DEPARTAMENT DE DIDÀCTICA DE LA MATEMÀTICA

ESTUDIOS SOBRE LA FAMILIA DE PROBLEMAS ARITMÉTICO-ALGEBRAICOS

FERNANDO CERDÁN PÉREZ

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA
Servei de Publicacions
2008

Aquesta Tesi Doctoral va ser presentada a València el dia 12 de febrer de 2008 davant un tribunal format per:

- D. Luis Rico Romero
- D. Francisco Fernández García
- D. Guillermo Rubio Camacho
- Dª. Mercedes Palarea Medina
- D. Manuel Pedro Huerta Palau

Va ser dirigida per:
D. Eugenio Filloy Yagüe
D. Luis Puig Espinosa

Depòsit legal:
I.S.B.N.:978-84-370-7119-0
Edita: Universitat de València
Servei de Publicacions
C/ Artes Gráficas, 13 bajo
46010 València
Spain
Telèfon: 963864115

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

FACULTAT DE MATEMÀTIQUES

Departament de Didàctica de la Matemàtica

Estudios sobre la Familia de problemas Aritmético-Algebraicos.

Tesis Doctoral

PRESENTADA POR:
Fernando Cerdán Pérez

DIRIGIDA POR:
Dr.Eugenio Filloy Yague
Dr.Luis Puig Espinosa

Valencia 2007

A Matilde y Aquilino que fueron mis padres.

A Trinidad, Trini, Julia.

Índice

Capitulo 3.-Problemas de Lectura Algebraica. Resoluciones en el sistema de signos de la Aritmética

Capitulo 4.- PLA. Resoluciones en el SMS del Álgebra. Estudio de dificultades de los problemas.

Capítulo 5.- PLA. Resoluciones en el SMS del Algebra. Estudio de las igualdades encontradas en las resoluciones.

Anexos, índice.

Introducción

El campo de trabajo de esta tesis es la resolución de problemas de matemáticas en los sistemas educativos.

Los problemas de matemáticas se pueden contemplar en los sistemas educativos en tres escenarios: global, local y puntual, lo que ya ha sido expuesto en Puig y Cerdán (1989) y Puig (1996). Global, cuando se contempla el conjunto de los problemas y la organización general del currículo; local, cuando se contempla las clases o familias de problemas que se estudian, y puntual, cuando se contempla una situación de enseñanza concreta con un problema concreto. Además, en cualquiera de los escenarios que se contemplen es posible situar en escena tres personajes, el problema, el estudiante y el profesor, como partícipes directos en cualquier situación de enseñanza. Ello lleva a considerar que en la concepción del marco teórico a que deban referirse las observaciones empíricas, se debe articular lo que es propio de cada uno de los personajes y las relaciones entre ellos. A tal efecto, se conciben lo que en Puig (1996) se denominan las teorías de nivel o niveles de análisis. Tres son los niveles de análisis, que designamos como niveles I, II y III, según se considere que en la escena están presentes: problema (nivel I), problema y estudiante (nivel II), o problema, estudiante y profesor (nivel III). En un nivel de análisis, se estudian solamente el o los personajes propios del nivel, considerando que dicho personaje es el que está en escena, pero sin olvidar que los otros forman parte del reparto.

La consideración de los problemas de la familia de problemas aritmético-algebraicos, en adelante también FPAA, como objeto de estudio en esta tesis indica que, en el mundo de la resolución de problemas, estamos en el ámbito de lo local. Los estudios que se presentan aquí sobre los problemas de esa familia corresponden a los niveles I y II. No obstante la consideración de estudios de nivel II, el objeto fundamental de estudio en esta tesis es los problemas, y la intención es obtener conocimiento sobre los problemas, es decir, la tesis desarrolla una teoría de nivel I. Cuando entran en escena los estudiantes, lo que ocurre, por ejemplo, cuando se estudian resoluciones de los problemas, dificultades del problema o los errores que se encuentran en las ecuaciones producidas en el proceso de traducción, en todos los casos, los estudiantes son considerados como población, en la cual se miden las dificultades, o como población observada, en la que se han encontrado tales errores para un problema. No se trata pues en esta tesis de describir características de los estudiantes o grupos de estudiantes, en función de las dificultades que tienen con los problemas o por los errores que cometen al traducir problemas a ecuaciones. Debe decirse también que en esta tesis no consta ningún estudio de nivel III, esto es, no se consideran explícitamente situaciones o modelos de enseñanza.

Existen razones que justifican la decisión de estudiar esta familia de problemas. Unas tienen que ver con la Educación Matemática y otras, con mi participación en las investigaciones sobre resolución de problemas que se han llevado a cabo en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València.

La educación matemática que deben recibir los ciudadanos viene marcada por las disposiciones ministeriales, que en parte configuran el currículo. Un currículo de matemáticas sin que en él se consideren los problemas es inimaginable, ya que los problemas constituyen el motor y el núcleo central de las matemáticas. Al socaire de modas y tiempos, los currículos pueden tener contenidos y finalidades diversas, pudiendo ambos estar inspirados en un amplio rango, que discurre entre hacer partícipes a los ciudadanos del mero saber matemático o intentar que éstos desarrollen ciertas competencias. Pero, independientemente de ello, estamos de acuerdo con Schroeder y Lester (1989), los currículos suelen contemplar el papel de los problemas sustancialmente de tres modos diferentes:

Uno, se enseña para la resolución de problemas. Se enseña el contenido matemático para usarlo después en la resolución de los problemas.

Dos, se enseña acerca de la resolución de problemas. Se enseñan estrategias heurísticas para mejorar la capacidad genérica de resolver problemas. Esto es, se enseña lo que llamamos pura resolución de problemas.

Tres, se enseña a través de la resolución de problemas. Se enseña el contenido matemático estándar presentando problemas, generalmente no rutinarios, que implican tal contenido.

Pues bien:

Uno, si se enseña para la resolución de problemas, el currículo determina los problemas que deben saber resolverse. En tal caso, los problemas de la familia de problemas aritmético-algebraicos han sido tradicionalmente considerados como problemas que deben saber resolverse, quizá porque presentan descripciones cuantitativas de situaciones en las que los ciudadanos se encuentran o podrían encontrarse en la vida cotidiana, a pesar de que los problemas que se presentan para ser resueltos lo hagan describiendo las situaciones en una versión estereotípica, propia de los problemas escolares.

Dos, si se enseña acerca de la resolución de problemas, los problemas de esta familia se sitúan en la secuencia curricular a continuación y entremezclados con los problemas aditivos y multiplicativos de una etapa. Los problemas de una etapa, que presentan una relación entre tres cantidades, pueden considerarse destinados a forjar la idea de qué es un problema y a la construcción de significados para las operaciones aritméticas elementales. Los problemas de la familia de problemas aritmético-algebraicos, que se resuelven por medio de varias operaciones combinadas, requieren para su solución que algunas preguntas sean respondidas –como ¿qué operaciones aritméticas deben realizarse?, ¿entre qué cantidades?, ¿en qué orden?– donde la tarea de responder a estas preguntas requiere algún tipo de organización, algún procedimiento. En Puig y Cerdán (1989) mostramos que para responder a estas preguntas y obtener el procedimiento podía usarse el método de Análisis-Síntesis. Siendo el método de Análisis-Síntesis un método general de resolución de problemas, en su versión problemática, o de adquisición de la certeza de una proposición, en su vertiente teórica, ¿qué mejor modo de iniciar a los estudiantes en la resolución de problemas que usando los problemas de la familia de problemas aritmético-algebraicos como ejemplo, para la instrucción en un método general? Por otro lado, debemos considerar que, cuando se enseña acerca de los problemas, no sólo se trata de enseñar destrezas, sugerencias y herramientas heurísticas, sino también métodos de resolución con contenido heurístico.

Polya (1966) presenta cuatro de éstos métodos, el de los dos lugares, la recurrencia, la interpolación y lo que él llama *the Cartesian Pattern*, el Método Cartesiano. El Método Cartesiano constituye el proyecto cartesiano de reducir la resolución de cualquier problema a un problema de resolución de ecuaciones. Como se mostrará en esta tesis, ocurre, para algunos de los problemas de la familia de problemas aritmético-algebraicos, que un procedimiento de resolución análogo al anterior es difícil o casi imposible de obtener, siendo entonces el Método Cartesiano, o la representación estructural mediante ecuaciones de las relaciones entre las cantidades del problema, un modo adecuado para obtener la solución. De ahí, que en una enseñanza acerca de los problemas, si se quiere poner algún énfasis en los métodos de resolución, los problemas de esta familia son un buen recurso para la instrucción en dos de ellos, el método de Análisis-Síntesis y el Método Cartesiano.

Tres, si se enseña a través de los problemas y el contenido a enseñar es el álgebra escolar, en Bednarz, Kieran, and Lee (1996), se plantean cuatro perspectivas para la introducción y desarrollo del álgebra escolar: generalización, resolución de problemas, modelización y funcional. Considerar la resolución de problemas como la formulación y resolución de ecuaciones ha sido no sólo ruta tradicional de la enseñanza del álgebra, sino uno de los motores históricos del desarrollo de esta disciplina. Ahora bien, considerar los problemas verbales como vía de aproximación al álgebra lleva aparejado, también, el estudio de la transición de la aritmética al álgebra, no sólo desde el punto de vista del sistema matemático de signos (SMS) utilizado, sino también desde la perspectiva del análisis estructural de los problemas y los métodos susceptibles de ser usados en su resolución.

En cuanto a las razones de índole personal, habría que comenzar diciendo que todas las investigaciones en las que he participado han tratado sobre resolución de problemas y que, en mi dedicación docente, también ha sido éste un campo al que le he prestado una atención especial (Cerdán y Puig, 1986). Es cierto que, dentro del mundo de la resolución de problemas, la atención inicial se centró en el mundo de la pura resolución de problemas, el estudio de la resolución de problemas sin mirar a los problemas desde el punto de vista de los conceptos o estructuras conceptuales implicadas en ellos y que considera todo aquello relacionado con los problemas y la resolución que fuese independiente del contenido. En esa etapa, el estudio de herramientas heurísticas y patrones de inferencia plausible, las descripciones del proceso de resolución o los mecanismos de gestión y control del mismo fueron el foco de atención (Cerdán y Puig, 1983; Puig y Cerdán, 1987). Es, en esta etapa, donde se va tomando consciencia de la necesidad de estudiar concienzudamente el problema y sus elementos. Esto porque, en nuestra concepción, una herramienta heurística consiste en la transformación de un problema en otro y, por tanto, hay que considerar cuáles son los elementos del problema que se trasforman. También en esa etapa es en la que, en el desarrollo de tres proyectos de investigación, *El papel de la resolución de problemas en el curriculum de formación de profesores de EGB. Herramientas heurísticas y patrones plausibles* (1982-1983), *Mecanismos de control y de decisión en la resolución de problemas de matemáticas* (1984-1985) y *Sugerencias heurísticas y gestión del proceso de resolución de problemas: efectos de la instrucción* (1986), desarrollados con Luis Puig, nos familiarizamos y desarrollamos metodología de investigación para observar procesos de resolución.

La atención al estudio de una colección concreta de problemas coincide, temporalmente, con la redacción del libro *Problemas Aritméticos Escolares* y con el inicio de la colaboración entre el Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universitat de València y el Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y Estudios Avanzados (CINVESTAV) del Instituto Politécnico Nacional de México. En *Problemas Aritméticos Escolares*, los problemas objeto de estudio venían impuestos por los problemas presentes en el segmento curricular considerado y los recursos matemáticos de los escolares a los que se instruye en la resolución de tales problemas. Ello condujo a una reformulación de las descripciones generales del proceso de resolución, útiles en la pura resolución de problemas, para la descripción del proceso de resolución de un problema aritmético y, además, a la consideración del uso del método de Análisis-Síntesis como guía en la obtención del procedimiento aritmético que los escolares usan para resolver los problemas. Es ahí donde los *Estudios Soviéticos en la Psicología del Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas* recogidos en Kilpatrick, Wirszup, Begle and Wilson (Eds.) (1969-1975) fueron de especial utilidad, en particular el volumen XI, dedicado al Análisis y Síntesis como Métodos de Resolución de Problemas.

Cuando se usa el método de Análisis-Síntesis para la resolución de problemas de varias operaciones combinadas, es connatural toparse con problemas en los que el uso del método se ve abocado al fracaso, por la real o aparente imposibilidad de reducir la incógnita del problema a datos. Como en los problemas en los que el Método de Análisis-Síntesis fracasaba, de manera fácil el Método Cartesiano obtenía éxito, se señaló esta clase de problemas como un lugar natural para realizar el tránsito de la aritmética al álgebra. Por su lado, en el CINVESTAV, Filloy y Rojano habían determinado un corte entre la aritmética y el álgebra en el terreno de la resolución de ecuaciones, que está en el momento en que es necesario operar con la incógnita para resolver la ecuación (Filloy y Rojano, 1985; Rojano, 1985), ocurriendo que, en los problemas en que inicialmente fracasaba el método de Análisis-Síntesis, las ecuaciones producidas por el Análisis-Síntesis con el uso del SMS del álgebra eran precisamente de la forma señalada por Filloy y Rojano. Y es así como se inician algunos de los estudios relacionados en esta tesis.

En lo que atañe a la transición de la aritmética al álgebra, Wagner y Kieran (1989) plantearon preguntas como: ¿existen problemas verbales que sean intrínsecamente algebraicos, más que aritméticos?, ¿qué es lo que hace un método de resolución de un problema verbal, algebraico más que aritmético? Estas preguntas fueron consideradas en dos trabajos (Puig y Cerdán, 1990a, 1990b) que se reescriben en esta tesis. En ellos se esbozaron respuestas partiendo del análisis del proceso de traducción, la expresión de éste en textos intermedios y las posibilidades de ejecutar las síntesis en un determinado sistema matemático de signos. Además, en estos trabajos se apuntaba la idea de tomar los textos intermedios como una descripción de la estructura del problema.

El estudio del proceso de traducción de un problema en ecuaciones parecía también metodológicamente accesible gracias a la experiencia en el análisis de resoluciones adquirida en el estudio de la pura resolución de problemas (Puig, 1996). Así se procedió a diseñar y poner a punto un instrumento de medida que prestase atención a lo producido en tal proceso de traducción (Cerdán, 1993). Posteriormente se diseña un test para obtener datos sobre las resoluciones de los estudiantes de problemas de diversas subfamilias de problemas aritmético-algebraicos, y se obtienen las resoluciones de estudiantes, a partir de las cuales se obtienen los datos brutos –datos brutos que serán usados aquí.

En ese periodo, tras un viaje a México, Luis Puig llega con un número de la *Revista de Matemáticas de la Universidad de Sonora* que contiene un artículo de L. Fridman, "Los grafos trinomiales como metalenguaje para los problemas"[1], Fridman (1990). Sustancialmente, el artículo de Fridman describe los grafos trinomiales, muestra un ejemplo del grafo trinomial de un problema, presenta las nociones de nodo, orden del grafo y grafos equivalentes, describe el algoritmo de destrucción del grafo y clasifica los grafos en abiertos, cerrados, mixtos y encadenados, según el grafo tenga o no entradas y sea destruible totalmente por el algoritmo, y contiene además diversos teoremas que relacionan los conceptos citados. Inmediatamente, el artículo nos pareció muy interesante y empezamos a estudiarlo. Así, asociamos grafos a problemas con la intención de averiguar qué nos decía la contemplación del grafo de los problemas, en especial, si nos mostraba más claramente algunas de las características del problema que quedasen ocultas o borrosamente dibujadas por otras miradas. Entre lo que nos parecía importante destacaba: la asociación problema-objeto matemático, que el proceso de asociación era independiente del procedimiento de resolución y que el algoritmo de destrucción proporcionaba el procedimiento de solución. Sin embargo, con la noción de grafo de Fridman inmediatamente nos topamos con problemas a los que no se podía asociar un grafo y problemas a los que no se podía aplicar el algoritmo de destrucción, algoritmo que sólo era aplicable a los grafos abiertos y encadenados. Así, se modificó la concepción de grafo trinomial de Fridman y se procuró dotar de entradas al grafo, en la búsqueda de un procedimiento de solución. Resueltos estos problemas, a partir de ahí, y como se hace en esta tesis, se usaron grafos para describir algunas características del problema y también para el análisis de resoluciones.

En el inicio de la década de los ochenta, el NCTM declara el "problem solving" como meta principal para la década, y le dedica el Yearbook de 1980, *Problem Solving in School Mathematics* (Krulik and Reys (Eds.), 1980). Así, identificada la necesidad y con el viento soplando a favor, la mayor parte de la investigación fundamental sobre resolución de problemas y en particular sobre problemas verbales elementales se lleva a cabo en esa década. En la década de los noventa, el esfuerzo de la investigación se concentra en el desarrollo e implementación de herramientas para el desarrollo del aprendizaje en un entorno computacional (Jonasssen, 2003). Así y por ejemplo, Hershkovitz and Nesher (1991), a quienes podemos encontrar examinando y categorizando los problemas de dos etapas mediante esquemas, los encontramos posteriormente examinando el papel de los esquemas en ambientes computacionales (Hershkovitz and Nesher, 1996). Se han diseñado algunos tutoriales para la resolución de problemas, v. g. ANIMATE para problemas de móviles, que utiliza un análisis estructural del problema, un modelo animado de la situación y un constructor de ecuaciones (Nathan, Kintsch, and Young, 1992), HERO, que utiliza un árbol, un diagrama de síntesis, para organizar los cálculos que deben realizarse para encontrar el

[1] La llegada casual o azarosa de este articulo a nuestras manos se debe al entrecruzamiento de las siguientes personas y circunstancias, una conferencia de Luis Puig, en la que está presentando los diagramas como medio de análisis de la estructura de los problemas de varias operaciones combinadas a la manera de como lo escribimos en Puig y Cerdán (1989), un profesor de la Universidad de Sonora que ha estado en Cuba, que habla ruso y ha traducido el articulo de Fridman que la revista de la citada Universidad publica, y el profesor Ramiro Avila, presente en la conferencia, que aprecia similitudes entre lo que está oyendo y lo que vio en el articulo de la revista de su Universidad.

resultado (Reusser, 1993). Algunas de las nociones consideradas en esta tesis, como la especificidad del espacio del problema, pueden tenerse también como contribución a un posible desarrollo en el diseño de tutoriales.

La organización del trabajo de investigación que hemos llevado a cabo sobre los problemas aritmético-algebraicos podría distinguir entre:

Estudios de carácter teórico, estudios que tratan de describir las diferentes estructuras de los problemas, enunciados verbalmente, de la familia de problemas aritmético-algebraicos: de cantidades, de relaciones, interrelaciones, del problema. La descripción de la estructura de un problema, vía la resolución del mismo, que se hace utilizando los textos intermedios producidos por el método de Análisis y Síntesis y el Método Cartesiano. La descripción de la estructura de un problema, vía la lectura analítica del mismo, se hace utilizando un metalenguaje adecuado para los problemas: los grafos trinomiales. Estudios en los que se pretende aclarar o precisar algunas cuestiones sobre isomorfía, equivalencia, complejidad o el carácter aritmético o algebraico de un problema de la FPAA, pretendiendo a la vez poner a punto instrumentos para los estudios de observación.

Estudios de carácter histórico, en los que, previa selección de textos y autores, se analizan los modos en los cuales los problemas de la FPAA se resuelven. En la descripción de la manera de resolver se utilizan los instrumentos desarrollados en los estudios teóricos. Estudios en los que se presta especial atención a cualquier indicación de carácter metodológico o regla para resolver problemas que conste en los textos seleccionados. Las fechas límite, para el periodo histórico que se estudia, son aquellas en las cuales se considera que el Método Cartesiano está institucionalizado en la enseñanza; esto es, fechas posteriores a la publicación de la *Aritmética Universal* de Isaac Newton.

Estudios con carácter de observación, estudios exploratorios, dedicados a poner a prueba los instrumentos para la observación desarrollados en los estudios teóricos, examinado la viabilidad de formular y contrastar hipótesis expresadas en dichos términos.

Estudio de los problemas de la FPAA mediante variables de producto, estudio en el que se hace un minucioso análisis de lo que es requerido producir en el uso competente del Método Cartesiano. Se intenta definir un conjunto de variables de producto asociadas a las distintas tareas que requiere el Método Cartesiano y se trata de medir su dificultad. Se definen perfiles de producción de distintos problemas de la FPAA mediante la observación y análisis de las resoluciones de los estudiantes. De estos perfiles se espera que muestren su dependencia de aspectos tales como isomorfía, complejidad, subfamilia de problemas o nivel de los estudiantes.

Estudio de carácter clínico, estudio del conjunto de las ecuaciones producidas para un problema por una población de estudiantes. Las igualdades se analizan mediante los grafos trinomiales introducidos en el estudio teórico, con el ánimo de describir tendencias de los estudiantes y confeccionar un catálogo de errores que incluya entre otros los ya descritos en la literatura. Se intenta asimismo apuntar a su etiología, o más bien conjeturar sobre lo que subyace en la aparición de tales errores para que pueda ser tomado en cuenta en estudios posteriores.

Los propósitos generales de los estudios son:

- Obtener conocimiento sobre los problemas y su estructura.
- Precisar qué quiere decirse cuando los calificativos aritmético y algebraico se predican de problemas de la familia.
- Establecer criterios de equivalencia de problemas o de decisión sobre cuándo un problema es más complejo que otro.
- Estudiar el uso del método de Análisis-Síntesis y del Método Cartesiano en problemas de la familia.
- Iniciar la confección de un catálogo de métodos disponibles para la resolución de los problemas de la familia.
- Obtener información sobre el rango de dificultades de los distintos problemas de la familia.
- Elaborar un marco teórico que sea capaz de dar cuenta de las resoluciones de los estudiantes.
- Estudiar para qué problemas los estudiantes parecen requerir el recurso del álgebra y de qué manera proceden en la resolución cuando no disponen de éste recurso y resuelven problemas que inicialmente podríamos llamar algebraicos.
- Estudiar, para problemas dados, las ecuaciones producidas por los estudiantes cuando ponen el problema en ecuaciones, con la intención de examinar su competencia en el uso del Método Cartesiano, la manera en que éste se usa y los errores que aparecen en dicho uso.

No nos pareció conveniente realizar aquí una revisión general de la bibliografía, dado que la diversidad de los estudios quizá requeriría de una única tesis dedicada a ello. No obstante, han sido objeto de atención singular:

a) las tesis y las revisiones particulares que constan en las tesis doctorales de Guillermo Rubio, Francisco Fernández, María Elisa Espinosa y Benito Huesca, que explícitamente contemplan problemas de la FPAA (Rubio, 1994; Fernández, 1997; Espinosa, 2004; Huesca, 2006),

b) el contenido de los dos primeros libros de la colección “Mathematics Education Library” y del ICMI Study dedicados al álgebra:

Bednarz, N., Kieran, C., and Lee, L. (Eds.) (1996). *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Sutherland, R., Rojano, T., Bell, A., and Lins, R. (Eds.) (2001). *Perspectives on School Algebra*. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers.

Stacey, K., Chick, H., and Kendal, M. (Eds.) (2004). *The Teaching and Learning of Algebra: The 12th ICMI study*. Boston/Dordrecht/New York/London: Kluwer Academic Publishers.

c) la contribución al álgebra del PME en sus 30 años, que resume Kieran, C. (2006) en Gutiérrez, A., and Boero, P. (Eds.) *Handbook of Research on the Psychology of Mathematical Education: Past, Present and Future.*

d) y, por ultimo, el libro Filloy, E., Puig, L., and Rojano, T. (2007). *Educational Algebra. A Theoretical and Empirical Approach*. New York: Springer.

De los estudios arriba mencionados, de todos puede darse cuenta de parte de lo en ellos encontrado, con la excepción del estudio de carácter histórico, dado que el material producido en su ejecución necesita aún de cierta elaboración para que pueda ser presentado. No obstante, es compromiso del autor hacerlo en un futuro cercano. Del resto de estudios mencionados se da cuenta aquí y ello se hace en cinco capítulos.

El capítulo 1, *Problema. Elementos. Estructuras. Carácter. Isomorfías. Espacio del problema. Situaciones*, en su totalidad, es un discurso fruto de la reflexión y especulación teórica. La exposición del capítulo no es lineal sino que discute y vuelve a discutir los asuntos según las nociones disponibles hasta ese momento. El capítulo comienza considerando los elementos del problema aisladamente, pasando a considerar las estructuras del problema o las disposiciones conjuntas de los elementos. Tales disposiciones provienen de la aplicación ortodoxa de un método de resolución o de un modo de leer el problema. Los términos novedosos introducidos, que implican nociones y que se utilizan para hablar de ello, son: diccionario de cantidades, textos intermedios y grafos. El uso de los calificativos aritmético o algebraico es visto como propio de un sistema matemático de signos en función de su modo o capacidad para designar y operar con las cantidades desconocidas. Así, en consonancia con ello, tales calificativos no se dicen nunca del problema sino del texto intermedio o del grafo en los cuales el uso de un sistema matemático de signos u otro permite encontrar la solución del problema. En el único caso en que el calificativo “algebraico” se usa para problema, es en el caso en el que no existan soluciones de ese problema con el uso del sistema matemático de signos aritmético. La cuestión de la equivalencia o ismorfia de problemas se resuelve mediante la equivalencia de los grafos asociados a los problemas, presentando diversas isomorfías entre problemas en función de lo que se haya abstraído de las características de las cantidades y relaciones del problema hasta la preservación última del carácter conocido o desconocido de las cantidades y la existencia de una relación elemental entre algunas de ellas. Sin embargo, siendo esta solución insatisfactoria por la no univocidad de la asociación grafo con problema, se sugieren algunos remedios y una última abstracción a partir de un problema, que consiste en la consideración de todas las cantidades de un problema como si fuesen desconocidas. Ello conduce a la consideración de lo que llamamos situaciones y al estudio de la equivalencia entre situaciones. Una última noción fundamental es considerada en este capítulo, la noción de espacio de problema. Se utiliza aquí parcialmente, y particularizándola para la familia que nos ocupa, la noción de Newell y Simon (cf. Newell and Simon, 1972). Esto conduce a la introducción de dos nuevas nociones: grafo teórico del problema y diccionario teórico de cantidades del problema. El grafo teórico del problema contendría el mundo de cantidades y relaciones entre ellas que es posible concebir en un mundo posible, y el diccionario teórico del problema contendría las referencias a esas cantidades por medio de expresiones aritméticas, algebraicas y verbales.

El capítulo 2, *Descripción de actuaciones y errores en la resolución*, contiene tres contrastaciones para examinar si es posible describir las actuaciones de estudiantes resolviendo problemas en términos del espacio del problema. En el examen se decide que una parte sustantiva de la información sobre la resolución está contenida en el grafo de la resolución y en el diccionario de cantidades de la misma. Además, como es connatural que en las actuaciones de los estudiantes aparezcan errores, se atribuye el error a un uso inadecuado de los operadores del espacio del problema. Desde esta visión del error, un análisis de posibilidades permite proponer un catálogo provisional de los errores que pueden aparecer en las resoluciones que usan el Método Cartesiano, dividiendo los errores en tres categorías: errores en el uso de letras, en la construcción de expresiones y en la construcción de la igualdad.

El capítulo 3, *Problemas de Lectura algebraica. Estudio de Resoluciones en el SMS de la Aritmética*, comienza con la delimitación de los problemas objeto de estudio: aquellos problemas que poseen lecturas algebraicas –en adelante, también PLA. El capítulo contiene una parte teórica y una parte empírica. En la parte teórica, se exponen detalladamente métodos susceptibles de ser utilizados en la resolución de problemas de la FPAA: el método aritmético, el método de tanteo y el método algebraico, y se relacionan dichos métodos con el sistema matemático de signos en que se expresan las resoluciones. Se afirma que, teóricamente, la resolución de un problema de lectura algebraica con el uso del SMS de la aritmética requiere de la consideración de más u otras cantidades y relaciones que las contenidas en la lectura algebraica. La parte empírica se dedica al examen de las resoluciones de estudiantes en SMS de la aritmética, y contiene dos estudios, ambos comparten metodología y también los tipos de datos extraídos de las resoluciones de los estudiantes: los grafos de la resolución y los diccionarios de cantidades. Los estudiantes considerados fueron estudiantes de Secundaria y estudiantes de la Licenciatura de Matemáticas a los que se prohibió usar ecuaciones. Ambos grupos de estudiantes fueron capaces de obtener soluciones en el SMS de la aritmética para problemas de lectura algebraica, si bien en el primer estudio se constató la presencia de un problema cuya lectura algebraica es tal, que ni uno ni otro grupo de estudiantes lograron una solución del mismo mediante el modo de resolver aritmético. En este primer estudio, se explora también la relación que pueda existir entre la eficiencia del modo de resolver y la complejidad del problema, los razonamientos usados por los estudiantes y se comparan las soluciones aportadas por uno y otro grupo de estudiantes. En el segundo de los estudios, se examinaron las resoluciones de problemas pertenecientes al espacio de problemas de una misma situación concreta por estudiantes de licenciatura. La intención era comprobar que, para determinadas lecturas algebraicas, es imposible en la práctica encontrar soluciones con el uso del modo de resolver aritmético y examinar los modos de resolver y razonamientos utilizados en los problemas de lectura algebraica de la misma situación concreta.

El capítulo 4, *PLA. Resoluciones en el SMS del Álgebra. Estudio de dificultades de los problemas,* estudia diversas dificultades asociadas a los problemas según lo observado en las resoluciones de una población de estudiantes. La población considerada fue, concretamente, de estudiantes de cada uno de los cursos de la especialidad de ciencias del anterior Bachillerato Unificado Polivalente. Las dificultades consideradas son: la dificultad apreciada del problema, la dificultad de la solución y la dificultad del proceso de traducción algebraico, y el error se estima mediante la diferencia de la dificultad apreciada y de la solución. La metodología usada es la propia de un estudio de variables. Las variables independientes consideradas de la tarea y del sujeto fueron subfamilia, complejidad y curso; las variables dependientes fueron variables de producto, a) de lo que es necesario producir en el proceso de traducción algebraico: uso de letras, construcción de expresiones algebraicas, construcción de la igualdad; b) de si lo producido lo era en la cantidad necesaria: todas las expresiones algebraicas y todas las igualdades, y c) de si se había producido correctamente: error en expresiones algebraicas, error en la igualdad. La fuente de datos la constituyeron las resoluciones escritas de los estudiantes, lo cual dificultó la determinación de los valores de las variables de producto relativas a la cantidad y corrección de lo producido. Los PLA que se usan son 31, de los cuales 13 se administran a todos los estudiantes, 258 en número. Un análisis de datos mediante SPS se usa para determinar tanto la influencia de las variables dependientes en las dificultades como los valores medios de éstas.

El capítulo 5, *Resoluciones en el SMS del Álgebra. Estudio de las igualdades encontradas en las resoluciones*, estudia los segmentos de signos "expresión algebraica = expresión algebraica", "expresión algebraica = número", "expresión algebraica = expresión aritmética" encontrados en las resoluciones y dados por los estudiantes como planteamiento del problema o como ecuaciones que resolviéndolas permiten encontrar el resultado del problema. Estos segmentos de signos son a los que en el título del capítulo se llaman igualdades. La fuente de datos la constituyen las igualdades encontradas en las resoluciones de los 13 problemas administrados a los 258 estudiantes. La finalidad del capítulo es examinar la manera en que los estudiantes usan el Método Cartesiano cuando lo hacen correctamente, e indicar cuáles son los errores encontrados en su uso, cuando la ecuación que terminan escribiendo no permite encontrar el resultado del problema. El análisis del conjunto de igualdades producidas por los estudiantes con la finalidad señalada no resulta una tarea simple, en mi opinión principalmente por dos motivos, uno, la diversidad de las igualdades encontradas para cada problema, y dos, la fuente de datos: las igualdades, simplemente el producto final de un proceso. De ahí que la metodología usada en este estudio consista en la elaboración de un protocolo para informar de las igualdades encontradas en cada problema. En dicho protocolo se incluye, tanto un análisis cuantitativo de las igualdades encontradas, que permite detectar cuales son las igualdades incorrectas que muestran errores persistentes, como un análisis clínico para el diagnóstico del error, que se basa en la construcción del grafo de la resolución que reconstruye la igualdad analizada. Diagnosticado el error, se usa el catálogo de errores para designar al mismo. Con esta metodología, en el capítulo se presentan como resultados un resumen común de los informes de cada uno de los problemas.

Por último, debe decirse que la exposición de estos cinco capítulos viene acompañada de un anexo o anexos. Tal anexo, no contiene únicamente los enunciados de los problemas junto con sus grafos, los datos brutos o semielaborados, los resultados de los contrastes de hipótesis, etc.; sino también, estudios puntuales, trabajos necesarios o resultados que pueden ser de interés. Así, el anexo del capítulo 1 contiene un estudio del espacio de problemas de una situación. El anexo del capítulo 3 contiene, como ayuda para el estudio 1 de ese capítulo: la determinación de las soluciones aritméticas de los problemas usados como instrumento de observación, utilizando en las resoluciones elementos geométricos, la determinación de parte de la componente *n* del diccionario teórico de cantidades y de la parte del grafo teórico que es necesaria para encontrar una solución aritmética al problema y, como previo para el estudio 2, la descripción de la construcción del test MECA. El anexo del capítulo 5 contiene los informes de los protocolos para el estudio de las producciones, donde se formulan observaciones, diagnósticos e interpretaciones de errores que, bien por ligados a un problema particular o a la singularidad del hecho, no se han recogido en el resumen general que figura en el capítulo.

Capítulo 1

Problema. Elementos. Estructuras. Carácter. Isomorfías. Espacio del problema. Situaciones.

1.0.- Introducción

Este primer capítulo tiene la intención de presentar una noción de problema de la Familia de Problemas Aritmético-Algebraicos (FPAA) y tratar alguna de las cuestiones sobre los problemas de dicha FPAA para las cuales puedan esbozarse respuestas desde la mera reflexión teórica. Ello quiere decir que las reflexiones y los razonamientos inmersos en el discurso que sigue no se fundamentan solamente, ni buscan su razón de ser en la observación empírica, sino más bien tratan de contribuir a forjar un marco teórico que permita hablar de y explicar algunos de los fenómenos que acaecen en la enseñanza y resolución de tales problemas.

En coherencia con el propósito general de esta tesis, que trata del estudio de los problemas, y con la teoría de niveles para el estudio de la resolución de problemas, en este capítulo el resolutor quedará fuera de escena, prestando todo el escenario a los problemas. Cuando sea ineludible la consideración del resolutor o su mera mención, el papel asignado a él corresponde al resolutor ideal y no al estudiante concreto, que es el resolutor de cualquier problema en el ámbito educativo.

Concretamente este capítulo estudia y reflexiona sobre los elementos del problema, su estructura, su carácter aritmético o algebraico, la equivalencia de problemas y su complejidad. Se consideran dos métodos generales de resolución de problemas, el método de Análisis-Síntesis y el Método Cartesiano, se estudian dichos métodos en su papel de guía en la producción de resoluciones de los problemas de la FPAA y, a partir de esto, lo que puede decirse de los problemas. Por otro lado, se hace un extenso uso de los grafos trinomiales, asociando grafos a problemas, mostrando lo útil que dicha asociación puede ser para decidir sobre el carácter del problema, o la luz que la consideración de los mismos permite aportar en cuestiones que tienen que ver con las soluciones, equivalencia y complejidad de los problemas. Además, se considera la noción de espacio del problema. Aquí, partiendo de la noción de “Problem Space” de Newel and Simon (1972), se reformula esta noción y se adapta ésta con las concreciones posibles que permiten considerarla como el espacio del problema de un problema de la FPAA o el lugar en que se da la búsqueda de soluciones para tales problemas. En relación con la noción de espacio del problema, se introduce la noción de grafo teórico del problema y diccionario teórico de cantidades del problema. Por último, se explora lo que puede ser la noción de situación y el espacio de problemas de una situación, estudio que es dejado aquí en sus inicios.

El capítulo comienza presentando los problemas y describiendo los elementos sustantivos que éste contiene, cantidades y relaciones entre las cantidades. Ello, con un estudio de detalle de cada uno de los mismos. A esto se dedican los apartados **1.1**. a **1.3**. Es de destacar en esta parte la noción de diccionario de cantidades, diccionario de cantidades que puede asociársele a un problema. Esta noción podría decirse que viene esbozada en Puig (1996) como diccionario de lo que aquí llamaremos diccionario de nombres para las cantidades. La consideración de tal diccionario es un elemento fundamental cuando se le considera como descriptor de uno de los elementos constituyentes de un Sistema Matemático de Signos (SMS). La noción de SMS, que fue introducida por Filloy, puede utilizarse como herramienta en el análisis tanto de los textos que se les presentan a los estudiantes como de los textos que éstos producen. Por otro lado, está poniéndose de manifiesto la importancia de considerar las maneras de nombrar y referir cantidades para explicar alguno de los fenómenos que ocurren en la resolución de problemas con el uso de hojas electrónicas, donde la interlocución estudiante-computadora juega un papel destacado (Arnau y Puig, 2006).

Wagner y Kieran (1989) en su agenda de investigación en álgebra propusieron como una de sus preguntas: ¿Qué es un problema verbal algebraico? Bednarz y Janvier (1996) indican que para poner a punto principios relativos a los modelos de enseñanza existe una necesidad de reflexionar profundamente sobre la naturaleza de los problemas y los criterios que permitan analizar la relativa complejidad de éstos. Rubio (1992) ya reclamaba la necesidad de disponer de una teoría de la complejidad de los problemas. Fernandez (1997), en su tesis "Evaluación de competencias en álgebra a través de problemas verbales", dada su intención de usar en su instrumento de evaluación únicamente problemas "algebraicos", para saber si los problemas de que consta el instrumento que diseña son o no algebraicos, termina por recurrir a la opinión de expertos que le garanticen que tales problemas son realmente algebraicos. Esto, dicho arriba, puede ser tomado como una muestra de la necesidad que parece existir entre los investigadores de conocer más sobre los problemas que usan en sus investigaciones.

El objeto conceptual que se siente la necesidad de conocer, para contestar a partir de él a las cuestiones citadas u otras similares, acaba siendo algo a lo que se denomina estructura del problema. En una revisión sobre modelos teóricos de problemas verbales algebraicos Carifio y Nasser (1994) afirman, que es común entre los investigadores asumir que un "Algebra Word Problem" tiene dos estructuras, una estructura profunda que consistiría en la ecuación de relaciones formales subyacente y una estructura superficial, que es la estructura sintáctica o la forma de revestir la ecuación estructural subyacente. En el presente capítulo, se sostiene que un problema de la FPAA tiene o se le pueden asociar diversas estructuras que cabría calificar de profundas. Esta diversidad de estructuras se obtiene según la manera o el propósito con que sean consideradas las relaciones e interrelaciones entre las cantidades del problema.

Concretamente, en este capítulo se presentan descripciones de la estructura del problema que se atienen a reflejar las resoluciones con el uso ortodoxo de dos métodos generales de resolución de problemas: el método de Análisis-Síntesis y el Método Cartesiano. De estas descripciones que se hacen mediante textos intermedios ya se dio cuenta (Puig y Cerdán 1990a, 1990b); aquí se reescriben los papeles mencionados con la intención de señalar de nuevo algunos criterios iniciales de a qué de un problema se le puede calificar de aritmético o algebraico, y distinguir en el modo de hacer en resolución de problemas lo que llamaremos y diremos propio del modo de pensar aritmético o algebraico. A ello se dedican **1.4** y **1.5**. Por otro lado, otra descripción estructural de un problema puede obtenerse asociando a un problema un objeto matemático, un grafo trinomial. La asociación de un grafo trinomial a un problema requiere de un proceso al que denominamos modo de leer analítico y que produce o no una lectura analítica del problema. La sustitución de un problema por un grafo o más precisamente por una lectura analítica del problema, permite decidir por ejemplo: si el problema, o mejor dicho, si la lectura analítica es aritmética o algebraica, de cuántas letras debemos servirnos como mínimo para poner el problema en ecuaciones, cuántas y cuan diversas son las ecuaciones que conducen al resultado del problema, etc. A ello se dedican **1.7** a **1. 12**.

Cualquier esbozo de una teoría de la complejidad de los problemas debería comenzar por reconocer cuándo dos instancias de un problema son de hecho el mismo problema, o, si se quiere, cuándo dos problemas son equivalentes en algún sentido. Aceptando metodológicamente que las estructuras de un problema sean dos: superficial y profunda, la elaboración de criterios de equivalencia no debería provenir de la estructura disfraz sino de la sustantiva, esto es, de la estructura profunda. Aquí dispondremos de una descripción estructural que es precisamente un objeto matemático: un grafo trinomial. De ahí que lo que nos permite reconocer a dos grafos como el mismo, esto es, la equivalencia de grafos, pueda enunciarse como de isomorfismo entre los problemas a los que dichos grafos se asocian. Ahora bien, como en el proceso de asociación de un grafo a un problema pueden considerarse las características del problema relativas a sus cantidades y relaciones, que se abstraen o que se ignoran voluntariamente, la reconsideración de esas características permite definir los problemas como isomorfos en diversos sentidos. Cumplida esa tarea, la FPAA vendría dibujada como un mundo constituido por clases de problemas isomorfos, familia de la que podrían obtenerse dibujos en distinto color según el sentido de isomorfía considerado. La complejidad de cada problema o mejor de la clase de problemas isomorfos a que este problema corresponde podría referirse a la complejidad del grafo asociado de la clase. Al desarrollo de ese programa se dedica **1.14**.

Sin embargo, el hecho de reducir el estudio de la complejidad del problema al del grafo asociado a éste, aunque útil, viene en parte limitado por la hipótesis subyacente en este planteamiento reduccionista: el de la correspondencia unívoca problema-grafo. Que es posible asociar dos grafos diferentes no isomorfos a un mismo problema era para nosotros un hecho conocido, así lo indicaba la posibilidad de asociar a un mismo problema un texto intermedio aritmético y un texto intermedio algebraico, ver Puig y Cerdán (1990a). A partir de ahí, en **1.16**, puede verse cómo la introducción del concepto de lectura analítica y lectura analítica mínima permite reformular el isomorfismo entre problemas y. cómo la introducción de la noción de grafo teórico del problema permite de nuevo establecer una correspondencia unívoca, ahora ya no problema-grafo sino situación- grafo.

En lo fundamental, y como último asunto, en **1.15**, se trata un constructo teórico esencial en esta tesis: el espacio de un problema de la FPAA. Su razón de ser la encontramos en las palabras de Newel y Simon: “Postulamos que la resolución de problemas tiene lugar mediante la búsqueda en un espacio del problema. Este principio es la principal invariante de conducta de resolución de problemas que se mantiene tanto cuando se cambia de tarea como cuando se cambia de sujeto” (Newel and Simon, 1972, p. 809). Lo que se hace aquí, en **1.15.2**, es además postular el contenido específico de algunas de las componentes de dicho espacio, siendo el caso que aquí se trata de la búsqueda de solución para problemas de la FPAA. Así, lo que es objeto de indagación experimental es la plausibilidad de tal espacio de problemas específico, asunto que se trata en el capítulo 2 con la descripción de resoluciones en el espacio del problema.

1.1.- La Familia de Problemas Aritmético-Algebraicos (FPAA).

La familia de problemas aritmético-algebraicos se concibe como la familia de problemas que acoge a problemas que en el ámbito escolar se resuelven mediante el recurso a varias operaciones aritméticas elementales, que se van combinando hasta obtener el resultado del problema, o bien mediante el planteamiento de ecuaciones, que posteriormente se resuelven hasta obtener el resultado.

Los problemas de la FPAA para encontrar el resultado del problema requieren pues del cálculo de expresiones aritméticas o de la resolución de ecuaciones. Sin embargo, no se considerará en esta tesis de los problemas nada que tenga que ver con las destrezas aritméticas o algebraicas requeridas para realizar los cálculos en las expresiones o resolver las ecuaciones toda vez que han sido planteadas.[2]

El enunciado de un problema de la FPAA es un texto, que presenta la descripción cuantitativa de una situación o un fenómeno por medio de varias cantidades interrelacionadas y que, en el momento en que se consideran, asumen un cierto valor, valor que es: bien conocido o bien desconocido. El propósito del problema, expresado en el propio texto, es la determinación de una o varias de las cantidades desconocidas.

En esta tesis se considerara únicamente una materia de expresión para la descripción mencionada que se presenta en el enunciado, la expresión verbal.

Los problemas de la FPAA son, en la tipología de Polya (1945), problemas de encontrar, esto es, en su enunciado podemos distinguir tres partes: datos, incógnita y condición. En una tipología que separa el continuo de las tareas escolares en ejercicios y problemas, Butts (1980), independientemente del título bajo el cual aparezca la tarea en el libro de texto, un problema de la FPAA lo encuadraríamos como un problema de aplicación y a veces como un problema de búsqueda. Este encuadre tiene sus razones en que el resolutor del problema, conociendo el procedimiento para resolver el problema, ha de justificar su competencia en el uso de ese procedimiento en ese problema o, a veces, debe tener la capacidad de efectuar modificaciones sustanciales del procedimiento.

1.2.- De las cantidades.

1.2.1.- Las cantidades y el problema.

De entre las cantidades del problema, llamaremos datos a aquellas cantidades para las cuales el enunciado del problema proporciona un valor numérico concreto o manifiesta expresamente que son cantidades conocidas. Una tipología de los datos que califica a éstos de suficientes, insuficientes, redundantes, superfluos, pertinentes, etc., se puede ver en Puig y Cerdán (1989), págs. 194-197. Aquí, cuando usemos una de esas denominaciones seguiremos el sentido allí apuntado.

Designaremos con el término incógnita a toda cantidad de la que se desconoce su valor. Calificaremos de principal o principales a aquella o a aquellas que el problema pide expresamente determinar y calificaremos de auxiliar a cualquier otra cantidad

---

[2] Esto supone aceptar un alto grado de independencia entre las destrezas algorítmicas y traductoras.

desconocida. Utilizaremos la denominación cantidad intermedia para una incógnita auxiliar cuyo valor se ha determinado.

Llamaremos cantidades mencionadas a aquellas cantidades de las cuales su nombre, el de la cantidad, aparece expresamente en el enunciado del problema. Diremos que una cantidad es mencionada indirectamente cuando la mención se realiza a través de un circunloquio que se refiere a ella. Cualquier otra cantidad que se considere diremos que es una cantidad no mencionada.

De entre las cantidades no mencionadas existen algunas que requieren una atención especial, son las cantidades que llamaremos implícitamente mencionadas. Por ejemplo: si en el enunciado de un problema se menciona la cantidad “pesetas ahorradas”, al ser ésta una cantidad que expresa la relación entre otras dos cantidades, que llamo aquí, por ejemplo, “pesetas disponibles” y “pesetas gastadas”, si éstas dos últimas cantidades no aparecen mencionadas en el texto del problema, diremos que han sido implícitamente mencionadas. Como es razonable, el ejemplo citado puede multiplicarse y extenderse. Así, en principio y siguiendo el ejemplo, una primera extensión se haría respecto de todas aquellas cantidades que intervienen en comparaciones aditivas o multiplicativas.

1.2.2.- Las cantidades y el contexto.

Por otro lado, tomando en cuenta el contexto del texto del problema, podemos considerar el conjunto de aquellas cantidades que habitualmente se utilizan para describir, explicar o predecir en el contexto considerado. O, si se quiere decir de otra manera, las cantidades que se requieren para manejarse en ese contexto. De esas cantidades se conoce: lo que significan y cómo están ligadas unas con otras a través de la red de relaciones que constituye la estructura conceptual. Así, si nos situamos por ejemplo en un contexto de compra-venta, inmediatamente invocaremos: precios totales, unitarios, más baratos, porcentajes de descuento, IVA, coste, beneficio, número de piezas, kilogramos o metros comprados, vendidos, etc. De todo este conjunto de cantidades, en el enunciado del problema, unas habrán sido mencionadas de una u otra manera y otras no lo habrán sido en modo alguno: es de éstas últimas cantidades de las que diremos que se invocan implícitamente.

1.2.3.- Las cantidades el problema y el resolutor. La polisemia de las cantidades.

Si, además, prestamos atención a un escolar concreto en su discurrir por el currículo y al contexto escolar del contexto del texto del problema, en un momento determinado de su pasaje escolar, del conjunto de cantidades referido anteriormente habrá una parte de ellas que le habrán sido presentadas, y con ellas su correspondiente red de relaciones. Presentadas, esto si, con el recorte del campo semántico que el contexto escolar conlleva. A estas cantidades las llamaremos cantidades habituales para el escolar, y es en el conjunto de estas cantidades habituales, en el que el contexto del texto invoca al igual que anteriormente implícitamente otras cantidades.

Siguiendo con la mirada puesta en el resolutor, podemos suponer que para éste, después de una lectura comprensiva del texto, tan sólo existen dos tipos de cantidades: datos e incógnitas. De estas últimas, unas serán determinables, siempre que el problema contenga datos suficientes para determinarlas y otras indeterminables, pero, independientemente de esta consideración, el resolutor elige qué cantidades desea determinar y cuáles no.

Cuando el resolutor desea determinar una cantidad y la determina correctamente, en el momento de su determinación está dotando a la cantidad determinada de un sentido, sentido que no es más, o que viene dado, por su modo de determinación. Si éste es alguno de los sentidos en que solemos referirnos o encontramos que nos podemos referir a una de las cantidades habituales, la cantidad determinada ya tenía un sentido de referencia. Si, por el contrario, la cantidad determinada no se reconoce como una de las cantidades habituales, se está determinando una cantidad nueva o no habitual y asociándole un sentido. Si a esa cantidad y con ese sentido se le encuentra capacidad de describir, predecir o explicar, busca acomodo y se acopla en la red de relaciones, con ello, pasa a ser un integrante más de la estructura conceptual, ahora enriquecida. Esto es, decimos que es una cantidad que construye sentido, en el sentido de que la cantidad deseada y determinada con su sentido aporta otros sentidos para otras de las cantidades habituales. Así, en la resolución de problemas, las cantidades poseen o adquieren una diversidad de sentidos.

Lo dicho anteriormente no es más que una muestra de lo que se puede aprender, mientras se resuelven problemas, hilada al hilo de la excusa de tener que dar cuenta de la estructura de cantidades de un problema. Sin embargo, aunque siempre se aprenda al determinar cantidades que se desea determinar, ocurre a veces que lo sucedido no es tan favorable, ya que se determinan mediante operaciones aritméticas cantidades de las que podemos decir que, sin carecer de sentido puesto que llevan asociado el de la propia construcción, son cantidades a las que es imposible con ese sentido encontrarles acomodo, o interpretarlas, en la estructura conceptual en la que nos estamos desenvolviendo, quizá porque su incorporación no es acorde, o está en contradicción, con el campo semántico de las cantidades con que se ha construido y que ya estaban incorporadas a la estructura conceptual. Esto suele ocurrir, en cantidades para las cuales el sentido aportado por su construcción no encuentra cantidad de referencia en la situación invocada por el problema. Ver **1.15.4**.

Para ilustrar lo expuesto sobre el sentido de las cantidades que el resolutor desea determinar o determina, consideremos los siguientes problemas:

ALCANZAR.

Un automóvil parte de un punto A con velocidad uniforme de 40 km/h hacia otro punto B. Dos horas después sale de A hacia B otro automóvil con velocidad uniforme de 60 km/h. Dígase a qué distancia de A se encuentran.

ENCONTRAR

Un tren parte a las 16 h de Madrid con destino a Valencia con una velocidad de 120 km/h. A la misma hora sale de Valencia otro tren con destino Madrid a una velocidad de 140 km/h. Dígase a qué distancia de Madrid se encuentran y a qué hora, si la distancia Madrid-Valencia es de 430 Km.

AVIONETA

Una avioneta vuela a 200 kilómetros por hora cuando no hay viento. Puede llevar carburante para 4 horas. Un día en que el viento sopla a 20 kilómetros por hora, la avioneta sale del aeropuerto en la dirección del viento. ¿Hasta qué distancia podrá llegar si ha de regresar al aeropuerto sin agotar el carburante?

HENO

Unos granjeros almacenaron heno para 40 días. Sin embargo el heno era de mejor calidad de la que pensaban y ahorraron 100 kg por día. Así tuvieron heno para 60 días. ¿Cuánto heno almacenaron?

Supongamos que las cantidades más habituales en el contexto escolar en los problemas de móviles sean: espacios, velocidades y tiempos de cada móvil, y, en el caso de la avioneta, la velocidad que es capaz de desarrollar y la real de la avioneta a la ida y a la vuelta, teniendo en cuenta el efecto viento. Supongamos también como no habituales: las ventajas o el adelanto o retraso medido en espacios o tiempos.

Así, en el problema ALCANZAR la determinación de la cantidad 60 km/h – 40 km/h supone la determinación de una cantidad no habitual, mientras que 2h × 40km/h es la determinación de una cantidad habitual: lo recorrido por el primer móvil en dos horas, justo lo recorrido cuando el segundo parte. La primera cantidad determinada: la diferencia de velocidades es interpretable en el sentido de "cuánto es el segundo móvil en partir más rápido que el primero", lo que explica que el primero sea alcanzado. Sin embargo, encuentra un mejor acomodo en la red de relaciones entre las cantidades de la situación cuando se la refiere en el sentido "lo que el móvil más rápido recupera por unidad de tiempo al móvil más lento". Podemos determinar asimismo 60km/h + 40km/h, la suma de velocidades de ambos móviles, y ¿qué decimos de ella en la situación descrita? o ¿cómo la referimos? Pues diciendo que no es más que eso, la suma de velocidades de los móviles. Es, ésta ultima cantidad, una cantidad a la que resulta difícil encontrarle un acomodo en un mundo posible de cantidades para la situación ALCANZAR.

Paralelamente, en el problema ENCONTRAR podemos determinar: la diferencia de las velocidades de los dos trenes y atribuirle a esta cantidad los sentidos mencionados en el problema ALCANZAR o también lo que recorre cada hora un tren más que otro. Y bien está, pero esta cantidad con estos sentidos no nos presta ayuda en la solución del problema. Si también determinamos la suma de las velocidades de los trenes, pero a diferencia de lo que ocurría en el caso ALCANZAR, interpretamos aquí esta cantidad como la velocidad de un tren ficticio que recorre en un solo sentido el trayecto Madrid-Valencia, esta cantidad, con este último sentido, es útil para predecir el tiempo que tarda ese tren ficticio en realizar su recorrido.

En el caso del problema AVIONETA, que es también un problema de móviles podemos determinar las cantidades habituales, la velocidad real de la avioneta en ambos sentidos, 200km/h – 20km/h = 180km/h, la velocidad de ida, y 220km/h + 20km/h = 220km/h, la velocidad de vuelta. Y a partir de aquí, podemos determinar, análogamente a los casos anteriores, otras cantidades, en un ejercicio de combinatoria de sumas y diferencias de velocidades y productos de velocidades y tiempos:

sv = 180 km/h + 220 km/h
dv = 220 km/h – 180 km/h
ei = 180 km/h × 4h
ev = 220 km/h × 4h

eviento = 20 km/h × 4h

donde, poniendo sentidos, *sv* es la velocidad de una avioneta ficticia que va en un solo sentido, *dv* lo más rápida que es la avioneta a la ida que a la vuelta o lo que recupera por unidad de tiempo respecto a lo recorrido en la ida. Y *ei* y *ev*, por su expresión aritmética, son espacios que pueden considerarse como el recorrido por la avioneta si todo el tiempo estuviese volando en el sentido de ida o en el sentido de vuelta. No se puede negar a ninguna de estas cantidades cierta capacidad descriptiva. Sin embargo, a partir de aquí nos sentimos bloqueados, incapaces de producir otro sentido para ellas, o utilizar el producido de modo que éste nos permita establecer entre estas cantidades relaciones con capacidad para predecir o determinar la cantidad que demanda el problema y que nos parece indeterminable.

En el caso del problema HENO, comentaremos las cantidades que algunos estudiantes produjeron, (Puig, 1996, pág. 245):

60 días – 40días
40 días × 100 kg heno (ahorrados) / día
60 días × 100 kg heno (ahorrados) / día
20 días × 100 kg heno (ahorrados) / día

la primera de ellas se califica de “días de más”, y las otras tres, tal como han sido producidas, tienen el sentido del “heno ahorrado” en 40, 60 y 20 días, respectivamente. Ahora bien, en la situación descrita en el problema, la primera de estas tres cantidades se interpreta como el heno ahorrado en los días previstos, mientras que las otras dos son difíciles de interpretar para el resolutor que las ha producido, esto es, no encuentra modo de referirse a ellas, modo tal que pueda encajarlas en la situación, ni como cantidades que describen o explican, ni como cantidades que predicen o cantidades útiles para predecir otras cantidades o la cantidad por la que pregunta el problema. A estas cantidades las podríamos decir “sin sentido” para el resolutor, no porque las propias cantidades carezcan del mismo, sino porque no lo tienen para el resolutor. Es más, la búsqueda de sentido para ellas puede llevar al resolutor a encontrar la situación descrita en el problema como inexplicable o incluso contradictoria.

Como veremos más adelante, por la propia estructura de relaciones que se dan entre las cantidades de los problemas de la FPAA, a la mayor parte de las cantidades nos podemos referir en dos o más sentidos y para algunas de éstas se requiere su polisemia si se quiere avanzar de algún modo en la solución del problema. Éste es el caso de la cantidad “40 días × 100 kg heno ahorrados / día” o del “heno ahorrado” en los días previstos, que mirado desde la óptica “heno consumido en los días de más”, permite determinar el heno consumido diariamente y, con ello, determinar una cantidad intermedia crucial en la resolución del problema.

1.2.4.- El tipo de cantidades.

Las cantidades que encontramos en la FPAA son de naturaleza diversa. Así, en principio, podemos distinguir entre problemas planteados en un contexto meramente numérico o en cualquier otro contexto, en los primeros las “cantidades” son puros números y en los segundos los números vienen acompañados de una unidad de magnitud.

En Puig y Cerdán (1989) págs. 125-130, se toma en cuenta la naturaleza de las cantidades para describir la estructura de los problemas multiplicativos. Los tipos de cantidades que se distinguen siguiendo a Kaput (1986) son dos: extensivas e intensivas. Considerando que una cantidad es un par (x, u) donde x es un número y u una unidad de una magnitud, las cantidades intensivas son aquellas en que u es unidad de magnitud compuesta: la razón de dos magnitudes. Tal razón puede ser interna o externa según que las magnitudes que intervienen sean de la misma clase o de distinta clase. En el primero de los casos, la cancelación en la razón de las magnitudes les confiere el aspecto de un escalar.

Las cantidades tanto extensivas como intensivas pueden sumarse siempre que se respete la ley de la homogeneidad, esto es $(x, u)+(x', u) = (x+x', u)$ siendo u una unidad de la misma clase. No obstante, las cantidades intensivas presentes en un problema son propias de un elemento concreto en la situación que se describe en el problema, así en el problema ALCANZAR las cantidades (40, km/h) y (60, km/h) se refieren a dos velocidades: las del primer y segundo móvil mientras que su suma o su diferencia (100, km/h), (20, km/h), aun siendo cantidades intensivas, cuya unidad de magnitud corresponde a una velocidad como hemos visto anteriormente, debe atribuírsele a algún móvil para que tal cantidad tenga sentido y sea útil en la resolución del problema. Ello se debe a que las cantidades intensivas son propias de un objeto, individuo o colección de ellos, y a su suma o diferencia considerada como cantidad intensiva debe corresponder por tanto un objeto individuo o colección, un móvil imaginario o real, en nuestro caso para la velocidad resultante.

Por otro lado, las cantidades tanto extensivas como intensivas intervienen en relaciones multiplicativas. El examen del tipo de estructura de cantidades para estas relaciones en función de las cantidades que intervienen se describe en el lugar arriba citado.

1.2.5.- Diccionario de cantidades.

Es habitual que en el enunciado de un problema aparezcan distintas cantidades del mismo tipo y unidad de magnitud, de ahí la necesidad de distinguirlas adoptando un modo de referirnos sin ambigüedad a cada una de ellas. A su vez, podemos considerar las cantidades mencionadas implícitamente, las invocadas, las que el resolutor construye en el curso de la resolución del problema, etc., cantidades para las cuales debemos disponer también de alguna manera de referirnos a ellas.

Así, podemos considerar que a un problema viene asociado un diccionario de cantidades, diccionario que contendría todas las cantidades mencionadas en el enunciado del problema de cualquiera de las maneras descritas en los puntos anteriores y las consideradas por el resolutor, y además todos los modos en los cuales dichas cantidades se refieren. Siendo éste un diccionario que podríamos llamar “de uso”, pues contendría tantos términos como cantidades consideradas, y, para cada cantidad, tantas acepciones como modos de referirnos a ellas. Esto es, tantas acepciones como sentidos en los cuales dicha cantidad es o puede ser utilizada. No siendo deseable que el diccionario conste de términos con acepciones únicas, dada lo útil que resulta la polisemia de las cantidades.

Llamaremos por tanto diccionario de cantidades de un problema a un conjunto de triadas (**x, u, n**). Donde (**x, u**) es la pareja que más arriba se llamó cantidad –y aquí debemos de considerar que **x** puede ser, tanto un número, como una letra, una expresión aritmética o una expresión algebraica. Entendemos que la componente **n** es la manera en la cual en el lenguaje vernáculo proporcionamos un sentido, que tiene por referente la cantidad (**x, u**), en el mundo de los sentidos que para ella sería posible imaginar en el contexto del problema. Cada manera se entiende por una acepción en el diccionario y de ella diremos aquí –permitiéndonos un desliz en el lenguaje– que es un nombre de la cantidad.

Debe anotarse que el diccionario de cantidades asociado a un problema, tal y como aquí se concibe, es un diccionario en evolución y renovación permanente, donde únicamente la componente **u** de dicha cantidad, que da cuenta del espacio de medida, permanece inalterable. Así, tomando como ejemplo la cantidad que es la pregunta del problema en el problema AVIONETA, "distancia a la que podrá llegar", la componente **x** de esta cantidad estará inicialmente en blanco, pudiendo ocupar, en el transcurso de la resolución, el lugar correspondiente a dicha componente una literal o una expresión aritmética o algebraica, siendo deseable que un número sea el que ocupe el lugar en dicha componente al terminar la resolución. Asimismo, su componente **n** obviamente no puede estar en blanco, al ser la cantidad por la que se pregunta en el problema, pero puede ser ocupada en el transcurso de la resolución por expresiones como: la distancia a la ida, la distancia a la vuelta, la distancia recorrida a favor del viento, etc.

Como ejemplo, en el caso del problema HENO, Puig (1996), pág. 245, nos proporciona el siguiente diccionario que aquí decimos de nombres (**n)**:

días	kg/día heno	heno
días previstos	heno previsto diario	heno consumido en los días previstos
días reales	heno consumido diario	heno almacenado
días de más	heno ahorrado diario	heno consumido en los días de más
		ahorro total

donde, como puede verse, el modo de elaborar este diccionario de nombres ha consistido en utilizar los calificativos: previstos, reales, de más, a las tres ocurrencias de la cantidad extensiva días, y previsto, consumido y ahorrado para la cantidad intensiva kg/día, y, en consonancia, las extensivas que son del estilo E x I (heno consumido en los días previstos, heno consumido en los días de más) han recibido su nombre en función del nombre de la pareja, extensiva por intensiva, que la produce. Esto es, en su propio nombre está embebida la relación entre las tres cantidades. El nombre heno almacenado es la cantidad por la que pregunta el problema y el ahorro total es el nombre de una determinada cantidad de heno, sin más precisión, y que por su nombre sólo nos indica que nos estamos refiriendo a una cantidad extensiva de heno y que éste heno ha sido el ahorrado en total, sin mención alguna de lo que debe considerarse para obtener este total, total pues que debe ser sobreentendido.

1.3.- De las relaciones.

Cuando hablamos aquí de relaciones nos referimos a las relaciones entre las cantidades del problema. El análisis realizado para las cantidades, en lo relativo a cantidades mencionadas, invocadas, habituales, etc., puede ser transportado por analogía al estudio de las relaciones. Por tanto, en este apartado haremos algunas consideraciones que pertenecen propiamente a las relaciones.

Un problema de la FPAA puede concebirse en abstracto de la siguiente manera:

"Dado un conjunto de cantidades c_1, c_2, c_3, …, c_n, x_1, x_2, x_3, …, x_m, cantidades donde c_i son conocidas y x_j desconocidas, y un conjunto de relaciones R_1, R_2, R_3,..., R_k entre las cantidades, determinar alguna o algunas de las cantidades x_i, de modo que se verifiquen todas y cada una de las relaciones R_i".

Mirado así un problema, es menester hablar de: el número de cantidades involucradas en una relación, la naturaleza o el carácter de la relación entre las cantidades y el tipo de cantidades que intervienen en la relación.

1.3.1.- El carácter de las relaciones.

En la mayoría de los problemas de la FPAA, y en particular en los aquí tratados, las relaciones aritméticas que nos encontramos entre las cantidades son aditivas, multiplicativas o de proporcionalidad. Esto suele ser así en los problemas en contexto realista o verosímil, mientras que en los problemas en contexto matemático (divisibilidad, sistemas de numeración, progresiones, geometría, etc.) las relaciones entre las cantidades suelen ser, además de las citadas, otras que son propias del contenido matemático concreto.

En el caso de las relaciones aditivas, el número de cantidades que generalmente se encuentran elementalmente relacionadas son tres. Es así como ocurre en las relaciones aditivas que ahora calificándolas semánticamente llamamos de cambio, comparación e igualación, y es únicamente en el caso de las relaciones de combinación o parte-parte-…-parte-todo donde suele darse una relación elemental entre cuatro o más cantidades. Al igual ocurre en las relaciones multiplicativas donde los casos isomorfismo de medidas y comparación multiplicativa implican la relación entre tres cantidades y es aquí el caso de la relación producto cartesiano en el que puede darse una relación elemental entre tres o más de tres cantidades.

En lo que toca a las relaciones de proporcionalidad, los términos aritmética y geométrica han caído en desuso para expresar la proporción en la que se encuentran tres o más números, encuadrando el estudio de dicha proporcionalidad en el mundo de las progresiones. Las relaciones de proporcionalidad que aparecen en los problemas y son habituales para nuestros estudiantes son las relaciones de proporcionalidad directa y de proporcionalidad inversa. Ahora bien, tal relación de proporcionalidad se predica intuitivamente entre las magnitudes, o entre los espacios de medida, por ejemplo: "*a más* velocidad *meno*s tiempo" (para los mismos kilómetros) para la proporcionalidad inversa y "*a más* velocidad *más* kilómetros" (para el mismo tiempo) para la proporcionalidad directa. Y la relación de proporcionalidad entre dos cantidades de magnitud de cada clase se expresa formalmente con la proporción que iguala las razones de las magnitudes correspondientes.

Aunque las relaciones de proporcionalidad directa e inversa cuantitativamente expresadas implican en su propia concepción cuatro cantidades, es posible diluir la relación de proporcionalidad a una relación entre tres cantidades –ver más en detalle en **1.18.** Esta posibilidad deviene del hecho de que en la relación de proporcionalidad directa las razones externas entre los espacios de medida son constantes, y en la proporcionalidad inversa lo es el producto, y es el uso de esta constante lo que permite eliminar una de las razones para sustituirla por la constante. Este proceso es el conocido como de reducción a la unidad en el caso de la proporcionalidad directa.

1.3.2.- El tipo de cantidades involucradas en las relaciones.

En las relaciones aditivas el tipo de cantidades que intervienen son o bien cantidades extensivas o bien cantidades intensivas, pero siempre cantidades de la misma clase en respeto a la ley de la homogeneidad. Y ya se anotado al respecto en **1.2.4**. Sin embargo, en las relaciones multiplicativas pueden intervenir ambos tipos de cantidades por separado o conjuntamente, un análisis de las posibles combinaciones en las que pueden intervenir ambos tipos de cantidades en las relaciones multiplicativas y la categoría semántica a la que tal combinación puede atribuirse se encuentra en Puig y Cerdán (1989, pág. 127).

Respecto a si son conocidas o no las cantidades que intervienen en una relación cabe descartar, por su escasa frecuencia, el caso en el cual todas las cantidades que intervienen en la relación son conocidas, pues estaríamos ante un problema con datos redundantes, siendo más usual que al menos una o dos de las cantidades que intervienen en la relación sean desconocidas y menos frecuente que todas las cantidades que intervienen en la relación sean cantidades desconocidas.

1.3.3.- El entretejido de las relaciones. Las relaciones de igualdad.

En los problemas de la FPAA, todo problema que se resuelve con más de una operación posee por lo menos una cantidad que pertenece a más de una relación, esto es, las relaciones no están aisladas sino que se entretejen por medio de cantidades. Así, las cantidades son los nudos que entretejen la red de relaciones, dichas cantidades nudo deben ser siempre referidas, por lo menos, en dos sentidos, un sentido por cada una de las relaciones que convergen en ese nudo, aunque esto no obsta para que las cantidades puedan ser referidas en más de dos sentidos. Esta relación de igualdad entre cantidades diferentes, o mejor y precisamente, de la misma cantidad referida en sentido diferente puede estar explícita o implícita en el enunciado del problema. Así en el problema del HENO, el heno almacenado es referido implícitamente como el heno consumido en la totalidad de los días, o como el heno previsto para los días previstos, mientras que en un problema cuyo enunciado contenga una frase como la siguiente:

“La edad de Pedro dentro de diez años será el doble de la edad que ahora tiene Juan”.

la igualdad entre las edades de Pedro y Juan en los momentos indicados está explícitamente expresada.

1.4.- Descripciones de la estructura de un problema de la FPAA: textos intermedios, diagramas, expresiones aritméticas, expresiones algebraicas y ecuaciones.

Cantidades y relaciones son elementos constituyentes de un problema, elementos que nos permiten hacernos una idea del tipo de problema ante el que nos encontramos y que incluso nos apuntan la complejidad del mismo. Sin embargo, la imagen proporcionada por ambas estructuras por separado no deja de ser una imagen parcial, una descripción global de la estructura del problema debe intentar interconectar estas estructuras y describir su entretejido. Esto puede realizarse y expresarse en un texto distinto al texto del problema. Utilizaremos en este apartado dos lenguajes diferentes para ello: diagramas y ecuaciones.

1.4.1.- Un programa de descripción de la estructura.

El detalle de la construcción de tales textos puede encontrarse en Puig y Cerdán (1989, 1990a). En lo esencial, el programa de producción de los textos procede del siguiente modo:

1) Se parte de considerar el proceso de resolución del problema dividido en fases: lectura, comprensión, traducción, cálculo, solución, revisión-comprobación.

2) Se presta atención a la fase de traducción, fase en la que la actividad del resolutor está centrada en la traducción del enunciado verbal a las expresiones aritméticas o algebraicas.

3) Para traducir se realiza un trabajo sobre el texto, sobre el enunciado del problema, que lo transforme en un nuevo texto que muestre explícitamente la manera en que las cantidades deben enlazarse entre sí para producir la expresión aritmética o la ecuación correspondiente.

4) Para encontrar el modo en que las cantidades se deben entrelazar se utilizan reglas. La Regla del Análisis-Síntesis, adaptación del Método de Análisis-Síntesis, o las Reglas Cartesianas.

El texto producido entonces es un texto intermedio, que podría seguir perteneciendo al lenguaje vernáculo, pero que se puede construir con más facilidad en un lenguaje grafico. De la expresión del texto intermedio en este lenguaje intermedio diremos que muestra la estructura del problema.

1.4.2.- Textos intermedios, diagramas y expresiones aritméticas.

Puede mostrarse como funciona el programa y los resultados del mismo. Para ello se precisa: 1) el texto: enunciado de un problema, 2) la regla de Análisis-Síntesis y 3) los signos del lenguaje grafico.

1) El texto: enunciado del problema.

ABRIGOS.

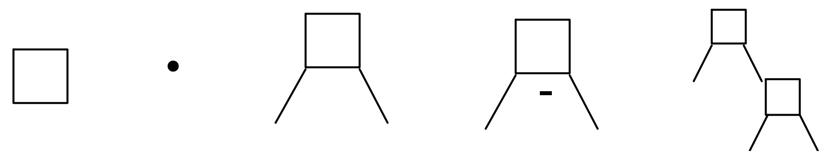
En un taller de confección disponen de 4 piezas de tela de 50m cada una para hacer trajes y abrigos. Piensan hacer 20 trajes que necesitan 3m de tela cada uno y abrigos que necesitan 4m de tela cada uno. ¿Cuántos abrigos pueden hacer?

2) La Regla de Análisis-Síntesis.

REGLA DEL ANÁLISIS-SÍNTESIS (A-S)[3]

Si *x* es la incógnita del problema, supóngala conocida.
Indague e investigue cuáles son aquellos antecedentes de los cuales *x* resulta y que permiten determinar *x*.
Considere cada uno de estos antecedentes como una nueva incógnita (auxiliar).
Indague e investigue de nuevo, iterando el proceso, hasta que
1) o bien todos los antecedentes sean datos del problema,
2) o bien alguno de los antecedentes entre en contradicción con los datos del problema.
En el caso 1), volviendo sobre sus pasos y trabajando hacia atrás, esto es, desde los datos hasta la incógnita, podrá determinar esta última.
En el caso 2), abandone el problema: su solución es imposible.

3) Los signos del lenguaje grafico:



(a) (b) (c) (d) (e)

Para designar las cantidades desconocidas (a), conocidas (b), relaciones entre ellas (c) –en el caso que se muestra entre una desconocida y otras cantidades cualesquiera– y el tipo de relación entre las cantidades que aparecen a la izquierda y la derecha del texto –sustractiva en el caso que se muestra en la figura (d)–, y, por último, la manera en que yuxtaponemos los signos elementales para construir textos más complejos, de arriba a abajo (e).

Y el texto intermedio producido, ver fig. (A).

Este texto intermedio leído de arriba abajo muestra la manera en la cual la incógnita del problema está conectada con otras incógnitas auxiliares y con los datos del problema.

El texto intermedio leído de abajo arriba, esto es en el sentido de la síntesis, permite obtener sucesivamente las expresiones aritméticas:

4·50, 3·20, en el primer escalón, **4·50-3·20**, en el segundo, y por último **(4·50-3·20) : 4**, correspondientes a las cantidades intermedias: tela disponible, tela trajes , tela abrigos

[3] Tomada de Lakatos (1981) págs. 107-108

y número de abrigos. Siendo esta última la expresión aritmética que traduce el enunciado verbal del problema y que expresa los cálculos aritméticos que es preciso realizar para dar el resultado del problema.

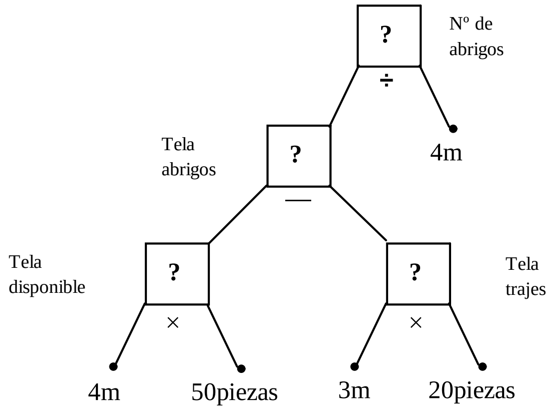


fig. (A)

La aplicación de la Regla del Análisis-Síntesis y el uso de este sistema de signos permite producir textos intermedios, diagramas de diversa estructura para distintos problemas de la FPAA, y a su vez diagramas diferentes para un mismo problema, Puig y Cerdán (1989).

A su vez, la consideración de diversas características del diagrama, como el número de escalones, o el número de incógnitas auxiliares, permite hablar de grados de complejidad de un problema. Por otro lado, sabemos que en los problemas habitualmente existentes en los libros de texto son muy pocos los problemas con grado de complejidad diferente, ya que queda agotada la diversidad de los problemas presentes en ellos por una docena de diagramas distintos (Puig y Cerdán, 1990a).

1.4.3.- Textos intermedios producidos mediante Análisis-Síntesis, expresiones algebraicas y ecuaciones.

En la producción de textos intermedios mediante el uso de la regla del A-S, podemos encontrarnos con algunos problemas como el problema siguiente:

ALCANZAR

Un automóvil parte de un punto A con velocidad uniforme de 40 km/h hacia otro punto B. Dos horas después sale de A hacia B otro automóvil con velocidad uniforme de 60 km/h. Dígase a qué distancia de A se encuentran.

para los cuales la regla nos produce textos intermedios como los que se muestran en los diagramas de la fig. (B).

Los diagramas de la fig. (B), y cualquier intento de análisis que se haga, indican que no es posible reducir la incógnita a los datos, por muchas vueltas que se den en el ciclo que indica la regla de A-S en su parte analítica, ya que se vuelve inexorablemente a la incógnita original del problema. En problemas como éste el análisis parece no acabar nunca al no encontrar ninguno de los casos enunciados en la regla de A-S donde el análisis debe terminar, entrando, si se quiere seguir adelante, en un bucle sin fin, con lo que la síntesis es imposible. Y por tanto también imposible el paso de este texto intermedio a una expresión aritmética.

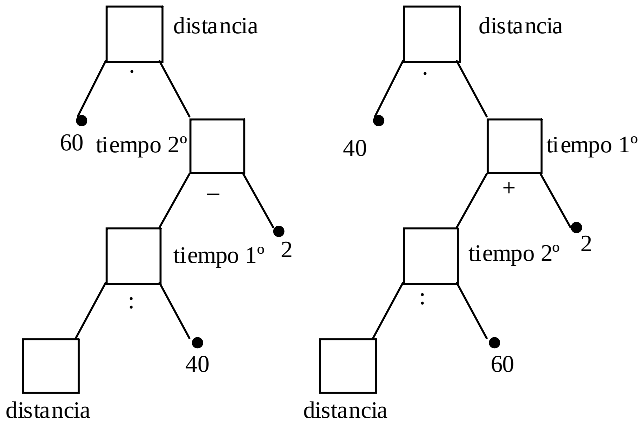


fig. (B)

Sin embargo, el intento de análisis lo que sí que ha puesto de manifiesto es la naturaleza de las relaciones que existen entre la incógnita, las incógnitas auxiliares y los datos del problema, y el orden en que unos y otros se encadenan.

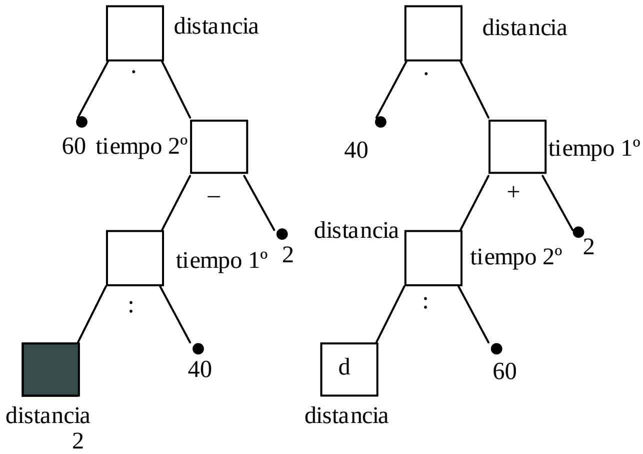
Es en este sentido en el que podemos decir que hemos realizado un análisis del problema, si bien un análisis incompleto, ante la imposibilidad de su compleción. Ahora bien, podemos, como es usual entre nosotros, transgredir la regla, pero conservar el espíritu, esto es, permitir que el análisis termine o se dé por acabado sin necesidad de que éste desemboque en los datos. O bien, considerar que el análisis realmente termina en cualquier etapa en que nos encontremos, a cuenta de considerar la incógnita o las incógnitas que habría que volver a analizar como datos.

Así, si el caso es el problema que estamos hablando, el problema ALCANZAR, en el punto del análisis en el cual abandonamos, rechazamos la idea de que el análisis es imposible de proseguir, considerando que la distancia incógnita del problema es un dato más del problema y damos el análisis por concluido. La síntesis ahora expresará cómo los datos –entre ellos la distancia, que ahora es un dato– se enlazan para obtener la incógnita del problema: la distancia.

Ciertamente, el artificio parece conducir a una síntesis que carece de sentido o más bien a una síntesis que es un contrasentido explicativo al expresar lo explicado en términos de sí mismo. Sin embargo, en esto consiste la utilidad del artificio en el doble estatus de la distancia: dato e incógnita, cantidad conocida y cantidad desconocida; incógnita explicada y dato en el explicando.

Por tanto, con el análisis concluido, el texto intermedio queda expresado en el diagrama (a) de la fig. (C).

Y para leer la síntesis de este texto intermedio en una expresión análoga a la aritmética, como fue el caso del problema anterior, se precisa de un signo para designar el dato distancia.



(a) (b)

fig. (C)

Utilizando la letra **d** para ello, y operando formalmente de la misma forma que lo hacemos habitualmente obtendríamos en el diagrama (a):

$\mathbf{\frac{d}{40}}$ para el primer escalón,

$\mathbf{\frac{d}{40} - 2}$ para el segundo escalón y

$\mathbf{60(\frac{d}{40} - 2)}$ para el tercer escalón,

esto es, el último escalón para la distancia, la incógnita del problema. Siendo ésta la expresión, ahora algebraica, la que corresponde a la síntesis.

Ahora, si **d** es el signo con el que hemos designado a la cantidad distancia, sea esta conocida o desconocida, podremos escribir la igualdad

$$\mathbf{d = 60(\frac{d}{40} - 2)}$$

ecuación cuya resolución conduce al resultado del problema.

Para resumir, el uso de la Regla de Análisis-Síntesis utilizada como guía en el paso del texto del problema al texto intermedio puede producir textos intermedios de naturaleza diferente, que llamaremos texto intermedio aritmético (TIAR) y texto intermedio algebraico (TIAL). El primero de ellos da cuenta del análisis completo de la incógnita del problema y permite leer la síntesis en lenguaje aritmético, produciendo la expresión aritmética cuyo cálculo determina la incógnita del problema. El segundo de ellos concluye el análisis con el artificio de considerar la incógnita como un dato. La designación de ésta por un signo diferente al utilizado para los datos, letra frente a cifras, pero operando formalmente con este signo como dato que es, permite leer la síntesis de modo que la incógnita del problema venga designada por una expresión algebraica. Con posterioridad, la duplicidad de designaciones de la misma cantidad permite escribir la ecuación cuya resolución conduce a la determinación de la incógnita.

1.4.4.- El Método Cartesiano. Ecuaciones.

Para hablar de la producción de textos intermedios con las Reglas Cartesianas comenzaremos comentando las reglas mismas. Las cuatro reglas que se transcriben a continuación y que constituyen el núcleo del Método Cartesiano (MC) para poner un problema en ecuaciones. Descartes en su *Geometría* (Descartes, 1954) describe el método y a partir de sus inacabadas *Reglas para la dirección de la mente*, Polya (1966) reescribe las últimas de ellas en un sentido que muestra claramente el programa cartesiano: de cualquier problema a un problema de álgebra y de éste a un problema de ecuaciones.

1. En primer lugar, comprender bien el problema, luego convertirlo en la determinación de cierto número de cantidades desconocidas. (Reglas XIII a XVI)

2. Examinar el problema de la manera más natural considerándolo como resuelto y presentando en un orden conveniente todas las relaciones que deben verificarse entre las incógnitas y los datos según la condición planteada. (Regla XVII)

3. Separar una parte de la condición que permita expresar una misma cantidad de dos maneras diferentes y obtener así una ecuación entre las incógnitas. Descomponer eventualmente la condición en varias partes. Obtendréis así un sistema con tantas ecuaciones como incógnitas. (Regla XIX)

4. Transformar el sistema de ecuaciones en una única ecuación. (Regla XXI)

Estas son las reglas que constituyen la base de lo que Polya llama el *Cartesian Pattern* de resolución de problemas y que el traductor francés convirtió en *modèle cartesien*, el Modelo Cartesiano, denominación que nosotros hemos utilizado también en ocasiones.

Las reglas del Método Cartesiano difieren de la regla del Análisis-Síntesis[4]. Para empezar, estas reglas no tienen carácter algorítmico, sino que más bien constituyen un plan general de actuación para poner un problema en ecuaciones. El problema, desde el principio, no consiste únicamente en determinar la incógnita o incógnitas del problema, sino todas aquellas cantidades desconocidas que consideremos necesario determinar. Además la consideración de los datos y las incógnitas y la forma de expresar las relaciones entre ellos es distinta. Tanto datos como incógnitas se tratan como si fueran datos, esto es, se puede operar formalmente –gracias al instrumento algebraico– con ellos. Como consecuencia de esto, el examen de las relaciones que están contenidas en la condición del problema no ha de comenzar desde la incógnita, ni ha de terminar en su reducción a los datos. Lo que se hace (regla 3) es buscar una cantidad –que no tiene por qué coincidir con la incógnita del problema– que pueda expresarse de dos maneras distintas, cada una de ellas en función de una parte de la condición.

[4] Tanto el Método Cartesiano como el Método de Análisis-Síntesis serán tratados de nuevo en **1.11** y **1.12**

Ahora bien, aunque las diferencias sean tantas y tan radicales, hay algo presente en el método de Análisis-Síntesis –y que es una parte esencial de éste–, que reaparece en el interior del Método Cartesiano. En efecto, una vez establecida la cantidad que puede expresarse de dos maneras distintas, lo que hay que hacer en el Método Cartesiano es analizar esa cantidad. El modo de proceder en el análisis y el tipo de razonamiento que éste implica para la búsqueda de las relaciones a través de la búsqueda de antecedentes es pertinente también aquí, con una única salvedad: el análisis no ha de terminar con los datos del problema, sino con una combinación de datos e incógnitas, lo que es coherente ya que estas últimas, expresadas algebraicamente, se están considerando también como datos. La regla 3 establece además que el análisis de cada cantidad se haga dos veces, y que se igualen las expresiones algebraicas que traducen los dos análisis de cada cantidad para formar las ecuaciones cuya solución es el resultado del problema.

Los comentarios anteriores pueden resumirse en ocho puntos:

1) Las Reglas Cartesianas producen textos intermedios que son, por principio, textos intermedios algebraicos.

2) El diagrama sigue siendo útil en la descripción de tales textos.

3) Datos e incógnitas tienen en el análisis el mismo estatus desde el comienzo, pero signos diferentes: números y letras.

4) En la Síntesis se opera formalmente con éstos sin distinguir unos de otros.

5) No hay prescripción alguna de la cantidad que se debe de analizar. Solo la sugerencia de separar en el problema una parte o partes de la condición que permita 6)

6) El análisis de algunas cantidades debe de ser doble para poder escribir la ecuación correspondiente entre las dos expresiones algebraicas que nos proporcionen las síntesis.

7) El número de dobles análisis debe ser exactamente igual al número de cantidades desconocidas que se han considerado conocidas, para poder tener tantas ecuaciones como incógnitas.

8) Cuando la cantidad analizada se corresponda con una de las cantidades para las que disponemos de un número o letra, en la práctica sólo se requiere un análisis, cosa que vimos en el caso de producción de textos intermedios algebraicos con A-S. Esto es, el segundo análisis es un auto-análisis que viene expresado mediante el número o letra.

Para los dos problemas que siguen se dan algunos ejemplos que muestran las posibilidades de los textos intermedios algebraicos y ecuaciones que se derivan de ellos, según las posibilidades de elección que nos permiten las Reglas Cartesianas.

RUBLOS

Una escuela rusa compra libros para la biblioteca. Si los paga con billetes de 3 rublos, la escuela tiene que dar 8 billetes más que si los paga con billetes de 5 rublos. ¿Cuánto cuestan los libros?

Cantidad a la que referimos la solución del problema:

n: el número de billetes de 3 rublos.

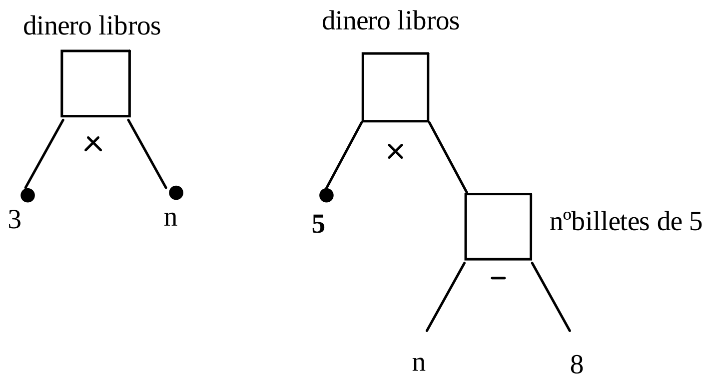
Cantidades para el análisis:

5: el valor de los billetes de 5 rublos.
8: el número en que el número de billetes de tres rublos excede al número de billetes de 5 rublos.
n : el número de billetes de 3 rublos.

Cantidad que se analizará dos veces:

El coste de los libros, “dinero libros” en el diagrama.

El doble análisis:



Las expresiones algebraicas producidas en la síntesis:

$3 \cdot n$ $\qquad$ $5 \cdot (n-8)$

La igualdad de las dos expresiones algebraicas que expresan el coste de los libros: la ecuación.

$$3n = 5 \cdot (n-8)$$

Donde podemos observar que la solución de la ecuación n = 20, 20 billetes de 3 rublos, no es el resultado del problema, ya que la incógnita del problema, el coste de los libros, no es la cantidad a que hemos referido la solución de éste. Y por tanto se precisa de un trabajo posterior para determinarla. Aquí, una síntesis aritmética sobre cualquiera de los diagramas ya que ésta ha sido la cantidad analizada doblemente.

El segundo ejemplo es un problema que procede del Álgebra de Abû Kâmil (Levey, 1966), y mostraremos para él dos posibilidades de entre las que nos permite el Método Cartesiano.

ABÛ KÂMIL

Cuando uno dice que 20 dividido igualmente entre hombres, añadir dos hombres y dividir 60 entre ellos, entonces ocurre que la porción de cada hombre, 5 más que la que recibieron la primera vez.

Primera posibilidad:

Cantidad a la que referimos la solución del problema:

c: el número de los primeros hombres.

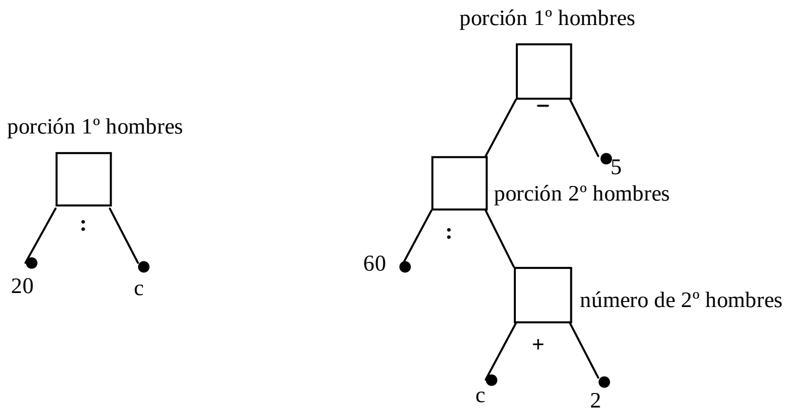
Cantidades para el análisis:

20: cantidad que se divide entre hombres. (1º hombres)
60: cantidad que se divide entre hombres y hombres añadidos. (2º hombres)
2: el número de hombres añadido.
5: el exceso de la porción al añadir hombres.
c: el número de los primeros hombres.

Cantidad que se analizará dos veces:

la porción que se divide entre hombres (porción 1º hombres)

El doble análisis:



Las expresiones algebraicas producidas en la síntesis:

$$\frac{20}{c} \qquad\qquad \frac{60}{c+2} - 5$$

La ecuación:

$$\frac{20}{c} = \frac{60}{c+2} - 5$$

Segunda posibilidad:

Cantidades a las que referimos la solución del problema:

c: el número de los primeros hombres.
d: la porción que se divide entre hombres (porción 1º hombres)

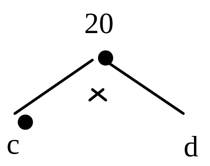
Cantidades para el análisis:

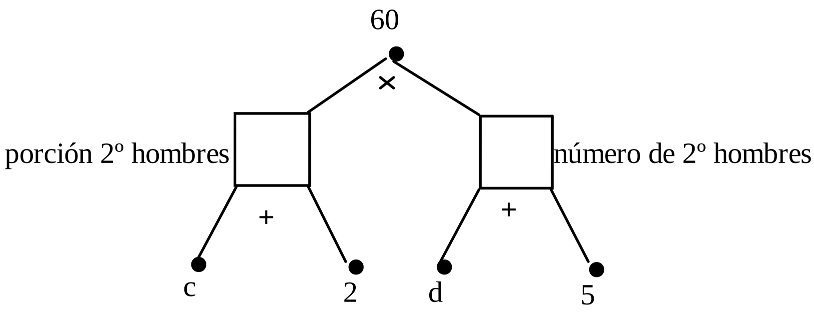
2: el número de hombres añadido.
5: el exceso de la porción al añadir hombres.
c: el número de los primeros hombres.
d: la porción que se divide entre hombres (porción 1º hombres)

Cantidades que se analizarán :

20: cantidad que se divide entre hombres. (1º hombres)
60: cantidad que se divide entre hombres y hombres añadidos. (2º hombres)

. Los análisis:





Las síntesis:

c·d (c+2)(d+5)

Las ecuaciones:

20 = c·d 60 = (c+2)(d+5)

En el problema de Abû Kâmil, hemos optado por analizar datos del problema, cosa que es permisible en el MC, aunque no sea la manera en la que habitualmente se procede. Esto se ha hecho así por un doble motivo: 1) para mostrar que no son siempre necesarios dos análisis para producir una ecuación ya que, como vimos anteriormente, el análisis de una cantidad para la que se dispone de un signo, letra o cifras, se puede considerar a sí misma autoanalizada sin necesidad de un análisis que permita producir un signo para ella, una expresión algebraica, y 2) que las ecuaciones que traducen un mismo problema tienen una estructura que depende de las cantidades consideradas como conocidas o desconocidas y las cantidades que se analizan una o dos veces. Así, en el caso de uso de una sola literal, tendríamos tres tipos diferentes de estructuras básicas:

f(x) = a **f(x) = x** **f(x) = g(x)**

tipos básicos que pueden extenderse a los casos en que se usen dos o más literales. Este tipo de estructuras, que pueden corresponder obviamente a un mismo problema, hacen que sea poco preciso asociar la mera estructura de la ecuación que se produce con la estructura del problema, y ello tanto teóricamente como en la práctica, ya que, como veremos en el **1.10**, disponemos de todo un conjunto de ecuaciones que permiten encontrar la solución de un problema, y además, cuando estudiamos las producciones de los estudiantes, éstos tienden a producir distintas ecuaciones para un mismo problema y será objeto del **capítulo 5** estudiar estas producciones.

1.5.- Acerca del carácter aritmético o algebraico de los problemas de la FPAA.

Podemos encontrarnos con estudiantes que juzgan difícil o imposible resolver un problema, o que incluso rechazan abordarlo, porque reconocen en él la necesidad de utilizar ecuaciones para resolverlo, alegan que han olvidado todo acerca de las ecuaciones e incluso cómo escribir las ecuaciones a partir del problema. Por el contrario, sucede que otros estudiantes, usuarios habituales del Método Cartesiano y competentes en el uso del sistema de signos del álgebra, muestran indiferencia o prestan poca atención a un argumento resolutorio de un problema que da cuenta con minuciosidad del encadenamiento sucesivo de la operaciones que deben realizarse con las datos para obtener la solución del problema. Juzgan el procedimiento descrito excesivamente complicado y opinan que las ecuaciones les proporcionan una solución más transparente y más sencilla. Esto, que no es más que un hecho contrastado, es un indicio de la zanja, para algunos abismo, que parece separar Aritmética y Algebra.

Para indagar en esta zanja, en cuanto a los problemas verbales se refiere, Wagner y Kieran (1989, págs. 226 y ss) plantearon en la agenda de investigación sobre álgebra para los 90 las siguientes preguntas:

¿Qué es un problema verbal algebraico? ¿Hay problemas verbales que son intrínsecamente más algebraicos que aritméticos? ¿Cuando un método de resolver problemas es más algebraico que aritmético?

¿Hay tipos particulares de problemas verbales que estimulan el desarrollo del razonamiento algebraico?

¿Qué está involucrado en el proceso de traducir problemas verbales a notación algebraica?

Contestar a estas preguntas, en algún sentido, es interesante al menos para conocer los puntos de corte entre la aritmética y el álgebra en el currículo escolar, prever los obstáculos que pueden presentarse en el tránsito del aritmética al álgebra, comprender la naturaleza del proceso de resolución de problemas verbales y desarrollar estrategias y modelos de enseñanza.

En Puig y Cerdán (1990b) anotamos vías que podían explorarse para intentar dar respuesta a estas preguntas, o a alguna reformulación de ellas.

Una, examinar los libros de texto que se utilizan en los currículos escolares y afirmar que son problemas aritméticos los que aparecen en las lecciones de aritmética y algebraicos los que aparecen en las lecciones de álgebra, para, luego, intentar caracterizar qué es lo que los diferencia. Ello conduce a dos listas separadas, de ellas se empieza por juzgar su coherencia, esto es, si cada problema está donde debería estar desde el punto de vista del juez que juzga. La sentencia que se emite se fundamenta generalmente en la solución que el juez daría al problema: aritmética o algebraica, una u otra, o las dos con mayor grado de naturalidad o dificultad una que otra. Ésta tentativa produce un clareamiento de las listas que las separa por un lado y las tiende a confundir en una frontera borrosa donde la sentencia duda. Si, por otro lado, se decide discriminar evitando todo prejuicio que provenga del estilo de solución, solo queda por atenerse al texto, y si se quiere además al contexto al que se refiere el texto. Por comenzar por el final, el contexto a que se refiere el texto encuadra a algunos problemas dentro de una tipología que es propia y tradicional de una u otra disciplina: aritmética o álgebra. En cuanto al texto, se puede percibir una cierta diferencia en el estilo narrativo, en la profusión de datos, en las construcciones sintácticas que describen las relaciones entre las cantidades, o en la presentación de las cantidades mismas, en fin hay cierta diferencia en algunos aspectos superficiales, que no tendrían, por el tipo de variables que se mencionan, por qué alterar la estructura profunda del problema, suponiendo que la estructura profunda sea ciega ante las variables consideradas.

Dos, examinar las estrategias de enseñanza tradicionales para una y otra clase de problemas y, en particular, lo que se hace en el período de transición o en aquellas estrategias que presentan en ese momento un problema y lo resuelven calificando a las soluciones presentadas como aritméticas o algebraicas.

Tres, proceder al examen de las soluciones que suelen utilizar los alumnos. Sin embargo, ese examen ha de ser difícil ya que los alumnos pueden abordar estos problemas de maneras que no pueden ser caracterizadas sin dificultad como aritméticas o algebraicas, cuando la tarea que se les encomienda sea simplemente “resolver el problema”.Y ello sin contar además que el contexto de la tarea induzca a los alumnos al uso de métodos aritméticos o algebraicos utilizados en su enseñanza. Para subsanar esta dificultad se puede recurrir a dos alternativas: primera, inducir a utilizar uno u otro método o los dos al proponer la tarea a estudiantes que ya son usuarios competentes en el sistema de signos del álgebra, y, segunda, examinar las soluciones de alumnos que están en la fase de transición, esto es, en el momento en que comienzan a utilizar ecuaciones, pero no son todavía competentes en su uso. Y cabe también, en último extremo, recurrir al artificio de examinar la resolución de problemas sin álgebra por parte de estudiantes que poseen la herramienta algebraica, pero a los que se les prohíbe que la usen, con el fin de determinar qué problemas son capaces de resolver y cuáles no, y a qué recurren para hacerlo.

Y cuatro, usar la vía utilizada en el programa desarrollado en el apartado anterior para describir la estructura del problema. En esta vía se empieza por dar respuesta a la pregunta “cuándo un método de resolver problemas es más algebraico que aritmético”, afirmando que, de los métodos de resolución de problemas que tenemos a nuestra disposición para resolver problemas verbales, el Método Cartesiano por su localización histórica tiene vocación algebraica, mientras que la adaptación del Método de Análisis-Síntesis a problemas verbales produce soluciones aritméticas.

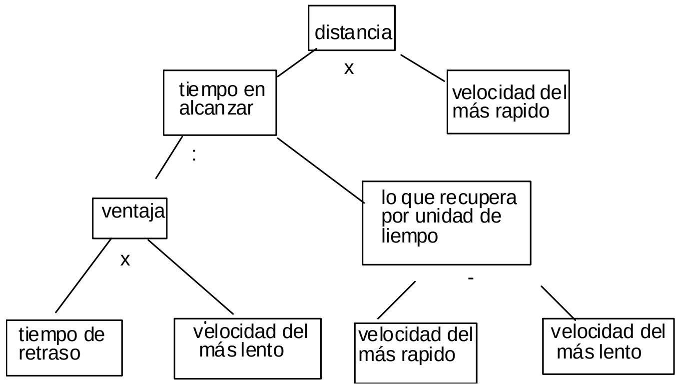
A partir de esta toma de posición, las preguntas se reformulan, olvidándonos del problema y prestando atención al texto intermedio producido en el proceso de traducción por un resolutor experto que utiliza, a su albur, una u otra regla. Es el texto intermedio el que se califica entonces de aritmético, TIAR, o algebraico, TIAL, pero ya no utilizando como criterio la regla utilizada para producirlo, sino el sistema de signos aritmético o algebraico que la síntesis requiere para leer dicho texto intermedio.

Así, la Regla de Análisis-Síntesis produce textos intermedios aritméticos. Y allí donde la Regla parece fracasar, con sólo permitir que el análisis termine donde comenzó, esto es, en la incógnita, el doble estatus de la incógnita, desconocida considerada como conocida, pero ahora no sólo hipotéticamente, como en el comienzo del análisis, sino desconocida considerada conocida realmente y con la capacidad operativa que requiere la síntesis. Pues bien, nos encontramos que la Regla de Análisis-Síntesis así modificada produce textos intermedios algebraicos. Textos intermedios algebraicos, eso sí, que conducen siempre a ecuaciones del tipo $x = f(x)$.

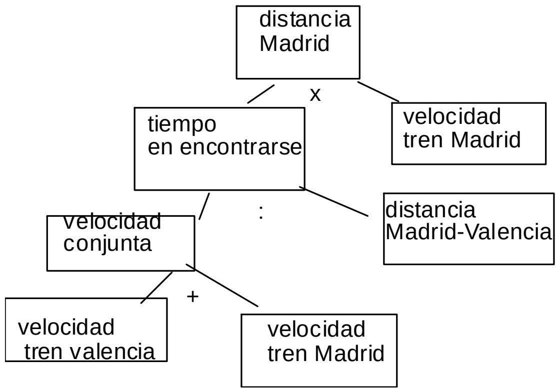
Entonces la pregunta “hay tipos particulares de problemas verbales que estimulan el desarrollo del razonamiento algebraico” queda contestada en el siguiente sentido: hay un tipo de problemas verbales que parecen obligar al uso del razonamiento algebraico para poder resolverlos. Y más, sea lo que sea lo que se entienda por razonamiento algebraico, lo que aquí se dice es que una componente esencial de éste, en cuanto toca a la resolución de problemas, es el modo de tratar con lo desconocido. Este modo de trato, que supone un cambio radical del razonamiento algebraico frente al razonamiento aritmético, no sólo consiste en la necesidad de signos para designar lo desconocido y operar con ellos formalmente, con lo que nos referiríamos meramente a los cambios en el plano sintáctico, sino en la ruptura conceptual que supone la idea de que aquello que se debe determinar puede ser utilizado en su determinación y no sólo imaginado como determinado, como artificio del pensamiento que permite dar cuenta de qué lo determina.

Lo fundamental de qué está involucrado en el proceso de traducir problemas a notación algebraica ya ha sido apuntado en el apartado anterior, cuando estudiamos la producción de textos intermedios con las Reglas Cartesianas. Donde damos de partida un trato igual a lo conocido y a lo desconocido, trato que se da no sólo a la incógnita o incógnitas del problema sino a todas aquellas incógnitas auxiliares que consideremos necesarias. Esta posición que supone en definitiva una multiplicación de lo dado, tiende a facilitar el análisis, de ahí que la estructura de los distintos trozos de que consta el texto intermedio, tenga una estructura más simple. Sin embargo, esta ventaja de partida conlleva una servidumbre: la necesidad de duplicar los análisis. Ello es nuevo para el estudiante, ya que las cantidades que se analizan precisan de la polisemia explicita, o al menos de su referencia en un doble sentido, polisemia que no se requiere explícitamente de las cantidades que se utilizan en el análisis.

La decisión de calificar de aritméticos o algebraicos a los textos intermedios y no a los problemas no es una decisión arbitraria. En efecto, para el problema ALCANZAR, que utilizamos en el apartado anterior como ejemplo del fracaso de la Regla de Análisis-Síntesis, podemos producir un texto intermedio como el que se muestra en el diagrama:



Del mismo modo, para su compañero inseparable el problema ENCONTRAR podemos producir el texto intermedio:



Los textos intermedios son, como se ve, textos intermedios aritméticos, pero el análisis realizado difiere del realizado anteriormente en **1.4.3**, y produce un texto intermedio de estructura más compleja.

Lo que acabamos de mostrar no es extraño. De hecho, sabemos que en las Aritméticas Comerciales que empiezan a aparecer en el siglo XV se enseña a resolver estos problemas mediante reglas que acompañan a la regla de tres, de compañía, mezclas, etc., reglas que prescriben y organizan, mediante un artefacto didáctico que es de hecho un texto intermedio aunque de diferentes características de los descritos aquí, las operaciones que deben realizarse con los datos para responder a la pregunta del problema En concreto, en la Aritmética de Treviso (Swetz, 1987), Treviso[5] proporciona a “los estudiantes que han estudiado las reglas (se refiere a las reglas de los algoritmos de las operaciones) y las clases de problemas mencionados anteriormente (resueltos mediante el uso de la regla de tres) dos reglas más que les pueden ser útiles:

> La regla de las dos cosas que vienen juntas es ésta:
>
> Que deberás multiplicar los dos términos uno por otro y dividir el producto de esta multiplicación por la suma de los dos términos dados

[5] Treviso es un pueblo italiano próximo a Venecia donde según tenemos noticia se imprimió la primera aritmética comercial, aritmética de la que estamos hablando. Dado que el autor es desconocido utilizamos aquí para él, el nombre del topónimo donde se imprimió el tratado.

> La regla de las dos cosas que se persiguen y después se alcanzan es ésta:
>
> Que deberás multiplicar los dos números por el número de pasos transcurridos y dividir por la diferencia.” (Swetz, 1987, pág. 158)

Los problemas que utiliza Treviso para instruir en el uso de estas reglas y su modo de proceder es el siguiente:

El Padre Santo envió un mensajero desde Roma a Venecia, rogándole que debería llegar a Venecia en 7 días. Y la más ilustre señora de Venecia también envió un mensajero de Venecia a Roma que debería llegar en 9 días. Y de Roma a Venecia hay 250 millas. Ocurrió que por orden de estas personalidades estos dos mensajeros emprendieron su viaje al mismo tiempo. Se pide hallar a los cuántos días se encontraran, y cuántas millas habrá viajado cada uno de ellos.

“Sigue la regla así :

```
  7                     1
  9                     35  |
 ----                   63  |  3 dias
 16    divisor          16
```

Por tanto se encontrarán en 3 días y 15/16.

Si quieres saber cuantas millas han hecho cada uno, procede por la regla de 3 de modo que: El primero que sale de Roma:

```
112
 7  \/ 250 ——— 63
--  /\         --
 1      1  ——— 16
       16
```

```
   250          1
    63        457
  -----     15750  |  140
   750      11222  |
 1500         111  |
 -----          1
 15750
```

Este ha hecho 140 millas y 5/8. Ahora igual para el que sale de Venecia:

Vemos que el que sale de Venecia a Roma ha hecho 109 millas y 3/8. Para comprobar el trabajo, notar que la suma de ambos ha de ser 250 millas”. (Swetz, 1987, pág. 159)

Y para la segunda regla:

Una liebre está a 150 pasos de un galgo que le sigue. La liebre recorre 6 pasos mientras que el galgo da 10. Se necesita saber cuántos pasos ha dado el galgo para alcanzar a la liebre.

"La diferencia entre 6 y 10 es 4, que es el divisor. Ahora sigue la regla de este modo:

150 10 1500 pasos 375	El galgo ha cubierto 375 pasos en alcanzar a la liebre.

Si deseas comprobarlo, halla el número de pasos que ha dado la liebre.

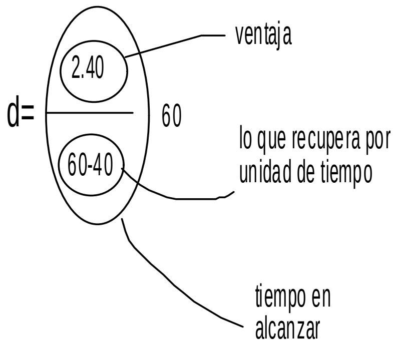
150 6 900 pasos 225	La liebre ha cubierto 225 pasos cuando la ha alzanzado el galgo.

Añade luego esos 225 pasos a la ventaja de 150 que tenía la liebre y el resultado es 375. Entre la distancia recorrida por la liebre y la ventaja que tenía tenemos tantos pasos como el galgo dio. Luego el problema está acabado". (Swetz, 1987, págs. 160-161)

Las reglas utilizadas son similares a las lecturas de los textos intermedios que proporcionan soluciones aritméticas a estos problemas, excepto que se ha invertido el orden de las operaciones, en el último caso, probablemente porque es más sencillo primero la multiplicación y luego la división, o porque se invoca una regla de tres, con lo que desaparecen las incógnitas auxiliares "tiempo en alcanzar" y "lo que se recupera por unidad de tiempo". Además, el problema clásico de la liebre alcanzada por el galgo, en Treviso es menos complejo que nuestro problema ALCANZAR, ya que la incógnita auxiliar de éste, "ventaja", es un dato en el otro.

En nuestro análisis, el establecimiento de esas incógnitas auxiliares y de las relaciones entre ellas, la incógnita y los datos del problema es lo que permite precisamente que el análisis se encamine por una vía que culmina en datos. Sin embargo, esas incógnitas auxiliares necesarias para que el texto intermedio resultante sea un texto intermedio aritmético son más difíciles de establecer que las que se utilizaron cuando se realizó el análisis de este problema en el apartado anterior. En efecto, aquéllas –tiempo del primer automóvil y tiempo del segundo– son cantidades que, aunque no aparecen explícitamente mencionadas en el texto del problema, están asociadas a las que aparecen –velocidad y distancia– en el esquema conceptual de la velocidad. Éstas, por el contrario, han de ser forjadas explorando más minuciosamente el campo semántico del texto del problema. El primer análisis puede pues calificarse de natural y éste, de complejo, refinado o sutil. Este problema pues permite la construcción de dos textos intermedios diferentes: algebraico por la vía del análisis natural y aritmético por la vía de un análisis más refinado o sutil.

Por otro lado, la expresión aritmética que lee la síntesis en el texto intermedio aritmético es $((2 \cdot 40) : (60 - 40))\, 60$, la misma expresión aritmética que se obtiene al resolver la ecuación $d = 60\ (d/40 - 2)$, producto del texto intermedio con síntesis algebraica. Lo que ha hecho posible llegar directamente a la expresión aritmética ha sido que en el campo semántico del problema era factible, aunque no a primera vista, dotar de sentido a cada parte de la expresión aritmética y convertirla en una incógnita auxiliar. Esta posibilidad, pues, puede plantearse formalmente para cualquier problema cuyo análisis natural no culmine en datos y se traduzca a una ecuación no aritmética. En efecto, una ecuación del tipo $Ax + B = Cx$, cuando se resuelve da $x = B/C - A$, que, como es aritmética, puede ser el producto de un texto intermedio aritmético guiado por A-S. Lo que hace falta para que ese TIAR pueda desencadenarse es que en el campo semántico del texto del problema sea posible dotar de sentido a la cantidad diferencia de los coeficientes de la incógnita y, por tanto, establecer como antecedente de la incógnita del problema esa incógnita auxiliar, con lo que se elude operar con la incógnita y el proceso de traducción será aritmético.



$$Ax+B=Cx$$

$$x=\frac{B}{C-A}$$?

Generalizando esta idea, cualquier problema que sea traducible a un sistema lineal de ecuaciones lineales es susceptible, en teoría, de ser resuelto a través de un texto intermedio aritmético producido por A-S, donde las incógnitas auxiliares encuentran su sentido de las expresiones aritméticas que expresan el valor de las incógnitas. Y más, cualquier problema que dé lugar a una ecuación con una incógnita no mayor de cuarto grado, también sería susceptible de ser resuelto con la regla de A-S con tal de que se sea capaz de dotar de sentido a las expresiones aritméticas entre los datos, expresiones que ahora pueden incluir radicales, y utilizarlas como incógnitas auxiliares.

De ahí, que sea interesante indagar, en la práctica y con estudiantes concretos, hasta dónde alcanza la realidad de está posibilidad teórica. Ello se explorará en el capítulo **3**.

1.6.- Los problemas ternarios y los grafos trinomiales.

Una gran parte de los problemas de la FPAA son problemas ternarios, estos problemas son los que Fridman (1990) propone modelar por medio de grafos trinomiales.

Un problema ternario es un problema en el que:

1) Se dan cantidades conocidas y desconocidas, cantidades que pueden ser contempladas en el problema de alguna de las maneras descritas en **1.2**.

2) Todas las cantidades conocidas y desconocidas están ligadas a otras cantidades por alguna relación ternaria. Una relación se dice ternaria si en ella intervienen tres cantidades.

3) Las relaciones, en el caso en que haya más de una, se hallan ligadas entre sí por una o dos cantidades.

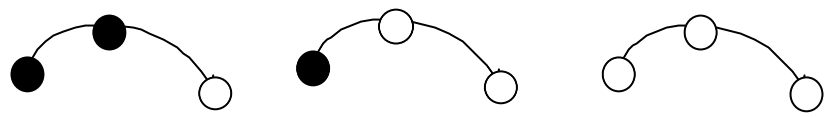
4) El objeto del problema consiste en la determinación de una o varias de las cantidades desconocidas.

La condición 3) indica que consideramos un problema cada vez y no varios problemas separados a la vez o que todas las cantidades están interconectadas a través de las relaciones que se dan en el problema.

Los problemas utilizados hasta ahora: ALCANZAR, ABRIGOS, HENO, ABÛ-KÂMIL, etc., son problemas ternarios.

Un grafo trinomial, a diferencia de un grafo ordinario en el que cada arista relaciona dos vértices y ambos son de la misma clase, es aquel grafo en el que cada arista posee tres vértices y éstos pueden ser de dos clases diferentes: claros y oscuros.

Ahora bien, si queremos que las aristas vengan a representar las relaciones ternarias de un problema, algunas de las aristas para un grafo trinomial serían:



donde identificaremos vértices oscuros con cantidades conocidas y vértices claros con cantidades desconocidas. Aquí, en aras de conservar el modo de representar en los diagramas, utilizaremos en lo que sigue para estas últimas cantidades el símbolo cuadrado.

Un grafo construido con aristas como las descritas es un grafo trinomial (GT), más precisamente:

Un sistema finito enlazado de *n* aristas, con tres vértices definidos en cada una de ellas, dos en los extremos de la arista y otro sobre ella, y de los cuales por lo menos uno es un vértice claro, mientras que los demás pueden ser vértices oscuros, se llama grafo trinomial de orden *n*.

La interconexión de las aristas del grafo viene dada por el hecho de que éstas poseen vértices comunes, vértices a los que llamaremos nodos. Cualquier vértice que no sea nodo se dirá que es un vértice terminal**.**

Si en el nodo concurren *k* aristas, siendo k>1, diremos que el nodo es un nodo de orden *k*; si el vértice es terminal, asignaremos a los vértices claros el orden uno, y a los oscuros el orden cero,. Las aristas de un GT pueden tener uno, dos o tres nodos de orden no menor que 2. Llamaremos género de la arista al número de estos nodos.

El objeto de este apartado es modelar los problemas ternarios por medio de los GT. Esto se hace identificando cantidades con vértices y relaciones con aristas.

Ejemplificaremos con el problema ALCANZAR la obtención del GT correspondiente a ese problema.

Un automóvil parte de un punto A con velocidad uniforme de 40 km/h hacia otro punto B. Dos horas después sale de A hacia B otro automóvil con velocidad uniforme de 60 km/h. Dígase a qué distancia de A se encuentran.

Análisis de cantidades:

Cantidades:
Velocidad, tiempo y espacio para cada uno de los dos móviles.

Tipo de Cantidades:

Desconocidas: tiempos y espacios de cada uno de los dos móviles.
Conocidas: velocidades de cada uno de los móviles: 40 km/h. y 60 km/h.

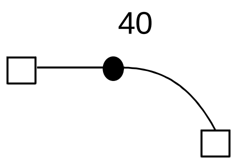
Análisis de relaciones:

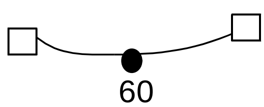
La relación entre tiempo, velocidad y espacio, correspondiente al movimiento uniforme, para cada uno de los móviles.
La relación entre los tiempos del primer y segundo móvil, señalada en el problema.

La igualdad de los espacios recorridos por ambos móviles, ya que partiendo del mismo punto se alcanzan.

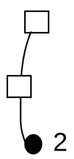
Representadas como aristas las tres relaciones ternarias, tendríamos:

Para el primer móvil Para el segundo móvil

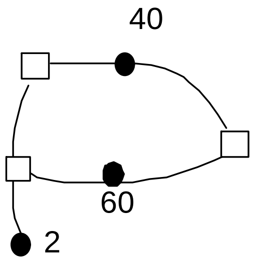




Para los tiempos:



Y, para las relaciones entretejidas, el grafo:



donde se han entrelazado las aristas a través de las cantidades comunes a las tres relaciones.

1.7.- Algunos conceptos y propiedades de los GT.

Como el GT de un problema será un instrumento de extenso uso en el estudio de la FPAA, parece pertinente presentar algunas nociones que vayan un poco más lejos de las presentadas en el apartado anterior y que nos proporcionen un vocabulario preciso para nuestro estudio.

1.7.1.- GT equivalentes.

Dos GT serán equivalentes cuando exista una correspondencia entre ellos que intercambie aristas y vértices de uno y otro grafo preservando los nodos situados sobre ellas y los ordenes de éstos. Más precisamente:

Sean G y G' dos grafos trinomiales de orden n. Sea A_i la arista número i del grafo G y B_k la arista número k del grafo G'. Sean a_j^r y b_i^p los vértices número j de G e i de G', de ordenes r y p respectivamente.

Los grafos G y G' se dicen equivalentes si para cualquier numeración arbitraria de los vértices de G existe una numeración de los vértices de G' tal que:

1) A cada arista A_i de G le corresponde una arista B_k de G' y sólo una.

2) A cada vértice a_j^r de G le corresponde un vértice b_i^p de G' donde se cumple que p = r.

3) Si los vértices $a_{i1}r_1$, $a_{i2}r_2$, $a_{i3}r_3$ pertenecen a la arista A_i de G, entonces los vértices $b_{j1}p_1$, $b_{j2}p_2$, $b_{j3}p_3$ pertenecen a la arista correspondiente B_k de G'.

1.7.2.- Destrucción, oscurecimiento de grafos trinomiales.

La destrucción de un grafo consiste en la transformación sucesiva de un grafo de orden n en otro de orden n-1, por medio de la eliminación de una arista, hasta dejarlo reducido a un grafo de orden cero. Esta destrucción también puede considerarse como oscurecimiento del grafo, si se interpreta como la transformación sucesiva de los vértices claros de una arista en oscuros hasta la obtención de un grafo que posea todos sus vértices oscuros.

Para que la destrucción tenga un sentido, como veremos después, se procede a eliminar aquellas aristas que poseen dos vértices oscuros, la eliminación de estas aristas puede implicar un desmembramiento del entretejido arquitectónico o estructura del grafo.

Para describir con detalle y precisión la destrucción del grafo se recurre a dos nociones: las de entrada y movimiento sobre el grafo.

Se llama entrada al grafo a una arista que posee dos vértices oscuros.

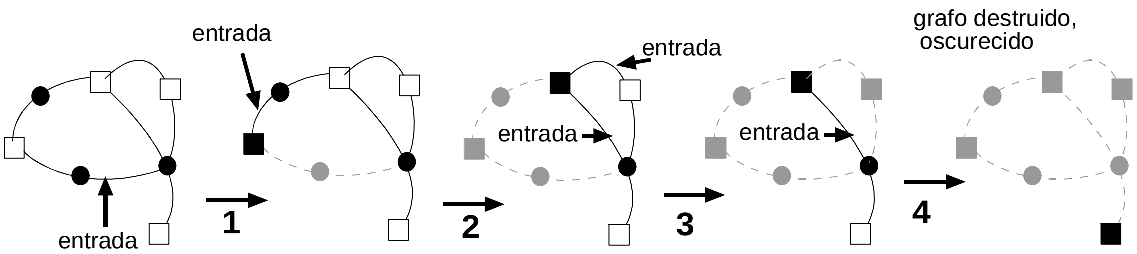
El movimiento por el grafo, que puede realizarse siempre que el grafo tenga entradas consiste, en lo siguiente:

Entrando al grafo, se avanza por la arista de entrada hasta llegar a un nodo, nodo que destruimos, transformamos en un vértice oscuro.

Eliminamos dicha arista del grafo y proseguimos moviéndonos por el grafo siempre que sea posible.

La consecuencia de los movimientos por el grafo puede llevar a la total destrucción del grafo o a un grafo sin entradas.

En la figura siguiente se muestran de izquierda a derecha los movimientos sucesivos que conducen a la destrucción del grafo inicial.



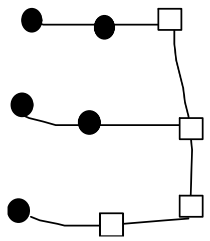
1.7.3.- Tipos de grafos.

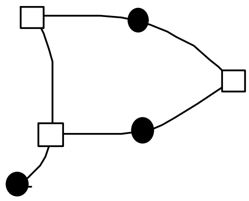
La posibilidad o no de movernos sobre el grafo y las consecuencias de dicho movimiento permiten clasificar los grafos en:

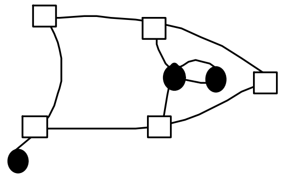
Grafos abiertos o cerrados, según posean o no entradas.

Grafos encadenados, cuando los sucesivos movimientos sobre el grafo acarrean la destrucción u oscurecimiento total de éste, y grafos mixtos, cuando, como resultado de nuestros movimientos sobre el grafo, nos encontramos con un grafo sin entradas.

Ejemplos: El GT correspondiente al problema ABRIGOS es un grafo abierto y encadenado, el correspondiente al problema ALCANZAR es un grafo cerrado y el grafo del problema AVIONETA es un grafo mixto.







ABRIGOS ALCANZAR AVIONETA

7.5.- Grafos y problemas.

Por la noción que tenemos de problema, los GT se pueden dividir en dos grandes clases: aquéllos que no tienen vértices oscuros, llamados grafos esquemas, y aquéllos que poseen por lo menos un vértice oscuro, llamados grafos problemas.

Los grafos problemas los podemos a su vez dividir en:

Grafos determinados: aquellos grafos en los cuales el número de vértices claros coincide con el número de aristas.

Grafos indeterminados: aquellos grafos en los cuales el número de vértices claros es mayor que el número de aristas.

Grafos sobredeterminados: aquellos grafos en los cuales el número de vértices claros es menor que el número de aristas.

1.8.- El paso del enunciado verbal del problema al GT.

Una lectura del texto del problema que proceda del modo descrito en **1.6** debe permitir la construcción del GT correspondiente a un problema dado. Sin embargo, en la práctica, o la traducción es inmediata o aparecen algunas dificultades. Estas dificultades suelen depender de la estructura de cantidades y relaciones del problema. Para hablar de ello consideremos los dos siguientes problemas:

CHOCOLATES Y CARAMELOS.

Una profesora tiene 120 chocolates y 192 caramelos para repartir –a partes iguales cada tipo de dulce– entre los alumnos de su grupo. Si cada alumno recibe tres caramelos más que chocolates, ¿cuántos son los alumnos?

HENO.

Unos granjeros almacenaron heno para 40 días. Sin embargo el heno era de mejor calidad de la que pensaban y ahorraron 100 kg por día. Así tuvieron heno para 60 días. ¿Cuánto heno almacenaron?

En el problema CHOCOLATES Y CARAMELOS todas las cantidades y relaciones están dadas explícitamente. Así, de la primera frase del problema, “Una profesora tiene 120 chocolates y 192 caramelos para repartir -a partes iguales cada tipo de dulce- entre los alumnos de su grupo”, podemos obtener directamente las cantidades conocidas y desconocidas.

Cantidades conocidas:

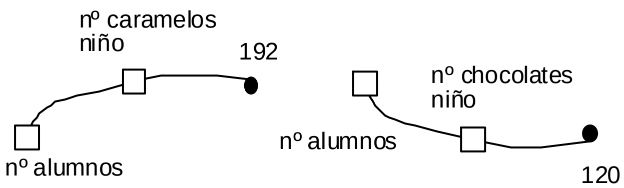
Número de chocolates = 120
Número de caramelos = 192

Cantidades desconocidas:

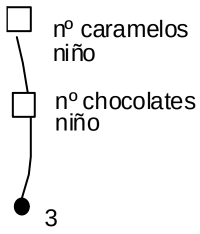
Chocolates y caramelos que tocan a cada alumno
Número de alumnos,

cantidad esta última que se menciona también en la última frase, allí, como la pregunta del problema.

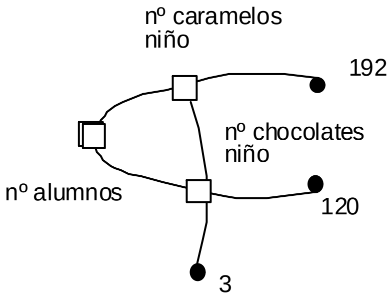
Podemos inferir también las relaciones entre alumnos, dulces por alumno y dulces disponibles, dada la intención de reparto equitativo mencionada.



Que junto con la relación:



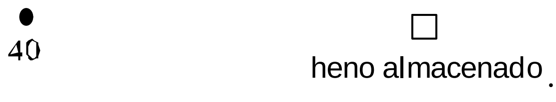
que viene expresada en el texto del problema como “Si cada alumno recibe tres caramelos más que chocolates”, permite entretejer esta última relación con las anteriores, ya entretejidas por número de alumnos, por medio de los chocolates y caramelos por alumno, para obtener el GT siguiente:



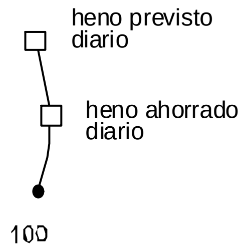
En este problema CHOCOLATES Y CARAMELOS, al igual que en los problemas ALCANZAR o ENCONTRAR, la estructura de cantidades y relaciones es explicita o sólo hace falta considerar algunas cantidades dadas implícitamente, como es el caso del número de patas por animal en el problema GALLINAS Y CONEJOS, o idear algunas cantidades desconocidas, por ejemplo, la tela utilizada en trajes y la tela utilizada en abrigos en el problema ABRIGOS, pero estas cantidades son habituales y de uso frecuente en el contexto en el que se plantea el problema, cantidades pues, que se evocan con naturalidad con la mediación de la estructura conceptual subyacente, de ahí que el GT del problema se construya con facilidad.

Si consideramos, por el contrario, el problema HENO caemos inmediatamente en la cuenta de que nos encontramos ante un texto más complejo. Si bien el texto describe lo ocurrido en una situación, parecen faltar, en el texto, elementos que permitan explicar –de modo más bien cuantitativo que cualitativo– lo que ha ocurrido. Es en este tipo de textos en los que es menester un análisis del contenido del problema del estilo descrito en Puig y Cerdán (1989). Tal análisis de contenido permite observar que en la situación descrita se consideran cantidades y relaciones que no están explícitamente mencionadas en el texto del problema, o que hay que construir para dar una explicación pertinente de la situación.

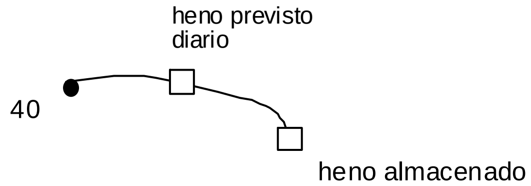
Así en la primera frase, “Unos granjeros almacenaron heno para 40 días”, sólo aparece una cantidad conocida, 40 días, mientras el heno a primera vista parece ser un tipo de alimento, tan adecuado al contexto como podía haberlo sido la cebada o el fuel para los tractores. Sin embargo al constituir este heno, ahora “cantidad de”, la pregunta del problema, en la primera frase tenemos dos cantidades: una desconocida, el heno almacenado, y otra conocida, los días para los que preveían los granjeros tener heno, a saber, 40 días.



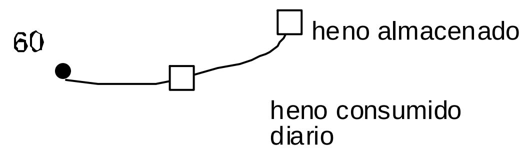
En la segunda frase, “Sin embargo, el heno era de mejor calidad de la que pensaban y ahorraron 100 kg por día”, se da otra cantidad conocida: 100 kg de heno ahorrado por día. Pero esta cantidad, al ser una cantidad que relaciona otras dos, indica implícitamente la presencia en el problema de estas dos cantidades: el heno que los granjeros tenían previsto que se consumiese diariamente y el heno diario consumido realmente. Con lo cual en esta frase se dan en realidad tres cantidades, una conocida y dos desconocidas, y la relación aditiva que las liga.



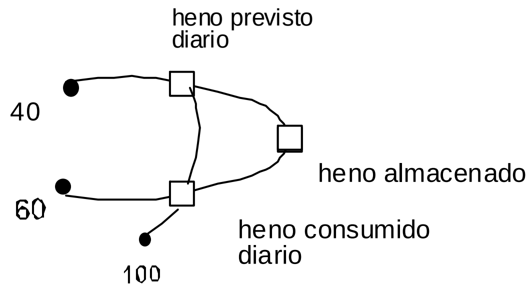
Y de todo ello la relación que implícitamente se da en la primera frase:



En la frase, "Así tuvieron heno para 60 días", una frase que expresa una consecuencia, se nos proporciona una cantidad conocida 60 días e implícitamente la relación que existe entre esa cantidad de días, el heno consumido diariamente y el heno almacenado.



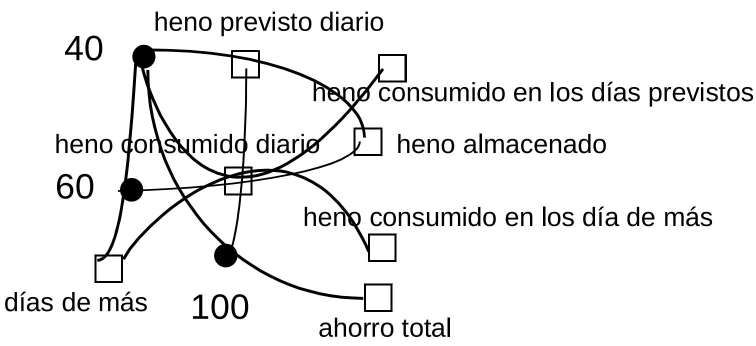
Y entretejiendo las tres relaciones ahora explícitamente mencionadas por las cantidades correspondientes, obtendremos el GT:



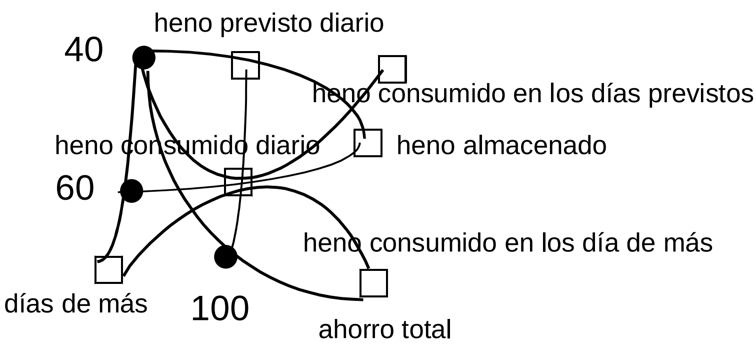
Éste es, digamos, el GT mínimo que podemos construir para el problema del heno, de modo que las cantidades y relaciones aparezcan entrelazadas. Sin embargo, un análisis continuado y más profundo de la situación nos puede llevar a incorporar nuevas cantidades a este problema –en cursiva en el diccionario que sigue– y con ellas las relaciones pertinentes, como hacen los resolutores estudiados por Puig (1996), que utilizan el diccionario de cantidades presentado en **1.2.5.**

días	kg/día heno	heno
días previstos	heno previsto diario	*heno consumido en los días previstos*
días reales	heno consumido diario	heno almacenado
días de más	heno ahorrado diario	*heno consumido en los días de más*
		ahorro total

Si incorporamos éstas al GT anterior, obtendríamos el GT siguiente:



y, considerando las relaciones de igualdad entre aquellas que han sido referidas con sentidos diferentes, obtendríamos el GT:



En conclusión, la obtención de un GT a partir del enunciado del problema es un asunto que atañe a la lectura del enunciado, y pueden construirse diversos GT para un mismo problema, de ahí que precise puntualizarse del GT del problema de qué tipo de lectura proviene. Eso se hará en detalle en **1.16**.

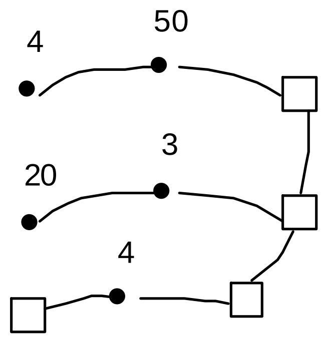
1.9.- Destrucción u oscurecimiento de un GT y solución del problema.

En **1.7.3** describimos la destrucción de un GT por medio de movimientos sucesivos sobre él. Aquí nos proponemos mostrar cómo los movimientos sobre el GT que represente a un problema permiten obtener una solución del mismo. Para ilustrar el modo de proceder, utilizaremos los problemas ABRIGOS y CHOCOLATES Y CARAMELOS, uno de los cuales posee un grafo abierto y encadenado, y el otro, un grafo cerrado.

1.9.1.- GT con entradas o abiertos.

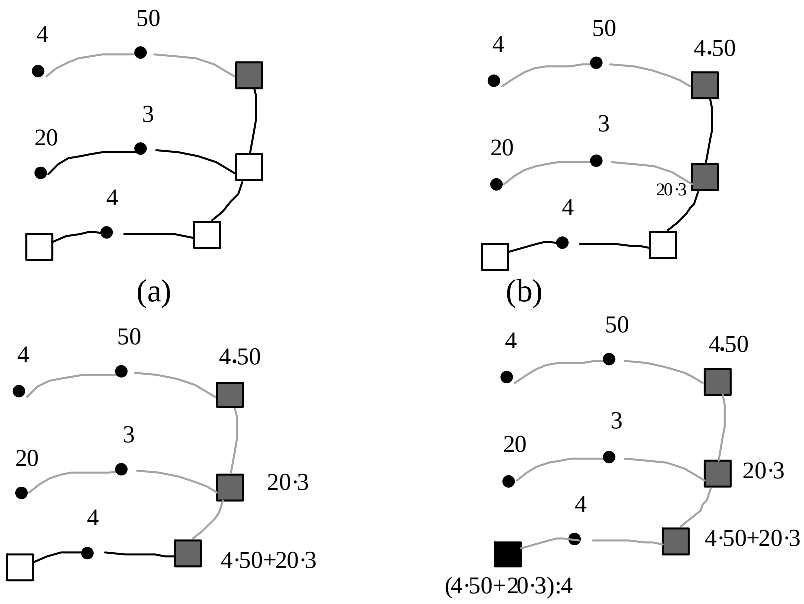
El problema ABRIGOS y su GT:

En un taller de confección disponen de 4 piezas de tela de 50m cada una para hacer trajes y abrigos.Piensan hacer 20 trajes que necesitan 3m de tela cada uno y aabrigos que necesitan 4m de tela cada uno.¿Cuántos abrigos pueden hacer?



Dado que el GT es abierto y encadenado, bastará tomar una de las entradas del grafo para ir transformando progresivamente los vértices claros en oscuros. Si anotamos, a su vez, la expresión aritmética que corresponde a la arista destruida en el vértice oscurecido, quedarán determinadas todas las cantidades desconocidas, entre las cuales se encuentra la incógnita del problema. En las figuras (a), (b), (c), (d) se muestra los movimientos seleccionados sucesivamente para oscurecer el GT.

Y en la figura (d) encontramos la expresión aritmética (4 · 50 + 20 · 3) **:** 4 que nos proporciona la respuesta a la pregunta del problema.



(c) (d)

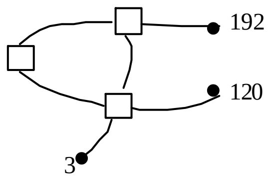
Así pues, la obtención de la solución de un problema, cuando se dispone de su GT y éste es abierto y encadenado, es de carácter meramente algorítmico, basta ir destruyendo progresivamente todas las aristas posibles. El plan que requiere la solución de cualquier problema de varias operaciones combinadas contesta básicamente a tres preguntas: ¿qué operaciones?, ¿entre qué cantidades?, ¿en qué orden? Pues bien, cuando se utiliza el GT correspondiente a un problema, esto es, un metatexto del problema, este plan se reduce a un plan mínimo: *“destruye cuanto puedas”*. Esto es así, porque las dos primeras operaciones están embebidas en las aristas del grafo –si bien la primera no de una manera manifiesta sino sugerida por la posición vertical u horizontal de las aristas[6]– y la tercera cuestión queda limitada en sus posibilidades por el entretejido que diseña la topología del grafo.

1.9.2.- Grafos sin entradas o cerrados.

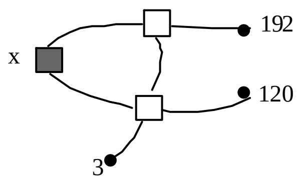
El problema CHOCOLATES Y CARAMELOS:

Una profesora tiene 120 chocolates y 192 caramelos para repartir –en partes iguales cada tipo de dulce– entre los alumnos de su grupo. Si cada alumno recibe tres caramelos más que chocolates, ¿cuántos son los alumnos?

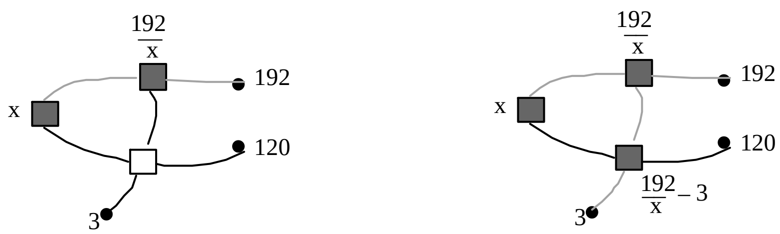
Su GT:



Dado que este GT no tiene entradas, es imposible cualquier movimiento por el grafo que al oscurecer un vértice determine la cantidad que representa. Para que al menos un movimiento sea posible, debemos de facilitar al grafo una entrada. Para ello transformemos uno de los nodos claros que representan cantidades desconocidas en un nodo oscuro. Esto es, usemos una cantidad desconocida como si fuese conocida, procedimiento que ya usamos en los textos intermedios cuyo análisis conllevaba una petición de principio. Elijamos la cantidad que constituye la pregunta del problema y designémosla por **x.**



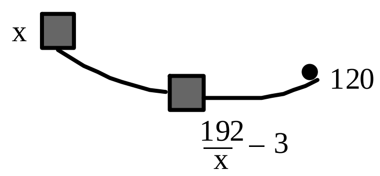
El GT posee ahora una entrada. Podemos pasar ahora a su destrucción progresiva y simbolizar a cada nodo claro, como antes, ahora con las expresiones algebraicas que corresponden a las cantidades intermedias. Lo que se hace en dos pasos (a) y (b) en la figura siguiente:



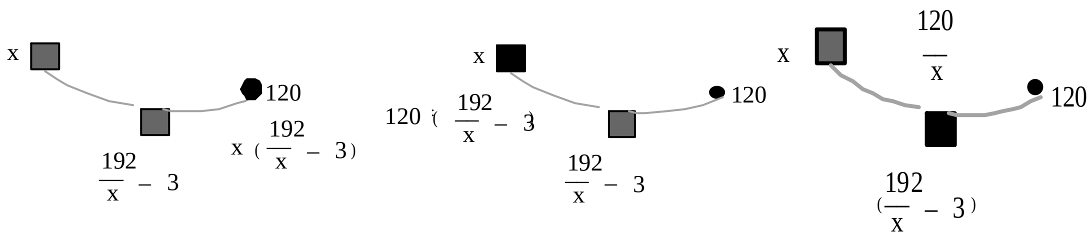
(a) (b)

[6] En la manera que aquí se disponen las aristas de los grafos se reserva la disposición horizontal para las aristas que representan relaciones multiplicativas y la disposición vertical para las aditivas.

En el grafo (b) podemos observar que todos los vértices han sido oscurecidos y ello sin destruir la arista:



arista a la que no habíamos otorgado carta de identidad en **1.6** al poseer sus tres vértices oscuros. Si nos permitimos oscurecer los vértices de esta arista de nuevo, entrando a ella por la izquierda (a), por la derecha (b) o por ambos lados (c) tendríamos dos expresiones diferentes en cada uno de los vértices,



(a) (b) (c)

que igualadas, las que corresponden al mismo vértice, nos proporcionan las ecuaciones:

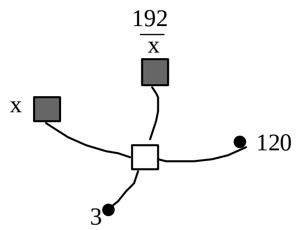
$$\text{(a)}\ \ x\left(\frac{192}{x}-3\right)=120 \qquad \text{(b)}\ 120:\left(\frac{192}{x}-3\right)=x \qquad \text{(c)}\left(\frac{192}{x}-3\right)=\frac{120}{x}$$

donde se igualan: el número de chocolates en (a), el número de alumnos en (b) y el número de chocolates por alumno en (c). La resolución de cualquiera de estas tres ecuaciones nos proporciona el número de alumnos, la cantidad que hemos designado con x.

El orden de los movimientos sobre el grafo, o el nodo que podemos elegir para oscurecer en un paso determinado, no está unívocamente determinado, sino que a veces podemos optar entre el oscurecimiento de distintos nodos. Esto es lo que ocurre en nuestro caso, donde, en el inicio del proceso de oscurecimiento, hemos tomamos una opción: oscurecer el nodo correspondiente a los caramelos por alumno, cuando podíamos haber optado también por oscurecer en primer lugar el nodo correspondiente a chocolates por alumno.

Sucede además, en el caso de los grafos encadenados, que en alguno de los movimientos un nodo puede ser oscurecido entrando al nodo por tantas aristas como concurren en él. Esto produce colisiones, colisiones que permiten escribir distintas expresiones algebraicas para una misma cantidad, la representada por el nodo oscurecido, y de ahí a la igualdad entre ellas: las ecuaciones.

Así, en la destrucción del grafo del problema anterior, tras el primer movimiento realizado, nos encontrábamos ante el grafo:



donde el nodo claro restante lo podemos oscurecer tanto entrando por la arista vertical como por la horizontal. La colisión permite escribir la ecuación (c) mostrada arriba, donde se igualaban los chocolates por alumno.

En resumen, el movimiento sobre el grafo nos proporciona la solución del problema cuando el grafo es abierto y encadenado. El movimiento no es posible en los grafos cerrados más que con el artificio de tomar cantidades desconocidas como conocidas, y tratarlas como tales hasta obtener un grafo con entradas y encadenado. Entonces, la destrucción del grafo nos conduce a colisiones en algunos nodos, estas colisiones permiten escribir ecuaciones que determinan cantidades que conducen a la solución del problema.

