Rev.R.Acad.Cienc.Exact.Fís.Nat. (Esp)
Vol. 101, Nº. 1, pp 21-33, 2007
VII Programa de Promoción de la Cultura Científica y Tecnológica

LAS MATEMÁTICAS DE LOS SISTEMAS ELECTORALES

FCO. JAVIER GIRÓN GONZÁLEZ-TORRE *; JOSÉ MIGUEL BERNARDO HERRÁNZ **

* Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Departamento de Estadística e Investigación Operativa. Facultad de Ciencias Matemáticas. Universidad de Malaga. 29071 Málaga. fj_giron@uma.es.
** Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales (A. Correspondiente). Departamento de Estadística. Facultad de Matemáticas. Universidad de Valencia. 46100 Burjassot (Valencia).

1. INTRODUCCIÓN

Detras del aparentemente simple hecho de buscar una solución al problema de la representatividad de las diversas opciones que los partidos políticos ofrecen a la ciudadania en aquellos países en los que está asentada una democracia, se oculta un problema, en apariencia simple, pero complejo desde el punto de vista matemático, que es el de distribuir los escaños de un Parlamento de acuerdo con las preferencias que los ciudadanos expresan en las consultas de carácter político.

Los sistemas de representación democrática exigen un metodo de selección justa de un pequeño número de individuos que representen a una mayoria de los ciudadanos.

Un sistema electoral es una herramienta constitucional utilizada para resolver el problema anterior que transforma los votos de los ciudadanos en un cierto reparto del número de escaños.

Aunque detrás de todos los sistemas electorales está la idea de que el reparto de escaños sea proporcional al número de votos que obtiene cada grupo político, al ser el número de escaños muy inferior al de votos y al ser necesariamente este un numero entero, se produce un desajuste —un problema de redondeo— a la hora de asignar las partes no enteras sobrantes de los escaños a alguno de los partidos políticos en liza.

A lo largo de la historia se ha propuesto una gran variedad de procedimientos o sistemas electorales (más de 300). El adoptar uno de ellos ha dependido de la historia, de la herencia y de los debates politicos de cada pais sobre todo en los dos ultimos siglos y la reforma electoral es un tema que afecta por igual a las nuevas democracias como a las más antiguas.

El diseño de sistemas electorales nuevos es algo tan difícil como elegir uno de entre los muchos que actualmente existen. En su elección suele haber factores culturales e históricos, además de intereses políticos, a veces espúreos. De modo que la elección de un sistema electoral no puede considerarse como una decisión imparcial o insesgada. Las votaciones *per se* no son garantia de equilibrio ya que el procedimiento elegido puede producir diferencias radicales en los resultados de la votación.

La ingenieria electoral se ocupa del diseño. el análisis y la selección de procedimientos que se suelen utilizar para transformar votos en escaños (fórmulas electorales), que constituyen el grueso de cada sistema electoral.

Algo que no podemos olvidar es que no hay sistemas electorales perfectos. No se puede diseñar ningún sistema electoral que satisfaga todas las propiedades dictadas por el sentido común. Esto sería una versión electoral del famoso *teorema de imposibilidad de Arrow* (1951). Así pues, la elección de un sistema electoral apropiado se reduce a elegir un cierto subconjunto de aquellas propiedades que se consideren fundamentales.

En este artículo nos referiremos básicamente al modelo español y al de las Comunidades Autónomas, señalando de paso brevemente algunos comentarios sobre otros procedimientos que se aplican a otros países. Siguiendo el mandato constitucional de atender a criterios de representación proporcional, analizaremos estos criterios desde la perspectiva de los problemas de optimización con números enteros.

De hecho, las llamadas *fórmulas electorales* no son fórmulas matemáticas en el sentido tradicional, sino que son algoritmos que con el *input* de la distribución de votos generan un *output* que es el reparto de los escaños, utilizando para ello operaciones elementales.

Desde el punto de vista matemático, veremos que una fórmula electoral es simplemente un algoritmo diseñado para minimizar una cierta función de costo. En particular, las fórmulas de representación proporcional son algoritmos eficientes para resolver un problema de optimización con una función objetivo específica. Estas funciones objetivo, distintas para cada fórmula, representan de hecho diversos índices de proporcionalidad. A estos los podemos considerar como los criterios ocultos sobre los que se basa cada una de las fórmulas.

Este modo de enfocar el problema nos proporciona un susbstrato teórico de las conocidas fórmulas de representación proporcional y nos permite estudiar los puntos débiles de muchas de las metodologías usuales en el análisis de los sistemas proporcionales.

No tratamos aquí los sistemas mayoritarios —donde el candidato más votado es elegido en su distrito— como los usados sobre todo en los paises anglosajones como Gran Bretaña, Estados Unidos, Nueva Zelanda y también en Italia. En Francia, sin embargo, se usa el sistema de doble votación.

2. EL MANDATO CONSTITUCIONAL

Reproducimos aquí el artículo de la Constitución española referido al modo de elegir los representantes de la Cámara Baja. Como puede comprobarse, el artículo 68 no es muy explícto a la hora de fijar el método de reparto de los Diputados, salvo la referencia a que sea proporcional. La descripción pormenorizada del procedimiento electoral vigente en nuestro país se desarrolla en los artículos de la Ley electoral, que reproducimos en el Apéndice A de este artículo.

TÍTULO III
De las Cortes Generales
CAPÍTULO PRIMERO
De las Cámaras
Artículo 68.

1. El Congreso se compone de un mínimo de 300 y un máximo de 400 Diputados, elegidos por sufragio universal, libre, igual, directo y secreto, en los términos que establece la ley.

2. La circunscripción electoral es la provincia. Las poblaciones de Ceuta y Melilla estarán representadas cada una de ellas por un Diputado. La ley distribuirá el número total de Diputados, asignando una representación mínima inicial a cada circunscripción y distribuyendo los demás en proporción a la población.

