DEPARTAMENTO DE PSICOLOGÍA EVOLUTIVA Y DE LA EDUCACIÓN

¡RESUÉLVELO ! EFICACIA DE UN ENTRENAMIENTO EN ESTRATEGIAS COGNITIVAS Y METACOGNITIVAS DE SOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS EN ESTUDIANTES CON DIFICULTADES DE APRENDIZAJE

RAÚL TÁRRAGA MÍNGUEZ

UNIVERSITAT DE VALENCIA
Servei de Publicacions
2008

Aquesta Tesi Doctoral va ser presentada a Valencia el dia 9 de Novembre de 2007 davant un tribunal format per:

- D. Julio Antonio González Pienda
- D. Miguel Ángel Carbonero Martín
- D. Manuel Soriano Ferrer
- Dª. Rosa García Castelar
- Dª. Mª del Carmen Fortes del Valle

Va ser dirigida per:
Dª. Ana Miranda Casas
Dª. Marjorie Montague

Depòsit legal:
I.S.B.N.:978-84-370-6997-5
Edita: Universitat de València
Servei de Publicacions
C/ Artes Gráficas, 13 bajo
46010 València
Spain
Telèfon: 963864115

Universitat de València
Departament de Psicologia Evolutiva i de l'Educació

¡Resuélvelo!
Eficacia de un entrenamiento en estrategias cognitivas y metacognitivas de solución de problemas matemáticos en estudiantes con dificultades de aprendizaje.

TESIS DOCTORAL

PRESENTADA POR:
Raúl Tárraga Mínguez.

DIRIGIDA POR:
Dra. Ana Miranda.
Dra. Marjorie Montague

Valencia, 2007

El trabajo que se expone en la presente tesis ha sido posible gracias a:

Los profesores que estuvieron dispuestos a recibir formación sobre el programa de intervención, y a aplicarlo con esfuerzo y entusiasmo en sus aulas:

Daniel Balaguer, Mª José Escriche, Rosa Mª Puchades, Mª Concepción Máñez, Mª Concepción Mateu, José Enrique del Olmo, Mª Dolors Paniego, Ana Pérez, Mª Fe Sánchez, y Jaume Sendra.

Las compañeras que han colaborado en la evaluación de los alumnos:

Gabriela Acosta e Inmaculada Fernández.

La asesora del CEFIRE de Sagunto encargada de organizar el curso de formación de profesorado que ha sido la vía para desarrollar este trabajo:

Paloma Silla.

Las dos codirectoras de la tesis, sin cuya guía, supervisión y consejos este trabajo no habría visto la luz:

Ana Miranda, y Marjorie Montague.

Y por supuesto, todos los alumnos que han "sufrido" pacientemente nuestras evaluaciones y programas de intervención, y que han aprendido con nosotros matemáticas, y, esperamos que algo más.

INTRODUCCIÓN

El estudio de las matemáticas es un objeto de aprendizaje injustamente tratado en todos los ámbitos en que se puede tratar un aprendizaje.

En el mundo de la investigación (de las teorías y de la producción científica aplicada), las matemáticas han sido tradicionalmente la hermana pobre en psicología educativa. Por lo general ha estado a la sombra de la investigación en lectoescritura, y hasta hace relativamente poco tiempo, ha tenido una presencia poco más que testimonial en las diferentes publicaciones científicas de psicología educativa en comparación con la lectura.

En el mundo de la escuela (de la práctica diaria aplicada), la injusticia se reproduce, quizá por aquella concepción positivista de que toda actividad práctica se desprende de una teoría previamente concebida y elaborada al margen del terreno práctico. La situación se agrava, ya que las matemáticas tienen que luchar contra clichés y prejuicios, que consideran las matemáticas como una materia rocosa y dura. La instrucción en esta materia, en muchos casos, representa una hora de sufrimiento para los alumnos ante la que algunos sucumben y desarrollan cuadros de ansiedad, y de la que otros escapan refugiándose en expresiones como “soy de letras”.

Una prueba objetiva de este tratamiento secundario que reciben las matemáticas respecto a las lenguas podemos encontrarla contabilizando el número de horas de currículum que se dedica en nuestras escuelas a las diferentes áreas. Así, el reciente decreto de enseñanzas mínimas en la etapa de Educación Secundaria Obligatoria (MECD, 2006), establece que para los tres primeros cursos de ESO, el número de horas dedicadas a lengua castellana y literatura es de 350 horas, mientras que las horas dedicadas a matemáticas son 280. Esta diferencia es importante, pero no justifica por sí sola la afirmación anterior de que las matemáticas son la "hermana pobre" del currículum. Sin embargo, la comparación entre el total de horas dedicadas a la lengua (350 horas de lengua castellana y literatura, 315 horas de lengua extranjera, más otras tantas en caso de las comunidades autónomas con lengua cooficial), contra las 280 horas de matemáticas, sí constituye un sustento para la afirmación de que las matemáticas son un área curricular minorizada por el estudio de las lenguas.

Pero dando un paso más adelante, se aprecia que todavía se comete mayor injusticia con el estudio de la solución de problemas matemáticos: el "hermano pobre" dentro de ese otro hermano pobre que son las matemáticas. La idea extendida en la escuela hasta no hace tanto tiempo de que el objetivo básico de la escolarización es aprender a leer y escribir, y a usar las cuatro reglas de cálculo, hizo en su momento mella en el tratamiento escolar dado a la solución de problemas matemáticos. Muy pocos educadores consideraron la idea de combinar estos aprendizajes en uno nuevo en que se leyera y se escribiera para después hacer cálculos matemáticos. Al contrario, hasta hace muy poco tiempo, maestros, padres, y libros de texto no habían caído en la cuenta de que enseñar a los alumnos a calcular no era suficiente para prepararlos para desenvolverse en la vida diaria, sino que era un primer paso. Un primer paso que debía continuar en una enseñanza más compleja: enseñar a los alumnos a solucionar problemas. Así, se dedicaban en la escuela gran cantidad de horas a enseñar a sumar y restar en los primeros cursos, a memorizar las tablas de multiplicar después, a realizar multiplicaciones, y finalmente, el asalto final, dividir por una cifra, y después por dos, tres, cuatro,….

Pero eso era todo, después ese aprendizaje o bien no se aplicaba a problemas matemáticos, o bien se aplicaba a estos problemas, pero sin dedicar tiempo a enseñar a los alumnos a resolverlos. Esta práctica tan reduccionista de la solución de problemas quizá se deba al hecho comentado anteriormente de que los psicólogos educativos han dejado de lado las matemáticas, y, al igual que los maestros, dentro de las matemáticas han dejado un poco más de lado si cabe la solución de problemas.

Remontándonos atrás en el tiempo, en los años cuarenta, encontramos un modelo de solución de problemas que describe los procesos cognitivos que desarrollamos para resolver correctamente problemas matemáticos, y da pautas para realizar correctamente estos procesos (Polya, 1986). Sin embargo, este trabajo sufre una importante interrupción temporal, y durante varias décadas el estudio de la solución de problemas matemáticos no siguió el avance que experimentaron los estudios de lectura.

De hecho no es hasta los años ochenta, bajo el paradigma general del aprendizaje constructivista, y más concretamente bajo el auspicio del movimiento de los *standards*, del *National Council of Teachers of Mathematics* de EEUU, cuando se revitaliza el estudio de las matemáticas, y se da a la solución de problemas la importancia que merece. Este movimiento propone una nueva visión de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, proponiendo metas de aprendizaje basadas en el aprendizaje conceptual, habilidades de comunicación matemática, y la solución de problemas (National Council of Teachers of Mathematics, 1989), convirtiendo las clases de matemáticas en laboratorios de aprendizaje en que los niños participan activamente en tareas de solución de problemas, y abandonando los procedimientos repetidos de prácticas de cálculo a veces innecesaria.

Es en este marco donde surge el programa de entrenamiento en solución de problemas matemáticos ¡Resuélvelo!, desarrollado por Marjorie Montague en la Universidad de Miami. Este programa aplica los principios de los *standards* a la práctica del aula, y hace converger los principios del aprendizaje significativo con la educación matemática.

La presente tesis doctoral supone la adaptación a nuestro contexto, aplicación práctica y evaluación empírica de este programa de intervención. Ello supone un notable cambio con los procedimientos de enseñar a solucionar problemas de los libros de texto escolares tradicionales, ya que implica el dedicar un tiempo específico extenso al proceso de enseñanza/aprendizaje de procedimientos de solución de problemas, y su puesta en práctica.

El marco en el que hemos desarrollado este programa es el de las aulas de pedagogía terapéutica; un marco idóneo dado que estas aulas se prestan a la flexibilidad necesaria para aplicar un programa de este tipo, y su finalidad última está más ligada a las necesidades de los alumnos que a los imperativos y las exigencias de los libros de texto.

Los alumnos con los que hemos trabajado son alumnos con dificultades de aprendizaje específicamente localizadas en solución de problemas matemáticos. Desde nuestro punto de vista, estos alumnos son la población objetivo idónea para este programa, y se beneficiarán de este tipo de entrenamiento, ya que el programa se dirige exactamente a suplir las carencias y déficits de estos alumnos.

Finalmente, adoptando una aproximación de investigación-acción, los agentes encargados de poner en marcha el programa de intervención fueron los propios maestros de los alumnos. Nuestro objetivo al comenzar la investigación fue desarrollar un programa 100% aplicable al aula, y pensamos que la mejor forma de hacerlo era adaptar este programa, carente de excesivos ornamentos teóricos innecesarios, y susceptible de ser aplicado por los propios maestros de los alumnos. Consideramos que el esfuerzo de formar a maestros para que sean ellos los que hayan aplicado directamente la intervención ha merecido la pena, ya que ello nos permite interpretar que los resultados producidos son los resultados reales que se pueden esperar en las escuelas, y no son debidos a efectos derivados de que la intervención es desarrollada por un investigador cuya ocupación no es directamente la práctica escolar.

Así pues, para cumplir nuestro objetivo de presentar un programa de intervención aplicado a la práctica docente basado en la investigación de la que disponemos actualmente en psicología de la educación, hemos dedicado una primera parte de nuestro trabajo a abordar los fundamentos teóricos del tema. En el capítulo 1 ofrecemos una panorámica general del concepto de dificultades del aprendizaje en las matemáticas, comentando someramente las polémicas relativas a su delimitación. En el siguiente capítulo, número 2, presentamos una síntesis de la investigación desarrollada sobre modelos psicológicos de solución de problemas matemáticos, que enlaza directamente con el contenido del capítulo 3 en el que se realiza una revisión de las publicaciones previas que han llevado a cabo programas de intervención en solución de problemas matemáticos.

En la segunda parte de nuestra investigación, dedicamos el capítulo 4 a la justificación y presentación del trabajo empírico implementado en las escuelas. Se describen los objetivos y la metodología así como el contenido del programa de intervención y de los procedimientos de evaluación e intervención. En el siguiente capítulo, el número 5, exponemos los resultados obtenidos de la evaluación del programa de intervención, y finalmente, el capítulo 6 se dedica a la discusión de los resultados y presentación de las conclusiones extraídas de la investigación, así como a los comentarios relativos a sus limitaciones y a la prospectiva de futuro.

II. PARTE EMPÍRICA.

I.
MARCO TEÓRICO

1

Las dificultades de aprendizaje de las matemáticas

1.1. Definición.

Uno de los aspectos que hasta el momento ha frenado el avance de la investigación en el estudio de las dificultades del aprendizaje en matemáticas (DAM), creando cierta confusión y limitando las conclusiones del área, es la ausencia de una definición unitaria y exhaustiva del propio concepto de dificultades del aprendizaje en matemáticas.

Para definir las DAM se suele recurrir a la definición genérica de dificultades del aprendizaje (DA), según la cual las DA "*son un grupo heterogéneo de trastornos que se manifiestan en dificultades en la adquisición y uso de habilidades de lectura, escritura, razonamiento, o matemáticas. Estos trastornos son intrínsecos al individuo, presumiblemente se deben a una disfunción en el sistema nervioso central, y pueden ocurrir a lo largo del ciclo vital. Los problemas en conductas de autorregulación, percepción social, e interacción social pueden coexistir con las dificultades del aprendizaje, pero por sí mismas no representan una DA. Aunque las DA pueden ocurrir concomitantemente con otros trastornos (por ejemplo déficit sensorial, retraso mental, o problemas socioemocionales), o con influencias extrínsecas (como diferencias culturales, instrucción insuficiente o inapropiada), las DA no son resultado de esta problemática*" (NJCLD, 1988).

Esta definición base, nos sirve para operacionalizar las definiciones de los subtipos de DA identificados hasta este momento. Así, las dificultades del aprendizaje en lectura (DAL), se definen adaptando la definición genérica al área de lectura, y las DAM al área de matemáticas. De este modo, un alumno con DAL es aquel que presenta un rendimiento significativamente bajo en lectura de acuerdo a su edad, curso escolar e inteligencia que no se puede explicar mejor por factores tales como déficit sensorial, retraso mental, problemas socioemocionales, diferencias culturales, instrucción insuficiente o inadecuada. Y de un modo análogo, esta misma descripción es aplicable a los alumnos con DAM cuando sus problemas o dificultades se dan en el área de matemáticas. Ambas definiciones son útiles, y sirvieron en su momento para realizar una primera distinción en el concepto original de DA (D'amato, Dean, y Rhodes, 1998; Davis, Parr, y Lan, 1997).

Existe sin embargo una diferencia básica en la definición de las DAL y las DAM, que seguramente junto a otros factores contribuye a la notable diferencia existente en cuanto al rápido progreso de la investigación en DAL en comparación con las DAM.

Esta diferencia radica en que la definición de DAL se ha seguido concretando y desgranando de modo exhaustivo, hasta el punto de que se han identificado y definido DA en, al menos, tres áreas distintas: reconocimiento o decodificación de palabras, comprensión lectora, y fluidez lectora. Ello ha posibilitado la identificación detallada de los alumnos participantes en las diferentes investigaciones, y el diseño de diferentes procedimientos de intervención en función de la dificultad específica del alumno.

Por el contrario, esta atomización exhaustiva de la definición no se ha dado en el estudio de las DAM. La matemática es un área tremendamente compleja y extensa en la que se incluyen aspectos tan dispares como la adquisición del concepto de número, el conteo, el cálculo, la solución de problemas, el álgebra o la geometría. Ante esta disparidad de contenidos parece lógico pensar que los alumnos con DAM no presentarán dificultades en todos estos aspectos, sino normalmente sólo en algunos, lo que puede dar lugar a subtipos de DAM que comentaremos más adelante. Pese a ello, los términos para definir las DAM han sido bastante vagos y poco descriptivos, y no hacen referencia a los aspectos específicos que están afectados en cada caso, sino que usualmente incluyen tan sólo el término genérico "matemáticas". A este respecto, los términos más comúnmente empleados son bastante generales, como *mathematics disabilities* (McLauglhin, Knoop, y Holliday, 2005) *mathematics dificulties* (Gersten, Jordan, y Flojo, 2005) *number fact disorder*, (Temple y Sherwood, 2002), o *developmental dyscalculia* (Shalev y Gross-Tsur, 1993; Temple, 1991). Estos términos de carácter tan general generan una doble problemática: en primer lugar engloban en un mismo grupo tanto alumnos con bajo rendimiento en cálculo como alumnos con dificultades en la solución de problemas, pese a que el origen y el carácter de estas dificultades parece bastante dispar; y en segundo lugar, normalmente hacen referencia a aspectos matemáticos básicos, como el cálculo o el conteo, mientras que en ningún caso mencionan o se refieren a procesos matemáticos de orden superior como la solución de problemas. Prueba de ello es la definición de discalculia evolutiva que da el departamento de Educación del Reino Unido, en la que considera la discalculia como un síndrome que engloba dificultades de muy distinta naturaleza: "*condición que afecta la habilidad de adquirir habilidades aritméticas. Los alumnos con discalculia pueden tener dificultades para comprender conceptos numéricos simples, carecer de un conocimiento numérico intuitivo, y presentar problemas para aprender hechos y* *procedimientos numéricos. Incluso cuando producen una respuesta correcta o usan un método correcto, pueden hacerlo mecánicamente y sin seguridad*" (Butterworth, 2005).

Para tratar de evitar esta problemática, en este trabajo se tratará de emplear una terminología más estricta, para así poder hablar con propiedad del tipo de dificultades que presenta cada alumno.

De este modo, para referirnos a alumnos con Dificultades del aprendizaje en el cálculo se empleará el término DAC, para referirnos a alumnos con dificultades del aprendizaje en solución de problemas se empleará el término DASP, y para referirnos a alumnos que presentan ambas problemáticas se empleará el término DAC+DASP. El término DAM queda pues reservado para referirnos genéricamente al área de investigación, y cuando aparezca en este trabajo debe entenderse como referencia al conjunto de trabajos existentes en la literatura científica, tanto cuando se refieren a una dificultad específica, como cuando tratan de problemáticas generales del área.

1.2. Diagnóstico.

En el DSM-IV-R-TR (APA, 2002) encontramos el término *trastorno del cálculo* dentro de los trastornos del aprendizaje, junto con el trastorno de la lectura, el trastorno de la expresión escrita, y el trastorno del aprendizaje no especificado. Los criterios diagnósticos que se proponen son:

A.La capacidad para el cálculo, evaluada mediante pruebas normalizadas administradas individualmente, se sitúa sustancialmente por debajo de la esperada, dados la edad cronológica del sujeto, su cociente de inteligencia y la escolaridad propia de su edad.

B. El trastorno del criterio A interfiere significativamente con el rendimiento académico o las actividades de la vida cotidiana que requieren capacidad para el cálculo.

C.Si hay un déficit sensorial las dificultades para el rendimiento en el cálculo exceden de las habitualmente asociadas a él.

Estos criterios se circunscriben exclusivamente a las habilidades de cálculo, por lo que quedan fuera de este trastorno las dificultades en otras áreas matemáticas como la solución de problemas o la geometría. Sin embargo, como se ha comentado anteriormente, el término DAM no es sinónimo de discalculia, sino que hace referencia a un constructo más amplio en el que no sólo se incluyen dificultades en la aritmética, sino también en la adquisición y comprensión del concepto de número, en conocimientos de geometría, y también en habilidades superiores de solución de problemas.

Por ello, en este trabajo se propone diagnosticar las diferentes dificultades en matemáticas respetando los criterios de discrepancia y exclusión comentados anteriormente, pero refiriéndonos específicamente al área dentro de las matemáticas que pretendemos evaluar. De este modo, en el presente trabajo se proponen los siguientes criterios diagnósticos:

1.2.1. Dificultades del aprendizaje del cálculo (DAC):

•Rendimiento en habilidades de cálculo significativamente inferior de acuerdo a lo esperado por la edad, CI, e instrucción del alumno.

•El bajo rendimiento no se debe a aspectos como deprivación cultural, o déficit sensorial.

•Ausencia de problemas significativos en el planteamiento de problemas de matemáticas.

1.2.2. Dificultades del aprendizaje en solución de problemas (DASP):

•Rendimiento en solución de problemas significativamente inferior de acuerdo a lo esperado por la edad, CI, e instrucción del alumno.

•El bajo rendimiento no se debe a aspectos como deprivación cultural, o déficit sensorial.

•Ausencia de problemas significativos en habilidades de cálculo.

1.2.3. Dificultades del aprendizaje en cálculo y solución de problemas (DAC+DASP):

•Rendimiento en habilidades de cálculo y solución de problemas significativamente inferior inferior de acuerdo a los esperado por la edad, CI, e instrucción del alumno.

•El bajo rendimiento no se debe a aspectos como deprivación cultural, o déficit sensorial.

1.3. Prevalencia.

El DSM-IV-R-TR (APA, 2002) indica que *“la prevalencia del trastorno de cálculo sólo (esto es, cuando no está asociado a otros trastornos del aprendizaje) se ha estimado que afecta aproximadamente a uno de cada cinco casos de trastorno del aprendizaje. Se supone que alrededor del 1% de los niños en edad escolar sufre un trastorno de cálculo”*. (p. 61).

Esta estimación es inferior a la que han encontrado varios estudios recientes. Esto es debido seguramente, tal y como comentábamos anteriormente, al carácter restrictivo del término “trastorno del cálculo” del DSM, que incluye sólo problemas en el cálculo (lo que hace arrojar unas cifras de prevalencia relativamente bajas), mientras que el término DAM que suele emplearse en la literatura científica incluye aspectos diversos como las dificultades en cálculo, en solución de problemas, o problemas para recuperar de la MLP hechos aritméticos, provocando esta heterogeneidad unas cifras de prevalencia mayores incluso que las del trastorno de lectura.

Los estudios que hasta el momento se han propuesto estimar la cantidad de alumnos con dificultades del aprendizaje en matemáticas obtienen una prevalencia que oscila entre un 3.6% y un 13.24% de la población escolar. Por ejemplo, Lewis, Hitch, y Walker (1994), se propusieron determinar la prevalencia de las dificultades del aprendizaje específicas en matemáticas (DAM), de las dificultades específicas en lectura (DAL), y de las dificultades combinadas en matemáticas y lectura (DAM-DAL) en una muestra de 1.206 alumnos que representaban prácticamente la totalidad de los alumnos de 9 y 10 años de un distrito educativo en Inglaterra (50 centros ordinarios y uno de educación especial). El resultado del estudio arrojó una prevalencia de un 1.3% de alumnos con DAM, un 3.9% de alumnos con DAL, y un 2.3% de alumnos con DAM y DAL, por lo que el total de alumnos con DAM (específicas o co-ocurrentes con dificultades en lectura), ascendía al 3.6% de la población general. Otra aportación interesante del estudio fue que en las dificultades específicas en matemáticas y combinadas con lectura no hubo diferencias entre sexos (18 niños y 20 niñas), mientras que en las dificultades específicas en lectura hubo 3.2 niños por cada niña.

Gross-Tsur, Manor y Shalev (1996), realizaron un estudio similar en el que se propusieron dos objetivos: en primer lugar determinar la prevalencia del trastorno de discalculia en una muestra de 3.029 estudiantes de 11 y 12 años, y en segundo lugar describir diversas características demográficas y de trastornos asociados en los alumnos con discalculia. Tras realizar diversas evaluaciones, Gross-Tsur y colaboradores encontraron un total de 140 alumnos con discalculia, lo que representaba una prevalencia del 6.5% sobre el total de la muestra. En cuanto al segundo objetivo, en su descripción de la muestra hallaron los siguientes resultados:

- El CI de los alumnos con discalculia oscilaba entre 80 y 129.
- El 26% de estos alumnos presentaba síntomas de TDAH.
- El 17% fue también diagnosticado con dislexia.

- Su estatus socioeconómico fue significativamente más bajo que el del resto de la muestra.
- El 42% de estos alumnos tenía algún familiar de primer grado con DA.
- La discalculia afectó por igual a ambos sexos (75 niñas, y 65 niños).

Más recientemente, McDermott, Goldberg, Watkins, Stanley, y Glutting (2006), han demostrado que una de las causas de la disparidad de resultados de los diversos estudios de prevalencia se debe a múltiples problemáticas: los diferentes criterios diagnósticos empleados, las diferencias en los instrumentos empleados, y al rango de edad de los estudiantes evaluados.

McDermott et al. (2006), realizaron un estudio epidemiológico en EEUU en el que realizaron una completa evaluación a 1.268 estudiantes de aquel país. Para el diagnóstico de DA emplearon el criterio clásico de discrepancia entre rendimiento y CI, pero además emplearon un criterio menos restrictivo que llamaron “criterio de bajo rendimiento”, en el que se diagnostica a un alumno con DA simplemente cuando rinde por debajo del percentil 15 en el test de rendimiento escolar empleado, sin tener en cuenta si este resultado está acorde a su CI, o bien si se produce una discrepancia entre rendimiento académico y CI. Una vez realizadas las evaluaciones, analizaron los resultados atendiendo a los dos criterios, con lo que obtuvieron dos cifras de prevalencia; una primera de 10.96% de acuerdo al criterio clásico de discrepancia, y una segunda cifra de 13.24%, atendiendo al criterio menos restrictivo de bajo rendimiento.

Por su parte, Mazzoco y Myers (2003), denuncian la metodología empleada en gran cantidad de estudios sobre prevalencia, ya que un método habitual suele ser realizar una única evaluación, con un sólo instrumento, y en un único momento temporal, y ponen el énfasis en la limitada capacidad de esos estudios de prevalencia para obtener conclusiones estables a lo largo del tiempo para una misma muestra. En su trabajo, Mazzoco y Myers (2003) realizaron un estudio longitudinal de 4 años de duración en una muestra de alumnos desde educación infantil hasta tercer curso de primaria. Los hallazgos señalaron que 35 de los 209 sujetos de su estudio (lo que supone un elevado 17%) cumplieron los criterios diagnósticos de DAM en al menos uno de los cuatro años en que fueron evaluados. Sin embargo, este diagnóstico no fue estable a lo largo del tiempo, sino que de estos 35 alumnos diagnosticados de DAM en algún momento, tan sólo 22 (un 63% de ellos, o lo que es lo mismo, un 9.6% de la muestra total) tuvieron un diagnóstico persistente (es decir, fueron diagnosticados al menos durante dos años), mientras que los 13 alumnos restantes tan sólo fueron diagnosticados en uno de los años del estudio, y en las otras tres evaluaciones no cumplieron los criterios para el diagnóstico. Este estudio pone de relevancia el hecho de que realizar un diagnóstico en un único momento y con un único instrumento puede llevar a resultados tan dispares, como el de este estudio, en el que un 17% de la muestra fue diagnosticado en alguna de las 4 evaluaciones, mientras que tan sólo un 9.6% recibió un diagnóstico persistente durante al menos 2 evaluaciones.

En cuanto a los estudios realizados en nuestro contexto, aunque los trabajos son todavía escasos y se han desarrollado a menor escala, podemos extraer algunas orientaciones de la investigación de García, Miranda y Fortes, (1999), que en una muestra de alumnos de la ciudad de Castellón obtuvieron una tasa de prevalencia de dificultades del aprendizaje de un 21%; de ellos, un 78% de los alumnos presentaban una combinación de DAM y DAL; un 17% manifestaba DAL sin presencia de dificultades en otras áreas, y un 5% presentaba DAM, quedando intactas el resto de áreas.

Para concluir este epígrafe, es necesario comentar el trabajo de Shalev, Auerbach, Manor, y Gross-Tsur (2000), quienes recopilan los estudios de prevalencia realizados en diferentes países hasta el año 2000. En la tabla 1 se expone un resumen de los trabajos comentados por Shalev y colaboradores, y se añaden los trabajos publicados con posterioridad no recogidos en la recopilación de Shalev.

1.4. Etiología.

Los factores ambientales tales como la calidad de la instrucción matemática, indudablemente juegan un papel importante en el rendimiento matemático de los alumnos. Sin embargo existe una fuerte evidencia de que los factores genéticos también desempeñan un papel crucial en las dificultades del aprendizaje en matemáticas. Las investigaciones realizadas en los últimos años ponen de manifiesto que muy probablemente las DAM tienen un origen al menos parcialmente genético. Esta afirmación se sustenta en investigaciones provenientes de al

Autor/es	Año	País	N	Edad / curso	Prevalencia	Proporción chicos:chicas
Kosc	1974	Checoslovaquia	375	5º curso	6.4%	
Badian	1983	EEUU	1.476	1º a 8º curso	6.4%	2.2 : 1.0
Klauer	1992	Alemania	546	3º	4.4%	Proporc. ligeramente superior en chicas
Hauber	1995	Alemania	200		6.6%	1.0 : 1.0
Von Aster et al	1997	Suiza	279	2º y 4º curso	4.7%	
Lewis et al	1994	Inglaterra	1206	9-10 años	3.6%	1.0 : 1.0
Gross-Tsur et al	1996	Israel	3.029	10-11 años	6.5%	Proporc. ligeramente superior en chicas
García et al	1999	España			5%	
Mazzoco et al	2003	EEUU	209	Longitudinal	9.6%	
McDermott et al	2006	EEUU	1.268	6-17 años	10.96% - 13.24%	

Tabla 1. Estudios de prevalencia de DAM.

menos dos líneas de investigación: la primera proviene de estudios que han buscado el origen biológico de este trastorno investigando patrones de agregación familiar en la habilidad matemática y en dificultades específicas de aprendizaje como la discalculia, y la segunda de estudios sobre la comorbilidad de las DAM con las dificultades de aprendizaje lector, con una etiología genética demostrada.

Estudios demográficos demuestran que la discalculia tiene una predisposición familiar, mayor cuanto mayor es el grado de vinculación familiar. Los porcentajes de co-ocurrencia de discalculia entre miembros de una misma familia son muy altos (el 66% de las madres de niños con discalculia presentan el mismo trastorno de aprendizaje, el 44% de los padres, el 53% de los hermanos, y el 44% de los familiares de segundo grado). El riesgo de sufrir este tipo de dificultad de aprendizaje cuando uno de los hermanos presenta discalculia es mayor en niños cuyos hermanos tienen discalculia, proporción que es 10 veces mayor que la esperada en la población general (Shalev et al., 2001). Aún más, estudios realizados con gemelos (Alarcón, DeFries, Light y Pennington, 1997), en los que uno de ellos tenía un diagnóstico de discalculia, señalan que el 58% de los gemelos monozigóticos presentaba también discalculia, mientras que el porcentaje para los dizigóticos fue 39% (concordancia entre hermanos de .73 y .56 respectivamente).

Una forma alternativa de establecer la base genética de las DAM ha consistido en estudiar la caracterización cognitiva que identifica los dos extremos de la habilidad matemática. Estudios de familias, en los que alguno de sus miembros destacaba académica o laboralmente en matemáticas, han evidenciado el carácter hereditario de la habilidad matemática. Además parece ser que se trata de un efecto específico y que no es atribuible a la habilidad cognitiva general (Wijsman et al., 2004).

Además de la evidencia directa, la existencia de una base genéticamente determinada en las DAM puede también deducirse, indirectamente, de su relación con las dislexias evolutivas cuyo origen genético ha sido extensamente investigado (Fisher, 2003; Morris, et al., 2000; Wood y Grigorenko, 2001). De hecho las investigaciones indican que la correlación entre dislexia y DAM oscila entre .40 y .86 (Light y DeFries, 1995). Reveladora en este sentido es una de las últimas publicaciones del grupo de DeFries, en la que se informa sobre la localización de ocho marcadores en el cromosoma 6 relacionados con la dislexia, que están mediatizando además la dificultad entre las dificultades lectoras y el trastorno por déficit de atención con hiperactividad (Willcut et al., 2003).

1.5. Subtipos de DAM.

Como se comentaba anteriormente, el término DAM hace referencia a un amplio constructo en el que se engloban diversos tipos de problemas de aprendizaje relacionados con las matemáticas. Con el fin de restar ambigüedad a este término y acotar en mayor medida el carácter de estas DAM, David Geary ha elaborado una clasificación en la que establece tres subtipos de DAM: subtipo procedimental, subtipo basado en déficits en la memoria semántica, y subtipo basado en déficits en las habilidades viso-espaciales (Geary, 2003). Esta clasificación se ha ido gestando en la última década, y ha sido parcialmente modificada a medida que se iba arrojando luz sobre algunos asuntos pendientes, sin resolver. La clasificación constituye un intento de sintetizar las conclusiones que se han extraído hasta el momento de la investigación en DAM relativas a: 1) estudios sobre el rendimiento y el tipo de errores de estos alumnos en tareas matemáticas; 2) las características neuropsicológicas de estos alumnos; 3) la investigación sobre genética, los aspectos evolutivos que influyen en estas dificultades, y 4) su relación con las DAL. A continuación se expone un breve resumen de los hallazgos en cada uno de los subtipos.

1.5.1. Subtipo procedimental.

Características cognitivas y rendimiento en pruebas matemáticas.

Uso relativamente frecuente de procedimientos evolutivamente inmaduros (uso de procedimientos comúnmente usados por alumnos sin DA más jóvenes).

Errores frecuentes en la ejecución de procedimientos en tareas matemáticas.

Escasa comprensión de los conceptos subyacentes al uso de procedimientos.

Dificultades para secuenciar los pasos en procedimientos complejos.

Características neuropsicológicas.

Permanecen sin aclarar, aunque algunos datos sugieren una asociación con disfunción en el hemisferio cerebral izquierdo, y en algunos casos una disfunción prefrontal.

Características genéticas. Permanecen sin aclarar.

Aspectos evolutivos.

Parece, en muchos casos, representar un retraso madurativo (su ejecución es similar a la de alumnos más jóvenes, y a menudo mejoran con el paso del tiempo).

Relación con la lectura. Permanece sin aclarar.

1.5.2. Subtipo de memoria semántica.

Características cognitivas y rendimiento en pruebas matemáticas.

Dificultades para recuperar de la memoria hechos matemáticos, como respuestas a problemas aritméticos sencillos. Alto porcentaje de error en los hechos matemáticos que se recuperan. En aritmética, los errores en la recuperación de la memoria están asociados a menudo a los números que contiene el problema (ej. responder 2+3 = 4, ya que 4 es el número que sigue en la secuencia de conteo 2, 3,...). Tiempos de reacción poco sistemáticos para la recuperación de los hechos matemáticos.

Características neuropsicológicas.

Parece estar asociado a una disfunción en el hemisferio izquierdo, posiblemente en las regiones posteriores o prefrontales, según el tipo de errores. Posible afectación subcortical, especialmente en los ganglios basales.

Aspectos genéticos. Parece ser un déficit heredable.

Aspectos evolutivos.

Parece representar un desarrollo madurativo diferente (las características cognitivas difieren de las de los niños de menor edad, y no suelen cambiar sustancialmente con la edad).

Relación con la lectura. Suele coocurrir con formas fonéticas de DAL.

1.5.3. Subtipo viso-espacial.

Características cognitivas y rendimiento en pruebas matemáticas.

Dificultades en la representación espacial numérica y otras formas de información matemática.

Frecuentes dificultades para comprender la información representada espacialmente.

Características neuropsicológicas.

Parece estar asociado con una disfunción en el hemisferio cerebral derecho, en particular, con las regiones posteriores, aunque puede haber también implicación de la corteza parietal del hemisferio izquierdo.

Aspectos genéticos.

Permanecen sin aclarar, aunque las características cognitivas son comunes en ciertas patologías genéticas (p.e. Síndrome de Turner).

Aspectos evolutivos.

Permanecen sin aclarar.

Relación con la lectura.

No parece estar relacionado con dificultades del aprendizaje en la lectura.

Sin duda, la clasificación de Geary, junto con los trabajos paralelos de descripción del rendimiento de los EDAM (estudiantes con dificultades del aprendizaje en matemáticas) desarrollados por Jordan (Jordan, y Hanich, 2000; Jordan, Hanich y Kaplan, 2003) han servido como base para empezar a superar uno de los principales problemas del área: el estudio diferenciado del rendimiento de los EDAM en diferentes tareas matemáticas, tales como: comprensión de conceptos, recuperación de hechos aritméticos básicos, y análisis del tiempo de reacción en la recuperación de estos cálculos, representación espacial de la información matemática, etc., así como el estudio diferenciado de los casos en que las DAM concurren con DAL de los casos en que las dificultades se dan sólo en un área. Sin embargo, las clasificaciones y estudios propuestos han arrojado poca luz sobre el lugar que ocupa en las clasificaciones y tipologías la solución de problemas matemáticos.

Quizá el intento más sensible a la necesidad de explicar el papel de la solución de problemas en los subtipos de DAM sea el realizado por Von Aster en 2000. Von Aster elaboró una propuesta de tipología de discalculia basádose en un análisis de cluster realizado sobre los resultados de una evaluación de 93 alumnos con discalculia. Para su evaluación empleó la Batería de Tests Neuropsicológicos para el Procesamiento Numérico y de Cálculo en Niños, en la que se incluía un amplio abanico de subtests representativos de todos los dominios matemáticos, incluido un subtest de solución de problemas. A priori ello hacía suponer que los alumnos con bajo rendimiento en solución de problemas se agruparían formando un grupo diferenciado de los alumnos con problemas en otras áreas matemáticas alejadas como el conteo, la escritura e números, la comparación oral, etc. Sin embargo, lejos de producirse esta agrupación, de acuerdo a la distribución de los resultados, Von Aster propuso los siguientes 3 subtipos de discalculia:

- Subtipo arábico, en el que se incluían niños con dificultades para leer y escribir números arábicos.
- Subtipo verbal, en el que se incluían niños con dificultades en conteo, cálculo mental y almacenamiento/recuperación de hechos aritméticos (que parece ser el equivalente al subtipo de memoria semántica propuesto por Geary), y
- Subtipo pervasivo, en el que se incluían niños con dificultades en casi todos los subtests de la batería, incluido el subtest de solución de problemas.

Este resultado, decepcionante para las aspiraciones de incluir las DASP en una tipología concreta de DAM, no hace sino incidir en la necesidad de continuar evaluando alumnos, y analizando los patrones comunes de resultados, para poder finalmente explicar el papel de las DASP en las matemáticas. Varias son las hipótesis que en la teoría podrían ser válidas para encontrar una ubicación teórica de las DASP, aunque los datos se han encargado siempre de rechazar estas propuestas:

1. Dada la naturaleza de la tarea de solución de problemas, una hipotética propuesta de tipología de DAM podría proponer que, debido a la importancia de la lectura en la solución de problemas matemáticos, el rendimiento en solución de problemas estaría

afectado en los alumnos del subtipo memoria semántica, o bien simplemente en los alumnos con DA combinadas en matemáticas y lectura. Sin embargo, diferentes investigaciones muestran que esto no necesariamente ocurre así siempre (ver por ejemplo los procedimientos de selección de alumnos en Miranda, Arlandis y Soriano, 1997, o el de la presente investigación).

2. Igualmente, dado que podemos considerar la solución de problemas como un proceso de orden superior, al contrario que el cálculo, que es un proceso más básico, una simple analogía con la jerarquía de estas dos tareas nos llevaría a pensar que el cálculo es imprescindible para solucionar problemas, por lo que los alumnos con dificultades en cálculo muy probablemente verán también afectados sus procedimientos para solucionar problemas, lo que en principio otorgaría una ubicación a la solución de problemas en las DAM. Sin embargo, de nuevo la investigación nos muestra que esto no siempre ocurre así, ya que estudios longitudinales han mostrado que alumnos con problemas para recuperar hechos aritméticos rinden en solución de problemas de un modo similar a los alumnos sin estos problemas para recuperar hechos aritméticos (Jordan, Hanich y Kaplan, 2003).

3. Una tercera propuesta teórica sobre el lugar de las DASP en las DAM, radica en el papel que juegan las estrategias en el proceso de solución de problemas. Una posibilidad basada en esta asunción sería que el elemento que diferencia a los alumnos con DA limitadas a la solución de problemas del resto de EDAM sería el conocimiento de un repertorio limitado de estrategias cognitivas de solución de problemas, y la habilidad para seleccionar y movilizar estas estrategias dependiendo del tipo de problema planteado y de otros

factores contextuales. Sin embargo, esta hipótesis no está totalmente explorada, y para corroborarla sería necesario, entre otras cosas, evaluar si las estrategias de cálculo son análogas o coinciden con las estrategias de solución de problemas, o bien si existen otros elementos que mediatizan el rendimiento en solución de problemas.

1.6. Características cognitivas y metacognitivas de alumnos con DAM.

Uno de los temas centrales de investigación en el área de estudio de las DAM, y en general de los trastornos relacionados con el aprendizaje es la identificación de los procesos cognitivos y metacognitivos que subyacen a las dificultades. En las DAM estos esfuerzos por realizar una descripción exhaustiva de los factores cognitivos y metacognitivos responsables últimos de las DAM se han centrado en cuatro aspectos fundamentales: la memoria de trabajo, la habilidad viso-espacial, el conocimiento y selección de estrategias, y las creencias metacognitivas.

1.6.1. Déficits en la memoria de trabajo.

Sin duda, los déficits en la memoria de trabajo (MT), y en la memoria a corto plazo (MCP), son la piedra angular sobre la que gira la línea de investigación orientada a la descripción de las características cognitivas de los alumnos con DAM. En la última década, un sinfín de trabajos se ha propuesto estudiar la naturaleza de las limitaciones que los EDAM presentan en su MT, planteándose varios objetivos en la investigación. Entre ellos están detectar si el déficit se sitúa en el bucle fonológico, la agenda viso-espacial o el ejecutivo central; averiguar si las limitaciones en la MT se atenúan con la edad, o persisten desde la infancia hasta la adolescencia; determinar si los problemas de la MT son causados por una carencia de estrategias para organizar la recuperación de información de la MCP. Por economía de espacio, y dado que no es el objetivo fundamental de este trabajo, se expone la tabla 2, que presenta un breve resumen de los trabajos más interesantes realizados en los últimos años en el que se indica la conclusión general de cada trabajo y las características de la muestra empleada.

Una descripción exhaustiva de los trabajos publicados a este respecto entre 1993 y 2003 puede encontrarse en Tárraga (2004). Igualmente, Swanson y Jerman (2006), han realizado un reciente metaanálisis de 28 estudios publicados desde 1983 en los que se compara el rendimiento en tareas cognitivas de alumnos con DAM y alumnos sin DA. Dicho metaanálisis corrobora el déficit en los diferentes almacenes de memoria de los alumnos con DAM, déficit que cuantifica en un tamaño del efecto de -.70 en memoria de trabajo verbal, -.63 en memoria de trabajo viso-espacial, y -.072 en memoria a largo plazo. Sin embargo, los modelos lineales jerárquicos llevados a cabo por Swanson indicaron que la memoria de trabajo verbal es el único proceso cognitivo capaz de predecir el funcionamiento cognitivo general de los EDAM, una vez que se controló el efecto del resto de variables cognitivas contempladas en el metaanálisis.

