

DEPARTAMENTO DE FÍSICA APLICADA Y  
ELECTROMAGNETISMO

CARACTERIZACIÓN MODAL DE SISTEMAS GUIADORES  
INHOMOGÉNEOS: ANÁLISIS DE SUPERFICIES  
SELECTORAS DE FRECUENCIA DIELECTRICAS.

ÁNGELA COVES SOLER

UNIVERSITAT DE VALENCIA  
Servei de Publicacions  
2004

Aquesta Tesi Doctoral va ser presentada a València el dia 04 de Juny de 2004 davant un tribunal format per:

- D. Alfredo Segura Del Río
- D. Vicente E. Borja Esbert
- D<sup>a</sup>. Magdalena Salazar Palma
- D. Alejandro Álvarez Melcón
- D. Maurizio Bozzy

Va ser dirigida per:

D. Benito Gimeno Martínez

D. Miguel V. Andrés Bou

©Copyright: Servei de Publicacions  
Àngela Coves Soler

---

Depòsit legal:

I.S.B.N.:84-370-1325-9

Edita: Universitat de València  
Servei de Publicacions  
C/ Artes Gráficas, 13 bajo  
46010 València  
Spain  
Telèfon: 963864115



**UNIVERSITAT DE VALÈNCIA**

**Departamento de Física Aplicada y Electromagnetismo**

**CARACTERIZACIÓN MODAL DE SISTEMAS GUIADORES  
INHOMOGÉNEOS: ANÁLISIS DE SUPERFICIES  
SELECTORAS DE FRECUENCIA DIELECTRICAS**

**Ángela Coves Soler**

**Directores: Dr. Benito Gimeno Martínez  
Dr. Miguel V. Andrés Bou**

**Tesis Doctoral presentada en la Universitat de València  
para la obtención del título de Doctor en Física**

**Valencia, Abril 2004**



# Agradecimientos

Resulta difícil expresar mi reconocimiento a todas aquellas personas e instituciones que han colaborado en mayor o menor medida en el desarrollo de esta tesis; el trabajo de varios años ha resultado sumamente agradable con la presencia y ayuda de una larga lista de personas...

Mi primer agradecimiento es para Benito Gimeno, por ofrecerme su amistad, orientarme siempre que me encontraba perdida, y porque desde que comencé a trabajar en el departamento me hizo sentir siempre que formábamos parte de un mismo equipo. Me siento muy afortunada por tener como director a un gran investigador y a un gran amigo.

También quiero agradecer a Miguel su dedicación y el interés demostrado en estos años tanto a nivel científico como personal, con quien he compartido muchos de los problemas que he ido encontrando desde que inicié mi labor de investigación.

No me puedo olvidar del resto de los miembros (profesores, becarios y PAS) del Departamento de Física Aplicada y Electromagnetismo de la Universitat de València, con quienes he interactuado en mayor o menor medida durante la realización de esta tesis y con los que deseo mantener un contacto duradero. Siempre echaré de menos los buenos ratos del café con Lluís, Pepe, Ramón, Daniele, Ángel, Pere, Ximo, y otros muchos más. . .

Quiero expresar también mi agradecimiento a mis nuevos compañeros y amigos del Área de Teoría de la Señal y Comunicaciones de la Universidad Miguel Hernández de Elche por las diversas ayudas prestadas (como las sugerencias de Juan o las ayudas con el látex de Ángel y Germán). El buen ambiente que se ha ido creando poco a poco entre todos nosotros ha hecho que me sienta enormemente agradecida por trabajar con todos ellos. Aquí también quiero incluir a Chus, de Física Aplicada de esta universidad, con la que ha aumentado el porcentaje femenino en las citas del café de máquina.

Y por último, agradezco a mis padres, a mis hermanos, y sobre todo a Toni la infinita paciencia que han tenido conmigo, por haber sabido comprenderme y apoyarme durante la realización de la tesis.



# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación e interés del tema . . . . .	1
1.2. Revisión bibliográfica . . . . .	2
1.2.1. Espectro modal de sistemas guidores de ondas con inhomogeneidades dieléctricas . . . . .	2
1.2.2. Dispersión de ondas planas en Superficies Selectoras de Frecuencia Dieléctricas (SSFD) . . . . .	3
1.3. Estructura de la tesis . . . . .	4
<b>2. Método de las Bases Bi-Ortogonales. Método de los Momentos. Método de Adaptación Modal</b>	<b>7</b>
2.1. Introducción . . . . .	7
2.2. Método de las Bases Bi-Ortogonales . . . . .	8
2.3. Método de los Momentos . . . . .	16
2.4. Método de Adaptación Modal . . . . .	18
<b>3. Estudio de guías ópticas y guías de microondas</b>	<b>23</b>
3.1. Introducción . . . . .	23
3.2. Guías ópticas . . . . .	24
3.2.1. Fibra óptica . . . . .	24
3.2.2. Guía <i>Rib</i> . . . . .	30
3.2.3. Guía <i>Rib-ARROW</i> . . . . .	36
3.3. Guías de microondas . . . . .	44
3.3.1. Guías rectangulares cargadas con láminas dieléctricas . . . . .	44
3.3.2. Guía dieléctrica rectangular . . . . .	58
3.3.3. Guías de cristal fotónico . . . . .	61
<b>4. Superficies selectoras de frecuencia dieléctricas: espectro modal para incidencia general oblicua</b>	<b>69</b>
4.1. Introducción . . . . .	69
4.2. Espectro modal en medios dieléctricos periódicos infinitos bajo excitación 3D	70
4.3. Análisis de la convergencia . . . . .	76
4.3.1. Análisis de la convergencia para el caso de incidencia 2D . . . . .	76

4.3.2. Análisis de la convergencia para el caso de incidencia 3D . . . . .	85
4.4. Resultados . . . . .	85
<b>5. Estudio de la dispersión de ondas planas en SSFD bajo incidencia 3D</b>	<b>95</b>
5.1. Introducción . . . . .	95
5.2. Matriz de dispersión generalizada de una discontinuidad entre dos medios .	97
5.3. Estudio de una discontinuidad entre dos medios homogéneos . . . . .	98
5.4. Estudio de una discontinuidad entre un medio homogéneo y un medio periódico	102
5.5. Conexión en cascada de distintas discontinuidades que constituyen una SSFD	104
5.6. Cálculo de los coeficientes de reflexión y transmisión en potencia . . . . .	107
5.7. Análisis de la convergencia . . . . .	112
5.7.1. Análisis de la convergencia para el caso de incidencia 2D . . . . .	113
5.7.2. Análisis de la convergencia para el caso de incidencia 3D . . . . .	124
5.8. Comparación con la bibliografía . . . . .	126
<b>6. Diseño de filtros basados en SSFD</b>	<b>143</b>
6.1. Introducción . . . . .	143
6.2. Principios de los filtros en reflexión . . . . .	144
6.3. Filtros diseñados . . . . .	145
6.3.1. Filtro frecuencial con una lámina periódica . . . . .	145
6.3.2. Filtro frecuencial con varias láminas periódicas . . . . .	160
6.3.3. Filtro angular con una lámina periódica . . . . .	163
<b>7. Conclusiones</b>	<b>169</b>
7.1. Conclusiones y principales aportaciones . . . . .	169
7.1.1. Artículos en revistas de ámbito internacional . . . . .	171
7.1.2. Artículos en congresos . . . . .	172
7.2. Futuras líneas de trabajo . . . . .	173
7.3. Agradecimientos . . . . .	173
<b>APÉNDICES</b>	<b>174</b>
<b>A. Obtención de las ecuaciones de valores propios de los campos transversales</b>	<b>175</b>
<b>B. Demostración de que los operadores <math>L</math> y <math>L^\dagger</math> son adjuntos uno del otro</b>	<b>177</b>
B.1. Introducción . . . . .	177
B.2. Medios guidores confinados . . . . .	177
B.3. Medios dieléctricos periódicos sin pérdidas . . . . .	179
<b>C. Relación de biortogonalidad para medios dieléctricos periódicos sin pérdidas</b>	<b>183</b>
<b>D. Evaluación de los elementos de matriz del operador <math>L</math></b>	<b>185</b>

---

<b>E. Modos de Floquet de un medio dieléctrico homogéneo con condiciones periódicas</b>	<b>189</b>
E.1. Introducción . . . . .	189
E.2. Estructura de campos: modos Tipo-E, Tipo-H . . . . .	189
E.3. El Teorema de Floquet . . . . .	192
E.4. Modos de Floquet Tipo-E y Tipo-H . . . . .	194
<b>F. Descomposición de una onda plana linealmente polarizada en modos tipo-E y tipo-H</b>	<b>197</b>



# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Motivación e interés del tema

El objetivo general de esta tesis es doble: en primer lugar se pretende desarrollar una técnica que permita analizar el espectro modal de sistemas guidores de ondas cuyos campos viajan confinados en una cierta región del espacio, pudiendo ser sistemas guidores cerrados, como por ejemplo las guías rectangulares rellenas inhomogéneamente de dieléctrico, así como sistemas abiertos, como son las guías dieléctricas. En segundo lugar, se desea caracterizar el espectro modal y la dispersión electromagnética de estructuras planares multicapa de dieléctricos con periodicidad en una dimensión, bajo excitación de una onda plana con incidencia tridimensional, cuyos campos en este caso se extienden de forma periódica por toda la sección transversal del medio periódico. Este tipo de estructuras son conocidas como Superficies Selectoras de Frecuencia Dieléctricas (SSFD), debido al carácter selectivo de su respuesta espectral.

El origen de la tesis se enmarca dentro de las líneas de investigación iniciadas conjuntamente por miembros del Departamento de Física Aplicada y Electromagnetismo, y del Departamento de Óptica de la Universitat de València. Entre ellos se encuentran los directores de la presente tesis, Dr. Benito Gimeno y Dr. Miguel V. Andrés, en cuyo grupo de investigación me integré con motivo de la beca de colaboración obtenida en el último año de carrera. Esta tesis es una aplicación directa del Método de las Bases Bi-Ortogonales desarrollado en dicho grupo de investigación.

En este capítulo se realiza una revisión bibliográfica en la que se detallan los principales métodos existentes para obtener el espectro modal de sistemas guidores de ondas y para analizar el problema de la dispersión electromagnética en SSFD. La revisión bibliográfica hará evidente el interés científico y práctico de los sistemas que se van a analizar en la tesis en los diferentes campos del electromagnetismo, como las microondas, ondas milimétricas y submilimétricas, y en el rango de la óptica. Así mismo se justificará la elección del método modal vectorial descrito en [1], [2], [3] para la caracterización modal de sistemas guidores arbitrarios, el cual se ha tomado como punto de partida para el análisis de la dispersión electromagnética de SSFD.

## 1.2. Revisión bibliográfica

### 1.2.1. Espectro modal de sistemas guidores de ondas con inhomogeneidades dieléctricas

El análisis de sistemas guidores de ondas ha venido incrementándose en los últimos tiempos. Las guías de ondas rellenas inhomogéneamente de dieléctricos han recibido una considerable atención en las últimas décadas debido a su amplio campo de aplicación como componentes de microondas. Por otro lado, las guías dieléctricas como la fibra óptica o la guía *rib* están siendo ampliamente utilizadas en el mundo de las comunicaciones ópticas. Los modos de propagación de dichos sistemas guidores de onda con inhomogeneidades dieléctricas no son en general modos *TE* o *TM*, sino modos híbridos. En ciertos casos particulares en los que la geometría a analizar es sencilla, se puede caracterizar su comportamiento electromagnético de forma analítica [4]. Por ejemplo, el método de valor en el contorno (*boundary value method*) ha sido empleado para calcular las soluciones modales de guías rectangulares y circulares rellenas inhomogéneamente de medios dieléctricos [5], [6], [7]. En este método, el campo electromagnético es conocido de forma analítica en cada una de las regiones de la guía, y tras imponer las condiciones de contorno del campo electromagnético en cada una de las interfases, se obtiene una ecuación trascendente, cuya resolución proporciona directamente el espectro modal de la guía. Cuando la guía se rellena de dos o más dieléctricos distintos, el cálculo de las constantes de propagación y de los campos deja de ser sencillo debido a las ecuaciones trascendentes que se tienen que resolver. Por otro lado, el método de propagación de haz (*beam propagation method*) se ha utilizado para obtener las constantes de propagación y los campos de una guía *rib* [8]. Alternativamente, en [9] se ha usado un método variacional para calcular el espectro modal de guías rectangulares rellenas de diferentes dieléctricos. El método de elementos finitos ha sido utilizado para obtener el espectro modal en guías rellenas inhomogéneamente de dieléctrico [10]. Este método, aunque aplicable a cualquier sistema guidor, requiere de elevados tiempos de computación, lo cual resulta ser un inconveniente en procesos de diseño de dispositivos, en los cuales es necesario hacer un gran número de simulaciones. Además de estos métodos, también existe un conjunto de métodos modales para analizar guías inhomogéneas, en los que los modos se expanden en términos de un conjunto completo de funciones base [11],[12]. La ventaja de los métodos modales respecto a otros métodos semianalíticos tales como el método de valor en el contorno, reside en su gran versatilidad a la hora de resolver el espectro modal de una gran variedad de guías de forma rigurosa y computacionalmente eficiente. De hecho, se pueden aplicar también a guías abiertas como la fibra óptica. Por esta razón, se comenzó a desarrollar en el Departamento de Física Aplicada y Electromagnetismo y en el Departamento de Óptica de la Universitat de València un método modal vectorial denominado Método de las Bases Bi-Ortogonales [1] para el cálculo del espectro modal en sistemas guidores inhomogéneos, que consiste en resolver las ecuaciones de valores propios que cumplen las componentes transversales de los campos eléctrico y magnético en dichos medios, para lo cual se ha empleado una propiedad que satisfacen los operadores responsables de la evolución de las componentes transversales de los campos eléctrico y magnético en el medio. Este

método modal de carácter vectorial ha sido aplicado en esta tesis a la caracterización modal de diversos sistemas guidores, tanto cerrados (guías rectangulares rellenas inhomogéneamente de dieléctrico, tales como la guía imagen) como abiertos (guías dieléctricas como la fibra óptica de salto de índice o las guías de cristal fotónico).

### 1.2.2. Dispersión de ondas planas en Superficies Selectoras de Frecuencia Dieléctricas (SSFD)

Las estructuras periódicas están siendo cada vez más estudiadas y empleadas en diferentes campos como las microondas, ondas milimétricas y submilimétricas, y en el rango de la óptica, debido a sus interesantes propiedades. Así, estructuras multicapa formadas por la conexión en cascada de superficies metálicas periódicas impresas en capas dieléctricas homogéneas bajo incidencia oblicua han encontrado un amplio campo de aplicación en sistemas de comunicación por satélite como superficies selectoras de frecuencia (SSF) y antenas [13], [14], y en la fabricación de giradores de polarización [15], [16], [17] y filtros angulares [18] formados por estructuras multietapa formadas por la conexión en cascada de SSF. Por ejemplo, en [19] se estudian polarizadores circulares multicapa formados por microtiras en forma de meandro. Por otro lado, en el campo de la óptica tienen una gran aplicación las redes de difracción o "*diffraction gratings*" bajo incidencia 3D. Un ejemplo de uso de las redes de difracción es como polarizadores de varillas [20], que consisten en varillas de metal de sección rectangular, equiespaciadas y dispuestas paralelamente formando una estructura periódica en una dimensión, que pueden ser usados como separadores de polarización en láseres. Estas estructuras han sido estudiadas empleando la teoría rigurosa de la difracción. También se han estudiado ampliamente las propiedades de estructuras dieléctricas periódicas ([21], [22], [23], [24]) (conocidas como cristales fotónicos) en cuanto a la posibilidad de generar bandas fotónicas prohibidas. Por otro lado ha surgido un interés reciente en la aplicación de estructuras dieléctricas de capas delgadas que combinan el uso de capas dieléctricas homogéneas y periódicas ([25], [26], [27], [28]) que contienen una variación periódica a lo largo de alguna de las capas. A frecuencias milimétricas, dichas estructuras tienen la ventaja de poseer bajas pérdidas de absorción en comparación con superficies metálicas. Como el grosor de la capa es del orden de la longitud de onda, la cantidad de material empleado será en general pequeña a esas frecuencias. A estas estructuras se les ha dado múltiples aplicaciones, como filtros en transmisión [29] y reflexión [28], [30], acopladores [31], [32], multiplexadores [33], diodos láser con realimentación distribuida [34], hologramas [35], redes de Bragg [36], sensores ópticos [37], etc.

La respuesta en frecuencia de los dispositivos que contienen estructuras dieléctricas periódicas depende de las propiedades de los campos electromagnéticos guiados por la estructura. Estos campos se han estudiado en el contexto de varias estructuras específicas. El espectro modal en medios dieléctricos periódicos en una dimensión ha sido estudiado con diferentes métodos. En [25] se utiliza la técnica de la resonancia transversal para obtener el espectro modal de una SSFD formada por dos bloques dieléctricos en la celda elemental. El mismo método se ha aplicado en [26] a un medio periódico con cuatro dieléctricos dentro del periodo de repetición. Por otro lado, en [29] se calculan los modos en un medio periódicamente

co con dos dieléctricos empleando la teoría rigurosa de modos acoplados, que básicamente consiste en expandir los modos como una suma de funciones periódicas (dada la periodicidad del problema), y sustituir esta expresión del campo y la constante dieléctrica como función periódica en la ecuación de ondas, obteniéndose las ecuaciones de modos acoplados, cuya resolución numérica proporciona las constantes de propagación y los coeficientes de expansión de cada modo. En gran parte de los estudios previos realizados sobre la dispersión en SSFD se han analizado estructuras con ciertas limitaciones, tanto en la geometría de las mismas (en el número de materiales dieléctricos dentro del periodo de la red dieléctrica, o en el número de capas en la SSFD) como en la dirección de incidencia (hasta la fecha, no se ha encontrado prácticamente ningún resultado en la literatura técnica sobre la dispersión de ondas planas en SSFD bajo excitación tridimensional). En este trabajo se ha aplicado la teoría desarrollada para caracterizar medios guidores con simetría traslacional, basada en el Método de las Bases Bi-Ortogonales, a la caracterización del espectro modal de medios dieléctricos periódicos en una dimensión. Los resultados obtenidos con dicho método han permitido obtener de forma eficiente la respuesta en frecuencia de SSFD bajo excitación de ondas planas con incidencia tridimensional, aplicando la Técnica de Adaptación Modal, formulada con Matrices de Dispersión Generalizadas (MDG) [38]. Las SSFD analizadas son estructuras planares multicapa compuestas por un número arbitrario de capas homogéneas o periódicas en una dirección, pudiendo tener las capas periódicas un número también arbitrario de bloques dieléctricos dentro del periodo de repetición, para cualquier ángulo de incidencia. Se pueden incluir las pérdidas óhmicas de los materiales dieléctricos de forma natural en la formulación desarrollada.

### 1.3. Estructura de la tesis

La tesis se ha estructurado en 7 capítulos.

El segundo capítulo se dedica a la caracterización modal completa de sistemas guidores inhomogéneos con simetría traslacional, así como al estudio de la dispersión en problemas constituidos por uniones de dos o más regiones guidoras. En este sentido, inicialmente se describen los fundamentos teóricos en los que se basa el método modal vectorial empleado, conocido como Método de las Bases Bi-ortogonales, para la obtención del espectro modal de sistemas guidores inhomogéneos cuyos modos cumplen una relación de biortogonalidad. Por otro lado, también se describe cómo aplicar el Método de los Momentos para la obtención del espectro modal en sistemas guidores en los cuales no es posible definir una relación de biortogonalidad entre los modos. Posteriormente, se desarrollan las ecuaciones básicas del Método de Adaptación Modal para la caracterización de uniones de dos o más regiones guidoras, en cada una de las cuales es conocido el espectro modal.

En el tercer capítulo se aplica el Método de las Bases Bi-Ortogonales al análisis de diversos sistemas guidores. Se particularizan las ecuaciones descritas en el segundo capítulo al estudio de guías ópticas (la fibra óptica y las guías *rib* y *rib-arrow*) por un lado, y por

otro lado al estudio de diversas guías de microondas (como las guías rectangulares cargadas con láminas dieléctricas, la guía dieléctrica rectangular y una guía dieléctrica basada en una estructura de cristal fotónico). En todos los casos bajo estudio se presentan los resultados obtenidos con este método para la constante de propagación y para los campos electromagnéticos de los modos. Así mismo, con el fin de validar los resultados proporcionados por el Método de las Bases Bi-Ortogonales, se comparan algunos de los valores obtenidos con datos proporcionados por otros autores en la literatura técnica.

El cuarto capítulo se dedica al estudio del espectro modal de medios dieléctricos periódicos en una dimensión para excitación 3D. Dichos medios son el elemento básico del que están constituidas las SSFD. Para analizar el espectro modal en medios dieléctricos infinitos con condiciones periódicas con pérdidas no es posible emplear el Método de las Bases Bi-Ortogonales, debido a que los modos en dichos medios no cumplen una relación de biortogonalidad. Así pues, para analizar su espectro modal en este caso se emplea el Método de los Momentos, y se presentan los resultados obtenidos para la obtención de las características de propagación de los modos en este tipo de medios. De nuevo se comparan los resultados obtenidos con este método con los proporcionados por otros métodos de análisis existentes en la literatura técnica. Por otro lado, también se demuestra que para el caso particular de medios dieléctricos sin pérdidas con condiciones periódicas sí que es posible definir una relación de biortogonalidad de los modos, lo cual nos va a permitir obtener también los modos en dichos medios mediante el Método de las Bases Bi-Ortogonales.

En el quinto capítulo se aplica el Método de Adaptación Modal al estudio de discontinuidades en SSFD bajo incidencia 3D. En primer lugar se describe cómo analizar discontinuidades entre dos medios dieléctricos homogéneos, así como entre un medio homogéneo y un medio periódico en una dimensión, considerando excitación tridimensional, para lo cual se emplea el Método de Adaptación Modal descrito en el capítulo 2 y la técnica de las MDG. Finalmente, se explica cómo se obtiene la MDG global de una estructura multicapa a través de la conexión en cascada de las distintas discontinuidades que constituyen la misma, y de la cual se extraen los coeficientes de reflexión y transmisión en potencia de la estructura. También se comparan nuestros resultados con los resultados presentados por otros autores para un conjunto de SSFD.

El sexto capítulo está dedicado al diseño de filtros espectrales y angulares empleando SSFD bajo excitación de ondas planas con incidencia 3D, utilizando para ello los resultados de la técnica de las MDG descrita en el capítulo 5.

Finalmente, en el capítulo séptimo se resumen y se extraen las conclusiones más importantes de la tesis y se apuntan diversas líneas de investigación futuras.

En este punto queremos comentar que todos los programas desarrollados en esta tesis se han escrito en FORTRAN usando el compilador COMPAQ VISUAL FORTRAN Profesional Edition 6.6.0, y se han ejecutado en un Pentium@2.4GHz con 512 MB de memoria RAM.



## Capítulo 2

# Método de las Bases Bi-Ortogonales. Método de los Momentos. Método de Adaptación Modal

### 2.1. Introducción

En este capítulo se pretende desarrollar una técnica que permita analizar el espectro modal en sistemas guidores de ondas con simetría traslacional. Ello permitirá caracterizar electromagnéticamente problemas constituidos por uniones de 2 o más sistemas guidores arbitrarios, en cada uno de los cuales existe un conjunto bien definido de modos. En este capítulo se describe un nuevo método de análisis de sistemas guidores de ondas con simetría traslacional, conocido como Método de las Bases Bi-Ortogonales, basado en unas ecuaciones de valores propios que cumplen las componentes transversales de los campos eléctrico y magnético en dichos medios, así como en una propiedad que satisfacen los operadores responsables de la evolución de dichos campos transversales. Esta propiedad da lugar a que los modos en dichos medios satisfagan una relación de biortogonalidad. Mediante este método se pueden analizar sistemas guidores confinados (cuyos campos sean nulos en el infinito) con simetría traslacional tanto cerrados (p.ej. guía imagen, que es una guía blindada) como abiertos (p.ej. fibra óptica de salto de índice, que es una guía dieléctrica abierta), en ambos casos rellenos inhomogéneamente de dieléctricos, con o sin pérdidas. Además, a la hora de analizar medios dieléctricos periódicos sin pérdidas bajo excitación tridimensional de ondas planas, que son los medios constituyentes de las Superficies Selectoras de Frecuencia Dieléctricas (SSFD), se demostrará que es posible utilizar el Método de las Bases Bi-Ortogonales para obtener el espectro modal en dichos medios, de forma que en medios dieléctricos periódicos sin pérdidas, los modos que se obtienen también cumplirán una relación de biortogonalidad. No obstante, para analizar el espectro modal en medios dieléctricos periódicos con pérdidas, no se puede emplear el Método de las Bases Bi-Ortogonales, debido a que no es posible definir una relación de biortogonalidad para los modos en este tipo de medios cuando hay pérdidas. Así, para obtener el espectro modal en medios dieléctricos con pérdidas con condiciones periódicas, se resolverá la ecuación de valores propios que

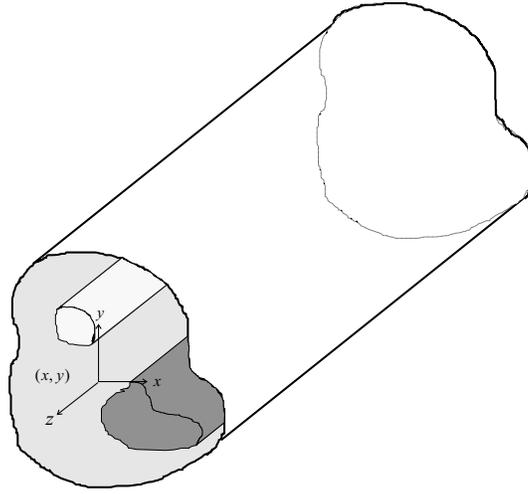


Figura 2.1: Esquema de un sistema guiador arbitrario con simetría traslacional.

satisface el campo magnético transversal en dichos medios (en la cual se pueden incluir las pérdidas óhmicas de los materiales dieléctricos), empleando para ello el Método de los Momentos [39]. Todos los medios guidores bajo estudio poseen invariancia traslacional a lo largo de la dirección de propagación. Tanto el Método de las Bases Bi-Ortogonales como el Método de los Momentos utilizados en esta tesis permiten obtener, de forma eficiente y con un bajo coste computacional los modos del problema a estudiar como una combinación lineal de modos de otro problema auxiliar cuyo espectro modal es conocido. Por último, en este capítulo se describirán los fundamentos del Método de Adaptación Modal para la obtención de la Matriz de Dispersión Generalizada (MDG) en la unión de dos regiones en las cuales el espectro modal es conocido.

## 2.2. Método de las Bases Bi-Ortogonales

El Método de las Bases Bi-Ortogonales es un método modal vectorial que va a permitir describir la propagación del campo electromagnético en sistemas guidores arbitrarios con inhomogeneidades dieléctricas [1], [40]. En este método se toma como punto de partida las ecuaciones de Maxwell para un medio con simetría traslacional en la dirección de propagación, que se ha elegido como la del eje  $Z$  (ver el esquema de la figura 2.1). Dicho medio vendrá definido por su permitividad dieléctrica compleja  $\varepsilon(x, y) = \varepsilon_0 \varepsilon_r(x, y)$ , y podrá estar blindado o no blindado mediante paredes metálicas. Los medios considerados se supondrán no magnéticos ( $\mu = \mu_0$ ). Además, se ha supuesto una variación temporal armónica de la forma  $e^{j\omega t}$  para los campos, que se omitirá en toda la memoria. Así, los campos en ese medio se pueden obtener como una superposición de campos con dependencia armónica explícita

con  $z$  de la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x, y, z) &= \sum_n [(\mathbf{e}_n(x, y) + e_{zn}(x, y) \hat{\mathbf{z}}) \exp(\mp j\beta_n z)] \\ \mathbf{H}(x, y, z) &= \sum_n [(\mathbf{h}_n(x, y) + h_{zn}(x, y) \hat{\mathbf{z}}) \exp(\mp j\beta_n z)] \end{aligned} \quad (2.1)$$

para modos que se propagan en la dirección  $\pm Z$ , donde  $\beta_n$  es la constante de propagación del  $n$ -ésimo modo,  $\{\mathbf{e}_n, \mathbf{h}_n\}$  representan las componentes de los campos eléctrico y magnético transversales a la dirección de propagación, respectivamente, y  $e_{zn}, h_{zn}$  son las componentes en la dirección  $Z$  de cada modo. Las componentes transversales de los campos eléctrico y magnético, cuando no hay fuentes presentes en el medio guizador, satisfacen las siguientes ecuaciones diferenciales de valores propios [1], [3] (ver el apéndice A)

$$\left[ \nabla_t^2 + k_0^2 \varepsilon_r + \left( \frac{\nabla_t \varepsilon_r}{\varepsilon_r} \right) \times (\nabla_t \times \circ) \right] \mathbf{h}_n = \beta_n^2 \mathbf{h}_n \quad (2.2)$$

$$\left[ \nabla_t^2 + k_0^2 \varepsilon_r + \nabla_t \left\{ \left( \frac{\nabla_t \varepsilon_r}{\varepsilon_r} \right) \cdot \circ \right\} \right] \mathbf{e}_n = \beta_n^2 \mathbf{e}_n, \quad (2.3)$$

que son ecuaciones de ondas vectoriales, siendo  $\nabla_t$  el operador gradiente transversal, y  $k_0$  el número de ondas en el espacio libre ( $k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$ ). Para nuestros propósitos, es más interesante reescribir las ecuaciones (2.2) y (2.3) como un par de ecuaciones de valores propios para los operadores diferenciales  $L$  y  $L'$ ,

$$L\mathbf{h}_n = \beta_n^2 \mathbf{h}_n \quad L'\mathbf{e}_n = \beta_n^2 \mathbf{e}_n, \quad (2.4)$$

siendo  $L$  y  $L'$  los operadores diferenciales que gobiernan la evolución de las componentes transversales de los campos a lo largo del eje  $Z$ , que vienen dados por las siguientes expresiones:

$$L \equiv \nabla_t^2 + k_0^2 \varepsilon_r + \left( \frac{\nabla_t \varepsilon_r}{\varepsilon_r} \right) \times (\nabla_t \times \circ) \quad (2.5)$$

$$L' \equiv \nabla_t^2 + k_0^2 \varepsilon_r + \nabla_t \left\{ \left( \frac{\nabla_t \varepsilon_r}{\varepsilon_r} \right) \cdot \circ \right\} \quad (2.6)$$

donde  $\mathbf{h}_n$  y  $\mathbf{e}_n$  son los autovectores de los operadores  $L$  y  $L'$ , respectivamente y  $\beta_n^2$  sus autovalores. Diagonalizando cualquiera de estos dos operadores vectoriales, junto con las condiciones de frontera adecuadas y las ligaduras que imponen las ecuaciones de Maxwell entre las componentes del campo, se obtiene la solución completa del problema.

El Método de las Bases Bi-Ortogonales se basa en una propiedad satisfecha por los vectores propios  $\theta_m$  de un operador  $A$  y los vectores propios  $\chi_n$  de su operador adjunto  $A^\dagger$ , es decir, los vectores que satisfacen las ecuaciones de valores propios

$$A\theta_n = \alpha_n \theta_n \quad A^\dagger \chi_m = \alpha_m^* \chi_m \quad (2.7)$$

donde  $\alpha_n$  y  $\alpha_m^*$  son los correspondientes autovalores. Esta propiedad establece que ambos conjuntos de autovectores cumplen una relación de *biortogonalidad* [41] de la forma

$$\langle \chi_m | \theta_n \rangle = \delta_{mn} \quad (2.8)$$

donde  $\langle | \rangle$  es el producto escalar ordinario en el espacio de Hilbert de las funciones complejas de cuadrado integrable en  $\mathcal{R}^2$ ,  $\mathcal{L}^2(\mathcal{R}^2, \mathcal{C})$ , definido como:

$$\langle \chi_m | \theta_n \rangle = \int_S \chi_m^* \theta_n dS . \quad (2.9)$$

Los valores propios de cada uno de estos dos operadores resultan ser conjugados, uno a uno, de los del otro. Si se reescribe la ecuación (2.3) adecuadamente, en términos de un nuevo campo eléctrico transversal definido como  $\bar{\mathbf{e}}_m = (-e_{ym}^*, e_{xm}^*)$ , se puede obtener el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$L\mathbf{h}_n = \beta_n^2 \mathbf{h}_n \quad L^\dagger \bar{\mathbf{e}}_m = (\beta_m^2)^* \bar{\mathbf{e}}_m \quad (2.10)$$

donde el operador  $L^\dagger$  que actúa sobre el campo  $\bar{\mathbf{e}}_m$  resulta ser:

$$L^\dagger = \nabla_t^2 + k_0^2 \epsilon_r^* + \hat{\mathbf{z}} \times \left\{ \nabla_t \left[ \hat{\mathbf{z}} \cdot \left( \frac{\nabla_t \epsilon_r^*}{\epsilon_r^*} \times \circ \right) \right] \right\} . \quad (2.11)$$

En el caso de sistemas guidores confinados, cuyos campos transversales  $\mathbf{h}_n$  y  $\bar{\mathbf{e}}_m$  sean nulos en el infinito, se puede demostrar que los operadores que rigen la evolución de dichos campos transversales  $\mathbf{h}_n$  y  $\bar{\mathbf{e}}_m$  son adjuntos uno del otro (ver el apéndice B), es decir,

$$\langle L^\dagger \bar{\mathbf{e}}_m | \mathbf{h}_n \rangle = \langle \bar{\mathbf{e}}_m | L \mathbf{h}_n \rangle . \quad (2.12)$$

Por lo tanto, sus vectores propios satisfacen una relación de biortogonalidad (ec. (2.8)) de la forma:

$$\langle \bar{\mathbf{e}}_m | \mathbf{h}_n \rangle = \delta_{mn} \quad (2.13)$$

que es válida para medios guidores confinados con o sin pérdidas.

Si se restaura la notación tridimensional original, se ve inmediatamente que esta propiedad es la relación satisfecha por los campos electromagnéticos conocida habitualmente como relación de 'ortogonalidad' [4],

$$\langle \bar{\mathbf{e}}_m | \mathbf{h}_n \rangle = \int_{CS} (\bar{\mathbf{e}}_m^* \cdot \mathbf{h}_n) dS = \int_{CS} (\mathbf{e}_m \times \mathbf{h}_n) \cdot \hat{\mathbf{z}} dS = \delta_{mn} \quad (2.14)$$

donde  $CS$  es la sección transversal de la guía, siendo esta relación válida para el caso general de medios guidores confinados con dieléctricos incluyendo las pérdidas.

Así mismo, en el caso particular de medios dieléctricos periódicos infinitos sin pérdidas, cuyos campos se extienden de forma periódica hasta el infinito, se demuestra que si se reescribe la ecuación (2.3) en este caso en términos del complejo conjugado del campo eléctrico

transversal definido anteriormente, es decir, en términos de un nuevo campo definido como  $\bar{\bar{\mathbf{e}}}_m = (-e_{ym}, e_{xm})$ , se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$L\mathbf{h}_n = \beta_n^2 \mathbf{h}_n \quad L^\dagger \bar{\bar{\mathbf{e}}}_m = (\beta_m^2)^* \bar{\bar{\mathbf{e}}}_m, \quad (2.15)$$

donde se ha tenido en cuenta que se trata de un medio sin pérdidas, siendo  $(L^\dagger)^* = L^\dagger$  (ver (2.11)), y  $\beta_m^2 = (\beta_m^2)^*$ . Así, en este caso también es posible demostrar que los operadores que rigen la evolución de los campos transversales  $\mathbf{h}_n$  y  $\bar{\bar{\mathbf{e}}}_m$  en medios dieléctricos periódicos sin pérdidas son también adjuntos uno del otro (ver el apéndice B), es decir,

$$\langle L^\dagger \bar{\bar{\mathbf{e}}}_m | \mathbf{h}_n \rangle = \langle \bar{\bar{\mathbf{e}}}_m | L \mathbf{h}_n \rangle. \quad (2.16)$$

Por lo tanto, sus vectores propios también deben satisfacer en este caso una relación de biortogonalidad (ec. (2.8)) de la forma:

$$\langle \bar{\bar{\mathbf{e}}}_m | \mathbf{h}_n \rangle = \int_{CS} (\bar{\bar{\mathbf{e}}}_m^* \cdot \mathbf{h}_n) dS = \int_{CS} (\mathbf{e}_m^* \times \mathbf{h}_n) \cdot \hat{\mathbf{z}} dS = \delta_{mn} \quad (2.17)$$

donde CS es la sección transversal de la celda periódica unidad. Esta relación de biortogonalidad satisfecha por los campos se demuestra en el apéndice C.

La relación de biortogonalidad que satisfacen los modos, (2.13), (2.17), nos permite expandir cualquier función vectorial  $\mathbf{f}$  en términos de los autovectores del operador  $L$ ,  $\mathbf{h}_n$ , o en términos de los de su operador adjunto  $L^\dagger$ ,  $\bar{\bar{\mathbf{e}}}_m$  (o  $\bar{\bar{\mathbf{e}}}_m$ ) puesto que forman una base bi-ortogonal. En lo que sigue hemos desarrollado la formulación para  $\bar{\bar{\mathbf{e}}}_m$ , pero debemos entender que los mismos pasos podrían seguirse para  $\bar{\bar{\mathbf{e}}}_m$  salvo cuando de forma explícita se indique. Así pues, escribiremos

$$\mathbf{f} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathbf{h}_n = \sum_{m=1}^{\infty} d_m \bar{\bar{\mathbf{e}}}_m, \quad (2.18)$$

donde  $c_n$  y  $d_m$  son los coeficientes complejos de la expansión modal de los campos transversales y que vienen dados por los productos internos  $c_n = \langle \bar{\bar{\mathbf{e}}}_n | \mathbf{f} \rangle$  y  $d_m = \langle \mathbf{f} | \mathbf{h}_m \rangle$ .

Una vez que se ha mostrado la relación entre las propiedades de los operadores  $L$  y  $L^\dagger$  definidos anteriormente y las ecuaciones de ondas vectoriales del campo electromagnético en sistemas guadores con simetría traslacional, es posible representar las ecuaciones (2.2) y (2.3) en forma matricial si se define un problema auxiliar (denotado con  $\tilde{\sim}$ ) como el de una guía caracterizada por una permitividad dieléctrica relativa  $\tilde{\epsilon}_{rb}$  de la cual conocemos sus vectores propios,  $\tilde{\mathbf{h}}_q$  y  $\tilde{\mathbf{e}}_p$ , y sus respectivas constantes de propagación  $\tilde{\beta}_p$ . Las ecuaciones que describen el problema auxiliar son, pues,

$$\tilde{L} \tilde{\mathbf{h}}_q = \tilde{\beta}_q^2 \tilde{\mathbf{h}}_q \quad \tilde{L}^\dagger \tilde{\mathbf{e}}_p = (\tilde{\beta}_p^2)^* \tilde{\mathbf{e}}_p \quad (2.19)$$

y, por tanto, el conjunto de sus vectores propios  $\tilde{\mathbf{h}}_q$  y  $\tilde{\mathbf{e}}_p$ , forman una base bi-ortogonal. Como ya se ha dicho, estos modos pueden utilizarse para representar matricialmente cualquier operador lineal que actúe sobre funciones de nuestro espacio de Hilbert, y, en particular, el

operador  $L$ . Es decir, expandiendo los vectores propios de  $L$  y  $L^\dagger$  en términos de los vectores propios de  $\tilde{L}$  y  $\tilde{L}^\dagger$ , tendremos

$$\mathbf{h}_n = \sum_{q=1}^{\infty} c_{qn} \tilde{\mathbf{h}}_q, \quad \bar{\mathbf{e}}_m = \sum_{p=1}^{\infty} d_{pm} \bar{\tilde{\mathbf{e}}}_p. \quad (2.20)$$

Aunque la expansión es formalmente infinita, desde un punto de vista computacional tendremos que truncar dicha expansión a un número finito  $N$  de funciones base. Introduciendo (2.20) en (2.10), y teniendo en cuenta que los operadores  $L$  y  $L^\dagger$  son lineales, tendremos que:

$$L\mathbf{h}_n = L \sum_{q=1}^N c_{qn} \tilde{\mathbf{h}}_q = \sum_{q=1}^N c_{qn} L\tilde{\mathbf{h}}_q = \beta_n^2 \sum_{q=1}^N c_{qn} \tilde{\mathbf{h}}_q \quad (2.21)$$

$$L^\dagger \bar{\mathbf{e}}_m = L^\dagger \sum_{p=1}^N d_{pm} \bar{\tilde{\mathbf{e}}}_p = \sum_{p=1}^N d_{pm} L^\dagger \bar{\tilde{\mathbf{e}}}_p = (\beta_m^2)^* \sum_{p=1}^N d_{pm} \bar{\tilde{\mathbf{e}}}_p. \quad (2.22)$$

El siguiente paso consiste en proyectar las funciones  $\bar{\tilde{\mathbf{e}}}_p$  sobre la ecuación (2.21), y proyectar las funciones  $\tilde{\mathbf{h}}_q$  sobre la ecuación (2.22), con lo que resultará que:

$$\sum_{q=1}^N \langle \bar{\tilde{\mathbf{e}}}_p | L\tilde{\mathbf{h}}_q \rangle c_{qn} = \sum_{q=1}^N L_{pq} c_{qn} = \beta_n^2 \sum_{q=1}^N c_{qn} \langle \bar{\tilde{\mathbf{e}}}_p | \tilde{\mathbf{h}}_q \rangle = \beta_n^2 c_{pn} \quad (2.23)$$

$$\sum_{p=1}^N \langle \tilde{\mathbf{h}}_q | L^\dagger \bar{\tilde{\mathbf{e}}}_p \rangle d_{pm} = \sum_{p=1}^N L_{qp}^\dagger d_{pm} = (\beta_m^2)^* \sum_{p=1}^N d_{pm} \langle \tilde{\mathbf{h}}_q | \bar{\tilde{\mathbf{e}}}_p \rangle = (\beta_m^2)^* d_{qm} \quad (2.24)$$

donde se ha hecho uso de la linealidad del producto escalar y de la relación de biortogonalidad de los modos del sistema auxiliar (2.13), siendo

$$L_{pq} = \langle \bar{\tilde{\mathbf{e}}}_p | L\tilde{\mathbf{h}}_q \rangle \quad L_{qp}^\dagger = \langle \tilde{\mathbf{h}}_q | L^\dagger \bar{\tilde{\mathbf{e}}}_p \rangle \quad (2.25)$$

los elementos de matriz de los operadores  $L$  y  $L^\dagger$  en la base  $\{\bar{\tilde{\mathbf{e}}}_p, \tilde{\mathbf{h}}_q\}$ , respectivamente.

Así, las ecuaciones anteriores quedan de la siguiente forma:

$$\sum_{q=1}^N L_{pq} c_{qn} = \beta_n^2 c_{pn} \quad (2.26)$$

$$\sum_{p=1}^N L_{qp}^\dagger d_{pm} = (\beta_m^2)^* d_{qm} \quad (2.27)$$

que son las ecuaciones matriciales lineales de autovalores que buscábamos. Si llamamos  $\underline{L}$  y  $\underline{L}^\dagger$  a la representación matricial de los operadores  $L$  y  $L^\dagger$ , que son matrices de dimensiones  $(N \times N)$ , donde recordemos que  $N$  era el número de funciones base que tomábamos en la expansión de los modos del problema real, y por otro lado definimos los vectores columna

de coeficientes:  $\underline{C}^{(n)} (= c_{pn})$  y  $\underline{D}^{(m)} = (d_{qm})$  de dimensiones  $(N \times 1)$ , las ecuaciones (2.26) y (2.27) se pueden expresar como:

$$\underline{L} \underline{C}^{(n)} = \beta_n^2 \underline{C}^{(n)} \quad (2.28)$$

$$\underline{L}^\dagger \underline{D}^{(m)} = (\beta_m^2)^* \underline{D}^{(m)}. \quad (2.29)$$

La diagonalización numérica de la ecuación (2.28) proporcionará los valores propios  $\beta_n^2$  y los vectores propios  $\{\mathbf{h}_n\}$ . Por otro lado, la diagonalización numérica de la ecuación (2.29) proporciona también los valores propios  $(\beta_m^2)^*$  y los vectores propios  $\{\bar{\mathbf{e}}_m\}$ , que están directamente relacionados con el campo eléctrico  $\{\mathbf{e}_m\}$ . Sin embargo, en el caso más general, ésta no es la manera más eficiente de calcular el campo eléctrico, ya que cuando se incluyen muchos modos de la base auxiliar en las expansiones modales, las matrices a diagonalizar pueden alcanzar dimensiones considerables, y su diagonalización conlleva un elevado coste computacional. No obstante, es posible obtener el campo eléctrico transversal de los modos relacionándolo con el campo magnético transversal a partir de las ligaduras entre las componentes de los campos derivadas de las ecuaciones de Maxwell, como se verá más adelante.

Así, nos vamos a limitar a resolver la ecuación (2.28). A la hora de obtener los elementos de la matriz  $\underline{L}$  descompondremos, por simplicidad de cálculo, el operador  $L$  como suma de dos términos,

$$L = \tilde{L} + \Delta \quad (2.30)$$

donde  $\tilde{L}$  es el operador que describe el problema auxiliar, y  $\Delta$  es

$$\Delta \equiv k_0^2(\varepsilon_r - \tilde{\varepsilon}_r) + \left( \frac{\nabla_t \varepsilon_r}{\varepsilon_r} \right) \times (\nabla_t \times \circ). \quad (2.31)$$

Así, cada elemento  $L_{pq}$  se calculará por medio de la siguiente expresión:

$$L_{pq} = \langle \bar{\mathbf{e}}_p | L \tilde{\mathbf{h}}_q \rangle = \langle \bar{\mathbf{e}}_p | (\tilde{L} + \Delta) \tilde{\mathbf{h}}_q \rangle = \langle \bar{\mathbf{e}}_p | \tilde{L} \tilde{\mathbf{h}}_q \rangle + \langle \bar{\mathbf{e}}_p | \Delta \tilde{\mathbf{h}}_q \rangle = \tilde{\beta}_q^2 \delta_{pq} + \langle \bar{\mathbf{e}}_p | \Delta \tilde{\mathbf{h}}_q \rangle \quad (2.32)$$

donde de nuevo se ha hecho uso de la relación de biortogonalidad (2.13) de los modos del problema auxiliar,

$$\langle \bar{\mathbf{e}}_p | \tilde{L} \tilde{\mathbf{h}}_q \rangle = \langle \bar{\mathbf{e}}_p | \tilde{\beta}_q^2 \tilde{\mathbf{h}}_q \rangle = \tilde{\beta}_q^2 \langle \bar{\mathbf{e}}_p | \tilde{\mathbf{h}}_q \rangle = \tilde{\beta}_q^2 \delta_{pq}. \quad (2.33)$$

Por tanto, nos queda resolver numéricamente la ecuación matricial lineal (2.28) de valores propios. Para un cierto número  $N$  de funciones base auxiliares necesarias para expandir los modos del problema real, la diagonalización numérica del sistema proporcionará  $N$  autovalores y la correspondiente matriz  $(N \times N)$  de autovectores, es decir, una matriz con  $N$  vectores columna de autovectores, cada uno de los cuales estará integrado por  $N$  coeficientes (coeficientes  $c_{pn}$  de la expansión). En nuestro caso, los autovalores serán directamente las constantes de propagación al cuadrado del  $n$ -ésimo modo,  $\beta_n^2$ . Para cada problema a analizar, el número  $N$  de funciones base auxiliares empleadas en la expansión modal será un parámetro a elegir en cada caso, y se determinará mediante un análisis numérico de convergencia. Desafortunadamente, no hay ninguna condición general que garantice la convergencia de las expansiones. Dicha convergencia dependerá por un lado de la naturaleza del

operador  $L$ , y por otro lado del problema auxiliar elegido para definir la base biortogonal. En general, se observa que los modos del problema real están mejor calculados cuanto mayor sea el número de modos auxiliares utilizados. De la misma forma, los sistemas auxiliares que pueden reproducir las características más importantes del problema real (con condiciones de contorno lo más parecidas posible) proporcionan una convergencia más rápida. En cualquier caso, se deberán realizar pruebas de convergencia variando el número de modos auxiliares en rangos significativos y estudiando la estabilidad de las soluciones obtenidas. También hay que comentar que a la hora de calcular la matriz  $\underline{L}$ , conviene ordenar los modos de la base auxiliar a utilizar poniendo en primer lugar los modos propagativos (ordenados de mayor a menor  $|\beta_n|$ ), y después los modos evanescentes (ordenados de menor a mayor  $|\beta_n|$ ), puesto que estamos interesados en obtener la porción más significativa del espectro modal del problema a analizar a la frecuencia de trabajo considerada, que obviamente serán los modos propagativos y los modos "menos" evanescentes.

Desde un punto de vista computacional, este método es muy eficiente debido a que las integrales que aparecen envueltas en el cálculo de los elementos de matriz del operador  $L$  son, en general, independientes de la frecuencia. Así, estas integrales tienen que ser evaluadas una única vez para poder obtener las curvas de dispersión de los modos.

Como ya se ha mencionado anteriormente, el resultado que proporciona la resolución numérica de la ecuación matricial lineal (2.28) de valores propios son las constantes de propagación (autovalores) y el campo magnético transversal (autovectores) de cada modo. En los problemas habituales es necesario conocer también el campo eléctrico. El campo eléctrico transversal se puede obtener por tres procedimientos distintos. En primer lugar, con esta forma de abordar el problema, y dado que la solución es una superposición lineal de los modos auxiliares, podemos asegurar que los modos del sistema problema satisfacen las ligaduras entre componentes de los campos derivadas de las ecuaciones de Maxwell. De esta forma, el campo eléctrico transversal  $\mathbf{e}_n$  del modo  $n$ -ésimo en el medio guiador bajo estudio se podrá obtener a partir del campo magnético transversal  $\mathbf{h}_n$ , que como sabemos, se ha obtenido como una suma de modos del sistema auxiliar. Así, es fácil ver que se puede deducir la relación entre las componentes transversales de ambos campos a partir de dos de las ecuaciones de Maxwell, introduciendo en ellas la descomposición de los campos descrita en la ecuación (2.1), de la siguiente forma:

$$\text{Ley de Ampère generalizada: } \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \Rightarrow \begin{cases} \nabla_t \times \mathbf{h}_n = j\omega\epsilon e_{zn} \hat{\mathbf{z}} \\ \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_t h_{zn} + j\beta \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{h}_n = j\omega\epsilon \mathbf{e}_n \end{cases} \quad (2.34)$$

$$\text{Ley de Gauss para } \mathbf{B}: \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \nabla_t \cdot \mathbf{h}_n = j\beta h_{zn} - \mathbf{h}_n \cdot \frac{\nabla_t \mu}{\mu}. \quad (2.35)$$

Teniendo en cuenta que el medio bajo estudio no tiene propiedades magnéticas, se cancelará el último término en la ecuación (2.35), obteniendo,

$$\nabla_t h_{zn} = \nabla_t \left( \frac{\nabla_t \cdot \mathbf{h}_n}{j\beta} \right). \quad (2.36)$$

Finalmente, sustituyendo (2.36) en la segunda ecuación de (2.34), y despejando  $\mathbf{e}_n$  se llega

a la siguiente expresión:

$$\mathbf{e}_n = \frac{j}{\omega \varepsilon} \hat{\mathbf{z}} \times \left[ \frac{1}{j\beta_n} \nabla_t [\nabla_t \cdot \mathbf{h}_n] + j\beta_n \mathbf{h}_n \right] \quad (2.37)$$

donde

$$\mathbf{h}_n = \sum_{q=1}^N c_{qn} \tilde{\mathbf{h}}_q . \quad (2.38)$$

En segundo lugar, también puede calcularse el campo eléctrico modificado  $\bar{\mathbf{e}}_n$  aprovechando que es biortogonal a  $\mathbf{h}_n$ , y obtener el campo eléctrico transversal  $\mathbf{e}_n$  a partir de éste, que en sistemas guíados confinados se obtendrá como  $(e_{xn}, e_{yn}) = (\bar{e}_{yn}^*, -\bar{e}_{xn}^*)$ , mientras que para medios dieléctricos periódicos sin pérdidas, se obtiene como  $(e_{xn}, e_{yn}) = (\bar{e}_{yn}, -\bar{e}_{xn})$ . Si desarrollamos la relación de biortogonalidad satisfecha por estos campos,  $\langle \bar{\mathbf{e}}_m | \mathbf{h}_n \rangle = \delta_{mn}$ , en términos de los campos auxiliares,  $\tilde{\mathbf{e}}_p$  y  $\tilde{\mathbf{h}}_q$ , que también son biortogonales, se obtiene, haciendo uso de (2.20), que

$$\langle \bar{\mathbf{e}}_m | \mathbf{h}_n \rangle = \sum_{pq} d_{pm}^* c_{qn} , \quad (2.39)$$

o lo que es lo mismo, que las matrices formadas por los coeficientes de los vectores propios de  $L$  y  $L^\dagger$ ,  $\underline{\underline{C}}$  y  $\underline{\underline{D}}$ , están ligadas por la relación

$$\underline{\underline{D}}^{*T} = \underline{\underline{C}}^{-1} . \quad (2.40)$$

En tercer lugar, otra forma de calcular el campo  $\bar{\mathbf{e}}_n$  es utilizar el hecho de que la representación matricial de  $L^\dagger$  es, como matriz, la *adjunta* de la de  $L$ , esto es,

$$(\underline{\underline{L}}^\dagger) = (\underline{\underline{L}}^*)^T , \quad (2.41)$$

por lo que no es necesario calcular las integrales para obtener los elementos de la matriz adjunta. La diagonalización de la ec. (2.29) proporciona la constante de propagación de cada modo  $n$  al cuadrado conjugada  $(\beta_n^2)^*$ , y su campo eléctrico transversal  $\bar{\mathbf{e}}_n$ .

Desde el punto de vista de la convergencia de las soluciones, el empleo de las ecs. (2.40) o (2.41) para la obtención del campo eléctrico transversal en la estructura guíadora proporcionará soluciones más rápidamente convergentes que el uso de las ecuaciones de Maxwell, ya que en (2.37) aparece la permitividad relativa de la guía, la cual, en el caso más general, es una función discontinua. Sin embargo, las componentes de campo eléctrico tangentes a una discontinuidad dieléctrica deben ser funciones continuas en la discontinuidad. Este hecho conlleva problemas de convergencia de las soluciones obtenidas empleando (2.37) para las componentes de campo eléctrico tangentes a las discontinuidades. Por otro lado, desde un punto de vista computacional, el empleo de las ecuaciones (2.40) o (2.41) conlleva la inversión o diagonalización de una matriz de dimensiones  $(N \times N)$ ; cuando el número  $N$  de modos de la base auxiliar necesarios para alcanzar una cierta convergencia es elevado, el tiempo de computación empleado en la inversión o diagonalización de esa matriz puede

crecer enormemente. Así mismo, el campo eléctrico y magnético transversal de los modos calculados diagonalizando (2.28) y empleando las ecs. (2.40) o (2.41), aun siendo biortogonales, no satisfacen exactamente las ecuaciones de Maxwell al quedar indeterminada una constante entre ambos campos por cada modo. Para determinar esta constante, basta con calcular explícitamente alguna de las componentes del campo eléctrico transversal a través de la ec. (2.37). Por tanto, a la hora de obtener el campo eléctrico transversal en las guías bajo estudio, se hará un estudio detallado de todos estos factores en cada caso a la hora de elegir el método para obtener dicho campo.

### 2.3. Método de los Momentos

Como ya se ha dicho en la introducción de este capítulo, el Método de las Bases Bi-Ortogonales es adecuado para analizar el espectro modal en sistemas guidores en los cuales los campos son nulos en el infinito. Sin embargo, para estudiar el campo electromagnético en el caso particular de medios dieléctricos infinitos con o sin pérdidas con condiciones periódicas, que son uno de los elementos constituyentes de las SSFD, no es posible definir una relación de biortogonalidad para los modos en dichos medios, y por tanto no es aplicable el Método de las Bases Bi-Ortogonales. No obstante, en este tipo de medios todavía es posible resolver la ecuación de valores propios que satisface el campo magnético transversal (en la cual se pueden incluir las pérdidas óhmicas de los materiales dieléctricos), empleando para ello el Método de los Momentos [39], transformándola en una ecuación matricial. Por otro lado, en la mayoría de ejemplos de guías de ondas cuyos campos están confinados en una región finita del espacio, también será posible emplear el citado Método de los Momentos como otra alternativa al Método de las Bases Bi-Ortogonales.

En este método vamos a partir de la ecuación diferencial de valores propios que cumple el campo magnético transversal en el medio guidor bajo estudio definida en el apartado anterior (ver (2.2)), también expresada como

$$L\mathbf{h}_n = \beta_n^2 \mathbf{h}_n, \quad (2.42)$$

en la que podíamos identificar el operador diferencial  $L$  que gobierna la evolución de la componente transversal del campo magnético a lo largo del eje  $Z$ . Para transformar dicha ecuación de valores propios en una ecuación matricial lineal de autovalores equivalente, expandiremos el campo magnético transversal de nuestro problema en términos de unas funciones base, las cuales deben ser escogidas de manera que cumplan las mismas condiciones de contorno de nuestro problema. Estas funciones base se han escogido como el campo magnético transversal de un sistema auxiliar  $\tilde{L}$ , cuyos campos satisfagan una relación de ortogonalidad [13] de la forma

$$\langle \tilde{\mathbf{e}}_p, \tilde{\mathbf{h}}_q \rangle = \int_{CS} (\tilde{\mathbf{e}}_p^* \times \tilde{\mathbf{h}}_q) \cdot \hat{\mathbf{z}} dS = \delta_{pq}. \quad (2.43)$$

Como funciones base, se usará el campo magnético transversal  $\tilde{\mathbf{h}}_q$  de los modos correspondientes a un sistema guidor relleno de un medio dieléctrico homogéneo sin pérdidas de permitividad relativa  $\tilde{\epsilon}_r = \tilde{\epsilon}_r(x, y) = \tilde{\epsilon}_{rb}$ , donde  $\tilde{\epsilon}_{rb}$  es una constante real.

Ello va a permitir expandir los modos del problema real en términos de los modos del sistema auxiliar,

$$\mathbf{h}_n = \sum_{q=1}^N c_{qn} \tilde{\mathbf{h}}_q, \quad (2.44)$$

donde  $N$  es el número de funciones base que se toman y  $c_{qn}$  son los coeficientes complejos de la expansión modal del campo magnético transversal del  $n$ -ésimo modo, que tendrán que ser calculados. Introduciendo (2.44) en (2.42) tendremos que:

$$L\mathbf{h}_n = L \sum_{q=1}^N c_{qn} \tilde{\mathbf{h}}_q = \sum_{q=1}^N c_{qn} L\tilde{\mathbf{h}}_q = \beta_n^2 \sum_{q=1}^N c_{qn} \tilde{\mathbf{h}}_q. \quad (2.45)$$

Si sustituimos ahora el operador lineal  $L$  por su expresión nos quedará la siguiente ecuación:

$$\sum_{q=1}^N c_{qn} \left[ \nabla_t^2 + k_0^2 \varepsilon_r + \left( \frac{\nabla_t \varepsilon_r}{\varepsilon_r} \right) \times (\nabla_t \times \circ) \right] \tilde{\mathbf{h}}_q = \beta_n^2 \sum_{q=1}^N c_{qn} \tilde{\mathbf{h}}_q. \quad (2.46)$$

El siguiente paso en el Método de los Momentos consiste en tomar unas funciones de prueba, que en nuestro caso serán los campos eléctricos transversales de los modos de la base auxiliar  $\tilde{\mathbf{e}}_p$ , y calcular el producto entre cada miembro de la ecuación (2.45) y estas funciones de prueba, con lo que resultará que:

$$\sum_{q=1}^N \langle \tilde{\mathbf{e}}_p, L\tilde{\mathbf{h}}_q \rangle c_{qn} = \sum_{q=1}^N L_{pq} c_{qn} = \beta_n^2 \sum_{q=1}^N c_{qn} \langle \tilde{\mathbf{e}}_p, \tilde{\mathbf{h}}_q \rangle = \beta_n^2 c_{pn}, \quad (2.47)$$

donde se ha hecho uso de la linealidad del producto escalar y de la relación de ortogonalidad (2.43) de los modos del sistema auxiliar, siendo

$$L_{pq} = \langle \tilde{\mathbf{e}}_p, L\tilde{\mathbf{h}}_q \rangle \quad (2.48)$$

los elementos de matriz del operador  $L$  en la base  $\{\tilde{\mathbf{e}}_p, \tilde{\mathbf{h}}_p\}$ . Así, la ecuación anterior queda

$$\sum_{q=1}^N L_{pq} c_{qn} = \beta_n^2 c_{pn}, \quad (2.49)$$

que es la ecuación matricial lineal de autovalores que buscábamos. Llamando  $\underline{\underline{L}}$  a la representación matricial del operador  $L$  (matriz de dimensiones  $(N \times N)$ ) y definiendo el vector columna de coeficientes:  $\underline{\underline{C}}^{(n)} (= c_{pn})$  de dimensiones  $(N \times 1)$ , la ecuación (2.49) se puede expresar como:

$$\underline{\underline{L}} \underline{\underline{C}}^{(n)} = \beta_n^2 \underline{\underline{C}}^{(n)}. \quad (2.50)$$

Para obtener los elementos de la matriz  $\underline{\underline{L}}$  de nuevo es más conveniente descomponer el operador  $L$  como suma de dos términos,

$$L = \tilde{L} + \Delta, \quad \Delta = k_0^2 (\varepsilon_r - \tilde{\varepsilon}_{rb}) + \left( \frac{\nabla_t \varepsilon_r}{\varepsilon_r} \right) \times (\nabla_t \times \circ) \quad (2.51)$$

siendo  $\tilde{L}$  el operador que describe el problema auxiliar. Así, cada elemento  $L_{pq}$  se calculará por medio de la siguiente expresión:

$$L_{pq} = \langle \tilde{\mathbf{e}}_p, L\tilde{\mathbf{h}}_q \rangle = \langle \tilde{\mathbf{e}}_p, (\tilde{L} + \Delta)\tilde{\mathbf{h}}_q \rangle = \langle \tilde{\mathbf{e}}_p, \tilde{L}\tilde{\mathbf{h}}_q \rangle + \langle \tilde{\mathbf{e}}_p, \Delta\tilde{\mathbf{h}}_q \rangle = \tilde{\beta}_q^2 \delta_{pq} + \langle \tilde{\mathbf{e}}_p, \Delta\tilde{\mathbf{h}}_q \rangle \quad (2.52)$$

donde de nuevo se ha hecho uso de la relación de ortogonalidad (2.43) de los modos del problema auxiliar,

$$\langle \tilde{\mathbf{e}}_p, \tilde{L}\tilde{\mathbf{h}}_q \rangle = \langle \tilde{\mathbf{e}}_p, \tilde{\beta}_q^2 \tilde{\mathbf{h}}_q \rangle = \tilde{\beta}_q^2 \langle \tilde{\mathbf{e}}_p, \tilde{\mathbf{h}}_q \rangle = \tilde{\beta}_q^2 \delta_{pq} . \quad (2.53)$$

Al igual que ocurría en el Método de las Bases Bi-Ortogonales, para un cierto número  $N$  de funciones base auxiliares para expandir los modos de nuestro problema, la diagonalización numérica de la ecuación (2.50) proporcionará  $N$  autovalores (las constantes de propagación al cuadrado del  $n$ -ésimo modo  $\beta_n^2$ ) y una matriz con  $N$  vectores columna de autovectores (formados por los coeficientes  $c_{pn}$  de la expansión). Por tanto, el proceso seguido para la obtención de la ecuación (2.50) y su resolución es idéntico al llevado a cabo en el Método de las Bases Bi-ortogonales, con la única diferencia de que en este caso los campos que se obtienen no cumplen una relación de biortogonalidad. Así mismo, el número  $N$  de funciones base auxiliares empleadas en la expansión modal será determinado a través de un análisis numérico de convergencia de las soluciones, por lo que se deberán realizar pruebas de convergencia variando el número de modos auxiliares en rangos significativos y estudiando la estabilidad de las soluciones obtenidas.

Como ya se ha mencionado anteriormente, el resultado que proporciona la resolución numérica de la ecuación matricial lineal de valores propios (2.50) son las constantes de propagación (autovalores) y los campos magnéticos (autovectores) de cada modo. En este caso, el campo eléctrico transversal  $\mathbf{e}_n$  del modo  $n$ -ésimo en el medio guiador bajo estudio se obtendrá a partir del campo magnético transversal  $\mathbf{h}_n$  según la relación que aparece en la ecuación (2.37) obtenida anteriormente a partir de las ecuaciones de Maxwell, no siendo posible emplear los otros dos métodos propuestos en 2.2 para obtener el campo eléctrico transversal.

## 2.4. Método de Adaptación Modal

En este apartado se describe cómo caracterizar electromagnéticamente la unión de dos medios guidores, pudiendo ser uno de ellos una guía de ondas con dieléctrico no homogéneo, cuyos modos serán obtenidos empleando los métodos modales descritos en el apartado anterior. En este tipo de guías de ondas en las que la permitividad relativa no es constante en la sección transversal, los modos no tienen -en el caso más general- una impedancia característica definida. Esta es la razón por la que se ha elegido el Método de Adaptación Modal (*Mode Matching Technique*) [42], [43] para analizar una discontinuidad entre dos medios. Este método permite obtener la Matriz de Dispersión Generalizada (MDG) en uniones de distintas regiones en las cuales el espectro modal es conocido, sin necesidad de que los modos deban tener definida una impedancia característica, en contra de otros métodos, como [44], [45], que sí lo requieren. En la memoria (capítulo 5) se aplicará este método

para analizar discontinuidades entre sistemas guidores, en los cuales se analizan uniones entre dos medios homogéneos de diferente permitividad dieléctrica, así como entre un medio dieléctrico homogéneo y un medio dieléctrico periódico en una dimensión. En ambas regiones de la unión existe un conjunto bien definido de soluciones (modos) de las ecuaciones de Maxwell (ver la figura 2.2):

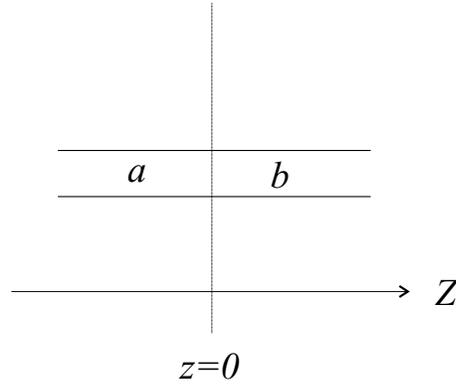


Figura 2.2: Unión de dos medios guidores a y b.

$e^a, h^a$ : Modos en la región  $a$

$e^b, h^b$ : Modos en la región  $b$

Dichas soluciones satisfacen todas las condiciones de contorno en ambas regiones excepto las impuestas en la unión. Estas últimas condiciones se impondrán mediante el Método de Adaptación Modal.

Como se ha comentado en la introducción de este capítulo, este método se aplicará al estudio de uniones entre los distintos medios que constituyen una SSFD. Por tanto, en la tesis se ha adaptado la formulación general del Método de Adaptación Modal al caso particular de una discontinuidad entre dos medios ( $a$  y  $b$ ) de igual sección transversal o 'cross section' ( $CS$ ). Las expresiones de los campos eléctrico y magnético transversales (a la dirección de propagación,  $Z$ ) se pueden escribir de la siguiente forma:

$$\mathbf{E}_t^a = \sum_{n=1}^{\infty} (I_n^{a+} e^{-j\beta_n z} + I_n^{a-} e^{+j\beta_n z}) \mathbf{e}_n^a, \quad \mathbf{E}_t^b = \sum_{n=1}^{\infty} (I_n^{b+} e^{-j\beta_n z} + I_n^{b-} e^{+j\beta_n z}) \mathbf{e}_n^b \quad (2.54)$$

$$\mathbf{H}_t^a = \sum_{n=1}^{\infty} (I_n^{a+} e^{-j\beta_n z} - I_n^{a-} e^{+j\beta_n z}) \mathbf{h}_n^a, \quad \mathbf{H}_t^b = \sum_{n=1}^{\infty} (I_n^{b+} e^{-j\beta_n z} - I_n^{b-} e^{+j\beta_n z}) \mathbf{h}_n^b. \quad (2.55)$$

Por otro lado, en el plano de la unión, que se ha elegido en  $z = 0$ , dichas ecuaciones quedan

de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_t^a &= \sum_{n=1}^{\infty} (I_n^{a+} + I_n^{a-}) \mathbf{e}_n^a, & \mathbf{E}_t^b &= \sum_{n=1}^{\infty} (I_n^{b+} + I_n^{b-}) \mathbf{e}_n^b \\ \mathbf{H}_t^a &= \sum_{n=1}^{\infty} (I_n^{a+} - I_n^{a-}) \mathbf{h}_n^a, & \mathbf{H}_t^b &= \sum_{n=1}^{\infty} (I_n^{b+} - I_n^{b-}) \mathbf{h}_n^b. \end{aligned} \quad (2.56)$$

En las expresiones anteriores,  $\{\mathbf{e}_n^i, \mathbf{h}_n^i\}$  representan las soluciones modales de campo eléctrico y magnético en cada uno de los dos medios considerados, y  $I_n^{i+}, I_n^{i-}$  son las amplitudes de dichos campos, que se propagan en el sentido de  $+\hat{\mathbf{z}}$  o  $-\hat{\mathbf{z}}$ , respectivamente. Imponiendo las condiciones de continuidad de los campos transversales en la unión, se pueden encontrar las relaciones entre las amplitudes de los campos que aparecen en (2.56), que representan los parámetros de dispersión tradicionalmente utilizados en teoría de circuitos de microondas. En el plano de la unión entre los dos medios situado en  $z = 0$  se deben cumplir las siguientes condiciones de continuidad para los campos eléctrico y magnético transversales:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}_t^a|_{z=0} &= \mathbf{E}_t^b|_{z=0} \\ \mathbf{H}_t^a|_{z=0} &= \mathbf{H}_t^b|_{z=0} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (I_n^{a+} + I_n^{a-}) \mathbf{e}_n^a &= \sum_{n=1}^{\infty} (I_n^{b+} + I_n^{b-}) \mathbf{e}_n^b \\ \sum_{n=1}^{\infty} (I_n^{a+} - I_n^{a-}) \mathbf{h}_n^a &= \sum_{n=1}^{\infty} (I_n^{b+} - I_n^{b-}) \mathbf{h}_n^b. \end{aligned} \right. \quad (2.57)$$

Si en las dos relaciones anteriores se multiplica adecuadamente por los campos  $\{\mathbf{e}_n^i, \mathbf{h}_n^i\}$ , se plantean las siguientes ecuaciones lineales:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{mn}^a (I_n^{a+} + I_n^{a-}) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} (I_n^{b+} + I_n^{b-}) \quad m = 1, 2, \dots, \infty \quad (2.58)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{nm}^{a*} (I_n^{a+} - I_n^{a-}) = \sum_{n=1}^{\infty} B_{nm}^* (I_n^{b+} - I_n^{b-}) \quad m = 1, 2, \dots, \infty \quad (2.59)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} (I_n^{a+} + I_n^{a-}) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{mn}^b (I_n^{b+} + I_n^{b-}) \quad m = 1, 2, \dots, \infty \quad (2.60)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_{nm}^* (I_n^{a+} - I_n^{a-}) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{nm}^{b*} (I_n^{b+} - I_n^{b-}) \quad m = 1, 2, \dots, \infty, \quad (2.61)$$

donde los coeficientes  $P_{mn}^i$ ,  $A_{mn}$  y  $B_{mn}$  que aparecen en estas ecuaciones lineales se definen del siguiente modo:

$$P_{mn}^i = \int_{S_i} (\mathbf{e}_n^i \times \mathbf{h}_m^{i*}) \cdot \hat{\mathbf{z}} dS; \quad i = a, b \quad (2.62)$$

$$A_{mn} = \int_{S_a} (\mathbf{e}_n^b \times \mathbf{h}_m^{a*}) \cdot \hat{\mathbf{z}} dS; \quad B_{mn} = \int_{S_b} (\mathbf{e}_n^a \times \mathbf{h}_m^{b*}) \cdot \hat{\mathbf{z}} dS. \quad (2.63)$$

De las expansiones modales anteriores se concluye que el sistema a resolver consta de un número infinito de ecuaciones e incógnitas ( $n = 1 \dots \infty$ ). Para poder resolver numéricamente

dicho sistema será necesario truncar las series infinitas a un cierto número  $NMR$  de modos en cada uno de los dos medios de la discontinuidad. Para cada problema a analizar, dicho número de modos será un parámetro a elegir en cada caso, y se determinará mediante un análisis numérico de convergencia. En todos los casos en los que se aplicará este método, los dos medios que constituyen la discontinuidad tienen la misma sección transversal, por lo que se escogerá el mismo número de modos  $NMR$  a ambos lados de la discontinuidad.

Las cuatro ecuaciones anteriores pueden expresarse matricialmente del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{P}}^a(\underline{I}^{a+} + \underline{I}^{a-}) &= \underline{\underline{A}}(\underline{I}^{b+} + \underline{I}^{b-}) \quad (a) & \underline{\underline{P}}^{a\#}(\underline{I}^{a+} - \underline{I}^{a-}) &= \underline{\underline{B}}^{\#}(\underline{I}^{b+} - \underline{I}^{b-}) \quad (b) \\ \underline{\underline{B}}(\underline{I}^{a+} + \underline{I}^{a-}) &= \underline{\underline{P}}^b(\underline{I}^{b+} + \underline{I}^{b-}) \quad (c) & \underline{\underline{A}}^{\#}(\underline{I}^{a+} - \underline{I}^{a-}) &= \underline{\underline{P}}^{b\#}(\underline{I}^{b+} - \underline{I}^{b-}) \quad (d) \end{aligned} \quad (2.64)$$

donde los vectores y matrices que aparecen tienen el siguiente significado:

$$\underline{I}^{a+} = (I_1^{a+}, I_2^{a+}, \dots, I_{NMR}^{a+})^t \quad \underline{I}^{b+} = (I_1^{b+}, I_2^{b+}, \dots, I_{NMR}^{b+})^t$$

$\underline{\underline{A}}$ : matriz ( $NMR \times NMR$ ) con elementos  $A_{mn}$ ;

$\underline{\underline{B}}$ : matriz ( $NMR \times NMR$ ) con elementos  $B_{mn}$ ;

$\underline{\underline{P}}^a$ : matriz ( $NMR \times NMR$ ) con elementos  $P_{mn}^a$ ;

$\underline{\underline{P}}^b$ : matriz ( $NMR \times NMR$ ) con elementos  $P_{mn}^b$ ;

y la operación # representa conjugar y transponer:

$$\underline{\underline{A}}^{\#} = (\underline{\underline{A}}^t)^* \quad (2.65)$$

El objetivo del Método de Adaptación Modal es encontrar la siguiente relación matricial entre los vectores columna  $I^{a-}$ ,  $I^{b+}$ ,  $I^{a+}$ , y  $I^{b-}$ :

$$\begin{bmatrix} \underline{I}^{a-} \\ \underline{I}^{b+} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{S}}_{11} & \underline{\underline{S}}_{12} \\ \underline{\underline{S}}_{21} & \underline{\underline{S}}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}^{a+} \\ \underline{I}^{b-} \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

donde  $\underline{\underline{S}}_{11}$ ,  $\underline{\underline{S}}_{12}$ ,  $\underline{\underline{S}}_{21}$ ,  $\underline{\underline{S}}_{22}$  son las cuatro submatrices por las que está formada la matriz de dispersión multimodal de la unión analizada, cuyos elementos son los parámetros de dispersión, que se definen del siguiente modo:

$$\begin{aligned} S_{11}(i, j) &= \left. \frac{I_i^{a-}}{I_j^{a+}} \right|_{I_k^{a+}=0(\forall k \neq j)} & S_{21}(i, j) &= \left. \frac{I_i^{b+}}{I_j^{a+}} \right|_{I_k^{a+}=0(\forall k \neq j)} \\ S_{12}(i, j) &= \left. \frac{V_i^{a-}}{I_j^{b-}} \right|_{I_k^{b-}=0(\forall k \neq j)} & S_{22}(i, j) &= \left. \frac{I_i^{b+}}{I_j^{b-}} \right|_{I_k^{b-}=0(\forall k \neq j)} \end{aligned}$$

Para obtener la matriz de parámetros  $\underline{\underline{S}}$  multimodal definida a través de las submatrices  $\underline{\underline{S}}_{11}$ ,  $\underline{\underline{S}}_{12}$ ,  $\underline{\underline{S}}_{21}$ ,  $\underline{\underline{S}}_{22}$  se necesita construir un sistema de 2 ecuaciones lineales; una de ellas debe hacer referencia a la condición de campo eléctrico y la otra a la de campo magnético. De las cuatro ecuaciones (2.64), se ha decidido utilizar las ecuaciones (2.64) (a) y (b) por cuestiones de simplicidad de cálculo a la hora de aplicar este método de análisis.

Así pues, se plantea el siguiente sistema de 2 ecuaciones matriciales para obtener la matriz  $\underline{\underline{S}}$ :

$$\underline{\underline{P}}^a(\underline{\underline{I}}^{a+} + \underline{\underline{I}}^{a-}) = \underline{\underline{A}}(\underline{\underline{I}}^{b+} + \underline{\underline{I}}^{b-}) \quad (a) \quad \underline{\underline{P}}^{a\#}(\underline{\underline{I}}^{a+} - \underline{\underline{I}}^{a-}) = \underline{\underline{B}}^{\#}(\underline{\underline{I}}^{b+} - \underline{\underline{I}}^{b-}) \quad (b) \quad (2.67)$$

La solución de dicho sistema de ecuaciones proporciona la matriz de parámetros  $\underline{\underline{S}}$  multimodal buscada:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{S}}_{21} &= 2(\underline{\underline{T}})^{-1} \underline{\underline{P}}^{a\#} & \underline{\underline{S}}_{22} &= (\underline{\underline{T}})^{-1} (\underline{\underline{B}}^{\#} - \underline{\underline{P}}^{a\#}(\underline{\underline{P}}^a)^{-1} \underline{\underline{A}}) \\ \underline{\underline{S}}_{11} &= (\underline{\underline{P}}^a)^{-1} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{S}}_{21} - \underline{\underline{I}} & \underline{\underline{S}}_{12} &= (\underline{\underline{P}}^a)^{-1} \underline{\underline{A}}(\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{S}}_{22}) \end{aligned} \quad (2.68)$$

donde la matriz  $\underline{\underline{T}}$  ( $NMR \times NMR$ ) se define del siguiente modo:

$$\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{B}}^{\#} + \underline{\underline{P}}^{a\#}(\underline{\underline{P}}^a)^{-1} \underline{\underline{A}} \quad (2.69)$$

y la matriz  $\underline{\underline{I}}$  es la matriz identidad de orden  $NMR$ .

# Capítulo 3

## Estudio de guías ópticas y guías de microondas

### 3.1. Introducción

En este capítulo se lleva a cabo la caracterización modal de diversos sistemas guidores de ondas, entendiéndose por sistemas guidores de ondas aquellos sistemas de transmisión con simetría traslacional destinados a llevar energía de un punto a otro, en los cuales la energía está confinada en una pequeña región del espacio y que se caracterizan por su invariancia traslacional en la dirección de propagación. Los efectos de propagación en las guías de ondas bajo estudio, cuyas dimensiones transversales son comparables a la longitud de onda característica (en el vacío),  $\lambda_0$ , requieren del conocimiento de la constante de propagación y de los campos transversales a la dirección de propagación de los modos en dichas guías. Para tal fin, en este capítulo se aplica el Método de las Bases Bi-Ortogonales descrito en el capítulo anterior al estudio de una serie de guías de ondas, que se han dividido en dos categorías, según sean sus aplicaciones: por un lado, se analizarán una serie de guías ópticas, y por otro lado se estudiarán diversas guías de microondas, que son el elemento clave en el diseño de muchos dispositivos de microondas de gran importancia en aplicaciones tales como comunicaciones vía satélite y comunicaciones terrestres, así como en sistemas de calentamiento por microondas.

A la hora de aplicar el Método de las Bases Bi-Ortogonales dentro de cada categoría de guías de ondas, y para cada caso a analizar, primero se hará una elección del sistema auxiliar más adecuado al problema. A continuación, se llevará a cabo un estudio de convergencia de las soluciones obtenidas con este método, y finalmente se presentarán los resultados más relevantes obtenidos para cada caso.

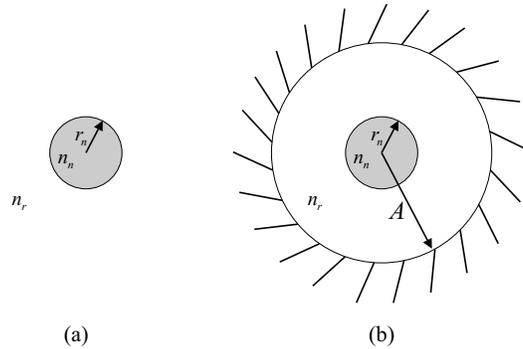


Figura 3.1: Sección transversal de una fibra óptica de salto de índice. (a) Problema real. (b) Problema estudiado, con un blindaje auxiliar añadido.

## 3.2. Guías ópticas

### 3.2.1. Fibra óptica

Esta guía se construye solamente con materiales dieléctricos y, como su propio nombre indica, transmite ondas electromagnéticas que están en la banda del visible (realmente, también se emplean en el infrarrojo cercano e infrarrojo lejano). La dimensión transversal de esta guía es tan pequeña que por su aspecto se le da el nombre de *fibra*. Este tipo de guía de ondas está siendo utilizada cada vez con más frecuencia en los sistemas de comunicaciones actuales [46], [47], [48].

Existen diferentes modalidades de fibra óptica, según sea la distribución de la permitividad dieléctrica en la sección transversal de la misma. Así, la *fibra óptica de salto de índice* [49] (ver la figura 3.1) consiste en una barra dieléctrica cilíndrica homogénea, denominada núcleo o *core*, rodeada por una capa concéntrica de otro material dieléctrico de permitividad dieléctrica menor, llamada revestimiento o *cladding*. Por otro lado, en la *fibra óptica de índice gradual* [47], la permitividad dieléctrica en el núcleo de la fibra pasa de forma gradual de un valor máximo hasta un valor igual al del revestimiento de la fibra. Existen otros tipos de perfiles de la permitividad dieléctrica en una fibra óptica, en los que la distribución del material dieléctrico permite obtener unas ciertas velocidades de fase y de grupo deseadas (como por ejemplo la fibra en W [40]).

El Método de las Bases Bi-Ortogonales permite analizar el espectro modal en todos estos tipos de fibras ópticas. En este apartado se muestra el estudio del espectro modal de una fibra óptica de salto de índice. En la figura 3.1(a) se muestra un esquema de la sección transversal de una fibra óptica de salto de índice típica. Debido a la simetría del problema, se ha empleado un sistema de coordenadas cilíndricas, en el cual la fibra óptica a estudiar vendrá descrita por la distribución de su permitividad dieléctrica relativa. Habitualmente se suele hablar de su índice de refracción,  $n$ , que se relaciona con la permitividad dieléctrica relativa como  $n = \sqrt{\epsilon_r}$ . En una fibra de salto de índice, el índice de refracción  $n(r, \theta)$  se

distribuye de la siguiente forma en la sección transversal:

$$n(r, \theta) = \begin{cases} n_n & r < r_n \\ n_r & r > r_n \end{cases} \quad (3.1)$$

donde  $n_n$  y  $n_r$  son los índices de refracción del núcleo y del revestimiento, respectivamente, con  $n_n > n_r$ , siendo  $r_n$  el radio del núcleo de la fibra. A la hora de elegir el sistema auxiliar más adecuado para este problema, se ha de considerar que, a pesar de que la fibra óptica es una guía de ondas abierta (no blindada), los campos están confinados en las proximidades del núcleo, y que por tanto es posible elegir como sistema auxiliar una guía circular rellena de un dieléctrico homogéneo y cuyo radio  $A$  sea mucho mayor que el radio del núcleo de la fibra, de forma que las condiciones de contorno impuestas por el sistema auxiliar no perturben las soluciones del problema real, lo cual es más crítico a bajas frecuencias. Por otro lado, también se ha de considerar que el número de modos auxiliares necesario para alcanzar una determinada precisión aumenta con el tamaño del blindaje. Este hecho se debe a que al aumentar el volumen del sistema auxiliar sin incrementar simultáneamente el número de modos, empobrecemos la precisión con la que describimos las estructuras espaciales del sistema en cuestión. Cuando una estructura espacial fundamental del problema no se describe adecuadamente (como por ejemplo el núcleo de la fibra), aparece una brusca pérdida de precisión. Para tratar este problema recurrimos al concepto de *resolución espacial*, definida como el número máximo de periodos espaciales de la base auxiliar que pueden acomodarse en la estructura que hemos de resolver. Así, en el análisis de convergencia, se tratará de determinar el tamaño de la caja y el número de modos que nos dan la solución buscada con un tiempo de cómputo realista.