3. La elección se verificará en cada circunscripción atendiendo a criterios de representación proporcional.

3. MÉTODOS PROPORCIONALES

La elección de los representantes del Congreso de los Diputados en España, o dentro de cada Comunidad Autónoma del correspondiente Parlamento, comporta dos problemas de asignación proporcional, a saber: el reparto del total de los escaños del Parlamento por provincias y, dentro de cada provincia, el posterior reparto de los correspondientes escaños entre los partidos políticos concurrentes. Cada uno de ellos se resuelve por métodos diferentes tal como se establece en la ley electoral.

3.1 El Método de los Restos mayores

Se utiliza para obtener la distribución de los escaños entre las provincias, aunque previamente se le aplican ciertas restricciones, a saber: a las ciudades autómas de Ceuta y Melilla se les asigna un escaño a cada una, y el resto de las provincias recibe automáticamente dos escaños cada una. La asignación del resto de los escaños se hace mediante el método de los Restos Mayores.

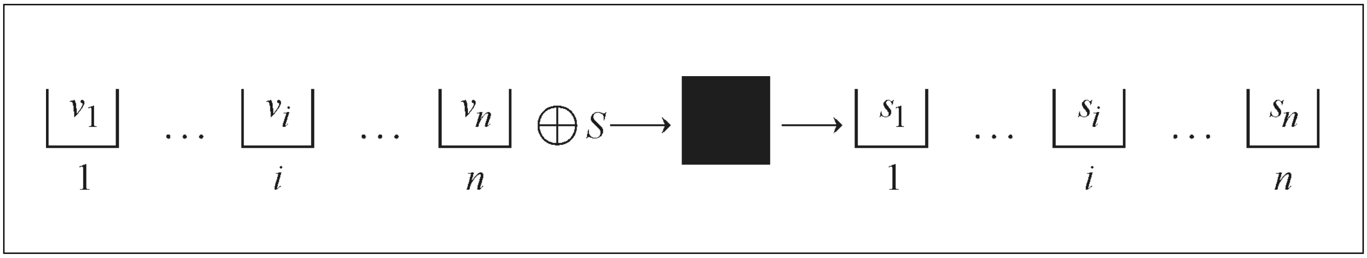

Figura 1. Modelo de *caja negra* que describe la transformación de votos v_1, ..., v_i, ..., v_n en escaños s_1, ..., s_i, ..., s_n, de modo que suman un total de $\sum_{i=1}^{n} s_i = S$ escaños.

3.1 El Método de los Restos mayores

Uno de estos métodos, conocido como ley o método de d'Hondt, se aplica a la asignación de escaños a los partidos dentro de cada provincia, con la restricción de que se excluyen aquellos partidos que no obtengan un mínimo del 3 % en cada distrito electoral.

Estos dos métodos son casos particulares de lo que se conoce como problemas de asignación proporcional entera, que se describen en la sección siguiente.

4. EL PROBLEMA DE LA ASIGNACIÓN PROPORCIONAL ENTERA

Entre estos problemas, además de los dos especificados de la distribución de escaños entre provincias y la asignación de escaños a los partidos políticos, se incluirían otros muchos como, p. ej., la asignación de centros escolares en proporción a la población, o muchos de los problemas de asignación de recursos en Economía.

La descripción matemática de todos estos problemas es la misma y se conoce con el nombre de *modelo de urnas (o cajas) y bolas*.

Adaptado a nuestro contexto, supongamos que hay que repartir una cantidad de escaños S entre n formaciones políticas a partir del número de votos $v_1,\ldots, v_n$ que recibe cada partido. Si $s_1,\ldots, s_n$ representa el número de escaños asignados a los partidos $1,\ldots, n$, un *método de asignación proporcional* determina los números enteros $s_1,\ldots, s_n$ de modo que los cocientes $s_1/v_1,\ldots, s_n/v_n$ sean lo más parecidos entre si.

Si definimos las cuotas $q_1,\ldots, q_n$ asociadas al número de votos $v_1,\ldots, v_n$ como la parte del número de escaños proporcional al número de votos

$$q_i = \frac{v_i}{v_1 + \ldots + v_n} S = \frac{v_i}{V} S$$

y si estas cuotas fuesen números enteros, que necesariamente suman S, tendríamos resuelto el problema pues entonces la solución sería $s_i = q_i$ ya que los cocientes $s_i/v_i = S/V$, donde $V = v_1 + \ldots + v_n$ sería el total de votos.

En general, las cuotas no son números enteros por lo que una solución al problema de asignación proporcional entera consistirá en encontrar unos números enteros $s_1,\ldots, s_n$ próximos a las cuotas y que sumen S.

Pero, de manera natural, surge la pregunta de ¿cómo se pueden construir métodos de asignación proporcional entera?

Históricamente se han utilizado esencialmente dos métodos, a saber: el de los restos mayores y los métodos basados en divisores.

Estos métododos parten de una idea simple y, como veremos, terminan siendo la solución de un problema de optimización en números enteros.

Todos los métodos propuestos tienen ciertas ventajas e inconvenientes. De hecho, no existe ningún método comunmente aceptado por todos ni puede existir un método de asignación proporcional que satisfaga una lista de propiedades razonables, como demuestra el teorema de imposibilidad de Balinski y Young (1982).

Como cabe esperar, la relación existente entre los métodos de asignación proporcional y los métodos de optimización permite profundizar en las propiedades de estos métodos y, de este modo, abre el camino para introducir nuevos métodos potenciales de asignación proporcional más razonables que los actuales.

A continuación, pasamos a describir el primero de los métodos de asignación proporcional.

5. EL MÉTODO DE LOS RESTOS MAYORES

5.1 Descripción del método

Se asigna, en primer lugar, a cada partido la parte entera de su cuota $[q_i]$; a continuación, se ordenan de mayor a menor los restos $qi - [qi]$ y se asigna un escaño más a cada uno de los partidos con mayor resto hasta completar los *S* escaños.

Una de las ventajas de este método es que satisface la propiedad de *verificación de la cuota*, a saber, que las soluciones $s_1, \ldots, s_n$ difieren de la cuota en menos de un escaño, es decir $|q_i - s_i| \leq 1$.

Sin embargo, tiene algunas desventajas, como la de que no es necesariamente monótono respecto de la asignación de escaños, lo que se conoce con el nombre de *Paradoja de Alhabama*, tal como se explica a continuación.

