

DEPARTAMENT INFORMÀTICA

MODELOS DE SIMULACIÓN EN TIEMPO REAL DE
SISTEMAS GRANULARES MEDIANTE AUTÓMATAS
CELULARES

MARTA PLA I CASTELLS

UNIVERSITAT DE VALENCIA
Servei de Publicacions
2009

Aquesta Tesi Doctoral va ser presentada a València el dia 26 de gener de 2009 davant un tribunal format per:

- D. Juan José Serrano Martín
- D. Alfonso Brazález Guerra
- D. Eugenio Oñate Ibáñez de Navarra
- D. Mariano Alcañiz Raya
- D. Marcos Fernández Marín

Va ser dirigida per:
D. Rafael J. Martínez Durá

©Copyright: Servei de Publicacions
Marta Pla i Castells

Depòsit legal:
I.S.B.N.:978-84-370-7440-5
D.L.:V-1329-2009

Edita: Universitat de València
Servei de Publicacions
C/ Artes Gráficas, 13 bajo
46010 València
Spain
Telèfon: 963864115



UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

Departament d'Informàtica

TESIS DOCTORAL

**MODELOS DE SIMULACIÓN EN TIEMPO REAL DE
SISTEMAS GRANULARES MEDIANTE AUTÓMATAS
CELULARES**

Presentado por:

D. Marta Pla i Castells

Valencia, Septiembre 2008

Trabajo dirigido por:

Dr. D. Rafael J. Martínez Durá

*Al millor enginyer i a la dona més valenta que conec,
de qui tant he après i de qui tant hem queda per aprendre.
Els meus pares.*

*A la llum i la alegria de ma vida.
Ignacio i Andrea*

D. RAFAEL J. MARTÍNEZ DURÁ, profesor titular del área de Arquitectura y Tecnología de Computadores de la Universitat de València

CERTIFICA que la presente memoria

“Modelos de Simulación en Tiempo Real de Sistemas Granulares Mediante Autómatas Celulares”

ha sido realizada bajo su dirección, en el Departamento de Informática de la Universitat de València por **Marta Pla i Castells**, y constituye su tesis para optar al grado de Doctor en Ingeniería Informática.

Y para que conste, en cumplimiento de la legislación vigente, presentamos ante la Escuela Técnica Superior de Ingeniería (ETSE) de la Universitat de València, a 8 de Septiembre de 2008.

EL DIRECTOR

Fdo.: Rafael J. Martínez Durá

Agradecimientos

Muchas han sido las personas que se han visto involucradas de un modo u otro en el desarrollo de este trabajo. Personalmente o profesionalmente todas han sido importantes en el largo camino que ha supuesto llegar hasta estas líneas y desde aquí me gustaría agradecerles el apoyo que me han dado.

A mi director de tesis, Rafael Martínez por su confianza y sus buenos consejos.

Al grupo LSYM del Instituto de Robótica, por su apoyo. Porque este trabajo surgió de la investigación realizada durante el desarrollo de sus proyectos. Por el trabajo conjunto y la ayuda prestada.

A mi familia. Porque lo han dado todo para que yo llegara hasta aquí. Por sus palabras de apoyo y de cariño. Por sus discusiones y sus plegarias.

Al iaio. Porque ha ayudado como el que más.

A todos las personas que ajenas a este trabajo me han alentado con sus palabras de ánimo.

Gracias a todos ellos.

Resumen

Las herramientas de formación basadas en simulación y realidad virtual se han convertido en las últimas décadas en una potente herramienta para la formación y el entrenamiento de multitud de tareas, especialmente aquellas que conllevan un coste o un riesgo elevado.

Debido a las exigencias de este tipo de aplicaciones, los modelos dinámicos utilizados deben reproducir el comportamiento del sistema simulado con suficiente realismo como para que los hábitos adquiridos por los aprendices sean correctos. Además, deben ser suficientemente robustos y eficientes como para poder ejecutarse de forma interactiva en tiempo real.

Dentro del ámbito de la simulación de maquinaria pesada, los sistemas granulares y la interacción con el terreno (arena, grava, material granel, etc.) forman parte de las tareas fundamentales que realiza el usuario. Sin embargo, como consecuencia de una metodología inadecuada, existe una deficiencia importante en los modelos existentes para simulación interactiva en tiempo real.

A lo largo de este trabajo se revisa la metodología de modelado utilizada habitualmente, y se desarrolla un conjunto de modelos dinámicos para la simulación de sistemas granulares.

Para conseguir modelos con un comportamiento suficientemente realista, se parte de estudios teóricos sobre el comportamiento de los sistemas granulares y la interacción con el suelo. A partir de estos estudios, y utilizando el modelo computacional de los Autómatas Celulares, se desarrolla un conjunto de modelos dinámicos que permiten la simulación interactiva de un sistema granular y una herramienta.

Los modelos se validan utilizando los trabajos teóricos anteriores, y se analiza el significado de los parámetros para permitir su ajuste en función del tipo de material que se desee simular.

Para conseguir una implementación eficiente de los modelos que permita la simulación en tiempo real, se analizan las propiedades estadísticas de la dinámica del sistema. Gracias a este análisis se consigue alcanzar un coste inferior a cuadrático respecto a las dimensiones del sistema simulado.

Se revisan las técnicas de representación gráfica existentes y se mejora la representación de las zonas de flujo por medio de la utilización de técnicas de multitextura programadas en el procesador gráfico.

Palabras clave: Sistemas Granulares, Autómatas Celulares, Simulación en Tiempo Real, Simulación para Entrenamiento, Simulación Interactiva, Simulación Interactiva.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1. Introducción	1
1.1. Simulación interactiva para formación	2
1.1.1. Características de un simulador para formación	3
1.2. Simulación interactiva de sistemas granulares	5
1.2.1. Sistemas granulares en simuladores para formación	6
1.3. Planteamiento del problema	8
1.4. Objetivos y metodología	9
1.4.1. Objetivos de la tesis	10
1.4.2. Metodología de trabajo	12
1.5. Organización de la memoria	14
CAPÍTULO 2. Simulación interactiva de sistemas granulares en entornos virtuales	17
2.1. Introducción	17
2.2. Modelado no interactivo o de superficie	18
2.3. Modelos interactivos	20
2.3.1. Deformación del terreno	20
2.3.2. Modelos con fuerzas de reacción	24
2.4. Análisis del estado de la técnica	27
2.5. Conclusiones	32
2.5.1. Limitaciones de los modelos actuales	32
2.5.2. Propuesta de mejora	33

CAPÍTULO 3. Dinámica de un montón de arena	35
3.1. Introducción	36
3.1.1. Descripción de la dinámica de un montón de arena	37
3.2. Dinámica molecular	38
3.2.1. Modelos de esferas rígidas	39
3.2.2. Modelo de esferas flexibles	42
3.3. Teoría de Mohr-Coulomb	47
3.3.1. El factor de estabilidad y el ángulo crítico del sistema	47
3.3.2. Interacción entre una herramienta y un sistema granular. Equilibrio límite	49
3.3.3. Relación entre presión y hundimiento	51
3.4. Modelos fenomenológicos	53
3.5. Autómatas Celulares	56
3.5.1. Introducción histórica	57
3.5.2. Aplicaciones de los Autómatas Celulares	62
3.5.3. Modelado de sistemas granulares por medio de Autómatas Celulares	63
3.5.4. Modelos de pila de arena	66
3.6. Conclusiones	70
 CAPÍTULO 4. Modelo de evolución del terreno	 73
4.1. Descripción del sistema simulado	74
4.1.1. Modelo geométrico	75
4.1.2. Parámetros globales	75
4.1.3. Parámetros y variables de cada celda	76
4.1.4. Evolución del sistema	77
4.2. Modelo formal	77
4.3. Modelo de evolución del sistema	79
4.3.1. La función de transición	81
4.3.2. Vecindad	83
4.3.3. Adición y sustracción de material	84
4.3.4. Influencia de la geometría de la base del Autómata Celular	85
4.4. Validación y análisis del modelo	87
4.4.1. Cálculo de la pendiente crítica. Factor de estabilidad	88
4.4.2. Consistencia con el BCRE	89
4.4.3. Variación del parámetro de descarga	93

4.4.4. Elección de los parámetros de simulación	95
4.4.5. Propiedades estadísticas del sistema	95
4.5. Introducción de inercia en el modelo	97
4.5.1. Modelo de pila de arena con inercia	98
4.5.2. Análisis del comportamiento del modelo	101
4.6. Conclusiones	102
CAPÍTULO 5. Interacción del terreno con una herramienta	103
5.1. Introducción	103
5.2. Detección de colisiones	104
5.2.1. Creación del mapa de contactos	105
5.2.2. Descripción del estado de la colisión	108
5.2.3. Interfaces verticales	112
5.2.4. Gestión eficiente de las colisiones	115
5.3. Aplicación de fuerzas sobre materiales no compresibles	116
5.3.1. Tensión en el interior de los sistemas granulares	116
5.3.2. Modelo formal	118
5.3.3. Aplicación del modelo	121
5.4. Modelo con compresión. Corrección al primer modelo	122
5.4.1. Modelo de presión vertical	122
5.4.2. Fricción tangencial	125
5.5. Interacción sistema-herramienta. Geomecánica	126
5.5.1. Introducción	127
5.5.2. Modelo de fractura	128
5.5.3. Actualización de un interfaz de fractura	130
5.5.4. Coordinación de varios interfaces	133
5.6. Revisión del modelo de Autómata Celular	137
5.6.1. Variables del sistema	137
5.6.2. Función de transición	137
5.7. Conclusiones	138
CAPÍTULO 6. Acumulación de material sobre objetos	141
6.1. Introducción	141
6.2. Acumulación de material sobre un objeto	143
6.2.1. Posición y orientación del Autómata Celular	144
6.3. Interacción de varios AC	146

6.3.1. La frontera de un Automata y su evolución	146
6.3.2. Interacción entre Automatas	147
6.3.3. Colisión entre dos Automatas	150
6.4. Llenado de una pala	152
6.4.1. Descripción de la pala	153
6.4.2. Evolución de la carga de una pala	153
6.5. La función de distribución de presiones	157
6.5.1. Interpretación de los parámetros	161
6.6. Conclusiones	162

CAPÍTULO 7. Análisis del coste computacional y validación de los modelos

165

7.1. Consideraciones computacionales	166
7.1.1. Coste de un paso de simulación del Automata Celular . . .	166
7.1.2. Implementación eficiente del algoritmo de actualización . .	170
7.1.3. Coste del modelo de la distribución de presiones	172
7.1.4. Gestión eficiente de la memoria	174
7.2. Pruebas de rendimiento sobre los modelos	174
7.2.1. Modelo de evolución	175
7.2.2. Modelo de evolución con representación gráfica	177
7.2.3. Modelo con colisiones	179
7.2.4. Modelo de desplazamiento horizontal	180
7.3. Validación de los modelos de interacción	184
7.3.1. Modelo de presión normal	184
7.3.2. Modelo de fuerzas horizontales	188
7.3.3. Simulación numérica de la distribución de presiones	189
7.4. Conclusiones	191

CAPÍTULO 8. Mejora de las técnicas de representación gráfica de terreno interactivo

193

8.1. Primitivas para representación gráfica	193
8.1.1. Utilización de TRIANGLE_STRIP	194
8.1.2. Aparición de crestas	197
8.2. Texturizado para las zonas en movimiento	199
8.2.1. Desplazamiento de la coordenada de textura	201
8.2.2. Control de la deformación de la textura	202

8.2.3. Representación de flujo mediante Multitextura	205
8.2.4. Resultados	212
8.3. Utilización de partículas	212
8.3.1. Sistemas de partículas	213
8.3.2. Utilización de sistemas de partículas	215
8.4. Resumen del capítulo	216

CAPÍTULO 9. Utilización de los modelos dinámicos en un simulador de minicargadora 219

9.1. Introducción	219
9.2. Elementos del simulador	220
9.2.1. Arquitectura de un simulador	220
9.2.2. Bloques funcionales de programación del simulador	222
9.3. Modelo dinámico de minicargadora	225
9.3.1. Elementos de la minicargadora	225
9.3.2. Motor, transmisión y sistema hidráulico	228
9.4. Modelo de terreno	228
9.4.1. Interacción entre la cuchara y el suelo	229
9.4.2. Modelo de interacción entre el neumático y el suelo	232
9.5. Representación gráfica del escenario	235
9.6. Integración de la aplicación y resultados obtenidos	236
9.7. Conclusiones	240

CAPÍTULO 10. Conclusiones y trabajo futuro 241

10.1. Consecución de los objetivos planteados	242
10.1.1. Modelo de evolución	242
10.1.2. Modelos de interacción	243
10.1.3. Representación gráfica	245
10.1.4. Conclusión	245
10.2. Aportaciones científicas del presente trabajo	246
10.2.1. Establecimiento de una nueva metodología de modelado	246
10.2.2. Mejoras en el modelo de evolución	247
10.2.3. Modelos de interacción	247
10.2.4. Acumulación de material sobre objetos	249
10.2.5. Aplicación y difusión de los resultados	250
10.3. Trabajo futuro y líneas de investigación abiertas	251

10.3.1. Modelado de la evolución del terreno	252
10.3.2. Modelado de las interacciones	253
10.3.3. Implementación y optimización	254
10.3.4. Líneas de investigación abiertas	256
APÉNDICE A. Notación utilizada	259
APÉNDICE B. Modelo formal de Autómata Celular	263
B.0.5. Vecindad V	264
B.0.6. Los estados de una celda S	264
B.0.7. Los parámetros locales P	265
B.0.8. La regla local φ	265
B.0.9. Las funciones de acciones externas E	266
APÉNDICE C. Criticalidad auto-organizada (SOC)	267
APÉNDICE D. Los modelos como Autómatas Celulares	269
D.1. Crítica a la clasificación del modelo como un Autómata Celular	270
D.2. Los Autómatas Celulares como modelos finitos	270
D.3. Sistemas continuos y Autómatas Celulares	271
Bibliografía	273

ÍNDICE DE TABLAS

3.1. Resumen y comparación de las principales metodologías de modelado de sistemas granulares.	72
7.1. Tiempo utilizado por una actualización completa del Autómata Celular con $N \times N$ celdas, en función del valor de N	177
7.2. Resultados de las pruebas numéricas para comparar el coste de la aplicación con modelo dinámico y de la aplicación sólo con representación gráfica.	178
7.3. Porcentaje de tiempo que representa el cálculo del modelo dinámico respecto al total de la aplicación gráfica (datos obtenidos con Valgrind).	179
7.4. Resultados de los experimentos destinados a analizar el coste del cálculo de colisiones y fuerzas de reacción en los modelos propuestos.	179
7.5. Coste del cálculo del desplazamiento horizontal sobre el sistema granular en función de la profundidad del interfaz y el número de celdas.	183
7.6. Hundimiento de la carga en función de su masa con diferentes valores del parámetro n	185
9.1. Medidas de la minicargadora simulada. Véase la Figura 9.3. . . .	227

9.2. Número de vértices y caras del entorno de simulación, del modelo geométrico de la minicargadora y de la malla del Autómata Celular utilizados en el simulador.	237
9.3. Resultados de las pruebas numéricas realizadas con el simulador de minicargadora.	238

ÍNDICE DE FIGURAS

2.1. El algoritmo de Sumner et al. (Sumner et al., 1999) requiere el cálculo de un mapa de distancias de cada celda hasta el borde la colisión.	21
2.2. Detección de colisiones en el trabajo de Onoue y Nishita (Onoue and Nishita, 2005).	23
3.1. Modelo de colisión del modelo de esferas rígidas.	41
3.2. Colisión entre dos partículas en el modelo de esferas deformables.	43
3.3. Diagrama de fuerzas para determinar la estabilidad de un talud. Si las fuerzas de rozamiento no pueden superar a la tensión del material a lo largo del interfaz de fractura, ésta tendrá lugar, provocando un corrimiento de tierra.	48
3.4. Superficie de fractura según Terzaghi.	51
3.5. Los modelos de relación presión-hundimiento consideran una plancha rectangular de lado menor b que ejerce una presión p sobre un terreno homogéneo.	52
3.6. Variables del modelo BCRE para la descripción del flujo sobre la superficie de un sistema granular.	55
3.7. Evolución del modelo BTW.	67
3.8. Descripción del modelo de Chen y den Nijs (Chen and den Nijs, 2002).	69

4.1. Parámetros que describen la geometría del modelo discreto de sistema granular que se propone en este trabajo.	76
4.2. El estado del sistema queda determinado a partir del valor de la altura de material sobre el centro de cada celda, h	77
4.3. Cuando la diferencia de altura entre dos celdas es muy alta, el material se reparte reduciendo ésta diferencia.	81
4.4. Elementos que intervienen en la regla de actualización.	82
4.5. (a) Vecindad de Moore. (b) Vecindad de Von Neumann.	84
4.6. Adición y sustracción de material.	85
4.7. Resultado de la creación de un montón sobre una base irregular.	87
4.8. Modelo de estabilidad de un talud indefinido.	88
4.9. Variables involucradas en la expresión de z_+	93
4.10. Relación entre el tamaño de las avalanchas y su frecuencia. La regresión muestra claramente un a relación de tipo $1/f$ indicadora de la ausencia de escala en las propiedades estadísticas del sistema.	97
5.1. Con el fin de evitar cálculos innecesarios, en primer lugar se proyecta la caja envolvente del objeto sobre el sistema, de forma que únicamente se comprobará la posibilidad de colisiones con las celdas afectadas.	105
5.2. El cálculo de la celda sobre la que se encuentra un punto puede hacerse por medio del ancho y alto de las celdas.	106
5.3. Posición de los segmentos verticales utilizados para la detección de colisiones.	107
5.4. Cuando se detecta un contacto con una intersección de cuatro celdas indica que las cuatro están en contacto con el objeto.	108
5.5. Cuando se produce un contacto entre un objeto y la malla se almacena el punto de contacto p , la profundidad d_0 y la normal n	109
5.6. La región en contacto sobre una celda se extiende a un paralelepípedo alineado con los ejes de la celda que envuelve completamente la intersección entre la celda y el objeto.	110
5.7. Cuando un objeto entra en contacto con una celda, es posible que parte de su superficie no quede cubierta. A partir de la cantidad de material contenido en una celda, y de su superficie libre, es posible conocer la altura de su superficie.	111

5.8. A cada plano vertical que delimita la zona que está colisionando y la zona libre de colisión en una celda la denominaremos *interfaz vertical*. 112

5.9. En cada celda con interfaces verticales se almacena la distancia horizontal desde el interfaz vertical hasta la arista opuesta s 113

5.10. Cálculo de de la anchura de un interfaz vertical w cuando la celda tiene dos interfaces perpendiculares. 114

5.11. Propagación de la tensión en el interior de un sistema granular. . . 117

5.12. Una bola lanzada en dos configuraciones diferentes del sistema. Los parámetros de simulación son $\eta = 1$, $d = 0,5$, $\alpha = 30^\circ$ y $z_+ = 0,05$ 121

5.13. El hundimiento z se calcula a partir del valor de d_0 125

5.14. La región de fractura del modelo de Perumpral. 128

5.15. Superposición del modelo de fractura de Perumpral discretizado sobre el modelo de Automata Celular propuesto. 129

5.16. Si una celda tiene un *interfaz vertical* en la dirección del eje y ninguna de sus esquinas superiores estará colisionando. 131

5.17. Desplazamiento de un interfaz vertical. 132

5.18. Cálculo del material desplazado por un interfaz vertical. 133

5.19. Cuando un interfaz vertical avanza hasta cambiar de celda el valor de s se reduce. Esto debe ser tenido en cuenta al calcular δs 134

5.20. Cuando se produce una colisión, una celda puede tener uno o dos interfaces verticales. 134

5.21. La inicialización de dos interfaces verticales sobre la misma celda debe tener en cuenta la velocidad del objeto. 135

5.22. En una celda con dos interfaces es necesario calcular correctamente el material desplazado por cada uno de ellos, que dependerá de la variación de sus anchuras. 136

6.1. Sobre los objetos del escenario se fija un modelo de Automata Celular para poder acumular el material sobre ellos. La base del Automata se adaptará a la forma del objeto. 142

6.2. Cuando el Automata se encuentra sobre la superficie de un sólido tiene su sistema de referencia. 143

6.3. Cálculo de la pendiente entre dos celdas del Autómata utilizando la posición de los puntos de su superficie, obtenidos a partir de la posición y orientación de la base.	145
6.4. Las celdas coloreadas simbolizan el conjunto de celdas imaginarias \mathcal{I} definido para poder intercambiar material de un Autómata Celular a otro.	149
6.5. Esquema de interacción entre un Autómata superior y uno inferior.	151
6.6. Si un objeto avanza arrastrando material, la acumulación frente a él puede hacer que el material acabe superando su altura. En ese caso, la reasignación de vecinos de las celdas hará que el material caiga sobre el objeto.	152
6.7. El comportamiento del material ante una pala horizontal no es el mismo que el que ocurre cuando se empuja el material. En este caso, no se produce un interfaz de fractura.	153
6.8. Para recoger material sobre una pala, necesitamos un Autómata Celular sobre ella.	154
6.9. Evolución del avance de una pala I. Se crea un interfaz vertical a causa del contacto.	154
6.10. Evolución del avance de una pala II. El material aumenta frente a la pala hasta que supera su altura. Las celdas en el terreno toman como vecinos las celdas de la pala.	155
6.11. Evolución del avance de una pala III. Las celdas en el terreno empiezan a descargar material sobre la pala.	156
6.12. Esquema de la discretización vertical para el cálculo de la distribución de masas.	158
7.1. Dependiendo de la geometría del terreno frente a la pala, el tamaño de la región de Rankine puede variar.	169
7.2. Tamaño medio y máximo del vector de celdas activas en la formación de un cono, para diferentes valores del radio del cono.	172
7.3. Experimento numérico realizado para analizar el coste de la actualización del sistema utilizando el modelo propuesto en este trabajo.	176
7.4. Evolución del coste de la aplicación con modelo dinámico y sin modelo dinámico en función del número de celdas. Véase también el Cuadro 7.2.	178

7.5. Experimento numérico realizado para analizar el coste de la de- tección y reacción a las colisiones.	180
7.6. Evolución del coste del cálculo de las fuerzas de contacto. Véase también el Cuadro 7.4.	181
7.7. Experimento numérico realizado para analizar el coste del despla- zamiento horizontal del material.	182
7.8. Evolución del coste del desplazamiento horizontal del material. Véase también el Cuadro 7.5.	183
7.9. Relación entre la presión y el hundimiento en el modelo de presión vertical.	186
7.10. Experimento realizado dejando caer un cubo de 1 metro de lado sobre una malla horizontal para calcular el hundimiento provocado por la presión ejercida sobre el sistema.	187
7.11. Simulación de un cubo semienterrado en el sistema granular para medir la fuerza horizontal que actúa sobre él.	188
7.12. Evolución de la fuerza horizontal que actúa sobre el cubo a lo largo del tiempo.	189
7.13. Simulación de la distribución de presiones debajo de una colina formada por deposición de material. (a) Distribución de presiones para diferentes valores de H . (b) Detalle de la region central de la colina.	190
8.1. Representación de una fila de la malla por medio de una primitiva de tipo QUAD_STRIP	195
8.2. Representación de una fila de la malla por medio de una primitiva de tipo TRIANGLE_STRIP	195
8.3. La representación del sistema por medio de TRIANGLE_STRIP da lugar a la aparición de <i>dientes de sierra</i> sobre las crestas cuando la dirección de las mismas es perpendicular a las diagonales que dividen los cuadriláteros sobre los que se define.	198
8.4. La utilización de un vector de vértices, junto con un vector de ín- dices que indica el orden en el que se generan los triángulos, per- mite evitar la aparición de crestas irregulares.	199
8.5. Deformación de la textura causado por el desplazamiento de la coordenada de textura propuesto por (Onoue and Nishita, 2005).	200

8.6. Secuencia de una simulación que muestra la deformación de la textura causado por el desplazamiento de la coordenada de textura propuesto por (Onoue and Nishita, 2005).	203
8.7. Secuencia en la que se aprecia una discontinuidad en la región frontera entre el flujo y el material estático.	204
8.8. Secuencia en la que se aprecia la deformación de la textura en la región frontera entre el flujo y el material estático.	207
8.9. La coordenada de textura de un vértice se reinicia cuando su valor supera un cierto umbral, de forma que la diferencia entre vértices adyacentes no crezca de forma indefinida. Si esta operación se realiza en el instante en que la visibilidad de la textura es 0 no se apreciarán discontinuidades en el flujo.	211
8.10. Gracias al reinicio de la coordenada de textura se evita la deformación en las fronteras entre material en movimiento y material estático.	212
8.11. Para la simulación de la caída de material de un sistema a otro se han empleado sistemas de partículas, tanto para el flujo del material como para las partículas en suspensión.	215
9.1. Con el fin de mostrar la aplicación y utilidad de los modelos desarrollados en el presente trabajo se ha desarrollado un sistema de simulación para una minicargadora.	220
9.2. Estructura de un sistema de simulación como los que se emplean habitualmente en simuladores de formación.	224
9.3. Esquema de la minicargadora considerada para el desarrollo del simulador.	226
9.4. La pala empieza a cargarse con el material traspasado desde el sistema del suelo.	229
9.5. Adhesión del Autómata Celular sobre la pala de la minicargadora simulada.	230
9.6. Los dos Autómatas celulares empiezan a interactuar.	231
9.7. La interacción entre el suelo y la rueda puede simularse por medio de los conocidos modelos de Pacejka (Pacejka, 1996) sobre terreno pavimentado, y un modelo basado en la teoría de equilibrio límite sobre terreno blando.	232

9.8. Fuerzas que intervienen en el modelo de tracción sobre terreno blando.	233
9.9. Marcas de los neumáticos dejadas por la minicargadora sobre el sistema granular.	234
9.10. Detalle del suelo después de interactuar las ruedas y la pala.	235
9.11. Vista aérea de la zona de simulación donde se han hecho las pruebas.	236
9.12. En la valoración de los costes de rendimiento se ha tenido en cuenta el número de vértices involucrados en el proceso de representación gráfica, así como la carga debida a la actualización del sistema granular.	239
B.1. (a) Vecindad de Moore (b) Vecindad de Von Neumann	264

*'Where shall I begin, please your Majesty?' The White Rabbit asked.
'Begin at the beginning,' the King said gravely, 'and go on till you come to the end:
then stop.'*

L. Carroll (Alice's Adventures in Wonderland)

CAPÍTULO 1

Introducción

Las herramientas de formación basadas en simulación y realidad virtual se han convertido en las últimas décadas en una potente herramienta para la formación y el entrenamiento de multitud de tareas, especialmente aquéllas que conllevan un coste o un riesgo elevado. Al campo de aplicación tradicional de la aviación civil y militar, se han sumado en los últimos años la formación de operadores de grúas portuarias y de obra civil entre otros. El Laboratorio de Simulación y Modelado del Instituto de Robótica trabaja desde hace una década en la simulación de maquinaria pesada para entrenamiento, con aplicaciones especialmente en el ámbito portuario y el de la construcción.

Motivación del trabajo

El presente trabajo de investigación está motivado por los proyectos derivados de esta línea de trabajo. En algunos de estos proyectos la interacción con el terreno o con material granel constituye un elemento fundamental del entrenamiento, lo que ha dado lugar a la necesidad de simular de forma realista este tipo de sistemas.

De forma más precisa, el trabajo de investigación que se presenta se inicia du-

rante del desarrollo de un simulador de entrenamiento para los operadores de las grúas móviles portuarias utilizadas para la carga y descarga de material granel en el Puerto de Valencia, en el marco del proyecto SIMPORT II. Posteriormente, se ha continuado en el marco de otros proyectos de investigación relacionados con la simulación para entrenamiento de equipos de obra civil, como volquetes y manipuladoras telescópicas (proyecto PREVEN).

El objeto de este trabajo es, por tanto, el modelado de sistemas granulares, aplicado a la simulación interactiva en entornos de simulación de maquinaria para entrenamiento.

1.1. Simulación interactiva para formación

Hasta hace apenas unos años, la utilización de simuladores para entrenamiento estaba limitada al terreno militar y a la aviación civil a causa del elevado coste asociado al desarrollo de este tipo de equipos. Sin embargo, el aumento en la capacidad de los equipos informáticos, en especial de los procesadores gráficos, y a la reducción de su coste, han permitido extender el empleo de los simuladores y de los sistemas de entrenamiento basados en realidad virtual a ámbitos muy diversos, como el entrenamiento de conductores, los manipuladores de grúas y de maquinaria de obra civil o la simulación de operaciones quirúrgicas, por poner sólo algunos ejemplos.

En ámbitos como la manipulación de maquinaria pesada, la formación se ha basado siempre en gran medida en la utilización de la máquina real. Como consecuencia de esto la simulación ofrece múltiples ventajas, tanto en el aspecto didáctico como en la prevención de riesgos y en la reducción de los costes asociados a la formación. Todo esto contribuye a potenciar su utilización para el entrenamiento de los operarios.

- La prevención de riesgos en la formación. La utilización por parte de un usuario inexperto de maquinaria pesada, ya de por sí peligrosa, supone un riesgo para el propio aprendiz y para el resto de trabajadores que puede evitarse por medio de la utilización de un simulador.

- Reducción de los costes derivados de la formación. El coste asociado a la formación con la máquina real es muy elevado debido, en primer lugar, al coste del propio equipo; en segundo lugar, a los costes derivados del mantenimiento, que aumentan por un uso inexperto; y en tercer lugar, a la reducción de la productividad del centro de trabajo al dedicar parte de los equipos a la formación.
- Reciclaje y formación permanente. La aparición de nuevos equipos, cada vez más avanzados y con nuevos modos de operación, obligan a mantener al personal en continua formación. Por medio del simulador se puede dar este tipo de formación, iniciando el aprendizaje incluso antes de la implantación de nuevos modelos de máquina.
- Entrenamiento en condiciones adversas. Una correcta formación puede requerir la realización de ciertos ejercicios que no son viables con equipo real: trabajo en condiciones meteorológicas extremas, simulación de averías, sometimiento al manipulador a situaciones de tensión, etc. La utilización de un simulador abre la puerta a la realización de estos ejercicios.

En el caso de los simuladores de maquinaria para movimiento de tierra y carga y descarga de material granel, la simulación ofrece una ventaja adicional respecto al entrenamiento con la máquina real. En estos casos, además de la máquina es necesario disponer de unas instalaciones especiales, con una gran extensión de terreno o gran cantidad de material granel para llevar a cabo la formación.

1.1.1. Características de un simulador para formación

El objetivo de un simulador es la complementación del entrenamiento sobre la máquina real. Por ello es necesario que el simulador permita reproducir de forma fiel el entorno de trabajo real, y que proporcione al usuario un alto grado de inmersión y sensación de *presencia*. Para ayudar a alcanzar estos objetivos, un simulador cuenta con una serie de subsistemas que proporcionan los estímulos necesarios al usuario:

- Cabina y plataforma de movimiento: el cuerpo del simulador consiste en

una cabina, que ocupará el usuario, situada sobre una plataforma de movimiento de 6 grados de libertad que simula los estímulos inerciales que se reciben en el sistema real, necesarios para obtener un alto grado de inmersión y evitar sensaciones de mareo.

- Sistema visual: por medio de un conjunto de proyectores y pantallas, situados normalmente sobre la propia cabina, se ofrece al usuario una representación gráfica del entorno simulado que cubre todo su campo de visión. Tras este equipo, un sistema informático se encarga de generar las imágenes por medio de una aplicación gráfica.
- Sistema de sonido: reproduce el entorno sonoro del escenario que se simula. Por una parte aumenta el grado de realismo del simulador, y por otra puede proporcionar estímulos que el aprendiz deba aprender a reconocer y reaccionar ante ellos (una señal de alerta, un cambio en el sonido del motor, etc).
- Sistema de entradas y salidas: se presenta habitualmente como una reproducción del salpicadero o el panel de mandos de la máquina simulada. Captura las acciones del usuario, y proporciona la información que se encuentra disponible en la máquina real.
- Modelos de simulación: es un conjunto de modelos matemáticos que reproducen el comportamiento de los sistemas simulados. A partir de las entradas del usuario, proporciona la información requerida por el resto de subsistemas, para la representación gráfica, el movimiento de la plataforma, el estado del panel de mandos o la reproducción de sonidos.

Modelado dinámico

El modelado dinámico para los simuladores de entrenamiento se enfrenta a varios retos importantes. Los modelos dinámicos utilizados deben reproducir el comportamiento del sistema y del entorno con suficiente realismo como para que la simulación sea creíble para el usuario y para que los hábitos adquiridos por los aprendices sean correctos. Además, deben ser suficientemente robustos y eficientes como para poder ejecutarse de forma interactiva en tiempo real.

La metodología empleada debe permitir una integración flexible de los modelos dinámicos junto con el resto de elementos del sistema de simulación (aplicación gráfica, sensorización, monitorización, etc.). Además, deben ser suficientemente generales como para reproducir el amplio abanico de situaciones que se dan en una simulación con interacción por parte del usuario.

Por tanto, el modelado para simulación en tiempo real supone un difícil reto desde diferentes puntos de vista y, a menudo, invalida metodologías y enfoques bien asentados y que han demostrado su utilidad en otros campos.

Dentro del ámbito de la simulación de maquinaria pesada, los sistemas granulares y la interacción con el terreno (arena, grava, material granel, etc.) se encuentran entre los sistemas que ofrecen más complejidad desde el punto de vista del modelado dinámico. Se trata de sistemas que pueden mostrar comportamientos propios del estado sólido o de los fluidos y que presentan una dinámica altamente no lineal.

1.2. Modelado y simulación interactiva de los sistemas granulares

Por sistemas granulares entendemos un amplio conjunto de sistemas físicos compuestos por un elevado número de partículas sólidas que interactúan entre sí por medio de contactos. El comportamiento de los sistemas granulares, tales como la arena, ha sido objeto de interés de la comunidad científica desde hace siglos. Autores tan destacados como Coulomb, Faraday, Lord Rayleigh o Reynolds se interesaron por su comportamiento, que muestra propiedades atribuibles a fluidos, sólidos y gases, según el estado del sistema o del entorno.

Este interés teórico por los sistemas granulares se ha visto incrementado debido a la cantidad de procesos industriales y agrícolas que los involucran. En las últimas décadas han sido muchos los autores que han dedicado su trabajo a comprender su comportamiento, tanto con una motivación teórica, como aplicada a la industria.

En muchos de estos casos, la manipulación de sistemas granulares requiere la utilización de maquinaria pesada, como en el caso del transporte de material granel, o de la manipulación de tierra en obra civil; maquinaria para la que la utilización de la simulación puede proporcionar grandes ventajas en la formación de sus operarios, creando la necesidad de introducir la simulación de los sistemas granulares en la simulación para entrenamiento.

Sin embargo, a pesar de esta necesidad emergente el hecho es que hasta el momento el nivel de introducción de los modelos de sistemas granulares en los simuladores de formación es muy bajo, por no decir que es prácticamente nulo. Para conocer los motivos de esta situación, es necesario analizar las técnicas utilizadas actualmente para la simulación de los sistemas granulares.

1.2.1. Sistemas granulares en simuladores para formación

Como ya se ha indicado, en un simulador para entrenamiento una de las principales fuentes de estímulos para el usuario es el sistema visual. Por este motivo, el modelado dinámico destinado a la simulación se desarrolla habitualmente dentro del campo científico y técnico de los gráficos por ordenador y la realidad virtual. En general, tanto la industria de los vídeo-juegos y la realidad virtual como la de la animación demandan modelos eficientes y creíbles de cualquier sistema que pueda verse involucrado en sus desarrollos y pueden beneficiarse de modelos de sistemas granulares.

Esta necesidad se refleja en la aparición cada vez más frecuente de trabajos destinados a la animación y simulación de terreno y sistemas granulares en informática gráfica. Estos trabajos se centran tanto en la representación geométrica y visual del terreno como en la simulación dinámica de las interacciones. Sin embargo, los diferentes modelos propuestos han resultado hasta el momento insuficientes para las necesidades de la simulación para entrenamiento.

Los factores que causan esta carencia son fundamentalmente dos: en primer lugar, las elevadas exigencias de los simuladores en lo que respecta al modelado y en segundo lugar la metodología de modelado empleada que procede del campo de la animación por ordenador en el que el comportamiento realista de

los modelos no es la principal exigencia.

Requisitos de la simulación para entrenamiento

En términos generales, los requisitos del modelado dinámico para el desarrollo de simuladores para formación son similares a los que aparecen en otras aplicaciones gráficas en tiempo real. Los modelos deben ser eficientes y estables, y además deben garantizar un nivel de realismo que permita la recreación de un entorno creíble.

Sin embargo, en comparación con otras aplicaciones relacionadas con los gráficos por ordenador, la simulación para entrenamiento es probablemente una de las aplicaciones más exigentes, con lo que los modelos encontrados en el campo de la animación y simulación de terreno en entornos virtuales no cubren las necesidades que ésta impone.

Comparte con el desarrollo de vídeo-juegos y otras aplicaciones en tiempo real la necesidad de modelos dinámicos que sean interactivos y muy eficientes. Pero las exigencias de realismo en el ámbito de la simulación para entrenamiento son mayores; la predisposición del usuario a aceptar discrepancias con la realidad es menor y además el comportamiento de los sistemas simulados debe ser suficientemente fiel como para permitir un aprendizaje correcto.

Simulación interactiva y sistemas granulares

El conjunto de modelos actuales que permiten la simulación interactiva en tiempo real del terreno o los sistemas granulares comparten la misma metodología de modelado; son modelos heurísticos simples que reproducen el comportamiento macroscópico del sistema de forma aproximada.

En el desarrollo de entornos de realidad virtual el modelado dinámico de los sistemas más complejos ha tendido, en general, a la utilización de modelos sencillos, no necesariamente correctos. Esta metodología permite obtener la *credi-*

bilidad buscada sin pagar el precio de un elevado coste computacional.

Este es el caso de los sistemas granulares, debido a su elevada complejidad. Como veremos, la simulación explícita de las partículas que componen un sistema granular no es viable desde el punto de vista del coste computacional. Por otra parte, otro tipo de modelos, basados en ecuaciones en derivadas parciales, tampoco parecen ser adecuados para simulaciones interactivas en tiempo real; no se trata de modelos eficientes ni resulta sencillo considerar situaciones de interacción arbitrarias.

Es cierto que algunos de los modelos utilizados en animación, y modificados posteriormente para simulación interactiva, están inspirados por descripciones macroscópicas de la física de los sistemas granulares. Sin embargo estos modelos son modificados o simplificados, desvirtuando propiedades importantes de su dinámica.

1.3. Planteamiento del problema

Se ha constatado una ausencia de modelos realistas de sistemas granulares en el ámbito de la simulación interactiva en tiempo real, que ha impedido su incorporación a la simulación para entrenamiento. Esta carencia se debe, principalmente, a la utilización de una metodología de modelado inadecuada para la consecución de estos objetivos.

La causa es la ausencia de una fundamentación física en los modelos que se basa en la hipótesis de que los modelos realistas de sistemas granulares procedentes del campo de la física son excesivamente costosos. El hecho de que algunos modelos rigurosos no hayan resultado suficientemente flexibles (Li and Moshell, 1993) o eficientes (Zhu and Bridson, 2005) como para su uso en entornos de realidad virtual ha contribuido a la reafirmación de esta hipótesis.

Por otra parte, la existencia de algunos modelos heurísticos que ofrecen un comportamiento visualmente creíble (Sumner et al., 1999; Benes et al., 2006a) han hecho que una metodología que proviene del campo de la animación se haya

asentado como principal herramienta para la simulación de este tipo de sistemas. Estos modelos han sido aceptados, entre otros motivos, porque la función de los modelos de terreno a menudo ha sido considerada como meramente decorativa (Sumner et al., 1999; O'Brien et al., 2000).

Como resultado, la metodología de modelado que se ha establecido durante la última década, basada en el planteamiento de Sumner (Sumner et al., 1999), y seguida en los trabajos más relevantes (Onoue and Nishita, 2005; Zeng et al., 2007), es completamente insuficiente cuando la interacción con el terreno es la tarea principal del sujeto en el entorno virtual.

Vemos, por tanto, que el desarrollo de modelos adecuados para su uso en simuladores para formación no pasa por la mejora o revisión de los modelos existentes. Por el contrario, es necesaria una revisión de los procedimientos empleados para la obtención de los modelos, que permita incorporar las propiedades físicas del sistema sin renunciar a las exigencias de eficiencia de la aplicación que nos ocupa.

La **hipótesis principal** de este trabajo de investigación es que por medio de la utilización de modelos provenientes de la física, y un planteamiento computacional adecuado, es posible alcanzar los objetivos de realismo, eficiencia, flexibilidad y estabilidad necesarios para la incorporación de los sistemas granulares a la simulación para entrenamiento.

1.4. Objetivos y metodología

La creación de entornos virtuales interactivos cada vez más cercanos a la realidad constituye uno de los retos principales de la informática gráfica aplicada a la simulación para entrenamiento. Sin embargo, hemos visto que las metodologías empleadas hasta el momento para el modelado de sistemas granulares no ha dado como resultado modelos suficientemente realistas para su utilización en este campo.

Desde esta perspectiva, el objetivo principal de este trabajo de investigación

es revisar la metodología de modelado existente y desarrollar un conjunto de modelos de sistemas granulares que contribuyan a cubrir la carencia de modelos dinámicos realistas, cumpliendo además con las exigencias que plantea la simulación para entrenamiento en tiempo real.

1.4.1. Objetivos de la tesis

Con el fin de alcanzar este objetivo principal, se plantea la consecución de un conjunto de hitos u objetivos intermedios. Estos objetivos se indican a continuación de forma detallada.

1. Establecer de forma clara las limitaciones de las técnicas existentes para la simulación de sistemas granulares, y determinar hasta que punto cumplen los requisitos de
 - Realismo,
 - Eficiencia,
 - Flexibilidad.
2. Proponer una metodología de modelado que se base en la utilización de modelos realistas, procedentes del campo de la física, que puedan ser útiles para el desarrollo de modelos adecuados en simulación para entrenamiento.
3. Desarrollar un conjunto de modelos para el comportamiento de un sistema granular utilizando esta metodología. Para que sean adecuados en la simulación para entrenamiento, los modelos que se obtengan deben cumplir los siguientes requisitos:
 - Deben ser modelos realistas que se basen en las propiedades físicas del sistema simulado.
 - Deben ser eficientes, y explotar adecuadamente las propiedades del sistema simulado para mejorar el rendimiento de la simulación.
 - Deben proporcionar un modelo geométrico del sistema que sea adecuado para su representación en aplicaciones de informática gráfica.

4. Desarrollar los modelos asociados que permitan la interacción entre el sistema granular y el resto de objetos del escenario. Se pretende alcanzar los siguientes objetivos:
 - Diseñar los elementos necesarios para la detección de colisiones entre los objetos del escenario y el sistema granular, y en especial la gestión de la información necesaria para el proceso de los contactos;
 - Desarrollar modelos para simular la aplicación de una presión vertical sobre un sistema granular;
 - Desarrollar modelos para simular el desplazamiento horizontal de terreno por un objeto, necesarios para la simulación de una herramienta como la pala de una excavadora o de una motoniveladora.
 - Obtener del sistema las fuerzas de contacto sobre la herramienta, permitiendo así la simulación de la reacción del terreno. Esto es necesario para conocer el comportamiento de la herramienta simulada y para proporcionar al usuario los estímulos adecuados a través de la plataforma de movimiento del simulador.
5. Analizar y validar los modelos obtenidos con el fin de conocer sus propiedades y su rango de validez por medio de los modelos físicos en los que se basan.
6. Desarrollar las técnicas necesarias para la simulación de modos de interacción más complejos que las colisiones, como la acumulación del material sobre los objetos del escenario y el intercambio de material entre varios sistemas granulares.
7. A partir de las técnicas anteriores, desarrollar los elementos necesarios para la realización de simulaciones que involucren escenarios generales, como el entorno necesario para los simuladores de maquinaria de movimiento de terreno.
8. Revisar y actualizar las técnicas existentes para la representación gráfica del terreno, incluyendo técnicas basadas en GPU, con el fin de obtener simulaciones visualmente realistas y de gran calidad.
9. Optimizar la implementación de los modelos obtenidos, de forma que su coste computacional sea el menor posible, ampliando así las posibilidades reales de utilización en simulaciones complejas.

10. Contribuir a la solución de algunos de los problemas abiertos en el campo de la animación por ordenador respecto al modelado de sistemas granulares.

El conjunto de objetivos de este trabajo va más allá de la simple obtención de modelos realistas. Este trabajo rompe con la hipótesis aceptada hasta ahora de que los modelos físicos de sistemas granulares no son adecuados para su utilización en simulaciones en tiempo real, debido a su complejidad y alto coste computacional.

Se abordará, por tanto, una revisión de la metodología de modelado actual que proviene principalmente del campo de los gráficos por ordenador. Como consecuencia de esto, además de las contribuciones que se obtendrán en el campo de la simulación para entrenamiento, se derivarán también resultados aplicables a otros campos como la realidad virtual, la animación o la industria del vídeo-juego.

1.4.2. Metodología de trabajo

Con el fin de alcanzar los objetivos que se proponen en este trabajo de investigación se propone la siguiente metodología. En primer lugar, se analizarán las técnicas actuales de modelado confirmando la hipótesis de que las metodologías de modelado existentes no son adecuadas. Para proponer una alternativa que permita obtener modelos más realistas necesitamos apoyarnos en dos elementos; un conjunto de modelos físicos, que proporcionarán la descripción correcta de la dinámica del sistema, y un modelo computacional que permitirá formalizarlos e integrarlos en un simulador.

Una vez obtenidos estos elementos, se desarrollarán y validarán los diferentes modelos y las técnicas necesarias para su implementación y adecuación a las exigencias de la simulación para entrenamiento. A continuación se detallan las fases en las que se descompone esta metodología.

1. En primer lugar se analizará en profundidad las técnicas que se utilizan actualmente para la representación y simulación interactiva de terreno y

sistemas granulares. Esto nos permitirá definir con claridad el problema y las carencias existentes y establecer de forma más concreta las actuaciones necesarias y las contribuciones que se espera obtener.

2. En segundo lugar y para poder desarrollar modelos que cumplan con el requisito fundamental de comportamiento realista, se analizarán modelos utilizados en disciplinas teóricas, como la física aplicada, la geomecánica o la matemática y que permitirán la descripción de la dinámica de los sistemas granulares. De entre estos modelos, se seleccionarán aquéllos más adecuados para conseguir simulaciones eficientes y flexibles. Se presentará también el modelo computacional de los Automatas Celulares, que permitirá la introducción de los modelos.
3. Se revisarán y discretizarán los modelos seleccionados, adaptándolos a las necesidades de las aplicaciones interactivas basadas en informática gráfica, para obtener los modelos dinámicos centrales de este trabajo. Se buscará la obtención de una representación del sistema similar a la que proponen otros autores pero, a diferencia de los trabajos existentes hasta ahora, se propondrán modelos basados en física.
4. Los modelos discretos obtenidos se extenderán para la obtención de nuevos modelos de interacción del sistema con el entorno. De nuevo, esta tarea se llevará a cabo por medio de la adaptación y discretización de modelos teóricos y empíricos aceptados por la comunidad científica como válidos.
5. Los diferentes modelos obtenidos se analizarán para conocer sus propiedades más relevantes. Para garantizar la consecución del objetivo principal que constituye la obtención de modelos realistas se validarán por medio de dos herramientas; por una parte, a través de desarrollos analíticos se compararán con modelos procedentes de la física y se obtendrá el significado y correcto ajuste de los parámetros; por otra parte, se realizarán experimentos numéricos que simulen las técnicas empíricas utilizadas sobre sistemas reales, comparando los resultados con experimentos ya descritos en la bibliografía especializada.
6. Por último, se desarrollará una aplicación de simulación completa para un modelo de minicargadora utilizado habitualmente en obra civil. Con esto, se mostrará la aplicabilidad de los modelos de simulación propuestos y

se confirmará la consecución del objetivo principal del presente trabajo de investigación.

Como resultado de esta metodología, se obtendrán modelos que permitirán la simulación realista y eficiente de los sistemas granulares, usando una implementación y una representación muy adecuadas para su integración en aplicaciones de informática gráfica.

1.5. Organización de la memoria

La memoria se ha organizado de la siguiente manera:

En el **Capítulo 2** se revisan los trabajos existentes en el área de la simulación y animación de sistemas granulares. Se analizan los elementos más importantes involucrados (cálculo de colisiones, modelado dinámico y representación gráfica), prestando especial atención a los modelos dinámicos que permiten la simulación interactiva en tiempo real. En este capítulo se realiza además un análisis crítico del estado actual de los conocimientos sobre este tema, con el fin de poner de manifiesto los principales problemas abiertos.

En el **Capítulo 3** se proporcionan las bases necesarias para el posterior desarrollo de modelos realistas de terreno. Por una parte se presentan las principales metodologías de modelado de sistemas granulares en física, analizando sus ventajas e inconvenientes a la hora de utilizarlos en entornos de simulación para entrenamiento. Por otra parte, se presenta el modelo computacional de los Autómatas Celulares y se discute su conveniencia para el desarrollo de los modelos en el marco de esta investigación.

En el **Capítulo 4** se desarrollan nuevos modelos dinámicos para la simulación de sistemas granulares en tiempo real. Por medio de la formalización de los Autómatas Celulares, se presenta un modelo de pila de arena basado en las propiedades físicas del sistema. Se analiza el modelo discreto propuesto, profundizando en el significado de sus parámetros y variables y se valida analíticamente su comportamiento frente al del modelo BCRE. Se analizan también las

propiedades estadísticas de la dinámica del modelo, con el fin de comprobar la concordancia del modelo con las propiedades conocidas de los sistemas granulares. Por último, se presenta una variación del modelo que contempla el efecto de la inercia de las partículas.

En el **Capítulo 5** se desarrollan diferentes modelos de interacción con el terreno. Sobre el modelo de evolución desarrollado en el capítulo anterior, se desarrolla un modelo de presión y deformación vertical del terreno. Este modelo se basa en las propiedades conocidas del suelo homogéneo. Igualmente, a partir de modelos utilizados en geomecánica se desarrolla un modelo de desplazamiento horizontal que permite además el cálculo de las fuerzas que aparecen sobre una herramienta.

En el **Capítulo 6** se amplían los modelos de los capítulos anteriores para permitir la acumulación del material granular sobre objetos en movimiento. Se considera la interacción entre varias pilas de arena y se presta especial atención al caso de la carga de una pala de excavadora.

En el **Capítulo 7** se analiza el coste computacional de los elementos más importantes de los diferentes modelos. Se implementan y se describen las pautas que se han seguido para la implementación eficiente de los modelos, explotando las propiedades del sistema simulado, y permitiendo así la simulación en tiempo real. Este análisis se complementa con un conjunto de pruebas numéricas realizadas con el fin de conocer de una manera precisa los tiempos de ejecución de cada modelo. Además, se llevan a cabo también experimentos numéricos que replican los realizados sobre sistemas reales, mostrando el correcto comportamiento de los modelos desarrollados a lo largo de este trabajo de investigación, y en particular validando los modelos de los capítulos 5 y 6.

En el **Capítulo 8** se analizan los aspectos más relevantes desde el punto de vista de la representación gráfica del terreno en aplicaciones de informática gráfica y realidad virtual. Se revisan las primitivas más adecuadas para el modelado del terreno, y las técnicas existentes para la animación del material en movimiento, con la propuesta de mejoras en este último punto. Por último, se propone la utilización de sistemas de partículas para la representación de las partículas en suspensión que aparecen habitualmente al manipular un sistema granular.

El **Capítulo 9** muestra un caso práctico de aplicación de los modelos desarrollados. Se muestra la implementación de un sistema de simulación de una minicargadora (una excavadora ligera) aplicando el conjunto de técnicas y modelos que se han propuesto a lo largo del trabajo. En este capítulo se demuestra, por tanto, la adecuación de los modelos presentados para su utilización en aplicaciones complejas en tiempo real e interactivas.

Por último, el **Capítulo 10** realiza un resumen de los logros alcanzados por medio de este trabajo, indicando las contribuciones científicas y técnicas más relevantes obtenidas. Se revisan las principales carencias que este trabajo ha contribuido a cubrir, y se hace un breve análisis de los problemas abiertos y de las posibles futuras líneas de investigación a las que da lugar.

La presente memoria cuenta además con tres apéndices en los que se han desarrollado algunos aspectos que, por su extensión, no resulta adecuado exponerlos en detalle durante la memoria.

En el **Apéndice A** se muestra un resumen de la notación utilizada en la memoria.

En el **Apéndice B** se presenta, de forma más extensa, el formalismo empleado a lo largo de la memoria para la definición de los Autómatas Celulares utilizados.

En el **Apéndice C** se introducen algunos conceptos relacionados con el comportamiento crítico auto-organizado y con los sistemas granulares.

Por último, en el **Apéndice D** se discute sobre la conveniencia de la utilización del término *Autómata Celular* para referirnos al modelo de evolución y sobre la correcta utilización de este término.

If it looks like a duck, and quacks like a duck, we have at least to consider the possibility that we have a small aquatic bird of the family anatidae on our hands

Douglas Noel Adams

CAPÍTULO 2

Simulación interactiva de sistemas granulares en entornos virtuales

El problema que se aborda en esta investigación es el desarrollo de modelos de sistemas granulares destinados a la simulación para entrenamiento de operarios de maquinaria de obra civil o de máquinas dedicadas a la manipulación de material granel. La aplicación a la que van dirigidos los modelos, la simulación para entrenamiento, exige que éstos sean realistas y que contemplen la interacción entre la máquina y el terreno.

En este capítulo se analizan los trabajos existentes en el campo de la simulación interactiva de terreno, con el fin de determinar el estado actual de las técnicas disponibles. Prestaremos especial atención a los trabajos que consideren la interacción entre el terreno y un objeto y a los que permiten la simulación interactiva en tiempo real.

2.1. Introducción

Atendiendo a la bibliografía existente, los trabajos pueden clasificarse en dos grupos: los que abordan únicamente el problema de la dinámica de la superficie del terreno y los que consideran la interacción entre el terreno y una herramienta

u objeto en contacto con él.

En la simulación interactiva de terreno en entornos virtuales, como los empleados en simulación para entrenamiento, frecuentemente se usa un mapa de alturas para la descripción de la superficie del sistema granular, de forma que el terreno puede representarse por medio de una matriz de valores reales.

Por este motivo, es habitual utilizar esta misma representación para la definición de los modelos que describen su evolución y la interacción con los objetos del entorno. A continuación presentamos los principales resultados existentes, prestando especial atención a los modelos que permiten la simulación de un sistema granular en tiempo real.

2.2. Modelado no interactivo o de superficie

Los primeros trabajos existentes en el modelado de terreno en entornos virtuales están dedicados a la obtención de una representación tridimensional de un terreno o paisaje. Es lo que en la nomenclatura anglosajona se conoce como *procedural modeling*. Se trata de modelos de erosión hídrica utilizados para obtener la evolución de un escenario geológico para obtener un paisaje realista. Estos modelos están destinados a modelar el terreno de forma no interactiva y suelen ser computacionalmente costosos.

Uno de los trabajos pioneros en este tipo de algoritmos es el de Musgrave et al. (Musgrave et al., 1989). En él combinan un algoritmo que genera un terreno con unas propiedades fractales dadas, con la utilización del modelo de erosión para hacer evolucionar el modelo preliminar, y obtener un resultado final realista. El grupo de investigación de B. Benes ha trabajado también activamente con modelos de erosión, introduciendo una representación multicapa del terreno para obtener el efecto de la aparición de diferentes estratos geológicos (Benes and Forsbach, 2001; Benes and Forsbach, 2002; Benes et al., 2006b; Stava et al., 2008). Otros trabajos basados en la misma metodología son el de Koh (Koh, 2002) o el Olsen (Olsen, 2004).

Aunque estos modelos no tienen como objetivo el cálculo de la evolución del sistema en una escala de tiempo corta, sino que son un procedimiento para conseguir el estado final, han motivado algunos de los desarrollos posteriores en animación y simulación interactiva de terreno.

Los primeros modelos que consideran la evolución del terreno en escalas cortas de tiempo se centran en el modelado de escenarios desérticos y la evolución de dunas. El modelo propuesto por Nishimori y Ouchi (Nishimori and Ouchi, 1993; Ouchi and Nishimori, 1995) y permite la simulación de un escenario dentro de un desierto de arena. El modelo simula la creación de ondulaciones en la arena que se forman a causa del efecto del viento. Considerando el terreno como una mapa de alturas sobre una malla regular, se permite el desprendimiento de una porción de material de la celda (i, j) de la malla. El material se depositará posteriormente en la celda $(i + L, j)$, si la dirección del viento es positiva en el eje x .

Onoue y Nishita (Onoue and Nishita, 2000) parten del modelo anterior, variando el valor de L en función de las propiedades del terreno, de forma que el material alcanza más distancia si el desplazamiento se produce hacia abajo por una pendiente que si se produce en una pendiente ascendente.

En estos modelos (Nishimori and Ouchi, 1993; Ouchi and Nishimori, 1995; Onoue and Nishita, 2000), tras el cálculo del desplazamiento de partículas a causa del viento se aplica un proceso de difusión al mapa de alturas, para simular el efecto de las pequeñas avalanchas que mantienen la pendiente en todo punto por debajo del *ángulo de reposo* del sistema.

Benes y Roa (Benes and Roa, 2004) amplían el modelo anterior de manera que es posible simular la acumulación de arena y la formación de *sombras de viento* ante la existencia de obstáculos tales como edificios, carreteras, plantas, etc. La arena se acumula en el lado desde el que procede el viento, mientras que en el lado opuesto se observa una zona en la que las ondulaciones son más suaves.

Hsu y wong (Hsu and Wong, 1995) proponen un método para simular la acumulación de nieve en función de la inclinación y la incidencia del aire en diferentes

zonas de un objeto, así como el procedimiento para obtener una correcta representación visual, por medio de trazado de rayos. Nishita et al. (Nishita et al., 1997) se centran en la representación de nieve, por medio de metabolas (*metaballs*), prestando especial atención al efecto de la dispersión de la luz. Fearing (Fearing, 2000) propone posteriormente un algoritmo más elaborado para simular la acumulación de nieve, obteniendo resultados más realistas. Uno de los pasos de su método consiste en la aplicación de métodos de erosión similares a los de Musgrave.

Los modelos presentados en estos trabajos están destinados a la obtención de un escenario realista mediante un pre-proceso del mismo, y no a representar la evolución del terreno. Aunque los resultados obtenidos son visualmente correctos, su coste hace que el modelado del terreno no pueda realizarse en tiempo real. Además, estos modelos no permiten ningún tipo de interactividad en la simulación, más allá del efecto de las condiciones atmosféricas en el terreno con lo que tampoco nos sirven para los objetivos de este trabajo.

2.3. Modelos interactivos

Una vez analizados los modelos enfocados a la representación visual del terreno, se encuentran con numerosos trabajos en los que se contemplan fuerzas de interacción entre el terreno representado y un objeto externo. Estas fuerzas pueden ser solamente desde el objeto hacia el terreno o en ambos sentidos. A continuación veremos los principales trabajos en estos dos tipos de modelos.

2.3.1. Deformación del terreno

Chanclou et al. (Chanclou et al., 1996) proponen un primer modelo para este problema. Consideran el suelo como un lienzo elasto-plástico que reacciona al contacto de un objeto externo. El modelo dinámico de deformación se basa en un sistema de partículas, situado bajo la superficie, al cual se le añaden elementos de fuerza que simulan el comportamiento plástico del terreno. El comportamiento dinámico del suelo por medio de sus propiedades físicas es descartado de forma

explícita, y las avalanchas y el flujo de material son reemplazados por un modelo sencillo de difusión para suavizar el terreno tras la deformación inicial.

Posteriormente, Dewaele y Cani (Dewaele and Cani, 2003) proponen un modelo volumétrico para la deformación plástica de arcilla. En su modelo, el espacio se descompone en una malla tridimensional regular; en cada celda cúbica de la malla se considera como variable el porcentaje de ocupación del mismo por la arcilla. Sobre esta representación, se propone un modelo fenomenológico para la dinámica, de forma que se cumplan tres reglas básicas; las deformaciones son totalmente plásticas y amortiguadas, el material es incompresible (el volumen total debe conservarse bajo cualquier deformación), y el sistema se opone a su fraccionamiento debido a cierto nivel de tensión superficial.

Los autores consiguen también la simulación de herramientas, definiéndolas por medio de un mapa de ocupación del espacio, de forma que la arcilla y la herramienta no pueden superponerse. El modelo no permite sin embargo obtener fuerzas de reacción del material sobre la herramienta.

Uno de los trabajos más importantes en el campo de la animación de terreno deformable es el realizado por Sumner et al. (Sumner et al., 1999) (publicado anteriormente como (Sumner et al., 1998)). En este trabajo presentan un modelo que considera la interacción entre un objeto arbitrario y el suelo para animación. Su enfoque, basado también en un mapa de alturas, se desarrolla en tres pasos;

- En primer lugar, se lleva a cabo la detección de colisiones entre cada objeto del escenario y el suelo, por medio de la proyección de rayos (*ray casting*). Si tiene lugar una colisión, se calcula un mapa de las celdas que están en contacto con el objeto, con el fin de conocer la distancia de cada una de ellas a la celda sin contacto más próxima. La Figura 2.1 muestra un ejemplo de este mapa.
- Empezando por las celdas con mayor valor de distancia en el mapa anterior, se elimina el material que ha quedado en el interior del objeto. Una fracción de este material (constante en todas las celdas) se reparte por igual a las celdas vecinas que tienen un valor menor de distancia sobre el mapa. La porción de material que no se distribuye se considera que ha sido

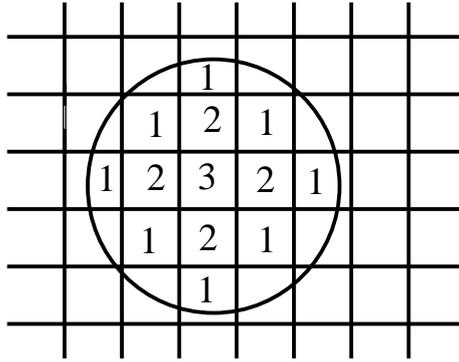


Figura 2.1: El algoritmo de Sumner et al. (Sumner et al., 1999) requiere el cálculo de un mapa de distancias de cada celda hasta el borde la colisión.

comprimida.

- Cuando el proceso anterior finaliza todo el material que se ha expulsado de la zona de contacto se ha acumulado en el anillo de celdas que rodea a esta zona. Esto da lugar a la aparición de picos y crestas poco realistas. Para solucionar este efecto, se aplica un proceso de erosión (suavizado) a dichas celdas, hasta que la diferencia de altura entre celdas vecinas se reduce por debajo de un cierto valor, que simula el *ángulo de reposo* del sistema. Este proceso de erosión está basado en el algoritmo de Musgrave (Musgrave et al., 1989).

En su trabajo se considera además la adhesión de material a la superficie del objeto que entra en contacto con el suelo. Cuando el contacto finaliza, y el objeto empieza a moverse se generan partículas que surgen de la superficie del objeto y caen de nuevo al suelo. Este modelo de deformación se ha convertido en una referencia ampliamente citada, y ha inspirado la mayoría de trabajos posteriores en este campo.

Onoue y Nishita (Onoue and Nishita, 2003; Onoue and Nishita, 2005), por ejemplo, proponen un modelo que permite la acumulación del material sobre objetos. Partiendo del modelo de Sumner para la animación del suelo (Sumner et al., 1999), el procedimiento seguido para acumular material sobre un objeto consiste en dividirlo en columnas verticales como una proyección de la malla

que representa el terreno. Sobre cada una de estas columnas la arena puede acumularse y su altura puede ser comparada con la de las columnas vecinas de la misma forma en que se hace sobre el modelo de terreno situado en el suelo.

Para la creación y actualización de la descomposición de los objetos en columnas siguen el siguiente procedimiento (véase la Figura 2.2):

1. En primer lugar, se detectan colisiones entre la caja envolvente del objeto y la del terreno.
2. Si las cajas envolventes están en contacto, o si el objeto tiene ya terreno acumulado encima se actualiza su descomposición en columnas. Para ello, se utiliza una versión implementada por software del algoritmo *zbuffer*.
3. La propia descomposición en columnas se utiliza para detectar los contactos, comparando la altura de la parte inferior de las columnas del objeto con la altura del terreno.

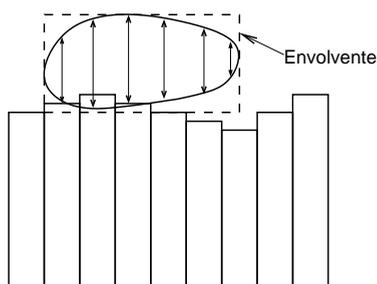


Figura 2.2: Detección de colisiones en el trabajo de Onoue y Nishita (Onoue and Nishita, 2005).

El procedimiento propuesto requiere la actualización de todo el mapa de columnas del objeto que se encuentra en contacto con el terreno a cada frame. Los resultados obtenidos de 7-14 fotogramas por segundo se obtienen realizando una única actualización por frame.

Aparte del modelo de acumulación de material sobre objetos, en su artículo introducen algunas modificaciones menores al algoritmo de Sumner (Sumner et al., 1999), como la repetición del proceso de desplazamiento de material antes

de proceder al de erosión, con el fin de evitar algunas inconsistencias detectadas en el modelo anterior. Además, introducen el efecto del deslizamiento lateral del objeto sobre la arena gracias a la ordenación de las celdas en el proceso de desplazamiento de material, utilizando la dirección del movimiento del objeto.

2.3.2. Modelos con fuerzas de reacción

Todos los modelos revisados hasta el momento proporcionan un cierto grado de interactividad y, sobre todo, permiten la animación realista de terrenos blandos, debido principalmente a que incluyen la simulación del efecto de la colisión de objetos con el terreno. Sin embargo, las posibilidades de los trabajos mencionados hasta el momento en cuanto a su utilización en aplicaciones con interacción por parte del usuario son limitadas, ya que éste no puede percibir el efecto de las fuerzas de interacción sobre el resto de objetos de la escena.

Una de las contribuciones más relevantes que tienen que ver con estas fuerzas de reacción se debe a Li y Moshell (Li and Moshell, 1993). Basándose en la teoría de Mohr-Coulomb ¹ (Shen and Kushwaha, 1998), presentan un algoritmo para la simulación de una pila de arena o material representada por un mapa de alturas.

Su modelo calcula el equilibrio de fuerzas en cada celda de la malla y la cantidad de material que se desplaza cuando tiene lugar una fractura. A partir de este valor de material desplazado para cada celda, se plantea un sistema de ecuaciones lineales que permite calcular la actualización de la altura de los puntos de la malla. Utilizando también la teoría de Mohr-Coulomb obtienen las fuerzas que aparecen sobre una pala que desplaza horizontalmente el material, permitiendo la simulación interactiva de una excavadora o niveladora.

Sin embargo, aunque el sistema de ecuaciones es triangular en el caso unidimensional, en el caso bidimensional se pierde la estructura de la matriz, haciendo que no sea tan eficiente. Además, éste cálculo se complica cuando se desea

¹La teoría de Mohr-Coulomb describe un sistema granular por medio de un sistema de fuerzas en las que la fricción interna del material juega un papel importante. En el Apartado 3.3 de esta memoria se revisará esta teoría.

considerar la acción de fuerzas externas sobre la superficie, descartadas en este modelo.

Benes et al. (Benes et al., 2006a; Dorjgotov et al., 2007) proponen un enfoque diferente para simular la manipulación de arena en un entorno háptico. Con el objetivo de conseguir simulación interactiva en tiempo real, simplifican el escenario considerando únicamente la manipulación del material por medio de una esfera. Esta simplificación da lugar a un cálculo de colisiones muy optimizado, basada en unas pocas comprobaciones aritméticas. El procedimiento del desplazamiento del material es también muy eficiente, basado en la convolución del terreno con una función *ad hoc*. De nuevo, el proceso va seguido del modelo de erosión de Musgrave et al. (Musgrave et al., 1989).

Este modelo tiene como principal novedad la aparición de fuerzas de reacción que pueden pasarse como entrada a un dispositivo háptico. Las fuerzas de reacción se calculan a partir de la fricción entre la esfera y el material. La resistencia a la penetración crece exponencialmente con la profundidad, y la fuerza de fricción es proporcional al producto de la fuerza normal y la velocidad horizontal del contacto.

El procedimiento proporciona una simulación en tiempo real, incluyendo la alimentación del dispositivo háptico utilizado, que requiere una frecuencia de 1000Hz en el modelo dinámico. Sin embargo, este modelo tiene como principal limitación su falta de flexibilidad en cuanto a las características del escenario, y la falta de exactitud en el modelo de interacción, que únicamente puede considerarse como aproximado.

Zeng et al. (Zeng et al., 2007) proponen un sistema de simulación más general para la simulación interactiva de arena y otros tipos de terreno, tomando de nuevo como punto de partida el trabajo de Sumner y otros (Sumner et al., 1999). El cálculo de colisiones de un objeto con el montón lo hacen por medio de una textura sobre la superficie de la malla; se renderiza una proyección ortogonal la malla vista desde abajo, de forma que la visibilidad de polígonos que no pertenezcan a la malla indica la existencia de colisión. Las caras del objeto se colorean cada una con un color diferente de forma que pueden identificar cada cara del objeto en colisión por su color.

Pero la principal contribución de este trabajo es el desarrollo de un modelo de fuerzas de reacción; utilizando la teoría de Mohr-Coulomb, y el trabajo de Li y Moshell realizan una estimación del momento lineal de cada celda y obtienen una fuerza de reacción que puede aplicarse sobre cada objeto en contacto. No obstante, no se ofrece ninguna validación del modelo, y el cálculo del momento involucra el material desplazado por medio del modelo de Sumner (Sumner et al., 1999) y no se hace a partir de un modelo físico, por lo que únicamente se puede considerar como aproximado.