Los modos de la guía circular homogénea que han sido empleados como base auxiliar vienen dados por las siguientes expresiones [50]:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{e}}_p^{TM(c)} &= N_p^{TM(c)} J'_s\left(\frac{\chi_{sk}}{A} \rho\right) \frac{\chi_{sk}}{A} \cos(s\phi) \mathbf{u}_\rho - N_p^{TM(c)} \frac{s}{\rho} J_s\left(\frac{\chi_{sk}}{A} \rho\right) \sin(s\phi) \mathbf{u}_\phi \\ \tilde{\mathbf{h}}_p^{TM(c)} &= N_p^{TM(c)} \frac{s}{\rho} J_s\left(\frac{\chi_{sk}}{A} \rho\right) \sin(s\phi) \mathbf{u}_\rho + N_p^{TM(c)} J'_s\left(\frac{\chi_{sk}}{A} \rho\right) \frac{\chi_{sk}}{A} \cos(s\phi) \mathbf{u}_\phi \\ \tilde{\mathbf{e}}_p^{TM(s)} &= N_p^{TM(s)} J'_s\left(\frac{\chi_{sk}}{A} \rho\right) \frac{\chi_{sk}}{A} \sin(s\phi) \mathbf{u}_\rho + N_p^{TM(s)} \frac{s}{\rho} J_s\left(\frac{\chi_{sk}}{A} \rho\right) \cos(s\phi) \mathbf{u}_\phi \\ \tilde{\mathbf{h}}_p^{TM(s)} &= -N_p^{TM(s)} \frac{s}{\rho} J_s\left(\frac{\chi_{sk}}{A} \rho\right) \cos(s\phi) \mathbf{u}_\rho + N_p^{TM(s)} J'_s\left(\frac{\chi_{sk}}{A} \rho\right) \frac{\chi_{sk}}{A} \sin(s\phi) \mathbf{u}_\phi \\ \tilde{\mathbf{e}}_p^{TE(c)} &= N_p^{TE(c)} \frac{s}{\rho} J_s\left(\frac{\chi'_{sk}}{A} \rho\right) \sin(s\phi) \mathbf{u}_\rho + N_p^{TE(c)} J'_s\left(\frac{\chi'_{sk}}{A} \rho\right) \frac{\chi'_{sk}}{A} \cos(s\phi) \mathbf{u}_\phi \\ \tilde{\mathbf{h}}_p^{TE(c)} &= -N_p^{TE(c)} J'_s\left(\frac{\chi'_{sk}}{A} \rho\right) \frac{\chi'_{sk}}{A} \cos(s\phi) \mathbf{u}_\rho + N_p^{TE(c)} \frac{s}{\rho} J_s\left(\frac{\chi'_{sk}}{A} \rho\right) \sin(s\phi) \mathbf{u}_\phi \\ \tilde{\mathbf{e}}_p^{TE(s)} &= N_p^{TE(s)} \frac{s}{\rho} J_s\left(\frac{\chi'_{sk}}{A} \rho\right) \cos(s\phi) \mathbf{u}_\rho - N_p^{TE(s)} J'_s\left(\frac{\chi'_{sk}}{A} \rho\right) \frac{\chi'_{sk}}{A} \sin(s\phi) \mathbf{u}_\phi \\ \tilde{\mathbf{h}}_p^{TE(s)} &= N_p^{TE(s)} J'_s\left(\frac{\chi'_{sk}}{A} \rho\right) \frac{\chi'_{sk}}{A} \sin(s\phi) \mathbf{u}_\rho + N_p^{TE(s)} \frac{s}{\rho} J_s\left(\frac{\chi'_{sk}}{A} \rho\right) \cos(s\phi) \mathbf{u}_\phi \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde los superíndices (c) y (s) indican la dependencia de la componente axial del campo eléctrico con el ángulo  $\phi$  (del tipo  $\cos(s\phi)$  o  $\sin(s\phi)$ ), siendo  $A$  el radio de la guía circular,

que está rellena de un dieléctrico homogéneo de permitividad relativa  $\tilde{\epsilon}_{rb}$ , y que se ha elegido igual a la del material del revestimiento,  $\tilde{\epsilon}_{rb} = n_r^2$ . El modo  $p$ -ésimo tiene asociados el par de índices  $s$  y  $k$ , que pueden tomar los siguientes valores:

$$(c) : s = 0, 1, 2, 3, \dots ; \quad (s) : s = 1, 2, 3, \dots ; \quad k = 1, 2, 3, \dots ; \quad (3.3)$$

$J_s(x)$  es la función de Bessel de primera especie y argumento  $x$ , y  $\chi_{sk}, \chi'_{sk}$  son el  $k$ -ésimo cero de la función de Bessel de primera especie y de su derivada, respectivamente. Por otro lado, al  $q$ -ésimo modo le asociaremos el par de índices  $t$  y  $l$ , respectivamente. Dichos modos han sido adecuadamente normalizados, de forma que cumplen la siguiente relación de biortogonalidad:

$$\langle \tilde{\mathbf{e}}_p | \tilde{\mathbf{h}}_q \rangle = \iint_{CS} (\tilde{\mathbf{e}}_p \times \tilde{\mathbf{h}}_q) \cdot \hat{\mathbf{z}} dS = \delta_{pq} \quad (3.4)$$

donde  $CS$  es la sección transversal (o *cross section*) de la guía circular de radio  $A$ . Las constantes de normalización vienen dadas por las siguientes expresiones:

$$N_p^{TM(c)} = \sqrt{\frac{\epsilon_s}{\pi}} \frac{1}{\chi_{sk} |J_{s+1}(\chi_{sk})|} = N_p^{TM(s)}$$

$$N_p^{TE(c)} = \sqrt{\frac{\epsilon_s}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\chi_{sk}^2 - s^2} |J_s(\chi'_{sk})|} = N_p^{TE(s)}$$

donde  $\epsilon_s$  es la función de Neuman, que se define de la siguiente forma:

$$\epsilon_s \equiv \begin{cases} 1 & s = 0 \\ 2 & s \neq 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

La aplicación del Método de las Bases Bi-Ortogonales nos conduce a evaluar los elementos de matriz del operador  $L$ , que en este caso se calcularán como (ver (2.25)):

$$L_{pq} = \langle \tilde{\mathbf{e}}_p | L \tilde{\mathbf{h}}_q \rangle = \iint_{CS} (\tilde{\mathbf{e}}_p \times L \tilde{\mathbf{h}}_q) \cdot \hat{\mathbf{z}} dS. \quad (3.6)$$

Estas integrales han sido calculadas analíticamente, obteniéndose los siguientes resultados:

$$\langle \tilde{\mathbf{e}}_p^{TM(c)} | L \tilde{\mathbf{h}}_q^{TM(c)} \rangle = \begin{cases} = \tilde{\beta}_q^2 \delta_{pq} + (C_{1pq} \pi [ \frac{\chi_{sk}^2 r_n^2 - s^2}{A^2} J_s^2(\frac{\chi_{sk}}{A} r_n) + \frac{\chi_{sk}}{A} r_n J_s(\frac{\chi_{sk}}{A} r_n) J'_s(\frac{\chi_{sk}}{A} r_n) + \\ \frac{\chi_{sk}^2 r_n^2 J_s'^2(\frac{\chi_{sk}}{A} r_n) ] + C_{2pq} \pi \frac{\chi_{sk}}{A} r_n J_s(\frac{\chi_{sk}}{A} r_n) J'_s(\frac{\chi_{sk}}{A} r_n) ) \delta_{st} & k = l \\ = \tilde{\beta}_q^2 \delta_{pq} + ( \frac{C_{1pq} \pi r_n}{\chi_{sk}^2 - \chi_{sl}^2} [ \frac{\chi_{sk}^2}{A^2} \frac{\chi_{sl}}{A} J_s(\frac{\chi_{sk}}{A} r_n) J'_s(\frac{\chi_{sl}}{A} r_n) - \frac{\chi_{sl}^2}{A^2} \frac{\chi_{sk}}{A} J'_s(\frac{\chi_{sk}}{A} r_n) J_s(\frac{\chi_{sl}}{A} r_n) ] + \\ C_{2pq} \pi \frac{\chi_{sk}}{A} J_s(\frac{\chi_{sl}}{A} r_n) J'_s(\frac{\chi_{sk}}{A} r_n) ) \delta_{st} & k \neq l \end{cases}$$

$$\langle \tilde{\mathbf{e}}_p^{TM(s)} | L \tilde{\mathbf{h}}_q^{TM(s)} \rangle = \langle \tilde{\mathbf{e}}_p^{TM(c)} | L \tilde{\mathbf{h}}_q^{TM(c)} \rangle$$

$$\langle \tilde{\mathbf{e}}_p^{TM(s)} | L \tilde{\mathbf{h}}_q^{TM(c)} \rangle = \langle \tilde{\mathbf{e}}_p^{TM(c)} | L \tilde{\mathbf{h}}_q^{TM(s)} \rangle = 0$$

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{\mathbf{e}}_p^{TE(c)} | L \tilde{\mathbf{h}}_q^{TM(s)} \rangle &= [C_{1pq} s \pi J_s(\frac{\chi'_{sk}}{A} r_n) J_s(\frac{\chi_{sl}}{A} r_n) + \frac{C_{2pq} s \pi}{r_n} J_s(\frac{\chi_{sl}}{A} r_n) J_s(\frac{\chi'_{sk}}{A} r_n)] \delta_{st} \\
\langle \tilde{\mathbf{e}}_p^{TE(s)} | L \tilde{\mathbf{h}}_q^{TM(c)} \rangle &= \langle \tilde{\mathbf{e}}_p^{TE(c)} | L \tilde{\mathbf{h}}_q^{TM(s)} \rangle \\
\langle \tilde{\mathbf{e}}_p^{TE(c)} | L \tilde{\mathbf{h}}_q^{TM(c)} \rangle &= \langle \tilde{\mathbf{e}}_p^{TE(s)} | L \tilde{\mathbf{h}}_q^{TM(s)} \rangle = 0 \\
\langle \tilde{\mathbf{e}}_p^{TM(c)} | L \tilde{\mathbf{h}}_q^{TE(s)} \rangle &= \langle \tilde{\mathbf{e}}_p^{TM(s)} | L \tilde{\mathbf{h}}_q^{TE(c)} \rangle = C_{1pq} s \pi J_s(\frac{\chi'_{sk}}{A} r_n) J_s(\frac{\chi_{sl}}{A} r_n) \delta_{st} \\
\langle \tilde{\mathbf{e}}_p^{TM(c)} | L \tilde{\mathbf{h}}_q^{TE(c)} \rangle &= \langle \tilde{\mathbf{e}}_p^{TM(s)} | L \tilde{\mathbf{h}}_q^{TE(s)} \rangle = 0 \\
\langle \tilde{\mathbf{e}}_p^{TE(c)} | L \tilde{\mathbf{h}}_q^{TE(c)} \rangle &= \begin{cases} = \tilde{\beta}_q^2 \delta_{pq} + C_{1pq} \pi \left[ \frac{\chi'_{sk}{}^2 r_n^2 - s^2}{A^2} J_s^2(\frac{\chi'_{sk}}{A} r_n) + \frac{\chi'_{sk}}{A} r_n J_s(\frac{\chi'_{sk}}{A} r_n) J'_s(\frac{\chi'_{sk}}{A} r_n) + \right. \\ \left. \frac{\chi'_{sk}}{A^2} r_n^2 J_s^2(\frac{\chi'_{sk}}{A} r_n) \right] \delta_{st} & k = l \\ = \tilde{\beta}_q^2 \delta_{pq} + \frac{C_{1pq} \pi r_n}{\frac{\chi'_{sk}{}^2}{A^2} - \frac{\chi_{sl}^2}{A^2}} \left[ \frac{\chi'_{sk}}{A^2} \frac{\chi_{sl}}{A} J_s(\frac{\chi'_{sk}}{A} r_n) J'_s(\frac{\chi_{sl}}{A} r_n) - \right. \\ \left. \frac{\chi_{sl}^2}{A^2} \frac{\chi'_{sk}}{A} J'_s(\frac{\chi'_{sk}}{A} r_n) J_s(\frac{\chi_{sl}}{A} r_n) \right] \delta_{st} & k \neq l \end{cases} \\
\langle \tilde{\mathbf{e}}_p^{TE(s)} | L \tilde{\mathbf{h}}_q^{TE(s)} \rangle &= \langle \tilde{\mathbf{e}}_p^{TE(c)} | L \tilde{\mathbf{h}}_q^{TE(c)} \rangle \\
\langle \tilde{\mathbf{e}}_p^{TE(c)} | L \tilde{\mathbf{h}}_q^{TE(s)} \rangle &= \langle \tilde{\mathbf{e}}_p^{TE(s)} | L \tilde{\mathbf{h}}_q^{TE(c)} \rangle = 0
\end{aligned} \tag{3.7}$$

donde las constantes  $C_{1pq}$  y  $C_{2pq}$  vienen dadas por las siguientes expresiones:

$$C_{1pq} = k_0^2 (n_n^2 - n_r^2) N_p N_q, \quad C_{2pq} = \frac{n_n^2 - n_r^2}{2} \left( \frac{1}{n_r^2} + \frac{1}{n_n^2} \right) A N_p N_q. \tag{3.8}$$

Finalmente, sólo queda realizar el proceso de diagonalización numérica de la matriz  $\underline{L}$ . Como se puede observar en las expresiones analíticas que se obtienen para los elementos de matriz del operador  $L$ , (3.7), debido a las simetrías que presenta el problema, no se mezclarán los subespacios generados por modos con el mismo orden respecto a dichas simetrías. Esto implica que simplemente ordenando los índices de los modos de forma que queden contiguos los del mismo orden, la matriz  $\underline{L}$  aparecerá estructurada en submatrices dispuestas a lo largo de la diagonal asociadas a cada uno de los órdenes de esa simetría, siendo el resto de elementos de la matriz nulos, pudiéndose entonces diagonalizar cada una de ellas por separado. Así, elegiremos los elementos de la base con el orden del modo que se quiera calcular de la fibra de salto de índice. Ello conlleva una reducción muy importante en el tiempo de cálculo para la obtención del espectro modal de la fibra, ya que se reduce considerablemente el tamaño de la matriz a diagonalizar, con la consiguiente reducción en el tiempo de CPU necesario para ello. Por todo esto, se concluye que para obtener los modos de la fibra óptica de salto de índice con un cierto orden angular  $s$ , se emplearán las siguientes familias de modos de la base auxiliar:

$$s = 0 \Rightarrow \text{Base auxiliar} : \{TE^{(c)}, TM^{(c)}\} \tag{3.9}$$

$$s \neq 0 \Rightarrow \text{Base auxiliar} : \{TE^{(s)}, TM^{(c)}\}. \tag{3.10}$$

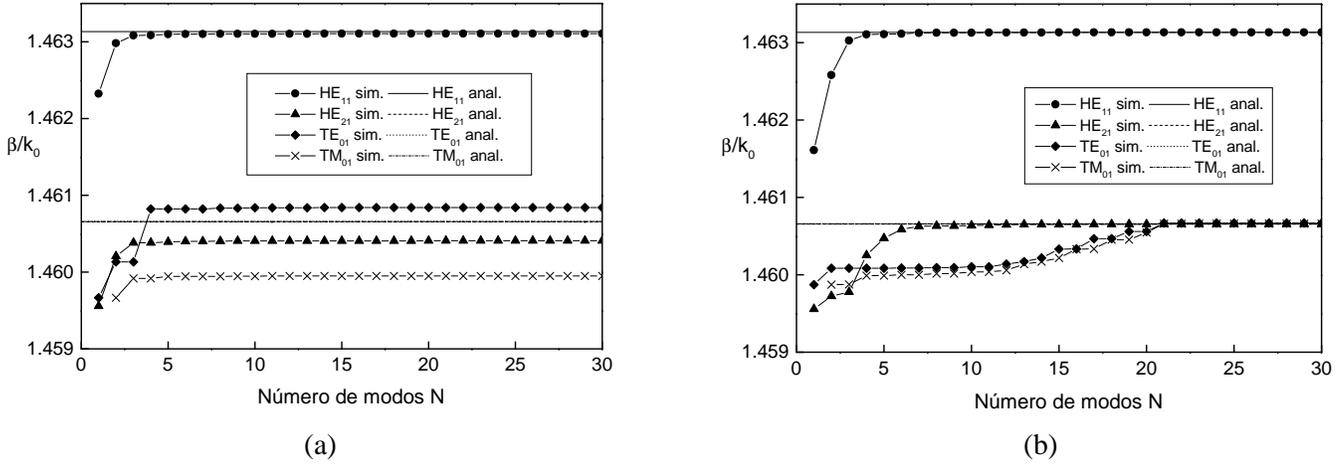


Figura 3.2: Estudio de convergencia de la constante de propagación normalizada  $\beta/k_0$  en función del número  $N$  de modos auxiliares para los primeros cuatro modos propagativos en una fibra óptica, con los siguientes parámetros:  $r_n = 5 \mu m$ ,  $n_n = 1,465$ ,  $n_r = 1,46$ ,  $\lambda_0 = 1330 \text{ nm}$ . (a) Radio de la guía circular empleada como sistema auxiliar:  $A = 7,5 \mu m$ . (b)  $A = 20 \mu m$ .

Para comprobar los resultados de los modos de una fibra óptica obtenidos con el Método de las Bases Bi-Ortogonales, se ha examinado un ejemplo de fibra óptica multimodo con los siguientes parámetros:  $r_n = 5 \mu m$ ,  $n_n = 1,465$ ,  $n_r = 1,46$ . Para este ejemplo se ha hecho un análisis numérico de convergencia de las soluciones obtenidas, en función del número de funciones auxiliares empleadas en la expansión modal y del tamaño de la guía circular empleada como sistema auxiliar, para una longitud de onda en el vacío de  $\lambda_0 = 1330 \text{ nm}$ . En la figura 3.2 se representa la convergencia de la constante de propagación normalizada  $\beta/k_0$  de los cuatro primeros modos propagativos en la fibra, en función del número  $N$  de funciones base auxiliares, y para dos tamaños distintos del blindaje. En la figura 3.2(a) el radio de la guía circular empleada como base auxiliar es de  $A = 7,5 \mu m$ , mientras que los resultados de la figura 3.2(b) corresponden a una guía circular con un radio de  $A = 20 \mu m$ . Para validar este método, se han programado también las ecuaciones analíticas que proporcionan el espectro modal en la fibra óptica de salto de índice [49], que son las ecuaciones trascendentes que se obtienen al imponer las condiciones de contorno con el método de valor en el contorno, y que se han de resolver de forma numérica. En la figura 3.2 se ha representado con líneas la solución analítica de la constante de propagación normalizada de los cuatro primeros modos propagativos en la fibra y con puntos las soluciones obtenidas con nuestro método. Como se puede apreciar, para el caso de guía circular de mayor radio se necesitan más modos de la base auxiliar para alcanzar la convergencia de los resultados. Ello se debe a que, para un mismo número  $N$  de funciones base, al aumentar el radio de la guía circular empleada como base auxiliar, se está disminuyendo la resolución espacial máxima alcanzada. Por otro lado, el problema real que constituye nuestra fibra óptica estará mejor descrito cuanto más alejada esté la pared conductora que introduce la base auxiliar [4]. Así, la solución a

la que convergirá nuestro método estará más próxima a la solución analítica para un mayor tamaño de la guía auxiliar (ello se puede apreciar claramente en las figura 3.2(a) correspondiente a un menor radio de la guía circular, en la que los resultados obtenidos con nuestro método no convergen a la solución analítica, mientras que sí lo hacen en la figura 3.2(b), para un mayor radio de la guía circular empleada como sistema auxiliar). Tras realizar diversas pruebas de convergencia, finalmente se concluye que los resultados proporcionados por este método se alcanzan con buena precisión en este problema para un radio de la guía circular de  $A = 20 \mu\text{m}$  y con  $N = 25$  modos de la base auxiliar, con un tiempo de computación para la simulación de 0,11 s por punto en frecuencia.

A continuación se muestra la tabla 3.1 en la que se comparan los valores obtenidos con el Método de las Bases Bi-Ortogonales (*MBBO*) para la constante de propagación normalizada  $\beta/k_0$  de los cuatro primeros modos propagativos en la fibra ( $N = 25$ ) con los obtenidos analíticamente, para una longitud de onda de  $\lambda_0 = 1330 \text{ nm}$ . Como se puede comprobar, los

Modo	$\beta/k_0$ (anal.)	$\beta/k_0$ ( <i>MBBO</i> )	Error Rel. (%)
$HE_{11}$	1,46313307	1,46313369	$0,4 \cdot 10^{-4}$
$HE_{21}$	1,46065666	1,46065554	$0,8 \cdot 10^{-4}$
$TE_{01}$	1,46066201	1,46066836	$4,0 \cdot 10^{-4}$
$TM_{01}$	1,46065914	1,46066195	$2,0 \cdot 10^{-4}$

Tabla 3.1: Constante de propagación normalizada de los cuatro primeros modos propagativos en una fibra óptica para una longitud de onda de  $\lambda_0 = 1330 \text{ nm}$ , cuyos parámetros se detallan en la figura 3.2. Comparación de los valores obtenidos con este método con las soluciones analíticas.

resultados que proporciona el Método de las Bases Bi-Ortogonales coinciden plenamente con la solución analítica para la constante de propagación normalizada.

Por otro lado, nuestro método no sólo proporciona las constantes de propagación de los modos, sino también las expresiones de los campos de dichos modos. Para verificarlo, se ha analizado otro ejemplo diferente de fibra óptica de salto de índice multimodo con los siguientes parámetros:  $r_n = 6,3 \mu\text{m}$ ,  $n_n = 1,46$ ,  $n_r = 1,455$ ,  $\lambda = 1521,2 \text{ nm}$ . A continuación se detallan los resultados obtenidos para la constante de propagación normalizada  $\beta/k_0$  (tabla 3.2) y la distribución de campo magnético (figura 3.3) de los cuatro primeros modos propagativos en esta fibra óptica. En este caso se han elegido como base auxiliar los 25 primeros modos de una guía circular de radio tres veces mayor que el radio del núcleo de la fibra, es decir,  $A = 18,9 \mu\text{m}$ . En la tabla 3.2 se compara de nuevo la constante de propagación normalizada  $\beta/k_0$  de los cuatro primeros modos propagativos en la fibra obtenida con el *MBBO* con los obtenidos analíticamente, para una longitud de onda de  $\lambda_0 = 1521,2 \text{ nm}$ , donde se puede apreciar de nuevo que ambos resultados difieren en la sexta cifra decimal. En este caso se ha obtenido también la distribución de campo magnético transversal de los modos. Dichos campos aparecen representados en la figura 3.3, cuyas distribuciones de campo coinciden con las que aparecen representadas en [49] para una fibra de salto de índice multimodo.

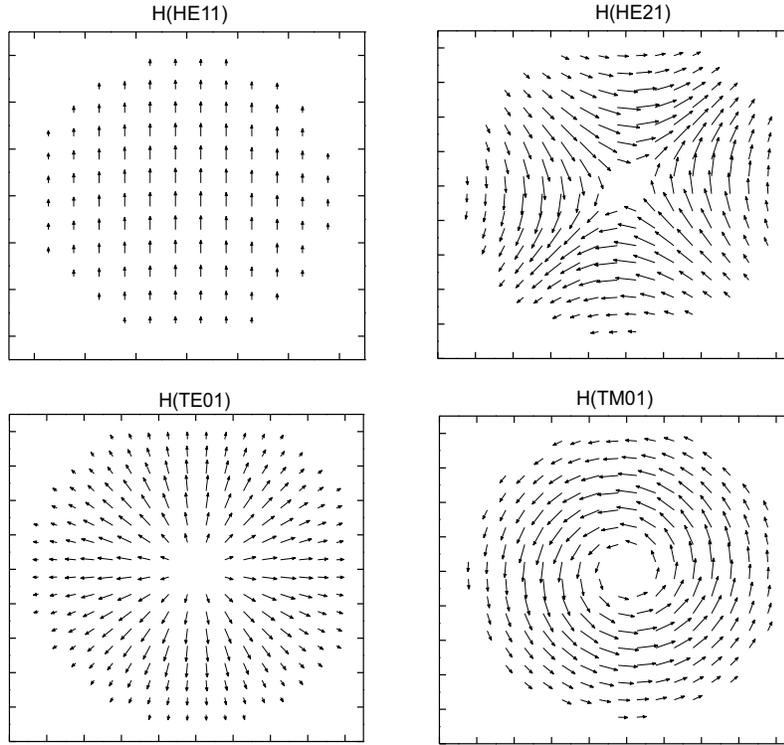


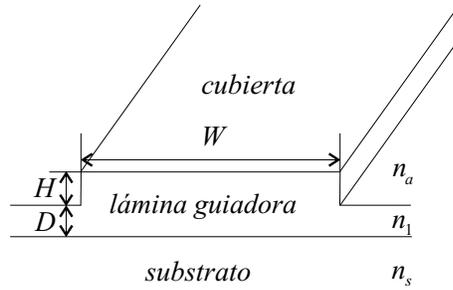
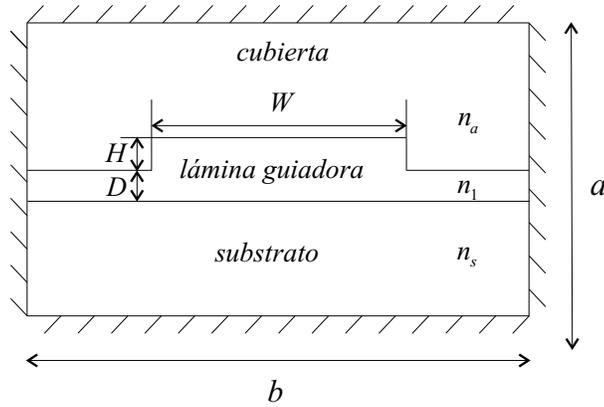
Figura 3.3: Distribución de campo magnético transversal de los cuatro primeros modos propagativos en una fibra óptica cuyos parámetros se detallan en la tabla 3.2.

Modo	$\beta/k_0$ (anal.)	$\beta/k_0$ (MBBO)	Error Rel. (%)
$HE_{11}$	1,45836746	1,45836993	$1,7 \cdot 10^{-4}$
$HE_{21}$	1,45611006	1,45611372	$2,5 \cdot 10^{-4}$
$TE_{01}$	1,45611428	1,45611118	$2,1 \cdot 10^{-4}$
$TM_{01}$	1,45610949	1,45610753	$1,3 \cdot 10^{-4}$

Tabla 3.2: Constante de propagación normalizada de los cuatro primeros modos propagativos en una fibra óptica con los siguientes parámetros:  $r_n = 6,3 \mu\text{m}$ ,  $n_n = 1,46$ ,  $n_r = 1,455$ ,  $\lambda_0 = 1521,2 \text{ nm}$ . Comparación de los valores obtenidos con este método con la solución analítica.

### 3.2.2. Guía Rib

La guía *rib* es una guía dieléctrica [51], [52]. Esta guía se muestra en la figura 3.4, en la que se puede ver que su estructura está constituida por un sustrato dieléctrico plano, una lámina guionadora de espesor  $D$ , de índice de refracción más alto, con un ensanchamiento central de dimensiones  $W \times H$ , cuyo aspecto le da su nombre a esta guía (*rib* o costilla), y por último una última capa homogénea que recubre la parte superior de la estructura. Se trata por tanto de una guía abierta, en la que de nuevo los campos de los primeros modos propagativos quedan confinados en la región central de dimensiones  $W \times H$ . Como se aprecia en la

Figura 3.4: Esquema de una guía *rib*.Figura 3.5: Guía *rib* encerrada dentro de una guía rectangular de dimensiones  $(a \times b)$  (sistema auxiliar).

figura, los diferentes medios se caracterizan por su índice de refracción  $n_a$ ,  $n_1$  y  $n_s$ , que son los índices de la cubierta, de la lámina guiadora y del substrato, respectivamente.

Para analizar esta estructura se ha elegido como sistema auxiliar una guía rectangular de dimensiones  $a \times b$  rellena de un dieléctrico homogéneo de permitividad relativa  $\tilde{\epsilon}_{rb} = \sqrt{n_a}$ , igual a la de la cubierta, cuyas paredes conductoras deberán estar de nuevo suficientemente alejadas de la región central guiadora para que no afecten a las soluciones del problema real [4] (ver la figura 3.5). El espectro modal en una guía rectangular es bien conocido [4]. Por tanto, las funciones base serán el conjunto de modos  $TE^z$  y  $TM^z$  de una guía rectangular, que han sido adecuadamente normalizados, y vienen dados por las siguientes expresiones:

$$\tilde{\mathbf{e}}_p^{TE} = -N_p^{TE} \left( \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi}{a}\left(x + \frac{a}{2}\right)\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}\left(y + \frac{b}{2}\right)\right) \hat{\mathbf{x}} + \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi}{a}\left(x + \frac{a}{2}\right)\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}\left(y + \frac{b}{2}\right)\right) \hat{\mathbf{y}} \right) \quad (3.11)$$

$$\tilde{\mathbf{h}}_p^{TE} = -N_p^{TE} \left( \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi}{a}\left(x + \frac{a}{2}\right)\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}\left(y + \frac{b}{2}\right)\right) \hat{\mathbf{x}} - \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi}{a}\left(x + \frac{a}{2}\right)\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}\left(y + \frac{b}{2}\right)\right) \hat{\mathbf{y}} \right) \quad (3.12)$$

$$\tilde{\mathbf{e}}_p^{TM} = N_p^{TM} \left( \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi}{a}\left(x + \frac{a}{2}\right)\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}\left(y + \frac{b}{2}\right)\right) \hat{\mathbf{x}} + \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{m\pi}{a}\left(x + \frac{a}{2}\right)\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}\left(y + \frac{b}{2}\right)\right) \hat{\mathbf{y}} \right) \quad (3.13)$$

$$\tilde{\mathbf{h}}_p^{TM} = -N_p^{TM} \left( \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{m\pi}{a}\left(x + \frac{a}{2}\right)\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}\left(y + \frac{b}{2}\right)\right) \hat{\mathbf{x}} + \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi}{a}\left(x + \frac{a}{2}\right)\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}\left(y + \frac{b}{2}\right)\right) \hat{\mathbf{y}} \right) \quad (3.14)$$

donde el  $p$ -ésimo modo tiene asociados el par de índices  $m$  y  $n$ , que pueden tomar los siguientes valores para cada familia de modos:

$$TE : m, n = 0, 1, 2, 3, \dots (m = n = 0 \text{ no incluido}) ; \quad TM : m, n = 1, 2, 3, \dots ; \quad (3.15)$$

Las constantes de normalización para las dos familias de modos vienen dadas por las siguientes expresiones:

$$N_p^{TE} = \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{a b}} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}}, \quad N_p^{TM} = \frac{2}{\sqrt{a b}} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}}. \quad (3.16)$$

Dichos modos cumplen la siguiente relación de biortogonalidad:

$$\langle \tilde{\mathbf{e}}_p^\alpha | \tilde{\mathbf{h}}_q^\beta \rangle = \iint_{CS} (\tilde{\mathbf{e}}_p^\alpha \times \tilde{\mathbf{h}}_q^\beta) \cdot \hat{\mathbf{z}} dS = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy (\tilde{\mathbf{e}}_p^\alpha \times \tilde{\mathbf{h}}_q^\beta) \cdot \hat{\mathbf{z}} = \delta_{pq}^{\alpha\beta} \quad (3.17)$$

donde los índices  $\alpha, \beta$  indican modo  $TE$  o modo  $TM$ . El siguiente paso para obtener el espectro modal de la guía *rib* consiste en evaluar los elementos de matriz del operador  $L$ , que en este caso se calcularán como:

$$\begin{aligned} L_{pq}^{\alpha\beta} &= \langle \tilde{\mathbf{e}}_p^\alpha | L \tilde{\mathbf{h}}_q^\beta \rangle = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy (\tilde{\mathbf{e}}_p^\alpha \times L \tilde{\mathbf{h}}_q^\beta) \cdot \hat{\mathbf{z}} dS \\ &= \tilde{\beta}_q^2 \delta_{pq} + k_0^2 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy (\epsilon_r - \tilde{\epsilon}_{rb}) (\tilde{\mathbf{e}}_p^\alpha \times \tilde{\mathbf{h}}_q^\beta) \cdot \hat{\mathbf{z}} dS \\ &\quad + \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \left[ \tilde{\mathbf{e}}_p^\alpha \times \left( \frac{\nabla_t \epsilon_r}{\epsilon_r} \times (\nabla_t \times \tilde{\mathbf{h}}_q^\beta) \right) \right] \cdot \hat{\mathbf{z}} dS. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Estas integrales han sido calculadas analíticamente para el caso general de una guía rectangular de dimensiones  $(a \times b)$  y permitividad relativa  $\tilde{\epsilon}_{rb}$  con diversos rectángulos dieléctricos insertados [53], los cuales vienen caracterizados por las coordenadas de los centros de los mismos  $(x_{0s}, y_{0s})$ , por sus dimensiones  $(c_s \times d_s)$ , y por sus permitividades relativas  $\epsilon_{rs}$ , respectivamente (ver la figura 3.6).

Este problema viene definido por la siguiente distribución transversal de permitividad relativa dentro de la guía:

$$\begin{aligned} \epsilon_r(x, y) &= \tilde{\epsilon}_{rb} + \sum_{s=1}^{ND} \left\{ (\epsilon_{rs} - \tilde{\epsilon}_{rb}) \left[ \theta\left(x - x_{0s} + \frac{c_s}{2}\right) - \theta\left(x - x_{0s} - \frac{c_s}{2}\right) \right] \right. \\ &\quad \left. \left[ \theta\left(y - y_{0s} + \frac{d_s}{2}\right) - \theta\left(y - y_{0s} - \frac{d_s}{2}\right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.19)$$

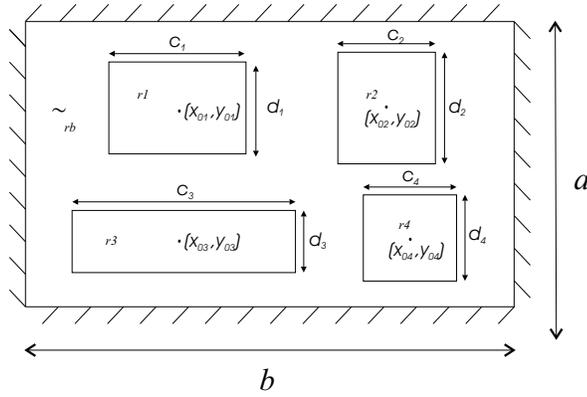


Figura 3.6: Guía rectangular de dimensiones  $(a \times b)$  y permitividad relativa  $\tilde{\epsilon}_{rb}$  con diversos rectángulos dieléctricos insertados.

donde  $\theta(x)$  es la función escalón o función de *Heaviside*, y  $ND$  es el número de rectángulos dieléctricos insertados. Debido a la definición de la distribución de la permitividad dieléctrica en la guía (como suma de funciones escalón), la segunda integral de superficie en (3.18) se reduce a una suma de integrales de línea (ver apéndice D). Finalmente, tras sustituir (3.19) en (3.18), y empleando la base de los modos normalizados  $TE^z$  y  $TM^z$  de una guía rectangular (donde el p-ésimo modo tiene asociados el par de índices  $m$  y  $n$ , y el q-ésimo modo el par de índices  $r$  y  $t$ ), se obtienen las siguientes expresiones para los elementos de matriz del operador  $L$ :

$$L_{pq}^{TM\ TM} = \tilde{\beta}_q^2 \delta_{pq} + k_0^2 N_{mn}^{TM} N_{rt}^{TM} \sum_{s=1}^{ND} \left\{ (\epsilon_{rs} - \tilde{\epsilon}_{rb}) \left[ \frac{mr\pi^2}{a^2} I_1 I_2 + \frac{nt\pi^2}{b^2} I_3 I_4 \right] \right\} \\ + N_{mn}^{TM} N_{rt}^{TM} \left( \frac{r^2\pi^2}{a^2} + \frac{t^2\pi^2}{b^2} \right) \sum_{s=1}^{ND} \left\{ \frac{2(\epsilon_{rs} - \tilde{\epsilon}_{rb})}{\epsilon_{rs} + \tilde{\epsilon}_{rb}} \left[ \frac{m\pi}{a} I_2 I_5 + \frac{n\pi}{b} I_3 I_6 \right] \right\} \quad (3.20)$$

$$L_{pq}^{TE\ TM} = k_0^2 N_{mn}^{TE} N_{rt}^{TM} \sum_{s=1}^{ND} \left\{ (\epsilon_{rs} - \tilde{\epsilon}_{rb}) \left[ -\frac{nr\pi^2}{ab} I_1 I_2 + \frac{mt\pi^2}{ab} I_3 I_4 \right] \right\} \\ + N_{mn}^{TE} N_{rt}^{TM} \left( \frac{r^2\pi^2}{a^2} + \frac{t^2\pi^2}{b^2} \right) \sum_{s=1}^{ND} \left\{ \frac{2(\epsilon_{rs} - \tilde{\epsilon}_{rb})}{\epsilon_{rs} + \tilde{\epsilon}_{rb}} \left[ -\frac{n\pi}{b} I_2 I_5 + \frac{m\pi}{a} I_3 I_6 \right] \right\} \quad (3.21)$$

$$L_{pq}^{TM\ TE} = k_0^2 N_{mn}^{TM} N_{rt}^{TE} \sum_{s=1}^{ND} \left\{ (\epsilon_{rs} - \tilde{\epsilon}_{rb}) \left[ -\frac{mt\pi^2}{ab} I_1 I_2 + \frac{nr\pi^2}{ab} I_3 I_4 \right] \right\} \quad (3.22)$$

$$L_{pq}^{TE\ TE} = k_0^2 N_{mn}^{TE} N_{rt}^{TE} \sum_{s=1}^{ND} \left\{ (\epsilon_{rs} - \tilde{\epsilon}_{rb}) \left[ \frac{nt\pi^2}{b^2} I_1 I_2 + \frac{mr\pi^2}{a^2} I_3 I_4 \right] \right\} \quad (3.23)$$

donde las constantes  $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5$  e  $I_6$  que aparecen en las ecuaciones (3.20)-(3.23) vienen dadas por las siguientes expresiones:

$$I_1 = \begin{cases} \frac{a}{\pi(m-r)} \sin\left(\frac{\pi c_s(m-r)}{2a}\right) \cos\left(\frac{\pi(m-r)}{a}\left(x_{0s} + \frac{a}{2}\right)\right) \\ + \frac{a}{\pi(m+r)} \sin\left(\frac{\pi c_s(m+r)}{2a}\right) \cos\left(\frac{\pi(m+r)}{a}\left(x_{0s} + \frac{a}{2}\right)\right) & m \neq r \\ \frac{c_s}{2} + \frac{a}{\pi(m+r)} \sin\left(\frac{\pi c_s(m+r)}{2a}\right) \cos\left(\frac{\pi(m+r)}{a}\left(x_{0s} + \frac{a}{2}\right)\right) & m = r \end{cases} \quad (3.24)$$

$$I_2 = \begin{cases} \frac{b}{\pi(n-t)} \sin\left(\frac{\pi d_s(n-t)}{2b}\right) \cos\left(\frac{\pi(n-t)}{b}\left(y_{0s} + \frac{b}{2}\right)\right) \\ - \frac{b}{\pi(n+t)} \sin\left(\frac{\pi d_s(n+t)}{2b}\right) \cos\left(\frac{\pi(n+t)}{b}\left(y_{0s} + \frac{b}{2}\right)\right) & n \neq t \\ \frac{d_s}{2} - \frac{b}{\pi(n+t)} \sin\left(\frac{\pi d_s(n+t)}{2b}\right) \cos\left(\frac{\pi(n+t)}{b}\left(y_{0s} + \frac{b}{2}\right)\right) & n = t \end{cases} \quad (3.25)$$

$$I_3 = \begin{cases} \frac{a}{\pi(r-m)} \sin\left(\frac{\pi c_s(r-m)}{2a}\right) \cos\left(\frac{\pi(r-m)}{a}\left(x_{0s} + \frac{a}{2}\right)\right) \\ - \frac{a}{\pi(r+m)} \sin\left(\frac{\pi c_s(r+m)}{2a}\right) \cos\left(\frac{\pi(r+m)}{a}\left(x_{0s} + \frac{a}{2}\right)\right) & m \neq r \\ \frac{c_s}{2} - \frac{a}{\pi(r+m)} \sin\left(\frac{\pi c_s(r+m)}{2a}\right) \cos\left(\frac{\pi(r+m)}{a}\left(x_{0s} + \frac{a}{2}\right)\right) & m = r \end{cases} \quad (3.26)$$

$$I_4 = \begin{cases} \frac{b}{\pi(t-n)} \sin\left(\frac{\pi d_s(t-n)}{2b}\right) \cos\left(\frac{\pi(t-n)}{b}\left(y_{0s} + \frac{b}{2}\right)\right) \\ + \frac{b}{\pi(t+n)} \sin\left(\frac{\pi d_s(t+n)}{2b}\right) \cos\left(\frac{\pi(t+n)}{b}\left(y_{0s} + \frac{b}{2}\right)\right) & n \neq t \\ \frac{d_s}{2} + \frac{b}{\pi(t+n)} \sin\left(\frac{\pi d_s(t+n)}{2b}\right) \cos\left(\frac{\pi(t+n)}{b}\left(y_{0s} + \frac{b}{2}\right)\right) & n = t \end{cases} \quad (3.27)$$

$$I_5 = \sin\left(\frac{\pi r}{a}\left(x_{0s} - \frac{c_s}{2} + \frac{a}{2}\right)\right) \cos\left(\frac{\pi m}{a}\left(x_{0s} - \frac{c_s}{2} + \frac{a}{2}\right)\right) \\ - \sin\left(\frac{\pi r}{a}\left(x_{0s} + \frac{c_s}{2} + \frac{a}{2}\right)\right) \cos\left(\frac{\pi m}{a}\left(x_{0s} + \frac{c_s}{2} + \frac{a}{2}\right)\right) \quad (3.28)$$

$$I_6 = \sin\left(\frac{\pi t}{b}\left(y_{0s} - \frac{d_s}{2} + \frac{b}{2}\right)\right) \cos\left(\frac{\pi n}{b}\left(y_{0s} - \frac{d_s}{2} + \frac{b}{2}\right)\right) \\ - \sin\left(\frac{\pi t}{b}\left(y_{0s} + \frac{d_s}{2} + \frac{b}{2}\right)\right) \cos\left(\frac{\pi n}{b}\left(y_{0s} + \frac{d_s}{2} + \frac{b}{2}\right)\right) . \quad (3.29)$$

Las soluciones analíticas de dichas integrales también serán empleadas en el apartado 3.3 para el estudio de guías de microondas con rectángulos dieléctricos insertados.

Por otro lado, gracias a la existencia de simetría respecto al eje  $Y$  en la guía  $rib$ , los modos con paridad distinta respecto a este eje no se acoplan entre sí, por lo que la dimensión de la matriz  $\underline{L}$  a diagonalizar se reduce en un factor 2, con la consiguiente reducción en el tiempo de computación.

A continuación se van a analizar las características de propagación de una guía *rib* empleando el Método de las Bases Bi-Ortogonales. Para ello se ha examinado un ejemplo de guía *rib* que ha sido analizada en [51] empleando el Método de propagación de haz (*BPM*), la cual se caracteriza por los siguientes parámetros (ver la figura 3.4):  $n_a = 1$ ,  $n_1 = 3,44$ ,  $n_s = 3,4$ ,  $W = 3 \mu\text{m}$ ,  $D = H = 0,5 \mu\text{m}$ . Para este ejemplo se ha hecho un análisis numérico de convergencia de las soluciones obtenidas con el *MBBO*, en función del número de funciones base auxiliares empleadas en la expansión modal, y para diferentes tamaños de la guía rectangular empleada como sistema auxiliar, para una longitud de onda de  $\lambda_0 = 1,55 \mu\text{m}$ . A dicha longitud de onda existen dos modos guiados en la estructura polarizados según el eje  $X$  e  $Y$ , respectivamente. En la figura 3.7 se ha representado la convergencia de la constante de propagación normalizada  $\beta/k_0$  de los dos modos guiados en la guía *rib* en función del número de funciones base  $N$  para dos tamaños distintos de la guía rectangular empleada como sistema auxiliar, y se comparan con el valor obtenido con el *BPM*. El modo denominado como  $E_x$  (campo eléctrico polarizado según el eje  $X$ ) se ha obtenido empleando los modos de la base auxiliar con índice  $m$  impar, mientras que el modo  $E_y$  (campo eléctrico polarizado según el eje  $Y$ ) se ha obtenido con las funciones de índice  $m$  par. En la figura 3.7(a) el tamaño de la guía rectangular empleada como sistema auxiliar es de  $9 \mu\text{m} \times 9 \mu\text{m}$ , mientras que los resultados de la figura 3.7(b) corresponden a una guía de dimensiones  $20 \mu\text{m} \times 20 \mu\text{m}$ .

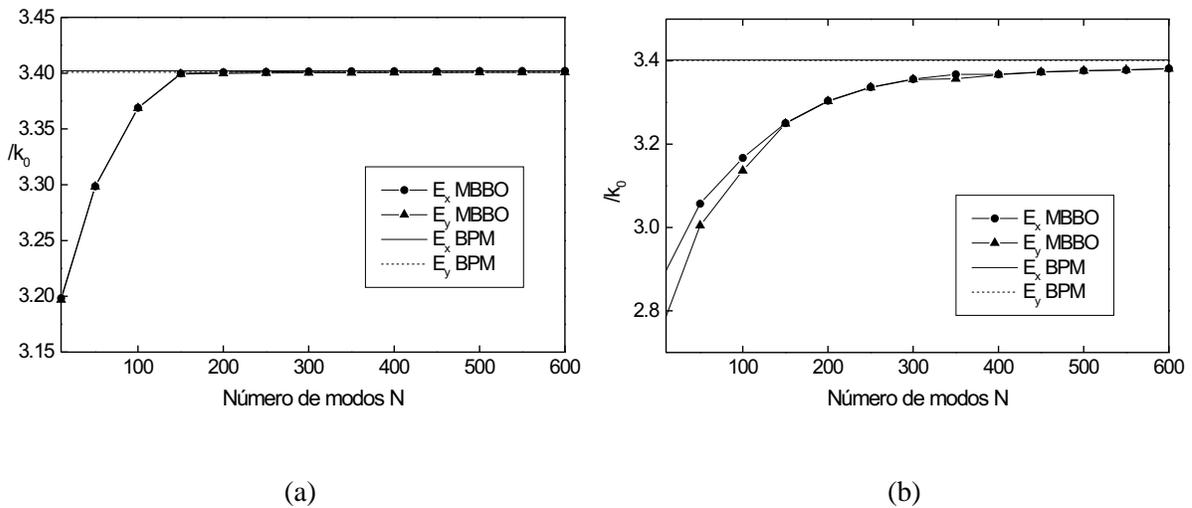


Figura 3.7: Estudio de convergencia de la constante de propagación normalizada  $\beta/k_0$  de los dos modos guiados en una guía *rib*, en función del número  $N$  de modos auxiliares para una longitud de onda de  $1,55 \mu\text{m}$ , con los siguientes parámetros:  $n_a = 1$ ,  $n_2 = 3,44$  y  $n_s = 3,4$ ,  $W = 3 \mu\text{m}$ ,  $D = H = 0,5 \mu\text{m}$ . Dimensiones de la guía rectangular empleada como sistema auxiliar: (a)  $9 \mu\text{m} \times 9 \mu\text{m}$ ; (b)  $20 \mu\text{m} \times 20 \mu\text{m}$ .

Al igual que para el caso de la fibra óptica, en este caso se alcanza más lentamente la convergencia de las soluciones para la guía rectangular más grande, que además se consigue para un número muy elevado de modos (del orden de 1500 modos). En cambio, en el caso

de la guía de dimensiones  $9 \mu\text{m} \times 9 \mu\text{m}$ , se alcanza más rápidamente la convergencia, obteniéndose resultados para 600 modos de la base auxiliar que difieren del valor obtenido en [51] en la cuarta o quinta cifra decimal. Tras realizar diversas pruebas de convergencia, finalmente se concluye que los resultados proporcionados por este método se alcanzan con buena precisión para una guía rectangular como sistema auxiliar de dimensiones  $9 \mu\text{m} \times 9 \mu\text{m}$  y con  $N = 600$  modos de la base auxiliar, con un tiempo de computación para la simulación de 2 min. y 3 s por punto en frecuencia.

A continuación se muestra la tabla 3.3 en la que se comparan los valores obtenidos con el *MBBO* para la constante de propagación normalizada  $\beta/k_0$  de los dos modos guiados en la guía *rib* ( $N = 600$ ,  $a = b = 9 \mu\text{m}$ ) con los obtenidos mediante el *BPM*, para una longitud de onda de  $\lambda_0 = 1,55 \mu\text{m}$ .

Modo	$\beta/k_0$ ( <i>BPM</i> )	$\beta/k_0$ ( <i>MBBO</i> )	Diferencia Rel. (%)
$E_x$	3,402313	3,402002	$9,1 \cdot 10^{-3}$
$E_y$	3,400917	3,400656	$7,7 \cdot 10^{-3}$

Tabla 3.3: Constante de propagación normalizada de los dos modos guiados en una guía *rib* para una longitud de onda de  $\lambda_0 = 1,55 \mu\text{m}$  cuyos parámetros se detallan en la figura 3.7. Comparación de los valores obtenidos con este método con los proporcionados por el *BPM*.

Como se puede comprobar, los resultados que proporciona el Método de las Bases Bi-Ortogonales coinciden con la solución proporcionada en [51] para la constante de propagación normalizada empleando el *BPM*.

Finalmente, también se ha obtenido la distribución de campos en esta guía. El campo magnético transversal se ha obtenido mediante la diagonalización de la matriz  $\underline{L}$ . En este caso, para obtener el campo eléctrico, se ha diagonalizado la matriz  $\underline{L}^\dagger$ , cuyos autovectores son el campo eléctrico transversal de los modos definido como  $\bar{e}_m = (-e_{ym}^*, e_{xm}^*)$ . Por tanto, el campo eléctrico transversal de cada modo se obtendrá como  $e_m = (\bar{e}_{ym}^*, -\bar{e}_{xm}^*)$ . En las figuras 3.8 y 3.9 se representan con líneas de contorno (espaciadas en 0.5 dB) las componentes normalizadas de campo eléctrico y magnético dominantes de los dos modos guiados en la guía *rib* de este ejemplo (que también aparecen representadas en [51]), cuyo campo eléctrico está polarizado según el eje  $X$  e  $Y$ , respectivamente. Para los dos modos, la relación entre el máximo correspondiente a la componente dominante respecto a la componente minoritaria, tanto para el campo eléctrico como para el campo magnético, es en todos los casos superior a 20. Como se puede observar, la mayor parte del campo está confinado en las proximidades de la capa de índice alto, extendiéndose en parte hacia el sustrato. Este es el comportamiento típico de una guía dieléctrica como la guía *rib*.

### 3.2.3. Guía *Rib-ARROW*

La guía *Rib-ARROW* o *rib* antirresonante es una guía dieléctrica óptica similar a la guía *rib* estudiada en el apartado anterior, con la diferencia de que en este caso la guía *rib* está integrada sobre un sustrato plano de silicio, siendo el índice de refracción del sustrato mayor que el de la estructura guiadora o *rib* (ver figura 3.10). Para esta guía se han hecho diversos

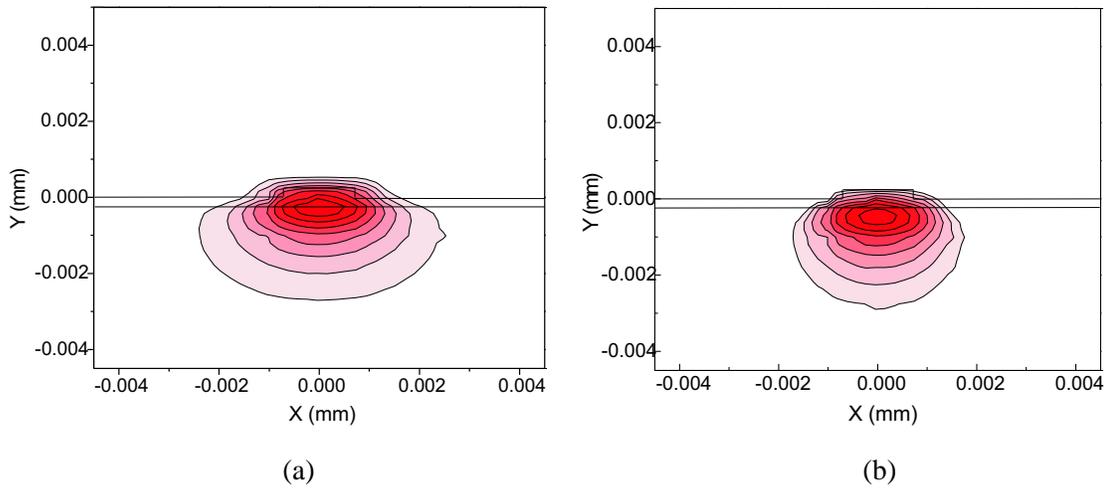


Figura 3.8: Distribución de la componente dominante de campo eléctrico transversal de los dos modos guiados en la guía *rib* cuyos parámetros se detallan al pie de la figura 3.7. (a) Modo 1: Campo eléctrico con polarización  $x$ . (b) Modo 2: Campo eléctrico con polarización  $y$ .

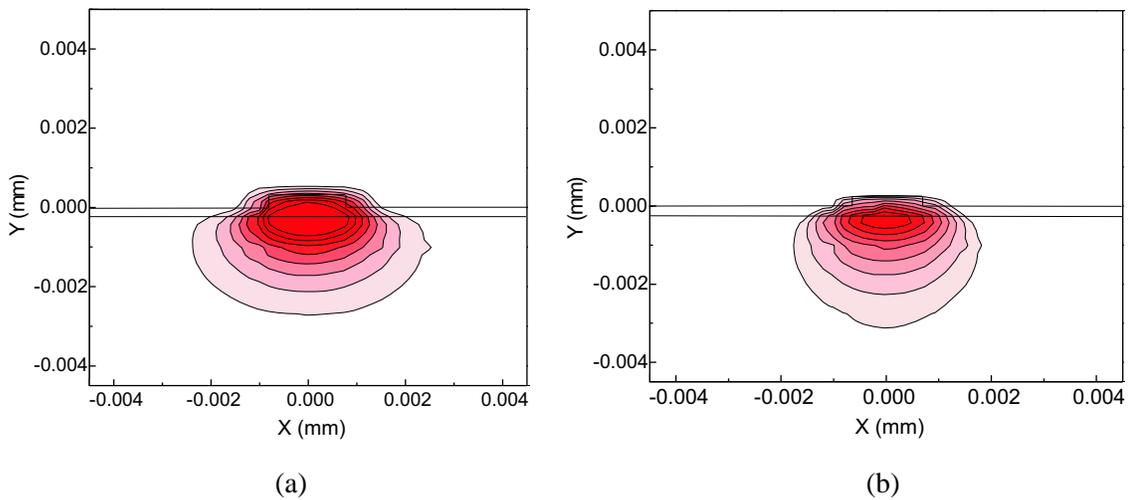


Figura 3.9: Distribución de la componente dominante de campo magnético transversal de los dos modos guiados en la guía *rib* cuyos parámetros se detallan al pie de la figura 3.7. (a) Modo 1: Campo magnético con polarización  $y$ . (b) Modo 2: Campo magnético con polarización  $x$ .

análisis teóricos y experimentales sobre la propagación del campo electromagnético en la misma [54], [55], [56]. Esta guía ha sido empleada en el diseño de dispositivos ópticos pasivos con aplicaciones en telecomunicaciones o como sensores optoquímicos [55], [57]. La estructura adoptada para la realización de las guías en la dirección transversal es la denominada estructura antirresonante o ARROW [58]. El nombre de ARROW (Anti Resonant Reflecting Optical Waveguide) hace referencia a una guía de ondas en la cual, al menos en una de las direcciones transversales, el guiado de la luz se produce mediante una reflexión antirreso-

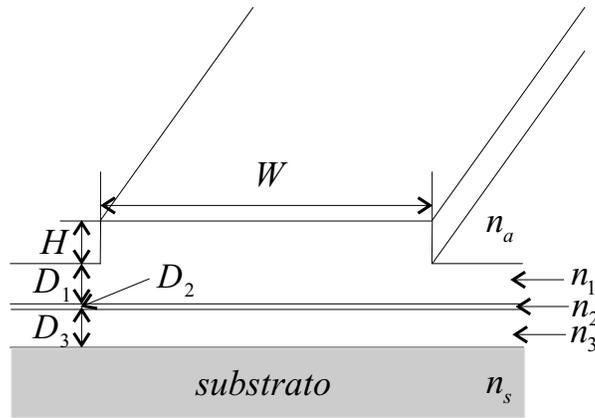


Figura 3.10: Esquema de una guía *Rib-ARROW*.

nante [56]. La estructura multicapa está fabricada sobre un sustrato de silicio, cuyo índice de refracción para una longitud de onda de trabajo de  $\lambda_0 = 628 \text{ nm}$  es  $n_s = 3,88 - j0,01$ . El confinamiento lateral en la otra dirección transversal se provoca mediante la estructura *rib*.

En concreto, la guía que se va a analizar tiene la geometría mostrada en la figura 3.10, cuyo diseño inicial como guía planar se debe a Duguay et al [58]. Esta guía está formada por una estructura plana antirresonante sobre la que se ha realizado, eliminando parte de la capa del núcleo, una estructura *rib*. Los valores de los diferentes parámetros, para que esta estructura sea antirresonante a la longitud de onda de  $628 \text{ nm}$ , son los siguientes:  $H + D_1 = 4 \mu\text{m}$ ,  $D_2 = 0,33 \mu\text{m}$ ,  $D_3 = 2 \mu\text{m}$ ,  $n_a = 1,0$ ,  $n_1 = 1,46$ ,  $n_2 = 2,0$ ,  $n_3 = n_1 = 1,46$ ,  $n_s = 3,88 - j 0,01$ . Se han analizado configuraciones antirresonantes con una estructura *rib* grabada sobre la región multicapa con anchuras ( $W$ ) en el rango de  $2$  a  $20 \mu\text{m}$ , y escalones de alturas ( $H$ ) de valores  $1.5$ ,  $2.5$  y  $3.5 \mu\text{m}$ .

El espectro modal en dicha guía ha sido analizado en [54] empleando dos métodos principalmente, que son el método de índice espectral (aproximado) y el método de ajuste de modos. Por otro lado, en el mismo trabajo también se ha analizado la atenuación total en dicha guía cuando ésta es excitada mediante un láser con campo gaussiano de  $4 \mu\text{m}$  de diámetro, centrado en el *rib* (en el montaje experimental para la medida de dicha atenuación, se inyecta luz en una fibra monomodo que a su vez excita la guía *Rib-ARROW* [54]). El análisis de la atenuación llevado a cabo en [54] ha sido realizado empleando el método de propagación de haz [59], que además ha sido comparado con medidas experimentales.

La guía *Rib-ARROW* descrita ha sido analizada con el Método de las Bases Bi-Ortogonales, que permite incluir las pérdidas en los medios dieléctricos. Para ello se ha empleado como sistema auxiliar una guía rectangular de dimensiones  $a \times b$  rellena de un dieléctrico homogéneo de permitividad relativa  $\tilde{\epsilon}_{rb} = \sqrt{n_a}$ , igual a la de la cubierta, cuyas paredes conductoras deberán estar de nuevo suficientemente alejadas de la región central guiadora para que no afecten a las soluciones guiadas por el *rib* [4]. Se ha llevado a cabo un estudio de convergencia de las soluciones como el descrito en el apartado 3.2.1, para la guía cuyo *rib* es el de menores dimensiones (para el cual hará falta una mayor resolución espacial), analizando tanto el efecto del número de modos de la base auxiliar como el del volumen finito crea-

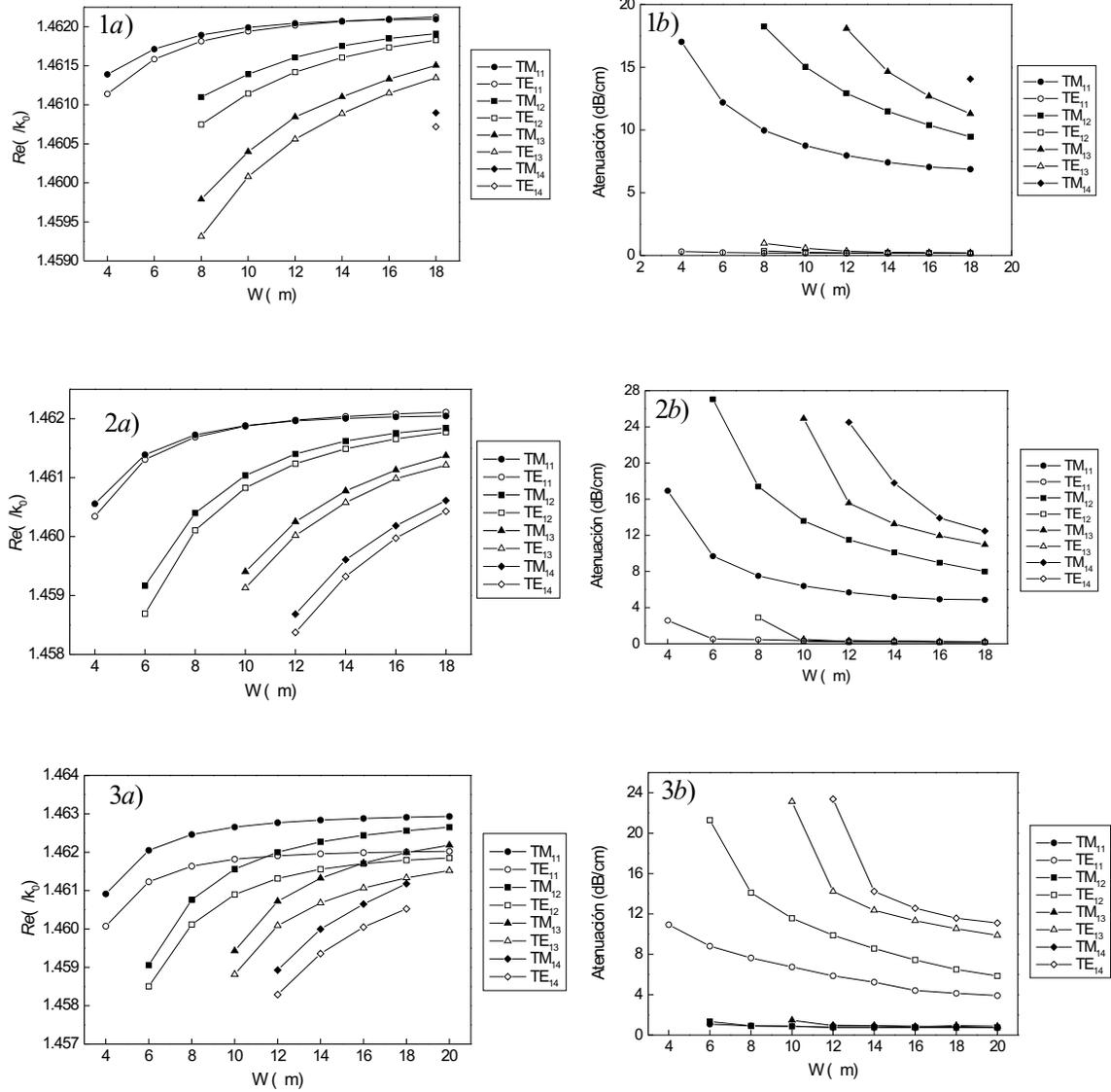


Figura 3.11: Resultados obtenidos para las soluciones modales con el MBBO para una guía Rib-ARROW a la longitud de onda de 628 nm para diferentes profundidades de grabado  $H$ , con los siguientes parámetros:  $H + D_1 = 4 \mu\text{m}$ ,  $D_2 = 0,33 \mu\text{m}$ ,  $D_3 = 2 \mu\text{m}$ ,  $n_a = 1$ ,  $n_1 = 1,46$ ,  $n_2 = 2,0$ ,  $n_3 = n_1 = 1,46$ ,  $n_s = 3,88 - j 0,01$ . Se representa la parte real de la constante de propagación normalizada ( $\text{Re}(\beta/k_0)$ ) y la atenuación calculada a partir de su parte imaginaria, frente a la anchura  $W$  de la guía, para profundidades de grabado de (1)  $1.5 \mu\text{m}$ , (2)  $2.5 \mu\text{m}$  y (3)  $3.5 \mu\text{m}$ .

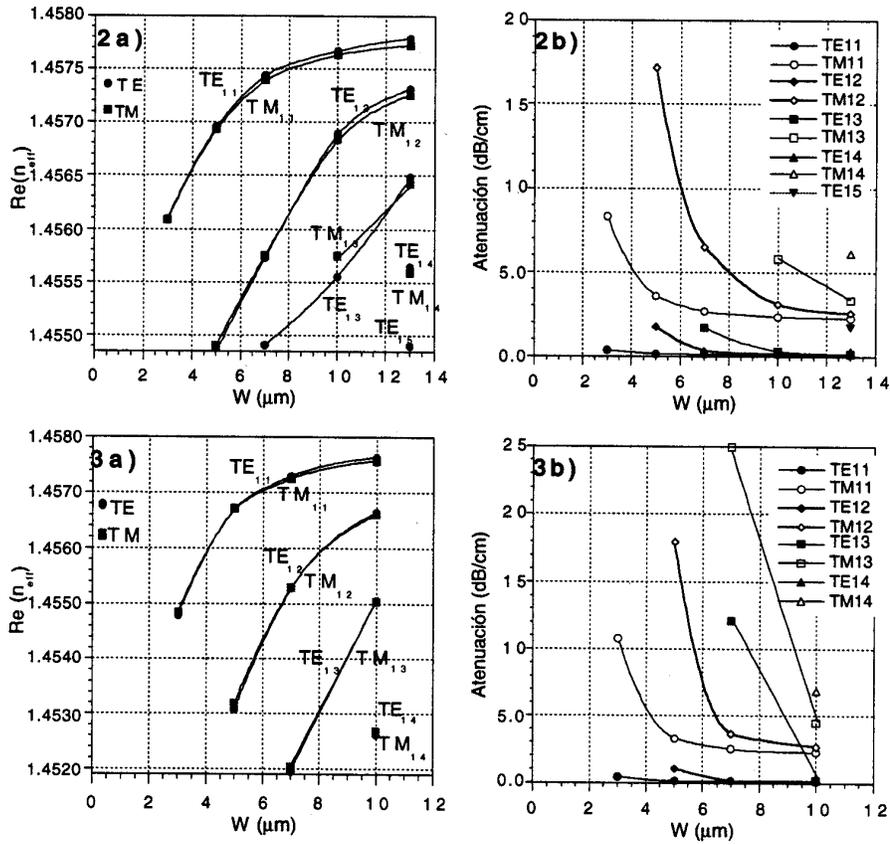


Figura 3.12: Resultados obtenidos por I. Garcés [54] para las soluciones modales empleando el método de ajuste de modos para una guía *Rib-ARROW* a la longitud de onda de 628 nm, con profundidades de grabado  $H$  de (2)  $1.5 \mu\text{m}$  y (3)  $2.5 \mu\text{m}$ . Se representa la parte real de la constante de propagación normalizada ( $\text{Re}(\beta/k_0)$ ) (izquierda) y la atenuación calculada a partir de su parte imaginaria (derecha), frente a la anchura  $W$  de la guía.

do artificialmente por las paredes confinantes. Tras realizar dicho estudio de convergencia, se ha concluido que se obtienen soluciones convergentes para una guía rectangular cuyos lados  $a$  y  $b$  son 4 veces mayores que las dimensiones transversales de la guía ( $a = 4W$ ,  $b = 4(H + D_1 + D_2 + D_3)$ ), y para 1000 funciones base auxiliares. En la figura 3.11 se muestran los resultados obtenidos para los primeros modos propagativos en el *rib*, la parte real de la constante de propagación normalizada ( $\mathcal{R}e(\beta/k_0)$ ) y la atenuación (en dB/cm) calculada a partir de su parte imaginaria (Atenuación (dB/cm) =  $-10 \log_{10} e^{-2\mathcal{I}m(\beta) \cdot (1\text{cm})}$ ), frente a la anchura  $W$  de la guía, para profundidades de grabado de (1)  $1.5 \mu\text{m}$ , (2)  $2.5 \mu\text{m}$  y (3)  $3.5 \mu\text{m}$ . Estos resultados se pueden comparar con los obtenidos por I. Garcés [54] (ver la figura 3.12) empleando el método de ajuste de modos, para profundidades de grabado de (2)  $1.5 \mu\text{m}$  y (3)  $2.5 \mu\text{m}$  (el caso de profundidad de grabado de  $3.5 \mu\text{m}$  es más difícil de resolver con el método de ajuste de modos debido a que se necesitan gran cantidad de modos de radiación, lo cual conlleva una falta de precisión numérica que hace que las soluciones lleguen a oscilar). Como se puede observar, ambos métodos proporcionan resultados ligeramente diferentes para las dos profundidades de grabado. Por un lado, la constante de propagación normalizada ( $\mathcal{R}e(\beta/k_0)$ ) de los modos obtenida con ambos métodos difiere en la tercera cifra decimal. Además, con el Método de las Bases Bi-Ortogonales, la constante de propagación de los modos con polarización *TM* es ligeramente superior a la de los modos con polarización *TE*, al contrario de lo que se observa con el método de ajuste de modos. Así mismo, la atenuación de los modos obtenida con nuestro método es algo mayor, además de que todos los modos entran en corte para anchuras de guía algo mayores. No obstante, ambos métodos coinciden en el hecho de que se observan mayores atenuaciones para la polarización *TM*. Además, esa diferencia de atenuaciones para ambas polarizaciones aumenta cuando los modos entran en las cercanías del corte.

El método de las Bases Bi-Ortogonales, que es un método totalmente vectorial, también permite calcular la distribución de potencia (componente  $z$  de la parte real del vector de Poynting complejo,  $\mathcal{R}e(S_z)$ ) a lo largo de la sección transversal de la guía *Rib-ARROW*. En la figura 3.13 se muestra la distribución de potencia de los modos  $TE_{11}$ ,  $TE_{12}$  y  $TE_{13}$  en la guía cuyos parámetros se detallan al pie de la figura 3.11, para una anchura del *rib*  $W = 10 \mu\text{m}$  y una profundidad de grabado  $H = 1,5 \mu\text{m}$ , a la longitud de onda de 628 nm. Como se puede observar, estas distribuciones corresponden a modos guiados que se propagan básicamente confinados dentro del *rib*. La distribución de potencia correspondiente a los modos con polarización *TM* para este caso es prácticamente idéntica, por lo que se ha omitido su representación.

Por último, se han calculado también las pérdidas que se producen en la propagación a lo largo de un tramo de guía de 2 cm de longitud. Para ello, esta estructura se excita mediante una fibra óptica monomodo que propaga un campo gaussiano de  $4 \mu\text{m}$  de diámetro, de forma que la fibra se enfrenta a la entrada de la guía quedando dicho campo centrado en el *rib*. Para hacer dicho cálculo, primero debemos calcular los coeficientes de acoplo entre el modo que propaga la fibra óptica y los modos de la guía *Rib-ARROW* en el plano de entrada  $z = 0$  cm. Una vez calculados dichos coeficientes de acoplo, y teniendo en cuenta la relación de biortogonalidad satisfecha por los campos en la guía, se calcula la potencia a la salida de la guía ( $z = 2$  cm), considerando que los campos han sufrido las atenuaciones que aparecen

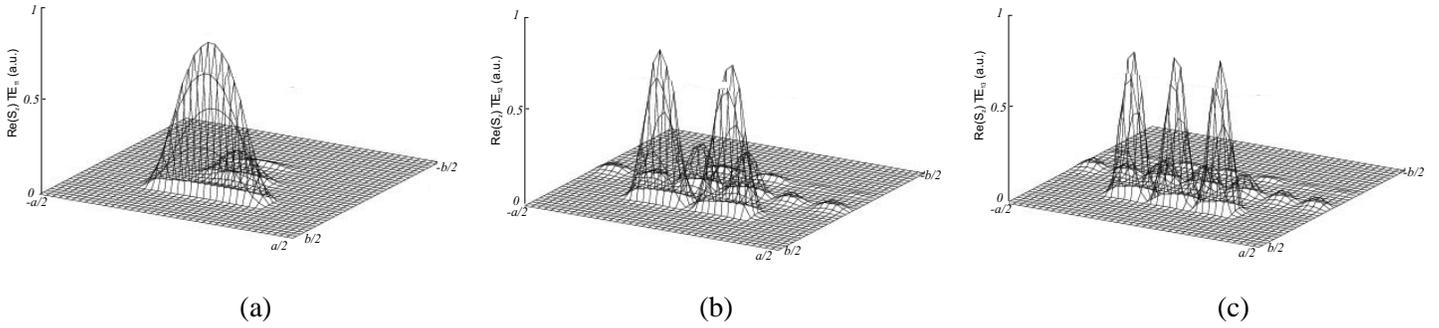


Figura 3.13: Distribución de potencia (componente  $z$  de la parte real del vector de Poynting complejo,  $\mathcal{R}e(S_z)$ ) de los modos  $TE_{11}$ ,  $TE_{12}$  y  $TE_{13}$  de la guía *Rib-ARROW* cuyos parámetros se detallan al pie de la figura 3.11 para una anchura del *rib*  $W = 10 \mu\text{m}$  y una profundidad de grabado  $H = 1,5 \mu\text{m}$ .

representadas en la figura 3.11.

En la figura 3.14 se representan los valores calculados de atenuación de una guía de 2 cm de longitud con diferentes profundidades de grabado ( $H = 1,5 \mu\text{m}$ ,  $H = 2,5 \mu\text{m}$  y  $H = 3,5 \mu\text{m}$ ) en función de la anchura  $W$  de la misma, a la longitud de onda de 628 nm. Así mismo, en la figura 3.15 se muestran las pérdidas totales que se midieron de la misma guía analizada anteriormente, la cual fue fabricada empleando la técnica de grabado RIE (*Reactive Ion Etching*) [54] (en dicha gráfica aparecen también, además de los valores anteriores de profundidad de grabado, las pérdidas totales medidas en una guía con profundidad de grabado de  $H = 0,8 \mu\text{m}$ ). Como se puede observar, en ambas gráficas se observa un mismo comportamiento: se produce un aumento de la atenuación conforme disminuye la anchura de la guía. No obstante, aunque los comportamientos teórico y experimental coinciden en sus formas y en la magnitud de las pérdidas, ambas curvas difieren en las anchuras a las que se producen los fuertes aumentos de atenuación. En consecuencia, el aumento brusco de las pérdidas totales que se observa experimentalmente para anchuras de guía inferiores a  $10 \mu\text{m}$  parece que no se explica adecuadamente por medio de la atenuación de los modos calculada con nuestro método. Esta discrepancia entre el método desarrollado en esta memoria y los resultados experimentales se puede explicar en base a que la atenuación medida experimentalmente tiene básicamente dos componentes, una componente debida a las pérdidas óhmicas, y otra debida a la radiación de la estructura; la primera ha sido considerada en nuestros cálculos, mientras que la segunda no ha sido modelizada. En [54] también se ha llevado a cabo un estudio de la atenuación de las guías empleando para ello el método de propagación de haz. Dicho estudio (ver la figura 3.16) predice respuestas en las que los aumentos de atenuación se producen a anchuras algo menores que las estimadas con el Método de las Bases Bi-Ortogonales, y por tanto, también inferiores a la observadas experimentalmente. Además, las pérdidas calculadas son inferiores a las medidas experimentales.

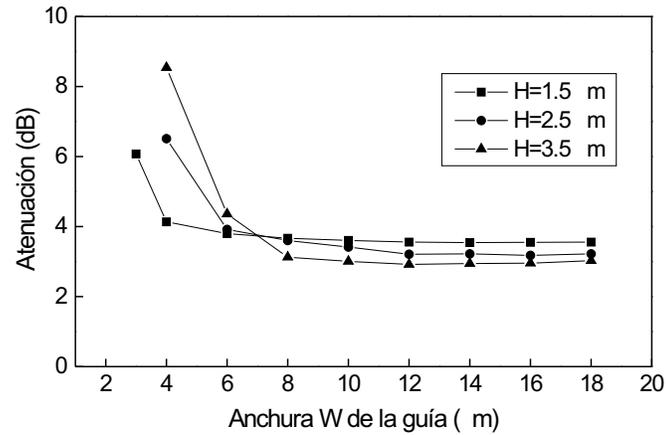


Figura 3.14: Cálculo de la atenuación, empleando el Método de las Bases Bi-Ortogonales, de una guía *Rib-ARROW* de 2 cm de longitud con diferentes profundidades de grabado ( $H = 1,5 \mu\text{m}$ ,  $H = 2,5 \mu\text{m}$  y  $H = 3,5 \mu\text{m}$ ) en función de la anchura  $W$  de la misma, a la longitud de onda de 628 nm.

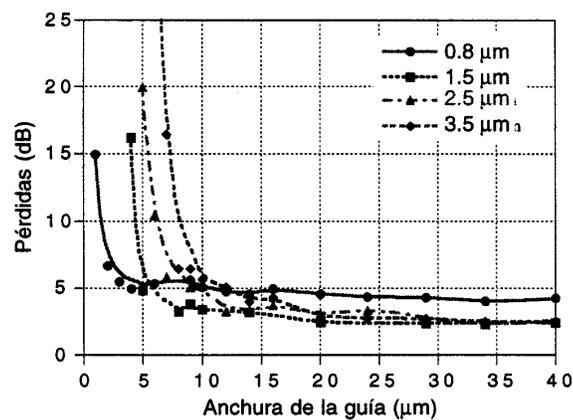


Figura 3.15: Medida de las pérdidas totales de una guía *Rib-ARROW* fabricada, empleando la técnica de grabado RIE, de 2 cm de longitud y con diferentes profundidades de grabado ( $H = 0,8 \mu\text{m}$ ,  $H = 1,5 \mu\text{m}$ ,  $H = 2,5 \mu\text{m}$  y  $H = 3,5 \mu\text{m}$ ) en función de la anchura  $W$  de la misma, a la longitud de onda de 628 nm.

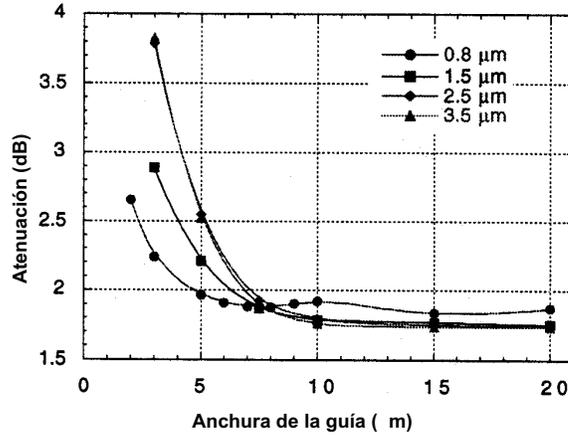


Figura 3.16: Atenuación calculada mediante el método de propagación de haz [54] de una guía *Rib-Arrow* de 2 cm de longitud con diferentes profundidades de grabado ( $H = 0,8 \mu\text{m}$ ,  $H = 1,5 \mu\text{m}$ ,  $H = 2,5 \mu\text{m}$  y  $H = 3,5 \mu\text{m}$ ) en función de la anchura  $W$  de la misma, a la longitud de onda de 628 nm.

### 3.3. Guías de microondas

#### 3.3.1. Guías rectangulares cargadas con láminas dieléctricas

En este apartado se analizan una serie de guías de onda formadas por una guía rectangular cargada parcialmente por una o varias láminas dieléctricas de sección rectangular. Alguno de los casos analizados tiene solución analítica [4], [60], y por tanto será posible contrastar con dicha solución los resultados proporcionados por el *MBBO* para ese caso. En el resto de casos, se analizarán ejemplos que han sido estudiados empleando otros métodos numéricos, cuyos resultados también serán empleados para contrastar nuestro método modal.

##### 3.3.1.1. Guía rectangular cargada con una lámina dieléctrica rectangular homogénea paralela al eje $X$

El primer caso es una guía rectangular de dimensiones  $(a \times b)$  que está parcialmente rellena de un rectángulo dieléctrico de dimensiones  $(a \times d)$  situado a una distancia  $l$  de la pared inferior de la guía. El esquema de esta guía se muestra en la figura 3.17. El espectro modal de esta guía tiene solución analítica [4], [60]. Este problema es homogéneo en el eje  $X$ . Debido a las condiciones de contorno impuestas por la discontinuidad del material dieléctrico en esta guía, los campos no van a ser en general modos  $TE^z$  o  $TM^z$ , sino que se pueden descomponer en las familias de modos híbridos *LSE longitudinal section electric* y *LSM o longitudinal section magnetic* [61], también conocidos como modos  $TE^y$  y  $TM^y$ , es decir, campos eléctricos o magnéticos tangentes (longitudinales) a la interfase dieléctrica que presenta la guía, respectivamente.

El sistema auxiliar elegido para este problema es una guía rectangular homogénea rellena de aire de iguales dimensiones  $(a \times b)$  que la guía bajo estudio (cargada con la lámina

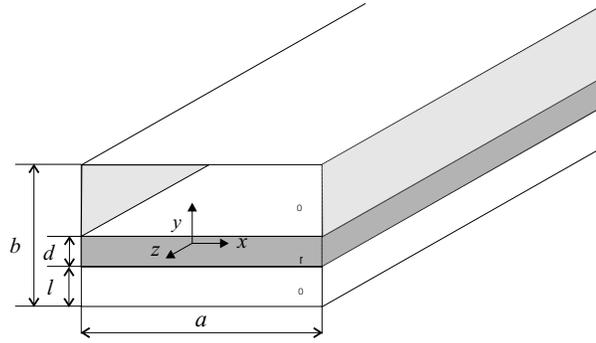


Figura 3.17: Esquema de una guía rectangular cargada con una lámina dieléctrica paralela al eje  $X$  de dimensiones  $(a \times d)$  situada a una distancia  $l$  de la pared inferior de la guía.

dieléctrica), que además cumple las mismas condiciones de contorno en las paredes de la guía satisfechas por el problema real. No obstante, debido a las condiciones de contorno impuestas por la discontinuidad en el eje  $Y$  del material dieléctrico, para este caso no se han empleado las expresiones de los modos  $TE^z$  y  $TM^z$  de la guía rectangular vacía anteriormente descritas en las ecuaciones (3.11)-(3.14), sino las familias de modos  $TE^y$  y  $TM^y$  de la guía rectangular homogénea, que son modos transversales a la dirección del eje  $Y$ , y que por tanto también cumplen las condiciones de contorno del sistema real. Dichos modos, una vez normalizados para que cumplan la relación de biortogonalidad (2.13), vienen dados por las siguientes expresiones [60]:

$$\tilde{\mathbf{e}}_p^{TE^y} = \cos\left(\frac{m\pi}{a}\left(x + \frac{a}{2}\right)\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}\left(y + \frac{b}{2}\right)\right) \mathbf{x} \quad (3.30)$$

$$\tilde{\mathbf{h}}_p^{TE^y} = \frac{1}{\frac{a}{\epsilon_m} \frac{b}{2}} \left( -\frac{\frac{m\pi}{a} \frac{n\pi}{b}}{k_0^2 \tilde{\epsilon}_{rb} - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \sin\left(\frac{m\pi}{a}\left(x + \frac{a}{2}\right)\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}\left(y + \frac{b}{2}\right)\right) \mathbf{x} + \cos\left(\frac{m\pi}{a}\left(x + \frac{a}{2}\right)\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}\left(y + \frac{b}{2}\right)\right) \mathbf{y} \right) \quad (3.31)$$

$$\tilde{\mathbf{e}}_p^{TM^y} = \frac{1}{\frac{a}{2} \epsilon_n} \left( \frac{\frac{m\pi}{a} \frac{n\pi}{b}}{k_0^2 \tilde{\epsilon}_{rb} - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \cos\left(\frac{m\pi}{a}\left(x + \frac{a}{2}\right)\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}\left(y + \frac{b}{2}\right)\right) \mathbf{x} - \sin\left(\frac{m\pi}{a}\left(x + \frac{a}{2}\right)\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}\left(y + \frac{b}{2}\right)\right) \mathbf{y} \right) \quad (3.32)$$

$$\tilde{\mathbf{h}}_p^{TM^y} = \sin\left(\frac{m\pi}{a}\left(x + \frac{a}{2}\right)\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}\left(y + \frac{b}{2}\right)\right) \mathbf{x} \quad (3.33)$$

donde el  $p$ -ésimo modo tiene asociados el par de índices  $m$  y  $n$ , que pueden tomar los siguientes valores para cada familia de modos:

$$TE^y : m = 0, 1, 2, \dots, \quad n = 1, 2, \dots; \quad TM^y : m = 1, 2, \dots, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad (3.34)$$

A continuación se muestran las soluciones de las integrales que han sido calculadas analíticamente para la obtención de los elementos de matriz del operador  $L$ , empleando la base de modos  $TE^y$ ,  $TM^y$  (donde el  $p$ -ésimo modo tiene asociados el par de índices  $m$  y  $n$ , y el  $q$ -ésimo modo tiene asociados el par de índices  $r$  y  $t$ ):

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{\mathbf{e}}_p^{TE^y} | L \tilde{\mathbf{h}}_q^{TE^y} \rangle &= \begin{cases} = \frac{k_0^2(\epsilon_r - \tilde{\epsilon}_{rb})}{\frac{ab}{2\epsilon_r}} \frac{a}{\epsilon_m} \left( \frac{d}{2} - \frac{b}{4\pi n} \left[ \sin\left(\frac{2n\pi}{b}\left(y_0 + \frac{d}{2} + \frac{b}{2}\right)\right) - \right. \right. \\ \left. \left. \sin\left(\frac{2n\pi}{b}\left(y_0 - \frac{d}{2} + \frac{b}{2}\right)\right) \right] \right) \delta_{mr} \text{ si } n = t \\ \frac{k_0^2(\epsilon_r - \tilde{\epsilon}_{rb})}{\frac{ab}{2\epsilon_r}} \frac{a}{\epsilon_m} \left( \frac{b}{2\pi(n-t)} \left[ \sin\left(\frac{(n-t)\pi}{b}\left(y_0 + \frac{d}{2} + \frac{b}{2}\right)\right) - \sin\left(\frac{(n-t)\pi}{b}\left(y_0 - \frac{d}{2} + \frac{b}{2}\right)\right) \right] - \right. \\ \left. \frac{b}{2\pi(n+t)} \left[ \sin\left(\frac{(n+t)\pi}{b}\left(y_0 + \frac{d}{2} + \frac{b}{2}\right)\right) - \sin\left(\frac{(n+t)\pi}{b}\left(y_0 - \frac{d}{2} + \frac{b}{2}\right)\right) \right] \right) \delta_{mr} \text{ si } n \neq t \end{cases} \\
\langle \tilde{\mathbf{e}}_p^{TM^y} | L \tilde{\mathbf{h}}_q^{TM^y} \rangle &= \begin{cases} = \left\{ \frac{k_0^2(\epsilon_r - \tilde{\epsilon}_{rb})}{\frac{ab}{2\epsilon_n}} \frac{a}{2} \left( \frac{d}{2} + \frac{b}{4\pi n} \left[ \sin\left(\frac{2n\pi}{b}\left(y_0 + \frac{d}{2} + \frac{b}{2}\right)\right) - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \sin\left(\frac{2n\pi}{b}\left(y_0 - \frac{d}{2} + \frac{b}{2}\right)\right) \right] \right) \delta_{mr} \right\} - \\ \left\{ \frac{a}{2} \frac{2(\epsilon_r - \tilde{\epsilon}_{rb})}{\epsilon_r + \tilde{\epsilon}_{rb}} \left[ \cos\left(\frac{n\pi}{b}\left(y_0 + \frac{d}{2} + \frac{b}{2}\right)\right) \sin\left(\frac{t\pi}{b}\left(y_0 + \frac{d}{2} + \frac{b}{2}\right)\right) - \right. \right. \\ \left. \left. \cos\left(\frac{n\pi}{b}\left(y_0 - \frac{d}{2} + \frac{b}{2}\right)\right) \sin\left(\frac{t\pi}{b}\left(y_0 - \frac{d}{2} + \frac{b}{2}\right)\right) \right] \delta_{mr} \right\} \text{ si } n = t \neq 0 \\ \frac{k_0^2(\epsilon_r - \tilde{\epsilon}_{rb})}{\frac{ab}{2\epsilon_n}} \frac{a}{2} d \delta_{mr} \text{ si } n = t = 0 \\ \left\{ \frac{k_0^2(\epsilon_r - \tilde{\epsilon}_{rb})}{\frac{ab}{2\epsilon_n}} \frac{a}{2} \left( \frac{b}{2\pi(n-t)} \left[ \sin\left(\frac{(n-t)\pi}{b}\left(y_0 + \frac{d}{2} + \frac{b}{2}\right)\right) - \sin\left(\frac{(n-t)\pi}{b}\left(y_0 - \frac{d}{2} + \frac{b}{2}\right)\right) \right] + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{b}{2\pi(n+t)} \left[ \sin\left(\frac{(n+t)\pi}{b}\left(y_0 + \frac{d}{2} + \frac{b}{2}\right)\right) - \sin\left(\frac{(n+t)\pi}{b}\left(y_0 - \frac{d}{2} + \frac{b}{2}\right)\right) \right] \right) \delta_{mr} \right\} - \\ \left\{ \frac{a}{2} \frac{2(\epsilon_r - \tilde{\epsilon}_{rb})}{\epsilon_r + \tilde{\epsilon}_{rb}} \left[ \cos\left(\frac{n\pi}{b}\left(y_0 + \frac{d}{2} + \frac{b}{2}\right)\right) \sin\left(\frac{t\pi}{b}\left(y_0 + \frac{d}{2} + \frac{b}{2}\right)\right) - \right. \right. \\ \left. \left. \cos\left(\frac{n\pi}{b}\left(y_0 - \frac{d}{2} + \frac{b}{2}\right)\right) \sin\left(\frac{t\pi}{b}\left(y_0 - \frac{d}{2} + \frac{b}{2}\right)\right) \right] \delta_{mr} \right\} \text{ si } n \neq t \end{cases} \quad (3.35)
\end{aligned}$$

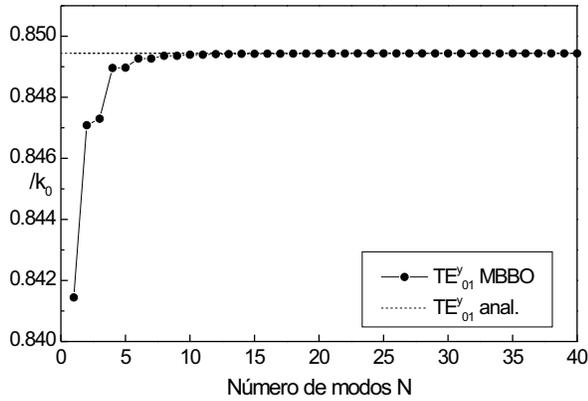
$$\langle \tilde{\mathbf{e}}_p^{TE^y} | L \tilde{\mathbf{h}}_q^{TM^y} \rangle = 0$$

$$\langle \tilde{\mathbf{e}}_p^{TM^y} | L \tilde{\mathbf{h}}_q^{TE^y} \rangle = 0.$$

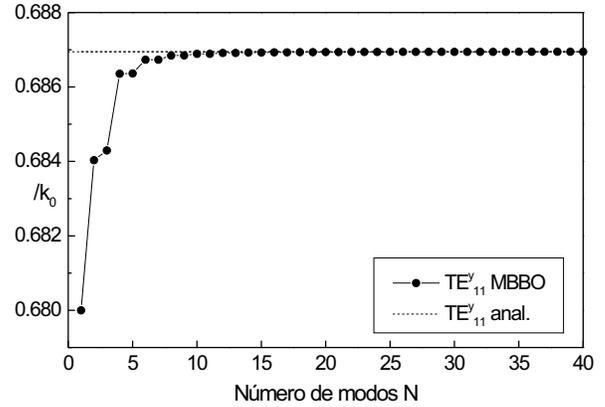
A la vista de los resultados obtenidos, se pueden extraer dos conclusiones:

(a) Puesto que el sistema es homogéneo en la dirección  $X$ , ambas familias de modos  $TE^y$  y  $TM^y$  en este problema no se acoplan, de forma que es posible obtener los modos para cada familia por separado, empleando para cada una de ellas la familia correspondiente de modos de la base auxiliar. Este hecho ha sido comprobado al calcular los elementos de matriz del operador  $L$  con la base de modos  $TE^y$  y  $TM^y$  de una guía rectangular homogénea, de forma que los elementos de matriz que se obtienen al multiplicar modos de familias distintas se cancelan. Ello va a permitir reducir a la mitad el número de modos de la base auxiliar empleados para alcanzar una cierta precisión, lo cual conlleva una importante reducción en el tiempo de computación.

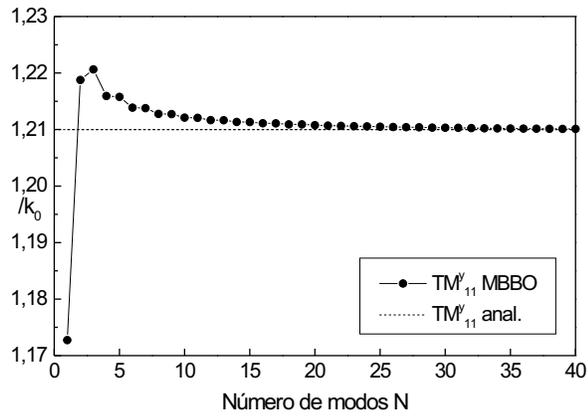
(b) Por otro lado, debido al carácter homogéneo de la guía en el eje  $X$ , los modos de la guía bajo estudio tienen exactamente la misma dependencia con la variable  $x$  que los modos de la base auxiliar, llevando cada modo de nuestro problema un índice  $m$  asociado, que empieza en 0 para la polarización  $TE^y$  y en 1 para la polarización  $TM^y$ . Así mismo, también se ha comprobado que es posible obtener los modos que llevan asociado un cierto valor del índice  $m$  empleando para la expansión modal de dichos modos el conjunto de modos de la base auxiliar con igual índice  $m$ . De nuevo, este hecho se hace evidente al calcular los elementos de matriz del operador  $L$ , que para cada familia de modos, son solamente distintos de cero al multiplicar modos con igual índice  $m$ . Este resultado también conllevará una importante reducción en el tiempo de computación para el cálculo de los modos de esta guía.



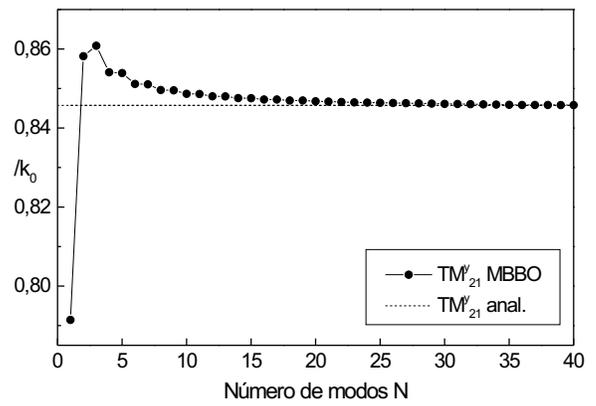
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 3.18: Estudio de convergencia de la constante de propagación normalizada  $\beta/k_0$  de los cuatro primeros modos propagativos en una guía rectangular de dimensiones  $a = 20$  mm y  $b = 10$  mm con una lámina dieléctrica insertada de espesor  $d = 5$  mm situada sobre la pared inferior de la guía, a una frecuencia de trabajo de 15 GHz.

