

DEPARTAMENTO DE ÓPTICA

ESTUDI SOBRE ESTRUCTURES DISIPATIVES EN  
SISTEMES ÒPTICS NO – LINEALS: ESTRUCTURES  
LOCALITZADES I FLUCTUACIONS QUÁNTIQUES

ISABEL PÉREZ ARJONA

UNIVERSITAT DE VALENCIA  
Servei de Publicacions  
2004

Aquesta Tesi Doctoral va ser presentada a València el dia 9 de Juliol de 2004 davant un tribunal format per:

- D. Ramón Corbalán Yuste
- D. Kestutis Staliunas
- D<sup>a</sup>. Alexandra Gatti
- D. Víctor Pérez García
- D. Javier García Monreal

Va ser dirigida per:

D. Eugenio Roldán Serrano

D. Germán J. De Valcárcel Gonzalbo

©Copyright: Servei de Publicacions  
Isabel Pérez Arjona

---

Depòsit legal:

I.S.B.N.:84-370-6068-0

Edita: Universitat de València  
Servei de Publicacions  
C/ Artes Gráficas, 13 bajo  
46010 València  
Spain  
Telèfon: 963864115

**UNIVERSITAT DE VALÈNCIA**  
DEPARTAMENT D' ÒPTICA



**ESTUDI SOBRE ESTRUCTURES DISIPATIVES EN  
SISTEMES ÒPTICS NO-LINEALS:  
ESTRUCTURES LOCALITZADES I  
FLUCTUACIONS QUÀNTIQUES.**

**Tesi presentada per  
Isabel Pérez Arjona  
per optar al grau de  
Doctora en Física.**

En Germán J. de Valcárcel Gonzalvo, Doctor en Física, Professor Titular de Universitat al Departament d'Òptica de la Universitat de València, i N'Eugenio Roldan Serrano, Doctor en Física, Professor Titular de Universitat del mateix centre

### **CERTIFIQUEN**

que la memòria present *Estudi sobre estructures dissipatives en sistemes òptics no-lineals: Estructures Localitzades i Fluctuacions Quàntiques*, resumeix el treball de investigació realitzat, sota la seva direcció, per Na Isabel Pérez Arjona i constitueix la seva Tesi per optar al grau de Doctora en Ciències Físiques.

I perquè així conste, i en compliment de la legislació vigent, signen el present certificat a València, el vint-i-set de maig de l'any dos mil quatre.



Dr. German J. de Valcárcel Gonzalvo



Dr. Eugenio Roldán Serrano

Aquesta pàgina és la que amb major dificultat estic enfrontant-me a escriure. Tan poc d'espai i sempre, tan difícils les paraules. Encara no he començat i ja sé que no podré trobar les que em caldrien. O potser és que en sobren. De totes maneres, gràcies de tot cor:

A la meva família, a tota ella, malgrat no tindre ací lloc per tots.... Però especialment, a la Mònica, la meva germana, a la que malgrat la distància cada dia tinc més prop i a Vicent i Isabel, els meus pares, a qui sempre he tingut prop.

Als companys i amics que hem fet junts aquest camí i que ara, poc a poc, un rere l'altre, anem acabant, i a tots els que ens aguanten: Jose Enrique, Eva, Jose, Guillem, Raquel, Bea, David, Núria...que las sort ens acompanye!

A Carlos Ferreira, entre moltes més coses, per un un bon consell.

A Ferran Garcia, company de cabòries, integracions i normalitzacions!

I per damunt de tot, a German J de Valcárcel i a Eugenio Roldán, que m'han dirigit, ajudat, ensenyat i recolzat en tot el procés que ha portat avui fins a aquesta Tesi. I al seu costat, Fenando Silva, company i àngel de la guarda en més d'una ocasió! A tots tres, gràcies, moltíssimes gràcies. Per ser com sou. Us trobaré a faltar. Tinc sort de compartir amb vosaltres cada dia.

A Eugenio, per compartir encara molt més.

A tots aquells amb qui, durant tots aquests anys i espere que durant molt i molt més temps, he compartit bons moments.

A tots els que m'estime.

...we're gonna have a real good time together!!!

*Estén el llenç a la paret. Agita  
les mans davant el llum  
i que l'ombra et serveixi  
d'estranyíssim mirall.  
Si aconsegueixes  
de llegir-hi a través signes i xifres,  
t'esglaiarà la nova lucidesa.*

Miquel Martí i Pol, *Vint-i-set poemes en tres temps.*

*No sabéi lo que sus dicéi...*  
València, un taxista.

# Contents

<b>1</b>	<b>Dinàmica no-lineal transversal en sistemes òptics. Antecedents</b>	<b>6</b>
1.1	Estructures dissipatives a la natura . . . . .	6
1.2	Patrons extensos en sistemes òptics . . . . .	8
1.3	Estructures Localitzades . . . . .	13
1.4	Ferramentes teòriques . . . . .	16
1.4.1	Mecanisme de formació de patrons. Anàlisi d'estabilitat	16
1.4.2	Formació de patrons extensos. Solucions amb simetria traslacional . . . . .	20
1.4.3	Ruptura de la simetria translacional: formació d'estructures localitzades . . . . .	22
1.4.4	Equacions de paràmetre d'ordre . . . . .	25
<b>2</b>	<b>Efectes Quàntics en Òptica No-lineal. Antecedents</b>	<b>28</b>
2.1	El començament: fluctuacions quàntiques en el temps i estats monomode no-clàssics de la llum . . . . .	31
2.2	Fluctuacions quàntiques espàcio-temporals. Estats multimode	35
2.3	Ferramentes teòriques en Òptica Quàntica . . . . .	38
2.3.1	La <i>Master equation</i> i les funcions de distribució de qua- siprobabilitat. Equacions de Fokker-Planck . . . . .	38
2.3.2	Equacions de Langevin . . . . .	42
2.3.3	Espectre de fluctuacions . . . . .	44
2.3.4	Espectre d' <i>squeezing</i> . Detecció homodina compensada .	45
<b>3</b>	<b>Resum dels treballs. Conclusions</b>	<b>49</b>
3.1	Solitons brillants en cavitats Kerr . . . . .	51
3.1.1	<i>Vectorial Kerr-cavity solitons</i> . . . . .	51
3.1.2	<i>Bright cavity solitons in anisotropic vectorial Kerr cav- ities</i> . . . . .	53
3.1.3	Conclusions . . . . .	54
3.2	Parets de domini . . . . .	54
3.2.1	<i>Domain Walls and Ising-Bloch Transitions in Para- metrically Driven Systems</i> . . . . .	55

3.2.2	<i>The Ising-Bloch transition in degenerate optical parametric oscillators</i>	57
3.2.3	<i>Stabilizing and controlling domain walls and dark-ring cavity solitons</i>	58
3.2.4	Conclusions	59
3.3	Fluctuacions quàntiques en solitons de cavitat	60
3.3.1	<i>Squeezed quantum cavity solitons</i>	61
3.3.2	Conclusions	62
<b>4</b>	<b>Apèndix A. L'algorisme d'<i>split-step</i></b>	<b>63</b>
<b>5</b>	<b>Apèndix B. Deducció de l'equació de Fokker-Planck per a la representació P-Generalitzada d'un DOPO</b>	<b>65</b>
<b>6</b>	<b>Apèndix C. Equació de Langevin per a l'equació de Ginzburg-Landau amb forçament paramètric</b>	<b>68</b>
<b>7</b>	<b>Apèndix D. Solució de les equacions de Langevin</b>	<b>71</b>
7.1	Diagonalització	71
7.2	Expansió modal de les equacions de Langevin linealitzades	76
7.2.1	Integració de les equacions de coeficients	78
7.2.2	Espectre de correlacions modal	79
7.2.3	Càlcul de la matriu de difusió entre modes	80
7.3	Espectre d' <i>squeezing</i>	83
7.3.1	Detecció homodina compensada	83
7.4	Detecció homodina: selecció de l'oscil·lador local i espectre d' <i>squeezing</i>	84
<b>8</b>	<b>Annex. Compedi de publicacions</b>	<b>98</b>



## Prefaci

El fenòmen de formació de patrons espacials en sistemes òptics té molts elements en comú amb altres sistemes formadors de patrons que trobem en altres camps de la natura (hidrodinàmics, biològics, mecànics, químics...). Ara bé, n'hi ha trets que són particulars dels sistemes òptics i que motiven encara més l'estudi de la formació de patrons en aquests. Per una banda, les potencials aplicacions a la tecnologia de la informació i les telecomunicacions, ja que la formació d'estructures en el pla transversal a la direcció de propagació de la llum en sistemes no-lineals òptics obre la porta al processat òptic de la informació en paral·lel. Des del punt de vista de la possibilitat de codificació i emmagatzemament de la informació en aquest pla transversal, n'hi ha dos aspectes que s'han de tindre molt en compte.

El primer d'ells és la possibilitat de multiestabilitat espacial, és a dir, la possibilitat d'existència de més d'una solució estable del sistema per a uns valors donats dels paràmetres, la qual cosa comporta, ja que parlem de sistemes extensos, la possibilitat d'assolir distintes solucions estables en distintes regions del pla transversal a la propagació de la llum. Aquest fet possibilita no només la possibilitat de coexistència entre dos patrons extensos, sinó l'existència d'estructures localitzades, de grandíssim interès si pensem en les aplicacions pràctiques que comentavem adés, ja que aquestes estructures actuaríen com bits d'informació.

És per tant d'importància estudiar com controlar els patrons emergents, i més en concret, les possibles estructures localitzades que puguen sorgir-ne, així com la possibilitat de crear-les, moure-les i esborrar-les a voluntat. Aquest control permetria l'utilització pràctica de les estructures localitzades com components de memòries òptiques, on la informació podria codificar-se i processar-se.

D'altra banda, el que estan creant-se i destruint-se en una interacció no-lineal, són fotons del camp electromagnètic. Aquesta naturalesa quàntica de la llum es manifesta fins i tot a temperatura ambient, cosa que diferencia notablement els sistemes òptics de qualsevol altre sistema. Aquest fet ha motivat el desenvolupament de l'estudi dels efectes quàntics en els patrons espacials transversals i, més recentment, en les estructures localitzades.

Aquesta tesi versa sobre algunes de les estructures localitzades que suporten distintes cavitats òptiques no-lineals. En particular, parlarem dels solitons de cavitat, entre els quals distingirem els solitons de cavitat brillants (d'amplitud) i els solitons de cavitat foscos o parets de domini (de fase). Es-

tudiarem aquestes estructures en cavitats Kerr anisòtropes i en oscil·ladors òptics paramètrics, així com en una equació de paràmetre d'ordre (en concret, l'equació no-lineal d'Schrödinger amb decaïment i forçament paramètric). També presentem dos mecanismes que permeten el control i estabilització d'aquestes estructures. Així mateix, es planteja el problema de les fluctuacions quàntiques en aquests solitons, estudiant-se l'espectre d'*squeezing* de solitons en oscil·ladors òptics paramètrics (si bé el nou tractament que presentem és trivialment aplicable a altres cavitats no-lineals) .

L'estructura de la tesi es divideix en dues parts, a saber:

Una part introductòria subdividida així mateix en dues seccions, la primera de les quals és un resum de l'estudi de la dinàmica no-lineal en cavitats òptiques on, a més d'una part introductòria on es presenten els patrons espacials, s'hi introdueix el concepte d'estructura localitzada. Un breu repàs històric d'aquest camp d'estudi es presenta junt amb les principals ferramentes i conceptes teòrics que calen per dur a terme l'estudi dels patrons espacials i de les estructures localitzades. La secció segona correspon a una introducció al tractament quàntic del camp electromagnètic. Una succinta revisió dels començaments i de l'evolució de l'òptica quàntica, fins la consideració dels aspectes espacials de les fluctuacions quàntiques de la llum, es realitza abans de presentar les ferramentes bàsiques per l'estudi de les propietats quàntiques i els estats no-clàssics de la llum.

La segona part es dedica a la presentació del compendi d'articles que forma el cos fonamental d'aquesta tesi, subagrupats en tres grans blocs, de cadascú dels quals s'hi presenten els resultats i conclusions fonamentals. Els blocs que constitueixen aquesta secció, així com els treballs que hi formen part, es citen tot seguit. Un primer bloc, dedicat als solitons brillants en cavitats Kerr, està constituït pels articles *Vectorial Kerr-cavity solitons*, Opt.Lett. **25**, 957 (2000) i *Bright cavity solitons in anisotropic vectorial Kerr cavities*, J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. **3** S118-S123 (2001). El segon grup, dedicat a les parets de domini, està format per tres articles: *Domain Walls and Ising-Bloch Transitions in Parametrically Driven Systems*, Phys. Rev. Lett. **89**, 164101 (2002), *The Ising-Bloch transition in degenerate optical parametric oscillators*, J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. **6**, S361-S368 (2004) i *Stabilizing and controlling domain walls and dark-ring cavity solitons*, Opt. Express, **12**, 2130 - 2137 (2004). Un últim bloc, corresponent a l'estudi de les fluctuacions quàntiques en estructures localitzades es presenta *Squeezed quantum cavity solitons*, enviat a publicar a la revista *Physical Review Letters*.

Finalment, uns annexos en forma d'apèndix s'afigen per tal de clarificar algun dels punts més tècnics o matemàtics. D'aquesta manera, la lectura pot realitzar-se sense necessitat d'aturar-se en aquests detalls, però si algun lector/a té major interès o curiositat, pot referir-se a aquestes seccions. Un últim annex inclou el *Compedi de publicacions*.

# 1 Dinàmica no-lineal transversal en sistemes òptics. Antecedents

## 1.1 Estructures dissipatives a la natura

La formació de patrons espàcio-temporal és un fenòmen que apareix de forma natural en camps molt diversos. Trobem aquests patrons en la pell de les zebres, en la formació de dunes de sorra, o quan voltem el palmell de la nostra mà i ens mirem les empremtes dels dits [Cross93]. No és d'extranyar, doncs, que l'estudi dels mecanismes de formació i la dinàmica de patrons espacials siga un camp comú a moltes disciplines científiques. Els primers estudis sobre la formació de patrons espàcio-temporals els trobem en el camp de la hidrodinàmica, a principis del segle XX, en l'estudi de convecció de fluids [Rayleigh16], però també els trobem més tard en biologia, amb l'innovador treball de Turing sobre els mecanismes de diferenciació de zigots [Turing52], en reaccions químiques oscil·lants [Zaikin70] o, com és el nostre cas, en sistemes òptics no-lineals [Lugiato89]-a partir dels 80s del passat segle-.



Fig. 1.1. Patrons espacials a la natura: els trobem a la pell de les zebres, a les formacions de dunes a la sorra o al revers dels nostres dits.

Aquests patrons que apareixen en sistemes aparentment tant distints entre si han de tindre -tenen- alguna cosa en comú: els trobem sempre en sistemes espacialment extensos, amb dissipació d'energia i que són forçats a allunyar-se del seu estat d'equilibri mitjançant un aport extern d'energia, al qual responen de forma no-lineal. Els sistemes de la natura que satisfan aquestes tres condicions, siguin aquells que siguin i pertanyen al camp que pertanyen, seran candidats a ser sistemes formadors de patrons. Analitzem però què és el que signifiquen, més explícitament, aquestes condicions. Quan

parlem de sistema espacialment extens ens referim a què el tamany del sistema, si més no en una direcció (la de formació del patró), siga molt més gran que l'escala característica del patró que hi emergeix, que ve determinada per una longitud d'ona característica. Quan caracteritzem el sistema com dissipatiu, volem dir que és un sistema obert que intercanvia, disipa, energia en acoblar-se al medi exterior. Ara bé, si el forçament a què sotmetem el nostre sistema augmenta, allunyarem aquest del seu estat d'equilibri. L'estat uniforme del sistema deixarà de ser estable i es destabilitzarà per a pertorbacions d'una determinada longitud d'ona. És a dir, per a un valor crític del forçament, l'estat del sistema pateix un canvi qualitatiu, consistent en el trencament de la simetria preexistent: hi apareixerà un patró on abans tot era homogeni. Com veurem, l'existència d'aquesta inestabilitat ve determinada tan sols per processos linials, el paper de la no-linealitat serà el de seleccionar un patró concret de tots els patrons possibles arran aquesta inestabilitat.

En els sistemes òptics en cavitat, que són els que ens ocuparan al llarg d'aquesta tesi, trobem que es satisfan aquestes condicions: a causa de l'efecte conjunt de la difracció que permet l'acoblament espacial, l'excitació fora de la resonància i la no-linealitat de la interacció entre la llum i el medi contingut a la cavitat, trobem patrons que es formen en el pla transversal a la direcció de propagació de la lum. Ara bé, els patrons que es formen en òptica tenen una forma molt semblant als que trobem en altres camps com els que havíem nomenat abans (hidrodinàmica, química, biologia...). Açò pot dur-nos a pensar que deu haver un substrat comú a tots ells, que va més enllà de la descripció específica de cada sistema i que descriu un comportament més general del sistema formador de patrons que és comú a tots ells. I així és.

Quan estudiem un sistema en concret, siga hidrodinàmic, on el patró apareix en l'alçada que assoleix l'aigua en un canal, siga òptic, on apareix en la intensitat mesurada en el pla transversal a la propagació, o siga de la naturalesa particular que estiguem estudiant, el comportament d'aquest sistema vindrà descrit per unes equacions que podem anomenar microscòpiques. Quan parlem d'equacions microscòpiques no volem dir que hagen d'incloure, necessàriament, graus de llibertat atòmics, el que volem dir és que representen els blocs elementals que constitueixen el sistema que anem a estudiar. En el cas dels sistemes òptics que estudiarem aquí, per exemple, aquestes equacions inclourien les amplituds dels camps implicats com a variables, els paràmetres de control del sistema (pèrdues, injecció de camp extern, desintonia dels camps amb la freqüència de la cavitat), la interacció no-lineal i la

difracció (en sistemes més complicats, com ara els làsers, caldria afegir-hi també les equacions d'evolució del medi material per descriure correctament la interacció no-lineal). Aquestes equacions microscòpiques són particulars i diferents per cadascú dels sistemes. Ara bé, si estudiem aquestes equacions microscòpiques en límits senzills (e.g. prop del llindar de funcionament del sistema), arribem a unes equacions, compartides per diversos sistemes, i que, per tant, tenen caràcter universal. Aquestes equacions reben el nom d'equacions de paràmetre d'ordre (OPE, de l'anglès *order parameter equation*), i el seu estudi és de grandíssima importància. Per un costat, per ser equacions universals i el nombre d'OPEs existent ser reduït, són equacions relativament ben conegudes, i per tant, un cop hem reduït les equacions microscòpiques del nostre sistema a una OPE d'aquest tipus, el seu comportament estarà ja, a gran trets, conegut i determinat. D'altra banda, la universalitat d'aquestes equacions dóna lloc a que els resultats obtinguts a partir d'elles siguin no només aplicables, per exemple, al sistema òptic que de partida havíem començat a estudiar, sinó a tots els sistemes de la natura que vinguen descrits pel mateix tipus d'OPE.

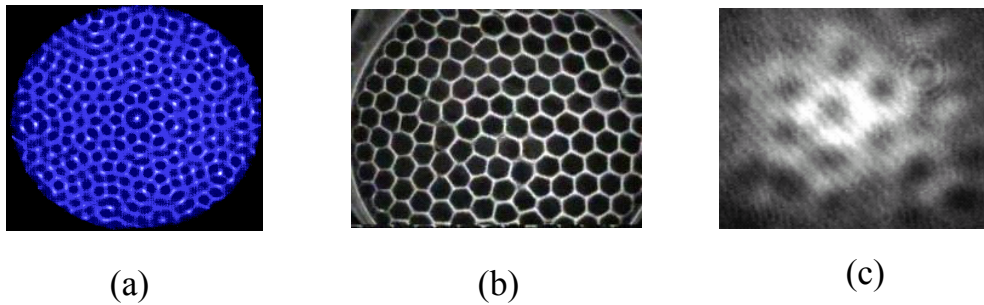


Fig.1.2. Patrons hexagonals en distints sistemes: a) capa d'oli de silicona sotmesa a una vibració vertical, b)capa de sorra sotmesa a vibració vertical i c) sistema òptic:microresonador passiu de semiconductor.

## 1.2 Patrons extensos en sistemes òptics

L'observació d'estructures espacials en el pla transversal al de la propagació de la llum en sistemes òptics apareix simultàniament amb els primers làsers, quan es començà a estudiar les diferents distribucions d'intensitat que apareixien al feix làser en funció de quins modes de la cavitat són excitats.

Tanmateix, en aquells moments el que preocupava era aconseguir a la sortida del làser un feix amb una estructura senzillament gaussiana, ja que era la que s'adequava a la major part de les aplicacions, i tan sols es pretenia eliminar mitjançant la disposició de diafragmes aquelles estructures que enterbolien el treball. No sigué fins més de vint anys més tard, cap als anys 80, que començà a desenvolupar-se un estudi sistemàtic de la formació de patrons en sistemes òptics.

La capacitat formadora d'estructures espacials per part de les cavitats òptiques, que són el tipus de sistemes amb què tractarem, ve fortament condicionada pel tipus de cavitat -i no només del medi material- emprada. Aquestes cavitats òptiques no-lineals estan formades per un conjunt d'espills que conté un medi no-lineal al seu interior.

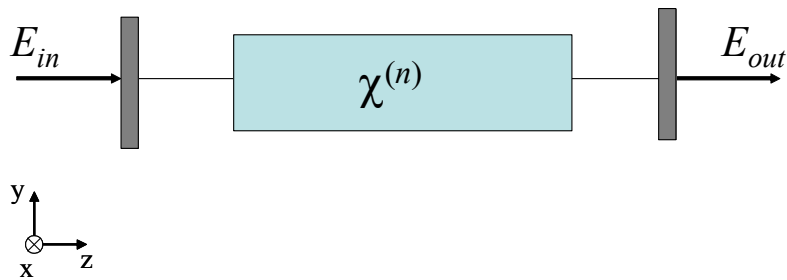


Fig.1.3. Esquema d'una cavitat Fabry-Perot amb espills plans i un medi no-lineal d'ordre  $n$  al seu interior.

Com ja hem dit, estan caracteritzades per una estructura de modes -que depèn de la geometria de la cavitat- i també per una intensa retroalimentació. Aquesta realimentació magnifica l'efecte de la interacció no-lineal, ja que la llum passa un nombre elevat de vegades pel medi, i s'ha de tindre en compte a l'hora de estudiar el camp emergent.

El factor més rellevant és el tipus d'espills, si són plans o esfèrics, i el número de Fresnel de la cavitat (bàsicament una mesura de l'obertura d'aquesta cavitat). Així, en els làsers usuals trobem cavitats amb espills concavos i número de Fresnel menut, cosa que provoca que el nombre de modes transversals que poden ser amplificats siga reduït -ja hem comentat que el que hom vol per la gran majoria d'aplicacions d'un làser són cavitats monomodes amb un perfil gaussià. Òbviament, la dinàmica espàcio-temporal d'aquest tipus de sistema depèn molt específicament de les condicions de contorn i de la geometria particular de cada cavitat, que sol implicar un cert número no massa elevat de modes. Per estudiar aquestes cavitats amb *simetria radial*

(espills esfèrics), es desenvolupa el camp en modes propis de la cavitat, que depenen de la geometria particular d'aquesta. Els patrons predits per aquesta tècnica [Lugiato90, Prati94, Brambilla94] s'han confirmat experimentalment [Lin90, Coates94]. Ara bé, aquests patrons, són de naturalesa exclusivament òptica, i es deuen fonamentalment a la geometria de la cavitat i a les condicions de contorn, i no són intrínsecs a la naturalesa no-lineal del problema.

Molt més interessant per nosaltres és considerar l'extrem oposat, és a dir, el cas de cavitats òptiques amb espills plans i número de Fresnel molt elevat, on un gran nombre de modes - ones planes- pot oscil·lar simultàniament dins de la cavitat. Diem que aquest cas ens resulta més interessant perquè permet connectar la dinàmica espàcio-temporal de les cavitats òptiques amb la formació d'estructures en altres sistemes, ja que en aquestes cavitats amb simetria translacional i alliberades dels efectes de les condicions de contorn particulars, els patrons emergents són fonamentalment deguts a la naturalesa no-lineal del problema. D'aquesta manera podrem extraure profit de la universalitat en la descripció a què ens estem referint reiteradament.

En aquest sentit dos treballs són de particular importància des del punt de vista històric. Un d'ells és el de Lugiato i Lefever [Lugiato87], on formulen un senzill model de cavitat Kerr, el qual conté el mecanisme bàsic de la formació de patrons. En el segon treball [Couillet89] es mostra per primer cop que les equacions de Maxwell-Bloch que descriuen un làser de dos nivells en una cavitat amb espills plans exhibeixen un tipus de solució universal com són els vòrtexos -un vòrtex és un punt d'intensitat nul·la que presenta una singularitat de fase, de forma que el camp té una variació contínua de fase d'un múltiple enter de  $2\pi$  al voltant del centre del vòrtex.

Abans de continuar, trobem interessant discutir algun detall del mecanisme bàsic que permet la formació d'estructures en cavitats òptiques. Aquest mecanisme apareix en el model del Kerr anteriorment esmentat [Lugiato87] i posteriorment sigué analitzat en [Scroggie94].

Una cavitat ve descrita per la seva estructura de modes, entre els quals podem distingir entre longitudinals i transversals. Suposem que una cavitat funciona seleccionant un determinat mode longitudinal -és a dir, hi ha algun mecanisme que impedeix que ho faci en la resta de modes longitudinals. Això, però, no impedeix que la cavitat resone en qualsevol dels modes transversals que corresponen al mode longitudinal seleccionat. Això possibilita que es done l'excitació fora de la resonància. És a dir, si considerem la injecció d'un camp extern amb una freqüència major que la pròpia del mode longitudinal en què resona la cavitat, aquest camp no resonarà axialment



amb la cavitat (no tindrem una emissió en eix), però encara podrà resonar amb la cavitat fora d'eix, és a dir, inclinant-se (Fig. 1.4).

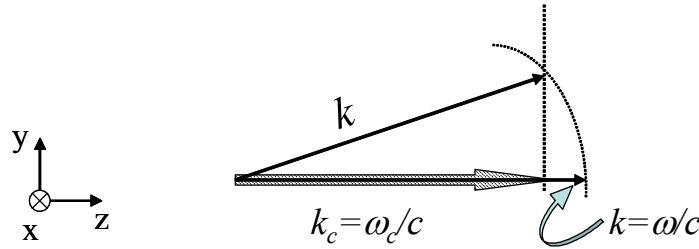


Fig.1.4. Resonància fora d'eix. Un camp de freqüència  $\omega$  major que la pròpia de la cavitat,  $\omega_c$ , encara pot resonar si es propaga fora d'eix.

Ara bé, l'emissió axial correspon a una única ona plana i la intensitat de llum a la sortida presentarà una distribució espacialment homogènia. Per contra, quan l'emissió es produeix fora d'eix poden aparèixer estructures en la distribució de la intensitat del camp. Es formarà aleshores un con de vectors que satisfan la resonància -els extrems dels quals formen un cercle crític en el pla transversal-, els quals són tots ells igualment resonants; sovint s'excitaran un conjunt de modes finit corresponent a modes sobre aquest cercle, i la distribució d'intensitat emergent correspondrà a la interferència d'aquests modes excitats (veure secció 1.3).

Comentarem breument alguns dels resultats més rellevants de l'estudi d'estructures extenses que apareixen als diferents sistemes òptics. Per una revisió dels tipus d'estructures que es generen en aquests sistemes poden consultar el llibre [Staliunas03] o reculls com [Lugiato98].

El patró més senzill és el de una (o en algun cas diverses) ona viatgera, que és la solució bàsica del làser [Jakobsen92], havent-se observat experimentalment [Encinas-Sanz96, Houlihan01]. L'ona viatgera també és solució d'altres resonadors no-lineals, com els oscil·ladors òptics no-degenerats [Longhi96, Sanchez-Morcillo98]. Si injectem un camp extern al làser, el patrons són més complexos, donant lloc a rotllos o hexàgons [Georgiou94, Longhi97a].

Els rotllos (Fig.1.5) són patrons molt comuns en moltes de les cavitats no-lineals que tractem: oscil·ladors òptics paramètrics degenerats (DOPOs) [Oppo94b], mescladors de quatre ones [deValcarcel96], biestabilitat òptica [Tlidi93] i cavitats Kerr [Geddes94]. En aquests resonadors trobem també patrons hexagonals [Firth92, Taranenko02]. (Troblem patrons similars als que es troben en hidrodinàmica en la convecció de Rayleigh-Bénard).

També trobem, en alguns d'aquests resonadors, altre tipus de solucions corresponent a patrons amb formes espirals, per exemple en làsers [Yu96] i OPOs [Lodhal00, Longhi01]. (Aquestes estructures són semblants a les que apareixen en sistemes químics de reacció-difusió).

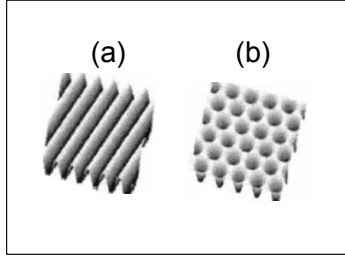


Fig.1.5. Patrons de rotllos (a) i hexàgons (b) en [Taranenko02].

Aquests són els patrons més comuns que trobem als resonadors no-lineals, tanmateix, considerant models més complexos, la diversitat de models que trobem es tornaria encara molt més extensa.

Hem parlat fonamentalment de patrons generats en cavitats òptiques no-lineals, però aquestes estructures espacials es troben també en altres configuracions. Trobem patrons en configuracions sense cavitat, on un camp es propaga a través del medi no-lineal, donant lloc a distribucions espacials no trivials [Mamaev96], o bé en la contrapropagació de dos camps que interfereixen al travessar el medi no-lineal [Firth88, Grynberg88]. En sistemes amb un únic espill (Fig.1.6.), on la no-linealitat i la difracció, a diferència dels casos anteriors, actuen separatament en l'espai, s'ha predit la formació de patrons, sobretot hexagonals [Firth91, D'Alessandro91, Scroggie96], confirmant-se experimentalment els resultats per diversos medis no-lineals, e.g. [Lange96, Vorontsov97].

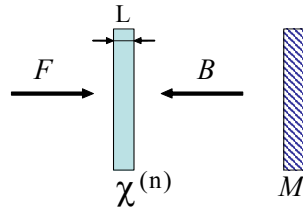


Fig.1.6. Configuració amb un únic espill. El camp travessa el medi no-lineal de grossor  $L$ , es reflexa a l'espill  $M$  i torna a travessar el medi.

### 1.3 Estructures Localitzades

Fins ara hem comentat algunes solucions estables del sistema corresponents a patrons que s'extenen al llarg tot el pla transversal. Ara bé, si per uns valors determinats dels paràmetres, el sistema té dues (o més) solucions estables, pot assolir una d'aquestes solucions en part del pla transversal i l'altra solució en la resta de l'espai. Sota aquestes condicions poden generar-se estructures complexes, de les quals cal destacar les estructures localitzades. Entre les estructures localitzades, en aquest treball ens centrarem en el solitons de cavitat. Aquests solitons de cavitat (CS, de l'anglès *cavity solitons*) comparteixen certes característiques amb els solitons espacials de propagació, que són feixos de llum que es propaguen sense deformar-se en un medi on la no-linealitat i la difracció es compensen. Els CSs són estructures que apareixen en el pla transversal a la propagació de la llum en cavitats òptiques no-lineals, on apareixen en la forma de punts brillants indeformables sobre un fons fosc (solitó brillant) o bé com una línia -o un cercle, en dues dimensions- fosc (solitó fosc) en una regió il·luminada. Aquests CSs desperten un gran interès, ja que poden jugar un important paper en possibles aplicacions tecnològiques: un solitó és equivalent a un bit d'informació, que pot escriure's o borrar-se, i seria de gran utilitat per emprar-ho en enmagatzament i processament paral·lel de la informació [Weiss02].

Podem classificar els CSs en dos tipus: CSs d'amplitud i CSs de fase. Malgrat que aprofundirem en les característiques dels distints tipus de solitons en la secció 1.4.2, presentem ara a grans trets algunes de les propietats dels dos tipus de CSs. Així mateix, presentem un breu resum dels començaments i algunes fites de particular interès en el camp dels CSs. De qualsevol manera, pot trobar-se un resum en e.g. [Firth01].

Els solitons d'amplitud els trobem arran bifurcacions subcrítiques de les solucions del sistema, de forma que per un conjunt de paràmetres tenim un sistema biestable, on en distints punts de l'espai connecten bé una solució excitada i una altra (la que ha patit la bifurcació) que no ho està, bé dues solucions excitades però de diferent amplitud. Els solitons d'amplitud poden ser brillants (on la major part del sistema es troba en la solució de menor intensitat) o foscos (on es troba en la solució de major intensitat).

Els solitons de fase els trobem arran bifurcacions que tant poden ser supercrítiques com subcrítiques, però sempre amb ruptura de simetria de fase, de forma que el sistema pot assolir dues solucions equivalents, de la mateixa amplitud, que es diferencien l'una de l'altra exclusivament per una

diferència de  $\pi$  en la seva fase. En aquests sistemes existeix per tant una biestabilitat de fase, de forma que la fase del camp pot prendre distints valors en distintes regions (dominis) del pla transversal, separades entre si mitjançant una línia fosca. Aquestes línies reben el nom de parets de domini (en anglés *domain walls*, DWs), i són estructures u-dimensionals; en dues dimensions el que trobem és un anell fosc tancat (una paret circular) separant dues regions del pla transversal de fases oposades (que reben el nom de *droplets*).

Finalment, un altre tipus d'estructura localitzada sobre la qual no ens detindrem, ja que s'allunya dels propòsits d'aquest treball, però que cal recordar, són els vòrtexos òptics, on ja no tenim una coexistència de solucions sinó un punt d'amplitud del camp nul·la i una singularitat de la fase. Perquè aquestes solucions siguin possibles la fase del camp ha de ser lliure.

Ens centrarem en l'estudi dels CSs, i comentarem succintament com començà aquest estudi, així com algunes aportacions fonamentals, tant de caire teòric com experimental. El primer treball en què es va predir l'existència d'estructures localitzades en una cavitat òptica no-lineal sembla ser el de McLaughlin et al. en 1983 [McLaughlin83], que integraren numèricament les equacions de la bistabilitat òptica en cavitat (de fet, una cavitat Kerr amb input Gaussià) i, malgrat que no obtingueren solitons aïllats, s'obtingué un conjunt de solitons brillants. Aquests autors consideraven la propagació del camp a l'interior de la cavitat i a cada volta al resonador (*cavity roundtrip*), afegien coherentment a l'espill de sortida el camp injectat. Foren McDonall i Firth [McDonall90] els que mostraren, anys després, que es poden obtenir solitons aïllats al mateix sistema modulant la intensitat del camp de bombeig. També mostraren en aquest treball com encendre i apagar els solitons mitjançant pulsos addicionals fora de fase amb el camp. Altre treball pioner és el de Rosanov qui va introduir els autosolitons difractants [Rosanov88, Rosanov90], formats a partir de les anomenades *switching waves*.

Arran aquests treballs pioners, aparegueren els primers estudis de CSs en models de camp uniforme (*mean field*), en què l'adició coherent del camp a l'interior de la cavitat amb el camp injectat era substituïda per una única equació diferencial amb derivades parcials (models com els que es consideren en aquesta tesi). Així, cap a mitjans de la passada dècada aparegueren prediccions sobre l'existència d'estructures localitzades (del tipus de solitó brillant) en models de biestabilitat òptica [Tlidi94a, Tlidi94b], de cavitat amb un medi pasiu de dos nivells [Firth96b, Brambilla96], i en el DOPO [Longhi97a, Staliunas97].

Són més els sistemes en què s'ha predit l'existència de solitons brillants. Sense voler fer ací un repàs exhaustiu d'aquestes prediccions, mencionarem els OPO no degenerats [Sanchez-Morcillo97, Longhi98a, deValcarcel00], en generació de segon harmònic en cavitat [Etrich97, Longhi98b, Peschel98], les cavitats Kerr [Firth96], i en làsers [Vilaseca01, Ahufinger03]. Sí mencionarem però l'observació experimental de solitons brillants. La primera vegada sigué el 1992, observant-se en làsers amb absorbent saturable [Bazhenov92] i posteriorment en cavitats fotorrefractives [Staliunas98]. Mención a banda mereixen les estructures localitzades predites [Spinelli98, Michaelis97] i observades [Taranenko01a, Taranenko01b, Barland02] en resonadors no-lineals de semiconductor.

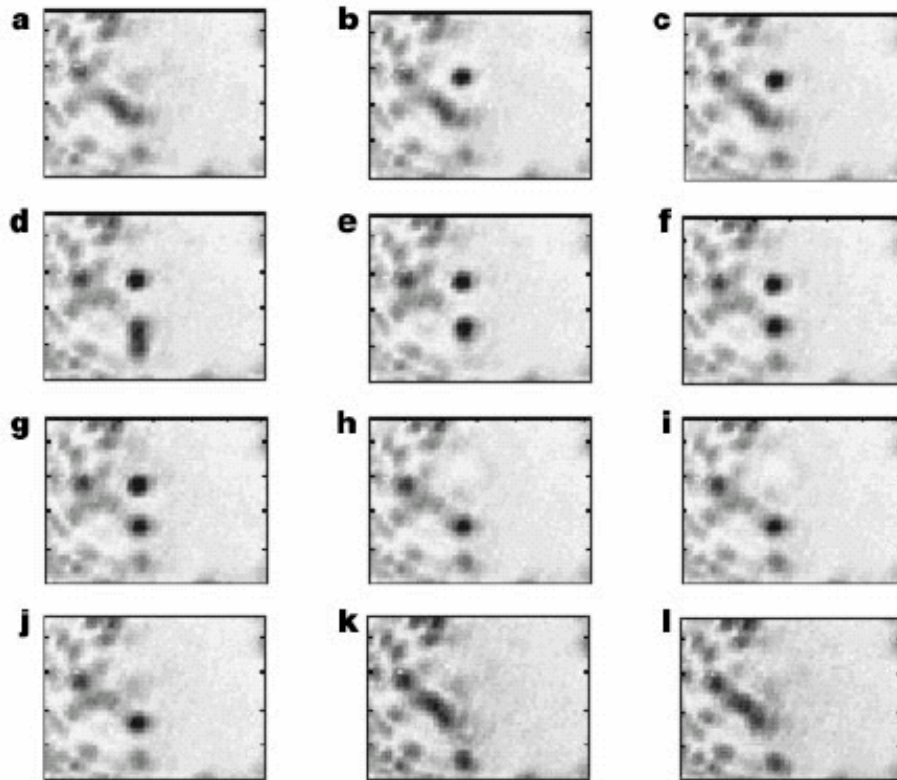


Fig. 1.7. Solitons observats en resonadors no-lineals de semiconductors en [Barland02]. Pot veure's el procés individual d'escriptura i esborrament del CSs.

D'altra banda, l'existència de solitons de fase en DOPOs fou predita per Trillo et al. [Trillo97] i per Staliunas i Sánchez–Morcillo [Staliunas98a] (aquests últims ja havien trobat el mateix tipus de solució a l'equació de Swift–Hohenberg [Staliunas98b] que representa el DOPO quan aquest funciona aprop del llindar d'emissió). Cal destacar l'observació experimental de solitons de fase (parets de domini) en oscil·ladors fotorrefractius per Weiss i col·laboradors [Taranenko98, Larionova04] així com molt recentment al laboratori d'òptica no-lineal del nostre grup [Esteban-Martín04].

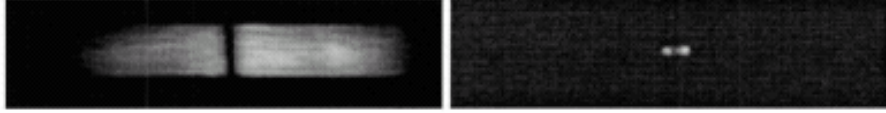


Fig. 1.8. Paret de domini observada en [Esteban-Martín04]. Es mostra l'aspecte en camp proper (esquerra) i camp llunyà (dreta).

En el moment actual, l'interès per aquest tipus d'estructures és gran i es tracta d'un camp d'activitat investigadora continuada, revestint particular interès les investigacions relatives al control de les estructures localitzades i la seua possible utilització en aplicacions de caire pràctic. Aquest serà, així mateix, el tema al voltant del qual es desenvolupa aquesta tesi: tots els treballs que s'hi presenten es centren en l'estudi dels CSs, tant d'amplitud, que s'estudien en el cas particular de cavitats Kerr, com de fase, estudiant-se les parets de domini per al DOPO, així com en un sistema més general descrit per una equació de paràmetre d'ordre. Finalment es consideren, també en el DOPO, les fluctuacions quàntiques de tots dos tipus de CSs.

## 1.4 Ferramentes teòriques

Fins ara s'ha descrit què és allò que entenem per estructures dissipatives, i quines són les principals estructures que podem trobar. Així mateix, hem fet un breu repàs des dels primers estudis sobre la distribució espacial de llum en el pla transversal, que ens permetrà contextualitzar el camp de treball i les contribucions presentades. Caldrà ara, però, saber com s'estudien aquests patrons i aquestes estructures localitzades en sistemes que presenten *simetria traslacional*.

### 1.4.1 Mecanisme de formació de patrons. Anàlisi d'estabilitat

Aquesta anàlisi és vàlida per qualsevol sistema formador de patrons (i no només per cavitats òptiques) amb simetria traslacional. Aquests sistemes parteixen d'una solució estacionària homogènia, que variant els paràmetres del sistema, es desestabilitzarà trencant aquesta simetria i donant lloc a una estructura espacial (en el cas dels sistemes òptics, en el camp transversal al de la propagació de la llum): l'anàlisi d'estabilitat ens proporciona aquesta informació. Veiem en què consisteix exactament.

Els sistemes formadors de patrons són sistemes dinàmics que estan definits per unes equacions d'evolució temporal per a les variables del sistema de la forma

$$\partial_t \mathbf{u} = \mathbf{G}(\mathbf{u}, \partial_x \mathbf{u}, \dots; R), \quad (1.1)$$

on s'ha designat per  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u_1(\mathbf{x}, t), u_2(\mathbf{x}, t), \dots, u_n(\mathbf{x}, t))$  el vector estat de  $n$ -components de les variables del sistema, per  $R$  l'espai dels paràmetres de control del sistema, la funció vectorial  $\mathbf{G}$  és un conjunt de funcions no-lineals de les variables i de les seves derivades espacials i  $\mathbf{x}$  és el vector de coordenades espacials. (Al llarg de tot el treball els símbols en negreta denotaran caràcter vectorial). Si el sistema té simetria traslacional en el pla transversal, les equacions dinàmiques (1.1) admeten una (o més) solució estacionària espacialment homogènia (i.e.  $\partial_x \mathbf{u}_0 = 0$ ), que anomenem  $\mathbf{u}_0$ . En cas de cavitats òptiques la derivada espacial apareix sempre en el terme de difracció i en cas de e.g. semiconductors, també en el terme de la difusió, corresponent a  $\nabla_{\perp}^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2$  -la qual cosa no impedeix que puguin haver-hi, en alguns casos, termes advectionals on apareguen derivades primeres. L'estabilitat d'aquesta solució dependrà dels valors dels paràmetres de control del sistema: el que tractarem d'estudiar és què ocorre quan aquesta solució estacionària perdi l'estabilitat. Com que sovint les equacions microscòpiques que descriuen el sistema no tenen solució analítica coneguda o bé són massa complicades per analitzar-les, desenvoluparem mètodes pertorbatius que permeten estudiar el comportament del sistema arran de la inestabilitat.

Per tal de fer el tractament de tota aquesta terminologia matemàtica menys feixug, l'aplicarem al cas particular de l'oscil·lador òptic paramètric degenerat (DOPO), en una configuració com la que es presenta en la Fig.1.3, amb un medi  $\chi^{(2)}$  al seu interior. Admetrem que l'amplitud del camp no té estructura espacial en la direcció de propagació (direcció  $z$ ). Sols podran ser amplificats els modes que siguin resonants amb la cavitat, ja que la resta de modes desapareixeran després d'uns quants recorreguts dins la cavitat. Con-

siderarem que les amplituds dels camps no tenen dependència espacial en  $z$ , és a dir, considerem pèrdues homogènies en el medi. Sota aquestes condicions escrivim les equacions per a un mode de la cavitat i realitzem dues aproximacions comuns, a saber, que la freqüència del camp en la cavitat amb el medi és pròxima a la que tindria en el buit i l'aproximació lenta de l'envolvent per a les amplituds dels camps, que equival a considerar que l'envolvent dels camps varia lentament en comparació amb la freqüència pròpia de la cavitat. Sota aquestes aproximacions arribem a l'expressió habitual que descriu el comportament de les amplituds de variació lenta dels camps en un DOPO [Oppo94a]:

$$\partial_t A_0 = \gamma_0[-(1 + i \Delta_0) A_0 + E + i a_0 \nabla_{\perp}^2 A_0 - A_1^2], \quad (1.2)$$

$$\partial_t A_1 = \gamma_1[-(1 + i \Delta_1) A_1 + i a_1 \nabla_{\perp}^2 A_1 + A_0 A_1^*], \quad (1.3)$$

on  $E(x, y)$  és el camp extern de freqüència  $\omega$ , les  $A_i$  són proporcionals a les amplituds dels camps, sent  $A_0$  (camp de bombeig) proporcional al camp de freqüència  $\omega$  i  $A_1$  al camp de freqüència  $\omega/2$  (camp senyal).  $\Delta_i$  és proporcional a la desintonia entre la freqüència del camp  $i$  i la freqüència més pròxima de la cavitat, l'operador laplaciana transversal  $\nabla_{\perp}^2$  descriu la difracció i la seva efectivitat ve mesurada pels paràmetres de difracció  $a_i$ . Les taxes de relaxació per a cadascú dels camps vénen donades pels paràmetres  $\gamma_i$ .

El DOPO és un sistema dinàmic amb dependència espacial. Podem comprovar que les equacions que el descriuen són equacions del tipus (1.1). Aquestes equacions microscòpiques, com veiem, no descriuen cap tipus d'interacció a nivell "atòmic", sinò que descriuen el comportament del sistema a través dels blocs que el conformen, és a dir, del medi material i dels camps. El vector estat de les equacions (1.1),  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$  és, en el cas concret del DOPO,  $\mathbf{u} = (A_0, A_0^*, A_1, A_1^*)$ . Els paràmetres de control  $R = \{R_1, \dots, R_p\}$  en aquest cas s'identifiquen amb  $R = \{\gamma_i, \Delta_i, E\}$ . Quan entenem el DOPO com un sistema espacialment extens ens referim a que les dimensions del pla transversal a la propagació de la llum i en el qual es formaran els patrons, són molt més grans que la inversa del nombre d'ones dels patrons. És com si tenim un canal d'aigua i es genera al seu interior una ona estacionària: direm que el canal d'aigua és extens si la longitud de l'ona estacionària és prou menor que la llargària del canal.

Resulta necessari estudiar l'estabilitat de la solució estacionària  $\mathbf{u}_0$  quan variem el paràmetre de control -e.g., augmentant el bombeig o variant la desintonia, en el cas de resonadors no-lineals-, ja que el tipus d'intestabilitat



que pateix la variable  $\mathbf{u}$  permet classificar els patrons que hi emergeixen. Per dur a terme aquesta anàlisi desenvoluparem una *anàlisi lineal d'estabilitat al voltant de la solució estacionària*  $\mathbf{u}_0$  [Ioos90], on estudiem la resposta del sistema a un mode de Fourier que pertorba l'estat estacionari. Concretament, el que fem en primer lloc és partir de la solució estacionària i uniforme més senzilla,  $\mathbf{u}_0$ , d'un sistema en particular descrit per unes equacions del tipus (1.1). Aquesta solució, que és vàlida per qualsevol valor dels paràmetres de control,  $R$ , no serà, però, sempre una solució estable. La inestabilitat bàsica de  $\mathbf{u}_0$  la trobem desenvolupant  $\mathbf{G}$  al voltant de  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_0$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_0 + \delta\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \quad (1.4)$$

i linealitzant al voltant de les pertorbacions  $\delta\mathbf{u}$ , que prenem com una pertorbació corresponent a un vector d'ona determinat

$$\delta\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \delta\bar{\mathbf{u}} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \lambda t). \quad (1.5)$$

En cas que la solució analitzada fos la solució trivial  $\mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$ , tindriem senzillament de l'equació (1.5)  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \delta\bar{\mathbf{u}} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \lambda t)$ . La forma de les equacions linealitzades és

$$\partial_t \delta\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = D(\mathbf{u}_0) \delta\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \quad (1.6)$$

on la matriu  $D$  rep el nom de matriu d'estabilitat del sistema i es correspon amb la matriu de derivades

$$D_{ij} = \partial G_i / \partial u_j + \sum_k \{ [\partial G_i / \partial (\partial_x^k u_j)] \partial_x^k + [\partial G_i / \partial (\partial_y^k u_j)] \partial_y^k \}. \quad (1.7)$$

En el cas del DOPO la solució trivial, estacionària i uniforme, s'obté anul·lant les derivades espacials i temporals en (1.2-1.3), per sota del llindar d'oscil·lació s'obté  $A_0^{(0)} = E / (1 + i\Delta_0)$ ,  $A_1^{(0)} = 0$ , i s'estudia l'estabilitat de la solució front a pertorbacions del tipus  $A_i \exp(i(k_x x + k_y y) + \lambda t)$ .

L'equació (1.6) tindrà un conjunt d'autovalors  $\lambda(k)$ . Recordant l'expressió de les pertorbacions (1.5) quan  $\lambda$  tinga part real negativa la pertorbació s'esmoreirà amb el temps i la solució  $\mathbf{u}_0$  serà estable. En canvi, quan la part real de l'autovalor siga positiva, les pertorbacions creixeran en el sistema desestabilitzant  $\mathbf{u}_0$ . Així, podem identificar la part real de l'autovalor  $\lambda$  com un coeficient d'atenuació de la pertorbació, mentres que la part imaginària s'identifica amb una freqüència temporal. Si el comportament de  $\mathbf{G}$  amb els

paràmetres de control és tal que existeix un valor crític  $R_c$  i un vector d'ona crític  $\mathbf{k}_c$  tal que

$$\begin{aligned} R < R_c &\Rightarrow \operatorname{Re}[\lambda(\mathbf{k})] < 0, \\ R = R_c &\Rightarrow \operatorname{Re}[\lambda(\mathbf{k}_c)] = 0, \\ R > R_c &\Rightarrow \operatorname{Re}[\lambda(\mathbf{k}_c)] > 0. \end{aligned} \tag{1.8}$$

la solució estacionària i homogènia  $\mathbf{u}_0$  deixa de ser estable en  $R = R_c$  i es desestabilitza donant lloc a una distribució espacial amb nombre d'ona  $\mathbf{k}_c$ .