1.10.- El GT y el conjunto de ecuaciones del problema.

El algoritmo de destrucción del GT y una interpretación de las Reglas Cartesianas que permite su aplicación sobre el texto que es el GT nos ha permitido, en el apartado **1.9,** la construcción de una ecuación cuya resolución conduce al resultado del problema. Podríamos estar tentados de admitir una correspondencia entre el problema y la ecuación o sistema de ecuaciones a que éste es finalmente traducido. Y, aún en el caso de que ecuaciones distintas sean producidas por resolutores distintos, cosa que suele ocurrir con frecuencia, limitarnos a hacer la observación de que las ecuaciones producidas son equivalentes, cosa que también suele suceder con frecuencia, y a partir de aquí por tanto proceder a clasificar los problemas con referencia a ecuaciones tipo. Sin embargo, ocurre con frecuencia que, para un mismo problema, los resolutores pueden producir ecuaciones que no son equivalentes y que ni siquiera utilizan la misma cantidad de literales (ver capítulo **5**).

El estudio del conjunto de ecuaciones a partir de las cuales es posible resolver el problema puede aportar, en mi opinión, información de referencia para juzgar sobre la competencia de los resolutores en el uso de MC, o de si hay un uso peculiar del MC en algún grupo de problemas o subfamilias de la FPAA. En particular, en aspectos como pueden ser: la preferencia por elegir una u otra incógnita para designarla con una literal, el número de literales utilizadas, el cómo las expresiones algebraicas producidas hacen referencia a las cantidades, el sentido de la referencia o la cantidad elegida para formular la igualdad.

En este apartado tomaremos como ejemplo un problema y, por supuesto, su GT. A continuación, utilizaremos el modo de proceder de **1.9** en un doble ejercicio combinatorio: el primero relativo al estudio de las posibilidades de dotar de entradas al

GT, y el segundo relativo a los diferentes modos en que puede ponerse en práctica el algoritmo de destrucción del GT. El ejercicio nos permitirá escribir el conjunto de ecuaciones a que puede traducirse este problema a partir del GT asociado a él.

El problema que tomaremos como ejemplo es el utilizado anteriormente: CHOCOLATES Y CARAMELOS.

Empezamos nuestro ejercicio designando con la literal **x,** el nodo que representa al número de alumnos, éste aparece oscurecido en la fig. 10a.1.

En la fig.10a.2 se presentan en gris las dos aristas que pueden eliminarse oscureciendo los nodos correspondientes a las cantidades número de caramelos por alumno y número de chocolates por alumno, y las expresiones algebraicas que corresponden a esas cantidades. Por último, la fig. 10a.3 presenta la arista correspondiente a la relación de comparación entre las cantidades arriba mencionadas, expresadas aditivamente.

Así, usando la fig.10a.3 podemos escribir las ecuaciones:

$$(1)\ \frac{192}{x} = \frac{120}{x} + 3\ ,\ (2)\ \frac{192}{x} - 3 = \frac{120}{x}\ ,\ (3)\ \frac{192}{x} - \frac{120}{x} = 3$$

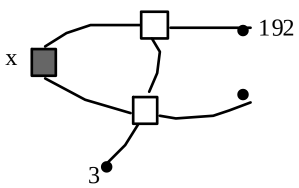


fig. 10a.1

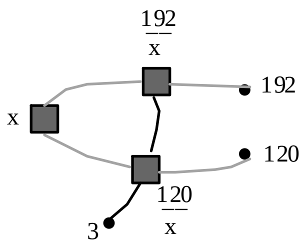


fig. 10a.2

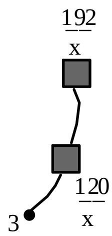
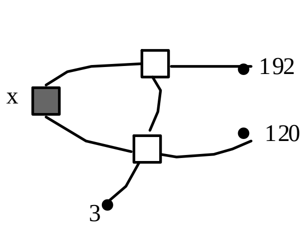
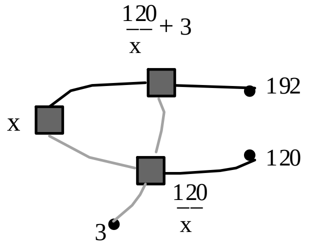


fig. 10a.3

ecuaciones que son equivalentes, pero pueden ser diferentes atendiendo a otros criterios, por ejemplo, las cantidades que se igualan en cada una de ellas: en (1) se igualan el número de caramelos por alumno, en (2) el número de chocolates por alumno y en (3) la diferencia entre ambos.

Si en el GT correspondiente al problema oscurecemos el mismo nodo, usamos la misma literal, pero procedemos de manera diferente en su destrucción, como se muestra en las fig. 10a.1 fig. 10a.4 y fig. 10a.5,





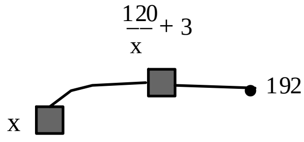


fig.10a.1 fig.10a.4 fig.10a.5

obtendremos otras expresiones algebraicas para el número de chocolates y caramelos por alumno, y, a partir de la fig. 10a.5, las ecuaciones:

$$(4)\ x\left(\frac{120}{x} + 3\right) = 192, \qquad (5)\ \frac{192}{x} = \frac{120}{x} + 3\ , \qquad (6)\ \frac{192}{\frac{120}{x} + 3} = x$$

donde en (4) se iguala el número de caramelos, en (5) el número de chocolates y en (6) el número de alumnos. De nuevo, se puede observar que son equivalentes y puede pasarse de una a otra mediante las transposiciones aditivas y multiplicativas adecuadas. Pero al alterar estas ecuaciones también cambian las cantidades referidas por las expresiones algebraicas de uno y otro lado de la ecuación.

Y, procediendo desde la misma entrada al GT y la otra posibilidad de destruir el grafo, fig. 10a.1, fig. 10a.5 y fig. 10a.6, obtendríamos las ecuaciones:

$$(7)\ x\left(\frac{192}{x} - 3\right) = 120, \qquad (8)\ \frac{120}{x} = \frac{192}{x} - 3)\ , \qquad (9)\ \frac{120}{\frac{192}{x} - 3} = x$$

donde se igualan número de chocolates (7), número de chocolates por alumno (8) y número de alumnos (9).

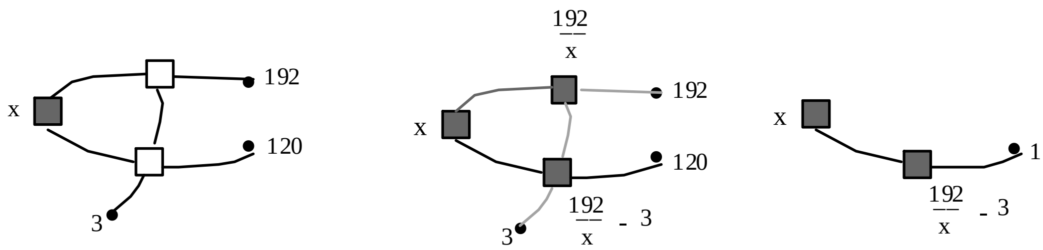


fig.10a.1 fig.10a.5 fig.10a.6

En resumen, lo que hemos producido con este ejercicio combinatorio y automático es un conjunto de nueve ecuaciones. De estas nueve ecuaciones, seis requieren expresiones algebraicas en los dos miembros de la igualdad (1), (2), (5), (6), (8), (9) y tres de ellas únicamente en uno de ellos (3), (4) y (7). Este hecho está en correspondencia con las cantidades igualadas y el orden del nodo o vértice que en el grafo las representa. Y todo ello ha sido posible porque hemos producido distintas expresiones algebraicas para una misma cantidad. Así, y por elegir las más complejas, para el número de alumnos:

$$\frac{120}{\frac{192}{x} - 3} \qquad \frac{192}{\frac{120}{x} + 3}$$

Es cierto que en el ejercicio anterior no hemos producido ninguna de las dos ecuaciones:

$$120 + 3x = 192 \qquad 190 – 120 = 3x\ (A)$$

que llevan a $x = \frac{190-120}{3}$, que es la expresión aritmética que resuelve el problema y a la que conducen todas y cada una de las nueve ecuaciones producidas anteriormente. Sin embargo, estas ecuaciones, a las que Rojano (1985) llamaría pre-algebraicas, no podían encontrarse utilizando el GT utilizado como estructura del problema. En el detalle de esta afirmación se entrará en el capítulo **3**. También es cierto que se puede argüir que el análisis anterior es excesivo, puesto que las ecuaciones que escriben los alumnos son del tipo últimamente mencionado, argumento razonable pero que debe justificarse con los datos.

Ni el espíritu ni la letra del MC lo requieren, pero es usual, al menos en directrices para la enseñanza (Gascón, 1989), usar la literal x para referirse a la incógnita principal del problema, usar esa cantidad para construir las expresiones algebraicas correspondientes a otras cantidades y a partir de ahí obtener las ecuaciones. Sin embargo, es inusual utilizar literales para otras incógnitas que no sean las principales, aunque Diofanto, con su maestría en la elección del *arithmo*, nos muestra cómo se puede simplificar el análisis de algunos problemas y la complejidad de las expresiones que se igualan. De aquí en adelante, siguiendo el precepto de referir el problema a la determinación de ciertas cantidades desconocidas, escribiremos otras ecuaciones que conducen al resultado del problema, utilizando una, dos o tres literales para distintos vértices claros del GT de modo que tales literales nos proporcionen entradas al grafo.

Con la literal x para número de caramelos por alumno, como nodo que nos proporciona una entrada al GT, siguiendo la pauta de las figs.10a, obtendríamos las ecuaciones:

$$(10)\ \ x = \frac{120}{\frac{192}{x}} + 3\ ,\quad (11)\ \ x-3 = \frac{120}{\frac{192}{x}}\ ,\quad (12)\ \ x - \frac{120}{\frac{192}{x}} = 3$$

$$(13)\ \ \frac{120}{\frac{192}{x}} = x-3\ ,\quad (14)\ \ \frac{120}{x-3} = \frac{192}{x}\ ,\quad (15)\ \ \frac{192}{x}(x-3) = 120$$

$$(16)\ \ \frac{192}{\frac{120}{x-3}} = x\ ,\quad (17)\ \ \frac{192}{x} = \frac{120}{x-3}\ ,\quad (18)\ \left(\frac{120}{x-3}\right) x = 192$$

Y, por último, tomando la literal x para el número de chocolates por alumno, las ecuaciones:

$$(19)\ \ \frac{192}{\frac{120}{x}} = x+3\ ,\quad (20)\ \ \frac{192}{x+3} = \frac{120}{x}\ ,\quad (21)\ \ \frac{120}{x}(x-3) = 192$$

$$(22)\ \ \frac{192}{\frac{120}{x}} -3 = x\ ,\quad (23)\ \ \frac{192}{\frac{120}{x}} +3 = x\ ,\quad (24)\ \ \frac{192}{\frac{120}{x}} -x = 3$$

$$(25)\ \frac{120}{x} = \frac{192}{x+3}\ ,\quad (26)\ \frac{120}{\frac{192}{x+3}} = x\ ,\quad (27)\ \left(\frac{192}{x+3}\right) x = 120$$

En este ejercicio de rutina, hemos producido dos nuevos grupos de nueve ecuaciones, equivalentes las de cada grupo y con el mismo resultado. Y no equivalentes una ecuación de un grupo con cualquiera del otro, o con el grupo (1) a (9). Como debía ser, ya que las literales tienen por referencia en cada uno de los grupos cantidades diferentes. Las ecuaciones (10) a (18) se pueden reducir todas ellas a:

$$120\,x = 192x - 3\cdot 192 \quad \text{o} \quad 192x - 120x = 3\cdot 192 \ \text{o}\ 192x = 120x + 3\cdot 192$$

donde $x = \dfrac{3\cdot 192}{192-120}$ la expresión aritmética para el número de caramelos por niño.

Por su parte, las ecuaciones (19) a (17) nos conducen a

$$120x + 3\cdot 120 = 192x \quad \text{o} \quad 192x - 120x = 3\cdot 120$$

donde $x = \dfrac{3\cdot 120}{192-120}$ para el número de chocolates por niño.

Y, como sabemos, a partir de una u otra de estas cantidades podemos determinar, usando la arista correspondiente, el número de alumnos: la incógnita principal.

En la delimitación del conjunto de ecuaciones que resuelven el problema, nos hemos limitado, hasta ahora, a transformar un único nodo claro en nodo oscuro, mediando el uso de una literal para ese nodo, en el problema ejemplo que estamos utilizando. Ello es suficiente para transformar el GT cerrado en un GT encadenado. En otros problemas, el oscurecimiento de un solo nodo puede ser insuficiente para pasar de un GT cerrado o mixto a un GT encadenado, entonces será preciso oscurecer dos o más nodos, o, en último extremo, oscurecer todos los nodos del GT. Así, algo de esto ocurre en el problema MECANÓGRAFA, que se estudia en **1.12.2**.

En el ejemplo que estamos considerando, también podemos oscurecer dos o tres vértices claros, y, ahora, con la garantía de que el GT resultante será encadenado. Las posibilidades de oscurecer dos nodos se muestran, con las distintas asignaciones de literales, en las figuras 10b.1, 10b.2 y 10b.3. En ellas se muestra asimismo las destrucción del GT.

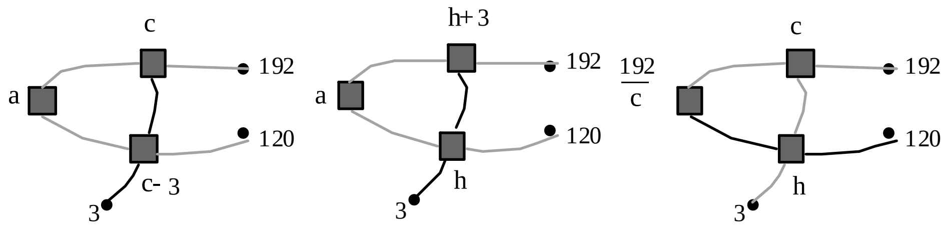


fig. 10b.1 fig. 10b.2 fig. 10b.3

Las ecuaciones, ahora sistemas de ecuaciones con dos incógnitas, que podemos escribir son:

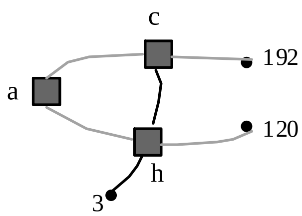
(28) $a \cdot c = 192$ que iguala número de caramelos
$a\,(c-3) = 120$ que iguala número de chocolates

(29) $a(h+3) = 192$ que iguala número de caramelos
$a \cdot h = 120$ que iguala número de chocolates

(30) $\frac{192}{c} \cdot h = 120$ que iguala número de chocolates por niño
$h = c-3$ que iguala número de chocolates

(31) $\frac{120}{h} \cdot c = 192$ que iguala número de caramelos
$c = h+3$ que iguala número de caramelos por niño

Y oscureciendo los tres nodos del GT siguiente



obtendremos el sistema de ecuaciones:

(32) $a \cdot c = 192$ que iguala número de caramelos
$a \cdot h = 120$ que iguala número de chocolates
$c = h+3$ que iguala número de caramelos por niño

Las distintas posibilidades de oscurecimiento de un GT del problema nos ha proporcionado un conjunto de 32 ecuaciones y sistemas de ecuaciones. Todas las que pueden escribirse para este problema utilizando el MC y partiendo del GT atribuido al problema. Si alguna otra ecuación, diferente de las aquí mencionadas, se produce como resultado de la traducción a ecuaciones del problema, ésta se debería obtener de las aquí escritas realizando las simplificaciones pertinentes, o, dicho de otra manera, serían las ecuaciones que pueden aparecer en el transcurso de la resolución de las ecuaciones o sistemas obtenidos, lo que se correspondería, en la traducción, con cálculos con las expresiones algebraicas, mentalmente ejecutados, pero no expresados. En última instancia, si encontrásemos alguna ecuación, fruto de una correcta traducción del problema a ecuaciones, que no fuese una de las 32 anteriores o consecuencia de transformaciones sintácticas de las mismas, podríamos afirmar que la ecuación encontrada deviene de un grafo diferente del problema.

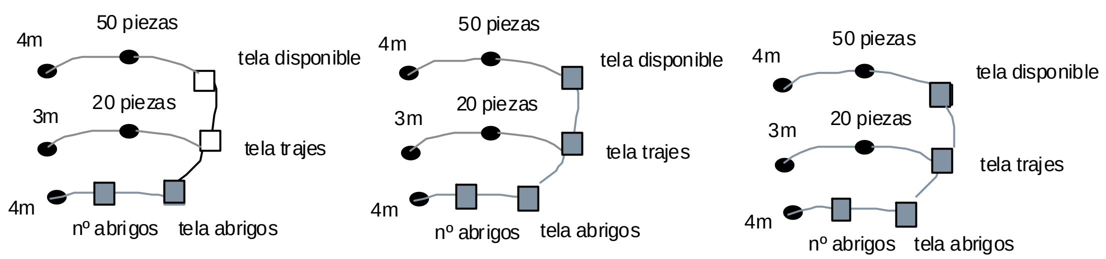
Además, por un lado, la complejidad de alguna de las expresiones algebraicas aquí encontradas para las cantidades, muestra lo sinuoso del camino andado en el análisis de esas cantidades cuando éstas son producidas por un resolutor, y, por otro lado, la simplicidad de las expresiones algebraicas, que resulta del incremento de literales usadas, indica, como señalamos en **1.4.4**, que el análisis es más directo en este último caso. En el primer caso, es más complejo el análisis del texto del problema, y, en el segundo caso, es más compleja la resolución del sistema de ecuaciones que conduce al resultado del problema.

1.11.- El Método de Análisis-Síntesis y el GT.

En **1.5** utilizamos la regla del A-S para la producción de textos intermedios, que eran una traducción del texto del problema guiada por dicha regla. La regla del A-S operaba allí sobre el enunciado del problema y la solución de éste devenía de la lectura del texto intermedio producido en el sentido de la síntesis. Nos proponemos ahora examinar el modo de proceder de la regla de A-S sobre el GT de un problema.

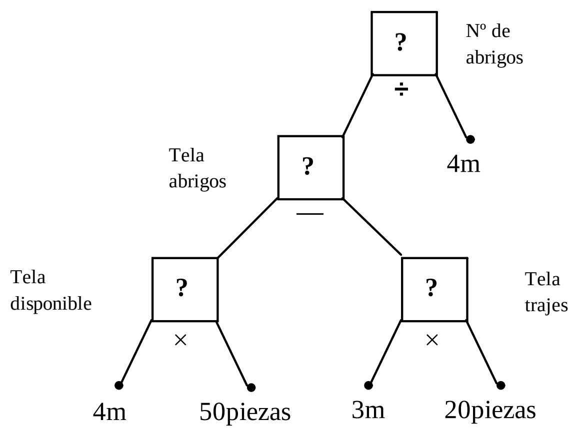
Para el examen propuesto utilizaremos los problemas: ABRIGOS, ALCANZAR. y sus correspondientes GT.

En el problema ABRIGOS, el funcionamiento de la regla del A-S en su parte analítica obliga a prestar atención a la incógnita del problema, “el número de abrigos”, y, en la búsqueda de antecedentes, aquí delimitada por el mundo de relaciones que nos otorga el GT, obtendremos: en el primer paso: “4m y tela abrigos” indicados en la arista correspondiente. La iteración del proceso con “tela abrigos” como incógnita auxiliar conlleva el tránsito por la arista vertical correspondiente a esta incógnita y el establecimiento de las incógnitas auxiliares “tela disponible” y “tela en trajes”, para acabar con la reducción de éstas a datos en un tercer paso, paso que transita por las aristas horizontales correspondientes. Así, en la figura, los pasos 1), 2) y 3)



paso 1) paso 2) paso 3)

donde encontramos el texto intermedio producido por la regla del A-S en su parte analítica al reordenar la figura del paso 3), de acuerdo con la transposición de signos del GT y del texto intermedio.

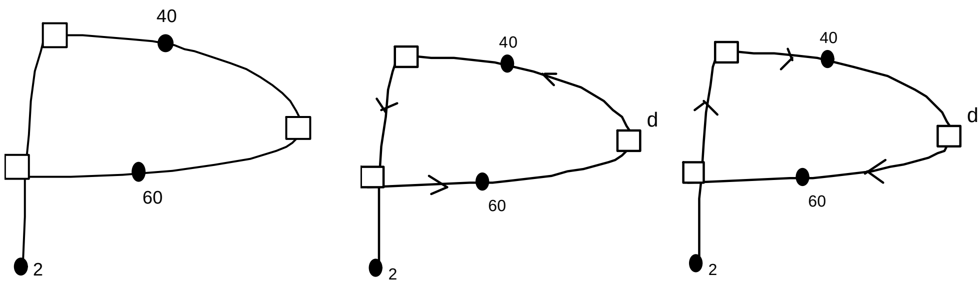


El uso de la regla del A-S, en su parte analítica, sobre el GT del problema, conlleva simplemente la ordenación de los antecedentes posibles de la incógnita del problema reflejados en el GT, y la disposición concatenada de ellos que conduce a los datos. La indagación de los posibles antecedentes y las relaciones entre ellos, y entre ellos y lo propuesto en el problema, ya fue objeto de los análisis de cantidades y relaciones, análisis previos realizados sobre el enunciado del problema que permiten construir el GT.

Por tanto, el GT del problema reduce el espacio de búsqueda para la regla del A-S. Sólo le concede un otorgamiento en este aspecto: cantidades y relaciones presentes en él. Pero, la topología del GT, más clarividente que la del enunciado del problema, proporciona a la regla del A-S un carácter semiautomático, al señalarle las vías disponibles en cada iteración del proceso.

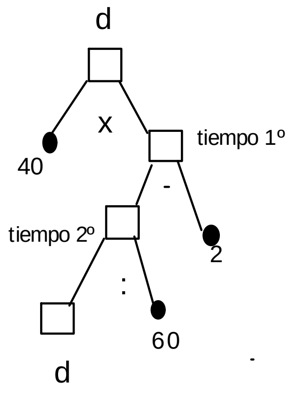
Por otro lado, la parte sintética de la regla del A-S cuando esta opera sobre el GT de un problema no necesita del total requerimiento de su parte analítica. La destrucción de un grafo, toda vez que ésta es posible –ver **1.9** y **1.10**–, puede permitirse ser algo caótica. El lema es: destruye lo que puedas. Y hay distintas posibilidades en algunos pasos del algoritmo de destrucción. Por ello, el orden preciso de concatenación señalado por la parte analítica de la regla del A-S es prescindible. Las bifurcaciones o alternativas en la destrucción de los nodos del grafo corresponden a distintas posibilidades de análisis. Y la síntesis, que queda finalmente dibujada en la destrucción del grafo, puede contener síntesis parciales de diferentes análisis. Así pues, bajo la única guía de la topología del grafo, no tenemos por qué decidirnos concretamente por uno de los posibles análisis para llegar a la meta: la determinación de la incógnita.

Los diversos análisis que pueden realizarse a partir del GT de un problema pueden observarse en el GT del problema ALCANZAR, fig. (a), donde los recorridos de destrucción del grafo que parten del nodo **d** por las aristas superior, fig. (b), e inferior, fig. (c)

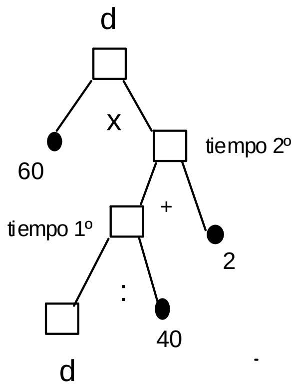


(a) (b) (c)

nos conducen a los textos intermedios de las figs. (b1) y (c1),



(b1)



(c1)

textos intermedios que podría haber producido la regla del A-S en su parte analítica.

La parte sintética de la regla del A-S destruyendo lo que se puede, no ha sido ejecutada por las características del análisis, mostrado como posible e inconcluso al no desembocar en lo conocido. La ejecución en su totalidad requiere de la disponibilidad de entradas en el GT. El modo de proporcionar entradas sigue el procedimiento mostrado anteriormente: considerar **d** como una cantidad supuestamente conocida. La elección de esta entrada concreta, frente a cualquier otra, viene determinada porque permite la destrucción del grafo, cosa que ha sido sugerida por los posibles análisis. Con esta suposición, la parte sintética de la regla del A-S puede funcionar sobre el grafo, y destruir las aristas, proporcionándonos expresiones algebraicas para las cantidades que son nodos Expresiones que son múltiples para un mismo nodo, fig. (d), y posibilitan la escritura de ecuaciones.

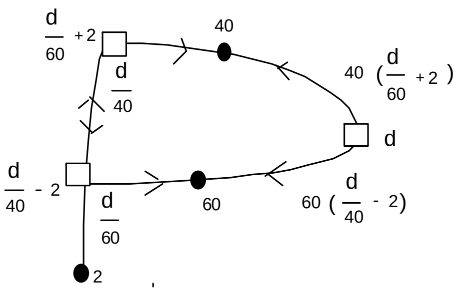


fig.(d)

Por otro lado, la posibilidad de otros análisis del problema ALCANZAR, que en el apartado **1.5** calificamos de más profundos, no pueden obtenerse obviamente a partir de este GT del problema ALCANZAR. En efecto, el diccionario de cantidades y el mundo de sus relaciones derivadas utilizados en la construcción del anterior GT ha sido mínimo. Y el diccionario de cantidades utilizado en el análisis del apartado **1.5** para la solución aritmética del problema era más amplio que el mini-diccionario aquí utilizado. Este mini-diccionario incluye únicamente las cantidades mencionadas explicita o implícitamente en el enunciado del problema. Y referidas, casi, en un único sentido, los otros quedan implícitos en el GT. El mini-diccionario de cantidades utilizado para el problema ALCANZAR, que construimos ahora, al estilo y con los nombres utilizados en las traducciones a ecuaciones de los problemas de móviles, como se describe en física, pasa por ser el siguiente:

tiempo del primer móvil
tiempo del segundo móvil
diferencia de tiempos
velocidad del primer móvil
velocidad del segundo móvil
distancia recorrida hasta alcanzar

donde queda implícito, pero referido en el GT, que la distancia recorrida hasta alcanzar puede referirse como la distancia recorrida por el primer móvil o por el segundo móvil , posibilidades que nos facilitaban los dos diferentes análisis.

Sin embargo, el diccionario utilizado en el análisis más profundo seria:

tiempo del primer móvil, más lento
tiempo del segundo móvil, más rápido
tiempo en alcanzar
diferencia de tiempos
velocidad del primero, más lento
velocidad del segundo, más rápido
lo que el segundo móvil recupera por unidad de tiempo al primer móvil
distancia recorrida por el primer o el segundo móvil
distancia al alcanzar
ventaja del primer móvil cuando parte el segundo móvil

donde, como se ve, se consideran cantidades antes no utilizadas, y algunas de ellas son referidas en varios sentidos o incorporan sentidos antes no considerados. Este diccionario, junto el entramado de relaciones subyacentes entre las cantidades, permite que construyamos un GT, fig. (e), para el problema ALCANZAR de mayor orden que el GT anterior, al que contiene como subgrafo.

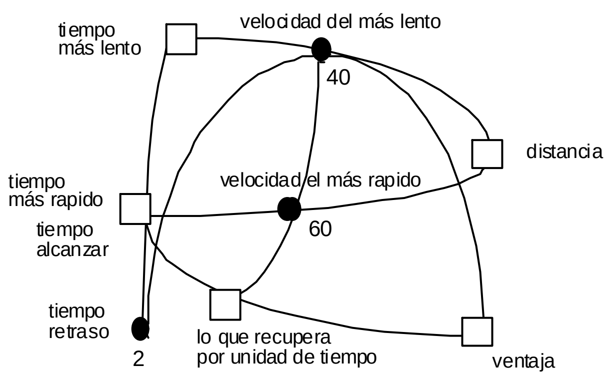


fig (e)

El uso sobre este grafo de la regla del A-S en su parte analítica nos conduciría al texto intermedio descrito en **1.5**, que repetimos, como recuerdo, en la fig. (f).

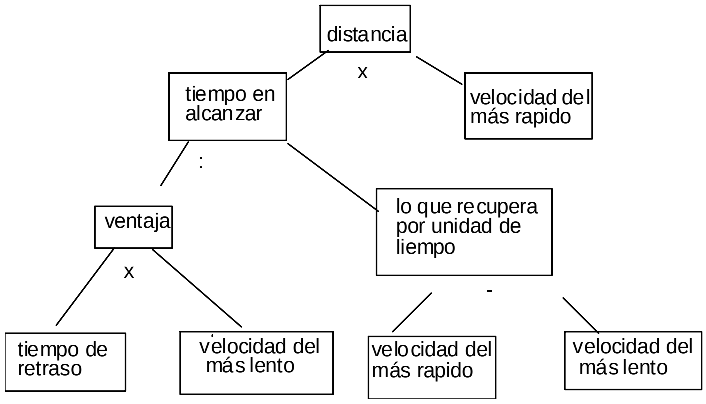


fig. (f)

La parte sintética de la regla del A-S es ahora posible puesto que el grafo posee entradas. Entradas que no han sido proporcionadas al grafo como antes, recurriendo al artificio de usar lo desconocido como supuestamente conocido, sino que son entradas que ya posee el propio grafo como consecuencia de la ideación de cantidades en la lectura del problema que nos produce tal diccionario de cantidades, cantidades algunas de las cuales permanecían como ocultas. Y las relaciones entre estas cantidades y los datos constituyen, precisamente, las aristas del grafo que nos permiten entrar a él y proceder a su destrucción.

En la fig. (g) se muestra sobre el GT la progresiva destrucción del grafo que conduce a la determinación de la incógnita del problema: la distancia.

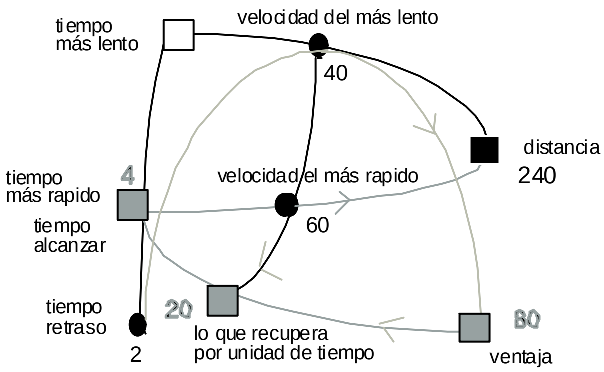
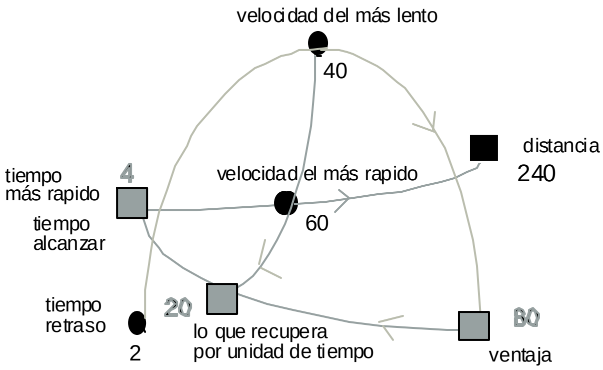


fig. (g)

Merece la pena señalar que el camino recorrido para esta determinación no ha precisado del tránsito por las aristas que confluyen en el nodo tiempo del más lento. Por lo tanto, esta cantidad y las aristas citadas pueden ser consideradas como innecesarias en el GT sobre el que realmente hemos resuelto el problema, es decir, el GT siguiente:



Así, las soluciones aritméticas pueden obviar el uso de cantidades desconocidas que pueden considerarse constituyentes de la estructura del problema. Sobre este hecho volveremos en al capítulo 3.

1.12.- El método cartesiano y el GT.

1.12.1.- Consideraciones sobre el MC

El método cartesiano (MC) de resolución de problemas es, como se sabe, un programa universal para la resolución de cualquier problema. Describe Polya (1966) que el plan consiste en reducir cualquier problema a un problema de álgebra y cualquier problema de álgebra a un problema de resolución de ecuaciones. Este plan, desgranado por Descartes en sus inacabadas *Reglas para la dirección del espíritu* (Descartes, 1984), es reformulado por Polya y reducido a 4 reglas, reglas tomadas en el **1.5** como las reglas del MC para la resolución de problemas de la FPAA. En concreto, las usamos allí para la producción de textos intermedios algebraicos a partir de los cuales devenían las ecuaciones para resolver el problema.

La correspondencia entre las Reglas de Descartes y las de Polya, según indicación de este último, se muestra en la tabla siguiente:

Descartes	**Polya**
Regla XIII.- Si nosotros comprendemos perfectamente una cuestión, es preciso abstraerla de todo concepto superfluo, reducirla a su mayor simplicidad y dividirla en partes tan menudas como sea posible, enumerándolas. Regla XIIII.- La misma regla debe aplicarse a la extensión real de los cuerpos y propuesta por entero a la imaginación con ayuda de figuras puras y desnudas: de esta manera, en efecto, será comprendida con mucha mayor distinción o claridad por el entendimiento. Regla XV.- Es también útil el trazar de ordinario estas figuras y presentarlas a	Regla 1. En primer lugar, comprender bien el problema, luego convertirlo en la determinación de cierto número de cantidades desconocidas. (Reglas

los sentidos externos, a fin de que sea más fácil por este medio mantener atento nuestro pensamiento Regla XVI.- Las cosas, empero, que no requieren una atención actual o inmediata de la inteligencia, aun cuando sean necesarias para la conclusión, vale más designarlas por notaciones más breves que por medio de figuras enteras: de esta manera la memoria no podrá equivocarse, y no obstante, durante este tiempo, el pensamiento no se distraerá en el intento de retenerlas, mientras se aplica a otras deducciones.	XIII a XVI)

Regla XVII.- La dificultad propuesta debe ser recorrida directamente, haciendo abstracción del hecho de que algunos de sus términos sean conocidos y otros desconocidos, y examinando por intuición la mutua dependencia de cada uno de ellos respecto de los demás, gracias a los razonamientos verdaderos. y la Regla XVIII no mencionada por Polya: Regla XVIII.- Para eso se requieren tan sólo cuatro operaciones: la adición, la sustracción, la multiplicación y la división; entre ellas, las dos últimas no deben con frecuencia hacerse aquí, bien sea para no complicar nada a la ligera, bien porque pueden ser más fácilmente efectuadas más adelante.	Regla 2. Examinar el problema de la manera más natural considerándolo como resuelto y presentando en un orden conveniente todas las relaciones que deben verificarse entre las incógnitas y los datos según la condición planteada. (Regla XVII)

Regla XVIIII.- Por medio de este método de razonar, hay que buscar tantas magnitudes expresadas de dos maneras diferentes, cuantos son los términos desconocidos que suponemos conocidos para recorrer directamente la dificultad: de esta manera, en efecto, se tendrán otras tantas comparaciones entre dos cosas iguales.	Regla 3. Separar una parte de la condición que permita expresar una misma cantidad de dos maneras diferentes y obtener así una ecuación entre las incógnitas. Descomponer eventualmente la condición en varias partes. Obtendréis así un sistema con tantas ecuaciones como incógnitas. (Regla XIX)
Regla XXI.- Si se tienen varias ecuaciones de esta clase, es preciso reducirlas a una sola, es decir, a aquella cuyos términos ocupen los menos grados posibles en la serie de magnitudes continuamente proporcionales, según la cual los mismos términos tienen que estar ordenados.	Regla 4. Transformar el sistema de ecuaciones en una única ecuación. (Regla XXI)

Las reglas del MC están concebidas para operar sobre el enunciado –digamos verbal– de un problema, e indicarnos el modo en el cual debe ser mirado el texto para que con el uso de la herramienta algebraica nos permita su traducción a ecuaciones. La lectura adoptada en el apartado **1.5** de las reglas del MC en íntima relación con la regla del A-S nos condujo a la producción de textos intermedios algebraicos con un centramiento en el análisis de la incógnita del problema del que fuimos progresivamente desprendiéndonos.

Este desprendimiento fue guiado por la Regla XVIIII cartesiana cuando dice "hay que buscar tantas magnitudes expresadas de dos maneras diferentes", y precisada en la regla 3 de Polya "Separar una parte de la condición que permita expresar una misma cantidad de dos maneras diferentes y obtener así una ecuación entre las incógnitas", que ya está expresada para la concepción de su división de un problema en partes: datos, incógnita y condición. La consecuencia de ello era la posibilidad de realizar otros análisis, de incógnitas auxiliares e incluso de datos, a condición de duplicar los análisis. Así, pasamos del problema a la multiplicidad de los textos intermedios que contienen los análisis y de ahí, por las síntesis, a las expresiones algebraicas y a las ecuaciones. Se señalaron entonces inconvenientes en la práctica para el seguimiento de esta guía: la no prescripción de las cantidades que se deben analizar doblemente y las cantidades desconocidas que se suponen conocidas. Volvemos aquí sobre estos inconvenientes.

De las cantidades desconocidas supuestamente conocidas, tanto Descartes como Polya sólo nos proporcionan el número de ellas y éste en relación con el número de dobles análisis, Regla XVIIII "cuantos son los términos desconocidos que suponemos conocidos para recorrer directamente la dificultad" y Polya, Regla 3, sobre el número y también sobre el modo de proceder, "Descomponer eventualmente la condición en varias partes. Obtendréis así un sistema con tantas ecuaciones como incógnitas".

¿Cuáles son las incógnitas a las que Polya se refiere aquí? Con toda seguridad las mencionadas en la Regla 1, “luego convertirlo en la determinación de cierto número de cantidades desconocidas”. Esto parece indicar que para poder comenzar se tiene necesariamente que elegir cuáles de entre las cantidades desconocidas se deben considerar supuestamente conocidas: las incógnitas, designadas en la práctica con literales, y utilizadas posteriormente en la Regla 2, “presentando en un orden conveniente todas las relaciones que deben verificarse entre las incógnitas y los datos según la condición planteada”. Estas presentaciones corresponden a las síntesis de los análisis que son posibles al “Examinar el problema de la manera más natural considerándolo como resuelto”, y, concretamente, a aquellos análisis que son fruto de “Separar una parte de la condición que permita expresar una misma cantidad de dos maneras diferentes”, parte que debería señalar a la cantidad que debe analizarse dos veces. Luego las cantidades que se deben analizar doblemente deben encontrarse al separar la condición en partes.

No obstante, tras estas aclaraciones, seguimos en la incertidumbre, respecto a cuáles de entre las cantidades desconocidas son más convenientes considerarlas como conocidas. Descartes solo hace mención a ellas en la Regla XVIIII, Polya, por su lado, parece darlas por supuestas en la Regla 1, y, en su Regla 2, ya hace uso de ellas en su distinción entre datos e incógnitas. Descartes en su Regla XVII que releemos: “La dificultad propuesta debe ser recorrida directamente, haciendo abstracción del hecho de que algunos de sus términos sean conocidos y otros desconocidos, y examinando por intuición la mutua dependencia de cada uno de ellos respecto de los demás, gracias a los razonamientos verdaderos”, en la que pone un énfasis especial en la necesidad de no distinguir lo conocido y lo desconocido al examinar sus relaciones mutuas, pero no encontramos explicación del salto dado de aquí a la Regla XVIIII donde ya se habla de lo desconocido supuesto conocido.

A lo que no se hace mención explícitamente es a la existencia, en el uso, de dos tipos diferentes de cantidades desconocidas: uno, las supuestamente conocidas que designamos con literales y tratamos en los análisis como datos y, dos, las cantidades que realmente analizamos dos veces y entre cuyas síntesis interponemos el signo igual. El asunto que complica discernir entre ellas, consiste en que no siempre el signo igual se interpone entre dos síntesis distintas de una misma cantidad. Así, en el caso más simple –el uso de una sola literal–, y para un mismo problema, tenemos la posibilidad de escribir ecuaciones de los tipos:

$$f(x) = g(x) \qquad h(x) = x \qquad q(x) = d$$

Como en las anteriores disquisiciones se está tratando de qué cantidades designar con literales, cuántas de ellas son precisas para resolver un problema, qué cantidades y de qué modo quedan identificadas en el signo igual, lo que haremos a continuación será servirnos del GT de un problema, reformularnos estas cuestiones y ver qué tipo de respuestas somos capaces de proporcionar.

1.12.2.- El GT y la Regla XVII

El GT de un problema lo tomaremos como el fruto en nuestra mente de considerar el enunciado del problema y la Regla XVII de Descartes, esto sí, leyendo utilizando los signos del grafo para señalar lo conocido, lo desconocido y las relaciones. Y para no forzarnos a proceder demasiado en abstracto, pero en el ánimo de no perder generalidad, dirijamos nuestra atención a un GT concreto de un problema concreto: el problema de la MECANÓGRAFA.

El problema:

Una mecanógrafa piensa que si escribe al día 2 páginas más de lo establecido normalmente, acabará el trabajo 3 días antes de lo previsto, mientras que, si escribe 4 páginas más al día, acabará 5 días antes de lo previsto. ¿Cuántas paginas tiene que escribir y en cuánto tiempo?

Y su GT con su diccionario de cantidades:

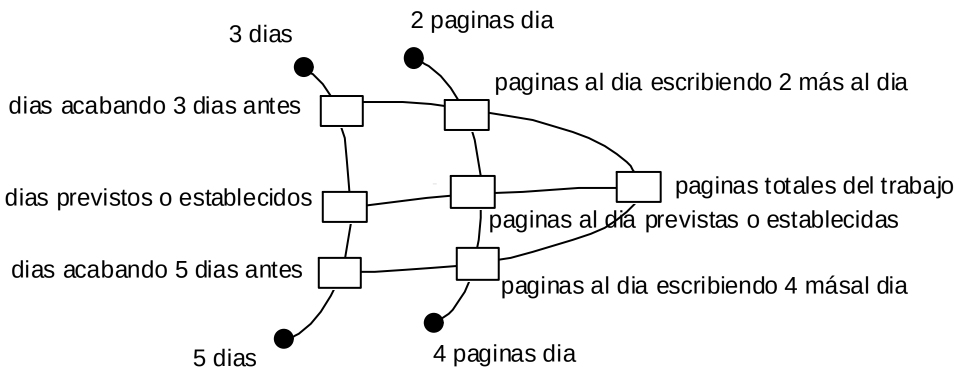


fig. 12.1

Comencemos nuestro discurso hablando sobre el grafo:

El GT es de orden 7.
Tiene 7 cantidades desconocidas.
Tiene 4 cantidades conocidas.
Disponemos de 7 nodos:

-cuatro de ellos son de orden 2: días acabando 3 días antes
días acabando 5 días antes
páginas al día escribiendo 2 más al día
páginas al día escribiendo 4 más al día

-tres de ellos son de orden 3: días previstos o establecidos
páginas al día previstas o establecidas.
páginas totales del trabajo.

Disponemos de 4 datos.

Las aristas del grafo son 7. De ellas, cuatro son de género 2 y tres de género 3. Las aristas de género 2 representan relaciones aditivas, las de género 3 multiplicativas.

El GT es un grafo cerrado y corresponde a un problema determinado. La destrucción del grafo es pues imposible.

Si queremos destruir el grafo, tenemos que proporcionarle las entradas suficientes para que éste se transforme en un grafo abierto y encadenado.

1.12.3.- La elección de las incógnitas y las cantidades que se igualan.

Proporcionar una entrada al grafo quiere decir usar una cantidad desconocida como supuestamente conocida, transformar un nodo claro en oscuro. La elección de alguno de los nodos no nos proporciona una entrada, mientras la de otros sí. En nuestro caso, cualquiera de los nodos que no sea el que corresponde a las paginas totales del trabajo, ver fig.12.2., nos proporciona una entrada.

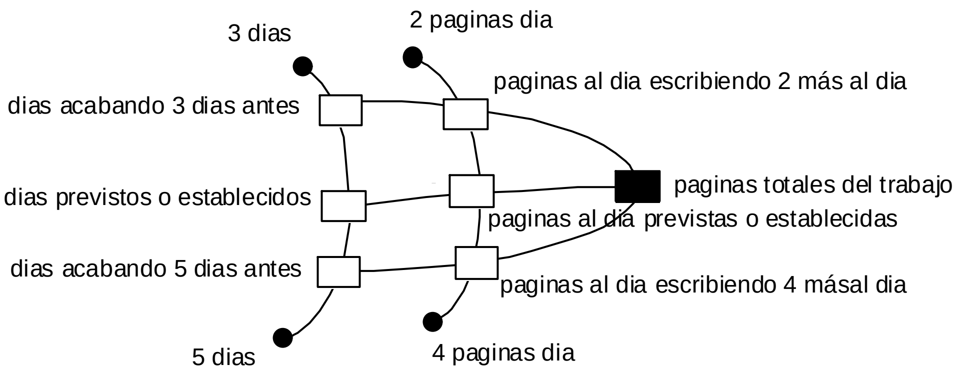


fig. 12.2

Podemos observar que en este nodo únicamente concurren aristas de género 3, luego no es útil para oscureciéndolo obtener entradas, ya que cualquier arista que concurra en él quedará transformada en una arista de género 2 y por lo tanto no será una entrada al grafo (ver fig. 12.2).

Mientras que oscurecer cualquiera de los otros nodos, que pertenecen a aristas de género 2, implica obtener aristas de género 1 y por tanto entradas al grafo. Así, por ejemplo, eligiendo páginas al día previstas o establecidas (ver fig.12.3)

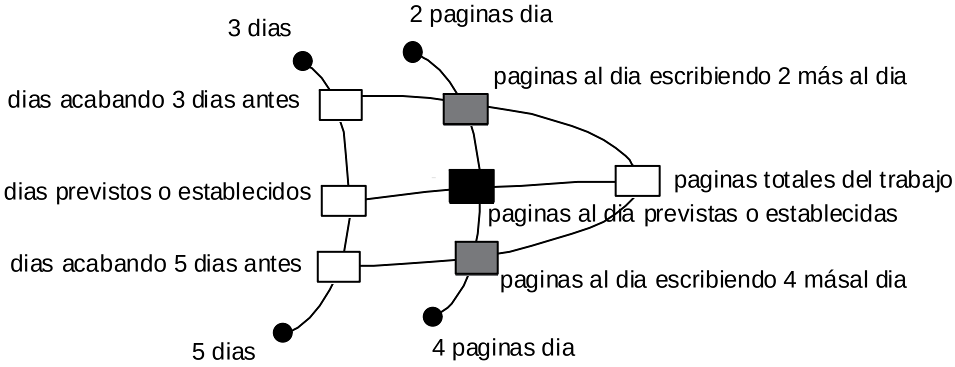


fig. 12.3

se oscurecen inmediatamente los nodos correspondientes a las aristas de género 2, fig. 12.3, posteriormente de género 1, con lo que los podemos eliminar, obteniendo así el grafo de la fig. 12.4,

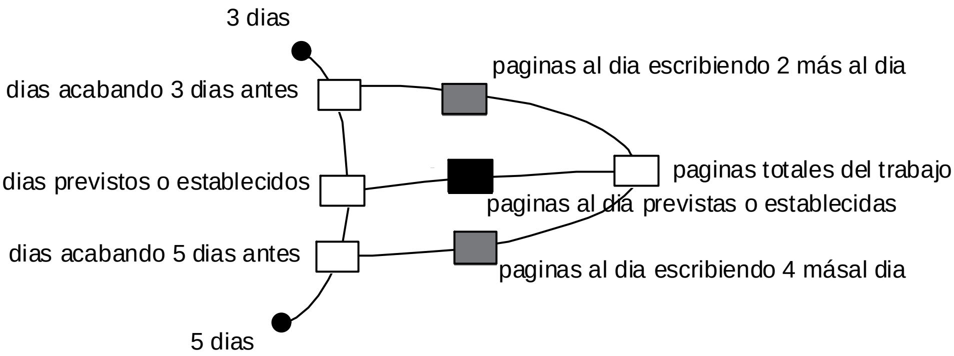


fig. 12.4

grafo que es de nuevo un grafo sin entradas, y en el que todos sus nodos pertenecen a aristas de género 2, luego cualquiera de ellos nos es útil para oscureciéndolo obtener una entrada al grafo.

La decisión de oscurecer uno u otro de los nodos no es irrelevante. Así, si la elección recae en el nodo correspondiente a días acabando 3 días antes, fig. 12.5, los nodos que se oscurecerían serian dos, los correspondientes a las aristas de género 2 que concurren en él, esto es, los correspondientes a días previstos o establecidos y a páginas totales del trabajo.

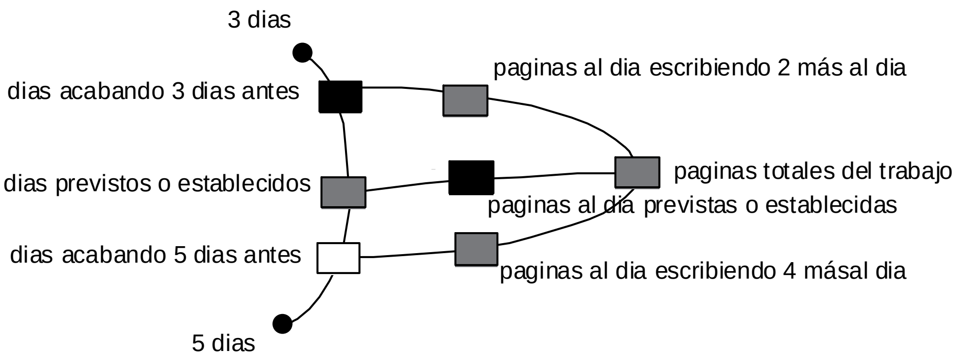


fig. 12.5

Y, si eliminamos las aristas utilizadas para oscurecer estos nodos, nos quedaría el grafo de la fig. 12.6.

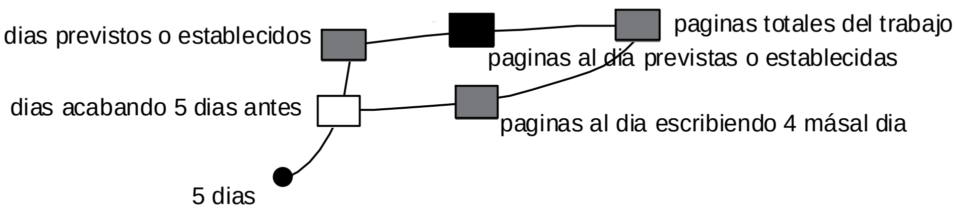


fig. 12.6

El grafo anterior se puede destruir inmediatamente oscureciendo el nodo restante, días acabando 5 días antes, fig. 12.7, entrando a él por cualquiera de las dos aristas que confluyen en él, y así encontramos en este nodo una colisión.

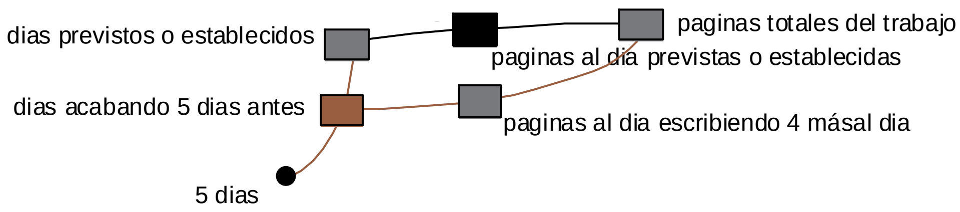


fig.12.7

Además, otras colisiones se producen en el re-oscurecimiento del antiguo nodo, días previstos o establecidos, a través de la arista que parte del antiguo nodo, páginas totales del trabajo, o viceversa, una colisión en el re-oscurecimiento del nodo, páginas totales del trabajo, a partir de la misma arista entrando a ella por días previstos o establecidos, fig. 12.8.

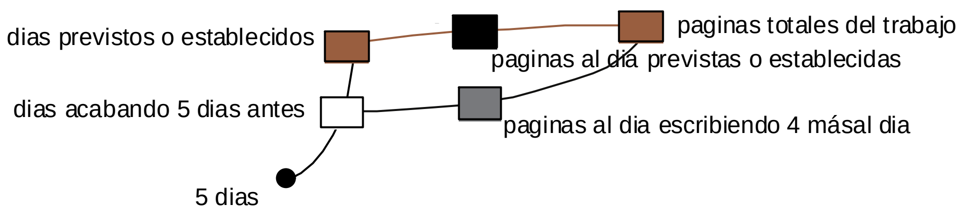


fig. 12.8

Cada una de estas colisiones mencionadas representa la posibilidad de nombrar la cantidad representada en el nodo de maneras diferentes. Esto es, los nodos en los que se producen colisiones señalan a las cantidades que se pueden expresar de formas distintas y, por tanto, a las cantidades que se igualan. En nuestro ejemplo, dadas las colisiones mencionadas podremos escribir igualdades para las cantidades: días acabando en cinco días, páginas totales del trabajo y días previstos o establecidos, igualdades todas ellas que utilizan, como cantidades supuestamente conocidas –incógnitas–, las cantidades páginas al día previstas o establecidas y días acabando 3 días antes.

Esto es, tres ecuaciones para dos incógnitas, más ecuaciones de las deseadas. Podemos descartar una de ellas. Si nuestra preferencia se declina hacia las expresiones algebraicas más simples, optaremos por aquellas ecuaciones en las que intervengan relaciones aditivas frente a aquellas en que intervengan relaciones multiplicativas, y, si esto no es posible, utilizando de estas últimas relaciones su lectura multiplicación en lugar de su lectura división. Aceptado esto, nos quedaríamos con las cantidades días acabando 5 días antes y páginas totales del trabajo, como cantidades para igualar.

Otro de los nodos que podríamos haber elegido, en segundo lugar, para oscurecer como incógnita, sería el correspondiente a la cantidad días acabando 5 días antes. En este caso, dada la simetría del grafo, la discusión seria análoga.

El tercero de los casos por examinar, como posible nodo que oscurecer como segunda entrada al grafo, sería el nodo correspondiente a días establecidos o previstos, fig. 12.9.

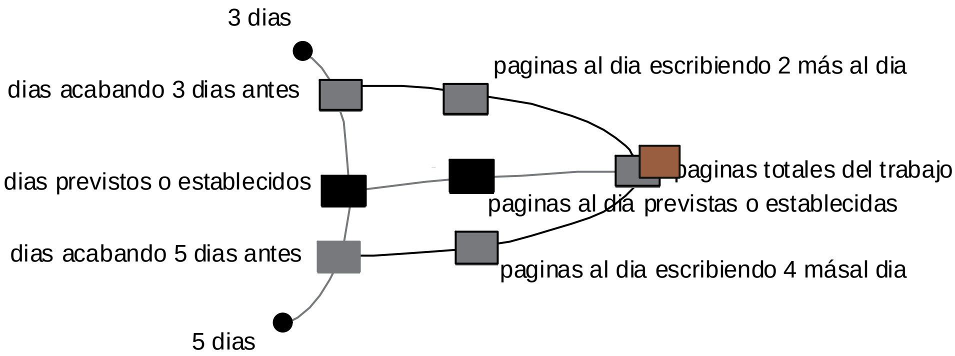


fig. 12.9

El oscurecimiento de este nodo, al ser un nodo de orden tres, en el que concurren el resto de las aristas con nodos por oscurecer, conllevaría el oscurecimiento inmediato de todos los nodos del grafo en un solo paso (ver fig. 12.9), y, en un examen posterior, la posibilidad de colisiones en el oscurecimiento o re-oscurecimiento de los distintos nodos dando ya por sobreentendido, por observación, que en cada nodo se producen tantas colisiones como sea el orden del nodo. Prestando atención al nodo paginas totales del trabajo, en particular, observaremos en éste una triple colisión y de ahí la posibilidad de expresar esta cantidad de tres modos diferentes o de escribir dos ecuaciones diferentes, por lo que quedaría esta cantidad como única cantidad que esconder debajo del signo igual o como única cantidad igualada.

Y, en cuarto lugar y último, podríamos haber escogido como nodo que oscurecer en segundo lugar, y designarlo como incógnita, el nodo paginas totales del trabajo, fig. 12.10,

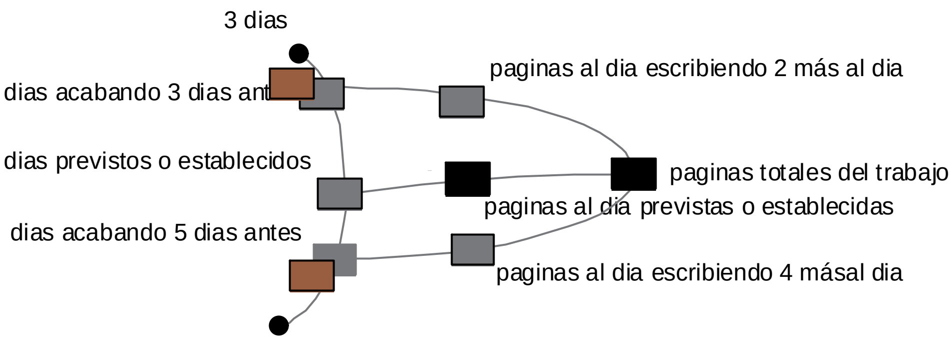


fig. 12.10

lo que hubiera llevado al oscurecimiento inmediato del resto de los nodos y a encontrar tres colisiones en el nodo de orden tres, días previstos o establecidos, y proceder como anteriormente, o bien a obtener dos colisiones al proceder a re-oscurecer cada uno de los nodos señalados doblemente en la fig. 12.10, con lo que hubiéramos escrito dos igualdades para las cantidades días acabando 3 días antes y días acabando 5 días antes.

En resumen, la determinación del mínimo número de incógnitas que designar con una literal, depende de la posibilidad de destruir el grafo. Hemos visto en el caso estudiado la imposibilidad de utilizar una y la suficiencia de dos. Toda vez que se tenga esta información, la elección concreta de éstas entre las cantidades desconocidas, de entre las posibles, puede atender a criterios de eficacia en la destrucción del grafo, conjugada tal eficacia con la simplicidad de las expresiones algebraicas de las otras cantidades desconocidas. Es en este juego donde un jugador más son las cantidades que se igualan y pueden intervenir decidiendo entre las ecuaciones posibles según su complejidad sintáctica.

1.12.4.- La elección de más incógnitas de las necesarias.

En primer lugar, decir que en este apartado se ha roto con la rigidez del uso del término *incógnita* delimitado en **1.2**. Y se ha utilizado el término *incógnita* para referirse a las cantidades desconocidas supuestamente conocidas, en cuanto nos servimos de una literal para designarlas. Ello, para seguir con las recomendaciones al uso para poner problemas en ecuaciones, recomendaciones que hablan: en primer lugar, elegir las incógnitas, y en la praxis se comienza por escribir unas literales, a las que se denomina incógnitas. También, se ha hecho para incorporar el sentido dado a este término en las reglas de Polya. Así, en este punto, cuando hablamos de más incógnitas de las necesarias nos referimos a estas incógnitas, no a que se haya procedido en la construcción del GT a incorporar más cantidades desconocidas de las necesarias para resolver el problema.

En el GT de un problema, escribir ecuaciones es una tarea algorítmica, el algoritmo fue esbozado en el apartado **1.10** cuando produjimos el conjunto de las ecuaciones de un problema. En el punto anterior se ha tratado de la elección de las incógnitas mínimas y de las cantidades que es más conveniente igualar.

Sin embargo, en la práctica, la decisión de las incógnitas que se utilizan más habitualmente viene guiada, más bien, por las incógnitas del problema o por la habilidad para resolver ecuaciones o sistemas de ecuaciones de una u otra clase que por las consideraciones realizadas anteriormente. Y el número necesario queda a cuenta del trabajo progresivo que permite la conclusión de la traducción en ecuaciones. Así, en el problema que estamos tratando, nos habríamos inclinado, sin más, por páginas diarias previstas y días previstos, que después resultan ser una elección conveniente, a cuenta de elegir páginas totales del trabajo como la cantidad que se iguala en las dos ecuaciones, esto último, algo que no es usual y puede conllevar dificultades.

No obstante esto, en un GT, podemos utilizar como máximo tantas incógnitas como vértices claros posea el grafo, ello a cuenta de escribir otras tantas ecuaciones. Sin embargo, como en un problema determinado el número de colisiones será suficiente, las ecuaciones se limitan a transcribir algebraicamente las relaciones aditivas o multiplicativas de las aristas del grafo. Ver **1.10** para el caso del que hablamos. Esto es, la destrucción del grafo no requiere de rutas complicadas de varios pasos y las expresiones algebraicas son las más simples posibles al constar de un solo paso. Para el resolutor del problema el paso a las ecuaciones es simple, pero la simplicidad de la traducción es transportada como complejidad al sistema de ecuaciones que hay que resolver. Véase en el caso de la MECANÓGRAFA, fig. 12.11, en que el oscurecimiento de todos los nodos y la destrucción del grafo conduce rápidamente al sistema de ecuaciones (SEM),

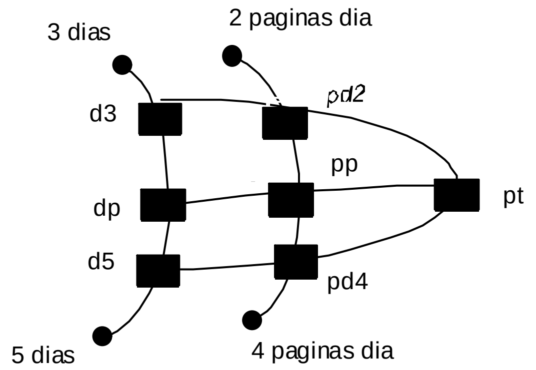


fig.12.11

$$dp = d3 + 3 \qquad dp = d5 + 5$$

(SEM) $$pp = pp2 - 2 \qquad pp = pp5 - 5$$

$$pt = d3 \cdot pd2 \qquad pt = d5 \cdot pp4 \qquad pt = dp \cdot pp$$

sistema de ecuaciones que resolverlo sabemos, pero es una tarea, al menos, tediosa. Así el asunto, la mejor sugerencia para la práctica sería el intento de guardar un equilibrio entre las tareas sintácticas de transformación y manipulación de las expresiones algebraicas en la resolución de ecuaciones, y las tareas de este estilo que pueden realizarse sobre el grafo, dado que cualquier recorrido sobre éste, construyendo expresiones algebraicas, lleva aparejado ineludiblemente un contenido semántico al apuntar siempre con la expresión a una cantidad de referencia. Pero sin permitir quizá que, aunque conozcamos de la propia expresión algebraica a qué cantidad se refiere, la complejidad de la expresión algebraica nos haga perder el sentido de la referencia.

1.13.-Las descripciones de la estructura de problemas de la FPAA y la estructura descrita por medio de un GT.

La correspondencia entre problema ternario y GT que puede establecerse a través de cantidades conocidas y desconocidas con vértices claros y oscuros, aristas con relaciones y topología del grafo con el entretejido de relaciones que anudan las cantidades, permite decir que un GT es un descriptor de la estructura del problema, al señalar a los elementos esenciales del problema y sus conexiones y representarlas de una cierta manera. Esta afirmación hecha, nos quedaría por reflexionar sobre el tipo de estructura del problema que el grafo describe.

Usar los lenguajes de los diagramas o las ecuaciones para describir la estructura del problema es recurrir a lenguajes que se utilizan en la resolución del problema. Por ello, los utilizamos en un intento de caracterizar o buscar marcas en la brumosa frontera que puede existir entre los problemas aritméticos y los problemas algebraicos (Puig y Cerdán, 1990a, 1990b).

Sentado esto, las estructuras descritas en esos lenguajes, el lenguaje de los diagramas y el lenguaje del álgebra, son estructuras de la búsqueda de una solución al problema y no otra cosa. Ahora bien, dado que la resolución de un problema es un asunto que atañe al resolutor, otra manera de hablar de la estructura de un problema es olvidando al resolutor, y, también, a los posibles usos personales que puede hacer el resolutor de esos lenguajes o su peculiar manera de resolver el problema. No obstante lo apuntado, se necesita una solución estereotipo en ese lenguaje que pueda ser considerada, y tomada a partir de ese momento, como la estructura del problema. Lo que se hace entonces es considerar que un experto utiliza ese lenguaje para su resolución del problema, utilizando además un método de resolución de forma ortodoxa. Y, ahora, utilizando el Método de Análisis-Síntesis o el Método Cartesiano como métodos de resolución, decimos que la solución producida escrita en lenguaje de diagramas representa la estructura de una solución del problema y en el lenguaje de las ecuaciones la estructura de una traducción del problema, aunque las ecuaciones sean, de hecho, la traducción misma..

Las descripciones de la estructura de un problema que atienden a resoluciones del mismo son descripciones ricas, puesto que ponen de manifiesto la manera en que los elementos esenciales del problema, cantidades y relaciones que constan en el texto del problema, se manejan en el curso de la resolución. Los lenguajes que usan esos elementos del problema producen textos intermedios escritos en los lenguajes con los que un resolutor obtiene la solución del problema. Esta riqueza y el texto intermedio final producido permiten hablar de la complejidad del problema, como se hizo en Puig y Cerdán (1989) en el caso de los diagramas, u organizar la enseñanza de manera que atienda primero a las ecuaciones de una incógnita, después las de dos incógnitas, etc., esto último, en el caso de las ecuaciones. En este último caso, la complejidad del problema parece estar más asociada a la resolución de las ecuaciones producidas que a la complejidad de la producción misma de estas ecuaciones a partir del texto del problema.

En resolución de problemas, a este tipo de descripciones las denominamos descripciones de nivel II, ya que, según se dijo, en el estudio de la Resolución de Problemas en situaciones educativas se pueden establecer tres niveles que indiquen la sucesiva entrada en el escenario de los personajes que intervienen en la representación, nivel I: problema, nivel II: problema-alumno, nivel III: problema-alumno-profesor. Descripciones de nivel I son por ejemplo las descripciones de las estructura lógica, sintáctica y semántica de los problemas aditivos de una etapa (Nesher 1982; Puig y Cerdán, 1989), o multiplicativos (Puig y Cerdán, 1989; Castro, 1994). Aparte de las mencionadas, otra descripción de estructura de nivel II es la del espacio de estados de un problema (Goldin, 1979), esta descripción concibe la resolución de un problema como la determinación de la ruta que conduce del estado inicial al estado final, estados que junto con las acciones permitidas para los cambios de estado se encuentran referidos en el texto del problema.

Afirmamos aquí que la estructura de un problema de la FPPA descrita por un GT es una descripción de nivel I, que corresponde a una lectura del texto del problema, la cual tiene desde el principio vocación de ser útil en la búsqueda de una solución del mismo, pero que no es en modo alguno, como lectura que es, una solución del problema. En esta lectura se dejan de lado aspectos contextuales e incluso semánticos o se traen a colación únicamente para prestar atención a los elementos esenciales: cantidades conocidas, desconocidas y relaciones. Tan es así que, desde el primer momento incluso, se puede olvidar si tal cantidad es extensiva o intensiva o si tal relación es aditiva o multiplicativa, importantes para la resolución del problema, pero clasificaciones ante las que el GT es, si se quiere, ciego. La lectura del texto del problema que produce el GT es pues una lectura analítica, que comienza en primer lugar con las cantidades y relaciones, para proseguir con el análisis del sistema de relaciones y detenerse cuando este sistema alcanza coherencia, ver **1.16**.

La lectura del texto del problema que permite producir el grafo no es una lectura que descompone el texto del problema en trozos como las que a menudo encontramos en los libros de texto, probablemente siguiendo el ejemplo de Newton (Newton, 1972), en los que aparecen dos columnas: la columna de la izquierda encabezada con *Quaestio latine enunciate*, la columna de la derecha con *Eadem algebraicè*. La descomposición del texto del problema que se presenta en la columna *Quaestio latine enunciate* está preparada para mostrar la manera en que "el problema será transliterado de la forma verbal a la forma algebraica", forma esta última en la que según Newton "el significado de la cuestión será expresado, si se puede hablar así, por medio de un discurso analítico" (Newton, 1972, pp. 130-131).

La lectura analítica del texto del problema atiende a identificar los elementos del problema que son signos del lenguaje del grafo, lenguaje que obliga a utilizar estos signos con las reglas sintácticas permisibles en él. La actividad traductora y el uso simultáneo de dos lenguajes obliga a miradas alternativas a uno y otro texto, a relecturas de los mismos que terminan como toda actividad traductora, en el momento en que se encuentra sentido al texto traducido, esto es, al GT.

Así pues, la estructura de un problema de la FPAA descrita por un grafo trinomial es una estructura de nivel I, que no supone para el traductor, ahora aquí resolutor, desplegar actividad mental de tipo diferente a la que desplegaría en la fase de comprensión de un problema. Entendida esta comprensión, como una comprensión dirigida por la traducción que se desea obtener del texto del problema, el GT.

Por otro lado, el GT describe una estructura del problema que es de índole más general que los textos intermedios o las ecuaciones. Así, del GT pueden derivarse distintos análisis con sus textos intermedios correspondientes y también distintas ecuaciones o sistemas de ecuaciones para un mismo problema. La razón de ello consiste, tanto en las diversas posibilidades a mano, tanto para destruir el grafo como para elegir las literales con las que denominar a las cantidades desconocidas que proporcionen entradas al grafo. En este último caso para una elección concreta de literales y un recorrido de destrucción que produzca colisiones en nodos concretos se corresponde con una estructura del problema descrita por medio de ecuaciones. Dicho de otro modo, elegidas las incógnitas –literales- y señaladas éstas como vértices oscuros en el GT, la estructura de este grafo se corresponde con un modelo de ecuaciones equivalentes para el problema.

1.14.- La complejidad de los problemas de la FPAA.

1.14 .1.- Consideraciones iniciales

Aunque la complejidad de los problemas de la FPAA es el titulo del apartado, quiero hacer antes algunas consideraciones sobre diversidad, similaridad y dificultad de los problemas.

No cabe duda de que los problemas que constituyen la FPAA muestran una gran diversidad, diversidad que se puede poner de manifiesto contemplándolos desde cualquier perspectiva: sea ésta el contexto en el que están enunciados, sea la regla especifica utilizada para resolverlos, sea la táctica particular para abordar tal o cual problema, sea la estrategia concreta de enseñanza, o simplemente la mera lectura de la lista de problemas que Newton en su *Aritmética Universal* (Newton, 1802) o Euler en su *Elementos de Álgebra* (Euler, 1984) proponen como práctica para aprender a poner un problema en ecuaciones. Esta diversidad ha llevado a que podamos agrupar a los problemas de la FPAA en subfamilias de problemas cuyos nombres, herencias, edades, móviles, mezclas, trabajo, ábaco, etc., nos evocan y predisponen quizá hacia un modo de actuación al resolverlos.

Cada una de estas subfamilias contiene problemas que podemos decir que son similares en alguna de las dimensiones en las que podemos entender la similitud de los problemas o que utilizan los alumnos para juzgar tal similitud. Se lean éstas últimas en cuatro niveles: cómo se resuelve el problema, el contexto, comparación con un problema genérico del mismo tipo, la cuestión del problema, cosa que hace Chartoff (1977), o según cuatro características fundamentales: contexto, estructura, forma de la cuestión, la cantidad que se mide, cosa que hace Silver (1981). A su vez podemos decir también que hay problemas similares en alguna dimensión en cada una de las subfamilias.

La similitud o la semejanza, o la analogía de los problemas interesa por ejemplo en los estudios de transferencia (Reed, 1999), en la construcción de test equivalentes, o en la resolución de problemas al estilo heurístico, donde el uso de problemas transformados del problema original y su relación con éste suelen determinar lo que puede acarrearse de la resolución de unos para la resolución del otro.

Difícil según el diccionario de Maria Moliner "se aplica a lo que requiere inteligencia, habilidad, o mucho trabajo, para hacerlo o entenderlo". Es así que, dejada de lado la inteligencia y dando por supuesta la laboriosidad de los resolutores, podemos decir que un problema es difícil para un resolutor porque éste carece o no posee en grado suficiente las habilidades que se requieren para resolver o entender el problema. Este modo de argumentar no es más que una opción para hablar de dificultades en términos de habilidades, haciendo transferencia de las habilidades que requiere el problema a las que debe tener el resolutor. Krutestkii (1976), en su clásico estudio, menciona las habilidades que diferencian a los buenos de los malos resolutores de problemas:

-habilidad para distinguir la información relevante de los detalles y otros datos irrelevantes,
-habilidad para percibir con rapidez y precisión la estructura formal del problema,
-habilidad para generalizar a lo largo de un amplio rango de problemas similares,
-habilidad para recordar la estructura formal del problema durante un largo periodo de tiempo,

o dicho de otro modo y de modo general: las dificultades que pueden tenerse para resolver problemas si no se dispone de esas habilidades.

En general, el recurso al término estructura del problema es una constante tanto para hablar de cualquier cuestión relacionada con la resolución de problemas, como vemos que aquí ocurre con similitud entre o habilidades para. No se suele entrar en el detalle de lo que por ello se entienda, aunque se califique a ésta de profunda, superficial, formal, etc., y, en particular, cuando se habla de una clase concreta de problemas, se aplica a la clase las denominaciones genéricas, sin precisión de ninguna clase. Dado que aquí hemos dedicado una cantidad considerable de líneas a la precisión de tal noción, entramos en la tarea de precisar la idea de similitud entre los problemas y describir su complejidad, con la intención de prever o hacer hipótesis sobre las dificultades que éstos pueden tener.

1.14.2.- Problemas isomorfos, problemas equivalentes.

Diremos que un problema P1 es isomorfo a un problema P2 si sus GT son equivalentes.

Esta definición delimita su ámbito, por su propio contenido, a los problemas ternarios.

Tomando como ejemplo los problemas, ALCANZAR, AVIONETA, ENCONTRAR, RUBLOS, HENO, CHOCOLATES Y CARAMELOS, LANA Y ALGODÓN, LEONARDO,

ALCANZAR.

Un automóvil parte de un punto A con velocidad uniforme de 40 km/h hacia otro punto B. Dos horas después sale de A hacia B otro automóvil con velocidad uniforme de 60 km/h. Dígase a qué distancia de A se encuentran.

AVIONETA

Una avioneta vuela a 240 km/h a favor del viento. y a 200 km/h en contra del viento. Puede llevar carburante para 4 horas. La avioneta sale del aeropuerto en la dirección del viento. ¿Hasta qué distancia podrá llegar, si ha de regresar al aeropuerto sin agotar el carburante?

ENCONTRAR

Un tren parte de Madrid en dirección a Valencia con una velocidad de 150 km/h, y otro de Valencia en dirección a Madrid con una velocidad de 200 km/h. La distancia entre Madrid y Valencia es de 430 km. Dígase a qué distancia de Madrid se cruzan ambos trenes.

RUBLOS

Una escuela rusa compra libros para la biblioteca. Si los paga con billetes de 3 rublos, la escuela tiene que dar 8 billetes más que si los paga con billetes de 5 rublos. ¿Cuánto cuestan los libros?

HENO.

Unos granjeros almacenaron heno para 40 días. Sin embargo el heno era de mejor calidad de la que pensaban y ahorraron 100 kg por día. Así tuvieron heno para 60 días. ¿Cuánto heno almacenaron?

CHOCOLATES Y CARAMELOS.

Una profesora tiene 120 chocolates y 192 caramelos para repartir –a partes iguales cada tipo de dulce– entre los alumnos de su grupo. Si cada alumno recibe tres caramelos más que chocolates, ¿cuántos son los alumnos?

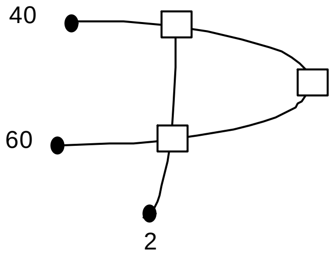
LANA Y ALGODÓN.

El metro de lana cuesta 150 pts. menos que el metro de algodón. Cuatro m de lana y 5 m de algodón cuestan 3000 pts. ¿Cuánto cuesta un metro de lana y cuánto un metro de algodón?

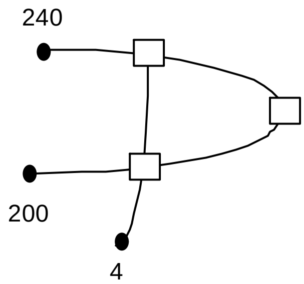
HOMBRES Y DINERO (LEONARDO)

Divido 60 entre un cierto número de hombres y cada uno recibe la misma cantidad. Después añado 2 hombres y ahora, dividiendo 60 entre ellos, cada uno recibe dos menos que antes. Se requiere cuántos hombres hay y cuánto recibe cada uno.

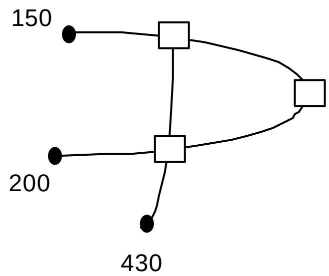
y sus correspondientes GT,



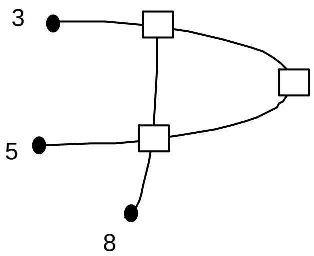
ALCANZAR



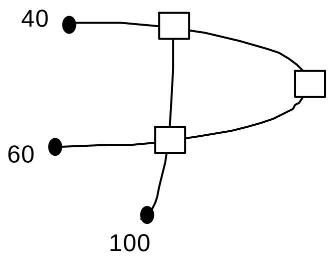
AVIONETA



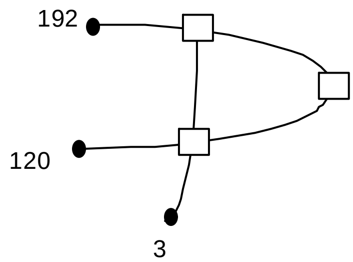
ENCONTRAR



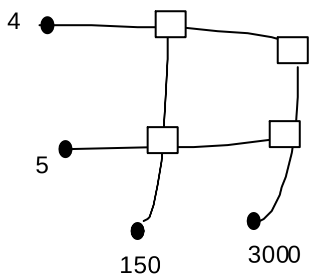
RUBLOS



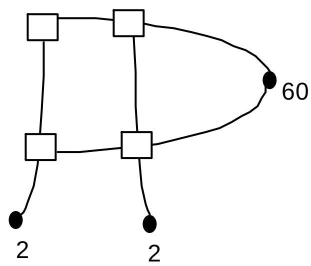
HENO



CHOCOLATES Y CARAMELOS



LANA Y ALGODON



HOMBRES Y DINERO (LEONARDO)

son isomorfos los seis primeros, mientras no lo son con los dos últimos, ni estos mismos entre sí.

Sin embargo, sabemos que los problemas que hemos dicho que son isomorfos, algunos ya tratados aquí, son diferentes en algún sentido y sabemos además que algunos son de mayor dificultad que otros, ver cap. **4**. Ahora hablo de dificultad para los estudiantes, cuando utilizo el término dificultad en sentido comparativo para expresar que hay un mayor porcentaje de estudiantes que resuelven el problema CHOCOLATES Y CARAMELOS que los problemas del HENO, RUBLOS, o ALCANZAR.

La isomorfía apuntada, en los problemas ejemplo, se debe a la coincidencia de lo que distingue el GT: número de cantidades conocidas y desconocidas, relaciones y entramado de relaciones.

Por lo que toca a las cantidades, el GT distingue cantidades conocidas de cantidades desconocidas, pero no distingue otro tipo de cantidades. En particular, no distingue entre cantidades extensivas e intensivas. Y en lo que toca a las relaciones el GT no distingue entre aditivas y multiplicativas. Una posible opción para curar parte de la ceguera del grafo consiste en orientar alguna de sus aristas. Así:

Una arista del grafo diremos que está orientada cuando sus vértices están numerados 1, 2, 3 de modo que el número 2 corresponde al vértice central y los números 1 y 3 a sus extremos.

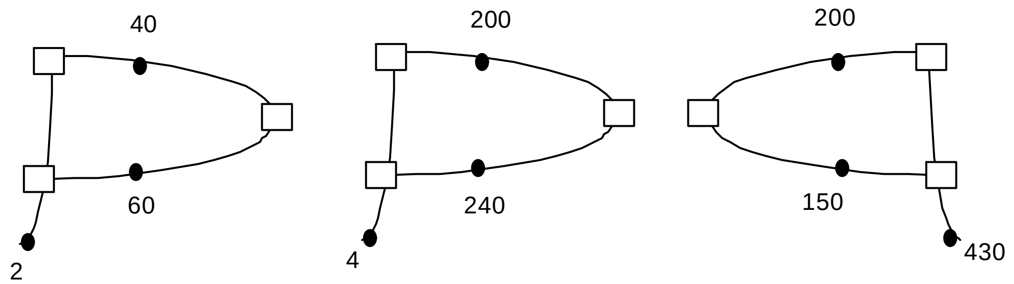
Las aristas del grafo que representan relaciones multiplicativas cuya estructura de cantidades sea E x I = E, E x escalar = E se orientan de izquierda a derecha atribuyendo el número 2 al vértice que represente la cantidad intensiva o el escalar y el número 3 al vértice que representa la cantidad extensiva producto.

Con la orientación de las aristas logramos pues que el grafo distinga relaciones aditivas de multiplicativas, al obligarnos a representar en dirección horizontal, dentro de lo posible, para leer de izquierda a derecha. Con ello, a su vez, tomamos nota de la estructura de cantidades de las relaciones multiplicativas.

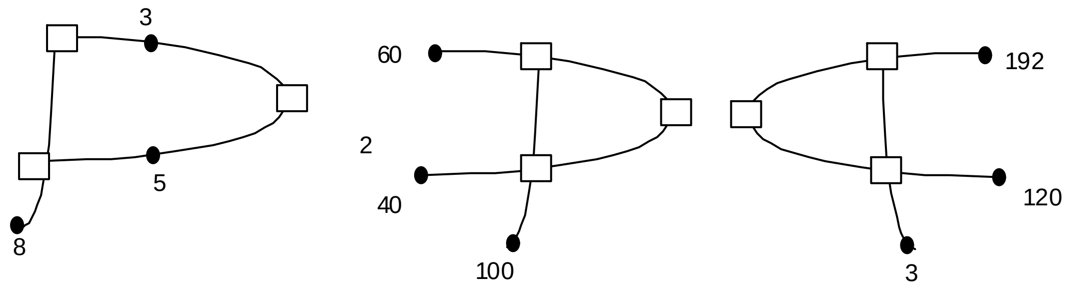
Un grafo orientado es aquel que tiene alguna de sus aristas orientadas. La equivalencia de grafos definida en **1.7.1** se puede extender a los grafos orientados sin dificultad. Con ello diremos que:

Un problema P_1 es fuertemente isomorfo a un problema P_2 si sus grafos orientados son equivalentes.

Ahora, los GT orientados de los problemas anteriores, que eran isomorfos, serían:



ALCANZAR AVIONETA ENCONTRAR



RUBLOS HENO CHOCOLATES Y CARAMELOS

Ocurre ahora que los problemas HENO, RUBLOS, CHOCOLATES Y CARAMELOS no son fuertemente isomorfos, mientras el problema ALCANZAR es fuertemente isomorfo al problema AVIONETA. Los problemas ENCONTRAR y AVIONETA, por su lado, tampoco son fuertemente isomorfos, aun a pesar de su simetría de aspecto. Al igual ocurre con los problemas HENO y CHOCOLATES Y CARAMELOS. Por otro lado, los problemas RUBLOS y ALCANZAR son también fuertemente isomorfos. Y no nos quedamos perplejos ante el fuerte isomorfismo de los problemas ENCONTRAR y AVIONETA, ya que el grafo es ciego para distinguir las operaciones de adición y substracción.

Y así, procediendo análogamente, con la sucesiva superposición de más estructuras al grafo podemos precisar hasta donde nos convenga la vaga noción de problemas equivalentes, que puede presentarse, por ejemplo en Wickelgren (1974), como “dos problemas a y b son equivalentes si tienen los mismos elementos” (pág 152).

Si seguimos en la dirección de lo operatorio, toda vez que hemos distinguido entre multiplicación y división, aunque lo hayamos hecho vía la estructura de cantidades, podemos distinguir entre adición y sustracción, presentando ahora las aristas que representan relaciones aditivas en dirección vertical y orientadas de arriba a abajo, donde quede en la parte inferior el vértice que represente a la cantidad suma de las otras dos representadas en los otros vértices. Con esta nueva precisión, todas las aristas del grafo estarán orientadas. Y podemos volver a las definiciones anteriores, para decir ahora:

Un GT se dice multiplicativamente orientado si lo están las aristas de éste que representan relaciones multiplicativas.

Un GT se dice aditivamente orientado si lo están las aristas de éste que representan relaciones aditivas.

Un GT se dice orientado si todas sus aristas están orientadas.

Un problema P1 se dice m-isomorfo a un problema P2 si sus GT multiplicativamente orientados son equivalentes.

Un problema P1 se dice a-isomorfo a un problema P2 si sus GT aditivamente orientados son equivalentes.

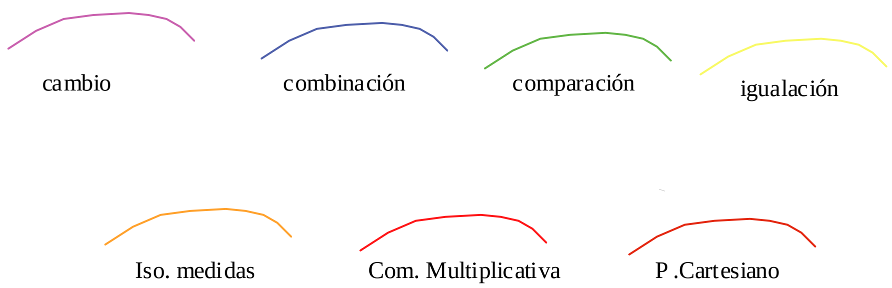
Un problema P1 se dice operativamente-isomorfo –o-isomorfo– a un problema P2 si sus GT orientados multiplicativa y aditivamente son equivalentes.

Si elegimos para matizar la isomorfía la dirección de lo semántico, podemos proceder así:

Dotémonos con una paleta de colores P = (C_1, C_2, C_3, …, C_n).

Diremos que un grafo está coloreado con la paleta P si cada una de sus aristas tiene atribuido uno de los colores C_i de la paleta P.

Para colorear un GT correspondiente a un problema concreto de la FPAA, puede procederse de la siguiente manera. Dispóngase de una paleta con los colores del arco iris, esto es, de siete colores. Resérvense cuatro de los colores fríos para las relaciones aditivas y tres de los colores calientes para las relaciones multiplicativas. Atribúyase uno de los colores fríos a cada una de las categorías semánticas aditivas: Cambio, Combinación, Comparación, e Igualación y uno de los colores calientes a las relaciones multiplicativas: Isomorfismo de medidas, Comparación multiplicativa y Producto cartesiano. Coloréese la arista del grafo con el color de la categoría semántica de la relación aditiva o multiplicativa que existe entre las tres cantidades dispuestas sobre ella.



Y ahora extendiendo la noción de grafos equivalentes a grafos coloreados definimos:

Un problema P_1 es semánticamente isomorfo –s-isomorfo– a un problema P_2 si sus grafos coloreados son equivalentes.

Y dejamos para problemas equivalentes:

Un problema P_1 es **equivalente** a un problema P_2 si sus grafos orientados y coloreados son equivalentes.

Esto es, consideramos problemas equivalentes a los problemas que son o-isomorfos y s-isomorfos.

De donde resulta que dos problemas equivalentes difieren casi exclusivamente en lo que deviene del contexto en que están enunciados. Esto es, en los significados de las cantidades y las operaciones entre éstas que provienen de dicho contexto.

1.14.3.- Una manera de definir la complejidad de los problemas.

La mera observación de un GT nos permite forjarnos una idea de la complejidad del problema que representa y, por tanto, comparar de visu la complejidad de dos problemas dados. No obstante, compararemos la complejidad de los problemas en distintos aspectos. Y haremos todo ello sin prestar atención al carácter aritmético o algebraico del problema. Por lo cual, si se opina que la “complejidad" de un problema algebraico es mayor que la de un problema aritmético o que éste es más difícil porque requiere la habilidad de usar la herramienta algebraica, la comparación de problemas en cuanto a su complejidad puede hacerse por separado para problemas aritméticos y problemas algebraicos.

Complejidad Relacional. Diremos que un problema P_1 tiene más complejidad de tipo R que otro problema P_2 si su grafo es de mayor orden.

Complejidad en cuanto a lo desconocido. Diremos que un problema P_1 tiene más complejidad de tipo x que otro problema P_2 si su grafo posee más vértices claros.

Complejidad sobre las aristas, que deviene de la intervención de lo desconocido en las relaciones. Diremos que un problema P_1 tiene más complejidad de tipo Rd que otro problema P_2 si alguna de las aristas del GT de P_1 es de mayor género que las aristas del GT de P_2.

Complejidad del entretejido de relaciones, sobre las nodos. Diremos que un problema P_1 tiene más complejidad de tipo Ed que otro problema P_2 si alguno de las nodos del GT de P_1 es de mayor orden que las nodos del GT de P_2.

Estas cuatro complejidades intentan captar, algunas localmente, la estructura del grafo en los sentidos indicados y pueden por tanto refinarse: la complejidad de tipo R, distinguiendo entre R aditiva y multiplicativa; la complejidad de lo desconocido, atendiendo a su distribución en las aristas, y la complejidad del entretejido, atendiendo al número de aristas de cada genero, o al número de nodos de un orden determinado. De aquí que podamos elegir alguna de estas características para describir la complejidad del problema. Personalmente me parece suficiente decirlo siguiente:

La complejidad de un problema es una 7-tupla de números:

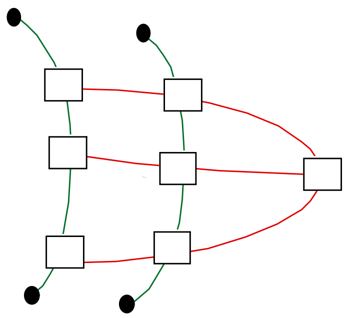
(R, Rm, x, d, a2, a3, n)

definidos sobre el GT orientado de un problema, donde:

R = el número de aristas del GT
Rm = el número de aristas multiplicativas orientadas
x = el número de vértices claros

d = número de datos
a2 = el número de aristas de genero 2
a3 = el número de aristas de genero 3
n = el orden del nodo de mayor orden.

Por ejemplo la complejidad del problema MECANÓGRAFA, del que la figura siguiente muestra su grafo orientado y coloreado, es (7, 3, 7, 4, 3, 3)



Otras informaciones adicionales sobre la complejidad del problema se pueden obtener de las relaciones entre los números de la 7-tupla que describe la complejidad.

1.15.- El espacio de un problema.

En resolución de problemas, dos términos parecen inextricablemente unidos a la palabra “problema”, y parece menester que sean tratados en cualquier estudio sobre el tema. El primer término es estructura, estructuras en nuestro caso, al que hemos dedicado gran parte de los apartados anteriores. El segundo término es espacio, al que dedicaremos este apartado.

El término espacio, como espacio de estados del problema se utiliza habitualmente para aquellos problemas que pueden describirse de modo muy preciso como un tránsito entre un estado inicial y un estado final (Goldin, 1979). Estado inicial y final, que están expresa y explícitamente mencionados en el enunciado del problema. Se entiende por solución del problema la traza de una ruta que lleva del estado inicial al estado final. Y por solución general del problema el conjunto de estas rutas. La descripción de estas rutas se realiza por medio de estados, llamados estados intermedios, estados que permiten ser descritos de modo muy semejante al estado inicial y final, y que constituyen modificaciones de éstos. La modificación que supone el cambio entre un estado y otro se atribuye a la actuación de un operador. En el enunciado del problema se explicita, pues, también, cuáles de entre los operadores imaginables son los operadores permitidos y cuáles de los estados que sería posible alcanzar por el uso de un operador son estados prohibidos, esto es, estados no permitidos como componentes de la traza de una ruta que sea solución del problema. Mirado el asunto de esta manera, es posible, por aplicación sucesiva hasta el agotamiento del conjunto de operadores, obtener todos los estados intermedios que pueden obtenerse en un primer paso a partir del estado inicial, para reiterando el proceso sobre los estados intermedios producidos tomados como espacios iniciales, esperar los pasos suficientes para que seamos conducidos al estado final o caer en la cuenta de la imposibilidad de alcanzarlo. A la organización y descripción de tal proceso y sus componentes por cualquier medio, generalmente por medios geométricos en los casos escolares, se le llama el espacio de estados del problema. Ejemplos de tales espacios de estados para problemas como la Torre de Hanoi y otros problemas de este tipo, habituales en las aulas, o para juegos, algunos tan clásicos como el tres en raya y otros, pueden verse en Goldin y McClintock (Eds.) (1979), donde además pueden encontrase caracterizaciones y usos de tales descripciones del espacio de estados.

Para algunos problemas, la simplicidad de la representación de los estados inicial, final e intermedio, la elementalidad de las consecuencias acarreadas por la entrada en acción de un operador, y la recursividad del proceso son, sin duda, las razones subyacentes del atractivo y eficacia de este tipo de análisis en resolución de problemas.

Es obvio señalar que una descripción análoga de la resolución de un problema, o familia de problemas objeto de estudio, en términos de estados y operadores requiere, para su posibilidad y utilidad, de representaciones, igualmente simples, generales, operativas y eficaces del problema, los estados y los operadores, al menos como condiciones de partida.

Otro sentido y propósito tiene el término espacio, ahora espacio de problemas del problema, utilizado por Puig (1996, págs. 55 y ss.), para dar cuenta ahora, no de la solución del problema, sino del proceso de resolución del problema. Hay que empezar por anotar que el tipo de proceso de resolución, del cual se quiere dar cuenta, corresponde a resoluciones de un determinado problema que se califican de estilo heurístico. Una de las características de una resolución marcada por dicho estilo es el uso de Herramientas Heurísticas. Por su propia concepción una Herramienta Heurística es un utensilio de esa caja de herramientas que transforma un problema en otro. El nombre del utensilio, esto es, el de la Herramienta Heurística proviene bien del efecto que sufrirá el problema transformándose, bien por el nombre utilizado para denominar la relación que puede describirse entre el problema original y el problema transformado. En todo caso, lo que es pertinente a la noción de espacio de problemas es el problema concreto en el cual el resolutor anda enfrascado en determinados momentos de la resolución del problema propuesto, problema que no suele coincidir con el propuesto, sino otro problema generado a partir del problema propuesto por el uso de una Herramienta Heurística, por una sugerencia heurística, por el uso de un método para resolver o por la relación que pueda existir entre los problemas generados y considerados en el transcurso del proceso. La determinación y el enunciado preciso de todos esos problemas considerados permiten construir lo que constituye los problemas componentes del espacio de problemas, y las relaciones entre ellos que dan cuenta de su generación, la gestión y el control de lo acarreado o utilizado de sus soluciones y la subordinación de todo ello a la solución del problema propuesto, las relaciones de incidencia que permiten entretejer una malla, que organizada geométricamente constituye el espacio de problemas del problema. Ejemplos del espacio de problemas de distintos problemas entre ellos problemas aritmético-algebraicos, se encuentran en Puig (1996).

La noción de problem space (PS) introducida por Newell y Simon es, por su pretensión e implicaciones, diferente de las anteriores y dedicaremos a ella el punto siguiente.

15.1.- El PS de Newell & Simon. El espacio del problema.

En el libro de Newell y Simon *Human Problem Solving*, concretamente en el capítulo 14 , "The Theory of Human Ploblem Solving", podemos leer:

"Postulamos que la resolución de problemas tiene lugar mediante la búsqueda en un espacio del problema. Este principio es la principal invariante de conducta de resolución de problemas que se mantiene tanto cuando se cambia de tarea como cuando se cambia de sujeto" (Newell y Simon, 1972, pág. 809).

En las líneas que siguen, Newell y Simon puntualizan: "el postulado anterior no significa que toda conducta relevante de resolución del problema sea búsqueda en el espacio del problema. Inicialmente, cuando un problema es presentado, debe ser primero reconocido y comprendido. Entonces se debe construir un espacio del problema o si ya existe en la memoria a largo plazo éste debe ser evocado. Los espacios del problema pueden ser cambiados y modificados en el transcurso de la resolución. Estas actividades cruciales en la resolución del problema, no necesitan ellas mismas ser búsquedas en un espacio del problema."

La noción de espacio del problema se introdujo simplemente como el espacio donde la resolución del problema tiene lugar y contiene no únicamente la actual solución del problema sino todas las posibles soluciones que el resolutor puede considerar.

Newell y Simon proporcionan una definición de espacio del problema acorde a su noción de sistema de procesamiento de la información.

Un espacio del problema consiste en:

1.- Un conjunto de elementos U, que son estructuras de símbolos, cada una de las cuales representa un estado de conocimiento sobre la tarea.

2.- Un conjunto de operadores Q, que procesan información, cada uno de los cuales produce estados nuevos de conocimiento a partir de otros estados de conocimiento anteriores.

3.- Un estado inicial de conocimiento u_0, que es el conocimiento sobre la tarea que el resolutor tiene al comienzo de la resolución del problema.

4.- Un problema, que se plantea al especificar un conjunto de estados finales G, que ha de ser alcanzado aplicando los operadores de Q.

5.- La totalidad del conocimiento disponible para un resolutor dado cuando está en un estado de conocimiento dado, que incluye (ordenado de lo más transitoria a la más estable):

(a) Información temporal-dinámica creada y usada exclusivamente dentro de un estado de conocimiento.

(b) El estado de conocimiento en si mismo: la información dinámica acerca de la tarea.

(c) Acceso a información de la estructura de símbolos adicional guardada en la memoria a largo plazo (LTM) o en la memoria externa (EM) (el estado de conocimiento extendido).

(d) Información acerca del camino y cómo se llegó a un estado de conocimiento y qué otras acciones se tomaron en este estado, si fue realmente visitado en ocasiones anteriores.

(e) Información de acceso a otros estados por los que se ha pasado previamente y que ahora están guardados en LTM o EM

(f) Información de referencia que es constante en el curso de la resolución, disponible en LTM o EM.

Newell y Simon proporcionan descripciones de espacios del problema para los problemas que estudian: uno de cripto-aritmética, otro de lógica y el juego del ajedrez. Tales descripciones son descripciones básicas, de ensayo, que van incorporando progresivamente elementos. Véase al respecto, en la página 273 de Newell y Simon (1972), los espacios del problema para la resolución del sujeto S3 del problema de criptoaritmetica:

```
     DONALD
+    GERALD          D=5
     ______
     ROBERT
```

el espacio básico, el aumentado, el numérico, el algebraico, el cripto-aritmético y el tipográfico.

La incorporación progresiva de elementos al esbozo inicial del espacio del problema es la que les permite su definición teórica final, definición que está en coherencia con su metodología: observación detallada y análisis de protocolos de sujetos reales resolviendo problemas, y con la finalidad de su investigación, a saber, la construcción de un programa de ordenador, que produzca efectivamente las conductas que pretende explicar y no sólo describir (Puig, 1996, pág. 24)

1.15.2.- El espacio del problema de un problema de la FPAA.

Habiendo tomado nota de la noción de Problem Space de Newell y Simon, presentaremos la noción de espacio del problema que será utilizada aquí para la descripción de las posibles soluciones de un problema de la FPAA que cualquier resolutor podría considerar. Añadiendo además que está en la intención de tal noción la posibilidad de que ésta sea usada para describir, además, las soluciones inacabadas, los usos inadecuados o incorrectos de algunos elementos del espacio del problema y las soluciones incorrectas. En **15.5** volveremos sobre esta intención añadida. Esto es, un espacio del problema susceptible de dar cuenta de las actuaciones de los resolutores.

Así, consideraremos espacio del problema de un problema de la FPA a una estructura que contiene los siguientes componentes:

1.- Un conjunto de GT completos o incompletos, cada uno de los cuales, en cualquier instante, da cuenta de:

1.1.- El estado de cantidades del problema, el cual incluye:

- 1.1.1.- Las cantidades que están siendo consideradas.
- 1.1.2.- El carácter conocido o desconocido de cada una de ellas.

1.2.- El estado de relaciones entre las cantidades de 1.1, el cual incluye:

- 1.2.1.- Las cantidades precisas que están relacionadas en una arista.
- 1.2.2.- Las cantidades precisas que están relacionadas por una arista incompleta. Esto es, por una arista que contiene únicamente dos cantidades.
- 1.2.3.- Las cantidades que están aisladas. Esto es, no pertenecen a ninguna arista.

1.3.- El estado de entretejido de las relaciones, el cual incluye:

1.3.1.- Las cantidades que son nodos del GT. Esto es, que forman parte de dos o más aristas.
1.3.2.- Las aristas que no están entrelazadas por medio de ninguna cantidad.

Llamaremos GT de una solución del problema, GTS, a un GT que contenga como subgrafos todos los GT de cada estado tomado en consideración para la obtención de dicha solución.

2.- Un conjunto de diccionarios de cantidades, cada uno de los cuales está asociado a los vértices o nodos de cada uno de los GT de la componente 1, y cada uno de ellos da cuenta en cualquier instante del estado de las componentes de los términos **(x, u, n)** que el diccionario dispone para cada cantidad, lo cual, incluye:

2.1.- Para la componente **x**, el estado de entre los posibles en que ésta se encuentra: blanco, número, expresión aritmética, literal o expresión algebraica.

2.2.- Para la componente **u**, su estado blanco o de mención de una unidad de magnitud.

2.3.- Para la componente **n**, su estado en blanco o de disposición de designación.

Llamaremos diccionario de cantidades de una solución, DCS, al diccionario de cantidades que contenga todos los diccionarios de cantidades utilizados en cada estado tomado en consideración para la obtención de dicha solución.

3.- Un conjunto de operadores Q que actúan sobre los elementos de las componentes 1 y 2 del espacio del problema, transformando un elemento de una componente en otro, modificando con ello el estado que dichas componentes describen. Conjunto de operadores que distinguiendo entre las componentes sobre las que actúan son:

3.1.- Actuando sobre los GT de la componente 1, esto es, operadores que amplían, modifican o trasforman bien el aspecto, bien la arquitectura del grafo.

ivc - incorporación vértice o nodo claro,
evc - eliminación vértice o nodo claro,
ivo - incorporación vértice oscuro,
ia - incorporación de arista,
ea - eliminación de arista,
cc - cambio de color del nodo.

3.2.- Actuando sobre el diccionario de cantidades (**x, u , n**)

3.2.1.- actuando sobre **x**:

an - asignación de número.
al - asignación de literal

aar - asignación de expresión aritmética.
aal - asignación de expresión algebraica.

3.2.2.- actuando sobre **u**:

mu- mención de la unidad de magnitud

3.2.3- actuando sobre **n** (asignaciones de nombre)

dvo - denominación de vértice oscuro
dvc - denominación de vértice claro

3.3.- Actuando sobre las aristas

da - denominación de arista. Esto es la atribución a una arista de la relación aditiva o multiplicativa que ésta representa.

3.4.- Actuando en los vértices o nodos:

ec - escritura de una ecuación entre dos asignaciones pertinentes de la componente **x** de los diccionarios de cantidades correspondientes a un mismo vértice o nodo.

Los operadores, como se ve, por 3.3, pueden actuar sobre grafos orientados multiplicativa y aditivamente.

4.- Un estado inicial de conocimiento, que es el conocimiento sobre el problema, como tarea que realizar, que el resolutor tiene al inicio del proceso de resolución del problema. Esto es, el adquirido tras el episodio de lectura. Estado inicial, que debería incluir al menos:

4.1.- Un elemento especifico y concreto de la componente 1. Que contenga, al menos, vértices oscuros para los datos del problema y vértices claros para las incógnitas del mismo.

4.2.- Un elemento especifico y concreto de la componente 2. Que contenga, al menos, las cantidades que son datos del problema y cada una de ella con las componentes **x, u, n** no en blanco y las cantidades que son incógnitas del problema y, cada una de ellas con las componentes **x** en blanco y **u**, **n** no en blanco.

4.3.- Un elemento no concretamente determinado del conjunto de estados finales G, o un esbozo de alguno de estos estados.

4.4.-Un subconjunto, no precisamente determinado pero disponible para su uso, del conjunto de operadores enumerados en la componente 3.

4.5.- El conocimiento necesario para usar adecuadamente elementos del conjunto de operadores **Q**.

4.6.- Un repertorio concreto de habilidades que contiene habilidades de los tres grupos que compone el repertorio de habilidades descrito en 5.

5.- Un repertorio de habilidades del resolutor. El cual, al menos, incluye:

5.1.- La disposición para el uso adecuado de las **herramientas aritméticas y algebraicas** para el manejo de los operadores que las requieren. En particular **aar**, **aal**, **ec**. Habilidades que se manifiestan:

-Por la destreza mostrada en la escritura de expresiones aritméticas y algebraicas, y por las sucesivas transformaciones de éstas.

-Por el uso del signo igual únicamente entre expresiones que correspondan al mismo nodo.

5.2.- La disposición para el uso de ciertos **modos de proceder en la resolución del problema** propuesto. Modos o maneras que pueden tener o no tener la categoría de reglas o métodos. Habilidades que se manifiestan:

-En la elección de los operadores que deben utilizarse.

-En la organización de la secuencia de operadores que se utiliza.

Organización esta última que, con posterioridad a la actuación, puede ser calificada como *el enfoque el problema*. En Puig (1996, págs. 243-256), podemos encontrar un *catalogo de enfoques* del problema del HENO, elaborado a partir de un conjunto de resoluciones de este problema. Descrito de este modo el asunto, podríamos re-escribir 5.2 así:

5.2 bis.- La disposición para el uso de un **catálogo de enfoques** del problema.

5.3.- La disposición para el uso de un arsenal más o menos cuantioso de **mecanismos de control, gestión y decisión.** Mecanismos que se usan en determinados estados de las componentes 1 y 2 , que no inducen conductas de tipo "productivo". Esto es, al uso, con cierto grado de inmediatez, de un operador concreto que modifique automáticamente los estados de las componentes 1 y 2 del espacio del problema.

En dichos estados el comportamiento que se da, puede ser, entre otros:

-*de reconsideración y análisis* de dicho estado o estados anteriores,
-*de duda* sobre el operador que se debe utilizar, *evaluación* de su conveniencia, o su *adecuación* al enfoque,
-*de restauración* de posibles errores,
-*de apunte de una organización local o global* de los operadores concretos que deben utilizarse, su concatenación y finalidad.

Comportamientos, algunas de cuyas maneras de manifestarse son:

-La sugerencia de alternativas en el uso de operadores. Sin usarlos efectivamente.
-La decisión de utilizar una de las alternativas propuestas.

-La re-utilización de operadores que conllevan la incorporación de vértices o nodos ya incorporados al GT.

-El uso, como de nuevo, de operadores que ya actuaron sobre determinadas cantidades del diccionario de cantidades, y la modificación de algunas de sus componentes **x**, **n**.

-El trazo, que no el recorrido, de una ruta más o menos extensa sobre un GT y/o el diccionario de cantidades a él asociado.

-El borrado puntual, local o masivo, de aristas o nodos del GT y de las cantidades asociadas en el diccionario de cantidades correspondientes a ese determinado estado.

-La sustitución del enfoque del catálogo que está siendo considerado por otro enfoque o la evaluación de otro enfoque como alternativo.

6.- Un conjunto de estados finales S, o soluciones del problema, cada una de las cuales incluye:

Un GT y un diccionario de cantidades que reúnan las siguientes características mencionadas en a) o en b).

a) Para cada solución aritmética:

a.1) Un GT ninguno de cuyos vértices haya sido oscurecido por la asignación de una literal y que, conteniendo vértices oscuros que son datos, contenga asimismo los vértices que corresponden a las cantidades incógnita del problema oscurecidos.

a.2) Rutas sobre el GT que indiquen el recorrido que debe hacerse sobre el GT para oscurecer cada uno de dichos vértices incógnita.

a.3) Un diccionario de cantidades que contenga las cantidades incluidas en dichas rutas y cuya componente x sea bien un número o una expresión aritmética.

b) Para cada solución algebraica:

b.1) Un GT con la indicación de los vértices claros oscurecidos por literales.

b.2) Una ruta o serie de rutas sobre el GT cuyo recorrido tomado en su conjunto incluya las cantidades incógnita del problema.

b.3) La serie de rutas debe cumplir las siguientes condiciones:

1.- Una ruta puede finalizar su trazado en un vértice oscuro u oscurecido por asignación de una literal –ruta de tipo1.

2,- Si una ruta finaliza su trazado en un vértice claro –ruta de tipo2–, debe venir acompañada al menos de otra ruta que finalice su trazado en el mismo vértice claro.

3.- El número de rutas de que consta la serie viene determinado por el número de vértices oscurecidos por asignación de literal. La relación es ésta:

nº vértices oscurecidos por asignación de literal = nº rutas de tipo1+(nº rutas de tipo2 - 1)

b.4) Un diccionario de cantidades que incluya todas las cantidades por las que pasen las rutas de la serie con una asignación a su componente **x** por cada una de las rutas que pase por ella, componente que puede tomar la forma de: un número, una expresión aritmética, una literal, bien una expresión algebraica.

b.5) Una ecuación o conjunto de ecuaciones, formadas a partir de las cantidades que tienen dos, tres, cuatro…, asignaciones a su componente **x**, igualando dos a dos las asignaciones correspondientes. Tantas ecuaciones como literales asignadas a vértices claros o nodos

7.- Un problema, que se plantea al especificar el conjunto de **soluciones**, alguno de cuyos elementos debe alcanzarse mediante operadores de **Q**.

1.15.3.- El GT teórico de las soluciones de un problema de la FPAA y su diccionario teórico de cantidades asociado.

La noción de espacio del problema descrita en **15.2** ha sido construida con la intención de dar cuenta de las componentes y estructura del “lugar” donde las resoluciones del problema ocurren. Es la intención de este punto tratar de describir con más detalle dicho lugar. Me quiero referir a la idea, en principio atractiva, de poder contar con un GT y un DC de donde pudiesen entresacarse, en la medida de lo posible, toda y cualquier solución del problema. Esto es, que incluyese “todos” los posibles GTS y DCS, como un universo de referencia de las soluciones.

Cuando hablamos de solución, nos es difícil, si no imposible, dejar de lado al resolutor que la produce: persona, personaje, o autómata. Así, para el intento que nos ocupa, propondremos dos vías.

La primera, la consideración de un grupo determinado de estudiantes y sus resoluciones de un problema prestando atención a los GTS y DCS producidos, para a continuación por superposición de los primeros y adjunción de los segundos obtener un GT y un DC, a los que podríamos considerar como el GTS de ese problema y el DCS de ese problema, para ese grupo de estudiantes. Sucesivas ampliaciones del universo de observación, a otros estudiantes u a otras personas, permitirían obtener sucesivos GTS y DCS del problema que, tras nuevas superposiciones y adjunciones con anteriores GTS y DCS, constituirían hasta ese momento el grafo teórico y diccionario teórico de cantidades de las soluciones del problema.

Por la propia concepción de los GTS y DTCS, de los grupos que se consideren, quedan fuera de observación los resolutores que no hayan obtenido una solución del problema. Los grafos y diccionarios correspondientes a soluciones, contienen información sobre el conjunto de operadores utilizado en las soluciones y sobre cuáles de las habilidades del repertorio se han utilizado, pero pueden contener además tanto usos no pertinentes o inadecuados de los operadores como de las habilidades mencionadas en el repertorio, ver a este respecto el capítulo de actuaciones. De ahí que estos GTS y DCS individual o colectivamente considerados poseen más información de la que puede contener un escueto informe sobre las soluciones. Del análisis de esta información extra y sus posibles usos se dará cuenta en capítulos posteriores.

La segunda, y la que seguiremos a continuación, para construir lo que llamaremos a partir de ahora **grafo teórico del problema,** y el correspondiente **diccionario teórico de cantidades del problema**. Vamos a proceder como podría hacerlo un autómata habilitado, en primera instancia para:

a) Proceder de modo combinatorio con los vértices de un GT de partida y con un DC de partida para producir un nuevo GT y un nuevo DC.

-La combinatoria de los vértices la lleva a cabo de dos en dos y produce aristas aditivas o multiplicativas cuyos vértices son los dos considerados y el de su combinación. Dichas aristas las incorpora al GT de partida.

-Los vértices producidos en la combinatoria representan nuevas cantidades que se incorporan al DC de partida. El nombre que hace constar para cada una de estas cantidades en el diccionario se corresponde con el sentido más natural al modo en que dicha cantidad ha sido producida.

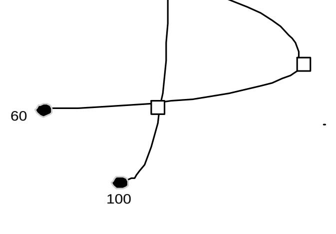
Además, el autómata está instruido sobre algunas combinaciones que no están permitidas, por ejemplo, la que produce aristas aditivas entre vértices que corresponden a cantidades debe someterse al juicio de la ley de la homogeneidad, o que quedan excluidas, en principio, las aristas multiplicativas entre vértices que corresponden a cantidades intensivas.

b) Incorporar aristas que contengan los nuevos vértices del GT producidos tras la combinatoria.

c) Proceder de modo recursivo tomando como GT y DC iniciales los GT y DC producidos.

Para ilustrar el posible funcionamiento del autómata y el uso de sus habilidades utilizaremos el problema del HENO y procederemos por etapas. Incluiremos a su vez algunos comentarios, y no descartaremos la atribución al autómata de otras habilidades inicialmente no requeridas.

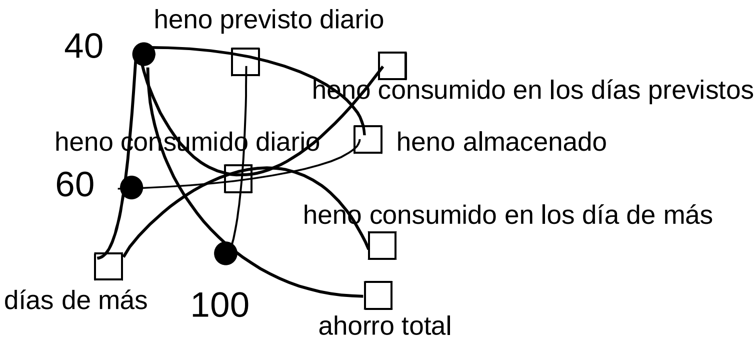
Etapa 1.- Un GT de partida, correspondiente a una lectura analítica mínima, ver **1.16**, y su DC.



días kg/día heno heno

40 días previstos heno previsto diario
60 días reales heno consumido diario heno almacenado
100 kg. heno ahorrado diario

O cualquier otro GT de partida, GT que puede provenir de otra lectura analítica. Y otro DC de partida, la lista de cantidades utilizada en Puig (1996, pág. 245) en el análisis de los protocolos del problema del HENO

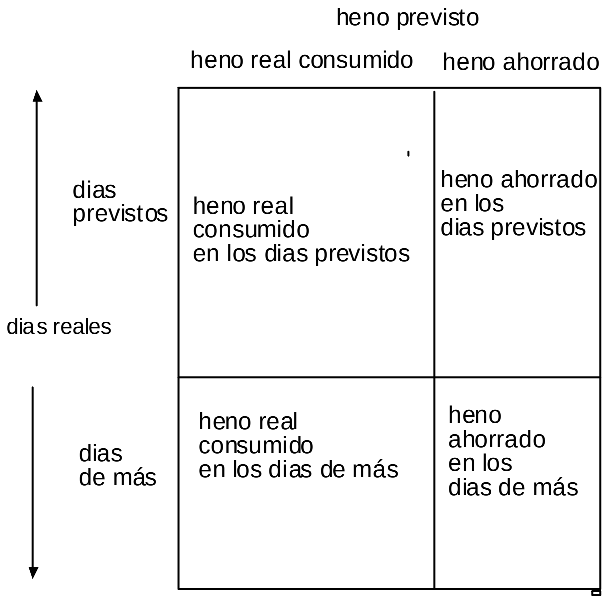


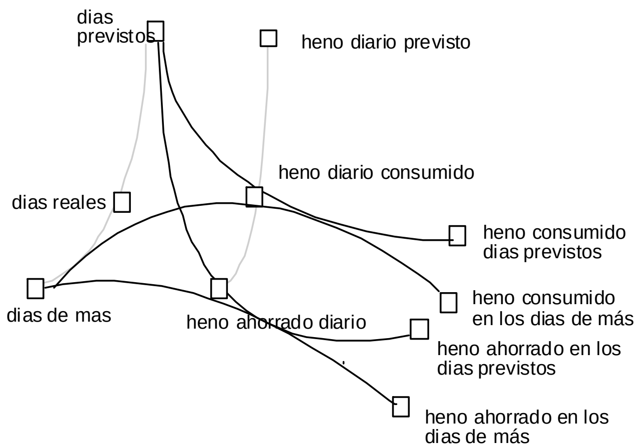
días previstos heno previsto diario heno consumido en los días previstos
días reales heno consumido diario heno almacenado
días de más heno ahorrado diario heno consumido en los días de más
ahorro total

El modo de elaborar este diccionario ha consistido en calificar con: previstos, reales, de más, a las tres ocurrencias de la cantidad extensiva días, y previsto, consumido y ahorrado para la cantidad intensiva kg/día. Y en consonancia, las extensivas que son del estilo ExI: heno consumido en los días previstos, heno consumido en los días de más, han recibido su nombre en función de la pareja extensiva x intensiva que la produce. Lo que hace el autómata. Esto es, en su propio nombre está embebida la relación entre las tres cantidades. El nombre heno almacenado es la cantidad por la que pregunta el problema y el ahorro total es el nombre con el que, por su propia denominación y por el contexto, nos referimos a una cantidad de heno, en la que “ahorro” indica que el heno proviene del ahorro de heno y el calificativo “total”, que se compone de ahorros diversos. Este último nombre “ahorro total” no sería producido por el autómata, al proponer producir a dicho autómata con el DC anterior a éste como punto de partida, concretamente la cantidad producida tendría por nombre heno ahorrado en los días previstos.

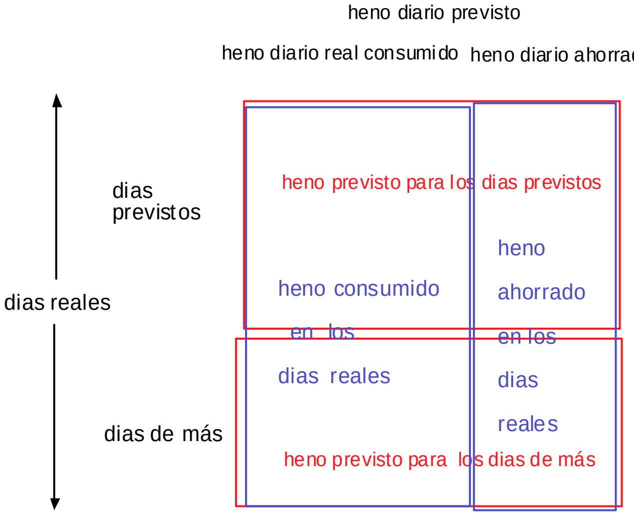
Etapa 2.- Combinatoria de cantidades.

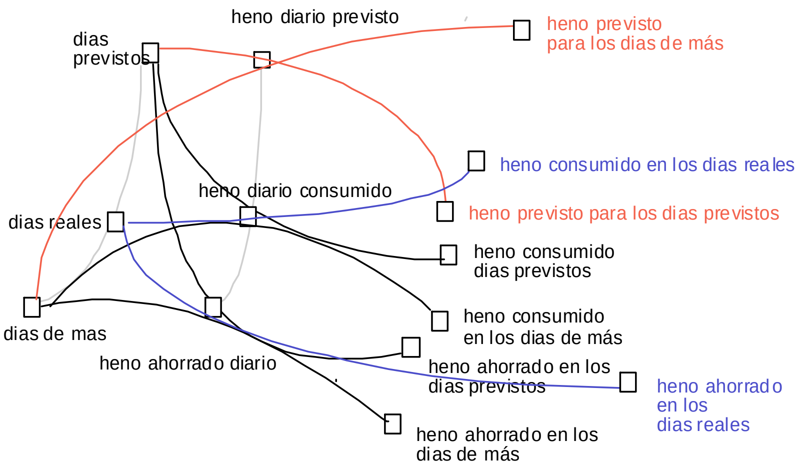
Que vamos a presentar sirviéndonos de un esquema geométrico que nos evita transgresiones y respeta las relaciones aditivas que existen entre dichas cantidades. Esquema geométrico que proporciona en una primera fase el grafo que le sigue:



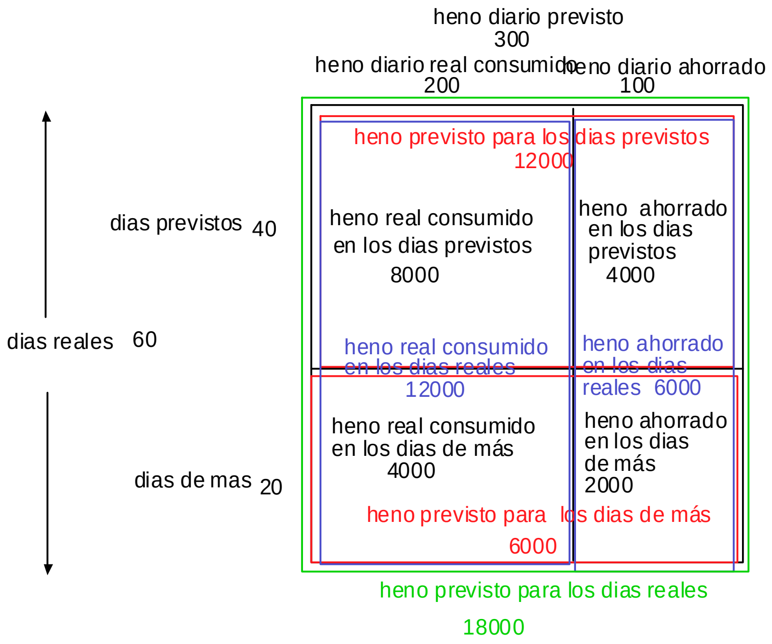


Y en una segunda fase:



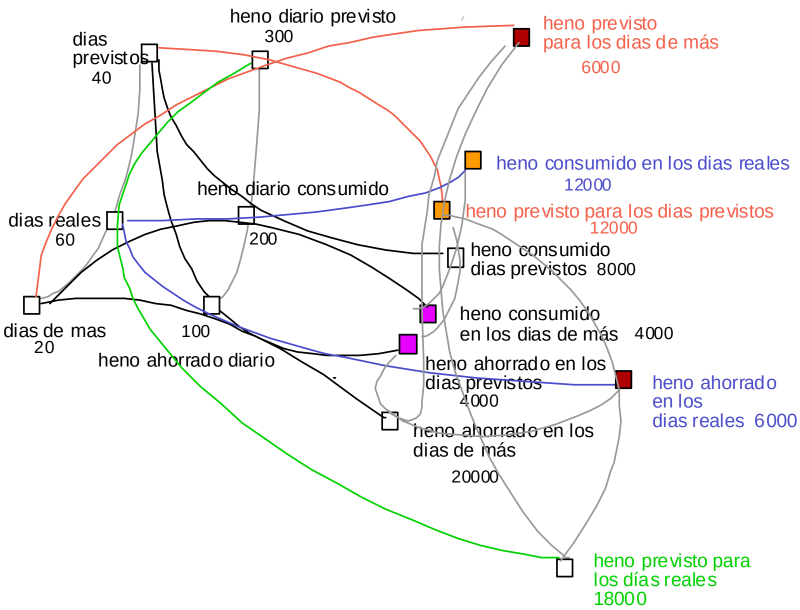


Estas fases se pueden resumir en el esquema geométrico siguiente, en el que hemos cuantificado las cantidades para facilitar la legibilidad.



Etapa 3.- Consideración de las relaciones entre las nuevas cantidades.

Cantidades que, incorporadas al GT anterior a la vez que las aristas que se corresponden a las relaciones aditivas observadas en el esquema geométrico, el autómata en el uso de su capacidad b) y cierta capacidad semántica, nos proporcionarían el GT:



Grafo que constituye un primer esbozo del grafo y diccionario teóricos. En el diccionario, prestando atención a las cantidades heno-días del tipo E x I construidas tendríamos heno:

consumido en los días previstos	ahorrado en los días previstos	previsto para los días previstos
consumido en los días de más.	ahorrado en los días de más	previsto para los días de más
consumido en los días reales	ahorrado en los días reales	previsto para los días reales

donde, cómo puede observarse, no figura cantidad alguna con el nombre heno almacenado, obviamente excluido en la producción sistemática de nombres del autómata. Y, sin embargo, podemos decir que esa cantidad está duplicada en el diccionario teórico, con dos nombres a su disposición “heno consumido en los días reales”, “heno previsto para los días previstos” que se refieren en distinto sentido a esa cantidad. Al igual que ocurre con esta cantidad, ocurre con “heno consumido en los días de más” y el “heno ahorrado en los días previstos”, nombres que se refieren a la misma cantidad en distinto sentido, sentidos a los que diríamos contrapuestos, si no vinieran matizados por los días calificados convenientemente: de más, los unos, previstos, los otros. Cantidad a la que también se refería antes con “ahorro total”.

Debemos observar que alguna de estas cantidades carecen de referencia en la situación descrita en el problema. Por ejemplo: el “heno ahorrado en los días de más” no es un sentido en el que se puede hacer referencia a una cantidad que pueda existir para los granjeros de nuestra historia, que bien saben ellos que nada ahorraron en esos días. Pero que puede ser construida por el autómata, permitiéndose lo que podíamos calificar de un abuso de uso de la cantidad concreta de kilogramos de heno ahorrados en ciertos días, en la situación del problema, los días previstos, y se permite hablar de un plausible heno ahorrado, heno ahorrado en cualquier clase de días y, en algún caso, como puede ser el heno ahorrado en los días reales, la cantidad es mera entelequia pero su denominación sirve para referirse al hipotético heno que se hubiese ahorrado si todos los días en los que se consume heno se pudiesen ahorrar los kilogramos de heno que se ahorraron en cada uno de los días previstos. Si esto sucediera realmente, se libraría a tan mentados granjeros de la necesidad de almacenar heno durante algún tiempo. No obstante, en tanto en cuanto esta cantidad puede imaginarse, puede utilizarse, por ejemplo, para hallar el heno almacenado. Así, en compañía de la no menos imaginaria heno previsto para los días reales, tendríamos:

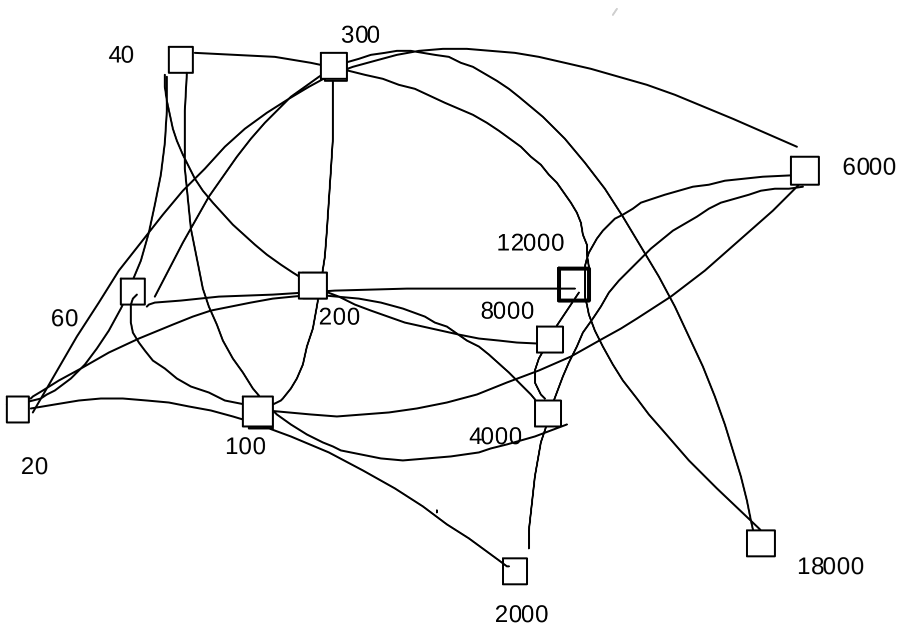
Heno almacenado = heno previsto para los días reales - heno ahorrado en los días reales.

Que en las relaciones del autómata puede leerse, entre otros modos, así:

Heno previsto para los días previstos = heno previsto para los días reales - heno ahorrado en días reales.

Como es posible imaginar otros usos y ocurrencias de estas cantidades carentes de referencia en la situación, pero para las que poseemos un sentido que nos permite interconectarlas en una red de relaciones, red de relaciones que es la que nos ha permitido determinar anteriormente una cantidad con referencia, incluiremos estas cantidades producidas por el autómata en el diccionario teórico de cantidades.

Ahora, volvemos al actual grafo teórico y lo rehacemos teniendo en cuenta la igualdad de las cantidades referidas en dos sentidos[7], las cantidades mencionadas vienen indicadas en el grafo teórico por dos nodos de coloreado idéntico, y reduciremos su representación a un solo nodo, con lo que no perderemos un ápice de sentido, puesto que las aristas concurriendo en dicho nodo nos permiten leer los sentidos. Así pues, tendremos un grafo teórico, no de menor orden, pero sí con menos nodos de y de mayor orden, más legible, canónico y operativo. Esto es, lo que se ha hecho en el grafo teórico que sigue partiendo del anterior, donde se han eliminado además los nombres de las cantidades, y conservado su cuantificación.



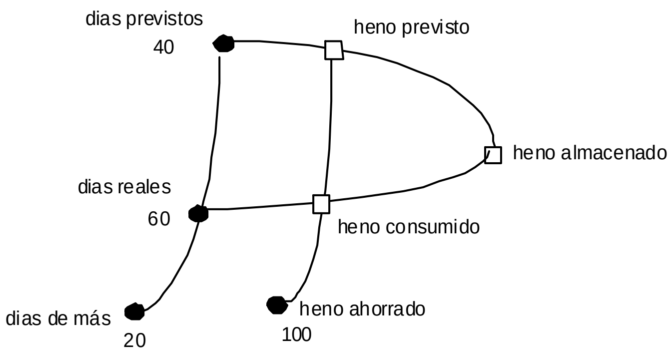
[7] Este rehacer, como actuación atribuida al autómata, implica, ahora sin remisión, dotar al autómata de habilidades semánticas.

Podemos conjeturar que el grafo teórico, hasta ahora construido, contiene un amplio espectro de las soluciones que los resolutores pueden producir. Esta conjetura es contrastable; así, constan en él, en perspectiva, una amplia gama de soluciones aritméticas y algebraicas, tal y como este tipo de soluciones se consideraron en la componente correspondiente del espacio del problema. Todo ello consecuencia del orden del grafo teórico, de la cantidad de nodos que contiene y del orden de los mismos. Obsérvese que en el grafo teórico construido no hay vértices y únicamente dos nodos de orden 2 y estos correspondientes a cantidades sin referencia en la situación. Esto es, podemos decir que el grafo teórico está bien cargado y recargado de sentido. Como muestra: el diccionario de cantidades. Por otro lado, el conjunto de ecuaciones solución del problema es más amplio que el conjunto tipo descrito en el punto **1.10** como conjunto de ecuaciones solución de un problema, lo que se deduce del hecho de que el grafo teórico contiene al GT allí considerado, ampliándose en consecuencia en el grafo teórico, entre otras cosas, los nodos disponibles para oscurecer por medio de una literal, lo que dará lugar a ecuaciones allí no consideradas.

Etapa 4.- Deducción de cantidades y relaciones.

A pesar del gran número de soluciones de que da cuenta el grafo teórico actual, si pensamos que este grafo teórico contiene cualquier solución, sabemos que esto no es así. En efecto, el grafo teórico actual no contiene una solución del problema del HENO, que contenga algo análogo a lo que contiene la solución del problema HOMBRES Y DINERO proporcionada por Fibonacci (Sigler, ed., 2002). Narrando lo hecho por Leonardo con el lenguaje que estamos utilizando, Leonardo se apoya en su narración en un esquema geométrico, lo que hace Leonardo rezaría así:

Disponiendo del siguiente GT:



y concurriendo en el nodo heno almacenado dos aristas multiplicativas:

días previstos x heno previsto, días reales x heno consumido

dichas cantidades son inversamente proporcionales y se tiene la proporción:

$$\frac{\text{dias previstos}}{\text{dias reales}} = \frac{\text{heno consumido}}{\text{heno previsto}}$$

de donde se obtiene:

$$\frac{\text{dias previstos}}{\text{dias reales} - \text{dias previstos}} = \frac{\text{heno consumido}}{\text{heno previsto} - \text{heno consumido}}$$

que se escribe:

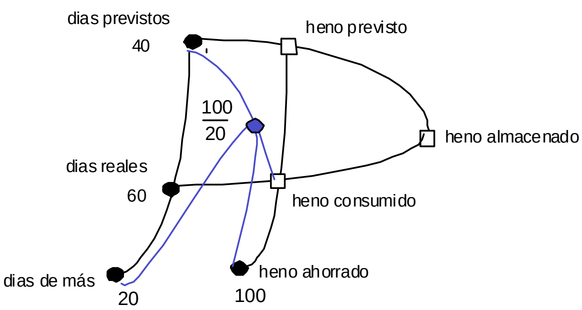
$$\frac{\text{dias previstos}}{\text{dias de más}} = \frac{\text{heno consumido}}{\text{heno ahorrado}} \;, \qquad \frac{\text{dias previstos}}{20} = \frac{\text{heno consumido}}{100}$$

o en versión multiplicativa:

días previstos x (100 / 20) = heno consumido

lo que permite añadir al grafo la arista correspondiente y el vértice 100/20 . Fin de la narración.

Consecuencias para el grafo teórico actual: el núcleo central del GT del problema quedaría:



Y dos observaciones:

-primera: el vértice incorporado 100/20 es una cantidad del tipo I / E , esto es,

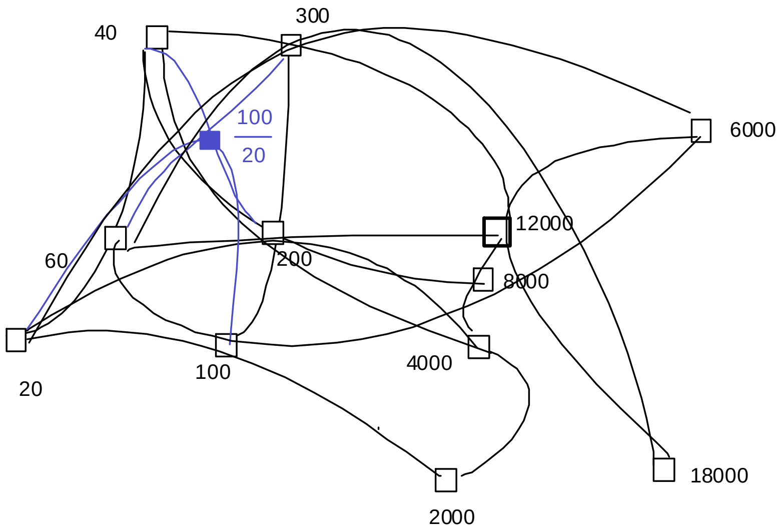
(heno /día) / día,

que permite transformar los días previstos, en heno consumido por día.

-segunda: la combinación de tales cantidades no estaba inicialmente excluida al autómata, pero el sentido que corresponde a su producción, la razón entre el heno ahorrado por día y los días de más, difícilmente hubiese permitido conectar esta cantidad con otras aristas del GT.

En realidad, siendo el GT un mundo de cantidades y de relaciones aditivas y multiplicativas entrelazadas, existe la posibilidad de que se dé el caso, como es el nuestro, de que sea posible proceder deductivamente para obtener, a partir de lo dado, nuevas cantidades y relaciones. Y esta capacidad de deducción y su disposición para el uso no constaba entre las habilidades del autómata.

Así, dando al autómata la tarea de incorporar al grafo todas las aristas que pueden obtenerse a partir de todas las relaciones de proporcionalidad que el grafo teórico actual contiene, y las deducciones que de dichas proporciones y las relaciones aditivas entre las cantidades que intervienen en las proporciones, el diccionario teórico de cantidades quedaría en el estado de la etapa 3 con la cantidad anteriormente añadida y el autómata nos proporcionaría un GTP, que sería tal cual:



Grafo trinomial teórico del problema, grafo teórico que hemos construido a partir del GT del problema procediendo a dos ampliaciones sucesivas, la primera presentada como combinatoria y que tiene un fuerte tinte semántico y la segunda de índole formal deductivo.

1.16.- (1.5bis y 1.14 bis)- Carácter e isormorfías de los problemas de la FPAA.

Carácter aritmético o algebraico:

La discusión acerca del carácter aritmético o algebraico de un problema de la FPAA realizada en **1.5** se hizo en función de los textos intermedios producidos en la resolución del problema. Así, veníamos a concluir allí que no podíamos calificar a un *problema como aritmético o algebraico sino a su texto intermedio*. Ello conlleva que tendríamos como tres grupos de problemas: un primer grupo de problemas, para los cuales se producirían de modo *natural* textos intermedios aritméticos, un segundo grupo de problemas para los cuales un *análisis superficial* produciría textos intermedios algebraicos, mientras que un *análisis más profundo* produciría textos intermedios aritméticos, y la existencia de un tercer grupo de problemas, del cual no se hizo mención, para los cuales sería casi imposible producir un texto intermedio aritmético.

Que tal último grupo debe de existir es fácil de argumentar, en general, así:

Imagínese un texto intermedio aritmético que pueda producirse para un problema que conduzca a una ecuación polinómica de quinto grado no resoluble por radicales.

Y recurriendo a las habilidades del lector:

Inténtese producir un texto intermedio aritmético para el problema HOMBRES Y DINERO o para el problema MECANÓGRAFA.

De cualquier manera, este modo de argumentar para calificar un problema como aritmético o algebraico, por medio de su texto intermedio, deja el asunto en manos de las habilidades del resolutor. Habilidades que por cierto no han sido especificadas, únicamente que posee las necesarias para producir un texto intermedio u otro.

Por otro lado, una vez representado un problema por su GT, la toma de decisión acerca del carácter aritmético o algebraico de un problema se puede referir a la clase de GT tomado como representante del problema. Así, se sentencia como aritmético a un problema que viene representado por un grafo trinomial abierto y encadenado y como algebraico al problema que viene representado por un grafo trinomial cerrado o mixto, tal que al oscurecer alguno de sus nodos mediante la asignación de letras se transforme en un grafo encadenado.

Con ello, las habilidades del resolutor para la producción de textos intermedios que tienen que ver con el encadenamiento de las distintas cantidades, la decisión de qué cantidades pueden utilizarse como conocidas o desconocidas en el análisis o los análisis, las conocidas que se toman como supuestamente conocidas, y las cantidades que deben igualarse quedan diluidas en el automatismo del algoritmo de destrucción del grafo y en la elección del nodo o nodos que se transforman de claros a oscuros, para proveyendo con ello entradas al grafo y garantizarse que el algoritmo de destrucción, en los nodos de colisión o vértices oscuros, permitirá escribir las ecuaciones correspondientes y en la cantidad necesaria.

Si queremos eliminar estas habilidades del resolutor, para no tenerlo en cuenta a la hora de decidir sobre el carácter de un problema en los textos intermedios, y decidir la cuestión del carácter del problema sobre el GT que lo representa, algo hay que decir sobre la construcción de dicho GT a partir del texto del problema. Este asunto ya se consideró en **1.8**, pero volveremos sobre él aquí, tratando el asunto en otro sentido.

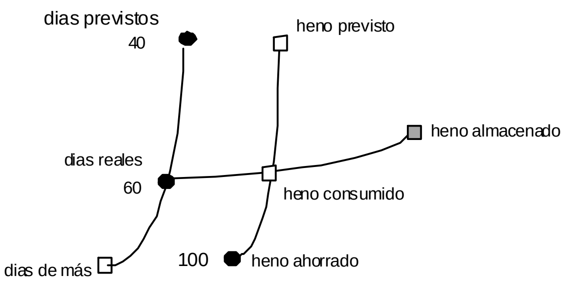
La construcción del GT de un problema a partir de su texto, requiere de dos tipos de análisis, que pueden ser simultáneos: el análisis de cantidades y el análisis de relaciones, y una tarea posterior que las presente entretejidas en una red conexa. El análisis de cantidades: distingue entre conocidas y desconocidas, y, si se quiere, el tipo de cantidades, y el de relaciones señala a las cantidades que están entrelazadas por una relación ternaria, y, si también se quiere, a la especificación de la naturaleza aditiva o multiplicativa de ésta. La tarea de entretejer señala a las cantidades que tienen un carácter polisémico, al pertenecer a dos o más relaciones, y las considera como nodos, de al menos orden dos en el GT que se está construyendo. Pues bien, llamemos a este modo de leer el problema, que posibilita la construcción de un GT de un problema, leer el problema de modo analítico. Y llamaremos lectura analítica del problema a una lectura de modo analítico que se represente por un GT que contenga, al menos, como vértices la incógnita y los datos.

Considerado esto así, tendremos la posibilidad de tener diferentes lecturas analíticas de un mismo problema y por tanto distintos GT para el mismo. Ahora bien las diferentes lecturas analíticas, esto es, las representadas por GT que contienen obligatoriamente los datos y la incógnita del problema pueden, o no, contener las relaciones adecuadas o suficientes para que se pueda obtener en ellos una solución del problema por uno de los algoritmos de destrucción señalados en **1.9.1** o **1.9.2**. Llamaremos lectura analítica suficiente a una lectura analítica representada por un grafo que nos permita obtener la solución del problema por uno de los algoritmos de destrucción.

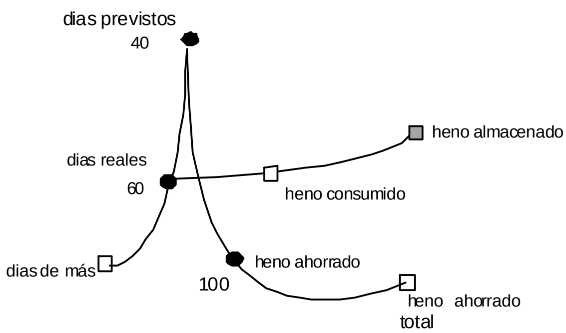
La decisión del carácter aritmético o algebraico del problema puede tomarse sobre el GT como anteriormente y atribuir el carácter aritmético o algebraico no al problema sino a su lectura diciendo: Esa lectura analítica suficiente de ese problema es aritmética, o esa lectura analítica suficiente de ese, el mismo o diferente problema es algebraica según el algoritmo de destrucción que requiera el GT.

Para ilustrar lo dicho, consideremos las lecturas de modo analítico del problema del HENO obtenidas de resoluciones de los estudiantes considerados en Puig (1996). A algunas de ellas las podemos llamar lecturas analíticas y a otras no.