Tampoco es necesariamente monótono respecto de la asignación de los votos, lo que se conoce como *Paradoja de los votos*: Puede ocurrir que, al comparar dos elecciones distintas, un determinado partido haya obtenido más votos pero menos escaños.

• La Paradoja de Alhabama

En 1881, el método de los Restos Mayores fue muy criticado por lo que, en su momento, el Congreso de los Estados Unidos lo eliminó debido al hecho de que el estado de Alhabama que tenía derecho a ocho representantes cuando el tamaño de la cámara era de 299 escaños pasó a tener siete cuando cuando el número de representantes se aumentó a 300, habiéndo mantenido los estados la misma población.

• La Paradoja de los estados nuevos

En 1907, Oklahoma se convirtió en un nuevo estado y se le asignaron 5 representantes en base a su población, con lo cual el total de representantes pasó de 386 a 391. La entrada de este nuevo estado produjo cambios colaterales inesperados. En concreto, y sin razón aparente, un escaño que previamente se había asignado a Nueva York pasó a engrosar los del estado de Maine, de modo que Nueva York pasó de 38 a 37 escaños mientras que Maine pasó de 3 a 4 escaños.

Podríamos pensar que las paradojas son simplemente cuestiones puramente académicas o bien que pudieran ser sucesos o acontecimientos históricos raros o poco probables: no osbtante, para bien o para mal, pueden tener implicaciones políticas de enorme importancia.

La mayoría de los debates parlamentarios sobre los métodos proporcionales se produce por la designación de un solo escaño. En 1991, los distritos de Montana y Massachusetts presentaron alegaciones contra la constitucionalidad del método de las Proporciones Iguales o de Hill-Huntington, que había estado en vigor durante más de 50 años. Ambos propusieron métodos alternativos basados en el censo de 1990 pero el Tribunal Supremo confirmó la constitucionalidad del método.

5.2 Ejemplo de aplicación del Método de los Restos Mayores

Presentamos un caso real tomado de las elecciones autonómicas catalanas celebradas el 16 de noviembre de 2003. Los datos corresponden a la provincia de Lérida y el total de escaños que había que repartir o asignar era de 15. Aunque para la asignación real de escaños se utiliza la regla d'Hont, a continuación ofrecemos la asignación que resultaría de aplicar a estos mismos datos el método de los restos mayores, para comprobar que puede haber diferencias sustanciales entre los dos métodos.

En la Figura 2, se muestra el resultado de aplicar el método de los restos mayores para obtener la asignación de los 15 escaños. Como se puede comprobar,

	CiU	PSC	ERC	PP	ICV	TOTAL
Votos	83 636	45 214	40 131	19 446	8 750	197 177
Porcentaje de votos	42.42%	22.93%	20.35%	9.96%	4.44%	100.00%
Cuotas	6.36	3.44	3.05	1.48	0.67	15.00
Restos	0.36	0.44	0.05	0.48	0.67	
1ª Asignación	6	3	3	1	0	13

	CiU	PSC	ERC	PP	ICV	TOTAL
Votos	83 636	45 214	40 131	19 446	8 750	197 177
Porcentaje de votos	42.42%	22.93%	20.35%	9.96%	4.44%	100.00%
Cuotas	6.36	3.44	3.05	1.48	0.67	15.00
Restos	0.36	0.44	0.05	0.48	0.67	
1ª Asignación	6	3	3	1	1	14

	CiU	PSC	ERC	PP	ICV	TOTAL
Votos	83 636	45 214	40 131	19 446	8 750	197 177
Porcentaje de votos	42.42%	22.93%	20.35%	9.96%	4.44%	100.00%
Cuotas	6.36	3.44	3.05	1.48	0.67	15.00
Restos	0.36	0.44	0.05	0.48	0.67	
1ª Asignación	6	3	3	2	1	15

Figura 2. Ejemplo del funcionamiento del método de los restos mayores a la asignación de escaños en un caso real.

en la primera iteración se asignan 13 de los 15 escaños, de modo que son necesarias dos iteraciones más para asignar el total de los quince escaños.

El resultado de la aplicación de este método conduciría a la asignación que aparece en la última fila, que consistiría en asignar 6, 3, 3, 2 y 1 escaños a los partídos políticos CiU, PSC, ERC, PP e ICV, respectivamente. Sin embargo, la asignación real que se obtuvo aplicando la ley de dHondt fue de 7, 4, 3, 1 y 0 escaños para CiU, PSC, ERC, PP e ICV, respectivamente.

El resultado anterior, que compara ambos métodos, revela un hecho frecuente y bien conocido —y también muchas veces criticado—, que es el que la regla d'Hont tiende sistemáticamente a favorecer a los partidos mayoritarios en detrimento de las minorías.

6. MÉTODOS DE LOS DIVISORES

En realidad, no se debe hablar de un solo método de los divisores sino que estos constituyen toda una clase de procedimientos de asignación proporcional, dependiendo del criterio divisor que se utilice. Varios de los métodos más utilizados en la práctica se enumeran en la Tabla 1.

6.1 Descripción de los métodos

Cada uno de los métodos se asocia con un *criterio divisor*. Un criterio divisor es una función real $d(s)$ definida sobre los números enteros $s = 0, 1, 2, \ldots$ de modo que satisfaga las condiciones

$$0 \le d(0) \le 1 \le d(1) \le 2 \le \ldots$$

Tabla 1. Ejemplos de los métodos de divisores.