Modelos basados en dinámica molecular

Los modelos basados en dinámica molecular consideran la dinámica de las diferentes partículas que componen el sistema de forma individual, por medio de las leyes de la mecánica. Gracias a esta formulación, contemplan de forma natural las fuerzas de reacción del sistema sobre cualquier objeto, por lo que, idealmente, ésta es la metodología más adecuada para la simulación de situaciones que involucran el contacto con otros objetos. Esta metodología se ha establecido como una herramienta potente en el análisis de sistemas granulares, como veremos en el Apartado 3.2.

Zhu y Bridson (Zhu and Bridson, 2005) obtiene unos resultados muy espectaculares por medio de la modificación de modelos de fluidos y partículas, junto con una novedosa reconstrucción de la superficie a partir del sistema de partículas. Su modelo permite animar y representar gráficamente diferentes tipos de material con un gran realismo, pero al precio de un elevado coste computacional (tiempos en el orden de 5-20 segundos por fotograma).

Otro ejemplo es el trabajo de Bell et al. (Bell et al., 2005), en el que se realizan diferentes experimentos con un sistema granular; en dicho trabajo, el tiempo de cálculo de cada fotograma se mide en minutos, y en el caso de los dos ejemplos más complejos, en los que se produce una avalancha y posteriormente una pala excavadora arrastra los restos de la misma, se superan los 25 y los 15 minutos por fotograma respectivamente. Como indican estos tiempos, tanto este trabajo como el anterior de Zhu y Bridson no están destinados a la simulación interactiva, sino a la animación.

Recientemente, esta metodología ha empezado a aplicarse en la simulación interactiva en tiempo real. En el trabajo de Ares (Ares, 2005) se proponen estrategias basadas en la computación paralela para la utilización de métodos de dinámica molecular, destinadas a la simulación para formación. Al igual que en el caso del trabajo de Li y Moshell (Li and Moshell, 1993), la tesis de Ares aborda el problema de la simulación interactiva de terreno desde una perspectiva basada en física, obteniendo resultados muy próximos al tiempo real. Sin embargo, en este caso el elevado coste de la simulación basada en sistemas de partículas hace que, a pesar de las mejoras alcanzadas, los modelos obtenidos tengan limitaciones en cuanto a las dimensiones del sistema que puede simularse, tanto en su extensión como en el número de partículas consideradas.

2.4. Análisis del estado de la técnica

Vemos, en definitiva, que el problema de la simulación interactiva ha sido abordado por numerosos autores, con diferentes niveles de éxito en la obtención de soluciones parciales. Sin embargo encontramos que la mayoría de modelos que permiten la simulación en tiempo real de alguno de los aspectos considerados utilizan una metodología de modelado poco rigurosa desde el punto de vista físico, lo que impide obtener simulaciones con garantías de realismo. A continuación analizamos en mayor detalle las principales limitaciones encontradas, y sus posibles causas, para proponer un cambio en la metodología.

A la vista de los resultados mostrados en este capítulo, el problema de la simulación interactiva del terreno no está en absoluto resuelto. En primer lugar, de entre los modelos existentes para la evolución del terreno, aquéllos que permiten una simulación en tiempo real son, en los mejores casos, simplificaciones bastante burdas de modelos procedentes de la física aplicada. Por otra parte, el problema de la interactividad ha sido resuelto parcialmente por diferentes autores, pero sin la existencia de un esquema o modelo general que proporcione la flexibilidad necesaria en un simulador complejo como puede ser el de una excavadora. Entre los trabajos analizados se han detectado las siguientes carencias que los hacen inadecuados para la consecución de los objetivos de este trabajo de investigación.

Falta de realismo físico en la evolución del sistema

Al margen de su capacidad de interacción, la mayoría de los modelos dinámicos analizados carecen, en general, del realismo necesario; buena parte de ellos (Sumner et al., 1999; Onoue and Nishita, 2005; Zeng et al., 2007) se basan en modelos de erosión propuestos para la síntesis de terrenos, y no para la simulación de la evolución de terrenos blandos en escalas cortas de tiempo (Musgrave et al., 1989).

Estos modelos proporcionan comportamientos locales visualmente aceptables, pero son insuficientes en cuanto a la dinámica del sistema. A modo de ejemplo, en el trabajo de Onoue y Nishita (Onoue and Nishita, 2005) puede observarse, en la figura 18, un pequeño montón de arena formado por acumulación de material; en el montón que allí se forma puede observarse un tendencia a formar una pirámide octogonal, en lugar de un cono, como cabría esperar. Este fenómeno ya ha sido observado en (Pla-Castells, 2003), donde se comprueba que el fenómeno está asociado a la utilización de ocho vecinos, ya que se rompe la isotropía del modelo.

La única excepción a esta situación la presenta el artículo de Li y Moshell (Li and Moshell, 1993), que presenta un modelo basado en la teoría de Mohr-Coulomb. Este trabajo propone un modelo realista, que contempla la interacción entre el terreno y una pala vertical que desplaza el sistema granular lateralmente. Sin embargo, este trabajo tiene como principales limitaciones la falta de generalidad, ya que no contempla la reacción del suelo a ningún otro tipo de acciones, y el modelo computacional utilizado, que dificulta su modificación para incluir estas interacciones.

Este último trabajo tiene además el inconveniente de plantear un modelo global, en el que la actualización de cada celda depende en cada paso de la del resto de celdas del sistema, dando lugar a un sistema de ecuaciones lineal. Esto supone un mayor coste, además de ciertos inconvenientes a la hora de incorporarlo en un sistema de simulación interactivo.

Falta de realismo físico en las interacciones

La falta de realismo en la evolución del sistema supone por si misma una traba considerable para conseguir un comportamiento realista durante las interacciones. No obstante, se han detectado también ciertos problemas específicos.

En general, los modelos de desplazamiento horizontal del terreno utilizados no tienen ningún realismo y el desplazamiento y compresión del material bajo el objeto en contacto se basa de nuevo en modelos heurísticos sin ninguna base física. Como veremos, el proceso que tiene lugar en el terreno cuando el material es desplazado es bien conocido. Sin embargo los modelos usados en animación se basan en procesos heurísticos (Onoue and Nishita, 2005; Zeng et al., 2007) y no consideran la reacción del material.

De hecho, los modelos actuales no consideran fuerzas de reacción del sistema granular hacia el objeto en contacto, o lo hacen de forma poco realista. En el modelo propuesto por Zeng et al. (Zeng et al., 2007), a pesar de estar basado en un análisis que parte de la teoría de Mohr-Coulomb, las simplificaciones realizadas hacen que su corrección sea dudosa; en primer lugar, el modelo mantiene información sobre la cantidad de momento que ha adquirido cada celda en base a su velocidad, pero los cálculos se realizan a partir del modelo de Sumner (Sumner et al., 1999), cuyas carencias ya han sido analizadas en este apartado; en segundo lugar, la conservación de momento que se supone en el modelo no tiene en cuenta el alto nivel de fricción que aparece en este tipo de sistemas y en la interacción con un sólido.

Otro problema que también está siendo motivo de investigación en los últimos años es la acumulación del material granular sobre los objetos. Este proceso es descartado en la mayoría de los casos, y únicamente el trabajo de Onoue y Nishita (Onoue and Nishita, 2005) lo ha resuelto parcialmente en el campo de la animación. Sin embargo, el procedimiento propuesto requiere la actualización de todo el mapa de columnas del objeto que se encuentra en contacto con el escenario tras cada actualización del sistema. Los resultados obtenidos de 7-14 fotogramas por segundo se obtienen realizando una única actualización por frame. Esto indica que su utilización en un sistema basado en física que requiera un centenar de actualizaciones por segundo es completamente inviable.

Falta de validación y análisis

De la misma manera (y de nuevo con la excepción de (Li and Moshell, 1993)), los trabajos analizados realizan una escasa o nula validación o análisis de las propiedades de los modelos que proponen, más allá de los aspectos puramente visuales. De nuevo, esto se justifica únicamente teniendo en cuenta los objetivos particulares de dichos trabajos, pero resulta inadecuado en el ámbito de la simulación para entrenamiento.

Separación de dinámica e interacción

Otra de las características observadas en los trabajos más recientes (Sumner et al., 1999; Onoue and Nishita, 2005; Benes et al., 2006a; Zeng et al., 2007), y en especial en aquéllos basados en el artículo de Sumner et al. (Sumner et al., 1999), es la separación del modelo dinámico en dos fases independientes; la fase de desplazamiento, en la que se desplaza el material debido al contacto del terreno con un sólido, y la fase de erosión, en la que se suaviza el nuevo perfil obtenido, para mantener un sistema coherente con el *ángulo de reposo*.

Esta separación impide de hecho la obtención de un modelo realista, ya que finalmente ambos procesos son el resultado del mismo conjunto de propiedades de los sistemas granulares. Existe por tanto una carencia clara en cuanto a la existencia de un modelo dinámico de terreno que incorpore de forma natural la interacción con otros objetos por medio de contacto.

Por otra parte, ciertas tareas consecuencia de esta separación, y en especial del carácter heurístico de la primera fase, resultan en un coste computacional adicional, como el cálculo del mapa de distancias para realizar el reparto del material sobrante de las celdas en contacto. Esta tarea se evitaría si se empleara un modelo dinámico completo que tuviera en cuenta ambas fases de forma integrada, ya que éstas ocurrirían de forma natural como consecuencia del mismo.

Animación de las avalanchas

Por último, para conseguir una correcta representación gráfica del sistema granular que proporcione realismo al entorno virtual del simulador, es necesario animar correctamente los procesos de avalancha, que se aprecian como un flujo sobre la superficie del sistema. Sin embargo, entre los modelos existentes para tiempo real no existen técnicas adecuadas para animar las zonas en las que se está produciendo una avalancha. Algunos autores (Onoue and Nishita, 2005) proponen técnicas de desplazamiento de la coordenada de textura (Max and Becker, 1995), pero sin conseguir resultados visualmente satisfactorios.

Análisis de las causas de las carencias encontradas

Uno de los principales factores que provocan la ausencia de un modelo adecuado es que en la mayoría de los modelos eficientes, que proceden del ámbito de la animación y la realidad virtual, el realismo en la evolución y la realimentación de fuerzas desde el modelo de terreno hacia el resto de objetos del entorno que se simula se consideran como problemas secundarios.

Así, Chanclou et al. (Chanclou et al., 1996) afirman que «*en el caso del terreno, la formación de montones, la aparición de avalanchas y el colapso interno no son el principal fenómeno a tener en cuenta*»; Sumner et al. (Sumner et al., 1999) dejan patente en su trabajo que su objetivo es permitir la *animación* del terreno para evitar un efecto visual incoherente o incompleto en películas o video-juegos; O'Brien et al. (O'Brien et al., 2000) denomina *movimiento secundario* al movimiento de ciertos sistemas del entorno virtual, tales como el agua o el terreno y, aunque proponen algunos esquemas para la simulación interactiva con algunos de ellos, insisten en que el movimiento de estos sistemas no es el objetivo principal en la mayoría de simulaciones.

El punto de partida de estos trabajos el hecho de que en animación, *la ausencia de una acción, o su incoherencia con el resto de la escena puede distraer al observador de la acción o el mensaje de la animación* (Sumner et al., 1999). La principal hipótesis será, por tanto, que es suficiente obtener modelos que permitan mantener dicha coherencia entre las condiciones de la escena y las acciones

de los sujetos principales y la reacción del entorno (movimiento de árboles o banderas, oleaje o, en el caso que nos ocupa, creación de marcas en la arena al paso de una persona o un vehículo), siendo la corrección física de los mismos una cuestión secundaria.

Obviamente, esta hipótesis es legítima dentro de los objetivos particulares del campo de la animación, permitiendo en la mayoría de los casos simplificaciones que habilitan simulaciones más rápidas con resultados satisfactorios. Sin embargo, dentro de los objetivos de la simulación para entrenamiento, esa hipótesis de partida no es una hipótesis válida; la simulación del terreno, dentro de un sistema destinado a la manipulación del mismo ha de ser, por una parte, lo más realista posible desde el punto de vista físico y, además, debe proporcionar un modelo de fuerzas que permita calcular el comportamiento de la maquinaria utilizada.

2.5. Conclusiones

El análisis de las diferentes técnicas que se emplean para la simulación interactiva de los sistemas granulares nos ha permitido concretar con mayor detalle las carencias existentes y analizar sus causas. A continuación se realiza un breve resumen de las conclusiones alcanzadas y se adelanta la solución que se desarrolla a lo largo del presente trabajo de investigación.

2.5.1. Limitaciones de los modelos actuales

Los modelos que actualmente permiten la simulación interactiva en tiempo real se basan en el modelo de interacción y deformación propuesto por Sumner et al. (Sumner et al., 1999) o en modelos heurísticos aún más simples (Benes et al., 2006a).

Estos modelos corresponden a simplificaciones excesivamente groseras de modelos físicos o, directamente, a modelos heurísticos que se basan únicamente en una descripción informal del comportamiento que se espera de un sistema granular. Es por este motivo que carecen totalmente del realismo que se requiere

en los modelos destinados a la simulación para entrenamiento.

Por otra parte, entre los modelos empleados para aplicaciones relacionadas con los gráficos por ordenador, aquéllos que alcanzan mayores cotas de realismo se basan habitualmente en la metodología de la dinámica molecular. Sin embargo estos modelos no permiten la simulación en tiempo real a menos que se utilice un número bastante limitado de partículas.

Por estos motivos, proponemos un cambio en la metodología de modelado de sistemas granulares que permita obtener modelos adecuados para su utilización en simulación para entrenamiento, cubriendo así la deficiencia detectada en este ámbito.

Una vez analizadas las técnicas existentes se ha podido detectar que, incluso en el ámbito de la animación y de las aplicaciones en las que las exigencias de realismo no son excesivamente altas, existen también diversos problemas abiertos, entre los que destacan la falta de realismo en la evolución del sistema y en las interacciones, la acumulación de material sobre objetos del escenario y la falta de técnicas visuales para la animación de las avalanchas.

Uno de los objetivos del trabajo que se presenta aquí es realizar aportaciones a la resolución o a la mejora de las soluciones existentes para estos problemas que se han detectado, especialmente en los problemas relacionados con la falta de realismo en los modelos, y que serán de utilidad también en otros ámbitos fuera del de la simulación para entrenamiento.

2.5.2. Propuesta de mejora

La propuesta que aquí se realiza, y que se desarrollará en los siguiente capítulos, se apoya en dos elementos principales: en primer lugar, la elección de los modelos físicos más adecuados para utilizarlos en los modelos; en segundo lugar, la elección de un modelo computacional que permita proponer una implementación de estos modelos adecuada al problema, desde el punto de vista del coste computacional y de la integración con el resto de modelos del mundo virtual.

El Capítulo 3 tiene como objetivo presentar estos elementos. Su finalidad no es tanto el desarrollo de un estado del arte sobre el modelado de sistemas granulares como esbozar las principales metodologías existentes, para disponer de los elementos de juicio necesarios para elegir el modelo más adecuado. En él se presenta además el modelo computacional de los Autómatas Celulares, que se utilizará para la discretización de los modelos físicos elegidos, junto con un análisis que justifica dicha elección.

*Whether you can observe a thing or not depends on the theory which you use.
It is the theory which decides what can be observed.*

A. Einstein.

CAPÍTULO 3

Dinámica de un montón de arena

Tras la revisión del estado de las técnicas que se emplean para la simulación interactiva de sistemas granulares en tiempo real se ha constatado una carencia de modelos adecuados para los simuladores destinados a formación. Se ha mostrado además que el origen de esta deficiencia está en la ausencia de modelos basados en física entre las diferentes técnicas empleadas.

De acuerdo con los objetivos propuestos en este trabajo, se desarrollarán nuevos modelos para la simulación de los sistemas granulares. Para ello, se partirá de modelos físicos y se adaptarán para su utilización en un simulador.

En este capítulo se presentan los dos elementos fundamentales sobre los que se apoya esta metodología: un conjunto de modelos físicos, para poder describir correctamente la dinámica de un sistema granular, y un modelo computacional para la discretización e implementación de los modelos físicos elegidos.

Este capítulo no presenta un estado del arte del modelado de los sistemas granulares. Únicamente se limita a describir las metodologías que pueden resultar útiles dentro de los objetivos de esta investigación, seguida de una discusión sobre qué modelos se consideran más adecuados.

3.1. Introducción

La física de los sistemas granulares es una disciplina que ha recogido un considerable interés por parte de los investigadores a la largo de la historia. No en vano, destacados científicos se han interesado por el comportamiento de los sistemas granulares, y los fundamentos que rigen el comportamiento de un montón de arena seca se remontan al siglo XVIII.

Charles de Coulomb (1736-1806) fija su atención en sistemas compuestos por apilamiento de objetos, entre ellos los sistemas granulares, y sienta las bases de su dinámica. Algunos de sus postulados, como la ley de fricción seca, se aplican aún en numerosos campos.

William Rankine (1820-1872) establece un conjunto de principios básicos, en especial el hecho de que el material se expande en el interfaz de fractura cuando se produce una avalancha, que aún hoy tienen vigencia.

A finales del siglo XIX y principios de XX, varios autores, entre ellos Lord Rayleigh (Premio Nobel de física en 1904), se plantean el problema de la distribución de fuerzas de un sistema granular almacenado en un silo. Este problema aún permanece abierto hoy en día, y es un terreno activo de investigación debido a sus implicaciones en la industria y la agricultura.

Ya en el siglo XX es preciso mencionar a Ralph A. Bagnold (Bagnold, 1941), autor de numerosos estudios sobre el comportamiento de la arena ante la acción del viento en el desierto, y de la formación de dunas. Numerosos principios descritos por Bagnold son utilizados actualmente en los modelos más establecidos. El premio Nobel Pierre Gilles de Gennes realizó también contribuciones en el campo de la interacción entre partículas (de Gennes, 1996) y en las propiedades de los modelos hidrodinámicos de evolución de la superficie de un sistema granular (de Gennes, 1997; Duran, 1999; de Gennes, 1999).

3.1.1. Descripción de la dinámica de un montón de arena

Como sistema granular, la evolución de un montón de arena viene determinado por el resultado de las fuerzas de interacción entre las partículas que lo componen y las fuerzas externas que actúan sobre el.

De esta manera, la evolución del sistema viene dada por la tensión, procedente del peso del material, que lo impele a moverse; la cohesión, que mantiene las partículas unidas entre si en muchos materiales; y la fricción interna, que se opone al deslizamiento de unas partículas respecto a otras.

Si estas tres fuerzas se compensan entre si, el sistema permanece estático, comportándose como un sólido. Sin embargo, si el equilibrio entre ellas se rompe de forma que la tensión supera el rozamiento debido a la cohesión y la fricción interna, una parte del material empieza a deslizarse, produciéndose lo que se conoce como una *fractura*. El material desprendido desliza por la superficie del montón, redistribuyéndose hasta que se restablece el equilibrio de fuerzas.

Esta descripción del sistema, establecida por Rankine sobre la base de la teoría de Coulomb, es el núcleo de la geomecánica actual y de buena parte de las técnicas de análisis de terrenos y de interacción terreno-herramienta utilizadas hoy en día (Shen and Kushwaha, 1998).

Los procesos internos anteriormente descritos dan lugar a un comportamiento macroscópico en la superficie de un sistema granular que puede describirse independientemente de cuáles son las causas internas que los originan. Es una propiedad bien conocida que los granos de arena pueden apilarse formando un montón. Pero esto sólo es posible hasta que la pendiente del mismo supera un determinado ángulo, conocido como *ángulo de reposo* del sistema. Superada esta pendiente se produce una avalancha, y una parte de los granos se deslizan pendiente abajo hasta que la pendiente se reduce de nuevo. Este planteamiento ha dado lugar a diferentes modelos, ya sea empleando descripciones discretas del sistema (Bak et al., 1988) o continuas (Bouchaud et al., 1995).

Más recientemente, con la introducción de los ordenadores y de la simulación como herramienta para el análisis de sistemas físicos, y especialmente gracias al

aumento de la potencia de cálculo de los ordenadores, se ha afianzado un nuevo paradigma de modelado de los sistemas granulares, que consiste en considerar la dinámica de cada partícula de forma individual y realizar simulaciones numéricas para observar el comportamiento del sistema. Como tal y como se analiza en el Apartado 3.2 este tipo de modelado no resultan apropiados para la simulación de terreno en tiempo real y por tanto, se analizarán otras metodologías para la consecución de los objetivos de este trabajo.

Dentro del marco de este trabajo de investigación, resultan especialmente interesantes dos aspectos: la evolución de la superficie de un montón de material granular y las fuerzas de interacción que aparecen entre el material y una herramienta empleada para manipularlo. De esta manera, los modelos obtenidos representarán fielmente tanto el movimiento del sistema granular como las fuerzas de reacción obtenidas sobre la herramienta necesarios para una simulación realista en un simulador de entrenamiento. En este capítulo se analizan los principales modelos de formación y evolución de un montón de arena y sus propiedades más relevantes, así como su adecuación a la simulación en tiempo real adecuada para entornos interactivos.

En primer lugar se aborda la metodología basada en dinámica de partículas, por tratarse de modelos introducidos específicamente para la simulación por ordenador. A continuación se desarrolla la teoría de Mohr-Coulomb y su aplicación al análisis de la interacción entre una herramienta y el terreno. Por último, se revisan los principales modelos fenomenológicos que describen la evolución de la superficie del sistema, empezando por los modelos continuos y siguiendo con los modelos basados en Autómatas Celulares.

3.2. Dinámica molecular

Un sistema granular está compuesto por un gran número de partículas que se encuentran en contacto unas con otras. La interacción entre dichas partículas condiciona el comportamiento global del sistema. Los modelos de dinámica molecular representan un sistema granular en base a estos principios, planteando las ecuaciones de movimiento de cada partícula individual a partir de las fuerzas

de interacción con el resto de partículas del sistema. Estos modelos se apoyan, por tanto, en dos elementos básicos; la descripción de las fuerzas de interacción y la forma de las partículas o granos del sistema.

El elevado coste computacional de este modelo restringía, en sus orígenes, su aplicación a gases moleculares y a líquidos simples. Sin embargo, a medida que la potencia de cálculo de los ordenadores ha ido aumentando, su utilización se ha extendido a sistemas granulares densos y para un número de partículas creciente, convirtiéndose en una potente herramienta para su análisis.

Dentro de esta metodología, se distingue habitualmente entre los modelos basados en partículas rígidas, con impactos instantáneos, y los modelos que consideran partículas elásticas. A un flujo granular en el que los contactos se pueden aproximar adecuadamente por medio de contactos instantáneos se lo denomina habitualmente *flujo colisional*¹. El flujo granular en el que los contactos pueden considerarse como no instantáneos es comúnmente conocido como *flujo friccional*².

A continuación se revisa estas metodologías, presentando los modelos más frecuentes, y se realiza un análisis de su utilidad dentro del problema que se pretende resolver en este trabajo de investigación.

3.2.1. Modelos de esferas rígidas

Como ya hemos adelantado, en el modelo de esferas rígidas, también conocido como el modelo de colisiones inelásticas, las partículas son esferas indeformables y las colisiones son, por tanto, instantáneas. Su dinámica se puede definir con unos pocos parámetros y se utiliza frecuentemente para la simulación eficiente de flujos granulares de alta energía (Jenkins and Savage, 1983; Savage, 1984; Allen and Tildesley, 1990; Campbell, 1990; Wang and Mason, 1992; Hogue and Newland, 1994; Hoomans et al., 1996; Duran, 1999; Goldhirsch, 2000; Mitarai et al., 2002). El modelo es simple y hay algoritmos muy eficientes para simularlo (Isobe, 1999) pero su rango de validez se limita al flujo colisional (Louge,

¹En inglés, *collisional flow*

²En inglés *frictional flow*

1994).

Cada partícula se representa por medio de tres parámetros que determinan la dinámica del contacto: los coeficientes de restitución normal y tangencial y la fricción tangencial. Cuando se produce un impacto entre dos partículas, se calcula, de acuerdo con estos parámetros, la pérdida de momento lineal y angular y se obtiene el cambio en la trayectoria de ambas partículas (Landau et al., 1973). La obtención de los parámetros del modelo se hace de forma experimental, con lo que se pueden simular diferentes tipos de material o flujo granular (Foerster et al., 1994).

Consideremos una colisión entre dos esferas i y j de diámetros σ_i y σ_j y con masas m_i y m_j , que en el momento del contacto se encuentran respectivamente en los puntos r_i y r_j . Antes de la colisión, los discos tienen velocidades v_i y v_j y velocidades angulares ω_i y ω_j . Sea $r_{ij} = r_i - r_j$ la posición relativa de las dos esferas. Entonces la velocidad relativa del punto de contacto v_{ij} viene dada por

$$v_{ij} = (c_i + c_j) + n \times \left(\frac{\sigma_i}{2} \omega_i + \frac{\sigma_j}{2} \omega_j \right),$$

donde $n = \frac{r_{ij}}{|r_{ij}|}$ es el vector normal. Sea e el coeficiente de restitución normal, $0 \leq e \leq 1$, que indica la cantidad de energía que se conserva tras el impacto. Tras la colisión, la velocidad relativa entre ambas partículas viene dada por

$$(n \cdot v'_{ij}) = -e(n \cdot v_{ij}).$$

Si se supone que no se produce ningún deslizamiento en la superficie del contacto, entonces la velocidad tras el impacto ha de cumplir

$$(n \times v'_{ij}) = -\beta(n \times v_{ij}),$$

donde $-1 \leq \beta \leq 1$ es el coeficiente de restitución tangencial. El impulso tangencial debe cumplir además la ley de fricción de Coulomb, de forma que estará acotado por el producto del impulso normal y el coeficiente de fricción tangencial (Louge, 1994; Luding, 1995).

En la Figura 3.1 se muestra un impacto entre dos partículas en el que parte del momento lineal de las mismas se pierde, reduciendo la velocidad de ambas.

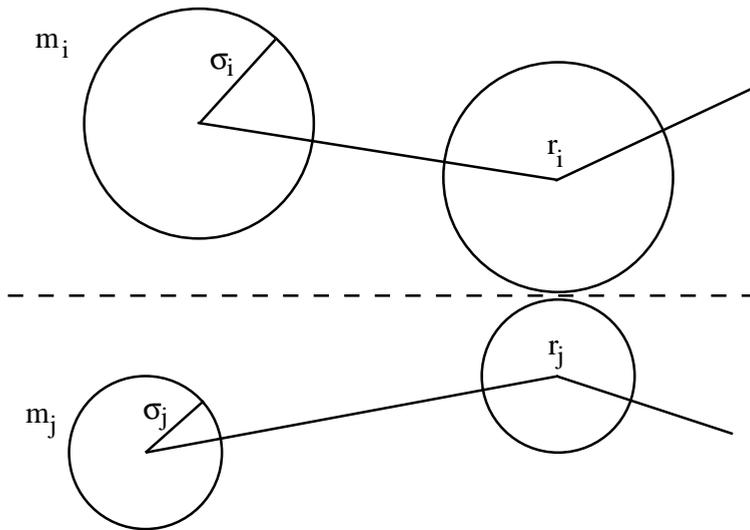


Figura 3.1: Modelo de colisión del modelo de esferas rígidas.

Gracias al carácter instantáneo de los contactos, las simulaciones basadas en esta metodología pueden realizarse por medio de eventos, de forma que la simulación avanza hasta que se produce un impacto entre dos partículas. Una gestión eficiente de las colisiones permite conseguir simulaciones con un coste computacional muy bajo (Pöschel and Schwager, 2004). Sin embargo, un aumento de la frecuencia de los contactos hace que el coste aumente enormemente y a menudo se detectan situaciones singulares, como el *inelastic collapse* (Kadanoff, 1999; Bernu and Mazighi, 1990; McNamara and Young, 1992; McNamara and Young, 1994) en el que un número infinito de colisiones tiene lugar entre un pequeño número de partículas en un tiempo finito.

Por otra parte, como ya hemos indicado, el rango de aplicación de esta metodología se limita a flujos de alta energía, en los que las colisiones son poco frecuentes, por lo que no es adecuado para la simulación de sistemas en reposo como el terreno.

Además, la metodología basada en eventos dificulta la introducción de otras posibles fuerzas como la fuerza electrostática, la cohesión o el rozamiento aerodinámico.

3.2.2. Modelo de esferas flexibles

Las limitaciones del modelo de esferas rígidas para simular sistemas granulares densos y con escasa energía cinética justifican la aparición de otras metodologías que permiten resolver el problema de una forma más adecuada (Cundall and Strack, 1979). La utilización de esferas elásticas, en lugar de rígidas, permite la consideración de contactos no instantáneos, que se mantienen durante un intervalo de tiempo no nulo. Esta metodología se considera a menudo como una relajación o aproximación al modelo de esferas rígidas (Mitarai and Nakashiki, 2003), permitiendo la simulación de apilamientos de partículas, incluso estáticas, en donde se consideran varios contactos simultáneos para una misma partícula (Mills et al., 1999; Andreotti and Douady, 2001; Pöschel and Schwager, 2004).

Por simplicidad en nuestro análisis, consideraremos partículas esféricas con densidad homogénea (Pöschel and Schwager, 2004), aunque numerosos autores han abordado el problema con partículas de diferentes formas y propiedades (Buchholtz et al., 1995; Hirshfeld et al., 1997; Potapov and Campbell, 1998; Schinner, 1999; Wait, 2001).

En esta metodología, un sistema granular viene determinado por un conjunto de posiciones \mathbf{r}_i correspondientes a los centros de las esferas que lo componen y sus velocidades \mathbf{v}_i . Como parámetros consideramos el conjunto de las masas m_i y de los radios R_i de las partículas. En el caso de esferas, la detección del contacto entre dos partículas se realiza por medio del cálculo de la compresión mutua

$$\xi_{ij} = R_i + R_j - |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| \quad (3.1)$$

que, cuando es positivo, indica la existencia de un contacto. La dinámica del sistema viene determinada por las fuerzas que aparecen como consecuencia de estos contactos.

Consideremos un par de partículas en contacto ($\xi_{ij} > 0$). La fuerza que actúa entre ellas en un determinado instante \mathbf{F}_{ij} se descompone en una componente normal \mathbf{F}_{ij}^n y una componente tangencial \mathbf{F}_{ij}^t ,

$$\mathbf{F}_{ij} = \mathbf{F}_{ij}^n + \mathbf{F}_{ij}^t \quad (3.2)$$

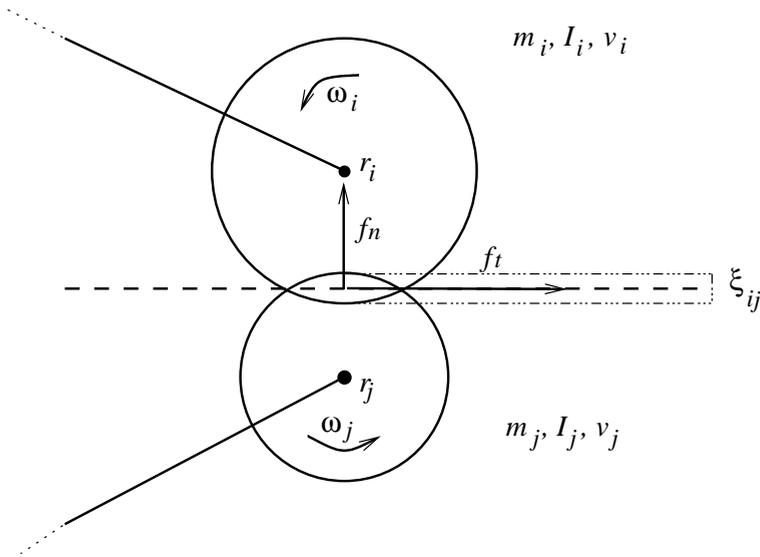


Figura 3.2: Colisión entre dos partículas en el modelo de esferas deformables.

La componente normal es la proyección de \mathbf{F}_{ij} sobre el vector que une los centros de las dos partículas:

$$\mathbf{F}_{ij}^n = \mathbf{F}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij}; \quad \mathbf{r}_{ij} = \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}. \quad (3.3)$$

mientras que la componente tangencial \mathbf{F}_{ij}^t tiene como única característica el ser perpendicular a la dirección normal. Estas fuerzas dependerán de la compresión mutua y de su velocidad relativa $\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j$. En la Figura 3.2 se muestra un esquema del impacto según el modelo de esferas deformables.

Modelos de fuerza normal

Probablemente, el modelo más simple de fuerza normal que puede considerarse es el que representa las fuerzas de contacto por medio de un muelle amortiguado. Según esta aproximación, para una colisión entre dos partículas con un valor de compresión mutua ξ , la fuerza normal viene dada por

$$F^n = Y\xi + \gamma \frac{\delta d\xi}{\delta dt} \quad (3.4)$$

donde Y es la constante de elasticidad y γ la constante de amortiguación. Este modelo tiene el inconveniente, entre otros, que cuando las esferas están separándose ($\frac{\delta d\xi}{\delta dt} < 0$) puede aparecer una fuerza de atracción entre ambas debido a la amortiguación.

Un modelo más elaborado considera esferas visco-elásticas, que tiene en cuenta la teoría de deformaciones de los materiales. El primer modelo de esferas elásticas (sin amortiguación) se debe a Heinrich Hertz (Hertz, 1881) y afirma que la fuerza que aparece en el contacto de dos esferas viene dado por

$$F^n = \frac{2Y\sqrt{R^e}}{3(1-\nu^2)}\xi^{3/2} \quad (3.5)$$

donde Y es el módulo de Young del material, ν es el coeficiente de Poisson y R^e es el radio efectivo de las dos esferas

$$\frac{1}{R^e} = \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_j}. \quad (3.6)$$

Este modelo fue generalizado posteriormente por Brilliantov y otros (Brilliantov et al., 1996), introduciendo un término de amortiguación

$$F^n = \frac{2Y\sqrt{R^e}}{3(1-\nu^2)} \left(\xi^{3/2} - A\sqrt{\xi} \frac{\delta d\xi}{\delta dt} \right) \quad (3.7)$$

para modelar esferas visco-elásticas. La constante A es el coeficiente de amortiguación.

Walton y Braun (Walton, 1982; Walton and Braun, 1986) proponen un modelo que modela la fuerza como un resorte, pero que considera un comportamiento diferente cuando las partículas se acercan o se alejan

$$F^n = \begin{cases} Y_1\xi & \text{if } \frac{\delta d\xi}{\delta dt} \geq 0 \\ Y_y(\xi - \xi_0) & \text{if } \frac{\delta d\xi}{\delta dt} < 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

Modelos de fuerza tangencial

La componente tangencial permite simular las propiedades del comportamiento del sistema debido al rozamiento entre partículas. Este rozamiento depende principalmente de la velocidad tangencial relativa del punto de contacto

de ambas esferas y se modela normalmente en base a dos parámetros; el parámetro de fricción μ y la amortiguación tangencial γ^t . Para el cálculo de la velocidad tangencial relativa para cada esfera y dado que en este modelo no existe un único punto de contacto, éste se toma habitualmente como la intersección entre la superficie de la esfera con el segmento que une los centros de ambas esferas.

En general, se supone que la fuerza tangencial cumple la ley de fricción de Coulomb, que afirma que ésta debe ser menor en módulo que μF^n , donde μ es una constante que depende de los materiales en contacto y se conoce como *coeficiente de rozamiento*

$$|F^t| \leq \mu |F^n|. \quad (3.9)$$

Cundall y Strack (Cundall and Strack, 1979) proponen la utilización de un modelo elástico para la fuerza tangencial. Cuando se produce un contacto entre dos partículas, en el instante t_0 , se establece un resorte elástico en el punto de contacto que actúa hasta que el contacto deja de estar activo. La fuerza tangencial depende, por tanto, de la longitud de este resorte en cada instante de tiempo, que puede calcularse como

$$\zeta(t) = \int_{t_0}^t v_r^t(s) ds \quad (3.10)$$

donde v_r^t es la velocidad tangencial relativa entre los dos puntos en los que se produjo el contacto inicialmente. La fuerza tangencial se considera proporcional a esta longitud, limitada por la ley de fricción de Coulomb

$$F^t = -\text{sign}(v_r^t) \cdot \min(|\kappa^t \zeta|, \mu |F^n|) \quad (3.11)$$

El trabajo de Cundall y Strack es el trabajo fundacional de esta metodología por lo que cuenta con numerosas revisiones (Brendel and Dippel, 1998; Liffman et al., 2001; Leszczynski, 2002; Mitarai and Nakanishi, 2003; Pöschel and Schwager, 2004).

Haff y Werner (Haff and Werner, 1986) propusieron un modelo sencillo en el que la fuerza tangencial es proporcional al módulo de la velocidad tangencial, y de sentido opuesto, proporcionando un amortiguador lineal

$$F^t = -\text{sign}(v^t) \cdot \min(\gamma^t |v^t|, \mu |F^n|) \quad (3.12)$$

Este modelo es muy adecuado para simulaciones en las que las partículas colisionan con cierta velocidad, sin acumularse de forma estática unas sobre otras. Sin embargo este modelo no considera la fricción estática, de forma que no es capaz de detener las partículas con lo que cualquier montón de partículas se desmorona lentamente (Pöschel and Schwager, 2004). Otro inconveniente de este modelo es la dificultad para determinar el valor del parámetro de fricción γ^t , que debe ajustarse por medio de la comparación de los resultados numéricos con resultados experimentales.

Walton y Braun (Walton and Braun, 1986) proponen un modelo algo más sofisticado, en el que la fuerza tangencial depende, no sólo del estado actual de las dos partículas en contacto, sino también de la evolución anterior de éstas durante el contacto. En lugar de calcular una fuerza en cada instante, se obtiene un incremento del valor de la fuerza en función del incremento de la posición relativa de los puntos de contacto $\Delta\zeta$, según

$$\Delta F^t = k^t \Delta\zeta$$

Al igual que en su modelo de fuerza normal, Walton y Braun proponen que el valor del parámetro k^t sea diferente cuando el incremento de ζ cause una variación en la fuerza tangencial.

Propiedades y coste computacional

La metodología basada en esferas flexibles permite la realización de simulaciones realistas que ofrecen mucha información sobre las propiedades de los sistemas granulares (Buchholtz et al., 1995; Nougier et al., 2000; Liffman et al., 2001; Silbert et al., 2001; Mitarai and Nakanishi, 2003; Snoeijer et al., 2003). Sin embargo, aunque la descripción que utilizan de la dinámica del sistema es muy sencilla, uno de los principales problemas a los que se enfrenta esta metodología es el elevado coste computacional de los modelos.

Para conseguir simulaciones realistas es necesario considerar un gran número de partículas que producen un elevado número de colisiones con lo que el cálculo de la evolución del sistema tiene un coste elevado. Gracias a los es-

fuerzas realizados para obtener implementaciones muy optimizadas de esta metodología (Potapov and Campbell, 1998; Wait, 2001; Ares, 2005; Wadaa et al., 2006) (Pöschel (Pöschel and Schwager, 2004) ofrece una buena revisión de las mismas) su utilización en simulación interactiva en tiempo real está empezando a ser viable. No obstante, el aumento del coste computacional respecto al número de partículas sigue siendo muy elevado y existen problemas como la simulación con escenarios compuestos por muchos objetos o la simulación de la cohesión que aún deben ser mejorados para conseguir el rendimiento deseado (Ares, 2005).

3.3. Teoría de Mohr-Coulomb

La teoría de Mohr-Coulomb proporciona un método analítico para el estudio de los sistemas granulares a partir del modelo de fuerzas internas del sistema. Las bases de la teoría de Mohr-Coulomb se fundan en los estudios de Charles de Coulomb (1736-1806) sobre la fricción (Coulomb, 1773). En ellos analiza la formación de taludes y su estabilidad, permitiendo determinar si va a producirse un corrimiento de tierra a partir de las propiedades del material y de la inclinación del mismo.

3.3.1. El factor de estabilidad y el ángulo crítico del sistema

Consideremos un talud con una superficie inclinada un ángulo β respecto de la horizontal. Se supone que el material se comporta como un sólido indeformable, y que en caso de producirse un deslizamiento, éste ocurrirá a lo largo de un plano, con ángulo $0 < \rho < \beta$ (véase la figura 3.3).

El peso del bloque superior (el bloque que deslizaría en caso de producirse la fractura) W , puede descomponerse como suma de dos fuerzas; una tangente a la superficie de fractura, $\sigma_t = W \sin \rho$, y otra perpendicular $\sigma_n = W \cos \rho$. Es un problema clásico de deslizamiento de un bloque sobre una superficie inclinada. En ausencia de otras fuerzas, el movimiento del bloque de material viene determinado por la componente tangencial del peso, σ_t . A esta fuerza se la co-

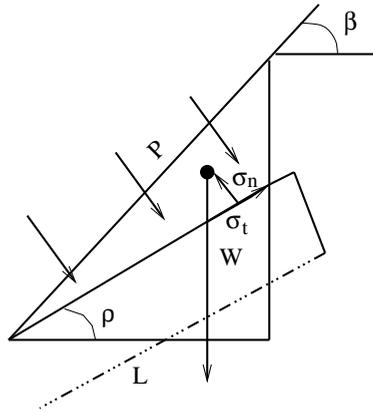


Figura 3.3: Diagrama de fuerzas para determinar la estabilidad de un talud. Si las fuerzas de rozamiento no pueden superar a la tensión del material a lo largo del interfaz de fractura, ésta tendrá lugar, provocando un corrimiento de tierra.

noce como fuerza de tensión tangencial (*tangential stress force*). Por otra parte, la componente normal a la superficie, dividido por la longitud de la misma, determina la presión que existe en la interfaz debida al peso $P = \sigma_n/L$.

Al movimiento a lo largo del plano de fractura se oponen, por una parte la cohesión del material, con una fuerza proporcional a la longitud de la superficie de contacto, y la fricción del material, que es proporcional al producto de la presión en la superficie por la longitud de la misma. Las constantes son el coeficiente de cohesión c , y la tangente del ángulo de fricción interna ϕ . La suma de ambas fuerzas es lo que se conoce como fuerza de cizalladura τ . De esta forma, las fuerzas que aparecen a lo largo del interfaz de fractura son

$$\tau = cL + \sigma_n \tan \phi = cL + W \cos \rho \tan \phi \quad (3.13)$$

$$\sigma_t = W \sin \rho \quad (3.14)$$

Dado que la la fuerza de cizalladura únicamente actúa para oponerse al movimiento, el valor de τ es en realidad una cota superior para dicha fuerza, y su valor será el mínimo de τ y σ_t . Por tanto, para determinar si efectivamente la fractura puede tener lugar a lo largo del plano con ángulo ρ , se define el coeficiente

de estabilidad como

$$F = \frac{\tau}{\sigma_t} = \frac{cL + W \cos \rho \tan \phi}{W \sin \rho} \quad (3.15)$$

Si F es mayor que 1 la fuerza de cizalladura anulará la tensión σ_t , por lo que no podrá tener lugar la fractura. En caso contrario (si $F \leq 1$) la fuerza de tensión debida al peso del bloque de material por encima del plano de fractura hará que el material se desplace, dando lugar a un deslizamiento. Dado que tanto el peso W como la longitud L en una configuración del valor ρ dependen únicamente de ρ , F puede expresarse como función de dicho ángulo. Por tanto, para determinar si una determinada configuración es estable, es necesario conocer si para algún valor de ρ entre 0 y β , el factor de estabilidad es menor que uno. De ser así, el mínimo valor de ρ para el que $F = 1$ se toma como *ángulo de reposo* o *ángulo crítico* del sistema (Li and Moshell, 1993).

3.3.2. Interacción entre una herramienta y un sistema granular. Equilibrio límite

Actualmente, una de las aplicaciones más relevantes de la teoría de Mohr-Coulomb es el estudio de la interacción mecánica entre una herramienta y el suelo, dentro de la disciplina conocida como geomecánica³.

Con el fin de diseñar la maquinaria y las herramientas de excavación, arado, etc. más adecuadas, es necesario conocer las fuerzas que actuarán sobre la superficie de contacto entre la herramienta y el terreno, así como las fuerzas mínimas que deberán ser aplicadas para conseguir la fractura del terreno. La aplicación del análisis de Mohr-Coulomb a este problema se conoce como *equilibrio límite*.

El estudio del equilibrio límite es seguramente el enfoque analítico más utilizado en esta disciplina. En este enfoque, se considera el sistema formado por el suelo y la herramienta como un todo, y se plantean las ecuaciones de equilibrio del sistema, en el supuesto de máxima resistencia del suelo, utilizando la teoría de Mohr-Coulomb. Resolviendo estas ecuaciones de equilibrio, es posible

³En inglés *terramechanics*

obtener las fuerzas de interacción entre la herramienta y el suelo y determinar los criterios de fractura del terreno.

Los interfaces de la fractura, en este caso, se definen *a priori*; a partir de observaciones empíricas, diferentes autores (Shen and Kushwaha, 1998) han propuesto interfaces de fractura adecuados para configuraciones concretas (proporciones de la herramienta, profundidad de la misma en el terreno, etc.) formando parte de la definición de cada modelo; una vez establecidas las ecuaciones de equilibrio, se determinan las fuerzas que aparecen en cada uno de los interfaces definidos.

Utilizando la notación del apartado anterior, la fricción tangencial a lo largo de cada interfaz de fractura entre dos bloques de material es

$$\tau = Lc + \sigma_n \tan \phi. \quad (3.16)$$

Por otra parte, la fuerza que aparece en la interfaz existente entre el material y la herramienta será

$$\tau = La + \sigma_n \tan \delta \quad (3.17)$$

donde a es la adhesión en el interfaz suelo-herramienta y δ es el ángulo de fricción externa del suelo en el interfaz.

Como ya se ha indicado, en esa metodología cada modelo viene determinado por la elección de los interfaces de fractura, realizada en base al conocimiento del problema. En caso de que el modelo contenga algún parámetro libre, éste se toma de forma que se minimicen las fuerzas de interacción.

Entre los modelos bidimensionales, el modelo de la espiral logarítmica, propuesto por Terzaghi (Terzaghi, 1959), es uno de los modelos fundamentales empleado como base para otros más elaborados para calcular la resistencia a herramientas de excavación. Según este modelo, la región que queda sobre la superficie de fractura delante de la herramienta se divide en dos partes; una región triangular bajo la superficie, y una región comprendida sobre una espiral logarítmica (véase la Figura 3.4).

En este caso, la fuerza necesaria para mover el material frente a la pala viene

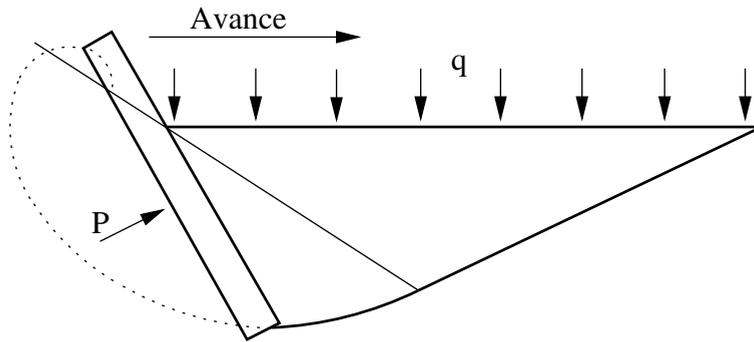


Figura 3.4: Superficie de fractura según Terzaghi.

dado por

$$P = \gamma^2 N_\gamma + cLN_c + aLN_a + qLN_q \quad (3.18)$$

donde γ es el peso específico del suelo, c es la cohesión, a es la adhesión del interfaz suelo-metal y q es la presión de sobrecarga sobre el material delante de la herramienta, y los términos N_x corresponden a las respectivas componentes de la reacción del suelo por unidad de longitud (Reece, 1965).

Este modelo es una aproximación válida en el caso en que la anchura de la herramienta sea sustancialmente mayor que la profundidad de la misma. En caso contrario, es necesario emplear modelos más adecuados, que tienen en cuenta también el desplazamiento lateral del material, dando lugar a regiones de fractura en tres dimensiones. Para una descripción detallada de varios de los modelos más utilizados puede consultarse la monografía de Shen y Kushwaha (Shen and Kushwaha, 1998).

En la práctica, estos modelos se aplican por medio de la utilización de elementos finitos en simulaciones por ordenador. Estas simulaciones permiten conocer con gran detalle las fuerzas soportadas por cada región de la herramienta, así como la obtención de criterios de fractura más precisos (Shen and Kushwaha, 1998).

3.3.3. Relación entre presión y hundimiento

El establecimiento de una relación entre la presión aplicada en una región del suelo y el hundimiento de dicha región es un problema de gran interés en geomecánica, con aplicación, por ejemplo, a las propiedades de la interacción entre una rueda y el suelo (Muro and Hoshika, 1995; Wong, 2001; Kumar and Kouzer, 2008).

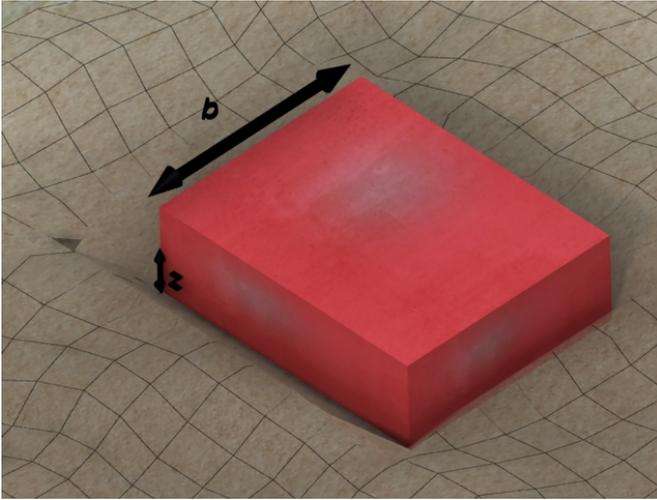


Figura 3.5: Los modelos de relación presión-hundimiento consideran una plancha rectangular de lado menor b que ejerce una presión p sobre un terreno homogéneo.

Uno de los modelos más establecidos considera una plancha rectangular de lado menor b presionando el terreno. Este modelo establece que la relación entre presión y hundimiento viene dada por (Bekker, 1969)

$$p = \left(\frac{k_c}{b} + k_\phi \right) z^n \quad (3.19)$$

donde k_c está relacionado con la cohesión del sistema y k_ϕ está relacionado con el ángulo de fricción interna del sistema. Tanto k_c y k_ϕ como n son parámetros que deben ser obtenidos empíricamente. En (Wong, 2001), p. 136, puede encontrarse una tabla con valores obtenidos empíricamente para estos parámetros sobre diferentes tipos de suelo.

Reece (Reece, 1965) propone una relación que considera como variable fundamental la proporción entre el hundimiento y el lado del área rectangular sobre la que se aplica la presión. El modelo viene descrito por medio de la ecuación

$$p = (ck'_c + \gamma_s bk'_\phi) \left(\frac{z}{b} \right)^n \quad (3.20)$$

En este segundo modelo se utiliza como valor característico la relación entre el hundimiento y el tamaño de la región sobre la que se aplica la presión.

Estos modelos tienen, entre otras aplicaciones, el análisis de la interacción entre un vehículo y el suelo y se utilizan en modelos de tracción para vehículos agrícolas. En el Capítulo 5 se utilizarán para determinar la presión que aparece durante las interacciones entre el modelo de sistema granular y cualquier objeto que entre en contacto con él.

3.4. Modelos fenomenológicos

El marco teórico que proporciona la teoría de Mohr-Coulomb permite analizar el comportamiento de los sistemas granulares, y especialmente obtener esquemas de fuerzas en situaciones dinámicas concretas. Sin embargo, su utilización para el estudio de la dinámica de una pila de arena resulta complejo, entre otras cosas porque no proporciona una descripción adecuada del sistema.

Otra metodología utilizada para el estudio de los sistemas granulares consiste en la descripción del comportamiento del sistema a escalas observables a simple vista. Esta descripción no tiene en cuenta las causas internas que dan lugar a dicho comportamiento. Uno de los autores más destacados es Ralph A. Bagnold (Bagnold, 1941), que durante los años 50 llevó a cabo un amplio estudio durante sus viajes por el desierto de Libia. Bagnold realiza una descripción fenomenológica de la formación de dunas así como una detallada clasificación en función de su forma y de las circunstancias de viento en las que aparecen. Muchas de sus descripciones y experimentos han servido como punto de partida para posteriores modelos destinados a la simulación por computador.

Este apartado se centra en este tipo de modelos que, en lugar de derivar resultados a partir de la dinámica interna de un sistema granular, analizan un modelo desarrollado para satisfacer un conjunto de comportamientos básicos, observados en sistemas reales.

Uno de los primeros modelos que aparecen en esta metodología es el modelo de pila de arena de Bak, Tang y Wiesenfeld (Bak et al., 1988). Este modelo se verá con más detalle en el Apartado 3.5.3 cuando se analicen los Autómatas Celulares. Basándose en este modelo, Hwa y Kardar (Hwa and Kardar, 1992) proponen un modelo continuo para la evolución de la superficie de un sistema granular. El modelo consiste en una pendiente inclinada un ángulo muy próximo al ángulo de reposo del sistema, y se utiliza para analizar el comportamiento a largo plazo de las avalanchas y de la forma de la superficie. De acuerdo con los resultados de este trabajo la superficie de un sistema granular tiende a hacerse uniforme, con una pendiente igual a la pendiente de reposo. Se considera un sistema unidimensional que tiene como única variable la altura de material en cada punto.

Posteriormente, Bouchaud et al. (Bouchaud et al., 1994; Bouchaud et al., 1995) introducen una nueva variable en el modelo reflejando tanto la altura de la capa estática como el espesor de la capa de partículas que deslizan por la pendiente cuando se produce una avalancha. Este modelo se conoce como el modelo BCRE. La altura de la capa estática varía únicamente debido al desprendimiento de granos que pasan a la capa deslizante, y a la fijación de granos de la capa deslizante que pasan a quedarse en la capa estática.

El modelo BCRE permite predecir comportamientos que no eran reflejados por los modelos anteriores. El más destacable es la aparición de avalanchas catastróficas que hacen que toda la pendiente se ponga en movimiento tras una perturbación en la base. Estas avalanchas aparecen si el ángulo inicial de la pendiente es mayor que un segundo ángulo crítico.

El modelo se plantea en términos de un sistema de ecuaciones en derivadas parciales que determinan la evolución de la altura de cada capa con el tiempo. La evolución de la capa dinámica se produce por dos motivos; en primer lugar, un término de convección para modelar la propagación del material pendiente abajo,

y en segundo lugar un término que modela el intercambio de material con la capa estática. Este intercambio puede producirse por desprendimiento de partículas, si la pendiente de la capa estática es mayor que el ángulo de reposo, o por el atrapamiento de partículas si es menor que dicho ángulo. Por su parte, la capa estática únicamente varía debido al intercambio de material con la capa dinámica (véase la Figura 3.6).

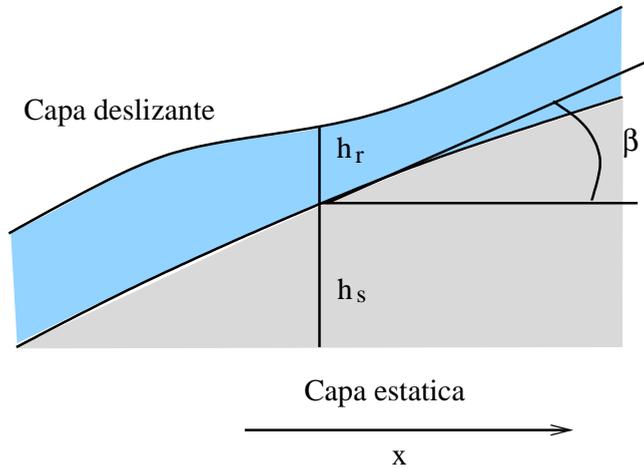


Figura 3.6: Variables del modelo BCRE para la descripción del flujo sobre la superficie de un sistema granular.

Las ecuaciones que rigen la evolución de la altura de la capa dinámica $h_r(x, t)$ y de la capa estática $h_s(x, t)$, para un sistema unidimensional con ángulo de reposo α , son, según la notación de Haderler y Kuttler (Haderler and Kuttler, 2001)

$$\partial_t h_r = v \partial_x (h_r \partial_x h_s) + \theta (\partial_x h_s - \alpha) \quad (3.21)$$

$$\partial_t h_s = -\theta (\partial_x h_s - \alpha). \quad (3.22)$$

En diversos trabajos el modelo BCRE se ha extendido a dos dimensiones y se han estudiado diversas propiedades de los sistemas granulares por medio de esta descripción (de Gennes, 1997; Haderler and Kuttler, 1999; Haderler and Kuttler, 2001; Prigozhin and Zaltzman, 2001; Prigozhin and Zaltzman, 2003). Duran ofrece también un análisis de diferentes variantes de este modelo (Duran, 1999).

Dado que el modelo BCRE no ofrece garantías de conservación de momento en la capa deslizante se utilizan en su lugar los modelos conocidos como modelos de Saint-Venant (de Barr Saint-Venant, 1850). Al igual que en el modelo BCRE las variables principales son el grosor de la capa deslizante y la altura de la capa estática. Bajo el nombre de modelos de Saint-Venant se agrupa un conjunto de modelos cuyo objetivo es la obtención de ecuaciones de conservación de la masa y del momento en la capa deslizante, promediando las cantidades en la dirección de la profundidad. Algunos de los trabajos más recientes en esta línea son los de S. Douady et al. (Douady et al., 1999).

En (Aradian et al., 2002) se puede encontrar una introducción a los modelos más relevantes tanto de BCRE como de Saint-Venant. Otros trabajos relacionados con los modelos de Saint-Venant más recientes se pueden encontrar en (Nalder, 1998; Mangeney-Castelnau et al., 2003; Bouchut et al., 2003; Siuta, 2006; Audusse and Bristeau, 2007; Audusse et al., 2008).

El principal inconveniente de los modelos fenomenológicos es que su rango de validez se restringe a situaciones dinámicas en las que el material está fluyendo. Además, su coste computacional es elevado, ya que requieren la solución de sistemas de ecuaciones en derivadas parciales de forma numérica. Por este motivo los modelos de medios continuos no a van a resultar adecuados para nuestros objetivos.

3.5. Autómatas Celulares

Los Autómatas Celulares (AC) son una idealización de los sistemas físicos en la que el espacio y el tiempo son discretos, y en los que además, los posibles estados de las variables solo pueden tomar un conjunto finito de valores.

Una característica de los AC que los ha hecho alcanzar la relevancia que ostentan actualmente es el hecho de que pueden exhibir un comportamiento muy complejo a partir de una descripción matemática muy simple de su dinámica. Son un ejemplo de que un gran número de sistemas simples, que se relacionan de forma simple, puede dar lugar a la emergencia de un comportamiento

colectivo complejo y distinto del de cada uno de ellos. Esta propiedad hace que los AC sean una aproximación computacional muy potente a los sistemas complejos y ha permitido su proliferación como modelos computacionales desde su introducción por von Neumann en los años 60.

Uno de los modelos de AC que describen sistemas complejos es el modelo de pila de arena de Bak, Tang y Wiesenfeld (Bak et al., 1988), que se ha convertido en un ejemplo paradigmático de la aplicación de este modelo computacional. El modelo, que se presenta como un modelo teórico destinado a estudiar las propiedades estadísticas de una familia de sistemas complejos, ha inspirado un gran número de trabajos posteriores, incluyendo algunos de los modelos de sistema granular ya estudiados aquí, como el modelo BCRE.

Precisamente, por haber mostrado su utilidad en el modelado discreto de sistemas granulares, y por la similitud que existe entre la descripción geométrica del sistema granular que se obtiene por medio de un Autómata Celular y el modelo geométrico utilizado habitualmente en la representación gráfica del sistema, se ha elegido este modelo computacional para el desarrollo de los modelos durante este trabajo.

A continuación se presenta una introducción histórica de este modelo computacional y se detallan algunos aspectos de los Autómatas Celulares que guardan más relación con la simulación de sistemas granulares.

3.5.1. Introducción histórica

Los Autómatas Celulares fueron introducidos formalmente por John von Neumann en 1966 como un modelo para la reproducción de seres vivos simples. Desde entonces, multitud de autores han desarrollado diferentes variantes y nuevos modelos aplicados a infinidad de campos.

El modelo de von Neumann y otros modelos iniciales

La motivación original de von Neumann era extraer los mecanismos abstractos que llevan a la auto-reproducción de los organismos biológicos (von Neumann, 1966). En otras palabras, el objetivo era idear un sistema que tuviera la capacidad de producir otro organismo de complejidad equivalente sólo con sus propios recursos.

Siguiendo las sugerencias de S. Ulam (Ulam, 1952), von Neumann planteó esta cuestión sobre un universo discreto hecho de celdas. Cada celda se caracteriza por un estado interno, que suele representarse por medio de un número finito de bits de información. von Neumann sugirió que cada celda de este sistema evoluciona, en pasos discretos de tiempo, como un Automata que sólo tiene una regla simple para calcular su nuevo estado interno. La regla que determina la evolución de este sistema es la misma para todas las celdas y es una función de los estados de sus celdas vecinas. De forma similar a lo que ocurre en los sistemas biológicos, la actividad de todas las celdas tiene lugar simultáneamente.

Su principal objetivo era proporcionar el rigor del tratamiento axiomático y deductivo al estudio de los sistemas naturales complejos. Las ideas básicas del Automata auto-reproductivo se presentaron anteriormente en (von Neumann, 1963) y conforman adaptación de la idea de la construcción de una máquina de Turing.

Utilizando una formalización similar, otros autores empezaron a plantear diferentes problemas discretos que abarcan desde el área de la resolución de problemas de optimización, hasta simples entretenimientos lógicos. Un ejemplo que ha dado lugar a posteriores variaciones y a numerosa bibliografía es el Firing Squad Problem (Moore, 1964). Se parte de un vector de celdas unidimensional, en el que el valor de cada celda puede ser 0 ó 1. Problema consiste en conseguir una regla de actualización que minimice el número de pasos necesario para que todas las celdas se sincronicen a partir de una configuración inicial en la que sólo una de las celdas se encuentra activa. El nombre proviene de la interpretación del Automata como un batallón de soldados, de forma que se consiga que todos disparen a la vez. Este problema fue resuelto por Mazoyer (Mazoyer, 1987) utilizando celdas con seis estados.

El Juego de la Vida y el modelo de pila de arena

Otro modelo bidimensional que tiene un cierto renombre en el mundo de los AC es el conocido como Juego de la Vida⁴. El Juego de la Vida, propuesto inicialmente por John Conway, se hizo famoso a raíz de la columna de Martin Gardner en la revista de divulgación *Scientific American* (Gardner, 1970; Gardner, 1971).

La motivación original fue diseñar un conjunto simple de reglas para estudiar el comportamiento macroscópico de una población. La población se representa por medio de una configuración de una malla 2-dimensional de celdas con la vecindad de Moore (véase la Sección 4.3.2), donde cada celda puede tener el estado 1 ó 0. La regla local se describe como sigue:

1. Supervivencia: si una celda se encuentra en el estado 1 (viva) y tiene dos o tres vecinos en estado 1, entonces la celda sobrevive, es decir, permanece en el estado 1.
2. Nacimiento: si una celda se encuentra en el estado 0 y tiene exactamente tres celdas vecinas en estado 1, en el próximo paso tendrá estado 1.
3. Muerte: una celda viva (en estado 1) muere (pasa a estado 0) por soledad si tiene un sólo vecino o ninguno. De la misma manera, muere de superpoblación si tiene 4 o más vecinos vivos.

Cada configuración se denomina una población, y el estudio de este tipo de Autómata Celular se ha centrado principalmente en el análisis de la evolución de la población.

Otro de los modelos con relevancia histórica dentro del ámbito de los AC es el modelo de pila de arena, descrito en detalle más adelante en este capítulo. Este modelo se ha convertido en un ejemplo paradigmático del comportamiento crítico auto-organizado y ha dado lugar a una extensa bibliografía que aún hoy sigue creciendo.

⁴En inglés *Game of Life*

Universalidad y complejidad en Autómatas Celulares

Al margen de su capacidad de modelado de sistemas físicos, los AC han despertado también un gran interés teórico sobre sus propiedades como modelo computacional. Entre estos estudios, dos de los aspectos más frecuentemente tratados en la bibliografía son la propiedad de universalidad de los AC y la complejidad computacional de ciertas cuestiones relacionadas con ellos.

Computación universal

Como consecuencia de la relación entre la Máquina de Turing y los Autómatas Celulares, desde su inicio se ha planteado el problema de la Universalidad Computacional de los mismos. La cuestión básica es si por medio de un AC es posible implementar una simulación paso a paso de una Máquina de Turing de una cinta (Smith, 1972; Dubacq, 1995).

Paralelamente al modelo de von Neumann surge el concepto de computación universal con Autómatas Celulares, puesto que el modelo se rige por las reglas de computación universal dadas anteriormente por Alan M. Turing (Turing, 1936; Turing, 1950) y Emil L. Post (Post, 1936; Post, 1943; Post, 1944). A causa de la complejidad mostrada por los modelos de Máquina de Turing motivó la búsqueda de condiciones mínimas necesarias para que un Autómata Celular fuera capaz de hacer computación universal.

Este problema que fue iniciado y planteado por von Neumann y continuado por Burks (von Neumann, 1966), fue simplificado y extendido por Codd, Banks, Smith y otros, a fines de la década de 1960 y principios de la década de 1970 (Codd, 1968; Smith, 1972). No fue hasta esta década cuando se caracterizaron las condiciones necesarias para que un Autómata fuera capaz de hacer computación universal (Toffoli, 1977; Morita and Harao, 1989; Nordahl, 1989; Sipper, 1998).

Complejidad computacional

La complejidad computacional es un aspecto estudiado en los Autómatas Celulares desde hace bastante tiempo (Wolfram, 1984; Wolfram, 1986; Green, 1987). Los principales resultados versan sobre la clasificación o no como NP-completos de ciertos problemas, tales como averiguar si una subconfiguración de un Autómata tendrá lugar antes de un número determinado de pasos, si una determinada secuencia de estados de una celda se producirá antes de un cierto número de pasos. Se han encontrado Autómatas para los que la solución de estos y otros problemas son NP-completos. Estos problemas, sin embargo, no guardan relación con el trabajo presentado en este trabajo. Para una relación más extensa de resultados en este sentido se sugiere la lectura de (Sarkar, 2000).

Sistemas dinámicos, conjuntos límites y propiedades fractales

Durante los años 80, diversos autores, entre los que destaca especialmente S. Wolfram (Wolfram, 1986; Wolfram, 1994) replantearon el estudio de los Autómatas Celulares, dando lugar a un enfoque completamente nuevo. El planteamiento propuesto por Wolfram (Wolfram, 1983) consiste en el estudio de los AC a como sistemas dinámicos y en el estudio de sus propiedades como tales. Por medio de la definición de métricas en el espacio de configuraciones permite el estudio de propiedades como los exponentes de Lyapunov, medidas de entropía, sensibilidad a las condiciones iniciales, atractores, etc. (Hurd et al., 1992; Finelli et al., 1998; Manzini and Margara, 1999).

El conjunto límite o atractor de un sistema dinámico es una variedad en el espacio de posibles configuraciones a la que tienden las diferentes trayectorias del sistema. Diversos estudios demuestran que es frecuente la aparición de conjuntos límite con dimensión fractal (Culik et al., 1989; Culik, 1990) y de comportamientos críticos autoorganizados (Malamud and Turcotte, 2000). Además, de acuerdo con lo predicho por Wolfram, esta misma propiedad se observa también para los conjuntos límite de los patrones observados en la evolución de Autómatas Celulares lineales (Takahashi, 1992).

Métodos Lattice Gas

Los Métodos Lattice Gas (MLG) son una aplicación de la metodología de los AC al estudio de sistemas tradicionalmente descritos como continuos. El MLG considera una malla en la que los estados de cada celda describen el hecho de que contenga o no una partícula, y su masa y velocidad. Aplicando el principio de conservación de momento y de masa, se calcula la evolución del sistema que describe el comportamiento de un gas (Hardy et al., 1976; Frisch et al., 1986).

Este modelo ofrece descripciones estadísticas de las propiedades de ciertos fluidos y, debido a su descripción local de la dinámica del sistema, propia de los AC, el MLG ofrece importantes ventajas respecto a otros métodos numéricos, especialmente en la utilización de contornos complejos, incorporación de interacciones microscópicas y paralelización de algoritmos (Margolus et al., 1986). Sin embargo su naturaleza discreta introduce ruido estadístico en su comportamiento y dificulta el ajuste de parámetros para la consideración de ciertos sistemas físicos.

A finales de los 80, McNamara y Zannetti (McNamara and Zanetti, 1988) y Higuera et al. (Higuera et al., 1989) mostraron las ventajas de extender la descripción booleana del estado de una celda para trabajar con probabilidades de que tenga un determinado estado. Esta aproximación, llamada el Método Lattice Boltzmann (MLB), es numéricamente mucho más eficiente que la dinámica booleana y proporciona un nuevo modelo computacional mucho más adecuado para la simulación multitud de aplicaciones de la física (Bahr and Rundle, 1995; Chopard and Droz, 2005).

El MLB proporciona una metodología para la resolución de problemas en dinámica de fluidos computacional que, en lugar de resolver las ecuaciones de conservación de las propiedades macroscópicas del sistema (masa, momento, energía, etc.), utiliza la ecuación discreta de Boltzman (Huang, 1987) para simular el flujo de un fluido Newtoniano con modelos de colisión continuos como el de Bhatnagar-Gross-Krook (BGK) (Bhatnagar et al., 1954). Simulando la interacción de un número limitado de partículas, el comportamiento de flujo viscoso emerge automáticamente del flujo de las partículas y de los procesos de colisión (Chapman and Cowling, 1970; Vincenti and Kruger, 1975; Liboff and Liboff,

1990).