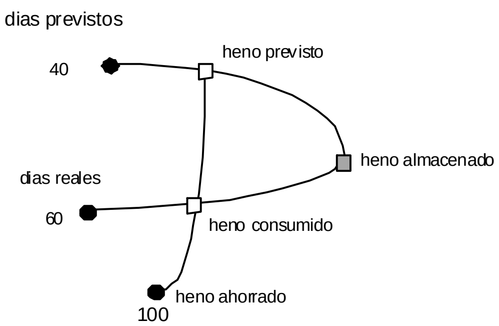
Las siguientes son lecturas analíticas:



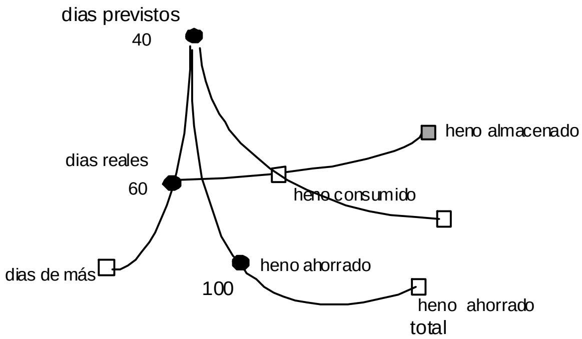
(1)



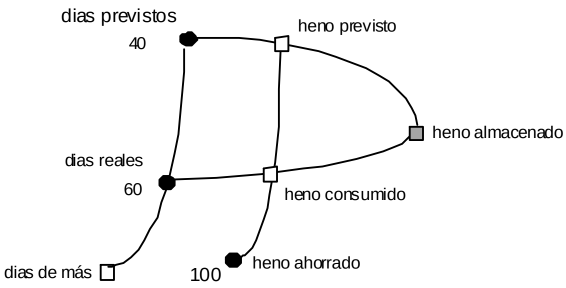
(2)



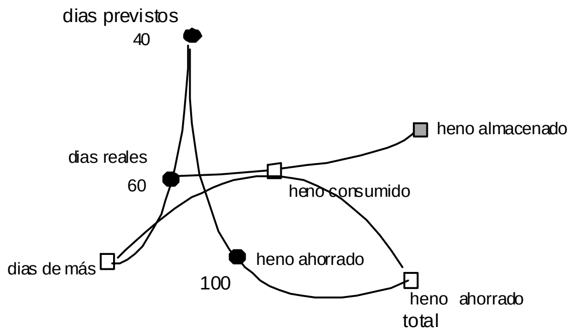
(3)



(4)

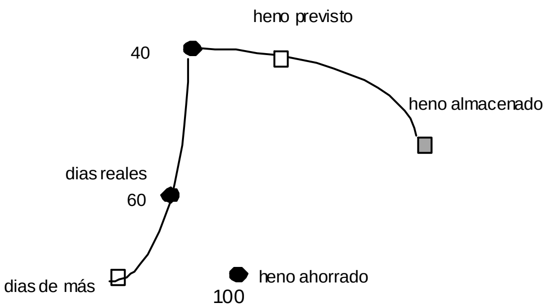


(5)

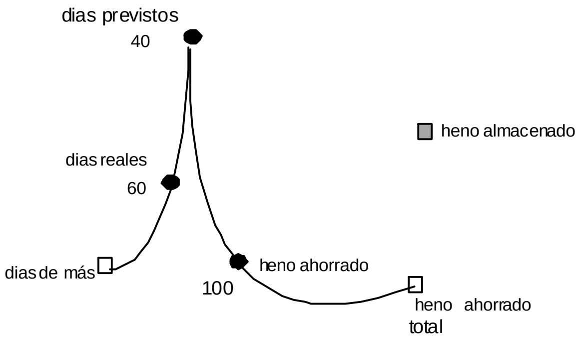


(6)

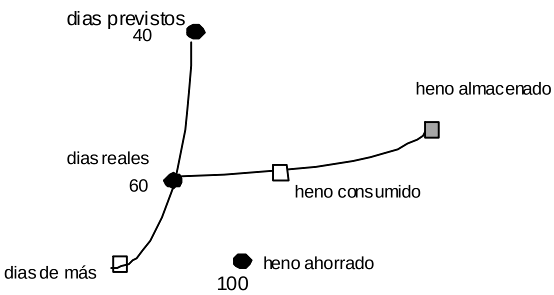
Y las siguientes no son lecturas analíticas.



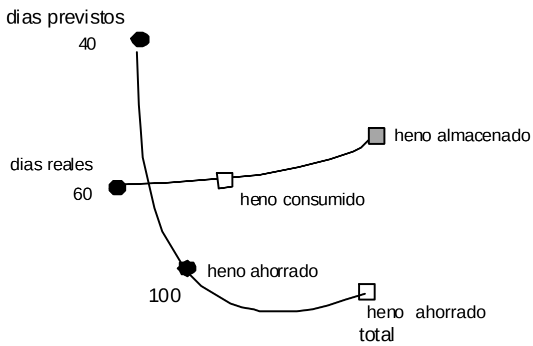
(7)



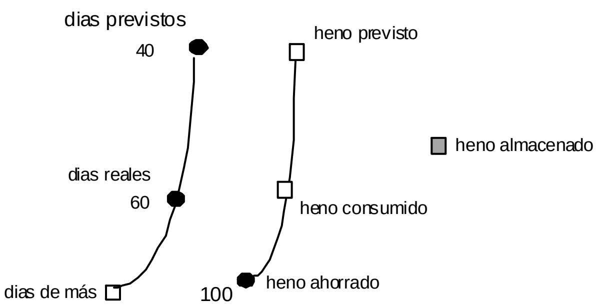
(8)



(9)



(10)



(11)

De las últimas cinco lecturas hemos dicho que no son lecturas analíticas por las siguientes razones: no se representan por un grafo trinomial, al dejar vértices aislados, casos: (7), (8), (9), (11) o se representan por varios grafos trinomiales, al no estar todas sus aristas conectadas, caso (10), o ambas cosas, como ocurre en la figura (11). Además, de entre las lecturas analíticas, las lecturas (1) (2) y (4) no son suficientes.

Así, como se dijo, no calificamos un problema como algebraico o aritmético, sino a su lectura analítica. Puesto que puede darse el caso, como ya sabíamos y reiteramos con el problema que nos ocupa, que un mismo problema posea lecturas analíticas aritméticas y lecturas analíticas algebraicas. Puede verse que las lecturas analíticas suficientes (3) y (5) son algebraicas, mientras que la lectura analítica suficiente (6) es aritmética.

Por otro lado, diremos que una lectura analítica suficiente es una lectura analítica mínima si el GT que la representa tiene el menor orden entre los órdenes de los GT que representan lecturas analíticas suficientes. Esto quiere decir, naturalmente, que las cantidades y relaciones establecidas que incluyen la incógnita y los datos, a las que la lectura hace mención y bastan para encontrar cualquier tipo de solución al problema son las menos de las posibles. De las lecturas analíticas suficientes consideradas arriba, la lectura (3) es una lectura mínima. Debe decirse que en los problemas que hemos manejado y que poseen dos o más lecturas analíticas suficientes, la lectura analítica mínima siempre es algebraica y única, no obstante no disponemos de ninguna prueba de ello.

Como es el caso que hasta ahora hemos marchado en la dirección de considerar el problema, abandonando progresivamente al resolutor, al que hemos reducido a lector, y más, hemos perseguido la misión imposible de intentar descodificar el mensaje emitido en el enunciado del problema, con un código que muestre el mínimo de lo contenido en dicho mensaje que permite encontrar solución al problema, cambiemos ahora de rumbo, consideremos al resolutor, o si se quiere, por no introducir en escena al personaje, que se dispone de un código capaz de producir a partir del enunciado del problema una lectura del mismo que sea exactamente el grafo trinomial teórico del problema.

Siguiendo con nuestro ejemplo de referencia, precisamente el grafo teórico de **1.15.3**, en tal lugar, también podemos tomar una decisión sobre el carácter aritmético o algebraico del problema. Ahora, sobre sus posibles soluciones, puesto que el grafo teórico es el lugar en que éstas están todas ellas representadas, o parte de cada una de ellas. Digo parte, para recordar que la noción de una solución concreta de un problema, incluida como una componente del espacio del problema era más amplia que la mera ruta. Así, diremos que un problema tiene solución aritmética, si en el grafo teórico del problema existe, al menos, un subgrafo que es una lectura analítica suficiente y ésta es aritmética. Y diremos que un problema tiene solución algebraica, si en el grafo teórico del problema existe, al menos, un subgrafo que es una lectura analítica suficiente y ésta es algebraica.

Y dado que la FPAA que constituye nuestro mundo de problemas sólo incluye problemas con estos dos tipos de solución, podremos decir que un problema es aritmético si tiene al menos una solución aritmética, y diremos que un problema es algebraico si el problema carece de soluciones aritméticas. Quedando a la espera de presentar al lector un problema algebraico.

Problemas isomorfos y equivalentes.

La disposición de diversas lecturas analíticas de un problema obliga a revisar las diversas nociones de isomorfía de problemas enunciadas en **1.14.2**. Como lo que ha cambiado respecto a lo expuesto en **1.14.2** es la no univocidad de la correspondencia problema-grafo, podemos comportarnos de forma laxa y decidir:

Dados dos problemas P1 y P2, diremos que P1 es isomorfo a P2 si existen una lectura analítica suficiente LA1 de P1 y una lectura analítica suficiente LA2 de P2 tales que los grafos que representan tales lecturas son equivalentes.

Los demás criterios de isomorfía en los diversos sentidos y la equivalencia de problemas pueden reformularse de modo análogo.

El criterio de isomorfía puede parecer poco exigente pero es muy pragmático en la determinación de cuándo dos problemas son isomorfos. De hecho, la equivalencia de los grafos orientados y cargados operativamente correspondientes a lecturas analíticas suficientes implica que los grafos teóricos asociados a los problemas sean a su vez equivalentes.

1.17.- Situación. El espacio de problemas de una situación.

Un problema lo podemos mirar como una instancia de algo más general.

Así, lo instado por el problema del HENO podría expresarse sucintamente:

Como un relato sucesivo de tres eventos:

Unos granjeros almacenan heno para ciertos días, ahorran tanto cada día y tienen heno para más días.

O con el tercero de los eventos como consecuencia necesaria de los dos primeros:

Si unos granjeros almacenan heno para ciertos días y ahorran tanto cada día, entonces tienen heno para más días.

Llamemos situación a lo instado por el problema. La descripción cuantitativa de una situación se sirve de cantidades precisas y relaciones entre ellas. La finalidad es clara: las cantidades introducidas y las relaciones que se expliciten entre estas cantidades deben permitir usar los valores de unas cantidades para explicar y predecir los valores de otras. Ello conlleva un requisito: que todas las cantidades que se consideren estén inmersas en por lo menos una relación.

Así, puede ocurrir que, si asignamos valores a algunas de las cantidades, podamos determinar el valor de otra u otras de las cantidades o no podamos determinarlo. Es exigible a cualquier descripción de la situación por medio de cantidades y sus relaciones la capacidad de decidir en un sentido o en el otro. En otras palabras, la asignación de valores a ciertas cantidades de la situación la transforma en una situación valuada.

Tomadas esas cantidades como datos de un problema, las cantidades que la situación juzga como determinables son las posibles incógnitas de un problema determinado, las que no, de uno indeterminado. No entendemos como descripción cuantitativa de una situación una descripción que no tenga capacidad para decidir en un sentido o en el otro.

Obsérvese, por otro lado, que lo más interesante de una situación no es contestar a la pregunta que se formula en los problemas que provienen de esa situación, sino responder a la pregunta inversa: determinar las cantidades que son necesarias para determinar otra u otras dadas.

1.17.1.- Situación concreta y situación. Descripciones de una situación.

Empezaremos la exposición por lo particular para ser conscientes de lo abstraído. Si en un GT del problema del HENO acompañado de su diccionario de cantidades nos desprendemos de los valores de las cantidades que son datos en el problema, obtenemos un grafo esquema, su diccionario de cantidades asociado y las relaciones entre las cantidades utilizadas para describir la situación instada, cualesquiera que sean los valores posibles de éstas, ver fig.(sc). A tal grafo esquema y al diccionario de cantidades que lo acompaña le llamaremos una situación concreta.

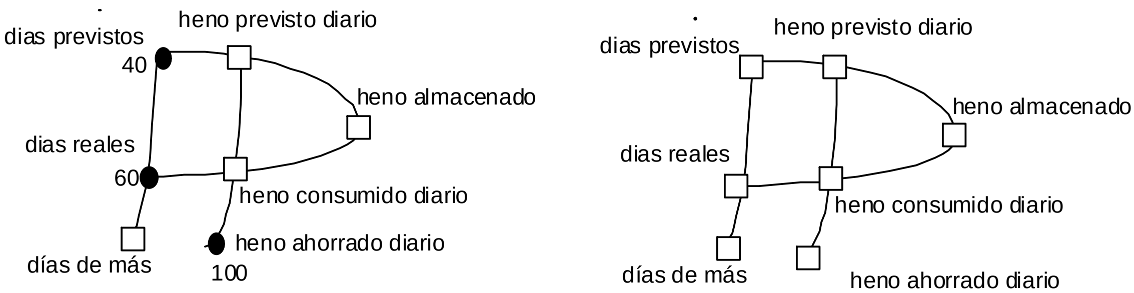
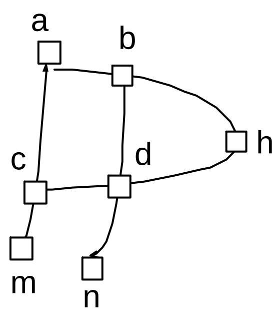


fig. (sc)

Si nos desprendemos además del diccionario y conservamos las cantidades y sus relaciones, quedamos en lo que llamamos una situación o una situación general.

Así, la situación que estamos considerando es una situación donde intervienen siete cantidades cualesquiera a, b, c, d, h, m, n y cuatro relaciones entre estas cantidades: dos relaciones multiplicativas y dos sustractivas. Relaciones que pueden representarse: bien por las aristas, en el grafo esquema de la izquierda, bien por las igualdades que aparecen a la derecha.



$$a \cdot b = h$$

$$c \cdot d = h$$

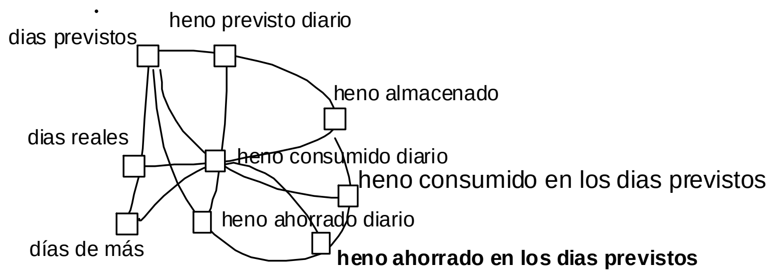
$$c - a = m$$

$$b - d = n$$

Relaciones cuyo entretejido se representa: bien por medio de la arquitectura del grafo, bien por la consideración simultánea de las igualdades. Otras representaciones posibles de la situación, que pueden ser para su estudio tan útiles o más que las dadas, no se tratan aquí.

1.17.2.- La introducción de más cantidades en una situación concreta.

Volviendo a la situación concreta considerada, sabemos que cabe introducir otras cantidades, ver **1.15.3**, que también son útiles para entender lo que ocurre o contestar a lo que pueda saberse cuando unos granjeros almacenan heno para ciertos días y ahorran tanto cada día. Tales cantidades son, por ejemplo, el heno ahorrado en los días previstos y el heno consumido en los días previstos, por utilizar un nombre para estas cantidades. Las otras cantidades consideradas en **1.15.3** no se añaden aquí por carecer de referencia. Esta adjunción de cantidades a la situación, que no se atiene a criterios del mínimo preciso, o de elegancia, sencillez y concisión, y transforman una situación concreta en otra semánticamente más rica y por tanto mucho más útil para resolver problemas, dado que su grafo esquema contiene al anterior como subgrafo. El que sigue sería el grafo esquema y el diccionario de cantidades de otra situación concreta más amplia que la anterior. Llamaremos a este tipo de situación, situación ampliada**.**



1.17.3.- El espacio de problemas de una situación y de una situación concreta.

Dada una situación, si asignamos valores a algunas cantidades y preguntamos por el valor de otra u otras, tendremos un problema. Este problema vendrá enunciado en el mundo de los números, es un problema de los llamados de ábaco, y deberemos proporcionar en el enunciado las relaciones aritméticas entre ellos que permiten determinar el número deseado a partir de lo dado. El libro I de la Aritmética de Diofanto es la referencia elemental obligada de los problemas donde se muestran relaciones aritméticas, que, establecidas entre lo que se propone determinar y lo dado, permiten determinar lo propuesto.

En una situación concreta, asignamos valores a cantidades que vienen referidas por su nombre, y preguntamos por el valor de otra por mediación de su nombre. En el enunciado del problema, las relaciones aritméticas que existen entre las cantidades apenas se mencionan, o no se mencionan, están embebidas en el enunciado. Y deben ser extraídas a partir del significado de las cantidades y de las relaciones entre ellas contenidas en el enunciado.

A este respecto, es un buen ejemplo el problema que estamos utilizando como modelo:

Unos granjeros almacenaron heno para 40 días. Sin embargo, el heno era de mejor calidad de la que pensaban y ahorraron 100 kg por día. Así tuvieron heno para 60 días. ¿Cuánto heno almacenaron?

donde, releyéndolo una vez más, comprobamos que no hay una ni una sola relación aritmética explícitamente mencionada en el enunciado del problema.

Por otro lado, el entramado de relaciones aritméticas susceptibles de codificarse en los problemas enunciados en situaciones concretas es difícil codificarlo en problemas de tipo ábaco. De nuevo una muestra de lo dicho, lo es la dificultad que tiene la tarea de enunciar en estilo diofantino el problema anterior. Una muestra de una aproximación:

Encontrar una razón, dada por una parte la diferencia de su antecedente y consecuente, y, por otra parte, una razón inversa de la dada.

Propongamos que la diferencia sea 100 y la razón 3 / 2.

En una situación concreta el valor de cada una de las cantidades de la situación puede ser la pregunta de un problema, y cualquier conjunto de valores de cantidades, suficientes para determinar el valor de la cantidad pregunta, puede ser tomado como datos de un problema determinado. Si insuficientes, los datos de un problema indeterminado. De ahí que a una situación concreta le podamos asignar una colección de problemas que llamaremos **espacio de problemas de una situación concreta**. Por otro lado, dado lo dificultoso, por lo anotado, de enunciar problemas de ábaco a partir de una situación, aunque teóricamente sea concebible, renunciaremos a hablar del espacio de problemas de una situación y sólo lo haremos de situaciones concretas.

El espacio de problemas de una situación contiene una colección amplia de problemas que depende de la complejidad del grafo de la situación. Pero tal cantidad de problemas puede determinarse. Y los problemas enunciarse, fijadas previamente algunas características del problema, referentes, fundamentalmente, al número de cantidades que contiene la pregunta del problema.

Así, en la situación concreta HENO, que nos viene ocupando, siendo lo dado tres cantidades que no estén en una arista, éstas determinan todas las demás. A partir de ahí, podemos considerar que hay tantos problemas como el número de combinaciones de ellas que reúnan tales condiciones. Siéndonos indiferente que en la pregunta del problema conste una, dos, tres, o cuatro de las cantidades no tomadas como datos, lo que es una opción. Si la pregunta del problema versa sobre cuatro cantidades, la colección de problemas de la situación contiene 31 problemas. Sin embargo, podríamos aducir ante esta opción que la mención explicita en el enunciado de tantas cantidades facilita, por ejemplo, el análisis del problema. Lo que nos aconsejaría prudencia, al menos a efectos del análisis de la colección, y a considerar como elementos individuales de la colección de problemas, problemas en los que en la pregunta del mismo sólo se refiera una cantidad. Tiempo habrá y según las intenciones educativas de reunir estos elementos individuales en un único problema.

De la concepción del espacio de problemas de una situación y por cómo fue construido el grafico teórico del problema, se desprende que todos los problemas del espacio de problemas de una situación tienen el mismo grafo teórico.

En el anexo **A1** se muestra el estudio del espacio de problemas de la situación concreta tomada como ejemplo. Dicho estudio se ha hecho con una doble intención, una, proporcionar una imagen completa del espacio de problemas de una situación, y, dos, presentar algunos problemas del espacio de problemas de la situación, problemas para los cuales el problema mismo puede ser calificado de algebraico dado que carece de solución aritmética.

1.17.4.- Comparación de situaciones y espacios de problemas de una situación.

Como quiera que las situaciones vienen dadas por sus grafos esquemas y sus diccionarios de cantidades asociados, diremos:

Dos situaciones S y S’ concretas son semántica, operativa o semántica y operativamente isomorfas si sus grafos esquemas cargados semántica, operativamente, o semántica y operativamente son equivalentes. Esto es, si provienen de la misma situación.

Dos situaciones S y S’ concretas son equivalentes si son operativamente isomorfas y existe un isomorfismo que preserva además la estructura de cantidades. Esto es, el isomorfismo transforma extensivas en extensivas e intensivas en intensivas de la misma clase.

Precisando, el isomorfismo entre dos situaciones que queremos decir equivalentes debe ser indiferente ante los nombres de las cantidades, pero debe preservar el “modo de medir” las cantidades en una situación y su equivalente. El isomorfismo debe actuar pues de modo coherente sobre la componente **u** de la triada **(x, u, n)** utilizada para referir una cantidad. Como **u** es la unidad de un espacio de medida, lo que deseamos que el isomorfismo haga corresponder son pues los espacios de medida.

Así, sean S y S’ situaciones concretas, sean GE y GE’ sus grafos esquema, sean Ei los espacios de medida de las cantidades de S y El/ Ek los cocientes de dichos espacios, sean E’j los espacios de medida de S´ y E´n/E’m sus cocientes. Las situaciones concretas S y S’ son equivalentes si:

1) GE y GE’ son equivalentes.

2) Si **i** es un isomorfismo que transforma GE en su equivalente GE’, entonces **i** es tal que:

    Si c de S se mide en Ei y **i**(c) de S’ se mide en E’j, entonces para cualquier k de S que se mida en Ei, **i**(k) se mide en E’j.

    Si c de S se mide en El/Ek y **i**(c) se mide en E’n/E’m de S’, entonces para cualquier k de S que se mida en El/Ek , **i**(k) se mide en E’n/E’m.

De donde se desprende que:

Las situaciones equivalentes son susceptibles de ampliarse proporcionando situaciones ampliadas equivalentes.

Los espacios de problemas de dos situaciones equivalentes están constituidos por problemas equivalentes.

Que de la observación de la equivalencia de dos problemas, podemos obtener la equivalencia de los problemas de los espacios con las situaciones como intermediario.

Los grafos teóricos de los problemas de los espacios de los problemas de dos situaciones equivalentes son equivalentes.

Que es una conjetura interesante para contrastar por sus consecuencias: los grafos de soluciones de los problemas de situaciones equivalentes son equivalentes.

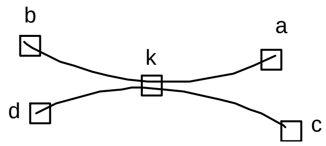
Y sería conveniente proseguir con este estudio de las situaciones y espacios de problemas de una situación con la finalidad de clarificar la diversidad de los problemas de la FPAA y de usar sus resultados en la práctica concreta de la enseñanza.

1.18.- Grafos generales para representar problemas de la FPAA.

Este punto no tiene otro objetivo que romper la limitación aparente adoptada en este estudio de restringir el mismo a los problemas de la FPAA que presentan únicamente relaciones ternarias entre cantidades. La limitación impuesta hasta aquí tenía, aparte de una excusa pragmática, las relaciones que en general se encuentran en los textos escolares son ternarias, una excusa metodológica y buscaba en lo posible una simplificación expositiva. El objeto matemático considerado para expresar lecturas analíticas era un grafo trinomial. La limitación impuesta a tal objeto matemático de que todas sus aristas tengan tres vértices puede fácilmente romperse permitiendo por un lado, que una arista pueda tener tres, cuatro, cinco o cualquier número de vértices superior a tres[8], y por otro, que el grafo en su conjunto pueda constar de varias de estas aristas entrelazadas.

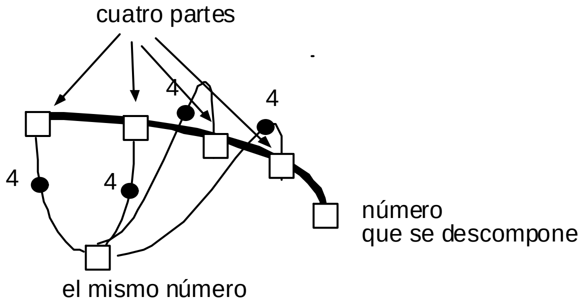
En los problemas de la FPAA escolares las relaciones no ternarias más frecuentes son las de proporcionalidad, y las de parte-todo, donde el todo se compone de más de dos partes. La relación de proporcionalidad ya indicamos en **1. 6** la posible vía de reducirla a dos relaciones ternarias así:

La relación a/b = c/d =k se representa



Un problema como DESCOMPONER EN 4 PARTES que implica una relación parte-todo en la que intervienen cinco cantidades se representa utilizando una arista de cinco vértices.

[8] El limite inferior debe mantenerse ya que representa el mínimo número de cantidades inmerso en una relación aritmética.

DESCOMPONER EN 4 PARTES.- Descomponer un número en cuatro partes de modo que si se resta 4 de la primera, se suma 4 a la segunda, la tercera se multiplica por 4, y la cuarta se divide por 4, se obtiene el mismo número en todos los casos.	

En otros problemas que implicasen relaciones de más de tres cantidades podría procederse de modo análogo.

1.19 .- Conclusiones

Relativas a los problemas:

1.- En un problema de la FPAA el conjunto de cantidades y relaciones entre las cantidades que debe contemplarse en la resolución es en general más amplio que el conjunto de cantidades mencionado en el enunciado.

2.- Aisladas individualmente las distintas relaciones entre las cantidades, los nexos de unión entre ellas vienen dados por cantidades que pueden interpretarse en varios sentidos.

3.- A un problema de la FPAA pueden asociársele textos intermedios fruto del uso en la resolución del método de análisis-síntesis. Un texto intermedio puede calificarse como aritmético o algebraico en función del SMS aritmético o algebraico que requiera la síntesis.

4.- A un problema de la FPAA puede asociársele con un modo de leer una o varias lecturas analíticas, dichas lecturas analíticas se pueden representar mediante grafos. Las lecturas analíticas pueden calificarse de aritméticas o algebraicas según el SMS necesario para obtener la solución en el grafo.

5.- Dada una lectura analítica algebraica, para ella pueden determinarse: el mínimo número de letras requerido para obtener la solución y el conjunto de ecuaciones equivalentes y no equivalentes que conducen a la solución.

6.- A un problema de la FPAA puede asociársele un grafo que llamamos grafo teórico del problema. En dicho grafo podemos decidir si el problema tiene o no solución con el único uso del sistema de signos de la aritmética (solución aritmética).

7.- A un problema puede asociársele una situación con el mero hecho de considerar como desconocidas todas las cantidades del problema considerado. A cada situación puede asociársele un espacio de problemas que comparten el mismo grafo teórico.

8.- Una manera de definir la equivalencia de problemas es considerar la equivalencia de los grafos de lecturas analíticas de los mismos.

9.- Una manera de definir la complejidad de los problemas es considerar las características del grafo de una lectura analítica mínima, por ejemplo: orden del grafo, genero de las aristas, orden de los nodos, etc.

10.- Se postula que la búsqueda de soluciones a los problemas de la FPAA tiene lugar en un espacio del problema específico, cuyas componentes se detallan en **1.15.2**

Relativas a lo que se consideran ingredientes del razonamiento algebraico en la resolución de problemas de la FPAA.

1.- La consideración inicial de todas las cantidades del problema en el mismo status, sin distinción alguna entre cantidades conocidas y desconocidas. Cualquiera de ellas, como cantidad susceptible de ser usada en la determinación de cualquier otra cantidad.

2.- El cambio de status de desconocido a conocido que sufre una cantidad por su mera designación por una letra.

3.- La aceptación de expresiones algebraicas como modo de expresión de cantidades.

4.- La consideración de cantidades que son conocidas (datos) como susceptibles de ser analizadas y determinadas.

5.- La disposición de al menos dos sentidos para referir algunas cantidades que posibilite la escritura de ecuaciones.

Capítulo 2

Descripción de actuaciones y errores en la resolución

2.0.-Introducción

Este es el primer capítulo, de los que componen ésta tesis, que incluye estudios de carácter empírico. En ellos, se presta atención a lo que hacen los estudiantes cuando se enfrentan a la tarea de encontrar "solución" al problema que se les propone. La teoría de niveles para el estudio de la RP, que aquí se utiliza, indica que nos encontramos ante estudios de nivel II, que contemplan al problema y al resolutor.

De entre los problemas de la FPAA utilizaremos en los estudios empíricos, casi exclusivamente, problemas que poseen lecturas analíticas algebraicas, problemas a los que designaremos problemas de lectura algebraica, PLA. Que un problema concreto de la FPAA es un PLA será mostrado acompañando el enunciado verbal del problema de un GT cerrado o mixto, que representa una lectura analítica algebraica y suficiente del mismo. Los resolutores serán estudiantes y el detalle de sus características, o de las que se tomó nota, se aporta en cada uno de los estudios que se presentan. Queda así, para la interacción problema resolutor, "lo que hacen los estudiantes cuando, y mientras, se enfrentan a la tarea de encontrar solución al problema que se les propone"[9], donde lo que hacen los estudiantes, en todo caso, debe ser observado.[10]

Compartimos con Newell y Simon (1972) que:

> "La resolución de problemas tiene lugar mediante la búsqueda en un espacio del problema. Esta es la principal invariante de conducta en la resolución de problemas que se mantiene tanto cuando se cambia de tarea como cuando se cambia de sujeto". (p. 809)

---

[9] Y dicho así, es lo bastante vago como para incluir síntomas o conductas como: enrojecer, temblar como un flan, mirar con cara de perro al profesor, frotarse las manos, entrar en trance, rascarse la cabeza o mesarse los cabellos, aplastar papeles, tachar con virulencia, poner a punto los retrovisores, etc., según : su carácter , la situación en la se le presenta el problema y las consecuencias que derivan de lo que haga, y u otros muchos etc. Sin embargo, estas conductas observables con un mínimo de aparato, sin duda que permiten hablar, por ejemplo: de la percepción por los estudiantes de la dificultad del problema - cara de perro, frotarse las manos-; que se puede abordar : peroo.., –rascarse la cabeza- , sin peros –mesarse los cabellos-, y a todo trapo- entrado en trance-; de los planes rechazados, mejorables o errores cometidos- tachando, aplastando-; de la imposibilidad de atacarlo- retrovisores en marcha-, etc.. De otro lado , cuando se pregunta que ha hecho -en pasado- un estudiante con o cómo ha resuelto un problema, se describe lo hecho en términos de lo que está establecido que el estudiante debería producir para ese problema a través de ciertos detalles al parecer esenciales; y si se responde con más precisión, se muestra una papel donde consta la producción del estudiante y se dice: mira.

[10] Es el caso, que de lo que hacen los estudiantes: lo que puede ser observado, lo que se observa o cae bajo observación, los medios de observación y las maneras de describir lo observado condicionan las preguntas que el investigador se hace o puede hacerse. Versen estas preguntas: sobre las maneras de resolver, los modos de razonamiento, los sistemas de representación, los sistemas de signos, el uso de letras, la concepción del signo igual, la presencia o ausencia de pensamiento algebraico, la dificultad de los problemas, los errores, el modelo de enseñanza, los procesos cognitivos involucrados o sobre cualquier otro ámbito que pueda interesar al investigador. Las preguntas se formulan desde una teoría y las respuestas se buscan en lo actuado por el resolutor. Ello obliga al menos que dichas preguntas se formulen de manera tal que informen, del modo más preciso posible, "de lo que debe ser observado" para que esto pueda ser tenido por respuesta.

En concreto, en **1.15** presentamos el espacio del problema de un problema de la FPAA, con la pretensión de tener una descripción del mundo donde ocurre la resolución de cualquier problema de dicha familia.

En esta tesis, el espacio del problema es el marco de referencia para la descripción de las actuaciones de los estudiantes. Así, cualquier pregunta que se plantee y cuya respuesta requiera de observación debe ser reformulada en términos de las componentes del espacio del problema, y explicitándola el máximo posible.

De ahí que, este capítulo se dedique a observar con detalle la actuación de estudiantes resolviendo un problema de la FPAA, e indagar, si lo observado puede ser descrito en los términos del espacio del problema postulado. Lo que, de ser así, puede tomarse como una corroboración de la pertinencia de los elementos y componentes del espacio del problema, para explicar y predecir, en dichos términos, lo que puede plantearse sobre la resolución.

Por otro lado, en cualquier actuación de los estudiantes pueden encontrarse errores. Lo producido por los estudiantes que se califica como error y un esbozo de un catálogo provisional de los errores que puedan ser observados en las resoluciones de los estudiantes de problemas de la FPAA, también se considera en este capitulo.

2.1.-Proceso de resolución, resolución, solución y resultado. De su observación.

El uso que de la adjunción de estos términos al término problema se hace en Puig (1996), pág. 34, es el siguiente:

Proceso de resolución, *la actividad mental y manifiesta que desarrolla el resolutor desde el momento en que, presentándosele un problema, asume que lo que tiene delante es un problema y quiere resolverlo, hasta que da por acabada la tarea.*

Resolución, *el conjunto de las acciones del resolutor durante el proceso de resolución.*

Solución, *la presentación final del conjunto de pasos que conducen de los datos a la incógnita*

Resultado, *lo que contesta a la pregunta del problema*.

Aquí, matizaremos el uso que haremos de esos términos para los problemas de la FPAA en particular.

El proceso de resolución como actividad mental es postulado obligado e inobservable. Sin embargo, tomado como actividad mental y manifiesta, esto es, que se da a conocer, es perfectamente observable. A esta actividad mental, expresada en términos de conducta como acciones del resolutor, es a la que arriba se denomina resolución. Otras conductas, que podemos considerar consecuencia de si no actividad mental si cerebral, las consideramos fuera de lugar dado que no se expresan en un Sistema Matemático de Signos.

.

La actividad mental de la que el resolutor da cuenta, o es capaz de dar cuenta, es fruto de un contrato “ad hoc” entre el resolutor y el investigador o de un contrato didáctico entre el estudiante y el profesor. Los contratos tratan, tanto del modo y código de comunicación, como de lo que de la actividad mental se debe dar cuenta. Esto es, de lo que la resolución debe contener. Así, por ejemplo, un estudiante que haya sido enseñado como aconseja Pluvinage (1993) incluirá en su resolución del problema, como etapa final, la redacción de la solución.

Las resoluciones que se consideran en los estudios empíricos de ésta tesis son frutos de contratos de naturaleza diferente entre estudiantes e investigador, cuya razón de ser se encuentra en las intenciones del investigador y las características de los estudiantes. Contratos no diferentes de los utilizados en otros estudios.

Así, cuando la intención del investigador es que el resolutor de cuenta lo más posible de su actividad mental, (Puig 1996, pág. 73), se sitúa a dos estudiantes frente a una pizarra y se les proporciona un clarión de tiza, el contrato explicito reza: “hablad en voz alta”. El registro audiovisual de la resolución queda como protocolo para su estudio. La capacidad de los estudiantes para dar cuenta del proceso de resolución precisa de cuidado en la elección de éstos, Puig utiliza estudiantes que siguen un curso de Resolución de Problemas en el estilo heurístico, y ahí, subyace implícito un contrato didáctico que señala a esos estudiantes, de entre lo que son capaces de dar cuenta, lo que es más pertinente y debe ser puesto en relieve.

Fernández (1997) está interesado en los sistemas de representación que utilizan los estudiantes para resolver problemas verbales algebraicos. Su registro de la resolución es escrito. Su contrato explícito con los estudiantes reza en todos los problemas de su instrumento de evaluación, “Resuélvelo como mejor sepas. Inténtalo de cualquier forma, sigue tus propias ideas y no dejes de hacer ningún paso que creas necesario. Explica cómo haces el problema”. En mi opinión, la intención de sus instrucciones, acorde con su objeto de estudio, es establecer un contrato que rompa algunas de las restricciones impuestas por el contrato didáctico implícito en las pruebas escritas, donde los estudiantes tienden a presentar únicamente la solución del problema, y expresada en los sistemas de representación y en las formas en que se consideran aceptadas, en la instrucción recibida por los estudiantes. Además, la coletilla, “Explica como haces el problema”, refuerza la intención añadida de tomar registro de la resolución.

Stacey y McGregor (2000), en un estudio en el que describen las “rutas desde el enunciado del problema a la solución”, léase aquí resultado, establecen éstas rutas a partir de “las soluciones escritas” de 900 estudiantes australianos de escuelas de secundaria, y mediante entrevistas con 30 estudiantes. En sus propias palabras: “The interviews gave us insights into students´ reasoning and explained much of the thinking underlying the writing solutions that we collected from the main sample”. Lo que puede ser considerado una muestra de que lo observado, con un tipo de registro, no se considera como fuente de datos suficiente, para hablar de lo que se pretende hablar, entre otras cosas, de las distintas rutas algebraicas y no algebraicas que siguen los estudiantes, desde el enunciado a la solución del problema.

En el capitulo 3 se estudiarán resoluciones de estudiantes, concretamente de 4º curso de la Licenciatura de Matemáticas, con los cuales se ha establecido un contrato que les prohibe expresamente obtener aquellas soluciones que requieran utilizar el lenguaje algebraico, esto es, se les priva de hacer uso de literales y ecuaciones en la obtención de cualquier solución del problema.

En estos casos y en cualquier otro, de lo producido por el resolutor queda un registro, audiovisual o escrito, del proceso de comunicación establecido. Esta producción es un texto, que da cuenta de lo que se supone su búsqueda intencionada de solución del problema, y es un texto matemático, que viene como tal, expresado en un determinado sistema matemático de signos. Dicho texto, además, constituye la fuente de los datos que se toman como evidencia.

El registro obtenido, esto es el texto, lo calificamos en el plano de la observación como la resolución del problema, y podemos tomar la decisión si ésta resolución contiene o no la solución del problema. Solución aquí no es resultado. En los problemas aquí considerados el resultado del problema siempre es un número o el valor de una cantidad. La solución, entendida como "la presentación final del conjunto de pasos que conducen de los datos a la incógnita", es del todo afortunado encontrarla en registros escritos de los estudiantes. Así, aquí se considera que una resolución contiene la solución del problema, si es posible, por un lector competente de la resolución, leer en ella: bien una secuencia de operaciones aritméticas ejecutadas o la expresión o expresiones aritméticas que involucran a los datos y proporcionan el resultado, bien un conjunto de expresiones aritméticas o algebraicas, que involucran los datos del problema y literales y una ecuación o sistema de ecuaciones cuya solución conduce al resultado. O, dicho con más precisión, si el lector de la resolución, provisto de la descripción del espacio del problema dada en **1.15,** encuentra en la resolución una solución aritmética o algebraica, tal y como allí fueron descritas. Otras resoluciones que proporcionan el resultado, y no contienen soluciones del tipo descrito arriba, son las resoluciones que utilizan el tanteo, donde los tanteos sucesivos y la organización de los mismos pueden tomarse como la solución.

2.2.- Actuaciones de estudiantes resolviendo un problema de la FPAA. Descripción de las resoluciones en el espacio del problema.

La intención de este punto es contrastar, si lo postulado como espacio de un problema de la FPAA, presentado en **1.15,** puede o no aseverarse y en qué medida. Para ello, se indaga si es posible describir la actividad de los estudiantes, a lo largo y ancho del proceso de resolución, sirviéndose de las componentes de dicho espacio.

En la indagación se utilizan tres actuaciones. Las tres actuaciones corresponden a parejas de estudiantes de la Escuela Universitaria del profesorado de E. G. B., que pertenecían al 2º curso de la especialidad de Ciencias y que seguían un curso de Resolución de Problemas. La descripción del curso puede verse en Puig (1966). Las resoluciones, que aquí se consideran, son los protocolos escritos de las actuaciones de los alumnos. Las actuaciones fueron video-grabadas y el modo de conducirse en la producción de las grabaciones audiovisuales y en la obtención a partir de ellas de los protocolos escritos constan en (Puig (1996, págs. 73-74). Los tres protocolos escritos de las actuaciones, que se consideran como base para la descripción en términos del espacio del problema, constan asimismo en el lugar anteriormente citado págs. 195-199, 208-216, 220-221.

El problema que se planteó a los estudiantes fue el problema HENO, problema profusamente estudiado en el capitulo 1, Las versiones del problema presentadas a las tres parejas difieren en los valores de las cantidades que son datos del problema. Ello se hizo en el momento de obtener los registros audiovisuales las grabaciones con la intención de evitar que los resolutores prestasen una atención excesiva a los cálculos o que la laboriosidad de su ejecución entorpeciese la observación de las características de la solución que eran el objeto de estudio. En cada caso se anota la versión del problema presentada.

2.2.1.- Notas metodológicas.

Previo a la descripción pormenorizada de las resoluciones en términos del espacio del problema, a partir de su descripción en los protocolos escritos de los cuales se parte, o si se quiere de la traducción de una descripción a otra, parece menester realizar algunas consideraciones tanto sobre el modo de presentar el análisis de las resoluciones como sobre el modo de leer dichas descripciones.

Tales consideraciones versan:

1.-Sobre los operadores.
2.-Sobre el uso del repertorio de habilidades.
3.-Sobre el fondo utilizado para representar las acciones de los operadores.
4.-Sobre la manera de organizar globalmente la descripción, los pasos y los estados que se muestran.

.

1-Sobre los operadores:

El conjunto Q de operadores que se presentó como componente 3 de espacio del problema consta de operadores elementales. Sin embargo, cuando se observa la actuación de los estudiantes descrita oralmente en los protocolos y ésta se trata de describir de nuevo utilizando este conjunto de operadores elementales, se encuentran instantes en los que los estudiantes muestran una conducta que sólo puede describirse como si se estuviesen utilizando de manera sucesiva, o si se quiere simultánea, varios de estos operadores elementales. Estos grupos de operadores corresponden a parejas o triadas de operadores que “naturalmente” se asocian. Así, por ejemplo los operadores:

ivc -- an -- dvc - para la mención de uno de los datos del problema.

ivc-- aar -- an -- cc -para la producción de una cantidad intermedia.

ia -- da -para la mención de una relación concreta entre dos cantidades.

En las descripciones que presentamos aparecerán en una línea la asociación de estos operadores que se muestran como actuando simultáneamente.

Por otro lado, un operador, por ejemplo **ia** , incorporación de arista, cuando actúa incorpora una arista al GT, pero no una arista cualquiera sino una arista determinada que relaciona unas cantidades determinadas del GT y no otras. Pues bien, en el detalle de la descripción de los operadores que se utilizan entre paso y paso, la mención a este operador se hará tantas y cuantas veces se halla utilizado en dicho paso, y las aristas concretas producidas se incluirán en el GT correspondiente al estado resultante. De análogo modo se procederá con otros operadores como: **al, aar, aal, an**.

En lo que toca a la incorporación de aristas, dos aclaraciones más son necesarias:

La primera, se refiere a la relación aditiva o multiplicativa a que tal arista puede referirse en un estado determinado. Para ello utilizaremos el operador:

> **da** - denominación explicita, mención al uso o uso de la relación aditiva o multiplicativa representada por una arista.

La segunda, a la representación de relaciones no ternarias entre cantidades, como es el caso de la relación de proporcionalidad entre cuatro cantidades. Para la consideración del uso de una relación de proporcionalidad utilizaremos el operador **irp** e incorporaremos al grafo trinomial las dos aristas que el uso de tal operador comporta. Además, se superpondrán al grafo segmentos horizontales, que rememorando el esquema de la regla de tres, señalen de modo preciso las cantidades involucradas en la relación de proporcionalidad.

En cuanto toca a los operadores que se refieren a asignaciones, principalmente en las asignaciones que van ligadas a los vértices, puede ocurrir, como es el caso en las actuaciones que se analizan, que en el transcurso de la resolución se produzca un cambio o varios cambios en lo ya asignado a un vértice, esto es, que ocurra una reasignación. Indicaremos este hecho precediendo con **n-** a los operadores reutilizados sobre los mismos vértices. Por ejemplo: **n-dvc** indica a la denominación con otro nombre o un nuevo nombre a la cantidad representada en un vértice claro. De análogo modo procederemos con otros operadores.

2.-Sobre el uso del repertorio de habilidades:

En las descripciones que se presentan, no se hará ningún comentario, salvo excepciones, del uso de las herramientas aritméticas o algebraicas o de la destreza manifestada en su uso por los estudiantes y que el lector puede apreciar en los grafos de la resolución del problema que siguen a las descripciones, donde se encuentran las expresiones aritméticas y algebraicas producidas.

Respecto a las maneras de resolver utilizaremos explícitamente las etiquetas de Puig (1966), allí donde utilice alguna para describir el plan y su manera de describirlo. Cuando esto no ocurre así, le asignaremos una etiqueta para su uso y daremos una breve descripción de ella.

En lo tocante a la incorporación o no a las descripciones presentadas del uso del arsenal de mecanismos de gestión, control y decisión, el asunto es más delicado. El uso de tales mecanismos se desencadena en determinados estados, y éste uso se pone de manifiesto en episodios de conducta llamados de transición, que se dan entre otros episodios etiquetados como análisis, ejecución, etc. Así las cosas, el análisis y la división del protocolo escrito en episodios, debe hacerse ad hoc para mostrar el uso de tales mecanismos, ésta es la metodología usada por Schoenfeld (1983). En nuestro estilo de descripción, lo dicho, supondría detenerse obligatoriamente en cada uno de los estados en que se encuentran los resolutores en el último item de un episodio del protocolo escrito que en el item siguiente de pie a un episodio de transición; para pasar a continuación, a describir por medio de un GT y su diccionario de cantidades asociado alguna de las maneras de manifestarse estos mecanismos como las mencionadas en la componente 5.3 del espacio del problema. Así del uso de estos mecanismos sólo se dará algún detalle en la resolución de M y J. Proceso de resolución "que tiene como una de sus características más notables la gestión continuada de lo que se esta haciendo" (Puig1996, pág.199).

3.-Sobre el fondo en el que representar la actuación de los operadores:

En los grafos completos o incompletos que acompañan el análisis se partirá del fondo gris del GT correspondiente a una lectura analítica mínima y suficiente del problema del HENO. Sobre este fondo, se irá coloreando el GT del corriente estado que se obtiene como consecuencia de haber utilizado un operador o una serie de ellos, operadores que se indican en cada caso.

Se reservará el color azul para el uso "correcto" de un operador y rojo para el incorrecto. Idénticos códigos de color se utilizarán en el diccionario de cantidades asociado. Se utilizaran otros colores cuando el uso de los operadores no puede calificarse, pertinentemente, como correcto o incorrecto, o bien, cuando se trate de dar cuenta de acciones que parecen apuntar al uso de operadores contemplados en la lista anterior pero con un uso singular o el uso de algunas habilidades del repertorio. En cada caso que esto se haga, se hará la indicación pertinente.

4.-Sobre la manera de organizar globalmente la descripción, los pasos y los estados que se muestran.

La descripción del análisis de la resolución se presenta en instantáneas sucesivas que muestran estados de conocimiento en los cuales elegimos detenernos, previa indicación de los operadores que nos permiten pasar de un estado a otro. La elección de los estados en los cuales decidimos tomar dicha instantánea para la ilustración del análisis no ha sido realizada arbitrariamente. La elección del estado de detención no siempre coincide con episodios o sub-episodios a los cuales sigue otro de transición. Esto es, el análisis para la descripción no ha sido, en todos los casos ni escrupuloso ni respetuoso en lo que dicho análisis podría tener de dar cuenta de la gestión del proceso de resolución, pero sí se ha procurado agrupar, en un paso, por ejemplo: varios item en los que se decide y se produce en una dirección u en otra, item en los se indica lo que puede producirse, item en los que se produce duda o una decisión de rechazo. Y por otro lado, se ha procurado, en distinto modo, formar grupos de item en los que lo producido en ese grupo se juzga en cantidad suficiente, ya que en el caso de que se añadiese a dicho grupo lo producido en los item que siguen, la lectura de la descripción sería cuanto menos laboriosa sino dificultosa.

En definitiva, las instantáneas mostradas congelan en una imagen no un instante sino un momento, momento que es la suma de los instantes en los que ocurren la serie de sucesos acaecidos en los item señalados, sucesos que podríamos describir uno a uno, asociando el acaecimiento de uno de ellos con el uso de uno de los operadores elementales, o de las parejas o triadas, etc., de estos operadores. Operadores que son precisamente los que se intercalan entre las instantáneas sucesivas. Éstas mal llamadas instantáneas son las que tomamos aquí como estados de conocimiento.

2.2.2.- La actuación de R y S.

La versión del problema presentada a R y S fue la siguiente:

Unos granjeros almacenaron heno para 55 días, pero, como el heno era de mejor calidad de lo que pensaban, ahorraron 240 kg por día, con lo que tuvieron heno para 67 días. ¿Cuántos kilos de heno almacenaron?

2.2.2.1.-Comentarios previos.

El enfoque utilizado por R y S para resolver el problema "puede modelarse por el método de Análisis-Síntesis".

No encontramos en Puig (1996) ninguna división del Protocolo de R y S en episodios. La explicación de esta omisión puede provenir del hecho que la resolución del problema ocupa únicamente 24 item. El resto de los item del protocolo están dedicados, por un lado, a la revisión de la solución item 30-54, y, por otro, al análisis de una cantidad no considerada en la solución: el heno diario previsto, item 62-153.

Dado que la resolución de R y S puede considerarse como la de un resolutor ideal, en la descripción que sigue utilizaremos:

-(R y S)1 para dar cuenta del estado de conocimiento que se exterioriza después de la ingestión de la lectura y a continuación de la evocación del esquema de la regla de tres.
-(R y S)2, (R y S)3, (R y S)4, para los estados de conocimiento en los cuales se esboza un plan y se cuestiona alguno de sus componentes.

-(R y S)5, (R y S)6, (R y S)7 para seguir los pasos de la ejecución del plan adoptado, en la cual se determinan las cantidades intermedias que se corresponden con las incógnitas auxiliares apuntadas en el plan.

-(R y S)8, para la revisión-comprobación.

y por último (R y S) 9 para mostrar dos análisis diferentes de la cantidad heno diario previsto.

2.2.2.2.- Descripción de la actuación de R y S en términos del espacio del problema.

{1} S: Parece que sea una vulgar regla de tres, ¿no?

{2} R: Simplemente, no.

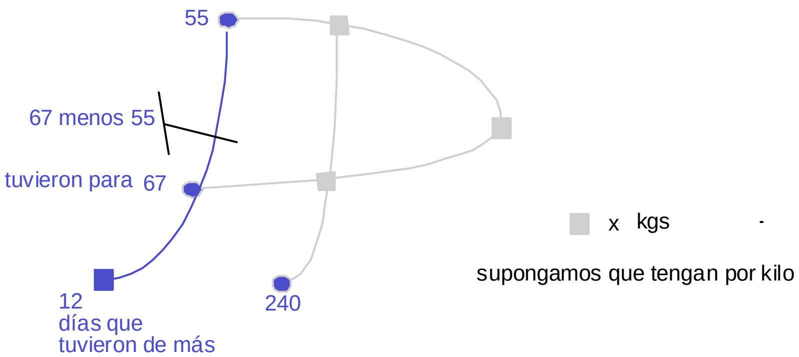
{3} S: ¡Yo qué sé! Parece una regla de tres.

{4} S: Heno para cincuenta y cinco días... Ahorraron doscientos cuarenta kilos por día... Y tuvieron para sesenta y siete días. 67 menos 55 serán los días que tuvieron de más, ¿no? (Escribe 67- 55.) Doce días... ¡Jo!

{5} R: (Ríe) No sé...

{6} S: Yo qué sé..., pongamos que tengan por kilo, ¿no? (Escribe '*x* kg') Y ahorran 240 kilos por día.

ivo, an
ivo, an, dvo,
ia, da
ivc, dvc, aar, cc, an
an

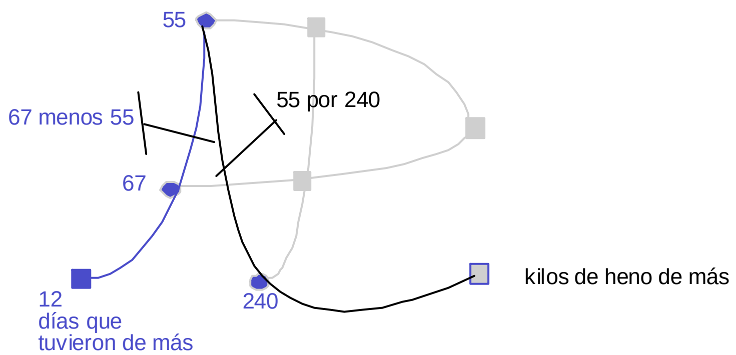


(R y S)1

{7} R: Pero eso en 55 días.

8} S: Sí. Pues 55 por 240, eso serán los kilos de heno de más... Entonces sabremos lo que vale un día; lo multiplicamos por 55, y ya lo que ellos habían calculado..., para 55... Sí, ya está, ¿no?

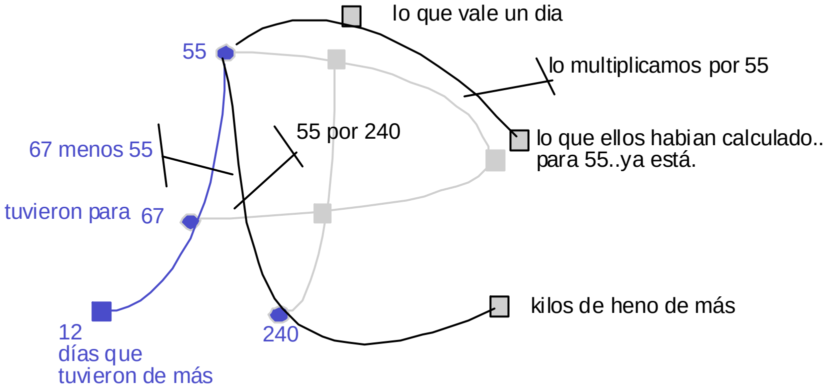
ivc, dvc
ia, da,



(R y S)2

8} S: Sí. Pues 55 por 240, eso serán los kilos de heno de más... Entonces sabremos lo que vale un día; lo multiplicamos por 55, y ya lo que ellos habían calculado..., para 55... Sí, ya está, ¿no?

ivc, dvc
ia, da
ivc, dvc



(R y S)3

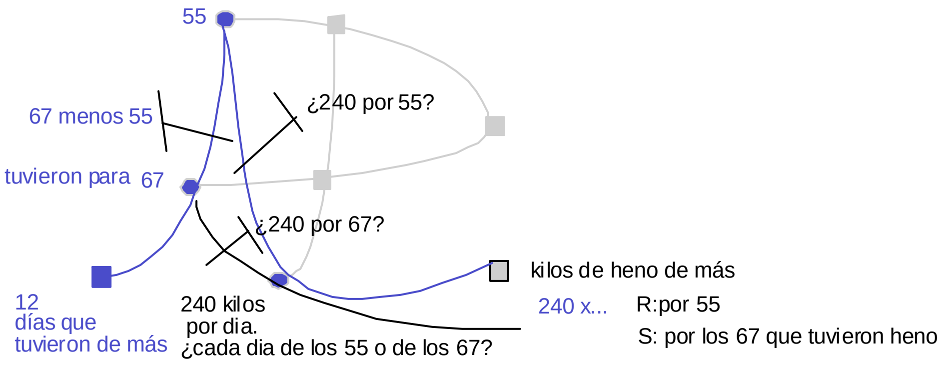
{9} R: Eso no tiene gracia.

{10} S: Yo que sé. 240 por día (escribe 240x...)

{11} R: Por 55...

{12} S: ...por los 67 días que tuvieron heno... Sí o no, pero espera..., l'últim dia no varen estalviar res. És que jo no entén el problema..., son 240 kilos por día, pero, ¿cada día de los 55 o de los 67?

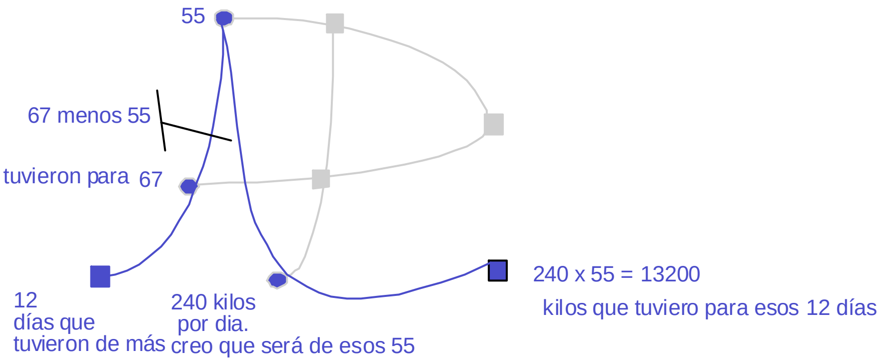
ia, da
¿¿ da, aar. O da, aar ??



(R y S)4

{13} F: Eso yo no sé si lo explica bien el problema. Esos kilos los ahorraron por día...
{14} S: Pero es que...
{15} R: Durante esos 55 días.
{16} S: Pero no puede ser..., porque el último día no pueden ahorrar 240 kilos.
{17} F: Piensa un poquito qué es el ahorro, qué quiere decir que ahorraron..., y a lo mejor...
{18} S: (Lee) "Unos granjeros..., el heno almacenado era de mejor calidad..., y ahorraron..." Yo creo que será en esos 55. Será 240 por día de esos 55 que pensaron, y entonces tuvieron para los 67. Multipliquemos (escribe 240x55=13200). Y esos kilos son los que tuvieron para esos 12 días, ¿no? (Divide 13200 por 12 en la pizarra con el algoritmo usual.)

aar, an. cc, n-dvc

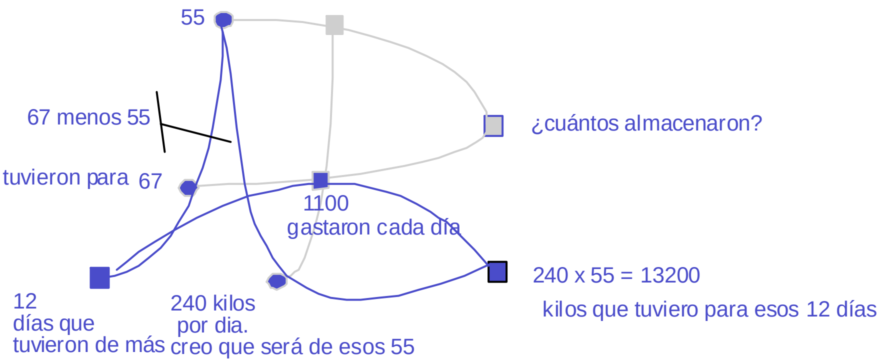


(R y S)5

{18} S: (Lee) "Unos granjeros..., el heno almacenado era de mejor calidad..., y ahorraron..." Yo creo que será en esos 55. Será 240 por día de esos 55 que pensaron, y entonces tuvieron para los 67. Multipliquemos (escribe 240x55=13200). Y esos kilos son los que tuvieron para esos 12 días, ¿no? (Divide 13200 por 12 en la pizarra con el algoritmo usual.)
{19} R: Está bien. ¿Cuánto da?
{20} S: 1100 kilos.
{21} R: Pregunta cuántos almacenaron.
{22} S: Eso es lo que gastaron cada día.

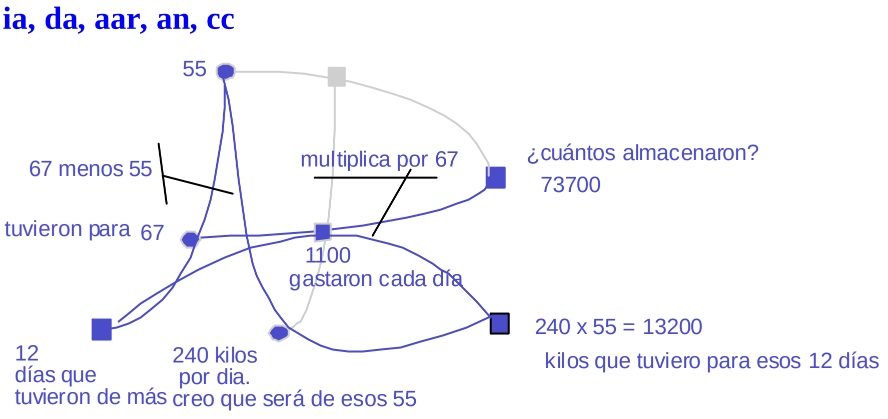
ivc, ia, da

aar,an,cc, dvc



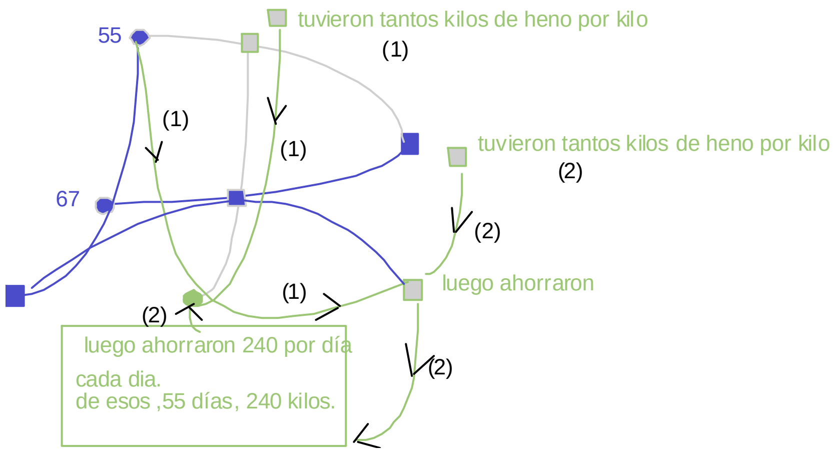
(R y S)6

.
{21} R: Pregunta cuántos almacenaron.
{22} S: Eso es lo que gastaron cada día.
{23} R: Multiplicamos por 67.
{24} S: (Multiplica 67x1100.) 73700 kilos. Ya está.



(R y S) 7

28} S: Hombre, si es lo que hemos pensado, tiene que estar bien. ¿Sí o no?
{29} F: A ver si nos explicáis qué habéis pensado. Un poquitín.
{30} S: ¡Uy! Pues que tuvieron tantos kilos de heno por kilo, pero luego se ahorraron 240 kilos cada día...
{31} R: Cada día...
{32} S: ...de esos 55 días, 240 kilos...
{33} R: Son los 13200.
{34} S: Luego, esos 13200 tuvieron para...
{35} F: ¿Esos 13200 qué? A ver..., explícame 13200, esa cantidad.
{36} S: Kilos, 13200 kilos son los que ahorran esos 55 días, y tuvieron para pasar los 12..., los 12 de más de los que pensaban. Lo dividimos por 12 y nos salen 1100 cada día.
{37} F: ¿1100 qué?
{38} S: 1100 kilos.
{39} F: ¿Cada día qué?
{40} S: Que utilizaban cada día.
{41} F: Que consumían o utilizaban.
{42} S: Que consumían cada día..., y lo multiplicamos por 67 días..., y ya está.
{43} F: ¿Y lo multiplicas por 67 y tienes qué? Aquellos kilos son los...
{44} R: Los totales, los totales.
{45} S: Son..., los kilos que han utilizado en total. 67 días a 1100 kilos cada día..., los que habían ahorrado... Habían ahorrado eso, si hubieran ahorrado éstos (señala 73700) en un principio...
{46} R: No, eso sería los almacenados en total.
{47} S: Los que habían almacenado, eso.
{48} F: A ver, los que habían almacenado, ¿cómo los has calculado? A ver.
{49} S: ¿Los que habían almacenado, cómo los hemos calculado?
{50} F: Sí, porque ahí...
{51} S: Hemos visto los que han ahorrado, 240 kilos cada día, durante 55 días, que es los que tenían previstos. Han ahorrado 240 días, pues han ahorrado estos kilos, 13200 kilos, es lo que ellos..., no tenían, han ahorrado, que no pensaban que les iban a sobrar después de esos 55 días.
{52} F: Eso ha supuesto..., que los utilizan para...
{53} R: Los 12 días.
{54} S: Esos 12 días que les pasan de más de 55 días.



(R y S) 8

La revisión del problema concluida lo que sigue es el resto de protocolo verbal ante una pregunta que pide determinar una cantidad no contemplada en la resolución.

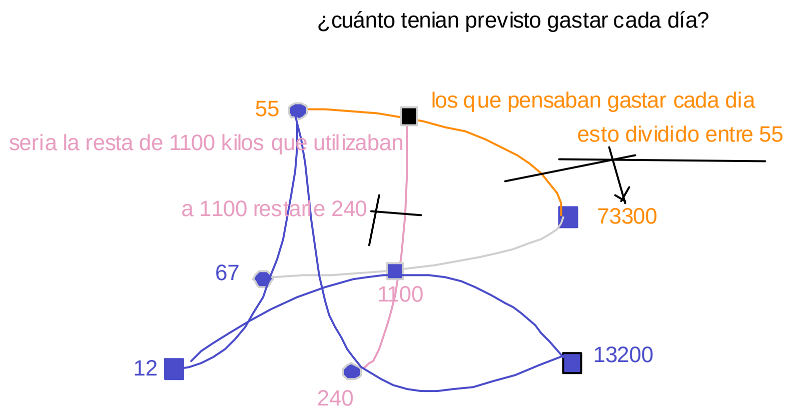
{61} F: ¿Me podéis decir cuánto tenían previsto gastar cada día? Aunque no lo pregunte el problema.

{62} S: Sí, ¿no?
{63} F: No lo sé.
{64} S: Tendríamos que descontar estos...
{65} F: A ver si me lo podéis contestar.
{66} S: ¿No?
{67} R: Yo creo que no.
{68} S: Vamos a pensar... ¡Yo qué sé!
{69} R: Si ésos son los que tienen que gastar al día y ahorraron 240 al día..., sería...
{70} S: Pues sería...
{71} R: ...sería la resta de 1100 kilos que utilizaban...
{72} S: Claro, 55 por éstos (señala 1100).
{73} F: Ésos son los que pensaban gastar..., cada día.
{74} S: No, los que pensaban gastar cada día sería esto (señala 73700), dividir entre 55..., 73700; los que tenían, tendrían que tener para 55 días, pues dividir eso entre 55.
{75} F: ¿Crees que es lo mismo que proponía Rosa?
{76} S: No.
{77} R: No.
{78} S: No, porque aquí...
{79} F: Pensarlo un poquito.
{80} S: No, porque aquí influye ya..., que era de buena calidad.
{81} F: No lo sé..., creo que no estáis pensando muy bien... Vamos a ver, a ver si me acuerdo: Rosa me dice de calcular lo que tenían previsto restándole a esto (señala 1100) 240 kilos.
{82} R: Y eso es lo que consumen.
{83} F: Tú me dices dividiendo esto (señala 73700) por...
{84} S: Por 55.
{85} F: ...por 55. A ver si os ponéis de acuerdo.
{86} S: La pregunta es: ¿cuánto heno pensaban gastar cada día?
{87} F: La pregunta que yo os he hecho es: ¿cuánto heno pensaban gastar cada día? (Lo escribe en la

pizarra mientras lo dice.)
{88} S: (falta)
{89} R: (falta)
{90} S: Si tenían que gastarlo..., cada día..., tú divides entre 55.
{91} R: Eso es lo que pensaban en un principio, porque ahorran después esos 240 kilos.
{92} S: Eso es lo que tenían, si lo ahorran o no, es igual; eso es lo que tenían.
{93} R: Sí, eso es lo que tenien pensat en un principi.
{94} S: Pues dividimos por 55 y sabemos lo que habían gastado.
{95} R: Ya.
{96} F: ¿Tú por qué habías dicho eso que decís de restar?
{97} R: (falta)
{98} F: Han gastado..., ¿más de lo que pensaban o menos de lo que pensaban?
{99} R: Gastan menos, menos de lo que pensaban.
{100} F: Gastan menos de lo que pensaban... ¿Y esto (señala 1100) qué es?
{101} R: Lo que gastaban cada día.
{102} F: ¿Y entonces por qué me has dicho que habría que restar?
{103} S: ¿Restar el qué?
{104} R: A 1100, restarle 240 kilos.
{105} F: Si no me acuerdo mal, tú me has dicho, "si a esto (señala 1100) le resto 240 kilos tengo el heno que gasto cada día" o algo así, parece que cuando se tienen 1100 menos 240...
{106} R: Sí.
{107} F: Bueno, el heno que preveían gastar cada día; pero bueno..., ¿gastan más o menos de lo que pensaban?
{108} R: Menos.
{109} F: Y eso es lo que te ha inducido a pensar restar.
{110} R: (falta)
{111} F: ¿Y ahora qué tendrías que haber hecho?
{112} R: Ahora, sumarle.
{113} F: Pensar eso: ¿daría lo mismo si ahora, después de este matiz, los kilos que tenían previsto gastar de las dos formas...
{114} R: Tú tienes...
{115} F: ...daría lo mismo?
{116} S: ¿Cómo, restando o sumando?
{117} R: No, no; sumando, sumando.
{118} R: Sumando.
{119} S: (Ríe.)
{120} R: (Ríe.)
{121} F: No sé si os he perdido demasiado...
{122} S: Yo es que no..., no me llego a enterar.
{123} F: A ver si vuelvo a hacer la pregunta. El problema ya parece que lo tenéis resuelto. Yo, cuando habéis hecho esto, he pensado que podía preguntar cuánto heno pensaban gastar cada día; como esta cantidad (señala 1100), cuando he preguntado, me habéis dicho que es la que gastaban cada día...
{124} S: Sí.
{125} F: ...la que gastaban, no es la que preveían gastar...
{126} S: No.
{127} F: ...por eso os he preguntado la cantidad que preveían gastar...
{128} R: Sumando.
{129} F: ...o la que pensaban gastar.
{130} R: Es la que pensaban gastar. No, no.
{131} F: Por eso me he quedado todo extrañado cuando tú me has dicho que...
{132} S: Tendrías que sumar (señala 1100 y 240).
{133} R: Sumando, sumando es la que preveían gastar ellos cada día.
{134} S: No, pero teníamos que... No, porque habíamos supuesto que era 55, y si lo sumamos, estamos pensando ya que es para... Entonces, no se podría sumar.
{135} F: ¿Cómo que...? A ver...
{136} S: Que estos 240 kilos los ahorra en 55 días, y esto..., este 1100 es en 67 días, lo que gasta cada día de los 67. Entonces no los podemos sumar, no podemos sumar.
{137} F: ¿Por qué no se puede sumar? ¿Son la misma cosa o no? Para sumar tienes que decidir... ¿O quiere decir que no tiene sentido la cantidad que averiguarías al sumar?

{138} S: Yo creo que no.
{139} F: Vamos a ver éstos (señala 1100) qué son.
{140} S: Esto son los kilos por día en los 67, y estos 240 son los que ahorran cada día (señala 55).
{141} F: Vale. ¿Y la relación entre los que han gastado y los que ahorran a qué lleva?
{142} S: La relación entre los que han gastado...
{143} F: Y los que ahorran.
{144} S: No lo sé.
{145} F: ¿No lleva a esto (señala ‘heno que pensaban gastar’)?
{146} S: (Hace gestos de negación.) Heno que pensaban gastar cada día es esto (señala 73700) dividido entre 55.
{147} F: ¿Ése es el que pensaban gastar cada día o el gastado realmente?
{148} S: El que pensaban gastar cada día.
{149} F: Éste (señala 1100).
{150} S: Este 73700 dividido entre 55.
{151} F: Divide.
{152} L: No lo hagas, da 1340. ¿Para qué os vais a entretener dividiendo? Da 1340.
{153} S: (Ríe.) Es que no lo comprendo.

La discrepancias mostradas por R y S en los item anteriores se muestran el grafo



(R y S)9 el análisis de Rosa

el análisis de Salva

2.2.2.3 La ruta de la solución, el grafo de la resolución y la componente n del diccionario de cantidades de la resolución de R y S.

-Ruta de la solución- fig(a): .

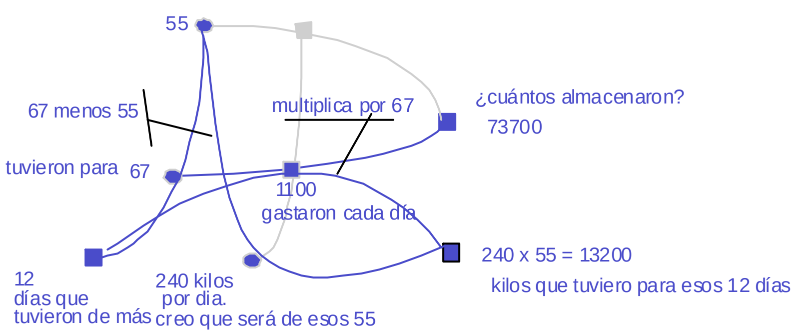


fig.(a)

Grafo de la resolución de de R y S, fig(b), en el que se muestran la componente **x** del diccionario de cantidades. En éste último se distinguen en lila y naranja las aristas controversia de Rosa y Salva

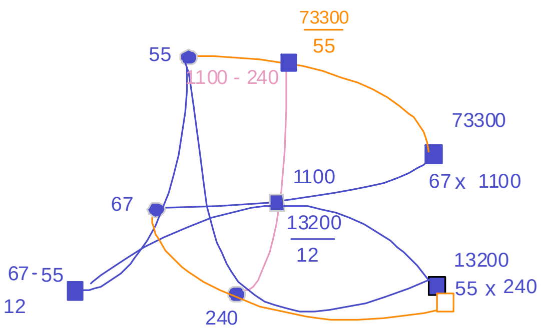


fig.(b) .

-La componente **n** del diccionario de cantidades de la resolución de R y S:

Para Días

días previstos	**días reales**	**días de más**
únicamente, por su número: 57	tuvieron para 67 días	días que tuvieron de más
días previstos (en la revisión)		12 días más de lo que pensaban.

Para Heno por día

Heno previsto	**heno ahorrado**	**heno consumido**
lo que vale un dia	heno ahorrado por día.	gastaron cada día
	240 kilos por día ¿cada día de esos 55 o 67?	que utilizaban
	ahorraron 240 por día , cada día, de esos, 55 días	que consumían cada

Para Heno:

heno almacenado	**heno ahorrado total**	**heno consumido días de más**
almacenaron	kilos de heno de más	kilos que tuvieron para esos 12 días
los que ello habían calculado para 55	13200 kilos ahorraron esos 55 días	

2.2.3-La actuación de M y J

La versión del problema presentada a M y J fue la siguiente:

Unos granjeros almacenaron heno para 57 días, pero, ahorraron 113 kg por día, con lo que tuvieron heno para 73 días. ¿Cuántos kilos de heno almacenaron?

2.2.3.1.- Comentarios previos

El protocolo de M y J se divide en los siguientes episodios:

Análisis:	item 1-22,
Ejecución:	item 22-35,
Verificación:	item 36-51
Ejecución :	item 52 ,
Verificación:	item 53-215,
Sugerencias externas:	item 216-222
Ejecución:	item 224-254

episodios que como se ha dicho no se corresponderán exactamente con las instantáneas mostradas.

El método usado en la resolución del problema lo denominaríamos MIAS de acuerdo con Rubio.

En este método se conciben los enunciados de los problemas como descripciones de "situaciones reales" o "estados de un mundo posible", en los que tales textos se transforman a través de oraciones analíticas, esto es, utilizando "hechos" validos en "todo mundo posible", o en otras palabras, la resolución de un problema verbal aritmético/algebraico mediante el MIAS se da como el producto de inferencias lógicas que actúan como descripciones de las "situaciones posibles" hasta llegar a una que se reconoce como la solución del problema. (Rubio, 1994 pág. 17).

En la solución del problema, M y J se sirven casi exclusivamente de herramientas aritméticas, entre las que cuenta el esquema de la regla de tres, esquema cuyo uso inadecuado les conduce al error. El uso de literales y la escritura de una ecuación únicamente se da alrededor del Item 187 para expresar la cantidad de heno almacenada, ya calculada por otra parte. Por otro lado, aún sin incidir en los mecanismos de gestión y control, como:

"El proceso de resolución de M y J tiene como una de sus características más notables la gestión continuada de lo que se está haciendo….Así, se gestiona el análisis del contenido del enunciado, se gestiona una y otra vez el significado de las cantidades que se elaboran,…se verifica el significado de las cantidades involucradas y las relaciones entre ellas, …" (Puig 1996, págs. 199-200).

para la descripción de la actuación de M y J, intercalaremos comentarios que denotan la presencia de estos mecanismos y que apuntan el sentido de lo que hacen los resolutores en alguno de los momentos descritos.

2.2.3.2.- Descripción de la resolución de M y J en términos del espacio del problema.

1} J: Tuvieron para 73 días, así que, vamos a ver..., vamos a ver para cuántos días más tuvieron de los que pensaban. Tuvieron para 16 días más de lo que pensaban.

{2} M: Tuvieron para 16 días más. (Escribe en la pizarra 'tuvieron para 16 días más'.) Vamos a ver...

{3} J: Y ahorraron por día..., cada día ahorraron 113 kilos.

{4} M: (Escribe 'ahorraron cada día 113 kilos')

{5} J: Si acaso utiliza..., lo de los 57 días..., que tú dices también...

{6} M: Ellos compraron...

{7} J: Cuántos kilos de heno almacenaron es la pregunta, cuántos kilos almacenaron.

{8} M: (Escribe 'compraron para 57 días'.) ¿Y qué más datos tenemos? Y tuvieron para 73 días.

{9} J: O sea, la cuestión es..., que calcularon...

{10} M: Exactamente, cuánto heno necesitaban para 57 días calcularon, o sea, el heno necesario para 57 días, pero, como ahorraban, resulta que al final tuvieron para 73 días.

estado de la pizarra:

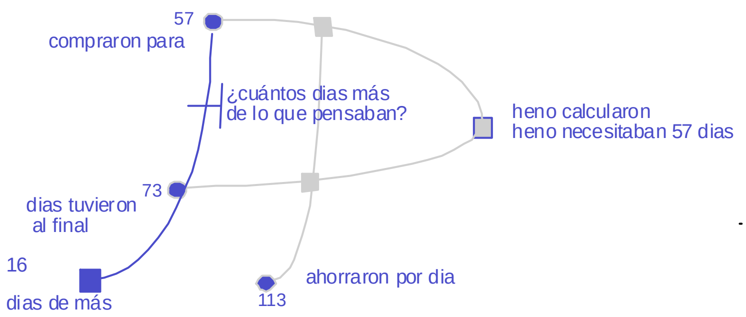
tuvieron para 16 días más

ahorraron cada día 113 kg

compraron para 57 días

Operadores :

ivo, an, dvo
ia, da
ivo, an. dvo
ivc, aar, an, dvc
ivo, an. dvo
inc, ndv, n-dvc



(My J)1

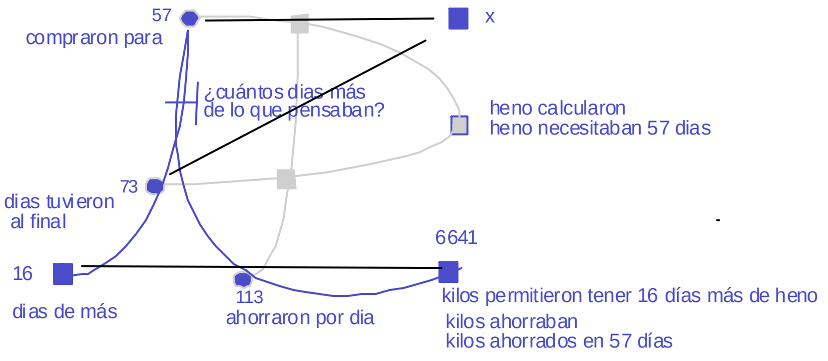
{11} M: O sea, la diferencia de 16 más ya lo tenemos ahí.
{12} J: Mira, cada día de los 57 días, cada día ahorraron 113 kilos; vamos a ver cuántos kilos ahorraban.
{13} M: De acuerdo, son 57 días por 113 kilos (hace la multiplicación y obtiene 6441).
{14} J: Y eso será los kilos que ahorraron a los 57 días. Y esos kilos que ahorraron son los que les permitieron el tener 16 días más de heno; de todas formas son 16..., si 73..., sí son 16.
{15} M: (Para poner nombre a la cantidad.) Eso para...
{16} J: Kilos ahorraron... Es lo que iban gastando, pero ahorraron eso.
{17} M: ...en 57 días. Eso es lo ahorrado.
{18} M: Ahorraron...
{19} J: Ahorrados.
{20} M: Ahorrados. (Escribe ‘6441 ahorrados en 57 días’.)
{21} J: Y, claro, los ahorraron en estos días.
{22} M: En 57 días.
{23} J: Entonces ahora está claro, ¿no? Si con estos..., si con estos kilos lograron aguantar 16 días...
{24} M: 16 días más.
{25} J: ...ahora con esa proporción sabremos el tiempo, o sea, lo que calcularon ..., almacenaron para aguantar los 57 días, ¿entiendes o no?
{26} M: No.
{27} J: Vamos a ver.
{28} M: Vamos a ver.
{29} J: Si con 6441 kilos ellos aguantaron 16 días (escribe ‘6441------ 16 días’), porque a partir del 57 día en realidad se les hubiera acabado el heno, entonces...
{30} M: Tuvieron 16 días más.
{31} J: Exactamente, tuvieron 16 días más. Entonces, si esto que ahorraron lo gastaron en 16 días, pues, si en vez de 16 días ponemos 57..., no sé si 57 o 73.

ia , da, ivc

aar, an, dvc,cc, n-dvc, ndvc

ivc, al, irp1

irp2



(M y J)2

El color negro se ha utilizado para mostrar los esquemas de regla de tres considerados

{32} M: Ahí está el problema realmente, o sea, que 6441 kilos gastaron en 16 días...
{33} J: Esto es lo que..., esto es lo que ahorraron (señala 6441), lo que tuvieron almacenado después de los 57 días, esto les permitió aguantar 16 días más. Entonces vamos a ver cuántos kilos ahorraron y entonces..., está claro, 57 días, son 57 días porque son lo que calcularon (escribe '*x* —– 57 días') que tenían que almacenar, no lo que aguantaron, eso ya surgió después por el hecho de ahorrar. Entonces...
{34} M: Vamos a hacer eso, haz la división de eso.
{35} J: En principio parece que es esto (escribe $\frac{6441 \times 57}{16}$). De todas formas vamos a pensarlo otra vez.
{36} M: Vamos a repasarlo otra vez, vamos a ver...
{37} J: Vamos a ver..., ahorraron tanto por día, así que al acortar 16 días, en realidad ahorraron..., entonces ahorraron 113 por 57. ¿La operación estaba bien?
{38} M: Sí, sí.
{39} J: Veamos, ahorraron eso, esto quiere decir que..., o sea, está muy claro, ¿no?, 6441 kilos; si aguantaron 16 días, un día entonces necesitaban por kilos, ¿no?

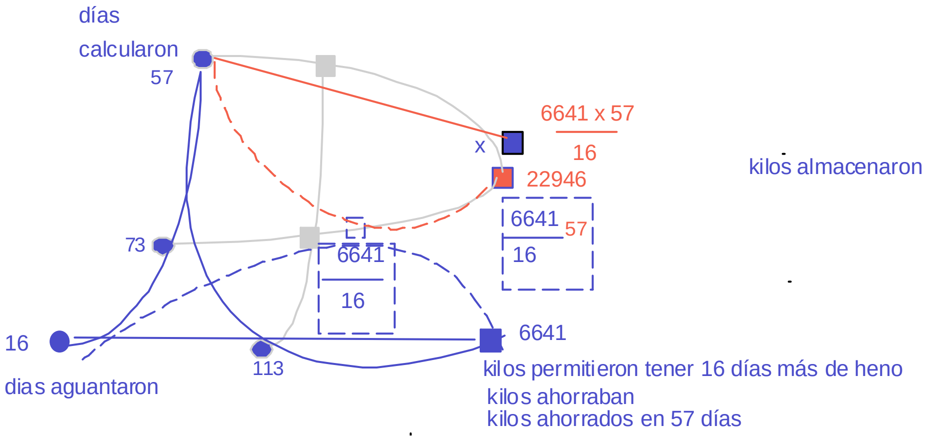
(Escribe: 6441 kg ---- 16 días
x ------------ 1 día)

O sea, necesitaban determinados kilos, pues estos kilos..., estos kilos son en realidad los que ellos calcularon que necesitaban por día.
{40} M: Por día.
{41} J: Entonces multiplicamos los kilos que necesitaban por día por los días que necesitaban tener heno; entonces, si esto..., vamos a ver...
{42} M: Esto se va. Son 6441 kilos que gastaron en 16 días. Entonces vamos a ver lo que gastan en un día. (Explicando sobre la regla de tres escrita.)
{43} J: En realidad eso no nos es importante...
{44} M: No, ya, ya, ya.
{45} J: ...sólo es para comprobar que está bien planteado.
{46} M: Son los 57 días..., que tenemos aquí (señala la otra regla de tres).
47} J: Este resultado..., este resultado (se refiere a la *x* de la segunda regla de tres) multiplicado por 57 es también el resultado final.
{48} M: Exactamente.
{49} J: Entonces casi podíamos comprobarlo. No, no, no puede ser lo mismo.
{50} M: Espera..., espera un momento, vamos a ver. Calculas lo que..., hay en un día.
{51} M: Sí, sí, justo, es lo mismo. Mira, esto es.... esto son equis kilos por día (escribe '*x* kg/día') Como ellos calcularon para 57 días, necesitaron equis kilos, que es lo mismo que realizar esta operación (comparando los cálculos para hallar *x* en ambas reglas de tres) 6441 por 16, dividido por 57, o sea, que sí que está bien.

[Hacen el cálculo 6441∗57, obtienen 367137, y dividen por 16, resultando 22946.]
{52} J: O sea que esto son los kilos almacenados (escribe '*x*=22946 kg almacenados') y de todas formas vamos ahora a hacer una comprobación.

n-dvo

erp2, aar, cc, an



(MyJ)3

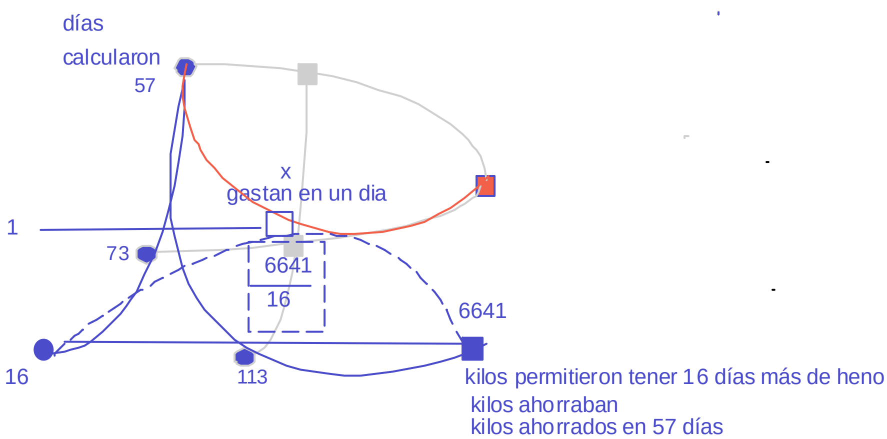
El color rojo indica el uso incorrecto de la regla de tres. Las aristas a trazos señalan las relaciones ternarias “implícitamente consideradas” en el esquema de la regla de tres. Las cantidades que aparece en recuadros a trazos son: la cantidad que reduce a la unidad, y el heno consumido en 57 días. Estas cantidades y relaciones, como se sabe, aparecen ocultas en el esquema de la regla de tres.

ivo, an

ivc, dvc

irp3

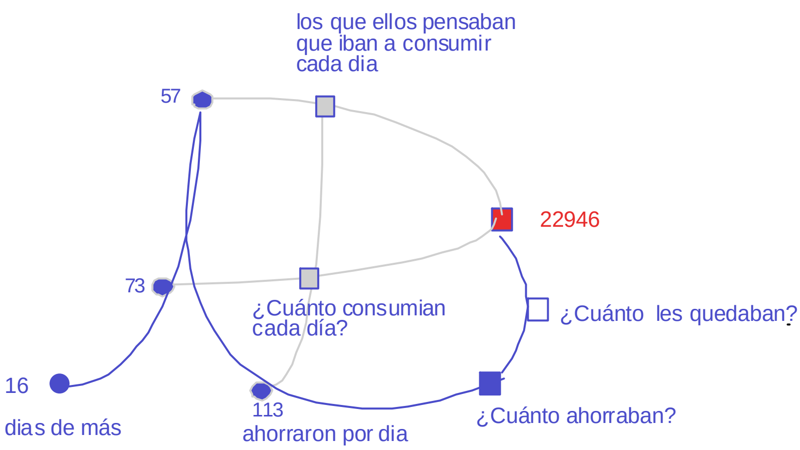
ia, da, cc



(My J)4

(MyJ)4 es una revisión incompleta del resultado obtenido en (MyJ)3 por medio de la consideración de la unidad.

{54} J: Éstos son los kilos almacenados, o sea, que..., (lee) unos granjeros almacenaron heno... y almacenaron..., ¿cuánto?
{55} M: 22946.
{56} J: Vale. (Escribe 22946 sobre el texto del problema donde pone 'almacenaron'.)
{57} M: Para 57 días.
{58} J: Para 57 días.
{59} M: (Leyendo el texto.) ...sin embargo, como el heno era de mejor calidad de lo que pensaban, ahorraron 113 kilos por día.
{60} J: Vamos a ver cuánto ahorraron.
{61} M: Vale, lo tenemos ahí calculado. Bueno, no...
{62} J: Ahora a partir de esto (señala 22946)...
{63} M: Sí, sí, exactamente.
{64} J: ¿Cómo? Bueno, no, quiero decir... No, es que..., esto no sé si nos hace falta o no.
{65} M: No. Si queremos comprobarlo, sería mejor hacer la prueba por pasos y sacar a ver si nos coincide el resultado.
{66} J: Si ahorraban esto, vamos a ver cuánto les quedaba. Pero es que..., ¿'cuánto les quedaba' para qué lo necesitamos? O sea, si nosotros buscamos cuánto ahorraban...
{67} M: Si buscamos cuánto les quedaba y nos coincide con esto de aquí, cuánto nos quedó..., ¿dónde estaba?, ¿no lo habíamos sacado? 6441 kilos. Seguro que está (falta)
{68} J: No, ésos son los ahorrados. ¿Sabes qué? Los ahorrados nos vuelve a salir lo mismo.
{69} M: Mira, tenemos 22946...
{70} J: Espera, espera, vamos a ver. Éstos son los kilos..., ya, ya, éstos son los kilos que ellos almacenaron..., pero ellos no sabían que iban a ahorrar, vamos a ver si dividido entre 73...
{71} M: 73 días.
{72} J: ...da..., da...
{73} M: Da eso.
{74} J: No.
{75} M: Tiene que dar lo que consumieron por día.
{76} J: Exactamente, lo que consumieron por día, vale. (Se dispone a borrar.) ¿Esto está apuntado?
{77} M: Sí, sí, en el texto, pero de todas formas lo apuntamos aquí.
{78} J: 22946 entre 57... 22946 kilos ellos lo calculaban para 57 días..., ellos lo calculaban para 57 días, pero en vez de 57 tuvieron para 73.
{79} M: Para 73.
{80} J: Entonces no dividimos por 57.
{81} M: Por 73.
{82} J: Nos tiene que salir...
{83} M: Nos tiene que salir...
{84} J: Los que en principio ellos pensaban que iban a consumir cada día, ¿no?
{85} M: Sí, exactamente.
{86} J: ¿Cuánto consumían por día? Eso no lo hemos calculado.
{87} M: No lo hemos calculado, lo tenemos ahí abajo.
{88} J: ¿Y cómo se calcula eso?
{89} M: Pues eran los 113 kilos que teníamos..., pues había...
{90} J: Eso no lo sabemos, no lo podemos saber.
{91} M: Antes sí lo habíamos

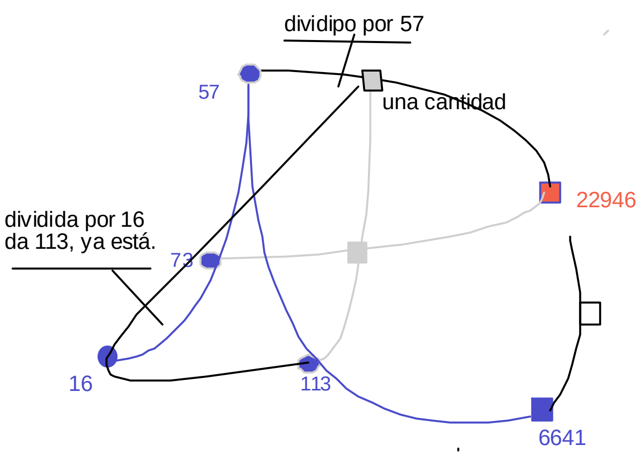


(My J)5

En (My J)5 se da cuenta del estado del conocimiento de la situación que M y J muestran en los Item 54-90, en su reconsideración de por dónde andan con el problema

[Pausa. Repasan.]

{92} J: (Leyendo el texto.) Ah, bueno, ya. Ya sé la forma de comprobarlo, este número (señala 22946) dividido por 57 días nos da una cantidad determinada. Si esa cantidad dividida por 16 días da 113 kilos, ya está. Entonces está bien. Vale, a la marcha.



(M y J)6

En (MyJ)6 se da cuenta de su plan para resolver la situación (aristas en color negro).

{93} M: Divide.

{94} J: Divide tú ahora. Esto dividido por 57 y el cociente dividido por 16. Parece razonable que sea 113, porque es lo ahorrado.

{95} M: (Comienza a hacer la división 22946 entre 57.)

{96} J: Espera, no, no estoy seguro de esto, ¿eh?

{97} M: Si tú divides 22946 por 57, eso será los kilos que ellos calcularon para tener bastante, para cada día. Saldrán..., y hay un excedente de 113 kilos por día. Luego, como hay 57 días, 57 por 113 saldrán los kilos, kilos que sobran de los 22946... De acuerdo, ¿no?

{98} J: 113 por 16..., ¿nos tendría que dar?

{99} M: Los kilos que tenemos.

{100} J: 113 por 57 es el excedente.

{101} M: No.

{102} J: Sí, los que hay de más.

{103} No.

{104} J: Sí, entonces a ver..., los que hay de más restando el total nos sale los que ellos calcularon.

{105} M: No, lo que ellos consumieron en 57 días, lo que consumieron.

{106} J: ¿Y cuánto consumieron?

{107} M: No, no, ¿eh?

{108} J: Ni se sabe.

{109} M: Ni se sabe.

[Ponen cara de estar perdidos.]

110} M: Vamos a calcular lo que...

{111} F: Podéis pedir ayuda cuando queráis.

{112} J: El caso es que...

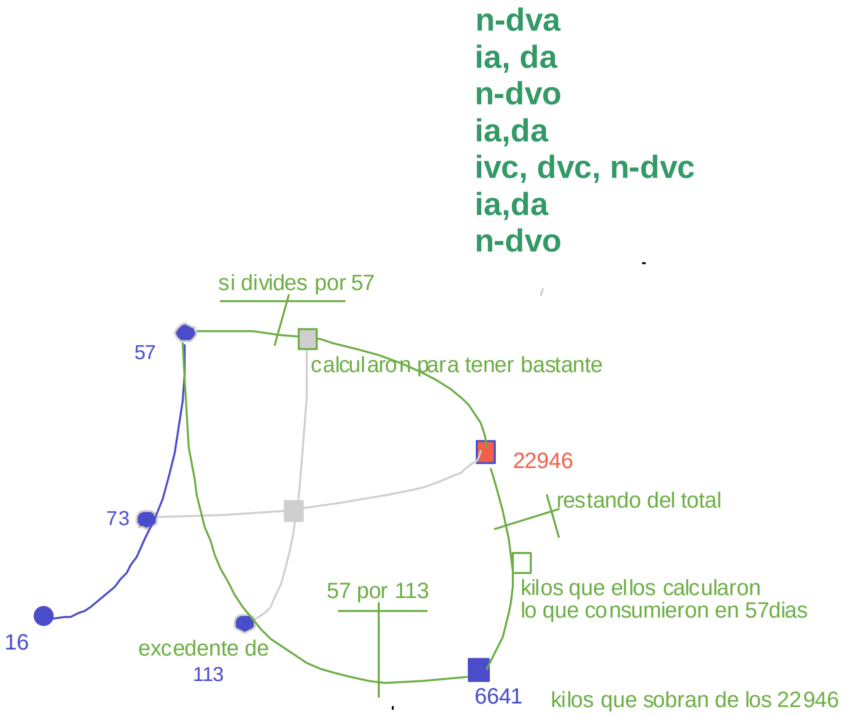
{113} F: Si creéis que no hace falta, estupendo.

{114} J: ¿Vamos bien?

{115} F: El resultado, de hecho, lo tenéis, estáis en la comprobación.

{116} J: Sí, ah, vamos a ver...

(M y J) 7 muestra en color verde a lo que deriva el plan que ha sido expuesto en (M y J)6, plan que no se lleva a cabo, como se ve, ya que incorporan elementos aportados en (M y J)5. El estado de conocimiento que se desprende de esta actividad consiste fundamentalmente en la incorporación de nuevas denominaciones para vértices que ya se habían incorporado y la incorporación de un nuevo vértice claro con apuntes de su denominación y su relación con otros vértices ya incorporados: los correspondientes al heno almacenado y al heno ahorrado ahora referido de otro modo.



(My J)7

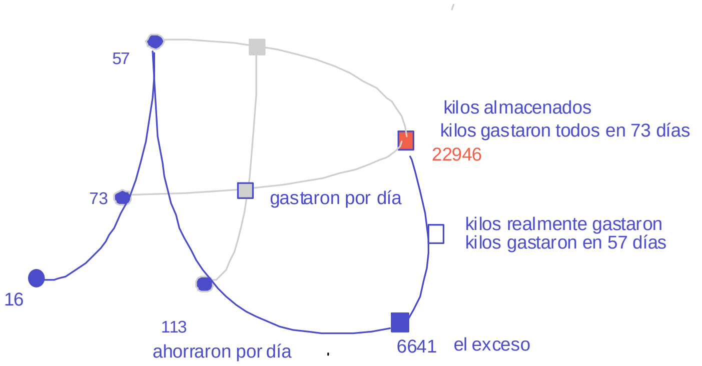
{117} L: Si escribierais alguna de las cosas que estáis diciendo, a lo mejor si lo tuvierais en la pizarra, no se os perdería tanto. Porque habéis dicho: ‘kilos que se gastan por día’, ‘kilos que pensaban gastarse por día’..., en la cabeza se lían.
{118} J: (Escribe ‘22946 kg almacenados’.)
{119} M: Ahora vamos a calcular los kilos que realmente gastaron.
{120} J: Estos kilos los gastaron todos..., en 73 días acabaron todo.
{121} M: En 57...
{122} J: ¿Pero eso para qué?
{123} M: Pues..., si sabemos los kilos que gastaron en 57 días, ¿no? La verdad es que no.
{124} J: Es que no sabes cuánto gastaban por día, sabes cuánto ahorraban.
{125} M: Bueno, exactamente..., si calculamos los kilos que gastaron en 57 días... Hay que dividir...
{126} J: ¿Cómo?
{127} M: No, espera. Calculamos los kilos que gastaron en 57 días, o sea, aquí hay un exceso que no sabemos lo que es.
{128} J: Sí, o sea, de aquí (señala 22946) sobra.
{129} M: De ahí sobra. Calculamos lo que nos quede, y eso lo dividimos por 57 y nos salen los kilos que gastaron por día.
{130} J: ¿Y eso para qué los quieres?
{131} M: Y eso..., pues, si sabemos los kilos que gastaron por día, y lo multiplicamos...
{132} J: Por 73 días.
{133} M: ...por 73 días que tenían...
{134} J: Que tenían.
{135} M: ...me tenía que dar eso de ahí.
{136} J: Vale.
{137} M: ¡Qué listo soy!

después de la sugerencia del Item L-117 referente a la escritura de las cantidades mencionadas para recordarlas y “para evitar lios en la cabeza”, se establece el estado de conocimiento (M y J)8 con un diccionario de cantidades más rico y preciso en los sentidos de referencia a las cantidades. Junto a ello un plan, esbozado en (M y J)9.

lvc, dvc

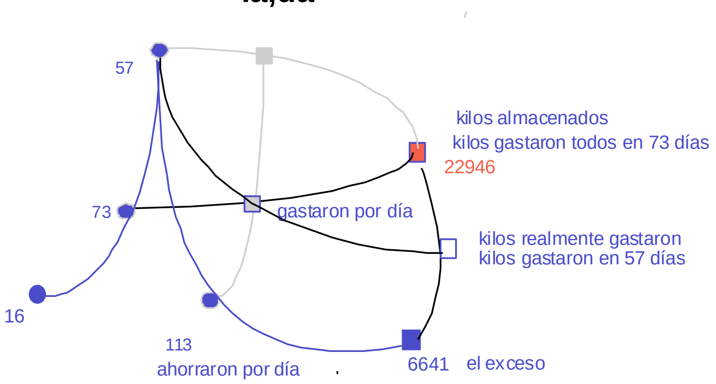
n-dvc, n-dvc

n-dvc, n-dvc



(My J)8

ia,da
ia, da,
ia,da



(My J)9

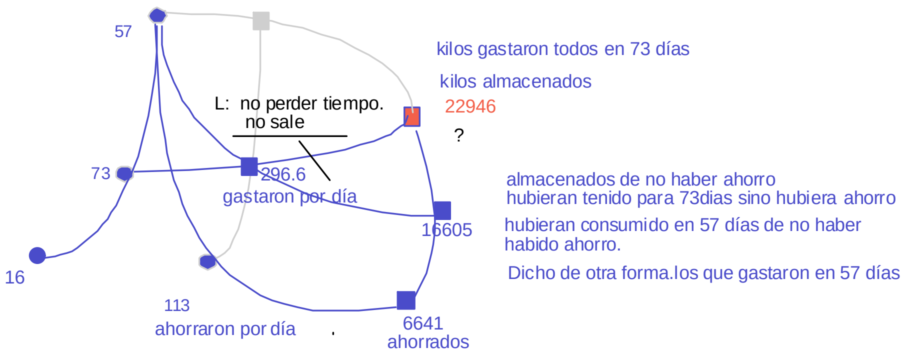
{138} J: Si lo hubiéramos apuntado...
{139} M: De nuevo apuntar...
{140} J: Sí, vamos a ver, otra vez de nuevo. Mira, 113 kilos...
{141} M: Si ahorraban por día...
{142} J: Y lo ahorraban durante 57 días... ¿vamos a ver cuánto ahorraron? Esta operación estaba hecha.
{143} M: Sí, me parece que...
{144} J: ¿Cuánto es?
{145} M: Son 6441.
146} J: ¿Ahorrado?
{147} M: Sí, ahorrados
148} J: (Escribe ‘6441 ahorrado’.) Es lo que ahorraron, eso, eso.
{149} M: Ahora hay que restar 22946 menos 6441, que es lo que hemos ahorrado. (Hace la diferencia y obtiene 16505.)

{150} J: Sí, esta cantidad (señala 16505) es la que..., ésta es la cantidad que ellos hubieran almacenado de no haber ahorro, es la cantidad que hubieran tenido para aguantar, mm..., 73 días sin que hubiera ahorro.
{151} J: Esta cantidad, 16505, seguro.
{152} M: Sí, seguro, fueron los que gastaron.
{153} J: No, no, esto son los kilos que ellos habían preparado y que hubieran consumido en 57 días de no haber habido ahorro, esto es, los kilos...
{154} M: Dicho de otra forma, lo que es..., es lo que gastaron en esos 57 días ellos.
{155} J: 57 días.
{156} M: Lo que gastaron en 57 días.
{157} J: Exactamente.
{158} M: Ahora, vamos a ver..., lo que gastaron...
{159} L: Escríbelo, por favor.
{160} J: Esto son los kilos gastados en 57 días.
{161} M: (Escribe en la pizarra '16505 gastados en 57 días'.) Vale, ahora hay que saber cuánto gastaron por día, ¿vale?
{162} J: ¿Para qué?
{163} M: Si sabemos lo que gastaron por día, multiplicado por 73 tenemos ese resultado de ahí... Vale, pues ahora te toca a ti. (Se refiere a hacer las operaciones.)
{164} J: ¿Estás seguro de que..., eso es? (Repasa en la pizarra.) Estos kilos los almacenaron; ahorraron tanto; esto lo ahorraron en 57 días...
{165} M: En 57 días.
{166} J: Es que has hecho lo que almacenaron en realidad. Lo almacenado, restado de lo ahorrado, sería lo que ellos hubieran necesitado para cubrir 57 días.
{167} M: Exactamente.
{168} J: Vale, y tienes estos kilos (señala 16505), esto fue lo que..., lo que gastaron en 57 días y también lo que hubieran tenido que almacenar de no ahorrar.
{169} M: Entonces, al dividir por 57 días nos saldrán los kilos que gastaron, y al multiplicarlo por 73 nos tiene que salir lo de ahí...
{170} J: Y ésa es una prueba segura.
{171} M: Hombre, eso es llegar al mismo resultado por otro camino, supongo que será válida.
{172} J: Supones. Vamos a hacerlo.
{173} M: (Dictando.) 16505, dividirlo entre 57.
{174} J: (Hace la división.) 289'6... (Escribe '289'6 kilos por día gastados'.) Si éste es el gasto, multiplicado por 73 días nos tiene que salir eso.

(M y J)9 muestra el plan de lo que debe hacerse. Y (M y J)10 la ejecución de dicho plan.

aar, an, n-dvc, n-dvc, cc

aar, an, cc

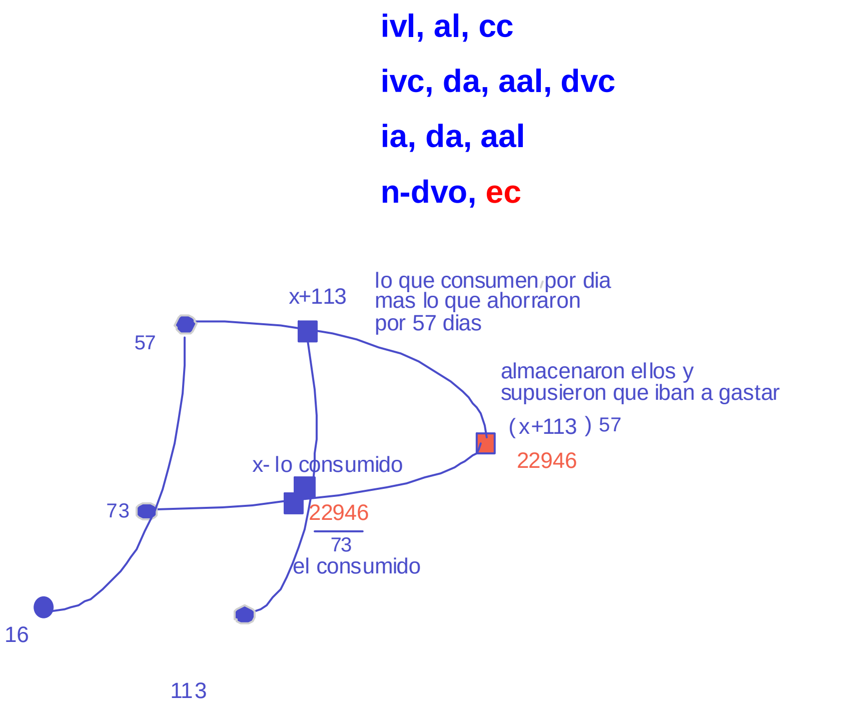


(My J)10

{175} L: Para que no perdáis el tiempo, si multiplicáis por 73 ahora, no sale.

{176} J: No sale.
{177} M: No sale.
{178} L: Sale uno más pequeño. No hace falta que os diga cuánto, entre otras cosas porque no lo sé.
{179} J: Yo lo que volvería es atrás otra vez.
{180} M: Yo, realmente..., vamos a ver..., vería lo que hemos hecho antes, lo que hemos hecho ahora y ver lo que... Por algún lado...
{181} J: Vamos a ver... (mirando a 22946), esto nos ha dado..., esto nos ha dado para 73 días.
{182} M: No, esto nos ha dado..., es lo que hemos calculado.
{183} J: Esto, dividido por 73 días, desde luego es el consumo diario, luego... (escribe '$\frac{22946}{73}$ kg/día consumido'), esto es lo consumido, ¿vale?, ¿es eso?
{184} M: Sí.
{185} J: Eso es lo consumido... Si eso es lo consumido, lo consumido más lo ahorrado...
{186} M: Es que ahí...
{187} J: Mira, lo consumido, luego este equis más lo ahorrado, 113, multiplicado por 57 días, tiene que dar esta cifra. (Escribe $(x+113)\supseteq 57=22946$.)
188} M: ¿Y esa equis qué era? ¿Lo consumido?
{189} J: Esa..., esto..., lo que consumen por día más lo que ahorraron por 57 días tiene que dar esto. Esto es lo que almacenaron ellos y lo que supusieron que iban a gastar. Ahora sólo..., sólo queda hacer esta división (señala $\frac{22946}{73}$) y ver que la igualdad se cumple. La habíamos hecho antes. Creo que sí, me parece que sí. Los gastados son éstos..., ¿cuántos?
{190} M: 289'5.
{191} J: Lo que no hemos visto es si esto está bien o no, 300 por 73 cuántos será...
{192} M: Me parece que sí.
{193} J: (Evalúa el resultado.) Hemos cogido uno de más.
{194} L: No os va a salir lo mismo.
{195} J: No.
{196} M: No.
{197} L: Si hubierais guardado en la pizarra el cálculo aquel, no habríais calculado antes los calculados por día de la misma manera.
{198} J: ¿Cómo está esto? No entiendo.
{199} L: Cuando has calculado antes los kilos gastados por día, no los has calculado dividiendo por 73 los kilos almacenados; lo habéis hecho, que se os puede haber olvidado, quitando de los almacenados los ahorrados..., y dividiendo el otro, lo que quedaba, dividiéndolo por 57.
{200} J: O sea, esta vez lo hemos hecho tomando todo lo almacenado dividido por 73; así hemos calculado el gasto por día... Y otra vez..., otra vez lo hemos hecho restando a aquella cantidad lo ahorrado, y dividiendo por 57, y el resultado no es el mismo y tendría que ser el mismo. Vamos a ver qué cosa está mal hecha.
{201} M: El resultado no es el mismo... No, espera.
{202} J: No es el mismo. Vamos a ver cuál de las dos cosas está mal hecha. Vamos a hacerlo rápido. Se supone que esta división estaría bien (señala $\frac{22946}{73}$)... Vamos a no hacer las operaciones, eso es lo que propones, no hacer las operaciones sino borrar... No vamos a hacer caso a aquello... Lo que no sé es por qué no está bien, quizá por la div..., que hayamos hecho mal las operaciones..., por lo demás...
{203} L: ¿Puedo decir una cosa? El argumento es correcto, tiene que dar igual.
{204} J: Si no da, es porque hay una operación mal hecha, no puede ser otra cosa...

La advertencia de L-175 de que el cálculo 296,6 por 73 no conducirá al número 22946 calculado para el heno almacenado, conduce a una reconsideración de la situación, con el uso de la herramienta algebraica.



(MyJ)11

206} J: ¿Este número (señala 22946)?
{207} L: Ese número está mal calculado.
{208} J: Exactamente, ésa es la prueba.
{209} M: Si estamos buscando la prueba y no sale lo mismo, es que está mal, o está mal la prueba o está mal el número.
{210} J: Vale, vale.
{211} J: Tú calcúlalo, yo lo voy a calcular con 73 días y tú a ese número quítale el ahorro y divídelo por 57.
{212} M: Quitarle el ahorro era... Está claro, es esto de aquí, 289’5.
{213} J: (Se enzarza en la división propuesta, $\frac{22946}{73}$, y le resulta 314’...) Ya no da.
214} M: Luego es culpa de..., luego no vale el final, 22946.
{215} J: Esto no es correcto (lo tacha). Ahora hay que volver a plantearse la estrategia exactamente.
{216} M: Vamos a ver...
{217} J: Vamos a ver...
{218} F: Sobre todo no tengáis prisa, tenéis todos los elementos para resolver el problema.
{219} L: ¿No creéis que el procedimiento de comprobación que habéis utilizado es el correcto?
{220} J: Sí.
{221} L: Pues quizá eso es una estrategia para resolver el problema.
{222} J: ¿Ver cuál de las dos ecuaciones..., es el bueno?
{223} M: Lo que sí está claro es que si hemos elaborado una estrategia para comprobar, eso es la forma de resolver el problema, es otro camino, sí, vamos a ver si es el bueno, ya que sabemos...
{224} J: Bueno, de todas formas nos tenía que haber dado igual la división, pero..., bueno..., un camino era..., un primer camino es calcular el ahorro..., esto...
{225} M: Calcular el ahorro por..., en los 113 días..., en los...
{226} J: No, espera.
{227} M: ...en los 57 días, lo que hemos ahorrado.
{228} J: 113 por 57 da...
{229} M: 6441, 6441 que hemos ahorrado.
{230} J: (Escribe ‘6441 kg ahorrados’.)
{231} M: El siguiente era..., me parece...

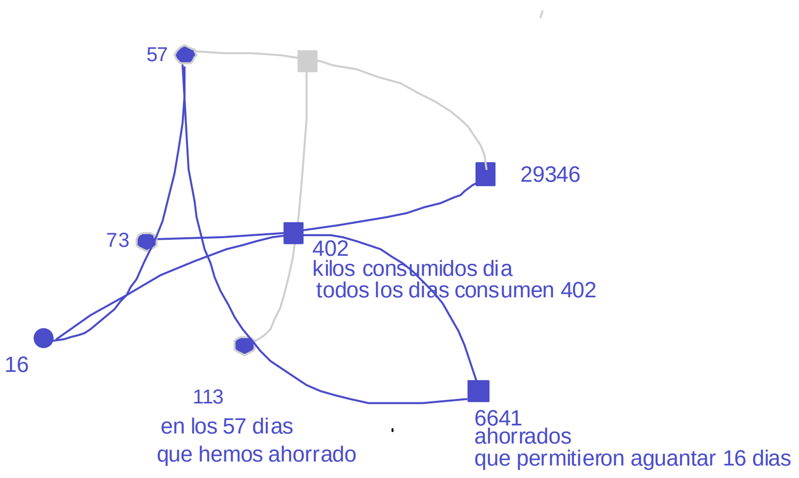
{232} J: Espera, en realidad estos kilos ahorrados nos han permitido
{233} M: Aguantar 16 días.
{234} J: ...aguantar los 16 días, entonces...
{235} M: Entonces, ahí tenemos que saber ya los kilos que nos salen por día si dividimos 6441 entre 16, está claro ya.
{236} J: Eso ya está hecho.
{237} M: No, ¿cuándo hemos dividido 6441 por 16?
{238} J: Veamos, 6441 dividido por 16 son como...
{239} L: ¡Eh, eh, repasa la división!
{240} J: Son 402 aproximadamente.
{241} M: Vale.
{242} J: Son kilos que han consumido por día
{243} M: Kilos por día.
{244} J: Que han consumido.
{245} M: Son kilos que han consumido por día.
{246} J: Porque gracias al exceso...
{247} M: Entonces todos los días han consumido 402, entonces simplemente hay que multiplicar por 73...
{248} J: 73 días.
{249} M: 402 kilos hay que multiplicar por 73 y ya está.
{250} J: Lo que queda esto son 402, y éste, 289’5 kilos por día, el que no es bueno. 402 días por 72, ¿no?
{251} J: (Hace la multiplicación.) Resulta 29346. Desde luego no es aquél.
{252} M: Pues ése debe de ser...
{253} J: Ahora nos sale otro número gracias a la prueba.
{254} L: Cortamos.

Tras la sugerencia de L-219-221 de utilizar el argumento de comprobación como estrategia para resolver el problema, se desencadena

n-dvo

ia, da,aar,an, cc, ndv

aar,an



(M y J) 12

2.2.2.3 La ruta de la solución, el grafo de la resolución y la componente n del diccionario de cantidades de la resolución de M y J.

- La Ruta de la solución, fig. (a) :

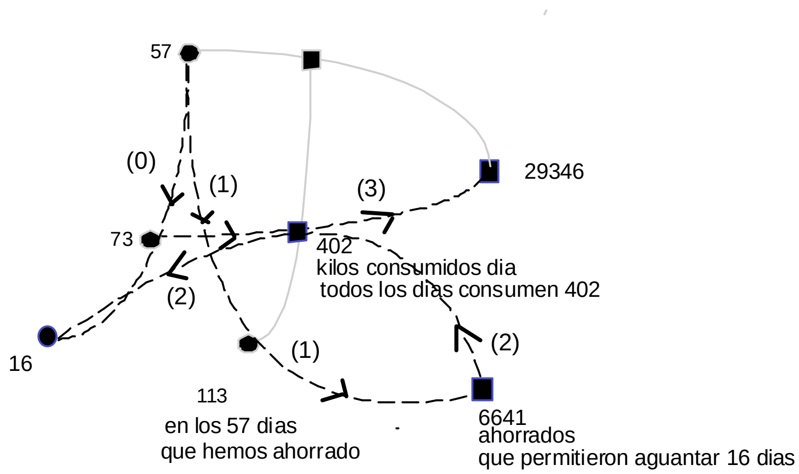
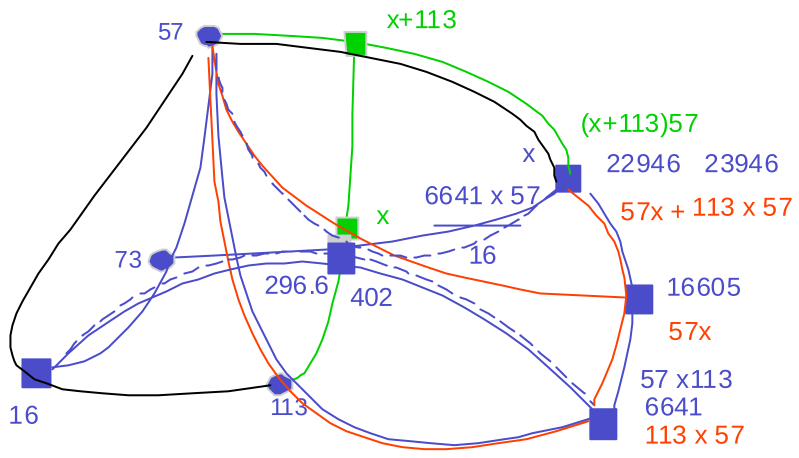


fig (a)

Los números entre paréntesis, situados sobre las aristas, ordenan la ruta.

Grafo de la resolución de de M y J, fig. (b), en el que se muestra la componente **x** del diccionario de cantidades:



fig(b)

Convenios de color:
- el color azul indica las aristas y vértices activados aritméticamente
- el color verde indica las aristas y vértices activados algebraicamente
- el color negro indica lo activado en planes no llevados a cabo
- el color rojo lo <u>susceptible</u> de ser activado sintácticamente.

-La componente **n** del diccionario de cantidades de la resolución de M y J:

Para Días:

días previstos	**días reales**	**días de más**
compraron para	días tuvieron al final	días de más
días calcularon		días aguantaron
		días más de lo que pensaban

Para Heno por día:

heno previsto	**heno ahorrado**	**heno consumido**
lo que consumen por día más lo que ahorraron	ahorraron por día en los 57 días que ahorraron	gastan en un día
calcularon para tener bastante una cantidad		kilos consumidos día
22946 dividido por 57		todos los días consumieron 402

Para Heno:

heno almacenado	**heno ahorrado total**	**heno consumido días de más**	**heno consumido días previstos**
heno calcularon	kilos ahorraban		kilos que consumieron en 57 días
kg almacenaron	kilos que les permitieron tener 16 días más de heno	kilos sobran de lo 22946	kilos que gastaron en 57 días
heno necesitaban 57 días	kilos ahorrados en 57 días	kilos que les permitieron tener 16 días más de heno	kilos que realmente gastan en
total			heno consumido en 57 días de no haber ahorro
kilos que gastaron todos en 73 días			almacenados de no haber ahorro
almacenaron y supusieron que iban a gastar			habrían tenido para 73 días sino hubiera ahorro.

2.2.4.-La actuación de A y J

La versión del problema del problema presentada a A y J fué:

Unos granjeros almacenaron heno para 57 días, pero, como el heno era de mejor calidad de lo que pensaban, ahorraron 113 kg por día, con lo que tuvieron heno para 73 días. ¿Cuántos kilos de heno almacenaron?

2.2.4.1- Comentarios previos.

El protocolo de A y J se divide en tres grandes episodios globales:

Lectura: Item 1-4
Ejecución: Item 5-89
Verificación: Item 90-112

El episodio de verificación no será analizado aquí. El episodio ejecución es el que centrará toda nuestra atención episodio que viene guiado según Puig(1996) pg.189 por un plan:

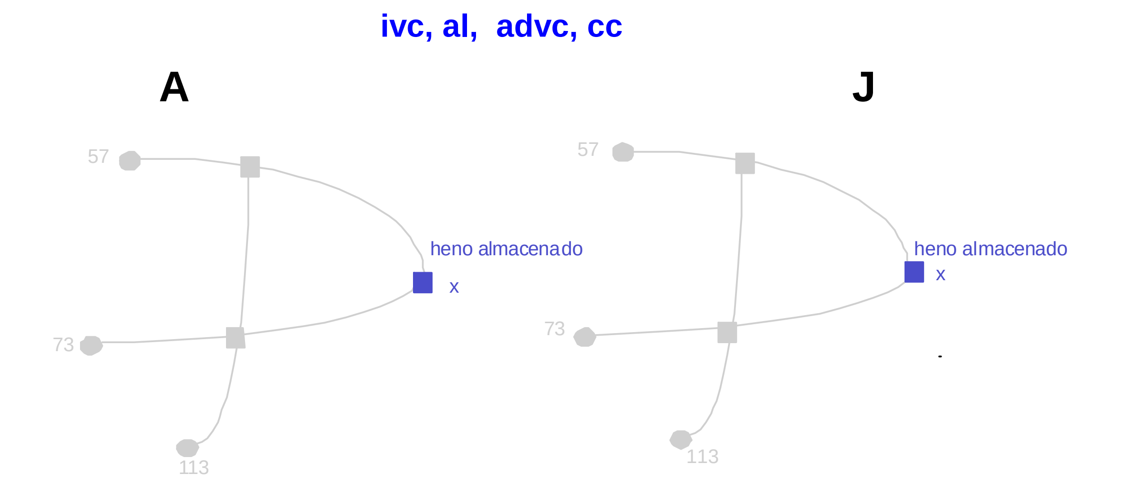
" El plan no se enuncia explícitamente, pero es una versión del método cartesiano que consiste en a) designar la incógnita con x, b) examinar cantidades que aparecen en la historia que narra el enunciado del problema y calcularlas numéricamente o escribirlas mediante expresiones algebraicas en que intervenga sólo una letra que designa la incógnita, hasta obtener una ecuación, y c) resolver la ecuación."

Dicho episodio contiene subepisodios de cálculos numéricos de cantidades concretas, de escrituras algebraicas de cantidades, junto a dudas y discusiones sobre la corrección de lo hecho, o lo que debe hacerse, rechazos de cálculos o expresiones, y borrados parciales, hasta llegar a la escritura de una ecuación, cosa esta última que ocurre en el item 80, donde finalizaremos nuestro análisis.

En el análisis de este protocolo, el autor del análisis juzga que A y J no realizan un trabajo excesivamente cooperativo en la resolución del problema, dado que en la práctica muestran una conducta que apunta a cada uno andando por su lado, y que aunque intercambian mensajes de lo producido por uno y otro, no siempre o casi nunca producen conjuntamente , o prestan la atención debida a lo dicho y producido por el otro; esto es, rara vez se puede afirmar que trabajan desde un estado de conocimiento compartido. Sentenciado esto así, se presentarán estados y operadores entre estados para A y para J por separado.

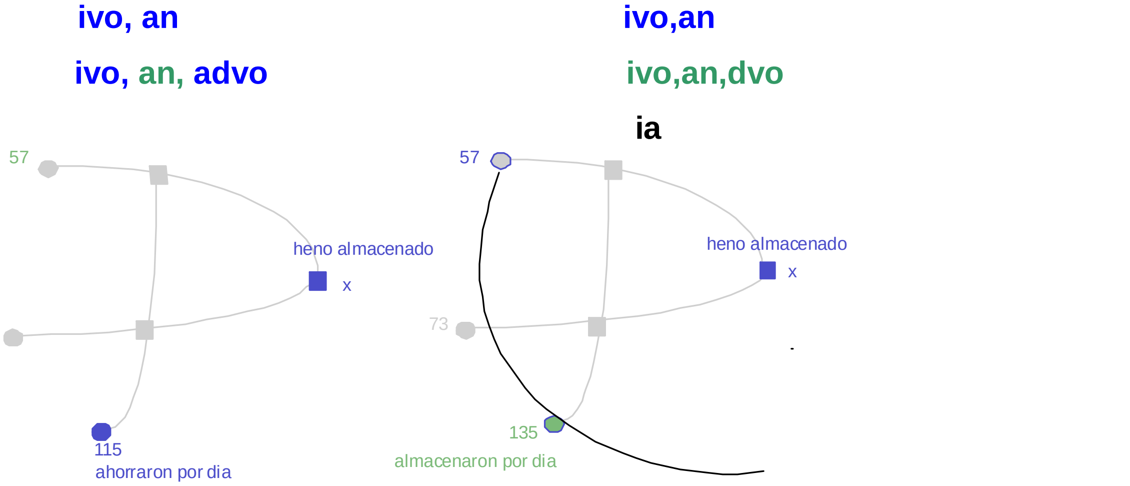
2.2.4.2- La descripción de la resolución de A y J términos del espacio del problema.

{1} A: (Lee el enunciado.)
{2} A: Estamos hablando todo el rato de lo mismo, ¿no?, del mismo heno, vamos, nada de que haya...
{3} F: Sí.
{4} A: Cuántos kilos de heno almacenaron...
{5} A: Bueno, vamos a ver...
{6} A: Lo que está claro es aclarar un poco la nomenclatura, la pregunta de cuántos kilos de heno, ponemos eso que equis será (escribe ‘*x* = heno almacenado’).



(Ay J)1

{7} J: Mira, y..., los 135 que almacenaron por día serán por 57 días, ¿no?
{8} A: Ahorraron 115 por día...
{9} J: O sea, sabemos una cosa, son 113 kilos por día, almacenados; sabemos..., si hay 57 días, sabemos...
{10} A: Se habrán ahorrado.
{11} J: ...sabemos la cantidad, ¿no?
{12} A: Heno ahorrado... (escribe ‘heno ahorrado = 113’), igual 113…, ¿será por 73 en este caso?
{13} F: Pensarlo, pensarlo.

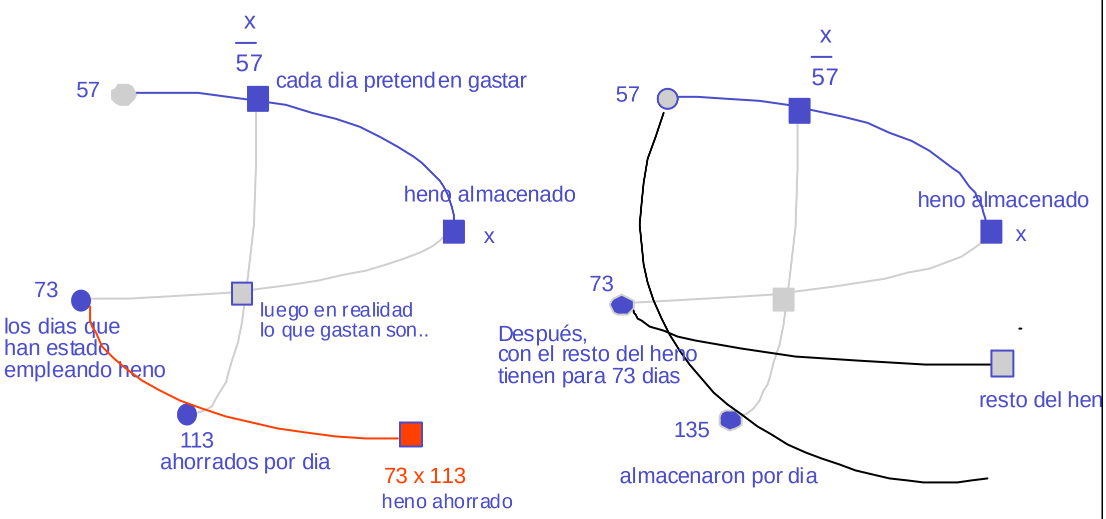


(A y J)2

El color verde en la figura (A y J)2 indica un posible despiste o a una verbalización inadecuada de lo que quiere expresarse. El color negro indica que la arista únicamente e ha sido apuntada o sugerida, sin incorporar una tercera cantidad, o mencionar la relación correspondiente.

{14} A: ¿Todo esto lo tenemos que pensar nosotros?
{15} F: Sí, sí.
{16} A: Entonces será por 73, porque son los días que están empleando heno; luego es eso, han estado ahorrando 113 kilos durante cada uno de los 73 días. (Escribe ‘heno ahorrado = 113∞73’.)
{17} A: Bueno...
{18} J: Son 113 kilos por día; esto (señala 113) es por día, por cada día de los que se tenía previsto el heno, ahorraron 113 kilos, ¿no? Después, con el resto del heno que tienen, tienen heno para 73 días.
{19} A: Cada día van gastando lo mismo.
{20} A: O sea, cada día pensaban gastar...
{21} J: Sí, sí. (Escribe $\frac{x}{57}$.) Cada día, ¿no?

ivo, an ,dvo	**ivo, an, dvo**
ivc, aal, cc, dvc	**ivc, aal, cc, dvc**
ivc,dvc	
ia, da	**ia, ivc,dvc**
ivc,dvc, aar, cc	



(A y J) 3

{21} J: Sí, sí. (Escribe $\frac{x}{57}$.) Cada día, ¿no?

{22} A: Y luego en realidad lo que gastan son... Eso es lo que pensaban inicialmente. (Escribe ‘$\frac{x}{57}$ cada día inicialmente’.) Y luego en realidad lo que gastaron cada día son 113. Entonces cada día gastan equis menos 113 partido... (escribe $\frac{(x-113)}{}$) ¿Y ahora por qué partimos?

{23} J: Exacto, ahí está el problema.
{24} A: Supongo que será: la cantidad inicial..., gastan cada día..., la cantidad inicial menos 113, pero durante 73 días; luego yo aquí pondría 73. (Escribe 73 debajo de la raya de fracción.)...

{25} J: Eso es lo que no veo yo claro, porque si son 113 kilos que se ahorran por día, y que tienen éstos o éstos, y yo creo que son los primeros, y con la cantidad de heno que te ha sobrado tienes para los 73 días...
{26} A: Mira, los días que están ahorrando heno serían 57, luego basta, ellos la idea que tenían era gastar cada día..., es equis dividido por 57, o sea, lo que tenían, pero..., o sea..., y en realidad lo que hacen es gastar cada día..., eso, cada día, gastar…, 113 es menos de lo que pensaban gastar en un principio, luego sería la cantidad inicial menos 113 (señala x–113)...
{27} J: Pero es que...
{28} A: 113 tampoco, 113 por día.
{29} J: Exacto.
{30} A: Bueno, esto está mal, sí. (Señala $\frac{(x-113)}{73}$.) ¿Lo borramos?
{31} F: Sí, si, podéis borrar siempre que lo consideréis necesario. Si lo queréis recordar...
{32} A: Sí, bueno, esto es porque está mal, otra cosa son los pasos intermedios.
{33} A: Bueno, vamos a ver...
{34} J: Yo lo que sí consideramos es eso.
{35} A: ¡Espera!, ¡ya está claro!
{36} J: Equis menos 113 por 57 (escribe x–113∞57).
{37} A: Bueno.
{38} A: Por 57 el 113, ¿no?
{39} J: Claro, eso será dividir..., no, eso no será a dividir por nada, no, eso será la cantidad de heno que te queda. De acuerdo, ¿no? Esa es la cantidad de heno, esa cantidad de heno que te queda será dividida, o sea, se repartirá en ese heno para esos 73 días.
{40} A: Creo que..., no sé.
{41} J: Sí.
{42} A: Bueno, el asunto es entender el problema. Es que el problema...
{43} J: Bueno, es que se ahorran 113 kilos por día, ¿de acuerdo?
{44} A: Pero durante 73 días.
{45} J: Eso es lo que no veo claro yo.
{46} A: Yo sí que lo veo claro, macho. Ahora ya, después de comentarlo, yo sí que lo veo claro.
{47} J: (falta)
{48} A: Vamos a ver, es..., es lo que te estoy diciendo: si es durante 57 días, gastan lo que quieren, lo que tenían pensado en un principio; pues eso lo gastan en 57 días, gastan..., gastan en equis, al ahorrarlo..., cada vez que ahorran 113, cada día, va a ser durante 73, no va a ser en 57. Es que lo que tienes que ver es el tiempo que empleas para cada cosa.
{49} J: (Borra x–113∞57.) Esto está mal.

En (A y J)4, bajo, el color verde se utiliza para indicar que al utilizar la literal x - ya utilizada para designar al heno almacenado, con el significada del heno: “cada día inicialmente”- se desencadena el uso de unos operadores que llevan a la consideración de la arista pertinente y la expresión algebraica x-113 y simultáneamente “ x-113/ “, que conducen a los errores que siguen

Después de este estado se produce un borrado masivo, ítems 31-49, debido a la las constatación de que las expresiones algebraicas producidas son erróneas, ”eso esta mal” A-30 para (x-113)/73 o J -49 “Esto está mal” para x-113x57 ante la imposibilidad de interpretar tal expresión coherentemente. Ello conduce al item- 52 donde nos encontraemos como partiendo de los estados de conocimiento mostrados como (A y J)5 y (A y J)6.

ivc, al, cc

ia, cc , aar

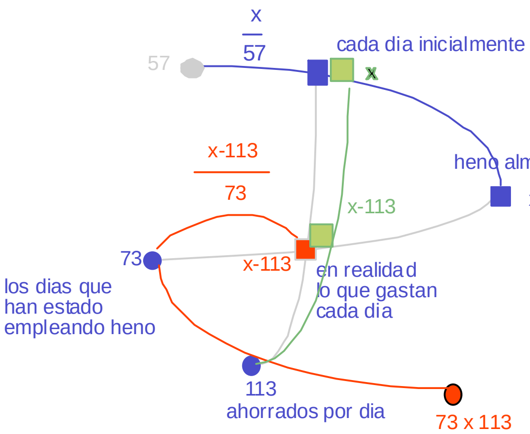
r-aar , n-ivc, cc

ia, da, ivc, aar

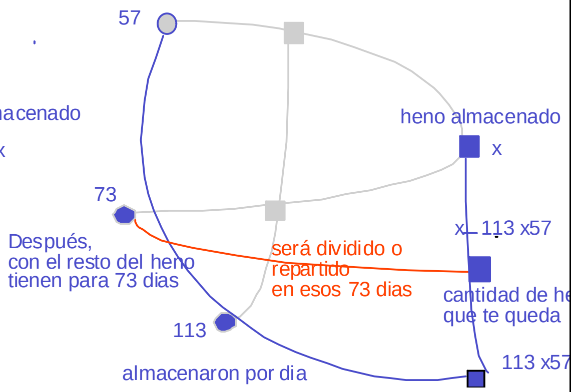
ia,da,ivc,aar,cc

ia, aal, cc

da



item 23-30

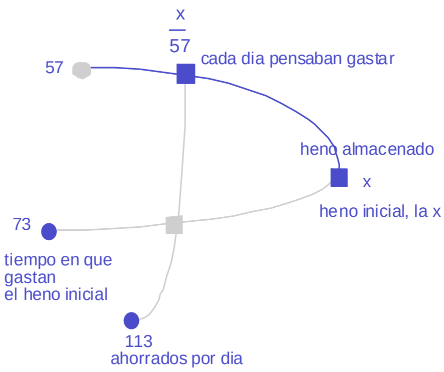


item 23-49

(A y J)4

{52} A: Y..., y..., en realidad lo que se hizo fue gastar..., gastar..., cada día también se gastaban.

{53} J: A esto (señalando $\frac{x}{57}$) le quitas 113 por 73, ¿o no?

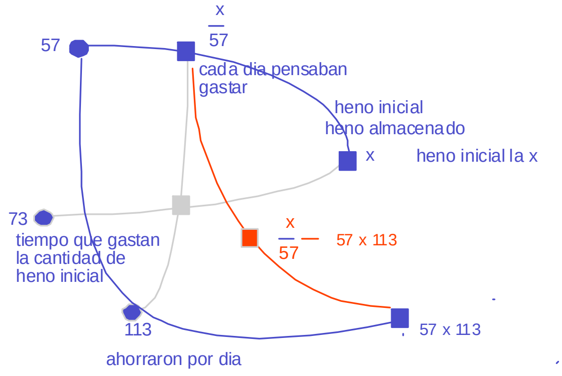


(AyJ)5

donde se sigue en J -53 sugiriendo

ia, ivc, da, aar

ia, ivc, da , aal,



(A y J)6 item J-53

54} A: No, la misma cantidad que pensaban, ahora lo veo, la misma cantidad que pensaban menos los 113. (Escribe $\frac{x}{57} - 113$.)
{55} J: 113 por 73.
{56} A: No, estamos hablando de cada día.
{57} J: Ah, sí, sí, si dividimos por 57, sí.
{58} A: Cada día ahorrando. (Escribe ‘cada día ahorrando’ a continuación de lo anterior.)
{59} A: Bueno, vamos a hacer una línea a todo esto.
{60} J: No, eso no es lo que ahorran cada día, eso es lo que gastan.
{61} A: Sí, pero quiero decir..., o sea, si no ahorraran, cada día gastarían equis partido por 57, pero como cada día gastan 113 menos de lo que pensaban, en realidad si lo que pensaban era esto (señala $\frac{x}{57}$), en realidad lo que gastan es esto (señala todo lo escrito).
{62} A: Lo que pensaban era 113.
{63} J: Que es lo que gastan.
{64} A: Bueno, gastan. (Escribe ‘gastan’ delante de ‘cada día ahorrando’.) (Ríe.)
{65} J: (Ríe.)
{66} A: Vale, creo que no valga nada, pero en fin...
{67} J: (falta)
{68} A: Vale.
{69} J: Vale, vale.
{70} A: ¿Y ahora qué hacemos con esto? Sabemos que cada día gastan esto; lo que queremos hallar es el..., el heno inicial.
{71} J: Sí, nosotros sabemos que si multiplicamos esto por 57..., nos saldrá la cantidad de heno que buscamos..., en incógnita, pero...
{72} A: Yo creo que..., por lo que hay que multiplicarlo es por 73.
{73} J: Bueno, por eso te he dicho.
{74} A: Has dicho 57.
{75} J: Bueno, por 73, o sea, esto. (Escribe $\left(\frac{x}{57} - 113\right) \times 73$.)
{76} A: Esto es una y.

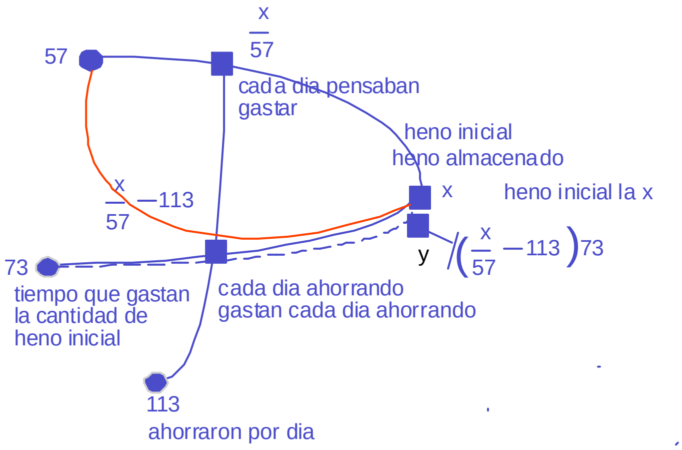
pero A en los item 54-76 a pesar de la insistencia de J-71, mediante los operadores citados pasa a (A y J) 7

ia , da

ivc, dvc, aal, cc

ia,da

ivc,al, cc, aal



(A y J) 7

{76} A: Esto es una y.

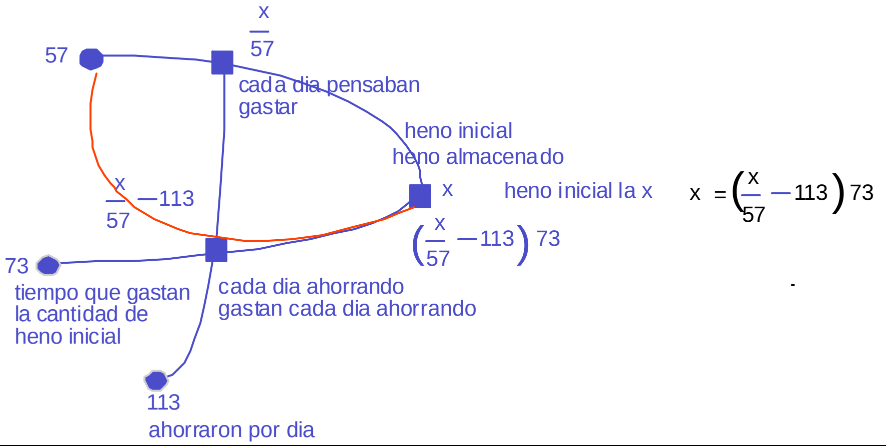
{77} J: Sí.

{78} A: En fin, es el heno inicial. Cada día gastan esto, lo hacen durante 73 días, luego durante todo ese tiempo lo que gastan es la cantidad inicial, que es la equis.

{79} J: Sí.

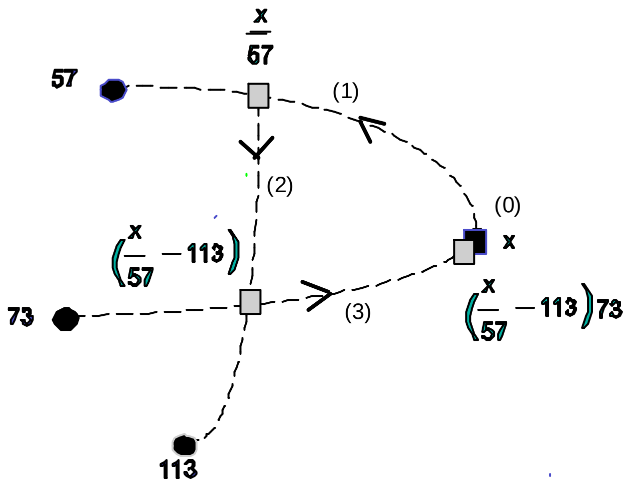
{80} A: O sea si pones equis, (escribe =*x* a continuación de la fórmula anterior, con lo que le queda $\left(\frac{x}{57}-113\right)\times 73 = x$) o sea, ya tienes una cosa con una incógnita y ya está. Lo que me temo es que hayamos puesto una identidad desde el principio y no lo podamos sacar. No, no... Y ahora es esto, resolver este sistema de ecuaciones..., este sistema, digo, esta ecuación

ec



2.2.4.3 La ruta de la solución, el grafo de la resolución y la componente n del diccionario de cantidades de la resolución de A y J.

-La Ruta de la solución, fig. (a) :



fig(a)

Grafo de la resolución de de A y J en el que se muestra la componente **x** del diccionario de cantidades, fig. (b) :

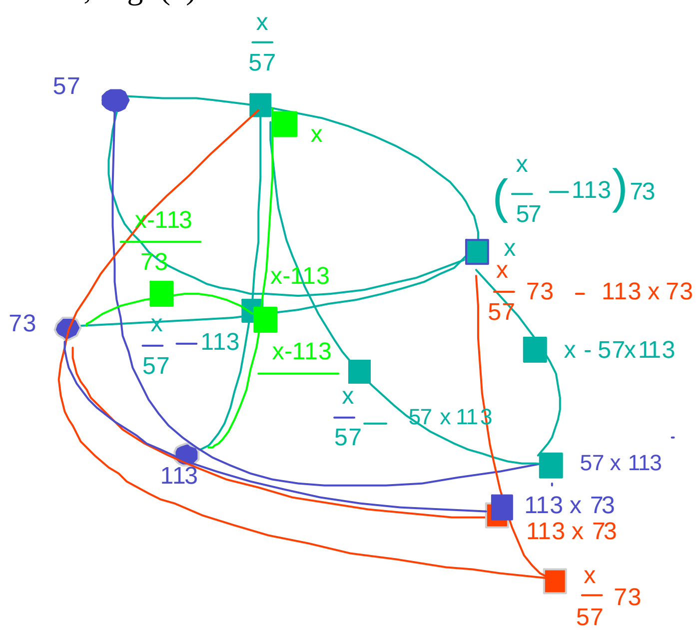


fig.(b)

Convenios de color:

- el color azul indica las aristas y vértices activados aritméticamente.
-el color azul verdoso indica las aristas y vértices activados algebraicamente.
- el color rojo lo susceptible de ser activado sintácticamente.