Aquesta inestabilitat que apareix per a  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_c$  en anul·lar-se la part real de l'autovalor pot classificar-se en dos tipus segons el seu comportament temporal:

a) si  $\operatorname{Im}[\lambda(\mathbf{k}_c)] = 0$ , la inestabilitat és estacionària; la nova solució a què es desestabilitza  $\mathbf{u}_0$  és estacionària al llarg del temps.

b) si  $\operatorname{Im}[\lambda(\mathbf{k}_c)] \equiv \omega_c \neq 0$ , la inestabilitat és oscil·latria.

En cas que la inestabilitat es produeixi en  $\mathbf{k}_c = \mathbf{0}$ , llavors  $\mathbf{u}_0$  es desestabilitza en una nova solució uniforme (que pot ser estacionària o dinàmica, depenent del valor de  $\operatorname{Im}[\lambda(\mathbf{k}_c = 0)]$ ).

Per tant, podem distingir entre tres classes de sistemes formadors de patrons en base a la naturalesa de la inestabilitat lineal que pateix l'estat estacionari uniforme  $\mathbf{u}_0$  [Cross93].

Tipus  $I_s$  ( $\omega_c = 0, \mathbf{k}_c \neq 0$ ): Estacionari en el temps i periòdic en l'espai. Per sobre del llindar, i gràcies a la selecció del mecanisme no-lineal, donarà lloc a diferents tipus de patrons "ideals" (estructures periòdiques). El més senzill és l'estat anomenat rotllo en una dimensió. En dues dimensions trobem altres patrons, com quadrats o hexàgons.

Tipus  $III_0$  ( $\omega_c \neq 0, \mathbf{k}_c = 0$ ): Oscil·latori en el temps i uniforme en l'espai. Dóna lloc a un estat sense estructura espacial però sotmés a una oscil·lació temporal periòdica.

Tipus  $I_0$  ( $\omega_c \neq 0, \mathbf{k}_c \neq 0$ ): Oscil·latori en el temps i periòdic en l'espai.

El cas  $III_s$ , amb  $\omega_c = 0, \mathbf{k}_c = 0$ , no té cap interès, ja que no genera cap patró pròpiament dit, sinó una altra solució estacionària i homogènia).

### 1.4.2 Formació de patrons extensos. Solucions amb simetria traslacional

La anàlisi lineal d'estabilitat ens permetrà, per tant, saber per quin vector d'ona crític  $\mathbf{k}_c$  es desestabilitza la solució estacionària i homogènia i, coneixent l'autovalor corresponent a aquest vector d'ona,  $\lambda(\mathbf{k}_c)$ , conèixer alguna de

les característiques de la nova solució estable del sistema. Ara bé, com ja sabem, en les cavitats òptiques moltes vegades l'única derivada espacial que apareix és una derivada segona corresponent a la difracció -encara que no sempre, ja que podem tindre, e.g., terme advectius-, i en aquest cas, a causa de la simetria del sistema la matriu  $D$  en l'equació (1.6) depèn solsament del mòdul del vector d'ona i, conseqüentment, ocorre el mateix amb l'autovalor

$$\lambda(\mathbf{k}_c) = \lambda(|\mathbf{k}_c|), \quad (1.9)$$

per tant no tenim un vector d'ona crític que determine el patró espacial que es formarà arran la inestabilitat, sinò que el que obtenim és un anell crític (Fig.1.9) de modes inestables en el pla transversal de  $(k_x, k_y)$ .

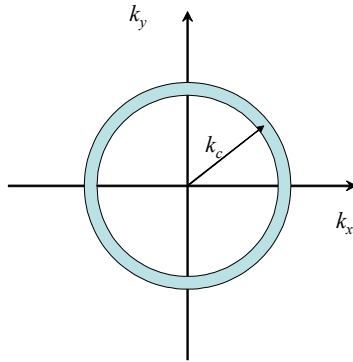


Fig.1.9 Anell crític de  $\vec{k}_\perp$  de modes inestables.

Com és possible aleshores que observem unes estructures espacials com les anteriorment esmentades -rotllos, hexàgons...? Quin és el fenomen pel qual observem tan sovint patrons formats per un nombre finit de vectors d'ona? Per què no observem una estructura formada per aquest anell continu? (De fet, aquestes estructures anomenades d'anell en el camp llunyà poden observar-se, encara que normalment només com a transitoris). El que ocorre és que, per efecte de la no-linealitat, s'estableix una competició no-lineal entre modes [Sanchez-Morcillo00b], trencant-se aquesta simetria rotacional.

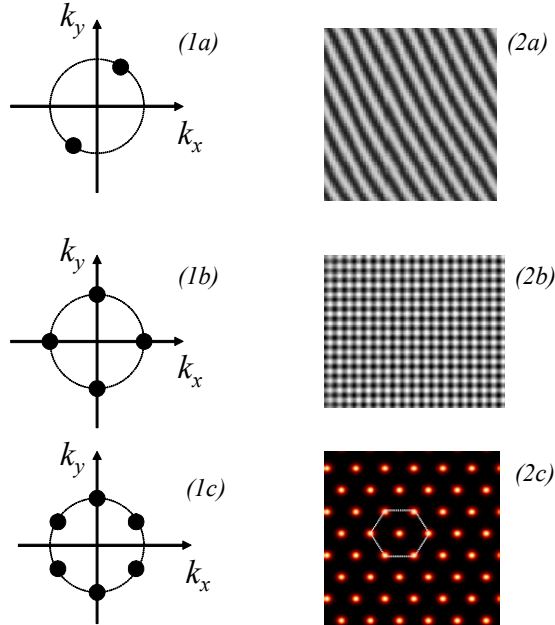


Fig. 1.10. Ruptura de simetria rotacional. Exemples dels patrons més senzills que apareixen per a una determinada  $k_c$ : rotllos (a), quadrats (b) i hexàgons (c), en el camp llunyà (1) i camp proper (2).

Com veiem, l'anell (continu) inestable es desestabilitza en dos, quatre o sis vectors d'ona en els exemples mostrats en Fig.1.10. Evidentment, a causa de la simetria rotacional, l'orientació d'aquests patrons és completament aleatòria. D'altra part, l'estudi analític del patró emergent arran l'estabilitat el fem trobant les *equacions d'amplitud* de les distintes solucions possibles, on fem la solució particular (rotllo, quadrat...) que volem estudiar com *ansatz* i desenvolupem pertorbativament les equacions d'evolució per aquesta solució.

### 1.4.3 Ruptura de la simetria traslacional: formació d'estructures localitzades

Fins ara s'ha parlat només d'estructures amb simetria traslacional en el camp transversal a la direcció de propagació de la llum. Tanmateix, trobem que de vegades aquesta simetria es trenca. Pot trencar-se en forma de defecte puntual dins el patró ideal (per exemple, si per efecte del soroll aquest patró pateix una dislocació o disclinació, de forma aleatòria) o pot tractar-se del

cas molt més interessant i sobre el qual tracta la major part de treballs que s'hi presenten: parlem dels solitons de cavitat.

Quan, per uns valors determinats dels paràmetres del sistema tinguem més d'una solució estable, podem trobar-nos que s'assoleix una solució en una (unes) regió(ns) del sistema i una altra en la resta del pla transversal. Sota aquesta condició de biestabilitat, es formen les distintes estructures connectant les distintes solucions, que classifiquem en fronts, solitons d'amplitud o solitons de fase, com ja hem comentat adés.

L'interés que desperten els solitons de cavitat, tant els solitons d'amplitud com els solitons de fase, és a causa de la seva aplicació potencial en tecnologia de la informació, on els solitons espacials permetrien codificar i emmagatzemar bits d'informació en el pla transversal. L'estudi de les estructures localitzades és actualment el camp més actiu dins de l'estudi de les distribucions transversals del camp electromagnètic en cavitat òptiques no-lineals.

Els dos tipus de solitons de cavitat poden existir sota condicions de biestabilitat del sistema, quan arran una bifurcació el sistema pot assolir dues solucions igualment estables. El tipus de bifurcació que genera les solucions que coexistiran en el solitó juga un paper fonamental en la naturalesa d'aquest.

Quan la bifurcació que pateix la solució homogènia del sistema és una bifurcació subcrítica, les amplituds de les dues solucions, la solució homogènia (en principi) que es desestabilitza i la nova solució difereixen en una quantitat finita en el punt de bifurcació. Com veiem en la figura 1.11,

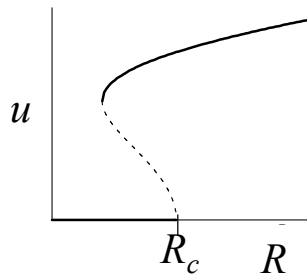


Fig.1.11. Bifurcació subcrítica de la variable  $u$  en augmentar els paràmetres de control  $R$ .

en una bifurcació subcrítica la nova solució naix "cap a darrere" sent inestable, fins arribar al punt de retorn. A partir d'eixe punt, i fins arribar al valor crític dels paràmetres  $R_c$ , el sistema exhibeix biestabilitat entre la solució homogènia (la trivial en la figura) i la solució superior. Si aquesta

solució (superior) és una solució modulada (com per exemple, rotllos o hexàgons), el solitó d'amplitud pot presentar-se en aquest cas connectant una part d'aquest patró modulad amb la solució homogènia.

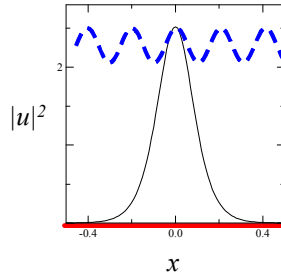


Fig.1.12. Solitó de cavitat brillant connectant un màxim d'un patró modulad que és biestable amb la solució trivial.

D'igual manera, si la solució homogènia fos la superior i la modulada la inferior, podríem tindre solitons d'amplitud foscos.

Si com s'ha vist els solitons d'amplitud connecten solucions estables de distinta amplitud, els solitons de fase connectaran solucions estables amb diferent fase. Els solitons de fase apareixen en sistemes amb ruptura de simetria de fase, on el sistema és biestable amb dues solucions equivalents que només es diferencien per una variació de fase  $\pi$  que poden connectar-se mitjançant solitons foscos de fase (DWs, de *domain wall* -paret de domini- en 1-D o *dark-rings* -anells foscos- en 2-D). El tipus de bifurcació no és una condició restrictiva per l'existència d'aquest tipus de solitó, ja que l'únic que li exigeix al sistema és una ruptura de la simetria de fase.

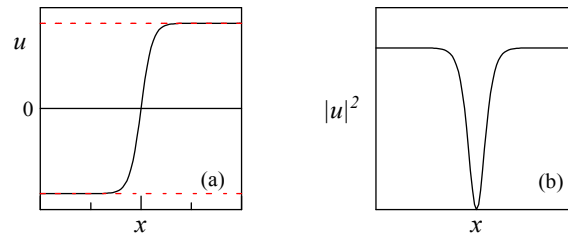


Fig.1.13. Solitó fosc de cavitat connectant dues solucions homogènies en oposició de fase. Amplitud (a) i intensitat (b) de la paret.

En la figura 1.13 es mostra una paret de domini connectant dues solucions

reals homogènies de fase oposada i amb un valor nul de la intensitat en el mínim d'aquesta. Ara bé, recordem que el camp electromagnètic és una magnitud complexa i per tant, potser la part real i la part imaginària del camp no s'anul·len en el mateix punt. En un cas així la intensitat en el centre de la paret no és exactament nul·la i el solitó rep el nom de solitó gris (Fig. 1.14).

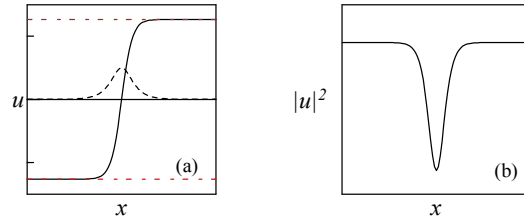


Fig.1.14. Solitó gris connectant dues solucions de fase oposada. La part real (línia contínua en (a)) i la part imaginària (línia discontinua) no s'anul·len en el mateix punt, de forma que la intensitat (b) no arriba a ser exactament zero en el mínim de la paret.

Sovint els sistemes presenten aquest dos tipus de parets, de manera que en funció dels valors dels paràmetres es produeix una transició de solitó fosc (o paret d'Ising) a gris (paret de Bloch). Aquesta transició és coneguda com transició Ising-Bloch fora de l'equilibri, per la seva semblança amb la transició Ising-Bloch (en equilibri) en ferromagnets [Couillet90]. En els sistemes no-variacionals les parets d'Ising són estàtiques, mentres que les de Bloch són dinàmiques, de forma que aquesta transició ve acompanyada en aquest cas pel moviment de les estructures.

A més a més, fins ara hem mostrat tan sols solitons de fase connectant solucions homogènies del sistema, tanmateix, les solucions que connecta poden ser també solucions modulades. Així mateix, l'existència d'un tipus de solitó (de fase o amplitud) no exclou la possibilitat d'existència de l'altre tipus de solitó: en sistemes que presenten una bifurcació subcrítica amb ruptura de simetria de fase podem trobar qualsevol dels dos tipus de solitó.

#### 1.4.4 Equacions de paràmetre d'ordre

L'estudi sobre les solucions del sistema, la seva estabilitat, les seves bifurcacions, el caràcter d'aquestes, la simetria de la fase, la ruptura de la simetria

rotacional i qualsevol altre estudi ho podem fer directament sobre les equacions *microscòpiques* del sistema. Recordem que aquestes equacions són les que descriuen el comportament particular de cada sistema, incloent els elements particulars que hi prenen part. Ara bé, enlloc de treballar sobre aquestes equacions particulars, sovint complexes i de difícil tractament, podem tractar de trobar una equació de paràmetre de ordre (OPE) que descriu el nostre sistema, si més no, en algun límit concret. Com que aquestes OPEs són equacions de caire universal, l'avantatge no serà senzillament reduir la dificultat de les equacions que s'estudien, sinó que, per una banda, podrem aprofitar tot el coneixement existent sobre l'OPE a què s'ha arribat a reduir les equacions microscòpiques del sistema, i per altra, tots els resultats obtesos per aquesta equació de paràmetre d'ordre seran igualment vàlids per qualsevol altre sistema que es descriu pel mateix tipus d'OPE, independentment de la naturalesa d'aquest.

Dos prototipus d'aquestes equacions que s'obtenen en sistemes òptics són les equacions tipus Swift-Hohemberg (SH) i tipus Ginzburg-Landau (GL).

Equacions com l'equació real SH

$$\partial_t u = \varepsilon u - (\nabla^2 + 1)^2 u - u^3,$$

on  $u(\mathbf{x}, t)$  és en general el paràmetre d'ordre, en aquest cas una magnitud real que és combinació de les amplituds dels camps de la cavitat, s'han derivat, per exemple, per a DOPOs [deValcarcel96, Longhi96c] i mescla degenerada de quatre ones [deValcarcel96], en el límit de desintonies menudes. Amb un terme constant adicional també s'ha obtés per a la biestabilitat òptica amb un [Mandel93] i dos fotons [Sanchez-Morcillo96]. L'equació de SH complexa descriu, e.g. làsers [Staliunas93, Lega95], oscil·ladors fotorefractius [Staliunas95] i OPOs [Longhi96c], també en el límit de desintonia menuda. L'equació real de SH desenvolupa patrons en forma de rotllos i hexàgons, mentre que la versió complexa ho fa en forma de xarxes de vòrtexos. Respecte a les estructures localitzades, la SH real sustenta dominis i solitons de fase, mentre que per a la complexa apareixen vòrtexos.

Altres variacions sobre l'equació de SH han estat també derivades per altres sistemes, com ara l'equació SH complexa amb un terme quintic  $u|u|^4$  que descriu, e.g. el comportament d'un làser amb absorbent saturable [Rosanov96], o bé termes que inclouen la possibilitat de resonància no-lineal on la desintonia  $\Delta$  passa a incloure una dependència amb la intensitat del camp sent ara  $\Delta - \Delta_0 |u|^2$ , com per exemple el DOPO amb una desintonia de bombeig



gran [deValcarcel96]. En totes aquestes versions modificades de l'equació de SH poden desenvolupar-se solitons.

Un altre model que apareix freqüentment en els sistemes òptics és l'equació complexa de Ginzburg-Landau (GL) i les seves diverses versions modificades. La forma general d'una equació de GL és

$$\partial_t u = (b_1 + i c_1) \nabla^2 u + f_1(|u|^2)u,$$

on  $f_1$  és una funció complexa de la intensitat del paràmetre d'ordre. Una versió de l'equació de GL de particular interès és

$$\partial_t u = i c_1 \nabla^2 u + i c_3 |u|^2 u,$$

que com veiem correspon a l'equació no-lineal d'Schrödinger.

En sistemes òptics s'han obtinguts diverses equacions de GL, tant en la seva versió real, com e.g. en la biestabilitat òptica [Mandel93], OPOs resonants [Staliunas95] o DOPOs [deValcarcel96]. Equacions complexes de GL també s'han derivat, com e.g. per al làser de dos nivells prop del llindar [Couillet89]. Equacions complexes de GL incloent termes addicionals, com el forçament paramètric, descriuen altres sistemes com l'amplificació sensible a la fase [Mecozzi94, Sánchez-morcillo00]. Les solucions que suporta l'equació en particular de GL que estem estudiant depenen dels valors dels seus coeficients.

Cadascuna d'aquestes equacions representen l'evolució d'un sistema òptic en un límit determinat, ara bé, el mateix tipus d'equació pot descriure, canviant el significat de cadascú dels termes que hi apareixen, el comportament d'un sistema d'una naturalesa completament distinta.

Així, l'estudi de l'evolució dels camps dins una cavitat òptica vindrà donat per un conjunt d'equacions, ja siguin microscòpiques, on describim tots i cadascú dels processos que hi contribueixen, ja siga amb trets més generals mitjançant una OPE, on cercarem un comportament més qualitatiu i universal. Ara bé, tant en un cas com en l'altre, d'allò que disposem és un conjunt d'equacions que proporcionen l'evolució de aquests camps. Per tal de resoldre-les, haurem de integrar-les. La integració d'aquestes equacions haurem de dur-la a terme mitjançant una integració numèrica que ens permeti estudiar les solucions de les equacions no només prop del llindar, com podríem fer amb l'anàlisi lineal d'estabilitat, sinó en qualsevol rang dels paràmetres, així com estudiar les distintes solucions que són estables. Els algorismes numèrics que s'han emprat per integrar aquestes equacions es mostren amb major detall a l'Apèndix A.

## 2 Efectes Quàntics en Òptica No-lineal. Antecedents

Els sistemes òptics formadors d'estructures dissipatives es diferencien de la majoria de sistemes formadors de patrons en què poden presentar efectes quàntics. Durant molt de temps l'estudi de la distribució espacial del camp i les seves propietats quàntiques foren dues disciplines tractades de forma independent i aïllada, i sorprenentment, no sigué fins anys després de començar a desenvolupar-se la teoria quàntica de la llum que es despertà l'interès per conèixer les propietats espacials de les fluctuacions quàntiques -de fet, als anys 90s.

L'interès sobre els estats no-clàssics de la llum començà als anys 60, quan Glauber desenvolupà la seva teoria sobre la coherència òptica [Glauber63]. Fins aquells moments, les prediccions donades per la teoria quàntica no afegien res de nou a la teoria clàssica; en canvi, els resultats augurats amb aquesta nova formulació eren únics i no esperats emprant la teoria clàssica. De fet, el primer experiment d'interferometria d'intensitat [Hanbury-Brown56], que calculava les correlacions en les fluctuacions d'intensitat de dos detectors emprant una font de llum tèrmica, donava com a resultat una funció de correlació d'intensitat amb *bunching* (apinyament, mantindrem però el terme en anglés) de fotons (veure fig. 2.1).

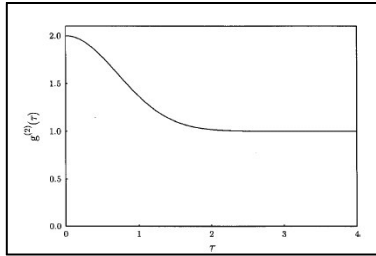


Fig.2.1. Bunching en la detecció de fotons en un experiment de mesura de la correlació d'intensitats [Kolobov99], es representa  $g^{(2)}(\tau)$  front a  $\tau$ .

Parlem de *bunching* de fotons quan, després de detectar un fotó, la probabilitat de detectar un segon fotó és major com menor és el temps transcorregut entre la detecció d'aquest segon fotó i el primer, en altre cas parlariem d'*antibunching* (veure fig. 2.2).

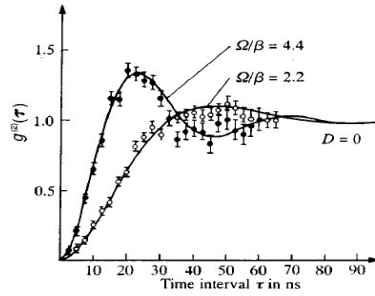


Fig.2.2. Antibunching de fotons en la fluorescència de resonància d'un àtom [Dagenais78].

El resultat d'un *bunching* de fotons és, en el fons, un resultat completament clàssic. Mentre que les fonts clàssiques presenten un *bunching* de fotons, per a un làser ideal actuant sobre el llindar d'engegament, e.g. coherent i perfectament estable, no hi hauria *bunching* de fotons. De la mateixa manera, si duguerem a terme un contactge de fotons al llarg d'un interval de temps i calculèssim l'aleatorietat amb què aquests fotons arriben segons l'interval de temps, per a un làser ideal trobaríem una distribució poissoniana. Per a una llum procedent d'una font tèrmica, e.g., la distribució de fotons seria superpoissoniana. Amb la formulació de Glauber es pogué, finalment, definir operacionalment els estats coherents de la llum, que corresponen a una ona clàssica exactament monocromàtica i d'amplitud complexa ben definida, estats límit entre els estats clàssics i quàntics de la llum, les propietats estadístiques dels quals delimiten, per tant, quan ens trobem davant un efecte quàntic. S'obria així l'estudi dels estats no-clàssics del camp electromagnètic, amb estudis i comprovacions experimentals, de fenòmens com l'*antibunching* (on la probabilitat de detecció d'un segon fotó no sempre decau amb l'interval de temps des de la mesura del primer fotó), estadístiques *sub-poissonianes* per la distribució del número de fotons i estats comprimits de la llum (estudi de l'*squeezing*) que, descomposant el camp en dos quadratures ortogonals, permetran tindre una incertesa en una d'aquestes quadratures menor que la corresponent als estats coherents.

Ara bé, com hem comentat, aquestes propietats quàntiques del camp electromagnètic, en les quals ens detindrem amb major detall en les seccions posteriors, es desenvoluparen inicialment considerant únicament fluctuacions quàntiques temporals dels camps, ignorant durant molt de temps possibles efectes espacials. Això és equivalent a dir que l'estudi es duia a terme en

l'aproximació d'un únic mode espacial del camp que, malgrat que sovint és una elecció perfectament justificada, té l'inconvenient de, per una banda, fer necessària la detecció completa amb un únic detector del feix per observar qualsevol característica quàntica del camp -ja que d'una altra manera aquestes estarien molt degradades- i, a més a més, no permet l'estudi de les fluctuacions quàntiques en patrons o estructures espacials. Per tal de tenir en compte el comportament de les fluctuacions quàntiques en el pla transversal a la propagació de la llum necessitarem una descripció completa de susdites fluctuacions, tant en l'espai com en el temps. Així doncs, no podrem limitar-nos a un únic mode espacial sinò que haurem de tractar amb una descripció multimode, introduint termes com *squeezing* local (on es mesura no tot el feix sinò només part), *squeezing* espacial en distints modes (tenim reducció de soroll o compressió per una banda ampla de modes) o estadística sub-poissoniana pels fotons no només en temps, sinò també en l'espai.

L'estudi espacial dels estats no-clàssics de la llum en el context dels sistemes formadors de patrons és un camp recent que només començà a investigar-se cap als anys 90, per Kolobov i Sokolov [Kolobov89, Kolobov91, Kolobov99] en amplificadors òptics paramètrics i pel grup de Lugiato en oscil·ladors òptics paramètrics [Lugiato93, Gatti95, Lugiato98, Lugiato97]. Aquest estudi espacial no només ha extés els fenòmens ja observats en el domini exclusivament temporal de les fluctuacions, sinò que ha permès descriure altres fenòmens nous i sorprenents, com les imatges quàntiques (*quantum images*), de què parlarem en la secció 2.2.

L'interés per l'estudi d'aquests estats no-clàssics de la llum, considerant tant el seu comportament temporal com l'espacial, no és exclusivament de caire fonamental, ja que el ventall de possibles aplicacions és d'allò més atractiu. Aquestes aplicacions abarquen el camp del tractament quàntic de la informació [Yamamoto90], amb el processat en paral·lel de la informació i la possibilitat d'operar en diversos canals mitjançant procediments òptics amb propietats no-clàssiques, les mesures d'alta precisió emprant llum comprimida (amb fluctuacions per sota del *shot-noise*), amplificació d'imatges sense soroll, o la litografia quàntica entre d'altres. (Podem trobar un recull en [Lugiato02].)

Per ubicar la situació actual de l'estudi espàcio-temporal de les fluctuacions quàntiques en sistemes òptics no-lineals, conèixer les aportacions que s'hi realitzen i situar-les en aquest marc, i presentar les ferramentes necessàries per estudiar les característiques dels estats quàntics del camp electromagnètic, seguirem els punts que es detalla tot seguit:

En la secció 2.1 es fa un breu recorregut històric dels primers anys de l'òptica quàntica, amb les aportacions fonamentals tant des del punt de vista teòric com experimental. L'estudi de les fluctuacions quàntiques es limitava a considerar exclusivament l'aspecte temporal, i per tant un únic mode del camp (*single-mode*). Els principals estats no-clàssics de la llum (*antibunching*, estadística sub-poissoniana de fotons i *squeezing*) es presenten també en aquest context *single-mode*.

En la secció 2.2 es revisa el camp de l'estudi espàcio-temporal de les fluctuacions quàntiques. Es generalitzen els estats no-clàssics anteriors, considerant ara diversos modes del camp (*multimode*), i es mostren trets nous i sorprenents que s'observen quan incloem l'espai a l'estudi de les propietats quàntiques.

Finalment, en la secció 2.3 es descriuen les tècniques emprades per estudiar les fluctuacions quàntiques, com estudiar l'evolució d'aquestes fluctuacions, com caracteritzar-les, i en particular, com mesurar l'espectre d'*squeezing*.

## 2.1 El començament: fluctuacions quàntiques en el temps i estats monomode no-clàssics de la llum

Tot i que l'estudi d'allò que coneixem com estats no-clàssics de la llum es retrotreu als anys vint (per una revisió del estats no-clàssics de la llum, consultar e.g. [Dodonov03]), és amb els primers treballs de Glauber [Glauber63], definint la coherència òptica i desenvolupant una teoria de la fotodetecció des d'una formulació quàntica, quan s'obrí el camí a la branca del coneixement de l'òptica quàntica. Amb la formulació de Glauber, per primer cop, els resultats predits per la nova teoria quàntica discernien dels predits per la teoria semiclàssica (entenem per teoria semiclàssica aquella que descriu la llum clàssicament i el medi material quànticament). Fins aleshores tots el resultats, tant experimentals com predits teòricament, tenien perfecta cabuda dins la formulació clàssica del camp electromagnètic. Ara es predeien estats que careixien d'explicació dins la teoria clàssica, com per exemple *antibunching* de fotons i estadístiques sub-poissonianes en el contacte de fotons, estats no-clàssics (dels quals parlem amb una mica més de detall al llarg d'aquesta mateixa secció) inexplicables des d'una estadística clàssica que hauria de recórrer a contrasentits com probabilitats negatives per explicar-los.

De totes formes, els primers efectes quàntics encara trigaren a observar-se. S'hagué d'esperar fins que Carmichael i Walls [Carmichael76a, Carmichael76b]

prediren l'*antibunching* de fotons que havia de ser present en la llum emergent de la fluorescència de resonància en un àtom de dos nivells. El primer experiment confirmant una predicció nova i única de la teoria quàntica es duria a terme un any després [Kimble77, Dagenais78].

El primer estat no-clàssic de la llum és, per tant, aquell que presenta *antibunching* de fotons, i l'analitzarem amb un poc més de detall. Aquest fenomen està relacionat amb el grau de coherència temporal de segon-ordre [Loudon83], que es defineix com

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle : I(t)I(t+\tau) : \rangle}{\langle I(t) \rangle^2}, \quad (2.1)$$

i que en un experiment pot mesurar-se amb la correlació d'intensitat ( $I(t) = a^\dagger(t)a(t)$  és l'operador fluxe de fotons). Aquesta magnitud  $g^{(2)}(\tau)$  és proporcional a la probabilitat de detectar un fotó en l'instant  $t + \tau$  després d'haver detectat un fotó en l'instant  $t$ , sense considerar les altres possibles deteccions que s'hagen produït en aquest interval de temps. Els :: en l'eq.(2.1) signifiquen ordenació normal i temporal (és a dir, els operadors creació apareixen a l'esquerra dels operadors destrucció i els temps estan ordenats de forma que a mesura que augmenten estan més cap els extrems de la funció de correlació), i correspon a la forma de produir-se la detecció en els detectors mitjançant l'absorció dels fotons que hi arriben.

Els primers experiments d'aquest tipus [Hanbury-Brown56], on s'emprava llum procedent de fonts tèrmiques, presentaven l'efecte de *bunching* de fotons: la probabilitat de detectar un segon fotó després d'una detecció anterior, era major quan menor era l'interval  $\tau$ , que és allò que esperem, sempre des d'un punt de vista clàssic: el que estem mesurant ací és fluctuacions en la intensitat, si detectem una fluctuació gran, la detecció anirà disminuint fins que la fluctuació minve.

Per a la llum coherent, que és llum clàssica sense fluctuacions, l'efecte del *bunching* de fotons desapareix, i la funció  $g^{(2)}(\tau) = 1$  és una constant per qualsevol interval  $\tau$ . En canvi, l'*antibunching* de fotons és un fenomen purament quàntic, on els operadors creació i destrucció del camp electromagnètic ja no poden ser tractats com números clàssics (*c-number*) sinò que han d'èsser tractats com operadors. Clàssicament el màxim de la funció  $g^{(2)}(\tau)$  el trobem per a un interval temporal nul  $\tau = 0$ , de forma que per qualsevol instant posterior es satisfà  $g^{(2)}(0) \geq g^{(2)}(\tau)$  (veure Fig. 2.1). En canvi, açò no es satisfà per alguns camps quàntics, els quals poden presentar distribu-

cions temporals de la funció  $g^{(2)}(\tau)$  on la màxima probabilitat de detecció d'un segon fotó pot donar-se per intervals de temps finits (Fig.2.2). Un altre efecte no-clàssic és la distribució *sub-Poissoniana* de fotons. Per un estat coherent d'amplitud complexa  $\alpha$ , la probabilitat  $p(n)$  de trobar en aquest estat un nombre  $n$  de fotons ve donada per una distribució Poissoniana

$$p(n) = e^{-\langle n \rangle} \frac{\langle n \rangle^n}{n!}, \quad (2.2)$$

amb  $\langle n \rangle = |\alpha|^2$  el nombre mig de fotons. L'estadística de fotons per a un estat monomode es caracteritza, en part, pel paràmetre de Mandel [Mandel79]

$$Q = \frac{(\Delta n)^2 - \langle n \rangle}{\langle n \rangle}. \quad (2.3)$$

El terme  $(\Delta n)^2$  és la dispersió del nombre de fotons, que per a una distribució Poissoniana val  $(\Delta n)^2 = \langle n \rangle$ . Els estats clàssics sempre tenen una dispersió del nombre de fotons major que la d'un estat coherent, per tant, per un estat clàssic,  $Q \geq 0$ . En canvi, un estat no-clàssic pot presentar una distribució sub-Poissoniana, una dispersió menor en el nombre de fotons i per tant un paràmetre  $Q$  que pot ser negatiu, arribant a assolir el valor  $Q = -1$  si la dispersió en el nombre de fotons és nul·la (cosa que ocorre als estats número o estats de Fock que són estats amb nombre de fotons ben definit). Per als estats quàntics amb estadística sub-Poissoniana tindrem per tant  $-1 \leq Q < 0$ . Els primers experiments on s'observà aquesta estadística sub-Poissoniana consistien en fluorescència amb un sol àtom [Short83] i en làsers [Machida86].

El tercer estat que presenta característiques no-clàssiques son els estats comprimits o *squeezed* de la llum [Stoler70, Yuen86]. El que caracteritza aquests estats és que son estats de mínima incertesa on les fluctuacions per a alguna quadratura del camp presenten un soroll menor que el límit quàntic estàndard. Què és el que volem dir amb això? En primer lloc definim la quadratura del camp  $\chi_\phi$  com

$$\chi_\phi = a e^{-i\phi} + a^\dagger e^{i\phi}. \quad (2.4)$$

Si tenim en compte que la relació de commutació entre els operadors creació i destrucció és  $[a, a^\dagger] = 1$ , s'ha de satisfer la relació de incertesa en les seves variances d'una quadratura i la corresponent ortogonal

$$(\Delta \chi_\phi)^2 (\Delta \chi_{\phi+\pi/2})^2 \geq 1. \quad (2.5)$$

(Encara que a primer cop d'ull puga semblar una formulació artificial i artificialosa, l'ús de les quadratures del camp resulta més intuïtiu si pensem que, per a un camp monocromàtic linealment polaritzat coherent la quadratura real  $\chi_{\phi=0}$  i la quadratura imaginària -ortogonal a l'anterior-  $\chi_{\phi=\pi/2}$ , no representen més que l'oscil·lació amb  $\cos(\omega t)$  i  $\sin(\omega t)$  del camp, respectivament.

Els estats per als quals es satisfà exactament la igualtat en (2.5) són els estats de mínima incertesa. Un estat coherent, que representem per  $|\alpha\rangle$  si la seva amplitud coherent és  $\alpha$ , és un estat de mínima incertesa on les variàncies per a dues quadratures ortogonals qualssevol·la són iguals

$$\left(\Delta\chi_{\phi}^{(\alpha)}\right)^2 = \left(\Delta\chi_{\phi+\pi/2}^{(\alpha)}\right)^2 = 1 \quad (2.6)$$

i tenen el mínim valor que per a la variància podria assolir-se en la teoria clàssica, que rep el nom de límit quàntic estàndard. Aquests estats coherents poden representar-se com un vector en el pla complex  $(\text{Re}(\alpha), \text{Im}(\alpha))$ , junt amb el cercle d'incertesa corresponent (Fig. 2.3), el qual defineix el límit quàntic estàndard.

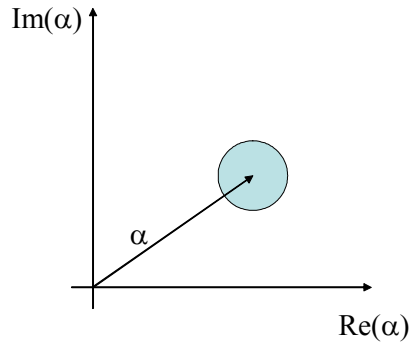


Fig.2.3. Representació en el pla complex d'un estat coherent amb la seva regió d'incertesa.

Els estats comprimits són també estats de mínima incertesa, però pels quals la incertesa en una quadratura està per sota del límit quàntic estàndard, la qual cosa s'haurà de compensar en la quadratura ortogonal per tal de satisfer la desigualtat (2.5), veure Fig. 2.4. En aquesta figura es representa un estat amb *squeezing* de fase (llistat) i un estat comprimit en la quadratura ortogonal, és a dir, amb *squeezing* d'amplitud (ombrejat).



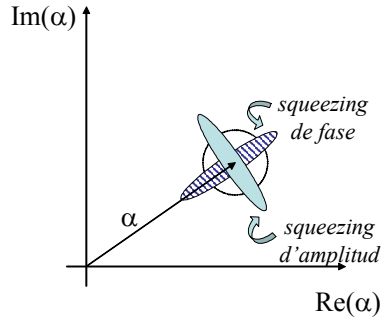


Fig.2.4. Representació d'estats comprimits i les seves region d'incertesa.

El gran avantatge d'aquests estats comprimits és que, en la quadratura comprimida, el soroll de les fluctuacions és menor que el de qualsevol camp coherent, i per tant, menor que el soroll del buit -que és un estat coherent d'amplitud nul·la-, la qual cosa permet pensar en aplicacions com la transmissió d'informació emprant aquesta quadratura. Podem trobar un recull sobre els estats comprimits en [Walls83, Loudon87, Drummond04].

La detecció de l'*squeezing* de fase implica dur a terme una detecció sensible a la fase, que es duu a terme mitjançant una detecció homodina en la qual el camp que presenta la compressió es mescla amb un camp intens que anomenem oscil·lador local (la detecció homodina s'explica més detalladament en l'apartat dedicat a l'espectre d'*squeezing*, apartat 2.3.4). El resultat d'aquesta detecció homodina ens proporciona les correlacions a dos temps de les fluctuacions d'intensitat, un resultat que s'interpreta de forma molt més clara si ho estudiem en l'espai de Fourier, en freqüències temporals, obtenint allò que anomenem l'espectre d'*squeezing*.

Els estudis, tant teòrics com experimentals, es centraren en les possibilitats de generar camps comprimits pels sistemes òptics no-lineals (que presenten una reducció de soroll important per a una quadratura) i així el primer estat comprimit s'observà en la mescla de quatre ones en un feix atòmic d'àtoms de sodi en 1985 [Slusher85].

## 2.2 Fluctuacions quàntiques espàcio-temporals. Estats multimode

Fins ara únicament hem considerat l'estudi de les fluctuacions quàntiques en el domini temporal. Ara volem generalitzar aquest estudi al domini espàcio-temporal, que ens permetrà estudiar i observar les distintes propietats quàn-

tiques de la llum no sols respecte al temps sinò també respecte la seva distribució espacial. Per estudiar el comportament de les fluctuacions del camp electromagnètic en el pla transversal del feix de llum, ja no haurem de detectar necessàriament el feix complet amb un únic detector [Kolobov99], com ocorria en el cas de l'estudi temporal, sinò que podem optar entre detectar el feix complet o només una part per tal d'estudiar el comportament espacial del soroll. Per exemple, podem emprar una matriu de detectors de tamany molt reduït (e.g., píxels d'una càmera CCD) que ens permetran conèixer les fluctuacions d'intensitat, així com les funcions de correlació d'aquesta intensitat, per distintes posicions dels detectors.

Generalitzant els conceptes anteriors, podem parlar d'estats que presenten un *bunching* de fotons espàcio-temporal definint el grau espàcio-temporal de coherència de segon ordre com

$$g^{(2)}(\vec{\xi}, \tau) = \frac{\langle : I(\vec{\rho}, t) I(\vec{\rho} + \vec{\xi}, t + \tau) : \rangle}{\langle I(\vec{\rho}, t) \rangle^2}, \quad (2.7)$$

que és proporcional a la probabilitat de mesurar un fotó en l'instant  $t + \tau$  i en la posició  $\vec{\rho} + \vec{\xi}$ , havent mesurat anteriorment una altre fotó en  $t$  i  $\vec{\rho}$ . Aquesta funció, clàssicament pren el seu valor mínim en  $\vec{\xi} = 0, \tau = 0$ . Per tant, parlarem d'un fenomen *bunching* espàcio-temporal si  $g^{(2)}(\vec{\xi}, \tau) < g^{(2)}(\vec{0}, 0)$ . Podem també estudiar les propietats espacials de les fluctuacions quàntiques independentment del comportament temporal, considerant processos que ocorren simultàniament (parlaríem de *bunching* espacial). De la mateixa manera, podem parlar també d'una estadística sub-Poissoniana espacial, ja que les fluctuacions d'un camp coherent, que recordem és el referent que marca el límit clàssic-quàntic, estan distribuïdes aleatòriament de la mateixa forma en el temps que en l'espai.

Pel que fa a l'efecte quàntic de la compressió o *squeezing* de les quadratures del camp, el grau de llibertat espacial permet parlar d'*squeezing* multimode espacial; tindrem una banda de modes espacials comprimits que genera *squeezing* local, és a dir, tindrem reducció de soroll per a unes regions finites del pla transversal. Aquests estats comprimits es detectarien mitjançant una detecció homodina compensada com la descrita en la secció 2.3.4. Aquest fenomen s'ha predit per a distints sistemes òptics, com l'amplificador òptic paramètric [Kolobov89, Kolobov91] i l'oscil·lador òptic paramètric (OPO) [Lugiato93, Gatti95, Lugiato97]. Aquests estats amb *squeezing* multimode han estat recentment observats [Treps02].

El ventall de possibles aplicacions d'aquests estats comprimits multi-mode és amplíssim. El fet de ser estats amb reducció de soroll per una quadratura del camp permet pensar en aplicacions, algunes d'elles amb confirmacions experimentals molt recents, en el processat paral·lel de la informació i l'operació en diversos canals mitjançant procediments quàntics, l'amplificació sense soroll, l'estudi dels límits quàntics per discernir petits desplaçaments [Trep03]... Podem trobar alguns d'aquestes prometedores aplicacions resumides en [Lugiato02].

Altres fenòmens sorprenents sorgeixen en considerar l'estudi espacial de les fluctuacions quàntiques, com l'existència de les imatges quàntiques en OPOs, que per sota del llindar de la formació de patrons espacials, i per tant amb una distribució homogènia de la intensitat en el pla transversal, presenten una estructura espacial en la correlació, tant de les quadratures com de les intensitats, precursora de la que emergirà en la intensitat un cop superat el llindar (e.g. [Gatti97] o [Lugiato95]).

Les cavitats òptiques no-lineals han estat un dels sistemes que més interès han despertat per l'estudi de les fluctuacions quàntiques en el règim espacial. Si bé aquests estudis s'han dut a terme la major part de vegades sobre la solució homogènia estable del sistema, també s'han estudiat sobre el patró generat pel sistema, tant considerant un espectre discret de vectors d'ona en casos generals o sistemes concrets (e.g. [Lugiato92, Grynberg93]) com un de continu e.g. [Zambrini00].

Ara bé, aquests sistemes presenten, a més dels patrons espacials extensos, unes estructures localitzades que resultaven d'allò més interessants per ser emprades en processat i emmagatzemament de la informació. Què és el que sabem sobre les propietats quàntiques d'aquestes estructures? En solitons de propagació -que són els que es formen en la propagació lliure de la llum en un medi no-lineal, sense l'efecte d'una cavitat- s'han dut a terme alguns estudis [Trep00, Lantz04] sobre les fluctuacions quàntiques i les correlacions espacials de solitons que es propaguen en un medi no-lineal  $\chi^{(2)}$  o  $\chi^{(3)}$ . En solitons de cavitat el camp està encara per estudiar. I precisament això és el que tractem en aquesta tesi: les propietats quàntiques de solitons de cavitat, és a dir, generats per un resonador no-lineal, fent-ho a partir d'un mètode que resultarà general per qualsevol tipus de solució de qualsevol cavitat òptica no-lineal.

Per dur a terme aquest estudi farem ús de les tècniques comuns emprades en òptica quàntica i que resumim en la següent secció.

## 2.3 Ferramentes teòriques en Òptica Quàntica

Resumim ara quines són les ferramentes més comuns en òptica quàntica, exemplificant-ho en alguns casos amb el problema en particular on nosaltres ho hem aplicat.

### 2.3.1 La *Master equation* i les funcions de distribució de quasi-probabilitat. Equacions de Fokker-Planck

Quan representem quànticament un sistema, ho fem a partir del seu hamiltonià. Ara bé, hem de tindre en compte quin és realment el nostre sistema: estarem interessats en l'estudi d'una cavitat òptica i els camps que s'hi generen, i coneixem el hamiltonià que descriu aquesta cavitat. Però no podem oblidar que aquest resonador té pèrdues que hem de considerar. Per fer-ho, considerem no només el nostre sistema aïllat, sinò també l'exterior; considerarem que el sistema s'acobla a un reservori de modes en equilibri tèrmic. El sistema global serà el nostre sistema més aquest reservori i el hamiltonià global vindrà descrit per

$$H_{GL} = H_S + H_R + V, \quad (2.8)$$

de forma que el hamiltonià global  $H_{GL}$  ve donat per la suma dels hamiltonians del sistema  $H_S$ , del reservori  $H_R$  i de la interacció entre ells. L'evolució per la matriu densitat d'aquest sistema en la imatge d'interacció serà simplement

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\varrho}(t) = -\frac{i}{\hbar} [V(t), \hat{\varrho}(t)], \quad (2.9)$$

on la matriu densitat  $\hat{\varrho}(t)$  inclou tant les variables del sistema com les del reservori. Com que l'únic que ens interessa realment és conèixer l'evolució de les variables del sistema, traçarem sobre les variables del reservori i trobarem una nova *matriu densitat reduïda*  $\hat{\rho}$  que només considerarà les variables del sistema i de la qual estudiarem l'evolució.

$$\hat{\rho}(t) = Tr_R\{\hat{\varrho}(t)\}. \quad (2.10)$$

Sota hipòtesis com la descorrelació entre el sistema i el reservori o l'aproximació markoviana, l'equació d'evolució de la matriu densitat reduïda pot escriure's com

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho}(t) = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}(t), \hat{\rho}(t)] + \Lambda(\hat{\rho}), \quad (2.11)$$

que rep el nom de *master equation*. El terme  $\Lambda(\widehat{\rho})$  és el superoperador Liou-villia, que representa les pèrdues i depèn del reservori en concret que s'haja considerat. Un tractament detallat d'aquesta deducció podem trobar-lo, e.g. [Walls94, Scully97]. Un exemple de master equation concret, en aquest cas per a un DOPO, el trobem en l'Apèndix B.

La *master equation* (2.11) té el problema intrínsec de ser una equació no-lineal d'operadors i no és possible trobar la seva solució. Per poder resoldre-la, es transforma en una representació *c-number* (números clàssics, és a dir, números complexos) projectant la matriu densitat en una base de l'espai de Hilbert del sistema. Les bases que podem triar són diverses: estats número o diverses projeccions sobre estats coherents. El gran nombre de fotons que tenim en qualsevol sistema limiten l'expansió en estats número, ja que s'hauria de treballar amb unes matrius de dimensions tan descomunals que el problema esdevindria irresoluble. Triem per tant *una* de les possibles projeccions sobre estats coherents. Diem una perquè els estats coherents formen una base del camp electromagnètic, però, pel fet de no ser una base ortonormal (és una base supercompleta) podem projectar de distintes formes sobre aquests estats. Cadascuna d'aquestes projeccions donarà lloc al que anomenem una *funció de distribució de quasiprobabilitat*, que tenen com a variables els números clàssics  $\vec{\alpha} = (\alpha, \alpha^+)$ . Aquestes funcions de distribució ens permeten calcular els valors esperats dels operadors  $\widehat{A}$  i  $\widehat{A}^+$ , així com els valors dels moments dels susdits operadors  $\langle \widehat{A}^{+m} \widehat{A}^n \rangle$ ,  $\langle \widehat{A}^m \widehat{A}^n \rangle$  i  $\langle \widehat{A}^{+m} \widehat{A}^{+n} \rangle$  tractant el problema com un problema clàssic, de forma que si anomenem  $F(\vec{\alpha})$  a la funció de distribució, els moments dels operadors venen donats de forma anàloga a com tractem amb funcions de probabilitat clàssiques, és a dir

$$\langle \widehat{A}_i^m \widehat{A}_j^n \rangle = \int \alpha_i^m \alpha_j^n F(\vec{\alpha}) d\vec{\alpha}; \quad (2.12a)$$

$$\langle \widehat{A}_i^{+m} \widehat{A}_j^n \rangle = \int \alpha_i^{+m} \alpha_j^n F(\vec{\alpha}) d\vec{\alpha}. \quad (2.12b)$$

N'hi ha un problema però, amb què hem d'anar amb cura en el moment de passar d'una equació d'operadors a una descripció que, seguint la mecànica estadística clàssica, ens permeta treballar amb números complexos. Si ens adonem, mentres que clàssicament

$$\langle \alpha_i^{+m} \alpha_j^n \rangle = \langle \alpha_j^n \alpha_i^{+m} \rangle \quad (2.13)$$

això no és cert en el cas d'estar calculant moments d'operadors, on l'ordre sí que és relevant

$$\langle \widehat{A}^{+m} \widehat{A}^n \rangle \neq \langle \widehat{A}^n \widehat{A}^{+m} \rangle. \quad (2.14)$$

Segons el tipus de projecció triada, els moments calculats com a (2.12) ens donaran els moments esperats calculats en una *ordenació* determinada dels operadors. Així distingirem entre les funcions de distribució que ens proporcionen els resultats dels moments dels operadors calculats:

- en ordre normal (on els operadors destrucció apareixen sempre abans que els operadors creació)

$$\int \alpha_i^{+m} \alpha_j^n P(\vec{\alpha}) d\vec{\alpha} = \langle \widehat{A}_i^{+m} \widehat{A}_j^n \rangle \quad (2.15)$$

-en ordre antinormal

$$\int \alpha_i^{+m} \alpha_j^n Q(\vec{\alpha}) d\vec{\alpha} = \langle \widehat{A}_i^m \widehat{A}_j^{+n} \rangle \quad (2.16)$$

-en ordre simètric

$$\int \alpha_i^{+m} \alpha_j^n W(\vec{\alpha}) d\vec{\alpha} = \frac{1}{2} \langle \widehat{A}_i^{+m} \widehat{A}_j^n + \widehat{A}_i^m \widehat{A}_j^{+n} \rangle. \quad (2.17)$$

L'elecció de la funció de distribució, com veiem, no és innocent. L'elecció d'una determinada funció de distribució implicarà que *tots* els resultats que obtinguem a partir d'aquesta funció i de les possibles equacions que d'ella es deriven, siguin vàlids només per als operadors ordenats d'una forma, determinada per la distribució triada. I les conseqüències d'aquest fet són més que les que podria semblar en un primer moment: no ens estendrem més sobre el problema de l'ordenació en aquest apartat, ja que hi tornarem més endavant, però cal dir que fins ara només estem preocupant-nos per què és el que ocorre *dins* de la cavitat, però en la realitat qualsevol mesura que fem l'haurem de fer *fora* de la cavitat.