A pesar de sus limitaciones en algunos campos específicos, como la dinámica de flujos aerodinámicos, los MLB se han mostrado muy útiles en numerosas aplicaciones. Algunas variantes de estos métodos, como los *Coupled Map Lattice* (Kaneko, 1993; Yanagita and Kaneko, 1997; Harris et al., 2002), se han utilizado incluso en el modelado de fluidos en informática gráfica (Nishimori and Ouchi, 1993; Miyazaki et al., 2001; Wei et al., 2003a; Wei et al., 2003b; Zhao et al., 2003).

3.5.2. Aplicaciones de los Autómatas Celulares

Como hemos indicado, los Autómatas Celulares, más que un modelo para describir un tipo de sistema son un esquema computacional que ofrece un paradigma de modelado realmente flexible.

Por este motivo, al margen de los estudios teóricos basados en modelos simples y de la bibliografía dedicada a su análisis desde diferentes puntos de vista, los Autómatas Celulares han sido aplicados a innumerables campos.

Por ser el objetivo principal de este trabajo de investigación, ya hemos mencionado el modelado de sistemas físicos. En este campo, se pueden encontrar aplicaciones a la simulación de flujos de lava (Miyamoto and Sasaki, 1997; Crisci et al., 2004; Barca et al., 2004) o de propagación de incendios (Mraz et al., 1999; Li and Magill, 2001; Sullivan and Knight, 2004; Hoya White et al., 2005; Encinas et al., 2007), por citar sólo algunos ejemplos. Sobre este tipo de modelos se puede encontrar una extensa revisión en el libro de B. Chopard (Chopard and Droz, 2005).

Sin embargo, los Autómatas Celulares se han aplicado también a otros tipos de sistemas dinámicos. En sistemas biológicos, por ejemplo, encontramos modelos de la evolución de diferentes tipos de poblaciones (Balzter et al., 1998; Bandini and Pavesi, 2002), modelos presa-predador (Gregorio et al., 1999; Ming-feng et al., 2003; Chopard and Lagrava, 2006; Tome and de Carvalho, 2007; Farina and Dennunzio, 2008) o modelos de crecimiento y evolución de cáncer o

epidemias (Sirakoulis et al., 2000; Zhen and Quan-Xing, 2006; Liu and Jin, 2006; Martín del Rey et al., 2006).

En el caso de los sistemas sociales, es posible encontrar modelos que describen la dinámica de peatones (Was, 2005; Yamamoto et al., 2006; Barwolff et al., 2007; Yamamoto et al., 2007; Weng et al., 2006), la expansión de ciudades (Wu and Martin, 2002; Fengyun and Zengxiang, 2005; Al-Kheder et al., 2007; Mavroudi, 2007), el comportamiento de multitudes (Hamagami and Hirata, 2003; Aube and Shield, 2004; Narimatsu et al., 2004; Vizzari et al., 2006; Was et al., 2006) y procesos de evacuación (Georgoudas et al., 2006; Tissera et al., 2007; Zhao et al., 2008) o el tráfico de vehículos (Aponte and Moreno, 2006; Kanai et al., 2006; Goldengorin et al., 2006).

De entre todas estas aplicaciones, en este trabajo de investigación son de especial interés los modelos destinados al modelado de sistemas granulares. A continuación se revisan los modelos más destacados, prestando especial atención a los que permiten simular la evolución de la superficie de un sistema granular denso y con flujo de baja energía, como el que puede encontrarse en la simulación de un montón de arena.

3.5.3. Modelado de sistemas granulares por medio de Autómatas Celulares

Dentro de la simulación de sistemas físicos por medio de Autómatas Celulares encontramos diversos modelos cuyo objetivo es el estudio de los sistemas granulares. Por una parte encontramos descripciones del flujo de material granular a través de conductos, o del flujo de material sobre la superficie de una pendiente de material estático, basadas habitualmente en modelos de tipo Lattice Gas. Por otra parte, encontramos también descripciones de la evolución de la superficie de un sistema granular que caracterizan el espectro de frecuencias de la ocurrencia de avalanchas, mostrando la complejidad de su dinámica.

A continuación revisamos los principales modelos de ambas metodologías, y analizamos su idoneidad como modelos para la consecución de los objetivos del

presente trabajo.

Modelos Lattice Gas

De acuerdo con la descripción de los sistemas granulares que se ofrece en la dinámica molecular (véase la Sección 3.2) en situaciones de alta energía el comportamiento de un sistema granular puede asemejarse al de un gas, y por tanto puede describirse como partículas que colisionan entre si mientras se desplazan por un determinado medio. Partiendo de esta premisa, los flujos granulares pueden simularse por medio de modelos como los Lattice Gas y los modelos Lattice Boltzman.

El comportamiento del material en un silo, que representa uno de los problemas más estudiados en dinámica de sistemas granulares por su aplicación en la industria, ha sido abordado utilizando esta metodología por múltiples autores (Gutt and Haff, 1990; Baxter and Behringer, 1990; Baxter and Behringer, 1991; Savage, 1992; Désérable and Martínez, 1993; Peng and Herrmann, 1994; Martínez et al., 1995; Chopard et al., 2000; Désérable et al., 2001; Kozicki and Teichman, 2005).

Otras fenómenos habituales en los sistemas granulares que han sido estudiados por medio de Autómatas Celulares es la formación de patrones (Savage, 1993; Peng and Herrmann, 1994), el fenómeno de segregación y mezcla de materiales granulares sujetos a vibración o rotación (Peng and Herrmann, 1994; Fiske et al., 1994; Sakaguchi et al., 1996; Katsura et al., 2001) o el comportamiento de la presión en el interior de una pila de material granular (Michalowski, 1990; Narayan, 2000).

Sin embargo, todos estos procesos corresponden a situaciones en las que el material está fluyendo, similares a las que pueden simularse por medio del modelo de esferas rígidas. Desde el punto de vista de la evolución de la superficie de un sistema granular, que es el problema abordado en este trabajo, únicamente el flujo de material sobre una superficie de partículas puede resultar de interés.

La descripción que se realiza habitualmente de una pila de arena por medio

de modelos de Lattice Gas corresponde a una sección vertical del sistema, y la dinámica del modelo describe el comportamiento del sistema a diferentes alturas bajo la superficie. En este trabajo, por el contrario, buscamos una descripción de la superficie del sistema, y únicamente estaremos interesados en el comportamiento del interior del mismo en tanto en cuanto nos proporcione información sobre su dinámica. Por este motivo, los modelos basados en las metodologías Lattice Gas y Lattice Boltzman no parecen adecuados para la resolución del problema que aquí abordamos.

El modelo de pila de arena de Bak, Tang y Wiesenfeld

Como ya se ha indicado, una de las propiedades de los Automatas Celulares es la complejidad de su dinámica a partir de una descripción muy simple de las reglas que la determinan. En este sentido se han utilizado modelos basados en AC para mostrar comportamientos caóticos y, en general, no lineales.

Uno de los ejemplos más conocidos de este tipo de estudios es el conocido como Modelo de Pila de Arena (Sandpile Model) presentado a finales de los años 80 por Bak, Tang y Wiesenfeld (Bak et al., 1988). Su trabajo es una descripción de un tipo de comportamiento de algunos sistemas complejos, al que denominan comportamiento Crítico Autoorganizado⁵, y para ello utilizan un modelo de Automata Celular inspirado en la descripción fenomenológica de una pila de arena basada en la pendiente crítica (véase el Apartado 3.4).

La descripción de la dinámica de un sistema que caracteriza la existencia de SOC es una descripción estadística que mide la frecuencia de ocurrencia de ciertos fenómenos en el sistema respecto de su magnitud (puede tratarse de las dimensiones de ciertos rasgos físicos, la duración temporal de ciertos fenómenos, etc.). La principal propiedad del comportamiento SOC es la ausencia de una escala característica, rigiéndose en su lugar por una ley de potencia (ruido $1/f$) (Bak et al., 1988). En el Apéndice C puede encontrarse una introducción a algunos de los conceptos fundamentales del comportamiento Crítico Autoorganizado. Tras la definición de Bak del comportamiento Crítico Autoorganizado, se

⁵En inglés *Self-Organized Criticality (SOC)*

han realizado numerosos análisis tanto de modelos teóricos como de sistemas reales, observándose numerosas leyes de potencia en la naturaleza.

Paradójicamente, diversos estudios sobre el comportamiento de la arena real han demostrado que su comportamiento no sigue estrictamente una ley de potencia como la descrita por Bak y otros. Por el contrario el Modelo de Pila de Arena (también conocido como modelo BTW), definido como un modelo teórico y falto de realismo, ha inspirado multitud de trabajos posteriores que sí permiten una reproducción realista de los sistemas granulares; en particular, el modelo BCRE, descrito en el Apartado 3.4, se plantea por sus autores como una evolución del modelo de Pila de Arena.

A continuación revisaremos el modelo BTW y los principales modelos basados en Autómatas Celulares que se derivan de él y que permiten la simulación de sistemas granulares. Describiremos los principios en los que basan su dinámica, y prestaremos atención a sus características desde el punto de vista de su representación gráfica de cara a su utilización en un entorno de simulación.

3.5.4. Modelos de pila de arena

Los modelos conocidos como Modelos de Pila de Arena⁶ se basan, en general, en una Autómata Celular sobre un malla unidimensional o bidimensional, que representa la base de la pila de arena, en el que la variable principal del sistema representa la altura de la pila sobre cada celda.

Los primeros modelos existentes en la bibliografía son descripciones muy simples del sistema y se centran especialmente en la dinámica del mismo, más que en una correcta descripción de un sistema real. El conjunto de posibles alturas suele ser muy reducido (generalmente dos o cuatro) y el comportamiento del sistema dista mucho de parecerse a la formación de una montaña de arena.

A continuación se describen los modelos de pila de arena iniciales, y posteriormente se revisan algunas evoluciones posteriores que sí se han empleado

⁶En inglés *Sandpile Models*

para la descripción de sistemas reales.

El modelo BTW

En el modelo BTW (Bak et al., 1988) el valor de cada una de las celdas del Autómata es un número entero $h(n)$ que representa el *número de granos* que contiene dicha celda. Según la función de transición del modelo unidimensional, cuando la diferencia entre la altura de una celda y la altura de la siguiente $z_n = h(n) - h(n+1)$ es mayor que un umbral z_c , se produce una descarga de un grano de la celda n a la celda $n+1$. Esto reduce la diferencia z_n y aumenta las diferencias $z_{n\pm 1}$. De esta manera, si se deja evolucionar el sistema, la diferencia entre celdas vecinas se mantendrá por debajo del umbral z_c identificando este valor con la pendiente máxima en una pila de arena real.

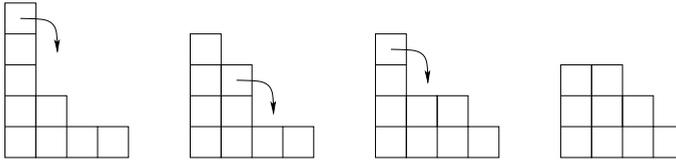


Figura 3.7: Evolución del modelo BTW.

La formulación de la función de transición que aparece en el trabajo de Bak et al., se hace en base a la diferencia de altura de las celdas, z_n . Para el caso de una dimensión tendremos:

BTW 1-D: Si $z_n > z_c$ entonces

$$\begin{cases} z_n \rightarrow z_n - 2 \\ z_{n\pm 1} \rightarrow z_{n\pm 1} + 1 \end{cases}$$

La generalización al caso bidimensional se realiza por medio de la diferencia $z(i, j) = 2h(i, j) - h(i+1, j) - h(i, j+1)$ que compara la altura de la celda (i, j) con el promedio de las celdas $(i, j+1)$ y $(i+1, j)$. De esta manera, la evolución

del Autómata será en la dirección diagonal en la que aumentan ambos índices. Formalmente, el modelo se presenta como:

BTW 2-D: Si $z(i, j) > z_c$ entonces

$$\begin{cases} z(i, j) \rightarrow z(i, j) - 4 \\ z(i, j \pm 1) = z(i, j \pm 1) + 1 \\ z(i \pm 1, j) = z(i \pm 1, j) + 1 \end{cases}$$

Las funciones de transición, tanto para el caso unidimensional como para el caso bidimensional, se aplican en todas las celdas de la malla simultáneamente utilizando los valores del paso anterior, y el proceso se repite hasta que el sistema alcanza un estado de equilibrio donde no se produce ninguna actualización. Este estado de equilibrio únicamente se modifica mediante la introducción aleatoria de granos, representado por el aumento del valor de una de las celdas, haciendo que el sistema sea inestable.

Tras una fase de transición, el sistema entra en una dinámica en la que el estado de equilibrio tras cada relajación es inestable, pues casi cualquier perturbación provoca una pérdida del estado de equilibrio. Este estado es el que Bak, Tang y Wiesenfeld denominan Estado Crítico Autoorganizado. Cuando se alcanza este estado, se observa que el tamaño de las avalanchas es inversamente proporcional a su frecuencia, determinando así la ausencia de escala en el sistema.

Disipación de fuerzas

Un modelo posterior al BTW es el modelo presentado por Christensen, Olami y Bak (Christensen et al., 1992) y que constituye un ejemplo de modelo acotado en altura. En este caso, los valores de las celdas del Autómata representan un campo de fuerzas $F(i, j)$ sobre la base. Los valores $F(i, j)$ se incrementan uniformemente hasta que alguna de las fuerzas excede un valor crítico F_c .

Entonces, la fuerza de la celda inestable $F(i, j)$ y los valores de las fuerzas de sus vecinos más próximos $F(i \pm 1, j \pm 1)$ se actualizan de acuerdo con la

siguiente función de transición

$$F(i \pm 1, j \pm 1) \rightarrow F(i \pm 1, j \pm 1) + f_\alpha F(i, j); \quad 0 < f_\alpha < 1.$$

Se trata de un ejemplo de sistema no conservativo (la suma de las magnitudes de las celdas se reduce con cada actualización) que exhibe comportamiento crítico autoorganizado.

Vaciado de un cajón de arena

El modelo presentado por Chen y den Nijs (Chen and den Nijs, 2002) representa el desalojo de una caja de arena por uno de sus laterales. La variable de altura $h(i, j)$ se define en una cuadrícula cuadrada. La cuadrícula se rota diagonalmente de manera que la dirección de propagación de una avalancha es a lo largo de la diagonal correspondiente al índice j .

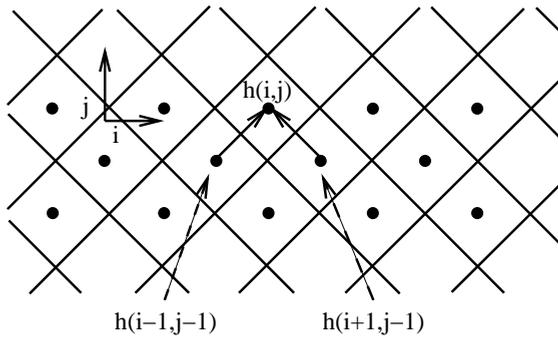


Figura 3.8: Descripción del modelo de Chen y den Nijs (Chen and den Nijs, 2002).

La columna de partículas de la celda (i, j) está sustentada por dos columnas $(i - 1, j - 1)$ y $(i + 1, j - 1)$ situadas en la dirección de caída del material. La columna en la celda (i, j) es estable cuando su altura es menor que el mínimo de las alturas de las celdas $(i - 1, j - 1)$ y $(i + 1, j - 1)$ más una cantidad fija s_c

$$h(x) \leq \min[h(i - 1, j - 1), h(i + 1, j - 1)] + s_c$$

La evolución del sistema se realiza eligiendo aleatoriamente una de las celdas situadas en el lateral abierto y reduciendo su altura en una cantidad $0 < \mu_l < s_c$ tomada aleatoriamente. Esto provoca una inestabilidad en alguna celda de la fila superior. La función de transición en este caso será

$$h(x) \rightarrow \min[h(i-1, j-1), h(i+1, j-1)] + \mu_l$$

donde $0 < \mu_l < s_c$ es a su vez un valor aleatorio. Esta actualización continúa fila por fila hasta que todas las celdas son estables.

En este modelo la altura de las celdas no está acotada, y la actualización depende de la diferencia de altura entre celdas vecinas. La diferencia más relevante respecto al modelo BTW es que la comparación entre alturas se realiza teniendo en cuenta el mínimo de las alturas de los vecinos, causando la evolución del sistema en la dirección de máxima pendiente.

Modelos de pila de arena y simulación de sistemas granulares

Otros autores han continuado el desarrollo de este tipo de modelos, introduciendo conceptos adicionales como la inercia (Prado and Olami, 1992) o la memoria en las avalanchas (Barker and Mehta, 1993; Mehta and Barker, 1994; Barker and Mehta, 2000). Sin embargo, como ya hemos indicado, aunque el comportamiento de esta familia de modelos se inspira en la fenomenología de una pila de arena, el comportamiento del mismo no es comparable con el de un sistema real; en primer lugar, por su carácter finito, y en segundo lugar porque la regla de actualización no pretende, en ningún momento, reproducir fielmente su comportamiento. Sobre este tipo de modelos se ha llevado a cabo mucha investigación de carácter teórico, estudiándose propiedades algebraicas (Dhar et al., 1995; Dhar, 1999; Dorso and Dadamia, 2002), o de universalidad en este tipo de modelos (Chessa et al., 1999; Pastor-Satorras and Vespignani, 2000).

Posteriormente, diferentes autores han presentado variantes del modelo con el fin de poder reproducir otras propiedades de los sistemas granulares desde el punto de vista macroscópico, como la evolución de la superficie y de su forma. Entre ellos destacan el trabajo de Goles et al. (Goles et al., 1998; Goles and Prisner, 2000), que presenta un estudio de la formación de un montón a partir de

un modelo de pila de arena con inercia, y los trabajos, más recientes, del grupo de T. Shinbrot (LaMarche et al., 2007; Shinbrot et al., 2007) que analizan diversos aspectos del flujo de un sistema granular comparándolo con los resultados de otros modelos de mecánica de fluidos.

3.6. Conclusiones

Una revisión de los modelos teóricos presentados en este capítulo permite ver que algunos de los modelos procedentes de la física y la ingeniería pueden resultar útiles para la obtención de modelos realistas aplicables a simulación interactiva en tiempo real.

En primer lugar, se puede concluir que los modelos basados en dinámica molecular son muy costosos y, aunque su descripción del sistema es natural y la consideración de las fuerzas de interacción es inmediata, no son adecuados para la simulación interactiva de sistemas granulares.

Por el contrario, los modelos basados en Autómatas Celulares proporcionan una metodología basada en una representación discreta del sistema. Además, los modelos se definen en base a un conjunto reducido de reglas, que son fáciles de implementar y con una ejecución eficiente. Su implementación puede optimizarse gracias a la existencia del umbral de descarga y a las propiedades de los sistemas granulares. De entre los modelos continuos, el modelo BCRE es un modelo que guarda numerosas analogías con los modelos de Autómatas Celulares, principalmente por inspirarse en ellos.

Por otra parte, los modelos basados en la teoría de Mohr-Coulomb no proporcionan una descripción adecuada de la dinámica del sistema ya que no permiten el cálculo de la evolución de la superficie. Sin embargo, los diferentes modelos existentes en el campo de la geomecánica y las descripciones existentes del comportamiento de las fuerzas pueden resultar útiles si es posible adaptarlas a la representación particular del sistema que se esté usando.

En este trabajo de investigación se va a utilizar como base el modelo de Autó-

mata Celular BTW debido a su conveniencia desde el punto de vista computacional. La regla de actualización para el modelo dinámico se derivará del modelo BCRE, que se utilizará además para la necesaria validación.

Además, se utilizarán los modelos de presión-hundimiento (Hiroma et al., 1997; Earl and Alexandrou, 2001; Park et al., 2004) para introducir la aplicación de fuerzas en la superficie del sistema y el cálculo de fuerzas de reacción. También se simulará el desplazamiento lateral del material por un objeto, utilizando los modelos de geomecánica revisados (Shen and Kushwaha, 1998; Nouguier et al., 2000) .

El Cuadro 3.1 muestra un resumen de las ventajas e inconvenientes de cada metodología desde el punto de vista de su utilización en informática gráfica y en simulaciones en tiempo real. En la última columna se indican aquellos aspectos que van a utilizarse en el desarrollo del presente trabajo.

Metodología	Ventajas	Inconvenientes	Aspectos útiles
Dinámica molecular	Simulaciones realistas. Aplicación de fuerzas de forma natural.	Muy costosos computacionalmente. Difíciles de representar gráficamente.	
Teoría de Mohr-Coulomb	Modelos sencillos.	Descripción limitada de la evolución del sistema	Modelo de fuerzas de interacción
Modelo BCRE	Buena descripción de la evolución del sistema.	Modelo continuo. Limitado a situaciones de flujo. Resolución de EDP costosa.	Modelo de evolución, discretizado. Descripción intuitiva de la dinámica del sistema. Modelo de referencia.
Autómatas Celulares	Modelos discretos. Representación gráfica inmediata. Descripción del modelo sencilla y local.	Falta de realismo en la mayoría de los casos. Valores discretos de las variables.	Modelo computacional. Filosofía de modelado.

Cuadro 3.1: Resumen y comparación de las principales metodologías de modelado de sistemas granulares.

*If you can't explain it simply
you don't understand it well enough.*

A. Einstein.

CAPÍTULO 4

Modelo de evolución del terreno

Tras la revisión del estado del arte en la simulación y animación por ordenador de los sistemas granulares realizada en el Capítulo 2, se constató una carencia desde el punto de vista del modelado dinámico. Las metodologías utilizadas habitualmente para la simulación interactiva de terreno se basan en modelos heurísticos poco realistas, y los modelos más próximos a la realidad son excesivamente costosos para su utilización en simulaciones en tiempo real.

El principal motivo es la utilización de metodologías procedentes del campo de la animación para el desarrollo de modelos destinados a la simulación interactiva en tiempo real, heredando sus principales limitaciones.

La hipótesis que se presenta en este trabajo es que, por medio de un cambio de metodología de modelado, es posible alcanzar modelos de comportamiento más realistas que permitan su ejecución en entornos de simulación interactivos en tiempo real.

Con el fin de desarrollar esta hipótesis, en el Capítulo 3 se han analizado un conjunto de modelos físicos de comportamiento de los sistemas granulares y de terreno en diferentes situaciones. Se ha presentado también el paradigma computacional de los Autómatas Celulares, utilizado anteriormente por otros au-

tores para el estudio de la dinámica de una pila de arena.

Se dispone, por tanto, de diferentes descripciones teóricas del sistema que se pretende simular y un modelo computacional que se ha empleado anteriormente en la representación de este tipo de sistemas. Con estos elementos, se muestra que es posible desarrollar modelos adecuados para simulaciones interactivas en tiempo real con aplicación a la simulación para entrenamiento.

En este capítulo se propone un modelo dinámico para el comportamiento de los sistemas granulares que permitirá la simulación interactiva del terreno o de una pila de arena. Para ello se hará uso de los modelos fenomenológicos de comportamiento de la superficie del sistema y de la teoría de Mohr-Coulomb descritos en el Capítulo 3.

4.1. Descripción del sistema simulado

El sistema granular sobre el que se va a trabajar está situado sobre una superficie dura. Su evolución se produce a causa de los procesos de fricción interna que rigen el comportamiento de este tipo de sistemas y de las acciones externas ejercidas por el usuario.

El principal proceso que se pretende reflejar en este modelo son las avalanchas de material que tienen lugar en la superficie y que determinan su evolución. Como se ha mostrado en el Capítulo 3, las avalanchas de material en un sistema granular son un proceso a través del cual se mantiene la pendiente del sistema. En este capítulo se abordará únicamente la evolución del sistema como consecuencia de la adición de material en puntos o regiones del mismo. La interacción por contacto se estudiará en el Capítulo 5.

En los sistemas considerados a lo largo del presente trabajo, las fuerzas de cohesión, que actúan impidiendo que las partículas se separen se considera suficientemente baja como para que la superficie del sistema no supere la posición vertical. Es decir, la altura de la superficie sobre cualquier punto puede describirse por medio de un único valor, de forma que no se permita la formación de

cuevas. En las situaciones en las que la cohesión es mayor, es más adecuada una representación del sistema por medio de mecánica del sólido rígido, y no se considerarán.

4.1.1. Modelo geométrico

La base sobre la que se encuentra el sistema granular se supone rectangular, y sobre ella se considera una malla regular, obtenida a partir de la división de los lados del rectángulo en intervalos regulares. A cada uno de los cuadros de esta malla lo denominaremos *celda*. El valor de la altura del sistema sobre el centro de cada una de las celdas da lugar a una función discreta sobre la malla, que representa la superficie del sistema.

Además de la representación geométrica de la superficie del sistema, dada por el mapa de alturas, un conjunto de variables asociadas a cada celda pueden representar otros aspectos de su dinámica, como la velocidad de desplazamiento de material, la cantidad de material en desplazamiento, etc. A continuación se describen los parámetros que determinan tanto la representación geométrica como la dinámica del sistema y las variables que representan el estado del sistema en cada instante.

4.1.2. Parámetros globales

Los parámetros globales del modelo afectan a las propiedades básicas del mismo: las dimensiones del sistema considerado y sus propiedades físicas como sistema granular. En el modelo se consideran los siguientes parámetros globales:

N_x, N_y , son las dimensiones de la malla en celdas, en la dirección del eje x y del eje y respectivamente. La malla tendrá $N_x \times N_y$ celdas.

$\delta x, \delta y$, son las dimensiones que representa una celda en el sistema real, en unidades de longitud. El sistema tendrá unas dimensiones de $N_x \delta x \times N_y \delta y$ unidades cuadradas.

γ , es la densidad del material, considerada constante.

α , es el ángulo de reposo del sistema. Es una propiedad de cada sistema granular, que depende de las propiedades de fricción y cohesión del material.

z_+ , es la velocidad de flujo del material, que depende igualmente de las propiedades del material.

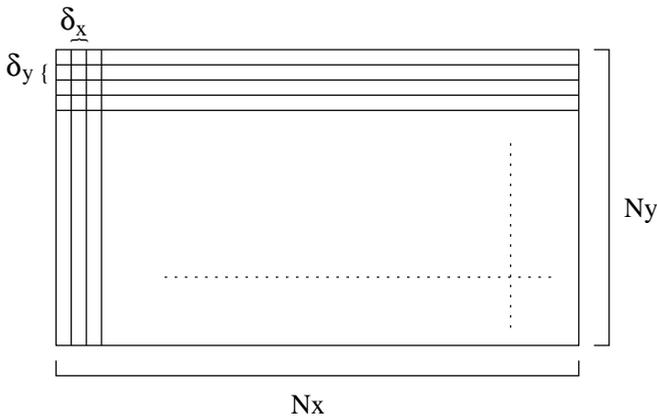


Figura 4.1: Parámetros que describen la geometría del modelo discreto de sistema granular que se propone en este trabajo.

4.1.3. Parámetros y variables de cada celda

Para cada celda (i, j) se considerará como un parámetro del modelo la altura del suelo firme bajo la celda, a la que denotaremos por $B(i, j)$. Este valor se considerará constante a lo largo de la simulación. El estado de cada celda (i, j) estará determinado por el valor de su variable $h(i, j)$ que representa la altura de material sobre su base. La cantidad de material contenida en dicha celda vendrá dada por

$$M = \delta x \cdot \delta y \cdot \gamma \cdot h(i, j)$$

donde δx , δy y γ son los parámetros descritos en el apartado anterior.

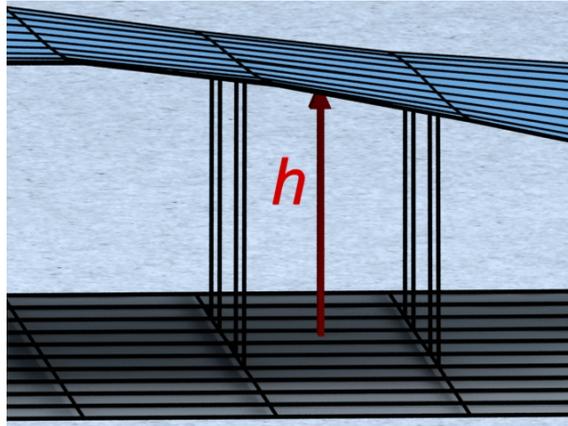


Figura 4.2: El estado del sistema queda determinado a partir del valor de la altura de material sobre el centro de cada celda, h .

4.1.4. Evolución del sistema

De acuerdo con el análisis realizado sobre los modelos existentes de sistema granular se propone la utilización de un modelo basado en la metodología de los Autómatas Celulares. A partir de la descripción del sistema que acabamos de realizar, disponemos de una malla cuadrada sobre la que formalizar el Autómata. Cada celda tiene una variable de estado, y es posible definir una regla de actualización a partir de los estados de las celdas vecinas.

Para ello, en primer lugar se definirá formalmente el Autómata Celular y se obtendrán cada uno de los elementos que lo componen a partir de las propiedades conocidas de los sistemas granulares.

4.2. Modelo formal

Con el fin de definir de una manera clara los elementos con los que se va a trabajar y la notación asociada, a continuación se presenta un modelo formal de Autómata Celular que se empleará para representar el sistema granular. El

Autómata Celular se define como:

$$AC = \langle \mathbf{M}, \mathbf{V}, \mathbf{S}, \mathbf{P}, \varphi, \mathbf{E} \rangle, \quad (4.1)$$

donde

- $\mathbf{M} = \{(i, j) : i, j \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq N_x, 1 \leq j \leq N_y\}$ es el conjunto de posiciones discretas o celdas del Autómata Celular.
- \mathbf{V} es la vecindad de una celda del Autómata.
- $\mathbf{S} = S_h$ es el conjunto de posibles estados de cada celda:
 $S_h = [0, \infty[$ son las posibles alturas de material sobre la base en una celda;
- $\mathbf{P} = P_b$ es el conjunto de parámetros:
 $P_b = [0, \infty[$ son las posibles alturas de la base;
- $\varphi : \mathbf{S}^{|\mathbf{V}|} \rightarrow \mathbf{S}$ es la función de transición.
- $\mathbf{E} = \{f_1, f_2\}$ es el conjunto de aplicaciones que determinan las acciones externas por adición o sustracción de material:
 $f_1 : \mathbb{N} \rightarrow 2^{\mathbf{M}}$, es una función que indica la región de interacción en cada instante de tiempo.
 $f_2 : \mathbf{S} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbf{S}$, es una función que, en cada instante de tiempo $t \in \mathbb{N}$ determina la modificación que se efectúa de las celdas $f_1(t)$.

A continuación se indicará brevemente el significado de cada uno de los elementos que componen el modelo. En el Apéndice B se puede encontrar una descripción más general de la formalización utilizada.

El conjunto de celda \mathbf{M} corresponde a la malla sobre la que se define el modelo. La vecindad \mathbf{V} de una celda $(i, j) \in \mathbf{M}$ se define como el conjunto de celdas que influirán en su evolución. Fijaremos la vecindad del Autómata a partir de la definición de la actualización del mismo.

El conjunto de estados de una celda \mathbf{S} es el conjunto formado por todos los posibles estados que puede tener una celda en un momento dado. Si una celda tiene r variables de estado, y cada celda puede tomar un estado del conjunto S_r ,

entonces el conjunto de estados será $S = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_r$. En nuestro caso, la única variable de estado que se ha definido es la variable h , que tomará un valor real positivo. Por tanto, los posibles estados de h serán $S_h = [0, \infty[$, y el conjunto de estados del Autómata será $S = S_h$. De la misma manera, el conjunto de posibles valores del único parámetro que se ha definido es $\mathbf{P} = P_b = [0, \infty[$, donde P_b son las posibles alturas de la base del sistema $B \in P_b$.

La función de transición, φ , es una función que, dada una celda (i, j) actúa sobre el estado de todas las celdas que pertenecen a su vecindad, y su imagen es otro estado de S , que corresponderá al nuevo estado de la celda (i, j) . Por tanto, si la vecindad de la celda (i, j) está compuesta por $|\mathbf{V}|$ celdas (la propia celda puede ser una de ellas) entonces la función de transición es de la forma

$$\varphi : S^{|\mathbf{V}|} \rightarrow S.$$

Por último, el conjunto de funciones $\mathbf{E} = \{f_1, f_2\}$ permitirá definir la interacción con el sistema por medio de la adición y sustracción de material. A cada paso de la evolución del Autómata, y previamente a la aplicación de la función de transición φ , la función f_1 determina el subconjunto de \mathbf{M} en el que va a modificarse la cantidad de material existente. Sobre este conjunto, la aplicación f_2 actúa modificando dicha cantidad de material, de forma que ésta aumente o disminuya de acuerdo con la acción que se esté realizando.

En los siguientes apartados se irán concretando los elementos que se han descrito para llegar a definir un modelo completo de sistema granular en base a esta formalización.

4.3. Modelo de evolución del sistema

Una vez formalizado el Autómata Celular se define un modelo dinámico que determine la evolución de la superficie de un sistema granular a partir de la descripción que hemos realizado hasta el momento. Recordemos que se pretende la obtención de un modelo con un grado de realismo adecuado a las necesidades de la simulación para entrenamiento y de los entornos de realidad virtual. Por

este motivo, debemos basar la evolución del Autómata en un modelo físico que permita reproducir la evolución de la superficie del sistema de forma realista.

De entre los modelos analizados en el Capítulo 3 debemos descartar aquéllos basados en dinámica molecular por su elevado coste. Por otro lado, observamos que los modelos fenomenológicos permiten descripciones sencillas adecuadas a la formalización que estamos empleando. Consideremos, por tanto, la descripción habitual del comportamiento de la superficie de un sistema granular (Bak et al., 1988; Bouchaud et al., 1995):

Cuando la pendiente de la superficie del sistema en un punto sea mayor que el ángulo de reposo del sistema se produce una avalancha de material que tiende a reducir la pendiente.

Esta descripción de la evolución del sistema corresponde a un sistema continuo, ya que se hace referencia a la pendiente del mismo. En nuestra descripción del sistema necesitamos una aproximación discreta al concepto de pendiente, para formular el mismo principio en términos de las celdas de la malla (véase la Figura 4.3).

Cuando la diferencia entre la altura de una celda y la altura de sus celdas vecinas sea mayor que un cierto umbral, se producirá una descarga de material que tienda a reducir dicha diferencia.

Diferentes autores han resuelto la cuestión de la aproximación a la pendiente utilizando distintas aproximaciones tanto en modelos destinados al estudio de los sistemas granulares (Bak et al., 1988; Christensen et al., 1992; Chen and den Nijs, 2002) como en modelos destinados a la animación de terreno en entornos virtuales (Sumner et al., 1999; Onoue and Nishita, 2005; Zeng et al., 2007). Sin embargo los modelos del primer grupo están destinados a la obtención de propiedades estadísticas del sistema, y no a la simulación realista de la evolución de la superficie. Mientras tanto, los modelos del segundo grupo están destinados a la animación creíble de la deformación del terreno, y no se basan en descripciones suficientemente realistas.

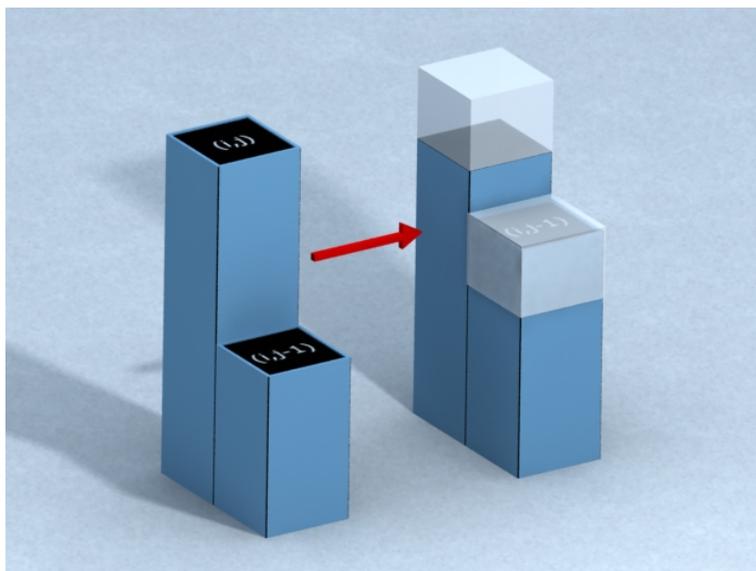


Figura 4.3: Cuando la diferencia de altura entre dos celdas es muy alta, el material se reparte reduciendo ésta diferencia.

De acuerdo con la teoría de Mohr-Coulomb se deduce que en caso de iniciarse una avalancha, ésta se producirá en la dirección de máxima pendiente, ya que en esa dirección es en la que la tensión interna del sistema será máxima. Por tanto, parece fundamental obtener una buena representación del gradiente del sistema, para poder decidir, en primer lugar, si debe producirse una avalancha y, en segundo lugar, en qué dirección debe producirse.

La propuesta que se presenta en este trabajo es considerar la malla y el mapa de alturas asociado como una discretización de la superficie del sistema, y utilizar las aproximaciones habituales en integración numérica para la aproximación del gradiente por medio de diferencias divididas. A continuación se define la función de transición del Autómata Celular a partir de este principio.

4.3.1. La función de transición

La función de transición, $\varphi : S^5 \rightarrow S$, determina el estado de una celda en el siguiente paso de la simulación a partir del estado de la propia celda y de las celdas vecinas en el paso actual.

Para el cálculo de la función de transición se procede de la forma siguiente. Para cada celda $(i, j) \in M$, sea $h \in S_h$, la altura de material en la misma y $h_b \in P_b$, la altura de la base. Sean δx y δy las dimensiones de las celdas. Se calcula en primer lugar la variable auxiliar $h' = h_b + h$, y se obtiene el vector de diferencias divididas entre el valor de h' de la celda y de sus celdas vecinas, por medio de

$$Dh' = (h'_x, h'_y) = \left(\frac{h'(i+1, j) - h'(i, j)}{\delta x}, \frac{h'(i, j+1) - h'(i, j)}{\delta y} \right) \quad (4.2)$$

A continuación, se obtiene el valor de $\beta = \arctan(|Dh'|)$, y al que denominaremos *ángulo local*. Cuando la pendiente local, β , sea mayor que el ángulo crítico del sistema, α , se producirá una transición de acuerdo con la siguiente regla.

$$\begin{aligned} h(i, j) &\leftarrow h(i, j) - z_+ \cdot (h'_x(i, j) + h'_y(i, j)) \\ h(i+1, j) &\leftarrow h(i+1, j) + z_+ \cdot h'_x(i, j) \\ h(i, j+1) &\leftarrow h(i, j+1) + z_+ \cdot h'_y(i, j) \end{aligned} \quad (4.3)$$

donde z_+ es un parámetro del sistema que determina la cantidad de material que se desplaza a causa de la avalancha, en función de la pendiente del sistema.

El modelo propuesto en este apartado es una generalización del modelo original de Bak, Tang y Wiesenfeld (Bak et al., 1988), en el que los posibles valores de la variable del sistema son continuos en lugar de tomar únicamente un conjunto discreto de valores¹. Por otra parte, cuando se produce una avalancha, la dinámica del sistema en las celdas que se ven afectadas por la misma puede considerarse como una discretización del modelo BCRE propuesto por Bouchaud et

¹El hecho de tomar un conjunto de valores continuo para los estados de la variable del Autómata puede suscitar ciertos reparos entre los puristas de los Autómatas Celulares. En el ámbito de este trabajo no consideramos de especial relevancia el hecho de si el modelo es o no un Autómata Celular en sentido estricto. No obstante, para una discusión más profunda al respecto puede consultarse el Apéndice D.

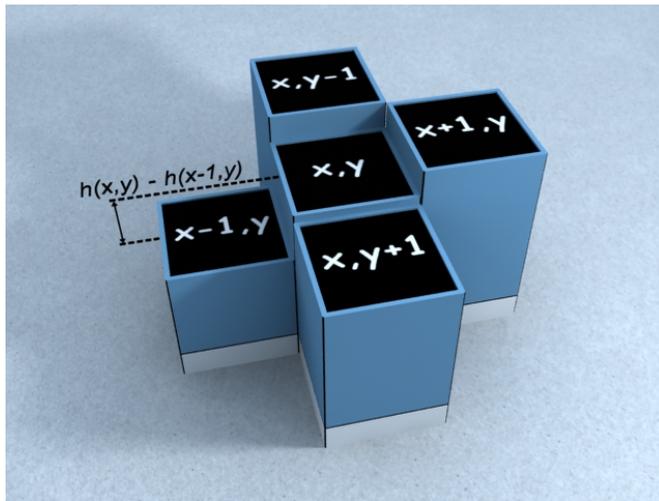


Figura 4.4: Elementos que intervienen en la regla de actualización.

al. (Bouchaud et al., 1994). Volveremos sobre este detalle más adelante en este capítulo.

Este primer modelo se apoya en la propiedad de la existencia del ángulo de reposo del sistema que se obtiene a partir de la teoría de estabilidad de taludes; la regla de actualización del Autómata determina que si la pendiente local del sistema supera dicho ángulo en alguna celda, entonces se produce una avalancha en la que la arena empieza a deslizarse por la pendiente, haciendo que la pendiente baje de nuevo del valor crítico.

4.3.2. Vecindad

De acuerdo con el criterio que se emplea para determinar la actualización o no de una celda, es necesario conocer la altura de las celdas próximas para poder obtener una aproximación de la pendiente en cada celda. Cada posible forma de obtener esta aproximación a la pendiente dará lugar a una formulación diferente de la función de actualización del Autómata, y a una vecindad diferente, en función de cuáles de las celdas vecinas se empleen en dicho cálculo.

En la formalización del modelo que se ha presentado la pendiente se obtiene a través del gradiente de la función de alturas. Este gradiente se calcula por medio de diferencias finitas, y en concreto, por medio de las diferencias finitas laterales, que aproximan la derivada de una función en un punto x_0 como

$$f'(x_0) \simeq \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

donde Δx es el tamaño de los intervalos en la discretización.

Esto da lugar a la utilización de la vecindad para la celda (i, j) formada por las celdas $(i + 1, j)$ e $(i, j + 1)$. En caso de utilizarse diferencias centradas para el cálculo del gradiente

$$f'(x_0) \simeq \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x}$$

la vecindad utilizada es la conocida como Vecindad de von Neumann. Figura 4.5.

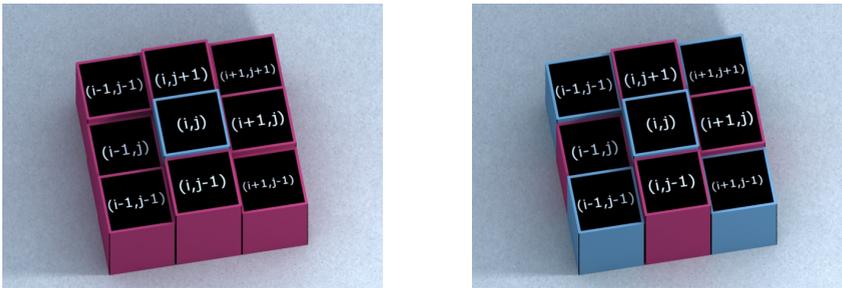


Figura 4.5: (a) Vecindad de Moore. (b) Vecindad de Von Neumann.

Dado que, en cualquiera de los dos casos la vecindad de von Neumann cubre las celdas necesarias para obtener la actualización del Autómata, sin pérdida de generalidad definiremos la vecindad del Autómata propuesto como la vecindad de von Neumann. Por tanto, por la celda $(i, j) \in \mathbb{M}$, su vecindad vendrá dada por

$$\mathbf{V} = \{(i, j), (i - 1, j), (i + 1, j), (i, j - 1), (i, j + 1)\}.$$

4.3.3. Adición y sustracción de material

Con el fin de poder simular la adición y sustracción de material se consideran las funciones de acciones externas $\mathbf{E} = \{f_1, f_2\}$.

A cada paso de la evolución del Autómata, y previamente a la aplicación de la función de transición φ , la función f_1 determina el subconjunto de M en el que va a modificarse la cantidad de material existente.

Sobre este conjunto, la aplicación f_2 actúa modificando dicha cantidad de material, de forma que ésta aumente o disminuya de acuerdo con la acción que se esté realizando.

Durante una simulación interactiva en tiempo real, el valor de la imagen de f_2 se obtiene por medio de la captura de las acciones del usuario. A modo de ejemplo, si consideramos la descarga de material por medio de una tolva sobre un sistema granular, $f_1(t)$ será el conjunto de celdas bajo la salida de la tolva, cuando ésta esté descargando material, y el conjunto vacío cuando la tolva esté vacía.

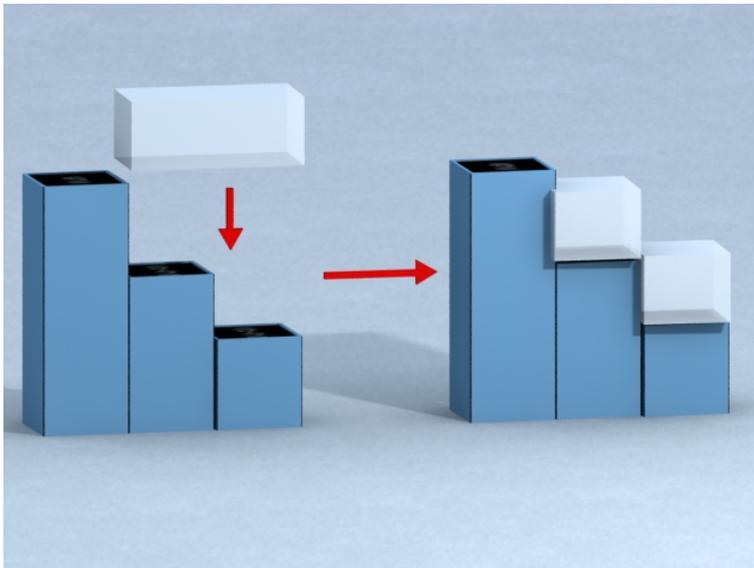


Figura 4.6: Adición y sustracción de material.

4.3.4. Influencia de la geometría de la base del Autómata Celular

Otra de las características importantes a tener en cuenta en la evolución del sistema granular es el modo en que el sistema se comporta en función de la forma de la base sobre la que se sitúa. Por ejemplo, la evolución del sistema será distinta si estamos descargando material a través de una tolva, sobre una superficie inclinada o en el interior de un silo cilíndrico.

Los modelos que se han presentado a lo largo de este trabajo consideran un Autómata abierto, de manera que las celdas situadas en la frontera del Autómata tienen altura nula. De esta manera, cuando el material alcanza el borde de la malla abandona el sistema.

Sin embargo, la mayoría de actividades industriales que involucran sistemas granulares trabajan con elementos como tolvas, silos, volquetes, etc... de manera que el material se mantiene confinado dentro de un volumen cerrado.

De la misma manera pueden considerarse situaciones en las que el sistema granular se forme sobre terreno irregular como por ejemplo en simulaciones de maquinaria de obra civil o en modelos de desprendimientos de tierra o aludes.

Gracias a la inclusión de la base del sistema $B(i, j)$ en el modelo dinámico es posible considerar estas situaciones. El valor de este parámetro se utiliza durante la actualización de las celdas del Autómata para determinar la altura mínima que puede alcanzar una celda.

Dado que el cálculo de la evolución se realiza a partir de las alturas de la superficie del sistema, no se tiene en cuenta la cantidad de material que queda en una celda. Antes de realizar una descarga de material se comprueba si la cantidad sustraída de la celda de origen

$$\Delta h = z_+ \cdot (h'_x(i, j) + h'_y(i, j))$$

es mayor a la cantidad disponible en la celda h . De ser así, la cantidad retirada será Δh , vaciando completamente la celda, pero evitando que resulte con un valor negativo. La Figura 4.7 muestra un ejemplo de sistema granular en el que

la base no es un plano horizontal.

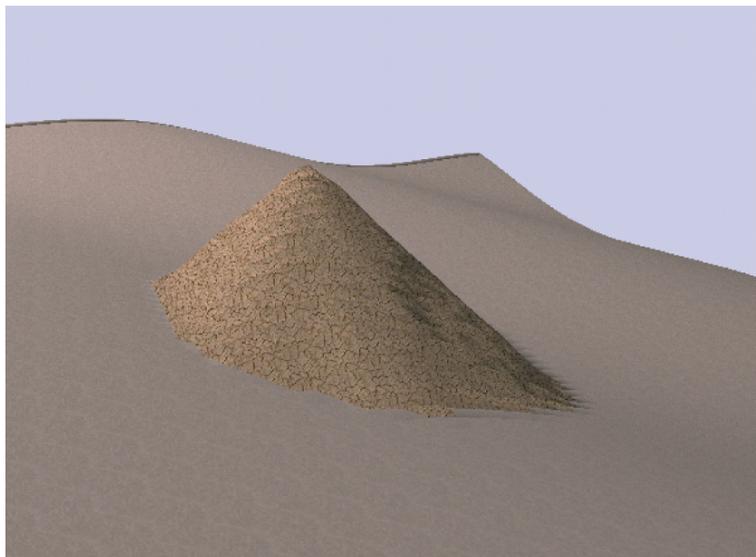


Figura 4.7: Resultado de la creación de un montón sobre una base irregular.

4.4. Validación y análisis del modelo

Una vez presentado el modelo es necesario analizar el significado de los parámetros del mismo y de su influencia en la dinámica del sistema. Este análisis permitirá, por una parte, determinar los valores de estos parámetros a partir de las propiedades de un sistema real y, por otra parte, cuantificar las diferencias entre el modelo propuesto y el sistema real o, al menos, otro modelo establecido que pueda servir como referencia.

En primer lugar presentaremos una deducción del valor de la pendiente crítica del sistema a partir de la teoría de Mohr-Coulomb. A continuación, analizaremos la evolución del modelo y la compararemos con la del sistema representado por medio del modelo BCRE. Este análisis nos proporcionará información adicional sobre el papel del parámetro de velocidad de flujo de material z_+ y de cómo debe ajustarse en función de las necesidades de la simulación.

4.4.1. Cálculo de la pendiente crítica. Factor de estabilidad

Por medio de la teoría de estabilidad de pendientes y taludes es posible determinar el ángulo máximo al que se sostendrá un terraplén o talud en función de las propiedades del material. El cálculo puede hacerse por medio de diferentes métodos, incluyendo el uso de elementos finitos. Sin embargo, la teoría de equilibrio límite proporciona modelos sencillos adecuados para la utilización en discretizaciones del suelo como la que se emplea en este trabajo.

En el caso particular de materiales granulares como los estudiados aquí, el modelo resulta especialmente sencillo de aplicar utilizando un análisis de estabilidad de un talud indefinido (Walsh, 2003). Este análisis parte de la suposición de que la fractura se produce por una línea paralela a la superficie, de forma que se produce un flujo de material a lo largo ésta. El flujo se produce por el deslizamiento de las partículas individuales por la pendiente.

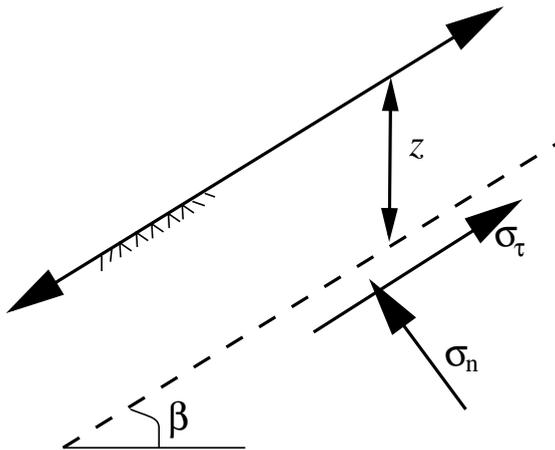


Figura 4.8: Modelo de estabilidad de un talud indefinido.

Para calcular el valor a partir del cual se producirá el deslizamiento del material se utiliza el método del equilibrio límite a lo largo de la pendiente. Se considera una capa de espesor z , en una pendiente con un ángulo respecto de la horizontal β .

En un tramo de longitud unidad sobre la pendiente, en el interfaz que se encuentra a profundidad z se producen una tensión normal σ_n y una tensión tangencial σ_t :

$$\sigma_n = W \cos \beta; \quad \sigma_t = W \sin \beta$$

donde

$$W = \gamma z \cos \beta$$

y γ es la densidad del material.

El coeficiente de estabilidad se obtiene como

$$F = \frac{\tan \phi}{\tan \beta}$$

donde ϕ es el ángulo de fricción interna del material. Si este coeficiente F es mayor que 1, entonces la pendiente es estable, mientras que en el caso de que el valor de este coeficiente sea menor que 1 el sistema no será estable y se producirá un corrimiento de material a lo largo de la superficie. Este coeficiente nos permite obtener, a partir del valor del ángulo de fricción interna del sistema, el ángulo máximo que puede tener la pendiente antes de producirse una avalancha. Este ángulo corresponde al parámetro α del modelo propuesto (4.3).

En este modelo de pendiente indefinida únicamente queda indeterminado el valor de la profundidad del interfaz de deslizamiento. De acuerdo con algunos trabajos sobre el comportamiento de esta capa de material deslizante, el espesor de la misma depende generalmente de las dimensiones de los granos del material (Boutreux et al., 1998). Se considerará este valor como un parámetro del modelo, que se obtendrá a partir de las propiedades físicas del material a partir de los resultados de estos estudios previos.

4.4.2. Consistencia con el BCRE

El modelo propuesto en (4.3) se planteó a partir de los modelos BCRE, presentados por Bouchaud et al. (Bouchaud et al., 1994), proporcionando una discretización del modelo continuo de la evolución de la superficie de un sistema granular que se describió en el Apartado 3.4.

Con el fin de establecer la relación entre ambos modelos, vamos a analizar su evolución en un punto dado (x_i, y_j) , durante un intervalo de tiempo δt , correspondiente al intervalo entre dos actualizaciones del Autómata Celular. Se mostrará que, supuestas ciertas simplificaciones en el modelo BCRE y con una correcta elección del parámetro z_+ la diferencia entre ambos modelos tiende a cero con la longitud del intervalo temporal y el tamaño de las celdas de la discretización espacial.

Evolución de una celda del Autómata Celular

La evolución del sistema tras el intervalo de tiempo δt en el modelo discreto consiste en una actualización del valor de la variable de altura en una celda, de acuerdo con la regla de actualización especificada. La actualización de la altura de la celda (i, j) dependerá de la actualización de la propia celda, y de la actualización de sus celdas vecinas $(i + 1, j)$ y $(i, j + 1)$, ya que estas últimas pueden modificar la altura de la celda (i, j) al actualizarse.

En una situación en la que el comportamiento del material se encuentra en la fase de flujo (cuando las celdas están cambiando su altura) las tres celdas se actualizarán. En este caso, la diferencia entre la altura de la celda (i, j) antes y después de una actualización de todo el sistema será la siguiente

$$\begin{aligned} \delta h_C &= h(t + \delta t) - h(t) = \\ &= z_+ (\partial_x h(i, j) + \partial_y h(i, j) - \partial_x h(i + 1, j) - \partial_y h(i, j + 1)) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Evolución del modelo BCRE

Consideremos ahora el modelo BCRE. En primer lugar, de acuerdo con las suposiciones que se han llevado a cabo en el desarrollo del modelo, consideraremos que el espesor de la capa deslizante r es constante en un entorno abierto A alrededor del punto (x_i, y_j) , centro de la celda (i, j) del Autómata. De acuerdo con la ecuación (3.21), en (x_i, y_j) la variación de la altura total del sistema,

$h = h_r + h_s$, vendrá dada por

$$\partial_t h = \partial_t h_r + \partial_t h_s = v \nabla (h_r \nabla h_s). \quad (4.5)$$

Dado que el valor de h_r se supone constante en un entorno de (x_i, y_j) , es posible extraer h_r del operador divergencia, obteniendo

$$\partial_t h = v h_r \nabla (\nabla h_s) = v h_r \nabla (\nabla h) = v h_r (\partial_{xx}^2 h + \partial_{yy}^2 h). \quad (4.6)$$

Consideremos ahora el desarrollo en serie de Taylor de la variable $h(x_i, y_j, t)$ como función del tiempo. Si denotamos como δh_B el incremento del valor de h de acuerdo con el modelo BCRE, obtenemos

$$\begin{aligned} \delta h_B = h(t + \delta t) - h(t) &= \partial_t h \delta t + R(\delta t)^2 \\ &= \delta t v h_r (\partial_{xx}^2 h + \partial_{yy}^2 h) + R(\delta t)^2. \end{aligned} \quad (4.7)$$

De manera similar, el desarrollo en serie de Taylor de $\partial_x h(\cdot, y_j, t)$ considerada como función de x y de $\partial_y h(x_i, \cdot, t)$ considerada como función de y , resultan en

$$\partial_{xx}^2 h(x_i, y_j) = \frac{\partial_x h(x_{i+1}, y_j) - \partial_x h(x_i, y_j)}{x_{i+1} - x_i} + R_1(x_{i+1} - x_i) \quad (4.8)$$

$$\partial_{yy}^2 h(x_i, y_j) = \frac{\partial_y h(x_i, y_{j+1}) - \partial_y h(x_i, y_j)}{y_{j+1} - y_j} + R_2(y_{j+1} - y_j). \quad (4.9)$$

A partir de (4.7), y suponiendo que $x_i - x_{i-1} = y_j - y_{j-1} = d$

$$\begin{aligned} \delta h_B = h(t + \delta t) - h(t) &= \delta t v h_r \left(\frac{\partial_x h(x + d, y) - \partial_x h(x, y)}{d} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial_y h(x, y + d) - \partial_y h(x, y)}{d} + (R_1 + R_2)d \right) \\ &\quad + R(\delta t)^2. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Convergencia de los dos modelos

Las expresiones (4.4) y (4.10) proporcionan, respectivamente, la variación del modelo propuesto, δh_C , y una aproximación, basada en diferencias finitas, de la

variación del modelo BCRE simplificado, δh_B , tras el intervalo de tiempo que transcurre entre dos actualizaciones del Automata δt .

A partir del desarrollo anterior, tomando

$$z_+ = \frac{\delta t v h_r}{d} \quad (4.11)$$

entonces la diferencia entre las expresiones (4.4) y (4.10) resulta

$$\delta h_C - \delta h_B = \delta t v h_r (R_1 + R_2) d + R (\delta t)^2 \quad (4.12)$$

que expresa la diferencia entre la evolución entre ambos modelos en el punto (x_i, y_j) , centro del nodo de la malla (i, j) .

Por tanto, en una situación en la que el espesor de la capa deslizante de material en el modelo BCRE es constante en un entorno de un punto (x_i, y_j) , y en la que, por tanto, las tres celdas (i, j) , $(i + 1, j)$ y $(i, j + 1)$ se encuentran activas (i.e. en la celda (i, j) el sistema se encuentra en la fase de flujo), el modelo discreto propuesto en (4.3) equivale a una discretización consistente del modelo continuo (4.6).

Es importante destacar que la suposición de una altura constante o, al menos, con una variación pequeña, no es gratuita. El tipo de sistemas en los que nos centramos se modelan bien por medio del modelo de estabilidad de taludes empleado en el Apartado 4.4.1. Este modelo, utilizado habitualmente en geomecánica, considera la profundidad de la capa en movimiento como constante a lo largo de toda la pendiente.

Analicemos también el valor obtenido para z_+ . En primer lugar, la obtención de la expresión (4.11) permite una correcta parametrización del modelo a partir de parámetros de otros modelos bien conocidos, y para los que se conocen valores aproximados (Wong, 2001). De esta forma, además de validar analíticamente el comportamiento del modelo propuesto, se introducen las herramientas para llevar a cabo simulaciones sobre materiales concretos.

Esta elección de z_+ involucra tanto el parámetro de discretización temporal δt como el parámetro de discretización espacial, d . La introducción de este segundo parámetro garantiza la suavización de las irregularidades que puedan aparecer

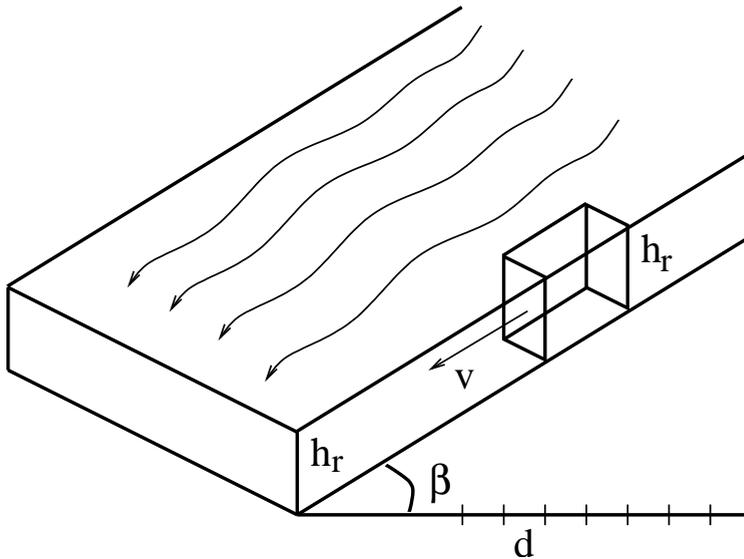


Figura 4.9: Variables involucradas en la expresión de z_+ .

sobre el sistema, de acuerdo con el comportamiento observado en el modelo BCRE (Bouchaud et al., 1995) como en el modelo precursor de Hwa y Kardar (Hwa and Kardar, 1992).

De hecho, al introducir la distancia entre posiciones discretas como numerador, el resultado es que el modelo se reduce a una versión no lineal del operador de Laplace ($\partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2$). La no linealidad proviene de la utilización de un umbral por debajo del cual la solución se anula. En el modelo resultante de tomar z_+ según la expresión (4.11) el umbral es el encargado de la conservación del ángulo de reposo del sistema, mientras que el modelo de difusión constituido por la descarga de material garantiza una solución suave.

4.4.3. Variación del parámetro de descarga

En el Apartado 4.4.2 se ha deducido un valor para z_+ que permite garantizar que bajo ciertas circunstancias el comportamiento del modelo es similar al de otros modelos ya existentes. No obstante, esta elección de z_+ da lugar también

a la aparición de ciertos comportamientos de la forma de la superficie que no concuerdan con las observaciones en sistemas reales. Si en una pendiente se produce una avalancha es de esperar que transcurran varios segundos antes de que el material que está deslizando alcance la base de la misma. Sin embargo, en el modelo que resulta de fijar z_+ de acuerdo con (4.11) el efecto de la avalancha será apreciable en la base tras un número fijo de pasos.

De acuerdo con la expresión (4.6) la evolución de la superficie a escala menor corresponde a un modelo de difusión, que hace que la dispersión de las variaciones de la superficie desaparezcan antes de que sea posible apreciar una propagación de las mismas. Para conseguir un control sobre la velocidad de la propagación de irregularidades en la superficie es necesario sustituir el modelo de difusión por un modelo de transporte como la ecuación de ondas. Este objetivo puede conseguirse suprimiendo d del denominador en la expresión de z_+ (4.11). Sin embargo, en este caso la difusión de las irregularidades, también observada en sistemas reales, no sería tan apreciable.

Para mantener ambos efectos, vamos a introducir una expresión de z_+ que variará según el estado local del sistema. Cada celda utilizará un valor diferente del coeficiente de descarga, en función del estado de las celdas vecinas. En aquellas celdas en las que el ángulo β sea mucho mayor que el ángulo crítico α , el modelo utilizará el valor de z_+ del Apartado 4.4.2, permitiendo una mayor difusión del material, mientras que en las celdas en las que el ángulo de la superficie sea próximo al ángulo crítico, $\beta \simeq \alpha$, se utilizará $\hat{z}_+ = z_+d$. Por medio de un razonamiento similar al desarrollado en el Apartado 4.4.2, es posible probar que en este caso el modelo de Autómata Celular es una discretización de la ecuación de ondas de orden uno

$$u_t + au_x = 0.$$

Si deseamos que el comportamiento del sistema a partir de un determinado valor de $\beta = \eta$, $\alpha < \eta < \frac{\pi}{2}$ sea el del modelo que se obtiene por medio de z_+ según la expresión (4.11), puede tomarse cualquier función monótona creciente, continua, $\hat{z}_+(x) : [\alpha, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ que cumpla $\hat{z}_+(\alpha) = z_+d$, y $\hat{z}_+(x) = z_+$, $\forall x \in [\eta, \frac{\pi}{2}[$.

Esta modificación introduce un cambio en la función de transición φ en la que debe sustituirse z_+ por la función \hat{z}_+ . Si la elección de \hat{z}_+ se realiza por

medio de alguna familia de funciones, entonces se está introduciendo también un nuevo conjunto de parámetros, que determinarán la expresión particular de dicha función. La función de transición es similar a la presentada anteriormente, pero utilizando en este caso \hat{z}_+

$$\begin{aligned}
 h(i, j) &\leftarrow h(i, j) - \hat{z}_+(\beta) \cdot (h'_x(i, j) + h'_y(i, j) - 2\alpha) \\
 h(i + 1, j) &\leftarrow h(i + 1, j) + \hat{z}_+(\beta) \cdot (h'_x(i, j) - \alpha) \\
 h(i, j + 1) &\leftarrow h(i, j + 1) + \hat{z}_+(\beta) \cdot (h'_y(i, j) - \alpha)
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

4.4.4. Elección de los parámetros de simulación

En el Apartado 4.3 presentamos un modelo dinámico para la evolución de la superficie de un sistema granular. Este modelo se basaba en un conjunto reducido de parámetros, que se dejaban indeterminados. En este Apartado hemos revisado estos parámetros, analizando su significado físico y deduciendo, a partir de las propiedades básicas de los sistemas granulares, expresiones que permiten su ajuste, por medio de otros parámetros más básicos de las propiedades físicas del sistema granular considerado.

De esta manera es posible llevar a cabo una simulación de un sistema granular a partir de la información sobre sus propiedades, que pueden encontrarse en diferentes textos especializados (Shen and Kushwaha, 1998). Este análisis se utilizará posteriormente en el Capítulo 7 para la realización de pruebas de validación del modelo más exhaustivas.

4.4.5. Propiedades estadísticas del sistema

Una de las propiedades bien conocidas de los modelos de pila de arena es el echo de tienen un comportamiento Crítico Autoorganizado. Esto implica que el espectro de frecuencias $S(f)$ del tamaño de las avalanchas es inversamente proporcional al valor de f , $S(f) = f^{-\alpha}$, de forma que la frecuencia de avalanchas de gran tamaño es muy pequeña. En el Apéndice C se pueden encontrar más detalles sobre los sistemas Críticos Autoorganizados.

Si se confirma la existencia de una relación de proporcionalidad inversa entre el tamaño de las avalanchas y su frecuencia, esta propiedad permitirá la simulación de un sistema granular con un crecimiento del coste lineal respecto al número de celdas por unidad de longitud.

Se ha desarrollado un conjunto de experiencias destinadas a determinar la distribución de frecuencia de las avalanchas de acuerdo con su tamaño. Para ello, se ha realizado el experimento habitual en este tipo de comprobaciones (Bak et al., 1988) que consiste en utilizar una pendiente y depositar cantidades aleatorias de material en la parte superior. Para conocer la posible dependencia de las propiedades del sistema respecto a sus dimensiones, el experimento se ha realizado para pendientes de diferente longitud y se han obtenido resultados similares.

Resultados

Los resultados obtenidos por medio de los experimentos muestran una relación clara entre el tamaño de las avalanchas y su frecuencia. La Figura 4.10 muestra la relación entre el logaritmo de las dimensiones de las avalanchas y el logaritmo de su frecuencia.

La existencia de una relación lineal entre ambos valores, con un coeficiente de correlación $r = 0,985$ indica que el espectro de frecuencias es de la forma $S(f) = f^{-\alpha}$, donde α es la pendiente de la recta de regresión obtenida. Como indicábamos, esta propiedad es relevante desde el punto de vista del coste computacional asociado a la simulación del sistema, como veremos detalladamente en el Capítulo 7.

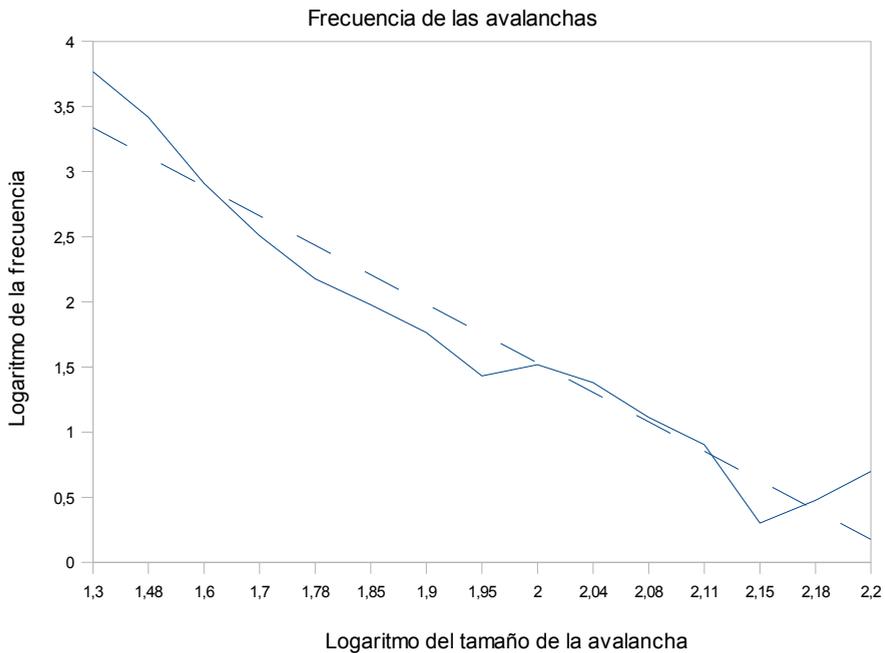


Figura 4.10: Relación entre el tamaño de las avalanchas y su frecuencia. La regresión muestra claramente un a relación de tipo $1/f$ indicadora de la ausencia de escala en las propiedades estadísticas del sistema.

4.5. Introducción de inercia en el modelo

El proceso de fractura e inicio de una avalancha, descrito en el Apartado 4.4.1, está causado por la energía potencial de las partículas. De esta forma, el ángulo de reposo del sistema depende de la capacidad de la fricción interna del material para impedir el inicio del movimiento de las partículas, de acuerdo con la ley de fricción seca de Coulomb.

Sin embargo, durante una avalancha formada por multitud de partículas que se deslizan por la pendiente, a la energía potencial de las partículas en reposo hay que sumar la energía cinética que reciben a causa de las colisiones con la capa deslizante. Por este motivo, es razonable esperar que el ángulo que alcanza

el sistema tras una avalancha sea menor que el ángulo de reposo del sistema obtenido a partir de la fricción interna del mismo.

Diversos autores se han planteado esta hipótesis, proponiendo diferentes modelos de sistemas granulares con inercia (Prado and Olami, 1992; Goles et al., 1998; Nerone and Gabbanelli, 2001). Estos modelos han podido reproducir comportamientos que no se apreciaban en los modelos sin inercia, y sí en los sistemas reales, confirmado la existencia de una influencia en la dinámica del sistema.

De acuerdo con diferentes estudios, se han observado dos efectos principales de la inercia en un sistema granular. El primero es, como ya se ha indicado, un ángulo de reposo menor que el definido por la ley de Mohr-Coulomb, cuando finaliza una avalancha. El segundo es lo que se conoce como *corrección logarítmica* en la forma de la pendiente (Alonso and Herrmann, 1996). En los sistemas reales se ha observado que las pendientes no adquieren una forma completamente recta, sino que en la base siguen una curva aproximadamente logarítmica.

A continuación se propone una modificación en el modelo de pila de arena propuesto en el Apartado 4.3 que permitirá considerar el efecto de la inercia en las avalanchas de material que se producen en el sistema granular. Para ello se introduce una nueva variable en el modelo y se modifica la función de transición del Autómata Celular.

4.5.1. Modelo de pila de arena con inercia

Para adaptar el modelo de evolución de la pila de arena descrito en los Apartados 4.2 y 4.3 vamos a basarnos en los principios utilizados en los modelos anteriores de Goles et al. (Goles et al., 1998). En este modelo se modifica un Lattice Model, con una descripción similar al Modelo de Pila de Arena de Bak et al. (Bak et al., 1988). En el modelo con inercia se tiene en cuenta si una celda está en movimiento o no, y por medio de una función aleatoria se permite que siga avanzando aunque la pendiente local esté por debajo de la pendiente crítica del sistema. A partir de este sencillo esquema la corrección logarítmica de la pendiente (Alonso and Herrmann, 1996) surge de forma natural.

En nuestro caso, proponemos un modelo determinista, pero basado en los mismos principios. En el modelo propuesto en el Apartado 4.3 las avalanchas se inician y se detienen utilizando el mismo ángulo crítico α . El modelo que se propone a continuación considera un segundo ángulo de reposo $\alpha_I < \alpha$ que se utilizará para detener las avalanchas. Para la descripción del modelo utilizaremos la misma formalización presentada en el Apartado 4.2, indicando únicamente los elementos de (4.1) que se van a modificar.

Variables del sistema

En primer lugar, para determinar el estado de una celda debemos añadir una variable de estado que nos indicará si el material de dicha celda se encuentra fluyendo o no. Para ello introduciremos una variable booleana I que tomará únicamente los valores verdadero (1) o falso (0). Por tanto, el conjunto de estados del Autómata quedará definido como

$$\mathbf{S} = S_h \times S_I = [0, \infty[\times\{0, 1\}, \quad (4.14)$$

y el estado de la celda (i, j) quedará determinado por el binomio

$$S = (h(i, j), I(i, j)) \in \mathbf{S}.$$

Como alternativa a esta definición del estado de una celda, la variable que indica su inercia I puede tomarse como un valor real positivo que indique alguna medida de la energía cinética del material que está en movimiento. No obstante, aquí se mantendrá el modelo booleano.

Parámetros del sistema

De acuerdo con el modelo de inercia se ha esbozado, el sistema debe considerar un nuevo parámetro global α_I que representa el ángulo de reposo del sistema cuando se produce una avalancha. El conjunto de parámetros no se modificará. En caso de considerarse la posibilidad de que la variable I tome un valor real positivo, este parámetro podría convertirse en una función $\alpha_I(I)$ que dependería de esta variable del sistema.

La función de transición

Una vez revisados los parámetros y variables del sistema, debemos indicar la forma en que se va a calcular la dinámica de las celdas del Autómata. Esto supone la modificación de la función de transición. Como hemos indicado, los elementos del Autómata que no se modifican expresamente permanecen como en el modelo del Apartado 4.3, con lo que la vecindad permanece sin cambios, y la función de transición sigue siendo $\varphi : S^5 \rightarrow S$.

En el modelo sin inercia la evolución del sistema se obtenía comparando el ángulo de la pendiente β con el ángulo crítico del sistema α . En el nuevo modelo, cuando se esté calculando la evolución de una celda, antes de llevar a cabo la comparación que decidirá si se debe producir intercambio de material se comprobará el estado de la variable I . En caso de que sea $I = 0$, indicará que la celda no tiene material en movimiento, y se empleará el ángulo crítico α , determinado por la ley de Mohr-Coulomb. En caso de que, por el contrario, sea $I = 1$, indicando que hay material en movimiento sobre la celda, se empleará el ángulo crítico α_I .

Analicemos ahora la cantidad de material descargado. En el modelo sin inercia, la cantidad de material que se desplaza de una celda a la celda vecina viene determinado por $z_+ \beta > z_+ \alpha$. Este comportamiento, habitual en los modelos de pila de arena, tiene el inconveniente de dar lugar a una discontinuidad en el flujo de material; cuando el ángulo de la pendiente baja del valor α el flujo de material pasa de $z_+ \tan \beta$ a cero en un sólo paso de la evolución del sistema. Este comportamiento no es coherente con la idea de la introducción de inercia, pues supone una pérdida repentina de la energía cinética del sistema.

Por tanto, en el nuevo modelo introduciremos otra modificación además de la comprobación del estado de la variable I ; la cantidad de material descargado dependerá de la diferencia entre el ángulo del sistema y el ángulo de reposo $\beta - \alpha_I$. A continuación se describe el cálculo de la evolución del sistema por medio de la función de transición.

Para cada celda $(i, j) \in \mathbf{M}$, sea $h \in S_h$, la altura de material en la misma, $h_b \in P_b$, la altura de la base e $I \in S_I$. Sean δx y δy las dimensiones de las

celdas. Al igual que en caso anterior se calcula la variable auxiliar $h' = h_b + h$, y se obtiene el vector de diferencias divididas entre el valor de h' de la celda y de sus celdas vecinas:

$$Dh' = (h'_x, h'_y) = \left(\frac{h'(i+1, j) - h'(i, j)}{\delta x}, \frac{h'(i, j+1) - h'(i, j)}{\delta y} \right) \quad (4.15)$$

obteniéndose a continuación $\beta = \arctan(|Dh'|)$. Si $I = 0$ se comprueba si $\beta > \alpha$. En caso contrario, se comprueba si $\beta > \alpha_I$. Si la comprobación correspondiente al valor de I resulta positiva, entonces se calcula el valor de $\hat{z}_+(\beta)$ producirá una transición de acuerdo con la siguiente regla.

$$\begin{aligned} h(i, j) &\leftarrow h(i, j) - \hat{z}_+(\beta) \cdot (h'_x(i, j) + h'_y(i, j) - 2\alpha_I) \\ h(i+1, j) &\leftarrow h(i+1, j) + \hat{z}_+(\beta) \cdot (h'_x(i, j) - \alpha_I) \\ h(i, j+1) &\leftarrow h(i, j+1) + \hat{z}_+(\beta) \cdot (h'_y(i, j) - \alpha_I) \end{aligned} \quad (4.16)$$

La utilización de α_I en el cálculo de la cantidad de material desplazado, independientemente del valor de I , permite además reproducir el carácter discontinuo de la formación de una avalancha por fractura. Al inicio de la avalancha la cantidad de material que empieza a fluir es estrictamente positivo, incluso en el caso en que la pendiente crítica sea sólo una cantidad diferencial por encima de α .

4.5.2. Análisis del comportamiento del modelo

Tras el cambio introducido en el modelo cabe plantearse hasta que punto la dinámica descrita por (4.16) sigue mostrando un comportamiento similar al que se observa en el modelo BCRE.

Por medio de un análisis similar al llevado a cabo en el Apartado 4.4.2 es posible demostrar que para valores de β próximos a α el comportamiento del modelo discreto que se acaba de presentar sigue la misma dinámica que la capa estática h_s del modelo BCRE, consistente en un modelo de transporte.

4.6. Conclusiones

Por medio de la combinación de las propiedades de los sistemas granulares con el modelo computacional de los Autómatas Celulares, se ha presentado un modelo que permite la simulación de una pila de arena de forma realista.

El nuevo modelo se basa en el conocido modelo BCRE que describe la evolución de la superficie del sistema y se presenta como una discretización del mismo. A lo largo de este capítulo se ha mostrado la consistencia del modelo discreto con la base teórica que lo motiva.

Con el fin de facilitar la aplicación del modelo a casos prácticos, se han analizado los parámetros z_+ y α , para determinar la forma de ajustarlos a partir de las propiedades del sistema simulado. Este análisis ha permitido además proponer una variación del modelo que permite un mayor control sobre la velocidad de propagación de las avalanchas.

Por último se ha ofrecido una variación del modelo que permite considerar el efecto de la inercia en el modelo de avalanchas gracias a la introducción de un segundo ángulo crítico en el sistema, que se utiliza para decidir la parada de una avalancha.

De acuerdo con los objetivos planteados, hemos conseguido presentar un modelo de sistema granular basado en las propiedades físicas del sistema, permitiendo la realización de simulaciones realistas. En los próximos capítulos continuaremos desarrollando este modelo con el fin de alcanzar los objetivos tanto en el proceso de interacción con otros elementos de la simulación como de mostrar su eficiencia.

*If the facts don't fit the theory,
change the facts.*

A. Einstein.

CAPÍTULO 5

Interacción del terreno con una herramienta

5.1. Introducción

En el Capítulo 4 se presenta un modelo de evolución realista (4.3) y (4.16) que permite la simulación de un sistema granular, así como la adición y sustracción de material del mismo. Sin embargo no es posible la interacción dinámica con el sistema por medio de la aplicación de fuerzas sobre el mismo, así como de la obtención de fuerzas de reacción. En este capítulo realizaremos las modificaciones necesarias para permitir la interactividad con el sistema granular.

En primer lugar se presenta el cálculo de colisiones utilizado para detectar la existencia de contacto entre el sistema granular y los objetos del entorno. Se muestra la información que se extrae de este cálculo, y que se emplea para obtener una descripción geométrica del estado del sistema durante una colisión.

A continuación se utiliza esta descripción para exponer la forma en que se calcula la evolución del sistema durante el contacto y cómo se obtienen las fuerzas de contacto. Se considera la aplicación de fuerzas sobre la superficie del montón, y la forma en que éste evoluciona. Para conseguir la simulación de este efecto, se proponen dos modelos diferentes: un primer modelo en el que el

material se considera incompresible, y por tanto con densidad constante, y un segundo modelo en el que el material se comprime ante la acción de una fuerza vertical. El primer modelo se basa únicamente en el desplazamiento del material saliendo de la zona en contacto, mientras que el modelo de material compresible calcula la fuerza de reacción del material a partir del grado de compresión del mismo.

Se propone también un modelo de interacción entre el sistema y una herramienta cuando se produce un interfaz vertical. En este capítulo entenderemos por interfaz vertical la frontera entre la región del sistema granular que está en contacto con un objeto, y la región que está libre. Cuando se produce un contacto, pueden producirse en esta frontera desplazamientos horizontales de material, similares al que se puede observar cuando una pala de excavadora empuja una porción de terreno. En este caso, se propone una discretización de modelos de geomecánica para la obtención de la evolución del terreno y de las fuerzas que actúan sobre la pala.

5.2. Detección de colisiones

A partir de la representación empleada para el sistema granular, la detección de las colisiones de los objetos del entorno virtual con el mismo se reduce a la detección del contacto entre un objeto arbitrario con una mapa de alturas. Este hecho permite la utilización de algoritmos específicos como la proyección de rayos e incluso la optimización de este proceso por medio del uso de la tarjeta gráfica, como se ha visto en el Capítulo 2.

El objeto de este trabajo, sin embargo, se centra en el desarrollo de los modelos dinámicos de evolución del terreno y de la interacción con el entorno. Por este motivo no entraremos en detalles demasiado técnicos en lo que respecta al cálculo de colisiones. El objetivo de este apartado no es la propuesta de un procedimiento para el cálculo de colisiones sino determinar cuál es la información que es necesario extraer del proceso de detección de colisiones para poder formalizar adecuadamente los modelos dinámicos de interacción que se propondrán más adelante en este capítulo.

Lo que se expone a continuación es la descripción del procedimiento de detección de colisiones que se ha empleado durante el desarrollo del presente trabajo, sin entrar en detalles sobre la implementación de los métodos numéricos subyacentes o de las posibles optimizaciones algorítmicas y en el procesador gráfico.

5.2.1. Creación del mapa de contactos

El modelo dinámico en el que nos basamos para la evolución del sistema granular es un modelo discreto, que fracciona el sistema en una cuadrícula regular. Por este motivo, el cálculo de las colisiones y la representación de la región en contacto se realizará a partir de esta discretización. Cuando se detecten colisiones se realizará una proyección de la región en contacto sobre la base del sistema, asignándole a cada celda un porcentaje o proporción de su área como ocupado o tapado por la colisión.

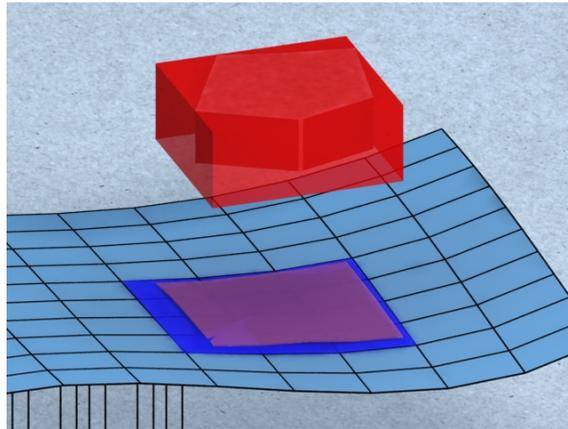


Figura 5.1: Con el fin de evitar cálculos innecesarios, en primer lugar se proyecta la caja envolvente del objeto sobre el sistema, de forma que únicamente se comprobará la posibilidad de colisiones con las celdas afectadas.

Al consistir el sistema en un mapa de alturas sobre una malla cuadrada, se calcula la caja envolvente del objeto que se desea comprobar alineada la dirección de las celdas del sistema, y se proyecta verticalmente sobre el mismo (Figura 5.1).

Esta proyección da como resultado un rango de celdas que debe ser comprobado para determinar si efectivamente existe contacto, evitando así realizar comprobaciones innecesarias con celdas que se encuentran fuera de dicha proyección.

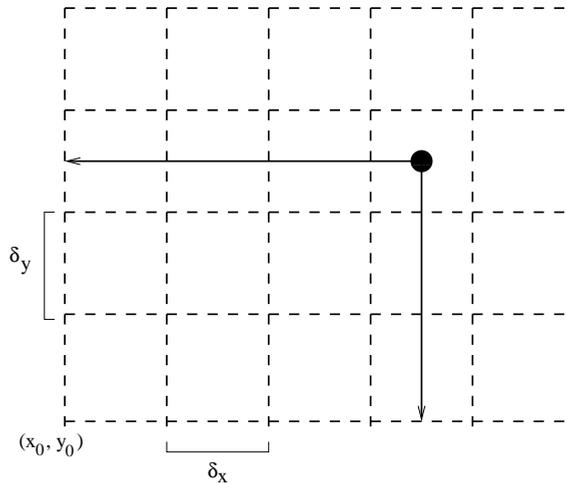


Figura 5.2: El cálculo de la celda sobre la que se encuentra un punto puede hacerse por medio del ancho y alto de las celdas.

Para calcular la celda en la que se encuentra una esquina de la caja envolvente, calcularemos la distancia entre el inicio de la malla y el punto donde se encuentra esta esquina y lo dividiremos por el ancho de la celda. De acuerdo con el esquema de la Figura 5.2, el número de celda se puede calcular mediante las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} i &= \left[\frac{x - x_0}{\delta x} \right] \\ j &= \left[\frac{y - y_0}{\delta y} \right], \end{aligned} \quad (5.1)$$

donde $[\cdot]$ representa la parte entera de su argumento.

Como ya se ha indicado, el objetivo es determinar un área de ocupación para cada celda que se encuentra en contacto con el objeto. Por tanto, se buscará la detección de todas aquellas celdas que tienen parte de su superficie ocupada por un objeto del escenario. Uno de los procedimientos empleados para llevar a cabo

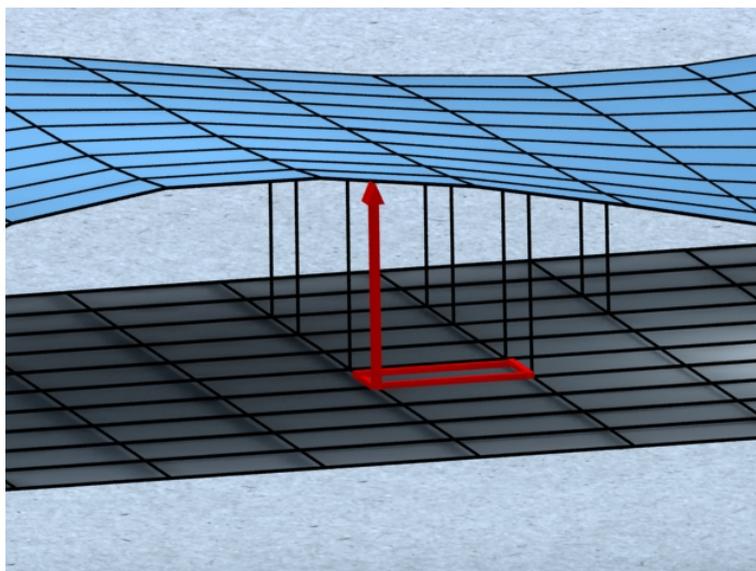


Figura 5.3: Posición de los segmentos verticales utilizados para la detección de colisiones.

esta tarea es la detección del contacto de un segmento con un objeto (Sumner et al., 1999); el segmento se definirá por medio de sus extremos, situados en la base del sistema y en la superficie del mismo, sobre la vertical del otro extremo (véase la Figura 5.3).

En primer lugar se sitúa un segmento en cada intersección entre cuatro celdas. La altura de este segmento será la mayor de las 4 alturas de las celdas adyacentes. Si se detecta la existencia de un contacto entre el segmento y un objeto del escenario, significa que al menos la celda de mayor altura tiene parte de su superficie invadida por el objeto (véase la Figura 5.4).

A partir de la información de la profundidad del contacto y de la altura de las 4 celdas es posible determinar cuáles de ellas están efectivamente colisionando y cuáles no. De esta manera se obtendrá un mapa con todas las intersecciones entre celdas que se encuentren en el interior de un objeto, y por tanto todas aquellas celdas que tienen parte de su superficie ocupada por una colisión.

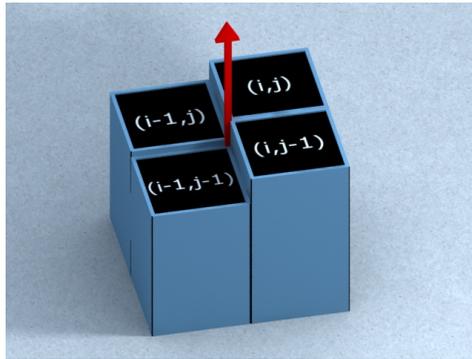


Figura 5.4: Cuando se detecta un contacto con una intersección de cuatro celdas indica que las cuatro están en contacto con el objeto.

5.2.2. Descripción del estado de la colisión

Una vez se detecta la existencia de colisiones en una intersección es necesario almacenar la información asociada. De cada contacto se almacenará el punto de contacto sobre la superficie del objeto \mathbf{p} , la profundidad del contacto en la dirección vertical d_0 y la dirección normal \mathbf{n} (véase la Figura 5.5). Además, se obtendrá la velocidad del punto de contacto sobre el objeto \mathbf{v} . El material granular se desplazará o comprimirá, adoptando la forma del objeto en contacto, lo que justifica esta elección de \mathbf{n} como perpendicular al objeto y no a la superficie del terreno.

Con el fin de definir el modelo dinámico a partir de la información de colisiones de una celda, se almacenará información sobre una única colisión en cada una de las celdas. Sin embargo, para una celda puede haber hasta cuatro colisiones relacionadas, debidas al contacto de un objeto con sus cuatro esquinas. Por este motivo, antes de almacenar la información sobre una celda se debe procesar la información de sus cuatro esquinas.

Para las colisiones vamos a suponer a la hora de hacer los cálculos que todas las superficies que están colisionando con una celda son planos, y que son perpendiculares a los tres ejes principales. Esto implica que cuando se detecta una colisión con un segmento vertical todo el objeto que está colisionando con la celda está a la misma altura y como altura se va a tomar el promedio de las

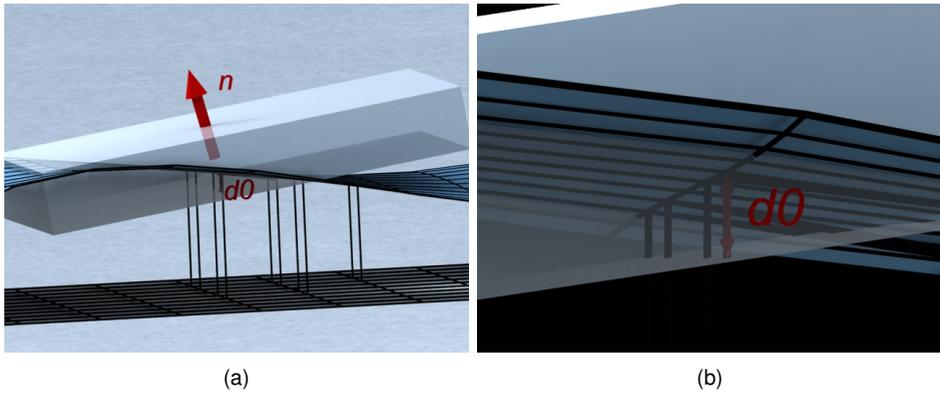


Figura 5.5: Cuando se produce un contacto entre un objeto y la malla se almacena el punto de contacto p , la profundidad d_0 y la normal n .

cuatro alturas de las cuatro esquinas.

El punto de contacto que se utilizará es el promedio de los cuatro puntos de contacto obtenidos. Esto se puede calcular a partir de la altura promedio calculada y del centro de la celda.

Si las cuatro esquinas no están colisionando, actuaremos de la misma manera; consideraremos que el objeto que está colisionando contra la celda es una caja alineada con los ejes y que corta las aristas de la celda en los mismos puntos que el objeto real (véase la Figura 5.6).

Ocupación de las celdas

Para introducir el modelo dinámico que considere la interacción del terreno con un objeto introduciremos nuevas variables de estado relacionadas con el porcentaje de ocupación de una celda del Autómata. Pero previamente debemos indicar de qué manera determinaremos la ocupación de cada celda.

A partir de la descripción anterior, una celda que no tenga todas sus esquinas ocupadas tendrá una parte libre. La celda tendrá asociadas cuatro cantidades:

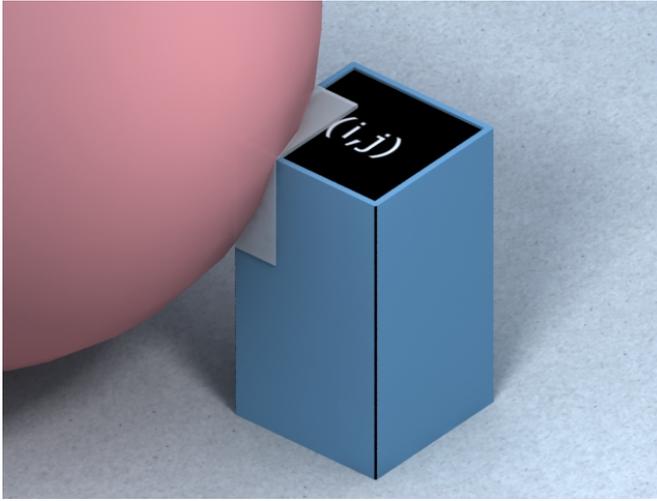


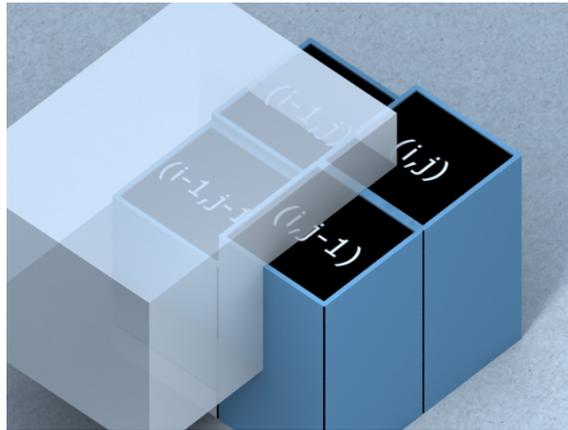
Figura 5.6: La región en contacto sobre una celda se extiende a un paralelepípedo alineado con los ejes de la celda que envuelve completamente la intersección entre la celda y el objeto.

la cantidad de material contenido en la celda M , el área libre de la celda A y dos alturas h_1 y h_2 . La primera altura h_1 es la altura desde la base hasta la altura que se ha considerado para la colisión. La cantidad de material que hay contenido en ese volumen será $h_1 \cdot \delta x \cdot \delta y$. Por tanto, desde la altura h_1 hasta la superficie del montón tendrá que haber suficiente altura como para albergar al resto de material contenido en la celda, $h_2 = (M - h_1 \cdot \delta x \cdot \delta y)/A$ (véase la Figura 5.7)

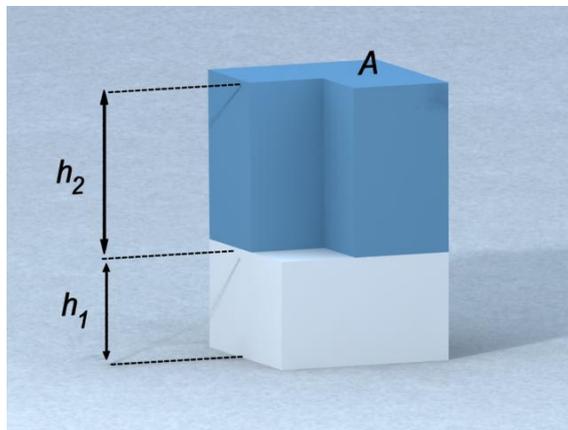
Si el objeto que está colisionando se desplaza horizontalmente, entonces la cantidad de superficie libre variará, y la altura del sistema sobre el área libre aumentará o se reducirá de forma que se conserve el material.

En esta situación, no se produce ningún desplazamiento de material entre celdas a causa del movimiento del objeto. Únicamente a causa de la diferencia de altura entre la celda que está parcialmente ocupada y las celdas vecinas.

Sin embargo, de acuerdo con los estudios sobre la interacción entre una herramienta y el terreno, este no es el comportamiento que cabe esperar en un sistema real. Por el contrario, cuando un objeto parcialmente enterrado se des-



(a)



(b)

Figura 5.7: Cuando un objeto entra en contacto con una celda, es posible que parte de su superficie no quede cubierta. A partir de la cantidad de material contenido en una celda, y de su superficie libre, es posible conocer la altura de su superficie.

plaza horizontalmente debe producirse una ruptura del volumen de material que queda frente a él, deslizándose la capa superior. A esta ruptura se la denomina *fractura*. Más adelante, en el Apartado 5.5 se propone un modelo que permite simular esta situación.

Antes de describir el modelo dinámico considerando estas situaciones se fi-

jará la información más relevante del interfaz vertical que aparece en una celda parcialmente cubierta, y que provocará este desplazamiento.

5.2.3. Interfaces verticales

De acuerdo con la descripción de los contactos que se ha realizado en el apartado anterior, una celda que no está completamente ocupada por el objeto que está colisionando supondremos que está invadida por una caja alineada con los ejes.

Por tanto, la región que está ocupada por esta caja y la región de la celda que está libre de colisión estarán delimitadas por uno o dos planos verticales. En la Figura 5.7(a) se puede observar una situación de colisión en la que se dan ambos casos; en la celda (i, j) la región en contacto está separada de la región libre de él por dos planos, mientras que en la celda $(i, j - 1)$ estas dos regiones están delimitadas únicamente por un plano.

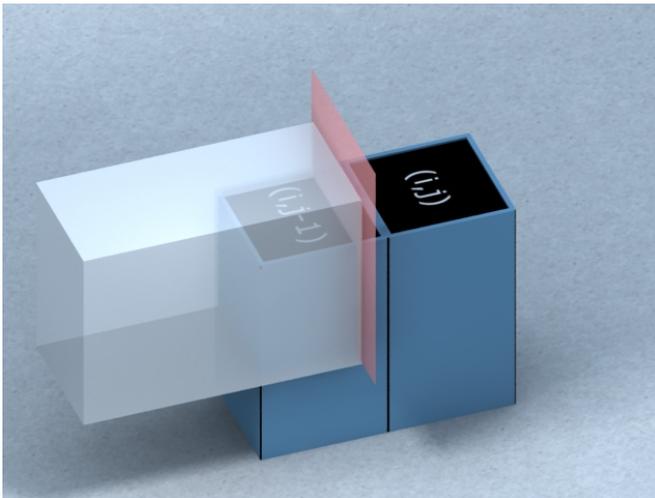


Figura 5.8: A cada plano vertical que delimita la zona que está colisionando y la zona libre de colisión en una celda la denominaremos *interfaz vertical*.

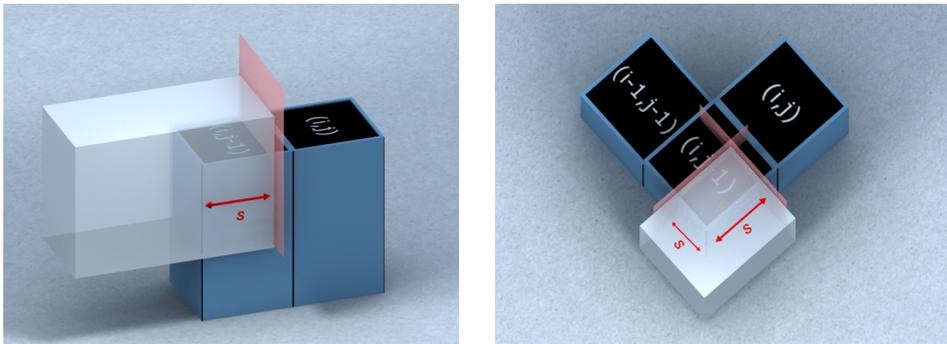
A cada uno de estos planos verticales que delimitan las dos regiones de la celda los denominaremos *interfaces verticales*. En la Figura 5.8 se muestra en

rojo un interfaz vertical provocado por la colisión de la caja blanca. A continuación se describen estos interfaces por medio de un conjunto de variables que permitirán desplazar el material de forma realista.

Variables de un interfaz

De acuerdo con la descripción que se ha realizado de la región de contacto, para determinar el volumen de material que se ha desplazado (el volumen ocupado) por un objeto en contacto con una celda, únicamente es necesario conocer los lados del paralelepípedo que representa la intersección. Esta información ya ha sido obtenida durante el proceso de cálculo de colisiones.

Para poder desplazar material a cada paso de evolución del modelo, necesitamos conocer la variación de este volumen. Este proceso se llevará a cabo incrementalmente, a partir de la variación de los lados de la intersección. Esto permitirá conocer el avance de cada uno de los interfaces verticales y actuar de la forma correcta.



(a) Celda con un interfaz

(b) Celda con dos interfaces

Figura 5.9: En cada celda con interfaces verticales se almacena la distancia horizontal desde el interfaz vertical hasta la arista opuesta s .

Por tanto, para cada interfaz vertical se almacena la distancia horizontal que hay desde los bordes de la celda hasta el objeto en contacto, denotada por s (véase la Figura 5.9). Estas distancias son las que permiten determinar la super-

ficie de la celda que está cubierta.

Para poder calcular correctamente el material que desplaza un objeto en movimiento es necesario conocer la superficie del objeto que está expuesta al terreno. Dado que conocemos la altura del interfaz, dada por d_0 , únicamente resta determinar la anchura del mismo, a la que denotaremos w . En el caso de una celda que únicamente cuenta con un interfaz vertical, esta anchura coincide con el ancho de la celda, pero cuando sobre una celda hay dos interfaces verticales el ancho de cada uno de ellos depende de la distancia s del otro interfaz.

En la Figura 5.10 se muestra esta situación. Sobre la celda mostrada se está produciendo una colisión en su esquina inferior derecha, mientras que las otras tres esquinas quedan libres. En este caso se producen dos interfaces verticales; el interfaz I_1 , perpendicular a la dirección de aumento de la coordenada j , y el interfaz I_2 , perpendicular a la dirección de aumento de la coordenada i . Como puede apreciarse en la Figura 5.10, el valor de w_1 coincidirá con s_2 , y el valor de w_2 con s_1 .

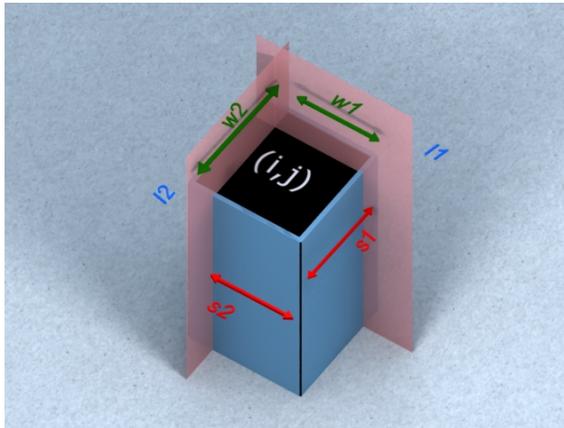


Figura 5.10: Cálculo de de la anchura de un interfaz vertical w cuando la celda tiene dos interfaces perpendiculares.

5.2.4. Gestión eficiente de las colisiones

Dado que los modelos que se están desarrollando están orientados a la simulación en tiempo real, es crucial la gestión eficiente de las estructuras de datos relacionadas con cada elemento del modelo, y en particular con las colisiones. Con el fin de evitar el coste asociado a la reserva de memoria cada vez que se produzca un contacto con el sistema, se utilizarán vectores con un tamaño fijo.

Durante una simulación, el número de celdas que pueden llegar a encontrarse en contacto con un objeto puede variar, desde cero a valores relativamente grandes. En cualquier caso, este número no depende de la cantidad de celdas que tenga la representación del terreno, sino del área en contacto en cada instante y de la densidad de celdas por unidad de área.

En realidad, en una situación de simulación como las que motivan este trabajo, la cantidad de terreno que estará colisionando en cada instante es una porción reducida de la superficie total del entorno de simulación. A modo de ejemplo podemos pensar en la cantidad de superficie que colisiona con una excavadora durante una sesión de trabajo; únicamente las ruedas del vehículo y la pala se encontrarán en contacto con el terreno.

Por este motivo, la cantidad de memoria que se reserve para almacenar las estructuras de colisiones se debe prever teniendo en cuenta esta posible superficie de contacto, y no el número total de celdas del sistema.

Una vez obtenida una descripción de las colisiones que se pueden producir entre un objeto y el sistema granular, ya es posible formular un conjunto de modelos dinámicos que permitan la simulación del terreno de forma interactiva. En primer lugar, en los Apartados 5.3 y 5.4 se aborda el problema de la aplicación de fuerzas perpendiculares al sistema. Más tarde, en el Apartado 5.5 se analiza el problema del desplazamiento horizontal de material.

5.3. Aplicación de fuerzas sobre materiales no compresibles

La simulación interactiva de un sistema granular pasa, necesariamente, por calcular la deformación del terreno, problema que ha sido estudiado por múltiples autores, pero también por el cálculo de las fuerzas de reacción debidas al contacto. Este cálculo es una de las principales carencias en los modelos actuales, pero sin él no es posible conseguir una simulación realista de los objetos de la escena cuando colisionan con el terreno.

En primer lugar se propone un modelo de fuerzas que permite una simulación interactiva del terreno con un escaso esfuerzo computacional y de implementación. Este primer modelo supone que el material granular no es compresible, y permitirá desarrollar de forma clara la metodología que se va a seguir para simular las interacciones. La evolución del sistema dependerá de la manera en que se distribuye la presión en el interior del sistema.

5.3.1. Tensión en el interior de los sistemas granulares

Consideremos un sistema granular y la aplicación de una fuerza sobre un área de su superficie. La presión ejercida sobre el sistema se propagará por medio de los contactos entre las partículas del sistema, produciéndose líneas de fuerza no sólo verticalmente, sino también hacia los laterales (véase la Figura 5.11).

Mientras la tensión que se acumula entre los contactos de las partículas no sea muy elevada, la fricción interna del sistema mantendrá la configuración estable. Sin embargo, al aumentar la presión sobre la superficie, el aumento de la tensión sobre los contactos provocará un desplazamiento del material. Dado que partimos de la suposición de que el material no es compresible, el desplazamiento del material deberá ocurrir, hacia los lados, y hacia arriba por el contorno de la zona presionada (Hiroma et al., 1997).

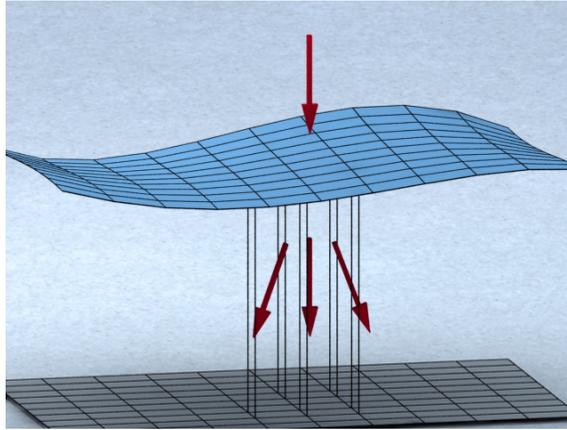


Figura 5.11: Propagación de la tensión en el interior de un sistema granular.

Aplicación de fuerzas sobre el Automata Celular

La descripción anterior se basa en el comportamiento interno de los sistemas granulares. Pero para poder aplicarla sobre el modelo dinámico del Capítulo 4 es necesario realizar una descripción que se base únicamente en el comportamiento de la superficie. A continuación se enuncia una descripción fenomenológica del comportamiento del material bajo una presión sobre su superficie.

Si descartamos los procesos internos del sistema granular, el comportamiento descrito anteriormente puede resumirse por medio de la siguiente regla:

Si una fuerza suficientemente grande, f , se aplica sobre una región del sistema se produce un movimiento de material desde esta región hacia su contorno.

Esta descripción macroscópica de la dinámica del sistema, conduce a modificar la función de transición para que refleje este comportamiento. Traducido a la formalización que hemos venido utilizando, puede enunciarse de la siguiente forma:

Cuando la diferencia de presión vertical entre dos celdas contiguas

es muy alta, se produce un intercambio de material, de la celda con mayor presión, a la celda con menor presión.

Consideremos ahora la situación en la que, además de la presión normal, se ejerce también una fuerza tangencial a la superficie del sistema. Esto puede producirse por la acción de la fricción en un contacto, o a causa de agentes externos como el aire. Además de la acción de una fuerza normal, consideraremos también el siguiente comportamiento como consecuencia de la aplicación de estas fuerzas:

Cuando una celda se ve sometida a una fuerza horizontal tangencial, el ángulo de reposo disminuye en la dirección de la fuerza.

A continuación se describe el modelo utilizando la misma formalización del capítulo anterior, y se modifica la regla de transición para que considere estos dos efectos de la aplicación de fuerzas de contacto.

5.3.2. Modelo formal

De acuerdo con las reglas enunciadas para el comportamiento de un sistema granular ante el contacto con un objeto, se define un nuevo Autómata Celular.

El modelo formal consiste en el modelo (4.1) presentado en el Capítulo 4, al que se añade un conjunto de fuerzas, y una variable de estado que representa la presión del Autómata sobre su base.

$$AC = \langle \mathbf{M}, \mathbf{V}, \mathbf{S}, \mathbf{P}, \mathbf{F}, \Phi, \varphi, \mathbf{E} \rangle \quad (5.2)$$

donde \mathbf{M} , \mathbf{V} , \mathbf{S} , \mathbf{P} , φ y \mathbf{E} tienen el mismo significado que en el anterior modelo, y el resto de elementos se definen de la siguiente forma:

- $\mathbf{F} = F_x \times F_y \times F_z$ es el conjunto de fuerzas externas.

F_x, F_y, F_z son los posibles valores de la fuerza aplicada sobre una celda en la dirección de los ejes x, y y z , respectivamente.

- $\Phi : F_z \rightarrow \mathbb{R}$ es una función real que determina la manera en que se aplica la fuerza que actúa sobre la celda, de acuerdo con la función de transición.

La función de transición

La función de transición, $\varphi : \mathbf{S}^5 \times \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{S}$, determina el estado de una celda en el siguiente paso de la simulación, a partir del estado de la propia celda y de las celdas vecinas en el paso actual, además de la fuerza que actúa sobre la celda.

Para el cálculo de la función de transición se procede de la forma siguiente:

Para cada celda $(i, j) \in \mathbf{M}$, sea $h \in S_h$, la altura de material en la misma, $h_b \in P_b$, la altura de la base, y $f_x \in F_x$, $f_y \in F_y$ y $f_z \in F_z$ el valor de las fuerzas externas aplicadas en la superficie del sistema sobre la celda. Sean δx y δy las dimensiones de las celdas.

Se calcula en primer lugar la variable auxiliar $h_f = h_b + h + \Phi(f_z)$, y se obtiene el vector de diferencias divididas entre el valor de h_f de la celda y de sus celdas vecinas, por medio de

$$\begin{aligned} Dh_f &= (h_{fx} + f_x, h_{fy} + f_y) = \\ &= \left(\frac{h_f(i+1, j) - h_f(i, j)}{\delta x} + f_x, \frac{h_f(i, j+1) - h_f(i, j)}{\delta y} + f_y \right) \end{aligned} \quad (5.3)$$

A continuación, se obtiene el valor del ángulo local ficticio $\beta_f = \arctan(|Dh_f|)$.

Cuando el ángulo local, β_f , sea mayor que el ángulo crítico del sistema, α , se producirá una transición de acuerdo con la siguiente regla.

$$\begin{aligned} h(i, j) &\leftarrow h(i, j) - z_+ \cdot (h_{fx}(i, j) + h_{fy}(i, j)) \\ h(i+1, j) &\leftarrow h(i+1, j) + z_+ \cdot h_{fx}(i, j) \\ h(i, j+1) &\leftarrow h(i, j+1) + z_+ \cdot h_{fy}(i, j) \end{aligned} \quad (5.4)$$

La función de fuerza

La función de fuerza $\Phi : F_z \rightarrow \mathbb{R}$ determina de qué manera se transmite la fuerza aplicada sobre una celda $f_z \in F_z$ afecta al modelo. La elección de esta función permite modelar diferentes comportamientos elasto-plásticos del material, o normalizar las fuerzas de acuerdo con las unidades utilizadas.

Para determinar la función de fuerza Φ en el modelo, a modo de ejemplo, se propone a continuación una función de fuerza adecuada para simulación en tiempo real.

La función propuesta proporciona, a partir de una fuerza f_z , la altura de la columna cuadrada de material que pesa exactamente el valor de dicha fuerza (Pla-Castells et al., 2006)

$$\Phi(f_z) = \eta \frac{f_z}{\delta x \delta y \gamma g} \quad (5.5)$$

donde g es la aceleración de la gravedad, γ es la densidad del material, $\delta x \delta y$ es el área de una celda del Autómata y $\eta > 0$ es un parámetro que permite definir cómo la fuerza causa el desplazamiento de material.

Esta función de fuerza es apropiada por su utilización junto con modelos de fuerzas de contacto basados en ecuaciones de muelle amortiguado, muy comunes en aplicaciones de tiempo real. Estos modelos evitan grandes penetraciones entre objetos ya que las fuerzas se calculan dependiendo de la cantidad de solapamiento entre los objetos a cada paso.

En el caso de la colisión de un objeto rígido contra un sistema granular modelado por (5.4) junto con (5.5) causará la deformación del sistema granular, para permitir el avance del objeto hasta que la deformación sea suficientemente grande como para detener el avance del objeto. La Figura 5.12 muestra dos ejemplos de la utilización de los modelos propuestos con esta estrategia de cálculo de fuerzas.

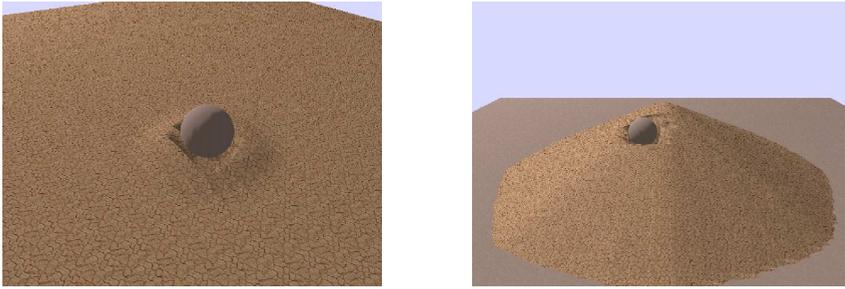


Figura 5.12: Una bola lanzada en dos configuraciones diferentes del sistema. Los parámetros de simulación son $\eta = 1$, $d = 0,5$, $\alpha = 30^\circ$ y $z_+ = 0,05$.

5.3.3. Aplicación del modelo

Aunque el modelo propuesto no reproduce los procesos internos que rigen la interacción entre un sistema granular y un objeto rígido, permite simular los fenómenos macroscópicos que se observan en la superficie.

No obstante el modelo parte de la suposición principal de que el material no es compresible. Un ejemplo de materiales que pueden considerarse como no compresibles son los formados por materiales muy duros, como la grava, y especialmente aquéllos que tienen un bajo ángulo de fricción interna como un sistema formado por bolas de acero. Este comportamiento puede ser también una buena aproximación al comportamiento de la arena seca, aunque en este caso si se apreciaría cierto grado de compresión.

En cualquier caso, el modelo representa una aproximación al problema del desplazamiento del material bajo el contacto que puede ser de utilidad en campos como la animación.

En los modelos existentes, basados principalmente en el trabajo de Sumner et al. (Sumner et al., 1999), la animación de la deformación del terreno involucra un proceso de desplazamiento del material que consigue un efecto similar al descrito aquí. Sin embargo, en aquél caso el procedimiento es heurístico, y requiere de una organización más compleja de las celdas que están colisionando. Por el contrario, nuestro modelo se basa en un conjunto muy reducido de reglas básicas

que se derivan de las propiedades del material, proporcionando una simulación más realista y eficiente.

5.4. Modelo con compresión. Corrección al primer modelo

Como ya hemos indicado, aunque el primer modelo propuesto proporciona un modelo válido en ciertas situaciones y proporciona mejoras respecto a otros modelos del campo de la animación, parte de un conjunto de suposiciones que no son ciertas en todos los casos.

La principal suposición que debe revisarse es el hecho de que el material no sea compresible, haciendo que cualquier desplazamiento de material se reparta hacia los lados bajo la región en contacto.

A continuación se describe un modelo de fuerzas sobre el Autómata Celular que considera materiales compresibles. Se describirán también las fuerzas tangenciales que aparecen a causa de la fricción entre el objeto y el sistema.

5.4.1. Modelo de presión vertical

En este apartado se proponen algunas modificaciones sobre el modelo presentado en el Apartado 5.3 con el fin de poder reproducir el comportamiento descrito por los modelos de relación entre presión y hundimiento descritos en el Apartado 3.3.3.

De acuerdo con estos modelos de hundimiento del terreno, cuando se ejerce una presión sobre el terreno el material se compacta, reduciendo su altura. La relación entre el hundimiento y la presión que aparece es una potencia del valor de hundimiento, cuyo exponente depende de las propiedades del material.

Según estos modelos, durante este proceso no se produce un desplazamien-

to del material hacia los lados. Únicamente, cuando se alcanza una presión elevada y una gran profundidad se produce una fractura y un desplazamiento de material (Earl and Alexandrou, 2001).

A continuación indicamos los cambios que son necesarios para la implementación de este comportamiento en el modelo dinámico de terreno basado en Autómatas Celulares.

Parámetros del modelo

Es importante observar que los modelos de presión que se exponen en el Apartado 3.3.3 suponen que la región de contacto entre el objeto y el terreno es rectangular, y que la presión se ejerce de forma vertical. Estos supuestos coinciden con los tests experimentales de hundimiento que se realizan habitualmente en geomecánica.

Sin embargo, es habitual la relajación de estos supuestos para el desarrollo de modelos prácticos, como el análisis de tracción de vehículos todo terreno (Muro and Hoshika, 1995; Wong, 2001).

Es especialmente el caso del parámetro del modelo b que representa el lado menor del rectángulo en contacto. En una simulación de un entorno de trabajo real, la región de contacto no tiene por qué ser rectangular. Para la implementación de los modelos a lo largo de este trabajo tomaremos la proyección de la caja envolvente ya calculada para la detección de colisiones como aproximación a este rectángulo, del que obtendremos el valor de b . Durante la detección de colisiones, se obtiene este valor, y se almacena como una variable en la estructura de datos en la que se almacena la información relativa a cada contacto.

El resto de parámetros, k_c , k_ϕ y n , que dependen de las propiedades del material pueden obtenerse en la bibliografía especializada por medio de tablas obtenidas experimentalmente (Wong, 2001).

Variables del modelo

En primer lugar, debe reproducirse el hundimiento del material por lo que será necesaria una nueva variable que indique este valor. Cuando se produzca una colisión, se considerará que el material se comprime bajo la superficie de contacto, en lugar de desplazarse lateralmente.

Por tanto, el conjunto de variables del Autómata Celular descrito en (5.2) se modifica para añadir este nuevo valor al que denotaremos por z . El nuevo conjunto de posibles estados del Autómata vendrá dado por $S = S_h \times S_z$ ($S = S_h \times S_I \times S_z$ si consideramos el modelo con inercia), donde $S_z = [0, \infty[$ representa el conjunto de todos los posibles valores de hundimiento. En realidad, este valor estará acotado, con una cota que depende de las propiedades del terreno, pero no la reflejaremos en el modelo.

Actualización del Autómata Celular

Para poder reflejar el proceso que se ha descrito para el comportamiento del terreno bajo la aplicación de una presión vertical, debemos revisar el proceso que se sigue para actualizar el Autómata. En concreto, cuando se detecte un contacto entre un objeto y una celda deberá comprimirse el material contenido en la celda, y calcularse la presión que aparece en la zona de contacto entre el objeto y el sistema granular.

En primer lugar, una vez detectada la colisión, se utilizará el valor d_0 para conocer la penetración del objeto en el terreno. Esta penetración se convertirá en un hundimiento, añadiéndola a la variable z . Por último se calculará el valor de la presión, p que se aplicará sobre el objeto por medio de una fuerza.

En algunos materiales se ha observado la existencia de un rango de penetración elástico, que suele corresponder a un rango de unos pocos milímetros o centímetros en el inicio de la compresión. Si se desea simular este comportamiento elástico del terreno el valor de d_0 se descompondrá en dos sumandos, $d_0 = d_e + d_p$. El valor de d_p correspondiente al rango plástico de la deformación se empleará para el cálculo de z , mientras que el valor de d_e se empleará para

la aplicación del modelo descrito en el Apartado 5.3.

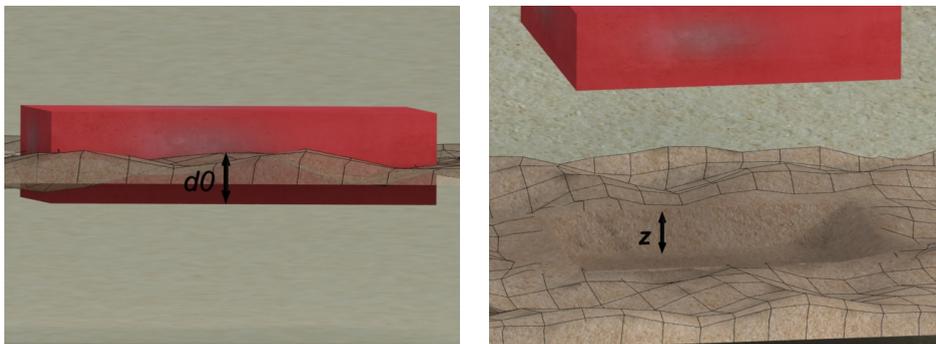


Figura 5.13: El hundimiento z se calcula a partir del valor de d_0 .

El cálculo del hundimiento se obtendrá en la dirección normal a la cara del objeto en contacto, de forma que se podrán descomponer las fuerzas en normales y tangenciales al contacto.

A continuación se describen de forma más detallada los pasos que se seguirán para el cálculo de la presión y la simulación de un contacto utilizando este modelo de hundimiento.

- Una vez detectada la colisión en una celda, se obtiene el valor d_0 y su descomposición en $d_e + d_p$.
- La variable z se aumenta una cantidad d_p , mientras que la cantidad d_e se emplea como entrada para el modelo de material no compresible.
- Se calcula la evolución del modelo de deformación no compresible.
- Se obtiene el valor de la presión debida al hundimiento del terreno.
- La presión se aplica sobre el sólido en contacto con el suelo.

5.4.2. Fricción tangencial

Como se ha visto anteriormente, la fricción es una fuerza fundamental en los materiales granulares, ya que determina la mayoría de su comportamiento.

Cuando un cuerpo está en contacto con el sistema granular, aparecen fuerzas de fricción entre el cuerpo y el terreno.

Las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo se descomponen en sus componentes tangencial y normal respecto de la superficie de contacto. La componente tangencial de la fuerza impulsa el objeto a moverse a lo largo de la superficie de contacto entre el material y el objeto; esta fuerza se denomina la tensión tangencial σ_t . La componente normal de la fuerza σ_n , llamada tensión normal, puede comprimir ambas caras del área de contacto uno contra el otro, dificultando el deslizamiento debido a la fricción. Esta fricción, llamada fuerza de fricción tangencial¹, que se opone al movimiento, debe ser menor que

$$\tau = (c + \sigma_n \tan \phi_e)A,$$

donde c es la fuerza de adhesión cuerpo-tierra, ϕ_e es el ángulo de fricción externa del contacto y A es el área de contacto del interfaz. En caso de que la tensión tangencial sea menor que la fricción tangencial no habrá movimiento. De otro modo, el cuerpo empezará a deslizarse mientras τ actúa en contra de ese movimiento.

Para conseguir este efecto en nuestros modelos, se calculan τ y σ_t . Si el objeto no se mueve y la fricción τ no es lo suficientemente grande para oponerse a la tensión, no se deslizará. En caso contrario, se aplica τ al cuerpo.

5.5. Interacción sistema-herramienta. Geomecánica

Una vez se ha resuelto el problema de contacto entre un objeto y el sistema en la dirección perpendicular a la superficie, se plantea la interacción entre el terreno y una herramienta que se desplaza horizontalmente.

Este problema apenas ha sido abordado en los trabajos relacionados con la simulación interactiva en tiempo real del terreno o sistemas granulares y los

¹En inglés, *tangential shear strength*

escasos trabajos que mencionan el problema lo hacen sin rigor físico (Zeng et al., 2007).

Nuestro planteamiento tiene ciertas similitudes con el de Li y Moshel, por estar ambos basados en los principios de la teoría de Mohr-Coulomb, aunque difieren principalmente en la formalización debido a la diferente representación del sistema que utilizan.

5.5.1. Introducción

En el Apartado 3.3 se introdujo la metodología del equilibrio límite, habitual en geomecánica. Para el cálculo de la tensión interna de un sistema granular se define un conjunto de interfaces de fractura y se plantean las ecuaciones de equilibrio de fuerzas de fricción.

Esta metodología se apoya en la ley de Coulomb de fricción seca, por la cual la fricción tangencial no puede superar el producto del coeficiente de fricción por la fuerza normal a la superficie. Gracias a esta propiedad, es posible determinar si el rozamiento es capaz de anular la tensión provocada por las fuerzas externas y la gravedad. Cuando no es así, el material empieza a moverse, deslizándose a lo largo del interfaz de fractura (Shen and Kushwaha, 1998).

Esta descripción del comportamiento de un sistema granular se emplea habitualmente en el cálculo de las fuerzas que aparecen sobre una herramienta, tal como la pala de una excavadora. La diferencia entre los diferentes modelos estriba en la elección de los interfaces de fractura frente a la herramienta.

Se propone la utilización de uno de los modelos de fractura básicos para la simulación de la interacción horizontal entre el material simulado y una herramienta por medio de los modelos propuestos en este trabajo. Para ello, a continuación se describe la región de fractura que caracteriza a dicho modelo y la forma en la que vamos a introducirse en el modelo discreto de terreno que estamos utilizando.

5.5.2. Modelo de fractura

El modelo de fractura que se propone utilizar es el modelo de Perumpral (Perumpral et al., 1983) en la formulación presentada por (Nouguier et al., 2000). Este modelo considera una interfaz vertical para la interacción suelo-herramienta. La región de fractura en la que se basa este modelo consiste en una cuña que parte de la base de la interfaz vertical suelo-herramienta y que asciende hasta la superficie del terreno frente a la herramienta con un ángulo ρ respecto de la horizontal (véase la Figura 5.14).

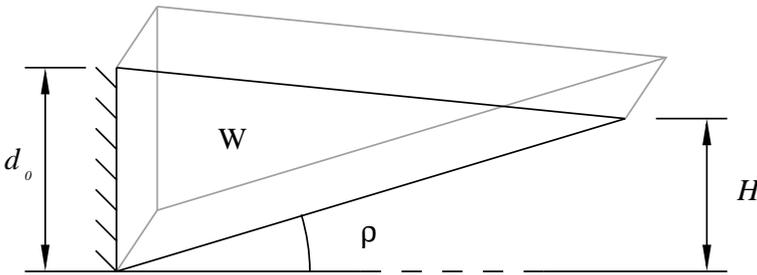


Figura 5.14: La región de fractura del modelo de Perumpral.

Por medio del análisis de equilibrio límite, se establece un equilibrio entre la fuerza externa ejercida por la herramienta sobre el terreno, el peso de la porción potencialmente desplazada y el rozamiento que aparece en la superficie de fractura debida a la fricción interna del material. De acuerdo con la notación de Nouguier et al. (Nouguier et al., 2000), el límite de la fuerza horizontal existente entre la herramienta y el terreno es

$$F_h = \frac{(W \sin(\phi + \rho) + 2F_l \cos \phi) \sin(\delta)}{\sin(\phi + \rho + \delta)} \quad (5.6)$$

donde F_l corresponde a la fricción en los laterales verticales de la cuña, y viene dada por

$$F_l = \frac{\gamma}{6} HW(1 - \sin \phi) \tan \phi.$$

En general, cualquier parámetro que no esté determinado en un modelo para el estudio del equilibrio límite, como es el caso de ρ , se toma de forma que

la fuerza de equilibrio tome el menor valor posible. Este valor se calculará previamente de forma que no suponga un coste computacional adicional durante la simulación.

El valor de F_h proporcionado por (5.6) corresponde a la magnitud máxima de la fuerza que es capaz de aplicar el terreno sobre la herramienta antes de fracturarse e iniciarse el deslizamiento. Por tanto, el procedimiento para utilizar este modelo será el siguiente.

- Cuando se establece una interacción entre una herramienta y el terreno de la forma descrita se calcula el límite de fuerza de acuerdo con (5.6).
- A continuación se calcula la resultante de las fuerzas que actúan sobre la herramienta sin tener en cuenta la interacción con el terreno, obteniendo su componente horizontal en la dirección del interfaz vertical herramienta-suelo.
- Mientras la resultante sea menor que el límite para la fuerza de equilibrio, se aplica una fuerza horizontal sobre la herramienta de la misma magnitud.
- En caso de que la resultante en el sentido del interfaz sea mayor que el límite establecido por el modelo, se aplica una fuerza con una magnitud de dicho límite.

Cuando se produzca esta última situación, la herramienta tendrá una resultante neta no nula en la dirección del interfaz, empezando a desplazarse, y empujando consigo al material.

Discretización del modelo

Para poder aplicar la ecuación (5.6) debemos calcular las variables W y H a partir de la representación discreta de nuestro sistema. Para ello, se considera un sistema unidimensional, discretizado como una sucesión de N puntos equidistantes $i = 0, \dots, N$ y sus alturas correspondientes $h_i = h(i)$.

Consideremos que existe un *interfaz vertical* en cada punto de colisión i_0 para el que el punto $i_0 + 1$ no esté colisionando. Denotaremos la profundidad de la

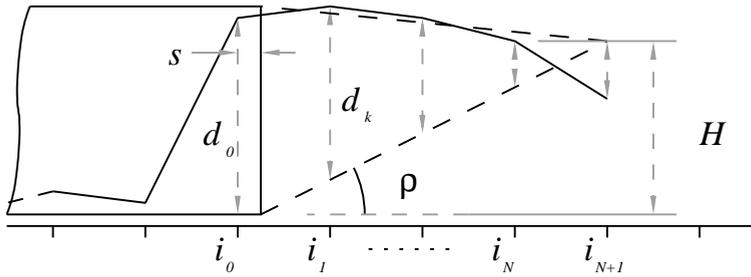


Figura 5.15: Superposición del modelo de fractura de Perumpral discretizado sobre el modelo de Automata Celular propuesto.

fractura vertical en el punto $i_0 + k$ como d_k , y M será el menor entero de manera que $d_{M+1} < 0$ (véase la Figura 5.15). En el caso de que $d_0 < 0$ o $d_1 < 0$, no se considerará ningún interfaz. Por otra parte, si la superficie frente a la herramienta está inclinada de forma que no se detecta intersección con la superficie, el interfaz de fractura se considerará de longitud $2H$, deteniendo entonces el cálculo.

El valor de W puede calcularse sumando los diferentes d_i , y H como $H = d_0 - d_M$. La fuerza se aplica en el punto que está a $1/3$ de la altura del interfaz (Shen and Kushwaha, 1998). Wang (Wang, 2007) ofrece un análisis más detallado sobre la distribución vertical de las fuerzas horizontales que aparecen sobre la herramienta.

Para mantener el significado de d_0 , no se aplicarán fuerzas de contacto verticales en el punto i_0 . En su lugar, actualizaremos i_0 mediante el modelo de evolución de la superficie y guardaremos el valor de s para calcular cuánto espacio hay ocupado entre i_0 and $i_0 + 1$. Si el objeto avanza en la dirección del lado libre, el material será desplazado por el cuerpo, deslizándose a lo largo de la fractura. Esto causa que la altura de cada celda debajo de la fractura aumente. En caso contrario, si el objeto se está retirando, la arena existente entre el objeto y el montón rellenará el nuevo hueco, reduciendo la altura del interfaz.

5.5.3. Actualización de un interfaz de fractura

Consideremos un objeto colisionando con el sistema y un interfaz vertical. De acuerdo con el procedimiento que se ha descrito en los Apartados 5.2.2 y 5.2.3 en las celdas que delimiten la frontera entre la zona en contacto y la zona libre de colisión habrá una sucesión de interfaces verticales.

Consideremos una celda $(i, j - 1)$ que tenga un interfaz de fractura en la dirección del eje y . Ninguno de los vértices entre la celda $(i, j - 1)$ y la celda (i, j) estarán en contacto con el objeto. Supongamos que la situación es tal que ambos vértices inferiores de la celda $(i, j - 1)$ están en contacto con el objeto (véase la Figura 5.16).

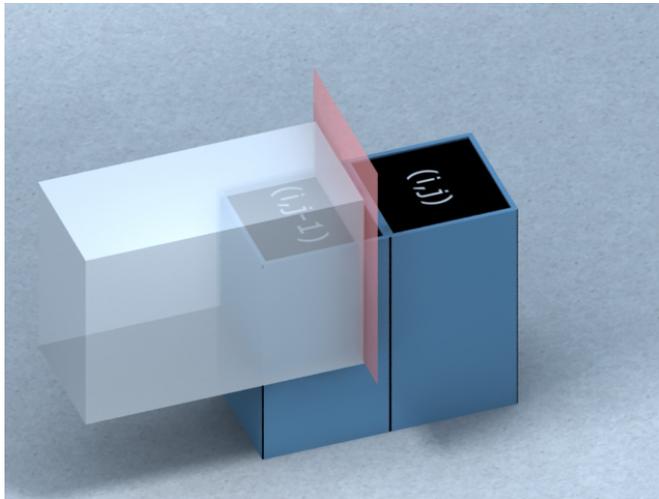


Figura 5.16: Si una celda tiene un *interfaz vertical* en la dirección del eje y ninguna de sus esquinas superiores estará colisionando.

Tras cada paso de la evolución del Autómata, se calculan las fuerzas que actúan sobre el interfaz de fractura, a partir del modelo (5.6) discretizado. Si la fuerza ejercida por el interfaz no es capaz de frenar el avance del objeto y este avanza, en el siguiente paso se calculará la variación de las distancias en el interfaz, de forma que se pueda saber cuánta superficie de la celda se ha ocupado o liberado.

Si se ha ocupado más superficie de la celda, el material correspondiente debe desplazarse a las celdas que quedan frente al interfaz de acuerdo con las propiedades de la fractura (Figura 5.17). Si se ha despejado superficie de la celda, entonces el cálculo de h_2 hará que se reduzca la altura de la celda que tiene el interfaz (véase el Apartado 5.2.2, pág. 109). Así, si una pala retrocede, el montón que hay frente a ella se desmorona.

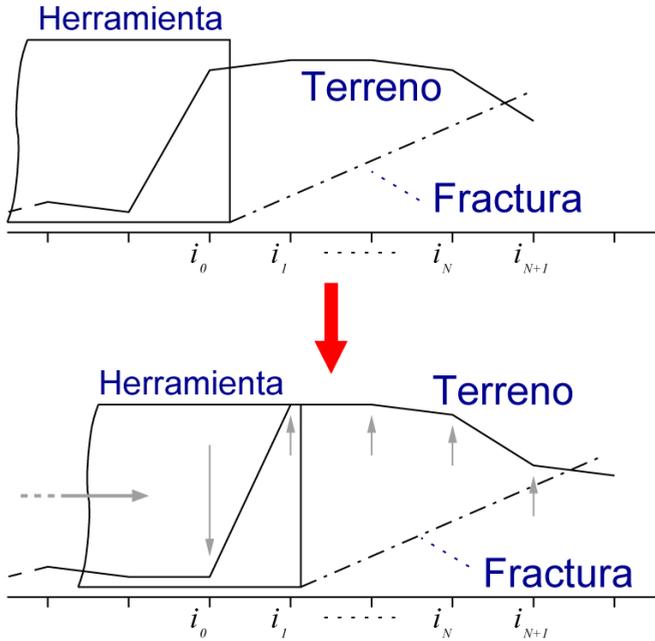


Figura 5.17: Desplazamiento de un interfaz vertical.

Cálculo del material desplazado

De acuerdo con el modelo que acaba de describirse, cuando se produzca el avance del interfaz debe desplazarse cierta cantidad de material. La cantidad de material que se desplaza debe coincidir con el volumen ocupado por el interfaz en su avance. Para ello, se calcula el incremento de las tres variables que determinan el volumen ocupado por la colisión, δd , δs y δw (véase la Figura 5.18). Para el caso en que una celda tenga un único interfaz, su anchura w coincidirá con la de la celda, de forma que la variación de esta variable será nula. El valor

del material desplazado μ vendrá dado por:

$$\mu = d_0 \cdot \delta_s \cdot w - \frac{\delta d \cdot \delta s}{2} \cdot w \quad (5.7)$$

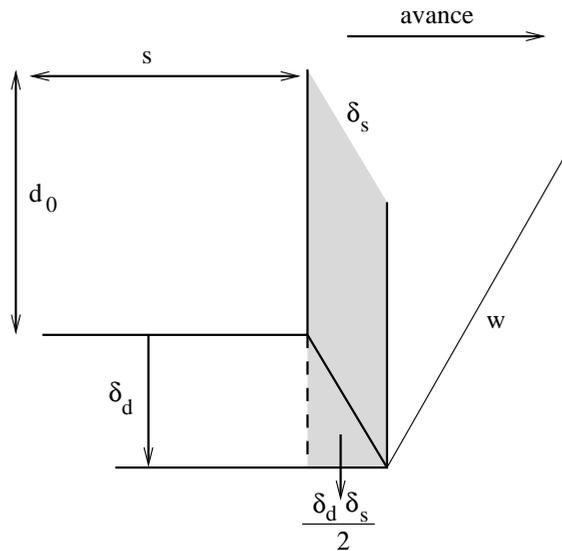


Figura 5.18: Cálculo del material desplazado por un interfaz vertical.

Cambio de celda de un interfaz

En las situaciones que hemos considerado hasta ahora, el avance del interfaz se producía por el interior de una misma celda. Sin embargo, si el avance persiste, llegará un momento en el que se alcance el extremo opuesto de la celda, entrando en la celda vecina.

Cuando esto ocurra, debe tenerse en cuenta en el cálculo del valor de δ_s . El motivo es que, en el último paso antes de producirse el cambio de celda el valor de s será próximo al ancho de la celda, mientras que una vez cambiada la celda, el valor de s será próxima a cero. Por este motivo, cuando se produzca un cambio de celda, debe sumarse la longitud de la celda al valor de δ_s obtenido (véase la Figura 5.19).