-La componente **n** del diccionario de cantidades de la resolución de A y J:

Para Días:

días previstos	**días reales**	**días de más**
únicamente por su número: 57	los días que han estado empleando heno	no mencionados
	los días que gastan el heno inicial	
	por su número: 73	
	días con el resto del heno, tienen para 73 días.	
	tiempo en que gastan la cantidad inicial.	

.

Existe la constante duda entre los días en los cuales se ha estado ahorrando heno 57 o 73 , y ” *los días que empleas en cada cosa*” v. g. : A-48

Para Heno por día:

heno previsto	heno ahorrado	heno consumido
cada día inicialmente	heno ahorrado por día	en realidad lo que gastan cada día, cada día ahorrando
cada día pensaban gastar		gastan cada día ahorrando
		gastan cada día ahorrando

Para Heno:

heno almacenado	heno ahorrado total	heno consumido días de más
heno almacenado	heno ahorrado	resto del heno
heno inicial		cantidad de heno que te queda

y algunas otras menciones a las cantidades arriba mencionadas por medio de circunloquios más complejos, que sólo pueden tener sentido comprensible en el diálogo que se establece entre ambos resolutores.

2.3.-De la suficiencia de la noción de espacio del problema para describir las resoluciones de los estudiantes.

Del análisis de la descripción detallada de las actuaciones anteriores, los grafos y diccionarios de cantidades de las resoluciones y las soluciones mostradas se desprende que el conjunto de las componentes del espacio del problema pueden ser suficientes para dar cuenta de las resoluciones de los estudiantes en el siguiente sentido:

1) La componente 1 del espacio del problema, esto es, el conjunto de GT y de lo que dan cuenta, se corresponde con las instantáneas mostradas: de (R y S) 1 a (R y S) 10, de (M y J) 1 a (M y J) 12 y de (A y J)1 a (A y J) 8 en las descripción de las actuaciones.

El grafo de la resolución de cada resolución presentado al final de la misma permite dar cuenta tanto de la ruta solución del problema como de otros vértices o aristas que no pertenecen a la ruta solución del problema. Tales vértices y aristas dan cuenta de otras cantidades y relaciones consideradas por los estudiantes en la búsqueda de una solución del problema. Algunos de estos vértices y aristas deben de ser considerados como fruto de un error.

Otras aristas y vértices, que hemos señalado en el grafo de la resolución y que no han sido producidas en la actuación, son las que hemos llamado susceptibles de ser activadas sintácticamente. Estas aristas y vértices se corresponden con expresiones algebraicas que resultan de las trasformaciones que podrían realizarse a partir de las expresiones algebraicas y ecuaciones que producen los operadores utilizados en la resolución. Estas transformaciones suelen realizarse de modo sintáctico con la finalidad de tener una expresión algebraica más simple o para resolver la ecuación resultante. Estos vértices y aristas producidos por transformaciones de las expresiones algebraicas o de la ecuación los consideraremos también como pertenecientes al grafo de la resolución, dado que aquí la actuación de los estudiantes se ha limitado al planteo de la ecuación. Dichos vértices y aristas suelen referir a cantidades y relaciones que difícilmente se incorporarían al grafo de la resolución de otro modo, ya que suelen referirse a cantidades y relaciones que suelen carecer de referencia, pero no de sentido en un mundo posible del problema. Así, por ejemplo:

Partiendo de la ecuación $(x/57 - 113) \cdot 73 = x$, solución aportada por (A y J), quitando paréntesis se obtendrían las expresiones “$x/57 \cdot 73$ “ y “$113 \cdot 73$” , que son componentes **x** de las cantidades “heno previsto para los días reales” y “heno ahorrado en los días reales”.

2) Los elementos de la componente 2 del espacio del problema , los diccionarios de cantidades con que se manejan los resolutores, se muestran parcialmente acompañando al grafo en cada una de las instantáneas. Tales diccionarios son un elemento fundamental en la resolución cuando menos como instrumentos de identificación y referencia de las cantidades. Además:

La componente **n**, que se muestra al final, da una indicación del uso abundante de los operadores que denominan. El proceso de comunicación que se da entre los estudiantes favorece la profusión de las expresiones verbales que se utilizan para referir la cantidad representada en un vértice. El contenido de las expresiones verbales indica la progresiva búsqueda de encaje en el significado global de la situación del sentido de referencia de la cantidad. El sentido de la referencia parece buscarse, por un lado, coherente con la expresión aritmética o algebraica ya asignada a la cantidad y, por otro lado, con la intención de que la expresión verbal utilizada en la denominación de la cantidad sirva de ayuda en la identificación de la arista que debe ser usada para determinarla.

La componente **x** del diccionario de cantidades de la resolución, que se muestra al final de la descripción de las actuaciones conjuntamente con el grafo de la resolución, da cuenta del o de los SMS utilizados en la resolución, ver capítulo 3, y de los usos inadecuados de los mismos. Así, la presencia en el diccionario de cantidades de la resolución de (A y J) de la literal *"x"* en el lugar de la componente **x** de dos cantidades diferentes. Por otro lado, la presencia en el diccionario de cantidades de la resolución de signos de ambos SMS el de la aritmética y el del álgebra cuando en el diccionario de cantidades de la solución solo constan signos de uno de los SMS es una muestra del uso de los mecanismos de control, gestión y decisión de la <u>componente 5 del espacio del problema</u>.

La correspondencia entre las componentes **x** y **n** para cada cantidad del diccionario da cuenta tanto de la elección como de la adecuación de la relación que debe ser utilizada o se utiliza para asignar a la cantidad una de dichas componentes cuando la otra ya ha sido previamente asignada. Así ocurre con la cantidad para la que nosotros usamos el nombre *"heno ahorrado en los días previstos"*, y la expresión aritmética *"57 ·113"* que implica el uso de una relación determinada, En la resolución de (R y S) se muestran dudas sobre la relación que debe utilizarse para determinar la cantidad con dicho nombre. Sin embargo, en (M y J) a la cantidad que tiene dicho nombre se le asigna la expresión aritmética *" 73 · 113"* utilizando una relación que produce una cantidad cuyo nombre para nosotros es "heno ahorrado en los días reales", lo cual es un error. Además, en las resoluciones ocurre que: el uso del arsenal de mecanismos de control, gestión y decisión obliga a la emisión de un juicio sobre la justeza de la correspondencia **n**, **x**, y como ocurre en A y J, (J-49), se puede acabar sentenciando "esto esta mal".

Dado que en la resoluciones analizadas intervienen parejas de estudiantes, en el proceso de comunicación éstos usan habitualmente, la componente **n** para referirse a las cantidades y el sentido de las expresiones verbales que las refieren se utiliza para justificar relaciones establecidas o explicar expresiones aritméticas, dirimir conflictos entre ellos o elaborar planes parciales.

3) El conjunto de operadores presentado como <u>componente 3</u> se muestra suficiente para describir los cambios de estado tal y como se muestra en las descripciones presentadas que incluyen los operadores que actúan en el paso de un estado a otro.

Lo que debe de anotarse aquí se refiere al uso adecuado de los operadores. Tomaremos como ejemplo para hablar de ello el operador **ia**, incorporación de arista, haciendo mención a algunas ocurrencias de su uso:

En **2.2.4.2**, (A y J)6, se señala en rojo una arista que contiene los vértices "x/57" y "73 · 113" componentes **x** de las cantidades "heno diario previsto" y "heno ahorrado en los días reales" (donde uso para estas cantidades los nombres del diccionario teórico de cantidades, ver **1.15.3**, A y J usan "cada día pensaban gastar" y dirimen sobre el nombre y significado de la expresión aritmética). Ocurre que en el grafo teórico no existe ninguna arista que contenga esos dos vértices, esto es, no hay una relación ternaria entre esas dos cantidades. De ahí el color rojo que indica "error".

En **2.2.3.2,** (M y J)3 el uso inadecuado de la regla de tres, acarrea implícitamente la incorporación de una arista (en rojo a trazos) cuyos vértices son las cantidades: “días previstos”, “heno consumido diario”, “heno almacenado”, arista que no consta en el grafo teórico. Asimismo, en el esbozo del plan de que se da cuenta en (M y J)6 en color negro aparecen aristas que tampoco constan en el grafo teórico.

Por otro lado, en **2.2.2.2**, (R y S)10 donde se resume la controversia entre R y S sobre el modo más conveniente de determinar “cuánto tenían previsto gastar cada día”, en lila y naranja, se muestran las aristas que cada uno de los estudiantes incorporarían al grafo de la resolución para determinar dicha cantidad. Lo que es relevante en nuestro caso es la posición de S que se niega en redondo a incorporar una arista que pertenece al grafo teórico. Explicaciones de este hecho se encuentran en (Puig 1996, pág. 219), en dos sentidos, en la aparición de un fenómeno “que muestra la tendencia a establecer las relaciones no entre las cantidades, sino entre las cantidades cargadas con significados del contexto de la historia que narra el problema” y en las condiciones bajo las cuales las cantidades intensivas pueden sumarse.

En resumen el uso de los operadores del conjunto Q, permite a los resolutores el paso de un estado a otro, pero un uso inadecuado puede conducirles a un estado prohibido. Para nosotros un estado prohibido es un grafo de la resolución que no es un subgrafo del grafo teórico. Como ocurre cuando se usa **ia,** o bien a una correspondencia inadecuada entre las componentes **n** y **x** del diccionario de cantidades de la resolución, -ver lo dicho en 2) cuando se usan los operadores **an**, **aar**, **aal**. Estos usos inadecuados se han considerado errores y se han señalado en rojo en la descripción de las resoluciones.

4) <u>El estado inicial de conocimiento es una componente postulada del espacio del problema</u>, De no postular tal estado como existente el proceso de la resolución de un problema no se desencadenaría y además carecería de sentido. El texto del problema no invocaría la necesidad de producir otro texto con las características de un texto que consideramos como resolución del problema.

La localización, como experimento mental en el discurso, de este estado inicial de conocimiento en la mente de un estudiante concreto, permitiría conjeturar la inexistencia, o el no uso, de tal estado inicial de conocimiento en la mente de estudiantes, que cuando se les presenta un test con el enunciado de varios problemas como el que tratamos y un espacio en blanco para su uso, escriben en dicho espacio frases como éstas:

“yo voy al cine, tu vas al cine”, “come melocotones fritos”.etc.

De lo dicho, y en contrario, conjeturamos su existencia en la mente de un estudiante que escriba en tal espacio en blanco una resolución que se ajuste al contrato establecido y en los estudiantes que han producido las resoluciones descritas. De ahí que postulemos dicho estado inicial como una de las componentes de dicho estado.

Lo que contiene concretamente dicho estado inicial, tal y como fue descrito, entra en el terreno de lo postulado, contiene los mínimos elementos que se requieren para echar a andar en la resolución, y lo que contiene el estado inicial de conocimiento de una resolución concreta solo puede ser esbozado y borrosamente a posteriori, tras el estudio de la resolución. Así en (R y S) podríamos afirmar que no constaría en su estado inicial de conocimiento el modo de resolver en el SMS del álgebra y por tanto el GT inicial de relaciones entre cantidades, la concepción de la solución y los operadores que tal estado inicial contendría son diferentes a A y J que comienzan su resolución en el SMS del álgebra.

5) El repertorio de habilidades del resolutor en cuanto a la disposición para su uso de los SMS aritmético y algebraico queda de manifiesto en las resoluciones descritas donde (A y J) utilizan el SMS del álgebra, (R y S) el SMS de la aritmética y (M y J) utilizan durante la mayor parte de la resolución y expresan su solución en el SMS de la aritmética, aunque muestran disponer para su uso el SMS del álgebra, lo que hacen cuando se encuentran en dificultades. La invocación de la regla de tres, ocurre en las resoluciones que hacen uso del SMS de la aritmética.

En las resoluciones descritas el uso de tales SMS en la resolución puede juzgarse de competente. No obstante en la resolución de (A y J) se usa la misma literal ”*x*”, para designar a dos cantidades diferentes, uso que prohibe el SMS del algebra. No obstante dicho uso de (A y J) de una misma literal para designar dos cantidades puede cuestionarse si es que se entiende que (A y J) comienzan un nuevo plan de resolución y empiezan por atribuir “*x*“ a la cantidad que ahora toman como nueva incógnita, ya que en la misma resolución de (A y J) nos encontramos con el uso de una nueva literal “*y*” para designar a la compleja expresión algebraica obtenida, para inmediatamente volver a su designación inicial “*x*”, toda vez que han reconocido dicha cantidad “*y*” como ya designada por “*x*”.

El catálogo de modos de resolver, incluye a los que se ha hecho mención en el apartado anterior. Estos modos de resolver están acompañados de su correspondiente SMS, guiando y organizando globalmente la resolución.

El estudio detenido de los mecanismos de control, gestión y decisión que intervienen en la resolución, no está en la intención ni es el propósito de esta tesis, nos basta aquí con señalar su presencia, como se ha hecho en las descripciones, y constatar que las formas de manifestarse son las anotadas en **1.15.2**

6) Las soluciones del problema que se muestran en el apartado anterior se corresponden con rutas tal y como fueron descritas en la componente 6 del espacio del problema en **1.15.2**. Que tales rutas representan la concepción de la solución de los estudiantes se manifiesta por expresiones como “ya está”, o “solo falta resolver”.No obstante aunque en las resoluciones examinadas no haya sido el caso, la concepción de lo que es una solución de un problema de esta familia debe incluir a las que encuentran el resultado mediante el tanteo, ver capitulo 3, por los que el conjunto S de soluciones del espacio del problema debería de ampliarse para acoger a dichas soluciones.

2.4.- De los errores

Es cierto, en las resoluciones analizadas en **2.2** se cometen pocos “errores” y los que se comenten se restauran en el transcurso de las resoluciones. Sin embargo, es conocido que en la realización de muchas tareas algebraicas los escolares producen multitud de errores. Respecto a las razones por las que pueden encontrase dichos errores podemos leer en Socas y Paralea (1997):

> "Pero su aprendizaje (el del algebra escolar) genera muchas dificultades a los alumnos y alumnas y estas dificultades son de naturaleza diferente, y tienen que ver con la complejidad de los objetos del álgebra, con los procesos de pensamiento algebraico, con el desarrollo cognitivo de los alumnos y alumnas, con los métodos de enseñanza y con actitudes afectivas y emocionales hacia el álgebra.
>
> Éstas dificultades de procedencia distinta se conectan y refuerzan en redes complejas que se concretan en la práctica en forma de obstáculos y se manifiestan en el alumnado, mediante errores." (Socas y Paralea, pág.17)

Socas y Paralea proponen agrupar los errores en tres ejes, según el origen del error lo constituyese: un obstáculo, una ausencia de sentido, o fuese debido a actitudes afectivas y emocionales.

En cuanto toca a lo que es demandado por la tarea que se propone a los estudiantes, se han identificado errores en el cálculo o transformación de expresiones aritméticas o algebraicas, en la sustitución formal en las mismas y en la resolución de ecuaciones. Matz (1980) ha organizado un catálogo que da cuenta y trata de explicar la mayoría de estos errores.

Cuando la tarea es resolver un problema o poner un problema en ecuaciones, el error más conocido es el error lamado "reversal error" encontrado en el problema estudiantes-profesor, (Clements, 1982). Aún conocida, la tarea es la siguiente:

"Write an equation using the variables S and P to representing the following statement:

There are six times as many students as professors at this university. Use S for the number of students and P for the number of professors."

Solamente el 63% de los estudiantes dieron la respuesta correcta y la respuesta incorrecta típica fue 6S=P. Replicaciones de este experimento han mostrado la misma respuesta típica, con este y otros problemas semejantes. Además, se han realizado entrevistas individuales con la intención de desvelar las razones de la comisión de dicho error e incluso diseñado sesiones tutoriales en orden a su superación, (Clement ,1982; Cooper, 1984; Kaput y Sims-Knight, 1983; Wollman, 1983). Lo que se acepta corrientemente es que la causa principal por la que se comete el reversal error es el intento de traducir directamente de palabras a símbolos, (Hershkovics, 1989; Laborde, 1990; Mestre, 1988)

Aunque el "reversal error" es el error más estudiado otros muchos errores se han encontrado en la traducción de problemas a ecuaciones lineales simples, Stacey y Mcgregor (1993) indican que es aceptado que los estudiantes cometen errores a causa de:

1.-El uso de letras como abreviaturas de palabras.
2.- El intento de traducir directamente de las palabras clave a los símbolos matemáticos, de izquierda a derecha, sin que el significado sea concernido.
3.- El uso del signo igual para indicar que lo que está en la izquierda esta asociado con lo que está en la derecha.
4.- La influencia perniciosa de los dibujos mentales.

2.4.1- Errores en las resoluciones.

Dedicaremos este punto a precisar que entendemos por error en la resolución de un problema de la FPAA, el criterio seguido para identificarlos y de qué diremos que son inicialmente consecuencia.

En el diccionario de la Real Academia Española, vigésima primera edición, constan para *error* cuatro acepciones de las cuales tres son pertinentes aquí: "1.-.Concepto equivocado o juicio falso.2.-Acción desacertada o equivocada. 3.-Cosa hecha desacertadamente" de donde tomaremos para *acertar* "1.- Dar en el punto que se dirige alguna cosa. 2.-Dar con lo cierto en lo dudoso, ignorado u oculto" y para *equivocar* "tener o tomar una cosa por otra, juzgando u obrando desacertadamente".

En las resoluciones descritas en el apartado **2.2** con independencia de que las resoluciones deben de considerarse acertadas al contener una solución del problema, ciertas acciones emprendidas por los estudiantes las hemos calificado como *erróneas*. Toda acción productiva en el proceso de resolución es consecuencia del uso de un operador, así cuando el resolutor produce usando inadecuadamente un operador se equivoca y comete un *error*. Por tanto lo que queda aquí por decir se refiere a los criterios que deben usarse para decidir cuando lo producido es erróneo, lo que debe contestarse respondiendo qué usos de los operadores son inadecuados.

L. Rico (s.f.) en un documento interno "Errores en el aprendizaje de las Matemáticas " escribe:

> "Una característica de las matemáticas escolares consiste en el carácter bien definido de las cuestiones y problemas que se plantean a los niños y jóvenes, independientemente del tópico tratado o del nivel de los escolares. Incluso cuando se incorporan tópicos relativos a estimación de medidas, cálculo aproximado o nociones de probabilidad, todas las cuestiones planteadas tienen una respuesta o un rango de respuestas, adecuada(s); cualquier otra respuesta se considera inadecuada o incorrecta".

En **1.15.3** se introdujeron las nociones de grafo teórico del problema y diccionario teórico de cantidades de un problema En los vértices y aristas del grafo teórico del problema están representadas todas las cantidades y relaciones ternarias entre ellas que pueden considerarse en la resolución. Las cantidades y relaciones que constan en el grafo teórico del problema unas provienen de una lectura analítica y las otras las imaginamos allí producidas por un autómata - léase experto- dotado de capacidades semánticas y deductivas. El diccionario teórico de cantidades del problema contiene un número de cantidades fijo, tantas como vértices tiene el grafo teórico del problema, Cada cantidad del diccionario teórico de cantidades del problema dispone de una o varias acepciones un sus componentes **x** y **n**, las expresiones aritméticas o algebraicas que la refieren en distintos sentidos, la componente **x**[11], y las distintas expresiones

[11] ver , por ejemplo **1.10** para las diferentes expresiones algebraicas que pueden asignarse a una cantidad

verbales, la componente **n**[12] y una única acepción en la unidad de medida de la componente **u**[13].

Pues bien, en esta tesis, un operador se usa adecuadamente, si lo producido mediante el uso de ese operador está contenido en el grafo teórico del problema o en el diccionario teórico de cantidades de ese problema. Lo producido en el diccionario de cantidades de la resolución que no consta en el diccionario teórico de cantidades del problema se califica de *error* y las características de lo producido identifican el operador que, actuando sobre el diccionario de cantidades de la resolución o el grafo de de la resolución, ha sido usado inadecuadamente.

Nótese que error se dice y se califica de erróneo lo producido puntualmente en la resolución, no la resolución. La resolución será correcta cuando contenga una solución. E incorrecta cuando sea errónea cualquier producción puntual de lo que se presenta como solución.

Algunos ejemplos de producciones erróneas pueden ser tomados de las resoluciones mostradas en el apartado **2.2**. Así:

En el diccionario teórico de cantidades del problema HENO no consta en la componente **x** de la cantidad "heno almacenado" el número "22946" que (M y J) dan inicialmente como respuesta del problema. Esta respuesta se proporciona en (M y J)3 fruto del cálculo de la expresión aritmética " (6641/16) · 57 " que tampoco consta en el diccionario, y dicha expresión aritmética ha sido obtenida obscureciendo una arista usando una relación, que contiene los vértices: (57, días, "días previstos"), (" 6641/57, kg./día, "heno consumido diario"), (¿? , kg., "heno almacenado") y no consta en el grafo teórico del problema ninguna arista que contenga esos tres vértices. De *error* calificamos a la expresión aritmética, consecuencia del uso de una arista -relación- inexistente. Este es el *error* y de lo que es consecuencia. En este caso, como la introducción de esa arista concreta, inexistente en el grafo teórico del problema no se de hace modo individual, sino que se introducen simultáneamente dos aristas usando una relación de proporcionalidad, el operador **irp,** el uso inadecuado lo ha sido de la regla de tres.

En el diccionario teórico de cantidades del problema tampoco consta ninguna cantidad que tenga en su componente **x** la expresión algebraica "x/57 – 113·73" luego tal expresión algebraica es un *error*. El operador **aal** -asignación de expresión algebraica-, debe asignar lo producido tras oscurecer una arista que relaciona los vértices ("x/57", "113·73", ¿?) - referidos por su componente **x** o ("heno consumido en los días previstos", "heno ahorrado en los días reales", ¿?) referida según su componente **n**, pero ocurre que no consta en el grafo teórico del problema ninguna arista que contenga los dos vértices mencionados y otro vértice cualquiera. El vértice que J propone incorporar al diccionario de cantidades de la resolución para constituir una arista junto con los dos vértices anteriores representaría una cantidad cuya componente x sería, "x/57 – 113·73" y dicha cantidad no existe en el diccionario teórico de cantidades del problema, entre otras cosas, porque transgrede la ley de la homogeneidad. La arista de la cual J presupone su existencia es : "("x/57", "113·73", "x/57 – 113·73") que no puede constar en el grafo teórico del problema . Por tanto el

[12] ver, por ejemplo, los diccionarios de nombres de las resoluciones del apartado **2.2**
[13] En esta tesis no se han considerado los cambios de escala en la unidad de medida.

operador **aal** ha sido usado tras **cc** que ha actuado sobre una arista inexistente en el grafo teórico del problema y que se incorpora al grafo de la resolución, esto es J ha utilizado inadecuadamente, **ivc**, **ia**, **da. cc.**

Debe de insistirse que lo dicho hasta aquí permite identificar el error y los operadores que han sido usados inadecuadamente, pero que ni una palabra ha sido dicha hasta ahora sobre qué puede desencadenar este uso inadecuado, si las características del problema o la carencia de competencias de los estudiantes, que son algunos de los lugares, en el nivel II de estudio de la RP, en los que podríamos buscar la fuente del error. Si se tiene la intención de construir un catálogo de errores que de cuenta de los posibles usos inadecuados de los operadores, lo apuntado tiene que ver con la manera de construir el catálogo y las categorías que éste debe contener.

2 4.2.- De la confección de un catálogo de errores.

En la concepción presentada en el punto anterior, los errores se identifican en el diccionario de cantidades de la resolución cuando este se contrasta con el diccionario teórico de cantidades y se constata que, de hecho, lo producido por cualquiera de los operadores que actúan sobre el diccionario de cantidades de la resolución o el grafo de la resolución no consta en el diccionario teórico de cantidades. Hecho que se ha tomado en última instancia como consecuencia de un uso inadecuado de los operadores.

Lo que sigue es un estudio teórico de los errores que pueden producirse en la resolución, mediante examen de las posibilidades del uso posible de los operadores, operadores cuyas sucesivas producciones terminan proporcionando elementos a las componentes del diccionario de cantidades de la resolución. Este estudio pretende distinguir los distintos usos adecuados e inadecuados de los operadores y en consecuencia los distintos tipos de error. A la vez, se intentará anotar los síntomas que detectan tales usos. De lo que además pueda decirse de las fuentes del error, en términos del repertorio de habilidades del resolutor, se harán algunas consideraciones.

Para el examen de posibilidades, procedamos de modo analítico a partir de lo producido:

Los operadores que actúan sobre el diccionario de cantidades según **1.15** son los siguientes:

-actuando sobre la componente **x** :

an - asignación de número.
al - asignación de literal
aar - asignación de expresión aritmética.
aal - asignación de expresión algebraica.

- actuando sobre la componente **u**:

mu- mención de la unidad de medida.

-actuando sobre la componente **n** (asignaciones de nombre)

dvo - denominación de vértice oscuro- correspondiente a un dato-

dvc - denominación de vértice claro

A) De los operadores que actúan sobre la componente **x**, los operadores **aar** y **aal**, que asignan expresiones aritméticas o algebraicas tienen como soporte una arista del grafo de la resolución con dos vértices oscuros, el oscurecimiento de dicha arista da lugar a la correspondiente expresión, que **aar** o **aal** asignarán a un vértice. Así puede ocurrir que:

a) que la arista soporte de la expresión que va a asignar el operador conste en el grafo teórico del problema, en cuyo caso la expresión también consta en el diccionario teórico de cantidades[14]
b) que la arista soporte de la expresión que va a asignar el operador no conste en el grafo teórico del problema, en cuyo caso la expresión no consta en el diccionario teórico de cantidades

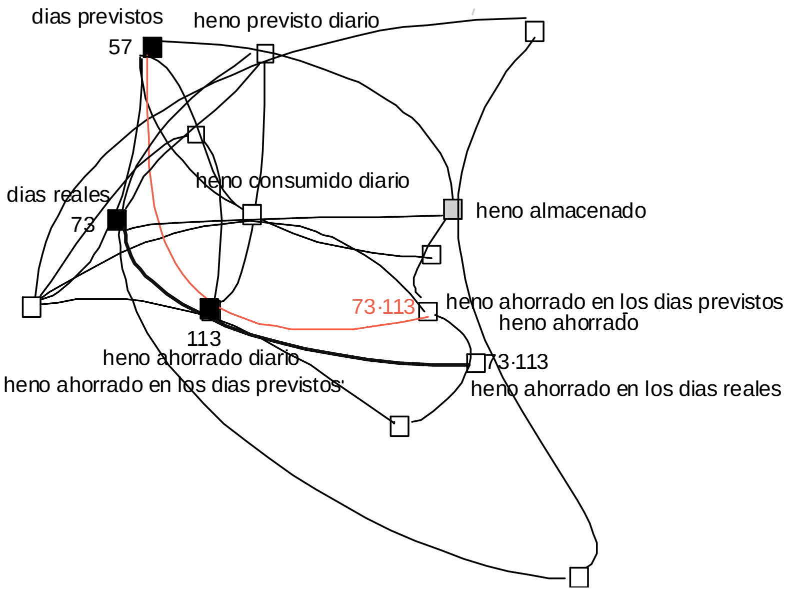
Caso a) Si la arista soporte de la expresión existe, el operador asignación de expresiones puede que actúe de dos maneras:

1) asignando la expresión al tercer vértice de la arista, el que se oscurece en la destrucción, *uso adecuado* del operador.
2) asignando la expresión al vértice de otra arista, *uso inadecuado* del operador.

Ejemplo: Tomemos el grafo teórico del problema del HENO y una instancia de la resolución de (M y J), ver figura bajo. En tal resolución señalamos con rojo, como error, la arista de la figura y la expresión aritmética “73 · 113”. La expresión “73 ·113” consta en diccionario teórico de cantidades, y se obtiene obscureciendo la arista soporte que se señala en la figura en trazo grueso y debe asignarse por tanto al vértice que representa a la cantidad “heno ahorrado en los días reales”. Sin embargo, en la resolución de (M y J) fue asignada al vértice “heno ahorrado (en los días previstos)”[15].

[14] Nótese que se supone que el resolutor tiene las habilidades aritméticas y algebraicas suficientes para construir adecuadamente una expresión compuesta, dadas otras dos expresiones y la operación correspondiente.

[15] Hablando en términos de estudiantes, puede decirse que éstos realizan un análisis equivocado de la cantidad “heno ahorrado”.



Caso b), Si la arista soporte no consta en el grafo teórico del problema, la propia expresión es un *error*. La expresión ha sido construida usando como soporte una arista que se ha incorporado al grafo de la resolución mediando el uso del operador **ia.**

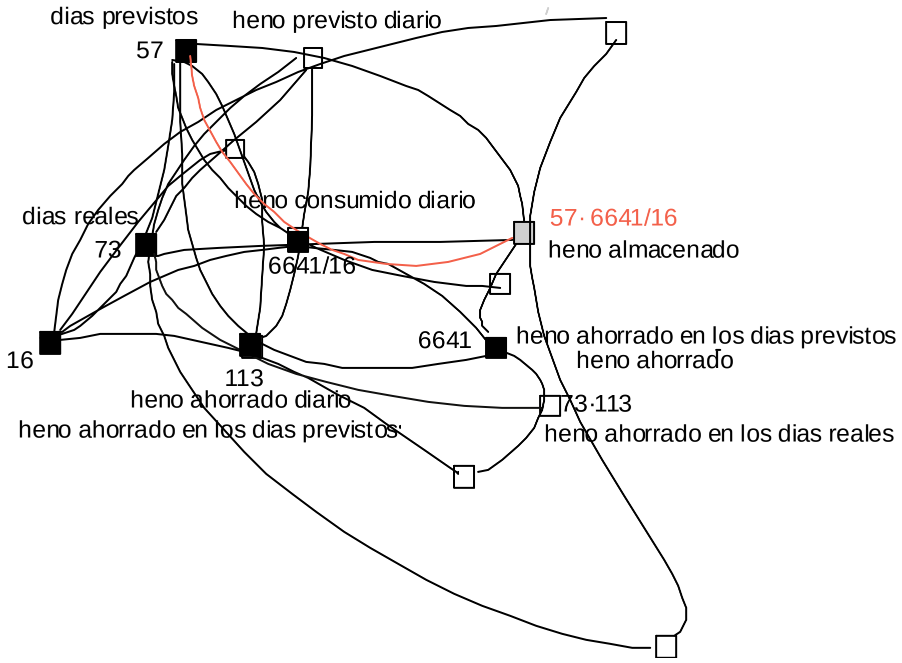
El uso del operador **ia** es adecuado cuando éste incorpora al grafo de la resolución aristas que constan en el grafo teórico. En el caso b), con lo que nos encontramos es con un uso inadecuado del operador **ia**. En todo caso, el operador asignación, al asignar tal expresión puede hacerlo de dos maneras distintas, según:

1) el tercer vértice de la arista inexistente en el grafo teórico conste en el grafo teórico.

2) el tercer vértice de la arista inexistente en el grafo teórico no conste en el grafo teórico.

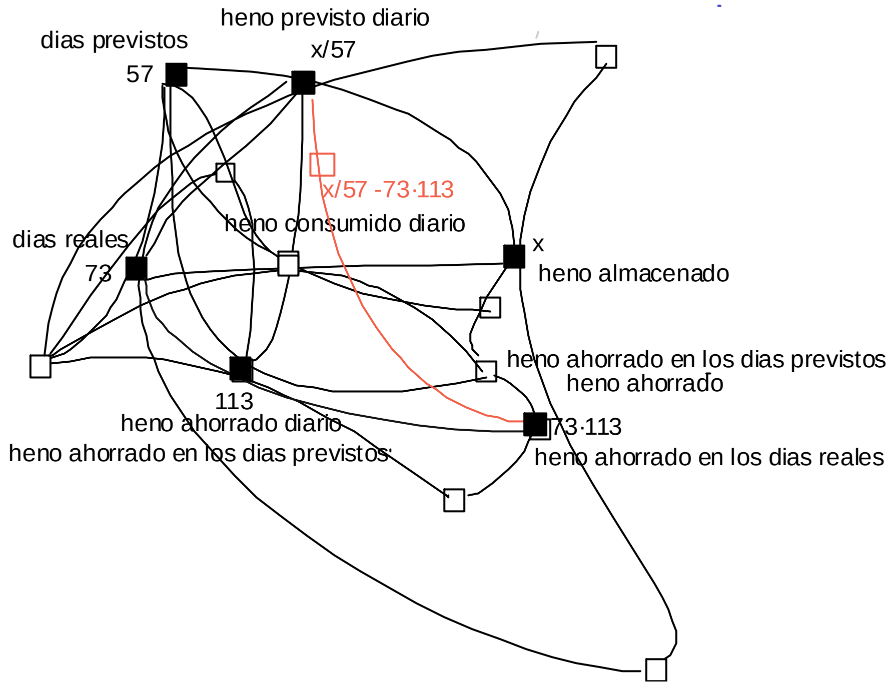
En el caso 1) nos encontramos con una cantidad en el diccionario de cantidades de la resolución para la cual habrá una discordancia entre su componente **x** y su componente **n**, el síntoma del *error*.

En la figura bajo, se presenta una instancia de la resolución de (A y J) en la que como consecuencia de un uso inadecuado del operador **irp**, que conlleva la incorporación de dos aristas al grafo de la resolución, una de las aristas incorporadas, la señalada en rojo, no consta en el grafo teórico. La expresión aritmética producida es un error, asignándose además al vértice “heno almacenado”.



Es de observar, que la discordancia entre las componentes **x** y **n** de una cantidad del diccionario de cantidades de la resolución también se da en la posibilidad a), 2) pero en ese caso el único síntoma que puede apreciarse es la discordancia, mientras que éste, en b), 1) la discordancia se produce necesariamente porque la expresión es un *error*.

En el caso 2), con la incorporación además de la arista, de una nueva cantidad y errónea en el diccionario de cantidades de la resolución. El ejemplo de la figura es una instancia de la resolución de (M y J). En rojo, la arista y la cantidad erróneas.



En este caso, el caso b), la arista inexistente en el grafo teórico ha sido incorporada al grafo de la resolución, mediante un uso inadecuado del operador **ia**, el operador **ia** señala relaciones entre las cantidades representadas por los vértices del grafo teórico.

Como en nuestro análisis se parte de las expresiones que se deben asignar, siempre tendremos una arista soporte, independientemente de su existencia en el grafo teórico, que contiene dos vértices oscuros y uno claro. En el caso 2) la incorporación de la arista se hace conjuntamente con la incorporación de un vértice, claro que al no constar en el grafo teórico del problema no representa a cantidad alguna. En el caso 1) la incorporación de la arista no conlleva la incorporación de vértice alguno, ya que es una arista que contiene tres vértices que ya están en el grafo teórico. Luego con relación a la arista que se incorpora y los vértices que esta relaciona puede ocurrir:

p) que entre esos tres vértices ya existiese una arista en el grafo teórico que relacionase esos tres vértices, pero que su denominación –**da** - no fuese precisamente la utilizada.

q) que entre esos tres vértices no existiese ninguna arista en el grafo teórico que los relacionase.

Puesto que todas las aristas que existen en el grafo teórico son aditivas o multiplicativas y están orientadas, en el caso p) lo que le ha ocurrido al operador **da** se ha equivocado, tomando una cosa por otra, esto es, denominando la arista aditivamente en lugar de multiplicativamente u orientándola indebidamente. Lo que en definitiva es un uso inadecuado del operador **da,** denominación de arista. No podemos aquí dar ejemplos de este tipo, porque no constan en las resoluciones estudiadas. En el caso q) se ha postulado una relación donde no la hay. Este caso ya ha sido estudiado como b), 1).

Debe anotarse que el análisis se ha realizado partiendo de expresiones asignadas previamente a dos vértices oscuros y que éstas asignaciones previas son adecuadas. Esto es, los errores se han analizado para una producción que requiere de "un único paso", un único movimiento sobre el grafo. En el proceso de resolución esta asignación adecuada puede postularse en su inicio, cuando ocurre que con las únicas asignaciones realizadas lo son de datos. De ahí que la iteración de usos adecuados o inadecuados de los operadores partiendo de expresiones erróneas o asignaciones inadecuadas pueda conducir a expresiones a su vez erróneas, cuya producción debería poder esclarecerse partiendo desde su inicio.

B) De los operadores que actúan sobre la componente **x**, el operador **al** – asignación de literal- asigna letras a los vértices claros. Los usos adecuados del operador **al** provienen de las reglas de uso del SMS del álgebra para resolver problemas establecidas en el Modelo Cartesiano. Tales reglas reescritas para el operador **al** versarían:

-el operador **al** puede asignar cualquier letra a cualquier vértice claro.
-la letra debe ser distinta para cada vértice distinto.
-si el operador **al** asigna una letra a un vértice oscuro, debe actuar en consecuencia el operador **ec**, que escriba la correspondiente igualdad cuyos dos miembros deben ser: uno, la letra asignada, otro, la componente **x** de la cantidad representada en el vértice al que se ha asignado la literal.

Cualquier otro uso del operador **al** se considera inadecuado. Así los usos inadecuados que pueden darse son:

-asignación de una letra a vértice oscuro, sin que esta asignación vaya seguida del uso de **ec**. Lo que puede ocurrir en los casos en que el vértice oscuro represente bien a una cantidad conocida del problema, bien a una cantidad desconocida representada por un vértice que ya ha sido oscurecido.
-asignación de una misma letra a dos vértices claros distintos.
- asignación de letra distintas al mismo vértice claro.

Debe anotarse que estos usos inadecuados parten del principio que una letra se usa para designar una cantidad y no otra cosa. De ahí que si las letras son usadas de otras maneras en la resolución del problema, lo dicho carecería de sentido. Y habría que rehacer los análisis anteriores.

C) De los operadores que actúan sobre la componente **x**, el operador **an** asigna números a dicha componente. Los números que asigna dicho operador o bien son datos o provienen de cálculos efectuados con expresiones aritméticas. En todo caso el operador siempre actúa sobre vértices oscuros.

En el caso que el operador **an** asigne un número que es un dato, tal número siempre constará en la componente **x** de una cantidad del diccionario teórico de cantidades, y puede asignarlo:

1) al vértice oscuro que representa dicha cantidad conocida - *uso adecuado*-
2) a otro vértice - *uso inadecuado*-

Uso inadecuado que no puede atribuirse más que a un despiste del estudiante, ahora en términos del mismo. Esta atribución debe hacerse, al menos, como suposición inicial.

En el caso que el operador **an** asigne un número que es fruto de cálculos sobre una expresión aritmética, expresión correctamente construida y correctamente asignada, se pueden dar 1) y 2) como antes, pero puede ocurrir además que el número fruto de los cálculos no conste en el diccionario teórico de cantidades, lo que se diagnostica cómo error de cálculo y permite hablar de las habilidades aritméticas del resolutor.

D) Un único operador actúa sobre la componente **u** del diccionario de cantidades de la resolución, el operador **mu** que se usa para mencionar la unidad de medida de una cantidad. El uso inadecuado de este operador consiste en atribuir a la componente **u** de una cantidad una unidad de medida que no es adecuada para la cantidad a la que se asigna tal unidad, esto es, que dicha cantidad no puede medirse con dicha unidad de medida.

Lo habitual en los diccionarios de cantidades de la resoluciones producidos por los estudiantes es encontrar la componente **u** de las cantidades del diccionario en blanco. En las resoluciones analizadas que provienen de registros audiovisuales de las actuaciones de los estudiantes se hace un uso escaso del operador **mu** o bien la mención de la unidad se acompaña de la mención a la componente **n** o **x**. En las resoluciones de las que el estudiante da cuenta por escrito de su actuación, las menciones a la unidad de medida de las cantidades que se consideran son casi inexistentes, incluso la respuesta a la pregunta del problema omite bastante a menudo la mención a dicha unidad.

Tal ausencia es de lamentar, pues uno de los instrumentos de los que pueden servirse los mecanismos de control, gestión y decisión para detectar algunos errores, o elaborar y descartar análisis encaminados a la determinación de cantidades, es precisamente el “análisis dimensional”, que tiene como requisito previo la consideración de la unidad de medida de la cantidad que se está considerando.

E) Los operadores que denominan **dvo, dvc**, se usan para hacer constar en la componente **n** de las cantidades del diccionario de cantidades de la resolución expresiones verbales que refieren cantidades. Esto es, el uso de **dvo, dvc** tiene como soporte expresiones verbales**.** El diccionario teórico de cantidades, por definición, dispone al menos de una expresiones verbal para referir a cada una de las cantidades que están representadas en los vértices del grafo teórico y puede contener acepciones que la refieren en distintos sentidos. En puridad deberían de constar al menos tantas expresiones verbales como sea el orden del vértice que en el grafo teórico representa dicha cantidad.

Si las expresiones verbales soporte de **dvo, dvc,** se expresan en alguno de los sentidos, o juzgados como semejantes, de las expresiones verbales que constan en el diccionario teórico de cantidades del problema, el único *uso inadecuado* que cabe de dichos operadores es equivocarse de vértice al asignar. Esto es, asignar una expresión verbal como componente **n** de una cantidad que debía de ser asignada a la componente **n** de otra cantidad.

En la resolución, este uso inadecuado de estos operadores es en principio indetectable, el uso de un operador denominación por un resolutor se puede considerar como la consideración por éste de la cantidad que tal operador denomina cuando la componente **x** de tal cantidad está en blanco. Ahora bien si el uso de este operador se hace con la componente **x** no en blanco, esto es después que hayan actuado alguno de los operadores **an**, **al**, **aar**, **aal**, la discordancia entre ambas componentes indica el uso inadecuado del operador. El síntoma de discordancia entre las componentes **x**, **n** ya nos lo encontramos entonces como un uso inadecuado de los operadores: **aar**, **aal**.

Sobre los sentidos de las expresiones verbales utilizados para referir las cantidades consideradas en las resoluciones se hicieron algunas consideraciones en **2.2**, en las resoluciones que constan de un texto escrito, que son la mayor parte de las que se considerarán en esta tesis, las expresiones verbales para referir las cantidades son escasas y en general inexistentes. Que las expresiones verbales son usadas en las resoluciones es manifiesto en las resoluciones de los estudiantes que hemos analizado. Puede postularse que las expresiones verbales son usadas internamente por los estudiantes, aunque nos den cuenta de su resolución en un texto escrito en el que raramente hacen constar expresiones verbales.

Para finalizar, el operador **ec** se encarga de establecer el signo igual entre dos expresiones asignadas al mismo vértice y cabe imaginar un único *uso inadecuado* de tal operador, que establezca el signo igual entre expresiones asignadas a dos vértices diferentes.

En resumen, los errores posibles según éste análisis son:

1. De discordancia entre las componentes **x** y **n** de una cantidad.
2. Asignación de expresiones erróneas a cantidades.
3. Expresiones aritméticas o algebraicas erróneas debidas:
   -a la consideración de una relación inexistente entre cantidades.
   -a dar por correcta una relación equivocada.
4. Asignación de letras inadecuada.
5. Igualdades establecidas entre expresiones que refieren cantidades diferentes

Errores que cometidos por estudiantes mostrarían deficiencias en el uso de letras o del signo igual respecto de lo establecido en el MC y una deficiente percepción de las relaciones entre las cantidades que conlleva análisis equivocados o irreales.

2.4.3.- Un catálogo de trabajo para los errores en la resolución.

A partir de las consideraciones anteriores podemos elaborar un catálogo de errores en la resolución, catálogo que como fruto del análisis teórico solo puede considerarse de trabajo y debe de ser contrastado con lo observado Además, dicho catálogo queda abierto a una ampliación y refinamiento de tipos en cada una de las categorías, con posterioridad al examen de resoluciones producidas por estudiantes ya analizadas por otros autores, o las que se realizarán en capítulos posteriores.

Se han considerado en el catálogo tres tipos de errores: en el uso de letras, en la construcción de expresiones algebraicas, en el establecimiento de la igualdad.

Errores en el uso de letras.

Designación múltiple

Se dice que la literal posee designación múltiple cuando un número o cantidad es designado por más de una literal.

Significado múltiple (polisemia)

Se dice que la literal posee polisemia cuando la literal se utiliza para designar a más de un número o cantidad.

Significado cambiado.

Se dice que la literal tiene el significado cambiado cuando una literal se usa para designar a otra cantidad diferente a la que le fue expresamente atribuida tal literal.

Errores en la construcción de expresiones aritméticas o algebraicas

Los errores en expresiones aritméticas o algebraicas se enuncian en función de la diferencia que existe entre la expresión algebraica: EA', utilizada para referir una cantidad y la expresión que debería referirla: EA.

Error de Operación

Se dice que la expresión (A # B)’ contiene un error de operación cuando se encuentra escrita la expresión (A # B)’ en lugar de A * B, donde # y * designan operaciones diferentes.

Entre ellos se encuentra el error de inversión.

Error de Inversión

Se dice que una expresión (A # B)’ contiene un error de inversión cuando se encuentra escrita la expresión (A # B)’ en lugar de A * B donde *, # se refieren a operaciones inversas.

Error de arbitrariedad

Se dice que la expresión EA contiene un error de arbitrariedad o es arbitraria cuando no tiene ningún referente en el DCTP, y leída de forma que los errores mencionados anteriormente no juegan un papel relevante.

Error de homogeneidad

Se dice que la expresión EA arbitraria contiene un error de homogeneidad si dicha expresión transgrede la ley de la homogeneidad.

Errores de Igualdad

Se dice que una igualdad es errónea si las cantidades referidas por las expresiones de un lado y otro de la igualdad son diferentes.

2.5.- Conclusiones.

1.- El espacio de un problema de la FPAA con todas las componentes mencionadas en **1.15.2** se considera suficiente para describir las resoluciones de los problemas de dicha FPAA por parte de los estudiantes. Esto es, el espacio del problema definido debería formar parte de cualquier modelo cognitivo para la resolución de problemas de la FPAA.

2.- De lo dicho en 1 se desprende que el grafo de la resolución de un problema, el diccionario de cantidades de la resolución y el modo de resolver resumen una parte de información sustantiva de lo acaecido en la resolución del problema.

3.- Admitiendo que:

Si lo que se acepta como correcto, de lo producido y expresado en un SMS en el proceso de resolución de un problema, viene delimitado por el diccionario teórico de cantidades y el grafo teórico del problema subyacente. Y que todo lo producido que no consta en el diccionario de cantidades es un error.

Entonces, los errores pueden atribuirse al uso inadecuado de los operadores. Y un análisis teórico predice que es posible observar los siguientes errores:

De discordancia entre las componentes **x** y **n** de una cantidad.

Asignación de expresiones erróneas a cantidades.

Expresiones aritméticas o algebraicas erróneas debidas:

-a la consideración de una relación inexistente entre cantidades.
-a dar por correcta una relación equivocada.

Asignación de letras inadecuada.

Igualdades establecidas entre expresiones que refieren cantidades diferentes

4.-Los errores que cometidos por estudiantes mostrarían deficiencias en el uso de letras o del signo igual respecto de lo establecido en el MC y una deficiente percepción de las relaciones entre las cantidades que conlleva análisis equivocados o irreales.

5.- En un catálogo de trabajo, los errores pueden agruparse en tres tipos: en el uso de letras, en la construcción de expresiones y en el establecimiento de la igualdad, que se corresponden con la heterogeneidad de lo que se produce en el SMS en que se expresa la resolución. Dicho catálogo de trabajo viene especificado en **2.4**.

Capítulo 3

Problemas de Lectura Algebraica. Estudio de Resoluciones en el SMS de la Aritmética.

3.0.-Introducción

Este capítulo y los subsiguientes contienen estudios de las resoluciones de estudiantes de secundaria y de la Licenciatura de Matemáticas de problemas de lectura algebraica, PLA.

En este capítulo nos ocuparemos, en primer lugar, de los modos de resolver PLA, en un intento teórico de describir un catálogo de modos de resolver del resolutor susceptible de ser utilizado por los estudiantes. Ahora bien, como las resoluciones se expresan en un sistema matemático de signos, SMS, usaremos la noción de SMS introducida por Filloy y pondremos en relación el SMS utilizado y el modo de resolver. Del proceso de resolución del problema se prestará atención al proceso de traducción y se intentará describir pormenorizadamente lo que debe contener el proceso de traducción según los distintos modos de resolver. La parte teórica del capítulo termina examinando las alternativas, que en teoría puede disponer un estudiante para encontrar solución de un PLA usando el modo de resolver aritmético. Dicho examen apunta a que es necesario, que el estudiante disponga de ciertas competencias semánticas y/o deductivas, e incluso heurísticas, para lograr obtener una solución del problema mediante el uso de dicho modo de resolver.

La parte experimental del capítulo consta de dos estudios, el primero se puede considerar exploratorio y se dedica a estudiar resoluciones de PLA en el SMS de la aritmética. En concreto a la indagación de los modos de resolver del catálogo que son utilizados por los estudiantes. También a la posible relación entre el modo de resolver y la estructura del problema; además, se pretende en este estudio comprobar la existencia de problemas difícilmente resolubles en el SMS de la aritmética, preguntándose por su estructura. La pretensión intencional de profundizar en cómo se resuelve obliga a cierto grado de detalle en la descripción de las resoluciones; ello, ayudaría a forjarse una idea de las competencias semánticas y/o deductivas puestas en juego por los estudiantes. La intención de estudiar resoluciones en el SMS de la aritmética requiere de una adecuada elección de los estudiantes. Los estudiantes que aquí se han considerado son: por una parte, estudiantes mexicanos de secundaria que están iniciándose en el estudio del álgebra escolar y con anterioridad a la introducción de la resolución de problemas mediante el MAES[16], y por la otra estudiantes de 4º curso de la Licenciatura de Matemáticas, que estaban informados del catálogo de modos de resolver. Así, los primeros estaban abocados a resoluciones en el SMS de la aritmética, por el mero

---

[16] El MAES es un modelo didáctico para poner un problema en ecuaciones. Y, antes de seguir y caer en el olvido, es el lugar de agradecer a G. Rubio la provisión de material que me hizo y que se utiliza en el presente capítulo: un cuestionario de problemas, las hojas de las respuestas y las resoluciones de los estudiantes.

desconocimiento de otra alternativa, mientras que a los segundos, se les prohibió el uso de ecuaciones para resolver los problemas, problemas propuestos en el contexto de un examen.

El segundo estudio, se dedica a la resolución de problemas pertenecientes al espacio de problemas de una situación concreta. Dos son las intenciones de este estudio: la primera, profundizar en el estudio de las competencias semánticas y deductivas de los estudiantes, competencias que se juzgan por su capacidad de introducir cantidades en la situación y mediante el uso pertinente del razonamiento proporcional; la segunda, corroborar que existen problemas de estructura tal, que en la práctica es difícil, o sencillamente imposible, obtener para ellos una solución aritmética. Esto último, aún en el caso que se disponga de una notable formación matemática y se hallan encontrado soluciones para problemas de estructuras semejantes, problemas pertenecientes al espacio de problemas de la misma situación concreta.

3.1.- SMS. Sistemas matemáticos de signos aritmético y algebraico.

La noción de SMS fue introducida por Filloy, (Kieran y Filloy , 1989). En Filloy (1999) se dice que tal noción puede ser una manera útil de organizar las observaciones experimentales. Puig (1994) tras ciertas reflexiones sobre los sistemas de signos en que se expresan las matemáticas y sobre la noción de sistemas matemáticos de signos introducida por Filloy presenta entre sus tesis.

"I.- Los textos matemáticos se producen mediante sistemas matemáticos de signos estratificados y con materias de expresión heterogéneas. op.cit. pág. 10.
II.- La heterogeneidad de la materia de expresión se manifiesta en la presencia en los textos de segmentos de lenguaje natural, algebraico, figuras geométricas, diagramas, etc." op.cit. pág.11.

Puesto que aquí consideramos, que la resolución de un problema producida por un estudiante es un texto matemático, para describir el SMS en que se expresa una resolución se va a hablar: de los signos, segmentos de signos que la resolución contiene, lo referido por ellos y el sentido de la referencia

Dos son los SMS en que vamos a clasificar los SMS utilizados en las resoluciones observadas. SMS que llamaremos SMS aritmético y SMS algebraico. Ello, olvidando que cualquiera que sea el SMS que se utilice en la resolución lo referido en ella lo es en "el mundo posible del problema" que sólo se interpreta en términos de cantidades y relaciones entre éstas. A lo que se presta atención en las resoluciones para decir que se expresan en uno u otro SMS es a los segmentos de signos matemáticos que en el "mundo de las matemáticas" refieren números, letras – incógnitas por su uso en dicho mundo- , operaciones aritméticas, y a lo que refiere en concreto el signo igual "= ".

Ambos SMS comparten los signos para las operaciones aritméticas y la referencia, de estos signos a las relaciones aditivas o multiplicativas entre las cantidades entre las que están interpuestos. La diferencia entre un SMS y otro estriba en los signos que se utilizan para referir las cantidades desconocidas del problema. De entrada, lo propio del SMS algebraico es el uso de letras para referirse a algunas de ellas. Para evitar ambigüedades, en lo que el signo refiere, se impone como regla de uso de signos del SMS, que la letra usada sea diferente para cada cantidad desconocida diferente.

No podemos, por principio, decir que en el SMS de la aritmética no se use signo alguno para referirse a las cantidades desconocidas. Como signos utilizados podemos encontrar abreviaturas, palabras, grupos de palabras o frases, etc., signos que entendemos que refieren lo que en el diccionario de cantidades llamamos el nombre de la cantidad y también otros signos gráficos, dibujos o esquemas alguno de cuyos elementos refieren a las cantidades desconocidas.

La diferencia sustancial entre un SMS y otro es la manera de referir la determinación de cualquier cantidad desconocida, o más precisamente, la componente que en la terna de componentes de la cantidad llamamos su valor. En el SMS de la aritmética, esto se hace mediante un número o signos que son expresiones aritméticas, en las que los signos aritméticos se interponen entre números, números que refieren a cantidades conocidas. Sin embargo, en el SMS del álgebra la determinación de cantidades desconocidas se refieren además mediante letras o expresiones algebraicas, en las que los signos aritméticos vienen interpuestos indistintamente entre números y letras, esto es, entre cantidades conocidas y desconocidas. Pero tanto en un caso como en otro, pueden usarse distintas expresiones aritméticas o algebraicas para referir la determinación de una misma cantidad, en cuyo caso decimos que la cantidad ha sido referida en sentidos diferentes. El signo “ = “ se usa en uno y otro SMS para indicar que la cantidad referida es la misma.

Se dice que lo sustantivo del SMS algebraico es la disposición de signos, letras para referir a cantidades desconocidas, signos que pueden combinarse tanto con otros que refieran a lo conocido o a lo desconocido mediante operaciones aritméticas para producir otros signos, que refieren a su vez a cantidades desconocidas. Esto es, se dice que en “el SMS del álgebra se puede operar con lo desconocido”, lo que debe matizarse cuando se usa el SMS en el proceso de traducción, ver **3.4**. En mi opinión, el poder del SMS del álgebra, cuando se usa en la resolución, reside en la capacidad que tiene para hacer posible que lo desconocido pueda referirse en una multiplicidad de sentidos.

Debemos hacer mención al uso de SMS en aquellas resoluciones en las que hay ausencia de letras o expresiones algebraicas para designar cantidades desconocidas pero éstas vienen referidas por otros signos, en particular por signos gráficos. Un determinado sistema de signos gráficos puede tener capacidad no sólo para referir cantidades conocidas o desconocidas aisladamente sino también a relaciones aditivas o multiplicativas entre cantidades. Esto ocurre por ejemplo, en la llamada, “álgebra geométrica” donde los signos elementales que refieren cantidades son segmentos y rectángulos y las relaciones geométricas entre estos elementos geométricos se usan para referir las relaciones entre las cantidades del problema. Así, en **A3.4,** haremos uso del SMS del álgebra geométrica en la obtención de soluciones aritméticas.

Por otro lado, Fernández (1997) ha caracterizado lo que él llama sistemas de representación, ayudado por la presencia y función de los signos gráficos en las resoluciones. Sin embargo, quizá debido al formato de presentación de los problemas o al contrato con los estudiantes, en las resoluciones que nosotros hemos analizado hay una escasa presencia de otros signos gráficos diferentes de números y letras para referir cantidades.

3.2.- SMS en las resoluciones de problemas de la FPAA.

Para hablar del contenido de las resoluciones de los estudiantes es menester hacer mención a los signos concretos de los SMS que utilizan en su composición del texto de resolución y tratar de indicar a qué se refieren estos signos en la resolución, que aquí debe leerse: indicar lo que vamos a dar por supuesto que deberían referir en un uso competente.

3.2.1.-Signos:

En este punto solo relacionaremos el conjunto de signos utilizados en las resoluciones que hemos analizado en esta tesis.

-*Signos numéricos*: en las grafías habituales según que los números sean enteros, decimales, fraccionarios,..

-*Signos alfabéticos*: letras, palabras, abreviaturas.

-*Signos aritméticos*: +, - ,x, ·, : , --

-Signos sintácticos aritmético-algebraicos: paréntesis, corchetes,..

-*El signo igual* : =

-*El signo de implicación*.

-*Otros signos gráficos*: Dibujos, esquemas, gráficas.

-*Bloques de signos* :

-en disposición de expresiones aritméticas o algebraicas: ejemplos: 33+47, (35-7) 2, 4^3, 3x-2, (100x-7x)4 , x^2.

-números, expresiones, ecuaciones,... acompañados de sus símbolos artefacto en disposición algorítmica.

-en la disposición del esquema de una regla: la regla de 3, Ejemplo:

20 -------------2000
60 ------------- x

-en otras disposiciones de tablas o secuencias. Por ejemplo: las disposiciones usadas para el tanteo

-*Igualdades incompletas*, donde el signo igual suele estar precedido de una expresión aritmética o algebraica y no precede a signo alguno.

-*Igualdades*:

-en las que no intervienen literales

$34+27.2 = 61.2$, $33 \times 5 = 155$, $40(120-80)= 40 \cdot 40 =1600$

$85+125=210$, $1410-210 =1200$, $1200 : 3 =400$

-en las que intervienen literales

a) $x = (1410- (85+25)) :3$, $x = (192 -120) : 3$, $x = 60 \cdot 2000/20$

b) $e = v\, t$, $A = l \times a$

c) $x + 2x = 3x$, $2(x-15) = 2x-30$

d) $3x+14 = 44$, $60(x-100) = 40\, x$

-Frases: expresadas en lengua vernácula, oraciones que tienden a describir, aclarar el significado, dar cuenta de la manera de proceder, explicar, argumentar,..

3.2.2.-De lo que refieren los signos usados en la resolución.

Los signos usados lo están en un texto de resolución. Nuestra referencia para hablar de lo que se refieren estos signos es la noción de espacio del problema, ver **1.15**, concebido como el mundo donde se lleva a cabo la búsqueda de la solución de cualquier problema de la FPAA.

Los enunciados de los problemas se conciben como descripciones de "situaciones reales" o "estados de un mundo posible". Los estados se describen verbalmente mediante cantidades y relaciones entre cantidades. Las cantidades son términos del diccionario de cantidades del problema y las relaciones entre las cantidades pueden expresarse en un grafo.

Los signos numéricos que encontramos en la resolución del problema y, a su vez, en el enunciado del mismo se refieren a cantidades conocidas. Desprendiéndose además, que cualquier otro signo numérico que se encuentre en la resolución se refiere a una cantidad desconocida y ha sido producido en el proceso de resolución.

De los signos alfabéticos, las letras se refieren a cantidades desconocidas excepto cuando aparecen en fórmulas. Las letras concretas que se utilizan son las habituales para las incógnitas u otras letras que suelen ser iniciales de los nombres de las cantidades. A pesar de insistir ante los estudiantes tanto verbalmente como en las instrucciones escritas, los estudiantes en la resolución no anotan, en la mayor parte de los casos, las cantidades desconocidas que refieren las letras que usan. Las letras que aparecen en fórmulas son las que habitualmente se utilizan en la instrucción y se refieren a las cantidades precisas que dicha fórmula relaciona en el "mundo para los que dicha formula es el caso", sin que sea en principio posible precisar en la instancia en que la fórmula es usada, si en el "mundo posible del problema" las letras refieren a cantidades conocidas o desconocidas

Por otro lado, es necesario decir, que, cuando un estudiante hace uso de letras en una resolución para referirse a cantidades desconocidas, es regla del sistema matemático de signos que debe utilizar letras distintas para referirse a cantidades diferentes y no debe utilizar letras para referirse a cantidades conocidas.

Los signos aritméticos se refieren a las relaciones aritméticas entre las cantidades entre las cuales el signo está interpuesto, independientemente de que éstas vengan referidas por signos numéricos o literales o una combinación de ambos. Además, dado que en el espacio del problema la única manera de producir cantidades requiere de la mediación de operaciones aritméticas, el bloque de signos que constituye una expresión aritmética elemental: “cantidad, signo aritmético, cantidad” se refiere a la cantidad así compuesta, en el sentido de cómo y de qué está cantidad está constituida, y el signo aritmético se refiere también a la operación aritmética que debe realizarse entre las dos cantidades en que está interpuesto para determinar efectivamente la otra cantidad. Y lo dicho para una expresión aritmética o algebraica elemental extiéndase para otras expresiones más complejas.

No puede hablarse de a qué se refiere el signo igual cuando se encuentra en igualdades incompletas sino únicamente decir que el resolutor tenía la intención de referir algo.

Cuando el signo igual se utiliza en igualdades refiere de modo diferente y en consonancia con lo que refieren los signos o expresiones que se encuentran en uno y otro lado de la igualdad. Así:

En las igualdades en que no intervienen literales, si leemos la igualdad en el mundo de los meros números, en las igualdades del estilo “expresión aritmética = número“ el signo igual se refiere a que el número que aparece a la derecha es el resultado de ejecutar las operaciones indicadas en la expresión aritmética que aparece a la izquierda, lo que en el espacio del problema indica que la cantidad inicialmente desconocida , y susceptible de determinarse por la expresión aritmética que la refiere, ha sido determinada o referida por un número, que es la manera usual de referir las cantidades conocidas, esto es, el modo en que se refieren en el enunciado. Así, aquí , en este texto, cuando hablamos de “ determinación de una cantidad” lo hacemos en algunos de estos dos sentidos.

Es necesario decir que lo anteriormente dicho como referido por la igualdad “expresión aritmética = número“, puede ser referido en ausencia del signo igual. Esto ocurre con lo que es referido por un bloque o un conjunto de bloques de signos numéricos en disposición algorítmica.

En las igualdades en las que intervienen literales, las del tipo “letra = expresión aritmética”, donde la letra habitualmente refiere a la incógnita del problema, pueden interpretarse relacionándolas con las igualdades del tipo “expresión aritmética = resultado”, si aquí la letra juega el papel del resultado. Y sirve todo lo dicho anteriormente, con la diferencia sustantiva de que la cantidad desconocida que se determina por la expresión aritmética ha sido simbolizada.

Por otro lado, a pesar del paralelismo entre las igualdades señalado en el párrafo anterior, una igualdad reza “letra = expresión aritmética” y la otra “expresión aritmética = resultado “. Si leemos éstas dos igualdades, así una : “para determinar ésta cantidad desconocida -simbolizada – hace falta realizar estas operaciones con éstas cantidades conocidas", y así la otra: " haciendo estas operaciones con estas cantidades conocidas determino ésta cantidad desconocida –resultado-" , resultado que no ha aparecido en la igualdad hasta que las operaciones no han sido realizadas; nos podríamos permitir decir que éstas diferentes escrituras denotarían un enfoque distinto en la ideación y concepción de las cantidades desconocidas.

En las igualdades del tipo "expresión algebraica = número", "expresión algebraica = letra", "expresión algebraica = expresión algebraica", descartando aquellas igualdades particulares que expresan identidades, esto es, considerando las igualdades que llamamos ecuaciones[17], el signo igual siempre declara que las cantidades referidas de diferente manera o en sentido diferente, el indicado en los lados izquierdo y derecho del mismo, son la misma cantidad.

3.3.- Modos de resolver.

En la descripción del espacio del problema hicimos constar, en el repertorio de habilidades del resolutor la disposición para el uso de ciertos modos de proceder en la resolución del problema. Modos de proceder que se manifestaban por la elección de operadores y la organización de la secuencia de operadores utilizada y que se observan en los textos de resolución por el sistema matemático de signos que se utiliza y lo en él referido.

En nuestro estudio de los problemas, ver capítulo **1**, no consideramos otros modos de resolver los problemas de la FPAA que los métodos A-S y MC o más precisamente, la regla del A-S y el MC, estos métodos se usaban allí en la etapa de traducción "del enunciado verbal del problema a las expresiones aritméticas o algebraicas" que conducían al resultado. Desde esa perspectiva, la concepción de lo que es la solución de un problema de la FPAA, el SMS que permite expresarla y el método de resolución van inextricablemente unidos. De ahí, que se dijo que hay dos tipos de soluciones de los problemas: aritméticas y algebraicas.

Si embargo, la historia muestra, que junto a soluciones que provienen de algún uso de los métodos citados, se pueden encontrar soluciones que constan de secuencias de instrucciones de cálculo, reglas o procedimientos para clases de problemas, cálculo con lo supuesto o falsa posición; modos de resolver todos ellos que vienen expresados en su correspondientes SMS.

En Fernández (1997) los modos de resolver pueden considerarse integrados dentro de los sistemas de representación considerados por los estudiantes en las resoluciones. Fernández describe cinco sistemas de representación: ensayo-error, parte-todo, gráfico,

---

[17] Es conveniente decir, que entre una expresión sea ésta aritmética o algebraica y la transformada de ella usando propiedades algebraicas también se escribe el signo igual, de ésta igualdad se dice que es una identidad. Sin embargo y ahora en el mundo posible del problema, leídas una expresión y su transformada como refiriéndose a una cantidad de ese mundo, esta cantidad es la misma y la referencia a ésta es obvio que se hace en sentidos diferentes mirando como y de qué cantidades se ve compuesta. Una igualdad como la descrita no es una ecuación y no permite determinar nada. Hay pues que hilar fino en la descripción de lo que refiere el signo igual cuando se pretende que hable de una ecuación producida en la resolución de un problema. En la práctica, lo dicho anteriormente no es raro que ocurra, a veces los estudiantes producen dos expresiones algebraicas para una cantidad que igualan convencidos que tienen una ecuación, no les cabe duda de que la cantidad está expresada en dos formas diferentes, pero cuando se ponen a resolver, "caen en la cuenta de que aquello no es una ecuación, no les sirve".

gráfico-simbólico, simbólico. En el proyecto problemas verbales aritmético-algebraico (Rubio, 1994 ; Filloy , Rojano y Rubio , 2001) describen cuatro métodos : método de las inferencias analíticas sucesivas (MIAS), el método analítico de las exploraciones sucesivas (MAES), el método cartesiano (MC) y el método de la hoja electrónica de cálculo (MHEC), donde MIAS y MC son métodos convencionales de solución mientras MAES y MHLC son métodos no convencionales, el MAES pretende favorecer la puesta en marcha del análisis del problema mediante la asignación de valores numéricos y el MHEL un método de resolución en el entorno de la hoja de cálculo que sólo es aplicable en determinados problemas (Arnau, 2004), teniendo ambos, MAES y MHEL la pretensión de desarrollar destrezas que puede requerir un usuario competente en el MC. Por lo general se admite, como Kieran (2006), que la aritmética es procedimental y un cambio se da cuando se tiene que pasar de pensar las operaciones que se tienen realizar para resolver el problema a representar las relaciones de la situación del problema. De ahí que se suela diferenciar entre resoluciones con algebra y sin álgebra. Stacey y Mac Gregor (2000) señalan que en la resolución de un problema de álgebra elemental los estudiantes utilizaron multitud de caminos que organizaron en un mapa que permite describir distintas rutas usadas en la solución de problema, las rutas empiezan por incluir el tratamiento algebraico o no, en este último caso se procede con el razonamiento aritmético o con el ensayo y error, mientras que si el tratamiento es algebraico las rutas pueden incluir la escritura de ecuaciones o la escritura de formulas o la mera designación de las incógnitas por letras o el regreso a la aritmética, siendo posibles también diversas rutas si se incluye en la ruta un tramo para la resolución de las ecuaciones.

Por otro lado, si por modo de resolver se entiende el proceso de traducción y se mira desde un punta cognitivo se distinguen dos maneras de proceder en la traducción: la traducción directa y la traducción basada en un esquema, (Chaiklin, 1989).

3.3.1.- Modos de resolver. Descritos superficialmente por medio del SMS utilizado en la resolución.

A partir de lo observado en las resoluciones de los estudiantes, y lo dicho anteriormente, vamos a señalar aquí tres modos diferentes de resolver, susceptibles de ser usados en la resolución de los problemas de la FPAA. Dos de ellos se expresan en el SMS de la aritmética y el otro en el SMS del álgebra. Debiendo hacer constar que una resolución particular puede contener varios de los modos de resolver. Esto es, los modos de resolver un problema particular pueden servir para mostrar en abanico el repertorio del resolutor.

Modo de resolver aritmético.- Cuando se observa en la resolución, la determinación de cantidades desconocidas a partir de cantidades conocidas mediante expresiones aritméticas. Se parte del principio que, al inicio del proceso de resolución, las únicas cantidades que el resolutor considera como conocidas son los datos del problema.

En los registros escritos que presentan este modo de resolver, la lectura de la resolución puede realizarse, en un intento de secuenciar temporalmente lo producido, siguiendo una “secuencia de determinaciones”, que se inicia por la determinación de una cantidad desconocida a partir de los datos del problema. La posición relativa de cada determinación en la secuencia vendrá señalada por el hecho de que las cantidades que intervienen en esa determinación son datos o cantidades ya determinadas y donde la secuencia finaliza en la determinación de la incógnita del problema. Ello en las resoluciones acabadas, en las resoluciones inacabadas sólo podrán leerse fragmentos de secuencia.

Modo de resolver algebraico.- Cuando se observa en la resolución el uso de letras y expresiones algebraicas para referirse a cantidades desconocidas, y de ecuaciones que señalan la igualdad de las cantidades referidas.

En los registros escritos, por la concisión de los mismos, una lectura de la resolución que secuencie temporalmente lo acaecido resulta difícil, sino imposible.

Modo de resolver mediante tanteo.- Cuando se observa en la resolución, la reiterada y sucesiva determinación de los valores de cantidades, valores de cantidades que son: datos o cantidades desconocidas, ejecutando operaciones aritméticas en "expresiones algebraicas", que involucran datos y cantidades desconocidas del problema. La ejecución de las operaciones aritméticas en la "expresión algebraica" se hace posible, porque las cantidades desconocidas del problema usadas en ellas son consideradas como conocidas, mediante la asignación de valores de tanteo. Cada determinación de valores de datos o cantidades desconocidas puede considerarse un ensayo o un tanteo. Las cantidades desconocidas para las que se usan valores de tanteo se suponen en su valor correcto, cuando los valores de tanteo usados en un ensayo determinan exactamente los valores de los datos, o/y cuando la relación entre las cantidades desconocidas o conocidas y desconocidas que se están determinando son exactamente las que expresa el problema. Cuando el valor de tanteo de todas las cantidades es el correcto, el tanteo se da por acabado

En los registros escritos, los tanteos sucesivos constan por separado y pueden estar organizados en líneas separadas, tablas, etc., que dan cuenta del modo, y a veces de la finalidad, con que se practica el tanteo.

3.3.2.-Modos de resolver. Descritos como procesos de traducción.

Hay acuerdo entre los investigadores en considerar como crucial en el proceso de resolución la fase que se denomina de traducción. En registros escritos se puede decir que las resoluciones, si se dejan de lado ejecución de operaciones y resolución de ecuaciones, de lo que dan cuenta es de lo producido en la traducción.

En **1.4**, para describir la traducción o el trabajo que se realiza sobre el enunciado del problema para producir una expresión aritmética o una ecuación, usamos la noción de textos intermedios, textos que señalan la manera en la cual el enunciado del problema se transforma para dar cuenta de qué cantidades se utilizan y cómo éstas cantidades se encuentran entrelazadas, para que puedan dar lugar a expresiones aritméticas, expresiones algebraicas y ecuaciones. Los métodos de resolución considerados allí para producir textos intermedios eran el Método de Análisis Síntesis y el Modelo Cartesiano.

La descripción, en detalle, de la traducción, en función de lo que suponemos que el resolutor tiene necesariamente que hacer, se da a continuación. Por otro lado, la traducción concreta que el resolutor realiza de un problema concreto puede obtenerse de su resolución, leyendo en ésta los trozos pertinentes, transformándolos y plasmándolos en un texto intermedio o en un grafo.

Procesos de traducción aritméticos. Procesos de traducción guiados por la pretensión de obtener el resultado mediante la ejecución de las operaciones indicadas en expresiones aritméticas. Se traducen enunciados verbales a expresiones aritméticas. El modo de resolver observado es aritmético. Los textos intermedios en los que se expresa la traducción son aritméticos.

La traducción se produce a partir de un enunciado verbal y de una lectura del problema que entiende el problema como estado de un mundo posible en el que se han identificado cantidades conocidas, desconocidas y relaciones entre ellas, figurando la pregunta del problema entre las cantidades desconocidas.

Se supone que el resolutor en la traducción tiene que:

1) decidir qué cantidades desconocidas debe determinar, sabiendo que entre ellas debe constar la incógnita del problema. Esto es, decidir cuáles van a ser sus incógnitas auxiliares.
2) precisar para la incógnita y para cada incógnita auxiliar:
   -qué cantidades son necesarias para determinarla,
   -si éstas cantidades son datos u otras incógnitas auxiliares,
   -las relaciones entre esas cantidades que permite determinarla,
   -la expresión de esas relaciones mediante operaciones aritméticas.
3) diseñar un entrelazado de determinación de incógnitas auxiliares que permita determinarlas siempre a partir de datos o cantidades intermedias, esto es, de datos o de cantidades determinadas a partir de ellos.
4) Proceder a expresar la determinación de las cantidades desconocidas por medio de expresiones aritméticas según el diseño esbozado en 3)

Lo que arriba se lee, referido a la traducción y al resolutor, está referido en sentido analítico, en primer lugar, y sintético, en el segundo. Pero, al igual, podíamos haber descrito lo que se supone que la traducción debe contener optando por referirlo en sentido sintético, o referir tal punto en un sentido, tal punto en otro sentido. Sin embargo, cuando se consideran resoluciones, en los registros escritos y aún en los registros audiovisuales, lo que en ellas puede ser observado relativo a la traducción suele darse siempre en sentido sintético, el sentido analítico de la expresión sintética es supuesto por quién indaga, siendo escasas las ocasiones en las que podemos encontrar resoluciones en las que el resolutor se expresa explícitamente en sentido analítico.

Procesos de traducción algebraicos.- Procesos de traducción guiados por la pretensión de obtener el resultado mediante la resolución de ecuaciones. Se traducen enunciados verbales a expresiones algebraicas susceptibles de producir ecuaciones. El modo de resolver observado es algebraico. Los textos intermedios en los que se expresa la traducción son algebraicos.

La traducción se produce a partir de un enunciado verbal y de una lectura del problema que reduce éste a una lista de cantidades conocidas, desconocidas y relaciones.

Se supone que el resolutor, en la traducción, tiene que:

1') decidir qué cantidades desconocidas va a designar por letras.
2') cambiar el status de las cantidades designadas por letras, de desconocidas a conocidas, esto es, considerarlas como datos.
3') decidir qué cantidades va a igualar en cada ecuación.
4') Si la cantidad que va a igualar es una cantidad conocida debe:

a) decidir qué cantidades desconocidas debe determinar, para determinarla. Esto es, decidir cuáles van a ser sus incógnitas auxiliares
b) precisar para cada incógnita auxiliar:
-qué cantidades son necesarias para determinarla,
-si éstas cantidades son datos u otras incógnitas auxiliares,
-la relaciones entre esas cantidades que permite determinarla,
-la expresión de esas relaciones mediante operaciones aritméticas,
c) diseñar un entrelazado de determinación de incógnitas auxiliares que permita determinarlas siempre a partir de datos o cantidades intermedias, esto es, de datos o de cantidades determinadas a partir de ellos,
d) proceder a expresar la determinación de las cantidades desconocidas por medio de una expresión algebraica según el diseño esbozado en c),
e) por último, escribir el signo igual entre la expresión algebraica producida y dicha cantidad conocida.

5') Si la cantidad que va a igualar es desconocida, realizar a) b) c) d) dos veces, cuidando que el conjunto de incógnitas auxiliares utilizado sea diferente cada vez. Por último, escribir el signo igual entre las dos expresiones algebraicas producidas.

6') Proceder a obtener tantas ecuaciones como letras haya usado en 1').

La interrelación entre ambos procesos, a semejanza de la mostrada para el MC y el método de A-S, viene dada por el hecho de que el proceso de traducción algebraico contiene en el interior un a modo de proceso de traducción aritmético. Así a), b) c), d) contenidas en 4') del proceso de traducción algebraico se corresponden con 1), 2), 3), 4), del proceso de traducción aritmético.

Sin embargo, los procesos son diferentes, tanto en cuanto a lo que el resolutor tiene que hacer globalmente, como sustancialmente diferentes en el trato que éste tiene que dar a las cantidades conocidas y desconocidas del problema. Esta diferencia se debe:

-a la capacidad para referir cantidades en los SMS, que se comentó en **3.1**.

-al cambio ontológico que supone 2'). Cantidades desconocidas son consideradas conocidas por mera designación, sin determinación alguna, determinación que requería el proceso de traducción aritmético.

-en consecuencia de lo anterior, a la extensión del conjunto de cantidades conocidas disponibles para determinar cualquier otra cantidad, esto es, como a una ampliación del conjunto de "datos" del problema.

- y, como consecuencia de la abundancia de “datos”, diferencias en uno y otro proceso de traducción de la complejidad de la tarea de diseño requerida en c).

-a la determinación de cantidades conocidas en 4’) del proceso de traducción algebraico, tarea absurda en un proceso de traducción aritmético.

-al requerimiento de dobles determinaciones de cantidades desconocidas, lo que conlleva para el resolutor una mayor capacidad de disposición, para dicho uso, del conjunto de sentidos disponibles para referirse a una cantidad.

Proceso de traducción para el tanteo. Proceso de traducción guiado por la pretensión de comprobar que los valores para las cantidades que son objeto de la pregunta del problema son los propuestos. Se traducen enunciados verbales a “expresiones algebraicas” y “ecuaciones”. El modo de resolver observado es mediante tanteo.

Lo que arriba y en la descripción del método de tanteo, llamamos “expresiones algebraicas” es el recipiente repetidamente usado para ejecutar los cálculos requeridos para determinar la cantidad deseada en los diferentes tanteos. Recipiente que podemos describir diciendo que adopta la forma de una expresión donde hay huecos en los lugares, que si lo describiésemos como una expresión algebraica diríamos que hay letras; ocupados los huecos por los valores de tanteo, los cálculos que se hacen son los indicados en la expresión aritmética correspondiente.

Con este uso del término “expresión algebraica”, en el modo de resolver de tanteo podremos decir que se usa una “ecuación” ya que en todos los tanteos que se realizan se toma el valor calculado como un valor correcto o incorrecto pero siempre de la misma cantidad.

Así con este uso de los términos, podemos decir que el proceso de traducción para el tanteo se asemeja o contiene elementos del proceso de traducción algebraica ya que se traducen enunciados verbales a “expresiones algebraicas” y “ecuaciones”, pero sin el uso explícito del SMS algebraico y todo lo que hemos apuntado arriba que ello conlleva.

3.4.-Problemas, estudiantes y modos de resolver.

Cuando se considera un resolutor cualquiera y su resolución de un problema concreto, el modo de resolver observado indica que tal modo de resolver consta en su repertorio de habilidades y que por alguna razón ha sido elegido. Quizá porque lo considera el más simple y adecuado para el problema o por cualquier otra razón, razones todas ellas que pueden ser objeto de indagación. Cuando el resolutor es un estudiante, la adquisición de las habilidades de que consta el repertorio son, han sido, o están siendo objeto de enseñanza. La observación, en una resolución de un estudiante de un problema concreto, de un modo de resolver indica la disposición para el uso de esa habilidad del repertorio, uso que se dice competente si la resolución contiene una solución del problema. Como un botón no hace muestra, se requiere de un conjunto de problemas, un instrumento, para evaluar la competencia del estudiante o dicho de otra manera juzgar sobre la adquisición de dicha habilidad.

Por otro lado, los estudiantes, al iniciar su instrucción en álgebra, pueden ser juzgados competentes en el uso del modo de resolver aritmético, como lo muestran de hecho al encontrar soluciones aritméticas para determinadas clases de problemas de la FPAA, pero no tienen éxito o tienen dificultades para encontrar la solución de otros problemas. La búsqueda de criterios que separen a unos problemas de otros, se plantea en términos de separar los problemas en aritméticos y algebraicos, partiendo del hecho de que para los últimos sólo puede encontrarse con facilidad la solución con el modo de resolver algebraico.

Los puntos de vista desde los que se puede abordar esta cuestión, y los criterios que pueden adoptarse para situar los problemas de un lado o de otro, se han tratado en **1.5** y **1.16**. En los términos que allí se utilizan podemos decir que hay problemas que tienen lectura algebraica (PLA) y solución aritmética.

Dado que la obtención de soluciones aritméticas requiere un proceso de traducción aritmético, lo que se estudiará aquí, en **3.5** teóricamente, serán las *características singulares* que suponemos debe tener el proceso de traducción aritmético de PLA. Esto nos servirá para elaborar preguntas, a las que sea susceptible encontrar una respuesta con métodos experimentales.

3.5.-Soluciones Aritméticas de PLA.

Los GT que representan una lectura algebraica de los PLA son cerrados o mixtos. Por ello, las soluciones aritméticas son imposibles con el sólo manejo de las cantidades y relaciones señaladas por los vértices y las aristas de dicho GT. Las soluciones aritméticas de los PLA de ser posibles en general deberían de poderse leer en el grafo teórico del problema que incorpora más cantidades y relaciones que el GT correspondiente a la lectura algebraica. Así, la existencia de una solución aritmética para un PLA determinado vendrá indicada en el grafo teórico por la existencia de un subgrafo de éste, que conteniendo como vértices oscuros los datos del problema y como vértice claro la incógnita del mismo sea abierto y encadenado. Esto es, que se corresponda en el grafo teórico con una lectura aritmética del problema. En esos términos, en la práctica, la búsqueda de soluciones aritméticas de un PLA se puede reducir a la determinación del grafo teórico de ese problema, o con un menor esfuerzo, a la determinación de una porción de éste que contenga una solución aritmética.

En términos del proceso de traducción aritmético, según fue descrito en **3.4**, entre lo que se tiene que hacer consta:

en 1) decidir cuales son las incógnitas auxiliares.

en 2) decidir qué cantidades son necesarias para determinarla y las relaciones que permiten determinarla.

en 3) diseñar un entrelazado de determinación de incógnitas auxiliares que permita determinarlas siempre a partir de datos o cantidades intermedias, esto es, de datos o de cantidades determinadas a partir de ellos.

Supongamos que el mundo de cantidades y relaciones que se contempla para tomar la decisiones de 1) y 2) se agota en las cantidades contenidas en el GT que representa una lectura algebraica del PLA. En tal supuesto, por las propias características del GT, que es cerrado o mixto, el diseño requerido en 3) es imposible.

La razón de tal imposibilidad radica en que la lectura analítica de que da cuenta el grafo del PLA representa un análisis del problema, en el cual el análisis de alguna de las cantidades no ha concluido en datos. Hay dos posibilidades distintas de que el análisis de una cantidad se dé por hecho sin que éste concluya en datos, éstas se representan en la fig.3. 1, que expresan ahora en modo de diagrama uno de los dos posibles modos de ser de las aristas del grafo de un PLA[18].

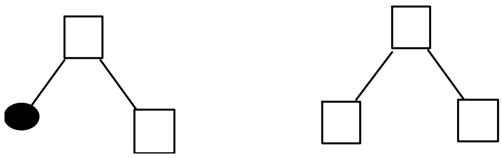


fig. 3.1

Si requerimos que el análisis de dicha cantidad concluya en datos, en el caso más favorable podremos lograr la culminación del análisis en una etapa. Ello nos lleva a las tres posibilidades que se muestran en la fig.3.2

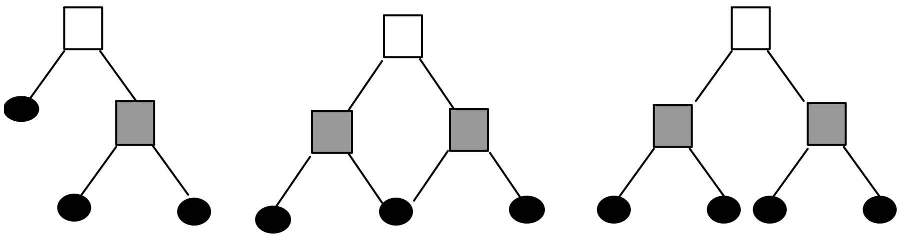


fig. 3.2

Ocurre, sencillamente, que en el grafo de un PLA no están representadas las cantidades que figuran en gris en la fig.3.2.

Ello ahora, supone que considerado un estudiante, aún imbuido éste en el modo de hacer que conlleva el proceso de traducción aritmético, no logrará obtener una solución aritmética de un PLA sino contempla o interpreta como mundo posible del problema, otro mundo posible mucho más rico en cantidades y relaciones entre éstas que el mundo posible sugerido por el GT del PLA.

Un autómata como el descrito en **1.15.3** puede encontrar soluciones de PLA, a cuenta de haber sido dotado de:

---

[18] En este examen de posibilidades, el grafo del PLA se supone cerrado. En el caso de que el grafo del PLA sea mixto pueden eliminarse las aristas pertinentes para que el grafo resultante sea cerrado. Hecho esto, las posibilidades son las descritas.
Asimismo, el análisis de cada cantidad se ha supuesto que requiere en una etapa de únicamente dos cantidades. Si se considera la posibilidad de que este requiera o sea posible mediante tres cantidades, como es el caso cuando se considera la relación de proporcionalidad, el examen de posibilidades puede rehacerse recurriendo a lo dicho en 1.18. Donde debe de quedar claro que el grafo de un PLA, si es cerrado, no está representada ninguna relación de proporcionalidad en que tres de sus términos sean vértices oscuros.

- capacidad para la ideación de cantidades en múltiples sentidos y para la percepción de relaciones, donde podemos llegar hasta el punto de dotarle de capacidad para concebir cantidades con sentido y sin referencia en un mundo posible del problema.

- cierta capacidad deductiva, o de razonamiento aritmético, en el sentido de que es capaz de deducir relaciones aritméticas a partir de otras dadas.

Para un estudiante, las cantidades y relaciones que puede incorporar al mundo posible del problema son tan diversas como sus fuentes. Estas cantidades fueron consideradas en **1.2** y se les designó como implícitamente mencionadas, habituales, no habituales, etc.. Los razonamientos deductivos que puede usar tienen como fuente la instrucción o bien son la expresión de teoremas en acto.

Desde esta óptica, preguntarse, si estudiantes con cierta competencia en el modo de resolver aritmético para encontrar soluciones en problemas de lectura aritmética pueden utilizar dicho método para obtener soluciones de PLA, debe entenderse como preguntarse, si los estudiantes dado un PLA son capaces de concebir más cantidades y relaciones de las contenidas en el grafo del PLA, interpretarlas en sentido múltiple, deducir nuevas relaciones a partir de las dadas y orientar todo ello en la construcción del diseño mencionado en 3).

La tarea experimental que esto conlleva es examinar resoluciones de estudiantes prestando atención en ellas: por un lado, a las cantidades, relaciones, razonamientos que utilizan junto a lo adecuado de su uso, y por otro lado, al diseño mencionado en 3), representado por el texto intermedio producido o el grafo de la resolución. Dicha tarea experimental se aborda en los estudios presentados en 3.6 y 3.7.

3.6.- Estudio de resoluciones de PLA en el SMS de la Aritmética. Estudio 1.

3.6.1.-Propósito.

Este estudio de resoluciones de PLA tiene por objeto:

En primer lugar:

Indagar la capacidad de estudiantes para obtener, en el SMS de la Aritmética, soluciones aritméticas de Problemas de Lectura Algebraica de distinta complejidad y los modos de resolver utilizados para obtenerlas.

En segundo lugar:

-Describir las resoluciones de estudiantes de secundaria que están iniciando el estudio del álgebra y estudiantes de 4º curso de Licenciatura de Matemáticas.

-Relacionar las resoluciones con la complejidad del problema.

-Examinar las posibles diferencias entre las resoluciones de unos y otros estudiantes.

Las resoluciones se describirán mediante:

1.-Las cantidades y relaciones que se utilizan en la resolución.
2.-Los razonamientos que se usan.
3.-Las soluciones obtenidas.
4.-La pertinencia del uso de 1) y 2) para la obtención de la solución.
5.-El uso inadecuado de 1) y 2). Los errores.

Y en tercer lugar:

Indagar la posible existencia de PLA cuya complejidad sea tal que, ni unos ni otros estudiantes, sean capaces de obtener para ellos una solución aritmética.

3.6.2.- Material y métodos.

3.6.2.1.- El instrumento. Los problemas.

Los instrumentos utilizados fueron dos. Uno de ellos, el Instrumento nº 1, que es exactamente el Cuestionario exploratorio nº 2 elaborado por Rubio, ver (Rubio, 1994), en la exploración de competencias de los estudiantes previa a su Instrucción en el MAES, un método para poner un problema en ecuaciones. El instrumento consta de 8 problemas todos ellos son PLA y sus grafos pueden verse en la fig.3.3. Este instrumento fue el utilizado con estudiantes mexicanos de secundaria, el Instrumento nº 2 utilizado con estudiantes de Licenciatura consta de 10 problemas.

Ambos instrumentos comparten 6 problemas: CHOCOLATES Y CARAMELOS, DAFNE, BOLETOS, ADRIAN, COLECTA, Y DINERO con las modificación pertinentes de valor y unidad de moneda. Además, en el instrumento número 2 se realizaron algunas modificaciones de los problemas del instrumento nº 1:

-la pregunta del problema ADRIAN ¿Cuándo **tendrá** Tania el doble de la edad de Adrián? por ¿Cuándo **tenía** Tania el doble de la edad de Adrián? lo que conlleva que la respuesta del problema sea diferente.

-el enunciado del problema DINERO cambiando una de las cantidades que aparecen en la situación así: de si hubiera habido dos niños menos, cada uno habría recibido **dos** dólares más a si hubiera habido dos niños menos, cada uno habría recibido **un** dólar más, cambio que hace imposible encontrar un resultado numérico para el problema.

-los problemas GALLINAS Y CONEJOS y ALCANZAR del instrumento nº 1, en razón de que habían sido tratados en la enseñanza de los estudiantes se sustituyeron por los problemas LANA Y ALGODÓN y RUBLOS en el instrumento nº 2, problemas isomorfos a los anteriores.

El instrumento nº 2 contiene además dos problemas de la subfamilia móviles: ENCONTRAR y AVIONETA.

Los grafos de lecturas algebraicas de los problemas pueden verse en la 3.4 y los enunciados de los mismos figuran a continuación.

Instrumento nº 1.

CHOCOLATES Y CARAMELOS

1.-Una educadora tiene 120 chocolates y 192 caramelos que va a repartir entre los alumnos de su clase. Si cada alumno recibe 3 caramelos más que chocolates. ¿Cuántos son los alumnos?

DAFNE

2.-Dafne y Fabiola vendieron 124 boletos para un concierto de jazz. Si el número de boletos que vendió Fabiola fue el triple de los que vendió Dafne. ¿Cuántos ha vendido cada una?

BOLETOS

3.-En una fiesta se vendieron boletos, los de dama costaron 8.000 pesos y los de caballero 12.000 pesos. Los boletos de dama fueron 100 más que los de caballero. La recaudación total fue de 3.000.000 pesos. ¿Cuántos boletos se vendieron de cada tipo?

GALLINAS Y CONEJOS

4.- En un corral hay pollos y conejos. Se cuentan las cabezas y son dieciséis; se cuentan las patas y son cincuenta y dos.¿ Cuántos pollos y conejos hay en el corral?

ADRIAN

5.-Adrián tiene 15 años, Tania tiene 40 años. ¿Cuándo tendrá Tania el doble de la edad de Adrián?

COLECTA

6-Un grupo de alumnos tiene que hacer una colecta para pagar una visita guiada. Si cada uno de ellos aportara 6.200 pesos les faltarían 50.000 pesos. Si cada uno de ellos contribuyera con 8.200 pesos entonces les sobrarían 50.000 pesos. ¿Cuántos alumnos constituyen el grupo?

DINERO

7.-Un señor que llegó del extranjero tenia una suma de dinero que repartió a partes iguales entre cierto número de niños. Si hubiera habido dos niños más, cada uno de ellos habría recibido un dólar menos; si hubiera habido dos niños menos, cada uno habría recibido dos dólares más.¿Cuántos niños había y cuánto recibió cada niño?

ALCANZAR

8.- Un tren sale de la estación hacia el norte recorriendo 72 kilometros cada hora. Tres horas después un segundo tren parte en vía paralela también hacia el norte y recorre 120 kilometros cada hora. ¿Cuánto le llevará al segundo tren alcanzar al primero?

Instrumento nº 2

CHOCOLATES Y CARAMELOS.

1.-Una educadora tiene 120 chocolates y 192 caramelos que va a repartir entre los alumnos de su clase. Si cada alumno recibe 3 caramelos más que chocolates. ¿Cuántos son los alumnos?

DAFNE

2.-Dafne y Fabiola vendieron 124 boletos para un concierto de jazz. Si el número de boletos que vendió Fabiola fue el triple de los que vendió Dafne.¿Cuántos ha vendido cada una?

BOLETOS

3.-En una fiesta se vendieron boletos, los de dama costaron 8 euros y los de caballero 12 euros. Los boletos de dama fueron 100 más que los de caballero. La recaudación total fue de 3000 euros. ¿Cuántos boletos se vendieron de cada tipo?

ADRIAN

4.-Adrián tiene 15 años, Tania tiene 40 años. ¿Cuándo tenia Tania el doble de la edad de Adrián?

COLECTA

5.-Un grupo de alumnos tiene que hacer una colecta para pagar una visita guiada. Si cada uno de ellos aportara 6.2 euros les faltarían 50 euros. Si cada uno de ellos contribuyera con 8.2 euros entonces les sobrarían 50 euros. ¿Cuántos alumnos constituyen el grupo?

DINERO

6.-Un señor que llegó del extranjero tenia una suma de dinero que repartió a partes iguales entre cierto número de niños .Si hubiera habido dos niños más, cada uno de ellos habría recibido un dólar menos; si hubiera habido dos niños menos, cada uno habría recibido un dólar más.¿Cuántos niños había y cuánto recibió cada niño?

RUBLOS

7.-En una escuela rusa compran libros para la biblioteca. Si pagan con billetes de 3 rublos necesitan 8 billetes más que si pagan con billetes de 5 rublos. ¿Cuál es el precio de los libros?

ENCONTRAR

8.-Un tren parte de Madrid a Valencia con una velocidad de 120 km/ hora y otro de Valencia a Madrid con una velocidad de 100 km /hora. La distancia por tren de Valencia a Madrid es de 440 km. Dígase a que distancia de Valencia se cruzan ambos trenes.

LANA Y ALGODÓN

9.-Se dispone de tela de lana y de tela de algodón. En total 12 metros. El precio del metro de lana es de 2 euros y el de algodón de 4 euros. El valor total de la tela que se dispone es de 32 euros.¿De cuántos metros de tela y de cuántos de algodón se dispone?

AVIONETA

10.-Una avioneta parte del aeropuerto en contra de la dirección del viento un día en que éste sopla a la velocidad de 20 km./hora. La velocidad de la avioneta es de 200 km./hora. La avioneta puede llevar carburante para 4 horas. ¿A qué distancia puede alejarse del aeropuerto si desea regresar a éste con la última gota de carburante?

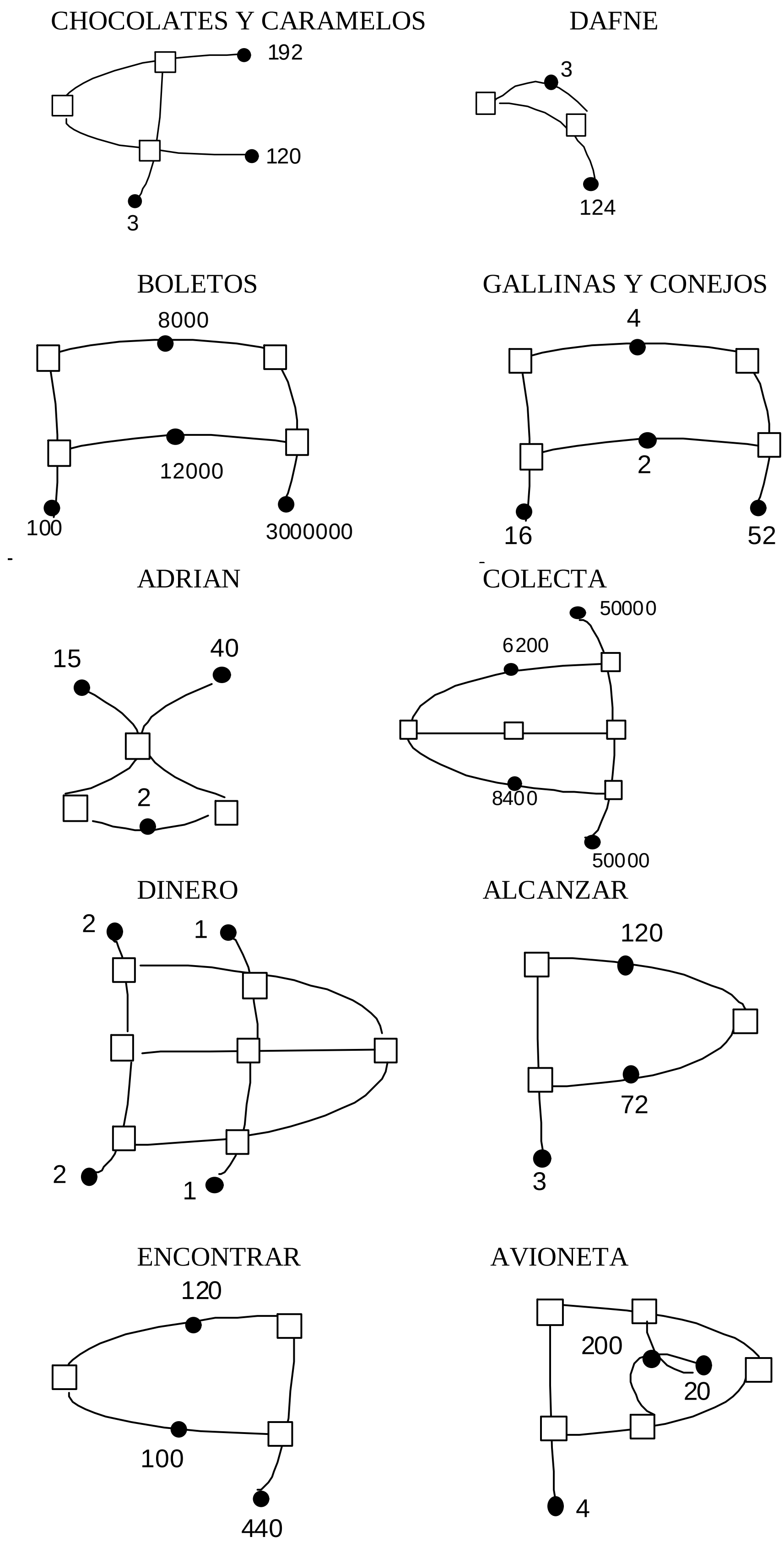


fig. 3.4-Grafos correspondientes a lecturas algebraicas de los problemas de los instrumentos

3.6.2.2.-. Los Grafos teóricos y Diccionarios de cantidades teóricos de las soluciones de los problemas del instrumento.

Para analizar parte de lo requerido como segundo propósito en este estudio de resoluciones es conveniente, como referencia para el examen de las resoluciones, disponer de los grafos y diccionario de cantidades teóricos de las soluciones de los problemas, nociones ambas introducidas en **1.15**.

Los grafos de la resolución de los problemas de los estudiantes, cuando se eliminan de ellos vértices y aristas que provienen del uso inadecuado de operadores, son subgrafos del grafo teórico de las soluciones, y, en los casos en los que los estudiantes tengan éxito, los grafos de sus resoluciones contendrán una solución aritmética.

Aquí, como referencia explicita para el análisis de las resoluciones, en lugar de la totalidad del grafo teórico de los problemas usaremos subgrafos de éste que contengan las lecturas algebraicas mostradas anteriormente, ver fig. 3.4, y soluciones aritméticas. Dichos subgrafos constan en el anexo **A3.4.**

Así en el **A3.4** consta para cada problema:

a).- el enunciado del problema,
b).- el GT de una lectura algebraica y un texto intermedio algebraico,
c).- un apunte de la solución usando el álgebra geométrica,
d).- la ecuación obtenida a partir del texto intermedio algebraico y la solución de ésta,
e).- las cantidades que se leen en dicha solución,
f).- un subgrafo del grafo teórico del problema conteniendo una solución aritmética y el texto intermedio aritmético de dicha solución,
g).- anotaciones sobre razonamientos aritméticos susceptibles de uso.

Cualquier otra referencia implícita a los grafos y diccionarios de cantidades teóricos de las soluciones de los problemas de lo producido en las resoluciones, queda a criterio del investigador. Entre de lo que se ayuda el investigador, en cuanto se refiere a las cantidades y relaciones mencionadas en las resoluciones, que puedan estar contenidas en los grafos y diccionarios de cantidades teóricos de las soluciones de los problemas figura lo expuesto en las resoluciones de los problemas utilizados, resoluciones que se presentan en el anexo **A3.4**.

3.6.2.3.- Los estudiantes.

Dos grupos de estudiantes son los que se han considerado en este estudio. Uno, el grupo compuesto por 42 estudiantes mexicanos de secundaria de 15 y 16 años de edad de "1º de Bachillerato del Plantel Sur del Colegio de Ciencias y Humanidades de la Universidad Autónoma de México (curso 91-92). Dos, el otro grupo compuesto por 21 estudiantes de la Universitat de València de 4º curso de la Licenciatura de Matemáticas (curso 2000-2001).

El grupo de estudiantes mexicanos es uno de los distintos grupos con los cuales (Rubio ,1994) ha ensayado y puesto a punto el MAES, un modelo didáctico diseñado por Rubio, para la enseñanza de la resolución de problemas de la FPAA. Entre otras, el

MAES tiene la intención de aprovechar el pasado aritmético de los estudiantes en lo que éste tiene que ver con la traducción del problema a ecuaciones. El momento en que se pasa el instrumento nº 1, un cuestionario exploratorio para Rubio, es aquel en el cual se va comenzar a usar el MAES en la enseñanza de los estudiantes.

Los estudiantes de la Universitat de València son todos ellos alumnos de la optativa "Elementos de Didáctica de la Matemática II ". Estos estudiantes conocían una parte sustancial de lo expuesto en **1.4**, **1.5** y habían sido informados de la posibilidad de representar problemas mediante GT y de la relación entre la destrucción del GT y la solución del problema.

3.6.2.4.- La administración de los instrumentos. El contrato con los estudiantes.

En el caso de los estudiantes mexicanos de secundaria el Instrumento nº 1 que constaba de una hoja con los enunciados de los problemas fue administrado en una sesión de clase. En la hoja del cuestionario, a continuación de la línea para nombre, edad y fecha, constaban las siguientes instrucciones.

INSTRUCCIONES. *En una HOJA ANEXA debes resolver los problemas. Es muy importante que anotes todo lo que hagas para llegar a la solución aunque no logres dar con ella. TODO lo que escribas se tomará en cuenta al revisar el cuestionario.*

En el caso de los estudiantes de la Universitat de València el instrumento fue administrado como parte del examen de la asignatura. Se presentó en un cuadernillo de varias hojas, con el enunciado del problema en la cabecera de la hoja y el resto de ella en blanco como espacio para la resolución. Los estudiantes fueron advertidos, verbal y repetidamente, de que debían resolver los problemas sin hacer uso del álgebra y lo que ello significaba, según lo tratado en clase.

3.6.3.- La fuente de datos.

3.6.3.1.- Las resoluciones y el resultado. SMS.

Las resoluciones de los estudiantes mexicanos de secundaria constaban en las HOJAS ANEXAS. Los resultados, en la hoja de enunciados.

Las resoluciones escritas, lo estaban en el SMS de la aritmética excepto en algunos casos en que lo estaban en el SMS del álgebra

Los signos utilizados en las resoluciones, para referirse a las cantidades, son numéricos. La presencia de signos gráficos es escasa. Los signos alfabéticos, que están casi ausentes, corresponden a nombres de las cantidades que se utilizan, con la función de identificarlas. La presencia en las resoluciones de expresiones aritméticas y del signo igual es, asimismo, escasa. La predominancia en las resoluciones la tienen los bloques de signos en disposición algorítmica, bloques que constan en el papel en un lugar en el que hay hueco para la ejecución del algoritmo, sin que en general se pueda juzgar que haya organización -ni horizontal ni vertical- de los bloques, que atienda a otra cosa que no sea la necesaria secuencia de ejecución de los cálculos. La presencia de frases es escasa o casi nula.

Cuando el modo de resolver es el tanteo, casi nunca vienen explicitados los nombres de las cantidades cuyo valor se tantea. Esto debe de desprenderse de los cálculos efectuados en los bloques algorítmicos o de los resultados de operaciones que vienen desgranados por el papel. No se observa en ningún lugar del papel una disposición separada y conjunta de valores de tanteo y resultado del tanteo.

Las respuestas a los problemas en la hoja del cuestionario o estaban o en blanco o contenían un número y un nombre o unidad que identificaba a la cantidad o una frase. Así, las de un estudiante: “93 Fabiola Daphne 31”, “110 caballero 210 Dama”, “10 conejos y 6 pollos”, “nunca porque Tania ya tuvo la edad de Adrián”, “ 6 alumnos o 8 alumnos con lo de 8200
6200”

En el caso de los estudiantes de Licenciatura, la mayor parte de resoluciones estaban escritas únicamente en el SMS de la Aritmética. Sin embargo, algunos estudiantes escribieron ecuaciones con letras para las incógnitas en algunos problemas, se escribieron también ecuaciones en las que usaron los nombres de las cantidades en lugar de letras. Estas ecuaciones las utilizaron en la resolución o las dieron como solución. Para el problema DINERO casi todos los estudiantes acabaron por escribir ecuaciones. Como los estudiantes conocían el uso del diagrama, algunos de ellos lo usaron para construir textos intermedios, usando en ellos los nombres de las cantidades, letras o números, los textos intermedios eran en su mayoría algebraicos.

En las resoluciones, números y expresiones aritméticas son de predominio casi absoluto para referirse al componente **x** de las cantidades, los bloques algorítmicos se encuentran en rara ocasión y se utilizan para la ejecución de los cálculos cuando éstos no se ejecutan mentalmente. Lo habitual es encontrar la expresión aritmética, el signo igual y el resultado del cálculo. Las expresiones aritméticas a veces son segmentos intercalados en frases donde constan palabras para mencionar las cantidades, para nombrarlas, nombres que suelen ser los del enunciado del problema para datos y cantidades desconocidas mencionadas y de ideación del estudiante para el resto, ver componente **n** del diccionario de cantidades de las resoluciones.

En alguna de las resoluciones se encontró el signo de implicación intercalado entre frases, pudiéndose éste leer como: “lo que implica que”.

La presencia de signos gráficos fue ocasional y para representar objetos –por ejemplo: los caramelos en el problema CHOCOLATES Y CARAMELOS- o quedando limitado en los problemas de móviles a segmentos y/o dobles flechas utilizados para ubicar en ellos el origen y final del movimiento y anotar datos.

Cuando el modo de resolver es el tanteo, éste viene organizado en tablas para dar cuenta de los tanteos sucesivos. En ocasiones, los sucesivos tanteos vienen en líneas sucesivas donde consta explícitamente la “expresión algebraica” que se utiliza como recipiente del tanteo.

El resultado del problema o no se señala explícitamente, o se hace mediante subrayado o recuadro del valor y el nombre de la cantidad, o se escribe: cantidad que se pregunta en el problema = su valor

3.6.3.2.- La obtención de datos de las resoluciones.

A partir de las resoluciones expresadas en los términos descritos arriba se examinaron éstas para atribuirles un modo de resolver, obtener el grafo de la resolución y el componente **n** del diccionario de la resolución, en el caso de los estudiantes de Licenciatura. Para este último grupo de estudiantes también se obtuvieron los recipientes de tanteo.

3.6.3.2.1.- Modos de resolver

A cada una de las resoluciones se le atribuyó uno de los modos de resolver indicados a continuación, siguiendo **3.3.1** y con los criterios que se precisan según lo observado en las resoluciones.

Aritmético: Cuando se observan en la resolución expresiones aritméticas y bloques algorítmicos en las que intervienen los datos del problema. No hay presencia de cálculos con valores de tanteo. No hay presencia alguna de letras en la resolución

Tanteo.- Cuando se observan en la resolución bloques algorítmicos, expresiones aritméticas o tablas en los que intervienen valores de tanteo. No hay presencia de letras en la resolución.

Algebraico.**-** Cuando se observa en la resolución la presencia de alguna letra y alguna expresión algebraica.

Aritmético más tanteo: Cuando se observa en la resolución lo dicho para los modos aritmético y tanteo, ya conste por separado o entremezclado en la resolución.

Otros.- Para las resoluciones en que lo observado no se juzga ajustado a lo descrito arriba para atribuirle uno de dichos modos.

Blanco.**-** Cuando en el espacio de papel destinado a la resolución no se observa signo alguno.

3.6.3.2.2.-Obtención del grafo de la resolución.

El grafo de la resolución sólo se obtuvo de las resoluciones cuyo modo de resolver se calificó de Aritmético.

Para la obtención del grafo de las resoluciones, en analogía con lo hecho en el análisis de las actuaciones del problema HENO, ver **A2.1**, se procedió de la siguiente manera:

Partiendo como fondo del GT de la lectura algebraica del problema (trazado en color negro) para cada una de las expresiones aritméticas de una operación o bloque algorítmico se identificaron los vértices y arista referida en la expresión. En el caso, en que dicha arista perteneciera al GT se redibujó a trazos obscureciendo el vértice de la cantidad determinada, en el caso, en que la expresión no refiriese a una cantidad representada por un vértice del GT se incorporó un vértice para representarla y una arista gris a trazos a dicho GT, que relacionase las cantidades referidas en la expresión o bloque oscureciéndose en gris el vértice que representaba la cantidad referida. Para expresiones aritméticas más complejas se procedió análogamente tras descomponer éstas en expresiones aritméticas elementales La disposición horizontal y vertical de aristas se hizo según los convenios establecidos. El grafo de la resolución se consideró determinado cuando todas las expresiones o bloques observados en la resolución habían sido representadas en él.

El grafo de la resolución se comparó con los subgrafo del grafo teórico de referencia, Anexo **A3.4**, y así se determinaron los errores, que se señalaron en rojo. Si la cantidad o cantidades por las que preguntaba el problema habían resultado oscurecidas, el grafo de la resolución contenía una solución del problema.

3.6.3.2.3.-Obtención de los diccionarios de cantidades de las resoluciones

Las cantidades de los diccionarios teóricos de cantidades de los problemas usadas en las resoluciones, fueron referidas mediante alguna de sus componentes (**x, u, n)** como puede verse en las resoluciones que se presentan en el anexo **A3.5**.

En las resoluciones que usaron el modo de resolver aritmético, el componente **x** de aquellas cantidades que se usaron como incógnitas auxiliares se refirió mediante una expresión aritmética o un bloque algorítmico que determinaba la cantidad intermedia correspondiente y mediante un número después del cálculo. Estas expresiones se utilizaron para obtener los grafos de las resoluciones. En las resoluciones mediante tanteo dicha componente **x** fue referida mediante el valor de tanteo, o el número que correspondía al valor de la expresión algebraica evaluada y que figuraba en las distintas casillas de la tabla que organiza el tanteo.

El componente **u** de las distintas cantidades fue referida en general acompañando al valor numérico en todas las cantidades que eran datos y para la cantidad por la que se preguntaba en el problema cuando se proporcionaba la respuesta. En el caso de las cantidades intermedias, la mención a la unidad se hizo en general tras realizar los cálculos correspondientes en la expresión aritmética que la refería.

En las resoluciones en las que constaba un diagrama, la componente **n** de las distintas cantidades, esto es, la expresión verbal para referirse a ellas, debía estar presente para todas las cantidades que constaban en el diagrama pero esto no fue así en todas las ocasiones como puede verse el anexo **A3.5**. En las resoluciones mediante tanteo la componente **n** figuraba en las casillas que daban entrada a la tabla. En las resoluciones que usaban el modo de resolver aritmético las expresiones verbales que referían las cantidades estaban inmersas en el discurso de la resolución. De estos discursos procede la componente **n** de los diccionarios de las resoluciones de los problemas.

3.6.3.2.4.-Obtención de los recipientes de tanteo.

En las resoluciones mediante tanteo se utilizaron casi siempre tablas para organizar el tanteo, y en estas tablas constaban los nombres de las cantidades cuyo valor se evaluaba y los valores de estas cantidades en los sucesivos ensayos. Esto permitió reconstruir las “expresiones algebraicas” que subyacen en los cálculos realizados para obtener dichos valores, esto es, los “recipientes de tanteo”. Hay que decir además que esta tarea se encontró facilitada porque en ocasiones se encontraron explícitamente expresiones aritméticas para realizar los cálculos destinados a obtener el valor de determinada cantidad en el ensayo.

3.6.3.3.- Organización de los datos.

Modos de resolver

En el caso de los estudiantes de Secundaria, para cada problema y cada modo de resolver se determinó el número de estudiantes que utilizaban ese modo de resolver, que se organizaron en una tabla de frecuencias. También se obtuvo una tabla de frecuencias del nº de estudiantes que obtenían una solución del problema usando ese modo de resolver, tomando estas tablas como datos brutos.

En el caso de los estudiantes de Licenciatura se construyó una tabla en la que se hacia constar el modo de resolver cada uno de los problemas por cada estudiante y si la resolución contenía errores. Esta tabla se utilizó como tabla de datos brutos.

Grafos de la resolución de los problemas.

Para cada problema se determinó el número de estudiantes cuyo grafo de la resolución era coincidente. Se separaron los grafos que contenían una solución. Los restantes grafos se organizaron según el orden de dichos grafos y el tipo de relaciones expresadas por las aristas del grafo.

Diccionarios de cantidades de las resoluciones. Componente ***n***

Para cada problema se construyó una tabla de dos columnas, una de ellas correspondiente al componente **n** del diccionario teórico de cantidades de referencia y la otra al componente **n** de dicha cantidad en la resolución. Como filas de la tabla figuraban las cantidades del problema mencionadas por su componente **n** en la resolución.

Recipientes de tanteo.

Para dar cuenta de los recipientes de tanteo se construyó una tabla donde para cada problema se hizo constar en tres columnas el valor de tanteo las “expresiones algebraicas” evaluadas y la igualdad utilizada para juzgar la corrección del tanteo.

3.6.4.- Resultados y Comentarios.

En la presentación de los resultados procederemos, en primer lugar, a presentar los resultados obtenidos a partir de las resoluciones de los estudiantes de secundaria, en segundo lugar los de los estudiantes de licenciatura y en tercer lugar compararemos ambos resultados.

3.6.4.1.- Modos de resolver y soluciones (estudiantes de secundaria)

Las tablas de frecuencias de los modos de resolver y las soluciones con ese modo de resolver vienen dadas en la Tabla 3.1 y 3.2.

La distribución de los modos de resolver viene dada en la Tabla 3.3. La fuente de las soluciones, entendida ésta como el porcentaje del total de las soluciones que de un problema se han dado mediante un modo determinado de resolver se encuentra en la Tabla 3.4. Y la eficiencia de cada modo de resolver, esto es el porcentaje de las resoluciones que utilizando una manera de resolver contienen una solución, se encuentra en la Tabla 3.5.

Modo resol / problema	Arit	Arit tanteo	Tanteo	Alg	Otros	Blanco	Total
CH. Y CAR.	31	2	1	1	3	4	42
DAFNE	30	2	2	3	5	0	42
BOLETOS	18	4	5	1	4	10	42
GA.Y CON.	4	0	24	2	10	2	42
ADRIAN	8	0	7	1	24	2	42
COLECTA	22	6	2	1	1	10	42
DINERO	0	0	3	5	6	28	42
ALCANZAR	23	0	10	1	4	4	42

Tabla 3.1.-nº de estudiantes que emplean ese modo de resolver.

Modo resol / problema	Arit	Arit tanteo	Tanteo	Alg	Otros	Total	%
CH. Y CAR.	12	0	0	1	0	13	**31**
DAFNE	24	0	0	3	0	27	**64**
BOLETOS	4	0	0	1	0	5	**12**
GA.Y CON.	2	---	16	0	3	21	**50**
ADRIAN	2	---	4	0	6	12	**29**
COLECTA	5	1	0	0	0	7	**15**
DINERO	---	---	0	0	0	0	**0**
ALCANZAR	7	---	4	0	0	11	**26**

Tabla 3.2.-nº de soluciones con ese modo de resolver.

Modo resol / problema	Arit	Arit tanteo	Tanteo	Alg	Otros	Blanco	Total
CH. Y CAR.	74	5	2.5	2.5	7.5	10	100
DAFNE	71	5	5	7.5	12	0	100
BOLETOS	43	10	12	2.5	10	24	100
GA.Y CON.	10	0	57	5	24	5	100
ADRIAN	19	0	17	2.5	57	5	100
COLECTA	52	14	5	2.5	2.5	24	100
DINERO	0	0	7.5	12	24	67	100
ALCANZAR	55	0	14	0	12	10	100

Tabla 3.3.- Distribución de los modos de resolver.

Modo resol / problema	Arit	Arit tanteo	Tanteo	Alg	Otros
CH. Y CAR.	92	0	0	8	0
DAFNE	89	0	0	11	0
BOLETOS	80	0	0	20	0
GA.Y CON.	10	----	76	0	14
ADRIAN	17	----	33	0	50
COLECTA	71	14	0	14	0
DINERO	---	----	0	0	0
ALCANZAR	54	----	36	0	0

Tabla 3.4.- Fuente de las soluciones.

Modo resol / problema	Arit	Arit tanteo	Tanteo	Alg	Otros
CH. Y CAR.	39	0	0	100	0
DAFNE	80	0	0	100	0
BOLETOS	17	0	0	0	0
GA.Y CON.	50	----	67	0	0
ADRIAN	25	----	50	0	25
COLECTA	23	17	0	100	0
DINERO	----	----	0	0	0
ALCANZAR	30	0	30	0	25

Tabla 3.5.- Eficiencia de los modos de resolver.

Un resumen de todas estas tablas se presenta en la Tabla 3.6, en la que se da la complejidad de los problemas definida por una tripleta de números, el primero de los números de la tripleta corresponde al número de aristas del grafo que caracteriza al problema como PLA, el segundo al número de aristas que representan relaciones aditivas y el tercero al número de aristas que representan relaciones multiplicativas. En la tabla se han ordenado los problemas atendiendo en primer lugar al número de relaciones y en segundo lugar a las que de éstas son multiplicativas. En dicha Tabla 3.6 constan pues los problemas y su complejidad, y en porcentajes: soluciones, fuentes y eficiencia.

problema	Complejidad	solu.	fuente Aritme.	Eficiencia Aritmét	fuente Tanteo	Eficiencia Tanteo	fuente Alge.	Eficiencia Algebr
DAFNE	2,1,1	64	89	80	0	0	11	100
ADRIAN	3,2,1	29	33	25	17	50	0	0
CH.Y CAR.	3,1,2	31	92	39	0	0	8	100
ALCANZA	3,1,2	26	54	30	36	30	0	0
BOLETOS	4,2,2	12	80	17	0	0	20	0
GA. y CON	4,2,2	50	10	50	76	67	5	----
COLECTA	4,2,2	14	71	17	14	17	14	0
DINERO	7,4.3	0	----	0	0	0	0	0

Tabla 3.6.- Complejidad. Soluciones. Fuente soluciones. Eficiencia

De la observación de las tablas anteriores se desprende:

-que la mayoría de los estudiantes presentan alguna resolución de los problemas. Únicamente el problema DINERO fue dejado en Blanco por más de la mitad de los estudiantes (el 67%) de los estudiantes, el problema COLECTA y el problema BOLETOS por una cuarta parte (el 24%) mientras que para el resto de los problemas un 90% o más de los estudiantes presentaron una resolución. Debiendo observarse que los problemas DINERO, COLECTA y BOLETOS se encuentran entre los problemas de mayor complejidad.

-que el modo de resolver aritmético fue preferentemente utilizado por los estudiantes en todos los problemas, con la excepción del problema GALLINAS Y CONEJOS en el que los estudiantes se decantaron por resolver mediante tanteo (57%). Y para el problema DINERO no se encontró ninguna resolución con el modo aritmético.

-que el modo de resolver algebraico, aunque no está disponible para los estudiantes en general, van a ser instruidos en él, es utilizado por algunos estudiantes que al parecer lo conocen, concretamente un estudiante lo usó preferentemente, y el caso más frecuente de ese modo de resolver en el problema DINERO. El uso quedó limitado a la presencia de algunas literales para designar a las cantidades y en dos casos a alguna expresión algebraica sin presencia de igualdad alguna. Por otro lado, dicho modo de resolver solo fue eficiente al 100% en el caso de los problemas CHOCOLATES Y CARAMELOS, DAFNE y BOLETOS, precisamente en las resoluciones del estudiante mencionado.

- que el modo de resolver mediante tanteo, utilizado en las resoluciones como único modo de resolver o conjuntamente con el modo aritmético (Arit , Tanteo) se usa en los problemas con los porcentajes y eficiencia que se indican en la Tabla 3.6 , donde los problemas están ordenados según la frecuencia de uso del tanteo.

problema	Tanteo	Eficiencia
GA. Y CON	57	63
BOLETOS	22	0
COLECTA	19	0
ADRIAN	17	50
ALCANZAR	14	30
DAFNE	10	0
DINERO	7.5	0
CH. Y CAR	7.5	0

Tabla 3.7.-Uso del tanteo y su eficiencia.(en tantos por cien)

A partir de dicha tabla 3.7 puede interpretarse que el uso del tanteo por los estudiantes se da con preferencia en los problemas de mayor complejidad o los que los valores de las cantidades se corresponden con “números fáciles o manejables “ en este último caso el tanteo puede alcanzar cierta eficiencia, (GALLINAS Y CONEJOS, ADRIAN, ALCANZAR), que siempre es inferior al modo aritmético. En problemas de la complejidad de DINERO el intento de una resolución por tanteo es un recurso del que pueden echar mano los estudiantes, pero la dificultad de su uso se muestra por la eficiencia de su uso, que es nula. Por otro lado, el uso del tanteo en problemas como DAFNE o CHOCOLATES Y CARAMELOS puede indicar una huida hacia este método en estudiantes que no pueden proceder de modo aritmético, cosa que hacen la mayor parte de los estudiantes. A pesar de ello los estudiantes que usan el tanteo con esos problemas muestran una eficiencia nula.

-que, para la mayor parte de estos problemas los estudiantes no pueden encontrar una solución -ver última columna de la Tabla 3.2-. Los únicos problemas que son resueltos por más de la mitad de los estudiantes son DAFNE y GALLINAS Y CONEJOS, en el primero las soluciones provienen del modo de resolver aritmético (89%) [19], mientras que en el segundo lo es el tanteo (76%). Los problemas para los que más de una cuarta parte de los estudiantes encuentran solución son CHOCOLATES Y CARAMELOS (31%), ADRIAN(29%) y ALCANZAR (26%) donde en las soluciones de los dos últimos problemas las soluciones por tanteo tienen una contribución importante el 25 y el 30%. Para los problemas COLECTA y BOLETOS un poco más del 10% de los estudiantes encontraron una solución.

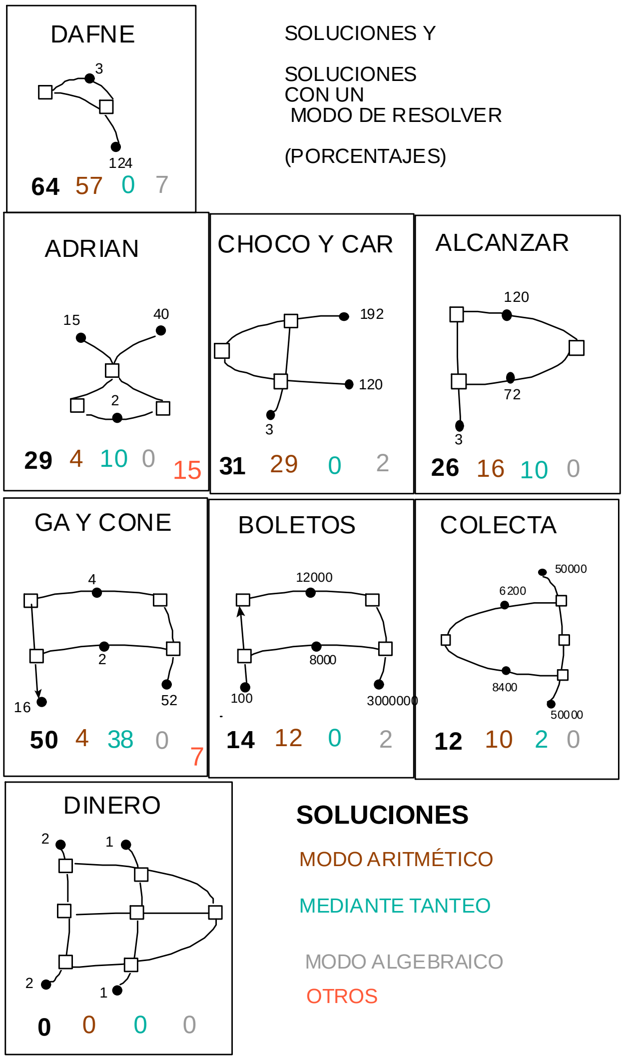
-que la complejidad de los problemas en cuanto al número de relaciones tiene que ver con la posibilidad de obtener una solución se puede observar en la Tabla 3.6 y el Cuadro 3.1.

En dicho Cuadro 3.1 los problemas se presentan en filas donde el número de aristas del grafo (relaciones del problema) son 2, 3, 4, 7, y se observa que el porcentaje de soluciones desciende al aumentar la complejidad expresada por el número de relaciones. La singularidad del problema GALLINAS Y CONEJOS puede atribuirse a la importante contribución del tanteo.

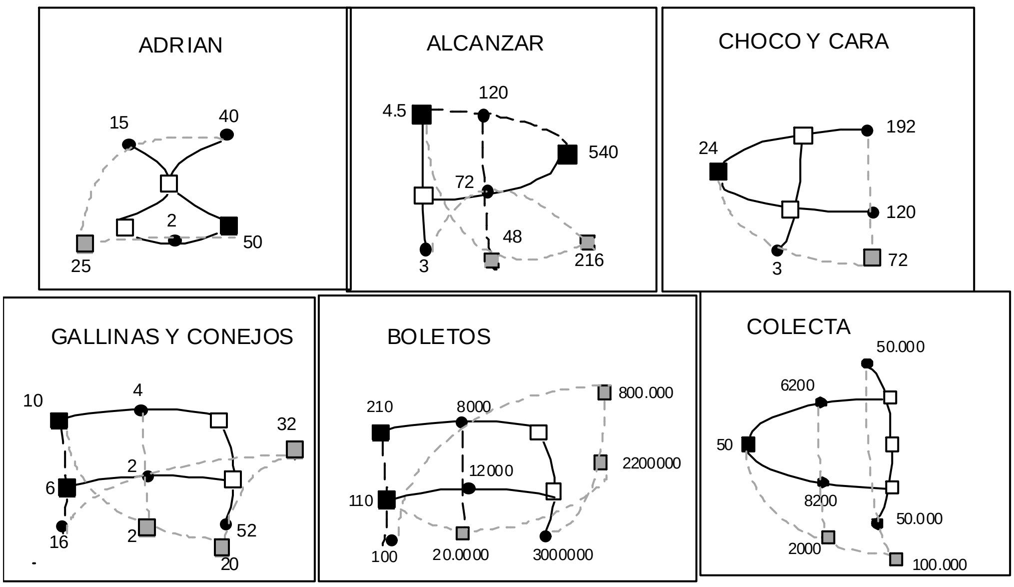
Las soluciones obtenidas con el modo aritmético también muestran una tendencia a decrecer con la complejidad del problema, aunque si observamos los problemas de complejidad relacional 3, los porcentajes de las soluciones obtenidas con este modo son muy diferentes 29, 16, 6 para los problemas : CHOCOLATES Y CARAMELOS, ALCANZAR Y ADRIAN y para los problemas de complejidad 4 14, 12, 4 para los problemas: BOLETOS, COLECTA, GALLINAS Y CONEJOS.

Por otro lado, si observamos los grafos de las resoluciones de estos problemas, que contienen una solución, obtenidas con dicho modo de resolver y que se muestran en el Cuadro 3.2, vemos que las cantidades introducidas para obtener la solución han sido:

[19] Tal como se han identificado aquí los modos de resolver, en las resoluciones de DAFNE se ha utilizado el modo de resolver aritmético cuando no hay presencia de letras en el texto de la resolución, sin embargo en las resoluciones de este problema que contienen una solución se ha procedido a sumar “1+3” y dividir “124 “ por “1+3”.Desafortunadamente en las resoluciones de estos estudiantes de secundaria no hay expresiones verbales que nos indiquen el sentido de la suma “1+3”. Sin embargo, en las resoluciones de los estudiantes de la Facultad donde si encontramos expresiones verbales el “1” y el “3” son considerados como “partes” de los boletos vendidos o “3 “es usado en ” 3 veces más”. En este sentido podemos entender que el cálculo “1+3” se hace con “veces “o “partes” . Y si esto se entiende como cálculo con lo desconocido se puede calificar este modo de resolver de algebraico.



Cuadro 3.1.- Grafos de los problemas, soluciones y modo de encontrarlas.



Cuadro 3.2.-Grafos de resoluciones que contienen una solución.
En gris las cantidades y relaciones introducidas.

-la razón de diferencias: “exceso de caramelos” / “exceso de caramelos por niño” para CHOCOLATES Y CARAMELOS.

-“La ventaja que le lleva un tren al otro”,”lo que recupera por hora” para ALCANZAR.

-“la diferencia de edades “o “la edad que tenis Tania cuando nació Adrián” para el problema ADRIAN.

-“el precio por pareja”, “el número de hombres como número de parejas”, “recaudado por pareja”, “recaudado mujeres sin pareja” para el problema BOLETOS.

-la razón de diferencias “entre lo pagado en cada caso / entre lo pagado por cada uno” para el problema COLECTA.

-el “número de patas si todo fuesen pollos”, “el defecto de patas”, “la diferencia de patas por animal” para el problema GALLINAS Y CONEJOS

Ahora si correlacionamos las cantidades introducidas y las soluciones obtenidas, donde debe insistirse que en las resoluciones de los estudiantes no constaban expresiones verbales para denominar a dichas cantidades, pero sí las “expresiones aritméticas”, y por lo tanto los nombres son nuestros, ver Anexo **3.4**, podemos sugerir que algunas cantidades son más susceptibles de ser consideradas como pertenecientes al mundo posible del problema y usadas para obtener la solución del mismo. En este sentido, las cantidades necesarias para la solución de los problemas ADRIAN. y GALLINAS Y CONEJOS, 4% de soluciones, “la edad que tenía Tania cuando nació Adrián”, “número de patas si todo fuesen pollos” serían bien extrañas a ese mundo o bien difícil encontrar como usarlas en la solución, ver grafos de las resoluciones, mientras que cantidades como “la ventaja” , ”lo que recupera por hora” o “el precio por pareja” consideradas en los problemas ALCANZAR o BOLETOS, 16 y 12% de soluciones”, esto ocurriría en menor grado. La consideración de las razones de diferencias “exceso de caramelos” / “exceso de caramelos por niño” y “entre lo pagado en cada caso / entre lo pagado por cada uno” utilizadas en un 26 y 10% de los casos en los problemas CHOCOLATES Y CARAMELOS y COLECTA requiere un poco más de atención.

Ambas razones de diferencias se han utilizado para determinar la cantidad “número de alumnos”. Considerando el problema CHOCOLATES Y CARAMELOS tal cantidad se presenta habitualmente como el cociente o la razón entre “el número de caramelos “ y “el número de caramelos por niño”, esto se hace en los problemas multiplicativos de una etapa en los que la pregunta versa sobre el número de partes y los datos son el total, nº de caramelos, y el tamaño de cada parte, nº de caramelos por niño. Los estudiantes han tenido la oportunidad en repetidas ocasiones de determinar el número de partes, en la versión repartir, mediante una división. Lo dicho, en analogía, es pertinente también para el problema COLECTA. Ahora bien, lo que los estudiantes muestran aquí, usando la razón de las diferencias, puede enunciarse así:

“Dadas dos instancias de reparto equitativo y permaneciendo *constante* el número de partes, tal número de partes puede obtenerse por el cociente de las diferencias entre lo que se reparte y lo que toca en cada reparto, en cada una de las dos instancias”. Esto es, están haciendo uso de una conocida propiedad de las proporciones:

$$k = R1 / T1 = R2/ T2 = (R1 – R2) / (T1 – T2)$$

La concepción de tales cantidades, constantes de proporcionalidad, como razones permite que sean usadas las "razones de diferencias" para su determinación.

En los problemas que estamos considerando, este uso requiere del uso de las incógnitas auxiliares "exceso de caramelos" y "diferencia de lo pagado en cada caso", la determinación de dichas incógnitas es más compleja en el problema COLECTA que en el problema CHOCOLATES Y CARAMELOS y ello podría explicar la diferencia porcentual 10, 31 que existe en el uso de la razón de diferencias en uno y otro problema.

3.6.4.2.-Grafos de las resoluciones y errores en la resolución

De los problemas del instrumento nº 1, en los Cuadros 3.3, 3.4, 3.5, 3.6 se muestran los grafos de las resoluciones de los problemas CHOCOLATES Y CARAMELOS, ALCANZAR, BOLETOS Y COLECTA, esto es, de aquellos problemas en los cuales el modo aritmético se utilizó un número significativo de veces. En los cuadros sólo aparecen los grafos de las resoluciones que no contienen una solución, por inacabadas, por contener errores y/o por dar una respuesta incorrecta. Las resoluciones se han agrupado en función de la naturaleza de las relaciones utilizadas para determinar cantidades. Se señalan a trazos las relaciones utilizadas, y en color rojo las respuestas incorrectas y las relaciones utilizadas inadecuadamente. Además, se ha incluido en cada cuadro el grafo del problema señalando en color gris las cantidades por las que se pregunta en los problemas.

En todos estos problemas podemos encontrar resoluciones inacabadas, es decir, que no dan una respuesta a la pregunta del problema y resoluciones que dan una respuesta incorrecta. La Tabla 3.8 da cuenta de ello.

problema	R.Inacabada	R.incorrecta	R.Inacabada %	R.incorrecta %	Total errores
CHOCYCARA	7	13	35	65	65
ALCANZAR	5	9	36	64	64
BOLETOS	9	6	60	40	60
COLECTA	4 (2)	9	31	69	85

Tabla 3.8.- Resoluciones acabadas e incorrectas.
( ) Inacabadas y con errores.

De la Tabla 3.8 se desprende que de los estudiantes que usaron el modo de resolver aritmético y no encontraron una solución alrededor de un tercio de ellos dejó inacabada la resolución y no dio una respuesta al problema, mientras que los dos tercios restantes dieron una respuesta incorrecta, con la excepción del problema BOLETOS en las que parecidas proporciones se invierten.

Como puede observarse en los Cuadros 3.3, 3.4, 3.5, 3.6, la mayor parte de los errores se cometieron al usar una relación arbitraria, en rojo en los grafos, para determinar la cantidad por la que preguntaba el problema, lo que condujo a una respuesta incorrecta.

Un análisis de detalle de las resoluciones y en ellas de los usos inadecuados de relaciones para determinar cantidades para cada problema sería el siguiente:

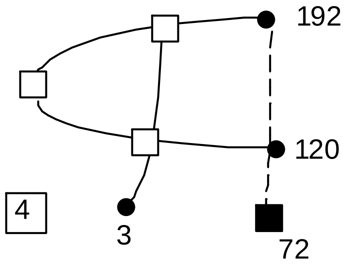
-en el problema CHOCOLATES Y CARAMELOS la respuesta incorrecta casi unánime es “64 alumnos”. Esta respuesta incorrecta proviene de determinar el nº de alumnos mediante el cociente “nº de caramelos / exceso de caramelos por alumno” y ello a pesar de que 4 de los estudiantes han determinado también el exceso de caramelos. En este problema 2 estudiantes han determinado a su vez el “total de dulces” y uno de ellos lo ha utilizado para determinar el nº de alumnos.

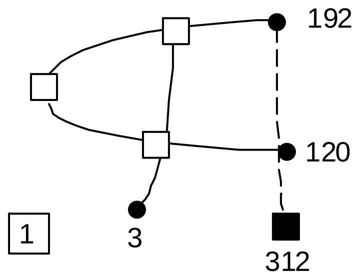
- en el problema ALCANZAR, 6 estudiantes han procedido a determinar los espacios recorridos en 3 horas, la única cantidad de tiempo disponible como dato, por ambos trenes y a partir de ahí han dado como respuesta al problema “distancia en alcanzar” usando “la suma o la diferencia de las distancias recorridas por los trenes en 3 horas”. Otros 6 estudiantes han optado por determinar “la suma o diferencia de velocidades” y determinar la “distancia en alcanzar” multiplicando por el tiempo de retraso. Así las respuestas incorrectas se concentran en 144 km. y 576 km.

-en el problema BOLETOS las respuestas incorrectas no se concentran en uno o dos valores determinados. 2 estudiantes concibieron la cantidad “precio por pareja” pero utilizaron la “recaudación total” para determinar el “número de boletos de dama” y posteriormente los de caballero (250,150) Otros 2 decidieron repartir la recaudación total entre 2 y obtener a partir de ello y “el precio por boleto” el “número de damas y de caballeros”. (287,125). El resto de los estudiantes determinaron lo “recaudado damas sin pareja” (800.00) y lo “recaudado parejas” (2.200.000), 5 de los estudiantes quedaron aquí dejando la resolución inacabada. Por otro lado, 8 de los estudiantes dividieron por 2 dinero recaudado, bien la “recaudación total”, tres estudiantes, bien lo “recaudado parejas” , cinco estudiantes .Eso lo hicieron, conjeturamos que con la intención de determinar la parte que correspondía a damas y a caballeros, incógnitas auxiliares que conocidos los precios permiten determinar el número de damas y caballeros. 4 estudiantes que repartieron entre 2 lo “recaudado parejas” (1.100.000) y lo dejaron aquí, probablemente al comprender que esta cantidad si bien era la mitad no había sido aportada mitad-mitad por damas y caballeros. Otro estudiante continuó, dando por cierto este último hecho, añadió los (800.000) recaudado de las mujeres y dispuso de las dos cantidades (1.900.000, 1.100.000) aportadas por damas y caballeros con lo cual determinó su número (210,90). De los tres estudiantes que dividieron entre 2 la “recaudación total”, la conducta de dos de ellos ya ha sido comentada, el tercero consideró el resultado de esta división como lo aportado por igual por damas y caballeros sustrajo lo aportado por las damas sin pareja(800.000) y obtuvo (700.000), cantidad que utilizó para determinar el número de damas.

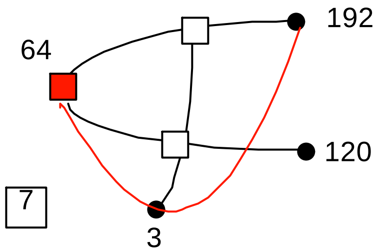
-en el problema COLECTA, 3 estudiantes transgredieron la ley de la homogeneidad, 50.000 pesos+ 6.200(8.200) pesos/estudiante. La determinación del “número de alumnos” se realizó mediante la división de las cantidades que eran datos, exceso o defecto y aportación. Así, cuatro de los estudiantes dieron dos cantidades 8 y 6 como respuesta, mientras que otros 4 sumaron ambas cantidades 14.