Método	Divisor n-simo	Sucesión de divisores	Criterio Div. $d(s)$	Paises
Belga	$(n+1)/2$	1, 1.5, 2, 2.5, ...		Bélgica
d'Hont	n	1, 2, 3, 4, ...	$s+1$	España*
Sainte-Laguë	$2n-1$	1, 3, 5, 7, ...	$s+1/2$	Dinamarca**
Sainte-Laguë modificado	$(10n-5)/7$	0.71, 2.14, 3.57, 5, 6.43 ...		Noruega, Suecia
Proporciones iguales	$\sqrt{n(n-1)}$	0, 1.41, 2.45, 3.46, 4.47, ...	$\sqrt{s(s+1)}$	USA
Adams Divs. peqs.	$(n-1)$	0, 1, 2, 3, 4, ...	s	

* Además de en España, la ley d'Hont también se emplea en Austria, Bélgica, Finlandia, Islandia, Portugal, Holanda, Suiza y Francia (solamente se empleó en el año 1986).
** En Dinamarca se empleó durante el período 1945-1953.

y

$$d(0)<d(1)<d(2)<\ldots$$

A continuación, una vez fijado el criterio divisor, para cada $i=1, 2,\ldots, n$ y para cada $s=0, 1,\ldots, S$ se calculan los cocientes

$$c_{is}=\frac{v_i}{d(s)},$$

se eligen los S mayores y se asignan a los respectivos partidos. Si hay empate, la *ley electoral* correspondiente decide el método de asignación (véase el ejemplo de la Figura 3).

6.2 Algunos casos particulares

El Método de d'Hondt, introducido por Jefferson para el reparto de escaños del Congreso de los Estados Unidos en 1794 y el más utilizado en Europa, a pesar de que se le haya criticado por ser el menos proporcional de todos. En Bélgica se atribuye al juriconsulto Victor d'Hondt la creación del método. El criterio divisor correspondiente es: $d(s)=s+1$.

El Método Sainte Laguë, introducido por el matemático francés del mismo nombre en 1910 —aunque Webster lo había sugerido algunos años antes— como alternativa al método de Jefferson que favorecía a los grandes estados. El criterio divisor correspondiente es: $d(s)=s+5$.

El Método de los Divisores Pequeños, desarrollado por Adams, se puede considerar como la antítesis del de d'Hondt ya que tiende a favorecer a los partidos pequeños. No se suele utilizar en Europa. El criterio divisor correspondiente es: $d(s)=s$.

Obsérvese que, en este caso, como $d(s)=0$ todos los cocientes $c_{i0}=+\infty$, lo que implica que cada partido obtiene al menos un escaño.

Una ventaja importante de todos los métodos de divisores es que son monótonos pero no necesariamente verifican la propiedad de la cuota.

6.3 Propiedades deseables que debe satisfacer un criterio de asignación proporcional entera

Aunque ya hemos mencionado algunas de las ventajas e inconvenientes de los métodos que hemos con-

Elecciones 2003

CERRAR

Ley D'hont

1 2 3 4 5 6 7 < VOLVER CONTINUAR >

En la convocatoria de elecciones se determinará el número de concejales a elegir y que servirá de base para configurar las listas electorales. A Huesca le corresponden 21.

Municipio: Huesca (Elecciones municipales de junio de 1999)
Concejales a elegir: **21**
Votos válidos: **21.954** Votos nulos: **229** Votos en blanco: **888** Votos a candidaturas: **21.066**

Candidaturas		Votos	% Válido
PSOE	Partido Socialista Obrero Español		
PP	Partido Popular		
CHA	Chunta Aragonesista		
PAR	Partido Aragonés		
IU	Izquierda Unida de Aragón		
ARTA	AG. Regeneracionista del Territorio Altoaragonés		
PH	Partido Humanista		

Elecciones 2003

CERRAR

Ley D'hont

1 2 3 4 5 6 7 < VOLVER CONTINUAR >

Se hace el recuento de votos y se ordena en una columna, de mayor a menor, la cifra de votos obtenidos.

Municipio: Huesca (Elecciones municipales de junio de 1999)
Concejales a elegir: **21**
Votos válidos: **21.954** Votos nulos: **229** Votos en blanco: **888** Votos a candidaturas: **21.066**

Candidaturas		Votos	% Válido
PSOE	Partido Socialista Obrero Español	6.808	31,01%
PP	Partido Popular	6.639	30,24%
CHA	Chunta Aragonesista	3.119	14,21%
PAR	Partido Aragonés	2.966	13,51%
IU	Izquierda Unida de Aragón	1.138	5,18%
ARTA	AG. Regeneracionista del Territorio Altoaragonés	362	1,65%
PH	Partido Humanista	34	0,15%

Elecciones 2003

CERRAR

Ley D'hont

1 2 3 4 5 6 7 < VOLVER CONTINUAR >

No se tendrán en cuenta las **candidaturas que no hayan superado el 5% de los votos** emitidos.

Municipio: Huesca (Elecciones municipales de junio de 1999)
Concejales a elegir: **21**
Votos válidos: **21.954** Votos nulos: **229** Votos en blanco: **888** Votos a candidaturas: **21.066**

Candidaturas		Votos	% Válido
PSOE	Partido Socialista Obrero Español	6.808	31,01%
PP	Partido Popular	6.639	30,24%
CHA	Chunta Aragonesista	3.119	14,21%
PAR	Partido Aragonés	2.966	13,51%
IU	Izquierda Unida de Aragón	1.138	5,18%
~~ARTA~~	~~AG. Regeneracionista del Territorio Altoaragonés~~	~~362~~	~~1,65%~~
~~PH~~	~~Partido Humanista~~	~~34~~	~~0,15%~~

Elecciones 2003

CERRAR

Ley D'hont

1 2 3 4 5 6 7 < VOLVER CONTINUAR >

Se va dividiendo el total de votos obtenidos por 1, 2, 3... hasta un número igual al de concejales asignados a la circunscripción. En este caso 21.

	Votos	votos/1	votos/2	votos/3	votos/4	votos/5	votos/6	votos/7
PSOE	6.808							
PP	6.639							
CHA	3.119							
PAR	2.966							
IU	1.138							

	votos/8	votos/9	votos/10	votos/11	votos/12	votos/13	votos/14
PSOE							
PP							
CHA							
PAR							
IU							

	votos/15	votos/16	votos/17	votos/18	votos/19	votos/20	votos/21
PSOE							
PP							
CHA							
PAR							
IU							

Elecciones 2003

CERRAR

Ley D'hont

1 2 3 4 5 6 7 < VOLVER CONTINUAR >

Se va dividiendo el total de votos obtenidos por 1, 2, 3... hasta un numero igual al de concejales asignados a la circunscripción. En este caso 21.