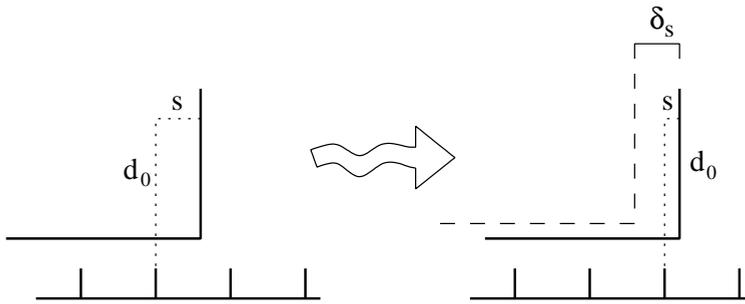


Figura 5.19: Cuando un interfaz vertical avanza hasta cambiar de celda el valor de s se reduce. Esto debe ser tenido en cuenta al calcular δ_s .

5.5.4. Coordinación de varios interfaces

Hasta ahora se ha analizado el efecto del avance de un interfaz vertical por el sistema, de forma que va desalojando material de las celdas que atraviesa. La explicación de este proceso se ha llevado a cabo, en la mayoría de los casos, suponiendo que el único interfaz en la celda era el interfaz considerado. La Figura 5.20 muestra celdas en las que se dan cada uno de los dos casos.

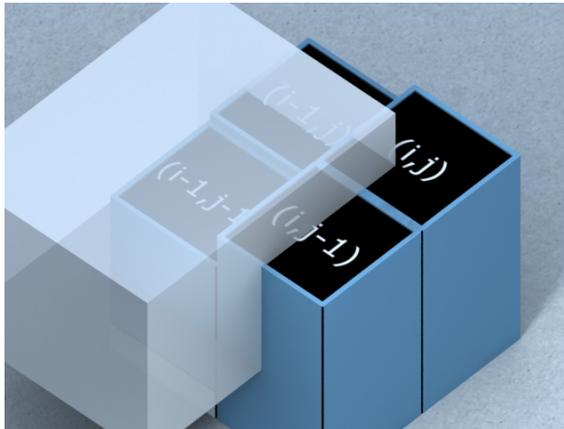


Figura 5.20: Cuando se produce una colisión, una celda puede tener uno o dos interfaces verticales.

Si bien la argumentación en general es válida, en el caso de que una celda tenga dos interfaces perpendiculares entre sí es necesario tener en cuenta

algunos detalles para que la simulación se realice correctamente.

Inicio de un interfaz

En el momento de iniciar dos interfaces I_1 e I_2 sobre la misma celda, se debe conocer la cantidad de material que el objeto ha desplazado en cada dirección. Para ello es necesario conocer la velocidad del objeto.

Supongamos el caso límite, en el que la velocidad del objeto es perpendicular a uno de los dos interfaces, I_2 . En este caso el avance del interfaz I_1 corresponderá al valor de s_1 , mientras que el avance del interfaz I_2 deberá ser cero, ya que el objeto no ha avanzado en esa dirección.

Para cualquier situación intermedia en la que la velocidad del objeto tiene componente no nula en la dirección de ambos interfaces, se determinará el valor de δs_k en función de estas dos componentes de la velocidad (véase la Figura 5.21).

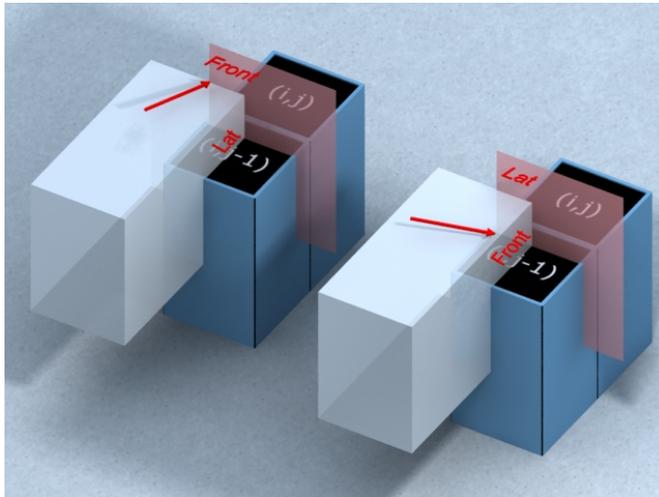


Figura 5.21: La inicialización de dos interfaces verticales sobre la misma celda debe tener en cuenta la velocidad del objeto.

Cálculo del material desplazado con dos interfaces

Por otra parte, en una situación habitual de avance de un objeto sobre una celda con dos interfaces, el área ocupada o liberada por el mismo debe calcularse adecuadamente. Dado que en una celda con un único interfaz la anchura del mismo es constante en la expresión (5.7) no se tiene en cuenta la variación δw .

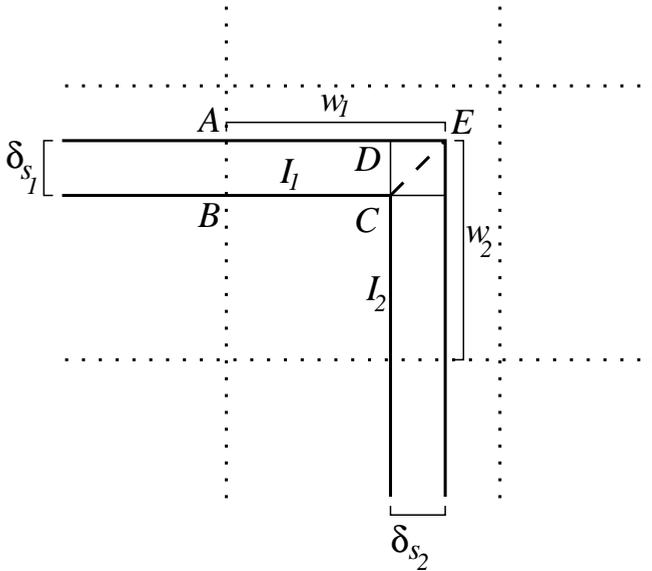


Figura 5.22: En una celda con dos interfaces es necesario calcular correctamente el material desplazado por cada uno de ellos, que dependerá de la variación de sus anchuras.

Considérese una celda con dos interfaces I_1 e I_2 . De acuerdo con la Figura 5.22 el volumen ocupado o liberado por I_1 corresponderá al volumen bajo el rectángulo $ABCD$, correspondiente a la fórmula (5.7), más el volumen bajo el triángulo DCE . Por tanto, el volumen deberá calcularse como:

$$\mu = \left(d_0 \cdot \delta s \cdot w - \frac{\delta d \cdot \delta s}{2} \cdot w \right) \left(1 + \frac{\delta w}{2} \right) \quad (5.8)$$

5.6. Revisión del modelo de Autómata Celular

A lo largo del presente capítulo se han desarrollado diversos modelos para la simulación de interacciones en sistemas granulares. En particular, en los Apartados 5.3 y 5.4 se han propuesto nuevos modelos de Autómata Celular que completan el modelo dinámico del Capítulo 4.

Sin embargo, con el fin de simplificar la exposición, en estos modelos no se ha reflejado convenientemente la introducción del cálculo de colisiones. En especial, es necesario reflejar en el modelo dinámico la existencia de las variables h_1 , h_2 y A . A continuación se dan las indicaciones necesarias para clarificar la forma en que pueden introducirse en la dinámica del sistema.

5.6.1. Variables del sistema

Con el fin de considerar las variables introducidas a causa de las colisiones, las variables de estado del Autómata vendrán dadas por $\mathbf{S} = S_M$, donde S_M es el conjunto de posibles valores del material, M , alojado por la celda, $S_M = [0, \infty[$.

Las variables descritas en el Apartado 5.2.2, pág. 109, h_1 , h_2 y A , no han sido consideradas como una variables de estado del sistema, ya que se trata de variables dependientes del resultado de las colisiones, y por tanto se consideran como variables de entrada.

5.6.2. Función de transición

La función de transición deberá adaptarse para trabajar con la variable de material M en lugar de basarse en alturas del sistema. En realidad, la única modificación necesaria es convertir la altura de la descarga a cantidad de material, por medio del área despejada en la celda, de forma que el incremento de material en una actualización sera $\delta M = \delta h/A$, donde δh corresponde al valor de descarga del modelo basado en alturas. La comprobación de la pendiente se sigue haciendo, como es natural, por medio de la altura total sobre cada celda,

$h = h_1 + h_2$. Las ecuaciones (5.7) y (5.8) proporcionan la variación de la cantidad de material en una celda para uno y dos interfaces verticales.

Este cambio, lejos de suponer un inconveniente, proporciona mayor generalidad al modelo, ya que en las celdas en las que el material no está colisionando, y por tanto $h = h_1$, el modelo se comporta igual al presentado en los apartados anteriores. Además, el trabajo con cantidades de material abre la posibilidad de trabajar en un futuro con variaciones en la densidad del mismo.

5.7. Conclusiones

Continuando con la consecución de los objetivos planteados, en este capítulo se han desarrollado las principales herramientas necesarias para la simulación interactiva de terreno y sistemas granulares, a partir del modelo presentado en el Capítulo 4.

Se ha desarrollado una descripción del estado de las colisiones de un objeto con el sistema, utilizando el carácter discreto del modelo. Se ha descrito la creación y mantenimiento de un mapa de contactos que permitirán modificar el modelo de evolución.

Sobre este esquema y el modelo del capítulo anterior se ha estudiado en primer lugar la forma de aplicar fuerzas sobre el sistema granular y cómo obtener las fuerzas de reacción. Al igual que en el caso del modelo de evolución, se han empleado modelos teóricos de validez comprobada. En este caso, los modelos empleados proceden del campo de la geomecánica

El mapa de contactos permite también la identificación de las celdas que constituyen la frontera entre la zona en contacto y la zona libre de él. Sobre estas celdas se aplica un modelo de fractura utilizado en el diseño de maquinaria agrícola, que permite calcular la evolución del sistema ante la acción de una herramienta, así como las fuerzas de reacción.

Los modelos que se han desarrollado en este capítulo permiten alcanzar el

objetivo de desarrollar un modelo interactivo de terreno. Con ello se obtiene un modelo discreto, basado en física que permite la simulación interactiva de un sistema granular. En el siguiente capítulo se aborda un problema actualmente abierto, y que complementará las propiedades del modelo que se ha propuesto hasta el momento; la acumulación de material sobre los objetos de la escena.

*As far as the laws of mathematics refer to reality, they are not certain;
and as far as they are certain, they do not refer to reality.*

A. Einstein.

CAPÍTULO 6

Acumulación de material sobre objetos

En los capítulos precedentes se ha desarrollado un conjunto de modelos que permite la simulación de un abanico muy amplio de situaciones. Desde la simulación del terreno como un sistema dinámico hasta diversos modelos de interacción, todos ellos basados en las propiedades físicas del sistema.

Para completar este conjunto de modelos, a continuación se aborda el problema de la acumulación del material sobre los objetos del escenario necesaria para la simulación de herramientas como la pala de una excavadora.

6.1. Introducción

La simulación del contacto con el terreno requiere la consideración de la deformación del suelo y de las fuerzas que aparecen. Pero para poder manipular el material con diferentes herramientas (palas, volquetes, excavadora, etc) es necesario poder depositar el material granular sobre ellas.

Para poder simular esta situación, se utilizará la siguiente metodología. Sobre los objetos del escenario en los que el material deba acumularse se fijará un

modelo de Autómata Celular, que se adaptará a su superficie por medio de las alturas de la base.

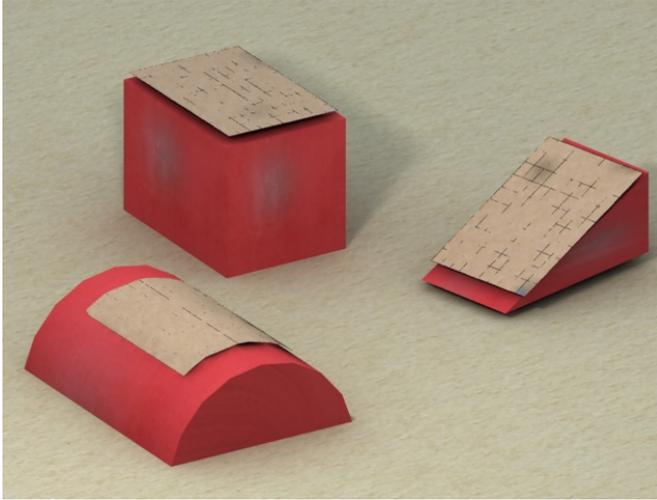


Figura 6.1: Sobre los objetos del escenario se fija un modelo de Autómata Celular para poder acumular el material sobre ellos. La base del Autómata se adaptará a la forma del objeto.

Al introducir varios modelos de sistema granular en la simulación se establecerá también la forma de conseguir la interacción entre ellos, como el intercambio de material o la colisión entre ellos.

El resultado será un modelo que permitirá la acumulación de material sobre los objetos de forma realista para la simulación de procesos de descarga sobre una tolva o volquete, etc.

Además se considera el caso especial de la carga de una pala por ser un escenario habitual en la manipulación de sistemas granulares y se analiza la distribución de presiones sobre el objeto que soporta un sistema granular.

6.2. Acumulación de material sobre un objeto

Para conseguir la acumulación del material sobre la superficie de un objeto es necesario disponer de una descripción geométrica de su superficie. A partir de esta descripción bastará considerarla como base para el mapa de alturas del sistema granular. De esta forma, será posible dejar caer material sobre la superficie de cualquier elemento del escenario.

Para poder realizar la simulación de forma interactiva es necesario considerar el movimiento de estos objetos para contemplar la influencia de la orientación de la base en el comportamiento del sistema. Esto permitirá simular situaciones como la descarga de una pala o un volquete.

Para ello se introduce como variable global en cada uno de los Autómatas Celulares utilizados un sistema de referencia que se moverá solidariamente con el objeto sobre el que se encuentra el sistema granular. La Figura 6.2 muestra un sistema granular que se desplaza y rota en el espacio.

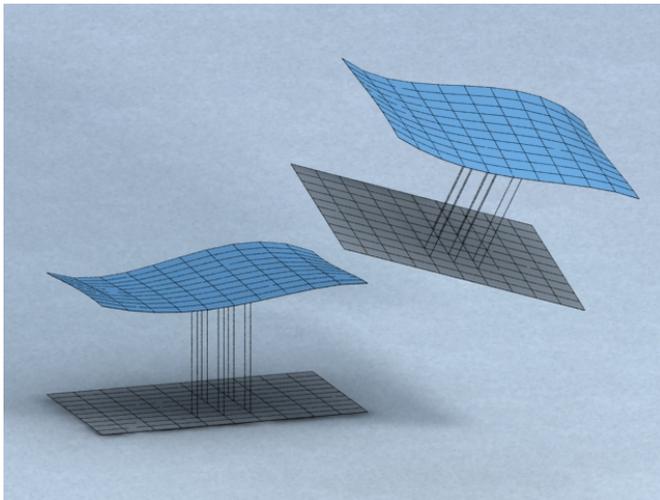


Figura 6.2: Cuando el Autómata se encuentra sobre la superficie de un sólido tiene su sistema de referencia.

6.2.1. Posición y orientación del Automata Celular

Para determinar el estado de un Automata Celular en el espacio es necesario conocer la posición y orientación de la base del Automata Celular, y la posición relativa de las celdas respecto a esta base. Consideremos una base ortonormal de \mathbb{R}^3 , $(\mathbf{0}, \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\})$, que representará el sistema de referencia del mundo. Consideremos también un sistema de referencia situado sobre el Automata Celular, y que se mueve solidariamente con él $(\mathbf{R}, \{\mathbf{x}', \mathbf{y}', \mathbf{z}'\})$, y la matriz ortogonal \mathbf{A} que permite pasar de las coordenadas en la base local del sistema del Automata Celular a las coordenadas en la base del sistema de referencia del mundo.

La posición \mathbf{R} representa la posición del centro de la celda $(1, 1)$ en el espacio, tras el desplazamiento y la rotación del objeto sobre que se encuentra fijo el Automata Celular. El vector de la base \mathbf{x}' indica la dirección en la que aumenta el índice i de la malla, el vector \mathbf{y}' representa la dirección en la que aumenta el índice j , y el vector \mathbf{z}' es perpendicular a ambos, formando una base positivamente orientada.

Variables del sistema

La interpretación de los valores de las variables del Automata Celular h y z , únicamente cambia en el sentido de que ahora se consideran como distancias en la dirección del eje \mathbf{z}' , de forma que no son estrictamente alturas. De esta forma, la posición de la superficie sobre una celda del Automata Celular, expresado en el sistema de referencia local viene dada por $\mathbf{p}'(i, j) = (i, j, h) = i\mathbf{x}' + j\mathbf{y}' + h\mathbf{z}'$.

Además, se introduce como variable auxiliar del sistema la posición en el espacio de la superficie de la celda, dada por:

$$\mathbf{p}(i, j) = \mathbf{R} + \mathbf{A}\mathbf{p}'(i, j) \quad (6.1)$$

Esta variable no se introduce como variable de estado del sistema debido a que no se obtiene por medio de otras y por ello se considera como una variable auxiliar. Por tanto, esta modificación no introduce ningún cambio en el conjunto de posibles estados del Automata Celular S .

Modificación de la regla de actualización

Para conservar el significado de la regla de actualización es necesario realizar el cálculo de la pendiente sobre cada punto teniendo en cuenta la rotación del Automata.

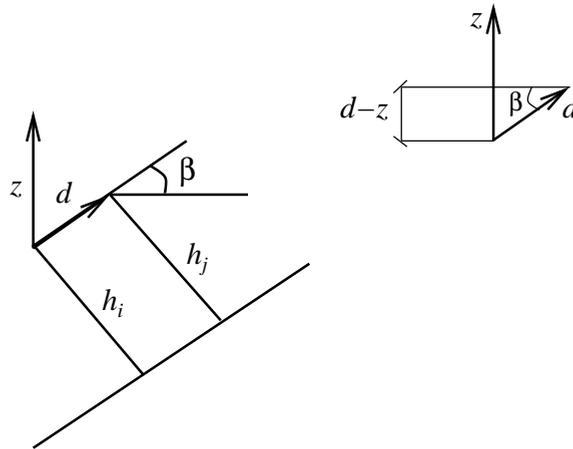


Figura 6.3: Cálculo de la pendiente entre dos celdas del Automata utilizando la posición de los puntos de su superficie, obtenidos a partir de la posición y orientación de la base.

Para realizar la comparación entre dos celdas (i, j) y (k, l) se calculará en primer lugar la posición de su superficie en el espacio $\mathbf{p}(i, j)$ y $\mathbf{p}(k, l)$, por medio de la expresión (6.1). A partir del vector $\mathbf{d} = \mathbf{p}(i, j) - \mathbf{p}(k, l)$ es posible calcular el ángulo de la pendiente entre ambas posiciones por medio de (6.2) (véase la Figura 6.3).

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \arccos \left(\frac{|\mathbf{d} \cdot \mathbf{z}|}{|\mathbf{d}|} \right) \quad (6.2)$$

Una vez calculado el ángulo β , el cálculo de la regla de actualización se lleva a cabo normalmente según el modelo dinámico elegido para la evolución del sistema.

Es importante observar que, como resultado de la rotación de la base del Automata, en principio pueden darse situaciones sin significado físico, como que

la pendiente del sistema supere la vertical. Sin embargo, si la velocidad de rotación de la base es suficientemente baja, el propio comportamiento del sistema compensará el incremento de la pendiente.

Por tanto, debe tenerse en cuenta que este modelo tiene validez para velocidades de rotación de la base suficientemente pequeñas como para que el comportamiento del sistema mantenga su estado dentro del conjunto de configuraciones que tienen significado físico.

Con el fin de ampliar el rango de aplicación del modelo, puede detectarse la situación en la que la pendiente supera la vertical, y reducir ese material, generando un sistema de partículas que se dejará evolucionar de acuerdo con la gravedad. En el Apartado 8.3 se discuten algunos aspectos relacionados con los sistemas de partículas.

6.3. Interacción de varios AC

Una vez se dispone de las herramientas necesarias para situar un sistema granular en cualquier posición u orientación válidas, puede plantearse una situación en la que un montón de arena, situado sobre un objeto móvil, es descargado sobre otro montón situado sobre otro objeto o sobre el suelo.

En este apartado se describe el procedimiento propuesto para introducir dos modelos de pila de arena en una simulación. El objetivo es que sean capaces de compartir material y de intercambiarlo a través de sus fronteras.

6.3.1. La frontera de un Autómata y su evolución

Hasta el momento se ha descrito la dinámica de un Autómata Celular y de los modelos de pila de arena sin tener en cuenta el papel de las fronteras. Sin embargo, si se quiere considerar el intercambio de material entre dos modelos de Autómata Celular a través de sus fronteras debe concretarse de qué manera pueden hacerlo.

De acuerdo con la definición de Autómata Celular sus celdas frontera son aquéllas celdas de la malla del Autómata que no tienen la vecindad completa. Se trata de las celdas

$$\mathbf{Fr} = \{(1, j), (N_x, j), (i, 1), (i, N_y) : i = 2, \dots, N_x - 1, j = 2, \dots, N_y - 1\} \quad (6.3)$$

Normalmente se consideran dos posibles comportamientos en los Autómatas Celulares, y en particular en los modelos de pila de arena: los sistemas abiertos y los sistemas cerrados. Un Autómata Celular *abierto* es aquél cuyas celdas en la frontera siempre tienen valor 0 de forma que cuando el material llega a ellas se pierde por el borde.

En un Autómata Celular *cerrado*, por el contrario, la actualización de las celdas de la frontera se hace normalmente teniendo en cuenta a los vecinos existentes. Este último tipo de sistemas se comporta como una pila de arena confinada en un recinto que rodea la malla con paredes infinitamente altas.

Desde el punto de vista de la simulación de sistemas reales, resulta más conveniente la utilización de sistemas abiertos, especialmente si se considera la necesidad de que el material de dos Autómatas pueda intercambiarse.

Según el modelo que se ha propuesto, la simulación de recintos o recipientes es fácilmente implementable por medio de este tipo de Autómatas utilizando la altura de la base para la simulación de las paredes. Por tanto, en adelante únicamente se considerarán Autómatas Celulares abiertos.

6.3.2. Interacción entre Autómatas

El hecho de que un Autómata Celular descargue material sobre otro consiste en que el material que atraviesa la frontera del primero aumente la altura de las celdas del otro Autómata que se encuentran bajo su frontera. Para ello se determinarán aquellas celdas del Autómata inferior están cubiertas por el Autómata superior, y se establecerá un mecanismo para conseguir el intercambio del material.

Durante la exposición relativa a la interacción entre varios Automatas se considerarán únicamente dos sistemas y se mostrará la interacción entre ellos. La interacción entre un número mayor de Automatas puede realizarse comprobando individualmente cada par de acuerdo con lo expuesto aquí. Aunque esto pueda parecer una limitación, por el coste asociado a la comprobación de todos los pares del conjunto de Automatas, es muy sencillo aplicar técnicas de poda similares a las empleadas en detección de colisiones para reducir este coste a niveles aceptables para simulación en tiempo real (Ericson, 2005).

Comprobación de las fronteras

Consideremos por tanto dos sistemas simulados por medio de dos Automatas Celulares. Denotaremos a los dos Automatas considerados por \mathcal{AC}^1 y \mathcal{AC}^2 , denotando los elementos de cada uno de ellos por medio del superíndice correspondiente.

Antes de iniciar el proceso de intercambio de material, debe identificarse el conjunto de celdas de un sistema que pueden estar en situación de desalojar partículas afectando al otro. Para ello se comprobará, en primer lugar, si la zona cubierta por ambos Automatas se solapa. Esto puede comprobarse obteniendo la caja envolvente de la base de ambos Automatas, y comprobando si su intersección es vacía. Si se detecta que no es vacía, entonces debe comprobarse si alguna de las celdas de la frontera de uno de los Automatas se encuentra sobre el otro.

Observemos que si no permitimos que las bases de ambos Automatas se crucen en el espacio, no es posible que ambos Automatas tengan celdas que se encuentren sobre alguna celda del otro Automata. Por tanto, una vez detectado que ambos Automatas se solapan se determina cuál de los dos tiene la base a mayor altura, y se identifica como el Automata superior. A este Automata lo denotaremos por \mathcal{AC}^s , mientras que al Automata inferior lo denotaremos por \mathcal{AC}^i , y a sus elementos los identificaremos por medio de los superíndices correspondientes.

Una vez detectado que existe una intersección entre la proyección de la base

de ambos Autómatas, se detecta si el material desalojado por alguno de los dos Autómatas puede caer verticalmente sobre el otro. Para ello se extiende la malla del Autómata superior en una celda en cada dirección, de forma que consideraremos los índices de este Autómata en el rango $i = 0, \dots, N_x + 1$ y $j = 0, \dots, N_y + 1$. Al conjunto de celdas imaginarias de esta extensión las denotaremos por \mathcal{I} .

Las celdas de \mathcal{I} son las celdas que recibirían el material de las celdas frontera cuando el material abandona el sistema. Al igual que las celdas frontera, se considerarán con altura de material 0 y con base la misma que la celda frontera de la que son vecina (véase la Figura 6.4).

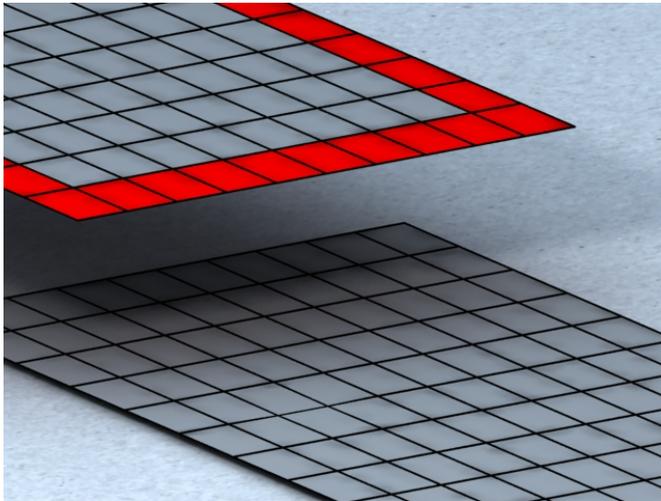


Figura 6.4: Las celdas coloreadas simbolizan el conjunto de celdas imaginarias \mathcal{I} definido para poder intercambiar material de un Autómata Celular a otro.

De esta manera, si se comprueba que alguna celda $c \in \mathcal{I}$ se encuentra situada verticalmente sobre el Autómata \mathcal{AC}^i , significa que a través de c se producirá un intercambio de material. Para concretar esta relación, consideremos la siguiente definición:

Diremos que una celda $(i, j)^s$ del Autómata \mathcal{AC}^s se encuentra sobre una celda $(k, l)^i$ del Autómata \mathcal{AC}^i cuando el centro de $(i, j)^s$ se en-

cuenta dentro de la celda $(k, l)^i$.

Se recorre el conjunto \mathcal{I} , comprobando si cada una de sus celdas se encuentra sobre alguna celda de \mathcal{AC}^i . Una vez terminado este proceso se dispondrá de una lista de celdas de \mathcal{I} que dan lugar a un intercambio de material. Al conjunto formado por estas celdas las denotaremos por $\overline{\mathcal{I}} \subseteq \mathcal{I}$.

Asignación de vecinos

Se ha identificado, por medio del conjunto $\overline{\mathcal{I}}$ las celdas imaginarias que suponen canales de material entre el Autómata \mathcal{AC}^s y el Autómata \mathcal{AC}^i .

Consideremos una celda $c \in \overline{\mathcal{I}}$. Esta celda, ocupa la posición de la celda vecina de una celda $c^s \in \text{Fr}$ del Autómata superior. Consideremos la celda c^i sobre la que se encuentra la celda imaginaria c . La cantidad de material que debe recibir c^i a través de c es la que ésta reciba de c^s . Es decir, c^i actúa como vecina en el proceso de actualización de c^s .

Por tanto, para cada celda $c \in \overline{\mathcal{I}}$, situada sobre la celda c^i , se tomará la celda c^s asociada. A esta celda c^s se le asignará como vecino la celda c^i . La Figura 6.5 muestra las celdas c^s y c^i , y el proceso de descarga de material entre ellas.

La implementación de este proceso puede llevarse a cabo de forma muy eficiente si la relación de vecindad se establece por medio de referencias o punteros en el lenguaje de programación empleado. De esta manera, es sencillo comprobar si una celda carece de algún vecino, y la asignación del mismo resulta muy rápida y eficiente.

6.3.3. Colisión entre dos Autómatas

Observemos que en la relación entre las celdas c^s y c^i , únicamente se modifica la vecindad de la celda de \mathcal{AC}^s . Todo el flujo de material de la celda c^i se realiza teniendo en cuenta sus vecinos naturales en \mathcal{AC}^i . Esto se realiza así, su-

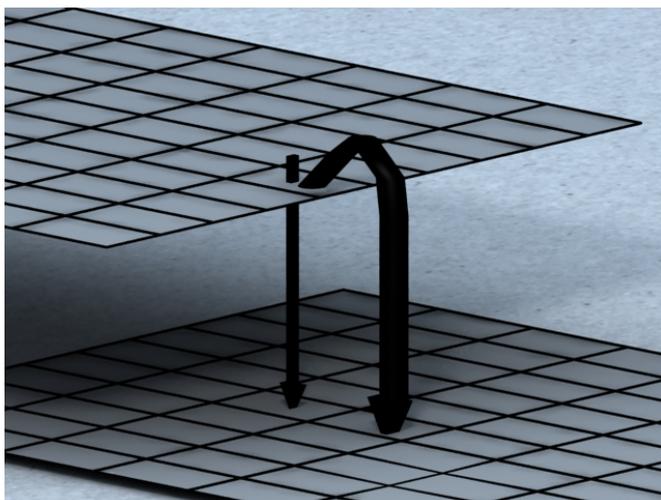


Figura 6.5: Esquema de interacción entre un Autómata superior y uno inferior.

poniendo que la base del Autómata \mathcal{AC}^s no sólo se encuentra más alta que la base de \mathcal{AC}^i , sino también más alta que la superficie de \mathcal{AC}^i .

Sin embargo, ya sea por el desplazamiento de \mathcal{AC}^s o por la evolución de \mathcal{AC}^i , puede ocurrir que la superficie de \mathcal{AC}^i en la celda c^i alcance la altura de la base de c^s . En esta situación, ambas celdas se encuentran al mismo nivel, por lo que el material podrá fluir también de c^i a c^s . Llegado este caso, c^s se fijará como vecina de la celda c^i .

Un ejemplo de esta situación es el avance horizontal de un objeto hasta que el material acumulado frente a él lo supere (véase la Figura 6.6). En este caso, el material desplazado se depositará sobre el Autómata situado sobre el objeto.



Figura 6.6: Si un objeto avanza arrastrando material, la acumulación frente a él puede hacer que el material acabe superando su altura. En ese caso, la reasignación de vecinos de las celdas hará que el material caiga sobre el objeto.

6.4. Llenado de una pala

Una situación especialmente interesante desde el punto de vista de la manipulación del terreno es el llenado de una pala de excavadora. Esta situación puede describirse por medio de los elementos que hemos definido hasta el momento, pero es necesario considerar ciertas situaciones especiales.

Una pala de excavadora se modelará como un objeto más del escenario que entrará en contacto con el material. Se detectarán colisiones con el objeto y se obtendrá el mapa de contactos.

Sin embargo, la principal diferencia entre el comportamiento de la pala y los objetos que hemos considerado hasta el momento es su altura; una pala es una pieza de metal con un filo, diseñada especialmente para cortar el material. De esta manera, puede entrar con un bajo esfuerzo, y el material no será empujado hacia adelante, quedando depositado sobre la propia pala.

Esto significa que durante el proceso de entrada de la pala en el material no se produciría una fractura como en el caso de los interfaces verticales considerados en el Capítulo 5. Por el contrario, el material que aún no ha sido invadido por la pala permanece casi sin modificar (Maciejewski et al., 2004; Coetzee et al., 2007). A continuación se revisan las situaciones que se producen en este caso, y se propone un procedimiento para la simulación del proceso de entrada de una pala en el sistema.

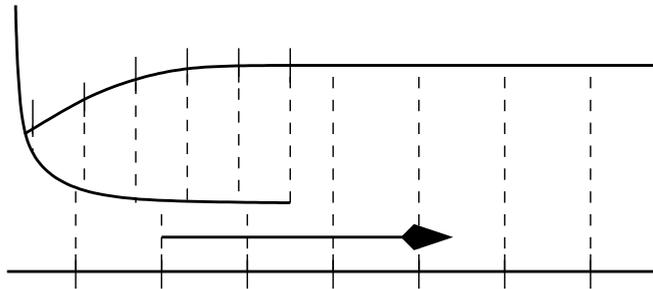


Figura 6.7: El comportamiento del material ante una pala horizontal no es el mismo que el que ocurre cuando se empuja el material. En este caso, no se produce un interfaz de fractura.

6.4.1. Descripción de la pala

Para implementar una pala que sea capaz de recoger el material sobre su superficie, en primer lugar se necesita un objeto del escenario que tenga asociado a su superficie un Autómata Celular. La información de la base del Autómata reproducirá la geometría de la pala, de forma que el material se mantenga en la región conveniente. La Figura 6.8 muestra un Autómata Celular sobre un modelo de pala excavadora.



Figura 6.8: Para recoger material sobre una pala, necesitamos un Autómata Celular sobre ella.

6.4.2. Evolución de la carga de una pala

Cuando se inicie la carga de una pala, se detectará en primer lugar la colisión entre la pala y el sistema. En este momento se obtendrá el mapa de colisiones habitual que define las celdas que quedan cubiertas y las celdas que forman la frontera de la colisión. Una vez se ha iniciado toda la información correspondiente a las colisiones, ambos Autómatas evolucionarán normalmente.

La interacción dará lugar a la aparición de un interfaz vertical frente a la pala y, posiblemente, de una región de Rankine en la que el material se desplaza sobre el interfaz de fractura. Pero si la pala sigue avanzando, llegará un momento en el que el material frente a la pala tendrá una altura mayor que la superficie de ésta (véase el Apartado 6.3.3).

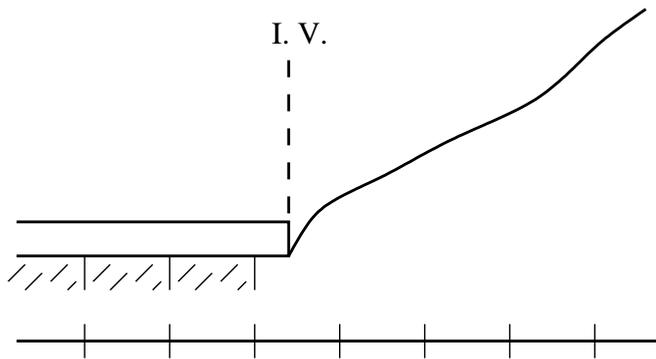


Figura 6.9: Evolución del avance de una pala I. Se crea un interfaz vertical a causa del contacto.

Avance de la pala

Cuando se produzca esta situación, el procedimiento descrito en el Apartado 6.3.3 hará que la primera celda frente al interfaz tome como celda vecina la primera celda de la pala.

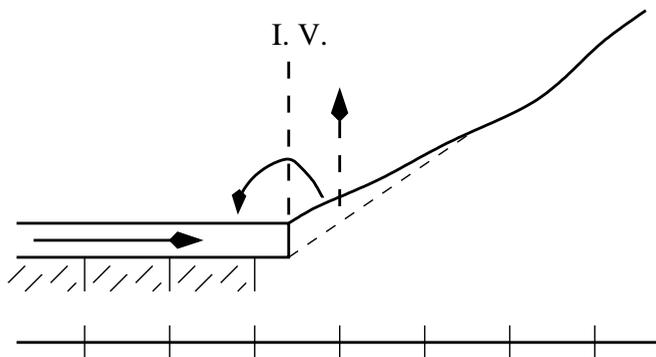


Figura 6.10: Evolución del avance de una pala II. El material aumenta frente a la pala hasta que supera su altura. Las celdas en el terreno toman como vecinos las celdas de la pala.

Se comprobará la altura del interfaz vertical, d_0 y la altura del colisionable. En

caso de que la altura del colisionable sea menor que un valor umbral, definido previamente, se considerará que estamos en la situación de carga de una pala.

En este caso, la evolución del interfaz vertical se modifica. El cálculo del material desplazado se realiza normalmente, utilizando como valor de d_0 la altura desde la base de la pala hasta la superficie del sistema. Sin embargo, en este caso no se produce ningún desplazamiento de material.

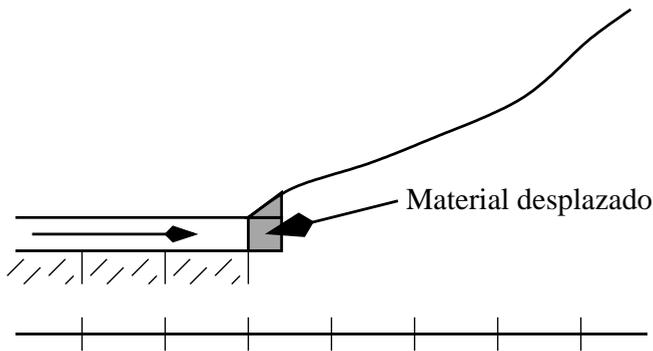


Figura 6.11: Evolución del avance de una pala III. Las celdas en el terreno empiezan a descargar material sobre la pala.

Por el contrario, el material desplazado μ que se ha calculado en el avance del interfaz vertical se acumula en una variable hasta que el avance de la pala alcance el tamaño de la celda sobre la pala. Esto se establece por medio de la velocidad de avance de la pala.

Cuando la pala ha avanzado la distancia de una celda, todas las celdas se desplazan hacia atrás una posición, de forma que parecerá que el material se ha deslizado. Cuando esto ocurra, la celda de la frontera de la pala se quedará vacía. En este caso, el material acumulado de los diferentes valores de μ se pondrá como material de la celda de la frontera.

Ángulo de reposo

Durante el proceso de carga de la pala en el sistema real, el material granular está deslizando sobre la herramienta. Esto provoca necesariamente vibraciones que afectan a la estabilidad del sistema. Por tanto, el ángulo de reposo del sistema sobre la pala será menor que el que le correspondería en el caso de material estático. Para simular este efecto, durante las interacciones, el Autómata Celular reducirá el valor del ángulo crítico del sistema.

6.5. La función de distribución de presiones

Cuando el sistema granular se encuentre sobre un objeto móvil del entorno de simulación (por ejemplo, sobre la pala de una excavadora, o el volquete de un camión) puede ser necesario conocer la distribución de la presión del material sobre el mismo. Este problema es complejo, y no existe una solución cerrada. Los procesos internos de fricción entre las partículas hacen que no exista una relación lineal entre la altura del sistema sobre una celda y la presión que soporta. Basándose en los estudios experimentales más relevantes y en trabajos de simulación destinados a analizar este problema, se propone un modelo de distribución.

Para considerar este efecto se introducirán dos elementos en el Autómata Celular, una nueva variable $p \in S_p$ y la función de distribución de presiones, $\pi : \mathbf{S}^{N_x \times N_y} \rightarrow S_p$, que determina la presión p que soporta la base de la celda (i, j) tras la aplicación de la función de transición.

Para definir esta función, debemos obtener una expresión que permita calcular la presión que soporta una celda i de la base a partir del estado del Autómata en un momento determinado. Para simplificar los cálculos y las expresiones obtenidas, el desarrollo se realizará sobre un Autómata Celular unidimensional, y a continuación se indicará la forma de realizar los cálculos en el caso general.

Sobre esta representación del sistema granular se considera una partición vertical, de forma que el material que está situado sobre la celda i se considera

como un apilamiento de bloques de altura H . Denotaremos por m_i^n al peso del n -ésimo bloque situado sobre la celda i , y por p_i^n a la presión total soportada por la base del n -ésimo bloque sobre la celda i .

En primer lugar se considera cuál es la presión que soporta la base de cada uno de estos bloques. Para ello, se considerará, además del peso del propio bloque m_{i+j}^n , la presión soportada por un número finito de bloques de la capa superior, centrados en la celda i , $\{p_{i+j}^{n+1} : j = -r, \dots, r\}$. Por simplicidad, en los desarrollos siguientes sólo se tendrán en cuenta los bloques más próximos, $\{m_j^{n+1} : j = -1, 0, 1\}$, aunque el desarrollo que se ha de seguir en el caso general es análogo.

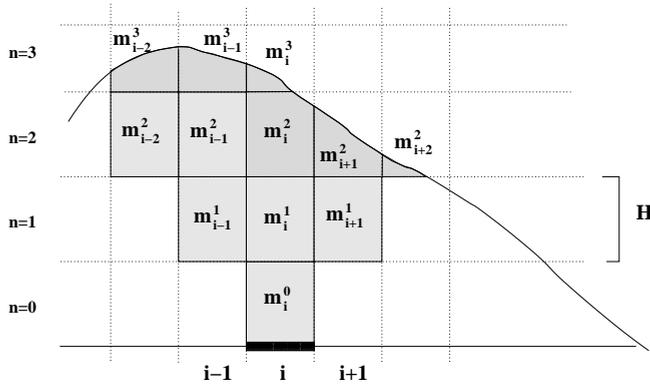


Figura 6.12: Esquema de la discretización vertical para el cálculo de la distribución de masas.

La forma en que la presión de los bloques de la capa n se propagan a la capa $n - 1$ se expresará por medio de una función $\phi : Z \rightarrow [0, 1]$, de soporte acotado ($\phi(k) = 0 \forall k : |k| > 1$) y simétrica, que cumpla

$$\sum_{k \in Z} \phi(k) = \phi(-1) + \phi(0) + \phi(1) = 1 \tag{6.4}$$

de forma que $\phi(t)$ indica que proporción de la presión soportada por la base del bloque i de la capa n se propaga al bloque $i + t$ de la capa $n - 1$.

Con el fin de simplificar la notación, se denota $\phi(i) = \phi^i$, y se utiliza el convenio de sumación de índices por el cual, si en una expresión i es un índice mudo,

entonces $a^i b_i := \sum_i a^i b_i$. Siguiendo esta notación, se establece que la presión sobre la base del bloque sobre la celda i a altura n es

$$p_i^n = m_i^n + \sum_{k=-1}^1 \phi^k p_{i+k}^{n+1} = m_i^n + \phi^k p_{i+k}^{n+1} \quad (6.5)$$

es decir, el peso del bloque de material contenido en la propia posición, más la suma ponderada de los pesos de los bloques en las tres celdas superiores. Obsérvese la aplicación del criterio de sumación de índices en la última expresión.

Llegados a este punto, es necesario hacer una puntualización. De acuerdo con el modelo de sistema granular descrito en el Capítulo 4, la densidad de material ρ es constante en todo el sistema, con lo que el peso de un bloque de material es $m_i^n = \rho H d g$, donde $d = x_i - x_{i-1}$ es el tamaño de una celda sobre el sistema real y g es la aceleración de la gravedad. Sin embargo no se realiza esta simplificación porque los bloques de la última capa de material sobre cada celda pueden no estar llenos. Además, con el fin de simplificar el desarrollo que sigue, consideraremos que los bloques por encima de la altura de la superficie del sistema tienen peso cero. Esto permitirá conseguir expresiones más compactas y generales.

A partir de esta relación entre el peso sobre una altura y el peso sobre la altura inmediatamente superior, podemos calcular la expresión del peso total sobre una celda de la base del sistema

$$\begin{aligned} p_i^0 &= m_i^0 + \phi^k p_{i+k}^1 = m_i^0 + \phi^{-1} p_{i-1}^1 + \phi^0 p_i^1 + \phi^1 p_{i+1}^1 \\ &= m_i^0 + \phi^{-1} (m_{i-1}^1 + \phi^k p_{i-1+k}^2) + \phi^0 (m_i^1 + \phi^k p_{i+k}^2) + \phi^1 (m_{i+1}^1 + \phi^k p_{i+1+k}^2) \\ &= m_i^0 + \phi^l m_{i+l}^1 + \phi^l \phi^k p_{i+l+k}^2, \end{aligned} \quad (6.6)$$

donde l toma valores entre $\{-1, 0, 1\}$.

Si se sigue sustituyendo por los valores correspondientes a las filas superiores, puede obtenerse una expresión que determina la presión sobre la celda i de la base del sistema en función de las capas superiores

$$\begin{aligned} p_i^0 &= m_i^0 + \phi^{k_1} m_{i+k_1}^1 + \phi^{k_1} \phi^{k_2} m_{i+k_1+k_2}^2 + \dots \\ &\quad + \phi^{k_1} \dots \phi^{k_{n-1}} m_{i+k_1+\dots+k_{n-1}}^{n-1} + \phi^{k_1} \dots \phi^{k_n} p_{i+k_1+\dots+k_n}^n \end{aligned} \quad (6.7)$$

que, reordenando los términos, puede reescribirse como

$$p_i^0 = \sum_n \sum_{j=-n}^n a_{jn} m_{i+j}^n \quad (6.8)$$

donde

$$\begin{aligned} a_{jn} &= \sum_{k_1 + \dots + k_n = j} \phi^{k_1} \dots \phi^{k_n} \\ a_{00} &= 1. \end{aligned}$$

El límite al primer sumatorio en (6.8) viene determinado por la altura del sistema, pues si N es tal que NH supera la cima del sistema, $m_i^n = 0, \forall i, \forall n > N$. Desde el punto de vista de la implementación, el cálculo de (6.7) es factible, ya que si N es tal que nH supera la cima del sistema, $m_i^n = 0, \forall i, \forall n > N$. Sin embargo, esta expresión resulta bastante inconveniente, pues aunque la modificación de la altura de una celda afectará normalmente a un único bloque, y por tanto a un único m_i^n , la expresión (6.7) no permite identificar los términos que deben recalcularse.

Por este motivo, se reordenan los términos de la suma de forma que se pueda determinar el coeficiente de cada m_i^n , para poder expresar la función de presión en la forma

$$p_i^0 = \sum_{n=0}^N \sum_{j=-n}^n a_{jn} m_{i+j}^n \quad (6.9)$$

Veamos la manera de obtener los coeficientes a_{jn} .

A partir de (6.7), se obtiene que en todos los términos en los que aparece m_j^n , el coeficiente que lo acompaña es un producto de la forma $a = \phi^{k_1} \dots \phi^{k_n}$, donde

$$\sum_{l=1}^n k_l = j$$

Dado que, además, por la expresión (6.6) aparecen todas las permutaciones con repetición posibles de los índices de los productos, obtenemos que el coeficiente que acompaña a m_{i+j}^n es

$$a_{jn} = \sum_{k_1 + \dots + k_n = j} \phi^{k_1} \dots \phi^{k_n}$$

a excepción del coeficiente $a_{00} = 1$.

La generalización del modelo a un sistema bidimensional es sencillo, a partir de (6.7), utilizando una función de pesos bidimensional ϕ^{ij} . El peso total sobre la celda (i, j) se obtiene como

$$p_{ij}^0 = \sum_n \sum_{s=-n}^n \sum_{t=-n}^n a_{stn} m_{i+s, j+t}^n \quad (6.10)$$

donde

$$\begin{aligned} a_{stn} &= \sum_{k_1 + \dots + k_n = s} \sum_{l_1 + \dots + l_n = t} \phi^{k_1 l_1} \dots \phi^{k_n l_n} \\ a_{000} &= 1. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Por tanto, a partir de (6.10) y (6.11) es posible calcular la presión que ejerce el sistema sobre cada celda de la base y, durante la evolución del mismo, actualizar este cálculo de forma sencilla.

Así, la función de distribución de presiones π , viene dada por

$$\pi = \sum_n \sum_{s=-n}^n \sum_{t=-n}^n a_{stn} m_{i+s, j+t}^n \quad (6.12)$$

con a_{stn} de acuerdo con (6.11).

6.5.1. Interpretación de los parámetros

El modelo presentado para la distribución del peso del sistema depende de dos parámetros, la altura de los bloques, H , y la función ϕ .

La elección de la función ϕ determina de qué manera se distribuye la carga del material de una capa a la inferior. Como ya se ha indicado, de acuerdo con diferentes trabajos experimentales y de simulación (Geng et al., 2001; Liffman et al., 2001), la carga se distribuye hacia los lados. Por este motivo, se recomienda tomar la función ϕ de la forma $\phi(-1) = \phi(1) = \epsilon$, $\phi(0) = 1 - 2\epsilon$ con $\frac{1}{3} < \epsilon < \frac{1}{2}$, de forma que la mayor parte de la distribución de la carga se realice hacia las celdas vecinas, y no hacia la inmediatamente inferior.

Por otra parte, la elección del parámetro H determina el ángulo respecto a la vertical con el que se propaga la carga, $\delta = \arctan \frac{H}{d}$. Este ángulo depende de las características particulares de cada sistema y, en principio, debe determinarse experimentalmente. No obstante, de acuerdo con la bibliografía existente (Liffman et al., 2001), los valores más frecuentes que aparecen en las simulaciones oscilan entre 30° y 45° respecto a la vertical, lo que da lugar a $2d > H > d$, donde d es el tamaño de una celda del Autómata.

Respecto a la relación entre los parámetros del sistema granular, d , α y z_+ , y el comportamiento del modelo de distribución de presiones, no se espera encontrar una relación directa. El motivo es que los parámetros del modelo de sistema granular no se refieren a aspectos de su estructura interna, y el modelo de distribución de presiones, según está formulado, únicamente depende del estado del sistema en un instante determinado y no del estado en instantes anteriores.

Esta independencia entre la evolución del sistema y la distribución de presiones no concuerda con algunos resultados de simulación obtenidos por otros investigadores (Geng et al., 2001). No obstante, la utilización que se propone aquí para este modelo, enfocada principalmente a conocer una estimación de la distribución de fuerzas sobre la superficie de un objeto, no requiere una precisión tan alta.

Además, la situación en la que esta relación se ha comprobado es la creación de un montón por acumulación de una gran cantidad de material en un punto. Esta situación no parece especialmente útil cuando se trata de la carga de material sobre objetos de la escena.

6.6. Conclusiones

Como se mostró en el Capítulo 2, uno de los aspectos menos resueltos en la simulación de sistemas granulares en tiempo real y en entornos virtuales es la acumulación de material sobre los objetos del escenario.

Si bien diversos autores han estudiado este problema desde una perspectiva

no interactiva (Hsu and Wong, 1995; Nishita et al., 1997; Fearing, 2000), únicamente el trabajo de Zeng et al. ha abordado el problema con cierto éxito (Zeng et al., 2007). No obstante, la metodología empleada en este último trabajo requiere un preproceso relativamente costoso de los objetos del escenario. Además, el modelo de desplazamiento de material que se propone allí es muy rudimentario, y el conjunto de la metodología se basa en un modelo de evolución sin garantías desde el punto de vista físico.

En este capítulo se ha propuesto una metodología que se apoya en los modelos desarrollados en los capítulos precedentes, basados en las propiedades de los sistemas granulares. Además, se ha resuelto el problema de la interacción entre diferentes sistemas, considerando el intercambio de material y el contacto. Por último, se introduce una novedad adicional, al proponer un modelo de distribución de presiones sobre la base.

Con este capítulo, se completa el conjunto de modelos dinámicos que describen de forma coherente y a partir de propiedades físicas la evolución de los sistemas granulares con una metodología que permite la simulación interactiva en tiempo real.

*No amount of experimentation can ever prove me right;
a single experiment can prove me wrong.*

A. Einstein

CAPÍTULO 7

Análisis del coste computacional y validación experimental de los modelos

Uno de los objetivos de los modelos propuestos es la simulación en tiempo real y entornos de realidad virtual. Por tanto es muy importante comprobar que el coste computacional de los modelos es suficientemente reducido como para permitirlo. Por otra parte, la utilización de los modelos en aplicaciones para formación obliga a garantizar que el comportamiento de los mismos es suficientemente creíble y próximo a la realidad.

En primer lugar, en este capítulo se analiza el coste computacional de diferentes elementos de los modelos propuestos. Se muestra que el coste de todos ellos está por debajo del orden cuadrático, permitiendo una ejecución eficiente. Además, se lleva a cabo una serie de pruebas de rendimiento que confirma los resultados del análisis previo.

En segundo lugar se realizan experimentos numéricos destinados a la validación de los modelos, que sirven como complemento al análisis que se ha llevado a cabo en el capítulo correspondiente a cada uno de ellos. Estas pruebas reproducen, por medio de los modelos, algunos experimentos utilizados habitualmente para obtener o validar los modelos teóricos que han sido utilizados durante el presente trabajo de investigación.

7.1. Consideraciones computacionales

Los modelos de Autómatas Celulares pueden representarse de forma sencilla por medio de una matriz o un vector de valores enteros o reales. En el caso de un Autómata bidimensional como los utilizados en este trabajo, lo más conveniente puede ser la utilización de una matriz de valores reales, en la que el valor almacenado en la posición $[i][j]$ de la matriz corresponda al valor de variable de la altura de la celda (i, j) . Por lo tanto la implementación de los modelos propuestos requerirá un espacio de almacenamiento de N^2 datos de punto flotante en el caso de una malla cuadrada de lado N .

El procedimiento más sencillo para actualizar un Autómata Celular es recorrer la matriz, y aplicar sobre cada celda la regla de actualización del modelo correspondiente según los métodos propuestos en el Capítulo 4.

7.1.1. Coste de un paso de simulación del Autómata Celular

Antes de mostrar, por medio de pruebas numéricas, el coste de los modelos presentados, es necesario llevar a cabo un análisis del coste de los principales algoritmos involucrados en la implementación de los modelos. Para ello, en primer lugar identificamos las tareas que se realizan de forma más frecuente durante la ejecución de los modelos. Estas tareas son las siguientes:

- Actualización de las celdas,
- Actualización de la región de Rankine (región de fractura) de un interfaz vertical,
- Actualización del mapa de colisiones.

Estas tareas son las únicas que involucran el recorrido de alguna vector o lista de datos. El resto de tareas involucradas en la implementación de los modelos, tales como el cálculo de fuerzas, tanto verticales como horizontales, la actualización de las estructuras de datos, como los interfaces verticales o la información sobre los contactos, etc. supone un coste muy reducido, ya que se limitan a una decena de operaciones aritméticas.

Veamos el coste asociado a cada una de estas tareas. Para ello, analizaremos el peor caso posible, en el que el coste es máximo, y posteriormente analizaremos el coste esperado.

Actualización de las celdas

La actualización del Autómata es el núcleo del modelo. Tras la detección de colisiones y el cálculo de las diferentes interacciones, el modelo de evolución del sistema recorre la malla para calcular la variación de altura de cada una de ellas.

Para estimar el coste de este proceso, se analiza brevemente el coste de actualizar una celda, y posteriormente se aborda el problema de la actualización de la malla en su conjunto.

El coste de actualización de una celda no es elevado, ya que únicamente involucra un conjunto reducido de comprobaciones. Tras la decisión de si es necesario realizar un intercambio de material, el algoritmo puede involucrar además las asignaciones necesarias para realizar este intercambio. En concreto se llevan a cabo las siguientes operaciones para actualizar una celda:

- Menos de 10 operaciones aritméticas y 4 asignaciones para el cálculo del gradiente;
- Menos de 20 comparaciones, 8 operaciones y 5 asignaciones para la decisión de si es necesario intercambiar material;
- 4 asignaciones y 8 operaciones aritméticas para el intercambio de material.

En cualquier caso, el coste de la actualización de una celda estará acotado por

$$\mathcal{C}(AC) \leq 24O + 13A + 20C \quad (7.1)$$

donde O indica operación aritmética, A asignación y C comparación.

Vemos, por tanto, que el coste asociado a la actualización de una celda no es elevado. El problema se encuentra en la actualización del Autómata en conjunto. Para un Autómata cuadrado de N celdas de lado, la revisión de todas las celdas

supondría la ejecución de los dos primeros pasos (cálculo del gradiente y decisión de actualización) un número de veces $N \times N$. Esto limita de forma evidente el tamaño de la malla que es posible utilizar.

En el Apartado 7.1.2 se discute con más profundidad la manera de evitar el coste cuadrático, apoyándonos en las propiedades del sistema.

Actualización de la región de Rankine

El cálculo de la fractura cuando se produce un desplazamiento horizontal del material así como el cálculo de las fuerzas que aparecen sobre la herramienta, requieren el análisis de la porción de terreno que se encuentra frente a la misma.

De acuerdo con el procedimiento descrito, es necesario calcular la región de Rankine, que comprende la cuña que se desliza por el interfaz de fractura. Para ello, de acuerdo con el procedimiento descrito en el Apartado 5.5.2, se recorren las celdas que se encuentran delante de la herramienta, comprobando si el interfaz de fractura corta la superficie.

Esto requiere el recorrido de cada una de las celdas que se encuentran frente al interfaz vertical y la comprobación de que la fractura aún no ha superado la altura del terreno. El plano de fractura se eleva desde la base de la herramienta con un ángulo ρ respecto de la horizontal que es fijo para un mismo tipo de material.

Por tanto, el número de celdas que será necesario comprobar hasta detectar que el plano de fractura ha emergido a la superficie dependerá de la inclinación del terreno frente a la herramienta. Si el terreno es horizontal, y la altura de la pala que se encuentra hundida es d_0 , entonces la distancia a la que el interfaz de fractura cortará la superficie será $D = \tan \rho / d_0$, y el número de celdas que será necesario recorrer será $D/\delta x$ (véase la Figura 7.1).

Si el terreno frente al material tiene un ángulo positivo respecto a la horizontal, el número de celdas que será necesario comprobar será mayor. En el peor de los casos, cuando el ángulo de la superficie β sea mayor o igual a ρ el plano

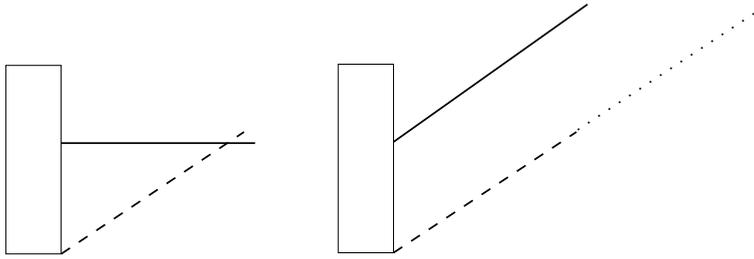


Figura 7.1: Dependiendo de la geometría del terreno frente a la pala, el tamaño de la región de Rankine puede variar.

de fractura definido no cortará la superficie. En este caso, el tamaño máximo del interfaz de fractura se define en el modelo como $2d_0$.

Considerando el peor de los casos, el coste del cálculo de la región de Rankine no depende del número de celdas que sea necesario recorrer, ya que éste está acotado para un valor de celdas por metro. El coste de esta tarea, depende del número de celdas que necesiten este cálculo.

Además, el cálculo de la región de fractura se efectúa en las celdas que son frontera entre la zona en contacto y la zona libre de él y únicamente se realizan los cálculos cuando un interfaz avanza.

Consideremos una región conexa de celdas en contacto, de diámetro \mathcal{D} . El número de celdas que pueden necesitar actualización tiene una relación lineal con este diámetro¹. Por tanto, el crecimiento del número de celdas con región de fractura activa es lineal respecto al número de celdas por unidad de longitud.

Actualización del mapa de colisiones

Como ya se indicó en el Apartado 6.3.3, el problema de la detección de colisiones es un problema suficientemente complejo en si mismo, y es uno de los

¹Aunque la longitud del perímetro no tiene necesariamente una relación lineal con el radio de la región, en el tipo de objetos que estamos considerando para la colisión con el terreno es una suposición aceptable.

objetivos secundarios en este trabajo. Por este motivo, la detección de colisiones se ha implementado utilizando bibliotecas de propósito general, sin llevar a cabo optimizaciones en el código ni en el procedimiento de detección. El fin de la implementación de este paso es, únicamente, obtener la información necesaria para implementar los modelos de interacción.

Por este motivo, no se lleva a cabo un análisis exhaustivo del coste de la detección de las colisiones. Posteriormente, en los análisis numéricos se justifica convenientemente que, en cualquier caso, la detección de colisiones no supone un impedimento para la simulación en tiempo real de un sistema granular, incluso con una implementación no optimizada.

7.1.2. Implementación eficiente del algoritmo de actualización

La utilización de la implementación directa de un Autómata Celular, recorriendo todas las celdas de la malla, supone un coste computacional del orden de N^2 para una malla cuadrada de lado N .

A pesar de que el coste es muy inferior al que encontramos en el caso de utilizar modelos de dinámica molecular, un coste cuadrático puede ser excesivo para determinadas aplicaciones de simulación en tiempo real, en las que al modelo del sistema granular se han de añadir otros modelos que controlan diferentes partes de la simulación.

Por este motivo, en lugar de actualizar en todos los pasos de simulación la malla completa, se mantiene una lista con las celdas que necesitan ser revisadas y únicamente se comprueban las celdas de esta lista. Por tanto, el problema del coste de ejecutar un paso de simulación se reduce al tamaño esperado y al tamaño máximo de esta lista.

En el Apartado 4.4.5 se han discutido las propiedades estadísticas del tamaño de las avalanchas que se obtienen con el modelo dinámico propuesto. Se ha confirmado la existencia de una ley de escala de tipo $1/f$ que indica que la frecuencia de las avalanchas decrece con su tamaño. Apoyándose en esta propiedad, diferentes autores han propuesto implementaciones muy eficientes basada

en listas de celdas activas (Pla-Castells, 2003; Walter and Worsch, 2004).

De acuerdo con estos esquemas de implementación no es necesario el recorrido de la malla completa para calcular el siguiente estado del Autómata. En el caso en que el Autómata alcance un estado de reposo, ninguna de las celdas necesitará ser actualizada hasta que se produzca una modificación externa en el sistema. E incluso en este caso, únicamente aquellas celdas afectadas por la modificación necesitarán ser comprobadas.

Estimación del coste computacional del algoritmo

A partir de la implementación anterior de la actualización del Autómata Celular, el coste real de un paso de la evolución del sistema dependerá directamente de la cantidad de celdas que se encuentren activas en ese instante.

Sin embargo, las propiedades estadísticas observadas en el sistema nos indican que a partir de un estado de reposo, cualquier modificación local de una celda, el número de celdas que se verá afectado en iteraciones sucesivas se mantendrá, en la mayoría de los casos, dentro del orden N .

Para comprobar el coste del nuevo algoritmo se han realizado simulaciones con mallas de diferentes tamaños y se han analizando tanto la media, como el máximo de la longitud del vector de posiciones a cada paso de la simulación de forma que se pueda obtener una cota superior del coste del algoritmo. Esta cota es importante en el caso de simulaciones en tiempo real.

Las simulaciones se han hecho sobre un cono de material con pendiente próxima a la pendiente crítica, de forma que prácticamente cualquier adición de material da lugar a una avalancha. La simulación se inicia con una adición de material en el vértice del cono que provoca una avalancha y cada vez que el sistema alcanza el estado de reposo se realiza una nueva adición de material para provocar una nueva avalancha. En cada actualización se ha medido el número de celdas activas.

La Figura 7.2 muestra el tamaño medio del vector de celdas activas, y el

tamaño máximo durante toda la simulación, para cada radio del cono en número de celdas. Se aprecia claramente que el tamaño máximo del vector durante la simulación crece linealmente con el número de celdas de la base del cono.

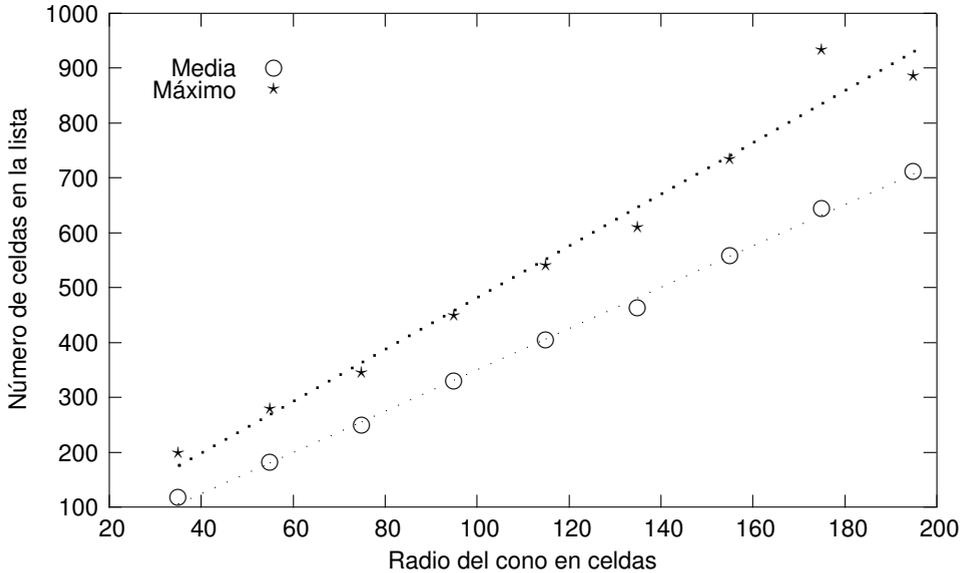


Figura 7.2: Tamaño medio y máximo del vector de celdas activas en la formación de un cono, para diferentes valores del radio del cono.

De los resultados anteriores se obtiene que el algoritmo propuesto tiene un coste lineal con respecto al radio del sistema en cada instante. El radio del sistema está acotado por el tamaño de la malla N y por tanto el coste del algoritmo será como mucho lineal con respecto al tamaño de la malla.

7.1.3. Coste del modelo de la distribución de presiones

En este trabajo, los aspectos computacionales son de gran importancia. La principal motivación para el desarrollo de los modelos basados en Autómatas Celulares ha sido la obtención de modelos utilizables en aplicaciones gráficas en tiempo real. Por lo tanto, para que los modelos de presión presentados puedan

utilizarse en el mismo ámbito deben ser suficientemente eficientes desde el punto de vista computacional.

El nuevo modelo de AC que se ha definido (5.4) tiene, al igual que el modelo descrito en el Capítulo 5, un coste máximo del orden de N^2 , para un Autómata $N \times N$, ya que únicamente añade el cálculo de cuatro sumas y dos divisiones para cada celda respecto al modelo no interactivo.

Como se comprobará en el Capítulo 9, estos modelos se han utilizado con éxito en aplicaciones gráficas en tiempo real complejas, y con una implementación adecuadamente optimizada se comprueba que en la práctica tienen un coste del orden de N .

A continuación se analiza es el coste asociado al modelo de cálculo de presiones. En primer lugar consideremos los cálculos asociados a los coeficientes a_{stn} de (6.10). El coste asociado al cálculo de estos coeficientes es elevado; para cada nivel n supone calcular $(2n+1)^2$ coeficientes, cada uno de ellos consistente en un sumatorio que puede tener del orden de hasta $(n!)^2$ términos, con varios productos cada uno, en el caso del coeficiente a_{00n} . Sin embargo, su cálculo no es necesario cada vez que ha de calcularse (6.10). Por el contrario, estos coeficientes pueden calcularse previamente para la función ϕ escogida, de forma que no es necesario ningún cálculo durante la simulación.

Una vez obtenidos los coeficientes, el cálculo de la presión sobre una celda a partir de (6.10) involucra el cálculo de $(2n+1)^2$ para cada uno de los niveles, $n = 1, \dots, N$. Sin embargo, de nuevo el cálculo de la presión para todas las celdas del sistema debe realizarse únicamente antes del inicio de la simulación, durante los cálculos preliminares, a partir del estado inicial del sistema.

A partir de ese instante, únicamente aquellas celdas que resulten modificadas por causas externas provocarán cambios en la distribución de presión, afectando a un cuadrado centrado en la celda, cuyo lado será el número de bloques de altura H que estén ocupados en esa celda. Y en estas celdas el número de coeficientes que deberán ser recalculados será del orden de 1, constante (únicamente debe recalcularse el término del bloque de material modificado).

Por tanto, podemos concluir que el modelo de distribución de presiones, aunque requiere una inicialización costosa, ésta puede realizarse con anterioridad a la simulación, para generar ficheros de inicio. Una vez realizados los cálculos de inicialización, el coste de actualización del sistema tras una modificación es del orden del cuadrado del número de bloques de altura H en que se ha descompuesto el sistema, que se encuentra, en la mayoría de casos prácticos, un orden de magnitud por debajo de N .

De esta forma, el modelo de distribución de presiones permite reproducir el efecto de la aplicación de fuerzas sobre los objetos del escenario que contengan material sobre ellos.

7.1.4. Gestión eficiente de la memoria

El modelo se ha implementado empleando una matriz de estructuras que contienen la información de cada celda. El hecho de utilizar una malla rectangular, hace que el número total de celdas que es necesario crear sea elevado. Esto limita la utilización de mallas realmente grandes, que puedan emplearse, por ejemplo para simular un entorno portuario de una gran extensión.

No obstante, el Autómata Celular se he implementado de forma que la posición y la estructura de vecinos de una celda puede modificarse durante la simulación de forma sencilla. Esto permitirá en un futuro la utilización de un vector de celdas de tamaño menor al de la malla completa.

7.2. Pruebas de rendimiento sobre los modelos

Para conocer el coste computacional de los diferentes modelos propuestos se han llevado a cabo una serie de pruebas controladas. En estas pruebas se han simulado situaciones en las que se ha ejecutado el bucle de simulación un número elevado de veces. De esta manera se ha podido obtener una estimación del tiempo necesario para la ejecución de un paso de simulación.

Estas pruebas se han realizado de forma que sea posible conocer el coste asociado a cada uno de los modelos presentados. Cada prueba se ha hecho sobre un escenario normalizado, de forma que a partir de los resultados sea posible estimar de forma sencilla el coste de una simulación si se conocen estimaciones de las dimensiones del escenario.

Además, las pruebas de coste temporal se acompañan de simulaciones realizadas con el programa de análisis Valgrind (Nethercote and Seward, 2007), que permiten conocer de forma precisa e independiente de la máquina el porcentaje de coste asociada a cada módulo de las bibliotecas implementadas.

A continuación se presentan experimentos numéricos para la evolución del Autómata en ausencia de colisiones, y para la evolución del Autómata cuando se producen colisiones.