El análisis de convergencia llevado a cabo en este caso solamente va a depender del número  $N$  de modos de la base auxiliar empleados para expandir los modos del problema real. Dicho estudio de convergencia se ha hecho para el caso de una guía rectangular de dimensiones  $a = 20$  mm y  $b = 10$  mm, y con una lámina dieléctrica de espesor  $d = 5$  mm situada sobre la pared inferior de la guía (ver la figura 3.17), cuya permitividad dieléctrica relativa es de  $\epsilon_r = 2,25$ . Este análisis se ha llevado a cabo a una frecuencia de 15 GHz, de forma que a dicha frecuencia existen cuatro modos propagativos en la guía inhomogénea, que son los modos  $TE_{01}^y$ ,  $TE_{11}^y$ ,  $TM_{11}^y$  y  $TM_{21}^y$ , respectivamente, donde el segundo índice

indica el orden de aparición de los modos correspondientes a un mismo índice  $m$  (primer índice). Por tanto, se trata de los dos primeros modos propagativos de la familia  $TE^y$  con  $m = 0$  y  $m = 1$  respectivamente, y de los dos primeros modos propagativos con polarización  $TM^y$  con  $m = 1$  y  $m = 2$  respectivamente. En la figura 3.18 se muestra la convergencia de la constante de propagación normalizada  $\beta/k_0$  de dichos modos en función del número  $N$  de funciones base auxiliares. En dicha figura se puede apreciar que se alcanza la convergencia mucho más rápidamente para los dos modos de la familia  $TE^y$ , en los que con sólo 20 modos de la base auxiliar se alcanza un valor de la constante de propagación que difiere del valor teórico en la quinta cifra decimal. No obstante, para los dos modos de la familia  $TM^y$ , son necesarios 40 modos para alcanzar la misma precisión en los resultados. Ello se debe a que en el caso de modos  $TM^y$ , el campo eléctrico tiene una componente  $y$  no nula, que es normal a la superficie de separación de los dieléctricos, y por tanto es discontinua (lo cual es una consecuencia directa de la discontinuidad en la permitividad relativa). Sin embargo, los campos eléctricos de los modos de la base auxiliar son funciones continuas, lo que conlleva problemas de convergencia que siempre aparecen al reconstruir una función discontinua a partir de funciones continuas (fenómeno de Gibbs [62]), por lo que para esta familia de modos, se requieren más modos para alcanzar la convergencia del algoritmo.

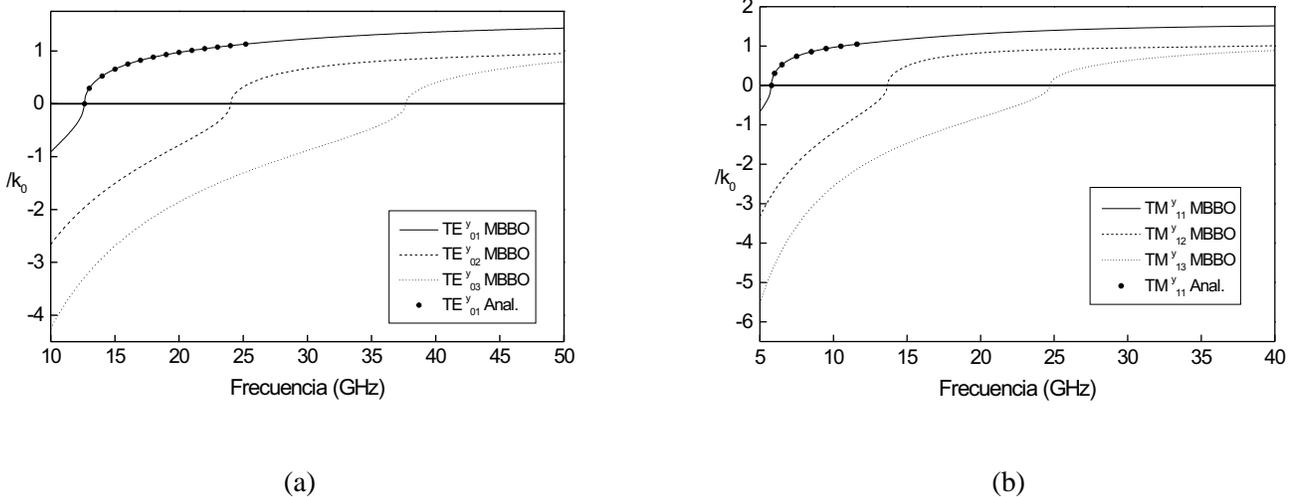


Figura 3.19: Curvas de dispersión de los modos  $TE_{01}^y$ ,  $TE_{02}^y$  y  $TE_{03}^y$  de una guía rectangular WR90 ( $a = 22,86$  mm,  $b = 10,16$  mm) parcialmente rellena de aire y de una lámina de poliestireno ( $\epsilon_r = 2,56$ ) de dimensiones  $a \times d$ , siendo  $d = b/3$ , situada sobre la pared inferior de la guía. En el semieje vertical positivo se representa la constante de propagación normalizada para régimen propagativo, mientras que el semieje vertical negativo corresponde a régimen evanescente. Se han representado con puntos los valores analíticos correspondientes a los modos (a)  $TE_{01}^y$  y (b)  $TM_{11}^y$  que aparecen en [60].

A continuación se van a analizar las características de propagación en una guía rectangular cargada con una lámina dieléctrica. Dicho ejemplo ha sido estudiado teóricamente en [60]. Se trata de una guía WR90 que opera en banda X (8,2 – 12,4 GHz), de dimensiones

Modo	$f_c$ (GHz) anal. [60]	$f_c$ (GHz) <i>MBBO</i>	Diferencia Rel. (%)
$TE_{01}^y$	12,62	12,62	$< 1 \cdot 10^{-2}$
$TE_{02}^y$	24,03	24,02	$4,1 \cdot 10^{-2}$
$TE_{03}^y$	37,71	37,69	$5,3 \cdot 10^{-2}$
$TM_{11}^y$	5,79	5,79	$< 1 \cdot 10^{-2}$
$TM_{12}^y$	13,68	13,67	$7,3 \cdot 10^{-2}$
$TM_{13}^y$	24,75	24,73	$8,0 \cdot 10^{-2}$

Tabla 3.4: Frecuencias de corte de la guía rectangular inhomogénea cuyos parámetros se detallan al pie de la figura 3.19.

$a = 22,86$  mm y  $b = 10,16$  mm, parcialmente rellena de aire y de una lámina de poliestireno ( $\epsilon_r = 2,56$ ), situada sobre la parte inferior de la guía, y de dimensiones  $a \times d$ , siendo  $d = b/3$ . Para la simulación, han sido suficientes 20 modos de la base auxiliar para calcular los modos con polarización  $TE^y$ , y 40 funciones base para obtener los modos con polarización  $TM^y$ , respectivamente. En la figura 3.19 aparece representada la constante de propagación normalizada de varios modos en dicha guía. En la figura 3.19 (a) se representan con líneas las curvas de dispersión de los modos  $TE_{01}^y$ ,  $TE_{02}^y$  y  $TE_{03}^y$ , y se ha representado con puntos la solución analítica para el modo  $TE_{01}^y$  que aparece en [60]. Por otro lado, las curvas de dispersión de los modos  $TM_{11}^y$ ,  $TM_{12}^y$  y  $TM_{13}^y$  se muestran en la figura 3.19 (b), y también se compara para el modo  $TM_{11}^y$  con la solución analítica de [60]. En ambos casos se observa una buena concordancia.

En la tabla 3.4 se comparan los valores obtenidos de las frecuencias de corte de los seis modos representados en la figura 3.19 empleando el *MBBO* con los valores analíticos proporcionados en [60]. Como se puede apreciar, el error relativo para todos los casos es siempre inferior a 0.1 %.

Para esta misma guía también se ha analizado la distribución de campo transversal del modo  $TE_{01}^y$  y  $TM_{11}^y$ , en este caso a 15 GHz, frecuencia a la cual ambos modos son propagativos. En la figura 3.20 se representan las componentes transversales de los campos eléctrico y magnético (en módulo) no nulas del modo  $TE_{01}^y$  a lo largo de la sección transversal de la guía, mientras que las componentes no nulas de campo eléctrico y magnético del modo  $TM_{11}^y$  aparecen representadas en las figura 3.21. En la figura 3.21 (b) se puede apreciar cómo la componente de campo eléctrico transversal normal a la discontinuidad dieléctrica dentro de la guía (componente  $e_y$ ) es una función discontinua sobre la discontinuidad.

### 3.3.1.2. Guía rectangular cargada con una lámina dieléctrica rectangular homogénea paralela al eje $Y$

En este caso se analiza una guía rectangular de dimensiones  $a \times b$  que está cargada con una lámina dieléctrica homogénea paralela al eje  $Y$  de dimensiones  $d \times b$  situada a una distancia  $l$  del lado derecho de la guía, como se muestra en el esquema de la figura 3.22. Este problema es análogo al problema del apartado anterior, aunque girado un ángulo de  $90^\circ$ . Por tanto, para analizar este problema, será posible emplear los resultados obtenidos en el apartado anterior

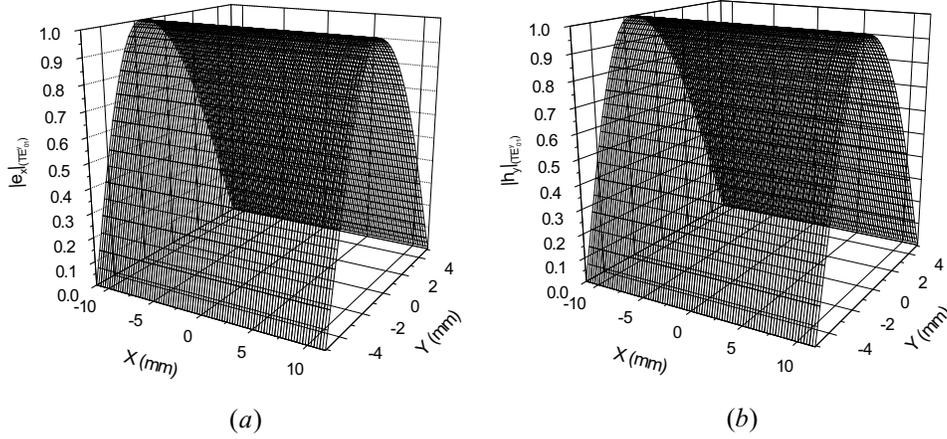


Figura 3.20: Representación tridimensional de las componentes no nulas de campo eléctrico (a) y magnético (b) correspondientes al modo  $TE_{01}^y$  de la guía rectangular inhomogénea cuyos parámetros se detallan al pie de la figura 3.19.

y el programa implementado, siempre y cuando se intercambien todas las variables asociadas con el eje  $X$  por variables asociadas con el eje  $Y$ , y viceversa. Así mismo, los modos que se obtienen en esta guía se clasifican en modos  $TE^x$  y  $TM^x$ , es decir, modos cuyo campo eléctrico o magnético es tangente (longitudinal) a la discontinuidad, respectivamente.

La guía rectangular cargada elegida para analizar en este caso consiste en una guía rectangular cargada con tres láminas dieléctricas, la cual ha sido empleada para modelar un dispositivo de calentamiento por microondas [7], y cuyos resultados obtenidos con el *MBBO* han sido publicados en [1]. En este problema, se sitúa una lámina dieléctrica de dimensiones  $d \times b$  y de permitividad relativa  $\varepsilon_{r2} = 10,0$  en el centro de una guía estándar WR-340 ( $a = 86,36 \text{ mm} \times b = 43,18 \text{ mm}$ ) homogénea de permitividad relativa  $\varepsilon_{r1} = 1,5$ , cuyos modos han sido empleados como base auxiliar ( $\tilde{\varepsilon}_{rb} = 1,5$ ). A la hora de aplicar en este problema el *MBBO*, se ha empleado el programa implementado en el apartado anterior, pero intercambiando las dimensiones  $a$  y  $b$  de la guía, y también las dimensiones del rectángulo dieléctrico insertado. El número de funciones base empleadas para resolver este caso, tras llevar a cabo un estudio de convergencia de las soluciones obtenidas con el *MBBO*, ha sido de 30 funciones base para los modos de la familia  $TE^x$ , y de 60 funciones base para obtener los modos  $TM^x$  (dicho número de funciones base es algo mayor que en el ejemplo del apartado anterior, debido a que la discontinuidad de la permitividad dieléctrica dentro de la guía es mayor, y por ello son necesarias más funciones base para alcanzar la convergencia del método). A continuación se describen las características de propagación de los tres primeros modos con polarización  $TE^x$  propagativos en esta guía, que también han sido estudiados en [7]. En la tabla 3.5 se comparan las frecuencias de corte de los modos  $TE_{10}^x$ ,  $TE_{20}^x$  y  $TE_{30}^x$  para cuatro anchuras diferentes de la región dieléctrica central obtenidas con el *MBBO*, con los valores analíticos proporcionados en [7].

La distribución del campo electromagnético es importante en aplicaciones de este tipo

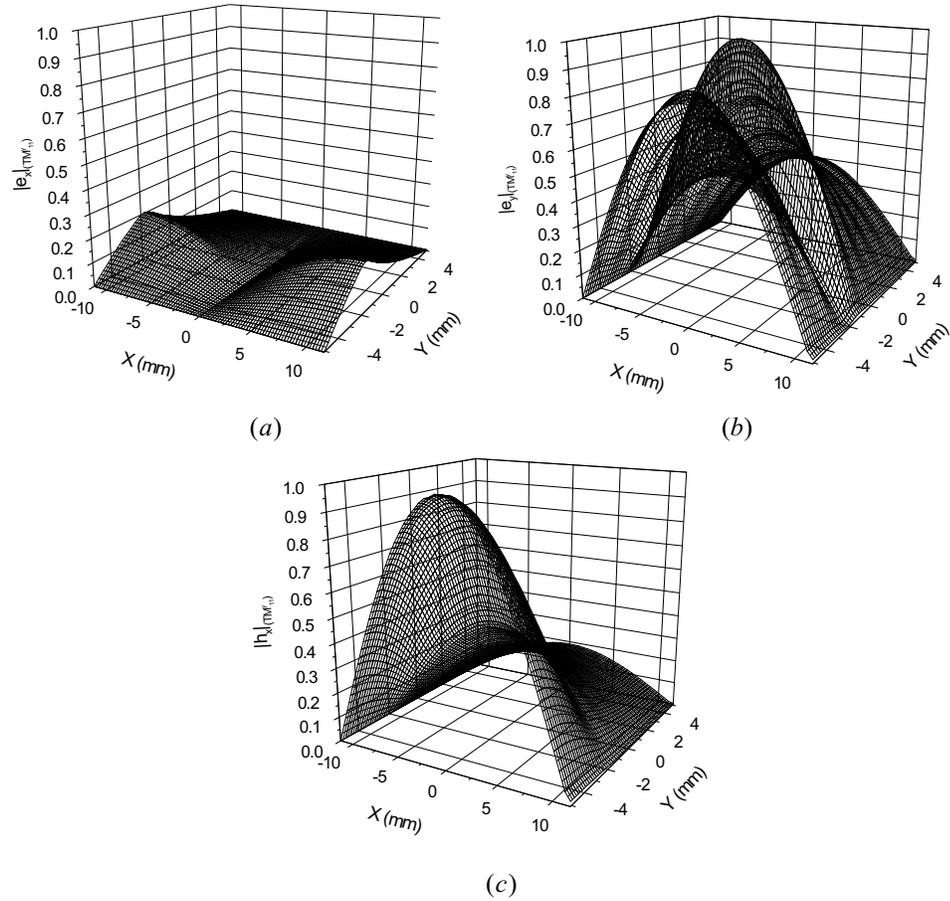


Figura 3.21: Representación tridimensional de las componentes no nulas de campo eléctrico (a)-(b) y magnético (c) correspondientes al modo  $TM_{11}^y$  de la guía rectangular inhomogénea cuyos parámetros se detallan al pie de la figura 3.19.

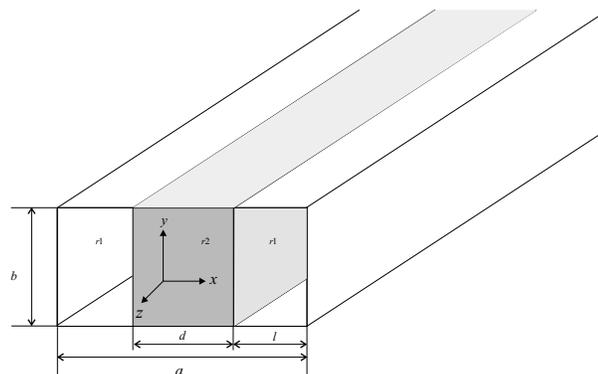


Figura 3.22: Esquema de una guía rectangular cargada con una lámina dieléctrica homogénea paralela al eje  $Y$  de dimensiones  $d \times b$  situada a una distancia  $l$  del lado derecho de la guía.

$d/a = 0,2$			
Modo	$f_c$ (GHz) [7]	$f_c$ (GHz) <i>MBBO</i>	Diferencia Rel. (%)
$TE_{10}^x$	0,778	0,775	0,4
$TE_{20}^x$	2,362	2,360	0,08
$TE_{30}^x$	3,372	3,371	0,03
$d/a = 0,4$			
Modo	$f_c$ (GHz) [7]	$f_c$ (GHz) <i>MBBO</i>	Diferencia Rel. (%)
$TE_{10}^x$	0,625	0,624	0,2
$TE_{20}^x$	1,550	1,553	0,2
$TE_{30}^x$	2,668	2,670	0,007
$d/a = 0,6$			
Modo	$f_c$ (GHz) [7]	$f_c$ (GHz) <i>MBBO</i>	Diferencia Rel. (%)
$TE_{10}^x$	0,625	0,624	0,2
$TE_{20}^x$	1,550	1,553	0,2
$TE_{30}^x$	2,668	2,670	0,007
$d/a = 0,8$			
Modo	$f_c$ (GHz) [7]	$f_c$ (GHz) <i>MBBO</i>	Diferencia Rel. (%)
$TE_{10}^x$	0,556	0,558	0,4
$TE_{20}^x$	1,121	1,122	0,1
$TE_{30}^x$	1,681	1,701	1,2

Tabla 3.5: Frecuencias de corte de una guía estándar WR-340 cargada con tres láminas dieléctricas, de forma que se sitúa una lámina dieléctrica de dimensiones  $d \times b$  y de permitividad relativa  $\epsilon_{r2} = 10,0$  en el centro de una guía rectangular rellena homogéneamente de un material dieléctrico de  $\epsilon_{r1} = 1,5$ . Se presentan resultados para diferentes valores de la anchura relativa de la región dieléctrica central ( $d/a$ ).

de estructuras, con el fin de focalizar la energía en la región central de la guía. El *MBBO* permite obtener las constantes de propagación y los campos eléctrico y magnético de los modos. Como ejemplo, se muestra la representación tridimensional de la parte real de la componente axial del vector de Pointing complejo de los primeros modos propagativos a lo largo de la sección transversal de esta guía en la figura 3.23. En dicha figura, la frecuencia de operación es de 5 GHz, y la anchura relativa de la región dieléctrica central es  $d/a = 0,6$ .

Otro ejemplo en el que se ha empleado el cálculo de los modos de esta guía es el diseño de filtros evanescentes en plano-H cargados con resonadores dieléctricos inductivos de sección rectangular [63]. Aunque el diseño de estos filtros no se ha realizado dentro del desarrollo de esta tesis, en la herramienta diseñada para el análisis de los mismos se ha integrado una parte de nuestro código. Mostramos en la figura 3.24 el esquema de uno de estos filtros pasabanda. La respuesta en frecuencia de dicho filtro se representa en la figura 3.25, la cual ha sido comparada con el software comercial HFSS 8.5. En la figura 3.25(a) se representa el módulo del parámetro  $|S_{11}|$  [dB] en la banda de interés, mientras que en la figura 3.25(b) se muestra el módulo del parámetro  $|S_{21}|$  [dB] fuera de banda.

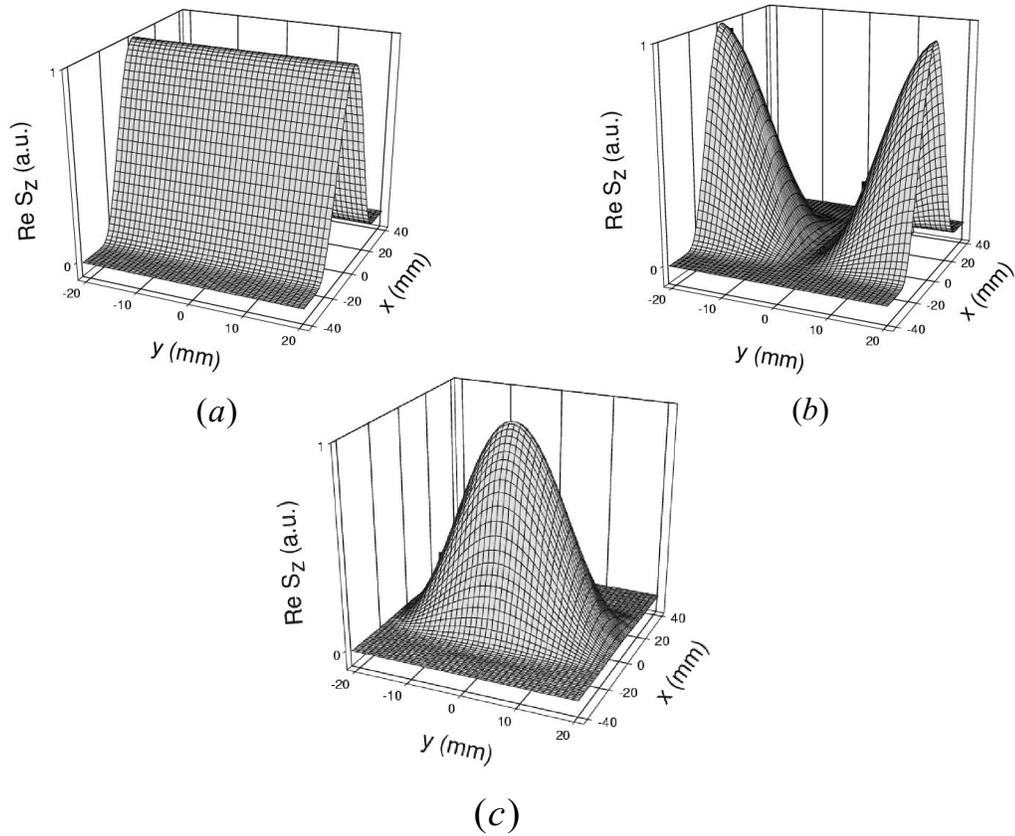


Figura 3.23: Representación tridimensional de la parte real del vector de Poynting complejo (componente  $z$ ) para los modos: (a)  $TE_{10}^x$ , (b)  $TE_{20}^x$ , y (c)  $TE_{30}^x$ , respectivamente, de una guía rectangular WR-340 cargada con tres láminas dieléctricas, siendo la anchura relativa de la región dieléctrica central igual a  $d/a = 0,6$ , y la frecuencia de operación 5 GHz.

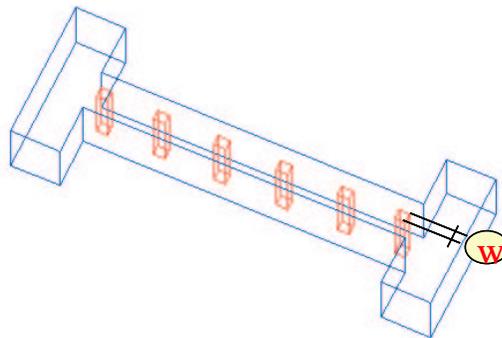


Figura 3.24: Esquema de un filtro evanescente en plano-H cargado con resonadores dieléctricos inductivos de sección rectangular.

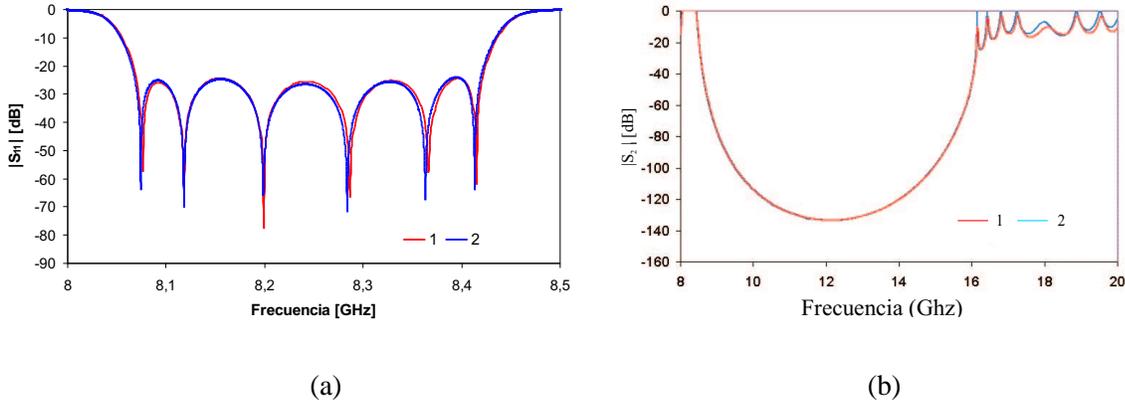


Figura 3.25: Respuesta en frecuencia del filtro pasobanda cuyo esquema se muestra en la figura 3.24, en la banda de interés (a) y fuera de banda (b). (1: Respuesta obtenida con el código basado en nuestro método; 2: Respuesta obtenida con el software comercial HFSS 8.5.)

### 3.3.1.3. Guía rectangular cargada con un rectángulo dieléctrico centrado

El siguiente caso analizado dentro de este apartado ha sido una guía dieléctrica centrada dentro de una guía rectangular metálica, cuya geometría se detalla en la figura 3.26. En este caso, la guía bajo estudio ya no es homogénea en ninguno de los dos ejes transversales, con lo cual se empleará como base auxiliar la familia de modos  $TE^z$  y  $TM^z$  de una guía rectangular homogénea, que ya fueron empleados para obtener el espectro modal de la guía rib (sección 3.2.2, figura 3.6). Los elementos de matriz del operador  $L$  que se obtienen en este caso también aparecen descritos en la sección 3.2.2. El sistema auxiliar elegido para este problema es una guía rectangular homogénea rellena de aire de iguales dimensiones ( $a \times b$ ) que la guía bajo estudio. El análisis de convergencia llevado a cabo en este caso solamente va a depender del número  $N$  de modos de la base auxiliar empleados para expandir los modos del problema real.

En el ejemplo elegido para estudiar esta guía, el dieléctrico insertado tiene una permitividad relativa de  $\varepsilon_{r1} = 2,22$ , que está situado en el centro de la guía metálica y tiene dimensiones  $c$  y  $d$ , con  $c/d = 0,99$ , siendo el aire el medio que lo separa de la guía rectangular metálica ( $\varepsilon_{ra} = 1,0$ ), de dimensiones  $a = 1,88c = 30$  mm y  $b = 1,88d$ . Esta guía presenta simetría respecto a los dos ejes  $X$  e  $Y$ . Por tanto, para este caso particular, es posible comprobar que se anulan muchos elementos de matriz del operador  $L$  a diagonalizar para resolver el problema, según sean los índices de los modos de la base auxiliar que aparecen en las integrales pares o impares. En la tabla 3.6 se muestra un cuadro resumen de los elementos de matriz no nulos que se obtienen en este caso, siendo los elementos de matriz del operador  $L$  de la forma:

$$L_{pq} = \langle \tilde{\mathbf{e}}_{mn}^\alpha | L \tilde{\mathbf{h}}_{rt}^\beta \rangle \quad (3.36)$$

donde  $\alpha, \beta$  indican la familia del modo,  $TE^z$  o  $TM^z$ , respectivamente.

Los resultados obtenidos muestran cómo, gracias a la existencia de simetrías en esta guía, los modos de la base auxiliar con paridad distinta tanto respecto al eje  $X$  como respecto al

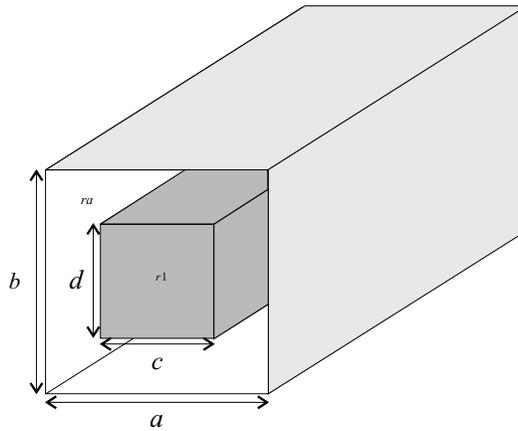


Figura 3.26: Esquema de una guía dieléctrica rectangular de dimensiones  $c \times d$ , blindada por una guía rectangular metálica de dimensiones  $a \times b$ .

Simetría	$m$ par $n$ par	$m$ par $n$ impar	$m$ impar $n$ par	$m$ impar $n$ impar
$r$ par $t$ par	$\neq 0$	$= 0$	$= 0$	$= 0$
$r$ par $t$ impar	$= 0$	$\neq 0$	$= 0$	$= 0$
$r$ impar $t$ par	$= 0$	$= 0$	$\neq 0$	$= 0$
$r$ impar $t$ impar	$= 0$	$= 0$	$= 0$	$\neq 0$

Tabla 3.6: Elementos de matriz del operador  $L$  en un problema que presenta simetrías respecto a los ejes  $X$  e  $Y$ .

eje  $Y$  no se acoplan entre sí. Por ello, en este caso, a la hora de obtener el espectro modal de la guía con una cierta paridad en  $x$  e  $y$ , sólo será necesario considerar modos cuya paridad en ambas coordenadas coincida con la del modo que se quiere obtener. Así, para el caso bajo consideración, en el que la guía presenta simetría en  $x$  e  $y$ , la dimensión de la matriz  $\underline{\underline{L}}$  a diagonalizar se reduce en un factor 4, lo cual es una reducción sustancial del tamaño del problema a resolver. Esto conduce a soluciones más precisas con menores esfuerzos computacionales.

En la figura 3.27 se comparan las curvas de dispersión para los dos primeros modos propagativos en la guía bajo estudio obtenidos con el *MBBO* (en línea continua) con resultados obtenidos con el método de diferencias finitas [64] (puntos), de forma que el modo híbrido  $HE_1^{eo}$  tiene simetría par en  $x$  e impar en  $y$ , y el modo  $HE_2^{ee}$  tiene simetría par en  $x$  e  $y$ . Para la simulación han sido necesarios únicamente 50 modos de la base auxiliar ( $\tilde{\epsilon}_{rb} = 1,0$ ) para obtener cada modo, lo cual conlleva un tiempo de computación de 0.10 s por punto en frecuencia.

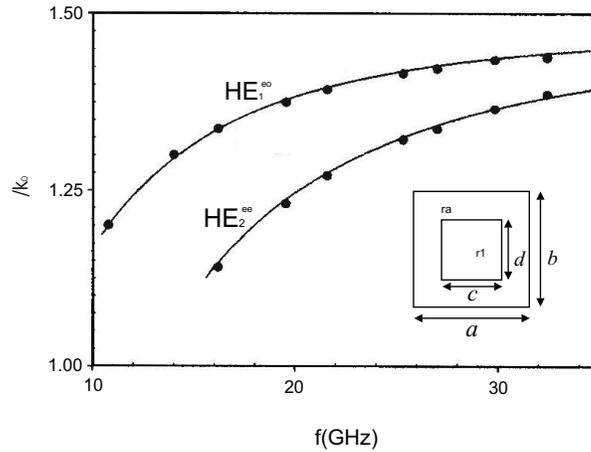


Figura 3.27: Curvas de dispersión de los modos  $HE_1^{eo}$  y  $HE_2^{ee}$  de una guía rectangular cargada con un rectángulo dieléctrico centrado. Comparación de los resultados obtenidos con el MBBO (línea continua) con resultados obtenidos con el método de diferencias finitas [64](puntos)

### 3.3.1.4. Guía imagen

El último caso analizado dentro de este apartado es la guía imagen, cuya geometría se muestra en la figura 3.28. Se trata de una guía rectangular metálica con un rectángulo dieléctrico insertado, idealmente sin pérdidas, que se coloca pegado a una de las paredes de la guía. La principal ventaja de la guía imagen respecto a la guía rectangular homogénea es que presenta bajas pérdidas de propagación a frecuencias milimétricas. Por esta razón esta guía ha sido utilizada en gran número de dispositivos pasivos de microondas como filtros [65], [66]. El espectro modal de la guía imagen sin pérdidas tiene como peculiaridad la existencia de modos complejos, que representan ondas evanescentes con constantes de propagación complejas. Puesto que la guía que soporta estos modos se supone que no tiene pérdidas, los modos complejos existen siempre a pares con constantes de propagación complejo conjugadas [67], [68]. Cada uno de estos modos complejos tiene un flujo total de potencia activa transportada igual a cero y representan campo evanescente. Numerosos trabajos realizados demuestran que se deben incluir los modos complejos en la expansión modal usada para los campos a la hora de analizar correctamente discontinuidades en estas guías [69], [70], [71]. En este caso la guía bajo estudio tampoco es homogénea en ninguno de los dos ejes transversales (se obtendrán modos híbridos), por lo que para analizarla se empleará como base auxiliar la familia de modos  $TE^z$  y  $TM^z$  de una guía rectangular homogénea. Los elementos de matriz del operador  $L$  que se obtienen para este problema se han calculado en la sección 3.2.2 (figura 3.6). Esta guía presenta simetría respecto al eje  $Y$ , por lo que a la hora de construir la matriz  $\underline{\underline{L}}$ , se separarán los modos de la base auxiliar en dos bloques, según si los índices que aparecen en las integrales asociados a la variable  $y$  son pares o impares, lo cual reduce la dimensión de la matriz a diagonalizar en un factor 2. Por otro lado, en el caso de que el medio dieléctrico no presente pérdidas —siendo  $\varepsilon_r(x, y)$  una función real—, la matriz  $\underline{\underline{L}}$  es real, de forma que sus autovalores  $\beta_n^2$  serán números reales, o serán pares complejo conjugados, debido a que son los ceros de un polinomio con coeficientes reales. Las

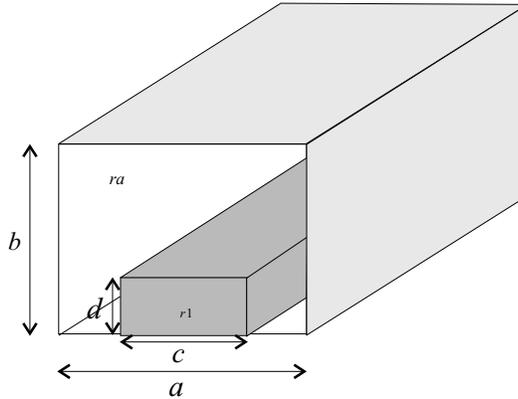


Figura 3.28: Esquema de una guía imagen.

soluciones de los pares complejo conjugados  $\beta_n^2$  corresponden precisamente a los llamados modos complejos. Cuando la guía se rellena con dieléctricos con pérdidas, la matriz  $\underline{\underline{L}}$  es compleja, de forma que todos los modos tienen una  $\beta_n$  con parte real e imaginaria distinta de cero y dejan de ser conjugados unos de otros.

El ejemplo escogido para estudiar la guía imagen ha sido analizado en [68], [72]. Para este caso se han elegido los siguientes parámetros:  $a = 15,789$  mm,  $b = 7,899$ ,  $c = 6,9$  mm,  $d = 3,2$  mm,  $\varepsilon_{r1} = 9$  y  $\varepsilon_{ra} = 1,0$ . El sistema auxiliar escogido en este caso ha sido una guía rectangular homogénea vacía ( $\tilde{\varepsilon}_{rb} = \varepsilon_{ra}$ ) de iguales dimensiones  $a \times b$  que la guía imagen. Tras el estudio de convergencia llevado a cabo (con los mismos criterios que los llevados a cabo en los tres apartados anteriores), se ha concluido que son suficientes 1000 modos de la base auxiliar. El tiempo de computación requerido por punto en frecuencia ha sido de 2 min 35 s.

En la figura 3.29 se representan las curvas de dispersión (módulo de la parte real de la constante de propagación normalizada en el semieje superior, y módulo de la parte imaginaria de la constante de propagación normalizada en el semieje inferior) obtenidas con el *MBBO* correspondientes a los primeros seis modos de esta guía imagen, incluyendo los modos complejos (en trazo discontinuo). En la tabla 3.7 se comparan los valores obtenidos de la constante de propagación normalizada de los seis primeros modos de esta guía imagen a la frecuencia de 14 GHz con los resultados presentados en [72]. Como se puede comprobar, ambos resultados coinciden hasta la tercera cifra decimal para todos los casos, incluidos los modos complejos.

Por otro lado, en la figura 3.30 se representa, a la frecuencia de 14 GHz, la distribución de potencia (parte real de la componente  $z$  del vector de Poynting complejo) a lo largo de la sección transversal de la guía imagen correspondiente a uno de los pares de modos complejos (a) así como de los modos  $EH_{11}$  (b),  $HE_{21}$  (c) y  $HE_{31}$  (d), cuya constante de propagación normalizada se muestra en la tabla 3.7. En la figura 3.30 (a) se puede apreciar que en el caso del modo complejo, la potencia es negativa en la región dieléctrica y positiva fuera del dieléctrico. Así mismo, se ha comprobado (mediante integración numérica) que la potencia total activa transportada por este modo en la sección transversal de la guía es igual a cero.

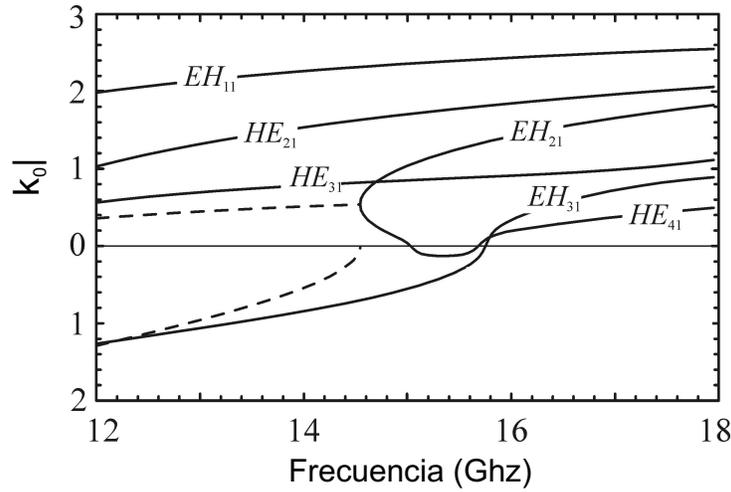


Figura 3.29: Curvas de dispersión en una guía imagen con los siguientes parámetros:  $a = 15,799$  mm,  $b = 7,899$  mm,  $c = 6,9$  mm,  $d = 3,2$  mm,  $\epsilon_{r1} = 9$  y  $\epsilon_{ra} = 1,0$ . En el semieje vertical superior se representa el módulo de la parte real de la constante de propagación normalizada de cada modo, mientras que en el semieje vertical inferior se representa el módulo de la parte imaginaria de la constante de propagación normalizada.

Modo	$\beta/k_0$ MBBO	$\beta/k_0$ [72]	Diferencia Rel. (%)
$EH_{11}$	2,2588	2,259	$< 1 \cdot 10^{-2}$
$HE_{21}$	1,5375	1,537	$3 \cdot 10^{-2}$
$HE_{31}$	0,8181	0,818	$1 \cdot 10^{-2}$
Complejo 1	$0,5225 - j0,5385$	$0,522 - j0,538$	$9 \cdot 10^{-2}$
Complejo 2	$0,5225 + j0,5385$	$0,522 + j0,538$	$9 \cdot 10^{-2}$
$EH_{31}$	$-j0,8371$	$-j0,837$	$1 \cdot 10^{-2}$

Tabla 3.7: Comparación de la constante de propagación normalizada  $\beta/k_0$  obtenida con el MBBO con los resultados presentados en [72] para la guía imagen cuyos parámetros se muestran al pie de la figura 3.29, para una frecuencia de 14 GHz.

Por otro lado, en el caso de los modos propagativos  $EH_{11}$ ,  $HE_{21}$  y  $HE_{31}$ , la potencia total transportada por cada uno de ellos es diferente de cero, y además positiva en los tres casos.

### 3.3.2. Guía dieléctrica rectangular

A continuación se estudiarán las características de propagación de una guía dieléctrica rectangular abierta de dimensiones  $w \times t$ , siendo  $w = 2t = 2$  mm (ver la figura 3.31), hecha de un material dieléctrico de permitividad relativa  $\epsilon_{r1} = 2,25$  rodeada de aire, que ha sido analizada en [73] empleando el método de elementos finitos.

A la hora de emplear el MBBO para obtener el espectro modal de la guía rectangular dieléctrica, al igual que sucedía en el caso de la fibra óptica, se ha de considerar que, a pesar de que se trata de una guía de ondas abierta (no blindada), los campos de los modos guiados

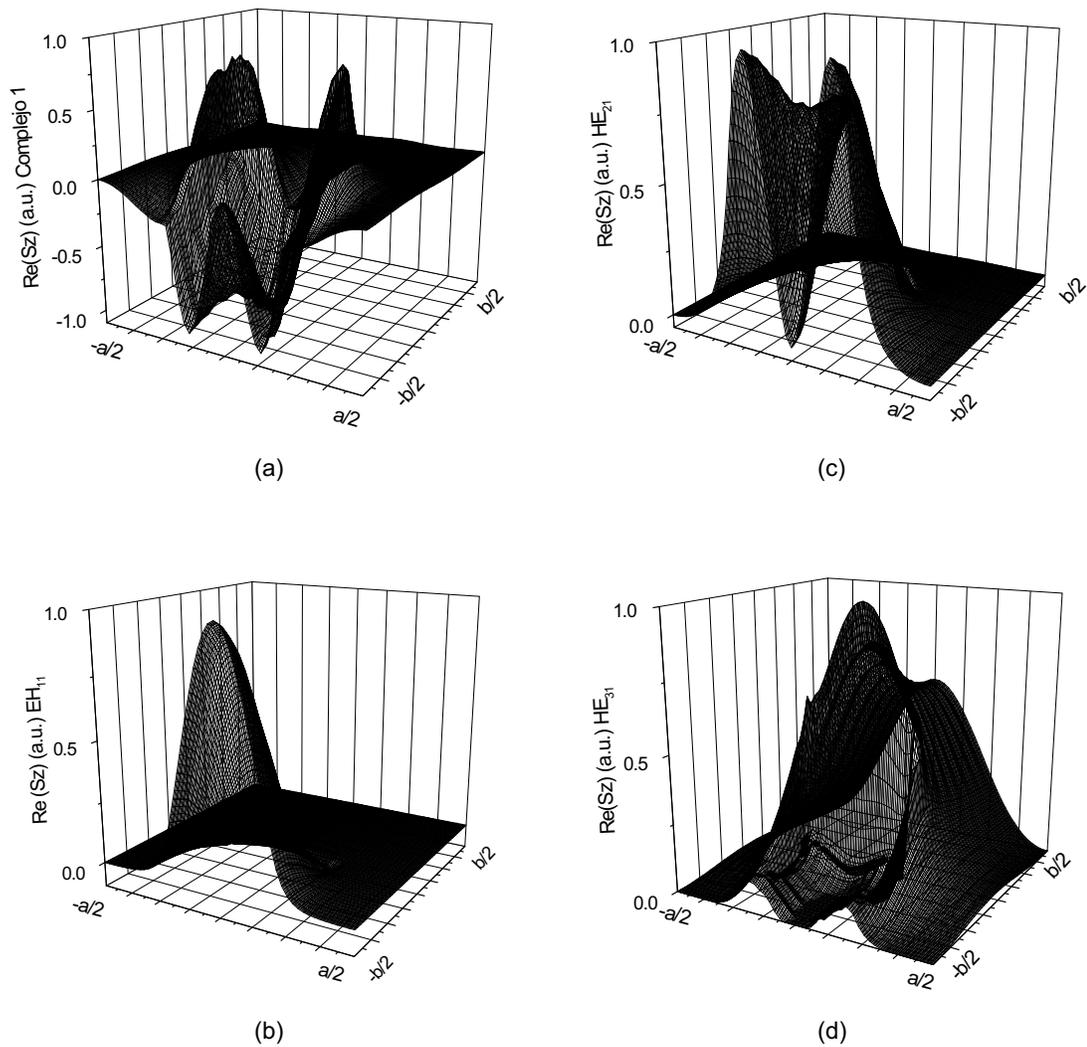


Figura 3.30: Parte real del vector de Poynting complejo (componente  $z$ ) para el modo complejo (a) y los modos propagativos  $EH_{11}$  (b),  $HE_{21}$  (c) y  $HE_{31}$  (d) mostrados en la figura 3.29 a 14 GHz.

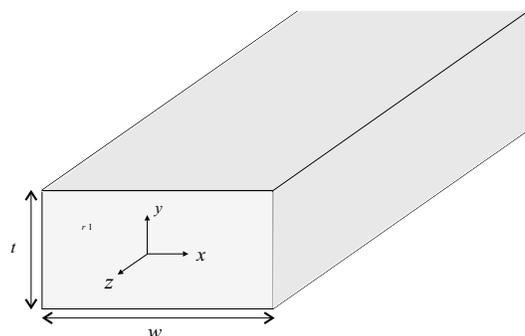


Figura 3.31: Esquema de una guía dieléctrica rectangular de dimensiones  $(w \times t)$  de permitividad relativa  $\epsilon_{r1} = 2,25$  rodeada de aire.

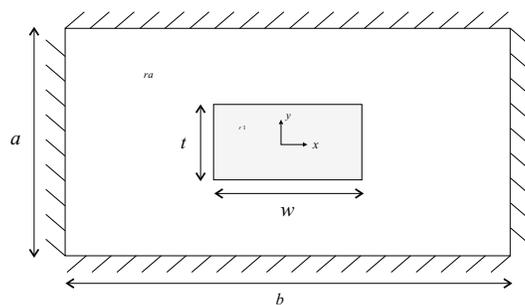


Figura 3.32: Sección transversal de la guía dieléctrica rectangular analizada junto con la guía rectangular empleada como sistema auxiliar.

en la estructura estarán confinados en las proximidades del dieléctrico, y por tanto es posible elegir como sistema auxiliar una guía metálica rectangular rellena de aire ( $\tilde{\epsilon}_{rb} = 1,0$ ) de dimensiones  $a \times b$  ((3.11)-(3.14)) suficientemente mayores que las dimensiones de la guía dieléctrica (ver la figura 3.32), de forma que las condiciones de contorno impuestas por el sistema auxiliar no perturben las soluciones del problema real [4]. Por otro lado, esta guía presenta simetría respecto de  $x$  e  $y$ , lo cual conllevará de nuevo una reducción de un factor 4 en el tamaño de la matriz a diagonalizar para obtener los modos en esta guía.

Tras el análisis de convergencia llevado a cabo para diferentes tamaños de la guía rectangular metálica empleada como sistema auxiliar ( $a/W = 3, 4, 5, 10$ ), se ha concluido que el valor  $a/w = 4$  proporciona buenos resultados empleando en la diagonalización 60 modos de la base auxiliar, con un tiempo de computación de 3.03 s por punto en frecuencia. En la figura 3.33 aparece representada la constante de propagación normalizada  $\beta/k_0$  frente a la frecuencia normalizada  $k_0 w$  de los cuatro primeros modos propagativos en la guía bajo estudio obtenida empleando el *MBBO* (en trazo continuo), y se compara con los resultados proporcionados por [73] empleando el método de elementos finitos, que concuerdan muy bien con nuestros resultados (la nomenclatura empleada para designar los modos corresponde a la usada en [73]).

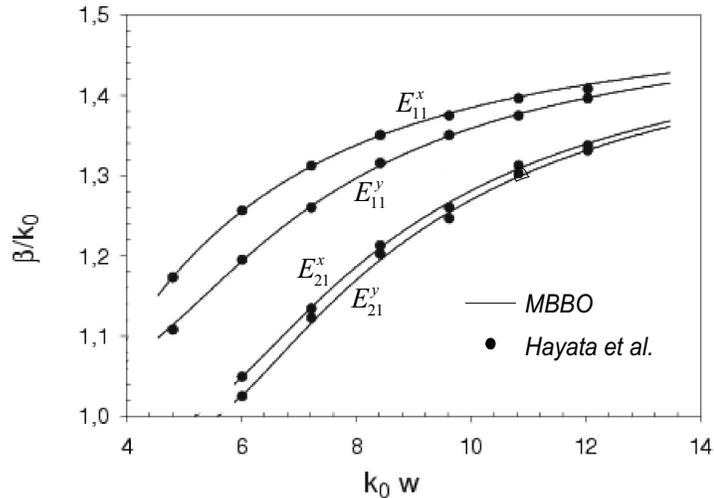
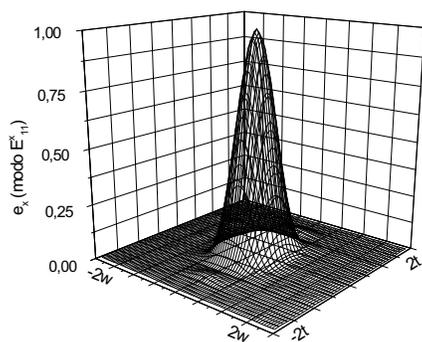


Figura 3.33: Curvas de dispersión de los cuatro primeros modos propagativos en la guía dieléctrica rectangular cuya geometría se detalla al pie de la figura 3.31. Comparación con los resultados obtenidos en [73].

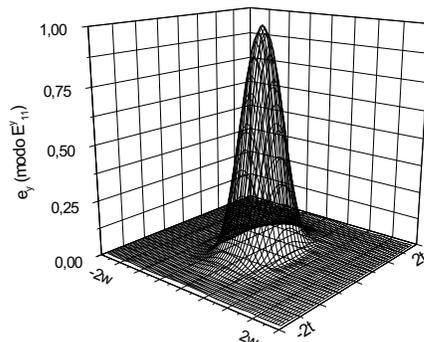
En la figura 3.34 se representa la distribución transversal de la componente principal de campo eléctrico de los cuatro primeros modos propagativos en la guía rectangular dieléctrica cuyas curvas de dispersión se muestran en la figura 3.33, para un valor de  $k_0 w = 12$ .

### 3.3.3. Guías de cristal fotónico

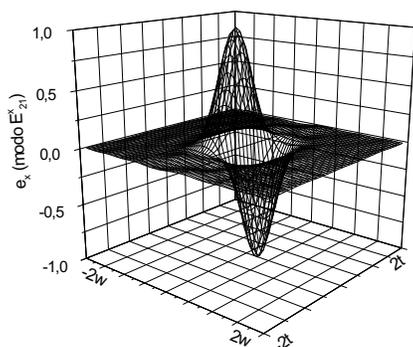
Los cristales fotónicos son una nueva familia de materiales [21] cuyas aplicaciones tienen un gran interés para el área de tecnología de microondas (como antenas de parche en



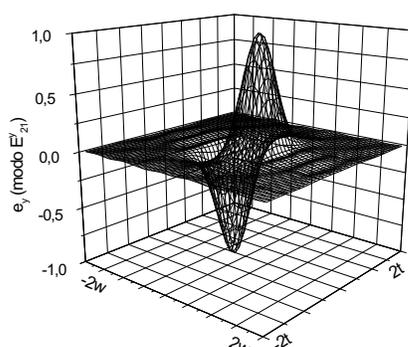
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 3.34: Distribución transversal de la componente principal de campo eléctrico de los cuatro primeros modos propagativos en la guía rectangular dieléctrica cuyas curvas de dispersión se muestran en la figura 3.33, para un valor de  $k_0 w = 12$ .

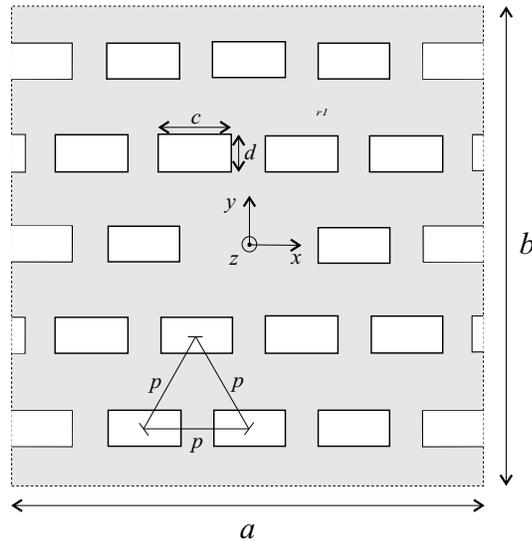


Figura 3.35: Geometría de la sección transversal de una guía de cristal fotónico formada por una serie de perforaciones rectangulares sobre un sustrato dieléctrico de permitividad relativa  $\epsilon_{r1}$ .

tecnología microstrip [74] y como líneas microstrip sobre sustratos periódicos artificiales [75]), así como en el campo de la optoelectrónica (como las fibras de cristal fotónico [76], [77], [78],[79]. En este apartado se van a emplear cristales fotónicos en 2D para diseñar un nuevo tipo de guía de microondas que exhibe propiedades muy interesantes en comparación con otras guías más convencionales [80].

La guía de cristal fotónico considerada (ver la figura 3.35) es una guía dieléctrica abierta que viene definida por una serie de perforaciones de sección transversal rectangular (rectángulos de aire) de dimensiones  $c \times d$  distribuidas periódicamente sobre un sustrato dieléctrico formando una red periódica equilátera de lado  $p$ , que se extienden longitudinalmente en esta guía. Las propiedades de guiado vienen determinadas por un defecto central que consiste en la eliminación del agujero central. El análisis de este problema es particularmente complejo debido a que la guía que se propone tiene muchos agujeros en el dieléctrico. No obstante, el *MBBO* permite obtener de forma sencilla y eficiente el espectro modal en dicha guía. En este caso, el sistema auxiliar empleado ha sido una guía metálica rectangular de permitividad relativa homogénea igual a la del material del que está hecha la guía de cristal fotónico ( $\tilde{\epsilon}_{rb} = \epsilon_{r1}$ ). Al igual que en el resto de guías abiertas analizadas, en el análisis de convergencia de las soluciones obtenidas se han tenido en cuenta, por un lado, los efectos del volumen finito generados por la caja metálica blindada del sistema auxiliar, que serán más relevantes para frecuencias bajas, y por otro lado, el número de modos auxiliares necesarios para alcanzar una precisión dada, que aumenta con el tamaño de la caja auxiliar. Los efectos numéricos de ambos parámetros han sido estudiados en detalle y han sido elegidos de forma que quede garantizada la exactitud de todos los resultados para todas las frecuencias analizadas que se presentan. Desde un punto de vista práctico, el estudio de dichos efectos de volumen finito proporciona información útil del tamaño físico que debe tener un cristal fotónico real para evitar la radiación de modos guiados.

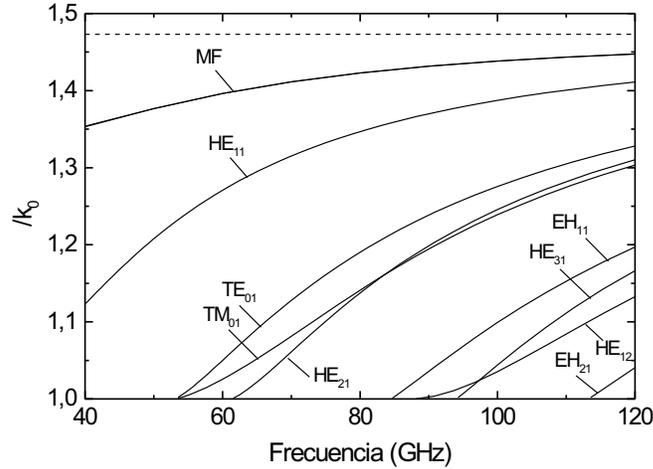
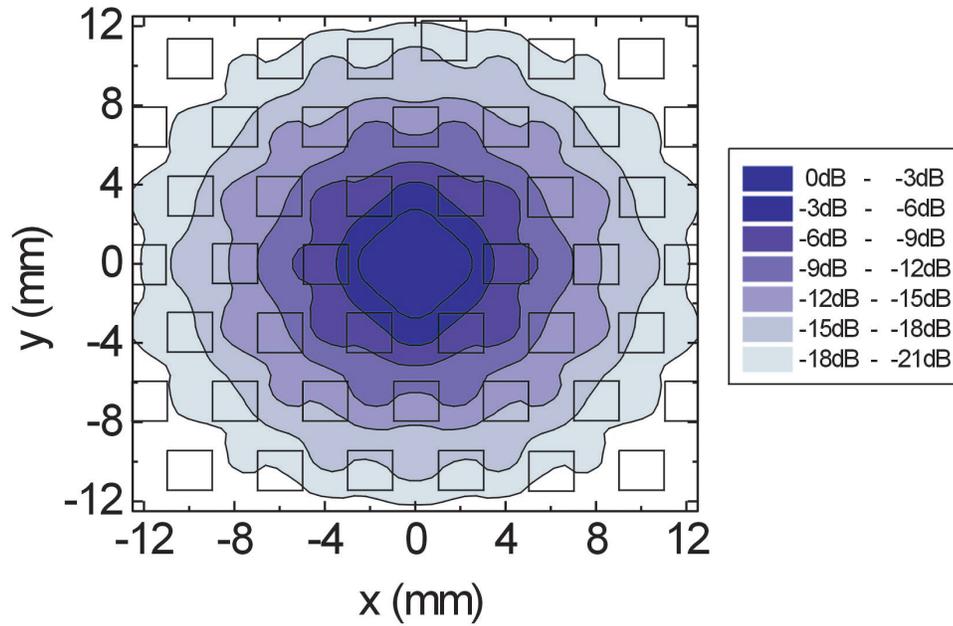


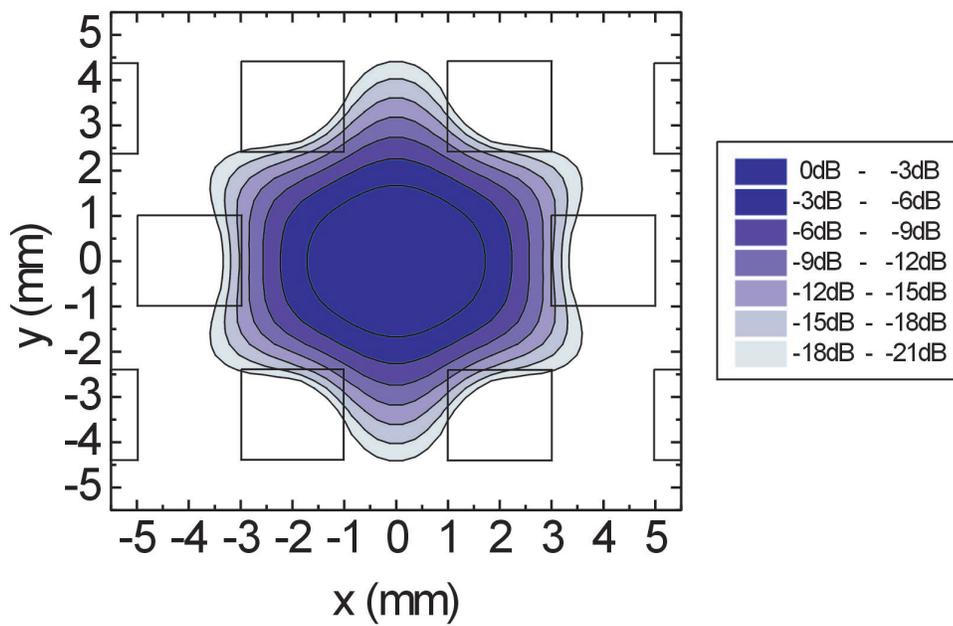
Figura 3.36: Curva de dispersión del modo fundamental (MF) de una guía de cristal fotónico 2D formada por perforaciones de sección cuadrada ( $c = d = 2$  mm,  $p = 4$  mm) sobre un sustrato dieléctrico ( $\epsilon_{r1} = 2,17$ ). Se incluyen, por comparación, las curvas de dispersión de los modos de una guía dieléctrica circular ( $p/2 = 2$  mm,  $\epsilon_{r1} = 2,17$ ). La curva discontinua es el índice de refracción del sustrato dieléctrico.

La guía de cristal fotónico considerada está definida por las dimensiones de los rectángulos de aire  $c \times d$ , la distancia entre los centros de dos rectángulos consecutivos,  $p$  y la permitividad relativa del sustrato,  $\epsilon_{r1}$ . En el ejemplo bajo estudio se ha tomado  $\epsilon_{r1} = 2,17$ , que es un valor típico para un material dieléctrico (CU-CLAD) empleado comúnmente en aplicaciones de microondas. En primer lugar, se va a analizar una guía de cristal fotónico formada por perforaciones de aire con sección cuadrada ( $c = d$ ). Para este caso se han llevado a cabo numerosas simulaciones de guías cubriendo un amplio rango de parámetros geométricos. Aquí se muestran los resultados para un caso particular en el que la guía de ondas sólo tiene un modo propagativo en el rango de 40 a 120 GHz. Este caso corresponde a  $c = d = 2$  mm y  $p = 4$  mm. De hecho, los resultados obtenidos de nuestro análisis numérico demuestran que esta guía de ondas es una guía monomodo en todo el espectro, es decir, tiene un único modo propagativo a cualquier frecuencia. En la figura 3.36 se representa la constante de propagación normalizada  $\beta/k_0$  del modo fundamental (MF) de la guía de cristal fotónico en función de la frecuencia. En la misma gráfica también se incluyen, con fines comparativos, las curvas de dispersión de los modos de una guía dieléctrica circular inmersa en el aire caracterizada por un diámetro igual a  $p$  y un dieléctrico con la misma permitividad que la del sustrato de la guía. Estos resultados se han obtenido empleando como sistema auxiliar una guía rectangular con permitividad relativa  $\tilde{\epsilon}_{rb} = \epsilon_{r1}$  de dimensiones  $a = 33$  mm,  $b = 33$  mm, con  $N=1200$  modos de la base auxiliar.

En dicha gráfica se puede comprobar que la guía de cristal fotónico 2D presentada en este ejemplo propaga un único modo, mientras que la guía dieléctrica circular propaga varios



(a)



(b)

Figura 3.37: Distribución de energía del modo fundamental de la guía de cristal fotónico 2D descrita en la figura 3.36 a la frecuencia de (a) 40 GHz y (b) 120 GHz. Las líneas de contorno están espaciadas 3 dB.

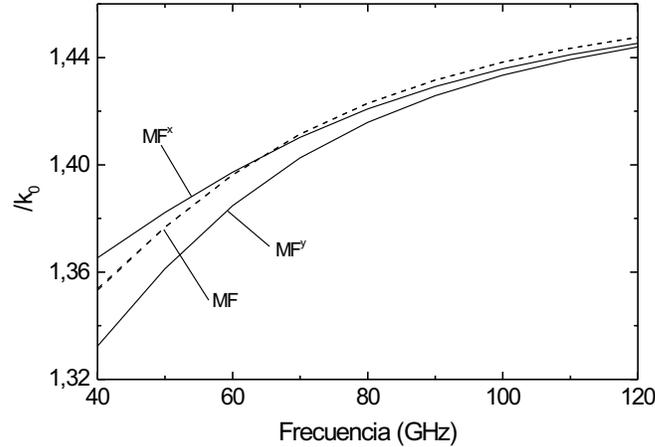


Figura 3.38: Curvas de dispersión de la guía de cristal fotónico 2D cuyos parámetros son:  $a = 3,6$  mm,  $b = 1,1$  mm,  $p = 4$  mm,  $\varepsilon_r = 2,17$ . Los subíndices  $x$  e  $y$  corresponden a los modos cuyo campo eléctrico transversal está orientado paralelo al eje  $X$  e  $Y$ , respectivamente.  $MF$  representa los mismos resultados que los mostrados en la figura 3.36.

modos en el mismo intervalo de frecuencias. Así, esta figura comparativa revela una de las propiedades más importantes y atractivas de esta guía de cristal fotónico 2D: su comportamiento monomodo en una banda muy ancha.

Otra característica importante del modo fundamental de esta guía es la distribución de energía en la sección transversal de la misma. En la figura 3.37 se representa en líneas de contorno (espaciadas 3 dB) la parte real de la componente axial del vector de Poynting complejo, a 40 y 120 GHz, respectivamente, para el modo fundamental cuya curva de dispersión se muestra en la figura 3.36. Como es de esperar, a frecuencias bajas los campos se extienden sobre una región mayor, aunque en esta guía particular el cambio en la distribución de intensidad es relativamente pequeño con la frecuencia. Aunque la región transversal presentada en las dos gráficas es diferente, es posible apreciar que la región incluida dentro de la línea de contorno de 3 dB siempre permanece dentro del primer anillo de agujeros alrededor del defecto central. Obviamente, el número de periodos necesarios para conseguir un confinamiento efectivo de la energía alrededor del defecto central depende de la frecuencia.

Por otro lado, el modo fundamental ( $MF$ ) anteriormente mencionado es, como cabría esperar, un doblete de polarización formado por un par de modos quasi-degenerados. Aunque no son completamente degenerados como en el caso de las guías circulares, la diferencia entre las constantes de propagación es muy pequeña ( $< 0,001\%$ ). Esto podría resultar en un problema para ciertas aplicaciones de microondas, ya que la onda irá cambiando su estado de polarización fácilmente durante su propagación a lo largo de la guía. No obstante, se ha ideado una forma sencilla de romper la degeneración de dicho doblete, y así hacer que esta guía sea birrefringente. El mecanismo consiste en considerar agujeros de sección rec-

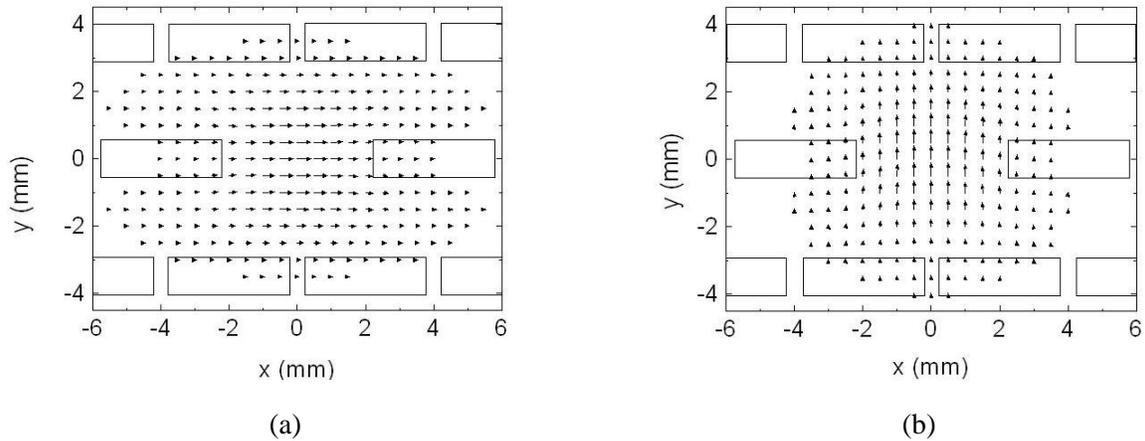


Figura 3.39: Representación con vectores de la distribución de campo eléctrico transversal de los dos modos propagativos no degenerados de una guía de cristal fotónico cuyos parámetros se detallan al pie de la figura 3.38, a una frecuencia de 80 GHz. (a) Modo polarizado según el eje  $X$ . (b) Modo polarizado según el eje  $Y$ .

tangular en lugar de emplear agujeros cuadrados. Esta técnica novedosa permite diseñar una nueva guía de ondas que, además de tener comportamiento monomodo en todo el espectro, preserva la polarización. Como ejemplo, se ha simulado en detalle el efecto de variar las dimensiones de los agujeros, es decir, los lados  $c$  y  $d$ , manteniendo constante el área de los mismos y el parámetro  $p$ . En la figura 3.38 se representan las curvas de dispersión que se han obtenido para un caso con  $c = 3,6$  mm y  $d = 1,1$  mm. Las curvas de dispersión del doblete de polarización quasi-degenerado ( $MF$ ), correspondiente al caso con agujeros de sección cuadrada ( $c = d$ ), se dividen ahora en dos curvas de dispersion diferentes asociadas a un par de modos no degenerados. Además, dichos modos resultan estar quasi-linealmente polarizados, estando sus respectivos campos eléctricos transversales orientados paralelamente al eje  $X$  ( $MF^x$ ) e  $Y$  ( $MF^y$ ), respectivamente. Esta última característica se puede apreciar claramente en la figura 3.39(a), en la que se ha representado con vectores el campo eléctrico transversal de dichos modos a una frecuencia de 80 GHz. En ella se observa que estos modos están efectivamente polarizados según los ejes  $X$  e  $Y$ , respectivamente.

Todas las características de las guías de cristal fotónico 2D descritas en este apartado, que son guías diseñadas para operar en la banda de frecuencias de microondas, son completamente trasladables a otras bandas espectrales si se hace el escalado necesario de las dimensiones de las guías. Así, por ejemplo, en los últimos años ha surgido un incremento sustancial en el estudio, diseño y fabricación de fibras ópticas de cristal fotónico [76], [77], aplicadas a las telecomunicaciones, en las cuales se hace uso de las interesantes propiedades descritas en este apartado para diseñar líneas de transmisión a frecuencias ópticas con características de guiado con muy bajas pérdidas y prácticamente sin dispersión.



# Capítulo 4

## Superficies selectoras de frecuencia dieléctricas: espectro modal para incidencia general oblicua

### 4.1. Introducción

Una superficie selectora de frecuencia dieléctrica (SSFD) es una estructura dieléctrica multicapa constituida por una serie de láminas dieléctricas homogéneas o periódicas en una dirección, de entre las cuales, al menos una de ellas debe ser un medio dieléctrico periódico. Este capítulo está dedicado a analizar el espectro modal en medios dieléctricos periódicos en una dimensión con perfil rectangular de la permitividad dieléctrica, con simetría traslacional en la dirección de propagación, cuando éstos son excitados mediante una onda plana con incidencia oblicua tridimensional (3D). Para casos sencillos, como por ejemplo dos únicos dieléctricos dentro de la celda periódica, existe solución analítica del problema [81], [82], [83]. Sin embargo, si se quiere estudiar una distribución rectangular con un número arbitrario de dieléctricos dentro de la celda unidad, hay que recurrir a otros métodos, como por ejemplo el método de elementos finitos [84]. En este trabajo se va a emplear el método modal vectorial descrito en el capítulo 2, en el cual se obtendrán los modos de la estructura problema como una combinación lineal de modos de un sistema auxiliar cuyos modos son conocidos. Como ya se dijo en la introducción del capítulo 2, el Método de las Bases Bi-Ortogonales es adecuado para analizar el espectro modal en sistemas guidores en los cuales los campos satisfacen una relación de biortogonalidad, como es el caso de los medios dieléctricos infinitos sin pérdidas con condiciones periódicas, que son uno de los elementos constituyentes de las SSFD. Por otro lado, en el caso en que dichos medios tengan pérdidas, no será posible definir una relación de biortogonalidad para los modos en dichos medios, y por tanto no será posible emplear el Método de las Bases Bi-Ortogonales. En el caso de medios dieléctricos periódicos con pérdidas se resolverá la ecuación de valores propios que satisface el campo magnético transversal (en la cual se pueden incluir las pérdidas óhmicas de los materiales dieléctricos), empleando para ello el Método de los Momentos [39], transformándola en una ecuación matricial, de idéntica forma que la ecuación que se obtiene con

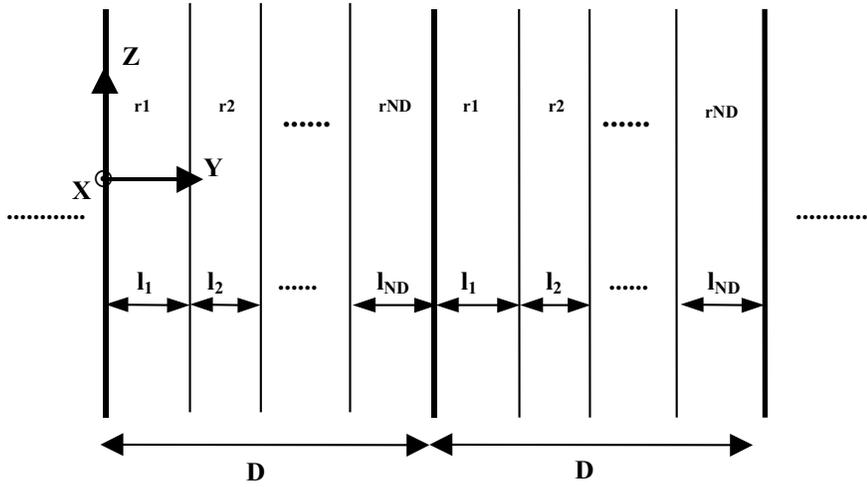


Figura 4.1: Medio dieléctrico periódico en la dirección  $Y$  y uniforme en la dirección  $X$ , formado por  $ND$  capas de dieléctricos insertados dentro de la celda unidad de periodo  $D$ , con sus respectivas permitividades relativas y espesores. El origen de coordenadas se sitúa a la izquierda de la celda periódica.

el Método de las Bases Bi-Ortogonales. La única diferencia en este caso es que los modos que se obtienen en medios dieléctricos periódicos con pérdidas no satisfacen una relación de biortogonalidad, como sucede en el caso sin pérdidas (ver el apartado 2.3).

## 4.2. Espectro modal en medios dieléctricos periódicos infinitos bajo excitación 3D

En la figura 4.1 se muestra la celda periódica unidad de los medios que se van a analizar con el Método de los Momentos descrito en el capítulo 2 para el caso más general de medios dieléctricos periódicos con pérdidas. Como se puede observar en la figura 4.1, en los medios dieléctricos periódicos bajo estudio se ha elegido la dirección de periodicidad como la del eje  $Y$ , siendo uniformes en la dirección  $X$ . El origen de coordenadas se ha situado en el extremo izquierdo de la celda periódica. Se elegirá el eje  $Z$  como la dirección de propagación. Así mismo se observa que dentro de la celda unidad de periodo  $D$  se pueden situar un número  $ND$  arbitrario de dieléctricos caracterizados por sus espesores  $l_i$ , y por sus constantes dieléctricas relativas  $\varepsilon_{ri}$  ( $i=1\dots ND$ ), que serán números complejos en el caso más general, para incluir el efecto las pérdidas óhmicas de los materiales dieléctricos. Este medio periódico será excitado mediante una onda plana linealmente polarizada cuyo vector de ondas en coordenadas rectangulares viene dado por:

$$\mathbf{k} = k_x \hat{\mathbf{x}} + k_y \hat{\mathbf{y}} + k_z \hat{\mathbf{z}}, \quad (4.1)$$

siendo

$$k_x = k \sin \theta \cos \phi, \quad k_{y0} = k \sin \theta \sin \phi, \quad k_{z0} = k \cos \theta$$

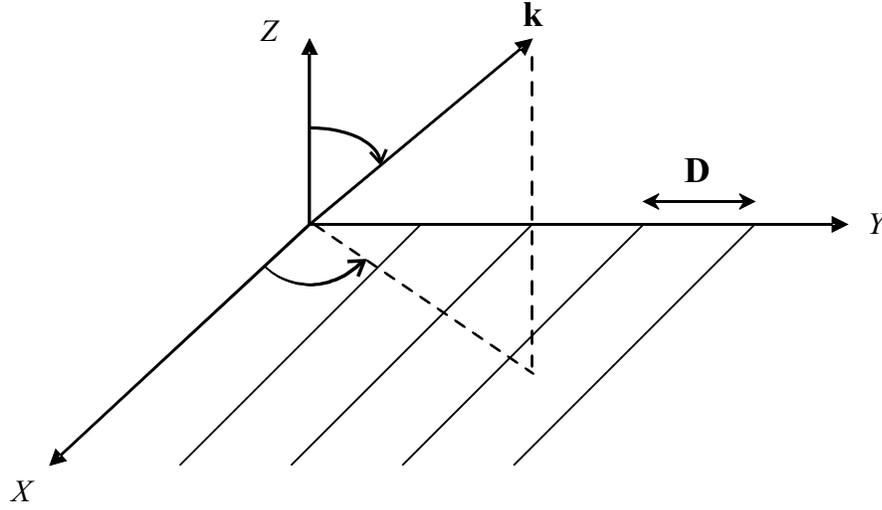


Figura 4.2: Esquema de una estructura periódica en la dirección  $Y$  y homogénea en la dirección  $X$  excitada mediante una onda plana linealmente polarizada.

donde  $k = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon}$  es el número de ondas en el medio, y  $\theta$  y  $\phi$  son los ángulos habituales de las coordenadas esféricas (ver la figura 4.2).

De acuerdo con el Método de los Momentos, los campos incógnita  $\{\mathbf{h}_n\}$  en el medio periódico los podemos expandir en términos de unas funciones base, las cuales deben ser escogidas de manera que cumplan las mismas condiciones de contorno de nuestro problema. Estas funciones base se escogerán como el campo magnético transversal de un sistema auxiliar  $\tilde{L}$ , cuyos campos satisfagan una relación de ortogonalidad [13] de la forma

$$\langle \tilde{\mathbf{e}}_p, \tilde{\mathbf{h}}_q \rangle = \int_{CS} (\tilde{\mathbf{e}}_p^* \times \tilde{\mathbf{h}}_q) \cdot \hat{\mathbf{z}} dS = \delta_{pq}. \quad (4.2)$$

A la hora de escoger la base auxiliar más adecuada para analizar este problema, se ha tenido en cuenta que el medio bajo estudio es homogéneo en el eje  $X$  y periódico en el eje  $Y$ . Altschuler y Goldstone [85] han estudiado la representación de los campos electromagnéticos en regiones guidoras que poseen una dirección privilegiada (eje  $Y$ ) en el plano transversal, obteniendo la familia de modos Tipo-E (denotados como  $'$ ) con  $H'_y = 0$ , también llamados  $TM^y$ , y la familia de modos Tipo-H (denotados como  $''$ ) con  $E''_y = 0$ , también llamados  $TE^y$ , concluyendo que esta descomposición del campo electromagnético es la más adecuada en estos medios. Esta misma descomposición ha sido empleada por otros autores para tratar la incidencia oblicua 3D de ondas planas sobre superficies con una dirección transversal privilegiada [19], [86], [17], empleando para la descomposición del campo en dichos medios los denominados modos de Floquet Tipo-E y Tipo-H. La base auxiliar más adecuada para analizar este problema serán por tanto las familias de modos de Floquet Tipo-E ( $'$ ) y Tipo-H ( $''$ ) correspondientes a un sistema guidor con condiciones periódicas en la dirección  $Y$ , relleno de un medio dieléctrico homogéneo sin pérdidas de permitividad relativa  $\tilde{\epsilon}_{rb}$ , con el mismo periodo  $D$  que el del problema real a analizar. Estas dos familias de modos se caracterizan por tener campo eléctrico o magnético nulo en la dirección de periodicidad, y sus

campos vienen dados por las siguientes expresiones (ver el apéndice E):

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\mathbf{e}}'_p &= \frac{1}{\sqrt{D}} e^{-j(k_x x + k_{y_p} y)} \left[ \frac{-k_x k_{y_p}}{k^2 - k_{y_p}^2} \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} \right] \\ \tilde{\mathbf{h}}'_p &= \frac{-1}{\sqrt{D}} e^{-j(k_x x + k_{y_p} y)} \hat{\mathbf{x}} \end{aligned} \right\} \text{TM}^y \quad (4.3)$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\mathbf{e}}''_p &= \frac{1}{\sqrt{D}} e^{-j(k_x x + k_{y_p} y)} \hat{\mathbf{x}} \\ \tilde{\mathbf{h}}''_p &= \frac{1}{\sqrt{D}} e^{-j(k_x x + k_{y_p} y)} \left[ \frac{-k_x k_{y_p}}{(k^2 - k_{y_p}^2)} \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} \right] \end{aligned} \right\} \text{TE}^y \quad (4.4)$$

donde  $k_{y_p}$  es el número de ondas de Floquet, que viene dado por:

$$k_{y_p} = k_{y_0} + \frac{2\pi}{D} p = \tilde{k} \sin \theta \sin \phi + \frac{2\pi}{D} p ; \quad p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.5)$$

siendo  $\tilde{k} = k_0 \sqrt{\tilde{\varepsilon}_{rb}}$ . Dichos modos han sido adecuadamente normalizados, de forma que cumplen la siguiente relación de ortogonalidad:

$$\langle \tilde{\mathbf{e}}_p^\alpha, \tilde{\mathbf{h}}_q^\beta \rangle = \int_0^D (\tilde{\mathbf{e}}_p^{\alpha*} \times \tilde{\mathbf{h}}_q^\beta) \cdot \hat{\mathbf{z}} dy = \delta_{\alpha\beta} \delta_{pq} , \quad (4.6)$$

donde los superíndices  $\alpha, \beta$  se refieren a la familia de modos, es decir, modos Tipo-E (') o Tipo-H (''), mientras que los subíndices  $p, q$  indican el orden del modo en cada familia.

La permitividad relativa dentro de la celda unidad con perfil rectangular puede ser por tanto expresada de la siguiente forma:

$$\varepsilon_r = \varepsilon_r(y) = \tilde{\varepsilon}_{rb} + \sum_{i=1}^{ND} \left[ (\varepsilon_{ri} - \tilde{\varepsilon}_{rb}) \left( H(y - y_{0i} + \frac{l_i}{2}) - H(y - y_{0i} - \frac{l_i}{2}) \right) \right] . \quad (4.7)$$

donde  $ND$  es el número de dieléctricos dentro de la celda unidad centrados en las coordenadas  $y_{0i}$ , estando cada uno de ellos caracterizado por sus espesores  $l_i$  ( $i=1\dots ND$ ) y por sus constantes dieléctricas relativas  $\varepsilon_{ri}$ , que serán números complejos en el caso más general, ya que se pueden incluir las pérdidas óhmicas de los materiales (ver la figura 4.1).

El siguiente paso en la obtención del espectro modal en un medio dieléctrico periódico con este perfil rectangular de la permitividad relativa consiste en evaluar los elementos de matriz del operador  $L$ , que en este caso se calcularán según (2.52) como:

$$L_{pq}^{\alpha\beta} = \langle \tilde{\mathbf{e}}_p^\alpha, L \tilde{\mathbf{h}}_q^\beta \rangle = \int_0^D (\tilde{\mathbf{e}}_p^{\alpha*} \times L \tilde{\mathbf{h}}_q^\beta) \cdot \hat{\mathbf{z}} dy . \quad (4.8)$$

Estas integrales han sido calculadas analíticamente, obteniéndose los siguientes resultados:

$$\langle \tilde{\mathbf{e}}'_p, L \tilde{\mathbf{h}}'_q \rangle = \begin{cases} \tilde{\beta}_p^2 + \sum_{i=1}^{ND} k_0^2 (\varepsilon_i - \tilde{\varepsilon}_b) \frac{l_i}{D} & p = q \\ \sum_{i=1}^{ND} \left[ \frac{2k_0^2}{(k_{y_p} - k_{y_q})} + \frac{4k_{y_q}}{(\varepsilon_i + \tilde{\varepsilon}_b)} \right] \frac{(\varepsilon_i - \tilde{\varepsilon}_b)}{D} \sin((k_{y_p} - k_{y_q}) \frac{l_i}{2}) e^{j(k_{y_p} - k_{y_q}) y_{0i}} & p \neq q \end{cases} \quad (4.9)$$

$$\langle \tilde{\mathbf{e}}'_p, L\tilde{\mathbf{h}}''_q \rangle = \begin{cases} 0 & p = q \\ \sum_{i=1}^{ND} \frac{4k_x(\varepsilon_i - \tilde{\varepsilon}_b)}{D(\varepsilon_i + \tilde{\varepsilon}_b)} \left( 1 + \frac{k_{yq}^2}{(\tilde{k}^2 - k_{yq}^2)} \right) \sin\left(\frac{(k_{yp} - k_{yq})l_i}{2}\right) e^{j(k_{yp} - k_{yq})y_{0i}} & p \neq q \end{cases} \quad (4.10)$$

$$\langle \tilde{\mathbf{e}}''_p, L\tilde{\mathbf{h}}'_q \rangle = \begin{cases} 0 & p = q \\ \sum_{i=1}^{ND} \frac{2k_0^2 k_x(\varepsilon_i - \tilde{\varepsilon}_b)}{D(k_{yp} - k_{yq})} \left( \frac{k_{yq}}{\tilde{k}^2 - k_{yq}^2} - \frac{k_{yp}}{\tilde{k}^2 - k_{yp}^2} \right) \sin\left(\frac{(k_{yp} - k_{yq})l_i}{2}\right) e^{j(k_{yp} - k_{yq})y_{0i}} & p \neq q \end{cases} \quad (4.11)$$

$$\langle \tilde{\mathbf{e}}''_p, L\tilde{\mathbf{h}}''_q \rangle = \begin{cases} \tilde{\beta}_p^2 + \sum_{i=1}^{ND} k_0^2(\varepsilon_i - \tilde{\varepsilon}_b) \frac{l_i}{D} & p = q \\ \sum_{i=1}^{ND} \frac{2k_0^2(\varepsilon_i - \tilde{\varepsilon}_b)}{(k_{yp} - k_{yq})D} \sin\left(\frac{(k_{yp} - k_{yq})l_i}{2}\right) e^{j(k_{yp} - k_{yq})y_{0i}} & p \neq q. \end{cases} \quad (4.12)$$

Tras observar las ecuaciones (4.9)-(4.12), se deduce que en los medios dieléctricos periódicos bajo excitación 3D no se preserva la polarización de los campos electromagnéticos en el medio periódico (se obtienen modos híbridos), es decir, el problema de guiado requiere la presencia simultánea de ambas familias de modos debido a que los términos (4.10) y (4.11) no se anulan en el caso general de incidencia oblicua 3D (la aparición de modos híbridos también se daba en el caso de guías rectangulares metálicas rellenas inhomogéneamente de dieléctrico). No obstante, en el caso particular de incidencia 2D, que corresponde al caso de incidencia para  $\phi = 90^\circ$  ( $k_x = 0$ ), los términos de acoplo (4.10) y (4.11) se anulan, de forma que en este caso los modos del medio periódico tendrán polarización Tipo-E o Tipo-H, que además coincide con las polarizaciones  $\text{TM}^z$  y  $\text{TE}^z$ , respectivamente, más comúnmente conocidas como TM y TE [13], ya que cuando  $\phi = 90^\circ$ , las componentes no nulas de los campos para cada familia de modos son las siguientes:

$$\phi = 90^\circ : \begin{cases} \text{Modos Tipo - E} : \begin{cases} \mathbf{e}'_p \equiv \mathbf{e}_p^{\text{TM}^y} \equiv \mathbf{e}_p^{\text{TM}^z} = (0, e'_{yp}, e'_{zp}) \\ \mathbf{h}'_p \equiv \mathbf{h}_p^{\text{TM}^y} \equiv \mathbf{h}_p^{\text{TM}^z} = (h'_{xp}, 0, 0) \end{cases} \\ \text{Modos Tipo - H} : \begin{cases} \mathbf{e}''_p \equiv \mathbf{e}_p^{\text{TE}^y} \equiv \mathbf{e}_p^{\text{TE}^z} = (e''_{xp}, 0, 0) \\ \mathbf{h}''_p \equiv \mathbf{h}_p^{\text{TE}^y} \equiv \mathbf{h}_p^{\text{TE}^z} = (0, h''_{yp}, h''_{zp}). \end{cases} \end{cases} \quad (4.13)$$

Por tanto, para incidencia 2D, a la hora de obtener los modos con una cierta polarización, se emplearán únicamente los modos de la base auxiliar con la misma polarización. Dicha base auxiliar de modos TE y TM viene descrita por las siguientes expresiones [87]:

$$\phi = 90^\circ : \begin{cases} \tilde{\mathbf{e}}_p^{\text{TE}} = \frac{1}{\sqrt{D}} e^{-j(k_x x + k_{yp} y)} \hat{\mathbf{x}} \\ \tilde{\mathbf{h}}_p^{\text{TE}} = \frac{1}{\sqrt{D}} e^{-j(k_x x + k_{yp} y)} \hat{\mathbf{y}} \\ \tilde{\mathbf{e}}_p^{\text{TM}} = \frac{1}{\sqrt{D}} e^{-j(k_x x + k_{yp} y)} \hat{\mathbf{y}} \\ \tilde{\mathbf{h}}_p^{\text{TM}} = \frac{-1}{\sqrt{D}} e^{-j(k_x x + k_{yp} y)} \hat{\mathbf{x}} \end{cases} \quad (4.14)$$

donde en este caso

$$\phi = 90^\circ : \quad k_{yp} = k_0 \sqrt{\tilde{\epsilon}_{rb}} \sin \theta + \frac{2\pi}{D} p \quad (p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (4.15)$$

siendo  $\theta$  el ángulo de incidencia del armónico fundamental asociado con la excitación de la estructura. Estos modos también satisfacen la relación de ortogonalidad definida en la ecuación (4.2). Esto conlleva una reducción muy importante en el tiempo de cálculo para la obtención del espectro modal en medios periódicos bajo incidencia 2D, ya que se reduce en un factor 2 el orden de la matriz a diagonalizar, con la consiguiente reducción en el tiempo de cálculo.