Per tal de relacionar els camps dins i fora de la cavitat, farem ús de la teoria *input-output* ([Collet84], veure secció de B. Yurke en [Drummond04]). Aquesta teoria relaciona les correlacions a temps diferents entre l'interior i l'exterior de la cavitat, que seran necessàries per calcular l'espectre d'*squeezing* del camp (veure secció 2.3.4)

$$\langle : \widehat{A}_{i,out}^\dagger(t), \widehat{A}_{j,out}(t') : \rangle = 2\gamma \langle : \widehat{A}_i^\dagger(t), \widehat{A}_j(t') : \rangle, \quad (2.18)$$

on  $::$  indica ordenació temporal i ordenació *normal* dels operadors i  $\langle \widehat{A}, \widehat{B} \rangle = \langle \widehat{A} \widehat{B} \rangle - \langle \widehat{A} \rangle \langle \widehat{B} \rangle$ . Per tant, ja que només coneixem aquesta relació entre les correlacions dins i fora de la cavitat en ordre normal, haurem de triar una funció de distribució que proporcione els valors esperats dels camps en ordre normal. Triem, per tant, la funció *P-generalitzada* com a representació de la matriu densitat, que es projecta sobre estats coherents no-diagonals [Drummond80]. També hauríem pogut triar d'altres com la P de Glauber-Sudarshan (projecció sobre estats coherents diagonals, que també proporciona els moments dels operadors en ordre normal). El perquè s'ha triat precisament la distribució P-generalitzada i no qualsevol altra que proporcione els moments en ordre normal -i per tant pot aplicar directament la teoria input-output-, vindrà justificat en la secció següent.

Triar la *P*-generalitzada equival a projectar mitjançant l'operador projecció  $\Xi(\vec{\alpha})$

$$\Xi(\vec{\alpha}) = \frac{|\alpha\rangle \langle (\alpha^+)^*|}{\langle (\alpha^+)^* | \alpha \rangle} \quad (2.19)$$

amb el vector  $\vec{\alpha} = (\alpha, \alpha^+)$ , on  $\alpha$  i  $\alpha^+$  són els *c-number* associats als operadors  $\widehat{A}$  i  $\widehat{A}^\dagger$  dels corresponents estats coherents. En aquesta base l'operador densitat reduïda s'expressa com

$$\widehat{\rho} = \int P(\vec{\alpha}) \Xi(\vec{\alpha}) d\mu(\vec{\alpha}) \quad (2.20)$$

on  $d\mu(\vec{\alpha}) = d\alpha d\beta$  és la mesura d'integració. L'actuació d'aquest projector sobre els operadors creació i destrucció del camp ve donada immediatament per les identitats

$$\widehat{A} \Xi(\vec{\alpha}) = \alpha \Xi(\vec{\alpha}); \quad (2.21)$$

$$\Xi(\vec{\alpha}) \widehat{A}^\dagger = \Xi(\vec{\alpha}) \alpha^+; \quad (2.22)$$

$$\widehat{A}^\dagger \Xi(\vec{\alpha}) = \left( \alpha^+ + \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) \Xi(\vec{\alpha}); \quad (2.23)$$

$$\Xi(\vec{\alpha}) \widehat{A} = \left( \frac{\partial}{\partial \alpha^+} + \alpha \right) \Xi(\vec{\alpha}). \quad (2.24)$$

que podem escriure explícitament com les equivalents sobre  $P(\vec{\alpha})$  quan pro-

jectem sobre l'operador  $\Xi$

$$\widehat{A}\widehat{\rho} \leftrightarrow \alpha P(\vec{\alpha}); \quad (2.25a)$$

$$\widehat{\rho}\widehat{A}^\dagger \leftrightarrow \alpha^+ P(\vec{\alpha}); \quad (2.25b)$$

$$\widehat{A}^\dagger\widehat{\rho} \leftrightarrow \left(\alpha^+ + \frac{\partial}{\partial\alpha}\right) P(\vec{\alpha}); \quad (2.25c)$$

$$\widehat{\rho}\widehat{A} \leftrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial\alpha^+} + \alpha\right) P(\vec{\alpha}). \quad (2.25d)$$

Amb aquestes equivalències (i altres semblants que haurem de deduir en funció de l'expressió del hamiltonià, veure Apèndix B) podem passar d'una equació d'evolució amb operadors a una equació d'evolució per una funció de quasidistribució de probabilitat amb números complexos que podem escriure com

$$\frac{\partial P(\vec{\alpha})}{\partial t} = \int d^2x \left[ -\sum_i \frac{\partial}{\partial\alpha_i} Q_i(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial\alpha_i \partial\alpha_j} D_{ij}(\mathbf{x}, t) + \Theta(\mathbf{x}, t) \right] P(\vec{\alpha}), \quad (2.26)$$

on el terme  $\Theta(\mathbf{x}, t)$  inclou la possibilitat de tindre derivades superiors i  $\vec{\alpha}$  és el vector de les components dels camps (e.g. amb un únic camp  $\alpha$ ;  $\alpha_1 = \alpha$ ;  $\alpha_2 = \alpha^+$ ). Si aquest terme  $\Theta(\mathbf{x}, t)$  és nul, l'equació té la forma d'una *equació de Fokker-Planck* que podrem transformar en un conjunt d'equacions diferencials estadístiques amb la forma d'*equacions de Langevin*.

### 2.3.2 Equacions de Langevin

A partir d'una equació de Fokker-Planck per a l'evolució d'una quasidistribució de probabilitat de la forma

$$\frac{\partial P(\vec{\alpha})}{\partial t} = \int d^2x \left[ -\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial\alpha_i} Q_i(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \frac{\partial^2}{\partial\alpha_i \partial\alpha_j} D_{ij}(\mathbf{x}, t) \right] P(\vec{\alpha}). \quad (2.27)$$

podem, aplicant les regles d'Ito [Gardiner00], transformar-la en un conjunt d'equacions diferencials estocàstiques pels camps de la forma

$$\frac{\partial\alpha_i(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = Q_i(\mathbf{x}, t) + B(\mathbf{x}) \eta_i(\mathbf{x}, t), \quad (2.28)$$



que anomenem *equacions de Langevin*, on  $[B(\mathbf{x})B^T(\mathbf{x})]_{ij} = D_{ij}(\mathbf{x})$  i  $\eta_i(\mathbf{x}, t)$  són sorolls independents gaussians de mitjana zero i amb correlacions

$$\langle \eta_i(\mathbf{x}, t) \eta_j(\mathbf{x}', t') \rangle = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t - t') \delta_{ij}. \quad (2.29)$$

L'avantatge que ens proporciona el fet d'emprar la P-generalitzada com a funció de distribució i no cap de les altres que hauríem pogut triar és que sempre podrem fer ús d'aquestes equacions de Langevin. Si recordem la teoria *input-output*, que ens permet calcular les correlacions dels camps fora de la cavitat, està formulada per correlacions calculades en ordre normal, només les distribucions P proporcionen moments en aquesta ordenació -tot i que hi ha teories semiclàssiques que fan ús de la  $W$  i permeten calcular espectres fora de la cavitat [Gatti97]-. Tot així encara hauríem pogut emprar la distribució de P de Glauber, ara bé, aquesta distribució considera  $\alpha_i$  i  $\alpha_i^+$  com variables conjugades i no com variables independents. En aquest cas, les equacions de Langevin per a  $\alpha_i$  i per a  $\alpha_i^+$  han de ser complexe-conjugades l'una de l'altra, i això sols ocorrera en cas que també siguin complexe-conjugats els termes de soroll. Ara bé, perquè això siga cert, la matriu  $D$  ha de ser necessàriament semidefinida positiva en (2.27), i en el cas del DOPO, que és el que nosaltres estudiem (veure Apèndixos B,C) això no ocorre més que en un rang limitat dels paràmetres del sistema. Com que la P-generalitzada considera  $\alpha_i$  i  $\alpha_i^+$  com variables independents, que no són complexe-conjugades més que en el seu valor mig, aquesta restricció sobre la matriu de difusió no existeix i per tant les equacions de Langevin a les que arribem sempre seran vàlides.

Les equacions de Langevin (2.28) caracteritzen l'evolució completa dels camps. Si, com és el nostre cas, estem interessats en estudiar el comportament de les fluctuacions al voltant d'una solució estacionària del sistema, el que farem serà linealitzar les equacions de Langevin respecte a aquesta solució, considerant fluctuacions  $\delta\alpha_i(\mathbf{x}, t)$  respecte la solució estacionària  $\bar{\alpha}_i$  (el que permet un desenvolupament pertorbatiu)

$$\alpha_i(\mathbf{x}, t) = \bar{\alpha}_i(\mathbf{x}) + \delta\alpha_i(\mathbf{x}, t), \quad (2.30)$$

i trobant les equacions de Langevin linealitzades que caracteritzen l'evolució de les fluctuacions

$$\frac{\partial}{\partial t} \overrightarrow{\delta\alpha}(x, t) = \tilde{Q}(x, t) \overrightarrow{\delta\alpha}(x, t) + \tilde{B}(x) \overrightarrow{\eta}(x, t). \quad (2.31)$$

En l'Apèndix C es desenvolupen les equacions de Langevin linealitzades al voltant d'una solució estacionària -en particular, la solució de solitó brillant-

de l'equació no-lineal d'Schrödinger amb forçament paramètric (PDNLS), que és l'equació que descriu, per exemple, un DOPO amb una desintonia de bombeig gran, entre altres molts sistemes [Longhi97a, deValcarcel02], considerant també la possibilitat de moviment d'aquest solitó.

Aquestes equacions ens donen per tant tota la informació sobre les fluctuacions quàntiques de la llum generada per la cavitat no-lineal que estem estudiant. Per trobar qualsevol informació respecte a aquestes fluctuacions, és a dir, respecte el soroll quàntic de la llum generada pel nostre sistema, haurem de treballar amb (2.28-2.31).

### 2.3.3 Espectre de fluctuacions

Una de les opcions per caracteritzar aquestes fluctuacions és conèixer la seva variança. La definició de la variança entre dues components del vector de les fluctuacions  $\delta\alpha_i$ ,  $\delta\alpha_j$  ve donada per

$$\begin{aligned} V_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &= \langle \delta\alpha_i(\mathbf{x}, t) \delta\alpha_j(\mathbf{x}', t) \rangle - \langle \delta\alpha_i(\mathbf{x}, t) \rangle \langle \delta\alpha_j(\mathbf{x}', t) \rangle \\ &= \langle \delta\alpha_i(\mathbf{x}, t) \delta\alpha_j(\mathbf{x}', t) \rangle. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Aquesta variança està definida per dos punts de l'espai i el mateix instant temporal. Tanmateix, amb allò que solem treballar és amb l'espectre en freqüències d'aquesta variança (calculada, per tant, en dos instants diferents), que és el que anomenem espectre de fluctuacions. L'espectre de fluctuacions per dos components  $i, j$  ve donat per [Collet85]

$$\tilde{S}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\omega\tau} \langle \delta\alpha_i(\mathbf{x}, t) \delta\alpha_j(\mathbf{x}', t + \tau) \rangle. \quad (2.33)$$

de forma que per a un camp, e.g.  $\tilde{S}_{11}(x, x'; \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\omega\tau} \langle \delta\alpha(\mathbf{x}, t) \delta\alpha(\mathbf{x}', t + \tau) \rangle$  o  $\tilde{S}_{12}(x, x'; \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\omega\tau} \langle \delta\alpha(\mathbf{x}, t) \delta\alpha^+(\mathbf{x}', t + \tau) \rangle$ . L'espectre en ordre normal es defineix com

$$S_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\omega\tau} \langle : \delta\alpha_i(\mathbf{x}, t) \delta\alpha_j(\mathbf{x}', t + \tau) : \rangle,$$

on els  $::$  tenen el mateix significat que en l'equació (1.1). Fixem-nos, doncs, que mentres que e.g.  $S_{11} = \tilde{S}_{11}$ , en canvi  $S_{12} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + \tilde{S}_{12}$ , la qual cosa s'ha de tindre en compte quan volguem detectar l'*squeezing* del nostre camp, ja que no hem d'oblidar que els aparells de mesura detecten en ordre

normal -si més no, quan detecten mitjançant un procés d'absorció, en cas de processos d'emissió estimulada la detecció és produeix en ordre antinormal, però igualment hauríem de tindre en compte la no-commutació dels operadors creació i destrucció del camp-. La divergència en  $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$  és la contribució del *shot-noise*.

Ara bé, nosaltres el que volem conèixer és l'espectre de fluctuacions per a una determinada quadratura del camp (en particular, volem saber quina és la quadratura del camp que està comprimida) i la seva quadratura ortogonal. Per a la quadratura  $\chi_\phi$ , definint  $\phi_+ = \phi$ ;  $\phi_- = \phi + \pi/2$ , amb  $\delta\chi_\phi(\mathbf{x}, t)$  definit per

$$\delta\chi_\phi(\mathbf{x}, t) = \delta\alpha(\mathbf{x}, t) e^{-i\phi} + \delta\alpha^+(\mathbf{x}, t) e^{i\phi}, \quad (2.34)$$

l'espectre de fluctuacions ve donat per

$$\begin{aligned} \tilde{S}_\pm(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\omega\tau} \langle \delta\chi_\pm(\mathbf{x}, t) \delta\chi_\pm(\mathbf{x}', t + \tau) \rangle = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + S_\pm(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega) \\ &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + \{ \pm e^{-i2\phi} S_{11} + S_{21} + S_{12} \pm e^{i2\phi} S_{22}, \}, \end{aligned} \quad (2.35)$$

(on hem obviat l'argument dels espectres), que calculat per una quadratura, e.g.  $\tilde{S}_+(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega)$  rep el nom d'espectre d'*squeezing* de la quadratura  $\chi_\phi$ . Aquest espectre ha estat calculat tractant només amb els camps dins de la cavitat. En la secció següent parlarem de la teoria *input-output*, a la qual ja ens hem referit amb anterioritat, que permet saber què és el que mesurarem fora d'aquesta i quina és la forma de mesurar-ho.

### 2.3.4 Espectre d'*squeezing*. Detecció homodina compensada

Fem aquí un resum de la teoria de la detecció homodina compensada (*balanced homodyne detection*) tal conforme és aplicada en [Gatti95] i que adequem al nostre cas (Apèndix D). Amb aquesta teoria es mesura directament l'espectre d'*squeezing* per a una quadratura. Inicialment, una detecció homodina simple (no compensada), emprant un únic detector s'emprà per detectar l'*squeezing*, però les fluctuacions del camp coherent emprat com referència dificulta la mesura de la compressió del soroll (per veure distintes configuracions per mesurar l'*squeezing* en determinades quadratures [Yuen80]). Considerarem la detecció homodina del camp  $A_{out}(\mathbf{x}, t)$  que surt de la cavitat, consistent en la combinació d'aquest camp amb un oscil·lador local (LOF, *local oscillator field*) mitjançant un separador de feix. Aquest LOF es considera un camp clàssic, en un estat coherent multimode d'amplitud complexa

$\alpha_L(\mathbf{x})$ , i amb intensitat molt major que la del camp emergent de la cavitat  $A_{out}(\mathbf{x}, t)$ . Mesurant la diferència d'intensitat entre els dos ports (Fig.2.5), podem obtenir l'espectre de fluctuacions de  $A_{out}(\mathbf{x}, t)$ , com podem veure a continuació.

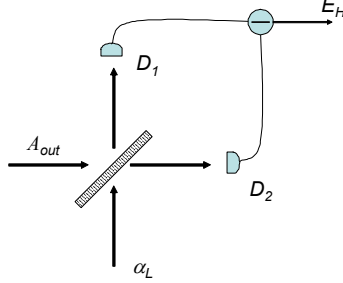


Fig.2.5. Esquema de detecció homodina. Amb la diferència dels dos fotocorrents mesurats en els detectors  $D_1$  i  $D_2$ , mesurem el component de quadratura del camp que està en fase oposada al LOF.

Els camps que arriben als detectors  $D_1$  i  $D_2$  són, respectivament,

$$D_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}[A_{out}(\mathbf{x}, t) + \alpha_L(\mathbf{x})]; \quad (2.36)$$

$$D_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}[A_{out}(\mathbf{x}, t) - \alpha_L(\mathbf{x})]. \quad (2.37)$$

i la detecció homodina mesura la diferència d'intensitats en els dos detectors, és a dir, mesura la quantitat

$$\Delta I(t) = \int dx [D_1^+(\mathbf{x}, t) D_1(\mathbf{x}, t) - D_2^+(\mathbf{x}, t) D_2(\mathbf{x}, t)] \equiv \sqrt{N} E_{H,out}(t). \quad (2.38)$$

Hem introduït el camp  $E_{H,out}(t)$ , que és la projecció del camp  $A_{out}$  sobre l'oscil·lador local  $\alpha_L$ , és a dir:

$$E_{H,out}(t) = A_{H,out} + A_{H,out}^\dagger \quad (2.39)$$

amb

$$A_{H,out}(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{N}} \int dx \alpha_L(\mathbf{x}) A_{out}(x, t) \quad (2.40)$$

i la intensitat de l'oscil·lador local definida com

$$N = \int dx |\alpha_L(\mathbf{x})|^2 \quad (2.41)$$

El que ens interessa mesurar són les fluctuacions quàntiques d'aquesta diferència d'intensitat respecte el valor mig. L'espectre de fluctuacions mesurades a la sortida ve donat per

$$V(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\omega\tau} \langle \delta E_{H,out}(t+\tau) \delta E_{H,out}(t) \rangle. \quad (2.42)$$

Les fluctuacions que mesurem són  $\delta E_{H,out}(t) = E_{H,out}(t) - \langle E_{H,out}(t) \rangle$ . Tenint en compte les relacions de commutació  $[A_{out}(\mathbf{x}, t), A_{out}^\dagger(\mathbf{x}', t)] = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ ,

podem escriure l'espectre de fluctuacions com

$$V(\omega) = 1 + \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\omega\tau} \langle : \delta E_{H,out}(t+\tau) \delta E_{H,out}(t) : \rangle \equiv 1 + S(\omega). \quad (2.43)$$

Així,  $S(\omega)$  queda definit com l'espectre d'*squeezing* del camp. Si el camp  $A_{out}(\mathbf{x}, t)$  és un camp perfectament coherent,  $S(\omega) = 0$ , i  $V(\omega) = 1$ , que és el terme que correspon exactament al *shot-noise*. Si, en canvi,  $S(\omega) < 0$  les fluctuacions estaran mesurades per sota del llindar de *shot-noise*, i per tant estarem davant de llum comprimida. Per al cas en què  $S(\omega) = -1$ , s'obtidria *squeezing* perfecte, és a dir, reducció completa de soroll ( $V(\omega) = 0$ ) (per a una quadratura del camp donada, en el cas de la detecció homodina, determinada per la fase del LOF).

Les propietats quàntiques que poguem extraure de les equacions (2.42-2.43) són vàlides pels camps a l'exterior de la cavitat, quan mesurem fora d'aquesta. La qüestió és com podem relacionar aquestes expressions amb els camp intracavitat, que són els que vénen descrits per les equacions de Langevin. Per una banda, les pèrdues  $\gamma$  que pateixen els camps al travessar els espills modifiquem els camps i han de ser considerades. D'altra banda, als espills es produeixen interferències entre els camps que hi ha a l'interior de la cavitat i el buit que hi ha a l'exterior. Aquestes interferències juguen un paper essencial en la producció de llum comprimida [Gardiner00]. Aplicant

el formalisme *input-output* [Collet84, Drummond04], és a dir, considerant que el rebost extern a la cavitat és coherent, la relació entre els camps que provenen de l'exterior  $A_{in}$ , el camp dins de la cavitat  $A$  i el camp que surt  $A_{out}$ , que és el que mesurem, ve donada per

$$A_{out}(t) - A_{in}(t) = \sqrt{2\gamma}A(t). \quad (2.44)$$

En aquest cas, la relació entre les correlacions dels camps dins i fora de la cavitat, calculades en ordre normal i temporal, pot demostrar-se [Collet84, Drummond04] que és senzillament

$$\langle : A_{out}^\dagger(t) A_{out}(t') : \rangle = 2\gamma \langle : A^\dagger(t) A(t') : \rangle. \quad (2.45)$$

Per tant, per calcular l'espectre fora de la cavitat, que és el que realment podrem mesurar, només caldrà avaluar  $S_{out}(\omega)$  com  $2\gamma S(\omega)$ , i.e.,

$$S_{out}(\omega) = 2\gamma \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\omega\tau} \langle : \delta E_H(t + \tau) \delta E_H(t) : \rangle \quad (2.46)$$

on ara

$$E_H(t) = A_H + A_H^\dagger, \quad (2.47)$$

amb

$$A_H(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{N}} \int d\mathbf{x} \alpha_L(\mathbf{x}) A(\mathbf{x}, t), \quad (2.48)$$

i  $N$  donada per (41). Com podem veure, la detecció homodina compensada proporciona una mesura directa de l'*squeezing* en una quadratura, determinada per la fase de l'oscil·lador local. De fet, si escrivim aquest oscil·lador local com

$$\alpha_L(\mathbf{x}) = |\alpha_L(\mathbf{x})| e^{i\phi_L}, \quad (2.49)$$

Podem comprovar que, substituint (49) en (48) i aquesta en (47) i (46) successivament, obtenim que

$$S_{out}(\omega) = 2\gamma \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\omega\tau} \int d\mathbf{x} d\mathbf{x}' \frac{|\alpha_L(\mathbf{x})| |\alpha_L(\mathbf{x}')|}{N} S_{\phi_L}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega), \quad (2.50)$$

on  $S_{\phi_L}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega)$  té l'expressió de  $S_+(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega)$  en (36) fent  $\phi = \phi_L$ , la fase de l'oscil·lador local.

### 3 Resum dels treballs. Conclusions

En aquesta secció presentem un resum del compendi d'articles que constitueixen el cos fonamental d'aquesta tesi doctoral. Per tal que aquesta presentació siga conceptualment més compacta, hem optat per subdividir els treballs que s'hi presenten en tres grups.

El primer d'aquests grups tracta sobre solitons brillants en cavitats Kerr, incloent els treballs *Vectorial Kerr-cavity solitons* [Sánchez-morcillo00] i *Bright cavity solitons in anisotropic vectorial Kerr cavities* [Pérez-Arjona01], on tractem una cavitat Kerr vectorial, incloent-hi els casos de cavitat dicròica i/o birrefringent i estudiem la regió de paràmetres en què poden existir solitons brillants. El tipus de bifurcació soferta pel sistema i que possibilita (o no) l'existència d'aquesta estructura localitzada també s'estudia en aquests articles. El comportament d'aquest solitó s'analitza també en el límit en què aquesta cavitat pot descriure's per una equació no-lineal d'Schrödinger amb decaïment i forçament paramètric (PDNLS).

Les parets de domini (DWs, de l'anglès *domain walls*) o solitons foscos són la matèria d'estudi dels tres articles que formen el segon grup: *Domain Walls and Ising-Bloch Transitions in Parametrically Driven Systems* [deValcarcel02], *The Ising-Bloch transition in degenerate optical parametric oscillators* [Pérez-Arjona04a] i *Stabilizing and controlling domain walls and dark-ring cavity solitons* [Pérez-Arjona04b]. Els dos tipus de parets de domini, a saber, parets d'Ising i de Bloch, i la transició fora de l'equilibri d'un tipus a l'altre, coneguda com transició Ising-Bloch (NIB, de l'anglès *nonequilibrium Ising-Bloch transition*), són caracteritzats per a un sistema general, basat en l'anàlisi d'una equació de paràmetre d'ordre, una equació PDNLS -incloent la possibilitat de petites pertorbacions d'aquesta equació-, i també per un sistema òptic particular, l'oscil·lador òptic paramètric degenerat (DOPO). La dinàmica de les parets de Bloch també es caracteritza en aquests sistemes. En els dos primers treballs es consideren sistemes unidimensionals, en el tercer es considera el cas més realista d'un sistema bidimensional amb una regió il·luminada de tamany finit, on les DWs deixen de ser estructures estables i passen a ser solucions transitòries. El que farem es proposar dos mecanismes que permeten establir i controlar les parets en aquest sistema bidimensional. Per calcular numèricament les equacions no-lineals que governen l'evolució dels camps en aquests cinc treballs, hem emprat l'algorisme d'*split-step*, que es dona de forma general en l'Apèndix A. Finalment, ens centrem en el problema de caracteritzar les fluctuacions

quàntiques d'un solitó de cavitat. L'espectre d'squeezing d'una estructura d'aquest tipus es considera en l'últim treball *Squeezed quantum cavity solitons* [Pérez-Arjona04], enviat per la seva publicació a la revista *Physical Review Letters*. Considerem les estructures localitzades sustentades per un DOPO, en el límit de desintonia de bombeig gran. Malgrat que només incloem un treball en aquesta última secció, cal remarcar que la feina desenvolupada proporciona un mètode molt potent que ens permet continuar actualment el treball d'aquesta caracterització de les propietats quàntiques d'aquestes i altres estructures. En cadascú dels resums presentats ens referirem a expressions i figures que apareixen en l'article corresponent, que s'han obviat per tal de facilitar la lectura i evitar la repetició de la informació. Així mateix, poden consultar-se en l'Annex final *Compendi de publicacions*.



### 3.1 Solitons brillants en cavitats Kerr

Incloem els treballs *Vectorial Kerr-cavity solitons*, Opt.Lett. **25**, 957 (2000) i *Bright cavity solitons in anisotropic vectorial Kerr cavities*, J. Opt. B:Quantum Semiclass. Opt. **3** S118-123 (2001).

#### 3.1.1 *Vectorial Kerr-cavity solitons*

**Víctor J. Sánchez-Morcillo, Isabel Pérez-Arjona, Fernando Silva, Germán J. de Valcárcel & Eugenio Roldán.**  
**Optics Letters, 25, 957-959 (2000).**

Considerem un model de cavitat Kerr vectorial, que permet la possibilitat de presentar pèrdues diferents per cada polarització del camp. En aquesta situació, demostrem que la cavitat Kerr es comporta seguint una equació de paràmetre d'ordre particular i que suporta estructures localitzades.

El nostre model de cavitat Kerr consisteix en un medi  $\chi^{(3)}$  isotròpic dins un resonador òptic bombejat per un camp homogeni, coherent, i linealment polaritzat, d'amplitud real  $E$ . Considerem una cavitat dicroïca, és a dir, que presente pèrdues diferents ( $\gamma_0, \gamma_1$ ) per les dues components de polarització lineal del camp en la cavitat,  $A_0, A_1$  (paralel·lament i ortogonal al camp de bombeig, respectivament). Les equacions que descriuen aquesta cavitat venen donades per (1) en el treball.

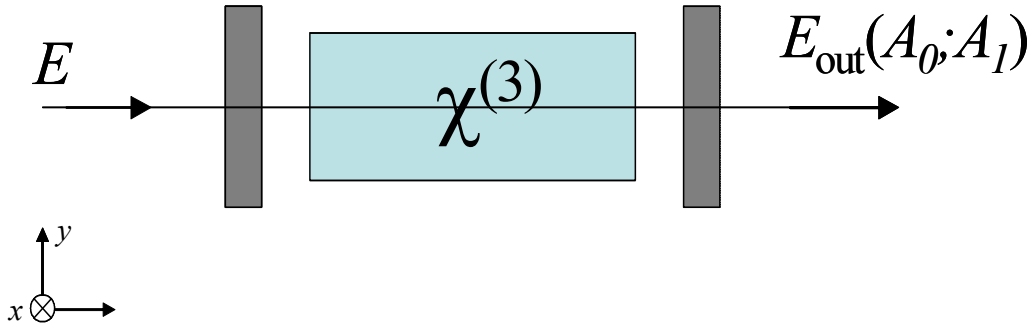


Fig.3.1. Cavitat Kerr en configuració Fabry-Perot.

La solució trivial del sistema ( $A_0 \neq 0, A_1 = 0$ ) d'aquestes solucions es desestabilitza a causa d'una inestabilitat que potser de dos tipus: o bé dóna lloc a l'engegament del camp polaritzat ortogonalment  $A_1$  -inestabilitat de polarització-, cosa que implica que el camp a la sortida passa d'èsser

linealment a el·lípticament polaritzat, o bé preserva la polarització lineal del camp injectat manifestant-se sols en el comportament de  $A_0$ , que en concret dóna lloc a un comportament biestable del sistema -inestabilitat escalar-. Mentres que per a una cavitat amb iguals pèrdues per a les dues components de polarització, la inestabilitat escalar precedeix sempre a la de polarització -si més no, en el cas autoenfocant-, quan s'introdueix el dicroïsme de la cavitat, la inestabilitat de polarització pot governar l'estabilitat fins i tot en aquest cas autoenfocant. Si aquesta bifurcació és subcrítica, l'estat linealment polaritzat i l'el·lípticament polaritzat poden coexistir, la qual cosa pot donar lloc a la formació de solitons, d'aquí la importància d'introduir el dicroïsme a la cavitat.

En el límit de pèrdues molt diferents per a les dues components de polarització ( $\gamma \equiv \gamma_0/\gamma_1; \gamma \gg 1$ ), l'equació que governa l'evolució del camp és una equació paramètrica de Ginzburg-Landau amb forçament paramètric (PGLE, de l'anglès), que també anomenem equació no-lineal d'Scrödinger amb decaïment i forçament paramètric (PDNLS) -eq. 2 en l'article-. Aquesta equació de paràmetre d'ordre suporta, com solucions analítiques, estructures localitzades, que per a cert rang dels paràmetres (veure eqs. 3-5 del treball) són solucions estables (en el cas autoenfocant -*self-focusing*- el solitó brillant és una solució estable; en el cas autodesenfocant -*self-defocusing*- ho és el solitó fosc). El rang de validesa d'aquesta aproximació de la cavitat Kerr a una PDNLS correspon estrictament a  $\gamma \gg 1$ , però per valors de  $\gamma$  no estrictament tan grans, el comportament qualitatiu de la cavitat Kerr continua sent descrit per l'equació PDNLS integrant numèricament les equacions exactes de la cavitat Kerr trobem que les solucions són, si més no qualitativament, com les que presenta la PDNLS, tant en el cas *self-focusing* com en el *self-defocusing*.

En el cas del solitó brillant, no només es confirma l'existència d'aquesta solució, sinó que s'estudia numèricament el comportament dinàmic en funció dels paràmetres del sistema. El solitó (veure secció 1.3) pateix una bifurcació de Hopf que condueix a la formació de solitons pulsants, que mitjançant bifurcacions secundàries sofertes a mesura que variem els paràmetres del sistema, duu a l'apagat del solitó a través d'una ruta al caos. Aquest comportament (investigat per  $\gamma = 10$ ) és el mateix que presenta el solitó brillant de la PDNLS, la qual cosa indica que la PDNLS captura les característiques de la cavitat Kerr fins i tot quan estem prou allunyats del límit estricte de validesa.

### 3.1.2 *Bright cavity solitons in anisotropic vectorial Kerr cavities*

Isabel Pérez-Arjona, Víctor J. Sánchez-Morcillo, Germán J. de Valcárcel & Eugenio Roldán.

*Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics* **3**, S118-S123 (2001).

L'estudi de la cavitat vectorial Kerr desenvolupat en el treball anterior per al cas d'una cavitat dicròica -amb pèrdues diferents per cada component de polarització lineal del camp- es generalitza ara per considerar, a més, la possibilitat d'una cavitat birrefringent. Això implica suposar que les desintonies per cadascuna de les dos components de polarització poden ser control·lades de forma independent (la qual cosa pot fer-se senzillament introduint una làmina anisotròpa a l'interior de la cavitat). En aquell cas mostràvem que quan les pèrdues eren suficientment diferents, la inestabilitat de polarització podia governar la formació de patrons i podia donar lloc a l'existència de solitons brillants. Mostrem ara que la birrefringència possibilita també l'existència d'aquests solitons, fins i tot en el cas de pèrdues iguals.

Considerant les equacions que descriuen aquesta cavitat Kerr vectorial amb dicròisme i birrefringència, eqs. (1) i (2) en el treball, s'estudien les solucions homogènies del sistema, tant la linealment polaritzada com l'el·líptica. Analitzem també en aquest apartat quan la solució el·líptica pot aparèixer arran una bifurcació subcrítica, ja que serà la primera condició per possibilitar l'existència de solitons brillants. En la figura 1 de l'article pot observar-se que la inestabilitat de polarització pot ser subcrítica per al cas de pèrdues iguals en les dues components de polarització sempre que la birrefringència siga suficientment gran.

Com que caldrà conèixer quina serà la inestabilitat que governa la formació de patrons en cada regió de paràmetres, estudiem l'estabilitat de la solució homogènia trivial mitjançant una anàlisi lineal d'estabilitat (veure introducció, 1.3.1): si allà on la inestabilitat de polarització és subcrítica, aquesta mateixa domina sobre l'escalar, el sistema podrà suportar solitons de polarització.

Diferenciem el cas de tindre un medi autoenfocant o autodesenfocant, que es manifesta en el signe de la no-linealitat. En el segon cas, la inestabilitat de polarització és dominant en cas de valors grans del paràmetre de dicròisme,  $\gamma$ , però la solució homogènia no naix de forma subcrítica. Per a valors de la desintonia corresponent a la polarització paral·lela a la del bombeig ( $\Delta_0$ ) grans, la inestabilitat escalar (o Kerr) domina sobre la de polarització.

En canvi, per a medis autoenfocants, la inestabilitat de polarització pot precedir a la inestabilitat escalar bé per valor grans del diòpsme  $\gamma$ , bé per una desintonia  $\Delta_0$  gran, i en ambdós casos trobem dominis de la desintonia  $\Delta_1$  (corresponent a la polarització ortogonal al bombeig), en què la bifurcació de la solució de polarització és subcrítica. Això dibuixa un escenari apropiat per l'existència de solitons brillants.

### 3.1.3 Conclusions

Analitzem, per tant, les possibles solucions de la cavitat Kerr vectorial, estudiant les dues inestabilitats (Kerr i polarització) que s'hi presenten, incloent la possibilitat de diferents pèrdues i diferents desintonies per cadascuna de les components de polarització. En funció dels paràmetres del sistema, trobem quina és la inestabilitat dominant i quan la solució homogènia (però inestable) polaritzada el·lípticament és subcrítica. En un primer treball es mostrà que una cavitat Kerr vectorial anisòtropa bombejada per un camp linealment polaritzat pot suportar solitons brillants en el cas autoenfocant (anàlogament, suporta solitons foscos en el cas desenfocant). Així mateix, s'estudià el límit en què les equacions d'aquesta cavitat Kerr vénen descrites per una equació de paràmetre d'ordre de la forma d'una PDNLS. Un acord qualitatiu entre els resultats s'obté per a les equacions exactes de la cavitat Kerr i de la PDNLS fins i tot fora d'aquest límit. Finalment, considerant la cavitat diòpsica i/o birrefrègent, l'existència de solitons brillants es comprovà numèricament, fins i tot en el cas de cavitat amb pèrdues iguals per totes dues components de la polarització.

## 3.2 Parets de domini

Tractarem el comportament de les parets de domini (o solitons foscos) per distints sistemes, en particular per la PDNLS [*Domain Walls and Ising-Bloch Transitions in Parametrically Driven Systems*, Phys. Rev. Lett. **89**, 164101 (2002).], i el DOPO [*The Ising-Bloch transition in degenerate optical parametric oscillators*, J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt., **6**, S361-S368 (2004).], on es caracteritza la transició Ising-Bloch fora de l'equilibri per a tots dos sistemes. Finalment, en el tercer treball [*Stabilizing and controlling domain walls and dark-ring cavity solitons*, Optics Express, **12**, 2130 (2004).] tractem el cas bidimensional, on presentem dos mètodes de control i estabilització de les parets.

### 3.2.1 *Domain Walls and Ising-Bloch Transitions in Parametrically Driven Systems*

**Germán J. de Valcárcel, Isabel Pérez-Arjona & Eugenio Roldán. *Physical Review Letters* **89**, 164101 (2002).**

És conegut que els sistemes sotmesos a forçament paramètric presenten solitons brillants de la forma de secant hiperbòlica. En aquest treball veiem que, per a un altre domini de paràmetres, on el solitó brillant no és estable, aquests sistemes poden suportar també altre tipus d'estructures localitzades, les anomenades parets de domini (DWs, de *domain walls* en anglés) o solitons de fase, que connecten solucions de fase oposta del sistema, solucions que podran ser bé homogènies o bé modul·lades. Així mateix, trobarem parets de Bloch (amb quiralitat no nul·la i en moviment) i parets d'Ising (amb quiralitat nul·la i estàtiques) i estudiarem la transició entre tots dos tipus de paret. Aquest treball recull, en gran mesura, el que es presentà al Treball d'Investigació *Transicions Ising-Bloch en l'equació no-lineal d'Schrödinger amb decaïment i forçament paramètric* [Pérez-Arjona01b]. Malgrat que un cert nombre de detalls bàsics poden trobar-se en aquest treball, aquest article sigué realitzat amb posterioritat a aquest Treball i conté resultats no continguts en aquest.

Quan sotmetem un sistema no-lineal dissipatiu i dispersiu a un forçament periòdic, s'exciten ones en el sistema que oscil·len amb una freqüència corresponent a la meitat de la freqüència del forçament -és el que s'anomena resonància paramètrica-. El sistema es veu forçat a adequar la fase de les seves oscil·lacions a la d'aquest forçament, de forma que si en el sistema sense forçar la solució era invariant respecte la fase, ara els valors que pot prendre estan bloquejats i fixats. En cas de resonància paramètrica, el sistema tendeix a dues solucions equivalents  $u_{\pm}$ , d'igual amplitud però amb una diferència de fase de  $\pi$ , de forma que  $u_+ = -u_-$ . En sistemes espacialment extensos, podem tindre una solució en una regió de l'espai i la solució de fase oposta en l'altra, connectant-se entre elles mitjançant una DW. Cadascuna d'aquestes solucions equivalents i en oposició de fase poden representar-se (en el cas més senzill de solucions homogènies) com dos punts fixes en el pla  $\langle \text{Re}(u), \text{Im}(u) \rangle$ , connectats per una trajectòria que determina el tipus de paret: Ising, si passa pel punt  $(0, 0)$  o Bloch si passa envoltant-lo, però sense creuar aquest punt. Des del punt de vista de la fase, direm que la paret és d'Ising si n'hi ha una discontinuïtat de  $\pi$  en la fase i si la fase rota de forma contínua un angle  $\pi$ , direm que és una paret de Bloch. Les primeres poden bifurcar-se

en les segones a través d'una transició Ising-Bloch fora de l'equilibri (NIB). En cas de sistemes no-variacionals, les parets es mouen amb una velocitat proporcional a la seva quiralitat, que és el paràmetre que mesura el sentit i la magnitud de la rotació de la fase al voltant del zero. En aquests sistemes, doncs, la transició Ising-Bloch ve acompanyada d'un moviment de la paret de Bloch -les parets d'Ising tenen una quiralitat nul·la-.

Per estudiar aquests sistemes prenem com model una equació no-lineal d'Scrödinger amb decaïment i forçament paramètric (PDNLS), incloent la possibilitat de petites modificacions, de la forma de saturació ( $\sigma$ ) o difusió ( $\delta$ ), és a dir, representant mecanismes dissipatius (eq.1). Aquesta equació és una equació de paràmetre d'ordre tipus Ginzburg-Landau, i per tant té l'avantatge de, si més no en un cert límit, ser capaç de descriure el comportament d'un gran nombre de sistemes (en particular, de la cavitat Kerr anisòtropa en el límit d'alta desintonia, com hem mostrat al treball presentat en 3.1.1).

La PDNLS suporta solitons brillants per a uns determinats valors dels paràmetres. Quan disminuïm el forçament, el solitó s'apaga, si l'augmentem per sobre de la regió d'existència del solitó brillant, el sistema presenta una solució modulada en forma de rotllos amb component contínua. Com que la PDNLS presenta una simetria de fase discreta  $u \rightarrow -u$ , podem tindre solucions de fase oposta connectades entre elles: en la PDNLS trobem parets de domini, per a certa regió de l'espai de paràmetres, que connecten solucions modulades de fase oposta, essent sempre parets de Bloch que es mouen de forma erràtica.

Quan considerem la possibilitat de incloure pertorbacions en la PDNLS, trobem quatre característiques que diferencien aquest cas de la PDNLS exacta, malgrat que la pertorbació afegida siga molt menuda: primer, la regió d'existència de parets de domini augmenta substancialment; la solució homogènia serà estable, amb la qual cosa podrem tindre parets connectant estats homogenis; trobem parets de Ising, estàtiques, que es bifurquen en parets de Bloch en moviment a través d'una transició Ising-Bloch, i finalment, veiem com aquestes parets de Bloch pateixen bifurcacions secundàries en el seu moviment, que desemboquen en un moviment caòtic i finalment la desaparició de la paret. La regió d'existència i la transició Ising-Bloch s'observa en la fig.2, les bifurcacions secundàries i el comportament caòtic es mostren en les figures 3-4.

### 3.2.2 *The Ising-Bloch transition in degenerate optical parametric oscillators*

Isabel Pérez-Arjona, Fernando Silva, Germán J. de Valcárcel, Eugenio Roldán & Víctor J. Sánchez-Morcillo.

*Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*, **6**, S361-S368 (2004).

En el treball tot just comentat, en què estudiem les parets de domini - solitons foscos-, ho fem sobre una equació tipus PDNLS, una equació de paràmetre d'ordre que descriu el comportament d'un gran nombre de sistemes, si més no, en un cert límit. En particular, descriu l'oscil·lador òptic paramètric degenerat (DOPO) tipus I en el límit de desintonia de bombeig gran. En aquest segon treball estenem l'estudi de les DWs en el DOPO més enllà del límit de validesa de la PDNLS, relaxant la condició d'una desintonia de bombeig gran i situant-nos per tant en un cas més comú, i estudiem l'existència i els tipus de parets, així com la transició Ising-Bloch (IB) i la dinàmica d'aquestes parets. Tanmateix, fins i tot fora del rang d'aproximació a una PDNLS, si bé trobem característiques particulars del sistema, el comportament de les parets en el DOPO ve descrit qualitativament pel comportament que havíem trobat en el cas d'aquesta equació de paràmetre d'ordre.

Les equacions que descriuen un DOPO tipus I venen donades per (1) i (2) en l'article, sent  $A_0$  el camp de bombeig, de freqüència  $2\omega$  i  $A_1$  el camp senyal de freqüència  $\omega$ . Per a desintonies del camp senyal ( $\Delta_1$ ) positives, a mesura que augmentem el camp injectat  $E$ , es genera el camp senyal a partir d'una bifurcació que pot ser subcrítica. El camp  $A_1$  es genera com una solució homogènia, però, augmentant més la desintonia, pateix una inestabilitat modulacional que dona lloc a rotllos (veure Fig.1).

En aquest escenari s'estudia, en primer lloc, l'existència, el tipus de parets i la transició Ising-Bloch en el pla de paràmetres  $\langle \Delta_1, E \rangle$ . Ho estudiem tant amb un bombeig pla infinitament extens com amb un bombeig pla limitat en l'espai. Els resultats són qualitativament i gairebé numèrica, els mateixos, i en el cas de la transició IB donem els resultats en cas de camp injectat d'extensió finita. Si fixem, e.g. el camp injectat  $E$ , trobem, en primer lloc, parets d'Ising connectant solucions homogènies del sistema i, augmentant la desintonia  $\Delta_1$ , aquesta paret passa a ser una paret de Bloch en moviment, connectant el mateix tipus de solucions homogènies. Si augmentem més encara la desintonia, la solució homogènia es desestabilitza i la paret de Bloch connectarà estats modul·lats. Com veiem, és semblant a l'escenari que ens

presentava l'equació PDNLS, sobretot incloent-hi pertorbacions.

La segona part de l'estudi fa referència a la dinàmica de les parets de Bloch. Per desenvolupar aquest estudi passarem a considerar un camp injectat infinit, ja que d'altra manera la paret quedava enganxada als extrems de la regió il·luminada i impedia observar quin era el comportament dinàmic de la paret més enllà del transitori. En particular, seguirem una ruta per a un valor de  $E$  fixat i augmentarem la desintonia senyal. Resumirem breument aquesta dinàmica, ja que els detalls estan a la publicació i són fàcilment reconeixibles si ens fixem en les figures. En una primera bifurcació, corresponent a la transició IB, la velocitat (i la quiralitat) de la paret passen a tindre un valor no nul. Un poc abans d'aquest punt, s'observa una oscil·lació temporal de la paret, però amb un desplaçament mitjà nul. Augmentant més la desintonia, la velocitat pateix una bifurcació de Hopf i comença a oscil·lar en el temps, amb un moviment periòdic, fet que és coincident -i no de forma casual- amb la inestabilitat modulacional de les solucions connectades per la paret, cosa que ocorre també per altres sistemes (e.g. la PDNLS). Si seguim augmentant la desintonia el moviment de la paret segueix una complexa ruta cap al caos: primer és quasiperiòdic, apareixent una nova freqüència, després és quasi-periòdic, amb una dinàmica de torus-3, després trobem una finestra periòdica -però amb un atractor diferent al que mostrava arran la segona bifurcació, en el llindar d'inestabilitat de la solució homogènia-i passa ràpidament de quasi-periòdic a una ruta que el duu al caos per intermitència.

### ***3.2.3 Stabilizing and controlling domain walls and dark-ring cavity solitons***

Isabel Pérez-Arjona, Fernando Silva, Eugenio Roldán & Germán J. de Valcárcel.

Optics Express, 12, 2130 (2004).

En els dos treballs anteriors ens hem centrat en el cas en què considerem una única dimensió espacial en el pla transversal de la llum. Sota aquestes condicions, les parets de domini connectant solucions equivalents en oposició de fase són estructures estables. Ara bé, quan considerem dues dimensions espacials transversal, això no és ben bé cert, sinò que depèn del tamany de la regió excitada pel camp extern injectat. Si aquest camp té una extensió infinita, les parets de domini són una solució estable del sistema, ara bé, si la regió il·luminada té una extensió finita, en aquest cas bidimensional, les



parets de domini són solsament solucions transitòries, que a causa dels efectes de corbatura, acaben desapareixent pels extrems d'aquesta regió il·luminada, tant en la regió de paràmetres corresponent a parets d'Ising com a parets de Bloch.

El que presentem en aquest treball són dos mètodes per controlar i estabilitzar aquestes parets de domini. En aquest cas, hem exemplificat aquests mecanismes de control i estabilització per al cas particular del DOPO, si bé són aplicables a qualsevol sistema òptic no-lineal sensible a la fase que suporta aquest tipus de DWs.

El primer mètode consisteix a injectar camps externs amb un perfil espacial de fase, és a dir, amb una fase no homogènia. Així, l'advecció exercida pels gradients de fase afecta el moviment de les DWs, que tendeixen a ser atrapades en les regions on la fase del camp és màxima i defugen d'allà on aquesta fase és mínima. Amb aquest mecanisme podem estabilitzar parets de domini, fins i tot en presència de soroll, però també podem generar parets en les posicions que seleccionem a partir de condicions de soroll aleatòries o bé controlar la posició de solitons de cavitat d'anell foscos, així com l'engegament i apagat d'aquests solitons, podent-se constituir una memòria òptica emprant aquests solitons com a bits d'informació.

El segon mecanisme introdueix un camp injectat amb un perfil modulad en intensitat, amb la forma d'una ona plana foradada, és a dir, amb zones de foscor, la qual cosa pot aconseguir-se senzillament amb una màscara. Ara el mecanisme de control de la paret és de naturalesa topològica, de forma que aquests forats d'intensitat nul·la poden capturar els extrems de les parets, que tendeixen a alinear-se amb els límits de les regions sense il·luminació. Quan distribuïm aquests forats en forma d'una matriu regular delimiten bits òptics espacials que formen una memòria òptica, on cadascú d'aquests bits correspon a una fase diferent del camp.

### 3.2.4 Conclusions

Els sistemes forçats paramètricament que presenten solucions de solitons brillants en forma de secant hiperbòlica, poden presentar també solucions del tipus solitó fosc o paret de domini en les regions en què el solitó brillant és inestable. Aquestes parets de domini connecten solucions modulades per a la PDNLS exacta, on sempre són parets quirals (de Bloch). Quan es consideren pertorbacions d'aquesta equació, les parets poden connectar solucions bé modulades, bé homogènies. En aquest cas, trobem parets d'Ising que es

bifurquen la través d'una transició NIB en parets de Bloch, les quals, a través de bifurcacions secundàries, arriben a un moviment caòtic. La relació entre la velocitat de les parets de Bloch i la seva quiralitat és també manifesta.

En el segon treball es demostra numèricament l'existència d'una transició Ising-Bloch en el DOPO tipus I, un sistema que en un límit determinat ve descrit per una PDNLS, que estudiem però fora del rang de validesa d'aquesta aproximació. S'han trobat parets de Bloch connectant tant solucions homogènies del sistema, com solucions modulades. S'ha descrit la dinàmica de les parets de Bloch, que presenta bifurcacions secundàries que porten a un moviment caòtic, trobant-se en el sistema dos tipus de rutes al caos: quasi-periòdica i intermitència quasi-periòdica. Cal destacar el fet que el moviment periòdic de les parets siga coincident amb la inestabilitat de la solució estacionària, sent aquest un fet propi de l'existència de la paret, i no induït per la dinàmica del patró de fons.