	Votos	votos/1	votos/2	votos/3	votos/4	votos/5	votos/6	votos/7
PSOE	6.808	6.808	3.404	2.269	1.702	1.361	1.134	972
PP	6.639	6.639	3.319	2.213	1.659	1.327	1.106	948
CHA	3.119	3.119	1.559	1.039	779	623	519	445
PAR	2.966	2.966	1.483	988	741	593	494	423
IU	1.138	1.138	569	379	284	227	189	162

	votos/8	votos/9	votos/10	votos/11	votos/12	votos/13	votos/14
PSOE	851	756	680	618	567	523	486
PP	829	737	663	603	553	510	474
CHA	389	346	311	283	259	239	222
PAR	370	329	296	269	247	228	211
IU	142	126	113	103	94	87	81

	votos/15	votos/16	votos/17	votos/18	votos/19	votos/20	votos/21
PSOE	453	425	400	378	358	340	324
PP	442	414	390	368	349	331	316
CHA	207	194	183	173	164	155	148
PAR	197	185	174	164	156	148	141
IU	75	71	66	63	59	56	54

Elecciones 2003

CERRAR

Ley D'hont

1 2 3 4 5 6 7 < VOLVER CONTINUAR >

El número de concejales se atribuye a las candidaturas que obtengan los cocientes (obtenidos en cada división) mayores, atendiendo a un orden decreciente.

	Votos	votos/1	votos/2	votos/3	votos/4	votos/5	votos/6	votos/7
PSOE	6.808	**6.808**	**3.404**	**2.269**	**1.702**	**1.361**	**1.134**	**972**
PP	6.639	**6.639**	**3.319**	**2.213**	**1.659**	**1.327**	**1.106**	**948**
CHA	3.119	**3.119**	**1.559**	**1.039**	779	623	519	445
PAR	2.966	**2.966**	**1.483**	**988**	741	593	494	423
IU	1.138	**1.138**	569	379	284	227	189	162

	votos/8	votos/9	votos/10	votos/11	votos/12	votos/13	votos/14
PSOE	851	756	680	618	567	523	486
PP	829	737	663	603	553	510	474
CHA	389	346	311	283	259	239	222
PAR	370	329	296	269	247	228	211
IU	142	126	113	103	94	87	81

	votos/15	votos/16	votos/17	votos/18	votos/19	votos/20	votos/21
PSOE	453	425	400	378	358	340	324
PP	442	414	390	368	349	331	316
CHA	207	194	183	173	164	155	148
PAR	197	185	174	164	156	148	141
IU	75	71	66	63	59	56	54

Elecciones 2003

CERRAR

Ley D'hont

1 2 3 4 5 6 7 < VOLVER CONTINUAR

En caso de empate: cuando en la relación de cocientes coincidan dos correspondientes a distintas candidaturas, el escaño se atribuirá a la que mayor número total de votos hubiese obtenido. Si hubiera dos candidaturas con igual número total de votos, el primer empate se resolverá por sorteo y los sucesivos de forma alternativa.

PSOE 7 concejales
PP 7
CHA 3
PAR 3
IU 1

Figura 3. Ejemplo real de aplicación de la ley d'Hont. Obsérvese que, en este caso, el corte para quedar excluído de la asignación de escaños se situa en el 5% en vez del 3% que dicta la ley electoral.

Tabla 2. Comparación entre los métodos de los Restos Mayores y el de d'Hondt.

Nº de escaños	Restos Mayores	d'Hondt	Cuotas
1	(0,1,0)	(0,1,0)	(0.31, 0.62, 0.06)
2	(1,1,0)	(0,2,0)	(0.63, 1.25, 0.13)
3	(1,2,0)	(1,2,0)	(0.94, 1.87, 0.19)
4	(1,3,0)	(1,3,0)	(1.25, 2.49, 0.25)
5	(1,3,1)	(1,4,0)	(1.56, 3.12, 0.32)
6	(2,4,0)*	(2,4,0)	(1.88, 3.74, 0.38)
7	(2,4,1)	(2,5,0)	(2.19, 4.36, 0.45)
8	(2,5,1)	(2,6,0)**	(2.50, 4.99, 0.51)
9	(2,6,1)	(2,7,0)**	(2.82, 5.61, 0.57)
10	(3,6,1)	(3,7,0)	(3.13, 6.23, 0.64)

* Esta asignación no verifica la propiedad de monotonía.
** Estas soluciones no verifican la cuota.

siderado, nos planteamos ahora el problema mucho más interesante de abordar el estudio de los métodos de asignación proporcional desde el punto de vista axiomático, es decir, de los principios que son deseables que verifique un criterio de asignación proporcional. La conclusión es —como por otra lado cabría esperar, dada la diversidad de métodos y las críticas que todos han recibido— decepcionante y nos conduce al siguiente teorema de imposibilidad, similar en espíritu, al famosos teorema de imposibilidad de Arrow.

Teorema de imposibilidad (Balinski y Young, 1982). No existe ningún criterio de asignación que cumpla simultáneamente las cuatro propiedades o axiomas siguientes:

1. **Verificación de la cuota:** Ninguna de las diferencias entre escaños y cuotas debe ser superior a la unidad.
2. **Monotonía respecto de los escaños:** Al aumentar el número de escaños S ningún partido debería recibir menos escaños, para una asignación fija de votos.
3. **Monotonía respecto de los votos:** Al comparar los resultados de dos elecciones, si el número de votos de un partido aumenta y el de otro disminuye, no debería ocurrir que el primero tuviera menos escaños y el segundo más que los que tuvieran anteriormente.
4. **Homogeneidad:** La solución no se altera si los números de votos se multiplican por un factor $\lambda > 0$.

6.4 Comparación entre los métodos de los Restos Mayores y el de d'Hondt

A modo de ejemplo —que además ilustra alguna de las paradojas y señala la posibilidad de que se incumplan algunos de los axiomas anteriores—, supongamos que el número de votos obtenidos por tres partidos A, B y C son 99, 245 y 32, respectivamente. La Tabla 2 compara los resultados de asignar uno, dos, …, hasta diez escaños a estos partidos, utilizando las fórmulas electorales de los Restos Mayores y la ley de d'Hondt. En la última columna aparecen las cuotas correspondientes. Aparte de las diferentes asignaciones que los dos métodos producen, se señalan con con uno y dos asteriscos, respectivamente, aquellas asignaciones que incumplen las propiedades de monotonía y de verificación de la cuota.