Como ya se ha comentado anteriormente, los resultados que nos proporciona la diagonalización de la matriz  $\underline{L}$  son la constante de propagación  $\beta_n$  (autovalores) y los coeficientes de expansión  $c_{in}$  (autovectores) de cada modo, de forma que el campo magnético transversal de dicho modo se obtendrá como una suma de modos de la base auxiliar en función de dichos coeficientes de expansión, quedando de la siguiente forma:

$$\mathbf{h}_n = \sum_{q=1}^N c_{qn} \tilde{\mathbf{h}}_q = \sum_{q=1}^N c_{qn} \begin{cases} \frac{-1}{\sqrt{D}} e^{-j(k_x x + k_{yq} y)} \hat{\mathbf{x}} & q \text{ es Tipo - E} \\ \frac{1}{\sqrt{D}} e^{-j(k_x x + k_{yq} y)} \left[ \frac{-k_x k_{yq}}{(k_0^2 - k_{yq}^2)} \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} \right] & q \text{ es Tipo - H.} \end{cases} \quad (4.16)$$

Por otro lado, el campo eléctrico transversal de cada modo se obtendrá, en el caso más general de dieléctrico periódico con pérdidas bajo incidencia 3D, a partir del campo magnético transversal según la relación que aparece en la ecuación (2.37) obtenida a partir de las ecuaciones de Maxwell. Sustituyendo el campo magnético transversal (ecuación (4.16)) en dicha ecuación, se obtiene la siguiente expresión general para el campo eléctrico transversal de cada modo en el medio periódico bajo excitación 3D:

$$\mathbf{e}_n = \frac{1}{\omega \epsilon \beta_n} \sum_{q=1}^N \frac{c_{qn}}{\sqrt{D}} e^{-j(k_x x + k_{yp} y)} \begin{cases} [-k_x k_{yq} \hat{\mathbf{x}} + k_x^2 \hat{\mathbf{y}}] & q \text{ es Tipo - E} \\ \left[ -\left( \frac{k_x^2 k_{yq}^2}{k^2 - k_{yq}^2} - k_{yq}^2 \right) \hat{\mathbf{x}} + \left( \frac{k_x^3 k_{yq}}{k^2 - k_{yq}^2} - k_x k_{yq} \right) \hat{\mathbf{y}} \right] & q \text{ es Tipo - H} \end{cases} \\ + \frac{\beta_n}{\omega \epsilon} \sum_{q=1}^N \frac{c_{qn}}{\sqrt{D}} e^{-j(k_x x + k_{yp} y)} \begin{cases} [\hat{\mathbf{y}}] & q \text{ es Tipo - E} \\ \left[ \hat{\mathbf{x}} + \frac{k_x k_{yq}}{k^2 - k_{yq}^2} \hat{\mathbf{y}} \right] & q \text{ es Tipo - H.} \end{cases} \quad (4.17)$$

donde  $\epsilon$  viene dada en (4.7).

En el caso particular de incidencia 2D ( $\phi = 90^\circ$ ), en el cual la geometría del problema lleva a que los modos que se obtienen en el medio periódico sean  $TE^z$  o  $TM^z$ , estando ambas polarizaciones desacopladas, podremos relacionar el campo eléctrico y magnético transversal de una forma mucho más sencilla si, para cada polarización, manipulamos adecuadamente las ecuaciones de Maxwell para las componentes transversales de los campos de la siguiente forma:

$\phi = 90^\circ$  : Polarización  $TE^z$ :

$$\mathbf{h}_n = \frac{-j}{\omega\mu_0} \hat{\mathbf{z}} \times [\nabla_t e_{zn} + j\beta_n \times \mathbf{e}_n] = \frac{\beta_n}{\omega\mu_0} (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{e}_n) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}_n = \frac{\omega\mu_0}{\beta_n} (\mathbf{h}_n \times \hat{\mathbf{z}}) \quad (4.18)$$

donde se ha aplicado la condición de campo eléctrico longitudinal nulo ( $e_{zn} = 0$ ) para la polarización  $TE^z$ .

$\phi = 90^\circ$  : Polarización  $TM^z$ :

$$\mathbf{e}_n = \frac{j}{\omega\varepsilon} \hat{\mathbf{z}} \times [\nabla_t h_{zn} + j\beta_n \mathbf{h}_n] = \frac{-\beta_n}{\omega\varepsilon} (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{h}_n) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}_n = \frac{\beta_n}{\omega\varepsilon} (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{h}_n) \quad (4.19)$$

donde en este caso se ha aplicado la condición de campo magnético longitudinal nulo ( $h_{zn} = 0$ ) para la polarización  $TM^z$ .

En las expresiones (4.18) y (4.19) podemos identificar las impedancias modales para ambas polarizaciones, que vienen definidas como:

$$\phi = 90^\circ : \begin{cases} Z_n^{TE^z} = \frac{\omega\mu}{\beta_n} \\ Z_n^{TM^z} = \frac{\beta_n}{\omega\varepsilon} \end{cases} \quad (4.20)$$

Es importante resaltar que aunque para este caso particular de incidencia 2D es posible definir unas impedancias características para los modos en el medio periódico, la impedancia característica  $Z_n^{TM^z}$  para polarización  $TM^z$  varía con la coordenada  $y$ , es decir, esta impedancia característica no es una constante porque la permitividad relativa del medio es una función de la coordenada  $y$ . En el caso general de incidencia oblicua 3D ( $k_x \neq 0$ ) los modos en el medio periódico dejan de tener una impedancia característica definida, puesto que ahora ya no hay una polarización definida para estos modos, sino que pasarán a ser modos híbridos.

Por otro lado, como ya se comentó en el capítulo 2, en el caso particular de medios dieléctricos periódicos sin pérdidas, los operadores que rigen la evolución del campo magnético transversal  $\mathbf{h}_n$  y del campo eléctrico transversal definido como  $\bar{\mathbf{e}}_m = (-e_{ym}, e_{xm})$ , son adjuntos uno del otro (ver el apéndice B), de forma que los modos en dichos medios también deben cumplir una relación de biortogonalidad (2.8) de la forma:

$$\langle \bar{\mathbf{e}}_m | \mathbf{h}_n \rangle = \int_{CS} (\bar{\mathbf{e}}_m^* \cdot \mathbf{h}_n) dS = \int_{CS} (\mathbf{e}_m^* \times \mathbf{h}_n) \cdot \hat{\mathbf{z}} dS = \delta_{mn} \quad (4.21)$$

En el apéndice C se demuestra que los modos en un medio dieléctrico periódico sin pérdidas satisfacen la citada relación de biortogonalidad (2.8). En consecuencia, en el caso de medios

sin pérdidas se podrá obtener el campo eléctrico transversal  $\mathbf{e}_m$  a partir del campo definido en el capítulo 2,  $\bar{\mathbf{e}}_m$ , como  $(e_{xm}, e_{ym}) = (\bar{e}_{ym}, -\bar{e}_{xm})$ , empleando para ello los métodos alternativos descritos en ese capítulo (ver (2.40), (2.41)).

### 4.3. Análisis de la convergencia

En este apartado se llevará a cabo un estudio de la convergencia de las soluciones que se obtienen con el Método de los Momentos a la hora de analizar el espectro modal en un medio dieléctrico periódico bajo excitación de ondas planas.

A la hora de llevar a cabo el análisis de la convergencia en el estudio de un medio dieléctrico periódico (ver la figura 4.1), habrá que estudiar cómo varían las soluciones obtenidas con el Método de los Momentos para un problema dado en función del número de funciones base auxiliares  $N$  empleadas en la expansión de los modos del sistema real. En dicho estudio habrá que considerar los diferentes parámetros del problema, a saber, la frecuencia de trabajo, el número de dieléctricos distintos dentro de la celda periódica, la diferencia de la permitividad relativa en los diversos medios que constituyen el medio periódico, y por último, los ángulos de incidencia.

En primer lugar se analizará la convergencia para el caso de incidencia 2D ( $\phi = 90^\circ$ ), la cual, como ya se ha comentado anteriormente, se alcanza al menos para la mitad de modos que para el caso 3D, puesto que en ese caso los modos de la base auxiliar con diferente polarización no se acoplan. Una vez se haya visto cómo afectan el resto de parámetros a la convergencia de las soluciones, se estudiará el efecto de incidencia oblicua 3D.

#### 4.3.1. Análisis de la convergencia para el caso de incidencia 2D

En este apartado consideraremos que sobre el medio dieléctrico periódico incide una onda plana TE o TM cuyo vector de ondas forma un ángulo  $\theta$  con el eje  $Z$ , para un ángulo  $\phi = 90^\circ$  (incidencia 2D), que excitará en el medio periódico modos TE o TM, respectivamente, según sea la polarización de la onda incidente. Cada una de esas familias de modos se obtendrá utilizando como base auxiliar los modos de Floquet TE o TM de un medio homogéneo de permitividad relativa  $\tilde{\epsilon}_{rb}$  [87] (4.14).

Para hacer el análisis de la convergencia de las soluciones que se obtienen en función del número de modos de la base auxiliar empleados en la expansión modal, se ha elegido un caso de medio periódico encontrado en la bibliografía, para el cual se ha hecho el estudio de la convergencia de la constante de propagación normalizada  $\beta/k_0$  de los primeros modos en ese medio a diferentes frecuencias por un lado, y para varios ángulos de incidencia  $\theta$  por otro, para los modos de las dos polarizaciones. Por otro lado se ha comparado la convergencia de las soluciones en esta estructura con las de otro medio periódico de igual periodicidad pero con un mayor número de capas dieléctricas dentro de la celda unidad. Así mismo, se ha visto cómo afectan las pérdidas de los dieléctricos en la convergencia. Por último, se ha estudiado el efecto que tiene en la convergencia de las soluciones la diferencia de la constante dieléctrica en los diversos medios que constituyen el medio periódico. En todos los

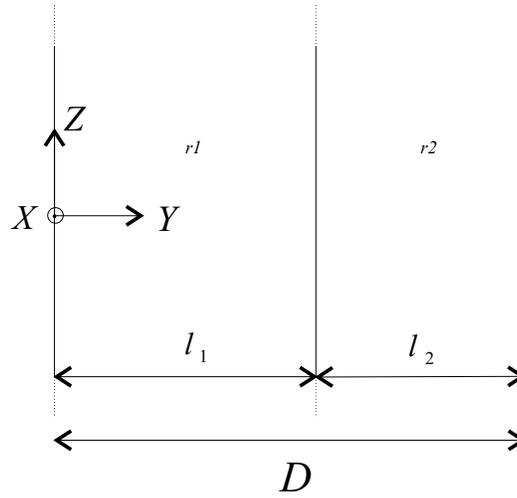


Figura 4.3: Celda unidad de la estructura analizada en el estudio de convergencia en el caso 2D. Parámetros:  $D = 17,987$  mm,  $\varepsilon_{r1} = 1,0$ ,  $\varepsilon_{r2} = 2,56$ ,  $l_1 = 10,209$  mm,  $l_2 = 7,778$  mm.

casos, se ha considerado que se alcanza la convergencia cuando la constante de propagación normalizada  $\beta_n/k_0$  del modo representado menos convergente varía únicamente en su cuarta cifra significativa, respecto al valor asintótico al que tiene cuando hacemos crecer  $N$ .

El medio elegido para este estudio es el analizado por Lewis y Hessel [83], cuyo periodo de repetición es  $D = 17,987$  mm, caracterizado por la alternancia de dos capas dieléctricas en la dirección  $Y$  de permitividades relativas  $\varepsilon_{r1} = 1,0$  y  $\varepsilon_{r2} = 2,56$ , y espesores  $l_1 = 10,209$  mm y  $l_2 = 7,778$  mm, respectivamente, y se ha tomado como sistema auxiliar un medio homogéneo de permitividad relativa  $\tilde{\varepsilon}_{rb} = 1,0$ . En la figura 4.3 aparece una celda unidad de esta estructura. El origen de coordenadas se elige en el lado izquierdo de la celda unidad.

En primer lugar se ha estudiado el efecto de la frecuencia en la convergencia de las soluciones obtenidas para esta estructura. Para ello, se han hecho los cálculos para dos valores de frecuencia suficientemente diferenciadas, en relación al número de modos propagativos en el medio periódico. En el caso de la frecuencia de 10 GHz, en el medio estudiado hay un sólo modo propagativo para cada polarización, mientras que existen 7 modos propagativos TE y TM a la frecuencia de 50 GHz. En la figura 4.4 se muestra el estudio de convergencia, en función del número de modos de la base auxiliar  $N$ , correspondiente al primer, segundo y tercer modo TE y TM de la estructura, para las dos frecuencias de 10 y 50 GHz, con incidencia normal. Las líneas continuas corresponden a modos propagativos, mientras que los modos evanescentes se han representado con línea discontinua (este criterio se empleará en todas las figuras de este capítulo). Como se puede observar, a 10 GHz son suficientes 10 modos de la base auxiliar para obtener los modos con polarización TE y 20 modos para la polarización TM. Se observa una convergencia algo más lenta a la frecuencia más alta, ya que a 50 GHz se necesitan 15 modos para polarización TE y 25 modos para polarización TM. Ello se debe a que son necesarios más modos de la base auxiliar (propagativos y evanescentes) para describir la misma estructura, puesto que al aumentar la frecuencia sin variar las dimensiones,

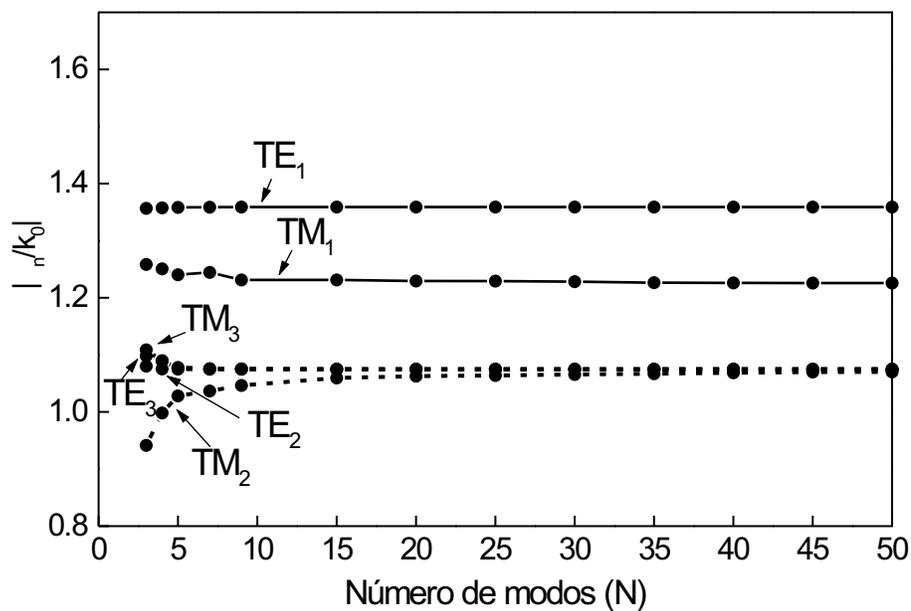
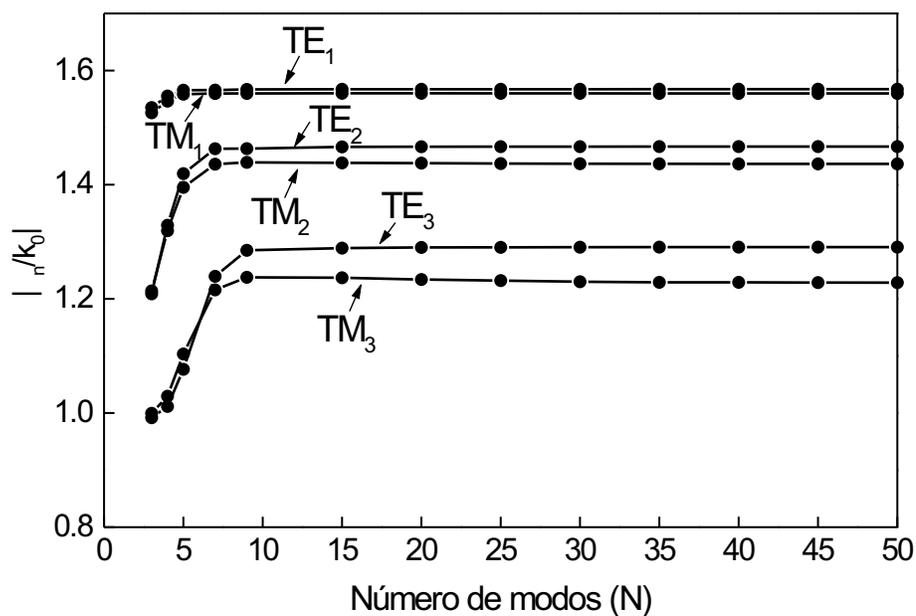
(a)  $f = 10 \text{ GHz}$ (b)  $f = 50 \text{ GHz}$ 

Figura 4.4: Convergencia en el caso 2D de la constante de propagación normalizada  $|\beta_n/k_0|$  de los tres primeros modos TE y TM del medio periódico cuyos parámetros se detallan al pie de la figura 4.3 en función del número de funciones base ( $N$ ) empleadas en la expansión modal para  $\theta = 0^\circ$ . (a) Frecuencia = 10 GHz. (b) Frecuencia = 50 GHz.

la estructura disminuye en unidades de longitud de onda. Por lo tanto, al disminuir las dimensiones eléctricas de la estructura, son necesarias más funciones base para describirla, de forma que a frecuencias elevadas es necesario un mayor número de modos en la expansión modal. También cabe comentar que a frecuencia mayor tanto los modos TE como los modos TM parecen tener el mismo tipo de convergencia. Sin embargo, a baja frecuencia se aprecia una convergencia más rápida de los modos TE que de los modos TM.

A continuación se va a estudiar el efecto que tiene el ángulo de incidencia  $\theta$  en la convergencia de las soluciones para el caso de incidencia 2D. En la figura 4.5 se compara la convergencia de la constante de propagación normalizada  $|\beta_n/k_0|$  correspondiente también al primer, segundo y tercer modo TE y TM de la estructura a una frecuencia de 10 GHz, para dos ángulos de incidencia distintos ( $\theta = 0^\circ$  y  $\theta = 45^\circ$ ). En el caso de la convergencia al variar el ángulo  $\theta$  bajo incidencia 2D, no se aprecia un cambio significativo (a  $\theta = 45^\circ$  se alcanza la convergencia para polarización TE con 10 modos, y con 15 modos para polarización TM). Ello se debe a que el número de modos propagativos en el medio apenas varía con dicho ángulo. Para ambos ángulos de incidencia, de nuevo hay una convergencia más rápida para la polarización TE.

Vamos a comparar ahora la convergencia de los modos de dos estructuras periódicas con distinto número de capas dieléctricas (ND) dentro del periodo de repetición. Para ello se compara en la figura 4.6 la convergencia de la constante de propagación normalizada  $|\beta_n/k_0|$  correspondiente también al primer, segundo y tercer modo TE y TM a una frecuencia de 10 GHz para incidencia normal, de dos estructuras caracterizadas por el mismo periodo de  $D = 17,987$  mm. La figura 4.6(a) corresponde a la estructura analizada anteriormente, caracterizada por la alternancia de dos capas dieléctricas de permitividades relativas  $\varepsilon_{r1} = 1,0$  y  $\varepsilon_{r2} = 2,56$ , y espesores  $l_1 = 10,209$  mm y  $l_2 = 7,778$  mm, respectivamente (ver la figura 4.3). La figura 4.6(b) corresponde a una estructura con cuatro capas dieléctricas, que están caracterizadas por las siguientes permitividades relativas y espesores respectivos:  $\varepsilon_{r1} = 1,0$ ,  $\varepsilon_{r2} = \varepsilon_{r4} = 2,048$ ,  $\varepsilon_{r3} = 2,56$ , y  $l_1 = 10,209$  mm,  $l_2 = l_4 = 2,990$  mm,  $l_3 = 1,798$  mm. En el caso de cuatro capas dieléctricas son necesarios más modos para alcanzar la convergencia (15 modos para polarización TE y 35 modos para polarización TM). Este incremento en el número de modos es lógico puesto que aparecen más saltos entre dieléctricos dentro de la celda unidad. De nuevo se alcanza una convergencia más rápida para modos TE.

Otro parámetro a tener en cuenta en el estudio de la convergencia son las posibles pérdidas óhmicas en los materiales dieléctricos. En la figura 4.7 se compara la convergencia del módulo de la constante de propagación normalizada  $|\beta_n/k_0|$  correspondiente al primer, segundo y tercer modo TE y TM de la estructura de la figura 4.3, cuya celda unidad está formada por aire y un material dieléctrico sin pérdidas ( $\varepsilon_{r1} = 1,0$  y  $\varepsilon_{r2} = 2,56$ ,  $\tan(\delta) = 0,0$ ), a una frecuencia de 10 GHz bajo incidencia normal, con otra estructura con los mismos parámetros, excepto que en este caso se ha considerado que el material dieléctrico tiene una tangente de pérdidas de  $\tan(\delta) = 0,01$  (que es un valor de pérdidas alto en los materiales dieléctricos empleados habitualmente a frecuencias de microondas). Como se puede observar en la figura 4.7, el módulo de la constante de propagación normalizada TE y TM (que en este caso no es real pura ni imaginaria pura para ningún modo) es prácticamente idéntico en

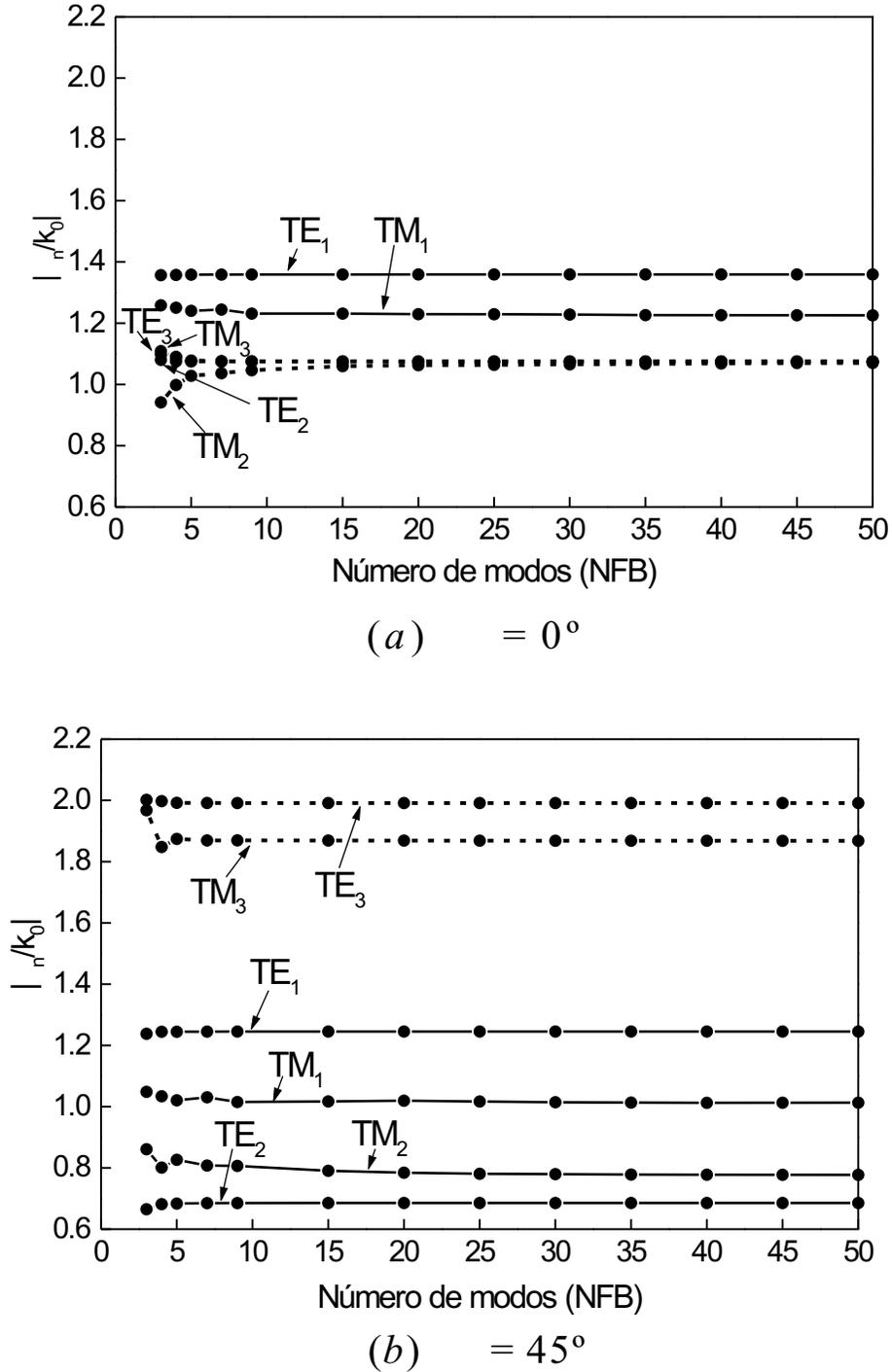


Figura 4.5: Convergencia de la constante de propagación normalizada  $|\beta_n/k_0|$  de los tres primeros modos TE y TM del medio periódico cuyos parámetros se detallan al pie de la figura 4.3 en función del número de funciones base ( $N$ ) empleadas en la expansión modal a una frecuencia de 10 GHz. (a)  $\theta = 0^\circ$ . (b)  $\theta = 45^\circ$ .

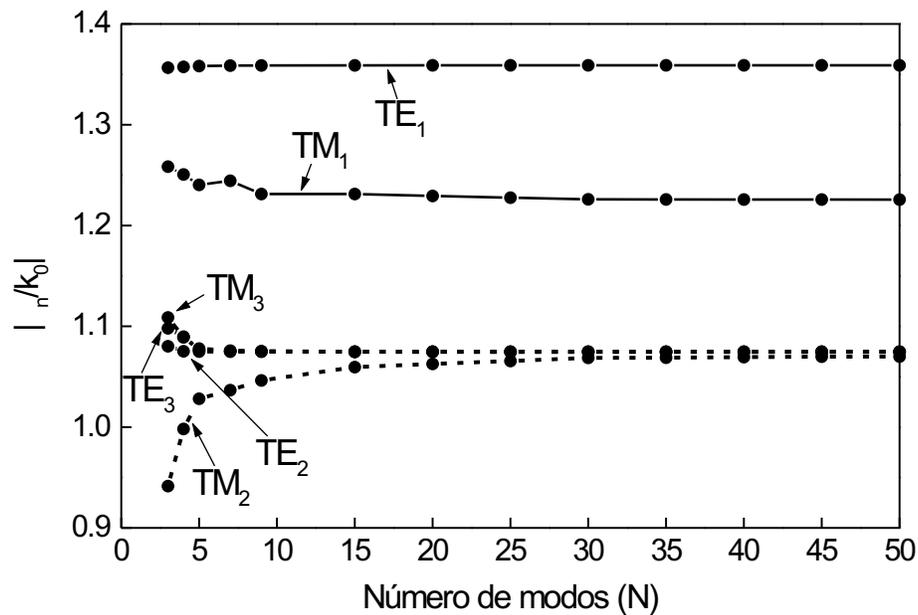
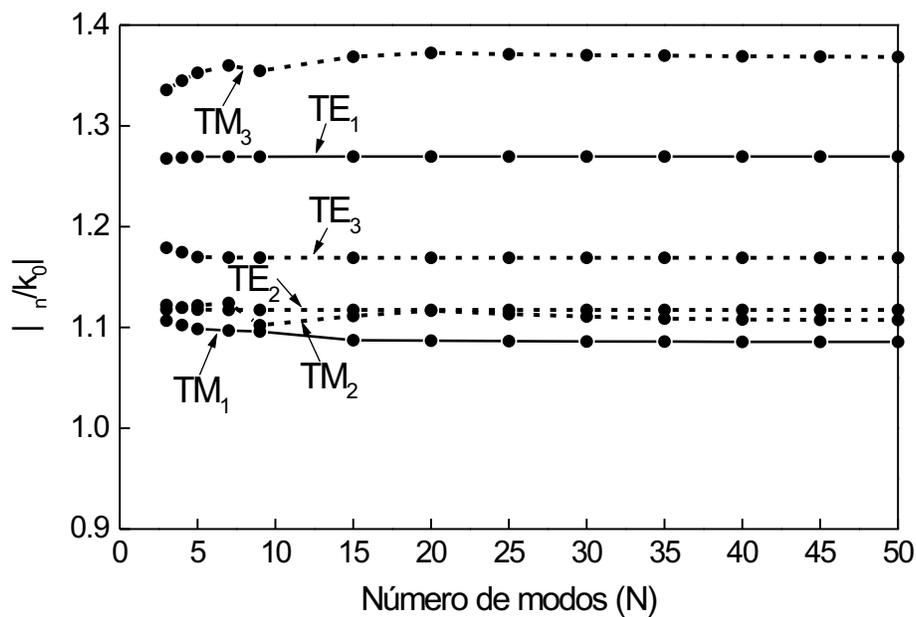
(a)  $ND = 2$ (b)  $ND = 4$ 

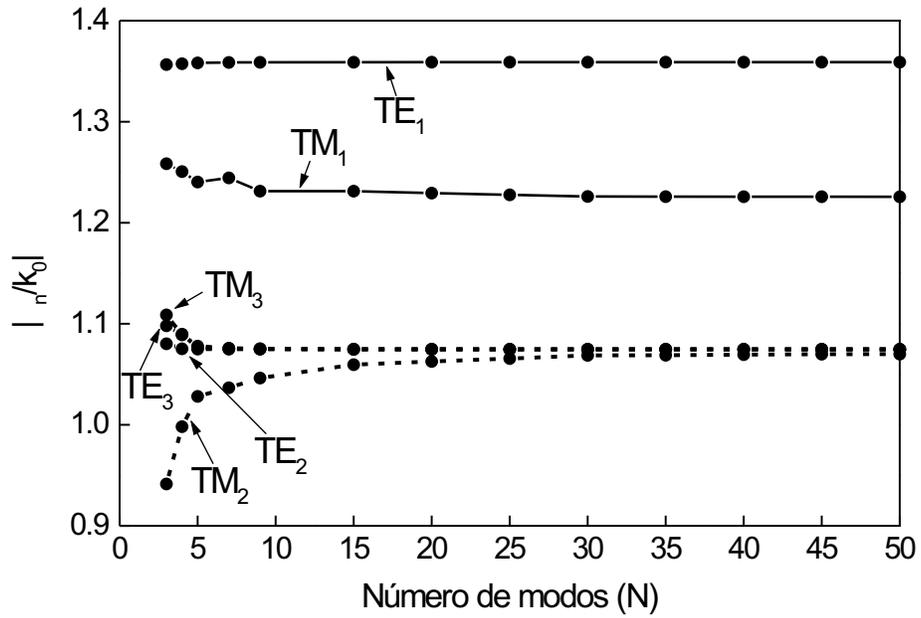
Figura 4.6: Convergencia de la constante de propagación normalizada  $|\beta_n/k_0|$  de los tres primeros modos TE y TM del medio periódico en función del número de funciones base ( $N$ ) empleadas en la expansión modal a una frecuencia de 10 GHz y  $\theta = 0^\circ$ . (a)  $ND=2$ . (b)  $ND=4$ .

el caso con y sin pérdidas, por lo que la convergencia se alcanza igualmente para un mismo número de modos de la base auxiliar en ambos casos. Así, podemos concluir que el hecho de que los dieléctricos tengan pequeñas pérdidas no afecta significativamente a la convergencia de las soluciones obtenidas con este método. Hemos analizado también cuál es el efecto que tiene en la convergencia de las soluciones el aumentar el valor de la  $\tan(\delta)$ , comprobando que es equivalente al efecto que tiene emplear una permitividad dieléctrica relativa real con el mismo módulo, lo cual será analizado a continuación.

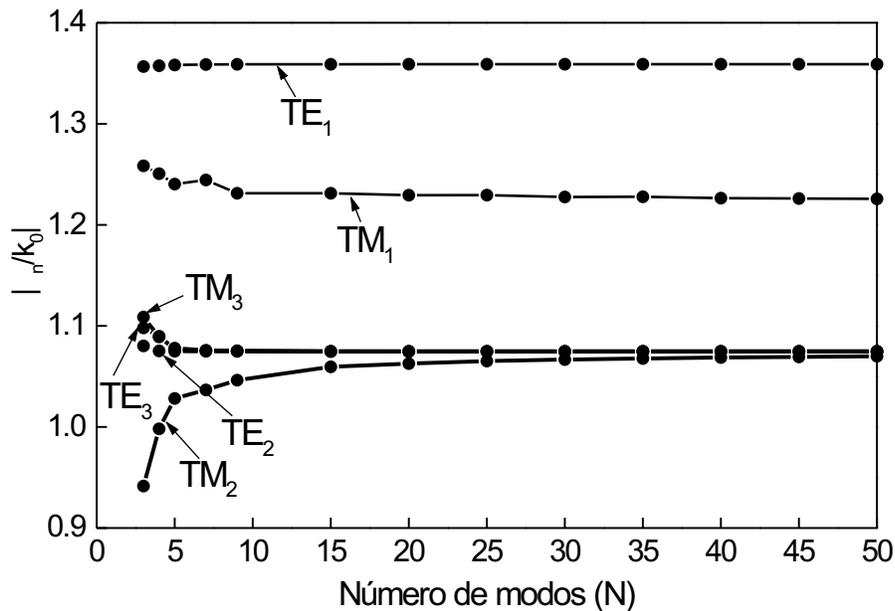
El último factor que ha sido estudiado en el análisis de la convergencia es la diferencia de la permitividad relativa que existe entre dieléctricos adyacentes. En la figura 4.8 se compara, con igual escala, la convergencia de la constante de propagación normalizada  $|\beta_n/k_0|$  correspondiente también al primer, segundo y tercer modo TE y TM de la estructura de la figura 4.3 a una frecuencia de 10 GHz para incidencia normal, con otra estructura con los mismos parámetros, excepto la permitividad dieléctrica relativa de las dos capas que forman la celda unidad ( $\varepsilon_{r1} = 1,0$  y  $\varepsilon_{r2} = 20,0$ ). Se comprueba que cuanto mayor es la diferencia de la permitividad relativa entre las capas que forman la celda unidad, también aumenta el número de funciones base auxiliares necesarias para alcanzar la convergencia de las soluciones (en el segundo caso hacen falta 20 modos para polarización TE y 50 modos para polarización TM). Al igual que en los casos anteriores, de nuevo se observa una mayor convergencia para la polarización TE.

En todos los casos analizados se ha observado una convergencia más lenta para los modos TM. Ello se debe a que el vector campo eléctrico para esa polarización es normal a la superficie de separación de los dieléctricos (está dirigido en la dirección  $Y$ ); sabemos que la condición de contorno que cumple esa componente del campo eléctrico en la superficie de separación de dos medios en ausencia de cargas verdaderas es que es discontinua. Sin embargo los campos eléctricos de los modos de la base auxiliar son funciones continuas. Ello conlleva problemas de convergencia que siempre aparecen al reconstruir una función discontinua a partir de funciones continuas (*fenómeno de Gibbs* [62]). Esto no ocurre en la otra polarización TE, puesto que el campo eléctrico es paralelo a la discontinuidad de los medios (está dirigido en la dirección  $X$ ), y por lo tanto ha de ser continuo. El campo  $\mathbf{H}$  y el campo  $\mathbf{B}$  son continuos en todos los casos, ya que no consideramos medios magnéticos.

Resumiendo, hemos visto que a la hora de calcular los modos de una estructura periódica bajo incidencia 2D para cada una de las dos polarizaciones TE y TM definidas en el problema, será necesario aumentar el número de funciones base auxiliares a medida que aumentemos la frecuencia, mientras que el ángulo de incidencia  $\theta$  no será un parámetro tan relevante en la convergencia. Además, en cálculos con un número elevado de capas dieléctricas dentro del periodo de repetición, o con diferencias de permitividad dieléctrica elevadas entre capas adyacentes, también se alcanzará la convergencia de las soluciones para un mayor número de funciones base auxiliares. También se ha observado que la convergencia no es igual para las dos polarizaciones TE y TM, por lo que se deberá hacer un estudio por separado en cada caso.



(a)  $\tan(\delta) = 0.0$



(b)  $\tan(\delta) = 0.01$

Figura 4.7: Convergencia en el caso 2D de la constante de propagación normalizada  $|\beta_n/k_0|$  de los tres primeros modos TE y TM del medio periódico cuyos parámetros se detallan al pie de la figura 4.3 en función del número de funciones base ( $N$ ) empleadas en la expansión modal a una frecuencia de 10 GHz. (a) Dieléctrico sin pérdidas ( $\tan(\delta) = 0,0$ ). (b) Dieléctrico con pérdidas ( $\tan(\delta) = 0,01$ ).

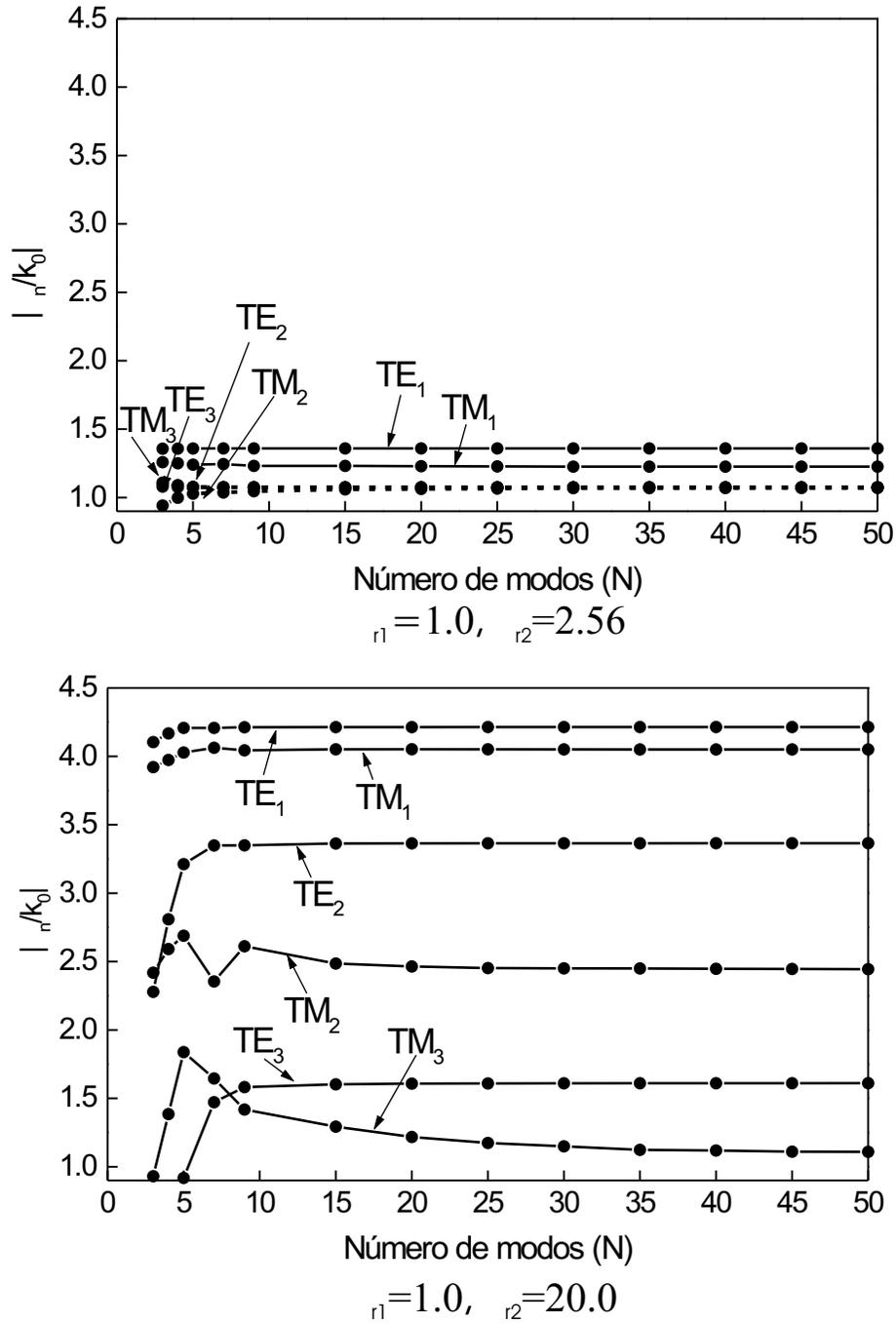


Figura 4.8: Convergencia en el caso 2D de la constante de propagación normalizada  $|\beta_n/k_0|$  de los tres primeros modos TE y TM del medio periódico cuyos parámetros se detallan al pie de la figura 4.3 en función del número de funciones base ( $N$ ) empleadas en la expansión modal a una frecuencia de 10 GHz. (a)  $\epsilon_{r1} = 1,0$  y  $\epsilon_{r2} = 2,56$ . (b)  $\epsilon_{r1} = 1,0$  y  $\epsilon_{r2} = 20,0$ .

### 4.3.2. Análisis de la convergencia para el caso de incidencia 3D

En este apartado se va a analizar el efecto de la incidencia oblicua 3D en la convergencia de las soluciones que se obtienen con el método modal vectorial desarrollado para la obtención del espectro modal en un medio dieléctrico periódico. Hay que recordar que cuando la incidencia deja de ser 2D ( $\phi \neq 90^\circ$ ), los modos en el medio periódico ya no tienen una polarización definida, sino que pasan a ser modos híbridos en general, por lo que para obtener dichos modos, será necesario incluir ambas familias de modos Tipo-E y Tipo-H en las expansiones modales. Este hecho ya comporta automáticamente un aumento de al menos un factor dos del número de modos de la base auxiliar necesario para alcanzar la convergencia de las soluciones.

A continuación se va a hacer un estudio de la convergencia en el medio dieléctrico periódico analizado en el apartado anterior (ver la figura 4.1) cuando la incidencia es 3D, con  $\theta = 45^\circ$ , para cuatro valores de  $\phi$  distintos. En la figura 4.9 se compara la convergencia de la constante de propagación normalizada  $|\beta_n/k_0|$  correspondiente a los seis primeros modos de la estructura a una frecuencia de 10 GHz y un ángulo de incidencia  $\theta = 45^\circ$  para cuatro ángulos acimutales distintos:  $\phi = 0^\circ$ ,  $\phi = 30^\circ$ ,  $\phi = 60^\circ$  y  $\phi = 90^\circ$ .

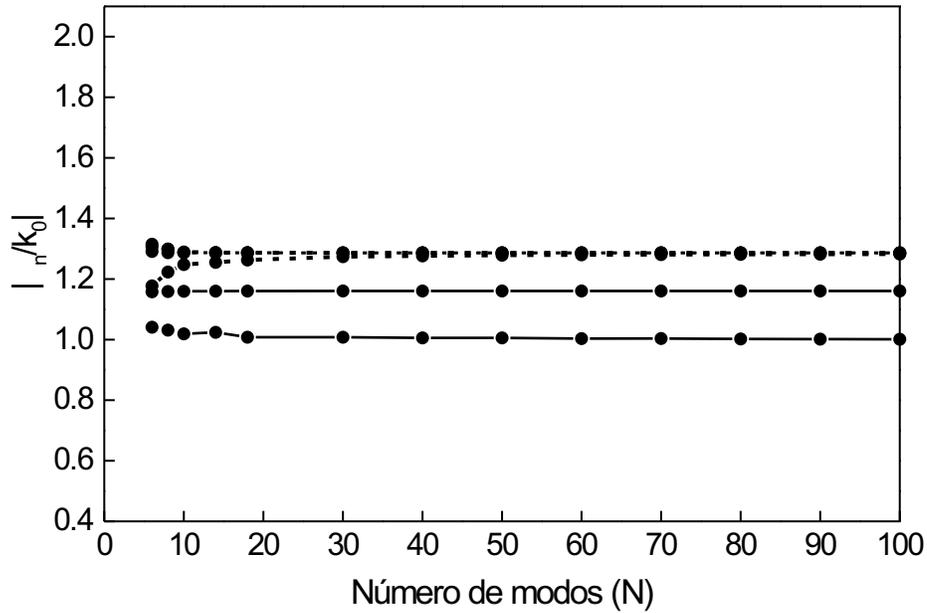
El caso analizado en la figura 4.9(d) ( $\theta = 45^\circ$ ,  $\phi = 90^\circ$ ) corresponde a incidencia 2D, y coincide con el estudiado anteriormente en la figura 4.5(b), en cuyo caso para alcanzar la convergencia eran necesarios 10 modos para polarización TE y 15 modos para polarización TM. En los casos (a), (b) y (c) se observa que en general, en el caso de incidencia 3D el número de modos para el cual converge la constante de propagación normalizada  $|\beta_n/k_0|$  es mayor que en el caso 2D, siendo en los tres casos analizados correspondientes a  $\phi = 0^\circ$ ,  $\phi = 30^\circ$  y  $\phi = 60^\circ$  de 30 modos. Por lo tanto, de la observación de estas gráficas y de otros cálculos realizados, se puede generalizar que si la incidencia es 3D la convergencia se alcanza aproximadamente para el doble de modos empleados de la base auxiliar respecto al caso de incidencia 2D.

## 4.4. Resultados

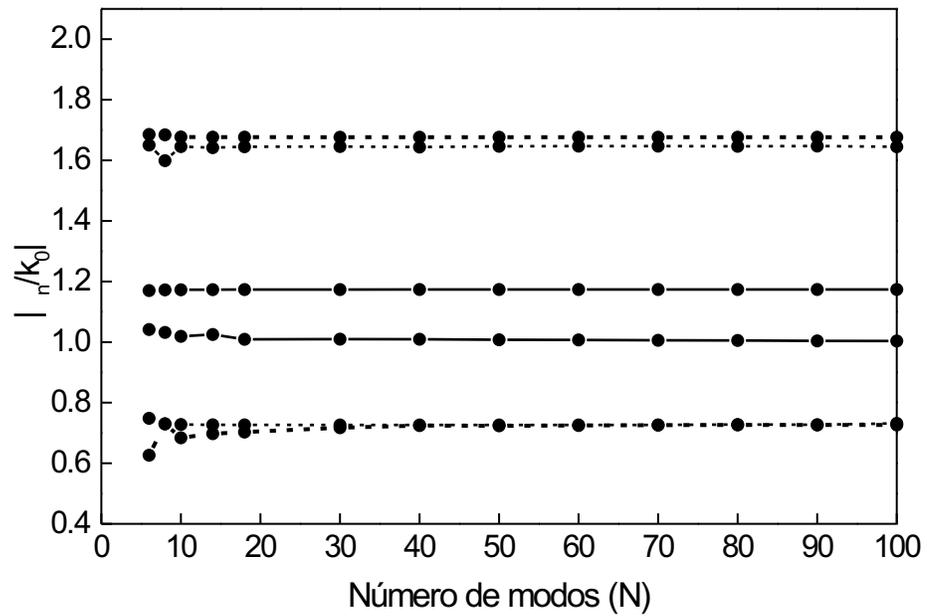
Estamos ya en condiciones de comparar la fiabilidad de nuestro algoritmo con los resultados encontrados en la bibliografía.

Con el fin de comparar nuestros resultados para las características de propagación de un medio dieléctrico periódico infinito con los obtenidos previamente por otros autores, en primer lugar se va a examinar una estructura periódica infinita con dos láminas dieléctricas dentro de la celda unidad de periodo  $D = 17,987$  mm, que ha sido previamente analizada por Lewis y Hessel [83] con la técnica de la resonancia transversal. Esta estructura, que ya se ha empleado en el análisis de la convergencia del apartado anterior, está caracterizada por los siguientes parámetros:  $\varepsilon_{r1} = 1,0$ ,  $\varepsilon_{r2} = 2,56$ ,  $\tilde{\varepsilon}_{rb} = 1,0$ ,  $l_1 = 10,209$  mm y  $l_2 = 7,778$  mm. En [83] se obtienen las características de propagación en dicho medio a una frecuencia de 10 GHz bajo incidencia 2D ( $\phi = 90^\circ$ ), para diferentes valores del ángulo de incidencia  $\theta$ .

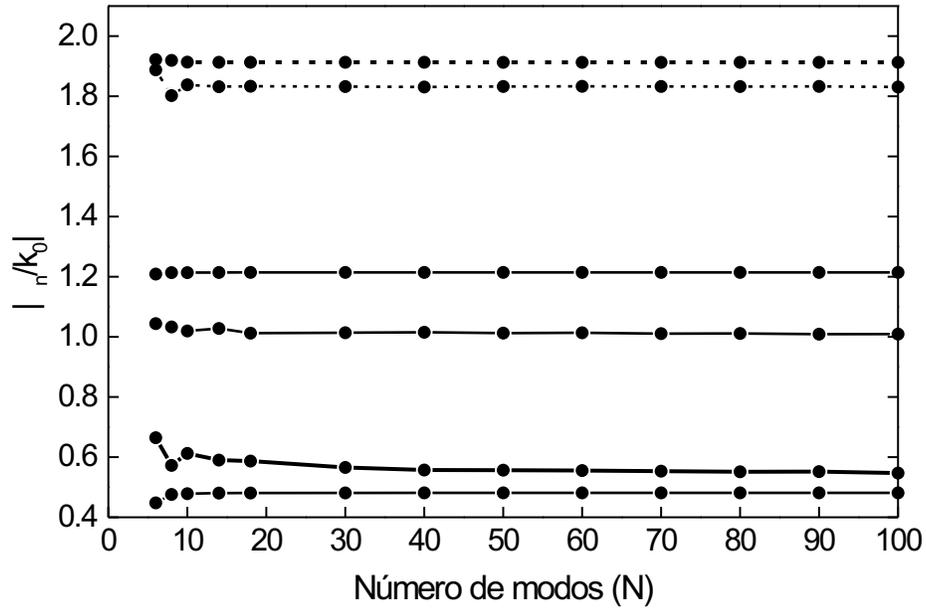
En la figura 4.10 aparece representado el módulo de la constante de propagación normalizada  $|\beta_n/k_0|$  del primer y segundo modo TE y TM de la estructura en función del vector



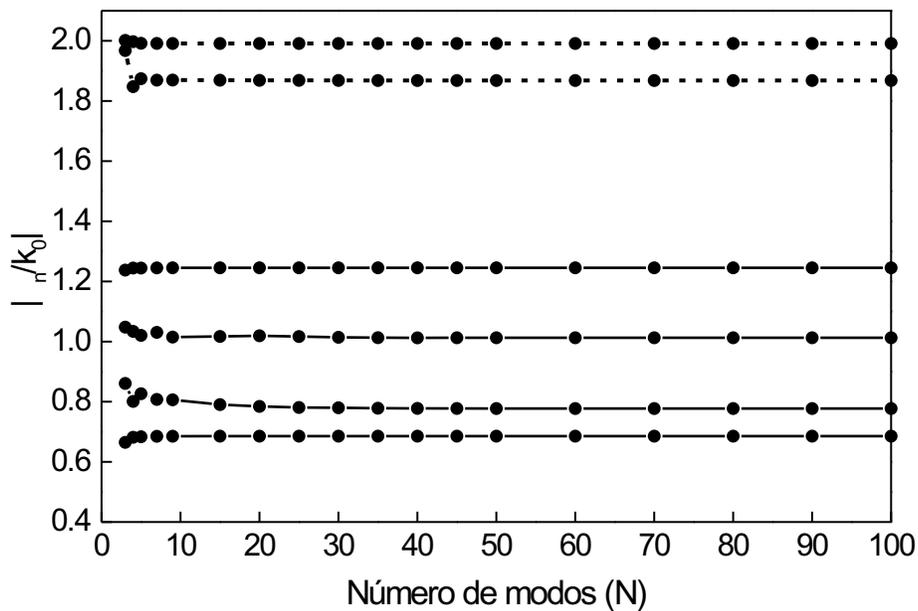
(a)  $= 0^\circ$



(b)  $= 30^\circ$



(c)  $\phi = 60^\circ$



(d)  $\phi = 90^\circ$

Figura 4.9: Convergencia en el caso 3D de la constante de propagación normalizada  $|\beta_n/k_0|$  de los seis primeros modos en el medio periódico bajo incidencia 3D cuyos parámetros se detallan al pie de la figura 4.3 en función del número de funciones base (N) empleadas en la expansión modal a una frecuencia de 10 GHz y un ángulo de incidencia  $\theta = 45^\circ$ . (a)  $\phi = 0^\circ$ . (b)  $\phi = 30^\circ$ . (c)  $\phi = 60^\circ$ . (d)  $\phi = 90^\circ$ .

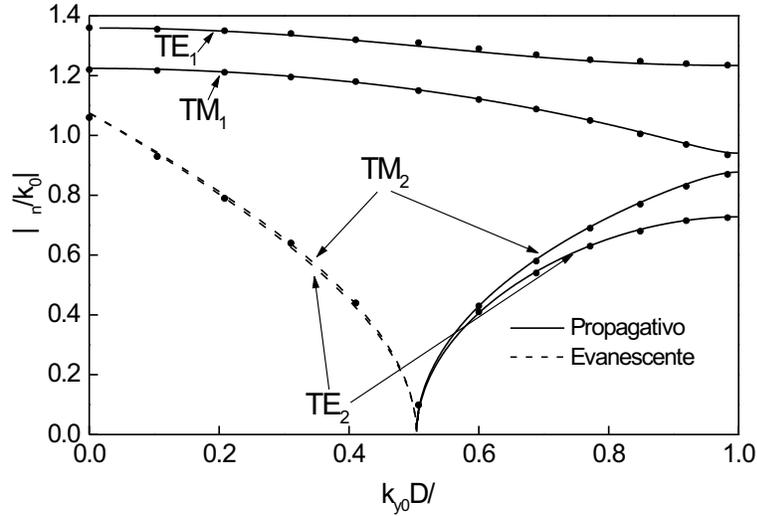


Figura 4.10: Constante de propagación normalizada  $|\beta_n/k_0|$  bajo incidencia 2D ( $\phi = 90^\circ$ ) para el primer y segundo modo TE y TM de una estructura periódica con dos capas dieléctricas por celda unidad con  $\varepsilon_{r1} = 1,0$ ,  $\varepsilon_{r2} = 2,56$ ,  $\tilde{\varepsilon}_{rb} = 1,0$  (parámetros correspondientes a la figura 4.3). Frecuencia=10 GHz. Los puntos corresponden a los resultados obtenidos en [83].

de ondas de Floquet normalizado de la onda incidente ( $k_{y0}D/\pi$ ), donde para este caso de incidencia 2D,  $k_{y0} = k_0 \sin\theta$ . Como los parámetros  $D$  y  $k_0$  han sido fijados, lo que se está haciendo realmente es un barrido en ángulo de incidencia  $\theta$ . El trazo continuo corresponde a modos en régimen propagativo, mientras que el trazo discontinuo corresponde a modos en régimen evanescente. Los puntos corresponden a los resultados obtenidos en [83], encontrándose una buena concordancia. En las simulaciones han sido suficientes 15 modos de la base auxiliar para calcular los modos TE, mientras que para los modos TM se han utilizado 20 modos de la base auxiliar, siendo en ambos casos el tiempo de computación inferior a una centésima de segundo por punto en ángulo de incidencia.

Nuestro método modal vectorial también proporciona información de la distribución de los campos transversales de los modos. Así, en la figura 4.11 se representa la distribución del módulo del campo magnético normalizado del primer modo con polarización TE a lo largo de la celda periódica para la geometría de la figura 4.10, para  $k_{y0}D = 0$  (línea continua) y  $k_{y0}D = \pi$  (línea discontinua). En esa figura aparecen también representados con puntos los valores calculados en [83], encontrándose también una buena concordancia.

A continuación se analizarán las características de propagación de un segundo medio dieléctrico periódico infinito que en este caso tiene cinco láminas dieléctricas dentro de la celda unidad, que ha sido estudiado por Costa y Giarola [88], también bajo excitación 2D. Los parámetros del medio periódico son los siguientes:  $D = 17,987$  mm,  $\varepsilon_{r1} = 1,0$ ,  $\varepsilon_{r2} = 1,28$ ,  $\varepsilon_{r3} = 2,56$ ,  $\varepsilon_{r4} = 1,28$ ,  $\varepsilon_{r5} = 1,0$ ,  $l_1 = 5,105$  mm,  $l_2 = 2,09$  mm,  $l_3 = 3,60$  mm,  $l_4 = 2,09$  mm y  $l_5 = 5,105$  mm. En los cálculos, el sistema auxiliar empleado es de nuevo un

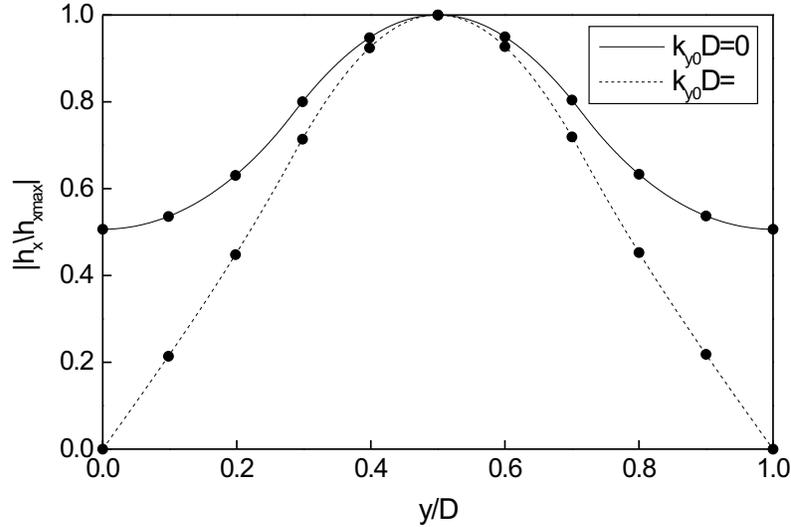


Figura 4.11: Distribución de campo magnético normalizado a lo largo de la celda unidad del primer modo TE para la geometría de la figura 4.10, para  $k_{y0}D = 0$  (línea continua) y  $k_{y0}D = \pi$  (línea discontinua). Los puntos corresponden a los resultados obtenidos en [83].

medio dieléctrico homogéneo infinito con  $\tilde{\epsilon}_{rb} = 1,0$  con el mismo periodo que el problema real. Según los resultados de un estudio de convergencia de las soluciones obtenidas para este problema, son necesarios 15 modos TE y 25 modos TM de la base auxiliar para cada polarización, respectivamente, con tiempos de computación inferiores a una centésima de segundo en ambos casos (por punto en frecuencia). En la figura 4.12 se muestran las curvas de la constante de propagación normalizada  $|\beta_n/k_0|$  para el primer y segundo modo para ambas polarizaciones TE y TM en función del vector de ondas de Floquet normalizado de la onda incidente ( $k_{y0}D/\pi$ ). En la misma figura se representan con puntos los resultados calculados en [88] empleando el método de la resonancia transversal, y se observa de nuevo una buena concordancia entre ambos métodos.

Para estos dos primeros modos también se ha representado la distribución de los campos transversales a lo largo de una celda periódica. En este caso de medio dieléctrico periódico sin pérdidas, el campo eléctrico transversal de los modos se ha obtenido de forma numérica a partir del campo magnético transversal haciendo uso de la relación de biortogonalidad satisfecha por los modos, a través de las ecuaciones (2.40), (2.41). En la figura 4.13(a) se representa la distribución de campo eléctrico normalizado del primer y segundo modo TE para valores de  $(k_{y0}D/\pi) = 0$  (línea continua) y 1 (línea discontinua). En esta figura también se representan los resultados calculados en [88] para el primer modo TE, mostrando un excelente acuerdo con nuestros resultados. La distribución de campo magnético normalizado del primer y segundo modo TM se muestra en la figura 4.13(b) para  $(k_{y0}D/\pi) = 0$  (línea continua) y 1 (línea discontinua), obteniendo de nuevo una buena concordancia entre ambos

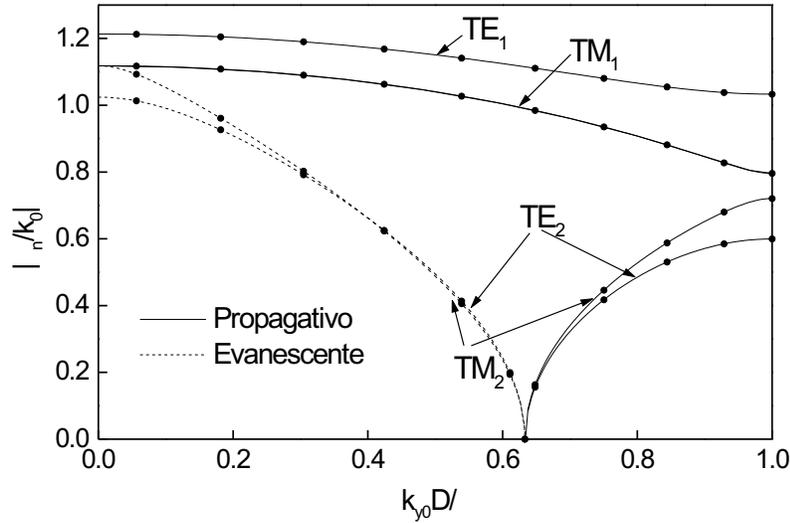


Figura 4.12: Constante de propagación normalizada  $|\beta_n/k_0|$  en función del vector de ondas de Floquet normalizado  $(k_{y0}D/\pi)$  del primer y segundo modo para ambas polarizaciones TE y TM de un medio dieléctrico periódico infinito con 5 dieléctricos dentro de la celda periódica con los siguientes parámetros:  $D = 17,987$  mm,  $\varepsilon_{r1} = 1,0$ ,  $\varepsilon_{r2} = 1,28$ ,  $\varepsilon_{r3} = 2,56$ ,  $\varepsilon_{r4} = 1,28$ ,  $\varepsilon_{r5} = 1,0$ ,  $\tilde{\varepsilon}_{rb} = 1,0$ ,  $l_1 = 5,105$  mm,  $l_2 = 2,09$  mm,  $l_3 = 3,60$  mm,  $l_4 = 2,09$  mm and  $l_5 = 5,105$  mm. Comparación entre nuestros resultados (líneas) y los resultados obtenidos en [88] (puntos).

métodos.

A continuación, en el siguiente caso analizado se va a estudiar el espectro modal bajo incidencia 3D de un medio dieléctrico periódico infinito con dos láminas dieléctricas dentro de la celda unidad con los siguientes parámetros:  $D = 11,28$  mm,  $\varepsilon_{r1} = 6,13$ ,  $\varepsilon_{r2} = 3,7$ ,  $l_1 = l_2 = D/2$ . Este medio se ha empleado para diseñar un filtro en reflexión [3] bajo excitación de una onda plana 2D con polarización TE e incidencia normal, el cual se detalla en el capítulo 6. Los resultados de este estudio también han sido empleados en el diseño de un filtro en reflexión bajo excitación de ondas planas con incidencia 3D y polarización Tipo-H [89] (ver también en el capítulo 6).

La figura 4.14 muestra las curvas de la constante de propagación normalizada  $\beta_n/k_0$  en función de la frecuencia del primer y segundo modo para un ángulo de incidencia de  $\theta = 45^\circ$ , para diferentes ángulos acimutales. Para la incidencia particular de  $\phi = 90^\circ$ , la curva de dispersión del primer modo corresponde al primer modo propagativo bajo excitación TE para incidencia 2D. De la misma forma, la constante de propagación normalizada del segundo modo de la figura 4.14 para el caso de  $\phi = 90^\circ$  corresponde al primer modo propagativo bajo excitación TM en el caso de incidencia 2D [3]. En la figura 4.14 se representan también con cruces los resultados obtenidos con el software desarrollado en [2],[3], [87] para el caso de incidencia 2D, observándose una coincidencia total entre ambos resultados. En los cálculos

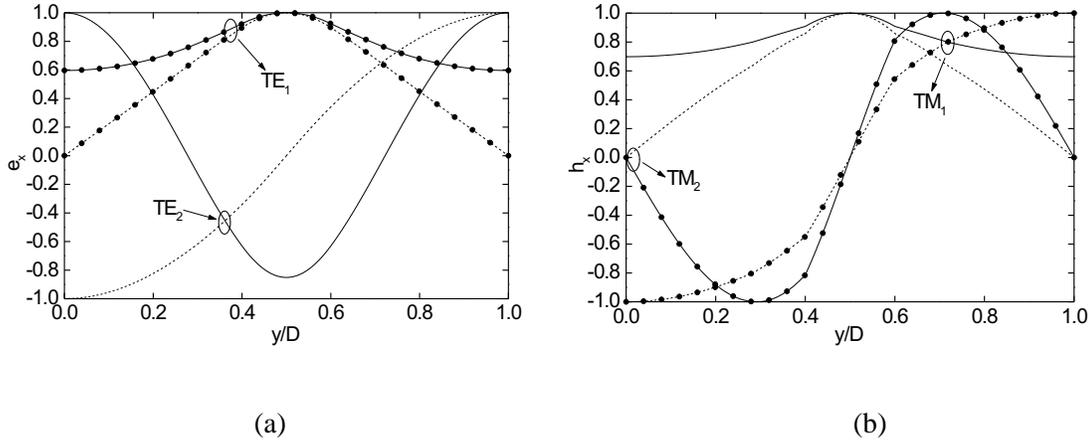


Figura 4.13: Distribuciones de campo a lo largo de la celda unidad del primer y segundo modo para el medio periódico de la figura 4.12 en el caso 2D. (a) Distribución del campo eléctrico normalizado para el primer y segundo modo TE para valores de  $(k_{y0}D/\pi) = 0$  (línea continua) y 1 (línea discontinua). Los resultados calculados en [88] se representan también con puntos. (b) Distribución del campo magnético normalizado del primer y segundo modo TM para  $(k_{y0}D/\pi) = 0$  (línea continua) y 1 (línea discontinua). Los resultados calculados en [88] aparecen también representados con puntos.

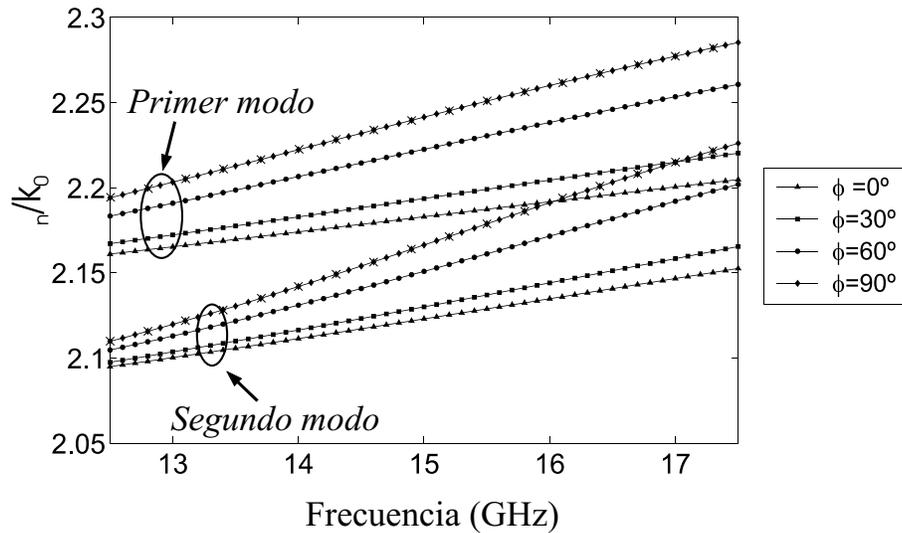


Figura 4.14: Curvas de dispersión en el caso de incidencia oblicua 3D del primer y segundo modo en un medio dieléctrico periódico con los siguientes parámetros:  $D=11,28$  mm,  $\epsilon_{r1}=6,13$ ,  $\epsilon_{r2}=3,7$ ,  $l_1=l_2=D/2$ ,  $\theta = 45^\circ$ . Los resultados obtenidos con el software desarrollado en [2],[3] para incidencia 2D ( $\phi = 90^\circ$ ) se han representado también en la misma gráfica (con cruces).

ha sido necesario emplear un mayor número de modos de la base auxiliar, de las dos familias de modos Tipo-E y Tipo-H, que en este caso ha sido de 50 modos, con un tiempo de compu-

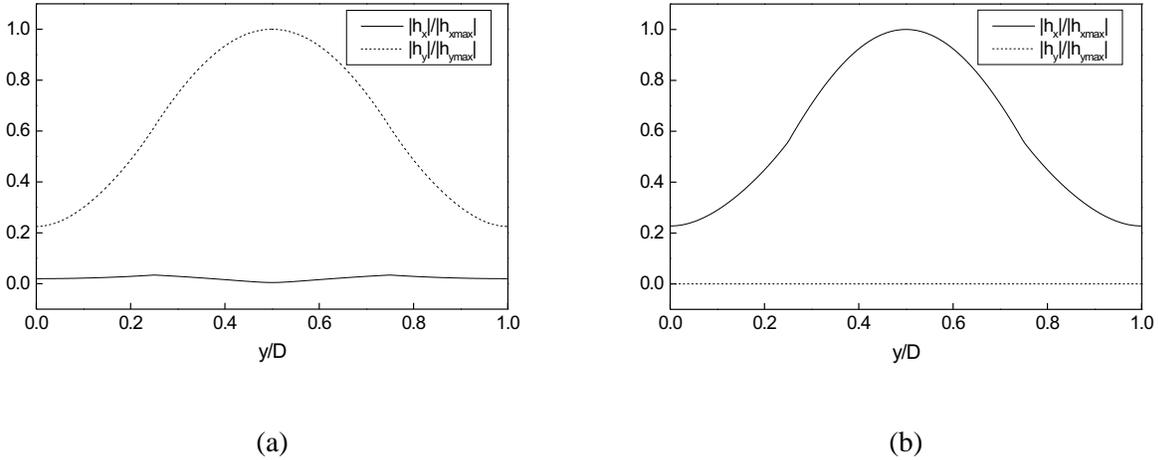


Figura 4.15: Distribución de las componentes transversales de campo magnético normalizado (módulo) del primer modo (a) y del segundo modo (b) en el medio periódico de la figura 4.14 bajo incidencia 3D con  $\theta = 45^\circ$  y  $\phi = 60^\circ$ , a la frecuencia de 15 GHz.

tación por punto en frecuencia de 0.04 s. En esta figura se puede observar un incremento de la constante de propagación con el ángulo  $\phi$ .

El método modal vectorial también permite obtener la distribución de los campos transversales eléctrico y magnético en el medio periódico bajo incidencia 3D. En este caso de medio periódico sin pérdidas bajo incidencia 3D (al igual que en el ejemplo anterior para incidencia 2D) también se puede obtener el campo eléctrico transversal de los modos de forma numérica haciendo uso de la relación de biortogonalidad satisfecha por los modos, a través de las ecuaciones (2.40), (2.41). En la figura 4.15 se ha representado la distribución de las componentes transversales de campo magnético del primer y segundo modo respectivamente en el medio periódico, (cuyos parámetros se detallan al pie de la figura 4.14) a una frecuencia de 15 GHz, para incidencia con  $\theta = 45^\circ$  y  $\phi = 60^\circ$ . Como se puede observar, el segundo modo tiene componente  $|h_y|$  prácticamente nula ( $|h_y|/|h_x| < 10^{-3}$ ), por lo que podemos decir que ese modo en particular tiene estructura de modo Tipo-E.

Por otro lado, en la figura 4.16 se representa la distribución de las componentes transversales de campo eléctrico de dichos modos. En ella se aprecia que el primer modo tiene estructura de modo Tipo-H, puesto que en este caso la componente  $|e_y|$  es prácticamente nula para ese modo. Además, se puede comprobar que las componentes tangenciales a la discontinuidad dieléctrica del medio son continuas en el plano de la discontinuidad (componente  $|e_x|$ ), mientras que la componente normal a la discontinuidad dieléctrica, que corresponde a  $|e_y|$ , es discontinua en el plano de la discontinuidad.

Para estos mismos modos, también se ha representado la distribución del vector desplazamiento a lo largo de la celda unidad en la figura 4.17, de forma que en ella se puede observar que en este caso las componentes tangentes a la discontinuidad dieléctrica son discontinuas en el plano de la discontinuidad, mientras que las componentes normales a la discontinuidad son funciones continuas.

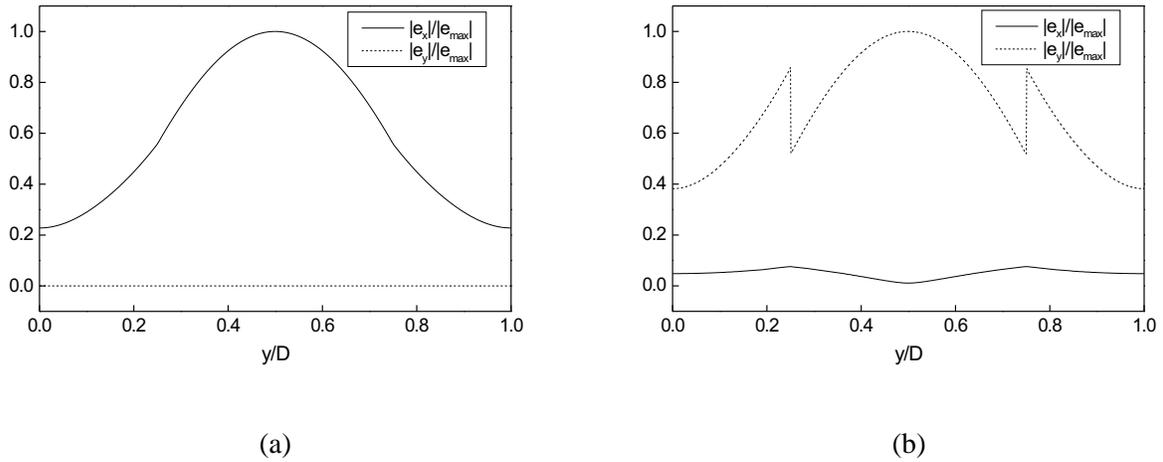


Figura 4.16: Distribución de las componentes transversales de campo eléctrico normalizado (módulo) del primer modo (a) y del segundo modo (b) en el medio periódico de la figura 4.14 bajo incidencia 3D con  $\theta = 45^\circ$  y  $\phi = 60^\circ$ , a la frecuencia de 15 GHz.

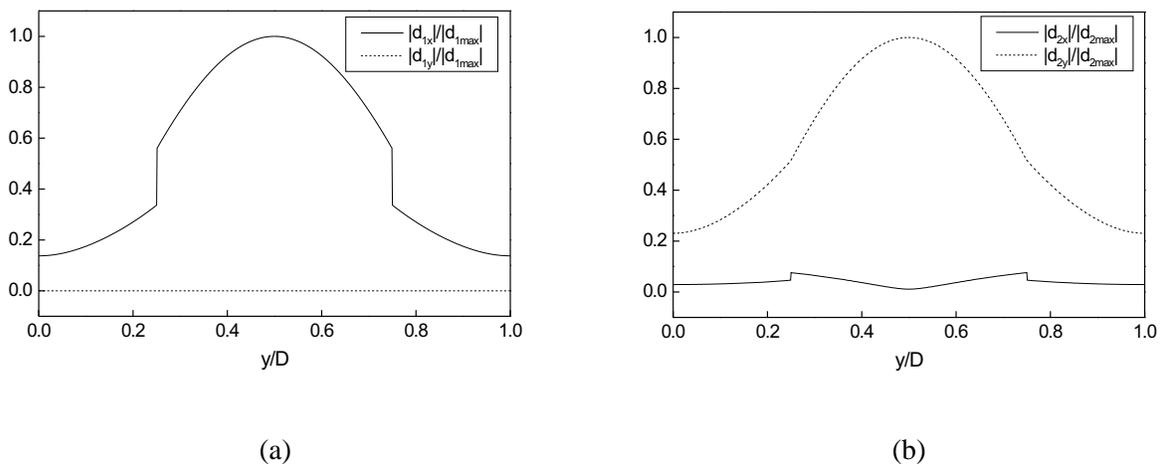


Figura 4.17: Distribución de las componentes transversales del vector desplazamiento normalizado (módulo) del primer modo (a) y del segundo modo (b) en el medio periódico de la figura 4.14 bajo incidencia 3D con  $\theta = 45^\circ$  y  $\phi = 60^\circ$ , a la frecuencia de 15 GHz.

A la vista de los diferentes problemas estudiados y de los resultados obtenidos, podemos concluir que hemos desarrollado un método muy eficiente y versátil para la caracterización modal de medios periódicos en una dimensión bajo incidencia general oblicua o 3D. Este método permite analizar medios periódicos con un número arbitrario de láminas dieléctricas dentro de la celda unidad, en las cuales es posible incluir las pérdidas de los materiales. Hemos comprobado que las soluciones obtenidas con este método están en excelente acuerdo con las proporcionadas por otros métodos. Además, hay que destacar que el tiempo empleado en el cálculo de las constantes de propagación y de los campos de cada estructura es muy reducido.

# Capítulo 5

## Estudio de la dispersión de ondas planas en SSFD bajo incidencia 3D

### 5.1. Introducción

En este capítulo se llevará a cabo el análisis de la dispersión de ondas planas en SSFD, que son estructuras planares dieléctricas multicapa compuestas por un número arbitrario de capas dieléctricas homogéneas o periódicas en una dirección, pudiendo tener las capas periódicas un número también arbitrario de capas dieléctricas dentro del periodo de repetición. En gran parte de los estudios previos realizados sobre la dispersión de ondas planas en SSFD se han analizado estructuras con ciertas limitaciones, tanto en la geometría de las mismas (en el número o las características de los materiales dieléctricos que hay dentro del periodo de la red dieléctrica, o en el número de capas de la SSFD) como en la dirección de incidencia (hay muchos resultados en la literatura técnica sobre la dispersión de ondas planas en SSFD bajo excitación bidimensional, pero la excitación tridimensional se ha tratado en menos trabajos). En el capítulo 2 se ha descrito el método modal vectorial que nos permite obtener las constantes de propagación y los campos en un medio guizador con simetría traslacional, mientras que en el capítulo 4 se emplea dicho método para la obtención de los modos de un medio dieléctrico infinito periódico en una dirección, con o sin pérdidas, con un número arbitrario de láminas dieléctricas dentro del periodo de repetición, el cual es excitado por una onda plana linealmente polarizada con una dirección de incidencia también arbitraria. Los modos de este medio serán empleados para caracterizar las SSFD, que no son más que estructuras en cascada de etapas elementales formadas por medios dieléctricos homogéneos o periódicos en una dimensión. En este capítulo se va a estudiar la manera de conectar unos medios con otros, empleando para tal fin el Método de Adaptación Modal que se describe en el capítulo 2, en combinación con la técnica de las matrices de dispersión generalizadas (MDG).

Los medios bajo estudio se caracterizan por ser periódicos en una dirección, que hemos elegido como la del eje  $Y$ , y uniformes en la dirección  $X$ , sobre los que haremos incidir una onda plana linealmente polarizada cuyo vector de ondas  $\mathbf{k}$  lleva la dirección de propagación tridimensional dada por los ángulos habituales de coordenadas esféricas,  $\theta$  y  $\phi$  (ver la figura

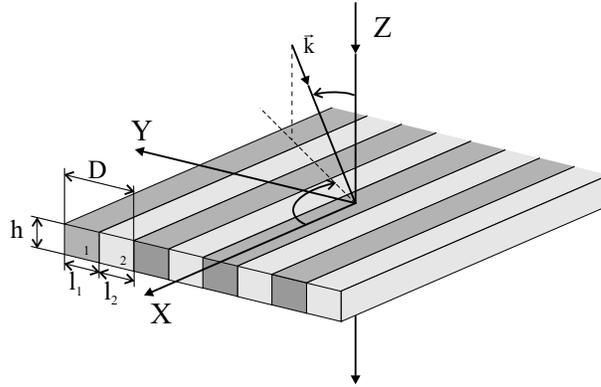


Figura 5.1: Lámina dieléctrica periódica con dos dieléctricos distintos dentro de la celda unidad rodeada por un medio homogéneo. La lámina está iluminada desde  $z < 0$  por una onda plana linealmente polarizada con direcciones  $\theta$  y  $\phi$ .

5.1 correspondiente a una SSFD constituida por una única lámina dieléctrica periódica rodeada de un medio homogéneo). En el capítulo anterior se ha visto que en el caso general de incidencia 3D ( $\phi \neq 90^\circ$ ) no existe una polarización definida en el espectro modal en un medio periódico, a diferencia de lo que sucede en un medio dieléctrico con condiciones periódicas relleno de un dieléctrico homogéneo, en el que aparecen dos polarizaciones desacopladas a las que hemos llamado Tipo-E y Tipo-H. No obstante, cuando el medio deja de ser homogéneo, ambas polarizaciones quedan acopladas, obteniéndose como soluciones modos híbridos. Sin embargo, hay un caso particular de incidencia para el cual los modos del medio periódico se desacoplan, que corresponde a incidencia 2D ( $\phi = 90^\circ$ ), de forma que cuando sobre este medio incide una onda con una cierta polarización definida (TE o TM) formando un ángulo  $\phi = 90^\circ$ , los modos en ese medio van a mantener la misma polarización, es decir, van a tener una polarización definida TE o TM. Esta diferencia entre incidencia 2D e incidencia 3D va a ser fundamental a la hora de obtener las matrices de dispersión que caracterizarán una discontinuidad entre un medio homogéneo, como puede ser el aire, y un medio periódico como los estudiados en el capítulo anterior.

En este capítulo se aplicará el Método de Adaptación Modal descrito en el capítulo 2 para analizar discontinuidades en SSFD, de forma que se describirá cómo obtener la matriz de dispersión generalizada que caracteriza uniones entre dos medios homogéneos de diferente permitividad dieléctrica, así como entre un medio dieléctrico homogéneo y un medio dieléctrico periódico en una dimensión, de forma que en ambas regiones de la unión exista un conjunto de modos bien definido. Así mismo, se describirá cómo realizar la conexión entre dos uniones entre las cuales se produce la propagación en un cierto tramo de un medio. Este proceso se generalizará para un número arbitrario de uniones entre diferentes medios homogéneos y periódicos. A continuación se describirá cómo obtener los coeficientes de reflexión y transmisión en potencia de una estructura a partir de los parámetros de dispersión de las mismas. Después se llevará a cabo un análisis de la convergencia de las soluciones obtenidas empleando dicha técnica para la obtención de los parámetros de dispersión de los diferentes tipos de uniones estudiados. Finalmente, el método desarrollado se comparará con

resultados encontrados en la literatura técnica.

## 5.2. Matriz de dispersión generalizada de una discontinuidad entre dos medios

En el capítulo 2 se obtuvo la expresión general de los parámetros de dispersión o parámetros  $S$  que caracteriza la unión entre dos regiones guidoras (a y b) cuyos modos son conocidos (ver la figura 5.2), los cuales venían definidos por las siguientes expresiones:

$\mathbf{e}^a, \mathbf{h}^a$ : Modos en la región a  $\mathbf{e}^b, \mathbf{h}^b$ : Modos en la región b

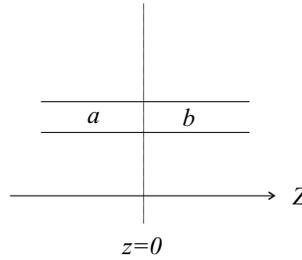


Figura 5.2: Unión de dos regiones guidoras a y b.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{S}}_{21} &= 2(\underline{\underline{T}})^{-1} \underline{\underline{P}}^{a\#} & \underline{\underline{S}}_{22} &= (\underline{\underline{T}})^{-1} (\underline{\underline{B}}^{\#} - \underline{\underline{P}}^{a\#} (\underline{\underline{P}}^a)^{-1} \underline{\underline{A}}) \\ \underline{\underline{S}}_{11} &= (\underline{\underline{P}}^a)^{-1} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{S}}_{21} - \underline{\underline{I}} & \underline{\underline{S}}_{12} &= (\underline{\underline{P}}^a)^{-1} \underline{\underline{A}} (\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{S}}_{22}) \end{aligned} \quad (5.1)$$

donde la matriz  $\underline{\underline{T}}$  se definía del siguiente modo:

$$\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{B}}^{\#} + \underline{\underline{P}}^{a\#} (\underline{\underline{P}}^a)^{-1} \underline{\underline{A}} \quad (5.2)$$

y  $\underline{\underline{I}}$ ,  $\underline{\underline{P}}^a$ ,  $\underline{\underline{A}}$  y  $\underline{\underline{B}}$  son matrices de dimensiones  $NMR \times NMR$  (donde  $NMR$  será el número de modos considerado en cada uno de los dos medios de la discontinuidad) con elementos  $I_{mn}$ ,  $P_{mn}^a$ ,  $A_{mn}$  y  $B_{mn}$  definidos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} I_{mn} &= \delta_{nm} \\ P_{mn}^a &= \int_{S_a} (\mathbf{e}_n^a \times \mathbf{h}_m^{a*}) \cdot \hat{\mathbf{z}} dS \\ A_{mn} &= \int_{S_a} (\mathbf{e}_n^b \times \mathbf{h}_m^{a*}) \cdot \hat{\mathbf{z}} dS \\ B_{mn} &= \int_{S_b} (\mathbf{e}_n^a \times \mathbf{h}_m^{b*}) \cdot \hat{\mathbf{z}} dS. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Como se ha comentado en la introducción, en este capítulo se analizan uniones entre dos medios homogéneos de diferente permitividad dieléctrica, así como entre un medio dieléctrico homogéneo y un medio dieléctrico periódico en una dimensión. A la hora de analizar la

unión entre dos medios homogéneos, los modos que se emplearán en cada medio serán precisamente los modos de Floquet Tipo-E y Tipo-H de un medio dieléctrico homogéneo con permitividad relativa  $\varepsilon_{rh}$ , similares a los se han definido en el apéndice E, pero adecuadamente normalizados. Dichos modos se expresan de la siguiente forma:

$$\mathbf{e}'_p{}^h = \frac{1}{\sqrt{D}\beta_{hp}\omega\varepsilon_h} e^{-j(k_x x + k_y y)} \left[ -k_x k_{yp} \mathbf{u}_x + (k_h^2 - k_{yp}^2) \mathbf{u}_y \right] \quad (5.4)$$

$$\tilde{\mathbf{h}}'_p{}^h = \frac{-1}{\sqrt{D}} e^{-j(k_x x + k_y y)} \mathbf{u}_x \quad (5.5)$$

$$\tilde{\mathbf{e}}''_p{}^h = \frac{\omega\mu\beta_{hp}}{\sqrt{D}(k_h^2 - k_{yp}^2)} e^{-j(k_x x + k_y y)} \mathbf{u}_x \quad (5.6)$$

$$\tilde{\mathbf{h}}''_p{}^h = \frac{1}{\sqrt{D}} e^{-j(k_x x + k_y y)} \left[ \frac{-k_x k_{yp}}{(k_h^2 - k_{yp}^2)} \mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y \right] \quad (5.7)$$

donde en este caso  $\varepsilon_h = \varepsilon_{rh}\varepsilon_0$ ,  $k_h = k_0\sqrt{\varepsilon_{rh}}$ , y  $\beta_{hp} = \sqrt{k_h^2 - k_x^2 - k_{yp}^2}$ .

Para estudiar una discontinuidad entre un medio dieléctrico homogéneo y un medio periódico en una dimensión, los modos en el medio homogéneo volverán a ser los modos de Floquet Tipo-E y Tipo-H descritos en las ecuaciones (5.4)-(5.7), mientras que para el medio periódico se emplearán los modos obtenidos en dicho medio empleando el método modal vectorial descrito en el capítulo 2, como suma de modos de Floquet con unos ciertos coeficientes de expansión, como se explica en el capítulo 4. En este último caso, el campo magnético transversal se obtendrá directamente, mientras que el campo eléctrico transversal de cada modo se obtendrá a partir del campo magnético empleando las ecuaciones de Maxwell.

### 5.3. Estudio de una discontinuidad entre dos medios homogéneos

Vamos a obtener los coeficientes de reflexión y transmisión generalizados de los modos de Floquet para una discontinuidad entre dos medios homogéneos a y b que tienen asociada la misma periodicidad  $D$ . Estas expresiones, para el modo de Floquet de orden cero, coinciden con las ecuaciones de Fresnel [90].

La parte transversal de los campos eléctrico y magnético del medio homogéneo i se van a descomponer de una forma completamente general como suma de modos de Floquet que se propagan en el sentido  $+\hat{z}$  y en el sentido  $-\hat{z}$  de la forma:

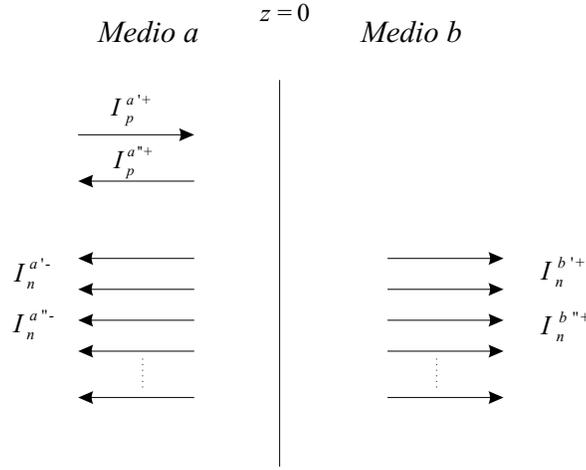


Figura 5.3: Unión entre dos medios a y b. Incidimos con el p-ésimo modo de Floquet Tipo-E y Tipo-H desde el medio a, que excita  $NMR$  modos de Floquet Tipo-E y Tipo-H en el medio b (modos transmitidos) y  $NMR$  modos de Floquet Tipo-E y Tipo-H en el medio a (modos reflejados).

$$\mathbf{E}_t^i = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( I_n^{i'+} \mathbf{e}_n^{i'} e^{-j\beta_n z} + I_n^{i''+} \mathbf{e}_n^{i''} e^{-j\beta_n z} + I_n^{i'-} \mathbf{e}_n^{i'} e^{+j\beta_n z} + I_n^{i''-} \mathbf{e}_n^{i''} e^{+j\beta_n z} \right) \quad (5.8)$$

$$\mathbf{H}_t^i = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( I_n^{i'+} \mathbf{h}_n^{i'} e^{-j\beta_n z} + I_n^{i''+} \mathbf{h}_n^{i''} e^{-j\beta_n z} - I_n^{i'-} \mathbf{h}_n^{i'} e^{+j\beta_n z} - I_n^{i''-} \mathbf{h}_n^{i''} e^{+j\beta_n z} \right) \quad (5.9)$$

donde  $I_n^{i\alpha\pm}$  son las amplitudes de los modos del medio  $i$ . En principio esa suma se extiende a un número infinito de modos. No obstante, como ya se mencionó en el capítulo 2, en la práctica dicha suma debe truncarse a un número finito de modos  $NMR$ , que serán suficientes para una adecuada convergencia de los resultados, y que tomaremos igual para los dos medios. Para obtener las matrices  $\underline{S}_{11}$  y  $\underline{S}_{21}$  consideraremos que incidimos desde el medio a con los armónicos de Floquet de orden  $p$  Tipo-E y Tipo-H de amplitudes conocidas, y se obtendrán las amplitudes de los modos de Floquet que serán excitados en el medio a (reflejados) y en el medio b (transmitidos) para ambas polarizaciones. Por otro lado, para obtener las matrices  $\underline{S}_{22}$  y  $\underline{S}_{12}$  se estudiará el caso de la incidencia desde el medio b.