Al tercer treball es considera el cas bidimensional i l'extensió finita del camp injectat, situació en què normalment les DWs són solucions transitòries i no estables del sistema. S'han demostrat dos mètodes robustos que permeten controlar i estabilitzar DWs. El primer es basa en l'advecció introduïda pels gradients de fase del camp de bombeig injectat, que força a les DWs a moure's cap a les regions on aquesta fase és màxima. Per eliminar els possibles defectes podem emprar perfils de fase divergents o ones viatgeres. Aquest mètode també permet crear memòries de solitons de cavitat d'anell fosc, de forma que podrem escriure i borrar individualment aquests solitons. El segon mecanisme està basat en la naturalesa topològica de les parets i empra camps injectats amb forats de intensitat nul·la en el seu perfil de intensitat, els quals atrapen els extrems de les DWs. També aquest mecanisme permet el desenvolupament de memòries òptiques. Aquestes tècniques aplicades al DOPO poden aplicar-se també a qualsevol sistema òptic que presente aquesta ruptura de simetria de fase.

### 3.3 Fluctuacions quàntiques en solitons de cavitat

En aquest última apartat presentem un mètode que ens ha permès estudiar l'squeezing que presenten els solitons de cavitat suportats per un oscil·lador òptic paramètric degenerat en [*Squeezed quantum cavity solitons*, enviat a Physical Review Letters].

### 3.3.1 *Squeezed quantum cavity solitons*

**Isabel Pérez-Arjona, Eugenio Roldán & Germán J. de Valcárcel.**  
(enviat a **Physical Review Letters** ).

En aquest treball tractem l'estudi de les fluctuacions quàntiques dels solitons de cavitat que presenten una cavitat òptica no-lineal, en particular, un oscil·lador òptic paramètric degenerat (DOPO) bidimensional. És sabut que aquest sistema genera llum amb propietats no-clàssiques, de les quals podem trobar algunes a la part introductòria de l'article. Així mateix, el DOPO suporta solitons de cavitat (CS), tant foscos com brillants, segons els signe de la no-linealitat. L'interès despertat per les potencials aplicacions dels CSs en processat, emmagatzemament i codificació de la informació, juntament amb la utilització de llum amb propietats quàntiques per obtindre resultats, e.g., de molt alta precisió, han motivat aquest estudi.

En concret, a partir de les equacions de Langevin del DOPO -derivades de l'equació de Fokker-Planck que dona l'evolució de la distribució de probabilitat P-generalitzada-, que proporcionen l'evolució de les fluctuacions quàntiques dels camps, estudiem el límit d'una desintonia de bombeig gran, on el camp de bombeig pot ser eliminat adiabàticament (eqs. 1-3 en l'article). En aquest límit el camp senyal ( $A_1$ ) suporta CSs brillants (per al cas autoenfocant) i CSs foscos (en el cas desenfocant). Per tal d'estudiar les fluctuacions al voltant de la solució del solitó, es linealitzen les equacions de Langevin (eqs. 12-15) considerant el moviment de l'estructura. Mitjançant un procés de linealització de la part determinista del problema  $\mathcal{L}$  i del corresponent adjunt  $\mathcal{L}^\dagger$  (veure Apèndix D), podem expressar les fluctuacions en la base de vectors propis d'aquesta part del problema.

El procés de diagonalització proporciona sempre un autovalor nul, corresponent al mode de Goldstone i que proporciona la velocitat de l'estructura, i el seu complementari, d'autovalor -2. L'existència d'aquest mode ens proporciona el resultat fonamental del treball. Considerem ara la mesura de l'squeezing sota una detecció homodina compensada (veure secció 2.3.4), en què expressem l'oscil·lador local (LOF, *local oscillator field*) en la base de vectors propis de  $\mathcal{L}^\dagger$ . Si prenem com a LOF el vector propi de  $\mathcal{L}^\dagger$  d'autovalor 2 ( $w_2$ ), els CSs presenten un *squeezing perfecte* a freqüència  $\omega = 0$  per *quals-sevol valors dels paràmetres* del sistem, eq. 19 . Aquest resultat s'obté sense considerar el moviment del solitó, ara bé, quan aquest moviment es té en compte comprovem que les seves conseqüències són negligibles.

Així mateix també s'estudia la influència de la forma i la posició del LOF.

Com podem veure, aquesta no es tan crítica com podria semblar, i si prenem un mode comú com pot ser un mode de Gauss-Hermite -semblant a la forma de  $w_2$  en una dimensió, veure Apèndix D- obtenim uns resultats amb nivell d'squeezing que poden arribar a valors molt propers a  $S(\omega = 0) = -1$ . Aquest resultat s'obté considerant el LOF centrat en el CS, així mateix, trobem que s'assoleix un alt nivell d'squeezing per a desplaçaments de l'ordre d'un 20% de l'amplada de l'estructura (veure Fig. 1 en l'article).

### 3.3.2 Conclusions

S'estudien per primer cop, si més no fins el que tenim coneixement, les fluctuacions quàntiques en solitons de cavitat (CSs), tant foscos com brillants, en una cavitat òptica. En particular, s'estudien per al DOPO, però el mètode desenvolupat pot aplicar-se de forma trivial a qualsevol estructura en un altre sistema.

Es demostra que les fluctuacions quàntiques d'aquests CSs presenten un squeezing perfecte per a un mode transversal especial, independentment dels valors del paràmetres. Si prenem un mode semblant a aquest com l'osil·lador local (LOF) d'una detecció homodina compensada, en concret un mode de Gauss-Hermite, l'squeezing que assolim és també pràcticament perfecte, mostrant així que la forma del LOF no es crítica. Així mateix, l'squeezing assolit considerant un desplaçament relatiu entre el LOF i el CSs és molt alt fins desplaçaments de l'ordre del 20% de l'amplada del solitó. Aquests dos trets faciliten notablement la possible comprovació experimental.

## 4 Apèndix A. L'algorisme d'*split-step*

Moltes equacions de propagació no-lineal de feixos són molt difícils de resoldre mitjançant mètodes analítics. Descrivim ara un algorisme numèric que proporciona solucions estables a aquest tipus d'equacions diferencials amb derivades parcials i que pot ser emprat amb relativa facilitat en la majoria de computadors. El mètode d'*split-step*, també conegut com el mètode de propagació de feixos en les aplicacions òptiques[Newell92], és un esquema computacionalment robust i permet resoldre els problemes amb condicions inicials.

Considerem per exemple el problema general descrit per una equació de tipus NoLineal d'Schrödinger (NLS) amb unes condicions inicials donades:

$$i\partial_t q = Lq + N(t)q, \quad (4.1)$$

on  $q = q(x, t)$  i  $L$  és un operador lineal (e.g.,  $i\partial_x^2$ ) i  $N(t)$  és un operador no-lineal que depèn de la solució de  $q$ . Si integrem formalment l'equació en un interval curt de temps  $\Delta t$  obtenim

$$q(x, \Delta t) = \exp[-i \left( L\Delta t + \int_0^{\Delta t} dt' N(t') \right)] q(x, 0), \quad (4.2)$$

aquesta expressió formal dels operadors ens permet propagar la solució un únic pas temporal. Com que els operadors  $L$  i  $N$  no commuten, en general, l'avaluació d'aquesta expressió és complicada. Aproximarem l'operador exponencial com

$$e^{-i(A+B)} \approx e^{-i/2A} e^{-iB} e^{-i/2A}, \quad (4.3)$$

on prendrem  $A = L\Delta t$  i  $B = \int_0^{\Delta t} N(t') dt'$ . En efecte, nosaltres dividim un operador compost en unes senzilles operacions exponencials, que poden ser avaluades en funció de  $q(x, 0)$  de forma seqüencial. L'error comès en aproximar l'operador exponencial original per aquest operador dividit és de l'ordre de  $O((\Delta t)^3)$ , com pot veure's desenvolupant per Taylor els dos termes de la igualtat.

Adonem-nos-en que l'operador  $B$ , en general, involucra una integral sobre l'interval de temps  $t$  i aquesta integral és implícita, amb la qual cosa no podem saber el seu valor al llarg del temps. De tots modes, quan  $N = N(|q|^2)$ ,  $N$  és una constant de moviment i podem escriure  $B = N(|q(0, x)|^2) \Delta t$ . Això fa explícita la seqüència de propagació sencera.

La potència del mètode d'*split-step* en la resolució d'equacions dels tipus NLS és que l'operador lineal té la forma  $L = i \partial_x^2$ , i aquest problema el podem resoldre fent ús de la transformada de Fourier. En altres paraules, en l'espai de Fourier l'efecte d'aquest operador exponencial és simplement una multiplicació escalar per  $\exp(-i k^2 \Delta t/2)$ . L'algorisme bàsic per a un sol pas de propagació pot resumir-se esquemàticament en la següent seqüència d'operacions:

$$\begin{aligned} & q(\Delta t, x) \\ = & FFT^{-1} [e^{-ik^2 \Delta t/2} FFT [e^{iN(|q(0,x)|^2) \Delta t} FFT^{-1} [e^{-ik^2 \Delta t/2} FFT [q(0, x)]]]]], \end{aligned} \tag{4.4}$$

on  $FFT (FFT^{-1})$  es refereix a la transformada ràpida de Fourier directa (inversa) (de l'anglès, *Fast Fourier Transform*). Aquest algorisme és natural en òptica, i l'emprem bé per la integració temporal de les equacions, com és el nostre cas, bé en la propagació de feixos, on no caldrà més que substituir la variable  $t$  per  $z$ , la direcció de propagació.

Aquest algorisme s'implementa de forma directa, i dóna resultat correctes quan emprem  $2^n$  punts transversals (necessaris per la  $FFT$ ). Si ens fixem, el problema de propagació de polsos és idèntic a aquest, reemplaçant  $x$  per  $t$  en el terme de derivades segones. L'esquema pot ser generalitzat a problemes amb equacions dels tipus NLS acoblades i, fins i tot, a feixos contrapropagants.

Només cal fer ara algun comentari sobre les condicions de contorn. La  $FFT$  opera en un finestra periòdica, és a dir, que fora de l'interval d'integració el problema es repeteix a si mateix. Això pot ésser un problema quan volem propagar feixos d'amplada finita, i el que s'ha de fer en aquests casos és assegurar-se que la nostra finestra d'integració és suficientment gran i que s'aplica les funcions correctes, que no poden donar lloc a altres efectes no desitjables.

## 5 Apèndix B. Deducció de l'equació de Fokker-Planck per a la representació P-Generalitzada d'un DOPO

El sistema que estem estudiant, l'oscil·lador òptic degenerat (DOPO), ve descrit per un hamiltonià en la imatge d'interacció

$$H = H_{free} + H_{int} + H_{ext} \quad (5.1)$$

donat per la contribució del hamiltonià lliure ( $H_{free}$ ) per cadascú dels camps, el de interacció no-lineal ( $H_{int}$ ), i el hamiltonià que descriu la injecció d'un camp extern ( $H_{ext}$ ), que s'expressen com:

$$\begin{aligned} H_f &= \hbar \int dx \hat{A}_0^\dagger (\delta_0 - a_0 \nabla^2) \hat{A}_0 + \hbar \int dx \hat{A}_1^\dagger (\delta_1 - a_1 \nabla^2) \hat{A}_1; \\ H_{int} &= \frac{i\hbar g}{2} \int dx \left\{ \hat{A}_0 (\hat{A}_1^\dagger)^2 - \hat{A}_0^\dagger \hat{A}_1^2 \right\}; \\ H_{ext} &= i \hbar \int dx \left\{ \varepsilon_{in} \hat{A}_0^\dagger - \varepsilon_{in}^* \hat{A}_0 \right\}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

on  $g$  representa el coeficient d'acoblament no-lineal,  $\varepsilon_{in}(\mathbf{x})$  és el camp extern coherent amb què bombegem la cavitat,  $\nabla^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2$  és el laplacià,  $a_i = c^2/2\omega_i\gamma_i$  és el coeficient de difracció del camp  $A_i$  i  $\hat{A}_i(\mathbf{x}, t)$ ;  $\hat{A}_i^\dagger(\mathbf{x}, t)$  són respectivament els operadors creació i destrucció del camp de bombeig, de freqüència pròxima al camp extern ( $i = 0$ ) i del camp senyal, de freqüència meitat ( $i = 1$ ) [Gatti95] que satisfan les relacions de commutació

$$\left[ \hat{A}_i(\mathbf{x}, t), \hat{A}_j^\dagger(\mathbf{x}', t) \right] = \delta_{ij} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (5.3)$$

El hamiltonià que, fins ara, descriu l'evolució del sistema (eq. 5.2) ens permet conèixer quina és l'evolució dels camps que tenim dins de la cavitat, tant com a conseqüència de la interacció amb el medi no-lineal com pel fet d'injectar un camp extern. Ara bé, en aquesta descripció hem obviat que el sistema no és un sistema tancat, sinó que està acoblat a l'exterior del sistema, de forma que els camps externs que puguen existir a l'exterior de la cavitat hi interactuen amb els interns. L'efecte de l'acoblament de les fluctuacions externes amb els camps de l'interior de la cavitat i la conseqüent dissipació d'energia es modelitza a través d'un rebost o reservori. En

cas que el rebost extern a la cavitat es considere, com és habitual, com un conjunt d'oscil·ladors harmònics en equilibri tèrmic, com podria ser el buit [Scully97, Gardiner00], que s'acobla al sistema a través d'un espill amb transmissió parcial, com és el cas de la cavitat DOPO, podem descriure l'evolució del sistema mitjançant una equació d'evolució per a la matriu densitat reduïda  $\hat{\rho}$  (on només s'estudien les variables del sistema, i no les del rebost) que rep el nom de *master equation* del sistema (veure secció 2.3.1)

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}] + \Lambda(\hat{\rho}), \quad (5.4)$$

on els termes liouvillians  $\Lambda(\hat{\rho})$  modelitzen l'acoblament del sistema amb el rebost a través de l'espill de la cavitat òptica considerant la reflectivitat finita d'aquest. La forma del superoperador Liuvillià sota aquestes consideracions és

$$\begin{aligned} \Lambda(\hat{\rho}) = & \gamma_0 \int dx [2 \hat{A}_0 \hat{\rho} \hat{A}_0^\dagger - \hat{\rho} \hat{A}_0^\dagger \hat{A}_0 - \hat{A}_0^\dagger \hat{A}_0 \hat{\rho}] \\ & + \gamma_1 \int dx [2 \hat{A}_1 \hat{\rho} \hat{A}_1^\dagger - \hat{\rho} \hat{A}_1^\dagger \hat{A}_1 - \hat{A}_1^\dagger \hat{A}_1 \hat{\rho}], \end{aligned} \quad (5.5)$$

on  $\gamma_i$  són les pèrdues per al camp  $A_i$ , que en l'aproximació de camp uniform que estem emprant ve donada per  $\gamma_i = cT_i/l$ ; on  $c$  és la velocitat de la llum en l'interior de la cavitat,  $T_i$  és la transmitància de l'espill a la freqüència del camp  $A_i$  i  $l$  és la longitud que viatja la llum dins de la cavitat (*round-trip*).

Com ja hem explicat a la part introductòria, la *master equation* és molt difícil de resoldre i el que fem es transformar-la en una equació de distribució de quasiprobabilitat. De totes les possibles, hem triat la distribució  $P$ -generalitzada, a la qual correspon l'operador projecció  $\Xi(\vec{\alpha})$  donat per l'equació (2.19).

Per tal de trobar l'equació d'evolució temporal corresponent a la distribució  $P$ -generalitzada (equació de Fokker-Planck) haurem de calcular, a més de les ja conegudes (eqs. 2.25) les projeccions sobre termes no-lineals



dels operadors, que sobre la funció  $P$  equivalen a

$$\widehat{A}_i^\dagger \widehat{A}_i \widehat{\rho} \leftrightarrow \alpha_i (\alpha_i^+ - \frac{\partial}{\partial \alpha_i}) P(\vec{\alpha}), \quad (5.6a)$$

$$\widehat{\rho} \widehat{A}_i^\dagger \widehat{A}_i \leftrightarrow \alpha_i^+ (\alpha_i - \frac{\partial}{\partial \alpha_i^+}) P(\vec{\alpha}), \quad (5.6b)$$

$$\widehat{A}_i (\widehat{A}_j^\dagger)^2 \widehat{\rho} \leftrightarrow (\alpha_j^{+2} - 2\alpha_j^+ \frac{\partial}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial^2}{\partial \alpha_i^2}) P(\vec{\alpha}), \quad (5.6c)$$

$$\widehat{\rho} \widehat{A}_i (\widehat{A}_j^\dagger)^2 \leftrightarrow \alpha_j^{+2} (\alpha_i - \frac{\partial}{\partial \alpha_i^+}) P(\vec{\alpha}), \quad (5.6d)$$

$$\widehat{A}_i^\dagger (\widehat{A}_j)^2 \widehat{\rho} \leftrightarrow \alpha_j^2 (\alpha_i^+ - \frac{\partial}{\partial \alpha_i}) P(\vec{\alpha}), \quad (5.6e)$$

$$\widehat{\rho} \widehat{A}_i^\dagger (\widehat{A}_j)^2 \leftrightarrow (\alpha_j^2 - 2\alpha_j \frac{\partial}{\partial \alpha_i^+} + \frac{\partial^2}{\partial \alpha_i^{+2}}) P(\vec{\alpha}). \quad (5.6f)$$

que aplicades a la master equation ens permeten arribar a la Fokker-Planck de la P-Generalitzada:

$$\begin{aligned} \partial_t P(\vec{\alpha}) = & \left\{ \int dx \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha_0} \left( \gamma_0 \alpha_0 + i \delta_0 \alpha_0 + \frac{g}{2} \alpha_1^2 - \varepsilon_{in} - i a_0 \nabla^2 \alpha_0 \right) + \right. \right. \\ & + \frac{\partial}{\partial \alpha_0^+} \left( \gamma_0 \alpha_0^+ - i \delta_0 \alpha_0^+ + \frac{g}{2} \alpha_1^{+2} - \varepsilon_{in}^* + i a_0 \nabla^2 \alpha_0^+ \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \gamma_1 \alpha_1 + i \delta_1 \alpha_1 - g \alpha_1^+ \alpha_0 - i a_1 \nabla^2 \alpha_1 \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial \alpha_1^+} \left( \gamma_1 \alpha_1^+ - i \delta_1 \alpha_1^+ - g \alpha_1 \alpha_0^+ + i a_1 \nabla^2 \alpha_1^+ \right) + \\ & \left. \left. + \frac{g}{2} \left( \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} \alpha_0 + \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^{+2}} \alpha_0^+ \right) \right] \right\} P(\vec{\alpha}). \quad (5.7) \end{aligned}$$

on el vector  $\vec{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_0^+, \alpha_1, \alpha_1^+)$  és el vector dels *c-numbers* que representen els camps de bombeig (0) i senyal (1), on la variable  $\alpha_i$  i la variable  $\alpha_i^+$  són només complexo-conjugades en la seva mitjana. En cas d'haver triat, enlloc de la P-generalitzada, la P de Glauber-Sudarshan, les variables  $\alpha$  i  $\beta$  passen a ser variables complexo-conjugades de forma que  $\alpha_i^+ = \alpha_i^*$ , i l'equació de Fokker-Planck que trobaríem per a aquesta funció de distribució seria igual a la equació (5.8) fent  $\alpha_i^+ = \alpha_i^*$ .

## 6 Apèndix C. Equació de Langevin per a l'equació de Ginzburg-Landau amb forçament paramètric

Emprant les regles d'Ito (veure eqs. 2.27-2.28), les equacions de Langevin que descriuen per tant el DOPO, es deriven immediatament de l'equació (5.8) :

$$\partial_t \alpha_0 = -(\gamma_0 + i \delta_0 - i a_0 \nabla^2) \alpha_0 - \frac{g}{2} \alpha_1^2 + \varepsilon_{in}, \quad (6.1)$$

$$\partial_t \alpha_0^+ = -(\gamma_0 - i \delta_0 + i a_0 \nabla^2) \alpha_0^+ - \frac{g}{2} (\alpha_1^+)^2 + \varepsilon_{in}^*, \quad (6.2)$$

$$\partial_t \alpha_1 = -(\gamma_1 + i \delta_1 - i a_1 \nabla^2) \alpha_1 + g \alpha_1^+ \alpha_0 + \sqrt{g \alpha_0} \eta(\mathbf{x}, t), \quad (6.3)$$

$$\partial_t \alpha_1^+ = -(\gamma_1 - i \delta_1 + i a_1 \nabla^2) \alpha_1^+ + g \alpha_1 \alpha_0^+ + \sqrt{g \alpha_0^+} \eta^+(\mathbf{x}, t), \quad (6.4)$$

que coincideixen amb les del model clàssic per al DOPO si ignorem els termes de soroll [Oppo94a] i identifiquem  $\alpha_0^+$  amb  $\alpha_0^*$  i  $\alpha_1^+$  amb  $\alpha_1^*$ , ja que no hem d'oblidar que en aquest tractament són variables independents que tan sols són complexo-conjugades en la seva mitjana. Aquest model es veu molt simplificat si suposem que el camp de bombeig està molt desintonitzat respecte la resonància, és a dir,  $\delta_0 \gg 0$ . En aquesta situació el camp de bombeig pot ser eliminat adiabàticament [Longhi97a] de les equacions de Langevin, de forma que obtenim

$$\alpha_0 = -\frac{i}{\delta_0} (\varepsilon_{in} - \frac{g}{2} \alpha_1^2), \quad (6.5)$$

$$\alpha_0^+ = \frac{i}{\delta_0} (\varepsilon_{in}^* - \frac{g}{2} (\alpha_1^+)^2). \quad (6.6)$$

El nostre sistema d'equacions queda reduït a dues equacions de Langevin per al camp senyal

$$\begin{aligned} \partial_t \alpha_1 &= -(\gamma_1 + i \delta_1 - i a_1 \nabla^2) \alpha_1 - \frac{i g \varepsilon_{in}}{\delta_0} \alpha_1 + \frac{i g^2}{2 \delta_0} \alpha_1^+ \alpha_1^2 + \\ &+ \sqrt{\frac{i g}{\delta_0} \left( \frac{g}{2} \alpha_1^2 - \varepsilon_{in} \right)} \eta(\mathbf{x}, t), \end{aligned} \quad (6.7a)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \alpha_1^+ &= -(\gamma_1 - i \delta_1 + i a_1 \nabla^2) \alpha_1^+ + \frac{i g \varepsilon_{in}^*}{\delta_0} \alpha_1^+ - \frac{i g^2}{2 \delta_0} \alpha_1 (\alpha_1^+)^2 + \\ &+ \sqrt{-\frac{i g}{\delta_0} \left( \frac{g}{2} (\alpha_1^+)^2 - \varepsilon_{in}^* \right)} \eta^+(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (6.7b)$$

De bell nou, si obviem els termes de soroll, les equacions anteriors coincideixen amb les clàssiques per un DOPO amb una desintonia de bombeig gran, interpretant  $\beta_1$  com  $\alpha_1^*$ . Aquesta equació és coneix com equació de no-lineal d'Schrödinger amb forçament paramètric (PDNLS, de l'anglès) i té l'avantge de estar ben estudiada i presentar solucions ben conegudes i d'alt interès com veurem més endavant [deValcarcel02, Alexeeva00].

Per tal de simplificar l'estudi reescrivim les equacions (6.7) en la forma canònica de la PDNLS

$$\begin{aligned} \partial_T A_1 &= -(1 + i \Delta_1) A_1 + i \bar{\nabla}^2 A_1 + \mu A_1 + i \beta A_1^2 + \\ &\quad + \kappa \sqrt{\mu + i A_1^2} \eta(\mathbf{X}, T), \end{aligned} \quad (6.8a)$$

$$\begin{aligned} \partial_T A_1^+ &= -(1 - i \Delta_1) A_1^+ - i \bar{\nabla}^2 A_1^+ + \mu A_1^+ + i (A_1^+)^2 A_1 + \\ &\quad + \kappa \sqrt{\mu - i (A_1^+)^2} \eta^+(\mathbf{X}, T), \end{aligned} \quad (6.8b)$$

on les variables s'han renormalitzat com  $T = \gamma_1 t$ ;  $\mathbf{X} = \sqrt{\gamma_1/a_1} \mathbf{x}$ ;  $\Delta_1 = \delta_1/\gamma_1$ ;  $\mu = -i g \varepsilon_{in}/\delta_0$  (considerat real sense pèrdua de generalitat),  $\kappa = \sqrt[4]{\gamma_1/a_1} \sqrt{2\delta_0\gamma_1/g}$  i  $A_1(A_1^+) = (2/\sqrt{2\delta_0})\alpha_1(\alpha_1^+)$ . Aquestes equacions de Langevin descriuen l'evolució del camp dins del sistema i donen les equacions que anem a centrar-nos en resoldre.

Com ja s'havia estudiat en un treball anterior, la forma clàssica d'aquesta equació presenta solucions estacionàries de la forma de solitons de cavitat , tant de solitó brillant, per al cas de  $\delta_0 > 0$ , amb la forma

$$\bar{A}_1(\mathbf{X}) = e^{i\varphi} \sqrt{2\beta} \operatorname{sech}(\beta \mathbf{X}), \quad (6.9)$$

com de solitó fosc, per a  $\delta_0 < 0$

$$\bar{A}_1(\mathbf{X}) = e^{-i\varphi} \beta \tanh(\beta \mathbf{X}/\sqrt{2}), \quad (6.10)$$

amb

$$\begin{aligned} \beta &= \sigma \Delta_1 \pm \sqrt{\mu^2 - 1}, \\ \cos(2 \varphi) &= 1/\mu. \end{aligned} \quad (6.11)$$

on  $\sigma = \pm 1$  denota el signe de  $\delta_0$ . Conegudes les propietats i el rang d'estabilitat de susdites estructures [deValcarcel02, Alexeeva00], es desenvolupa un mètode general per estudiar les característiques i l'evolució de les fluctuacions

quàntiques d'una solució donada d'un sistema, que s'ha aplicat, en particular, a les fluctuacions quàntiques del solitó brillant que sustenta la PDNLSE. Per tal d'estudiar aquestes fluctuacions escrivim el camp com

$$A_1(\mathbf{x}, t) = \overline{A_1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1(t)) + \delta\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1(t), t), \quad (6.12a)$$

$$A_1^+(\mathbf{x}, t) = \overline{A_1}^*(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1(t)) + \delta\alpha^+(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1(t), t). \quad (6.12b)$$

on s'ha considerat la possibilitat de desplaçament tant de l'estructura localitzada com de les fluctuacions. Aquesta consideració és necessària, ja que el solitó respon difusivament al soroll movent-se. Per tant, si no considerarem aquest moviment, podríem arribar, en un temps finit, a que la diferència entre el camp  $A_1(\mathbf{x}, t)$  i la solució estacionària  $\overline{A_1}(\mathbf{x})$  arribés a créixer molt i no puguem considerar-la com una fluctuació, de forma que l'evolució a partir d'una anàlisi pertorbativa de (6.8) seria errònia.

Substituint el desenvolupament (6.12) en les equacions de Langevin (6.8) i arribant fins el primer ordre en les fluctuacions, trobem les equacions de Langevin linealitzades que descriuen l'evolució de les susdites fluctuacions, i poden expressar-se en forma matricial com

$$-\dot{\mathbf{x}}_1(t) \overrightarrow{v}_1 + \partial_t \overrightarrow{\delta\alpha}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{L} \overrightarrow{\delta\alpha}(\mathbf{x}, t) + \overrightarrow{f}, \quad (6.13)$$

on  $\overrightarrow{\delta\alpha}(\mathbf{x}, t) = (\delta\alpha(\mathbf{x}, t), \delta\alpha^+(\mathbf{x}, t))^T$  és el vector de les fluctuacions,  $\overrightarrow{v}_1(\mathbf{x}) = \partial_{\mathbf{x}} [\delta\overline{A_1}(\mathbf{x}, t)]$ , el punt denota la derivada temporal  $d/dt$  i  $\overrightarrow{f} = \left( \sqrt{\mu + i \overline{A_1}^2} \eta, \sqrt{\mu - i (\overline{A_1}^*)^2} \eta^+ \right)$

és el vector del soroll. S'ha menyspreat el terme  $-\dot{\mathbf{x}}_1 \partial_x \overrightarrow{\delta\alpha}(\mathbf{x}, t)$  per ser d'ordre superior en les fluctuacions. L'operador lineal  $\mathcal{L}$  i el seu adjunt  $\mathcal{L}^\dagger$  tenen la forma

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_1 & \mu + i \overline{\alpha}^2 \\ \mu - i (\overline{\alpha}^*)^2 & \mathcal{L}_1^* \end{pmatrix}, \quad (6.14)$$

$$\mathcal{L}^\dagger = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_1^* & \mu + i \overline{\alpha}^2 \\ \mu - i (\overline{\alpha}^*)^2 & \mathcal{L}_1 \end{pmatrix}, \quad (6.15)$$

on

$$\mathcal{L}_1 = -(1 + i\Delta_1) + i \overline{\nabla}^2 + 2i |\overline{A_1}|^2. \quad (6.16)$$

Aquestes equacions (6.13) són les que s'han de resoldre per estudiar les fluctuacions quàntiques del solitó brillant .

## 7 Apèndix D. Solució de les equacions de Langevin

### 7.1 Diagonalització

El mètode de resolució de l'equació (6.13) emprat en [Pérez-Arjona04] consisteix en primer lloc en triar la base de vectors propis de  $\mathcal{L}$  com la base amb què treballarem. L'espectre de  $\mathcal{L}$  està ben estudiat [Barashenkov91] i consta d'un espectre continu, amb autovalors de la forma

$$\lambda_s(k) = -1 + s\sqrt{\mu^2 - \Delta_k^2} \quad (7.1)$$

on

$$\Delta_k = \Delta_1 + k^2; s = \pm 1; k \in [0, \infty), \quad (7.2)$$

i d'un espectre discret  $\{\lambda_i\}_{i=1}^D$ , que per a uns valors dels paràmetres qual-sevulla només pot calcular-se de forma numèrica [Alexeeva00]. El càlcul d'aquest espectre i dels vectors propis de  $\mathcal{L}$  i de  $\mathcal{L}^\dagger$  són el primer pas per resoldre (6.13). Per resoldre el problema d'autovectors i autovalors, que escrivim com

$$\mathcal{L} \vec{v}_i(\mathbf{x}) = \lambda_i \vec{v}_i(\mathbf{x}), \quad (7.3)$$

$$\mathcal{L}^\dagger \vec{w}_i(\mathbf{x}) = \lambda_i^* \vec{w}_i(\mathbf{x}), \quad (7.4)$$

resultarà més senzill escriure aquests vectors descomposats en part real i part imaginària:

$$\vec{v}(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} \beta (r(\mathbf{x}, t) + i y(\mathbf{x}, t)) \\ e^{-i\varphi} \beta (r(\mathbf{x}, t) - i y(\mathbf{x}, t)) \end{pmatrix}, \quad (7.5)$$

$$\vec{w}(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} \beta (\bar{r}(\mathbf{x}, t) + i \bar{y}(\mathbf{x}, t)) \\ e^{-i\varphi} \beta (\bar{r}(\mathbf{x}, t) - i \bar{y}(\mathbf{x}, t)) \end{pmatrix}, \quad (7.6)$$

on  $\beta, \varphi$  són les mateixes que apareixen en la solució estacionària (6.9-6.11).

Definint  $\tau = \gamma_1 T = \gamma_1 \beta^2 t$  i  $\mathbf{z} = \beta \mathbf{X} = \sqrt{\frac{\gamma_1}{a_1}} \beta \mathbf{x}$ , i els vectors  $\vec{\xi}_i(\mathbf{z}) = (r_i(\mathbf{z}) \ y_i(\mathbf{z}))^\top$ ;  $\vec{\bar{\xi}}_i(\mathbf{z}) = (\bar{r}_i(\mathbf{z}) \ \bar{y}_i(\mathbf{z}))^\top$  el problema d'autovalors que hem de resoldre pot expressar-se com

$$\mathcal{L}' \vec{\xi}_i(\mathbf{z}) = \lambda'_i \vec{\xi}_i(\mathbf{z}); \quad (7.7)$$

$$(\mathcal{L}')^\dagger \vec{\bar{\xi}}_i(\mathbf{z}) = (\lambda'_i)^* \vec{\bar{\xi}}_i(\mathbf{z}) \quad (7.8)$$

amb

$$\mathcal{L}' = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{L}'_1 \\ \mathcal{L}'_2 & \mathcal{L}'_3 \end{pmatrix}, \quad (7.9a)$$

$$\mathcal{L}'_1 = -\partial_{\mathbf{z}}^2 + 1 - 2H - 2 \sec h(\mathbf{z})^2, \quad (7.9b)$$

$$\mathcal{L}'_2 = \partial_{\mathbf{z}}^2 - 1 + 6 \sec h(\mathbf{z})^2, \quad (7.9c)$$

$$\mathcal{L}'_3 = -\frac{2}{\beta^2}, \quad (7.9d)$$

on per simplificar la notació s'ha definit el paràmetre

$$H \equiv \frac{\sqrt{\mu^2 - 1}}{\beta^2}, \quad (7.10)$$

i els nous autovalors estan relacionats amb els originals en (7.3-4) per

$$\lambda'_i = \frac{\lambda_i}{\beta^2}, \quad (7.11)$$

a causa de la normalització temporal.

El problema el resollem desenvolupant els autovectors  $\xi_m(\mathbf{z})$  en la base de sinus i cosinus. A causa de la ruptura de simetria de  $\mathcal{L}$ , cadascú dels autovalors del continu duu associats dos autovectors infinitament extensos; un mode que anomenarem parell, que oscil·la com  $\cos(k \mathbf{z})$  i un senar que ho fa com  $\sin(k \mathbf{z})$ . Així expressem els autovectors com

$$\begin{aligned} \vec{\xi}(\mathbf{z}) &= \begin{pmatrix} r(\mathbf{z}) \\ y(\mathbf{z}) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{L}} \vec{\xi}^{(0)} + \\ &+ \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \vec{\xi}_c^{(n)} \cos\left(\frac{2\pi n}{L} \mathbf{z}\right) + \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \vec{\xi}_s^{(n)} \sin\left(\frac{2\pi n}{L} \mathbf{z}\right), \\ \vec{\xi}^{(0)} &\equiv \begin{pmatrix} r^{(0)} \\ y^{(0)} \end{pmatrix}; \quad \vec{\xi}_c^{(n)} \equiv \begin{pmatrix} r_c^{(n)} \\ y_c^{(n)} \end{pmatrix}; \quad \vec{\xi}_s^{(n)} \equiv \begin{pmatrix} r_s^{(n)} \\ y_s^{(n)} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (7.12)$$

on truncant la sèrie en  $n = N$  reduïm el problema a un càlcul d'un nombre finit de valors i vectors propis on ara el continu de  $k$  s'expressa com un conjunt finit de  $k_n = 2\pi n/L, n \in Z$ , on  $L$  és la longitud del nostre espai (mesurada, recordem, en unitats  $\mathbf{z} = \beta x$ , és a dir, en unitats d'amplada del solitó-eq.6.9-). Com que els termes parells i senars no es creuen entre ells, sinò

que els autovectors són exclusivament d'una o altra paritat, podem separar el problema d'autovalors en un problema associat als modes que oscil·len amb cosinus per una banda -modes parells- i amb sinus per l'altra -modes senars-. La condició de normalització dels coeficients del desenvolupament ha estat triada per tal de treballar amb funcions sinus i cosinus normalitzades ja que

$$\int_{-L/2}^{L/2} \cos\left(\frac{2\pi n}{L}\mathbf{z}\right) \cos\left(\frac{2\pi m}{L}\mathbf{z}\right) dz = \int_{-L/2}^{L/2} \sin\left(\frac{2\pi n}{L}\mathbf{z}\right) \sin\left(\frac{2\pi m}{L}\mathbf{z}\right) dz = \frac{L}{2} \delta_{m,n}, \quad (7.13a)$$

i així poder calcular la norma del vector senzillament com

$$\int_{-L/2}^{L/2} \vec{\xi}(\mathbf{z}) \cdot \vec{\xi}(\mathbf{z}) dz = \vec{\xi}^{(0)} \cdot \vec{\xi}^{(0)} + \sum_{n=1}^N \vec{\xi}_c^{(n)} \cdot \vec{\xi}_c^{(n)} + \sum_{n=1}^N \vec{\xi}_s^{(n)} \cdot \vec{\xi}_s^{(n)}. \quad (7.14)$$

Obtenim d'aquesta descomposició dues matrius desacoblades pels vectors propis parells (incloent-hi el terme constant) i els senars. L'expressió del problema pels modes parells ve donada per la diagonalització d'una matriu de dimensió  $2(N+1) \times 2(N+1)$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & M_{C1} \\ M_{C2} & M_{C3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{r}_c \\ \vec{y}_c \end{pmatrix} = \lambda_c \begin{pmatrix} \vec{r}_c \\ \vec{y}_c \end{pmatrix}, \quad (7.15)$$

on  $\vec{r}_c, \vec{y}_c$  són vectors de dimensió  $(N+1)$  cadascú d'ells, de la forma  $\vec{r}_c = (r^{(0)}, r_c^{(1)}, r_c^{(2)}, \dots, r_c^{(N)})^T$ ;  $\vec{y}_c = (y^{(0)}, y_c^{(1)}, y_c^{(2)}, \dots, y_c^{(N)})^T$ , i les matrius  $M_{Ci}$  són de dimensió  $(N+1) \times (N+1)$  cadascuna d'elles. Els elements d'aquestes matrius, expressats com  $M_{Ci}^{(m,n)}$ , on els índexos  $m, n = 0, 1, 2 \dots N$  indiquen

els modes (parells) que relacionen, són:

$$M_{C1}^{(0,0)} = 1 - 2H - \frac{4}{L}, \quad (7.16a)$$

$$M_{C1}^{(0,n)} = M_{C1}^{(n,0)} = -\frac{4\sqrt{2}}{L^2} \frac{\pi^2 n}{\sinh(\frac{n\pi^2}{L})}, \quad (7.16b)$$

$$M_{C1}^{(n,n)} = \left(\frac{2\pi n}{L}\right)^2 + 1 - 2H - \frac{4}{L} - \frac{8m\pi^2}{L^2 \sinh(\frac{2n\pi^2}{L})}, \quad (7.16c)$$

$$M_{C1}^{(n,m)} = \frac{-4\pi^2}{L^2} \left( \frac{m-n}{\sinh(\frac{(m-n)\pi^2}{L})} + \frac{m+n}{\sinh(\frac{(m+n)\pi^2}{L})} \right); m \neq n, \quad (7.16d)$$

$$M_{C2}^{(0,0)} = -1 + \frac{12}{L}, \quad (7.16e)$$

$$M_{C2}^{(0,n)} = M_{C2}^{(n,0)} = \frac{12\sqrt{2}n\pi^2}{L^2} \frac{1}{\sinh(\frac{n\pi^2}{L})}, \quad (7.16f)$$

$$M_{C2}^{(n,n)} = -\left(\frac{2\pi n}{L}\right)^2 - 1 + \frac{12}{L} + \frac{24n\pi^2}{L^2 \sinh(\frac{2n\pi^2}{L})}, \quad (7.16g)$$

$$M_{C2}^{(n,m)} = \frac{12\pi^2}{L^2} \left( \frac{m-n}{\sinh(\frac{(m-n)\pi^2}{L})} + \frac{m+n}{\sinh(\frac{(m+n)\pi^2}{L})} \right); m \neq n, \quad (7.16h)$$

$$M_{C3}^{(n,n)} = -\frac{2}{\beta^2}, \quad (7.16i)$$

$$M_{C3}^{(n,m)} = 0; m \neq n. \quad (7.16j)$$

Les integrals on només hi contribueixen funcions infinitament extenses, han estat avaluades dins l'interval  $[-L/2, L/2]$ . Les integrals on apareix la solució estacionària del solitó, és a dir, la secant hiperbòlica, s'han aproximat avaluant-les en  $(-\infty, \infty)$ , ja que la presència d'aquesta funció limitada anul·la l'integrand quan ens allunyem suficientment del centre del solitó. L'error que introdueix aquesta aproximació minva exponencialment amb  $L$ , i en aquest problema en particular, l'error quan es treballa amb una longitud de  $L = 20$  vegades l'amplada del solitó entre la integral exacta entre  $[-L/2, L/2]$  i l'aproximació és de l'ordre de  $10^{-9}$ . Així doncs, aquestes integrals s'avaluen



com

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sec h(\mathbf{z})^2 \cos\left(\frac{2\pi n}{L}\mathbf{z}\right) dz = \frac{2n\pi^2}{L \sinh\left(\frac{n\pi^2}{L}\right)}, \quad (7.17a)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \sec h(\mathbf{z})^2 \cos\left(\frac{2\pi n}{L}\mathbf{z}\right) \cos\left(\frac{2\pi m}{L}\mathbf{z}\right) dz &= \\ &= \frac{\pi^2}{L} \left( \frac{m+n}{\sinh\left(\frac{(m+n)\pi^2}{L}\right)} + \frac{m-n}{\sinh\left(\frac{(m-n)\pi^2}{L}\right)} \right). \end{aligned} \quad (7.17b)$$

Anàlogament, i amb les mateixes consideracions, pot calcular-se la matriu corresponent als modes senars

$$\begin{pmatrix} 0 & M_{S1} \\ M_{S2} & M_{S3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{r}_s \\ \vec{y}_s \end{pmatrix} = \lambda_s \begin{pmatrix} \vec{r}_s \\ \vec{y}_s \end{pmatrix}, \quad (7.18)$$

on ara  $\vec{r}_s, \vec{y}_s$  són vectors de  $N$  components de la forma  $\vec{r}_s = (r_s^{(1)}, r_s^{(2)}, \dots, r_s^{(N)})^T$ ;  $\vec{y}_s = (y_s^{(1)}, y_s^{(2)}, \dots, y_s^{(N)})^T$  i les matriu  $M_{S_i}$  són matrius de dimensió  $N \times N$ , ja que el terme constant no hi contribueix. Tal com s'han calculat anteriorment per a les matrius  $M_{C_i}$ , es calculen ara les components  $M_{S_i}^{(n,m)}$  que relacionen els modes senars d'ordre  $m, n$ :

$$M_{S1}^{(n,n)} = \left(\frac{2\pi n}{L}\right)^2 + 1 - 2H - \frac{4}{L} + \frac{8n\pi^2}{L^2 \sinh\left(\frac{2n\pi^2}{L}\right)}, \quad (7.19a)$$

$$M_{S1}^{(n,m)} = \frac{-4\pi^2}{L^2} \left( \frac{m-n}{\sinh\left(\frac{(m-n)\pi^2}{L}\right)} - \frac{m+n}{\sinh\left(\frac{(m+n)\pi^2}{L}\right)} \right); m \neq n \quad (7.19b)$$

$$M_{S2}^{(n,n)} = -\left(\frac{2\pi n}{L}\right)^2 - 1 + \frac{12}{L} - \frac{24n\pi^2}{L^2 \sinh\left(\frac{2n\pi^2}{L}\right)}, \quad (7.19c)$$

$$M_{S2}^{(n,m)} = \frac{12\pi^2}{L^2} \left( \frac{m-n}{\sinh\left(\frac{(m-n)\pi^2}{L}\right)} - \frac{m+n}{\sinh\left(\frac{(m+n)\pi^2}{L}\right)} \right), m \neq n \quad (7.19d)$$

$$M_{S3}^{(n,n)} = -\frac{2}{\beta^2}, \quad (7.19e)$$

$$M_{S3}^{(n,m)} = 0; m \neq n. \quad (7.19f)$$

El procés de diagonalització de les matrius es duu a terme mitjançant una subrutina estàndar. Un cop diagonalitzades mitjançant aquest procediment

les matrius  $\mathcal{L}'$  i  $(\mathcal{L}')^\dagger$ , podem reconstruir els vectors propis del problema original. Hem resolt (7.7-8) i reconstruïm el problema d'autovectors i autovalors original (7.3-4) desfent els canvis realitzats en els procesos intermedis:

$$\lambda_i = \beta \lambda'_i; \quad (7.20a)$$

$$\vec{v}_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\varphi}(r_i + i y_i) \\ e^{-i\varphi}(r_i - i y_i) \end{pmatrix}, \quad (7.20b)$$

$$\vec{w}_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\varphi}(\bar{r}_i + i \bar{y}_i) \\ e^{-i\varphi}(\bar{r}_i - i \bar{y}_i) \end{pmatrix}, \quad (7.20c)$$

on els factors  $1/\sqrt{2}$  apareixen per qüestions de normalització. (Els autovectors de  $\mathcal{L}'$  estan normalitzats a la unitat, però en reconstruir els vectors propis de  $\mathcal{L}$ , tenint en compte les propietats de ortogonalitat que cal que satisfacen aquests vectors propis  $\vec{v}_i, \vec{w}_i$ , per desenvolupar de forma més senzilla el tractament teòric que expliquem tot seguit, són aquests els que han d'estar normalitzats).

## 7.2 Expansió modal de les equacions de Langevin linealitzades

Un cop resolt el problema de la diagonalització de  $\mathcal{L}$  i  $\mathcal{L}^\dagger$ , (eqs. 7.3-4) podem passar a desenvolupar les equacions de Langevin (6.13) en aquesta base. És convenient, ara per ara, distingir l'espectre continu

$$\mathcal{L} \vec{v}_{s,p}^{(k)}(\mathbf{x}) = \lambda_s^{(k)} \vec{v}_{s,p}^{(k)}(\mathbf{x}), \quad (7.21a)$$

$$\mathcal{L}^\dagger \vec{w}_{s,p}^{(k)}(\mathbf{x}) = \lambda_s^{(k)*} \vec{w}_{s,p}^{(k)}(\mathbf{x}), \quad (7.21b)$$

-on  $s$  indica el  $\pm 1$  del l'autovalor en (7.1), i  $p = \pm 1$  indica si és un mode parell (+1) o senar (-1) i la  $k$  del mode- de l'espectre discret

$$\mathcal{L} \vec{v}_i(\mathbf{x}) = \lambda_i \vec{v}_i(\mathbf{x}), \quad (7.22a)$$

$$\mathcal{L}^\dagger \vec{w}_i(\mathbf{x}) = \lambda_i^* \vec{w}_i(\mathbf{x}); \quad i = 1, \dots, D. \quad (7.22b)$$

Definint en aquest espai el producte escalar de la forma

$$\begin{aligned} (\vec{p}, \vec{q}) &\equiv \int d\mathbf{x} \vec{p}^\dagger(\mathbf{x}) \cdot \vec{q}(\mathbf{x}) = \int d\mathbf{x} (\delta\alpha_p^*, (\delta\alpha_p^+)^*) \cdot \begin{pmatrix} \delta\alpha_q \\ \delta\alpha_q^+ \end{pmatrix} = \\ &= \int d\mathbf{x} (\delta\alpha_p^* \delta\alpha_q + (\delta\alpha_p^+)^* \delta\alpha_q^+). \end{aligned} \quad (7.23)$$

es satisfà

$$(\vec{w}_i(\mathbf{x}), \mathcal{L} \vec{\delta\alpha}(\mathbf{x}, t)) = \lambda_i(\vec{w}_i(\mathbf{x}), \vec{\delta\alpha}(\mathbf{x}, t)), \quad (7.24)$$

per al discret i

$$(\vec{w}_{s,p}^{(k)}, \mathcal{L} \vec{\delta\alpha}(\mathbf{x}, t)) = \lambda_s^{(k)}(\vec{w}_{s,p}^{(k)}, \vec{\delta\alpha}(\mathbf{x}, t)), \quad (7.25)$$

per al continu.

Tenint en compte aquesta projecció i fixant-nos en la normalització dels autovectors, donada per<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} (\vec{w}_i, \vec{v}_j) &= \int d\mathbf{x} \vec{w}_i^\dagger(\mathbf{x}) \cdot \vec{v}_j(\mathbf{x}) = \delta_{ij}; \\ (\vec{w}_{s,p}^{(k)}, \vec{v}_{s',p'}^{(k')}) &= \int d\mathbf{x} \vec{w}_{s,p}^{(k)}(\mathbf{x}) \cdot \vec{v}_{s',p'}^{(k')}(\mathbf{x}) = \delta_{s,s'} \delta_{p,p'} \delta_{k,k'}. \end{aligned} \quad (7.26)$$

La resta de projeccions són totes nul·les. Si expandim ara les fluctuacions quàntiques del solitó en la base dels vectors propis podem expressar-les com

$$\vec{\delta\alpha}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=2}^D c_i(t) \vec{v}_i(\mathbf{x}) + \sum_{p=\pm 1} \sum_{s=\pm 1} \sum_{k=1}^N c_{s,p}^{(k)}(t) \vec{v}_{s,p}^{(k)}(\mathbf{x}). \quad (7.27)$$

i substituir (7.27) en l'equació de Langevin (6.13) per trobar l'evolució del coeficients. Abans que res, cal destacar que el primer mode del discret ( $i = 1$ ) no col·labora en la descripció. El mode exclós correspon al mode de Goldstone, d'autovalor nul  $\mathcal{L} \vec{v}_1(\mathbf{z}) = 0 \vec{v}_1(\mathbf{z})$ . Projectant l'equació (6.13) sobre el vector propi adjunt al mode de Goldstone trobem

$$-\dot{\mathbf{x}}_1(\vec{w}_1, \partial_{\mathbf{x}} \vec{\delta\alpha}_1) - \dot{\mathbf{x}}_1 \sum_{i \neq 1} c_i(\vec{w}_1, \partial_{\mathbf{x}} \vec{v}_i) = (\vec{w}_1, \vec{f}) \quad (7.28)$$

on s'ha fet ús de (7.26). Veiem doncs, que el coeficient del mode de Goldstone no contribueix a l'evolució de les fluctuacions del solitó; la informació que

---

<sup>1</sup>La delta de Kronecker  $\delta_{k,k'}$  és en realitat una delta de Dirac  $\delta(k - k')$ , que es veu transformada en una delta discreta a causa del truncament dut a terme en l'expansió (7.12), que limita el nombre d'ordres emprats

podem extraure de l'equació (7.28) és, en canvi, la velocitat de desplaçament d'aquest solitó, que ve donada per

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = -\frac{(\vec{w}_1, \vec{f})}{(\vec{w}_1, \partial_{\mathbf{x}} \vec{\delta\alpha}_1)}. \quad (7.29)$$

Si substituïm ara (7.27) en les equacions de Langevin (6.13) i projectem sobre un  $\vec{w}_n$ ,  $n \neq 1$ , tenint en compte les relacions d'ortogonalitat entre els vectors propis, trobem l'equació de Langevin dels coeficients de l'expansió de  $\vec{\delta\alpha}(\mathbf{x}, t)$  en la base de vectors propis:

$$\dot{c}_j = \lambda_j c_j + (\vec{w}_j, \vec{f}). \quad (7.30)$$

que dona una equació de Langevin per als coeficients de l'expansió en vectors propis.