Para estos mismos datos, y como complemento a la Tabla 2, las Figuras 3a y 3b representan las asignaciones de los escaños a cada uno de los partidos, en

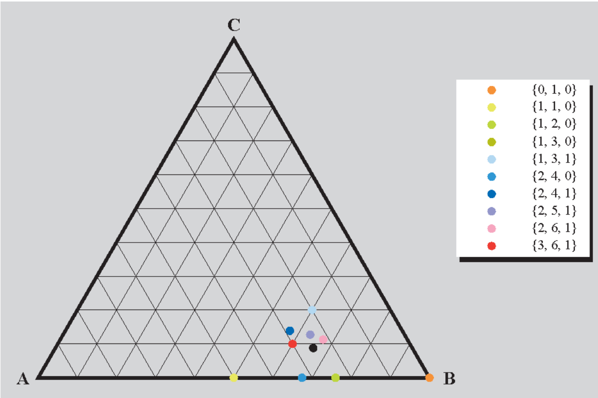

Figura 3a. Comportamiento gráfico del Método de los Restos Mayores. El punto negro representa el *reparto ideal*.

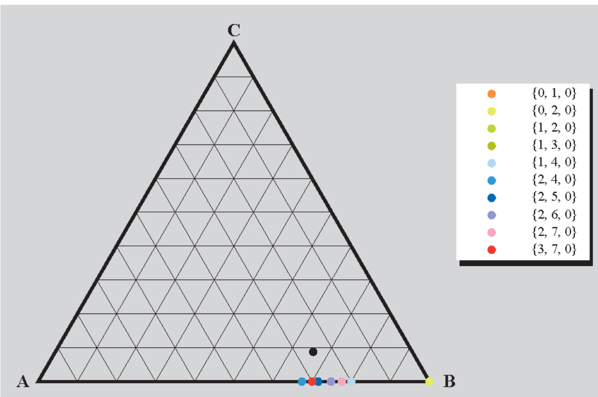

Figura 3b. Comportamiento gráfico del Método de d'Hondt. El punto negro representa el *reparto ideal*.

cada una de las diez etapas de asignación, en la que se comprueba visualmente la diferencia entre ambos métodos y los problemas debidos al incumplimiento de alguna de las propiedades que deberían satisfacer los dos criterios anteriormente señalas. El punto negro, que representa el *reparto ideal*, sería la solución óptima para un número de escaños suficientemente grande, de modo que al hacerse más fina la retícula —es decir, al aumentar el número de escaños—, aquella coincidiría con alguno de los puntos de intersección de la retícula. Este hecho refleja la idea intuitiva de que todos los métodos de reparto proporcional coincidirían si el número de escaños fuese suficientemente grande (se tendría una malla o retícula muy fina), y las proporciones de votos de los diversos partidos no fuesen demasiado dispares, lo que impediría que hubiese mayorías o minorías demasido acusadas (ya que, en estas circunstancias, estaríamos demasido cerca de un vértice).

7. RELACIÓN CON LOS MÉTODOS DE OPTIMIZACIÓN

Uno de los problemas más importantes que se nos plantean en el estudio de los métodos de reparto o asignación proporcional es saber cómo se puede medir su grado de proporcionalidad.

Parece ser un sentir general que el método de los Restos Mayores es el más proporcional mientras que el método de d'Hondt es el menos proporcional. La respuesta o la explicación a este sentir no está priori del todo clara; sin embargo, se puede aclarar enfocando el problema de la asignación proporcional como un problema de optimización con números enteros.

Pero, ¿cuál es la función objetivo que se encuentra detrás de cada uno los métodos de asignación proporcional? La optimización entera nos permite descubrir, a posteriori, la función objetivo que cada criterio minimiza.

Este nuevo enfoque del problema original en términos de las soluciones de problemas de optimización permite diseñar nuevas fórmulas electorales que correspondan a ciertas funciones objetivo o medidas de desproporcionalidad.

El planteamiento del problema de optimización para la asignación proporcional sería pues el siguiente.

Consideremos n partidos y S escaños. Sea $v = \{v_1, \ldots, v_n\}$ el vector de los votos que obtiene cada partido y $V = \sum_{i=1}^{n} v_i$. El problema de representación proporcional consiste en determinar la configuración o vector $s = \{s_1, \ldots s_n\}$ tal que

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} s_i = S \\ &s_i \geq 0, \text{ entero, para } i = 1, 2, \ldots, n, \\ &s_i \overset{\text{más}}{\propto} v_i \end{aligned} \qquad (P1)$$

donde la relación $s_i \overset{\text{más}}{\propto} v_i$ *vi* intenta representar el que los escaños asignados s_i sean lo *más proporcionales posible* a los votos obtenidos v_i.

Para que el número de escaños s_i fuese exactamente proporcional al número de votos de cada uno de los partidos $i = 1,\dots, n$, se debería cumplir exactamente la igualdad

$$s_i = v_i \frac{S}{V} \text{ para } i = 1, 2, ..., n.$$

Como la cuota, $v_i \frac{S}{V}$, es generalmente un número fraccionario, hay que redondearla de algún modo y, por consiguiente, no hay solución única del problema ($P1$).

Se puede demostrar que la solución del problema ($P1$) dado por las diferentes fórmulas de asignación son soluciones óptimas del siguiente problema de optimización

$$\begin{aligned} &\min \phi(s; v) \\ &\sum_{i=1}^{n} s_i = S \qquad\qquad (P2) \\ &s_i \geq 0, \text{ entero, para } i = 1, 2, ..., n, \end{aligned}$$

en el que la función de costo $\phi(s; v)$ es una medida de la falta de equidad (o índice de desproporcionalidad) específica de cada método, que toma valores no negativos y generalmente satisface el que $\phi(s; v) = 0$ si y solo si $s_i = v_i \frac{S}{V}$ para todo $i = 1, 2,\dots, n$.