REFERENCIA	LOCALIZACIÓN DEL DÉFICIT	TIPO DE DIFICULTADES.
Keeler y Swanson (2001)	Déficit en el conocimiento de estrategias para resolver tareas de MT.	DAM (aritmética Y SP).
McLean y Hitch (1999)	Déficit en el ejecutivo central y la agenda viso-espacial. Déficit en la interacción entre la MT y la MLP.	DA aritmética.
Passolunghi y Siegel (2001)	Déficit en la MT, y en la MCP. Dificultades para eliminar información irrelevante de los problemas.	DASP.
Swanson (1994)	Aunque tanto la MT como la MCP contribuyen a las DA, los EDA manifiestan déficits en MT, independientemente de su MCP, por lo que la MT es un mejor predictor de las DA.	DAM y DAL.
Swanson y Sachse-Lee (2001)	Déficit generalizado en la MT. Afectación de agenda viso-espacial, bucle fonológico, y ejecutivo central.	DASP.
Swanson y Jerman (2006)	Cuantifica el déficit en un tamaño del efecto de -.70 en memoria de trabajo verbal, -.63 en memoria de trabajo viso-espacial, y -.072 en memoria a largo plazo.	Metaanálisis de 28 estudios publicados desde 1983.
Van der Sluis, Van der Leij, y de Jong (2005)	Déficit en tareas de agenda viso-espacial que incluyen información en movimiento (no estática).	DA en aritmética.
Wilson y Swanson (2001)	Déficit general en la MT. Afectación de la MT espacial, y en mayor medida la MT verbal.	DA en aritmética.
Zhang, Zhao, Fu (2000)	Déficit en “metamemoria” caracterizado por ausencia de estrategias de organización del recuerdo, y por un monitoreo del recuerdo poco efectivo.	DAM y DAL.

Tabla 2. Investigaciones sobre la localización del déficit en memoria de trabajo en alumnos con DA.

1.6.2. Déficit viso-espacial.

Tanto la atención como la memoria de contenido viso-espacial, y más concretamente el proceso cognitivo de representación viso-espacial, que consiste en representar visualmente el problema mediante un dibujo o esquema, o bien mediante una imagen mental clara elaborada a partir de la comprensión del enunciado, parecen otro aspecto determinante para la presencia de dificultades del aprendizaje en solución de problemas.

A este respecto, Van Garderen y Montague (2003) se propusieron indagar sobre si hay diferencias en la frecuencia y tipo de representaciones visoespaciales entre alumnos con DAM, con rendimiento medio, y superdotados o con muy altas habilidades para SP. También se propusieron analizar la relación entre representación viso-espacial y rendimiento en solución de problemas. Para ello leyeron a los alumnos 13 problemas de matemáticas, les pidieron que los resolvieran, y que contestaran a preguntas sobre el modo en que los habían resuelto. “¿Cómo lo resolviste?”, “¿Viste un dibujo del problema mientras lo estabas resolviendo?” “En caso afirmativo, describe el dibujo”; “¿Cómo te ayudó el dibujo a responder?”. Además, las autoras codificaron los dibujos que realizaron los alumnos para resolver los problemas como “pictóricos”, o “esquemáticos”, dependiendo de su grado de abstracción, y de las explicaciones que los alumnos daban.

La conclusión fundamental que extrajeron es que los alumnos con DAM parecen presentar un déficit en sus habilidades de representación viso-espacial: utilizan menos esta estrategia, y cuando la usan, sus representaciones son de carácter fundamentalmente pictórico, dibujan objetos o personas que aparecen en el problema, pero no representan los datos del problema, ni establecen relaciones entre ellos. Por contra, las representaciones de los alumnos superdotados tienden a ser más esquemáticas, establecen relaciones entre los datos del problema, y demuestran una comprensión más profunda del mismo. Estas mismas conclusiones son las que se encuentran el trabajo realizado por Guoliang y Pangpang en 2003, en el que reprodujeron la misma metodología del trabajo de Van Garderen y Montague obteniendo un resultado prácticamente idéntico.

1.6.3. Déficit estratégico.

El conocimiento y empleo de estrategias es crucial para resolver problemas matemáticos. Este conocimiento es adquirido de modo natural por la mayoría de estudiantes conforme se exponen a tareas de solución de problemas, o mediante la imitación de modelos de solución expertos (Siegler y Jenkins, 1989). Estos alumnos tan sólo necesitan la oportunidad de resolver problemas para poco a poco generalizar su conocimiento de estrategias y convertirse en resolutotes expertos. Por contra, los estudiantes con dificultades de aprendizaje presentan un problema específico para adquirir de modo natural este conocimiento estratégico; presentan un déficit en el aprendizaje y generalización de estrategias, lo que sin duda afecta a su rendimiento en solución de problemas (Montague, 1997).

La naturaleza de este déficit estratégico ha sido estudiada por numerosas investigaciones. Los resultados obtenidos indican que la cantidad de estrategias empleadas por los EDAM no difieren significativamente de las empleadas por el resto de sus compañeros sin DA. Sin embargo, sí existen diferencias en la clase de estrategias empleadas: los EDAM emplean más estrategias de lectura y relectura del enunciado del problema, que sus compañeros, e invierten más tiempo en realizar cálculos y operaciones que no han seleccionado ni planificado adecuadamente; además, presentan notables problemas para transformar la información lingüística y numérica de los enunciados en operaciones adecuadas conducentes a la solución. Por ello, a menudo recurren a inefectivas tentativas de ensayo y error, y realizan gran cantidad de cálculos inefectivos (Kamann y Wong, 1993; Montague y Applegate, 1993, Montague, Applegate, y Marquard, 1993; Montague, Bos y Doucette, 1991).

Pero este déficit estratégico no se limita al conocimiento y selección de estrategias de solución, sino que se extiende al terreno de la autorregulación y automonitoreo del procedimiento de solución de problemas. Miller y Mercer (1997) encontraron que los EDAM no son conscientes de las habilidades, estrategias y recursos que son necesarios para realizar una tarea, fracasando a la hora de utilizar mecanismos autorregularios para terminar las tareas. Esta carencia repercute negativamente en las habilidades para: a) evaluar su capacidad para resolver problemas; b) identificar y seleccionar estrategias apropiadas; c) organizar la información; d) autocontrolar los procesos de resolución de problemas; y e) generalizar estrategias a situaciones apropiadas.

Más recientemente, Miranda, Acosta, Tárraga, Fernández y Rosel (2005) realizaron una investigación en la que emplearon un instrumento para la evaluación de habilidades cognitivas y metacognitivas en tareas matemáticas en alumnos con y sin DAM (una adaptación del EPA 2000). En dicho trabajo encontraron que los EDAM tienen una menor capacidad para predecir y evaluar su rendimiento matemático, especialmente en tareas de cálculo. Además, encontraron un perfil metacognitivo de predicción y evaluación similar entre estudiantes con DAM de 4º y estudiantes sin DAM de 3º, lo que sugiere que las bajas habilidades de predicción y evaluación podrían ser explicadas por la falta de madurez en el desarrollo metacognitivo. Estos resultados están en la línea de los encontrados por otros investigadores (Desoete y Roeyers, 2002), quienes también han subrayado el déficit de los EDAM en estrategias de metacognición "*off-line*", de predicción acerca de la capacidad para resolver una tarea matemática, y evaluación del éxito en la tarea una vez resuelta.

1.6.4. Creencias metacognitivas.

Finalmente, es necesario destacar que los déficits subyacentes a las DAM no se limitan al plano puramente cognitivo, sino que hoy día el paradigma de investigación asume que estos factores cognitivos se entrelazan con las creencias metacognitivas, dando lugar conjuntamente a las DAM. Esta afirmación se sustenta en modelos de habilidades matemáticas como el desarrollado por Desoete, Roeyers, Buysse, y De Clercq (2002), que incluyen las creencias metacognitivas como un elemento crucial a evaluar en el rendimiento matemático. En este modelo las creencias metacognitivas se definen como las ideas, creencias o valoraciones que el sujeto tiene sobre sus habilidades y procesos cognitivos, y se asume que éstas están compuestas por 5 parámetros metacognitivos: el *autoconcepto*, que se refiere a las creencias que el sujeto tiene sobre su capacidad cognitiva para resolver la tarea. Esta creencia modula variables como la motivación del sujeto, lo que incide directamente sobre sus resultados al enfrentarse a las tareas matemáticas. La *autoeficacia*, entendida como la confianza que el sujeto tiene en su capacidad para afrontar las tareas, constituye otro elemento que influye decisivamente en sus resultados. La *motivación*, un factor fundamental que marcará la actitud del sujeto ante la tarea. Las *creencias atribucionales*, las causas a las que achaca el sujeto sus resultados en la tarea (causas externas o internas) son otro elemento que decidirá su rendimiento ante las tareas. Y finalmente la *concepción de inteligencia y aprendizaje* del sujeto, que marcará la conducta y actitud del sujeto ante la tarea.

En una línea de investigación paralela, Efeklides, Kiorpelidou, y Kiosseoglou (2006) acuñan el término *experiencias metacognitivas* para referirse a los sentimientos e impresiones que experimenta un sujeto cuando lee un problema matemático, respecto al grado de familiaridad con el problema (si se ha enfrentado anteriormente a problemas similares), las expectativas de solucionarlo con éxito, o la impresión de la dificultad del problema. Estas experiencias metacognitivas son conscientes, y contribuyen a formar las atribuciones causales y el autoconcepto del alumno; sin embargo, no siempre son realistas, ni están directamente relacionadas con el rendimiento en solución del problemas del alumno, sino que como apuntan Efeklides, Kiorpelidou, y Kiosseoglou (2006), existen casos de ilusión de familiaridad, ilusión de comprensión, e ilusión de dificultad, en los que los alumnos sobreestiman sus capacidades, y se creen a sí mismos capaces de resolver adecuadamente los problemas, cuando sus déficits estratégicos, y sus DA les impiden rendir adecuadamente.

Numerosas investigaciones muestran que los EDAM presentan carencias en estos y otros parámetros metacognitivos y experiencias metacognitivas, en comparación con los estudiantes sin DA, e incluso cuando se los compara con estudiantes con DAL.

Miranda, García y Rosel (2004) compararon las atribuciones de estudiantes de 5º curso divididos en 3 grupos: alumnos con DAM, alumnos con DAL, y alumnos sin DA. En los resultados de su estudio no encontraron diferencias entre EDAM y EDAL. Sin embargo, cuando compararon el grupo de EDAM con el de alumnos sin DA, se encontraron diferencias significativas en las puntuaciones referidas a las atribuciones respecto al rendimiento académico, mientras que el grupo de EDAL no difirió significativamente respecto del mismo grupo sin DA. Estos resultados sugieren que, al contrario que los EDAL, los EDAM tienden a atribuir sus éxitos y fracasos al interés y la capacidad en menor medida que los alumnos sin DA.

González-Pienda, et al., (2000) compararon el autoconcepto, estilo atribucional, metas académicas y orientación motivacional de un grupo de preadolescentes con DA, y un grupo de estudiantes de la misma edad sin DA. Sus resultados indicaron que los estudiantes con DA presentaban autopercepciones más negativas y estaban menos motivados hacia el aprendizaje significativo que los ESDA (estudiantes sin dificultades del aprendizaje). Además, eran más propensos a atribuir sus resultados negativos a la falta de capacidad que los ESDA. Sin embargo, los análisis intragrupo revelaron que el patrón atribucional de los EDA no es homogéneo, sino que una parte de los EDA muestran un estilo atribucional adaptativo, que les permite atribuir sus fracasos a factores controlables, como el esfuerzo.

Finalmente, Arlandis (1992) compararó las atribuciones causales, competencia percibida, síntomas depresivos y ansiedad escolar de un grupo de alumnos con DASP y un grupo de alumnos sin DA. Los resultados de su estudio mostraron que los EDASP (estudiantes con dificultades de aprendizaje en solución de problemas) atribuían su éxito a causas internas significativamente menos que el grupo de compañeros sin DA. Igualmente, los EDASP obtuvieron una puntuaron significativamente mayor en el Inventario de Depresión Infantil aplicado, en comparación con los EDASP, hasta el extremo de que un 39% de los EDASP obtenían una puntuación en este inventario que cumplía los criterios de depresión. En esta misma línea, los EDASP manifestaban mayores niveles de ansiedad y timidez en la escuela que sus compañeros sin DA.

1.6.5. Conclusiones del capítulo.

Este primer capítulo ha tratado de ofrecer una panorámica introductoria del estado del arte de la investigación básica en DAM. Las conclusiones fundamentales de esta panorámica son dos:

1. Es necesario llegar a un consenso acerca de la definición de DAM y de sus subtipos, así como de un modo de diagnóstico adecuado que excluya falsos positivos y que no obtenga

falsos negativos. Este aspecto es urgente y fundamental si pretendemos que todo el grueso de investigación del área tenga credibilidad y produzca resultados fiables, dado que una identificación y diagnóstico adecuados son necesarios para todas las investigaciones posteriores.

2. Pese a las trabas que supone la falta de consenso definitorio y terminológico, el área ha avanzado en las últimas décadas, elaborando propuestas de subtipos de DAM e identificando algunos aspectos claves que consistentemente caracterizan a los alumnos con DAM: déficits en la memoria de trabajo, déficits estratégicos, y problemas a largo plazo en el espectro afectivo-motivacional.

2

Modelos de solución de problemas matemáticos.

Al igual que la mayoría de tareas cognitivas complejas que realizamos los humanos, la solución de problemas matemáticos constituye un proceso de pensamiento general, fruto de la conjunción de varios procesos cognitivos de carácter más básico, que se concatenan unos con otros conformando en suma los procesos psicológicos complejos.

Una de las aportaciones de la psicología cognitiva en las últimas décadas ha consistido en intentar aislar e identificar estos procesos básicos que subyacen a las tareas cognitivas complejas, y reflejarlos en forma de modelos psicológicos, o modelos de arquitectura cognitiva. Estos modelos tratan de aproximarse a una descripción lo más exhaustiva posible de los pasos o fases por las que atraviesa la mente humana cuando está enfrascada en una tarea.

En el marco de la psicología cognitiva se han elaborado diferentes procedimientos para inferir los procesos cognitivos que subyacen a la conducta humana, entre las que destacan las técnicas de simulación por ordenador, los protocolos de pensamiento en voz alta y los procedimientos de recuerdo inducido. Específicamente en el campo de la solución de problemas matemáticos, los investigadores han ideado formas muy dispares para inferir los procesos cognitivos que subyacen a los procedimientos de solución de problemas. Así, en algunos casos han comparado los procesos de solución de problemas de alumnos expertos e inexpertos (Montague, y Van Garderen, 2003); en otras ocasiones han grabado a alumnos mientras están resolviendo problemas y después les han enseñado la grabación pidiéndoles que recuerden qué procedimiento estaban siguiendo en cada caso (Montague, y Applegate, 1993). También han elaborado instrumentos de evaluación de habilidades cognitivas y metacognitivas a modo de entrevista como el *Mathematical Problem Solving Assessment* (MPSA), (Montague, 2003), o a modo de pruebas de rendimiento como el *Test di Soluzione di Problemi Matematici* (Lucangeli, Tressoldi, y Cendron, 1998, a), etc.

Los resultados obtenidos a través de estos procedimientos han dado lugar a la formulación de diferentes modelos de procesos cognitivos que subyacen a la solución de problemas matemáticos.

Estos modelos se iniciaron seguramente con las aportaciones de Polya en la década de los 40, quien propuso un primer intento de descripición de los procesos que los alumnos realizan al resolver problemas basado en la distinción de 4 fases: comprensión del problema, concepción de un plan, ejecución del plan, y visión retrospectiva (Polya, 1986). Posteriormente, en la década de los 70, Mayer retomó la descripción de Polya matizándola para diferenciar 4 fases en la solución de problemas: comprensión del problema, integración de la información, planificación y supervisión, y ejecución del plan (Mayer, 2002). Finalmente, en los últimos años, numerosos autores han diseñado procedimientos para el entrenamiento en habilidades de solución de problemas a cuya base se encuentran formulaciones particulares del proceso de solución de problemas. Algunos de estos procedimientos de intervención se describen en el capítulo siguiente, en el que se repasan las diferentes aproximaciones a la enseñanza de solución de problemas. Por último, Lucangeli y colaboradores han formulado un modelo ecléctico en el que tratan de recoger las conclusiones de las investigaciones previas disponibles en la literatura (Lucangeli, Tressoldi y Cendron, 1998, b). Este modelo presenta el valor añadido de que es el único que ha sido sometido a procedimientos estadísticos de confirmación factorial.

2.1. Modelo de Solución de Problemas de Polya.

Como se comentaba anteriormente, en los años 40 George Polya realizó las primeras descripciones de los procesos que subyacen a la solución de problemas matemáticos con el objetivo de servir de guía a los profesores que enseñan a sus alumnos a resolver problemas. Polya aisló 4 fases fundamentales en la solución de problemas: comprensión del problema, concepción de un plan, ejecución del plan, y visión retrospectiva. El modelo propone estas 4 fases o procesos generales, pero admite que se pueden descomponer en procesos más sencillos, e incluso sugiere que puede ser conveniente establecer subdivisiones en estas fases. Para ello facilita una lista de preguntas que se enmarcan dentro de cada fase. A continuación el cuadro 1, adaptado de Polya (1986), resume las preguntas propuestas.

Comprender el problema.
•¿Cuál es la incógnita?; ¿cuáles son los datos?
Concebir un plan.
•¿Se ha encontrado con un problema semejante? ¿ha visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente? •He aquí un problema relacionado al suyo y que se ha resuelto ya. ¿Podría usted utilizarlo?; ¿podría utilizar su resultado?; ¿podría emplear su método?; ¿le haría a usted falta introducir algún elemento auxiliar a fin de poder utilizarlo? •¿Podría enunciar el problema en otra forma? •¿Ha empleado todos los datos?; ¿ha considerado usted todas las nociones esenciales concernientes al problema?
Ejecutar el plan.
•Al ejecutar el plan de solución, compruebe cada uno de los pasos. •¿Puede usted ver claramente que el paso es correcto? ¿puede usted demostrarlo?
Visión retrospectiva.
•¿Puede usted verificar el resultado? ¿puede verificar el razonamiento? •¿Puede obtener el resultado en forma diferente? ¿puede usted emplear el resultado o el método en algún otro problema?

Cuadro 1. Adaptado de Polya (1986, p. 19).

El análisis de las preguntas recogidas en este cuadro desvela que además de las 4 fases principales, en el modelo quedan recogidos otros procesos más básicos que constituyen la base de muchos de los procesos descritos en los modelos posteriores. Así por ejemplo, las preguntas referidas a buscar otros problemas similares al propuesto son seguramente el origen de lo que después Lucangeli llamará proceso de “categorización”, o Mayer llama “integración”; y cuando se pide al alumno que enuncie el problema de otra forma se hace referencia al proceso de “parafraseo” que propone Montague, por ello se considera a este modelo como el origen o inspiración de la mayoría de modelos posteriores.

2.2. Modelo de Mayer.

Richard E. Mayer propone un modelo de solución de problemas en el que también distingue 4 componentes: traducción del problema, integración del problema, planificación de la solución y supervisión, y ejecución de la solución (Mayer, 2002).

Este modelo se ha generado a partir de la observación de los procedimientos seguidos por los alumnos mientras resuelven problemas, y de la comparación de esos procedimientos en alumnos con alto y bajo rendimiento en solución de problemas. El modelo se plantea en términos operativos, ofreciéndose descripciones de marcado carácter procedimental en las que cada proceso trata de presentarse como una descripción de los procedimientos o de los procesos operativos que realiza un alumno mientras resuelve el problema.

La traducción del problema se refiere a la habilidad del sujeto para transformar las afirmaciones del enunciado del problema en una representación interna. Según Mayer, esta habilidad requiere de dos tipos de conocimiento: conocimiento lingüístico (conocimiento del idioma en que está escrito el enunciado), y conocimiento semántico (conocimientos sobre los referentes reales a los que se refiere el problema; por ejemplo en un problema de geometría, saber que un cuadrado es una figura con 4 lados iguales y 4 ángulos rectos).

El proceso de integración del problema hace referencia a la capacidad para integrar cada una de las afirmaciones del problema en una representación coherente de la información. Según Mayer, este proceso requiere de conocimiento esquemático, que hace referencia a la habilidad de los sujetos para reconocer diferentes tipos de problemas, y clasificarlos en tipologías preestablecidas. Mayer incluye en este proceso, además, la capacidad para distinguir entre información relevante e información irrelevante para la solución del problema.

El tercer proceso identificado por Mayer, la planificación y supervisión del problema, hace referencia a la habilidad del sujeto para generar un plan mediante el planteamiento de objetivos y subobjetivos dentro del problema, y a la habilidad para supervisar o monitorizar los procedimientos mediante los que se sigue el plan. Mayer propone que el conocimiento necesario para la elaboración de planes es el conocimiento estratégico, que implica la capacidad para crear o aplicar estrategias que ayuden a resolver problemas.

Por último, el cuarto proceso de solución de problemas aislado por Mayer es la ejecución de la solución; la aplicación de las reglas de la aritmética siguiendo el plan anteriormente elaborado. Este proceso requiere de conocimiento procedimental, necesario para hacer efectivos los procedimientos que se han planificado en la fase anterior.

El cuadro 2, adaptado de Mayer (2002, p. 147), trata de resumir el modelo de solución de problemas expuesto.

Componente	*Tipo de conocimiento*	*Procesos realizados por el alumno.*
Traducción del problema	Conocimiento lingüístico	Comprensión lingüística del enunciado
	Conocimiento semántico	Conocimientos sobre los referentes del problema
Integración del problema	Conocimiento esquemático	Adscripción del problema a una tipología preestablecida
Planificación y supervisión del plan	Conocimiento estratégico	Generación de Estrategias de solución. Monitoreo de aplicación de las estrategias
Ejecución de la solución	Conocimiento procedimental	Aplicación de reglas aritmética

Cuadro 2. Adaptado de Mayer (2002, pp. 147).

2.3. Modelo de solución de problemas que subyace al programa ¡Resuélvelo!

La profesora Marjorie Montague (1997) de la Universidad de Miami también ha desarrollado un modelo de procesos que subyacen a la solución de problemas matemáticos. Su modelo es resultado de una línea de investigación de varios años, utilizando un paradigma de investigación que compara los procedimientos seguidos por alumnos con bajo rendimiento en solución de problemas, alumnos con rendimiento medio, y alumnos con muy alto rendimiento en solución de problemas o sobredotación intelectual.

El modelo es el origen del programa de entrenamiento en habilidades de solución de problemas ¡Resuélvelo!, ya que cada una de las estrategias en las que el programa entrena a los alumnos corresponde con los procesos psicológicos que subyacen a la solución de problemas. Por ello, aunque más adelante se comentarán de un modo más exhaustivo cada uno de los procesos que conforman el programa de intervención, ahora se ofrece una breve descripción de ellos a fin de poder compararlos con los demás modelos de solución de problemas matemáticos.

Los componentes de este modelo son: lectura y comprensión del problema, parafraseo del enunciado del problema, visualización del problema, planificación o establecimiento de hipótesis para solucionar el problema, estimación de la respuesta, cálculo o resolución del problema, y comprobación de los procesos realizados. Además, se incluyen tres estrategias metacognitivas, que se aplican a cada uno de los procesos cognitivos anteriores: autoinstrucciones, automonitoreo, y autoevaluación de cada uno de los 7 procesos cognitivos anteriores.

Lectura y comprensión del problema. Consiste en la lectura detenida del enunciado hasta estar seguro de que se ha comprendido.

El parafraseo del problema es un mecanismo para cerciorarse de que se ha comprendido correctamente el problema que consiste en poner el enunciado del problema en tus propias palabras.

La visualización es el procedimiento mediante el cual el alumno realiza un dibujo o esquema del problema; o bien se forma una imagen mental clara del problema en la que pone en relación los diferentes datos que aparecen y la pregunta o incógnita del problema.

La planificación o establecimiento de hipótesis es el procedimiento por el que el alumno planifica las operaciones que serán necesarias para resolver el problema.

La estimación es una primera tentativa o aproximación a la respuesta que se consigue redondeando los números de manera que sea fácil operar con ellos, y haciendo las operaciones pensadas en el proceso anterior “de cabeza”. Este proceso ayuda a hacernos una primera idea del resultado, y después será útil para compararlo con la respuesta definitiva.

La solución o realización de los cálculos es el proceso en el que se completan las operaciones planificadas anteriormente.

Por último, la comprobación es el proceso en el que se comprueban los procedimientos llevados a cabo durante la solución, se compara la estimación con la solución final, y se revisa que todos los procesos anteriores se hayan cumplido correctamente.

Estos 7 procesos se aplican mediante la respuesta a tres preguntas: 1) ¿qué tengo que hacer?; son las autoinstrucciones, mediante las que el alumno se dice a sí mismo lo que tiene que hacer en cada proceso; 2) ¿lo estoy haciendo bien?, o automonitoreo, mediante el que el alumno supervisa el proceso que está aplicando en cada caso; y 3) ¿lo he hecho bien?, o autocomprobación, en la que el alumno se asegura de que en cada proceso ha realizado la actividad oportuna, y ha puesto en práctica el proceso adecuadamente. Una representación gráfica de este modelo puede encontrarse en la figura 1.

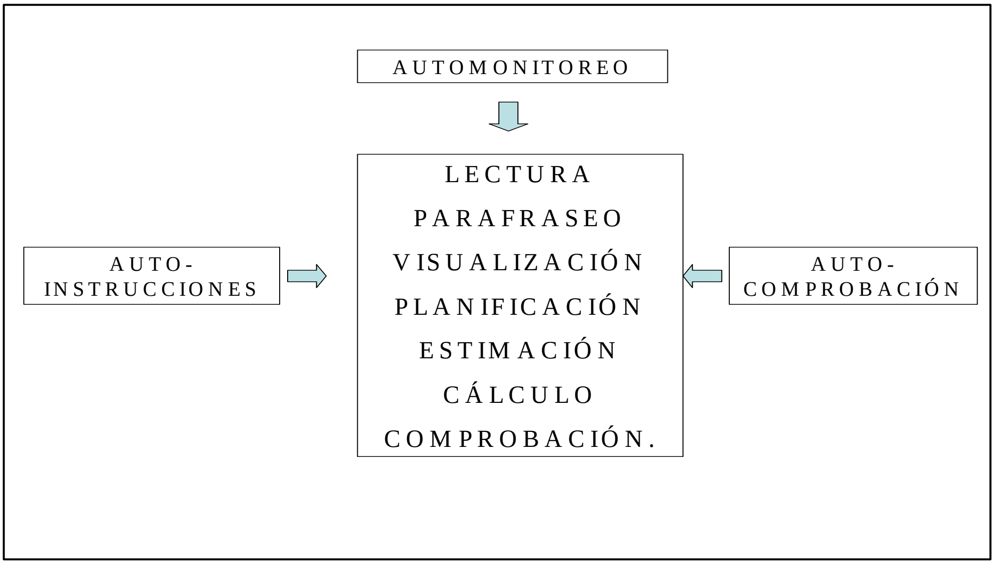


Figura 1. Modelo de solución de problemas de M. Montague.

2.4. El modelo de Lucangeli, Tressoldi y Cendron.

Por último, Lucangeli, Tressoldi y Cendron (1998 b), proponen un modelo de procesos implicados en la solución de problemas en el que recogen las diferentes aportaciones de las investigaciones previas en la literatura especializada.

La particularidad fundamental de este modelo es que, mientras en las formulaciones anteriores de solución de problemas los modelos eran resultado de la observación de los alumnos mientras trabajaban, del análisis de protocolos verbales, o de procedimientos de recuerdo inducido, este modelo es resultado de los datos obtenidos a partir de un instrumento de evaluación de procesos cognitivos implicados en solución de problemas (El *Test di Soluzioni dei Problemi*), y el sometimiento empírico de estos datos a procedimientos de confirmación factorial mediante *path analysis*.

El modelo contempla la existencia de 5 procesos cognitivos: comprensión del enunciado, representación, categorización, planificación, y autoevaluación, que determinan de un modo jerárquico, la habilidad de solucionar problemas. Una representación gráfica del modelo puede encontrarse en la figura 2.

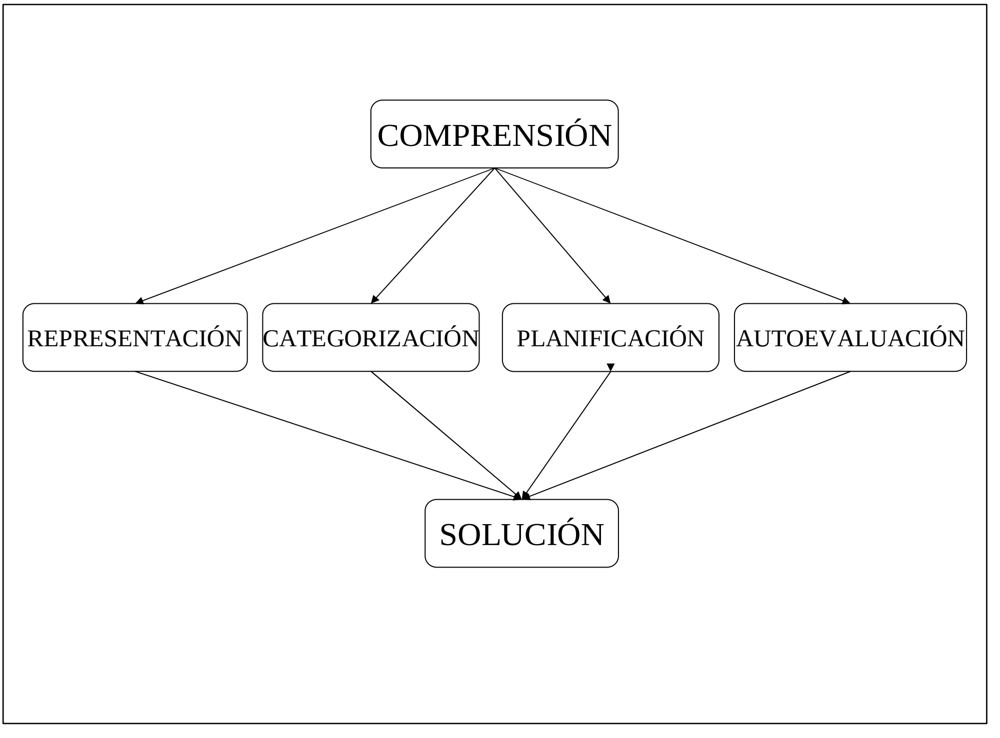


Figura 2. Modelo de solución de problemas de D. Lucangeli.

La comprensión del enunciado se contempla en el modelo como un proceso general, al que se subordinan el resto de procesos implicados, ya que la comprensión del enunciado es un requisito previo de cuyo éxito depende la correcta aplicación del resto de procesos.

La <u>representación</u> es la habilidad para hacerse una idea mental del contenido del problema: los datos que se presentan, la relación que se establece entre ellos, y la determinación de la pregunta o incógnita que se debe resolver.

La <u>categorización</u> es la habilidad de los alumnos para reconocer la estructura que subyace al problema, y adscribirlo a una categoría previamente conocida.

El proceso de <u>planificación</u> consiste en el establecimiento de un plan o serie de estrategias para resolver el problema, y se considera un proceso crucial en tanto que de él depende la elección de acciones que se realizarán para resolver el problema.

Por último, el proceso de <u>autoevaluacion</u> se refiere a las acciones que realiza el sujeto para monitorizar los procedimientos que va siguiendo para resolver el problema.

2.5. Diferencias y similitudes entre los modelos de solución de problemas.

Los 4 modelos expuestos anteriormente coinciden básicamente en distinguir 5 fases generales en el procedimiento de solución de problemas matemáticos: una primera fase de lectura y comprensión, una fase posterior de identificación de la estructura profunda del problema, una fase de planificación, una fase de comprobación, y por supuesto una fase en la que se realizan los cálculos y se ofrece la respuesta final. En la tabla 3 se

<table>
<tr><th>Autor/fase</th><th>F. de lectura y comprensión</th><th colspan="2">F. de identificación estructura profunda problema</th><th colspan="2">F. de planificación</th><th>F. de comprobación.</th></tr>
<tr><td>Pólya</td><td>Comprensión.</td><td colspan="4">Planificación</td><td>Visión retrospectiva</td></tr>
<tr><td>Mayer</td><td>Traducción</td><td colspan="2">Integración</td><td colspan="2">Planificación y supervisión</td><td></td></tr>
<tr><td>Lucangeli et al.</td><td>Comprensión.</td><td>Categorización</td><td>Representación</td><td colspan="2">Planificación</td><td>Autoevaluación</td></tr>
<tr><td>Montague</td><td>Lectura. Parafraseo.</td><td colspan="2">Visualización</td><td>Planificación</td><td>Estimación</td><td>Comprobación</td></tr>
</table>

Tabla 3. Comparación entre los diferentes modelos de solución de problemas.

expone un breve resumen comparativo de los 4 modelos. En esta tabla se observa cómo todos los modelos contemplan estas fases básicas, aunque consideramos interesante comentar sus diferencias:

1.La fase de lectura y comprensión se recoge en todos los modelos, aunque en el modelo de Lucangeli se le da una importancia mayor que al resto de fases, considerándose una fase de la que dependen el resto de procesos cognitivos, al contrario que el resto de modelos, que no contemplan esta estructura jerárquica.

2.Mientras que los modelos de Polya, Mayer, y Lucangeli contemplan una fase en la que los alumnos adscriben el problema a una categoría preestablecida con el objetivo de identificar la estructura profunda del problema, el modelo de Montague obvia este procedimiento, y opta simplemente por realizar un esquema del problema o esbozar una imagen mental del mismo.

3.Mientras que Montague incluye en su modelo una fase de estimación de la respuesta, en el resto de modelos este procedimiento no aparece; es más, antes de exponer su modelo definitivo, Lucangeli y colaboradores propusieron otros modelos alternativos, en los que sí se contemplaba la estrategia de estimación, aunque se decidió excluirla del modelo final, dado que no contribuía a predecir el rendimiento en solución de problemas. Al mismo respecto, otra diferencia a tener en cuenta es que Lucangeli contempla la estimación como un proceso metacognitivo, mientras que Montague la considera un proceso cognitivo. Esta diferencia es justificable por dos motivos: en primer lugar porque no parece lógico establecer una frontera estricta entre cognición y metacognición, y en segundo lugar porque la estimación sería una estrategia “a caballo” entre el terreno cognitivo y metacognitivo, ya que se puede considerar bien como una fase más en el proceso de resolución, es decir como otro elemento necesario en la secuencia de solución; o bien como un mecanismo que contribuya al proceso de automonitoreo y comprobación (que serviría para hacerse una idea de la complejidad de las operaciones, para comprobar si el resultado aproximado es coherente con el enunciado, etc.)

4.La cuarta diferencia también atañe al modelo de Montague, ya que es el único que contempla la distinción entre procesos cognitivos y metacognitivos. Los procesos metacognitivos que se identifican en el modelo son las autoinstrucciones, el automonitoreo, y la autocomprobación. Montague otorga una gran importancia a estos procesos, en tanto que se aplican a cada una de las 7 estrategias cognitivas de su modelo. Por el contrario, en el resto de modelos expuestos, estos elementos aparecen como un componente más del procedimiento, pero se aplican en momentos específicos, y no a lo largo de todo el proceso; por ejemplo, Mayer habla de planificación y supervisión, lo que en términos de Montague sería automonitoreo de la planificación y de la ejecución; y Lucangeli habla de autoevaluación del procedimiento de solución, lo que equivaldría a la autocomprobación de Montague. La diferencia con el planteamiento de Montague, sería que ella aplica estos 3 procesos metacognitivos a cada uno de los 7 procesos cognitivos, mientras que en el resto de modelos estos procesos metacognitivos tienen su cabida, pero su importancia es mucho menor.

2.6. El modelo que se plantea en nuestra investigación.

Los modelos hasta ahora expuestos han conseguido reflejar de modo exhaustivo los procesos cognitivos que realizan los alumnos mientras resuelven problemas matemáticos. Sin embargo, ninguno de ellos ha prestado atención a un aspecto que afecta de un modo crucial el desempeño de los alumnos en las tareas académicas: el sistema afectivo y motivacional.

El modelo en el que se fundamenta el trabajo de la presente tesis trata de superar esta visión que escinde el sujeto cognitivo del sujeto emocional, planteando un modelo comprehensivo y global en el que tanto los procesos cognitivos como los procesos afectivos y motivacionales determinan el rendimiento en solución de problemas matemáticos de los alumnos. Para ello se propone integrar el modelo de procesos cognitivos y metacognitivos implicados en la resolución de problemas, con diferentes teorías y trabajos que han relacionado los procesos afectivos y motivacionales con el rendimiento académico.

2.6.1. Teorías que justifican la relación de procesos afectivos y motivacionales y rendimiento académico.

Desde hace ya algunas décadas, el paradigma de la psicología cognitiva viene trabajando sobre la tesis de que el funcionamiento cognitivo de las personas y su sistema afectivo y motivacional guardan una estrecha relación de mutua interacción e influencia, abandonando por tanto las concepciones anteriores en las que los aspectos cognitivos estaban separados de los emocionales.

Las dos teorías que seguramente encarnan más fielmente estos planteamientos son la teoría de la autoeficacia de Bandura, y la teoría de las atribuciones de Weiner.

- La teoría de la autoeficacia desarrollada por Bandura postula que los sujetos con una buena autopercepción de sus propias capacidades para una tarea presentan mayores niveles de motivación hacia ella, y logran un rendimiento más alto, mientras que los sujetos que tienen un bajo sentimiento de autoeficacia en una determinada tarea tenderán a evitarla, y lograrán un rendimiento menor en dicha tarea.

- La teoría de las atribuciones de Weiner postula que los individuos tratan de explicar las causas de los eventos significativos que les acontecen. En situaciones escolares, los alumnos pueden atribuir sus éxitos y fracasos a factores tales como la habilidad, el esfuerzo, la dificultad de la tarea, o la suerte. Según esta teoría, los alumnos que atribuyen la causa de su éxito a factores internos (esfuerzo, capacidad) tienden a mostrar mayor rendimiento que los sujetos que tienden a atribuir su rendimiento a factores externos (suerte, grado de facilidad de la tarea).

A este respecto, John Borkowski, uno de los autores que centran su línea de investigación en tratar de comprender esta estrecha interacción entre aspectos cognitivos y afectivos, resume sus tesis en la siguiente afirmación: "*cada acto cognitivo importante tiene consecuencias motivacionales, y, además, estas consecuencias potencian futuras acciones autorreguladoras*" (Borkowski, 1992, p. 253). La afirmación anterior viene respaldada por un gran número de trabajos que constatan la influencia de los elementos motivacionales en el rendimiento cognitivo de los sujetos. A modo de ejemplo se exponen algunos de los resultados obtenidos en el TIMSS (*Third Internacional Mathematics and Science Study*) en 1999, uno de los mayores trabajos a gran escala sobre rendimiento en matemáticas en el que se han evaluado diferentes aspectos sobre el estado de la educación matemática en diversos países.

•En 2002, Shen empleó los datos de 38 países participantes en el TIMSS, y encontró prácticamente en todos ellos que los estudiantes con buen rendimiento en matemáticas generalmente afirman que les gustan las matemáticas, se perciben a sí mismos como competentes en matemáticas, y contemplan las matemáticas como una materia fácil, lo que sugiere una estrecha relación entre alto rendimiento matemático, y buenas actitudes hacia la materia (Shen, 2002).

•En la misma línea, Hammouri (2004), empleó los datos recogidos en Israel para el TIMSS, y propuso un modelo sometido a *path análisis e*n el que describía cómo la percepción del alumno de la importancia que la madre otorga a las matemáticas, las atribuciones de éxito al esfuerzo, la actitud hacia las matemáticas, y la confianza en las habilidades matemáticas, eran elementos que estaban influyendo directa o indirectamente en el rendimiento matemático de los alumnos, confirmando así la relación expuesta en el estudio anterior.

Esta relación entre procesos cognitivos y afectivos se ve acrecentada en los alumnos con DA debido a la amplia gama de problemas en el área afectiva que muchas veces manifiestan: estilos atribucionales desadaptativos en los que explican sus éxitos aludiendo a causas externas (suerte, facilidad tarea, etc.), y sus fracasos a factores inernos (ausencia de capacidad o esfuerzo), entrando en ciclos de indefensión aprendida (Tabassam y Grainger, 2002); bajo autoconcepto académico, caracterizado por una valoración más baja que el resto de sus compañeros de su capacidad y habilidades escolares (Prout, Marcal y Marcal, 1992); pérdida de motivación, orientación a metas de rendimiento en mayor medida que a metas de aprendizaje, conducta motivada por evitación de fracasos, en lugar de conseguir logros (Gonzalez-Pienda et al., 2000); problemas de ansiedad ante situaciones escolares, provocados por acontecimientos tales como sacar malas notas, recibir críticas del profesor o los compañeros, ser objeto de burlas, etc. (Bender y Wall, 1994); e incluso problemas de depresión, llegando incluso los datos epidemiológicos (Palladino, Poli, Masi, y Marcheschi, 2000) a indicar que las dificultades del aprendizaje están presentes aproximadamente en la mitad de los casos de depresión en niños. *Para una revisión más exhaustiva, véase el trabajo de Miranda, García, Marco, y Rosel, 2006)*.

Por consiguiente, teniendo en cuenta los trabajos que proponen una cercana relación entre aspectos cognitivos, metacognitivos, y afectivo-motivacionales, y especialmente en alumnos con DA, el modelo sobre el que el programa de itervención que fundamenta este trabajo contempla dos tipos de determinantes del rendimiento en solución de problemas matemáticos:

- Procesos cognitivos y metacognitivos, que toman como referencia el modelo de Montague, ya que supone la base del programa de intervención que se pone en práctica en este trabajo: lectura, parafraseo, visualización, planificación, estimación, cálculo, y comprobación, combinados con autoinstrucciones, automonitoreo, y autocomprobación.