### 7.2.1 Integració de les equacions de coeficients

Les equacions de Langevin per als coeficients del desenvolupament (eq. 7.27) poden integrar-se directament com

$$c_j(t) = \int_{-\infty}^t dt' e^{\lambda_j(t-t')} (\vec{w}_j, \vec{f}(t')). \quad (7.31)$$

Ara bé, l'equació (7.31) pot escriure's també en l'espai de freqüències temporals, de forma que definint les transformades de Fourier

$$c_i(t) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega e^{i\omega t} \Theta_i(\omega), \quad (7.32a)$$

$$\vec{f}(t) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega e^{i\omega t} \vec{\chi}(\omega), \quad (7.32b)$$

i les respectives transformades inverses

$$\Theta_i(\omega) = \int d\omega e^{-i\omega t} c_i(t), \quad (7.33a)$$

$$\vec{\chi}(\omega) = \int d\omega e^{-i\omega t} \vec{f}(t), \quad (7.33b)$$

obtenim en l'espai de freqüències una equació tan senzilla com

$$i\omega\Theta_i(\omega) = \lambda_i\Theta_i(\omega) + (\vec{w}_i, \vec{\chi}(\omega)) \quad (7.34)$$

que dóna directament l'expressió dels coeficients en  $\omega$

$$\Theta_i(\omega) = \frac{(\vec{w}_i, \vec{\chi}(\omega))}{-\lambda_i + i\omega}. \quad (7.35)$$

i permet calcular també els coeficients  $c_j(t)$  substituint en (7.2)

$$c_i(t) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega e^{i\omega t} \frac{(\vec{w}_i, \vec{\chi}(\omega))}{-\lambda_i + i\omega}. \quad (7.36)$$

### 7.2.2 Espectre de correlacions modal

Volem caracteritzar les fluctacions quàntiques al voltant del valor mig del camp, i per fer-ho calcularem l'espectre d'*squeezing* d'aquestes fluctuacions mitjançant una detecció homodina compensada (veure secció 2.3.4). Per tal de dur a terme aquest càlcul, però, ens caldrà calcular separatament d'espectre de correlacions a dos temps dels coeficients  $c_j(t)$  del desenvolupament en modes propis (7.27). Aquest càlcul es desenvolupa amb detall tot seguit, i recorrerem al seu resultat quan analitzem l'espectre d'*squeezing* sota una detecció homodina.

L'espectre de les correlacions entre dos modes d'índexos  $i, j$  es defineix com

$$S_{i,j}(\omega) = \int dt e^{-i\omega t} \langle c_i(\tau), c_j(t + \tau) \rangle \quad (7.37)$$

on emprant les relacions de les transformades de Fourier (7.36)

$$\begin{aligned} S_{i,j}(\omega) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\omega_1 e^{i\omega_1 t} \int d\omega_2 e^{i\omega_2 t} \int d\tau e^{i(\omega_2 - \omega)\tau} \langle \Theta_i(\omega_1), \Theta_j(\omega_2) \rangle = \\ &= \frac{1}{(2\pi)} \int d\omega_1 e^{i(\omega_1 + \omega)t} \sum_{i,j=1,2} \langle \Theta_i(\omega_1), \Theta_j(\omega) \rangle. \end{aligned} \quad (7.38)$$

De l'equació (7.35) trobem

$$\langle \Theta_i(\omega_1), \Theta_j(\omega) \rangle = \frac{1}{(-\lambda_i + i\omega_1)} \frac{1}{(-\lambda_j + i\omega)} \langle (\vec{w}_i, \vec{\chi}(\omega_1), (\vec{w}_j, \vec{\chi}(\omega)) \rangle, \quad (7.39)$$

i per tant sols cal calcular la correlació

$$\begin{aligned}
& \langle (\vec{w}_i, \vec{\chi}(\omega_1), (\vec{w}_j, \vec{\chi}(\omega))) \rangle = \\
& = \int dt_1 e^{-i\omega_1 t_1} \int dt_2 e^{-i\omega t_2} \langle (\vec{w}_i, \vec{f}(t_1), (\vec{w}_j, \vec{f}(t_2))) \rangle = \int dt_1 e^{-i\omega_1 t_1} \int dt_2 e^{-i\omega t_2} \\
& \langle (w_i^*(\mathbf{x})f_1(\mathbf{x}, t_1) + w_i^{+*}(\mathbf{x})f_2(\mathbf{x}, t_1)), (w_j^*(\mathbf{x}')f_1(\mathbf{x}', t_2) + w_j^{+*}(\mathbf{x}')f_2(\mathbf{x}', t_2)) \rangle = \\
& = 2\pi \delta(\omega + \omega_1) \sqrt{\frac{\gamma_1}{a_1}} \\
& \int dx [w_i^*(\mathbf{x})w_j^*(\mathbf{x})(\mu + i \overline{A_1(\mathbf{x})}^2) + w_i^{+*}(\mathbf{x})w_j^{+*}(\mathbf{x})(\mu - i \overline{(A_1(\mathbf{x}))^*})^2)],
\end{aligned}$$

que ens permet arribar finalment a l'espectre de correlacions entre dos modes  $i, j$

$$\begin{aligned}
S_{i,j}(\omega) & = \frac{1}{(2\pi)} \int d\omega_1 e^{i(\omega_1 + \omega)t} \langle \Theta_i(\omega_1), \Theta_j(\omega) \rangle = \\
& = \sqrt{\frac{\gamma_1}{a_1}} \frac{1}{(-\lambda_i - i\omega)(-\lambda_j + i\omega)} \\
& \int dx [w_i^*(\mathbf{x})w_j^*(\mathbf{x})(\mu + i \overline{A_1(\mathbf{x})}^2) + w_i^{+*}(\mathbf{x})w_j^{+*}(\mathbf{x})(\mu - i \overline{(A_1(\mathbf{x}))^*})^2] \\
& \equiv \frac{D_{ij}}{(-\lambda_i - i\omega)(-\lambda_j + i\omega)}. \tag{7.40}
\end{aligned}$$

on la matriu  $D_{ij}$  rebrà el nom de matriu de difusió entre modes, a causa de la semblança de l'equació (7.40) amb la matriu espectral derivada directament a partir d'una equació de Langevin [Collet85].

### 7.2.3 Càlcul de la matriu de difusió entre modes

El potencial del càlcul de l'espectre modal (7.40) és moltíssim. Una vegada calculat aquest espectre per tots els modes, el càlcul de la detecció homodina serà un càlcul trivial. A causa de la simetria del terme de la matriu de difusió,  $(\mu + i \overline{A_1}^2)$ , parell en  $\mathbf{x}$ , i de la descomposició en ordres senars i parells, és a dir, en modes que oscil·len com sinus o com cosinus, l'acoblament entre els dos tipus de modes es nul, i poden estudiar-se separatament. Es calcularà ara la matriu de difusió entre modes,  $D_{i,j}$ , recordant que  $\mathbf{z} = \sqrt{\frac{\gamma_1}{a_1}}\beta x$  i que  $\langle \eta(\mathbf{X}, T)\eta(\mathbf{X}', T) \rangle = \sqrt{\frac{a_1}{\gamma_1}} \langle \eta(\mathbf{x}, T)\eta(\mathbf{x}', T) \rangle$  com la projecció del vector de soroll original  $\vec{f}$  sobre la base de vectors propis

$$D_{i,j} = \gamma_1 \int dz [w_i^*(\mathbf{z})w_j^*(\mathbf{z})(\mu + i \overline{A_1(\mathbf{z})}^2) + w_i^{+*}(\mathbf{z})w_j^{+*}(\mathbf{z})(\mu - i (\overline{A_1(\mathbf{z})}^*)^2)]. \quad (7.41)$$

El càlcul numèric d'aquesta matriu és el més feixug des del punt de vista de rapidesa de càlcul. Les matrius impliquen sumatoris de 100, 200 ó 300 modes, per cadascú del termes de la matriu, i això incrementa substancialment el temps necessari per calcular-la. Afortunadament, i després de fer la comprovació per distints valors dels paràmetres del sistema, els resultats obtesos variant el nombre de modes (100, 300 o 300 modes) divergeixen en quantitats de l'ordre de  $10^{-9}$  i per tant decidírem treballar amb 100 modes. Per als modes parells, amb

$$\vec{w}_i(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} w_i(\mathbf{z}) \\ w_i^+(\mathbf{z}) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{L}} \begin{pmatrix} w_i^{(0)}(\mathbf{z}) \\ w_i^{(0)+}(\mathbf{z}) \end{pmatrix} + \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{n=1}^N \begin{pmatrix} w_i^{(n)}(\mathbf{z}) \\ w_i^{(n)+}(\mathbf{z}) \end{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi n}{L}\mathbf{z}\right). \quad (7.42)$$

les expressions explícites per als  $D_{i,j}$  són

$$C_{i,j}^{(0,0)} = \mu \left[ \left( w_i^{(0)} \right)^* \left( w_j^{(0)} \right)^* + \left( w_i^{+(0)} \right)^* \left( w_j^{+(0)} \right)^* \right] \\ + i 4\beta^2 \left[ \left( w_i^{(0)} \right)^* \left( w_j^{(0)} \right)^* e^{i2\phi} - \left( w_i^{+(0)} \right)^* \left( w_j^{+(0)} \right)^* e^{-i2\phi} \right], \quad (7.43a)$$

$$C_{i,j}^{(0,n)} = i \frac{4\sqrt{2}\beta^2 n \pi^2}{L^2 \sinh\left(\frac{n\pi^2}{L}\right)} \left[ \left( w_i^{(0)} \right)^* \left( w_j^{(n)} \right)^* e^{i2\phi} - \left( w_i^{+(0)} \right)^* \left( w_j^{+(n)} \right)^* e^{-i2\phi} \right], \quad (7.43b)$$

$$C_{i,j}^{(n,0)} = i \frac{4\sqrt{2}\beta^2 n \pi^2}{L^2 \sinh\left(\frac{n\pi^2}{L}\right)} \left[ \left( w_i^{(n)} \right)^* \left( w_j^{(0)} \right)^* e^{i2\phi} - \left( w_i^{+(n)} \right)^* \left( w_j^{+(0)} \right)^* e^{-i2\phi} \right], \quad (7.43c)$$

$$C_{i,j}^{(n,n)} = \mu \left[ \left( w_i^{(n)} \right)^* \left( w_j^{(n)} \right)^* + \left( w_i^{+(n)} \right)^* \left( w_j^{+(n)} \right)^* \right] \quad (7.43d)$$

$$+ i 2\beta^2 \left[ \frac{2}{L} + \frac{4 n \pi^2}{L^2 \sinh\left(\frac{2\pi^2 n}{L}\right)} \right] \left[ \left( w_i^{(n)} \right)^* \left( w_j^{(n)} \right)^* e^{i2\phi} - \left( w_i^{+(n)} \right)^* \left( w_j^{+(n)} \right)^* e^{-i2\phi} \right], \quad (7.43e)$$

$$C_{i,j}^{(n,m)} = i \frac{4\beta^2 \pi^2}{L^2} \left[ \frac{m-n}{\sinh\left(\frac{(m-n)\pi^2}{L}\right)} + \frac{m+n}{\sinh\left(\frac{(m+n)\pi^2}{L}\right)} \right] \\ \left[ \left( w_i^{(n)} \right)^* \left( w_j^{(m)} \right)^* e^{i2\phi} - \left( w_i^{+(n)} \right)^* \left( w_j^{+(m)} \right)^* e^{-i2\phi} \right]; \quad m \neq n, \quad (7.43f)$$

$$D_{i,j} = C_{i,j}^{(0,0)} + \sum_{n=1}^N \left[ C_{i,j}^{(0,n)} + C_{i,j}^{(n,0)} + C_{i,j}^{(n,n)} \right] + \sum_{\substack{m,n=1 \\ m \neq n}}^N C_{i,j}^{(n,m)}. \quad (7.43g)$$

Per als modes senars, amb

$$\vec{w}_i(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} w_i(\mathbf{z}) \\ w_i^+(\mathbf{z}) \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{n=1}^N \begin{pmatrix} w_i^{(n)}(\mathbf{z}) \\ w_i^{(n)} + (\mathbf{z}) \end{pmatrix} \sin\left(\frac{2\pi n}{L} \mathbf{z}\right). \quad (7.44)$$



els elements  $D_{i,j}$  són

$$S_{i,j}^{(n,n)} = \mu \left[ \left( w_i^{(n)} \right)^* \left( w_j^{(n)} \right)^* + \left( w_i^{+(n)} \right)^* \left( w_j^{+(n)} \right)^* \right] + i 2\beta^2 \left[ \frac{2}{L} - \frac{4 n \pi^2}{L^2 \sinh\left(\frac{2\pi^2 n}{L}\right)} \right] \left[ \left( w_i^{(n)} \right)^* \left( w_j^{(n)} \right)^* e^{i2\phi} - \left( w_i^{+(n)} \right)^* \left( w_j^{+(n)} \right)^* e^{-i2\phi} \right]; \quad (7.45)$$

$$S_{i,j}^{(n,m)} = i \frac{4\beta^2 \pi^2}{L^2} \left[ \frac{m-n}{\sinh\left(\frac{(m-n)\pi^2}{L}\right)} - \frac{m+n}{\sinh\left(\frac{(m+n)\pi^2}{L}\right)} \right] \left[ \left( w_i^{(n)} \right)^* \left( w_j^{(m)} \right)^* e^{i2\phi} - \left( w_i^{+(n)} \right)^* \left( w_j^{+(m)} \right)^* e^{-i2\phi} \right]; \quad m \neq n; \quad (7.46)$$

$$D_{i,j} = \sum_{n=1}^N S_{i,j}^{(n,n)} + \sum_{\substack{m,n=1 \\ m \neq n}}^N S_{i,j}^{(n,m)}. \quad (7.47)$$

## 7.3 Espectre d'*squeezing*

### 7.3.1 Detecció homodina compensada

Resoldre les equacions (7.30) ens proporciona una ferramenta per estudiar qualsevol propietat quàntica del solitons, dins aquesta aproximació lineal. El primer que ens preguntem és quines són les característiques d'*squeezing* que presentaria el solitó en un experiment de detecció homodina compensada. Particularitzarem, per tant, (2.46) al problema del solitó en la PDNLS.

Expressant les fluctuacions en la base de vectors propis de  $\mathcal{L}$  com

$$\vec{\delta\alpha}(x, t) = \sum_{i=2}^{N_T=2N+1} c_i(t) \vec{v}_i(x), \quad (7.48)$$

que és l'expansió (7.27), però on ara el subíndex  $i$  és l'etiqueta del mode  $i$ -èssim, siga bé del continu bé del discret, on  $\vec{v}_i(x) = (v_i \ v_i^+)^T$ . Substituint  $\delta E_H(t)$ , donat per (2.47-2.48), en l'espectre d'*squeezing* (2.46) i tenint en compte que  $A(\mathbf{x}, t)$  en (2.48) ve donat per  $A_1(\mathbf{x}, t)$ , segons (6.12) obtenim que

$$\begin{aligned}
S(\omega) &= 2\gamma \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\omega\tau} \langle : \delta E_H(t+\tau) \delta E_H(t) : \rangle = \\
&= \frac{2\gamma}{N} \sum_{i,j} \int dx (\alpha_L^*(x) v_i(x) + \alpha_L(x) v_i^+(x)) \\
&\int dx' (\alpha_L^*(x') v_j(x') + \alpha_L(x') v_j^+(x')) \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\omega\tau} \langle : c_i(t+\tau) c_j(t) : \rangle \\
&= \frac{2\gamma}{N} \sum_{i,j} (\vec{\alpha}_L, \vec{v}_i) (\vec{\alpha}_L, \vec{v}_j) S_{i,j}(\omega).
\end{aligned}$$

On els termes  $(\vec{\alpha}_L, \vec{v}_i)$  és la projecció del vector  $v_i$  sobre l'oscil·lador local a través del producte escalar definit en (7.23), amb  $\vec{\alpha}_L(x) = (\alpha_L(x) \alpha_L^*(x))^\top$ , i el terme de l'espectre corresponent a la interacció entre els modes  $i, j$ , ve donat per  $S_{i,j}(\omega)$  en (7.40) i  $N$  donat per (2.41).

## 7.4 Detecció homodina: selecció de l'oscil·lador local i espectre d'*squeezing*

Un cop triat el LOF que s'emprarà per dur a terme la detecció l'únic que ens cal és fer la projecció sobre els vectors propis de  $\mathcal{L}$  i pesar-la amb el corresponent espectre modal. Si ens fixem en la normalització d'aquests vectors propis (7.26) ens adonem d'una propietat ben curiosa: si com a LOF triem un dels vectors propis de  $\mathcal{L}^\dagger$ ,  $\vec{w}_i$ , la projecció  $(\vec{\alpha}_L, \vec{v}_j)$  sobre cada autovector serà  $(\vec{w}_i(x), \vec{v}_j(x')) = \delta_{ij} \delta(x - x')$ , i per tant l'única projecció no nul·la correspondrà al mode  $i$ -èssim, que correspon al mode triat com LOF. En particular, trobem que per qualsevol valor dels paràmetres tenim el vector i el valor propis complementaris dels de Goldstone, és a dir, sempre existeix un autovalor, que pertany a l'espectre discret d'autovalor  $\lambda_2 = -2$  i d'autovector de  $\mathcal{L}^\dagger$  (que és el que necessitem per construir el LOF),  $\vec{w}_2 = (i \partial_x \overline{A_1}(\mathbf{X}), -i \partial_x \overline{A_1^*}(\mathbf{X}))^\top$ . Substituint en l'expressió (7.38) amb  $i = j = 2$  (recordant la normalització de l'espai i del temps) veiem que per aquest LOF en particular l'espectre d'*squeezing* no està afectat pels valors particulars dels paràmetres del sistema, així *sempre* que aquest siga l'oscil·lador triat

per detectar les fluctuacions del camp a la sortida de la cavitat obtindrem *squeezing* perfecte per a freqüència  $\omega = 0$ .

De la mateixa manera que hem trobat l'espectre d'*squeezing* per a aquest oscil·lador en particular, podem trobar-ho per qualsevol altre calculant la projecció sobre els distints autovectors de  $\mathcal{L}$  en (7.49). De fet, aquesta projecció donada pel producte escalar (7.23) resultarà encara més senzilla de calcular si descomposem el LOF que es preten utilitzar en la base de sinus i cosinus en què hem descompost els autovectors. D'aquesta manera la projecció es limitarà a un producte de coeficients del desenvolupament dels vectors -ens estalviarem haver de calcular la integració espacial-. És a dir, si escrivim el LOF com

$$\alpha_L(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \vec{\alpha}_L^{(0)} + \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \vec{\alpha}_c^{(n)} \cos\left(\frac{2\pi n}{L} z\right) + \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \vec{\alpha}_s^{(n)} \sin\left(\frac{2\pi n}{L} z\right) \quad (7.49)$$

i havent construït els autovectors com

$$\vec{v}_i(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \vec{v}_i^{(0)} + \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \vec{v}_{i,c}^{(n)} \cos\left(\frac{2\pi n}{L} z\right), \quad (7.50)$$

si  $\vec{v}_i(x)$  és un mode parell ( $p = +1$ ), i

$$\vec{v}_i(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \vec{v}_{i,s}^{(n)} \sin\left(\frac{2\pi n}{L} z\right), \quad (7.51)$$

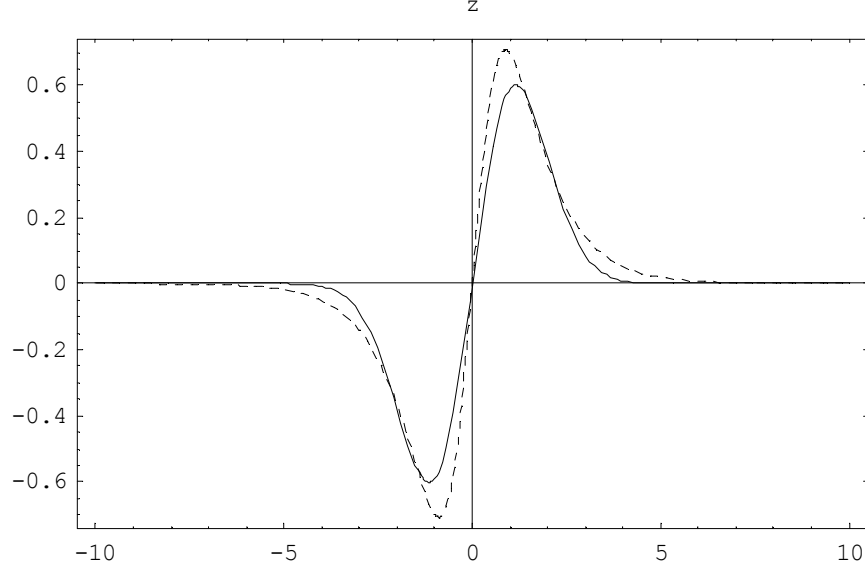
si  $\vec{v}_i(x)$  és un mode senar ( $p = -1$ ).

La projecció queda senzillament

$$\begin{aligned} (\vec{\alpha}_L, \vec{v}_j) &= \frac{(1+p)}{2} \left[ \frac{1}{L} (\vec{\alpha}_L^{(0)}, \vec{v}_i^{(0)}) + \frac{2}{L} \sum_{n=1}^N (\vec{\alpha}_c^{(n)}, \vec{v}_{i,c}^{(n)}) \right] \\ &\quad + \frac{(1-p)}{2} \frac{2}{L} \sum_{n=1}^N (\vec{\alpha}_s^{(n)}, \vec{v}_{i,s}^{(n)}). \end{aligned} \quad (7.52)$$

on com veiem queda eliminat l'inconvenient d'haver d'integrar aquestes funcions en  $x$ . Aprofitant que coneixem el LOF òptim que ens permetria aconseguir un *squeezing* perfecte i també com predir quin serà el resultat de

projectar amb un altre oscil·lador qualsevol, el que farem serà tractar de buscar un oscil·lador "semblant" al mode  $w_2$ , però fàcilment reproducible en un laboratori. El mode de Gauss-Hermite de primer ordre satisfà aquesta propietat  $H_1(z) = z e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}$ . Tal i com podem comprovar la forma d'aquest mode depèn de la seva amplada  $\sigma$ , i segons el valor d'aquesta serà més o menys semblant a  $w_2$ .



La línia contínua representa el mode de gauss-hermite normalitzat amb amplada  $\sigma = 1.15$ , la línia discontinua representa l'amplitud del mode  $w_2$  (obvian el terme corresponent a la fase del solitó i canviada de signe).

L'espai està mesurat en unitats d'amplada del solitó:  $z = \beta x$ .

Prenem per detectar l'*squeezing* del camp un LOF amb la forma d'un mode de Gauss-Hermite

$$\vec{h}(z) = \sqrt{\frac{2}{\sigma^3 \sqrt{\pi}}} z e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} \begin{pmatrix} i e^{i\phi} \\ -i e^{-i\phi} \end{pmatrix} \quad (7.53)$$

al qual es dóna la mateixa fase que al mode  $w_2$ . La semblança d'aquest mode i del gauss-hermite depèn de l'amplada  $\sigma$  d'aquest últim, i per tant també hi depèn l'*squeezing* màxim que es pot assolir. En la figura (1a) de [Pérez-Arjona04] es mostra l'*squeezing* que s'assoleix, per a dos freqüències, en funció de l'amplada del mode de gauss-hermite. En Fig. (1b) es mostra l'efecte d'un desplaçament entre el solitó i el LOF.

## References

- [Alexeeva00] Alexeeva N. V. , I. V. Barashenkov, and G. P. Tsironis, Phys. Rev. Lett. **84**, 3053 (2000).
- [Ahufinger03] Ahufinger V., J. García-Ojalvo, J. Mompart, M. C. Torrent, R. Corbalán, and R. Vilaseca, Phys. Rev. Lett. **91**, 083901 (2003)
- [Barashenkov91] Barashenkov I.V. , M.M. Bogdan, and V.I. Korobov, Europhys. Lett. **15**, 113 (1991).
- [Barland02] Barland S., J.R. Tredicce, M. Brambilla, L.A. Lugiato, S. Balle, M. Giudici, T. Maggipinto, L. Spinelli, G. Tisoni, T. Knoedl, M. Miller, & R. Jaeger, Nature **419**, 699 (2002)
- [Bazhenov92] Bazhenov V. Yu., V.B. Taranenko, & V.M. Vasnetsov, Proc. SPIE **1840**, 183 (1992)
- [Brambilla91] Brambilla F.Battipede, L.A. Lugiato, V. Penna, F. Prati, C. Tamm & C.O. Weiss, Phys. Rev. A **43**, 5090 (1991).
- [Brambilla94] Brambilla M., M. Cattaneo, L.A. Lugiato, R. Pirovano, F. Prati, A.J. Kent, G.L. Oppo, A.B.Coates, C.O.Weiss, C. Green, E.J. D'Angelo & J.R. Tredicce, Phys. Rev. A **49**, 1427 (1994).
- [Brambilla96] Brambilla M., L.A. Lugiato, & M. Stefani, Europhys. Lett. **34**, 109 (1996).
- [Brambilla97] Brambilla M., L.A. Lugiato, F. Prati, L. Spinelli & W.J. Firth, Phys. Rev. Lett. **79**, 2042 (1997).
- [Carmichael76a] Carmichael H.J & D.F. Walls, J.Phys. B **9**, L43 (1976).
- [Carmichael76b] Carmichael H.J & D.F. Walls, J.Phys. B **9**, 1199 (1976).
- [Coates94] Coates A.B., C.O.Weiss, C.Green, E.J. D'Angelo, J.R. Tredicce, M. Brambilla, M. Cattaneo, L.A. Lugiato, R.

- Pirovano F. Prati, A.J. Kent & G.L.Oppo, Phys. Rev. A **49**, 1452 (1994).
- [Collet84] Collet M.J. & C.W. Gardiner, Phys. Rev. A **30**, 1386 (1984).
- [Collet85] Collet M.J. & D.F. Walls, Phys. Rev. A **32**, 2887 (1985).
- [Couillet89] Couillet P., L.Gil & F.Rocca Opt.Comm. **73**, 403 (1989).
- [Couillet90] Couillet P., Lega J., Houchmanzadeh B & Lajzerowicz J., Phys. Rev. Lett., **65**, 1352 (1990).
- [Cross93] Cross M.C. & P.C.Hohenberg, Rev.Mod.Phys. **65**, 851 (1993)
- [Dagenais78] Dagenais M. & L.Mandel, Phys. Rev. A **35**, 2887 (1978).
- [D'Alessandro91] D'Alessandro G.P. & W.J. Firth, Phys. Rev. Lett. **66**, 2597 (1991).
- [D'Alessandro92] D'Alessandro G., Phys. Rev. A **46**, 2791 (1992).
- [deValcarcel96] de Valcárcel G.J., K. Staliunas, E. Roldán & V.J. Sánchez-Morcillo, Phys. Rev. A **54**, 1609 (1996).
- [deValcarcel00] de Valcárcel G.J., E. Roldán & K. Staliunas, Opt. Comm. **181**, 207 (2000).
- [deValcarcel02] de Valcárcel G.J., I. Pérez-Arjona & E. Roldán, Phys. Rev. Lett. **89**, 164101 (2002).
- [Dodonov03] Dodonov V.V. & Man'ko V.I, *Theory of nonclassical states of light*, Taylor and Francis (2009).
- [Drummond80] Drummond P.D. & Gardiner C.W. J. Phys. A **13**, 2353 (1980).
- [Drummond04] Drummond P.D & Ficek, Eds. *Quantum Squeezing*, (Springer- Verlag, Berlin, 1994).

- [Dunlop98] Dunlop A.M., E.M. Wright & W.J.Firth, *Opt.Comm.* **147**, 393 (1998).
- [Encinas-Sanz96] Encinas-Sanz F., J.M. Guerra & I. Pastor, *Opt.Lett.* **21**,1153 (1996).
- [Esteban-Martín04] Esteban-Martín A., J. García, E. Roldán,V.B. Taranenکو, G.J. de Valcárcel, & C.O. Weiss, *Phys.Rev. A* **69**, 033816 (2004)
- [Etrich97] Etrich C., U.Peschel & F.Lederer, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 2454 (1997).
- [Fauve90] Fauve S. & O.Thual, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 282 (1990).
- [Firth91] Firth W.J. , *J.Mod.Opt.* **37**, **151** (1991).
- [Firth92] Firth W.J., A.J. Scroggie, G.S.McDonald & L.A.Lugiato,, *Phys. Rev. A* **46**, R3609 (1992).
- [Firth96] Firth W.J. & A. Lord, *J.Mod.Opt.* **43**, 1071 (1996).
- [Firth96b] Firth W.J. & Scroggie A.J., *Phys. Rev. Lett.*, **76**, 1623 (1996).
- [Firth88] Firth W.J. & C.Pare, *Opt.Lett.* **13**, 1096 (1988).
- [Firth01] Firth W.J. & Harkness G.K., "Existence, Stability and Properties of Cavity Solitons", in *Spatial Solitons*, Eds. S.Trillo & W.Torruellas, , Springer-Verlag (2001).
- [Gardiner85] Gardiner C.W. , *Handbook of Stochastics Methods* (Springer, 1985).
- [Gardiner00] Gardiner C.W. & P. Zoller, *Quantum Noise*, (Springer-Verlag, Berlin,2000).
- [Gatti95] Gatti A.& L.A.Lugiato, *Phys. Rev. A*, **52**, 1675 (1995).
- [Gatti97] Gatti A., H. Wiedemann, L.A. Lugiato, I. Marzoli, G.L. Oppo & S. Barnett, *Phys. Rev. A*, **56**, 877 (1997).

- [Geddes94] J. B. Geddes, J. V. Moloney, E. M. Wright and W. J. Firth, *Opt. Comm.* **111**, 623, (1994).
- [Georgiou94] Georgiou M. & P.Mandel, *Chaos Solitons, Fractals*, **4**, 1657 (1994).
- [Glauber63] Glauber R.J. *Phys.Rev.* **130**, 2529 (1963).
- [Grynberg88] G. Grynberg, E. Le Bihan, P. Verkerk, P. Simoneau, J. R. R. Leite, D. Bloch, S. Le Boiteux, and M. Ducloy, *Opt. Commun.* **67**, 363 (1988).
- [Grynberg93] Grynberg G. & L.A. Lugiato, *Opt. Comm.* **101**, 69 (1993).
- [Hanbury-Brown56] Hanboursy Brown R. & R.Q. Twiss, *Nature (London)* **177**, 27 (1956).
- [Hegarty99] Hegarty S.P. G.Huyet, J.G.McInerney & K.D.Choquette, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 1434, (1999).
- [Houlihan01] Houlihan J., J.R. O'Callaghan, V. Voignier, G. Huyet, J.G. McInerney & B. Corbett, *Opt.Lett.* **26**, 1556 (2001).
- [Ioos90] Ioos G. & G.G. Joseph, *Elementary Stability and Bifurcation Theory*, Springer, New York (1990).
- [Jakobsen92] Jakobsen P.K. J.V. Moloney, A.C.Newell & R.Indik, *Phys. Rev. A* **45**, 8129 (1992).
- [Kimble77] Kimble, H. J., M. Dagenais, and L. Mandel, *Phys. Rev. Lett.* **39**, 691, (1977).
- [Kolobov89] Kolobov M.I. & I.V. Sokolov, *Phys. Lett. A* **140**,101 (1989).
- [Kolobov91] Kolobov M.I. & I.V. Sokolov, *Eurphys. Lett.* **15**, 271 (1991).
- [Kolobov99] Kolobov M.I., *Rev. Mod. Phys.*, **71**, 1539 (1999).



- [Krolikowsky98] Królikowsky W., M. Saffman, B. Luther-Davies & C. Denz, Phys. Rev. Lett. **80**, 3240 (1998).
- [Lange96] Lange W., Yu.A. Logvin & T. Ackemann, Phys. D, **96**, 230 (1996).
- [Lantz04] Lantz E., T. Sylvestre, H. Maillotte, N Trep & C. Fabre, J. Opt.. B: quantum Semiclass. Opt., **6**, S295 (2004).
- [Larionova04] Larionova Ye., U. Peschel, A. Esteban-Martin, J. García Monreal, & C. O. Weiss, Phys. Rev. A **69**, 033803, (2004).
- [LeBerre99] Le Berre M., D. Leduc, E. Ressayre & A. Tallet, J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. **1**, 153 (1999).
- [LeBerre00] Le Berre M. , E. Ressayre & A. Tallet, J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. **2**, 347 (2000).
- [Lega95] Lega J., J.W.Moloney & A.C.Newell,. Physica D **83**, 478 (1995).
- [Lin90] Lin H. & N.B. Abraham, Opt. Comm. **79**, 476 (1990).
- [Longhi96] Longhi S., Opt. Lett. **21**, 860 (1996).
- [Longhi96b] Longhi S., Phys. Rev. A **53**, 4488 (1996).
- [Longhi96c] Longhi S. & A. Geraci, Phys. Rev. A **54**, 4581 (1996).
- [Longhi97a] Longhi S., Phys.Scr. **56**, 611 (1997).
- [Longhi97b] Longhi S., Phys. Rev. A **56**, 2397, (1997).
- [Longhi98a] Longhi S., Opt. Comm. **149**, 335(1998).
- [Longhi98b] Longhi S., Opt. Lett. **23**, 346 (1998).
- [Longhi01] Longhi S., Phys. Rev. E **63**, 055202 (2001).
- [Lodhal00] Lodhal P., M. Bache & M. Saffman, Phys. Rev. Lett. **85**, 4506 (2000).

- [Loudon83] Loudon R., *The Quantum theory of light*, Clarendon Press, Oxford (1983).
- [Loudon87] Loudon R. & Knight P.L., *J. Mod. Opt.* **34**, 709 (1987).
- [Lugiato87] Lugiato L.A. & R. Levefer, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 2209 (1987).
- [Lugiato88] Lugiato L.A., C. Oldano & L.M. Narducci, *J. Opt. Soc. Am. B* **5**, 8790 (1988).
- [Lugiato89] Lugiato L.A., et al, *J. Opt. Soc. Am. B*, **69**, 387 (1989).
- [Lugiato90] Lugiato L.A., G.L. Oppo, J.R. Tredicce, L.M. Narducci & M.A. Pernigo, *J. Opt. Soc. Am B* **7**, 1019 (1990).
- [Lugiato95] Lugiato L. A. , A. Gatti, & H. Wiedemann, *Quantum fluctuations and nonlinear optical patterns*, Les Houches, session LVIII, 1995, edited by S. Reynaud, E. Giacobino, and J. Zinn Justin (Elsevier-North-Holland, Amsterdam, 1997).
- [Lugiato92] Lugiato L.A. & F. Castelli, *Phys.Rev. Lett.* **68**, 3284 (1992).
- [Lugiato93] Lugiato L.A.& A. Gatti, *Phys.Rev.Lett.*, **70**, 3868 (1993).
- [Lugiato97] Lugiato L.A.& Ph. Grangier, *J. Opt. Soc. Am. B*, **14**, 225 (1997).
- [Lugiato98] Lugiato L.A. , Brambilla M. & Gatti A., *Optical Pattern Formation*, in *Advances in Atomic, Molecular and Optical Physics* **40**, 229 (1998).
- [Lugiato02] Lugiato L.A., A.Gatti & E. Brambilla, *J. Opt. B:Quantum Semiclass. Opt.* **4**, S176 (2002).
- [Machida86] Machida S. & Y. Yamamoto, *Opt. Commun.* **57**, 290 (1986)

- [Mamaev96] Mamaev A.V., M. Saffman, D.Z. Anderson & A.A. Zozulya, Phys. Rev. A **54**, 870 (1996).
- [Mandel79] Mandel L., Opt. Lett. **4**, 205 (1979).
- [Mandel93] Mandel P., M.Georgiou & T.Erneux, Phys. Rev. A **47**, 4277 (1993).
- [McDonall90] McDonall G.S. & W.J. Firth, J. Opt. Soc. Am. B **7**, 1378 (1990)
- [McLaughlin83] MacLaughlin D.W. , J.V. Moloney, & A.C. Newell, Phys. Rev. Lett. **51**, 75 (1983)
- [Mecozzi94] Mecozzi A., L. Kath, P. Kumar, and C. G. Goedde, Opt. Lett. **19**, 2050 (1994)
- [Michaelis97] Michaelis D., U. Peschel, & F. Lederer, Phys. Rev. A **56**, R3366 (1997).
- [Newell92] Newell A. & Moloney J., Nonlinear Optics, Addison-Wesley, Redwood City (1992).
- [Oppo94a] Oppo G.L., M.Brambilla & L.A.Lugiato, Phys. Rev. A **49**, 2028 (1994).
- [Oppo94b] Oppo G.L., M.Brambilla & L.A. Lugiato, Phys. Rev. A **49**, 2028 (1994).
- [Oppo99] Oppo G.L., A.J. Scroggie & W.J. Firth, J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. **1**, 133 (1999).
- [Oppo01] Oppo G.L., A.J. Scroggie & W.J. Firth, Phys. Rev. E **63**, 066209 (2001).
- [Pérez-Arjona01] Pérez-Arjona I., V.J. Sánchez-Morcillo, E. Roldán & G.J. de Valcárcel, J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt., **3**, S118 (2001).
- [Pérez-Arjona01b] Pérez-Arjona I., *Transicions Ising–Bloch en l’Equació Nolineal d’Schrödinger amb Decaïment i Forçament-Paramètric*, Universitat de València, unpublished (2001).

- [Pérez-Arjona04a] Pérez-Arjona I., F. Silva, G.J. de Valcárcel, E. Roldán & V.J. Sánchez-Morcillo, *J. Opt. B: Quantum Semi-class. Opt.*, **6**, S361-S368 (2004).
- [Pérez-Arjona04b] Pérez-Arjona I., F. Silva, E. Roldán & G.J. de Valcárcel, *Opt. Exp.*, **12**, 2130 (2004).
- [Pérez-Arjona04] Pérez-Arjona I., E. Roldán & G.J. de Valcárcel. (enviat a *Phys. Rev. Lett.*).
- [Peschel98] Peschel U., D. Michaelis, C. Etrich, & F. Lederer, *Phys. Rev. E* **58**, 2745 (1998).
- [Prati94] Prati F., M.Brambilla & L.A. Lugiato, *Nuovo Cimento* **17**, 1 (1994).
- [Rayleigh16] Lord Rayleigh, *Proc. R. Soc. London, Ser.A* **93**, 148 (1916).
- [Rosanov88] Rosanov N.N. & G.V. Khodova, *Opt. Spectros.*, **65**, 449 (1998).
- [Rosanov90] Rosanov N.N. & G.V. Khodova, *J. Opt. Soc. Am.* **7**, 1057 (1990)
- [Rosanov96] Rosanov N.N., "Transverse patterns in wide-aperture nonlinear optical systems" , in *Progress in Optics*, E. Wolf, Ed.Amsterdam, (1996)..
- [Sanchez-Morcillo96] Sánchez-Morcillo V.J. & G.J. de Valcárcel, *Quantum Semicl. Opt.* **8**, 919 (1996).
- [Sanchez-Morcillo97] Sánchez-Morcillo V.J. , E. Roldán, G.J. de Valcárcel, & K. Staliunas, *Phys. Rev. A* **56**, 3237 (1997).
- [Sanchez-Morcillo98] Sánchez-Morcillo V.J., G.J. de Valcárcel, E. Roldán & K. Staliunas, *Phys. Rev. E* **57**, R4731 (1998).
- [Sánchez-morcillo00] Sánchez-Morcillo V.J., I. Pérez-Arjona, F. Silva, G.J. de Valcárcel & E.Roldán., *Opt. Lett.* **25**, 957 (2000).
- [Sanchez-Morcillo00b] Sánchez-Morcillo V.J., *Anales de Física*, 95 (2000).

- [Scroggie94] Scroggie A. J. & W.J. Firth, *Europhys. Letters*, **26** 521, (1994).
- [Scroggie96] Scroggie A.J.& W.J. Firth, *Phys. Rev. A* **53**, 2752 (1996).
- [Scully97] Scully M.O. & Zubairy M.S., *Quantum Optics*, (Cambridge University Press, 1997).
- [Short83] Short R. & P.Mandel, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 2921 (1983).
- [Slekys98] Sleky G., K.Staliunas & C.O.Weiss, *Opt. Comm.* **149**, 113 (1998).
- [Slusher85] Slusher R.E., P. Grangier, A. LaPorta, B. Yurke, and M.J.Potasek, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 2566 (1987).
- [Spinelli98] Spinelli L., G. Tissoni, M. Brambilla, F. Prati, & L.A. Lugiato, *Phys. Rev. A* **58**, 2542 (1998).
- [Staliunas93] Staliunas K., *Phys. Rev. A* **48**, 1573 (1993).
- [Staliunas95] Staliunas K. M.F.H. Tarroja, G. Sleky, C.O. Weiss & L. Dambly, *Phys. Rev. A* **51**, 4140.
- [Staliunas97] Staliunas K.& V.J. Sánchez-Morcillo, *Opt. Comm.* **139**, 306 (1997).
- [Staliunas98] Staliunas K., G. Sleky, & C.O. Weiss, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 2658 (1998)
- [Staliunas98a] Staliunas K. & V.J. Sánchez-Morcillo, *Phys. Rev. A* **57**, 1454 (1998).
- [Staliunas98b] Staliunas K. & V.J. Sánchez-Morcillo, *Phys. Lett. A* **241**, 28 (1998).
- [Staliunas03] Staliunas K. & Sánchez-Morcillo V.J. *Transverse Patterns in Nonlinear Optical Resonators*, Springer-Verlag (2003).
- [Stoler70] Stoler D., *Phys. Rev. D* **1**,3217 (1970).

- [Tamm88] Tamm C.H., Phys. Rev. A **28**, 5960 (1988).
- [Taranenko97] Taranenko V.B., K. Staliunas & C.O. Weiss, Phys. Rev. A **1582** (1997).
- [Taranenko98] Taranenko V.B., K. Staliunas & C.O. Weiss, Phys. Rev. Lett. **81**, 2236 (1998).
- [Taranenko99] Taranenko V.B., M. Zander, P. Wobben & C.O. Weiss., Appl. Phys. B **69**, 337 (1999).
- [Taranenko00] Taranenko V.B., I. Ganne, R.J. Kuszelewicz & C.O. Weiss, Phys. Rev. A **61**, 0638818 (2000).
- [Taranenko01a] Taranenko V.B., I. Ganne, R.J. Kuszelewicz, & C.O. Weiss, Appl. Phys. B **72**, 377 (2001)
- [Taranenko01b] Taranenko V.B., C.O. Weiss, & W. Stolz, Opt. Lett. **26**, 1574 (2001)
- [Taranenko02] Taranenko V.B., C.O. Weiss & B. Schäpers, Phys. Rev. A **65**, 013812 (2002).
- [Taranenko02b] Taranenko V.B., C.O. Weiss & B. Schäpers, Phys. Rev. A **46**, R3609 (2002).
- [Tlidi93] Tlidi M., M. Giorgiou & P. Mandel, Phys. Rev. A **48**, 4605 (1993).
- [Tlidi94a] Tlidi M., P. Mandel & R. Levefer, Phys. Rev. Lett. **73**, 640 (1994).
- [Tlidi94b] Tlidi M. & P. Mandel, Chaos Solitons and Fractals **4**, 1475 (1994).
- [Tlidi00] Tlidi M., P. Mandel, M. LeBerre, E. Ressayre, A. Tallet & L. Di Menza., Opt. Lett. **25**, 487 (2000).
- [Trep00] Trep N. & Fabre, Phys. Rev. A **62**, 033816 (2000).
- [Trep02] N. Trep, U. Andersen, B. Buchler, P. K. Lam, A. Maître, H.-A. Bachor, and C. Fabre, Phys. Rev. Lett. **88**, 203601 (2002).

- [Treps03] Treps N., Grosse, Bowen W.P., Fabre C., Bachor H.A. & Lam P.K., *Science*, **301**, 940 (2003).
- [Trillo97] Trillo S. et al., *Phys. Rev. A* **61**, 043806 (1997).
- [Trillo98] Trillo S. & M. Haelterman, *Opt.Lett.* **23**, 1514 (1998).
- [Turing52] Turing A.M., *Phil. Trans. R.Soc. London B*, **237**, 37, (1952).
- [Vilaseca01] Vilaseca R., M.C. Torrent, J. García-Ojalvo, M. Brambilla, & M. San Miguel, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 083902 (2001).
- [Vorontsov97] Vorontsov M.A. & A.Y. Karpov, *J. Mod. Opt.* **44**, 439 (1997).
- [Walls83] Walls D.F., *Nature* **306** 141 (1983).
- [Walls94] Walls D.F.& G.J. Milburn, *Quantum Optics* (Springer-Verlag, 1994).
- [Weiss02] Weiss C.O. & Firth W.J., *Opt. Phot. News*, **13**, n°2, (2002).
- [Yamamoto90] Yamamoto Y., S. Machida, S. Saito, N. Imoto, T. Yanagawa, M. Kitagawa, and G. Björk, 1990, in *Progress in Optics*, Vol. **28**, edited by E. Wolf (North-Holland, Amsterdam).
- [Yu96] Yu D., W.Lu & R.G. Harrison, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 5051 (1996).
- [Yuen80] Yuen H.P.& J.H. Saphiro, *IEEE Trans. IT* **26**, 78 (1980).
- [Yuen86] Yuen H.P.& P. Tombesi, *Opt. Comm.* **59**, 155 (1986).
- [Zaikin70] Zaikin V.M. & Zhabotinsky A.M., *Nature* **225**, 535 (1970).
- [Zambrini00] R. Zambrini, S. M. Barnett, P. Colet, and M. San Miguel, *Phys. Rev. A* **65**, 023813 (2002).

## 8 Annex. Compedi de publicacions

### Publicació 1.

*Vectorial Kerr-cavity solitons.*

V.J. Sánchez-Morcillo, I. Pérez-Arjona, F. Silva, G.J. de Valcárcel & E. Roldán.

Optics Letters **25**, 957-959 (2000).

### Publicació 2.

*Bright cavity solitons in anisotropic vectorial Kerr cavities.*

I. Pérez-Arjona, V.J. Sánchez-Morcillo, G.J. de Valcárcel & E. Roldán.

J. of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics **3**, S118-S123 (2001).

### Publicació 3.

*Domain Walls and Ising-Bloch Transitions in Parametrically Driven Systems.*

G.J. de Valcárcel, I. Pérez-Arjona & E. Roldán.

Physical Review Letters **89**, 164101 (2002).

### Publicació 4.

*The Ising-Bloch transition in degenerate optical parametric oscillators.*

I. Pérez-Arjona, F. Silva, G.J. de Valcárcel, E. Roldán & V.J. Sánchez-Morcillo.

J. of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics **6**, S361-S368 (2004).

### Publicació 5.

*Stabilizing and controlling domain walls and dark-ring cavity solitons.*

I. Pérez-Arjona, F. Silva, E. Roldán & G.J. de Valcárcel.

Optics Express **12**, 2130 (2004).

### Publicació 6.

*Squeezed quantum cavity solitons.*

I. Pérez-Arjona, E. Roldán & G.J. de Valcárcel.

(enviat a Physical Review Letters ).

arXiv:quant-ph/0405148 v1 25 May 2004



# Vectorial Kerr-cavity solitons

V. J. Sánchez-Morcillo, I. Pérez-Arjona, F. Silva, G. J. de Valcárcel, and E. Roldán

Departament d'Òptica, Universitat de València, Dr. Moliner 50, 46100-Burjassot, Spain

Received January 3, 2000

It is shown that a Kerr cavity with different losses for the two polarization components of the field can support both dark and bright cavity solitons (CS's). A parametrically driven Ginzburg–Landau equation is shown to describe the system for large-cavity anisotropy. In one transverse dimension the nonlinear dynamics of the bright CS's is numerically investigated. © 2000 Optical Society of America

OCIS codes: 190.4420, 190.3100, 190.3270, 190.4380.

Cavity solitons (CS's) are localized structures formed in the plane transverse to the axis of light propagation in a nonlinear cavity that, like solitons, keep their shapes unchanged in time. In the case of CS's this shape retention is due to the balance among dissipation, nonlinearity, and diffraction in the cavity. We demonstrate the existence of such structures in a Kerr-cavity model that permits different cavity losses to exist for the two polarization components of the intracavity field.

We consider an optical resonator filled with an isotropic  $\chi^{(3)}$  medium and driven by a spatially homogeneous linearly polarized coherent field of real amplitude  $E$ . We assume that the two intracavity field polarization components  $A_0$  and  $A_1$  (parallel and orthogonal to the input field, respectively) have different losses ( $\gamma_0$  and  $\gamma_1$ ). The adimensional model equations in the mean-field limit read as<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \partial_t A_j = & -(\lambda_j + i\eta\Delta)A_j + i\eta[|A_j|^2 A_j \\ & + \mathcal{A}|A_k|^2 A_j + (\mathcal{B}/2)A_k^2 A_j^*] \\ & + i\nabla^2 A_j + \gamma(1-j)E, \end{aligned} \quad (1)$$

where  $j = 0, 1$ ,  $\lambda_0 = \gamma$ ,  $\lambda_1 = 1$ , and  $k \neq j$ . Equation (1) is a generalization to different losses of the isotropic cavity model of Ref. 2.

In Eq. (1),  $\nabla^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2$  is the transverse Laplacian operator (the transverse spatial coordinates  $x$  and  $y$  are normalized to the diffraction coefficient; light propagates along the  $z$  axis) and time  $t$  is normalized to  $\gamma_1$ .  $\Delta$  is the cavity mistuning,  $\gamma = \gamma_0/\gamma_1$  is the cavity anisotropy parameter, and  $\eta$  accounts for self-focusing ( $\eta = +1$ ) and self-defocusing ( $\eta = -1$ ). Finally,  $\mathcal{A}$  and  $\mathcal{B}$  are the Maker–Terhune coefficients that verify  $\mathcal{A} + \mathcal{B}/2 = 1$  when the medium is isotropic. For details see Ref. 1.

The spatially homogeneous linearly polarized ( $A_1 = 0$ ) solution<sup>1</sup> of Eq. (1) is the primary solution of the system. Its stability against plane-wave perturbations (of null transverse wave number) was studied in Ref. 1 for arbitrary values of  $\gamma$ . This solution is affected by two independent bifurcations. One of them preserves the linear polarization of the total field (scalar instability:  $A_1$  remains off), and the other leads to an elliptically polarized state (polarization instability:  $A_1$  switches on). In the absence of polarization instability the model of Eq. (1) reduces to the Lugiato–Lefever scalar model,<sup>3</sup> at least close to threshold.<sup>2</sup>

For our purposes the most relevant result of the plane-wave model studied in Ref. 1 is that the polarization instability may become subcritical for  $\gamma > 2$ , leading to coexistence of the (stable) linearly polarized state and the elliptically polarized state. This coexistence of states opens the possibility of existence of bright CS's (a bright spot on a black background, corresponding to the polarization component cross polarized with respect to the pump), provided that the elliptically polarized state be modulationally unstable. This possibility is not expected to occur in an isotropic cavity,  $\gamma = 1$ , because in that case the polarization instability is always supercritical. Next we summarize the linear stability analysis of the homogeneous linearly polarized solution.

*Self-Focusing Nonlinearity.* For  $\gamma < 4/3$  [in particular, the isotropic cavity case  $\gamma = 1$  (Refs. 2 and 4)], the instability is always scalar. For larger anisotropy,  $\gamma > 4/3$ , the instability depends on  $\Delta$ , so for  $\Delta < \Delta_P(\gamma) = \gamma/4 + [(3\gamma/4)^2 - 1]^{1/2}$  the scalar instability is replaced by the polarization instability. In particular, for  $\Delta < 1/3$  the instability is to finite wave-number perturbations (pattern-forming instability), whereas for  $1/3 < \Delta < \Delta_P(\gamma)$  the instability is to the plane wave, i.e., that studied in Ref. 1. We thus guess that, in the last detuning domain, bright-cavity solitons could be observed, provided that the polarization bifurcation be subcritical, which occurs only if  $\gamma > 2$  and roughly requires that  $\Delta > 1/3$  (for details see Ref. 1). In any case we conclude that cavity anisotropy is essential if polarization instability is to play a role in this self-focusing case.

*Self-Defocusing Nonlinearity.* For  $\gamma < 4/3$  (in particular, the isotropic case<sup>2,4</sup>) the scalar instability dominates if  $\Delta > \sqrt{3}\gamma$ , the condition for optical bistability in model Eq. (1).<sup>1</sup> For  $\gamma > 4/3$  the polarization instability dominates for any detuning, so the role of increasing  $\gamma$  is to favor polarization instability, as in the self-focusing case. For any anisotropy  $\gamma$  the polarization instability is to the plane wave if  $\Delta < 1/3$ . We thus conclude that, differently from the self-focusing case, the plane-wave polarization instability analyzed in Ref. 1 has relevance here only if  $\Delta < 1/3$ , where the bifurcation is always supercritical and hence bright CS's are not expected to exist.

To gain insight into the essential polarization pattern-formation features of model Eq. (1) we first consider the large-cavity anisotropy limit ( $\gamma \gg 1$ ), which,

as we commented above, favors polarization instability. We can obtain a reduced equation in this limit by taking  $\gamma^{-1}$  as a smallness parameter—the rest of parameters are taken as  $\mathcal{O}(1)$  quantities—and performing a standard multiple-scale expansion of Eq. (1). At leading order it is found that  $A_0(x, y, t) = E + \mathcal{O}(\gamma^{-1})$  and  $A_1(x, y, t) = \exp(i\pi/4)u(x, y, t) + \mathcal{O}(\gamma^{-1})$ , where  $u$  is governed by the following parametrically driven Ginzburg–Landau equation (PGL):

$$\partial_t u = -(1 + i\eta\theta)u + \mu u^* + i\eta|u|^2 u + i\nabla^2 u, \quad (2)$$

where  $\theta = \Delta - \mathcal{A}E^2$  and  $\mu = (\mathcal{B}/2)E^2$ . The functional dependence of effective detuning  $\theta$  and parametric gain  $\mu$  on coefficients  $\mathcal{A}$  and  $\mathcal{B}$  indicates that, for large  $\gamma$ , the Kerr-cavity dynamics should not be highly sensitive to the specific values of these coefficients, except when  $\mathcal{B} = 0$  (nonlinearity owing to electrostriction).

Let us consider the one-dimensional (1D) problem ( $\nabla^2 = \partial_x^2$ ), which describes, e.g., a physical situation in which the Kerr cavity has a slab waveguide configuration that confines the field in the  $y$  direction. Outstandingly, the 1D PGL supports either bright solitons in the self-focusing case ( $\eta = +1$ ) or dark solitons in the self-defocusing case ( $\eta = -1$ ) (Refs. 5 and 6):

$$u_{\text{bright}} = \sqrt{2}\beta \exp(i\phi)\text{sech}(\beta x), \quad (3)$$

$$u_{\text{dark}} = \beta \exp(-i\phi)\tanh[(1/\sqrt{2})\beta x], \quad (4)$$

$$\beta^2 = \theta \pm \sqrt{\mu^2 - 1}, \quad 2\phi = \pm \arccos(\mu^{-1}). \quad (5)$$

Some well-known properties of the analytical solitons [Eqs. (3) and (4)] are that (i) solitons with a minus in Eqs. (5) are always unstable, (ii) the dark soliton exists for  $\mu > \mu_0 = \sqrt{1 + \theta^2}$  and is stable only for  $\theta < 0$ , and (iii) the bright soliton is stable only for  $\theta > 0$ , exists for  $1 < \mu$ , and loses stability at  $\mu = \mu_0$ .

To illustrate and check the above analytical predictions we performed a numerical study of Eq. (1) for the special case of liquids ( $\mathcal{A} = 1/4$ ,  $\mathcal{B} = 3/2$ ). [For other kinds of nonlinearity, such as an off-resonant electronic response ( $\mathcal{A} = \mathcal{B} = 2/3$ ), qualitatively similar results are obtained.] Figure 1 shows 1D CS's obtained by numerical integration of Eq. (1) (solid curves) together with the analytical solitons [Eqs. (3) and (4)] (dashed curves). The analytical solitons show good agreement with the numerical Kerr CS's, even for values of  $\gamma$  that are not too high. We note that solitons similar to the dark CS's shown here were described numerically in Ref. 7 for the isotropic-cavity case  $\gamma = 1$ . Both the 1D localized structure described in Ref. 7 and our dark CS asymptotically connect two states of opposite (elliptical) polarization. In our case, far from the CS core ( $x \rightarrow \pm\infty$ ),  $A_0(-\infty) = A_0(+\infty)$  and  $A_1(-\infty) = -A_1(+\infty)$ . Thus, far from the CS core, one elliptical polarization state dominates the orthogonal state, as in Ref. 7. The fact that we can identify the CS as a dark soliton is due to the (linear) polarization basis that we are using, whereas in Ref. 7 the chosen basis was circular.

In what follows, we consider only the bright CS. It has been shown that the PGL bright soliton undergoes a Hopf bifurcation that leads to formation of self-pulsing solitons.<sup>8,9</sup> When the parameters are varied, these self-pulsing solitons undergo secondary bifurcations that can lead to spatiotemporal chaos in period doubling and quasi-periodicity situations. For the Kerr-cavity model [Eq. (1)] the same behavior is expected for large values of  $\gamma$  (strictly speaking, for  $\gamma \rightarrow \infty$ ). Next we show that, even for moderately large values of  $\gamma$ , qualitatively similar effects are observed, which indicates that the PGL captures the main features of the Kerr cavity even far from its strict validity limit.

We numerically integrated Eq. (1) for  $\gamma = 10$  and  $\eta = 1$  (self-focusing case) for liquids. The numerical scheme used a split-step algorithm with periodic boundary conditions. The integration region had a length  $x = 1$ , and a grid of 2048 points was used. We limited our study to not-too-large values of the cavity detuning  $\Delta$  (up to  $\Delta = 8$ ) to prevent the influence of the scalar pattern from forming instability (for  $\gamma = 10$ ,  $\Delta_p \approx 9.933$ ).

Figure 2 summarizes our numerical study of Eq. (1) on the plane  $(\Delta, E^2)$ . The results are marked by crosses (joined by smooth curves obtained by interpolation) that correspond to different boundaries. The numerical CS exists between the two straight lines. It is stable in the region  $ST$  and is affected by a Hopf bifurcation that leads to simple periodic behavior  $P_1$  [Fig. 3(a)]. Below the lower straight line in Fig. 2 the soliton switches off. Above the upper straight line the soliton destabilizes to a patterned state (rolls

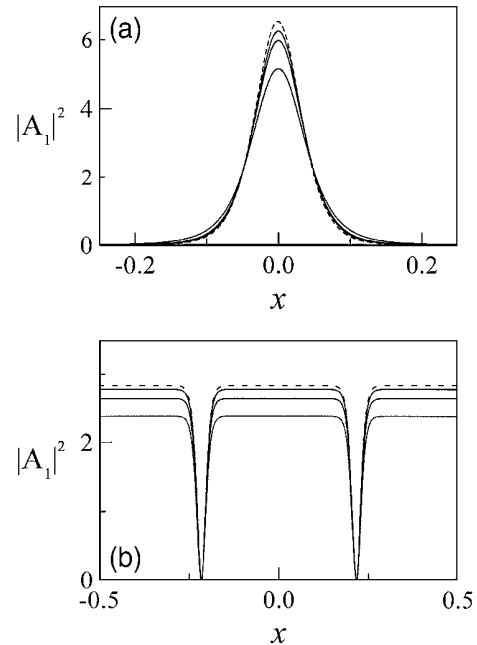


Fig. 1. Cavity solitons for liquids. (a) Bright soliton in the self-focusing case, (b) dark soliton in the self-defocusing case. Parameters are (a)  $\Delta = 2.5$ ,  $E = 1.5$ , and  $\gamma = 10, 25, 50$  from bottom to top; (b)  $\Delta = 0.5$ ,  $E = 2$ , and  $\gamma = 25, 50, 150$  from bottom to top. Dashed curves correspond to the solutions [Eqs. (3) and (4)] of the PGL.

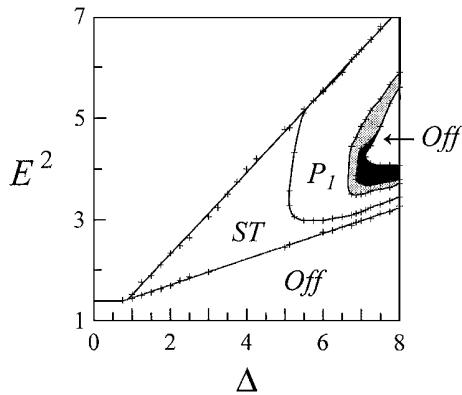


Fig. 2. Bifurcation diagram of the bright CS for  $\gamma = 10$  and  $\eta = +1$  in the case of liquids. See text.

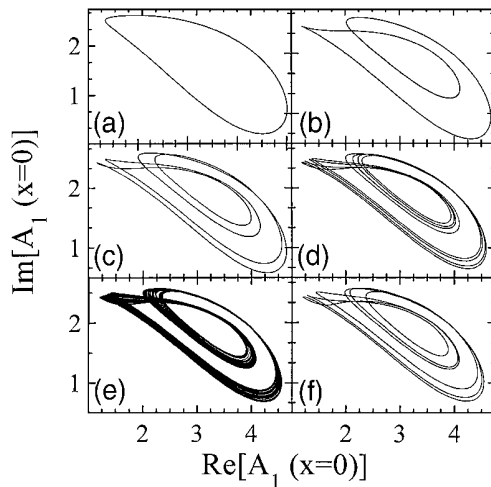


Fig. 3. Field portraits corresponding to the center of the bright CS, showing a period-doubling cascade for  $\Delta = 7.25$ . (a)  $P_1(E = 2.40)$ , (b)  $P_2(E = 2.20)$ , (c)  $P_4(E = 2.16)$ , (d)  $P_8(E = 2.144)$ , (e) chaos ( $E = 2.14$ ). (f) A  $P_6(E = 2.12)$  behavior that occurs in a periodic window inside the chaotic domain.

to the left of the Hopf bifurcation and shows weak spatiotemporal chaos to the right of it). Increasing  $\Delta$  from the  $P_1$  region initiates a period-doubling (gray area) route to chaos (black area) (Fig. 2) that finally

leads to the switching off of the CS. The qualitative agreement with the numerical analysis of the PGLE<sup>8</sup> confirms that the PGLE description of the system is qualitatively correct even for not-too-large values of  $\gamma$ . Let us finally comment that the period of oscillation in the  $P_1$  region is typically 1–10 times the cavity photon lifetime of the field,  $A_1$ , and, as can be deduced from Fig. 3(a), the maximum-to-minimum CS peak intensity ratio is typically 3–5 (the exact values depend on the parameter set).

Let us just mention that both bright and dark CS's are found in two-dimensional simulations. Nevertheless, we find that the bright CS is intrinsically self-pulsing, at least for the parameter region considered here.

In conclusion, we have shown that anisotropic vectorial Kerr cavities pumped by linearly polarized light can support bright (dark) CS in the self-focusing (self-defocusing) cases. The existence of the bright CS requires that the polarization instability that affects the trivial state be subcritical, which can occur only in anisotropic cavities.<sup>1</sup>

This study was supported by the Spanish government (Dirección General de Enseñanzas Superiores, grant PB98-0935-C03-02). We are grateful to Antón Pirulero (Universitat de València) for his many inspiring suggestions. V. J. Sánchez-Morcillo's e-mail address is victor.sanchez@uv.es.

## References

1. V. J. Sánchez-Morcillo, G. J. de Valcárcel, and E. Roldán, *Opt. Comun.* **173**, 381 (2000).
2. J. B. Geddes, J. V. Moloney, E. M. Wright, and W. J. Firth, *Opt. Commun.* **111**, 623 (1994).
3. L. A. Lugiato and R. Lefever, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 2209 (1987).
4. M. Hoyuelos, P. Colet, M. San Miguel, and D. Walgraef, *Phys. Rev. E* **58**, 2992 (1998).
5. J. W. Miles, *J. Fluid Mech.* **148**, 451 (1984).
6. S. Fauve and O. Thual, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 282 (1990).
7. R. Gallego, M. San Miguel, and R. Toral, *Phys. Rev. E* **61**, 2241 (2000).
8. M. Bondila, I. V. Barashenkov, and M. M. Bogdan, *Physica D* **87**, 314 (1995).
9. S. Longhi, G. Steinmeyer, and W. S. Wong, *J. Opt. Soc. Am. B* **14**, 2167 (1997).

# Bright cavity solitons in anisotropic vectorial Kerr cavities

I Pérez-Arjona, V J Sánchez-Morcillo, G J de Valcárcel and Eugenio Roldán

Departament d'Òptica, Universitat de València, Dr Moliner 50, 46100-Burjassot, Spain

Received 30 October 2000, in final form 6 February 2001

## Abstract

Instabilities in vectorial Kerr cavities can arise from two different bifurcations of scalar and vectorial character. We study the conditions that determine which of the instabilities is responsible for pattern formation. We find that a subcritical homogeneous polarization instability governs pattern formation when cavity anisotropy or injected field detuning is large. Under these conditions the system exhibits bright cavity solitons.

## Keywords:

Processing JOB/118567/SPE

Printed 13/3/2001

Issue no

Total pages

First page

Last page

File name OB .TEX

Date req

## 1. Introduction

Theoretical studies on pattern formation in cavity nonlinear optics concentrate on a limited number of archetypical systems. One of the aims of these studies is to gain general understanding of the conditions for producing patterns in the laboratory by progressively modelling phenomena that may have relevance under real experimental conditions. Special emphasis is placed on searching conditions for obtaining localized structures (usually termed cavity solitons) both because of their intrinsic interest as fascinating nonlinear entities and because of their potentiality for information storage and processing.

One of the systems that has attracted attention since the seminal work of Lugiato and Lefever [1] is the Kerr cavity, which is an optical resonator filled with a Kerr medium and driven by a coherent field. This system is interesting in itself but can also be regarded as an approximation to dispersive optical bistability (e.g. a passive system of two-level atoms driven by a highly detuned injected field). The Lugiato–Lefever model was later extended to include the possibility of a polarization instability in [2], where it was shown that for a polarization-insensitive cavity (a cavity with equal losses and equal cavity frequencies for both polarization components of the intracavity field) the polarization instability was relevant at the onset of pattern formation for a defocusing nonlinearity (in the case of a focusing nonlinearity the polarization instability was always preceded by the usual Kerr instability). This first work on pattern formation in vectorial Kerr cavities was extended in [3], where the case of elliptically polarized input was considered, and in [4], where two-dimensional dark-ring solitons were studied.

Our group extended these works by considering a dichroic anisotropic cavity (with different linear losses for the two polarization components). We showed that large enough cavity

anisotropy introduces two new important facts: (i) it means that the polarization instability may be subcritical [5] and (ii) it means that the polarization instability governs pattern formation also in the self-focusing case [6]. These two facts lead to the possibility of existence of bright cavity solitons (which in this case are polarization solitons), whose existence we demonstrated in [6]. In this paper we extend our previous work to cover the possibility of different cavity frequencies for the two intracavity polarization field components. As we show below this last situation also allows for the existence of bright cavity solitons.

## 2. Model

We consider an optical resonator filled with an isotropic  $\chi^{(3)}$  medium and driven by a spatially homogeneous linearly polarized coherent field of real amplitude  $E$  that propagates along the resonator axis ( $z$  axis). The resonator is anisotropic; i.e., the two intracavity field polarization components  $A_0$  and  $A_1$  (parallel and orthogonal to the input field, respectively) experience different losses ( $\gamma_0$  and  $\gamma_1$  respectively). We further assume that the detunings of the two polarization components can be controlled independently (for example by introducing an anisotropic plate inside the cavity). The adimensional model equations for such a system in the mean-field limit read [5, 6]

$$\partial_t A_0 = -(\gamma + i\eta\Delta_0)A_0 + i\eta(|A_0|^2 A_0 + \mathcal{A}|A_1|^2 A_0 + \frac{\beta}{2}A_1^2 A_0^*) + i\nabla^2 A_0 + \gamma E, \quad (1)$$

$$\partial_t A_1 = -(1 + i\eta\Delta_1)A_1 + i\eta(|A_1|^2 A_1 + \mathcal{A}|A_0|^2 A_1 + \frac{\beta}{2}A_0^2 A_1^*) + i\nabla^2 A_1. \quad (2)$$

In equations (1) and (2)  $\nabla^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2$  is the transverse Laplacian operator (the transverse spatial coordinates  $x, y$

are normalized to the diffraction coefficient) and time  $t$  is normalized to  $\gamma_1$ .  $\Delta_0$  and  $\Delta_1$  are the cavity detunings of the fields  $A_0$  and  $A_1$ ,  $\gamma = \gamma_0/\gamma_1$  is the cavity anisotropy parameter and  $\eta$  accounts for self-focusing ( $\eta = +1$ ) and self-defocusing ( $\eta = -1$ ) cases. Finally,  $\mathcal{A}$  and  $\mathcal{B}$  are the Maker and Terhune coefficients, which satisfy  $\mathcal{A} + \frac{\mathcal{B}}{2} = 1$  for isotropic media [7]. For details on the normalizations see [5].

This model has been previously studied in the context of pattern formation only in the case  $\Delta_1 = \Delta_0$ . As already quoted, in [2–4] the case  $\gamma = 1$  was considered, and in [5, 6] the case of arbitrary  $\gamma$  was studied.

### 3. Homogeneous solutions

Equations (1) and (2) have two homogeneous solutions. One is the linearly polarized ( $A_1 = 0$ ) state

$$\gamma^2 E^2 = [\gamma^2 + (\Delta_0 - I_0)^2] I_0, \quad (3)$$

$$\phi_0 = \arccos \frac{\sqrt{I_0}}{E} \quad (4)$$

and the other is the elliptically polarized state

$$\gamma^2 E^2 I_0 = (I_1 + \gamma I_0)^2 + [(\Delta_1 - I_1) I_1 - (\Delta_0 - I_0) I_0]^2, \quad (5)$$

$$I_1 = \Delta_1 - \mathcal{A} I_0 \pm \sqrt{\left(\frac{\mathcal{B}}{2} I_0\right)^2 - 1}, \quad (6)$$

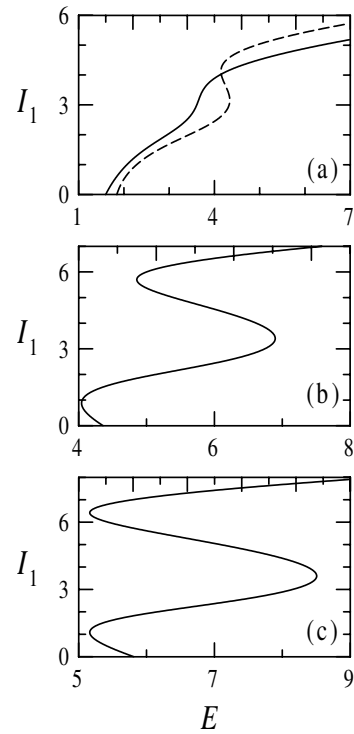
$$\phi_0 = \arccos \frac{\sqrt{I_0}}{E} \left(1 + \frac{I_1}{\gamma I_0}\right), \quad (7)$$

$$\phi_1 = -\phi_0 + \arccos \frac{\Delta_1 - \mathcal{A} I_0 - I_1}{\mathcal{B} I_0}, \quad (8)$$

where  $A_k \equiv \sqrt{I_k} \exp(i\phi_k)$ . The primary solution of the system (in the sense that it exists for any parameter set) is the linearly polarized one, equation (3), and patterns arise as a consequence of its destabilization.

The linearly polarized solution equation (3) is known to be a multivalued function of the input field  $E$  for  $\Delta_0 > \sqrt{3}\gamma$  [1, 2]. In its turn, the elliptically polarized solution equation (5) can be also a multivalued function. For the particular case  $\Delta_0 = \Delta_1$  the multistability of that solution was analysed in detail in [5]. It will be of later relevance to know under which conditions the polarization instability is subcritical and what implies the coexistence, close below the instability point, of the stable linearly polarized state ( $I_1 = 0$ ) and an elliptically polarized state ( $I_1 \neq 0$ ).

For our purposes, especially relevant are the results of [5] concerning the role played by  $\gamma$  in the character of the polarization instability. In particular it was shown that the polarization instability can become subcritical for  $\gamma > 2$  (the actual value depends on the detuning) whenever  $\Delta_0 (= \Delta_1) > \frac{1}{3}$ . Making use of this knowledge we showed later in [6] that bright cavity solitons can be excited in the system associated with this subcritical bifurcation for large cavity anisotropy. As we show next, the most outstanding effect of letting  $\Delta_0 \neq \Delta_1$  is that the polarization instability can become subcritical even for a cavity with equal losses for the two field polarization components ( $\gamma = 1$ ). An example is given in figure 1, where we take  $\gamma = 1$  and  $\Delta_1 = 2$ . For  $\Delta_0 = \Delta_1 = 2$  (full curve in figure 1(a)), the polarization instability



**Figure 1.** Intensity of the  $A_1$  field component corresponding to the homogeneous elliptically polarized solution as a function of the input field  $E$ . The parameters are  $\mathcal{A} = 1/4$ ,  $\mathcal{B} = 3/2$ ,  $\gamma = 1$ ,  $\Delta_1 = 2$  and several values of  $\Delta_0$ : (a)  $\Delta_0 = 2$  (full curve) and  $\Delta_0 = 3$  (dashed curve), (b)  $\Delta_0 = 5$ , and (c)  $\Delta_0 = 6$ .

is supercritical and the intensity of the cross-polarized field  $I_1$  is a single-valued function of the input field  $E$ . For  $\Delta_0 = 4$  (dashed curve in figure 1(a)), the bifurcation remains supercritical but  $I_1$  becomes multivalued. Further increasing  $\Delta_0$  leads to a change in the character of the bifurcation. For  $\Delta_0 = 5$  (figure 1(b)), the bifurcation is already subcritical and an additional domain of multivaluedness associated with this bifurcation appears. Further increasing  $\Delta_0$  makes both the multivalued domains increase and, especially, that the upper ‘S’ shifts to the left, even leading to the coexistence of five solutions, as shown in figure 1(c) for  $\Delta_0 = 6$ .

It can be easily shown from equations (5) and (6) that the polarization instability is subcritical when

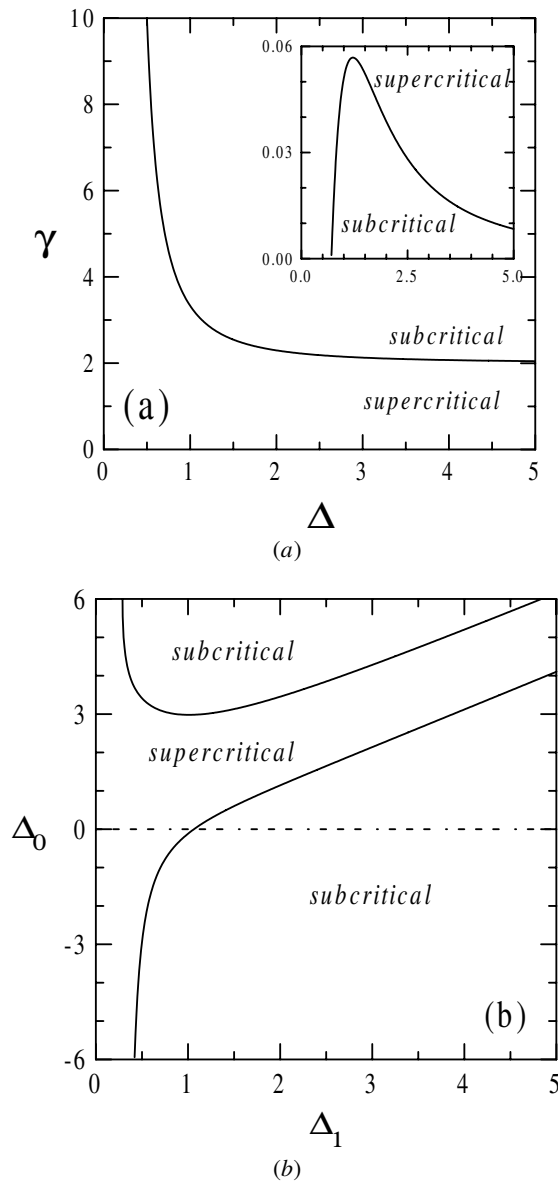
$$0 > \frac{\alpha C_1 + \mathcal{B} C_2 - 16(\Delta_0 - \Delta_1)}{\alpha(\mathcal{B} - 1)}, \quad (9)$$

$$\alpha = \sqrt{4(\mathcal{B} - 1) + (\mathcal{B} \Delta_1)^2}, \quad (10)$$

$$C_1 = 2[(\Delta_0 - \Delta_1)^2 + \gamma^2 - 2\gamma - 3] + \mathcal{B}(\Delta_1^2 + 4\Delta_0\Delta_1 - 5\Delta_0^2 - 5\gamma^2 + 12\gamma + 9) + \mathcal{B}^2(\Delta_1^2 + 4\Delta_0^2 + 4\gamma^2 - 12\gamma - 3) - \mathcal{B}^3(\Delta_1^2 + \Delta_0^2 + \gamma^2 - 4\gamma), \quad (11)$$

$$C_2 = 8(5\Delta_0 - 3\Delta_1) - \mathcal{B}[7\Delta_1^3 + \Delta_0^2\Delta_1 - 8\Delta_1^2\Delta_0 + 32\Delta_0 - (9 - \gamma^2)\Delta_1] + \mathcal{B}^2[5\Delta_1^3 - 12\Delta_0\Delta_1^2 + 2\Delta_1\Delta_0^2 + 8\Delta_0 + (2\gamma^2 - 1)\Delta_1] - \mathcal{B}^3\Delta_1(\Delta_1^2 - 4\Delta_0\Delta_1 + \Delta_0^2 + \gamma^2). \quad (12)$$

In figure 2 the boundary predicted by equation (9) is represented for the particular case of liquids ( $\mathcal{A} = 1/4$ ,  $\mathcal{B} = 3/2$ ). In figure 2(a) we take  $\Delta_1 = \Delta_0 \equiv \Delta$  and the boundary



**Figure 2.** Domains in which the homogeneous polarization instability is subcritical or supercritical. In (a)  $\Delta_0 = \Delta_1 \equiv \Delta$  and in (b)  $\gamma = 1$ .

is represented on the plane  $\langle \Delta, \gamma \rangle$ . There are two domains where the polarization instability is subcritical: one for  $\gamma > 2$  and  $\Delta > \frac{1}{3}$ , and another one for  $\gamma < 0.06$  and  $\Delta > 0.7$  *ca* [5]. In figure 2(b) we take  $\gamma = 1$  and represent the boundary in the plane  $\langle \Delta_0, \Delta_1 \rangle$ . In this case the polarization instability is subcritical also in two domains (for  $\Delta_1 < 0$  the instability is always supercritical).

#### 4. Stability analysis

As stated, the primary solution of the system is the linearly polarized solution equation (3). Its stability analysis versus perturbations of the form  $\delta A_i(\vec{r}, t) = \delta A_i \exp(\lambda t + i\vec{k} \cdot \vec{r})$ , with  $\vec{r} = (x, y)$ , leads to a characteristic equation consisting of the product of two second-order polynomials. The corresponding eigenvalues read

$$\lambda_0 = -\gamma \pm \sqrt{I_0^2 - (\Delta_0 + \eta k^2 - 2I_0)^2}, \quad (13)$$

$$\lambda_1 = -1 \pm \sqrt{\left(\frac{\mathcal{B}}{2} I_0\right)^2 - (\Delta_1 + \eta k^2 - \mathcal{A} I_0)^2}, \quad (14)$$

where  $k^2 = \vec{k} \cdot \vec{k}$ . The eigenvalue  $\lambda_0$  (13) is associated with perturbations  $(\delta A_0, \delta A_0^*)$  and thus it does not lead to the switching on of the field  $A_1$ . It describes both the optical bistability and the pattern forming instability of the Lugiato–Lefever model [1]. The instabilities associated with  $\lambda_0$  will be called Kerr instabilities. In contrast the eigenvalue  $\lambda_1$  (14) is associated with perturbations  $(\delta A_1, \delta A_1^*)$  and thus describes the switching on of the field  $A_1$ , which entails a change in the polarization state of the system. Accordingly the instability associated with this eigenvalue is usually termed the polarization instability. In order to make a clear exposition of the bifurcations, we find it convenient to study separately the self-focusing and self-defocusing cases.

##### 4.1. Self-focusing case ( $\eta = +1$ )

Consider first  $\lambda_0$ . The eigenvalue with the plus sign can become positive. By derivating (13) with respect to  $k$  one obtains that the most unstable mode, of transverse wavenumber  $k = k_K$ , is

$$k_K^2 = (2I_0 - \Delta_0) \quad \text{for } \Delta_0 < 2I_0, \quad (15)$$

$$k_K^2 = 0 \quad \text{for } \Delta_0 > 2I_0, \quad (16)$$

and thus the bifurcation associated with  $\lambda_0$  is pattern forming (the most unstable mode has a finite wavenumber) for  $\Delta_0 < 2I_0$ , whereas it leads to optical bistability (the most unstable mode is the one with  $k = 0$ ) for  $\Delta_0 > 2I_0$ . The corresponding instability thresholds are

$$I_{0,K} = \gamma \quad \text{for } \Delta_0 < 2\gamma, \quad (17)$$

$$I_{0,K} = \frac{1}{3} \left( 2\Delta_0 - \sqrt{\Delta_0^2 - 3\gamma^2} \right) \quad \text{for } \Delta_0 > 2\gamma. \quad (18)$$

Consider now  $\lambda_1$ , equation (14). In this case the most unstable mode, of wavenumber  $k = k_P$ , is

$$k_P^2 = (\mathcal{A} I_0 - \Delta_1) \quad \text{for } \Delta_1 < \mathcal{A} I_0, \quad (19)$$

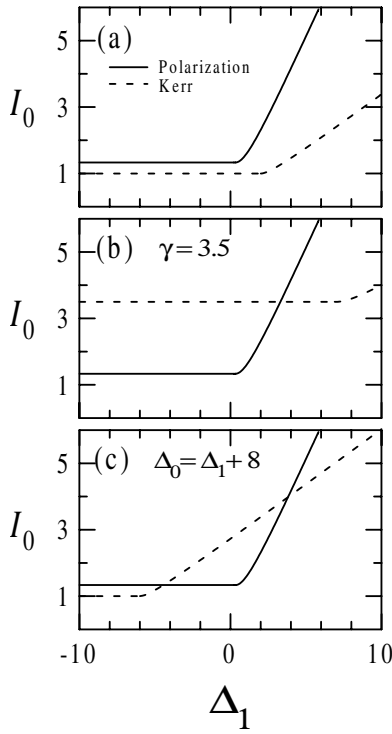
$$k_P^2 = 0 \quad \text{for } \Delta_1 > \mathcal{A} I_0 \quad (20)$$

and thus the bifurcation associated with  $\lambda_1$  is pattern forming for  $\Delta_1 < \mathcal{A} I_0$ , whereas it leads to the homogeneous elliptically polarized solution for  $\Delta_1 > \mathcal{A} I_0$  (we term this last bifurcation the homogeneous polarization instability). The instability thresholds are

$$I_{0,P} = \frac{2}{\mathcal{B}} \quad \text{for } \Delta_1 < \frac{2\mathcal{A}}{\mathcal{B}}, \quad (21)$$

$$I_{0,P} = \frac{(\mathcal{B} - 2)\Delta_1 + \sqrt{\mathcal{B}^2 \Delta_1^2 + 4(\mathcal{B} - 1)}}{2(\mathcal{B} - 1)} \quad \text{for } \Delta_1 > \frac{2\mathcal{A}}{\mathcal{B}}. \quad (22)$$

In order to illustrate which instability dominates the destabilization of the homogeneous linearly polarized solution, let us concentrate again on the particular case of liquids ( $\mathcal{A} = 1/4$ ,  $\mathcal{B} = 3/2$ ). In figure 3 the relevant instability curves are plotted in the plane  $I_0$  versus detuning  $\Delta_1$ . The horizontal



**Figure 3.** Stability analysis boundaries for  $\eta = +1$  corresponding to liquids ( $\mathcal{A} = 1/4$  and  $\mathcal{B} = 3/2$ ). The full (dashed) curve corresponds to the polarization (Kerr) instability. In the horizontal (tilted) domains the most unstable mode has a non-null (null) wavenumber. The rest of the parameters are (a)  $\gamma = 1$  and  $\Delta_0 = \Delta_1$ , (b)  $\gamma = 3.5$  and  $\Delta_0 = \Delta_1$  and (c)  $\gamma = 1$  and  $\Delta_0 = \Delta_1 + 8$ .

(tilted) portions of the curves correspond to the case in which the most unstable mode has a non-null (null) wavenumber. In figure 3(a) the case  $\gamma = 1$  and  $\Delta_0 = \Delta_1$  is represented. Notice that the Kerr instability always dominates the destabilization of the linearly polarized homogeneous solution, since its threshold is lower than that of the polarization instability.

In figure 3(b) we keep  $\Delta_0 = \Delta_1$  but take  $\gamma = 3.5$ . The effect of increasing  $\gamma$  is to shift upwards and rightwards the Kerr instability lines. As a result the polarization instability dominates for  $\Delta_1$  below a given value (easily obtainable from the condition  $k_P = k_K$ ). The domain in  $\Delta_1$  for which the primary instability is the polarization one with  $k_P = 0$  (from  $\Delta_1 = 1/3$  to 3.3 in the figure) is particularly relevant since, as  $\gamma$  is large, the polarization instability is subcritical in a part of this domain (see figure 2(a)). The domain in detunings where this occurs increases as  $\gamma$  is increased.

Finally we consider the case of different detunings while keeping  $\gamma = 1$ . In figure 3(c) we have taken  $\Delta_0 = (\Delta_1 + 8)^1$  and we see that the effect with respect to figure 3(a) is to shift leftwards the Kerr instability lines. Similarly to the case of large  $\gamma$ , the result is that there is a domain where the homogeneous polarization instability is responsible for the destabilization (this does not occur for  $\Delta_0$  smaller than  $\Delta_1$  or for  $\Delta_0$  negative since in this case the Kerr instability lines move rightwards). Again, since  $\Delta_0$  is large there is a domain in  $\Delta_1$

<sup>1</sup> The relation  $\Delta_0 = \delta + \Delta_1$  ( $\delta$  constant) exactly describes the case in which an anisotropic plate, with principal axes aligned along the  $x$  and  $y$  directions (parallel to  $A_0$  and to  $A_1$ , respectively) is inserted into the cavity. Here  $\delta$  is proportional to the dephasing between the two fields, associated with their crossing through the plate.

for which the polarization instability with  $k = 0$  is subcritical (compare with figure 2(b)).

As a conclusion we see that in the self-focusing case the polarization instability can precede the Kerr instability both for large  $\gamma$  and for large  $\Delta_0$ . Importantly, in both these two limits, within the domain of  $\Delta_1$  values for which the polarization instability is to the homogeneous mode, the bifurcation turns out to be subcritical if  $\gamma$  or  $\Delta_0$  is large enough. We will come back to this important point since these facts suggest the existence of bright cavity solitons.

#### 4.2. Self-defocusing case ( $\eta = -1$ )

Following the same lines as in the previous subsection one finds that the most unstable modes for the Kerr instability are

$$k_K^2 = (\Delta_0 - 2I_0) \quad \text{for } \Delta_0 > 2I_0, \quad (23)$$

$$k_K^2 = 0 \quad \text{for } \Delta_0 < 2I_0, \quad (24)$$

corresponding to a pattern forming instability for  $\Delta_0 > 2I_0$ . The corresponding instability thresholds are

$$I_{0,K} = \gamma \quad \text{for } \Delta_0 > 2\gamma, \quad (25)$$

$$I_{0,K} = \frac{1}{3} \left( 2\Delta_0 \pm \sqrt{\Delta_0^2 - 3\gamma^2} \right) \quad \text{for } \Delta_0 < 2\gamma. \quad (26)$$

In the case of the polarization instability the most unstable mode is

$$k_P^2 = (\Delta_1 - \mathcal{A}I_0), \quad \text{for } \Delta_1 > \mathcal{A}I_0, \quad (27)$$

$$k_P^2 = 0 \quad \text{for } \Delta_1 < \mathcal{A}I_0 \quad (28)$$

and it is a pattern forming instability for  $\Delta_1 > \mathcal{A}I_0$ . The instability thresholds are

$$I_{0,P} = \frac{2}{\mathcal{B}} \quad \text{for } \Delta_1 > \frac{2\mathcal{A}}{\mathcal{B}}, \quad (29)$$

$$I_{0,P} = \frac{(\mathcal{B} - 2)\Delta_1 + \sqrt{\mathcal{B}^2\Delta_1^2 + 4(\mathcal{B} - 1)}}{2(\mathcal{B} - 1)} \quad (30)$$

for  $\Delta_1 < \frac{2\mathcal{A}}{\mathcal{B}}$ .

In figure 4 an analysis similar to that given in figure 3 is presented. Figure 4(a) (in which  $\Delta_0 = \Delta_1$ , and  $\gamma = 1$ ) shows that the polarization instability is the relevant one for  $\Delta_0 = \Delta_1 < \sqrt{3}$  whilst the Kerr instability is for  $\Delta_0 = \Delta_1 > \sqrt{3}$ . The increase of  $\gamma$  makes the Kerr instability play no role, as can be seen in figure 4(b) for  $\gamma = 3.5$ . Notice that now, in contrast to the self-focusing case, the homogeneous polarization instability is not subcritical (see figure 2(a)). Finally, the increase of  $\Delta_0$  in this self-defocusing case plays the role opposite to the one it plays in the self-focusing case; i.e., the Kerr instability is shifted leftwards and the polarization instability is preceded by the Kerr one.

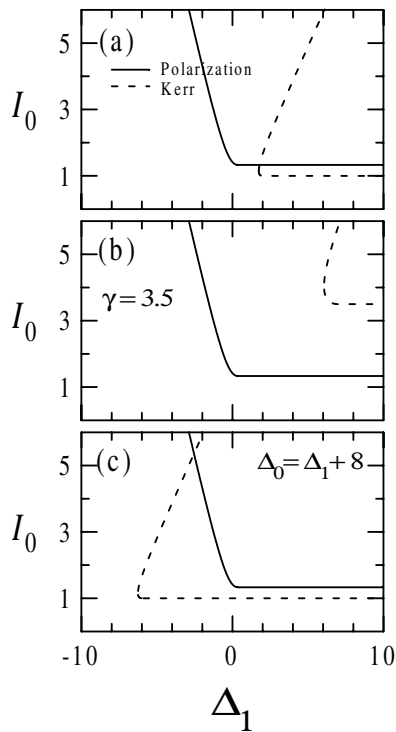


Figure 4. As figure 3 but for  $\eta = -1$ .

## 5. Bright cavity solitons

The existence of a bright cavity soliton can be intuitively understood as a consequence of the coexistence, in space, of a stable homogeneous solution and a stable pattern (e.g. a roll pattern for one transverse dimension or a hexagonal pattern for two transverse dimensions). As a result of this bistability, different regions of space can choose different solutions. If the system remains in the homogeneous solution in a large region of the transverse space except in a small region where it chooses a cell of the patterned solution, a localized intensity peak will be observed surrounded by a homogeneous background. In our case this possibility exists in the region where the elliptically polarized solution and the linearly polarized solution coexist (as occurs, e.g., when the polarization instability is subcritical) whenever the elliptically polarized solution is modulationally unstable. It is important to notice however that the absence of coexistence between two homogeneous solutions does not rule out the coexistence between a homogeneous solution and a pattern, since the latter can also be born subcritically *from a pattern forming instability* [8]. Nevertheless the coexistence of homogeneous solutions is, *a priori*, a good situation for the existence of bright solitons: the necessary condition is that one of the solutions is unstable versus finite-wavenumber perturbations.

Here we do not attempt to assess the stability of the elliptically polarized solution in the subcritical domain, thus characterizing all situations in which bright cavity solitons are expected. The main aim of this section is to give evidence that the previous reasonings are confirmed by numerical simulations of the model (1), (2). In any case we have numerically checked the stability of the elliptically polarized solution for the parameter values used below and have found that it is unstable for any value of  $E$ .

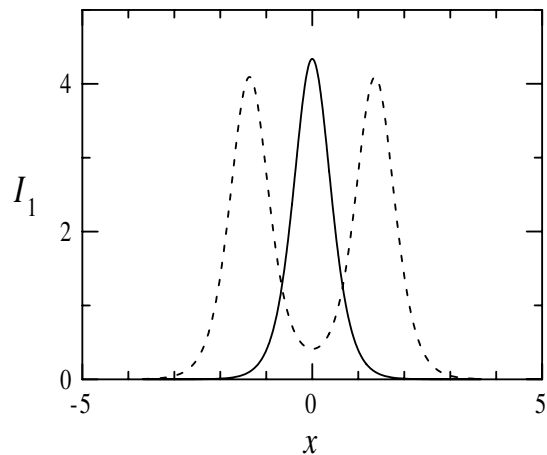


Figure 5. Intensity of the  $A_1$  field component corresponding to a single (full curve) and a double peak (dashed curve) soliton. The parameters are  $A = 1/4$ ,  $B = 3/2$ ,  $\eta = +1$ ,  $\gamma = 1$ ,  $\Delta_0 = 10$ ,  $\Delta_1 = 2$  and  $E = 11$ .

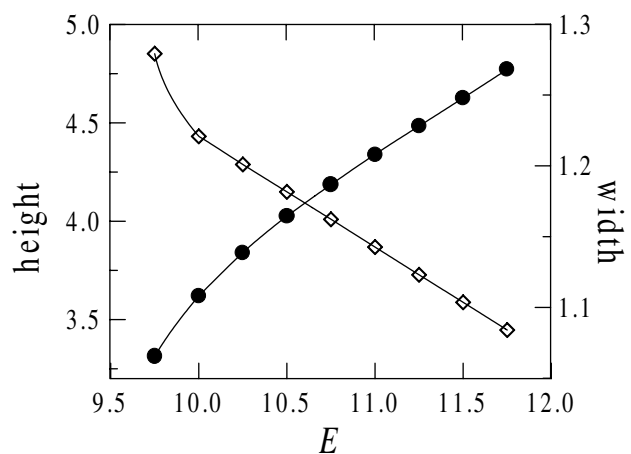


Figure 6. Dependence of the height (dots) and width (diamonds) of the bright soliton for the same parameters as in figure 5.

From the previous sections we have learned that suitable conditions for the existence of bright cavity solitons (these conditions are (i) that the homogeneous polarization instability rules the destabilization of the linearly polarized solution and (ii) that this bifurcation is subcritical) are met only in the self-focusing case and for large cavity anisotropy,  $\gamma$ , or for large injected field detuning,  $\Delta_0$ .

The case of large  $\gamma$  has already been treated in detail in [6], both analytically in the limit  $\gamma \rightarrow \infty$ , where a parametrically driven, damped nonlinear Schrödinger equation was shown to describe the bright cavity soliton dynamics of the system, and numerically for  $\gamma = 10$ . Here we consider the bright cavity solitons appearing for large  $\Delta_0$ . We have numerically integrated our model equations in one transverse dimension looking for localized structures in the case  $\Delta_0 = 10$ ,  $\Delta_1 = 2$  and  $\gamma = 1$ . The numerical integration has been performed with a split-step algorithm with 2048 spatial points. The length of the integration window is 20. Figure 5 shows the intensity  $I_1$  of a soliton found for  $E = 11$  (below the subcritical polarization instability, which occurs at  $E = E_P = 11.793$  in this case). Also shown (dashed curve) is a seemingly stable bound state of two solitons. Figure 6 shows the peak intensity (dots) and width (diamonds) of the soliton as a function of



$E$ . We note that the domain of existence of the soliton is bounded from above by  $E_p$  (for  $E > E_p$  the linearly polarized solution loses stability and the soliton zero background grows and destabilizes) and from below, very approximately, by the value where the homogeneous elliptically polarized solution disappears through a turning point (similar to that shown in figure 1(b)). We also note that the peak intensity is very approximately twice the value of the corresponding (unstable) homogeneous intensity, which is typical of bright solitons associated with subcritical bifurcations, such as those found in the parametrically driven, damped nonlinear Schrödinger equation [6]. Thus we observe bright cavity solitons in a region that very approximately coincides with the domain where there is coexistence between the linearly polarized solution ( $I_1 = 0$ ) and the (modulationally unstable) elliptically polarized solution.

## 6. Conclusions

In this paper we have analysed the two possible instabilities (Kerr instability and polarization instability) of the linearly polarized state of a vectorial Kerr cavity, pumped by a linearly polarized coherent field. The general case of different losses and detunings for the two linearly polarized intracavity fields, parallel and orthogonal to the input field polarization, has been considered. In particular, this analysis has led to the identification of parameter domains where the polarization instability leading to the spatially homogeneous elliptically

polarized solution is subcritical. From the point of view of the formation of bright cavity solitons these domains are potentially interesting, and we have given evidence that such localized structures exist in the case of equal losses ( $\gamma = 1$ ) and large pump detuning  $\Delta_0$ .

## Acknowledgments

We thank F Silva for his support in computational simulations and M San Miguel and P Colet for interesting discussions. Financial support from the Spanish DGES (project no PB98-0635-C03-02) and from the European Science Foundation network PHASE are gratefully acknowledged.

## References

- [1] Lugiato L A and Lefever R 1987 *Phys. Rev. Lett.* **58** 2209
- [2] Geddes J B, Moloney J V, Wright E M and Firth W J 1994 *Opt. Commun.* **111** 623
- [3] Hoyuelos M, Colet P, San Miguel M and Walgraef D 1998 *Phys. Rev. E* **58** 2992
- [4] Gallego R, San Miguel M and Toral R 2000 *Phys. Rev. E* **61** 2241
- [5] Sánchez-Morcillo V J, de Valcárcel G J and Roldán E 2000 *Opt. Commun.* **173** 381
- [6] Sánchez-Morcillo V J, Pérez-Arjona I, Silva F, de Valcárcel G J and Roldán E 2000 *Opt. Lett.* **25** 957
- [7] Boyd R W 1992 *Nonlinear Optics* (New York: Academic)
- [8] Tlidi M, Mandel P and Lefever R 1994 *Phys. Rev. Lett.* **73** 640  
Firth W J and Scroggie A J 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 1623

## Domain Walls and Ising-Bloch Transitions in Parametrically Driven Systems

Germán J. de Valcárcel,\* Isabel Pérez-Arjona, and Eugenio Roldán

*Departament d'Òptica, Universitat de València, Dr. Moliner 50, 46100-Burjassot, Spain*

(Received 27 October 2000; revised manuscript received 27 June 2002; published 30 September 2002)

Parametrically driven systems sustaining sech solitons are shown to support a new kind of localized state. These structures are walls connecting two regions oscillating in antiphase that form in the parameter domain where the sech soliton is unstable. Depending on the parameter set the oppositely phased domains can be either spatially uniform or patterned. Both chiral (Bloch) and nonchiral (Ising) walls are found, which bifurcate one into the other via an Ising-Bloch transition. While Ising walls are at rest Bloch walls move and may display secondary bifurcations leading to chaotic wall motion.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.89.164101

PACS numbers: 05.45.Xt, 42.65.Tg, 47.35.+i, 75.60.Ch

The periodic forcing of dissipative, dispersive nonlinear systems may lead to the excitation of sustained waves oscillating at half the driving frequency, a phenomenon known as parametric resonance. One of its paradigms is the excitation of surface waves in liquids vertically vibrated on horizontal plates. Apart from supplying energy to the system, the periodic forcing breaks the continuous time translation invariance of the undriven system down to the discrete one  $t \rightarrow t + 2\pi/\omega_f$ , where  $\omega_f$  denotes the angular frequency of driving. Alternatively, in the absence of driving, the (damped) oscillations can have an arbitrary phase, whereas forced waves *see* an external clock and their phase tends to lock to it: the phase invariance of the undriven oscillations is broken. In particular, when the frequency of oscillations is half that of driving, as in parametric resonance, symmetry considerations [1] allow one to conclude that there exist two dynamically equivalent preferred phases differing by  $\pi$ . In spatially extended systems this equivalence allows the antiphase oscillation of two neighboring regions (domains), which appear separated by a so-called wall. Two types of walls, namely, Ising and Bloch walls, exist which differ in the way the phase of oscillations changes across them: In an Ising wall the phase displays a discontinuous  $\pi$  jump at a nonoscillating node, whereas in a Bloch wall the phase angle rotates continuously through  $\pi$ . Hence Bloch walls are chiral (have the symmetry of a corkscrew) while Ising walls are not, and this has important effects on the walls dynamics [1,2]. Ising and Bloch walls may bifurcate one into the other via a nonequilibrium Ising-Bloch transition [2,3], similar to the (equilibrium) Ising-Bloch transition of ferromagnets.