7.1 Métodos de asignación y sus correspondientes medidas de desproporcionalidad

A continuación, damos una lista de varios de los métodos de asignación proporcional más utilizados, con sus correspondeintes funciones de costo. Obsérvese que para un mismo criterio puede haber más de una función de costo.

$$\text{Método de los Restos Mayores} \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} |s_i - q_i|^p & \text{para todo } p \geq 1 \\ \sum_{i=1}^{n} v_i \left| \frac{s_i}{v_i} - \frac{S}{V} \right| & \\ \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{s_i}{S} - \frac{v_i}{V} \right|^p & \text{para todo } p \geq 1 \\ \max_{i=1,2,\dots,n} \left| \frac{s_i}{S} - \frac{v_i}{V} \right| & \end{cases}$$

$$\text{Método de d'Hondt} \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{s_i}{v_i} - \frac{S}{V} \right)^+, & \text{donde } z^+ = \max(z, 0) \\ \max_{i=1,2,\dots,n} \frac{s_i}{v_i} & \end{cases}$$

$$\text{Método de Sainte-Lagüe} \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} v_i \left(\frac{s_i}{v_i} - \frac{S}{V} \right)^2 \\ \sum_{i=1}^{n} s_i \left(\frac{s_i}{v_i} - \frac{S}{V} \right) \\ \sum_{i=1}^{n} \frac{(s_i - q_i)^2}{q_i} \end{cases}$$

$$\text{Método de las Proporciones Iguales} \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} s_i \left(\frac{v_i}{s_i} - \frac{V}{S} \right)^2 \\ \sum_{i=1}^{n} v_i \left(\frac{v_i}{s_i} - \frac{V}{S} \right) \\ \sum_{i=1}^{n} \frac{(s_i - q_i)^2}{s_i} \end{cases}$$

$$\text{Método de los divisores pequeños} \begin{cases} \max_{i=1,2,\dots,n} \frac{v_i}{s_i} \end{cases}$$

8. EPÍLOGO

Finalizamos el artículo con unos comentarios referentes a las consecuencias que tiene la ley electoral vigente y, de paso, señalamos alguna posibilidad de mejora de ésta conducente a aumentar el grado de proporcionalidad de la misma, sin olvidar la importante y difícil tarea que supone la modificación de una ley electoral, atendiendo a criterios objetivos y no de oportunidad política que, como es bien sabido y la historia nos lo recuerda, se pueden volver en su contra en otras circunstancias.

Un examen global de los resultados de las diez elecciones generales habidas en nuestro país muestra una baja proporcionalidad entre el número total de votos y el número total de escaños recibidos por cada partido.

Esta baja proporcionalidad no solamente se debe a la aplicación del método de d'Hondt sino principalmente a la existencia de muchas circunscripciones pequeñas.

Balinski y Ramírez proponen las siguientes modificaciones a la ley electoral con el objeto de aumentar la proporcionalidad:

a) Aumentar el tamaño de la Cámara al máximo que contempla la Constitución (400 escaños), asignar solamente un escaño inicial por provincia y repartir el resto mediante el método de Sainte-Laguë.

b) Sustituir el método de d'Hondt para el reparto de escaños por el método de los divisores con criterio divisor $d(s)=s+2/3$.

Por otra parte, Bernardo sugiere sustituir la ley de d'Hondt por otro criterio que minimice alguna métrica o distancia entre las cuotas y los escaños como ocurre, p. ej., con el método de los Restos Mayores.

9. CONCLUSIONES

El teorema de imposibilidad de Balinsky y Young afirma que no hay ningún método de reparto proporcional óptimo.

Por otra parte, la fórmula electoral ideal ha de ser, a la vez, fácil de entender y de calcular.

El que sea fácil de entender es una condición muy importante ya que "en un sistema realmente democrático cada elector debe ser consciente y tener una idea clara de las consecuencias de su voto".

El segundo requisito, de que sea fácil de calcular, antaño fue importante, pero hoy ya no lo es. Podemos concluir, por consiguiente, que la elección de una fórmula electoral es una decisión política importante que debe compatibilizarse con el mandato constitucional.

El que los métodos de reparto proporcionales se puedan considerar como un problema de optimización con una determinada función de costo ayuda a entender los pros y los contras de cada uno de los métodos comunmente usados e, incluso, a diseñar nuevas fórmulas electorales que minimicen ciertas medidas de desproporcionalidad o distancia entre la representación política de cada partido medida por s_i/v_i y la ideal S/V. Otra gran ventaja, es que además permiten que se puedan añadir restricciones al problema de optimización de modo que fuercen a la asignación de escaños resultante a respetar ciertas propiedades.

De aquí deducimos, como conclusión final, que las matemáticas pueden ayudar a encontrar la solución al problema de la asignación proporcional que mejor se ajuste a unas determinadas circunstancias políticas, independientemente de éstas circunstancias y de otros elementos que pudieran distorsionar la idea que subsyace detrás del concepto de reparto proporcional.

APÉNDICE A: LA LEY ELECTORAL

LEY ORGÁNICA 5/1985, DE 19 DE JUNIO DEL RÉGIMEN ELECTORAL GENERAL, MODIFICADA POR LA LEY ORGÁNICA 1/1987, DE 2 DE ABRIL, POR LA LEY ORGÁNICA 8/1991, DE 13 DE MARZO, POR LA LEY ORGÁNICA 6/1992, DE 2 DE NOVIEMBRE, POR LA LEY ORGÁNICA 13/1994, DE 30 DE MARZO, POR LA LEY ORGÁNICA 3/1995, DE 23 DE MARZO, POR LA LEY ORGÁNICA 1/1997, DE 30 DE MAYO, POR LA LEY LEY ORGÁNICA 3/1998, DE 15 DE JUNIO Y POR LA LEY ORGÁNICA 8/1999, DE 21 DE ABRIL.

CÁPITULO III

Sistema electoral

Artículo 161. 1. Para la elección de Diputados y Senadores, cada provincia constituirá una circunscripción electoral. Asimismo, las ciudades de Ceuta y Melilla serán consideradas, cada una de ellas, como circunscripciones electorales. 2. Se exceptúa de lo dispuesto en el párrafo anterior, para las elecciones de Senadores, a las provincias insulares, en las que a tales efectos se consideran circunscripciones cada una de las siguientes islas o agrupaciones de islas: Mallorca, Menorca, Ibiza-Formentera, Gran Canaria, Fuerteventura, Lanzarote, Tenerife, Hierro, Gomera y La Palma.