- El sistema afectivo y motivacional de los alumnos, que trata de completar el modelo anterior, y se incluye en el programa de dos modos: mediante el planteamiento de las actividades del programa desde un punto de vista lúdico y motivador; y mediante la evaluación no sólo del rendimiento matemático de los alumnos, sino también de sus actitudes hacia las matemáticas, su estilo atribucional, y su nivel de ansiedad ante las matemáticas.

En la figura 3 se propone una representación gráfica de este modelo.

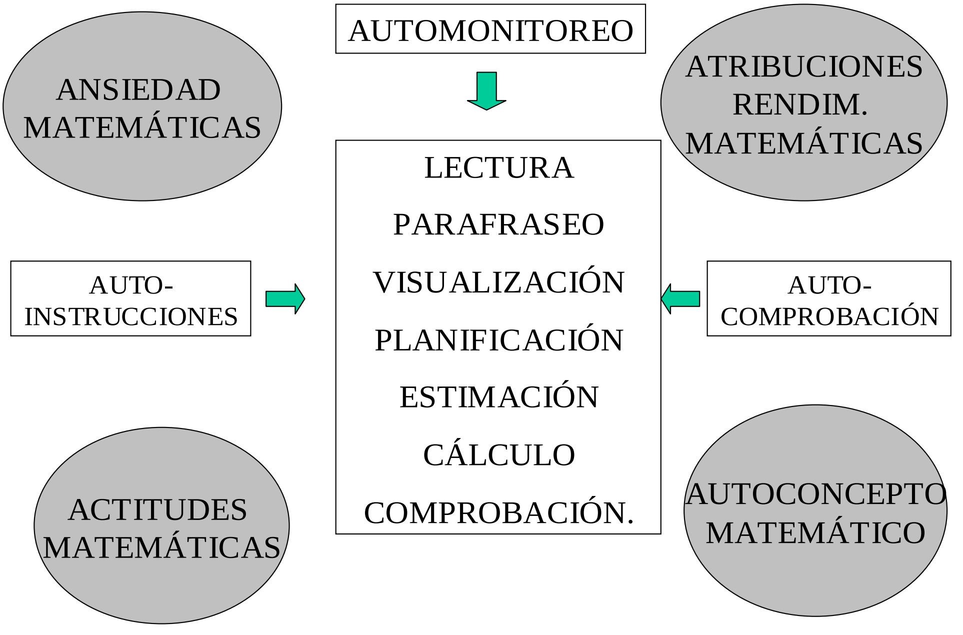


Figura 3. Modelo de solución de problemas planteado en la tesis.

3

Aproximaciones a la enseñanza de habilidades de resolución de problemas en alumnos con dificultades del aprendizaje.

Una revisión de la literatura especializada muestra que entre los diferentes procedimientos de enseñanza de habilidades de resolución de problemas a alumnos con dificultades del aprendizaje se puede diferenciar fundamentalmente tres procedimientos básicos de intervención:

- Entrenamiento basado en la enseñanza de secuencias de estrategias cognitivas y metacognitivas,
- Entrenamiento basado en la identificación y elaboración de esquemas que subyacen al problema, y
- Enseñanza de solución de problemas con apoyo de materiales manipulativos.

Las revisiones meta-analíticas sobre procedimientos de intervención en solución de problemas matemáticos muestran que los tres procedimientos se han mostrado efectivos para ayudar a los alumnos a mejorar su rendimiento en tareas de solución de problemas (Xin y Jitendra, 1999), aunque como se comentará al final de este epígrafe, los tres presentan sus ventajas e inconvenientes. A continuación se exponen las líneas básicas de cada uno de estos procedimientos, y se ilustran con algunos trabajos en los que se han llevado a cabo este tipo de intervenciones.

3.1. Entrenamiento en solución de problemas a través de enseñanza de secuencias de estrategias.

Los trabajos que han tratado de enseñar a los alumnos a resolver problemas de matemáticas a partir de secuencias de estrategias cognitivas y metacognitivas encuentran su referente teórico directo en los modelos de procesos cognitivos y metacognitivos expuestos en el capítulo anterior.

Estos procedimientos de enseñanza consisten en descomponer los problemas de matemáticas en fases, y en buscar procedimientos para enseñar estas fases a los alumnos. Se parte de la premisa de que los problemas se resuelven aplicando estrategias que corresponden con las fases de solución del problema, y de que la diferencia fundamental entre los alumnos con y sin DASP es que los primeros aprenden espontáneamente las estrategias necesarias para resolver los problemas (por la mera práctica o exposición a modelos correctos de solución de problemas), mientras que los alumnos con DA sólo son capaces de interiorizar las estrategias tras un período de tiempo dedicado específicamente a enseñar estas estrategias. Estas intervenciones tratan de suplir el déficit estratégico que presentan los alumnos con DA, y difieren unas de otras tan sólo en las estrategias concretas que enseñan, ya que existen pequeñas diferencias entre los autores para escoger las estrategias clave a elegir.

A continuación se expone una serie de trabajos en los que se ponen en práctica intervenciones basadas en secuencias estratégicas diferentes (Case, Harris, y Graham, 1992; Fleischner, Nuzum y Marzola 1987; Hutchinson, 1993; Marco, Miranda, Simó y Soriano, 2006; Meravech, Tabuk y Sinai, 2006; Miranda, Arlandis y Soriano, 1997; Montague, 1997; Shiah, Mastropieri, Scruggs, y Fulk, 1995). Igualmente, se describen dos estudios en los que se aplican procedimientos de intervención basados en la enseñanza de estrategias cognitivas y metacognitivas, pero que no se ven plasmadas en secuencias de estragias, sino en intervenciones más amplias que emplean diferentes procedimientos de intervención (Butler, Beckingham y Lauscher, 2005; Van Luit y Kroesbergen, en 2006).

Fleischner, Nuzum y Marzola (1987) desarrollaron una secuencia de estrategias para resolver problemas. La secuencia era como sigue: a) <u>leer el problema</u>; ¿cuál es la pregunta?, b) <u>releer el problema</u>; ¿cuál es la información necesaria para resolverlo?, c) <u>pensar sobre los conceptos clave y sobre lo que tengo que hacer</u>; "juntar = sumar", "quitar = restar"; ¿necesito toda la información?; ¿es un problema de uno o dos pasos?; d) <u>resolver</u>; escribir la operación; e) <u>comprobar</u>; recalcular, poner la unidad a la respuesta, y comparar. El resultado del estudio indicó que los alumnos mejoraron su rendimiento en SP tras recibir instrucción basada en esta secuencia de estrategias.

Case, Harris, y Graham (1992) desarrollaron un procedimiento de instrucción de SP basado en la siguiente secuencia de estrategias: a) leer el problema en voz alta, b) buscar palabras clave en el enunciado que indiquen la operación a realizar (p.e. "juntar" para sumar, "¿cuántas menos?" para restar), y rodearlas con un círculo, c) hacer dibujos que ayuden a explicar qué dice el enunciado, d) escribir la operación matemática, y e) escribir la respuesta. Esta secuencia de estrategias iba acompañada de otra secuencia de autoinstrucciones que el alumno tenía que dirigirse a sí mismo cada vez que resolvía un problema: a) definición del problema; "¿qué es lo que tengo que hacer?", b) planificación; "¿cómo puedo resolver el problema?...buscando las palabras clave",

c) uso de las estrategias “las cinco estrategias que he aprendido me ayudarán a buscar las palabras importantes”, d) autoevaluación “¿cómo lo estoy haciendo?, ¿tiene sentido?”, y e) autorrefuerzo “hice un buen trabajo; lo he conseguido”. El resultado del estudio indicó que los alumnos mejoraron su rendimiento en solución de problemas de sumar, y especialmente de restar.

Hutchinson (1993), propone una secuencia de estrategias para resolver problemas de álgebra: a) objetivo del problema, b) identificar lo que no sé (la incógnita), c) identificar los datos que sé, d) escribir o decir el problema con mis palabras y hacer un dibujo, e) tipo de problema, f) ecuación, g) resolución de la ecuación, h) solucion, i) comparación con el objetivo, j) comprobación. La secuencia va acompañada de un procedimiento de comprobación en forma de autopreguntas dividida en fase de representación, y fase de resolución. Fase de representación: a) ¿He leído y comprendido cada frase?; ¿hay alguna palabra de la que tenga que preguntar el significado?, b) ¿He hecho un dibujo o representación del problema?, c) ¿He escrito mi representación en el cuaderno? d) ¿Qué debería buscar en un nuevo problema para saber si se trata del mismo tipo de problema? Fase de resolución: e) ¿He escrito una ecuación?, f) ¿He ampliado los términos?, g) ¿He escrito los pasos de solución en el cuaderno?, h) ¿Qué debería buscar en un nuevo problema para saber si se trata del mismo tipo de problema?

Shiah et al., (1995) emplearon una secuencia de 7 estrategias cognitivas que desarrollaron basándose en investigaciones previas. Las estrategias eran: a) leer el problema, b) pensar sobre el problema, c) decidir el signo de la operación, d) escribir la operación matemática, e) hacer el problema, f) etiquetar la respuesta (decir la unidad), y g) comprobar. En su trabajo compararon tres tratamientos; en dos de ellos se realizaba la instrucción en esta secuencia de estrategias además de dos variaciones de un programa informático, y en el otro tratamiento simplemente se utilizaba para la instrucción el programa informático, sin la secuencia de estrategias. Los resultados del estudio indicaron que los tres tratamientos mejoraban el rendimiento de los alumnos con DAM en tareas de SP, aunque no hallaron diferencias entre los tres tratamientos. Una posible explicación de ello sea el escaso tiempo dedicado a la instrucción (2 sesiones), demasiado corto como para mostrar diferencias entre las variaciones del tratamiento.

Miranda, Arlandis y Soriano (1997), desarrollaron una intervención en la que se pretendía proporcionar a los estudiantes procedimientos para comprender mejor los problemas y desarrollar un plan de actuación. La secuencia de estrategias era: lectura del problema, subrayado de las palabras “claves”, representación gráfica del problema, inclusión de los datos en un gráfico y planteamiento de las operaciones de resolución. La instrucción en estrategias se realizó mediante una técnica autoinstruccional que incluía cuatro bloques de autoverbalizacions (preguntas y respuestas):

1.Definición del problema: “¿Qué es lo que tengo que hacer”?

2.Aproximación al problema: “¿Cuál es la mejor forma de hacerlo?”

3.Comprobación de la ejecución: ¿Lo estoy haciendo correctamente?”

4.Evaluación de la ejecución: "Bien, yo he hecho un buen trabajo", o "Yo he cometido un error, pero la próxima vez lo haré mejor".

Los resultados de la intervención indicaron que los alumnos con DAM que recibieron el entrenamiento en esta secuencia de estrategias mejoraron sus resultados; pero además este estudio concluyó que cuando este entrenamiento en estrategias se combinó con un reentrenamiento atribucional los alumnos no sólo mejoraron en sus habilidades de solución de problemas, sino que además mejoraron en su autoconcepto y en sus atribuciones al éxito y al fracaso.

Otro ejemplo de secuencia de estrategias cognitivas y metacognitivas podemos encontrarlo en el propio programa ¡Resuélvelo! Este programa será descrito con especial detenimiento en el siguiente capítulo, dado que el objeto principal de esta tesis doctoral es su adaptación a nuestro sistema educativo. La secuencia propuesta en este programa se compone de 7 estrategias cognitivas: lectura, parafraseo, visualización, hipotetización, estimación, cálculo y comprobación, que se enseñan conjuntamente con 3 estrategias metacognitivas: autoinstrucción, autocuestionamiento, y autocomprobación. Este programa ha sido sometido a comprobación empírica en diferentes ocasiones, y ha mostrado óptimos resultados, aumentando el rendimiento de los alumnos en solución de problemas, empleo de estrategias cognitivas y metacognitivas, y rendimiento matemático general (Montague, 1997).

Marco, Miranda, Simó y Soriano (2006), proponen igualmente una secuencia de estrategias cognitivas con la particularidad de que emplean como ayuda un programa con soporte informático en el que los alumnos aprenden las estrategias con la ayuda de representaciones virtuales de los problemas que tienen que resolver. La secuencia que proponen consta de 5 estrategias generales: 1. ¿Qué tengo que hacer?; 2. Tengo que estar concentrado y seguir un plan; 3. Comprobar-corregir; 4. ¿Cómo lo he hecho?

Además, en la segunda estrategia general se incluyen 5 pasos o acciones más concretas en las que el alumno resuelve propiamente el problema: 1. Separar oraciones; 2. Subrayar las palabras importantes y redondear las cantidades; 3. Colocar los datos en un esquema cuadrado; 4. Pensar la operación y hacerla; y 5. Anotar la solución.

Esta distinción entre estrategias generales y específicas responde a la distinción entre procesos de orden superior de solución de problemas, en los que los alumnos se dan autoinstrucciones, se proponen la elaboración del plan, y automonitorean y comprueban el proceso; y procesos concretos u operativos en los que los alumnos llevan a cabo los procedimientos que les marcan los procesos de orden superior: separación de oraciones, subrayado, realización de esquema, calcular y responder.

Por último, Meravech, Tabuk y Sinai (2006), han diseñado un programa de instrucción en estrategias cognitivas que responde al acrónimo inglés IMPROVE: introducción del nuevo material, cuestionamiento metacognitivo, práctica, revisión, obtención de alto rendimiento en procesos cognitivos de alto y bajo nivel, verificación y enriquecimiento.

En este caso la secuencia de estrategias se presenta totalmente en forma de preguntas, en concreto de 4 tipos de autopreguntas o autoinstrucciones: preguntas de comprensión: ¿de qué trata el problema?; preguntas de conexión: ¿en qué se parece y diferencia el problema a otros que he resuelto anteriormente?; preguntas de estrategias: ¿qué clase de estrategias son apropiadas para este problema y por qué?; y preguntas de reflexión: ¿tiene sentido la respuesta?, ¿puedo resolver el problema de otro modo?.

Como se comentaba al principio de este epígrafe, no todas las intervenciones basadas en esta línea de trabajo orientada a la enseñanza de estrategias cognitivas y metacognitvas optan siempre por la aplicación de secuencias de estrategias. A continuación se comentan varios trabajos que también se enmarcan por pleno derecho en esta línea de trabajo, pero que lo hacen desde un enfoque más flexible y amplio, en el que las estrategias no se enseñan específicamente, sino impregnando todos los elementos de la intervención.

Butler, Beckingham y Lauscher (2005) optan también por una aproximación basada en el énfasis en las estrategias cognitvas y metacognitivas; sin embargo, al contrario que los trabajos anteriores, no proponen una secuencia concreta de estrategias, sino que optan por una visión más amplia de la intervención en DASP en la que proponen unos principios generales para la enseñanza de las matemáticas inspirados en los principios previamente expuestos por el National Council for Teachers of Mathematics (2000), que a su vez inspiran toda la línea de investigación reciente en DASP. Estos principios fueron aplicados con resultado satisfactorio en tres estudios de casos de alumnos con DAM, descritos en el trabajo de Butler, Beckingham y Lauscher (2005). Los principios son:

1.Integrar en la intervención elementos de autorregulación.

•Proponer al alumno seguir el ciclo recursivo de actividades cognitivas centradas en la autorregulación.

•Ayudarle a construir el conocimiento a través de ciclos de autorregulación.

2. Contemplar a los alumnos como intérpretes activos del aprendizaje.

•Estructurar la instrucción para centrar a los alumnos en la selección, interpretación y correcto uso de la información.

•Promover en los alumnos la interpretación activa de la información que expone el profesor.

3.Permitir que los alumnos construyan el conocimiento.

•Seleccionar ejemplos estratégicos, establecer diálogos con el alumno, y ofrecerle pistas y orientaciones en lugar de facilitarle la respuesta,

•Promover que los alumnos reconstruyan el conocimiento una vez acabada la tarea.

4.Enfocar el aprendizaje como la persecución de un objetivo.

•Proponer al alumno tareas colaborativas de solución de problemas.

•Realización de tareas de identificación de metas, selección, adaptación e incluso invención de estrategias de solución de problemas.

La investigación basada en procesos cognitivos y metacognitivos en solución de problemas se ha extrapolado recientemente a habilidades básicas de cálculo. Van Luit y Kroesbergen (2006) han diseñado el programa MASTER (Mathematics Strategies Training for Educational Remediation) y lo han empleado con alumnos con DAM. Los objetivos de la intervención son:

•Aproximar al alumno a las operaciones y elaborar un plan previo sobre la posible solución.

•Aplicar las operaciones enseñadas (multiplicaciones y soluciones) en situaciones reales e imaginarias.

•Comprensión del sistema numérico y el funcionamiento de algunas estrategias de solución de problemas: reversibilidad (5 x 9 = 9 x 5); asociación (9 x 7 = 10 x 7 – 1 x 7), etc.

•Comprensión y uso activo del procedimiento de comprobación.

•Dar importancia a la memorización de las tablas de multiplicar.

Van Luit y Kroesbergen (2006) han concretado estos objetivos en una intervención compuesta por 23 lecciones de multiplicación y 19 lecciones de división, que han aplicado a alumnos con DAM obteniendo resultados satisfactorios.

Los componentes de los diversos procedimientos de instrucción expuestos hasta el momento se resumen en la tabla 4.

3.2. Entrenamiento basado en la identificación y elaboración de esquemas.

Asha Jitendra y colaboradores, han adaptado un procedimiento de instrucción en solución de problemas basado fundamentalmente en el uso de esquemas, y en la comprensión conceptual de las operaciones. El objetivo de este procedimiento es que los alumnos aprendan a identificar el tipo de problema que se les plantea, y a partir de ahí apliquen el esquema de solución adecuado. Se trata de un procedimiento en el que se enfatiza el

Referencia	N, CI, edad.	Contenidos de la intervención
Butler, Beckingham y Lauscher (2005)	3; CI: medio-bajo; edad: 12-13.	4 principios generales: Contemplar a los alumnos como intérpretes activos del aprendizaje. Integrar en la intervención elementos de autorregulación. Permitir que los alumnos construyan el conocimiento. Enfocar el aprendizaje como la persecución de un objetivo.
Case, Harris, y Graham (1992)	4; CI: 77-82; 5º y 6º grade.	Secuencia de estrategias: a) leer el problema en voz alta, b) buscar palabras clave en el enunciado que indiquen la operación a realizar, c) hacer dibujos que ayuden a explicar qué dice el enunciado, d) escribir la operación matemática, y e) escribir la respuesta. + autoinstrucciones: a) definición del problema; "¿qué es lo que tengo que hacer?", b) planificación; "¿cómo puedo resolver el problema?...buscando las palabras clave", c) uso de las estrategias "las cinco estrategias que he aprendido me ayudarán a buscar las palabras importantes", d) autoevaluación "¿cómo lo estoy haciendo?, ¿tiene sentido?", y e) autorrefuerzo "hice un buen trabajo; lo he conseguido".
Fleischner, Nuzum y Marzola (1987)	4; diagnóstico de DA.	Secuencia de estrategias: a) <u>leer el problema</u>; ¿cuál es la pregunta?, b) <u>releer el problema</u>; ¿cuál es la información necesaria para resolverlo?, c) <u>pensar sobre los conceptos clave y sobre lo que tengo que hacer</u>; "juntar = sumar", "quitar = restar"; ¿necesito toda la información?; ¿es un problema de uno o dos pasos?; d) <u>resolver</u>; escribir la operación; e) <u>comprobar</u>; recalcular, poner la unidad a la respuesta, y comparar.
Hutchinson (1993)	20; CI: 85-115; edad: 151-190 meses.	Secuencia de estrategias para resolver problemas de álgebra: a) objetivo del problema, b) identificar lo que no sé (la incógnita), c) identificar los datos que sé, d) escribir o decir el problema con mis palabras y escribir un dibujo, e) tipo de problema, f) ecuación, g) resolución de la ecuación, h) solucion, i) comparación con el objetivo, j) comprobación + procedimiento de autocomprobación en forma de preguntas.
Marco, Miranda, Simó y Soriano (2006)	44; 8-10 años.	5 estrategias generales con ayuda del ordenador: 1.¿Qué tengo que hacer?; 2. Tengo que estar concentrado y seguir un plan; 3. Comprobar-corregir; 4. ¿Cómo lo he hecho? En la 2ª estrategia se incluyen 5 pasos más concretos: 1. Separar oraciones; 2. Subrayar las palabras importantes y redondear las cantidades; 3. Colocar los datos en un esquema cuadrado; 4. Pensar la operación y hacerla; y 5. Anotar la solución.

Meravech, Tabuk y Sinai (en prensa)	100; junior high school.	7 estrategias: 1. Introducción del nuevo material, 2. Cuestionamiento metacognitivo, 3. Práctica, 4. Revisión, 5. Otención de alto rendimiento en procesos cognitivos de alto y bajo nivel, 6. Verificación y 7. Enriquecimiento. Se presenta en forma de 4 tipos de autopreguntas o autoinstrucciones: 1. Preguntas de comprensión: ¿de qué trata el problema?; 2. Preguntas de conexión: ¿en qué se parece y diferencia el problema a otros que he resuelto anteriormente?; 3. Preguntas de estrategias: ¿qué clase de estrategias son apropiadas para este problema y por qué?; y 4. Preguntas de reflexión: ¿tiene sentido la respuesta?, ¿puedo resolver el problema de otro modo?.
Miranda, Arlandis y Soriano (1997)	41; CI medio; edad: 10.1-11.9 años.	Autoinstrucciones 4 bloques de autoverbalizaciones: Definición del problema: "¿Qué es lo que tengo que hacer"? Aproximación al problema: "¿Cuál es la mejor forma de hacerlo?" Comprobación de la ejecución: ¿Lo estoy haciendo correctamente?" Evaluación de la ejecución: "Bien, yo he hecho un buen trabajo", o "Yo he cometido un error, pero la próxima vez lo haré mejor".
Montague (1997).	Diversos estudios.	Secuencia de estrategias cognitivas: Lectura, parafraseo, visualización, planificación, estimación, cálculo, comprobación; y metacognitivas: autoinstrucciones, automonitoreo, autocomprobación.
Shiah et al., (1995)	30; CI: 84.17; edad: 122 meses.	Instrucción con ayuda del ordenador. 7 estrategias: a) leer el problema, b) pensar sobre el problema, c) decidir el signo de la operación, d) escribir la operación, e) hacer el problema, f) escribir la respuesta, g) comprobar los pasos.
Van Luit y Kroesbergen (2006).	60; CI: 85-110; edad: 10 años, 10 meses.	Aproximar al alumno a las operaciones y elaborar un plan previo sobre la posible solución. Aplicar las operaciones enseñadas (multiplicaciones y soluciones) e situaciones reales e imaginarias. Comprensión del sistema numérico y el funcionamiento de algunas estrategias de solución de problemas: reversibilidad (5 x 9 = 9 x 5); asociación (9 x 7 = 10 x 7 – 1 x 7), etc. Comprensión y uso activo del procedimiento de comprobación. Dar importancia a la memorización de las tablas de multiplicar.

Tabla 4. Resumen de estrategias empleadas en intervenciones previas.

aprendizaje conceptual, en tanto que se enseñan las relaciones entre las operaciones (la oposición de suma y resta, y de multiplicación y división, las similitudes entre multiplicación y suma, etc.), y se enseña a los alumnos a identificar estas relaciones en los enunciados, y posteriormente el procedimiento para solucionarlos. Esta metodología se divide fundamentalmente en dos fases, siendo necesario adquirir un nivel de superación elevado en la primera para pasar a la segunda (normalmente un éxito entre el 80%-100% de las tareas durante dos sesiones consecutivas).

En la primera fase, de identificación del tipo de problemas, se enseña al alumno a identificar las claves conceptuales de cada problema. En esta fase no se emplean problemas, sino frases o enunciados en los que no hay ninguna incógnita, y no se elabora ninguna pregunta, pero sí se ofrecen unos datos y se establecen relaciones entre ellos.

El objetivo es enseñar a los alumnos a subrayar las palabras clave (las palabras que indican el tipo de relación entre los enunciados), a identificar las claves conceptuales de cada problema y a codificarlas en un esquema. Por ejemplo, ante la frase “un coche circula 25 Km. con un litro de gasolina; el mismo coche circula 75 Km. con 3 litros de gasolina”, se enseñaba al alumno a identificar las siguientes claves: una unidad de medida (1 litro de gasolina); cuatro cantidades (25, 1, 75, y 3), que representan dos tipos diferentes de unidades de medida (litros y kilómetros); una asociación entre cada tipo de unidad (con un litro el coche funciona durante 25 Km); y una relación del tipo “si ... entonces ...” (si un coche funciona con un litro 25 Km., entonces con 3 litros funcionará 75 Km.). Una vez claras las relaciones de los datos del enunciado se enseña al alumno a codificarlas en un esquema. Cada tipo de problemas tiene un esquema común. Por ejemplo, el enunciado anterior, correspondiente a un problema de cambio, tendría el siguiente esquema:

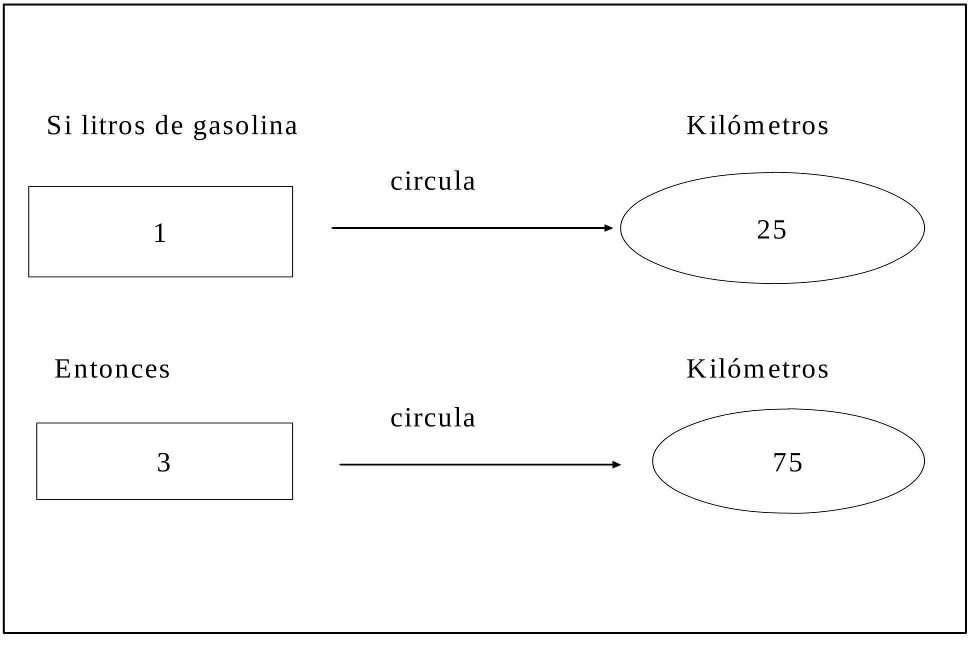


Figura 4. Esquema para representar enunciados matemáticos.

La metodología de enseñanza básica para esta fase consta de demostraciones del profesor, intercalando comentarios con el alumno. Al final del entrenamiento en esta fase, los alumnos realizan esta actividad individualmente, sin ayuda del profesor, y cuando han adquirido un dominio suficiente (normalmente tras 6-8 sesiones) se pasa a la segunda fase.

En la segunda fase, la fase de solución, de nuevo se identifican las relaciones numéricas que se establecen en el enunciado y se codifican en una representación esquemática marcando claramente cuál es la incógnita. A continuación se codifica el contenido del esquema en lenguaje matemático, se enseña la regla necesaria para solucionar el problema, y se comprueba la coherencia del resultado. Por ejemplo, ante el problema “En la clase de D. Manuel hay 9 ordenadores para 27 alumnos. ¿Cuántos alumnos deben compartir cada ordenador?”, la representación esquemática sería la que se muestra en la figura 5.

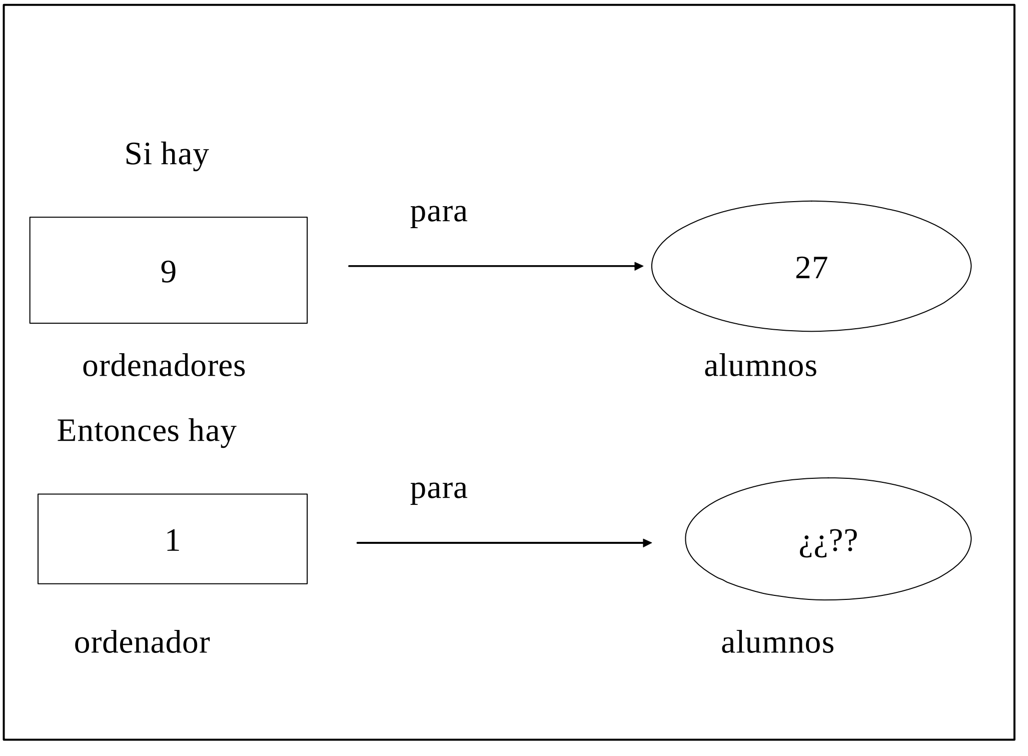


Figura 5. Esquema representar la solución de problemas.

La representación en lenguaje matemático sería:

$$\frac{\text{1 ordenador}}{\text{xxx alumnos}} = \frac{\text{9 ordenadores}}{\text{27 alumnos}}$$

La regla que se enseñaría es la equivalencia de fracciones. Finalmente se enseña a comprobar la respuesta, se razona si el resultado tiene sentido, y se comprueban los cálculos haciendo multiplicaciones cruzadas en las fracciones.

La metodología de enseñanza es básicamente similar a la de la anterior fase, pero su duración suele ser mayor: 12-15 sesiones. Ha sido validada con éxito en investigaciones con alumnos de diferentes edades, y empleando diferentes tipos de problemas (Jitendra, Di Pippi, y Perron-James, 2002; Jitendra, Griffin, McGoey, Gardill, Bhat, Riley, 2002; Jitendra, Hoff y Beck, 1999).

Recientemente, un estudio desarrollado por los mismos autores abanderados de esta aproximación metodológica al entrenamiento en solución de problemas matemáticos (Xin, Jitendra y Deatline-Buchman, 2005) ha comparado la efectividad de los dos tipos de entrenamiento hasta ahora expuestos: el entrenamiento basado en la aplicación de una secuencia de estrategias, y el entrenamiento basado en la identificación y elaboración de esquemas. La metodología que han empleado consiste en establecer dos grupos de alumnos con dificultades del aprendizaje en matemáticas, y enseñarles a resolver problemas matemáticos de estructura de comparación multiplicativa, y problemas de proporción. La particularidad fue que un grupo recibió una instrucción basada en la aplicación de una secuencia de estrategias (leer el problema, trazar un plan, resolver, y comprobar), mientras que el otro grupo recibió instrucción basada en la identificación y aplicación de esquemas.

Los resultados de este estudio indicaron que ambos grupos de alumnos mejoraron su rendimiento tras recibir las sesiones de instrucción, independientemente de cuál fuera la condición de instrucción a la que estaban adscritos. Sin embargo, el grupo de alumnos que recibió instrucción basada en el empleo de esquemas, obtuvo resultados significativamente mejores que sus compañeros en diferentes medidas: medida de posttest (llevada a cabo inmediatamente después del tratamiento), medida de mantenimiento (realizada una o dos semanas después de finalizar la instrucción), medida de seguimiento (realizada en un lapso de tiempo de entre tres semanas y tres meses después del entrenamiento), y medida de generalización, en la que los alumnos debían resolver problemas con la misma estructura que los problemas empleados en la instrucción, pero que incluían información irrelevante en el enunciado, y eran de varios pasos en lugar de un único paso.

A priori estos resultados parecen indicar una clara superioridad de la aproximación metodológica basada en esquemas, sin embargo, a esta afirmación pueden hacerse al menos 3 objeciones:

1. Una lectura detenida de la descripción de ambos tipos de instrucción revela que en el entrenamiento realizado bajo la etiqueta de “identificación y elaboración de esquemas” las estrategias cognitivas juegan un papel importante, ya que se enseña a los alumnos a leer para comprender el enunciado, representar el problema, trazar un plan, resolver y comprobar el problema. Esta secuencia de estrategias apenas difiere de la empleada en cualquiera de las investigaciones recogidas bajo el epígrafe 3.1. (entrenamiento en solución de problemas a través de enseñanza de secuencias de estrategias), por lo que podría afirmarse que en realidad, la instrucción basada en el uso de esquemas no es sino un complemento de la instrucción basada en estrategias, ya que emplea el mismo procedimiento base, pero además se añade un

procedimiento para detectar el esquema subyacente al problema y aprender los problemas que presentan ese mismo esquema.

2. Pese a que el estudio contempla una evaluación de transferencia de aprendizajes, esta medida sólo difiere de las evaluaciones de pretest y posttest en el hecho de que sus problemas incluyen información irrelevante en el enunciado, y en que requieren varios pasos para solucionarlos (no uno solo), por lo que las estrategias para solucionar estos problemas no se alejan demasiado de las estrategias empleadas para resolver los problemas de las pruebas de pretest y posttest, es decir, se evalúan sólo procesos de transferencia cercana de aprendizajes, pero no de transferencia lejana. Por tanto, resta por ver si en una medida real de transferencia lejana de aprendizajes, la instrucción basada en esquemas mantendría su ventaja sobre la instrucción basada en estrategias. Una posible forma para comprobarlo sería emplear en la evaluación de transferencia problemas de estructura diferente a los empleados en la instrucción (por ejemplo problemas de comparar o de igualar). Con ello se comprobaría si los alumnos que han recibido instrucción basada en esquemas son capaces de identificar un esquema subyacente diferente al que han aprendido en el entrenamiento, y de aplicar el nuevo esquema para resolverlo, o si por el contrario el aprendizaje de un tipo de esquemas es independiente de los demás, y no asegura el aprendizaje de otros tipos de esquemas.

3. La secuencia de estrategias empleada en la investigación de Xin y colaboradores (2005) está inspirada en “*la instrucción*

típicamente empleada en los libros de texto de matemáticas comercializados”, en los que no se suele hacer hincapié en el aprendizaje conceptual, sino que suelen limitarse a un aprendizaje mecánico de procedimientos. Cabe pensar por tanto que las estrategias cognitivas de leer, trazar un plan, resolver y comprobar se aplicaron en la investigación sin incidir en los aspectos profundos y conceptuales, tal y como se plantea en algunos libros de texto, sino que se plantearon como una mera secuencia de pasos a seguir. Además, la investigación no incluye estrategias metacognitivas que incidan en una enseñanza más conceptual y profunda del proceso de solución de problema, por lo que podría pensarse que la inclusión de estrategias metacognitivas en el entrenamiento multiplicaría los beneficios de este tipo de instrucción, y quedaría por ver si se igualarían los resultados de ambos tratamientos.

3.3. Enseñanza de solución de problemas con ayuda de materiales manipulativos.

Por último, la tercera aproximación metodológica para la mejora de la solución de problemas matemáticos es la que emplea materiales manipulativos. Estos materiales son recursos didácticos en forma de objeto físico (reglas de medir, cubos, tableros diseñados para representar superficies, etc.) de los que se hace uso para solucionar tareas matemáticas. El objetivo básico de este recurso es que los alumnos tengan una representación física (no sólo verbal o numérica) de la tarea que deben resolver, facilitando que el alumno opere al principio en un plano concreto y tangible, (los materiales manipulativos), antes de pasar al plano abstracto de la tarea (la representación numérica).

El eje común de todas estas intervenciones es el empleo de materiales manipulativos, sin embargo, existe otro elemento común a casi todos los trabajos que emplean esta metodología: la secuencia instruccional de modelado, seguido de práctica guiada, y práctica independiente. En el modelado es el profesor quien emplea el material para resolver la tarea, expresando en voz alta los pasos que sigue para ello, y el papel del alumno se limita a observar el procedimiento que sigue el profesor. Posteriormente, en la fase de práctica guiada, el profesor ayuda al alumno a resolver la tarea, indicándole al principio los pasos que debe seguir, y retirando su ayuda poco a poco hasta llegar finalmente al estadio de la práctica independiente, en la que la intervención del profesor es mínima, y se limita a ofrecer retroalimentación al alumno una vez ha resuelto la tarea.

Paula Maccini ha coordinado dos trabajos (Maccini y Hughes, 2000; Maccinini y Ruhl, 2000) en los que ha analizado la efectividad de un entrenamiento basado en estrategias cognitivas y metacognitivas para resolver tareas de álgebra. Estas estrategias tienen un carácter muy similar a las intervenciones basadas en estrategias cognitivas y metacognitivas de M. Montague y colaboradores dado que además del material manipulativo se enseña a los alumnos una secuencia de estrategias a través del acrónimo inglés STAR: buscar (search), traducir (translate), contestar (answer), y revisar (review).

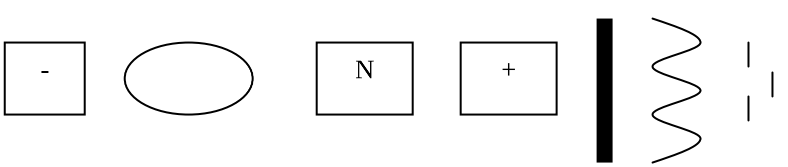
En cuanto al sistema de representación, se empieza trabajando desde el nivel concreto, representando la información numérica del problema mediante bolas en un ábaco que representan números positivos y negativos. Por ejemplo, al resolver el siguiente problema: “La temperatura esta mañana era de –2º C, pero por la tarde ha subido 9º C. ¿Cuál es la temperatura de la tarde?” los alumnos deben representar los dos grados negativos colocando dos bolas en una fila representando números negativos, y representar los 9 grados positivos colocando 9 bolas en una fila representando números positivos. Para calcular la operación se eliminan dos bolas negativas y a la vez dos bolas positivas, y hallan la solución contando las bolas que quedan (7), y el signo de la solución recordando que esa fila era de números positivos (por tanto la solución era +7).

En la segunda fase de la representación, la semiconcreta, se representan estas mismas cantidades mediante un dibujo. El dibujo es prácticamente una copia en papel de las filas de bolitas de números negativos y positivos, de modo que el paso de material manipulativo a material pictórico no requiere apenas esfuerzo. En este caso se dibujaría una fila de 2 bolitas representando los números negativos, una fila de 7 bolitas representando los números positivos, se tacharían las dos bolitas de los números negativos y dos de los positivos, y para solucionar la operación se contarían las bolas que quedan y se anotaría el signo de su fila.

Por último, en la tercera fase de la representación, la abstracta, se representa y se resuelve el problema usando símbolos matemáticos. Por ejemplo, en el problema anterior, la representación sería: -2º C + (+9º C) = x, y para solucionarlo se aplicaría la regla de solución explicada en las estrategias (buscar la diferencia entre los números y mantener el signo del número más lejano a 0).

La efectividad de este entrenamiento se comprobó en los dos trabajos antes mencionados (Maccini y Hughes, 2000; y Maccinini y Ruhl, 2000); los resultados en ambos fueron positivos, e indicaron que tras el entrenamiento los alumnos mejoraron en la representación y solución de problemas de álgebra, aumentó el uso de estrategias al resolver los problemas, y se produjo transferencia de los aprendizajes.

Witzel, Mercer y Miller (2003) desarrollaron una metodología de enseñanza de solución de problemas algebraicos muy similar a la de Maccini y colaboradores. Por ejemplo, para resolver la ecuación – N + 10 = 3, la representación manipulativa emplearía una figura que representa un signo negativo, otra figura que representaría un marcador de coeficiente (el coeficiente de n, que es 1), una figura con una N (la incógnita), un signo de suma, una barra alargada (que representaría el 10), una línea ondulada (que indicaría el símbolo "igual"), y tres líneas pequeñas (que representarían las 3 unidades). Esta representación se haría con objetos físicos en tres dimensiones. El resultado sería como sigue:



En el segundo estadio, la representación pictórica consistiría en un dibujo idéntico al material manipulativo, y se eliminaría el uso de materiales. Por último, en la representación abstracta se pasaría a representar la ecuación en su forma numérica – N + 10 = 3.

La diferencia de esta representación con la de Maccini, sería pues, que en este caso la representación concreta y la pictórica siguen exactamente la misma estructura que la ecuación numérica (en lugar de seguir representaciones del tipo de “líneas de bolitas”), consiguiendo así el efecto de enseñanza conceptual incluso desde la representación concreta.

Por su parte, Butler et al. (2003), compararon la efectividad de dos procedimientos instruccionales que empleaban materiales manipulativos para la mejora de habilidades en cálculo y SP de fracciones. Ambos tratamientos eran idénticos, salvo por el hecho de que uno de ellos seguía la secuencia de representación CRA comentada anteriormente, y el otro seguía la misma secuencia, pero eliminando el paso intermedio, es decir, pasando directamente de la representación concreta a la abstracta (secuencia CA).

Los resultados mostraron que ambos grupos mejoraron significativamente sus resultados tras la intervención, con unos resultados muy similares. Tan sólo hubo diferencias significativas entre los grupos en un subtest: ledctura de fracciones, siendo el resultado en favor del grupo de la condición CRA. En el resto de subtests los resultados fueron siempre similares, aunque es importante notar que siempre fueron favorables al grupo CRA.

La conclusión del estudio fue que ambos procedimientos parecían efectivos para mejorar el aprendizaje de los alumnos en tareas con fracciones, aunque el tratamiento que seguía la secuencia CRA fue, en comparación, ligeramente más efectivo.

3.4. Valores añadidos a las intervenciones en mejora de la solución de problemas: la evaluación basada en el currículum.

Un procedimiento de intervención en DAM muy popularizado en las últimas décadas es la “evaluación basada en el currículum”. (Currículum Based Measurement), un procedimiento sencillo, pero técnicamente adecuado y eficaz en alumnos con DA que consiste básicamente en monitorizar el progreso del rendimiento del alumno en una tarea académica de modo sistemático, llevando a cabo una evaluación de objetivos concretos que da lugar a la planificación de los objetivos inmediatamente superiores a los ya superados. Dos aspectos centrales de esta evaluación basada en el currículum son que la evaluación se refiere a objetivos a largo plazo, y que la evaluación debe ser frecuente, y es conveniente registrarla de modo gráfico para realizar una toma de decisiones objetiva, lo que hace que este procedimiento se sitúe a caballo entre el procedimiento de evaluación y el de intervención.

Este procedimiento es empleado de modo muy habitual en tareas de cálculo o lectura. Sin embargo, también ha sido empleada con éxito en procedimientos de enseñanza de tareas complejas o de orden superior, como la solución de problemas, ya sea bien como elemento único de la intervención, o bien, lo que es más habitual, como elemento o valor añadido de intervenciones más amplias en las que se enseña a los alumnos a resolver problemas, y se controla periódicamente su aprendizaje mediante registros de los empleados en la evaluación basada en el currículum, de modo tal que estos registros marcan el ritmo de avance del programa, y sirven a alumno y educador para marcarse las metas adecuadas a las características de los alumnos (Stecker, Fuchs, Fuchs, 2005).

II. PARTE EMPÍRICA.

4

Presentación del trabajo empírico.

4.1. Justificación: ¿Por qué optar por "Resuélvelo"?

Como se comentaba anteriormente, los 3 procedimientos para enseñar a solucionar problemas a estudiantes con DA expuestos son efectivos, los 3 deben tenerse en cuenta, y los 3 tienen sus potencialidades: la enseñanza de secuencias de estrategias cognitivas y metacognitivas (Marco, Miranda, Simó y Soriano, 2006; Miranda, Arlandis y Soriano, 1997; Montague, 1997; Shiah, et al., 1995); la enseñanza de identificación y solución de esquemas aplicables a tipologías concretas de problemas (Jitendra, Di Pippi, y Perron-James, 2002; Jitendra, Griffin, McGoey, Gardill, Bhat, Riley, 2002; Jitendra, Hoff y Beck, 1999); y el uso de materiales manipulativos como soporte para la mejor comprensión del enunciado y del proceso de solución (Butler et al., 2003; Maccini y Hughes, 2000; Maccinini y Ruhl, 2000).

Sin embargo, en esta investigación se ha optado por la aproximación de enseñanza de estrategias por diferentes motivos:

a) La transferencia de los aprendizajes; la enseñanza de solución de problemas mediante el uso de esquemas presenta el inconveniente de que la transferencia de los aprendizajes parece limitada. Cuando los alumnos comprenden y aprenden un esquema para solucionar un problema, parece lógico pensar que serán capaces de solucionar todos los problemas con ese mismo esquema, sin embargo desgraciadamente las investigaciones realizadas hasta el momento no han valorado este factor de la transferencia, por lo que no se puede afirmar que el uso de esquemas para solucionar problemas sea útil para todo tipo de problemas. Por el contrario, las estrategias parecen más fáciles de extrapolar a todo tipo de problemas, ya que en realidad las estrategias enseñadas son los pasos que se realizan al resolver todo tipo de problemas matemáticos.

b) La utilidad en todos los estadios de aprendizaje; la aproximación que emplea materiales manipulativos resulta tremendamente interesante, y ayuda al alumno a dar sentido al problema, y a darle una visión cercana a la realidad. Sin embargo parece que es útil fundamentalmente en los primeros instantes del proceso de aprendizaje, cuando el alumno se está familiarizando con un tipo de problemas, ya que el empleo de materiales manipulativos ayuda a "visualizar" mejor los problemas. Ahora bien, el empleo de estos materiales parece menos necesario cuando los alumnos ya han aprendido a llegar a las representaciones mentales adecuadas para solucionar el problema, y son capaces de representar y "visualizar" los problemas mentalmente, sin ayuda de materiales concretos. En cambio, las estrategias se emplean tanto por alumnos inexpertos, que las aplican de un modo secuencial, muy dirigido, y estricto, como por alumnos expertos, que las aplican casi inconscientemente, de un modo flexible e interiorizado a través de la práctica.

c) El énfasis en aminorar los puntos débiles de los alumnos; quizá el principal argumento que justifica la enseñanza de estrategias, es que el conocimiento y uso de estrategias cognitivas y metacognitivas es precisamente la piedra angular que diferencia a los estudiantes con y si DA. La conclusión fundamental de la línea de investigación de Montague durante los últimos años (Montague y Applegate, 2000; Montague, Boss y Doucette, 1991; Montague y Van Garderen, 2003), es que, al contrario que los alumnos sin DA, los alumnos con DASP no generan espontáneamente estrategias de solución de problemas, sino que desarrollan estrategias poco elaboradas que aplican mecánicamente sin una planificación clara. Sin embargo, cuando las estrategias se les enseñan de un modo explícito y programado, son capaces de aprovechar la instrucción, y de aplicar las estrategias de un modo similar a los alumnos sin DA. Por tanto puede afirmarse que uno de los aspectos que diferencia a los EDASP del resto de alumnos es la ausencia de estrategias elaboradas, por ello los programas de enseñanza de estrategias cognitivas y metacognitivas para la solución de problemas matemáticos como el Resuélvelo tratan de paliar este déficit mediante la enseñanza explícita de estas estrategias.

4.2. Objetivos del estudio.

El objetivo principal del presente estudio es valorar la eficacia de un entrenamiento en solución de problemas matemáticos basado en la instrucción y práctica de estrategias cognitivas y metacognitivas en alumnos con dificultades del aprendizaje en matemáticas.

Este objetivo general se concreta en otros más específicos que coinciden con las diferentes formas de evaluar la efectividad de la intervención:

1. Comprobar el efecto de la intervención en la resolución de problemas matemáticos de 1, 2, ó 3 pasos que implican las 4 operaciones básicas (problemas similares a los empleados en el entrenamiento).

2. Comprobar el efecto de la intervención en la resolución de problemas matemáticos “de la vida real”; problemas que incluyen en el enunciado datos irrelevantes, problemas sin solución, etc.

3. Comprobar el efecto de la intervención en el conocimiento, uso y control de estrategias cognitivas y metacognitivas de resolución de problemas por parte de los alumnos.

4. Comprobar el efecto de la intervención en diferentes variables afectivas relacionadas con las matemáticas: actitud hacia las matemáticas, ansiedad hacia las matemáticas, y atribuciones al rendimiento matemático.

Estos cuatro objetivos fueron evaluados en tres momentos: inmediatamente antes de la intervención (evaluación de pretest), inmediatamente después de la intervención (evaluación de posttest) y transcurridos dos meses tras la intervención (evaluación de seguimiento). El objetivo de esta doble evaluación de posttest es evaluar tanto los efectos inmediatos del programa como el mantenimiento en el tiempo de estos efectos tras un período en el que no ha habido intervención.

Estos objetivos suponen un avance en el área de investigación en tanto que:

a) El presente estudio constituye una replicación transcultural de un procedimiento de intervención diseñado y aplicado en origen en alumnos de EEUU, que ha sido adaptado a nuestro contexto y aplicado con alumnos del sistema educativo español.

Pese a las notables diferencias en las concepciones sobre la enseñanza de las matemáticas que existen entre sistemas escolares (Cai, 2004; Cai y Hwang, 2002; Haggarty y Pepin, 2002), la replicación transcultural de procedimientos de intervención ha sido hasta el momento muy escasa; por consiguiente cabe comprobar si las intervenciones realizadas con éxito en alumnos de EEUU son igualmente exitosas en nuestro contexto.

b) La presente investigación supone una serie de adaptaciones y novedades del programa original *Solve it!*: es aplicado con alumnos de menor edad que en las investigaciones previas, por lo que la dificultad de los problemas incluidos en el programa de entrenamiento, así como algunos de los materiales instruccionales se han adaptado a la edad de los sujetos. Pensamos que la instrucción en estrategias de SP debe llevarse a cabo cuando los estudiantes empiezan a fracasar, no cuando ya han tenido una experiencia repetida de fracaso, con todas las connotaciones negativas que esto acarrea.

c) En el presente estudio se incluye una batería de evaluación extensa en la que se valoran diferentes aspectos que ofrecen una idea global de la efectividad de la intervención, tales como: 1) la transferencia de los aprendizajes a problemas diferentes de los empleados en el entrenamiento: problemas no académicos, o “de la vida real”; 2) el aprendizaje y uso de estrategias cognitivas y metacognitivas de solución de problemas matemáticos; y 3) el impacto del tratamiento en el sistema afectivo y motivacional de los alumnos: ansiedad hacia las matemáticas, actitudes hacia las matemáticas, y atribuciones al rendimiento matemático. Igualmente, estas evaluaciones no se realizan tan sólo inmediatamente tras finalizar la intervención, sino que también se aplican una vez transcurrido un período de tiempo tras la intervención con el objetivo de observar el grado de mantenimiento de los aprendizajes. Pese a que este tipo de evaluaciones es crucial en las intervenciones llevadas a cabo en alumnos con DA dado que muchas veces manifiestan tendencia a olvidar sus aprendizajes estas evaluaciones de "seguimiento de los resultados" son contadas excepciones en la literatura (Shiah et al., 1995; Wilson y Sindelar, 1991).

d) Finalmente, el presente estudio presenta un diseño "ecológico" que trata de reproducir con la mayor fidelidad posible las situaciones reales de la escuela, ya que el programa es aplicado durante el horario escolar, en el aula de apoyo a la que asisten habitualmente los alumnos, y los encargados de llevarlo a cabo han sido los propios profesores del centro. Este tipo de diseños son aún poco habituales, ya que todavía se siguen empleando comúnmente los diseños tradicionales en que el implementador del tratamiento es el propio investigador. A este respecto, en el metaanálisis de Xin y Jitendra de 1999 se revisaron 26 estudios; en 16 de ellos, el implementador era el propio investigador; en 6 implementaban la intervención tanto investigadores como profesores, mientras que tan sólo en 9 el tratamiento era implementado íntegramente por los profesores de los alumnos. Esta manera de proceder en que el implementador es el propio experimentador, presenta el inconveniente de que no se asegura que el tratamiento sea igualmente efectivo cuando es aplicado por los profesores habituales de los alumnos.

4.3. Método.

4.3.1. Participantes.

a) Profesores. Procedimiento de contacto y selección de los profesores.

10 maestros de Educación primaria y ESO (5 hombres y 5 mujeres) participaron en la investigación implementando en sus aulas el programa de intervención. En la tabla 5 se recogen su edad, años de experiencia y formación.

Sexo	Edad	Años docencia	Titulación
Hombres: 5 Mujeres: 5	<30 años: 2	1-5 años: 4	Diplomados: 2 Licenciados: 8
	31-45 años: 6	6-10 años: 1	
	>46 años: 2	11-15 años: 2	
		>16 años: 3	

Tabla 5. Datos demográficos de los profesores.

Durante el tercer trimestre del curso académico 2002/2003, y el primer trimestre del curso 2003/2004, desde la asesoría de necesidades educativas especiales del Centro de Innovación, Formación y Recursos Educativos (CEFIRE) de Sagunto, conjuntamente con el Departamento de Psicología Evolutiva y de la Educación de la Universidad de Valencia, se propuso al profesorado de pedagogía terapéutica de los centros de primaria y ESO de la zona del Camp de Morvedre participar en un curso de formación sobre dificultades del aprendizaje en matemáticas. En los documentos de información y publicidad del curso se indicaba que el profesorado participante en el curso colaboraría en una investigación con el Departamento de Psicología Evolutiva y de la Educación de la Universidad de Valencia en la que se pondrían en práctica los contenidos expuestos en el programa (ver ANEXO I).

Los requisitos para participar en el curso eran: ser profesorado en activo encargado del aula de pedagogía terapéutica, comprometerse a participar en la investigación poniendo en práctica en sus aulas el programa de intervención, permitir a los miembros del equipo investigador evaluar el progreso de los alumnos, y tener en sus aulas alumnos con dificultades del aprendizaje en matemáticas.

Un total de 12 profesores asistieron y completaron voluntariamente el curso. Sin embargo, sólo 10 participaron finalmente en la investigación, ya que 2 de ellos no tenían en sus aulas alumnos con DASP. Al finalizar el curso, los profesores recibieron un certificado expedido por el CEFIRE en el que se reconocía su participación en una actividad de formación continua que contribuía a aumentar sus méritos profesionales para la solicitud de sexenios de formación.

b) Alumnos. Selección de alumnos.

La evaluación y selección de los alumnos fue realizada por un equipo de evaluadores compuesto por 3 miembros del equipo investigador: el autor de la presente tesis y dos estudiantes de doctorado en psicología evolutiva y de la educación que recibieron una formación de dos sesiones de dos horas en entrenamiento en la aplicación de la batería de las pruebas específicas empleadas en la evaluación.

Los alumnos del grupo experimental fueron escogidos entre una preselección de 24 alumnos que realizaron los profesores participantes con su alumnado de aulas de apoyo, de acuerdo con los criterios de identificación de alumnos con dificultades del aprendizaje en solución de problemas, propuestos por parte del equipo investigador:

- Presentar un rendimiento significativamente bajo en resolución de problemas matemáticos (al menos dos cursos por debajo de su nivel).
- Tener una inteligencia normal (sin problemas de retraso mental u otras disfunciones que afecten a la inteligencia).
- No presentar problemas significativos en el cálculo de las operaciones básicas.
- No presentar problemas significativos en comprensión lectora que afecten a la resolución de problemas.
- Cursar tercer ciclo de primaria o primer ciclo de ESO.

Para identificar y evaluar a los alumnos del grupo control con DASP se contó con la colaboración de siete maestros de pedagogía terapéutica y psicólogos de diferentes de colegios de primaria y Servicios Psicopedagógicos Escolares (SPE) a los que se presentó el planteamiento y los objetivos de la investigación, y que voluntariamente aceptaron colaborar en la identificación de alumnos. Estos profesionales realizaron una primera identificación de alumnos con DASP de acuerdo a los criterios anteriormente expuestos.

Sobre este conjunto de alumnos preidentificados por los maestros, el mismo equipo de evaluadores que seleccionó el grupo experimental aplicó a estos alumnos los mismos instrumentos que al grupo experimental, y se seleccionó a los alumnos con DAM de acuerdo a los mismos criterios expuestos para el grupo experimental.

Finalmente, para la selección de los alumnos del grupo control sin DA, se pidió a un grupo de los mismos maestros de matemáticas de los alumnos de los grupos anteriores que identificaran en sus clases a alumnos de rendimiento medio en solución de problemas matemáticos. Sobre esta preselección, el mismo equipo de evaluadores que realizó la evaluación los dos grupos anteriores aplicó a estos alumnos los mismos instrumentos, y se seleccionó al grupo de alumnos sin DAM de acuerdo a los siguientes criterios:

- Presentar un rendimiento medio en resolución de problemas matemáticos.
- Tener una inteligencia normal (sin problemas de retraso mental u otras disfunciones que afecten a la inteligencia).
- No presentar problemas significativos en el cálculo de las operaciones básicas.
- No presentar problemas significativos en comprensión lectora que afecten a la resolución de problemas.
- Cursar tercer ciclo de primaria o primer ciclo de ESO.

La selección final de los alumnos participantes y su distribución en los diferentes grupos se realizó mediante la aplicación de una batería de pruebas para evaluar las siguientes variables:

•<u>CI:</u> se aplicó los subtests de vocabulario y cubos del WISC (Weschler, 1993) , y se realizó una estimación del CI realizando un cálculo según el prorrateo propuesto por Spreen y Strauss (1991). Sólo se incluyeron en la investigación alumnos con un CI igual o superior a 80. Esta variable fue contemplada para excluir de la investigación a los alumnos cuyos malos resultados en solución de problemas eran debidos fundamentalmente a un bajo CI.

•<u>Comprensión lectora</u>: se aplicó el subtest de comprensión lectora del nivel IV del Test de Análisis de Lectoescritura (TALE), de Toro y Cervera (1995). En este subtest se pide al alumno que lea un texto narrativo, y se le realizan 10 preguntas sobre el texto sin dejarle la posibilidad de volverlo a consultar. Sólo se incluyó en el estudio a los alumnos que respondieron correctamente 4.5 preguntas. Numerosos trabajos han constatado que las DA en lectura y en matemáticas se presentan conjuntamente en numerosos alumnos reforzándose unas a otras (Gross-Tsur, Manor y Shalev, 1996; Knopik, Alarcón y De Fries, 1997). Sin embargo, en nuestra investigación buscábamos un perfil de alumnos cuya dificultad de aprendizaje se centrara fundamentalmente en el área de matemáticas (ya que la intervención estaba centrada en esta área). Por ello se contempló esta prueba para excluir de la investigación a los alumnos cuyos malos resultados en solución de problemas estuvieran asociados claramente con problemas en comprensión lectora.

•<u>Cálculo</u>: se aplicó la Prueba de Rapidez de Cálculo de Canals (1998). En esta prueba los alumnos deben responder correctamente en un minuto al máximo número de sumas, restas, multiplicaciones y divisiones posibles. Fueron excluidos de la investigación los alumnos que no consiguieron realizar al menos dos operaciones de cada algoritmo. Esta prueba fue contemplada con el objetivo de excluir de la investigación a los alumnos cuyas dificultades en la solución de problemas matemáticos fueran debidas fundamentalmente a dificultades en el cálculo.

•Solución de problemas matemáticos: se aplicó el subtest de solución de problemas de los niveles II y III de la Batería Psicopedagógica Evalúa, (García, y González, 1996). Este subtest los alumnos deben solucionar 15 problemas matemáticos adecuados a su curso escolar. Los niveles de esta batería están organizados por ciclos escolares; el nivel II evalúa los contenidos curriculares del segundo ciclo de primaria (por tanto debe aplicarse al final del segundo ciclo o al principio del tercero). El nivel III evalúa los contenidos curriculares del tercer ciclo de primaria (por tanto debe aplicarse al final del tercer ciclo o al principio de la educación secundaria obligatoria).

Los alumnos de 5º y 6º curso completaron el nivel II de la prueba. Los alumnos de 5º que obtuvieron un centil igual o inferior a 35, y los alumnos de 6º que obtuvieron un centil igual o inferior a 25 fueron incluidos en el grupo experimental o en el grupo control con dificultades del aprendizaje. Los alumnos que superaron estos centiles fueron incluidos en el grupo de rendimiento medio en matemáticas.

Los alumnos de 1º y 2º de ESO completaron el nivel III de la prueba. Se incluyó en el grupo experimental o en el grupo control con DASP a los alumnos de 1º que obtuvieron un centil igual o inferior a 35, y a los alumnos de 2º que obtuvieron un centil igual o inferior a 25. Los alumnos que superaron estos centiles fueron incluidos en el grupo de rendimiento medio en matemáticas.

Esta prueba fue aplicada con el objetivo de identificar a los alumnos con un desnivel significativo entre su curso escolar y su rendimiento escolar en solución de problemas matemáticos.

Todos los maestros interesados recibieron un informe con los resultados de la evaluación de sus alumnos. Además, los profesores de los alumnos de los dos grupos control interesados en el programa de intervención recibieron el material expuesto en el curso de formación sobre el programa de entrenamiento ¡Resuélvelo! una vez finalizada la evaluación de sus alumnos.

Finalmente, la muestra de alumnos participantes en la investigación quedó conformada por 33 alumnos (15 chicas, 18 chicos) de centros públicos de Educación Primaria y ESO de las provincias de Valencia y Castellón con edades comprendidas entre los 10 y 14 años de edad distribuidos en 3 grupos:

- Grupo experimental: 11 alumnos con diagnóstico de DASP que recibieron el entrenamiento en el uso de estrategias cognitivas y metacognitivas ¡Resuélvelo!

- Grupo control con DASP: 11 alumnos con diagnóstico de DASP que continuaron el ritmo normal de su aula de apoyo recibiendo la instrucción que habitualmente se llevaba a cabo en matemáticas.

•Grupo control sin DA: 11 alumnos con buen rendimiento en matemáticas que continuaron el ritmo normal de sus aulas recibiendo instrucción tradicional en matemáticas.

Los datos demográficos de los grupos se recogen en tabla 6.

Grupo	N	Sexo	Edad	CI	
				X	DT
Experimental	11	6 chicas, 5 chicos	11,28	90,55	10,12
Control con DA	11	5 chicas, 6 chicos	10.82	91,91	10,48
Control sin DA	11	4 chicas, 7 chicos	10.82	92.91	10.18
Total	33	15 chicas, 18 chicos	10.97	91.78	9.99

Tabla 6. Datos demográficos de los alumnos.

4.3.2. Instrumentos de evaluación.

El mismo equipo de evaluación que realizó la selección de alumnos aplicó la batería empleada para evaluar la eficacia del programa a los alumnos de los 3 grupos. La evaluación de los alumnos se realizó durante el horario de clase en el espacio reservado al aula de apoyo o de pedagogía terapéutica en el caso de alumnos con DA, y en el horario determinado por los profesores tutores en el caso de los alumnos sin DA. La batería de evaluación contemplaba 3 dominios: rendimiento en solución de problemas, estrategias cognitivas y metacognitivas de solución de problemas, y variables afectivas relacionadas con las matemáticas. La evaluación de los tres dominios se llevó a cabo en tres momentos diferentes:

- Pretest: antes de la aplicación del programa.
- Posttest: inmediatamente tras finalizar el programa.
- Seguimiento: transcurridos dos meses tras finalizar la intervención.

4.3.2.1. Rendimiento en solución de problemas.

Prueba criterial solución de problemas (ANEXO II):

Esta prueba fue elaborada ad hoc para el presente estudio. Consta de 15 problemas (5 de un paso, 5 de dos pasos, y 5 de tres pasos) que requieren para su solución del dominio de las 4 operaciones básicas. Estos problemas tienen un contenido similar al de los problemas del programa de intervención.

La puntuación de los alumnos corresponde al número de problemas correctamente planteados (problemas en los que el alumno elige las operaciones correctas en el orden correcto), independientemente de que haya errores en el cálculo de dichas operaciones.

Dado que esta prueba fue aplicada en los tres momentos de evaluación (pretest, posttest, y seguimiento), para evitar el sesgo derivado del aprendizaje que se produce al realizar una prueba en repetidas ocasiones, se elaboraron tres versiones paralelas en las que se incluyeron problemas con estructura matemática idéntica; aparecían los mismos datos, en el mismo orden, y la operación para solucionarlos era idéntica. A continuación se presentan a modo de ejemplo tres problemas paralelos, cada uno correspondiente a una evaluación diferente, en los que se observa que aparecen los mismos datos, en el mismo orden, y hay que emplearlos del mismo modo para solucionarlos correctamente.

En un partido de balonmano el resultado es Bélgica 23 – España 34. ¿Por cuántos goles de diferencia ganó España?

En las Olimpiadas de un colegio la clase de Javier ganó 23 medallas, y la clase de Sonia ganó 34 medallas. ¿Por cuántas medallas de diferencia ganó la clase de Sonia a la de Javier?

En una competición de atletismo, el equipo rojo ganó 23 pruebas, y el equipo azul ganó 34 pruebas. ¿Por cuántas pruebas de diferencia ganó el equipo azul?

Prueba de solución de problemas "de la vida real" (ANEXO III).

Esta prueba consta de 5 problemas no tradicionales, o "no académicos" cuya estructura matemática no corresponde a la clásica secuencia de lectura, operación y resultado; son problemas que exigen a los alumnos un razonamiento y comprensión profunda de la situación planteada. Los problemas son adaptaciones de los utilizados por Reusser y Stebler (1997); tres de los problemas no tenían solución, uno de los problemas incluía información irrelevante para la solución, y el restante exigía que el alumno realizara una división y diera una utilidad no sólo al cociente, sino también al resto de la división. La puntuación de los alumnos corresponde al número de problemas que el alumno responde correctamente realizando el razonamiento oportuno.

Al igual que la prueba anterior, esta prueba se aplicó en los tres momentos de evaluación, por lo que se elaboraron tres versiones paralelas en las que se controló que aparecieran los mismos datos en el mismo orden, que apareciera la misma información, y que se requiriera el mismo razonamiento lógico o matemático para solucionarlos.

A continuación se incluye el ejemplo de uno de estos problemas:

> El mejor tiempo de Luis corriendo los 100 metros es de 17 segundos. ¿Cuánto tardará en correr 1.000 metros?

En este problema, la respuesta esperada desde una perspectiva tradicional, o no realista sería 170 segundos. Sin embargo, una respuesta más ligada a la realidad sería simplemente: “No puedo calcularlo, porque 100 metros se corren con una intensidad mucho mayor que 1000 metros”, o “No puedo calcularlo exactamente, pero seguro que tarda más de 170 segundos”. En el primer caso, el alumno hace un razonamiento estricto, académico, y adecuado si tenemos en cuenta que establece la relación correcta entre tiempo y distancia. Sin embargo, ese razonamiento está alejado de la realidad, ya que es prácticamente imposible mantener el mismo ritmo cuando se corren 100 metros que cuando se corren 1.000 metros, por tanto una respuesta más ligada a la realidad necesitaría incluir de algún modo el factor cansancio en la respuesta, para terminar contestando que es prácticamente imposible ofrecer una respuesta exacta basada en una operación matemática.

4.3.2.2. Estrategias cognitivas y metacognitivas de solución de problemas.

Prueba de evaluación de estrategias de solución de problemas (ANEXO IV).

Se trata de una adaptación del *Mathematical Problem Solving Assessment-Short Form,* (Montague, 2003). La prueba consta de 30 ítems de respuesta abierta en los que se trata de averiguar el grado de conocimiento, uso y control del alumno sobre las 7 estrategias cognitivas de solución de problemas que plantea el programa de intervención (lectura, parafraseo, visualización, planificación, estimación, cálculo y comprobación).

La corrección de la prueba se efectúa de acuerdo a parámetros cualitativos según los cuales el evaluador califica de bueno, regular o malo el conocimiento, uso y control (o automonitoreo) que realiza el alumno en cada estrategia. Esta prueba fue aplicada individualmente a modo de entrevista estructurada.

La prueba ofrece 4 puntuaciones globales:

- Conocimiento de estrategias de solución de problemas: esta escala indica la cantidad de estrategias que el alumno conoce y el grado de profundidad de dicho conocimiento.
- Uso de estrategias de solución de problemas: esta escala refleja el grado en que el alumno emplea las estrategias de solución de problemas que conoce.
- Control de estrategias de solución de problemas: esta escala puntúa la capacidad del alumno para evaluar y controlar la eficacia de la aplicación de las estrategias que emplea.

•Puntuación total: finalmente, esta escala es el sumatorio de las tres anteriores, y se considera la puntuación global del cuestionario.

4.3.2.3. Variables afectivas relacionadas con las matemáticas.

Las tres pruebas relacionadas con variables afectivas fueron aplicadas individualmente, y fueron leídas en voz alta por el examinador, para evitar la influencia en las respuestas de la habilidad lectora, y minimizar en lo posible los efectos del cansancio en los alumnos.

<u>Encuesta de Actitudes sobre Resolución de Problemas. Adaptación de Arlandis, 1992 (ANEXO V).</u>

Este instrumento fue creado y utilizado en una investigación de Miranda y Fortes (1989) sobre la resolución de problemas del sistema métrico decimal, con niños que cursaban 6º de E.G.B. Las propias autoras redactaron los ítems basándose en su propia experiencia y en la reflexión sobre investigaciones realizadas con alumnos en clases de matemáticas. La construcción de este instrumento obedeció al hecho de no haber encontrado ningún cuestionario sobre esta temática tan concreta que ya estuviese experimentado y tabulado en inglés o español. Se trata de una encuesta compuesta inicialmente por 20 ítems (en la adaptación de 1992 Arlandis añadió 3 nuevos ítems) con 4 alternativas de respuesta (mucho, bastante, poco, nada) en la que se pide al alumno que indique su grado de identificación con una serie de afirmaciones relacionadas con la solución de problemas matemáticos; p.e.: “*Me gusta salir a la pizarra a resolver o corregir problemas*”. La puntuación final del alumno es la suma de las puntuaciones directas de cada ítem (mínimo, 0; máximo, 69). Las puntuaciones más altas indican una actitud positiva hacia la solución de problemas, mientras que las puntuaciones más bajas indican una actitud más negativa hacia la solución de problemas.

<u>Cuestionario de atribuciones al rendimiento en matemáticas, (adaptado de Crandall, Katkovsky, y Crandall, 1965) (ANEXO VI).</u>

Se trata de un cuestionario compuesto por 30 ítems con 2 alternativas de respuesta, en el que se pide al alumno que se imagine a sí mismo ante eventos positivos y negativos relacionados con situaciones escolares matemáticas. Una de las dos posibles respuesta atribuye el evento a factores intrínsecos del propio alumno, mientras que la otra atribuye el evento a factores externos al alumno; p.e.: “*Cuando te sale bien un control de matemáticas en la escuela, es: A) Porque tú te has preparado bien para ese control; B) Porque el control era fácil.”*

Las subescalas que componen este cuestionario son:

E: atribuciones internas al esfuerzo para eventos positivos y negativos. Esta puntuación indica las ocasiones en las que el alumno atribuye al esfuerzo sus resultados académicos.

U: atribuciones internas indiferenciadas para eventos positivos y negativos. Esta puntuación indica las ocasiones en las que el alumno atribuye a factores internos diferentes al esfuerzo (por ejemplo, habilidad o interés) sus resultados académicos.

Un ejemplo de ítem de la escala E sería: “*Cuando te sale bien un control de matemáticas en la escuela, es: A) Porque tú te has preparado bien para ese control; B) Porque el control era fácil.”;* mientras que un ejemplo de ítem de la escala U sería: “*Si cometes más errores que tus compañeros al hacer problemas de matemáticas, es: A) Porque tus compañeros saben hacer los problemas mejor que tú. B) Porque tú no sabes hacer los problemas.”*

El cuestionario fue adaptado en 2001 y empleado con éxito para evaluar el estilo atribucional de alumnos de educación primaria en un trabajo previo sobre intervención en alumnos con dificultades del aprendizaje en matemáticas (Simó, 2003).

El cuestionario presenta propiedades psicométricas adecuadas: una fiabilidad test-retest de entre .66 y .74, y una consistencia interna de entre .54 y .60 entre los ítems que relatan eventos positivos y los ítems que relatan eventos negativos (Crandall, Katkovsky, y Crandall, 1965).

Escala de ansiedad hacia las matemáticas, (adaptada de Suinn y Winston, 2003) (ANEXO VII).

Se trata de una escala Likert compuesta por 24 ítems en la que se pregunta al alumno el grado de ansiedad que presenta o cree que presentaría ante cada una de las 24 situaciones que corresponden a los 24 ítems; p.e. *“¿Cómo de ansioso crees que estarías al abrir el libro de matemáticas para empezar a hacer los deberes?”*. Cada ítem presenta 4 opciones de respuesta: en absoluto ansioso, un poco ansioso, bastante ansioso, o totalmente ansioso (0 a 3 puntos). La puntuación final del alumno es la suma de las puntuaciones de cada ítem (mínimo 0; máximo 72). Las puntuaciones más altas indican mayor grado de ansiedad hacia las matemáticas, mientras que las puntuaciones más bajas indican menor grado de ansiedad.

La escala presenta valores psicométricos adecuados: un coeficiente alpha de Cronbach de .96, lo que indica una elevada consistencia interna, así como una elevada estabilidad test-retest de .90 ($p<.001$), (Suinn y Winston, 2003).

4.3.3. Programa de intervención.

La intervención llevada a cabo en esta investigación supone una adaptación del programa de entrenamiento en estrategias cognitivas y metacognitivas ¡Resuélvelo!, cuya autora original es Marjorie Montague (2003). Se fundamenta en una extensa línea de investigación sobre las diferencias en solución de problemas de matemáticas entre alumnos que tienen un buen rendimiento en solución de problemas y alumnos con dificultades del aprendizaje.

En particular son dos los supuestos básicos que constituyen su columna vertebral y que dan un armazón teórico a la intervención de esta tesis:

a) La diferencia fundamental entre los buenos y malos resolutores de problemas radica en el conocimiento y uso adecuado de estrategias de solución de problemas (Desoete y Roeyers, 2002; Lucangeli, Cornoldi y Tellarini, 1998; Montague y Applegate, 1993; Montague, Bos, y Doucette, 1991).

b) Los alumnos con DA pueden mejorar su rendimiento en solución de problemas con una instrucción adecuada basada en el entrenamiento en el uso de estrategias cognitivas y metacognitivas de las que carecen (Case, Harris, y Graham, 1992; Hutchinson, 1993; Miranda, Arlandis y Soriano, 1997; Montague, 1992; Montague, Applegate y Marquard, 1993; Montague y Bos, 1986; Zawaiza y Herber, 1993).

Paralelamente existe otra línea de investigación que complementa la anterior, y que desgraciadamente se ha desarrollado de un modo independiente, de manera que hasta hace poco tiempo no se ha conectado a la primera. Esta línea gira entorno a la relación entre el sistema afectivo-motivacional y el aprendizaje humano, y su postulado principal es que las creencias metacognitivas (el autoconcepto, la autoeficacia, la motivación y las creencias atribucionales) se interrelacionan profundamente con los aspectos más puramente cognitivos.

La conclusión fundamental de esta línea es que los problemas que generan las DA no se limitan al ámbito académico, sino que tienen consecuencias negativas en el bienestar emocional de los niños, generando patrones atribucionales desadaptativos, bajo autoconcepto, problemas de motivación, ansiedad ante las situaciones escolares, e incluso depresión (Borkowski, 1992; Bender, Rosenkrans, y Crane, 1999; Chan, 1994; Elbaum, 2002; Palladino, Poli, Masi, y Marcheschi, 2000).

La conjunción de estos dos enfoques de investigación se materializa en el programa de entrenamiento en solución de problemas matemáticos ¡Resuélvelo!, que plantea tres objetivos fundamentales:

a) Enseñar a los alumnos las estrategias cognitivas y metacognitivas de las que carecen o que tienen dificultades para aplicar, enseñándoles una forma organizada y lógica de aplicarlas.

b) Proporcionar a los alumnos oportunidades para practicar estas estrategias de solución de problemas.

c) Motivar a los alumnos adaptando los contenidos a sus capacidades, aumentando progresivamente la dificultad (para no verse desbordados al inicio del programa), y mediante una metodología de enseñanza basada en la enseñanza recíproca y el aprendizaje guiado.

En el programa se diferencian dos tipos de estrategias: las cognitivas, y las metacognitivas.

Las estrategias cognitivas se refieren a las acciones o pasos que el alumno debe ir dando para solucionar el problema. Las 7 estrategias cognitivas que se proponen en este programa son: leer el problema, poner el problema en tus palabras, visualizar el problema, pensar un plan, estimar la respuesta, calcular realizando las operaciones necesarias y comprobar el proceso.

Por otra parte, el concepto de metacognición incluye el conocimiento sobre la naturaleza de las diferentes tareas cognitivas, las posibles estrategias que pueden ser aplicadas a la solución de cada tarea, y también las habilidades para monitorizar y regular las actividades cognitivas propias (Flavell, 1999).

En este programa se proponen 3 estrategias metacognitivas que ayuden a los alumnos a autodirigir, controlar y evaluar sus procesos de resolución de tareas. Estas estrategias son: decirse a sí mismo lo que tienen que hacer en forma de autoinstrucción, preguntarse a sí mismo si están siguiendo su plan, y comprobar que el resultado es correcto y está acorde con su plan.

4.3.3.1. Estrategias cognitivas.

- Leer el problema.

Hasta la fecha, muy pocas intervenciones encaminadas a mejorar la comprensión lectora de los alumnos con DA han empleado textos matemáticos o científicos, ya que la mayoría de los textos empleados en este tipo de investigaciones han sido textos de ciencias sociales (Hall, 2005). Sin embargo, es obvio que la comprensión del enunciado es un requisito imprescindible para solucionar problemas matemáticos; prueba de ello es el hecho de que los alumnos con DAM+DAL presentan más dificultades en solución de problemas que los alumnos con sólo DAM, (Hanich et al., 2001; Jordan y Hanich, 2000); dificultades que se agrandan conforme aumenta la complejidad del texto de los problemas (Fuchs y Fuchs, 2002). Estas dificultades justifican que la primera estrategia del programa sea realizar una lectura comprensiva del enunciado.

Mediante la enseñanza de esta estrategia se intenta enseñar al alumno a realizar una lectura detenida y concienzuda del enunciado, dejando claro que el objetivo fundamental de la lectura es comprender lo mejor posible su significado. Se trata de intentar que el alumno intente formar una idea clara del problema asegurándose de que comprende dos aspectos del enunciado: la información que aparece y la información que se nos solicita. Igualmente se enseña al alumno a controlar si está comprendiendo correctamente, y a releer el problema (o alguna de sus partes) en caso de que no haya comprendido el enunciado.

- Parafraseo. Poner el problema en tus palabras.

Una habilidad muy relacionada con la comprensión lectora es la capacidad para poner un texto que hemos leído en nuestras propias palabras, es decir, ser capaz de traducir la información lingüística del problema reformulando el enunciado. Realizar esta tarea correctamente es un buen indicador de la calidad del proceso de comprensión lectora.

La estrategia de “parafrasear” el texto del problema es muy similar a las estrategias empleadas en algunos programas de intervención específicos en comprensión lectora. En la mayoría de estos programas se suelen realizar actividades en que se pide al alumno que haga un pequeño “resumen” o una recapitulación de lo que ha leído (Kintsch, 1998), una actividad muy similar a la estrategia del “parafraseo” del programa resuélvelo.

Para enseñar esta estrategia, el profesor pide al alumno que “le cuente” el problema con sus propias palabras imaginando que el profesor no lo ha leído. En el desarrollo de esta estrategia se hace hincapié en que el alumno se asegure de que lo que dice tiene sentido, que ha comprendido la información que da el problema, y que sabe lo que el problema le pide.

- Visualizar. Hacer un dibujo o esquema que represente el problema.

Al igual que ocurre con el déficit lector, los EDAM también tienen dificultades para hacerse imágenes o composiciones mentales sobre los problemas matemáticos. Los alumnos con DAM parecen presentar un déficit en sus habilidades de representación viso-espacial: utilizan menos esta estrategia, y cuando la usan, sus representaciones son de carácter fundamentalmente pictórico, dibujan objetos o personas que aparecen en el problema, pero no representan los datos del problema, ni establecen relaciones entre ellos. Por contra, las representaciones de los alumnos superdotados o con buenas habilidades de solución de problemas tienden a ser más esquemáticas, establecen relaciones entre los datos del problema, y demuestran una comprensión más profunda del mismo (Van Garderen y Montague, 2003)

Mediante esta estrategia se enseña a los alumnos a realizar representaciones geométricas, diagramas, tablas, figuras o cualquier otro tipo de representación pictórica o gráfica en la que quede reflejada la estructura del problema, la información que se ofrece en enunciado, y la información que nos demanda. Estas imágenes esquemáticas o relacionales son claves para una solución de problemas exitosa.

• Planificar. Pensar un plan.

Quizá la planificación es el proceso clave en la solución de problemas, y seguramente también es el proceso en que más dificultades tienen los EDAM. Una de las conductas típicas de estos alumnos, que les genera mayores dificultades para solucionar los problemas, es lanzarse impulsivamente a resolver el problema, sin apenas dedicar tiempo a la planificación (Bryant, Bryant y Hammill, 2000).

Para abordar estas dificultades, el programa incluye la estrategia de planificación, en la que se enseña al alumno a detenerse una vez ha comprendido y representado el problema correctamente, y a pensar sobre las acciones que debe llevar a cabo para solucionar el problema. Se enseña al alumno a marcarse una meta de solución, una vez detectado lo que el problema pide, y después se le enseñan diversos caminos para obtener su resultado. Se enseña al alumno a realizar razonamientos del tipo "si hago… entonces obtendré…", en los que se frena la impulsividad del alumno, y a decidir las operaciones que tiene que seleccionar.

•Estimar la respuesta.

La habilidad de estimar está relacionada con la adquisición del sentido numérico, se trata de ser capaz de resolver una tarea matemática (bien un problema matemático, bien una operación aritmética) de un modo aproximado, utilizando "números redondos", sin necesidad de realizar las operaciones detalladamente, y siendo consciente de que el resultado ofrecido no coincide con el resultado real, pero sí es razonablemente cercano.

La estimación es empleada en ocasiones como una estrategia para solucionar eficazmente problemas, ya que permite hacer predicciones del resultado antes de realizar los cálculos, y valorar la plausibilidad de la respuesta. Igualmente, la estimación sirve como un elemento para comprobar los cálculos, ya que una discrepancia más grande de lo habitual entre la estimación y la respuesta definitiva sugiere muy posiblemente que ha habido un error. Al igual que ocurría con las estrategias anteriores, los EDAM presentan dificultades en el uso de esta estrategia. Estos alumnos emplean estrategias de estimación poco sofisticadas, adivinación y estimaciones "a ojo", mientras que los alumnos con altas capacidades para solucionar problemas emplean estrategias más sofisticadas: descomposición y comparación con unidades de medida complejas (Montague y Van Garderen, 2003)

Mediante el programa se enseña a los estudiantes a redondear números arriba y abajo para que puedan calcular mentalmente la solución en números redondos (ej. 132-46 se redondea a 130-50=80). Esta respuesta se considera como una respuesta guía, que posteriormente compararemos con la respuesta final. En el ejemplo la respuesta final es 132-46= 86. Este resultado debemos compararlo con nuestra estimación (80), y entonces decidir si aceptamos que la diferencia entre el resultado y la respuesta es razonable, y por tanto el cálculo es correcto. En este caso la diferencia entre las dos operaciones es 6, por lo que aceptamos el resultado, y asumimos que la diferencia es fruto del redondeo.

•<u>Calcular</u>. Hacer las operaciones en el orden correcto.

En las tareas de cálculo, los estudiantes deben ser capaces de recuperar los procedimientos correctos para trabajar a través de la adición, sustracción, multiplicación y división con la suficiente exactitud. Están extensamente documentadas las dificultades de estos alumnos para recuperar de su MLP operaciones matemáticas básicas, tales como las tablas de multiplicar, los números que suman 10, y otras tareas sencillas que deberían recuperarse automáticamente de la MLP cuando la tarea matemática lo requiere (Ashcraft, 1992)

En el programa se enseña a los alumnos a esforzarse por realizar las operaciones de un modo concienzudo y aplicado; sin embargo la instrucción en procesos de cálculo no es el objetivo de esta instrucción, por lo que cuando las tareas de cálculo suponen un sobreesfuerzo excesivo para los EDAM que va a perjudicar el proceso de solución de problemas, se permite al alumno el uso de la calculadora, con el fin de liberar así recursos atencionales que pueda dedicar al proceso general de SP.

• <u>Comprobar</u>.

Finalmente, la comprobación es una estrategia que aparece prácticamente en todos los modelos de solución de problemas, y que supone un indicador de calidad del proceso de solución.

La comprobación es una estrategia que subraya la importancia de enseñar la solución de problemas como un proceso recursivo en el que los estudiantes comprenden que volver a los procesos previos y en ocasiones trabajar hacia atrás son necesarios para la solución de problemas. Comprobar la exactitud del cálculo es importante, incluso cuando se han utilizado calculadoras, aunque en el programa, comprobar el problema implica verificar tanto el proceso como el producto; se enseña a los estudiantes cómo comprobar el proceso de resolución para asegurarse de que lo han comprendido, lo han representado adecuadamente, han elegido la vía de solución correcta y lo han resuelto correctamente.

4.3.3.2. Estrategias metacognitivas.

Anteriormente nos referíamos a los procesos cognitivos como las actividades mentales que el alumno pone en marcha mientras resuelve el problema: leer el problema, ponerlo en sus propias palabras, etc.; en otras palabras las estrategias cognitivas son "*lo que hace y piensa el alumno para resolver el problema*". Puede parecer que estos procesos son espontáneos o naturales, sin embargo estos procesos no son azarosos. Están controlados por los procesos metacognitivos, que suponen la reflexión y planificación de las acciones cognitivas.

Las estrategias metacognitivas difieren de las cognitivas en que enfatizan la autoconciencia del conocimiento cognitivo, el uso de estrategias o procesos cognitivos durante la solución del problema y el control de estrategias para la regulación y el monitoreo, estando a menudo asociadas con la conciencia, la evaluación y la regulación de los procesos.

Los procesos metacognitivos contemplados en el programa coinciden con los tres estadios que tradicionalmente la psicología cognitiva ha descrito en las tareas cognitivas: planificación, automonitoreo, y comprobación (Pintrich, 2003)

La autoinstrucción implica decirse a sí mismo qué hacer antes y durante la resolución. Esta fase equivaldría a la fase previa de la mayoría de programas de enseñanza de estrategias de aprendizaje. Podría resumirse mediante la pregunta ¿Qué tengo que hacer?, y supondría el inicio del proceso de movilización de la estrategia de aprendizaje.

El autocuestionamiento o automonitoreo implica preguntarse a sí mismo mientras se está implicado en una actividad, con el objetivo de mantenerse centrado en la tarea, regular el proceso y asegurarse de que se está haciendo correctamente. Esta fase se desarrolla mientras el sujeto está inmerso en la tarea, y podría resumirse con la pregunta ¿lo estoy haciendo bien?; ¿estoy siguiendo mi plan?

Finalmente, la comprobación requiere que el resolutor del problema se asegure de que todo se ha hecho correctamente a lo largo del proceso de solución del problema. Equivaldría a la fase posterior a la realización de la tarea, y podría resumirse con la pregunta ¿lo he hecho bien?

El cuadro 3 muestra las estrategias cognitivas y metacognitivas usadas en el programa. Es importante ser consciente de que a medida que los estudiantes se familiarizan con el programa estas estrategias se van internalizando, y como se verá al tratar la metodología de enseñanza, cada vez se van haciendo más propias e implícitas, es decir, el alumno las va internalizando y no es necesario mencionarlas explícitamente cada vez que se ponen en marcha.

PROCESOS COGNITIVOS Y ESTRATEGIAS METACOGNITIVAS DEL PROGRAMA ¡RESUÉLVELO!.

1. Leer (para comprender).

¿Qué tengo que hacer?: Leer el problema. Si no lo comprendo, leerlo de nuevo.

¿Lo estoy haciendo bien?: ¿Estoy entendiendo el enunciado?

¿Lo he hecho bien?: Comprobar que he entendido bien el problema.

2. Parafrasear (poner el problema en tus propias palabras).

¿Qué tengo que hacer?: Subrayar la información importante. Poner el problema en mis propias palabras.

¿Lo estoy haciendo bien?: ¿He subrayado la información importante?; ¿Cuál es la pregunta?; ¿Qué estoy buscando?

¿Lo he hecho bien?: Asegurarse de que se ha recogido toda la información necesaria.

3. Visualizar (hacer un dibujo o esquema).

¿Qué tengo que hacer?: Hacer un dibujo o esquema.

¿Lo estoy haciendo bien?: ¿Me sirve este dibujo?

¿Lo he hecho bien?: Comprobar que el dibujo contiene toda la información del problema.

4. Planificar (pensar un plan para resolver el problema).

¿Qué tengo que hacer?: Decidir cuántos pasos y operaciones son necesarias. Escribir los símbolos de las operaciones (+,-, x, y /).

¿Lo estoy haciendo bien?: Si hago......, ¿Qué conseguiré?. Y si hago....... , ¿entonces qué tengo que hacer después?, ¿Cuántos pasos son necesarios?

¿Lo he hecho bien?: Comprobar que el plan tiene sentido.

5. Estimar (predecir la respuesta).
¿Qué tengo que hacer?: Redondear los números, hacer el problema de cabeza, y escribir la estimación.
¿Lo estoy haciendo bien?: ¿Redondeé al alza o a la baja?; ¿Escribí la estimación?
¿Lo he hecho bien?: Comprobar que usé la información importante.

6. Calcular (usando las operaciones del plan).
¿Qué tengo que hacer?: Haz las operaciones en el orden correcto.
¿Lo estoy haciendo bien?: ¿Cómo es el resultado comparado con la estimación?; ¿Tiene sentido la respuesta?
¿Lo he hecho bien?: Comprobar que todas las operaciones se hicieron en el orden correcto.

7. Comprobar (asegurarse de que todo se ha hecho bien).
¿Qué tengo que hacer?: Comprobar los cálculos.
¿Lo estoy haciendo bien?: ¿He comprobado cada paso?; ¿He comprobado los cálculos?; ¿Es mi respuesta correcta?.
¿Lo he hecho bien?: Comprobar que todo es correcto. De lo contrario, volver atrás. Pedir ayuda si es necesario.

Cuadro 3. Resumen de las estrategias cognitivas y metacognitivas del programa de intervención.

4.3.3.3. Metodología del programa.

Los profesores que asistieron al curso de formación fueron instruidos en el conocimiento suficiente sobre los principios instruccionales generales que rigen el desarrollo del SOLVE IT: la instrucción explícita de las estrategias, el dar oportunidades para la práctica del alumno, la motivación para aplicar las estrategias y resolver los problemas, y el modelado cognitivo.

a) Instrucción explícita de las estrategias.

Las estrategias son la base fundamental del programa, y el alumno debe conocerlas desde el primer día de implementación. La forma básica de enseñarlas, como veremos posteriormente es el modelado cognitivo. En un paso previo a ese modelado, al inicio del programa de intervención, las estrategias fueron presentadas a los alumnos a través de unas tarjetas gráficas en las que por una cara aparecía un dibujo en el que se representa un personaje realizando la acción correspondiente a cada estrategia cognitiva, y por la otra aparecían escritas las 3 preguntas referentes a las estrategias cognitivas de dicha estrategia (ANEXO VIII).

Igualmente, cada profesor colgó en un lugar visible de su aula un póster en el que se enumeraban las 7 estrategias cognitivas, para que el alumno lo tuviera siempre visible cuando resolvía problemas matemáticos. (ANEXO IX).

b) Oportunidades para la práctica.

La enseñanza de las estrategias en el vacío (como un contenido abstracto más, desligadas de su aplicación) no implica su aplicabilidad en las tareas cotidianas por parte de los alumnos. Las estrategias del programa deben aprenderse en un contexto lo más aplicado posible, a ser posible mediante las mismas tareas con las que se va a encontrar el alumno en el currículum ordinario, y debe ofrecerse al alumno suficientes oportunidades para la práctica. Al enseñar las estrategias ligadas a su aplicación real (en este caso los problemas de matemáticas), se favorecerá su recuperación de la memoria cuando el alumno se enfrente a este tipo de problemas.

Con el fin de asegurar que todos los alumnos del grupo experimental tuvieran exactamente las mismas oportunidades para la práctica, y con el mismo material, se entregó a los profesores una serie de cuadernillos con problemas matemáticos clasificados según el número de operaciones necesarias para su solución, y según la estructura de dichos pasos de acuerdo a la clasificación de Riley, Greeno y Heller, (1983), que distingue entre problemas de cambiar, combinar, comparar e igualar.

Igualmente, se entregó a los profesores participantes un calendario de planificación de las sesiones en el que se les marcaba el ritmo y la temporalización para practicar las estrategias. Este último aspecto se concreta y amplía más adelante, en la descripción del timing de la intervención.

c) La motivación.

Los estudiantes sólo aplicarán las estrategias del programa si piensan que les van a ser útiles para la práctica. La aplicación de las estrategias requiere un esfuerzo consciente extra para los alumnos, por lo que debe justificarse que este esfuerzo va a ser “rentable”. Para ello se propone:

1.Explicar al alumno la importancia de la resolución de problemas; en la primera toma de contacto con el programa es conveniente justificar la importancia de la resolución de problemas tanto en la vida académica como en la vida real. Se propone un diálogo en que los alumnos sugieran para qué creen ellos que es útil la resolución de problemas: para calcular el cambio cuando van a comprar, para calcular los descuentos en las rebajas, para hacer planes de ahorro, para administrarse las pagas, etc. Se trata de que los alumnos sean conscientes de la utilidad de saber resolver problemas matemáticos correctamente y de que este programa está diseñado explícitamente para ello.

2. Plantear el programa de un modo positivo y constructivo; seguir el programa no debe representar para los alumnos un castigo, sino que debe constituir un reto lo más motivador posible. Para ello es importante la actitud del profesor, la forma de presentar el programa al alumno, los refuerzos que se le vayan dando, etc.

3. Ser cuidadosos con la retroalimentación; como se comentaba anteriormente, los alumnos con dificultades de aprendizaje pueden presentar problemas de autoestima, estilos atribucionales desadaptativos, baja tolerancia a la frustración y tendencia a abandonar las tareas. Estas dificultades pueden acrecentarse si los profesores no son cautelosos con el feedback que proporcionan a los alumnos.

Cuando el resultado de un problema no es el correcto, la retroalimentación no debe parecer una riña o reprimenda. En lugar de enfatizar en lo que se ha hecho mal, se tiene que hacer hincapié en cómo hacerlo correctamente. Igualmente, cuando el resultado del problema es satisfactorio, debe reforzarse positivamente al alumno.

4. Introducir técnicas de autorrefuerzo; se trata de que el alumno, como parte del monitoreo que se propone con las estrategias metacognitivas, sea capaz de autorregularse y autorreforzarse mediante frases como “lo estoy haciendo bien”, “tengo que seguir así”, “debería ir más despacio y pensar más las cosas”,... Estas estrategias se enseñan también insertas en el modelado del profesor, de modo que explícitamente las introduzca en los primeros estadios del modelado (cuando es el profesor quien resuelve los problemas), e incite a los alumnos a autorreforzarse cuando son ellos los que resuelven los problemas.

d) Modelado cognitivo.

Como se comentaba anteriormente, el modelado cognitivo es la técnica que se emplea para enseñar las estrategias a los alumnos; este modelado se inicia con la enseñanza de las estrategias, ya que consiste básicamente en mostrar al alumno cómo debe resolverse un problema utilizando las estrategias y métodos del programa. Se trata de empezar el profesor resolviendo él sólo los problemas, y diciendo en voz alta, de un modo claro y organizado todos los pasos y acciones que va ejecutando. Más adelante, el profesor irá perdiendo protagonismo, y será el alumno quien vaya resolviendo el problema, cada vez con menos ayuda por parte del profesor, hasta que al final del programa sea capaz de resolver los problemas sin ayuda.

La secuencia lógica será: en un primer momento el profesor resuelve sólo el problema, posteriormente lo resuelven conjuntamente profesor y alumno, siendo el profesor quien guía el proceso. En un tercer momento siguen resolviendo el problema conjuntamente, pero es el alumno quien guía el proceso. Por último, en el cuarto estadio, el alumno resuelve los problemas de modo independiente.

En el modelado cognitivo el profesor ha de servir de “modelo” para los estudiantes en cómo resolver problemas matemáticos, pero no sólo muestra cómo resolver los problemas correctamente, sino que también comete deliberadamente errores que va corrigiendo (al seguir la estrategia metacognitiva de comprobar), y así muestra a los alumnos el modo de autorregularse durante la solución de problemas. Igualmente, el profesor también debe tratar de razonar porqué es preferible efectuar esos pasos y no otros, explicitar a qué variables hay que prestar atención para proceder correctamente, cómo y porqué se escogen diferentes procedimientos de actuación, qué procedimientos alternativos podrían también emplearse, cómo se controla el proceso seguido, de qué forma es capaz de saber que ya ha resuelto la tarea, etc. El objetivo básico es proporcionar al alumno un modelo correcto de solución de problemas, un vocabulario correcto y apropiado, una metodología de trabajo ordenada y lógica, y una actitud positiva hacia la tarea que el alumno deberá aprender para después ponerla él en práctica.

4.3.3.4. Duración de la intervención.

El programa tuvo una duración de 15 sesiones de 55 minutos (2 sesiones semanales durante 8 semanas) desarrolladas en las aulas de pedagogía terapéutica de los centros en grupos de 2 ó 3 alumnos.

Las 5 primeras sesiones se dedicaron a introducir el programa, y realizar la fase de modelado. En esta fase, el número de problemas resueltos en cada sesión fue de entre 2 problemas (al inicio del programa) y 5 problemas por sesión (en las últimas sesiones de esta fase).

El objetivo de las sesiones fue que el propio profesor resolviera correctamente los problemas, para así ofrecer a los alumnos un modelo correcto de solución, en el que se realizaran de un modo adecuado todas las estrategias. Eventualmente, se propuso a los profesores que introdujeran deliberadamente errores en el proceso de solución para, de este modo, poder ejemplificar también las estrategias de comprobación y revisión, verbalizando el procedimiento en de repaso y corrección del problema, búsqueda de coherencia del resultado, así como la corrección pertinente posterior.

Las 5 siguientes sesiones correspondieron a la fase de práctica guiada, en la que el alumno resolvía los problemas con la ayuda necesaria por parte del profesor. El objetivo de estas sesiones fue pasar la responsabilidad del proceso de solución al alumno, aunque todavía con un alto grado de dirección y control por parte del profesor. Durante estas sesiones aumentó el número de problemas solucionados en cada sesión, hasta una cantidad de problemas resueltos de entre 4 y 7.

Finalmente, las 5 últimas sesiones correspondieron a la fase de práctica independiente, en las que todo el peso del proceso de solución pasa al alumno, y el profesor se convierte tan sólo en un supervisor y orientador, pero cuya intervención en el proceso se limita al máximo. Esta fase fue el estadio final de la intervención, y en ella el número de problemas solucionados por sesión aumentó hasta una cantidad comprendida entre 7 y 10 problemas en cada sesión.

Durante el período de duración del entrenamiento, el grupo control con DA asistió al aula de pedagogía trerapéutica también durante dos sesiones semanales de apoyo a la asignatura de matemáticas. Los contenidos tratados en este aula suelen estar dirigidos a reforzar los contenidos tratados en el aula ordinaria de un modo individualizado para atender las necesidades educativas especiales de los alumnos que asisten al aula, haciendo un énfasis especial en las habilidades básicas de cálculo y solución de problemas, por lo que consideramos que estos alumnos representan un grupo de comparación adecuado y representativo del trabajo que realizan los alumnos con DAM en la escuela.

4.3.3.5. Procedimiento de formación del profesorado.

El presente estudio asume una perspectiva enmarcada en la investigación-acción, de forma que los responsables directos de la intervención son los mismos profesores de los alumnos. Por ello, una parte fundamental de la investigación es la formación del profesorado. Esta formación se desarrolló en el marco de un curso de formación continua para profesores en activo fuera del horario lectivo. Los responsables de impartir dicho curso fueron el autor y la directora del estudio.

El curso se dividió en dos partes: 6 sesiones de 2 horas y 30 minutos de duración con una periodicidad semanal previas a la intervención con los alumnos, y una sesión final, desarrollada al acabar la intervención del programa en la que se evaluaron diferentes aspectos relacionados con el curso y el desarrollo de la investigación (ver calendario en el ANEXO X)

El contenido de la sesión 1 consistió en una introducción a las dificultades del aprendizaje; se explicó el concepto de DA, las características de los alumnos con DA, el procedimiento de identificación y evaluación, la prevalencia de las DA, y el tratamiento de las DA en nuestro sistema educativo.

La segunda sesión de formación sirvió para concretar los contenidos expuestos en la primera sesión, y centrar el curso en el tratamiento de las DAM. En esta sesión se expusieron los requisitos cognitivos, metacognitivos y afectivos para realizar un correcto procedimiento de solución de problemas, se explicaron los posibles déficits subyacentes en los estudiantes con DASP, se propusieron criterios para identificar en el aula a estos alumnos, y se explicaron procedimientos para interpretar y analizar errores de los alumnos al resolver problemas.

En la tercera sesión de formación se explicó el contenido y la utilidad del Cuestionario de Evaluación de Estrategias de Solución de Problemas, que evalúa las mismas estrategias que emplea el programa de intervención. Igualmente, se explicaron los contenidos y funcionamiento de varios programas comercializados de instrucción en matemáticas y solución de problemas: el Eureka (de la editorial Bruño), y el Pues Claro (de la editorial CEPE), así como el programa de soporte informático “La Escuela Submarina”. Finalmente, se explicó la tipología de problemas matemáticos propuesta por Riley, Greeno y Heller (1983), con el fin de que los profesores comprendieran y fueran capaces de diferenciar los tipos de problemas incluidos en el programa de intervención.

En la cuarta sesión se realizó una introducción general al programa de intervención, el ¡Resuélvelo!; se explicaron las estrategias cognitivas y metacognitivas incluidas en el programa, así como la metodología de enseñanza del programa.

La sesión 5 se dedicó a modelar el procedimiento para presentar al alumno el programa ¡Resuélvelo!. Para ello se expusieron varios ejemplos de problemas matemáticos resueltos empleando las estrategias del programa de intervención (ver ejemplo en el anexo XI). Finalmente, se dedicó un tiempo a que los profesores practicaran el procedimiento de empleo de las estrategias, y a que practicaran el procedimiento de enseñanza de estas estrategias mediante role-playing.

En la sexta sesión se continuó con la práctica de solución de problemas mediante el empleo de las estrategias cognitivas y metacognitivas del programa, se expusieron diferentes ejemplos de problemas resueltos (anexo XII), los profesores comentaron las sesiones de intervención desarrolladas durante la semana, las dificultades encontradas, y las dudas que surgieron, y se propuso un calendario de aplicación del programa.

Finalmente, la séptima sesión se realizó una vez finalizado el programa de intervención. En esta sesión se realizó una evaluación del funcionamiento del curso, y sirvió para reunir a los diferentes profesores que habían realizado la intervención en sus respectivos centros para opinar sobre la marcha del programa, y de la investigación en general.

Además de estas sesiones de formación semanales, cada profesor fue visitado por el autor de la tesis en dos ocasiones durante sesiones de desarrollo del programa con los alumnos. En estas sesiones se desarrollaron procedimientos de observación del desarrollo del programa, y se ofreció retroalimentación a los profesores sobre la metodología empleada, y sobre la interacción con el alumno.

5

Resultados.

5.1. Análisis estadísticos.

Para comprobar que los grupos eran inicialmente equiparables en una serie de variables de control se ha puesto a prueba la igualdad mediante pruebas de análisis de varianza unifactorial, en el caso de variables cuantitativas, o prueba de chi-cuadrado, en el caso de variables cualitativas.

Para evaluar los efectos del tratamiento se han realizado análisis de varianza mixtos 3 (grupo) x 3 (tiempo), con medidas repetidas en el último factor. Se han puesto a prueba los efectos principales de ambas variables, grupo y momento de la evaluación, y el efecto de interacción. En todos los casos se probaron los supuestos subyacentes a las pruebas. Tras las pruebas F de efectos principales y de interacción se procedió a realizar pruebas a posteriori si aparecían diferencias. En el caso de grupo mediante la prueba de Tukey, en el caso de tiempo mediante el ajuste de Bonferroni, y en el caso de la interacción mediante efectos simples. Dado el elevado número de variables dependientes se ha optado por realizar la corrección de Bonferroni, si bien debido al pequeño tamaño muestral se han calculado tamaños del efecto, en concreto etas al cuadrado, para poder evaluar si algunos de los efectos son de la suficiente cuantía como para intentar evaluarlos en muestras de tamaño superior.

Para evaluar la capacidad predictiva de las variables a través de momentos temporales se han calculado coeficientes de correlación de Pearson.

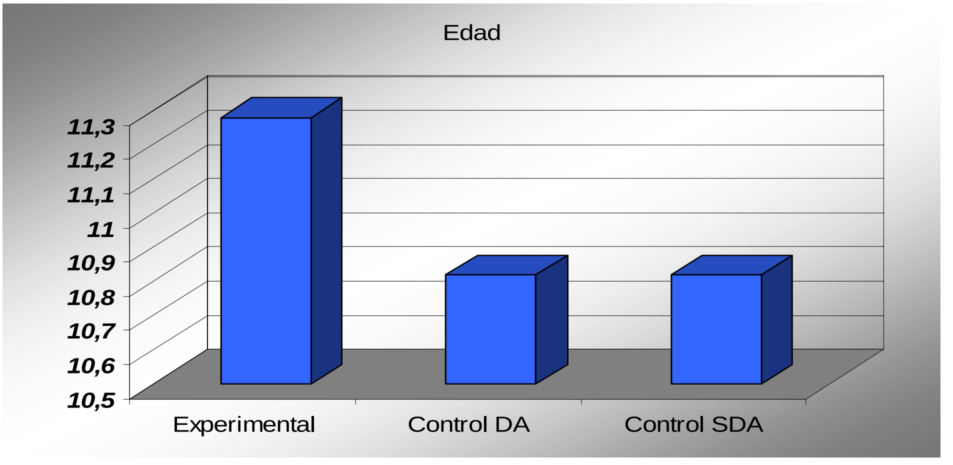
Todos los análisis estadísticos se han realizado en el paquete estadístico SPSS versión 14.

5.2. Comparación de medias en el pretest.

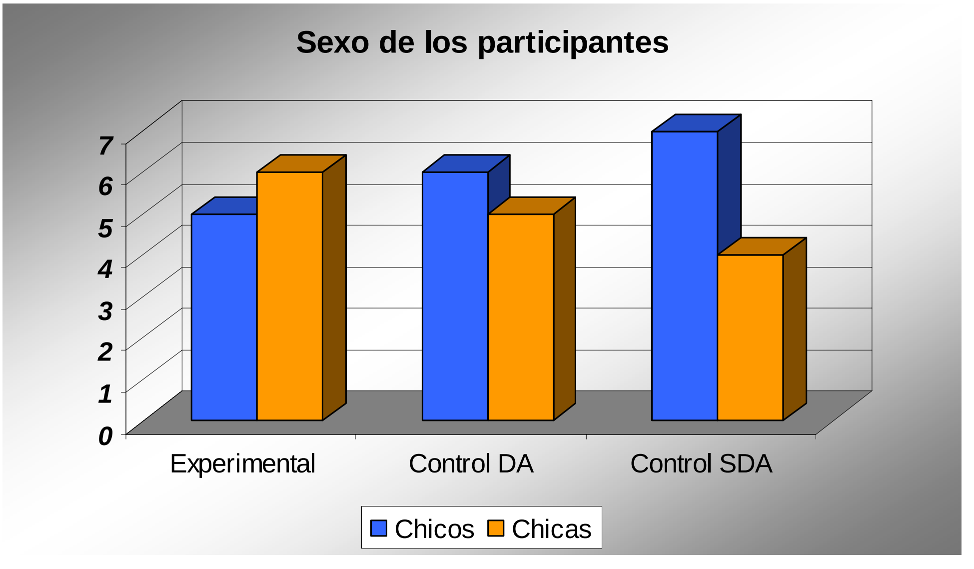
Para comprobar los supuestos necesarios para la realización de la técnica de análisis estadístico de ANOVA entre-grupos intra-grupos, se comprobaron una serie de requisitos previos:

1. Para comprobar que los grupos eran equivalentes en edad, se realizó un ANOVA de un factor en que se corroboró que la edad de los 3 grupos no presentaba diferencias estadísticamente significativas $F_{2,30}= 0.772$, $p= 0.471$. La gráfica 1 recoge la media de edad de los 3 grupos.

2. Para comprobar que los grupos eran equivalentes en su composición en cuanto a sexo de los participantes, se recurrió al estadístico chi cuadrado de Pearson ($\chi^2_2= 0.733$, $p= 0.693$). El resultado de dicha prueba indicó que no existían diferencias en la composición de los grupos en función del sexo. La distribución de chicos y chicas en los diferentes grupos queda recogida en la gráfica 2.



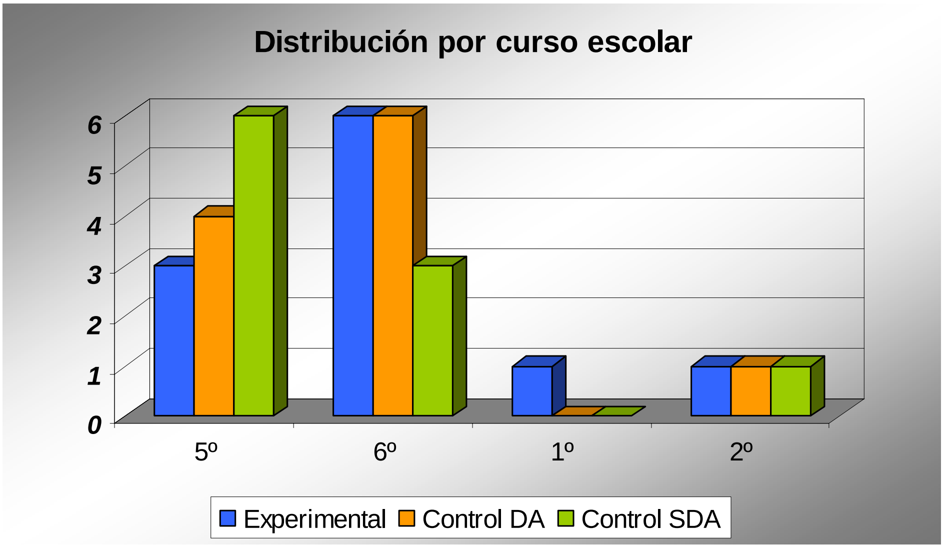
Gráfica 1. Media de edad de los participantes.



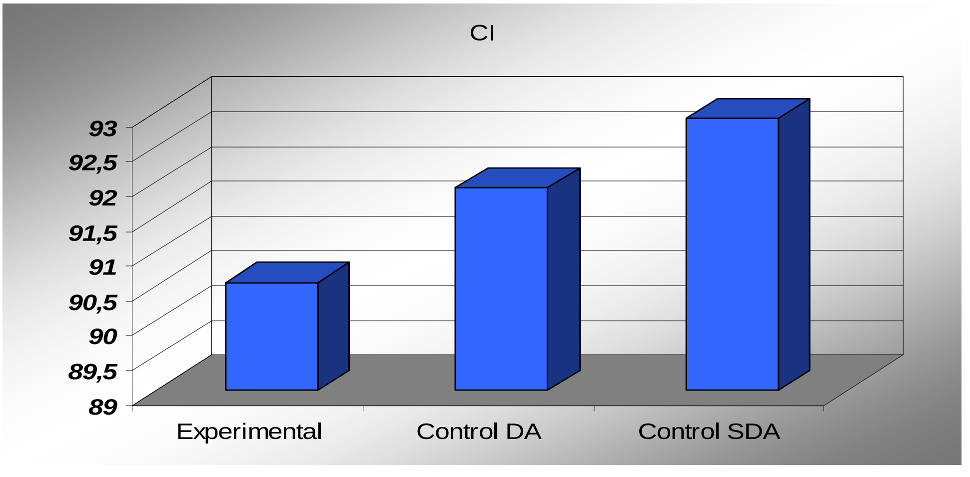
Gráfica 2. Distribución por sexo de los participantes.

3. Para comprobar que los grupos eran equivalentes en su composición en cuanto a curso escolar de los participantes, se realizó igualmente la prueba chi cuadrado de Pearson (χ^2_6= 5.057, *p*= 0.537). El resultado nuevamente corroboraba que los grupos eran equivalentes en la variable curso escolar. La distribución por cursos de los participantes se recoge en la gráfica 3.

4. Para comprobar que al inicio del tratamiento los grupos eran equivalentes en CI, se realizó un ANOVA de un factor en la variable CI ($F_{2,\ 30}$= 0.147, *p*= 0.864) que constató que los tres grupos presentaban un resultado comparable en la evaluación de su CI. La gráfica 4 recoge la comparación de medias de CI entre los grupos.



Gráfica 3. Distribución por curso escolar de los participantes.



Gráfica 4. Comparación de medias de CI.

5.3. Análisis de varianza.

Para evaluar los efectos del tratamiento en las diferentes variables analizadas en el estudio se realizó una serie de análisis de varianza mixtos entre-sujetos, intra-sujetos. En cada análisis se realizó la corrección por Bonferroni ajustando el alfa por el número de comparaciones. El resumen de los resultados de estos análisis, así como la expresión de las puntuaciones medias y desviaciones típicas vienen recogidos en las tablas 7 (variables de rendimiento y estrategias de solución de problemas), y 8 (variables afectivo-motivacionales).

		Pretest			Posttest			Seguimiento			Valores F ANOVA		
		Exp.	Ctrl DA	Ctrl SDA	Exp.	Ctrl DA	Ctrl SDA	Exp.	Ctrl DA	Ctrl SDA	Grupo	Tiempo	Interacción
Sol.Probl	M	4.18	4.30	9.18	11.18	4.10	10.27	9.18	4.70	11.18	25.68	29.71	17.39
	DT	1.94	1.49	3.16	2.18	1.52	3.29	2.79	0.95	2.23			
	%	27.87	28.67	61.2	74.53	27.33	68.53	61.2	31.33	74.53			
Sol.Probl vida real	M	0.37	0.30	0.73	0.91	0.40	1.09	0.09	0.10	0.91	3.51	5.04	1.23
	DT	0.67	0.48	1.01	0.70	0.52	0.83	0.30	0.32	1.22			
	%	7.4	6	14.6	18.2	8	21.8	1.8	2	18.2			
MPSA	M	16.27	19.67	14.60	22.18	18.67	21.20	18.18	11.67	14.00	0.33	5.59	1.66
	DT	7.90	9.79	1.82	10.56	12.32	4.82	6.57	3.44	4.69			

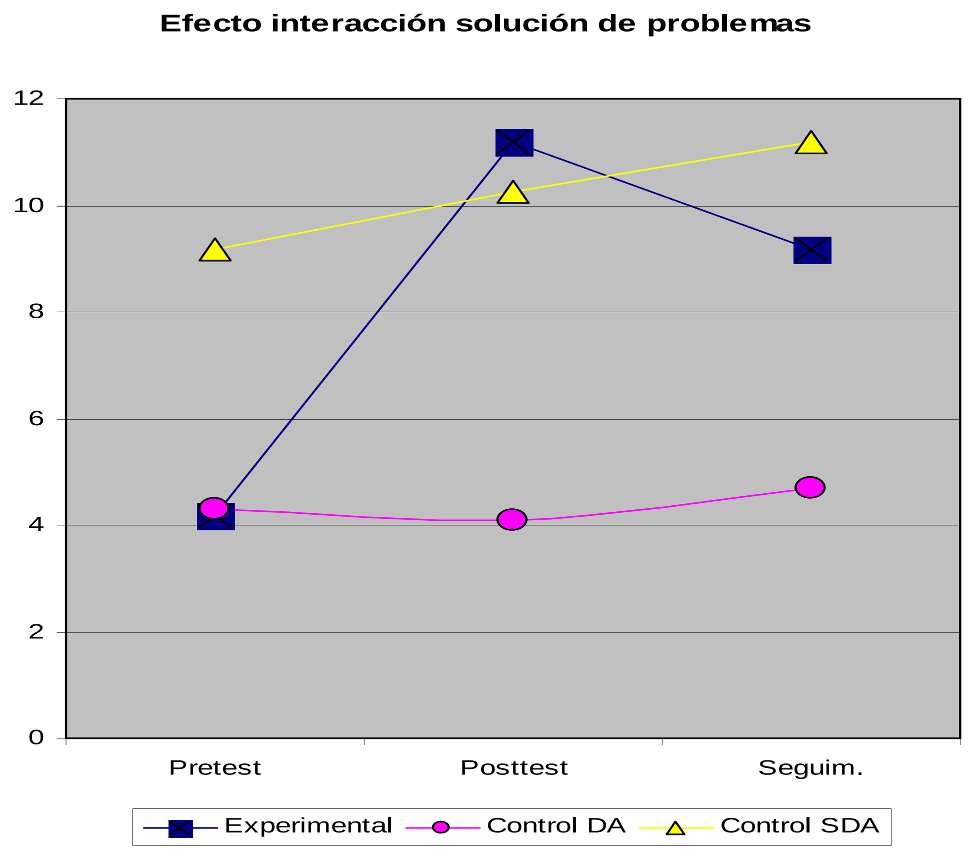
Tabla 7. Medias, desviaciones típicas, y resumen del ANOVA mixto. Variables de rendimiento y estrategias de solución de problemas. La fila % indica el porcentaje de problemas resueltos correctamente. Exp: grupo experimental; Ctrl DA: grupo control con DA; Ctrl.SDA: grupo control sin DA.

		Pretest			Posttest			Seguimiento			Valores F ANOVA		
		Exp.	Ctrl DA	Ctrl SDA	Exp.	Ctrl DA	Ctrl SDA	Exp.	Ctrl DA	Ctrl SDA	Grupo	Tiempo	Interacción
Actitudes	M	40.45	40.70	46.36	42.55	43.10	44.09	43.00	42.70	45.37	0.72	0.34	0.60
	DT	7.81	7.29	6.07	9.07	14.42	8.09	9.19	8.01	4.39			
Ansiedad	M	36.40	37.50	48.56	41.90	44.00	43.22	43.00	42.00	44.33	0.43	1.16	2.92
	DT	12.83	11.37	17.16	11.07	12.27	16.10	10.17	12.27	17.47			
Atrib. Esf.	M	13.82	13.60	15.73	15.27	14.20	13.90	14.64	15.00	15.55	0.35	1.37	2.73
	DT	1.83	3.69	2.24	2.72	3.32	2.55	3.13	1.70	2.02			
Atrib. Indif.	M	8.55	8.30	8.91	8.73	9.90	8.37	9.45	9.80	9.18	0.44	4.17	2.60
	DT	1.57	1.57	1.30	1.49	1.10	1.91	2.38	1.48	1.89			

Tabla 8. Medias, desviaciones típicas, y resumen del ANOVA mixto. Variables afectivo-motivacionales.
Exp: grupo experimental; Ctrl DA: grupo control con DA; Ctrl.SDA: grupo control sin DA.

5.3.1. Solución de problemas matemáticos.

Se ha realizado un análisis de varianza mixto 3 (grupo) x 3 (momentos de evaluación) con medidas repetidas en el último factor para evaluar los efectos de estos dos factores sobre la variable dependiente solución de problemas. Todos los efectos han resultado estadísticamente significativos. En el caso de los efectos principales, tanto el grupo ($F_{2,29}$= 25.685, p< 0.001, η^2= 0.639) como el tiempo ($F_{2,58}$= 29.706, p< 0.001, η^2= 0.506) han resultado estadísticamente significativos y con tamaño del efecto muy importante. Así mismo, la interacción es significativa y el tamaño del efecto grande ($F_{4,58}$= 17.387, p< 0.001, η^2= 0.545). Dado que la interacción ha resultado significativa puede decirse que el tratamiento presenta un efecto que se muestra claramente en la gráfica 5.



Gráfica 5. Efecto de la interacción en la variable solución de problemas.

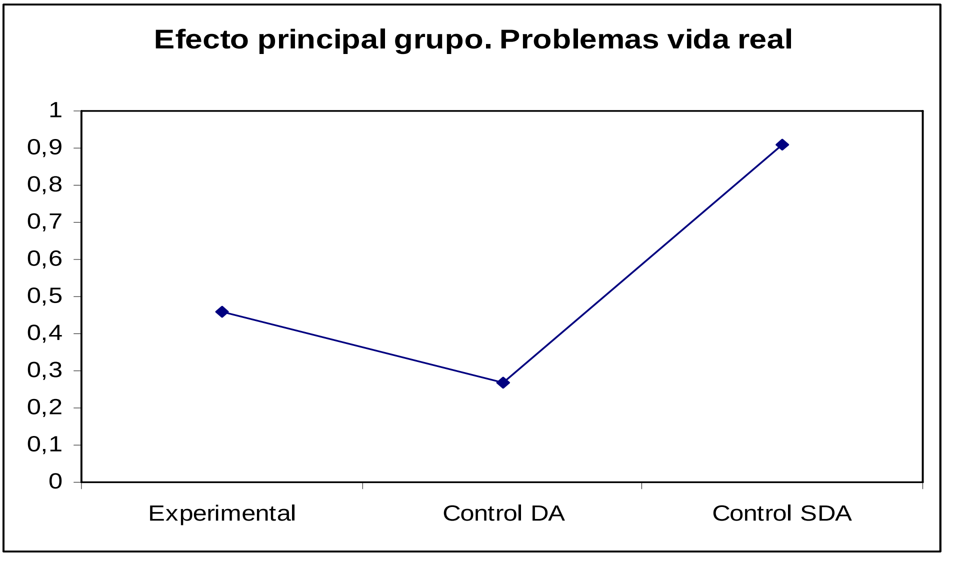
En la gráfica puede verse cómo la posición inicial del grupo experimental es idéntica en términos promedio con la del grupo de comparación con dificultades del aprendizaje. Sin embargo, tras el tratamiento, el grupo experimental mejora enormemente hasta superar al grupo control sin DA, para posteriormente decaer ligeramente. El grupo control con DA no consigue mejorar durante los distintos momentos temporales.

No obstante ésta es sólo una inspección visual de la gráfica, de forma que para analizar estadísticamente las diferencias se han realizado efectos simples de la interacción, evaluando las diferencias entre los tres grupos en cada momento temporal. Así en el primer momento temporal, antes de intervenir, existen diferencias entre medias ($F_{2,30}$= 19.364, p< 0.001, η^2= 0.564), y las diferencias, como era plausible, se dan entre el grupo sin DA y los otros dos grupos que experimentan DA. Por tanto, en solución de problemas, el grupo experimental y el grupo control con DA de partida no presentan entre sí diferencias significativas. En la evaluación de posttest, (tras acabar el tratamiento) los efectos simples de la interacción también revelan diferencias significativas entre los grupos ($F_{2,30}$= 28.428, p< 0.001, η^2= 0.655). Pero en este caso los grupos experimental y de comparación sin DA se igualan, pues las medias no difieren significativamente, mientras que sí difieren las medias de estos dos grupos comparando con el grupo control con DA. Finalmente en la evaluación de seguimiento, también se encontraron diferencias entre los grupos ($F_{2,29}$= 24.485, p< 0.001, η^2= 0.628), y en el mismo sentido que en el posttest, las medias del grupo control sin DA y el experimental no difieren, mientras el grupo control con DA rinde significativamente peor en esta variable.

5.3.2. Solución de problemas de la vida real.

Para analizar el efecto del tratamiento en la resolución de problemas problemáticos o de la vida real, se ha realizado un análisis de varianza mixto 3 (grupos) X 3 (momentos de evaluación), con medidas repetidas en el último factor.