Vamos a suponer que la discontinuidad está en el plano  $z = 0$  (ver la figura 5.3). Para analizar la discontinuidad entre los dos medios homogéneos, supondremos que incide desde el primer medio homogéneo una onda correspondiente al p-ésimo modo de Floquet con las dos polarizaciones Tipo-E y Tipo-H (caso más general), la cual excitará  $NMR$  modos de Floquet Tipo-E y Tipo-H en el medio b (modos transmitidos) y  $NMR$  modos de Floquet Tipo-E y Tipo-H en el medio a (modos reflejados). Escribiremos los campos en cada medio,

e impondremos la condición de continuidad de las componentes tangenciales de los campos eléctrico y magnético en la discontinuidad entre los dos medios a y b ( $z = 0$ ), que se traduce en las siguientes ecuaciones:

$$(I_p^{a'} \mathbf{e}_p^{a'} + I_p^{a''} \mathbf{e}_p^{a''}) + \sum_{n=1}^{NMR} (I_n^{a'} \mathbf{e}_n^{a'} + I_n^{a''} \mathbf{e}_n^{a''}) = \sum_{n=1}^{NMR} (I_n^{b'} \mathbf{e}_n^{b'} + I_n^{b''} \mathbf{e}_n^{b''}) \quad (5.10)$$

$$(I_p^{a'} \mathbf{h}_p^{a'} + I_p^{a''} \mathbf{h}_p^{a''}) - \sum_{n=1}^{NMR} (I_n^{a'} \mathbf{h}_n^{a'} + I_n^{a''} \mathbf{h}_n^{a''}) = \sum_{n=1}^{NMR} (I_n^{b'} \mathbf{h}_n^{b'} + I_n^{b''} \mathbf{h}_n^{b''}) \quad (5.11)$$

donde  $\mathbf{e}_n^{i\alpha}$ ,  $\mathbf{h}_n^{i\alpha}$  son los modos de Floquet de un medio homogéneo de permitividad relativa  $\varepsilon_{ri}$  con condiciones periódicas, cuyas expresiones aparecen en las ecuaciones (5.4)-(5.7), y  $\alpha$  indica el estado de polarización, Tipo-E o Tipo-H. Estas ecuaciones dependen del tiempo (ya que los campos tienen una dependencia temporal armónica de la forma  $e^{j\omega t}$ ), y de las coordenadas transversales  $x$  y  $y$  (con una dependencia de la forma  $e^{-j(k_x x + k_y y)}$ ). Al imponer la continuidad de las componentes transversales del campo electromagnético en el tiempo, se llega a la conclusión de que la frecuencia angular de las ondas reflejadas y transmitidas debe ser igual a la de la onda incidente [90]. Por otro lado, al exigir la continuidad en el espacio, las fases a ambos lados de la unión también deben ser iguales, con lo que se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} k_{xa}^+ = k_{xa}^- = k_{xb}^+ &\equiv k_a \sin \theta_a^+ \cos \phi_a^+ = k_a \sin \theta_a^- \cos \phi_a^- = k_b \sin \theta_b^+ \cos \phi_b^+ \\ k_{ya_p}^+ = k_{ya_n}^- = k_{yb_n}^+ &\equiv k_a \sin \theta_a^+ \sin \phi_a^+ + \frac{2\pi}{D} p = k_a \sin \theta_a^- \sin \phi_a^- + \frac{2\pi}{D} n = \\ &= k_b \sin \theta_b^+ \sin \phi_b^+ + \frac{2\pi}{D} n. \end{aligned}$$

De estas ecuaciones se extraen varias condiciones. La primera de ellas es que  $\phi_a^+ = \phi_a^- = \phi_b^+$ , es decir, el ángulo  $\phi$  de las ondas reflejadas y transmitidas es igual al ángulo  $\phi$  de la onda incidente. Además, también se debe cumplir que  $n = p$ , es decir, sólo se excitarán en los medios a y b modos reflejados y transmitidos del mismo orden de Floquet del modo incidente. Y por último, también se cumple que:

$$\begin{aligned} k_a \sin \theta_a^+ &= k_a \sin \theta_a^- \equiv \theta_a^+ = \theta_a^- \\ k_a \sin \theta_a^+ &= k_b \sin \theta_b^+ \equiv \sqrt{\varepsilon_{ra}} \sin \theta_a^+ = \sqrt{\varepsilon_{rb}} \sin \theta_b^+ \end{aligned}$$

siendo la primera de dichas condiciones la conocida *Ley de la reflexión*, mientras que la segunda de ellas es la conocida *Ley de Snell* [90].

Por último, nos falta igualar las amplitudes de las componentes tangenciales de los campos eléctrico y magnético a ambos lados de la discontinuidad. Al hacer esto último, se obtendrán los elementos  $S_{ij}$  de la MDG de la unión de los dos medios, que no son más que las relaciones entre las amplitudes de las ondas transmitidas y reflejadas respecto a la amplitud de la señal incidente.

Para obtener dichos elementos de la MDG de la unión entre dos medios dieléctricos homogéneos, partiremos de las ecuaciones de continuidad para las componentes tangenciales del campo eléctrico y magnético (ecuaciones (5.10) y 5.11)), que tras aplicar las condiciones anteriores, quedan de la siguiente forma:

$$I_p^{a'+} \mathbf{e}_p^{a'} + I_p^{a''+} \mathbf{e}_p^{a''} + I_p^{a'-} \mathbf{e}_p^{a'} + I_p^{a''-} \mathbf{e}_p^{a''} = I_p^{b'+} \mathbf{e}_p^{b'} + I_p^{b''+} \mathbf{e}_p^{b''} \quad (5.12)$$

$$I_p^{a'+} \mathbf{h}_p^{a'} + I_p^{a''+} \mathbf{h}_p^{a''} - I_p^{a'-} \mathbf{h}_p^{a'} - I_p^{a''-} \mathbf{h}_p^{a''} = I_p^{b'+} \mathbf{h}_p^{b'} + I_p^{b''+} \mathbf{h}_p^{b''} . \quad (5.13)$$

Si sustituimos los campos  $\mathbf{e}_p^{i\alpha}$ ,  $\mathbf{h}_p^{i\alpha}$  por sus expresiones (ecuaciones (5.4)-(5.7)), e igualamos las componentes  $x$  e  $y$  en ambas ecuaciones, se obtienen cuatro ecuaciones con seis incógnitas, que son las diferentes amplitudes de los campos  $I_p^{a'+}$ ,  $I_p^{a''+}$ ,  $I_p^{a'-}$ ,  $I_p^{a''-}$ ,  $I_p^{b'+}$ ,  $I_p^{b''+}$ . Tras realizar diversas operaciones, es posible obtener las deseadas relaciones entre las amplitudes de las ondas reflejadas en el medio a ( $I_p^{a'-}$ ,  $I_p^{a''-}$ ) y transmitidas al medio b ( $I_p^{b'+}$ ,  $I_p^{b''+}$ ), respecto a las amplitudes de las ondas incidentes en el medio a ( $I_p^{a'+}$ ,  $I_p^{a''+}$ ), que serán los elementos de dispersión  $S_{11}$  y  $S_{21}$ . Dichos elementos serán nulos salvo en los casos en los que los órdenes de los modos de Floquet sean iguales, como ya se ha explicado anteriormente. Los parámetros de dispersión no nulos para la discontinuidad entre dos medios homogéneos a y b se pueden extraer a partir de los siguientes resultados:

$$I_p^{a'-} = \xi I_p^{a'+} + \tau I_p^{a''+} \quad (5.14)$$

$$I_p^{a''-} = \gamma(1 + \xi) I_p^{a'+} + (\alpha + \gamma\tau) I_p^{a''+} \quad (5.15)$$

$$I_p^{b'+} = \left[ \frac{\varepsilon_b \beta_{bp} (k_a^2 - k_{yp}^2)}{\varepsilon_a \beta_{ap} (k_b^2 - k_{yp}^2)} (1 + \xi) \right] I_p^{a'+} + \left[ \frac{\varepsilon_b \beta_{bp} (k_a^2 - k_{yp}^2)}{\varepsilon_a \beta_{ap} (k_b^2 - k_{yp}^2)} \tau \right] I_p^{a''+} \quad (5.16)$$

$$I_p^{b''+} = -\gamma(1 + \xi) I_p^{a'+} + (1 - \alpha - \gamma\tau) I_p^{a''+} \quad (5.17)$$

donde las constantes  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $\xi$ ,  $\tau$  se definen como:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\beta_{bp} (k_a^2 - k_{yp}^2) - \beta_{ap} (k_b^2 - k_{yp}^2)}{\beta_{bp} (k_a^2 - k_{yp}^2) + \beta_{ap} (k_b^2 - k_{yp}^2)} \\ \gamma &= \frac{k_x k_{yp} (\varepsilon_{rb} - \varepsilon_{ra}) (k_a^2 - k_{yp}^2)}{\varepsilon_{ra} \beta_{ap} \left( \beta_{bp} (k_a^2 - k_{yp}^2) + \beta_{ap} (k_b^2 - k_{yp}^2) \right)} \\ \xi &= \frac{1 - \frac{\varepsilon_b \beta_{bp} (k_a^2 - k_{yp}^2)}{\varepsilon_a \beta_{ap} (k_b^2 - k_{yp}^2)} - \gamma \left( \frac{k_x k_{yp}}{k_a^2 - k_{yp}^2} - \frac{k_x k_{yp}}{k_b^2 - k_{yp}^2} \right)}{1 + \frac{\varepsilon_b \beta_{bp} (k_a^2 - k_{yp}^2)}{\varepsilon_a \beta_{ap} (k_b^2 - k_{yp}^2)} + \gamma \left( \frac{k_x k_{yp}}{k_a^2 - k_{yp}^2} - \frac{k_x k_{yp}}{k_b^2 - k_{yp}^2} \right)} \\ \tau &= \frac{\left( \frac{k_x k_{yp}}{k_a^2 - k_{yp}^2} - \frac{k_x k_{yp}}{k_b^2 - k_{yp}^2} \right) (1 - \alpha)}{1 + \frac{\varepsilon_b \beta_{bp} (k_a^2 - k_{yp}^2)}{\varepsilon_a \beta_{ap} (k_b^2 - k_{yp}^2)} + \gamma \left( \frac{k_x k_{yp}}{k_a^2 - k_{yp}^2} - \frac{k_x k_{yp}}{k_b^2 - k_{yp}^2} \right)} . \end{aligned}$$

De nuevo, si particularizamos las ecuaciones (5.14)-(5.17) al caso de incidencia 2D ( $k_x = 0$ ), se comprueba que al incidir desde el medio a con un modo de Floquet de orden

$p$  con una polarización dada, sólo se excitará en los medios a y b el modo reflejado y transmitido del mismo orden que el modo incidente, y con igual polarización (en la discontinuidad entre dos medios homogéneos bajo incidencia 2D sí se preserva la polarización). Para ese caso particular, los parámetros de dispersión son directamente los coeficientes de reflexión y transmisión en amplitud para cada modo de Floquet en la separación entre dos medios homogéneos bajo excitación 2D:

$$S'_{11} = \frac{I_p^{a'-}}{I_p^{a'+}} = \rho'_p = \xi = \frac{\frac{\beta_{bp}}{\varepsilon_b} - \frac{\beta_{ap}}{\varepsilon_a}}{\frac{\beta_{bp}}{\varepsilon_b} + \frac{\beta_{ap}}{\varepsilon_a}} \quad (5.18)$$

$$S'_{21} = \frac{I_p^{b'+}}{I_p^{a'+}} = \tau'_p = \frac{\varepsilon_b \beta_{bp} (k_a^2 - k_{yp}^2)}{\varepsilon_a \beta_{ap} (k_b^2 - k_{yp}^2)} (1 + \xi) = \frac{2 \frac{\beta_{ap}}{\varepsilon_a}}{\frac{\beta_{bp}}{\varepsilon_b} + \frac{\beta_{ap}}{\varepsilon_a}} \quad (5.19)$$

$$S''_{11} = \frac{I_p^{a''-}}{I_p^{a''+}} = \rho''_p = \alpha = \frac{\beta_{ap} - \beta_{bp}}{\beta_{ap} + \beta_{bp}} \quad (5.20)$$

$$S''_{21} = \frac{I_p^{b''+}}{I_p^{a''+}} = \tau''_p = 1 - \alpha = \frac{2\beta_{bp}}{\beta_{ap} + \beta_{bp}}, \quad (5.21)$$

donde la polarización ' coincide en el caso 2D con la polarización TM más comúnmente conocida, mientras que la polarización '' se corresponde con la polarización TE. Este resultado particularizado para ondas planas ( $p = 0$ ) también coincide con las *Ecuaciones de Fresnel* [87], [90] de la reflexión y transmisión de ondas planas en la superficie de separación entre dos medios homogéneos a y b para incidencia con campo eléctrico perpendicular (TE) o paralelo (TM) al plano de incidencia.

## 5.4. Estudio de una discontinuidad entre un medio homogéneo y un medio periódico

La MDG de una discontinuidad entre un medio homogéneo y un medio periódico se ha obtenido empleando el Método de Adaptación Modal (ver sección 2.4). Para ello, se calculan las matrices  $\underline{P}^a$ ,  $\underline{A}$  y  $\underline{B}$ , cuyos elementos, para el caso particular de la unión entre un medio dieléctrico homogéneo a y un medio dieléctrico periódico b con periodicidad  $D$ , se calculan como:

$$P_{mn}^a = \int_0^D (\mathbf{e}_n^a \times \mathbf{h}_m^{a*}) \cdot \hat{\mathbf{z}} dy = \begin{cases} \frac{k_a^2 - k_{yn}^2}{\beta_{an} \omega \varepsilon_a} \delta_{nm} & n es', m es' \\ 0 & n es'', m es' \\ 0 & n es', m es'' \\ \frac{\omega \mu \beta_{an}}{k_a^2 - k_{yn}^2} \delta_{nm} & n es'', m es'' \end{cases} \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned}
 A_{mn} = \int_0^D (\mathbf{e}_n^b \times \mathbf{h}_m^{a*}) \cdot \hat{\mathbf{z}} dy = \frac{1}{\omega \varepsilon_0 \beta_n D} \sum_{q=1}^N c_{qn} \Psi \begin{cases} [k_x^2] & q \text{ es } ', m \text{ es } ' \\ \left[ -k_x k_{yq} + \frac{k_x^3 k_{yq}}{k^2 - k_{yq}^2} \right] & q \text{ es } ', m \text{ es } ' \\ \left[ -k_x k_{ym} + \frac{k_x^3 k_{ym}}{k_a^2 - k_{ym}^2} \right] & q \text{ es } ', m \text{ es } '' \\ \left[ k_{yq}^2 - \frac{k_x^2 k_{yq}^2}{k^2 - k_{yq}^2} + \frac{k_x k_{ym}}{k_a^2 - k_{ym}^2} \left( \frac{k_x^3 k_{yq}}{k^2 - k_{yq}^2} - k_x k_{yq} \right) \right] & q \text{ es } ', m \text{ es } '' \end{cases} \\
 + \frac{\beta_n}{\omega \varepsilon_0 D} \sum_{q=1}^N c_{qn} \Psi \begin{cases} 1 & q \text{ es } ', m \text{ es } ' \\ \left[ \frac{k_x k_{yq}}{k^2 - k_{yq}^2} \right] & q \text{ es } ', m \text{ es } ' \\ \left[ \frac{k_x k_{ym}}{k_a^2 - k_{ym}^2} \right] & q \text{ es } ', m \text{ es } '' \\ \left[ 1 + \frac{k_x^2 k_{yq} k_{ym}}{(k^2 - k_{yq}^2)(k_a^2 - k_{ym}^2)} \right] & q \text{ es } ', m \text{ es } '' \end{cases} \quad (5.23)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{mn} = \int_0^D (\mathbf{e}_n^a \times \mathbf{h}_m^{b*}) \cdot \hat{\mathbf{z}} dy = \sum_{q=1}^N c_{qm} \begin{cases} \left[ \frac{k_a^2 - k_{yn}^2}{\beta_n \omega \varepsilon_a} \right] \delta_{nq} & n \text{ es } ', q \text{ es } ' \\ \left[ \frac{k_a^2 - k_{yn}^2}{\beta_n \omega \varepsilon_a} \left( \frac{k_x k_{yq}}{k^2 - k_{yq}^2} - \frac{k_x k_{ym}}{k_a^2 - k_{ym}^2} \right) \right] \delta_{nq} & n \text{ es } ', q \text{ es } '' \\ 0 & n \text{ es } ', q \text{ es } '' \\ \left[ \frac{\omega \mu \beta_n}{k_a^2 - k_{yn}^2} \right] \delta_{nq} & n \text{ es } ', q \text{ es } '' \end{cases} \quad (5.24)
 \end{aligned}$$

donde se ha introducido en la matriz  $A$  una constante  $\Psi$  de valor:

$$\Psi = \frac{D}{\tilde{\varepsilon}_{rb}} \delta_{qm} + \sum_{s=1}^{ND} \begin{cases} \left( \frac{1}{\varepsilon_{rs}} - \frac{1}{\tilde{\varepsilon}_{rb}} \right) \frac{2 \sin\left((k_{yq} - k_{ym}) \frac{l_s}{2}\right) e^{-j(k_{yq} - k_{ym})y_0 s}}{(k_{yq} - k_{ym})} & q \neq m \\ \frac{l_s}{\varepsilon_{rs}} - \frac{l_s}{\tilde{\varepsilon}_{rb}} & q = m \end{cases}$$

y donde se ha hecho uso de la expansión modal del campo magnético  $\mathbf{h}_m^b$ :

$$\mathbf{h}_m^b = \sum_{q=1}^N c_{qm} \tilde{\mathbf{h}}_q,$$

mientras que  $\mathbf{e}_n^b$  se ha obtenido a partir de  $\mathbf{h}_n^b$  a través de las ecuaciones de Maxwell (ver las ecuaciones (4.16) y (4.17)).

Tras sustituir dichas matrices en las ecuaciones (5.1) y (5.2), y realizar las operaciones correspondientes, se obtiene la MDG que caracteriza la unión entre el medio dieléctrico homogéneo a y el medio dieléctrico periódico b.

De nuevo, a la vista de los resultados obtenidos en las matrices  $\underline{P}^a$ ,  $\underline{A}$  y  $\underline{B}$ , también se concluye que en el caso particular de incidencia 2D ( $k_x = 0$ ), no hay acoplamiento entre las polarizaciones ' y ''. Por tanto, en ese caso, será más conveniente analizar la dispersión en una discontinuidad entre un medio homogéneo a y un medio periódico b para cada polarización por separado.

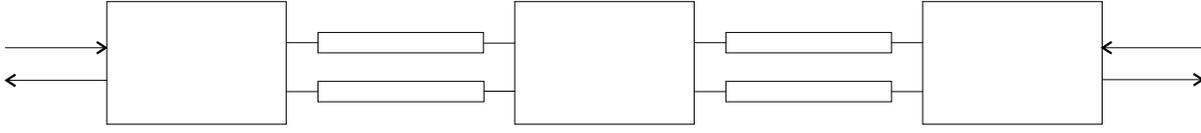


Figura 5.4: Esquema básico de un sistema formado por varias etapas en cascada.

## 5.5. Conexión en cascada de distintas discontinuidades que constituyen una SSFD

La teoría de las matrices de dispersión generalizadas está especialmente desarrollada para el estudio de sistemas en cascada como el que muestra la figura 5.4. Hay varias formulaciones para el análisis de dichos sistemas, que se sintetizan básicamente en dos:

a) La primera consiste en transformar las matrices de dispersión generalizadas de cada etapa en matrices de transmisión generalizadas; a continuación se multiplican las matrices de transmisión de todas las etapas, y, finalmente, se transforma la matriz de transmisión generalizada (MTG) del sistema total a la matriz de dispersión generalizada (MDG) del sistema total, de la cual se obtiene la información necesaria [38], [91].

b) En la segunda formulación se resuelve primero la conexión de dos discontinuidades separadas por un tramo de línea de transmisión, y posteriormente se aplica un método iterativo para conectar de la misma forma las demás transiciones. Esta formulación no emplea matrices de transmisión [92], [93], [94].

En nuestro caso se ha empezado probando el primer planteamiento, que está basado en la matriz de transmisión generalizada (MTG)  $\underline{T}_{ij}$  ( $i,j=1,2$ ), cuyos elementos relacionan las amplitudes de las ondas en el medio  $j$  con las amplitudes de las ondas en el medio  $i$ . Se puede pasar de matrices  $\underline{S}$  a matrices  $\underline{T}$  (y viceversa) a través de las siguientes ecuaciones [38], [91]:

$$\underline{T} = \begin{pmatrix} \underline{T}_{11} & \underline{T}_{12} \\ \underline{T}_{21} & \underline{T}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{S}_{21} - \underline{S}_{22} \underline{S}_{12}^{-1} \underline{S}_{11} & \underline{S}_{22} \underline{S}_{12}^{-1} \\ -\underline{S}_{12}^{-1} \underline{S}_{11} & \underline{S}_{12}^{-1} \end{pmatrix} \quad (5.25)$$

$$\underline{S} = \begin{pmatrix} \underline{S}_{11} & \underline{S}_{12} \\ \underline{S}_{21} & \underline{S}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\underline{T}_{22}^{-1} \underline{T}_{21} & \underline{T}_{22}^{-1} \\ \underline{T}_{11} - \underline{T}_{12}^{-1} \underline{T}_{21} & \underline{T}_{12} \underline{T}_{22}^{-1} \end{pmatrix}. \quad (5.26)$$

La MTG de un sistema formado por  $NE$  etapas en cascada es el producto de las matrices de cada una de esas etapas multiplicadas de la forma:

$$\underline{T} = \underline{T}^{NE} \cdot \underline{T}^{NE-1} \cdot \underline{T}^{NE-2} \cdot \dots \cdot \underline{T}^2 \cdot \underline{T}^1 \quad (5.27)$$

donde  $\underline{T}^i$  es la MTG de la  $i$ -ésima etapa.

En nuestro caso, las matrices  $\underline{T}^i$  serán de dos tipos:

- Matriz de transición entre dos medios
- Matriz de propagación en un tramo de un medio

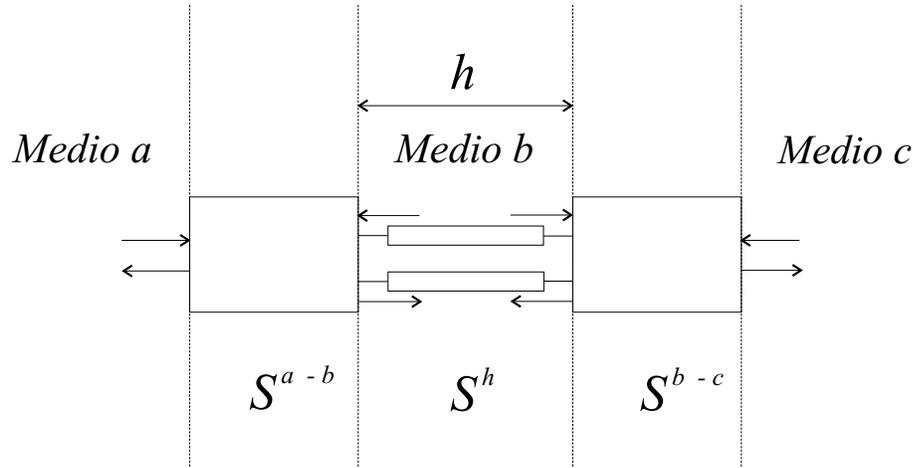


Figura 5.5: Esquema de la conexión de dos transiciones por medio de un tramo de línea de transmisión de longitud  $h$ .

La MTG correspondiente a la transición entre dos medios se obtiene a partir de la correspondiente MDG de la transición [91]. La MTG correspondiente a la propagación en un medio de espesor  $h$  se obtiene teniendo en cuenta el desfase que se introduce en la propagación para los modos del medio en cuestión, siendo de la forma [91]:

$$\begin{aligned}
 T_{11}(n, m) &= e^{-j\beta_n h} \delta_{nm} & T_{12}(n, m) &= 0 \\
 T_{21}(n, m) &= 0 & T_{22}(n, m) &= e^{j\beta_n h} \delta_{nm} .
 \end{aligned}
 \quad n, m = 1 \dots NMR \quad (5.28)$$

Para los modos propagativos en un medio de espesor  $h$  sin pérdidas, los elementos de la MTG son números complejos con módulo unidad ( $\beta_n$  es real), mientras que si los modos están en corte ( $\beta_n$  imaginario puro) dichos elementos son números reales. El tratamiento de los primeros no dará problemas numéricos de ningún tipo. Sin embargo, para el caso de los modos evanescentes, los elementos de la submatriz  $\underline{T}_{22}$  pueden llegar a ser números muy grandes, de forma que si incluimos en esta formulación modos cuyas constantes de propagación  $\beta_n$  sean imaginarias y muy grandes (en módulo), tendremos problemas computacionales. Hemos estudiado este problema para varios casos analizados, y hemos comprobado que realmente se obtienen soluciones erróneas a medida que se van incluyendo en el cálculo un mayor número de modos evanescentes.

Así pues, hemos empleado la otra formulación de conexión de etapas en la cual se relacionan directamente las MDG de dos transiciones entre medios (la transición del medio a al medio b, caracterizada por la matriz de dispersión  $\underline{S}^{a-b}$ , y la transición del medio b al medio c, caracterizada por la matriz de dispersión  $\underline{S}^{b-c}$ ) conectadas por un tramo de línea de transmisión de longitud  $h$  (medio b), como se muestra en el esquema de la figura 5.5. En dicho sistema, se desea conocer la MDG que relaciona los puertos  $a$  y  $c$ .

En este caso, la MDG correspondiente a la propagación en un medio de espesor  $h$  pasa a

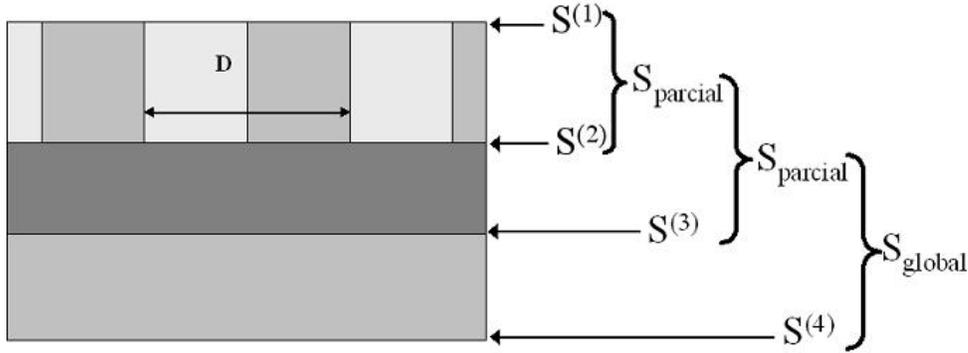


Figura 5.6: Esquema de la conexión de cuatro transiciones por medio de tres tramos de línea de transmisión.

ser de la siguiente forma [91], [92]:

$$\begin{aligned}
 S_{11}(n, m) &= 0 & S_{12}(n, m) &= S_h(n, m) = e^{-j\beta_n h} \delta_{nm} \\
 S_{21}(n, m) &= S_h(n, m) = e^{-j\beta_n h} \delta_{nm} & S_{22}(n, m) &= 0.
 \end{aligned} \quad n, m = 1 \dots NMR \quad (5.29)$$

Por tanto, las tres matrices de dispersión que caracterizan el sistema de la figura 5.5 se expresan como:

$$\underline{\underline{S}}^{a-b} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{S}}_{11} & \underline{\underline{S}}_{12} \\ \underline{\underline{S}}_{21} & \underline{\underline{S}}_{22} \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{S}}^h = \begin{pmatrix} 0 & \underline{\underline{S}}_h \\ \underline{\underline{S}}_h & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{S}}^{b-c} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{S}}_{33} & \underline{\underline{S}}_{34} \\ \underline{\underline{S}}_{43} & \underline{\underline{S}}_{44} \end{pmatrix}. \quad (5.30)$$

Las operaciones algebraicas para obtener la MDG que relaciona los puertos a y c están desarrollados en [92], obteniendo:

$$\underline{\underline{S}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{S}}_{11} + \underline{\underline{S}}_{12} \underline{\underline{S}}_h \underline{\underline{U}}_2 \underline{\underline{S}}_{33} \underline{\underline{S}}_h \underline{\underline{S}}_{21} & \underline{\underline{S}}_{12} \underline{\underline{S}}_h \underline{\underline{U}}_2 \underline{\underline{S}}_{34} \\ \underline{\underline{S}}_{43} \underline{\underline{S}}_h \underline{\underline{U}}_2 \underline{\underline{S}}_{21} & \underline{\underline{S}}_{44} + \underline{\underline{S}}_{43} \underline{\underline{S}}_h \underline{\underline{U}}_1 \underline{\underline{S}}_{22} \underline{\underline{S}}_h \underline{\underline{S}}_{34} \end{pmatrix} \quad (5.31)$$

donde se han definido las matrices  $\underline{\underline{U}}_1$  y  $\underline{\underline{U}}_2$  como:

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{U}}_1 &= \left( \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{S}}_{22} \underline{\underline{S}}_h \underline{\underline{S}}_{33} \underline{\underline{S}}_h \right)^{-1} \\
 \underline{\underline{U}}_2 &= \left( \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{S}}_{33} \underline{\underline{S}}_h \underline{\underline{S}}_{22} \underline{\underline{S}}_h \right)^{-1}.
 \end{aligned} \quad (5.32)$$

donde  $\underline{\underline{I}}$  es la matriz identidad de orden  $NMR$ .

En nuestro caso, para analizar una SSFD compuesta por  $NE$  etapas en cascada, se obtendrá la MDG del sistema total de la siguiente forma: empezaremos por conectar las primeras dos discontinuidades a través de la MDG de propagación en el segundo medio de la SSFD,

empleando para ello las ecuaciones (5.31) y (5.32). Cuando ya tenemos la MDG de ese sistema parcial, lo conectaremos con la siguiente discontinuidad a través de la MDG de propagación en el tercer medio, con lo que obtendremos una nueva MDG parcial. Repitiendo de forma iterativa el mismo proceso hasta llegar a la última discontinuidad se obtiene finalmente la MDG global de la SSFD. En la figura 5.6 se muestra un ejemplo de dicho proceso de conexión de etapas en cascada, para el caso de una SSFD en la que se conectan cuatro discontinuidades.

## 5.6. Cálculo de los coeficientes de reflexión y transmisión en potencia

En la técnica de la *matriz de dispersión convencional* (MDC), los parámetros  $S$  describen las características de reflexión y transmisión del modo fundamental de un sistema guidor. Esta técnica encuentra serias limitaciones en sistemas guidores multimodo y en el estudio de discontinuidades muy próximas, en las que, aunque haya un solo modo propagativo, la interacción entre los modos evanescentes es relevante.

La técnica de las MDG es una extensión de la técnica de la MDC, y en ella se incluyen todos los modos necesarios para describir la respuesta del sistema. Para el análisis de las SSFD se ha escogido un mismo número de modos  $NMR$  en los diferentes medios, puesto que todos ellos tienen una misma sección transversal (que es igual a la celda periódica). Ese número es un parámetro que se ha de elegir adecuadamente, y dependerá del número de modos propagativos en los medios guidores y de sus espesores.

La MDG del sistema global contiene toda la información necesaria para calcular los coeficientes de reflexión y transmisión de la estructura. Vamos a suponer siempre que el primer y último medio de la SSFD son medios homogéneos, cuyos modos serán los armónicos de Floquet de cada medio homogéneo. Supondremos que sobre la SSFD incide un armónico de Floquet  $'$  o  $''$  desde el primer medio (1), cuya energía se distribuirá a los diferentes modos de Floquet  $'$  y  $''$  transmitidos al medio (2) de salida de la SSFD, y a los modos de Floquet  $'$  y  $''$  reflejados en el medio homogéneo (1) de entrada. Los coeficientes de reflexión y transmisión en amplitud de cada modo serán directamente los elementos de la MDG de la estructura global. Los coeficientes de reflexión y transmisión en potencia de un modo  $i$  con estado de polarización  $\alpha$  ( $'$  o  $''$ ) cuando incide un modo  $j$  con polarización  $\beta$  ( $'$  o  $''$ ) sobre la estructura se calculan, a partir de la integral de la parte real del vector de Poynting complejo, con las

siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
 R_{ij}^{\alpha\beta} &= \frac{P_i^{1\alpha}}{P_j^{1\beta}} = \frac{\operatorname{Re} \int_0^D [(I_i^{1\alpha-} \mathbf{e}_i^{1\alpha}) \times (-I_i^{1\alpha-} \mathbf{h}_i^{1\alpha})^*] \cdot (-\hat{\mathbf{z}}) dy}{\operatorname{Re} \int_0^D [(I_j^{1\beta+} \mathbf{e}_j^{1\beta}) \times (I_j^{1\beta+} \mathbf{h}_j^{1\beta})^*] \cdot \hat{\mathbf{z}} dy} = \\
 &= \begin{cases} \frac{|I_i^{1'-}|^2}{|I_j^{1'+}|^2} \operatorname{Re} \left( \frac{\beta_{1j}(k_1^2 - k_{y_j}^2)}{\beta_{1i}(k_1^2 - k_{y_j}^2)} \right) & \alpha es', \beta es' \\ \frac{|I_i^{1'-}|^2}{|I_j^{1''+}|^2} \operatorname{Re} \left( \frac{(k_1^2 - k_{y_i}^2)(k_1^2 - k_{y_j}^2)}{\beta_{1i}\beta_{1j}k_1^2} \right) & \alpha es', \beta es'' \\ \frac{|I_i^{1''-}|^2}{|I_j^{1'+}|^2} \operatorname{Re} \left( \frac{\beta_{1i}\beta_{1j}k_1^2}{(k_1^2 - k_{y_i}^2)(k_1^2 - k_{y_j}^2)} \right) & \alpha es'', \beta es' \\ \frac{|I_i^{1''-}|^2}{|I_j^{1''+}|^2} \operatorname{Re} \left( \frac{\beta_{1i}(k_1^2 - k_{y_j}^2)}{\beta_{1j}(k_1^2 - k_{y_i}^2)} \right) & \alpha es'', \beta es'' \end{cases} \quad (5.33)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{ij}^{\alpha\beta} &= \frac{P_i^{2\alpha}}{P_j^{1\beta}} = \frac{\operatorname{Re} \int_0^D [(I_i^{2\alpha+} \mathbf{e}_i^{2\alpha}) \times (I_i^{2\alpha+} \mathbf{h}_i^{2\alpha})^*] \cdot \hat{\mathbf{z}} dy}{\operatorname{Re} \int_0^D [(I_j^{1\beta+} \mathbf{e}_j^{1\beta}) \times (I_j^{1\beta+} \mathbf{h}_j^{1\beta})^*] \cdot \hat{\mathbf{z}} dy} = \\
 &= \begin{cases} \frac{|I_i^{2'+}|^2}{|I_j^{1'+}|^2} \operatorname{Re} \left( \frac{\varepsilon_1\beta_{1j}(k_2^2 - k_{y_j}^2)}{\varepsilon_2\beta_{2i}(k_1^2 - k_{y_j}^2)} \right) & \alpha es', \beta es' \\ \frac{|I_i^{2'+}|^2}{|I_j^{1''+}|^2} \operatorname{Re} \left( \frac{(k_2^2 - k_{y_i}^2)(k_1^2 - k_{y_j}^2)}{\beta_{2i}\beta_{1j}k_2^2} \right) & \alpha es', \beta es'' \\ \frac{|I_i^{2''+}|^2}{|I_j^{1'+}|^2} \operatorname{Re} \left( \frac{\beta_{2i}\beta_{1j}k_1^2}{(k_2^2 - k_{y_i}^2)(k_1^2 - k_{y_j}^2)} \right) & \alpha es'', \beta es' \\ \frac{|I_i^{2''+}|^2}{|I_j^{1''+}|^2} \operatorname{Re} \left( \frac{\beta_{2i}(k_1^2 - k_{y_j}^2)}{\beta_{1j}(k_2^2 - k_{y_i}^2)} \right) & \alpha es'', \beta es'' \end{cases} \quad (5.34)
 \end{aligned}$$

Cuando el modo incidente  $j$  es una onda plana (caso más habitual), a los coeficientes de reflexión y transmisión de cada modo les llamaremos

$$R_{i0}^{\alpha\beta} \equiv R_i^{\alpha\beta}, \quad T_{i0}^{\alpha\beta} \equiv T_i^{\alpha\beta}. \quad (5.35)$$

Por tanto,  $R_i^{\alpha\beta}$  y  $T_i^{\alpha\beta}$  serán los coeficientes de reflexión y transmisión en potencia del modo  $i$  de Floquet con polarización  $\alpha$  cuando sobre la estructura incide una onda plana con polarización  $\beta$ .

Para obtener el coeficiente de reflexión total de la estructura cuando incide el modo de Floquet  $j$  con polarización  $\beta$ , a partir de los coeficientes de reflexión de cada modo excitado, tendremos que:

$$R_j^\beta = \sum_{i \text{ propag}} R_{ij}^{\alpha\beta} \quad (5.36)$$

donde la suma se hace para los modos propagativos (ya que los modos evanescentes no propagan potencia activa). Habitualmente, cuando el modo incidente es una onda plana con

polarización  $\beta$  (' o ''), al coeficiente de reflexión  $R_0^\beta$  se le suele llamar directamente  $R^\beta$ . De igual forma se obtiene el coeficiente de transmisión total de la estructura como:

$$T_j^\beta = \sum_{i \text{ propag}} T_{ij}^{\alpha\beta}, \quad (5.37)$$

que para el caso de incidencia de una onda plana con polarización  $\beta$  (' o ''), se suele representar por  $T^\beta$ .

Una vez tenemos los coeficientes de reflexión y transmisión en potencia para cada modo incidente  $j$ , se debe comprobar numéricamente que se cumple el principio de conservación de la energía para medios sin pérdidas, el cual establece que la suma de los coeficientes de reflexión y transmisión en potencia para cada modo incidente  $j$  propagativo en dicho medio es igual a la unidad:

$$R_j^\beta + T_j^\beta = 1. \quad (5.38)$$

Esta comprobación es sencilla de demostrar en el caso de una discontinuidad entre dos medios homogéneos sin pérdidas a y b bajo excitación 2D ( $k_x = 0$ ), ya que en ese caso:

$$R_j^\beta = R_{jj}^{\beta\beta}, \quad T_j^\beta = T_{jj}^{\beta\beta}. \quad (5.39)$$

Si particularizamos para el caso de polarización ' o TM, tenemos que:

$$R_j^{\text{TM}} = R_{jj}^{\text{TM}} = \frac{|I_j^{\text{TM}-}|^2}{|I_j^{\text{TM}+}|^2} \mathcal{R}e \left( \frac{\beta_{aj}(k_a^2 - k_{y_j}^2)}{\beta_{aj}(k_a^2 - k_{y_j}^2)} \right) = \left| \frac{I_j^{\text{TM}-}}{I_j^{\text{TM}+}} \right|^2 \quad (5.40)$$

$$T_j^{\text{TM}} = T_{jj}^{\text{TM}} = \frac{|I_j^{\text{TM}+}|^2}{|I_j^{\text{TM}+}|^2} \mathcal{R}e \left( \frac{\varepsilon_a \beta_{aj}(k_b^2 - k_{y_j}^2)}{\varepsilon_b \beta_{bj}(k_a^2 - k_{y_j}^2)} \right) = \left| \frac{I_j^{\text{TM}+}}{I_j^{\text{TM}+}} \right|^2 \mathcal{R}e \left( \frac{\varepsilon_a \beta_{bj}}{\varepsilon_b \beta_{aj}} \right) \quad (5.41)$$

y sustituyendo los resultados de las ecuaciones (5.18), (5.19) en (5.40), (5.41) se llega finalmente al siguiente resultado:

$$\begin{aligned} R_j^{\text{TM}} + T_j^{\text{TM}} &= \left| \frac{\frac{\beta_{bj}}{\varepsilon_b} - \frac{\beta_{aj}}{\varepsilon_a}}{\frac{\beta_{bj}}{\varepsilon_b} + \frac{\beta_{aj}}{\varepsilon_a}} \right|^2 + \left| \frac{2\frac{\beta_{aj}}{\varepsilon_a}}{\frac{\beta_{bj}}{\varepsilon_b} + \frac{\beta_{aj}}{\varepsilon_a}} \right|^2 \mathcal{R}e \left( \frac{\varepsilon_a \beta_{bj}}{\varepsilon_b \beta_{aj}} \right) \\ &= \frac{\left| \left( \frac{\beta_{bj}}{\varepsilon_b} \right)^2 + \left( \frac{\beta_{aj}}{\varepsilon_a} \right)^2 - 2\frac{\beta_{bj}}{\varepsilon_b} \frac{\beta_{aj}}{\varepsilon_a} + 4\frac{\beta_{bj}}{\varepsilon_b} \frac{\beta_{aj}}{\varepsilon_a} \right|}{\left| \frac{\beta_{bj}}{\varepsilon_b} + \frac{\beta_{aj}}{\varepsilon_a} \right|^2} = \frac{\left| \frac{\beta_{bj}}{\varepsilon_b} + \frac{\beta_{aj}}{\varepsilon_a} \right|^2}{\left| \frac{\beta_{bj}}{\varepsilon_b} + \frac{\beta_{aj}}{\varepsilon_a} \right|^2} = 1. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Igualmente, para el caso de polarización '' o TE bajo incidencia 2D tenemos que:

$$R_j^{\text{TE}} = R_{jj}^{\text{TE}} = \frac{|I_j^{\text{TE}-}|^2}{|I_j^{\text{TE}+}|^2} \mathcal{R}e \left( \frac{\beta_{aj}(k_a^2 - k_{y_j}^2)}{\beta_{aj}(k_a^2 - k_{y_j}^2)} \right) = \left| \frac{I_j^{\text{TE}-}}{I_j^{\text{TE}+}} \right|^2 \quad (5.43)$$

$$T_j^{\text{TE}} = T_{jj}^{\text{TE}} = \frac{|I_j^{\text{TE}+}|^2}{|I_j^{\text{TE}+}|^2} \mathcal{R}e \left( \frac{\beta_{bj}(k_a^2 - k_{y_j}^2)}{\beta_{aj}(k_b^2 - k_{y_j}^2)} \right) = \left| \frac{I_j^{\text{TE}+}}{I_j^{\text{TE}+}} \right|^2 \mathcal{R}e \left( \frac{\beta_{aj}}{\beta_{bj}} \right) \quad (5.44)$$

y sustituyendo los resultados de las ecuaciones (5.19), (5.20) en (5.43), (5.44) se obtiene el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} R_j^{\text{TE}} + T_j^{\text{TE}} &= \left| \frac{\beta_{aj} - \beta_{bj}}{\beta_{aj} + \beta_{bj}} \right|^2 + \left| \frac{2\beta_{bj}}{\beta_{aj} + \beta_{bj}} \right|^2 \mathcal{R}e \left( \frac{\beta_{aj}}{\beta_{bj}} \right) = \\ &= \frac{|\beta_{aj}^2 + \beta_{bj}^2 - 2\beta_{aj}\beta_{bj} + 4\beta_{aj}\beta_{bj}|}{|\beta_{aj} + \beta_{bj}|^2} = \frac{|\beta_{aj} + \beta_{bj}|^2}{|\beta_{aj} + \beta_{bj}|^2} = 1. \end{aligned} \quad (5.45)$$

En los problemas de dispersión de ondas planas en SSFD bajo incidencia 3D, es más común estudiar la incidencia de ondas planas con campo eléctrico perpendicular o paralelo al plano de incidencia [82] (incidencia conocida como TE o TM), en lugar de la incidencia de ondas planas con las polarizaciones tipo-E o tipo-H (' o ") descritas anteriormente. En el apéndice F se ha estudiado detalladamente la descomposición de los campos transversales de una onda plana linealmente polarizada en modos de Floquet de orden  $n = 0$  tipo-E, tipo-H de la siguiente forma:

$$\mathbf{E}_{0inct} = c'_{0e} \mathbf{e}'_0 + c''_{0e} \mathbf{e}''_0 \quad (5.46)$$

$$\mathbf{H}_{0inct} = c'_{0h} \mathbf{h}'_0 + c''_{0h} \mathbf{h}''_0. \quad (5.47)$$

Así pues, para una onda plana con polarización arbitraria cuyo campo eléctrico transversal es de la forma:

$$\mathbf{E}_{0inct} = E_{0incx} \hat{\mathbf{x}} + E_{0incy} \hat{\mathbf{y}} = E_{0incx} (\hat{\mathbf{x}} + \tan\zeta \hat{\mathbf{y}}), \quad \tan\zeta = \frac{E_{0incy}}{E_{0incx}} \quad (5.48)$$

se obtienen los siguientes coeficientes del armónico de Floquet de orden  $n = 0$  tipo-E, tipo-H:

$$\begin{aligned} c'_{0e} &= \frac{E_{0incx} \tan\zeta \sqrt{D} k_{z0} \omega \varepsilon}{k^2 - k_{y0}^2} \\ c''_{0e} &= \frac{E_{0incx} \sqrt{D} (k^2 - k_{y0}^2)}{\omega \mu k_{z0}} \left( 1 + \frac{\tan\zeta k_x k_{y0}}{k^2 - k_{y0}^2} \right) \\ c'_{0h} &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{E_{0incx} \sqrt{D}}{k} \left( \frac{k_x k_{y0}}{k_{z0}} + \frac{k_{y0}^2 \tan\zeta}{k_{z0}} + k_{z0} \tan\zeta - \frac{k_x k_{y0}}{k_{z0} (k^2 - k_{y0}^2)} (k_{z0}^2 + k_x^2 + k_x k_{y0} \tan\zeta) \right) \\ c''_{0h} &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{E_{0incx} \sqrt{D}}{k_{z0} k} (k_{z0}^2 + k_x^2 + k_x k_{y0} \tan\zeta). \end{aligned} \quad (5.49)$$

Para calcular los coeficientes de reflexión y transmisión en potencia de una onda plana linealmente polarizada con polarización arbitraria cuando incide desde el medio 1 sobre una SSFD, se calculará la potencia incidente  $P_{inc}$  como:

$$\begin{aligned} P_{inc} &= \mathcal{R}e \int_S (\mathbf{E}_{0inct} \times \mathbf{H}_{0inct}^*) \cdot \hat{\mathbf{z}} dS \\ &= \mathcal{R}e \left( c'_{0e} c'^*_{0h} \frac{k_1^2 - k_{y0}^2}{\beta_{10} \omega \varepsilon_1} \right) + \mathcal{R}e \left( c''_{0e} c''^*_{0h} \frac{\beta_{10} \omega \mu}{k_1^2 - k_{y0}^2} \right) \end{aligned} \quad (5.50)$$

donde  $\beta_{10} \equiv k_{z0}$  es la constante de propagación en el medio 1. La potencia reflejada  $P_{refl}$  se obtendrá a partir de los campos reflejados al medio 1:

$$\mathbf{E}_{oreflt} = \left( \frac{I_0^{1'-}}{I_0^{1'+}} c'_{0e} + \frac{I_0^{1'-}}{I_0^{1''+}} c''_{0e} \right) \mathbf{e}_0^{1'} + \left( \frac{I_0^{1''-}}{I_0^{1'+}} c'_{0e} + \frac{I_0^{1''-}}{I_0^{1''+}} c''_{0e} \right) \mathbf{e}_0^{1''} \quad (5.51)$$

$$\mathbf{H}_{oreflt} = - \left( \frac{I_0^{1'-}}{I_0^{1'+}} c'_{0h} + \frac{I_0^{1'-}}{I_0^{1''+}} c''_{0h} \right) \mathbf{h}_0^{1'} - \left( \frac{I_0^{1''-}}{I_0^{1'+}} c'_{0h} + \frac{I_0^{1''-}}{I_0^{1''+}} c''_{0h} \right) \mathbf{h}_0^{1''} \quad (5.52)$$

donde los términos  $\frac{I_0^{1\alpha-}}{I_0^{1\beta+}}$  son los elementos de la submatriz  $\underline{\underline{S}}_{11}$  de la MDG global de la SSFD. Así, la potencia reflejada se obtendrá como:

$$P_{refl} = \mathcal{R}e \int_S (\mathbf{E}_{oreflt} \times \mathbf{H}_{oreflt}^*) \cdot (-\hat{\mathbf{z}}) dS. \quad (5.53)$$

Por último, la potencia transmitida  $P_{trans}$  se obtendrá a partir de los campos transmitidos al medio 2 (suponiendo que el resto de modos son evanescentes):

$$\mathbf{E}_{otranst} = \left( \frac{I_0^{2'+}}{I_0^{1'+}} c'_{0e} + \frac{I_0^{2'+}}{I_0^{1''+}} c''_{0e} \right) \mathbf{e}_0^{2'} + \left( \frac{I_0^{2''+}}{I_0^{1'+}} c'_{0e} + \frac{I_0^{2''+}}{I_0^{1''+}} c''_{0e} \right) \mathbf{e}_0^{2''} \quad (5.54)$$

$$\mathbf{H}_{otranst} = \left( \frac{I_0^{2'+}}{I_0^{1'+}} c'_{0h} + \frac{I_0^{2'+}}{I_0^{1''+}} c''_{0h} \right) \mathbf{h}_0^{2'} + \left( \frac{I_0^{2''+}}{I_0^{1'+}} c'_{0h} + \frac{I_0^{2''+}}{I_0^{1''+}} c''_{0h} \right) \mathbf{h}_0^{2''} \quad (5.55)$$

donde los términos  $\frac{I_0^{2\alpha+}}{I_0^{1\beta+}}$  son los elementos de la submatriz  $\underline{\underline{S}}_{21}$  de la MDG global de la SSFD. Por tanto, la potencia transmitida al medio 2 se obtendrá como:

$$P_{trans} = \mathcal{R}e \int_S (\mathbf{E}_{otranst} \times \mathbf{H}_{otranst}^*) \cdot \hat{\mathbf{z}} dS. \quad (5.56)$$

Las expresiones (5.51), (5.52), (5.54), (5.55) se pueden generalizar a modos de orden superior si éstos son propagativos. En muchas aplicaciones prácticas, se utiliza para excitar este tipo de estructuras las polarizaciones  $\text{TE}^{3D}$  (campo eléctrico perpendicular al plano de incidencia) y  $\text{TM}^{3D}$  (campo eléctrico paralelo al plano de incidencia), que se representan en la figura 5.7. En los párrafos anteriores se ha estudiado la descomposición de una onda plana con polarización arbitraria en modos tipo-E, tipo-H, obteniéndose los coeficientes  $c'_{0e}$ ,  $c''_{0e}$ ,  $c'_{0h}$ ,  $c''_{0h}$  en función del parámetro  $\tan\zeta = E_{0incy}/E_{0incx}$ . Para obtener la expresión del campo eléctrico incidente para cada una de las mencionadas polarizaciones  $\text{TE}^{3D}$  y  $\text{TM}^{3D}$ , se tendrá en cuenta lo siguiente: dada una cierta dirección de incidencia definida a partir de los ángulos  $\theta$ ,  $\phi$ , el vector perpendicular al plano de incidencia, al que llamaremos  $\mathbf{N}$ , quedará determinado por el producto vectorial de los vectores número de ondas de las ondas incidente y reflejada (que son dos vectores contenidos en el plano de incidencia):

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_i &= k \sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + k \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{y}} + k \cos \theta \hat{\mathbf{z}} \\ \mathbf{k}_r &= k \sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + k \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{y}} - k \cos \theta \hat{\mathbf{z}} \end{aligned} \quad (5.57)$$

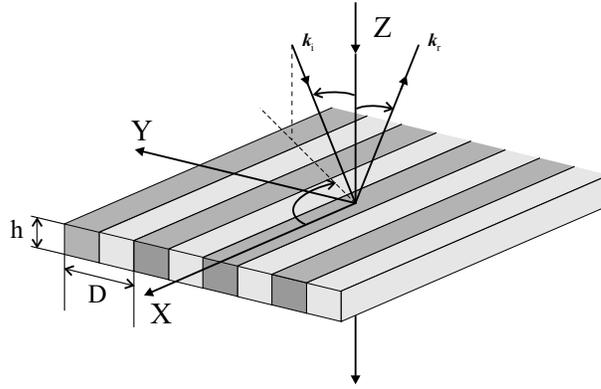


Figura 5.7: El plano de incidencia es el plano que contiene los vectores de ondas incidente ( $\mathbf{k}_i$ ) y reflejado ( $\mathbf{k}_r$ ) de orden cero. La polarización  $TE^{3D}$  corresponde a que el campo eléctrico de la onda incidente es perpendicular al plano de incidencia, mientras que en la polarización  $TM^{3D}$  el campo magnético es perpendicular a dicho plano. El ángulo azimutal de la onda incidente  $\phi$  representa el ángulo que forma el plano de incidencia con el eje  $X$ .

$$\mathbf{N} = \mathbf{k}_i \times \mathbf{k}_r = 2k^2 (-\sin \theta \sin \phi \cos \theta \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta \cos \phi \cos \theta \hat{\mathbf{y}}) \quad (5.58)$$

Por tanto, para el caso de incidencia de una onda plana con polarización perpendicular al plano de incidencia (incidencia  $TE^{3D}$ ), el campo eléctrico será un vector paralelo al vector  $\mathbf{N}$  de la ecuación (5.58), de forma que:

$$\mathbf{E}_{oinc}^{rmTE^{3D}} // \mathbf{N} \Rightarrow \tan \zeta = \frac{E_{0incy}^{TE^{3D}}}{E_{0incx}^{TE^{3D}}} = \frac{N_y}{N_x} = -\frac{\sin \theta \cos \phi \cos \theta}{\sin \theta \sin \phi \cos \theta} = -\frac{\cos \phi}{\sin \phi}. \quad (5.59)$$

$$\zeta = -\arctan(\cot \phi). \quad (5.60)$$

Por otro lado, para el caso de incidencia de una onda plana con polarización paralela al plano de incidencia (incidencia  $TM^{3D}$ ), el campo eléctrico será un vector perpendicular al vector  $\mathbf{N}$  de la ecuación (5.58), y por tratarse de una onda plana, también será un vector perpendicular al vector de ondas de la onda incidente. Por tanto, el vector de campo eléctrico paralelo al plano de incidencia se obtendrá como el producto vectorial del vector  $\mathbf{N}$  y del vector de ondas de la onda incidente  $\mathbf{k}_i$ :

$$\mathbf{E}_{oinc}^{TM^{3D}} \perp \mathbf{N} \Rightarrow \mathbf{N} \times \mathbf{k}_i = 2k^3 (\sin \theta \cos \phi \cos^2 \theta \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta \sin \phi \cos^2 \theta \hat{\mathbf{y}} - \sin^2 \theta \cos \theta \hat{\mathbf{z}}) \quad (5.61)$$

$$\mathbf{E}_{oinc}^{TM^{3D}} // \mathbf{N} \times \mathbf{k}_i \Rightarrow \tan \zeta = \frac{E_{0incy}^{TM^{3D}}}{E_{0incx}^{TM^{3D}}} = \frac{\sin \theta \sin \phi \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \phi \cos^2 \theta} = \frac{\sin \phi}{\cos \phi} \Rightarrow \zeta = \phi. \quad (5.62)$$

## 5.7. Análisis de la convergencia

A la hora de llevar a cabo el análisis de la convergencia de las soluciones obtenidas con nuestro método para la obtención de la MDG de una SSFD, habrá que estudiar cómo

varían los parámetros de dispersión para un problema dado (como pueden ser el coeficiente de reflexión o transmisión en potencia definidos en (5.36), (5.37), cuando la estructura bajo análisis es excitada con una onda plana con polarización definida  $\beta$  (Tipo-E o Tipo-H)), en función del número de modos que se incluyen en las MDG que caracterizan la estructura. Si no se consideran pérdidas en los dieléctricos, el principio de conservación de la energía exige que:

$$R^\beta + T^\beta = 1 \quad (5.63)$$

Dicha condición servirá para testear los algoritmos de cálculo realizados.

Para ver el efecto que tienen los diferentes parámetros en la convergencia de los resultados, se hará el estudio de la convergencia del coeficiente de reflexión en potencia  $R^\beta$  de la estructura, también llamado reflectancia, cuando sobre dicha estructura incide una onda plana con polarización Tipo-E o Tipo-H. En dicho estudio tendremos que considerar los diferentes parámetros que caracterizan el problema, a saber, la frecuencia de trabajo, el número de capas en la dirección  $Z$  (tanto homogéneas como periódicas), la diferencia de la permitividad relativa de los diversos medios que constituyen la SSFD, la polarización de la onda incidente, y por último, los ángulos de incidencia ( $\theta$  y  $\phi$ ).

En primer lugar se analizará la convergencia para el caso de incidencia 2D ( $\phi = 90^\circ$ ). En la sección 5.3 se llegó a la conclusión de que en el caso particular de incidencia 2D ( $k_x = 0$ ), no hay acoplo entre las polarizaciones Tipo-E y Tipo-H a la hora de analizar la dispersión en una discontinuidad entre un medio homogéneo  $a$  y un medio  $b$ , tanto homogéneo como periódico. Así, en el caso 2D será más conveniente estudiar la dispersión en SSFD para cada polarización por separado, puesto que el tamaño de las MDG que caracterizan las discontinuidades se reducen en un factor 2. Por tanto, la convergencia de las soluciones en este caso se alcanza al menos con la mitad de modos que para el caso 3D. Una vez se haya visto cómo afectan todos los parámetros a la convergencia de las soluciones, se estudiará el efecto de la incidencia oblicua o 3D.

### 5.7.1. Análisis de la convergencia para el caso de incidencia 2D

En este apartado consideraremos que sobre la SSFD incide una onda plana TE o TM formando su vector de ondas un ángulo  $\theta$  con el eje  $Z$ , para un ángulo  $\phi = 90^\circ$ , que excitará en los diferentes medios que constituyen la SSFD modos TE o TM, respectivamente, según sea la polarización de la onda incidente. Cada polarización se analizará por separado.

Para hacer el análisis de la convergencia del método empleado en función del número de modos que se incluyen en las MDG ( $NMR$ ), se ha elegido una estructura sencilla encontrada en la bibliografía [29], y caracterizada por una única lámina dieléctrica periódica (con dos dieléctricos distintos de igual espesor en la celda unidad) inmersa en el aire (ver la figura 5.1). Se empezará haciendo un estudio de la convergencia de los parámetros de dispersión y del coeficiente de reflexión en potencia  $R^\beta$  (ver la ecuación (5.36)) de la lámina dieléctrica periódica cuando sobre dicha lámina incide una onda plana con polarización  $\beta$  bajo incidencia 2D, a diferentes frecuencias por un lado, y también para varios ángulos de incidencia  $\theta$  distintos. Por otro lado, se ha comparado la convergencia del coeficiente de reflexión  $R^\beta$  de

esta estructura con la de otra SSFD caracterizada por un mayor número de capas en la dirección  $Z$  (tanto homogéneas como periódicas). Por último, también se ha estudiado el efecto que tiene la diferencia de la constante dieléctrica de los distintos medios que constituyen la SSFD en la convergencia del coeficiente de reflexión. En todos los casos, se ha considerado que se alcanza la convergencia cuando el coeficiente de reflexión  $R^\beta$  varía únicamente en su tercera cifra decimal respecto al valor asintótico al que tiende para valores altos del número de modos  $NMR$ .

En todos los medios periódicos estudiados se ha elegido un número de modos de la base auxiliar ( $N$ ) suficiente para que la solución obtenida con el método modal vectorial empleado para calcular los modos del medio periódico sea convergente, como se discutió en el capítulo 4. Además, en todos los casos analizados en este apartado se ha empleado como sistema auxiliar el aire.

La estructura elegida para hacer el análisis de convergencia está formada por una lámina dieléctrica periódica inmersa en el aire. Por lo tanto, en este caso tendremos una discontinuidad entre el medio homogéneo (aire) y el medio periódico, una propagación en el medio periódico, y otra discontinuidad entre el medio periódico y el medio homogéneo (aire). El medio periódico tiene un espesor  $h = 6,35$  mm. El valor del periodo en la dirección  $Y$  es de  $D = 29,0$  mm, y existen dos láminas dieléctricas dentro de la celda unidad, caracterizadas por los siguientes parámetros:  $\varepsilon_{r1} = 1,0$ ,  $\varepsilon_{r2} = 2,59$ ,  $l_1 = l_2 = D/2 = 14,5$  mm (ver la figura 5.1). Se considerará que sobre esta lámina incide una onda plana con polarización TE o TM, respectivamente. En primer lugar se muestra la convergencia de los parámetros de dispersión de la estructura, concretamente del parámetro  $S_{11}(1, 1)$ , que es el coeficiente de reflexión en amplitud del armónico de Floquet de orden  $n = 0$  cuando sobre la SSFD incide el mismo armónico (onda plana), que se ha estudiado a dos frecuencias distintas de 7,5 GHz y 22,0 GHz, para incidencia normal. La convergencia de dicho parámetro (módulo y fase) en función del número de modos  $NMR$  que se incluyen en la construcción de las MDG de la estructura se ha representado en la figura 5.8 para incidencia con polarización TE, mientras que la figura 5.9 corresponde a incidencia TM. Para ambas polarizaciones, se aprecia claramente una convergencia más rápida para la frecuencia más baja.

Así mismo, en la figura 5.10 se ha representado el coeficiente de reflexión en potencia  $R^\beta$  de esta estructura en función del número de modos  $NMR$ , para los mismos dos valores de frecuencia de 7,5 GHz y 22,0 GHz bajo incidencia normal. En la figura 5.10 (a) la onda plana incidente tiene polarización TE, mientras que la figura 5.10 (b) corresponde a una onda plana incidente con polarización TM. Para ambas polarizaciones, de nuevo se observa una convergencia más rápida del coeficiente de reflexión en potencia  $R^\beta$  para la frecuencia más baja. De hecho, se observa que tanto el módulo y fase del parámetro de dispersión  $S_{11}(1, 1)$  como el coeficiente de reflexión en potencia  $R^\beta$  muestran el mismo tipo de convergencia en función del número de modos  $NMR$  a una misma frecuencia y para una misma polarización. Además, en el estudio de convergencia realizado, ambos parámetros han mostrado un mismo comportamiento con el número de modos  $NMR$  para cada caso analizado en este apartado, por lo que en el resto de casos únicamente se presentan los resultados de convergencia para el coeficiente de reflexión en potencia  $R^\beta$ .

La convergencia más lenta observada a altas frecuencias se debe a que para la frecuencia

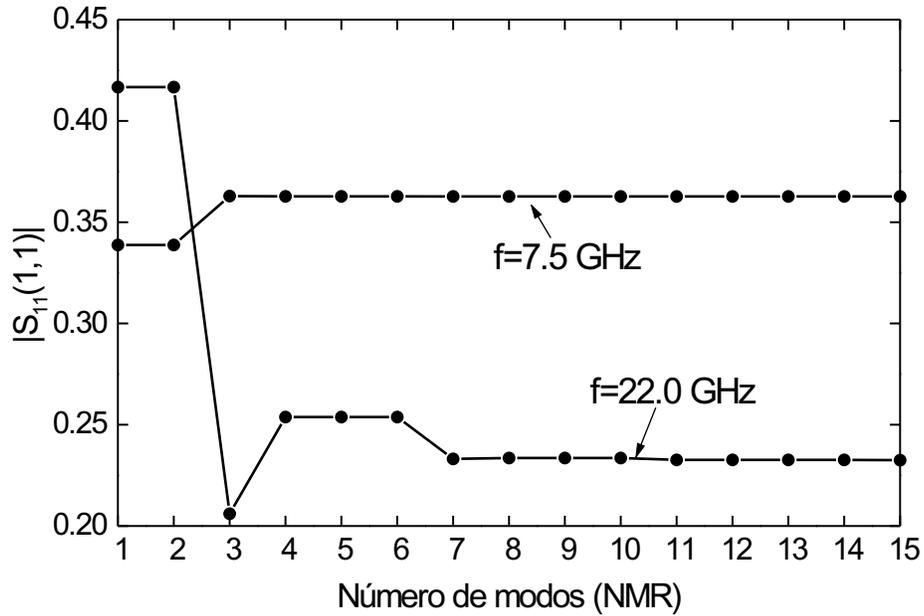
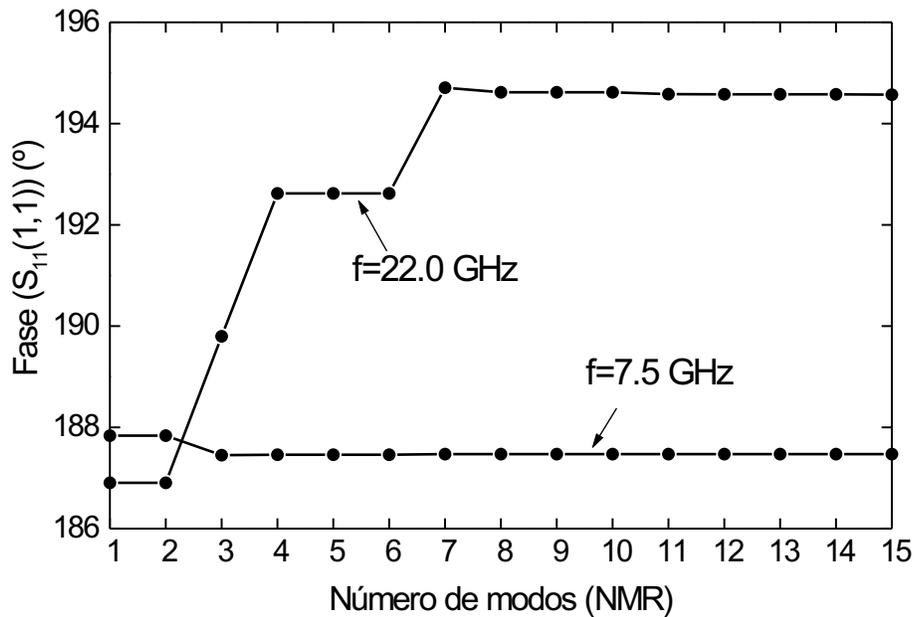
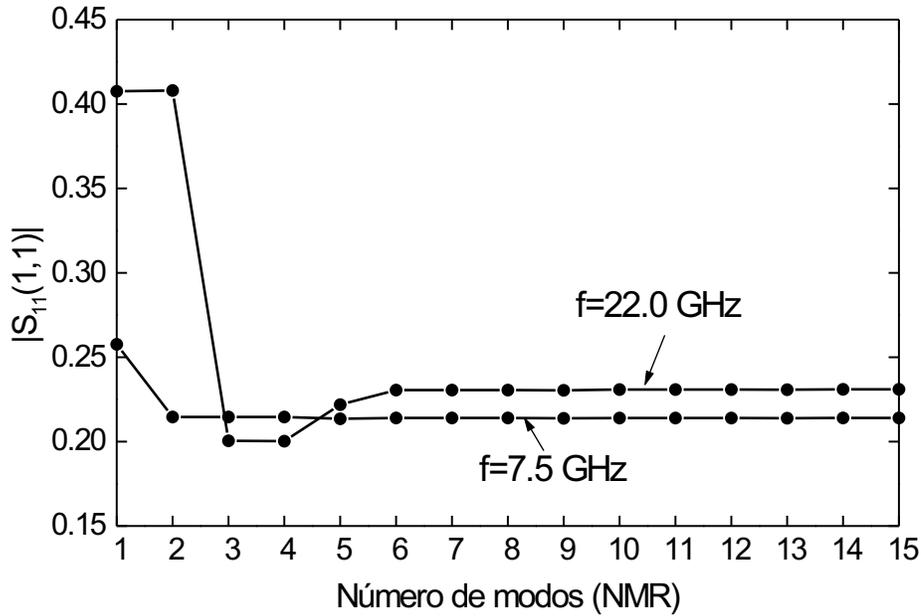
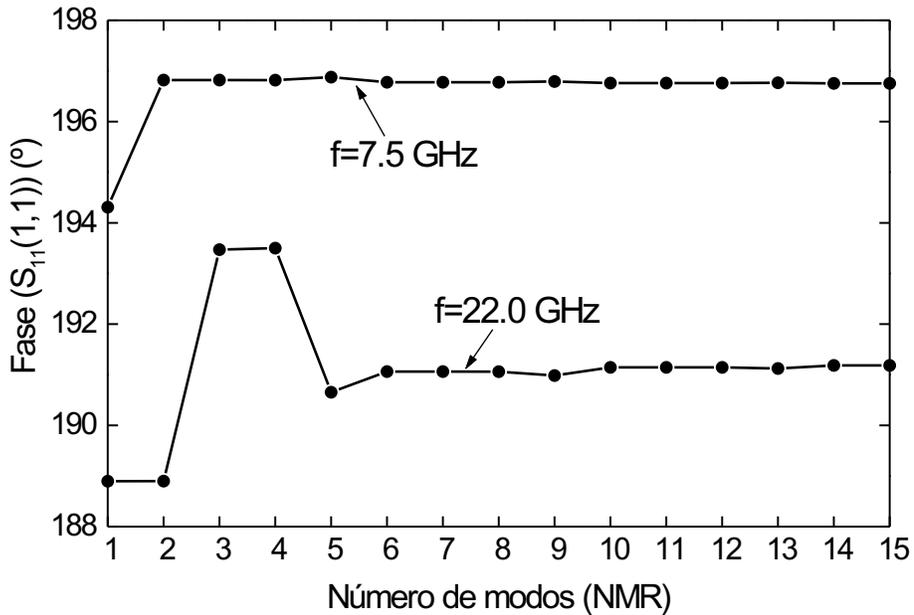
(a)  $|S_{11}(1,1)|$  Incidencia TE(b) Fase ( $S_{11}(1,1)$ ) Incidencia TE

Figura 5.8: Convergencia en el caso 2D del módulo (a) y fase (b) del parámetro de dispersión  $S_{11}(1,1)$  en función del número de modos  $NMR$  a diferentes frecuencias para una SSFD con los siguientes parámetros:  $D = 29,0$  mm,  $h = 6,35$  mm,  $\epsilon_{r1} = 1,0$ ,  $\epsilon_{r2} = 2,59$ ,  $l_1 = l_2 = D/2 = 14,5$  mm. Incidencia normal TE.



(a)  $|S_{11}(1,1)|$  Incidencia TM



(b) Fase ( $S_{11}(1,1)$ ) Incidencia TM

Figura 5.9: Convergencia en el caso 2D del módulo (a) y fase (b) del parámetro de dispersión  $S_{11}(1,1)$  bajo incidencia normal TM en función del número de modos  $NMR$  que se incluyen en el cálculo de las MDG de la SSFD cuyos parámetros se detallan al pie de la figura 5.8, a diferentes frecuencias.

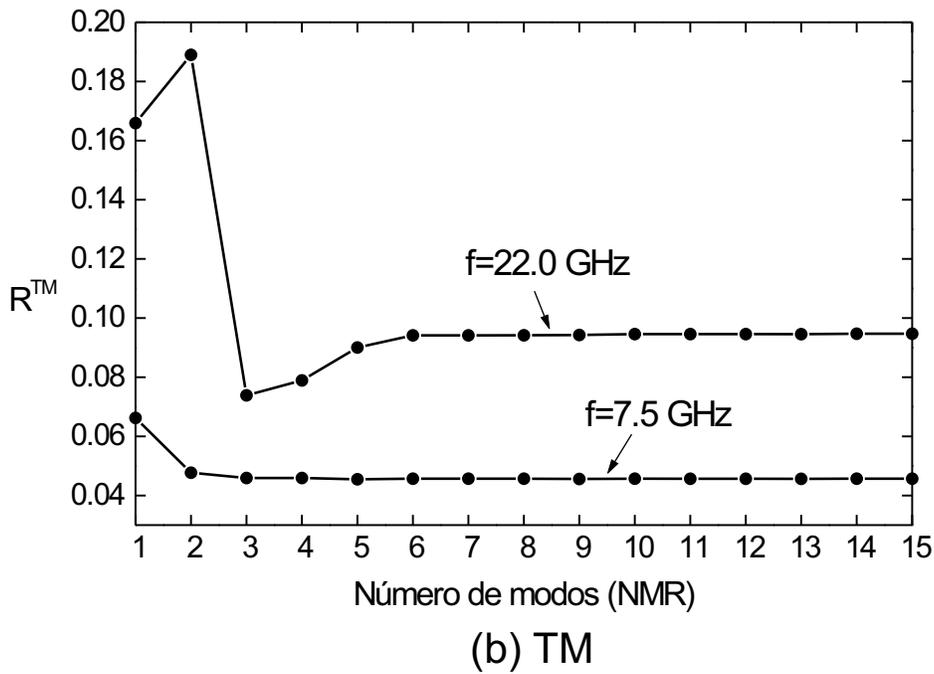
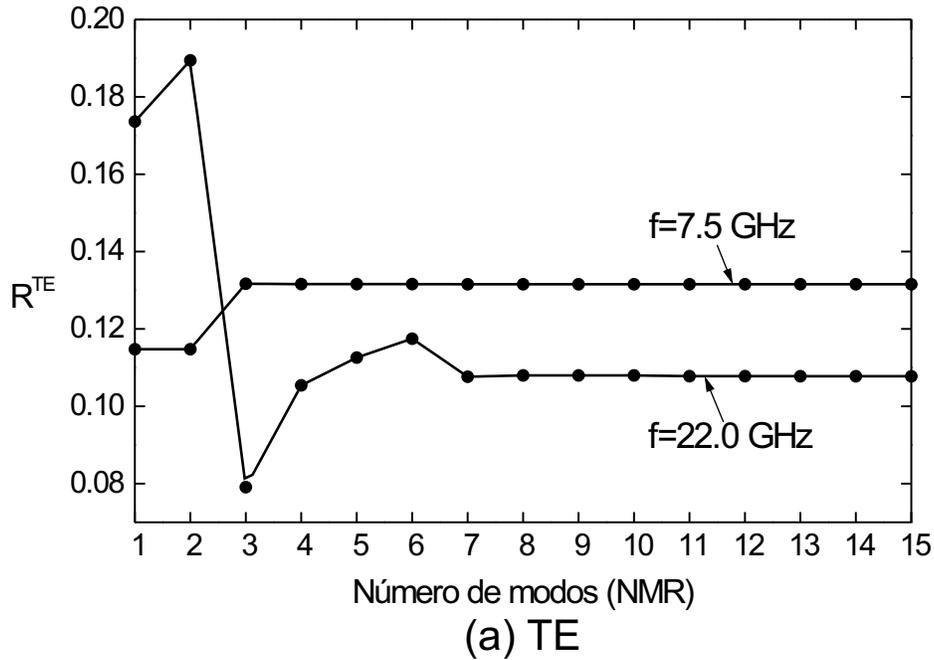


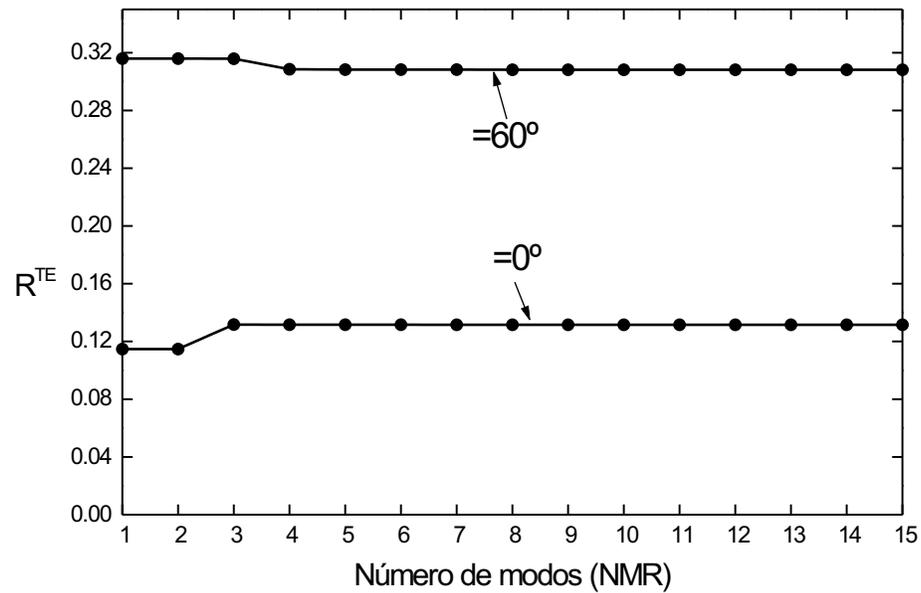
Figura 5.10: Convergencia en el caso 2D del coeficiente de reflexión en potencia  $R^\beta$  en función del número de modos  $NMR$  que se incluyen en el cálculo de las MDG de la SSFD cuyos parámetros se detallan al pie de la figura 5.8, a diferentes frecuencias. (a) Polarización TE. (b) Polarización TM.

de 22,0 GHz hay un mayor número de modos propagativos tanto en el aire como en el medio periódico (hay 5 modos propagativos en el aire y 5 modos propagativos en el medio periódico, para ambas polarizaciones), y por tanto será necesario incluir más modos en el cálculo de las MDG de las discontinuidades y de la propagación. De hecho, a esta frecuencia serán necesarios 7 modos en la MDG para las dos polarizaciones para alcanzar una solución convergente. Por el contrario, a la frecuencia de 7,5 GHz, sólo hay un modo propagativo en cada medio para ambas polarizaciones, y son suficientes solamente 3 modos (para ambas polarizaciones) para alcanzar la convergencia.

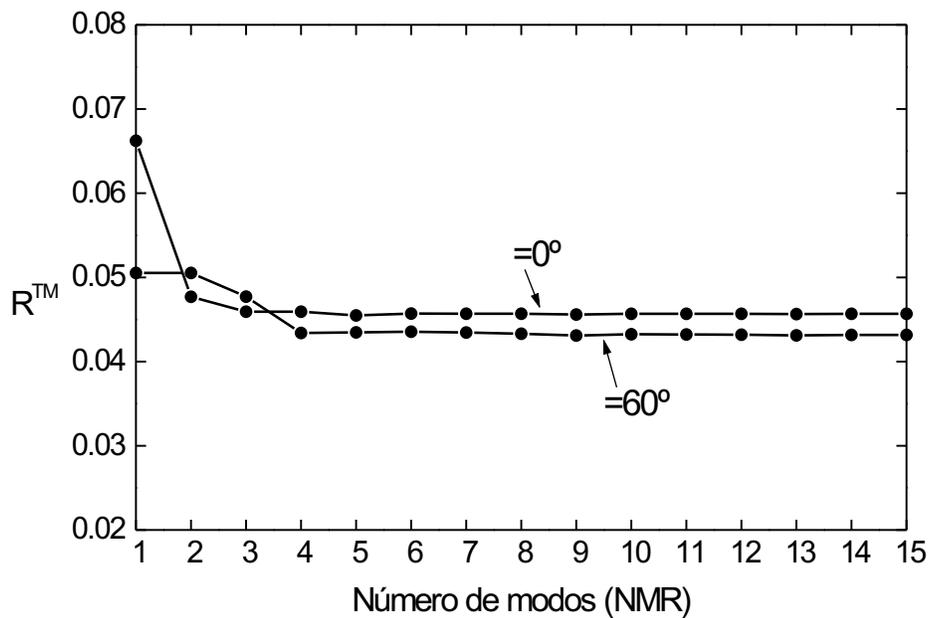
También se ha comparado la convergencia del coeficiente de reflexión  $R^\beta$  para dos valores distintos del ángulo de incidencia  $\theta$ , a una misma frecuencia. En la figura 5.11 se representa el coeficiente de reflexión de la estructura anterior a una frecuencia de 7,5 GHz, para incidencia normal y para un ángulo de incidencia de  $\theta = 60^\circ$ . En la figura 5.11 (a) la onda plana incidente tiene polarización TE, mientras que la figura 5.11 (b) corresponde a una onda plana con polarización TM. Para ambas polarizaciones, en este caso se observa que para los dos valores del ángulo de incidencia se alcanza la convergencia para un número de modos similar, que es de 3 modos para incidencia normal y de 4 modos para incidencia con  $\theta = 60^\circ$ . Ello es porque el efecto que tiene este parámetro en cuanto al número de modos propagativos en los diferentes medios no es muy relevante.

Seguidamente, estudiaremos la convergencia del algoritmo en función del número de etapas en la dirección del eje  $Z$ . Para ello, se ha elegido una SSFD formada por cinco capas, tres de las cuales son periódicas, y el resto son homogéneas. En la figura 5.12 se muestra un esquema de dicha estructura, cuyos parámetros son los siguientes:  $D = 29,0$  mm,  $h_h = h_p = 6,35$  mm,  $\varepsilon_{r1} = 1,0$ ,  $\varepsilon_{r2} = 2,59$ ,  $\varepsilon_{rh} = 1,0$ ,  $l_1 = l_2 = D/2 = 14,5$  mm. En la figura 5.13 se representa en línea discontinua la reflectancia en función del número de modos  $NMR$  para esta estructura a una frecuencia de 22,0 GHz e incidencia normal, mientras que en línea continua está representada la reflectancia de la estructura de una capa correspondiente a la figura 5.8. La figura 5.13 (a) corresponde a incidencia de una onda plana con polarización TE, mientras que en la figura 5.13 (b) la onda plana incidente tiene polarización TM. Para la polarización TE se observa que con las dos estructuras se alcanza la convergencia para un mismo número de modos, que para esta frecuencia es de 7 modos, mientras que para la polarización TM hacen falta 7 modos para la SSFD de una capa, y 10 modos para la SSFD de cinco capas. Ello quiere decir que si se aumenta el número de capas en la dirección del eje  $Z$ , manteniendo constante el número de modos propagativos en las nuevas capas, la convergencia se alcanza para un número de modos similar.

A continuación se analizará el efecto que tiene la constante dieléctrica de los distintos medios que constituyen las SSFD en la convergencia de los parámetros de dispersión. Para ello, en la figura 5.14 se representa por un lado el coeficiente de reflexión en función del número de modos  $NMR$  de la estructura de una capa (cuyos parámetros se detallan al pie de la figura 5.8), a la frecuencia de 7,5 GHz y bajo incidencia normal, y por otro lado la convergencia del coeficiente de reflexión para otra estructura de iguales características que la anterior, salvo que en este caso se ha modificado la permitividad relativa de uno de los medios que forman la capa periódica de  $\varepsilon_{r2} = 2,59$  a un nuevo valor igual a  $\varepsilon_{r2} = 14,0$  (ver la figura 5.1). De nuevo, la figura 5.14 (a) corresponde a incidencia de una onda plana con



(a) TE



(b) TM

Figura 5.11: Convergencia en el caso 2D del coeficiente de reflexión  $R^\beta$  en función del número de modos  $NMR$  que se incluyen en el cálculo de las MDG de la SSFD cuyos parámetros se detallan al pie de la figura 5.8, a una frecuencia de 7,5 GHz, para dos ángulos de incidencia  $\theta$  distintos. (a) Polarización TE. (b) Polarización TM.

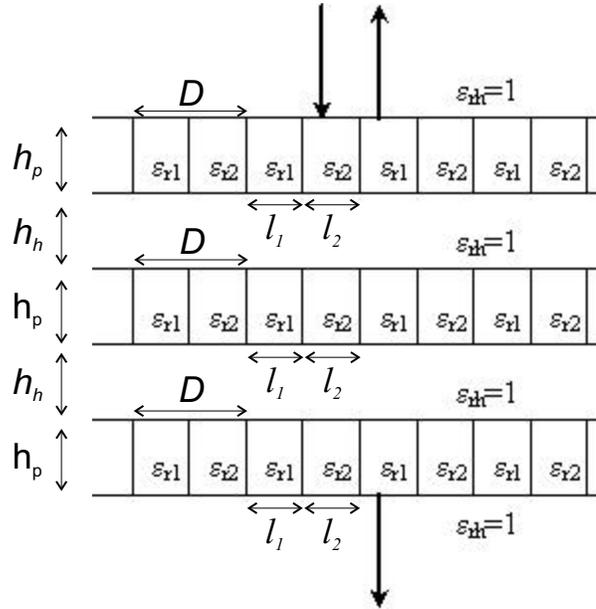
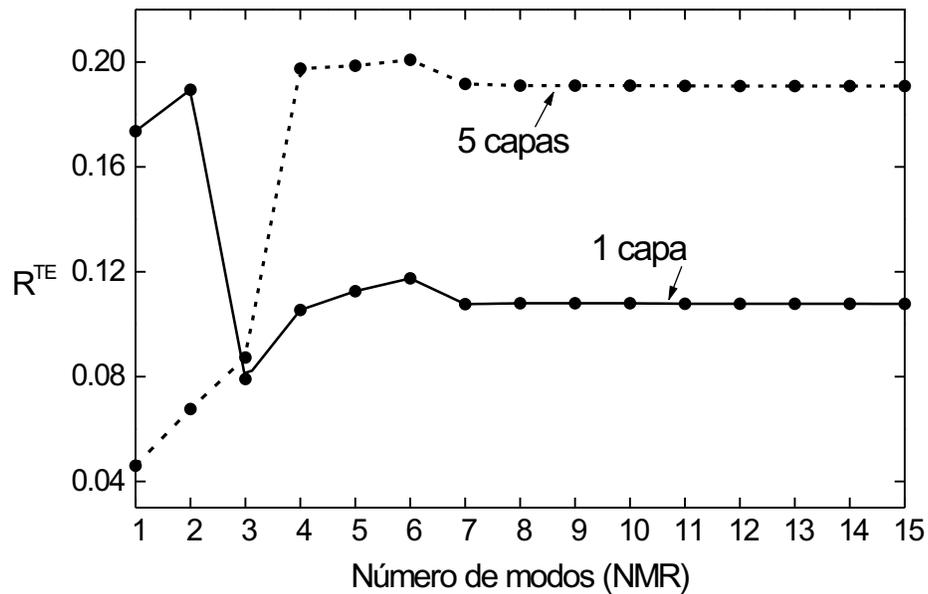


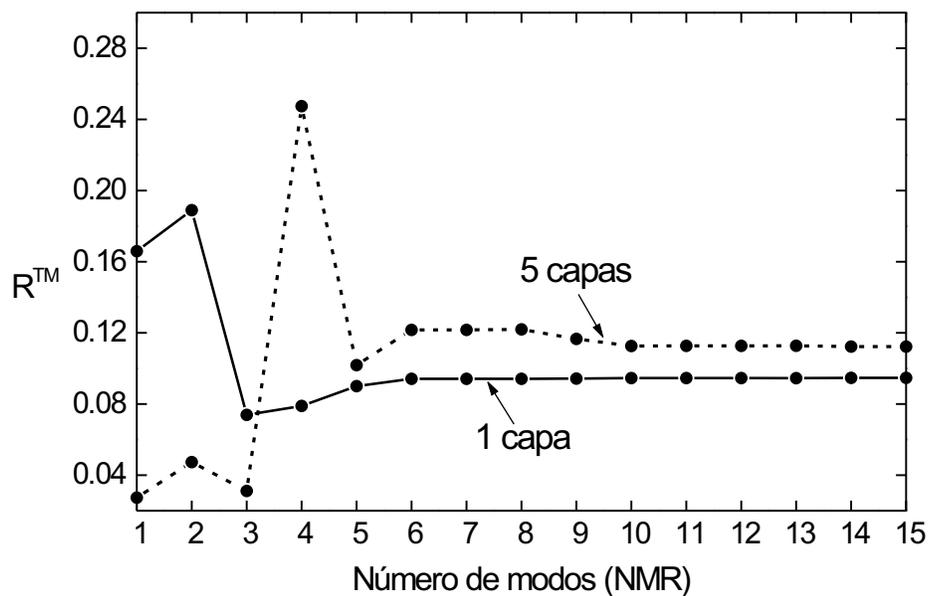
Figura 5.12: SSFD formada por cinco capas, tres de las cuales son capas periódicas, y el resto son capas homogéneas, con los siguientes parámetros:  $D = 29,0$  mm,  $h_h = h_p = 6,35$  mm,  $\varepsilon_{r1} = 1,0$ ,  $\varepsilon_{r2} = 2,59$ ,  $l_1 = l_2 = D/2 = 14,5$  mm.

polarización TE, mientras que en la figura 5.14 (b) la onda plana incidente tiene polarización TM. En el caso de la estructura con mayor salto en la permitividad relativa dentro de la celda periódica, se puede observar claramente que ha aumentado el número de modos *NMR* necesario para alcanzar la convergencia del coeficiente de reflexión  $R^\beta$ , que para las dos polarizaciones ha pasado a valer de 3 a 7 modos. Este resultado se debe a que en el caso de una mayor permitividad relativa aumenta el número de modos propagativos en el medio periódico (para  $\varepsilon_{r2} = 14,0$  existen tres modos propagativos en el medio periódico para las dos polarizaciones), y por tanto será necesario considerar un mayor número de modos en el cálculo de las MDG de la estructura.

Por último, para el caso de incidencia 2D, se va a estudiar también el efecto que tiene el espesor de las capas de las SSFD en la convergencia de los parámetros de dispersión. Para ello, se estudiarán dos láminas dieléctricas periódicas con iguales características pero con diferente espesor, para ver cómo afecta este parámetro en la convergencia de las soluciones obtenidas. En la figura 5.15 se compara la convergencia del coeficiente de reflexión  $R^\beta$  de la lámina dieléctrica cuyos parámetros se detallan al pie de la figura 5.8, cuyo espesor era de  $h = 6,35$  mm, con la de otra estructura de idénticas características pero con la mitad de espesor que la primera ( $h = 3,175$  mm), a una frecuencia de 7,5 GHz y bajo incidencia normal. La figura 5.15 (a) corresponde a incidencia de una onda plana con polarización TE, mientras que en la figura 5.15 (b) la onda plana incidente tiene polarización TM. Para ambas polarizaciones, se observa una convergencia más lenta para la lámina más delgada ( $h = 3,175$  mm), siendo el número de modos *NMR* necesario para alcanzar la convergencia en este caso igual a 5. Ello se debe a que los modos evanescentes son más relevantes para la

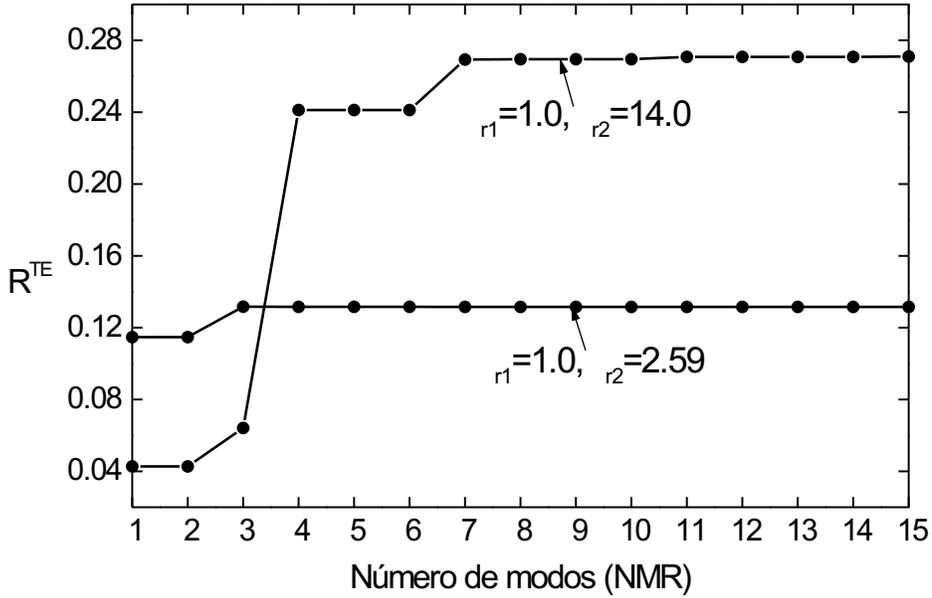


(a) TE

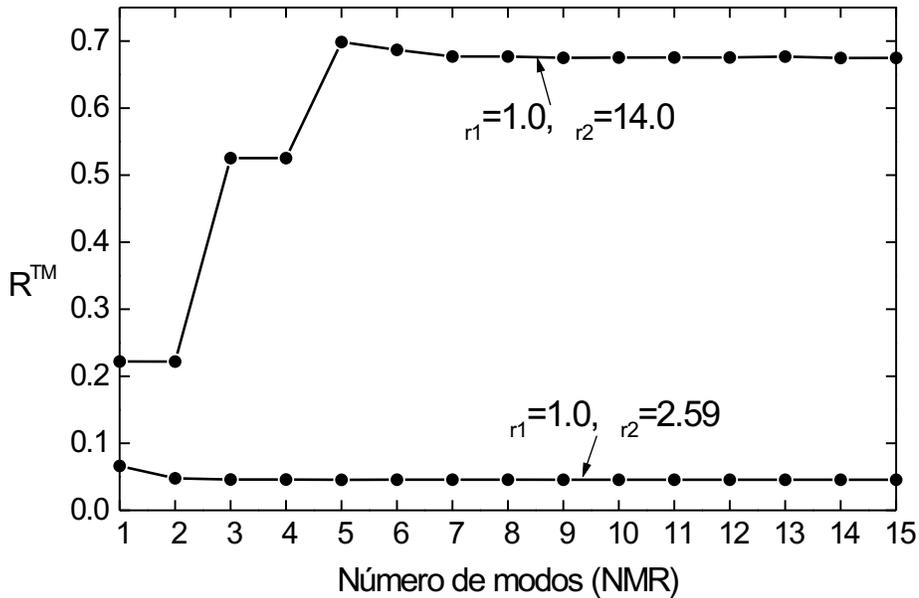


(b) TM

Figura 5.13: Convergencia en el caso 2D del coeficiente de reflexión  $R^\beta$  en función del número de modos  $NMR$  que se incluyen en el cálculo de las MDG de dos SSFD con diferente número de capas, a una frecuencia de 22,0 GHz, para incidencia normal. (a) Polarización TE. (b) Polarización TM.

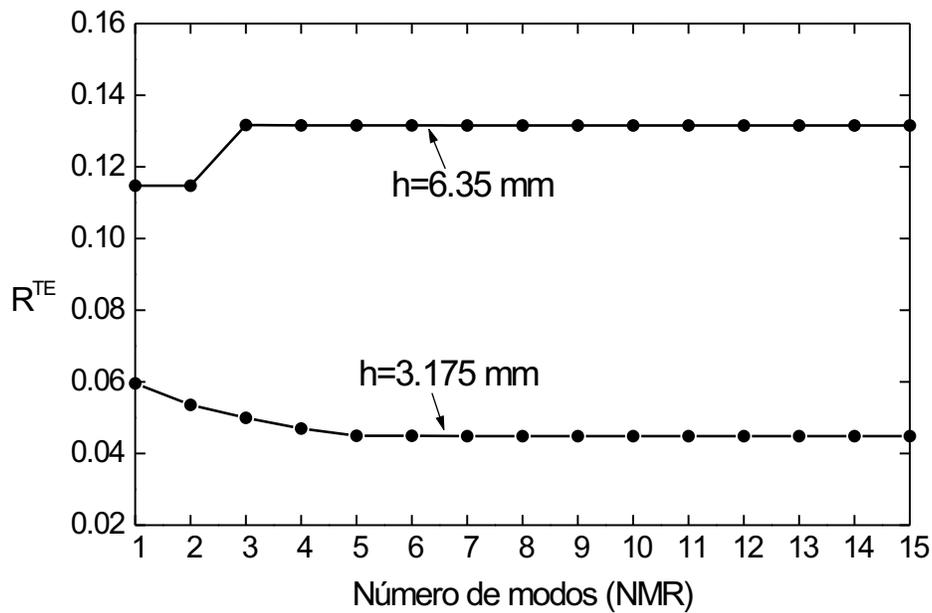


(a) TE

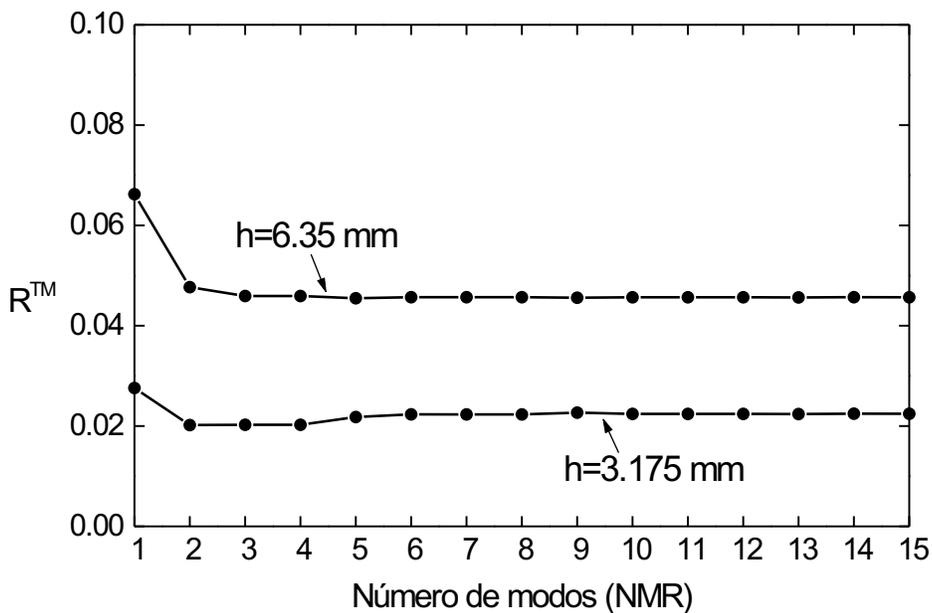


(b) TM

Figura 5.14: Convergencia en el caso 2D del coeficiente de reflexión  $R^\beta$  en función del número de modos  $NMR$  que se incluyen en el cálculo de las MDG de dos SSFD con diferente valor de la permitividad dieléctrica en uno de los dos medios de la capa periódica, a una frecuencia de 7,5 GHz para incidencia normal. (a) Polarización TE. (b) Polarización TM.



(a) TE



(b) TM

Figura 5.15: Convergencia en el caso 2D del coeficiente de reflexión  $R^\beta$  en función del número de modos  $NMR$  que se incluyen en el cálculo de las MDG de dos láminas dieléctricas periódicas con diferente valor del espesor de la lámina, a una frecuencia de 7,5 GHz para incidencia normal. (a) Polarización TE. (b) Polarización TM.

estructura con menor espesor (para ambas polarizaciones, hay un único modo propagativo a esta frecuencia), ya que en este caso los modos evanescentes sufren una menor atenuación en el tramo de propagación dentro de la lámina periódica, teniendo por tanto una mayor influencia en el cálculo del coeficiente de reflexión de la estructura.

Resumiendo, se ha visto que a la hora de obtener la MDG que caracteriza una SSFD en el caso de incidencia 2D para cada una de las dos polarizaciones TE y TM, habrá que hacer un estudio previo de la convergencia de las soluciones obtenidas en función del número de modos ( $NMR$ ) que se incluyan en el cálculo de dicha matriz. Podemos concluir que será necesario aumentar el número de modos en la MDG a medida que aumentemos la frecuencia, mientras que el ángulo de incidencia no será un parámetro tan relevante para alcanzar la convergencia. Además, en SSFD que tengan constantes dieléctricas elevadas en alguno de los medios de las diferentes capas, también se alcanzará la convergencia de las soluciones para un mayor número de modos  $NMR$  que se incluyan en la MDG.

### 5.7.2. Análisis de la convergencia para el caso de incidencia 3D

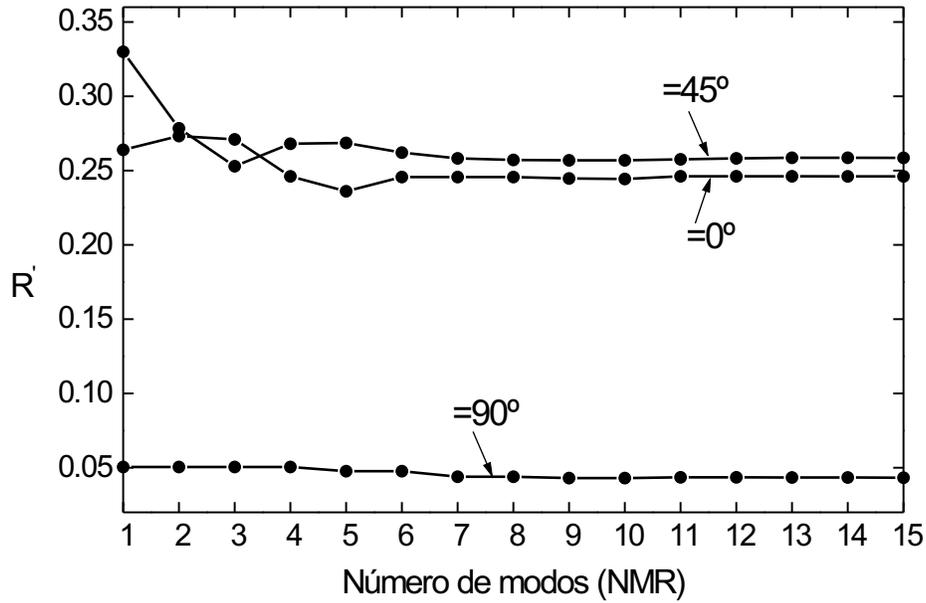
En este apartado se va a analizar el efecto de la incidencia oblicua 3D en la convergencia de las soluciones del coeficiente de reflexión en potencia  $R^\beta$  de la estructura. Hay que recordar que cuando la incidencia deja de ser 2D ( $\phi \neq 90^\circ$ ), se producirá acoplo entre las polarizaciones tipo-E y tipo-H a la hora de analizar la dispersión en una discontinuidad entre dos medios homogéneos a y b, y por tanto en los medios homogéneos será necesario incluir ambas familias de modos.

A continuación se va a llevar a cabo un estudio de la convergencia del coeficiente de reflexión  $R^\beta$  de la lámina dieléctrica periódica analizada en el apartado anterior (cuyos parámetros se detallan al pie de la figura 5.8) cuando es iluminada por una onda plana con incidencia 3D con  $\theta = 60^\circ$ , para cuatro valores distintos del ángulo acimutal  $\phi$ . En la figura 5.16 se compara la convergencia del coeficiente de reflexión en potencia  $R^\beta$  de la estructura a una frecuencia de 7,5 GHz y un ángulo de incidencia  $\theta = 60^\circ$  para tres ángulos acimutales distintos:  $\phi = 0^\circ$ ,  $\phi = 45^\circ$  y  $\phi = 90^\circ$ . La figura 5.16 (a) corresponde a incidencia de una onda plana con polarización tipo-E, mientras que en la figura 5.16 (b) la onda plana incidente tiene polarización tipo-H.

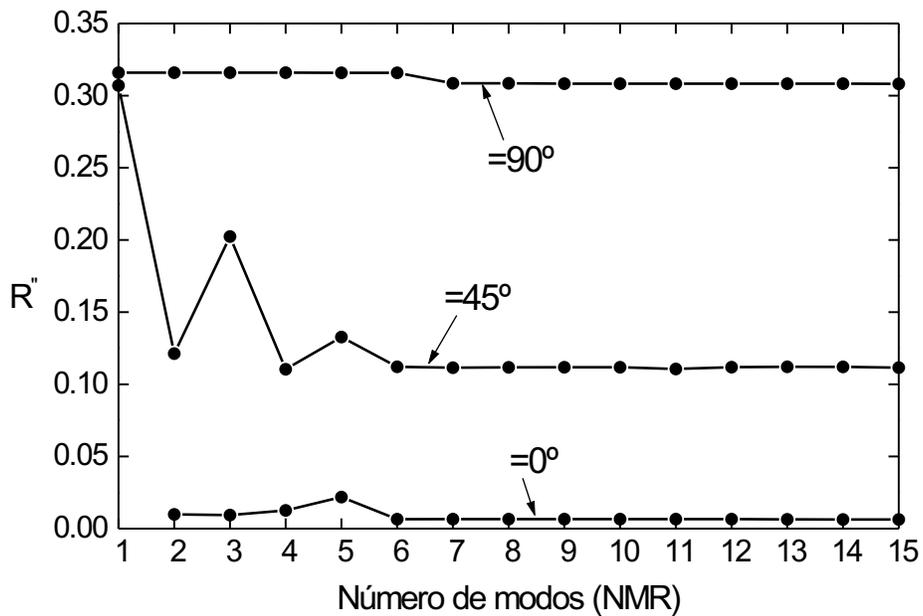
Para ambas polarizaciones de la onda incidente, se alcanza la convergencia para un número de modos similar, que para esta estructura a esta frecuencia es de 7 modos. Ello es porque el efecto que tiene este parámetro en cuanto al número de modos propagativos en los diferentes medios en general no es muy relevante.

Como ya se mencionó al principio de este apartado, en todos los casos analizados hasta este punto se ha observado que la convergencia de los parámetros de dispersión  $S_{ij}(n, m)$ , tanto en módulo como en fase, es igual que en el coeficiente de reflexión en potencia  $R^\beta$ .

Finalmente es conveniente apuntar que el test de conservación de la energía se ha tenido presente en los cálculos efectuados, observando que la suma de los dos coeficientes  $R^\beta + T^\beta$  definidos en (5.36), (5.37) tiende a 1 a medida que las soluciones se van haciendo estables. El error relativo observado en esa suma para todos los casos en los que se ha alcanzado la convergencia del parámetro  $R^\beta$  es siempre inferior al 0,001 %.



(a) Tipo-E



(b) Tipo-H

Figura 5.16: Convergencia en el caso 3D del coeficiente de reflexión  $R^\beta$  en función del número de modos  $NMR$  que se incluyen en el cálculo de las MDG de una lámina dieléctrica periódica cuyos parámetros se detallan al pie de la figura 5.8, a una frecuencia de 7,5 GHz bajo un ángulo de incidencia  $\theta = 60^\circ$ , para tres ángulos acimutales distintos. (a) Polarización tipo-E. (b) Polarización tipo-H.

## 5.8. Comparación con la bibliografía

Una vez hecho el análisis de la convergencia de nuestro método para obtener los coeficientes de reflexión y transmisión de una SSFD, pasaremos a comparar algunos de nuestros resultados para varias estructuras con los obtenidos por otros autores con diferentes métodos.

En primer lugar se han comparado los resultados que proporciona nuestro código en el caso de una interfase entre dos medios homogéneos, con las ecuaciones de Fresnel [90]. Para ello se han analizado los coeficientes de reflexión y transmisión en potencia de una discontinuidad entre el aire  $\varepsilon_{r1} = 1,0$  y un medio dieléctrico homogéneo de permitividad relativa  $\varepsilon_{r2} = 2,25$  en función del ángulo  $\theta$ , para las dos orientaciones de campo eléctrico paralelo y perpendicular al plano de incidencia, cuyos resultados aparecen en [90].

En la figura 5.17 se comparan los coeficientes de reflexión y transmisión en potencia de una discontinuidad entre aire  $\varepsilon_{r1} = 1,0$  y un dieléctrico de permitividad relativa  $\varepsilon_{r2} = 2,25$  obtenidos a partir de las ecuaciones de Fresnel [90], con los obtenidos con nuestro método ( $\phi = 90^\circ$ ) para una discontinuidad entre aire y un medio periódico, pero que tiene un único rectángulo dieléctrico que ocupa toda la celda unidad (con una permitividad relativa de  $\varepsilon_{r2} = 2,25$ ). Para este caso, se hará una expansión modal de los modos del medio de  $\varepsilon_{r2} = 2,25$  con la base auxiliar correspondiente a un medio homogéneo con  $\tilde{\varepsilon}_{rb} = 1,0$ . Este caso es muy sencillo por no tratarse realmente de un medio periódico, de forma que la matriz  $\underline{L}$  será diagonal y por tanto será suficiente un único modo de la base auxiliar para expandir cada modo del segundo medio. Además, es suficiente incluir un sólo modo en la MDG de la discontinuidad, porque al incidir desde el primer medio con una onda plana, sólo tendremos una onda plana reflejada en el primer medio y una onda plana transmitida al segundo medio (el modo de Floquet de orden cero en cada medio). En la figura 5.17 (a) se representan los coeficientes de reflexión y transmisión  $R^{\text{TE}}$  y  $T^{\text{TE}}$  en función del ángulo de incidencia  $\theta$  cuando en el medio 1 incide una onda plana con el campo eléctrico perpendicular al plano de incidencia, mientras que la figura 5.17 (b) corresponde a la reflectancia y transmitancia  $R^{\text{TM}}$  y  $T^{\text{TM}}$  de dicha discontinuidad para incidencia de una onda plana con campo eléctrico paralelo al plano de incidencia. Como se puede apreciar, los resultados obtenidos con nuestro método concuerdan perfectamente con los resultados teóricos tanto para incidencia perpendicular como para incidencia paralela.

En la figura 5.17 (b), que corresponde al caso anteriormente analizado para incidencia con campo eléctrico paralelo al plano de incidencia, se puede identificar el ángulo de Brewster, que es aquél para el cual no hay onda reflejada ( $R^{\text{TM}} = 0$ ). Para el ángulo de Brewster se cumple que [90]:

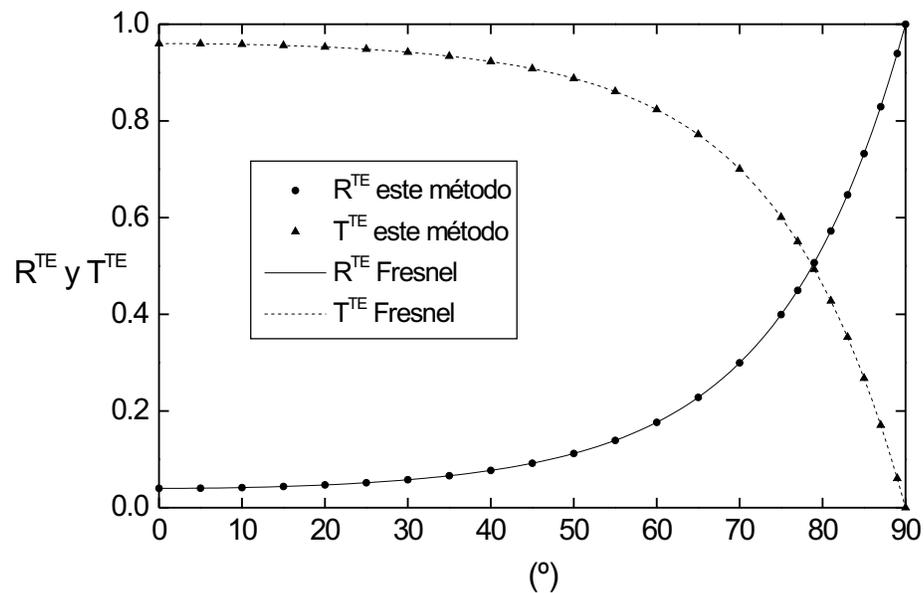
$$\tan \theta_B = \frac{n_2}{n_1} \quad (5.64)$$

Para el caso de la discontinuidad entre aire y un dieléctrico de  $\varepsilon_r = 2,25$ , dicho ángulo vale:

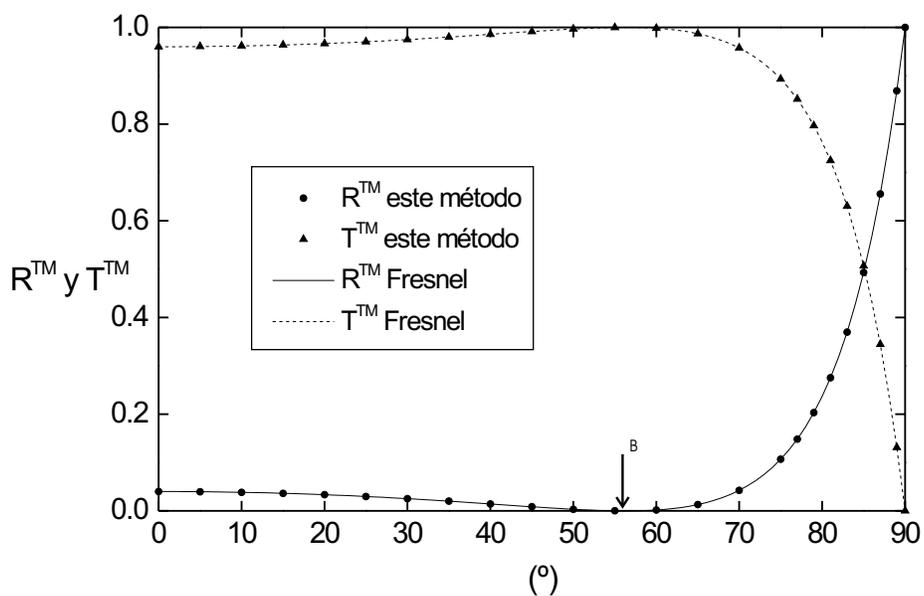
$$\tan \theta_B = \frac{\sqrt{2,25}}{\sqrt{1}} = 1,5 \rightarrow \theta_B = 56,31^\circ \quad (5.65)$$

que es precisamente el valor de  $\theta$  para el cual se anula la reflexión en la figura 5.17(b).

El siguiente caso analizado también tiene solución analítica [95], y corresponde a la transmitancia de una lámina dieléctrica homogénea inmersa en el aire. La lámina se caracteriza



(a) Incidencia perpendicular



(b) Incidencia paralela

Figura 5.17: Coeficientes de reflexión y transmisión en función del ángulo de incidencia  $\theta$  de una discontinuidad entre dos medios homogéneos de permitividades relativas  $\varepsilon_{r1} = 1,0$  y  $\varepsilon_{r2} = 2,25$ . Los datos obtenidos con nuestro método ( $\phi = 90^\circ$ ) se representan con puntos, mientras que las curvas representan los resultados obtenidos con las ecuaciones de Fresnel [90]. (a) Onda plana incidente con campo eléctrico perpendicular al plano de incidencia. (b) Onda plana incidente con campo eléctrico paralelo al plano de incidencia.

por una permitividad relativa  $\varepsilon_{r2} = 2,25$  y un espesor  $h = 6,0$  mm. La transmitancia  $T_L^\alpha$  de una lámina dieléctrica de índice de refracción  $n_2 = \sqrt{\varepsilon_{r2}}$  inmersa en el aire ( $n_1 = 1$ ) cuando incide sobre ella una onda plana con polarización  $\alpha$  viene dada por la siguiente expresión:

$$T_L^\alpha = \frac{(1 - R^\alpha)^2}{1 + (R^\alpha)^2 - 2R^\alpha \cos \delta}, \quad R_L^\alpha = 1 - T_L^\alpha, \quad \delta = 2 k_0 n_2 h \cos \theta_2 \quad (5.66)$$

siendo

$$\theta_2 = \arcsin \left( \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_1 \right) \quad (5.67)$$

el ángulo que forma la onda transmitida dentro de la lámina, que viene dado por la Ley de Snell. El término  $R^\alpha$  que aparece en la ecuación (5.66) es el coeficiente (en potencia) de Fresnel para la reflexión de una onda plana en una interfase aire-medio homogéneo para una cierta polarización  $\alpha$  de la onda incidente, que aparece representado en la figura 5.17.

Para este ejemplo se ha hecho por un lado un barrido en función del ángulo de incidencia  $\theta$  a una frecuencia fija, y por otro lado un barrido en frecuencia, para un ángulo de incidencia  $\theta$  fijo, en ambos casos para polarización de la onda incidente perpendicular (TE) y paralela (TM) al plano de incidencia. En la figura 5.18 se han representado los coeficientes de transmisión de la lámina en función del ángulo de incidencia  $\theta$  de la onda incidente para polarización (TE) y (TM), respectivamente, a una frecuencia de 10 GHz, y en la figura 5.19 se representan los coeficientes de transmisión de la lámina (TE) y (TM) en función de la frecuencia, para  $\theta = 45^\circ$ .

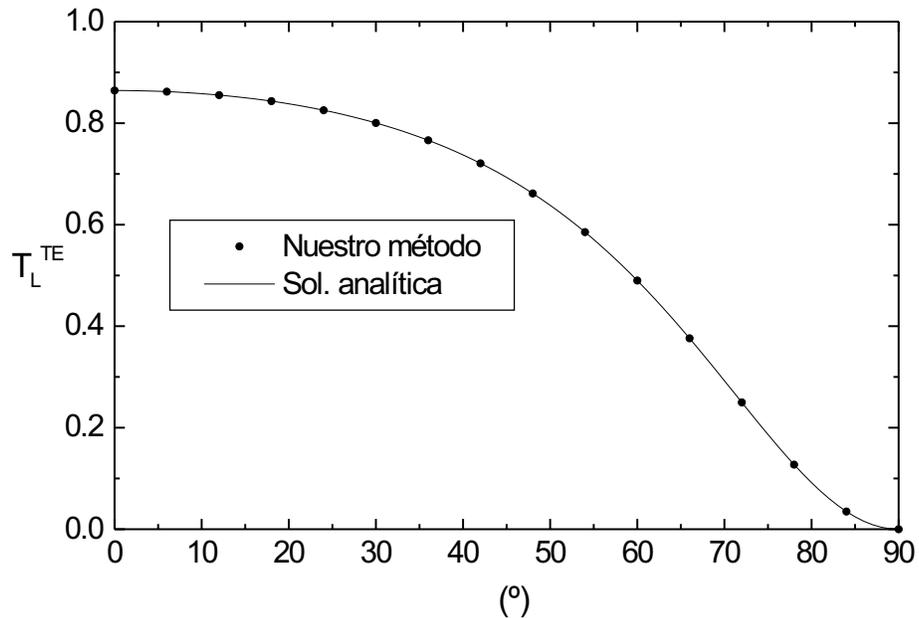
En la figura 5.18 (a), correspondiente a incidencia TE, el coeficiente de transmisión de la lámina  $T_L^{\text{TE}}$  disminuye con el ángulo de incidencia hasta hacerse cero para incidencia rasante ( $\theta = 90^\circ$ ). Ello es debido a que el coeficiente de reflexión de la discontinuidad aire-medio homogéneo  $R^{\text{TE}}$  aumenta con el ángulo de incidencia hasta valer 1 para  $\theta = 90^\circ$ . Por otro lado, en la figura 5.18 (b) el coeficiente de transmisión  $T_L^{\text{TM}}$  aumenta con el ángulo  $\theta$  hasta hacerse máximo para un cierto valor (correspondiente al ángulo de Brewster (5.64)) a partir del cual vuelve a decrecer hasta valer 0 de nuevo para incidencia rasante.

Así mismo, en la figura 5.19 se observa una variación sinusoidal del coeficiente de transmisión de la lámina con la frecuencia para ambas polarizaciones, lo cual es debido a que en ambos casos aparece la frecuencia dentro del coseno de la ecuación (5.66). La transmisión alcanza a ciertas frecuencias un valor máximo de  $T_L^\alpha = 1$ , que corresponden a un espesor  $h$  de la lámina para la cual todas las ondas a la salida de la lámina interfieren constructivamente (diferencias de fase que son múltiplos de  $2\pi$ ). Esto ocurre cuando  $\cos \delta = 1$ , es decir, para valores de frecuencia que satisfacen la siguiente condición:

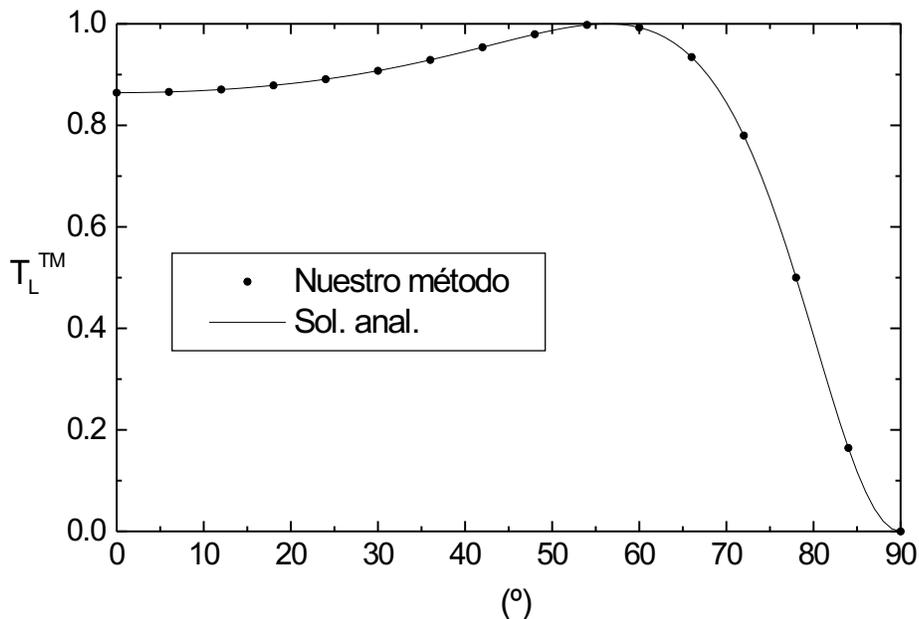
$$T_L^\alpha = 1 \Rightarrow \cos \delta = 1 \Rightarrow \delta = 2\pi m ; m = 0, 1, 2 \dots$$

$$f(\text{GHz}) = \frac{c \cdot 10^{-9}}{2n_2 h \cos \theta_t} m = 18,9 m \quad (5.68)$$

Estos valores de frecuencia para los cuales  $T_L^\alpha = 1$  se pueden identificar claramente en la figura 5.19. Sin embargo, no hay una condición que nos dé un valor de transmisión igual a cero, es decir, reflexión total. Ello es porque no hay una condición de interferencia destructiva

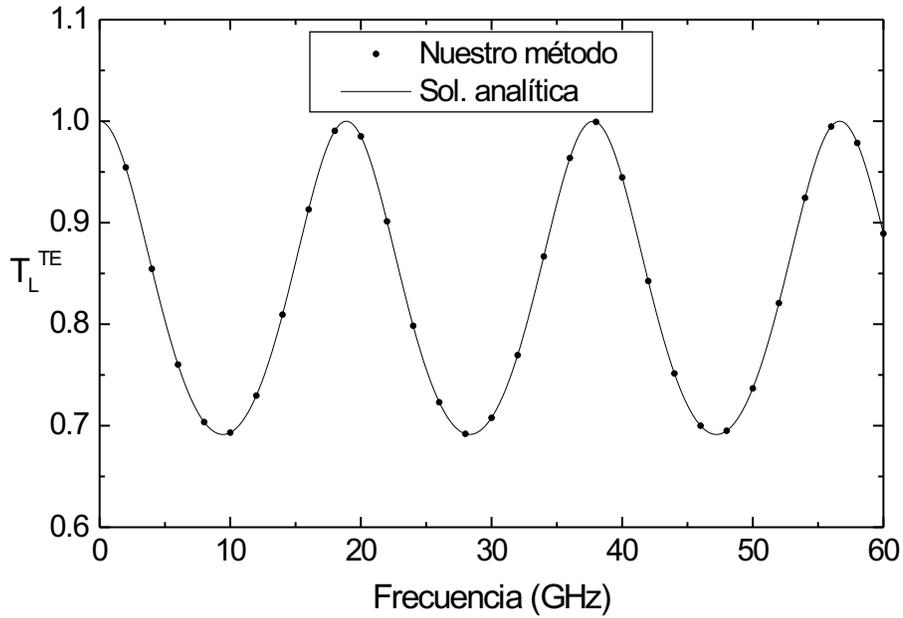


(a) Incidencia perpendicular

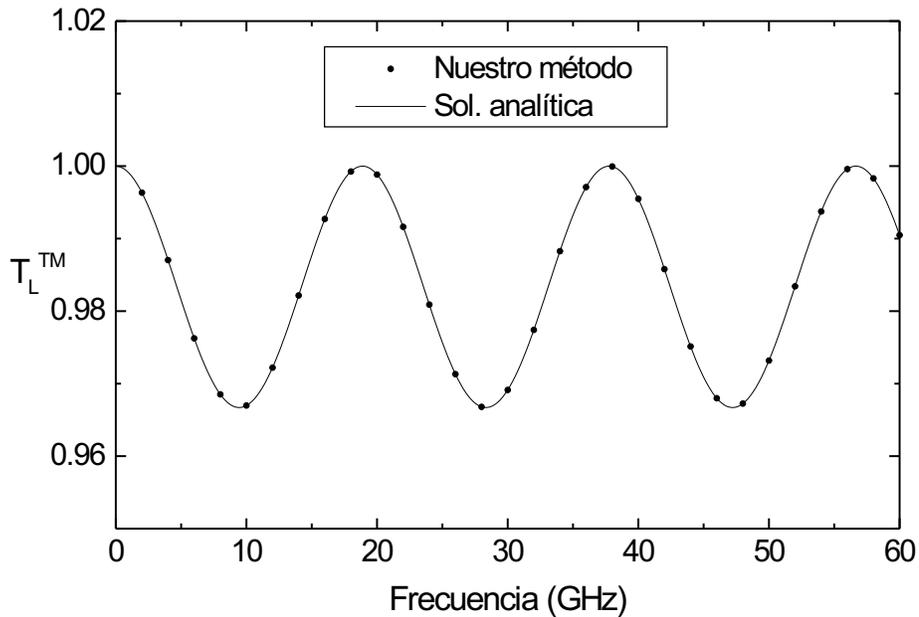


(b) Incidencia paralela

Figura 5.18: Transmitancia  $T_L^\alpha$  de una lámina dieléctrica homogénea de permitividad relativa  $\epsilon_{r2} = 2,25$  y espesor  $h = 6,0$  mm inmersa en el aire en función del ángulo de incidencia  $\theta$  para una frecuencia de 10 GHz. (a) Incidencia con polarización perpendicular al plano de incidencia (TE). (b) Incidencia con polarización paralela al plano de incidencia (TM). Comparación de los resultados obtenidos con nuestro método con la solución analítica (5.66).



(a) Incidencia perpendicular



(b) Incidencia paralela

Figura 5.19: Transmitancia  $T_L^\alpha$  de una lámina dieléctrica homogénea de permitividad relativa  $\epsilon_{r2} = 2,25$  y espesor  $h = 6,0$  mm rodeada de aire, en función de la frecuencia para un ángulo de incidencia  $\theta = 45^\circ$ . (a) Incidencia con polarización perpendicular al plano de incidencia (TE). (b) Incidencia con polarización paralela al plano de incidencia (TM). Comparación de los resultados obtenidos con nuestro método con la solución analítica (5.66).

de todas las ondas transmitidas por la lámina. Al observar la expresión del coeficiente de transmisión  $T_L^\gamma$  en la ecuación (5.66), se aprecia que sólo puede valer cero para  $R^\alpha = 1$ , condición que se cumple sólo en dos casos: uno de ellos corresponde a la incidencia rasante ( $\theta = 90^\circ$ ), y el otro se cumple para cualquier valor del ángulo de incidencia cuando la lámina dieléctrica está hecha de un material dieléctrico con índice de refracción infinito (conductor). Ninguno de esos dos casos tienen interés en este contexto. Podemos concluir que al incidir con una onda electromagnética plana linealmente polarizada sobre una lámina de material dieléctrico homogéneo inmersa en el aire no es posible conseguir una respuesta en frecuencia que contenga un pico de reflexión total ( $R_L^\alpha = 1$ ).

El siguiente caso analizado es una extensión del caso anterior, y consiste en un sistema multicapa de 5 dieléctricos homogéneos inmersos en aire (filtro *Fabry-Perot*) iluminado por una onda plana bajo incidencia normal (incidencia 2D), cuya respuesta en frecuencia también tiene solución analítica [95]. El espesor total del sistema multicapa es de  $h = 16,2$  mm. Los espesores de cada capa son los siguientes:  $h_1 = 2,0$  mm,  $h_2 = 4,0$  mm,  $h_3 = 4,2$  mm,  $h_4 = 4,0$  mm y  $h_5 = 2,0$  mm; las permitividades relativas de los cinco materiales son  $\varepsilon_{r1} = 6,5$ ,  $\varepsilon_{r2} = 1,067$ ,  $\varepsilon_{r3} = 6,373$ ,  $\varepsilon_{r4} = 1,023$ , y  $\varepsilon_{r5} = 6,5$ . Esta estructura multicapa ha sido diseñada como un filtro en transmisión para incidencia normal [28]. En la figura 5.20 se representa el coeficiente de reflexión en potencia  $R$  de esta estructura bajo incidencia normal de una onda plana en el rango de 12,4 a 18,8 GHz (en el caso de incidencia normal, la respuesta en reflexión de la lámina homogénea es independiente de la polarización de la onda incidente), y se compara con los valores obtenidos en [28]. De nuevo se puede comprobar que los resultados obtenidos con la teoría de las *MDG* para estructuras formadas por capas de dieléctricos homogéneos coinciden con la solución analítica.

Una vez hechas estas primeras comprobaciones con estructuras que contienen únicamente láminas homogéneas, pasaremos a estudiar otras estructuras más complejas que incluyan alguna capa de medio periódico. El primer caso analizado es una *SSFD* formada por una única capa periódica inmersa en el aire con dos dieléctricos dentro del periodo de repetición (ver la figura 5.21), cuya respuesta en frecuencia ha sido analizada en [25] para incidencia 2D ( $\phi = 90^\circ$ ) con  $\theta = 45^\circ$ , y polarización TE. La capa periódica tiene un periodo  $D = 1,0$  mm y su espesor es de  $h = 1,713$  mm, mientras que los espesores y permitividades relativas de los dieléctricos que constituyen el medio periódico son los siguientes:  $l_1 = l_2 = D/2 = 0,5$  mm;  $\varepsilon_{r1} = 2,56$ ,  $\varepsilon_{r2} = 1,44$ . Para este caso de incidencia 2D y polarización TE, los modos del medio periódico se han obtenido empleando la base auxiliar correspondiente a la familia de modos TE para incidencia 2D de un medio dieléctrico homogéneo con permitividad relativa  $\tilde{\varepsilon}_{rb} = 1,44$ . En la figura 5.21 se ha representado con línea continua el coeficiente de reflexión en potencia  $R^{\text{TE}}$  de la *SSFD* obtenido con nuestro método para un ángulo de incidencia de  $\theta = 45^\circ$ , mientras que los puntos corresponden a los resultados obtenidos en [25]. Como se puede observar, en el rango analizado aparecen dos resonancias en esta estructura a las que se produce reflexión total correspondientes a las frecuencias de 148 y 162 GHz, respectivamente. Para obtener una buena convergencia de los resultados obtenidos con este método, se han empleado 150 modos de la base auxiliar en el cálculo de los modos del medio periódico ( $N = 150$ ), y se han incluido 15 modos en el cálculo de la *MDG* de la estructura ( $NMR = 15$ ). El tiempo de computación por punto en frecuencia ha sido de 0,28 s. Como

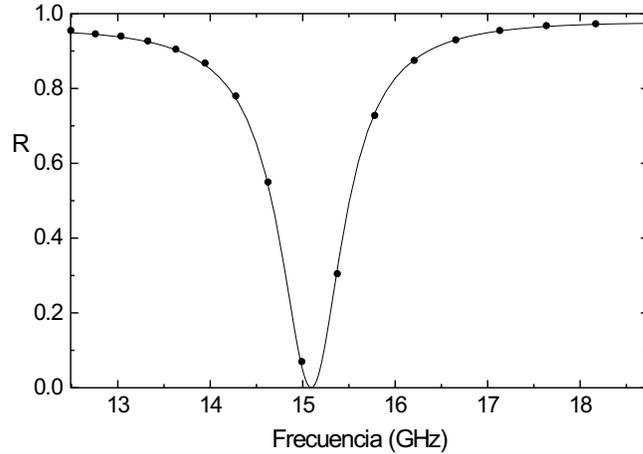


Figura 5.20: Coeficiente de reflexión  $R$  en función de la frecuencia de un sistema multicapa formado por 5 dieléctricos homogéneos inmersos en el aire (filtro *Fabry-Perot*) iluminado con una onda plana con  $\theta = 0^\circ$ . Parámetros de las capas: espesores:  $h_1 = 2,0$  mm,  $h_2 = 4,0$  mm,  $h_3 = 4,2$  mm,  $h_4 = 4,0$  mm y  $h_5 = 2,0$  mm; permitividades relativas:  $\epsilon_{r1} = 6,5$ ,  $\epsilon_{r2} = 1,067$ ,  $\epsilon_{r3} = 6,373$ ,  $\epsilon_{r4} = 1,023$ , y  $\epsilon_{r5} = 6,5$ . Comparación de nuestros resultados (línea continua) con los resultados obtenidos en [28] (puntos).

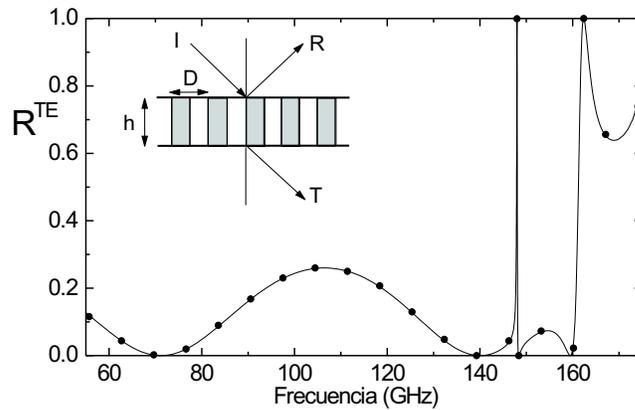


Figura 5.21: Coeficiente de reflexión  $R^{\text{TE}}$  en función de la frecuencia de una SSFD formada por una capa dieléctrica periódica en la dirección  $Y$  inmersa en el aire con dos dieléctricos dentro del periodo de repetición, iluminada por una onda plana 2D con  $\theta = 45^\circ$ ,  $\phi = 90^\circ$  y polarización perpendicular al plano de incidencia (TE), con los siguientes parámetros:  $D = 1,0$  mm,  $h = 1,713$  mm,  $l_1 = l_2 = D/2 = 0,5$  mm,  $\epsilon_{r1} = 2,56$ ,  $\epsilon_{r2} = 1,44$ . Comparación de nuestros resultados (línea continua) con los obtenidos en [25], representados con puntos.

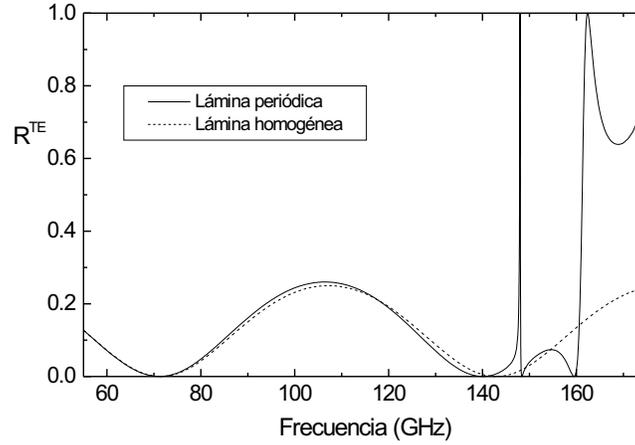


Figura 5.22: Comparación del coeficiente de reflexión  $R^{TE}$  de la lámina periódica inmersa en aire de la figura 5.21 (línea continua) con el de una lámina dieléctrica homogénea inmersa en aire de igual espesor que la lámina periódica, con una permitividad relativa igual a  $\bar{\epsilon}_r = 2,0$  (línea discontinua).

se puede observar, nuestros resultados coinciden perfectamente con los presentados en [25] para esta estructura.

Vamos a tratar de explicar la aparición de las resonancias en esta curva. El medio periódico soporta un número infinito de modos en la dirección  $Z$ . A frecuencias bajas, sólo será propagativo el primer modo, mientras que todos los demás modos serán evanescentes, de forma que la lámina periódica se comporta aproximadamente como si tuviese una constante dieléctrica uniforme igual al promedio de las constantes dieléctricas que constituyen el medio periódico, que en este caso es de  $\bar{\epsilon}_r = (2,56 + 1,44)/2 = 2,0$ . A frecuencias más altas, habrá más de un modo propagándose simultáneamente en el medio periódico, de forma que el comportamiento en frecuencia se alejará del de una lámina homogénea con el valor de la constante dieléctrica promedio  $\bar{\epsilon}_r$ . De hecho, se ha observado que en el medio periódico se propaga un único modo TE hasta la frecuencia de 142,61 GHz, a partir de la cual se empieza a propagar el segundo modo TE del medio periódico. Para comprobarlo, en la figura 5.22 se ha representado en línea continua de nuevo el coeficiente de reflexión TE de la SSFD anterior obtenido con nuestro método para incidencia 2D ( $\phi = 90^\circ$ ) y un ángulo de incidencia de  $\theta = 45^\circ$ , y en línea discontinua el coeficiente de reflexión  $R^{TE}$  para el mismo ángulo de incidencia correspondiente a una lámina dieléctrica homogénea con  $\bar{\epsilon}_r = 2,0$  inmersa en aire, de igual espesor que la lámina periódica. Como se puede apreciar, ambas curvas coinciden a bajas frecuencias, hasta que se excita el segundo modo propagativo en la estructura periódica. A partir de la excitación del segundo modo de la lámina periódica, el coeficiente de reflexión  $R^{TE}$  tiene un comportamiento totalmente distinto al de la lámina homogénea. A ciertos valores específicos de la frecuencia y del ángulo de incidencia, la onda plana incidente es capaz de excitar los modos guiados por la estructura periódica en la dirección transversal, conocidos habitualmente como modos *leaky* [25] (ver la figura 5.23). Estos modos son débilmente

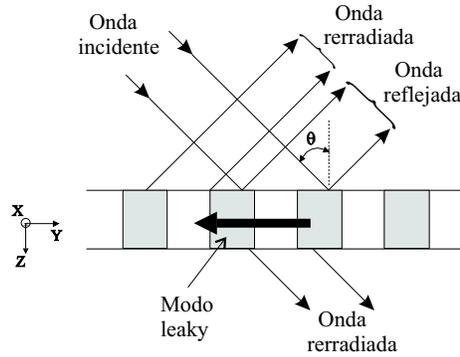


Figura 5.23: Incidencia de una onda plana sobre una lámina dieléctrica periódica y rerradiación de la onda *leaky* guiada por dicha lámina que es excitada en la misma cuando se cumple la condición de ajuste de fase.

guiados en el eje  $Y$  debido a la periodicidad de la estructura en dicha dirección, y por tanto rerradiarán su energía a medida que la onda avanza en la dirección del eje  $Y$ . Así pues, la onda plana tipo *leaky* rerradiada por encima de la lámina interfiere con la onda plana reflejada que se genera directamente en la superficie superior de la lámina: cuando las dos componentes están en fase tiene lugar una reflexión fuerte, mientras que cuando están en oposición de fase, el campo reflejado total es pequeño, y la transmisión es alta. Como las fases tienen un comportamiento fuertemente dependiente con la frecuencia y con los ángulos de incidencia, aparecen fenómenos de reflexión total ( $R^{\text{TE}} = 1$ ) y transmisión total ( $R^{\text{TE}} = 0$ ) que dan lugar a una resonancia. La frecuencia a la que se produce dicha resonancia recibe el nombre de frecuencia de resonancia de la lámina periódica. La posición aproximada de la frecuencia de resonancia se puede predecir imponiendo la condición de ajuste de fase en la dirección  $Y$  de periodicidad entre la onda plana incidente,  $k_{y0}$ , y la del modo excitado en la guía dieléctrica periódica en la dirección transversal  $\kappa_g$ , pudiendo aproximarse la fase transversal de dicho modo por la siguiente expresión [25]:

$$\kappa_g \approx \kappa_m + \frac{2\pi}{D}n; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.69)$$

donde  $\kappa_m$  es la constante de propagación del  $m$ -ésimo modo TE en una guía dieléctrica homogénea en la dirección  $Y$  de espesor  $h$ , cuyos modos se pueden obtener analíticamente [4], mientras que  $2\pi n/D$  es el vector de red de orden  $n$  proporcionado por la red periódica. La obtención de los modos de una lámina homogénea usando la formulación tradicional descrita en [4] conduce a la resolución numérica de una ecuación trascendente, lo que resulta bastante incómodo, por lo que hemos optado por elegir otro método. Para calcular las constantes de propagación de dichos modos ( $\kappa_m$ ) hemos empleado el Método de las Bases Bi-Ortogonales para medios con condiciones periódicas, situando una lámina homogénea dentro de una celda periódica rellena de aire, de periodo "suficientemente grande".

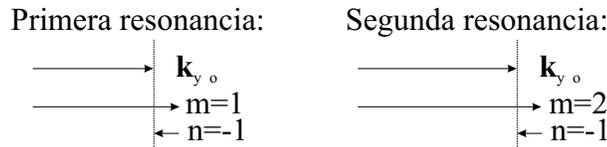
La condición de ajuste de fase para el caso general de incidencia oblicua 3D se traduce en la siguiente expresión [89]:

$$k_{y0} \approx |\kappa_m + \frac{2\pi}{D}n| \Rightarrow k_0 \sin \theta \sin \phi \approx |\beta_{gym} + \frac{2\pi}{D}n| \quad (5.70)$$

que para el caso de incidencia 2D ( $\phi = 90^\circ$ ) se expresa como [25], [96]:

$$k_0 \sin \theta \approx |\kappa_m + \frac{2\pi}{D}n| \quad (5.71)$$

Dicha expresión predice las dos frecuencias de resonancia que se observan dentro de la banda representada en la figura 5.22, siendo la primera resonancia a 148 GHz, correspondiente a  $m = 1$ ,  $n = -1$ , y la segunda resonancia a 162 GHz, correspondiente a  $m = 2$ ,  $n = -1$ , lo que se pretende representar en el siguiente diagrama, donde la suma de los dos vectores de la parte inferior debe ser igual al vector de la parte superior  $k_{y0}$  (condición de ajuste de fase):



Como el vector representado por  $m = 1$  y  $m = 2$  es más grande que el vector  $k_{y0}$ , el índice  $n$  debe ser igual a  $-1$ .

El siguiente problema analizado es también una lámina dieléctrica periódica inmersa en el aire, con dos dieléctricos dentro de la celda unidad. En este caso la periodicidad de la lámina es de  $D = 29$  mm, y su espesor es de  $h = 6,35$  mm. Los parámetros de los dieléctricos que forman el medio periódico son los siguientes (ver la figura 5.24):  $l_1 = l_2 = D/2 = 14,5$  mm,  $\varepsilon_{r1} = 2,59$ ,  $\varepsilon_{r2} = 1,0$ . En este caso se ha estudiado la respuesta en frecuencia de la estructura para incidencia normal (2D) de una onda plana con campo eléctrico polarizado en la dirección perpendicular al plano de incidencia (polarización TE). En la figura 5.24 se representa con línea continua el coeficiente de reflexión  $R_0^{\text{TE}}$  del modo de Floquet de orden cero en el vacío obtenido con nuestro método, y se compara con los valores calculados en [97] (puntos). Para este caso se produce una resonancia a 9,65 GHz, para la cual  $R_0^{\text{TE}} = 1$ . En este caso se ha hecho la expansión modal de los modos del medio periódico con  $N = 200$  funciones base TE del problema auxiliar con  $\tilde{\varepsilon}_{rb} = 1,0$ . Por otro lado, para analizar la dispersión de la estructura se han incluido  $NMR = 15$  modos. El tiempo de computación por punto en frecuencia ha sido de 0,29 s. De nuevo, ambos resultados coinciden.

La siguiente SSFD analizada es de nuevo una lámina dieléctrica periódica de periodo  $D = 30,0$  mm y espesor  $h = 8,7$  mm inmersa en el aire con dos dieléctricos dentro del periodo de repetición. La respuesta de esta lámina ha sido estudiada experimentalmente en [27], donde se ha medido la transmitancia  $T_0^\beta$  del modo de Floquet de orden cero difractado cuando dicha lámina es iluminada por una onda plana 2D bajo incidencia normal, tanto para polarización perpendicular (TE) como paralela (TM) al plano de incidencia. Los parámetros de los dieléctricos son los siguientes:  $l_1 = l_2 = D/2 = 15,0$  mm;  $\varepsilon_{r1} = 2,59$ ,  $\varepsilon_{r2} = 1,0$ . En los cálculos se han tenido en cuenta las pérdidas en el material dieléctrico 1 del medio periódico, para el cual se ha considerado que tiene una tangente de pérdidas de  $\tan\delta_1 = 0,0067$ . Como base auxiliar, se han empleado los modos de un dieléctrico homogéneo con  $\tilde{\varepsilon}_{rb} = 1,0$ . Se ha hecho un barrido en frecuencia de 4 a 20 GHz, considerando un ángulo de incidencia de  $\theta = 1^\circ$ . En la figura 5.25 se representa la transmitancia en dB para polarización TE de la estructura calculada con nuestro método, y se compara con las medidas experimentales

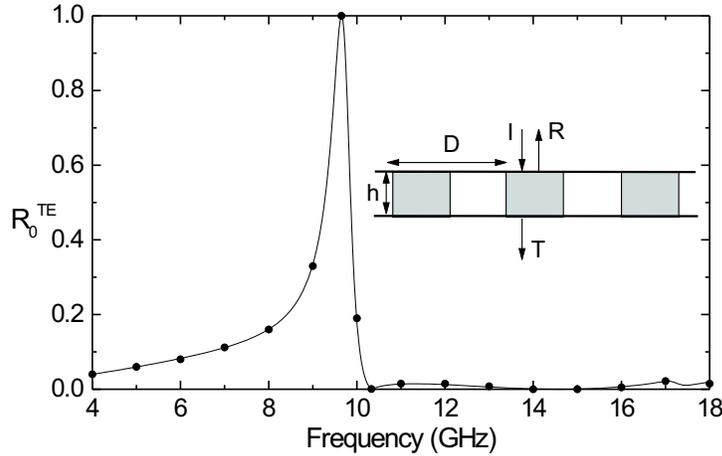


Figura 5.24: Coeficiente de reflexión  $R_0^{\text{TE}}$  del modo de Floquet de orden cero en función de la frecuencia de una SSFD formada por una capa dieléctrica periódica inmersa en el aire con dos dieléctricos dentro del periodo de repetición, iluminada por una onda plana 2D ( $\phi = 90^\circ$ ) con incidencia normal y polarización TE, con los siguientes parámetros:  $D = 29,0$  mm,  $h = 6,35$  mm,  $l_1 = l_2 = D/2 = 14,5$  mm,  $\varepsilon_{r1} = 2,59$ ,  $\varepsilon_{r2} = 1,0$ . Comparación de nuestros resultados (línea continua) con los obtenidos en [97] (puntos).

presentadas en [27], mientras que la figura 5.26 corresponde a la transmitancia de la lámina para polarización TM. Experimentalmente se observan dos picos en la curva de transmitancia para ambas polarizaciones, que para polarización TE aparecen a las frecuencias de 8,7 y 9,2 GHz, mientras que para polarización TM aparecen a las frecuencias de 9,3 y 9,7 GHz. Debido a las pérdidas del material dieléctrico, la transmitancia a frecuencias por debajo de las resonancias es algo menor que la unidad. En las expansiones modales del medio periódico se han empleado  $N = 150$  funciones base para incidencia TE y  $N = 200$  funciones base para incidencia TM, y se han incluido  $NMR = 15$  modos en la construcción de las MDG en ambos casos, siendo el tiempo de computación por punto en frecuencia para cada polarización de 0,32 s y 0,45 s, respectivamente.

Con el fin de comprobar los resultados obtenidos con estructuras con varias capas en la dirección  $Z$ , a continuación se analizará una SSFD formada por tres capas dieléctricas inmersas en el aire, la primera de las cuales es una capa periódica con dos dieléctricos dentro del periodo de repetición, y las otras dos son homogéneas. Esta estructura ha sido también analizada en [27] bajo incidencia normal de una onda plana 2D ( $\theta = 0^\circ$ ,  $\phi = 90^\circ$ ), para las dos polarizaciones correspondientes a campo eléctrico perpendicular (TE) y paralelo (TM) al plano de incidencia. Los parámetros de las diferentes capas de la estructura son los siguientes (ver figura 5.27): capa 1 (periódica):  $h_1 = 3,5$  mm,  $D = 13,0$  mm,  $l_1 = l_2 = 6,5$  mm;  $\varepsilon_{rh1} = 2,59$ ,  $\varepsilon_{rl1} = 2,05$ ; capa 2 (homogénea):  $h_2 = 2,2$  mm,  $\varepsilon_{r2} = 6,13$ ; capa 3 (homogénea):  $h_3 = 3,3$  mm,  $\varepsilon_{r3} = 2,59$ . Para calcular los modos en el medio periódico (capa 1), se ha

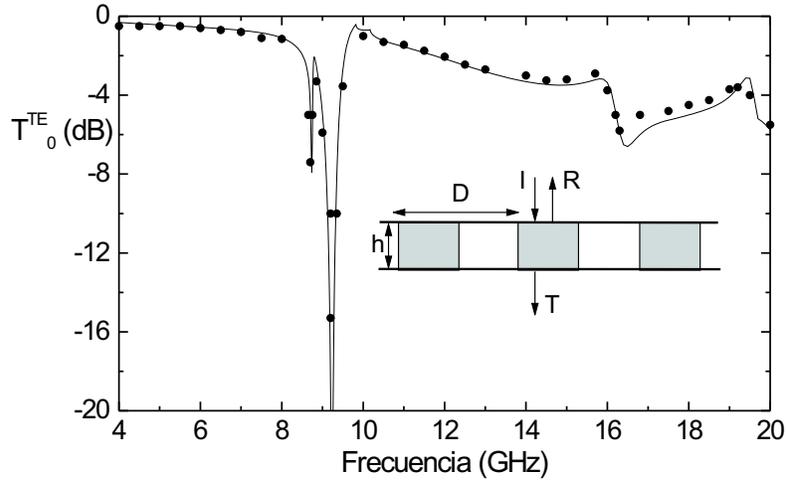


Figura 5.25: Transmitancia en dB del modo de Floquet de orden cero difractado por una lámina dieléctrica periódica en aire bajo iluminación de una onda plana 2D con incidencia normal polarizada perpendicularmente al plano de incidencia (TE). Parámetros de la estructura:  $D = 30,0$  mm,  $h = 8,7$  mm,  $l_1 = l_2 = D/2 = 15,0$  mm;  $\varepsilon_{r1} = 2,59$ ,  $\varepsilon_{r2} = 1,0$ ,  $\tan\delta_1 = 0,0067$ ,  $\theta = 1^\circ$ . Las medidas experimentales obtenidas en [27] se han representado con puntos.

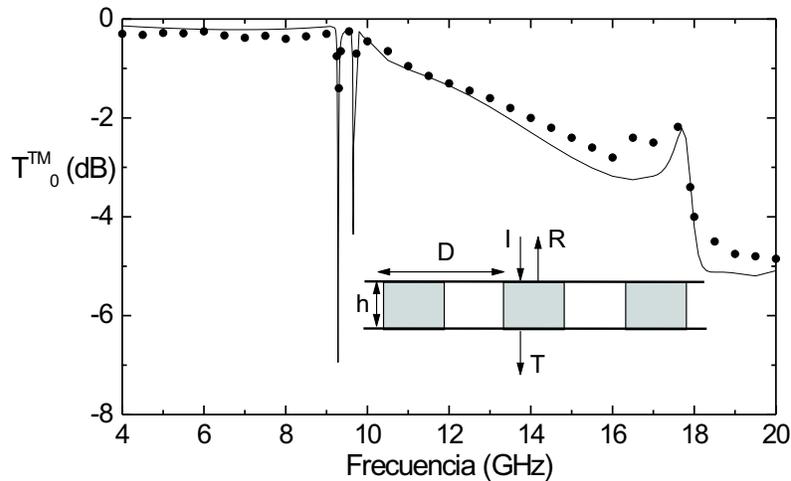


Figura 5.26: Transmitancia en dB del modo de Floquet de orden cero difractado por la lámina dieléctrica periódica cuyos parámetros se detallan al pie de la figura 5.25 bajo iluminación de una onda plana 2D con incidencia normal polarizada paralelamente al plano de incidencia (TM). Las medidas experimentales obtenidas en [27] se han representado con puntos.

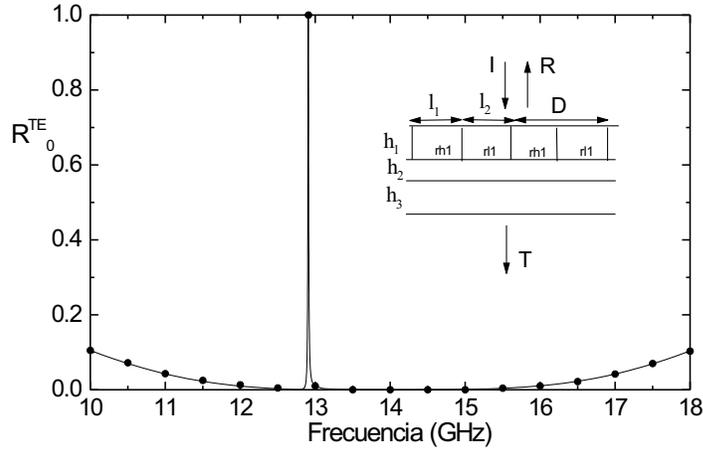


Figura 5.27: Coeficiente de reflexión  $R_0^{\text{TE}}$  del modo de Floquet de orden cero en función de la frecuencia de una SSFD formada por tres capas dieléctricas inmersas en el aire, iluminada por una onda plana 2D ( $\phi = 90^\circ$ ) con incidencia normal y polarización TE, con los siguientes parámetros: capa 1 (periódica):  $h_1 = 3,5$  mm,  $D = 13,0$  mm,  $l_1 = l_2 = 6,5$  mm;  $\varepsilon_{rh1} = 2,59$ ,  $\varepsilon_{rl1} = 2,05$ ; capa 2 (homogénea):  $h_2 = 2,2$  mm,  $\varepsilon_{r2} = 6,13$ ; capa 3 (homogénea):  $h_3 = 3,3$  mm,  $\varepsilon_{r3} = 2,59$ . Comparación de nuestros resultados (línea continua) con los obtenidos en [27] (puntos).

empleado como sistema auxiliar un dieléctrico homogéneo de permitividad relativa  $\tilde{\varepsilon}_{rb} = 2,05$ . En la figura 5.27 se muestra el coeficiente de reflexión en potencia para polarización TE correspondiente al modo de Floquet de orden cero en el rango de 10 a 18 GHz, en el cual sólo es propagativo ese modo en el vacío ( $R^{\text{TE}} = R_0^{\text{TE}}$ ). En la misma gráfica se han representado con puntos los valores calculados en [27] para la misma estructura. La frecuencia correspondiente al pico de resonancia obtenida en [27] es de 12,91 GHz, valor que coincide con nuestros resultados. El resto de puntos en frecuencia comparados también coinciden perfectamente. Para este caso se han empleado  $N = 150$  modos TE de la base auxiliar en la expansión de los modos del medio periódico, y  $NMR = 9$  modos en la construcción de las MDG (hay un sólo modo propagativo en el vacío en el intervalo de frecuencias analizado). El tiempo empleado por punto en frecuencia fue de 0,27 s. Por otro lado, en la figura 5.28 se representa el coeficiente de reflexión en potencia de la misma estructura para incidencia normal con polarización TM en el mismo intervalo de frecuencias, en el cual también es propagativo sólo el modo de Floquet de orden cero en el vacío ( $R^{\text{TM}} = R_0^{\text{TM}}$ ). Para este caso se han empleado  $N = 200$  modos y  $NMR = 9$  modos, con un tiempo de computación por punto en frecuencia de 0,36 s. De nuevo se comparan nuestros resultados con los presentados en [27], pudiéndose comprobar de nuevo que ambos coinciden.

A continuación hemos analizado una SSFD que ha sido diseñada en [29] como un filtro en transmisión (paso banda) para incidencia normal de una onda plana 2D ( $\theta = 0^\circ$ ,  $\phi = 90^\circ$ ) con polarización perpendicular al plano de incidencia (TE). La estructura está formada por un

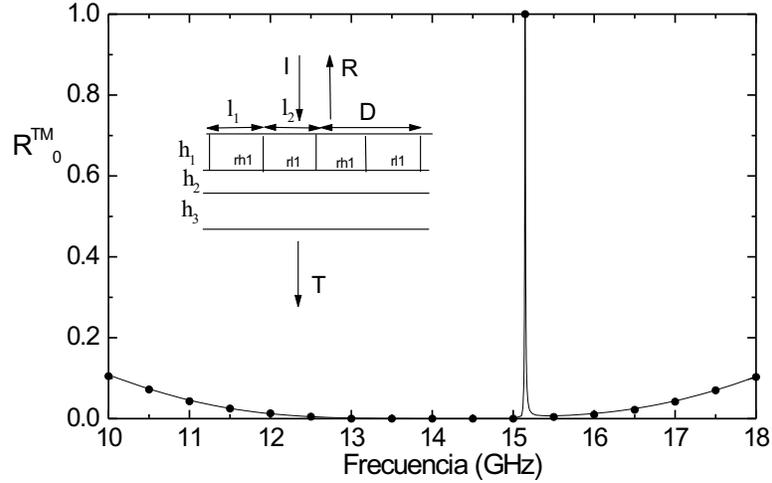


Figura 5.28: Coeficiente de reflexión  $R_0^{\text{TM}}$  del modo de Floquet de orden cero de la misma SSFD descrita al pie de la figura 5.27, bajo incidencia normal y polarización TM. Comparación de nuestros resultados (línea continua) con los obtenidos en [27] (puntos).

elevado número de capas en la dirección  $Z$ . Además, en este caso hay dos capas dieléctricas periódicas. Se trata de una estructura formada por ocho capas dieléctricas situadas entre el aire ( $\varepsilon_{ra} = 1,0$ ) y un sustrato de constante dieléctrica relativa igual a  $\varepsilon_{rs} = 2,31$ . Las dos capas periódicas son iguales. Los parámetros de las diferentes capas situadas entre el aire y el sustrato son los siguientes: capa 1 y 7 (periódicas):  $D = 0,3 \mu\text{m}$ ,  $h_1 = h_7 = 0,051 \mu\text{m}$ ,  $\varepsilon_{rh1} = \varepsilon_{rh7} = 6,25$ ,  $\varepsilon_{rl1} = \varepsilon_{rl7} = 4,84$ ,  $l_h = l_l = 0,15 \mu\text{m}$ ; capas 2, 4, 6 y 8 (homogéneas):  $h_2 = h_4 = h_6 = h_8 = 0,087 \mu\text{m}$ ,  $\varepsilon_{r2} = \varepsilon_{r4} = \varepsilon_{r6} = \varepsilon_{r8} = 1,9$ ; capas 3 y 5 (homogéneas):  $h_3 = h_5 = 0,051 \mu\text{m}$ ,  $\varepsilon_{r3} = \varepsilon_{r5} = 5,52$ . Para calcular los modos en los medios periódicos (capas 1 y 7), se ha empleado como sistema auxiliar un dieléctrico homogéneo de permitividad relativa  $\tilde{\varepsilon}_{rb} = 4,84$ . Para incidencia normal con polarización TE, tanto en el aire como en el sustrato sólo es propagativo el modo de Floquet de orden cero, por lo que en la figura 5.29 se ha representado la transmitancia  $T_0^{\text{TE}}$  del modo de Floquet de orden cero de la estructura, junto con los valores calculados en [29]. Estos resultados se han obtenido con  $N = 200$  modos del sistema auxiliar en los medios periódicos y  $NMR = 15$  modos para el cálculo de la MDG, siendo el tiempo de computación por punto en frecuencia de 1,45 s, los cuales concuerdan con los obtenidos en [29].

Todas las SSFD con láminas dieléctricas periódicas analizadas hasta este momento han sido estudiadas para el caso de incidencia oblicua 2D ( $\phi = 90^\circ$ ). A continuación pasaremos a analizar una lámina dieléctrica periódica situada entre aire y un sustrato de silicio que ha sido diseñada en [98] como una estructura antirreflejante para incidencia normal con polarización TE cuando es iluminada por radiación óptica a una longitud de onda de  $\lambda_0 = 1,55 \mu\text{m}$ . A esa longitud de onda la permitividad relativa del silicio es de  $\varepsilon_{rs} = 12,25$ . La lámina

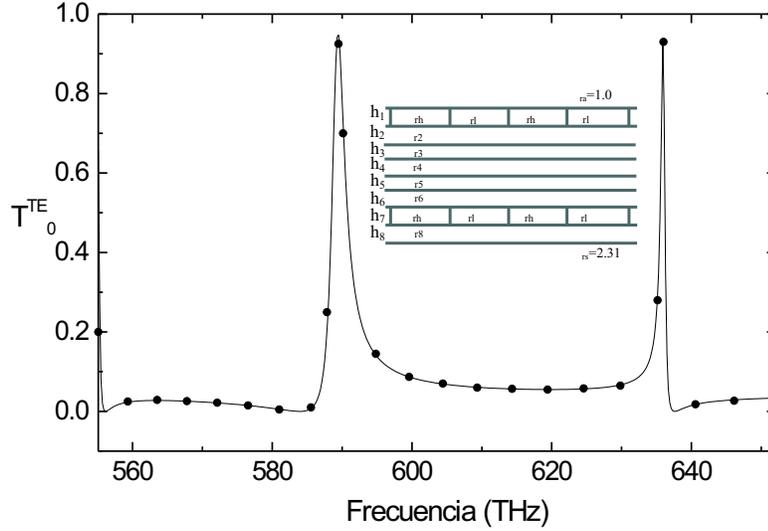


Figura 5.29: Transmitancia  $T_0^{\text{TE}}$  del modo de Floquet de orden cero de una SSFD formada por siete capas dieléctricas (dos de ellas periódicas) situadas entre aire y un sustrato dieléctrico ( $\epsilon_{rs} = 2,31$ ), bajo incidencia normal y polarización TE. Comparación de nuestros resultados (línea continua) con los obtenidos en [29] (puntos).

dieléctrica de periodo  $D$  y espesor  $h = 0,401\lambda_0$  está formada por dos dieléctricos dentro del periodo de repetición de espesores  $l_1 = 0,222D$ ,  $l_2 = 0,778D$ , y permitividades relativas  $\epsilon_{r1} = 12,25$  (silicio),  $\epsilon_{r2} = 1,0$  (aire). Para dicha estructura se ha calculado en primer lugar el coeficiente de reflexión de la onda plana reflejada en función de la relación  $\lambda_0/D$  cuando sobre la misma incide una onda plana con  $\theta = 0^\circ$  cuyo campo eléctrico está polarizado perpendicularmente al plano de incidencia (polarización TE). En los cálculos se ha empleado como sistema auxiliar un dieléctrico homogéneo de permitividad relativa  $\tilde{\epsilon}_{rb} = 1,0$ , de forma que han sido necesarias  $N = 170$  funciones base en la expansión de los modos del medio periódico y  $NMR = 15$  modos en la construcción de las MDG, con un tiempo de computación por punto en frecuencia de 0,38 s. Los resultados obtenidos con nuestro método para el caso 2D se muestran en la figura 5.30 (línea continua), y se comparan con los valores proporcionados en [98] (puntos). Como se puede apreciar, ambos resultados coinciden perfectamente.

Por otro lado, en la figura 5.31 se representa para la misma estructura el coeficiente de reflexión  $R_0^{\text{TE}^{3D}}$  de la onda plana reflejada en función de la relación  $\lambda_0/D$  cuando ésta es iluminada con una onda plana polarizada perpendicularmente al plano de incidencia ( $\text{TE}^{3D}$ ) con incidencia oblicua 3D para  $\theta = 45^\circ$ ,  $\phi = 45^\circ$ . En los cálculos se han empleado como base auxiliar las dos familias de modos Tipo-E y Tipo-H correspondientes a un dieléctrico homogéneo de permitividad relativa  $\tilde{\epsilon}_{rb} = 1,0$ , de forma que han sido necesarias  $N = 350$  funciones base en la expansión de los modos del medio periódico y  $NMR = 25$  modos

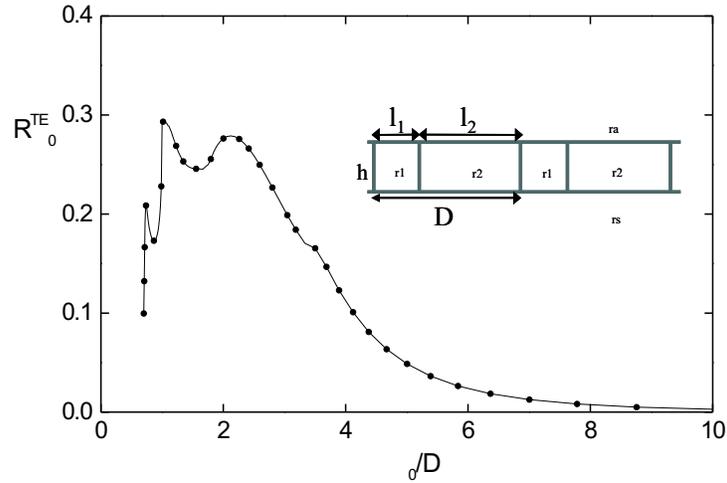


Figura 5.30: Coeficiente de reflexión  $R_0^{\text{TE}}$  en función de la relación  $\lambda_0/D$  de una lámina dieléctrica periódica situada entre aire y un substrato dieléctrico ( $\epsilon_{rs} = 12,25$ ) cuando se ilumina con una onda plana 2D con incidencia normal y polarización TE, a una longitud de onda de  $\lambda_0 = 1,55 \mu\text{m}$ . Parámetros:  $h = 0,401\lambda_0$ ,  $l_1 = 0,222D$ ,  $l_2 = 0,778D$ ,  $\epsilon_{r1} = 12,25$  (silicio),  $\epsilon_{r2} = 1,0$  (aire). Comparación de nuestros resultados (línea continua) con los obtenidos en [98] (puntos).

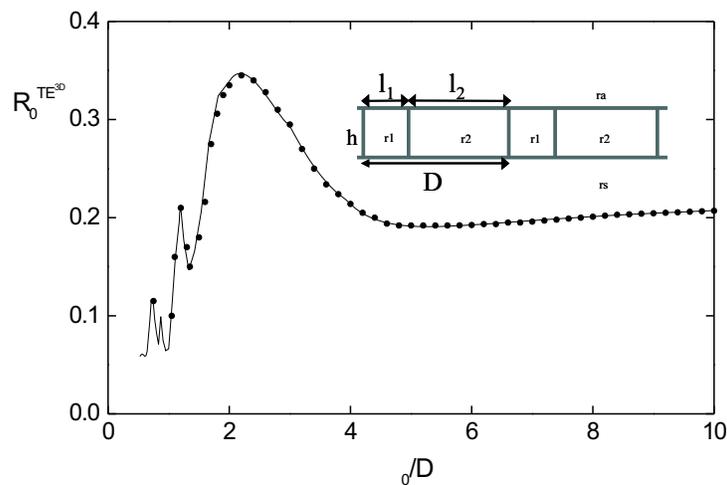


Figura 5.31: Coeficiente de reflexión  $R_0^{\text{TE}^{3D}}$  en función de la relación  $\lambda_0/D$  de la estructura de la figura 5.30 para el caso de incidencia oblicua 3D con  $\theta = 45^\circ$ ,  $\phi = 45^\circ$  y polarización  $\text{TE}^{3D}$ . Comparación de nuestros resultados (línea continua) con los obtenidos en [98] (puntos).

en la construcción de las MDG. El tiempo de computación por punto en frecuencia ha sido de 1,71 s. En la figura 5.31 se representa el coeficiente de reflexión calculado con nuestro método para esta estructura en el caso de incidencia 3D en función de la relación  $\lambda_0/D$ , y se compara con los valores obtenidos en [98] (puntos), obteniéndose un excelente acuerdo entre ambos resultados.

# Capítulo 6

## Diseño de filtros basados en SSFD

### 6.1. Introducción

Las estructuras periódicas están siendo cada vez más estudiadas y empleadas para el diseño y fabricación de dispositivos en los rangos de microondas, ondas milimétricas y también en el espectro óptico, debido a que muestran un carácter selectivo en frecuencia, el cual tiene su origen en las propiedades periódicas de las mismas. Así, estructuras multicapa formadas por la conexión en cascada de superficies metálicas periódicas impresas en capas dieléctricas homogéneas bajo incidencia oblicua han encontrado un amplio campo de aplicación en sistemas de comunicación por satélite como superficies selectoras de frecuencia (SSF) y antenas [13], y en la fabricación de giradores de polarización [15], [16], [17]. Por otro lado, en el campo de la óptica tienen una gran aplicación las redes de difracción [34]. También se han estudiado ampliamente las propiedades de estructuras dieléctricas periódicas [21], [22], [23], [24] (conocidas como cristales fotónicos) en cuanto a la posibilidad de generar bandas fotónicas prohibidas y permitidas. En los últimos años ha surgido un interés reciente en la aplicación de estructuras dieléctricas de capas delgadas que combinan el uso de capas dieléctricas homogéneas y periódicas ([25], [26], [27], [28]) que contienen una variación periódica a lo largo de alguna de las capas. A frecuencias milimétricas, dichas estructuras tienen la ventaja de poseer bajas pérdidas de absorción en comparación con los dispositivos que emplean superficies metálicas. Al conjunto de estas estructuras se les ha dado múltiples aplicaciones, como filtros en transmisión [29] y reflexión [28], [30], reflectores en antenas [14], redes de Bragg [36], sensores ópticos [37], etc.

Este capítulo se centra en el estudio y diseño de filtros en reflexión (elimina banda) empleando estructuras dieléctricas periódicas multicapa con periodicidad en una dimensión, denominadas Superficies Selectoras de Frecuencia Dieléctricas (SSFD), bajo excitación de ondas planas. La razón fundamental de estudiar filtros en reflexión es, como ya se comentó en la sección 5.8, que no son posibles de diseñar con una única lámina homogénea. Para llevar a cabo este estudio se emplea la formulación desarrollada en el capítulo 2. En primer lugar se describe cómo diseñar estas estructuras como filtros en reflexión bajo excitación de ondas planas, empleando una única lámina dieléctrica periódica con una modulación rectangular de la permitividad dieléctrica relativa. Así mismo, se muestra el efecto que tiene en la respuesta

de estos filtros la introducción de más dieléctricos dentro de la celda periódica. Por último, se describe cómo diseñar filtros en reflexión para incidencia oblicua basados en el fenómeno del ángulo de Brewster, cuando se excita la lámina dieléctrica periódica mediante una onda plana con polarización paralela al plano de incidencia.

## 6.2. Principios de los filtros en reflexión

Las SSFD que se analizarán son estructuras en cascada formadas por medios dieléctricos homogéneos o periódicos (en una dimensión). En el capítulo 4 se describe cómo estudiar el espectro modal de cada una de las etapas elementales que constituyen las SSFD para excitación de ondas planas, mientras que en el capítulo 5 se estudia una técnica para conectar unos medios con otros, empleando para tal fin el Método de Adaptación Modal que se describe en el capítulo 2, en combinación con la técnica de las matrices de dispersión generalizadas (MDG). Con los resultados de dicho estudio se ha desarrollado una herramienta de simulación muy eficiente para el análisis de la dispersión de SSFD, la cual permite modificar todos los parámetros eléctricos y geométricos: la periodicidad de la estructura, el espesor, la permitividad dieléctrica relativa de cada lámina (homogénea o periódica), la frecuencia, la polarización, y los ángulos de incidencia de la onda plana incidente. El algoritmo implementado proporciona, además de los coeficientes de reflexión y transmisión de las SSFD analizadas (relacionados con el módulo de los parámetros de dispersión), información de las fases de dichos parámetros de dispersión.

El caso más sencillo de SSFD consiste en una única lámina dieléctrica periódica con un perfil rectangular de la permitividad dieléctrica rodeada por un medio homogéneo, sobre la que incide una onda plana linealmente polarizada con ángulos de incidencia  $\theta$ ,  $\phi$ , como la que se muestra en la figura 5.1. El valor promedio de la constante dieléctrica de la lámina periódica  $\varepsilon_{rp}$  debe ser mayor que la constante dieléctrica del medio que la rodea, para que constituya efectivamente una guía dieléctrica. El diseño de filtros en reflexión empleando SSFD está basado en el principio de excitación de las resonancias de modos guiados en la lámina periódica [25]. Cuando incide una onda plana sobre esta estructura, la reflectancia de la misma coincide en la mayor parte del espectro con la respuesta de una lámina homogénea de constante dieléctrica igual al promedio de las constantes dieléctricas de los materiales que la constituyen  $\varepsilon_p$ . No obstante, para ciertos valores particulares de la frecuencia y ángulos de incidencia, es posible acoplar la onda incidente a alguno de los modos guiados en dicha estructura (en la dirección de periodicidad), que reciben el nombre de modos *leaky* [99], [100], [101] debido a que son modos de radiación. Estos modos, una vez excitados, irradian energía a ambos lados de la lámina. Para las frecuencias de resonancia correspondientes a la excitación de un modo *leaky*, se producen fenómenos de reflexión total y de transmisión total de la onda incidente. Así mismo, entorno a las frecuencias de resonancia se ha observado que se produce una variación brusca de la fase de los parámetros de dispersión. El valor aproximado de la posición de dichas frecuencias se puede predecir imponiendo la condición de ajuste de fase para la lámina homogénea equivalente de permitividad relativa promedio  $\varepsilon_{rp}$  [25], que para el caso general de incidencia oblicua tridimensional viene dada por la

ecuación (5.70).

Las resonancias de una lámina dieléctrica periódica dan lugar a respuestas espectrales en reflexión que tienen en general una forma asimétrica. No obstante, es posible diseñar un filtro en reflexión para incidencia normal con bandas laterales de baja reflectividad y con una respuesta en frecuencia simétrica respecto a la frecuencia central del filtro, si se escoge el espesor de dicha lámina próximo a un múltiplo de media longitud de onda [27]. En ese caso, la respuesta en frecuencia de la lámina en las proximidades de la frecuencia de resonancia mostrará una reflectancia baja (lámina de media onda), mientras que a la frecuencia de resonancia se producirá reflexión total. Obviamente, cuando una lámina periódica diseñada para incidencia normal es excitada con un ángulo de incidencia diferente, la respuesta en reflexión deja de ser simétrica. Otro efecto que tiene el cambio de los ángulos de incidencia  $\theta$  y  $\phi$  en la respuesta espectral es que se produce un desplazamiento de la frecuencia de resonancia de la lámina periódica. Dicho desplazamiento se puede predecir mediante la condición de ajuste de fase (5.70). Por otro lado, se ha observado que el ancho de banda de estos filtros en reflexión aumenta con la modulación de la permitividad dieléctrica de la lámina periódica. Ello se debe al aumento del carácter *leaky* de la estructura en las proximidades de la frecuencia de resonancia.

Además de los filtros diseñados para operar en condiciones de incidencia normal, también es posible diseñar filtros en reflexión para incidencia oblicua ( $\theta \neq 0^\circ$ ) cuando la onda plana de excitación está polarizada con el campo eléctrico paralelo al plano de incidencia (TM) e incide sobre la lámina periódica con un ángulo de incidencia  $\theta$  que coincide con el ángulo de Brewster (definido para una interfase entre un dieléctrico homogéneo con el valor promedio de la constante dieléctrica de la lámina periódica, y el medio homogéneo que la rodea (5.64)). En este caso se observa que la respuesta en frecuencia de la lámina periódica para incidencia con polarización TM en las proximidades de la frecuencia de resonancia muestra una reflectancia muy baja (como sucede para el caso de incidencia para el ángulo de Brewster en la lámina dieléctrica con la permitividad relativa promedio), excepto para la frecuencia de resonancia de la lámina periódica, frecuencia a la cual se producirá una reflexión total. Esta estructura se comporta como un filtro angular a la frecuencia de resonancia de la lámina.

## 6.3. Filtros diseñados

A continuación se detallarán los diferentes filtros basados en SSFD que han sido diseñados empleando las técnicas descritas en el apartado 6.2.

### 6.3.1. Filtro frecuencial con una lámina periódica

#### 6.3.1.1. Lámina dieléctrica con dos dieléctricos en la celda periódica

El primer filtro diseñado es un filtro en reflexión (elimina banda) consistente en una lámina dieléctrica periódica rodeada de aire con dos dieléctricos dentro del periodo de repetición, la cual es excitada mediante una onda plana con incidencia normal para polarización

del campo eléctrico paralelo a las láminas dieléctricas (TE) [3], [89]. Para empezar a diseñar la estructura, se han escogido dos medios dieléctricos de permitividades relativas  $\varepsilon_{r1} = 6,13$  y  $\varepsilon_{r2} = 3,7$  correspondientes a *E-glass* (fibra de vidrio) y sílice (óxido de silicio), respectivamente. Por simplicidad, escogemos los espesores de dichas láminas iguales:  $l_1 = l_2 = D/2$ . Con estos valores, la permitividad relativa promedio es de  $\varepsilon_{rp} = (\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2})/2 = 4,915$ . El siguiente paso en el diseño del filtro es elegir el rango de frecuencias y la frecuencia resonante; en este ejemplo hemos elegido un rango de frecuencias entre 13 y 17 GHz, y la frecuencia de resonancia elegida es  $f_0 = 15$  GHz. A continuación debemos fijar el grosor de la lámina dieléctrica para que la estructura se comporte como una lámina de media onda a la frecuencia central del filtro:

$$h = \frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda_0}{2\sqrt{\varepsilon_{rp}}f_0} = 4,508 \text{ mm} .$$

Por último, el valor del periodo  $D$  de la lámina periódica se elegirá de forma que aparezca una resonancia en la lámina periódica a la frecuencia central de diseño del filtro, que quedará determinado por la condición de ajuste de fase (5.71), según la cual para incidencia normal ( $\theta = 0^\circ$ ) deberá cumplirse:

$$0 \approx \left| \kappa_m + \frac{2\pi}{D}n \right| . \quad (6.1)$$

Dicha expresión proporciona un valor del periodo  $D = 10,921$  mm con  $n = -1$  y  $m = 1$ . Con estos parámetros obtenemos la respuesta del filtro mostrada en la figura 6.1. Podemos observar que la frecuencia de resonancia de esta estructura no coincide con la frecuencia de operación esperada  $f_0$ , y que la respuesta no es del todo simétrica. El desplazamiento de la frecuencia de resonancia es debido a que la condición de ajuste de fase (5.71) es una expresión analítica aproximada, ya que los modos en la dirección  $Y$  de la lámina periódica se han calculado de forma aproximada, en base a los modos de la lámina homogénea y la condición de periodicidad. Modificando ligeramente la periodicidad de la lámina ( $D$ ) y el grosor de la misma ( $h$ ), se consigue mover la frecuencia de resonancia al valor deseado, manteniendo una respuesta en frecuencia simétrica. Tras este ajuste, se obtienen los siguientes parámetros del filtro:  $D = 11,28$  mm,  $h = 4,37$  mm. Estos parámetros conducen a la respuesta mostrada en la figura 6.2 (ver filtro de banda ancha representado en línea continua).

Para obtener la respuesta en frecuencia de este filtro con nuestro método, primero se ha calculado el espectro modal en el medio periódico empleando el Método de las Bases Bi-ortogonales, utilizando como sistema auxiliar un medio dieléctrico homogéneo con  $\tilde{\varepsilon}_{rb} = 3,7$ . En la figura 6.2 (línea continua) se comprueba que  $R^{\text{TE}} < 0,2$  en el rango de 13 a 17 GHz (excepto alrededor de la frecuencia de resonancia), y  $R^{\text{TE}} > 0,5$  en el rango de 14,88 a 15,12 GHz, siendo por tanto el ancho de banda del filtro (FWHM o *Full Width at Half Maximum*) de 240 MHz (1,6 %). Así mismo, en la figura 6.3 se muestra la fase de los parámetros  $S_{11}$  y  $S_{21}$  del filtro cuya respuesta se representa en la figura 6.2 con línea continua. En dicha figura se observa que entorno a la frecuencia de resonancia se produce una variación brusca de la fase de los dos parámetros.

Como ya se comentó en la sección 6.2, el ancho de banda de estos filtros en reflexión aumenta con la modulación de la permitividad dieléctrica de la lámina periódica, debido al

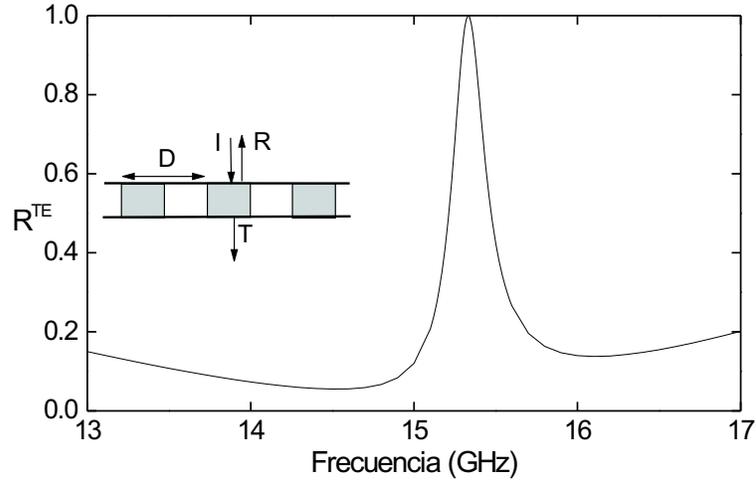


Figura 6.1: Coeficiente de reflexión en potencia  $R^{\text{TE}}$  del filtro en reflexión diseñado a una frecuencia central de 15 GHz para incidencia normal de una onda plana con polarización TE. Parámetros del filtro:  $D = 10,921$  mm,  $h = 4,508$  mm,  $l_1 = l_2 = D/2$ . Las permitividades relativas son  $\varepsilon_{r1} = 6,13$ ,  $\varepsilon_{r2} = 3,7$ .