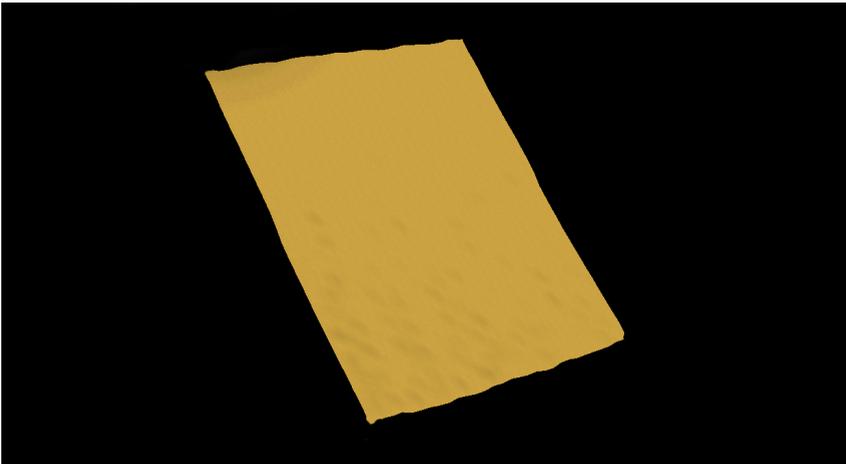
7.2.1. Modelo de evolución

En primer lugar, se ha llevado a cabo un experimento numérico destinado a evaluar la actualización del Autómata, de acuerdo con los modelos presentados en el Capítulo 4.

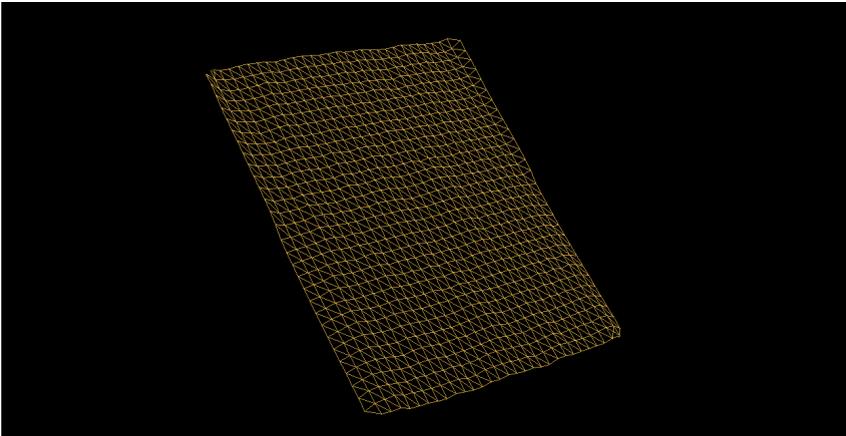
Para ello se ha diseñado un experimento en el que todas las celdas del Autómata se actualizan durante un número determinado de pasos. De esta manera, es posible obtener un tiempo de actualización promedio por celda calculando el tiempo de actualización de todo el Autómata.

Se ha preparado una configuración inicial en la que el sistema forma una pendiente plana de 1 metro de lado (Figura 7.3(a)), con una pendiente suficientemente inclinada de manera que, al dejar evolucionar el sistema, su ángulo inicial es superior al ángulo de reposo del sistema y todas las celdas del Autómata se encuentran activas durante todos los pasos simulados.

La Figura 7.3(b) muestra una representación en alambre de la configuración inicial con 30 celdas por metro de densidad de la malla.



(a) Sistema de prueba con dibujo sólido



(b) Sistema de prueba con malla de alambre

Figura 7.3: Experimento numérico realizado para analizar el coste de la actualización del sistema utilizando el modelo propuesto en este trabajo.

Los experimentos se han realizado con diferente número de celdas por metro, $N = \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$ con simulaciones de 100000 pasos. De esta forma, en cada experimento se han ejecutado $N \times N \times 10000$ actualizaciones de celda.

De cada prueba se han realizado 50 repeticiones, con el fin de poder obtener datos estadísticamente significativos. El Cuadro 7.1 muestra los tiempos obteni-

dos para cada actualización del Autómata, en milisegundos, para cada densidad de celdas por metro. Estos tiempos corresponden a la actualización del sistema entero, es decir, para $N \times N$ celdas.

	N					
	5	10	15	20	25	30
Tiempo (ms)	0,019 ± 0,005	0,088 ± 0,005	0,171 ± 0,005	0,272 ± 0,005	0,403 ± 0,005	0,550 ± 0,005

Cuadro 7.1: Tiempo utilizado por una actualización completa del Autómata Celular con $N \times N$ celdas, en función del valor de N .

Vemos, por tanto, que la actualización del Autómata es extraordinariamente eficiente, incluso en el caso más desfavorable, con todas las celdas del Autómata activas. Con un coste menor a medio milisegundo por metro cuadrado, el margen existente para la utilización de mallas muy densas es muy grande, y el límite lo pondrá, en cualquier caso, la representación gráfica o la memoria necesaria para el almacenamiento del modelo.

7.2.2. Modelo de evolución con representación gráfica

Una vez analizado el coste computacional de la actualización de una celda mediante los modelos de evolución, debemos repetir los experimentos realizados en el Apartado 7.2.1 pero añadiendo el análisis de la representación gráfica del sistema.

Se ha repetido el experimento sobre una malla de tamaño 1 metro, con distintas densidades de celda $N = \{30, 35, 40, 45, 50\}$ y con dos configuraciones diferentes; primero con el sistema completo de actualización de Autómata Celular más su representación gráfica mediante OpenSceneGraph y segunda sólo con la representación gráfica sin actualización del Autómata.

Los resultados obtenidos se muestran en el Cuadro 7.2 y en la gráfica de la Figura 7.4. Como cabría esperar, el coste de la realización de un paso de simulación sin la actualización del Autómata Celular es inferior al del sistema completo. Sin embargo los resultados muestran que el impacto sobre el coste de la simulación del sistema granular es muy reducido.

	N				
	30	35	40	45	50
osg+AC (ms)	1.96006	2.43348	3.05932	3.67728	4.16358
osg (ms)	1.8069	2.18414	2.69826	3.16888	3.58104

Cuadro 7.2: Resultados de las pruebas numéricas para comparar el coste de la aplicación con modelo dinámico y de la aplicación sólo con representación gráfica.

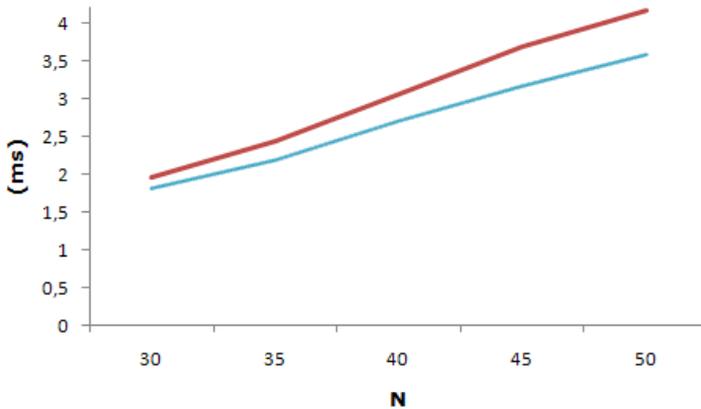


Figura 7.4: Evolución del coste de la aplicación con modelo dinámico y sin modelo dinámico en función del número de celdas. Véase también el Cuadro 7.2.

El Cuadro 7.3 recoge el porcentaje de coste de la actualización del Autómata Celular dentro de un paso de simulación para diferentes densidades de la malla. Este dato ha sido obtenido por medio de la herramienta Valgrind, con lo que puede estar sobreestimando el coste de la representación gráfica, al no aprovechar toda la potencia de la tarjeta gráfica. Sin embargo, los resultados no discrepan excesivamente con los obtenidos en simulaciones con aceleración gráfica completa. En todos los casos el porcentaje queda por debajo del 12 % en la simulación real y por debajo del 10 % en la simulación realizada con Valgrind.

	N				
	10	15	20	25	30
% coste AC	6.0665	7.48	8.31	8.785	9.095

Cuadro 7.3: Porcentaje de tiempo que representa el cálculo del modelo dinámico respecto al total de la aplicación gráfica (datos obtenidos con Valgrind).

7.2.3. Modelo con colisiones

Para obtener mediciones sobre el coste de la aplicación de fuerzas y gestión de colisiones en el sistema se ha realizado un experimento consistente en el apoyo de un cubo de arista unidad sobre un sistema granular en reposo. Esto da lugar a un área de contacto de $1m^2$ como puede observarse en la Figura 7.5(a).

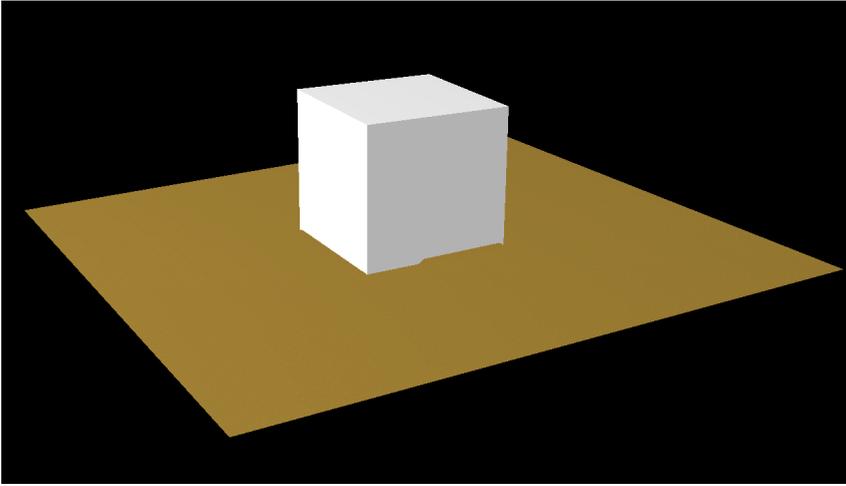
El experimento se ha realizado para diferentes configuraciones en la densidad de la malla N dando lugar a un número variable de celdas en contacto con el objeto externo. Puede observarse un detalle del experimento en la Figura 7.5(b).

Se han realizado 50 repeticiones para cada uno de los valores de N , obteniendo las medias con los correspondientes intervalos de confianza. El Cuadro 7.4 muestra los resultados obtenidos para este experimento.

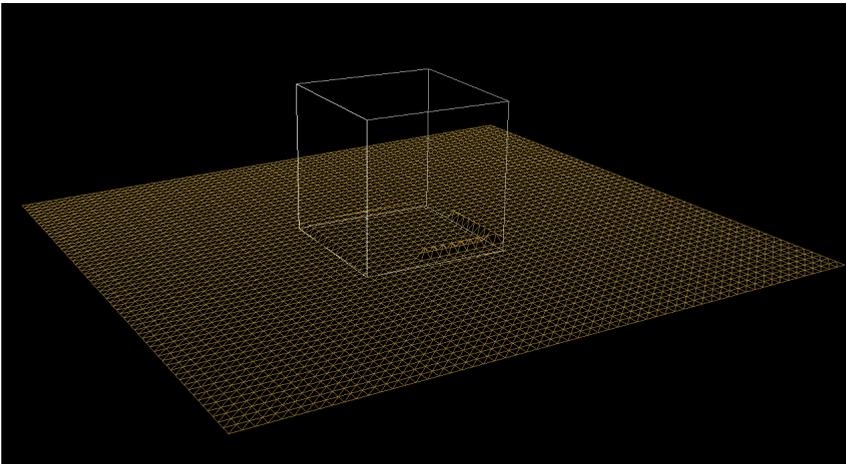
	N					
	5	10	15	20	25	30
Tiempo (ms)	0,02037	0.04805	0.09137	0.16653	0.28971	0.52715
IC	0.00039	0.00074	0.00019	0.00021	0.00099	0.00637

Cuadro 7.4: Resultados de los experimentos destinados a analizar el coste del cálculo de colisiones y fuerzas de reacción en los modelos propuestos.

Se puede apreciar que, aunque el crecimiento es cuadrático (véase la Figura 7.6), como cabría esperar, el tiempo empleado para el cálculo de los valores más grandes de N es sólo ligeramente superior a medio milisegundo.



(a) Sistema de prueba con dibujo sólido



(b) Sistema de prueba con malla de alambre

Figura 7.5: Experimento numérico realizado para analizar el coste de la detección y reacción a las colisiones.

7.2.4. Modelo de desplazamiento horizontal

En los experimentos realizados en el Apartado 7.2.3 involucran, principalmente contactos de tipo vertical, ya que en la situación simulada no se dan desplazamientos horizontales del material. En este apartado se realiza un estudio sobre el

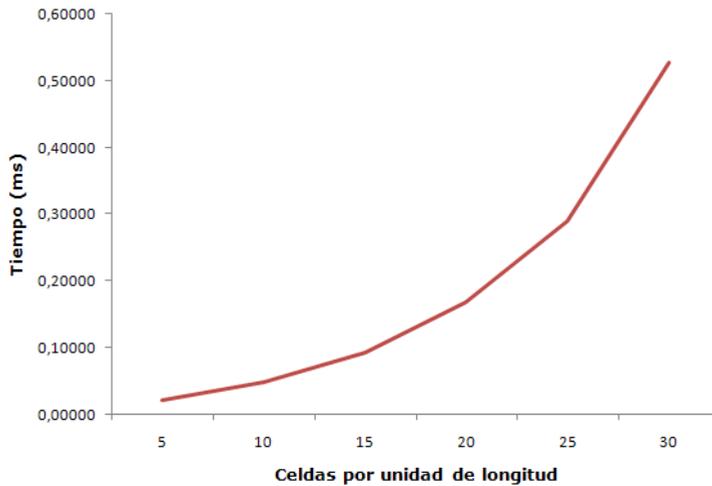


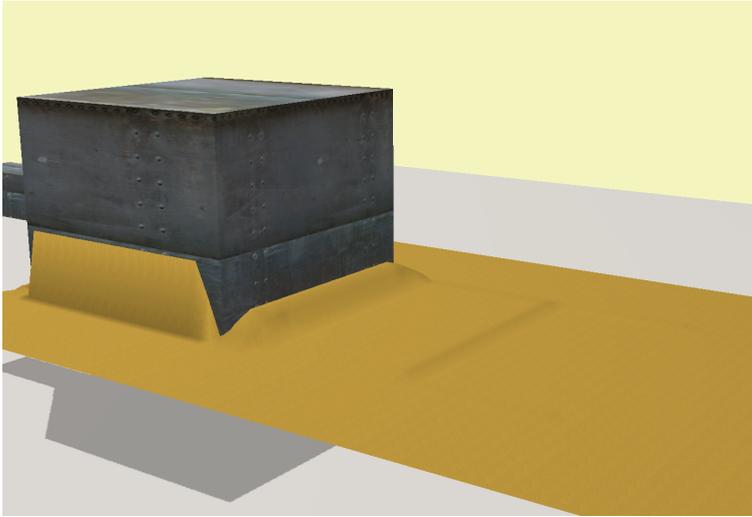
Figura 7.6: Evolución del coste del cálculo de las fuerzas de contacto. Véase también el Cuadro 7.4.

coste computacional del cálculo de fuerzas y actualización del Autómata Celular debido al desplazamiento horizontal de un sólido en su superficie.

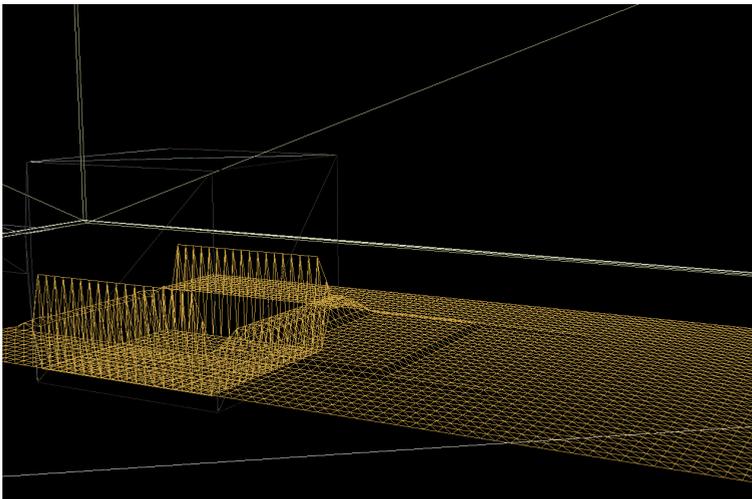
Para medir el coste del desplazamiento horizontal de material se ha realizado un experimento similar al anterior. Se ha partido de una malla de $2m \times 6m$. En un extremo se ha situado un cubo de arista unidad, hundido en el suelo una profundidad d_0 variando entre 0.1m y 0.3m. A partir de esta situación inicial, se ha provocado un desplazamiento horizontal del cubo a velocidad constante, haciendo que desplace el material.

A modo de ejemplo, en la Figura 7.7(a) puede observarse la colocación del cubo sobre el sistema granular a una profundidad d_0 de 0.25 con una densidad de malla de 20 celdas por metro (véase la Figura 7.7(b))

Las pruebas se han realizado mediante 50 repeticiones del mismo experimento con diferentes valores de densidad de celda $N = \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$ y para diferentes valores de $d_0 = \{0,1, 0,15, 0,2, 0,25, 0,3\}$. En el Cuadro 7.5 los resultados obtenidos expresados en milisegundo de cada uno de los experimentos.



(a) Sistema de prueba con dibujo sólido



(b) Sistema de prueba con malla de alambre

Figura 7.7: Experimento numérico realizado para analizar el coste del desplazamiento horizontal del material.

Como puede observarse (véase también la Figura 7.8), el tiempo necesario para realizar un paso de simulación aumenta tanto con la densidad de la malla utilizada, como con la profundidad d_0 a la que se coloca inicialmente el cubo

N	d_0				
	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3
5	0.058256	0.059008	0.0606	0.061128	0.060964
10	0.161752	0.185186	0.175581	0.173528	0.17658
15	0.334178	0.34078	0.345908	0.348218	0.356416
20	0.579922	0.591814	0.606	0.619512	0.634594
25	0.944118	0.972844	0.982218	1.000694	1.027596
30	1.317558	1.344494	1.353386	1.348878	1.372106

Cuadro 7.5: Coste del cálculo del desplazamiento horizontal sobre el sistema granular en función de la profundidad del interfaz y el número de celdas.

como cabría esperar. No obstante, el coste de las simulaciones no supera los 1.4 milisegundos en ninguno de los casos simulados.

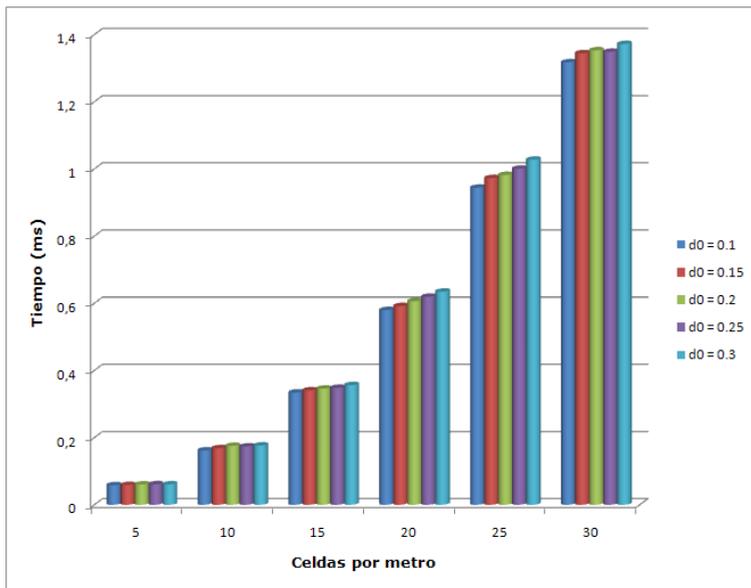


Figura 7.8: Evolución del coste del desplazamiento horizontal del material. Véase también el Cuadro 7.5.

7.3. Validación de los modelos de interacción

En este apartado desarrollan experimentos numéricos destinados a determinar la similitud entre el comportamiento de los modelos propuestos en este trabajo y el comportamiento descrito por los modelos teóricos que los han motivado o el observado en experimentos empíricos.

La posibilidad de realización de pruebas con material real ha sido descartada, debido a la complejidad y el coste que revisten. Por tanto, como elementos de referencia utilizaremos, además de los modelos teóricos discutidos en el Capítulo 3, trabajos experimentales llevados a cabo por otros científicos.

7.3.1. Modelo de presión normal

El modelo de presión normal y fuerzas de reacción presentado en el Capítulo 3 se basa en la observación de pruebas de hundimiento. Tomaremos como referencia el modelo presentado en (Wong, 2001), descrito en el Apartado 3.3.3. El experimento realizado consiste en la repetición del experimento para el cálculo del rendimiento descrito en el Apartado 7.2.3, que consiste en dejar caer un cubo sobre una superficie plana (Figura 7.10). En este caso, el experimento se ha repetido con cubos de diferentes masas, pero con iguales dimensiones.

Esto ha dado lugar a diferentes valores para la presión que actúa sobre el área de 1m^2 de contacto entre el terreno y el cubo debidos a las diferentes fuerzas ejercidas por la gravedad. Para cada valor de presión ejercido se ha calculado el hundimiento final del cubo con el fin de obtener una relación experimental entre presión y hundimiento, y determinar si el modelo basado en el Autómata Celular se ajusta al comportamiento predicho por los modelos teóricos.

Se han realizado tres experimentos variando el valor de n en la ecuación 3.19. Los modelos experimentales encontrados en la bibliografía muestran que para la arena seca $n = 1.1$. Aún así, hemos querido comprobar que cambiando el valor de n el modelo respondía a las expectativas teóricas a pesar de ser un modelo integrado en un conjunto de modelos de interacción.

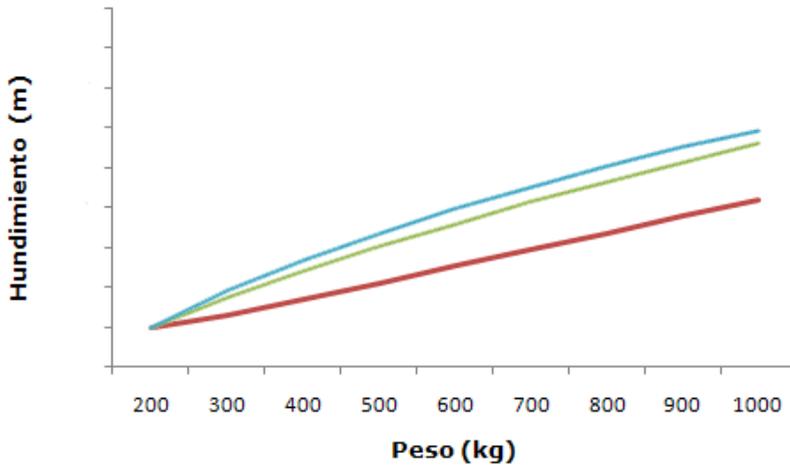
En el Cuadro 7.6 podemos observar los valores de hundimiento obtenidos en los experimentos para valores de $n = \{1.1, 1.5, 2.0\}$.

	Masa								
	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
$n = 1.1$	0.04195	0.062955	0.08394	0.10496	0.12593	0.14693	0.16797	0.18892	0.20996
$n = 1.5$	0.120744	0.158228	0.19174	0.22249	0.251253	0.278454	0.304395	0.329253	0.353212
$n = 2.0$	0.204767	0.250868	0.2898	0.323945	0.354885	0.38332	0.409795	0.434649	0.458209

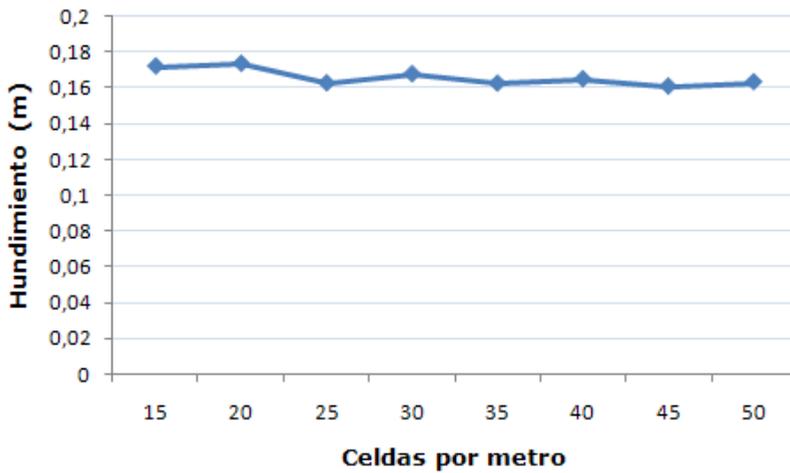
Cuadro 7.6: Hundimiento de la carga en función de su masa con diferentes valores del parámetro n .

En la Figura 7.10(a) puede observarse una representación gráfica de los resultados mostrados en el Cuadro 7.6. Se han relativizado los datos respecto al experimento correspondiente a $n = 1.1$ para la mejor comprensión de los datos representados. La línea roja corresponde a los datos $n=1.1$, la línea verde corresponde a los datos $n=1.5$ y la línea azul corresponde a los datos $n=2.0$. Claramente se observa en la figura que los datos se ajustan al modelo teórico predicho $z^{1,1}$, $z^{1,5}$ y z^2 respectivamente.

El experimento se ha llevado a cabo para diferentes valores de la densidad de celdas por metro, con el fin de descartar que este valor pueda tener alguna influencia. La Figura 7.10(b) muestra gráficamente el resultado obtenido que indica que el comportamiento del modelo es independiente de la discretización utilizada.

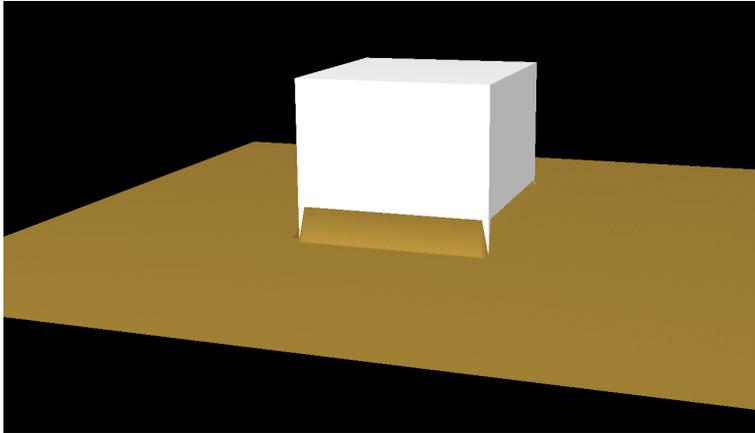


(a) Relación entre la fuerza del peso y el hundimiento

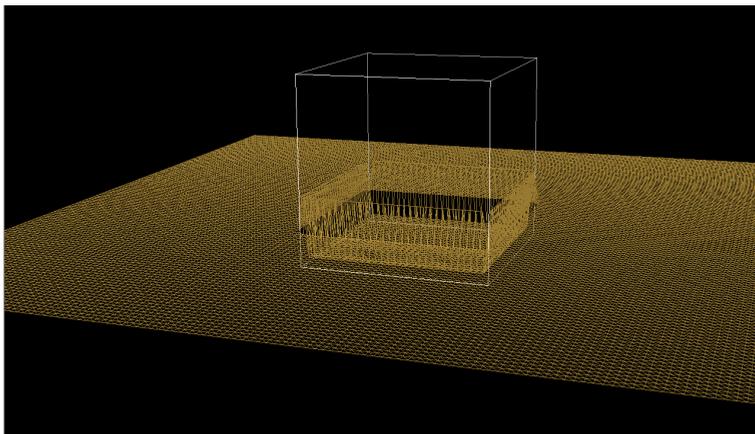


(b) Relación entre la densidad de la malla y el hundimiento

Figura 7.9: Relación entre la presión y el hundimiento en el modelo de presión vertical.



(a) Sistema de prueba con dibujo sólido



(b) Sistema de prueba con malla de alambre

Figura 7.10: Experimento realizado dejando caer un cubo de 1 metro de lado sobre una malla horizontal para calcular el hundimiento provocado por la presión ejercida sobre el sistema.

7.3.2. Modelo de fuerzas horizontales

El modelo de desplazamiento horizontal del terreno, basado en la teoría de Mohr-Coulomb, y descrito por medio de interfaces de fractura, es un modelo descriptivo y basado en la observación experimental. El modelo discreto que se presenta en el Apartado 5.5.2 reproduce esta descripción, y su comportamiento puede observarse por medio de la realización de experimentos.

Sin embargo, además de la descripción fenomenológica de este comportamiento, el modelo involucra el cálculo de la fuerza horizontal que aparece sobre una pala vertical. La evolución de esta fuerza durante el avance de la pala en un sistema granular ha sido medido, y comparado con experimentos similares realizados por otros autores.

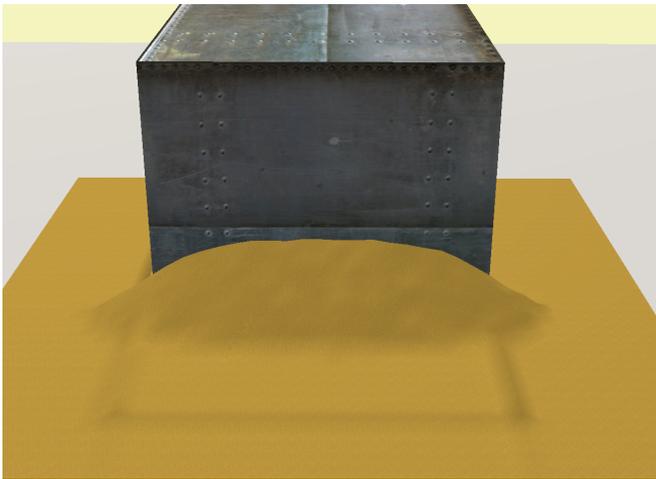


Figura 7.11: Simulación de un cubo semienterrado en el sistema granular para medir la fuerza horizontal que actúa sobre él.

En particular, se ha utilizado el experimento numérico del Apartado 7.2.4 (Figura 7.11) para reproducir un experimento similar presentado por Nougier (Nougier et al., 2000). Se ha iniciado el experimento situando un cubo en el interior del sistema granular, y se ha provocado su avance a velocidad constante, midiendo la fuerza horizontal a cada instante.

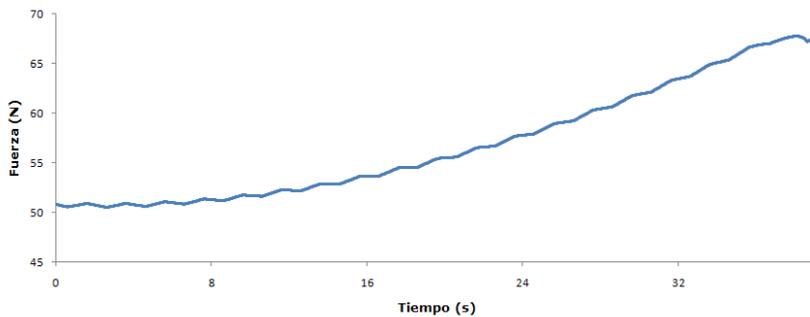


Figura 7.12: Evolución de la fuerza horizontal que actúa sobre el cubo a lo largo del tiempo.

En la Figura 7.12 puede observarse que la fuerza aumenta a lo largo del tiempo debido a que la cantidad de material que se va acumulando delante del obstáculo y que ejerce una fuerza contraria a la dirección de avance. Estos resultados son similares a los presentados por Nougquier (Nougquier et al., 2000) como cabría esperar.

7.3.3. Simulación numérica de la distribución de presiones

Una vez analizado tanto los modelos de presión vertical como los modelos de fuerza horizontal que se presentan en la simulación de manipulación de terreno por una herramienta, nos queda analizar el modelo de distribución de presiones presentado en el Apartado 6.5 y que corresponde al conjunto de fuerzas que aparecen en la base de la pala cuando se está manipulando material granular.

Con el objeto de poder comparar los resultados obtenidos con los de otros autores, la validación del modelo de distribución de presiones se ha realizado reproduciendo un experimento habitual en este tipo de análisis. Este experimento consiste en la formación de una colina por medio de la caída de material en una zona circular de un plano horizontal. Se ha obtenido la distribución de presiones una vez el sistema ha alcanzado un estado de reposo.

Las simulaciones numéricas se han realizado a partir de un sistema unidimensional como el utilizado para el desarrollo del modelo en el Apartado 6.5. Se ha utilizado un sistema con $d = 0,5$, $\alpha = 30^\circ$ y $z_+ = 0,05$, con densidad $\rho = 1$, y se han realizado experimentos numéricos para diferentes valores de δ , para una distribución ϕ con $\epsilon = 0,4$.

Como podemos observar en la Figura 7.13, los resultados de la simulación muestran una curva que sigue de manera suave las alturas del sistema. Este resultado es el mismo que han obtenido otros autores que han estudiado el caso de material con densidad constante utilizando métodos numéricos (Liffman et al., 2001), y además, nuestros resultados no varían significativamente de otros resultados experimentales (Geng et al., 2001).

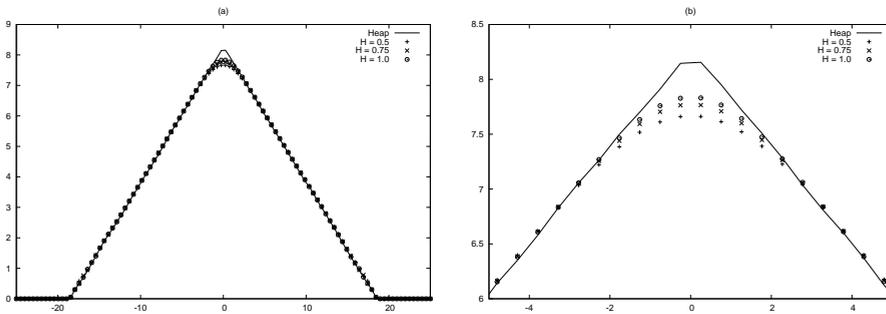


Figura 7.13: Simulación de la distribución de presiones debajo de una colina formada por deposición de material. (a) Distribución de presiones para diferentes valores de H . (b) Detalle de la región central de la colina.

Podemos observar en la Fig. 7.13 (b) que la distribución de presiones para valores grandes de δ lleva a presiones ligeramente menores en el centro de la colina.

Hay aspectos observados en otros trabajos que no se reflejan convenientemente, como la aparición de una depresión en la zona central del sistema cuando la caída de material se sitúa en un único punto (Geng et al., 2001), y que ha sido relacionada, como ya hemos mencionado con la influencia de estados anteriores en la distribución final del sistema. Éste y otros posibles aspectos no reflejados

en el modelo tendrán que ser analizados para su consideración en futuras revisiones de este trabajo.

7.4. Conclusiones

En este capítulo se ha presentado un análisis exhaustivo del conjunto de modelos presentado en este trabajo destinado a determinar si permiten alcanzar sus principales objetivos; la simulación en tiempo real, y la reproducción realista del comportamiento del sistema.

Para ello, en primer lugar se ha mostrado, por medio de análisis de costes y de pruebas de rendimiento, que los modelos son perfectamente adecuados para simulación en entornos interactivos en tiempo real. Los costes de la ejecución de un paso de simulación son del orden de medio milisegundo por metro cuadrado de terreno activo en el peor de los casos.

Hemos visto además, que el coste asociado a la detección y gestión de colisiones puede llegar a duplicar y casi triplicar el coste. Pero aún así no supone un problema, ya que los números se mantienen dentro de valores muy adecuados para la simulación en tiempo real. Estos datos tienen un valor añadido, si tenemos en cuenta que los algoritmos de detección de colisiones no han sido optimizados, lo que da un margen amplio para la mejora de dichos tiempos.

En segundo lugar, se han realizado experimentos con los modelos desarrollados en el presente trabajo replicado experimentos reales empleados para el estudio de los sistemas granulares. Por medio del análisis de los resultados, se ha comprobado que los modelos no sólo permiten una implementación eficiente, sino que además ofrecen un comportamiento realista.

Se ha analizado el comportamiento de la fuerza de reacción tanto en el desplazamiento horizontal como en el caso del hundimiento. En ambos casos, los resultados obtenidos coinciden con los mostrados por los sistemas granulares reales y por otros experimentos realizados con metodologías contrastadas, como el caso del trabajo de Nougier (Nougier et al., 2000).

También se ha comparado con experimentos realizados sobre sistemas reales la distribución de presiones obtenida en el Apartado 6.5. En este caso se ha comprobado que, si bien no se reproducen algunos comportamientos observados en sistemas reales, el comportamiento de la distribución no discrepa excesivamente del observado en éstos.

Todos estos resultados, unidos a la descripción estadística del sistema obtenida en el Apartado 4.4.5 ofrecen una validación muy completa de los modelos dinámicos propuestos.

Make everything as simple as possible, but not simpler.

A. Einstein

CAPÍTULO 8

Mejora de las técnicas de representación gráfica de terreno interactivo

Una vez definidos los modelos que se proponen para la representación de sistemas granulares, se detallan a continuación algunos de los principales aspectos relacionados con la representación gráfica de los mismos en el ámbito de aplicaciones de realidad virtual.

En este capítulo revisaremos las primitivas más adecuadas para el modelado geométrico de los modelos propuestos en los capítulos anteriores. Además, se propone un conjunto de mejoras en la representación gráfica en tiempo real de los sistemas granulares respecto a las técnicas existentes actualmente.

8.1. Primitivas para representación gráfica

Dado que el objetivo del trabajo es el desarrollo de modelos de sistemas granulares para su utilización en entornos virtuales, será necesario indicar la forma en que se puede realizar la representación gráfica de los sistemas a partir de los modelos.

Para ello veremos la manera en que se puede transferir la información al-

macenada en los modelos propuestos a un sistema de representación gráfica basada en OpenGL.

Recordemos que la forma de formalizar cualquiera de los modelos propuestos en este trabajo consiste en una matriz de las mismas dimensiones que el Autómata. En ella, el valor almacenado en la posición (i, j) representa la altura del sistema en la posición (x_i, x_j) . A partir de esta información es posible utilizar determinadas primitivas de OpenGL para realizar una representación casi inmediata.

8.1.1. Utilización de `TRIANGLE_STRIP`

Primitivas OpenGL

Antes de continuar, repasaremos dos de las primitivas de OpenGL que resultan muy adecuadas para realizar la representación de los modelos basados en Autómatas Celulares.

En primer lugar, el `QUAD_STRIP` consiste en una cadena de cuadriláteros. Cada cuadrilátero comparte con el siguiente una arista, de manera que es posible formar una cuadrícula $N \times M$ utilizando N `QUAD_STRIP` de longitud M o bien M `QUAD_STRIP` de longitud N . Cada `QUAD_STRIP` de longitud N se define a partir de un conjunto de $2N + 2$ puntos, de manera que el n -ésimo cuadrilátero está formado por los puntos $2n - 1, 2n, 2n + 2$ y $2n + 1$.

En la Figura 8.1 se puede ver un ejemplo de representación de una de las filas de una cuadrícula por medio de `QUAD_STRIP`.

En segundo lugar, el `TRIANGLE_STRIP` consiste en una cadena de triángulos dispuestos de manera que cada par de triángulos adyacentes comparten dos de sus puntos. El triángulo n -ésimo de la tira de triángulos estará formado por los puntos $n, n + 1, y n + 2$ para n impar y por los puntos $n + 1, n, y n + 2$ para n par. Para un conjunto de $N > 2$ nodos se construye una tira formada por $N - 2$ triángulos.

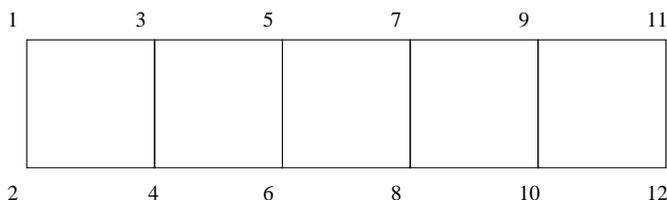


Figura 8.1: Representación de una fila de la malla por medio de una primitiva de tipo **QUAD_STRIP**.

Por medio de **TRIANGLE_STRIP** se puede representar una cuadrícula de forma similar a como se representa con **QUAD_STRIP** dividiendo cada celda de la malla en dos triángulos. En la Figura 8.2 se puede ver un ejemplo de representación de una de las filas de una cuadrícula por medio de **TRIANGLE_STRIP**.

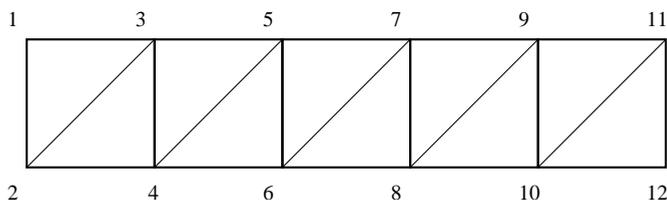


Figura 8.2: Representación de una fila de la malla por medio de una primitiva de tipo **TRIANGLE_STRIP**.

Evaluación de mallas con OpenGL

La interfaz de OpenGL incorpora funciones que permiten la creación automática de mallas para representación a partir de un conjunto de puntos de control. Esta tarea se puede realizar, por ejemplo, por medio de las funciones `glMap2` y `glEvalMesh`, que toman un conjunto de puntos de control tridimensionales y lo convierten en una malla de tamaño arbitrario definida por los puntos proporcionados.

La principal ventaja de este método es que incorpora un método de cálculo automático de normales, texturas y color, obteniéndose un resultado con apa-

riencia diferenciable.

Sin embargo, este método de representación requiere el almacenamiento de una matriz de tamaño N por M en la que cada elemento es a su vez un vector tridimensional. Este almacenamiento no es necesario en el caso de la utilización de las primitivas anteriores, en las que únicamente es necesario almacenar una matriz con alturas.

Además, este método es más costoso computacionalmente. Esto es debido a que la biblioteca OpenGL utiliza los puntos proporcionados como puntos de control para construir una malla con superficies de bezier u otro tipo de superficies parametrizadas, en lugar de utilizar directamente los puntos proporcionados.

Cálculo de normales

En el caso de utilizar para la representación de los modelos las primitivas de OpenGL `QUAD_STRIP` o `TRIANGLE_STRIP`, es necesario calcular las direcciones normales de los vértices, para el correcto funcionamiento del modelo de iluminación. A continuación se indica el procedimiento a seguir para este cálculo, a partir de la definición de normal a una superficie.

Dada una superficie parametrizada definida en un abierto, se define su plano tangente en un punto \mathbf{p} como el subespacio vectorial de \mathbb{R}^3 generado por los vectores tangentes a las curvas contenidas en la superficie que pasan por \mathbf{p} .

En este subespacio se considera una base $\langle X_1(\mathbf{p}), X_2(\mathbf{p}) \rangle$ y se define el vector normal unitario a la superficie en \mathbf{p} como

$$N(\mathbf{p}) = \frac{X_1(\mathbf{p}) \times X_2(\mathbf{p})}{\|X_1(\mathbf{p}) \times X_2(\mathbf{p})\|}$$

A partir de estas definiciones puede obtenerse una aproximación al vector normal unitario en un punto de la malla. Consideremos el conjunto de puntos $(x_i, x_j, h(i, j))$ de \mathbb{R}^3 como una discretización de una superficie dada en la forma $z = f(x, y)$. Los vectores tangentes a las curvas $\sigma_1(t) = (t, y_j, f(t, y_j))$ en $t = x_i$ y $\sigma_2(t) = (x_i, t, f(x_i, t))$ en $t = y_j$ forman una base del plano tangente a la

superficie en el punto $\mathbf{p} = (x_i, y_j, h(i, j))$.

El vector tangente a una curva $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ es el vector dado por $\mathbf{t}(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$. A partir de la discretización definida por los puntos de la malla de cada una de las dos curvas se pueden obtener aproximaciones sus vectores tangentes por medio de diferencias:

$$\sigma'_1(x_i) = \left(1, 0, \frac{h(i+1, j) - h(i, j)}{x_{i+1} - x_i}\right)$$

$$\sigma'_2(y_j) = \left(0, 1, \frac{h(i, j+1) - h(i, j)}{y_{j+1} - y_j}\right)$$

El cálculo del vector normal en cada vértice, tanto para su utilización en el modelo de iluminación de la escena como para el cálculo de fuerzas de contacto en los modelos de interacciones se puede aproximar por medio de

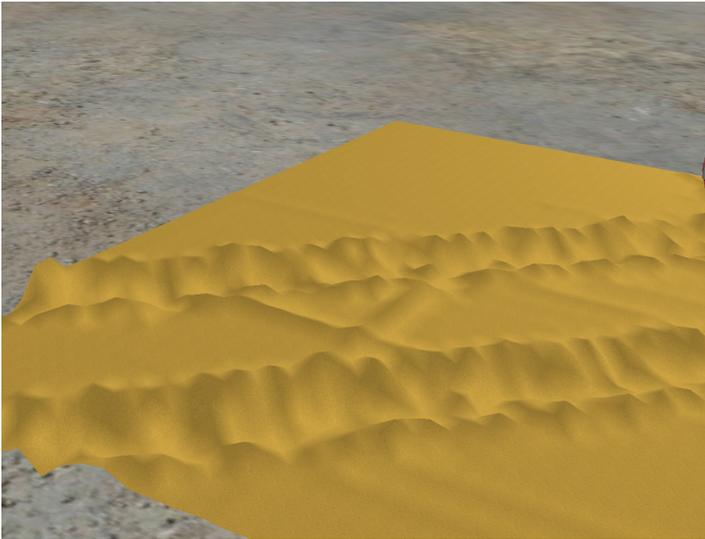
$$N(x_i, x_j, h(i, j)) = \frac{\sigma'_1(x_i) \times \sigma'_2(y_j)}{\|\sigma'_1(x_i) \times \sigma'_2(y_j)\|}$$

8.1.2. Aparición de crestas

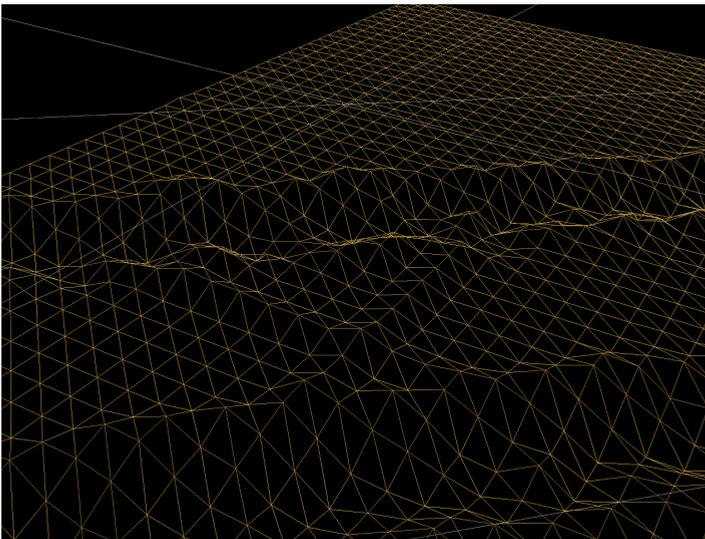
En la utilización de las primitivas **TRIANGLE_STRIP** se ha observado que la geometría del modelo no se adapta bien a la forma del terreno en algunos puntos. Consideremos una situación en la que se produce una cresta como, por ejemplo, el borde de una rodada de los neumáticos de un vehículo (véase la Figura 8.38.3a).

Si la cresta sigue la dirección de una de las diagonales de la malla y esta diagonal es perpendicular a la dirección de las diagonales que definen el **TRIANGLE_STRIP** (véase la Figura 8.2) se produce un efecto de *dientes de sierra*. El motivo es que la orientación de las aristas del **TRIANGLE_STRIP** impide reproducir correctamente la curvatura de la superficie en la dirección perpendicular a las mismas.

Con el fin de evitar la aparición de esta anomalía en la representación del terreno, se propone la sustitución de la primitiva **TRIANGLE_STRIP** por una implementación de la misma utilizando un vector de vértices **GL_VERTEX_ARRAY**



(a) Representación del terreno con dibujo sólido



(b) Representación del terreno con malla de alambre

Figura 8.3: La representación del sistema por medio de **TRIANGLE_STRIP** da lugar a la aparición de *dientes de sierra* sobre las crestas cuando la dirección de las mismas es perpendicular a las diagonales que dividen los cuadriláteros sobre los que se define.

de OpenGL. Por medio de un `GL_VERTEX_ARRAY` es posible decidir el orden en el que se utilizan los vértices para la creación de los triángulos, lo que permite modificar la dirección de las diagonales.

Para ello, cuando se actualiza la altura de un vértice a partir de la información proporcionada por el modelo dinámico, se comprueban los cuadrados que comparten ese vértice. Para cada uno de ellos se decide la dirección que debe seguir la diagonal en función de la altura de los cuatro vértices del cuadrado.

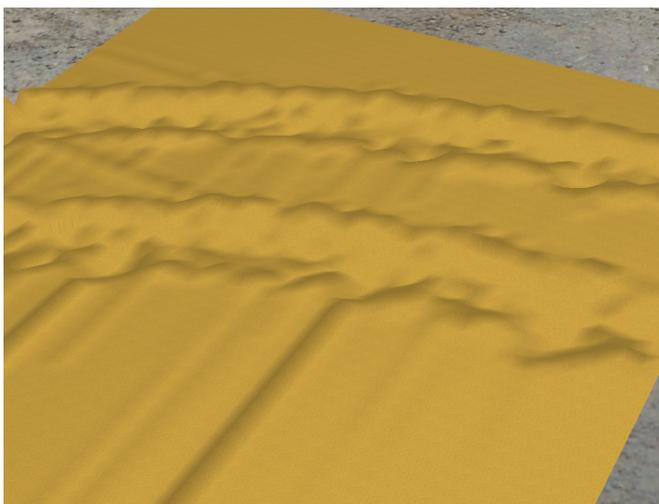


Figura 8.4: La utilización de un vector de vértices, junto con un vector de índices que indica el orden en el que se generan los triángulos, permite evitar la aparición de crestas irregulares.

8.2. Texturizado para las zonas en movimiento

Con el fin de obtener una representación realista del sistema simulado es necesario tratar de forma especial las zonas del montón que están en movimiento. Es decir, aquellas regiones en las que se está produciendo una avalancha y en las que el material está fluyendo por la superficie.

A modo de ejemplo, consideremos un montón de grava representado por un mapa de alturas con puntos (i, j) y una textura fotográfica en la que se aprecian partículas con diferentes tamaños. Si el material empieza a fluir por la superficie del montón, con un campo de velocidades $v(i, j)$, podemos hacer que la coordenada de textura se modifique de acuerdo con este campo de velocidades. Sin embargo, la divergencia de v hará que, rápidamente, el aspecto de la textura se deforme hasta aparecer irreconocible (Figura 8.5). Por tanto, es necesario conseguir la preservación del aspecto original de la textura, al menos hasta un cierto grado.

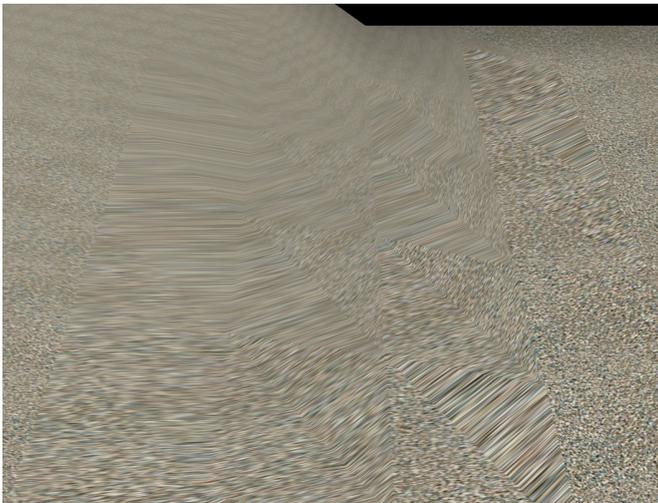


Figura 8.5: Deformación de la textura causado por el desplazamiento de la coordenada de textura propuesto por (Onoue and Nishita, 2005).

Para la realización de esta tarea se utilizarán técnicas de representación de flujo de material habituales en la simulación de fluidos. Las técnicas existentes para conseguir una sensación realista de flujo se centran en conseguir dos objetivos. En primer lugar, conseguir que las características locales de la textura que representa el material se desplacen de acuerdo con el campo vectorial de velocidades definido por el flujo. En segundo lugar, conseguir que la deformación de estas características no llegue a hacer que se pierda su aspecto global.

El principal inconveniente que presentan estas técnicas es el hecho de que están diseñadas para obtener resultados muy realistas, adecuados para la realización de animaciones no interactivas, por lo que su coste computacional es elevado. Estas técnicas se componen de algoritmos de desplazamiento y combinación de texturas obtenidas de forma procedural. Sin embargo, parte de las ideas básicas de estas técnicas son utilizables en tiempo real, como ha sido mostrado por Neyret (Neyret, 2003).

Además, de la cuestión relativa al coste computacional, las técnicas presentadas habitualmente están destinadas a la realización de animaciones de flujos continuos, por lo que presentan ciertas deficiencias cuando se aplican al flujo de un sistema granular, que presenta discontinuidades.

En este apartado presentamos el esquema de animación de flujo utilizado en el modelo de terreno, así como las consideraciones adicionales necesarias para la representación de flujos con discontinuidades.

8.2.1. Desplazamiento de la coordenada de textura

Consideremos una malla representada por un mapa de alturas, con una textura. Cada vértice (i, j) tiene una coordenada de textura $(u, v) = (w_i i, w_j j)$, donde $\{w_i\}_i, \{w_j\}_j$ son parámetros que determinan la forma en la que la textura cubre la malla. Cada vértice tiene asociado además, un valor de desplazamiento $S(i, j) = (s_i, s_j)$, de forma que la coordenada de textura que se representa para un vértice (i, j) es

$$T(i, j) = (u, v) + (s_i, s_j)$$

A continuación se explica el procedimiento para modificar el desplazamiento de la coordenada de textura de cada vértice $S(i, j)$ empleado por Onoue y Nishita (Onoue and Nishita, 2005), basado a su vez en el trabajo de Max y Becker (Max and Becker, 1995). En su modelo de evolución, cada celda se comprueba con los ocho vecinos, pudiendo producirse una avalancha desde la celda central a una o varias de las adyacentes. Cada vez que se produce un flujo de material, en el que una cantidad F pasa de la celda central (i, j) a la celda adyacente $(i, j) + E$,

donde E representa la dirección en la que se produce el flujo, el incremento de S se calcula como

$$\delta S(i, j) = \gamma F E.$$

Cuando se produce flujo de material en diferentes direcciones E_α con valores F_α , el incremento total del desplazamiento de la coordenada de textura para la celda (i, j) se calcula como

$$\delta_s = \gamma \sum_{\alpha} F_{\alpha} E_{\alpha}$$

Este procedimiento supone que la textura contiene un patrón muy fino y que la continuidad de dicho patrón no es excesivamente relevante entre polígonos adyacentes. Esto puede ser cierto para el caso de la arena, en la que el tamaño de los granos es muy pequeño y puede equipararse al de un pixel. El algoritmo se ha probado utilizando una textura con ruido gaussiano coloreada con resultado aceptables. Sin embargo, en el momento en que se desea emplear una textura con detalles mayores, como puede ser el caso de grava en la que las partículas pueden ser hasta de varios centímetros, los resultados obtenidos con este procedimiento son muy deficientes y la deformación de los detalles oculta completamente la textura original tras unos pocos segundos de simulación (Figura 8.6).

8.2.2. Control de la deformación de la textura

Para solucionar el problema de la deformación de la textura, es necesario restablecer las coordenadas de textura antes de que el valor del desplazamiento sea suficientemente grande como para impedir que se reconozca el patrón original de la misma.

La forma más simple de realizar esto es restar w_i, w_j al valor del desplazamiento de la textura cada vez que su valor supere a estos coeficientes. De esta manera, se consigue que la deformación nunca aumente de forma indefinida. Esta modificación impide la deformación de la textura, mejorando el aspecto visual de la animación en la región en la que hay un flujo de material. Sin embargo,

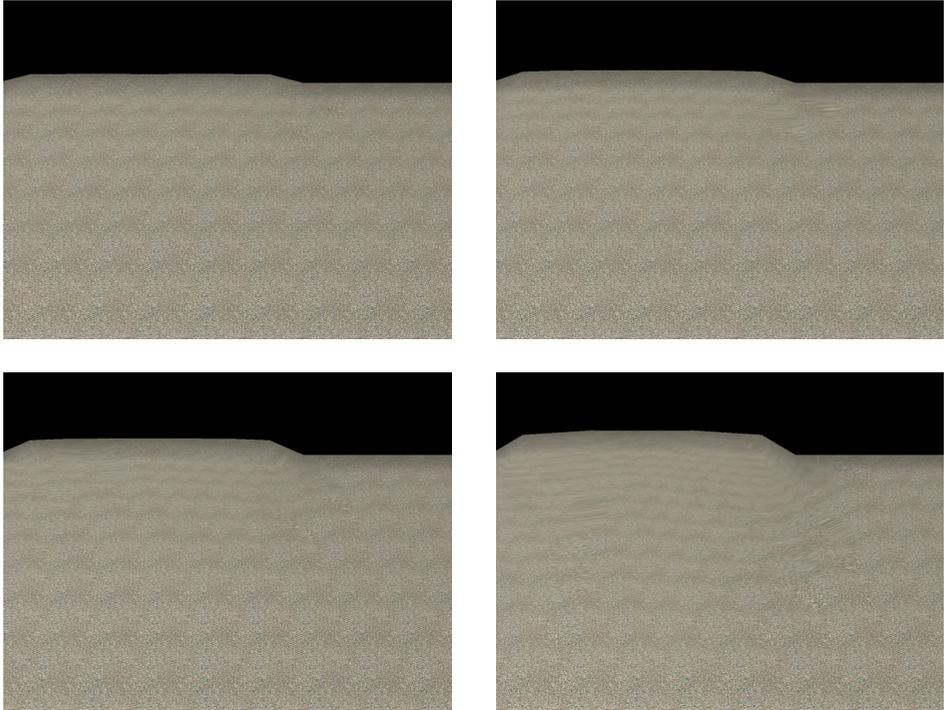


Figura 8.6: Secuencia de una simulación que muestra la deformación de la textura causado por el desplazamiento de la coordenada de textura propuesto por (Onoue and Nishita, 2005).

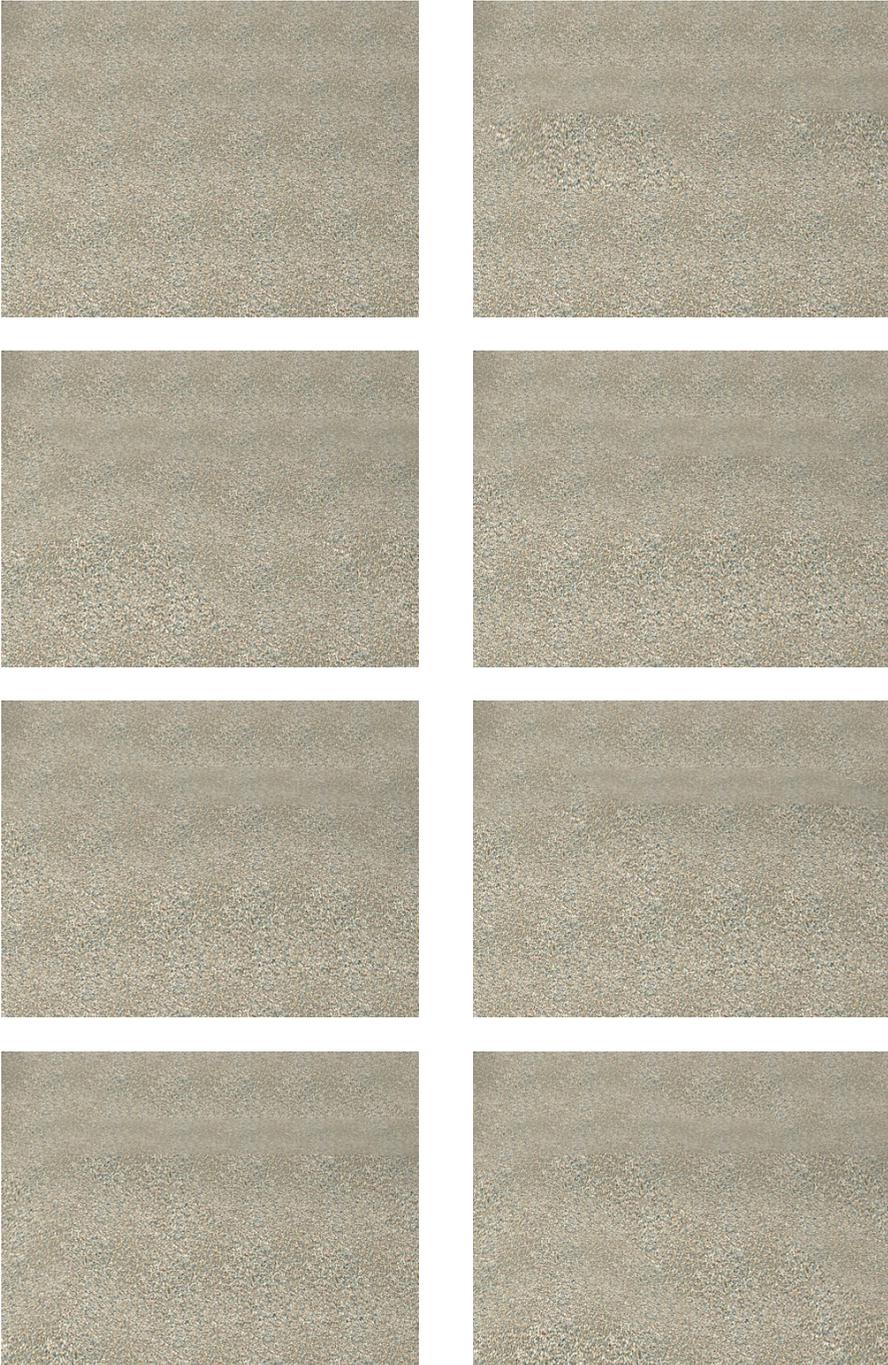


Figura 8.7: Secuencia en la que se aprecia una discontinuidad en la región frontera entre el flujo y el material estático.

cada vez que la coordenada de textura se reinicia, en la frontera entre la región que se desliza y la región estática se aprecia un salto en la textura (Figura 8.7).

Además, en el caso de avalanchas en sistemas granulares, el valor de la divergencia suele ser bajo respecto al valor que se encuentra en otros fluidos, por lo que el modelo conseguido con esta modificación da lugar a que el material parezca moverse como un bloque, en lugar de estar produciéndose una avalancha de un material granular. Incluso, en casos en los que la velocidad de deslizamiento es suficientemente alta respecto a la tasa de refresco aparece el efecto de aliasing, causando que el material parezca moverse en la dirección opuesta a en la que realmente está ocurriendo el desplazamiento.

Por estos motivos, esta metodología se muestra inadecuada para la representación del flujo de superficie que se produce en sistemas granulares. Si bien los modelos de texturas obtenidas de forma procedural son excesivamente costosos, a continuación veremos que algunos de los procedimientos básicos que se encuentran en la mayoría de modelos de representación de flujo actuales sí son utilizables en tiempo real.

8.2.3. Representación de flujo mediante Multitextura

Con el fin de solucionar el problema de la deformación a largo plazo de la textura, y de evitar la visibilidad del reinicio del desplazamiento de la textura, Neyret (Neyret, 2003) propone un método basado en multitextura.

El procedimiento planteado por Neyret está destinado, de nuevo, a flujos continuos. Se apoya en el hecho de que la imagen representada sobre una malla con una textura es periódica respecto al valor de la coordenada de textura, con periodo unidad; un vértice con coordenada (u, v) mostrará el mismo punto de la textura que cualquier otro vértice con coordenada $(u + n, v + k)$, con n y k enteros. Por tanto, la deformación de la textura en un punto puede determinarse por la diferencia entre la coordenada de textura original y la actual, en función de cuánto se separe esta diferencia de un valor entero.

Neyret utiliza tres texturas iguales para mostrar el texturizado de un objeto,

de forma que se muestra un porcentaje de cada una de ellas. El porcentaje que se le asigna a una textura es tanto mayor cuanto más próxima esté la textura a su estado original. De esta forma, durante el intervalo de tiempo que una textura es visible en un punto del objeto su deformación corresponde con el mínimo periódico. Durante ese intervalo, además, la textura está desplazándose durante ese intervalo en la dirección del flujo de material.

El resultado es que la textura obtenida que se percibe en cada instante como mezcla de las tres copias es siempre similar a la textura original, y el conjunto parece deslizarse de forma continua, pero irregular. El modelo se presenta en realidad como la base para un modelo de representación de flujo más sofisticado, basado en texturas procedurales y ruido de Perlin (Perlin and Hoffert, 1989). Sin embargo, esta base puede usarse por si misma y resulta más adecuada para la representación de flujo en tiempo real.

En este modelo se utilizan dos parámetros básicos para obtener la animación. La velocidad del flujo V y el tiempo de latencia τ , que indica cada cuanto tiempo debe volver a verse la textura en su estado original. Si la velocidad es alta, en poco tiempo se producirá un grado de deformación apreciable, por lo que convendrá utilizar una latencia más baja.

Para el cálculo de la textura a partir de las tres copias utilizadas, según se ha indicado anteriormente, se utiliza la mezcla lineal de los valores de cada una de ellas:

$$T = \sum_{j=1}^3 \alpha_j T(u_j, v_j)$$

donde cada coeficiente α_j viene dado por

$$\alpha_j = \frac{1}{3} \left(1 - \cos \left(2\pi \frac{t - t_0}{\tau} \right) \right)$$

En esta expresión t_0 representa el tiempo en el que la coordenada de textura se encuentra en su estado original.

En lugar de ajustar el valor de τ de forma continua, Neyret (Neyret, 2003) propone utilizar un conjunto discreto de valores τ^i , y una medida de la deformación d^i para cada uno de ellos. Para un determinado vértice, se calculará el grado de deformación, que se obtiene con cada valor del tiempo de latencia, y se tomarán

los dos que más se acerquen al mínimo, realizando una mezcla de la textura resultante en ambos.

Este modelo, no obstante, sigue teniendo problemas con las regiones frontera porque la deformación no está controlada a largo plazo. En las regiones de flujo funciona bien, pero en las regiones frontera la textura se estira mucho hasta que resulta irreconocible. La secuencia de imágenes de la Figura 8.8 puede apreciarse como se produce en una situación de flujo de material.

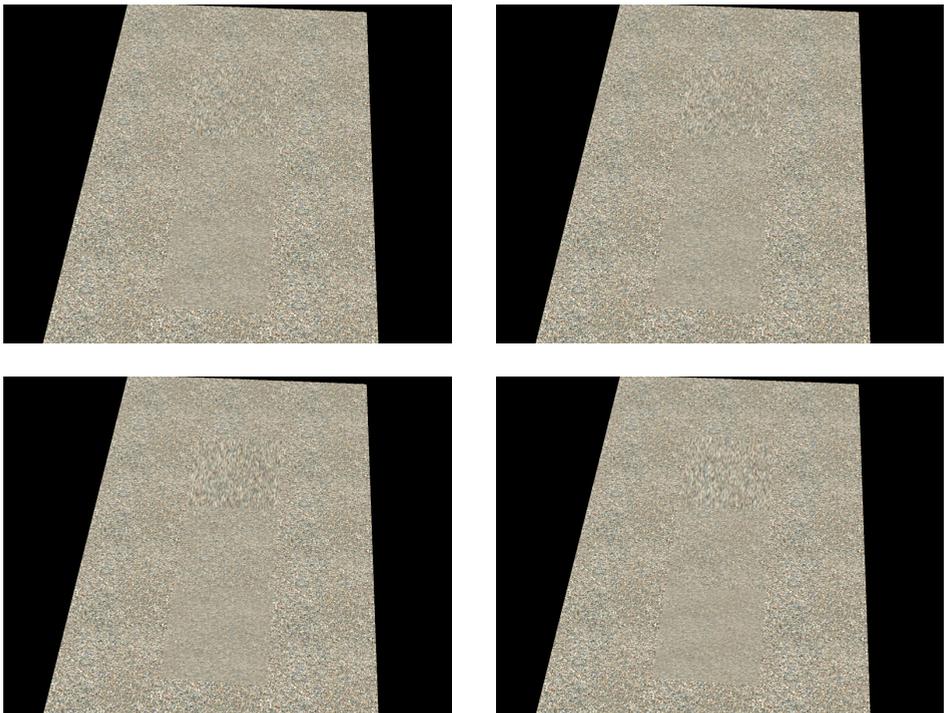


Figura 8.8: Secuencia en la que se aprecia la deformación de la textura en la región frontera entre el flujo y el material estático.

El origen de este problema es que el modelo está destinado a flujos continuos en los que no hay regiones estáticas. Por este motivo se permite que la coordenada de textura crezca de forma indefinida. Para salvar este inconveniente nosotros haremos retroceder efectivamente la coordenada de textura de forma que su valor sea en todo momento próximo al valor inicial.

Esta estrategia, sin embargo, tiene el inconveniente de que pueden apreciarse discontinuidades temporales cuando una textura es reiniciada mientras sus vecinas permanecen en el mismo valor. Para evitar esta situación utilizaremos el instante en el que α^j es nulo para realizar esta operación.

De esta forma, una vértice únicamente tendrá una discontinuidad en la coordenada de textura cuando una textura no sea visible. En función del valor de la latencia, existirá un intervalo en el que la coordenada de textura podrá mostrarse. En el momento en que el extremo superior del intervalo se supere, la coordenada de textura se reducirá en una cantidad igual a la longitud del intervalo. De esta manera, la diferencia de coordenada de textura entre dos vértices adyacentes nunca superará la longitud del rango que puede abarcar ésta. El procedimiento se ha implementado por medio de *shaders*.