Artículo 162. 1. El Congreso está formado por trescientos cincuenta Diputados. 2. A cada provincia le corresponde un mínimo inicial de dos Diputados. Las poblaciones de Ceuta y Melilla están representadas cada una de ellas por un Diputado. 3. Los doscientos cuarenta y ocho Diputados restantes se distribuyen entre las provincias en proporción a su población, conforme al siguiente procedimiento:

a) Se obtiene una cuota de reparto resultante de dividir por doscientos cuarenta y ocho la cifra total de la población de derecho de las provincias peninsulares e insulares.

b) Se adjudican a cada provincia tantos Diputados como resulten, en números enteros, de dividir la población de derecho provincial por la cuota de reparto.

c) Los Diputados restantes se distribuyen asignando una a cada una de las provincias cuyo cociente, obtenido conforme al apartado anterior, tenga una fracción decimal mayor.

Descripción del método de los restos mayores

4. El Decreto de convocatoria debe especificar el número de Diputados a elegir en cada circunscripción, de acuerdo con lo dispuesto en este artículo.

Artículo 163. 1. La atribución de los escaños en función de los resultados del escrutinio se realiza conforme a las siguientes reglas:

a) No se tienen en cuenta aquellas candidaturas que no hubieran obtenido, al menos, el 3 por 100 de los votos válidos emitidos en la circunscripción.

b) Se ordenan de mayor a menor, en una columna, las cifras de votos obtenidos por las restantes candidaturas.

c) Se divide el número de votos obtenidos por cada candidatura por 1, 2, 3, etcétera, hasta un número igual al de escaños correspondientes a la circunscripción, formándose un cuadro similar al que aparece en el ejemplo práctico. Los escaños se atribuyen a las candidaturas que obtengan los cocientes mayores en el cuadro, atendiendo a un orden decreciente.

Aquí se describe un ejemplo práctico de aplicación de la ley d'Hondt

d) Cuando en la relación de cocientes coincidan dos correspondientes a distintas candidaturas, el escaño se atribuirá a la que mayor número total de votos hubiese obtenido. Si hubiera dos candidaturas con igual número total de votos, el primer empate se resolverá por sorteo y los sucesivos de forma alternativa.

e) Los escaños correspondientes a cada candidatura se adjudican a los candidatos incluidos en ella, por el orden de colocación en que aparezcan.

2. En las circunscripciones de Ceuta y Melilla será proclamado electo el candidato que mayor número de votos hubiese obtenido.

Artículo 164. 1. En caso de fallecimiento, incapacidad o renuncia de un diputado, el escaño será atribuido al candidato o, en su caso, al suplente, de la misma lista a quien corresponda, atendiendo a su orden de colocación. 2. Las vacantes de los Diputados elegidos en Ceuta y Melilla serán cubiertas por sus respectivos suplentes, designados en los términos del artículo 170 de esta Ley.

APÉNDICE B: LA TEORÍA DE LA ELECCIÓN SOCIAL

Como complemento de este artículo, ofrecemos una breve descripción del teorema de imposibilidad de Arrow, al que se ha hecho referencia en varias ocasiones.

Formulación del problema

Si cada individuo de un grupo tiene un cierto orden de preferencias entre las diferentes alternativas A, B, C, etc., ¿cómo se pueden convertir las distintas preferencias individuales en una sola elección para todo un grupo?

La herramienta básica es la definición de *función de bienestar social*, que es una regla o procedimiento de agregación que permite ordenar las distintas alternativas a partir de las preferencias individuales.

Como ejemplos de funciones de bienestar social, que se han utlizado con profusión se encuentran las siguientes:

a) El método de la mayoría relativa.

b) El índice de recuento de Borda.

c) El método de comparación por parejas.

A la pregunta de qué propiedades debería verificar una función de bienestar social razonable, Arrow (1951) en su histórico artículo que adoptaba la perspectiva axiomática imperante en la época, introdujo las siguientes como axiomas que una función de bienestar social ideal debería satisfacer.

a) **Dominio Universal:** Cualquier preferencia individual es legítima.

b) **El Principio de Pareto:** Si hay unanimidad en considerar una alternativa mejor que otra entonces el procedimeinto de agregación debería colocar siempre la alternativa mejor antes de la peor.

c) **Independencia de alternativas irrelevantes:** La ordenación social de dos alternativas sólo depende de su ordenación en cada lista individual y no de su relación con otras alternativas.

Con estas premisas, Arrow demostró su teorema de imposibilidad, que enunciamos de la manera siguiente.

Teorema de Imposibilidad de Arrow (1951)

Si hay más de dos alternativas, cualquier función de bienestar social que cumpla las propiedades anteriores coincide con las preferencias de un cierto individuo, que variará según cual sea la función, por lo que tendríamos necesariamente una dictadura.

NOTA BIBLIOGRÁFICA

En la referencia **4** puede encontrarse una extensa y reciente bibiografía, clasificada según los diversos aspectos que ofrece el tema de *las Matemáticas de los Sistemas Electorales*, desde las contribuciones fundamentales de los pioneros, como Arrow y Black, al análisis de los métodos proporcionales, pasando por las reformas electorales, la estabilidad de los gobiernos y los efectos y consecuencias de los sistemas electorales.

BIBLIOGRAFÍA

1. Arrow, K. (1963). *Social Choice and Individual Values* (2nd edition). Wiley: New York.

2. Balinski, M. L. and Young, H. P. (1982a). *Fair Representation: Meeting the Ideal of One Man One Vote*. Yale University Press: New Haven, CT.

3. Balinski, M. L. and Young, H. P. (1982b). The quota method of apportionment. *American Mathematical Monthly*, **82**, pp. 701–729.

4. Grilli di Cortona, P. Manzi, C. Pennisi, A., Ricca, F., and Simeone, B. (1999). *Evaluation and Optimization of Electoral Systems*. SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications.