

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

LA ECUACIÓN DE INCE - HILL

JOAQUÍN SASTRE SENDRA

UNIVERSITAT DE VALENCIA  
Servei de Publicacions  
2004

Aquesta Tesi Doctoral va ser presentada a València el dia 21 de Juny de 2004 davant un tribunal format per:

- D. Juan José Morales Ruiz
- D. Rafael López Machí
- D. Luis Marco Montoro
- D<sup>a</sup>. Cristina Chiralt Monleón
- D<sup>a</sup>. Beatriz Campos Sancho

Va ser dirigida per:  
D. José Martínez Alfaro

©Copyright: Servei de Publicacions  
Joaquín Sastre Sendra

---

Depòsit legal:  
I.S.B.N.:84-370-6067-2

Edita: Universitat de València  
Servei de Publicacions  
C/ Artes Gráficas, 13 bajo  
46010 València  
Spain  
Telèfon: 963864115

# LA ECUACIÓN DE INCE-HILL

J. Sastre Sendra

Departament de Matemàtica Aplicada

Universitat de València

5 de noviembre de 2004

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
<b>2. Foliación en una singularidad</b>	<b>7</b>
2.1. Introducción . . . . .	7
2.2. Topología de las hojas . . . . .	12
2.2.1. Caso no resonante . . . . .	14
2.2.2. Caso resonante . . . . .	22
2.3. El Flujo . . . . .	24
<b>3. Campos vectoriales de tipo Fuchs en <math>\mathbb{C}\mathbb{P}^n</math></b>	<b>29</b>
3.1. Geometría en $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ . . . . .	29
3.2. Curvas Algebraicas en $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ . . . . .	31
3.3. 1-formas polinomiales en $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ . . . . .	31
3.4. Campos vectoriales en $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ con una singularidad de Fuchs . . . . .	33
<b>4. La ecuación de Ince-Hill.</b>	<b>41</b>
4.1. Introducción . . . . .	41
4.1.1. Resultados conocidos. . . . .	41
4.1.2. Clasificación según coeficientes. . . . .	42
4.2. Caso Hamiltoniano . . . . .	45

4.2.1. Estabilidad de las soluciones . . . . .	59
4.3. Apéndice . . . . .	68
<b>Bibliografía</b>	<b>79</b>

# 1 Introducción

En 1877, G.W. Hill publica un artículo [6] sobre el movimiento del perigeo de la Luna (punto de la órbita de la Luna más próximo a la Tierra), en el que aparecen las primeras soluciones periódicas del problema de 3 cuerpos desde el descubrimiento por Lagrange de soluciones de equilibrio relativo en 1772.

El problema era la discrepancia entre los valores calculados teóricamente para el movimiento del perigeo lunar y sus valores derivados de la observación.

En este trabajo, Hill determinó primero una solución periódica y entonces dedujo las ecuaciones de variación teniendo en cuenta hasta la primera potencia de la excentricidad lunar. Obtuvo un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de cuarto orden con coeficientes periódicos. Utilizando integrales conocidas y realizando una serie de transformaciones, redujo el sistema a una sola ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$\frac{d^2w}{dt^2} + \Theta w = 0 \tag{1.1}$$

donde  $w$  es la desviación normal de la Luna respecto la órbita intermedia, y  $\Theta$  sólo depende de la posición relativa de la Luna con referencia al Sol.  $\Theta$  puede ser expresada como una serie de Fourier

$$\begin{aligned} \Theta &= \theta_0 + \theta_1 \cos 2t + \theta_2 \cos 4t + \dots = \\ &= \sum_j \theta_j \zeta^{2j} \end{aligned} \tag{1.2}$$

donde  $\zeta = \exp(it)$  y  $\theta_i = \theta_{-i}$ , por tanto la ecuación (1.1) puede escribirse como

$$\frac{d^2w}{dt^2} + w \sum_{j=-\infty}^{\infty} \theta_j \zeta^{2j} = 0 \quad (1.3)$$

que es conocida como la **ecuación de Hill**.

La ecuación de Hill puede ser considerada como una forma generalizada de la ecuación de Mathieu

$$\frac{d^2w}{dt^2} + (a + b \cos 2t)w = 0 \quad (1.4)$$

introducida por Mathieu en 1868 en el estudio de membranas elásticas con frontera elíptica. A su vez, la ecuación de Hill es un caso particular de la de Ince-Hill

$$(1 + a \cos 2x) \frac{d^2y}{dx^2} + b \operatorname{sen} 2x \frac{dy}{dx} + (c + d \cos 2x)y = 0 \quad (1.5)$$

El interés de la ecuación de Ince-Hill radica en que todos los casos conocidos de ecuaciones del tipo *Hill* con coeficientes analíticos y problemas de coexistencia resueltos son casos particulares de esta ecuación de 4 parámetros, entendiendo por coexistencia la existencia de dos soluciones linealmente independientes de la ecuación de periodo  $\pi$  y  $2\pi$ . Además es la ecuación más general para la cual puede ser aplicado el método de *Ince* de relaciones de recurrencia.

La ecuación de *Ince-Hill* es una ecuación poco estudiada en general, aunque casos particulares de ella se presentan en ecuaciones variacionales ligadas a problemas de Mecánica Celeste. Con frecuencia el parámetro  $a$  representa  $-e$ , siendo  $e$  la excentricidad.

Precisamente, una de las motivaciones iniciales de esta tesis es el estudio de la estabilidad de la solución trivial de (1.5) para los numerosos problemas de la mecánica a los que se aplica. Este estudio no resulta nada sencillo desde el punto de vista analítico.

Observar que la ecuación de Ince-Hill es una ecuación diferencial lineal de segundo

orden que posee singularidades regulares, también llamadas de tipo Fuchs, es por ello que la tesis está dividida en dos partes. Una primera, más general, que comprende los 2 primeros capítulos, dedicada al estudio local de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con una singularidad de Fuchs.

En esta primera parte, en el Capítulo 2, realizamos el estudio local de la foliación definida por un sistema lineal complejo en un entorno de una singularidad de Fuchs. Este estudio general representa uno de los resultados más destacados de la tesis, ya que, aunque las ecuaciones lineales con coeficientes holomorfos han sido abordados usualmente desde el punto de vista del análisis, su consideración como sistema dinámico, y la introducción de métodos algebraicos ha sido más reciente. Así la foliación para sistemas lineales ha sido realizada por Camacho, C., H. Kuiper, N., Palis, J. [4]. En nuestro caso se trata del estudio de sistemas con singularidades tipo Fuchs. A diferencia de [4] en el que se realiza un estudio de la foliación realizado con métodos independientemente de las coordenadas, la presencia de singularidades nos ha obligado a basarnos en ellas. Como resultado obtenemos una caracterización de la foliación determinada por el campo vectorial.

Continuando con la analogía entre [4] y el caso de un sistema con singularidades, en el Capítulo 3 vemos como se puede llevar el estudio realizado en el Capítulo 2 a los campos vectoriales en  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ . Generalizando [17], obtenemos una relación entre los campos vectoriales lineales en  $\mathbb{C}^{n+1}$  y los campos vectoriales en  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  con una singularidad de Fuchs.

La segunda parte de la tesis, que comprende el Capítulo 4, la dedicamos al estudio particular de la ecuación de Ince-Hill. Uno de los resultados que obtenemos es la clasificación de la misma en función del tipo de singularidades que posee para los distintos valores de los parámetros, para lo cual analizamos la forma algebraica de la ecuación. Finalmante, realizamos un estudio de la misma en el caso en el que la

ecuación se puede expresar como un sistema Hamiltoniano y realizamos el estudio de la estabilidad para algunos casos concretos de los parámetros, siguiendo uno de los objetivos señalados anteriormente.

Dejamos abierto para una investigación futura el estudio de la relación entre los resultados obtenidos en el Capítulo 2 y los obtenidos en el Capítulo 4.

## 2 Foliación en una singularidad

### 2.1. Introducción

Este capítulo lo dedicamos al estudio de la foliación determinada por un sistema lineal complejo en un entorno de una singularidad de Fuchs.

En primer lugar vamos a introducir algunos resultados obtenidos en el caso de ecuaciones diferenciales holomorfas definidas por un campo vectorial holomorfo  $F$  en una variedad compleja.

Es sabido que las órbitas de una ecuación diferencial definida por un campo vectorial holomorfo en una variedad compleja, son curvas complejas parametrizadas en un subconjunto  $X \subset \mathbb{C}$ , llamado *base*. Dichas órbitas, forman una foliación  $\mathcal{F}$  con singularidades en los ceros del campo vectorial.

La topología de la foliación  $\mathcal{F}$  definida por una ecuación diferencial del tipo  $\frac{dY}{dx} = AY$ , donde  $Y \in \mathbb{C}^n$ ,  $x \in \mathbb{C}$  y  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , ha sido estudiada por C. Camacho[4] y J. Il'yashenko[7], siendo los resultados básicos los siguientes:

**DEFINICIÓN 2.1** *Un campo vectorial  $A$  se dice que es hiperbólico si  $\frac{\lambda_i}{\lambda_j} \notin \mathbb{R}$  para todo  $i \neq j$ , siendo  $\lambda_i$  los valores propios de  $A$ , verificándose que  $\lambda_i \neq 0$  para  $i = 1, \dots, n$ .*

**DEFINICIÓN 2.2** *La envoltura convexa de  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , denotada por  $\langle (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \rangle$*

se define como

$$\langle (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \rangle = \sum_{k=1}^n \alpha_k \lambda_k$$

verificándose que

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1$$

DEFINICIÓN 2.3 Diremos que la matriz  $A$  está en el:

1. **Dominio de Poincaré** si  $0 \notin \langle (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \rangle$ .
2. **Dominio de Siegel** si  $0 \in \langle (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \rangle$ .

siendo  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  los valores propios de la matriz.

**Teorema 2.1** Dos campos vectoriales lineales hiperbólicos en el Dominio de Poincaré son topológicamente equivalentes.

**Teorema 2.2** Sea  $A$  hiperbólico en el Dominio de Siegel. Consideremos  $\Lambda = \text{Espectro de } A = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ , y  $\bar{\Lambda} = \text{Espectro de } 2\pi A^{-1} = \{\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_n\}$  donde  $\bar{\lambda}_j = 2\pi\lambda_j^{-1}$ . La clase de equivalencia de  $\bar{\Lambda}$  bajo la acción de  $Gl(2, R)$ , denotada  $\eta(A)$ , es el único invariante topológico de  $A$ .

A continuación, veamos las siguientes definiciones y resultados sobre singularidades de Fuchs que utilizaremos luego.

DEFINICIÓN 2.4 Diremos que  $x$  es una singularidad de la ecuación diferencial

$$Y' = A(x)Y \tag{2.1}$$

si  $x$  es un polo de  $A(x)$ .

**DEFINICIÓN 2.5** Si la matriz  $A(x)$  de la ecuación (2.1) tiene un polo de orden uno, entonces la ecuación (2.1) se puede escribir de la forma

$$xY' = A(x)Y \quad (2.2)$$

donde  $A(x)$  es holomorfa en  $x = 0$ . En este caso diremos que  $x = 0$  es una singularidad de Fuchs.

Consideraremos la ecuación (2.2), en la que la variable  $x$  pertenece al disco  $D^2$  centrado en el origen, y la variable dependiente  $Y$  pertenece a  $(P^1(\mathbb{C}))^n$ .

**DEFINICIÓN 2.6** La  $n$ -tupla  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$  de valores propios de la matriz  $A(0)$  del sistema (2.2), con  $x = 0$  singularidad de Fuchs, diremos que es resonante si existen un par de valores propios cuya diferencia es un entero.

**Teorema 2.3** Si la ecuación (2.2) posee una singularidad de Fuchs y el espectro de la matriz  $A(0) = \Lambda$  es no resonante, entonces la ecuación es holomórficamente equivalente a la ecuación estandard  $xY' = \Lambda Y$ .

**DEFINICIÓN 2.7** Sea  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Si  $\lambda$  es valor propio de  $A$  definimos la multiplicidad geométrica de  $\lambda$ , y la denotamos por  $g$ , como

$$g = \dim(\text{Ker}(A - \lambda I_n))$$

**Teorema 2.4** Dada  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , diremos que es diagonalizable si se cumple que  $g_i = m_i$   $1 \leq i \leq p$ , siendo  $g_i$  y  $m_i$  las multiplicidades geométrica y algebraica de  $\lambda_i$  respectivamente, con  $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$  los diferentes valores propios de la matriz  $A$ .

Supongamos que el espectro de la matriz  $A(0)$  de (2.2) es no resonante. Entonces

1. Si la matriz  $A(0)$  en (2.2) es diagonalizable, el sistema lineal (2.2) posee la solución

$$Y = (C_1 x^{\lambda_1}, \dots, C_n x^{\lambda_n}) \quad (2.3)$$

donde  $\lambda_i$  se repite tantas veces como su orden de multiplicidad.

2. Por otra parte, si la matriz  $A(0)$  en (2.2) es no diagonalizable, entonces el sistema lineal (2.2) es equivalente al sistema

$$xY' = \Lambda Y \quad (2.4)$$

y  $\Lambda$  es la matriz

$$\Lambda = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & J_p \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

donde  $J_i$  ( $1 \leq i \leq p$ ) son matrices de Jordan. Por tanto, el sistema (2.2) se puede desacoplar en  $p$  sistemas de la forma

$$xY_i' = J_i Y_i \quad (2.6)$$

para  $1 \leq i \leq p$ , donde

$$Y_i = (y_{i1}, \dots, y_{im_i})$$

El sistema lineal (2.6) tiene la solución

$$y_{i(m_i-j)} = x^{\lambda_i} \left[ \sum_{r=0}^j C_{m_i-(j-r)} \frac{[\ln x]^r}{r!} \right], \quad 0 \leq j \leq m_i - 1 \quad (2.7)$$

En este capítulo estudiaremos la descomposición en hojas del espacio de fase extendido, y su clausura. Más concretamente, consideremos la nueva variable

$$\begin{aligned} t &= x \\ \frac{dt}{dx} &= 1 \end{aligned} \quad (2.8)$$

entonces, el sistema (2.2) nos quedará de la forma

$$\begin{aligned}\frac{dY}{dt} &= \frac{A(x)}{x} Y \\ \frac{dx}{dt} &= 1\end{aligned}\tag{2.9}$$

el cual define una campo vectorial holomorfo  $F$  en el espacio de fase extendido

$$E = \left(\overline{D^2} - \{0\}\right) \times (P^1(\mathbb{C}))^n\tag{2.10}$$

Este campo vectorial define una foliación en (2.10), de forma que cada hoja de ella es una superficie de Riemann. Los puntos de dicha superficie se pueden expresar de la forma  $(x, f_\Psi(x))$  donde  $x \in X$ , y  $f_\Psi$  es el conjunto de determinaciones de la solución.

Las siguientes definiciones [5] las utilizaremos más adelante.

**DEFINICIÓN 2.8** *El conjunto límite de una hoja  $L$  de una foliación  $\mathcal{F}$  se define como*

$$\text{lím}(L) = \bigcap_{m \geq 1} \overline{L \setminus K_m}$$

para una sucesión de compactos  $K_m \subset K_{m+1} \subset L$  tal que

$$\bigcup_{m \geq 1} K_m = L$$

**DEFINICIÓN 2.9** *El conjunto límite de una foliación  $\mathcal{F}$  se define como*

$$\mathcal{L}(\mathcal{F}) = \bigcup_L \overline{\text{lím}(L)}$$

donde  $L$  es cualquier hoja de  $\mathcal{F}$ .

En nuestro caso, para realizar el estudio de  $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ , vamos a considerar los subconjuntos compactos  $K_m = (k_m, f_\Psi(k_m))$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , donde los  $k_m$  son los subconjuntos

compactos de  $X$  definidos como  $X$  menos un disco abierto de radio  $\frac{1}{m}$ , centrado en la singularidad. La descomposición de  $(D^2) \times (P^1(\mathbb{C}))^n$  viene dada por la foliación  $\mathcal{F}$  de (2.10) y por  $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ .

## 2.2. Topología de las hojas

Observar que aunque la transformación logarítmica de la base convierte (2.2) en un sistema lineal autónomo, la topología de (2.2) no puede ser caracterizada por dicho sistema autónomo ya que la transformación no es holomorfa en el origen. Por ello el conjunto límite de cada hoja es básico en este análisis.

En esta sección estudiamos la topología de las hojas. Los resultados básicos son el **Lema 2.1**, el **Teorema 2.5** y el **Teorema 2.6**.

En la Section 3 caracterizamos el flujo del campo mediante el **Teorema 2.7**.

A partir de estos momentos consideraremos que  $rg(A(0)) = n$ , ya que en otro caso el sistema (2.2) se puede reducir a un sistema de dimensión menor. Veamos, en primer lugar una serie de definiciones y notaciones.

Supongamos que la variable  $x$  pertenece a  $X = \overline{D^2} - 0$ , donde 0 es la singularidad. Consideremos un generador del grupo de homotopía de  $X$  que denotaremos por  $\sigma^1$ , por ejemplo la circunferencia

$$S_r^1 = \{x \in X / |x| = r\}$$

y un elemento del conjunto  $\Pi_1(X, \partial X)$ , de homotopía relativa denotado por  $\rho$ , por ejemplo un rayo que va desde 0 hasta la frontera de  $\overline{D^2}$ .

Sea  $L$  una hoja de la foliación  $\mathcal{F}$  y  $L/S_r^1$  la restricción de  $L$  a  $S_r^1$ , es decir  $L \cap (S_r^1 \times (P^1(\mathbb{C}))^n)$ .

Consideremos  $q = (x, y_1, \dots, y_n)$  un punto de  $L$ , donde  $y_i$  representa un punto de

$P_i^1(\mathbb{C})$ . Vamos a denotar el origen  $(a, 0)$  de  $P_i(\mathbb{C})$  mediante  $0_i$  y el punto del infinito  $(0, a)$  por  $\infty_i$ .

Diremos que  $y_i$  toma un valor singular si  $y_i \in \{0_i, \infty_i\}$ .

Teniendo en cuenta las multiplicidades respectivas, sea  $r$  el número de valores propios racionales de la matriz  $A(0)$ ,  $\bar{r}$  el número de valores propios reales no racionales y  $c$  el número de valores propios no reales ( $r + \bar{r} + c = n$ ). Entonces podemos descomponer  $(P^1\mathbb{C})^n$  de la forma

$$(P^1\mathbb{C})^n = (P^1\mathbb{C})^r \oplus (P^1\mathbb{C})^{\bar{r}} \oplus (P^1\mathbb{C})^c \quad (2.11)$$

siendo  $(P^1\mathbb{C})^r$  asociado a los valores propios racionales,  $(P^1\mathbb{C})^{\bar{r}}$  asociado a los valores propios reales no racionales y  $(P^1\mathbb{C})^c$  asociado a los valores propios no reales. Con esta descomposición podemos expresar el punto  $q$  de la forma  $q = (x, q_r, q_{\bar{r}}, q_c)$  donde  $q_r \in (P^1\mathbb{C})^r$ ,  $q_{\bar{r}} \in (P^1\mathbb{C})^{\bar{r}}$  y  $q_c \in (P^1\mathbb{C})^c$ .

Dado un punto  $q$ , denotaremos por  $ns(q)$  el número de coordenadas con valor no singular.

Sea  $k(q) = ns(q_{\bar{r}})$ , es decir, el número de coordenadas no singulares en el factor  $(P^1\mathbb{C})^{\bar{r}}$  de la descomposición (2.11).

Por último, entenderemos por dependencia racional entre valores propios reales no racionales, toda relación:

$$\frac{p_1}{s_1}\lambda_1 + \frac{p_2}{s_2}\lambda_2 + \dots + \frac{p_n}{s_n}\lambda_n = 0, \quad p_i, s_i \in \mathbb{Z} - \{0\}.$$

que podemos expresar de la forma

$$n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2 + \dots + n_n\lambda_n = 0, \quad n_i \in \mathbb{Z} - \{0\}.$$

con  $m.c.d.(n_i) = 1$ .

El conjunto de todas las relaciones de dependencia racional independientes definen una matriz cuyos elementos son los coeficientes de las relaciones.

### 2.2.1. Caso no resonante

Consideremos que el espectro de la matriz  $A(0)$  del sistema (2.2) es no resonante.

**Lema 2.1** *Supongamos que la matriz  $A(0)$  de (2.2) es diagonalizable. Sea  $q \in L/S_r^1$  y sea  $m$  el número de relaciones de dependencia racional independientes que verifican los valores propios irracionales. Entonces:*

1. Si  $ns(q_c) = 0$  se cumple que

a)  $L/S_r^1$  es homeomorfa a una curva cerrada si todos los valores propios  $\lambda_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , son racionales o si  $ns(q) = 0$ .

b) Sea  $q \in L/S_r^1$ , si  $ns(q) = k(q)$  entonces  $L/S_r^1$  es densa en un toro  $T^{k(q)+1-m}$ .

2. Si  $ns(q_c) > 0$  entonces  $L/S_r^1$  es una espiral que se acumula a dos toros  $T^{k(q)+1-m}$  disjuntos.

*Demostración.* Observar que el caso (1.b) significa que existen coordenadas no singulares en el factor

$$(P^1\mathbb{C})^{\bar{r}}$$

pero que no existen coordenadas no singulares en el factor

$$(P^1\mathbb{C})^c$$

de la descomposición (2.11).

Sin embargo, en el caso (2) si que existen coordenadas no singulares en el factor

$$(P^1\mathbb{C})^c$$

de (2.11).

Como hemos afirmado, asociada a cada  $S_r^1$  tenemos una sección de una hoja  $L$ ,  $L/S_r^1$

$$= (S_r^1, f_\Psi(S_r^1)) \in S_r^1 \times (P^1(\mathbb{C}))^n.$$

Como la matriz  $A(0)$  es diagonalizable tenemos que el sistema reducido se puede desacoplar.

Sea  $\lambda_i$  el elemento de la diagonal correspondiente a la fila o columna  $i$  de la matriz  $A(0)$  diagonalizada. Entonces para las coordenadas  $y_i$  se tiene

$$y_i = C_i x^{\lambda_i}$$

como  $x \in S_r^1$  tenemos

$$x = r \exp(i\theta)$$

entonces

$$y_i = y_i^0 \exp(\lambda_i i\theta)$$

Iterando  $g_i$  sobre el punto inicial  $(x^0, y_1^0, \dots, y_n^0)$  pasando de una determinación de  $L$  a otra, se tiene para  $(S_r^1, g_i(f_\Psi(S_r^1)))$ , en función del valor de  $\lambda_i$  lo siguiente:

1. Si  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ ,  $g_i$  preserva  $\|y_i\|$  ya que

$$\|y_i^1\| = \|y_i^0\| \|\cos 2\pi\lambda_i + i \operatorname{sen} 2\pi\lambda_i\| = \|y_i^0\|$$

Entonces el toro

$$T_{r,i}^2 = S_r^1 \times \{y_i / \|y_i\| = \|y_i^0\|\}$$

con coordenadas  $(\theta, \tau_i)$  es invariante, y en cada sección obtenida fijando  $\operatorname{Arg}(x)$ ,  $g_i$  es una rotación  $g_i(\tau_i) = \tau_i + 2\pi\lambda_i$ , por tanto

- a) Si  $\lambda_i \in \mathbb{Q}$  el número de rotación es racional, con lo cual se obtiene una curva cerrada.
- b) En el caso en el que  $\lambda_i \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$  el número de rotación es irracional, por tanto la curva es densa en un toro.

Si se tiene que  $y_i^0 = 0_i$  ó  $\infty_i$ , entonces la situación es equivalente a que el valor propio sea racional ya que  $y_i$  permanecerá constante.

2. Si  $\lambda_i \notin \mathbb{R}$  entonces se tiene que

$$y_i(\theta) = y_i^0 \exp(-Im(\lambda_i)\theta + iRe(\lambda_i)\theta)$$

entonces

$$g_i(y_i) = y_i(\theta+2\pi) = y_i^0 \exp(-Im(\lambda_i)\theta + iRe(\lambda_i)\theta) \exp(-Im(\lambda_i)2\pi + iRe(\lambda_i)2\pi)$$

Si

$$K_i = \exp(-Im(\lambda_i)2\pi)$$

entonces

$$\|g_i(y_i)\| = K_i \|y_i\|$$

donde  $K_i > 1$  si  $Im(\lambda_i) < 0$  o  $K_i < 1$  si  $Im(\lambda_i) > 0$ , en cuyo caso  $y_i$  tiende a  $0_i$  o  $\infty_i$  respectivamente. Por tanto la órbita es una espiral que tiende a  $S^1 \times \{p\}$  donde  $p$  es el  $0_i$  o el  $\infty_i$ .

Veamos gráficamente el tipo de órbita que nos aparece en función del tipo de valor propio asociado. Para ello representaremos la esfera de Riemann (figura 2.1). Para

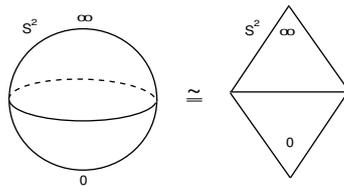
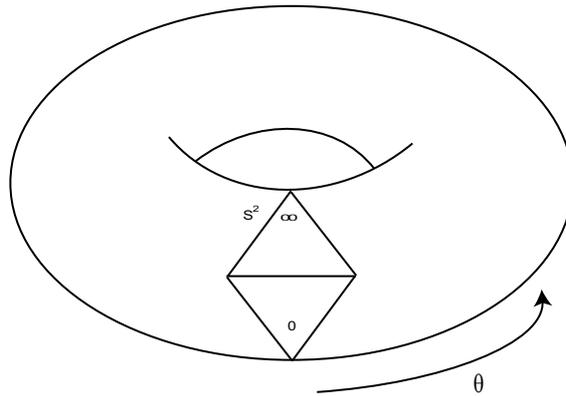
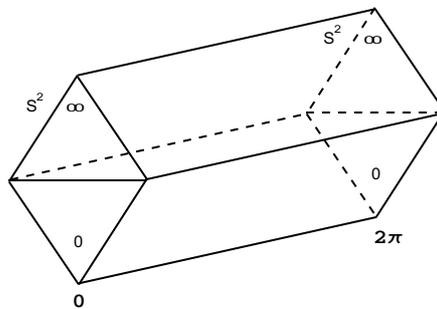


Figura 2.1: Triangulación esfera de Riemann

cada variable  $y_i$  se tiene  $x \in S^1$  e  $y_i \in S^2$  (figura 2.2). Lo representamos de la forma

Figura 2.2:  $S^2 \times S^1$ Figura 2.3:  $S^2 \times S^1$ 

(figura 2.3). Para  $\lambda_i \in \mathbb{Q}$  se tiene la órbita cerrada (figura 2.4).

Para  $\lambda_i \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$  se tiene la órbita densa (figura 2.5).

Cuando  $\lambda_i \notin \mathbb{R}$  tenemos (figura 2.6).

La caracterización de  $(S_r^1, f_\Psi(S_r^1))$  viene claramente determinada por  $(S_r^1, p_i(f_\Psi(S_r^1)))$ .

Por tanto

- Cuando  $ns(q_c) = 0$  tenemos que si todos los valores propios son racionales o si  $ns(q) = 0$  entonces tenemos una curva cerrada. Sin embargo si  $ns(q) = k(q)$  entonces tenemos una curva densa en  $T^{k(q)+1}$ .

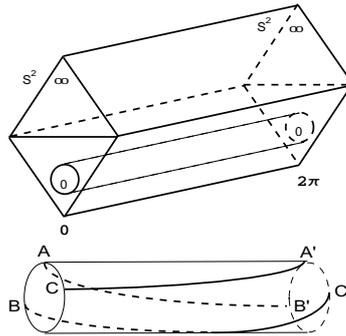


Figura 2.4: Valor propio racional

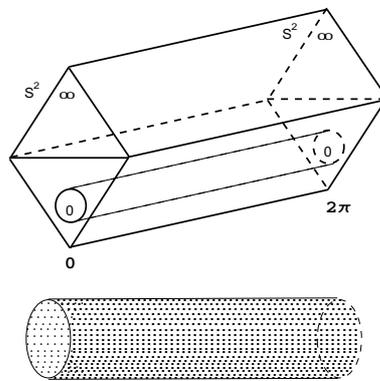


Figura 2.5: Valor propio irracional

- En el caso en que  $ns(q_c) > 0$ , entonces se tiene una espiral que se acumula a dos toros  $T^{k(q)+1}$  disjuntos.

Por otra parte, para cada dependencia racional

$$r_1\lambda_1 + \dots + r_n\lambda_n = 0$$

con  $r_i \in \mathbb{Q}$  y  $\lambda_i \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ , se tiene que la superficie

$$r_1\tau_1 + \dots + r_n\tau_n = K$$

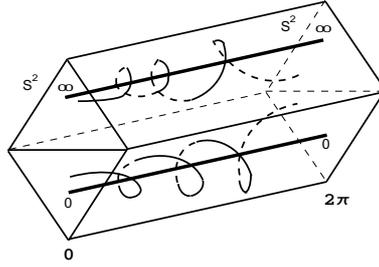


Figura 2.6: Valor propio complejo

es un  $T^{n-1}$  toro invariante, ya que si al ser  $g_i$  una rotación  $\forall 1 \leq i \leq n$  se cumple que

$$g_i(\tau_i) = \tau_i + 2\pi\lambda_i$$

Entonces la expresión

$$r_1 g_1(\tau_1) + \dots + r_n g_n(\tau_n) = r_1(\tau_1 + 2\pi\lambda_1) + \dots + r_n(\tau_n + 2\pi\lambda_n)$$

la podemos escribir de la forma

$$r_1(\tau_1 + 2\pi\lambda_1) + \dots + r_n(\tau_n + 2\pi\lambda_n) = r_1\tau_1 + \dots + r_n\tau_n + 2\pi(r_1\lambda_1 + \dots + r_n\lambda_n) \quad (2.12)$$

Por la dependencia racional de los valores propios sabemos que

$$r_1\lambda_1 + \dots + r_n\lambda_n = 0 \quad (2.13)$$

Al sustituir (2.13) en (2.12) nos queda

$$r_1\tau_1 + \dots + r_n\tau_n = K$$

Luego la superficie es invariante.

Por tanto, el número de dependencias racionales independientes disminuye la dimensión del toro que contiene a  $L/S_r^1$ .  $\square$

**Teorema 2.5 (Caso Diagonalizable)** *Con la notación del Lema 1, si la matriz  $A(0)$  de (2.2) es diagonalizable, entonces la clausura de la hoja es homeomorfa a*

1. Un cono de  $T^{k(q)+1-m}$  si  $ns(q) = k(q)$ .
2.  $\mathbb{C} \times$  cono de  $T^{k(q)+1-m}$  si  $ns(q_c) > 0$ .

*Demostración.* Recordemos que dado un espacio topológico  $X$ , el espacio cociente

$$\frac{X \times I}{X \times 0}$$

se llama cono sobre  $X$ . A  $(X \times 0)$  se le denomina vértice del cono y a  $(X \times 1)$  base del cono. El conjunto  $(x \times I)$ , con  $x \in I$ , es la generatriz del cono. La base se asocia a  $X$  mediante un homeomorfismo canónico y, en general, se identifica con  $X$ . Las generatrices son asociadas con  $I$  mediante homeomorfismos canónicos. Luego el disco centrado en el origen se puede considerar como un cono de  $S^1$  ya que

$$D^2 \simeq \frac{S^1 \times \rho}{S^1 \times \{0\}}$$

La hoja hereda esta caracterización de  $D^2 = X$ .

Como en la demostración del **Lema 2.1** vamos a considerar cada coordenada  $y_i$  por separado, pero en este caso fijamos el  $Arg(x)$  y hacemos variar  $|x|$  en  $\rho \in \Pi_1(X, \partial X)$ .

Por otra parte como  $x = r \exp(\theta i)$  entonces al sustituir en (2.3) nos queda

$$y_i = C \exp(\lambda_i(\ln r + 2k\pi i\theta)) \quad (2.14)$$

Entonces

1. Si  $\lambda_i \in \mathbb{R}$

$$y_i = C \exp(\lambda_i \ln r) \exp(2k\pi \lambda_i \theta i)$$

luego

$$\lim_{|x| \rightarrow 0} y_i$$

será 0 si  $\lambda_i > 0$  ó  $\infty$  si  $\lambda_i < 0$ .

2. Si  $\lambda_i \notin \mathbb{R}$  se tiene que

$$y_i = C \exp(\operatorname{Re}(\lambda_i) \ln r - 2\operatorname{Im}(\lambda_i)k\pi\theta) \exp(i(\operatorname{Im}(\lambda_i) \ln r + 2\operatorname{Re}(\lambda_i)k\pi\theta))$$

por tanto

$$\lim_{|x| \rightarrow 0} y_i$$

será 0 si  $\operatorname{Re}(\lambda_i) > 0$  o  $\infty$  si  $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$ .

Entonces existe  $\lim_{x \rightarrow 0}(y_i)$  ya que  $\|y_i\| \rightarrow 0$  ó  $\infty$ , siendo dicho límite  $0_i$  ó  $\infty_i$ . Luego  $\bar{L}$  es un continuo de toros que se acumulan en un punto, con lo que se tiene 1.

Si  $\lambda_i \notin \mathbb{R}$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow 0}(y_i)$  no está definido, por tanto la acumulación de la hoja es una recta, con lo que se obtiene 2.  $\square$

**Teorema 2.6 (Caso No Diagonalizable)** *Si la matriz  $A(0)$  de (2.2) no es diagonalizable entonces  $L/S^1$  es una espiral que tiende a  $S^1 \times \{\text{punto}\}$ . La clausura de la hoja será  $\mathbb{C} \times$  cono de  $T^{k(q)+1-m}$ , siendo  $q \in L/S_r^1$ .*

*Demostración.* Sabemos que las soluciones son de la forma

$$y_i = x^{\lambda_i} \left[ \sum_{j=0}^{m_i-1} C_j \frac{[\ln x]^j}{j!} \right] \quad (2.15)$$

por (2.7), siendo  $m_i$  la multiplicidad algebraica de  $\lambda_i$ .

Como  $x \in S_r^1$  se tiene que

$$y_i = (r \exp(i\theta))^{\lambda_i} \left[ \sum_{j=0}^{m_i-1} C_j \frac{[\ln(r \exp(i\theta))]^j}{j!} \right] \quad (2.16)$$

Iterando  $g_i$  en el punto inicial  $(x^0, y_1^0, \dots, y_n^0)$  pasando de una determinación de  $L$  a otra, se tiene para  $(S_r^1, g_i(f_\Psi(S_r^1)))$  que:

Si  $\theta = 0$  entonces (2.16) nos queda

$$y_i^0 = r^{\lambda_i} \left[ \sum_{j=0}^{m_i-1} C_j \frac{[\ln(r)]^j}{j!} \right] \quad (2.17)$$

por tanto

$$\|y_i^0\| = \|r^{\lambda_i}\| \left\| \left[ \sum_{j=0}^{m_i-1} C_j \frac{[\ln|r| + i(\arg(r) + 2\pi n)]^j}{j!} \right] \right\| \quad (2.18)$$

Si  $\theta = 2\pi$  entonces tendremos

$$\|y_i^1\| = \|r^{\lambda_i}\| \left\| \left[ \sum_{j=0}^{m_i-1} C_j \frac{[\ln|r| + i(\arg(r) + 2\pi(n+1))]^j}{j!} \right] \right\| \quad (2.19)$$

Como consecuencia obtendremos que

$$\|y_i^0\| < \|y_i^1\|$$

es decir que obtenemos espirales, independientemente del carácter de  $\lambda_i$ .  $\square$

Entonces, como conclusión, obtenemos que la foliación definida por (2.2) en un entorno de una singularidad depende de

1. El número de coordenadas singulares del punto.
2. El número de  $\lambda_i \notin \mathbb{R}$ .
3. El número de dependencias racionales independientes entre los valores propios  $\lambda_i$  irracionales.
4. La diferencia  $(m_i - g_i)$  entre las multiplicidades algebraica y geométrica de cada valor propio  $\lambda_i$  para  $i = 1, \dots, p$ .

### 2.2.2. Caso resonante

Consideremos la ecuación (2.2) con  $A(x)$  holomorfa en  $x = 0$ . Sea  $T$  una matriz constante tal que

$$J = T^{-1}A(0)T \quad (2.20)$$

es una matriz de Jordan.

Transformamos (2.2) en la ecuación

$$xZ' = B(x)Z \quad (2.21)$$

mediante la transformación de coeficientes constantes

$$Y = TZ \quad (2.22)$$

tal que  $B(0) = J$ .

Si  $\lambda$  es un valor propio de  $J$  que excede de otro valor propio en un entero positivo  $k$ , podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que el bloque de Jordan correspondiente a dicho valor aparece en último lugar. Sea  $p$  la multiplicidad de  $\lambda$  entonces mediante la transformación (Wasow [16]), que llamaremos reductora,

$$Z = S(x)W \quad (2.23)$$

siendo

$$S(x) = \begin{pmatrix} I_{n-p} & O \\ O & xI_p \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

la matriz  $C(x)$  de la ecuación diferencial resultante

$$xW' = C(x)W \quad (2.25)$$

cumple que  $C(0)$  posee los mismos valores propios que  $J$ , excepto que el valor propio  $\lambda$  decrece en una unidad. Aplicando  $k$  veces el proceso llegaremos a una matriz  $R(0)$  en que sus valores propios no difieren en un entero positivo.

La solución es de la forma [16]

$$W = P(x)x^{R(0)} \quad (2.26)$$

donde  $P(x)$  es holomorfa en  $x = 0$ .

Mediante la transformación reductora no tenemos una equivalencia holomorfa, pero

debido a (2.23) podemos aplicar los resultados obtenidos en el caso no resonante ya que

$$Z = S(x)P(x)x^{R(0)} = \bar{P}(x)x^{R(0)} \quad (2.27)$$

donde  $\bar{P}(x)$  es holomorfa en  $x = 0$ .

Por tanto los resultados obtenidos para el caso no resonante los podemos trasladar al caso resonante estudiando los valores propios de la matriz  $R(0)$  resultante de aplicar la transformación reductora tantas veces como sea necesario para no tener resonancia.

Para obtener una caracterización de los flujos del campo vectorial, en la siguiente sección vamos a estudiar invariantes topológicos de las hojas.

### 2.3. El Flujo

El sistema (2.2) define en  $X = \bar{D}^2 - \{0\}$  una foliación no singular de  $E$ . Sin embargo, si consideramos  $\bar{D}^2 \times (P^1(\mathbb{C}))^n$ , entonces tenemos una foliación singular ya que las hojas se acumulan en un punto o en una recta cuando  $x \rightarrow 0$ . La descomposición de  $\bar{E}$  por (2.2) es el resultado de relacionar el conjunto límite con la foliación en  $E$ .

**DEFINICIÓN 2.10** *Dados dos sistemas definidos por (2.2) diremos que son equivalentes si se cumple que*

1. *Las foliaciones en  $E$  son equivalentes.*
2. *Los conjuntos límite son del mismo tipo para cada hoja de  $E$ .*

Esta definición da sentido al siguiente teorema.

**Teorema 2.7** *El flujo de (2.2) viene caracterizado por*

1. *Los valores propios racionales y sus multiplicidades algebraica y geométrica  $(m_i, g_i)$ .*
2. *El número de valores propios irracionales con sus multiplicidades, y la matriz de dependencias racionales salvo reducciones o reordenaciones.*

*Demostración.* Denotaremos  $S_r^1 \times (P^1(\mathbb{C}))^n$  por  $\Gamma_r$  y  $\mathcal{F}$  será la foliación definida por  $A(0)$ . Por el Lema 2.1 tenemos que  $\mathcal{F} \cap \Gamma_r$  es independiente del valor de  $r$ . Por tanto, dos sistemas que tengan foliaciones equivalentes en  $\mathcal{F} \cap \Gamma_r$  poseen foliaciones equivalentes en  $E$ .

Vamos a estudiar  $\mathcal{F} \cap \Gamma_r$  considerando la intersección de las hojas con la frontera del polidisco  $B$  de radio  $c$  centrado en el origen de  $(P^1(\mathbb{C}))^n$

$$B = \{y \in (P^1(\mathbb{C}))^n / \sup_i \{|y_i|\} \leq c, i = 1, \dots, n\}$$

Si todos los valores propios son reales y  $A(0)$  es diagonalizable, entonces  $B$  está foliado por los toros

$$\|y_i\| = a, \quad i = 1, \dots, n$$

El tipo topológico de la intersección de las órbitas con  $B$  y sus conjuntos límite tienen que ser los mismos para sistemas equivalentes. Por tanto si los valores propios son racionales deberemos exigir que sean los mismos, salvo reducciones, y con igual multiplicidad para garantizar el tipo de homotopía. De hecho, dado  $\lambda_i \in \mathbb{Q}$  y  $y_i$  la coordenada no singular de un punto  $q$ , la intersección de la hoja que pasa por el punto  $q$  con  $\Gamma_r$  es un nudo en el toro invariante  $T_{r,i}^2$  con la notación de la demostración del Lema 2.1. El valor de  $\lambda_i$  determina el tipo de nudo de la intersección. En el caso de valores propios irracionales, la dimensión y el tipo de toro límite ha de ser

el mismo. Por tanto el número de dependencias irracionales independientes, y los coeficientes de dichas dependencias han de ser los mismos, salvo reducciones, es decir, combinaciones lineales de ellas y reordenamientos. Notar que los coeficientes de una dependencia determinan la pendiente racional de la proyección en el toro límite en cada 2-dimensional toro  $\tau_i, \tau_j$ .

Si  $A(0)$  no es diagonalizable o  $A(0)$  posee valores propios no reales, entonces la intersección de las hojas con  $\partial B$  es un punto.

Por tanto, todas las condiciones requeridas en este teorema son necesarias.

Recíprocamente, si se dan estas condiciones se tiene que el límite de intersecciones con  $\partial B$  cuando  $c \rightarrow 0$  y el conjunto límite cuando  $x \rightarrow 0$  están determinados, por tanto el flujo puede ser construido.  $\square$

En las figuras (2.7), (2.8), (2.9) y (2.10) hemos esquematizado la intersección de las hojas con  $\partial B$  en los casos más importantes cuando  $n = 2$ .

$\phi_i$  es el argumento de  $y_i$  y  $\theta$  corresponde a  $|x|$ .

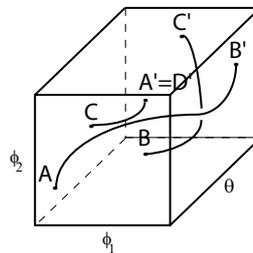


Figura 2.7: Valores propios racionales

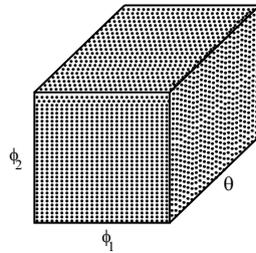


Figura 2.8: Valores propios reales no racionales

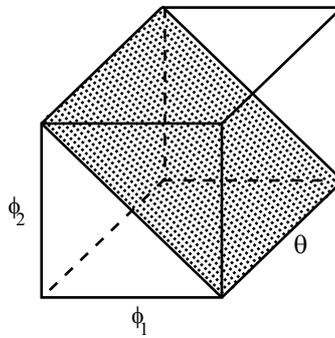


Figura 2.9: Dependencia racional de valores propios irracionales

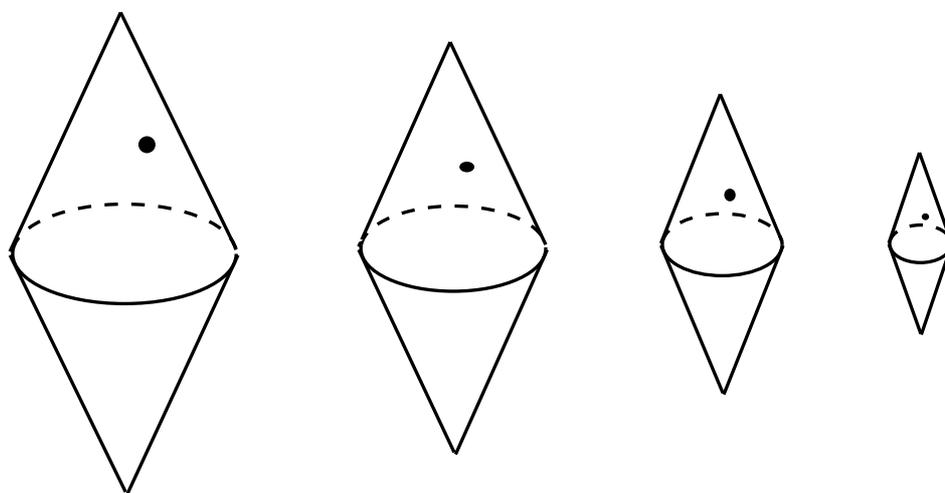


Figura 2.10: Valor propio complejo

# 3 Campos vectoriales de tipo Fuchs en $\mathbb{CP}^n$

Este capítulo lo dedicamos al estudio de los campos vectoriales en  $\mathbb{CP}^n$  con una singularidad de Fuchs, y su relación con los campos vectoriales lineales en  $\mathbb{C}^{n+1}$  obteniendo como resultado el teorema 3.2.

## 3.1. Geometría en $\mathbb{CP}^n$

Empezamos fijando la notación a utilizar.

El cociente de  $\mathbb{C}^{n+1} - \{(0, \dots, 0)\}$  por la relación de equivalencia

$$(x_0, x_1, \dots, x_n) \sim (\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \iff \bar{x}_i = \lambda x_i \quad \leq i \leq n$$

se llama el hiperplano proyectivo complejo denotado por  $\mathbb{CP}^n$ .

$\mathbb{CP}^n$  se puede describir de la siguiente forma:

Cubrimos  $\mathbb{CP}^n$  mediante  $(n + 1)$  abiertos definidos por

$$U_i = \{[x_0, \dots, x_n] / x_i \neq 0\} \quad i = 0, \dots, n. \tag{3.1}$$

y definimos los homeomorfismos

$$\phi_i : \mathbb{C}^n \rightarrow U_i$$

de la forma

$$\phi_i(u_1^i, \dots, u_n^i) = [u_1^i, \dots, 1^{(i)}, \dots, u_n^i] \quad 0 \leq i \leq n. \quad (3.2)$$

es decir

$$\begin{aligned} \phi_0(u_1^0, \dots, u_n^0) &= [1, u_1^0, \dots, u_n^0] \in U_0 \\ \phi_1(u_1^1, \dots, u_n^1) &= [u_1^1, 1, u_2^1, \dots, u_n^1] \in U_1 \\ &\vdots \\ \phi_n(u_1^n, \dots, u_n^n) &= [u_1^n, \dots, u_n^n, 1] \in U_n \end{aligned} \quad (3.3)$$

Consideremos el cambio de coordenadas

$$\phi_{ij}(u_1^i, \dots, u_n^i) = \phi_j^{-1} \circ \phi_i(u_1^i, \dots, u_n^i) \quad (3.4)$$

definido por

$$\begin{aligned} \phi_{ij}(u_1^i, \dots, u_n^i) &= \\ 1) \text{ Si } i < j & \\ \left( \frac{u_1^i}{u_j^i}, \frac{u_2^i}{u_j^i}, \dots, \frac{u_i^i}{u_j^i}, \frac{1}{u_j^i}, \frac{u_{i+1}^i}{u_j^i}, \dots, \frac{u_{j-1}^i}{u_j^i}, \frac{u_{j+1}^i}{u_j^i}, \dots, \frac{u_n^i}{u_j^i} \right) & \\ 2) \text{ Si } i > j & \\ \left( \frac{u_1^i}{u_{j+1}^i}, \frac{u_2^i}{u_{j+1}^i}, \dots, \frac{u_j^i}{u_{j+1}^i}, \frac{u_{j+2}^i}{u_{j+1}^i}, \dots, \frac{u_i^i}{u_{j+1}^i}, \frac{1}{u_{j+1}^i}, \frac{u_{i+1}^i}{u_{j+1}^i}, \dots, \frac{u_n^i}{u_{j+1}^i} \right) & \end{aligned} \quad (3.5)$$

para  $0 < i, j < n$ .

Al ser el cambio de coordenadas holomorfo, el atlas

$$\{(U_i, \phi_i^{-1}), i = 0, \dots, n\}$$

determina una única estructura compleja en  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  para la cual los  $\phi_i$  son biholomorfismos.

### 3.2. Curvas Algebraicas en $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$

Consideremos un polinomio de grado  $k$  en  $\mathbb{C}^n$

$$P(u_1, \dots, u_n) = \sum_{i_1+\dots+i_n=0}^{i_1+\dots+i_n=k} a_{i_1\dots i_n} (u_1)^{i_1} \dots (u_n)^{i_n} \quad (3.6)$$

Escribamos  $P$  en otra carta. Para ello calculemos

$$P \circ \phi_{i_0} (u_1^i, \dots, u_n^i) \quad (3.7)$$

Por la definición de  $\phi_{i_0}$  se tiene que (3.7) nos queda

$$(u_i^i)^{-k} \sum_{i_1+\dots+i_n=0}^{i_1+\dots+i_n=k} a_{i_1\dots i_n} (u_1^i)^{i_1} \dots (u_i^i)^{k-(i_1+\dots+i_n)} \dots (u_n^i)^{i_n} \quad (3.8)$$

Definamos los polinomios

$$P^i(u_1^i, \dots, u_n^i) = \sum_{i_1+\dots+i_n=0}^{i_1+\dots+i_n=k} a_{i_1\dots i_n} (u_1^i)^{i_1} \dots (u_i^i)^{k-(i_1+\dots+i_n)} \dots (u_n^i)^{i_n} \quad (3.9)$$

Entonces la curva algebraica  $\mathcal{S}_P$  en  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  viene definida por

$$\bigcup_{i=0}^n \phi_i \{ (u_1^i, \dots, u_n^i) : P^i(u_1^i, \dots, u_n^i) = 0 \} \quad (3.10)$$

Otra forma de caracterizar la curva es mediante un polinomio homogéneo  $H_P$ , de grado  $k$  en  $\mathbb{C}^{n+1}$ , definido por

$$\begin{aligned} H_P(x_0, \dots, x_n) &= x_0^k P\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right) \\ &= \sum_{i_1+\dots+i_n=0}^{i_1+\dots+i_n=k} a_{i_1\dots i_n} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} x_0^{k-(i_1+\dots+i_n)} \end{aligned} \quad (3.11)$$

### 3.3. 1-formas polinomiales en $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$

Consideremos la 1-forma polinómica

$$w(u_1, \dots, u_n) = \sum_{k=1}^n P_k(u_1, \dots, u_n) du_k \quad (3.12)$$

Sea la forma traspuesta  $\tilde{w}$  definida por

$$\tilde{w}(u_1^i, \dots, u_n^i) = (\phi_{ij}^* w)(u_1^i, \dots, u_n^i) = w(\phi_{ij}(u_1^i, \dots, u_n^i)) \quad (3.13)$$

Por la definición de  $\phi_{ij}$  vista en (3.5) tenemos que (3.13) nos queda

1. Si  $i < j$

$$w\left(\frac{u_1^i}{u_j^i}, \frac{u_2^i}{u_j^i}, \dots, \frac{u_i^i}{u_j^i}, \frac{1}{u_j^i}, \frac{u_{i+1}^i}{u_j^i}, \dots, \frac{u_{j-1}^i}{u_j^i}, \frac{u_{j+1}^i}{u_j^i}, \dots, \frac{u_n^i}{u_j^i}\right) = \sum_{k=1}^n P_k(\tilde{u}_1^i, \dots, \tilde{u}_n^i) d\tilde{u}_k^i \quad (3.14)$$

siendo

$$\tilde{u}_k^i = \begin{cases} \frac{u_k^i}{u_j^i} & \text{si } 1 \leq k \leq i \text{ ó } j+1 \leq k \leq n \\ \frac{1}{u_j^i} & \text{si } k = i+1 \\ \frac{u_{k-1}^i}{u_j^i} & \text{si } i+1 < k < j+1 \end{cases}$$

entonces

$$d\tilde{u}_k^i = \begin{cases} (u_j^i)^{-1} \left[ du_k^i - \frac{u_k^i}{u_j^i} du_j^i \right] & \text{si } 1 \leq k \leq i \text{ ó } j+1 \leq k \leq n \\ (u_j^i)^{-1} \left[ -\frac{1}{u_j^i} du_j^i \right] & \text{si } k = i+1 \\ (u_j^i)^{-1} \left[ du_{k-1}^i - \frac{u_{k-1}^i}{u_j^i} du_j^i \right] & \text{si } i+1 < k < j+1 \end{cases} \quad (3.15)$$

Sustituyendo estas expresiones en (3.14) nos queda

$$(u_j^i)^{-1} \left[ \sum_{k=1}^n P_k(\tilde{u}_1^i, \dots, \tilde{u}_n^i) \left( d\tilde{u}_k^i - \frac{\bar{u}_k^i}{u_j^i} du_j^i \right) \right] \quad (3.16)$$

donde

$$\bar{u}_k^i = \begin{cases} u_k^i & \text{si } 1 \leq k \leq i \text{ o } j+1 \leq k \leq n \\ 1 & \text{si } k = i+1 \\ u_{k-1}^i & \text{si } i+1 < k < j+1 \end{cases} \quad (3.17)$$

Por tanto la forma traspuesta nos queda

$$\tilde{w}(u_1^i, \dots, u_n^i) = (u_j^i)^{-2} \left[ \sum_{k=1}^n P_k(\tilde{u}_1^i, \dots, \tilde{u}_n^i) (u_j^i d\tilde{u}_k^i - \bar{u}_k^i du_j^i) \right] \quad (3.18)$$

siendo  $\bar{u}_k^i$  de la forma vista en (3.17)

2. Si  $i > j$  razonando de forma análoga se tiene que

$$\tilde{w}(u_1^i, \dots, u_n^i) = (u_{j+1}^i)^{-2} \left[ \sum_{k=1}^n P_k(\tilde{u}_1^i, \dots, \tilde{u}_n^i) (u_{j+1}^i d\bar{u}_k^i - \bar{u}_k^i du_{j+1}^i) \right] \quad (3.19)$$

siendo  $\bar{u}_k^i$  de la forma

$$\bar{u}_k^i = \begin{cases} u_k^i & si \quad 1 \leq k \leq j \quad o \quad i+1 \leq k \leq n \\ 1 & si \quad k = i \\ u_{k-1}^i & si \quad j < k < i \end{cases} \quad (3.20)$$

### 3.4. Campos vectoriales en $\mathbb{CP}^n$ con una singularidad de Fuchs

En esta sección vamos a estudiar la relación entre los campos vectoriales en  $\mathbb{CP}^n$  con una singularidad de Fuchs y los campos vectoriales lineales en  $\mathbb{C}^{n+1}$ .

En campos vectoriales sin singularidades se conoce [4] que:

**Teorema 3.1** *Todo campo vectorial holomorfo en  $\mathbb{CP}^n$  viene inducido por un campo vectorial lineal en  $\mathbb{C}^{n+1}$ .*

Para el caso  $n = 2$ , Saeed Zakeri[17] obtuvo la relación entre los campos vectoriales holomorfos en  $\mathbb{CP}^2$  y los lineales en  $\mathbb{C}^3$  mediante coordenadas. Aquí generalizaremos para  $n$ .

Concretaremos la relación entre campos vectoriales holomorfos en  $\mathbb{CP}^n$  y los lineales en  $\mathbb{C}^{n+1}$  mediante coordenadas. Necesitamos para ello las condiciones (3.33) que no hemos encontrado explicitadas

Sea  $X^i$  un campo vectorial holomorfo en  $\mathbb{CP}^n$ , el cual tiene la siguiente expresión en la carta afín  $U_i$

$$X^i = \sum_{p=1}^n f_p^i \frac{\partial}{\partial u_p^i} \quad (3.21)$$

con  $0 \leq i \leq n$ .

Entonces, para  $i = 0$  tenemos el campo vectorial

$$X^0(u_1^0, \dots, u_n^0) = f_1^0(u_1^0, \dots, u_n^0) \frac{\partial}{\partial u_1^0} + \dots + f_n^0(u_1^0, \dots, u_n^0) \frac{\partial}{\partial u_n^0} \quad (3.22)$$

luego, igualando expresiones tenemos el sistema

$$\left. \begin{aligned} \dot{u}_1^0 &= f_1^0(u_1^0, \dots, u_n^0) \\ &\vdots \\ \dot{u}_n^0 &= f_n^0(u_1^0, \dots, u_n^0) \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

o equivalentemente

$$\left. \begin{aligned} du_1^0 - f_1^0(u_1^0, \dots, u_n^0) dt &= 0 \\ &\vdots \\ du_n^0 - f_n^0(u_1^0, \dots, u_n^0) dt &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

Como

$$\left. \begin{aligned} u_1^0 &= \frac{1}{u_1^1} \\ u_2^0 &= \frac{u_2^1}{u_1^1} \\ &\vdots \\ u_n^0 &= \frac{u_n^1}{u_1^1} \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

entonces, al sustituir (3.25) en (3.24) nos queda

$$\left. \begin{aligned} d\left(\frac{1}{u_1^1}\right) - f_1^0\left(\frac{1}{u_1^1}, \frac{u_2^1}{u_1^1}, \dots, \frac{u_n^1}{u_1^1}\right) dt &= 0 \\ d\left(\frac{u_2^1}{u_1^1}\right) - f_2^0\left(\frac{1}{u_1^1}, \frac{u_2^1}{u_1^1}, \dots, \frac{u_n^1}{u_1^1}\right) dt &= 0 \\ &\vdots \\ d\left(\frac{u_n^1}{u_1^1}\right) - f_n^0\left(\frac{1}{u_1^1}, \frac{u_2^1}{u_1^1}, \dots, \frac{u_n^1}{u_1^1}\right) dt &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.26)$$

La primera ecuación de (3.26) es igual a

$$-(u_1^1)^{-2} d(u_1^1) - f_1^0\left(\frac{1}{u_1^1}, \frac{u_2^1}{u_1^1}, \dots, \frac{u_n^1}{u_1^1}\right) dt = 0$$

por tanto, tenemos la relación

$$\dot{u}_1^1 = - (u_1^1)^2 f_1^0 \left( \frac{1}{u_1^1}, \frac{u_2^1}{u_1^1}, \dots, \frac{u_n^1}{u_1^1} \right) \quad (3.27)$$

De la segunda ecuación del sistema (3.26) obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{u_1^1 du_2^1 - u_2^1 du_1^1}{(u_1^1)^2} - f_2^0 \left( \frac{1}{u_1^1}, \frac{u_2^1}{u_1^1}, \dots, \frac{u_n^1}{u_1^1} \right) dt &= 0 \\ (u_1^1)^{-1} (\dot{u}_2^1) - u_2^1 (u_1^1)^{-2} (\dot{u}_1^1) &= f_2^0 \left( \frac{1}{u_1^1}, \frac{u_2^1}{u_1^1}, \dots, \frac{u_n^1}{u_1^1} \right) \end{aligned}$$

Al sustituir en la relación anterior la expresión de  $\dot{u}_1^1$  vista en (3.27) obtenemos

$$(\dot{u}_2^1) = u_1^1 f_2^0 \left( \frac{1}{u_1^1}, \frac{u_2^1}{u_1^1}, \dots, \frac{u_n^1}{u_1^1} \right) - u_1^1 u_2^1 f_1^0 \left( \frac{1}{u_1^1}, \frac{u_2^1}{u_1^1}, \dots, \frac{u_n^1}{u_1^1} \right) \quad (3.28)$$

Razonando de forma análoga se tiene para la variable  $i$

$$(\dot{u}_i^1) = u_1^1 f_i^0 \left( \frac{1}{u_1^1}, \frac{u_2^1}{u_1^1}, \dots, \frac{u_n^1}{u_1^1} \right) - u_1^1 u_i^1 f_1^0 \left( \frac{1}{u_1^1}, \frac{u_2^1}{u_1^1}, \dots, \frac{u_n^1}{u_1^1} \right) \quad (3.29)$$

para  $2 \leq i \leq n$ .

Por tanto tenemos las siguientes relaciones entre coeficientes

$$\begin{aligned} f_1^1(u_1^1, \dots, u_n^1) &= - (u_1^1)^2 f_1^0 \left( \frac{1}{u_1^1}, \frac{u_2^1}{u_1^1}, \dots, \frac{u_n^1}{u_1^1} \right) \\ f_i^1(u_1^1, \dots, u_n^1) &= u_1^1 f_i^0 \left( \frac{1}{u_1^1}, \frac{u_2^1}{u_1^1}, \dots, \frac{u_n^1}{u_1^1} \right) - u_1^1 u_i^1 f_1^0 \left( \frac{1}{u_1^1}, \frac{u_2^1}{u_1^1}, \dots, \frac{u_n^1}{u_1^1} \right) \end{aligned} \quad (3.30)$$

Consideremos la expansión en series de potencias

$$f_i^0(u_1^0, \dots, u_n^0) = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0} a_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^i (u_1^0)^{\alpha_1} \dots (u_n^0)^{\alpha_n}$$

Al sustituir en (3.30) obtendremos

$$\begin{aligned} f_1^1(u_1^1, \dots, u_n^1) &= - (u_1^1)^2 \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0} a_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^1 \left( \frac{1}{u_1^1} \right)^{\alpha_1} \left( \frac{u_2^1}{u_1^1} \right)^{\alpha_2} \dots \left( \frac{u_n^1}{u_1^1} \right)^{\alpha_n} \\ &= - (u_1^1)^2 \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0} a_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^1 (u_1^1)^{-(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)} (u_2^1)^{\alpha_2} \dots (u_n^1)^{\alpha_n} \\ &= - \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0} a_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^1 (u_1^1)^{2 - (\alpha_1 + \dots + \alpha_n)} (u_2^1)^{\alpha_2} \dots (u_n^1)^{\alpha_n} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Como  $f_1^1$  es holomorfa se tiene que

$$a_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^1 = 0 \quad (3.32)$$

para todo  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  tales que  $2 - (\alpha_1, \dots, \alpha_n) < 0$ .

Razonando de forma similar para las otras componentes se tiene que

$$a_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^i = a_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^1 = 0$$

Como conclusión podemos concluir que si  $X$  es un campo vectorial holomorfo en  $\mathbb{CP}^n$  entonces  $X$  viene definido por:

$$X(u_1, \dots, u_n) = \sum_{i=1}^n \left( a_0^i + \sum_{j=1}^n (a_{e_j}^i u_j + a_{e_{ij}}^i u_j u_i) \right) \frac{\partial}{\partial u_i} \quad (3.33)$$

donde

$$e_j = (0, \dots, 0, 1^{(j)}, 0, \dots, 0)$$

$$0 = (0, \dots, 0)$$

$$e_{ij} = e_i + e_j$$

$$a_{e_{ii}}^i = a_{e_{ki}}^k, \quad \forall k \neq i$$

Consideremos el campo vectorial lineal en  $\mathbb{C}^{n+1}$

$$\bar{X}(x_0, x_1, \dots, x_n) = \left( \sum_{j=0}^n \alpha_{0j} x_j \right) \frac{\partial}{\partial x_0} + \dots + \left( \sum_{j=0}^n \alpha_{nj} x_j \right) \frac{\partial}{\partial x_n} \quad (3.34)$$

Introducimos las nuevas variables

$$u_i = \frac{x_i}{x_0} \quad i = 1, \dots, n \quad (3.35)$$

La derivada de  $u_1$  es

$$\dot{u}_1 = \frac{x_0 \dot{x}_1 - x_1 \dot{x}_0}{(x_0)^2} = \frac{1}{x_0} (\dot{x}_1) - \left( \frac{x_1}{x_0^2} \right) (\dot{x}_0) \quad (3.36)$$

Sustituyendo las expresiones de  $\dot{x}_1$  y  $\dot{x}_0$  en (3.36) nos queda

$$\dot{u}_1 = \frac{1}{x_0} [\alpha_{10}x_0 + \alpha_{11}x_1 + \dots + \alpha_{1n}x_n] - \frac{x_1}{(x_0)^2} [\alpha_{00}x_0 + \alpha_{01}x_1 + \dots + \alpha_{0n}x_n] \quad (3.37)$$

que podemos reescribir:

$$\dot{u}_1 = \alpha_{10} + (\alpha_{11} - \alpha_{00})u_1 + \alpha_{12}u_2 + \dots + \alpha_{1n}u_n - \alpha_{01}u_1^2 - \alpha_{02}u_1u_2 - \dots - \alpha_{0n}u_1u_n \quad (3.38)$$

Razonando de forma análoga para el resto de variables  $u_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) se tiene que

$$\dot{u}_i = \alpha_{i0} + \sum_{j=1}^n ((\alpha_{ij} - \delta_{ij}\alpha_{00})u_j - \alpha_{0j}u_iu_j) \quad (3.39)$$

donde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Tenemos, pues, que el campo vectorial lineal (3.34) de  $\mathbb{C}^{n+1}$  determina el siguiente campo vectorial en  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$

$$X(u_1, \dots, u_n) = \sum_{i=1}^n \left( \alpha_{i0} + \sum_{j=1}^n ((\alpha_{ij} - \delta_{ij}\alpha_{00})u_j - \alpha_{0j}u_iu_j) \right) \frac{\partial}{\partial u_i} \quad (3.40)$$

Igualando las expresiones de (3.33) y (3.40) se obtiene

$$a_0^i + \sum_{j=1}^n (a_{e_j}^i u_j + a_{e_{ij}}^i u_j u_i) = \alpha_{i0} + \sum_{j=1}^n ((\alpha_{ij} - \delta_{ij}\alpha_{00})u_j - \alpha_{0j}u_iu_j) \quad (3.41)$$

$1 \leq i \leq n$ . Las relaciones entre los coeficientes para cada  $i$  son

$$\begin{aligned} a_0^i &= \alpha_{i0} \\ a_{e_j}^i &= \alpha_{ij} - \delta_{ij}\alpha_{00} \\ a_{e_{ij}}^i &= -\alpha_{0j} \end{aligned} \quad (3.42)$$

con  $1 \leq j \leq n$ .

Por tanto, los coeficientes  $\alpha_{ij}$  del campo vectorial (3.34) verifican

$$\begin{aligned} \alpha_{i0} &= a_0^i \\ \alpha_{ij} &= a_{e_j}^i + \delta_{ij}\alpha_{00} \\ \alpha_{0j} &= -a_{e_{ij}}^i \end{aligned} \quad (3.43)$$

con  $1 \leq j \leq n$ .

Luego (3.34) lo podemos escribir de la forma

$$\bar{X}(x_0, x_1, \dots, x_n) = \left( x_0 - \sum_{i=1}^n a_{e_{1i}}^1 x_i \right) \frac{\partial}{\partial x_0} + \sum_{i=1}^n \left( a_0^i x_0 + \sum_{j=1}^n (a_{e_j}^i + \delta_{ij}) x_j \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (3.44)$$

siendo

$$e_j = (0, \dots, 0, 1^{(j)}, 0, \dots, 0)$$

$$0 = (0, \dots, 0)$$

$$e_{ij} = e_i + e_j$$

$$a_{e_{ii}}^i = a_{e_{ki}}^k, \quad \forall k \neq i$$

Por tanto, todo campo vectorial holomorfo en  $\mathbb{CP}^n$  viene inducido por un campo vectorial lineal en  $\mathbb{C}^{n+1}$ .

Veamos que para el caso en el que tenemos una singularidad de Fuchs se obtiene un resultado equivalente con cálculos similares.

**Teorema 3.2** *Todo campo vectorial en  $\mathbb{CP}^n$  con una singularidad de Fuchs, viene inducido por un campo vectorial lineal en  $\mathbb{C}^{n+1}$  con una singularidad de Fuchs.*

*Demostración.* Consideremos el campo vectorial lineal en  $\mathbb{C}^{n+1}$  con una singularidad de Fuchs

$$\bar{X}(x_0, x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{z} \left[ \left( \sum_{j=0}^n \alpha_{0j} x_j \right) \frac{\partial}{\partial x_0} + \dots + \left( \sum_{j=0}^n \alpha_{nj} x_j \right) \frac{\partial}{\partial x_n} \right] \quad (3.45)$$

Como en el caso no singular, introducimos las variables

$$u_i = \frac{x_i}{x_0} \quad i = 1, \dots, n \quad (3.46)$$

Las derivadas de estas nuevas variables serán

$$\dot{u}_i = \frac{x_0 \dot{x}_i - x_i \dot{x}_0}{(x_0)^2} = \frac{1}{x_0} (\dot{x}_i) - \left( \frac{x_i}{x_0^2} \right) (\dot{x}_0) \quad (3.47)$$

para  $1 \leq i \leq n$ .

Al sustituir las expresiones de  $x_i$  en (3.47) obtenemos

$$\dot{u}_i = \frac{1}{z} \left[ \alpha_{i0} + \sum_{j=1}^n ((\alpha_{ij} - \delta_{ij}\alpha_{00}) u_j - \alpha_{0j} u_i u_j) \right] \quad (3.48)$$

donde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Por tanto tenemos el siguiente campo vectorial en  $\mathbb{CP}^n$

$$X(u_1, \dots, u_n) = \frac{1}{z} \left[ \sum_{i=1}^n \left( \alpha_{i0} + \sum_{j=1}^n ((\alpha_{ij} - \delta_{ij}\alpha_{00}) u_j - \alpha_{0j} u_i u_j) \right) \frac{\partial}{\partial u_i} \right] \quad (3.49)$$

que es un campo vectorial con una singularidad de Fuchs.  $\square$



# 4 La ecuación de Ince-Hill.

## 4.1. Introducción

En este capítulo vamos a estudiar la ecuación de Ince (1.5) escrita en la forma

$$(1 + a \cos(2x)) \frac{d^2 y}{dx^2} + b \operatorname{sen}(2x) \frac{dy}{dx} + (c + d \cos(2x)) y = 0 \quad (4.1)$$

donde  $a, b, c$  y  $d$  son parámetros reales, y  $|a| \leq 1$ .

### 4.1.1. Resultados conocidos.

Recordemos los siguientes resultados [9] sobre la ecuación (4.1).

**Teorema 4.1** *Si la ecuación (4.1) tiene dos soluciones linealmente independientes de periodo  $\pi$ , entonces el polinomio*

$$Q(\mu) = 2a\mu^2 - b\mu - \frac{d}{2} \quad (4.2)$$

*tiene un cero en uno de los puntos  $\mu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$*

*Sin embargo, si posee dos soluciones de periodo  $2\pi$ , entonces es el polinomio*

$$Q^*(\mu) = 2Q\left(\mu - \frac{1}{2}\right) = a(2\mu - 1)^2 - b(2\mu - 1) - d \quad (4.3)$$

*el que se anula para uno de los valores  $\mu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$*

**Teorema 4.2** *Para cualesquiera valores de los parámetros  $a, b$  y  $d$  de la ecuación (4.1) con  $|a| \leq 1$  existen infinitos valores del parámetro  $c$  tal que la ecuación tiene una solución par o impar de periodo  $\pi$  o  $2\pi$ .*

#### 4.1.2. Clasificación según coeficientes.

Vamos a recordar los conceptos de singularidad elemental, regular e irregular de una ecuación diferencial lineal de orden  $n$  [8].

Consideremos la ecuación

$$L(y) \equiv p_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + p_n(x) y = 0 \quad (4.4)$$

donde los  $p_i$  son funciones polinómicas  $0 \leq i \leq n$ .

**DEFINICIÓN 4.1** *Diremos que  $x_0$  es una singularidad de la ecuación (4.4) si  $x_0$  es una raíz del polinomio  $p_0$ .*

Sea

$$y(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i x^{r+i} \quad (4.5)$$

una solución de la ecuación (4.4).

Sustituyamos (4.5) en (4.4) y consideremos el coeficiente de la  $x$  de menor grado, que denotaremos por  $G(r)$ . Entonces

**DEFINICIÓN 4.2** *Diremos que  $0$  es una singularidad regular de (4.4) si el grado de  $G(r)$  es igual al orden de (4.4). Si es menor diremos que  $0$  es una singularidad irregular.*

En el caso en que el orden de (4.4) es  $n = 2$  tenemos

**DEFINICIÓN 4.3** *A la diferencia de soluciones de la ecuación  $G(r) = 0$  se le denomina diferencia de exponentes.*

DEFINICIÓN 4.4 Diremos que 0 es una singularidad elemental de (4.4) si es regular y la diferencia de exponentes es  $\frac{1}{2}$ .

Vamos a estudiar las singularidades de la ecuación (4.1) transformándola en una ecuación algebraica. Para ello consideraremos el tiempo módulo  $2\pi$ , y efectuamos el cambio

$$x = \cos \theta$$

con ello la ecuación (4.4) nos queda, considerando

$$\text{sen } \theta = +\sqrt{1 - \cos^2 \theta}$$

de la forma

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \left( \frac{(a-b)x^2 + x + b}{(1+ax)(1-x^2)} \right) \frac{dy}{dx} + \left( \frac{c+dx}{(1+ax)(1-x^2)} \right) y = 0 \quad (4.6)$$

suponiendo que  $a, b$  y  $d$  no se anulan simultáneamente.

El número de singularidades de (4.6) lo representaremos por  $[e, r, i]$  donde  $e, r, i$  es el número de singularidades elementales, regulares e irregulares de (4.6) respectivamente.

**Teorema 4.3** Dada la ecuación (4.6) se obtiene la siguiente clasificación en función de sus singularidades y de sus parámetros, (ver cuadro (4.1)) siendo

$[4, 0, 0]$  un caso particular de la Ecuación de Lamé.

$[3, 1, 0]$  Ecuación de Lamé en forma algebraica.

$[2, 2, 0]$  Ecuación de Ince.

$[2, 0, 1]$  Ecuación de Mathieu.

$[1, 2, 0]$  Ecuación Asociada de Legendre.

$[2, 1, 0]$  Ecuación de Gegenbauer.

a	b	c	d	[ , , ]
$\neq 0, \pm 1$	$-\frac{a}{2}$		0	[4, 0, 0]
$\neq 0, \pm 1$	$-\frac{a}{2}$		$\neq 0$	[3, 1, 0]
$\neq 0, \pm 1$	$\neq -\frac{a}{2}$		$\frac{a^2-4b^2}{16a}$	[3, 1, 0]
$\neq 0, \pm 1$	$\neq -\frac{a}{2}$		$\neq \frac{a^2-4b^2}{16a}$	[2, 2, 0]
0				[2, 0, 1]
1		$\frac{4b^2+8b+1}{16}$	$\frac{1-4b^2}{16}$	[3, 0, 0]
1		$\frac{b^2+b+2d}{2}$	$\neq \frac{1-4b^2}{16}$	[2, 1, 0]
1		$\neq \frac{4b^2+8b+1}{16}$	$\frac{1-4b^2}{16}$	[2, 1, 0]
1		$\neq \frac{b^2+b+2d}{2}$	$\neq \frac{1-4b^2}{16}$	[1, 2, 0]
-1		$\frac{4b^2-8b+1}{16}$	$\frac{4b^2-1}{16}$	[3, 0, 0]
-1		$\frac{b^2-b-2d}{2}$	$\neq \frac{4b^2-1}{16}$	[2, 1, 0]
-1		$\neq \frac{4b^2-8b+1}{16}$	$\frac{4b^2-1}{16}$	[2, 1, 0]
-1		$\neq \frac{b^2-b-2d}{2}$	$\neq \frac{4b^2-1}{16}$	[1, 2, 0]

Cuadro 4.1: Clasificación de Singularidades

*Demostración.*

La demostración se basa en métodos elementales que por completitud se exponen en el apéndice.

## 4.2. Caso Hamiltoniano

En esta sección vamos a enunciar algunos resultados que hemos obtenido sobre la ecuación (4.1) en el caso general en el que  $a \neq \{0, \pm 1\}$  siendo  $a = b$ .

**Proposición 4.1** *Si  $a = b$  entonces la ecuación (4.1) se puede expresar como un sistema Hamiltoniano*

$$H = rv^2 + \frac{y^2}{8r^2} (c + d \cos x) \quad (4.7)$$

con

$$2r = 1 + a \cos x$$

*Demostración.* Si  $a = b$  entonces la ecuación (4.1) quedaría

$$(1 + a \cos x) y'' + (a \sin x) y' + (c + d \cos x) y = 0 \quad (4.8)$$

Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} y' &= 2rv \\ v' &= -\frac{(c + d \cos x)}{(2r)^2} y \end{aligned} \quad (4.9)$$

Si definimos la Hamiltoniana como en (4.7) es claro que

$$\frac{\partial H}{\partial v} = 2rv = y' \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{2y}{8r^2} (c + d \cos x) = \frac{y}{(2r)^2} (c + d \cos x) = -v'$$

Veamos ahora que el sistema (4.10) representa la ecuación de Ince en el caso en el que  $a = b$ .

De la primera ecuación de (4.10) deducimos que

$$v = \frac{y'}{2r}$$

derivando esta expresión e igualando con (4.10) se tiene que

$$2ry'' + (a \operatorname{sen} x) y' + (c + d \cos x) y = 0 \quad (4.11)$$

□

**Proposición 4.2** *El sistema Hamiltoniano*

$$\begin{aligned} y' &= 2rv \\ v' &= -\frac{(c + d \cos x)}{(2r)^2} y \end{aligned} \quad (4.12)$$

posee las simetrías

$$\begin{aligned} S_1(y, v, x) &= (y, -v, -x) \\ S_2(y, v, x) &= (-y, v, -x) \end{aligned} \quad (4.13)$$

*Demostración.*

1. Veamos la simetría  $S_1(y, v, x) = (y, -v, -x)$ .

Al sustituir, en el sistema (4.12),  $v$  por  $-v$  y  $x$  por  $-x$ , obtenemos

$$\frac{dy}{d(-x)} = -y = (1 + a \cos(-x)) (-v) = -(1 + a \cos(x)) v$$

De forma similar para la segunda ecuación de (4.12).

$$\frac{d(-v)}{d(-x)} = v' = -\frac{(c + d \cos(-x))}{(1 + a \cos(-x))^2} y = -\frac{(c + d \cos(x))}{(1 + a \cos(x))^2} y$$

Por tanto, el sistema (4.12) posee la simetría respecto al eje  $OY$

2. Análogamente para la simetría  $S_2(y, v, x) = (-y, v, -x)$ .

Al sustituir  $y$  por  $-y$  y  $x$  por  $-x$  en (4.12) la primera ecuación nos queda

$$\frac{d(-y)}{d(-x)} = y' = (1 + a \cos(-x))v = (1 + a \cos x)v$$

La segunda ecuación quedaría

$$\frac{dv}{d(-x)} = -v = -\frac{(c + d \cos(-x))}{(1 + a \cos(-x))^2}(-y) = \frac{(c + d \cos(x))}{(1 + a \cos(x))^2}y$$

Por tanto, se tiene la simetría respecto al eje  $OV$ .

□

**Proposición 4.3** *Consideremos la aplicación*

$$\begin{aligned} M : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (y(0), v(0)) &\longmapsto (y(2\pi), v(2\pi)) \end{aligned}$$

que expresamos mediante la matriz

$$A = \begin{pmatrix} y(1, 0; 2\pi) & y(0, 1; 2\pi) \\ v(1, 0; 2\pi) & v(0, 1; 2\pi) \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

Se cumple que  $y(1, 0; 2\pi) = v(0, 1; 2\pi)$ .

*Demostración.* Denotemos por  $\Delta$  la traza de la matriz  $A$  y por  $\mu_i$  los valores propios de  $A$ .

1.  $|\Delta| < 2$

Por el teorema de Floquet [9], y viendo la forma de la ecuación [11] cualquier solución se puede escribir de la forma

$$y(x) = A \cos(\alpha x)p(x) + B \operatorname{sen}(\alpha x)q(x) \quad (4.15)$$

donde  $p(x)$  y  $q(x)$  son periódicas de periodo  $2\pi$ .

a) Calculemos  $y(1, 0; 2\pi)$ .

Tenemos que  $y(0) = 1$  y  $v(0) = 0$ , entonces de (4.10) se tiene que  $y'(0) = 0$ .

Por otra parte, de (4.15) obtenemos  $y(0) = Ap(0)$ , al igualar con el valor de  $y(0)$  que tenemos concluimos que

$$Ap(0) = 1$$

Derivando la expresión (4.15) se tiene

$$y'(x) = [-A\alpha p(x) + Bq'(x)] \operatorname{sen}(\alpha x) + [B\alpha q(x) + Ap'(x)] \operatorname{cos}(\alpha x) \quad (4.16)$$

por tanto

$$y'(0) = B\alpha q(0) + Ap'(0)$$

como  $y'(0) = 0$  entonces obtenemos la relación

$$0 = B\alpha q(0) + Ap'(0)$$

Tenemos, pues, las siguientes igualdades

$$\left. \begin{aligned} 1 &= Ap(0) \\ 0 &= B\alpha q(0) + Ap'(0) \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

Por otra parte, de (4.15)

$$\left. \begin{aligned} y(1, 0; 2\pi) &= A \operatorname{cos}(2\pi\alpha)p(0) + B \operatorname{sen}(2\pi\alpha)q(0) \\ y(1, 0; -2\pi) &= A \operatorname{cos}(2\pi\alpha)p(0) - B \operatorname{sen}(2\pi\alpha)q(0) \end{aligned} \right\} \quad (4.18)$$

por simetría sabemos que

$$y(1, 0; 2\pi) = y(1, 0; -2\pi)$$

entonces, de (4.18) se tiene

$$B \operatorname{sen}(2\pi\alpha)q(0) = 0 \quad (4.19)$$

al sustituir (4.19) en (4.15) obtenemos

$$y(1, 0; 2\pi) = \cos(2\pi\alpha) \quad (4.20)$$

b) Calculemos  $v(0, 1; 2\pi)$ .

Tenemos que  $y(0) = 0$  y  $v(0) = 1$ , entonces de (4.10) se tiene que  $y'(0) = 1 + a$ .

Por otra parte, de (4.15) obtenemos  $y(0) = Ap(0)$ , de (4.10) y (4.16) se deduce que

$$v(0) = \frac{[B\alpha q(0) + Ap'(0)]}{1 + a} \quad (4.21)$$

Obtenemos las siguientes relaciones

$$\left. \begin{aligned} 0 &= Ap(0) \\ (1 + a) &= B\alpha q(0) + Ap'(0) \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} v(0, 1; 2\pi) &= \frac{1}{1 + a} ([-A\alpha p(0) + Bq'(0)] \operatorname{sen}(2\pi\alpha) \\ &\quad + [B\alpha q(0) + Ap'(0)] \operatorname{cos}(2\pi\alpha)) \end{aligned} \quad (4.23)$$

y

$$\begin{aligned} v(0, 1; -2\pi) &= \frac{1}{1 + a} (-[-A\alpha p(0) + Bq'(0)] \operatorname{sen}(2\pi\alpha) \\ &\quad + [B\alpha q(0) + Ap'(0)] \operatorname{cos}(2\pi\alpha)) \end{aligned} \quad (4.24)$$

por simetría se tiene que

$$v(0, 1; 2\pi) = v(0, 1; -2\pi)$$

entonces, igualando las expresiones de (4.23) y (4.24) obtenemos la relación

$$[-A\alpha p(0) + Bq'(0)] \operatorname{sen}(2\pi\alpha) = 0 \quad (4.25)$$

por tanto (4.23) es

$$v(0, 1; 2\pi) = \frac{1}{1+a} [B\alpha q(0) + Ap'(0)] \cos(2\pi\alpha) \quad (4.26)$$

Teniendo en cuenta las relaciones (4.22) obtenemos

$$v(0, 1; 2\pi) = \cos(2\pi\alpha) \quad (4.27)$$

de (4.20) y (4.27) tenemos que

$$y(1, 0; 2\pi) = v(0, 1; 2\pi) = \cos(2\pi\alpha) \quad (4.28)$$

2.  $|\Delta| = 2$  con  $\mu_1 = \mu_2 = 1$

La forma general de la solución es en este caso

$$y(x) = Ap(x) + Bxq(x) \quad (4.29)$$

donde  $p(x)$  y  $q(x)$  son periódicas de periodo  $2\pi$ .

a) Calculemos  $y(1, 0; 2\pi)$ .

Tenemos que  $y(0) = 1$  y  $v(0) = 0$ , entonces de (4.10) se tiene que

$$y'(0) = 0$$

De (4.29) se deduce que

$$y(0) = Ap(0)$$

por tanto se tiene

$$1 = Ap(0)$$

Derivando la expresión (4.29) obtenemos

$$y'(x) = Ap'(x) + Bq(x) + Bxq'(x) \quad (4.30)$$

entonces

$$y'(0) = Ap'(0) + Bq(0)$$

es decir

$$\left. \begin{aligned} 1 &= Ap(0) \\ 0 &= Ap'(0) + Bq(0) \end{aligned} \right\} \quad (4.31)$$

Por otra parte, y teniendo en cuenta (4.29) obtenemos

$$\left. \begin{aligned} y(1, 0; 2\pi) &= Ap(0) + 2\pi Bq(0) \\ y(1, 0; -2\pi) &= Ap(0) - 2\pi Bq(0) \end{aligned} \right\} \quad (4.32)$$

por simetría

$$y(1, 0; 2\pi) = y(1, 0; -2\pi)$$

luego por (4.32) se tiene que

$$Bq(0) = 0$$

Por tanto, de (4.29) y (4.31) obtenemos que

$$y(1, 0; 2\pi) = Ap(0) = 1 \quad (4.33)$$

b) Calculemos  $v(0, 1; 2\pi)$ .

Sabemos que  $y(0) = 0$  y  $v(0) = 1$ , luego por (4.10) tenemos que  $y'(0) = 1$ .

De (4.29) obtenemos que

$$y(0) = Ap(0)$$

entonces

$$0 = Ap(0)$$

De (4.10) se tiene que

$$v(x) = \frac{y'(x)}{1 + a \cos x} \quad (4.34)$$

por tanto

$$v(0) = 1 = \frac{y'(0)}{1+a} = \frac{1}{1+a} [Ap'(0) + Bq(0)] \quad (4.35)$$

Tenemos, pues, las relaciones

$$\left. \begin{aligned} 0 &= Ap(0) \\ 1 &= \frac{1}{1+a} [Ap'(0) + Bq(0)] \end{aligned} \right\} \quad (4.36)$$

Considerando (4.10) y (4.30) se tiene

$$\left. \begin{aligned} v(0, 1; 2\pi) &= \frac{1}{1+a} [Ap'(0) + B(q(0) + 2\pi q'(0))] \\ v(0, 1; -2\pi) &= \frac{1}{1+a} [Ap'(0) + B(q(0) - 2\pi q'(0))] \end{aligned} \right\} \quad (4.37)$$

por simetría

$$v(0, 1; 2\pi) = v(0, 1; -2\pi)$$

luego por (4.37) se tiene que

$$2\pi Bq'(0) = 0$$

Por tanto, de (4.29) y (4.36) obtenemos que

$$v(0, 1; 2\pi) = \frac{1}{1+a} [Ap'(0) + Bq(0)] = 1 \quad (4.38)$$

luego de (4.33) y (4.38) concluimos que

$$y(1, 0; 2\pi) = v(0, 1; 2\pi) = 1 \quad (4.39)$$

3.  $|\Delta| = 2$  con  $\mu_1 = \mu_2 = -1$ .

La forma general de la solución es en este caso:

$$y(x) = [Ap_1(x) + Bxp_2(x)] \cos\left(\frac{x}{2}\right) + [Aq_1(x) + Bxq_2(x)] \sin\left(\frac{x}{2}\right) \quad (4.40)$$

Al derivar (4.40) nos queda

$$\begin{aligned}
 y'(x) = & \left[ A \left( p_1'(x) + \frac{1}{2}q_1(x) \right) + B \left( p_2(x) + xp_2'(x) + \frac{1}{2}xq_2(x) \right) \right] \cos\left(\frac{x}{2}\right) \\
 & + \left[ A \left( q_1'(x) - \frac{1}{2}p_1(x) \right) + B \left( q_2(x) + xq_2'(x) - \frac{1}{2}xp_2(x) \right) \right] \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)
 \end{aligned}
 \tag{4.41}$$

a) Calculemos  $y(1, 0, 2\pi)$

Tenemos que  $y(0) = 1$  y  $v(0) = 0$ , entonces por (4.10)

$$y'(0) = 0$$

De (4.40)

$$y(0) = Ap_1(x)$$

entonces

$$1 = Ap_1(x)$$

Por otra parte, de (4.41), deducimos que

$$y'(0) = A \left( p_1'(0) + \frac{1}{2}q_1(0) \right) + Bp_2(0)$$

luego

$$0 = A \left( p_1'(0) + \frac{1}{2}q_1(0) \right) + Bp_2(0)$$

Por tanto se cumplen las relaciones

$$\left. \begin{aligned}
 1 &= Ap_1(0) \\
 0 &= A \left( p_1'(0) + \frac{1}{2}q_1(0) \right) + Bp_2(0)
 \end{aligned} \right\} \tag{4.42}$$

De (4.40) se tiene

$$\left. \begin{aligned}
 y(1, 0; 2\pi) &= [Ap_1(0) + 2\pi Bp_2(0)](-1) \\
 y(1, 0; -2\pi) &= [Ap_1(0) - 2\pi Bp_2(0)](-1)
 \end{aligned} \right\} \tag{4.43}$$

por simetría sabemos que

$$y(1, 0; 2\pi) = y(1, 0; -2\pi)$$

luego por (4.43) se tiene que

$$2\pi Bp_2(0) = 0$$

Por tanto, de (4.40) y (4.42) obtenemos que

$$y(1, 0; 2\pi) = [Ap_1(0)](-1) = 1(-1) = -1 \quad (4.44)$$

b) Calculemos  $v(0, 1; 2\pi)$ .

Sabemos que  $y(0) = 0$  y  $v(0) = 1$ , luego por (4.40) se tiene que

$$0 = Ap_1(0)$$

por otra parte de (4.10)

$$v(x) = \frac{y'(x)}{1 + a \cos x} \quad (4.45)$$

entonces

$$v(0) = \frac{y'(0)}{1 + a} = \frac{1}{1 + a} \left[ A \left( p_1'(0) + \frac{1}{2}q_1(0) \right) + Bp_2(0) \right] \quad (4.46)$$

luego

$$1 + a = A \left[ p_1'(0) + \frac{1}{2}q_1(0) \right] Bp_2(0) \quad (4.47)$$

Tenemos, pues las relaciones

$$\left. \begin{aligned} 0 &= Ap_1(0) \\ 1 + a &= \left[ Ap_1'(0) + \frac{1}{2}q_1(0) \right] + Bp_2(0) \end{aligned} \right\} \quad (4.48)$$

Considerando (4.10) y (4.41) se tiene

$$\left. \begin{aligned} v(0, 1; 2\pi) &= \frac{1}{1+a} \left[ A \left( p_1'(0) + \frac{1}{2} q_1(0) \right) \right. \\ &\quad \left. + B (p_2(0) + 2\pi p_2'(0) + \pi q_2(0)) \right] (-1) \\ v(0, 1; -2\pi) &= \frac{1}{1+a} \left[ A \left( p_1'(0) + \frac{1}{2} q_1(0) \right) \right. \\ &\quad \left. + B (p_2(0) - 2\pi p_2'(0) - \pi q_2(0)) \right] (-1) \end{aligned} \right\} \quad (4.49)$$

por simetría

$$v(0, 1; 2\pi) = v(0, 1; -2\pi)$$

luego por (4.49) se tiene que

$$B (2\pi p_2'(0) + \pi q_2(0)) = 0$$

Por tanto, de (4.40) y (4.48) obtenemos que

$$\begin{aligned} v(0, 1; 2\pi) &= \frac{1}{1+a} \left[ A \left( p_1'(0) + \frac{1}{2} q_1(0) \right) + B p_2(0) \right] (-1) \\ &= \frac{1}{1+a} (1+a) (-1) = -1 \end{aligned} \quad (4.50)$$

luego de (4.44) y (4.50) concluimos que

$$y(1, 0; 2\pi) = v(0, 1; 2\pi) = -1 \quad (4.51)$$

4. Cuando  $|\Delta| > 2$  la forma general de la solución es

$$y(x) = A q_1(x) \cosh(\alpha x) + B q_2(x) \sinh(\alpha x) \quad (4.52)$$

razonando de forma análoga a los casos anteriores obtenemos las simetrías.

□

**Proposición 4.4** Si en (4.1) se verifica que  $c > |d|$ , y consideramos  $R$  y  $\theta$  las coordenadas polares en el plano  $(y, v)$ , entonces  $\bar{\theta}$  (alzamiento universal del ángulo  $\theta$ ) es estrictamente decreciente en toda trayectoria.

Además, si  $a$  es próximo a  $-1$ , entonces  $\bar{\theta}(1, 0, 2\pi, a)$  es una función decreciente respecto de  $a$ .

*Demostración.* Las ecuaciones

$$\begin{aligned} y' &= (1 + a \cos x)v \\ v' &= -\frac{c + d \cos x}{(1 + a \cos x)^2}y \end{aligned} \quad (4.53)$$

en coordenadas polares quedarían

$$\begin{aligned} R' &= R \cos \theta \sin \theta \left[ (1 + a \cos x) - \frac{c + d \cos x}{(1 + a \cos x)^2} \right] \\ \theta' &= - \left[ \cos^2 \theta \left( \frac{c + d \cos x}{(1 + a \cos x)^2} \right) + \sin^2 \theta (1 + a \cos x) \right] \end{aligned} \quad (4.54)$$

Como  $c > |d|$  entonces

$$c + d \cos x > 0$$

para cualquier valor de  $x$ . Además por ser  $|a| < 1$  se tiene que

$$1 + a \cos x > 0 \quad \forall x$$

por tanto se puede afirmar que

$$\theta' < 0$$

Consideremos

$$u = \frac{\partial \theta}{\partial a}$$

entonces se tiene

$$u' = \operatorname{sen}(2\theta) \left[ \frac{c + d \cos x}{(1 + a \cos x)^2} - (1 + a \cos x) \right] u \\ + \left[ 2 \cos^2 \theta \left( \frac{c + d \cos x}{(1 + a \cos x)^3} \right) - \operatorname{sen}^2 \theta \right] \cos x \quad (4.55)$$

Si inicialmente  $\theta(0) = 0$  entonces

$$u'(0) = \frac{2(c + d)}{(1 + a)^3} \quad (4.56)$$

como  $c > |d|$ , entonces  $c + d > 0$ , por tanto

$$u'(0) \rightarrow \infty$$

cuando  $a \rightarrow -1$ .

Para regularizar consideremos el cambio

$$z = \frac{u}{1 + |u|} \quad (4.57)$$

es decir

$$u = \frac{z}{1 - |z|} \quad (4.58)$$

entonces

$$\frac{dz}{du} = \frac{1}{(1 + |u|)^2} = (1 - |z|)^2 \quad (4.59)$$

luego

$$z' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{du} u' \quad (4.60)$$

De (4.55) y (4.59) tenemos

$$z' = (1 - |z|)^2 \left[ \frac{z}{(1 - |z|)} \operatorname{sen}(2\theta) \left( \frac{c + d \cos x}{(1 + a \cos x)^2} - (1 + a \cos x) \right) \right. \\ \left. + \left( 2 \cos^2 \theta \left( \frac{c + d \cos x}{(1 + a \cos x)^3} \right) - \operatorname{sen}^2 \theta \right) \cos x \right] \quad (4.61)$$

Regularizamos mediante un cambio de escala temporal  $s$  definido por

$$\frac{dx}{ds} = (1 + a \cos x)^3 \quad (4.62)$$

y obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} \frac{dz}{ds} &= (1 - |z|)z \operatorname{sen}(2\theta)(1 + a \cos x) [(c + d \cos x) - (1 + a \cos x)^3] \\ &\quad + (1 - |z|)^2 \cos x [2 \cos^2 \theta (c + d \cos x) - (1 + a \cos x)^3 \operatorname{sen}^2 \theta] \\ \frac{d\theta}{ds} &= -(1 + a \cos x) [\cos^2 \theta (c + d \cos x) + \operatorname{sen}^2 \theta (1 + a \cos x)^3] \\ \frac{dx}{ds} &= ((1 + a \cos x)^3) \end{aligned} \quad (4.63)$$

El espacio de fases es difeomorfo al cilindro

$$S^1 \times S^1 \times [-1, 1] = T^2 \times [-1, 1]$$

ver figura(4.1).

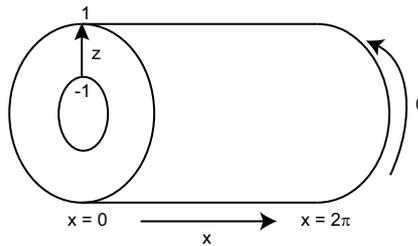


Figura 4.1: Coordenadas del Espacio de Fases

Consideremos  $a = -1$ , entonces el cilindro  $x = 0$  es invariante y posee dos circunferencias de puntos de equilibrio  $z = \pm 1$ .

El campo vectorial se reduce a

$$\begin{aligned} \frac{dz}{ds} &= 2(c + d)(1 - |z|)^2 \cos^2 \theta \\ \frac{d\theta}{ds} &= 0 \end{aligned} \quad (4.64)$$

como  $c + d > 0$  entonces todas las órbitas son líneas rectas,  $\theta$  constante, con punto límite positivo el círculo  $z = 1$ .

Si  $x \neq 0$  entonces  $\theta$  siempre decrece y  $x$  crece. Además, las órbitas fuera del cilindro invariante  $x = 0$  tienden a  $x = 2\pi$  y van al círculo  $z = 1$ . Ver figura (4.2).

Si  $a$  se aproxima al valor  $-1$ , entonces las órbitas con condición inicial

$$z = \theta = x = 0$$

para un  $x$  pequeño se aproximan a la recta

$$x = 2\pi$$

y por continuidad

$$z = -1 + \delta < 0$$

por tanto,  $u(z)$  será negativo.

Luego, si  $a$  es próximo a  $-1$

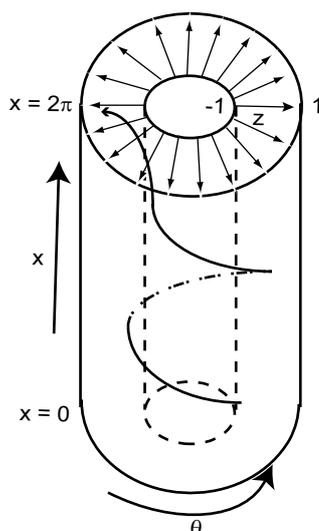
$$\bar{\theta}(1, 0; 2\pi, a)$$

es estrictamente decreciente respecto de  $a$ .

### 4.2.1. Estabilidad de las soluciones

En este apartado vamos a estudiar la estabilidad de las soluciones de la ecuación de Ince-Hill en el caso en el que  $a = b$ , con  $a \neq 0$ .

**Proposición 4.5** Cuando  $\Delta = 2$  entonces la ecuación (4.53) admite la solución

Figura 4.2: Trayectorias del sistema para  $a=-1$ 

formal

$$y(x) = A \left( \frac{2a-d}{2c} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(nx) \right) + B \left( \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \operatorname{sen}(nx) \right) \quad (4.65)$$

$$v(x) = \frac{y'(x)}{1 + a \cos x}$$

donde  $A$  y  $B$  son constantes, siendo las  $\alpha_n$

$$\alpha_1 = 1$$

$$\alpha_2 = \frac{2ad + 2c^2 - 2c - d^2}{c(6a - d)} \quad (4.66)$$

$$\alpha_3 = \frac{2ad(5c - 8) + 4c^3 - 20c^2 + c(16 - 3d^2) + 8d^2}{c(6a - d)(12a - d)}$$

y, en general

$$\alpha_{n+1} = \frac{2(n^2 - c)\alpha_n + [a(n^2 - 3n + 2) - d]\alpha_{n-1}}{d - a(n^2 + 3n + 2)} \quad (4.67)$$

y para las  $\beta_n$

$$\begin{aligned}\beta_1 &= 1 \\ \beta_2 &= \frac{2(c-1)}{6a-d} \\ \beta_3 &= \frac{6a^2 + 5ad + 4c^2 - 20c - d^2 + 16}{(6a-d)(12a-d)}\end{aligned}\tag{4.68}$$

y, en general

$$\beta_{n+1} = \frac{2(n^2 - c)\beta_n + [a(n^2 - 3n + 2) - d]\beta_{n-1}}{d - a(n^2 + 3n + 2)}\tag{4.69}$$

*Demostración.* Si consideramos una solución de la forma

$$y(x) = A \left( \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(nx) \right) + B \left( \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \operatorname{sen}(nx) \right)\tag{4.70}$$

al sustituir en la ecuación los coeficientes verifican las relaciones anteriores.  $\square$

**Proposición 4.6** Cuando  $\Delta = 2$  si

$$c = \frac{a + \sqrt{(-a)[4a^2d + a(2d^2 - 1) - 2d^3]}}{2a}$$

entonces en (4.65) se cumple que

$$\alpha_n = \beta_n, \quad n \geq 1$$

*Demostración.* Simplemente al sustituir el valor de  $c$  en (4.65) se verifica que

$$\alpha_n = \beta_n, \quad n \geq 1$$

**Proposición 4.7** En las condiciones de las Proposiciones (4.4) y (4.6) si  $-1 < a < 0$  entonces la solución de la ecuación (4.53) es convergente.

*Demostración.* Por el teorema de Floquet debe existir, al menos, una solución periódica. Sea esta

$$y(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A\alpha_n \cos(nx) + B\alpha_n \operatorname{sen}(nx)) \quad (4.71)$$

al sustituir en la ecuación diferencial que define  $x$  llegamos, considerando los valores de  $c$ , a la expresión formal del enunciado, ya que, si  $\beta_1 = 1$  entonces  $\alpha_n = \beta_n$  para  $n \geq 2$ .

La existencia de esta solución periódica asegura la convergencia de  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ .

Probemos ahora la convergencia de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \operatorname{sen}(nx)$$

Si  $n$  es lo suficientemente grande,  $\alpha_n$  tiene signo constante, ya que para valores grandes de  $n$  la relación de recurrencia tiende a la aplicación

$$\begin{aligned} u_1 &= w \\ w_1 &= -\frac{2}{a}w - u \end{aligned} \quad (4.72)$$

Los valores propios asociados al punto fijo  $u = w = 0$  son

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1 - a^2}}{a}$$

Ambos son positivos si  $-1 < a < 0$  o negativos si  $0 < a < 1$ .

El vector propio

$$\left( 1, \frac{-1 + \sqrt{1 - a^2}}{a} \right)$$

corresponde a la dirección estable.

Si  $-1 < a < 0$ , los puntos de la variedad estable están en el primer cuadrante o en el tercer cuadrante, y sus coordenadas tienen el mismo signo. Como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$$

converge,  $\alpha_n$  tiende a 0 para valores grandes de  $n$ , los elementos de la serie tienen signo constante.

Excepto para un número finito de términos,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \operatorname{sen}(nx)$$

se puede acotar por  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ , siendo ésta convergente.

Por tanto, la solución de la ecuación viene dada por las series dadas.  $\square$

En el caso en que  $0 < a < 1$  los puntos de la variedad estable están en el segundo cuadrante o en el cuarto cuadrante, y sus coordenadas no tienen el mismo signo, por tanto, no podemos asegurar, en general, la convergencia de la serie.

**Corolario 4.1** *En las condiciones de la Proposición (4.7) si  $a$  está próximo a  $-1$  entonces  $\Delta = 2$  es un máximo absoluto. Además, si se cumple que  $\operatorname{Traza}(A(a)) > -2$  entonces las soluciones de la ecuación son estables.*

*Demostración.* Sea  $\hat{a}$  suficientemente próximo a  $-1$  tal que  $\operatorname{Traza}(A(\hat{a})) = 2$ . Supongamos que  $\Delta = 2$  no es un máximo, entonces, existe un  $a_1$  próximo a  $\hat{a}$ , tal que  $\operatorname{Traza}(A(a_1)) > 2$ , supongamos que  $a_1 < \hat{a}$ .

Como  $\operatorname{Traza}(A(a)) = 0$  es equivalente a que

$$\bar{\theta}(1, 0, 2\pi, a) = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

y  $\bar{\theta}(1, 0, 2\pi, a)$  es una función decreciente respecto a  $a$ , entonces existe un valor  $a_2$ , con  $-1 < a_2 < a_1$  tal que  $\operatorname{Traza}(A(a_2)) = 0$ . Por continuidad  $\operatorname{Traza}(A(a))$  toma de nuevo el valor 2 para un  $\hat{\hat{a}}$ , antes de tomar de nuevo el valor 0. Esto implica que

$$\bar{\theta}(1, 0, 2\pi, \hat{\hat{a}}) = \bar{\theta}(1, 0, 2\pi, \hat{a}) = 2k\pi$$

siendo  $\hat{\hat{a}} < \hat{a}$ , en contradicción con que  $\bar{\theta}(1, 0, 2\pi, a)$  es una función decreciente respecto a  $a$ . Por tanto  $\Delta = 2$  es un máximo absoluto.  $\square$

**Proposición 4.8** Cuando  $\Delta = -2$  entonces la solución formal de la ecuación (4.53) es

$$y(x) = A \left( \sum_{n=-1}^{\infty} \alpha_{2n+3} \cos \left( \frac{2n+3}{2} \right) \right) + B \left( \sum_{n=-1}^{\infty} \beta_{2n+3} \operatorname{sen} \left( \frac{2n+3}{2} \right) \right)$$

$$v(x) = \frac{y'(x)}{1 + a \cos x} \quad (4.73)$$

donde  $A$  y  $B$  son constantes, siendo las  $\alpha_n$

$$\alpha_1 = \beta_1 = 1$$

$$\alpha_3 = \frac{8c + 4d - 2 - 3a}{15a - 4d} \quad (4.74)$$

$$\beta_3 = \frac{8c - 4d - 2 + 3a}{15a - 4d}$$

y, en general

$$\alpha_{2n+3} = \frac{(4d - (2n-1)(2n-3)a)\alpha_{2n-1} + (8c - 2(2n+1)^2)\alpha_{2n+1}}{(2n+3)(2n+5)a - 4d} \quad (4.75)$$

y la misma expresión para los coeficientes  $\beta_{2n+3}$

*Demostración.* Si consideramos una solución de la forma

$$y(x) = A \left( \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos \left( \frac{nx}{2} \right) \right) + B \left( \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \operatorname{sen} \left( \frac{nx}{2} \right) \right) \quad (4.76)$$

al sustituir en la ecuación los coeficientes verifican las relaciones anteriores.  $\square$

**Proposición 4.9** Cuando  $\Delta = -2$  si  $a = \frac{4d}{3}$  y  $(\frac{c}{d})^2 = \frac{5}{3}$  entonces en (4.73) se cumple que

$$\alpha_{2n+3} = \beta_{2n+3} \quad n \geq -1$$

*Demostración.* Al sustituir las relaciones

$$a = \frac{4d}{3}$$

$$\left(\frac{c}{d}\right)^2 = \frac{5}{3}$$

en (4.73) se tiene que

$$\alpha_{2n+3} = \beta_{2n+3}$$

para  $n \geq -1$

**Proposición 4.10** *En las condiciones de las Proposiciones (4.4) y (4.9) cuando  $\Delta = -2$ , si se cumple que  $-\frac{3}{8} < d < 0$  entonces la solución de la ecuación (4.53) es convergente.*

*Demostración.* La ecuación admite la solución formal que aparece en la proposición. Si  $\Delta = -2$ , los valores propios son  $-1$ , entonces por la Teoría de Floquet-Liapunov, debe existir al menos una solución periódica correspondiente, por ejemplo, a la condición inicial  $y(0) = 1, v(0) = 0$  o  $y(0) = 0, v(0) = 1$ . Consideremos el primer caso. La existencia de solución periódica asegura la convergencia de

$$\sum_{n=-1}^{\infty} \alpha_{2n+3}$$

Veamos la convergencia de

$$\sum_{n=-1}^{\infty} \alpha_{2n+3} \operatorname{sen} \left( \frac{2n+3}{2} x \right)$$

Para  $n$  suficientemente grande se tiene que  $\alpha_{2n+3}$  tiene signo constante ya que para valores grandes de  $n$  la relación de recurrencia tiende a la aplicación

$$\begin{aligned} u_1 &= w \\ w_1 &= -\frac{6}{8d}w - u \end{aligned} \tag{4.77}$$

Los valores propios asociados al punto fijo  $u = w = 0$  son

$$\frac{-3 \pm \sqrt{9 - 64d^2}}{8d}$$

Ambos son positivos si  $-\frac{3}{8} < d < 0$  y el vector

$$\left(1, \frac{-3 + \sqrt{9 - 64d^2}}{8d}\right)$$

es el correspondiente a la dirección estable. Los puntos de la variedad estable están en el primer o tercer cuadrante y sus coordenadas tienen el mismo signo. Como

$$\sum_{n=-1}^{\infty} \alpha_{2n+3}$$

converge, entonces  $\alpha_{2n+3}$  tiende a cero, y para valores grandes de  $n$  los elementos de la serie tienen signo constante. Excepto para un número finito de términos, la serie

$$\sum_{n=-1}^{\infty} \alpha_{2n+3} \operatorname{sen} \left( \frac{2n+3}{2} x \right)$$

se puede acotar por

$$\sum_{n=-1}^{\infty} \alpha_{2n+3}$$

y ésta es convergente. Por tanto, la solución de la ecuación es la serie dada.  $\square$

**Corolario 4.2** *En las condiciones de la Proposición(4.10) si  $a$  es próximo a  $-1$  entonces  $\Delta = -2$  es un mínimo absoluto. Además, si se cumple que  $\operatorname{Traza}(A(a)) < 2$  entonces las soluciones de la ecuación son estables.*

*Demostración.* Análoga a la realizada para el máximo en el caso en el que  $\Delta = 2$ .  $\square$

**Teorema 4.4** *En las condiciones de (4.7) o de (4.10) existe una sucesión de intervalos disjuntos  $I_n = (a_{2n-1}, a_{2n})$ ,  $-1 < a_k < 0$  que se acumulan al punto  $-1$  para los cuales las soluciones de la ecuación (4.53) son estables.*

*Demostración.* Sabemos por (4.1) que  $\Delta = 2$  es un máximo absoluto, y que si  $\text{Traza}(A(a)) > -2$  entonces las soluciones de (4.53) son estables, entonces los intervalos complementarios  $J_n$  de  $I_n$  están acotados por los valores de  $a$  para los cuales la traza es  $-2$ .

Análogamente cuando se tienen las condiciones de (4.10)  $\Delta = -2$  es un mínimo y si  $\text{Traza}(A(a)) < 2$  entonces las soluciones de (4.53) son estables, luego los intervalos complementarios  $J_n$  de  $I_n$  están acotados por los valores de  $a$  para los cuales la traza es  $2$ .

### 4.3. Apéndice

Sea la ecuación de *Ince-Hill* en forma algebraica

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{(a-b)x^2 + x + b}{(1+ax)(1-x^2)} \frac{dy}{dx} + \frac{c+dx}{(1+ax)(1-x^2)} y = 0 \quad (4.78)$$

Calculemos las singularidades de (4.78). Para ello resolvemos la ecuación

$$(1+ax)(1-x^2) = 0$$

y obtenemos las singularidades  $\pm 1, -\frac{1}{a}, \infty$ .

#### La singularidad $x = 1$

Traslademos la singularidad al 0 mediante el cambio

$$t = x - 1$$

entonces la ecuación (4.78) nos queda

$$\begin{aligned} & (-at^3 - (3a+1)t^2 - 2(1+a)t) \frac{d^2y}{dx^2} - \\ & - [(a-b)t^2 + (2(a-b)+1)t + (a+1)] \frac{dy}{dx} + \\ & + [dt + (c+d)]y = 0 \end{aligned} \quad (4.79)$$

Consideremos una solución de (4.79) de la forma

$$y(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i t^{r+i} \quad (4.80)$$

Al sustituir (4.80) en (4.79) obtenemos

$$\begin{aligned} & [-at^3 - (3a+1)t^2 - 2(1+a)t][r(r-1)a_0 t^{r-2} + (r+1)ra_1 t^{r-1} + \dots] \\ & - [(a-b)t^2 + (2(a-b)+1)t + (a+1)][ra_0 t^{r-1} + (r+1)a_1 t^r + \dots] \\ & + [dt + (c+d)][a_0 t^r + a_1 t^{r+1} + a_2 t^{r+2} + \dots] = 0 \end{aligned} \quad (4.81)$$

El menor grado de  $t$  es  $r - 1$  si  $a \neq -1$ . Y el coeficiente asociado a  $t^{r-1}$  es

$$G(r) = -(1 + a)a_0 t^{r-1} [2r(r - 1) + r]$$

la ecuación indicial es

$$r[2(r - 1) + 1] = 0$$

Como el grado del polinomio  $G(r)$  es 2 se cumple que  $t = 0$  es una singularidad *regular*.

Las soluciones de la ecuación indicial anterior son 0 y  $\frac{1}{2}$ , por tanto la singularidad es, en particular *elemental*.

En el caso en que  $a = -1$  se cumple que el menor grado de  $t$  es  $r$ , y su coeficiente asociado es

$$G(r) = 2r^2 + (2b - 1)r + (c + d)$$

análogamente obtenemos que la singularidad es *regular*.

Las soluciones de la ecuación indicial son:

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{1 - 2b + \sqrt{(2b - 1)^2 - 8(c + d)}}{4} \\ r_2 &= \frac{1 - 2b - \sqrt{(2b - 1)^2 - 8(c + d)}}{4} \end{aligned} \quad (4.82)$$

y su diferencia

$$r_1 - r_2 = \frac{\sqrt{(2b - 1)^2 - 8(c + d)}}{2}$$

Por tanto la singularidad será *elemental* cuando

$$(2b - 1)^2 = 1 + 8(c + d)$$

Concluimos que la singularidad  $x = 1$  es

1. Si  $a \neq -1$  elemental

2. Si  $a = -1$

a) Cuando  $(2b - 1)^2 = 1 + 8(c + d)$  elemental

b) En el caso  $(2b - 1)^2 \neq 1 + 8(c + d)$  regular

### La singularidad $x=-1$

En este caso, si  $a \neq 1$ , se tiene que

$$G(r) = (1 - a)a_0 t^{r-1} (2r(r - 1) + r)$$

siendo, por tanto, la ecuación indicial

$$r(2(r - 1) + 1) = 0$$

Como el grado del polinomio  $G(r)$  es 2 se cumple que  $t = 0$  es una singularidad *regular*.

Las soluciones de la ecuación indicial anterior son 0 y  $\frac{1}{2}$ , por tanto la singularidad es, en particular, *elemental*.

En el caso en el que  $a = 1$  se cumple que el menor grado de  $t$  es  $r$ , y su coeficiente asociado es

$$G(r) = 2r^2 - (2b + 1)r + (c - d)$$

análogamente obtenemos que la singularidad es *regular*.

Las soluciones de la ecuación indicial son:

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{1 + 2b + \sqrt{(2b + 1)^2 - 8(c - d)}}{4} \\ r_2 &= \frac{1 + 2b - \sqrt{(2b + 1)^2 - 8(c - d)}}{4} \end{aligned} \quad (4.83)$$

y su diferencia

$$r_1 - r_2 = \frac{\sqrt{(2b + 1)^2 - 8(c - d)}}{2}$$

Por tanto la singularidad será *elemental* cuando

$$(2b + 1)^2 = 1 + 8(c - d)$$

Luego la singularidad  $x = -1$  es

1. Si  $a \neq 1$  elemental

2. Si  $a = 1$

a) Cuando  $(2b + 1)^2 = 1 + 8(c - d)$  elemental

b) Si  $(2b + 1)^2 \neq 1 + 8(c - d)$  regular

**La singularidad  $x = -\frac{1}{a}$  con  $a \neq 0$**

Razonando como en los dos casos anteriores se tiene que, si  $a \neq \pm 1$

$$G(r) = a_0 t^{r-1} r \left[ \left( \frac{a^2 - 1}{a} \right) (r - 1) + b \left( \frac{1 - a^2}{a^2} \right) \right]$$

la ecuación indicial es

$$r \left[ \left( \frac{a^2 - 1}{a} \right) (r - 1) + b \left( \frac{1 - a^2}{a^2} \right) \right] = 0$$

Como el grado del polinomio  $G(r)$  es 2 se cumple que  $t = 0$  es una singularidad *regular*.