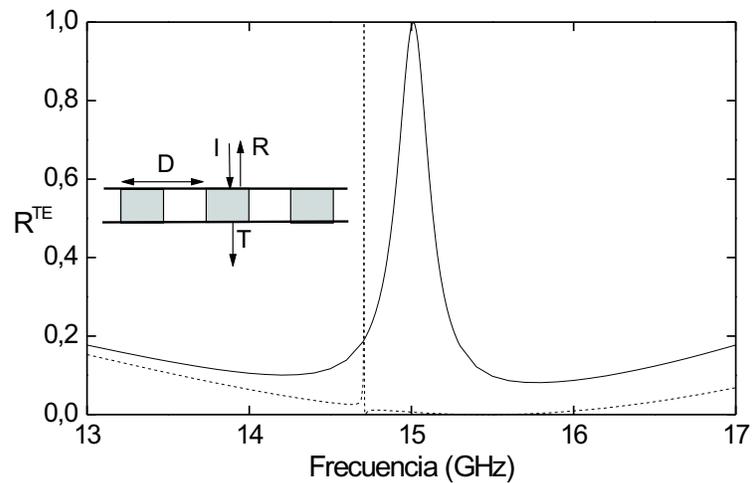


Figura 6.2: Coeficiente de reflexión en potencia  $R^{\text{TE}}$  del filtro en reflexión ya diseñado cuya respuesta se muestra en la figura 6.1, con los siguientes parámetros optimizados:  $D = 11,28$  mm,  $h = 4,37$  mm,  $l_1 = l_2 = D/2$ . Las permitividades relativas de los dieléctricos son  $\varepsilon_{r1} = 6,13$ ,  $\varepsilon_{r2} = 3,7$  para el filtro en reflexión de banda ancha (línea continua), mientras que para el filtro en reflexión de banda estrecha (línea discontinua) son  $\varepsilon_{r1} = 5,03$ ,  $\varepsilon_{r2} = 4,8$ .

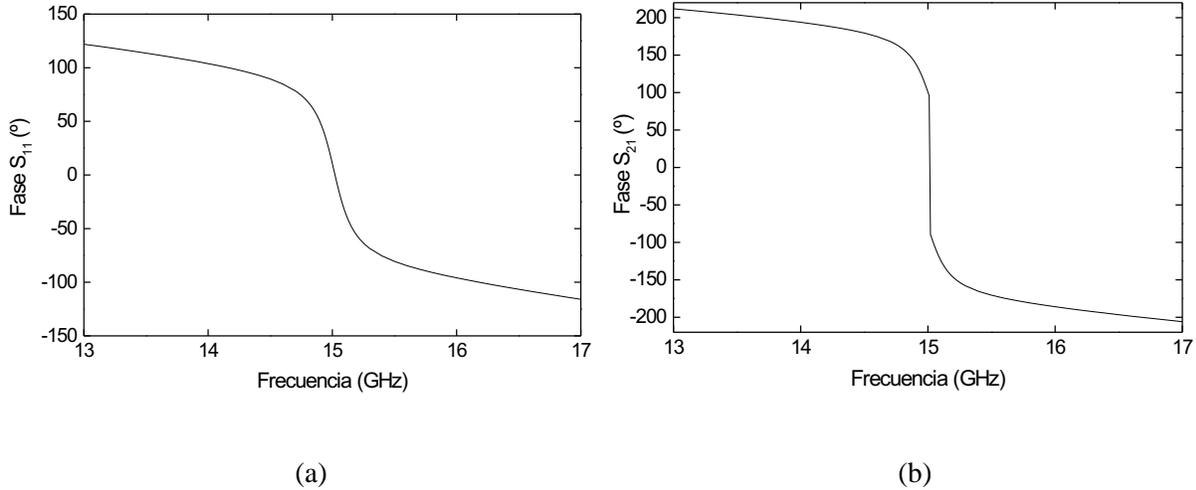


Figura 6.3: Fase de los parámetros  $S_{11}$  y  $S_{21}$  del filtro en reflexión de banda ancha cuya respuesta se muestra en la figura 6.2 (línea continua) para incidencia normal de una onda plana con polarización TE.

aumento del carácter *leaky* de la estructura en las proximidades de la frecuencia de resonancia. En la figura 6.2 se muestra la influencia de la modulación en el ancho de banda del filtro, en la cual se representa en línea discontinua la respuesta en frecuencia bajo incidencia normal de una lámina dieléctrica periódica con igual espesor, periodicidad y permitividad relativa promedio que el ejemplo anterior, pero con una modulación menor de la permitividad relativa (representada con línea discontinua). Con permitividades relativas de valores  $\varepsilon_{r1} = 5,03$ ,  $\varepsilon_{r2} = 4,8$  se consigue un filtro en reflexión de banda estrecha (como se muestra en la figura 6.2 en línea discontinua), siendo el ancho de banda del filtro en este caso de 1,8 MHz (0,1 %) a la frecuencia central de 14,7 GHz. Observamos que la resonancia no está situada en la frecuencia deseada  $f_0$ , lo que se podría conseguir modificando ligeramente los parámetros geométricos  $D$  y  $h$ . En la figura 6.4 también se muestra la fase de los parámetros  $S_{11}$  y  $S_{21}$  del filtro de banda estrecha. De nuevo se observa que entorno a la frecuencia de resonancia se produce una variación brusca de la fase de ambos parámetros.

En la figura 6.5 se muestra también el comportamiento del coeficiente de reflexión  $R^{\text{TE}}$  de los filtros de banda ancha (línea continua) y de banda estrecha (línea discontinua) correspondientes a la figura 6.2 fuera de banda, en el intervalo de 0 a 30 GHz. En dicha curva también se ha añadido con puntos la respuesta en frecuencia de una lámina homogénea de igual espesor  $h$  y permitividad relativa promedio  $\varepsilon_{rp}$  que las láminas periódicas de la figura 6.2, observándose que a bajas frecuencias el comportamiento de los dos filtros es muy similar al de la lámina homogénea, mientras que a frecuencias superiores a  $f_0$ , aparecen nuevas resonancias correspondientes a otros valores del índice  $n$  y también del modo excitado en la guía homogénea en la dirección de periodicidad ( $m$ ). También se observa que la respuesta del filtro de banda estrecha se aproxima más al comportamiento de la lámina homogénea fuera de las resonancias que el filtro de banda ancha; esto es debido a que la modulación de

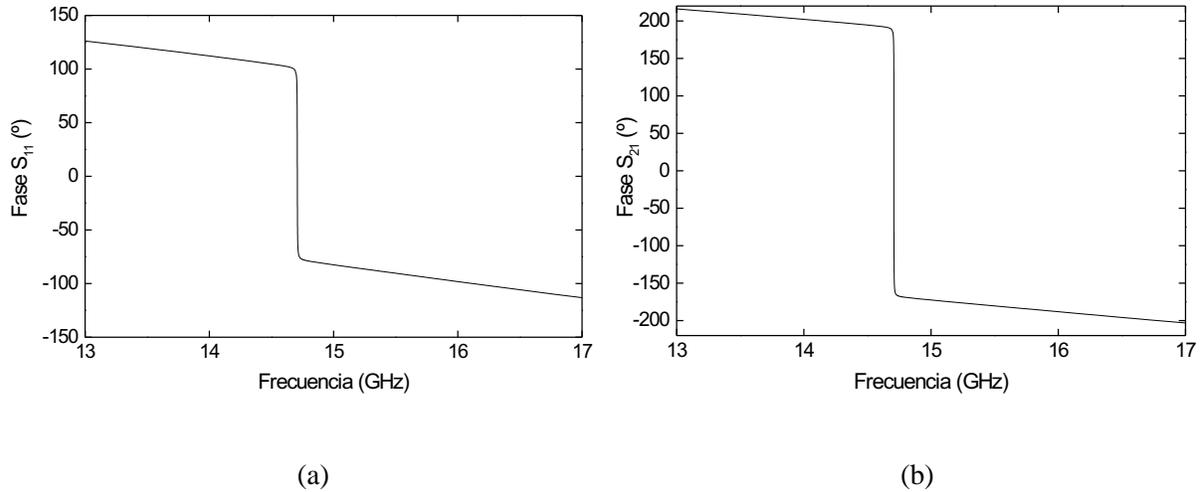


Figura 6.4: Fase de los parámetros  $S_{11}$  y  $S_{21}$  del filtro en reflexión de banda estrecha de la figura 6.2 (línea discontinua) para incidencia normal de una onda plana con polarización TE.

la permitividad dieléctrica del primero es menor que la del segundo, teniendo por lo tanto un menor carácter *leaky*.

En la figura 6.6 se analiza el efecto de las pérdidas en los materiales dieléctricos de los que está constituida la lámina periódica para el filtro de banda ancha cuya respuesta se muestra en la figura 6.2 en línea continua, en la banda de 12,5 a 17,5 GHz. En dicha figura se compara la respuesta en reflexión de dicho filtro en el caso sin pérdidas (línea continua) con la respuesta que tiene un filtro de iguales características que el de la figura 6.2 pero cuyos materiales dieléctricos tienen una tangente de pérdidas de  $\tan \delta = 0,001$ , que es un valor típico en estos materiales a frecuencias de microondas (representada en línea discontinua). En la respuesta del filtro con pérdidas en los dieléctricos se aprecia una disminución del coeficiente de reflexión en la banda analizada, así como un ligero ensanchamiento de la respuesta del mismo.

El siguiente paso es estudiar el comportamiento del filtro para incidencia oblicua. El efecto de variar el ángulo  $\theta$  en la respuesta en frecuencia del filtro de banda ancha para incidencia 2D ( $\phi = 90^\circ$ ) con polarización TE se muestra en la figura 6.7, y en la figura 6.8 para el filtro de banda estrecha. En ambas figuras se puede apreciar que, para incidencia oblicua, el pico de resonancia se desdobra en dos picos debido a la asimetría de la estructura, efecto que ya se ha mostrado experimentalmente en [27] para otro filtro en reflexión. Este comportamiento se puede predecir al imponer en este caso la condición de ajuste de fase (5.71) para incidencia 2D. Los picos de reflexión total que se observan para ambos filtros a frecuencias altas se pueden predecir mediante la condición de ajuste de fase (5.71) para el armónico espacial  $n = -1$ , mientras que los picos a frecuencias bajas, corresponden a la excitación del orden  $n = +1$ .

Por otro lado, cuando se fija el ángulo de incidencia  $\theta$  y se varía el ángulo azimutal  $\phi$  se observa un comportamiento similar en la respuesta del filtro. En la figura 6.9 se representa

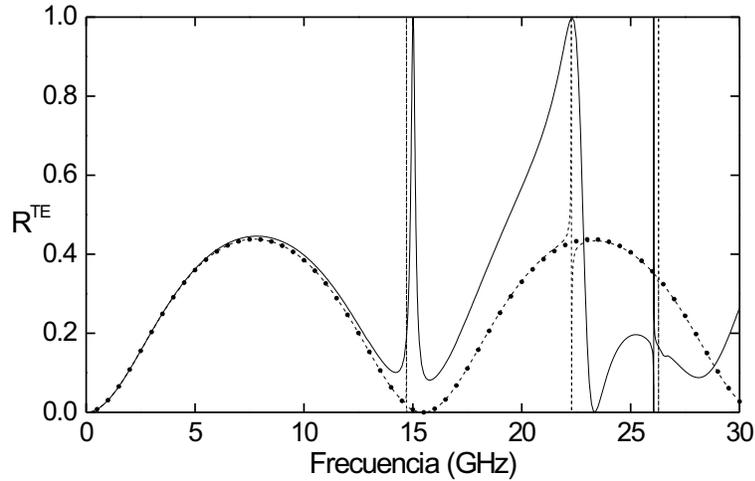


Figura 6.5: Representación del coeficiente de reflexión  $R^{TE}$  fuera de banda de los filtros de banda ancha (línea continua) y de banda estrecha (línea discontinua) correspondientes a la figura 6.2, en el intervalo de 0 a 30 GHz. También se representa con puntos la respuesta en frecuencia de una lámina homogénea de igual espesor  $h$  y permitividad relativa promedio  $\varepsilon_{rp}$ .

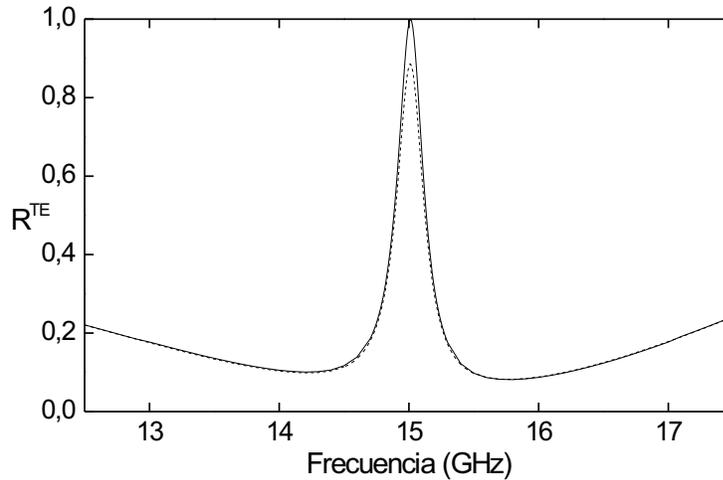


Figura 6.6: Comparación del coeficiente de reflexión  $R^{TE}$  del filtro de banda ancha correspondiente a la figura 6.2 (línea continua) con el coeficiente de reflexión de un filtro de iguales características que el de la figura 6.2, pero cuyos materiales dieléctricos tienen una tangente de pérdidas de  $\tan \delta = 0,001$  (representado en línea discontinua).

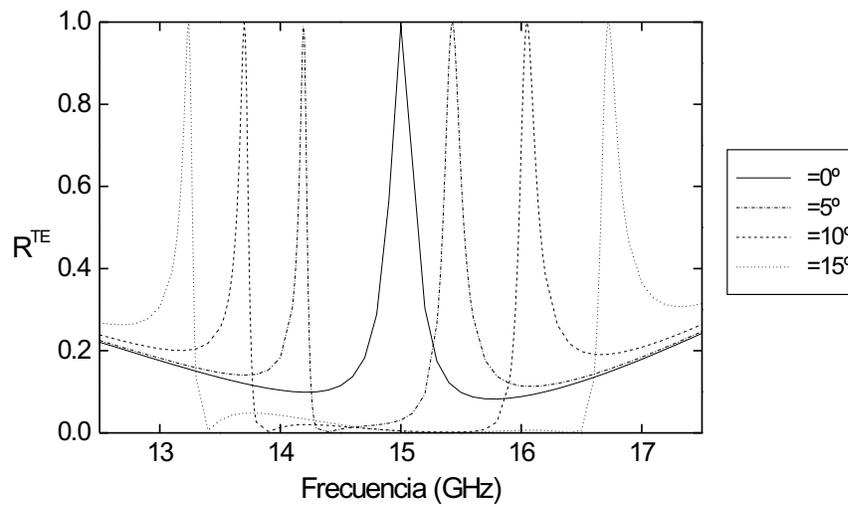


Figura 6.7: Efecto de la variación del ángulo de incidencia  $\theta$  en la respuesta en frecuencia del filtro de banda ancha cuya respuesta se muestra en la figura 6.2 con línea continua, bajo incidencia 2D y polarización TE ( $\phi = 90^\circ$ ) para cuatro valores distintos del ángulo de incidencia  $\theta$ .

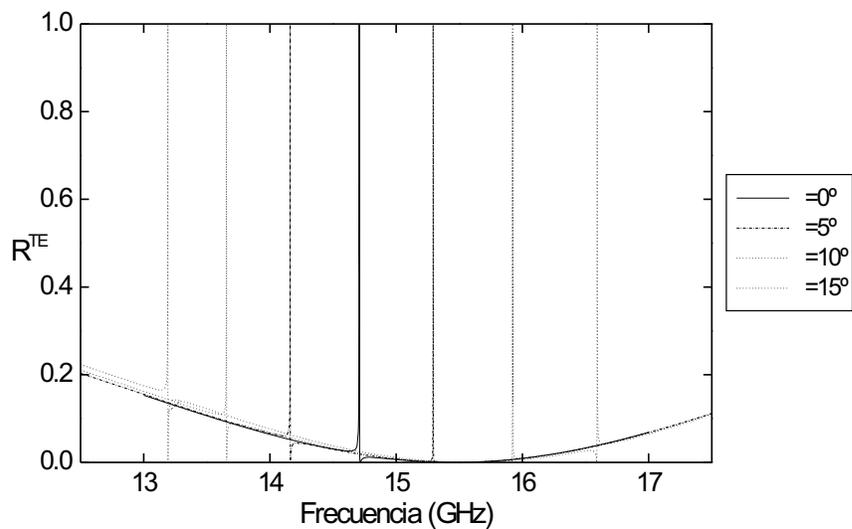


Figura 6.8: Efecto de la variación del ángulo de incidencia  $\theta$  en la respuesta en frecuencia del filtro de banda estrecha cuya respuesta se muestra en la figura 6.2 con línea discontinua, bajo incidencia 2D y polarización TE ( $\phi = 90^\circ$ ) para cuatro valores distintos del ángulo de incidencia  $\theta$ .

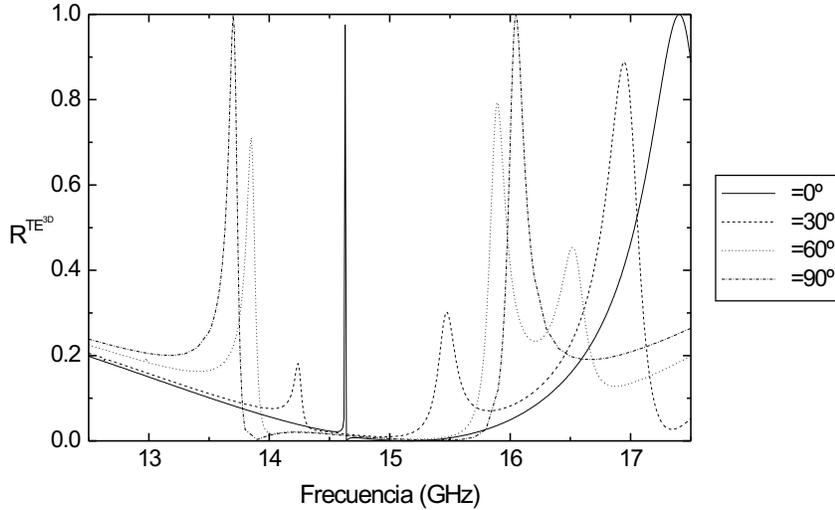


Figura 6.9: Respuesta espectral del filtro de banda ancha de la figura 6.2 para incidencia de una onda plana oblicua 3D ( $\phi \neq 90^\circ$ ) con  $\theta = 10^\circ$  y polarización  $TE^{3D}$  para cuatro valores distintos del ángulo de incidencia  $\phi$ .

el coeficiente de reflexión  $R^{TE^{3D}}$  para el filtro de banda ancha, y en la figura 6.10 para el filtro de banda estrecha, para un ángulo de incidencia de  $\theta = 10^\circ$ , correspondiente a cuatro ángulos azimutales diferentes,  $\phi = 90^\circ, 60^\circ, 30^\circ$  y  $0^\circ$ , para incidencia de una onda plana con polarización  $TE^{3D}$ . En este caso, la posición de las frecuencias de resonancia para incidencia 3D ( $\phi \neq 90^\circ$ ) se predice con la condición de ajuste de fase (5.70). Se ha comprobado que la variación de la fase de los parámetros  $S_{11}$  y  $S_{21}$  al variar los ángulos  $\theta$  y  $\phi$  no aporta información relevante.

Por último, en este caso también se ha hecho una representación tridimensional del coeficiente de reflexión del filtro de banda ancha de la figura 6.2 en función de los ángulos  $\theta$  y  $\phi$  para incidencia de una onda plana con polarización  $TE^{3D}$  a la frecuencia de diseño ( $f_0 = 15$  GHz), la cual se muestra en la figura 6.11. Lo primero que se puede observar en esta figura es que el coeficiente de reflexión varía en función del ángulo azimutal  $\phi$  para el caso de incidencia normal ( $\theta = 0^\circ$ ), lo cual puede resultar en principio algo inesperado. Esta variación se traduce en un giro del campo eléctrico de la onda incidente alrededor del eje  $Z$ , como se puede comprobar en las ecuaciones que describen la incidencia  $TE^{3D}$  (ver la sección 5.6). Por otro lado, en la figura 6.12 se ha representado el coeficiente de reflexión del mismo filtro a la frecuencia de 16 GHz para incidencia  $TE^{3D}$  en función de  $\theta$  y  $\phi$ . En ella se observa una clara degradación respecto a la respuesta mostrada en la figura 6.11 para incidencia normal.

Para el filtro de banda estrecha de la figura 6.2 tendremos un comportamiento similar; el coeficiente de reflexión para incidencia  $TE^{3D}$  se representa en la figura 6.13, en función de los ángulos  $\theta$  y  $\phi$ , a la frecuencia de resonancia de este filtro (14,7 GHz). A dicha frecuencia,

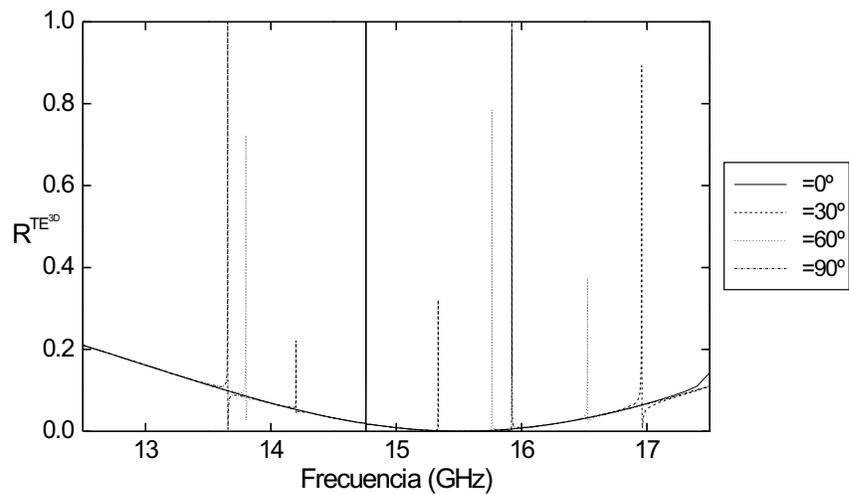


Figura 6.10: Respuesta espectral del filtro de banda estrecha de la figura 6.2 para incidencia de una onda plana oblicua 3D ( $\phi \neq 90^\circ$ ) con  $\theta = 10^\circ$  y polarización  $TE^{3D}$  para cuatro valores distintos del ángulo de incidencia  $\phi$ .

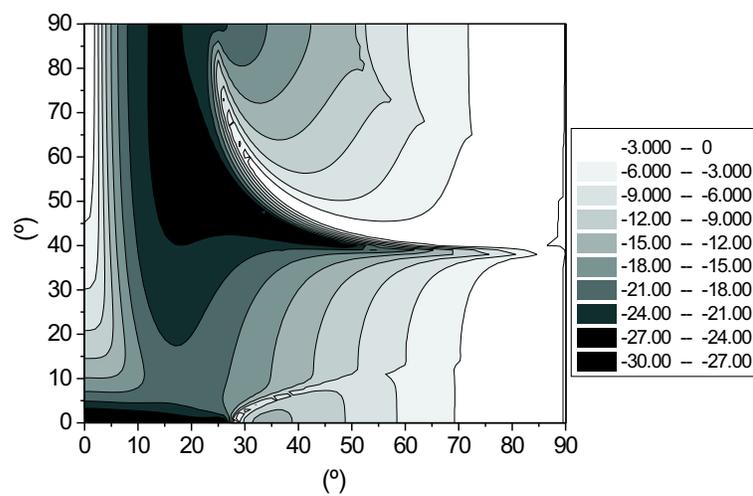


Figura 6.11: Coeficiente de reflexión  $R^{TE^{3D}}$  (dB) del filtro de banda ancha de la figura 6.2 en función de los ángulos  $\theta$  y  $\phi$ , para la frecuencia de diseño (15 GHz).

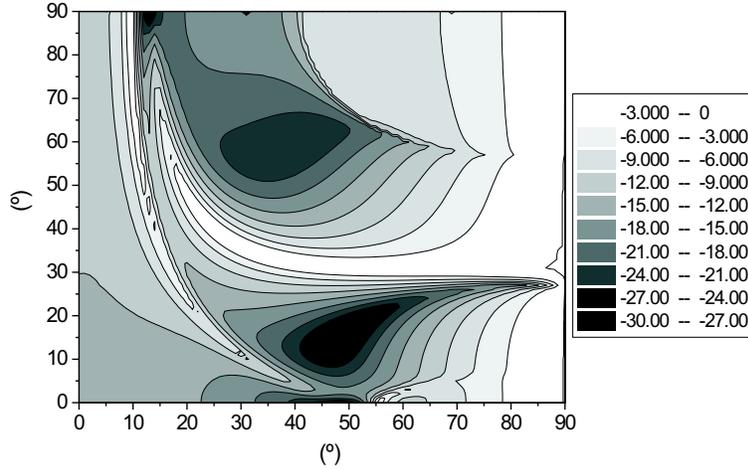


Figura 6.12: Coeficiente de reflexión  $R^{\text{TE}^{3\text{D}}}$  (dB) del filtro de banda ancha de la figura 6.2 en función de los ángulos  $\theta$  y  $\phi$ , para una frecuencia de 16 GHz.

se produce reflexión total ( $R^{\text{TE}^{3\text{D}}} = 1$ ) para incidencia normal,  $\theta = 0^\circ$ ,  $\phi = 90^\circ$  (cosa que no llega a apreciarse en la gráfica), y el coeficiente de reflexión pasa a ser nulo inmediatamente al alejarnos de esta dirección de incidencia (resonancia muy estrecha). Este efecto se puede apreciar en la figura 6.14, en la que se ha hecho una representación de la respuesta del filtro en las cercanías de la resonancia. Así mismo, en la figura 6.15 se muestra la respuesta del mismo filtro fuera de la resonancia, para una frecuencia de 16 GHz, observándose de nuevo una degradación de la respuesta del filtro para incidencia normal.

Este primer ejemplo de filtro en reflexión ha sido diseñado y analizado para incidencia de ondas planas con polarización TE. Los pasos a seguir en el proceso de diseño de filtros en reflexión para incidencia de ondas planas con polarización TM es idéntico (ver [96]), por lo que se han omitido en esta memoria por brevedad.

Las estructuras analizadas se han diseñado escogiendo que los espesores de los dieléctricos dentro de la celda elemental son iguales ( $l_1 = l_2 = D/2$ ). Se ha comprobado que la modificación del factor de llenado no cambia sustancialmente el principio de funcionamiento de estos filtros, ni el diseño de los mismos.

### 6.3.1.2. Lámina dieléctrica con tres dieléctricos en la celda periódica

En este apartado se va a analizar el efecto que tiene la introducción de un mayor número de materiales dieléctricos dentro de la celda periódica. Para ello, se ha estudiado la respuesta en frecuencia de una lámina dieléctrica periódica con igual espesor, periodicidad y permitividad relativa promedio  $\varepsilon_{rp}$  que en el ejemplo anterior (ver la figura 6.2), pero con tres dieléctricos distintos dentro de la celda elemental, cuyas permitividades relativas son  $\varepsilon_{r1} = 3,7$ ,  $\varepsilon_{r2} = 4,915$  y  $\varepsilon_{r3} = 6,13$ , respectivamente, de forma que la permitividad relativa

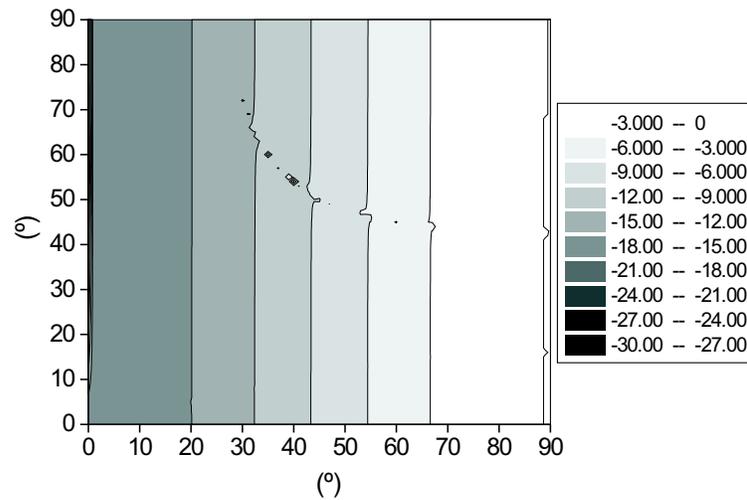


Figura 6.13: Coeficiente de reflexión  $R^{\text{TE}^{3\text{D}}}$  (dB) del filtro de banda estrecha de la figura 6.2 en función de los ángulos  $\theta$  y  $\phi$ , para la frecuencia de resonancia del filtro (14,7 GHz).

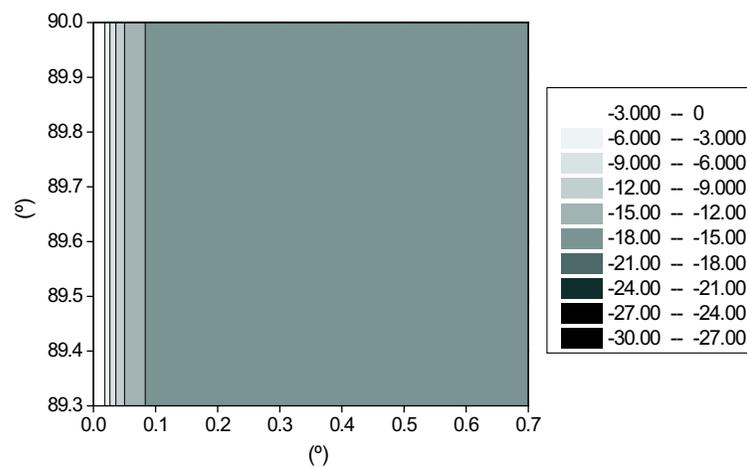


Figura 6.14: Ampliación de la respuesta angular del filtro de la figura 6.13 en las cercanías de la resonancia del filtro ( $\theta = 0^\circ$ ,  $\phi = 90^\circ$ .)

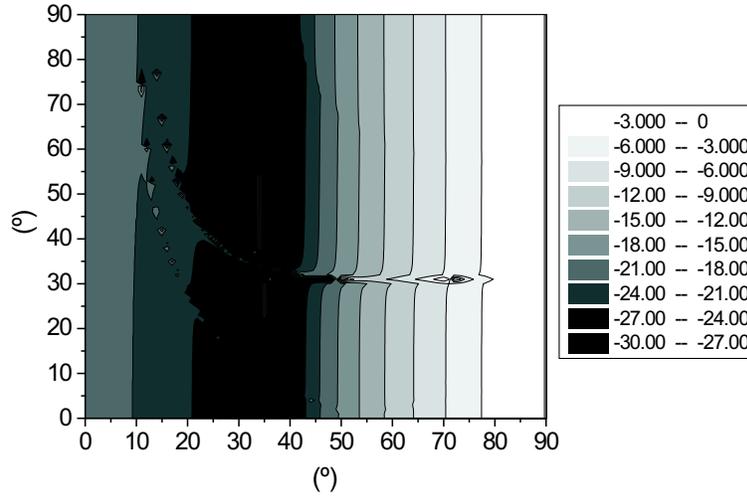


Figura 6.15: Coeficiente de reflexión  $R^{\text{TE}^{3D}}$  (dB) del filtro de banda estrecha de la figura 6.2 en función de los ángulos  $\theta$  y  $\phi$ , para una frecuencia de 16 GHz.

promedio es  $\varepsilon_{rp} = 4,915$ , al igual que en el filtro de la figura 6.2. La respuesta espectral de este nuevo filtro bajo incidencia normal de una onda plana con polarización TE se representa en la figura 6.16. Como se puede observar, en este caso aparecen dos resonancias a las frecuencias de 14,3 y 15,2 GHz, respectivamente, estando ambas entorno a la frecuencia de resonancia  $f_0$  que predice la condición de ajuste de fase (5.71). Así, vemos que el efecto que tiene en este caso la introducción de un nuevo material dieléctrico dentro de la celda periódica se traduce en un desdoblamiento del pico de reflexión total que se observaba en la figura 6.2 para el caso de una única discontinuidad dieléctrica en la celda unidad.

En el caso de dos láminas dieléctricas dentro de la celda elemental, los modos  $n = -1$  y  $n = +1$  son indistinguibles (incidencia normal), porque la onda *leaky* que se propaga en las direcciones  $+\hat{y}$  y  $-\hat{y}$ , respectivamente, encuentra la misma distribución de la permitividad dieléctrica. Sin embargo, cuando hay tres (o más) láminas dieléctricas en la celda elemental distribuidas de forma asimétrica respecto al centro de la celda, los modos  $n = -1$  y  $n = +1$  encuentran distribuciones de la permitividad dieléctrica distintas, generando el desdoblamiento de la resonancia predecida por la condición de ajuste de fase [27].

Por otro lado, el ancho de banda de los dos picos que se observan en la figura 6.16 resulta ser de 55 MHz (0,4 %) para la primera resonancia, y de 80 MHz (0,5 %) para la segunda resonancia, siendo en ambos casos menor que el ancho de banda del filtro de banda ancha con dos dieléctricos de la figura 6.2. Ello se debe a que en este caso hay una modulación más pequeña de la permitividad dieléctrica dentro de la celda periódica, ya que el nuevo material dieléctrico que se ha introducido en la celda periódica ( $\varepsilon_{r2}$ ) tiene un valor intermedio de la permitividad dieléctrica respecto al de los materiales anteriores ( $\varepsilon_{r1}$  y  $\varepsilon_{r3}$ ). En la figura 6.17 también se muestra la fase de los parámetros  $S_{11}$  y  $S_{21}$  del filtro con tres dieléctricos para incidencia normal en función de la frecuencia. De nuevo se observa que entorno a las

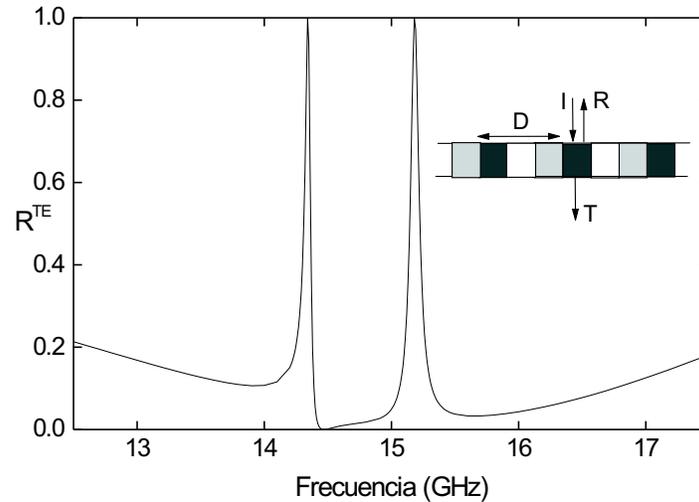


Figura 6.16: Coeficiente de reflexión en potencia  $R^{\text{TE}}$  de una lámina dieléctrica periódica con tres dieléctricos distintos dentro de la celda elemental, con igual espesor, periodicidad y permitividad relativa promedio que la lámina periódica cuya respuesta se muestra en la figura 6.2, bajo incidencia normal TE. Los parámetros del filtro son los siguientes:  $D = 11,28$  mm,  $h = 4,37$  mm,  $l_1 = l_2 = l_3 = D/3$ ,  $\varepsilon_{r1} = 3,7$ ,  $\varepsilon_{r2} = 4,915$ ,  $\varepsilon_{r3} = 6,13$ .

frecuencias de resonancia se produce una variación brusca de la fase de ambos parámetros. En la figura 6.18 se muestra también el comportamiento del coeficiente de reflexión  $R^{\text{TE}}$  de este filtro fuera de banda (línea continua), en el intervalo de 0 a 30 GHz, y se compara con la respuesta en frecuencia de una lámina homogénea de igual espesor y permitividad relativa promedio  $\varepsilon_{rp}$  (puntos), observándose que a bajas frecuencias el comportamiento del filtro es muy similar al de la lámina homogénea, mientras que a frecuencias superiores a la frecuencia de la primera resonancia, aparecen nuevas resonancias, también a pares, entorno a las frecuencias de resonancia que predice la condición de ajuste de fase para dichas frecuencias. Así mismo, se observa que a partir de la primera frecuencia de resonancia, la respuesta del filtro se aleja del comportamiento de la lámina homogénea, debido a que se tiene una modulación relativamente alta de la permitividad dieléctrica en la lámina periódica. En la figura 6.19 se ha representado el coeficiente de reflexión de la lámina periódica con tres dieléctricos para incidencia  $TE^{3D}$  en función de los ángulos  $\theta$  y  $\phi$  a la frecuencia de 14,3 GHz (primera resonancia). Si se compara dicha gráfica con la de la figura 6.11 para el filtro de banda ancha con dos dieléctricos a la frecuencia de resonancia, se observa un comportamiento muy similar ( $R^{\text{TE}^{3D}} = 1$  para  $\theta = 0^\circ$ ,  $\phi = 90^\circ$ , mientras que a medida que nos alejamos de dicha dirección de incidencia, el coeficiente de reflexión disminuye).

Como se ha comentado anteriormente, la aparición de dobles resonancias entorno a las frecuencias que predice la condición de ajuste de fase (5.71) en el ejemplo anterior está originada en la asimetría de la distribución de la permitividad dieléctrica dentro de la celda

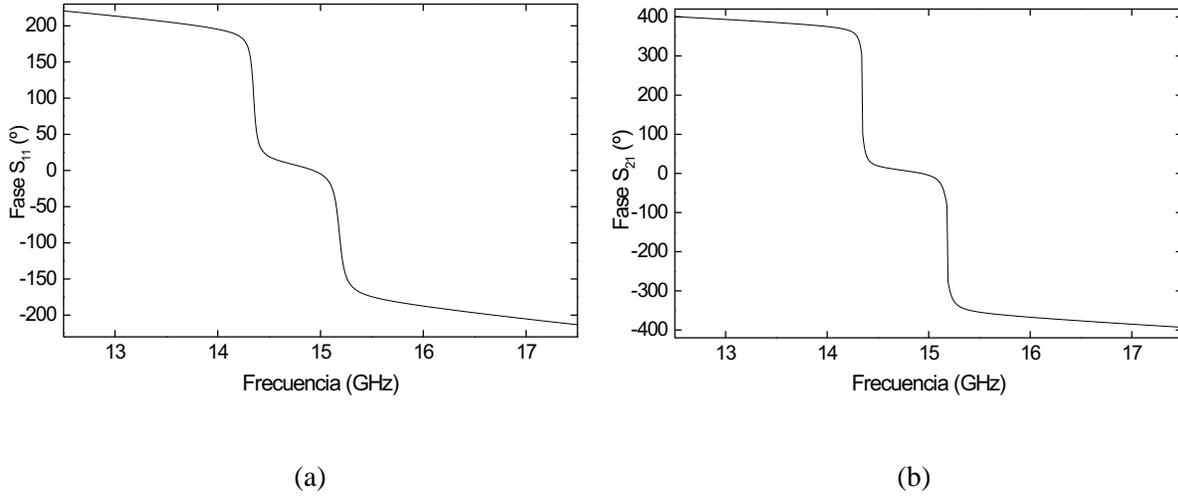


Figura 6.17: Fase de los parámetros  $S_{11}$  y  $S_{21}$  del filtro en reflexión cuya respuesta se muestra en la figura 6.16 para incidencia normal de una onda plana con polarización TE.

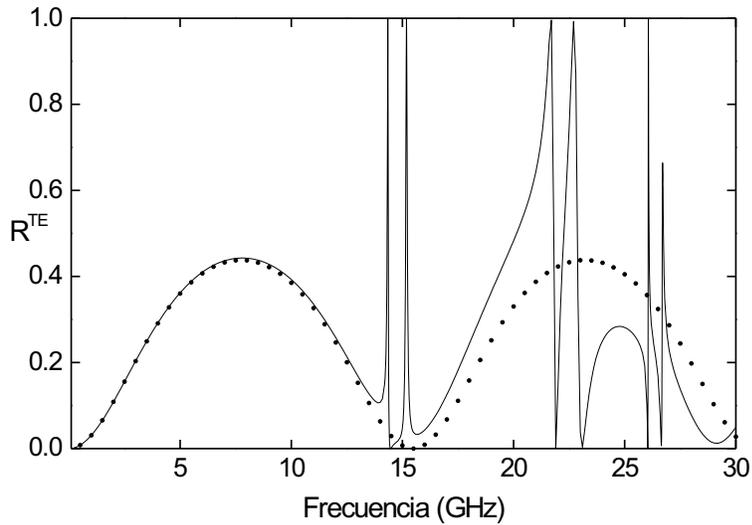


Figura 6.18: Representación del coeficiente de reflexión  $R^{TE}$  fuera de banda del filtro en reflexión de la figura 6.16 con tres dieléctricos dentro de la celda elemental, en el intervalo de 0 a 30 GHz. También se representa con puntos la respuesta en frecuencia de una lámina homogénea de igual espesor y permitividad relativa promedio  $\epsilon_{rp}$ .

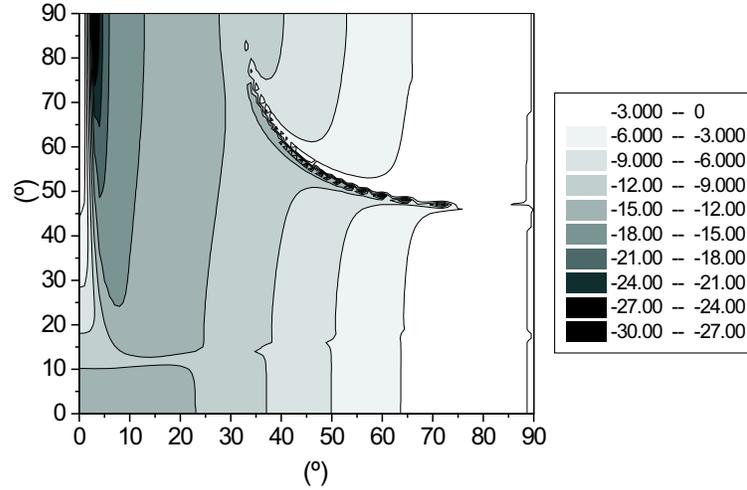


Figura 6.19: Coeficiente de reflexión  $R^{\text{TE}^{3\text{D}}}$  (dB) del filtro de la figura 6.16 en función de los ángulos  $\theta$  y  $\phi$ , para la frecuencia de 14,3 GHz.

periódica que existe en ese caso ( $\varepsilon_{r1} < \varepsilon_{r2} < \varepsilon_{r3}$ ). No obstante, si la introducción del tercer material dieléctrico se realiza de forma adecuada dentro de la celda periódica, de forma que la distribución de la permitividad dieléctrica tenga simetría respecto al centro de la celda periódica, se debería observar la aparición de un único pico de reflexión total asociado a cada una de las resonancias de la lámina periódica determinadas por la condición de ajuste de fase (5.71), al igual que sucedía en la lámina con dos dieléctricos dentro de la celda periódica. Para comprobarlo, en la figura 6.20 se ha representado el coeficiente de reflexión  $R^{\text{TE}}$  de 0 a 30 GHz para incidencia normal de una onda plana TE correspondiente a una lámina dieléctrica con igual periodo, espesor y permitividad relativa promedio que la lámina del ejemplo anterior ( $D = 11,28$  mm,  $h = 4,37$  mm,  $\varepsilon_{rp} = 4,915$ ), con tres dieléctricos distintos dentro de la celda periódica, distribuidos simétricamente de la siguiente forma:  $l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = l_5 = D/5$ ,  $\varepsilon_{r1} = \varepsilon_{r5} = 3,7$ ,  $\varepsilon_{r2} = \varepsilon_{r4} = 5,5225$ ,  $\varepsilon_{r3} = 6,13$ . Como se puede observar, la respuesta en frecuencia mostrada en la figura 6.20 correspondiente a una lámina con tres dieléctricos distribuidos de forma simétrica en la celda elemental, es similar a la respuesta mostrada anteriormente en la figura 6.5 para la lámina con dos dieléctricos. Las resonancias de ambas estructuras aparecen a las mismas frecuencias en ambas láminas periódicas (puesto que tienen igual periodicidad, espesor y permitividad relativa promedio), y están determinadas por la condición de ajuste de fase (5.71), siendo la principal diferencia entre ambas respuestas el ancho de banda de las resonancias, que es algo inferior para el caso de tres dieléctricos por tratarse de una estructura con una modulación más pequeña de la permitividad dieléctrica.

Finalmente, podemos concluir que el efecto más relevante que aparece al añadir un mayor número de materiales dieléctricos dentro de la celda elemental, en el caso de distribuciones asimétricas de la permitividad dieléctrica dentro de la celda elemental, es que las resonancias

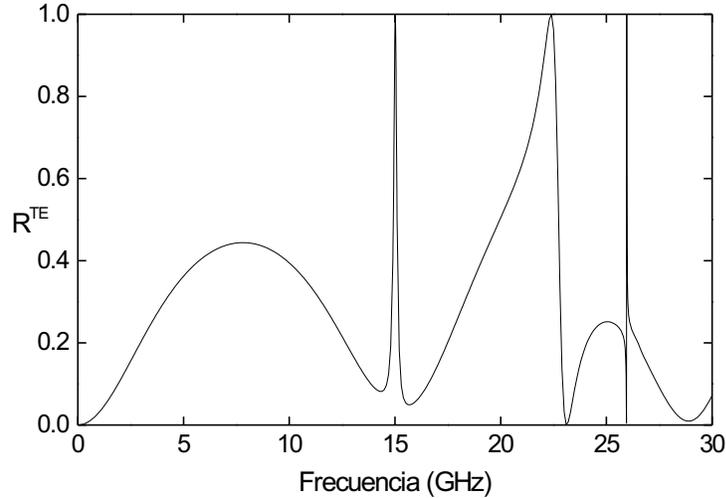


Figura 6.20: Coeficiente de reflexión en potencia  $R^{\text{TE}}$  de una lámina dieléctrica periódica con tres dieléctricos distintos dentro de la celda elemental, con igual espesor, periodicidad y permitividad relativa promedio que la lámina periódica cuya respuesta se muestra en la figura 6.18, bajo incidencia normal TE. Los parámetros del filtro son los siguientes:  $D = 11,28$  mm,  $h = 4,37$  mm,  $l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = l_5 = D/5$ ,  $\epsilon_{r1} = \epsilon_{r5} = 3,7$ ,  $\epsilon_{r2} = \epsilon_{r4} = 5,5225$ ,  $\epsilon_{r3} = 6,13$ .

de la lámina para incidencia normal aparecen a pares entorno a las frecuencias de resonancia que predice la condición de ajuste de fase; esto también se ha comprobado numéricamente para cinco y siete láminas dieléctricas dentro de la celda periódica. Este efecto observado para incidencia normal desaparece en el caso de láminas periódicas con una distribución simétrica de la permitividad dieléctrica dentro de la celda elemental. Por otro lado, la introducción de más dieléctricos dentro de la celda periódica, manteniendo constante la permitividad relativa promedio, conlleva una disminución de la modulación de la permitividad dieléctrica en la lámina, lo cual se traduce en una reducción del ancho de banda de las resonancias.

### 6.3.2. Filtro frecuencial con varias láminas periódicas

A continuación se analizará el efecto que tiene la introducción de varias láminas periódicas en la respuesta en reflexión de las SSFD. Para ello, en primer lugar se va a estudiar una SSFD rodeada de aire constituida por dos láminas dieléctricas periódicas iguales, separadas entre sí también por una capa de aire, cuyo esquema se muestra en la figura 6.21. Concretamente, se analizará la respuesta en frecuencia para incidencia normal de una onda plana con polarización TE sobre una SSFD formada por dos láminas periódicas iguales y de idénticas características que la lámina periódica del ejemplo del apartado anterior, correspondiente al filtro en reflexión de banda ancha diseñado para la frecuencia central de resonancia  $f_0 = 15$

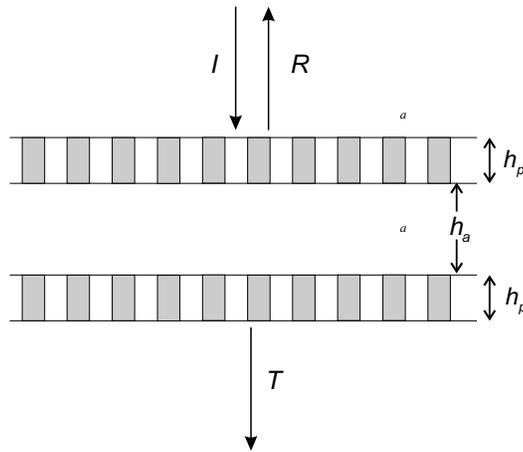
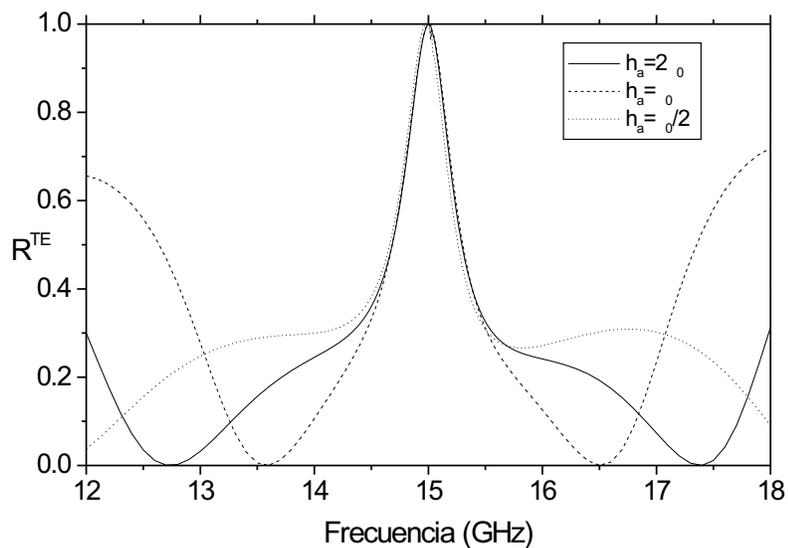


Figura 6.21: Esquema de una SSFD rodeada de aire formada por dos láminas dieléctricas periódicas iguales y separadas por una capa de aire de espesor  $h_a$ .

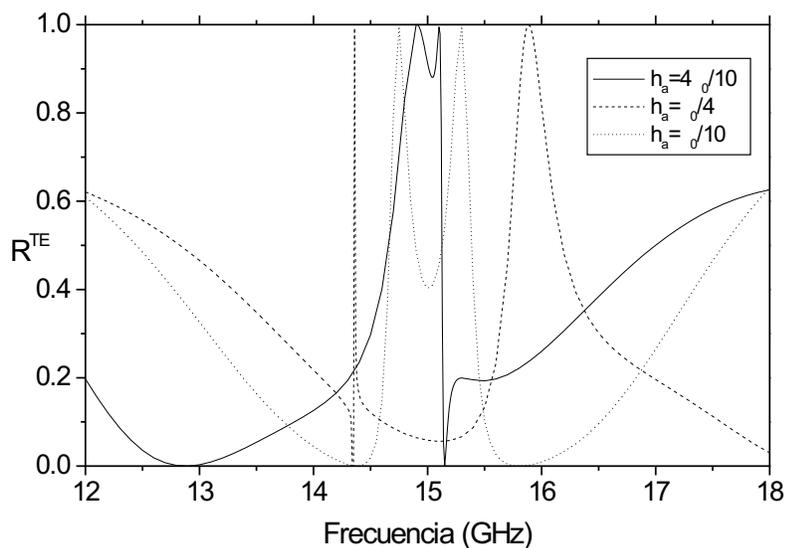
GHz, con los siguientes parámetros:  $D = 11,28$  mm,  $h_p = 4,37$  mm,  $l_1 = l_2 = D/2$ ,  $\varepsilon_{r1} = 6,13$ ,  $\varepsilon_{r2} = 3,7$ . Las dos láminas periódicas están separadas por una capa de aire de espesor  $h_a$ .

En la figura 6.22 se representa la respuesta en reflexión de la SSFD cuyo esquema se muestra en la figura 6.21 para diferentes valores del espesor  $h_a$  de la capa de aire que separa las dos láminas periódicas, expresado en términos de la longitud de onda de resonancia  $\lambda_0$  (longitud de onda en el vacío). Como se puede observar, para separaciones grandes entre las láminas periódicas respecto la longitud de onda de resonancia (figura 6.22 (a)), aparece una única resonancia en la respuesta en frecuencia de la estructura. Ello se debe a que en este caso los modos evanescentes excitados en las láminas periódicas se atenúan en la capa de aire que las separa, de forma que como las dos láminas periódicas son iguales, ambas resuenan a la misma frecuencia  $f_0$ . Sin embargo, a medida que disminuye la separación entre las láminas periódicas, el pico de reflexión total se desdobra en dos resonancias (ver la figura 6.22 (b)), que se van distanciando entre sí a medida que disminuye la separación entre las láminas periódicas. Este efecto puede interpretarse en términos de la teoría de ondas acopladas, de tal forma que al aproximarse las dos láminas periódicas el coeficiente de acoplamiento aumenta y con ello aumenta también la separación entre las resonancias del sistema acoplado. Así, por ejemplo, para  $h_a = \lambda_0/4$ , se observan dos picos de reflexión total a frecuencias de 14,75 y 15,3 GHz. Este valor de la separación entre las láminas periódicas es el que da lugar a una respuesta en reflexión más simétrica en frecuencia dentro de la banda analizada.

Por otro lado, en la figura 6.23 se analiza la respuesta en frecuencia bajo incidencia normal TE de diversas SSFD formas por varias láminas periódicas iguales, con idénticos parámetros que la lámina periódica del filtro en reflexión de banda ancha de la figura 6.2, separadas entre sí por capas de aire de espesor constante igual a  $h_a = \lambda_0/4$ . Concretamente, se muestra el coeficiente de reflexión  $R^{\text{TE}}$  para los casos de 2, 3, 4 y 5 láminas periódicas. En esta figura se puede comprobar que el efecto que tiene la introducción de un mayor número de láminas dieléctricas periódicas es que los picos de reflexión total que muestran



(a)



(b)

Figura 6.22: Respuesta de una SSFD formada por dos láminas dieléctricas periódicas iguales separadas por una capa de aire de espesor  $h_a$ , cuyo esquema se muestra en la figura 6.21. Se muestra la respuesta de la estructura bajo incidencia normal TE para diferentes espesores de la capa de aire.

las estructuras se aproximan entre sí, y que el mínimo que alcanza el coeficiente de reflexión que existe entre dos máximos consecutivos se aproxima más a la unidad. Por tanto, podemos concluir que otro mecanismo para la obtención de filtros frecuenciales en reflexión en banda ancha consiste en aumentar el número de láminas periódicas en las SSFD.

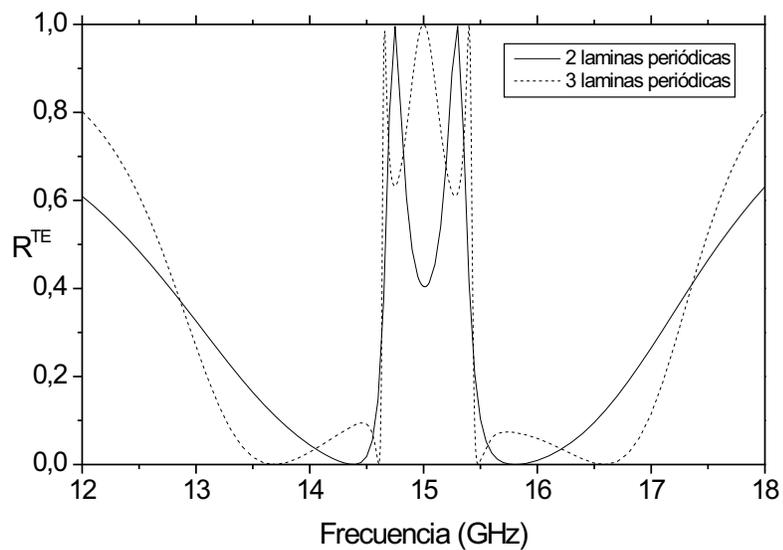
### 6.3.3. Filtro angular con una lámina periódica

La siguiente estructura que se va a estudiar es un filtro angular en reflexión aprovechando el fenómeno del ángulo de Brewster. El filtro ha sido diseñado para incidencia 2D oblicua ( $\phi = 90^\circ, \theta \neq 0^\circ$ ) con polarización TM o paralela al plano de incidencia, cuya resonancia se ha elegido para un ángulo de incidencia igual al ángulo de Brewster  $\theta_B$  (definido para una lámina dieléctrica homogénea de permitividad relativa igual al valor promedio de las permitividades relativas en la lámina periódica, como se define en (5.64)). Dicho filtro ha sido realizado empleando una única lámina dieléctrica periódica rodeada de aire ( $\varepsilon_{ra} = 1,0$ ) con dos dieléctricos distintos dentro de la celda periódica. En esta ocasión, se desea conseguir una respuesta con una reflectancia lo más baja posible en un cierto intervalo angular, a una cierta frecuencia de operación; como el fenómeno del ángulo de Brewster es independiente de la frecuencia, la estructura resultante también se puede emplear como filtro frecuencial siempre que se incida en el ángulo de Brewster. Por lo tanto, el grosor de la lámina periódica no va a afectar sustancialmente al comportamiento frecuencial del filtro (es decir, no es necesario escoger  $h = \lambda/2$ ).

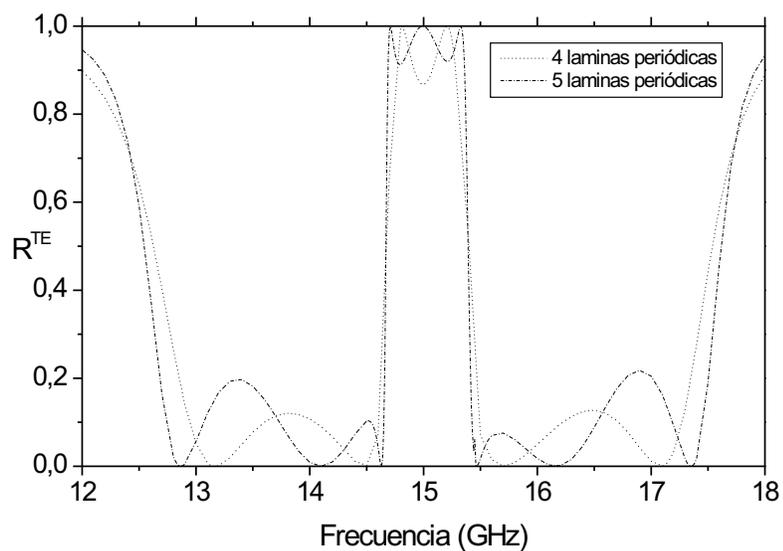
Este filtro ha sido diseñado empleando dos dieléctricos de igual espesor dentro de la celda elemental ( $l_1 = l_2 = D/2$ ) con permitividades relativas  $\varepsilon_{r1} = 1,44$  y  $\varepsilon_{r2} = 2,56$ , respectivamente, rodeados de aire ( $\varepsilon_{ra} = 1,0$ ), siendo la permitividad relativa promedio en la lámina  $\varepsilon_{rp} = 2,0$ . De esta forma, el ángulo de Brewster para una lámina homogénea con dicho valor de la permitividad relativa promedio rodeada de aire será igual a:

$$\theta_B = \arctan \frac{\sqrt{\varepsilon_{rp}}}{\varepsilon_{ra}} = \arctan \frac{\sqrt{2}}{1} = 54,73^\circ . \quad (6.2)$$

Cuando incide una onda plana con polarización TM con este ángulo de incidencia sobre una lámina homogénea con la permitividad relativa  $\varepsilon_{rp}$ , el coeficiente de reflexión será nulo para cualquier frecuencia. El siguiente paso en el proceso de diseño consiste en elegir la frecuencia de operación del filtro. En este caso se ha elegido un valor de  $f_0 = 14,5$  GHz. A continuación, se elegirá la periodicidad  $D$  y el espesor  $h$  de la lámina de forma que se produzca una resonancia para el ángulo de Brewster  $\theta_B$  a dicha frecuencia, de forma que se satisfaga la condición de ajuste de fase (5.71) para incidencia 2D con un ángulo de incidencia igual a  $\theta_B$ . Como ya se ha comentado anteriormente, la condición de baja reflectancia en las bandas laterales del filtro no dependerá del grosor de la lámina periódica, por lo que la elección de dicho grosor puede ser algo completamente arbitrario. Así mismo, la periodicidad de la lámina se deberá elegir convenientemente de forma que sólo sea propagativo el modo de Floquet de orden cero en el aire a la frecuencia de operación del filtro. Finalmente, los valores del espesor y la periodicidad de la lámina que han sido escogidos para que se cumpla



(a)



(b)

Figura 6.23: Respuesta en frecuencia de diversas SSFD bajo excitación de una onda plana con polarización TE e incidencia normal, formadas por varias láminas periódicas iguales, con idénticos parámetros que la lámina periódica del filtro en reflexión de banda ancha de la figura 6.2, separadas entre sí por capas de aire de espesor constante igual a  $h_a = \lambda_0/4$ .

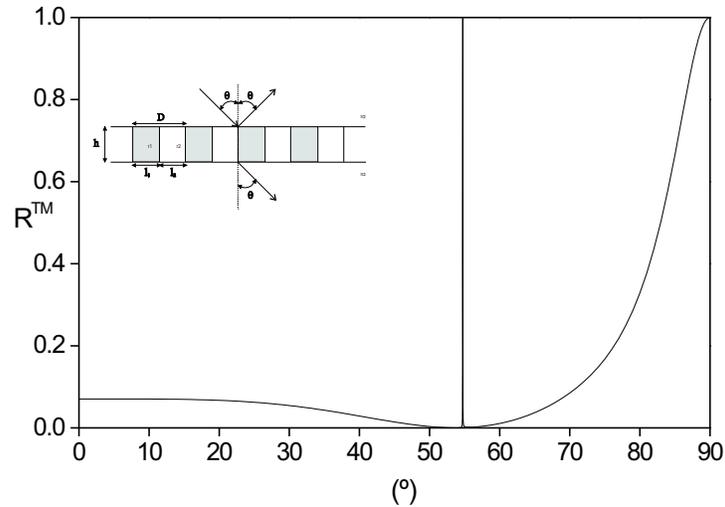


Figura 6.24: Respuesta de un filtro angular diseñado para incidencia de una onda plana (2D) con polarización TM a la frecuencia de 14,5 GHz para un ángulo de incidencia  $\theta_B = 54,73^\circ$ . Los parámetros de la lámina periódica son los siguientes:  $D = 10,0$  mm,  $h = 12,4$  mm,  $\epsilon_{ra} = 1,0$ ,  $\epsilon_{r1} = 1,44$ ,  $\epsilon_{r2} = 2,56$ ,  $l_1 = l_2 = D/2$ .

la condición de ajuste de fase en la lámina periódica a la frecuencia  $f_0 = 14,5$  GHz son de  $h = 12,4$  mm y  $D = 10,0$  mm.

En la figura 6.24 se muestra la respuesta angular del filtro para incidencia de una onda plana TM a la frecuencia de 14,5 GHz. Como se puede observar, la lámina periódica presenta un coeficiente de reflexión muy bajo a cualquier ángulo de incidencia  $\theta$  desde  $\theta = 0^\circ$  hasta unos  $70^\circ$ , salvo para del ángulo de Brewster, para el cual se produce una reflexión total en la lámina, originada por la excitación de un modo *leaky* en la lámina periódica. En la figura 6.25 también se muestra la fase de los parámetros  $S_{11}$  y  $S_{21}$  en función del ángulo de incidencia para dicha lámina. De nuevo, se observan variaciones bruscas de la fase de dichos parámetros en las cercanías de la resonancia.

La dependencia del coeficiente de reflexión  $R^{\text{TM}^{3\text{D}}}$  con los ángulos  $\theta$  y  $\phi$  para este filtro angular también se muestra en la figura 6.26 para incidencia de una onda plana sobre la lámina periódica con polarización  $\text{TM}^{3\text{D}}$  a la frecuencia de resonancia del filtro ( $f_0 = 14,5$  GHz). En dicha figura se observa que esta estructura tiene un comportamiento antirreflejante a dicha frecuencia para cualquier dirección de incidencia entre  $\theta = 0^\circ$  y  $\theta = \theta_B = 54,73^\circ$ . Así mismo, para incidencia 2D correspondiente al ángulo de Brewster ( $\theta = 54,73^\circ$ ,  $\phi = 90^\circ$ ) se produce reflexión total. El comportamiento del coeficiente de reflexión  $R^{\text{TM}^{3\text{D}}}$  en las cercanías de dicha resonancia se muestra de forma ampliada en la figura 6.27, donde se ha representado dicho coeficiente de reflexión en función de los ángulos  $\theta$  y  $\phi$ . Como se puede observar, a medida que aumentamos el ángulo de incidencia  $\theta$ , la resonancia de la lámina periódica se produce para valores del ángulo azimutal  $\phi$  cada vez menores, e inferiores a

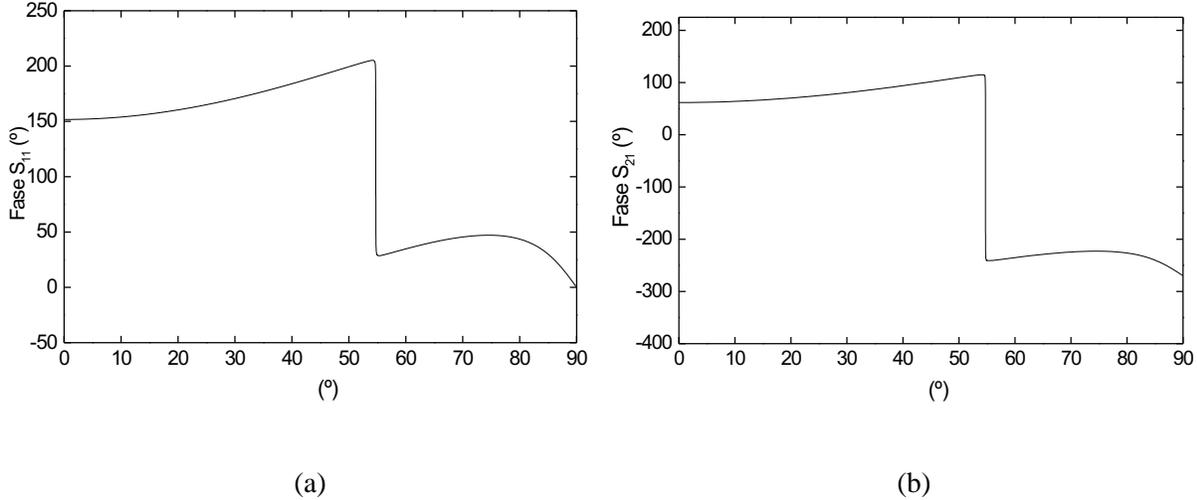


Figura 6.25: Fase de los parámetros  $S_{11}$  y  $S_{21}$  en función del ángulo de incidencia  $\theta$  del filtro en reflexión cuya respuesta se muestra en la figura 6.24 para incidencia de una onda plana con polarización TM a la frecuencia de 14,5 GHz.

$\phi = 90^\circ$ , lo cual se puede predecir mediante la condición de ajuste de fase (5.70) para incidencia 3D.

En la figura 6.28 se puede ver la respuesta en frecuencia del filtro que ha sido diseñado con un ángulo de incidencia  $\theta_B = 54,73^\circ$ , en el intervalo de 13 a 16 GHz. Es interesante comprobar que para este filtro, a diferencia de lo que sucedía con los filtros anteriores, se obtienen bandas laterales muy reducidas, siendo  $R^{\text{TM}} < 10^{-3}$  en todo el rango analizado (excepto en la frecuencia de resonancia de la lámina  $f_0 = 14,5$  GHz). Ello se debe a que cuando incidimos con el ángulo de Brewster sobre la lámina periódica, dicha lámina tiene un coeficiente de reflexión prácticamente nulo independientemente de la frecuencia de operación, salvo en la frecuencia de resonancia. Esto se puede comprobar en la figura 6.29, en la que se ha representado la respuesta del filtro en un mayor intervalo de frecuencias, desde 0 hasta 16,2 GHz (a 16,3 GHz aparece la siguiente resonancia de la lámina periódica para ese ángulo de incidencia). Este filtro tiene un ancho de banda reducido (0,11 %) debido a que se ha elegido una modulación pequeña de la permitividad dieléctrica en la lámina periódica. Por lo tanto, este tipo de filtros también se pueden usar como filtros frecuenciales en reflexión.

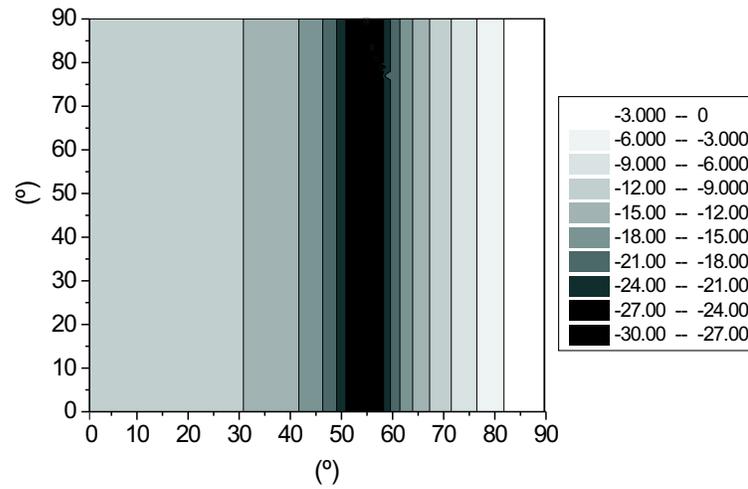


Figura 6.26: Coeficiente de reflexión  $R^{\text{TM}^{3\text{D}}}$  (dB) del filtro angular de la figura 6.24 en función de los ángulos  $\theta$  y  $\phi$ , para la frecuencia de 14,5 GHz.

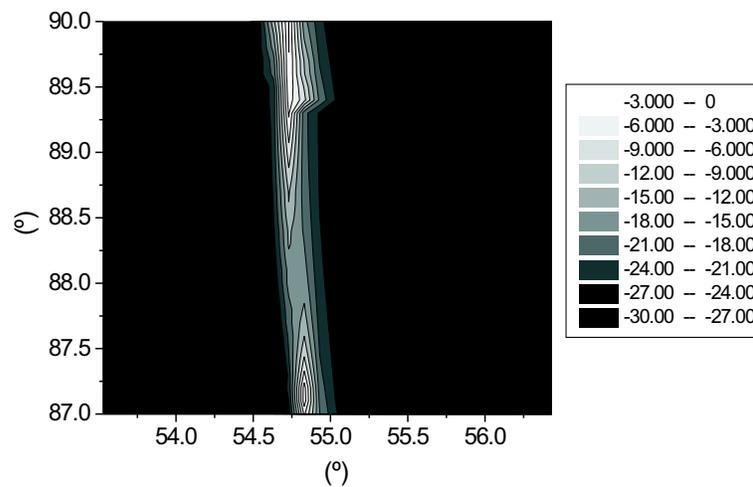


Figura 6.27: Ampliación de la respuesta angular del filtro de la figura 6.26 en las cercanías del ángulo de Brewster para incidencia 2D ( $\theta = 54,73^\circ$ ,  $\phi = 90^\circ$ .)

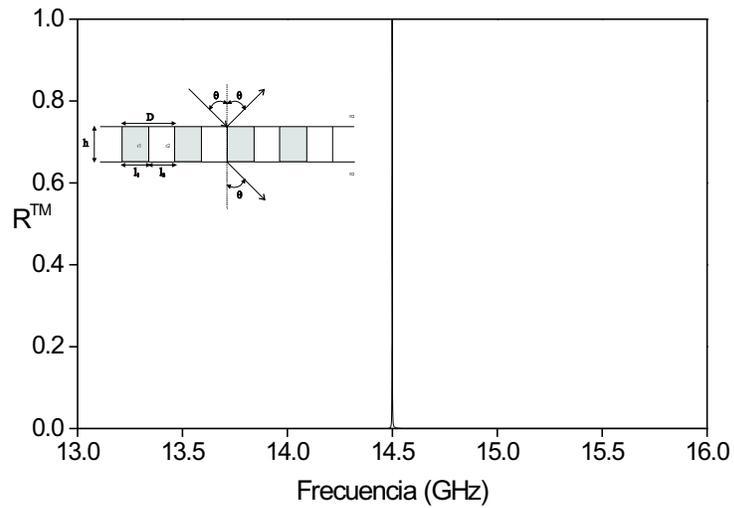


Figura 6.28: Respuesta en frecuencia del filtro en reflexión cuya respuesta angular se muestra en la figura 6.24.

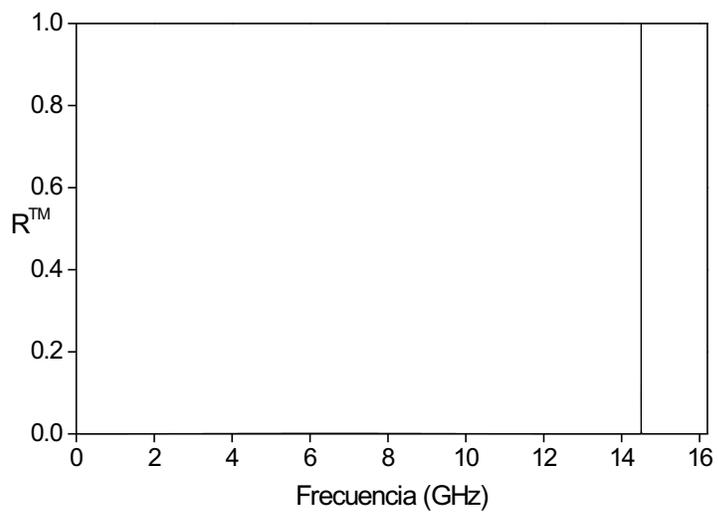


Figura 6.29: Respuesta en frecuencia fuera de banda del filtro de la figura 6.28.

# Capítulo 7

## Conclusiones

### 7.1. Conclusiones y principales aportaciones

El primer trabajo realizado en la tesis ha sido el de desarrollar la teoría básica para el estudio riguroso del espectro modal de medios guidores inhomogéneos (guías blindadas o guías dieléctricas abiertas), como también de medios dieléctricos periódicos infinitos, cuyos campos se extienden a todo el espacio, los cuales son el elemento básico de las SSFD. Para tal fin se ha adaptado el Método de las Bases Bi-Ortogonales, desarrollado inicialmente en el Departamento de Física Aplicada y Electromagnetismo y en el Departamento de Óptica de la Universitat de València, para el estudio de un amplio espectro de guías ópticas y guías de microondas. Así, se ha aplicado el Método de las Bases Bi-ortogonales al estudio del espectro modal en sistemas guidores confinados inhomogéneos, cuyos campos están confinados en una región finita del espacio. Dicho método se ha aplicado al estudio de una gran variedad de sistemas guidores, tanto cerrados (guías rectangulares rellenas inhomogéneamente de dieléctrico, tales como la guía imagen) como abiertos (guías dieléctricas como la guía *rib* o las guías de cristal fotónico), cuyos campos satisfacen una relación de bi-ortogonalidad. Así mismo, en esta tesis se ha demostrado que dicho método también es aplicable a la hora de obtener el espectro modal de medios dieléctricos periódicos infinitos sin pérdidas. Por tanto, en este tipo de medios también se demuestra que los modos cumplen una relación de biortogonalidad. En el caso de medios dieléctricos periódicos con pérdidas, el espectro modal de dichos medios se ha obtenido empleando el Método de los Momentos.

En segundo lugar se ha llevado a cabo el análisis de la dispersión de ondas planas en Superficies Selectoras de Frecuencia Dieléctricas (SSFD) bajo excitación tridimensional, que son estructuras planares multicapa formadas por láminas dieléctricas homogéneas o periódicas en una dimensión, que se ha elegido como la del eje  $Y$ . Para ello se ha empleado el Método de Adaptación Modal, que parte del conocimiento del espectro modal de cada una de las capas dieléctricas que constituyen estas estructuras. Dicho método consiste en imponer las condiciones de contorno en las discontinuidades entre las diferentes capas dieléctricas, de forma que finalmente se obtiene la matriz de dispersión multimodal de la estructura. Cuando incide una onda electromagnética plana sobre una SSFD, parte de su energía es reflejada por la estructura y el resto es transmitida a través de ella. La respuesta en frecuencia de

una SSFD depende del espectro modal de cada una de las capas que la constituyen, tanto homogéneas como periódicas. El campo electromagnético en las capas homogéneas se ha descompuesto en el conjunto de los armónicos vectoriales de Floquet Tipo-E y Tipo-H. Para la obtención del espectro modal en las capas periódicas se ha aplicado el Método de las Bases Bi-Ortogonales en el caso de dieléctricos periódicos sin pérdidas, mientras que para el caso de dieléctricos periódicos con pérdidas se ha usado el Método de los Momentos.

Dentro del análisis de las SSFD, las principales aportaciones y conclusiones de este estudio pueden resumirse en los siguientes apartados:

1.- En primer lugar se ha desarrollado la teoría básica para el estudio del campo electromagnético en regiones guidoras de ondas dieléctricas con periodicidad en una dirección, que son los conocidos modos de Floquet o de Bloch, empleando para ello el Método de las Bases Bi-Ortogonales en el caso de dieléctricos sin pérdidas, mientras que para el caso de medios con pérdidas se ha empleado el Método de los Momentos. Dada la geometría del problema, se ha planteado una descomposición modal en los modos Tipo-E y Tipo-H, que da cuenta de los estados naturales de polarización que introduce el sistema. Se ha desarrollado un algoritmo eficiente y rápido que se basa en la transformación de las ecuaciones diferenciales que describen la evolución de los campos en el plano transversal, en un problema matricial de autovalores. La resolución del mismo permite obtener las constantes de propagación y los campos eléctrico y magnético modales. Las pérdidas óhmicas en los materiales se pueden incluir de una forma natural en la formulación.

2.- Para cada polarización de la onda plana incidente ( Tipo-E o Tipo-H), se ha realizado un estudio de la convergencia de las soluciones modales obtenidas con el método modal vectorial, para los distintos parámetros del problema (frecuencia, ángulos de incidencia  $\theta$  y  $\phi$ , número de dieléctricos dentro del periodo de repetición, y valor de la constante dieléctrica relativa de los mismos).

3.- Con el fin de analizar la bondad del método propuesto para la obtención de los campos en medios periódicos en una dirección, se han comparado nuestros resultados con los obtenidos en la bibliografía, obteniendo buena concordancia entre ambos, tanto para incidencia 2D como para incidencia 3D.

4.- Para el análisis de la dispersión de ondas planas bajo incidencia 3D en SSFD se ha empleado la Técnica de Adaptación Modal, formulada con Matrices de Dispersión Generalizadas. Dicho análisis de dispersión se ha llevado a cabo suponiendo que sobre las SSFD incide una onda plana linealmente polarizada con polarización arbitraria, cuyos campos se han descompuesto en modos de Floquet de orden  $n = 0$  tipo-E, tipo-H. Esta descomposición se ha particularizado para los dos casos más habituales, que corresponden a la incidencia de una onda plana con polarización perpendicular y paralela al plano de incidencia, respectivamente, comúnmente conocidas como polarización TE y TM.

5.- Se ha desarrollado un programa en FORTRAN que calcula los parámetros de dispersión y los coeficientes de reflexión y transmisión en potencia de estas estructuras a partir de la obtención de la MDG de las mismas. El programa es muy eficiente, con tiempos de computación por punto en frecuencia muy reducidos.

6.- Se ha llevado a cabo un estudio de la convergencia del algoritmo, para los diferentes parámetros involucrados (frecuencia, ángulos de incidencia y polarización de la onda pla-

na incidente, número y espesor de las capas que forman la SSFD, y valor de la constante dieléctrica de las mismas).

7.- Tras ello se han comparado los resultados obtenidos para una serie de estructuras con los proporcionados en la bibliografía, resultando para todos los casos un excelente acuerdo entre ambos.

8.- Por último, se ha realizado el diseño de una serie de filtros en reflexión basados en SSFD, que han resultado tener buenas prestaciones.

Finalmente, podemos concluir que el modelo desarrollado nos ha permitido tratar con eficacia tanto el estudio del espectro modal en sistemas guidores inhomogéneos, como el análisis de la dispersión de ondas planas en SSFD con dieléctricos periódicos en una dirección. Una parte de los resultados obtenidos en este trabajo ha dado lugar a una serie de publicaciones científicas en revistas de ámbito internacional al mismo tiempo que se han presentado en congresos, tanto nacionales como internacionales. A continuación se proporciona una relación de las publicaciones científicas realizadas.

### 7.1.1. Artículos en revistas de ámbito internacional

- J. A. Monsoriu, A. Coves, B. Gimeno, M. V. Andrés, and E. Silvestre, "A robust and efficient method for obtaining the complex modes in inhomogeneously filled waveguides", *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 37, no. 3, pp. 218-222, May 2003.
- A. Coves, A. A. San Blas, B. Gimeno, A. Díez, M. V. Andrés, and V. E. Boria, "Two-dimensional photonic-crystal microwave waveguide", *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 39, no. 3, pp. 243-246, November 2003.
- A. Coves, B. Gimeno, A. A. San Blas, A. Vidal, V. E. Boria, and M. V. Andrés, "Three-dimensional scattering of dielectric gratings under plane-wave excitation", *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, vol. 2, pp. 215-218, 2003.
- A. Coves, B. Gimeno, D. Camilleri, M. V. Andrés, A. A. San Blas, and V. E. Boria, "Full-wave analysis of dielectric frequency-selective surfaces using a vectorial Modal Method", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, aceptado para su publicación en Agosto de 2004.
- A. Coves, B. Gimeno, M. V. Andrés, A. A. San Blas, J. Gil, V. E. Boria, and A. Vidal, "Analysis and applications of dielectric frequency-selective surfaces under plane-wave excitation", *Recent Research in Microwave Theory and Techniques*, aceptado para su publicación en Abril de 2004 (invitado).

## 7.1.2. Artículos en congresos

### 7.1.2.1. Congresos nacionales

- A. Coves, B. Gimeno, D. Camilleri, M. V. Andrés, A. A. San Blas, and V. E. Boria, "Análisis de superficies selectoras de frecuencia dieléctricas mediante un método modal vectorial", *Libro de actas del XVII Simposium Nacional de la Unión Científica Internacional de Radio*, pp. 27-28, Alcalá de Henares, Madrid, 11-13 Septiembre 2002.
- A. Coves, A. A. San Blas, B. Gimeno, M. V. Andrés, V. E. Boria, D. Camilleri, "Diseño y aplicaciones de superficies selectoras de frecuencia dieléctricas", *Libro de actas del XVIII Simposium Nacional de la Unión Científica Internacional de Radio*, p. 106, A Coruña, 10-12 Septiembre 2003.

### 7.1.2.2. Congresos internacionales

- A. Coves, B. Gimeno, M. A. Abián, E. Silvestre, A. Ferrando, V. Boria, A. Díez and M. V. Andrés, "Bi-orthonormal-basis method applied to the study of dielectric-loaded waveguides and 2D photonic crystals guides for millimeter applications", *Proceedings of European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*, p. 1146, Barcelona, Spain, September 11-14 2000.
- A. Coves, B. Gimeno, D. Camilleri, M. V. Andrés, A. A. San Blas and V. E. Boria, "Scattering by dielectric frequency-selective surfaces using a vectorial modal method", *Proceedings of 2002 IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium*, pp. 580-583, San Antonio (Texas, USA), June 15-21 2002.
- A. Coves, B. Gimeno, M. V. Andrés, A. A. San Blas, V. E. Boria, and J. V. Morro, "Analysis and applications of dielectric frequency-selective surfaces under plane-wave excitation", *Proceedings of 2003 IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium*, pp. 825-828, Columbus (Ohio, USA), June 22-27 2003.
- A. Coves, A. A. San Blas, B. Gimeno, M. V. Andrés, V. E. Boria, and A. Vidal, "Analysis and applications of one-dimensional periodic dielectric gratings under plane wave excitation", *Proceedings of 9th International Symposium on Microwave and Optical Technology*, p. 21, Ostrava, Czech Republic, August 11-15 2003.
- V. E. Boria, M. Bozzi, D. Camilleri, A. Coves, H. Esteban, B. Gimeno, M. Guglielmi, and L. Polini, "Contributions to the analysis and design of all-inductive filters with dielectric resonators", *33rd European Microwave Conference*, pp. 1247-1250, Munich, Germany, October 7-9 2003.
- A. Coves, B. Gimeno, M. V. Andrés, A. A. San Blas, and J. Gil, "Scattering of Dielectric Frequency-Selective Surfaces under Three-Dimensional Plane-Wave Incidence", *Proceedings of 2004 IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium*, Monterrey (California, USA), June 20-26 2004 (enviado).

## 7.2. Futuras líneas de trabajo

La presente memoria deja abiertas varias líneas de investigación:

1- Estudiar el espectro modal y la dispersión de SSFD con periodicidad en dos dimensiones.

2- Analizar SSFD con diversas láminas periódicas con periodicidades diferentes, lo cual permitiría diseñar filtros en reflexión de banda ancha.

3- Analizar el efecto de haz finito en el estudio de la transmitancia y reflectancia de estas estructuras. Así, descomponiendo el haz incidente en un sumatorio de infinitas ondas planas, el algoritmo desarrollado permitiría el tratamiento "por separado" de cada una de estas ondas (Método del Espectro Angular).

4- Analizar SSF con dieléctricos y metales. Para ello, se tendría que combinar la técnica modal desarrollada para el análisis de SSFD dieléctricas con algún otro método de análisis de superficies periódicas metalizadas.

5- Combinar la técnica de análisis desarrollada en esta tesis con métodos de optimización, lo cual nos permitiría llevar a cabo un proceso de diseño optimizado de estas estructuras.

6- Desde un punto de vista experimental, sería interesante construir los filtros diseñados en esta tesis y medir su respuesta en frecuencia.

## 7.3. Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por el Ministerio de Ciencia y Tecnología, proyectos TIC2000-0591-C03-03 y TIC2002-04527-C02-01.



# Apéndice A

## Obtención de las ecuaciones de valores propios de los campos transversales

Las componentes transversales de los campos eléctrico y magnético en un medio guiador con simetría traslacional en ausencia de fuentes, satisfacen sendas ecuaciones diferenciales de valores propios, las cuales pueden ser fácilmente derivables a partir de las ecuaciones de Maxwell (para una dependencia temporal armónica de los campos de la forma  $e^{j\omega t}$ ). Dichas ecuaciones de valores propios para cada modo en el medio guiador son de la siguiente forma:

$$\left[ \nabla_t^2 + k_0^2 \varepsilon_r + \left( \frac{\nabla_t \varepsilon_r}{\varepsilon_r} \right) \times (\nabla_t \times \circ) \right] \mathbf{h}_n = \beta_n^2 \mathbf{h}_n \quad (\text{A.1})$$

$$\left[ \nabla_t^2 + k_0^2 \varepsilon_r + \nabla_t \left\{ \left( \frac{\nabla_t \varepsilon_r}{\varepsilon_r} \right) \cdot \circ \right\} \right] \mathbf{e}_n = \beta_n^2 \mathbf{e}_n \quad (\text{A.2})$$

donde  $\beta_n$  es la constante de propagación del  $n$ -ésimo modo, y  $\{\mathbf{e}_n, \mathbf{h}_n\}$  son las componentes transversales de los campos eléctrico y magnético, siendo  $\mathbf{E}_n = \mathbf{e}_n + e_{nz} \hat{\mathbf{z}}$  y  $\mathbf{H}_n = \mathbf{h}_n + h_{nz} \hat{\mathbf{z}}$ , respectivamente.