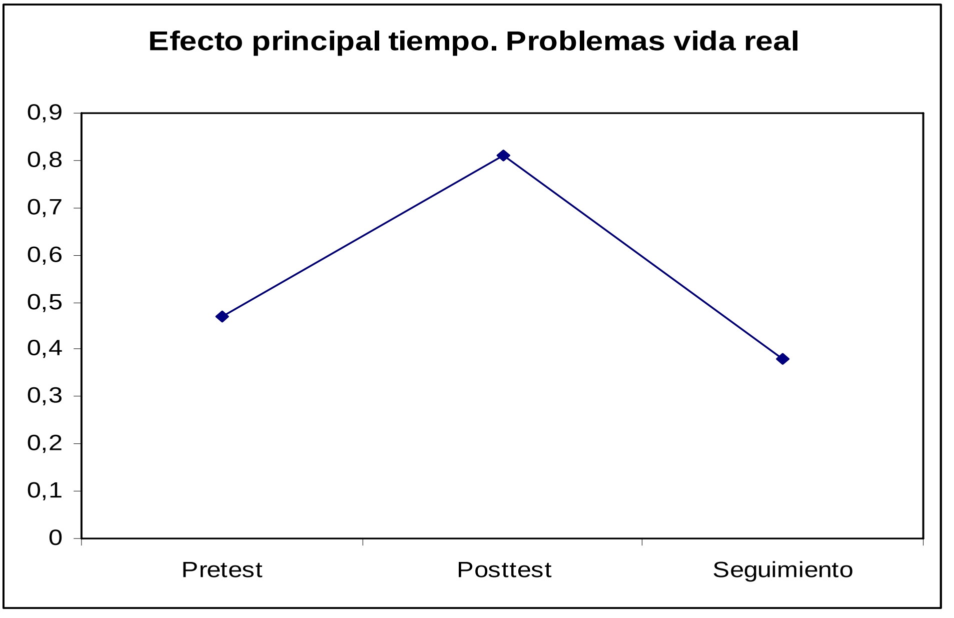
Una vez aplicada la corrección de Bonferroni, el efecto principal de grupo no resultó estadísticamente significativo ($F_{2, 29}$= 3.509, p= 0.043, η^2= 0.195). Sin embargo, el elevado valor de la eta al cuadrado (η^2= 0.195) sugiere la posibilidad de que las diferencias no sean estadísticamente significativas debido al reducido tamaño muestral. El resultado se muestra en la gráfica 6.



Gráfica 6. Efecto principal de grupo. Variable problemas de la vida real.

El patrón de resultados muestra que el grupo control sin DA puntúa notablemente mejor que los dos grupos con DA, cuyos resultados son más similares, con una ligera ventaja del grupo experimental. La única diferencia estadísticamente significativa se encuentra en la ventaja del grupo control sin DA respecto al grupo control con DA.

El efecto principal de tiempo, tampoco resultó estadísticamente significativo tras aplicar la corrección de Bonferroni ($F_{2,\ 58}$= 5.045, p=0.010, η^2=0.148). Sin embargo, de nuevo el elevado valor de la eta cuadrado (η^2=0.148) sugiere la conveniencia de analizar el patrón de resultados, que se presenta en la gráfica 7.



Gráfica 7. Efecto principal de tiempo. Variable problemas de la vida real.

El patrón de resultados muestra una mejora de los resultados en el posttest, y una notable caída en el seguimiento.

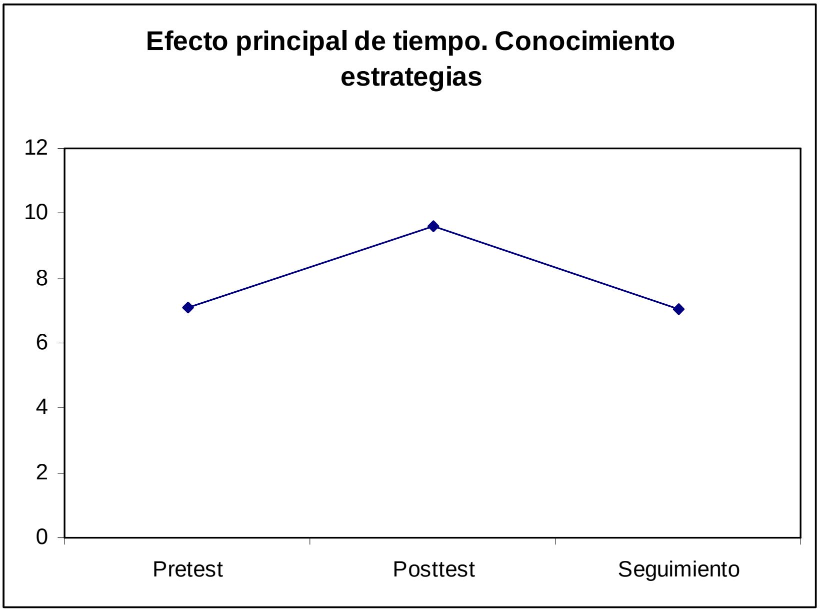
Finalmente, el efecto de la interacción no resultó estadísticamente significativo ($F_{4,58}$= 1.234, *p*=0.306, η^2=0.078), lo que indica que el tratamiento no tuvo efectos sobre el rendimiento en solución de problemas problemáticos de la vida real.

5.3.3. Conocimiento de estrategias de solución de problemas.

Para analizar el efecto del tratamiento en el conocimiento de estrategias de solución de problemas se ha realizado un análisis de varianza mixto 3 (grupos) X 3 (momentos de evaluación), con medidas repetidas en el último factor.

El efecto principal de grupo no resultó estadísticamente significativo ($F_{2,\ 19}$= 0.158, p= 0.855, η^2= 0.016), lo que indica que los grupos no difieren de modo significativo en el conocimiento de estrategias de solución de problemas.

El efecto principal de tiempo sí resultó estadísticamente significativo, ($F_{2,\ 38}$= 9.974, p< 0.001, η^2= 0.344). Ello indica que las puntuaciones en conocimiento de estrategias de solución de problemas son diferentes en función del momento en que son evaluadas. Para analizar en qué momentos de evaluación se daban esas diferencias se recurrió a la prueba por pares a posteriori de Bonferroni, que indica que las puntuaciones en pretest y seguimiento son similares, pero difieren significativamente del posttest, tal como se indica en la gráfica 8.



Gráfica 8. Efecto principal de tiempo. Variable conocimiento estrategias.

Finalmente, el efecto de la interacción no resultó estadísticamente significativo ($F_{4, 38}$= 0.691, *p*= 0.603, η^2= 0.068), lo que indica que el tratamiento no tuvo efectos significativos sobre el conocimiento de estrategias de solución de problemas.

5.3.4.Uso de estrategias de solución de problemas.

Para analizar el efecto del tratamiento en el uso de estrategias de solución de problemas se ha realizado un análisis de varianza mixto 3 (grupos) X 3 (momentos de evaluación), con medidas repetidas en el último factor.

El efecto principal de grupo no resultó estadísticamente significativo ($F_{2, 19}$= 1.211, *p*= 0.320, η^2= 0.113), lo que indica que los grupos no difieren de modo significativo en el uso de estrategias de solución de problemas.

El efecto principal de tiempo tampoco resultó estadísticamente significativo ($F_{2, 38}$= 2.037, p= 0.144, η^2= 0.097), lo que indica que los resultados en los tres momentos de evaluación no son significativamente diferentes.

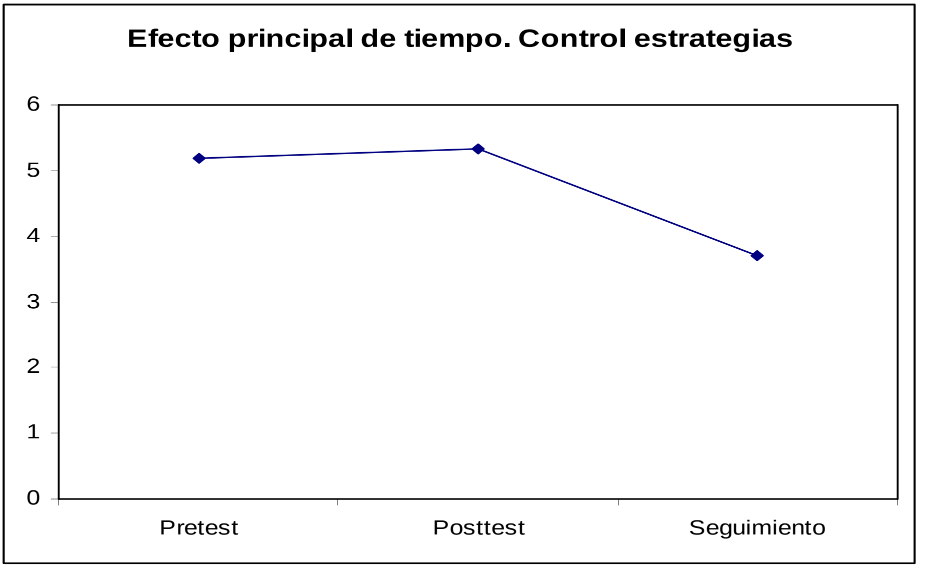
Finalmente, el efecto de la interacción tampoco resultó estadísticamente significativo ($F_{4, 38}$= 1.471, p= 0.230, η^2= 0.134), lo que indica que el tratamiento no tuvo efectos significativos sobre el uso de estrategias de solución de problemas.

5.3.5.Control de estrategias de solución de problemas.

Para analizar el efecto del tratamiento en el control de estrategias de solución de problemas se ha realizado un análisis de varianza mixto 3 (grupos) X 3 (momentos de evaluación), con medidas repetidas en el último factor.

El efecto principal de grupo no resultó estadísticamente significativo ($F_{2, 18}$= 0.630, p= 0.544, η^2= 0.065), lo que indica que los grupos no difieren de modo significativo en el control de estrategias de solución de problemas.

El efecto principal de tiempo tampoco resultó estadísticamente significativo ($F_{2, 36}$= 3.566, p= 0.039, η^2= 0.165) una vez aplicada la corrección de Bonferroni. Pese a ello, el elevado valor de la eta cuadrado (η^2= 0.165), indica que pese a que el control de estrategias de solución de problemas no fue significativamente diferente en los tres momentos de evaluación, es conveniente analizar la tendencia de las puntuaciones. La gráfica 9 muestra cómo el control de estrategias decae notablemente en la evaluación de seguimiento.

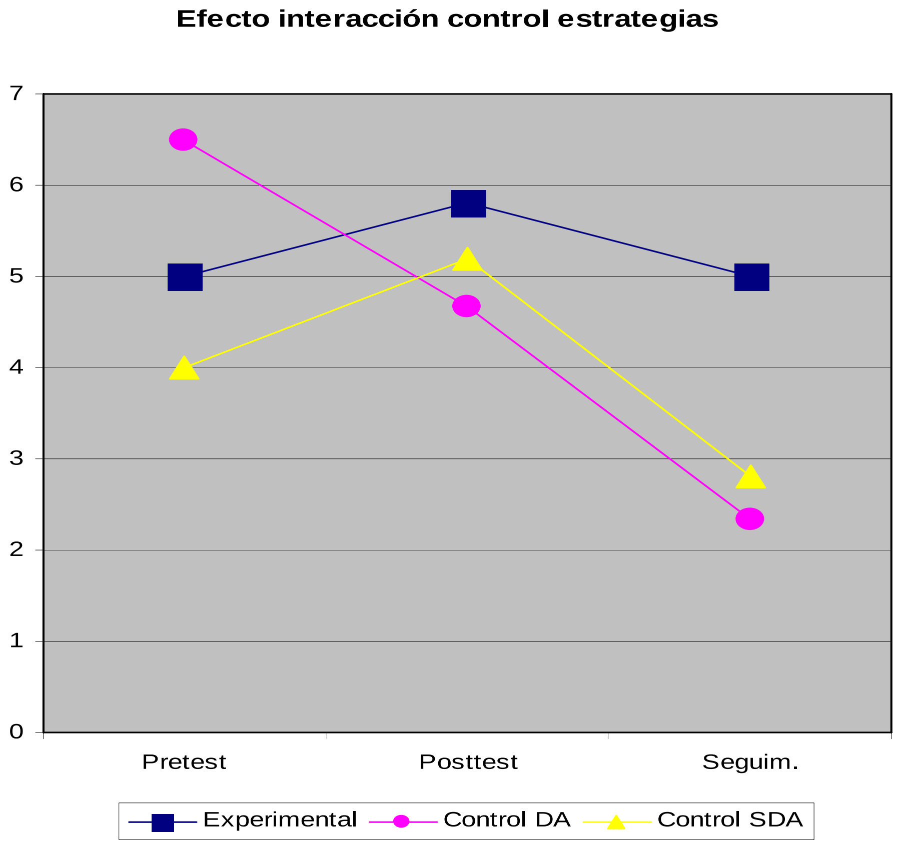


Gráfica 9. Efecto principal de tiempo. Variable control de estrategias.

Igualmente, el efecto de interacción tampoco resultó estadísticamente significativo ($F_{4, 36}$= 1.564, *p*= 0.205, η^2= 0.148). Pese a ello, también en este caso, la elevada eta cuadrado (η^2= 0.148), indica que pese a que tratamiento no tiene un efecto significativo en el control de estrategias de solución de problemas, es conveniente analizar la tendencia de las puntuaciones, ya que el tamaño del efecto es suficientemente notable, y es posible que el pequeño tamaño muestral impida conseguir la significación estadística. Esta tendencia se recoge en la gráfica 10.

El patrón de resultados muestra que el grupo control sin DA obtiene la mayor puntuación en el pretest, pero decae tanto en el posttest como en el seguimiento, mientras que los dos grupos con

DA presentan un patrón similar, en el que aumentan ligeramente en el posttest, pero decaen en el seguimiento.



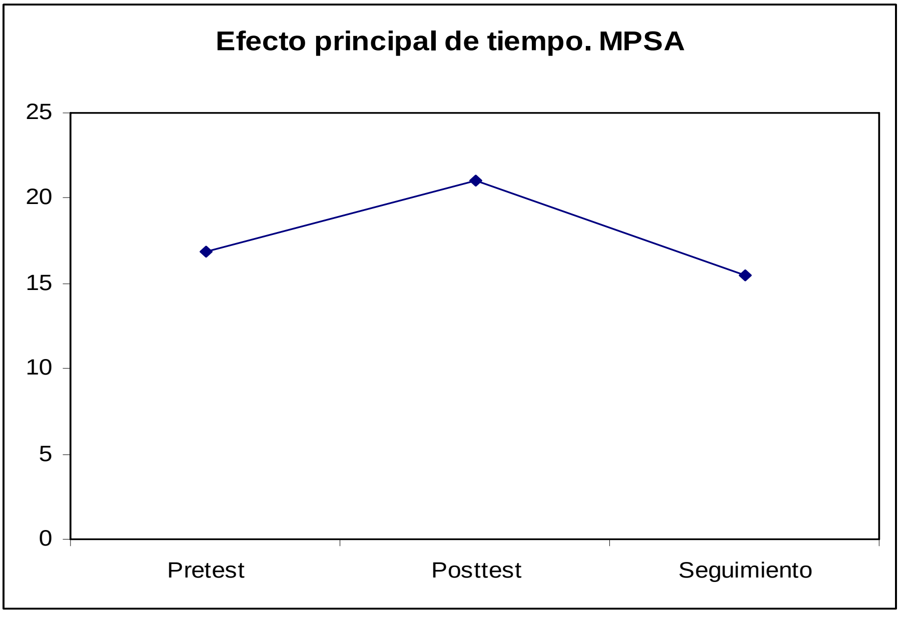
Gráfica 10. Efecto de interacción. Variable control de estrategias.

5.3.6. Cuestionario de evaluación de estrategias de solución de problemas (MPSA-SF).

Finalmente, para analizar el efecto del tratamiento en la puntuación global del cuestionario de evaluación de estrategias de solución de problemas (MPSA-SF), que agrupa las 3 variables analizadas anteriormente (conocimiento, uso y control de estrategias de solución de problemas), se ha realizado un análisis de varianza mixto 3 (grupos) X 3 (momentos de evaluación), con medidas repetidas en el último factor.

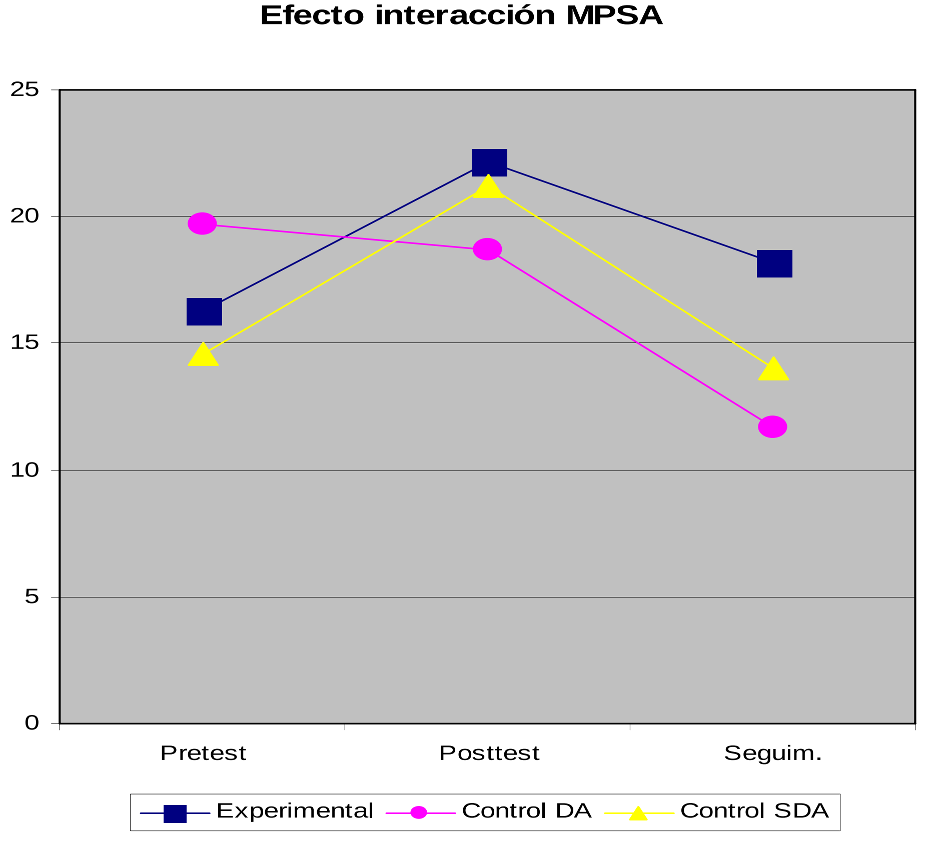
El efecto principal de grupo no resultó estadísticamente significativo ($F_{2,\ 19}$= 0.328, *p*= 0.724, η^2= 0.033), lo que indica que los grupos no presentaban diferencias estadísticamente significativas en su evaluación conjunta de conocimiento, uso y control de estrategias de solución de problemas.

El efecto principal de tiempo ofreció un resultado muy cercano a la significación estadística según la corrección de Bonferroni ($F_{2,\ 38}$= 5.587, *p*= 0.007, η^2= 0.227), además, la eta cuadrado presenta un valor elevado (η^2= 0.227). Las comparaciones por pares a posteriori de Bonferroni indican que se produce un cambio estadísticamente significativo entre la evaluación de posttest y la de seguimiento, tal y como indica la gráfica 11.



Gráfica 11. Efecto principal de tiempo. Variable MPSA.

Finalmente, el efecto de la interacción no resultó estadísticamente significativo ($F_{4,\ 38}$= 1.661, *p*= 0.179, η^2= 0.149). Pese a ello, el elevado valor de la eta cuadrado (η^2= 0.149) indica que es interesante analizar la tendencia de los resultados que aparee en la gráfica 12, dado que, de nuevo, el pequeño tamaño muestral podría estar impidiendo la significatividad estadística.



Gráfica 12. Efecto de interacción. Variable MPSA.

El patrón de resultados muestra que el grupo experimental y el grupo control sin DA se comportan de un modo similar: mejoran sus resultados en el posttest, pero decaen en el seguimiento. Por el contrario, el grupo control con DA empeora sus resultados tanto en el posttest como en el seguimiento.

5.3.7. Actitudes hacia las matemáticas.

Para analizar el efecto del tratamiento en la actitud hacia las matemáticas se ha realizado un análisis de varianza mixto 3 (grupos) X 3 (momentos de evaluación), con medidas repetidas en el último factor.

El efecto principal de grupo no ha resultado estadísticamente significativo ($F_{2, 29}$= 0.719, p= .496, η^2=0.047), por lo que los grupos son estadísticamente equivalentes en promedio en la variable actitud.

El efecto principal del tiempo tampoco ha resultado estadísticamente significativo ($F_{2, 58}$= 0.337, p= 0.715, η^2= 0.011) por lo que la actitud no parece sufrir variación a lo largo de los tres momentos de evaluación.

Finalmente, el efecto de interacción tampoco resultó estadísticamente significativo ($F_{4, 58}$= 0.596, p= 0.667, η^2= 0.039), lo que indica que el tratamiento no resultó efectivo para modificar las actitudes de los estudiantes.

5.3.8. Ansiedad hacia las matemáticas.

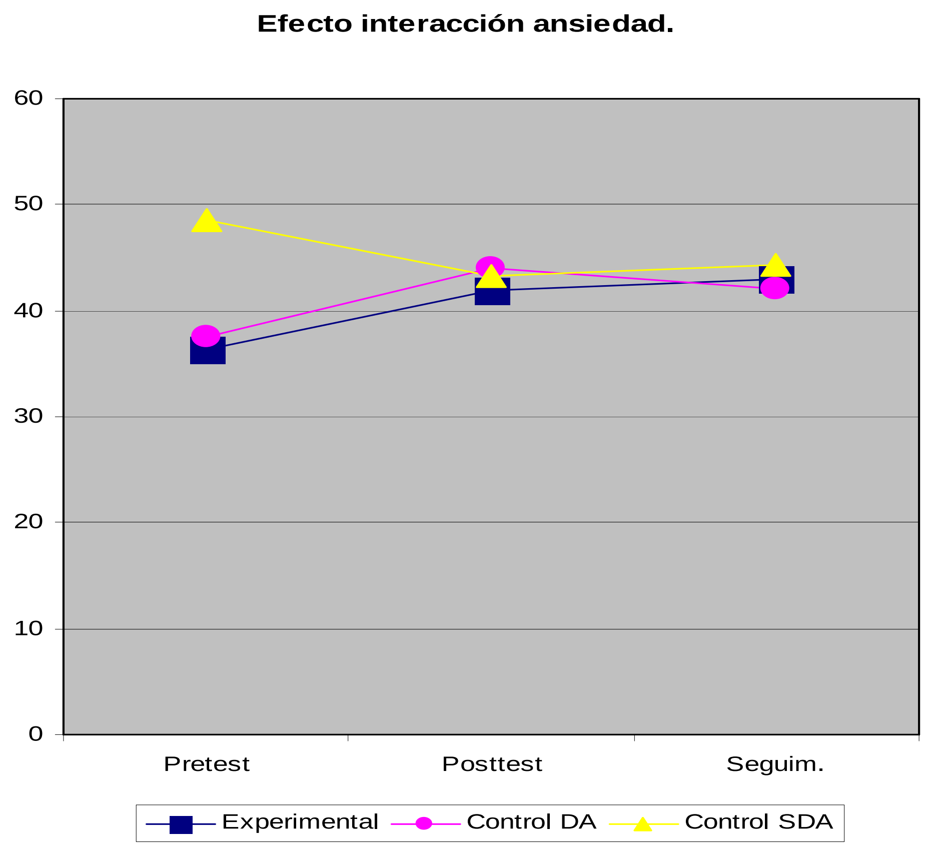
Para analizar el efecto del tratamiento sobre la ansiedad hacia las matemáticas se ha realizado un análisis de varianza mixto 3 (grupos) X 3 (momentos de evaluación), con medidas repetidas en el último factor.

El efecto principal de grupo no resultó estadísticamente significativo ($F_{2,26}$=0.428, p= 0.656, η^2= 0.032), lo que indica que en promedio, los tres grupos puntuaron de un modo similar.

El efecto principal de tiempo tampoco resultó estadísticamente significativo ($F_{2, 52}$=1.164, p= 0.320, η^2= 0.043), lo que sugiere que la ansiedad no difiere significativamente en los tres momentos de evaluación.

El efecto de la interacción tampoco resultó estadísticamente significativo una vez aplicada la corrección de Bonferroni ($F_{4, 52}$= 2.919, p= 0.030, η^2= 0.183).

El elevado valor de la eta al cuadrado (η^2= 0.183) sugiere la conveniencia de analizar el patrón de resultados mostrado en la gráfica 13. Una vez analizado, se deduce que la interacción se debe a que la ansiedad en el grupo control sin DA resultó extremadamente alta en la primera evaluación, mientras que decae en el posttest y el seguimiento, mientras que los dos grupos con DA se comportan de un modo similar. Este resultado nos lleva a pensar en la existencia de algún factor susceptible de alterar los resultados del grupo sin DA en el pretest aumentando desmesuradamente su puntuación en ansiedad.



Gráfica 13. Efecto de interacción. Variable ansiedad hacia las matemáticas.

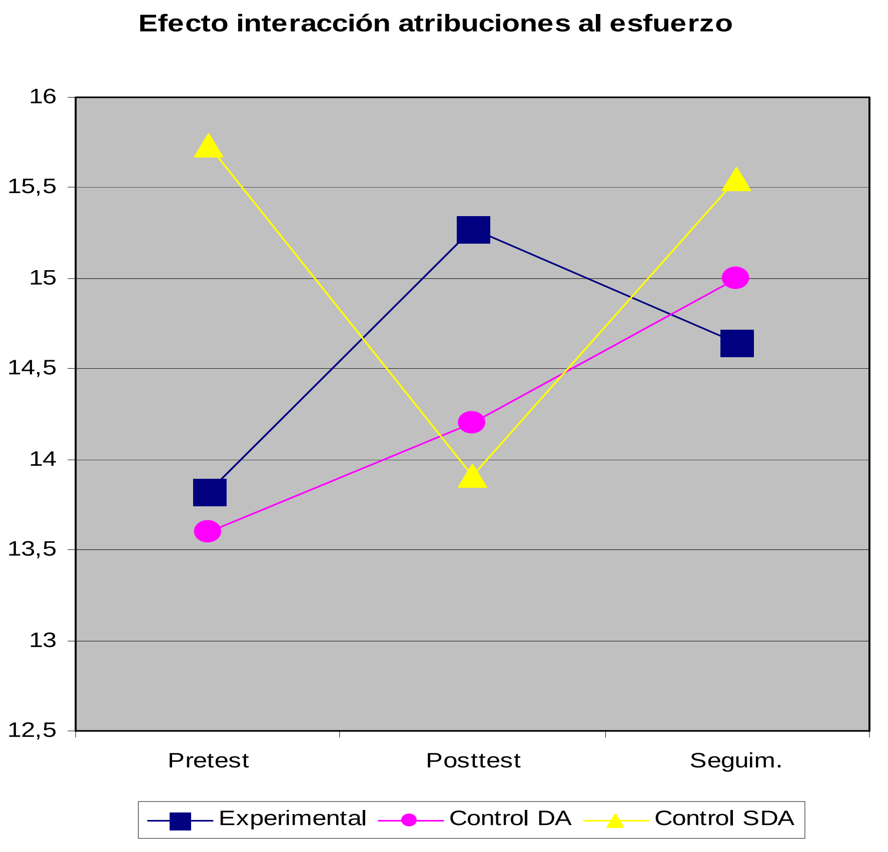
5.3.9.Atribuciones internas al esfuerzo.

Para analizar el efecto del tratamiento en la puntuación en atribuciones internas al esferzo de la escala IAR, se realizó nuevamente un análisis de varianza mixto 3 (grupos) X 3 (momentos de evaluación), con medidas repetidas en el último factor.

El efecto principal de grupo no resultó estadísticamente significativo ($F_{2, 29}$= 0.348, *p*= 0.709, η^2= 0.023), lo que indica que en promedio, los tres grupos se puntuaron de un modo similar en la variable de atribuciones internas al esfuerzo.

El efecto principal de tiempo tampoco resultó estadísticamente significativo ($F_{2, 58}$= 1.365, *p*= 0.263, η^2= 0.045), lo que indica que las puntuaciones en los tres momentos de evaluación fueron similares.

Finalmente, el efecto de la interacción no resultó estadísticamente significativo una vez aplicada la corrección de Bonferroni ($F_{4, 58}$= 2.731, *p*= 0.038, η^2= 0.158), lo que sugiere que el tratamiento no modificó sustancialmente las puntuaciones en la variable de atribuciones internas al esfuerzo. Sin embargo, el elevado valor de la eta al cuadrado (η^2= 0.158) sugiere la conveniencia de analizar el patrón de resultados mostrado en la gráfica 14. Este patrón muestra una tendencia similar en los dos grupos con DA, que empiezan con un bajo rendimiento y mejoran en el posttest y el seguimiento. Sin embargo, el grupo control sin DA obtiene puntuaciones altas en el pretest y el seguimiento, pero sufre una notable bajada en sus puntuaciones en el posttest.



Gráfica 14. Efecto de interacción. Variable atribuciones esfuerzo.

5.3.10. Atribuciones internas indiferenciadas.

Para analizar el efecto del tratamiento en la puntuación en atribuciones internas indiferenciadas de la escala IAR, se realizó nuevamente un análisis de varianza mixto 3 (grupos) X 3 (momentos de evaluación), con medidas repetidas en el último factor.

El efecto principal de grupo no resultó estadísticamente significativo ($F_{2,\ 29}$= 0.435, p= 0.652, η^2= 0.029), lo que indica que los grupos no difieren de modo significativo en la variable de actitudes internas indiferenciadas.

El efecto principal del tiempo, no resultó estadísticamente significativo ($F_{2, 58}$= 4,165, p= 0.020, η^2= 0.126) una vez aplicada la corrección de Bonferroni, lo que indica que las atribuciones internas indiferenciadas no varían en los 3 momentos de evaluación.

Finalmente, el efecto de la interacción tampoco resultó estadísticamente significativo ($F_{4, 58}$= 2.059, p= 0.98, η^2= 0.124), lo que indica que el tratamiento no modificó sustancialmente la puntuación en la escala de atribuciones internas indiferenciadas.

6

Conclusiones y discusión.

6.1. Conclusiones.

El análisis de los resultados nos lleva a plantear 4 conclusiones fundamentales, que hacen referencia a cada uno de los 4 objetivos planteados en la investigación.

El objetivo 1 pretendía comprobar el efecto de la intervención en la resolución de problemas matemáticos de 1, 2, ó 3 pasos que implican las 4 operaciones básicas (problemas similares a los empleados en el entrenamiento). La conclusión que se extrae de este objetivo es la siguiente:

1. El programa de entrenamiento en estrategias cognitivas y metacognitivas de solución de problemas produjo una mejora en la solución de problemas matemáticos tradicionales similares a los empleados en la intervención.

El elevado tamaño del efecto de interacción de la ANOVA entre-sujetos intra-sujetos ($F_{4,58}$= 17.387, $p< 0.001$) indica que el entrenamiento produjo efectos significativos en la variable de solución de problemas. Estos efectos se produjeron en el sentido esperado: en la evaluación de pretest, el grupo control sin DA puntuó significativamente mejor que los dos grupos con dificultades, que obtuvieron resultados muy similares. En el posttest, el grupo experimental obtuvo una importante mejora en sus resultados, llegando a superar ligeramente al grupo sin dificultades del aprendizaje, mientras que el grupo control con DA obtuvo un resultado similar al del pretest y significativamente peor que el de los otros dos grupos. Finalmente, en el seguimiento, el grupo experimental sufrió una ligera caída en sus resultados. Esta caída es esperable, y hasta cierto punto lógica teniendo en cuenta que entre el final del tratamiento y la evaluación de seguimiento pasaron dos meses sin entrenamiento. De todos modos, es un resultado positivo, dado que no hubo diferencias significativas entre el grupo experimental y el grupo control sin DA, mientras que sí que las hubo entre estos dos grupos y el grupo control con DA, que de nuevo obtuvo malos resultados, similares a los obtenidos en pretest y posttest, y por supuesto significativamente peores que el grupo control sin DA y el grupo experimental. Este resultado puede observarse de modo claro en la gráfica 5, y corrobora la hipótesis de que el programa de entrenamiento es beneficioso, y sus efectos se mantienen en períodos de tiempo prolongados, al menos hasta de dos meses.

Esta primera conclusión supone los siguientes avances respecto al corpus de investigación actual:

a) La contrastación del efecto de mantenimiento en el tiempo de los beneficios del programa no es sometido habitualmente a comprobación en las investigaciones que se realizan acerca de intervenciones con alumnos con DAM. En nuestra investigación se demuestra que el entrenamiento en estrategias cognitivas y metacognitivas de solución de problemas sí tiene efectos positivos duraderos en períodos de tiempo razonables.

b) Las investigaciones previas que han puesto en práctica el programa de entrenamiento ¡Resuélvelo! desarrolladas por Marjorie Montague (Montague, 1992; Montague y Boss, 1986; Montague, Applegate y Marquard, 1993) se han llevado a cabo con estudiantes de educación secundaria, mientras que el presente estudio se ha llevado a cabo mayoritariamente con estudiantes de educación primaria, por lo que se prueba que el programa ¡Resuélvelo! puede emplearse con resultados adecuados en estudiantes de menor edad de lo que se había hecho anteriormente.

c) La tendencia habitual en las investigaciones encaminadas a mejorar la solución de problemas matemáticos en estudiantes con DA es que los propios investigadores lleven a cabo la intervención. En el metaanálisis de llevado a cabo por Xin y Jitendra (1999), se observa que de 26 estudios analizados, en 16 de ellos la intervención era llevada a cabo por los investigadores, en 6 de ellos eran tanto profesores como investigadores quienes desarrollaban la intervención, y tan sólo en 9 de ellas eran los profesores los únicos agentes encargados de desarrollar la intervención. El presente estudio muestra que la intervención basada en estrategias cognitivas y metacognitivas para la solución de problemas puede ser llevada a cabo por los propios maestros de los alumnos, por lo que queda probada la validez ecológica de la intervención, y se constata que los agentes que directamente intervienen en la práctica con los alumnos con DA (los maestros de pedagogía terapéutica de los centros) son capaces de desarrollar correctamente la intervención si reciben la formación adecuada.

d) Finalmente, el presente estudio es útil como replicación transcultural, en la que se constata que el entrenamiento empleado en alumnos del sistema educativo de EEUU puede ser igualmente útil en los estudiantes de nuestro sistema educativo. Esta constatación abre una vía para el intercambio de programas de entrenamiento entre ambos sistemas educativos, ya que muestra que las diferencias de cultura escolar entre ambos países son relativamente fáciles de salvar.

El objetivo 2 pretendía comprobar el efecto de la intervención en la resolución de problemas matemáticos “de la vida real”; problemas que incluyen en el enunciado datos irrelevantes, problemas sin solución, etc. La conclusión de este objetivo es la siguiente:

2. **El efecto beneficioso del entrenamiento en estrategias cognitivas y metacognitivas no se hace extensivo a la solución de problemas “problemáticos”, o “de la vida real”.**

La ausencia de efectos significativos de interacción sugiere que el entrenamiento no produjo efectos significativos en la habilidad de los alumnos para resolver problemas de la vida real, notablemente diferentes a los empleados en el entrenamiento.

La interpretación de este resultado debemos buscarla en la comparación de los procesos cognitivos necesarios para resolver los dos tipos de problemas evaluados: los problemas tradicionales, y los problemas de la vida real. Mientras que para resolver los problemas tradicionales las estrategias cognitivas de lectura, parafraseo, visualización, planificación, estimación, cálculo y comprobación; y las estrategias metacognitivas de autoinstrucciones, automonitoreo, y autocomprobación, planteadas en el entrenamiento encuentran una aplicación directa (dado que la solución de los problemas requiere precisamente la aplicación de estas estrategias, tal y como señalan los modelos de solución de problemas descritos en el capítulo 2); en el caso de los problemas “de la vida real”, el tipo de estrategias necesarias para la solución correcta son diferentes, dado que en tres de los cinco problemas planteados no existe una respuesta numérica considerada como correcta, sino que el alumno debe realizar un razonamiento que le lleve a responder que el problema no aporta datos suficientes para su solución; en otro problema, una vez realizada la operación matemática necesaria para la respuesta (una división), para ofrecer el resultado es necesario dar un significado al cociente y también al resto, y únicamente el problema que incluye en su enunciado datos irrelevantes posee una estructura similar a la de los problemas tradicionales, en la que es necesaria la aplicación de las mismas estrategias, con la salvedad de que es necesaria una lectura más profunda y atenta, en la que hay que descartar un dato innecesario para la solución. Por tanto, las estrategias necesarias para resolver correctamente estos problemas están más ligadas a la inteligencia práctica que propone Sternberg (2002) que a las estrategias de los modelos matemáticos mencionados con anterioridad.

Por otro lado, debemos destacar que pese a que el grupo sin DA obtuvo resultados notablemente mejores que los dos grupos con DA ($F_{2,\ 29}$= 3.509, p= 0.043, η^2= 0.195); los resultados de los tres grupos fueron notablemente bajos, tal y como muestran las medias en los tres momentos de evaluación que aparecen en la tabla 7.

La puntuación media máxima de un grupo en alguna de las tres evaluaciones fue el posttest del grupo control sin DA, que resuelve correctamente 1.09 problemas sobre 5, lo que supone un 21.8 % de problemas correctos, mientras que el porcentaje medio de problemas correctos en los problemas tradicionales es notablemente superior, tal y como se muestra en la misma tabla 7.

El porcentaje medio de problemas tradicionales acertados en las tres evaluaciones del grupo control sin DA, y en las intervenciones posteriores a la intervención en el grupo experimental es superior al 60% en todos los casos, y es destacable que incluso los resultados del grupo control con DA y del pretest del grupo experimental es ligeramente superior a los resultados en problemas de la vida real, ya que se sitúa entorno al 30% de problemas correctos.

Las razones de este bajo rendimiento en solución de problemas “de la vida real” no deben buscarse en un déficit generalizado para comprender los razonamientos subyacentes a los problemas planteados, sino más bien en los procedimientos instruccionales con los que estos alumnos están familiarizados (Greer, 1997). Los procedimientos tradicionales de enseñanza de solución de problemas, estereotipados y desligados de la realidad producen que los estudiantes con y sin DA obtengan estos malos resultados en problemas “de la vida real”, malos resultados que tienen consecuencias especialmente negativas para el grupo de alumnos con DA, quienes se encuentran en una situación de mayor desventaja, ya que carecen tanto de los recursos “tradicionales” como de los razonamientos “de la vida real” necesarios para resolver problemas, por lo que sus posibilidades de éxito ante situaciones matemáticas complejas son mínimas. Fuchs y Fuchs (2005) profundizan en este tema y apuntan que los estudiantes con DA tienen menos posibilidades de recibir instrucción adecuada para resolver problemas de la vida real, debido a la creencia de que las matemáticas están estructuradas bajo una secuencia jerárquica, en la que las operaciones de cálculo básicas son prerrequisito necesario para acceder a la solución de problemas; igualmente, Patton et al. (1997) señalan la especial importancia de enseñar a los estudiantes con DAM las habilidades básicas para su desempeño en la vida real (uso del dinero, medición de superficies, cálculo de cantidades de ingredientes de cocina, etc.) y proponen los procedimientos pedagógicos de adición e infusión para incluir estos contenidos en el currículum escolar.

Esta segunda conclusión supone un avance respecto a las investigaciones previas en tanto que habitualmente las investigaciones en este campo no evalúan los posibles efectos de generalización de los aprendizajes, y cuando lo hacen emplean instrumentos de transferencia cercana o local (Xin y Jitendra, 1999). Nuestro resultado pone la voz de alarma en este aspecto y remarca la importancia de evaluar los posibles efectos de transferencia en futuras investigaciones, con la finalidad de comprobar si los resultados obtenidos se limitan exclusivamente a las mismas tareas en que se ha desarrollado el entrenamiento, o si por el contrario, se produce un efecto de transferencia.

El objetivo 3 pretendía comprobar el efecto de la intervención en el conocimiento, uso y control de estrategias cognitivas y metacognitivas de resolución de problemas por parte de los alumnos. La conclusión que se extrae de este objetivo es la siguiente:

3. El entrenamiento no produjo efectos significativos en el conocimiento, uso y control de estrategias de solución de problemas matemáticos.

Pese a ello, el elevado valor de la eta al cuadrado del ANOVA entre-sujetos intra-sujetos en la puntuación global del cuestionario de estrategias de solución de problemas (MPSA-SF) ($\eta^2 = 0.149$) sugiere que el tratamiento sí pudo producir algún efecto en esta variable, aunque su valor estadístico pudo verse reducido por el pequeño tamaño muestral de la investigación. El análisis de la tendencia de este posible efecto, que puede observarse en la gráfica 12, indica que el grupo experimental y el grupo control sin DA se comportan de un modo similar, aumentando sus resultados en el posttest y disminuyendo en el seguimiento, mientras que el grupo control con DA sigue un patrón errático en el que empeora progresivamente sus resultados en el posttest y en el seguimiento.

El cuestionario MPSA (ver ANEXO IV) presenta el formato de una entrevista estructurada en la que se pregunta al sujeto acerca de su conocimiento de las 7 estrategias cognitivas empleadas en el entrenamiento del programa de intervención (lectura, parafraseo, visualización, planificación, estimación, cálculo y comprobación), así como del grado de uso y autocomprobación o control de estas estrategias, con lo que globalmente el cuestionario otorga una puntuación a las estrategias cognitivas y metacognitivas de solución de problemas. Por ello es razonable pensar que la puntuación de este cuestionario refleje en cierta manera el grado de importancia que los alumnos otorgan a las estrategias cognitivas y metacognitivas de solución de problemas, dado que un elevado uso y control de estrategias, debería implicar que el alumno otorga mayor importancia y valora en mayor medida estos procesos cognitivos y metacognitivos, y por ello realiza el esfuerzo de aplicarlas y comprobarlas, mientras que una puntuación baja en conocimiento, uso y control de estrategias debebería significar que el alumno no valora estas estrategias, y por ello no realiza esfuerzos en aumentar el conocimiento de nuevas estrategias, aplicarlas y comprobarlas cuando resuelve problemas. Esta interpretación es congruente con el modelo de estrategias de aprendizaje propuesto por (Zimmerman. 2000) en el que a los tres componentes clásicos de la metacognición de conocimiento, uso y control, se añade un cuarto componente: la valoración de estas estrategias, es decir, el grado de importancia que el sujeto otorga al conocimiento, automonitoreo y autosupervisión de las estrategias, lo que facilita el conocimiento condicional entorno al uso de estrategias.