Las soluciones de la ecuación indicial anterior son 0 y  $1 + \frac{b}{a}$ , por tanto la singularidad será *elemental* cuando  $a = -2b$ .

En el caso en el que  $a = 1$  se cumple que el menor grado de  $t$  es  $r$ , y su coeficiente asociado es

$$G(r) = 2r^2 - (2b + 1)r + (c - d)$$

análogamente obtenemos que la singularidad es *regular*.

Las soluciones de la ecuación indicial son:

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{1 + 2b + \sqrt{(2b + 1)^2 - 8(c - d)}}{4} \\ r_2 &= \frac{1 + 2b - \sqrt{(2b + 1)^2 - 8(c - d)}}{4} \end{aligned} \quad (4.84)$$

y su diferencia

$$r_1 - r_2 = \frac{\sqrt{(2b + 1)^2 - 8(c - d)}}{2}$$

Entonces la singularidad será *elemental* cuando

$$(2b + 1)^2 = 1 + 8(c - d)$$

En el caso en el que  $a = -1$  se cumple que el menor grado de  $t$  es  $r$ , y su coeficiente asociado es

$$G(r) = 2r^2 - (2b - 1)r + (c + d)$$

luego la singularidad es *regular*.

Las soluciones de la ecuación indicial son:

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{1 - 2b + \sqrt{(2b - 1)^2 - 8(c + d)}}{4} \\ r_2 &= \frac{1 - 2b - \sqrt{(2b - 1)^2 - 8(c + d)}}{4} \end{aligned} \quad (4.85)$$

y su diferencia

$$r_1 - r_2 = \frac{\sqrt{(2b - 1)^2 - 8(c + d)}}{2}$$

Por tanto, la singularidad será *elemental* cuando

$$(2b - 1)^2 = 1 + 8(c + d)$$

Luego la singularidad  $x = \frac{1}{a}$  será

1. Si  $a \neq \pm 1, 0$

a) Elemental cuando  $a = -2b$

b) Regular si  $a \neq -2b$

2. Si  $a = 1$

a) Elemental cuando  $(2b + 1)^2 = 1 + 8(c - d)$

b) Regular si  $(2b + 1)^2 \neq 1 + 8(c - d)$

3. Si  $a = -1$

a) Elemental cuando  $(2b - 1)^2 = 1 + 8(c + d)$

b) Regular si  $(2b - 1)^2 \neq 1 + 8(c + d)$

### La singularidad $x = \infty$

Consideremos el cambio

$$z = \frac{1}{x}$$

entonces la ecuación (4.78) se transforma en la ecuación

$$\frac{d^2u}{dz^2} + p(z)\frac{du}{dz} + q(z)u = 0 \quad (4.86)$$

siendo

$$p(z) = \frac{2}{z} - \frac{P(z)}{z^2} \quad (4.87)$$

$$q(z) = \frac{Q(z)}{z^4}$$

donde

$$P(x) = -\frac{(a-b)x^2 + x + b}{(1+ax)(1-x^2)} \quad (4.88)$$

$$Q(x) = \frac{c+dx}{(1+ax)(1-x^2)}$$

por tanto

$$\begin{aligned} P(z) &= -\frac{(a-b)\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + b}{(1+a\frac{1}{z})[1-(\frac{1}{z})^2]} \\ &= -\frac{z[(a-b) + z + bz^2]}{(z+a)(z^2-1)} \end{aligned} \quad (4.89)$$

y

$$\begin{aligned} Q(z) &= \frac{c + d\frac{1}{z}}{(1+a\frac{1}{z})[1-(\frac{1}{z})^2]} \\ &= \frac{z^2(cz + d)}{(z+a)(z^2-1)} \end{aligned} \quad (4.90)$$

Al sustituir (4.89) y (4.90) en (4.87) obtenemos

$$p(z) = \frac{2z^3 + (2a+b)z^2 - z - (a+b)}{z(z+a)(z^2-1)} \quad (4.91)$$

$$q(z) = \frac{cz + d}{z^2(z+a)(z^2-1)}$$

Si sustituimos (4.91) en (4.86) nos queda

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \left( \frac{2z^3 + (2a+b)z^2 - z - (a+b)}{z(z+a)(z^2-1)} \right) \frac{du}{dz} + \left( \frac{cz + d}{z^2(z+a)(z^2-1)} \right) u = 0 \quad (4.92)$$

Consideremos una solución de (4.92) de la forma

$$u(z) = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i z^{r+i} \quad (4.93)$$

Al sustituir (4.93) en (4.92) nos queda

$$\begin{aligned} (z^5 + az^4 - z^3 - az^2)[r(r-1)a_0z^{r-2} + (r+1)ra_1z^{r-1} + (r+2)(r+1)a_2z^r + \dots] - \\ - [2z^4 + (2a+b)z^3 - z^2 - (a+b)z][ra_0z^{r-1} + (r+1)a_1z^r + (r+2)a_2z^{r+1} \dots] + \\ + (cz + d)[a_0z^r + a_1z^{r+1} + a_2z^{r+2} + \dots] = 0 \end{aligned}$$

El menor grado de  $z$  es  $r$ , y el coeficiente asociado a  $z^r$  es

$$G(r) = -ar^2 - br + d$$

la ecuación indicial es

$$ar^2 + br - d = 0$$

Como el grado del polinomio  $G(r)$  es 2, si  $a \neq 0$  se cumple que  $z = 0$  es una singularidad *regular*.

Las soluciones de la ecuación indicial son:

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4ad}}{2a} \\ r_2 &= \frac{-b - \sqrt{b^2 + 4ad}}{2a} \end{aligned} \quad (4.94)$$

y su diferencia

$$r_1 - r_2 = \frac{\sqrt{b^2 + 4ad}}{a}$$

Por tanto la singularidad será *elemental* cuando

$$a^2 = 4b^2 + 16ad$$

Sin embargo, si  $a = 0$  el grado de  $G(r)$  será 1 y la singularidad será *irregular*.

Con lo cual la singularidad  $x = \infty$  será

1. Si  $a \neq 0$

a) Elemental si  $a^2 = 4b^2 + 16ad$

b) Regular cuando  $a^2 \neq 4b^2 + 16ad$

2. Si  $a = 0$  entonces la singularidad es irregular

Observar que cuando  $a = 1$  se obtienen los mismos resultados cambiando en la ecuación (4.1)  $a, b, c$  por  $-a, -b, -c$ .

Tenemos por tanto que la ecuación (4.1) será

1. Del tipo  $[4, 0, 0]$  si  $a \neq 0, \pm 1$ ,  $b = \frac{-a}{2}$  y  $d = 0$ .

En este caso nos quedará la ecuación

$$(1 + a \cos(2x)) \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{a}{2} \operatorname{sen}(2x) \frac{dy}{dx} + cy = 0 \quad (4.95)$$

2. Del tipo  $[3, 1, 0]$  si

a)  $a \neq 0, \pm 1$ ,  $b = \frac{-a}{2}$  y  $d \neq 0$

En este caso nos quedará la ecuación

$$(1 + a \cos(2x)) \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{a}{2} \operatorname{sen}(2x) \frac{dy}{dx} + cy = 0 \quad (4.96)$$

b)  $a \neq 0, \pm 1$ ,  $b \neq \frac{-a}{2}$  y  $d = \frac{a^2 - 4b^2}{16a}$

En este caso nos quedará la ecuación

$$\left[1 + a \cos(2x)\right] \frac{d^2 y}{dx^2} + b \operatorname{sen}(2x) \frac{dy}{dx} + \left[c + \left(\frac{a^2 - 4b^2}{16a}\right) \cos(2x)\right] y = 0 \quad (4.97)$$

3. Del tipo  $[2, 2, 0]$  si  $a \neq 0, \pm 1$ ,  $b \neq \frac{-a}{2}$  y  $d \neq \frac{a^2 - 4b^2}{16a}$

En este caso nos quedará la ecuación

$$\left[1 + a \cos(2x)\right] \frac{d^2 y}{dx^2} + b \operatorname{sen}(2x) \frac{dy}{dx} + [c + d \cos(2x)] y = 0 \quad (4.98)$$

4. Del tipo  $[2, 0, 1]$  si  $a = 0$ .

En este caso nos quedará la ecuación

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + b \operatorname{sen}(2x) \frac{dy}{dx} + (c + d \cos(2x)) y = 0 \quad (4.99)$$

5. Del tipo  $[3, 0, 0]$  si

a)  $a = 1$ ,  $c = \frac{4b^2 + 8b + 1}{16}$  y  $d = \frac{1 - 4b^2}{16}$

En este caso nos quedará la ecuación

$$\left[1 + \cos(2x)\right] \frac{d^2 y}{dx^2} + b \operatorname{sen}(2x) \frac{dy}{dx} + \frac{1}{16} \left[4b^2 + 8b + 1 + (1 - 4b^2) \cos(2x)\right] y = 0 \quad (4.100)$$

$$b) a = -1, c = \frac{4b^2-8b+1}{16} \text{ y } d = \frac{4b^2-1}{16}$$

En este caso nos quedará la ecuación

$$[1 - \cos(2x)] \frac{d^2y}{dx^2} + b \operatorname{sen}(2x) \frac{dy}{dx} + \frac{1}{16} [(4b^2 - 8b + 1) + (4b^2 - 1) \cos(2x)] y = 0 \quad (4.101)$$

6. Del tipo  $[2, 1, 0]$  si

$$a) a = 1, c = \frac{b^2+b+2d}{2} \text{ y } d \neq \frac{1-4b^2}{16}$$

En este caso nos quedará la ecuación

$$[1 + \cos(2x)] \frac{d^2y}{dx^2} + b \operatorname{sen}(2x) \frac{dy}{dx} + \left[ \left( \frac{b^2 + b + 2d}{2} \right) + d \cos(2x) \right] y = 0 \quad (4.102)$$

$$b) a = 1, c \neq \frac{4b^2+8b+1}{16} \text{ y } d = \frac{1-4b^2}{16}$$

En este caso nos quedará la ecuación

$$[1 + \cos(2x)] \frac{d^2y}{dx^2} + b \operatorname{sen}(2x) \frac{dy}{dx} + \left[ c + \left( \frac{1 - 4b^2}{16} \right) \cos(2x) \right] y = 0 \quad (4.103)$$

$$c) a = -1, c = \frac{b^2-b-2d}{2} \text{ y } d \neq \frac{4b^2-1}{16}$$

En este caso nos quedará la ecuación

$$[1 - \cos(2x)] \frac{d^2y}{dx^2} + b \operatorname{sen}(2x) \frac{dy}{dx} + \left[ \left( \frac{b^2 - b - 2d}{2} \right) + d \cos(2x) \right] y = 0 \quad (4.104)$$

$$d) a = -1, c \neq \frac{4b^2-8b+1}{16} \text{ y } d = \frac{1}{4b^2-1} 16$$

En este caso nos quedará la ecuación

$$[1 - \cos(2x)] \frac{d^2y}{dx^2} + b \operatorname{sen}(2x) \frac{dy}{dx} + \left[ c + \left( \frac{4b^2 - 1}{16} \right) \cos(2x) \right] y = 0 \quad (4.105)$$

7. Del tipo  $[1, 2, 0]$  si

$$a) \ a = 1, \ c \neq \frac{b^2+b+2d}{2} \ y \ d \neq \frac{1-4b^2}{16}$$

En este caso nos quedará la ecuación

$$[1 + \cos(2x)] \frac{d^2y}{dx^2} + b \operatorname{sen}(2x) \frac{dy}{dx} + [c + d \cos(2x)] y = 0 \quad (4.106)$$

$$b) \ a = -1, \ c \neq \frac{b^2-b-2d}{2} \ y \ d \neq \frac{4b^2-1}{16}$$

En este caso nos quedará la ecuación

$$[1 - \cos(2x)] \frac{d^2y}{dx^2} + b \operatorname{sen}(2x) \frac{dy}{dx} + [c + d \cos(2x)] y = 0 \quad (4.107)$$

El caso más general que se plantea en la ecuación de *Ince* es cuando las singularidades son del tipo  $[2, 2, 0]$ , de ahí que a dicho caso le llamemos la ecuación de *Ince*.

La expresión general de la ecuación del tipo  $[2, 2, 0]$  es

$$\frac{d^2w}{dz^2} + \left[ \frac{1}{z} + \frac{1}{z-\alpha} + \frac{\frac{1}{2}}{z-1} \right] \frac{dw}{dz} + \frac{C_0 + 2C_1z - n(n+1)z^2}{4z(z-\alpha)^2(z-1)} w = 0 \quad (4.108)$$

con cuatro constantes irreducibles  $\alpha, C_0, C_1, n$ .

Si consideramos  $\alpha = \frac{1}{k^2}$  y tomamos la transformación  $z = \operatorname{sn}^2(x, k)$ , entonces la ecuación (4.108) se puede expresar como

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \left[ h + n(n+1)k^2 \operatorname{sn}^2 x + \frac{m(m+1)k^2 \operatorname{cn}^2 x}{\operatorname{dn}^2 x} \right] y = 0 \quad (4.109)$$

La ecuación (4.109) es una generalización de la ecuación de *Lamé* ya que si consideramos  $m = 0$  obtenemos

$$\frac{d^2y}{dx^2} + [\lambda - n(n+1)k^2 \operatorname{sn}^2 x] y = 0 \quad (4.110)$$

que es la ecuación de *Lamé*

# Bibliografía

- [1] Arnold, V.I. and Il'yashenko. *Dynamical Systems I. Ordinary Differential Equations and Smooth Dynamical Systems*. Springer-Verlag, 1985.
- [2] Arscott, F. *Periodic differential equations. An Introduction to Mathieu, Lamé, and Allied Functions*. The MacMillan Company, 1964.
- [3] Barrow-Green, J. *Poincaré and the Three Body Problem. History of Mathematics*. Vol. n 11, pp. 22-28. American Mathematical Society, 1997.
- [4] Camacho, C., H. Kuiper, N., Palis, J. *The Topology of holomorphic flows with singularity. Institut des Hautes Études scientifiques. Publications Mathématiques*. n 48, pp. 5-38, 1978.
- [5] Camacho, C., Lins, A. and Sad, P. *Foliations with algebraic limit sets. Annals of Mathematics*. Vol. n 136, pp. 429-446, 1992.
- [6] Hill, G.W. *On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon*. Reprinted, with some additions, from a paper published at Cambridge U.S.A., 1877. *Acta mathematica*. 8. 1886.
- [7] Il'yashenko, J. *Remarks on the topology of singular points of analytic differential equations in the complex domain and Ladi's theorem. Funct. Anal. and Appl.* 55, pp. 351-367, 1993.

- [8] Ince, E.L. *Ordinary Differential Equations*. Dover, 1956 (originalmente publicado en 1926).
- [9] Magnus, W., Winkler, S. *Hill's equation*. Dover, 1979.
- [10] Markushevich, A. *Teoría de las funciones analíticas*. Mir, 1978 (originalmente publicado en 1970).
- [11] Martínez, J., Chiralt, C. *Invariant rotational curves in Sitnikov's problem*. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **11**, pp. 105-113, 1993.
- [12] Martínez, J., Sastre, J. *Intervalos de estabilidad de la ecuación de Ince-Hill*. *XIV CEDYA*, pp. 331, Vic (1995).
- [13] Martínez, J., Sastre, J. *Foliation of linear complex system near a fuchsian singularity*. *Qualitative Theory of Dynamical Systems* Preprint, 2002.
- [14] Pars, L. A. *A Treatise on analytical dynamics*. Heinemann, 1965.
- [15] Szebehely, V. *Theory of orbits. The Restricted Problem of Three Bodies*. Academic Press, 1967.
- [16] Wasow, W. *Asymptotic Expansions for Ordinary Equations*. Dover, 1965.
- [17] Zakeri, S. *Dynamics of singular holomorphic foliations on the complex projective plane* Stony Brook IMS Preprint, September 1998

# Índice alfabético

- base, 7
- campo vectorial
  - hiperbólico, 7
  - holomorfo
    - con singularidad de Fuchs, 39
  - lineal
    - con singularidad de Fuchs, 38
- conjunto límite
  - de una foliación, 11
  - de una hoja, 11
- dependencia racional, 13
- diferencia de exponentes, 42
- dominio
  - de Poincaré, 8
  - de Siegel, 8
- ecuación
  - de Hill, 4
  - de Ince, 4
    - en forma algebraica, 68
    - en forma general, 78
  - de Lamé, 78
  - de Mathieu, 4
- envoltura convexa, 7
- foliación, 7
- matriz diagonalizable, 9
- multiplicidad geométrica, 9
- singularidad, 8, 42
  - de Fuchs, 7, 9
  - regular, 42
    - elemental, 43
- sistema Hamiltoniano, 45
- valores propios resonantes, 9