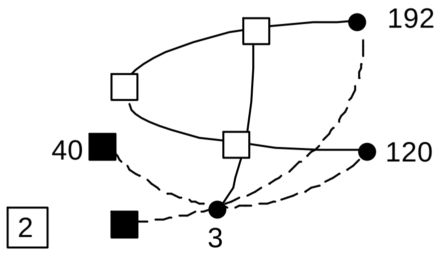
CHOCOLATES Y CARAMELOS.
Relaciones aditivas:



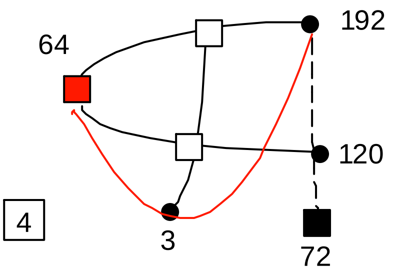


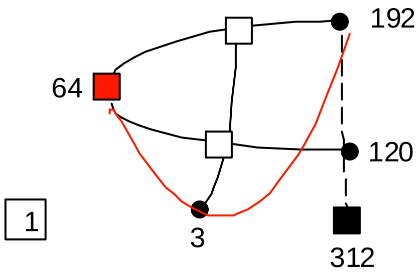
Relaciones multiplicativas:

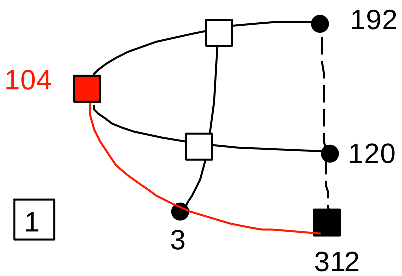


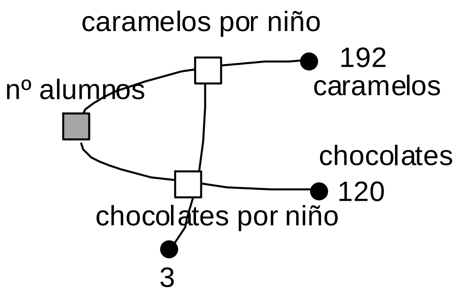


Relaciones aditivas y multiplicativas:





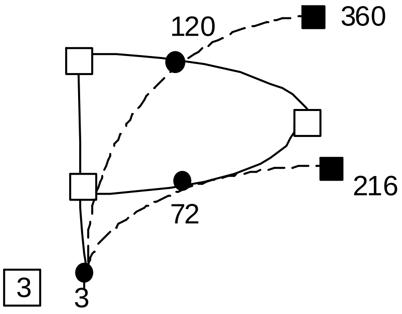


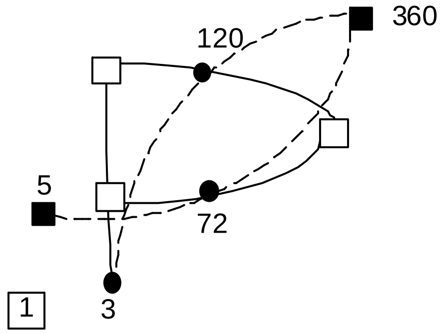


Cuadro 3.3.-Grafos de las resoluciones del problema CHOCOLATES Y CARAMELOS

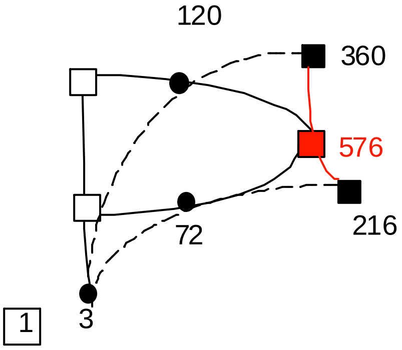
ALCANZAR

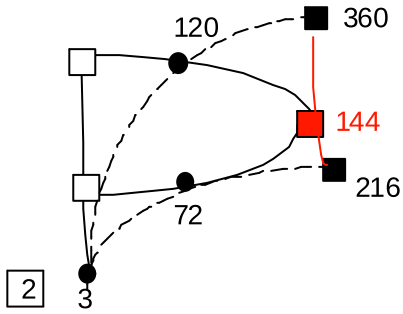
Relaciones multiplicativas:

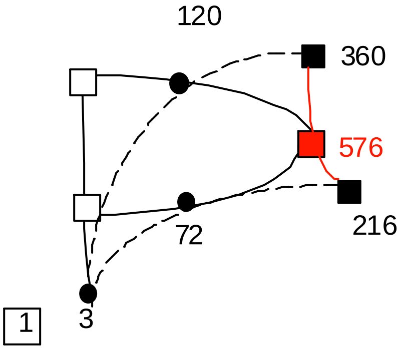


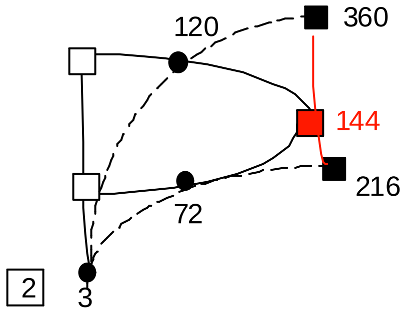


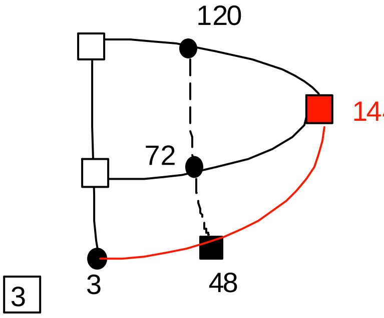
Relaciones aditivas y multiplicativas:

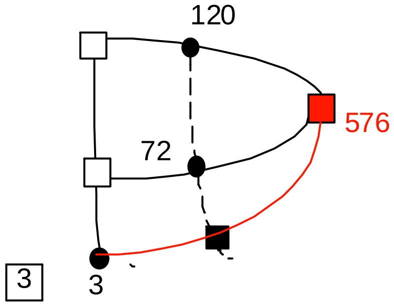


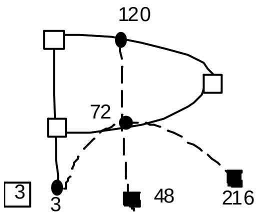


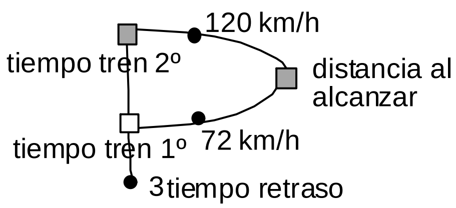






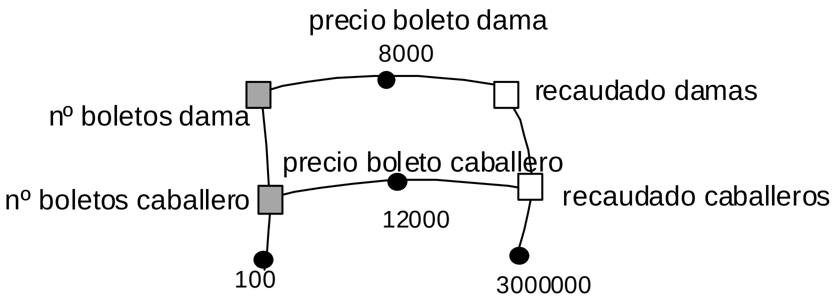




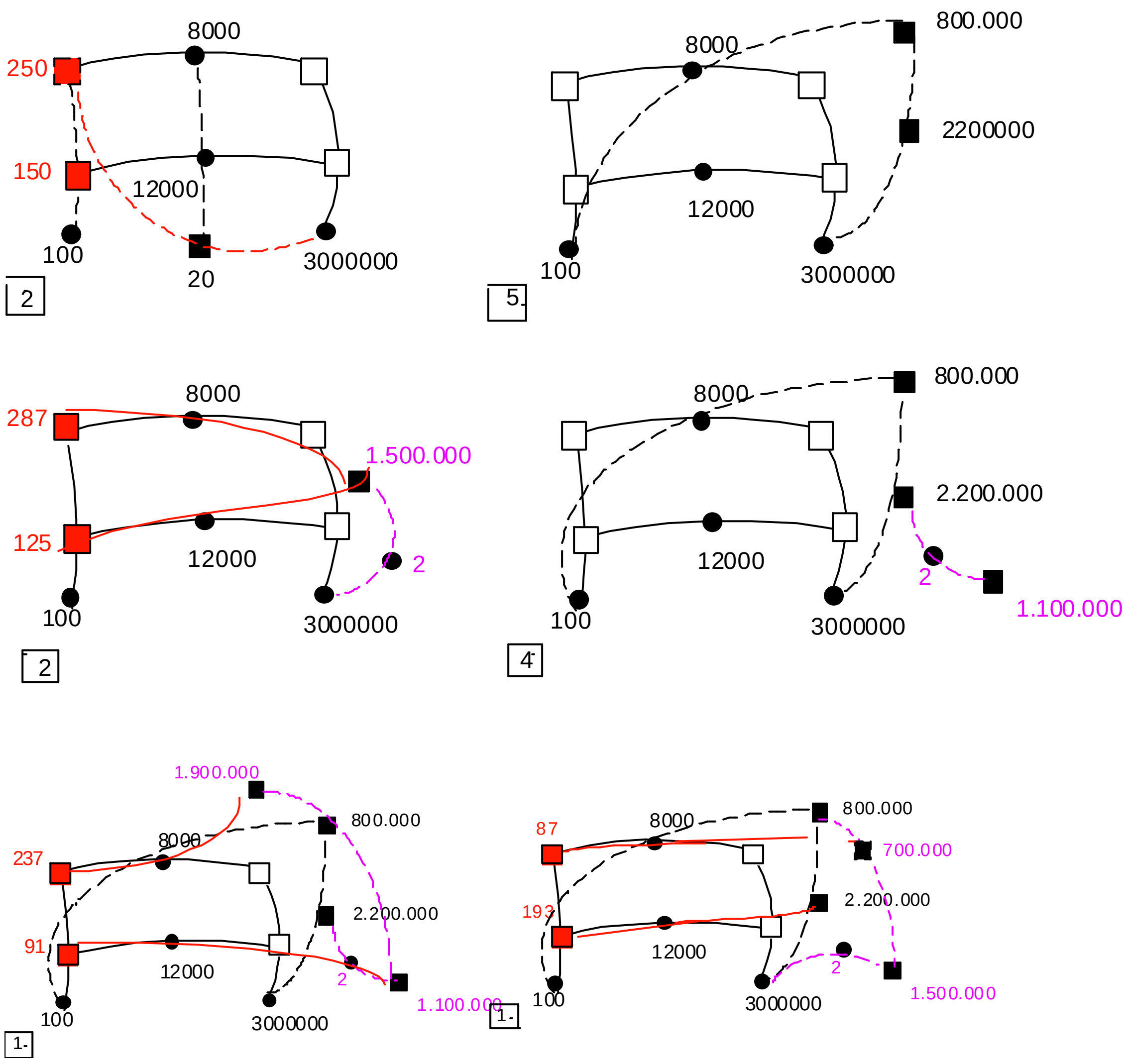


Cuadro 3.4.-Grafos de las resoluciones del problema ALCANZAR.

BOLETOS



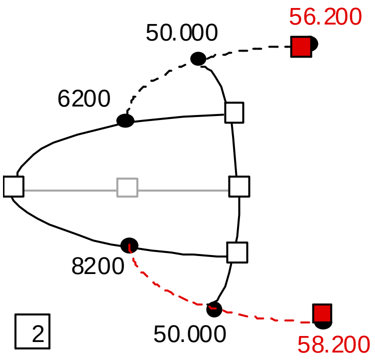
Relaciones aditivas y multiplicativas:

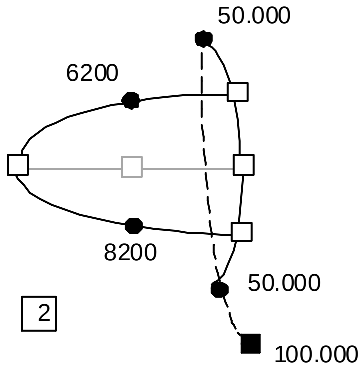


Cuadro 3.5.-Grafos de las resoluciones del problema BOLETOS.

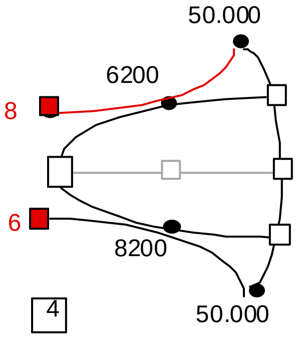
COLECTA

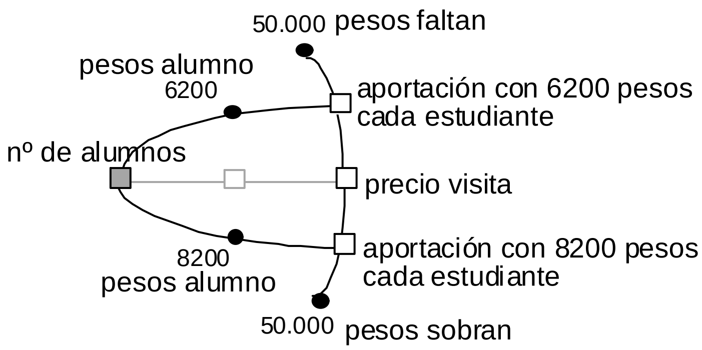
Relaciones Aditivas:



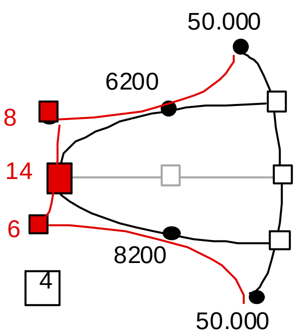


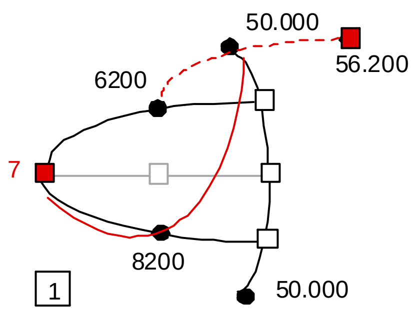
Relaciones Multiplicativas:





Relaciones Aditivas y Multiplicativas:





Cuadro 3.6.-Grafos de las resoluciones del problema COLECTA

3.6.5.1- Modos de resolver y soluciones (estudiantes de licenciatura)

Los modos de resolver de cada uno de los 21 estudiantes que abordaron cada uno de los 10 problemas del instrumento nº 2, con la prohibición explicita de usar ecuaciones para resolver los problemas, se muestran en la Tabla 3.9. En la Tabla 3.10 los modos de resolver usados por cada estudiante. En la tabla 3.11, el número de modos de resolver cada uno de los problemas por los 21 estudiantes. Y en la tablas 3.12 y 3.13, la distribución de los modos de resolver para cada problema y su eficiencia.

Previo a la consideración de la tabla 3.12, donde se muestra la distribución de los modos de resolver para cada problema, deben observarse las tablas 3.9, 3.10, 3.11 de donde se desprende que:

-Únicamente 6 de los estudiantes dejaron algún problema en blanco y esto ocurrió, mayoritariamente, con el problema DINERO. -Ver Tabla 3.11-.

-Los modos de resolver fueron aritmético, algebraico, y mediante tanteo, y en el caso del problema DINERO algunos estudiantes proporcionaron como resolución un argumento.

-En las resoluciones de algunos estudiantes, concretamente de 6 de ellos, constaba un diagrama que representaba un texto intermedio aritmético o algebraico, ello se debe a que, como ya se dijo, en la asignatura de la cual éstos estudiantes se estaban examinando, se había tratado lo referido en **1.4**, **1.5**, **1.6.** La producción de textos intermedios se ha hecho constar en las tablas 3.9, 3.10, 3.11. Tres de estos estudiantes (nº 7,10,11) produjeron diagramas en los que constaban los valores de las cantidades y el orden de las operaciones, anotado en las tablas como (TIAR) y otros tres (nº 1, 6, 20) diagramas en los que hacían constar el nombre de las cantidades que se analizaban, y produjeron un texto intermedio algebraico (anotado como TIAL en las tablas), el texto intermedio conducía a una ecuación, ecuación que hicieron constar en la resolución en casi todos los casos. Estos 6 estudiantes no produjeron diagramas para todos los problemas del instrumento nº 2. En la Tabla 3.9 puede observarse que ninguno de los 3 estudiantes que produjeron textos intermedios algebraicos produjo un texto intermedio para el problema ADRIAN, que 2 de los estudiantes que producían textos intermedios aritméticos no lo hicieron en el problema BOLETOS, y que en el caso de los problemas DINERO y AVIONETA únicamente el estudiante nº 20 produjo textos intermedios algebraicos.

Considerando con algunas prevenciones la presencia en la resolución de diagramas como lo que son, una manera de expresar el uso de la manera de resolver aritmética o algebraica según lo sea el texto intermedio, en las frecuencias del uso de los modos de resolver que se muestran en la tabla 3.10 y 3.11 deben considerarse los números que figuran entre paréntesis, que son la suma de A+TIAR o E+TIAL .

A pesar de la prohibición de usar ecuaciones, 11 (12) de los estudiantes se sirvieron de ellas para expresar la solución de algunos problemas como se muestra en la tabla 3.10. Si se observa además la tabla 3.11, puede comprobarse que las ecuaciones se usaron en el problema DINERO en 7 ocasiones, en 2 ocasiones en el problema AVIONETA y en 1 ocasión en el resto de los problemas, ocasiones que se incrementan si se consideran los 3 estudiantes en cuya resolución constaba un TIAL. La excepción la constituyó el problema ADRIAN en cuya resolución ningún estudiante utilizó ecuaciones.

-Si se exceptúa el problema DINERO, en el que la mayor parte de los estudiantes hicieron caso omiso de la restricción, solo cuatro de los estudiantes escribieron directamente ecuaciones como solución de los problemas (en negrita en la tabla 3.9), los estudiantes nº 3 y 9 en el problema AVIONETA, el estudiantes nº 15 que lo hizo en 2 ocasiones y el estudiante nº 8 que lo hizo en cinco ocasiones.

- Las resoluciones mediante tanteo o el modo de resolver aritmético sugieren la presencia de dos tipos de comportamientos:

el de 7 de los estudiantes (nº 2, 3, 4, 16, 17,19, 21) usaron el modo de resolver mediante tanteo en la mitad o más de los problemas mientras que el estudiante nº 15 usó el tanteo en 4 ocasiones pero para el resto de los problemas escribió ecuaciones o los dejó en blanco.

el de 9 de los estudiantes (nº 5, 7, 9. 10, 11, 12, 13, 14, 18) se decidieron por usar el modo de aritmético en más de la mitad de los problemas.

Ahora, la consideración conjunta de las tablas 3.12 y 3.13 permite decir que, cualquiera que sea el modo de resolver utilizado éste es eficiente, excepto el modo aritmético en el caso del problema AVIONETA. Los casos de los problemas BOLETOS y ENCONTRAR pueden atribuirse a errores puntuales de dos estudiantes que no utilizaron ese modo de resolver más que de modo incorrecto. La singularidad del problema DINERO se tratará posteriormente

Se desprende de la Tabla 3.12 que:

- en torno a una quinta parte de los estudiantes (14-19%) usaron ecuaciones para resolver los problemas, ello pese a su prohibición.

- el modo de resolver aritmético únicamente fue utilizado como modo de resolver en el problema DINERO en una ocasión, sin éxito.

- el aproximado 80% de las resoluciones que utilizan el modo de resolver aritmético y tanteo que consta en la tabla 3.12 permite ordenar los problemas, de mayor a menor frecuencia de resoluciones con el modo de resolver aritmético, como se muestra en la tabla 3.14, la cual nos informa:

-que el modo de resolver aritmético fue utilizado con preferencia al tanteo en todos los problemas excepto en ADRIAN y LANA y ALGODÓN.

-que el modo de resolver aritmético fue utilizado en un 50% o más de todas las resoluciones no algebraicas en todos los problemas excepto los mentados ADRIAN y LANA y ALGODÓN

-que los problemas DAFNE y COLECTA fueron los que más resoluciones presentaron un el modo de resolver aritmético.

Tabla 3.9 .- Modos de resolver. Instrumento nº 2.

	Choco y car	Dafne	Boletos	Adrian	Colecta	Dinero	Rublos	Encontrar	lana y algodon	Avionet
1	TIAL	TIAL	TIAL	T	TIAL	E	TIAL	A	TIAL	a
2	A	A	A	T	A	E	T	T	T	T
3	T	T	T	T	T		T	T	T	**E**
4	T, A	A	T	T	A	T	T	T	T	a
5	A	A	A	T	A	E	A	A	T	T
6	TIAL	TIAL	TIAL	T	TIAL	E	TIAL	TIAL	TIAL	a
7		TIAR	TIAR	TIAR	TIAR		TIAR		TIAR	
8	T , **E**	T,A, E	a	A		E	**E**	**E**	T	a
9	A	A	A	T	A	E	A	A	**E**	**E**
10	TIAR	TIAR	A	TIAR	TIAR	argu mento	TIAR	TIAR	TIAR	A
11	TIAR	TIAR	A	TIAR	TIAR	ARGU MENTO	TIAR	TIAR	TIAR	A
12	A	A	A	T	A	argu mento	A	T	T	a
13	A	A	A	A	A		A	A	T	a
14	A	A	A	T	A	argu mento	A	T	T	a
15	T	**E**	T	T	**E**			a	T	
16	T	T	T	T			**E**	T	T	a
17	T	A	T	T	T	argu mento	A	T	T	T
18	A	A	A	A	A	E	A	A	A	T
19	T	A	T	T	T	t	T	A	T	T
20	TIAL	TIAL	TIAL	T	TIAL	TIAL	TIAL	TIAL	TIAL	TIAL
21	T	T	T	T	A	a	t	T	T	a

A.- Modo de resolver Aritmético
T.- Modo de resolver mediante tanteo.
TP.- Modo de resolver mediante tanteo, en busca de un patrón.
TIAR.- Texto intermedio aritmético.
TIAL.- Texto intermedio algebraico.
E.- Modo de resolver Algebraico.
Las letras minúsculas indican una solución incorrecta.

Tabla 3.10- Modos de resolver usados en los problemas del instrumento nº 2 por cada uno de los 21 estudiantes (frecuencias).

Modo/ estudiante	A	T	TIAR	TIAL	E	Argu mento	B
1	2	1		6	1(7)		
2	4	5			1		
3		8			1		1
4	4	7					
5	6	3			1		
6	1	1		7	1(8)		
7	(6)		6				4
8	3	3			5		1
9	6	1			3		
10	2 (9)		7			1	
11	2 (9)		7			1	
12	6					1	
13	8	1					1
14	6	3				1	
15	1	4			2		3
16	1	6			1		2
17	2	7			1		
18	8	1			1		
19	2	8					
20		1		9	(9)		
21	2	7				1	
Total estudiantes	18(19)	17	3	3	11(12)	8	6

A.- Modo de resolver Aritmético
T.- Modo de resolver mediante tanteo.
B.-Blanco
TP.- Modo de resolver mediante tanteo, en busca de un patrón.
TIAR.- Texto intermedio aritmético.
TIAL.- Texto intermedio algebraico.
E.- Modo de resolver Algebraico.
(-) el número entre paréntesis es bien A+TIAR o bien E+TIAL

	A	T	TIAR	TIAL	E.	argumento	Blanco
Cho y caram	8 (10)	7	2	3	1 (4)		1
Dafne	10 (13)	4	3	3	1(4)		
Boletos	9 (10)	6	1	3	1 (4)		
Adrian	3(6)	15	3				
Colecta	10 (13)	3	3	3	1 (4)		1
Dinero	1	2		1	7 (8)	6	6
Rublos	7 (10)	5	3	3	1 (4)		1
Encontrar	6 (8)	8	2	2	1 (3)		1
Lana y algdon	1 (4)	13	3	3	1 (4)		
Avioneta	11	5		1	2 (3)		2

Tabla.3.11-Número de estudiantes que utilizan ese modo de resolver en ese problema.

A.- Modo de resolver Aritmético
T.- Modo de resolver mediante tanteo.
TP.- Modo de resolver mediante tanteo, en busca de un patrón.
TIAR.- Texto intermedio aritmético.
TIAL.- Texto intermedio algebraico.
E.- Modo de resolver Algebraico.
(-)el número entre paréntesis es bien A+TIAR o bien E+TIAL

	A	T	E
Choco y cara	48	33	19
Dafne	62	19	19
Boletos	48	29	19
Adrián	19	71	
Colecta	62	14	19
Dinero	5	10	38
Rublos	48	24	19
Encontrar	38	38	14
Lana y algodón	19	71	19
Avioneta	52	24	14

Tabla 3.12.-Distribución de los modos de resolver.

	A	T	E
Choco y cara	100	100	100
Dafne	100	100	100
Boletos	90	100	100
Adrián	100	100	
Colecta	100	100	100
Dinero	0	0	100
Rublos	100	100	100
Encontrar	87	100	100
Lana y algodón	100	100	100
Avioneta	18	100	100

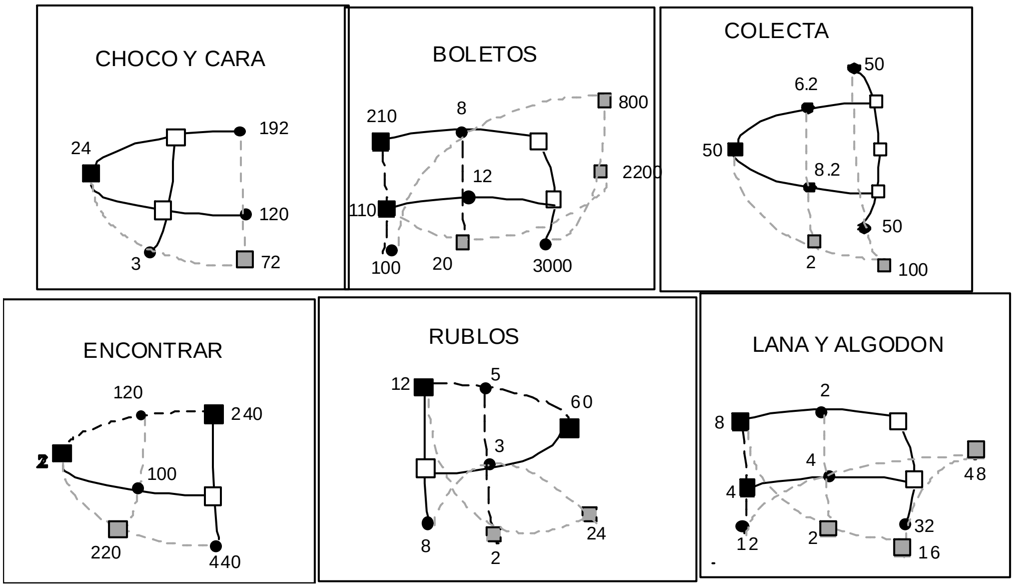
Tabla 3.13.- Eficiencia.

problema	A	T	A	T
Colecta	62	14	*82*	*18*
Dafne	62	19	*77*	*23*
Avioneta	52	24	*68*	*32*
Rublos	48	24	*67*	*33*
Boletos	48	29	*62*	*38*
Cho. y car.	48	33	*53*	*47*
Encontrar	38	38	*50*	*50*
Adrian	19	71	*24*	*76*
Lana y Alg.	19	71	*24*	*76*

Tabla 3.14.-problemas ordenados por el uso del modo de resolver Aritmético. En cursiva el % sobre el total de ambos modos.

3.6.5.2.-Soluciones y razonamientos. Modo de resolver aritmético

Las resoluciones que usaron el modo de resolver aritmético casi sin excepción contenían una solución, ver tabla 3.13. Las excepciones son los casos de los problemas AVIONETA y DINERO. Los grafos de las resoluciones con la ruta solución a trazos se muestran en el Cuadro 3.7.



Cuadro 3.7.-Grafos de las resoluciones que contienen una solución
En gris las cantidades y relaciones introducidas.
Estudiantes Licenciatura.

Para el problema LANA y ALGODÓN también se encontró la solución que aparece en la fig. 3.6 .

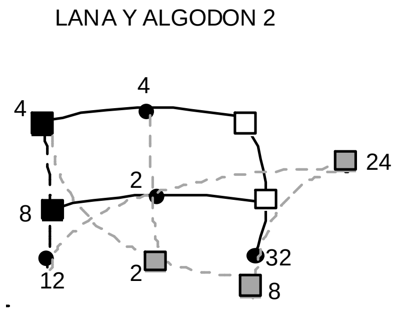


fig. 3.6

Un ejemplo de una resolución, proporcionada por alguno de los estudiantes que se examinaron con el instrumento nº 2, de cada problema que contiene la solución mostrada en los grafos del Cuadro 3.3 se da en las figs. 3.7 y 3.8 y ejemplos de resoluciones de todos los problemas del instrumento constan en el anexo **A3.5**.

1.-Una educadora tiene 120 chocolates y 192 caramelos que va a repartir entre los alumnos de su clase.Si cada alumno recibe 3 caramelos más que chocolates. ¿Cuántos son los alumnos?

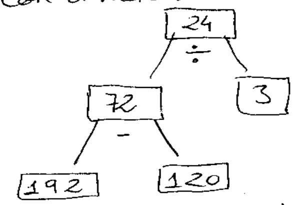
Primero veamos en cuanto excede el nº de caramelos al nº de chocolates:

$192 - 120 = 72$

Ahora los agrupamos de 3 en 3:

$72 \div 3 = 24$ alumnos

Con el método de análisis-síntesis, sale un problema de 2 etapas:



En definitiva ~~bas~~ cada alumno de los 24 recibe

$192 \div 24 = 8$ caramelos y $120 \div 24 = 5$ chocolates.

3.-En una fiesta se vendieron boletos, los de dama costaron 8 euros y los de caballero 12 euros.Los boletos de dama fueron 100 más que los de caballero.La recaudación total fué de 3000 euros. ¿Cuántos boletos se vendieron de cada tipo?

Los 100 boletos de dama son 800 euros

El resto de recaudación es de 2200 euros obtenido del mismo número de boletos de dama que de caballero. Hacemos como si fueran packs de boletos dama-caballero a un precio de $12+8=20$ euros.

Entonces se vendieron $\frac{2200}{20} = 110$ packs dama-caballero.

Así pues vendieron 110 boletos de caballero y 210 boletos de dama.

5.-Un grupo de alumnos tiene que hacer una colecta para pagar una visita guiada.Si cada uno de ellos aportara 6.2 euros les faltarian 50 euros.Si cad uno de ellos contribuyera con 8.2 euros entonces les sobrarian 50 euros. ¿Cuántos alumnos contituyen el grupo?

La diferencia entre que le falten 50 € y que le sobren 50 € es que en la colecta se consigan 100 € más. El enunciado se puede reformular así:

"Si cada alumno pone 2 € más, se recolectan 100 € más

$100 \underline{|2}$
$\quad 50$

Solución: El grupo lo constituyen 50 alumnos

fig 3.7.-Resoluciones de los problemas CHOCOLATES Y CARAMELOS, BOLETOS y COLECTA.

8.-Un tren parte de Madrid a Valencia con una velocidad de 100 km / hora y otro de Valencia a Madrid con una velocidad de 120 km/hora. La distancia por tren de Valencia a Madrid es de 440 km.Dígase a que distancia de Valencia se cruzan ambos trenes.

En una hora ambos recorren 120 + 100 = 320 km, para recorrer los 440 km que los separan tenemos que ver cuantas veces contiene 440 a 320 es decir $\frac{440}{320} = 1'375$

→ a distancia de Madrid estaremos a 137's y de valencia a 440 − 137's = 302'5 km

7.-En una escuela rusa compran libros para la biblioteca.Si pagan con billetes de 3 rublos necesitan 8 billetes más que si pagan con billetes de 5 rublos. ¿Cuál es el precio de los libros?

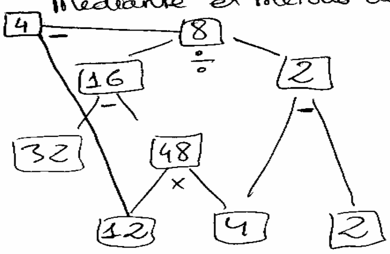
Por cada billete de 5 rublos pago 2 rublos más que con un billete de 3 rublos.

Con la totalidad de billetes de 5 pagaré (ó tendré) 3·8 = 24 rublos más que con ese mismo número de billetes pero de 3.

Entonces el número de billetes de 5 será $\frac{24}{2} = 12$ y el precio de los libros es de 12·5 = 60 rublos.

9.-Se dispone de tela de lana y de tela de algodon. En total 12 metros.El precio del metro de lana es de 2 euros y el de algodon de 4 euros. El valor total de la tela que se dispone es de 32 euros.¿De cuántos metros de tela y de cuántos de algodos se dispone?

Mediante el método de análisis-síntesis en 3 etapas:



Si la tela fuera toda de algodón ~~habríamos~~ el valor total habría sido de 48 euros. Como el valor real era de 32 euros, la diferencia (48 - 12 = 16 euros) se corresponde con la diferencia en euros del precio por metro de algodon y de lana (es decir 4-2=2 euros). Luego hay 8 ms de ~~algodon~~ lana y 12 - 8 = 4 ms de algodon.

fig.3.8- Resoluciones de los problemas ENCONTRAR, RUBLOS y LANA Y ALGODÓN. La resolución del problema ENCONTRAR contiene un error de calculo “120 + 100 =320”.

La componente **n** de los diccionarios de cantidades de las resoluciones se muestra en las tablas 3.15, a 3.21.

Tabla 3.15.-Diccionario CHOCOLATES Y CARAMELOS

n , diccionario teórico	**n**, diccionario de la resolución
nº caramelos	*caramelos de partida*
nº chocolates	*chocolates total*
nº alumnos	*número de alumnos,* *paquetes de 3* *exceso agrupado de 3 en 3* *la diferencia entren 3*
nº caramelos por niño	*caramelos cada uno*
nº chocolates por niño	*chocolates cada uno*
exceso de caramelos	*caramelos que sobran* *caramelos más que chocolates* *excede el nº caramelos al de chocolates*
exceso de caramelos por niño	*recibe más que chocolates*
Otras	*golosinas totales* *golosinas por niño*

Tabla 3.16.- Diccionario DAFNE

n , diccionario teórico	**n**, diccionario de la resolución
nº boletos vendidos por Dafne y Fabiola	*el número de boletos en 4 partes* *4 veces los de Dafne* *4 lotes de 4*
nº boletos vendidos por Dafne	*una parte* *¼ de los 124*
nº boletos vendidos por Fabiola.	*3 veces más* *3 grupos* *¾ de los 124* *el triple que los de Dafne*

Tabla 3.17.- Diccionario ENCONTRAR

n , diccionario teórico	**n**, diccionario de la resolución
distancia Valencia –Madrid	*distancia*
distancia de Madrid	*distancia de Madrid*
velocidad tren ficticio	*un tren quieto, el otro a velocidad suma de los dos* *lo que recorren en una hora ambos trenes.*
tiempo en encontrarse	*cuantas veces contiene 440 a 320*

Tabla 3.18.- Diccionario BOLETOS

n , diccionario teórico	**n**, diccionario de la resolución
precio boletos de dama	*recaudación dama*
precio boletos de caballero	*recaudación caballero*
Recaudación total	*recaudación total*
exceso boletos de dama	*vendieron de más*
parejas	*1 dama y 1 caballero* *boletos emparejados* *pareja hombre mujer, coincide hombres*
Precio pareja	*precio pack dama caballero* *cuestan 20*
Recaudado parejas	*el precio boletos de dama mas un nº de caballeros(el mismo).* *lo que constaban los que se vendieron (mitad uno, mitad otro)* *2200 obtenido del mismo número de damas que de caballeros*
Recaudado mujeres sin pareja	*precio 100 boletos de dama que se vendieron de más* *diferencia recaudación (a favor mujeres)*

Tabla 3.19.- Diccionario COLECTA

n , diccionario teórico	**n**, diccionario de la resolución
nº de alumnos.	*nº de alumnos*
dinero que falta	*faltan 50 euros*
dinero que sobra	*sobran 50 euros*
diferencia entre lo pagado por cada uno en cada caso	*poniendo 2 más..* *si contribuyesen con la diferencia de los 2..*
diferencia entre lo pagado en cada caso	*con 2 más por alumno pagan 100.* *hay un desfase de 100.* *aportando 6.2 y 8.2 la diferencia es 100.* *lo que aumenta la colecta.*

Tabla 3.20.- Diccionario LANA Y ALGODÓN

n , diccionario teórico	**n**, diccionario de la resolución
metros de tela	
precio tela	precio
precio metros de lana	
precio metros de algodón	
diferencia precio por metro	la diferencia en euros del precio por metro. cada metro vendemos de algodón aumentamos el precio
precio si todo fuese lana	si fuesen todos de lana, en total 24
precio si todo fuese algodón	si toda la tela fuese algodón , el valor 48
exceso en cada caso	el valor real 32, la diferencia 16
Otros	precio pack lana algodón

Tabla 3.21.-RUBLOS

n , diccionario teórico	**n**, diccionario de la resolución
precio libros	precio libros
nº de billetes de 3 rublos	billetes de 3
nº de billetes de 5 rublos	billetes de 5
diferencia de valor de los billetes	con cada billete de 5 entregamos 2 euros más que con uno de 3
pagado con exceso billetes de 3	con la totalidad de los billetes de 5 tendré que pagar 24 rublos más que con esos de 3. tendremos que pagar los 8 billetes más de 3, 24 rublos

Los razonamientos que subyacen en las soluciones de los problemas, que figuran en el Cuadro 3.7 y cuyos diccionarios figuran en los Tablas 3.15 a 3.21, en general apelaron a los significados de las cantidades y relaciones introducidas. Dichas soluciones pueden reconstruirse como sigue:

-en el problema CHOCOLATES Y CARAMELOS se introdujo la cantidad "exceso de caramelos", bajo una de las denominaciones que aparecen en la tabla, y a partir de ahí, se concibió el número de alumnos como el cociente de los "excesos de caramelos y caramelos por niño" – *la diferencia entre 3*- o bien se concibió el "exceso de caramelos" en – *paquetes de 3, agrupados de 3 en 3*- y el número de paquetes o grupos se identificó con el número de alumnos.

-en el problema ENCONTRAR se reencontró la Regla de las dos cosas que se encuentran, en la solución de este problema, en una de las alternativas, se consideró la cantidad correspondiente a *–lo que recorren los en una hora ambos trenes*- para a partir de ahí determinar el tiempo invertido en encontrase y la distancia a una de las ciudades cuando se encuentran; y, en otra alternativa, se consideró la "velocidad del tren ficticio" *-un tren quieto, el otro a velocidad suma de los dos*- para a partir de ahí proseguir del mismo modo para hallar el resultado.

-en el problema COLECTA se consideraron las diferencias "entre lo pagado en cada caso y lo pagado por cada uno en cada caso" – *hay un desfase de 100, lo que aumenta la colecta,.. y poniendo 2 más, si contribuyesen con la diferencia de los 2,..*- y se determinó el número de alumnos como el cociente de éstas diferencias. Lo que no se puede afirmar es si ésta determinación se hace apelando al conocimiento y uso de las propiedades de la proporcionalidad, como puede ser el caso del estudiante que suele escribir en sus resoluciones "*diferencia de..* ", "*diferencia de..*" y que incluso utilizó este cociente de diferencias en el problema DINERO, ver anexo **A3.5,** o bien que la consideración de las diferencias permite que el problema sea reformulado de modo análogo a como se hace explícitamente en la resolución que aparece en la fig. 3.7

"*Si cada alumno pone 2 euros más se recolectan 100 euros más*"

problema en el cual la determinación del número de alumnos mediante el cociente de los "*100 euros mas*" y "*2 euros más*" no es sino la expresión del uso mediante esa acción de un teorema.

-en el problema RUBLOS se consideraron las cantidades correspondientes a lo "pagado con el exceso de billetes de 3" *–tendremos que pagar los 8 billetes de más de 3, 24 rublos,..*- y la "diferencia del valor de los billetes" – *con cada billete de 5 entregamos 2 euros más que con un billete de 3*- y se argumentó que lo pagado con "el exceso de billetes de 3" debía ser enjugado con la totalidad de los billetes de 5 – *con la totalidad de los billetes de 5 tendré que pagar 24 rublos más que con esos de 3*- lo que permitió utilizar los *-2 euros más entregados con cada billete de 5*- para obtener el número de billetes de 5 utilizados y a partir de ahí el precio de los libros.

- en el problema BOLETOS se consideraron las cantidades "recaudado mujeres sin pareja" – *precio de los 100 boletos que se vendieron de más, diferencia recaudación(a favor de mujeres)*- , "recaudado parejas" *–lo que costaban los que se vendieron (mitad uno, mitad otro), el precio de boletos de dama más un número de caballeros (el* *mismo)-* "el precio por pareja" – *precio pack dama caballero-* y con éstas cantidades se determinó el "nº de parejas" *–pareja hombre mujer, coincide con hombres-*.La resolución de este problema muestra un estilo heurístico, en el sentido de que una de las incógnitas del problema "el número de boletos de hombres" se ha sustituido por otra "el número de boletos de parejas" cuyos valores coinciden. Hecho esto "el precio por pareja" es fácilmente determinable a partir de los datos y el problema transformado que se resuelve es más o menos este:

BOLETOS.- En una fiesta se vendieron boletos de dama que costaban 8 euros y de pareja que constaban 20 euros. Además de boletos de parejas se vendieron 100 boletos de dama. La recaudación fue de 3000 euros. ¿Cuántos hombres y mujeres fueron a la fiesta?

problema que posee un grafo abierto y encadenado, fig. 3.9, que es el que se utiliza en la resolución del problema.

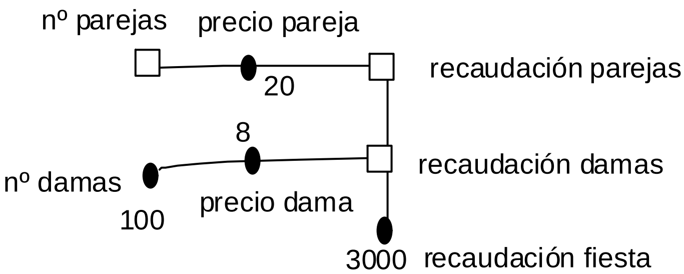
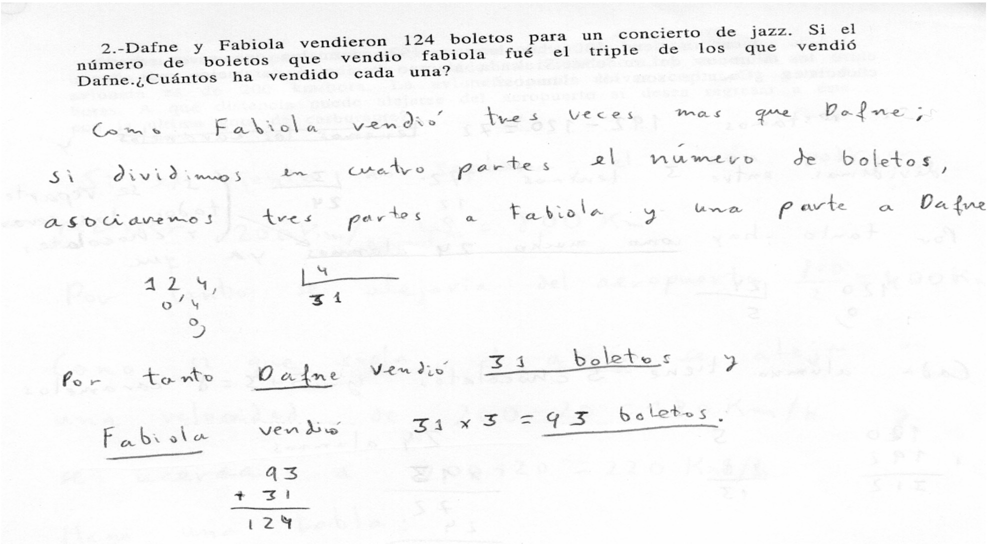


fig. 3.9

-en el problema LANA y ALGODÓN se consideraron dos cantidades "precio si todo fuese lana", "precio si todo fuese algodón ", *-si fuesen todos de lana, en total 24-*, *-si toda la tela fuese algodón, el valor 48-* que corresponden a la consideración de un caso limite, caso límite que se emplea para así obtener las diferencias, diferencia entre el precio de la tela en el caso límite y en el problema propuesto y diferencia en el precio del metro de lana y algodón, uno de cuyos precios no se considera en el caso límite y sí en el problema propuesto. El cociente de las diferencias conduce al resultado del problema. Mirada así la resolución de este problema, esta es de estilo puramente heurístico.

Las soluciones del problema DAFNE utilizaron el cálculo con "veces" o con "partes" como puede verse en la fig. 3.10

El problema ADRIAN no tiene respuesta numérica en el instrumento nº 2, hay que limitarse a decir que "Tania nunca tuvo el doble de la edad de Adrián" y proporcionar el argumento que permite tal respuesta. Los estudiantes que usaron el modo de resolver aritmético, partieron del hecho de que la diferencia de edades se mantiene constante y determinaron la parte que esta diferencia corresponde al todo constituido por sus edades sumadas, ver fig.3.11. A partir de ahí determinaron el momento en que la relación entre las edades era el doble.



2.-Dafne y Fabiola vendieron 124 boletos para un concierto de jazz. Si el número de boletos que vendio fabiola fué el triple de los que vendió Dafne.¿Cuántos ha vendido cada una?

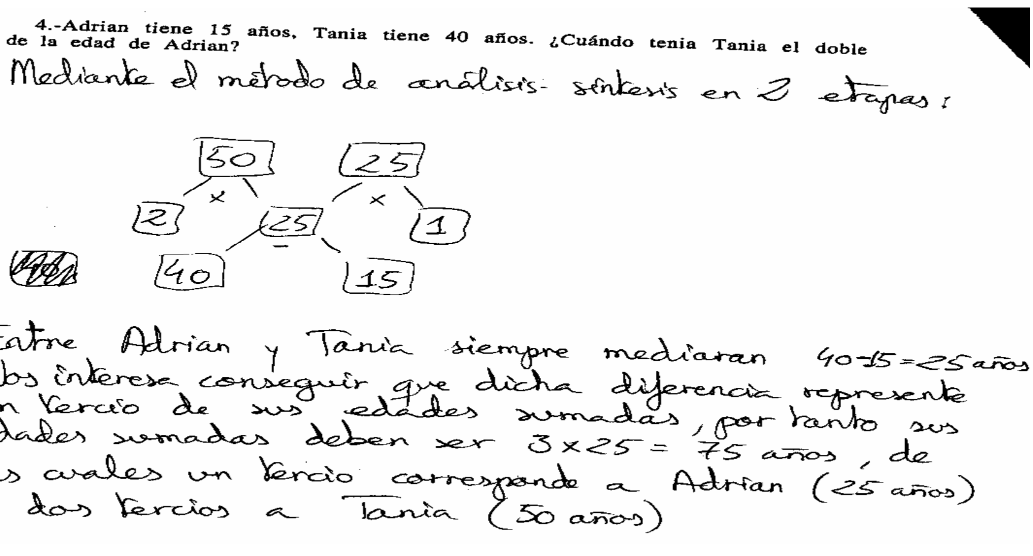
Como Fabiola vendió tres veces mas que Dafne; si dividimos en cuatro partes el número de boletos, asociaremos tres partes a Fabiola y una parte a Dafne

124 | 4
04 | 31
0

Por tanto Dafne vendió 31 boletos y Fabiola vendió 31 x 3 = 93 boletos.

  93
+ 31
 124

Fig.3.10.--resolución del problema DAFNE



4.-Adrian tiene 15 años. Tania tiene 40 años. ¿Cuándo tenia Tania el doble de la edad de Adrian?

Mediante el método de análisis- síntesis en 2 etapas:

Entre Adrian y Tania siempre mediaran 40-15=25 años
Nos interesa conseguir que dicha diferencia represente un tercio de sus edades sumadas, por tanto sus edades sumadas deben ser 3 x 25 = 75 años, de las cuales un tercio corresponde a Adrian (25 años) y dos tercios a Tania (50 años)

fig. 3.11.-Resolución del problema ADRIAN.

3.6.5.2.1.- El caso del problema AVIONETA

De los 11 estudiantes que utilizaron el modo de resolver aritmético sólo 2 de ellos encontraron una solución, los 9 restantes usaron razonamientos erróneos de los tipos mostrados en la fig. 3.14. En estas resoluciones: bien tras "estudiar" el efecto viento 180 km/h a la ida, 220 km/h a la vuelta, decidieron que -*lo que perdemos en la ida lo ganamos en la vuelta y por tanto nos quedamos igua*l- que les llevo a decir que la avioneta podría llegar a 200 ·2 = 400 Km.; bien tuvieron en cuenta que la avioneta iba contra el viento 180 Km/h, y con el carburante (4h) podía recorrer 4 ·180 = 720 Km. con el probable olvido de la consideración de la velocidad a la vuelta; o bien meramente argumentando como en el caso de la figura 3.14 que el trayecto es el línea recta, de ida y vuelta concluyen que recorre la mitad a la ida y la mitad a la vuelta, luego la avioneta se aleja 720/2= 360. Estas dos respuestas 360 km y 400 km fueron las aportadas por los 9 estudiantes que dieron una respuesta incorrecta para este problema.

Los dos estudiantes que encontraron una solución al problema AVIONETA no lo hicieron introduciendo la cantidad "el tiempo empleado en recorrer un kilómetro de ida y otro de vuelta" como lo hace la solución mostrada en el anexo **A3.4,** sino que lo hicieron apelando a una de las leyes del movimiento uniforme, "si los espacios recorridos son iguales las velocidades y los tiempos empleados en recorrerlos son inversamente proporcionales" y razonando a partir de ella.

En la segunda de las soluciones de la fig.3.13, se empieza -*Como la avioneta recorre la misma distancia a la ida y a la vuelt*a- lo que viene a indicar que se está en el caso que puede aplicarse dicha ley. En la primera, tal indicación no esta explícita, sino que viene de suyo al resolver - *el problema planteado en paralelo al problema "ideal" con viento nulo*-. El uso de la relación de proporcionalidad inversa entre tiempos y velocidades es diferente en uno y otro estudiante.

Así el segundo utiliza directamente la razón de velocidades para obtener la razón de tiempos, -*Por hora tendremos que la razón de tiempo que necesita 220 / 180 = 11 /9* -, y es ahora cuando utiliza el hecho, que la proporcionalidad es inversa, -*11 el que va a 180 km/h , 9 el que va a 220 km/h*-. A partir de ahí obtiene las proporciones de tiempo del total empleadas a la ida y a la vuelta -*luego en proporción a la ida se necesita 11/20 del tiempo y a la vuelta 9/20*- , lo que utiliza para saber el total de 4 horas obtener las 2,2 horas a la ida y 1,8 horas a la vuelta. Por lo tanto se podrá alejar del aeropuerto 396 km.

Pos su parte, el primero utiliza la proporcionalidad inversa de velocidades y tiempos utilizando el porcentaje de pérdida o ganancia de velocidad en la ida y en la vuelta sobre el caso ideal, así calcula en un 10% la pérdida de velocidad a la ida y la ganancia de velocidad a la vuelta, y procede a atribuir inversamente una ganancia de un 10% al tiempo de ida y una pérdida del 10% al tiempo de vuelta. -*Luego al tener viento perdemos un 10% de velocidad en la ida y ganamos un 10% de velocidad en la vuelta. El mismo porcentaje de perdida o ganancia se dará respecto al tiempo de vuelta*- A partir de ahí los cálculos son simples el tiempo de ida es 2horas +2/10 horas y el tiempo de vuelta 2horas – 2/10 horas. Y en definitiva podemos alejarnos 396 km.

10.-Una avioneta parte del aeropuerto en contra de la dirección del viento un dia en que éste sopla a la velocidad de 20km/hora.La velocidad de la avioneta es de 200 km/hora. La avioneta puede llevar carburante para 4 horas. A qué distancia puede alejarse del aeropuerto si desea regresar a éste con la ultima gota de carburante?

Resolvemos el problema planteando en paralelo el problema "ideal" con viento nulo:

~~CON VIENTO 200 Km/h 20~~

CON VIENTO DE 20 Kms/h

IDA : $\xrightarrow{}$ 200 − 20 = 180 Kms/h

VUELTA : $\xleftarrow{}$ 200 + 20 = 220 Kms/h

SIN VIENTO

IDA : 200 Kms/h

VUELTA : 200 Kms/h

Luego al tener viento perdemos un 10 % de velocidad en la IDA y ganamos un 10 % de velocidad a la vuelta. El mismo porcentaje de pérdida o ganancia se dará respecto al tiempo de vuelo, es decir

CON VIENTO DE 20 Km/h : (2 horas = 120 minutos)

IDA : 2 horas + $\frac{2 \text{ horas}}{10}$ = 2 horas 12 minuto

VUELTA : 2 horas − $\frac{2 \text{ horas}}{10}$ = 1 hora 48 minutos

SIN VIENTO : IDA : 2 horas ; VUELTA : 2 horas

En definitiva podemos alejarnos durante 2 horas y 12 minuto a 180 Kms/hora, es decir 2'2 horas × 180 Kms/h = 396 Kms

10.-Una avioneta parte del aeropuerto en contra de la dirección del viento un dia en que éste sopla a la velocidad de 20km/hora.La velocidad de la avioneta es de 200 km/hora. La avioneta puede llevar carburante para 4 horas. A qué distancia puede alejarse del aeropuerto si desea regresar a éste con la ultima gota de carburante?

Como la avioneta recorre la misma distancia a la ida y a la vuelta.

Por tanto tendremos que la razón de tiempo que recorre a $\frac{220}{180} = \frac{11}{9}$ ← el que va a 180 km/h ← el que va a 220 km/h.

luego en proporción a la ida se recorre $\frac{11}{20}$ del tiempo y a la vuelta $\frac{9}{20}$.

$\frac{11}{20} \times 4 = \frac{44\cancel{0}}{2\cancel{0}} = 2'2$ hora = 2h 12 min

$\frac{9}{20} \times 4 = \frac{36}{20} = 1h 48$ min.

Luego habrá recorrido a la ida:

$2'2 \times 180 = 396$ km.

⇒ Por lo tanto se podrá alejar del aeropuerto 396 km

Fig.3.13- Resoluciones del problema AVIONETA que contienen una solución.

10.-Una avioneta parte del aeropuerto en contra de la dirección del viento un dia en que éste sopla a la velocidad de 20km/hora.La velocidad de la avioneta es de 200 km/hora. La avioneta puede llevar carburante para 4 horas. A qué distancia puede alejarse del aeropuerto si desea regresar a éste con la ultima gota de carburante?

Aquí hay que estudiar el comportamiento del viento, aunque ahora veremos que da igual.
Cuando partimos del aeropuerto el avión iría a 200 km/h pero como tenemos el aire en contra iríamos a 180 km/h, sin embargo a la vuelta como el aire lo llevamos a favor en lugar de ir a 200 km/h iríamos a 220, luego lo q perdemos en la ida lo ganamos en la vuelta y por lo tanto nos quedamos igual.
Como sólo tenemos carburante para 4 h dos o algo para ir y un poco menos de 2 para volver
→ 200 × 2 = 400 km
luego tenemos para ir a 400 km y volver.

10.-Una avioneta parte del aeropuerto en contra de la dirección del viento un dia en que éste sopla a la velocidad de 20km/hora.La velocidad de la avioneta es de 200 km/hora. La avioneta puede llevar carburante para 4 horas. A qué distancia puede alejarse del aeropuerto si desea regresar a éste con la ultima gota de carburante?

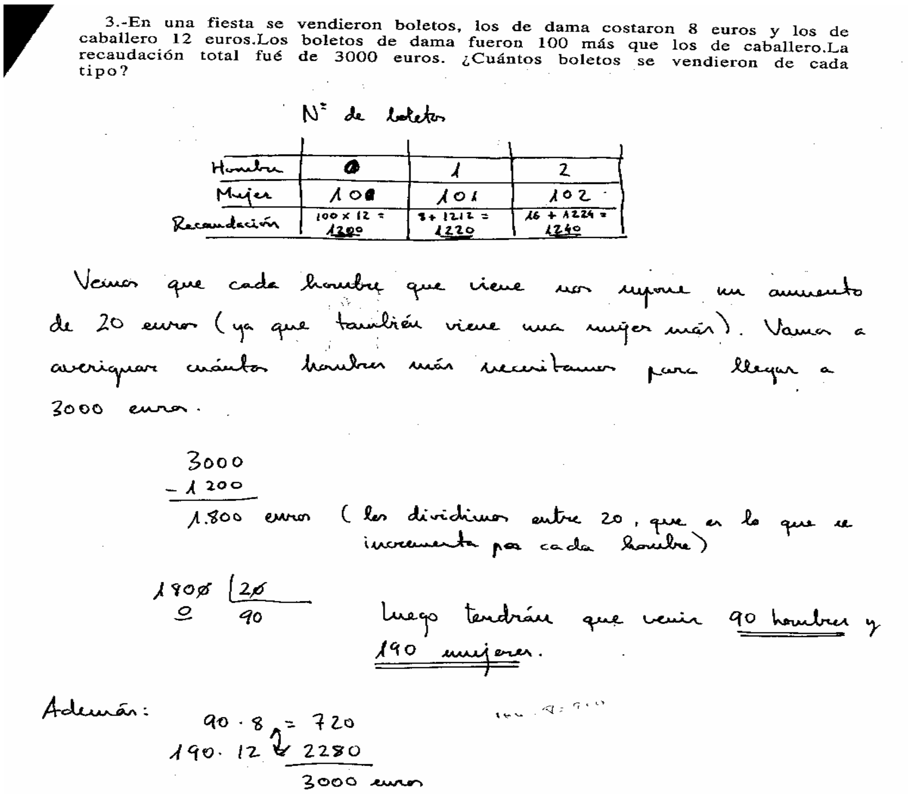
Como va en contra del viento, no lleva 200 Km/h, sino 200 − 20 = 180Km/h y como lleva carburante para 4h ⟹ puedo recorrer 4·180 = 720 Km.
Puesto que es ida y vuelta, suponiendo que el recorrido es en línea recta ← IDA → VUELTA recorrerá la mitad de Km a la ida y la otra mitad a la vuelta. $\frac{720}{2}$ = 360, es decir, sólo puede alejarse del aeropuerto, 360 Km

fig.3.14. -Resoluciones del problema AVIONETA con razonamientos erróneos.

3.6.5.3.- Soluciones mediante tanteo

Las resoluciones que usaron el tanteo contenían la respuesta a la pregunta del problema.

De modo general los sucesivos tanteos se hicieron de modo sistemático, además 2 de los estudiantes en algunos problemas extrajeron consecuencias de los ensayos, para futuros tanteos o conjeturaron pautas de comportamientos para obtener las respuestas mediante operaciones aritméticas con los datos, esto último, por ejemplo, se muestra en la resolución de la fig. 3.12.


3.-En una fiesta se vendieron boletos, los de dama costaron 8 euros y los de caballero 12 euros.Los boletos de dama fueron 100 más que los de caballero.La recaudación total fué de 3000 euros. ¿Cuántos boletos se vendieron de cada tipo?

Nº de boletos

Hombre	0	1	2
Mujer	100	101	102
Recaudación	100 x 12 = 1200	8+ 1212 = 1220	16 + 1224 = 1240

Vemos que cada hombre que viene nos supone un aumento de 20 euros (ya que también viene una mujer más). Vamos a averiguar cuántos hombres más necesitamos para llegar a 3000 euros.

3000
− 1200
1.800 euros (los dividimos entre 20, que es lo que se incrementa por cada hombre)

1800 | 20
0 | 90

Luego tendrán que venir 90 hombres y 190 mujeres.

Además: 90 · 8 = 720
190 · 12 = 2280
3000 euros

fig.3.12..- Resolución del problema BOLETOS.

En la tabla 3.22 se muestra para cada problema las cantidades con que se han ensayado los valores de tanteo y los recipientes de tanteo, esto es, las expresiones algebraicas evaluadas. Los valores que se han comparado para dar por correcto o incorrecto el tanteo, aparecen en el Tabla 3.22 en forma de igualdad entre las “expresiones algebraicas” utilizadas para obtener dichos valores.

Si representamos en el grafo correspondiente a una lectura algebraica de cada uno de estos problemas, el valor de tanteo -mediante una letra-, las expresiones algebraicas evaluadas, indicando la arista o relación que permite producirlas, y la igualdad utilizada para juzgar la corrección del tanteo indicando la cantidad a la que se atribuyen las dos expresiones algebraicas, observaremos que en el fondo del modo de resolver mediante tanteo subyacen, como sabíamos por otro lado, ciertas características del Modelo

Cartesiano[20] o el modo de resolver algebraico. Esto es lo que se hace en los Cuadros 3.8 y 3.9

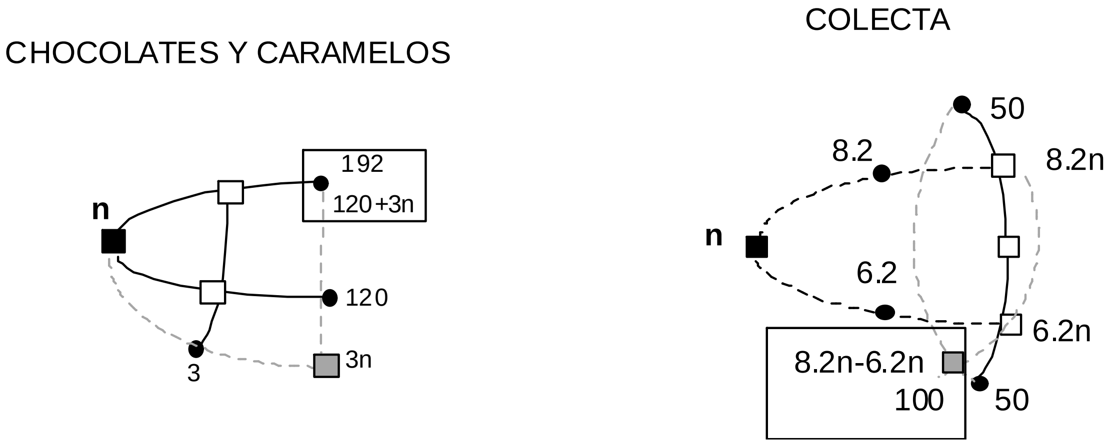
Lo que hay que resaltar en el uso del método de tanteo, entendiendo que hay en él un uso subyacente de parte del modo de resolver algebraico, por lo que aquí se estudia, es que <u>las resoluciones mediante tanteo no necesitan introducir ninguna relación o cantidad que no conste en una lectura algebraica del problema</u>. Que de hecho los estudiantes no suelen hacerlo se demuestra porque las resoluciones analizadas únicamente utilizan el grafo correspondiente a la lectura algebraica que nos ha llevado a afirmar que tal problema era un PLA como se muestra en el Cuadros 3.8 .Y es únicamente en el caso de los problemas CHOCOLATES Y CARAMELOS y COLECTA donde se introducen cantidades que no estaban en esta lectura -ver cuadro 3.9- .

problema	Valores tanteo	Expresiones Algebraicas Evaluadas	Igualdades para juzgar correccion valores de tanteo.
CHO y CAR	n “número alumnos”	120 +3n	120+3n =192
	n “número alumnos”	120/n 120/n + 3 (120/n + 3)n	(120/n + 3)n - 192 = 0
	c nº de caramelos por niño	c+3 120/c 192/(c+3)	120/c = 192/(c+3)
DAFNE	d “nº boletos Dafne”	3d d+3d	d+3d = 124
BOLETOS	h “nºcaballeros”	100+h h·12 (100+h)8	h·12 + (100+h)8 =3000
	h,m “pagado hombres” “pagado damas”	h/12 m/8 h +m m/8 – h/12	h+m =3000 m/8 – h/12 = 100
ADRIAN	t “nºaños antes”	15-t 40-t 2(15-t)	2(15-t) = 40-t
COLECTA	n “número alumnos”	6.2n 8.2n 8.2n -6.2n	8.2n -6.2n = 100
RUBLOS	b “nº billetes de 5”	b+8 b·5 (b+8)3	b·5 = (b+8)3
ENCONTRAR	h “nº horas”	100h 120h 120h +100h	120h +100h 0 440

[20] Como son la construcción de “expresiones algebraicas” y la expresión de una cantidad de dos modos diferentes. En general en el tanteo uno de los modos es en forma de dato. Ver Tabla 3.22.

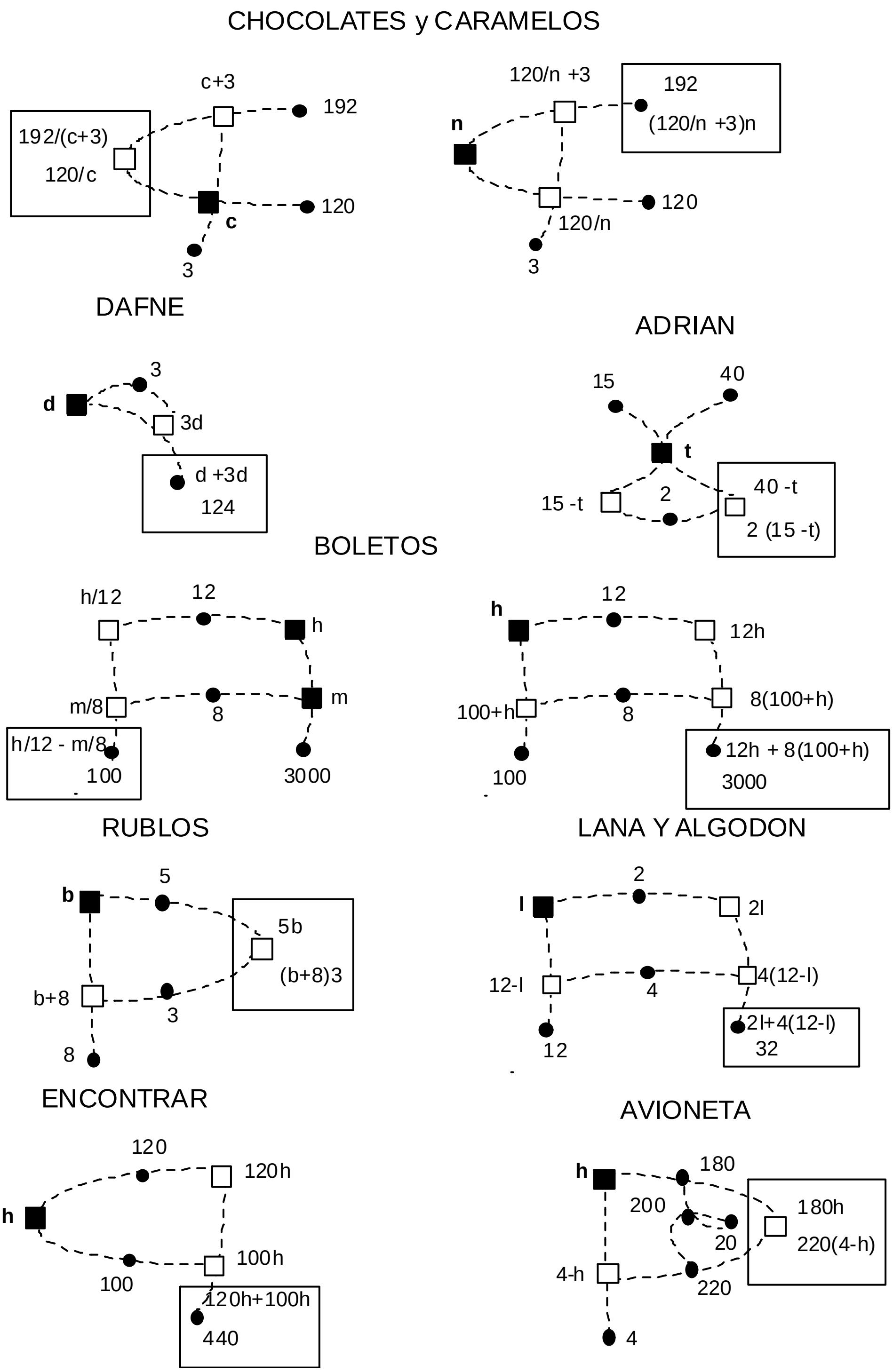
problema	Valores tanteo	Expresiones Algebraicas Evaluadas	Igualdades para juzgar correccion valores de tanteo.
LANA Y ALG.	l , a “nº metros lana” “nºmetros algodón”	12- l 2l 4(12 –l) 2l + 4(12-l)	2l + 4(12-l) = 32
AVIONETA	h “nº horas ida”	4-h 180h 220(4-h)	180h = 220(4-h)

Tabla 3.22- Recipientes de tanteo en las resoluciones del instrumento nº 2.



Cuadro3.8 Recipientes de tanteo.

En negrita el valor y la cantidad usada en el tanteo.
A trazos las aristas requeridas para construir las “expresiones algebraicas” evaluadas para las cantidades que se indican.
En gris, las cantidades y aristas (relaciones) introducidas.
Recuadro, la igualdad para juzgar la corrección de los valores de tanteo.



Cuadro3.9 Recipientes de tanteo. En negrita el valor y la cantidad usada en el tanteo.
A trazos las aristas requeridas para construir las “expresiones algebraicas” evaluadas para las cantidades que se indican.
Recuadro, la igualdad para juzgar la corrección de los valores de tanteo.

3.6.5.4.- El caso del problema DINERO

El problema DINERO es un problema que es isomorfo al problema MECANOGRAFA. El problema MECANOGRAFA lo hemos utilizado en repetidas ocasiones con la intención de encontrar un resolutor que presentase una solución con el modo de resolver aritmético, cosa que se hace también en el estudio que se presenta en **3.7**.

En el caso que nos ocupa, la versión del problema DINERO que se presenta a los estudiantes carece de respuesta numérica, esto es, la situación que se describe es imposible que ocurra con los datos que se proporcionan. El interés del investigador se centraba en observar las reacciones y modo de resolver de los estudiantes ante una versión del problema en la cual es relativamente fácil caer en la cuenta que no tiene solución, pero el estudiante está privado de recurrir a las ecuaciones y argumentar sobre la imposibilidad de la solución sirviéndose de la discusión de la solución(es) de la ecuación o el sistema de ecuaciones a que puede traducirse el problema.

Lo que se encontró –ver resoluciones en anexo **A3.5-** con el grupo de 21 estudiantes mencionados fue lo siguiente:

- 5 estudiantes dejaron el problema en blanco.

- 8 estudiantes usaron ecuaciones, a pesar de la prohibición, y tras resolver las ecuaciones declararon, como el estudiante cuya resolución se muestra en la fig.3.17 dijeron que no tiene solución, o dijeron que es absurdo, es imposible, etc.

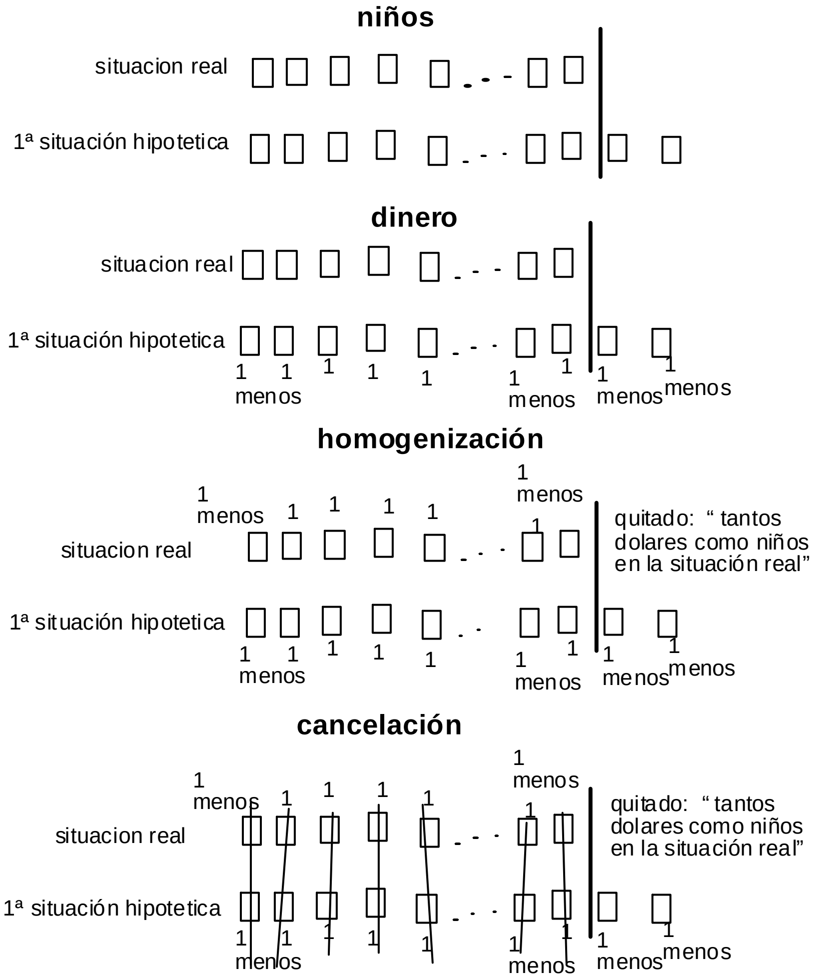
-2 estudiantes mediante tanteo intentaron encontrar la respuesta y abandonaron tras algunos ensayos.

- 1 estudiante presentó una resolución mediante el modo de resolver aritmético –ver fig.3.16-, en la que usó el cociente de diferencias: la diferencia de niños y la diferencia de dinero para obtener el número de niños. En mi opinión este estudiante era consciente de, que tal resolución contenía un error dado, que en el cociente hace constar las unidades de las cantidades que divide 4 niños/ 2 euros/ por niño. A pesar de ello, subraya el resultado <u>2 niños.</u>

- 5 estudiantes presentaron una resolución que en la tabla 3.9 hemos hecho constar como argumento, aunque a veces no era tal, declarando simplemente que faltaban datos, que era imposible, que la información era redundante. Dos de estos estudiantes, cuyas resoluciones constan en las fig. 3.16 y fig. 3.17, presentaron argumentos más elaborados, uno de ellos impecable.

El argumento de uno de estos estudiantes se muestra en la fig.3.16. El estudiante parte de suponer que hay 3 niños y procede a repartir el dinero en la situación real y en las dos situaciones hipotéticas. A partir de ahí compara por diferencia el dinero de las dos situaciones hipotéticas y observa que algo extraño le ocurre.*¿qué pasa con los D/3 +D/3 -1 restantes? ¿Quién se los queda?,…. de ahí su declaración No puedo resolverlo, me faltan datos o el problema es imposible?*

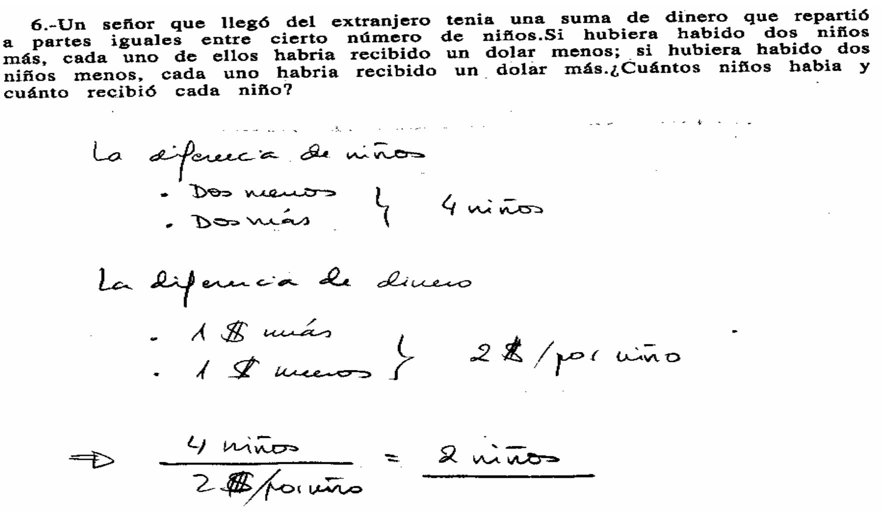
El argumento del estudiante que se muestra en la fig. 3.17 es brillante e ingenioso. Dicho estudiante se las arregla -buscando homogeneizar situaciones y cancelando- para expresar de dos maneras diferentes una determinada cantidad de dinero en función de los niños en una y otra situación hipotética, pero la cantidad de dinero que expresa en función de los niños no es el dinero que el señor repartió sino el que resta después de haber cancelado tras homogeneizar. El estudiante presenta una primera comparación de la realidad con el primer caso hipotético – que puede leerse también en la fig. 3.17- En esta comparación encuentra que "*tantos dólares como niños hay*" equivale a la cantidad de dinero que tienen "*el dinero de 2 niños cada uno con 1 dólar menos*" La comparación de la situación real con el segundo caso hipotético que realiza de forma análoga le permite concluir que "*tantos dólares como niños hay*" equivale "*el dinero de 2 niños cada uno con 1 dólar más*". A partir de ahí concluye que, *el problema no tiene solución alguna.*



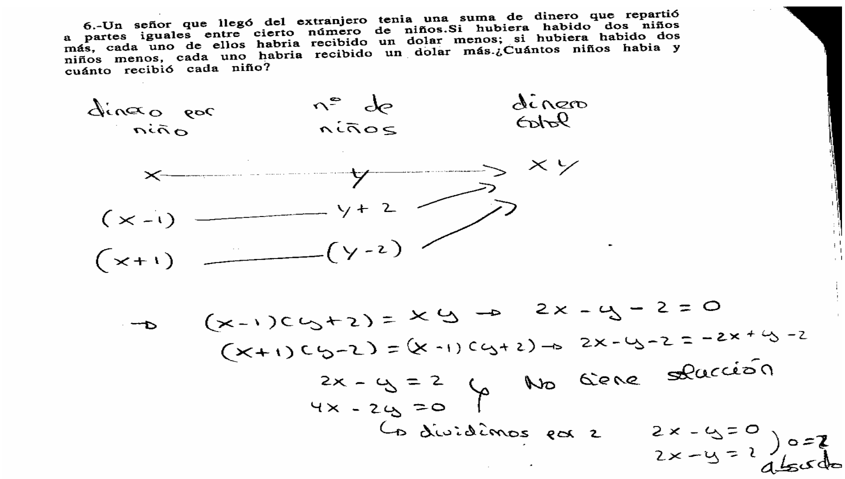
dinero restante situación real : Tantos dolares como niños situación real

dinero restante en situación hipotetica: el dinero de 2 niños cada uno con un dolar menos

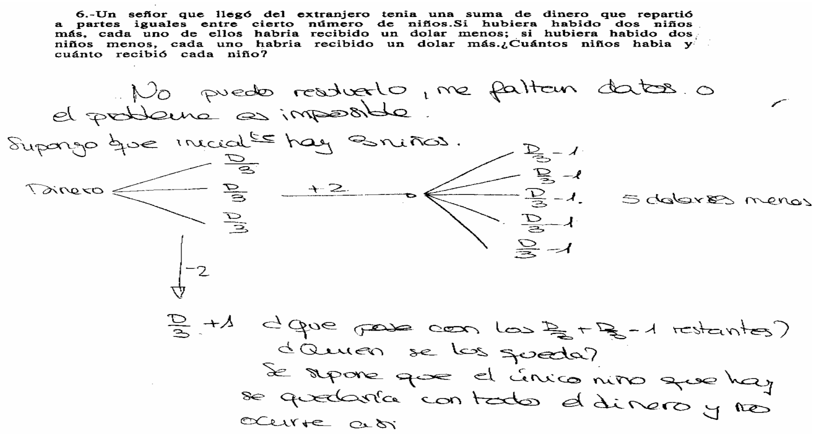
fig. 3.15.- Argumento problema DINERO. Comparación de situaciones.



6.-Un señor que llegó del extranjero tenia una suma de dinero que repartió a partes iguales entre cierto número de niños.Si hubiera habido dos niños más, cada uno de ellos habria recibido un dolar menos; si hubiera habido dos niños menos, cada uno habria recibido un dolar más.¿Cuántos niños habia y cuánto recibió cada niño?



6.-Un señor que llegó del extranjero tenia una suma de dinero que repartió a partes iguales entre cierto número de niños.Si hubiera habido dos niños más, cada uno de ellos habria recibido un dolar menos; si hubiera habido dos niños menos, cada uno habria recibido un dolar más.¿Cuántos niños habia y cuánto recibió cada niño?



6.-Un señor que llegó del extranjero tenia una suma de dinero que repartió a partes iguales entre cierto número de niños.Si hubiera habido dos niños más, cada uno de ellos habria recibido un dolar menos; si hubiera habido dos niños menos, cada uno habria recibido un dolar más.¿Cuántos niños habia y cuánto recibió cada niño?

fig.3.16.- Resoluciones del problema DINERO. Aritmética. Ecuaciones. Argumento

6.-Un señor que llegó del extranjero tenia una suma de dinero que repartió a partes iguales entre cierto número de niños.Si hubiera habido dos niños más, cada uno de ellos habria recibido un dolar menos; si hubiera habido dos niños menos, cada uno habria recibido un dolar más.¿Cuántos niños habia y cuánto recibió cada niño?

- Comparemos la realidad con el 1^er caso hipotético (2 niños más):

En ambas situaciones el dinero total es el mismo. Buscando homogeneizar ambas situaciones, dejemos momentáneamente a cada niño en el caso real con 1 dolar menos; así todos los niños de ambas situaciones tendran cada uno el mismo dinero. Así podemos ir "cancelando" el dinero de un niño del caso real con el dinero de un niño del 1^er caso hipotético. Seguimos este proceso hasta que ya no podemos "cancelar" más. Puesto que el dinero total en ambas situaciones es el mismo, después de esta cancelación en paralelo nos restará el mismo dinero en ambos casos, a saber: en el caso real quedan tantos dolares como niños hay previo cancelaciones; en el 1^er caso hipotético queda el dinero de 2 niños, cada uno con 1 dolar menos de lo tenían en el caso real.

- Comparemos la realidad con el 2º caso hipotético (2 niños menos):

A efectos prácticos añadamos a las cantidades totales de dinero de ambos casos (que coinciden) tantos dólares como niños hay en el caso real. Seguiremos teniendo totales equivalentes en ambas situaciones. Los dólares añadidos en el caso real los repartimos a partes iguales entre los niños (1 dolar por cabeza). De este modo, todos los niños, tanto en una situación como en otra, tendran cada uno el mismo dinero. Procedamos a "cancelar" de forma análoga a como lo hemos indicado más arriba. Tras finalizar la cancelación seguiremos teniendo la misma cantidad total de dinero en ambos casos, a saber: en el caso real resta el dinero de 2 niños, cada uno con 1 dolar más de lo que tenían al principio en el caso real; en el 2º caso hipotético quedan tantos dolares como niños hay en el caso real, previo cancelaciones.

- Conclusión

Al cotejar los 2 análisis que hemos hecho, observamos que ambos subrayados en verde deberían representar la misma cantidad de dinero, lo cual es imposible. Por tanto, concluimos ~~que independientemente de cual sea la suma de dinero y el número total de niños, este problema NO tiene solución.~~ que el problema no tiene solución alguna.

fig.3.17.- Resolución del problema DINERO.

3.6.5.5.- Comparación de las resoluciones y de los modos de resolver de los estudiantes de licenciatura y de secundaria.

Modos de resolver.

Las tablas 3.23 muestran el % de los estudiantes de uno y otro grupo que utilizaron los modos de resolver aritmético y mediante tanteo. Los problemas que figuran en las tablas son los comunes a los instrumentos utilizados con ambos grupos, donde los problemas ALCANZAR y GALINAS y CONEJOS, por las razones expresadas en **3.6.2.1,** fueron sustituidos por RUBLOS y LANA y ALGODÓN para los estudiantes de 4º de Licenciatura, problemas isomorfos a los anteriores. En la tabla correspondiente al modo de resolver mediante tanteo para los estudiantes de secundaria se han sumado los correspondientes a Tanteo y Aritmética, tanteo de la tabla 3.23. Además en las tablas 3.23 los problemas se presentan ordenados según el porcentaje de uso del modo de resolver aritmético de los estudiantes de Licenciatura.

Aritmético

Problema	Licen.	Secu.
DAFNE	62	71
COLECTA	62	52
RUBLOS*	52	55
CHO.Y CAR.	48	74
BOLETOS	48	43
ADRIAN	19	19
LANA Y ALG**.	19	10
DINERO	5	0

Mediante tanteo

Problema	Licen.	Secu.
DAFNE	14	19
COLECTA	19	10
RUBLOS*	24	14
CHO.Y CAR.	33	8
BOLETOS	29	22
ADRIAN	71	19
LANA Y ALG*.*	71	57
DINERO	10	8

Tablas 3.23.-Modos de resolver aritmético y mediante tanteo.(%). *Problema ALCANZAR en los estudiantes de secundaria. **Problema GALLINAS y CONEJOS en los estudiantes de secundaria.

Previo a cualquier comentario sobre las tablas 3.23 debe decirse que mientras en el caso de los estudiantes de Licenciatura casi no hubo resoluciones en blanco con la excepción del problema DINERO[21], en el caso de los estudiantes de Secundaria este porcentaje fue significativo en algunos problemas –ver tablas 3.1 y 3.3-. Por otro lado, mientras que según la metodología adoptada para clasificar los modos de resolver – ver **3.6.3.2.1** - en el caso de los estudiantes de Licenciatura no se necesitó una clase a la que denominar “Otros”, esto sí fue necesario al analizar las resoluciones de los estudiantes de Secundaria. A esta clase “Otros” pertenecen, por ejemplo, el 24% de las resoluciones de los problemas ADRIAN o GALLINAS y CONEJOS.

La tabla 3.23 que da cuenta del uso del modo de resolver aritmético muestra una ordenación de los problemas (según porcentajes de uso) casi coincidentes, con la excepción sobresaliente del problema CHOCOLATES y CARAMELOS. El hecho de que los estudiantes de Licenciatura hayan usado este modo en un menor porcentaje que

[21] En lo que sigue se omitirá cualquier comentario sobre el problema DINERO dada la escasez de resoluciones mediante dichos modos de resolver y la diferencia entre las versiones de este problema en los instrumentos nº 1 y 2.

los de secundaria (48% frente a 74%) en este problema es de difícil explicación[22]. La coincidencia de la ordenación indica que el orden de preferencia de uso del modo de resolver aritmético en los distintos problemas es el mismo en ambos grupos de estudiantes.

Además de las tablas 3.23 se desprende que los estudiantes de ambos grupos consideran más adecuado usar el modo de resolver aritmético en todos los problemas de los instrumentos (más de un 43% de los estudiantes de ambos grupos usaron dicho modo de resolver) excepto en los problemas ADRIAN, LANA y ALGODÓN (GALLINAS y CONEJOS).

Los porcentajes de resoluciones mediante tanteo de los estudiantes de Licenciatura son los complementarios aproximados a 80, el descarte del 20 de ecuaciones, mientras que los de secundaria no lo son debidos a la clase Otros y Blanco. Aun así las cosas, el problema GALLINAS y CONEJOS (LANA y ALGODÓN) fue en el que más resoluciones mediante tanteo se encontraron en ambos grupos. Sin embargo, en el problema ADRIAN mientras que un 71% de los estudiantes de Licenciatura usaron el tanteo solo lo hicieron un 19% de los estudiantes de Secundaria, la explicación de ello puede estar, en la clase ”Otros” que contiene un 57% de las soluciones de estos estudiantes y además con una eficiencia del 25%.

Si podemos decir que no hay discrepancias fundamentales en cuanto a los modos de resolver usados en los problemas por ambos grupos de estudiantes, no podemos decir lo mismo de la eficacia de su uso para encontrar una solución a los problemas como se muestra en las tablas 3.24 que dan cuenta de la eficiencias de los modos de resolver los distintos problemas de los dos grupos de estudiantes.

De la observación de las tablas 3.24 puede desprenderse que para los estudiantes de Licenciatura la elección de un modo de resolver es la garantía de una solución mediante su uso, o que usan la manera de resolver que les permite encontrar la solución,100% es la eficiencia de ambos modos de resolver y en todos los problemas con la sola excepción del problema BOLETOS (90% modo aritmético). Ello no ocurre para los estudiantes de Secundaria donde la eficiencia del modo de resolver – al menos aritmético- está más ligada a la complejidad del problema y el tanteo sólo muestra cierta eficiencia en algunos problemas, lo que puede estar ligado tanto a la carencia de las destrezas requeridas para la práctica del tanteo como a la dificultad de encontrar un

[22] La alternativa no algebraica, si se descarta el modo de resolver aritmético, es el tanteo, pero mientras que para los estudiantes de secundaria el tanteo es una “huida natural” o dicho de otra manera y con más precisión hay “una tendencia natural a usar valores numéricos para explorar los problemas” – Filloy, Rojano, Rubio(2001) pág.165. Proposición II. Para los estudiantes de Licenciatura, dada su concepción del modo de hacer matemático, el recurso al tanteo puede ser tomado por éstos como indicio de fracaso, la denominación popular del método “cuenta de la vieja” puede leerse en despectivo y el método sin la entidad matemática suficiente para que sea propio que lo use un estudiante de 4º de Licenciatura. En la asignatura que cursaban el profesor se ocupó de institucionalizar tal método como legítimo y propio no únicamente de las matemáticas escolares, para ello dió algunos ejemplos de su uso con problemas no triviales. Así, el rescoldo no fue pura ceniza y quizás por ello o pese a ello, y porque este problema era el primero de los que constaba en el instrumento nº 2, el primero que tenían que abordar con la carga de la prohibición. Un 33% de los estudiantes de Licenciatura usaron el tanteo en el problema CHOCOLATES y CARAMELOS frente a un 8% de los estudiantes de secundaria. Esto explicaría la divergencia fundamental entre las ordenaciones.

recipiente de tanteo adecuado, carencias y dificultades que no tienen los estudiantes de Licenciatura.

Aritmético

Problema	Licen.	Secu.
DAFNE	100	80
COLECTA	100	23
RUBLOS*	100	30
CHO.Y CAR.	100	39
BOLETOS	90	17
ADRIAN	100	25
LANA Y ALG**.	100	50
DINERO	0	0

Mediante tanteo

Problema	Licen.	Secu.
DAFNE	100	0
COLECTA	100	0
RUBLOS*	100	30
CHO.Y CAR.	100	0
BOLETOS	100	0
ADRIAN	100	50
LANA Y ALG*.*	100	67
DINERO	0	0

Tabla 3.24.-Eficiencia de los modos de resolver aritmético y mediante tanteo.(%). *Problema ALCANZAR en los estudiantes de secundaria. **Problema GALLINAS y CONEJOS en los estudiantes de secundaria.

Soluciones

Las soluciones obtenidas con el modo de resolver aritmético por uno y otro grupo de estudiantes figuran en los Cuadros 3.2 y 3.7

Comparando el Cuadro 3.7 con el Cuadro 3.2 observamos que las soluciones para los problemas COCOLATES Y CARAMELOS, BOLETOS y COLECTA son coincidentes, esto es, se expresan mediante grafos equivalentes. Las soluciones de los problemas RUBLOS y LANA y ALGODÓN mostradas mediante grafos, son también grafos equivalentes a las soluciones de los problemas ALCANZAR y GALLINAS Y CONEJOS del cuado 3.2. Los problemas ALCANZAR y GALLINAS Y CONEJOS son los problemas que en el instrumento nº 1 fueron sustituidos por los problemas RUBLOS y LANA y ALGODÓN en el instrumento nº 2 por el hecho que estos problemas poseen una lectura analítica isomorfa a la de aquellos. La única novedad estriba en la aparición de las dos soluciones del problema LANA y ALGODÓN en el caso de los estudiantes de Licenciatura.

Errores.

Las resoluciones de los estudiantes de Licenciatura no presentaban errores en estos problemas salvo el problema BOLETOS (dos estudiantes, atribuibles a despistes puntuales) mientras que las resoluciones de los estudiantes de Secundaria si contenían errores o estaban inacabadas, ver **3.6.4.2**

3.6.6.-Discusión

Los problemas cuyas resoluciones se han considerado aquí son problemas de lectura algebraica, PLA. Esta característica de los problemas que son objeto de estudio debe, ineludiblemente, tenerse en cuenta al considerar todo lo que se diga sobre ellas.

Si existiese alguna duda sobre si los estudiantes pueden obtener respuesta a problemas PLA mediante procedimientos aritméticos esta debe disiparse. Algunos estudiantes, de los considerados aquí, han conseguido obtener la respuesta a problemas PLA en el SMS de la aritmética, sea por el modo de resolver aritmético o mediante el tanteo. Pues bien, ahora, el asunto es para qué PLA, cómo y como cuántos estudiantes lo logran.

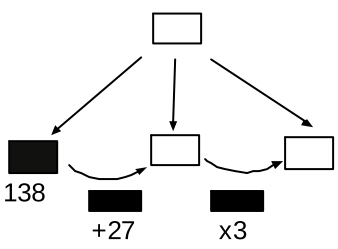
Hay evidencia en la literatura de investigación que los estudiantes resuelven “algebra words problems” en el SMS de la aritmética, sea usando estrategias informales o mediante ensayos o instanciación númerica (Malara,1999; Kutscher y Linchevski, 1997; Johanning, 2004) y que incluso, como han observado Stacey y MacGregor (1999) en las primeras etapas de la enseñanza de la resolución por álgebra, los estudiantes desertan del camino algebraico y regresan procedimientos basados en la resolución de problemas aritméticos. Sin embargo, no es habitual en las investigaciones una caracterización de los problemas que se utilizan, excepto mediante ejemplos, por lo cual es difícil comparar resultados y procedimientos.

En nuestro estudio se han caracterizado los problemas mediante su lectura algebraica. Bednarz (1996) y Fernandez (1997) son dos investigadores que también se preocupan de caracterizar los problemas que estudian.

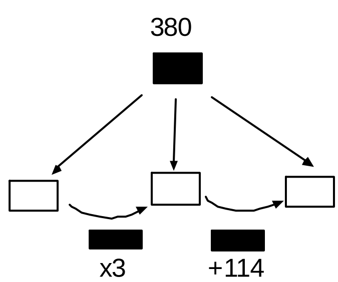
Bednarz (1996) describe mediante diagramas la estructura de los problemas que usa. Así los problemas 1 y 2 mediante los diagramas que los acompañan.

Problema A.-Steeve tiene 27 estampas más que Harold mientras Jack tiene 3 veces más que Steeve. Si Steeve tiene 138 estampas. ¿Cuántas estampas tienen los tres juntos.

Problema B.-380 estudiantes están inscritos en actividades deportivas. En baloncesto hay inscritos 3 veces más que en patinaje y en natación 114 más que en baloncesto.¿Cuántos estudiantes hay inscritos en cada una de estas actividades?

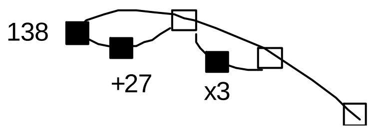


problema A

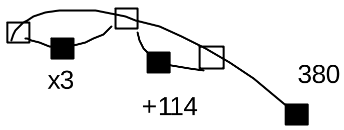


problema B

Bednarz hace notar que el diagrama correspondiente al problema A, números y operadores dejados de lado, está conectado y corresponde a los problemas generalmente presentados en aritmética, mientras que el diagrama correspondiente al problema B está desconectado y, compartiendo el mismo tipo de relaciones, corresponde a los problemas generalmente presentados en álgebra. Las lecturas correspondientes a los problemas A y B vendrían representadas por los grafos, ver figura bajo, que se corresponden con una lectura aritmética y una lectura algebraica. Las diferencias en el porcentaje de éxito 80-82% son para los problemas de tipo A y entre 2.78- 31.59% para los problemas de tipo B, rango cuya amplitud tiene que ver con la naturaleza de las relaciones y su composición, también ponen de manifiesto las características diferentes de estos problemas.



problema A



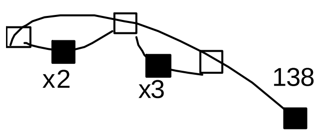
problema B

Bednarz y su grupo también han estudiado los razonamientos usados por los estudiantes e incluso han realizado un estudio en el que se examinaba el comportamiento de estudiantes que cursaban dos curriculos distintos Québec, México pero con un fuerte énfasis en le papel asignado a los problemas (Bednarz, 2003). Las maneras de resolver los problemas de tipo B descritas por Bednarz son: crear un estado de partida usando un número ficticio, tomar el estado conocido como punto de partida, repartiendo y generando, tomando en cuenta la estructura. Estas maneras se corresponden con las maneras aquí denominadas tanteo para la primera y diversos usos de la manera de resolver aritmético las tres últimas, las dos primeras de éstas suelen conducir a la determinación de cantidades arbitrarias y la última supone la composición adecuada de las relaciones involucradas.

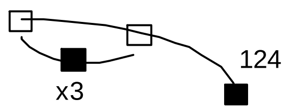
Los problemas que han sido aquí objeto de estudio son diferentes de los considerados por Bednarz, en primer lugar por la presencia en los problemas aquí estudiados de cantidades intensivas y en segundo lugar por el tipo de relaciones involucradas, los problemas que considera Bednarz sólo contienen relaciones de comparación aditiva o multiplicativa y de parte-todo. De los problemas de los instrumentos nº 1 y nº 2 únicamente el problema DAFNE es semejante a los problemas utilizados por Bednarz , concretamente al problema g) :

Problema g).-Tres niños estan jugando a las canicas. Entre los tres tienen 198 canicas. George tiene 2 veces más que Denis y Pierre tiene 3 veces más que George. ¿Cuántas canicas tiene cada uno?. (Bednarz , 1996), pág. 121.

DAFNE .-Dafne y Fabiola vendieron 124 boletos para un concierto de jazz. Si el número de boletos que vendió Fabiola fue el triple de los que vendió Dafne. ¿Cuántos ha vendido cada una?



problema g)



DAFNE

Bednarz (1996), pág. 127 describe la resolución de Eleonora, del problema g), así:

" escribe: 198 : 9 =122
(ella parece ver 1 parte, 2 partes y 6 partes).

Ella así obtiene la parte de Denis y entonces los números de los otros dos :

22x2 = 44 (Georges)
44x3 = 132 (Pierre) "

e incluye esta resolución entre aquellas que tienen en cuenta la estructura. Obsérvese que en la resolución se ha introducido la cantidad 9 como las partes en que están divididas las canicas. Nada hay de diferente en la solución del problema g) de la encontrada por nosotros para DAFNE : 1+3, 124:4 , y la indicación, en los alumnos de licenciatura a través del diccionario de cantidades de la resolución, que la composición se realiza con partes o con veces. El porcentaje de éxito que Bednarz proporciona para el problema g) es del 19,44%, op. cit, pág. 121. El porcentaje encontrado por nosotros en los estudiantes de secundaria para el problema Dafne es el 64%, todas ellas mediante el modo de resolver aritmético. El porcentaje de éxito es tres veces mayor que el del problema g), lo que puede explicarse por la menor complejidad relacional del problema DAFNE.

Fernández (1997) caracteriza los problemas que usa como algebraicos recurriendo al dictamen de expertos, sólo considera en su instrumento para el estudio de competencias problemas que los expertos han sentenciado como algebraicos, desconociendo explícitamente los criterios usados por los expertos que juzgaron los problemas y procediendo a determinar las lecturas algebraicas de los problemas usados por él – ver anexo **A3**. -encontramos, fig(gif) , bajo, que todos los problemas usados por él eran PLA, y algunos de ellos, isomorfos. Debe anotarse, como muestra la figura que algunos problemas considerados por Fernándes en su instrumento tienen una complejidad relacional elevada, que en ellos las cantidades consideradas son tanto extensivas como intensivas y que combinan relaciones aditivas y multiplicativas de maneras diversas.

Fernández no examina el SMS en que se expresa la resolución sino el sistema de representación utilizado, determinando que son cinco los sistemas de representación usados en las resoluciones: ensayo y error, parte-todo, gráfico, gráfico- simbólico y simbólico. De estos sistemas de representación los tres primeros podemos considerar que se corresponden a resoluciones que se expresan en el SMS de la aritmética, si bien el sistema de representación gráfico utiliza también dibujos como materia de expresión, debiendo de anotar que en los enunciados de los problemas del instrumento de Fernández una de las variables de la tarea es la presencia de dibujos en su enunciado. Pues bien, Fernández encontró que los estudiantes que él examinó, estudiantes de secundaria y universitarios que hacía 4 o 5 años que no recibían clases de matemáticas, usaron en sus resoluciones de los problemas de su instrumento el SMS de la arimética. En la tabla (srf), tomada de Fernández, se muestra, en los diferentes problemas de su instrumento, el uso del SMS de la aritmética y ello a pesar de que los estudiantes tenían a su disposición el SMS del álgebra. Y no sólo se usó el SMS de la aritmética en las resoluciones sino que los estudiantes fueron capaces de dar respuesta a los problemas mediante su uso. La tabla (rif), tomada de Fernández (1997), muestra el porcentaje de problemas bien resueltos en cada sistema de representación, la eficiencia en nuestros términos y la eficiencia de las resoluciones en el modo de resolver aritmético.

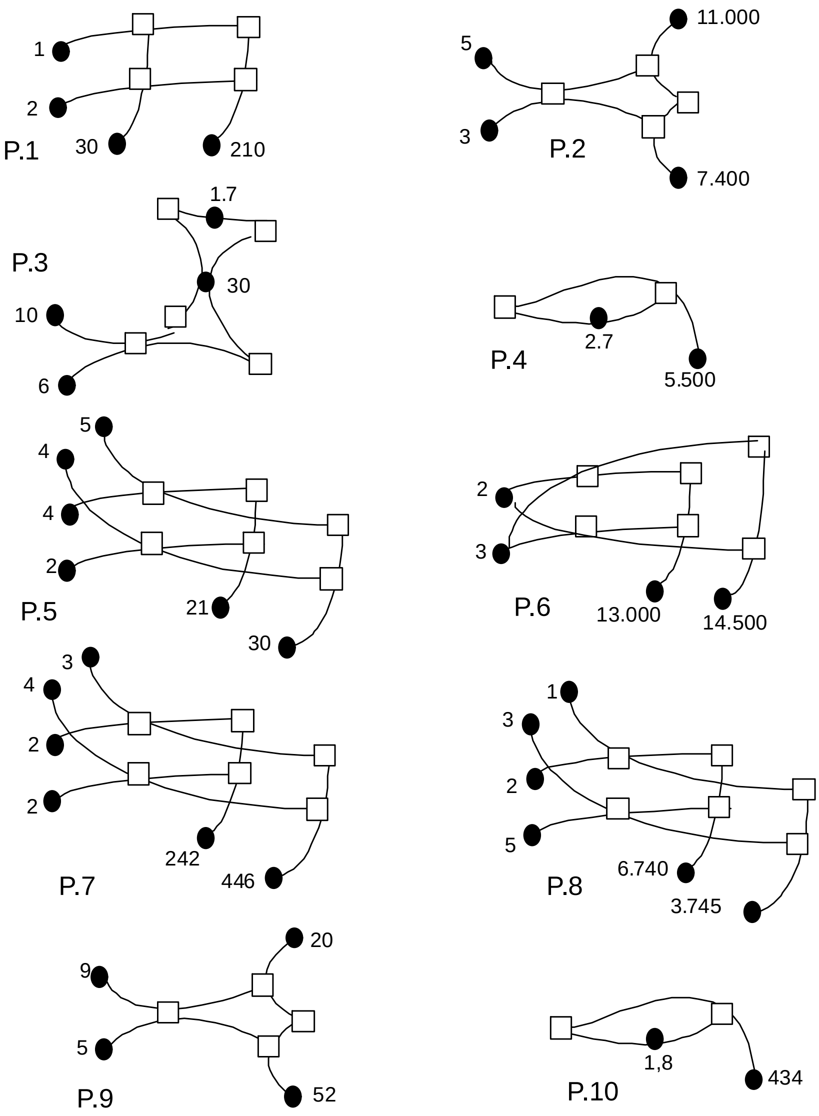


Fig. (gif)

problema	ensayo error	parte todo	gráfico	gra-simbo.	simbólico	**SMS arit.**
1	4,4	30	4,4	13,1	46,9	**38,8**
2	12,1	13,4	2	0	69,1	**27,5**
3	0,7	32,4	0	0	65,5	**33,1**
4	2,8	12,8	0	0	81,6	**15,6**
5	0	27,1	6,8	17,8	41,5	**33,9**
6	4,1	26	2,1	0,7	64,4	**32,2**
7	5,6	22,4	0	0	64,8	**28**
8	4,8	21	0	0,8	65,3	**25,8**
9	3,8	9,6	1,9	1	81,7	**15,3**
10	0	11,8	5,9	16,2	55,9	**17,7**

Tabla (srf) .- Porcentaje de problemas planteados según los distintos sistemas de representación . Tomada de Fernandez (1997). pág.210. en sus primeras 5 columnas. La 6º constituye la suma de las tres primeras.

problema	ensayo error	parte todo	gráfico	gra-simbo.	simbólico	modo aritmé.
1	100	58,3	71,4	76,2	62,7	60,0
2	50	15	0	0	53,4	13,0
3	100	0	0	0	71	0,0
4	25	27,8	0	0	58,3	27,8
5	0	3,1	0	81	63,3	3,1
6	33,3	65,8	100	100	71,3	66,7
7	28,6	25	0	0	54,3	25,0
8	33,3	20,8	0	0	59,3	20,8
9	25	60	100	100	55,3	63,6
10	0	0	36,4	36,4	44,7	36,4
total	39,52	27,58	30,78	39,36	59,36	31,6

Tabla (rif).- Porcentaje de problemas bien resueltos según los distintos sistemas de representación. Tomada de Fernandez (1997), pág. 213, en sus 5 primeras columnas. La columa 6 proviene de considerar conjuntamente los sistemas de representación parte-todo y grafico.

Con la lectura anterior de los resultados de Fernández, podemos discutir y comparar de alguna manera sus resultados con los obtenidos aquí. En primer lugar, destacar por lo valiosa, la información respecto a que los problemas cuyas lecturas algebraicas constan en la fig (gif), excepto el problema 3, son susceptibles de ser resueltos mediante el modo de resolver aritmético, esto es, poseen lecturas aritméticas, aunque Fernández , que no se ocupa de ello, no nos las proporcione. Esta información no está en contradicción con la hipótesis de que no se encontrarán soluciones mediante el modo de resolver aritmético a problemas de estructuras como las propuestas en **3.7.1**, ya que ninguno de los grafos de los problemas del instrumento de Fernandez poseen tales estructuras ni las contienen como subgrafos. Lo que habría que considerar es la posibilidad de encontrar una solución del problema 3, en el SMS de la aritmética, sin el uso del tanteo (ensayo y error) con el que los estudiantes muestran tener éxito. En segundo lugar, la eficiencia media de los modos de resolver encontrada por nosotros para los estudiantes de secundaria que fue 20, 5% para el tanteo y 32,5% para el modo de resolver aritmético y de 39,5 y 31,6 % para Fernandez. Así, aun siendo distinto el historial de instrucción de los estudiantes considerados en uno y otro estudio y sobre todo la diferente disposición de SMS, podríamos afirmar que la eficiencia del modo de resolver aritmético en uno y otro estudio, que comparten el hecho de que los problemas considerados son de lectura algebraica, tienen valores similares que rondan el 30% (32,5 y 31,5). No puede decirse lo mismo respecto del tanteo donde los valores encontrados 20,5 y 39,5%, son uno doble que el otro, lo que confirmaría que la eficiencia del tanteo es muy sensible frente a problemas y estudiantes, como lo confirma, además, en nuestro estudio la altísima eficiencia de los estudiantes de licenciatura de matemáticas.

La obtención de una solución de un PLA, mediante el método de resolver aritmético, requiere, según se desprende del estudio teórico realizado en **3.6,** de la consideración de cantidades y relaciones no contempladas en la lectura algebraica o si se quiere de la disposición de lecturas aritméticas del problema. Rubio (1994) da una descripción del método de análisis clásico para resolver problemas aritméticos a la que denomina método le las inferencias analíticas sucesivas (MIAS) y lo describe así:

En este método se conciben los enunciados de los problemas como descripciones de “situaciones reales” o “estados de un mundo posible”, en los que tales textos se transforman a través de oraciones analíticas, esto es, utilizando “hechos” validos en “todo mundo posible”, o en otras palabras, la resolución de un problema verbal aritmético/algebraico mediante el MIAS se da como el producto de inferencias lógicas que actúan como descripciones de las “situaciones posibles” hasta llegar a una que se reconoce como la solución del problema. Rubio (1994) pág.17.

En esta descripción no se presta, en el detalle, atención a las cantidades que se van produciendo en las sucesivas inferencias, lo que si hace es mostrar una descripción del modo de resolver aritmético, que está relatado partiendo de que, en primer lugar debe de inferirse qué cantidades se requieren para determinar la incógnita principal del problema. Sin embargo, en las ilustraciones del funcionamiento del método que proporciona Rubio:

“Ilustración de la serie de inferencia que se pueden producir para el problema Chocolates y caramelos.

Resolución nº1

-Como en el enunciado del problema se dice que se reparten 192 caramelos y 120 chocolates entre todos los alumnos, se puede concluir que se repartieron 72 caramelos más que chocolates a los alumnos.
-Como además de lo anterior, el texto del problema indica que cada alumno recibió 3 caramelos más que chocolates, se puede determinar el número de alumnos viendo cuántas veces caben los caramelos dentro de los tres caramelos, pudiéndose obtener fácilmente esto dividiendo 72 : 3, cuyo resultado, 24, corresponde al número de alumnos”. Rubio (1994) pág.17,

podemos observar que 72, el exceso de caramelos, es determinada en la primera inferencia y que en la segunda el número de alumnos se determina porque se concibe esta cantidad como el cociente de excesos.

Lo que se ha hecho aquí es confirmar, que, en el uso del método de resolver aritmético, o del MIAS, y en los problemas de lectura algebraica, se usan cantidades que no constan en la lectura algebraica. En efecto, los grafos de las resoluciones que contienen una solución, tanto de los estudiantes de secundaria como de licenciatura Cuadro 3.2 y 3.7, así lo demuestran. La observación de este hecho ha sido posible por el uso de una metodología, que permite representar, conjuntamente y de una vez, las resoluciones y una posible estructura del problema, como es una lectura algebraica; tal metodología ha hecho uso de los grafos correspondientes a la lectura algebraica y a la resolución, aquí introducidos. Lo aportado por esta metodología es mucho más y viene a confirmar la observación teórica realizada en **1.11,** que en las soluciones de PLA obtenidas con el modo de resolver aritmético no se usan algunas de las relaciones entre las cantidades contenidas en la lectura algebraica.

La indagación sobre en qué se fundamenta la introducción de las cantidades concretas que se usan o las inferencias que se realizan, se ha buscado explorando al máximo posible las resoluciones escritas, vía el diccionario de cantidades del problema. Esto, en la suposición, implícita, que de la manera en que los estudiantes refirieran la cantidad conjuntamente con las relaciones usadas para determinarla, pudieran derivarse las razones de su uso. Ciertamente la metodología no ha sido exitosa con los estudiantes de secundaria, donde la escasez de frases en las resoluciones es abrumadora, sin embargo sí lo ha sido con los estudiantes de licenciatura. Determinados los diccionarios de cantidades y los grafos de la resolución, la reconstrucción racional de la resolución permite afirmar que los estudiantes determinan las cantidades que usan apelando a su significado, o bien porque se obtienen mediante relaciones puede deducirse de otras. Obviamente, mejor fuente de información se obtendría partiendo de protocolos audiovisuales o por medio de entrevistas clínicas, pero partiendo de resoluciones escritas, la creo sinceramente una metodología adecuada.

Los porcentajes en los distintos problemas de uso del modo de resolver aritmético y la eficiencia del método indican, que aun procediendo en PLA el modo de resolver aritmético de la manera indicada y usando los indicados modos de razonar, su uso resulta cada vez más ineficiente con la complejidad del problema. Esto es, en determinados problemas como pueden ser los casos de BOLETOS, GALLINAS Y CONEJOS, LANA Y ALGODÓN, AVIONETA, problemas donde el modo de resolver se usa con menor frecuencia, estudiantes de licenciatura, o resulta mas ineficiente, estudiantes de secundaria. La obtención de soluciones en el SMS de la aritmética requiere de tal ingenio en la ideación de cantidades que podemos decir que, en ocasiones, la obtención de la respuesta requiere de la transformación del problema en otro, caso BOLETOS o la consideración del problema dado conjuntamente con otro con el cual compararlo, caso GALLINAS Y CONEJOS, LANA Y ALGODÓN, AVIONETA, esto es requieren de algún uso de Herramientas Heurísticas.

Se ha observado, también, la obtención de respuestas a los problemas mediante tanteo, ensayo y error o ensayos numéricos son otras denominaciones, sin embargo la descripción detallada del método de tanteo y la observación de su uso llevada a cabo aquí permite afirmar que, aunque las resoluciones mediante tanteo se expresen en el SMS de la aritmética, las soluciones obtenidas por dicho método son muy diferentes de las obtenidas por el modo de resolver aritmético. En efecto, estás difieren, en primer lugar, por las cantidades y relaciones que utilizan, basta comparar los cuadros 3,9 y 3,7 donde se puede observar que las cantidades y relaciones usadas en las resoluciones mediante tanteo se corresponden precisamente con las que constan en el grafo de la lectura algebraica, mientras que esto, como ya ha sido dicho, no sucede con las soluciones obtenidas con el modo de resolver aritmético. Y, en segundo lugar, en el criterio utilizado para juzgar la corrección del valor de tanteo, que puede ser considerado una igualdad entre cantidades referidas en dos sentidos diferentes, aunque ello quede oculto algunas veces, aquellas en que se juzga la corrección del valor de tanteo comparando el valor obtenido mediante el recipiente de tanteo con uno de los datos del problema, en cuyo caso podemos decir que se procede a analizar un dato, algo impensable en el modo de resolver aritmético.

Por último, según lo hallado aquí parece evidente que la posibilidad de obtener soluciones con el modo de resolver aritmético tiene al menos como límite práctico problemas de la estructura de DINERO, sin embargo dado que ello es objeto de estudio especifico en el estudio 2 de este capítulo el asunto será discutido posteriormente.

3.6.7.-Conclusiones.

Estudiantes de secundaria.

1.- Los problemas de lectura algebraica son abordables por estudiantes que sólo disponen del SMS de la aritmética. El porcentaje de estudiantes que intentan una resolución varía entre el 95% y el 33% en los problemas y estudiantes considerados aquí. El porcentaje de estudiantes que aborda un determinado problema depende del problema.

2.-Los modos de resolver utilizados por los estudiantes son el modo de resolver aritmético y el tanteo. El tanteo o el modo de resolver aritmético junto con el tanteo se usa en problemas en que el grafo de la lectura algebraica es de mayor orden o los datos son números fáciles o manejables.

3.-Los modos de resolver aritmético y tanteo muestran una eficiencia diferente. Mientras el tanteo mostró ser ineficiente en los problemas de mayor complejidad y números no manejables, fue mas eficiente que el modo de resolver aritmético en los problemas en que se usaron ambos modos de resolver.

4.-Los porcentajes de estudiantes que encontraron solución a los problemas se pueden situar en tres niveles:

- En el 50% o un poco por encima en problemas de complejidad relacional 2 o 4, donde se realizan operaciones con partes o con veces o predomina el uso del tanteo.

-Alrededor del 30% en problemas de complejidad relacional 3 y donde las respuestas se encontraron mediante tanteo o el modo de resolver aritmético.

-De un poco más del 10% en problemas de complejidad relacional 4 donde las respuestas se obtuvieron con el modo de resolver aritmético y donde el tanteo por si sólo fue ineficiente.

5.- Las soluciones encontradas con el modo de resolver aritmético fueron todas iguales, esto es, tienen el mismo grafo y en todas ellas se usaron cantidades y relaciones que no constaban en la lectura algebraica del problema.

6.- Las resoluciones que no contenían la respuesta lo eran en un tercio inacabadas y dos tercios contenían errores, errores que o bien eran de homogeneidad o que habían considerado una cantidad arbitraria.

7.- El problema DINERO resultó ser el problema, de los 8 propuestos. que más estudiantes dejaron en blanco, el 67%, además para este problema no se encontró ninguna solución.

Estudiantes de 4º Licenciatura

1.-Los estudiantes de Licenciatura abordaron sin el uso de ecuaciones todos los problemas de lectura algebraica propuestos, aunque en torno a una quinta parte de los estudiantes (14-19%) usaron ecuaciones para resolver los problemas, ello pese a su prohibición.

2.-El aproximado 80% de las resoluciones que no usaron ecuaciones emplearon el modo de resolver aritmético y el tanteo. El modo de resolver aritmético fue utilizado, con preferencia al tanteo, en todos los problemas excepto en ADRIAN y LANA y ALGODÓN (GALLINAS Y CONEJOS en Secundaria). Además, el uso de uno u otro modo de resolver permite ordenar los problemas indicando una preferencia de uso del tanteo en los mismos problemas que los estudiantes de secundaria.

3.- El modo de resolver aritmético únicamente fue utilizado como modo de resolver en el problema DINERO en una ocasión, sin éxito.

4.- Cualquiera que sea el modo de resolver utilizado éste muestra una eficiencia del 100% en todos los problemas, salvo el ya mencionado problema DINERO y el modo de resolver aritmético en el caso del problema AVIONETA.

5.- Las soluciones encontradas mediante el tanteo todas ellas hacen uso de recipientes de tanteo e igualdad para juzgar la corrección del tanteo que se corresponden con ecuaciones. Ecuaciones que se pueden obtener a partir del grafo correspondiente a la lectura algebraica, tomando como incógnitas los valores de tanteo.

6.- Las soluciones obtenidas por el modo de resolver aritmético coinciden con las obtenidas por los estudiantes de secundaria. Si bien en el caso del problema LANA y ALGODON se encontraron dos soluciones diferentes.

7.- Las soluciones obtenidas por el modo de resolver aritmético hacen uso de cantidades y relaciones no contenidas en la lectura algebraica del problema. De las expresiones verbales utilizadas por los estudiantes para referirlas parece desprenderse que el significado atribuido a la cantidad es lo que explica que su uso es adecuado para la determinación de otras cantidades.

8.-De las expresiones verbales encontradas en las resoluciones parece desprenderse el uso de algunas herramientas heurísticas como la sustitución de una incógnita por otra o la consideración de casos limite o” ideales”.

9.- Ninguno de los estudiantes encontró ni por con el modo de resolver aritmético ni mediante tanteo solución al problema DINERO. Únicamente un estudiante que usó de modo ingenioso el Modelo Cartesiano sin utilizar letras logró encontrar una solución y una respuesta. Así que podemos decir que para estos estudiantes el problema DINERO carece de soluciones en el SMS de la Aritmética.

10.- La diferencias fundamentales encontradas entre los estudiantes de Secundaria y Licenciatura consisten en: la accesibilidad de los problemas, la eficiencia en el uso de los modos de resolver y la expresión de las resoluciones.

3.7.- Estudio 2. Resoluciones de problemas del Espacio de problemas de una Situación.

3.7.1.-Propósito.

El propósito general de este estudio puede enunciarse así:

"En estudiantes con un alto grado de capacitación matemática (4º Licenciatura de Matemáticas) y a los que se les exige resolver problemas sin usar ecuaciones:

1.-Estudiar con detalle las cantidades, relaciones entre éstas y razonamientos que se usan en las resoluciones de PLA del Espacio de problemas de una situación concreta.

2.-Indagar si estudiantes a los que se propone a su vez la resolución de diversos problemas PLA de una situación concreta –por lo que su resolución debe suponer implícitamente la familiaridad con cantidades, relaciones y razonamientos susceptibles de uso en esa situación-, son capaces de resolver sin el uso de ecuaciones problemas a los que hasta aquí hemos podido llamar algebraicos. Esto es, problemas cuyos grafos vienen dados en la figura inferior:[23]

Y, más concretamente, dado que:

-los problemas cuya resolución se va a considerar constituyen un conjunto estructurado de problemas de una situación, en la que las relaciones de proporcionalidad tanto directa como inversa entre las cantidades de la situación son abundantes.

Responder a las preguntas:

1.- ¿Para qué problemas se ha utilizado en su resolución el SMS de la Aritmética? ¿Para cuáles no?.

2.-Para los problemas resueltos en el SMS del aritmética, cómo se ha encontrado su solución: ¿Con el modo de resolver aritmético?, ¿mediante tanteo?.

3.-Para las soluciones encontradas ¿qué ha sido *lo sustantivo del razonamiento* que ha permitido encontrarlas?.

a).-La interpretación polisémica de las cantidades en un mundo posible del problema.

b).- la apelación a relaciones de proporcionalidad entre las cantidades.

[23] El grafo de la izquierda lo encontramos en el estudio de la Situación HENO- ver **A1.1** y el grafo de la derecha es una lectura algebraica del problema DINERO considerado en el Estudio 1 –ver **3.6-**

4.-¿Se puede confirmar la existencia de problemas cuya estructura[24] hace que resulte difícil o imposible a estos estudiantes encontrar una solución en el SMS de la Aritmética?

3.7.2.- Material y métodos.

3.7.2.1.- Los problemas. El test MECA.

Los problemas utilizados en este estudio fueron 16 que constituyen el test denominado como test-MECA divididos en cuatro grupos de cuatro problemas cada uno: test-MECA1, test-MECA2, test-MECA3, test-MECA4. La construcción del test y el conjunto de subtest se relata con detalle en **A3.5**.Los enunciados de los problemas de cada uno de los subtest, figuran en el cuadro 3. 9 y los grafos de los problemas en el cuadro 3.10. donde vienen coloreados en gris los vértices que representan a las cantidades por las que cuyo valor pregunta problema.

MECA-1

1.- Una mecanógrafa escribe 200 páginas diarias durante 10 días, para realizar un trabajo. Si escribiese 50 páginas diarias más. ¿Cuántas páginas escribiría durante esos 10 días?.

2.-Una mecanógrafa escribe cierta cantidad de páginas durante 10 días, para realizar un trabajo. Si escribiese 100 páginas menos diarias tardaría 10 días más. ¿Cuántas páginas escribe al día, cuántas páginas tiene que escribir en total?.

3.- Una mecanógrafa escribe 2000 páginas en cierto número de días. Si escribiese 50 páginas diarias más escribiría 2500 páginas en esos días. ¿Cuántas páginas diarias escribe en ambos casos?.

4.- Una mecanógrafa piensa que si escribe al día 50 páginas más realiza 500 páginas más de lo previsto, y si escribe 50 páginas menos al día realiza 500 menos de lo previsto. ¿Cuántas páginas tiene que escribir y en cuanto tiempo?.

MECA-2

1.- Una mecanógrafa debe escribir 200 páginas diarias durante 10 días, para realizar un trabajo. Si escribe 50 páginas diarias más. ¿En cuántos días podrá completar su trabajo?.

2.- Una mecanógrafa escribe cierta cantidad de páginas durante 10 días, para realizar un trabajo. Si escribiese 120 páginas menos diarias tardaría 15 días más. ¿Cuántas páginas escribe al día, cuántas páginas tiene que escribir en total?.

3.- Una mecanógrafa, para realizar un trabajo, escribe 200 páginas durante un cierto número de días. Si escribiese 200 páginas más cada día tardaría 5 días menos. ¿Cuántas páginas escribe al día, cuántas páginas tenía que escribir en total?.

4.-Una mecanógrafa escribe un total de 2000 páginas en un cierto número de días. Si escribiese 120 páginas menos al día tardaría 15 días más. ¿Cuántos días ha tardado en escribirlo?.

Cuadro 3.9.-Enunciados de los problemas de los subtest del test MECA (MECA-1, MECA-2)

---

[24] Donde debe leerse por estructura, la del grafo correspondiente a una lectura algebraica.

MECA-3

1.-Una mecanógrafa escribe durante un cierto número de días un total de 2000 páginas, para realizar un trabajo. Si escribiera 5 días escribiría 1000 páginas menos. ¿Cuántas páginas ha escrito durante esos 5 días?.

2.- Una mecanógrafa, para realizar un trabajo, escribe cierta cantidad de páginas durante 10 días. Si escribiese 200 páginas diarias más, tardaría 5 días menos. ¿Cuántas páginas escribe al día, cuántas páginas tenía que escribir en total?.

3.- Una mecanógrafa escribe 200 páginas diarias durante un cierto número de días, para realizar un trabajo, si escribiese 120 páginas diarias menos, tardaría 15 días más. ¿Cuántas páginas escribe al día, cuántas tiene que escribir en total?.

4.- Una mecanógrafa tiene que realizar un cierto trabajo. Si escribiese 120 páginas menos al día tardaría 15 días más en hacerlo, y si escribiese 50 páginas más al día tardaría 2 días menos. ¿Cuántas páginas tiene que escribir y en cuanto tiempo?

MECA-4

1.-Una mecanógrafa escribe durante un cierto número de días un total de 2000 páginas, para realizar un trabajo. Si escribiera 13 días escribiría 600 páginas más. ¿Cuántas páginas ha escrito durante esos 13 días?

2.- Una mecanógrafa escribe cierta cantidad de páginas durante 10 días. Si escribiese 50 páginas más diarias tardaría 2 días menos. ¿Cuántas páginas escribe al día, cuántas páginas tenía que escribir en total?

3.- Una mecanógrafa escribe 2000 páginas durante un cierto número de días. Si escribiese 50 páginas más al día tardaría 2 días menos. ¿Cuántos días ha tardado en escribirlo?

4.- Una mecanógrafa tiene que realizar un cierto trabajo. Si escribiese 100 páginas menos al día tardaría 10 días más en hacerlo, y si escribiese 200 páginas más al día tardaría 5 días menos. ¿Cuántas páginas tiene que escribir y en cuanto tiempo?

Cuadro 3.9.-Enunciados de los problemas de los subtest del test MECA.(MECA-3, MECA-4).

En el cuadro 3.10 nos hemos servido del grosor o trazo del cuadrado en que está inscrito el grafo del problema para señalar la clase de problemas. Y de los colores: rojo, azul, verde o gris para señalar los problemas de cada clase que son equivalentes

Los problemas del test MECA corresponden a clases de problemas de lecturas analíticas diferentes.

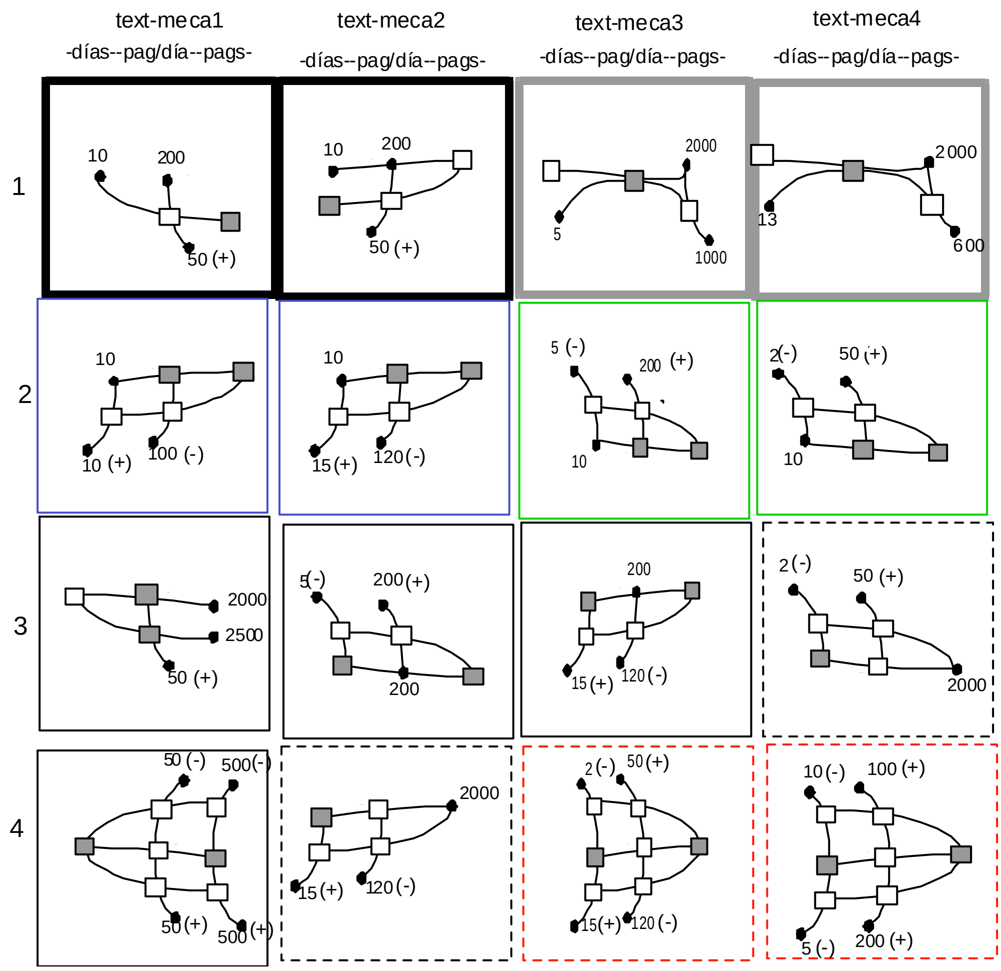
1) LA, problemas de lectura analítica aritmética, (cuadrado en trazo grueso). Problemas 1.1, 2.1, 3.1, 4.1

2) LA, problemas de lectura analítica aritmética, (cuadrado en trazo grueso). Problemas 1.1, 2.1, 3.1, 4.1

3) PLA, problemas que poseen una lectura analítica algebraica , que dividimos en dos categorías:

-PLAr.- los problemas que tienen una solución aritmética, (cuadrado en trazo fino). Problemas 1.2, 1.3, 1.4, 2.2, 2.3, 3.2, 3.3, 4.2,

-PLAg.-los problemas sobre los que nos cuestionamos la posibilidad de que los estudiantes obtengan una solución aritmética, (cuadrado en trazo discontinuo). Problemas 2.4, 3.4, 4.3, 4.4.



Cuadro 3.10.- Grafos de los problemas del test-MECA.

Los problemas de cada una de estas clases contienen problemas que son isomorfos en algún sentido y equivalentes en última instancia.

Para empezar, cualquier isomorfía de los problemas implica una isomorfía semántica ya que todas las aristas aditivas corresponden a problemas de comparación aditiva y las aristas multiplicativas a problemas de isomorfismo de medidas. Además:

-De entre los problemas PLAr, los problemas 1.2, 2.2, 3.2, 4.2 son isomorfos multiplicativamente, aditivamente además y equivalentes 1.2, 2.2 por un lado y 3.2, 4.2. Los problemas 2.3, 3.3 no son isomorfos a los anteriores únicamente porque tienen intercambiados los datos días y páginas diarias respecto de los problemas 1.2, 2.2, 3.2, 4.2. El resto de los problemas PLAr 1.3, 1.4 son problemas equivalentes a los problemas CHOCOLATES y CARAMELOS y COLECTA de los instrumentos nº 1 y nº 2 del Estudio1.

-De entre los problemas PLAg, los problemas 3.4 y 4.4 son problemas equivalentes y los problemas 2.4 y 4.3 relacionalmente isomorfos.

Por otro lado, la secuencia de los problemas en cada uno de los subtest como en la totalidad del test es intencionada. Así, los primeros problemas de cada subtest (1.1, 2.1, 3.1, 4.1) son de la clase LA, y los últimos (2.4, 3.4, 4.3, 4.4) son de la clase PLAg y el resto de los problemas son de la clase PLAr. El subtest MECA1 no contiene ningún problema PLAg mientras el subtest MECA4 contiene dos problemas PLAg.

La intencionalidad de la secuencia se conserva al proporcionar valores a los datos con la intención de sugerir relaciones numéricas, procurando que los problemas que sugieren relaciones numéricas más familiares o fáciles siempre ocupen lugares anteriores en el test. Esta preferencia de orden se combinó con el tipo de cantidades donde la abundancia de datos que eran cantidades extensivas precedía a las intensivas. Así, ver la secuencia 1.2, 2.2, 3.2, 4.2.

3.7.2.2.- Los estudiantes.

Los estudiantes que afrontaron el test MECA fueron los estudiantes de 4º curso de la Licenciatura de Matemáticas descritos en **3.6.2.2**.

3.7.2.3.-La administración del test. El contrato con los estudiantes.

El contrato con los estudiantes fue el mismo que en el caso del instrumento nº 2: quedaba totalmente prohibido usar ecuaciones para resolver los problemas y el test continuaba formando parte del examen de la asignatura.

El test se presentó en cuatro cuadernillos de dos hojas, uno para cada subtest, cada hoja con el enunciado de un problema en la cabecera de cada hoja y el resto del espacio en blanco para escribir la resolución.

El test se entregó al final de la parte del examen con presencia física en el aula, y se les concedió a los estudiantes una semana para intentar resolver los problemas del test según el contrato establecido, transcurrido este plazo debían entregar el fruto de su trabajo al profesor en el seminario. En este caso, no faltó en el discurso del contrato la apelación a la honestidad intelectual de los estudiantes[25]. La única recomendación extra respecto a la estrategia para abordar los problemas del test fue que procediesen en secuencia y que volviesen atrás en la serie o series si lo creían útil o preciso.

3.7.3.-La fuente, organización y análisis de los datos.

En este punto se procedió sustancialmente como se dice en **3.6.3**, con algunas modificaciones derivadas de las características de las resoluciones encontradas y el

[25] Tras el examen de las resoluciones por parte del profesor la honestidad intelectual de los estudiantes resultó ser impecable.

grupo de estudiantes, la no necesidad de aplicar rígidamente parte de la metodología puesto que no hay en este estudio propósito de comparación con otro grupo de estudiantes, y por el carácter más preciso de las preguntas formuladas en **3.7.1**. Las modificaciones fueron las siguientes:

A cada resolución se le asignó un modo de resolver y se hizo constar además si ésta contenía: diagramas, el esquema de la regla de tres, tablas de tanteo o constaba fundamentalmente de un discurso en lengua vernácula con segmentos de expresiones aritméticas intercalados.

Se agruparon los estudiantes según los tipos de resoluciones presentadas en el conjunto de los problemas del test. Para tal agrupación no se recurrió a ningún procedimiento taxonómico que usase medidas de similaridad cuantitativas o criterios de agrupamiento en función de dichas medidas. Ello, en razón de que los valores de las variables de descripción de los estudiantes, que son los problemas, tenían valores modales: los distintos tipos de resolución. Y hay otros procedimientos quizás más ventajosos, menos distorsionantes y eficaces, aunque eso sí mas rudimentarios o artesanales. Aquí se utilizó un procedimiento artesanal análogo al descrito por Sokal (Sokal, 1974). El procedimiento funciona así:

La población se describe mediante una tabla, 21 por 16, que describe a los 21 estudiantes, cada uno mediante una fila de 16 variables cuyos valores son uno de los tipos de resolución observados. Los valores se hacen constar mediante letras diferentes para cada tipo de resolución -para mayor facilidad en el uso del procedimiento se pueden colorear las casillas-. Se provee el artesano de unas tijeras y procede al despiece de la tabla en filas o columnas. A continuación procede a recomponer la tabla siguiendo el criterio de situar las filas encima o debajo unas de otras en función del criterio de homogeneidad en la distribución del color, con la intención de lograr un patrón o patrones de la distribución del color en la tabla que esta reconstruyendo. Si lo cree útil o preciso, recorta columnas con la misma finalidad de conseguir ver, con mayor facilidad, la distribución del color en la tabla -con los que jerarquiza estudiantes y problemas-. Cuando esto lo cree logrado, los patrones de color se utilizan como criterio de agrupamiento.

El estudio de los razonamientos utilizados para obtener las soluciones se hizo con más detalle que en el Estudio 1 donde se procedió a una reconstrucción de las soluciones procurando usar lo argüido y los nombres de las cantidades usadas por los estudiantes. Para el estudio de los razonamientos se tuvo en mente la noción de razonamiento que se encuentra en Aristóteles:

> “Un razonamiento es un discurso en el que sentadas ciertas cosas, necesariamente se da a la vez, a través de lo establecido, algo distinto de lo establecido”. (Tópicos. Libro I)

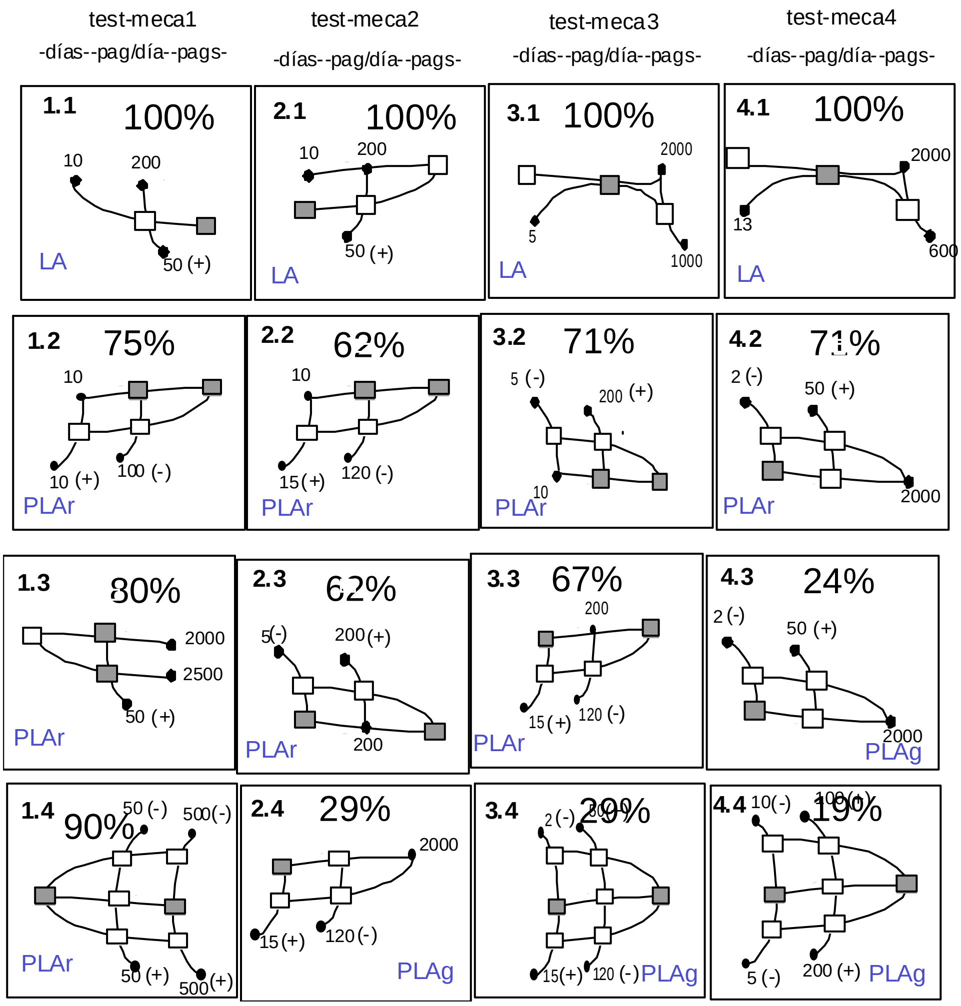
A partir de ahí se intentó averiguar a qué apelaban los estudiantes una vez señaladas o determinadas ciertas cantidades para establecer o determinar otras.

3.7.4.-Resultados y comentarios

3.7.4.1.-El uso de ecuaciones en las resoluciones.

Los estudiantes debían intentan encontrar la respuesta a los problemas del test MECA sin usar ecuaciones. Sin embargo, como era previsible, en las resoluciones de algunos problemas constaban ecuaciones. En el Cuadro 3.11 para cada problema del test se dan los porcentajes de estudiantes que no escribieron ecuaciones ni dejaron el problema en blanco. Dado lo que significa resolución en blanco según el contrato establecido con los estudiantes, estos porcentajes pueden tomarse como la medida de la posibilidad de que el problema sea susceptible de ser abordado sin usar ecuaciones.

Los porcentajes que constan en el Cuadro 3.11 nos indican que en las resoluciones de los problemas LA no se recurre a ecuaciones. En los problemas PLAr, en un 62 % de los problemas, no se recurre a ellas y este recurso es necesario en menor grado en los problemas 1.3, 1.4, donde únicamente un 20% y un 10% de los estudiantes lo requiere. Estos problemas son precisamente aquellos que en el grafo las aristas multiplicativas indican la presencia de una relación de proporcionalidad directa. Para los problemas PLAg, aproximadamente, una cuarta parte de los estudiantes intentaron una resolución sin usar ecuaciones aunque con escaso éxito, ver **3.7.4.6**.



Cuadro 3.11.-Porcentaje de resoluciones ni en blanco ni con ecuaciones.

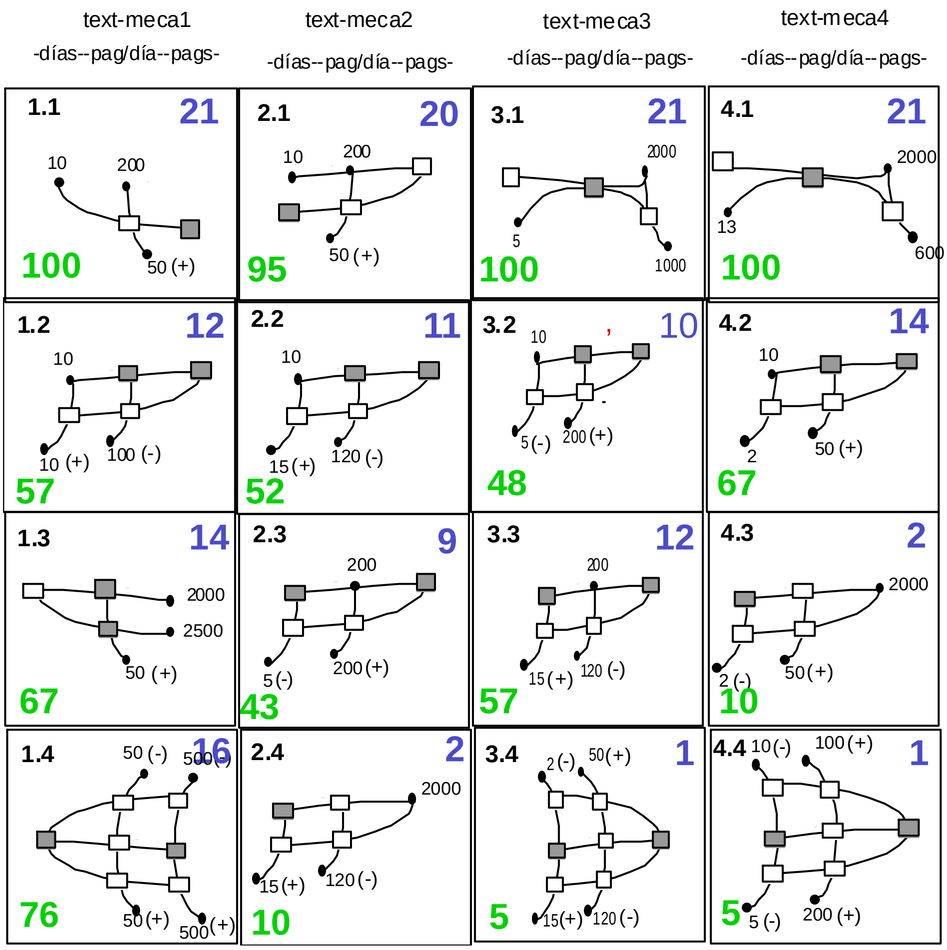
3.7.4.2.-Respuesta a los problemas. Errores

En las resoluciones se encontraron pocos errores, ver tabla 3.26, siendo de resaltar que éstos también aparecieron en las resoluciones mediante ecuaciones y puntualmente en un problema de la clase LA.

test/ problema	1	2	3	4
1		1		
2	1	1, **1**	4,**1**	
3	1	2,**1**	**1**	
4		2	1	

Tabla 3.26.-Errores. En negrita, en ecuaciones.

Se consideraron respuestas adecuadas aquellas respuestas correctas que no provenían de resoluciones que habían usado ecuaciones. El Cuadro 3.12 proporciona el número y porcentaje de estudiantes que dieron respuestas adecuadas. Los porcentajes que constan en dicho Cuadro 3.12 son siempre inferiores a los del Cuadro 3.11 y las diferencias, que dan cuenta de los errores más las resoluciones inacabadas, se encontraron fundamentalmente en los problemas PLAg.



Cuadro 3.13.- Respuestas adecuadas. Azul, nº de estudiantes. Verde, porcentajes.

3.7.4.3-Las resoluciones del test-meca. Signos que contienen.

Las resoluciones, en cuanto texto escrito en un SMS, reunían las características generales descritas en el estudio anterior. Por otro lado, puede hacerse una primera distinción entre las resoluciones en función de lo que en éstas consta y de los signos que contienen los SMS usados en las resoluciones. Así hay resoluciones en las que:

-Consta, en el texto de la resolución una ecuación o un sistema.(e)
-Consta, en el texto, el esquema de la regla de tres. (r)
-Consta, en el texto, una tabla o cuadro para el tanteo, o se tantea. (t)
-El texto de la resolución consta de un diagrama representando un texto intermedio, aritmético o algebraico, y las correspondientes expresiones aritméticas o ecuaciones. (D)
-El texto de la resolución es un discurso en lengua vernácula con segmentos de expresiones aritméticas intercalados. (d)
-El texto de la resolución consta de un discurso y además contiene un diagrama donde sólo constan los valores de las cantidades. *(d)*

Las figuras 3.18 a 3.23 muestran ejemplos de estos tipos de resoluciones.

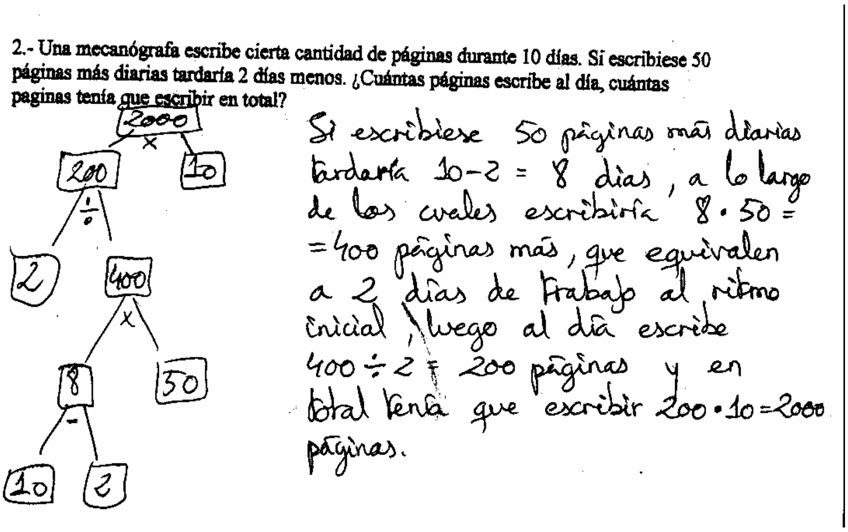


fig.3.18.- Resolución que es un discurso y contiene un diagrama.

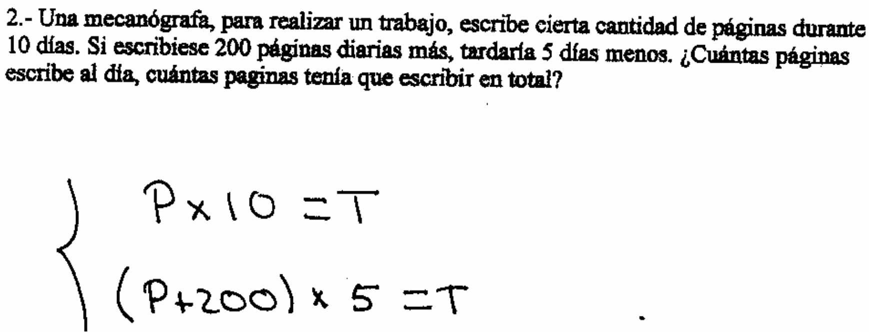
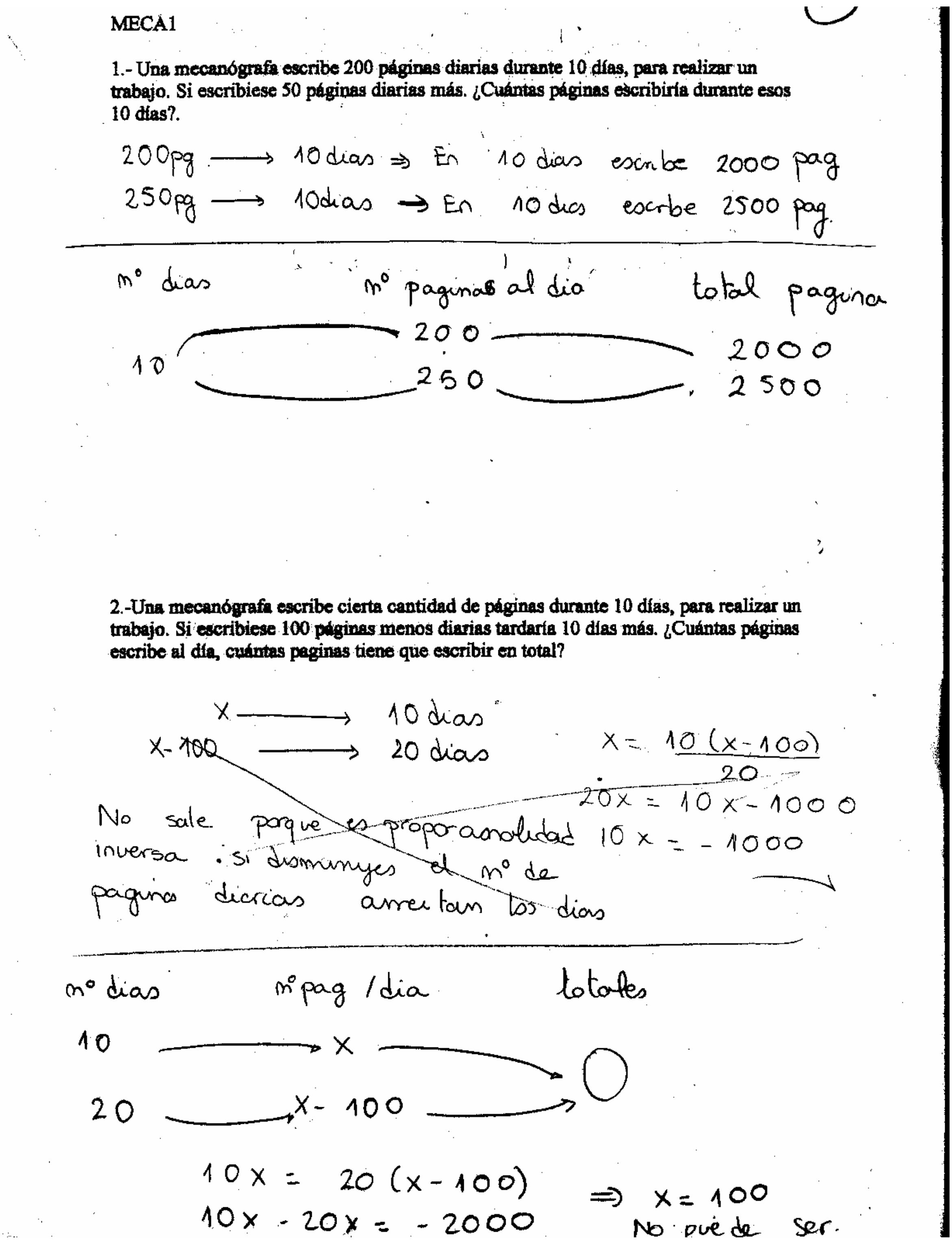


fig.3.19.- Resolución que consta de un sistema de ecuaciones y que además contiene un error.



MECA1

1.- Una mecanógrafa escribe 200 páginas diarias durante 10 días, para realizar un trabajo. Si escribiese 50 páginas diarias más. ¿Cuántas páginas escribiría durante esos 10 días?.

200pg ⟶ 10 dias ⇒ En 10 dias escribe 2000 pag

250pg ⟶ 10dias ⟶ En 10 dias escribe 2500 pag.

nº dias — nº paginas al dia — total pagina

10 — 200 — 2000

10 — 250 — 2500

2.-Una mecanógrafa escribe cierta cantidad de páginas durante 10 días, para realizar un trabajo. Si escribiese 100 páginas menos diarias tardaría 10 días más. ¿Cuántas páginas escribe al día, cuántas paginas tiene que escribir en total?

$x \longrightarrow 10$ dias

$x-100 \longrightarrow 20$ dias

$x = \frac{10(x-100)}{20}$

$20x = 10x - 1000$

$10x = -1000$

No sale porque es proporcionalidad inversa. si disminuyes el nº de paginas diarias aumentan los dias

nº dias — nºpag /dia — totales

10 ⟶ x ⟶

20 ⟶ x- 100 ⟶

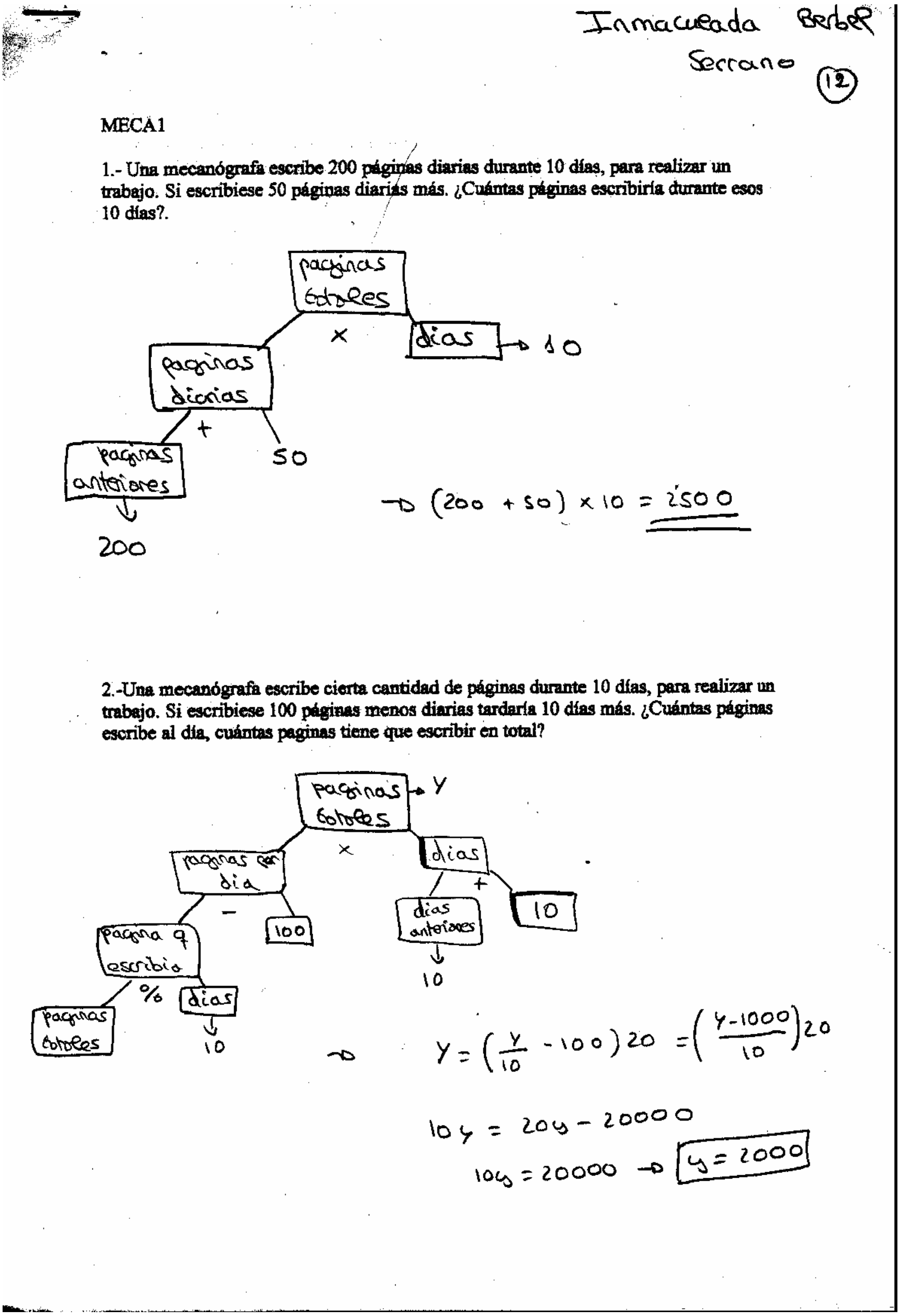
$10x = 20(x-100)$

$10x - 20x = -2000$

$\Rightarrow x = 100$

No puede ser.

fig. 3.20.-Resoluciones en las que consta el esquema de la regla de tres.



Inmaculeada Berber Serrano (12)

MECA1

1.- Una mecanógrafa escribe 200 páginas diarias durante 10 días, para realizar un trabajo. Si escribiese 50 páginas diarias más. ¿Cuántas páginas escribiría durante esos 10 días?.

$\rightarrow (200 + 50) \times 10 = \underline{2500}$

2.-Una mecanógrafa escribe cierta cantidad de páginas durante 10 días, para realizar un trabajo. Si escribiese 100 páginas menos diarias tardaría 10 días más. ¿Cuántas páginas escribe al día, cuántas paginas tiene que escribir en total?

$\rightarrow \quad y = \left(\frac{y}{10} - 100\right)20 = \left(\frac{y-1000}{10}\right)20$

$10y = 20y - 20000$

$10y = 20000 \rightarrow \boxed{y = 2000}$

fig.3.21.-Resoluciones con textos intermedios, expresiones aritméticas y ecuaciones.

4.-Una mecanógrafa escribe un total de 2000 páginas en un cierto número de días. Si escribiese 120 páginas menos al día tardaría 15 días más. ¿Cuántos días ha tardado en escribirlo?

Días que tarda 2ª en hacer 2000 pág.	15	20	25
Días que tarda 1ª en hacer 2000 pág.	0	5	10
Pag. día del 1ª)	0	2000 ÷ 5 = 400	2000 ÷ 10 = 200
Pag. total del 2ª)	/	400 − 120 = 280 280 × 20 = 5.600	200 − 120 = 80 80 × 25 = 2000

← Lo tendremos así que tengamos 2000 pag.

fig. 3.22.- Resolución que contiene una tabla para el tanteo.

2.- Una mecanógrafa, para realizar un trabajo, escribe cierta cantidad de páginas durante 10 días. Si escribiese 200 páginas diarias más, tardaría 5 días menos. ¿Cuántas páginas escribe al día, cuántas paginas tenía que escribir en total?

Si con 200 paginas diarias de más, tarda 5 dias menos que es la mitad de 10 dias. Entonces las que escribia más 200 es el doble de lo que escribia.

Por tanto escribe al dia 200 paginas.

En total 200 pag/dia · 10 dias = 2000 paginas

2.- Una mecanógrafa, para realizar un trabajo, escribe cierta cantidad de páginas durante 10 días. Si escribiese 200 páginas diarias más, tardaría 5 días menos. ¿Cuántas páginas escribe al día, cuántas paginas tenía que escribir en total?

Si escribiese 200 pag/dia más tardaría 5 días menos, haría 200·5 = 1000 páginas, que será lo que hace en los 5 días sin suponer que hace 200 pag/dia más. luego escribe 200 páginas al dia y tiene que escribir 200·10 = 2000 páginas

fig. 3.23.- Resoluciones que son un discurso.

El uso del esquema de la regla de tres. (r)

Tres de los estudiantes mostraron una tendencia a representar la información contenida en el problema mediante el esquema de la regla de tres, dos de ellos utilizaron este esquema de modo sistemático en casi todos los problemas.

El esquema de la regla de tres no fue invocado en todos los casos como un esquema para la acción, esto es, para escribir ecuaciones –como en la fig.3.20 - o determinar el valor de la cantidad deseada. Como esto último no era posible a partir de los datos del problema donde los valores de las cantidades vienen expresados como diferencias, el esquema también se usó como representación de la información sobre la cual elaborar argumentos, para considerar esquemas en los que constasen las diferencias o superponer resultados de problemas ya resueltos. Ver anexo **A3.6** (uso regla de tres).

Los errores que se encontraron en el uso del esquema proviene del uso de éste como el de una regla de tres directa. Ver fig.3.20 y anexo **A3.6** (uso regla de tres).

Resoluciones en las que consta un diagrama. (D), (*d*).

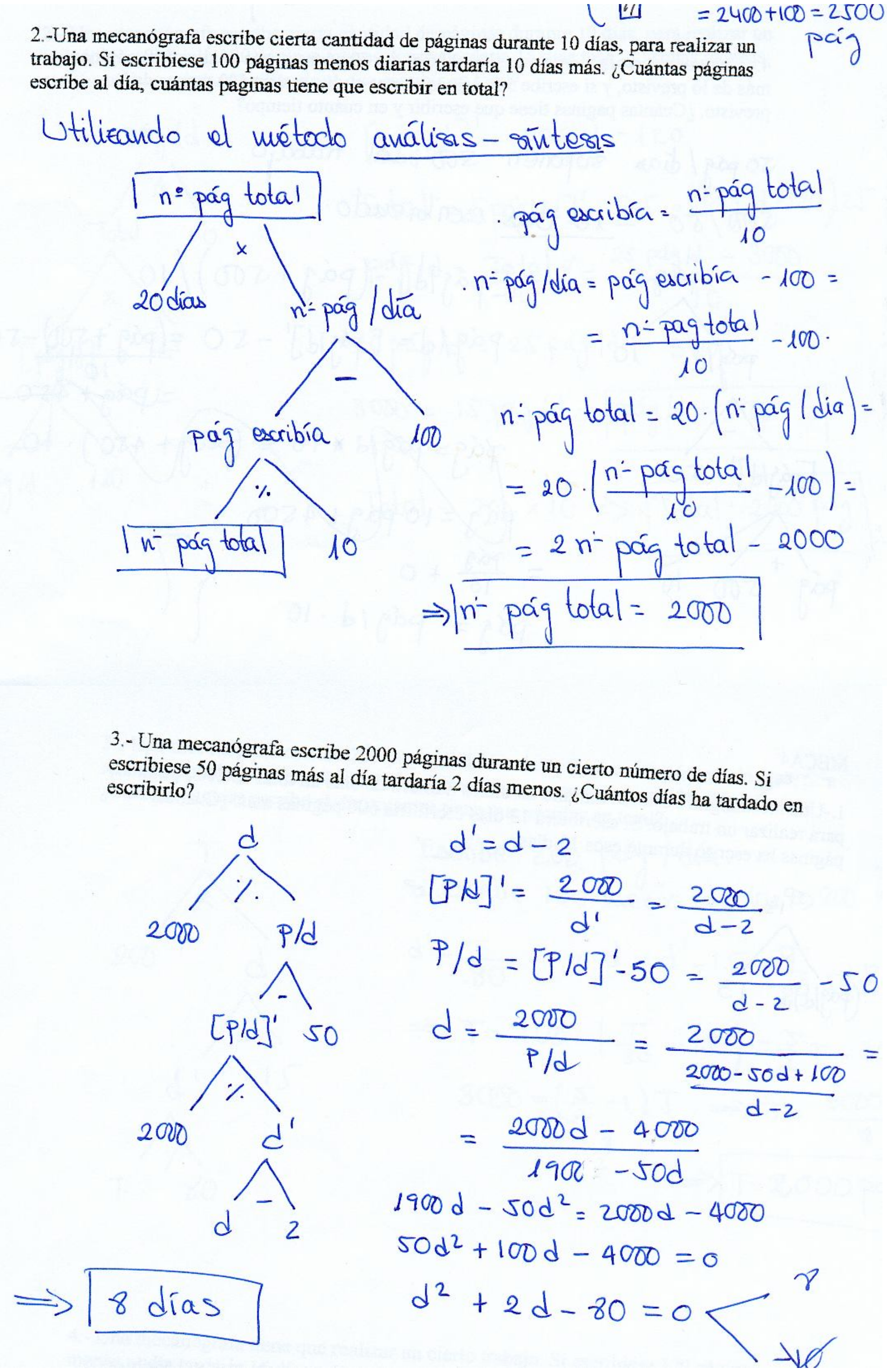
A los estudiantes en uno de los temas de la asignatura de la cual se examinaban, y de cuyo examen formaba parte el presente test, se les había presentado sustancialmente el contenido del Capítulo 5 del libro "Problemas Aritméticos Escolares" (Puig y Cerdán, 1989) y parte de lo contenido en los apartados **1.4, 1.5, 1.6**. Así, algunos estudiantes presentaron en la resolución el diagrama correspondiente al texto intermedio. Ahora bien como los estudiantes sabían distinguir entre textos intermedios aritméticos y algebraicos, conocían perfectamente que un texto intermedio algebraico no era una respuesta adecuada para el problema.

En las resoluciones que constaban de un diagrama, expresiones aritméticas o algebraicas y ecuaciones, los diagramas eran textos intermedios algebraicos para los PLA. En ellos no siempre se usaban nombres para las cantidades que se estaban analizando, como ocurre en el caso de la fig.3.24 (arriba), sino que con frecuencia se usaban únicamente literales, fig.3.24 (bajo), y el diagrama daba cuenta del análisis requerido para construir la ecuación.

En otras resoluciones, un diagrama venia acompañado de o acompañando a un discurso,-ver fig. 3.18-, con toda probabilidad éste diagrama había sido construido con posterioridad al discurso y no había sido utilizado para el análisis. Esto puede conjeturarse porque el diagrama, en el que constaban únicamente los valores de las cantidades, daba cuenta del encadenamiento de las operaciones aritméticas requerido para encontrar el resultado.

-Resoluciones en las que consta en el texto una tabla o cuadro para el tanteo, o se tantea (t)

Las resoluciones en las que constaba una tabla para el tanteo fueron producidas casi exclusivamente por el estudiante nº 17, que encontró en esa manera de resolver el modo de dar una respuesta adecuada a la tarea requerida, ante la prohibición de usar ecuaciones y favorecido por los números enteros que se proporcionaban como valores de las cantidades.



2.-Una mecanógrafa escribe cierta cantidad de páginas durante 10 días, para realizar un trabajo. Si escribiese 100 páginas menos diarias tardaría 10 días más. ¿Cuántas páginas escribe al día, cuántas paginas tiene que escribir en total?

= 2400 + 100 = 2500 pág

Utilizando el método análisis – síntesis

n° pág total

20 días × n: pág / día

pág escribía − 100

n: pág total ÷ 10

$\cdot$ pág escribía = $\frac{\text{n: pág total}}{10}$

$\cdot$ n: pág/día = pág escribía − 100 = $= \frac{\text{n: pág total}}{10} - 100$.

n: pág total = 20 · (n: pág / día) =

$= 20 \cdot \left(\frac{\text{n: pág total}}{10} - 100\right) =$

= 2 n: pág total − 2000

⇒ $\boxed{\text{n: pág total} = 2000}$

3.- Una mecanógrafa escribe 2000 páginas durante un cierto número de días. Si escribiese 50 páginas más al día tardaría 2 días menos. ¿Cuántos días ha tardado en escribirlo?

d

2000 ÷ P/d

[P/d]' − 50

2000 ÷ d'

d − 2

$d' = d - 2$

$[P/d]' = \frac{2000}{d'} = \frac{2000}{d-2}$

$P/d = [P/d]' - 50 = \frac{2000}{d-2} - 50$

$d = \frac{2000}{P/d} = \frac{2000}{\frac{2000 - 50d + 100}{d-2}} =$

$= \frac{2000d - 4000}{1900 - 50d}$

$1900d - 50d^2 = 2000d - 4000$

$50d^2 + 100d - 4000 = 0$

$d^2 + 2d - 80 = 0$ 8, −10

⇒ $\boxed{8 \text{ días}}$

fig 3.24.- Diagramas que muestran el análisis requerido para construir una ecuación.

En otras pocas resoluciones se usó el tanteo o se sugirió su uso, pero no como manera de resolver. Así, en la resolución que muestra la fig. 3.31, en la página 272, el estudiante hace uso del tanteo para resolver un subproblema que encuentra en el transcurso de la resolución, concretamente utiliza el tanteo para determinar dos cantidades de las que conoce su razón y su diferencia.

Resoluciones que constan de un discurso. (d)

Sin afirmar que el resto de las resoluciones no fuesen un discurso. El discurso verbal que consta en algunas resoluciones resultó el más favorable para entenderlo como un razonamiento en el sentido apuntado en **3.7.3.** Ello sirvió de fundamento para clasificar los razonamientos presentes en las resoluciones en dos tipos.

Unos que establecen, señalan, ciertas cantidades y apelan al significado de dichas cantidades para establecer, determinar, otras cantidades partir de ellas. A continuación, apelando a la polisemia de la cantidad determinada en primer lugar, determinan otras cantidades. Razonamiento que abreviaremos como RC.

Otros, que podemos dividir en dos subtipos:

a) los razonamientos que establecen ciertas relaciones numéricas entre los valores de ciertas cantidades y apelan a dichas relaciones numéricas para determinar el valor de otras cantidades. Estas relaciones numéricas son entendidas como razones y apelan a una relación de proporcionalidad existente entre las cantidades consideradas y la que se desean determinar. Razonamiento que abreviaremos con RP.

b) los razonamientos que se sirven de la razón entre dos cantidades para determinar otra cantidad que declaran que es precisamente esa razón. Razonamientos que abreviaremos por RP*

3.7.4.4.-Agrupamientos de los estudiantes.

Partiendo de los tipos de resoluciones consignadas en el punto anterior y del modo de resolver que se utilizó con la intención de obtener la solución: aritmético(a) tanteo (t) ecuaciones (e), se describió cada uno de los estudiantes en función de las resoluciones de cada uno de los problemas. Ello condujo a la obtención de la tabla 3.24. En dicha tabla se coloreó en las gamas del rojo (a). azul (e) o verde (t) según los modos de resolver y con el matiz dependiendo de los signos que estas contenían . El procedimiento taxonómico descrito en **3.7.3** condujo a la tabla 3.25 en la que nos pareció distinguir bien tres grupos de estudiantes.

Un primer grupo (E1) compuesto por cuatro estudiantes que se limitaron a elaborar diagramas para los problemas del test-meca, los diagramas eran textos intermedios algebraicos (excepto para los problemas 1.1, 2.1, 3.1, 4.1 y 1.3 que eran textos intermedios aritméticos) y escribieron las ecuaciones correspondientes a dichos textos o las expresiones aritméticas en el caso de textos intermedios aritméticos. Tres de estos estudiantes no elaboraron diagramas para los problemas: 2.4, 3.4, 4.3, 4.4 sino que escribieron directamente las ecuaciones.

	11	21	31	41	12	22	32	42	13	23	33	43	14	24	34	44
1	ra	ra	ra	ra	ra	rt	rt	rt	r	rt	ru	ru	rt	ru	ru	r
2	da	da	da	da	da	da	da	da	da	da	u	u	da			
3	da	da	da	da	da	da	da	da	da		da		da			
4	a	a	a	a	a	e	e	e	e	e	e	e	a	e	e	e
5	da	da	da	da	da	da	da	da	da	da	da		da	e		
6	da	da	da	da	da	da	ra	re			re		da			
7	da	da	da	da	e	e	da	da	da	e	da	e	da	d	e	e
8	da	da	da	da	da	da	da	da	da	da	da	e		e	e	e
9	*da*	*da*	*da*	*da*	*da*	*da*	*da*	*da*	*da*	*da*	*da*		*da*			
10	*da*	*da*	*da*	*da*	*da*	*da*	*da*	*da*	*da*	*da*	*da*		*da*	da		
11	Da	Da	Da	Da		De	De	De	Da	De	De	e	Da	e	e	e
12	Da	Da	Da	Da	De	De	De	De	Da	De	De	e	Da	e	e	e
13	da	da	da	da	t	e	t	t	da	e	t	e	da		e	d
14	a	a	a	a	a	e	e	e	e	e	e	e	e	e	e	e
15	da	da	da	da	da	da	da	da	da	da	da	e	da			
16	da	da	da	da	da	da	da	da	da	da	t	d	da	d	d	e
17	da	da	da	da	da	t	da	t	da	da	t	t	t	t	t	t
18	Da	Da	Da	Da	De	De	De	De	De	De	De	e	Da	e	e	e
19	Da	Da	Da	Da	De	De	De	De	De	De	De	De	De	De	De	De
20	ra	ra	ra	ra	ra	ra	ra	ra	ra	ra	ra	d	ra	d	d	d
21	da	da	da	da	da	da	da	da	da		da		da	e		

Tabla 3.24.-Descripción de los estudiantes.

	11	21	31	41	14	12	22	32	42	13	23	33	43	24	34	44
2	da	da	da	da	da	da	da	da	da	da	da	u	u			
3	da	da	da	da	da	da	da	da	da	da		da				
5	da	da	da	da	da	da	da	da	da	da	da	da		e		
8	da	da	da	da		da	da	da	da	da	da	da	e	e	e	e
7	da	da	da	da	da	e	e	da	da	da	e	da	e	d	e	e
21	da	da	da	da	da	da	da	da	da	da		da		e		
15	da	da	da	da	da	da	da	da	da	da	da	da	e			
16	da	da	da	da	da	da	da	da	da	da	da	t	d	d	d	e
10	*da*	*da*	*da*	*da*	*da*	*da*	*da*	*da*	*da*	*da*	*da*	*da*		da		
9	*da*	*da*	*da*	*da*	*da*	*da*	*da*	*da*	*da*	*da*	*da*	*da*				
6	da	da	da	da	da	da	da	ra	ra	da		re				
20	ra	ra	ra	ra	ra	ra	ra	ra	ra	ra	ra	ra	d	d	d	d
1	ra	ra	ra	ra	rt	ra	rt	rt	rt	r	rt	ru	ru	ru	ru	r
17	da	da	da	da	t	da	t	da	t	da	da	t	t	t	t	t
13	da	da	da	da	da	t	e	t	t	da	e	t	e		e	d
19	Da	Da	Da	Da	De	De	De	De	De	De	De	De	De	De	De	De
11	Da	Da	Da	Da	Da		De	De	De	Da	De	De	e	e	e	e
12	Da	Da	Da	Da	Da	De	De	De	De	Da	De	De	e	e	e	e
18	Da	Da	Da	Da	Da	De	De	De	De	De	De	De	De	De	De	De
14	a	a	a	a	e	a	e	e	e	e	e	e	e	e	e	e
4	a	a	a	a	a	a	e	e	e	e	e	e	e	e	e	e

Tabla 3.25.- Organización Jerárquica de estudiantes y problemas.

Un segundo grupo (E2) compuesto por dos estudiantes, que escribieron ecuaciones para todos los problemas excepto para todos los PLA del test, excepto en el problema 1.2 ambos estudiantes, y el 1.4 uno de ellos. Además uno de estos estudiantes escribió algunas ecuaciones incorrectas.

Un tercer grupo (E3) compuesto por los quince estudiantes restantes, que presentaron resoluciones de los problemas del test intentando no usar ecuaciones, declarando, explícitamente en algunos casos, cuándo un problema no lo podían resolver sin ecuaciones y optando bien por dejarlo en blanco o bien por escribir las ecuaciones correspondientes.

En lo que sigue se consideran únicamente las resoluciones de los estudiantes del grupo E3.

3.7.4.5.-Las resoluciones de los problemas PLAr

3.7.4.5.1.-Los tipos de razonamiento

En la tabla 3.28 se da cuenta de los modos de resolver: mediante tanteo (T) mediante ecuaciones (E) y los tipos de razonamiento (RC, RP, RP*), cuando el modo de resolver era aritmético, que se encontraron en las resoluciones de cada uno de los estudiantes del grupo E3. La tabla 3.29 da cuenta de las frecuencias y la tabla 3.30 de los porcentajes En la tabla 3.28, las filas corresponden a los 15 estudiantes del grupo E3[26], las columnas de las tablas donde se sitúan los problemas se han ordenado de la siguiente manera:

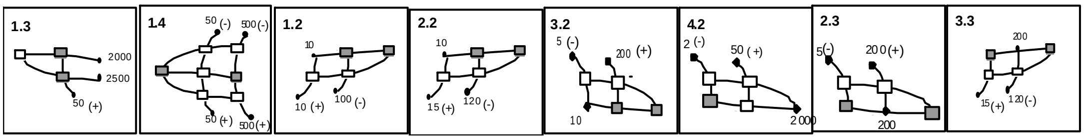
-las dos primeras columnas refieren a los problemas (1.3,1.4) en los que la concurrencia de las aristas multiplicativas en un nodo indican la presencia de una relación de proporcionalidad directa entre las otras dos cantidades de las arista que no son nodo.

-las seis segundas columnas refieren a los problemas en los que concurren aristas multiplicativas en un nodo, la concurrencia de aristas multiplicativas en el nodo indica la presencia de una relación de proporcionalidad inversa entre las otras cantidades de las aristas que no son nodo.

-de las seis segundas columnas las cuatro primeras corresponden a problemas en los que se dan como datos, los días y los días de más o de menos, y las dos últimas corresponden a problemas en los que los datos son las páginas diarias y las páginas diarias de más o de menos.

Y en la cabecera de la tabla 3.28 figura un cuadro con una lectura algebraica de los problemas.

[26]En la tabla 3.28 se han jerarquizado de nuevo los estudiantes, por el procedimiento taxonómico descrito en **3.7.3**, teniendo ahora también en cuenta el tipo de razonamiento, en el ánimo de facilitar las observaciones.



Estud.	1.3	1.4	1.2	2.2	3.2	4.2	2.3	3.3
10	P*	P*	C	C	C	C	C	C
16	P*	P*	C	C	C	C	P	T
9	P*	P*	P	C	C	C	P, C	C
20	P*	P*	C	C	P	C	P	C
21	P*	P*	P	C	P	C		C
15	P*	P*	P	C	P	C	P	C
2	P*	P*	P	C	P	C	P	UR
3	P*	P*	P	C	P	P		C
5	P*	P*	P	C	P	C	P	C
6	P*	P*	P	P	C	E		E
7	P*	P*	E	E	C	C	E	C
8	P	P*	P	C	P	P	P	P
1	P*	P*	P	P,T	T	T	T	UR
13	P*	P*	T	E	T	T	E	T
17	P*	P*	P	T	P	T	P	T

Tabla 3.28.-C- Razonamiento de tipo RC. P y P*- razonamiento de tipo RP y RP*. E –ecuaciones UR-Uso de resultados de otros problemas

Problema/ nº de Estd.	1.3	1.4	1.2	2.2	3.2	4.2	2.3	3.3
C	0	0	3	10	5	9	2	8
RP	1	0	10	2	8	2	8	1
RP*	14	15	0	0	0	0	0	0
T	0	0	1	2	2	3	1	3
E	0	0	1	2	0	1	2	1
Blanco	0	0	0	0	0	0	3	0
UR	0	0	0	0	0	0	0	2

Tabla 3.29.-Problemas PLAr. Modos de resolver y razonamientos (frecuencias)

Problema/ Estdu. nº	1.3	1.4	1.2	2.2	3.2	4.2	2.3	3.3
C	0	0	20	67	33	60	13	53
RP	7	0	67	13	13	13	53	0
RP*	93	100	0	0	0	0	0	0
T	0	0	7	13	13	20	7	20
E	0	0	7	13	0	7	13	7
Blanco	0	0	0	0	0	0	20	0
UR	0	0	0	0	0	0	0	13

Tabla 3.30.-Problemas PLAr. Modos de resolver y razonamientos (porcentajes)

De la observación de las tablas se desprende que:

En los problenas 1.3,1.4 se utilizaron, de modo exclusivo, razonamientos del tipo RP*, excepto en el caso de un estudiante. Además, en las resoluciones del problema 1.4, los estudiantes hicieron constar que no se podía determinar el número de paginas o que podía ser cualquiera. Algunos estudiantes añadieron : *cualquiera menor que 500.* En ambos problemas se utiliza una razon : "el cociente de las diferencias de paginas y paginas diarias" para determinar el número de días.

En el resto de los problemas (1.2, 2.2, 3.2, 4.2, 2.3, 3.3) donde la relación de proporcionalidad es inversa :

- tres estudiamtes, (nº 1,13,17), que hicieron uso del tanteo nunca usaron razonamientos de tipo RC, ver Tabla 3.28.

- un único estudiante, (nº 10), utilizó razonamientos de tipo RC en todos los problemas.

- el resto de estudiantes utilizaron razonamientos de tipo RC y RP, según la escala que puede apreciarse al leer la tabla de arriba abajo hasta llegar al estudiante nº 8 que utilizó razonamientos de tipo RP, en todos los problemas excepto el 2.2, estudiante que también utilizó este tipo de razonamiento RP en el problema 1.3.

-se muestra una tendencia a usar razonamientos de tipo RP en los problemas 1.2, 3.2 y 4.2 y una tendencia a usar razonamientos de tipo RC en el resto de los problemas, ver Tabla 3.30. Esto es, se observa que la tendencia a usar RP lo es en los problemas donde las relaciones númericas entre las cantidades estan en la razón de *1 a 2 y se puede razonar con doble y mitad.*

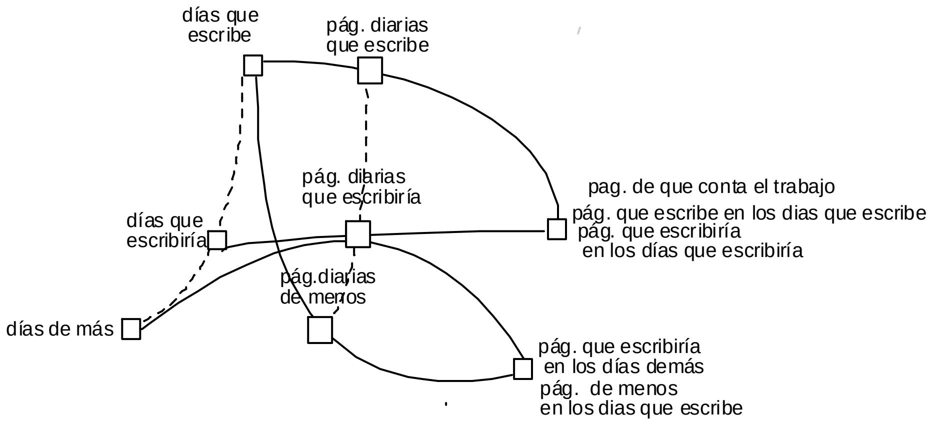
3.7.4.5.2 Estudio de los razonamientos del tipo RC.

En las resoluciones de los problemas PLAr, que se da un tipo de razonamiento RC, el grafo de la resolución es uno de los dos subgrafos del grafo teórico de la situación MECA que aparecen en las figura 3.25.

Si comparamos ambos grafos con los grafos esquemas correspondientes a las lecturas algebraicas de los problemas, en gris en la fig. 3.26, queda claramente indicado que en el grafo correspondiente a la lectura algebraica se ha introducido una cantidad y dos aristas en ambos casos.

En el caso del grafo A, fig.3.26, ello indica que los estudiantes en los razonamientos de tipo RC introducen la cantidad « páginas de menos (que escribe) en los días que escribe » usando la arista (1) la interpretan como la cantidad « páginas que escribiría en los días de más », lo que les permite servirse de la relación entre las cantidades involucradas en la arista (2). Análogamente puede leerse acerca de las cantidades involucradas en el grafo B. Lo que nos lleva a dos tipos de enfoque diferente A y B en los razonamientos RC.

Grafo A



Grafo B

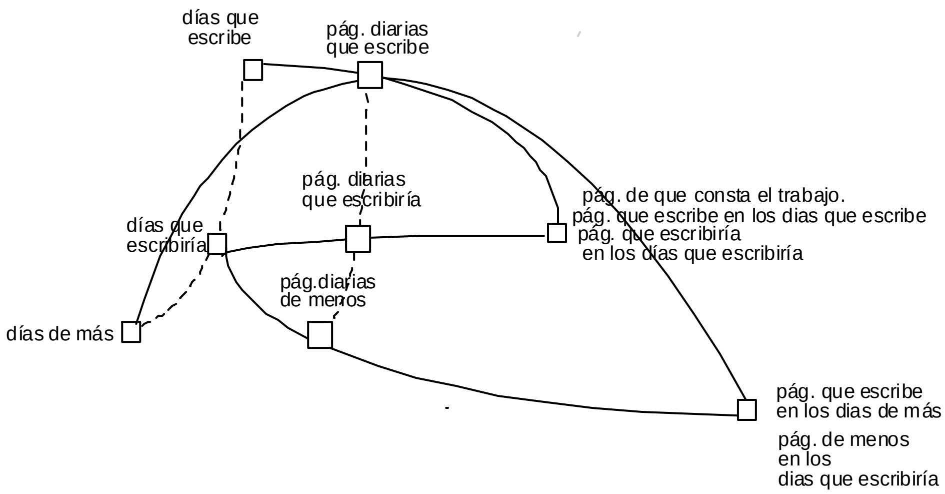


fig. 3.25.- Subgrafos del grafo teórico usados en las resoluciones.

Grafo A Grafo B

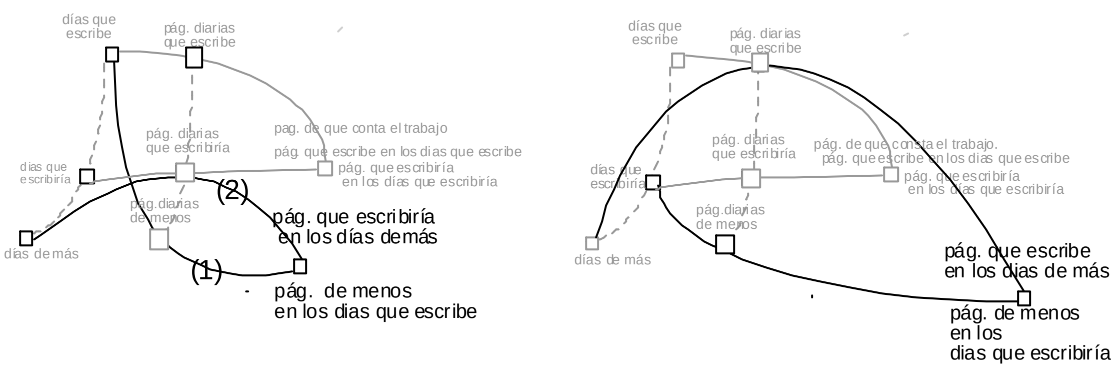
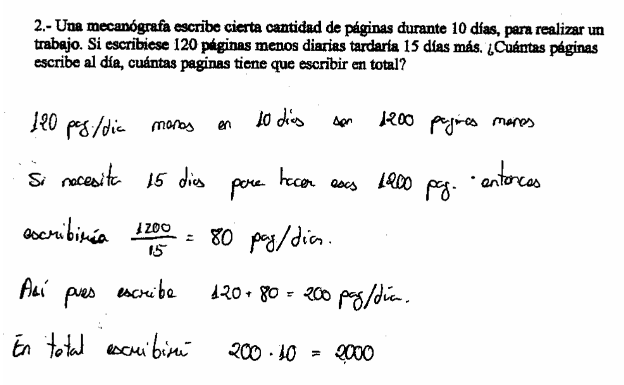


fig 3.26.-Superposición de grafos de las resoluciones y de las lecturas algebricas.

En las fig 3.27 y 3.28 se muestran resoluciones de estudiantes en las que los razomamientos de tipo RC, para un mismo problema (2.2) optan por uno de los enfoques A o B. Las resoluciones vienen acompañadas por los grafos de las resoluciones. Debe señalarse que dada la estructura de datos del problemas (2.2) el uso del enfoque B requiere de la determinación previa de la cantidad « días que escribiría ».


2.- Una mecanógrafa escribe cierta cantidad de páginas durante 10 días, para realizar un trabajo. Si escribiese 120 páginas menos diarias tardaría 15 días más. ¿Cuántas páginas escribe al día, cuántas paginas tiene que escribir en total?

120 pag/dia menos en 10 días son 1200 páginas menos

Si necesita 15 días para hacer esas 1200 pag. entonces

escribiría $\frac{1200}{15} = 80$ pag/día.

Así pues escribe $120 + 80 = 200$ pag/día.

En total escribirá $200 \cdot 10 = 2000$

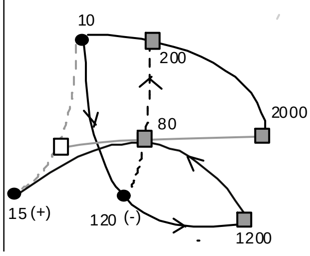
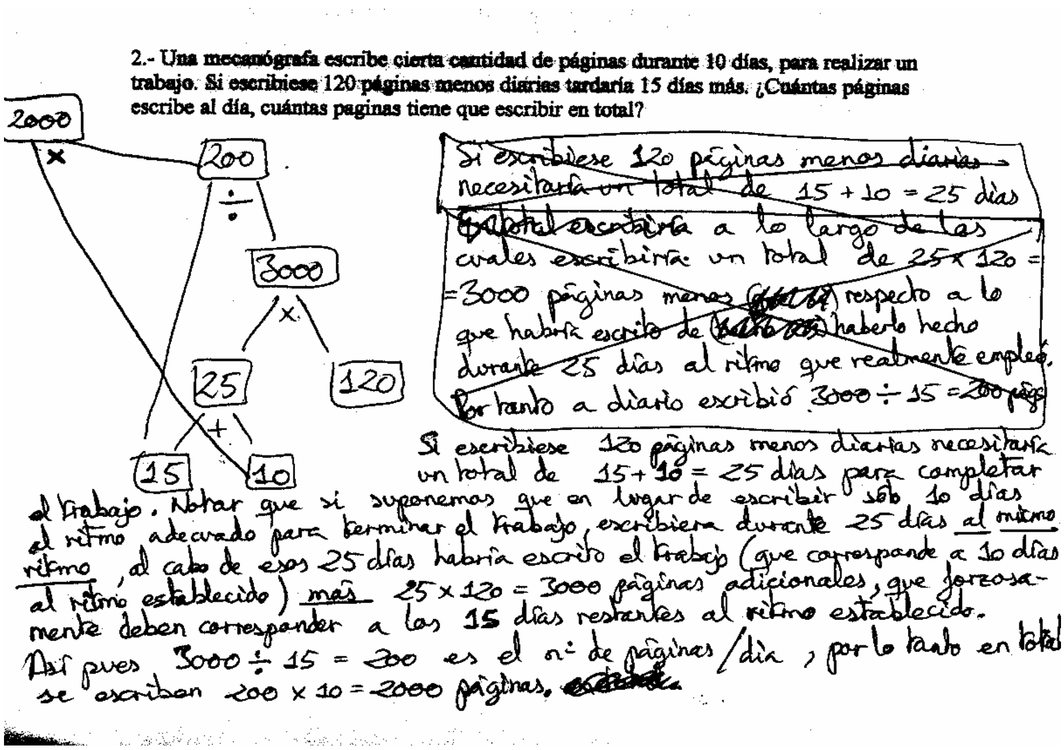


fig.3.27.- Problema 2.2. Razonamiento RC con enfoque A y grafo de la resolución.


2.- Una mecanógrafa escribe cierta cantidad de páginas durante 10 días, para realizar un trabajo. Si escribiese 120 páginas menos diarias tardaría 15 días más. ¿Cuántas páginas escribe al día, cuántas paginas tiene que escribir en total?

~~Si escribiese 120 páginas menos diarias necesitaría un total de 15 + 10 = 25 días a lo largo de las cuales escribirá un total de 25 × 120 = = 3000 páginas menos respecto a lo que habría escrito de haberlo hecho durante 25 días al ritmo que realmente empleó. Por tanto a diario escribió 3000 ÷ 15 = 200 pág.~~

Si escribiese 120 páginas menos diarias necesitaría un total de 15 + 10 = 25 días para completar el trabajo. Notar que si suponemos que en lugar de escribir sólo 10 días al ritmo adecuado para terminar el trabajo, escribiera durante 25 días al mismo ritmo, al cabo de esos 25 días habría escrito el trabajo (que corresponde a 10 días al ritmo establecido) más 25 × 120 = 3000 páginas adicionales, que forzosamente deben corresponder a los 15 días restantes al ritmo establecido. Así pues 3000 ÷ 15 = 200 es el nº de páginas/día, por lo tanto en total se escriben 200 × 10 = 2000 páginas.

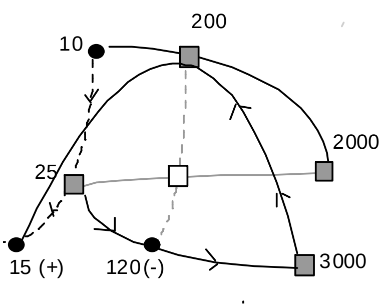


fig.3.28.- Problema 2.2. Razonamiento RC con enfoque B y grafo de la resolución.

La tabla 3.31 muestra las frecuencias y porcentajes de los enfoques A y B en las resoluciones. De ellas, parece desprenderse una ligera tendencia global a usar el enfoque A frente al B (57% frente a 47%). En la tabla se puede pareciar – ya que los problema aparecen ordenados según enfoque-que cada uno de los enfoques parece como propio de un grupo de problemas. Que tal tendencia no se debe a las preferencias de los estudiantes por usar uno de los enfoques se muestra en la tabla 3.32, donde puede apreciarse que no hay un solo estudiante que utilice el mismo enfoque para todos los problemas.

Sin embargo, si atendemos a la equivalencia de los problemas o a su isomorfía relacional y aditiva, esto es, a su pertenencia a una de las dos situaciones MECA(-) o MECA(+) como se hace en las tablas 3.33, 3.24, veremos que hay una manifiesta asociación entre enfoque y equivalencia de problemas y situación de la que provienen.

.

problema	2.3	1.2	3.3	2.2	3.2	4.2	total
Enfoque A	2 **100**	3 **100**	8 **100**	7 **70**	0 **0**	0 **0**	20 **57**
Enfoque B	0 **0**	0 **0**	0 **0**	3 **30**	3 **100**	9 **100**	15 **43**
Razonamiento RC	2	3	8	10	3	9	35

Tabla 3.31.- Enfoques de los problemas(frecuencias y **porcentajes**)

Problema/ Estdu. nº	1.2	2.2	3.2	4.2	2.3	3.3
1						
2		A		B		
3		A				A
5		A		B		A
6						
7			B	B		A
8		A				
9		B		B	A	A
10	A	B	B	B	A	A
13						
15		B		B		A
16	A	A	B	B		
17						
20	A	A		B		A
21		A		B		A

Tabla 3.32.- Enfoques de los problemas y estudiantes

	equivalentes 1.2 , 2.2	equivalentes 3.2 , 4.2	total
enfoque A	10	0	10
enfoque B	3	12	15
total	13	12	25

Tabla 3.33.- Enfoques y equivalencia de problemas.

	Sit. MECA(-) 1.2 , 2.2, 3.3	Sit. MECA(+) 3.2 , 4.2, 2.2	total
enfoque A	18	2	20
enfoque B	3	12	15
total	21	14	35

Tabla 3.34.- Enfoques y Situación.

Los Grafos de las resoluciones .

Para los problemas en los que la resolución contenía un razonamiento de tipo RC los grafos de las resoluciones encontrados para los problemas PLAr del test fueron los siguientes :

Con enfoque A :

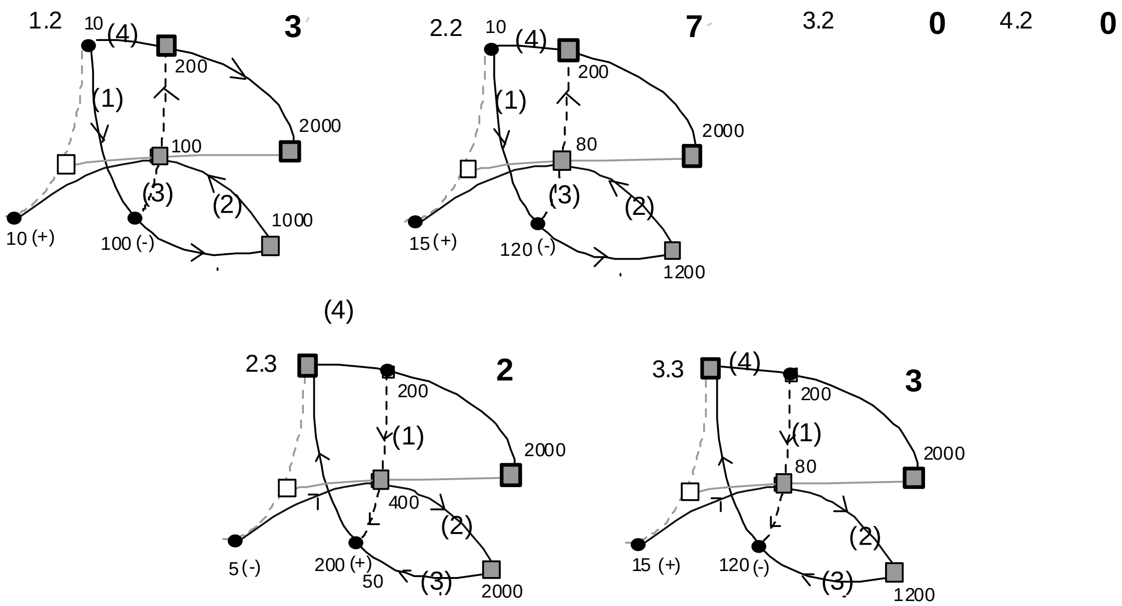


fig. 3.29- Grafos de las resoluciones de tipo RC. Enfoque A.
Los números en negrita indican el número de resoluciones.
Los números entre paréntesis el orden de oscurecimiento de las aristas.

Con enfoque B :

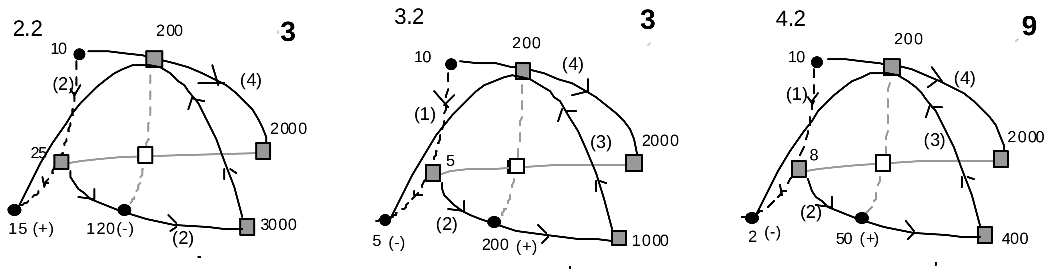


fig .3.30.- Grafos de las resoluciones de tipo RC. Enfoque B.
Los números en negrita indican el número de resoluciones.
Los números entre paréntesis el orden de oscurecimiento de las aristas

3.7.4.5.2.- El estudio de los razonamientos de tipo RP.

Tal y como muestra la tabla 3.35 los razonamientos de tipo RP, se encontraron con mayor frecuencia en los problemas 1.2, 3.2 y 2.3, esto es, en los problemas entre los que hay una relación de "doble o mitad" entre:

días que escribe y días que escribiría (1.2, 3.2).
páginas diarias que escribe y páginas diarias que escribiría (2.3).

Problema/ nº de Estdudiantes	1.3	1.4	1.2	2.2	3.2	4.2	2.3	3.3
RP	1	0	10	2	8	2	8	1

Tabla 3.35.- Frecuencia de uso de los razonamientos RP por los 15 estudiantes del grupo E3

En los problemas restantes el uso de este tipo de razonamiento proviene de un estudiante (nº 8) que lo usó de modo sistemático en todos los problemas, con la excepción del problema 2.2, y de dos estudiantes, uno de ellos que lo usó en el problema 2.2 y otro en el problema 4.2. El primer estudiante será considerado como caso aparte y las resolución de los dos últimos estudiantes se consideran al final del estudio de la relación doble y mitad.

El uso de la relación doble y mitad y la relación de proporcionalidad inversa.

El discurso de las resoluciones en las que se menciona "el doble" o/y "la mitad" se puede considerar "*escueto*", donde la mención de las relaciones "doble, mitad" se considera suficiente para determinar la cantidad deseada "días que escribe" o "páginas que escribe", que a continuación se determina –fig. 3.29- , o "*abundante*", donde se apunta como se usa esta relación para, a partir de ella, determinar la cantidad deseada –fig. 3.30-.

Lo que se desprende de los discursos sean éstos “escuetos” o “abundantes” es que los estudiantes no hacen uso de otra relación de proporción que:

días que escribe : días que escribiría :: páginas que escribiría : páginas que escribe

de donde desprenden que, si una de las razones es “la mitad”, la otra pensada como razón inversa es “el doble” . Por ejemplo

Si días que escribe : días que escribiría = 1 :: 2 ,
entonces páginas que escribe : páginas que escribiría =2 :: 1

Así, en el caso del problema 2.2 los estudiantes disponen de los datos

nº de días que escribe = 10 y nº de días de menos = 5

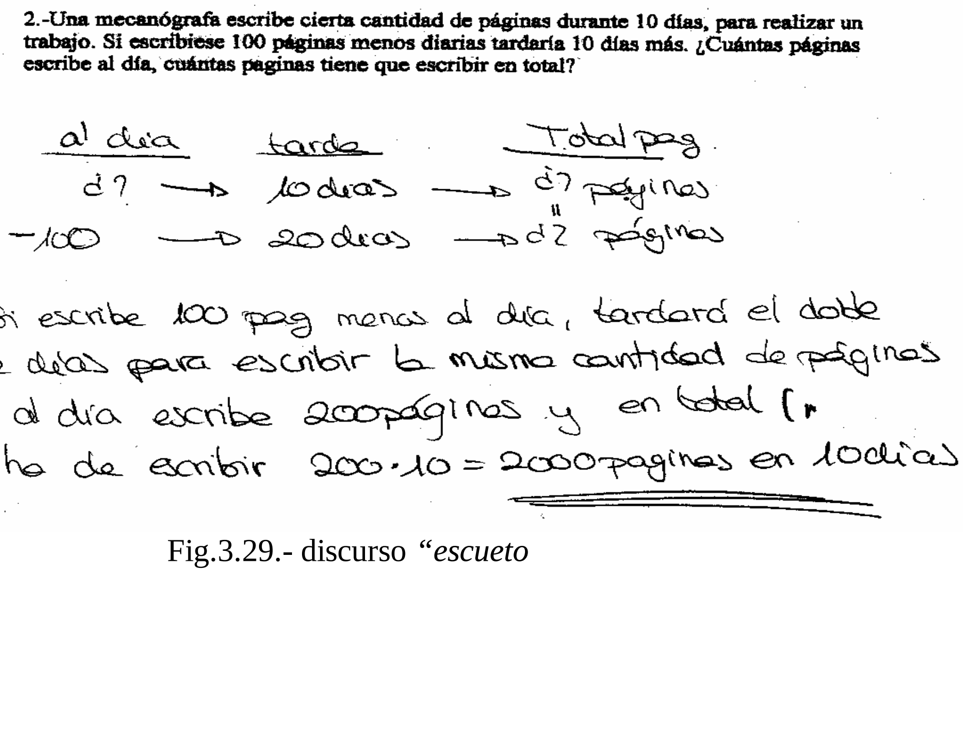
a partir del cual obtienen -fig3.30- resolución a) , siendo éste el caso general.

nº de días que escribiría = 5

La relación numérica entre ambas cantidades les permite afirmar que “tarda la mitad”, de donde “hace el doble por día”, las “páginas diarias que escribe” son el doble. Ahora bien, como no disponen de las “páginas diarias que escribiría” sino de la diferencia entre una y otras páginas diarias, se ven abocados al subproblema:

“Encontrar dos números dados conocida su razón y su diferencia” (D.I.4),

problema fácilmente resoluble, incluso mentalmente, cuando la razón es “2 “. En los discursos *“escuetos*”, de este subproblema no hay ni rastro, ver figs. 3.29. En los discursos *“abundantes”* se encuentran frases como “entonces las que escribía más 200 es el doble de las que escribía”, o “Al día escribe 200 páginas diarias (si aumentamos 200 es el doble)”, ver fig.3.30 que da cuenta de que este subproblema ha sido considerado y resuelto.


2.-Una mecanógrafa escribe cierta cantidad de páginas durante 10 días, para realizar un trabajo. Si escribiese 100 páginas menos diarias tardaría 10 días más. ¿Cuántas páginas escribe al día, cuántas paginas tiene que escribir en total?

al día   tarda   Total pag.
d? → 10 días → d? páginas
-100 → 20 días → d? páginas

Si escribe 100 pag menos al día, tardará el doble de días para escribir la misma cantidad de páginas
→ al día escribe 200 páginas y en total [r
ha de escribir 200·10 = 2000 páginas en 10 días

Fig.3.29.- discurso *“escueto*

2.-Una mecanógrafa escribe cierta cantidad de páginas durante 10 días, para realizar un trabajo. Si escribiese 100 páginas menos diarias tardaría 10 días más. ¿Cuántas páginas escribe al día, cuántas paginas tiene que escribir en total?

Si escribiendo 100 páginas menos tarda el doble
escribe la mitad de páginas al día
Entonces escribe $200 = 2(100)$. paginas al día
$\overset{\shortparallel}{\underset{200-100}{}}$
y escribe 2000 páginas en total.

$\boxed{\text{Conclusion} \quad 200 \text{ pag/día} \quad 2000 \text{ páginas en total}}$

Fig.3.29.- discurso *"escueto*

2.- Una mecanógrafa, para realizar un trabajo, escribe cierta cantidad de páginas durante 10 días. Si escribiese 200 páginas diarias más, tardaría 5 días menos. ¿Cuántas páginas escribe al día, cuántas paginas tenía que escribir en total?

200 paginas diarias más → tarda 5 días.
Haciendo 200 paginas diarias más - tarda la mitad
Entonces lo que quiere decir es que hace el doble por día → Al día escribe 200 paginas diarias (si aumentamos 200 es el doble)

Tenía que escribir 2000 paginas.

a)

2.- Una mecanógrafa, para realizar un trabajo, escribe cierta cantidad de páginas durante 10 días. Si escribiese 200 páginas diarias más, tardaría 5 días menos. ¿Cuántas páginas escribe al día, cuántas paginas tenía que escribir en total?

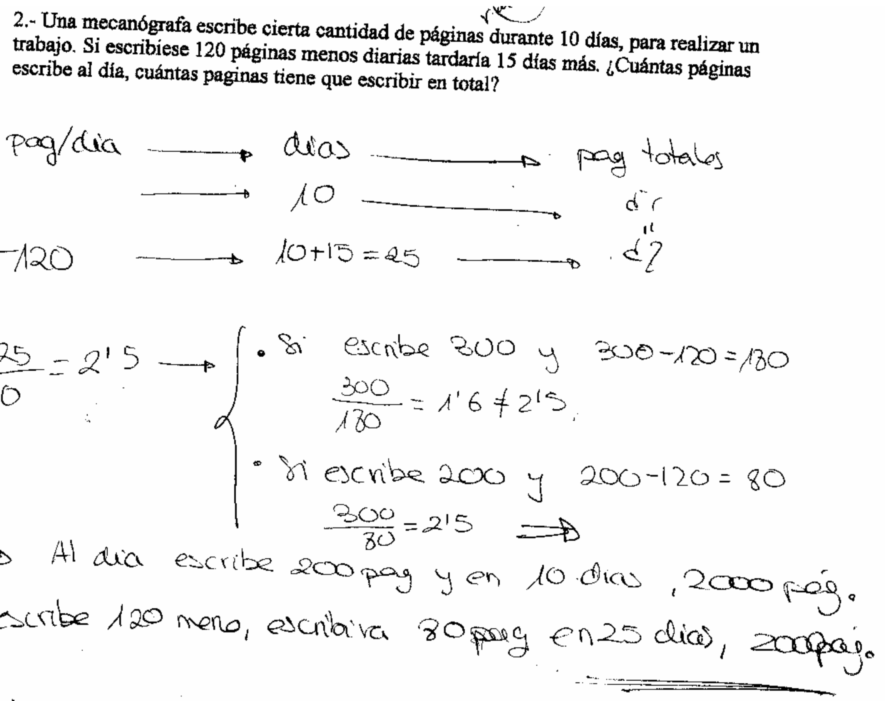
Si con 200 paginas diarias de más, tarda 5 dias menos que es la mitad de 10 dias.
Entonces las que escribia más 200 es el doble de lo que escribia.
Por tanto escribe <u>al dia 200 paginas.</u>

En total 200 pag/dia · 10 dias = <u>2000 paginas</u>

b)

Fig.3.30.- discursos *"abundantes"*

La confirmación de que este problema es considerado la encontramos en la soluciones de la fig. 3.31, en esta resolución, el estudiante, con una razón considerada, recurre al tanteo para determinar usando la diferencia y la razón la cantidad "páginas que escribe al día".


2.- Una mecanógrafa escribe cierta cantidad de páginas durante 10 días, para realizar un trabajo. Si escribiese 120 páginas menos diarias tardaría 15 días más. ¿Cuántas páginas escribe al día, cuántas paginas tiene que escribir en total?

pag/dia → dias → pag totales
→ 10 → ¿?
−120 → 10+15 = 25 → ¿?

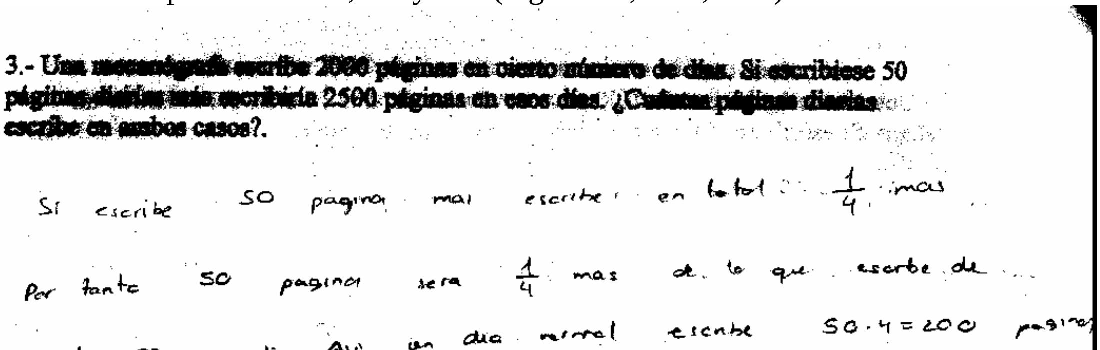
$\frac{25}{10} = 2'5$ →
• Si escribe 300 y 300−120 = 180; $\frac{300}{180} = 1'6 \neq 2'5$
• Si escribe 200 y 200−120 = 80; $\frac{200}{80} = 2'5$ ⇒

⇒ Al dia escribe 200 pag y en 10 dias, 2000 pág.
Si escribe 120 meno, escribiria 80 pag en 25 dias, 2000 pág.

Fig.3.31.- Resolución del subproblema (D.I.4) mediante tanteo.

El uso de otras proporciones. Estudio del caso del estudiante nº 8.

Las resoluciones de este estudiante nº 8 pueden verse en el anexo **A3.6** Las resoluciones de los problemas en los que hay una relación "doble y mitad", son semejantes a las de otros estudiantes por lo que centraremos la atención en las resoluciones de los problemas 1.3, 3.3 y 4.2. (Figs. 3.32, 3.33, 3.34).


3.- Una mecanógrafa escribe 2000 páginas en cierto número de días. Si escribiese 50 páginas diarias más escribiría 2500 páginas en esos días. ¿Cuántas páginas diarias escribe en ambos casos?.

Si escribe 50 pagina mas escribe en total $\frac{1}{4}$ mas
Por tanto 50 paginas sera $\frac{1}{4}$ mas de lo que escribe de normal en un dia. Asi un dia normal escribe 50·4 = 200 paginas

Fig.3.32. -Resolución del problema 1.3

El problema 1.3 es un problema que los estudiantes, en general, resolvieron mediante el cociente de diferencias, "de páginas totales y de páginas diarias", obteniendo así el "número de días que escribe", y posteriormente, el "número de páginas diarias que escribe en esos días". Sin embargo, el estudiante que estamos considerando determina directamente el “número de páginas diarias que escribe” haciendo uso de la proporción:

páginas de más **:** paginas que escribe **::** páginas diarias de más **:** páginas que escribe

esto es :

1 **:** 4 **: :** 50 **:** --

De manera semejante se comporta en el problema 4.2 donde utiliza la proporción:

días de menos **:** días que escribe **::** páginas diarias de menos **:** páginas diarias que escribiría

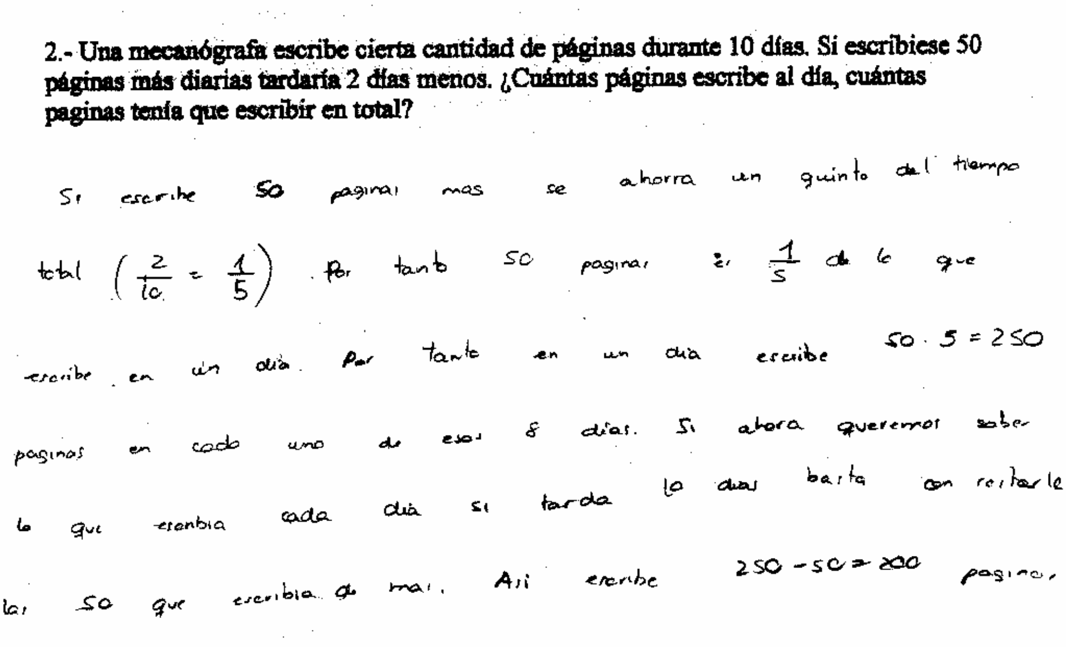
esto es:

1 **:** 5 **: :** 50 **:** --

determina este número de páginas como 250 y, a partir de ahí, determina las páginas que escribe.

Puede observarse en la resolución como la razón 1/5 es conceptualizada como la parte del tiempo total que se ahorra.” Si escribe 50 páginas más se ahorra un quinto del tiempo total (2/10 = 1/5) “. Dicha conceptualización parece hacer posible el uso de la relación de proporcionalidad anterior, cuando la concebimos expresada:

“la parte del tiempo ahorrado es igual que la parte de páginas diarias ahorradas”.



2.- Una mecanógrafa escribe cierta cantidad de páginas durante 10 días. Si escribiese 50 páginas más diarias tardaría 2 días menos. ¿Cuántas páginas escribe al día, cuántas paginas tenía que escribir en total?

Si escribe 50 paginas mas se ahorra un quinto del tiempo total $\left(\frac{2}{10} = \frac{1}{5}\right)$. Por tanto 50 paginas es $\frac{1}{5}$ de lo que escribe en un dia. Por tanto en un dia escribe $50 \cdot 5 = 250$ paginas en cada uno de esos 8 dias. Si ahora queremos saber lo que escribia cada dia si tarda 10 dias basta con restarle las 50 que escribia de mas. Asi escribe $250 - 50 = 200$ paginas

fig. 3.33.- Resolución del problema 4.2

En el problema 3.3, la razón “páginas diarias de menos / paginas que escribe” se conceptualiza como partes del total –del trabajo-. Esta razón, que resulta ser 3 / 5, se dice que es la parte del trabajo realizada en 15 días - los días de más- y, a partir de ahí, se obtienen los días necesarios para hacer los 2 /5 del trabajo restante.

3.- Una mecanógrafa escribe 200 páginas diarias durante un cierto número de días, para realizar un trabajo, si escribiese 120 páginas diarias menos, tardaría 15 días más. ¿Cuántas páginas escribe al día, cuántas tiene que escribir en total?.

Si escribe 120 paginas menos, entonces escribe $200 - 120 = 80$ paginas al dia

Y como tarda para hacer $\frac{3}{5}$ partes del total 15 dias $\left(\frac{120}{200} = \frac{3}{5}\right)$

entonces para hacer las $\frac{2}{5}$ partes restantes tardara 10 dias

(ya que si $\frac{3}{5}$ son 15 dias entonces los $\frac{5}{5}$ seran 25 dias)

Por tanto si escribe 25 dias 80 pagina escribia

$25 \cdot 80 = 2000$ paginas

Fig. 3.34. - Resolución del problema 3.3

3.7.4.6.-Las resoluciones de los PLAg

La Tabla 3.35 da cuenta de lo que hicieron los estudiantes con los problemas 2.3, 4.3, 3.4 y 4.4. En ella se hace constar para cada uno de los 15 estudiantes lo que se consideran aquí de lo que constaba en el espacio en blanco que quedaba bajo el enunciado del problema para su resolución.

La mayor parte de ellos declara expresamente ’No, sin algebra ‘, ‘No sé’, hace una raya y escribe unas ecuaciones o simplemente el espacio se deja en blanco o escribe ecuaciones. No obstante, algunos estudiantes presentaron resoluciones sin ecuaciones. ver anexo **A3. 6**

De estos estudiantes :

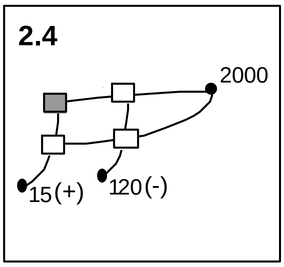
los estudiantes nº 1 y 2, que usaron los resultados de otros problemas, problemas del test que contenian como datos algunos de los datos de estos problemas, para dar el resultado del problema propuesto,

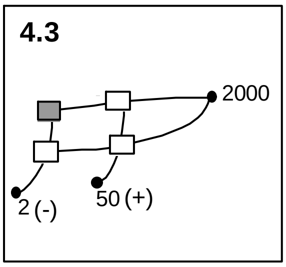
el estudiante nº 17 que utilizó el tanteo en los problemas PLAr y siguió utilizando esta manera de resolver con éstos problemas. ver fig. 3.35,

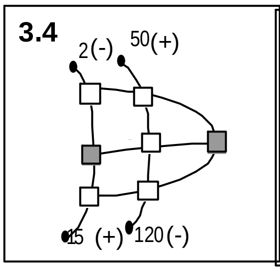
el estudiante nº 10 que hizo una inmersión de este problema en el « mundo de la divisibilidad » y presentó una resolución del problema con una solución del problema 2.4 por medio de un razonamiento que parte de :

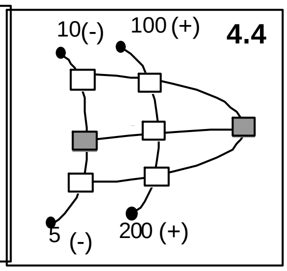
« el total de páginas por día ha de ser divisor de 2000 y mayor de 120 » para proceder, a partir de ahí, a encontrar el resultado mediante un examen de posibilidades , ver fig. 3.36.

La misma inmersión fué intentada por el estudiante nº 16 con el problema 3.4, pero abandonó y pasó a escribir ecuaciones, ver fig.3.37.









Problemas/ Estudiante nº	2.4	4.3	3.4	4.4
1	No puede *Usa res. 2.2*	No puede *Usa res. 2.3*	No puede *Usa 2.1,2.2*	¿ ?
2	*Usa 2.2*		*Da resultado*	**Doble y mitad**
3	No, sin algebra. En blanco	No, sin algebra. En blanco	No, sin algebra. En blanco	No, sin algebra. En blanco
5	No, Sinecuacio.	Ecuaciones	No se hacerlo	Toma datos
6	Hace calculos.			Toma datos
7	**Discurso**	Ecuaciones	Ecuaciones	Ecuaciones
8	No sé, Ecuaciones	No sé, Ecuaciones	No sé, Ecuaciones	No sé, Ecuaciones
9				
10	**Solución. Divisores**.			
13	Blanco Ecuaciones	Blanco Ecuaciones	Blanco Ecuaciones	**Discurso**
15		Ecuaciones		
16	**Discurso**	**Discurso**	**Discurso Divisores**.	Complcado. Ecuaciones
17	*Tanteo*	*Tanteo*	*Tanteo*	*Tanteo*
20	**Discurso**	**Discurso**	**Discurso**	**Discurso**
21		Ecuaciones		

Tabla 3.35.-De lo que consta en las Resoluciones de los PLAg

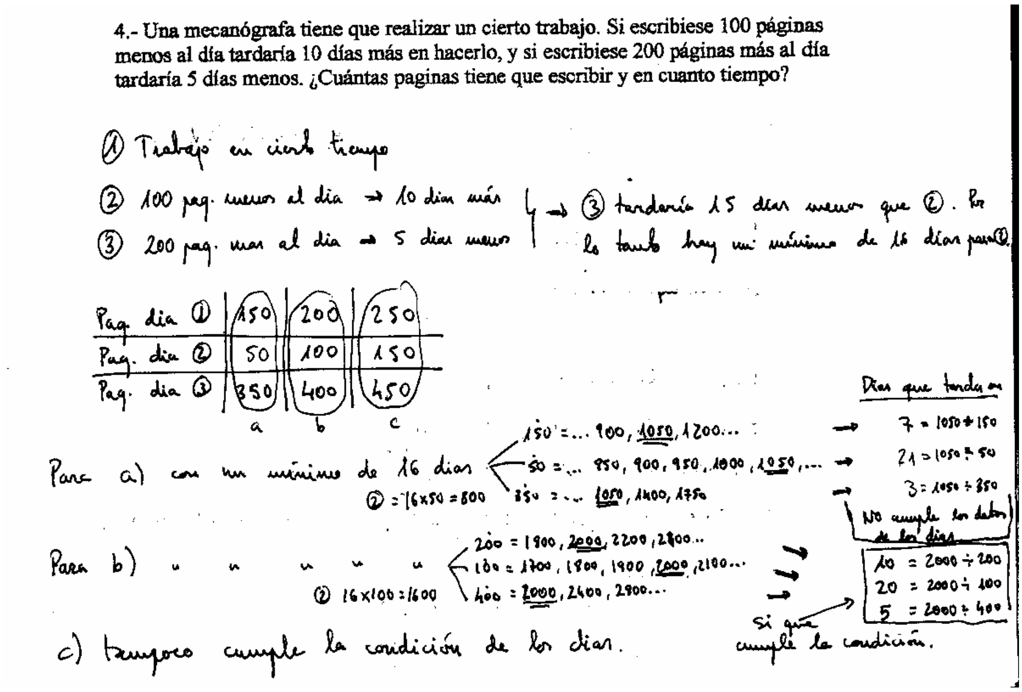


fig.3.35.- Resolución mediante tanteo de 4.4

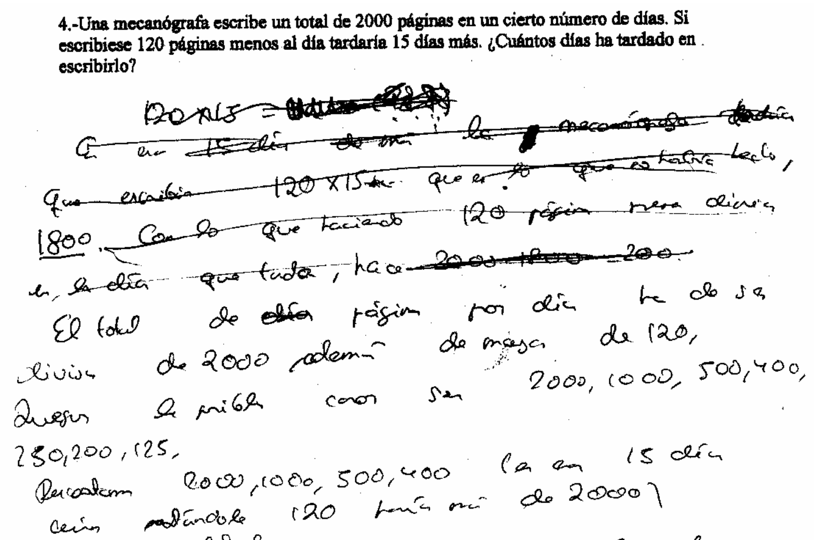
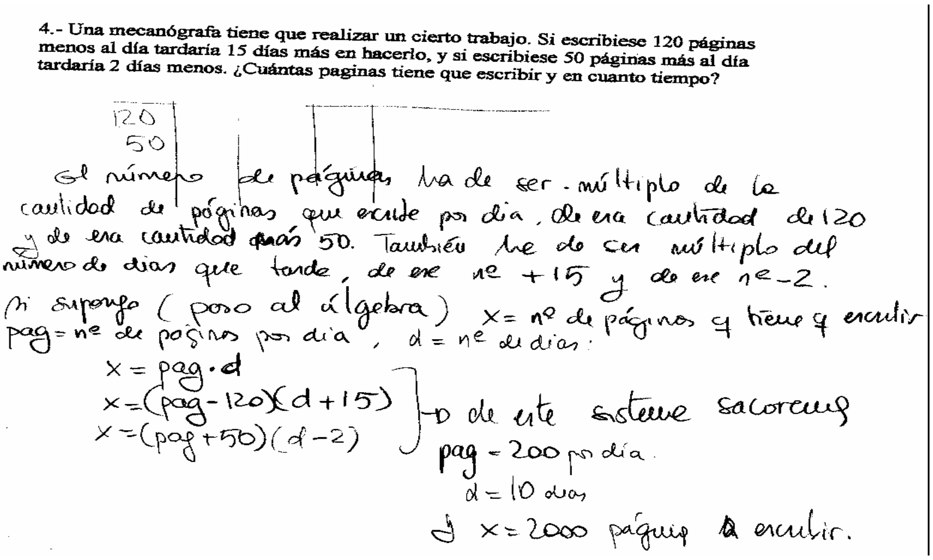
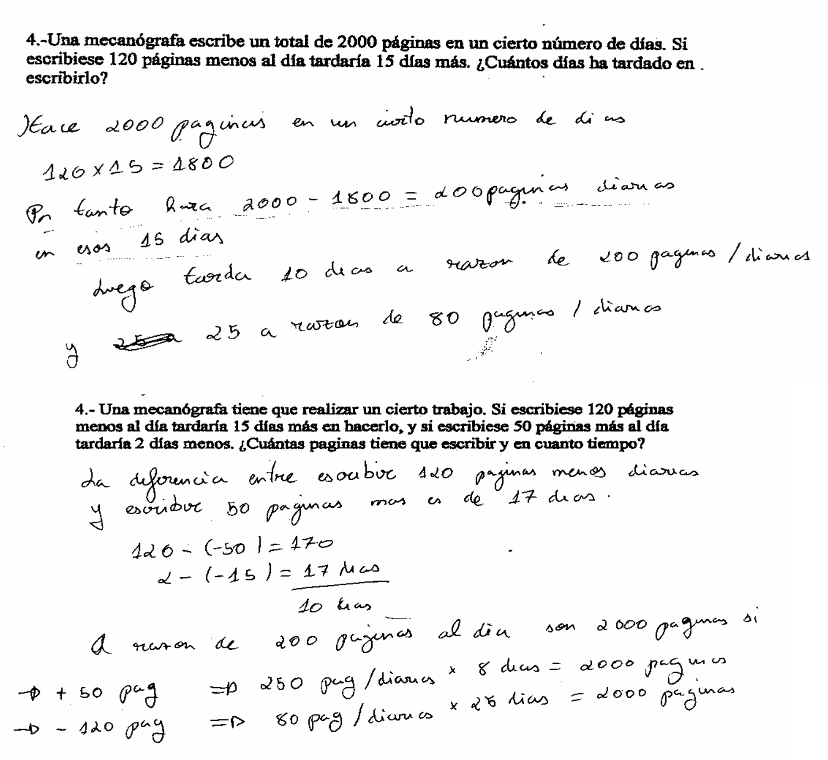


fig.3.36.- Resolución del problema 2.4


4.- Una mecanógrafa tiene que realizar un cierto trabajo. Si escribiese 120 páginas menos al día tardaría 15 días más en hacerlo, y si escribiese 50 páginas más al día tardaría 2 días menos. ¿Cuántas paginas tiene que escribir y en cuanto tiempo?

120
50
El número de páginas ha de ser múltiplo de la cantidad de páginas que escribe por día, de esa cantidad de 120 y de esa cantidad más 50. También ha de ser múltiplo del número de días que tarde, de ese nº + 15 y de ese nº - 2.
Si supongo (paso al álgebra) x = nº de páginas q tiene q escribir
pag = nº de páginas por día, d = nº de días.
x = pag · d
x = (pag - 120)(d + 15)
x = (pag + 50)(d - 2) → de este sistema sacaremos
pag = 200 por día
d = 10 días
y x = 2000 páginas a escribir.

fig.3.37.- Resolución del problema 3.4


4.-Una mecanógrafa escribe un total de 2000 páginas en un cierto número de días. Si escribiese 120 páginas menos al día tardaría 15 días más. ¿Cuántos días ha tardado en escribirlo?

Hace 2000 paginas en un cierto numero de dias
120 x 15 = 1800
Por tanto hace 2000 - 1800 = 200 paginas diarias
en esos 15 dias
luego tarda 10 dias a razon de 200 paginas / diarias
y ~~25~~ 25 a razon de 80 paginas / diarias

4.- Una mecanógrafa tiene que realizar un cierto trabajo. Si escribiese 120 páginas menos al día tardaría 15 días más en hacerlo, y si escribiese 50 páginas más al día tardaría 2 días menos. ¿Cuántas paginas tiene que escribir y en cuanto tiempo?

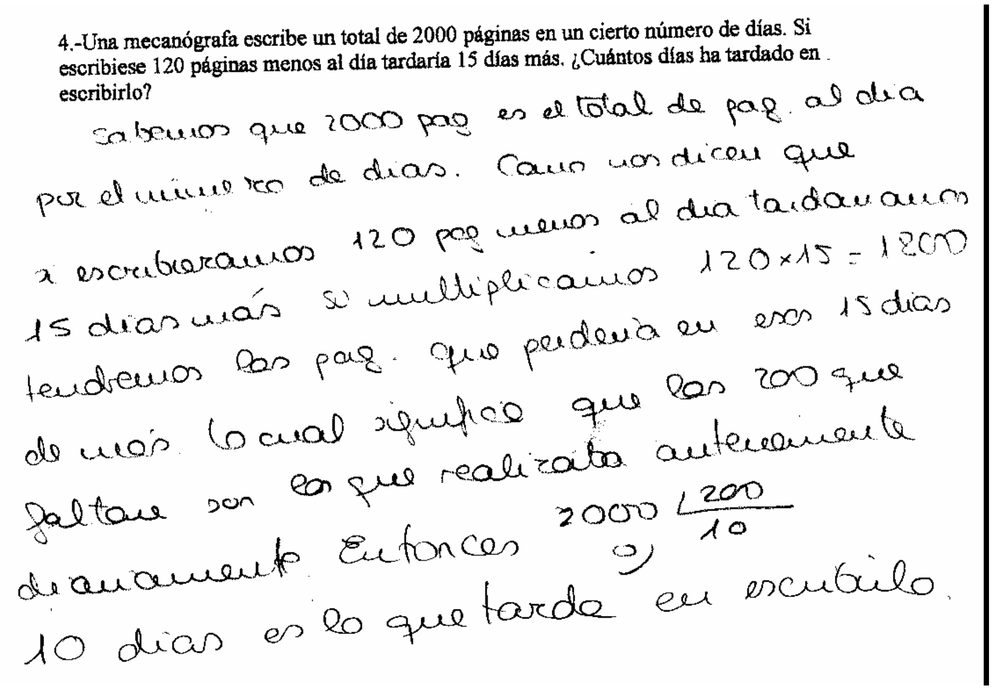
La diferencia entre escribir 120 paginas menos diarias y escribir 50 paginas mas es de 17 dias.
120 - (-50) = 170
2 - (-15) = 17 dias
10 dias
A razon de 200 paginas al dia son 2000 paginas si
→ + 50 pag ⇒ 250 pag / diarias x 8 dias = 2000 paginas
→ - 120 pag ⇒ 80 pag / diarias x 25 dias = 2000 paginas

fFig.3.38.- Resoluciones de 2.4 y 3.4

Los estudiantes nº 7 y 13 que presentaron un discurso como resolución de los problemas 2.4 y 4.4 respectivamente y el ya citado estudiante nº 16 que lo hizo en los problemas 2.4, 3.4 y 4.3.

El estudiante nº 20 presentó un discurso como resolución de todos ellos, dos ejemplos de tales discursos se muestran en la figura 3.38.

En las resoluciones de la fig.3.38 puede observarse que el estudiante determina en primer lugar ciertas cantidades, y en un momento determinado las usa para determinar arbitrariamente otra cantidad cuyo valor conoce que es el resultado. (las 200 páginas diarias en 2.4, los 10 días en 3.4) Es de remarcar que una resolución semejante para 2.4 la encontramos en el estudiante nº 7, ver fig.3.39.


4.-Una mecanógrafa escribe un total de 2000 páginas en un cierto número de días. Si escribiese 120 páginas menos al día tardaría 15 días más. ¿Cuántos días ha tardado en escribirlo?

Sabemos que 2000 pag es el total de pag. al dia
por el número de dias. Como nos dicen que
si escribiéramos 120 pag menos al dia tardaríamos
15 dias más si multiplicamos 120×15 = 1800
tendremos las pag. que perdería en esos 15 dias
de más lo cual significa que las 200 que
faltan son las que realizaba anteriormente
diariamente Entonces 2000 | 200
10
10 dias es lo que tarda en escribirlo.

Fig.3.39.- Resolución del problema 2.4

En resumen, ninguno de los 21 estudiantes encontró una solución de los problemas PLAg por medio de razonamientos de tipo RC o RP. La mayor parte de ellos declaró no saber como hacerlo y los que lo intentaron incurrieron en el error o no concluyeron la argumentación. La inmersión de los problemas en el "mundo de la divisibilidad" dado que los datos son números enteros, fue una vía explorada, esta vía permitió a un estudiante dar el resultado de uno de los problemas. El tanteo también posible por el tipo de datos, fue usado por un estudiante competente en el uso de tal manera de resolver. Este estudiante fue capaz de dar el resultado de todos ellos mediante el manejo de dicho modo de resolver.

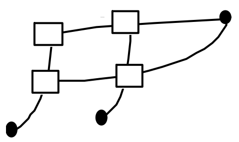
Conclusiones.

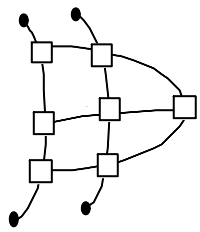
1.- Una manera de explorar el catálogo de maneras de resolver y enfoques de que disponen los estudiantes, para resolver problemas de la FPAA, dependientes del uso de un SMS determinado, consiste en confrontarlos con la tarea de resolver problemas del espacio de problemas de una situación.

2.- Confrontados los estudiantes con la resolución de una colección de problemas provenientes del espacio de una situación, que contiene problemas de lecturas aritméticas y algebraicas y disponiendo los estudiantes del SMS del álgebra, aproximadamente una quinta parte de estos presentan resoluciones en el SMS del álgebra a pesar de que, en el contexto de un examen, se les prohiba explícitamente usar dicho SMS del álgebra. La prohibición se transgrede en problemas de lectura algebraica.

3.- El catálogo de modos de resolver mostrado contiene los modos de resolver aritmético y mediante tanteo, conteniendo algunas resoluciones esquemas de reglas de tres o diagramas, como maneras de organizar la información u obtener y presentar la solución. El modo de resolver aritmético fue usado con preferencia en el test- MECA.

4.- El porcentaje de soluciones encontrado para los problemas de lectura algebraica, que no estaban representadas por los grafos de la figura estuvo en torno al 60-70%, encontrándose además unos pocos errores y razonamientos incorrectos.





5.- El modo de resolver aritmético contiene una variedad de enfoques que muestran los razonamientos utilizados por los estudiantes para determinar cantidades.

6.- Los razonamientos que se usaron en las resoluciones de problemas de lectura algebraica tienen su fundamento último en el significado de las cantidades o en el razonamiento proporcional. Así se identificaron dos modos de razonar:

Unos, que establecen, señalan ciertas cantidades y apelan al significado de dichas cantidades para establecer, determinar otras cantidades partir de ellas. A continuación, apelando a la polisemia de la cantidad determinada en primer lugar, determinan otras cantidades.

Otros, que podemos dividir en dos subtipos:

a).-los razonamientos que establecen ciertas relaciones numéricas entre los valores de ciertas cantidades y apelan a dichas relaciones numéricas para determinar el valor de otras cantidades. Estas relaciones numéricas son entendidas como razones y apelan a una relación de proporcionalidad existente entre las cantidades consideradas y las que se desean determinar.

b).-los razonamientos que se sirven de la razón entre dos cantidades para determinar otra cantidad que declaran que es precisamente esa razón.

7.- Los modos de razonar mostraron ser más dependientes del problema que del estudiante. Así, un mismo estudiante usaba distintos modos de razonar en diferentes problemas y únicamente se encontró un estudiante que fue persistente en el empleo de un modo de razonar.

8.- Los razonamientos del subtipo mencionado en a) fueron usados casi única y exclusivamente cuando la relación numérica identificada era de 1 a 2.

9.- Ninguno de los estudiantes pudo proporcionar una respuesta mediante el modo de resolver aritmético de los problemas cuya lectura algebraica fuese un grafo como los representados en este apartado de conclusiones..

Capitulo 4

PLA. Resoluciones en el SMS del Álgebra. Estudio de dificultades de los problemas

4.0.-Introducción

Las resoluciones de PLA en el SMS del álgebra son el producto de un proceso de traducción algebraico, que puede suponerse guiado por el MC, y que tratan de encontrar el resultado del problema mediante la resolución de una ecuación o sistema de ecuaciones. La instrucción de los estudiantes tiene la intención de que éstos lleguen a ser competentes en el uso del MC. En el currículo, la instrucción en el uso del MC se entremezcla con la introducción del SMS del álgebra y algunos usos del SMS del álgebra, como los requeridos para la resolución de una ecuación o los métodos de resolución de sistemas. Esto es así, porque la competencia de los estudiantes en la resolución de ecuaciones es un requisito imprescindible para que éstos puedan obtener el resultado de un problema cuando usan el MC.

Las estrategias de enseñanza que se utilizan para enseñar a poner un problema en ecuaciones son diversas (Trujillo, 1987), y más concretamente pueden estar basadas en el uso de una directriz (Gascón, 1989), en la exploración numérica sucesiva para facilitar los análisis y establecer las ecuaciones, (Rubio, 1994), o incluir el uso de destrezas y herramientas heurísticas (Puig, 1998). Sin embargo, cualquiera que sea la estrategia de enseñanza utilizada, la instrucción en el MC siempre se sirve de una colección de problemas, enunciados en su mayoría verbalmente, para ejemplificar la estrategia. Y, también, nos servimos de una colección de problemas, bien para evaluar la competencia en el uso del MC, bien para la evaluación de competencias en álgebra, (Fernández, 1997).

Demos por establecida la siguiente afirmación, que en algunas ocasiones se ha formulado explícitamente, o que se toma como supuesto implícito en muchos estudios educativos: “Los ciudadanos de una generación comparten su propia colección de problemas escolares”. Y permítaseme que, en espera de corroboración, tome ésta conjetura como afirmación: “Los ciudadanos, al menos de Newton a nuestros días, que han sido instruidos, en instituciones educativas, a poner un problema cualquiera en ecuaciones, comparten la colección de problemas utilizada para ello.”[27] Donde aquí, compartir quiere decir que se comparten de los problemas: las cantidades y relaciones entre éstas, los tipos de cantidades y la naturaleza de las relaciones. Siendo como algo ajenas o extrañas para cada generación las situaciones, a veces por impensables[28], en que se enuncian algunos problemas, las cantidades concretas utilizadas en ellos, su estilo de redacción o su formato de presentación. La primera afirmación podía darse por

[27] Dicha conjetura se sustenta en el estudio de la colección de 16 problemas contenidos en Newton (1683-1684) y usados por él mismo en sus lecciones, que a su vez se sustentan en una colección anterior de 13 problemas contenidos en el Álgebra de Kinckuyen. Dicha colección de problemas se encuentra asimismo en la Aritmética Universal.

[28] ¿Cabe imaginar a Newton planteando problemas de “móviles” en términos de megas por segundo?

corroborada de alguna manera, en el sentido dado a compartir, por el estudio de Mayer (1981). Mayer seleccionó un conjunto de 1097 problemas verbales de 10 textos de álgebra, determinando las frecuencias de cada tipo de problema y clasificando los 1097 problemas en un conjunto de 8 familias, basadas en la fórmula fuente, cada familia en categorías, basadas en la forma general de la historia y éstas, en patrones basados en la estructura específica de las frases que componen el enunciado del problema.

Es el propósito general de éste capítulo dar cuenta de un estudio exploratorio que tiene la intención de obtener información sobre el uso del MC, en problemas PLA de la FPAA. El estudio trata de medir la dificultad global que conlleva poner en ecuaciones problemas enunciados verbalmente y también la dificultad puntual que alguna de las tareas que el proceso de traducción algebraica presupone. La dificultad se entiende de los problemas y medida a partir del porcentaje de éxito de una determinada población de estudiantes. Además, también se pretende obtener información de los errores que puedan observarse en dicho proceso de traducción.

La obtención de esa información requiere del análisis de resoluciones de problemas concretos por estudiantes concretos. Por ello puede ser dependiente, excesivamente, de unos u otros. Así pues, deben ser considerados: los estudiantes, la diversidad contextual de los problemas de la FPAA o su complejidad, al menos para conocer de dónde proviene la información.

Si en el propósito del estudio se hace constar, además, la intención de obtener la información señalada de una parte sustancial de los problemas de la FPAA, se tiene como corolario que, es preciso disponer de alguna organización de la FPAA, para elegir los problemas que la representen. Además de la clasificación de Mayer y la tradicional adscripción de los problemas a subfamilias, buena parte del capitulo **1** se dedicó a proveernos de medios, con los cuales organizar la FPAA, distinguiendo estructuras, isomorfías, complejidades y situaciones. En este capitulo, dichos medios serán utilizados para elegir problemas representantes, y, posteriormente, para comparar dificultades en la solución y en el proceso de traducción.

Como este estudio lo que se pretende estudiar son los problemas, los estudiantes no se consideran individualmente sino que son considerados como población, para mediante la observación de sus resoluciones obtener valores descriptores de los problemas, ya sean éstos valores de las dificultades u otros que puedan asociarse al proceso de traducción.

Por otro lado, los estudiantes que se requieren en este estudio ya deben haber sido instruidos a poner un problema en ecuaciones, por lo cual parece conveniente considerar estudiantes de secundaria, estudiantes, que acaben de recibir tal instrucción y estudiantes, que sin que hayan vuelto a recibir instrucción especifica en ello, continúan en el discurrir del currículo usando el MC cuando un problema u otra actividad matemática lo requiere, y, que a su vez, siguen utilizando el SMS del algebra en otros contenidos curriculares.

Por último, dado el propósito del estudio, es una decisión metodológica que este estudio quede inscrito dentro del paradigma agrícola y que use una clasificación de las variables que tome en consideración la clasificación inicial de variables, introducida por Kilpatrick para las investigaciones sobre resolución de problemas (Kilpatrick,1975).

4.1 .- La Clasificación de variables de Kilpatrick y los problemas de la FPAA.

Lo que sigue parte de la clasificación de Kilpatrick[29], ya comentada en Puig y Cerdán ,1989) págs. 30-34, y se hace teniendo delante el trabajo de Khulm (1977) y la tesis de Fernández (1997). Se escribe en la terminología usada en esta tesis y se tiene en cuenta que los problemas que interesan son los de la FPAA, que el estudio que se va a presentar tiene el propósito general señalado y que las resoluciones que van a constituir la fuente de datos vendrán dadas en textos escritos. Así pues, este apartado tiene la intención de desgranar argumentos, y tomarlos en consideración, para que la elección de las variables del estudio sea lo más adecuada posible.

Como no podía ser menos, Kilpatrick comienza su clasificación distinguiendo entre variables dependientes e independientes. En nuestro caso, dicho de otra manera, las variables cuyos valores solo son determinables a partir de las resoluciones y las variables cuyo valor se determina a priori y pueden ser manejadas por el investigador. Kilpatrick distingue entre las variables dependientes: variables del producto, del proceso, de evaluación y concomitantes y entre las independientes: variables del sujeto, de la tarea y de la situación.[30]

Las variables de evaluación y concomitantes no son pertinentes aquí. Las variables del producto tienen que ver con lo logrado respecto de la solución o el resultado y suelen darse como ejemplos el tiempo empleado, la corrección e incorrección de una y otro o lo que se ha avanzado en la solución.

Las variables del proceso tienen que ver con la concepción de la resolución de un problema como proceso mental y sus valores se extraen de los registros verbales o de las resoluciones escritas. Para problemas algebraicos pueden considerarse de proceso las variables: resultado en el planteamiento, resultado en la ejecución, resultado en el desempeño final utilizadas en su tesis por Fernandez (1997). En el estudio que se presenta lo que se trata de analizar es el proceso de traducción de un enunciado verbal a ecuaciones. El resultado de la tarea son las ecuaciones producidas y las variables que se consideren pueden calificarse bien de producto o bien de proceso. En todo caso, las variables dependientes deben de dar cuenta de las distintas tareas que el resolutor debe realizar necesariamente en el proceso de traducción. La manera de proceder para definir dichas variables consta en **4.4**.

Entre las variables de la tarea se distinguen variables de contexto, de estructura y de formato.

Las variables de formato describen las diferentes maneras en las cual el problema se presenta al resolutor. Dado que los problemas que se consideran en esta tesis están enunciados verbalmente y que dichos enunciados no se acompañan de dibujo alguno, de estas variables a las que únicamente habrá que prestar atención son a las variables sintácticas, esto es, a la complejidad sintáctica del problema.

---

[29] Esta clasificación ha sido posteriormente reelaborada y refinada, en particular para las variables de la tarea. Ver Goldin y McClintock (1977).

[30] Antes que se produzcan malentendidos, por el significado conferido en el capítulo **1** al término situación, las variables de *situación* describen "el entorno físico, psicológico o social en el cual la resolución del problema tiene lugar"

En la ideación inicial, las variables de contexto pretenden describir diferencias entre problemas teniendo la misma estructura matemática, mientras que las variables de estructura pretenden describir la estructura matemática intrínseca del problema , “One way to do so is to employ a mathematical formula or relation.”(Khulm 1997, pág. 5). Entonces, las variables de contexto describen la situación física del problema y el lenguaje empleado en él. Así, en la tesis citada, Fernandez (1997) utiliza entre sus variables de la tarea el número de incógnitas y los contextos de los problemas: listones de madera, discos-casettes, material escolar, entradas.

Describir la estructura matemática intrínseca de la tarea, cualquier cosa que esto sea, mediante una fórmula o relación en nuestro caso es inapropiado ya que conocemos que un mismo problema puede ser “descrito” por diferentes ecuaciones o sistema(s) de ecuaciones no todos ellos equivalentes, ver **1.10**. Fernández (1997) tampoco pretende describir esta estructura con el número de incógnitas aunque el número de incógnitas sea una medida del número de ecuaciones al que se traduce el problema – cuando este es determinado- sino que apela a que en la instrucción se distingue entre los problemas que se resuelven con una incógnita o con dos incógnitas. Esta posición hace que la variable de la tarea sea una variable de la tarea desde el punto de vista de la secuencia de instrucción y, por tanto, para una variable de contexto escolar.

Days (1977) clasificó los problemas en problemas de estructura simple o compleja, según la complejidad de su representación matemática. La decisión de si un problema tiene estructura simple o compleja se basa en el examen de si cuatro o cinco aserciones de un conjunto de siete son ciertas. El conjunto de aserciones versan sobre el número de incógnitas y datos, las operaciones involucradas en las expresiones algebraicas, etc., en fin sobre la complejidad sintáctica de la ecuación o ecuaciones o el número de sustituciones, transposiciones y restituciones requeridas para resolver las ecuaciones. Con tal clasificación, Days estudia si la estructura simple o compleja del problema tiene algún efecto sobre un conjunto de procesos y estrategias, observables y codificables a partir de un protocolo de registro audiovisual de la resolución del problema. De los procesos, comprensión, evaluación, representación o evaluación se usan más en los problemas de estructura compleja. De las estrategias, ensayo y error en problemas de estructura compleja y deductiva algorítmica en los problemas de estructura simple. El factor estructura es significativo, en el análisis de la varianza, para los procesos: comprensión (relee, reenuncia, separa) y representación (produce manipulaciones exploratorias, dibuja diagramas, usa notaciones mnemotécnicas.).

Lo que se entiende aquí por describir la(s) estructura(s) del problema ha sido suficientemente explicitado en el Capitulo **1,** donde entre otras descripciones estructurales, una de las estructuras de un problema de la FPAA concebido como un conjunto de cantidades y relaciones, puede ser descrita por un objeto matemático: un grafo. Grafo que cuando se le superponen otras estructuras, provenientes de las cantidades y las relaciones, puede dar cuenta de la diversidad estructural del problema. Así pues, en este estudio, el grafo de la lectura algebraica será una variable de la tarea.

Los valores de la variable de estructura son los diferentes grafos de los problemas que se consideren. Ahora bien, dada la diversidad de los grafos de los problemas de la FPAA, y teniendo la intención de que el estudio de dificultades sea representativo, se requeriría un estudio sobre las estructuras mostradas por los grafos que son más frecuentes en lo problemas que se encuentran en los textos[31]. Siendo este estudio inexistente y dada la multiplicidad de dichos valores, estos valores pueden ser reducirse considerando valores de complejidad relacional del problema, ver **1.15**, con la consiguiente pérdida de información sobre la arquitectura del grafo. Esto, parece conveniente en el momento de elección de los problemas, aunque se tenga menor calidad de información, sobre todo, cuando posteriormente se comparen los problemas mediante los resultados obtenidos.

Nuestra posición respecto de lo contextual en lo que tiene que ver con los números y las operaciones ha sido expuesta en Puig y Cerdán (1989), pág. 55, y reza así: "los contextos son los responsables principales de la restricción semántica, esto es, de la fijación del campo semántico a partir del cual el sujeto produce sentido para el número y para las operaciones con ellos". Aquí y ahora, en esta tesis, en el contexto de la FPAA, tal posición podría rezar "los contextos son los responsables de la delimitación del mundo posible del problema, donde las cantidades y las relaciones entre éstas pueden concebirse, tienen significado, adquieren sentido". Dicho esto, la intención de distinguir tajantemente lo contextual de lo estructural no tiene mucho sentido, pues más bien lo contextual posibilita la descripción estructural, descripción estructural que podemos atribuir a un experto que dispone de un abanico de mundos posibles para el problema o de un mundo posible abierto a sucesivas extensiones. Ahora bien, atribuido este poder a lo contextual, de alguna manera debe de valorarse para aclarar su contribución a la dificultad. En este sentido, la distinción entre contextos diferentes debe ir un poco más allá de la distinción entre contextos por la mera adscripción a la situación física, cotidiana, familiar, económica, social, etc. a la que pertenezca el fenómeno que describe el problema. En mi opinión, en una de las direcciones en las que este asunto puede explorarse ha sido apuntada en ésta tesis, al introducir la noción de situaciones concretas equivalentes, donde se ha añadido a la descripción estructural la correspondencia que puede establecerse entre los espacios de medidas a los que las cantidades consideradas pertenecen. Esta variable, la pertenencia del problema a una determinada clase de situaciones concretas puede ser considerada también una variable de la tarea.

Por otro lado, en un mundo más reducido, como lo es el de los problemas aditivos o multiplicativos verbales de una etapa, una categorización de los problemas no meramente contextual, la categorización semántica de los problemas ha permitido, que, gracias al trabajo de múltiples investigadores, haga ya tiempo que se dispone de suficiente información: de su dificultad, de las estrategias de resolución y de cómo pueden disponerse en una jerarquía de niveles que en última instancia puede servir de guía en la instrucción y en la evaluación de competencias (Puig y Cerdán 1989, capítulos 3 y 4)

La categorización semántica de los problemas de una etapa viene facilitada por la simplicidad de la complejidad estructural de dichos problemas –un grafo de orden 1-. La posible transferencia de ésta categorización semántica a la totalidad de problemas de la FPAA que sea respetuosa con la estructura de cantidades y relaciones del problema descrita mediante un grafo, conduce a la noción de problemas semánticamente isomorfos, ver **1.14**. En este sentido no parece posible ir más allá. Así la isomorfía

[31] Véanse, a este respecto, en Puig y Cerdán (1990a) las diferentes estructuras de los textos intermedios de los problemas de varias etapas que se encuentran en algunos textos escolares.

semántica, como cualquier isomorfía entre problemas, puede ser utilizada para definir una variable de la tarea para comparar variables de producto.

Por último y algo que aquí tomamos por muy importante, porque proviene de la tradición, existe una meridiana adscripción de los problemas de la FPAA a subfamilias. Entre éstas subfamilias pueden considerarse las denominadas aquí ABACO, HERENCIAS, MOVILES, EDADES, TRABAJO, GEOMETRIA, OTROS. Los problemas de cada una de estas subfamilias con la excepción de la subfamilia OTROS por la diversidad de situaciones que hemos agrupado en esta subfamilia comparten la puesta en escena de las cantidades, el tipo de cantidades y las relaciones entre ellas. Además, a veces, en textos escritos bajo el titulo “How to solve algebra words problems”, ver por ejemplo(Nardi,1991), o en la instrucción misma, los problemas de estas subfamilias son objeto de atención especifica, lo que conlleva que los significados de las cantidades, usuales en cada una de estas subfamilias, sean habituales para los estudiantes y que incluso dispongan de tácticas especificas para resolver los problemas de las distintas subfamilias, tácticas que los estudiantes invocarían diciéndose: este problema es de móviles, este problema es de edades, etc. Debe decirse, que si se adopta, como haremos aquí, como variable de la tarea, la pertenencia de un problema a una subfamilia determinada, esta variable de la tarea también puede considerarse como proveniente de la tradición en la instrucción, pero en todo caso de una tradición en la instrucción que no se atiene a considerar clasificados los problemas por el número de incógnitas que se usan para resolver, clasificación ésta última que, mirada desde el proceso de traducción, guiado por el MC, o lo por el MC requerido, no puede ser considerada como una clasificación.

4.2.- La elección de las variables de la tarea para el estudio de dificultades.

Las variables de la tarea que el investigador considera son las que determinan, en gran parte, la selección concreta de los problemas del instrumento que se va a utilizar para el propósito perseguido.

Tras el desgrane de argumentos en el discurso de **4.1,** a grandes rasgos, entre lo que cabe considerar de un problema para considerarlo como fuente de variables de la tarea está:

La subfamilia a que el problema pertenece.
La(s) estructura (s) del problema, descrita(s) por el grafo.
La estructura sintáctica del enunciado verbal del problema.

La determinación de la subfamilia a la que el problema pertenece puede ser determinada directamente por cualquiera, sin ambigüedad, a partir del enunciado del problema y provisto de una lista de subfamilias acompañada de una descripción somera de ellas. Así pues, subfamilia es una de las variables de la tarea que consideraremos en el estudio. Esta variable adoptará los valores: ABACO, HERENCIAS-REPARTOS, EDADES, GEOMETRIA, TRABAJO, MÓVILES, OTROS. La multiplicidad de valores de ésta variable se atiene al objetivo de la obtención de información de una parte sustancial de la FPAA. Realmente, se cubriría casi globalmente la FPAA si se hubiesen considerado MEZCLAS u otras subfamilias con denominación más específicamente contextual, como GRIFOS, que se podría incluir en la subfamilia TRABAJO, o RELOJES, que se podría incluir en MOVILES, o problemas de ARITMETICA

COMERCIAL. La razón de no considerar estas subfamilias está no sólo en la necesidad de poner límites al estudio o la de su abandono en mayor o menor grado por el currículo. Este no es el caso de ARITMETICA COMERCIAL, que se excluye intencionadamente del estudio, para no tener que considerar, por el uso del tanto por ciento, otra nueva variable de la tarea relativa al tipo de números.

La estructura del problema descrita por el grafo no puede ser determinada sin más. La consideración del grafo del problema, proveniente de una lectura analítica mínima y suficiente del problema, como una variable de la tarea, requiere de alguien informado de, o instruido en realizar lecturas analíticas a partir de los enunciados verbales de los problemas, para que pueda este alguien construir el grafo de un problema concreto. Como no excluimos, como posible, que puedan producirse dos lecturas analíticas y ambas sean algebraicas, a partir del enunciado verbal del problema. Aquí, consideraremos como variable de estructura de la tarea el grafo de una lectura algebraica del problema. Su valor será el grafo concreto construido por el investigador, grafo que se explicita para cada problema.

Los valores que puede adoptar esta variable son tantos como grafos diferentes quepa imaginar. Dada la no existencia de estudio mencionado en **4.1**, el control de los valores de esta variable es dificultoso. Un modo indirecto, pero no preciso, de hacerlo es considerar variables de la tarea a partir del grafo, como las complejidades descritas en **1.14**. Así, las complejidades del problema son una variable de la tarea, las complejidades del problema que aquí consideramos son de tipo R, RM, X donde R, RM, X adquieren los valores:

R = número de aristas del grafo. El orden del grafo.
RM = número de aristas que representan relaciones multiplicativas.
X = número de vértices claros del grafo.

y donde si R> X el problema es sobredeterminado, si R= X determinado y si R< X indeterminado.

Se consideran también como variables de la tarea subsidiarias del grafo las isomorfías, relacionales, aditivas, multiplicativas, operacionales y semánticas. Así, dos problemas tendrán el mismo valor para cada una de estas variables cuando los grafos de dichos problemas sean isomorfos en alguno de los sentidos citados.

Las variables sintácticas deben de dar cuenta de la estructura sintáctica del enunciado. En este estudio, para no incrementar su complejidad, se decidió no considerarlas, pero no abandonarlas a su albur. Se consideraron como controladas dichas variables presentando los problemas en un enunciado que podemos llamar, tradicional y telegráfico, mediante frases que constaban de una oración, evitando en lo posible subordinadas. Siempre que fue posible se evitaron condicionales, lo que era imposible en los casos en que el problema presentaba una situación hipotética. El enunciado siempre carecía de descripciones prescindibles de la situación, cada una de las frases presentaba cantidades y/o relaciones entre éstas. De todos modos, salvo contadas excepciones, se respetó el enunciado de la fuente de donde procedía el problema, siempre que nos pareció acorde con los requerimientos anteriores. No obstante, lo dicho, respecto de la complejidad sintáctica, en algunos de los problemas de la subfamilia EDADES, en respeto de enunciados tradicionales, se usaron problemas que en su enunciado contienen lo que parecen trabalenguas o enigmas, derivados de las conjugaciones verbales requeridas para referir las edades de los personajes, en los momentos en que sus edades se consideran.

4.3.-Variables del sujeto.

De las variables del sujeto únicamente vamos a considerar, una variable que describe, de manera no precisa, el historial de instrucción de los estudiantes. Esta variable es, en concreto, el curso del nivel educativo a que pertenecen los estudiantes que tienen que realizar el proceso de traducción.

En el momento en que se llevó a cabo el grueso de la toma de datos del estudio, el primer trimestre del año 1992, los ciudadanos debían permanecer obligatoriamente en el sistema educativo hasta haber superado la E G. B., lo que debía de ocurrir en edades comprendidas entre los 14 y 15 años. Con posterioridad, caso de haber superado con éxito este ciclo educativo, voluntariamente podían pasar a cursar el Bachillerato, una de cuyas ramas era el Bachillerato de Ciencias, que los estudiantes cursaban mediando su propia elección. Pues bien, los estudiantes que se consideran en este estudio son los que en aquel momento – primer trimestre del 92- cursaban 1º, 2º o 3º del Bachillerato de Ciencias y cuyas edades oscilaban entre los 15 y los 19 años.

Lo anterior permite describir el historial de instrucción de los estudiantes, en cuanto a si estos habían sido instruidos o no y cuándo a poner un problema en ecuaciones. Y también nos permite conocer su familiaridad con el SMS del algebra para otros usos que no sean la traducción a ecuaciones del problema y la resolución de las mismas.

Considerando esto así, cuando aquí se habla de Curso 1º se esta hablando de una población de estudiantes que en el último curso de EGB ha sido iniciada o instruida a poner problemas en ecuaciones y que en el curso que está cursando, Curso 1º, lecciones al respecto han sido impartidas[32]. No obstante, ignoramos totalmente el modelo de enseñanza que se ha utilizado para ello, pero conocemos la colección de problemas utilizada. De la población de estudiantes, Curso 2º y Curso 3º, sabemos que en el curso que están cursando en ese momento, ninguna lección determinada trata de instruir en cómo poner un problema verbal en ecuaciones, pero el problema se pondrá en ecuaciones cuando parezca pertinente para encontrar el resultado del problema, tanto en clase de Matemáticas como en clase de Física. Además, estos estudiantes usan el SMS del álgebra en temas de geometría analítica, estudio de funciones, cálculo de derivadas e integrales, estadística y probabilidad.

Así, hay que hacer notar que la información que se extraiga, de las resoluciones de problemas de estas poblaciones de estudiantes, debe ser mirada como proveniente de poblaciones de estudiantes que tienen el historial de instrucción mencionado.

4.4.-El proceso de traducción algebraico. Su descripción mediante variables.

El proceso de traducción algebraico puede considerarse como una fase del proceso de resolución del problema, que se inicia con una lectura de modo analítico del problema, y se da por concluido cuando el resolutor ha producido la ecuación o

[32] En el caso de los estudiantes considerados en el estudio nos aseguramos de que ello había sido así.

ecuaciones y pasa a la resolución de las mismas. Al igual que el proceso de resolución del problema, el proceso de traducción es un proceso mental que podemos tomar como residente en la mente del resolutor. Cuando el proceso de traducción se supone guiado por el Modelo Cartesiano, es posible apuntar teóricamente las tareas que el resolutor debe necesariamente acometer durante dicho proceso. Esto, es lo que se hizo en **3.3.3,** donde se apuntaban como tareas del resolutor:

1') decidir qué cantidades desconocidas va a designar por letras.
2') cambiar el status de las cantidades designadas por letras, de desconocidas a conocidas, esto es, considerarlas como datos.
3') decidir qué cantidades va a igualar en cada ecuación.
4') Si la cantidad que va a igualar es una cantidad conocida debe:

a) decidir qué cantidades desconocidas debe determinar, para determinarla. Esto es, decidir cuales van a ser sus incógnitas auxiliares
b) precisar para cada incógnita auxiliar:
-qué cantidades son necesarias para determinarla.
-si éstas cantidades son datos u otras incógnitas auxiliares
-la relaciones entre esas cantidades que permite determinarla.
-la expresión de esas relaciones mediante operaciones aritméticas.
c) diseñar un entrelazado de determinación de incógnitas auxiliares que permita determinarlas siempre a partir de datos o cantidades intermedias, esto es, de datos o de cantidades determinadas a partir de ellos.
d) Proceder a expresar la determinación de las cantidades desconocidas por medio de una expresión algebraica según el diseño esbozado en c)
e) por último, escribir el signo igual entre la expresión algebraica producida y dicha cantidad conocida.

5') Si la cantidad que va a igualar es desconocida, realizar a) b) c) d) dos veces, cuidando que el conjunto de incógnitas auxiliares utilizado sea diferente cada vez. Por último, escribir el signo igual entre las dos expresiones algebraicas producidas. Obteniendo así una ecuación.

6') Proceder a obtener tantas ecuaciones como letras haya usado en 1').

El examen de si el resolutor ha realizado o no estas tareas y si lo ha hecho con corrección sólo puede basarse en lo que éste da cuenta en su resolución. Si la resolución es un protocolo verbal procedente de un registro audiovisual la imagen obtenida será más diáfana, si la resolución es un registro escrito será inevitablemente más borrosa. Las resoluciones que vamos a estudiar aquí queremos que sean las habituales que los estudiantes producen en las aulas o en los exámenes de evaluación, estas resoluciones son un texto matemático escrito, expresado en el SMS del álgebra.

Así, la cuestión es ¿cómo observar, en un texto escrito de una resolución, si un estudiante ha realizado o no las tareas anteriormente apuntadas?, y también, ¿lo ha hecho correctamente? En Cerdán (1993) apuntamos que esto podía hacerse mediante el siguiente conjunto de variables de producto[33]:

1.-PROCEDIMIENTO DE SOLUCIÓN
0.- No se produce nada para resolver el problema.
1.- Se utilizan ecuaciones.
2.- Se utiliza otro método.

[33] En la elaboración de dicho catalogo de variables de producto y la elección de sus modalidades se contó con la inestimable ayuda del profesor F. Pluvinage.

2.- ELECCIÓN DE INCÓGNITAS.
  0.- Ausencia de elección.
  1.- Elegidas en la cantidad usual.
  2.- Elegidas de más.
3.-ADECUACIÓN DE LA ELECCIÓN.
  0.- Ausencia de elección.
  1.- Elección inapropiada (cuanto menos una)
  2.- Elecciones correctas.
4.- SÍMBOLOS COMPUESTOS (EXPRESIONES ALGEBRAICAS)
  0.- No hay.
  1.- Arbitrarios (No se les puede atribuir referencia en el contexto del problema)
  2.- Error típico. (ej. 3x+8 en lugar de 3(x+8))
  3.- Error de traducción.
  4.-Correctos.
5.- IGUALDADES.
  0.- No aparece el signo de igualdad.
  1.- Aparece entre cantidades diferentes.
  2.-Aparece entre cantidades iguales, pero con error de traducción.
  3.- Entre cantidades iguales.
6.-HACIA LA SOLUCIÓN.
  0.- Nada
  1.- Lo que está escrito permite alcanzar la solución.
  2.- Es excesivo.
  3.- Es apropiado.
  4.- Es absurdo.

Este catálogo de variables trata de describir el proceso de traducción dando cuenta de si cada una de las tareas, que en su descripción teórica hemos supuesto que dicho proceso contiene, se ha realizado o no en una resolución concreta, y si ello se ha hecho correctamente. La distinción de modalidades en las variables sirve tanto de instrucciones para la codificación de las resoluciones, como de medio para facilitar el análisis de los datos.

El catálogo fue pilotado con un test de 8 problemas, para analizar resoluciones escritas provenientes de estudiantes de Bachillerato y de Magisterio y cotejar la adecuación del catálogo de variables para describir lo que consta en las resoluciones. De tal pilotaje provienen los comentarios sobre las variables que se hacen en Cerdán (1993), donde se destaca que, una vez se habían usado letras, la decisión en las resoluciones sobre las modalidades: elección inapropiada, elegidas en la cantidad usual eran difíciles de tomar sin ambigüedad; que lo mismo ocurría con todas las modalidades relativas a errores en expresiones algebraicas o igualdades. Además, en el caso de la variable hacia la solución, la modalidad excesivo no se encontró en ninguna resolución. Sin embargo, posteriormente también se constató que el catálogo carecía en mayor medida de estos inconvenientes, si la resolución se video-grababa o se observaba la resolución directamente en el momento en que ésta se producía. Se concluyó, que había que mejorar el conjunto de variables, su descripción y las instrucciones de codificación.

4.4.1.- Las variables del proceso utilizadas en el estudio.

El conjunto de variables que se utilizó en el estudio de dificultades es una revisión del comentado en el punto anterior ajustado a lo que contienen las resoluciones efectivamente producidas por los estudiantes y cuyo valor, en principio, parece poder determinarse sin ambigüedad.

En dicho conjunto de variables se distinguieron tres grupos: producción, cantidad y corrección. Dichas variables tienen, en cada resolución, valor afirmativo o negativo y son las siguientes:

Producción:

UL - uso de letras en la resolución.

EA - presencia de expresiones algebraicas en la resolución.

IG - presencia en la resolución del signo igual entre expresiones, al menos una de las cuales es algebraica.

Cantidad:

TI – presencia en la resolución de todas las igualdades que requiere el método. Tantas como letras utilizadas.

TEA – Todas las expresiones algebraicas requeridas para expresar la cantidad que se iguala en los dos sentidos en que se hace.

Corrección:

EEA – Error en expresiones algebraicas. Alguna expresión algebraica incorrecta.

EIG –Error en igualdad. Alguna igualdad incorrecta.

S – Las ecuaciones producidas conducen al resultado del problema.

Un análisis de lo que las variables dicen del proceso de traducción rezaría así:

Uso de letras UL. Esta variable declara que el estudiante ha acometido en algún grado la tarea 1’) [34]. El nombre elegido para denominar a la variable, uso de letras y no elección de incógnita, trata de describir objetivamente lo que dice esta variable cuando se consideran un conjunto de resoluciones de diversos estudiantes, pues suele ser habitual que los estudiantes no hagan constar en su resolución la cantidad que refiere la letra utilizada[35] y puede que tal letra refiera a una cantidad conocida o que la misma

[34] En este punto, las tareas del proceso de traducción algebraico se designan de igual manera que en el punto anterior.

[35] Puede advertirse a los estudiantes e insistir en ello, tanto verbalmente como en las instrucciones de los tests “haz constar lo que significan las letras que utilizas”. No obstante, al menos el que suscribe, se encuentra, invariablemente y en muchas de las resoluciones, con que ésta tarea cae en el olvido.

letra se utilice para referirse a distintas cantidades. Lo que sí que puede afirmarse de esta variable es que da cuenta de la intención del estudiante de utilizar ecuaciones para resolver el problema. Ello como consecuencia de que suponemos que ha designado mediante letras alguna cantidad.

Producción de expresiones algebraicas EA y TEA. La producción de expresiones algebraicas es una tarea requerida en 4') d) y 5') y es el fruto de realizar las tareas 4') b) c). Luego esta variable da cuenta de que estas tareas han sido realizadas. La variable EA, no obstante, no informa de la tarea 4') a) para lo cual es necesario examinar en detalle lo que la expresión algebraica producida concretamente contiene y, en virtud de ello, la cantidad que refiere. Como la producción de expresiones algebraicas según se precisa en 4') b) debe hacerse para cada incógnita auxiliar de las que se ha decidido utilizar en 4') a), TEA informa si se han elegido las suficientes incógnitas auxiliares, examinando si se han producido para ellas todas las expresiones algebraicas.

Igualdades, IG y TI. La escritura del signo igual es una tarea requerida en 4') e) y 5'). Además, por como viene descrito arriba el proceso de traducción algebraico cada vez que se escribe el signo igual lo que se obtiene es una ecuación,[36] porque se iguala la misma cantidad referida en sentidos diferentes, sea esta cantidad una cantidad conocida o desconocida. Sin embargo, la variable IG que declara meramente la existencia de una igualdad en las resoluciones, no declara que la igualdad producida sea una ecuación, pues puede haberse establecido dicha igualdad sin que se hayan realizado las tareas 4') a) b) c) d) que, necesariamente, tienen que realizarse para poder declarar que la igualdad entre expresiones es una ecuación. Así, la variable IG declara que la igualdad que consta en la resolución es una ecuación para el estudiante que produce la resolución. TI, por su parte, da cuenta de la tarea 6').

Solución, S. Esta variable declara que la ecuación o ecuaciones producidas son algunas de las que pueden escribirse para, mediante su resolución, encontrar el resultado del problema. Debe de indicarse que la cantidad por la que se pregunta en el problema no tiene porque ser una de las incógnitas (letras) que consten en la ecuación, basta con que el valor de dicha cantidad pueda determinarse aritméticamente y de modo elemental a partir de los valores de las cantidades que figuran como incógnitas en la ecuación.

Error en expresiones algebraicas, EEA. Esta variable declara que al menos una de las expresiones algebraicas producidas contiene un error de inversión, de operación o de arbitrariedad en el sentido en que estos errores fueron definidos en el capítulo **2**.

Error de igualdad EIG. Esta variable declara que las cantidades a que refieren las expresiones algebraicas que constan en el lado izquierdo y derecho de algunas de las igualdades formuladas, o bien pertenecen a espacios de medida diferentes, o bien, perteneciendo al mismo espacio de medida, no refieren la misma cantidad en sentidos diferentes.

[36] Insistimos que en resolución de problemas y usando el MC, ecuación quiere decir una igualdad entre expresiones que refieren una cantidad en sentidos diferentes.

4.5.- El estudio de dificultades de los problemas de la FPAA.

4.5.1.- Propósitos.

Este estudio sobre dificultades de los problemas de la FPAA tiene como propósitos generales:

Primero.-Obtener información sobre las dificultades que tienen los problemas de la FPAA enunciados verbalmente.

Donde las dificultades de los problemas se entienden descritas en función de lo observado en las resoluciones de una determinada población de estudiantes, a los que se les administra una colección de problemas.

En concreto, para cada problema se consideran el siguiente tipo de dificultades:

Dificultad apreciada[37] de un problema, que es una medida de no haber abordado un problema de una colección de problemas.

Dificultad de la solución de un problema**,** que es una medida del no encuentro de solución[38] a un problema de una colección de problemas.

Como es posible que un problema sea abordado y que se usen otros modos de resolver que el algebraico. Lamamos pertinencia en un problema del uso del modo de resolver algebraico, a una medida del uso de dicho modo de resolver en un problema de una colección de problemas que se ha administrado a una población de estudiantes. Así, quedan como segundo y tercer propósito general:

Segundo.- Obtener información de la pertinencia en un problema del uso del modo de resolver algebraico.

Tercero.- Obtener información sobre la dificultad del proceso de traducción algebraico.

Donde entendemos por:

.

Dificultad del proceso de traducción de un problema**, a** una medida del no logro exitoso de la tarea "poner en ecuaciones" un problema, por aquel grupo de la población antedicha, en el que cada uno de los individuos de dicho grupo ha puesto de manifiesto que el proceso de traducción se ha iniciado.

Esto es, una medida del no éxito, cuando el uso del modo de resolver algebraico se considera pertinente. O de la no eficiencia del proceso de traducción algebraico.

---

[37] El calificativo apreciada pareció conveniente para esta dificultad dado el tamaño de la colección de problemas propuesta en cada sesión, 8 problemas para una hora, y el contrato con los estudiantes, ver **4. 5. 2.3**.

[38] Aquí, se entiende por solución una ecuación o un sistema de ecuaciones que conducen al resultado.

Por otro lado, dado que se postula que el proceso de traducción puede descomponerse en varias tareas subsidiarias, es el cuarto propósito general:

Cuarto.- Obtener información sobre la dificultad en los problemas de las tareas subsidiarias del proceso de traducción.

Y como alguna de estas tareas pueden llevarse de modo incompleto o inadecuado.

Quinto.- Obtener información sobre el grado de cumplimiento o errores cometidos en la ejecución de las tareas subsidiarias del proceso de traducción

Los propósitos más concretos del estudio se derivan de las hipótesis que se hacen de la fuente de la dificultad que aquí formulamos en términos de variables de la tarea y variables del sujeto. Así, quedan como propósitos concretos, los propósitos generales reformulados:

Obtener información sobre la dificultad del problema, de la solución y del proceso de traducción en algunas subfamilias de la FPAA. Así como comparar dichas dificultades.

Obtener información sobre la dificultad del problema, de la solución y del proceso de traducción en problemas de distinta complejidad. Así como comparar dichas dificultades.

Comparar las dificultades de problemas isomorfos y de problemas equivalentes.

Las tareas que el proceso de traducción requiere las hemos expresado aquí en términos de variables de producto del proceso. Así pues, dense por formulados, tanto los propósitos concretos relativos a cada una de estas variables como a los cruzamientos que de las variables de la tarea y del proceso pueden obtenerse.

4.5.2.- Material y métodos.

4.5.2.1.- El instrumento. Los problemas

Los problemas que se utilizaron en el estudio fueron 32. De la construcción del instrumento, los problemas concretos que éste contiene y del valor de las variables de la tarea, en cada uno de los problemas, se da cuenta detallada en el anexo **A4.1**.

<u>Variables de la tarea. Enunciados de los problemas</u>.

Las variables de la tarea fueron dos: Subfamilia con 7 valores y Complejidad de tipo R [39]con 6 valores. La distribución del número de problemas en el instrumento según subfamilia y complejidad se muestra en la Tabla 4.1[40]

---

[39] La complejidad de tipo RM también se consideró para la elección de los problemas y se determinó su valor para cada problema –ver **Anexo 4.1-** . Pero fue pospuesto su estudio para reconsiderarlo tras un primer análisis de los datos respecto de la complejidad de tipo R. La complejidad de tipo X, cuando R es distinto de X, se consideró mediante la presencia en los problemas del instrumento, de un problema sobredeterminado y dos indeterminados.

complejidad/ subfamilia	3	4	5	6	7	8	TOTAL
ABACO	2		2	1			**5**
HEREN-REP	1	1	1			1	**4**
EDADES	1	2	2				**5**
GEOMETRIA	1		2	1			**4**
MOVILES	2	1	1				**4**
TRABAJO		3			1		**4**
OTROS	3		1		2		**6**
TOTAL	**10**	**7**	**9**	**2**	**3**	**1**	**32**

Tabla 4.1.- Distribución del número de problemas en el instrumento según subfamilia y complejidad.

Los enunciados de los problemas por subfamilias y con indicación de la fuente de donde proceden son:

Subfamilia ABACO

MITAD Y TERCERA PARTE (Texto BUP)

Estoy pensando en un número tal que la suma de su mitad y su tercera parte es 7 unidades mayor que su cuarta parte. ¿Cuál es dicho número?

DESCOMPONER EN 4 PARTES (Krutestki modificado para que sea indeterminado).

Descomponer un número en cuatro partes de modo que si se resta 4 de la primera, se suma 4 a la segunda, la tercera se multiplica por 4, y la cuarta se divide por 4, se obtiene el mismo número en todos los casos.

ENTERO (Trujillo)

El doble de un entero es igual al cuádruple del entero anterior a él. ¿Cuál es ese entero?.

FRACCION (Trujillo)

Si se resta 1/4 a una fracción cuyo denominador es dos unidades mayor que su numerador se obtiene 1. ¿Cuál es la fracción?.

RESTA Y RESTA (Euler)

Encontrar un número tal que si se resta 1 de su doble, el resto se dobla, a esto se resta 2 y lo que queda se divide por cuatro. Al final, queda uno más que el número inicial.

Subfamilia REPARTOS-HERENCIAS

REPARTIR 1200 (Texto EGB)
Repartir 1200 pts entre tres personas de modo que la primera tenga la mitad que la segunda y la tercera lo que entre las otras dos juntas.

---

[40] Basta contemplar dicha tabla para comprender que el diseño no es equilibrado. De ello se es consciente. Se tendrá en cuenta en el tratamiento de los datos.

BOLSAS DE CARAMELOS (Rubio)

En tres bolsas había igual número de caramelos. Se quitaron 600 de cada bolsa. Entre todas quedó entonces el mismo número de caramelos que había en cada una al principio. ¿Cuántos caramelos había en cada bolsa?.

FORTUNA (Euler)

Un padre murió dejando cuatro hijos. Estos se repartieron la herencia de la manera siguiente: El primero cogió la mitad de la fortuna menos 3000 libras. El segundo cogió un tercio de ella menos 1000 libras. El tercero cogió exactamente un cuarto de ella. El cuarto cogió 600 libras, más la quinta parte de la fortuna. ¿Cuál era la fortuna del padre y qué cantidad recibió cada uno de los hijos?.

REPARTIR ENTRE 5 (Euler)

Cinco personas se reparten 8591 pts. Encontrar la parte que recibe cada una sabiendo que la segunda recibe 3/4 de lo que ha recibido la primera, la tercera 3/4 de lo que recibe la segunda y así sucesivamente.

Subfamilia EDADES

EDAD DOBLE (Texto BUP)

La edad de una persona es doble de la de otra. Hace siete años la suma de las edades de las dos personas era igual a la edad actual de la primera. ¿Cuál es la edad de cada una?.

PEDRO Y JUAN (Anónimo)

Pedro dice a Juan: Tengo dos veces la edad que tenía cuando tenía la edad que tienes tú. Cuando tú tengas la edad que yo tengo ahora, entre los dos tendremos 63 años. ¿Cuáles son nuestras edades actuales?.

LUIS Y SU PADRE (Anónimo)

Luis tiene 22 años y su padre 40 años. ¿Cuántos años tienen que transcurrir para que la edad de su padre sea el doble que la de Luis?.

HACE DIEZ (Anónimo, modificado para que sea sobredeterminado)

Hace diez años era dos veces más joven que lo soy ahora. Dentro de veinte años seré dos veces más viejo. ¿Cuál es mi edad actual?.

HERMANOS (Krutestki)

Soy ahora tres veces más viejo que lo era cuando mi hermano tenía mi edad. Cuando tenga la edad que mi hermano tiene ahora, habremos vivido 96 años entre los dos. ¿Cuáles son nuestras edades ahora?

Subfamilia GEOMETRIA

TERRENO (Texto BUP

El ancho de un terreno rectangular es 2/3 de su largo. Si ambas dimensiones se aumentan en 2 m, el área aumenta en 64 m^2. ¿Cuáles son las dimensiones de este terreno?

PERIMETRO (Texto BUP)

El perímetro de un rectángulo es 2500 m y el ancho es 2/3 del largo. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

HOJA DE ALUMINIO (Rubio, modificado para que sea indeterminado)

Una hoja de aluminio se recorta en sus esquinas para hacer una caja. Los cortes son cuadrados de 2 cm de lado. ¿Cuáles son las dimensiones de la hoja, si la base de la caja debe tener 300 cm^2 de superficie?

EDITORIAL (Rubio)

Una editorial necesita cortar hojas rectangulares, cuyo ancho es la mitad de su largo, para imprimir en cada página una superficie de 300 cm^2. Si los márgenes son de 2 cm. arriba y abajo y 2'5 cm. en cada lado, ¿cuáles son las dimensiones de la hoja?

Subfamilia MOVILES

ALCANZAR (Anónimo)

Un automóvil parte de un punto A con velocidad uniforme de 40 km/h hacia otro punto B. Dos horas después sale de A hacia B otro automóvil con velocidad uniforme de 60 km/h. Dígase a qué distancia de A se encuentran.

ENCONTRAR (Anónimo)

Un tren parte a las 16 h de Madrid con destino a Valencia con una velocidad de 120 km/h. A la misma hora sale de Valencia otro tren con destino Madrid y a una velocidad de 140 km/h. Dígase a qué distancia de Madrid se encuentran y a qué hora, si la distancia Madrid-Valencia es de 430 km.

LIEBRE Y GALGO (Anónimo)

Una liebre era perseguida por un galgo al que llevaba 50 saltos de ventaja. La liebre daba 4 saltos mientras que el galgo daba 3, pero 2 saltos del galgo miden tanto como 3 saltos de liebre. ¿Cuántos saltos deberá dar el galgo para alcanzar a la liebre?.

AVIONETA (Polya)

Una avioneta vuela a 220 kilómetros por hora cuando no hay viento. Puede llevar carburante para 4 horas. Un día en que el viento sopla a 20 kilómetros por hora, la avioneta sale del aeropuerto en la dirección del viento. ¿Hasta qué distancia podrá llegar si ha de regresar al aeropuerto sin agotar el carburante?.

Subfamilia TRABAJO

CAVAR (Anónimo)

La superficie de un campo es de 6 ha. Juan puede cavarlo en 2 días. Antonio lo hace en 3 días. Si trabajan los dos juntos en el campo, ¿cuánto tiempo tardarán en cavarlo?.

EJE VIARIO (Rubio)

Una persona contrata el acondicionamiento de un eje viario para realizarlo en 72 días. Sabe que para ello necesitaría 72 hombres. Cuando empieza los trabajos, emplea 50 hombres, y al cabo de cierto tiempo contrata a 30 hombres más para poder dar cumplimiento a su contrato. ¿Durante cuántos días trabajan estos 30 hombres?

ROTATIVA (Rubio)

La rotativa de cierto diario imprime los periódicos de un día en 4 horas. Otra rotativa de mayor velocidad puede hacerlo en 2 horas. Se pregunta por el tiempo que emplearán las dos rotativas trabajando a la vez.

ARTEL (Euler)

Un artel de segadores debía segar dos prados, uno de los cuales tenia el doble superficie que el otro. Durante medio día trabajó todo el personal del artel en el prado grande; después de la comida, una mitad de la gente quedó en el prado grande y la otra mitad trabajó en el pequeño. Durante esa tarde fueron terminados los dos tajos, a excepción de un reducido sector del prado pequeño, cuya siega ocupó a un segador toda la jornada siguiente. ¿Cuántos segadores componían el artel?

Subfamilia OTROS

RUBLOS (Krutestki)

Una escuela rusa compra libros para la biblioteca. Si los paga con billetes de 3 rublos, la escuela tiene que dar 8 billetes más que si los paga con billetes de 5 rublos. ¿Cuánto cuestan los libros?

HENO (Kalmikova)

Unos granjeros almacenaron heno para 40 días. Sin embargo el heno era de mejor calidad de la que pensaban y ahorraron 100 kg por día. Así tuvieron heno para 60 días. ¿Cuánto heno almacenaron?

MECANOGRAFA (Rubio)

Una mecanógrafa piensa que si escribe al día 2 páginas más de lo establecido normalmente, acabará el trabajo 3 días antes de lo previsto, mientras que si escribe 4 páginas más al día, acabará 5 días antes de lo previsto. ¿Cuántas paginas tiene que escribir y en cuánto tiempo?

DINERO (Rubio)

Una cierta suma de dinero se repartió a partes iguales entre cierto. número de niños. Si hubiera habido dos niños más, cada uno hubiera recibido 100 pts menos; si hubiera habido dos niños menos, cada uno hubiera recibido 200 pts más. ¿Cuántos niños había y cuánto recibió cada uno?

CHOCOLATES Y CALRAMELOS (Rubio)

Una profesora tiene 120 chocolates y 192 caramelos para repartir —a partes iguales cada tipo de dulce— entre los alumnos de su grupo. Si cada alumno recibe tres caramelos más que chocolates, ¿cuántos son los alumnos?

COMERCIANTES (Bezout)

Dos comerciantes se presentaron en el mercado con 100 cartones de huevos. Uno de ellos llevaba más cartones que el otro, pero despues de vendidos obtuvieron el mismo provecho. Así fue que, uno le dijo al otro: si hubiera tenido tus huevos, les hubiera sacado 45000 pts.; por supuesto que, si yo hubiera tenido los tuyos, tendría ahora 20000 pts., respondió el otro. Averiguar los cartones de huevos que llevó cada uno.

Entre los problemas, son indeterminados DESCOMPONER EN CUATRO PARTES y HOJA DE ALUMUNIO y sobredeterminado HACE DIEZ.

El valor de complejidad concreto de cada problema consta en el **Anexo 4.1**

Variable del sujeto. Problemas administrados a cada Curso.

La variable del sujeto tomó tres valores que fueron Curso 1º, Curso 2º y Curso 3º.

Los tamaños de las colecciones de problemas que se administraron en los cursos 1º , 2º y 3º fueron 24, 23 y 21 respectivamente, divididos en tres partes .

Los problemas que contenía cada una de las partes, para cada curso, constan en la Tabla 4.2. Los problemas compartidos por los tres cursos fueron 13. Los problemas compartidos por 1º y 2º o 2º y 3º fueron 5, diferentes en cada caso. El resto de los problemas fueron asignados o bien sólo a 1º o bien sólo a 3º.

4.5.2.2.- Los estudiantes

Los estudiantes, a los que se administró el instrumento, eran muchachos y muchachas entre los 14-19 años de edad que cursaban, en el año 1992, estudios de 1º, 2º o 3º de Bachillerato Unificado Polivalente (BUP), en la especialidad de Ciencias. El Bachillerato no formaba parte de la enseñanza obligatoria.

Los estudiantes pertenecían a Institutos de la red publica de enseñanza, éstos Institutos son: Instituto “Benlliure”, Instituto de Mislata, Instituto “Virrey Morcillo”[41] ubicados respectivamente en la ciudad de Valencia, en Mislata un municipio de la periferia de la ciudad y en Villarrobledo un municipio de unos 20.000 habitantes en una zona rural y vitivinícola de la provincia de Albacete.

[41] Donde es el momento de agradecer la importante colaboración de D. Anselmo Perez Machado( ), Dª. M.ª Carmen Tormo Sevilla y D. Servando Plaza Olivares profesores de Matemáticas de los Institutos Benlliure, Mislata y Virrey Morcillo que coordinaron la administración del instrumento en sus respectivos institutos y lo administraron a sus estudiantes. También nuestro agradecimiento al resto de profesores de Matemáticas de dichos Institutos que personalmente administraron el instrumento a sus estudiantes..

En la Tabla 4.3 se muestra según cursos y centros la distribución de los estudiantes a los que se administró alguno de los tres test del instrumento.

Instituto/ estudiantes	1º	2º	3·
Benlliure-Valencia	30	37	35
Mislata	40	38	35
Villarrobledo	25	22	21
total	95	97	91

Tabla 4.3.- Distribución del número de estudiantes según cursos y centros

La totalidad del instrumento, esto es, las tres partes o sub-test no fueron administrados a todos los estudiantes[42] de cada curso que participaron en la investigación. La tabla 4.4 muestra los estudiantes de cada curso que pasaron cada uno de los tres test, resultando que el número de los estudiantes que realizaron los tres subtest fueron 91, 92 y 75 de 1º, 2º y 3º respectivamente.

.

test/curso	test -1	test-2	test-3
1º	93	94	91
2º	94	96	92
3º	87	84	82

Tabla 4.4.-Número de estudiantes que pasaron cada uno de los tres test.

Las características de los estudiantes relativas a su historial de instrucción y el curso al que pertenecen se han considerado en **4.4**.

4.5.2.3 La administración del instrumento. El contrato con los estudiantes.

El instrumento fue administrado a los estudiantes personalmente por su propio profesor de Matemáticas, en horas que correspondían a clases de la asignatura. Los tres test no se administraron en clases de Matemáticas sucesivas. El momento de administración concreta de cada uno de los test fue dejado a criterio de los profesores, para que no interfiriese su propio desarrollo de la asignatura. Los profesores siempre administraron sucesivamente los test nº 1, 2 y 3 por dicho orden. El periodo de tiempo que llevó la administración de la totalidad del instrumento, fue diferente según cursos e institutos y tuvo una variación entre dos y seis semanas.

Los estudiantes eran conocedores de que lo que produjesen no iba a ser utilizado en ningún caso para su evaluación. Se les informó que su colaboración estaba destinada a una investigación sobre resolución de problemas, que su participación era voluntaria y

[42] Ello se debió a que los estudiantes no asistieron a clase o no quisieron realizar el test en el día en que éste se administró.

	1º	2º	3º
1º parte	ENTERO FRACCION REAPARTIR 1200 **MECANOGRAFA** CHOCO Y CALRAMELOS HACE DIEZ **LIEBRE Y GALGO** PERIMETRO	FRACCION **MECANOGRAFA** HACE DIEZ **LIEBRE Y GALGO** *HERMANOS* *AVIONETA* *FORTUNA*	**MECANOGRAFA** COMERCIANTES **LIEBRE Y GALGO** *HERMANOS* *AVIONETA* *FORTUNA* MEZCLAS
2º parte	**DESCOMPONER EN 4 PARTES** **CAVAR** HOJA DE ALUMINIO LUIS Y SU PADRE **EDAD DOBLE** **ENCONTRAR** **RUBLOS** REPARTIR ENTRE 5	**DESCOMPONER EN 4 PARTES** **CAVAR** HOJA DE ALUMINIO *EJE VIARIO* **EDAD DOBLE** **ENCONTRAR** **RUBLOS** REPARTIR ENTRE 5	**DESCOMPONER EN 4 PARTES** **CAVAR** ARTEL *EJE VIARIO* **EDAD DOBLE** **ENCONTRAR** **RUBLOS**
3º parte	**MITAD Y TERCERA PARTE** **DINERO** **PEDRO Y JUAN** **ALCANZAR** TERRENO ROTATIVA **HENO** BOLSAS DE CARAMELOS	**MITAD Y TERCERA PARTE** **DINERO** **PEDRO Y JUAN** **ALCANZAR** TERRENO ROTATIVA **HENO** *RESTA Y RESTA*	**MITAD Y TERCERA PARTE** **DINERO** **PEDRO Y JUAN** **ALCANZAR** EDITORIAL **HENO** *RESTA Y RESTA*

Tabla 4.2.- Composición de cada una de las tres partes en que fue dividido el instrumento y su administración a cada curso.. En **NEGRITA** problemas comunes a los tres cursos. En GRIS los problemas comunes únicamente a 1º y 2º curso. En *CURSIVA* los problemas compartidos únicamente por los cursos 2º y 3º.

que también se había pedido a estudiantes de otros institutos. También fueron informados de que el instrumento constaba de tres pruebas.

En la administración concreta de cada uno de los test, estudiantes y profesor se comportaron como si de un examen se tratase. La diferencia con un examen estribaba en que los estudiantes no necesitaban hacer constar su nombre en las hojas donde constaban los problemas del test que junto con las resoluciones debían de entregar al profesor. Podían hacer constar cualquier nombre o pseudónimo pero éste debía ser recordado para que hiciesen constar el mismo en las tres pruebas.

Lo mencionado en los párrafos anteriores trata de describir la presión psicológica a que los estudiantes se podían encontrar sometidos u otras circunstancias que pudiesen afectar a su desempeño. El contrato concreto con los estudiantes, respecto de lo que debían hacer, constaba en la cabecera de la hoja que contenía los problemas de cada test. En dicha cabecera –ver Cuadro 4.1- constaban los datos requeridos para la identificación de los estudiantes, las instrucciones que debían seguir y un recuadro donde con letra negrita constaba una advertencia destinada a que no ocultasen al investigador ninguna huella de lo producido en la resolución. La intención en la redacción de las instrucciones era dirigir la actividad de los estudiantes hacia el logro del mayor número de planteamientos.

.

NOMBRE____

CURSO_____________EDAD___________FECHA________________________

INSTRUCCIONES: Intenta hacer todos los problemas que puedas. Cuando creas que un problema ya está planteado y sólo falta "resolver o hacer operaciones", puedes pasar al siguiente. Si después de plantearlos todos te queda tiempo, resuélvelos hasta el final.

No borres nada de lo que escribas. Lo que pienses que está mal táchalo con una raya.

Cuadro 4.1- Cabecera de la hoja de cada test. En la hoja constaban a continuación los problemas

4.5.3.- La fuente de datos. Las resoluciones. SMS.

4.5.3.1.- Las resoluciones.

En el anexo **A4.8** se encuentra una muestra de resoluciones de los problemas de los tres subtest, por estudiantes de cada uno de los cursos y de los tres Institutos que se consideraron. Las resoluciones, algunas de una, un par o tres de líneas se limitaron generalmente al planteamiento del problema. La mayoría utilizaron el SMS del álgebra y no siempre dijeron que significaban las letras utilizadas. En muchas resoluciones la expresión verbal era inexistente. Excepto en los problemas de la subfamilia geometría, la presencia de dibujos fue escasa o casi nula, con la excepción de una línea que representa el recorrido en algunas de las resoluciones de problemas de la subfamilia móviles.

4.5.3.2.- La determinación del valor de las variables del proceso.

A las variables de proceso, descritas en **4.4.1** para la descripción del proceso de traducción: uso de letras (UL), expresiones algebraicas (EA), igualdades (IG), todas las expresiones algebraicas (TEA), todas las igualdades (TI), solución (S), error en expresiones algebraicas (EEA), error en igualdad(EI), se añadieron las variables Abordado (A) y solución mediante ecuaciones (SEC) para facilitar el análisis de los datos y porque en las resoluciones no siempre se usaban letras,

La determinación del valor de cada variable del proceso, para cada resolución, de cada problema, se hizo siguiendo las instrucciones que se elaboraron para codificar dichas resoluciones. Las instrucciones figuran en el cuadro 4.2.

El proceso de codificación se llevó a cabo estudiante a estudiante, según el modelo de plantilla de la Tabla 4.5, donde debía de tacharse la celda correspondiente en caso afirmativo.

Nombre Curso

1.1	A	UL	EA	IG	TEA	TI	S	SEC	EEA	EIG
……	A	UL	EA	IG	TEA	TI	S	SEC	EEA	EIG
……	A	UL	EA	IG	TEA	TI	S	SEC	EEA	EIG
2.1	A	UL	EA	IG	TEA	TI	S	SEC	EEA	EIG
……	A	UL	EA	IG	TEA	TI	S	SEC	EEA	EIG
	A	UL	EA	IG	TEA	TI	S	SEC	EEA	EIG
3.1	A	UL	EA	IG	TEA	TI	S	SEC	EEA	EIG
……	A	UL	EA	IG	TEA	TI	S	SEC	EEA	EIG
……	A	UL	EA	IG	TEA	TI	S	SEC	EEA	EIG

Tabla 4.5.- Plantilla para la codificación de las resoluciones de un estudiante.

No se codificaron las resoluciones de los estudiantes a los que no se les había administrado alguno de los tres subtest.

Dadas las reticencias apuntadas en **4.4**, sobre la determinación del valor de las variables en cada resolución, no obstante la creencia de que las instrucciones de codificación elaboradas eran precisas, las resoluciones de los estudiantes de 2º curso del Instituto de Mislata fueron codificadas por el investigador y por la Dra. Gregoria Guillem[43]. Tomadas las plantillas de codificación de los estudiantes y las dos codificaciones se constató que la codificación de las variables A, UL, EA, IG, TI, S, y SEC no mostró discrepancias, de la totalidad de los estudiantes, más que en dos estudiantes y tres problemas, atribuibles a un desliz del lápiz mientras se codificaba.

[43] A quien le agradezco profundamente, tanto la ayuda prestada en esta codificación, que no es asunto de un minuto, como muchas otras de las que me ha dispensado para hacer posible la realización de esta tesis.

INSTRUCCIONES PARA LA CODIFICACIÓN DE LAS RESOLUCIONES.

ABORDADO (A). Se codificará como afirmativo (1) siempre que en la resolución conste algún signo: letras, anotaciones sobre datos, dibujos, expresiones aritméticas o algebraicas, etc.

Nota.-Se codificará abordado como afirmativo aunque la resolución este tachada. El mismo criterio se utilizará para la codificación del resto de las variables.

USO DE LETRAS (UL). Se codificará como afirmativo (1) siempre que en la resolución conste:

a) una letra seguida de su significado.
b) una letra que se juzgue va a ser utilizada como incógnita.
c) alguna expresión algebraica.

Nota.- No se codificará UL si las letras únicamente constan en fórmulas.

EXPRESIONES ALGEBRAICAS (EA). Se codificará como afirmativo (1) siempre que en la resolución conste alguna expresión algebraica.

IGUALDAD (IG) Se codificará como afirmativo (1) siempre que en la resolución conste el signo igual interpuesto entre dos expresiones al menos una de las cuales es algebraica o entre una expresión algebraica y un dato del problema.

SOLUCION (S). Se codificará como afirmativo (1) siempre que:

a) en la resolución consten la ecuación o ecuaciones cuya resolución conduzca al resultado del problema
b) las expresiones aritméticas que conducen al resultado o el resultado.

SOLUCION MEDIANTE ECUACIONES (SEC).Se codificará como afirmativo (1) siempre se haya codificado S y se esté en el caso a).

TODAS LAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS (TEA). Se codificará afirmativo (1) si en la resolución una vez examinada una de las expresiones algebraicas que figura en un lado de la igualdad y determinada la cantidad que refiere, en el otro lado de la igualdad se encuentran todas las expresiones algebraicas elementales que refieren dicha cantidad en sentido diferente.

TODAS LAS IGUALDADES (TI). Se codificará afirmativo (1) si en la resolución se encuentran tantas igualdades como letras utilizadas.

ERROR EN EXPRESIONES ALGEBRAICAS (EEA) .- Se codificará afirmativo (1) si alguna de las expresiones algebraicas que figuran en la resolución contiene un error de inversión, operación o de arbitrariedad.

ERROR EN IGUALDADES (EIG).- Se codificará afirmativo (1) siempre que la resolución as cantidades a que refieren las expresiones algebraicas que constan en el lado izquierdo y derecho de una igualdad o bien pertenecen a espacios de medida diferentes o bien perteneciendo al mismo espacio de medida no refieren la misma cantidad en sentidos diferentes.

Cuadro 4.2.-Instrucciones para la codificación de resoluciones.

Sin embargo, en la codificación de las variables TEA, EEA, EIG no habían sido coincidentes ambas codificaciones en parte de los problemas de bastantes de los estudiantes. En vista de ello, se retiraron del estudio todas las variables relativas a cantidad y error, esperando realizar un estudio de los errores por otra vía. Así, quedó el estudio limitado a las variables A, UL, EA, IG, S, SEC.

El valor de cada una de las variables A, UL, EA, IG, S, SEC para cada uno de los problemas, se obtuvo para cada curso, mediante recuento del valor de las variables de proceso del problema de cada uno de los estudiantes. Dicho recuento se llevó a efecto mediante recuentos parciales de cada instituto. El valor de las variables obtenido en el recuento, para cada problema y curso, representa el número de estudiantes del curso considerado que han realizado en la resolución del problema las tareas de que da cuenta cada una de las variables.

Así, se obtuvieron las tres matrices de datos brutos, una para cada curso, con los valores de las variables A, UL, EA, IG, S, SEC que constan en el anexo **A4.2**. Tablas I, II, III y provienen de la codificación del investigador.

4.5.4.- Tratamiento, organización y análisis de los datos.

4.5.4.1.-Variables dependientes.

4.5.4.1.1.-Las medidas de dificultades y pertinencia utilizadas.

Las medidas concretas utilizadas para las dificultades y pertinencia, mencionadas en el propósito del estudio, fueron determinadas a partir de los valores de las variables de proceso. Así:

Dificultad apreciada de un problema = (A / n) *100 , donde n = nº de estudiantes.

Dificultad de la solución de un problema = (1 - (S/ n)) *100

Dificultad del proceso de traducción algebraico de un problema:
(1- (SEC/UL))*100

Pertinencia del proceso de traducción algebraica = (UL / A) *100.

Además para el análisis se introdujo la variable:

Diferencia entre dificultades de un problema: la diferencia entre los valores de la dificultad apreciada y la dificultad de la solución de ese problema.

Variable que es una medida del error en un problema[44] estimada por el porcentaje de estudiantes que habiéndolo abordado no obtienen la solución.

El uso de dichas fórmulas, operando sobre las matrices de datos brutos permitió obtener las matrices de dificultades, diferencia entre dificultades y pertinencia para cada

[44] Al dar cuenta de los resultados se utilizará en ocasiones error en lugar de diferencia entre dificultades, pero se preservará la denominación diferencia entre dificultades con la intención del recuerdo constante del error a que nos referimos.

curso. Esto se llevó a cabo en una hoja de cálculo, obteniendo así los valores de la variable dependientes que figuran en el anexo **A4.2**. Tablas IV, V, VI.

4.5.4.1.2.- Perfil del proceso de traducción algebraico de un problema.

No se consideraron las dificultades de las tareas subsidiarias del proceso de traducción construcción de expresiones algebraicas y construcción de igualdades por las razones que se apuntarán en **4.5.5.7**.

Para forjarse una idea de la marcha del proceso de traducción de cada problema, se asociaron a éste cuatro números: los porcentajes de las variables de producto UL, EA, IG, SEC respecto de UL A dichos cuatro números:

100, (EA / UL)*100, (IG / UL)*100, (SEG / UL)*100,

les llamaremos perfil del proceso de traducción de un problema. O simplemente perfil del problema. La obtención de los perfiles de cada problema se realizó en una hoja de calculo a partir de los datos brutos obteniéndose así los perfiles para cada problema en cada curso, perfiles que figuran en el anexo **A4.2** Tablas VII, VIII, IX.

En la representación en un eje de coordenadas del perfil de los problemas, ver anexo **A4**.**7,** los perfiles siguen una pauta de descenso progresivo, en tres escalones, desde 100 hasta el porcentaje de estudiantes que han encontrado la solución mediante ecuaciones, cuyo complemento a 100 es la dificultad del proceso de traducción.

La información de la marcha, en cuanto a producción, del proceso de traducción de los problemas se hace mediante la observación y estudio de perfiles.

4.5.4.2.- La organización de los datos.

Como quiera que los problemas administrados no fueron los mismos para los estudiantes de los tres cursos, ver Tabla 4.2, y además, entre los problemas del instrumento figuraban problemas equivalentes, indeterminados, etc., para el análisis de datos se miró el instrumento como descompuesto en varios instrumentos, en función de la población de problemas que contenía y los estudiantes a los que se les habían administrado. Así, se consideraron las siguientes poblaciones:

Población 1º.- Población en la que los casos son los problemas administrados a los estudiantes del curso 1º. Compuesta de 24 problemas.

Población 2º.- Población en la que los casos son los problemas administrados a los estudiantes del curso 2º. Compuesta de 23 problemas.

Población 3º.- Población en la que los casos son los problemas administrados a los estudiantes del curso 3º. Compuesta de 21 problemas.

Población 1º y 2º.- Población en la que los casos son los problemas comunes administrados a los estudiantes de los cursos: 1º y 2º. Compuesta de 36 problemas, 18 problemas diferentes de cada curso, los mismos problemas en ambos cursos.

Población 2º. y 3º.- Población en la que los casos son los problemas comunes administrados a los estudiantes de los cursos: 2º y 3º. Compuesta de 36 problemas, 18 problemas diferentes de cada curso, los mismos problemas en ambos cursos.

Población de problemas comunes.-. Población en la que los casos son los problemas comunes administrados a los estudiantes de los cursos: 1º, 2º y 3º. Compuesta de 39 problemas, 13 problemas diferentes de cada curso, los mismos problemas en los tres cursos.

Población bajo estudio.- Población en la que los casos son los problemas administrados a los estudiantes de los cursos 1º, 2º y 3º. Compuesta de 68 problemas, 24 problemas de primero, 23 problemas de 2º, 21 de 3º. Esto es la consideración conjunta de las tres primeras poblaciones.

Población reducida.- Población construida a partir de la Población bajo estudio, excluyendo los problemas indeterminados, sobredeterminados, uno de los equivalentes de la misma familia y peculiares. Esto es, los casos de los problemas: DESCOMPONER EN 4 PARTES, HACE DIEZ, HERMANOS, HOJA DE ALIMINIO, LIEBRE Y GALGO y DINERO, en cualquiera de los cursos en que estos problemas figurasen. Población compuesta de 53 problemas.

La intención de la construcción de esta última población es evitar el posible sesgo que pudiese encontrarse en los efectos de la variable subfamilia y complejidad por el desequilibrio que pudiese comportar los casos de problemas que las representaban.

4.5.4.3.- Análisis de datos.

El estudio esta diseñado de modo que se dispone para cada caso -problema- de las variables independientes, -factores- : curso, subfamilia y complejidad y las variables dependientes: dificultad apreciada, dificultad de la solución, diferencia entre dificultades, pertinencia del proceso y dificultad del proceso de traducción.

El análisis de datos se llevó a efecto mediante el paquete estadístico SPSS.13. De este paquete, utilizamos en el análisis de datos la opción MODELO LINEAL GENERAL que permite evaluar, para el conjunto de las variables dependientes, la significación de los efectos de los factores, tanto de modo aislado como combinado, según el modelo que el investigador diseñe. Nosotros utilizamos el diseño: modelo factorial completo.

Además, el paquete estadístico citado evalúa en las pruebas de los efectos inter-sujetos, para cada una de las variables dependientes los efectos de los factores, y, como post hoc, proporciona las comparaciones entre las medias de los factores para cada una de las variables en la población considerada. Esto nos resuelve, de una vez, el contraste de las hipótesis nulas. No obstante, a veces por comodidad o porque el análisis lo permitía también se utilizó ANOVA de un factor para la comparación de medias.

Previo a cualquier análisis de cualquier población, se obtuvo información referida a la distribución de las variables dependientes y de su correlación. Esto último, además, con la intención de retirar alguna variable del estudio en caso de que se observasen correlaciones elevadas.

4.5.5.- Resultados y comentarios

4.5.5.1.- Población bajo estudio.

4.5.5.1.1.- Descriptivos y correlaciones.

Las medias y desviaciones de las variables dificultades y pertinencia vienen dadas en la Tabla 4.6 y las correspondientes distribuciones pueden verse en el anexo **A4.3**, Tabla I.

	dif. apreciada	**dif. solución**	**pertinencia**	**dif. proceso**
media	36.36	79.58	89.33	69.9
desviación	20.6	20.0	23.0	25.4

Tabla 4.6.- Población bajo estudio. Medias y desviaciones de dificultades y pertinencia.

Aunque no es pertinente poner calificativos[45] la dificultad apreciada la diremos media, la dificultad de proceso alta y la dificultad de la solución elevada. Por otro lado, dado el valor de la variable pertinencia puede decirse que, a juicio de los estudiantes, el modo de resolver algebraico se considera apropiado para la resolución de la mayor parte de los problemas.

La correlación entre dichas variables estimada por el coeficiente de correlación de Pearson resultó ser siempre significativa, anexo **A4.3**, tabla II. El coeficiente siempre fue positivo, excepto entre dificultad apreciada de la solución y pertinencia del proceso que resultó ser -0,552. El valor de los coeficientes entre dificultad de la solución y dificultad del proceso fue 0,89, lo que era de esperar dado el valor medio de la variable pertinencia. A pesar de esta correlación elevada, ambas variables se mantuvieron en el análisis, la dificultad de la solución para relacionarla con la dificultad apreciada (correlación 0,66) y la dificultad del proceso con la pertinencia (correlación 0,72).

4.5.5.1.2.- Dificultades. Variables de la tarea y del sujeto.

a) Contrastes multivariantes del efecto de las variables de la tarea y del sujeto sobre las dificultades del problema.

El efecto de las variables de la tarea sobre el conjunto de dificultades resultó significativo (s<.002) bien se juzgase su efecto por separado subfamilia, complejidad o por la interacción complejidad*subfamilia, Anexo **A4.3**, Tabla III.

El efecto de las variable del sujeto curso sobre el conjunto de dificultades resultó significativo (s<.03), Anexo **A4.3**, Tabla III.

[45] Aquí las dificultades tienen un valor numérico estimado, y no hay modo más preciso de hablar de cuán difícil es un problema, que referir el valor de dicho número. No obstante con el ánimo de facilitar la lectura o retener en la memoria un índice de la dificultad usaremos los calificativos baja, media, alta y elevada para las dificultades cuyos valores estimados estén en el primero, segundo, tercero o cuarto cuartíl.

El efecto de la interacción de variable de la tarea * variable del sujeto sobre el conjunto dificultades solo puede considerase significativo en el caso subfamilia*curso (s <.02), mientras que no resulta significativa la interacción complejidad*curso (s=.34 para la traza de Pillai), Anexo **A4.3**, Tabla III .

El efecto de la interacción de las variables del sujeto y la tarea (subfamilia *complejidad*curso) sobre el conjunto de dificultades resultó significativo (s<.01), Anexo **A4.3**, Tabla III.

b) Efecto de las variables de la tarea y del sujeto sobre cada una de las dificultades.

De este efecto, se da cuenta en la Tabla IV del anexo **A4.3** y se ha efectuado un resumen en Tabla 4.7, donde se han señalado con **X** todos los casos en que el efecto es significativo (s<.05) y se ha dado el nivel de significación en los casos en que el efecto no puede darse como significativo.

	dif. apreciada	**dif. solución**	**dif. proceso**
subfamilia	**X**	**X**	**X**
complejidad	**X**	**X**	**X**
subfamilia*complejidad	**X**	**X**	**X**
curso	**X**	**X**	**X**
curso*complejidad	.14	**X**	.29
curso*subfamilia	.13	**X**	.18
curso*subfamilia * complejidad	**X**	**X**	.30

Tabla 4.7.- Significación de los efectos de variables de tarea y del sujeto sobre cada una de las dificultades. **X** = (s<,05).

A partir de la observación de dicha tabla podemos enunciar:

En la dificultad de la solución, las variables de la tarea y del sujeto, bien por separado o en todas sus interacciones, tienen un efecto significativo.

En la dificultad apreciada, las variables de la tarea y del sujeto, por separado, o la interacción triple de las mismas, tienen un efecto significativo, mientras que no lo tienen las interacciones dobles variable de la tarea* variable del sujeto.

En la dificultad del proceso de traducción, las dos variables de la tarea, su interacción y la variable del sujeto tienen un efecto significativo.

4.5.5.1.3.- Diferencia entre dificultad apreciada y de la solución (error).

La media de la diferencia entre dificultades es 43.0 y su desviación 16.9

La correlación de esta variable con el resto resultó significativa pero nunca alcanzó el 0.5, anexo **A4.3**, Tabla II, siendo negativa con la dificultad apreciada.

De la dependencia de la diferencia de dificultades de las variables de la tarea y del sujeto se da cuenta en la Tabla V, del anexo **A4.3,** que permite concluir:

Las variables de la tarea subfamilia y complejidad y su interacción tienen un efecto significativo sobre la diferencia entre dificultades. La variable del sujeto curso no tiene ningún efecto significativo. Sin embargo, la interacción de las variables de la tarea y del sujeto tiene un efecto significativo sobre la diferencia de dificultades.

4.5.5.1.4.- Pertinencia del proceso de traducción. Variables de la tarea y del sujeto.

De la dependencia de la pertinencia proceso de traducción de las variables de la tarea y del sujeto se da cuenta en la Tabla VI, del anexo **A4.3**, que permite concluir:

De las variables de la tarea y del sujeto únicamente la variable de la tarea subfamilia tiene efecto significativo sobre la pertinencia del proceso de traducción.

Las variables complejidad y curso requieren para que su efecto sea admisible de niveles de significación del .13 y .16 respectivamente.

Ninguna interacción doble o triple de las variables de tarea y sujeto tienen efecto sobre la pertinencia del proceso de traducción.

Por último, en las tablas VII, VIII y IX del anexo **A4.3** figuran las medias estimadas de las variables dependientes para curso, subfamilia y complejidad.

4.4.5.2.- Población reducida.

4.5.5.2.1.- Descriptivos y correlaciones.

Las medias y desviaciones de las variables dificultades y pertinencia vienen dadas en la Tabla 4.8 y las correspondientes distribuciones pueden verse en el anexo **A4.4**, Tabla I.

	dif. apreciada	**dif. solución**	**pertinencia**	**dif. proceso**
media	36.8	74.5	81.5	64.7
desviación	21.6	21.0	24.5	25.0

Tabla 4.8- Población reducida. Medias y desviaciones de dificultades y pertinencia

Comparados estos datos con los de la población bajo estudio observamos que la dificultad apreciada tiene valores similares, mientras que la dificultad de la solución y del proceso han disminuido alrededor de 5 puntos y la pertinencia de 8. Descenso que se debe o puede explicarse en función de la mayor dificultad de los problemas indeterminados DESCOMPONER EN 4 PARTES Y HOJA DE ALUMINIO por un lado y la elevada dificultad de los problemas HERMANOS, DINERO y LIEBRE Y GALGO por el otro, ya que estos problemas no constan en la población reducida. El descenso de la pertinencia del proceso de traducción sólo se puede atribuir a los problemas HOJA DE ALUMINIO y LIEBRE Y GALGO que tienen valores menores para la pertinencia del proceso que otros problemas, ver **4.5.5**.

Por su lado, en la población reducida, también la correlación entre las variables estimada por el coeficiente de correlación de Pearson resultó ser siempre significativa**,** anexo **A4.4**, Tabla II. El coeficiente siempre fue positivo excepto entre dificultad apreciada de la solución y pertinencia del proceso que resultó ser -.49. El valor de los coeficientes entre dificultad de la solución y dificultad del proceso fue .87 lo que era de esperar dados el valor medio de la variable pertinencia. La correlación entre la dificultad de la solución y la dificultad apreciada (correlación .75) y entre la dificultad del proceso y pertinencia (correlación .55) proporciona valores similares a los de la población bajo estudio, excepto en el último caso, dificultad del proceso y pertinencia, donde el coeficiente de correlación es sensiblemente menor.

4.5.5.2.2.- Dificultades. Variables de la tarea y del sujeto.

a) Contrastes multivariantes del efecto de las variables de la tarea y del sujeto sobre las dificultades del problema.

El efecto de las variables de la tarea sobre el conjunto de dificultades resulta significativo (s<.002) cuando se juzga su efecto por separado subfamilia o complejidad. Ahora bien, cuando se juzga la interacción complejidad*subfamilia, la traza de Pillai, que es el indicador más exigente, indica un nivel de significación de .13, si bien para otros indicadores la significación queda por debajo del .03, Anexo **A4.4**, Tabla III.

Cuando se juzga el efecto de la variable del sujeto curso sobre el conjunto de variables dependientes dificultades, la traza de Pillai indica un nivel de significación de .16, si bien para lo otros indicadores la significación queda por debajo del .07, Anexo **A4.4**, Tabla III.

El efecto de la interacción variable de la tarea * variable del sujeto sobre el conjunto dificultades, sólo puede considerase significativo en el caso subfamilia*curso (s <.02), mientras que para la interacción complejidad*curso, la traza de Pillai, que es el indicador mas exigente, indica un nivel de significación de .16, si bien para los otros indicadores la significación queda por debajo del .03, Anexo **A4.4** , Tabla III.

El efecto de la interacción de las variables del sujeto y la tarea subfamilia*complejidad*curso sobre el conjunto no resultó significativo, Anexo **A4.4,** Tabla III.

Comparando los resultados obtenidos en la población reducida y en la población bajo estudio, respecto de los efectos de las variables de tarea y producto sobre las dificultades, puede decirse, en general, que hay que asumir mayor riesgo para aceptar los efectos de las interacciones en las que interviene la complejidad, al no estar presentes los problemas indeterminados y los problemas representados mediante dos problemas equivalentes, los problemas de complejidad 7, MECA y DINERO, que luego mostraron tener dificultades elevadas. A su vez, esta no presencia de problemas indeterminados y las prevenciones que hay que tomar en la población reducida para asumir el efecto de la variable del sujeto indica que la determinación o indeterminación de un problema es una de las fuentes para distinguir la dificultad de un problema según curso.

b) Efecto de las variables de la tarea y del sujeto sobre cada una de las dificultades.

De este efecto se da cuenta en la Tabla IV del anexo **A4.4** y se ha efectuado un resumen en tabla 4.9, donde se han señalado con **X** todos los casos en que el efecto es significativo (s<.05) y se ha dado el nivel de significación en los casos en que el efecto no puede darse como significativo.

	dif. apreciada	**dif. solución**	**dif. proceso**
subfamilia	**X**	**X**	**X**
complejidad	**X**	**X**	**X**
curso	**X**	**X**	**X**
subfamilia*complejidad	**X**	**X**	.20
curso*complejidad	.09	**X**	..64
curso*subfamilia	.12	.11	..40
curso*subfamilia * complejidad	.12	**X**	.51

Tabla 4.9.-Significación de los efectos de variables de tarea y producto sobre cada una de las dificultades. **X**= (s< .05)

A partir de la observación de dicha tabla podemos enunciar:

En la dificultad de la solución, las variables de la tarea y del sujeto, bien por separado, o en todas sus interacciones tiene un efecto significativo excepto en la interacción curso*subfamilia con cierto riesgo (s=.11)

En la dificultad apreciada, las variables de la tarea y del sujeto, por separado, y la interacción subfamilia*complejidad tienen un efecto significativo.

En la dificultad del proceso, únicamente las variables de la tarea y del sujeto por separado tienen un efecto significativo.

4.5.5.2.3.- Diferencia entre dificultad apreciada y de la solución (error)

La media de la diferencia entre dificultades es 39.5 y su desviación 14.9

De la dependencia de la diferencia de dificultades de las variables de la tarea y del sujeto se da cuenta en la Tabla V, del anexo **A4.4,** que permite concluir:

Las variables de la tarea subfamilia y complejidad y su interacción tienen un efecto significativo sobre la diferencia entre dificultades. La variable del sujeto curso no tiene ningún efecto significativo. Sin embargo, la interacción de las variables de la tarea y del sujeto tiene un efecto significativo sobre la diferencia de dificultades.

4.5.5.2.4.-Pertinencia del proceso de traducción.

.

De la dependencia de la pertinencia proceso de traducción de las variables de la tarea y del sujeto se da cuenta en la Tabla VI, del anexo **A4.4,** que permite concluir:

De las variables de la tarea y del sujeto, únicamente la variable de la tarea subfamilia tiene efecto significativo sobre la pertinencia del proceso de traducción.

4.5.5.3.- Población problemas comunes.

4.5.5.3.1.- Descriptivos y correlaciones.

Las medias y desviaciones de las variables dificultades y pertinencia vienen dadas en la Tabla 4.10 y las correspondientes distribuciones pueden verse en el anexo **A4.5**, Tabla I.

	dif. apreciada	**dif. solución**	**pertinencia**	**dif. proceso**
media	33.6	80.8	85.77	73.0.
desviación	19.9	19.10	19.19	24.9

Tabla 4.10.- Población Problemas Comunes. Medias y desviaciones de dificultades y pertinencia

La correlación entre dichas variables estimada por el coeficiente de correlación de Pearson resultó ser siempre significativa, Anexo **A4.5**, tabla II. El coeficiente siempre fue positivo excepto entre dificultad apreciada de la solución y pertinencia del proceso que resultó ser -0,33. El valor de los coeficientes entre dificultad de la solución y dificultad del proceso fue 0,91 la más elevada de las poblaciones estudiadas. La correlación la dificultad de la solución y la dificultad apreciada fue 0,65 y la dificultad del proceso y pertinencia 0, 45, valor menor que el de las poblaciones anteriores, no obstante, diferir aquellas en los problemas que contiene cada curso.

4.5.5.3.2.- Dificultades. Variables de la tarea y del sujeto.

a) Contrastes multivariantes del efecto de las variables de la tarea y del sujeto sobre las dificultades del problema.

El efecto de las variables de la tarea subfamilia y complejidad bien por separado o en la interacción subfamilia*complejidad sobre el conjunto de dificultades resultó significativo($s< .05$), Anexo **A4.5**, Tabla III.

El efecto de la variable del sujeto curso sobre el conjunto de variables dependientes dificultades puede considerarse significativo (.07 para la traza de Pillai que es el indicador mas exigente), Anexo **A4.5**, Tabla III.

El efecto de la interacción de variable de la tarea * variable del sujeto sobre el conjunto dificultades no resultó significativo, Anexo **A4.5**,Tabla III.

b) Efecto de las variables de la tarea y del sujeto sobre cada una de las dificultades.

De este efecto se da cuenta en la tabla IV del anexo **A4.5** y se ha efectuado un resumen en tabla 4.11 donde se han señalado con **X** todos los casos en que el efecto es significativo ($s<.05$) y se ha dado el nivel de significación en los casos en que el efecto no puede darse como significativo.

	dif. apreciada	dif. solución	dif. proceso
subfamilia	**X**	**X**	**X**
complejidad	**X**	**X**	**X**
curso	**X**	**X**	**X**
subfamilia*complejidad	.34	**X**	**X**
curso*complejidad	.28	**X**	.37
curso*subfamilia	.45	**X**	.54
curso*subfamilia * complejidad	**X**	**X**	.88

Tabla 4.11.-Significación de los efectos de variables de tarea y producto sobre cada una de las dificultades. **X**= (s< .05).

A partir de la observación de dicha tabla podemos enunciar:

En la dificultad de la solución, las variables de la tarea y del sujeto bien por separado o en todas sus interacciones muestran un efecto significativo

En la dificultad del proceso, las variables de la tarea y del sujeto por separado además de la interacción de las dos variables de la tarea complejidad*subfamilia tienen un efecto significativo.

En la dificultad apreciada del problema, las variables del sujeto y la tarea por separado y la interacción triple subfamilia*complejidad*curso tienen un efecto significativo.

4.5.5.3.3. Diferencia entre dificultad apreciada y de la solución (error)

La media de la diferencia entre dificultades es 47.2 y su desviación 16.8.

De la dependencia de la diferencia de dificultades de las variables de la tarea y del sujeto se da cuenta en la Tabla V del anexo **A4.5**, que permite concluir:

Las variables de la tarea subfamilia y complejidad y su interacción tienen un efecto significativo sobre la diferencia entre dificultades. La variable del sujeto curso no tiene ningún efecto significativo. Sin embargo, la interacción de las variables de la tarea y del sujeto tiene un efecto significativo sobre la diferencia de dificultades.

4.5.5.3.4.- Pertinencia del proceso de traducción. Variables de la tarea y del sujeto.

De la dependencia de la pertinencia proceso de traducción de las variables de la tarea y del sujeto se da cuenta en la Tabla VI del anexo **A4.5,** que permite concluir:

De las variables de la tarea y del sujeto, únicamente la variable de la tarea subfamilia tiene efecto significativo sobre la pertinencia del proceso de traducción.

4.5.5.4..-Dificultad apreciada, dificultad de la solución y diferencia entre dificultades (error) de los problemas.

4.5.5.4.1.- Dificultades y cursos.

4.5.5.4.1.1.-Curso 1º

La figura 4.1 y la tabla 4.12 dan cuenta de la dificultad apreciada y la dificultad de la solución de los problemas administrados a los estudiantes del Curso 1º. En la fig. 4.1, los problemas, en el eje X, vienen ordenados de izquierda a derecha, según orden decreciente de la dificultad de la solución. En la tabla 4.12, los problemas vienen ordenados en las columnas de arriba abajo, según orden decreciente de cada una de las dificultades. La fig. 4.2 y la tabla 4.13 dan cuenta de las diferencias entre la dificultad apreciada del problema y de la solución, estando ambas organizadas análogamente a las anteriores.

La tabla 4.14 presenta los estadísticos descriptivos correspondientes a dificultades y diferencias.

La dificultad apreciada media de los problemas es 36.7 y su desviación estándar 16.8, para la dificultad de la solución dichos valores son 81.6, 15.0.

Por su lado, el coeficiente de correlación entre ambas dificultades es .64

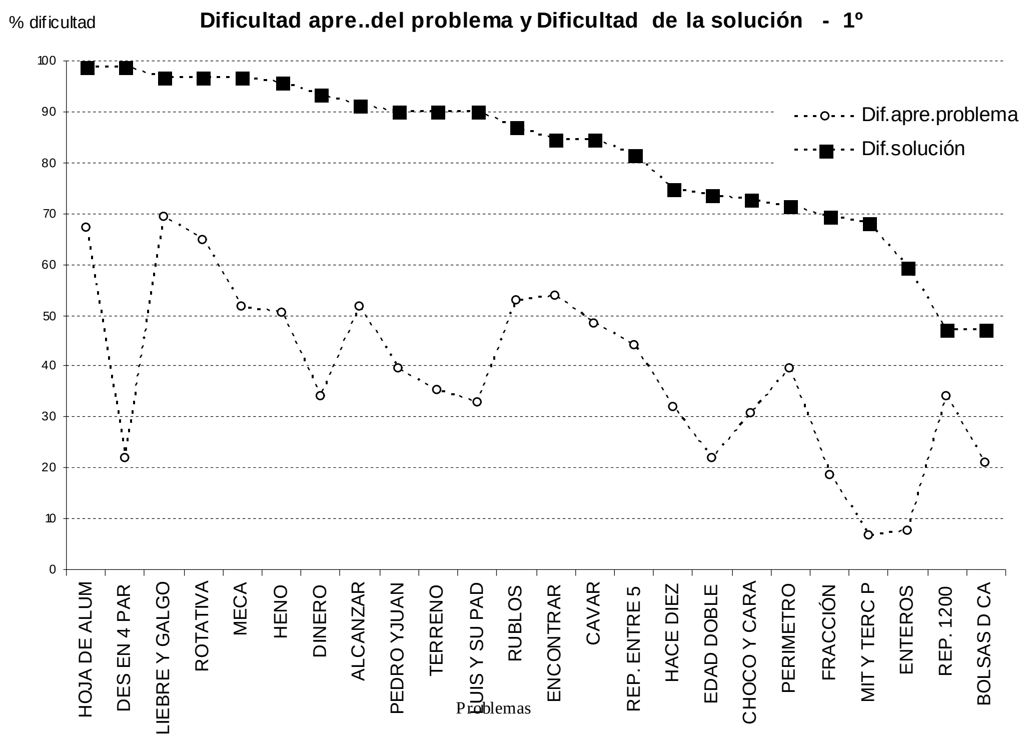


fig. 4.1.- Dificultad apreciada del problema y de la solución .Curso 1º.

Dif.solución			Dif. apre. problema	
HOJA DE ALUM	98,9		LIEBRE Y GALGO	69,2
DES EN 4 PAR	98,9		HOJA DE ALUM	67,0
LIEBRE Y GALGO	96,7		ROTATIVA	64,8
ROTATIVA	96,7		ENCONTRAR	53,8
MECA	96,7		RUBLOS	52,7
HENO	95,6		MECA	51,6
DINERO	93,4		ALCANZAR	51,6
ALCANZAR	91,2		HENO	50,5
PEDRO YJUAN	90,1		CAVAR	48,4
TERRENO	90,1		REP. ENTRE 5	44,0
LUIS Y SU PAD	90,1		PEDRO YJUAN	39,6
RUBLOS	86,8		PERIMETRO	39,6
ENCONTRAR	84,6		TERRENO	35,2
CAVAR	84,6		DINERO	34,1
REP. ENTRE 5	81,3		REP. 1200	34,1
HACE DIEZ	74,7		LUIS Y SU PAD	33,0
EDAD DOBLE	73,6		HACE DIEZ	31,9
CHOCO Y CARA	72,5		CHOCO Y CARA	30,8
PERIMETRO	71,4		DES EN 4 PAR	22,0
FRACCIÓN	69,2		EDAD DOBLE	22,0
MIT Y TERC P	68,1		BOLSAS D CA	20,9
ENTEROS	59,3		FRACCIÓN	18,7
REP. 1200	47,3		ENTEROS	7,7
BOLSAS D CA	47,3		MIT Y TERC P	6,6

Tabla 4.12.- Dificultad apreciada del problema y de la solución. Curso 1º.Prob. ordenados

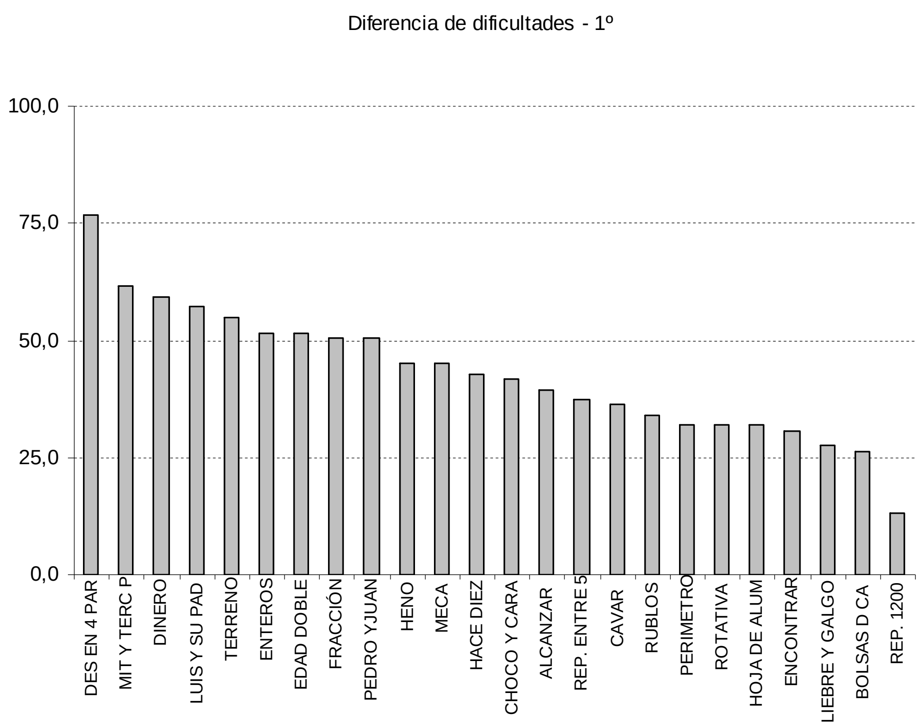


fig.4.2.- Diferencia entre dificultades (error)1º. Problemas ordenados.

Diferencia entre dificultades(error)				
DES EN 4 PAR	76,9		HENO	45,1
MIT Y TERC P	61,5		MECA	45,1
DINERO	59,3		HACE DIEZ	42,9
LUIS Y SU PAD	57,1		CHOCO Y CAR	41,8
TERRENO	54,9		ALCANZAR	39,6
ENTEROS	51,6		REP. ENTRE 5	37,4
EDAD DOBLE	51,6		CAVAR	36,3
FRACCIÓN	50,5		RUBLOS	34,1
PEDRO YJUAN	50,5		PERIMETRO	31,9
			ROTATIVA	31,9
			HOJA DE ALUM	31,9
			ENCONTRAR	30,8
			LIEBRE Y GALG	27,5
			BOLSAS D CA	26,4
			REP. 1200	13,2

Tabla 4.13.- Diferencia entre dificultades. Curso 1º.

	Media	**Des-viación**	**Rango** (máx., min.) Tamaño.	problema -máximo problema -mínimo
Difi. problema	36.7	16.9	(69.2, 6.6) 62.6	LIEBRE Y GALGO MIT Y TERC P
Difi. solución	81.6	15.0	(98.9, 47.3) 51.6	HOJA DE ALUM, DES EN 4 PAR BOLSAS D CA
Diferencia Difi. (error)	48.9	13.6	(76.9, 13.2) 62.7	DES EN 4 PAR REP. 1200 , BOLSAS D CA

Tabla 4.14.-- Estadísticos descriptivos de dificultades y diferencia entre dif. (error). Curso 1º.

De la observación de las tablas y figuras parece conveniente comentar:

a) Respecto a la dificultad apreciada de los problemas

-que la media de la dificultad apreciada de los problemas 36.7 indica que más de un tercio de las resoluciones se presentaron en blanco.

-que el rango de la dificultad es (69.2, 6.6) y su tamaño 62.6, estando los problemas distribuidos de modo bastante uniforme en dicho rango.

-que los problemas que se encuentran en el primer cuartil (0, 25) pertenecen a las subfamilias ABACO, EDADES, y HERENCIAS-REPARTOS. Además en este cuartil están incluidos todos los problemas de ABACO. Lo que puede decirse de los problemas de este cuartil es lo que tienen de común los problemas de estas subfamilias, la ausencia en ellos de cantidades intensivas. Es de notar que se incluye en este grupo el problema DESCOMPONER EN 4 PARTES, a pesar de ser éste un problema indeterminado.

- que los problemas que encontramos en el tercer cuartil (50,75) pertenecen al resto de las subfamilias hasta ahora no mencionadas. En particular, se encuentran aquí todos los problemas de la subfamilia MÓVILES y el problema HOJA DE ALUMINIO, el único problema de GEOMETRIA que hace mención a un cuerpo geométrico y es además indeterminado.

- que el segundo cuartil (25,50) parece acoger con preferencia a los problemas de las subfamilias EDADES, GEOMETRIA Y HERENCIAS REPARTOS. La excepción el problema CAVAR, de dificultad apreciada 48.4 podría considerarse igualmente en a acogido en el cuartil superior. Por otro lado, de los problemas de la subfamilia OTROS que pertenecen a este cuartil, el problema DINERO, tiene considerando su enunciado, la apariencia de un problema de repartir y en cuanto al problema CHOCOLATES Y CARAMELOS, aunque puede parecer paradójico lo encontramos aquí con la misma dificultad apreciada (30.8) que la dificultad de la solución (31) que encontramos en los estudiantes de secundaria en el Capítulo 3.

-que los problemas con mayor dificultad apreciada son el comentado HOJA DE ALUMINIO (67.) y LIEBRE Y GALGO (69.2) un peculiar problema de “alcanzar” donde las los valores de velocidades o espacio no se proporcionan del modo usual.

-que los problemas con menor dificultad apreciada son ENTEROS (7.7) y MITAD Y TERCERA PARTE (6.6), problemas de la subfamilia ABACO de la menor complejidad o en los que no aparecen como datos explícitamente números fraccionarios.

b) Respecto de la dificultad de la solución.

-que la media de la dificultad de la solución 81.7, esto es, muy elevada.

-que el rango de dificultad de la solución es (98.8, 47.3) no estando además los problemas uniformemente distribuidos en dicho rango sino que tienden a concentrarse en la parte elevada del rango.

- que los únicos dos problemas que se encuentran en la parte elevada del segundo cuartil (25,50) pertenecen a la subfamilia HERENCIAS-REPARTOS.

-que el cuarto cuartil (75,100) acoge a 15 de los 24 problemas, estando 11 de ellos en la franja superior a 90, franja que contiene problemas de todas las subfamilias, excepto HERENCIAS-REPARTOS.

- que en el tercer cuartil (50,75) no se encuentran problemas de la subfamilia TRABAJO, concentrándose en ella todos los problemas de la familia ABACO, excepto el indeterminado DESCOMPONER EN 4 PARTES.

- que el cuarto cuartil acoge a todos los problemas de la subfamilia OTROS, excepto CHOCOLATES Y CARAMELOS para el que se encontraron soluciones aritméticas.

-que los problemas de mayor dificultad son dos problemas indeterminados, HOJA DE ALUMINIO y DESCOMPONER EN 4 PARTES.

c) Respecto a la diferencia entre las dificultades (error)

-que la diferencia del tamaño de los rangos, de una y otra dificultad, de 11 puntos muestra que la diversidad de la dificultad apreciada de los problemas se empobrece cuando se considera la dificultad de la solución.

- que la media de esta diferencia, en torno al 50% (48.9) muestra la gran diferencia que existe entre una y otra dificultad. A mi juicio, diferencias de ese valor no son deseables.

- que el rango, su tamaño 66,7 y la distribución de los problemas en él, da cuenta de la diversidad de esta diferencia en los distintos problemas.

- que entre los problemas que muestran una diferencia entre dificultades superior al 50% se encuentran todos los problemas de las subfamilias ABACO y EDADES.

- que los problemas en los que se encuentra menor diferencia entre dificultades pertenecen a la subfamilia HERENCIAS-REPARTOS.

4.5.5.4.1.2.-Curso 2º

Las fig. 4.3 y 4.4 y las tablas 4.15, 4.16, 4.17, al igual que para los estudiantes del Curso 1º, dan cuenta de dificultades y diferencias entre dificultades y estadísticos descriptivos para los problemas administrados a los estudiantes del Curso 2º y están análogamente organizadas.

La dificultad apreciada media de los problemas es 38.2 y su desviación estándar 14.5 para la dificultad de la solución dichos valores son 81.8, 23.5. Por su lado, el coeficiente de correlación entre ambas dificultades es .54

De la observación de las tablas y figuras parece conveniente comentar:

a) Respecto a la dificultad apreciada de los problemas

-que la media de la dificultad apreciada de los problemas 38.2 indica una dificultad media.

-que el rango (75, 3.3) de tamaño 72.5 y con los problemas distribuidos uniformemente (9 en el primer cuartil, 6 en el segundo cuartil, 9 en el tercer cuartil) muestra un abanico de dificultad apreciada de los problemas amplio.

- que existen problemas, como HACE DIEZ o MITAD Y TERCERA PARTE cuya dificultad apreciada, menor del 10%, podemos calificar de bastante baja. Que es sorprendente que el problema CAVAR tenga el valor de dificultad apreciada máximo 75 cuando este problema es de lectura aritmética. Mientras, el problema ROTATIVA de estructura semejante pero de lectura algebraica, tiene una dificultad de 16.3.

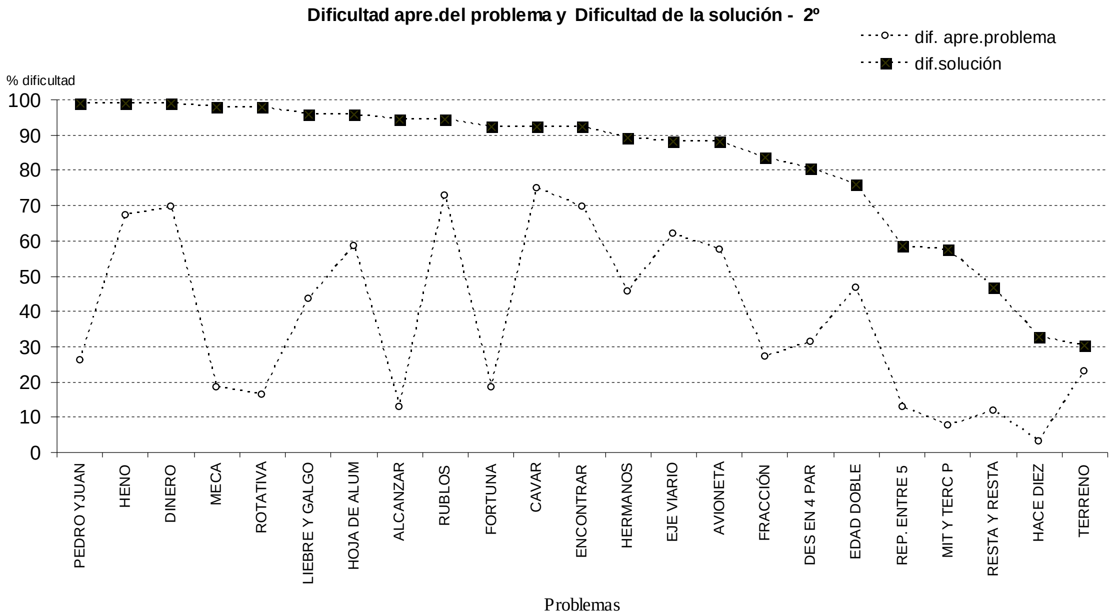


fig. 4.3.- Dificultad apreciada del problema y de la solución. Curso 2º

Dif. Solución			Dif. apre. Problema	
PEDRO YJUAN	98,9		CAVAR	75,0
HENO	98,9		RUBLOS	72,8
DINERO	98,9		DINERO	69,6
MECA	97,8		ENCONTRAR	69,6
ROTATIVA	97,8		HENO	67,4
LIEBRE Y GALGO	95,7		EJE VIARIO	62,0
HOJA DE ALUM	95,7		HOJA DE ALUM	58,7
ALCANZAR	94,6		AVIONETA	57,6
RUBLOS	94,6		EDAD DOBLE	46,7
FORTUNA	92,4		HERMANOS	45,7
CAVAR	92,4		LIEBRE Y GALGO	43,5
ENCONTRAR	92,4		DES EN 4 PAR	31,5
HERMANOS	89,1		FRACCIÓN	27,2
EJE VIARIO	88,0		PEDRO YJUAN	26,1
AVIONETA	88,0		TERRENO	22,8
FRACCIÓN	83,7		FORTUNA	18,5
DES EN 4 PAR	80,4		MECA	18,5
EDAD DOBLE	76,1		ROTATIVA	16,3
REP. ENTRE 5	58,7		REP. ENTRE 5	13,0
MIT Y TERC P	57,6		ALCANZAR	13,0
RESTA Y RESTA	46,7		RESTA Y RESTA	12,0
HACE DIEZ	32,6		MIT Y TERC P	7,6
TERRENO	30,4		HACE DIEZ	3,3

Tabla 4.15.- Dificultad apreciada del problema y de la solución. Curso 2º. Prob. ordenados.

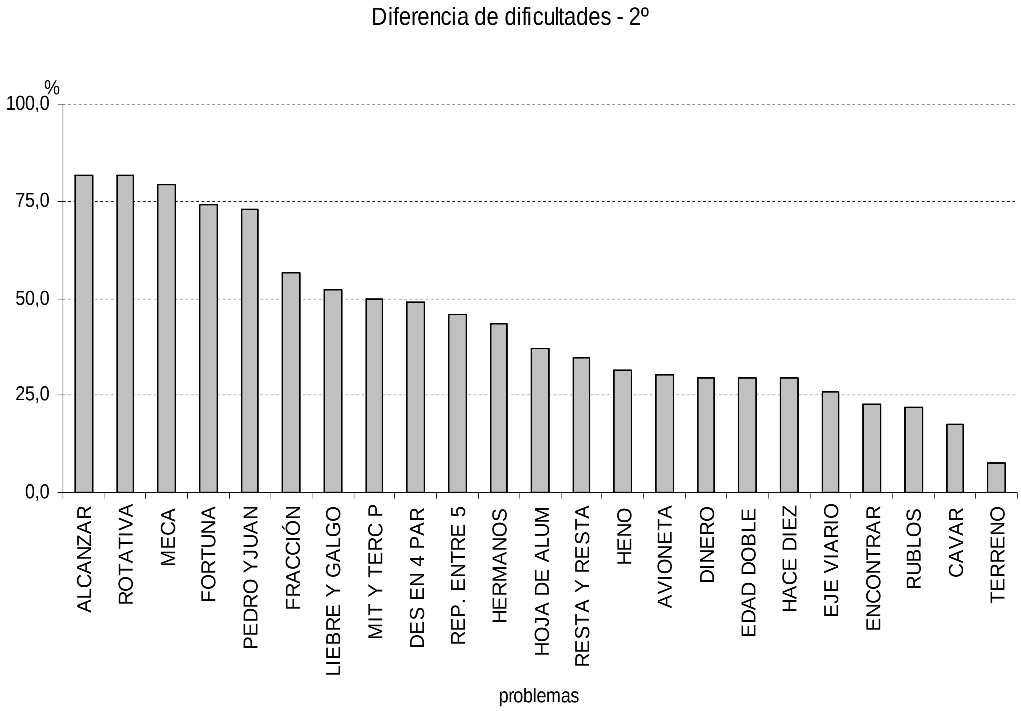


fig.4.4.- Diferencia entre dificultades -2º. Problemas ordenados.

Diferencia entre dificultades				
ALCANZAR	81,5		DES EN 4 PAR	48,9
ROTATIVA	81,5		REP. ENTRE 5	45,7
MECA	79,3		HERMANOS	43,5
FORTUNA	73,9		HOJA DE ALU	37,0
PEDRO YJUAN	72,8		RESTA Y RES	34,8
FRACCIÓN	56,5		HENO	31,5
LIEBRE Y GALG	52,2		AVIONETA	30,4
MIT Y TERC P	50,0		DINERO	29,3
			EDAD DOBLE	29,3
			HACE DIEZ	29,3
			EJE VIARIO	26,1
			ENCONTRAR	22,8
			RUBLOS	21,7
			CAVAR	17,4
			TERRENO	7,6

Tabla 4.16.- Diferencia entre dificultades. Curso 2º.

	media	**des-viación**	**Rango** (máx., mín.) tamaño	problema-máximo problema-mínimo
Difi. problema	38.2	14.5	(75, 3.3) 72.2	CAVAR HACE DIEZ
Difi. solución	81.8	23.5	(98.9, 30.4) 68.5	PEDRO Y JUAN TERRENO
Diferencia Difi.	43.6	21.3	(81.5, 7.6) 73.5	ALCANZAR TERRENO

Tabla 4.17.- Estadísticos descriptivos de dificultades y diferencias. Curso 2º

-que el cuartil (75,50) no acoge a ningún problema de las subfamilias ABACO, HERENCIAS-REPARTOS Y EDADES.

-que el cuartil (25,50) acoge, casi exclusivamente, problemas de ABACO y EDADES.

b) Respecto a la dificultad de la solución de los problemas.

-que la media de la dificultad de la solución 81.8 es un valor muy elevado.

-que el rango de dificultad de la solución (98, 9) es a mi juicio muy elevado en un nivel superior y muy bajo en el inferior.

- que, de los 23 problemas, únicamente 3 problemas tienen una dificultad inferior a 50 y 2 inferior a 75, todos ellos de las subfamilias ABACO, EDADES y HERENCIAS-REPARTOS, excepto el problema TERRENO que resulta ser el de menor dificultad. El resto de los problemas, 18 tienen dificultades superiores a 80 y de ellos 12 superiores a 90.

- que los problemas que ocupan el puesto superior e inferior en el cuartil (100,75) son precisamente EDAD DOBLE y PEDRO Y JUAN que difieren en complejidad, dificultad sintáctica y número de momentos en que se considera la edad de los personajes del problema.

c) Respecto de la diferencia de dificultades (error).

- que la media de esta diferencia, 43.6, muestra la gran diferencia que existe entre una y otra dificultad, a mi juicio diferencias de ese valor no son deseables.

- que la distribución de los problemas en el rango es en torno a la media con cierta curtosis hacia la izquierda.

- que 12 de los problemas se encuentran acogidos en el cuartil (25,50) quedando en ellos representadas todas las subfamilias.

- que los cuartiles (0,25) y (50,75) no acogen problemas de las subfamilias ABACO, HERENCIAS-REPARTOS Y EDADES.

4.5.5.4.1.3.-Curso 3º

Las fig. 4.5 y 4.6 y las tablas 4.18, 4.19, 4.20 al igual que para los estudiantes del Curso 1º y 2º dan cuenta de dificultades y diferencias entre dificultades y estadísticos descriptivos para los problemas administrados a los estudiantes del Curso 3ºº y están análogamente organizadas.

La dificultad apreciada media de los problemas es 32.0 y su desviación estándar 20.03 para la dificultad de la solución dichos valores son 74.8, 23.9.

Por su lado el coeficiente de correlación es .78. Valor que por primera vez indica una cierta correspondencia entre ambas dificultades.

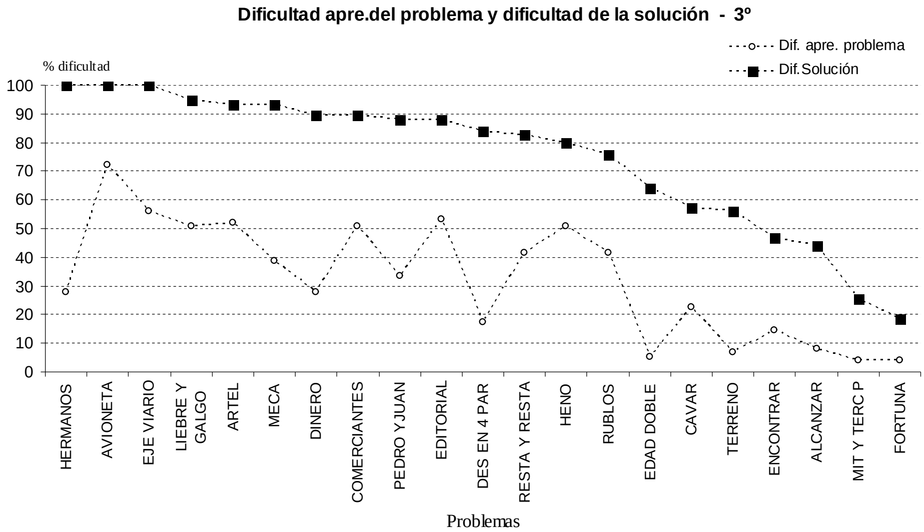


fig.- 4.5.-Dificultad apreciada del problema y de la solución . Curso 3º

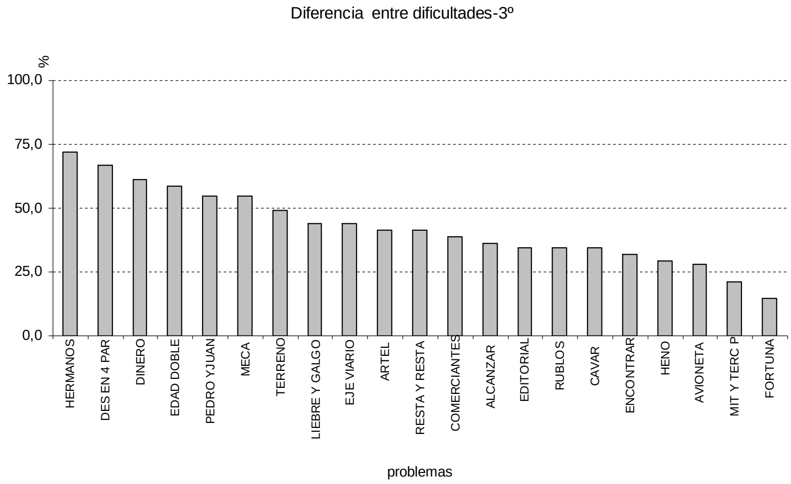


fig. 4.6.- Diferencia entre dificultades -3º. Problemas ordenados

Dif. solución			Dif. apre. problema	
HERMANOS	100,0		AVIONETA	72,0
AVIONETA	100,0		EJE VIARIO	56,0
EJE VIARIO	100,0		EDITORIAL	53,3
LIEBRE Y GALG	94,7		ARTEL	52,0
ARTEL	93,3		LIEBRE Y GALGO	50,7
MECA	93,3		HENO	50,7
DINERO	89,3		COMERCIANTES	50,7
COMERCIANTES	89,3		RESTA Y RESTA	41,3
PEDRO YJUAN	88,0		RUBLOS	41,3
EDITORIAL	88,0		MECA	38,7
DES EN 4 PAR	84,0		PEDRO YJUAN	33,3
RESTA Y RESTA	82,7		HERMANOS	28,0
HENO	80,0		DINERO	28,0
RUBLOS	76,0		CAVAR	22,7
EDAD DOBLE	64,0		DES EN 4 PAR	17,3
CAVAR	57,3		ENCONTRAR	14,7
TERRENO	56,0		ALCANZAR	8,0
ENCONTRAR	46,7		TERRENO	6,7
ALCANZAR	44,0		EDAD DOBLE	5,3
MIT Y TERC P	25,3		MIT Y TERC P	4,0
FORTUNA	18,7		FORTUNA	4,0

Tabla 4.18.- Dificultad apreciada del problema y de la solución. Curso 3º. Prob. ordenados.

Diferencia entre dificultades				
HERMANOS	72,0		TERRENO	49,3
DES EN 4 PAR	66,7		LIEBRE Y GALG	44,0
DINERO	61,3		EJE VIARIO	44,0
EDAD DOBLE	58,7		ARTEL	41,3
PEDRO YJUAN	54,7		RESTA Y RESTA	41,3
MECA	54,7		COMERCIANTES	38,7
			ALCANZAR	36,0
			EDITORIAL	34,7
			RUBLOS	34,7
			CAVAR	34,7
			ENCONTRAR	32,0
			HENO	29,3
			AVIONETA	28,0
			MIT Y TERC P	21,3
			FORTUNA	14,7

Tabla 4.19.- Diferencia entre dificultades. Curso 3º

	media	**des-viación**	**Rango** (máx., mín.) tamaño	problema-máximo problema-mínimo
Difi. problema	32.0	20.3	(72. 4) 68	AVIONETA FORTUNA
Difi. solución	74.8	23.9	(100. 18.7) 82.3	HERMANOS FORTUNA
Diferencia Difi.	42.4	14.4	(72, 14.7) 57.2	HERMANOS FORTUNA

Tabla 4.20.- Estadísticos descriptivos de dificultades y diferencia. Curso 3º

De la observación de las tablas y figuras parece conveniente comentar:

a) Respecto a la dificultad apreciada de los problemas

-que la media de la dificultad apreciada de los problemas 32.0 indica una dificultad moderada.

- que el rango de dificultad (72, 4) podemos considerarlo como (56, 4) si descartamos el problema AVIONETA y de tamaño 52, no estando los problemas distribuidos de manera uniforme en el rango.

- que 6 de los problemas, FORTUNA, MITAD Y TERCERA PARTE, EDAD DOBLE. TERRENO, ALCANZAR y ENCONTRAR tienen dificultades comprendidas entre 4 y 15, esto es, muy baja.

-que el intervalo (50,7, 56) acoge problemas de todas las subfamilias excepto ABACO, HERENCIAS-REPARTOS, EDADES, esto es de las subfamilias cuyos problemas contienen cantidades intensivas.

b) Respecto a la dificultad de la solución de los problemas

- que la media de la dificultad de la solución 74.8 es un valor muy elevado.

- que la dificultad no se distribuye de manera uniforme en el rango (100, 18.2).

- que en el cuartil (100,75) se encuentran acogidos 14 problemas que pertenecen a todas las subfamilias con la excepción de HERENCIAS-REPARTOS.

- que encontramos 3 problemas de dificultad 100: HERMANOS, AVIONETA, EJE VIARIO y 14 problemas con dificultades superiores a 80.

- que únicamente 4 problemas tienen dificultad inferior a 50 y los problemas tradicionales de la subfamilia MOVILES: ENCONTRAR y ALCANZAR se encuentran en el intervalo (46.7, 44).

c) Respecto a la diferencia de dificultades

- que la diferencia de dificultades se distribuye de modo bastante uniforme en el rango (72, 14.7).

-que los problemas MITAD Y TERCERA PARTE, FORTUNA en los que esta diferencia es menor son aquellos que presentaban además menor dificultad apreciada y dificultad de solución.

-que los problemas con mayor diferencia de dificultades son los de la subfamilia EDADES, los de la subfamilia OTROS de mayor complejidad MECA y DINERO y el problema indeterminado DESCOMPONER EN 4 PARTES.

- que más de la mitad de los problemas, 13, quedan acogidos en el cuartil (50,25).

4.5.5.4.2.- Dificultad apreciada del problema y dificultad de la solución. Comparación de cursos.

En esta comparación se utiliza la población problemas comunes.

La fig. 4.7 y las tabla 4.21 dan cuenta y permiten comparar la dificultad apreciada de los problemas, que fueron administrados a los estudiantes de los tres cursos y las diferencias de la dificultad entre los cursos para cada problema.

La fig. 4.8 comparan y la tabla 4.22 dan cuenta de la dificultad de la solución de los problemas, que fueron administrados a los estudiantes de los tres cursos y las diferencias de la dificultad entre los cursos para cada problema.

La fig. 4.9 compara la diferencia entre la dificultad apreciada del problema y la dificultad de la solución de los problemas. La tabla 4.23 da cuenta de los valores de esta diferencia de dificultades y la diferencia de ella entre los cursos.

Los estadísticos descriptivos de la dificultad apreciada, de la solución y de la diferencia entre ellas para cada uno de los cursos se muestran en las tablas 4.24.
.

Los valores de F que proporciona ANOVA factor curso y su nivel de significación para dificultades y diferencia vienen dados en la tabla 4.25.

	F	sig.
Dificultad apreciada del problema	2.486	.097
Dificultad de la solución	4.514	**.018**
Diferencia entre las dificultades.	1.37	.257

Tabla 4.25.- Valores de F y significación. Dificultades y diferencia entre dificultades

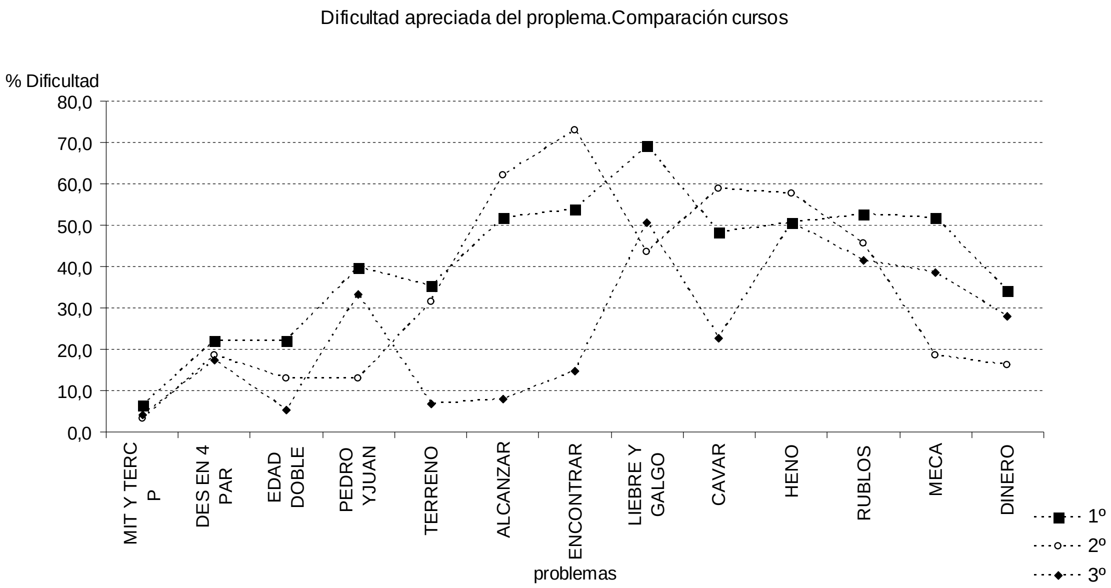


fig. 4.7.- Dificultad apreciada de los problemas. Comparación de cursos

dificultad apreciada	1º	2º	3º		1º-2º	2º-3º	1º-3º
MIT Y TERC P	6,6	3,3	4		3,3	-0,7	2,6
DES EN 4 PAR	22	18,5	17,3		3,5	1,1	4,6
EDAD DOBLE	22	13	5,3		8,9	7,7	16,6
PEDRO YJUAN	39,6	13	33,3		26,5	-20,3	6,2
TERRENO	35,2	31,5	6,7		3,6	24,9	28,5
ALCANZAR	51,6	62	8		-10,3	54	43,6
ENCONTRAR	53,8	72,8	14,7		-19	58,2	39,2
LIEBRE Y GAL	69,2	43,5	50,7		25,8	-7,2	18,6
CAVAR	48,4	58,7	22,7		-10,3	36	25,7
HENO	50,5	57,6	50,7		-7,1	6,9	-0,1
RUBLOS	52,7	45,7	41,3		7,1	4,3	11,4
MECA	51,6	18,5	38,7		33,2	-20,2	13
DINERO	34,1	16,3	28		17,8	-11,7	6,1

Tabla 4.21.-Dificultad apreciada de los problemas y diferencia entre cursos

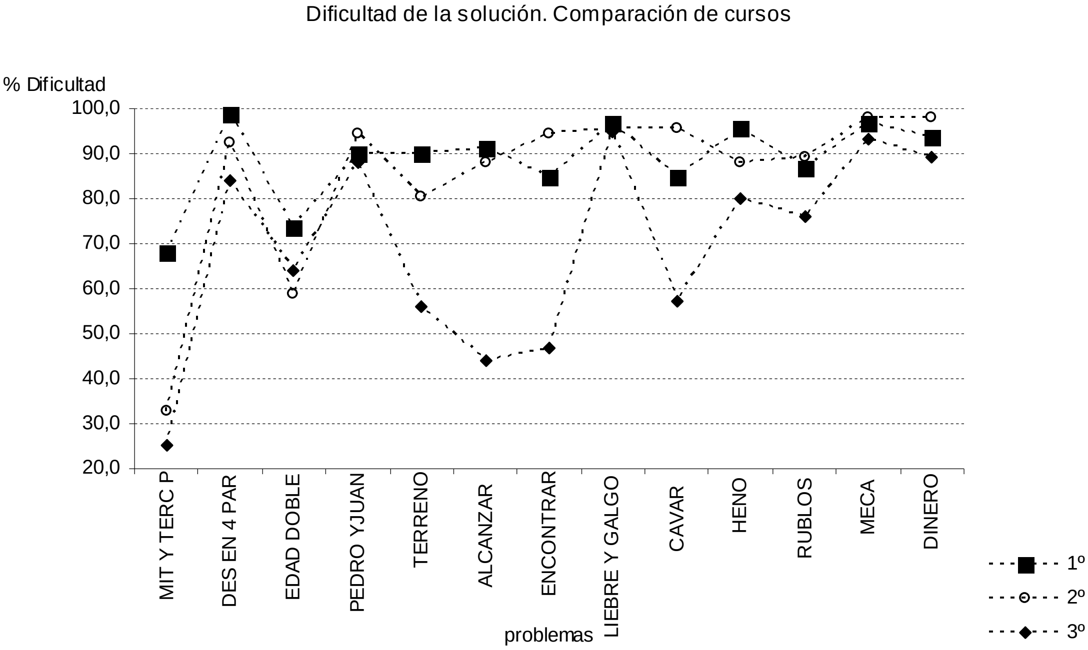


fig.4.8.- Dificultad de la solución. Comparación de cursos.

Dif. Soluc.	1º	2º	3º		1º-2º	2º-3º	1º-3º
MIT Y TERC P	68,1	32,6	25,3		35,5	7,3	42,8
DES EN 4 PAR	98,9	92,4	84		6,5	8,4	14,9
EDAD DOBLE	73,6	58,7	64		14,9	-5,3	9,6
PEDRO YJUAN	90,1	94,6	88		-4,5	6,6	2,1
TERRENO	90,1	80,4	56		9,7	24,4	34,1
ALCANZAR	91,2	88	44		3,2	44	47,2
ENCONTRAR	84,6	94,6	46,7		-9,9	47,9	37,9
LIEBRE Y GAL	96,7	95,7	94,7		1,1	1	2
CAVAR	84,6	95,7	57,3		-11	38,3	27,3
HENO	95,6	88	80		7,6	8	15,6
RUBLOS	86,8	89,1	76		-2,3	13,1	10,8
MECA	96,7	97,8	93,3		-1,1	4,5	3,4
DINERO	93,4	97,8	89,3		-4,4	8,5	4,1

Tablas 4.22.- Dificultad de la solución de los problemas y diferencia entre cursos

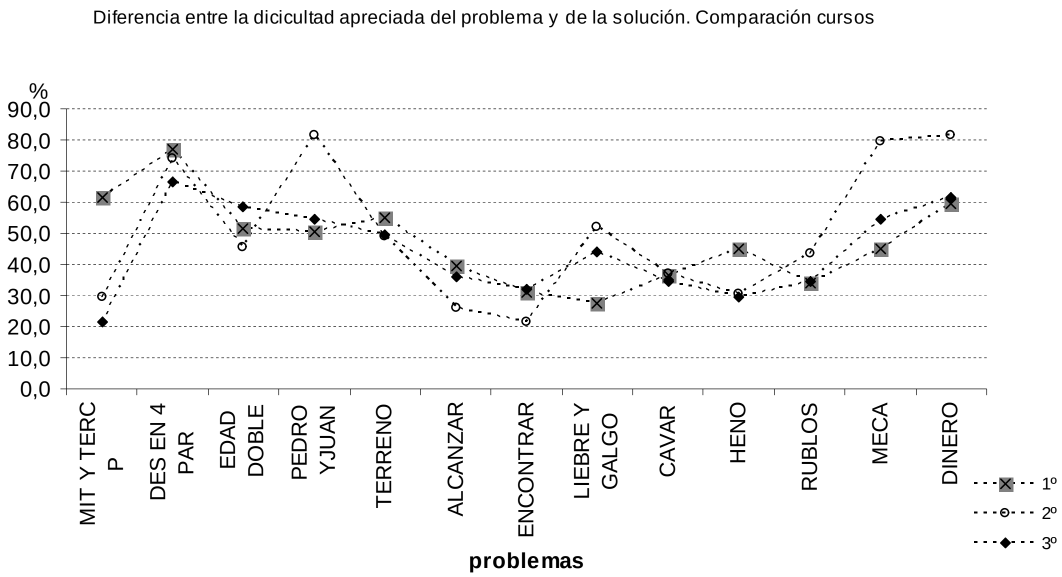


fig.4.9.- Diferencia entre dificultad apreciada y de la solución. Comparación de cursos

diferencia	**entre**	**dificul.**	**proble.**	**y**	**dificul.**	**soluci.**	**(error)**
	1º	2º	3º		1º-2º	2º-3º	3º-1º
MIT Y TERC P	61,5	29,3	21,3		32,2	8	40,2
DES EN 4 PAR	76,9	73,9	66,7		3	7,2	10,3
EDAD DOBLE	51,6	45,7	58,7		6	-13	-7
PEDRO YJUAN	50,5	81,5	54,7		-31	26,9	-4,1
TERRENO	54,9	48,9	49,3		6	-0,4	5,6
ALCANZAR	39,6	26,1	36		13,5	-9,9	3,6
ENCONTRAR	30,8	21,7	32		9	-10,3	-1,2
LIEBRE Y GAL	27,5	52,2	44		-24,7	8,2	-16,5
CAVAR	36,3	37	34,7		-0,7	2,3	1,6
HENO	45,1	30,4	29,3		14,6	1,1	15,7
RUBLOS	34,1	43,5	34,7		-9,4	8,8	-0,6
MECA	45,1	79,3	54,7		-34,3	24,7	-9,6
DINERO	59,3	81,5	61,3		-22,2	20,2	-2

Tablas 4.23.-Diferencia entre dificultades y su diferencia entre cursos

Dificultad apreciada del problema				
curso	media	desviación	rango tamaño	problema min, problema max
1º	41,3	16,9	(6,6 , 69,2) 63,6	MIT Y TERC P LIEBRE Y GALGO
2º	34,9	22,9	(3,3, 72,8) 69.5	MIT Y TERC P ENCONTRAR
3º	24,7	17	(4,0, 50,7) 45,3	MIT Y TERC P LIEBRE Y GALGO, HENO

Dificultad de la solución				
curso	media	desviación	rango tamano	problema min, problema max
1º	88,5	9,1	(68,1, 98,9) 30,8	MIT Y TERC P DES EN 4 PAR
2º	85,03	18,9	(32,6,97,8) 65,2	MIT Y TERC P MECA, DINERO
3º	69,1	21,9	(25,3, 94,7) 69,5	MIT Y TERC P LIEBRE Y GALGO

Diferencia entre dificultades				
curso	media	desviación	rango tamaño	problema min, problema max
1º	47,16	13,9	(27,5, 76,9) 50,6	LIEBRE Y GALGO DES EN 4 PAR
2º	50	22,05	(21,7, 81,5) 59,8	ENCONTRAR PEDRO YJUAN
3º	44,2	14,2	(21,3, 66,7) 45,4	MIT Y TERC P DES EN 4 PAR

Tablas 4.24.- Descriptivos. Cursos 1º,2º,3º. Dificultades y diferencia entre dificultades

De la observación de las tablas y figuras anteriores parece conveniente comentar:

a) Respecto a la dificultad apreciada de los problemas.

-que asumiendo un cierto riesgo, en torno al 10% podemos aceptar la hipótesis de la no igualdad de la dificultad apreciada media en los tres cursos

-que la media de la dificultad apreciada disminuye de curso en curso, 41.3, 34.9, 24.7 para 1º, 2º y 3º. Siendo la disminución total entre 1º y 3º es de 16.6 consumiéndose 6.4 en el paso de 1º a 2º y 10.2 en el paso de 2º a 3º.

- que el tamaño del rango de la dificultad, así como su limite máximo sufren un descenso en torno a 20 cuando se compara 3º con 2º y 1º. Que el problema para el que se tiene la menor dificultad apreciada en los tres cursos es MITAD Y TERCERA PARTE, mientras que LIEBRE Y GALGO es el de mayor dificultad apreciada en 1º y 3º.

-que la citada disminución gradual de la media de la dificultad apreciada no se da cuando se consideran los problemas individualmente – ver tablas 4.21-. Así:

> -la diferencia de la dificultad apreciada de cada problema entre 1º y 3º es positiva casi sin excepción y con valores entre 18.6 y 43.6 para los problemas de las subfamilias GEOMETRIA, MOVILES y TRABAJO.
> -la diferencia de la dificultad apreciada de cada problema entre 2º y 3º es positiva y con valores entre 24.8 y 58.2. para los problemas de las subfamilias GEOMETRIA, MOVILES y TRABAJO, con la excepción de LIEBRE Y GALGO donde la diferencia es negativa.
> -la diferencia de la dificultad apreciada de cada problema entre 2º y 3º es negativa para los problemas de mayor complejidad MECA y DINERO y para el problema PEDRO Y JUAN.
> -la diferencia de la dificultad apreciada de cada problema entre 1º y 2º es positiva excepto en los casos ALCANZAR, ENCONTRAR, CAVAR y HENO.

Lo que puede resumirse diciendo que la dificultad apreciada de cada problema suele disminuir de 1º a 3º y que la dificultad apreciada de algunos problemas en 2º viene unas veces minusvalorada –caso MECA, DINERO, PEDRO Y JUAN o sobrevalorada ALCANZAR, ENCONTRAR, CAVAR y HENO.

b) Respecto a la dificultad de la solución de los problemas.

- que con mínimo riesgo, en torno al 2% podemos aceptar la hipótesis de la no igualdad de la media de la dificultad de la solución en los tres cursos.

-que la media de la dificultad de la solución disminuye de curso en curso, 88.5, 85.0, 69.1 para 1º, 2º y 3º. Siendo la disminución total entre 1º y 3º es de 18.4 consumiéndose 3.5 en el paso de 1º a 2º. y 14.9 en el paso de 2º a 3º.

- que el tamaño del rango de la dificultad de la solución es muy superior en 2º y 3º que en 1º , 65.2 y 69.5 frente a 30.8. Ello es debido a que mientras el límite superior sufre pequeñas variaciones entre los cursos el límite inferior que precisamente corresponde al mismo problema MITAD Y TERCERA PARTE desciende súbitamente de 1º a 2º y 3º , de 68.1 a 32.6 y 25.3.

- que los tres cursos no comparten el problema con mayor dificultad de solución ya que estos son DESCOMPONER EN CUATRO PARTES 1º, MECA, DINERO para 2º, LIEBRE Y GALGO para 3º que son problemas particulares, el primero de ellos de complejidad 5 e indeterminado, los segundos problemas equivalentes y de complejidad 7 y el tercero LIEBRE Y GALGO problema del tipo "alcanzar", del que ya se ha comentado su peculiaridad.

-que los problemas por el valor de la diferencia de dificultad de la solución entre cursos pueden ser ordenados así:

Dificultad de la solución. Diferencia entre cursos	1º-3º		1º-2º		2º-3º
ALCANZAR	47,2	MIT Y TERC P	35,5	ENCONTRAR	47,9
MIT Y TERC P	42,8	EDAD DOBLE	14,9	ALCANZAR	44,0
ENCONTRAR	37,9	TERRENO	9,7	CAVAR	38,3
TERRENO	34,1	HENO	7,6	TERRENO	24,4
CAVAR	27,3	DES EN 4 PAR	6,5	RUBLOS	13,1
HENO	15,6	ALCANZAR	3,2	DINERO	8,5
DES EN 4 PAR	14,9	LIEBRE Y GALGO	1,1	DES EN 4 PAR	8,4
RUBLOS	10,8	MECA	-1,1	HENO	8,0
EDAD DOBLE	9,6	RUBLOS	-2,3	MIT Y TERC P	7,3
DINERO	4,1	DINERO	-4,4	PEDRO YJUAN	6,6
MECA	3,4	PEDRO YJUAN	-4,5	MECA	4,5
PEDRO YJUAN	2,1	ENCONTRAR	-9,9	LIEBRE Y GALGO	1,0
LIEBRE Y GALGO	2,0	CAVAR	-11,0	EDAD DOBLE	-5,3

Tabla 4.com.- Dificultad de la solución. Diferencia entre cursos. Problemas ordenados.

leyendo la tabla 4.com vemos que:

- las diferencias entre 1º y 3º son todas positivas, esto es, la dificultad de la solución de todos y cada uno de los problemas disminuye de 1º a 3º . La cuantía de esta disminución no es la misma para todos los problemas según puede apreciarse en la tabla donde se han trazado líneas para distinguir dicha cuantía.

-las diferencias entre 1º y 2º muestra que esta disminución de dificultad de la solución no ocurre para todos los problemas sino que 6 de ellos incrementan su dificultad, si bien sólo 2 de ellos con valores apreciables ENCONTRAR y CAVAR. Además, la cuantía de la disminución de la dificultad es inferior a 10 en 11 de los problemas.

-las diferencias entre 2º y 3º son todas positivas con la excepción del problema EDAD DOBLE. Ello añadido a que las cuantías de las diferencias entre 2º y 3º son superiores para todos los problemas a las cuantías de las diferencias de 1º y 2º muestra que es en éste transito donde se da una mayor disminución de la dificultad de la solución de todos los problemas. Salvo con dos excepciones, claro está, EDAD DOBLE y MITAD Y TERCERA PARTE problema este último cuya dificultad disminuye 35.5 entre 1º y 2º y 7.3 ente 2º y 3º.

c) Respecto a la diferencia entre las dificultades.

-que no podemos decir que se pueda distinguir de modo significativo (F=1.37 sig. = .257) entre las medias de la diferencia entre dificultades de los tres cursos.
-que dichas medias se mueven en torno a la media de 1º, 47.1, aproximadamente tres puntos por arriba 2º y por debajo 3º.

- que considerando individualmente los problemas y cursos ésta diferencia entre dificultades solo supera a 10 al comparar 2º y 3º en los problemas MITAD Y TERCERA PARTE, DESCOMPONER EN CUATRO PARTES y CAVAR.

- que sólo los problemas de la subfamilia ABACO y el problema HENO muestran una disminución gradual de esta diferencia de 1º a 2º y de 2º a 3º mientras que en el resto los problemas las diferencias entre cursos de la diferencia entre dificultades muestra un comportamiento diferente según el problema que se considere.

4.5.5.4.3.- Dificultades y error. Subfamilias.

Por dificultad apreciada, de la solución, diferencia entre dificultades (error) de una subfamilia se entiende la media de las dificultades de los problemas que pertenecen a dicha subfamilia en la población que se considere. Así las cosas, la dificultad de una subfamilia dependerá de la de los problemas que la representen. Como es el caso que disponemos en este estudio de distintas poblaciones, en las que las subfamilias vienen representadas por distintos problemas de distinta complejidad, los resultados sobre las dificultades concretas de cada una de las subfamilias se proporcionarán para cada una de dichas poblaciones.

4.5.4.4.3.1 Población bajo estudio.

En **4.5.5.1** encontramos que en población bajo estudio, la variable de la tarea subfamilia tiene un efecto significativo sobre las dificultades: apreciada, de la solución y la diferencia entre dificultades

Los valores concretos de las dificultades y diferencia entre ellas para las distintas subfamilias se proporcionan en la tabla 4.26 En ella puede observarse que:

- la menor dificultad apreciada corresponde a la subfamilia ABACO (16,2) y la mayor a la subfamilia TRABAJO (55,3). Las subfamilias ABACO, HERENCIAS-REPARTOS, EDADES tienen una dificultad apreciada en torno a 20. Las subfamilias GEOMETRIA Y OTROS tienen una dificultad apreciada en torno a 40. Las subfamilias MOVILES y TRABAJO tienen una dificultad apreciada en torno a 50.

- la menor dificultad de la solución corresponde a la subfamilia HERENCIAS-REPARTOS (43,5). La dificultad de la solución de la subfamilia ABACO es del orden de 70 y para el resto de las subfamilias la dicha dificultad se mueve en el intervalo (80,90).

-la menor diferencia entre dificultades (error) corresponde a la subfamilia HERENCIAS-REPARTOS (19,6). Ocurriendo que las dos subfamilias de menor dificultad apreciada ABACO, EDADES tienen el mayor valor de la diferencia entre dificultades y por el contrario las dos subfamilias de mayor valor de dificultad apreciada MOVILES y TRABAJO tienen el menor valor de diferencia entre dificultades.

	Dif. apre. Problema	Dificultad solución	diferencia entre dificultades.
ABACO	16,2	68,1	51,9
HEREN-REPAR	23,9	43,5	19,6
EDADES	23,2	80,3	57,0
GEOMETRIA	42,2	82,8	40,6
MOVILES	52,6	84,9	32,3
TRABAJO	55,3	89,9	34,6
OTROS	40,1	89,3	49,2

Tabla 4.26.- Dificultad apreciada del problema, de la solución y diferencia entre dificultades. Subfamilias. Población bajo estudio.

La tabla 4.27 resume la comparación de medias de dificultades y diferencia entre dificultades de las subfamilias que consta en el anexo **A4.3**, Tabla X.

	ABACO	HEREN-REPAR	EDADES	GEOMETRIA	MOVILES	TRABAJO	OTROS
ABACO				X	X	X	X , *.11*
HEREN-REPAR	S		***X***	X	.10 ,***X***	X	X, ***X***
EDADES		S		X		X	
GEOMETRIA							
MOVILES	S		S				
TRABAJO	.10		S				
OTROS		S				.08	

Tabla 4.27.- Diferencia significativa entre las subfamilias.(s<.05)
X.-Diferencia significativa entre dificultad apreciada.
X.- Diferencia significativa entre dificultad de la solución.
S.- Diferencia significativa entre Diferencia entre dificultades.
Los números refieren al nivel de significación (s<.15) requerido para aceptar la diferencia entre medias. Blanco en una casilla (s >.15)

La tabla 4.27 viene a decir que, en general para la dificultad apreciada y la diferencia entre dificultades son significativas las diferencias de medias entre las subfamilias del grupo ABACO, HERENCIAS-REPARTOS, EDADES y el grupo formado por el resto de las subfamilias, no siendo significativas las diferencias entre los miembros de ambos grupos excepto HERENCIAS-REPARTOS y EDADES en un grupo y TRABAJO y OTROS en el otro grupo. Por otra parte, en cuanto a la dificultad de la solución únicamente son distinguibles la subfamilias HERENCIAS-REPARTOS de MOVILES y OTROS y asumiendo cierto riesgo (s =.11) ABACO sería distinguible de OTROS.

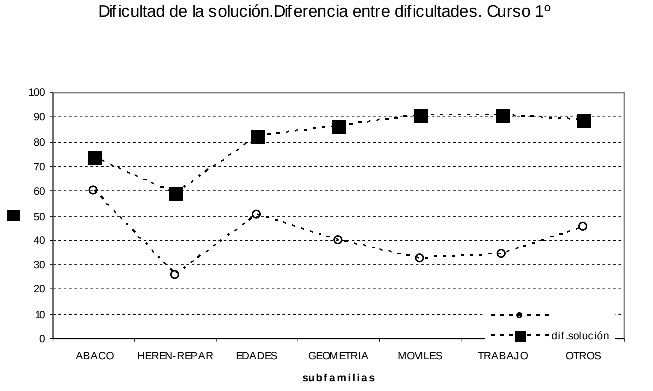
4.5.5.4.3.2- Comparación de cursos en la población bajo estudio.

Las tablas 4.28 y la fig 4.10 proporcionan para cada uno de los cursos y cada una de las subfamilias los valores de la dificultad de la solución y la diferencia entre dificultades, variables en las que la interacción Subfamilia*Curso es significativa –ver **4.5.5.1**-.

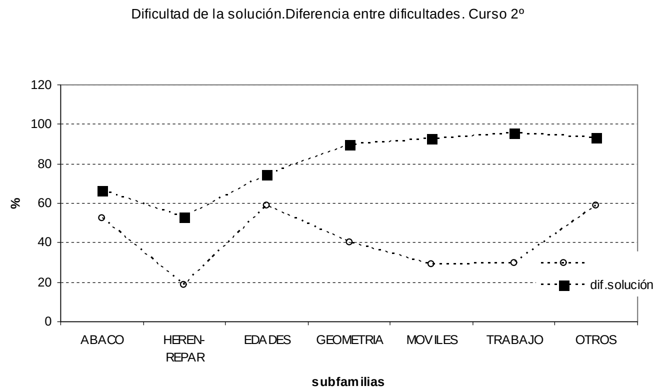
Las figuras 4.11a, 4.11b comparan la dificultad de la solución y diferencia entre dificultades en los cursos 1º,2º,3º.

En la figura 4.11a puede observarse que en el Curso 3º la dificultad de la solución es menor para todas las subfamilias con la excepción de la subfamilia EDADES. y que dicha dificultad es muy similar en las subfamilias ABACO y OTROS. Que para los cursos 2º y 3º la dificultad de la solución en todas las subfamilias es similar.

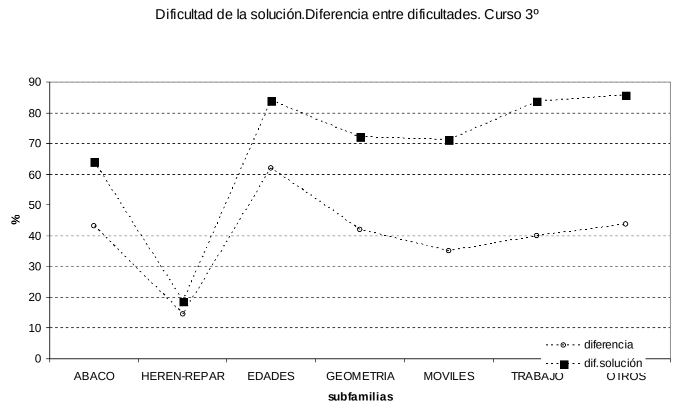
En la fig. 4.11b puede observarse que, contra lo que cabria esperar, la diferencia entre dificultades (error) es similar o superior en el curso 3º que en los Cursos 1º y 2º para las subfamilias EDADES, GEOMETRIA, MOVILES Y TRABAJO siendo únicamente inferior en ABACO y HERENCIAS-REPARTOS y similar en la subfamilia OTROS.



1º	Dific. solución	diferencia entre dific.
ABACO	73,9	60,2
HEREN-REPA	58,6	25,7
EDADES	82,1	50,6
GEOMETRIA	86,8	39,6
MOVILES	90,8	32,6
TRABAJO	90,6	34,1
OTROS	89,0	45,1



2º	Dific. solución	diferencia entre dific
ABACO	66,5	52,4
HEREN-REPA	53,2	18,5
EDADES	74,7	58,7
GEOMETRIA	89,6	40,2
MOVILES	92,6	29,3
TRABAJO	95,6	29,7
OTROS	93,2	58,7



3º	Dific. solución	diferencia entre dific
ABACO	64	43,2
HEREN-REPA	18,6	14,6
EDADES	84	61,8
GEOMETRIA	72	42
MOVILES	71,3	35
TRABAJO	83,5	40
OTROS	85,6	43,8

fig. 4.10.- Comparación de la dificultad de la solución y la diferencia entre dificultades. Población bajo estudio. Subfamilias. Cursos 1º,2º,3º.

Tablas 4.28.- Dificultad de la solución y diferencia entre dificultades. Población bajo estudio. Subfamilias. Cursos 1º,2º,3º.

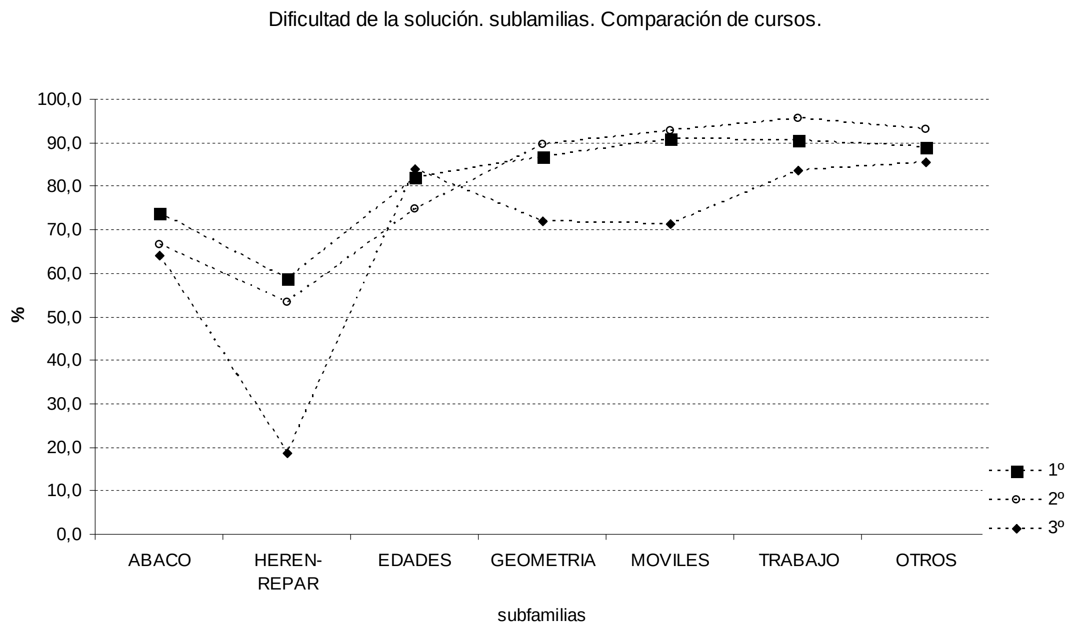


fig. 4.11a.- Dificultad de la solución. Población bajo estudio. Subfamilias. Comparación de cursos.

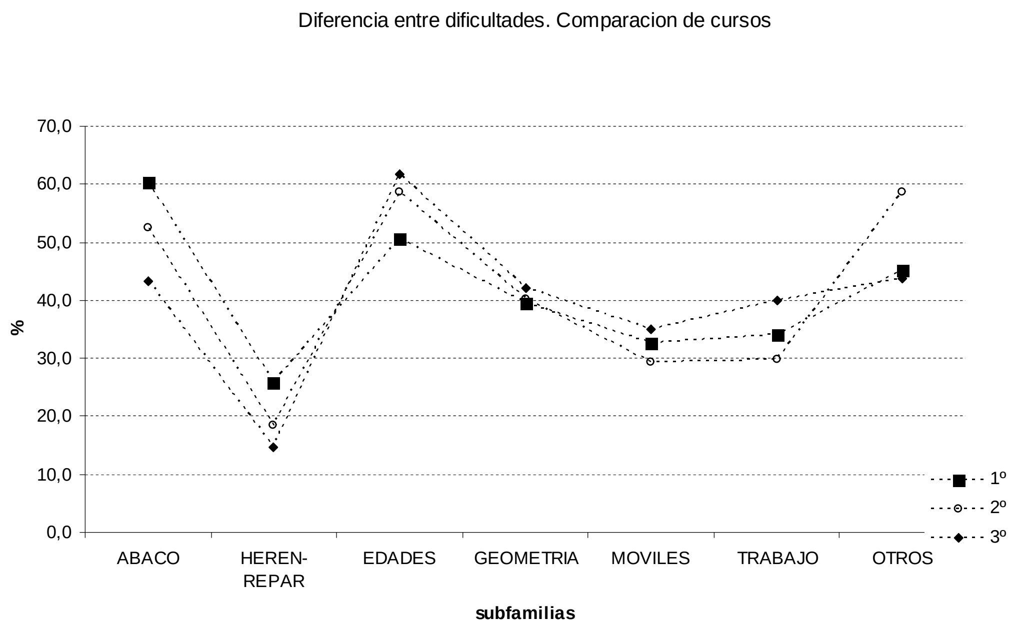


fig. 4.11b.- Diferencia entre la dificultad apreciada del problema y la dificultad de la solución. Población bajo estudio. Subfamilias. Comparación de cursos.

Que la diferencia entre dificultades en los cursos tiene valores parecidos superior uno a otro según qué subfamilia, siendo de destacar que en la subfamilia OTROS la diferencia tiene un valor muy superior en el Curso 2º.

4.5.4.3.3.-Población reducida.

En **4.5.5.2** encontramos que en la población reducida la variable de la tarea subfamilia tiene un efecto significativo sobre las dificultad apreciada y de la solución mientras la interacción subfamilia*curso no tiene un efecto significativo.

Los valores concretos de las dificultades y diferencia entre ellas se proporcionan en la tabla 4.29.

	Dif. Apre. Problema	Dif. solución	Diferencia entre dificultades
ABACO	15.8	68.5	52.7
HEREN-REPAR	28.7	50.1	21.4
EDADES	23.3	79.3	56.5
GEOMETRIA	42.9	83.3	40.4
MOVILES	52.1	84.4	32.3
TRABAJO	55.2	89.8	34.6
OTROS	40.5	88.9	48.4

Tabla 4.29.- Dificultad apreciada del problema, de la solución y diferencia entre dificultades. Subfamilias. Población reducida.

La tabla 4.30 resume el post hoc para la comparación entre las subfamilias de dificultades y diferencia entre dificultades, Anexo **A4.4** , Tabla VIII. Por otro lado, las figuras 4.12a, b, c comparan las dificultades y la diferencia entre dificultades en la población bajo estudio y reducida.

De la tabla 4.30 se desprende que las diferencias anotadas entre los dos grupos de subfamilias en el estudio de la población bajo estudio siguen dándose en la población reducida

Lo único que cabria anotar respecto de lo dicho estudio de la población bajo estudio es que en la población reducida la dificultad de la solución es menor para algunas subfamilias –ver figs. 4.12b- como cabía esperar, por la ausencia en la población reducida de problemas indeterminados. Sin embargo, la diferencia entre dificultades es la misma para todas las subfamilias en ambas poblaciones , ver figs. 4.12a, b, c .

	ABACO	HEREN-REPAR	EDADES	GEOMETRIA	MOVILES	TRABAJO	OTROS
ABACO					X	X, *X*	X, *X*
HEREN-REPAR	S		*.10*		*.08*	X, *X*	*X*
EDADES		S			X	X	
GEOMETRIA		S					
MOVILES	.14		S				
TRABAJO			S				
OTROS		S			.14		

Tabla 4.30.- Diferencia significativa entre las subfamilias.(s<.05)
X.-Diferencia significativa entre dificultad apreciada.
X.- Diferencia significativa entre dificultad de la solución.
S.- Diferencia significativa entre Diferencia entre dificultades.
Los números refieren al nivel de significación (s<.15) requerido para aceptar diferencia entre subfamilias
Los números refieren al nivel de significación (s<.15) requerido para aceptar diferencia entre subfamilias

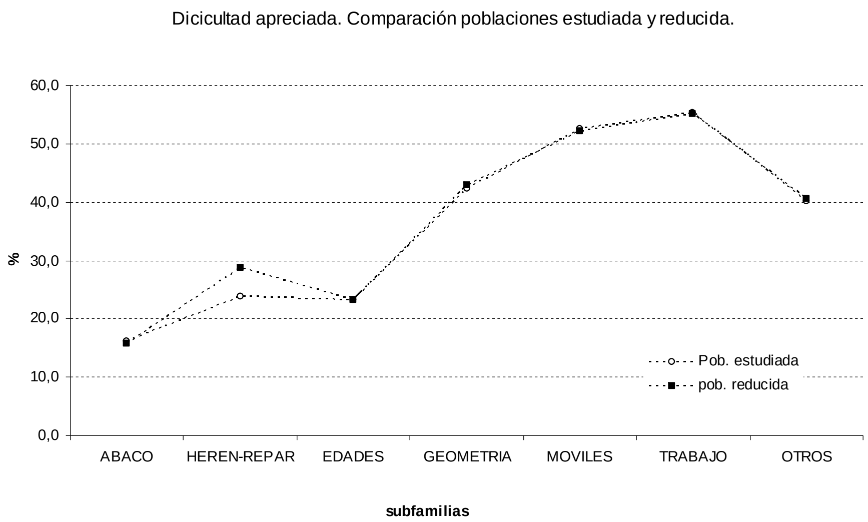


fig 4.12a.- Dificultad apreciada. Subfamilias. Comparación de las poblaciones bajo estudio y reducida.

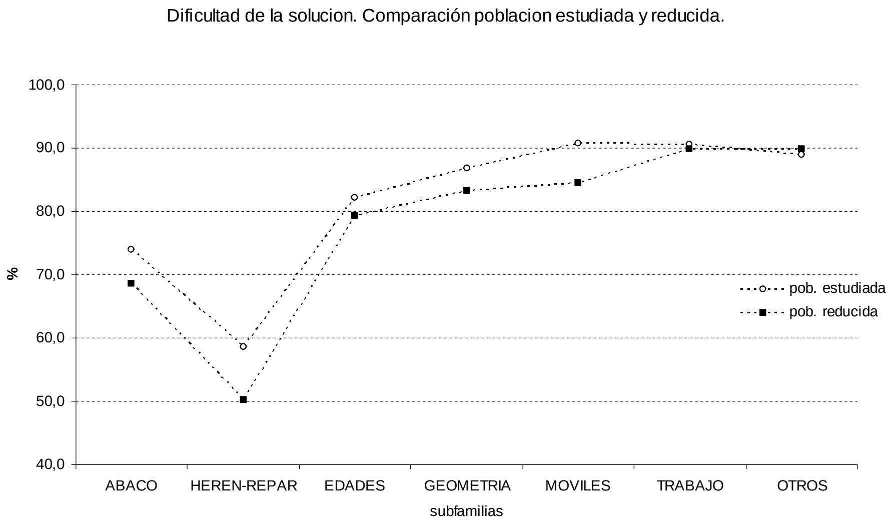


fig 4.12b.- Dificultad de la solución. Subfamilias. Comparación de las poblaciones bajo estudio y reducida.

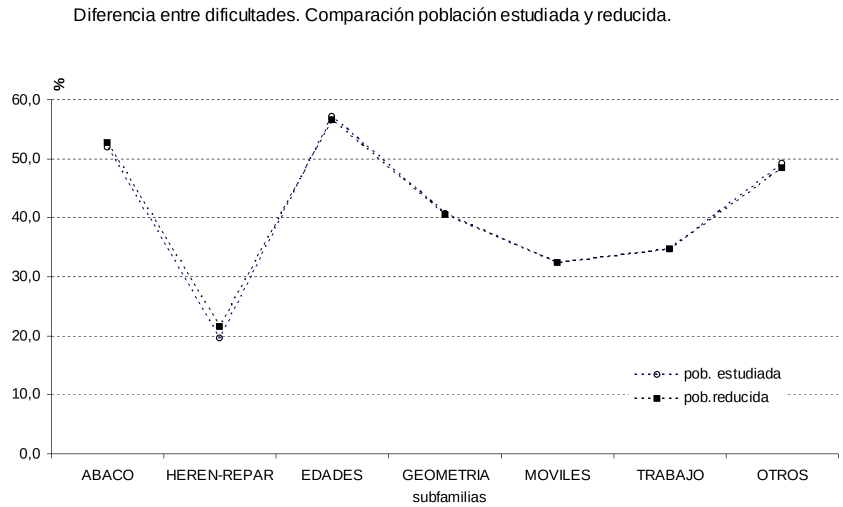


fig 4.12.c-. Diferencia entre dificultades. Subfamilias. Comparación de las poblaciones bajo estudio y reducida.

4.5.5.5.- Dificultad de la solución cuando no se usa el proceso de traducción algebraico.

Las resoluciones de los estudiantes estaban, en general, escritas en el SMS del álgebra, pero no todas ellas. No hubo ningún estudiante que no usara letras en alguno de los problemas, de la totalidad que le fueron administrados. Sin embargo, en la resolución de algún problema, algunos estudiantes consideraron pertinente no usar letras y descartar el proceso de traducción algebraico. Además, algunas de esas resoluciones contenían el resultado del problema.

La tablas 4.31 da cuenta de la pertinencia del no uso de letras en los problemas de los Cursos 1º, 2º y 3º.

En ella puede observarse que los valores de dicha pertinencia fueron mayores para el curso 3º. Además, en general los problemas en los que de un modo significativo, (>5%), no se usaron letras en la resolución pertenecen a las subfamilias MOVILES,

Pertinencia del no uso de letras					
problema	**curso 1º**	problema	**curso 2º**	problema	**curso 3º**
ROTATIVA	53,1	EJE VIARIO	71,4	CAVAR	84,5
HOJA DE ALUM	50,0	AVIONETA	65,2	ARTEL	75,0
ENCONTRAR	40,5	ENCONTRAR	52,0	EJE VIARIO	69,7
CAVAR	38,3	HOJA DE ALU	33,3	AVIONETA	57,1
HENO	37,8	CAVAR	23,7	ENCONTRAR	46,9
ALCANZAR	31,8	HENO	17,9	HENO	37,8
CHOCO Y CAR	30,2	LIEBRE Y GAL	17,3	LIEBRE Y GALG	35,1
LUIS Y SU PAD	27,9	RUBLOS	10,0	ALCANZAR	30,4
RUBLOS	16,3	ROTATIVA	3,6	COMERCIANTES	16,2
BOLSAS D CA	8,3	ALCANZAR	2,9	RUBLOS	13,6
HACE DIEZ	8,1	MECA	1,3	TERRENO	2,9
PERIMETRO	3,6	FRACCIÓN	1,2	PEDRO YJUAN	2,0
LIEBRE Y GAL	3,6			DES EN 4 PAR	1,6
DINERO	3,3			MIT Y TERC P	1,4
ENTEROS	2,4				
REP. ENTRE 5	2,0				
PEDRO YJUAN	1,8				

Tabla 4.31.- Pertinencia del no uso de letras. Cursos 1º, 2º,3º.
Problemas ordenados según pertinencia.

TRABAJO y OTROS, de esta última subfamilia, aquellos que conocíamos que eran susceptibles de lecturas aritméticas.

En los problemas de la subfamilia GEOMETRIA también se encuentran valores de esta pertinencia que son mayores que el 5%. Así, el caso del problema HOJA DE ALUMINIO (50,0 en 1º, 33,3 en 2º) resulta sorprendente, quizá este caso pueda explicarse por los cálculos que pueden realizarse antes de iniciar el proceso de traducción algebraico y que la resolución este proceso aun no se haya iniciado; de ese modo, dadas las instrucciones de codificación una resolución de ese tipo no se codificará con UL -uso de letras- y el problema aparece como si no fuera pertinente para él , el proceso de traducción algebraico.

Por su lado, para el problema LUIS Y SU PADRE (27,9 en 1º) equivalente al problema ADRIAN, ya estudiado en el Capitulo **3**, no es extraño que encontremos tal valor.

La tabla 4.32 muestra la dificultad de la solución cuando no se usan letras. Debiendo hacerse notar, que la dificultad de la solución cuando no se usan letras, no viene referida a población total de estudiantes, sino a la población de estudiantes que abordaron el problema y no usaron letras, en semejanza a la dificultad del proceso de traducción algebraico.

Como era de esperar, las dificultades fueron 100 para los problemas de las subfamilias ABACO, HERENCIAS- REPARTOS , EDADES y GEOMETRIA con la excepción del problema BOLSAS DE CARAMELOS y también fueron del 100 para los problemas MECA , DINERO y ARTEL. Del resto de los problemas, considerados los tres cursos el problema RUBLOS fue el que menos dificultad presentó.

Dificultad de la solución sin uso de letras			
problema/curso	1º	2º	3º
ENTEROS-1	100,0		
FRACCIÓN-1,2		100,0	
MIT Y TERC P-1,2,3			100,0
DES EN 4 PAR-1,2,3		100,0	
REP. ENTRE 5 -1,2	100,0		
BOLSAS D CA-1	83,3		
LUIS Y SU PAD-1	100,0		
HACE DIEZ	100,0		
PEDRO YJUAN-1,2,3	100,0		
PERIMETRO-1	100,0		
HOJA DE ALUM-1,2	100,0	100.0	
ALCANZAR-1,2,3	50,0	60,0	66,7
ENCONTRAR-1,2,3	82,4	15,4	63,3
LIEBRE Y GALGO	100,0	44,4	69,2
AVIONETA-1		40,0	100
CAVAR-1,2,3	77,8	22,2	51,0
ROTATIVA-1,2	82,4	100,0	
EJE VIARIO-2,3		30,0	28,2
ARTEL-3			100,0
CHOCO Y CARA-1	31,6		
HENO-1,2,3	88,2	42,9	71,4
RUBLOS-1,2,3	42,9	42,9	50,0
DINERO-1,2,3 MECA-1,2,3	100,0	100,0 100,0	100,0
COMERCIANTES-3			100,0
media	**84,6**	**58,2**	**72,9**

Tabla 4.32.- Dificultad de la solución sin uso de letras. Cursos 1º, 2º y 3º. Los números que siguen al nombre del problema indican los cursos en el que el problema fue administrado.

La fig, 4.12 compara la dificultad de los problemas para los problemas de las Subfamilias MOVILES, TRABAJO y OTROS, donde la dificultad no fue siempre del 100%. en la fig.4.12 puede observarse que la dificultad es siempre menor en el curso 2º que en 3º y en 1º, con la excepción de los problemas ALCANZAR y ROTATIVA

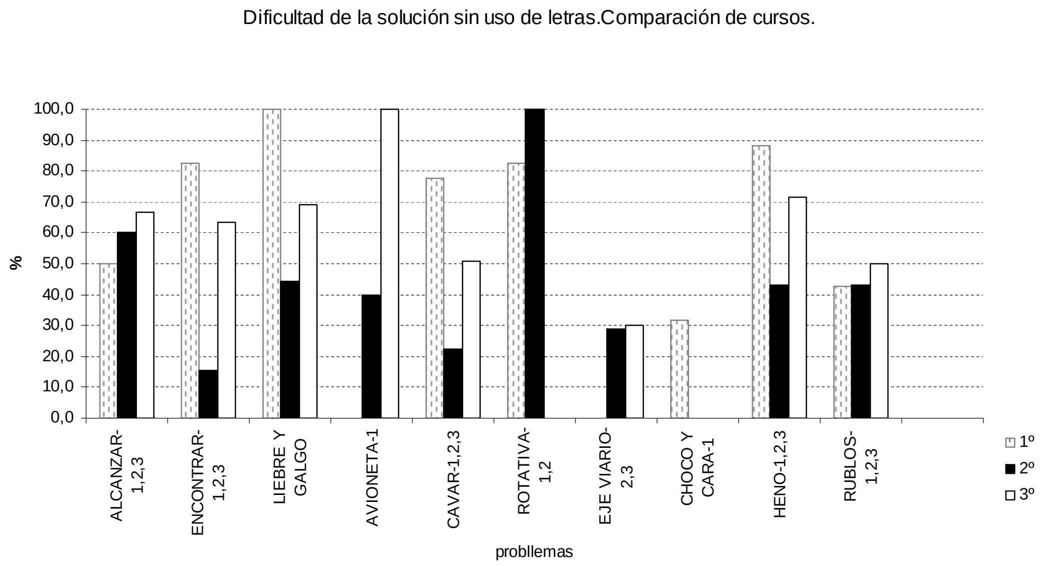


fig. 4.12.- Dificultad de la solución sin uso de letras: Comparación de cursos.

4.5.5.6- Pertinencia del proceso de traducción algebraico.

Para empezar, comencemos recordando que en cualquiera de las poblaciones consideradas, de las variables de la tarea y del sujeto, la única variable que ejerce un efecto significativo sobre la pertinencia del proceso de traducción algebraica, es la variable de la tarea Subfamilia, ver **4.5.5.1**, **4.5.5.2**, **4.5.5.3**.

La tabla 4.33 proporciona la pertinencia para cada uno de los problemas del instrumento en cada uno de los cursos, donde se han resaltado en negrita los valores de pertinencia menor que 95[46]. La fig. 4 presenta estos últimos problemas ordenados por el valor de la pertinencia

Los problemas en los cuales el valor de pertinencia para el problema no viene en negrita pertenecen a las subfamilias ABACO, HERENCIAS-REPARTOS, EDADES y GEOMETRIA con la excepción de HOJA DE ALUMINIO, BOLSAS DE CARAMELOS y LUIS Y SU PADRE. Y los problemas cuyo valor viene en negrita pertenecen a las subfamilias MOVILES, TRABAJO Y OTROS con la excepción de los problemas MECA y DINERO. Así el análisis estadístico confirma que la variable

[46] El motivo de la elección de 95 se debe a la rigidez de las instrucciones de codificación. Estas, codifican UL únicamente cuando aparece una letra con su significado o expresiones algebraicas. Y puede ocurrir que un estudiante, aún deseando utilizar el proceso de traducción algebraico en la resolución todavía no lo haya manifestado. Ello proporcionaría para la pertinencia valores más bajos. A este respecto, puede servir de ejemplo el problema HOJA DE ALUMINIO donde pueden hacerse cálculos previos con los datos antes de asignar letras, así resulta un valor de pertinencia muy bajo para este problema.

subfamilia es esencial para la pertinencia del proceso pero además a partir de dicho análisis de datos y los problemas que son excepción de la pauta general se puede afirmar que los problemas que tienen valores de pertinencia inferiores a 95 son en general los problemas susceptibles de lecturas aritméticas que es lo que caracteriza a los problemas cuyo valor aparece en negrita.

	pertinencia	**del proceso**	**de traducción**	
problema/curso	1º	2º	3º	para el problema
ENTEROS	97,6			97,6
BOLSAS D CA	**91,7**			91,7
REP. 1200	100			100,0
LUIS Y SU PAD	**72,1**			**72,1**
PERIMETRO	96,4			96,4
CHOCO Y CARA	**69,8**			69,8
FRACCIÓN	100,0	98,8		99,4
REP. ENTRE 5	98,0	100,0		99,0
HACE DIEZ	**91,9**	100,0		96,0
ROTATIVA	**46,9**	96,4		**71,7**
HOJA DE ALUM	**50,0**	**66,7**		**58,3**
MIT Y TERC P	100,0	100,0	98,6	99,5
DES EN 4 PAR	100,0	100,0	98,4	99,5
EDAD DOBLE	100,0	100,0	100,0	100,0
PEDRO YJUAN	98,2	100,0	98,0	98,7
TERRENO	100,0	100,0	97,1	99,0
ALCANZAR	**68,2**	97,1	**69,6**	**78,3**
ENCONTRAR	**59,5**	**48,0**	**53,1**	**53,5**
LIEBRE Y GALG	96,4	**82,7**	**64,9**	**81,3**
CAVAR	**61,7**	**76,3**	**15,5**	**51,2**
HENO	**62,2**	**82,1**	**62,2**	**68,8**
RUBLOS	**83,7**	**90,0**	**86,4**	**86,7**
MECA	100,0	98,7	100,0	99,6
DINERO	96,7	100,0	100,0	98,9
RESTA Y RESTA		100,0	100,0	100,0
FORTUNA		100,0	100,0	100,0
HERMANOS		100,0	100,0	100,0
AVIONETA		**34,8**	**42,9**	**38,8**
EJE VIARIO		**28,6**	**30,3**	**29,4**
EDITORIAL			100,0	100,0
ARTEL			**25,0**	**25,0**
COMERCIANTES			**83,8**	**83,8**

Tabla 4.33.- Pertinencia del proceso de traducción. Para cada curso y problema.

En la tabla 4.33 todos los problemas, con la excepción de ROTATIVA, tienen valores de pertinencia superiores a 50, lo que muestra una preferencia por el uso del proceso de traducción algebraico.

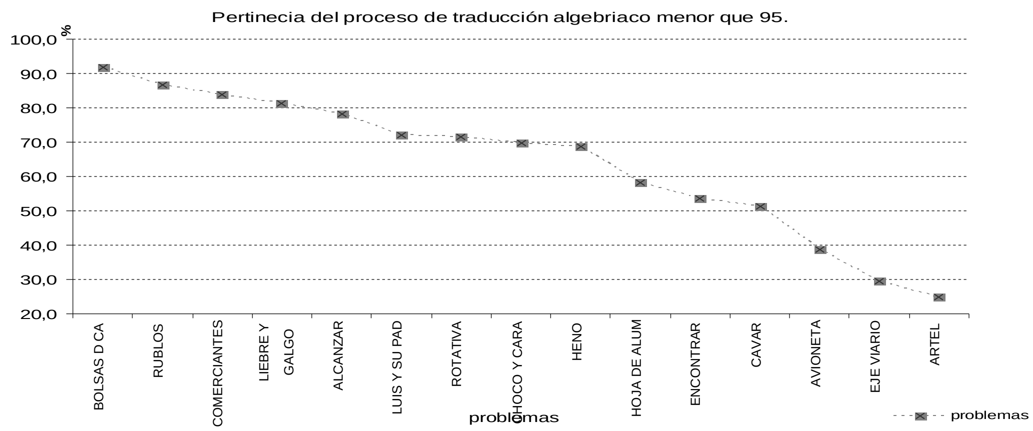


Fig. 4.13.- Problemas con pertinencia del proceso de traducción algebraica menor que 95

4.5.5.7.- Las dificultades del proceso de traducción algebraico.

Uno de los propósitos de este capítulo es estudiar no únicamente la dificultad del proceso de traducción algebraico como un todo, sino también la dificultad de cada una de las tareas parciales que lo componen: construcción de expresiones algebraicas e igualdades.

Pues bien, con los datos brutos en la mano, resultó que los valores de las variables del proceso UL, EA e IG eran similares para muchos de los problemas e incluso iguales en algunos casos. Los valores de las diferencias UL – EA, EA – IG, UL –IG, IG- SEC y UL- SEC para las poblaciones de los cursos 1º, 2º y 3º constan en el anexo **A4.6**, Tablas I, II, y III. Además, los coeficientes de correlación, todos ellos significativos, entre las variables UL, EA, IG, SEC, para las poblaciones de los cursos 1º, 2º, 3º, que se muestran en las Tablas 4.34 resultaron ser prácticamente 1 entre las variables UL, EA, IG

Curso 1º				
Coef. correlación	UL	EA	IG	SEC
UL		0,98	0,94	0,60
EA			0,96	0,68
IG				0,75

Curso 2º				
Coef. correlación	UL	EA	IG	SEC
UL		0,99	0,96	0,58
EA			0,97	0,62
IG				0,58

Curso 3º				
Coef. correlación	UL	EA	IG	SEC
UL		0,99	0,98	0,65
EA			0,98	0,66
IG				0,66

Tabla 4.34.- Coeficientes de correlación entre las variables de proceso de los problemas. Poblaciones: Curso 1º, 2º y 3º.

Así las cosas, el estudio de la dificultad de las tareas subsidiarias: construcción expresiones algebraicas, construcción de igualdades, en los términos en que se definen las dificultades, sería casi equivalente al estudio de la dificultad del proceso de traducción algebraico como un todo, usando únicamente las variables de proceso UL, SEC. Esto último, se hace en **4.5.5.8**

Por otro lado, los valores de las diferencias expresados en % respecto de UL , ver anexo **A4.6.** Tablas IV, V, VI , y en particular el valor de las diferencias UL- IG que se muestran en la Tabla 4.35 eran de cierta consideración para algunos problemas por lo cual se decidió representar el proceso de producción de un problema mediante su perfil tal como se define en **4.5.4.1.2** El estudio de los perfiles de realiza en **4.5.5.9**

Curso 1º	
problemas	UL-IG
ENTEROS	8,5
FRACCIÓN	1,4
MIT Y TERC P	10,6
DES EN 4 PAR	46,5
REP. 1200	5,0
REP. ENTRE 5	4,0
BOLSAS D CA	3,0
LUIS Y SU PAD	27,3
HACE DIEZ	10,5
EDAD DOBLE	2,8
PEDRO YJUAN	13,0
PERIMETRO	18,9
TERRENO	16,9
HOJA DE ALU	40,0
ALCANZAR	93,3
ENCONTRAR	40,0
LIEBRE Y GAL	59,3
CAVAR	44,8
ROTATIVA	26,7
CHOCO Y CAR	15,9
HENO	32,1
RUBLOS	8,3
MECA	15,9
DINERO	8,6

Curso 2º	
problemas	UL-IG
FRACCIÓN	0,0
MIT Y TERC P	30,3
DES EN 4 PAR	4,0
RESTA Y REST	16,4
REP. ENTRE 5	20,4
FORTUNA	1,4
HACE DIEZ	8,6
EDAD DOBLE	0,0
PEDRO YJUAN	16,3
HERMANOS	27,9
TERRENO	15,9
HOJA DE ALU	55,0
ALCANZAR	47,1
ENCONTRAR	8,3
LIEBRE Y GAL	39,5
AVIONETA	75,0
CAVAR	51,7
ROTATIVA	59,3
EJE VIARIO	75,0
HENO	6,3
RUBLOS	8,9
MECA	8,1
DINERO	5,2

Curso 3º	
problemas	UL-IG
MIT Y TERC P	0,0
DES EN 4 PAR	23,0
RESTA Y RESTA	9,1
FORTUNA	12,5
EDAD DOBLE	5,6
PEDRO YJUAN	6,1
HERMANOS	16,7
TERRENO	1,5
EDITORIAL	28,6
ALCANZAR	10,4
ENCONTRAR	8,8
LIEBRE Y GALG	20,8
AVIONETA	22,2
CAVAR	0,0
EJE VIARIO	40,0
ARTEL	22,2
HENO	8,7
RUBLOS	5,3
MECA	0,0
DINERO	1,9
COMERCIANTES	3,2

Tabla 4.35.- Diferencia en % de los valores de las variables de proceso UL e IG para cada problema. Cursos 1º,2º, 3º.

4.5.5.8- Dificultad del proceso de traducción de los problemas.

En primer lugar, recordar que sobre la dificultad del proceso de traducción tienen un efecto significativo las variables de la tarea y del sujeto subfamilia, complejidad y curso en las poblaciones: bajo estudio, reducida y problemas comunes y la interacción subfamilia*complejidad en la población reducida.

4.5.5.8.1.-Dificultad del proceso de traducción de los problemas. Cursos.

Curso 1º

Los valores de la dificultad del proceso de traducción de los problemas, administrados al curso 1º, vienen dados en la tabla 4.36 y fig.4.14 ordenados por el valor de dicha dificultad. La media de la dificultad es 73.26 y la desviación típica 21.70.

Como puede observarse en la tabla 4.36 exactamente la mitad de los problemas, 12, tiene dificultad por debajo de 75 y 12 la tienen por encima de 75. De éstos últimos 8 tienen una dificultad del orden de 90 o superior donde encontramos además dos problemas de dificultad 100 LIEBRE Y GALGO y ROTATIVA, otros problemas que están en esta franja son los indeterminados , DESCOMPONER EN 4 PARTES, HOJA DE ALUMINIO y los de mayor complejidad MECA, DINERO. Los problemas de menor dificultad pertenecen a la subfamilia HERENCIAS-REPARTOS siendo de extrañar que el problema REPARTIR ENTRE 5 de la misma subfamilia difiera tanto en dificultad (del orden de 40), una explicación posible sería la presencia en el enunciado de este problema de la frase “y así sucesivamente”, que requiere de un proceso recursivo, lo que haría más dificultoso el proceso de traducción. Por otro lado, hay una brecha del orden de 25 entre estos problemas y los del cuartil (50,75) que acoge problemas de todas las subfamilias.

Curso 1º			
problema	dif. proceso	problema	dif. proceso
LIEBRE Y GALG	100,0	CHOCO Y CA	72,7
ROTATIVA	100,0	EDAD DOBLE	66,2
DES EN 4 PAR	98,6	REP. ENTRE 5	66,0
ALCANZAR	96,7	MIT Y TERC P	65,9
HOJA DE ALUM	93,3	CAVAR	65,5
MECA	93,2	FRACCIÓN	62,2
HENO	92,9	HACE DIEZ	59,6
DINERO	89,7	ENCONTRAR	56,0
TERRENO	84,7	ENTEROS	54,9
PEDRO YJUAN	83,3	PERIMETRO	50,9
LUIS Y SU PAD	79,5	BOLSAS D CA	28,8
RUBLOS	77,8	REP. 1200	20,0

Tabla 4.36 .- Dificultad del proceso de traducción algebraico de los problemas. Curso 1º.

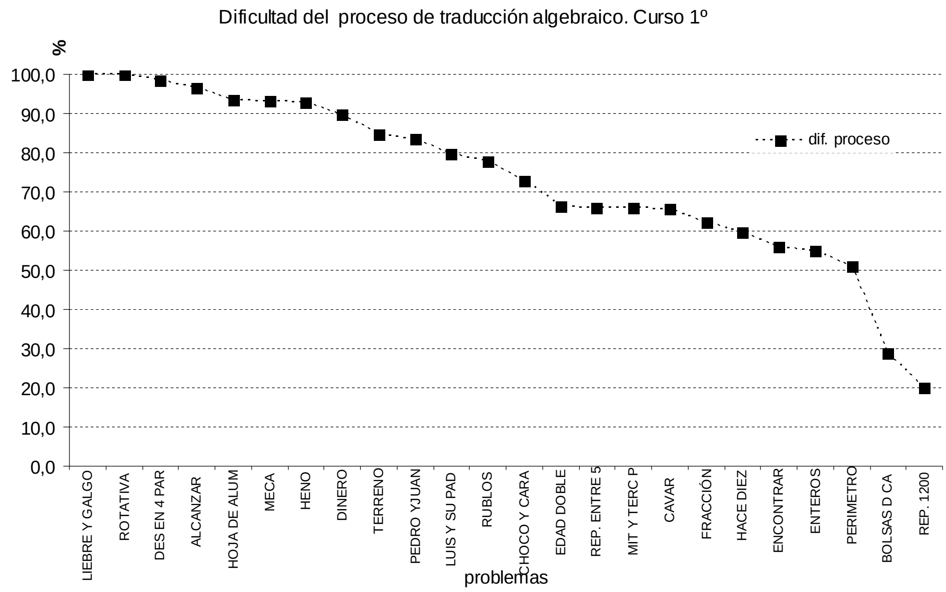


fig. 4.14 .- Dificultad del proceso de traducción algebraico de los problemas. Curso 1º.

Curso 2º

Los valores de la dificultad del proceso de traducción de los problemas administrados al curso 2º vienen dados en la tabla 4.37 y fig.4.15 ordenados por el valor de dicha dificultad. La media de la dificultad es 75.9 y la desviación típica 24.70

Curso 2º			
problema	dif.proceso	problema	dif.proceso
LIEBRE Y GAL	100,0	ENCONTRAR	75,0
ROTATIVA	100,0	HENO	75,0
HERMANOS	98,5	TERRENO	71,4
DINERO	97,4	REP. ENTRE 5	55,1
MECA	97,3	FRACCIÓN	53,6
HOJA DE ALUM	95,0	EDAD DOBLE	52,5
PEDRO YJUAN	93,8		
CAVAR	93,1	HACE DIEZ	39,5
DES EN 4 PAR	90,7	MIT Y TERC P	30,3
AVIONETA	87,5	FORTUNA	9,9
EJE VIARIO	87,5		
ALCANZAR	85,3		
RUBLOS	80,0		
RESTA Y REST	77,6		

Tabla 4.37 .- Dificultad del proceso de traducción algebraico de los problemas. Curso 2º.

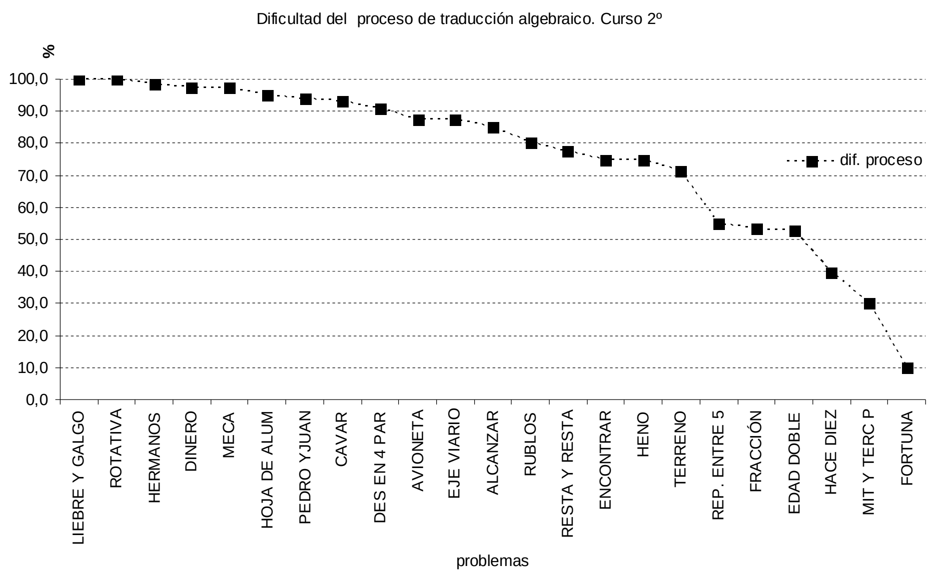


fig. 4.15 .- Dificultad del proceso de traducción algebraico de los problemas. Curso 2º.

Como puede observarse en la tabla 4.37 más de la mitad de los problemas tiene dificultad por encima de 75. De ellos 9 tienen una dificultad del orden de 90 o superior, donde encontramos además dos problemas de dificultad 100 LIEBRE Y GALGO y ROTATIVA; otros problemas que están en esta franja son los indeterminados DESCOMPONER EN 4 PARTES, HOJA DE ALUMINIO y los de mayor complejidad MECA, DINERO. El problema de menor dificultad es FORTUNA y el problema REPARTIR ENTRE 5 difiera en dificultad de este del orden de 40. El cuartil (50,75) acoge problemas de todas las subfamilias siendo los problemas de las subfamilias ABACO y EDADES los que ocupan el escalón inferior, También pertenecen a éstas subfamilias los problemas FRACCION y EDAD DOBLE que sin embargo están acogidos en centro del cuartil (25,50). Por otro lado, es de notar que en la subfamilia EDADES los problemas PEDRO y JUAN y HERMANOS difieren sustancialmente de HACE DIEZ y EDAD DOBLE lo que podría explicarse tanto por su mayor complejidad como por la manera de referir en el enunciado las edades de los personajes en los tres momentos en que se consideran, los años trascurridos entre dichos momentos son datos en los problemas HACE DIEZ y EDAD DOBLE mientras que no lo son en PEDRO y JUAN o HERMANOS.

Curso 3º.

Los valores de la dificultad del proceso de traducción de los problemas administrados al curso 3º vienen dados en la tabla 4.38 y fig.4.16 ordenados por el valor de dicha dificultad. La media de la dificultad es 59.7 y la desviación típica 25.4

Como puede observarse en la tabla 4.38 un tercio de los problemas tiene dificultad por encima de 75. De ellos dos problemas de dificultad 100 LIEBRE Y GALGO y HERMANOS. Cuatro problemas menos de 25, dos problemas en el cuartil (25,50) y 8 problemas de todas las subfamilias excepto HERENCIAS- REPARTOS con dificultad entre (51,5 y 77,8).

Curso 3º			
problema	dif.proceso	problema	dif.proceso
HERMANOS	100,0	EDITORIAL	74,3
LIEBRE Y GALG	100,0	COMERCIANTES	74,2
MECA	89,1	RESTA Y RESTA	70,5
DINERO	85,2	ARTEL	66,7
PEDRO YJUAN	81,6	EDAD DOBLE	62,0
DES EN 4 PAR	80,3	RUBLOS	60,5
AVIONETA	77,8	HENO	52,2
		TERRENO	51,5
		EJE VIARIO	40,0
		ALCANZAR	27,1
		MIT Y TERC P	21,1
		FORTUNA	15,3
		ENCONTRAR	14,7
		CAVAR	11,1

Tabla 4.38 .- Dificultad del proceso de traducción algebraico de los problemas. Curso 3º.

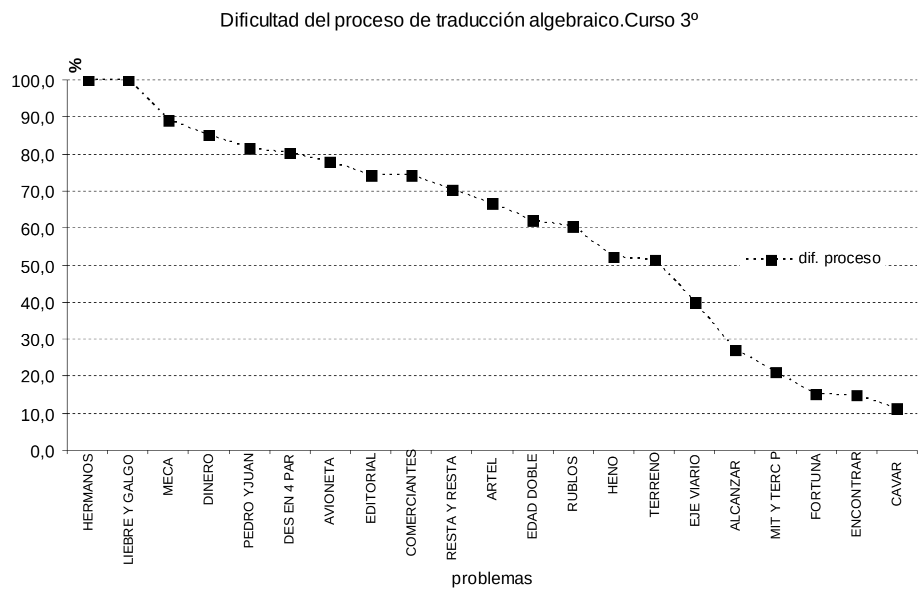


fig. 4.16 .- Dificultad del proceso de traducción algebraico de los problemas. Curso 3º.

4.5.8.2.- Dificultad del proceso de traducción. Comparación de cursos

Para la comparación de la dificultad del proceso de traducción algebraico de los problemas entre los cursos utilizamos la población problemas comunes. En esta población, recordemos que, la variable del sujeto curso tiene un efecto significativo sobre la dificultad del proceso de traducción.

Los estadísticos descriptivos de cada uno de los cursos se muestran en la tabla 4.39

Dificultad del proceso				
curso	media	desviación	rango tamaño	problema min, problema max
1º	82,33	14,71	(56,0 , 100) 44,4	ENCONTRAR LIEBRE Y GALGO
2º	80,13	20,10	(30,3 , 100) 69,7	MIT Y TERC P LIEBRE Y GALGO
3º	56,65	30,26	(11,1 , 100) 88,9	CAVAR LIEBRE Y GALGO

Tabla 4.39.- Estadísticos descriptivos de la dificultad del proceso de traducción.Cursos.

El nivel de significación, de las pruebas post-hoc, para la diferencia de medias de la dificultad del proceso de cada curso se muestran en la Tabla 4.40, de la que se concluye que dicha dificultad es análoga en los cursos 1º y 2º y significativamente diferente en el curso 3º.

CURSO	1º	2º	3º
1º		0,8	0,006
2º			0,012
3º			

Tabla 4.40.-Dificultad del proceso. Comparación de medias de los cursos. Niveles de significación

La tabla 4.41- proporciona el valor de la dificultad del proceso de cada problema en cada curso y la figura 4.17 permite su mejor comparación. En ellas puede apreciarse que mientras la dificultad del proceso de cada problemas es superior en 2º o en 1º dependiendo del problema, esta dificultad es claramente inferior para todos los problemas en el curso 3º, con la excepción de EDAD DOBLE.

Dificultad	del proceso	Traducción Algebraico	
problema/ Curso	1º	2º	3º
MIT Y TERC P	65,9	30,3	21,1
DES EN 4 PAR	98,6	90,7	80,3
EDAD DOBLE	66,2	52,5	62,0
PEDRO YJUAN	83,3	93,8	81,6
TERRENO	84,7	71,4	51,5
ALCANZAR	96,7	85,3	27,1
ENCONTRAR	56,0	75,0	14,7
LIEBRE Y GALGO	100,0	100,0	100,0
CAVAR	65,5	93,1	11,1
HENO	92,9	75,0	52,2
RUBLOS	77,8	80,0	60,5
MECA	93,2	97,3	89,1
DINERO	89,7	97,4	85,2

Tabla 4.41.- Dificultad del proceso de traducción algebraico de los problemas. Comparación de cursos.

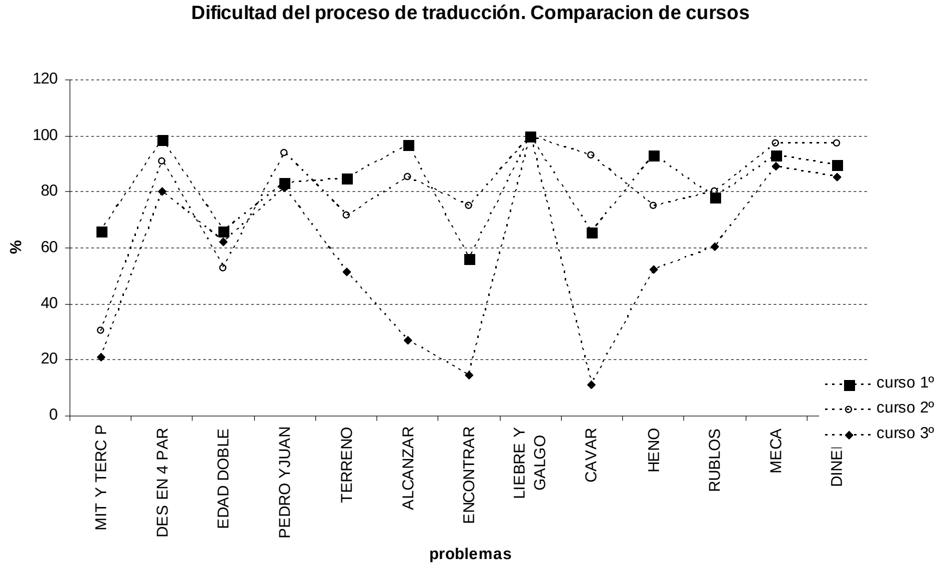


fig. 4.17- Dificultad del proceso de traducción algebraico de los problemas.
Comparación de cursos

4.5.8.3.- Dificultad del proceso de traducción. Subfamilias.

4.5.8.3.-Poblaciones bajo estudio y reducida.

En la población bajo estudio, reducida y problemas comunes, la variable de la tarea subfamilia así como la interacción subfamilia*complejidad tiene un efecto significativo sobre la dificultad del proceso de traducción mientras que en la población reducida el efecto interacción no era significativo. Asimismo el efecto de la interacción subfamilia*curso no era significativo en ninguna de las poblaciones.

Los valores concretos de la dificultad del proceso de cada subfamilia en las poblaciones bajo estudio y reducida se muestran en la tabla 4.42 y a tabla 4.43 resume el post hoc para la comparación de medias de la dificultad del proceso entre las distintas subfamilias.

Dificultad del proceso		
	Población reducida	Población bajo estudio
subfamilia	Dif. Proceso	Dif. Proceso
OTROS	78,6	81,2
EDADES	74,1	74,2
TRABAJO	70,4	70,4
GEOMETRIA	66,5	74,5
MOVILES	65	74,5
ABACO	54,5	64,5
HEREN-REP	32,5	32,5

Tabla 4.42.-Dificultad del proceso de traducción. Subfamilias. Poblaciones reducida y bajo estudio..