Si otorgamos este significado a la puntuación del cuestionario MPSA, y asumimos que en cierta manera refleja el grado de importancia que los sujetos otorgan al conocimiento uso y control de estrategias de solución de problemas, la tendencia de los resultados sugiere que el grupo control con DA disminuye progresivamente su valoración de las estrategias conforme avanza el paso del tiempo. Este resultado es congruente con investigaciones previas que concluyen que uno de los principales déficits de los estudiantes con dificultades del aprendizaje radica en la falta de uso de estrategias de aprendizaje adecuadas (Montague y Applegate, 2000), lo que explicaría el deterioro progresivo en la puntuación de este grupo.

Por el contrario, tanto el grupo experimental como el grupo control sin DA presentan un patrón cambiante, en el que aumentan su puntuación en el posttest, pero posteriormente la disminuyen en el seguimiento. El primer dato, el aumento de la puntuación en el posttest es esperable, y debe reflejar, en el caso del grupo control con DA una mejora esperable por el paso del tiempo, la instrucción en la clase regular de matemáticas, y la experiencia en la resolución de problemas. En el caso del grupo experimental, esta mejora se debe probablemente al efecto del tratamiento, dado que éste se basaba precisamente en la instrucción de las estrategias cognitivas y metacognitivas de solución de problemas, y dedicaba un tiempo importante en las primeras sesiones a concienciar a los alumnos de la importancia y la conveniencia de emplear estas estrategias.

El segundo dato comentado anteriormente, el descenso de las puntuaciones del grupo control sin DA y del grupo experimental en el seguimiento es, en principio, menos esperable, máxime si tenemos en cuenta que el resultado en solución de problemas no varía sustancialmente en el paso del posttest al seguimiento, es decir, que ambos grupos resuelven correctamente un número de problemas muy similar en ambos momentos. Desde nuestro punto de vista este descenso en la puntuación del cuestionario MPSA puede indicar en cierto modo que los alumnos otorgan menos importancia y valoran en menor medida el uso y control de estrategias cognitivas y metacognitivas de solución de problemas, y por tanto su puntuación en el cuestionario decae. Este descenso podría ser explicado por el fenómeno de automatización o mecanización en el empleo de estrategias cognitivas; es decir, el uso y autoevaluación de estrategias ya no sería un esfuerzo consciente realizado por el alumno, sino que estaría mecanizado hasta el punto de que el alumno las aplicaría de modo automático, en ocasiones incluso inconsciente, lo que sería congruente con una baja puntuación en el MPSA si es que otorgamos a este cuestionario el significado de valoración o importancia que los alumnos otorgan al uso de estrategias. Pese a ello, esta es sólo una explicación teórica e hipotética, que debe ser sometida a prueba por futuras investigaciones.

Por ello, desde nuestro punto de vista la aportación de esta última conclusión no es en sí una conclusión robusta, sino el planteamiento de una hipótesis que debe ser sometida a posterior comprobación: que la instrucción en estrategias cognitivas y metacognitivas produce, a corto plazo, un aumento de la importancia que los alumnos otorgan a estas estrategias, pero a largo plazo, una vez que se han aprendido e interiorizado estas estrategias, y se usan de modo inconsciente y automático, la importancia que estos alumnos les otorgan decrece notablemente, hasta un punto similar a los niveles previos a la instrucción.

Finalmente, el objetivo 4 planteaba comprobar el efecto de la intervención en diferentes variables afectivas relacionadas con las matemáticas: actitud hacia las matemáticas, ansiedad hacia las matemáticas, y atribuciones al rendimiento matemático. La conclusión que se extrae de este objetivo es la siguiente:

4. Finalmente, el entrenamiento en estrategias cognitivas y metacognitivas no produjo efectos significativos en las variables afectivo-motivacionales evaluadas: actitudes hacia las matemáticas, ansiedad ante las matemáticas, y las atribuciones al rendimiento matemático.

Este resultado sugiere que aunque el rendimiento en solución de problemas mejore de un modo más que notable, ello no produce un efecto de arrastre directo que haga mejorar automáticamente las actitudes, ansiedad y estilo atribucional de los estudiantes con DA.

Numerosos trabajos han puesto de manifiesto previamente las carencias de los estudiantes con DAM en cuanto a factores afectivo-motivacionales tales como la ansiedad hacias la matemáticas, el autoconcepto académico, patrones atribucionales desadaptativos, o actitudes negativas hacia aspectos académicos, y especialmente matemáticos (González-Pienda, Núñez, González-Pumariega, Álvarez et al., 2000; Hanich y Jordan, 2004; Lackaye, Margalit, Ziv, y Ziman, 2006; Miranda, García y Rosel, 2004; Stone y May, 2002).

En nuestra opinión, estas variables no resultan fáciles de mejorar en intervenciones breves como la nuestra (15 sesiones de una hora de duración). Esta cantidad de tiempo parece insuficiente para influir en aspectos de un arraigo tan profundo como las creencias sobre la propia capacidad, máxime cuando la intervención no tiene como objetivo central la manipulación de estos elementos.

Esta conclusión supone un aporte al corpus teórico previo en tanto que corrobora la necesidad de incluir módulos específicos encaminados a manipular las variables afectivo-motivacionales si es que se desea influir sobre ellas, dado que se descarta el efecto de arrastre y mejora conjunta de variables de rendimiento y afectivo-motivacionales. Estudios previos sí han conseguido un efecto positivo en diferentes variables afectivo-motivacionales. Sin embargo, estas mejoras se han conseguido aplicando módulos específicos encaminados a manipular este tipo de variables. Por ejemplo, Miranda, Arlandis y Soriano (1997), compararon los efectos de un entrenamiento en solución de problemas matemáticos en dos grupos de alumnos con DA, de los cuales tan sólo uno recibió un componente adicional de reentrenamiento atribucional. Los resultados de la comparación indicaron que ambos grupos mejoraron su rendimiento en SP, sin embargo, tan sólo el grupo que recibió reentrenamiento atribucional aumentó sus atribuciones internas al esfuerzo, actitudes hacia las matemáticas y autoconcepto. Nuestro trabajo obtiene un resultado similar, ya que corrobora la necesidad de manipular estas variables para obtener mejoras, descartando la posibilidad de que una mejora en el rendimiento implique esta misma mejora en variables afectivas.

6. 2. Sugerencias para futuras investigaciones.

Los resultados y conclusiones de la presente investigación abren numerosas nuevas vías de investigación que plantean cuestiones e inquietudes en el área. Estas nuevas vías de investigación se resumen en las siguientes 4 sugerencias:

1. Una de las principales conclusiones que se desprenden de nuestra investigación es que los estudiantes con DASP presentan un déficit en estrategias cognitivas y metacognitivas de solución de problemas, aunque si éste es compensado mediante un entrenamiento específico, el rendimiento en solución de problemas de los EDASP se iguala con el de sus compañeros sin DA.

Por otra parte, en el capítulo 1, se ha comentado que uno de los déficits de los EDASP más extensamente documentados es el déficit en memoria de trabajo. Sin embargo, nuestra intervención no estaba en ningún caso encaminada a manipular esta variable, pese a lo que el rendimiento de los EDASP se ha igualado con el de los alumnos sin DA.

Por ello consideramos que sería interesante calibrar el peso o la contribución que aportan respectivamente el déficit en MT y el déficit en estrategias a las DASP, ya que creemos que de nuestros resultados puede deducirse de un modo indirecto que la contribución del déficit estratégico al diagnóstico de DASP debe ser importante, y este déficit es capaz de explicar al menos parcialmente las dificultades para solucionar problemas, al margen de los posibles déficits en MT.

Desde nuestro punto de vista, conseguir delimitar exactamente el peso de los diferentes déficits que presentan los EDASP, así como ahondar en el conocimiento en que se interrelacionan ambos tipos de déficits (déficit en MT y déficit estratégico), sería un avance en el área, ya que se plantearía una referencia clara para el diseño de futuras intervenciones encaminadas a la mejora de los procedimientos de solución de problemas.

2. Una segunda sugerencia clara para futuras investigaciones se deriva de los dos resultados más negativos de nuestra investigación: los efectos del entrenamiento en la solución de problemas de la vida real, y en las variables afectivo-motivacionales evaluadas. Esta sugerencia consiste en la necesidad de incluir en futuras intervenciones módulos de mejora de las variables afectivo-motivacionales y de problemas “de la vida real”. Consideramos que es necesario aclarar si, en efecto, la inclusión de estos módulos en el entrenamiento produce una mejora en todas las variables

evaluadas. Por tanto proponemos para posteriores trabajos plantear como objetivo la implementación de módulos de entrenamiento específicamente diseñados para conseguir mejoras en las dos variables cuyos resultados no han sido satisfactorios en nuestra investigación.

Creemos por tanto que nuestro trabajo debe servir como señal de alarma para futuras investigaciones que pretendan influir sobre estas variables, ya que se ha constatado la necesidad de contemplar estas variables en el entrenamiento de un modo más explícito y sistemático del que se ha hecho en nuestra investigación si es que se pretenden modificar.

3. Una tercera sugerencia que se deriva directamente de los resultados de nuestra investigación es la necesidad de evaluar el efecto del entrenamiento en el conocimiento, uso y control de estrategias de solución de problemas con un tamaño muestral superior, para averiguar si el alto valor de nuestra eta al cuadrado realmente sugiere un efecto del tratamiento, y si se corrobora la hipótesis que lanzamos en la cuarta conclusión: la hipótesis de que la interiorización y automatización de las estrategias de solución de problemas produce que los alumnos otorguen menor importancia al uso y control de estrategias, y por tanto disminuya su puntuación en cuestionarios como el MPSA.

Dado que el tamaño muestral de nuestro trabajo era notablemente limitado, consideramos interesante que futuras investigaciones repliquen nuestro estudio con tamaños muestrales mayores, diversifiquen los instrumentos y las técnicas de evaluación sobre conocimiento, uso y control de estrategias, así como la valoración de esas estrategias, y sometan a comprobación la hipótesis anteriormente comentada sobre el fenómeno de automatización de uso de estrategias.

4. Finalmente, planteamos como sugerencia para futuras investigaciones la comparación de diferentes variaciones de este mismo entrenamiento. El modelo planteado por Lucangeli y colaboradores (Lucangeli, Tressoldi, y Cendron, 1998,a) planteado en el capítulo 2, indica que no todos los procesos cognitivos aportan la misma contribución al proceso de solución, por lo que consideramos interesante que futuras investigaciones comparen variaciones del programa ¡Resuélvelo!, eliminando diferentes estrategias para averiguar si el programa sigue siendo efectivo sin ellas, u otorgando mayor peso e importancia durante la intervención a otras estrategias. Una posible propuesta la encontramos en el modelo de Lucangeli, en el que no se incluye la estrategia de estimación, y se otorga una posición jerárquicamente superior a la estrategia de comprensión.

Desde nuestro punto de vista nuestra investigación nos indica que el entrenamiento es efectivo para mejorar el rendimiento de los alumnos en solución de problemas de matemáticas; sin embargo, resta por ver qué partes del entrenamiento son las más efectivas, si todas las estrategias del entrenamiento tienen la misma contribución a la mejora del rendimiento, e incluso si se podría incluir alguna otra estrategia que contribuyera a mejorar la eficacia del programa.

6.3. Limitaciones del estudio.

El presente trabajo presenta varias limitaciones que pueden suponer un menoscabo en el alcance de las conclusiones. Apuntamos 3 de estas limitaciones:

1. En primer lugar, el reducido tamaño muestral de la investigación (11 alumnos en cada grupo) supone una importante limitación en cuanto a la validez de los resultados, así como un impedimento para obtener resultados estadísticamente significativos robustos. Para tratar de subsanar esta limitación, en los ANOVAs se ha calculado la eta al cuadrado, con la intención de poder calibrar el tamaño del efecto del tratamiento al margen de su significación estadística.

Debemos apuntar que este pequeño tamaño muestral es debido a la dificultad para encontrar alumnos con el perfil del grupo experimental (bajo rendimiento en solución de problemas, pero rendimiento adecuado en comprensión lectora y cálculo). Al inicio de la investigación nos propusimos seleccionar alumnos específicamente con este perfil, ya que dado que el entrenamiento estaba exclusivamente encaminado a mejorar la solución de problemas matemáticos, consideramos que la mejor forma de eliminar variables que pudieran contaminar los resultados era seleccionar alumnos cuyo déficit se limitara al área en que pensábamos intervenir. Sin embargo, ello ha presentado una limitación, dado que finalmente el tamaño muestral conseguido ha sido demasiado reducido para obtener conclusiones que sean valiosas en términos de su poder de generalización.

2. En segundo lugar, consideramos que el hecho de que el entrenamiento fuera puesto en práctica por diferentes personas en diferentes aulas simultáneamente puede reducir la validez de nuestros resultados. Esta limitación trata de ser paliada de dos modos: a) mediante una formación rigurosa de los profesionales que realizan la intervención, para asegurar que ésta se desarrolla del modo más homogéneo posible, y para reducir al máximo factores externos derivados del estilo docente de cada profesional, y b) mediante las visitas del investigador a las aulas durante las sesiones de intervención y el feedback proporcionado a los maestros una vez finalizada la sesión.

En nuestra opinión esta limitación es un hándicap que debíamos asumir si por otro lado queríamos conseguir una cierta validez ecológica del tratamiento, ya que nuestra intención era que los agentes encargados de realizar la intervención fueran los mismos que intervienen directamente con los alumnos con DA.

3. En tercer lugar, una vez analizados los resultados observamos un aspecto francamente mejorable en el resultado referido a la no presencia de transferencia de mejora en solución de problemas a problemas de la vida real. La amplia diferencia de resultados entre problemas tradicionales y problemas de la vida real obtenidos por el grupo experimental y el grupo control sin DA nos indica que la distancia entre los constructos evaluados es muy amplia. Por ello, consideramos que el cuestionario de problemas de la vida real es útil para calibrar el efecto de transferencia lejana que produce el entrenamiento, pero no nos aporta información acerca de

la posible transferencia cercana que pueda tener dicho entrenamiento, y creemos que la no inclusión de un cuestionario de problemas situados en un nivel de “realismo” intermedio, no tan diferentes de los problemas tradicionales, podría haber sido útil para evaluar esta transferencia cercana.

La justificación de la no inclusión de más cuestionarios en la investigación responde a razones eminentemente prácticas, fundamentalmente basadas en el elevado número de cuestionarios incluidos en las baterías de evaluación, y en el impacto que estas evaluaciones tienen en la desarrollo normal de la jornada escolar de los alumnos.

7

Referencias bibliográficas.

Alarcón, M., DeFries, J.C., Light, J.G., y Pennington, B.F. (1997). A twin study of mathematics disability, *Journal of Learning Disabilities, 30,* 617-623.

Asociación de Psiquiatría Americana (2002). DSM-IV-R-TR. *Manual diagnóstico y estadístico de los trastornos mentales*. Barcelona: Masson.

Arlandis, P. (1992). *Estudiantes con dificultades en la resolución de problemas de matemáticas. Efectos de la instrucción en estrategias sobre el aprendizaje y la conducta*. Tesis Doctoral. Valencia: Universidad de Valencia. Facultad de Psicología.

Ashcraft, M.H. (1992). Cognitive arithmetic: a review of data and theory. *Cognition, 44,* 75-106.

Bender, W.N., Rosenkrans, C.B., y Crane, M.K. (1999). Stress, depression, and suicide among students with learning disabilities. Assesing the risk. *Learning Disability Quarterly, 22,* 143-156.

Bender, W.N., y Wall, M.E. (1994). Social-emotional development of students with learning disabilities. *Learning Disability Quarterly, 17,* 323-341.

Borkowski, J.G. (1992). Metacognitive theory: a framework for teaching literacy, writing, and math skills. *Journal of Learning Disabilities, 25,* 253-257.

Bryant, D.P., Bryant, B.R., Hammill, D.D. (2000). Characteristic behaviours of students with learning disabilities who have teacher-identified math weakness, *Journal of Learning Disabilities, 32,* 168-177.

Butler, D.L., Beckingham, B., Lauscher, H.L. (2005). Promoting learning by eight-grade students struggling in mathematics: a report of three case studies. *Learning Disabilities Research & Practice, 20,* 156-174.

Butler, F.M., Miller, S.P., Crehan, K., Babbit, B., y Pierce, T. (2003). Fraction instruction for students with mathematics disabilities: comparing two teaching sequences. *Learning Disabilities Research & Practice, 18,* 99-111.

Butterworth, B. (2005). The development of arithmetical habilities. *Journal of Child Psychology and Psychiatry, 46,* 3-18.

Cai, J. (2004). Why do U.S. and Chinese students think differently in mathematical problem solving? Impact of early algebra learning and teachers' beliefs. *The Journal of Mathematical Behavior, 23,* 135-167.

Cai, J., y Hwang, S. (2002). Generalized and generative thinking in US and Chinese students' mathematical problem solving and problem posing. *The Journal of Mathematical Behavior, 21,* 401-421.

Case, L.P., Harris, K.R., Graham, S. (1992). Improving the mathematical problem-solving skills of students with learning disabilities: self-regulated strategy development. *The Journal of Special Education, 26,* 1-19.

Canals, R. (1988). *Proves psicopedagògiques d'Aprenentatges Instrumentals*. Barcelona: Teide.

Chan, L.K. (1994). Relationship of motivation, strategic learning, and reading achievement in Grades 5, 7, and 9. *Journal of Experimental Education, 62,* 319-339.

Crandall, V.C., Katkovsky, W., y Crandall, V.J. (1965). Children's beliefs in their own control of reinforcements in intellectual-academic achievement situation. *Child Development, 36,* 91-109.

D'amato, R.C., Dean, R.S., y Rhodes, R.L.(1998). Subtyping children's learning disabilities with neuropsychological, intellectual, and achievement measures, *International Journal of Neuroscience, 96,* 107-125.

Davis, J.T., Parr, G., y Lan, W. (1997). Differences between learning disability subtypes classified using the revised Woodcock-Jhonson Psycho-Educational Battery, *Journal of Learning Disabilities, 30,* 346-352.

Desoete, A. Roeyers, H. (2002). Off-line metacognition – a domain specific retardation in young children with learning disabilities? *Learning Disability Quarterly, 25,* 123-139.

Desoete, A., Roeyers, H., Buysse, A., y De Clercq, A. (2002). Assessment of metacognitive skills in young children with mathematics learning disabilities. En J. Carlson (Series Ed.), y D. Van der Aalsvoort, W. C. M. Sesing, & A. J. J. M. Ruijssenaars (Vol. Eds.), *Advances in cognition and educational practice: Vol. 7. Learning potential assessment and cognitive training: Actual research and perspectives in theory building and methodology* (pp. 307-333). Amsterdam: JAI Press/Elsevier Science.

Efeklides, A., Kiorpelidou, K., Kiosseoglou, G. (2006). Worked-out examples in mathematics: effects on performance and metacognitive experiences. En A. Desoete, y M. Veenman (Eds.) *Metacognition in Mathematics Education*. Nueva York: Nova Science Publisher.

Elbaum, B. (2002). The self-concept of students with learning disabilities: a meta-analysis of comparisons across different placements. *Learning Disabilities Research & Practice, 17,* 216-226.

Flavell, J.H. (1999). Cognitive development: children's knowledge about the mind. *Annual Review of Psychology, 50,* 21-45.

Fleischner, J.E., Nuzum, M.B., Marzola, E.S.(1987). Devising an instructional program to teach arithmetic problem-solving skills to students with learning disabilities. *Journal of Learning Disabilities, 20,* 214-217.

Fisher, S.E. (2003). Isolation of the genetic factors underlying speech and language disorders. En R. Plomin, J.C. DeFries, I.W. Craig, y P.McGuffin (Eds.), *Behavioral Genetics in the Postgenomic Era* (pp.205-226). Washingon D.C: APA Books.

Fuchs, L.S., y Fuchs, D. (2002). Mathematical problem solving profiles of students with mathematics learning disabilities with and without reading disabilities. *Journal of Learning Disabilities, 35,* 563-573.

Fuchs, L.S., y Fuchs, D. (2005). Enhancing mathematical problem solving for students with disabilities. *The Journal of Special Education, 39,* 45-57.

García, J., González, D. (1996). *Batería Psicopedagógica Evalúa*. Madrid: EOS.

García, R., Miranda, A., y Fortes, M.C. (1999). *Análisis de los conocimientos básicos adquiridos por los estudiantes en 4º de primaria en matemáticas*. Ponencia presentada al Congreso Internacional de Psicología y Educación: Orientación e intervención Psicopedagógica. Santiago de Compostela.

Geary, D. C. (2003). Learning Disabilities in Arithmetic: problem solving differences and cognitive deficits. En H.L. Swanson, K. R. Harris, y S. Graham (Eds.). *Handbook of Learning Disabilies*, (pp. 199-212). Nueva York: Guilford Press.

Gersten, R., Jordan, N.C., y Flojo, J.R. (2005). Early identification and interventions for students with mathematics difficulties. *Journal of Learning Disabilities, 38,* 293-304.

González-Pienda, J., Núñez, J.C., González-Pumariega, S., Álvarez, L., Roces, C., García, M., González, P., Cabanach, R., y Valle, A. (2000). Autoconcepto, proceso de atribución causal y metas académicas en niños con y sin dificultades de aprendizaje. *Psicothema, 12,* 548-556.

Greer, B. (1997). Modelling reality in mathematics classrooms: the case of word problems. *Learning and Instruction, 7,* 293-307.

Gross-Tsur, V., Manor, O., Shalev, R.S. (1996). Developmental dyscalculia: Prevalence and demographic features. *Developmental Medicine & Child Neurology, 38,* 25-33.

Guoliang, Y., y Pangpang, Z.(2003). Visual-spatial representations and mathematical problem solving among mathematical learning disabilities. *Acta Psychologica Sinica, 35,* 643-648.

Haggarty, L., y Pepin, B. (2002). An Investigation of Mathematics Textbooks and their Use in English, French and German Classrooms: who gets an opportunity to learn what? *British Educational Research Journal, 28,* 567-590*.*

Hall, L.A. (2005). Comprehending expository text: promising strategies for struggling readers and students with reading disabilities? *Reading Research and Instruction, 44,* 75-95.

Hammouri, H.A. (2004). Attitudinal and motivational variables related to mathematics achievement in Jordan: findings from the Third Internacional Mathematics and Science Study (TIMMS). *Educational Research, 46,* 241-257.

Hanich, L.B., Jordan, N.C. (2004). Achievement-related beliefs of third-grade children with mathematics and reading difficulties. *Journal of Educational Research, 97*, 227-233.

Hanich, L.B., Jordan, N.C., Kaplan, D., y Dick, J. (2001). Performance across different areas of mathematical cognition in children with learning disabilities. *Journal of Educational Psychology, 93,* 615-626.

Hutchinson, N.L. (1993). Effects of cognitive strategy instruction on algebra problem solving of adolescents with learning disabilities. *Learning Disability Quarterly, 16,* 34-63.

Jitendra, A., Di Pipi, C.M., Perron-James, N. (2002). An exploratory study of schema-based word-problem-solving instruction for middle school students with learning disabilities: an exphasis on conceptual and procedural understanding. *Journal of Special Education, 36,* 23-38.

Jitendra, A., Griffin, C., McGoey, K., Gardill, M.C., Bhat, P., Riley, T.(2002). Effects of mathematical word problem solving by students at risk or with mild disabilities. *Journal of Educational Research, 91,* 345-355.

Jitendra, A., Hoff., K., Beck, M.M.(1999). Teaching middle school students with learning disabilities to solve word problems using a schema based approach. *RASE: Remedial and Special Education, 20,* 50-64.

Jordan, N.C., y Hanich, L.B. (2000). Mathematical thinking in second-grade children with differents forms of LD. *Journal of Learning Disabilities, 33,* 567-578.

Jordan, N.C., Hanich, L.B., Kaplan, D. (2003). Arithmetic Fac. mastery in young children: a longitudinal investigation. *Journal of Experimental Child Psychology, 85,* 103-119.

Kamann, M. P. y Wong, B.Y.L. (1993). Inducing adaptive coping self-statements in children with learning disabilities through self-instruction training. *Journal of Learning Disabilities, 26,* 630-638.

Keeler, M.L., Swanson, H.L.(2001). Does strategy knowledge influence working memory in children with mathematical disabilities? *Journal of Learning Disabilities, 34,* 418-434.

Kintsch, W. (1998). *Comprehension: a paradigm for cognition*. Cambridge: Cambridge University Press.

Knopik, V.S., Alarcón, M., De Fries, J.C. (1997). Comorbidity of mathematics and reading deficits: Evidence for a genetic etiology. *Behavior Genetics, 27,* 447-453.

Lackaye, Margalit, M., Ziv, O., Ziman, T. (2006). Comparisons of Self-Efficacy, Mood, Effort, and Hope Between Students with Learning Disabilities and Their Non-LD-Matched Peers. *Learning Disabilities Research & Practice, 21,* 111-121.

Lewis, C., Hitch, G.J., Walker, P.(1994). The prevalence of specific arithmetic difficulties and specific reading difficulties in 9-to 10-year old boys and girls. *Journal of Child Psychology & Psychiatry & Allied Disciplines, 35,* 283-292.

Light, J.G., y De Fries, J.C. (1995). Comorbidity of reading and mathematics disabilities: Genetic and environmental etiologies. *Journal of Learning Disabilities, 28,* 96-106.

Lucangeli, D., Cornoldi, C., y Tellarini, M. (1998). Metacognition and learning disabilities in mathematics. En Scruggs, T.E., Mastropieri, M.A. (Eds.) *Advances in learning and behavioral disabilities, Vol 12, (*p 219-244). Nueva York: Nova Science Publisher.

Lucangeli, D., Tressoldi, P.E., Cendron, M. (1998, a). *SPM: Test delle abilità di soluzione dei problemi matematici*. Trento: Erickson.

Lucangeli, D., Tressoldi, P.E., Cendron, M. (1998, b). Cognitive and metacognitive abilities involved in the solution of mathematical word problems: validation of a comprehensive model. *Contemporary Educational Psychology, 23,* 257-275.

Maccini, P., y Hughes, C.A. (2000). Effects of a problem-solving strategy on the introductory algebra performance of secondary students with learning disabilities. *Learning Disabilities Research & Practice, 15,* 10-21.

Maccini, P., y Ruhl, K.L. (2000). Effects of graduated instructional sequence on the algebraic substraction of integers by secondary students with learning disabilities. *Education & Treatment of Children, 23,* 465-489.

Marco, R., Miranda, A., Simó, P., Soriano, M. (2006). *Instructional efectiveness of technology for training students with learning disabilities in cognitive strategies for problem solving*. 30th Annual IARLD Conference: Boulder, Colorado.

Mayer, R.E. (2002). *Psicología de la educación. El aprendizaje en las áreas de conocimiento*. Madrid: Prentice Hall.

Mazzoco, M.M, Myers, G.F. (2003). Complexities in identifying and defining mathematics learning disability in primary school-age years. *Annals of Dyslexia, 53,* 218-253.

McDermott, P.A., Goldberg, M.M., Watkins, M.W., Stanley, J.L., Glutting, J.J. (2006). A nation wide epidemiologic modelling study of LD: risk, protection, and unintended impact. *Journal of Learning Disabilities, 39,* 230-251.

McLean, J.F., Hitch, G.J.(1999). Working memory impairments in children with specific arithmetic learning disabilities. *Journal of Experimental Child Psychology, 74,* 240-260.

McLauglhin, S.M., Knoop, A.J., Holliday, G.A. (2005). Differentiating students with mathematics difficulty in college: mathematics disabilities vs. no diagnosis. *Learning Disability Quarterly, 28,* 223-232.

MECD (2006). *Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria.*

Meravech, Z.R., Tabuk, A., Sinai, O. (2006). Meta-cognitive instruction in mathematics classrooms: effects on the solution of diferent kinds of problems. En A. Desoete, y M. Veenman (Eds.) *Metacognition in Mathematics Education*. Nueva York: Nova Science Publisher.

Miller, S.P. y Mercer, C.D. (1997). Educational aspects of, mathematics disabilities. *Journal of Learning Disabilities, 30*, 48-56.

Miranda, A., Acosta, G., Tárraga, R., Fernández, I., Rosel, J. (2005). Nuevas tendencias en la evaluación de las dificultades de aprendizaje de las matemáticas. El papel de la metacognición. *Revista de Neurología, 40 ,* 97-102.

Miranda, A., Arlandis, P., y Soriano, M. (1997). Instrucción en estrategias y entrenamiento atribucional: efectos sobre la resolución de problemas y el autoconcepto de los estudiantes con dificultades en el aprendizaje. *Infancia y Aprendizaje, 80,* 37-52.

Miranda, A. y Fortes, M.C. (1989). Aplicación de las técnicas cognitivo comportamentales a la resolución de problemas de matemáticas. *Revista de Psicología de la Educación,* 1, 57-72.

Miranda, A., García, R., Rosel, J. (2004). *Una comparación del estilo atribucional de estudiantes con dificultades de comprensión lectora y estudiantes con dificultades en solución de problemas*. 1º Congreso Vasco de Dificultades del Aprendizaje de la Lect-Escritura, Bilbao.

Miranda, A., García, R., Marco, R., Rosel, J. (2006). The role of metacognitive beliefs system in learning disabilities in mathematics. Implications for intervention. En A. Desoete, y M. Veenman (Eds.) *Metacognition in Mathematics Education*. Nueva York: Nova Science Publisher.

Montague, M. (1992). The effects of cognitive and metacognitive strategy instruction on mathematical problem solving of middle school students with learning disabilities. *Journal of Learning Disabilities, 25,* 230-248.

Montague, M. (1997). Cognitive strategy instruction in mathematics for students with learning disabilities. *Journal of Learning Disabilities, 30,* 164-177.

Montague, M. (2003). Solve it! A practical approach to teaching mathematical problem solving skills. Reston: Exceptional Innovations.

Montague, M., Applegate, B. (1993). Mathematical problem-solving characteristics of middle school students with learning disabilities. *The Journal of Special Education, 27,* 175-201.

Montague, M., Applegate, B., Marquard, K. (1993). Cognitive strategy instruction and mathematical problem solving performance in students with learning disabilities. *Learning Disabilities Research and Practice, 8,* 223-232.

Montague, M., Applegate, B. (2000). Middle school students' perceptions, persistence and performance in mathematical problem solving. *Learning Disability Quarterly, 23,* 215-227.

Montague, M., y Bos, C.S. (1986). The effect of cognitive strategy training on verbal math problem solving performance of learning disabled adolescents. *Journal of Learning Disabilities, 19,* 26-33.

Montague, M., Bos, C.S., Doucette, M. (1991). Affective, cognitive, metacognitive attributes of eight-grade mathematical problem solvers. *Learning Disabilities Research and Practice, 6,* 145-151.

Montague, M., Van Garderen, D.(2003). A cross-sectional study of mathematics achievement, estimation skills, and academic self-perception in students of varying ability. *Journal of Learning Disabilities, 36,* 437-448.

Morris, D.W., Robinson, L., Turic, D., Duke, M., Webb, V., Milham, C., Hopkin, E., Pound, K., Fernando, S., Easton, M., Hamshere, M., Williams, N., McGuffin, P., Owen, M.J., O'Donovan, M.C., Williams, J. (2000). Family-based association mapping provides evidence for reading disability on chromosome 15q. *Human Molecular Genetics, 9,* 843-848.

National Council of Teacher of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston: Author.

National Council of Teacher of Mathematics (2000). *Principles and NCTM standards for school mathematics*. Reston: Author.

National Joint Committee on LD (1988). *Letter to NJCLD Member Organizations*, Washington, DC: Author.

Palladino, P., Poli, P., Masi, G., Marcheschi, M. (2000). The relation between metacognition and depressive symptoms in preadolesents with learning disabilities: data in support of Borkowski's model. *Learning Disabilities Research and Practice, 15,* 142-148.

Patton, J.R., Cronin, M.E., Basset, D.S., Koppel, A.E. (1997). A life skills approach to mathematical instruction: preparing students with learning disabilities for the real-life math demands of adulthood. *Journal of Learning Disabilities, 30,* 178-187.

Pintrich, P.R. (2003). A motivational science perspectiva on the role of student motivation in learning and teaching contexts. *Journal of Educational Psychology, 95,* 667-686.

Polya, G. (1986). *Cómo plantear y resolver problemas.* México: Trillas.

Prout, H.T., Marcal, S.D., Marcal, D.C. (1992). A meta-analysis of self-reported personality characteristics of children and adolescents with learning disabilities. *Journal of Psychoeducational Assessment, 10,* 59-64.

Reusser, K., Stebler, R. (1997). Every word problem has a solution: the social rationality of mathematical modeling in schools*. Learning and Instruction, 7,* 309-327.

Riley, M.S., Greeno, J.G., Heller, J.I. (1983). Development of children's problem solving ability in arithmetic. En H.P. Ginsburg (Ed.). *The development of mathematic thinking* (p. 153-196). Nueva York: Academic Press.

Shalev, R.S., Auerbach, J., Manor, O., Gross-Tsur, V. (2000). Developmenal dyscalculia: prevalence and prognosis. *European Child and Adolescent Psychiatry, 9*: II58-II64.

Shalev, R.S., Gross-Tsur, V. (1993). Developmental dyscalculia and medical assessment. *Journal of Learning Disabilities, 26,* 134-137.

Shalev, R.S., Manor, O., Kerem, B., Ayali, M., Badichi, N., Frielander, Y., Gross-Tsur, V. (2001) Developmental dyscalculia is a familial learning disability. *Journal of Learning Disabilities, 34,* 59-65.

Shen, C. (2002). Revisiting the relationship between student's achievement and their self-perceptions: a cross-national analysis based on TIMSS 1999 data. *Assessment in Education, 9,* 161-184.

Shiah, R., Mastropieri, M.A., Scruggs, T.E., Mushinski, B.J.(1995) The effects of computer-assisted instruction on the mathematical problem solving of students with learning disabilities. *Excepcionality, 5,* 131-161.

Siegler, R.S., Jenkins, E. (1989). *How children discover strategies.* Hillsdale: Erlbaum.

Simó, P.(2003). *Eficacia del entrenamiento cognitivo por ordenador en estudiantes con dificultades para resolución de problemas*. Tesis doctoral. Universidad de Valencia.

Spreen, O., y Strauss, E. (1991). *A compendium of neuropsychological tests*. Nueva York. Oxford University Press.

Stecker, P.M., Fuchs, L.S., Fuchs, D. (2005). Using curriculum-based measurement to improve student achievement: review of research. *Psychology in the Schools, 42,* 795-819.

Sternberg, R.J. (2002). Intelligence s not just inside the head: the theory of successful intelligence. En J. Aronson (Ed.) *Improving academic achievement: impact of psychological factors on education.* (pp. 227-244). San Diego: Academic Press.

Stone, C.A., May, A.L. (2002). Self-concept, attributional style and self-efficacy beliefs of students with learning disabilities with and without attention deficit hyperactivity disorder. *Learning Disability Quarterly, 25*, 141-151.

Suinn, R.M., y Winston, E.H. (2003). The Mathematics Anxiety Rating Scale, a brief version: Psychometric data. *Psychological Reports, 92,* 167-173.

Swanson, H.L.(1994). Short-term memory and working memory: Do both contribute to our understunding of academic achievement in children and adults with learning disabilities? *Journal of Learning Disabilities, 27,* 34-50.

Swanson, H.L., Jerman, O. (2006). Math disabilities: a preliminary meta-analysis of the published literature on cognitive processes. *Advances in Learning and Behavioral Disabilities, 19,* 285-314.

Swanson, H.L., Sachse-Lee, C.(2001). Mathematical problem solving and working memory in children with learning disabilities: both executive and phonological proceses are important. *Journal of Experimental Child Psychology, 79,* 294-321.

Tabassam, W., Grainger, J. (2002). Self-concept, attributional style and self-efficacy beliefs of students with learning disabilities with and without attention deficit hyperactivity disorder. *Learning Disability Quarterly, 25*, 141-151.

Tárraga, R.(2004). *Progresos en el conocimiento de las dificultades del aprendizaje de las matemáticas a través de un análisis bibliométrico y de contenido*. Trabajo de investigación presentado en el Departamento de Psicología Evolutiva y de la Educación de la Universidad de Valencia.

Temple, C.M. (1991). Procedural dyscalculia and number fact dyscalculia: Double dissociation in developmental dyscalculia. *Cognitive Neuropsychology, 8,* 155-176.

Temple, C.M., y Sherwood, S. (2002). Representation and retrieval of arithmetical facts: Developmental difficulties. *Quarterly Journal of Experimental Psychology, 55A,* 733-752.

Toro, J., Cervera, M. (1995) *Test de Análisis de Lectoescritura*. Madrid: Visor.

Van der Sluis, S., Van der leij, A., de Jong, P.F. (2005). Working memory in dutch children with reading- and arithmetic-related LD. *Journal of Learning Disabilities, 38,* 207-221.

Van Garderen, D., Montague, M. (2003). Visual-spatial representation, mathematical problem solving and students of varying abilities. *Learning Disabilities Research and Practice, 18,* 246-254.

Van Luit, J.E.H., Kroesbergen, E.H. (2006). Teaching metacognitive skills to students with mathematical disabilities. En A. Desoete, y M. Veenman (Eds.) *Metacognition in Mathematics Education*. Nueva York: Nova Science Publisher.

Von Aster (2000). Developmental cognitive neuropsychology of number processing and calculation: varieties of developmental dyscalculia. *European Child & Adolescent Psychiatry, 9,* II41.II57.

Weschler, D. (1993). WISC-R. *Escala de Inteligencia para Niños Revisada*. Madrid: TEA.

Wijsman, E.M., Robinson, N.M., Ainsworth, K.H., Rosenthal, E.A., Holzman, T., Raskind, W.H. (2004). Familial aggregation patterns in mathematical ability. *Behavior Genetics, 34,* 51-62.

Willcut E.G., De Fries, J.C., Pennington, B.F., Smith, S.D., Cardon, L.R., Olson, R.K. (2003). Genetic etiology of comorbid reading difficulties and ADHD. En R. Plomin, J.C. DeFries, I.W. Craig, y P. McGuffin (Eds.), *Behavior Genetics in the Postgenomic Era* (pp. 227-246). Washington D.C: APA Books.

Wilson, C.L., y Sindelar, P.T. (1991). Direct instruction in math Word problems: students with learning disabilities. *Exceptional Children*, *57,* 512-519.

Wilson, K.M., Swanson, H.L.(2001). Are mathematical disabilities due to a domain-general or a domain-specific working memory deficit? *Journal of Learning Disabilities, 34,* 237-248.

Witzel, B.S., Mercer, C.D., y Miller, M.D. (2003). Teaching algebra to students with learning difficulties: An investigation of an explicit instruction model. *Learning Disabilities Research & Practice, 18,* 121-131.

Wood, F.B., Grigorenko, E.L. (2001). Emerging issues in the genetics of dyslexia: A methodological preview. *Journal of Learning Disabilities, 34,* 503-511.

Xin, Y.P., Jitendra, A.K. (1999). Mathematical word problems for students with learning disabilities : a meta-analysis. *The Journal of Special Education, 32,* 207-225.

Xin, Y.P., Jitendra, A.K., Deatline-Buchman, A. (2005). Effects of mathematical word problem-solving instruction on middle school students with learning problems. *The Journal of Special Education, 39,* 181-192.

Zawaiza, T., y Gerber, M. (1993). Effects of explicit instruction on math Word problem solving by community college students with learning disabilities. *Learning Disability Quarterly, 16,* 64-79.

Zhang, C., Zhao, H., Fu, Z.(2000). A contrastive research on the characters of metamemory between learning disabled children and non learning disabled children. *Psychological Science (China), 23,* 421-424.

Zimmerman, B.J. (2000). Attaining self-regulation: A social cognitive perspective. En M. Boekaerts, P.R. Pintrich, y M. Zeidner (Eds.), *Handbook of self regulation.* San Diego: Academic Press.

III.
ANEXOS.

ANEXO 1. DOCUMENTO DE PUBLICIDAD DEL CURSO.

CENTRE DE FORMACIÓ INNOVACIÓ I RECURSOS EDUCATIUS

Plaça dels Furs, 9 46500-Sagunt Tel. 96 265 02 77 / 96 265 02 34
Fax 96 265 05 98
http:www.cult.gva.es/cefire/sagunt e-correu: 464401670@centres.cult.gva.es

FORMACIÓ DEL PROFESSORAT 2003- 04CODI: 03SA54IN035

"RESUÉLVELO": PROGRAMA PER A LA RESOLUCIÓ DE PROBLEMES MATEMÀTICS EN ALUMNAT AMB DIFICULTATS D'APRENENTATGE

Destinataris: Professorat de NEE o/i de suport a l'últim cicle de primària i/o primer cicle de secundària.

Durada: 50 hores. (30 presencials+15 d'intervenció + 5 de memòria)

Nombre màxim de participants: 20

Dates de realització i horari: 22 i 29 d'octubre; 5, 12 i 19 i 26 de novembre de 2003, i 25 de febrer de 2004. De 17 '30h fins a 20 h.

Lloc: CEFIRE de Sagunt.

Coordinador: *Paloma Silla Aleixandre*

Professorat: *Ana Miranda, i Raúl Tárraga*. Departament de psicologia evolutiva i de l'educació. Universitat de València

PROGRAMA DEL CURS

Aquest curs es va dissenyar dins d'una línia d' investigació-acció en col·laboració amb el departament de psicologia evolutiva de la Universitat de València. L' objectiu general és treballar en la investigació de dificultats de l'aprenentatge a través de la participació en l'avaluació i l'aplicació d'un programa per a la resolució de problemes matemàtics per a l'alumnat amb dificultats d'aprenentatge. El curs es divideix en dues parts. Començarem amb la formació del professorat seleccionat mitjançant sessions presencials(20 H). En aquestes sessions es treballaran els continguts del programa " Resuélvelo"(fonaments, avaluació i aplicació del programa). Desprès, en la segona part, el professorat iniciarà les intervencions amb l'alumnat seleccionat per a l'aplicació del programa al seu centre (20 h). Durant aquests mesos hi haurà sessions de seguiment de l'aplicació del programa (10 h).