Como hemos dicho anteriormente las coordenadas de textura de las tres texturas que se superponen están desfasadas el valor de la fase utilizando un valor de fase de 0.3.

```
for (int i=0; i<36; i++)
{
    (*texcoords_orig)[i] = (*texcoords)[i];
    (*texcoords1)[i] = (*texcoords)[i] + osg::Vec2(0.3,0.3);
    (*texcoords_orig1)[i] = (*texcoords1)[i];
    (*texcoords2)[i] = (*texcoords)[i] + osg::Vec2(0.6,0.6);
    (*texcoords_orig2)[i] = (*texcoords2)[i];
}
```

Estas tres coordenadas de textura se pasan al *Vertex Shader* (Ver algoritmo 1) para poder pegar la textura desplazada en cada uno de las capas.

Una vez desplazadas las texturas la distancia correspondiente a su fase se pasan al *Fragment Shader* para calcular su visibilidad. Previamente se comprueban las coordenadas de textura para que no se estiren o se encojan de manera infinita aquellos triángulos en los que haya vértices con movimiento y vértices estáticos.

Para calcular el momento en el que la textura es invisible deberemos calcular

Algoritmo 1 Vertex shader

```

attribute vec2 coord_textura2;
attribute vec2 coord_textura;
attribute vec2 coord_textura1;
attribute vec2 velocidad;

varying vec2 vel;

void main(void) {

    vel = velocidad;

    gl_Position = ftransform();

    gl_TexCoord[0].s = coord_textura.x;
    gl_TexCoord[0].t = coord_textura.y;

    gl_TexCoord[1].s = coord_textura1.x;
    gl_TexCoord[1].t = coord_textura1.y;

    gl_TexCoord[2].s = coord_textura2.x;
    gl_TexCoord[2].t = coord_textura2.y;
}

```

las siguientes expresiones

$$\begin{aligned}
 \alpha_j &= \frac{1}{3} \left(1 - \cos \left(2\pi \frac{t + \sigma}{\tau} \right) \right) = 0 \\
 &\Rightarrow \cos \left(2\pi \frac{t + \sigma}{\tau} \right) = 1 \\
 &\Rightarrow \frac{t + \sigma}{\tau} = k, \quad k = 0, 1, 2, \dots
 \end{aligned} \tag{8.1}$$

De esta manera, según la ecuación (8.1) la coordenada de textura correspondiente al nivel de textura 0 se sustituirá por la coordenada de textura original cuando $\frac{t + \sigma}{\tau}$ sea un número entero.

$$\alpha_j = \frac{1}{3} \left(1 - \cos \left(2\pi \frac{t}{\tau} \right) \right) = 0 \tag{8.2}$$

Realizando los mismos cálculos en la coordenada de textura 1, según la ecuación (8.2) la coordenada de textura se sustituirá por la coordenada original cuando $\frac{t}{\tau}$ sea un número entero.

Algoritmo 2 Fragment shader

```

varying vec2 vel;

uniform float tiempoU;
uniform sampler2D tex1;
uniform sampler2D tex2;
uniform sampler2D tex3;

void main (void) {
    float PI = 3.14159265;
    float u3 = 1.0/3.0;
    float fase = 0.3;
    float latencia = 3*fase;
    float a1,a2,a3;

    vec4 value1 = texture2D(tex1, gl_TexCoord[0].st);
    vec4 value2 = texture2D(tex2, gl_TexCoord[1].st);
    vec4 value3 = texture2D(tex3, gl_TexCoord[2].st);

    if (vel.x != 0 || vel.y != 0)
    {
        a1 = (1-cos(2*PI*(tiempoU+fase)/latencia))*u3;
        a2 = (1-cos(2*PI*(tiempoU)/latencia))*u3;
        a3 = (1-cos(2*PI*(tiempoU-fase)/latencia))*u3;
    }
    else
    {
        a1 = 1;
        a2 = 0;
        a3 = 0;
    }

    vec4 color = a1*value1 + a2*value2 + a3*value3;
    gl_FragColor = color;
}

```

$$\alpha_j = \frac{1}{3} \left(1 - \cos \left(2\pi \frac{t - \sigma}{\tau} \right) \right) = 0 \quad (8.3)$$

Realizando los mismos cálculos en la coordenada de textura 2, según la ecuación (8.3) la coordenada de textura se sustituirá por la coordenada original cuando $\frac{t-\sigma}{\tau}$ sea un número entero.

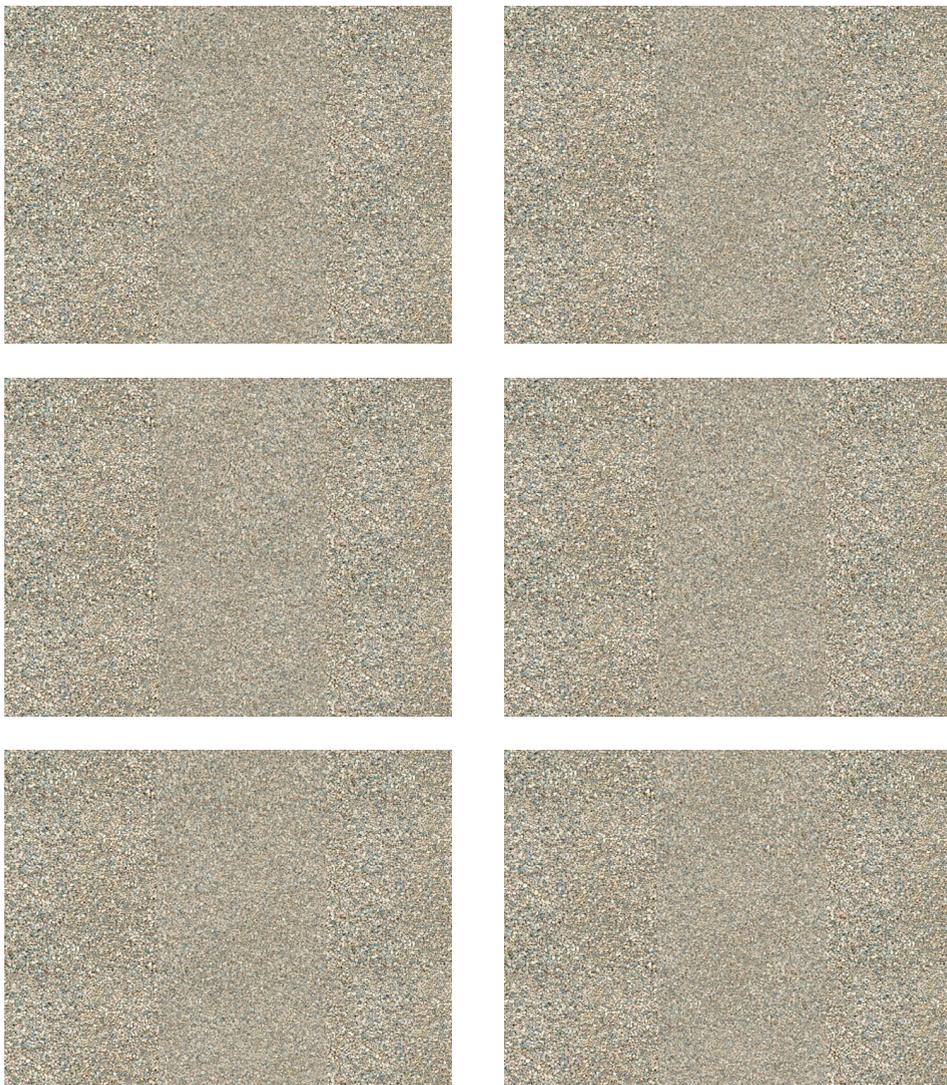


Figura 8.9: La coordenada de textura de un vértice se reinicia cuando su valor supera un cierto umbral, de forma que la diferencia entre vértices adyacentes no crezca de forma indefinida. Si esta operación se realiza en el instante en que la visibilidad de la textura es 0 no se apreciarán discontinuidades en el flujo.

8.2.4. Resultados

Por medio de las técnicas de representación de flujo presentadas se ha conseguido una mejora considerable en la calidad de la representación gráfica de los modelos de simulación.

La secuencia de imágenes de la Figura 8.9 muestra la evolución de la textura utilizando esta técnica. Figura 8.10 muestra un detalle del límite entre la región en movimiento y la región estática, en la que no se aprecia deformación en ninguna de las caras del modelo.



Figura 8.10: Gracias al reinicio de la coordenada de textura se evita la deformación en las fronteras entre material en movimiento y material estático.

8.3. Utilización de partículas

Además de una correcta animación de las texturas para la representación gráfica del flujo del material, es necesario tener en cuenta otros efectos para conseguir un alto grado de realismo. Cuando se produce una avalancha en un material granular una capa de partículas se deslizan por la superficie a gran

velocidad. Durante este comportamiento, las partículas más pequeñas quedarán en suspensión en el aire provocando una nube de polvo. Este efecto será aún más notable cuando la avalancha se produzca por la caída de nuevo material sobre el montón ya formado.

Para simular este efecto se utilizarán técnicas de representación de sistemas de partículas, utilizados habitualmente en la representación de humo, polvo, etc.

8.3.1. Sistemas de partículas

Los métodos basados en sistemas de partículas fueron presentados por (Reeves, 1983). El método original cada partícula se mueve de forma independiente de acuerdo con sus propiedades, sin considerar ninguna interacción entre diferentes partículas.

Sims (Sims, 1990) extendió el trabajo anterior para permitir la interacción con el entorno y, desde entonces, múltiples autores han propuesto diferentes modificaciones y mejoras que consideran la interacción con el entorno y entre las partículas del sistema (Chen et al., 1999).

Un sistema de partículas puede describirse de la siguiente manera; cada partícula tiene sus propios parámetros que influyen en sus propiedades. Los parámetros más habituales son los siguientes:

- Posición y orientación
- Movimiento, expresado por medio de las derivadas de la posición y la orientación
- Color (RGB)
- Transparencia (alpha)
- Forma (punto, línea, esfera, rectángulo, cubo, etc.)
- Volumen
- Densidad

- Masa
- Tiempo de vida
- Posición inicial y final para la estela

La posición, forma y tamaño de un sistema de partículas viene determinado por la posición inicial de sus partículas y su rango de movimiento. El movimiento del sistema de partículas está determinado por fuerzas internas y externas y los resultados de las rotaciones y las aceleraciones de las partículas como un todo. Un sistema de partículas puede cambiar su forma, tamaño, color, transparencia o cualquiera de sus atributos mientras evoluciona. El tiempo de vida define durante cuantos pasos debe estar activa una partícula. Cada partícula suele tener una posición inicial y una final, de manera que es posible representar una estela a lo largo de su movimiento, proporcionando mayor sensación de movimiento a la simulación.

Simulación de un sistema de partículas

El sistema de partículas se inicia asignando a cada partícula su posición inicial y los valores de inicio de sus parámetros. Tras iniciar el sistema, en cada paso de la simulación se actualizan algunos parámetros de las partículas siguiendo una regla y se representa el sistema completo.

A continuación se esboza el proceso que se sigue en una simulación con sistemas de partículas:

1. Creación del sistema de partículas e inicio de las posiciones y velocidades.
2. Inicio de las propiedades de cada partícula (color, transparencia, forma, . . .)
3. En cada paso de la simulación:
 - Crear nuevas partículas de acuerdo con el ritmo de creación establecido
 - Eliminar las partículas que hayan superado su tiempo de vida
 - Calcular y actualizar los parámetros de cada partícula

- Ajustar el inicio y el final de cada partícula
- Representar gráficamente el sistema de partículas

8.3.2. Utilización de sistemas de partículas

Para una simulación realista del sistema granular es necesario utilizar sistemas de partículas de forma que reproduzcan tanto la caída del material granular como las nubes de polvo que se producen por el movimiento del mismo.

Para el primer efecto se emplean sistemas de partículas situados en las celdas que emiten el material y se ajustan los parámetros para que su trayectoria sea la caída libre del material. El tiempo de vida de las partículas se ajusta en función de la altura que deben recorrer en el momento de su creación. Este dato se conoce a través de los cálculos empleados para la interacción entre ambos Automatas.

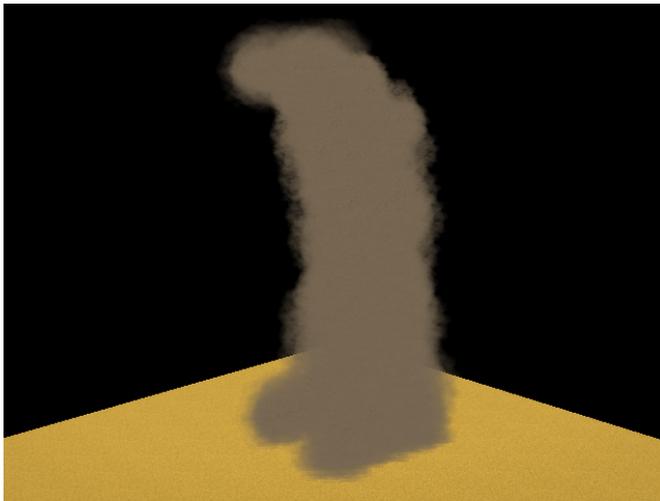


Figura 8.11: Para la simulación de la caída de material de un sistema a otro se han empleado sistemas de partículas, tanto para el flujo del material como para las partículas en suspensión.

Además, se sitúan emisores de partículas tanto en las celdas que lanzan el material como en las celdas que lo reciben. El emisor de las celdas de las que sale el material en la caída es independiente del estado de los sistemas; se utiliza un emisor radial en el que las partículas se separan del punto en el que se crearon y van perdiendo opacidad con el tiempo. El emisor situado en las celdas que reciben el material tiene el mismo comportamiento que el anterior, pero en este caso su velocidad y número de partículas depende de la altura de la que provenga el material, siendo éstos mayores cuánto mayor sea la altura.

8.4. Resumen del capítulo

En este capítulo se han presentado las técnicas necesarias para la representación gráfica de los modelos propuestos a lo largo del presente trabajo. Se ha expuesto en primer lugar cuáles son las primitivas más adecuadas para la representación gráfica del modelo en un entorno virtual y se han indicado los problemas que pueden surgir al utilizarlas.

A continuación se han revisado las técnicas existentes para la representación de flujo por medio de texturas. En este apartado se he propuesto una metodología basada en técnicas de difusión de texturas que permite la animación en tiempo real del flujo de material por la superficie del sistema. Estas nuevas técnicas se han implementado utilizando el lenguaje de programación de Shaders de OpenGL GLSL, aprovechando así la capacidad de cálculo de la tarjeta gráfica y mejorando el rendimiento computacional de la simulación.

Asociado al movimiento de terreno, y con el fin de mejorar la calidad visual de las simulaciones, se ha propuesto la utilización de sistemas de partículas para la simulación de la caída de material y de la nube de polvo que se genera a causa de las partículas en suspensión.

El Capítulo 9 mostrará la integración de los elementos que se han definido a lo largo de los Capítulos 4 a 8 para el desarrollo de aplicaciones de realidad virtual que involucren la simulación interactiva de sistemas granulares junto con sistemas mecánicos. A modo de ejemplo se expondrá el desarrollo de un si-

mulador de minicargadora por medio de los modelos fruto de este trabajo de investigación.

When you are solving a problem, don't worry.

Now, after you have solved the problem, then that's the time to worry.

R. Feynman

CAPÍTULO 9

Utilización de los modelos dinámicos en un simulador de minicargadora

9.1. Introducción

El presente trabajo de investigación está motivado por las tareas de desarrollo de simuladores para entrenamiento del Laboratorio de Simulación y Modelado. Los diferentes modelos han sido desarrollados en paralelo con algunos de los sistemas de simulación desarrollados, y han sido incorporados a simuladores que se encuentran actualmente en uso.

No obstante, se ha querido realizar un desarrollo propio para demostrar el uso de los resultados de este trabajo de investigación, con el fin de poder mostrar en una única aplicación todas las contribuciones que se han obtenido. En este capítulo se desarrollan los detalles de un modelo de una minicargadora como la que se muestra en la Figura 9.1, y se discuten los resultados obtenidos.



Figura 9.1: Con el fin de mostrar la aplicación y utilidad de los modelos desarrollados en el presente trabajo se ha desarrollado un sistema de simulación para una minicargadora.

9.2. Elementos del simulador

Un simulador de vehículo destinado a la formación es un sistema complejo compuesto por varios elementos que permiten, por una parte, predecir el comportamiento del entorno ante las acciones del usuario, y por otra reproducir los estímulos sensoriales del entorno real, tanto visuales y sonoros, como inerciales.

Los elementos y sistemas que se describen a continuación hacen referencia a los componentes que constituyen el simulador completo para su uso como sistema de ayuda al aprendizaje, además de incorporar la vertiente evaluadora y de monitorización de reacciones. En los siguientes apartados se describen los elementos que componen el simulador.

9.2.1. Arquitectura de un simulador

La arquitectura del simulador está formada por los siguientes elementos:

Sistemas informáticos: Conjunto de equipos informáticos necesarios para la ejecución en tiempo real de los procesos de modelado de los subsistemas de la maquinaria, tanto de los elementos hidráulicos, como aquellos necesarios para la conducción, de la generación de los entornos y efectos gráficos, así como de los modelos de comportamiento de terreno.

Plataforma móvil de 6 grados de libertad: Sirve de base flotante para la réplica de la cabina en escala real. Se utiliza como medio para estimular los órganos propioceptivos y el sistema vestibular del usuario logrando una gran sensación de inmersión y realismo ante los movimientos y reacciones de la cabina.

Réplica de la cabina, el asiento del manipulador y los mandos: Se utiliza para dar la sensación al usuario de la manipulación de la maquinaria lo más cercano a la realidad.

Sistema de Entradas y Salidas (SES): Incluye todos los elementos físicos necesarios para la sensorización y control de los mandos de las diferentes máquinas. Los elementos de sensorización son fundamentales para transmitir al modelo matemático las acciones y reacciones del operador.

Sistema de proyección: Se encarga de la proyección de las imágenes al usuario. Se puede utilizar un sistema con una vista, ampliable a tres o cuatro vistas (canales de visualización) implementadas en un sistema basado en retroproyección o un sistema basado en TFT's de altas prestaciones. Se puede utilizar también un sistema de proyección de imágenes en 3 Dimensiones, ya sea empleando estéreo activo con un monitor, o estéreo pasivo sobre una o varias pantallas de proyección.

Sistema de tracking: Sirve para ajustar las imágenes proyectadas en función de los movimientos de cabeza que realiza el usuario. Un pequeño giro de la cabeza hacia los laterales permitirá al usuario ver el lateral del campo de simulación. Lo mismo ocurre si la cabeza se levanta o agacha o si se mueve en cualquier dirección. En el caso de optar por un sistema con un amplio campo de vista, el tracker se emplea para corregir los movimientos del usuario dentro de la escena.

9.2.2. Bloques funcionales de programación del simulador

A continuación detallamos los elementos de programación que se tienen en cuenta en el desarrollo de un simulador de realidad virtual.

Base de datos visual del sistema: Supone el desarrollo de los elementos relacionados con el aspecto visual a recrear durante la simulación e incluye los siguientes módulos:

1. *Módulo de información geométrica y visual:* Almacena toda la información referente a la representación geométrica del entorno de simulación. Esta representación se realiza utilizando un modelo poligonal para la geometría y se emplean texturas y materiales para ofrecer la información de detalle visual. En esta fase se modela un entorno de trabajo realista, con diferentes clases de maquinaria y de objetos decorativos (como herramientas, materiales, bancadas, etc...) típicos de un ambiente industrial.
2. *Modelado geométrico:* Se compone del modelo tridimensional realista de la minicargadora que se va a utilizar durante la simulación.
3. *Módulo gestor de avatares:* En el entorno pueden definirse un conjunto de humanoides que describen un comportamiento inteligente o pregrabado por la escena. Este módulo incluye también la parte física del avatar, de forma que puedan reaccionar en tiempo real a empujones y/o golpes.
4. *Módulo de iluminación:* Se encarga de realizar las implementaciones de las diferentes condiciones de iluminación, incluyendo la generación de sombras, descritas en cada escenario de simulación.
5. *Motor de visualización:* Se encarga de la sincronización y la gestión dinámica del dibujado de cada uno de los canales visuales presentes en el escenario.

Sistema de modelado dinámico de la grúa: El comportamiento de la grúa y de otros agentes externos que se mueven por la escena tiene que ser reproducido mediante el desarrollo de modelos matemáticos que representen fielmente los efectos reales que sufre la maquinaria en función de las acciones del manipulador. Estos modelos reproducen el comportamiento de los

diferentes subsistemas que actúan en la grúa y se verán con mayor detalle en el Apartado 9.3.

Sistema de intercomunicaciones y de reproducción de sonido: Se utiliza un sistema reproductor de sonidos reales 3D (con efecto Doppler). De esta forma se pueden reproducir varios sonidos de forma simultánea y se modulan en función de las condiciones del entorno: ruido del motor y de ambiente, así como colisiones y otros sonidos típicos de un entorno de trabajo.

Sistema de configuración del hardware del simulador: Se compone de los interfaces necesarios para poder ajustar el simulador a la arquitectura específica que lo ejecuta. Entre ellos, suelen encontrarse:

1. *Configuración del sistema visual.*
2. *Configuración de los mandos.*
3. *Ajustes del modo de funcionamiento del tracker.*
4. *Ajustes del sistema de sonidos.*

Interfaz gráfica de usuario y puesto del instructor: Comprende el desarrollo de la interfaz del simulador, de forma que sea fácil su utilización. Mediante esta interfaz se selecciona el usuario y el ejercicio a desarrollar. De la misma forma se pueden realizar la gestión de la base de datos de los usuarios, la visualización de los informes de cada uno, la elección y configuración de los ejercicios a realizar, la gestión dinámica de eventos, etc.

Sistema gestor de ejercicios: Consiste en la implementación de un programa de utilización secuenciada del simulador (prácticas y ejercicios), que facilite y maximice las conclusiones que se adquieren y se refuerzan mediante la práctica en el propio simulador. Este sistema incorpora unos Módulos que permiten la elección de un conjunto de escenarios predefinidos. Cada ejercicio se define utilizando lenguaje XML, de forma que sea sencillo el realizar modificaciones sobre los mismos, e incluso el añadir a posterior nuevos ejercicios. Dentro de esta gramática se define el entorno que se desea cargar, los puntos de interés, marcas, nuevos objetos, eventos preprogramados que regirán la manera de funcionar del ejercicio y la secuenciación y contenido de los mensajes y de la voz en off que se debe escuchar en función de la actividad que se está realizando.

Sistema gestor de usuarios y evaluación: Este sistema incorpora unos Módulos que permiten la gestión de usuarios. Se implementa una base de datos de usuarios centralizada en un servidor, basada en MySQL, accesible en tiempo real y de forma segura, que permita la conexión y la realización de consultas simultáneas a través de la red. En la base de datos se guardan los datos que identifican a un usuario, junto con los informes de todos los ejercicios que ha realizado, la nota obtenida en cada uno de ellos y las sesiones grabadas de los mismos. De tal modo, la utilización del simulador se desarrollará de acuerdo a un Plan integral, y será controlable (y auditable) de posible certificación del paso de los usuarios por el simulador en caso necesario. También incluye el desarrollo de un sistema de adquisición de medidas de simulación automático, que permite realizar informes de evaluación de los trabajos. Cada trabajo dispone de ciertos criterios de evaluación que quedan registrados, así como las acciones que se han realizado durante la sesión.

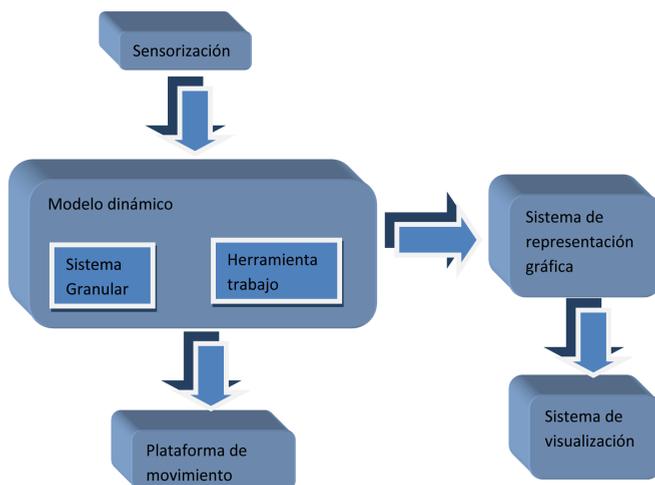


Figura 9.2: Estructura de un sistema de simulación como los que se emplean habitualmente en simuladores de formación.

Todos estos módulos se agrupan dependiendo de la información que deben compartir para el correcto funcionamiento del sistema de simulación completo. Las relaciones principales entre ellos pueden observarse en la Figura 9.2.

Los desarrollos mostrados a lo largo del presente trabajo de investigación corresponden al modelado dinámico del escenario, y en particular del terreno y los sistemas granulares involucrados teniendo en cuenta el comportamiento y los requisitos de cada uno de los restantes elementos.

A continuación discutiremos las cuestiones más relevantes desde el punto de vista de la integración del conjunto de modelos de terreno desarrollados en este trabajo en un simulador.

En primer lugar se abordan las cuestiones relacionadas con la implementación de las aplicaciones informáticas y se discute la relación entre estas aplicaciones y los modelos aquí desarrollados, tanto en el aspecto dinámico de la simulación como en el aspecto visual. Por último, se muestran algunas medidas de rendimiento del sistema y se discuten los resultados obtenidos.

9.3. Modelo dinámico de minicargadora

El sistema simulado es una minicargadora empleada en obra civil para el transporte y manipulación de pequeñas cantidades de materiales granulares, como grava arena, cemento etc. o para el trabajo en localizaciones cuyas características no permitan la utilización de maquinaria de mayores dimensiones. La Figura 9.3 muestra un diagrama de la máquina y el Cuadro 9.1 muestra los valores de las cotas de este diagrama utilizadas en la aplicación.

9.3.1. Elementos de la minicargadora

En el modelo de minicargadora se han considerado el chasis, las cuatro ruedas, el brazo abatible que soporta los implementos de trabajo y la pala.

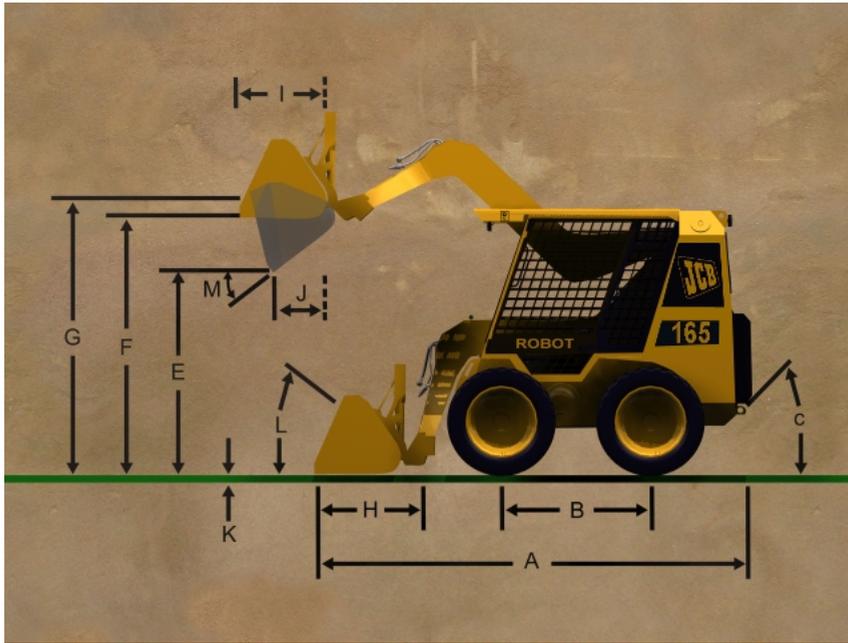


Figura 9.3: Esquema de la minicargadora considerada para el desarrollo del simulador.

Chasis

El sólido correspondiente al chasis se considera como un único sólido rígido incluyendo el propio chasis, la cabina, el motor y los sistemas eléctrico e hidráulico. La masa de este sólido es de 1900kg. Las dimensiones del chasis se indican en el Cuadro 9.1.

Brazo abatible

El brazo abatible conecta el chasis de la máquina con el portaherramientas de la misma, en el que se acoplan los diferentes implementos disponibles. Este brazo se considera en el modelo como una viga sólida. Su masa es de 450kg y tiene un giro de 95° accionado por un pistón hidráulico.

Cota	Dimensión (m)
A (longitud total)	3,27
B (distancia entre ejes)	1,03
C (ángulo de salida)	28°
E (altura de descarga)	2,16
G (altura del bulón, totalmente subido)	2,80
H (alcance a nivel del suelo)	0,86
I (alcance máximo a altura máxima)	0,76
J (alcance a altura máxima - totalmente volteada)	0,47
K (distancia de profundidad de excavación)	-15mm
L (ángulo de recogida a nivel del suelo)	30°
M (ángulo de descarga)	40°

Cuadro 9.1: Medidas de la minicargadora simulada. Véase la Figura 9.3.

Cuchara o pala

La cuchara es el implemento utilizado para la carga de material granel, que se sitúa al final del brazo. Este implemento tiene un peso de 300kg y unas dimensiones de $0,86 \times 2,3 \times 0,95$ m.

Neumáticos

Los neumáticos no se consideran como sólidos rígidos en el sistema multi-cuerpo que representa la máquina. Para su simulación se han considerado como discos sin masa, que se emplean para obtener la interacción entre el chasis y el suelo. Su masa, y su aportación a la matriz de inercia del chasis se calculan a partir del teorema de Steiner, descartando la aceleración de Coriolis.

En el Apartado 9.4.2 se detalla el modelo empleado para la interacción entre los neumáticos y el suelo.

9.3.2. Motor, transmisión y sistema hidráulico

Se ha simulado un motor diesel de 2.2l que genera una potencia de 60cv a 2800rpm. La metodología de modelado empleada ha sido la utilización de una curva de potencia típica para los motores diesel (Wong, 2001). La entrada del modelo de motor es el valor correspondiente al pedal de aceleración, y la salida se recibe como un par de fuerza en N/m que se introduce en el modelo de tracción.

Transmisión

La transmisión de la máquina es una transmisión hidrostática servocontrolada de cero a velocidad máxima (11km/h) hacia adelante y hacia atrás a máxima potencia. Los dos lados de la máquina tienen sistemas de transmisión independientes, que permiten modificar la dirección del vehículo.

Sistema hidráulico

El sistema hidráulico de la máquina consta de dos bombas, accionadas por el motor diesel. Una bomba controla la transmisión, mientras que la otra se encarga del control del brazo y la cuchara de la máquina.

Éste último subsistema consta de un pistón hidráulico para la elevación del brazo y de otro para la inclinación de la cuchara. En (Buzdugan et al., 1999) puede encontrarse una descripción del modelo dinámico empleado para la simulación de las bombas hidráulicas y los pistones.

9.4. Modelo de terreno

En el escenario de simulación se ha incluido un sistema granular con las características de la arena seca con una profundidad de 40cm y una extensión de

8 × 8 metros. El vehículo puede desplazarse sobre el terreno, empujarlo horizontalmente, presionarlo o cargarlo utilizando la cuchara.

9.4.1. Interacción entre la cuchara y el suelo

Para la interacción de la cuchara con el terreno, y para poder cargar el material por medio de la cuchara se ha incluido la geometría del modelo de cuchara en el sistema de cálculo de colisiones. De esta manera, la interacción entre la cuchara y el terreno tiene lugar por medio de los modelos presentados en este trabajo a lo largo de los Capítulos 5 y 6.

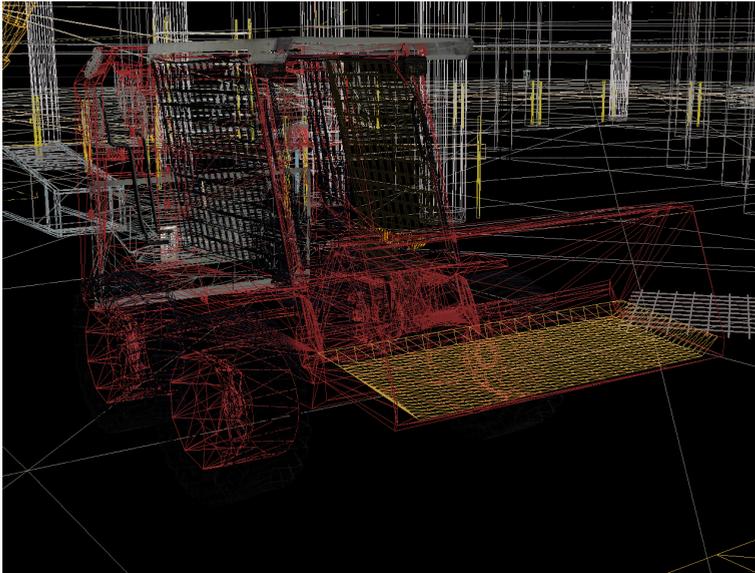


Figura 9.4: La pala empieza a cargarse con el material traspasado desde el sistema del suelo.

Para poder cargar el material se ha adherido un Autómata Celular sobre la superficie de la pala. La base de este autómata sigue la geometría del interior de la pala, mientras que la detección de colisiones impide que el material crezca más allá del techo de la misma (Figura 9.5).

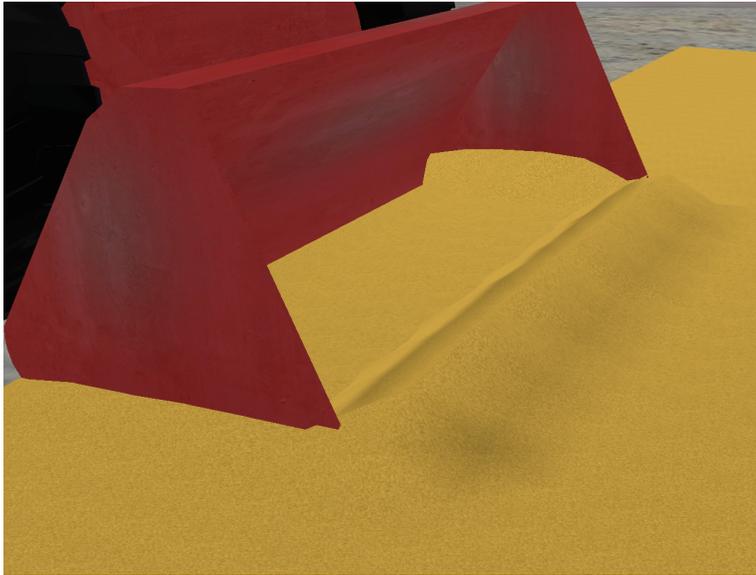


(a)

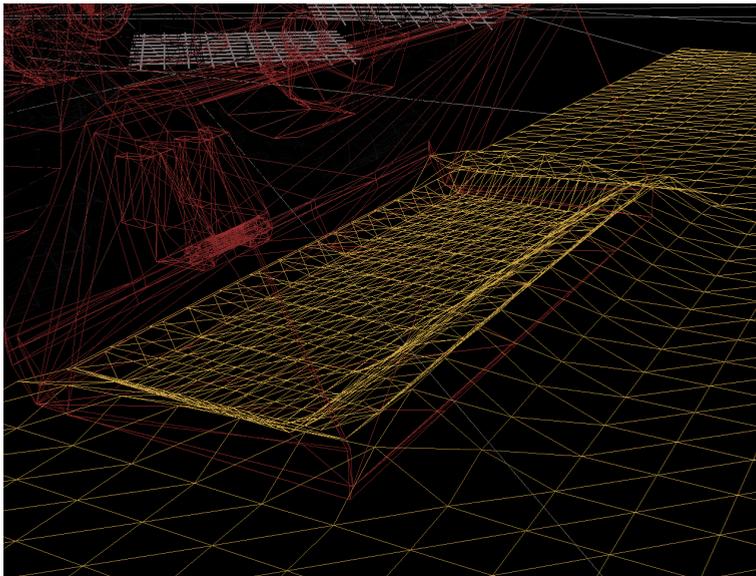


(b)

Figura 9.5: Adhesión del Autómata Celular sobre la pala de la minicargadora simulada.



(a) Representación con dibujo sólido



(b) Representación con malla de alambre

Figura 9.6: Los dos Autómatas celulares empiezan a interactuar.

9.4.2. Modelo de interacción entre el neumático y el suelo

La interacción entre el neumático y el suelo es un problema con una alta complejidad debido a la cantidad de factores que influyen en su comportamiento. No obstante, existen modelos relativamente simples que permiten llevar a cabo simulaciones suficientemente precisas.



Figura 9.7: La interacción entre el suelo y la rueda puede simularse por medio de los conocidos modelos de Pacejka (Pacejka, 1996) sobre terreno pavimentado, y un modelo basado en la teoría de equilibrio límite sobre terreno blando.

El modelo más establecido para la dinámica de neumáticos sobre suelo rígido es el de Pacejka (Pacejka, 1996; Pacejka, 1996) que propone el modelado de la interacción entre el suelo y el neumático por medio de una *fórmula mágica*. Puede encontrarse un tratado más completo sobre el tema en su libro (Pacejka, 2006). En el modelo dinámico desarrollado para el simulador se ha utilizado este modelo para la interacción con las áreas del escenario con suelo firme.

Sin embargo, en el caso que nos ocupa, el principal problema es la interacción entre el neumático y terreno blando. Este problema es de gran interés para la industria de la construcción de vehículos todo terreno, como tractores

(Kawase et al., 2006; Yahya et al., 2007), maquinaria pesada, vehículos militares (Dabrowski et al., 2006), etc. dando lugar a numerosa bibliografía durante las últimas décadas (Bekker, 1960; Brixius, 1987; Muro and Hoshika, 1995; Rubinshtein and Hitron, 2004; Shibly et al., 2005; Fukami et al., 2006; Khot et al., 2007; Coutermarsh, 2007). El libro de Wong ofrece un resumen de los modelos más utilizados (Wong, 2001).

Estos modelos se basan fundamentalmente en la combinación del modelo de presión-hundimiento de Bekker (Bekker, 1969) y el cálculo de la fricción entre el terreno y el neumático.

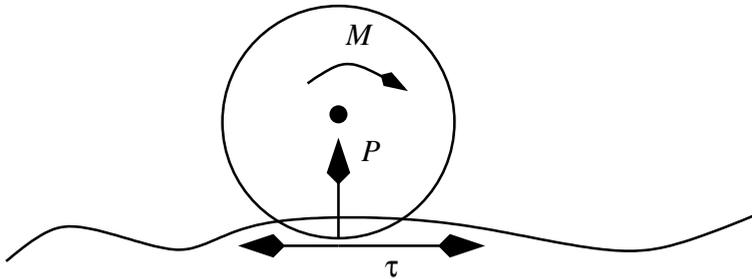
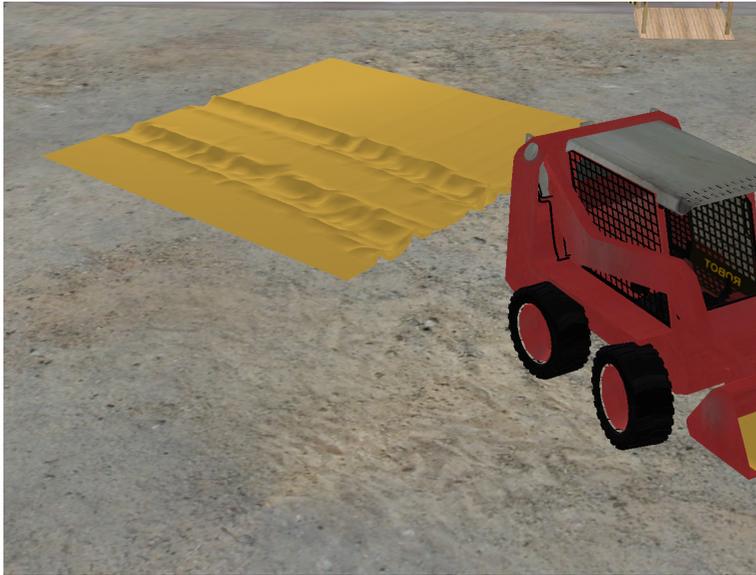
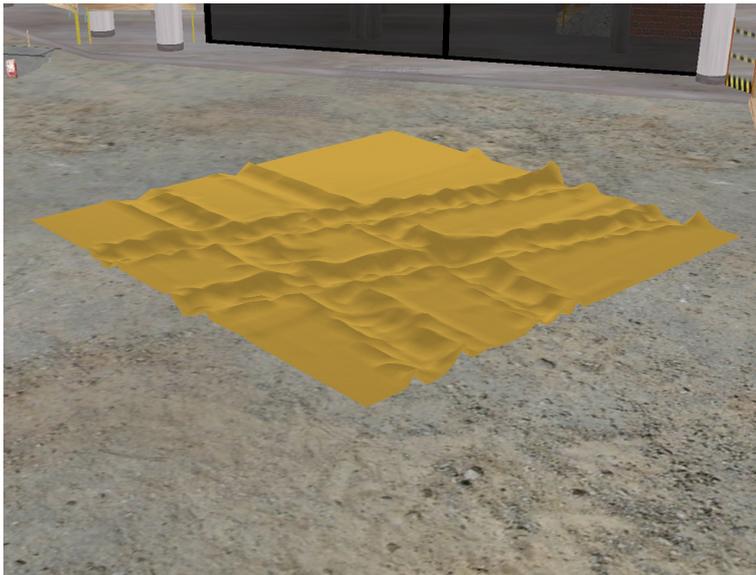


Figura 9.8: Fuerzas que intervienen en el modelo de tracción sobre terreno blando.

Para el cálculo de la fuerza de tracción que se obtiene cuando se aplica un par a un neumático de radio R , se calcula, en primer lugar, la presión normal que actúa en la superficie de contacto p . A partir de esta presión se obtiene la tensión normal que aparece en el interfaz neumático-terreno, σ_n , y la fuerza de corte o cizalladura (la máxima tensión tangencial que es capaz de soportar el material), τ , a partir del ángulo de fricción del contacto suelo-neumático δ . Véase el Apartado 3.3.



(a)



(b)

Figura 9.9: Marcas de los neumáticos dejadas por la minicargadora sobre el sistema granular.

Una vez obtenida esta información, se calcula la fuerza causada por el par de tracción aplicado sobre el neumático en el parche de contacto entre el neumático y el suelo, F_t . Si la fuerza de tracción es menor que la fuerza de corte τ , entonces la fuerza F_t se aplica sobre el neumático y el suelo, de acuerdo con los modelos correspondientes. Si por el contrario la fuerza de tracción F_t es mayor que la fuerza de corte, se aplica esta última, dando lugar al deslizamiento del suelo bajo el neumático de acuerdo con el modelo descrito en el Capítulo 5.

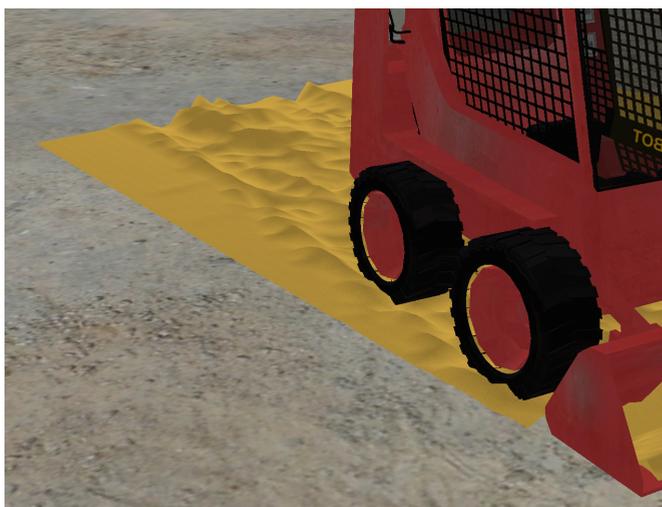


Figura 9.10: Detalle del suelo después de interactuar las ruedas y la pala.

9.5. Representación gráfica del escenario

El escenario simulado reproduce el entorno de una obra de construcción de un edificio. Este escenario consiste en un conjunto de modelos geométricos que representan los diferentes elementos que aparecen en la escena además del modelo geométrico de la minicargadora.

El terreno interactivo se ha modelado por medio de un mapa de alturas, con una textura que representa arena. Para la animación de las avalanchas se ha utilizado el modelo de deslizamiento de texturas propuesto en el Apartado 8.2.3

de este trabajo, implementado por medio del lenguaje GLSL y ejecutado en la GPU.

La aplicación informática que gestiona el grafo de escena se ha desarrollado utilizando la biblioteca OpenSceneGraph. La Figura 9.11 muestra una perspectiva de la zona donde se han realizado las pruebas de rendimiento para la aplicación entera.

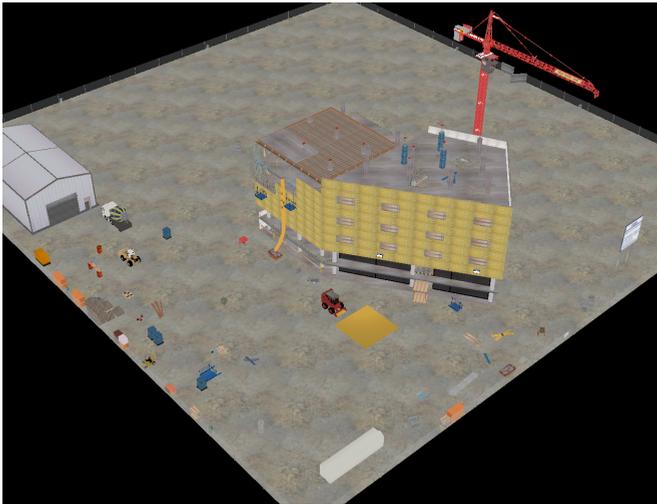


Figura 9.11: Vista aérea de la zona de simulación donde se han hecho las pruebas.

9.6. Integración de la aplicación y resultados obtenidos

La integración de los modelos dinámicos se ha realizado por medio de la aplicación que implementa el entorno gráfico. Los modelos dinámicos del sistema multicuerpo y del terreno se ejecutan en un hilo de ejecución independiente a una tasa de actualización de 500 pasos por segundo, con el fin de garantizar la estabilidad de los métodos numéricos.

Cada vez que el sistema de representación gráfica finaliza el proceso de pintado de la escena, realiza una llamada al módulo que gestiona la dinámica de la escena y obtiene el estado del sistema máquina-terreno tras la última actualización completa del modelo. Utilizando esta información se genera una nueva representación de la escena.

La aplicación se ha ejecutado sobre un equipo Intel PIV-HT, 3.4GHz con Windows XP y con una tarjeta gráfica con procesador nVidia 8600GT y 512Mb de memoria. La tasa de refresco de la aplicación gráfica se ha fijado a 25 imágenes por segundo y se ha comprobado la capacidad de la aplicación de mantener esta tasa de refresco.

Para ello, se han utilizado diferentes densidades de malla, y se han realizado operaciones habituales de carga y transporte de material. En el Cuadro 9.2 se muestran los datos correspondientes al número de caras y vértices del entorno de simulación y de la excavadora utilizados para la realización de las pruebas. El número de vértices y triángulos correspondientes al sistema granular dependerá de la densidad de la malla elegida.

	Entorno	Excavadora	Sistema granular
Vértices	149074	17337	$8*N*8*N$
Caras	249599	28899	$(8*N-2)*(N-1)$

Cuadro 9.2: Número de vértices y caras del entorno de simulación, del modelo geométrico de la minicargadora y de la malla del Autómata Celular utilizados en el simulador.

En el Cuadro 9.3 pueden observarse los resultados obtenidos para distintos valores de densidad de la malla (N); para la vista aérea mostrada en la Figura 9.11, para la vista normal de trabajo (véase la Figura 9.12(a)) y para el momento de mínimo rendimiento durante la interacción con el sistema granular (véase la Figura 9.12(b))

Se ha observado que hasta una densidad de 9 celdas por metro el sistema era capaz de mantener el refresco a 25Hz. A partir de esta densidad, las tareas que involucraban el contacto de la pala o las ruedas sobre el sistema provocaban una

N	celda/m	Aérea	Reposo	Trabajo
30	4	38.8	60	40
40	5	37.6	60	36
50	6.25	36.0	54	31.6
60	8	34.4	48	28
70	9	33.4	47.6	24.6
80	10	32.4	44.8	20.2

Cuadro 9.3: Resultados de las pruebas numéricas realizadas con el simulador de minicargadora.

caída de la tasa de actualización. Aún así, los resultados muestran que para una densidad de malla de 0.1m por celda, la tasa de refresco se mantiene alrededor de los 25Hz y la sensación visual es muy buena.



(a) Vista normal de trabajo



(b) Interacción herramienta-sistema

Figura 9.12: En la valoración de los costes de rendimiento se ha tenido en cuenta el número de vértices involucrados en el proceso de representación gráfica, así como la carga debida a la actualización del sistema granular.

9.7. Conclusiones

Teniendo en cuenta la motivación del presente trabajo de investigación, es natural la incorporación de los resultados a los diferentes sistemas de simulación que se han desarrollado en los últimos años en el Instituto de Robótica de la Universidad de Valencia. En este capítulo hemos mostrado de forma detallada esta integración, demostrando que los resultados obtenidos suponen una contribución efectiva en el campo de la simulación para entrenamiento.

Para ello se ha desarrollado el modelo dinámico de una minicargadora, considerando sus principales subsistemas. Entre los modelos implementados se ha desarrollado un modelo de interacción entre los neumáticos y el terreno basado en las técnicas descritas en el Capítulo 5. Este modelo dinámico se ha integrado en una aplicación que incluye el sistema de sensorización, para permitir la conducción del vehículo, y un entorno virtual que recrea una obra de construcción de un edificio.

La aplicación se ha utilizado además para realizar pruebas de rendimiento destinadas a conocer la influencia de la introducción del modelo dinámico en un entorno virtual complejo, con un elevado número de polígonos y con las exigencias de los simuladores para formación.

Los resultados que se han obtenido han sido muy satisfactorios, tanto desde la perspectiva del aspecto visual y del aumento de calidad conseguidos gracias a los nuevos modelos, como en lo que respecta a la tasa de refresco de la representación visual en un rango amplio de número de celdas por metro.

*Any intelligent fool can make things bigger, more complex, and more violent.
It takes a touch of genius - and a lot of courage - to move in the opposite direction.*

A. Einstein

CAPÍTULO 10

Conclusiones y trabajo futuro

A lo largo de la memoria se ha presentado un análisis de las carencias en la simulación interactiva de terreno y sistemas granulares en tiempo real, se ha propuesto un cambio en la metodología de modelado respecto a los trabajos anteriores y se han desarrollado y validado un conjunto de nuevos modelos, junto con las técnicas necesarias para integrarlos en un sistema de simulación para entrenamiento. Finalmente, se ha presentado un ejemplo de desarrollo de una aplicación completa, concluyendo así la exposición de los desarrollos que constituyen el presente trabajo de investigación.

A continuación se realiza un resumen de los logros alcanzados y de las principales contribuciones realizadas. En primer lugar se analiza el grado de cumplimiento de los objetivos planteados y la manera en que han sido alcanzados. A continuación se discuten las principales aportaciones científicas que ofrece el presente trabajo en el campo de la simulación de sistemas granulares, tanto en el ámbito de la simulación para formación como en el de los entornos virtuales en tiempo real, indicando la difusión y aplicación que se ha dado a estas contribuciones. Por último, se indican las principales líneas de trabajo futuro y las nuevas líneas de investigación que se abren como resultado de este trabajo.

10.1. Consecución de los objetivos planteados

A lo largo de este trabajo se han desarrollado un conjunto de modelos dinámicos para la simulación de sistemas granulares. Para ello, se ha partido de un análisis de los principales modelos existentes en el ámbito de la simulación interactiva en tiempo real de terreno y sistemas granulares y se han identificado sus deficiencias.

Con el fin de conseguir modelos realistas y eficientes, se han explotado las propiedades de los sistemas granulares. Se ha realizado una revisión exhaustiva de las metodologías de modelado utilizadas para el análisis teórico de los sistemas granulares y las pilas de arena, buscando modelos que sean adecuados para conseguir los objetivos del trabajo de investigación. Finalmente, se han escogido modelos de evolución de la superficie del sistema para la descripción de la dinámica y la formalización de los Autómatas Celulares para la implementación.

Para alcanzar los objetivos en cuanto a interacción con el sistema se han empleado modelos de geomecánica, disciplina que estudia el comportamiento del suelo y la interacción de éste con herramientas, vehículos y otras estructuras, y se han discretizado para aplicarlos en el modelo de evolución, sin un coste adicional apreciable.

La representación del sistema y la integración del mismo en simulaciones complejas se ha llevado a cabo gracias a la utilización de las primitivas geométricas adecuadas. Se ha mejorado la representación gráfica por medio de la adaptación de algoritmos de representación de flujo a las exigencias de la simulación en tiempo real mediante la programación en la tarjeta gráfica de un modelo de desplazamiento de texturas.

10.1.1. Modelo de evolución

Los modelos desarrollados a lo largo de los Capítulos 4 y 5 se han apoyado en modelos teóricos, que han sido previamente discutidos en el Capítulo 3. Se ha llevado a cabo una discretización del modelo BCRE (Bouchaud et al., 1994)

utilizando la metodología propia de los Autómatas Celulares.

Gracias a esta combinación de un modelo teórico continuo y el esquema computacional discreto de los Autómatas Celulares, se ha conseguido un modelo cuya dinámica es similar a la de los sistemas reales, tanto en la evolución de la superficie, que es el aspecto más relevante desde el punto de vista visual, como en la distribución de frecuencias de las avalanchas, lo que permite además implementaciones muy eficientes del modelo. La validez del modelo ha sido discutida en el propio capítulo en que ha sido presentado, mostrando la consistencia entre el modelo discreto y el modelo BCRE, basado en ecuaciones en derivadas parciales.

En el Capítulo 7 se ha mostrado además de forma clara la eficiencia del modelo propuesto, conseguida gracias al análisis de las propiedades de los sistemas simulados. La metodología de los Autómatas Celulares permite la reproducción de comportamientos complejos en base a un conjunto reducido de reglas muy simples, que permiten una implementación muy eficiente.

Además, gracias a las propiedades del espectro de frecuencias de las avalanchas, y utilizando una adecuada implementación de los algoritmos de evolución, se consigue la reducción del coste de actualización del sistema desde cuadrático a lineal respecto del número de celdas del lado de la malla.

10.1.2. Modelos de interacción

La interactividad de los modelos ha sido desarrollada convenientemente sobre el modelo de evolución del sistema. La metodología seguida ha sido similar a la empleada para la obtención del modelo de evolución: se ha partido de modelos teóricos, que tratan de describir de forma fiel el comportamiento de los sistemas granulares ante las interacciones; estos modelos se han discretizado para identificar los elementos involucrados en el modelo de Autómata Celular propuesto.

Para conseguir esta integración de los modelos de contacto en el modelo de evolución anterior, se ha desarrollado un procedimiento que permite estructurar la información de los contactos procedente del sistema de detección de colisio-

nes. Aunque a lo largo del trabajo se propone también una implementación para la detección de colisiones, este procedimiento es lo suficientemente versátil como para funcionar con cualquier otro método de detección de colisiones.

Se ha demostrado que el procedimiento empleado, junto con los algoritmos y modelos propuestos para la deformación son más eficientes y sencillos que los utilizados hasta ahora por otros autores para conseguir efectos similares (Sumner et al., 1999; Onoue and Nishita, 2005; Zeng et al., 2007).

Los modelos de interacción que se proponen cubren tanto la deformación del terreno ante una colisión como la obtención de las fuerzas de contacto que se producen, permitiendo así una interactividad completa del sistema granular con cualquier elemento de su entorno. Además, partiendo de modelos de la teoría de Mohr-Coulomb se ha propuesto un modelo de desplazamiento horizontal del material que permite la simulación de formas complejas de manipulación del terreno.

El Capítulo 6 muestra además cómo pueden emplearse los modelos para la simulación de situaciones de mayor complejidad, considerando la acumulación de material sobre objetos y permitiendo el intercambio de material entre varios sistemas granulares. Se presta especial atención a la situación que aparece cuando se manipula el material con una pala o cuchara de excavadora.

A lo largo del Capítulo 7 se han llevado a cabo una serie de experimentos numéricos que han permitido validar el comportamiento de los modelos de interacción. Esto se ha conseguido reproduciendo experimentos, recogidos de la bibliografía sobre sistemas granulares, por medio de los modelos desarrollados. Los experimentos realizados muestran la concordancia entre el comportamiento del modelo y el sistema real, necesaria para la utilización de los modelos en aplicaciones que requieren realismo.

En el Capítulo 7 se ha mostrado también que el coste computacional de los modelos de interacción no supone un aumento de la carga respecto a la utilización de los modelos de evolución. Esta eficiencia permite de nuevo la utilización de la metodología propuesta en aplicaciones complejas, como se ha mostrado en el Capítulo 9 por medio del desarrollo de una aplicación completa de simulación.

10.1.3. Representación gráfica

Se ha mostrado también que la representación geométrica que se propone para los modelos dinámicos resulta muy adecuada a la hora de visualizar un montón de arena en una aplicación gráfica en tiempo real, ya que el modelo geométrico empleado, por medio de una malla rectangular, dispone de primitivas nativas en OpenGL.

Además, se ha mejorado la representación gráfica del sistema por medio de la introducción de técnicas de representación de flujo por medio de técnicas de multitextura. Para ello se han revisado las técnicas existentes que se emplean para la representación de fluidos y se han modificado para permitir su utilización en entornos de tiempo real. La implementación se ha realizado con el lenguaje de *Shading* de OpenGL basado en OpenGL 2.1.

Estas técnicas, junto con la utilización de efectos basados en sistemas de partículas para la visualización de las nubes de polvo que se producen durante las avalanchas y la descarga de material, proporcionan simulaciones en tiempo real con una alta calidad visual y realismo.

10.1.4. Conclusión

De todo lo anterior, se desprende que el conjunto de objetivos planteados en el Apartado 1.4 ha sido ampliamente cubierto a lo largo de la realización del trabajo de investigación. Se han desarrollado los modelos propuestos, incluyendo los diferentes modos de interacción buscados.

Además, se ha propuesto una mejora en la metodología de modelado respecto a los trabajos anteriores, de forma que la validación emerge de forma natural a partir del desarrollo del modelo, sin perder por ello prestaciones en las simulaciones resultantes.

Todo esto, ha sido corroborado por medio de un exhaustivo análisis y de un completo conjunto de pruebas numéricas para demostrar el buen rendimiento y la validez de los modelos. A esto se añade el desarrollo de una aplicación completa

para un simulador de pala cargadora, que demuestra la facilidad de la integración de los modelos con los del resto de sistemas y su adecuación a la simulación interactiva en tiempo real. También se han incorporado en la aplicación mejoras en la visualización del material.

10.2. Aportaciones científicas del presente trabajo

Durante la revisión de diferentes trabajos en simulación interactiva que involucran sistemas granulares, se ha venido constatando en los últimos años una serie de carencias en cuanto a los modelos dinámicos de este tipo de sistemas. En la primera fase del desarrollo del trabajo de investigación, correspondiente al Capítulo 2 estas carencias se han concretado e identificado convenientemente.

A continuación resumimos las carencias más relevantes que se detectaron, y las condiciones de partida que las provocan, indicando la manera en la que el presente trabajo de investigación contribuye a su mejora o solución.

10.2.1. Establecimiento de una nueva metodología de modelado

En primer lugar, la carencia fundamental y que, de alguna manera, resume el conjunto de problemas detectados, es la ausencia de modelos de evolución e interacción con el terreno que sean realistas y eficientes a la vez. Esto impide la obtención de simulaciones interactivas realistas en entornos de realidad virtual.

De acuerdo con la hipótesis que se defiende en este trabajo, el principal motivo para este problema es la suposición generalizada de que los modelos físicamente correctos son siempre costosos computacionalmente y además no permiten una simulación flexible. Esto ha dado lugar a la utilización de diferentes procedimientos más o menos heurísticos, en los que se aceptaba un comportamiento *visualmente creíble* de las deformaciones.

Para cambiar esta tendencia es por tanto necesario romper la suposición de partida de que los modelos físicos de sistemas granulares no son útiles en el desarrollo de modelos adecuados para simulación interactiva en tiempo real.

Y es por este motivo que el presente trabajo no sólo cubre el problema de la carencia de modelos dinámicos, sino que resuelve el problema de fondo que motivaba esta carencia. Y lo hace por medio de la revisión de la metodología de modelado, mostrando que la utilización de modelos teóricos, que da excelentes resultados en otros problemas, como la animación de objetos deformables o de fluidos, es perfectamente válida en este caso.

10.2.2. Mejoras en el modelo de evolución

Como resultado de la utilización de modelos físicos en el modelado, la dinámica del sistema durante la simulación resulta más realista que en los modelos anteriores. Como ya indicábamos en la crítica a las técnicas existentes en el Apartado 2.4, pequeños detalles, como la utilización de los ocho vecinos en los modelos de *erosión* propuestos por (Musgrave et al., 1989), y empleados posteriormente en la mayoría de modelos, dan lugar a comportamientos alejados de la realidad. Este tipo de inconvenientes se han superado gracias a la utilización de los nuevos modelos basados en física.

Además estos modelos heurísticos contienen un conjunto de parámetros que se ajustan de acuerdo con la experiencia del programador para conseguir los resultados esperados en cada caso particular. En los modelos propuestos aquí, los parámetros tienen un significado físico bien definido y están identificados con los parámetros que se utilizan para describir las propiedades de los sistemas granulares reales.

10.2.3. Modelos de interacción

La deformación básica del terreno es un problema que, atendiendo exclusivamente a las necesidades de la animación, puede considerarse resuelto con

el trabajo de Sumner (Sumner et al., 1999). De hecho, este modelo es la base de casi todos los trabajos posteriores, que mejoran o complementan diferentes aspectos de la interacción. Sin embargo, los modelos propuestos aquí aportan las siguientes mejoras:

Animación del suelo

Recordemos que en el trabajo de Sumner, previamente al desplazamiento del material, se elaboraba un mapa de colisiones similar al que se construye en este trabajo. Sin embargo, en el caso del modelo de animación de Sumner este mapa requiere el recorrido de todas las celdas, para la obtención de su distancia a la frontera, dando lugar a un algoritmo de coste cuadrático.

Por el contrario, en el caso del modelo presentado aquí, únicamente se identifican las celdas de la frontera de la colisión, y además se hace de forma adaptativa a partir de la información de pasos anteriores. Por este motivo, el proceso de los contactos es mucho más eficiente en el nuevo modelo.

Por otra parte, en el modelo de Sumner, el desplazamiento del material se realiza de forma instantánea, y sin atender a ningún criterio más allá de la distancia a la frontera. En el nuevo modelo de presión vertical propuesto aquí, el desplazamiento de material tiene lugar de forma natural, sin necesidad de la aplicación de ningún procedimiento en el instante del contacto, y éste ocurre durante el intervalo de tiempo que describe las propiedades del sistema.

Desplazamiento horizontal del terreno

Entre los diferentes trabajos encontrados sobre deformación del suelo, el desplazamiento horizontal del terreno ha sido tratado en pocas ocasiones y de forma muy superficial.

El modelo de desplazamiento de (Zeng et al., 2007) resulta insuficiente en muchas situaciones, y además no atiende a criterios físicos. Por otra parte el modelo de Li y Moshel (Li and Moshell, 1993) es realista pero, como ya hemos

indicado, no es suficientemente flexible para su utilización en entornos complejos de realidad virtual.

Por tanto, el modelo de desplazamiento horizontal de terreno presentado en este trabajo, basado en física e integrada en un modelo completo de sistema granulares, es el primer modelo que ofrece una solución completa de este problema para entornos de realidad virtual.

Fuerzas de reacción del terreno

De la misma manera, no existen modelos anteriores que permitan la obtención de las fuerzas de reacción del sistema sobre el sólido que se encuentra en contacto con él. Li y Moshell (Li and Moshell, 1993) no consideran contactos verticales, y únicamente Zeng (Zeng et al., 2007) plantea un modelo basado en la conservación de momento. Sin embargo, este modelo presenta bastantes dudas respecto a su validez, en primer lugar, por que no se indica de forma clara la discretización del momento, y en segundo lugar, porque, al no responder la evolución del terreno a un modelo validado no hay garantías de que las fuerzas obtenidas sean correctas.

De esta manera, en este trabajo se presenta también el primer modelo que permite el cálculo de las fuerzas de una forma realista y rigurosa. En combinación con el modelo de desplazamiento horizontal del terreno, podemos decir que se presenta el primer modelo completamente interactivo de deformación de terreno.

10.2.4. Acumulación de material sobre objetos

Otro aspecto que no ha sido introducido en los modelos de deformación y animación de terreno hasta fechas muy recientes es la acumulación del material sobre los objetos de la escena, y el intercambio del material entre varios sistemas granulares; Onoue y Nishita (Onoue and Nishita, 2005) proponen un modelo basado en la extensión vertical de las celdas del mapa de alturas, atravesando los objetos de la escena.

Este modelo ofrece funcionalidades similares al nuevo enfoque propuesto en el presente trabajo de investigación. De hecho, en general podría sustituirse el modelo propuesto aquí por el de Onoue y Nishita, en cuanto a la representación de los objetos para la acumulación del material.

En este trabajo, sin embargo, se ha analizado de forma más profunda la interacción entre varios sistemas, y se han desarrollado completamente tanto el proceso de colisión entre dos sistemas granulares como la carga de material por medio de una herramienta.

10.2.5. Aplicación y difusión de los resultados

El presente trabajo de investigación surge como continuación del trabajo *Nuevos modelos de sistemas granulares basados en Autómatas Celulares para simulación en tiempo real* (Pla-Castells, 2003), que fue motivado por el desarrollo de un simulador de grúa móvil portuaria para la carga y descarga de material granel.

Además de en el simulador de grúa móvil, los modelos aquí presentados se han utilizado en el simulador de manipuladora telescópica desarrollado en el marco del proyecto *PREVEN - SISTEMA DE FORMACIÓN EN PREVENCIÓN DE RIESGOS LABORALES EN LA CONSTRUCCIÓN MEDIANTE SIMULACIÓN EN REALIDAD VIRTUAL* (FIT-340000-2006-290), obtenido en convocatoria competitiva del Ministerio de Industria y Energía y ejecutado a lo largo de los años 2006 y 2007.

Por otra parte, han sido empleados también en el proyecto de investigación *PROSIGRAT - Prototipaje virtual de sistemas complejos mediante entornos gráficos 3D reactivos en tiempo real*, en el que se realizaron simulaciones interactivas que involucraban interfaces hápticos.

También han motivado la concesión de un proyecto de investigación anual dentro de la Convocatoria de Acciones Especiales de la Universitat de Valencia del año 2006, con título *Interacción con terrenos virtuales por medio de interfaces hápticos H-TERRAIN*.

Publicaciones

A lo largo de la realización del trabajo de investigación, se han publicado en diferentes foros científicos internacionales los resultados intermedios que se han obtenido. A continuación se detalla una lista con las publicaciones motivadas por este trabajo.

(Pla-Castells et al., 2008) Pla-Castells, M.; García-Fernandez, I.; Martínez-Dura R. J. *Physically-Based Interactive Sand Simulation*. Eurographics 2008 - Short Papers. Eurographics Association, 2008, 21-24

(García-Fernández et al., 2007) Garcia-Fernández, I.; Pla-Castells, M.; Martínez-Durá, R. J. *A Discrete Model for the Dynamics of Sandpile Surfaces*. Proceedings of the Industrial Simulation Conference 2007, 64-68

(Pla-Castells et al., 2006) Pla-Castells, M.; Garcia-Fernandez, I.; Martínez-Durá, R. J. *Interactive Terrain Simulation and Force Distribution Models in Sand Piles*. Lecture Notes on Computer Science, 2006, 4173, 392-401

(Pla-Castells et al., 2004b) Pla-Castells, M.; García, I.; Martínez, R. *Granular system models for real time simulation*. Proceedings of the Industrial Simulation Conference 2004, 88-93

(Pla-Castells et al., 2004a) Pla-Castells, M.; García, I.; Martínez, R. *Approximation of Continuous Media Models for Granular Systems Using Cellular Automata*. Lecture Notes in Computer Science, 2004, 230-237

(Pla-Castells et al., 2003) Pla-Castells, M.; García, I.; Martínez, R. *Visual Representation Of Enhanced Sand Pile Models*. Proceedings of the Industrial Simulation Conference 2003, 141-146

10.3. Trabajo futuro y líneas de investigación abiertas

A continuación se indican las principales líneas de investigación abiertas y posibles mejoras a partir de los resultados obtenidos en el presente trabajo de investigación.

10.3.1. Modelado de la evolución del terreno

Desde el punto de vista del modelado del terreno, pueden considerarse dos líneas de investigación, destinadas a la mejora del modelo principal.

Utilización de dos variables de estado

Una de las principales suposiciones del modelo dinámico presentado en el Capítulo 4 es el hecho de que el espesor de la capa deslizante es constante. Esta suposición es la que permite reducir el número de variables del modelo BCRE de dos a una.

Si bien esta suposición proporciona un modelo que ofrece buenos resultados, no se debe descartar la posibilidad de que un Autómata Celular con dos variables, permita una descripción más ajustada a la realidad, o la reproducción de comportamientos no observables con modelos de una variable. Por este motivo, debe estudiarse en profundidad la consideración de una segunda variable que represente el espesor de la capa deslizante en el sistema y analizar sus aportaciones a la dinámica del sistema.

Discretización de otros modelos

Como se desprende del análisis realizado en el Capítulo 3, el modelo BCRE no es el único modelo continuo que permite simular la evolución de la superficie de un sistema granular. Otros autores han propuesto variaciones a este modelo u otros modelos alternativos que, una vez discretizados, podrán aportar nuevas propiedades. El libro de Duran (Duran, 1999) puede ser un buen punto de partida para la realización de esta tarea.

10.3.2. Modelado de las interacciones

Los modelos de interacción permiten una serie de mejoras, destinadas principalmente a incrementar los aspectos considerados, y la precisión de las simulaciones obtenidas. Estas mejoras se detallan a continuación:

Consideración de estratos y descripción vertical del sistema

Probablemente, la principal limitación del modelo de evolución propuesto en este trabajo es el hecho de que la descripción del sistema se limita a la altura de la superficie respecto a la base. Este enfoque elimina cualquier información relativa a las propiedades del terreno a diferentes profundidades desde la superficie. De esta manera se está considerando un terreno homogéneo, que no permite, por ejemplo, la reproducción de la reacción del terreno ante una herramienta que va atravesando diferentes estratos.