Para la obtención de la ecuación (A.1), se parte de la ley de Ampère generalizada para dependencia temporal armónica, y se toma el rotacional a ambos lados de dicha ecuación:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}_n) = \nabla \times (j\omega(\varepsilon \mathbf{E}_n)) \quad (\text{A.3})$$

Haciendo uso de las siguientes identidades vectoriales:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad \nabla \times (f \mathbf{A}) = (\nabla f) \times \mathbf{A} + f(\nabla \times \mathbf{A})$$

y teniendo en cuenta que en un medio con simetría traslacional ( $\varepsilon = \varepsilon(x, y)$ ) se cumple que  $\nabla \varepsilon = \nabla_t \varepsilon$ , se llega a la siguiente igualdad:

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{H}_n) - \nabla^2 \mathbf{H}_n = j\omega [(\nabla_t \varepsilon) \times \mathbf{E}_n + \varepsilon(\nabla \times \mathbf{E}_n)] \quad (\text{A.4})$$

Ahora, aplicando en el término de la izquierda de la ecuación (A.4) la ecuación de la divergencia de la inducción magnética, que para medios no magnéticos ( $\mu = \mu_0$ ) queda como

$\mu_0(\nabla \cdot \mathbf{H}_n) = 0$ , y sustituyendo la ley de Faraday-Lenz y la ley de Ampère generalizada en los términos de la derecha de la ecuación (A.4), se obtiene lo siguiente:

$$-\nabla^2 \mathbf{H}_n = j\omega \left[ (\nabla_t \varepsilon) \times \left( \frac{1}{j\omega \varepsilon} \nabla \times \mathbf{H}_n \right) - \varepsilon j\omega \mu_0 \mathbf{H}_n \right] \quad (\text{A.5})$$

que reordenando queda como:

$$\left[ \nabla^2 + k_0^2 \varepsilon_r + \frac{\nabla_t \varepsilon_r}{\varepsilon_r} \times (\nabla \times \circ) \right] \mathbf{H}_n = 0 \quad (\text{A.6})$$

Por último, al imponer la dependencia armónica explícita con  $z$  de los campos ( $\nabla^2 = \nabla_t^2 - \beta_n^2 \hat{\mathbf{z}}$ ), y tomando la componente transversal en la ecuación (A.6), finalmente se obtiene el resultado buscado:

$$\left[ \nabla_t^2 + k_0^2 \varepsilon_r + \left( \frac{\nabla_t \varepsilon_r}{\varepsilon_r} \right) \times (\nabla_t \times \circ) \right] \mathbf{h}_n = \beta_n^2 \mathbf{h}_n \quad (\text{A.7})$$

El procedimiento a seguir para obtener la ecuación de valores propios del campo eléctrico transversal (A.2) es muy similar al del caso anterior. En este caso se parte la ley de Faraday-Lenz para dependencia temporal armónica, y se toma el rotacional a ambos lados de dicha ecuación:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}_n) = \nabla \times (-j\omega \mu_0 \mathbf{H}_n) \quad (\text{A.8})$$

o equivalentemente:

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}_n) - \nabla^2 \mathbf{E}_n = -j\omega \mu_0 (\nabla \times \mathbf{H}_n) \quad (\text{A.9})$$

En esta ocasión se empleará en el término de la izquierda la ley de Gauss, según la cual, fuera de las fuentes tendremos:

$$\nabla \cdot \mathbf{D}_n = 0 = \nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{E}_n) = (\nabla \varepsilon) \cdot \mathbf{E}_n + \varepsilon (\nabla \cdot \mathbf{E}_n) \quad (\text{A.10})$$

mientras que en el término de la derecha se empleará la ley de Ampère generalizada, quedando la ecuación anterior de la siguiente forma:

$$-\nabla \left( \frac{\nabla_t \varepsilon_r}{\varepsilon_r} \cdot \mathbf{E}_n \right) - \nabla^2 \mathbf{E}_n = k_0^2 \varepsilon_r \mathbf{E}_n \quad (\text{A.11})$$

Usando de nuevo la descomposición del operador laplaciano ( $\nabla^2 = \nabla_t^2 - \beta_n^2 \hat{\mathbf{z}}$ ) y reordenando, dicha ecuación queda:

$$\left[ \nabla_t^2 + k_0^2 \varepsilon_r + \nabla \left( \frac{\nabla_t \varepsilon_r}{\varepsilon_r} \cdot \circ \right) \right] \mathbf{E}_n = \beta_n^2 \mathbf{E}_n \quad (\text{A.12})$$

y al tomar la componente transversal de (A.12) se obtiene finalmente el resultado buscado:

$$\left[ \nabla_t^2 + k_0^2 \varepsilon_r + \nabla_t \left\{ \left( \frac{\nabla_t \varepsilon_r}{\varepsilon_r} \right) \cdot \circ \right\} \right] \mathbf{e}_n = \beta_n^2 \mathbf{e}_n \quad (\text{A.13})$$

# Apéndice B

## Demostración de que los operadores $L$ y $L^\dagger$ son adjuntos uno del otro

### B.1. Introducción

En este apéndice se demuestra que en el caso de sistemas guidores confinados con o sin pérdidas (cuyos campos transversales sean nulos en el infinito), el operador  $L$  que rige la evolución del campo magnético transversal  $\mathbf{h}_n = (h_{xn}, h_{yn})$  y el operador  $L^\dagger$  que rige la evolución del campo eléctrico transversal definido como  $\bar{\mathbf{e}}_m = (-e_{ym}^*, e_{xm}^*)$ , respectivamente, son adjuntos uno del otro. Al final de este apéndice se demostrará también que en el caso particular de medios dieléctricos sin pérdidas con condiciones periódicas en la dirección transversal, los operadores que rigen en este tipo de medios la evolución del campo magnético transversal  $\mathbf{h}_n = (h_{xn}, h_{yn})$  y del campo eléctrico transversal definido como  $\bar{\mathbf{e}}_m = (-e_{ym}, e_{xm})$ , respectivamente, son también adjuntos uno del otro.

### B.2. Medios guidores confinados

En el caso de sistemas guidores confinados con o sin pérdidas (cuyos campos transversales sean nulos en el infinito), se demostrará que el operador  $L$  que rige la evolución del campo magnético transversal  $\mathbf{h}_n = (h_{xn}, h_{yn})$  y el operador  $L^\dagger$  que rige la evolución del campo eléctrico transversal definido como  $\bar{\mathbf{e}}_m = (-e_{ym}^*, e_{xm}^*)$ , respectivamente, son adjuntos uno del otro, es decir:

$$\langle L^\dagger \bar{\mathbf{e}}_m | \mathbf{h}_n \rangle = \langle \bar{\mathbf{e}}_m | L \mathbf{h}_n \rangle \quad (\text{B.1})$$

de forma que los modos en este medio cumplirán una relación de biortogonalidad de la forma:

$$\langle \bar{\mathbf{e}}_m | \mathbf{h}_n \rangle = \iint_{CS} \bar{\mathbf{e}}_m^* \cdot \mathbf{h}_n \, dS = \iint_{CS} (\mathbf{e}_m \times \mathbf{h}_n) \cdot \hat{\mathbf{z}} \, dS \quad (\text{B.2})$$

siendo  $CS$  el límite de integración, el cual, en el caso más general, supondremos que se extiende hasta el infinito, donde, como ya se ha dicho, los campos transversales se anulan.

Dichos operadores vienen dados en este caso por las siguientes expresiones:

$$L \equiv \nabla_t^2 + k_0^2 \varepsilon_r + \left( \frac{\nabla_t \varepsilon_r}{\varepsilon_r} \right) \times (\nabla_t \times \circ) \quad (\text{B.3})$$

$$L^\dagger \equiv \nabla_t^2 + k_0^2 \varepsilon_r^* + \hat{\mathbf{z}} \times \left\{ \nabla_t \left[ \hat{\mathbf{z}} \cdot \left( \frac{\nabla_t \varepsilon_r^*}{\varepsilon_r^*} \times \circ \right) \right] \right\}. \quad (\text{B.4})$$

Para llevar a cabo esta demostración, empezaremos desarrollando el término de la derecha de la ecuación (B.1):

$$\begin{aligned} \langle \bar{\mathbf{e}}_m | L \mathbf{h}_n \rangle &= \iint_{CS} \bar{\mathbf{e}}_m^* \cdot L \mathbf{h}_n dS \\ &= \iint_{CS} \bar{\mathbf{e}}_m^* \cdot \nabla_t^2 \mathbf{h}_n dS + \iint_{CS} \bar{\mathbf{e}}_m^* \cdot k_0^2 \varepsilon_r \mathbf{h}_n dS + \iint_{CS} \bar{\mathbf{e}}_m^* \cdot \left[ \frac{\nabla_t \varepsilon_r}{\varepsilon_r} \times (\nabla_t \times \mathbf{h}_n) \right] dS \\ &= \iint_{CS} \left( \bar{e}_{mx}^* \frac{\partial^2 h_{nx}}{\partial x^2} + \bar{e}_{my}^* \frac{\partial^2 h_{ny}}{\partial y^2} \right) dx dy + \iint_{CS} k_0^2 \varepsilon_r (\bar{e}_{mx}^* h_{xn} + \bar{e}_{my}^* h_{yn}) dx dy \\ &+ \iint_{CS} \left( \bar{e}_{mx}^* \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial y} \left( \frac{\partial h_{yn}}{\partial x} - \frac{\partial h_{xn}}{\partial y} \right) - \bar{e}_{my}^* \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial x} \left( \frac{\partial h_{yn}}{\partial x} - \frac{\partial h_{xn}}{\partial y} \right) \right) dx dy. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Del mismo modo, al desarrollar el término de la izquierda de la ecuación (B.1) nos queda el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} \langle L^\dagger \bar{\mathbf{e}}_m | \mathbf{h}_n \rangle &= \iint_{CS} (L^\dagger)^* \bar{\mathbf{e}}_m^* \cdot \mathbf{h}_n dS \\ &= \iint_{CS} \nabla_t^2 \bar{\mathbf{e}}_m^* \cdot \mathbf{h}_n dS + \iint_{CS} k_0^2 \varepsilon_r \bar{\mathbf{e}}_m^* \cdot \mathbf{h}_n dS + \iint_{CS} \hat{\mathbf{z}} \times \left\{ \nabla_t \left[ \hat{\mathbf{z}} \cdot \left( \frac{\nabla_t \varepsilon_r}{\varepsilon_r} \times \bar{\mathbf{e}}_m \right) \right] \right\} \cdot \mathbf{h}_n dS \\ &= \iint_{CS} \left( \frac{\partial^2 \bar{e}_{mx}^*}{\partial x^2} h_{nx} + \frac{\partial^2 \bar{e}_{my}^*}{\partial y^2} h_{ny} \right) dx dy + \iint_{CS} k_0^2 \varepsilon_r (\bar{e}_{mx}^* h_{xn} + \bar{e}_{my}^* h_{yn}) dx dy \\ &+ \iint_{CS} \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial y} \bar{e}_{mx}^* \right) h_{nx} - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial x} \bar{e}_{my}^* \right) h_{nx} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial y} \bar{e}_{mx}^* \right) h_{ny} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial x} \bar{e}_{my}^* \right) h_{ny} \right] dx dy. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

En las ecuaciones (B.5) y (B.6) aparece la suma de tres integrales de superficie. De las tres integrales, la segunda de ellas es la misma integral en ambas ecuaciones. Por tanto solamente nos queda por demostrar que las otras dos integrales también son iguales en ambas ecuaciones. Para ello, hay que manipular la primera y tercera integral de la ecuación (B.6) aplicando integración por partes, de forma que se hará uso de la condición de campo nulo en el infinito. Así, en la primera de las tres integrales que aparece en (B.6), se llevarán a cabo las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned}
& \iint_{CS} \left( \frac{\partial^2 \bar{e}_{mx}^*}{\partial x^2} h_{nx} + \frac{\partial^2 \bar{e}_{my}^*}{\partial y^2} h_{ny} \right) dx dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dy \left[ \frac{\partial \bar{e}_{mx}^*}{\partial x} h_{nx} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \iint_{CS} \frac{\partial \bar{e}_{mx}^*}{\partial x} \frac{\partial h_{nx}}{\partial x} dx dy + \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[ \frac{\partial \bar{e}_{my}^*}{\partial y} h_{ny} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \iint_{CS} \frac{\partial \bar{e}_{my}^*}{\partial y} \frac{\partial h_{ny}}{\partial y} dx dy \\
&= - \int_{-\infty}^{+\infty} dy \left[ \bar{e}_{mx}^* \frac{\partial h_{nx}}{\partial x} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \iint_{CS} \bar{e}_{mx}^* \frac{\partial^2 h_{nx}}{\partial x^2} dx dy - \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[ \bar{e}_{my}^* \frac{\partial h_{ny}}{\partial y} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \iint_{CS} \bar{e}_{my}^* \frac{\partial^2 h_{ny}}{\partial y^2} dx dy \\
&= \iint_{CS} \bar{e}_{mx}^* \frac{\partial^2 h_{nx}}{\partial x^2} dx dy + \iint_{CS} \bar{e}_{my}^* \frac{\partial^2 h_{ny}}{\partial y^2} dx dy \tag{B.7}
\end{aligned}$$

obteniéndose la misma expresión que aparece en la primera de las tres integrales de (B.5). Actuando del mismo modo en la tercera integral de (B.6), se llega al siguiente resultado:

$$\begin{aligned}
& \iint_{CS} \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial y} \bar{e}_{mx}^* \right) h_{nx} - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial x} \bar{e}_{my}^* \right) h_{nx} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial y} \bar{e}_{mx}^* \right) h_{ny} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial x} \bar{e}_{my}^* \right) h_{ny} \right] dx dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[ \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial y} \bar{e}_{mx}^* h_{nx} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \iint_{CS} \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial y} \bar{e}_{mx}^* \frac{\partial h_{nx}}{\partial y} dx dy \\
&\quad - \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[ \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial x} \bar{e}_{my}^* h_{nx} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \iint_{CS} \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial x} \bar{e}_{my}^* \frac{\partial h_{nx}}{\partial y} dx dy \\
&\quad - \int_{-\infty}^{+\infty} dy \left[ \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial y} \bar{e}_{mx}^* h_{ny} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \iint_{CS} \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial y} \bar{e}_{mx}^* \frac{\partial h_{ny}}{\partial x} dx dy \\
&\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} dy \left[ \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial x} \bar{e}_{my}^* h_{ny} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \iint_{CS} \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial x} \bar{e}_{my}^* \frac{\partial h_{ny}}{\partial x} dx dy \\
&= - \iint_{CS} \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial y} \bar{e}_{mx}^* \frac{\partial h_{nx}}{\partial y} dx dy + \iint_{CS} \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial x} \bar{e}_{my}^* \frac{\partial h_{nx}}{\partial y} dx dy \\
&\quad + \iint_{CS} \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial y} \bar{e}_{mx}^* \frac{\partial h_{ny}}{\partial x} dx dy - \iint_{CS} \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial x} \bar{e}_{my}^* \frac{\partial h_{ny}}{\partial x} dx dy \\
&= \iint_{CS} \left( \bar{e}_{mx}^* \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial y} \left( \frac{\partial h_{ny}}{\partial x} - \frac{\partial h_{nx}}{\partial y} \right) - \bar{e}_{my}^* \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial x} \left( \frac{\partial h_{ny}}{\partial x} - \frac{\partial h_{nx}}{\partial y} \right) \right) dx dy \tag{B.8}
\end{aligned}$$

que coincide con el resultado que aparece en la tercera de las tres integrales de (B.5). Por tanto, queda demostrado que los operadores de evolución  $L$  y  $L^\dagger$  de los campos transversales en sistemas guadores confinados son adjuntos uno del otro.

### B.3. Medios dieléctricos periódicos sin pérdidas

A continuación, se llevará a cabo la misma demostración para un caso particular de medios guadores no confinados (cuyos campos se extienden hasta el infinito), que son los medios dieléctricos periódicos sin pérdidas. En este caso particular, se demostrará que el

operador  $L$  de evolución del campo magnético transversal  $\mathbf{h}_n = (h_{xn}, h_{yn})$  y el operador  $L^\dagger$  de evolución de un campo eléctrico transversal definido como  $\bar{\mathbf{e}}_m = (-e_{ym}, e_{xm})$ , respectivamente, son adjuntos uno del otro (ver la ecuación B.1), de forma que los modos en este medio cumplirán de nuevo una relación de biortogonalidad de la forma:

$$\langle \bar{\mathbf{e}}_m | \mathbf{h}_n \rangle = \iint_{CS} \bar{\mathbf{e}}_m^* \cdot \mathbf{h}_n dS = \iint_{CS} (\mathbf{e}_m^* \times \mathbf{h}_n) \cdot \hat{\mathbf{z}} dS \quad (\text{B.9})$$

siendo  $CS$  el área de integración, el cual, en el caso más general de medios periódicos en dos dimensiones con periodicidades  $D_x$  y  $D_y$  en las direcciones  $X$  e  $Y$ , respectivamente, se extenderá al área de la celda unidad del medio periódico de dimensiones  $(D_x \times D_y)$  [13].

Dichos operadores vienen dados en este caso por las siguientes expresiones:

$$L \equiv \nabla_t^2 + k_0^2 \varepsilon_r + \left( \frac{\nabla_t \varepsilon_r}{\varepsilon_r} \right) \times (\nabla_t \times \circ) \quad (\text{B.10})$$

$$L^\dagger \equiv \nabla_t^2 + k_0^2 \varepsilon_r + \hat{\mathbf{z}} \times \left\{ \nabla_t \left[ \hat{\mathbf{z}} \cdot \left( \frac{\nabla_t \varepsilon_r}{\varepsilon_r} \times \circ \right) \right] \right\}. \quad (\text{B.11})$$

donde hemos supuesto que  $\varepsilon_r^* = \varepsilon_r$  para medios sin pérdidas. Para ello, se aplicará el teorema de Floquet [13] a los campos transversales en dicho medio, según el cual dichos campos transversales tienen una dependencia con las variables  $x$  e  $y$  de la forma:

$$\mathbf{e}_m(x_0 + D_x, y_0 + D_y) = \mathbf{e}_m(x_0, y_0) e^{-j(k_{mx} D_x + k_{my} D_y)} \quad (\text{B.12})$$

$$\mathbf{h}_n(x_0 + D_x, y_0 + D_y) = \mathbf{h}_n(x_0, y_0) e^{-j(k_{nx} D_x + k_{ny} D_y)} \quad (\text{B.13})$$

Para llevar a cabo la demostración, y siguiendo los mismos pasos que en el caso anterior, partiremos de las expresiones (B.5) y (B.6) (donde a la hora de escribir la ecuación (B.6) se ha tenido en cuenta que el medio dieléctrico periódico bajo estudio es un medio sin pérdidas, es decir,  $\varepsilon_r^* = \varepsilon_r$ ), y para demostrar en este caso que las dos integrales distintas que aparecen en ambas ecuaciones dan el mismo resultado, aplicaremos de nuevo en ambas la integración por partes, haciendo uso de la condición de periodicidad de los campos en el medio (teorema de Floquet). Así, en la primera de las tres integrales que aparece en (B.6), se llevarán a cabo las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned} & \iint_{CS} \left( \frac{\partial^2 \bar{e}_{mx}^*}{\partial x^2} h_{nx} + \frac{\partial^2 \bar{e}_{my}^*}{\partial y^2} h_{ny} \right) dx dy \\ &= \int_{y_0}^{y_0+D_y} dy \left[ \frac{\partial \bar{e}_{mx}^*}{\partial x} h_{nx} \right]_{x_0}^{x_0+D_x} - \iint_{CS} \frac{\partial \bar{e}_{mx}^*}{\partial x} \frac{\partial h_{nx}}{\partial x} dx dy + \int_{x_0}^{x_0+D_x} dx \left[ \frac{\partial \bar{e}_{my}^*}{\partial y} h_{ny} \right]_{y_0}^{y_0+D_y} - \iint_{CS} \frac{\partial \bar{e}_{my}^*}{\partial y} \frac{\partial h_{ny}}{\partial y} dx dy \\ &= - \int_{y_0}^{y_0+D_y} dy \left[ \bar{e}_{mx}^* \frac{\partial h_{nx}}{\partial x} \right]_{x_0}^{x_0+D_x} + \iint_{CS} \bar{e}_{mx}^* \frac{\partial^2 h_{nx}}{\partial x^2} dx dy - \int_{x_0}^{x_0+D_x} dx \left[ \bar{e}_{my}^* \frac{\partial h_{ny}}{\partial y} \right]_{y_0}^{y_0+D_y} + \iint_{CS} \bar{e}_{my}^* \frac{\partial^2 h_{ny}}{\partial y^2} dx dy \\ &= \int_{CS} \bar{e}_{mx}^* \frac{\partial^2 h_{nx}}{\partial x^2} dx dy + \iint_{CS} \bar{e}_{my}^* \frac{\partial^2 h_{ny}}{\partial y^2} dx dy \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

donde en este caso se demuestra que los términos entre corchetes se cancelan haciendo uso del teorema de Floquet, ya que dichos términos son de la forma:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{e}_{m\alpha}^*}{\partial \alpha} h_{n\alpha} &= \frac{\partial e_{m\beta}^*}{\partial \alpha} h_{n\alpha} \\ \bar{e}_{m\alpha}^* \frac{\partial h_{n\alpha}}{\partial \alpha} &= e_{m\beta}^* \frac{\partial h_{n\alpha}}{\partial \alpha}\end{aligned}$$

con  $\alpha = x$  o  $y$ , de forma que:

$$\begin{aligned}\left[ \frac{\partial e_{m\beta}^*}{\partial \alpha} h_{n\alpha} \right]_{\alpha_0}^{\alpha_0+D_\alpha} &= j k_\alpha e_{m\beta}^*(\alpha_0) e^{j k_\alpha D_\alpha} h_{n\alpha}(\alpha_0) e^{-j k_\alpha D_\alpha} - j k_\alpha e_{m\beta}^*(\alpha_0) h_{n\alpha}(\alpha_0) = 0 \\ \left[ e_{m\beta}^* \frac{\partial h_{n\alpha}}{\partial \alpha} \right]_{\alpha_0}^{\alpha_0+D_\alpha} &= e_{m\beta}^*(\alpha_0) e^{j k_\alpha D_\alpha} (-j k_\alpha) h_{n\alpha}(\alpha_0) e^{-j k_\alpha D_\alpha} - e_{m\beta}^*(\alpha_0) (-j k_\alpha) h_{n\alpha}(\alpha_0) = 0.\end{aligned}$$

Por tanto, la expresión (B.14) correspondiente a la primera de las tres integrales de (B.6) es la misma expresión que aparece en la primera de las tres integrales de (B.5). Actuando del mismo modo en la tercera integral de (B.6) se llega al siguiente resultado:

$$\begin{aligned}& \iint_{CS} \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial \varepsilon_r \bar{e}_{mx}^*}{\partial y} \right) h_{nx} - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial \varepsilon_r \bar{e}_{my}^*}{\partial x} \right) h_{nx} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial \varepsilon_r \bar{e}_{mx}^*}{\partial y} \right) h_{ny} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial \varepsilon_r \bar{e}_{my}^*}{\partial x} \right) h_{ny} \right] dx dy \\ &= \int_{x_0}^{x_0+D_x} dx \left[ \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial \varepsilon_r \bar{e}_{mx}^*}{\partial y} h_{nx} \right]_{y_0}^{y_0+D_y} - \iint_{CS} \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial \varepsilon_r \bar{e}_{mx}^*}{\partial y} \frac{\partial h_{nx}}{\partial y} dx dy \\ &- \int_{x_0}^{x_0+D_x} dx \left[ \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial \varepsilon_r \bar{e}_{my}^*}{\partial x} h_{nx} \right]_{y_0}^{y_0+D_y} + \iint_{CS} \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial \varepsilon_r \bar{e}_{my}^*}{\partial x} \frac{\partial h_{nx}}{\partial y} dx dy \\ &- \int_{y_0}^{y_0+D_y} dy \left[ \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial \varepsilon_r \bar{e}_{mx}^*}{\partial y} h_{ny} \right]_{x_0}^{x_0+D_x} + \iint_{CS} \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial \varepsilon_r \bar{e}_{mx}^*}{\partial y} \frac{\partial h_{ny}}{\partial x} dx dy \\ &+ \int_{y_0}^{y_0+D_y} dy \left[ \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial \varepsilon_r \bar{e}_{my}^*}{\partial x} h_{ny} \right]_{x_0}^{x_0+D_x} - \iint_{CS} \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial \varepsilon_r \bar{e}_{my}^*}{\partial x} \frac{\partial h_{ny}}{\partial x} dx dy \\ &= - \iint_{CS} \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial \varepsilon_r \bar{e}_{mx}^*}{\partial y} \frac{\partial h_{nx}}{\partial y} dx dy + \iint_{CS} \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial \varepsilon_r \bar{e}_{my}^*}{\partial x} \frac{\partial h_{nx}}{\partial y} dx dy \\ &+ \iint_{CS} \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial \varepsilon_r \bar{e}_{mx}^*}{\partial y} \frac{\partial h_{ny}}{\partial x} dx dy - \iint_{CS} \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial \varepsilon_r \bar{e}_{my}^*}{\partial x} \frac{\partial h_{ny}}{\partial x} dx dy \\ &= \iint_{CS} \left( \bar{e}_{mx}^* \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial y} \left( \frac{\partial h_{ny}}{\partial x} - \frac{\partial h_{nx}}{\partial y} \right) - \bar{e}_{my}^* \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial x} \left( \frac{\partial h_{ny}}{\partial x} - \frac{\partial h_{nx}}{\partial y} \right) \right) dx dy\end{aligned}\tag{B.15}$$

donde de nuevo se ha hecho uso de la condición del teorema de Floquet para los campos en el medio periódico, de forma que los corchetes que aparecen en (B.15) se anulan. Así, la expresión (B.15) correspondiente a la tercera de las tres integrales de (B.6) es la misma expresión que aparece en la tercera de las tres integrales de (B.5). Por tanto, queda demostrado que los operadores de evolución  $L$  y  $L^\dagger$  de los campos transversales en medios dieléctricos sin pérdidas con condiciones periódicas son adjuntos uno del otro.



## Apéndice C

# Relación de biortogonalidad para medios dieléctricos periódicos sin pérdidas

Los modos en un medio dieléctrico periódico sin pérdidas satisfacen una relación de biortogonalidad, la cual se puede derivar fácilmente a partir de las ecuaciones de Maxwell. Siguiendo los mismos pasos que se describen en [4] para el caso de una guía cerrada por paredes conductoras, vamos a considerar los campos totales  $\mathbf{H}_n$ ,  $\mathbf{E}_n$ , y  $\mathbf{H}_m$ ,  $\mathbf{E}_m$  para dos soluciones linealmente independientes de las ecuaciones de Maxwell. Para un medio dieléctrico periódico, empezaremos con la ecuación del rotacional del campo eléctrico del modo  $n$ -ésimo  $\nabla \times \mathbf{E}_n = -j\omega\mu\mathbf{H}_n$ , y su conjugada para el campo eléctrico del modo  $m$ -ésimo,  $\nabla \times \mathbf{E}_m^* = j\omega\mu\mathbf{H}_m^*$ . Multiplicando escalarmente dichas ecuaciones por  $\mathbf{H}_m^*$  y  $\mathbf{H}_n$ , respectivamente, y sumando, se obtiene:

$$\mathbf{H}_m^* \cdot \nabla \times \mathbf{E}_n + \mathbf{H}_n \cdot \nabla \times \mathbf{E}_m^* = 0 \quad (\text{C.1})$$

De la misma forma, multiplicando escalarmente las ecuaciones del rotacional de  $\mathbf{H}_n$ ,  $\mathbf{H}_m^*$  por  $\mathbf{E}_m^*$ ,  $\mathbf{E}_n$  y sumando se obtiene:

$$\mathbf{E}_m^* \cdot \nabla \times \mathbf{H}_n + \mathbf{E}_n \cdot \nabla \times \mathbf{H}_m^* = 0 \quad (\text{C.2})$$

Restando (C.1) - (C.2) se obtiene la siguiente ecuación:

$$\nabla \cdot (\mathbf{E}_n \times \mathbf{H}_m^* + \mathbf{E}_m^* \times \mathbf{H}_n) = 0 \quad (\text{C.3})$$

Haciendo uso de la relación  $\nabla = \nabla_t + \hat{\mathbf{z}} \partial/\partial z$ , y aplicando la forma bidimensional del teorema de la divergencia, se tiene que:

$$\oint_C \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E}_n \times \mathbf{H}_m^* + \mathbf{E}_m^* \times \mathbf{H}_n) dl = j(\beta_n - \beta_m) \int_S \hat{\mathbf{z}} \cdot (\mathbf{E}_{tn} \times \mathbf{H}_{tm}^* + \mathbf{E}_{tm}^* \times \mathbf{H}_{tn}) dS \quad (\text{C.4})$$

donde  $S$  representa la superficie de la sección transversal de la celda periódica,  $C$  representa el contorno de la celda, y el subíndice  $t$  representa las componentes transversales de los campos. Se puede comprobar fácilmente que la integral de contorno alrededor de la celda unidad se cancela, puesto que dicha integral de contorno se puede descomponer en cuatro

integrales de línea: por un lado, las dos integrales de línea para la coordenada  $x$  constante son idénticas en un medio independiente de  $x$ , pero con un cambio de signo en la dirección de integración, de forma que ambos términos se cancelan uno con el otro; por otro lado, las integrales de línea a lo largo de las líneas  $y = y_0$  y  $y = y_0 + D$  también se cancelan una a otra, puesto que los campos difieren únicamente en un término de fase, que viene dado por el Teorema de Floquet[13]:

$$\mathbf{E}_{tn}(y_0 + D) = \mathbf{E}_{tn}(y_0)e^{-jk_y D} \quad (\text{C.5})$$

$$\mathbf{H}_{tn}(y_0 + D) = \mathbf{H}_{tn}(y_0)e^{-jk_y D} \quad (\text{C.6})$$

No obstante, dichos términos de fase se cancelan cuando se sustituyen los campos en las integrales de línea, de forma que finalmente estas dos integrales también se cancelan una a otra. Así, obtendremos la siguiente ecuación para modos con dependencia con la coordenada  $z$  de la forma  $\exp(-j\beta_n z)$ :

$$j(\beta_n - \beta_m) \int_S \hat{\mathbf{z}} \cdot (\mathbf{e}_n \times \mathbf{h}_m^* + \mathbf{e}_m^* \times \mathbf{h}_n) dS = 0 \quad (\text{C.7})$$

puesto que los términos de las exponenciales comunes se pueden cancelar. Para demostrar que ambos términos de la ecuación (C.7) se cancelan, vamos a considerar las dos soluciones  $\mathbf{E}_n, \mathbf{H}_n$  y  $\mathbf{E}'_m, \mathbf{H}'_m$ , donde  $\mathbf{E}'_m, \mathbf{H}'_m$  es el mismo modo que el considerado anteriormente, pero con una dependencia con  $z$  de la forma  $\exp(j\beta_m z)$  en lugar de  $\exp(-j\beta_m z)$ . Ello corresponde a una inversión en la dirección de propagación, y consecuentemente, la dirección del campo magnético transversal también se invierte. La ecuación correspondiente a (C.7) para este caso es:

$$j(\beta_n + \beta_m) \int_S \hat{\mathbf{z}} \cdot (\mathbf{e}_n \times (-\mathbf{h}_m^*) + \mathbf{e}_m^* \times \mathbf{h}_n) dS = 0 \quad (\text{C.8})$$

Sumando (C.7) y (C.8) se obtiene finalmente:

$$\int_S (\mathbf{e}_m^* \times \mathbf{h}_n) \cdot \hat{\mathbf{z}} dS = 0, \quad m \neq n \quad (\text{C.9})$$

que es la relación de biortogonalidad satisfecha por los campos en un medio dieléctrico periódico sin pérdidas.

## Apéndice D

# Evaluación de los elementos de matriz del operador $L$

En este apéndice se describe cómo resolver la integral de superficie que aparece en la evaluación de los elementos de matriz del operador  $L$  para sistemas guidores cuya permitividad dieléctrica relativa  $\varepsilon_r$  es una función discontinua. Concretamente, se analizará el caso más sencillo, correspondiente a una guía rectangular homogénea con permitividad dieléctrica relativa  $\tilde{\varepsilon}_{rb}$  de dimensiones  $(a \times b)$ , rellena parcialmente de un dieléctrico con permitividad relativa  $\varepsilon_{r1}$ , delimitado por el contorno  $C$ , como se muestra en la figura D.1. En esta guía, tenemos un sistema cartesiano de coordenadas, como se muestra en dicha figura. Para describir un objeto dieléctrico de sección transversal arbitraria, es conveniente definir un sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales [102], definidas por  $(n, \tau, z)$ , siendo  $n$  la coordenada normal al contorno del objeto dieléctrico ( $C$ ), y  $\tau$  la coordenada tangencial asociada a dicho contorno, mientras que  $z$  es la coordenada axial. Con este sistema de coordenadas, es sencillo describir la permitividad relativa en cualquier punto de la guía:

$$\varepsilon_r = \varepsilon_{r1} + (\tilde{\varepsilon}_{rb} - \varepsilon_{r1}) [\theta(n - n_c)] \quad (\text{D.1})$$

donde  $\theta(x)$  es la función escalón o función de *Heaviside*, y  $n = n_c$  define el contorno  $C$  del objeto dieléctrico. La integral que pretendemos evaluar se expresa de forma general como (3.18):

$$\begin{aligned} L_{pq} &= \langle \tilde{\mathbf{e}}_p | L \tilde{\mathbf{h}}_q \rangle = \tilde{\beta}_q^2 \delta_{pq} + k_0^2 \int_{CS} (\varepsilon_r - \tilde{\varepsilon}_{rb}) (\tilde{\mathbf{e}}_p \times \tilde{\mathbf{h}}_q) \cdot \hat{\mathbf{z}} dS \\ &+ \int_{CS} \left[ \tilde{\mathbf{e}}_p \times \left( \frac{\nabla_t \varepsilon_r}{\varepsilon_r} \times (\nabla_t \times \tilde{\mathbf{h}}_q) \right) \right] \cdot \hat{\mathbf{z}} dS. \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

En esta ecuación aparece el gradiente transversal de la función  $\varepsilon_r$ ; dicho gradiente se puede calcular como:

$$\nabla_t \varepsilon_r = (\tilde{\varepsilon}_{rb} - \varepsilon_{r1}) \frac{1}{h_n} \frac{\partial}{\partial n} \theta(n - n_c) \hat{\mathbf{n}} = (\tilde{\varepsilon}_{rb} - \varepsilon_{r1}) \frac{1}{h_n} \delta(n - n_c) \hat{\mathbf{n}} \quad (\text{D.3})$$

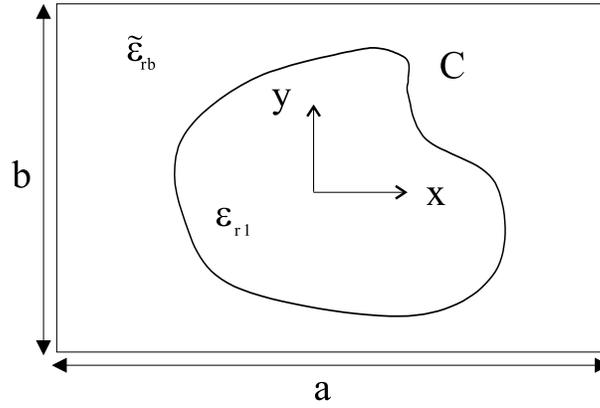


Figura D.1: Sección transversal de una guía rectangular homogénea de permitividad relativa  $\tilde{\epsilon}_{rb}$  parcialmente rellena de un dieléctrico con permitividad relativa  $\epsilon_{r1}$  con un perfil arbitrario definido por el contorno  $C$ .

donde  $h_n$  es el coeficiente métrico de la coordenada normal,  $\hat{\mathbf{n}}$  es el vector unitario asociado a dicha coordenada, y  $\delta(x)$  es la *Delta de Dirac*. El elemento de superficie  $dS$  en la dirección del eje  $Z$  en este sistema de coordenadas toma la forma:

$$dS = dx dy \hat{\mathbf{z}} = h_n h_\tau dn d\tau \hat{\mathbf{z}} \quad (D.4)$$

donde  $h_\tau$  es el coeficiente métrico tangencial.

La primera integral que aparece en (D.2) se puede evaluar fácilmente y no entraremos en detalles. Sin embargo, la segunda integral de (D.2) presenta cierta dificultad en su evaluación, debido a que en ella aparece el gradiente transversal de una función discontinua. Además, se demostrará que esta integral de superficie se puede reducir a una integral de línea. Sustituyendo (D.1), (D.3) y (D.4) en la segunda integral de (D.2) se tiene que:

$$\begin{aligned} L_{2pq} &\equiv \int_{CS} \left[ \tilde{\mathbf{e}}_p \times \left( \frac{\nabla_t \tilde{\epsilon}_r}{\epsilon_r} \times (\nabla_t \times \tilde{\mathbf{h}}_q) \right) \right] \cdot \hat{\mathbf{z}} dS \\ &= \int_{CS} \left[ \tilde{\mathbf{e}}_p \times \left( \frac{(\tilde{\epsilon}_{rb} - \epsilon_{r1}) \frac{1}{h_n} \delta(n - n_c) \hat{\mathbf{n}}}{\epsilon_r(n, \tau)} \times (\nabla_t \times \tilde{\mathbf{h}}_q) \right) \right] \cdot \hat{\mathbf{z}} h_n h_\tau dn d\tau \end{aligned} \quad (D.5)$$

y ahora, haciendo uso de la propiedad del triple producto vectorial se puede reescribir (D.5) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} L_{2pq} &\equiv \int_{CS} - \left( \tilde{\mathbf{e}}_p \cdot \frac{(\tilde{\epsilon}_{rb} - \epsilon_{r1}) \frac{1}{h_n} \delta(n - n_c) \hat{\mathbf{n}}}{\epsilon_r(n, \tau)} \right) (\nabla_t \times \tilde{\mathbf{h}}_q) \cdot \hat{\mathbf{z}} h_n h_\tau dn d\tau \\ &= (\epsilon_{r1} - \tilde{\epsilon}_{rb}) \int_{CS} \frac{\tilde{e}_{np} \delta(n - n_c)}{\epsilon_r(n, \tau)} (\nabla_t \times \tilde{\mathbf{h}}_q) \cdot \hat{\mathbf{z}} h_n h_\tau dn d\tau \end{aligned} \quad (D.6)$$

donde  $\tilde{e}_{np}$  es la componente normal del campo eléctrico transversal. Ahora se puede transformar esta integral de superficie en una integral de línea haciendo uso de la propiedad fun-

damental que define la función *Delta de Dirac*, según la cual:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-a)dt = f(a). \quad (\text{D.7})$$

siempre que  $f$  sea continua en  $t = a$ . En nuestro caso, la integración en la variable  $n$  se puede reducir evaluando el integrando en  $n = n_c$ :

$$L_{2pq} \equiv (\varepsilon_{r1} - \tilde{\varepsilon}_{rb}) \oint_C \frac{\tilde{\varepsilon}_{np}(n_c, \tau)}{\varepsilon_r(n_c, \tau)} [(\nabla_t \times \tilde{\mathbf{h}}_q) \cdot \hat{\mathbf{z}}]_{n=n_c} h_\tau d\tau. \quad (\text{D.8})$$

Las funciones  $\tilde{\varepsilon}_{np}$  y  $(\nabla_t \times \tilde{\mathbf{h}}_q) \cdot \hat{\mathbf{z}}$  son funciones continuas, y su evaluación en  $n = n_c$  no presenta ninguna dificultad. Sin embargo, no podemos decir lo mismo de la función inversa de la permitividad dieléctrica relativa. El siguiente paso es la evaluación de dicha función justo en la discontinuidad. Para evaluarla, aproximaremos dicha función por una función continua, la cual en el límite coincide con la función de *Heaviside* [62]. Dicha función es la siguiente:

$$f(x) = \frac{1}{2} [1 + \tanh sx] \quad \Rightarrow \quad \lim_{s \rightarrow \infty} f(x) = \theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases} \quad (\text{D.9})$$

$$f'(x) = \frac{s}{2 \cosh^2 sx} \quad \Rightarrow \quad \lim_{s \rightarrow \infty} f'(x) = \delta(x). \quad (\text{D.10})$$

donde  $'$  indica la derivada. Por tanto, ahora se puede evaluar la inversa de la función permitividad dieléctrica relativa justo en el escalón, resultando:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon_r(n_c, \tau)} &= \frac{1}{\varepsilon_{r1} + (\tilde{\varepsilon}_{rb} - \varepsilon_{r1}) [\theta(n - n_c)]_{n=n_c}} \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{[\varepsilon_{r1} + \frac{\tilde{\varepsilon}_{rb} - \varepsilon_{r1}}{2} [1 + \tanh s(n - n_c)]]_{n=n_c}} \\ &= \frac{2}{\tilde{\varepsilon}_{rb} + \varepsilon_{r1}} \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

Sustituyendo este resultado en D.8 se llega a la expresión final para la segunda integral de (D.2):

$$L_{2pq} \equiv (\varepsilon_{r1} - \tilde{\varepsilon}_{rb}) \frac{2}{\tilde{\varepsilon}_{rb} + \varepsilon_{r1}} \oint_C \tilde{\varepsilon}_{np}(n_c, \tau) [(\nabla_t \times \tilde{\mathbf{h}}_q) \cdot \hat{\mathbf{z}}]_{n=n_c} h_\tau d\tau. \quad (\text{D.12})$$

Si en lugar de seguir estos pasos, se evalúa el término  $\nabla_t \varepsilon_r / \varepsilon_r$  expresado como  $\nabla_t \ln(\varepsilon_r)$  al igual que en [103], [104], [105], se llega a un resultado erróneo. En este caso la evaluación de la segunda integral en (D.2) proporciona este otro resultado:

$$L_{2pq} \equiv (\ln(\varepsilon_{r1}) - \ln(\tilde{\varepsilon}_{rb})) \oint_C \tilde{\varepsilon}_{np}(n_c, \tau) [(\nabla_t \times \tilde{\mathbf{h}}_q) \cdot \hat{\mathbf{z}}]_{n=n_c} h_\tau d\tau \quad (\text{D.13})$$

que es diferente a D.12; hemos comprobado numéricamente que si se emplea (D.13) en lugar de (D.12), los resultados proporcionados por el método son incorrectos (el error aumenta cuanto mayor es la diferencia entre  $\tilde{\varepsilon}_{rb}$  y  $\varepsilon_{r1}$ ).



# Apéndice E

## Modos de Floquet de un medio dieléctrico homogéneo con condiciones periódicas

### E.1. Introducción

En este apéndice se va a obtener el campo electromagnético en un sistema guiador con condiciones periódicas en una dimensión relleno de un medio dieléctrico homogéneo sin pérdidas, que son los modos de Floquet, también conocidos como ondas o modos de Bloch. Estos modos se emplearán posteriormente en el Método de los Momentos como base auxiliar para obtener el espectro modal en medios dieléctricos infinitos periódicos en una dirección, que son uno de los constituyentes básicos de las SSFD.

En primer lugar se hará una descomposición del campo electromagnético en las dos familias de modos *Tipo-E* y *Tipo-H*, que están relacionadas con los distintos estados de polarización posibles. Después, se aplicará la condición de contorno para el medio dieléctrico homogéneo con condiciones periódicas bajo estudio; dicha condición de contorno se conoce con el nombre de Teorema de Floquet. Finalmente, se obtendrán las expresiones de los armónicos vectoriales de Floquet.

### E.2. Estructura de campos: modos Tipo-E, Tipo-H

Las ecuaciones de Maxwell para campos de variación armónica en medios lineales, isotrópicos y homogéneos, en ausencia de fuentes, pueden escribirse de la siguiente forma [61]:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H} &= j\omega\varepsilon\mathbf{E} & \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -j\omega\mu\mathbf{H} & \nabla \cdot \mathbf{H} &= 0\end{aligned}$$

donde se ha supuesto una dependencia temporal armónica de la forma  $e^{j\omega t}$  que ha sido omitida. En ausencia de las fuentes dichos campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  satisfacen la ecuación de ondas, que

## 190 Modos de Floquet de un medio dieléctrico homogéneo con condiciones periódicas

para el caso armónico es conocida como ecuación de Helmholtz:

$$[\nabla^2 + k^2] \begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{Bmatrix} = 0. \quad (\text{E.1})$$

Para un sistema guiador, la simetría traslacional - cuyo eje de propagación haremos coincidir con el eje  $Z$  - permite simplificar la solución del problema, buscando soluciones de la forma:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_t + E_z = (\mathbf{e}_t + e_z \hat{\mathbf{z}}) \exp(\pm j\beta z) \quad (\text{E.2})$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_t + H_z = (\mathbf{h}_t + h_z \hat{\mathbf{z}}) \exp(\pm j\beta z) \quad (\text{E.3})$$

según se propaguen las ondas en sentido positivo o negativo; el subíndice  $t$  indica las componentes del plano transversal. El operador  $\nabla$  es descompuesto en la forma habitual:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} - (\pm j\beta \hat{\mathbf{z}}) = \nabla_t - (\pm j\beta \hat{\mathbf{z}}) \quad (\text{E.4})$$

y descomponiendo la ecuación E.1 en sus tres componentes cartesianas obtenemos las ecuaciones de valores y vectores propios:

$$[\nabla^2 + \gamma^2] \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_i \\ \mathbf{h}_i \end{Bmatrix} = 0 \quad i = x, y, z \quad (\text{E.5})$$

con  $\gamma^2 = k^2 - \beta^2 = k_x^2 + k_y^2$ . La resolución de estas ecuaciones es la familia de soluciones  $\{\gamma_n, \mathbf{e}_n, \mathbf{h}_n\}$  donde  $\gamma_n$  es el valor propio de las funciones propias  $\{\mathbf{e}_n, \mathbf{h}_n\}$ .

Las anteriores ecuaciones son degeneradas, en el sentido de que para una misma pareja  $k_{xn}, k_{yn}$  es posible encontrar dos parejas de funciones modo  $\{\gamma_n, \mathbf{e}_n, \mathbf{h}_n\}$  linealmente independientes. La aparición de modos degenerados está relacionada con los distintos estados de polarización posibles. Estas dos funciones pueden ser escogidas ortogonales entre sí. Así, la condición  $\mathbf{e}_{tn} = Z_n(\mathbf{h}_{tn} \times \hat{\mathbf{z}})$  lleva a dos subconjuntos de modos, ambos asociados con los mismos valores propios, que son los conocidos modos  $\text{TE}^z$  (transversal eléctrico al eje  $Z$ ),  $\text{TM}^z$  (transversal magnético al eje  $Z$ ). Estos modos, como se ha comentado anteriormente, se caracterizan por tener una de las componentes axiales del campo eléctrico o magnético nulas:  $h_z$  para  $\text{TM}^z$  y  $e_z$  para  $\text{TE}^z$ . Harrington [61] construye dichos modos imponiendo la condición:  $\mathbf{A} = \Psi \hat{\mathbf{z}}, \mathbf{F} = 0$  para el  $\text{TM}^z$  y  $\mathbf{A} = 0, \mathbf{F} = \Psi \hat{\mathbf{z}}$  para el  $\text{TE}^z$ , donde  $\Psi$  es un potencial escalar y  $\mathbf{A}, \mathbf{F}$  son los potenciales vectores magnético y eléctrico, respectivamente, que se relacionan con los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  a través de las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{-j}{\omega\mu\epsilon} [\nabla\nabla + k^2] \mathbf{A} - \frac{1}{\epsilon} [\nabla \times \mathbf{F}] \\ \mathbf{H} &= \frac{-j}{\omega\mu\epsilon} [\nabla\nabla + k^2] \mathbf{F} + \frac{1}{\mu} [\nabla \times \mathbf{A}]. \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

En ciertos sistemas en los que existe una dirección privilegiada en el plano transversal —que haremos coincidir con el eje  $Y$ — no conviene elegir los modos  $\text{TE}^z, \text{TM}^z$ , ya que

no describen bien los estados "naturales" de polarización de la onda incidente. Tal es el caso de la interacción de ondas planas linealmente polarizadas al incidir sobre una estructura plana infinita conductora con periodicidad unidimensional en el eje  $Y$ . Al incidir la onda normalmente sobre la misma, si el campo  $\mathbf{H}$  es perpendicular al eje  $Y$ , la onda se transmite, mientras que si el campo  $\mathbf{E}$  es perpendicular al eje  $Y$ , la onda es principalmente reflejada por la rejilla. Por tanto, en medios periódicos en el eje  $Y$  será más interesante definir unos modos caracterizados por ser transversales, no a la dirección de propagación de la señal (eje  $Z$ ), sino a la dirección de periodicidad (eje  $Y$ ); a estos modos se les denomina de diferentes formas: LSE (*longitudinal-section electric*) y LSM (*longitudinal-section magnetic*) en [4]; TE $^y$  y TM $^y$  en [61], y modos Tipo-E y Tipo-H (utilizada en esta tesis para medios dieléctricos periódicos) [85] [106], [19], [86], [17], [107]. Al modo Tipo-E se le denotará por  $'$  y al Tipo-H por  $''$ .

El modo Tipo-E se caracteriza por no tener componente del campo magnético en la dirección  $Y$ , es decir,  $h'_y = 0$ , mientras que el modo Tipo-H se define imponiendo la condición  $e''_y = 0$ . Para conseguir la estructura de campos correspondiente a los modos Tipo-E, Tipo-H vamos a seguir el método propuesto en [61]; si lo que se pretende es que el campo magnético sea nulo en la dirección  $Y$ , elegiremos los potenciales vectores:  $\mathbf{A}' = \Psi' \hat{\mathbf{y}}$ ,  $\mathbf{F}' = 0$ . Imponiendo dichas condiciones en las ecuaciones (E.6) se obtiene, en coordenadas rectangulares:

$$\begin{aligned} E'_x &= \frac{-j}{\omega\mu\varepsilon} \frac{\partial^2 \Psi'}{\partial x \partial y} & H'_x &= \frac{-1}{\mu} \frac{\partial \Psi'}{\partial z} \\ E'_y &= \frac{-j}{\omega\mu\varepsilon} \left[ \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2 \right] \Psi' & H'_y &= 0 \\ E'_z &= \frac{-j}{\omega\mu\varepsilon} \frac{\partial^2 \Psi'}{\partial y \partial z} & H'_z &= \frac{1}{\mu} \frac{\partial \Psi'}{\partial x}. \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

Análogamente, para el modo Tipo-H, eligiendo  $\mathbf{A}'' = 0$ ,  $\mathbf{F}'' = \Psi'' \hat{\mathbf{y}}$ , se obtiene:

$$\begin{aligned} E''_x &= \frac{-1}{\varepsilon} \frac{\partial \Psi''}{\partial z} & H''_x &= \frac{-j}{\omega\mu\varepsilon} \frac{\partial^2 \Psi''}{\partial x \partial y} \\ E''_y &= 0 & H''_y &= \frac{-j}{\omega\mu\varepsilon} \left[ \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2 \right] \Psi'' \\ E''_z &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \Psi''}{\partial x} & H''_z &= \frac{-j}{\omega\mu\varepsilon} \frac{\partial^2 \Psi''}{\partial y \partial z}. \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

El paso siguiente es resolver la ecuación de ondas (E.1) para los potenciales vectoriales eléctrico y magnético, y con las expresiones (E.7), (E.8) obtener la estructura de campos buscada. Comenzaremos con el modo Tipo-E.

La ecuación de ondas que satisface el potencial vector eléctrico en coordenadas cartesianas, teniendo en cuenta (E.4) y que  $\mathbf{A}' = \Psi' \hat{\mathbf{y}}$ , puede ser resuelta utilizando la técnica de separación de variables; si expresamos  $\Psi'$  como:

$$\Psi'^{\pm}(x, y, z) = X(x)Y(y)e^{-(\pm j\beta z)} \quad (\text{E.9})$$

## 192 Modos de Floquet de un medio dieléctrico homogéneo con condiciones periódicas

tendremos:

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \gamma^2 \right] X(x)Y(y)e^{-(\pm j\beta z)} = 0; \quad \gamma^2 = k^2 - k_z^2 = k_x^2 + k_y^2 \quad (\text{E.10})$$

que tiene solución trivial:

$$\Psi'^{\pm}(x, y, z) = e^{-jk_x x} e^{-jk_y y} e^{-(\pm j\beta z)} \quad (\text{E.11})$$

Para el modo Tipo-H se tiene la misma solución, dada la simetría del problema:  $\Psi''^{\pm}(x, y, z) = \Psi'^{\pm}(x, y, z)$ .

Con las ecuaciones (E.7), (E.8) y algunas manipulaciones matemáticas se llega fácilmente a las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} E_x'^{\pm} &= \frac{jk_y}{\omega\mu\epsilon} \Psi'^{\pm} & H_x'^{\pm} &= \frac{\pm j\beta}{\mu} \Psi'^{\pm} \\ E_y'^{\pm} &= \frac{-j(k^2 - k_y^2)}{\omega\mu\epsilon} \Psi'^{\pm} & H_y'^{\pm} &= 0 \\ E_z'^{\pm} &= \frac{\pm jk_y\beta}{\omega\mu\epsilon} \Psi'^{\pm} & H_z'^{\pm} &= \frac{-jk_x}{\mu} \Psi'^{\pm} \end{aligned} \quad (\text{E.12})$$

para el modo Tipo-E, y para el Tipo-H:

$$\begin{aligned} E_x''^{\pm} &= \frac{-(\pm j\beta)}{\epsilon} \Psi''^{\pm} & H_x''^{\pm} &= \frac{jk_x k_y}{\omega\mu\epsilon} \Psi''^{\pm} \\ E_y''^{\pm} &= 0 & H_y''^{\pm} &= \frac{-j(k^2 - k_y^2)}{\omega\mu\epsilon} \Psi''^{\pm} \\ E_z''^{\pm} &= \frac{jk_x}{\epsilon} \Psi''^{\pm} & H_z''^{\pm} &= \frac{\pm jk_y\beta}{\omega\mu\epsilon} \Psi''^{\pm} \end{aligned} \quad (\text{E.13})$$

Estas expresiones son las soluciones ondulatorias de las ecuaciones de Maxwell buscadas para los modos Tipo-E, Tipo-H.

### E.3. El Teorema de Floquet

En este apartado vamos a describir las soluciones del campo electromagnético usadas para estudiar los medios periódicos, que son los modos de Floquet.

La geometría a tratar es un medio periódico en la dirección Y con periodicidad D y uniforme en la dirección X, como se muestra en la figura E.1. Este medio es excitado por una onda plana linealmente polarizada cuyo vector de ondas  $\mathbf{k}$  lleva la dirección de propagación dada por los ángulos habituales de coordenadas esféricas  $\theta$ ,  $\phi$ , y viene dado por la siguiente expresión:

$$\mathbf{k} = k_x \mathbf{x} + k_y \mathbf{y} + k_z \mathbf{z} \quad (\text{E.14})$$

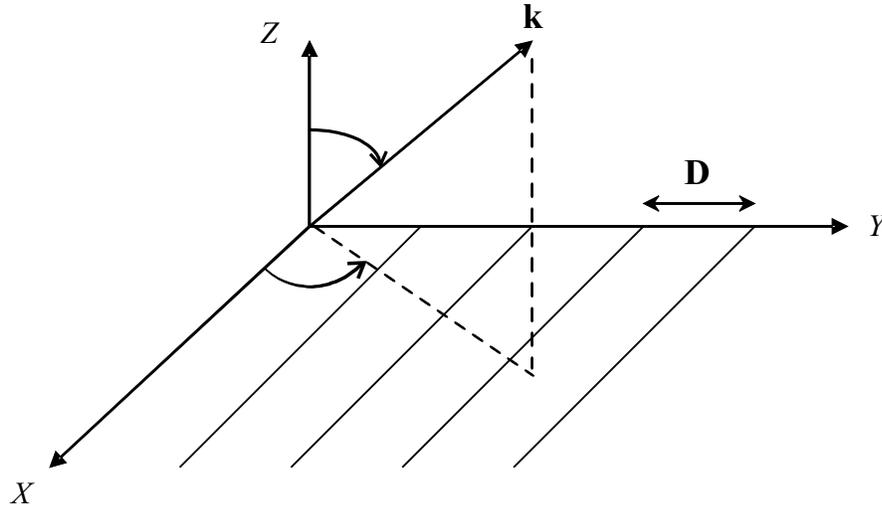


Figura E.1: Esquema de una estructura periódica en la dirección  $Y$  y homogénea en la dirección  $X$  sobre la que incide una onda plana linealmente polarizada.

siendo

$$k_x = k \sin \theta \cos \phi, \quad k_{y0} = k \sin \theta \sin \phi, \quad k_{z0} = k \cos \theta$$

donde  $k = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon}$  es el número de ondas en el medio. El Teorema de Floquet establece que el campo o el potencial en cualquier punto de una celda unidad tomará exactamente el mismo valor en un punto similar de otra celda unidad salvo un factor de fase. Así, si hacemos uso de la condición de periodicidad del medio en la dirección  $Y$  en la ecuación (E.9), las soluciones del campo deben cumplir la condición:

$$Y(y + D) = Y(y) e^{-jkD \sin \theta \sin \phi} \quad (\text{E.15})$$

es decir, la variación en el eje  $Y$  en un periodo es igual a una fase lineal introducida por la onda incidente. La solución del potencial escalar de la ecuación (E.11) para la componente  $Y$  es:

$$Y(y) = e^{-jk_{y0}y} \quad (\text{E.16})$$

Se define una función  $\hat{Y}(y)$  de la forma:

$$\hat{Y}(y) = Y(y) e^{jk_{y0}y} \quad (\text{E.17})$$

y por tanto:

$$\hat{Y}(y + D) = Y(y + D) e^{jk_{y0}(y+D)} = Y(y) e^{jk_{y0}y} = \hat{Y}(y) \quad (\text{E.18})$$

es decir, la función  $\hat{Y}$  es periódica de periodo  $D$ , con lo cual puede ser descompuesta en una serie de Fourier [62]:

$$\hat{Y}(y) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} d_n e^{-j(2\pi n/D)y} \quad (\text{E.19})$$

## 194 Modos de Floquet de un medio dieléctrico homogéneo con condiciones periódicas

y por tanto:

$$Y(y) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} d_n e^{-j(2\pi n/D + k_{y0})y} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} d_n e^{-jk_{yn}y} \quad (\text{E.20})$$

donde:

$$k_{yn} = k \sin \theta \sin \phi + \frac{2\pi}{D}n = k_{y0} + \frac{2\pi}{D}n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (\text{E.21})$$

Ello nos lleva a soluciones del tipo:

$$Y_n(y) = e^{-jk_{yn}y} \quad (\text{E.22})$$

conocidas como los *armónicos de Floquet*. La componente  $X$  del vector  $\mathbf{k}$  no tiene subíndice, ya que hemos supuesto que la estructura es periódica en el eje  $Y$  y homogénea en el eje  $X$ , siendo por tanto de la forma:

$$k_x = k \sin \theta \cos \phi \quad (\text{E.23})$$

y la componente  $Z$ , conocida como la constante de propagación  $\beta_n$  en la dirección  $+\hat{z}$ , teniendo en cuenta la relación de dispersión  $\mathbf{k}^2 = \mathbf{k}_x^2 + \mathbf{k}_y^2 + \beta_n^2$ , queda:

$$\beta_n = \begin{cases} +\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_{yn}^2} & \text{si } k^2 \geq k_x^2 + k_{yn}^2 \\ -j\sqrt{k_x^2 + k_{yn}^2 - k^2} & \text{si } k^2 < k_x^2 + k_{yn}^2 \end{cases} \quad (\text{E.24})$$

Estos modos se clasifican en modos propagativos y modos evanescentes, según sea  $\beta_n$  un número real o imaginario puro.

El Teorema de Floquet también puede enunciarse para un caso de periodicidad en dos direcciones (en el plano transversal) que sean o no perpendiculares entre sí [108].

### E.4. Modos de Floquet Tipo-E y Tipo-H

El Teorema de Floquet permite expresar los potenciales vectoriales eléctrico y magnético –y por tanto los campos eléctrico y magnético– de un medio periódico en función de una suma de infinitos armónicos que vienen expresados por la ecuación (E.22). Por otra parte, en el apartado E.2 se ha analizado la descomposición vectorial de dichos campos para obtener dos familias de modos degenerados Tipo-E, Tipo-H) que resuelven el problema de la polarización de la manera más adecuada. Introduciendo la ecuación (E.20) en las expresiones dadas en las ecuaciones (E.12), (E.13), se obtienen finalmente las expresiones de los armónicos vectoriales de Floquet de orden  $n$  del modo Tipo-E o Tipo-H, cuyas componentes transversales son:

$$\tilde{\mathbf{e}}'_p = \frac{1}{\sqrt{D}} e^{-j(k_x x + k_{y_p} y)} \left[ \frac{-k_x k_{y_p}}{k_0^2 - k_{y_p}^2} \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} \right] \quad (\text{E.25})$$

$$\tilde{\mathbf{h}}'_p = \frac{-1}{\sqrt{D}} e^{-j(k_x x + k_{y_p} y)} \hat{\mathbf{x}} \quad (\text{E.26})$$

$$\tilde{\mathbf{e}}''_p = \frac{1}{\sqrt{D}} e^{-j(k_x x + k_{y_p} y)} \hat{\mathbf{x}} \quad (\text{E.27})$$

$$\tilde{\mathbf{h}}''_p = \frac{1}{\sqrt{D}} e^{-j(k_x x + k_{y_p} y)} \left[ \frac{-k_x k_{y_p}}{(k_0^2 - k_{y_p}^2)} \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} \right] \quad (\text{E.28})$$

donde  $k_{y_p}$  es el número de ondas de Floquet, que viene dado como:

$$k_{y_p} = k_y + \frac{2\pi}{D} p = k \sin \theta \sin \phi + \frac{2\pi}{D} p ; \quad p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (\text{E.29})$$

Estos modos han sido adecuadamente normalizados, de manera que forman una base ortogonal que cumple una relación de ortogonalidad de la forma:

$$\langle \tilde{\mathbf{e}}_p^\alpha, \tilde{\mathbf{h}}_q^\beta \rangle = \int_0^D (\tilde{\mathbf{e}}_p^{\alpha*} \times \tilde{\mathbf{h}}_q^\beta) \cdot \hat{\mathbf{z}} dy = \delta_{\alpha\beta} \delta_{pq} \quad (\text{E.30})$$

donde  $\alpha, \beta$  indica el estado de polarización, es decir, modos Tipo-E (') o Tipo-H ('').

**196 Modos de Floquet de un medio dieléctrico homogéneo con condiciones periódicas**

# Apéndice F

## Descomposición de una onda plana linealmente polarizada en modos tipo-E y tipo-H

En este apartado vamos a estudiar la descomposición de una onda plana linealmente polarizada en modos tipo-E, tipo-H. Para ello, se van a obtener los coeficientes del armónico de Floquet de orden  $n = 0$  tipo-E, tipo-H correspondientes a dicha onda plana linealmente polarizada.

Supondremos que sobre un medio incide una onda plana linealmente polarizada cuyo vector de ondas  $\mathbf{k}$  lleva la dirección de propagación dada por los ángulos habituales de coordenadas esféricas  $\theta, \phi$  (ver la figura E.1), y viene dado por la siguiente expresión:

$$\mathbf{k} = k_x \hat{\mathbf{x}} + k_y \hat{\mathbf{y}} + k_z \hat{\mathbf{z}} = k(\sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}}) \quad (\text{F.1})$$

donde  $k = \omega \sqrt{\mu \varepsilon}$  es el número de ondas en el medio. El campo eléctrico transversal de dicha onda plana incidente puede expresarse como:

$$\mathbf{E}_{inc} = \mathbf{E}_{0inc} e^{-jk_x x} e^{-jk_y y} e^{-jk_z z} \quad (\text{F.2})$$

y el campo magnético viene dado por el producto vectorial:

$$\mathbf{H}_{inc} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (\hat{\mathbf{u}}_k \times \mathbf{E}_{inc}) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \left( \frac{\mathbf{k}}{k} \times \mathbf{E}_{inc} \right) \quad (\text{F.3})$$

donde  $\hat{\mathbf{u}}_k$  es el vector unitario en la dirección de propagación de la onda incidente.

El vector  $\mathbf{E}_{0inc}$  se descompone en una componente transversal a la dirección de propagación (que se ha elegido como la del eje  $Z$ ) y en una componente longitudinal de la forma:

$$\mathbf{E}_{0inc} = \mathbf{E}_{0inct} + \mathbf{E}_{0incz} = E_{0incx} \hat{\mathbf{x}} + E_{0incy} \hat{\mathbf{y}} + E_{0incz} \hat{\mathbf{z}} \quad (\text{F.4})$$

Se define el ángulo  $\zeta$  como el formado por el vector  $\mathbf{E}_{0inct}$  con el eje  $X$ , de tal forma que (ver la figura F.1):

$$\tan \zeta = \frac{E_{0incy}}{E_{0incx}} ; \quad \mathbf{E}_{0inct} = E_{0incx} \hat{\mathbf{x}} + E_{0incy} \hat{\mathbf{y}} = E_{0incx} (\hat{\mathbf{x}} + \tan \zeta \hat{\mathbf{y}}) \quad (\text{F.5})$$

## 198 Descomposición de una onda plana linealmente polarizada en modos tipo-E, tipo-H

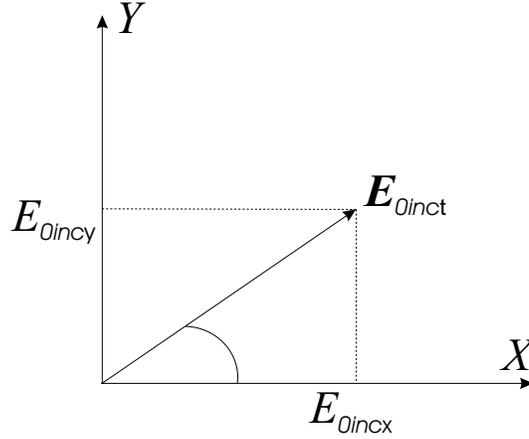


Figura F.1: Descomposición en el plano  $XY$  de la proyección del campo eléctrico transversal incidente.

Teniendo en cuenta que en una onda plana se satisface la relación  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_{0inc} = 0$ , la componente  $E_{0incz}$  se obtiene como:

$$E_{0incz} = -\frac{k_x E_{0incx} + k_{y0} E_{0incy}}{k_{z0}} = -E_{0incx} \frac{k_x + \tan\zeta k_{y0}}{k_{z0}} \quad (\text{F.6})$$

Utilizando (F.3) y (F.6), el campo magnético transversal de la onda incidente se puede expresar de la siguiente forma:

$$\mathbf{H}_{0inct} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{E_{0incx}}{k} \left\{ \left( \frac{-k_{y0}}{k_{z0}} (k_x + k_{y0} \tan\zeta) - k_{z0} \tan\zeta \right) \hat{\mathbf{x}} + \left( k_{z0} + \frac{k_x}{k_{z0}} (k_x + k_{y0} \tan\zeta) \right) \hat{\mathbf{y}} \right\} \quad (\text{F.7})$$

En consecuencia, para caracterizar la onda plana se necesitan los siguientes parámetros: frecuencia angular ( $\omega = 2\pi f$ ), constantes eléctricas del medio ( $\varepsilon, \mu$ ), ángulos  $\theta$  y  $\phi$ , ángulo  $\zeta$ , y la amplitud de la componente  $x$  del campo eléctrico incidente ( $E_{0incx}$ ). Con estos parámetros la onda queda perfectamente definida.

Descompondremos la onda plana incidente como combinación lineal de los modos tipo-E, tipo-H correspondientes al armónico de Floquet de orden  $n = 0$  de la forma:

$$\mathbf{E}_{0inct} = E_{0incx} (\hat{\mathbf{x}} + \tan\zeta \hat{\mathbf{y}}) = c'_{0e} \mathbf{e}'_0 + c''_{0e} \mathbf{e}''_0 \quad (\text{F.8})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{0inct} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{E_{0incx}}{k} \left\{ \left( \frac{-k_{y0}}{k_{z0}} (k_x + k_{y0} \tan\zeta) - k_{z0} \tan\zeta \right) \hat{\mathbf{x}} + \right. \\ \left. \left( k_{z0} + \frac{k_x}{k_{z0}} (k_x + k_{y0} \tan\zeta) \right) \hat{\mathbf{y}} \right\} = c'_{0h} \mathbf{h}'_0 + c''_{0h} \mathbf{h}''_0 \end{aligned} \quad (\text{F.9})$$

Sustituyendo los valores de los armónicos vectoriales de Floquet (5.4)-(5.7), y tras unas

breves manipulaciones algebraicas, se obtienen los coeficientes  $c'_{0e}$ ,  $c''_{0e}$ ,  $c'_{0h}$ ,  $c''_{0h}$ :

$$\begin{aligned}
 c'_{0e} &= \frac{E_{0incx} \tan \zeta \sqrt{D} k_{z0} \omega \varepsilon}{k^2 - k_{y0}^2} \\
 c''_{0e} &= \frac{E_{0incx} \sqrt{D} (k^2 - k_{y0}^2)}{\omega \mu k_{z0}} \left( 1 + \frac{\tan \zeta k_x k_{y0}}{k^2 - k_{y0}^2} \right) \\
 c'_{0h} &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{E_{0incx} \sqrt{D}}{k} \left( \frac{k_x k_{y0}}{k_{z0}} + \frac{k_{y0}^2 \tan \zeta}{k_{z0}} + k_{z0} \tan \zeta - \frac{k_x k_{y0}}{k_{z0} (k^2 - k_{y0}^2)} (k_{z0}^2 + k_x^2 + k_x k_{y0} \tan \zeta) \right) \\
 c''_{0h} &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{E_{0incx} \sqrt{D}}{k_{z0} k} (k_{z0}^2 + k_x^2 + k_x k_{y0} \tan \zeta) \tag{F.10}
 \end{aligned}$$

**200 Descomposición de una onda plana linealmente polarizada en modos tipo-E, tipo-H**

# Bibliografía

- [1] E. Silvestre, M.A. Abián, B. Gimeno, A. Ferrando, M. V. Andrés, and V. E. Boria, “Analysis of inhomogeneously filled waveguides using a bi-orthonormal-basis method”, *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 48, no. 4, pp. 589–596, April 2000.
- [2] A. Coves, B. Gimeno, D. Camilleri, M. V. Andrés, A. A. San Blas, and V. E. Boria, “Scattering by dielectric frequency-selective surfaces using a vectorial modal method”, *2002 IEEE AP-S International Symposium, San Antonio, TX, USA*, pp. 580–583, June 16-21 2002.
- [3] A. Coves, B. Gimeno, D. Camilleri, M. V. Andrés, A. A. San Blas, and V. E. Boria, “Full-wave analysis of dielectric frequency-selective surfaces using a vectorial modal method”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Aceptado para su publicación en Agosto 2004.
- [4] R. E. Collin, *Field theory of guided waves*, IEEE Press, New York, 1991.
- [5] H. A. Ragheb, A. Sebak, and L. Shafai, “Cutoff frequencies of circular waveguide loaded with eccentric dielectric cylinder”, *Proc. Inst. Elect. Eng.*, vol. 144, no. 1, pp. 7–12, Febrero 1997.
- [6] K. A. Zaki and C. Chen, “Intensity and distribution of hybrid-mode fields in dielectric-loaded waveguides”, *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 33, no. 12, pp. 1442–1447, Diciembre 1985.
- [7] L. Outifa, M. Delmotte, and H. Jullien, “Dielectric and geometric dependence of electric field and power distribution in a waveguide heterogeneously filled with lossy dielectrics”, *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 45, no. 8, pp. 1154–1161, Agosto 1997.
- [8] Y. L. Hsueh, M. C. Yang, and H. C. Chang, “Three-dimensional noniterative full-vectorial beam propagation method based on the alternating direction implicit method”, *Journal of Lightwave Technology*, vol. 17, no. 11, pp. 2389–2397, Noviembre 1999.

- [9] C. C. Yu and T. H. Chu, "Analysis of dielectric-loaded waveguide", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 38, no. 9, pp. 1333–1338, Septiembre 1990.
- [10] T. Angkaew and N. Kumagai, "Finite-element analysis of waveguide modes: A novel approach that eliminates spurious modes", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 35, pp. 117–123, Febrero 1987.
- [11] T. Rozzi and M. Farina, "Eigenvalue approach to the efficient determination of the hybrid and complex spectrum of inhomogeneous, closed waveguide", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 45, no. 3, pp. 345–353, Marzo 1997.
- [12] Z. Menachem and E. Jerby, "Transfer matrix function (TMF) for wave propagation in dielectric waveguides with arbitrary transverse profiles", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 46, pp. 975–982, Julio 1998.
- [13] R. Mittra, H. Chi, and T. Cwik, "Techniques for analyzing frequency selective surfaces –a review", *Proceedings of the IEEE*, vol. 76, no. 12, pp. 1593–1615, Diciembre 1998.
- [14] V. D. Agrawal and W. A. Imbriale, "Design of a dichroic cassegrain subreflector", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 27, pp. 466–473, 1979.
- [15] N. Amitay and A. A. M. Saleh, "Broad-band wide-angle quasi-optical polarization rotators", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 31, no. 1, pp. 73–76, Enero 1983.
- [16] B. Gimeno, V. Such, A. C. García, J. L. Cruz, and E. Navarro, "Transmission-line model to analyze a multistage polarizer rotator", *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 4, no. 3, pp. 113–117, Febrero 1991.
- [17] B. Gimeno, J. L. Cruz, E. A. Navarro, and V. Such, "A polarizer rotator system for three-dimensional oblique incidence", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 42, no. 7, pp. 912–919, Julio 1994.
- [18] P. R. Franchi and R. J. Mailloux, "Theoretical and experimental study of metal grid angular filters for sidelobe suppression", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 31, no. 3, pp. 445–450, Mayo 1983.
- [19] R. S. Chu and K. M. Lee, "Analytical model of a multilayered meander-line polarizer plate with normal and oblique plane-wave incidence", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 35, no. 6, pp. 652–661, Junio 1987.
- [20] X. J. Yu and H. S. Kwok, "Optical wire-grid polarizers at oblique angles of incidence", *Journal of Applied Physics*, vol. 93, no. 8, pp. 4407–4412, Abril 2003.

- [21] J. Joannopoulos, R. D. Meade, and J. N. Winn, *Photonic Crystals. Molding the flow of light*, Princeton University Press, New York, 1995.
- [22] D. M. Atkin, P. St. J. Russell, T. A. Birks, and P. J. Roberts, “Photonic band structure of guided bloch modes in high index films fully etched through with periodic microstructure”, *Journal of Modern Optics*, vol. 43, pp. 1035–1053, 1996.
- [23] E. Yablonovitch, “Photonic band-gap structures”, *Journal of Optical Society of America B*, vol. 10, no. 2, pp. 283–295, Febrero 1993.
- [24] E. Özbay, A. Abeyta, G. Tuttle, M. Tringides, R. Biswas, C. T. Chan, C. M. Soukoulis, and M. Ho, “Measurement of a three-dimensional photonic band gap in a crystal structure made of dielectric rods”, *Physical Review B*, vol. 50, no. 3, pp. 1945–1948, Julio 1994.
- [25] H. L. Bertoni, L. H. S. Cheo, and T. Tamir, “Frequency-selective reflection and transmission by a periodic dielectric layer”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 37, no. 1, pp. 78–83, Enero 1989.
- [26] J. C. W. A. Costa and A. J. Giarola, “Analysis of the selective behaviour of multilayer structures with a dielectric grating”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 43, no. 5, pp. 529–533, Mayo 1995.
- [27] S. Tibuleac, R. Magnusson, T. A. Maldonado, P. P. Young, and T. R. Holzheimer, “Dielectric frequency-selective structures incorporating waveguide gratings”, *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 48, no. 4, pp. 553–561, Abril 2000.
- [28] C. Zuffada and T. Cwik, “Synthesis of novel all-dielectric grating filters using genetic algorithms”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 46, no. 5, pp. 657–663, Mayo 1998.
- [29] R. Magnusson and S. S. Wang, “Transmission bandpass guided-mode resonance filters”, *Applied Optics*, vol. 34, no. 35, pp. 8106–8109, Diciembre 1995.
- [30] S. S. Wang and R. Magnusson, “Design of waveguide-grating filters with symmetrical line shapes and low sidebands”, *Optics Letters*, vol. 19, no. 12, pp. 919–921, Junio 1994.
- [31] M. Nevriere, P. Vincent, R. Petit, and M. Cadilhac, “Systematic study of resonance of holographic thin film couplers”, *Optics Communications*, vol. 9, pp. 48–53, 1973.
- [32] T. Tamir and S. T. Peng, “Analysis and design of grating couplers”, *Applied Physics*, vol. 14, pp. 235–254, November 1977.
- [33] A. C. Livanos, A. Katzir, A. Yariv, and C. S. Hong, “Chirped-grating demultiplexers in dielectric waveguides”, *Applied Physics Letters*, vol. 30, pp. 519–521, Mayo 1977.

- [34] D. B. Anderson, P. R. August, and J. E. Coker, “Distributed-feedback double-heterostructure GaAs injection laser with fundamental grating”, *Applied Optics*, vol. 13, pp. 2742–2744, Diciembre 1974.
- [35] V. L. Vinetskii and N. V. Kukhtarev, “Geometric factors in the dynamic holographic conversion of light beams”, *Sov. Quantum Electronics*, vol. 8, pp. 231–235, Febrero 1978.
- [36] M. McCall, “On the application of coupled mode theory for modeling fiber bragg gratings”, *Journal of Lightwave Technology*, vol. 18, no. 2, pp. 236–242, Febrero 2000.
- [37] J. Mora, A. Díez, J. L. Cruz, and M. V. Andrés, “A magnetostrictive sensor interrogated by fiber gratings for dc-current and temperature discrimination”, *IEEE Photonics Technology Letters*, vol. 12, no. 12, pp. 1680–1682, Diciembre 2000.
- [38] R. C. Hall, R. Mittra, and K. M. Mitzner, “Analysis of multilayered periodic structures using generalized scattering matrix theory”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 36, no. 4, pp. 511–517, Abril 1988.
- [39] R.F. Harrington, *Field computation by moment methods*, IEEE Press, USA, 1993.
- [40] E. Silvestre, V. E. Andrés, and P. Andrés, “Biorthonormal-basis method for the vector description of optical-fiber modes”, *Journal of Lightwave Technology*, vol. 16, no. 5, pp. 923–928, Mayo 1998.
- [41] Philip M. Morse and Herman Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, Parte I, MacGraw-Hill, 1953.
- [42] T. Itoh, *Numerical Techniques for Microwave and Millimeter-wave Passive Structures*, John Wiley & Sons, New York, 1989.
- [43] V. E. Boria, *Curso de Doctorado: Electromagnetismo Avanzado*, Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, 2002.
- [44] A. Álvarez, G. Connor, and M. Guglielmi, “New simple procedure for the computation of the multimode admittance or impedance matrix of arbitrarily planar waveguide junctions”, *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 44, no. 3, pp. 413–418, Marzo 1996.
- [45] G. Gerini, G. Lastoria, and M. Guglielmi, “Efficient integral equation formulations for admittance or impedance representation of planar waveguide junctions”, *IEEE MTT International Symposium*, June 7-12 1998.
- [46] G.P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics*, Academic Press, San Diego, 2001.
- [47] J.M. Senior, *Optical Fiber Communications: Principles and Practice*, Prentice-Hall, New York, 1992.

- [48] A. Ferrando, E. Silvestre, J. J. Miret, P. Andrés, and M. V. Andrés, “Full-vector analysis of realistic photonic crystal fiber”, *Optics Letters*, vol. 24, no. 5, pp. 276–278, Mayo 1999.
- [49] A. W. Snyder and J. D. Love, *Optical Waveguide Theory*, Chapman and Hall, London, 1983.
- [50] R. E. Collin, *Foundations for microwave engineering*, McGraw-Hill Int. Ed., 1992.
- [51] Y. Hsueh, M. Yang, and H. Chang, “Three-dimensional noniterative full-vectorial beam propagation method based on the alternating direction implicit method”, *Journal of Lightwave Technology*, vol. 17, no. 11, pp. 2389–2397, Noviembre 1999.
- [52] P. L. Liu and B. J. Li, “Semivectorial beam-propagation method for analyzing polarized modes of rib waveguides”, *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 28, pp. 778–782, 1992.
- [53] A. Coves, B. Gimeno, M. A. Abian, E. Silvestre, A. Ferrando, V. E. Boria, A. Díez, and M. V. Andrés, “Bi-orthonormal-basis method applied to the study of dielectric-loaded waveguides and 2D photonic crystals guides for millimeter applications”, *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, Barcelona*, p. 1146, 11-14 Septiembre 2000.
- [54] J. I. Garcés Gregorio, *Estudio teórico y desarrollo experimental de guías de onda ópticas en tecnología de silicio: aplicación al diseño de sensores optoquímicos*, PhD thesis, Universidad de Zaragoza, Zaragoza, 1996.
- [55] I. Garcés, J. Subías, and R. Alonso, “Analysis of the modal solutions of rib antiresonant reflecting optical waveguides”, *Journal of Lightwave Technology*, vol. 17, no. 9, pp. 1655–1574, Septiembre 1999.
- [56] F. Prieto, A. Llobera, D. Jiménez, C. Domínguez, A. Calle, and L. M. Lechuga, “Design and analysis of silicon antiresonant reflecting optical waveguides for evanescent field sensors”, *Journal of Lightwave Technology*, vol. 18, pp. 966–972, 2000.
- [57] F. Prieto, L. M. Lechuga, A. Calle, A. Llobera, and C. Domínguez, “Optimized silicon antiresonant reflecting optical waveguides for sensing applications”, *Journal of Lightwave Technology*, vol. 19, no. 1, pp. 75–83, Enero 2001.
- [58] M. A. Duguay, Y. Kokubun, T. L. Koch, and L. Pfeiffer, “Antiresonant reflecting optical waveguides in SiO<sub>2</sub> – Si multilayer structures”, *Applied Physics Letters*, vol. 49, no. 1, pp. 13–15, 1986.
- [59] M. D. Feit and J. A. Fleck, “Mode properties of optical fibers with lossy components by the propagating beam method”, *Applied Optics*, vol. 20, no. 5, pp. 848–856, 1981.
- [60] C. A. Balanis, *Field theory*, John Wiley & Sons, Inc, London, 1983.

- [61] R.F. Harrington, *Time-Harmonic Electromagnetic Fields*, McGraw-Hill Book Company, Inc., USA, 1961.
- [62] George Arfken, *Mathematical methods for physicists*, Academic Press, Inc., London, 1985.
- [63] V. E. Boria, M. Bozzi, D. Camilleri, A. Coves, H. Esteban, B. Gimeno, M. Guglielmi, and L. Polini, “Contributions to the analysis and design of all-inductive filters with dielectric resonators”, *33rd European Microwave Conference, Munich*, pp. 1247–1250, Octubre 7-9 2003.
- [64] E. Schweig and W. B. Bridges, “Computer analysis of dielectric waveguides: A finite-difference method”, *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 32, pp. 531–541, Mayo 1984.
- [65] Y. Chang, J. A. Paul, and Y. C. Ngan, “Millimeter-wave integrated circuit for communication interconnect system”, *Interim report, U.S. Army ECOM Contract DAAB07-76-C-1353*, Septiembre 1977.
- [66] W. V. McLevidge, T. Itoh, and R. Mittra, “New waveguide structures for millimeter-wave and optical integrated circuits”, *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 23, pp. 788–794, Octubre 1975.
- [67] A. S. Omar and K. F. Schünemann, “Complex and backward-wave modes in inhomogeneously and anisotropically filled waveguides”, *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 35, no. 3, pp. 268–275, Marzo 1987.
- [68] J. A. Monsoriu, A. Coves, B. Gimeno, M. V. Andrés, and E. Silvestre, “A robust and efficient method for obtaining the complex modes in inhomogeneously filled waveguides”, *Microwave and Optical Technology letters*, vol. 37, no. 3, pp. 218–222, Mayo 2003.
- [69] A. S. Omar and K. F. Schünemann, “The effect of complex modes at finite discontinuities”, *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 34, pp. 1508–1514, Diciembre 1986.
- [70] A. A. Oliner, S. T. Peng, T. I. Hsu, and A. Sánchez, “Guidance and leakage properties of a class of open dielectric waveguides: Part II –new physical effects”, *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 29, no. 9, pp. 855–869, Septiembre 1981.
- [71] J. Strube and F. Arndt, “Three-dimensional higher-order mode analysis of transition from waveguide to shielded dielectric image line”, *Electronic Letters*, vol. 19, pp. 306–307, Abril 1983.
- [72] J. Strube and F. Arndt, “Rigorous hybrid-mode analysis of the transition from rectangular waveguide to shielded dielectric image guide”, *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 33, no. 5, pp. 391–401, Mayo 1985.

- [73] K. Hayata, M. Koshiha, M. Eguchi, and M. Suzuki, “Vectorial finite-element method without any spurious solutions for dielectric waveguiding problems using transverse magnetic-field component”, *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 34, no. 11, pp. 1120–1124, Noviembre 1986.
- [74] Y. Horii and M. Tsutsumi, “Harmonic control by photonic bandgap on microstrip patch antenna”, *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, vol. 9, no. 1, pp. 13–15, Enero 1999.
- [75] Hung-Yu David Yang, “Theory of microstrip lines on artificial periodic substrates”, *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 47, no. 5, pp. 629–635, Mayo 1999.
- [76] A. Ferrando, E. Silvestre, J. J. Miret, J. A. Monsoriu, M. V. Andrés, and P. St. J. Russel, “Designing a photonic crystal fibre with flattened chromatic dispersion”, *Electronics letters*, vol. 35, no. 4, pp. 325–327, Febrero 1999.
- [77] T. A. Birks, J. C. Knight, and P. St. J. Russel, “Endlessly single-mode photonic crystal fiber”, *Optics Letters*, vol. 22, pp. 961–963, 1997.
- [78] J. C. Knight, T. A. Birks, P. St. J. Russel, and D. M. Atkin, “All-silica single-mode optical fiber with photonic crystal cladding”, *Optics Letters*, vol. 21, no. 19, pp. 1547–1549, Octubre 1996.
- [79] A. Ortigosa-Blanch, J. C. Knight, W. J. Wadsworth, J. Arriaga, B. J. Mangan, T. A. Birks, and P. St. J. Russel, “Highly birefringent photonic crystal fibers”, *Optics Letters*, vol. 25, no. 18, pp. 1325–1327, Septiembre 2000.
- [80] A. Coves, A. A. San Blas, B. Gimeno, A. Díez, M. V. Andrés, and V. E. Boria, “Two-dimensional photonic-crystal microwave waveguide”, *Microwave and Optical Technology letters*, vol. 39, no. 3, pp. 243–246, Noviembre 2003.
- [81] R. E. Collin, “Reflection and transmission at a slotted dielectric interface”, *Canadian Journal of Physics*, vol. 34, pp. 398–411, 1956.
- [82] T. K. Gaylord and M. G. Moharam, “Analysis and applications of optical diffraction by gratings”, *Proceedings of the IEEE*, vol. 73, no. 5, pp. 894–937, Mayo 1985.
- [83] L. R. Lewis and A. Hessel, “Propagation characteristics of periodic arrays of dielectric slabs”, *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 19, no. 3, pp. 276–286, Marzo 1971.
- [84] W. P. Pinello, R. Lee, and A. C. Cangellaris, “Finite element modeling of electromagnetic wave interactions with periodic dielectric structures”, *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 42, no. 12, pp. 2294–2301, Diciembre 1994.

- [85] H. M. Altschuler and L. O. Goldstone, "On network representations of certain obstacles in waveguide regions", *IRE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 7, no. 4, pp. 213–221, 1959.
- [86] B. Gimeno, *Estudio electromagnético de estructuras planas infinitas conductoras con periodicidad unidimensional de cintas impresas en dieléctrico. Aplicación al diseño de giradores de polarización multietapa de microondas*, PhD thesis, Universidad de Valencia, Valencia, 1992.
- [87] A. Coves, *Estudio de superficies selectoras de frecuencia con dieléctricos*, Trabajo de Investigación, Universidad de Valencia, Valencia, 2001.
- [88] J. C. W. A. Costa and A. J. Giarola, "Wave propagation in multilayer dielectric periodic structures", *IEEE AP-S International Symposium Digest, Ann Arbor, MI., USA*, pp. 1964–1967, June 27–July 2 1993.
- [89] A. Coves, A. A. San Blas, B. Gimeno, A. Vidal, V. E. Boria, and M. V. Andrés, "Three-dimensional scattering of dielectric gratings under plane-wave excitation", *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, vol. 2, pp. 215–218, 2003.
- [90] P. Lorrain and D. F. Corson, *Campos y ondas electromagnéticos*, Selecciones Científicas, Madrid, 1972.
- [91] S. Ramo, J. R. Whinnery and T. Van Duzee, *Campos y ondas*, Ed. Pirámide, Madrid, 1965.
- [92] T. S. Chu and T. Itoh, "Generalized scattering matrix method for analysis of cascaded and offset microstrip step discontinuities", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 34, no. 2, pp. 280–284, Febrero 1986.
- [93] P. L. Overfelt and D. J. White, "Alternate forms of the generalized composite scattering matrix", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 37, no. 8, pp. 1267–1268, Agosto 1989.
- [94] T. Cwik and R. Mittra, "The cascade connection of planar periodic surfaces and lossy dielectric layers to form an arbitrary periodic screen", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 35, no. 12, pp. 1397–1405, Diciembre 1987.
- [95] Eugene Hecht and Alfred Zajac, *Optics*, Addison-Wesley, Massachusetts, 1987.
- [96] A. Coves, B. Gimeno, M. V. Andrés, A. A. San Blas, V. E. Boria, and J. V. Morro, "Analysis and applications of dielectric frequency-selective surfaces under plane-wave excitation", *2003 IEEE AP-S International Symposium, Columbus, OH, USA*, pp. 825–828, June 23–27 2003.
- [97] R. Magnusson, S. S. Wang, T. D. Black, and A. Sohn, "Resonance properties of dielectric waveguide gratings: theory and experiments at 4–18 GHz", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 42, no. 4, pp. 567–569, Abril 1994.

- [98] D. L. Brundrett, E. N. Glytsis, and K. Gaylord, "Homogeneous layer models for high-spatial-frequency dielectric surface-relief gratings: conical diffraction and anti-reflection designs", *Applied Optics*, vol. 33, no. 13, pp. 2695–2706, Diciembre 1994.
- [99] T. Tamir, "Inhomogeneous wave types at planar interfaces: Iii-leaky waves", *Optik*, vol. 38, pp. 269–297, 1973.
- [100] H. Y. D. Yang, "Characteristics of guided and leaky waves on multilayer thin-film structures with planar material gratings", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 45, no. 3, pp. 428–435, Marzo 1997.
- [101] A. Hessel and A. A. Oliner, "A new theory of wood's anomalies on optical gratings", *Applied Optics*, vol. 10, pp. 1275–1297, 1965.
- [102] K. F. Riley, M. P. Hobson, and S. J. Bence, *Mathematical Methods for Physics and Engineering*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [103] T. M. Monro, D. J. Richardson, N. G. R. Broderick, and P. J. Bennett, "Modeling large air fraction holey optical fibers", *Journal of Lightwave Technology*, vol. 18, pp. 50–56, 2000.
- [104] Z. Zhu and T. G. Brown, "Analysis of the space filling modes of photonic crystal fibers", *Optics Express*, vol. 8, pp. 547–554, 2001.
- [105] D. Mogilevtsev, T. A. Birks, and P. St. J. Russell, "Localized function method for modeling defect modes in 2-d photonic crystals", *Journal of Lightwave Technology*, vol. 17, pp. 2078–2081, 1999.
- [106] R. S. Chu and K. M. Lee, "Radiation impedance of a dipole printed on periodic dielectric slabs protruding over a ground plane in an infinite phased array", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 35, no. 1, pp. 13–25, Enero 1987.
- [107] M. H. Chen, "Design formulas for a quasi-optical diplexer or multiplexer", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 28, no. 4, pp. 363–368, Abril 1980.
- [108] J. P. Montgomery, "Scattering by an infinite periodic array of thin conductors on a dielectric sheet", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 23, pp. 70–75, Enero 1975.