Ising walls in the form of hyperbolic tangents (also called kinks or dark solitons) have been observed in the parametrically driven surface waves of liquids in *shallow* channels [4] and in the parametric excitation of the *upper* cutoff mode of a chain of coupled pendula [5]. A key feature of both systems is that the sign of dispersion and nonlinear frequency shift are opposite. On the contrary, when they have the same sign, the localized structures supported by parametrically driven systems are of a

different nature. Now solitons have the form of hyperbolic secants (also called solitary waves or bright solitons) and have been observed in the parametrically driven surface waves of liquids in *deep* channels [6] and in the parametric excitation of the *lower* cutoff mode of a chain of coupled pendula [7]. Both tanh and sech solitons are well understood in the frame of nonlinear Schrödinger models generalized by terms accounting for dissipation and parametric drive [4,5,7,8]. In this Letter we show that parametrically driven systems supporting sech solitons may display domain walls as well. These new structures are predicted to exist within the parameter region where the soliton is unstable against spatially extended modes.

We consider a basic equation widely used for modeling the parametric forcing of cutoff modes in one dimensional systems,

$$\partial_t u = \gamma u^* - (1 + i\theta)u + (i + \delta)\partial_x^2 u + (i - \sigma)|u|^2 u, \quad (1)$$

where  $u$  is the slowly varying complex envelope of oscillations and  $u^*$  is its complex conjugate. A typical scalar variable  $h$ , e.g., the fluid surface displacement from planarity, can be expressed in terms of  $u$  as  $h(x, t) = \text{Re}[u(x, t) \exp(-i\omega_f t/2)]$ . Equation (1) is adimensional and contains four real parameters: (i) the driving strength  $\gamma$ , proportional to the amplitude of forcing; (ii) the detuning  $\theta$ , proportional to the difference between  $\omega_f/2$  and the frequency of the cutoff mode; (iii) the wave-number-dependent damping coefficient  $\delta$ ; and (iv) the nonlinear damping coefficient  $\sigma$ . Parameters  $\delta$  and  $\sigma$  are non-negative, and  $\gamma$  is taken as non-negative without loss of generality. Note that the term  $\gamma u^*$  breaks the continuous phase symmetry  $u \rightarrow e^{i\phi} u$  of the undriven ( $\gamma = 0$ ) system down to the discrete one  $u \rightarrow -u$ , so that each state has a single equivalent one, of opposite phase, as commented.

For  $\delta = \sigma = 0$ , Eq. (1) is a parametrically driven, damped nonlinear Schrödinger (PDNLS) equation. It is used to model parametrically excited surface waves in long channels [8], parametrically driven chains of

coupled pendula [7,9], parametric waves in plasma [10], phase-sensitive amplification in optical systems [11], and magnetization waves in parametrically pumped easy-plane ferromagnets [12]. It also governs the dynamics [12] of parametrically driven, damped sine-Gordon systems [13].

The terms proportional to  $\delta$  and  $\sigma$  in Eq. (1) are considered here as a perturbation of the PDNLS equation. They represent actual dissipation mechanisms [14,15], although they are usually neglected in the studies of parametric resonance. We keep these terms since they have important effects on the solutions here analyzed [16].

Before reporting on the new states, let us briefly comment on the known solutions to the PDNLS equation ( $\delta = \sigma = 0$ ). (i) For  $\theta < 0$  the trivial state  $u = 0$  becomes unstable at  $\gamma = 1$  giving rise supercritically to roll solutions [17]. (ii) For  $\theta > 0$  the trivial state undergoes a subcritical bifurcation at  $\gamma = \gamma_\theta \equiv \sqrt{1 + \theta^2}$ , leading to a sech soliton for  $1 < \gamma < \gamma_\theta$  [8,9,12]. For  $\gamma > \gamma_\theta$  the soliton is destabilized since the trivial state (to which the solitons asymptotically tends) is unstable and spatially extended modes are amplified. In this region ( $\gamma > \gamma_\theta$  and  $\theta > 0$ ), stable roll solutions  $u_{\text{roll}}(x) \approx \pm e^{i\varphi_0}(\rho_0 + \rho_1 \cos k_c x)$ , with  $\cos 2\varphi_0 = \gamma^{-1}$ ,  $\rho_0^2 = 3\theta/5 + \sqrt{\gamma^2 - 1}$ ,  $\rho_1^2 = 4\theta/15$ , and  $k_c^2 = \theta + 2\sqrt{\gamma^2 - 1}$ , exist [18]. Note that  $u_{\text{roll}}(x)$  is not symmetric with respect to  $u = 0$  because of the bias term  $\rho_0$ . We argue that, given the broken phase invariance of Eq. (1), stable walls joining the two ( $\pm$ ) roll states should exist for  $\gamma > \gamma_\theta$  and  $\theta > 0$ . Clearly, different to the usual (tanh) domain walls, these new solutions should connect two patterned states.

In order to determine the nature of the sought walls we introduce a chirality parameter  $\chi = \text{Im}[u^*(x_0)\partial_x u(x_0)]$ , where  $x_0$  is the position of the wall core (where  $|u|$  is closest to zero). For Ising (Bloch) walls  $\chi = 0$  ( $\chi \neq 0$ ). Since Eq. (1) is invariant under spatial translations ( $x \rightarrow x + x'$ ) and spatial reflections ( $x \rightarrow -x$ ), if a Bloch wall  $u_1 = u_B(x - x_0, t)$  exists with chirality  $\chi_1$  another Bloch wall  $u_2 = u_B(x_0 - x, t)$  also exists and has chirality  $\chi_2 = -\chi_1$ . This is important since a generic property of domain walls (at least of the tanh type) in nongradient systems—such as Eq. (1)—is that they move with a velocity proportional to their chirality [2], so that Bloch walls with opposite chiralities should move in opposite directions, and Ising walls ( $\chi = 0$ ) should be at rest.

We show next the results of our numerical study of Eq. (1) [19]. Since periodic boundary conditions were used, not one but two domain walls had to be excited. Nevertheless, the chosen integrating window length  $L$  allowed both walls to be separated enough so that there was no interaction between the two walls [20].

*Bloch walls in the PDNLS equation.*—For  $\delta = \sigma = 0$  only Bloch walls are found, of which Fig. 1 (upper row) is an example. The domain wall nature of this structure is evident in Fig. 1(a) where  $\text{Re}(u)$  is shown to consist of two

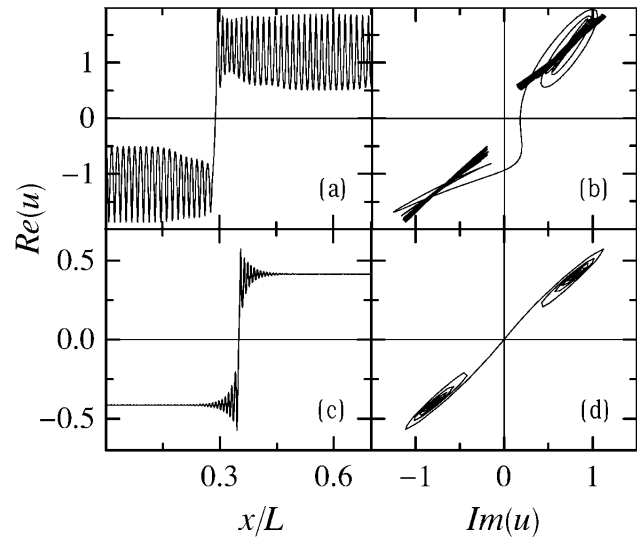


FIG. 1. Upper (lower) row corresponds to a Bloch (Ising) wall. Parameters are  $\gamma = 2.0$ ,  $\theta = 0.8$ ,  $\sigma = \delta = 0$  for the Bloch wall, and  $\gamma = 1.25$ ,  $\theta = 0.1$ ,  $\delta = 0$ ,  $\sigma = 0.01$  for the Ising wall.

rolls with opposite signs (phases) joined by a wall. The fact that these are Bloch walls is evident in Fig. 1(b) where  $u$  is seen to be different from zero everywhere, so that its phase varies smoothly from one roll to the other. As expected these Bloch walls move although their motion is not "clean": walls are usually wandering around a fixed location in an irregular way. These walls exist within region  $B$  of Fig. 2(a). Region  $B$  is bounded from below by the line  $\gamma = \gamma_\theta$  (below this line walls destabilize leading to chains of bright solitons in a way similar to [18]) and from above. As the upper boundary is approached from region  $B$  the spatial modulations next to the wall, see Fig. 1(a), increase and approach the complex zero. At the boundary these deep modulations become so close to the complex zero that new defects are nucleated. The above mechanism affects in turn each of the new defects and propagates across the entire pattern, eventually leading to a weakly turbulent, unbiased roll pattern.

*Ising and Bloch walls in the perturbed PDNLS equation.*—The effects of a nonzero  $\delta$  or a non-null  $\sigma$  in Eq. (1) are similar and fourfold: (i) the region of existence of domain walls is enlarged; (ii) the spatially uniform solutions (always unstable in the PDNLS equation [18]) stabilize within some parameter region and usual domain walls connecting spatially homogeneous states are excited, besides the spatially modulated domain walls; (iii) besides the Bloch walls reported above, Ising walls also exist and bifurcate into Bloch walls via an Ising-Bloch transition; and (iv) Bloch walls display secondary instabilities affecting their motion, eventually leading to chaotic behavior.

Figure 2 summarizes points (i)–(iii) above by showing the domains of existence of Ising and Bloch walls on the

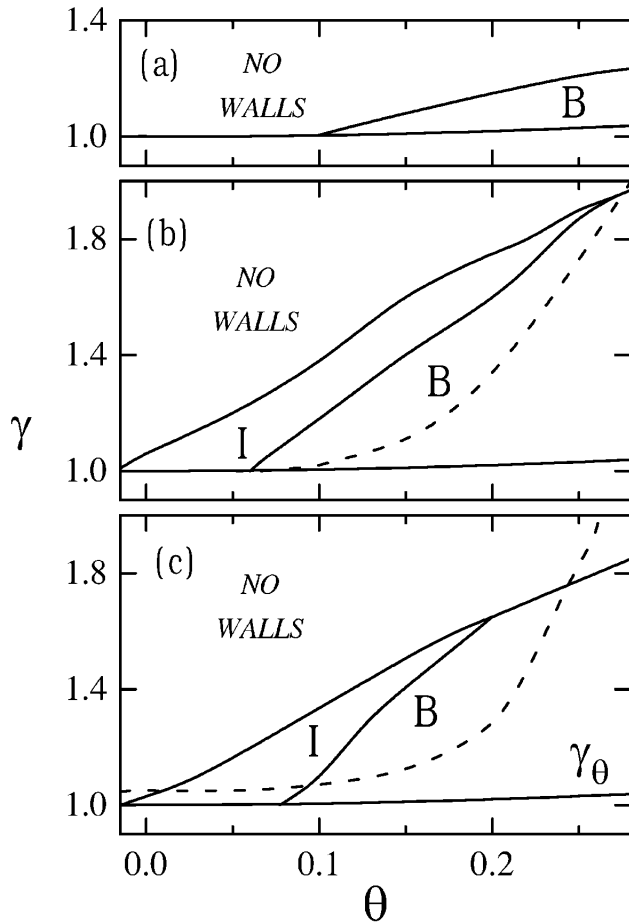


FIG. 2. Numerically determined existence regions of Ising (I) and Bloch (B) walls. (a) corresponds to the PDNLS equation ( $\sigma = \delta = 0$ ). (b)  $\delta = 0.01$ ,  $\sigma = 0$ . (c)  $\delta = 0$ ,  $\sigma = 0.01$ . The nontrivial homogeneous state is stable above the dashed line and the trivial state  $u = 0$  is unstable above line  $\gamma_\theta$ , only indicated in (c).

plane  $\gamma - \theta$  for  $\{\delta = 0.01, \sigma = 0\}$ , Fig. 2(b), and  $\{\delta = 0, \sigma = 0.01\}$ , Fig. 2(c). The line that separates regions *I* from *B* corresponds to the Ising-Bloch transition. Outside regions *I* and *B* walls destabilize through the same mechanisms described above for the PDNLS equation. Also depicted (dashed line) is the stability boundary of the spatially homogeneous states as predicted by their linear stability analysis: to the left of the dashed line the homogeneous steady states are stable and can form domain walls, which can be of either Ising or Bloch type. To the right of the dashed line the homogeneous states destabilize towards roll solutions similar to  $u_{\text{roll}}$  and domain walls (of Ising or Bloch character) similar to those found in the PDNLS equation form. An example of an Ising wall connecting two spatially homogeneous states is shown in the bottom row in Fig. 1. We have checked that by increasing the values of  $\sigma$  and  $\delta$  (keeping them small) the region where domain walls exist is enlarged, as well as the region where Ising walls are found.

In Fig. 3 we show a typical bifurcation diagram obtained for  $\{\gamma = 1.3, \delta = 0, \sigma = 0.01\}$ . By increasing  $\theta$  from the Ising region the Ising-Bloch transition occurs at  $\theta = 0.134$  where the Ising wall (at rest) bifurcates into two Bloch walls of opposite chirality that move with opposite velocities. Which one of the two Bloch walls is excited is selected by numerical noise. One can also force the direction of motion by giving a small chirality  $\chi_0$  to the wall as an initial condition, the sign of  $\chi_0$  controlling the direction of the drift. At  $\theta = 0.185$  a secondary bifurcation takes place, Fig. 3, where a new, oscillatory motion is superimposed to the already constant drift of the walls; see Fig. 4(a). Figure 4(b) displays a projection onto the plane  $\chi - v$  of the attractor associated to Fig. 4(a) showing a clear correlation between these two quantities even under oscillatory motion. Also shown in Fig. 4(b) is the symmetric attractor corresponding to the oppositely moving wall, with an accordingly opposite chirality. Finally, by further increasing  $\theta$  oscillations become more and more pronounced, Fig. 3, until the velocity minima become virtually zero. In this situation the two symmetric attractors [analogous to those in Fig. 4(b)] glue and merge, the wall dynamics alternates between these two lobes, Fig. 4(c), and a single chaotic attractor is formed, Fig. 4(d).

We finally note that other scenarios, related to the one reported here, have also been found and will be reported elsewhere since they are not essential to our findings. We just remark that when diffusion is considered ( $\delta \neq 0$ ) the bifurcation diagram is similar to the one found in the anisotropic XY model of statistical physics weakly perturbed by nongradient terms [1].

In conclusion we have shown that parametrically driven systems exhibiting sech solitons can also support tanh-like states in the high parametric gain region where the sech solitons are unstable. This new solution is a

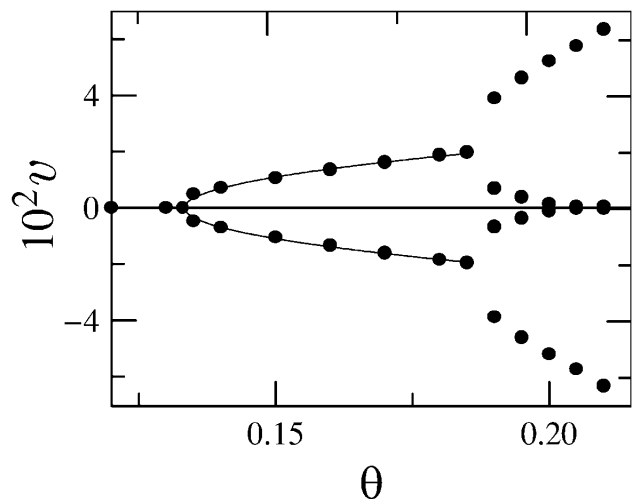


FIG. 3. Wall velocity ( $v$ ) as a function of detuning ( $\theta$ ) for  $\gamma = 1.3$ ,  $\delta = 0$ ,  $\sigma = 0.01$ . The curve is a parabolic fit.

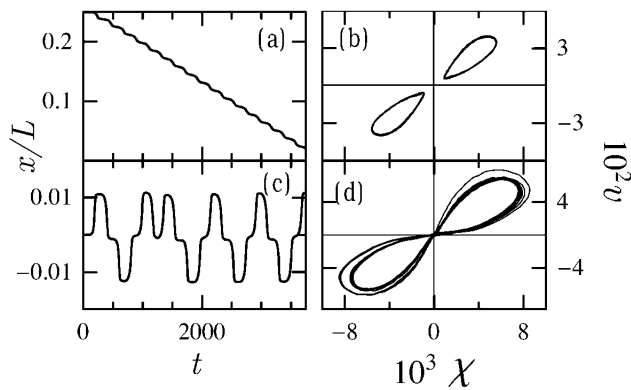


FIG. 4. Evolution of the wall location (left column) and attractor's projection onto the plane velocity vs chirality (right column). Parameters as in Fig. 3 with  $\theta = 0.2$  (a),(b) and  $\theta = 0.25$  (c),(d).

domain wall connecting two oppositely phased states, both spatially homogeneous or patterned, which exhibits an Ising-Bloch transition. Bloch walls move and exhibit secondary bifurcations eventually leading to chaotic motion. A clear relation between the chirality associated to the wall core and the velocity of the whole pattern has been reported which means that the global dynamics of the pattern is controlled by the local properties of the core of the defect. Long channels of deep liquid and chains of coupled pendula parametrically forced at twice the frequency of the fundamental cross mode and the lower cutoff mode, respectively, could be ideal systems to test the phenomena reported here.

We thank V. J. Sánchez-Morcillo, M. San Miguel, and F. Silva for fruitful discussions and J. C. Jackson for his reading of the manuscript. Financial support from the Spanish Government (DGES Project No. PB98-0935-C03-02) and from ESF network PHASE is acknowledged.

\*Electronic address: german.valcarcel@uv.es

- [1] P. Coullet and K. Emilsson, *Physica (Amsterdam)* **61D**, 119 (1992).  
 [2] P. Coullet *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 1352 (1990).  
 [3] D. Michaelis *et al.*, *Phys. Rev. E* **63**, 066602 (2001).

- [4] B. Denardo *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 1518 (1990).  
 [5] B. Denardo *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 1730 (1992).  
 [6] J. Wu, R. Keolian, and I. Rudnick, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 1421 (1984).  
 [7] B. Denardo, Ph.D. thesis, University of California, Los Angeles, 1990 (unpublished).  
 [8] J.W. Miles, *J. Fluid Mech.* **148**, 451 (1984); C. Elphick and E. Meron, *Phys. Rev. A* **40**, 3226 (1989).  
 [9] N.V. Alexeeva, I.V. Barashenkov, and G. P. Tsironis, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 3053 (2000).  
 [10] V. E. Zakharov, S. L. Musher, and A. M. Rubenchik, *Phys. Rep.* **129**, 285 (1985).  
 [11] A. Mecozzi *et al.*, *Opt. Lett.* **19**, 2050 (1994); S. Longhi, *Phys. Scr.* **56**, 611 (1997); V. J. Sánchez-Morcillo *et al.*, *Opt. Lett.* **25**, 957 (2000).  
 [12] I.V. Barashenkov, M. M. Bogdan, and V. I. Korobov, *Europhys. Lett.* **15**, 113 (1991).  
 [13] N. Grønbech-Jensen, Y. S. Kivshar, and M. R. Samuelsen, *Phys. Rev. B* **47**, 5013 (1993); R. Grauer and Y. S. Kivshar, *Phys. Rev. E* **48**, 4791 (1993).  
 [14] S. T. Milner, *J. Fluid Mech.* **225**, 81 (1991).  
 [15] G. P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics* (Academic Press, San Diego, CA, 1995); A. M. Dunlop, W. J. Firth, and E. M. Wright, *Opt. Commun.* **138**, 211 (1997); Y. S. Kivshar and B. Luther-Davies, *Phys. Rep.* **298**, 81 (1998).  
 [16] Our case is similar to [17], where  $\sigma = 0.05$  had to be used in order to reproduce the experimentally observed secondary instabilities of parametric surface waves.  
 [17] W. Zhang and J. Viñals, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 690 (1995).  
 [18] S. Longhi and A. Geraci, *Appl. Phys. Lett.* **67**, 3060 (1995).  
 [19] A split-step algorithm was used. Spatial grids from 1024 to 8192 points were used in order to check convergence. Results reported here were obtained with an integrating window length  $L = 300$  (other values were also used) and the temporal step was lowered to  $\delta t = 10^{-3}$  in order to yield  $\delta t$ -independent results.  
 [20] In order to check this we also made integrations for a localized parametric driving  $\gamma = \gamma_0 \exp[-(x/\Delta x)^8]$  with  $\Delta x = 0.45L$ , which is flat around  $x = 0$  and null close to the border ( $x = \pm L/2$ ) of the integration region. Single domain walls could be excited obtaining identical results as with spatially uniform driving. This localized driving is not just a numerical trick as it describes, e.g., a light beam with finite transverse extension injected into a nonlinear optical system.

# The Ising–Bloch transition in degenerate optical parametric oscillators

Isabel Pérez-Arjona<sup>1</sup>, Fernando Silva<sup>1</sup>, Germán J de Valcárcel<sup>1</sup>, Eugenio Roldán<sup>1</sup> and Víctor J Sánchez-Morcillo<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Departament d'Òptica, Universitat de València, Dr Moliner 50, 46100 Burjassot, Spain

<sup>2</sup> Departament de Física Aplicada, Universitat Politècnica de Valencia, Carretera Nazaret-Oliva S/N, 46730 Grao de Gandia, Spain

Received 31 October 2003, accepted for publication 19 December 2003

Published 4 May 2004

Online at [stacks.iop.org/JOptB/6/S361](http://stacks.iop.org/JOptB/6/S361)

DOI: 10.1088/1464-4266/6/5/026

## Abstract

Domain walls in type I degenerate optical parametric oscillators are numerically investigated. Both steady Ising and moving Bloch walls are found, bifurcating one into another through a nonequilibrium Ising–Bloch transition. Bloch walls are found that connect either homogeneous or roll planforms. Secondary bifurcations affecting Bloch wall movement are characterized that lead to a transition from a steady drift state to a temporal chaotic movement as the system is moved far from the primary Ising–Bloch bifurcation. Two kinds of routes to chaos are found, both involving tori: the usual Ruelle–Takens and an intermittent scenario.

**Keywords:** Ising–Bloch transition, domain walls, dissipative structures, parametric oscillation

## 1. Introduction

Nonlinear optical systems with broken phase symmetry and high Fresnel number have a tendency to emit light beams whose transverse section displays uniformly illuminated domains (usually spatially homogeneous) separated by dark lines, the so-called domain walls (DWs). These structures are also commonplace in self-oscillatory chemical reactors (like some variants of the BZ reaction) forced at a 2:1 resonance, and in weakly damped nonlinear mechanical systems (chains of coupled pendula, or fluids) when parametrically forced. In both cases, sustained waves appear that oscillate at half the driving frequency. An optical analogue of this is the degenerate optical parametric oscillator (DOPO): a  $\chi^{(2)}$  cavity is driven by a coherent light field of frequency  $2\omega$  and the system starts to oscillate (above a certain threshold) at the subharmonic frequency  $\omega$ .

Examples of DWs have been predicted to occur in the last few years in several nonlinear optical resonators, such as DOPOs [1–5], vectorial Kerr cavities [6, 7] and type II second harmonic generation [8] and, importantly, they have also been experimentally realized in parametric mixing [9]. Related phenomena have also been reported in nascent optical bistability [10], in which case domains of low and high light intensity are separated (or better, joined) by a switching front,

and in single feedback mirror experiments in the presence of an intrinsic polarization instability [11], where domain patterns are observed.

Usually a DW asymptotically joins two homogeneous states,  $u_{\pm}$ . In the simplest, most usual case,  $u_{\pm}$  have the same amplitude and opposite phase, i.e.  $u_{+} = -u_{-}$ , corresponding to two antisymmetric fixed points in the complex plane  $\langle \text{Re } u, \text{Im } u \rangle$ . In this representation, a trajectory connecting the two domains can follow two paths, corresponding to two different types of walls: either crossing the complex zero (Ising wall) or surrounding it (Bloch wall). In terms of the phase, in an Ising wall there is a discontinuous variation of the field phase across the wall, whereas in a Bloch wall the phase angle rotates through  $\pi$  across the wall. This is a crucial difference between Ising and Bloch walls as it implies that the latter are chiral while the former are not. The chirality measures the direction and magnitude of the rotation of the phase angle at the wall core and, as two directions of rotation of the phase angle can in principle be expected, Bloch walls of positive and negative chirality can exist. Alternatively, in an Ising wall the field intensity vanishes at its core, whilst it is minimum, but not zero, in a Bloch wall. That is the reason why in nonlinear optics Ising and Bloch walls are sometimes referred to as dark and grey solitons, respectively.

In nonequilibrium systems, Ising walls bifurcate into Bloch walls by varying a parameter of the system, the

bifurcation point corresponding to the nonequilibrium Ising–Bloch transition [12] (NIB in the following). In systems showing this behaviour, the chirality behaves as an order parameter, and can be described, in principle, by a nonlinear evolution equation: the NIB transition is then related to a bifurcation of the chirality parameter [13]. Importantly, in gradient systems (those whose dynamics derives from a potential), both Ising and Bloch walls are at rest. This is a consequence of the equivalence between the states connected by the wall, characterized by the same free energy. However, in nongradient systems, such as the DOPO, a generic property of Bloch walls is that they move with a velocity proportional to (or related to) their chirality, while Ising walls are at rest [13].

The NIB transition has been found in systems of very different nature, such as nematic liquid crystals [14], and reaction–diffusion systems [15]. In the context of nonlinear optics, it has been found in type II optical parametric oscillators when cavity birefringence and/or mirror dichroism are taken into account [6], and in type II second harmonic generation [8]. It has also been studied in universal equations describing nonlinear optical cavities in some limiting cases, as is the case of the parametrically driven Ginzburg–Landau equation [16] and the parametrically driven nonlinear Schrödinger (PDNLS) equation [17]. In [8], a universal criterion for evaluating the NIB transition boundary in a wide variety of nongradient systems was proposed.

The results obtained in [17] are particularly relevant for the present work. Whilst it is well known that the PDNLS equation with self-defocusing nonlinearity exhibits domain walls (tanh solitons) [18], it was not known until recently [17] that domain walls are also solutions of this equation when the nonlinearity is self-focusing (in which case the basic solitonic structure is a sech). This fact makes possible that the same nonlinear system exhibits both bright and dark solitons in adjacent regions of the parameter space, as bright solitons are stable solutions of the PDNLS equation [19]. Moreover, in [17] it was shown that an NIB transition occurs in this equation. It is to be remarked that the DWs found in the self-focusing PDNLS equation can connect not only homogeneous states, as usual domain walls do, but also patterned states. As that equation has been derived in nonlinear optics for a number of systems (in particular for DOPOs with large pump detuning [1], vectorial Kerr cavities with large cavity anisotropy [7], and fibre rings with phase-sensitive amplification [20]), the results presented in [17] imply that these systems should exhibit domain walls and a NIB transition in some parameter range.

In this paper we show numerically that the Ising walls previously studied in the type I DOPO can experience the NIB transition for positive signal detuning. Remarkably, we show that this occurs in a parameter domain for which the PDNLS equation, which was derived for large pump detuning [1], cannot be applied. The moving Bloch fronts that appear beyond the NIB bifurcation connect two homogeneous states with opposite phase, and exist in a finite parameter region. By varying a control parameter (e.g., the signal detuning) the homogeneous solutions connected by the Bloch wall become modulationally unstable and are replaced by rolls. These new domain walls exhibit a very rich dynamic behaviour that we analyse in detail. We would like to mention that some of the results presented here have been previously found by Le

Berre *et al* [4] in a propagation model for DOPO. In particular, they pointed out that DWs exist in the DOPO also for positive signal detuning, that these domain walls can connect patterned states, and it was also speculated by the authors that the system could exhibit a NIB transition. The main goals of the present work are to characterize the NIB transition in DOPOs and to describe in detail the nonlinear dynamics of the Bloch walls. Our study, being specific to the DOPO model, finds however a qualitative parallelism with our previous work on the PDNLS equation [17]; we thus conjecture that our findings should be applicable to other systems.

## 2. Model, homogeneous solutions and their stability

The standard, mean-field model for a type I DOPO reads [21]

$$\frac{\partial A_0}{\partial T} = \gamma_0 \left[ -(1 + i\Delta_0)(A_0 - E) - A_1^2 + ia_0 \nabla^2 A_0 \right], \quad (1)$$

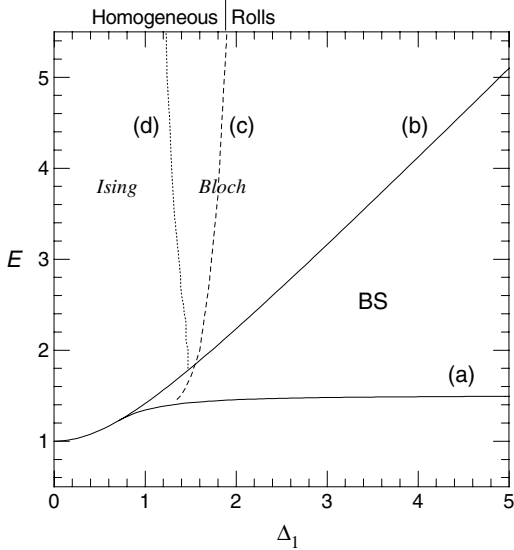
$$\frac{\partial A_1}{\partial T} = \gamma_1 \left[ -(1 + i\Delta_1)A_1 + A_0 A_1^* + ia_1 \nabla^2 A_1 \right], \quad (2)$$

where  $A_n$  are the slowly varying envelopes of the intracavity pump ( $n = 0$ ) and signal ( $n = 1$ ) fields,  $\gamma_n$ ,  $\Delta_n$  and  $a_n$  their corresponding cavity decay rates, detuning and diffraction coefficients, and  $E$  is the amplitude of the injected pump, which in general may depend on transverse coordinates. The phase-matching condition imposes that  $\gamma_0 a_0 = 2\gamma_1 a_1$ . In this paper we shall consider the 1D limit of equation (1). This situation corresponds, for example, to a slab waveguide configuration for the resonator, in which the fields are confined in one direction of the transverse plane, say  $Y$ , the diffraction acting only in the  $X$  direction, and then  $\nabla^2 = \partial^2/\partial X^2$ . In the following we shall concentrate on the particular case  $\gamma_0 = \gamma_1 \equiv \gamma$  (hence  $a_1 = 2a_0$ ), and use normalized time  $t = \gamma T$  and space  $x = X/\sqrt{a_1}$ . Moreover, throughout this paper we shall assume that the two fields oscillate within the same cavity and then we shall keep the relation  $\Delta_0 = 2\Delta_1$  fixed.

For a spatially uniform injected pump, equations (1) and (2) admit two homogeneous solutions. The trivial solution  $\{A_0 = E, A_1 = 0\}$  exists for all parameter sets, while the ‘lasing’ solution

$$\begin{aligned} |A_1|^2 &= \Delta_0 \Delta_1 - 1 \pm \sqrt{E^2(1 + \Delta_0^2) - (\Delta_0 + \Delta_1)^2}, \\ |A_0|^2 &= 1 + \Delta_1^2, \end{aligned} \quad (3)$$

that corresponds to the subharmonic (signal) generation, requires a threshold pump. The bifurcation from the trivial solution to the lasing solution (3) occurs at  $E = \sqrt{1 + \Delta_1^2}$ ; it is subcritical (and then the lasing solution can coexist with the stable trivial state) when  $\Delta_0 \Delta_1 > 1$ , and is supercritical in the opposite case [22]. For positive  $\Delta_1$  (which is the case we consider throughout the paper) this is the only bifurcation that affects the trivial state. Note that the discrete phase symmetry  $A_1 \rightarrow -A_1$  supported by equations (1) and (2) makes two equivalent solutions of equal intensity but opposite phase exist that are dynamically equivalent, and this opens the possibility of exciting DWs connecting them. For negative  $\Delta_1$  (a case we do not discuss here) a pattern forming instability affecting the



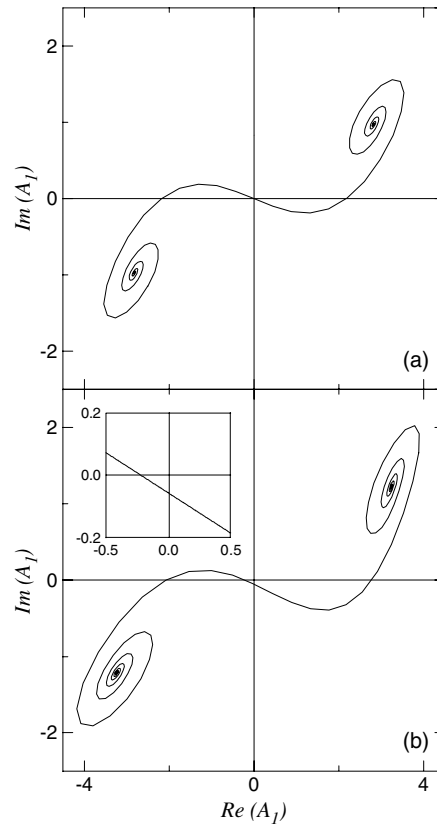
**Figure 1.** Bifurcation diagram in the parameter space pump amplitude ( $E$ ) versus signal detuning ( $\Delta_1$ ). The different curves denote the following. (a) The location of the turning point of the homogeneous, ‘lasing’ solution; in (b) the trivial solution loses its stability; in (c) the homogeneous solution (that is stable to the left of this line and unstable to the right) suffers a modulational instability that gives rise to the appearance of patterns; finally, curve (d) denotes the location of the Ising–Bloch transition. The region denoted by BS corresponds to the bistability domain where bright solitons can be excited.

trivial state occurs at  $E = 1$  [21], leading to the appearance of roll patterns [21, 23].

The stability of the lasing solution (3) against space-dependent perturbations has also been investigated [1, 3]. A linear stability analysis predicts that a pattern forming instability of the homogeneous state occurs for pump values below a critical value or, alternatively, above a critical detuning value. The analytical expressions are rather involved, but the instability threshold can be found in particular cases numerically. In figure 1 we represent the domain of existence of the different solutions in the plane  $(\Delta_1, E)$ . The homogeneous solution exists above curve (a), being stable to the left of the dashed curve (c) and unstable versus the roll pattern to the right of curve (c). The roll pattern appearing in this region has a dc component, in contrast with the roll pattern appearing for negative detuning, which has no dc component and thus its visibility equals unity. In the region marked as BS, between curves (a) and (b), the trivial and homogeneous solutions coexist, but as the latter is modulationally unstable, in this region bright cavity solitons are formed [1, 25].

### 3. Nonequilibrium Ising–Bloch transition

In this section we report the results of our numerical study of the DW dynamics. We integrated equations (1) and (2) numerically, making use of a split-step algorithm with periodic boundary conditions. Spatial grids from 1024 to 8192 points were used in order to check convergence. The results reported here were obtained with an integrating window length  $L = 316$  (other values were also used), and the temporal step was lowered up to  $\delta t = 10^{-2}$  in order to yield  $\delta t$ -independent results. We considered two cases for the pump amplitude



**Figure 2.** Parametric representation of (a) an Ising and (b) a Bloch wall, computed numerically from equation (1) with  $E = 3$  and (a)  $\Delta_1 = 1.2$ , and (b)  $\Delta_1 = 1.5$ .

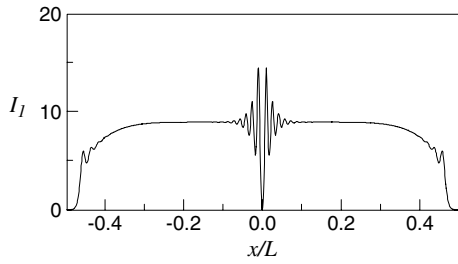
profile  $E$  corresponding to (i) an infinitely extended plane-wave field and (ii) a flat but spatially limited field, flat in order to avoid any gradient effect on the DW dynamics. For this last case we chose

$$E = E_0 \exp[-(x/\Delta x)^8], \quad (4)$$

with  $\Delta x = 0.45L$ , which is top-hat like: it is flat around  $x = 0$  and null close to the border of the integration region ( $x = \pm L/2$ ). This supergaussian profile is used only with the purpose of simulating a flat and finite pump, and that is not essential for the results here reported. In fact very similar results, differing mainly in minor quantitative details, are found in the two studied cases, thus demonstrating the robustness of the reported behaviour.

We first report the results obtained for a top-hat pump. A wall connecting the two homogeneous oppositely phased states was excited by using an appropriate initial condition. The two kinds of walls, Ising and Bloch, were found at different parameter values. Whilst the intensity trace  $|A_1(x)|^2$  of the walls formed in the subharmonic field does not allow us to distinguish clearly between Ising and Bloch walls—due to the very small value of the intensity at the core of the wall—the different nature of the walls can however be clearly appreciated in a parametric representation  $(\text{Re } A_1, \text{Im } A_1)$  of these interfaces. In figure 2 the parametric representations of both an Ising wall, figure 2(a), obtained for  $E_0 = 3$  and  $\Delta_1 = 1.2$ , and a Bloch wall, figure 2(b), obtained for  $E_0 = 3$  and  $\Delta_1 = 1.5$ , are shown. The NIB transition, numerically





**Figure 3.** Intensity profile of the signal field,  $|A_1|^2$ , as a function of the normalized position  $x/L$  for  $E = 3$  and  $\Delta_1 = 1.2$ . An Ising wall appears at the centre.

computed from equations (1) and (2), is plotted in figure 1, curve (d).

The NIB transition can be clearly identified as a bifurcation of a chirality parameter defined as [17]

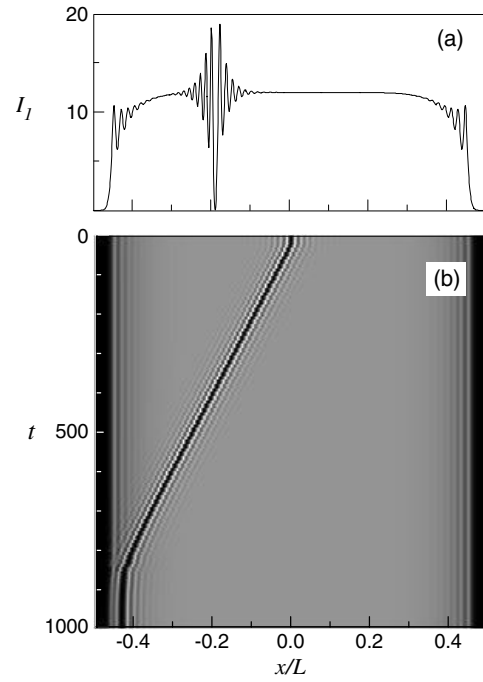
$$\chi = \text{Im}[A_1^*(x_0) \partial_x A_1(x_0)], \quad (5)$$

where  $x_0$  is the position of the wall core, i.e. where  $|A_1|$  is closest to zero. Notice that if we use a polar decomposition of  $A_1(x)$  as  $A_1(x) = |A_1(x)| \exp[i\phi_1(x)]$ , then  $\chi = |A_1(x_0)|^2 \partial_x \phi_1(x_0)$ . Thus this quantity is sensitive to both the sense and magnitude of the rotation of the phase angle at the wall,  $\partial_x \phi_1(x_0)$ , and to the intensity at the wall core,  $|A_1(x_0)|^2$ . Consequently  $\chi = 0$  for Ising walls and  $\chi \neq 0$  for Bloch walls, and the NIB can be understood as a pitchfork bifurcation of the chirality parameter.

As equations (1) and (2) are invariant under spatial translations ( $x \rightarrow x + x'$ ) and spatial reflections ( $x \rightarrow -x$ ), if a Bloch wall  $A_1^{(1)} = A_B(x - x_0, t)$  exists with chirality  $\chi_1$  another Bloch wall  $A_1^{(2)} = A_B(x_0 - x, t)$  also exists and has chirality  $\chi_2 = -\chi_1$ . This is important, as a generic property of domain walls in nongradient systems (at least for domain walls of the tanh type) is that they move with a velocity which is proportional to their chirality [13], so that Bloch walls with opposite chiralities move in opposite directions, and Ising walls ( $\chi = 0$ ) are at rest.

In figure 3 the signal field intensity  $|A_1(x)|^2$  is shown for the same set of parameters as in figure 2(a), and the Ising wall is clearly appreciated in the centre of the illuminated region, where it remains at rest indefinitely. In figure 4(a) a similar representation for the same parameters as in figure 2(b), that is, for a Bloch wall, is shown. In this case the position of the wall varies with time, as can be seen in figure 4(b), which displays the time evolution of the wall position: in contrast to the Ising wall, the Bloch wall drifts at a velocity  $v$  (that depends on the parameter values) until it reaches the boundary of the pumped area, where it remains locked.

Let us notice that, in the wall neighbourhood, the intensity profile of the signal field shows spatial oscillations that decay exponentially to the homogeneous state given by (3); see figures 3 and 4. These spatial modulations appear in the parametric representation as a spiralling of the heteroclinic trajectory around the stable fixed points representing the homogeneous stable solutions; see figure 2. These modulations have a characteristic wavenumber that can be predicted by a spatial stability analysis [24], and are typical of diffraction-supported fronts. These modulations play an



**Figure 4.** (a) As in figure 3 but for  $E = 3$  and  $\Delta_1 = 1.5$  showing a Bloch wall. (b) Time evolution of the pattern. The pattern in (a) corresponds to  $t = 400$  in the time evolution shown in (b).

important role in the stabilization of the walls, and allow for the existence of bounded states [24]. The number of orbits in the parametric representation increases when approaching the pattern forming instability boundary, curve (c) in figure 1.

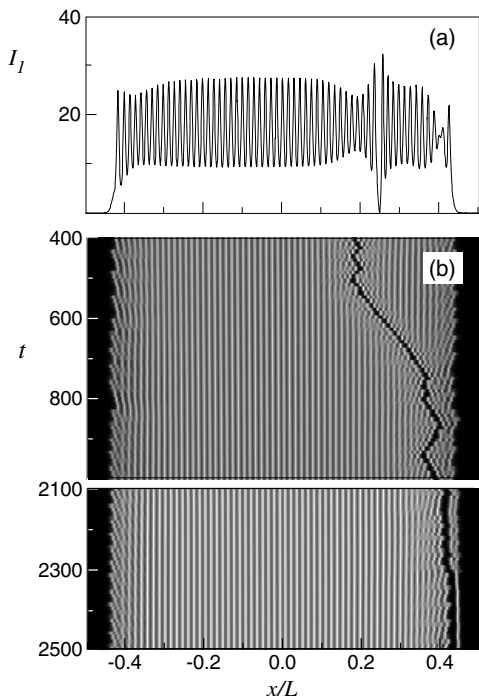
#### 4. Nonlinear dynamics of the Bloch wall

We consider next the dynamical properties of Bloch walls. First we consider the case of the top-hat pump profile of equation (4), and then we consider the case of plane-wave pumping. In both cases, a typical route is reported, as obtained for  $E = 3$ , and the signal detuning  $\Delta_1$  is left as the control parameter.

##### 4.1. Pump field with finite transverse extension

The Ising wall represented in figure 3 (also in figure 2(a)), corresponding to  $\Delta_1 = 1.2$ , suffers instabilities at its core by increasing  $\Delta_1$ . For the selected pump value, the NIB transition is found at  $\Delta_1 = 1.362$ . At this point the value of the intensity at the dip becomes different from zero, although it has an extremely small value, and the wall starts to move with a constant drift, as shown in figure 4 for  $\Delta_1 = 1.5$ . We note that the drift velocity of the wall is not exactly constant as it oscillates slightly with a very low frequency. We shall return to this point in the next section.

For detuning values larger than  $\Delta_1 = 1.73$ , the homogeneous solution (3) becomes modulationally unstable, see figure 1, and each of the two domains connected by the wall develop extended spatial oscillations. Bloch walls still exist in this parameter region but now they connect two patterned states instead of two homogeneous solutions [4]. This type of domain wall was already found in the PDNLS [17]. An example of the intensity profile of a wall affected by the modulational instability is shown in figure 5, corresponding to  $\Delta_1 = 2.01$ .



**Figure 5.** As in figure 4 but for  $E = 3$  and  $\Delta_1 = 2$ .

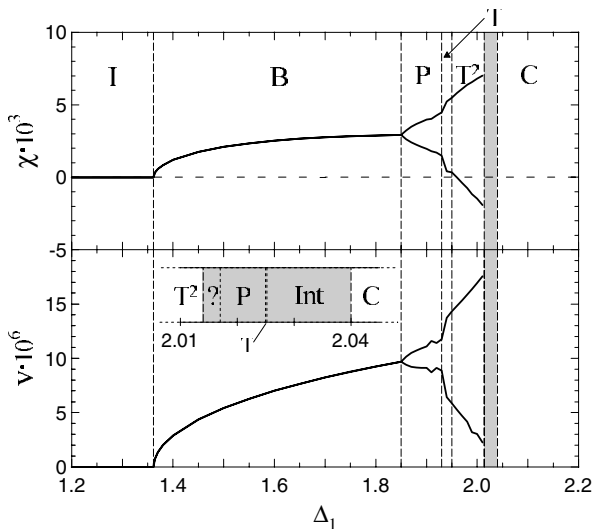
For this value of the detuning, after a transient the wall moves at nearly constant velocity until it reaches the border of the illuminated region, where it remains locked, see figure 5(b), similarly to the case of figure 4(b). Notice however that now the wall is bounced from the border of the illuminated region before it locks to it. On further increasing the detuning, the Bloch wall keeps existing, but it exhibits an erratic motion until finally it is also locked to the boundary. This ‘chaotic’ motion of the Bloch walls is observed for  $\Delta_1 > 2.03$ .

We see that with a pump of finite extension, the dynamics of the domain walls is always transient as Bloch walls get eventually locked to the boundary of the illuminated region. Then, in order to quantitatively analyse the temporal dynamics of Bloch walls, it is necessary to consider an infinitely extended plane-wave pump in order to avoid the influence of boundary effects. This is done in the next subsection.

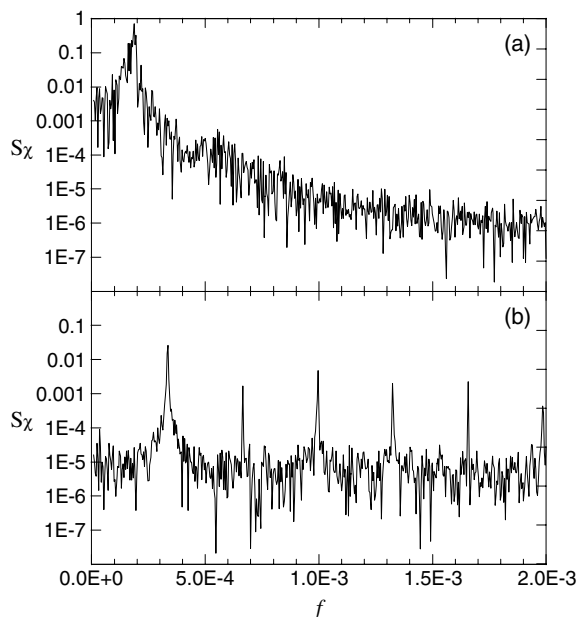
#### 4.2. Infinitely extended pump field

For periodic boundary conditions and uniform pump, an even number of DWs had to be excited. In our simulations, two DWs were initially created. Consequently, care had to be taken that the two DWs did not interact, as the dynamics of a single DW was to be studied. This was done by checking that the two domain walls were far apart from each other and that they did not approach significantly during the numerical run. We analysed the temporal series of both the chirality and velocity of DWs. In figure 6 the dependence of both quantities on the detuning  $\Delta_1$  are shown for a pump value  $E = 3$ . Next we analyse this bifurcation diagram in detail.

The NIB occurs at  $\Delta_1 = 1.362$ , as in the case of spatially limited pump, and at this point both the chirality and velocity of the wall become non-null through a pitchfork bifurcation. Nevertheless, for detunings slightly below this value there

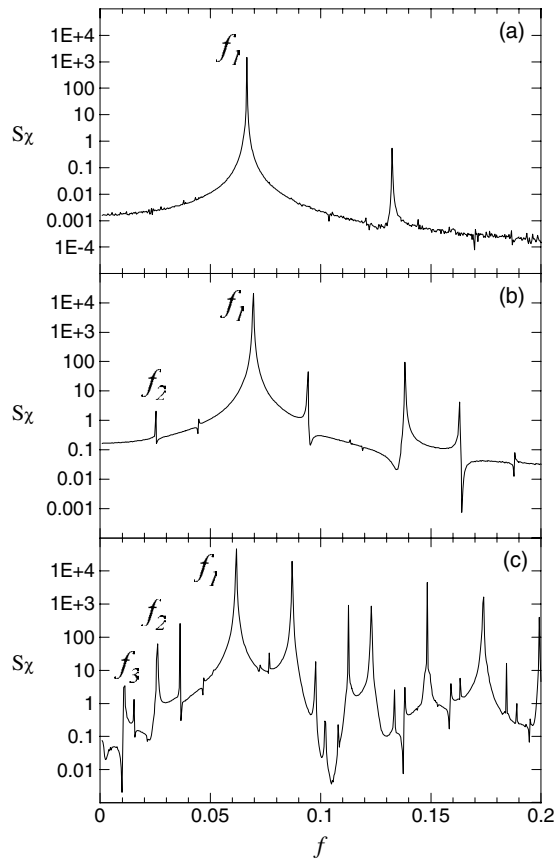


**Figure 6.** Bifurcation diagram for the chirality (a) and velocity (b) of the wall as a function of detuning for  $E = 3$ . I denotes the region of existence of Ising walls and B the region of existence of Bloch walls with constant velocity. In P the motion of Bloch walls is periodic (quasiperiodic in T and  $T^2$ , and chaotic in C) and the maximum and minimum value of the chirality and velocity are represented. The inset diagram shows the dynamics in the grey region, where Int corresponds to the intermittent route to chaos and the symbol (?) marks the detuning where the dynamics of a single wall cannot be tracked (see the text).