La utilización de una descripción de cada celda que considere diferentes estratos, de manera similar a los modelos propuestos por Benes y Forsbach (Benes and Forsbach, 2001), puede contribuir a superar esta limitación.

Detección de colisiones

Según se indicó en el Apartado 5.2, el problema de la detección de colisiones se ha considerado como un problema tangencial en el desarrollo del trabajo. El desarrollo de algoritmos específicos para este problema, o la adaptación de las técnicas existentes (Ericson, 2005) no se encuentran entre los objetivos de este trabajo. Queda pendiente, por tanto, la búsqueda de mejoras en la detección de colisiones, destinadas a reducir el coste computacional de esta tarea.

Generalización de la geometría de las colisiones

Con el objeto de facilitar las descripciones del proceso de detección de colisiones, y en parte también para poder proporcionar una implementación más eficiente de los interfaces verticales, la descripción de la región de contacto sobre una celda se ha llevado a cabo por medio de un paralelepípedo alineado con los ejes. Sin embargo, las técnicas de detección de colisiones permiten obtener una descripción mucho más precisa de las intersecciones entre un objeto y la malla que representa el terreno (Ericson, 2005).

Una de las tareas que debe llevarse a cabo es la generalización de las geometrías empleadas para describir estos contactos, y del cálculo de la zona ocupada de cada celda que está colisionando.

10.3.3. Implementación y optimización

Los principales objetivos de este trabajo se centran en la metodología de modelado y en la obtención de los modelos matemáticos. Por otra parte, se ha demostrado que los modelos desarrollados permiten alcanzar los objetivos de eficiencia exigidos por la simulación para entrenamiento sin la implantación de estrategias de optimización más allá de la implementación eficiente propuesta en el Apartado 7.1.2.

Por este motivo no se han abordado tareas destinadas a la optimización de los algoritmos que resultan de los modelos propuestos. Sin embargo, los resultados obtenidos en este trabajo en cuanto a rendimiento pueden mejorarse por medio de la aplicación de varias técnicas.

Consumo eficiente de memoria

De la misma manera que únicamente se actualizan aquellas celdas que lo requieren para reducir la carga de CPU, para el ahorro de memoria es posible utilizar una implementación que únicamente emplee la memoria necesaria para

el máximo de celdas que puedan estar activas simultáneamente.

Para ello se debe reservar un vector de celdas, cuyo tamaño no depende de las dimensiones del Autómata, sino del número de celdas que se espera tener activas simultáneamente de acuerdo con las propiedades de la simulación. Cada vez que una celda requiera ser activada se le asignará una de las celdas que no se encuentre en uso. Esta celda se utilizará mientras permanezca activa y una vez desactivada se liberará para poder ser empleada de nuevo. La implementación de esta mejora elimina cualquier limitación respecto a las dimensiones que puede alcanzar la malla.

Mallas con tamaño variable

El conjunto de modelos dinámicos se ha presentado sobre una malla regular con celdas cuadradas. Esta malla resulta sencilla de implementar, y en ella los modelos se formulan de forma natural.

Sin embargo, la utilización de una malla regular no explota las características del sistema para reducir el uso de CPU o memoria, o para detectar la necesidad de aumentar la resolución del sistema para obtener mejores resultados.

Para ello existen multitud de trabajos destinados a refinar una malla para obtener una serie de objetivos (eficiencia, consumo de memoria, mejora de la calidad, etc.) utilizando las propiedades geométricas locales de la malla u otras medidas de calidad dependientes de cada problema. Además de las técnicas de refinamiento de la malla, sería necesario reformular los modelos para poder aplicarlos sobre una malla irregular o desestructurada.

En el caso de la simulación de sistemas granulares la aplicación de este enfoque podría mostrarse útil en situaciones como el aumento de resolución en las zonas de colisión, el refinamiento de la malla en función de la geometría de la superficie del sistema o la implantación de niveles de detalle, tanto visuales como físicos.

Ejecución de los algoritmos usando el procesador gráfico

El avance de los procesadores gráficos y la existencia de herramientas que permiten su programación abre la puerta a la utilización de la GPU para tareas diferentes del proceso de representación del escenario.

Cada vez con mayor frecuencia las GPUs se emplean para procesos de cálculo numérico, especialmente cuando se trata de problemas de álgebra lineal computacional. Utilizando algunas de las técnicas que se han propuesto en los últimos años, sin duda será posible enviar la información necesaria a la GPU para el cálculo de la evolución del Autómata.

Deberá desarrollarse esta tarea, y llevar a cabo un análisis exhaustivo de las mejoras de rendimiento que permite obtener.

Paralelización del proceso de actualización

La actualización de la malla del Autómata Celular se realiza siempre a partir del estado del sistema en el paso anterior, en lo que se conoce como actualización síncrona del Autómata, con lo que la actualización de cada una de las celdas es independiente de la del resto.

Esto hace que la paralelización del bucle de actualización de las celdas del Autómata no revista excesiva dificultad.

10.3.4. Líneas de investigación abiertas

Dentro del conjunto de campos de investigación relacionados con este trabajo, las principales líneas de investigación que quedan aún abiertas corresponden al modelado de la evolución y las interacciones, a la representación visual y a la ejecución de los algoritmos numéricos por medio de la GPU.

Modelado dinámico

Desde el punto de vista del modelado dinámico, la influencia de ciertas propiedades de los sistemas granulares sobre el comportamiento del sistema y sobre su reacción ante las interacciones no se ha reproducido de forma completa. Factores como la cohesión se han tenido en cuenta a la hora de desarrollar los modelos.

Sin embargo, la aparición de cúmulos de material, o de rocas de un tamaño mucho mayor que el tamaño medio de los granos son situaciones que no han sido abordadas. De la misma manera, no se han considerado inhomogeneidades ni estratificaciones en el material. Una de las principales líneas de investigación que quedan abiertas es el modelado de éstas y otras situaciones derivadas de las propiedades del sistema.

Representación visual

La representación gráfica del sistema granular se ha mejorado incorporando técnicas basadas en *shaders* para la representación del flujo. Este problema es una línea de investigación activa actualmente, aplicada principalmente a la animación de fluidos, pero los algoritmos utilizados son costosos y no suelen ser adecuados para tiempo real.

Por tanto, la visualización de flujo basada en texturizado procedural para aplicaciones de tiempo real supone una línea de investigación poco explotada que puede proporcionar considerables mejoras en multitud de aplicaciones.

Programación del procesador gráfico

Una línea de investigación muy activa actualmente es lo que se ha dado en llamar *General-Purpose Programming on GPU* (GPGPU), cuyo objetivo es la utilización de las unidades de proceso gráfico para la ejecución de cualquier tipo de algoritmo con el fin de reducir su tiempo de ejecución. Las unidades gráfi-

cas tienen ciertas propiedades en su arquitectura que hacen que determinados algoritmos pueden ejecutarse de forma muy eficiente.

La representación de los sistemas granulares por medio de mallas y el tipo de cálculos que se realizan para simular su evolución permiten que esta herramienta pueda jugar un papel importante en su desarrollo futuro.

APÉNDICE A

Notación utilizada

Símbolo	Descripción
(i, j)	Identificación de una celda
(x_i, y_j)	Centro de la celda (i, j)
h	Altura de material sobre la base
Δh	Material eliminado en algunos modelos del estado del arte
β	Ángulo de un terraplén respecto de la horizontal
ρ	Ángulo del plano de fractura en la Sección 3.3
σ_n	Tensión normal en un interfaz de fractura
σ_t	Tensión tangencial en un interfaz de fractura
τ	Fuerza de cizalladura
W	Peso del material sobre el interfaz de fractura
L	Longitud del interfaz de fractura
P	Presión sobre el interfaz de fractura
ϕ	Ángulo de fricción interna del material
c	Cohesión del material
a	Adhesión en el interfaz suelo-herramienta
γ	Peso específico del suelo
α	Ángulo crítico del sistema
q	Presión de sobrecarga sobre el material en una fractura

Símbolo	Descripción
$N_\gamma, N_c, N_a,$ N_q F	Componentes de la reacción del suelo por unidad de longitud en los modelos de fractura Coeficiente de estabilidad en equilibrio límite
$h(i) = h_i$ z_c $h(i, j) = h_{ij}$ $F(i, j)$ f_α F_c s_c μ_l	Altura de la celda i en el modelo BTW Umbral en el modelo BTW Altura de la celda (i, j) en el modelo BTW 2D Campo de fuerzas sobre la celda (i, j) en el modelo de Christensen Coeficiente de descarga en el modelo de Christensen Umbral en el modelo de Christensen Parámetro del modelo de Chen Parámetro del modelo de Chen
$h_r(x, t)$ $h_s(x, t)$ v θ	Altura de la capa deslizante en el modelo BCRE Altura de la capa estática en el modelo BCRE Velocidad del material en el modelo BCRE Velocidad de transferencia de material en el modelo BCRE
δx δy N_x N_y z_+ \hat{z}_+ M V S S_h P P_b P_u P_f	Tamaño de una celda en el eje x Tamaño de una celda en el eje y Número de celdas de la malla en el eje x Número de celdas de la malla en el eje y Coeficiente de caída del modelo de Autómata Celular Coeficiente de caída del modelo de Autómata Celular, considerada como función de β Conjunto de posiciones discretas o celdas del Autómata Celular Vecindad de una celda del Autómata Celular Conjunto de estados de una celda Posibles valores de la altura de una celda Conjunto de parámetros Valores de la altura de la base Valores de la pendiente crítica Flujo de material

Símbolo	Descripción
$P_{\delta x}$	Longitud de la celda en la dirección del eje x
$P_{\delta y}$	Longitud de la celda en la dirección del eje y
φ	Función de transición del Autómata Celular
\mathbf{E}	Conjunto de aplicaciones que determinan las acciones externas sobre el Autómata
\mathbf{F}	Conjunto de fuerzas externas
F_x, F_y, F_z	Fuerzas en cada una de las direcciones
Φ	Función que determina la manera en que se aplica la fuerza
π	Función que determina la presión bajo el Autómata
f_2	Función que, en cada instante de tiempo $t \in \mathbb{N}$ determina la modificación que se efectúa de las celdas $f_1(t)$
z	Espesor de la capa deslizante en el modelo de estabilidad de taludes
α_I	Ángulo crítico del sistema con inercia
s	Distancia desde el borde de una celda hasta el interfaz
δs	Incremento de la distancia s
w	Ancho de un interfaz
δw	Incremento del ancho de un interfaz
d_0	Profundidad vertical de un contacto
\mathbf{n}	Normal al contacto entre un objeto y el sistema
\mathbf{v}	Velocidad del punto de contacto sobre el objeto que colisiona
B	Altura de la base del sistema en una celda
M	Cantidad de material contenido en una celda
δd	Incremento de d
h_1	Altura desde la base de la celda hasta la superficie o el primer contacto
h_2	Altura desde el primer contacto hasta la superficie
A	Área libre de una celda que colisiona
F_h	Fuerza horizontal entre el terreno y la pala
F_l	Fuerzas de rozamiento de los laterales de la cuña desplazada

Símbolo	Descripción
H	Altura desde la base de la herramienta hasta el punto donde el interfaz de fractura sale a la superficie
μ	Cantidad de material desplazado por el avance de un interfaz vertical
R	Sistema de referencia situado sobre el Autómata Celular
A	Matriz ortogonal que pasa de las coordenadas locales del sistema del A.C al sistema de referencia del mundo
x'	Dirección en al que aumenta el índice i de la malla
y'	Dirección en al que aumenta el índice j de la malla
z'	Eje perpendicular a x' y y'
$p'(i, j)$	Posición de la superficie del Autómata Celular rotado (sistema local)
$p(i, j)$	Posición de la superficie del Autómata Celular rotado (sistema global)
Fr	Conjunto de celdas frontera
\mathcal{I}	Celdas imaginarias de la extensión de un Autómata Celular

Modelo formal de Autómata Celular

Con el fin de definir de una manera clara los elementos con los que vamos a trabajar y la notación asociada, se ha utilizado un modelo formal de Autómata. Por razones de brevedad y claridad, en los diferentes modelos descritos se han particularizado los elementos que lo componen de acuerdo con las propiedades de cada modelo. A continuación se detalla de forma general la formalización utilizada.

$$AC = \langle \mathbf{M}, \mathbf{V}, \mathbf{S}, \mathbf{P}, \varphi, \mathbf{E} \rangle, \quad (\text{B.1})$$

donde

- $\mathbf{M} = \{(i, j) : i, j \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq N_x, 1 \leq j \leq N_y\}$ es el conjunto de posiciones discretas o celdas del Autómata Celular.
- \mathbf{V} es la vecindad de una celda del Autómata.
- \mathbf{S} es el conjunto de posibles estados de cada celda:
- \mathbf{P} es el conjunto de parámetros:
- $\varphi : \mathbf{S}^{|\mathbf{V}|} \rightarrow \mathbf{S}$ es la función de transición.
- \mathbf{E} es el conjunto de aplicaciones que determinan las acciones externas.

B.0.5. Vecindad V

La vecindad en un Autómata Celular, V , se define a partir de las coordenadas de una celda. Dada una celda (i, j) , su vecindad estará formada por el conjunto de celdas que influyen en su evolución entre dos pasos consecutivos de tiempo.

Dos ejemplos frecuentes de vecindades en mallas cuadradas son la *vecindad de von Neumann* o *vecindad ortognonal* (von Neumann, 1963), que consiste en el conjunto de 4 celdas

$$V_V = \{(i, j - 1), (i, j + 1), (i - 1, j), (i + 1, j)\}$$

y la vecindad de Moore (Moore, 1956) con 8 celdas

$$V_M = V_V \cup \{(i - 1, j - 1), (i - 1, j + 1), (i + 1, j - 1), (i + 1, j + 1)\}$$

utilizada, por ejemplo, en el *juego de la vida* (Gardner, 1970). En la Figura B.1 se muestra un gráfico que representa ambas vecindades.

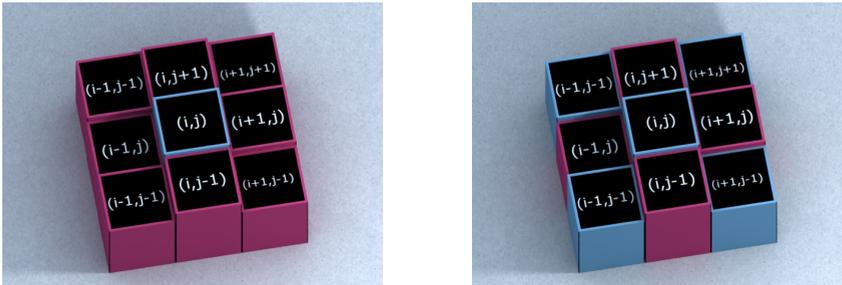


Figura B.1: (a) Vecindad de Moore (b) Vecindad de Von Neumann

B.0.6. Los estados de una celda S

En cada instante de tiempo, una celda puede encontrarse en un estado de entre un conjunto finito de estados posibles S , que suele tomarse igual para todas las celdas. Aunque S puede tomarse como un conjunto arbitrario, en algunos estudios analíticos sobre las propiedades de los AC, es habitual considerar propiedades algebraicas sobre el mismo (un grupo o un anillo, por ejemplo).

El hecho de que este conjunto sea finito permite el estudio analítico, por medio de herramientas de matemática discreta y álgebra, de los Autómatas Celulares, y es para muchos autores una propiedad irrenunciable en la definición de Autómata Celular. Sin embargo, a medida que la aplicación de los Automatas Celulares se ha ido abriendo a nuevos campos, esta propiedad se ha ido relajando con el fin de modelar fenómenos continuos. Esta propiedad y sus consecuencias se analizan en el Capítulo 4, ya que los modelos propuestos en este trabajo consideran conjuntos de estados infinitos. En particular, el conjunto S se toma como \mathbb{R} , o como \mathbb{R}^2 , en los diferentes modelos propuestos.

B.0.7. Los parámetros locales P

Denominamos parámetros locales del modelo a un conjunto de parámetros que se mantienen constantes durante toda la simulación, pero que pueden variar de una celda a otra. Estos parámetros se utilizan, por ejemplo, para almacenar el relieve de la base sobre la que se encuentra situado el sistema granular simulado. El conjunto P corresponde al conjunto de todos los posibles valores para los parámetros locales.

B.0.8. La regla local φ

La regla local, o función de transición del Autómata φ , determina la evolución de los estados de las celdas y es, habitualmente, la misma función para todas las celdas. En la mayoría de los casos se trata de una aplicación determinista. No obstante, se han estudiado aplicaciones no deterministas como reglas locales, en relación con la teoría de lenguajes (Smith, 1972; Mahajan, 1992). También es posible encontrar aplicaciones en las que se emplean reglas diferentes para cada celda e incluso reglas que cambian con el tiempo, dando lugar a los conocidos como Autómatas Celulares programables (Nandi et al., 1994).

En nuestro caso, la regla local $\varphi : S^5 \rightarrow S$ es una regla determinista y única para todas las celdas del Autómata.

B.0.9. Las funciones de acciones externas E

Además, de la función de transición, y con el fin de dotar a los modelos propuestos de interactividad, en este trabajo se introduce un nuevo elemento a los Autómatas Celulares propuestos; el conjunto de funciones de acciones externas $E = \{f_1, \dots, f_n\}$, que permiten modelar, mediante funciones que influyen en el estado de las celdas del sistema, la posible interacción del usuario con el sistema.

Criticalidad auto-organizada (SOC)

Criticalidad auto-organizada (SOC)¹ es un término usado en física para describir sistemas dinámicos que tienen puntos críticos como un atractor en su evolución temporal. A finales de la década de los 80, Bak, Tang y Wiesenfeld (Bak et al., 1988) describieron el comportamiento de algunos sistemas dinámicos complejos con grados de libertad en el tiempo y en el espacio.

Estos sistemas presentan dos características principales, la ausencia de una escala temporal y la existencia de la propiedad de auto-semejanza habitual en algunos fractales.

Los autores sugirieron que la aparición de un estado crítico auto-organizado proporciona una conexión entre la dinámica no lineal, la aparición de auto-semejanza espacial y el ruido $1/f$ de una manera natural y robusta.

El tipo de sistemas en los que se observa este comportamiento no permiten el habitual enfoque perturbativo. La reducción de la dimensionalidad no es efectiva, ya que no es posible encontrar estados desacoplados en la dinámica del sistema. Por el contrario, los diferentes grados de libertad, parecen cooperar de forma que se alcanza un estado estable lejos del equilibrio.

La principal característica observada en este tipo de sistemas, es lo que se

¹En inglés *Self-Organized Criticality*

conoce como ruido $1/f$. Este fenómeno consiste en la aparición de un espectro en las variables espacio-temporales en el que la frecuencia es inversamente proporcional a la magnitud de los eventos. Esta propiedad es la que constata la no existencia de una escala predominante en la dinámica del sistema.

Esta ausencia de escala es lo que da lugar a la aparición de estructuras macroscópicas en algunos sistemas espaciales y más concretamente a determinadas estructuras fractales.

Los sistemas críticos auto-organizados evolucionan hasta alcanzar el estado crítico en el que se manifiestan las características mencionadas. Cuando el sistema entra en este régimen de comportamiento, la aparición de una perturbación en un estado estable del sistema da lugar a una serie de procesos de relajación que le devuelven la estabilidad.

Un montón de arena es un ejemplo paradigmático de este tipo de sistemas. Cuando es modificado por la introducción de nuevas partículas evoluciona hasta que su pendiente alcanza un valor crítico. A partir de este punto, la introducción de una nueva partícula provocará un aumento de esta pendiente, dando lugar a una avalancha de partículas. Esta avalancha devuelve la pendiente a un valor inferior al ángulo crítico, manteniendo la estabilidad del sistema.

Los modelos propuestos en el marco de los Autómatas Celulares

El modelo presentado en el Capítulo 4 se ha formalizado como un Autómata Celular. Los motivos para la utilización de este tipo de modelo computacional y de su terminología son principalmente dos; por una parte, al desarrollar el modelo se parte de uno de los Autómatas Celulares clásicos, el modelo BTW de pila de arena; por otra parte, la formalización habitual de los Autómatas Celulares describe perfectamente el modelo computacional allí propuesto y es la más adecuada para la consecución de los objetivos del trabajo de investigación, como se verá.

No obstante, debe quedar claro que la utilización que se hace de este tipo de modelos es meramente instrumental; el modelo computacional de Autómata Celular se usa para realizar una contribución dentro del ámbito de la simulación de sistemas granulares, quedando fuera de los objetivos de este trabajo de investigación cualquier contribución a la teoría de los Autómatas Celulares.

Por lo tanto, el hecho de que los modelos aquí propuestos se consideren o no como Autómatas Celulares es irrelevante desde el punto de vista de los objetivos de este trabajo. Los modelos desarrollados durante este trabajo de investigación, permite alcanzar los objetivos marcados independientemente de si el modelo se clasifica como un Autómata Celular o no.

Sin embargo, dado que éstos son la nomenclatura y el formalismo escogidos,

por una cuestión de rigor parece adecuado analizar de qué manera el modelo descrito encaja dentro del terreno de los Autómatas Celulares. Lo que sigue es, en parte, el resultado de conversaciones mantenidas con diferentes participantes, entre ellos con el profesor B. Choppard, en las reuniones bianuales Cellular Automata for Research and Industry (ACRI) de los años 2004 y 2006.

D.1. Crítica a la clasificación del modelo como un Autómata Celular

En el modelo presentado en el Capítulo 4, la variable de estado h pertenece a un conjunto S_h . De acuerdo con la definición de Autómata Celular, este conjunto debe ser finito. De hecho, esta propiedad es, para muchos autores, clave a la hora de decidir si un modelo computacional puede considerarse o no un Autómata Celular.

Sin embargo, en el modelo propuesto el significado de la variable h , la altura del sistema granular sobre la celda, queda mejor representado por medio de una variable continua. Por este motivo cabe plantearse si es adecuado considerar este modelo como un Autómata Celular o si, por el contrario, debería utilizarse una nomenclatura diferente.

D.2. Los Autómatas Celulares como modelos finitos

Históricamente, los Autómatas Celulares han sido introducidos como modelos basados en un conjunto de Autómatas finitos, cuya dinámica viene dada por reglas simples, y que evolucionan a través de la interacción entre ellos. Así definidos, los Autómatas Celulares representan un ejemplo paradigmático de sistemas complejos, cuyas propiedades emergen de la relación entre sus partes que son, por el contrario, sistemas dinámico simples.

El hecho de que sean modelos computacionales discretos implica una mayor simplicidad en la elaboración de modelos, y la posibilidad de un análisis matemático más profundo de sus propiedades. Un ejemplo de esto son los estudios de Wolfram sobre la dinámica de los Autómatas Celulares, y su clasificación en función de esta dinámica. Esto proporciona herramientas matemáticas potentes para el análisis de un modelo, así como la inferencia de propiedades del mismo a partir de su clasificación dentro de una determinada taxonomía.

D.3. Sistemas continuos y Autómatas Celulares

Sin embargo, el campo de los Autómatas Celulares ha evolucionado, dando lugar a diferentes modelos computacionales, y ha visto como lo continuo ha terminado por asentarse al menos en algunos aspectos. Los modelos de Lattice Boltzman, discretos, han dado lugar a los conocidos como modelos multipartícula, en los que el número de partículas que puede ocupar una celda del Lattice es mayor que uno. Estos modelos introducen variables continuas en el modelo al considerar distribuciones de probabilidad como variables. El propio Wolfram, a quién podría considerarse como defensor de los Autómatas Celulares como modelos discretos, considera en su clasificación una generalización de los Autómatas Celulares clásicos consistente en considerar un número infinito de posibles valores para las variables.

Este planteamiento da lugar a generalizaciones de los Autómatas Celulares utilizadas para el modelado de ciertos sistemas dinámicos continuos. Es el caso de los conocidos como Sistemas Dinámicos Extensos¹, sistemas dinámicos con grados de libertad tanto temporales como espaciales. En el modelado de este tipo de sistemas, la utilización de Autómatas Celulares se plantea como una alternativa a los modelos basados en ecuaciones diferenciales, y no es infrecuente la utilización de una o más variables de estado continuas.

En estos casos, la justificación del término Autómata Celular se basa en el hecho de que cualquier modelo computacional es un modelo discreto, y que las variables están limitadas, en último extremo, a las posibilidades de representa-

¹En inglés, *Spatially Extended Dynamical Systems*

ción de la máquina utilizada.

Si bien es cierto que este último argumento puede resultar un tanto forzado, no lo es menos que los modelos basados en Autómatas Celulares suelen utilizarse para obtener representaciones macroscópicas o cualitativas (generalmente estadísticas) del sistema estudiado. Esto hace que la precisión requerida en la solución sea menor que la que se exige cuando se utiliza otro tipo de modelos, como las ecuaciones diferenciales.

En este sentido, Wolfram afirma que "un Autómata Celular suficientemente grande a menudo muestra un comportamiento macroscópico aparentemente continuo. Por tanto, pueden utilizarse para modelar sistemas continuos tales como fluidos".

Por tanto, muchos de los modelos que formalmente utilizan variables continuas, podrían reducirse a un modelo equivalente en el que dichas variables estuvieran limitadas a un conjunto discreto, o incluso finito, de valores.

El modelo propuesto en el Capítulo 4 se basa en una generalización del modelo BTW de pila de arena, en el que el conjunto S_h de valores que puede tomar la variable de estado es suficientemente amplio como para reproducir el comportamiento continuo de un sistema granular real. Se trata por tanto de un modelo de Sistema Dinámico Extenso basado en Autómata Celular similar a otros que pueden encontrarse en la bibliografía. No en vano, este modelo, junto con el modelo de interacción propuesto en el Capítulo 5 ha sido publicado en dos ocasiones en el principal foro internacional sobre Autómatas Celulares: el International Conference on Cellular Automata for Research and Industry.

Dado que las propiedades del modelo no cambian sustancialmente, el hecho de si el conjunto se toma finalmente como un conjunto finito pero muy grande, o se toma como un conjunto continuo, puede considerarse como un detalle de la implementación.

BIBLIOGRAFÍA

- Al-Kheder, S., Jun, W., and Jie, S. (2007). Cellular automata urban growth model calibration with genetic algorithms. *Urban Remote Sensing Joint Event, 2007*, pages 1–5.
- Allen, M. P. and Tildesley, D. J. (1990). *Computer simulations of liquids*. Oxford Science Publications.
- Alonso, J. J. and Herrmann, H. J. (1996). Shape of the tail of a two-dimensional sandpile. *Physical Review Letters*, 76(26):4911.
- Andreotti, B. and Douady, S. (2001). Selection of velocity profile and flow depth in granular flows. *Phys. Rev. E*, 63(3):031305.
- Aponte, A. and Moreno, J. A. (2006). Cellular automata and its application to the modeling of vehicular traffic in the city of caracas. In (Yacoubi et al., 2006), pages 502–511.
- Aradian, A., Raphaël, E., and Gennes, P.-G. D. (2002). Surface flows of granular materials: a short introduction to some recent models. *Comptes Rendus Physique*, 3(2):187–196.
- Ares, J. (2005). *Nuevas Estrategias Para Tiempo Real en Modelos Matemáticos de Terrenos Dinámicos Basados en DEM. Aplicación a los Simuladores de Entrenamiento*. PhD thesis, Escuela Superior de Ingenieros. Universidad de Navarra, San Sebastián.

- Aube, F. and Shield, R. (2004). Modeling the effect of leadership on crowd flow dynamics. In *ACRI 2004 : international conference on cellular automata for research and industry*, volume 3305, pages 601–611.
- Audusse, E. and Bristeau, M. O. (2007). Finite-volume solvers for a multilayer saint-venant system. *J. Appl. Math. Comput. Sci.*, 17(3):311–320.
- Audusse, E., Bristeau, M. O., and Decoene, A. (2008). Numerical simulations of 3d free surface flows by a multilayer saint-venant model. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 56(3):331–350.
- Bagnold, R. A. (1941). *The physics of blown sand and desert dunes*. Chapman and Hall, London.
- Bahr, D. and Rundle, J. (1995). Theory of lattice boltzmann simulation of glacier flow. *Journal of Glaciology*, 139:634–640.
- Bak, P., Tang, C., and Wiesenfeld, K. (1988). Self-organized criticality. *Physical Review A*, 38:364–374.
- Balster, H., Braun, P. W., and Köhler, W. (1998). Cellular automata models for vegetation dynamics. *Ecological Modelling*, 107(2-3):113–125.
- Bandini, S. and Pavesi, G. (2002). Simulation of vegetable populations dynamics based on cellular automata. In *ACRI '01: Proceedings of the 5th International Conference on Cellular Automata for Research and Industry*, pages 202–209, London, UK. Springer-Verlag.
- Barca, D., Crisci, G. M., Rongo, R., Gregorio, S. D., and Spataro, W. (2004). Application of the cellular automata model sciara to the 2001 mount etna crisis. *Geophysical monograph*, 143:343–356.
- Barker, G. C. and Mehta, A. (1993). Avalanches in real sandpiles: The role of disorder. In Thornton, C., editor, *Proceedings of Powders and grains 93, Proceedings of the second international conference on micromechanics of granular media*, pages 315–320.
- Barker, G. C. and Mehta, A. (2000). Two types of avalanche behaviour in model granular media. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 283(3-4):328–336.

- Barwolff, G., Chen, M., and Schwandt, H. (2007). Mathematical modeling of pedestrian flows using cellular automata and dynamic stepsizing. In *NUMERICAL ANALYSIS AND APPLIED MATHEMATICS: International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics. AIP Conference Proceedings*.
- Baxter, G. W. and Behringer, R. P. (1990). Cellular automata models for granular flow. *Physical Review A (Rapid Communication)*, 42(2):1017.
- Baxter, G. W. and Behringer, R. P. (1991). Cellular automata models for the flow of granular materials. *Physica D*, 51:465–471.
- Bekker, M. (1960). *Off-the-road Locomotion*. Ann Arbor, MI: University of Michigan Press.
- Bekker, M. (1969). *Introduction to Terrain-Vehicle Systems*. Ann Arbor, MI: University of Michigan Press.
- Bell, N., Yu, Y., and Mucha, P. J. (2005). Particle-based simulation of granular materials. In *Proceedings of SIGGRAPH'05*.
- Benes, B., Dorjgotov, E., Arns, L., and Bertoline, G. (2006a). Granular material interactive manipulation: Touching sand with haptic feedback. In *Proceedings of WSCG'2006*.
- Benes, B. and Forsbach, R. (2001). Layered data representation for visual simulation of terrain erosion. In *Proceedings of the 17th Conference on Computer Graphics, SCCG'01*, pages 80–85, Washington, DC, USA. IEEE Computer Society.
- Benes, B. and Forsbach, R. (2002). Visual simulation of hydraulic erosion. *Journal of WSCG*, 10:79–86.
- Benes, B. and Roa, T. (2004). Simulating desert scenery. In *Winter School of Computer Graphics SHORT Communication Papers Proceedings*, pages 17–22.
- Benes, B., Tesínský, V., Hornys, J., and Bhatia, S. (2006b). Hydraulic erosion. *Computer Animation and Virtual Worlds*, 17(2):99–108.
- Bernu, B. and Mazighi, R. (1990). One-dimensional bounce of inelastically colliding marbles on a wall. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 23(24):5745–5754.

- Bhatnagar, P. L., Gross, E. P., and Krook, M. (1954). A model for collision processes in gases. i. small amplitude processes in charged and neutral one-component systems. *Phys. Rev.*, 94(3):511–525.
- Bouchaud, J. P., Cates, M. E., Ravi-Prakash, J., and Edwards, S. F. (1994). A model for the dynamics of sandpile surfaces. *Journal de Physique I France*, 4:1383–1410.
- Bouchaud, J. P., Cates, M. E., Ravi-Prakash, J., and Edwards, S. F. (1995). Hysteresis and metastability in a continuum sandpile model. *Physical Review Letters*, 74(11):1982–1985.
- Bouchut, F., Mangeney-Castelnau, A., Perthame, B., and Vilotte, J.-P. (2003). A new model of saint venant and savage-hutter type for gravity driven shallow water flows. *Comptes Rendus Mathematique*, 336(6):531–536.
- Boutreux, T., Raphaël, E., and Gennes, P.-G. D. (1998). Surface flows of granular materials:a modified picture for thick avalanches. *Physical Review E*, 58(4):4692–4700.
- Brendel, L. and Dippel, S. (1998). Lasting contacts in molecular dynamics simulations. In Herrmann, H. J., Hovi, J.-P., and Luding, S., editors, *Physics of Dry Granular Materials*, page 313, Dordrecht. Kluwer Academic Publishers.
- Brilliantov, N. V., Spahn, F., Hertzsch, J.-M., and Pöschel, T. (1996). A model for collisions in granular gases. *Physical Review E*, 53:5382 – 5392.
- Brixius, W. (1987). Traction prediction equations for bias-ply tires. *ASAE*, paper N° 871622.
- Buchholtz, V., Poschel, T., and Tillemans, H. J. (1995). Simulation of rotating drum experiments using non-circular particles. *Physica A*, 216:199–212.
- Buzdugan, L. I., Balling, O., Lee, P.-T., Balling, C., Freeman, J., and Huck, F. (1999). Multirate integration for real-time simulation of wheel loader hydraulics. In *Proceedings of DETC'99*, pages 291–302.
- Campbell, C. (1990). Rapid granular flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 22:57–90.

- Chanclou, B., Luciani, A., and Habibi, A. (1996). Physical models of loose soils dynamically marked by a moving object. In *Proceedings of the Computer Animation, CA'96*, pages 27–35, Washington, DC, USA. IEEE Computer Society.
- Chapman, S. and Cowling, T. G. (1970). *The Mathematical Theory of Non-uniform Gases: An Account of the Kinetic Theory of Viscosity, Thermal Conduction and Diffusion in Gases*. Cambridge University Press.
- Chen, C. C. and den Nijs, M. (2002). Directed avalanche processes with underlying interface dynamics. *Physical Review E*, 66(011306).
- Chen, J. X., Fu, X., and Wegman, E. J. (1999). Real-time simulation of dust behavior generated by a fast traveling vehicle. *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation*, 9:81–104.
- Chessa, A., Stanley, H. E., Vespignani, A., and Zapperi, S. (1999). Universality in sandpiles. *Physical Review E*, 59(1):R12–R15.
- Chopard, B. and Droz, M. (2005). *Cellular Automata Modeling of Physical Systems*. Cambridge University Press.
- Chopard, B. and Lagrava, D. (2006). I a cellular automata model for species competition and evolution. *Lecture Notes on Computer Science*, 4173:277–286.
- Chopard, B., Masselot, A., and Dupuis, A. (2000). A lattice gas model for erosion and particles transport in a fluid. *Computer Physics Communications*, 129(1-3):167–176.
- Christensen, K., Olami, Z., and Bak, P. (1992). Deterministic $1/f$ noise in non-conservative models of self-organized criticality. *Physiscal Review Letters*, 68(16):2417–2420.
- Codd, E. F. (1968). *Cellular Automata*. Academic Press, New York.
- Coetzee, C. J., Basson, A. H., and Vermeer, P. A. (2007). Discrete and continuum modelling of excavator bucket filling. *Journal of Terramechanics*, 44(2):177–186.

- Coulomb, C. (1773). Mémoires de mathématiques et de physique présentés à l'académie royale des sciences par divers savants et lus dans les assemblées. *Imprimerie Royale, Paris*, 7:343.
- Coutermarsh, B. (2007). Velocity effect of vehicle rolling resistance in sand. *Journal of Terramechanics*, 44(4):275–291.
- Crisci, G. M., di Gregorio, S., Rongo, R., Spataro, W., and Nicoletta, F. (2004). Analysing lava risk for the etnean area: Simulation by cellular automata methods. *Natural Hazards*, 20:215–229.
- Culik, K. (1990). Computation theoretic aspects of CA. *Physica D*, 45:357–378.
- Culik, K., Pachl, J., and Yu, S. (1989). On the limit sets of cellular automata. *SIAM Journal of Computing*, 18:831–842.
- Cundall, P. A. and Strack, O. D. L. (1979). A discrete numerical model for granular assemblies. *Géotechnique*, 29(1):47–65.
- Dabrowski, J., Pytka, J., Tarkowski, P., and Zajac, M. (2006). Advantages of all-season versus snow tyres for off-road traction and soil stresses. *Journal of Terramechanics*, 43(2):163–175.
- de Barr Saint-Venant, A. J. C. (1850). Mémoire sur des formules nouvelles pour la solution des problèmes relatifs aux eaux courantes. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 31:283.
- de Gennes, P. (1997). Avalanches of granular materials. In Behringer and Eds, J., editors, *Proceedings of Powders and Grains 97*, pages 3–10, Balkema, Rotterdam.
- de Gennes, P. G. (1996). Static compression of a granular medium: the *soft shell* model. *Europhysics Letters*, 35(2):145–149.
- de Gennes, P. G. (1999). Granular matter: a tentative view. *Reviews of Modern Physics*, 71:S374–S382.
- Désérable, D. and Martínez, J. (1993). Using a cellular automaton for the simulation of flow of granular material. In *Powders and grains 93, Proceedings of the second international conference on micromechanics of granular media*, pages 345–350.

- Désérable, D., Masson, S., and Martínez, J. (2001). Influence of exclusion rules on flow pattern in a lattice grain model. *Powders and Grains*, pages 421–424.
- Dewaele, G. and Cani, M. P. (2003). Interactive global and local deformations for virtual clay. *Pacific Graphics*, pages 131–140.
- Dhar, D. (1999). The abelian sandpile and related models. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 263(1-4):4–25.
- Dhar, D., Ruelle, P., Sen, S., and D.Verma (1995). Algebraic aspects of abelian sandpile models. *Journal of Physics A*, 28:805–831.
- Dorjgotov, E., Benes, B., and Krishna, M. (2007). An immersive granular material visualization system with haptic feedback. In *Proceedings of EG UK Theory and Practice in Computer Graphics*.
- Dorso, C. O. and Dadamia, D. (2002). Avalanche prediction in abelian sandpile model. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 308(1-4):179–191.
- Douady, S., Andreotti, B., and Daerr, A. (1999). On granular surface flow equations. *The European Physical Journal B - Condensed Matter*, 11(1):131–142.
- Dubacq, J. (1995). How to simulate turing machines by invertible one-dimensional cellular automata. *International Journal of Foundations of Computer Science*, 6:395–402.
- Duran, J. (1999). *Sands, Powders and Grains*. Springer.
- Earl, E. and Alexandrou, A. (2001). Deformation process below a plate sinkage test on sandy loam soil: experimental approach. *Journal of terramechanics*, 38:153–162.
- Encinas, L. H., Whiteb, S. H., del Rey, A. M., and Sanchez, G. R. (2007). Modelling forest fire spread using hexagonal cellular automata. *Applied Mathematical Modelling*, 31:1213–1227.
- Ericson, C. (2005). *Real-Time Collision Detection*. Morgan Kaufmann.
- Farina, F. and Dennunzio, A. (2008). A predator-prey cellular automaton with parasitic interactions and environmental effects. *Fundamenta Informaticae*, 83:337–353.

- Fearing, P. (2000). Computer modelling of fallen snow. In *Proceedings of SIG-GRAPH'00*, pages 33–46.
- Fengyun, M. and Zengxiang, Z. (2005). Cellular automata model based on gis and urban sprawl dynamics simulation. In *Proceedings of SPIE, the International Society for Optical Engineering*.
- Finelli, M., Manzini, G., and Margara, L. (1998). Lyapunov exponents versus expansivity and sensitivity in cellular automata. *Journal of Complexity*, 14:210–233.
- Fiske, T., Railkar, S., and Kalyon, D. (1994). Effects of segregation on the packing of spherical and non-spherical particles. *Powder Technology*, 81:57–64.
- Foerster, S. F., Louge, M. Y., Chang, H., and Allia, K. (1994). Measurements of the collision properties of small spheres. *Physics of Fluids*, 6(3):1108–1115.
- Frisch, U., Hasslacher, B., and Pomeau, Y. (1986). Lattice-gas automata for the navier-stokes equation. *Physical Review Letters*, 56(14):1505–1508.
- Fukami, K., Ueno, M., Hashiguchi, K., and Okayasu, T. (2006). Mathematical models for soil displacement under a rigid wheel. *Journal of Terramechanics*, 43(3):287–301.
- García-Fernández, I., Pla-Castells, M., and Martínez-Durá, R. (2007). A discrete model for the dynamics of sandpile surfaces. In *Proceedings of the Industrial Simulation Conference*, pages 64–68, TU Delft. Delft, Netherlands.
- Gardner, M. (1970). The fantastic combinations of john conway's new solitaire game of life. *Scientific American*, 223(4):120–123.
- Gardner, M. (February 1971). Mathematical Games: On cellular automata, self-reproduction, the garden of eden and the game of 'Life'. *Scientific American*, 224(2):112–117.
- Geng, J., Longhi, E., Behringer, R. P., and Howell, D. W. (2001). Memory in two-dimensional heap experiments. *Physical Review E*, 64(060301).
- Georgoudas, I. G., Sirakoulis, G. C. H., and Andreadis, L. T. H. (2006). A cellular automaton crowd tracking system for modelling evacuation processes. In *Cellular automata : (7th international conference on cellular automata for research and industry, ACRI 2006)*, volume 4173, pages 699–702.

- Goldengorin, B., Makarenko, A., and Smelyanec, N. (2006). Some applications and prospects of cellular automata in traffic problems. In (Yacoubi et al., 2006), pages 532–537.
- Goldhirsch, I. (2000). *Modeling in Applied Sciences: A Kinetic Theory Approach*, chapter Rapid granular flows: kinetics and hydrodynamics. Springer Netherlands.
- Goles, E., Gonzalez, G., Hermann, H., and Martinez, S. (1998). Simple lattice model with inertia for sand piles. *Granular Matter*, 1(3):137–140.
- Goles, E. and Prisner, E. (2000). Source reversal and chip firing on graphs. *Theoretical Computer Science*, 233(1-2):287–295.
- Green, F. (1987). NP-complete problems in cellular automata. *Complex Systems*, 1.
- Gregorio, S. D., Serra, R., and Villani, M. (1999). Applying cellular automata to complex environmental problems: The simulation of the bioremediation of contaminated soils. *Theoretical Computer Science*, 217:131–156.
- Gutt, G. M. and Haff, P. K. (1990). An automata model of granular material. *IEEE*, pages 522–529.
- Hadeler, K. P. and Kuttler, C. (1999). Dynamical models for granular matter. *Granular Matter*, 2(1):9–18.
- Hadeler, K. P. and Kuttler, C. (2001). Granular matter in a silo. *Granular Matter*, 3:193–197.
- Haff, P. K. and Werner, B. T. (1986). Computer simulation of the mechanical sorting of grains. *Powder Technology*, 48:239–245.
- Hamagami, T. and Hirata, H. (2003). Method of crowd simulation by using multi-agent on cellular automata. In *IAT '03: Proceedings of the IEEE/WIC International Conference on Intelligent Agent Technology*, Washington, DC, USA. IEEE Computer Society.
- Hardy, J., de Pazzis, O., and Pomeau, Y. (1976). Molecular dynamics of a classical lattice gas: Transport properties and time correlation functions. *Physical Review A*, 13.

- Harris, M. J., Coombe, G., Scheuermann, T., and Lastra, A. (2002). Physically-based visual simulation on graphics hardware. *Graphics Hardware*, pages 1–10.
- Hertz, H. (1881). Über die berührung fester elastischer körper. *J. f. reine u. angewandte Math*, 92(156–171).
- Higuera, F., Jimenez, J., and Succi, S. (1989). Boltzmann approach to lattice gas simulations. *Europhysics Letters*, 9:663.
- Hiroma, T., Wanjii, S., Kataoka, T., and Ota, Y. (1997). Stress analysis using FEM on stress distribution under a wheel considering friction with adhesion between a wheel and soil. *Journal of terramechanics*, 34(4):225–33.
- Hirshfeld, D., Radzyner, Y., and Rapaport, D. C. (1997). Molecular dynamics studies of granular flow through an aperture. *Physical Review E*, 56(4):4404.
- Hogue, C. and Newland, D. (1994). Efficient computer simulation of moving granular particles. *Powder Technology*, 78.
- Hoomans, B. P. B., Kuipers, J. A. M., Briels, W. J., and van Swaaij, W. P. M. (1996). Discrete particle simulation of bubble and slug formation in a two-dimensional gas-fluidised bed: A hard-sphere approach. *Chemical Engineering Science*, 51(1):99–118.
- Hoya White, S., Martín del Rey, A., and Rodríguez Sánchez, G. (2005). A cellular automata model for predicting fire spread. *WIT transactions on ecology and the environment*, 81:69–78.
- Hsu, S. and Wong, T. (1995). Simulating dust accumulation. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 15:18–22.
- Huang, K. (1987). *Statistical Mechanics*. Wiley.
- Hurd, L. P., Kari, J., and Culik, K. (1992). The topological entropy of cellular automata is uncomputable. *Ergodic theory and dynamical systems*, 12:255–265.
- Hwa, T. and Kardar, M. (1992). Avalanches, hydrodynamics and discharge events in models of sandpiles. *Physical Review A*, 45(10):7002.

- Isobe, M. (1999). Simple and efficient algorithm for large scale molecular dynamics simulation in hard disk systems. *International Journal of Modern Physics C*, C10:1281.
- Jenkins, J. T. and Savage, S. B. (1983). A theory for the rapid flow of identical, smooth, nearly elastic, spherical particles. *Journal of Fluid Mechanics*, 130:187–202.
- Kadanoff, L. P. (1999). Built upon sand: Theoretical ideas inspired by granular flows. *Rev. Mod. Phys.*, 71(1):435–444.
- Kanai, M., Nishinari, K., and Tokihiro, T. (2006). Stochastic cellular-automaton model for traffic flow. In (Yacoubi et al., 2006), pages 538–547.
- Kaneko, K. (1993). *Theory and applications of coupled map lattices*. Wiley.
- Katsura, N., Shimosaka, A., Shirakawa, Y., and Hidaka, J. (2001). Simulation for flow behaviour of vibrating granular materials using cellular automata. *Powders and Grains*, pages 525–528.
- Kawase, Y., Nakashima, H., and Oida, A. (2006). An indoor traction measurement system for agricultural tires. *Journal of Terramechanics*, 43(3):317–327.
- Khot, L., Salokhe, V., Jayasuriya, H., and Nakashima, H. (2007). Experimental validation of distinct element simulation for dynamic wheel-soil interaction. *Journal of Terramechanics*, 44(6):429–437.
- Koh, A. (2002). Dramatic landscapes. Master's thesis, School of Computer Science and Software Engineering.
- Kozicki, J. and Tejchman, J. (2005). Application of a cellular automaton to simulations of granular flow in silos. *Granular Matter*, 7(1):45–54.
- Kumar, J. and Kouzer, K. M. (2008). Bearing capacity of two interfering footings. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 32(3):251–264.
- LaMarche, K. R., Conway, S. L., Glasser, B. J., and Shinbrot, T. (2007). Cellular automata model of gravity driven granular flows. *Granular Matter*, 9:219–229.
- Landau, L., Ajeizer, A., and Lifshitz, E. (1973). *Curso de Física General*. Editorial Mir Moscú.

- Leszczynski, J. S. (2002). The calculation of a normal force between multiparticle contacts using fractional operators. In *Proceedings of Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics*, volume 2, Amsterdam.
- Li, X. and Magill, W. (2001). Modeling fire spread under environmental influence using a cellular automaton approach. *Complexity International*, 08.
- Li, X. and Moshell, J. M. (1993). Modeling soil: Realtime dynamic models for soil slippage and manipulation. In *Proceedings of SIGGRAPH'93*, pages 361–368.
- Liboff, R. L. and Liboff, R. C. (1990). *Kinetic Theory*. Springer.
- Liffman, K., Nguyen, M., Metcalfe, G., and Cleary, P. (2001). Forces in piles of granular material: an analytic and 3d dem study. *Granular matter*, 3(3):165–176.
- Liu, Q. X. and Jin, Z. (2006). Spatial organization and evolutionary period of the epidemic model using cellular automata. *Physical Review E*, 74.
- Louge, M. Y. (1994). Computer simulations of rapid granular flows of spheres interacting with a flat, frictional boundary. *Physics of Fluids*, 6(7):2253–2269.
- Luding, S. (1995). Granular materials under vibration: Simulations of rotating spheres. *Phys. Rev. E*, 52(4):4442–4457.
- Maciejewski, J., Jarzebowski, A., and Trampczynski, W. (2004). Study on the efficiency of the digging process using the model of excavator bucket. *Journal of Terramechanics*, 40(4):221–233.
- Mahajan, M. (1992). *Studies in language classes defined by different types of time-varying cellular automata*. PhD thesis, .
- Malamud, B. and Turcotte, D. (2000). Cellular-automata models applied to natural hazards. *Computing in Science and Engg.*, 2(3):42–51.
- Mangeney-Castelnau, A., Vilotte, J.-P., Bristeau, M. O., Perthame, B., Bouchut, F., Simeoni, C., and Yerneni, S. (2003). Numerical modeling of avalanches based on saint venant equations using a kinetic scheme. *JOURNAL OF GEOPHYSICAL RESEARCH*, 108(B11):2527.

- Manzini, G. and Margara, L. (1999). Attractors of linear cellular automata. *Journal of Computer and System Sciences*.
- Margolus, N., Toffoli, T., and Vichniac, G. (1986). Cellular-automata supercomputers for fluid-dynamics modeling. *Phys. Rev. Lett.*, 56(16):1694–1696.
- Martínez, J., Masson, S., and Deserables, D. (1995). Flow patterns and velocity profiles during silo discharge simulation with a lattice grain model. In *Proceedings of the International Conference on Silos*, pages 367–379.
- Martín del Rey, A., Hoya White, S., and Rodríguez Sánchez, G. (2006). A model based on cellular automata to simulate epidemic diseases. *Lecture Notes on Computer Science*, 4173:304–310.
- Mavroudi, A. (2007). Simulating city growth by using the cellular automata algorithm. Master's thesis, Bartlett School of Graduate Studies - University College London.
- Max, N. and Becker, B. (1995). Flow visualization using moving textures. In *Proceedings of the ICASW/LaRC Symposium on Visualizing Time-Varying Data*.
- Mazoyer, J. (1987). A six-state minimal time solution to the firing squad synchronization problem. *Theoretical Computer Science*, 50:183–238.
- McNamara, G. and Zanetti, G. (1988). Use of the boltzmann equation to simulate lattice-gas automata. *Physical Review Letters*, 61:2332–2335.
- McNamara, S. and Young, W. R. (1992). Inelastic collapse and clumping in a one-dimensional granular medium. *Physics of Fluids A*, 4(3):496–594.
- McNamara, S. and Young, W. R. (1994). Inelastic collapse in two dimensions. *Phys. Rev. E*, 50(1):R28–R31.
- Mehta, A. and Barker, G. C. (1994). Disorder, memory and avalanches in sand-piles. *Europhysics Letters*, 27(7):501.
- Michalowski, R. (1990). Strain localization and periodic fluctuations in granular flow processes from hoppers. *Geotechnique*, 40(3):389–403.
- Mills, P., Loggia, D., and Tixier, M. (1999). Model for a stationary dense granular flow along an inclined wall. *EPL (Europhysics Letters)*, 45(6):733–738.

- Mingfeng, H., Hongbo, R., and Chanliang, Y. (2003). A predator-prey model based on the fully parallel cellular automata. *International Journal of Modern Physics C*, 14:1237–1249.
- Mitarai, N., Hayakawa, H., and Nakanishi, H. (2002). Collisional granular flow as a micropolar fluid. *Phys. Rev. Lett.*, 88(17):174301.
- Mitarai, N. and Nakanishi, H. (2003). Hard-sphere limit of soft-esphere model for granular materials: Stiffness dependence of steady granular flow. *Physical Review E*, 67(21301).
- Miyamoto, H. and Sasaki, S. (1997). Simulating lava flows by an improved cellular automata method. *Comput. Geosci.*, 23(3):283–292.
- Miyazaki, R., Yoshida, S., Nishita, T., and Dobashi, Y. (2001). A method for modeling clouds based on atmospheric fluid dynamics. In *PG '01: Proceedings of the 9th Pacific Conference on Computer Graphics and Applications*, page 363, Washington, DC, USA. IEEE Computer Society.
- Moore, E., editor (1964). *Sequential machines. Selected papers*. Addison Wesley Publishing.
- Moore, E. F. (1956). Gedanken-experiments on sequential machines. *Automata Studies, Annals of Mathematical Studies*, 34:129–153.
- Morita, K. and Harao, M. (1989). Computation universality of one-dimensional reversible (injective) cellular automata. In *Trans IEICE E 72*, volume 6, pages 758–762.
- Mraz, M., Zimic, N., and Virant, J. (1999). Intelligent bush fire spread prediction using fuzzy cellular automata. *J. Intell. Fuzzy Syst.*, 7(2):203–207.
- Muro, T. and Hoshika, Y. (1995). Tractive performance and compaction effect of a road roller running on a weak sandy soil. *Journal of Terramechanics*, pages 245–261.
- Musgrave, F. K., Kolb, C. E., and Mace, R. S. (1989). The syntesis and rendering of eroded fractal terrains. In *Proceedings of SIGGRAPH'89*, pages 41–50.
- Nalder, G. V. (1998). *The De Saint-Venant equations in curved channels*. PhD thesis, University of Auckland.

- Nandi, S., Kar, B., and Chaudhari, P. P. (1994). Theory and applications of cellular automata in cryptography. *IEEE Transactions on Computers*, 43.
- Narayan, O. (2000). Vector lattice model for stresses in granular materials. *Physical Review E*, 63(010301).
- Narimatsu, K., Shiraishi, T., and Morishita, S. (2004). Acquisition of local neighbor rules in the simulation of pedestrian flow by cellular automata. In Sloot, P. M. A., Chopard, B., and Hoekstra, A. G., editors, *ACRI*, volume 3305 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 211–219. Springer.
- Nerone, N. and Gabbanelli, S. (2001). Surface fluctuations and the inertia effect in sandpiles. *Granular Matter*, 3(1):117–120.
- Nethercote, N. and Seward, J. (2007). Valgrind: A framework for heavyweight dynamic binary instrumentation. In *Proceedings of ACM SIGPLAN 2007 Conference on Programming Language Design and Implementation (PLDI 2007)*.
- Neyret, F. (2003). Advected textures. In *ACM-SIGGRAPH/EG Symposium on Computer Animation (SCA)*.
- Nishimori, H. and Ouchi, N. (1993). Formation of ripple patterns and dunes by wind-blown sand. *Physical Review Letters*, 71(1):197.
- Nishita, T., Iwasaki, H., Dobashi, Y., and Nakamae, E. (1997). A modeling and rendering method for snow by using metaballs. *Computer Graphics Forum*, 16(3):357–364.
- Nordahl, M. (1989). Formal languages and finite cellular automata. *Complex Systems*, 3:63–78.
- Nouguier, C., Bohatier, C., Moreau, J. J., and Radjai, F. (2000). Force fluctuations in a pushed granular material. *Granular matter*, 2(4):171–178.
- O'Brien, J. F., Zordan, V. B., and Hodgins, J. K. (2000). Combining active and passive simulations for secondary motion. *Computer Graphics and Applications*, 20:86–96.
- Olsen, J. (2004). Realtime procedural terrain generation.

- Onoue, K. and Nishita, T. (2000). A method for modeling and rendering dunes with wind-ripples. *Pacific Graphics*, pages 427–428.
- Onoue, K. and Nishita, T. (2003). Virtual sandbox. In *Proceedings of the 11th Pacific Conference on Computer Graphics and Applications*, pages 252–259.
- Onoue, K. and Nishita, T. (2005). An interactive deformation system for granular material. *Computer Graphics Forum*, 24(1):51–60.
- Ouchi, N. and Nishimori, H. (1995). Modeling of wind-blown sand using cellular automata. *Physical Review E*, 52:5877–5880.
- Pacejka, H. (1996). The tyre as a vehicle component. In *Proceedings of XXVI FISITA Congress*.
- Pacejka, H. (2006). *Tyre and Vehicle Dynamics*. Elsevier, 2 edition.
- Park, S., Popov, A. A., and Cole, D. J. (2004). Influence of soil deformation of off-road heavy vehicle suspension vibration. *Journal of Terramechanics*, 41:41–68.
- Pastor-Satorras, R. and Vespignani, A. (2000). Letter to the editor: Universality classes in directed sandpile models. *Journal of Physics A - Mathematical and General*, 33(3):L33.
- Peng, G. and Herrmann, H. J. (1994). Density waves of granular flow in a pipe using lattice-gas automata. *Physical Review E*, 49(3):1796.
- Perlin, K. and Hoffert, E. M. (1989). Hypertexture. *SIGGRAPH Comput. Graph.*, 23(3):253–262.
- Perumpral, J. V., Grisso, R. D., and Dessai, C. S. (1983). A soil-tool model based on limit equilibrium analysis. *Transactions of the ASAE*, pages 991–995.
- Pla-Castells, M. (2003). Nuevos modelos de sistemas granulares basados en autómatas celulares para simulación en tiempo real. Master's thesis, Escuela de Ingenierías, Universidad de Valencia.
- Pla-Castells, M., García, I., and Martínez, R. (2003). Visual representation of enhanced sand pile models. In *Proceedings of the Industrial Simulation Conference*, pages 141–146, Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, Spain.

- Pla-Castells, M., García, I., and Martínez, R. (2004a). Approximation of continuous media models for granular systems using cellular automata. *Lecture Notes in Computer Science*, pages 230–237.
- Pla-Castells, M., García, I., and Martínez, R. (2004b). Granular system models for real time simulation. In *Proceedings of the Industrial Simulation Conference*, pages 88–93, Universidad de Málaga, Malaga, Spain.
- Pla-Castells, M., Garcia-Fernandez, I., and Martínez-Durá, R. J. (2006). Interactive terrain simulation and force distribution models in sand piles. *Lecture Notes on Computer Science*, 4173:392–401.
- Pla-Castells, M., García-Fernandez, I., and Martinez-Dura, R. J. (2008). Physically-based interactive sand simulation. In Mania, K. and Reinhard, E., editors, *Eurographics 2008 - Short Papers*, pages 21–24, Crete, Greece. Eurographics Association.
- Pöschel, T. and Schwager, T. (2004). *Computational Granular Dynamics : Models and Algorithms*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1 edition.
- Post, E. L. (1936). Finite combinatory processes - formulation 1. *The Journal of Symbolic Logic*, 1:810–811.
- Post, E. L. (1943). Formal reductions of the general combinatorial decision problem. *Journal of Mathematics*, 65:197–215.
- Post, E. L. (1944). Recursive enumerable sets of positive integers and their decision problems. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 50:284–316.
- Potapov, A. V. and Campbell, C. S. (1998). A fast model for the simulation of non-round particles. *Granular Matter*, 1(1):9–14.
- Prado, C. and Olami, Z. (1992). Inertia and break of self-organized criticality in sandpile cellular-automata models. *Physical Review A*, 45(2):665–669.
- Prigozhin, L. and Zaltzman, B. (2001). Two continuous models for the dynamics of sandpile surfaces. *Physical Review E*, 63(4):041505.
- Prigozhin, L. and Zaltzman, B. (2003). On the approximation of the dynamics of sandpile surfaces. *PORTUGALIAE MATHEMATICA*, 60:117–137.

- Reece, A. R. (1965). The fundamental equation of earth-moving mechanics. In *Proceedings of the Symposium on Earth-moving Machinery*, pages 8–14.
- Reeves, W. T. (1983). Particle systems—a technique for modeling a class of fuzzy objects. *ACM Trans. Graph.*, 2(2):91–108.
- Rubinstein, D. and Hitron, R. (2004). A detailed multi-body model for dynamic simulation of off-road tracked vehicles. *Journal of Terramechanics*, 41(2-3):163–173.
- Sakaguchi, H., Murakami, A., Hasegawa, T., and Shirai, A. (1996). Connected lattice cellular automaton particles: model for pattern formation in vibrating granular media. *Soils and Foundations*, 36(1):105–110.
- Sarkar, P. (2000). A brief history of cellular automata. *ACM Computing Surveys (CSUR)*, 32(1):80–107.
- Savage, S. (1984). The mechanics of rapid granular flows. *Advances in Applied Mechanics*, 24:289–366.
- Savage, S. (1992). Some aspects of confined granular flows. In *Proceedings of International Conference on Silos*, pages 111–121.
- Savage, S. B. (1993). Disorder, diffusion, and structure formation in granular flows. *Disorder and Granular Media*, pages 255–185.
- Schinner, A. (1999). Fast algorithms for the simulations of polygonal particles. *Granular Matter*, 2(1):35–43.
- Shen, J. and Kushwaha, R. L. (1998). *Soil-Machine Interactions*. Marcel Dekker, New York.
- Shibly, H., Iagnemma, K., and Dubowsky, S. (2005). An equivalent soil mechanics formulation for rigid wheels in deformable terrain, with application to planetary exploration rovers. *Journal of Terramechanics*, 42(1):1–13.
- Shinbrot, T., Duong, N.-H., Hettenbach, M., and Kwan, L. (2007). Coexisting static and flowing regions in a centrifuging granular heap. *Granular Matter*, 9(5):295–307.
- Silbert, L. E., Ertas, D., Grest, G. S., Halsey, T. C., Levine, D., and Plimpton, S. J. (2001). Granular flow down an inclined plane: Bagnold scaling and rheology. *Physical Review E*, 64(051302).

- Sims, K. (1990). Particle animation and rendering using data parallel computation. In *SIGGRAPH '90: Proceedings of the 17th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 405–413, New York, NY, USA. ACM.
- Sipper, M. (1998). Computing with cellular automata: three cases for nonuniformity. *Physical Review E*, 57(3):3589–3592.
- Sirakoulis, G. C., Karafyllidis, I., and Thanailakis, A. (2000). A cellular automaton model for the effects of population movement and vaccination on epidemic propagation. *Ecological Modelling*, 133:209–223.
- Siuta, T. (2006). Real-time flow forecasting on the basis of st. venant model. *PUBLS. INST. GEOPHYS. POL. ACAD. SC*, E-6:390.
- Smith, A. (1972). Real-time language recognition by one-dimensional cellular automata. *Journal of Computer and Systems Sciences*, 6:233–253.
- Snoeijer, J. H., van Hecke, M., Somfai, E., and van Saarloos, W. (2003). Force and weight distributions in granular media: Effects of contact geometry. *Physical Review E*, 67(030302).
- Stava, O., Krivanek, J., Benes, B., and Brisbin, M. (2008). Interactive terrain modeling using hydraulic erosion. In *SCA '08: Proceedings of the 2008 ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation*, pages 201–210.
- Sullivan, A. L. and Knight, I. K. (2004). A hybrid cellular automata/semi-physical model of fire growth. In *Proceedings of the 7th Asia-Pacific Conference on Complex Systems*.
- Sumner, R. W., O'Brien, J. F., and Hodgins, J. K. (1998). Animating sand, mud, and snow. In *Proceedings of Graphics Interface '98*, pages 125–132.
- Sumner, R. W., O'Brien, J. F., and Hodgins, J. K. (1999). Animating sand, mud and snow. *Computer Graphic Forum*, 18.
- Takahashi, S. (1992). Self-similarity of linear cellular automata. *Journal of Computer and Systems Sciences*, 44:114–140.
- Terzaghi, K. (1959). *Theoretical soil mechanics*. J. Wiley and Sons, NY.

- Tissera, P. C., Printista, M., and Errecalde, M. L. (2007). Evacuation simulations using cellular automata. *Journal of computer science and Technology*, 7:14–17.
- Toffoli, T. (1977). Computation and construction universality of reversible cellular automata. *Journal of Computer and Systems Sciences*, 15:213–231.
- Tome, T. and de Carvalho, K. C. (2007). Stable oscillations of a predator–prey probabilistic cellular automaton: a mean-field approach. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 40(43):12901–12915.
- Turing, A. M. (1936). On computable numbers with an application to the entscheidungs-problem. *Proc. London Math. Soc.*, 2:230–265.
- Turing, A. M. (1950). Computing machinery and intelligence. *Mind*, 59:433–460.
- Ulam, S. (1952). Random process and transformations. In *Proceedings of International Conference of Mathematics*, pages 264–275.
- Vincenti, W. G. and Kruger, C. H. (1975). *Introduction to Physical Gas Dynamics*. Krieger Pub Co.
- Vizzari, G., Pizzi, G., and Federici, M. L. (2006). Visualization of discrete crowd dynamics in a 3d environment. In (Yacoubi et al., 2006), pages 720–723.
- von Neumann, J. (1963). *J. von Neumann collected works*, chapter The general and logical theory of automata. A. Taub ed.
- von Neumann, J. (1966). *Theory of Self-Reproducing Automata*. A. W. Burks ed. University of Illinois Press, Urbana, Illinois.
- Wadaa, K., Senshuc, H., and Matsui, T. (2006). Numerical simulation of impact cratering on granular material. *Icarus*, 180(2):528–545.
- Wait, R. (2001). Discrete element models of particle flows. *Mathematical modeling and analysis*, 6(1):156–164.
- Walsh, M. J. (2003). *Slope Stability*. US Army Corps of Engineers.
- Walter, R. and Worsch, T. (2004). Efficient simulation of ca with few activities. *ACRI 2004. Lecture Notes in Computer Science*, 3305:101–110.

- Walton, O. R. (1982). Explicit particle dynamics model for granular materials. In Eisenstein, Z., editor, *Proceedings of Numerical Methods in Geomechanics*, pages 1261–1268. Balkema, Rotterdam.
- Walton, O. R. and Braun, R. L. (1986). Viscosity, granular-temperature, and stress calculations for shearing assemblies of inelastic, frictional discs. *Journal of Rheology*, 30(5):949–980.
- Wang, C.-D. (2007). Lateral force and centroid location caused by horizontal and vertical surcharge strip loads on a cross-anisotropic backfill. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 31(13):1443–1475.
- Wang, Y. and Mason, M. (1992). Two dimensional rigid body collisions with friction. *Trans ASME; J Applied Mechanics*, 59(3):635–642.
- Was, J. (2005). Cellular automata model of pedestrian dynamics for normal and evacuation conditions. In *ISDA '05: Proceedings of the 5th International Conference on Intelligent Systems Design and Applications*, pages 154–159, Washington, DC, USA. IEEE Computer Society.
- Was, J., Gudowski, B., and Matuszyk, P. J. (2006). New cellular automata model of pedestrian representation. In (Yacoubi et al., 2006), pages 724–727.
- Wei, X., Li, W., Mueller, K., and Kaufman, A. (2003a). Implementing lattice boltzmann computation on graphics hardware. *Visual Computer*, pages 444–456.
- Wei, X., Zhao, Y., Fan, Z., Li, W., Yoakum-Stover, S., and Kaufman, A. (2003b). Blowing in the wind. In *SCA '03: Proceedings of the 2003 ACM SIG-GRAPH/Eurographics symposium on Computer animation*, pages 75–85, Aire-la-Ville, Switzerland, Switzerland. Eurographics Association.
- Weng, W. G., Chen, T., Yuan, H. Y., and Fan, W. C. (2006). Cellular automaton simulation of pedestrian counter flow with different walk velocities. *Phys. Rev. E*, 74.
- Wolfram, S. (1983). Statistical mechanics of cellular automata. *Reviews of Modern Physics*, 55:601–644.
- Wolfram, S. (1984). Universality and complexity in cellular automata. *Physica D*, 10:1–35.

- Wolfram, S. (1986). Theory and application of cellular automata. *World Scientific*, page ..
- Wolfram, S. (1994). *Cellular automata and complexity (collected papers)*. Addison-Wesley, Reading.
- Wong, J. (2001). *Theory of ground vehicles*. John Wiley & Sons, 3 edition.
- Wu, F. and Martin, D. (2002). Urban expansion simulation of southeast england using population surface modelling and cellular automata. *Environment and Planning A*, 34:1855–1876.
- Yacoubi, S. E., Chopard, B., and Bandini, S., editors (2006). *Cellular Automata, 7th International Conference on Cellular Automata, for Research and Industry, ACRI 2006, Perpignan, France, September 20-23, 2006, Proceedings*, volume 4173 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer.
- Yahya, A., Zohadie, M., Ahmad, D., Elwaleed, A. K., and Kheiralla, A. F. (2007). Upm indoor tyre traction testing facility. *Journal of Terramechanics*, 44(4):293–301.
- Yamamoto, K., Kokubo, S., and Nishinari, K. (2006). New approach for pedestrian dynamics by real-coded cellular automata (rca). *Lecture Notes on Computer Science*, 4173:728–731.
- Yamamoto, K., Kokubo, S., and Nishinari, K. (2007). Simulation for pedestrian dynamics by real-coded cellular automata (rca). *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 379:654–660.
- Yanagita, T. and Kaneko, K. (1997). Modeling and characterization of cloud dynamics. *Physical Review Letters*, 78(22):4297+.
- Zeng, Y.-L., Tan, C. I., Tai, W.-K., Yang, M.-T., Chiang, C.-C., and Chang, C.-C. (2007). A momentum-based deformation system for granular material. *Computer Animation and Virtual Worlds*, 18(4-5):289–300.
- Zhao, D., Yang, L., and Li, J. (2008). Occupants' behavior of going with the crowd based on cellular automata occupant evacuation model. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 387(14):3708–3718.

- Zhao, Y., Wei, X., Fan, Z., Kaufman, A., and Qin, H. (2003). Voxels on fire. In *VIS '03: Proceedings of the 14th IEEE Visualization 2003 (VIS'03)*, page 36, Washington, DC, USA. IEEE Computer Society.
- Zhen, J. and Quan-Xing, L. (2006). A cellular automata model of epidemics of a heterogeneous susceptibility. *Chinese Physics*, 15(6):1248–1256.
- Zhu, Y. and Bridson, R. (2005). Animating sand as a fluid. *ACM Transactions on Graphics*, 24:965–972.