OBJECTIUS

-Acostar el professorat a la metodologia de treball d'investigació -acció en dificultats de l'aprenentatge.

-Conéixer diferents instruments d'avaluació congitiva, de rendimet i metacognitius.

-Conéixer el programa per a la resolució de problemes matemàtics " Resuélvelo".

-Entrenar en diferents tècniques i estratègies de procesos cognitius: autoregulació, metacognició., visualització i autoinstruccions.

-Aplicar el programa " Resuélvelo" a un grup d'alumnes dins d'un context d'investigació –acció.

CONTINGUTS

-Fonaments en dificultats de resolució de problemes. Bases conceptuals i metodològiques.

-Avaluació de les dificultats d'aprenentatge: Test de rendiment, test cognitius, i tests metacognitius.

-"Resuélvelo": Programa per a la resolució de problemes matemàtics per l'alumnat amb dificultats d'aprenentatge.

-Seguiment de l'aplicació del programa.

INSCRIPCIÓ

Fins al 15/10/03 al CEFIRE de Sagunt.

CONDICIONS D'ADMISSIÓ

Professorat de suport o/i de NEE que treballa amb grups de 4 o 5 alumnes al tercer cicle de primaria o primer cicle de secundària. Consulteu l'admissió i confirmeu l'assistència tres dies abans de l'inici de l'activitat.

ANEXO II. PRUEBA CRITERIAL DE SOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

Nombre y apellidos del alumno:_______________________________________

Curso:________________________ Edad:________________________

Colegio:____

1.En un partido de balonmano el resultado es Bélgica 23 – España 34. ¿Por cuántos goles de diferencia ganó España?

2.En un invernadero había algunas flores. En primavera nacieron 74 flores más. Ahora hay 158 flores. ¿Cuántas flores había al principio?

3.En un menú hay 12 primeros platos y 16 segundos platos. ¿Cuántas combinaciones distintas de menú se pueden hacer?

4.Antonio gana a la semana 352 €. Teniendo en cuenta que trabaja 5 días; ¿Cuánto dinero gana cada día?

5.En un autobús hay 8 filas de asientos, en cada fila hay 4 personas. ¿Cuántas personas hay en el autobús?

6.Sonia ha comprado una camiseta por 15 € y un pantalón por 21 €. Por ser una buena clienta le han hecho un descuento de 3 €. ¿Cuál es el precio total de su compra?

7.Inés tiene 32 cromos, y Antonio tiene 3 veces más cromos que Inés. ¿Cuántos cromos tienen entre los dos?

8.Lucas tiene 96 sellos en su colección, y Manuel tiene tres veces menos. ¿Cuántos sellos tiene que conseguir Manuel para tener los mismos que Lucas?

9. Ignacio tiene 8 sobres de cromos. En cada sobre van 7 cromos. Lucía tiene 36 cromos. ¿Cuántos cromos tiene que conseguir Lucía para tener los mismos que Ignacio?

10. Carlos trabaja en casa pintando figuritas de cerámica. Pinta una media de 15 figuritas al día, y trabaja 4 días a la semana. Le pagan 2 € por cada figurita que pinta. ¿Cuánto dinero gana en una semana?

11. Manuel tiene ahorrados 65 €, y quiere comprarse un equipo de pesca. La caña de pescar le cuesta 49 €. Además quiere comprar 4 anzuelos, y cada uno vale 6 €. ¿Cuánto dinero más necesita para comprarse todo el equipo?

12. Esteban ahorra todas las semanas 18 €, y Lucía 12 €. Entre los dos quieren comprarse una colección de CDs, y deciden ahorrar durante 5 semanas. Cada CD cuesta 6 €. ¿Cuántos CDs podrán comprarse en las 5 semanas?

13. Una abuela reparte una cantidad de dinero entre sus nietos para que se lo gasten en la feria del pueblo. Al nieto menor le da un billete de 5 €, una moneda de 2 €, y 3 monedas de 1 €. Al nieto mayor le da tres veces más que al nieto menor. ¿Cuánto dinero más le da al nieto mayor que al menor?

14. Ángela y Vicente van de compras al centro comercial. Ángela se compra 3 pantalones por 9 € cada uno, 4 camisetas por 5 € cada una, y unos zapatos que le cuestan 15 €. Vicente se ha comprado 2 pantalones de 14 € cada uno, 5 camisetas de 6 € cada una, y unos zapatos de 20 €. Pero además ha comprado un regalo que cuesta 46 €. ¿Cuántas veces más se gasta Vicente que Ángela?

15. Andrés ha comprado 3 paquetes de cromos, y en cada paquete van 5 cromos. Eva ha comprado 4 paquetes de cromos, y en cada uno van 4 cromos. Deciden juntar sus cromos, para poder completar antes la colección, ya que no hay ningún cromo repetido. ¿Cuántos cromos tienen en total?

ANEXO III. PRUEBA DE SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE LA VIDA REAL.

Traducción y adaptación de los problemas publicados en Reusser, K., Stebler, R. (1997). Every word problem has a solution: the social rationality of mathematical modeling in schools*. Learning and Instruction, 7,* 309-327.

ANEXO IV. MATHEMATICAL PROBLEM SOLVING ASSESSMENT.

Traducción y adaptación del cuestionario publicado en Montague, M. (2003). Solve it! A practical approach to teaching mathematical problem solving skills. Reston: Exceptional Innovations.

ANEXO V. ENCUESTA DE ACTITUDES SOBRE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

Nombre y apellidos del alumno:_______________________________________
Curso:_________________________ Edad:_________________________
Colegio:____

Esto no es ningún examen. No hay respuestas correctas ni incorrectas; cualquiera de las frases que vas a leer a continuación puede tener diferentes respuestas. Asegúrate de que tus respuestas muestran lo que realmente piensas. Por favor, no hables acerca de tus respuestas con los demás. Nosotros mantendremos tus respuestas en secreto y no se las diremos a nadie.

Cuando estés preparado para empezar, lee cada una de las frases y elige la respuesta que te parezca más correcta. Hay cuatro respuestas posibles para cada una de las frases: MUCHO, BASTANTE, POCO o NADA.

Después de leer cada frase debes elegir una de esas respuestas, marcando en las casillas que aparecen al lado de la frase la que crees que más se adecua a lo que tú piensas. Marca sólo una casilla en cada frase, y no dejes ninguna casilla sin contestar.

Mira en este ejemplo cómo ha contestado otro niño llamado Juan: su respuesta significa que a Juan le gusta mucho leer cómics.

Me gusta leer cómics...............................MUCHO BASTANTE POCO NADA

1.- Me gusta resolver problemas............... MUCHO BASTANTE POCO NADA

2.- Creo que resolver problemas es
una actividad que se me da bien........ MUCHO BASTANTE POCO NADA

3.- Trabajo con un problema sin
importarme el tiempo hasta que lo
resuelvo.. MUCHO BASTANTE POCO NADA

4.- Cuando tengo la solución siempre
compruebo las operaciones por si
me he equivocado.............................. MUCHO BASTANTE POCO NADA

5.- Procuro presentar el problema
bien organizado para que se pueda
corregir sin dificultad...........................MUCHO BASTANTE POCO NADA

6.- Cuando sé resolver un problema
me gusta que el profesor se dé
cuenta de que lo hago bien.................MUCHO BASTANTE POCO NADA

7.- Resolver problemas es divertido...MUCHO BASTANTE POCO NADA

8.- Me gusta salir a la pizarra a
resolver o corregir problemas.............MUCHO BASTANTE POCO NADA

9.- Aprender a resolver problemas
puede ayudarme en la vida diaria y
en un futuro...................................... MUCHO BASTANTE POCO NADA

10.- Creo que resolver problemas
es un buen ejercicio para nuestra

mente, así aprendemos a pensar..... MUCHO BASTANTE POCO NADA

11.- Me cuesta decidir lo que
tengo que hacer cuando estoy
resolviendo problemas.......................MUCHO BASTANTE POCO NADA

12.- Me avergüenzo cuando no
entiendo cómo resolver un problema MUCHO BASTANTE POCO NADA

13.- Soy inseguro, nunca sé si he
sido incapaz o no de resolver un
problema bien.................................... MUCHO BASTANTE POCO NADA

14.- Resolver problemas es una
actividad que me pone nervioso/a.... MUCHO BASTANTE POCO NADA

15.- Me cuesta concentrarme sobre
lo que me pide el texto de un
problema... .MUCHO BASTANTE POCO NADA

16.- Debería ser mucho más listo
de lo que soy para resolver bien los
problemas.. MUCHO BASTANTE POCO NADA

17.- Necesito que otras personas
me ayuden cuando tengo que
resolver problemas........................... MUCHO BASTANTE POCO NADA

18.- Me pone de mal humor
comprobar que me he equivocado... MUCHO BASTANTE POCO NADA

19.- Resolver problemas es una
actividad que me cansa.....................MUCHO BASTANTE POCO NADA

20.- Si te cuesta resolver problemas
¿Crees que puedes hacer halgo para
mejorar?... MUCHO BASTANTE POCO NADA

21.- Si el problema se me presenta
difícil, lo dejo. Casi no intento
solucionarlo...................................... MUCHO BASTANTE POCO NADA

22.- Antes de realizar una operación,
razono el problema y lo analizo......... MUCHO BASTANTE POCO NADA
23.- Aunque compruebo un problema
no sé si lo he hecho bien o mal........ MUCHO BASTANTE POCO NADA

ANEXO VI. CUESTIONARIO IAR

Traducción y adaptación del cuestionario publicado en Crandall, V.C., Katkovsky, W., y Crandall, V.J. (1965). Children's beliefs in their own control of reinforcements in intellectual-academic achievement situation. *Child Development, 36,* 91-109.

ANEXO VII. ESCALA DE ANSIEDAD ANTE LAS MATEMÁTICAS.

Traducción y adaptación del cuestionario publicado en Suinn, R.M., y Winston, E.H. (2003). The Mathematics Anxiety Rating Scale, a brief version: Psychometric data. *Psychological Reports, 92,* 167-173.

ANEXO VIII. CARTULINAS ENTREGADAS A LOS PROFESORES PARA RECORDAR LAS ESTRATEGIAS COGNITIVAS Y METACOGNITIVAS.

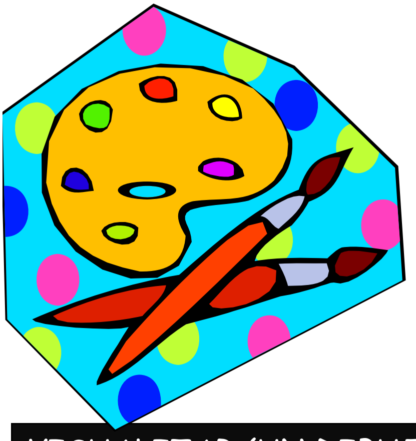
LEER (PARA COMPRENDER).

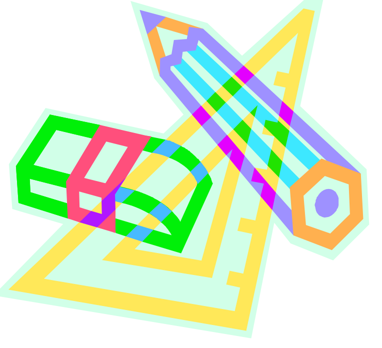
LEER (PARA COMPRENDER).
¿QUÉ TENGO QUE HACER?: Leer el problema. Si no lo comprendo, leerlo de nuevo. **¿LO ESTOY HACIENDO BIEN?:** ¿Es esto lo que realmente quiere decir el problema? **¿LO HE HECHO BIEN?:** Comprobar que he entendido bien el problema.

PARAFRASEAR (PONER EL PROBLEMA EN TUS PROPIAS PALABRAS).

PARAFRASEAR (PONER EL PROBLEMA EN TUS PROPIAS PALABRAS).
¿QUÉ TENGO QUE HACER?:
Subrayar la información importante y poner el problema en mis propias palabras.
¿LO ESTOY HACIENDO BIEN?:
¿He subrayado la información importante?; ¿Cuál es la pregunta?; ¿Qué estoy buscando?
¿LO HE HECHO BIEN?:
Asegurarse de que lo que yo he dicho es lo mismo que dice el enunciado.

VISUALIZAR (HACER UN DIBUJO O ESQUEMA)





VISUALIZAR (UN DIBUJO O ESQUEMA).

¿QUÉ TENGO QUE HACER?:

Hacer un dibujo o esquema que represente el problema.

¿LO ESTOY HACIENDO BIEN?:

¿Me sirve este dibujo? ¿Son estas las relaciones entre los datos?

¿LO HE HECHO BIEN?:

Comprobar que el dibujo representa toda la información del problema.

HIPOTETIZAR (TRAZAR UN PLAN).

HIPOTETIZAR (UN PLAN PARA RESOLVER EL PROBLEMA).
¿QUÉ TENGO QUE HACER?:
Decidir cuántos pasos y operaciones son necesarias. Escribir los símbolos de las operaciones (+,-, x, y /).
¿LO ESTOY HACIENDO BIEN?:
Si hago......, ¿Qué conseguiré?. Y si hago....... , ¿entonces qué tengo que hacer después?, ¿Cuántos pasos son necesarios?
¿LO HE HECHO BIEN?:
Comprobar que el plan tiene sentido.

ESTIMAR (PREDECIR LA RESPUESTA).

ESTIMAR (PREDECIR LA RESPUESTA).

¿QUÉ TENGO QUE HACER?:

Redondear los números, hacer el problema de cabeza, y escribir la estimación.

¿LO ESTOY HACIENDO BIEN?:

¿Redondeé al alza o a la baja?; ¿Escribí la estimación?

¿LO HE HECHO BIEN?:

Comprobar que usé la información importante.

CALCULAR (HACER LAS OPERACIONES EN EL ORDEN CORRECTO).

CALCULAR (USANDO LA ARITMÉTICA).

¿QUÉ TENGO QUE HACER?:

Hacer las operaciones en el orden correcto.

¿LO ESTOY HACIENDO BIEN?:

¿Son estas las operaciones de mi plan?; ¿Están los números bien colocados en columnas?

¿LO HE HECHO BIEN?:

Comprobar que todas las operaciones se hicieron en el orden correcto.

COMPROBAR (ASEGURARSE DE QUE TODO ESTÁ BIEN).

COMPROBAR (ASEGURARSE DE QUE TODO SE HA HECHO BIEN).

¿QUÉ TENGO QUE HACER?:

Comprobar que he seguido los pasos, y que he hecho bien los cálculos.

¿LO ESTOY HACIENDO BIEN?:

¿He comprobado cada paso?; ¿He comprobado los cálculos?; ¿Es mi respuesta correcta?; ¿Son similares mi estimación y la respuesta?

¿LO HE HECHO BIEN?:

Comprobar que todo es correcto. De lo contrario, volver atrás. Pedir ayuda si es necesario.

ANEXO IX. CARTEL DESPLEGABLE CON ESTRATEGIAS COGNITIVAS.

LEER (PARA COMPRENDER).

PARAFRASEAR (PONER EL PROBLEMA EN TUS PALABRAS).

VISUALIZAR (HACER UN DIBUJO O ESQUEMA).

HIPOTETIZAR (TRAZAR UN PLAN).

ESTIMAR (PREDECIR LA RESPUESTA).

CALCULAR (HACER LAS OPERACIONES EN EL ORDEN CORRECTO).

COMPROBAR (ASEGURARSE DE QUE TODO ESTÁ BIEN).

ANEXO X. CALENDARIO DE DESARROLLO DEL CURSO.

CEFIRE SAGUNT

CEFIRE de Sagunt

Octubre, novembre 2003 gener i febrer 2004.

Coordina: Paloma Silla

"Resuelvelo": programa per a la resolució de problemes matemàtics en alumnat amb dificultats d'aprenentatge.

DATES Dimecres 17'30 – 20	PONENTS	CONTINGUTS
22 d'octubre	Ana Miranda	Bases conceptuals de les dificultats de l'aprenentatge. Les dificultats en l'aprenentatge de les matemàtiquesal marc del sistema educatiu espanyol.
29 d'octubre	*Ana Miranda*	Coneixements generals sobre els alumnes amb dificultats de l'aprenentatge a les matemàtiques:manifestacions cognitives, metacognitives i socioemocionals
5 de novembre	*Raúl Tárraga*	Programes d'entrenamente en resolució de problemes fonamentats en estratègies cognitives i metacognitives. Procediments d'avaluació d'estratègies de resolució de problemes.
12 de novembre	Raúl Tárraga	Programa Resuélvelo: continguts i metodologia.
19 de novembre	Raúl Tárraga	Pràctica de problemes del programa.
26 de novembre	Raúl Tárraga	Pràctica de problemes del programa.

	Raúl Tárraga	Sessions de seguiment del programa als centres.
25 de febrer	Raúl Tárraga	Avaluació final de l'aplicació del programa. Avaluació del curs.

ANEXO XI. EJEMPLO DE MODELADO.

El profesor resolverá en voz alta los problemas, modelando las estrategias de modo que el alumno las comprenda y sepa en todo momento lo que el profesor está haciendo. En el proceso, el profesor introducirá errores deliberadamente, y los corregirá él mismo, utilizando la estrategia metacognitiva de comprobar *"¿lo he hecho bien?"*.

Problema 1:

José y María están vendiendo tarjetas de felicitación para ahorrar dinero para el viaje de fin de curso. Los dos juntos vendieron tantas tarjetas que ganaron un total de 88.50 €. Con lo que vendió María ganaron un total de 67 €. ¿Cuánto dinero ganó José?

Se trata de un problema de combinar, con un subconjunto desconocido de una sola operación.

El modelado sería el siguiente:

ESTRATEGIA 1: LEER (PARA COMPRENDER).

<u>¿Qué tengo que hacer?</u> Leer el problema, para entenderlo bien, y después poder resolverlo.

El profesor relee en voz alta el problema y se detiene en las partes más importantes, de modo que el alumno se dé cuenta de que se hace una primera preselección de la información importante y de que se le da una organización coherente.

¿Lo estoy haciendo bien? Mientras lee el problema, el profesor se detiene y se pregunta a sí mismo si lo está haciendo bien, si está leyendo correctamente el problema.

"*Es un problema en el que me dicen unas cantidades de dinero; entre dos niños ganan un total de 88.50 €. La niña ha ganado 67 €, y me preguntan cuánto ha ganado el niño".*

¿Lo he hecho bien?. ¿He comprendido el problema?

Al finalizar comprueba que ha comprendido el significado del problema.

"Muy bien, creo que ya lo he comprendido. Además creo que podré hacerlo. Si sigo los pasos seguro que lo hago bien. Siguiente paso."

ESTRATEGIA 2: PARAFRASEAR (PONER EL PROBLEMA EN TUS PROPIAS PALABRAS).

¿Qué tengo que hacer? Subrayar la información importante. Poner el problema en mis propias palabras.

¿Lo estoy haciendo bien? El profesor se formula a sí mismo preguntas en voz alta para comprobar que está realizando la tarea que se ha propuesto:

Entonces son dos niños que están vendiendo tarjetas de felicitación. Entre los dos han ganado 88.50 €. Este dato lo tengo que subrayar. María ha ganado 67 €. También lo subrayo. La pregunta es cuánto ha ganado José. La pregunta es muy importante, también la tengo que subrayar.

Tengo que poner el problema en mis propias palabras. Lo que yo diría sería algo así: María y José han ganado entre los dos 88.50 €. María ha ganado 67 €. Tengo que averiguar cuánto ha ganado José.

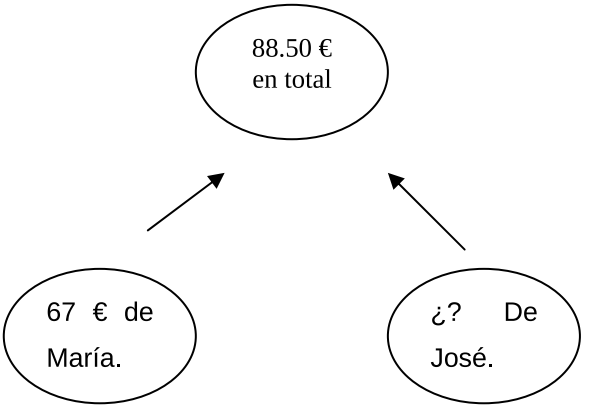
¿Lo he hecho bien? Al finalizar, el profesor comprueba que al poner el problema en sus propias palabras el significado del enunciado no cambia y que realmente ha comprendido el problema.

"Yo creo que está bien. He utilizado los datos importantes, y los he formulado de forma coherente. Yo creo que lo he entendido bien y que lo que he dicho es lo mismo que lo que dice el problema".

ESTRATEGIA 3: VISUALIZAR (HACER UN DIBUJO O ESQUEMA).

¿Qué tengo que hacer? "*Tengo que hacer un dibujo que me represente el problema y que me ayude a resolverlo".*

¿Lo estoy haciendo bien? *"Muy bien, tengo que dibujar el total, que han ganado. Esto es 88.50 €. También tengo que dibujar lo que ha ganado María: 67 €. También hay que dibujar lo que ha ganado José. Pero no sé cuánto es. ¿Cómo lo dibujo? Como no sé lo que es, le pondré un interrogante."*



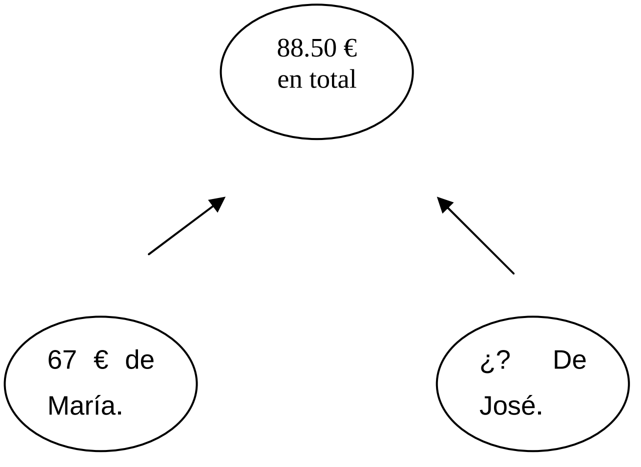
<u>¿Lo he hecho bien?</u> "*Yo creo que sí. Están los tres datos importantes, y está la relación entre ellos, y está la pregunta, que es saber cuánto ha ganado José. Voy a hacer el siguiente paso*".

ESTRATEGIA 4: TRAZAR UN PLAN (PARA RESOLVER EL PROBLEMA).

<u>¿Qué tengo que hacer?</u> Tengo que hacer un plan para resolver el problema. Tengo que pensar qué operaciones tengo que hacer.

<u>¿Lo estoy haciendo bien?</u> "*Vamos a ver, María ha ganado 67 €, y también tengo una cantidad de 88.50 €, que es el total. Lo que tendré que hacer es sumar estas dos cantidades, y así sabré cuánto ha ganado José".*

¿Lo he hecho bien? ¿Tiene el plan sentido? *"No lo sé. Vamos a ver, si sumo las dos cantidades tendré un número mayor, porque en las sumas el resultado es siempre mayor que las partes que he sumado. Entonces me parece que algo tiene que estar mal, porque el 88.50 € es el total de lo que han ganado entre los dos, y si mi resultado es que José ha vendido más de 88.50 € no tiene sentido. Algo tiene que estar mal. Voy a volver al esquema."*



"El esquema dice que el total es 88.50 €, y que este total tiene dos partes; una es la de María, 67 €, la otra es la de José, que no la sé. Yo creo que si le quito al total lo que ha vendido María averiguaré lo que ha vendido José. Quitar es lo mismo que restar. Entonces lo que tengo que hacer es restarle 67 a 88.50. Creo que ahora sí que tiene más sentido".

ESTRATEGIA 5: ESTIMAR (PREDECIR LA RESPUESTA)

¿Qué tengo que hacer? Redondear los números que voy a utilizar, hacer el problema en mi cabeza, y escribir el estimado.

¿Lo estoy haciendo bien? "*Los 88.50 € los voy a redondear al alza, porque están más cerca de 90 que de 80. Los 67 los voy a redondear también al alza, porque están más cerca de 70 que de 60. Ahora lo hago en la cabeza: 90 menos 70 son 20. Me lo voy a apuntar aquí arriba, para luego compararlo con la respuesta definitiva".*

¿Lo he hecho bien? ¿He hecho la operación que decía mi plan?; ¿He redondeado bien los números?

"*88.50 lo he redondeado a 90, 67 a 70, lo he restado, como decía el plan. Sí. Está bien. Siguiente paso".*

ESTRATEGIA 6: CALCULAR (HACER LAS OPERACIONES).

¿Qué tengo que hacer? Hacer las operaciones en el orden correcto.

¿Lo estoy haciendo bien?

Mi operación era 67 € menos 88.50 €. Voy a intentar hacerlo. Pongo la parte entera debajo de la parte entera, y los decimales debajo de los decimales.

Un momento, así no puede ser, porque le voy a quitar a un número pequeño otro más grande. Me he equivocado, tiene que ser al revés. Lo tendré que poner bien.

67 -88.50	88.50 -67 21.50

¿Lo he hecho bien? ¿Son similares mi respuesta final y mi estimación? *Sí; mi resultado es 21.50 €, y tengo apuntado que mi estimación es 20. Son números razonablemente cercanos, entonces yo creo que está bien.*

ESTRATEGIA 7: COMPROBAR (ASEGURARSE DE QUE TODO ES CORRECTO).

¿Qué tengo que hacer? Comprobar los cálculos y los pasos que he dado.

¿Lo estoy haciendo bien? ¿He comprobado los pasos?; ¿He comprobado los cálculos?; ¿Es mi respuesta correcta?

Sí; he planeado unos pasos, los he comprobado y los he seguido. He comprobado las operaciones y he dado una respuesta que es muy parecida a la de mi estimado.

¿Lo he hecho bien? ¿Está todo bien?; Si no lo está tengo que volver atrás, a revisar dónde me he equivocado. Si no logro encontrar el error, debería buscar a alguien que me pudiera ayudar.

En este caso yo creo que está bien. He hecho un buen trabajo. Los pasos de las tarjetas me han servido para hacer el problema poco a poco y a que me saliera bien.

ANEXO XII. EJEMPLOS DE MODELADO DE PROBLEMAS.

Problema 1:

> Me he hecho un disfraz y me han sobrado 44 metros de cintas de colores. Si he utilizado 68 metros de cintas, ¿cuántas tenía al principio?

Se trata de un problema de cambio con conjunto inicial desconocido. En este primer momento de la instrucción, el profesor resolvería el problema en voz alta, y el alumno debería escucharle e interrumpirle cuando no entendiera algún paso. La secuencia de solución sería la siguiente:

ESTRATEGIA 1: LEER (PARA COMPRENDER).

¿Qué tengo que hacer? Leer el problema, sobre todo las partes más importantes. Volverlo a leer si no lo he comprendido. Leer el problema es lo primero y lo más importante para hacerlo bien.

El profesor relee en voz alta el problema y se detiene en las partes más importantes, de modo que el alumno se dé cuenta de que se hace una primera preselección de la información importante y de que se le da una organización coherente.

¿Lo estoy haciendo bien? Mientras lee el problema, el profesor se detiene y se pregunta a sí mismo si lo está haciendo bien, si está leyendo correctamente el problema.

“El problema va sobre cintas de colores para hacer un disfraz. Hay además unas cantidades, y al final una pregunta. Ahí debe estar la clave de lo que me pide el enunciado. Me dicen los metros que he usado y los que me han sobrado, y me dicen que averigüe cuántos metros tenía al principio. ¿Me dicen algo más?; ¿Tengo claro lo que me dicen?"

¿Lo he hecho bien?. ¿He comprendido el problema?

Al finalizar comprueba que ha comprendido el significado del problema.

"Muy bien, creo que ya lo he comprendido. Además creo que podré hacerlo. Si sigo los pasos seguro que lo hago bien. Siguiente paso."

ESTRATEGIA 2: PARAFRASEAR (PONER EL PROBLEMA EN TUS PROPIAS PALABRAS).

¿Qué tengo que hacer? Subrayar la información importante. Poner el problema en mis propias palabras.

¿Lo estoy haciendo bien? El profesor se formula a sí mismo preguntas en voz alta para comprobar que está realizando la tarea que se ha propuesto:

¿He subrayado la información importante?; ¿Qué es lo que me pide el problema? Me piden que diga cuántos metros de cintas tenía al principio de hacer el disfraz. También me dicen que he utilizado 68 metros, ¡Ah!, y también que me han sobrado 44 metros. Yo creo que en mis propias palabras el enunciado debe querer decir que tengo que calcular cuántos metros de cintas tenía al principio de hacerme el disfraz, y eso tengo que calcularlo sabiendo que he gastado 68 metros, y que me han sobrado 44 metros.

¿Lo he hecho bien? Al finalizar, el profesor comprueba que al poner el problema en sus propias palabras el significado del enunciado no cambia y que realmente ha comprendido el problema.

"Sí, yo creo que lo que yo he dicho es lo mismo que lo que dice el enunciado. Pero además ahora lo he puesto en mis palabras, así seguro que lo comprendo mejor. Muy bien. Siguiente paso."

ESTRATEGIA 3: VISUALIZAR (MEDIANTE UN DIBUJO O ESQUEMA).

¿Qué tengo que hacer? Hacer un dibujo o esquema que represente el problema.

¿Lo estoy haciendo bien? ¿Representa este dibujo lo que me dice el enunciado? ¿Me sirve para resolver el problema?

Si empiezo dibujando los metros que tengo, porque me han sobrado, tengo que dibujar también los metros que he utilizado para hacer el disfraz, pero me hace falta dibujar otra parte, la parte que tenía al principio, lo que pasa es que no sé cuánto mide. Entonces tendré que dejarla sin número. Mi dibujo debería ser algo así:

68 metros que he gastado	44 metros que me han sobrado

Parte que tenía al principio.

¿Lo he hecho bien? ¿Representa este esquema el problema? *Yo creo que sí, están los 68 metros que utilizo para el disfraz, y los*

44 metros que me sobran, pero no sé, creo que le falta algo. Sí; en el dibujo tiene que aparecer también la pregunta, lo que me pide el problema. Bien, entonces tendría que añadirlo:

¿¿¿¿Parte que tenía al principio????	
68 metros que he gastado	44 metros que me han sobrado

La pregunta es averiguar cuánto tenía al principio de hacer el disfraz; eso tiene que salir en el esquema. Y para representarlo puedo poner estas líneas aquí abajo, que me indican que lo que quiero es saber cuánto tenía al principio, es decir, cuántos metros eran antes los 68 metros y los 44 metros. Entonces ya no tengo que dibujar la parte que tenía al principio, esa parte me sobra, porque lo que tenía al principio lo sabré uniendo la parte que he gastado y la que me ha sobrado. Menos mal que he comprobado mi dibujo. Voy a hacer el siguiente paso.

ESTRATEGIA 4: TRAZAR UN PLAN. (PARA RESOLVER EL PROBLEMA).

<u>¿Qué tengo que hacer?</u> Tengo que elaborar un plan que me ayude a resolver el problema. ¿Cuántos pasos y operaciones tengo que hacer?; ¿Cuáles son los símbolos de esas operaciones?.

<u>¿Lo estoy haciendo bien?</u>

Según el esquema tengo un grupo de 68 metros y un grupo de 44 metros, y tengo que juntarlos, para saber lo que tenía al principio. Juntarlos es lo mismo que sumar. ¿Seguro que si los sumo tendré el total, es decir, lo que tenía al principio? Sí, yo creo que sí.

<u>¿Lo he hecho bien?</u> ¿Me sirve este plan para resolver el problema? ¿Tengo que hacer algo más aparte de sumar estas cantidades?

Yo creo que está bien, vamos a hacer el siguiente paso.

ESTRATEGIA 5: ESTIMAR (PREDECIR LA RESPUESTA)

<u>¿Qué tengo que hacer?</u> Redondear los números que voy a utilizar, hacer el problema en mi cabeza, y escribir el estimado.

<u>¿Lo estoy haciendo bien?</u> “Los 68 metros voy a redondearlos al alza, por lo alto, porque 68 está más cerca de 70 que de 60. El 44 lo redondeará hacia abajo, porque está más cerca del 40 que del 50. Entonces sería 70+40, que de cabeza me da 110. De todos modos esto no será la respuesta exacta; es sólo un número aproximado al resultado que luego compararé con mi respuesta final”.

<u>¿Lo he hecho bien?</u> ¿He hecho la operación que decía mi plan?; ¿He redondeado bien los números?

Sí, yo creo que lo he hecho bien (el 68 a 70, el 44 a 40, sumado son 110). ¿He escrito mi estimado? ¡Ah!, se me había olvidado, lo escribiré aquí arriba para después compararlo con la respuesta correcta. Yo creo que está todo bien. Siguiente paso.

ESTRATEGIA 6: CALCULAR (HACER LAS OPERACIONES).

¿Qué tengo que hacer? Hacer las operaciones en el orden correcto.

¿Lo estoy haciendo bien?

Mi operación era 68+44. La hago en papel. Me fijo que las columnas están bien alineadas: unidades con unidades y decenas con decenas. El resultado es 112. (Si la operación fuera más complicada podría utilizarse la calculadora; bien para hacer la operación, bien para comprobarla).

¿Lo he hecho bien? ¿Son similares mi respuesta final y mi estimación? *Sí; 112 está muy cerca de 110. ¿Tiene sentido mi respuesta? Sí, porque yo estaba sumando, por eso me tenía que dar un número mayor de los que he sumado. Además tiene sentido con el problema: yo tenía 112 metros de cintas, he usado 68 para hacer un disfraz y me han sobrado 44. Tiene sentido. Muy bien, me queda un último paso.*

ESTRATEGIA 7: COMPROBAR (ASEGURARSE DE QUE TODO ES CORRECTO).

¿Qué tengo que hacer? Comprobar los cálculos.

¿Lo estoy haciendo bien? ¿He comprobado los pasos?; ¿He comprobado los cálculos?; ¿Es mi respuesta correcta?

Sí; he planeado unos pasos, los he comprobado y los he seguido. He comprobado las operaciones y he dado una respuesta que es muy parecida a la de mi estimado.

¿Lo he hecho bien? ¿Está todo bien?; Si no lo está tengo que volver atrás, a revisar dónde me he equivocado. Si no logro encontrar el error, debería buscar a alguien que me pudiera ayudar.

En este caso yo creo que está bien.

Problema 2:

Manuel compró una jaula para su loro por 3.98 €. Además le compró algo de comida que le costó 1,90 €. Le dio al hombre de la tienda 6 €. ¿Cuánto cambio le devolvieron?

Se trata de un problema de dos operaciones de cambio, con resultado final desconocido.

El modelado sería el siguiente:

ESTRATEGIA 1: LEER (PARA COMPRENDER).

¿Qué tengo que hacer? Leer el problema, y volverlo a leer si no lo he comprendido. Tengo que tener claros qué datos sé y qué datos me piden.

¿Lo estoy haciendo bien? Los datos importantes parece que son el precio del loro, el precio de la comida, y el dinero que entrega para pagar.

¿Lo he hecho bien? ¿He leído el problema correctamente? Sí; yo creo que sí, ¡Ah!, y también tengo que saber que lo que me preguntan es cuánto cambio le devuelven?

ESTRATEGIA 2: PARAFRASEAR (PONER EL PROBLEMA EN MIS PROPIAS PALABRAS).

¿Qué tengo que hacer? Tengo que poner el problema en mis propias palabras, para entenderlo mejor, y después resolver el problema.

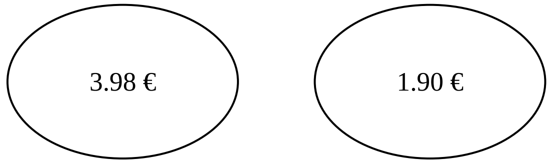
¿Lo estoy haciendo bien? Vamos a ver, Manuel pagó con 6 €, y el precio es de 3.98 € por el loro, y de 1.90 € por la comida. Tengo que saber cuánto dinero le devolvieron.

¿Lo he hecho bien? Sí, creo que sí. Lo que yo he dicho es lo mismo que dice el problema, pero yo lo he hecho un poco más sencillo. Ahora puedo resolverlo mejor.

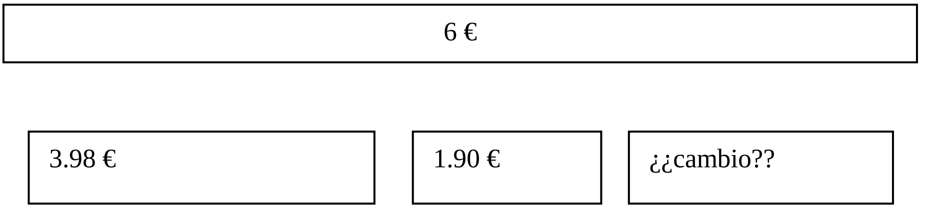
ESTRATEGIA 3: VISUALIZAR (MEDIANTE UN DIBUJO O ESQUEMA).

¿Qué tengo que hacer? Tengo que hacer un dibujo que represente el problema. Con este dibujo luego me será más fácil hacer un plan para resolverlo correctamente.

¿Lo estoy haciendo bien? Puedo dibujar por un lado lo que vale lo que vale la compra, es decir, 3.98 € el loro, y 1.90 € la comida.



Ahora tengo que dibujar lo que paga, que son 6 €. Pero tiene que haber alguna relación entre los datos. Vamos a ver. Yo quiero saber lo que le devuelven. Eso es porque él paga más de lo que vale lo que compra, que no da el cambio exacto. Entonces tiene que haber algo de dinero que le sobre. Ya sé cómo lo puedo dibujar.



¿Lo he hecho bien? Yo creo que sí, porque están los datos importantes, la relación entre ellos, y la pregunta.

ESTRATEGIA 4: TRAZAR UN PLAN. (PARA RESOLVER EL PROBLEMA).

¿Qué tengo que hacer? Tengo que pensar una forma para resolver el problema. Tengo que pensar qué operaciones hacer y en qué orden.

¿Lo estoy haciendo bien? Vamos a ver, según mi esquema el problema es que el niño le da al tendero más de lo que vale la compra, entonces hay que calcular la diferencia. Lo primero que hay que hacer es calcular cuánto vale la compra. Eso es fácil. Sólo tengo que sumar lo que valen las dos cosas que compra. Tendré que sumar 3.98 + 1.90. Pero aún no he acabado. Ahora tengo que calcular lo que de verdad me piden, que es el cambio. Para calcularlo tengo que quitarle el precio total al dinero que el niño entrega. Eso es muy fácil. Quitar es como restar. Entonces tendré que restarle a 6 el resultado que me haya dado la suma anterior.

¿Lo he hecho bien? ¿Tiene sentido mi plan? Yo creo que sí. El plan es sumar el precio total y después restárselo al dinero con el que el niño paga. Sí que tiene sentido. Siguiente paso.

ESTRATEGIA 5: ESTIMAR (PREDECIR LA RESPUESTA)

¿Qué tengo que hacer? Tengo que hacer una estimación de la respuesta. Tengo que redondear los números y luego hacer las operaciones de cabeza.

¿Lo estoy haciendo bien? 3.98 € lo voy a redondear a 4, porque está más cerca de 4 que de 3. 1.90 lo voy a redondear a 2, porque está más cerca de 2 que de 1. Mi plan decía que estos números los tenía que sumar, es decir 4+2 = 6. Ahora mi plan decía que tengo que restarle al dinero que entrega este resultado. Es decir 6 – 6 = 0.

¿Lo he hecho bien? Parece muy raro que el resultado sea 0. Pero he redondeado los números bien, y he seguido mi plan de hacer primero una suma y después una resta. Eso debe ser porque el resultado estará muy cerca de 0, pero no debe ser 0 exactamente. Este resultado es una estimación. La voy a apuntar aquí arriba, y después la comprobaré con el resultado final.

ESTRATEGIA 6: CALCULAR (HACER LAS OPERACIONES).

¿Qué tengo que hacer? Tengo que hacer los cálculos que he dicho en mi plan. Tengo que fijarme en que los números están bien alineados.

$$\boxed{\begin{array}{r} 3.98 \\ \underline{+1.90} \end{array}}$$

¿Lo estoy haciendo bien? Lo primero que decía el plan era sumar el resultado es 5.88. Ahora tenía que restar 6 menos este resultado y me da 0.12.

$$\boxed{\begin{array}{l} \ \ 6 \\ \underline{-5.88} \end{array}}$$

¿Lo he hecho bien? ¿He seguido los pasos de mi plan? Sí; creo que lo he hecho bien. He hecho las operaciones del plan y me he fijado en que los números estén bien alineados. Además, me ha dado un número muy similar al de mi estimación; de cabeza me daba 0, y ahora me da 0.12. Eso es que voy por buen camino. Siguiente paso.

ESTRATEGIA 7: COMPROBAR (ASEGURARSE DE QUE TODO ES CORRECTO).

¿Qué tengo que hacer? Comprobar que he seguido todos los pasos, que no me he equivocado en los cálculos y que la respuesta final es parecida a la de la estimación.

¿Lo estoy haciendo bien? Vamos a ver, he leído el problema y lo he entendido bien. Luego he hecho un plan para resolverlo. Los cálculos están bien hechos, y el resultado final es parecido al de la estimación.

¿Lo he hecho bien? Yo creo que sí, que todo es correcto. He hecho un buen trabajo, no me he precipitado, he ido poco a poco siguiendo los pasos y al final me ha salido bien. Esto de las tarjetas es un truco muy bueno para hacer problemas.