**Figure 7.** Chirality spectrum for the time series corresponding to  $E = 3$ ,  $\Delta_1 = 1.361$  (a) and  $\Delta_1 = 1.365$  (b).

appears some subtle dynamics, as anticipated. For a detuning of  $\Delta = 1.361$  we have observed that the position of the DW oscillates in time, with null mean displacement and a very small amplitude in the oscillations (of the order of a fraction of a pixel—the determination of the intensity minimum was done through a three-point parabolic fit). In figure 7(a) the power spectrum of the chirality time series corresponding to this case is shown. The frequency of the oscillation is so small ( $f = 1.793 \times 10^{-4}$ ) that runs with a duration  $\Delta t = 2^{18}$



**Figure 8.** Chirality spectrum for the time series corresponding to  $E = 3$ ,  $\Delta_1 = 1.86$  (a),  $\Delta_1 = 1.93$  (b) and  $\Delta_1 = 1.99$  (c); these correspond to regions P, T, and  $T^2$  in the inset in figure 6.

(more than 26 million time steps) had to be considered in order to have 47 oscillations. Given the tiny value of the fundamental frequency, power spectra were obtained after sampling every time unit. In figure 7(b) the power spectrum corresponding to a detuning  $\Delta_1 = 1.365$ , that is beyond the NIB transition, is shown. The fundamental frequency in the spectrum is larger than that in figure 7(a) and, remarkably, the dynamics is richer as higher order harmonics appear. In the range of detunings  $1.362 < \Delta_1 < 1.85$ , the movement of the wall is practically steady, but for these very low frequency, smallest amplitude, oscillations; that is, for constant detuning the velocity is very nearly constant, its value increasing with the detuning, as can be seen in figure 6. Unfortunately, as the NIB transition is crossed, it is no longer possible to track the low frequency dynamics, as new oscillatory bifurcations involving much higher frequencies develop. Thus, up to  $\Delta_1 = 1.85$ , the velocity of the Bloch wall is not constant, but the frequency of the oscillation, as well as its amplitude, is so small that one can consider it as practically constant. In the following we neglect this low frequency dynamics.

At  $\Delta_1 = 1.85$  there is a clear Hopf bifurcation at which the velocity is no longer constant, but begins to oscillate in time (in figure 6 we plot both the maximum and minimum values of the velocity and chirality in this oscillatory regime). In figure 8(a) the spectrum corresponding to that clear periodic motion is shown. Let us remark that the frequency of these oscillations is larger, by a factor greater than 350, than the low frequency oscillations commented on above.

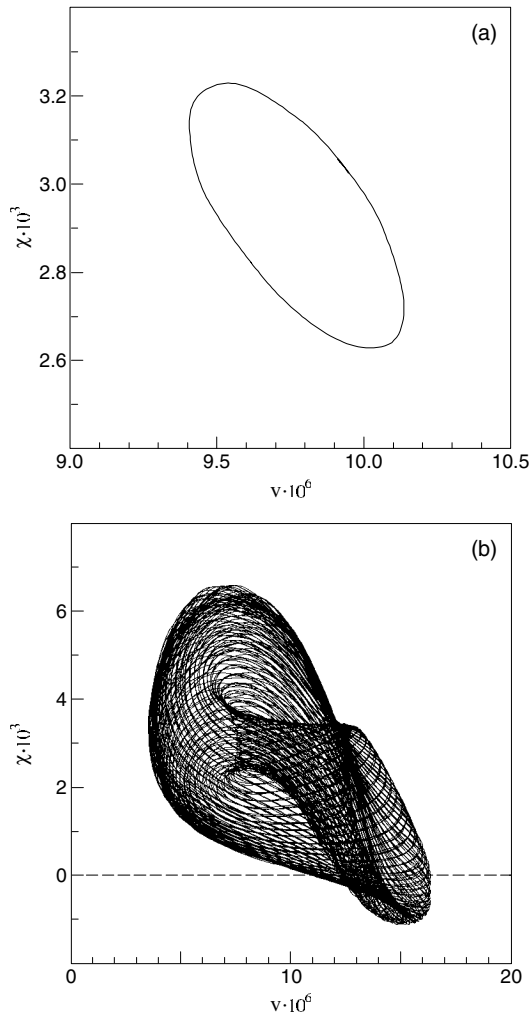
It is most interesting to notice that this Hopf bifurcation occurs at exactly the same detuning value at which the homogeneous solution of the system becomes modulationally unstable, curve (c) in figure 1. This does not seem to be accidental or specific to this system, as we have observed the same phenomenon in the PDNLS equation [17, 26]. Then it seems that the appearance of a Hopf bifurcation in the movement of the Bloch wall is forced by the modulational instability that the homogeneous solution undergoes. Up to some extent this fact can be understood intuitively. The appearance of a pattern on the background where the domain wall exists necessarily influences the movement of the domain wall, as the displacement of the wall forces local changes in the spatial frequency of the pattern. In their turn, these local readjustments in the pattern shape modify the velocity of the Bloch wall. This is consistent with the fact that the oscillations developed by the wall velocity increase their amplitude as the detuning is increased, as occurs with the modulation of the roll pattern on which the wall is ‘written’.

Further increasing the detuning leads to the appearance of new frequencies in the spectrum. At  $\Delta_1 = 1.93$ , a new and incommensurate frequency appears, see figure 8(b), reflecting the fact that the movement of the wall is now quasiperiodic. At  $\Delta_1 = 1.95$ , there still appears a third new incommensurate frequency, and then the movement of the wall corresponds to a 3-torus dynamics; see figure 8(c). This quasiperiodic dynamics remains up to  $\Delta_1 = 2.014$ . In figure 9 we represent a projection of the attractor on the  $\langle v, \chi \rangle$  plane for a periodic and a quasiperiodic behaviour; see the caption. Notice in figure 6(a) that at  $\Delta_1 \approx 1.96$ , the minimum value of the chirality becomes negative, although the velocity remains positive along all the depicted lines (see also figure 9(b)). This means that, under oscillatory dynamics, there is no longer a direct relation between the sign and magnitude of the chirality and those of the velocity.

We find it important to emphasize that the observed dynamics is due to the existence of a DW: we have checked that the roll pattern existing for  $\Delta_1 > 1.73$  is always steady for  $E = 3$ . Then, the secondary bifurcations affecting the Bloch wall movement are not induced by any temporal dynamics of the pattern, but have to be attributed to the interplay between the change in the wall velocity with detuning, on the one side, and the changes in the spatial frequency and modulation of the roll pattern, on the other side.

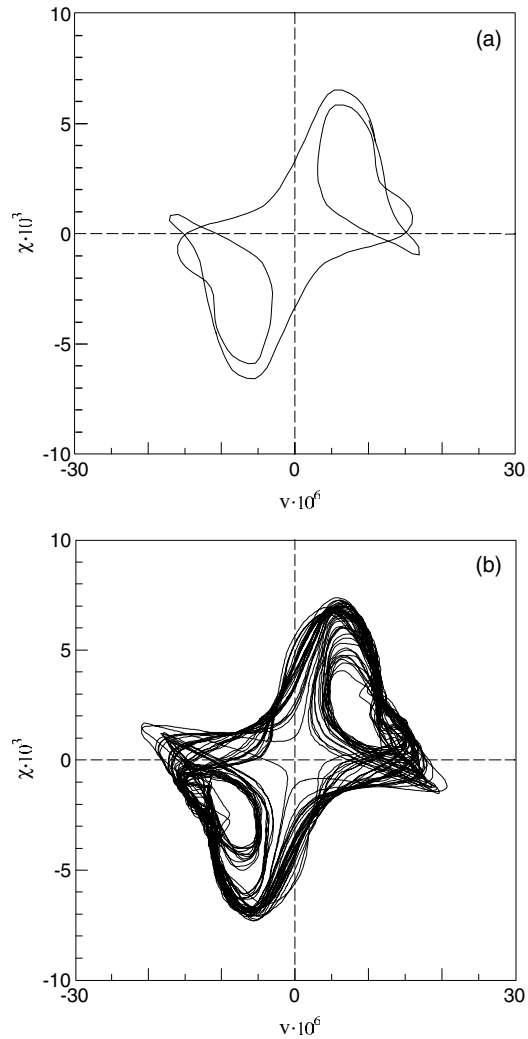
For detuning values within the range  $2.014 < \Delta_1 < 2.017$  (within the shaded area depicted in figure 6) the dynamic behaviour of the wall cannot be tracked, as the two excited walls always coalesce into a single structure (a cavity soliton). Although we tried to avoid this fact by changing the initial conditions (more specifically, the initial chirality value of the two walls) we have not been able to isolate the dynamics of a single structure in this smallest domain of detunings.

Further, at  $\Delta_1 = 2.017$ , there appears a new qualitative change in the dynamics of the Bloch wall: the time evolution of the chirality (or the velocity) is again periodic, but now the dynamics corresponds to an attractor different from the one shown in figure 9, as can be seen in figure 10(a). This new attractor is two sided, that is, the orbit on the  $\langle v, \chi \rangle$  plane surrounds alternatively the two unstable symmetric fixed points differing in sign of the chirality and the velocity. As in the



**Figure 9.** Attractor projection on the  $(v, \chi)$  plane for (a)  $E = 3$  and  $\Delta_1 = 1.86$  (periodic attractor) and (b)  $E = 3$  and  $\Delta_1 = 1.99$  (quasiperiodic attractor).

previous case, this periodic attractor transforms into a chaotic one, figure 10(b), after a series of bifurcations involving tori; see figure 11. However, in this case the route to chaos is quite unusual: by increasing the detuning, this motion remains periodic until  $\Delta_1 = 2.0250$ , then at  $\Delta_1 = 2.0251$  the motion becomes quasiperiodic and at  $\Delta_1 = 2.0252$  an intermittent route to chaos (built on the torus) is initiated. Close to this border laminar phases are very long, and they become shorter as we move from the bifurcation, as usual. An example of this intermittent behaviour is shown in figure 12, where a series of chirality extrema is depicted. We have not tried to characterize this highly complicated behaviour and just note that the same type of intermittencies were found by some of us in laser models [27, 28]. On further increasing the detuning, the laminar phases become progressively shorter until eventually they disappear (at some detuning value between 2.035 and 2.039), the wall motion becoming chaotic. For still larger values of the detuning, the dynamics of the wall remains chaotic until curve (b) in figure 1 is crossed, as at this point the pattern is no longer stable, and bright (sech type) solitons appear after a transient.

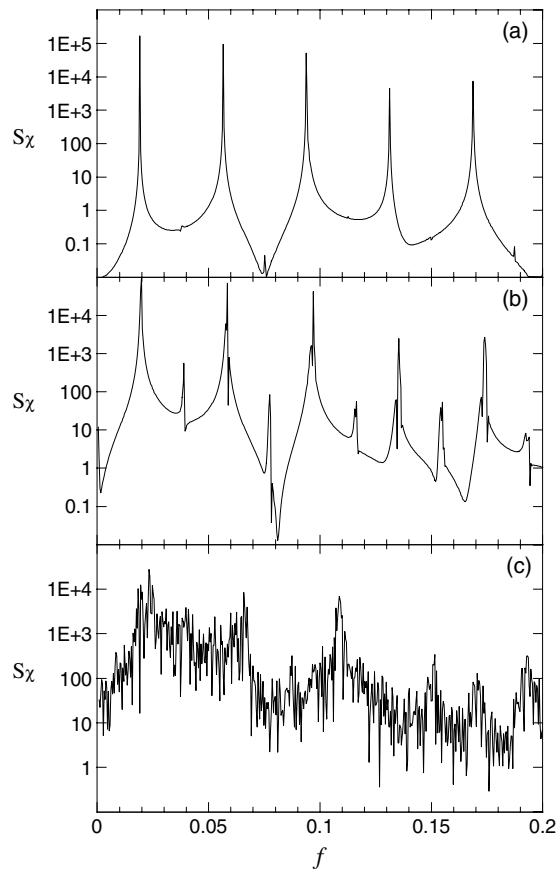


**Figure 10.** Attractor projection on the  $(v, \chi)$  plane for (a)  $E = 3$  and  $\Delta_1 = 2.02$  (periodic two-sided attractor) and (b)  $E = 3$  and  $\Delta_1 = 2.04$  (chaotic attractor); these correspond to regions P and C in the inset in figure 6.

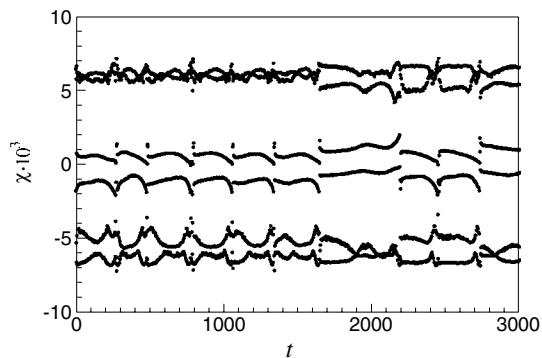
## 5. Conclusions

We have presented numerical evidence of the existence of a nonequilibrium Ising–Bloch transition in a type I DOPO model with one transverse dimension. Bloch walls have been found in two different forms, either connecting homogeneous states, which are the usual ones, or connecting modulated states, a kind of domain wall already found in the propagation model for DOPO [4], and in the parametrically driven, damped nonlinear Schrödinger equation [17].

Bloch walls move, and their movement undergoes complicated secondary bifurcations, eventually leading to chaotic motion involving quasiperiodicity. Two routes to chaos have been described: a usual quasiperiodic (Ruelle–Takens) scenario and an unusual quasiperiodic intermittency. We have seen that the nonlinear dynamics of the wall movement is related to the appearance of a modulational instability on the pattern on which the domain wall is written. Let us remark that although the NIB transition in DOPO has been reported for the particular case  $\Delta_0 = 2\Delta_1$ , we have observed similar phenomena for different sets of detuning values. In fact, for



**Figure 11.** Chirality spectrum for the time series corresponding to  $E = 3$  and  $\Delta_1 = 2.02$  (a),  $\Delta_1 = 2.0251$  (b) and  $\Delta_1 = 2.04$  (c); these correspond to regions P, T, and C in the inset in figure 6.



**Figure 12.** Series of chirality extrema for  $E = 3$  and  $\Delta_1 = 2.0260$ , corresponding to the intermittent route to chaos in the inset in figure 6.

the case of large pump detuning (and signal detuning of order one), the DOPO equations can be approximated by the PDNLS equation [1], where the NIB transition as well as the nonlinear dynamics of the Bloch wall have been previously reported by some of us [17, 26].

We would like to finish with a brief mention of the case of two transverse spatial dimensions. In 2D the situation is much more complicated than the 1D case we have analysed here, as in 2D the dynamics of DWs is affected not only by the NIB but also by curvature effects [6, 4]. Moreover, boundary effects become determinant in two dimensions as domain walls tend

to be perpendicular to the boundary of the illuminated region. Thus the analysis of the NIB in a 2D optical system still remains to be characterized.

## Acknowledgments

We thank Javier Redondo (Departament de Física Aplicada, Universitat Politècnica de València) for useful discussions about the processing of the numerical data. This work has been supported by the Spanish Ministerio de Ciencia y Tecnología and the European funds FEDER under projects BFM2002-04369-C04-01 and BFM2002-04369-C04-04.

## References

- [1] Longhi S 1997 *Phys. Scr.* **56** 611
- [2] Trillo S, Haelterman M and Sheppard A 1997 *Opt. Lett.* **22** 970
- [3] Staliunas K and Sánchez-Morcillo V J 1998 *Phys. Rev. A* **57** 1454
- [4] Le Berre M, Leduc D, Ressayre E and Tallet A 1999 *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* **1** 153
- [5] Rabiosi I, Scroggie A J and Oppo G-L 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 254102
- [6] Izús G, San Miguel M and Santagiustina M 2000 *Opt. Lett.* **25** 1454
- [7] Sánchez-Morcillo V J, Pérez-Arjona I, Silva F, de Valcárcel G J and Roldán E 2000 *Opt. Lett.* **25** 957
- [8] Michaelis D, Peschel U, Lederer F, Skryabin D V and Firth W J 2001 *Phys. Rev. E* **63** 066602
- [9] Taranenko V B, Staliunas K and Weiss C O 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 2236
- [10] Tlidi M, Mandel P and Lefever R 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 979
- [11] Grosse Westhoff E, Kneisel V, Logvin Yu A, Ackemann T and Lange W 2000 *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* **2** 386
- [12] Bulaevskii L N and Ginzburg V L 1964 *Sov. Phys.—JETP* **18** 530
- [13] Lajzerowicz J and Niez J J 1979 *J. Physique Lett.* **40** L165
- [14] Coulet P, Lega J, Houchmanzadeh B and Lajzerowicz J 1990 *Phys. Rev. Lett.* **65** 1352
- [15] Frisch T, Rica S, Coulet P and Gilli J M 1994 *Phys. Rev. Lett.* **72** 1471
- [16] Hagberg A and Meron E 1993 *Phys. Rev. E* **48** 705
- [17] Skryabin D V, Yulin A, Michaelis D, Firth W J, Oppo G-L, Peschel U and Lederer F 2001 *Phys. Rev. E* **64** 056618
- [18] de Valcárcel G J, Pérez-Arjona I and Roldán E 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 164101
- [19] Elphick C and Meron E 1989 *Phys. Rev. A* **40** 3226
- [20] Miles J W 1984 *J. Fluid Mech.* **148** 451
- [21] Mecozi A, Kath W L, Kumar P and Goedde C G 1994 *Opt. Lett.* **19** 2050
- [22] Oppo G L, Bambrilla M and Lugiato L A 1994 *Phys. Rev. A* **49** 2028
- [23] Lugiato L A, Oldano C, Fabre C, Giacobino E and Horowicz R J 1988 *Nuovo Cimento D* **10** 959
- [24] de Valcárcel G J, Staliunas K, Roldán E and Sánchez-Morcillo V J 1996 *Phys. Rev. A* **54** 1609
- [25] Sánchez-Morcillo V J and Staliunas K 2000 *Phys. Rev. E* **61** 7076
- [26] Staliunas K and Sánchez-Morcillo V J 1997 *Opt. Commun.* **139** 306
- [27] Pérez-Arjona I 2001 *Transicions Ising-Bloch en l'Equació Nolineal d'Schrödinger amb Decaïment i Forçament Paramètric* Universitat de València, unpublished
- [28] de Valcárcel G J, Roldán E, Espinosa V and Vilaseca R 1995 *Phys. Lett. A* **206** 359
- [29] de Valcárcel G J, Roldán E, Espinosa V and Vilaseca R 1995 *Phys. Lett. A* **209** 388 (erratum)
- [30] Redondo J, de Valcárcel G J and Roldán E 1997 *Phys. Rev. E* **56** 6589

# Squeezed quantum cavity solitons

Isabel Pérez-Arjona, Eugenio Roldán, and Germán J. de Valcárcel

*Departament d'Òptica, Universitat de València, Dr. Moliner 50, 46100-Burjassot, Spain*

## Abstract

Cavity solitons produced by a degenerate optical parametric oscillator are shown to exhibit perfect squeezing for any parameter set when probed with a suitable local oscillator field. This novel result is a direct consequence of the spatial symmetry breaking introduced by the cavity soliton and the phenomenon is thus specific to spatially extended (multi-transverse mode) optical systems.

PACS numbers: 42.50.Dv, 42.65.Sf, 42.65.Tg, 42.65.Yj

When all technical sources of noise are eliminated quantum vacuum fluctuations remain that affect any coherent radiator, like a laser. These fluctuations define the so-called standard quantum limit as they set an upper bound to the precision attainable with classical (coherent) optical techniques and can even render the latter useless in some ultra precise applications, such as the measurement of tiny displacements (e.g., in gravitational wave detection [1] or in pointing direction measurements [2]). However it is possible to break this limit with the help of quantum states of light. Squeezed states [3], displaying fluctuations below the standard quantum limit in one of the field quadratures, play a prominent role in this regard. Also, squeezed light finds applications in quantum teleportation [4], quantum cryptography and quantum communication [3]. Usually, single-mode squeezed states of the electromagnetic field are considered—single-mode optical parametric oscillators are by now routinely used as actual sources of squeezed light [3, 4]. In the last fifteen years however a new branch of quantum optics has emerged that generalizes the study of squeezing to multimode cases as well as, generically, studies the spatial aspects of the quantum fluctuations of the radiation field [5, 6]. The degenerate optical parametric oscillator (DOPO) has been already shown to display interesting spatial quantum features, such as the spatial structure of the squeezed emission below oscillation threshold [7], the concepts of quantum images [8] and quantum entangled images [9], and the twin photon emission below threshold [10]. Here we show theoretically that cavity solitons (CS)—narrow, localized structures that form across the transverse section of beams radiated by some nonlinear optical cavities [11]—generated by DOPOs are sources of perfectly squeezed light. We demonstrate that CS fluctuations are perfectly squeezed in a special transverse mode irrespectively of the parameter setting. This independence is a genuine consequence of the spatial symmetry breaking introduced by the CS, which is obviously not present in single transverse mode devices. The study of quantum fluctuations and correlations in (single pass) spatial solitons has been recently initiated [12, 13].

*Model.*—We consider the model of [14] for a DOPO with plane cavity mirrors. A plane wave coherent field of fre-

quency  $2\omega_s$  and uniform amplitude  $\mathcal{E}_{\text{in}}$  pumps the cavity and an intracavity  $\chi^{(2)}$  crystal converts pump photons into signal photons (of frequency  $\omega_s$ ) and vice versa. Only two longitudinal cavity modes, of frequencies  $\omega_0$  (pump mode) and  $\omega_1$  (signal mode), which are the closest to  $2\omega_s$  and  $\omega_s$ , respectively, are assumed to be relevant. These modes are damped at rates  $\gamma_n$  ( $n = 0, 1$ ) and losses are assumed to occur at a single cavity mirror (single-ended cavity). The intracavity field envelope operators for pump and signal modes are denoted by  $A_0(\mathbf{r}, t)$  and  $A_1(\mathbf{r}, t)$ , respectively, where  $\mathbf{r} = (x, y)$  denotes the transverse coordinates, and obey standard equal-time commutation relations  $[A_n(\mathbf{r}, t), A_m^\dagger(\mathbf{r}', t)] = \delta_{nm}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ . The master equation for the reduced density matrix of the system is given in [14]. Making use of the complex  $P$ -representation [15, 16] generalized to include the field nature of the problem [14], which sets a correspondence between quantum operators  $A_n$  and  $A_n^\dagger$ , and independent c-number fields  $\mathcal{A}_n$  and  $\mathcal{A}_n^\dagger$ , respectively, the master equation is transformed into an equivalent set of stochastic differential equations (Langevin equations) via the Fokker–Planck equation verified by the complex  $P$ -distribution (details will be given elsewhere). Here we consider the large pump detuning limit ( $|\omega_0 - 2\omega_s| \gg \gamma_0, \gamma_1, |\omega_1 - \omega_s|$ ) which allows the adiabatic elimination of the pump fields [17] as  $\mathcal{A}_0 = \gamma_1\alpha_0/g$ ,  $\mathcal{A}_0^\dagger = \gamma_1\alpha_0^\dagger/g$ ,

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \mu + i\sigma\kappa^{-2}\mathcal{A}_1^2, & \alpha_0^\dagger &= \mu - i\sigma\kappa^{-2}\mathcal{A}_1^{\dagger 2}, \\ \kappa &= \sqrt{2\gamma_1|\omega_0 - 2\omega_s|}/g, & \sigma &= \text{sign}(\omega_0 - 2\omega_s), \end{aligned}$$

where  $g$  is the (real) nonlinear coupling coefficient [18],  $\mu = g|\mathcal{E}_{\text{in}}|/\gamma_1|\omega_0 - 2\omega_s| > 0$  is the dimensionless pumping parameter (we take  $\mathcal{E}_{\text{in}} = i\sigma|\mathcal{E}_{\text{in}}|$  without loss of generality), and the remaining Langevin equations read

$$\partial_t \mathcal{A}_1(\mathbf{r}, t) = \gamma_1 (L_1 \mathcal{A}_1 + \alpha_0 \mathcal{A}_1^\dagger) + \sqrt{\gamma_1 \alpha_0} \eta, \quad (1)$$

$$\partial_t \mathcal{A}_1^\dagger(\mathbf{r}, t) = \gamma_1 (L_1^* \mathcal{A}_1^\dagger + \alpha_0^\dagger \mathcal{A}_1) + \sqrt{\gamma_1 \alpha_0^\dagger} \eta^\dagger, \quad (2)$$

where  $L_1 = -(1 + i\Delta_1) + il_1^2 \nabla^2$ ,  $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ ,  $\Delta_1 = (\omega_1 - \omega_s)/\gamma_1$  is the signal mistuning parameter,  $l_1 = c/\sqrt{2\omega_s\gamma_1}$  is the signal diffraction length ( $c$  is the speed of light in the crystal), and  $\eta$  and  $\eta^\dagger$  are independent, white Gaussian noises of zero mean and

correlations,

$$\langle \eta_i(\mathbf{r}, t) \eta_j(\mathbf{r}', t') \rangle = \delta_{ij} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t'), \quad (3)$$

$\eta_1 = \eta$ ,  $\eta_2 = \eta^+$ . When noises are ignored and  $\mathcal{A}_i^+$  is interpreted as  $\mathcal{A}_i^*$  (classical limit) Eqs. (1,2) coincide with the equations for a classical DOPO with large pump detuning [17].

*Classical cavity solitons.*—In the absence of noise Eqs. (1,2) support 2D solitary structures for  $\sigma = +1$  [19]. These are stationary radially symmetric CS of the form  $[\mathcal{A}_1^+(\mathbf{r})]^* = \mathcal{A}_1(\mathbf{r}) = \bar{\mathcal{A}}_{1,\pm}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)$ ,  $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1)$  denotes the arbitrary CS location,

$$\bar{\mathcal{A}}_{1,\pm}(\mathbf{r}) = \kappa \bar{\alpha}_{1,\pm}(r) \equiv \kappa e^{i\sigma\theta_{\pm}} \beta_{\pm} \mathcal{R}(\beta_{\pm} r / l_1), \quad (4)$$

$r = |\mathbf{r}|$ ,  $\beta_{\pm}^2 = \sigma \Delta_1 \pm \sqrt{\mu^2 - 1}$ ,  $\mu e^{i2\theta_{\pm}} = 1 \pm i\sqrt{\mu^2 - 1}$  [20], and  $\mathcal{R}(r)$  is the bell-shaped nodeless solution of [19]

$$\partial_r^2 \mathcal{R} + r^{-1} \partial_r \mathcal{R} - \mathcal{R} + \mathcal{R}^3 = 0, \quad (5)$$

verifying  $\partial_r \mathcal{R}(0) = \mathcal{R}(\infty) = 0$ . The CS  $\bar{\mathcal{A}}_{1,+}$  is stable for  $0 < \Delta_1 \lesssim 0.7$  and  $1 < \mu < \sqrt{1 + \Delta_1^2}$  [19] while  $\bar{\mathcal{A}}_{1,-}$  is always unstable. We only consider the stable CS  $\bar{\mathcal{A}}_{1,+}$  and shall refer to it simply as  $\bar{\mathcal{A}}_1$ .

*Dynamics of quantum fluctuations.*—Fluctuations around the classical CS are studied by setting

$$\mathcal{A}_1(\mathbf{r}, t) = \bar{\mathcal{A}}_1(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1(t)) + a_1(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1(t), t), \quad (6)$$

$$\mathcal{A}_1^+(\mathbf{r}, t) = \bar{\mathcal{A}}_1^*(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1(t)) + a_1^+(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1(t), t), \quad (7)$$

where the position,  $\mathbf{r}_1$ , of the classical CS is let to vary in time as the soliton movement responds diffusively to the noise due to the translation invariance of the problem (see below). This choice is necessary as we study the fluctuations  $(a_1, a_1^+)$  in the linear approximation and this requires them to be small. Upon expressing the fluctuations in vector form as  $\mathbf{a} = (a_1(\mathbf{r}, t), a_1^+(\mathbf{r}, t))^T$ , where  $T$  denotes transposition, and linearizing Eqs. (1,2) around the classical CS, the following Langevin equations for the CS quantum fluctuations are obtained:

$$-\kappa(\dot{x}_1 \mathbf{G}_x + \dot{y}_1 \mathbf{G}_y) + \partial_t \mathbf{a} = \gamma_1 \mathcal{L} \mathbf{a} + \sqrt{\gamma_1} \mathbf{f}, \quad (8)$$

where the overdot denotes  $d/dt$ ,

$$\mathbf{G}_{x(y)} = \partial_{x(y)} (\bar{\alpha}_1(r), \bar{\alpha}_1^*(r))^T \quad (9)$$

$$\mathbf{f} = \left( \sqrt{\bar{\alpha}_0} \eta(\mathbf{r}, t), \sqrt{\bar{\alpha}_0^*} \eta^+(\mathbf{r}, t) \right)^T, \quad (10)$$

$$\bar{\alpha}_0 = \mu + i\sigma \bar{\alpha}_1^2(r), \quad (11)$$

and the linear operator  $\mathcal{L}$  and its adjoint  $\mathcal{L}^\dagger$  read

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_1 & \bar{\alpha}_0 \\ \bar{\alpha}_0^* & \mathcal{L}_1^* \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L}^\dagger = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_1^* & \bar{\alpha}_0 \\ \bar{\alpha}_0^* & \mathcal{L}_1 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

where  $\mathcal{L}_1 = L_1 + 2i\sigma |\bar{\alpha}_1(r)|^2$  [21].

The spectra of  $\mathcal{L}$  and  $\mathcal{L}^\dagger$ , which we introduce as  $\mathcal{L} \mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$ ,  $\mathcal{L}^\dagger \mathbf{w}_i = \lambda_i^* \mathbf{w}_i$  [22], are clearly relevant. With the usual definition of scalar product  $\langle \mathbf{b} | \mathbf{c} \rangle \equiv \int d^2r \mathbf{b}^\dagger(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{c}(\mathbf{r})$ , the relation  $\langle \mathbf{w}_i | \mathcal{L} \mathbf{c} \rangle = \lambda_i \langle \mathbf{w}_i | \mathbf{c} \rangle$  holds. We assume that all eigenvectors are normalized as  $\langle \mathbf{w}_i | \mathbf{v}_j \rangle = \delta_{ij}$ . In general, the spectra must be computed numerically. Two properties of the discrete spectra can, however, be stated: (i)  $\mathbf{G}_{x(y)}$ , Eq. (9), are Goldstone modes as  $\mathcal{L} \mathbf{G}_{x(y)} = 0$  (we write  $\mathbf{v}_{1x(1y)} \equiv \mathbf{G}_{x(y)}$  and denote by  $\mathbf{w}_{1x(1y)}$  the associated adjoint eigenvectors:  $\mathcal{L}^\dagger \mathbf{w}_{1x(1y)} = 0$ ); (ii) For any parameter set  $\mathcal{L}^\dagger \mathbf{w}_{2x(2y)} = -2\mathbf{w}_{2x(2y)}$ , with

$$\mathbf{w}_{2x(2y)} = \partial_{x(y)} (i\bar{\alpha}_1(r), -i\bar{\alpha}_1^*(r))^T. \quad (13)$$

Property (i) is a mere consequence of the translational invariance of the problem. Property (ii) is the key for our analysis. It can be checked by direct calculation and is clearly related to the existence of Goldstone modes. Eq. (8) is solved by using the (biorthogonal) basis  $\{\mathbf{v}_i, \mathbf{w}_j\}$ , which is essential for arriving at the results we report:

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}, t) = \sum c_i(t) \mathbf{v}_i(\mathbf{r}), \quad (14)$$

where the expansion excludes the Goldstone modes as  $\mathbf{r}_1$  is to denote the position of the soliton [23]. By substituting Eq. (14) into Eq. (8) and projecting, one obtains

$$\dot{x}_1 = -\sqrt{\gamma_1} \langle \mathbf{w}_{1x} | \mathbf{f} \rangle / \kappa, \quad \dot{y}_1 = -\sqrt{\gamma_1} \langle \mathbf{w}_{1y} | \mathbf{f} \rangle / \kappa, \quad (15)$$

$$\dot{c}_i = \gamma_1 \lambda_i c_i + \sqrt{\gamma_1} \langle \mathbf{w}_i | \mathbf{f} \rangle. \quad (16)$$

*Squeezing via optical homodyning.*—Once Eq. (8) is solved a quantum property of the CS can be studied in the used linear approximation. We consider here the squeezing properties of the CS as measured in a balanced homodyne detection experiment: The outgoing quantum field  $A_{1,\text{out}}(\mathbf{r}, t)$  is combined in a beam splitter with a local oscillator field (LOF) which lies in a classical, (multimode) coherent state  $\alpha_L(\mathbf{r} - \mathbf{r}_L(t))$ —which is allowed to be dynamically shifted—of intensity much larger than  $A_{1,\text{out}}(\mathbf{r}, t)$ , and the intensity difference between the two output ports is measured [24]. The spectrum of fluctuations of this difference,  $V(\omega)$ , verifies  $V(\omega) = 1 + S(\omega)$ ,

$$S(\omega) = 2\gamma_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau e^{-i\omega\tau} \langle : \delta E_H(t + \tau) \delta E_H(t) : \rangle, \quad (17)$$

where [24]  $\delta E_H(t) = E_H(t) - \langle E_H(t) \rangle$ ,  $E_H(t) = A_H(t) + A_H^\dagger(t)$ ,  $A_H(t) = N^{-\frac{1}{2}} \int d^2r \alpha_L^*(\mathbf{r} - \mathbf{r}_L(t)) A_1(\mathbf{r}, t)$ , and  $N = \int d^2r |\alpha_L(\mathbf{r})|^2$ . When  $A_{1,\text{out}}(\mathbf{r}, t)$  is in a (multimode) coherent state  $V(\omega) = 1$  [ $S(\omega) = 0$ ], which represents the standard quantum limit. As  $V(\omega) \geq 0$  by definition,  $S(\omega_c) = -1$  signals perfect squeezing at  $\omega = \omega_c$ . In the used complex  $P$ -representation the normally ordered, time ordered expectation value in Eq. (17) is given by the stochastic correlation  $C_H(t, \tau) = \langle \delta \mathcal{E}_H(t + \tau) \delta \mathcal{E}_H(t) \rangle$  [15], where, using Eqs. (6) and (7),

$$\delta \mathcal{E}_H(t) = N^{-\frac{1}{2}} \langle \alpha_L(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}(t)) | \mathbf{a}(\mathbf{r}, t) \rangle, \quad (18)$$

$\alpha_L(\mathbf{r}) = (\alpha_L(\mathbf{r}), \alpha_L^*(\mathbf{r}))^T$  and  $\boldsymbol{\rho}(t) = \mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_L(t)$ .

*Perfect squeezing for any parameter set.*—Let us assume momentarily that we can set  $\boldsymbol{\rho} = 0$  in Eq. (18), which means that we can shift the LOF according to the soliton movement. Let us choose  $\alpha_L(\mathbf{r}) = \mathbf{w}_{2x}(\mathbf{r})$  [25]. According to Eq. (18) and using expansion (14), one has  $C_H(t, \tau) = N^{-1} \langle c_{2x}(t + \tau) c_{2x}(t) \rangle$ . Upon integrating formally Eq. (16) for  $i = 2x$ , and making use of Eqs. (10), (13), (3), (4) and (11) one easily obtains  $C_H(t, \tau) = -\frac{1}{2} \exp(-2\gamma_1 |\tau|)$ . From this result, the squeezing spectrum (17) runs:

$$S^{\text{opt}}(\omega) = -4\gamma_1^2 / (\omega^2 + 4\gamma_1^2). \quad (19)$$

As the result is independent of the CS parameters, Eq. (19) shows that the CS displays *perfect squeezing* at  $\omega = 0$  for any parameter set when probed with the appropriate LOF. This is our main result. We note that this LOF is easily realizable in principle, as it is the  $\pi/2$  phase-shifted gradient of the corresponding CS envelope. The same result holds obviously for  $\alpha_L(\mathbf{r}) = \cos \phi_0 \mathbf{w}_{2x}(\mathbf{r}) + \sin \phi_0 \mathbf{w}_{2y}(\mathbf{r})$  for any  $\phi_0$  owed to the rotational invariance of the problem.

*Influence of the soliton movement.*—In arriving to Eq. (19) we have assumed that we can use a movable LOF which exactly follows the CS movement. This could be done by tracking the movement of the companion soliton  $A_{0,\text{out}}$ , which is correlated with that of  $A_{1,\text{out}}$ , without disturbing the subharmonic soliton. The scheme could employ, e.g., a quadrant detector [2] whose output would be fed into a positioning system controlling  $\mathbf{r}_L(t)$ . However, in general, this will give rise to a time delay  $t_d$  so that  $\mathbf{r}_L(t) = \mathbf{r}_1(t - t_d)$  yielding  $\boldsymbol{\rho}(t) = \mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_1(t - t_d)$ . Making use of Eq. (15), taking into account that  $\mathbf{w}_{1x(1y)} = (w_{1x(1y)}, w_{1x(1y)}^*)^T$  (both components are complex conjugated each other as the corresponding eigenvalues  $\lambda_{1x} = \lambda_{1y} = 0$  are real), and making use of Eqs. (10) and (3), we obtain  $\langle \boldsymbol{\rho}^2(t) \rangle = Dt_d$ , where the diffusion constant  $D = 2\gamma_1 \kappa^{-2} \text{Re} \int d^2r [w_{1x}^2(\mathbf{r}) + w_{1y}^2(\mathbf{r})] [\mu - i\bar{\alpha}_1^{*2}(\mathbf{r})]$ . We note that the integrand is dimensionless and it is found numerically to be of order unity. Thus  $D \sim \gamma_1 \kappa^{-2}$  and  $\sqrt{\langle \boldsymbol{\rho}^2(t) \rangle} / \Sigma_{\text{eff}} \sim \sqrt{\gamma_1 t_d / N_1}$ , being  $N_1 \sim (\kappa l_1)^2$  the number of intracavity signal photons in one CS and  $\Sigma_{\text{eff}} \sim l_1^2$  its effective area [26]. We see that  $N_1$  acts as an inertial mass. Using realistic values for the system parameters [27] one has  $N_1 \sim 10^{12}$ . Hence  $\sqrt{\langle \boldsymbol{\rho}^2(t) \rangle} / \Sigma_{\text{eff}} \lesssim 5 \cdot 10^{-4}$  for  $t_d \lesssim 1$ ms. Thus the relative error existing between the location of the CS center and that of the LOF is negligible as compared with the CS width and one can assume  $\boldsymbol{\rho} = 0$ . Hence, to the leading order, the influence of the delay time can be ignored. Indeed, given the smallness of  $\boldsymbol{\rho}$  one is legitimated to expand Eq. (18) up to second order in  $\boldsymbol{\rho}$ . The squeezing spectrum so obtained is then given by Eq. (19) plus a correction proportional to  $\boldsymbol{\rho}^2 / \Sigma_{\text{eff}}$  (linear corrections in

$\boldsymbol{\rho}$  vanish as they involve the correlations among three Gaussian noises). This quadratic correction however is on the order of  $\langle \boldsymbol{\rho}^2(t) \rangle / \Sigma_{\text{eff}} \lesssim 3 \cdot 10^{-7}$ , which is absolutely negligible.

A related question we ask is how the squeezing properties of the soliton are modified if the LOF is kept fixed, which is a scheme simpler than the previous one. Due to the unbounded movement of the soliton, one must perform the heterodyning experiment in a short time in order to obtain significant squeezing. If we assume that at  $t = 0$  the LOF and the soliton centers are made to coincide, the mathematics are the same as in the previous case with the only difference that now  $\boldsymbol{\rho}(t) = \mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_1(0)$  and  $\sqrt{\langle \boldsymbol{\rho}^2(t) \rangle} / \Sigma_{\text{eff}} \sim \sqrt{\gamma_1 t / N_1} \sim 10^{-6} \sqrt{\gamma_1 t}$ . Then, if we limit the experiment to a sufficiently small duration  $t_H$  ( $t_H \lesssim 1$ ms for the used parameters) we can again take  $\boldsymbol{\rho} = 0$  and use  $C_H(t, \tau) = -\frac{1}{2} \exp(-2\gamma_1 |\tau|)$ . The squeezing spectrum is then given by Eq. (17) with the limits of integration being replaced by  $\mp \frac{t_H}{2}$ . The result reads as Eq. (19) plus a correction proportional to  $e^{-\gamma_1 t_H}$ , which is virtually zero. Then the obtention of almost optimal levels of squeezing is not affected in practice by the existing soliton movement. In this regard we note that this insensitivity contrasts with the issue of quantum images [8], whose squeezing properties are washed out in the near field, which is the one we are considering. This is a consequence of the strong inertia ( $\propto N_1^{1/2}$ ) that the CS movement displays against fluctuations, as compared with the below threshold emission.

*Influence of the shape and positioning of the LOF.*—Up to here we have dealt with a special LOF. However the use of a LOF with the exact form or precisest positioning is not critical as we show next. In what follows we ignore the negligible influence of the CS movement. The study is facilitated by expressing a general LOF as  $\alpha_L = \sum \alpha_i \mathbf{w}_i$ ,  $\alpha_i = \langle \alpha_L | \mathbf{v}_i \rangle$ . Eq. (18) becomes  $\delta \mathcal{E}_H(t) = N^{-1/2} \sum \alpha_i^* c_i(t)$ , and  $S(\omega) = 2\gamma_1 N^{-1} \sum_{i,j} \alpha_i^* \alpha_j S_{ij}(\omega)$ , where  $S_{ij}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau e^{-i\omega\tau} \langle c_i(t + \tau) c_j(t) \rangle$ .  $S_{ij}(\omega)$  is easily evaluated by integrating Eq. (16) and using Eq. (3) (details will be given elsewhere). In the end all we need is to compute the spectra of  $\mathcal{L}$  and  $\mathcal{L}^\dagger$ . This was done by adapting the Fourier method described in [28]. We limit here our study to the 1D case for the sake of computational economy [29]. The accuracy of the method was checked by computing  $S(\omega)$  when  $\alpha_L = \mathbf{w}_2$ , Eq. (19), yielding an error less than  $10^{-13}$ . The influence of the LOF shape was studied for a Gauss-Hermite mode of the form  $\alpha_L(x) = GH_1(x) \equiv i e^{i\theta} x e^{-\frac{1}{2}(x/\xi)^2}$ , which is similar to  $w_2$ . Fig. 1(a) shows that quite high levels of squeezing can be reached even with a non ideal LOF. The influence of a mispositioning was studied both for a LOF of the form  $w_2(x - \bar{x})$  and  $GH_1(x - \bar{x})$ . Fig. 1(b) shows that mispositionings up to 5% of the CS width yield quite good levels of squeezing.

In summary we have shown that DOPO CS are sources



of perfectly squeezed light for any parameter set. This result is a consequence of the spatial symmetry breaking introduced by the CS, which is obviously absent in single transverse mode nonlinear cavity squeezers, which only yield perfect squeezing at the bifurcation points.

This work has been supported by Spanish Ministerio de Ciencia y Tecnología and European Union FEDER (Project PB2002-04369-C04-01).

### FIGURE CAPTION

Figure 1. Squeezing level (at the labeled frequencies) displayed by the 1D CS when nonideal LOFs are used. In (a) a Gauss-Hermite LOF ( $GH_1$ ) of width  $\xi$  is used. In (b) LOFs displaced  $\bar{x}$  from the CS center are considered ( $w_2$  denotes a special LOF, see text).  $\Delta x = l_1/\beta$  denotes the CS width. Parameters are  $\sigma = +1$ ,  $\Delta_1 = 1$ ,  $\mu = 1.2$ .

---

[1] See, e.g., C. M. Mow-Lowry et al., Phys. Rev. Lett. **92**, 161102 (2004), and references therein.

[2] C. Fabre, J. B. Fouet, and A. Maître, Opt. Lett. **25**, 76 (2000); N. Treps et al., Phys. Rev. Lett. **88**, 203601 (2002); N. Treps et al., Science **301**, 940 (2003).

[3] P. D. Drummond and Z. Ficek (eds.), *Quantum Squeezing* (Springer, 2004).

[4] A. Furusawa et al., Science **282**, 706 (1998).

[5] M. I. Kolobov, Rev. Mod. Phys. **71**, 1539 (1999).

[6] L. A. Lugiato, A. Gatti, and E. Brambilla, J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. **4**, S176 (2002).

[7] L. A. Lugiato and A. Gatti, Phys. Rev. Lett. **70**, 3868 (1993).

[8] L. Lugiato and G. Grynberg, Europhys. Lett. **29**, 675 (1995).

[9] A. Gatti et al., Phys. Rev. Lett. **83**, 1763 (1999).

[10] I. Marzoli, A. Gatti, and L. A. Lugiato, Phys. Rev. Lett. **78**, 2092 (1997).

[11] W. J. Firth and C. O. Weiss, Opt. Photon. News **13**(2), 55 (2002); L. A. Lugiato, IEEE J. Quant. Electron. **39**, 193 (2003); V. B. Taranenko, C. O. Weiss, and W. Stolz, Opt. Lett. **26**, 1574 (2001); S. Barland et al., Nature **419**, 699 (2002).

[12] N. Treps and C. Fabre, Phys. Rev. A **62**, 033816 (2000).

[13] E. Lantz et al., J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. **6**, S295 (2004).

[14] A. Gatti et al., Phys. Rev. A **56**, 877 (1997).

[15] C. W. Gardiner and P. Zoller, *Quantum Noise* (Springer, 2000).

[16] P. D. Drummond and C. W. Gardiner, J. Phys. A **13**, 2353 (1980).

[17] S. Trillo, M. Haelterman, and A. Sheppard, Opt. Lett. **22**, 970 (1998); S. Longhi, Phys. Scr. **56**, 611 (1997).

[18]  $g = \left[ 3\chi^{(2)}\omega_s/2(2\pi n)^3 \right] (\hbar\omega_s/\varepsilon_0 L_z)^{1/2}$ , being  $\chi^{(2)}$  the relevant nonlinear susceptibility,  $n$  the refractive index of the crystal, and  $L_z$  the thickness of the crystal along the resonator axis.

[19] I. V. Barashenkov, N. V. Alexeeva, and E. V. Zemlyanaya, Phys. Rev. Lett. **89**, 104101 (2002).

[20] Although for the CS we are analyzing  $\sigma = +1$ , we keep the symbol  $\sigma$  for later purposes.

[21] In Eq. (8) two terms ( $\dot{x}_1\partial_x\mathbf{a}$  and  $\dot{y}_1\partial_y\mathbf{a}$ ) have been neglected as they are of second order.

[22] The index  $i$  represents symbolically both the discrete and the continuous spectra. In the latter case, Kroenecker deltas and sums should be understood as containing suitable Dirac deltas and integrals.

[23] Should the sum contain the Goldstone modes ( $c_{1x(1y)} \neq 0$ ) the terms  $\dot{c}_{1x(1y)}\mathbf{v}_{1x(1y)}$  would be added to the first term in Eq. (8) hence redefining  $x_1(y_1)$  as  $x_1(y_1) - c_{1x(1y)}/\kappa$ .

[24] A. Gatti and L. A. Lugiato, Phys. Rev. A **52**, 1675 (1995).

[25] This choice corresponds to a physically realizable LOF as the second component of  $\mathbf{w}_{2x}$  is the complex conjugate of the first one, Eq. (13), as the definition of  $\alpha_L$  requires.

[26] In the used complex  $P$ -representation, the number of intracavity signal photons that a CS contains per unit transverse area is computed from the stochastic correlation  $\mathcal{N}_1(\mathbf{r}, t) \equiv \langle \mathcal{A}_1^\dagger(\mathbf{r}, t)\mathcal{A}_1(\mathbf{r}, t) \rangle$ . When fluctuations are ignored  $\mathcal{N}_1(r) = |\bar{\mathcal{A}}_1(\mathbf{r})|^2 = \kappa^2\beta^2\mathcal{R}^2(\beta r/l_1)$ , Eq. (4). The number of intracavity signal photons in one CS is thus  $N_1 = 2\pi \int dr r \mathcal{N}_1(r)$ . The effective area of the CS is  $\Sigma_{\text{eff}} \equiv 2\pi \int dr r (\pi r^2) \mathcal{N}_1(r)/N_1$ . From Eq. (5) we obtain  $N_1 \simeq 11.70(\kappa l_1)^2$  and  $\Sigma_{\text{eff}} \simeq 3.731(l_1/\beta)^2 \sim l_1^2$  as  $\beta$  is of order unity.

[27] We take  $\chi^{(2)} = 2 \cdot 10^{-11} \text{ m} \cdot \text{V}^{-1}$ ,  $\omega_s = 1.885 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$  (corresponding to a signal wavelength of  $1\mu\text{m}$ ),  $n = 2.5$ ,  $L_z = 10^{-2} \text{ m}$ ,  $\gamma_0 = \gamma_1 = 3 \cdot 10^8 \text{ s}^{-1}$ , and  $|\omega_0 - 2\omega_s| = 10\gamma_0$ .

[28] N. V. Alexeeva, I. V. Barashenkov, and D. E. Pelinovsky, Nonlinearity **12**, 103 (1999).

[29] A DOPO with waveguide geometry is described by Eqs. (1,2) with  $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2$ . These 1D equations support classical CS both for  $\sigma = \pm 1$  of the form (4) (with  $r$  replaced by  $x$ ) with  $\mathcal{R}(x) = \sqrt{2}\text{sech}(x)$  for  $\sigma = +1$  [30] and  $\mathcal{R}(x) = \tanh(x/\sqrt{2})$  for  $\sigma = -1$  [31]. The stability properties of these CS are treated in [32, 33]. All said for 2D CS holds true for these 1D CS.

[30] J. W. Miles, J. Fluid Mech. **148**, 451 (1984).

[31] C. Elphick and E. Meron, Phys. Rev. A **40**, 3226 (1989).

[32] I. V. Barashenkov, M. M. Bogdan, and V. I. Korobov, Europhys. Lett. **15**, 113 (1991).

[33] I. V. Barashenkov, S. R. Woodford, and E. V. Zemlyanaya, Phys. Rev. Lett. **90**, 054103 (2003).

Fig. 1