Comparación de medias de la dificultad del proceso de traducción (Subfamilias)							
	ABACO	HEREN-REPAR	EDADES	GEOMETRIA	MOVILES	TRABAJO	OTROS
ABACO		X					X
HEREN-REPAR	.07		X	X	X	X	X
EDADES	.09	S					
GEOMETRIA		S					
MOVILES		S					
TRABAJO	.15	S					
OTROS	S	S					

Tabla 4.43.- Diferencias de las medias de las subfamilias. Comparación.
S, X.-Diferencias significativas: en la Población reducida, S, en la Población total, X, (s < 0.05)
Los números refieren el nivel de significación (s<.15) para aceptar la diferencia de medias entre subfamilias. Espacio en blanco (s>.15)

La tabla 4.43 viene a decirnos que únicamente la subfamilia HERENCIAS-REPARTOS muestra una dificultad del proceso de traducción diferente de todas las demás, siendo esta dificultad inferior, ver tabla 4.42. Mientras que la subfamilia ABACO tiene una dificultad del proceso claramente diferente de OTROS, siendo más arriesgado afirmar si la dificultad del proceso de esta subfamilia es diferente de EDADES. No encontrándose diferencias significativas en la comparación del resto de las subfamilias.

4.5.5.9.- Perfiles de los problemas.

Los perfiles de los problemas administrados a los tres cursos se muestran para cada problema y curso en las figs. 4.18, 4.19, 4.20.

La observación de los perfiles de esos problemas permite enunciar una pauta general de la marcha del proceso de traducción que rezaría así:

Para la mayoría de los problemas, con independencia del curso en el que el problema se proponga, una vez iniciado el proceso de traducción mediante el uso de letras, en más del 95% de los casos este prosigue con la construcción de expresiones algebraicas y en torno al 90% de los casos el proceso desemboca en la producción de igualdades. No obstante esta abundancia de igualdades, dichas igualdades no conducen a la solución del problema, sino que lo hacen en un tanto por ciento de los casos según la dificultad del proceso de traducción de dicho problema en cada curso.

Dicho de otra manera, en términos de los estudiantes, la mayor dificultad que encuentran los estudiantes cuando han decidido iniciar el proceso de traducción no es producir, ya que casi todos ellos producen una igualdad, sino producir la igualdad adecuada. Además, los estudiantes de 3º cuando inician el proceso, tienden a producir igual o más que los estudiantes de 1º o 2º, pero sobre todo más adecuadamente.

No obstante esta pauta general, pueden observarse desviaciones de esta pauta en algunos problemas en que la producción es inferior a la mencionada. Así:

En el problema MITAD y TERCERA PARTE la producción de igualdades es 69,7 en el curso 2º.

En el problema DESCOMPONER EN 4 PARTES la producción de igualdades es 53,5 en el curso 1º y 77,0 en el curso 3º

En el problema TERRENO la producción de igualdades es 83,1 en el curso 1º y 84,1 en el curso 2º.

En el problema HENO la producción de igualdades es 67,9 en el curso 1º.

En el problema MECA la producción de igualdades es 84,1 en el curso 1º.

En el problema ENCONTRAR la producción de igualdades es 60,0 en el curso 1º.

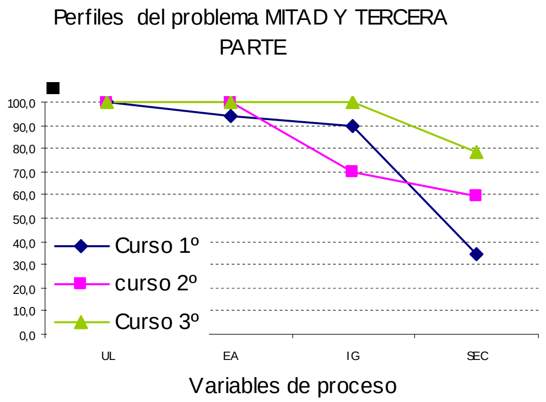
En el problema LIEBRE y GALGO la producción de igualdades es 40,7 en el curso 1º, 60,5 en el curso 2º y 79,0 en el curso 3º.

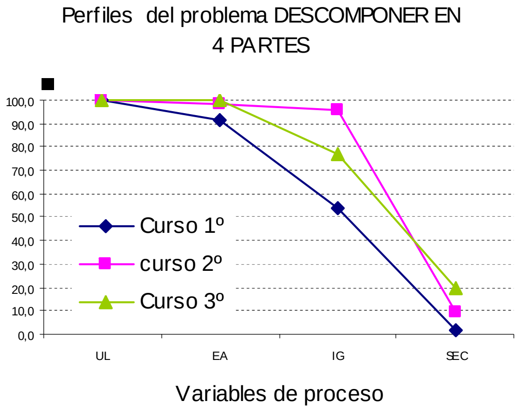
En el problema ALCANZAR la producción de expresiones algebraicas es 60,7 y la de igualdades 6,7, dichas producciones fueron 82,4 y 52,9 en el curso 2º.

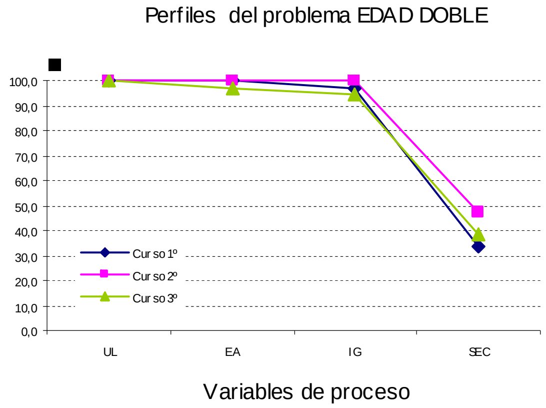
En el problema CAVAR la producción de expresiones algebraicas es 62,1 y la de igualdades 55,2, dichas producciones fueron 65,5 y 48,3 en el curso 2º.

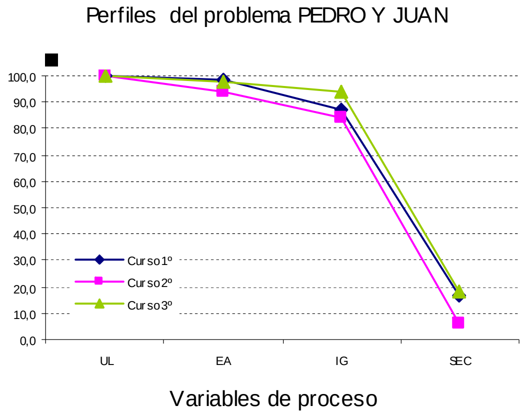
Siendo de anotar, que para los problemas HENO, ENCONTRAR, ALCANZAR o CAVAR que son en los que encontramos mayores desviaciones de la pauta general en los cursos 1º y 2º, encontramos para ellos también soluciones sin el uso de ecuaciones-ver **4.5.5.5-** por lo cual el descenso en el nivel de producción puede deberse tanto a que no se encontrara qué igualar como al abandono del proceso de traducción para intentar encontrar la solución mediante otro modo de resolver.

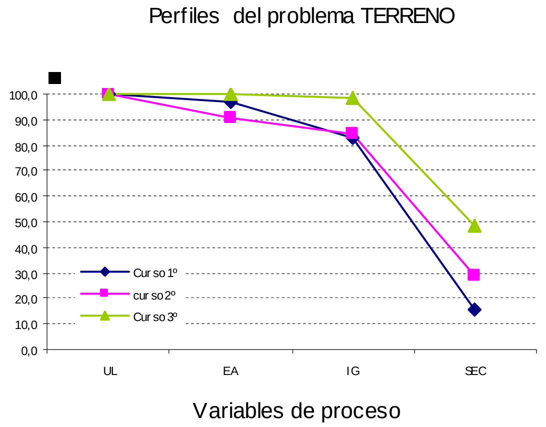
Por último, en el anexo **A4.7** figuran los perfiles de todos los problemas del instrumento según subfamilias y cursos, su observación viene a corroborar la pauta general enunciada para el proceso de traducción. Además de su observación se confirma, que para los problemas de las subfamilias GEOMETRIA, MOVILES y TRABAJO la producción de igualdades en los cursos 1º y 2º suele estar por debajo de la pauta general del 90%.











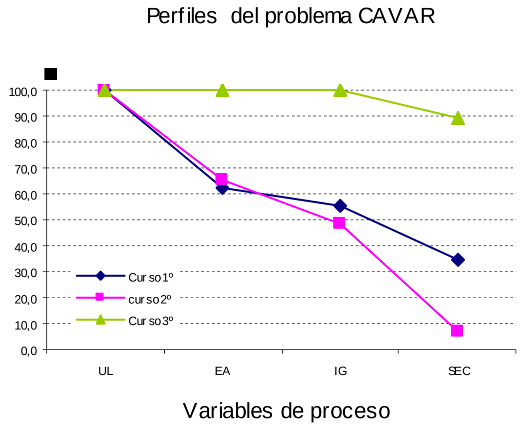
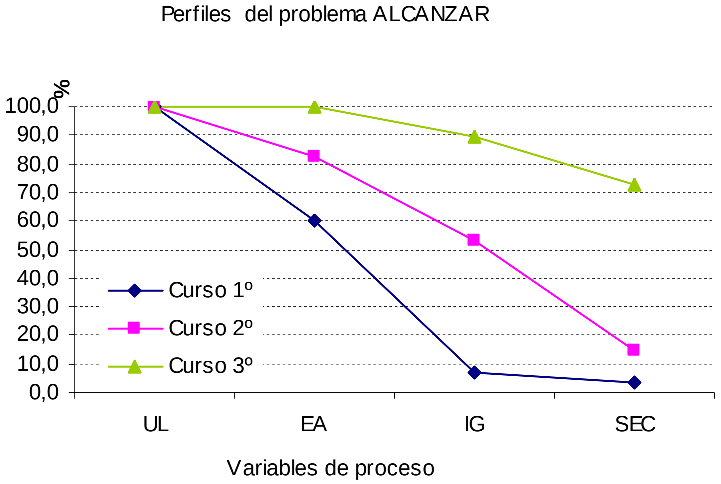
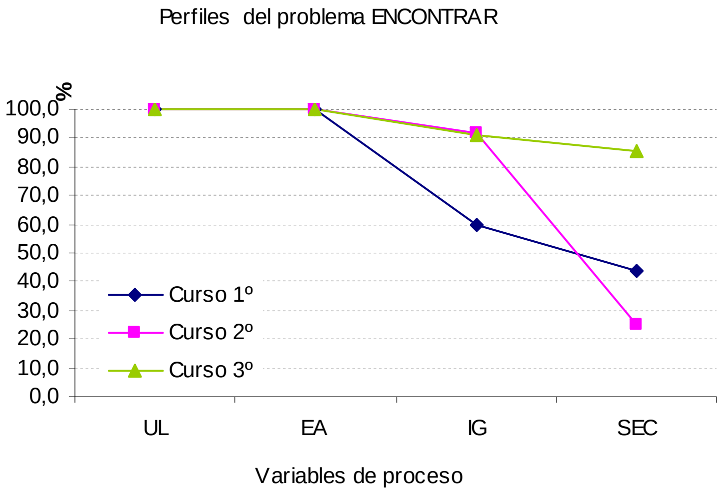


fig. 4.18 .- Perfiles de los problemas: MITAD Y TERCERA PARTE, DESCOMPONER EN 4 PARTES, EDAD DOBLE, PERO Y JUAN, TERRENO Y CAVAR.





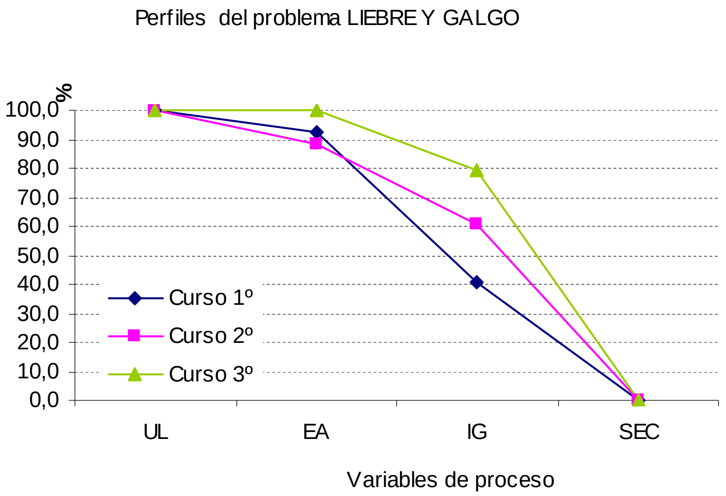


fig.4.19.- Perfiles de los problemas: ALCANZAR, ENCONTRAR, LIEBRE Y GALGO.

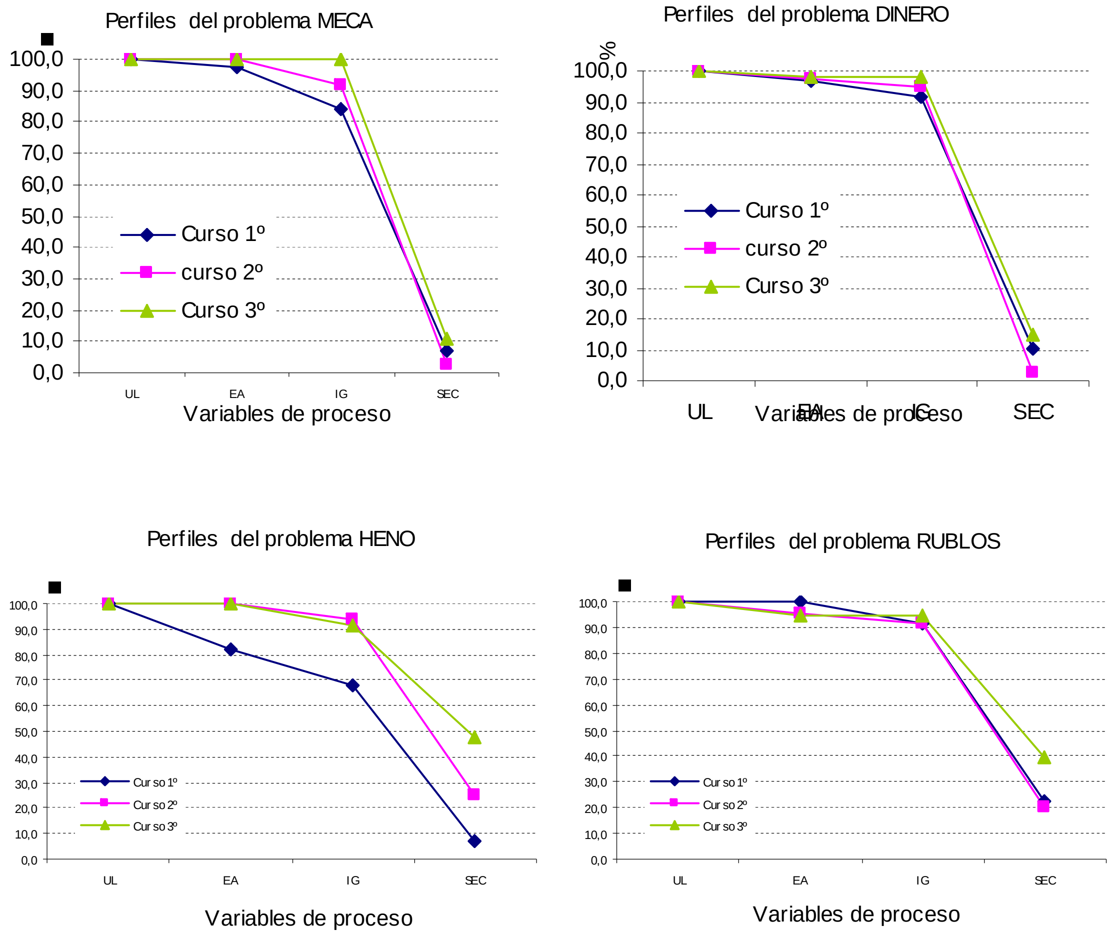


fig.4.20.- Perfiles de los problemas: MECA, DINERO, HENO, RUBOS.

4.5.5.10.- Complejidad, dificultades, error y pertinencia.

Por dificultad apreciada, de la solución o del proceso de un determinado valor de complejidad, se entiende la media de las dificultades de los problemas de dicha complejidad en la población que se considere. Análogamente, deben entenderse la diferencia entre dificultades y la pertinencia de un determinado valor de complejidad.

El estudio del efecto de la variable de la tarea complejidad sobre las variables dependientes se llevó a cabo, de modo general, en **4.5.2.1**, **4.5.5.2** y **4.5.5.3,** de él, se concluyó en negativo, que la interacción complejidad*curso no tenia efecto significativo sobre ninguna de las variables dependientes, en ninguna de las poblaciones consideradas. Lo que sigue, es un estudio más en detalle de donde se concluyeron efectos significativos.

Población bajo estudio.

La variable de la tarea complejidad y su interacción con subfamilia tienen un efecto significativo sobre las variables dependientes: dificultad apreciada, de la solución y diferencia entre dificultades, ver **4.5.5.1**.

En esta población, los valores de la variable complejidad y el número de casos [47] de cada uno de dichos valores viene dado en la tabla.4.44

complejidad		nº de casos
	3	19
	4	14
	5	21
	6	5
	7	7
	8	2
	Total	68

Tabla 4.44.- Valores de complejidad, número de casos. Población bajo estudio.

retirando de la población el problema FORTUNA de valor de complejidad 8 por la escasez de casos y estudiando el efecto del factor complejidad sobre la población resultante encontramos que:

A) si analizamos conjuntamente el efecto variables de la tarea subfamilia y complejidad en un modelo factorial completo. Anexo **A4.9,** Tabla I. Encontramos que tanto ambas variables por separado o en su interacción tienen un efecto significativo(s=.052 para la traza de Pillai) . Y la significación de dichos efectos sobre cada una de las variables se muestra en la Tabla 4.45.

complejidad	dif.apre.pro.	,041
	dif.solución	**,084**
	diferencias	**,135**
	pertinencia	,138
	dif.proceso	,201

complejidad * subfamilia	dif.apre.pro.	,021
	dif.solución	,108
	diferencias	**,090**
	pertinencia	,051
	dif.proceso	,090

Tabla 4.45.- Efecto de la complejidad sobre las variables dependientes.
Modelo factorial completo (Subfamilia, complejidad).

B) si analizamos únicamente el efecto de la variable de la tarea complejidad por separado encontramos niveles de significación del orden de .20 para la traza de Pillai Y

[47] Por como está construida la Población –ver 4.5.4.2 – un mismo problema puede constituir uno, dos o tres casos, según al número de cursos a los que el problema le haya sido propuesto.

la significación de dicho efecto sobre cada una de las variables se muestra en la tabla 4.46.

complejidad	dif.apre.pro.	,813
	dif.solución	**,143**
	diferencias	**,010**
	pertinencia	,223
	dif.proceso	,096

Tabla 4.45.- Efecto de la complejidad sobre las variables dependientes. Modelo intercept+complejidad.

De ambos análisis podría desprenderse que la complejidad tiene un cierto efecto relevante (s<0.143 en ambos análisis) en la dificultad de la solución y la diferencia entre dificultades (error) .

Los valores de las variables dependientes para los distintos valores de complejidad cuya diferencia es más significativa vienen dados en la tabla 4.46.

	complejidad	Media	Desv. típ.
dif.solución	3	74,586	17,9042
	4	80,335	19,4265
	5	84,092	20,2333
	6	78,581	13,1254
	7	94,537	3,0979
	Total	81,249	18,3585
dif.proceso	3	61,261	26,7813
	4	71,545	26,0378
	5	75,931	21,6047
	6	71,142	12,3940
	7	88,360	10,5502
diferencia entredificul (error)	3	37,432	10,8912
	4	39,138	10,9277
	5	46,185	20,7944
	6	50,209	5,9897
	7	60,371	15,4866
	Total	43,980	16,2849

Tabla 4.46 - Valores de la dificultad de la solución, del proceso y error para los distintos valores de complejidad.

La comparación de medias para los distintos valores de complejidad, que consta en el anexo **A4.3,** tablas XV y XVI proporciona los siguientes niveles de significación.

para el análisis A)

Dificultad de la solución: 3 vs. 5 (0 .05), 3 vs. 7 (.05), 4 vs7 (.02).

Diferencia de dificultades: 3 vs. 5 (0.02), 3 vs. 6 (0.03), 3 vs.7 (.04).
Dificultad del proceso: 3 vs. 5 (0.03), 3 vs. 7 (0.00).

Para el análisis B)

Dificultad de la solución: 3 vs. 5 (0 .09), 3 vs. 7 (.01), 4 vs7 (.09).
Diferencia de dificultades: 3 vs. 5 (0.07), 3 vs. 6 (0.09), 3 vs.7 (.00.)
Dificultad del proceso: 3 vs. 5 (0.05), 3 vs. 7 (0.01).

De los análisis A y B y de la observación de la tabla 4.46 puede concluirse que los valores de la dificultad de la solución, de la dificultad del proceso y de la diferencia de dificultades (error) siguen un orden creciente según los valores de complejidad 3,5,7.

Como es el caso, que la complejidad 7, aún con 7 casos, contiene únicamente 3 problemas diferentes que la representen, mientras que las complejidades 3 y 5 están representadas por 19 y 21 casos, 10 y 9 problemas diferentes, la afirmación anterior debe tomarse con cierta prevención, cuando esto se diga en general.

4.5.5.11.-Comparación de problemas equivalentes.

Para explorar si las dificultades de los problemas equivalentes eran similares en el instrumento se disponían de las parejas ALCANZAR y RUBLOS, MECANOGRAFA y DINERO.

La tabla 4.47 en la que constan los valores de las dificultades, diferencia de dificultades y pertinencia, permite apreciar que para la pareja MECANOGRAFA y DINERO las discrepancias de la dificultad del proceso, de la solución son mínimas al igual que ocurre para la pertinencia del proceso de traducción donde prácticamente la totalidad de los estudiantes usaron dicho modo de resolver. Sin embargo en la dificultad apreciada existe una diferencia de un 10%, esto es, esta dificultad apreciada es menor para el problema DINERO que podría explicarse por la presencia en el enunciado de la expresión “para repartir”, además debe anotarse que esta diferencia es la que explica la discrepancia en la diferencia de dificultades.

	dif.apre.pro.	dif.solución	diferen. dificu.	pertinencia	dif.proceso
ALCANZAR	40,5	74,4	33,9	78,3	69,7
RUBLOS	41,3	76,0	34,7	86,4	60,5

	dif.apre.pro.	dif.solución	diferen. dificu.	pertinencia	dif.proceso
MECA	36,3	96,0	59,7	99,6	93,2
DINERO	26,1	93,5	67,4	98,9	90,7

Tabla 4.47.- Comparación de dificultades y pertinencia de problemas equivalentes.

Por su lado para la pareja ALCANZAR y RUBLOS las discrepancias se manifiestan de manera diferente, efecto, si la dificultad apreciada y de la solución son prácticamente coincidentes en ambos problemas, la pertinencia del proceso de traducción algebraico que fue menor para el problema ALCANZAR y tuvo mayor dificultad. La mayor dificultad del proceso de traducción algebraico del problema ALCANZAR se debe, a que para este problema los estudiantes lograron en menor medida que en el problema RUBLOS concluir el proceso de traducción algebraico en formulación de una igualdad, como muestra la fig.4.21, lo que indica que en el problema RUBLOS a pesar de que el proceso de traducción tenga menor dificultad las igualdades serán erróneas en mayor porcentaje que en el problema ALCANZAR.

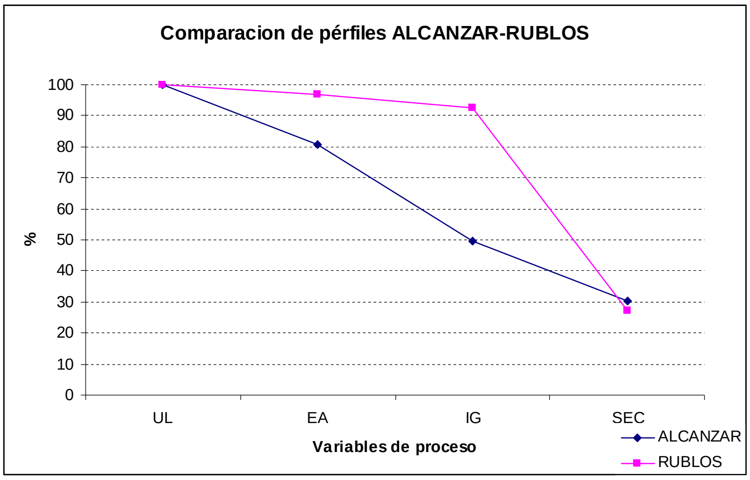


fig. 4.21.-Perfiles de los problemas equivalentes RUBLOS y ALCANZAR.

Por su lado los perfiles de los problemas MECANOGRAFA y DINERO como se muestra en la fig. 4.22 son prácticamente coincidentes.

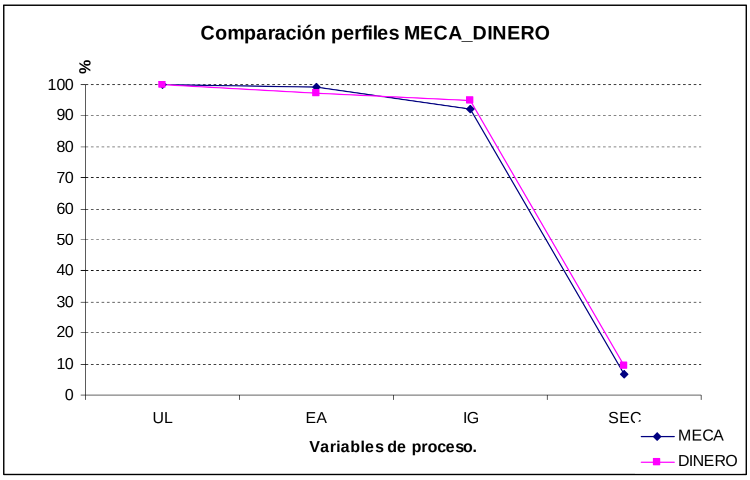


fig. 4.21.-Perfiles de los problemas equivalentes MECANOGRAFA y DINERO.

En resumen, las similitudes de los valores de dificultad señalados, pese a las discrepancias señaladas, indicarían que la hipótesis de dificultades muy semejantes para problemas equivalentes puede ser considerada plausible y objeto de investigación.

4.5.6.-Comentarios y discusión.

La afirmación de que la tarea de resolver problemas verbales algebraicos resulta difícil para los estudiantes es casi común en la introducción de cualquier reporte de investigación sobre problemas verbales algebraicos. Sin embargo, aunque se cite como argumento que justifica la necesidad de la investigación o las investigaciones al respecto, se tiene poca información del valor de una dificultad concreta de algunos problemas o del conjunto de los problemas para los estudiantes en general o para grupos de estudiantes. Así, la comparación de los resultados acerca del valor de las dificultades asociadas aquí a los problemas con las obtenidas por otros investigadores deviene casi en una tarea imposible.

No obstante, la poca información disponible, en nuestro país, disponemos de la tesis de Fernández (1997) que, aún teniendo otras pretensiones, contiene resultados acerca de los logros de los estudiantes en la resolución de problemas verbales de álgebra, resultados a los que recurriremos, con las precauciones debidas, para discutir los valores de dificultad obtenidos aquí. Aún así, las consideraciones que se hagan en este punto, en parte llamado discusión, no pueden sino apuntar fundamentalmente a justificaciones metodológicas o interpretaciones de lo encontrado.

Aquí hemos asociado a cada problema individual tres dificultades, dificultad apreciada, dificultad de la solución y dificultad del proceso de traducción algebraico. La dificultad apreciada del problema y de la solución se ha estimado a partir de la población de estudiantes a los que se ha administrado el instrumento y la dificultad del proceso de traducción algebraica de un problema a partir de la población de estudiantes que han considerado para el problema el uso del modo de resolver algebraico. La necesidad de distinguir entre dificultad de la solución y del proceso de traducción algebraico no se debe solamente a las intenciones del investigador que quería fundamentalmente indagar sobre las dificultades de este proceso, intención que se refleja en los problemas elegidos para componer el instrumento, problemas de lectura algebraica. La necesidad de tal distinción radica en el comportamiento de los estudiantes que, como indica Fernandez (1997) o como fue mostrado en el capitulo 3, pueden encontrar el resultado de estos problemas por el modo de resolver aritmético. Así la alternativa seguida aquí, a mi juicio razonable, ha consistido en asociar a cada problema una pertinencia de uso del modo de resolver algebraico y distinguir entre dificultad de la solución del problema y dificultad del proceso de traducción, obteniendo esta última en función de los estudiantes que han iniciado este proceso. La intención inicial del investigador de asociar dificultades a las distintas tareas del proceso de traducción de cada problema se ha mostrado a tenor de los datos o de la metodología empleada como una información menos valiosa, pero sobre este asunto se volverá después.

a) De las dificultades apreciada de la solución y su diferencia

De los problemas dejados en blanco, no se puede extraer ninguna información, en cuanto de la resolución se trata. Sin embargo, cuando se trata de extraer información sobre el problema, el hecho que, ante una colección de problemas, los estudiantes decidan abordar unos y no otros, puede tomarse como indicador de una preferencia de los estudiantes. En el contexto de un examen, esta preferencia la damos determinada por la finalidad de los estudiantes, aprobar el examen. Así, suelen preferir abordar aquellos problemas para los que juzgan más fácil encontrar una solución, bien porque les resulten más familiares o por cualquier otro motivo. En este estudio, se ha tomado esta preferencia de los estudiantes como un juicio de los mismos de la dificultad del problema y se la ha denominado dificultad apreciada del problema. Es cierto, el contexto en el que fue administrado el instrumento no era el de un examen, ni por las consecuencias que se derivaban de lo actuado por los estudiantes, ni por lo que se requería respecto de la resolución del problema, sustancialmente el planteamiento, ni por el número de problemas presentados para cada sesión. De lo anterior, se deduce, que los valores concretos encontrados para las dificultades deben tomarse con prevención, pues pensamos que el valor de ésta dificultad y los de otras dificultades pueden estar sobrevalorados, ya que en este test, pese al encarecimiento de los profesores colaboradores, como en otros test que se pasan con intención de indagar, los estudiantes no se suelen emplear a fondo. Además, en el caso de algunos problemas, estos valores pueden estar sesgados, o no corresponderse con lo que pretenden indicar, dado que los estudiantes, libres de la necesidad de obtener una calificación propia, pueden decidir prestar atención sólo a problemas familiares para ellos o a otros problemas que les resulten atractivos, extraños o novedosos.

La media de la dificultad apreciada de los problemas del instrumento utilizado aquí superó el 30%, dificultad que se movió para los problemas en un rango aproximado entre 4% y el 70%. Fernandez (1997, pág. 198) encontró para los problemas de su instrumento que el porcentaje de problemas abordados -para el que utiliza el término, tasa de respuestas- se movió en un rango entre el 100% y el 42,5%, lo que para nosotros indicaría dificultades apreciadas entre el 0% y el 57,5%. El instrumento de Fernandez constaba de 10 problemas, que administró en dos sesiones, y él explicó estas diferencias de porcentaje en el abordamiento de los problemas, en función de que los porcentajes se podían ordenar en dos series decrecientes de 5, donde cada serie se correspondía con los 5 problemas administrados en cada sesión y la posición en la serie se correspondía con la posición del problema en el test, así adujo que un problema se podía haber abordado en mayor porcentaje que otro debido al cansancio o la motivación de los estudiantes y a la voluntariedad de la tarea, no atribuyendo a este hecho dificultad alguna del problema. En nuestro caso, las dificultades apreciadas de los problemas no se pueden disponer en series que se atengan a los ocho problemas de cada parte del instrumento ni observarse una dificultad apreciada decreciente según la posición que ocupara el problema en cada parte del instrumento. Además, en el contrato con los estudiantes se estimulaba el planteamiento. De ahí que creamos que se puede interpretar el hecho de que un estudiante deje un problema en blanco como que el estudiante prefiere abordar otro problema de entre los que le han sido propuestos, y que con ese problema, ya veremos después, si tengo ganas y tiempo, interpretación que vendría avalada por la multitud de ocasiones en la que los estudiantes presentan los planteamientos en una secuencia que no se corresponde con la secuencia de enunciados o que después de un número para el problema y un espacio en blanco, se encuentra ese problema abordado posteriormente en la secuencia de las resoluciones. Es, en esta interpretación, con este contrato didáctico y con una tarea que propone un número de problemas en el limite de los que pueden ser abordados y planteados en el tiempo disponible, en la que decimos que el porcentaje de estudiantes que no abordan un problema indica una dificultad del problema que llamamos dificultad apreciada del problema y cuya medida vendrá dada en función de ese porcentaje.

El valor medio de la dificultad apreciada de los problemas del instrumento, fue como se ha dicho, superior al 30%, y en el rango entre el 4% y el 70%. La amplitud del rango indica que entre los problemas de la FPAA que la mera posibilidad de abordaje del problema es muy dependiente del problema concreto que se tiene delante, esto, como hecho observado, no tiene discusión. Sin embargo, al encontrar que la dificultad apreciada depende de las variables de la tarea y del sujeto podemos atribuir a esta dificultad un valor de uso. La distinción, según el grado de esta dificultad, de dos grupos de subfamilias, uno de ellos, compuesto por las subfamilias: ABACO, HERENCIAS, REPARTOS, EDADES, en el rango (16,2 , 23,9); el otro, por el resto de las subfamilias, cabría explicarlo: bien por un énfasis de la instrucción en los problemas de estas subfamilias, cuyos problemas suelen emplearse a veces en el inicio de la instrucción, bien por la ausencia en estos problemas de cantidades intensivas y por la expresión de las relaciones entre las cantidades en un lenguaje verbal que puede ser considerado por los estudiantes como relato de relaciones aritméticas que tienen que codificar algebraicamente. Por otro lado, la dificultad apreciada tiene una correlación significativa con la dificultad de la solución (coef.corre = 0,6) lo que indica que el porcentaje de no abordamiento de los problemas es un indicador de la dificultad de su solución, sin embargo, e indirectamente del modo de resolver utilizado para encontrarla, ya que la dificultad apreciada del problema está correlacionada negativamente con la pertinencia del proceso de traducción algebraico. Esta correlación negativa indica que a un menor valor de dificultad apreciada supone un mayor valor de pertinencia e interpretarse como que los estudiantes considerados abordan en mayor cuantía un problema, cuando tienen claro que van a usar el modo de resolver algebraico y en menor cuantía, cuando tanto el proceso de traducción algebraico o el modo de resolver aritmético pueden utilizarse para encontrar el resultado, aunque se halla obtenido posteriormente como resultado, que el modo de resolver algebraico sea el preferido (61,4% es el valor de pertinencia del proceso de traducción algebraico para los problemas en los que se usan los dos modos de resolver).

El valor medio de la dificultad de la solución para los problemas del instrumento de los cursos 1º, 2º y 3º fue, según el calificativo utilizado aquí, elevado o alto, poco superior al 80% en 1º y 2º y casi del 75% en el curso 3º. Estos datos con una diferencia de 5 puntos en porcentaje de estudiantes indican lo que parece normal, que más estudiantes del último curso encuentren solución para los problemas. Además, según los valores encontrados aquí se puede sostener con firmeza la opinión que la dificultad de la solución de los problemas es en general elevada y muy diversa. Así, el rango de la dificultad de la solución de mayor amplitud lo encontramos para la población del curso 3º, (18,7, 100 rango de un tamaño de 80, que se estrecha sucesivamente en 2º y en 1º pero a costa de la elevación de su cota inferior a 30,4, 47,3 respectivamente, casi manteniendo su cota superior, en 98,9; esto es, para una mayoría de los problemas del instrumento utilizado la dificultad de la solución supera fácil y ampliamente el 50%.

Estos resultados, en principio, contrastan de alguna manera con los obtenidos por Fernández (1997, pág.203) que para los 10 problemas de su instrumento encuentra un rango para el buen resultado entre (30,9 y 65,8), que traduciendo, sin más, a dificultad de la solución nos proporcionaría para esta el rango (34,2 y 69,1) estando para la mayoría de los problemas esta dificultad en torno al 50%. Esta discrepancia de los valores podría resolverse, obviando de momento los estudiantes, afirmando que los problemas del instrumento de Fernández son en su conjunto más "fáciles", por diferentes, que los usados aquí. Sin embargo, un análisis más de detalle llevaría a considerar: primero, que Fernández da por perdidos, a efectos de análisis estadístico, (op. cit., pág. 169), los datos en blanco, con lo cual midiendo como lo hemos hecho nosotros sobre los estudiantes a los que se ha administrado el problema las dificultades encontradas deben ser sensiblemente superiores, sencillamente porque en nuestro instrumento el valor de la dificultad apreciada es considerable para muchos problemas; segundo, que como se ha encontrado aquí la dificultad de la solución depende de las variables de la tarea y en concreto de la variable de la tarea subfamilia, así nosotros hemos encontrado para los problemas una dificultad de la solución menos homogénea y más alta al incluir problemas de la mayor parte de las subfamilias; tercero, el formato de presentación de los problemas, nosotros hemos presentado el enunciado de los problemas en formato exclusivamente verbal, mientras que Fernández acompaña el enunciado con dibujos y señala que entre los problemas que se obtienen mejores resultados están aquellos que incluyen un dibujo orientativo, lo que también podría ayudar a entender los mayores valores de dificultad de la solución encontrados por nosotros; y cuarto, los estudiantes a los que se les administró el instrumento, nosotros estudiantes de Bachillerato, Fernandez estudiantes de secundaria y estudiantes universitarios que hacia años que no recibían enseñanza de álgebra.

La diferencia de la dificultad apreciada y de la solución del problema indica el porcentaje de estudiantes que habiendo abordado el problema, e independientemente del modo de resolver utilizado, no logran alcanzar la solución. Esta medida puede obtenerse fácilmente a partir de las dos dificultades anteriores y podría tomarse como la "dificultad intrínseca del problema", en cuanto que señala para el problema la posibilidad de que para él se produzca una resolución que esté "inacabada" o que contenga errores. A esta dificultad se le ha llamado, aquí y a veces, inapropiadamente error y no debe tomarse por tal. No obstante, dado lo observado, en particular cuando se usa el modo de resolver algebraico como, en un alto porcentaje, los estudiantes, cuando abordan el problema, terminan escribiendo igualdades, esta diferencia de dificultades es una buena estimación del error. La media de la diferencia de dificultades en los distintos cursos estuvo entre el 40 y el 50% y se encontró, aunque resulte sorprendente, que el análisis de la varianza mostró que la variable del sujeto curso no tiene un efecto significativo sobre dicha diferencia de dificultades. Sin embargo, las variables de la tarea y su interacción, como cabía esperar, sí tienen un efecto significativo sobre dicha diferencia. Por otro lado, la correlación negativa entre la dificultad apreciada y esta diferencia de dificultades nos informa, que lo que parece natural ocurre, que cuando es escaso el número de estudiantes que deciden abordar un problema, menos posibilidad tenemos de encontrarnos resoluciones con errores o inacabadas.

b) Del uso del proceso de traducción algebraico y su dificultad.

En el trabajo presentado en este capítulo figura como capital el estudio de lo producido en el proceso de traducción algebraico. Así, lo que constituye el material se atiene a tal propósito: los problemas que componen el instrumento tiene todos ellos una lectura algebraica, pertenecen a subfamilias de la FPAA, en general habituales para los estudiantes. Los estudiantes a los que se les administra el instrumento son estudiantes de bachillerato, recién instruidos a poner problemas en ecuaciones o de los dos cursos siguientes donde se prosigue resolviendo problemas con el uso de tal procedimiento, y por último, el contrato con los estudiantes que incide en el logro del planteamiento del problema. En tales condiciones es de esperar que los estudiantes que aborden los problemas lo hagan, en una inmensa mayoría, usando el proceso de traducción algebraico y que en sus resoluciones se pueda examinar hasta qué punto las tareas subsidiarías de este proceso de traducción se han llevado a cabo. Sin embargo, a partir de lo que se ha considerado bajo observación y lo observado deben de hacerse algunas anotaciones que tienen que ver tanto con el uso de distintos modos de resolver como de la relevancia de determinar la dificultad de producir expresiones algebraicas o formular igualdades cuando se usa el Método Cartesiano.

En cuanto a los modos de resolver:

-primera, no se encontraron resoluciones que utilizaran el método de tanteo, lo que puede explicarse: bien porque los estudiantes descartasen su uso, bien porque no considerasen que el tanteo fuese un planteamiento del problema, bien porque su uso puede ser laborioso y requiere tomarse tiempo.

- segunda, descartados los problemas de las subfamilias ABACO, EDADES, y GEOMETRIA o los problemas MECA y DINERO que no poseen lecturas aritméticas algunos estudiantes usaron en las resoluciones del resto de problemas el modo de resolver aritmético. Lo que nos llevaría a decir, que para ese resto de problemas algunos estudiantes percibieron con más nitidez su lectura aritmética que su lectura algebraica y la usaron en su planteamiento, no obstante, la pertinencia del proceso de traducción algebraico encontrada fue el 61,4%, que sigue indicando la preeminencia en el conjunto de estudiantes de la percepción algebraica de los problemas.

- tercera, el valor de la pertinencia del proceso de traducción algebraico, 61,4%, encontrado para los problemas que poseen lecturas aritméticas es inferior al uso de los sistemas de representaciones que llevan el calificativo de simbólicos en los problemas del instrumento de Fernandez (1997), 73,21 %, pero vienen a confirmar la preeminencia en el uso del modo de resolver algebraico en los problemas que tienen ambos tipos de lectura: aritmética y algebraica.

- cuarta, nosotros encontramos aquí que la dificultad de la solución de los problemas susceptibles de lecturas aritméticas, sin el uso del proceso de traducción algebraico, fue 71,8 esto es, similar a la dificultad del proceso de traducción que estuvo en torno al 70%. Fernandez (1997), para los problemas de su instrumento, encontró porcentajes de buen resultado del orden del 60% en los sistemas de representación simbólicos, y del 30% o poco superiores en el resto, de donde tendríamos dificultades del orden del 40% y del 70%. Así las dificultades encontradas para los problemas de su instrumento cuando no se usan sistemas de representación simbólicos vendrían a ser de orden similar a las encontrada aquí para el conjunto de problemas de nuestro instrumento susceptibles de lecturas aritméticas cuando no se usa el proceso de traducción algebraico, esto es del orden del 70%; pero la dificultad media de los problemas de su instrumento, cuando se usan sistemas de representación simbólica, es inferior del orden de 30 puntos a la dificultad media del proceso de traducción de los problemas del instrumento utilizado aquí, lo que conduce a afirmar que la dificultad del proceso de traducción de los problemas del instrumento empleado aquí es mayor que la de los problemas utilizados por Fernández. En efecto, los problemas del instrumento tienen dificultades en el sistema de representación simbólico en el rango (29, 51,3), mientras que las dificultades del proceso de traducción de problemas de nuestro instrumento como: PEDRO y JUAN de la subfamilia EDADES, DESCOMPONER EN 4 PARTES problema indeterminado de la subfamila ABACO, o MECANOGRAFA y DINERO de la subfamilia OTROS superan el 80%, por no mencionar el problema LIEBRE y GALGO para el que se encontró una dificultad del 100%.

En cuanto a la dificultad de producir expresiones algebraicas o formular igualdades:

- el proceso de traducción algebraica requiere para su culminación de al menos tres tareas: elección de incógnitas, construcción de expresiones algebraicas, formulación de igualdades. Tareas que el resolutor debe llevar a cabo, independientemente de que las realice correcta o incorrectamente. Pues bien, era la intención de este trabajo determinar el valor de la dificultad de realizar cada una de estas tareas, corrección aparte..

-la observación de lo producido en el proceso de traducción se ha realizado mediante las variables UL-uso de letras, EA-expresiones algebraicas, IG-igualdades que indican la presencia de estos signos o segmentos de signos en la resolución, variables a las que se ha añadido la variable SEC que juzga si las igualdades producidas conducen al resultado del problema, esto es, juzga globalmente la corrección de lo producido. Consideradas las resoluciones escritas de un problema de una población de estudiantes se ha obtenido un perfil del proceso de traducción del problema. ¿Qué se ha observado? Pues, sencillamente, lo siguiente. Si tomamos para UL un valor de 100 (en cada problema este valor viene indicado como la pertinencia del proceso de traducción), y expresando los valores de las demás variables, con relación a UL, encontramos, para muchos de los problemas, un perfil similar al de la fig.P[48], que es el perfil medio de los problemas del instrumento.

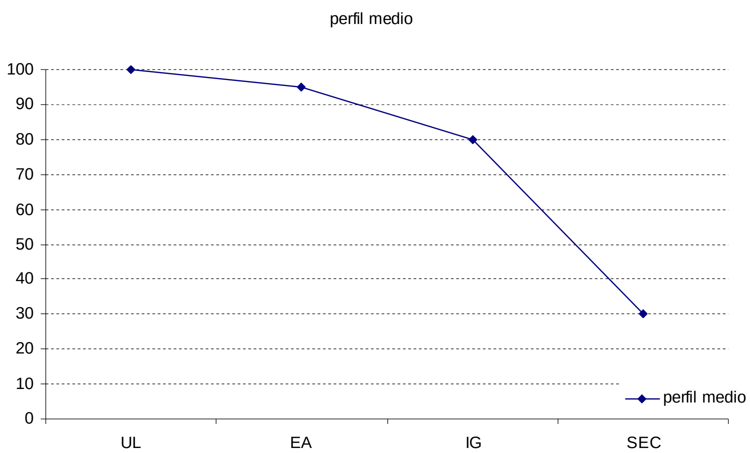


fig.P.- Perfil medio de los problemas del instrumento.

El perfil medio indica, claramente, que del 70% de la dificultad del proceso de traducción algebraico, el 20% se debe a la dificultad de producir lo necesario y el 50% a la dificultad de hacerlo con corrección. De ahí, que la información contenida en la dificultad del proceso sea sustancialmente relativa a la corrección con que el mismo se realiza. El alto porcentaje de estudiantes que producen igualdades podría interpretarse como que para la mayoría de ellos dotarse de letras para resolver un problema sólo tiene

[48] las desviaciones más acusadas de este perfil medio están en los problemas de las subfamilias MOVILES y TRABAJO. ver anexos **A4.7**.

sentido si escriben una ecuación, esto es, letras y ecuación es un binomio inextricablemente unido en una “resolución por ecuaciones. Otro asunto, digamos al margen, pero no carente de importancia, es que las ecuaciones deban de estar bien formuladas. Debe decirse, que el investigador tiene sus dudas, si este porcentaje de formulación de igualdades hubiese sido tan alto, si lo que se hubiesen observado, no fuesen resoluciones escritas sino actuaciones de estudiantes, donde como se muestra por ejemplo en el protocolo de A y J, **2.2.4**, la formulación de la igualdad tiene que vencer los obstáculos del análisis y lleva su tiempo.

Dicho lo anterior, que la dificultad del proceso de traducción algebraico de los distintos problemas mostrará ser muy diferente era de esperar. Lo que puede sorprender es lo elevado de su valor y el tamaño del rango. Pues sí, la dificultad media del proceso de traducción algebraico de los problemas de la FPAA fuese 73,2, 75,9 y 59,7 para los estudiantes de los cursos 1º,2º y 3º. y el rango entre 10 y 100 Esto está en desacuerdo con los resultados de Fernandez (1997) que encontró que, para casi todos los problemas de su instrumento de evaluación más de la mitad de los estudiantes obtenían un buen planteamiento, sobre todo cuando usaban el sistema de representación simbólico. Como es el caso que el estudio de Fernández ha sido replicado (Espinosa, 2004) y Espinosa encontró porcentajes de buen planteamiento todavía un poco más elevados, no cabe sino concluir, que para los problemas de nuestro instrumento a los estudiantes les resulta más dificultoso ponerlos en ecuaciones; descartada la idea fácil de que ello se debe a la muestra de estudiantes considerada, sobre todo por el tamaño de la diferencia de dificultad observada, no queda otro remedio que atribuir la dificultad a los problemas en si mismos. Así, como ninguna de las lecturas algebraicas de los problemas del instrumento de Fernandez, ver **3.6.6** y **A4.1**, coincide con las lecturas algebraicas de los problemas considerados aquí, en un instrumento no hay problemas que sean isomorfos o equivalentes con los del otro, y tendríamos con la consideración conjunta de ambos resultados una base más amplia de datos como ayuda para establecer una jerarquía de la dificultad de los problemas.

4.5.7.- Resumen de resultados.

Cuando se examinan la dificultad apreciada, de la solución, del proceso de traducción y el error encontrado en cada uno de los 24, 23, 21 problemas propuestos a cada uno de los curso 1º, 2º,3º, de los cuales 13 problemas son comunes a los tres cursos. Las dificultades y el error difieren para cada problema y cada curso. Las medias

	Curso 1º	Curso 2º	Curso 3º
Dificultad Apreciada	**36,7** 16,9 (6,6 , 69,2)	**38,2** 14,5 (3,3 , 75)	**32** 20,3 (4 ,72)
Dificultad de la Solución	**81,6** 15,0 (47,3 , 98,9)	**81,8** 23,5 (30,4, 98,9)	**74,8** 23,9 (18,7 ,100)
Dificultad del Proc. Traducción	**73,2** 21,7 (20 , 100)	**75,9** 24,20 (9,9 ,100)	**59,7** 25,0 (11,1 , 100)
Error	**48,9** 13,6 (13,2 , 76,9)	**43,6** 21,3 (7,6 , 81,5)	**42,4** 14,4 (14,7 , 72)

desviaciones y rango para cada una de ellas se muestran en la tabla superior

A.- De la influencia de variables de la tarea y el sujeto sobre el conjunto de dificultades.

A.1.-El efecto de las variables de la tarea, subfamilia, complejidad, sobre el conjunto de las dificultades apreciada, de la solución y del proceso de traducción es significativo, bien se juzgue su efecto por separado, subfamilia, complejidad o por la interacción complejidad*subfamilia.

A.2.-El efecto de las variable del sujeto curso sobre el conjunto de variables dificultades apreciada, de la solución y del proceso de traducción es significativo.

A.3.- El efecto de la interacción de variable de la tarea * variable del sujeto sobre el conjunto dificultades puede considerase significativo en el caso subfamilia*curso y no en el caso complejidad*curso.

A.4.-El efecto de la interacción de las variables del sujeto y la tarea (subfamilia *complejidad*curso) sobre el conjunto de dificultades apreciada, de la solución y del proceso de traducción es significativo.

B.- De las dificultades apreciada de la solución y del error.

B.1.-La dificultad apreciada del conjunto de los problemas tiene un valor en torno al 35%. La dificultad apreciada depende significativamente y por separado de las variables del sujeto y de la tarea: curso, subfamilia y complejidad. Siendo arriesgado afirmar que ésta depende de alguna interacción de las otras variables de la tarea y del sujeto que no sean subfamilia*curso.

B.2.-La dificultad de la solución del conjunto de problemas tiene un valor próximo al 80%. La dificultad de la solución depende significativamente por separado y de todas las interacciones de las variables de la tarea y del sujeto: subfamilia, complejidad y curso.

B.3.-El error encontrado en el conjunto de los problemas, medido por la diferencia entre la dificultad apreciada y de la solución, es superior al 40%. El error es significativamente dependiente de las variables de la tarea subfamilia y complejidad y de sus interacciones. Sin embargo, éste no muestra ninguna dependencia de la variable del sujeto curso.

B.4.-Existe una correlación significativa entre la dificultad apreciada y de la solución, siendo el coeficiente de correlación del orden de 0.6. El error está correlacionado significativamente con la dificultad apreciada y de la solución, siendo el coeficiente de correlación del orden de 0,4. Pero este coeficiente es negativo para la dificultad apreciada y error.

C.- Del proceso de traducción algebraico.

C.1.-En todas las resoluciones del conjunto de problemas no siempre se consideró pertinente el uso del proceso de traducción algebraico. La pertinencia del proceso de traducción algebraica tuvo un valor en torno al 85%.

C.2.-La pertinencia del proceso de traducción únicamente se mostró significativamente dependiente de la variable de la tarea subfamilia.

C.3.-De los problemas considerados en el instrumento únicamente mostraron un valor de pertinencia del proceso de traducción algebraico inferior al 95% aquellos problemas que conocíamos que eran susceptibles de lecturas aritméticas. En estos problemas, el valor de la pertinencia del proceso de traducción algebraico fue de 61,4 %, esto es, se siguió mostrando, en ellos, una preferencia por usar en su resolución el proceso de traducción algebraico.

C.4.-La dificultad del proceso de traducción algebraico del conjunto de los problemas tiene un valor en torno al 70%. La dificultad de la solución de los problemas sin el uso del proceso de traducción algebraico de los problemas susceptibles de lecturas aritméticas fue 71,8%, esto es un valor similar a la dificultad del proceso de traducción algebraico.

C.5.-La dificultad del proceso de traducción depende significativamente de cada una de las variables de la tarea y del sujeto: subfamilia complejidad y curso. Siendo arriesgado afirmar que esta depende de la interacción subfamilia *complejidad y no mostrando ninguna dependencia de la interacción variable de la tarea*variable del sujeto.

C.6.-Cuando se examina la marcha de la producción durante del proceso de traducción algebraico se encuentra que: para la mayoría de los problemas, con independencia del curso en el que el problema se proponga, una vez iniciado el proceso de traducción mediante el uso de letras, en más del 95% de los casos este prosigue con la construcción de expresiones algebraicas y en torno al 90% de los casos el proceso desemboca en la producción de igualdades. No obstante esta abundancia de igualdades, dichas igualdades no conducen al resultado del problema, sino que lo hacen en un tanto por ciento de los casos según la dificultad del proceso de traducción de dicho problema en cada curso

D.- De las subfamilias estudiadas.

D.1.- La dificultad apreciada permite distinguir dos grupos de subfamilias: uno formado por las subfamilias: ABACO, HERENCIAS-REPARTOS, EDADES con dificultad apreciada en el rango (16,2 , 23,9) y otro formado por el resto de las subfamilias con dificultad apreciada en el rango (40,1 , 55,3)

D.2.- La dificultad de la solución de las subfamilia HERENCIAS-REPARTOS, en torno al 40%, es significativamente menor que la del resto de las subfamilias estudiadas: ABACO, EDADES, TRABAJO, MOVILES, GEOMETRIA, OTROS. Asumiendo un cierto riesgo, s=0,11, también se podría decir que esta dificultad también es significativamente menor en la subfamilia ABACO, en torno al 70%, que en el resto de las subfamilias que tienen una dificultad superior al 80%.

D.3.- El error, medido por la diferencia entre la dificultad apreciada y de la solución, es significativamente más bajo en la subfamilia HERENCIAS-REPARTOS, en torno al 20%, ascendiendo en tamaño en las subfamilias, TRABAJO, MOVILES, en torno al 33%, ABACO y OTROS, en torno al 50%, siendo el error más alto el la subfamilia EDADES, el 57%.

D.4.-Cuando se compara la dificultad de la solución y el error de las subfamilias en los distintos cursos, la dificultad de la solución es menor en el curso 3º para todas las subfamilias estudiadas con la excepción de la subfamilia EDADES; por su parte, en el error en el curso 3º es similar o superior al de los otros cursos para todas las subfamilias con la excepción de ABACO y EDADES donde es inferior.

E.- De la complejidad.

E.-1.- Definida la complejidad por el orden del grafo de una lectura algebraica del problema, la dificultad apreciada, de la solución y el error complejidad crecen en tamaño con el orden de complejidad.

F.- De los estudiantes.

F.1.- Cuando se comparan las dificultades y el error de los estudiantes de los tres cursos mediante una colección de 13 problemas, de todas las subfamilias excepto HERENCIAS-REPARTOS, no se encuentran entre cursos diferencias significativas en la dificultad apreciada y el error, mientras que sí se encuentran en la dificultad de la solución y del proceso de traducción, en particular la dificultad del proceso de traducción es significativamente menor en el curso 3º, en torno al 55%, que en 2º y 1º , en torno al 80%.

Capitulo 5

PLA. Resoluciones en el SMS del Álgebra. Estudio de las igualdades encontradas en las resoluciones.

5.0.- Introducción.

Cuando se utiliza el MC para resolver un problema de la FPAA, el proceso de traducción tiene la finalidad de producir una ecuación o sistema de ecuaciones que conduzcan al resultado del problema.

En esta tesis, un problema se concibe como la formulación de una pregunta sobre el valor de una cantidad, a partir de la descripción de una situación o fenómeno en un mundo posible, descripción que se realiza en términos de cantidades conocidas, desconocidas y relaciones entre ellas, expresándose la descripción en lenguaje natural. El proceso de traducción algebraico, que requiere el MC, no consiste en la mera expresión en lenguaje algebraico de las relaciones entre cantidades expresadas en lenguaje natural, sino en la formulación última de dichas relaciones única y exclusivamente en términos de relaciones de igualdad entre expresiones algebraicas que refieren cantidades. Por ello, el titulo del capitulo reza: “igualdades”, en lugar de “ecuaciones”, para enfatizar dónde y cómo debe interpretarse el contenido de la expresión, que llamaríamos ecuación, en el SMS del algebra.

El MC y las consideraciones sobre el mismo que consideramos convenientes para su uso competente, en lo que concierne a la elección de incógnitas, construcción de expresiones algebraicas y formulación de igualdades ha sido tratado en **1.4.3**, **1.9** y **1.12**. El detalle de las tareas, que el proceso de traducción algebraico requiere del resolutor, consta en **3.3.2**.

Dado un problema, el proceso de traducción algebraico no tiene porqué reducir el problema a una ecuación o sistema de ecuaciones unívocamente determinado. Ello, porque el MC permite elegir de entre las cantidades desconocidas, qué cantidades designar por medio de literales, y de entre las cantidades, qué cantidad usar en la formulación de cada una de las igualdades. Así, en **1.10,** puede verse, que el conjunto de ecuaciones que conducen al resultado de un problema, suele contener un número relativamente elevado de ecuaciones, no todas ellas equivalentes, y todo ello, sólo para una determinada lectura algebraica del problema.

En la práctica escolar, cuando para la resolución de un problema se usa el MC, las ecuaciones resultantes del proceso de traducción se resuelven hasta obtener el resultado del problema. Ello permite a los estudiantes juzgar en última instancia sobre la corrección de las ecuaciones, o en sus propios términos, sentenciar que el problema está bien o mal planteado. Un mal planteamiento suele suponer la vuelta al enunciado del problema, y el reinicio del proceso de traducción para la restauración de los posibles errores.

Cuando un profesor o un investigador tienen que juzgar si las ecuaciones producidas en el proceso de traducción son correctas, lo habitual es que procedan a realizar la traducción inversa, interpretando el contenido de las expresiones algebraicas e igualdades entre ellas, en términos del mundo posible de cantidades y relaciones que se contempla en el enunciado del problema. En dicho proceso de traducción inversa se puede apreciar, tanto la alternativa elegida allí donde el MC lo permitía, como detectar la presencia de errores.

Los estudios sobre el proceso de traducción, en lo que alcanza mi información, por un lado, han prestado poca o casi nula atención a las cantidades que los estudiantes tienden a designar con letras, eligen como incógnitas, al número de incógnitas que prefieren utilizar o a qué cantidades prestan atención para construir igualdades. Por otro lado, ciertamente se han señalado algunos errores que aparecen en el proceso de traducción, ver **2.4**, pero no se dispone de un catalogo de errores, comparable al elaborado por Matz (1980), relativo al cálculo y transformación de expresiones algebraicas, ni tampoco de información suficiente sobre las fuentes de dichos errores.

Así, este capitulo tiene la intención de utilizar las igualdades producidas en la resolución de los problemas, de la población problemas comunes presentada en el capítulo **4**, y por los estudiantes allí considerados, para aportar información sobre los aspectos señalados en el párrafo anterior.

5.1.- Propósito.

El presente estudio de las igualdades entre expresiones algebraicas[49] producidas en el proceso de traducción algebraica de un problema contempla:

-problemas de subfamilias y complejidad diferente.
-igualdades producidas por estudiantes de distintos cursos.
-igualdades que conducen al resultado del problema e igualdades que no. Esto es, igualdades correctas e igualdades incorrectas.

El estudio tiene dos partes que podemos considerar como un análisis cuantitativo y un análisis clínico de las igualdades producidas.

Es propósito del análisis cuantitativo describir cuantitativamente el conjunto de las igualdades producidas para cada problema, distinguiendo las igualdades correctas de las incorrectas y dentro de cada una de estos grupos las igualdades que son diferentes y el número de letras utilizado. Además, como los problemas se han propuesto a varios cursos, pretende utilizar la información obtenida para juzgar sobre la tendencia a usar más o menos incógnitas o sobre la persistencia de la incorrección, con el avance de los estudiantes por el currículo.

Es propósito del análisis clínico, con el apoyo del análisis cuantitativo, esbozar respuestas para preguntas como las siguientes:

---

[49] Donde debe sobrentenderse que al menos uno de los miembros de la igualdad es una expresión algebraica.

1.-En cuanto a las Igualdades Correctas:

a) Respecto de las cantidades.

¿Qué cantidades se eligen como incógnita?
¿Qué cantidades se refieren mediante expresiones algebraicas?
¿Qué cantidad se utiliza en la construcción de la igualdad?

b) Respecto de las relaciones.

¿Qué relaciones se utilizan en la construcción de las expresiones algebraicas? ¿Las relaciones que contiene la lectura algebraica?
¿Qué relaciones se utilizan en la construcción de la igualdad?

2,-En cuanto a las Igualdades Incorrectas:

¿Puede considerarse el catálogo de trabajo para la tipificación de errores, elaborado en el capítulo **2**, suficiente para describir los errores encontrados, en la totalidad de las igualdades incorrectas estudiadas?
¿Precisa dicho catalogo de rectificaciones o modificaciones?
¿De la inclusión de otros errores?

¿Cuáles son los errores que se encuentran en las igualdades incorrectas de un problema? ¿Cuáles son más frecuentes?

¿A qué puede apuntarse como posible fuente del error? ¿Al problema en función de alguna de sus estructuras? ¿Al uso inadecuado del SMS del álgebra? ¿A la concepción del proceso de traducción?

3.-En cuanto a los problemas:

¿Cuál es el número de incógnitas utilizado en el proceso de traducción. ¿El mínimo necesario para resolver el problema?

¿Cuáles son los problemas para los que se produce mayor diversidad de igualdades correctas? ¿Cuáles son las igualdades correctas de las producidas que predominan en frecuencia?

¿Existen tipos de errores que puedan ser asociados a problemas o clases de problemas?

4.-En cuanto a los estudiantes, y según el curso al que pertenecen los estudiantes:

¿Hay alguna tendencia a usar más o menos incógnitas?

¿Se producen más o menos igualdades diferentes como solución de un problema?

¿Existen errores persistentes? ¿Cuáles?

5.2.- Material y métodos.

5.2.1.- Material.

El material del estudio lo constituyen las igualdades entre expresiones algebraicas, que contienen las resoluciones de la población problemas comunes del instrumento considerado en el capítulo **4**. Las igualdades fueron producidas por los estudiantes de los cursos 1º, 2º y 3º, a los cuales se les administró dicho instrumento.

Con más precisión, las igualdades que se consideran para su estudio son aquéllas que suponemos que los estudiantes dieron como planteamiento de los problemas, planteamiento que se cita en las instrucciones escritas que se proporcionaron a los estudiantes, conjuntamente con los enunciados de los problemas. Tal suposición, se basa en que las igualdades consideradas son aquéllas encontradas en las resoluciones que:

-podían considerarse como final de la resolución, cuando el estudiante había decidido limitarse al planteamiento del problema.

-eran el punto de arranque para la resolución de las ecuaciones, cuando el estudiante había decidido continuar para encontrar el resultado del problema.

-eran igualdades de las que suponemos que el estudiante había dado por buenas, al no estar tachadas en la resolución, cuando el estudiante no continuaba con la resolución de las ecuaciones.

5.2.1.1.- La obtención del listado de producciones de un problema.

Para cada problema y cada una de sus resoluciones se entresacó de ellas, la igualdad o igualdades que se consideraron el planteamiento, junto con la indicación de lo que significaban las letras utilizadas, caso de que esto último constase en la resolución. En dicho vaciado de las resoluciones, se fue estrictamente escrupuloso, transcribiendo fielmente lo que constaba en el escrito de los estudiantes.

Para las resoluciones de un mismo problema, ocurrió que muchas veces la(s) igualdad(es) entresacadas eran idénticas. Por ello, se acordó en llamar producción a este conjunto de igualdades idénticas, y se anotó el número de estas igualdades idénticas, esto es, la frecuencia con que apareció en el conjunto de las resoluciones de un problema una misma igualdad. Así, el conjunto de igualdades producidas en las resoluciones de un problema quedó reducido a un listado de producciones diferentes, cada una con su frecuencia. Dado que los problemas habían sido propuestos a más de un curso, se tomó nota del curso en que las producciones se habían encontrado y su frecuencia.

5.2.1.2.- La organización del listado de producciones de un problema.

Para el análisis de las producciones de un problema, acorde a los propósitos del estudio, se consideró conveniente organizar el listado de producciones.

En primer lugar, se dividió dicho listado en dos grupos, separando las producciones correctas de las incorrectas. Esto es, las producciones cuya igualdad(es) conducían al resultado del problema de las que no[50]. Así, para cada problema, el número de producciones correctas nos proporciona el número de igualdades diferentes encontradas como resultado del proceso de traducción. Por su lado, el número de producciones incorrectas no nos proporciona el número de errores distintos producidos durante dicho proceso, ya que una producción incorrecta puede contener varios errores o distintas producciones el mismo error; esto, cuando optamos por recurrir al catálogo de errores para decidir cuando un error es distinto de otro (ver más consideraciones al respecto en **5.3.4.1**).

En segundo lugar, se procedió a organizar las producciones de cada uno de los grupos. Para ello, se determinaron subgrupos de producciones, en función de que la producción considerada se hubiese encontrado en tres, dos o uno de los cursos. Posteriormente, en cada uno de los subgrupos las producciones se ordenaron atendiendo a su frecuencia[51].

Dicha organización se transcribió para cada problema en dos listados secuenciales de producciones: producciones correctas y producciones incorrectas. En la secuencia, los subgrupos de producciones se ordenaron: subgrupo de producciones presentes en tres cursos, en dos cursos, en un curso, y en éste último caso producciones presentes en el curso 1º, 2º, 3º. A las producciones presentes en los tres cursos, se les dirá persistentes, a las encontradas en dos cursos, compartidas y a las encontradas en un sólo curso, propias de ese curso.

El listado de producciones para cada problema, junto a su frecuencia para cada curso, se encuentra en el anexo **A5.1**.

5.2.2.- Método

5.2.2.1.- El análisis cuantitativo de las igualdades.

Para el estudio cuantitativo de las igualdades producidas en el proceso de traducción algebraico se consideraron para cada problema las siguientes variables dependientes: PIG, PC, PrC, PrI

-PIG= (IG/n)*100 porcentaje de igualdades,

donde n=nº de estudiantes a los que se les propuso el problema e IG = nº de resoluciones que contenían alguna igualdad.

-PC , porcentaje del nº total de igualdades que son correctas,

---

[50] Este modo de dividir las producciones conlleva que entre las producciones incorrectas se encuentren producciones inacabadas que no contienen ningún error.

[51] Esta es la organización definitiva, que aquí presentamos. No obstante, en el estudio de las producciones se manejaron otras organizaciones en grupos y secuencial, tales como: el número de letras empleado, la semejanza de las expresiones algebraicas que contenían las ecuaciones, etc.

donde PC = (SEC/IG)*100, siendo SEC = nº de igualdades que conducen al resultado e IG =nº de igualdades, variables de proceso, cuyo valor fue determinado en el capitulo **4**.

-PrC, nº de producciones correctas.

-PrI, nº de producciones incorrectas.

Los valores de las variables dependientes PIG, PC, PrC, PrI para los problemas de cada uno de los cursos constan en el anexo **A5.2**, Tablas A5.2.1, A5.2.2 y A5.2.3.

5.2.2.2.- El informe de las producciones de un problema.

Para indagar sobre las preguntas formuladas en **5.1** se elaboró un informe de las producciones de cada problema. Dicho informe se elaboró siguiendo un protocolo, el protocolo consta en el punto siguiente, **5.2.2.2.1**.

La mayoría de los apartados del protocolo podían cumplimentarse a partir de las tablas de frecuencias de las producciones. Sin embargo, el detalle de lo realizado en cada producción y el diagnóstico de los errores requirieron de un análisis clínico de la producción. El método para el análisis clínico consta en **5.2.2.2.2**.

El protocolo cumplimentado para cada problema consta en el anexo **A5.3**.

5.2.2.2.1.- El protocolo para el informe de las producciones de un problema.

El protocolo contiene la siguiente secuencia de apartados que deben cumplimentarse para las producciones correctas e incorrectas de cada problema:

1.-Producciones Correctas.

a) Número de producciones correctas.

b) Distribución porcentual de las producciones correctas:

   El porcentaje del total de igualdades correctas que supone cada una de las producciones.

c) Número de producciones encontradas en cada curso.

d) Distribución de la corrección en cursos:

   El porcentaje de igualdades correctas que corresponde a cada uno de los cursos, toda vez que se ha corregido el desigual número de estudiantes de cada curso de los que proceden las producciones, 92, 91, 75.

e) Grafo de la resolución de cada producción.

   Construido como se indica en **5.2.2.2.2**, el punto siguiente, y que permite determinar: las cantidades que se han elegido cómo incógnitas, las expresiones algebraicas atribuidas a cada cantidad, su modo de construcción, la cantidad (es) que se igualan.

f) Comentarios:

Donde se mencione lo que se juzgue conveniente a partir de lo observado en los apartados a) a e) respecto de la lista de preguntas formuladas en **5.1**.

2.-Producciones Incorrectas.

A) Número de producciones incorrectas.

B) Distribución porcentual de las producciones incorrectas.

C) Número de producciones incorrectas encontradas en cada curso.

D) Distribución del error en cursos.

E) Producciones encontradas en tres, dos o un curso: Número de producciones y porcentaje del error que suponen esas producciones.

Donde se trata de señalar las producciones incorrectas que se encuentran independientemente del curso al que pertenezca el estudiante. Esto es, las producciones que persisten aunque el estudiante avance en el curriculo. El porcentaje del error trata de dar cuenta de su importancia.

F) Distribución del error en cada uno de los cursos de las producciones encontradas en tres cursos.

Donde se trata de dar cuenta del grado de persistencia del error.

G) Diagnóstico y comentarios de los errores.

5.2.2.2.2- El método para el análisis clínico

1.-Producciones correctas:

Para el análisis clínico de las producciones correctas, se procedió para cada una de ellas a elaborar el grafo de la resolución, de forma análoga a la descrita en **3.6.3.2.2**. El procedimiento de elaboración discurre así:

1) Se considera el grafo de la lectura algebraica del problema, que consta en el anexo **A4.1**, incorporando a éste la componente **n** del diccionario de cantidades.

2) Si en la producción hay una mención explicita de la cantidad o cantidades a las que se han asignado letras:

   a) se sitúa la literal en el vértice del grafo que representa a tal cantidad.

b) se procede seguidamente a verificar, si las expresiones algebraicas contenidas en la producción se pueden obtener oscureciendo el grafo, reconstruyendo dichas expresiones.
c) en caso de que alguna de las expresiones algebraicas contenidas en la producción no se pudiese obtener mediante oscurecimiento, se incorporan al grafo la arista necesaria para obtenerla y un vértice para representarla. Se constata, que tal arista y vértice están contenidos en el grafo teórico del problema.
d) Se toma nota del vértice claro del grafo, al que se le han asignado las dos expresiones algebraicas que constan en el lado izquierdo y derecho de la igualdad; o del vértice oscuro, al que se le ha asignado una expresión algebraica.
e) Se toma nota de las cantidades referidas mediante expresiones algebraicas, y de la cantidad utilizada en la formulación de la igualdad.

3) Si en la producción no hay mención explicita de la cantidad o cantidades a las que se han asignado letras. Se examina globalmente la producción y las expresiones algebraicas que contiene. Se procede a situar las literales en vértices claros, de modo que oscureciendo el grafo, sea posible construir las expresiones algebraicas que contiene la producción. Procediendo a continuación como en 2).

Así, considérese por ejemplo el problema MITAD Y TERCERA PARTE y las tres producciones correctas para él encontradas que se muestran en la primera columna de la tabla 5.1, las columnas segunda, tercera y cuarta muestran la frecuencia por curso.

Estoy pensando en un número tal que la suma de su mitad y su tercera parte es 7 unidades mayor que su cuarta parte. ¿Cuál es dicho número?			
Producciones correctas	**1º**	**2º**	**3º**
P-1 $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=\frac{x}{4}+7$	29	59	54
P-2 $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}-7=\frac{x}{4}$		3	1
P-3 $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}-\frac{x}{4}=7$			1

Tabla 5.1.- Producciones correctas y su frecuencia del problema MITAD Y TERCERA PARTE.

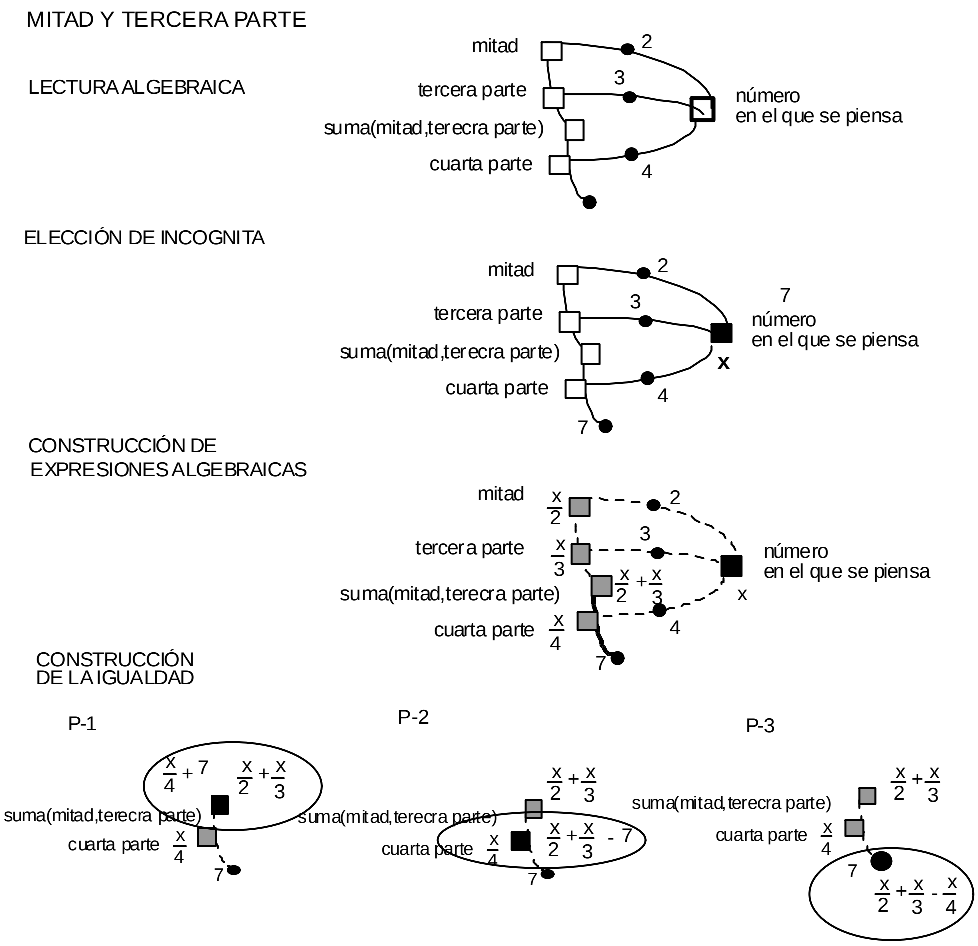
La construcción del grafo de la resolución de estas producciones, Cuadro 5.1, procede así:

Estando en el caso en que no se ha indicado qué significa la letra x utilizada en las producciones, el examen de las expresiones algebraicas que contiene la producción nº 1, o las producciones nº 2 y 3, lleva a suponer que la letra x se ha atribuido al número en que se está pensando. A continuación, procedemos como se muestra en las sucesivas líneas del cuadro 5.1.

Partimos de la primera línea del cuadro 5.1, que contiene la lectura analítica del problema.

En la segunda línea, se muestra en el grafo la elección de incógnita efectuada, señalando en negro el vértice correspondiente al "número en el que se piensa".

En la tercera línea, se da cuenta de las expresiones algebraicas producidas, mostrando los vértices a qué corresponden señalados en gris y con las aristas utilizadas para la construcción de dichas expresiones algebraicas a trazos. Se ha remarcado en trazo grueso la arista no utilizada, y que será utilizada como se muestra en la línea 4, en la construcción de expresiones algebraicas que se igualan a otra de dicha asista.



Cuadro 5.1.- Pasos en la construcción del grafo de las resoluciones de las producciones del problema MITAD Y TERCERA PARTE.

En la línea 4, se señala mediante una elipse el vértice que representa el número que se ha igualado y las dos expresiones algebraicas que refieren dicho número. El vértice se señala en negro, la arista a trazos dado que ha sido utilizada para construir una de las expresiones algebraicas que se igualan.

En los grafos de las resoluciones, correspondientes a las producciones de cada problema, que constan en el anexo **A5.3**, no se muestran los pasos seguidos en la construcción de los mismos, sino el grafo final de la resolución, en el que se han seguido los convenios indicados arriba, tanto de coloreado de vértices, trazo de las aristas como de señalamiento de la cantidad que se ha igualado.

No obstante, con la finalidad de remarcar los convenios usados en los grafos de las resoluciones que constan en el Anexo **A5.3**, consideremos, por ejemplo, 5 de las producciones correctas del problema HENO y los grafos de resolución que constan en el anexo **A5.3**, ver tabla 5.2 bajo.

El coloreado en negro de los vértices a los que se han asignado letras y el remarcado de las letras en negrita permite, por mera observación, señalar cuántas y cuáles han sido las cantidades elegidas como incógnitas. El coloreado en gris de un vértice indica que la cantidad por él representada ha sido referida mediante una expresión algebraica, precisamente la que acompaña a dicho vértice. Un vértice en blanco indica que la cantidad que representa no ha sido referida por una expresión algebraica.

El trazado a trazos de una arista indica que esa arista ha sido utilizada en la construcción de alguna expresión algebraica. Si dicha arista no es una arista del grafo de la lectura algebraica, estamos ante una resolución que esta haciendo uso de otra lectura analítica que la supuesta. El coloreado en gris de una arista indica, que la relación entre cantidades que representa no ha sido usada en la construcción de expresiones algebraicas.

Las elipses señalan la cantidad usada en la construcción de la igualdad, englobando en su interior las expresiones algebraicas utilizadas para referirla, el número de elipses debe de ser igual al de letras utilizadas, un número menor indica más de una doble referencia de una cantidad mediante expresiones algebraicas, lo que permite construir más de una igualdad en ese vértice.

Así, la mera observación conjunta de los grafos que constan en la Tabla 5.2 nos permite obtener conclusiones respecto las resoluciones del problema HENO como las siguientes:

-se ha usado una letra en las producciones nº 1, 2 y 4, pero mientras en las producciones nº 1 y 4 ésta indica la cantidad de heno consumido diario en la producción nº 2 esta indica la cantidad de heno almacenado, la incógnita del problema.

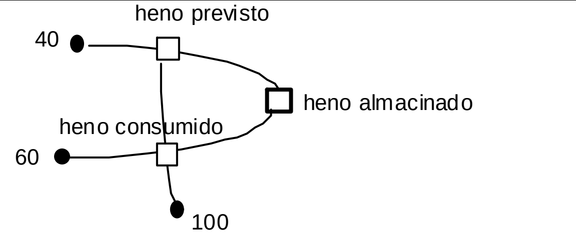
-se han usado dos letras en las producciones nº 3 y 5, en ambas indicando la cantidad de heno almacenado y la cantidad de heno diario previsto.

-que para la construcción de una igualdad, la cantidad de heno almacenado –la incógnita del problema- se utiliza en 4 de las cinco producciones.

-que las 5 producciones muestran 3 lecturas analíticas diferentes, ver grafos conformados por las aristas a trazos.

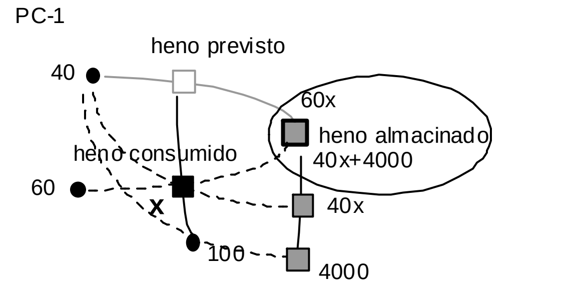
-que en las producciones nº 1 y 4, las lecturas analíticas utilizadas del problema son diferentes, a pesar de que en ellas: se ha utilizado la misma cantidad cómo incógnita, la cantidad de heno consumido diariamente, y se ha igualado la misma cantidad, la cantidad de heno almacenado.

<table>
<tr><td>HENO.-Unos granjeros almacenaron heno para 40 días. Sin embargo el heno era de mejor calidad de la que pensaban y ahorraron 100 kg por día. Así tuvieron heno para 60 días. ¿Cuánto heno almacenaron?</td><td>



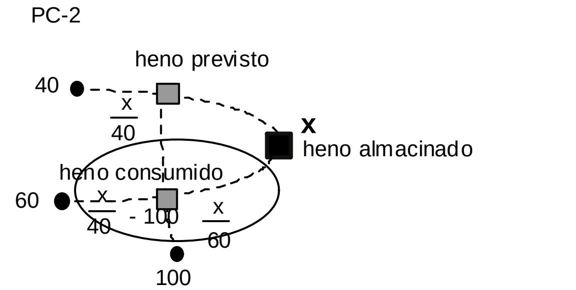
</td></tr>
<tr><td>1

$40x + 4000 = 60x$</td><td>



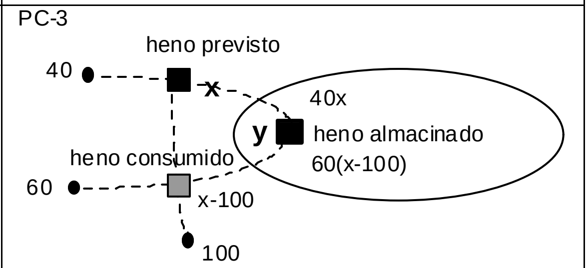
</td></tr>
<tr><td>2

$\frac{x}{40} - 100 = \frac{x}{60}$</td><td>



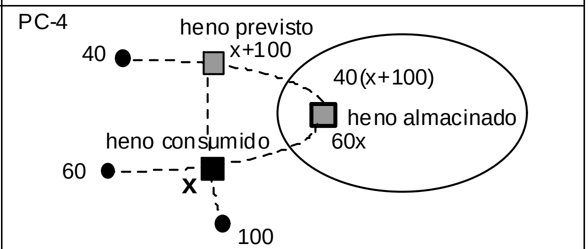
</td></tr>
<tr><td>3

$y=40x$ $y=60(x-100)$</td><td>



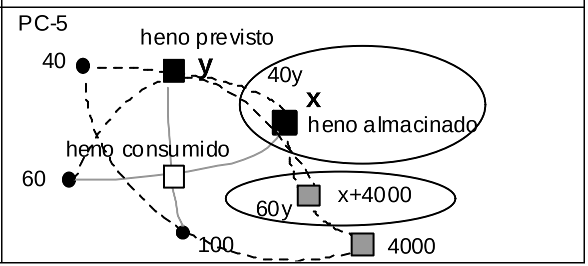
</td></tr>
<tr><td>4

$60x = 40(x+100)$</td><td>



</td></tr>
<tr><td>5

$x=40y$ $x+4000 = 60y$</td><td>



</td></tr>
</table>

Tabla 5.2.- Grafos de la resolución de algunas producciones correctas del problema HENO.

-que la producción nº 5, se iguala una cantidad singular, de las que llamamos con sentido pero sin referencia, “la cantidad de heno previsto para los días reales”.

2.-Producciones incorrectas:

Para el análisis clínico de las producciones incorrectas, se procedió a elaborar el grafo de la resolución de la producción, con toda la analogía posible al modo descrito para las producciones correctas, con la finalidad de señalar los operadores del espacio del problema que se usaron inadecuadamente y proceder al diagnóstico del error o los errores que presenta la producción. La calificación del error se hace en concordancia con el catálogo de errores que consta en **2.4.3**.

Lo que sigue es una muestra de ejemplos, de la construcción de los grafos de la resolución de algunas producciones incorrectas y el diagnóstico del error:

Ejemplo 1: problema MITAD Y TERCERA PARTE

Estoy pensando en un número tal que la suma de su mitad y su tercera parte es 7 unidades mayor que su cuarta parte. ¿Cuál es dicho número?

En el problema MITAD Y TERCERA PARTE, en el cuadro 5.1, se muestra la construcción de los grafos de la resolución de las producciones correctas. Detengámonos en el paso construcción de las expresiones algebraica, fig. 5.1, donde todavía no se ha usado la arista señalada en trazo grueso.

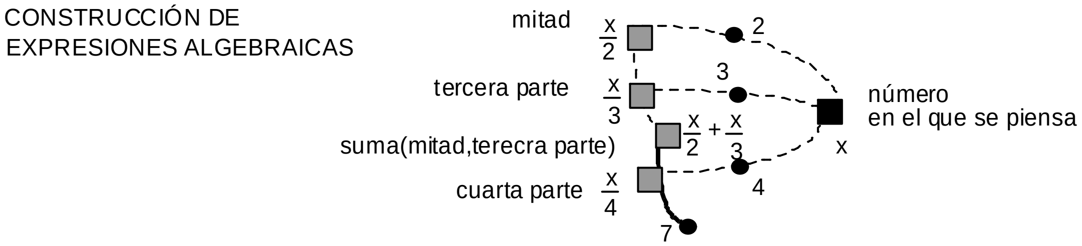


Fig. 5.1.-Construcción de expresiones algebraicas. Problema MITAD Y TERCERA PARTE

Consideremos ahora tres de las producciones incorrectas de éste problema, las que figuran en la Tabla 5.3. Podemos observar que las tres producciones contienen las expresiones algebraicas señaladas en el grafo de la fig.5.1.

Ahora bien, la producción nº 1 contiene en su segundo miembro la expresión algebraica $7\frac{x}{4}$ que se produce utilizando la arista en trazo grueso mencionada, utilizándola, como si esta arista representase una relación multiplicativa, entre los tres números que en ella figuran, en lugar de una relación aditiva. En el grafo de la resolución, la arista se señala en rojo y también la expresión algebraica $7\frac{x}{4}$ que ha producido el uso inadecuado de dicha arista. El error se califica de error de operación. Análogamente, las producciones nº 4 y nº 6 de la Tabla 5.3 contienen las expresiones algebraicas $\frac{x}{4}-7$ y $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+7$ que sólo pueden producirse mediante el uso de una relación aditiva de los tres números involucrados en ésta arista., lo que ahora ocurre es que la relación aditiva se expresa erróneamente. El error se califica de inversión. En los grafos correspondientes, las aristas y las expresiones algebraicas figuran coloreadas en rojo.

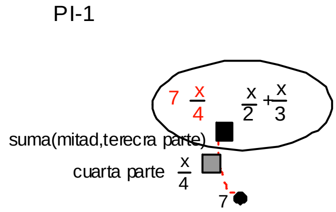
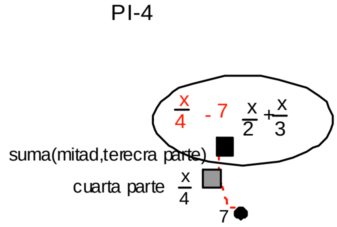
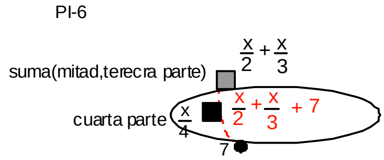
1 $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=7\frac{x}{4}$		Error de operación
4 $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=\frac{x}{4}-7$		Error de inversión
6 $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+7=\frac{x}{4}$		Error de inversión

Tabla 5.3 .- Tres producciones incorrectas del Problema MITAD Y TERCERA PARTE . Grafo de la resolución y diagnóstico del error.

Ejemplo 2: problema MECANOGRAFA

Una mecanógrafa piensa que si escribe al día 2 páginas más de lo establecido normalmente, acabará el trabajo 3 días antes de lo previsto, mientras que si escribe 4 páginas más al día, acabará 5 días antes de lo previsto. ¿Cuántas páginas tiene que escribir y en cuánto tiempo?

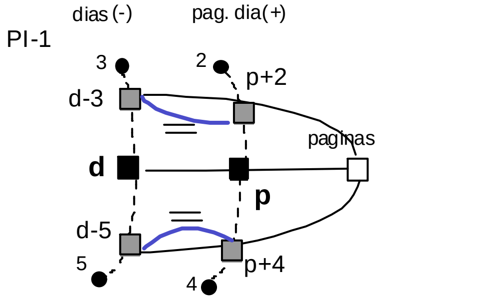
La tabla 5.4 contiene tres producciones incorrectas del problema MECANOGRAFA.

En la producción nº 1, las expresiones algebraicas son correctas, como se muestra en el grafo, donde se señalan: las incógnitas elegidas, las aristas usadas para producirlas y los vértices a que corresponden dichas expresiones algebraicas. Ahora bien, como no es el caso que las expresiones algebraicas correspondan al mismo vértice, no se puede escribir ninguna relación de igualdad entre ellas. Las igualdades entre las expresiones algebraicas, que se dan en la producción, se muestran en el grafo, mediante un trazo azul entre dichas expresiones, al que se sobrepone el signo igual. El error se dice error de igualdad.

En la producción nº 5 figuran las expresiones algebraicas (x+2)(x+4) y (y–3)(y–5). Ambas expresiones se obtienen a partir de las expresiones x+2, x+4, y-3 e y-5, usando las aristas coloreadas en rojo en el grafo. Ni las cantidades que refieren ambas expresiones, ni la arista usada para su construcción están contenidas en el grafo o diccionario teórico de cantidades del problema. Por lo cual, el error en la producción de éstas expresiones algebraicas se califica de arbitrariedad. Además, como se escribe un signo igual entre ellas, siendo las dimensiones de éstas cantidades “días x días” y “pag. diarias x pag. diarias”, se dice, que esta producción contiene también un error de igualdad.

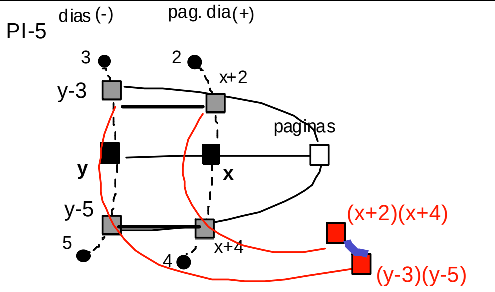
<table>
<tr>
<td>1

p+2 = d–3

p+4 = d–5</td>
<td>
</td>
<td>Error de igualdad.

Una expresión que refiere a una cantidad de páginas diarias (p+2) se iguala a otra expresión (d-3) que refiere a una cantidad de días.</td>
</tr>
<tr>
<td>5
x+2———y–3
x+4———y–5

(x+2)(x+4) =

(y–3)(y–5)</td>
<td>
</td>
<td>Error de arbitrariedad.

Error de igualdad.</td>
</tr>
<tr>
<td>7
(x+2)y=y–3

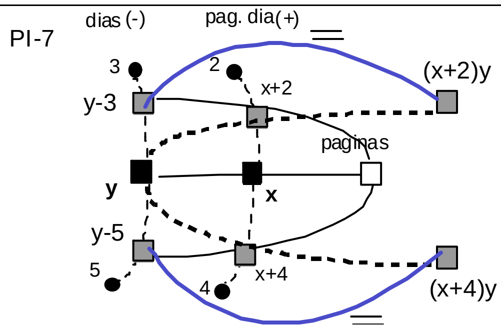
(x+4)y=y–5</td>
<td>
</td>
<td>Error de igualdad.</td>
</tr>
</table>

Tabla 5.4.- Tres producciones incorrectas del Problema MECANOGRAFA. Grafo de la resolución y diagnóstico del error.

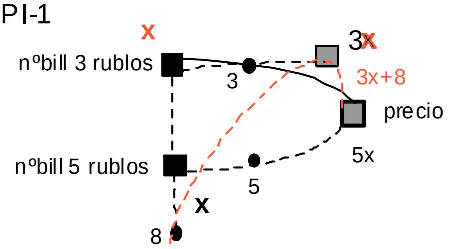
La producción nº 7 contiene las expresiones algebraicas (x+2)y, (x+4)y. Estas expresiones se producen tal como se indica en el grafo. Y, refieren a las cantidades: "páginas totales que se escribirían, escribiendo 2 o 4 páginas diarias más de las páginas previstas, en los días previstos". Por lo tanto, son cantidades contenidas en el diccionario teórico de cantidades del problema y no se advierte en ellas error alguno. Ahora bien, la igualación de éstas expresiones algebraicas a las expresiones y-3 e y-5, que refieren días, se califica de error de igualdad.

Ejemplo 3: problema RUBLOS

Una escuela rusa compra libros para la biblioteca. Si los paga con billetes de 3 rublos, la escuela tiene que dar 8 billetes más que si los paga con billetes de 5 rublos. ¿Cuánto cuestan los libros?

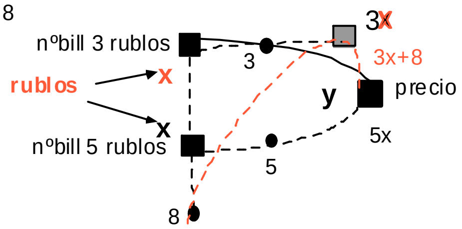
En la Tabla 5.5, se muestran dos producciones incorrectas del Problema RUBLOS. En ambas producciones se encuentran las expresiones algebraicas 3x y 5x. En la producción nº 1, no figura ningún comentario de lo que significan las letras usadas en la producción mientras que esto sí ocurre en la producción nº 28. No obstante, por la propia topología del grafo de la lectura algebraica del problema RUBLOS, toda vez que se haya asignado la letra x a uno de los vértices correspondientes al nº de billetes, sea este de 3 rublos o sea de 5 rublos, si la expresión algebraica producida es 3x entonces 5x no puede producirse, y viceversa, si se produce 5x no puede producirse 3x. Así, la única opción para que las expresiones 3x y 5x puedan producirse a la vez es suponer un uso polisémico de la letra x.

En la producción nº 1, x sería usada para designar tanto al nº de billetes de 3 rublos como al nº de billetes de 5 rublos, además como consecuencia de ello la expresión 3x+8 presenta un error de homogeneidad donde se suman rublos y nº de billetes. Análogo error, se dice que contiene la producción nº 28. Producción, donde del significado atribuido a las letras x e y debería desprenderse del fragmento de texto “x-rublos”, “y-precio”, que figura en la resolución, x parece pues significar rublos como contenidos en un número de billetes de 3 o de 5.

<table>
<tr>
<td>1
3x+8 = 5x</td>
<td>PI-1

</td>
<td>Error en uso de letras.

Polisemia</td>
</tr>
<tr>
<td>28

x–rublos y– precio

y=3x+8
5x=y</td>
<td>PI-28

</td>
<td>Error en uso de letras.

Polisemia</td>
</tr>
</table>

Tabla 5.5 .- Dos producciones incorrectas del Problema RUBLOS. Grafo de la resolución y diagnóstico del error.

Ejemplo 4: problema TERRENO.

El ancho de un terreno rectangular es 2/3 de su largo. Si ambas dimensiones se aumentan en 2m, el área aumenta en 64 m^2. ¿Cuáles son las dimensiones de este terreno?

La Tabla 5.6 muestra dos producciones incorrectas del Problema TERRENO.

En la producción nº 1, como se muestra en el grafo de la resolución, no se encuentra ningún error en las expresiones algebraicas. Pero, la expresión algebraica que refiere el área del terreno aumentada se iguala al número de metros cuadrados en que dicha área se incrementa. El error se dice de igualdad.

En el grafo de la resolución de la producción nº 3, se ha señalado en rojo la expresión algebraica $x+\frac{2}{3}$ x $+2+2$ obtenida usando la arista que también está coloreada en rojo y las expresiones algebraicas x+2 y $\frac{2}{3}$ x +2 que corresponden al largo y ancho del terreno aumentado . Se juzga aquí que o bien no se conoce la fórmula para obtener el área o que hay alguna confusión entre área y perímetro, se tiene entonces que $x+\frac{2}{3}$ x +2+2 es una expresión algebraica arbitraria y el error proviene del uso de un concepto o fórmula equivocada. Esta producción contiene además como se señala en el grafo un error de igualdad al igualarse la expresión anterior, o la que se hubiese obtenido usando la fórmula adecuada, a los 64 m^2 en los que se ha incrementado el área.

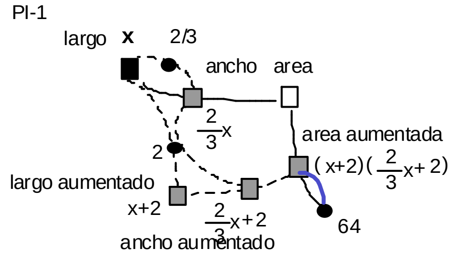
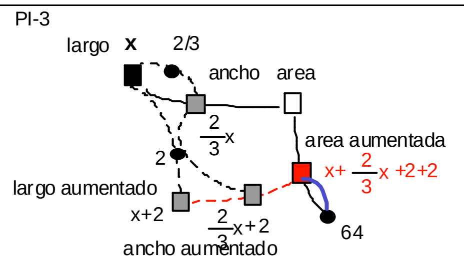
1 $(\frac{2}{3}x+2)(x+2)= 64$	 	Error de igualdad
3 $x+\frac{2}{3}x+2+2=64$	 	Error de igualdad y uso de Concepto equivocado o fórmula equivocada.

Tabla 5.6 .- Dos producciones incorrectas del Problema TERRENO. Grafo de la resolución y diagnóstico del error.

Ejemplo 5 : Problema HENO.

Unos granjeros almacenaron heno para 40 días. Sin embargo el heno era de mejor calidad de la que pensaban y ahorraron 100 kg. por día. Así tuvieron heno para 60 días. ¿Cuánto heno almacenaron?

La Tabla 5.7 muestra cuatro producciones incorrectas del Problema HENO.

En la producción nº 3, $\frac{40}{x}$ y $\frac{60}{x}$ son consecuencia de un error de inversión multiplicativo, ver aristas en rojo en el grafo de ésta producción. Suponiendo ahora correctas ambas expresiones, la expresión $\frac{40}{x}+100$ muestra un error de inversión aditivo, ya que las expresiones, que supuestamente refieren el heno diario previsto y el heno diario ahorrado, se añaden para obtener la expresión que supuestamente refiere el heno consumido diariamente. Así, las dos expresiones algebraicas que se igualan son diferentes.

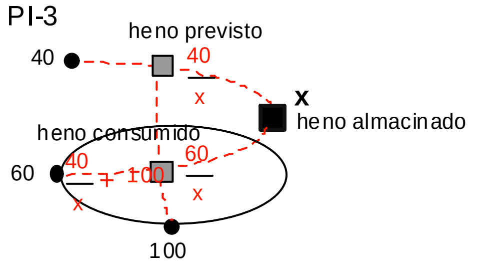
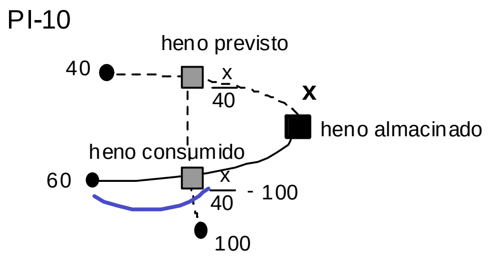
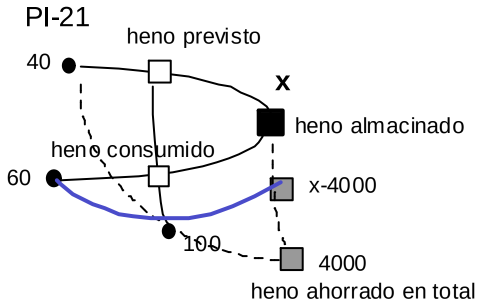
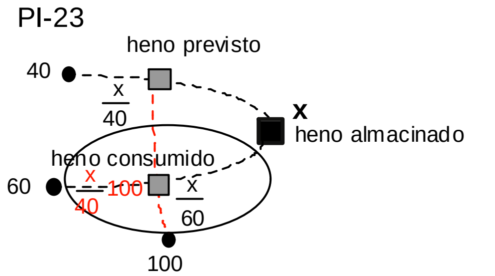
3 $\frac{40}{x} + 100 = \frac{60}{x}$		Errores de inversión multiplicativo y Error de inversión aditivo
10 $\frac{x}{40} - 100 = 60$		Error de Igualdad
21 x-400 = 60		Error de Igualdad
23 $\frac{x}{40}\ 100 = \frac{x}{60}$		Error de operación

Tabla 5.7 .- Cuatro producciones incorrectas del Problema HENO. Grafo de la resolución y diagnóstico del error

En la producción nº 10 puede observarse según el convenio establecido, arco azul, que las dos expresiones algebraicas que se igualan refieren cantidades diferentes. Esta producción contiene pues un error de igualdad. Al igual ocurre en la producción nº 21, producción en la que se han utilizado cantidades y relaciones no incluidas en la lectura algebraica utilizada como modelo para este problema.

Por último, la producción nº 23 muestra un error de operación pues en la producción de la expresión $\frac{x}{40}$ 100 se ha utilizado la arista señalada en rojo como si esta representase una relación multiplicativa.

5.3.- Resultados y comentarios

5.3.1.- Las igualdades correctas e incorrectas. Estudio cuantitativo.

En el capitulo 4 se encontró que entre los estudiantes que abordaron un problema, algunos consideraron pertinente para su resolución el uso del MC, y de éstos últimos, aproximadamente un 80% de ellos produjeron alguna igualdad en la mayoría de los problemas. Los valores de las variables dependientes: nº de igualdades, nº de igualdades correctas, porcentajes de igualdades y de igualdades correctas, nº de producciones correctas e incorrectas diferentes para cada problema y curso constan en el anexo **A5.2** Lo que contiene **5.3.1.1** es un resumen de la información más relevante, que describe el mundo de igualdades producido por los estudiantes de los cursos 1º, 2º y 3º para los problemas comunes. Las características de las igualdades se estudian en los puntos siguientes con detalle.

5.3.1.1.- Igualdades producidas e Igualdades correctas. Problemas y cursos.

La figura 5.2 muestra para cada curso y problema el porcentaje de estudiantes que produjeron igualdades y el porcentaje de igualdades correctas.

En la figura 5.2, prestando atención a los ejes de categorías y a la depresión en los perfiles puede observarse que donde los estudiantes produjeron menos igualdades fue en los problemas ALCANZAR, ENCONTRAR, LIEBRE Y GALGO y CAVAR, esto es en los problemas de las subfamilias MOVILES y TRABAJO, en consonancia con la menor pertinencia del proceso de traducción para estos problemas.

Ahora, prestando atención a la figura sombreada, las formas de sus perfiles superior e inferior parecen indicar, que a partir del problema TERRENO no hay ninguna relación entre el porcentaje de igualdades producidas para un problema y la corrección de las mismas. Esto es, para los problemas que figuran a continuación de TERRENO en el eje de categorías, la corrección de las igualdades no seguiría una pauta general, digamos de proporcionalidad, respecto de las igualdades producidas, sino que su corrección dependería del problema. Además, la similitud de los perfiles en los tres cursos refuerza esta hipótesis. La corroboración de ello la tenemos en la tabla 5.8 que muestra los coeficientes de correlación entre las variables producción de igualdades (%), PIG, y producción de igualdades correctas (%), PC , para todos los problemas y en los dos grupos de problemas mencionados, para la totalidad de los estudiantes y para cada uno de los tres cursos. Así, podemos afirmar que únicamente en los problemas de las subfamilias ABACO, EDADES Y GEOMETRIA existe una correlación entre las igualdades que se producen y el porcentaje de éstas que son correctas.

Coef. Correlación (PIG, PC)				
	curso 1º	**curso 2º**	**curso 3º**	***pobla. total***
Todos los problemas	0,740	0,584	0,615	***0,608***
MIT Y TERC hasta TERRE	0,999	0,739	0,887	***0,960***
ALCANZAR hasta DINERO	0,215	-0.088	0,244	***-0,258***

Tabla 5.8 Coeficientes de correlación entre las variables porcentaje de igualdades y porcentaje de igualdades correctas.

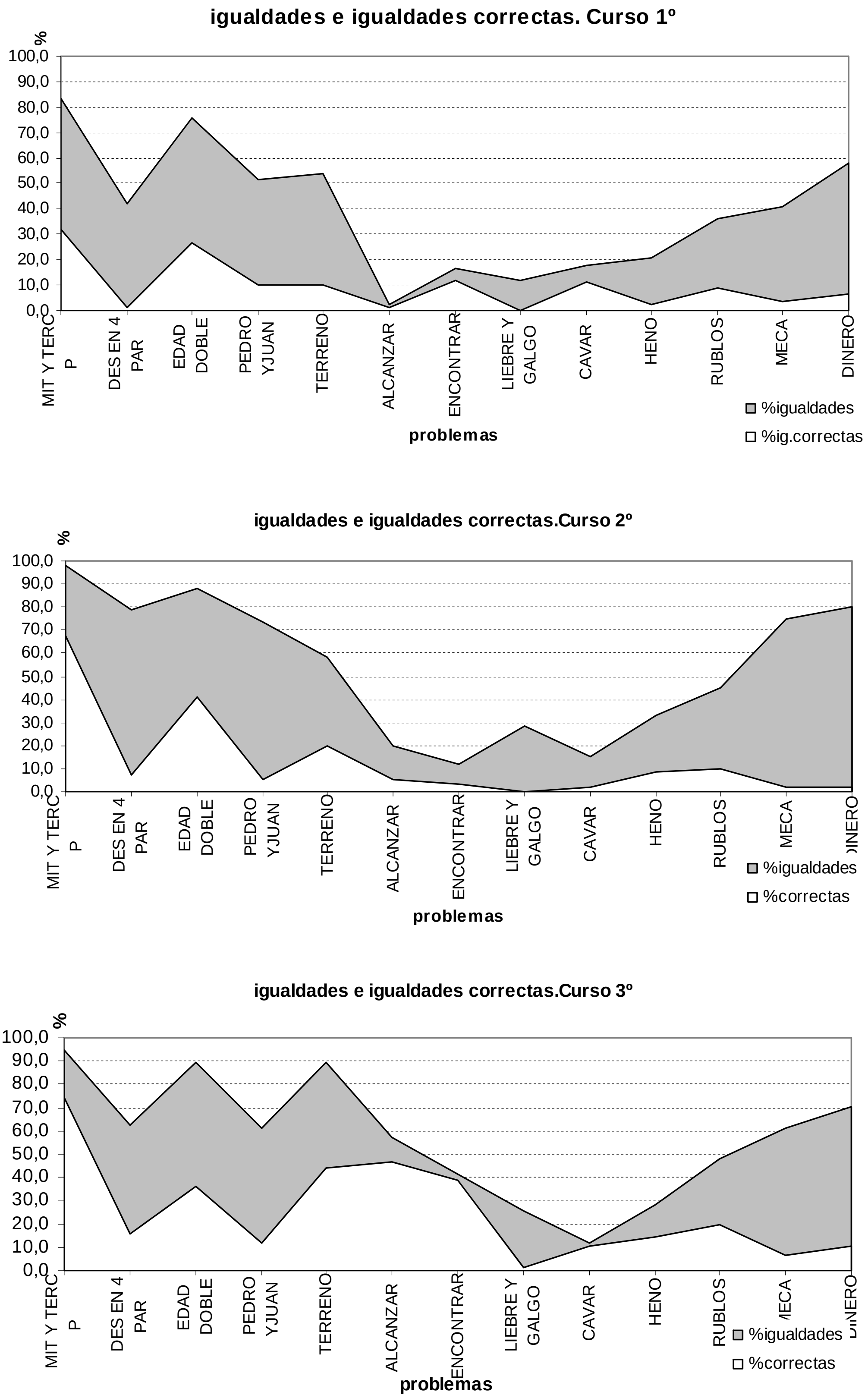


fig. 5.2. – Para cada problema, porcentaje de igualdades producidas y porcentaje de igualdades correctas. Cursos 1º,2º,3º

Por otro lado, la tabla 5.9 muestra para cada curso: el promedio en la totalidad de los problemas de los porcentajes de igualdades e igualdades correctas y el promedio de los porcentajes de igualdades de entre las igualdades producidas en cada problema que son correctas.

curso	**1º**	**2º**	**3º**	**2º-1º**	**3º-2º**
porcentaje de igualdades producidas (% sobre estudiantes)	38.3	54.3	57.0	16.	2.7
porcentaje de igualdades producidas que son correctas (% sobre estudiantes)	9.6.	13.5	25.5	3.9	12
porcentaje de las igualdades producidas que son igualdades correctas (% sobre las igualdades producidas)	27.2	22.5	46.4	4.7	23.9

Tabla 5.9 – Porcentajes de igualdades para la totalidad de los problemas comunes. Cursos 1º,2º y 3º

En la tabla 5.9 pueden observarse tanto los valores de los porcentajes que se señalan como que el incremento del 16% de 1º a 2º y del 2.7% de 2º a 3º en las igualdades producidas. Este incremento no se corresponde proporcionalmente con el incremento porcentual de la producción de igualdades correctas que es 3.91% de 1º a 2º y de 12.% de 2º a 3º. La ultima fila de la tabla 5.9 muestra que cuando se consideran las igualdades producidas el porcentaje de las que son correctas se mueve en torno al 25% para los cursos 1º y 2º y en torno al 45% para el curso 3º. Indicando además, que la mayor parte del incremento de la producción de igualdades de 1º a 2º deviene en igualdades erróneas; por otro lado, el escaso incremento en la producción de igualdades entre 2º y 3º, 2.7 %, y el aumento del 23.9% de las igualdades que son correctas indicaría, que el incremento de la producción de 2º a 3º es escaso pero que las igualdades producidas no son erróneas. Esto es, como si los estudiantes de 3º restaurasen los errores que cometían cuando eran estudiantes de 2º.

Por último, la tabla 5.10 y la fig. 5.3 muestran para cada uno de los problemas y cursos los porcentajes respecto de las igualdades producidas que fueron igualdades correctas. En dicha tabla y figura puede observarse que también para todos los problemas, con la única excepción del problema EDAD DOBLE, los estudiantes de. 3º produjeron un porcentaje de igualdades correctas igual o superior a los estudiantes de 1º y 2º.

cursos	1º	2º	3º
MIT Y TERC P	38,2	69,7	78,9
DES EN 4 PAR	2,6	9,7	25,5
EDAD DOBLE	34,8	47,5	40,3
PEDRO YJUAN	19,1	7,5	19,6
TERRENO	18,4	34,0	49,3
ALCANZAR	50,0	27,8	81,4
ENCONTRAR	73,3	27,3	93,5
LIEBRE Y GALG	0,0	0,0	5,3[52]
CAVAR	62,5	14,3	88,9
HENO	10,5	26,7	52,4
RUBLOS	24,2	22,0	41,7
MECA	8,1	2,9	10,9
DINERO	11,3	2,7	15,1

..

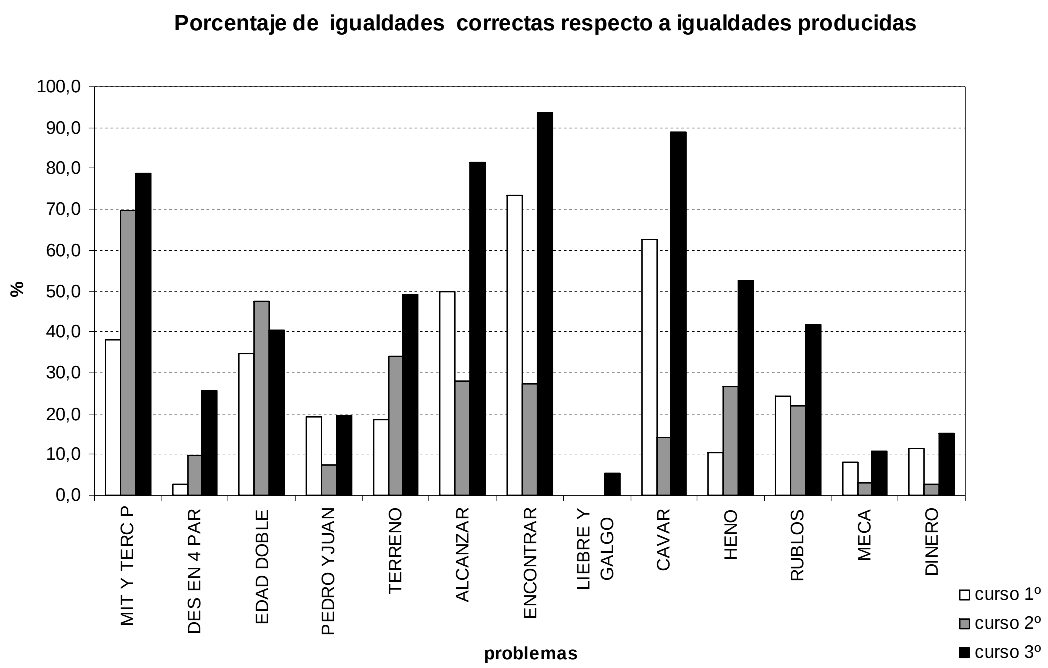


Tabla 5.10 y Fig.5.3.-Porcentaje de las igualdades producidas que eran correctas. Problemas. Comparación de cursos.

[52] En una revisión posterior, se constató que la producción dada por correcta para el problema LIEBRE Y GALGO no lo era. Dicho porcentaje es pues 0,0.

5.3.2.- Estudio de las igualdades correctas.

5.3.2.1.- La diversidad de las igualdades correctas.

Dado un problema, como ya se dijo en **1.10**, existe un conjunto de ecuaciones o sistemas de ecuaciones que son solución, conducen al resultado del problema. Estas ecuaciones son equivalentes[53] si la letra o letras utilizadas refieren a la misma cantidad o cantidades – si las incógnitas elegidas son las mismas- y no equivalentes en caso contrario. Aun siendo las ecuaciones equivalentes las expresiones algebraicas que figuran en los miembros izquierdo y derecho de la igualdad pueden referir cantidades diferentes en las distintas ecuaciones que son equivalentes dado que la cantidad que se ha decidido igualar en cada caso es diferente y en última instancia las expresiones algebraicas que figuran en uno de los miembros de la igualdad aún refiriendo a la misma cantidad pueden ser diferentes debido a la manera en que refieren dicha cantidad.

En resumen, la configuración de la ecuación, producida a partir de un problema, viene a mostrar la manera particular en que se han realizado los pasos del MC en la resolución de ese problema.

Si se sigue el criterio, adoptado aquí, de considerar las igualdades producidas en las resoluciones como diferentes cuando una no es una replica exacta de la otra[54] nos encontramos con una diversidad de igualdades diferentes que pueden ser solución del problema. A cada original aquí lo llamamos producción, siendo entonces el caso de que producciones diferentes pueden ser ecuaciones equivalentes o a la misma ecuación, que nos señalan, como se ha dicho, elecciones de incógnitas diferentes.

Por tanto, en la práctica, el estudio del número de producciones diferentes de cada problema es un indicador de la flexibilidad que permite el problema respecto de la manera en que puede usarse en la resolución del mismo el MC, o bien, de los diversos modos en que lo hacen los estudiantes.

5.3.2.2.- Las producciones correctas diferentes.

En este estudio, se encontraron producciones correctas diferentes para todos los problemas con la excepción del problema DESCOMPONER EN 4 PARTES.

Así, la tabla 5.11 muestra para cada uno de los problemas el número de producciones diferentes de los estudiantes de cada uno de los cursos y las producciones diferentes encontradas considerando la totalidad de los 258 estudiantes.

En dicha tabla 5.11 puede observarse que, en la mitad de los problemas, el número de producciones diferentes es igual o superior a cinco y que general en el curso 3º el número de producciones diferentes es mayor.

---

[53] Por ecuaciones equivalentes se entienden aquellas que tienen la misma solución.
[54] Obviamente, se admite que la replicación es ciega ante la conmutatividad de las operaciones involucradas en las expresiones algebraicas, y, ante la simetría del signo igual.

problema	**1º**	**2º**	**3º**	**totalidad estudiantes**
MIT Y TERC P	1	2	3	**3**
DES EN 4 PAR	1	1	1	**1**
EDAD DOBLE	3	6	4	**6**
PEDRO YJUAN	4	2	4	**6**
TERRENO	2	3	3	**3**
ALCANZAR	1	2	3	**4**
ENCONTRAR	1	2	5	**5**
LIEBRE Y GAL[55]	0	0	0	**0**
CAVAR	4	1	1	**4**
HENO	2	5	5	**9**
RUBLOS	3	5	4	**8**
MECA	2	1	3	**5**
DINERO	4	2	4	**4**

Tabla 5.11- Número de producciones diferentes para cada problema. Estudiantes de cada curso y totalidad de estudiantes.

Por otro lado, si se exceptúan los problemas de la subfamilia ABACO, ninguna de las producciones diferentes de un problema puede considerarse como representativa de la solución del problema. Ello se deduce de la tabla 5.12 que muestra para cada problema el porcentaje que corresponde a cada una de las producciones diferentes del total de igualdades correctas producidas por la totalidad de los estudiantes para ese problema. En dicha tabla 5.12 se observa que sólo para los problemas MITAD Y TERCERA PARTE y DESCOMPONER EN 4 PARTES encontramos producciones que acaparan casi el 100% de las igualdades correctas producida para ese problema. Para el resto de los problemas con la excepción de ALCANZAR y CAVAR ninguna de las producciones alcanza el 50% de las igualdades correctas producidas

problemas	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8	p9
MIT Y TER P	**97**	2,5	0,5						
DES EN 4 PA	**100**								
EDAD DOBLE	42	19	5	32	9	9			
PEDRO YJUA	39	13	26	4	13	5			
TERRENO	24	13	64						
ALCANZAR	*73*	15	10	2					
ENCONTRAR	35	46	7	2	11				
CAVAR	*75*	13	6	6					
HENO	14	19	14	14	5	5	14	5	5
RUBLOS	16	16	38	3	9	3	9	6	
MECA	30	20	10	30	10				
DINERO	40	20	13	17					

Tabla 5.12.- Porcentaje del total de igualdades correctas de cada una de las producciones encontradas en cada problema.

[55] A partir de aquí, el problema LIEBRE y GALGO será eliminado del estudio ya que para él no se encontró ninguna producción correcta.

Además, no parece posible asociar una determinada producción a un curso determinado dado que, como se muestra en la Tabla 5.13, para todos los problemas hay producciones que pueden encontrarse en más de un curso (producciones compartidas). Ahora bien, para la mayoría de los problemas hay determinadas producciones que sólo es posible encontrarlas en el curso 3º.

Cursos	1º,2º,3º	1º,2º	1º,3º	2º ,3º	sólo 1º	sólo2º	sólo 3º
MIT Y TERC P	1			1			1
DES EN 4 PAR	1						
EDAD DOBLE	3			1		2	
PEDRO YJUAN	1		1	1	2		1
TERRENO	2			1			
ALCANZAR			2		1		1
ENCONTRAR	1			1			3
CAVAR	2						3
HENO		1	1	1		3	3
RUBLOS	1	1	1			3	2
MECA				2	2		2
DINERO	2		2				

Tabla 5.13.- Número de producciones compartidas y no compartidas en cada problema y cursos que las comparten.

5.3.2.3.- Las ecuaciones diferentes.

Como se muestra en la Tabla 5.14, en todos los problemas se encontraron producciones correctas que eran ecuaciones diferentes -no equivalentes- excepto en MITAD Y TERCERA PARTE, DESCOMPONER EN 4 PARTES y CAVAR. Además la diferencia entre el número de ecuaciones diferentes y el número de producciones que muestra la tabla 5.14 indica que para la mayoría de los problemas una misma elección de incógnitas no comporta el uso de la misma cantidad para construir la igualdad.

Problema	Número de produciones diferentes	Número de ecuaciones diferentes
MIT Y TERC P	3	**1**
DES EN 4 PAR	1	**1**
EDAD DOBLE	6	**2**
PEDRO YJUA	6	**2**
TERRENO	3	**3**
ALCANZAR	4	**3**
ENCONTRAR	5	**4**
CAVAR	4	**1**
HENO	9	**4**
RUBLOS	8	**3**
MECA	5	**3**
DINERO	4	**3**

Tabla 5.14.- Número de producciones y ecuaciones diferentes encontradas en cada problema.

5.3.2.4.- La elección de incógnitas, número de incógnitas y cantidades elegidas.

La tabla 5.15 presenta el porcentaje que corresponde a cada una de las ecuaciones diferentes y el número de letras utilizado en dicha ecuación. En dicha tabla, encontramos que para todos los problemas, con la excepción del problema HENO, siempre hay una ecuación que acapara más del 50% de las igualdades correctas, lo que indica que existe una cierta preferencia por la elección de las cantidades que deben ser designadas con una letra.

Ahora bien, dicha tabla 5.15 también muestra, que cuando se usa una o dos letras podemos encontrar que la elección de las cantidades que se utilizan como incógnitas, se designan con letras pueden ser diferentes. Así, encontramos ecuaciones diferentes con el uso de una o dos letras en los problemas TERRENO, ALCANZAR, ENCONTRAR, HENO, RUBLOS, MECA y DINERO.

problema	nº ecua.dif.	%	%	%	%
MIT Y TERC P	1	**100** (1)			
DES EN 4 PAR	1	**100** (5)			
EDAD DOBLE	2	44 (1)	**56** (2)		
PEDRO YJUA	2	24 (1)	**76** (2)		
TERRENO	3	24 (1)	13 (2)	**63** (2)	
ALCANZAR	3	**76** (1)	15 (1)	9 (2)	
ENCONTRAR	4	**80** (1)	2 (1)	11 (1)	7 (2)
CAVAR	1	**100** (1)			
HENO	4	29 (1)	29 (1)	19 (1)	24 (2)
RUBLOS	3	25 (1)	**53** (1)	9 (2)	13 (2)
MECA	3	10 (2)	30 (2)	**60** (3)	
DINERO	3	13 (2)	20 (2)	**67** (3)	

Tabla 5.15.- Porcentaje del total de igualdades correctas en cada problema que corresponde a cada una de las ecuaciones diferentes. Entre paréntesis, número de letras utilizado.

Las cantidades que son elegidas para designar con letras o el número de letras usadas en la resolución pueden depender del número de cantidades por las que se pregunta en el problema. En la colección de problemas que componen el instrumento utilizado, el número de cantidades por cuyo valor se pregunta en los problemas es diferente: una, dos y cuatro. Por otro lado, éstos problemas pueden ser resueltos con el uso como mínimo de una letra, dos letras, ello independientemente del número de cantidades por las que el problema pregunta. De hecho, 10 de los problemas pueden ser resueltos con el uso de letra, dos con el uso de dos letras MECANOGRAFA y DINERO, también con 2 letras DESCOMPONER EN 4 PARTES siendo éste un problema indeterminado.

En primer lugar, debe de decirse que las producciones correctas no contienen siempre un número de letras igual al número de cantidades por las que se pregunta en el problema, como ya se pone de manifiesto en la tabla 5.15 y se precisa en las tablas 5.16, 5.17 y 5.18. Por otro lado, tampoco es mayoritario el uso del mínimo número de letras requerido para resolver el problema. Esto es, las ecuaciones que se producen, en un alto porcentaje y para la mayoría de los problemas, tienden a contener más letras del mínimo número requerido para resolverlo. Obsérvese, que en la tabla 5.15 los mayores porcentajes corresponden a ecuaciones con dos o tres letras en los problemas EDAD DOBLE, PEDRO Y JUAN, TERRENO, RUBLOS, MECA y DINERO.

Las tablas 5.16, 5.17, 5.18 corresponden al estudio de la posible tendencia a designar con una letra la incógnita o alguna de las incógnitas del problema, de ellas se puede deducir que:

a) en los problemas que basta una sola letra para resolverlos (tablas 5.16 y 5.17)

- una sola letra es utilizada designando a la incógnita o a una de las incógnitas del problema, en aproximadamente la mitad de las igualdades correctas encontradas, tanto en el caso que en el problema se pregunte por una cantidad como por dos cantidades (54,6 %, 46,25%).

- en los problemas que preguntaban por dos cantidades, no se encontraron igualdades correctas en las que se usase una sola letra y que esta no designase a una cantidad que no fuese una incógnita del problema, mientras que, esto si ocurrió en los problemas en que se preguntaba por una cantidad. (39,8%)

- si el problema preguntaba por una cantidad, el uso de dos letras fue escaso , 9.8%, de las igualdades correctas, y en las igualdades una de las letras siempre designaba a la incógnita del problema.

- si el problema preguntaba por dos cantidades, se usaron dos letras en el 53,75% de las igualdades y en ellas o bien cada una de las letras designaba a cada una de las incógnitas del problema, 38%, o bien una de las letras designaba a una de las incógnitas del problema.

b) en los problemas que dos letras eran necesarias para resolverlos (tabla 5.18)[56]

- se usaron tres letras en el 63,75 % de los casos, dos de las letras para las dos incógnitas del problema y cuando se usaron dos letras y cuando se usaron dos al menos una de ellas designaba a una de las incógnitas.

Sobre las incógnitas utilizadas en el problema indeterminado DESCOMPONER EN 4 PARTES ver **5.3.3**.

En resumen, podemos decir que: las ecuaciones encontradas como solución del problema contienen aproximadamente en la mitad de los casos más letras del mínimo requerido para ello, y que la o las incógnitas del problema suelen ser designadas con una letra, sobre todo cuando se usan más letras del mínimo requerido para resolver el problema.

[56] De este tipo de problemas sólo hay dos en el instrumento y además ambos son isomorfos por lo que debe tomarse lo afirmado con cierta prevención.

elección pregunta 1-cantidad	1- letra para la incógnita	2-letras, una para la incógnita	Otras eleccio. 1-letra	1- letra para la incógnita	2-letras, una para la incógnita	Otras eleccio. 1-letra
	nº de producción	*nº de producción*	*nº de producción*	% igualdades	% igualdades	% igualdades
MIT Y TERC P	*1, 2, 3*			100		
ALCANZAR		*3*	*1,2,4*		10	90
CAVAR	*1,2,3,4,5*			100		
HENO	*2,,6,6*	*3,5,9*	*1,4,7*	25	25	50
RUBLOS	*2,4,8*	*5,6*	*1,3*	28	14	59
total				**54,6**	**9,8**	**39,8**

Tabla 5.16.- Problemas en los que se pregunta por una cantidad y que como mínimo se requiere una letra para resolverlos Número de letras usadas y elecciones que designan la incógnita del problema con letras. *Producciones* y porcentaje

elección pregunta 2-cantidades	1-letra para una de las incógnitas	2-letras, una por incógnita	Otras elec. 2-letras una de ellas una incógnita	1-letra para una de las incógnitas	2-letras, una por incógnita	Otras elec. 2-letras una de ellas una incógnita
	nº de producción	*nº de producción*	*nº de producción*	% igualdades	% igualdades	% igualdades
EDAD DOBLE	*1,5,6*	*2,3,4*		44	56	
PEDRO YJUA	*2,5*	*1,3,4,6*		24	76	
TERRENO	*1*	*2*	*3*	24	13	63
ENCONTRAR	*1,2,4,5*	*3*		93	7	
total				**46,25**	**38**	**15,75**

Tabla 5.17.- Problemas en los que se pregunta por dos cantidades y que como mínimo se requiere una letra para resolverlos. Número de letras usadas y elecciones que designan de la incógnita del problema con letras. *Producciones* y porcentaje.

elección pregunta 2-cantidades	2-letras, una por incógnita	Otras elecciones. 2-letras, una de ellas para una de las incógnitas	3-letras 2 de las letras para las incógnitas	2-letras una por incógnita	Otras elecciones. 2-letras, una de ellas para una de las incógnitas.	3-letras 2 de las letras para las incógnitas.
	nº de produ.	*nº de produ.*	*nº de produ.*	% igualdades	% igualdades	% igualdades
MECA	*1*	*3*	*2,3,6*	10	30	60
DINERO	*3*	*2*	*1,4*	13	20	67
total				**11,5**	**20**	**63,5**

Tabla 5.18.- Problemas en los que se pregunta por dos cantidades y que como mínimo se requieren dos letras para resolverlos. . Número de letras usadas y elecciones que designan de la incógnita del problema con letras. *Producciones* y porcentaje.

5.3.2.5- Las relaciones utilizadas en la construcción de expresiones algebraicas.

En esta tesis, se postula la existencia de un Grafo Teórico que contiene y representa todas las cantidades y relaciones del mundo posible del problema, dicho grafo contiene como subgrafos aquellos a los que hemos llamado Lecturas Algebraicas (LA), grafos en los que por asignación de letras y oscurecimiento podemos encontrar expresiones algebraicas y finalmente las ecuaciones solución del problema. El investigador ha atribuido a cada uno de los problemas una LA , esta lectura consta junto al enunciado y los grafos de la resolución en el informe de las producciones de cada problema, anexo **A5.3**, lectura que digamos es su lectura tipo y de la que afirma que es la lectura más natural del problema. El interés se centra en saber si los estudiantes tienen de los problemas alguna LA preferida y si ésta es la del investigador. Para ello, basta indagar, cosa que se hace en este punto, las relaciones utilizadas por los estudiantes en la construcción de las expresiones algebraicas. Pues bien, la observación de los grafos de la resolución de las producciones que constan en el anexo **A5.3** permite afirmar:

En 9 de los 12 problemas estudiados encontramos que las expresiones algebraicas que contienen las igualdades correctas provienen de una única lectura algebraica del problema. Siendo ésta lectura precisamente la postulada por el investigador.

La imposibilidad de afirmar que esto ocurre en todos los problemas la constituyen los problemas RUBLOS y HENO donde se han usado otras lecturas algebraicas que la postulada: una lectura en el problema RUBLOS que se usa en la producción nº 1 con el que supone el 14,8 % de las igualdades correctas y dos lecturas en el problema HENO que se usan en las producciones nº 5 y nº 6 y que supones el 9.2% de las igualdades correctas. Además de estos problemas, otra excepción la constituye el problema CAVAR, problema con un dato redundante en el que se ha usado una lectura aritmética en las producciones nº 1, 3 ,4 y 5, esto es, en el 80% de las igualdades.

5.3.2.6.-.Las cantidades que se han igualado y las relaciones usadas para referirlas.

Como es sabido, en el uso competente del MC las igualdades se construyen expresando una cantidad de dos maneras diferentes. En el anexo **A5.4** constan para cada problema y cada producción, las cantidades que se han igualado y las relaciones que interpretamos que se han usado en última instancia para construir la igualdad. Éstas, vienen indicadas sobre los grafos de la lectura algebraica del problema, las cantidades señaladas mediante elipses y las relaciones mediante el trazado grueso de las aristas.

La tabla 5.19, que resume dicho anexo, muestra la cantidad igualada más frecuentemente en cada uno de los problemas y el porcentaje de las igualdades en que dicha cantidad es igualada, independientemente de si en la solución del problema otra cantidad era además igualada.

problema	cantidad igualada	% de igualdades.	cantidad igualada	% de igualdades.
MIT Y TERC P	suma mitad y tercera parte	96,6	cuarta parte	2,7%
DES EN 4 PAR	número que se descompone	100%	**número que resulta**	100%
EDAD DOBLE	*edad primera persona*	100%	***edad 2º persona***	4,7%
PEDRO Y JUA	63 años	100%	***edad actual pedro***	55,6%
TERRENO	área aumentada	100%	***ancho o largo***	64,4%
ALCANZAR	*distancia en alcanzar*	97,9%	40 km./hora	2,1%
ENCONTRAR	*distancia a Madrid*	66,1%	430 km.	31,7%
CAVAR	6 ha.	86,5%	ha/día cavadas conjuntamente	13,5%
HENO	*heno almacenado*	71,4%	heno consumido diario	23,8%
RUBLOS	*precio libros*	65,8%	nº billetes de 3 o 5	31,2%
MECA	***páginas totales***	90%	**páginas diarias de más o de menos**.	10%
DINERO	**dinero**	59,8%	***dinero por niño en cada caso***.	40,2%

Tabla 5.19 .- Cantidades igualadas y porcentaje de igualdades en las que dicha cantidad es igualada. Las cantidades en cursiva son incógnitas del problema. En negrita, cantidad igualada sólo en el caso de que figurasen dos o más igualdades en la solución.

De la observación de la tabla 5.19, dados los altos porcentajes observados en la tercera columna, se desprende que existe para cada problema una tendencia a usar una determinada cantidad del problema para construir una igualdad.

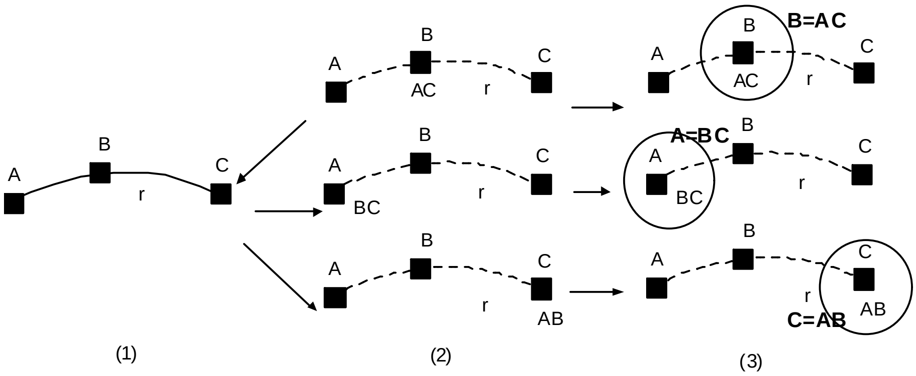
En los problemas de las subfamilias ABACO, EDADES, GEOMETRIA y TRABAJO, la casi unanimidad existente en la elección de la cantidad que se iguala proviene probablemente de las características del enunciado del problema, que contiene, a veces expresamente, una relación entre tres cantidades que implica a la cantidad igualada.

En el caso de los problemas: ALCANZAR, ENCONTRAR, HENO y RUBLOS se iguala mayoritariamente una cantidad que es la incógnita del problema. Ahora bien, como no es mayoritaria, a su vez, la presencia de ecuaciones del tipo x=f(x), este hecho nos informa que, en estos problemas el uso de una sóla letra y esta letra designando la incógnita del problemas es minoritario. En los problemas MECA y DINERO donde la solución requiere de dos ecuaciones también se iguala una de las incógnitas del problema, siendo de anotar la preferencia por usar cantidades extensivas para igualarlas.

Como se desprende del análisis teórico, ver **1.10**, y se pueden interpretar los hechos observados, dos son los modos generales en los cuales se establece la igualdad:

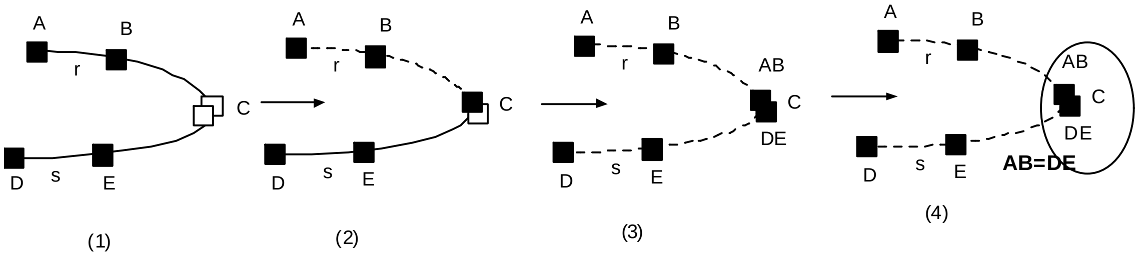
Modo A)

Donde las expresiones algebraicas que se igualan representan a tres cantidades de la misma arista. y una de ellas se dice igual en función de la relación aritmética existente entre ellas.



Modo B)

Donde las expresiones algebraicas que se igualan pertenecen a cuatro cantidades de dos aristas que comparten un vértice. Se expresa la cantidad que corresponde al vértice de dos maneras diferentes representada por cada arista.



La tabla que sigue, obtenida a partir del anexo **A5.4,** muestra para cada problema el porcentaje que suponen las producciones que contienen igualdades construidas de los modos A y B.

problemas	modo A	modo B
MIT Y TERC P	100	
DES EN 4 PAR	100	
EDAD DOBLE	4,7	100
PEDRO YJUAN	100	
TERRENO	100	
ALCANZAR	2,1	97,9
ENCONTRAR	31,7	84
CAVAR	86,5	13,5
HENO		100
RUBLOS	2,8	97,2
MECA		100
DINERO		100

Tabla 5.20.- Problemas y modo de construcción de igualdades. Porcentaje de igualdades.

Observando conjuntamente las tablas 5.19 y 5.20 relativas a las cantidades que se igualan y el modo de construir la igualdad, es posible afirmar que: cuando la cantidad igualada es la incógnita del problema la igualdad se construye del modo B, esto es, se refiere la incógnita del problema de dos maneras diferentes. Esto ocurre en los problemas de las subfamilias MÓVILES y OTROS mientras que en los problemas de las restantes subfamilias las igualdades se construyen del modo A, con toda probabilidad porque, el enunciado de estos problemas se favorece el centramiento en una relación entre tres cantidades, que reduciría el problema a un problema de una etapa y la construcción de la igualdad correspondiente. Obsérvese además, que en la tabla 5.20 el problema EDAD DOBLE, un problema de la subfamilia ABACO donde se usa el modo B, figuran en su enunciado dos frases, cada una de las cuales refiere una de las incógnitas del problema de dos maneras diferentes.

5.3.3.- El número de letras usado en las igualdades producidas.

Para la obtención de una solución algebraica, ya se dijo, que de los 13 problemas estudiados, 10 requieren el uso de una letra, dos el 2 uso de dos letras, y el problema indeterminado DESCOMPONER EN 4 PARTES que también requiere el uso de 2 letras. Requieren una, dos letras quiere decir, que ese es el mínimo número de letras necesario para oscurecer el grafo de la lectura algebraica del problema y formular ecuaciones, ver **1.13**.

Para los 10 problemas, que requieren el uso de una sola letra, únicamente en dos de ellos, CAVAR y MITAD Y TERCERA PARTE, todas las igualdades producidas contenían una sola letra, mientras que las producciones de los otros ocho contenían una o dos letras. En particular, en el problema LIEBRE y GALGO, donde las igualdades encontradas fueron todas incorrectas, todas las producciones contenían dos letras, excepto 2 de ellas, que representaban el 4% de las igualdades.

Para los dos problemas que requieren del uso de dos letras, MECANOGRAFA y DINERO, se encontraron producciones con una, dos o tres letras. Las igualdades con una letra, que eran naturalmente incorrectas, suponían el 6,5% de las igualdades en el problema MECANOGRAFA y el 2,4 % en el problema DINERO y corresponden mayoritariamente a estudiantes de 1º. Con el uso de tres letras, no se encontraron producciones incorrectas en el problema MECNOGRAFA y si se encontraron tres producciones correctas que suponían el 60% de las igualdades correctas. En el caso del problema DINERO se encontró una producción inacabada con el uso de tres letras que suponía el 4,7 % de las igualdades y dos producciones correctas que suponían el 67% de las igualdades correctas. En resumen en los problemas que requieren el uso de dos letras no se encontraron producciones incorrectas con el uso de tres letras y si un porcentaje en torno al 60% de igualdades correctas.

Para el problema DESCOMPONER EN 4 PARTES, problema indeterminado que requiere el uso de 2 letras, se utilizaron 5 letras en la única producción correcta encontrada, mientras en la producciones incorrectas se encontraron numerosas producciones en las cuales se usó una sola letra, las razones de este hecho son analizadas en el protocolo de este problema que consta en anexo **A5.3** y pueden consistir fundamentalmente: a) en la asunción de que las partes en las que el número se descompone son iguales, asunción innecesaria y por demás en contradicción con lo que se deduce de lo expresado en el enunciado del problema y b) en el uso en el enunciado del problema del mismo término “número” para referirse a dos números diferentes. La tabla 5.21 da cuenta del nº de letras usado en las igualdades encontradas en las resoluciones de éste problema.

nº letras	**% igualdades incorrectas**
1- letra	49,7
2 letras	19,0
4 letras	0,8
5-letras	29,7
9-letras	0,8

Tabla 5.21.-Número de letras usadas en el problema DESCOMPONER EN 4 PARTES.

En lo que resta de este apartado, se da cuenta para los problemas que requieren del uso de una letra: de los resultados obtenidos en relación al número de letras utilizadas en la resolución, el número de cantidades por la que se pregunta en el problema, la dependencia entre la corrección de la igualdad y número de letras utilizada y la tendencia a usar más o menos letras por los estudiantes de los distintos cursos.

a) El número de letras que contienen las igualdades. Problemas y cursos.

La tabla 5.22 muestra para cada problema y curso el porcentaje de las igualdades que usaban una única letra. El complementario a 100 mostraría el porcentaje de las igualdades que contienen dos letras.

porcentajes del total igualdades que contiene una letra.

problemas	**1º**	**2º**	**3º**	**total**
EDAD DOBLE	72,4	41,5	33,8	**49,1**
PEDRO Y JUAN	19,1	5,9	23,9	**16,3**
TERRENO	83,6	41,5	35,8	**53,6**
ALCANZAR	100	61,1	86,6	**87**
ENCONTRAR	80,0	72,7	90,1	**80,9**
HENO	78,9	46,6	42,8	**60,9**
RUBLOS	66,6	63,4	63,8	**64,6**
total	**71,5**	**47,5**	**53,8**	**58,9**

Tabla 5.22.-Problemas que requieren de una sola letra. Porcentaje de igualdades con una letra y curso. El complementario a 100 corresponde a las igualdades que contienen dos letras

En la tabla 5.22, puede observarse:

- que considerando la totalidad de los problemas y el total de los estudiantes el 58,9% de las igualdades contiene una letra; esto es, en aproximadamente un 40% de las igualdades se usan más letras de las necesarias.

- que considerando individualmente los problemas y la totalidad de los estudiantes, se puede decir que para los problemas que requieren el uso de una letra que sólo entre un máximo de un 87% (para el problema ALCANZAR) y un mínimo del

16,3% (para el problema PEDRO Y JUAN) de los estudiantes usan una letra cuando escriben una igualdad. Estando este porcentaje en el resto de los problemas para en un franja entorno al 50-60%

- que considerando el total de los problemas, el uso de una letra lo es en el 71,5%. 47.3% y 53,8% de los estudiantes de los cursos 1º,2º y 3º, de donde se deduce que los estudiantes de los cursos avanzados tienden a usar más letras.

- que considerando individualmente los problemas la tendencia a usar más letras en cada uno de los problemas en los cursos avanzados se conserva con la excepción del problema PEDRO y JUAN.

b) El número de letras y la corrección de las igualdades.

Las tablas 5.23 y 5.24 muestran la corrección de las igualdades cuando se usa una o dos letras para cada uno de los problemas y cursos.

Eficiencia del uso de una letra.				
Curso/problema	**1º**	**2º**	**3º**	**total**
EDAD DOBLE	36	33,3	66,7	**45,3**
PEDRO Y JUAN	55,6	0	9,1	**21,6**
TERRENO	19,5	9,1	12,5	**13,7**
ALCANZAR	50	27,8	81,4	**53,1**
ENCONTRAR	91,7	27,3	100,0	**73,0**
HENO	13,3	35,7	9,1	**19,4**
RUBLOS	36,4	19,2	52,2	**35,9**
total	**43,2**	**21,8**	**47,3**	**37,4**

Tabla 5.23.- Porcentaje de entre las igualdades que usan una letra que son correctas

Eficiencia del uso de dos letras.				
Curso/problema	**1º**	**2º**	**3º**	**total**
EDAD DOBLE	31,6	57,6	53,2	**47,5**
PEDRO Y JUAN	44,4	7,9	33,9	**28,7**
TERRENO	12,5	51,6	69,8	**44,6**
ALCANZAR	0,0	0,0	66,6	**33,3**
ENCONTRAR	0,0	0,0	33,3	**11,1**
HENO	0,0	18,8	22,9	**13,9**
RUBLOS	0,0	26,7	23,1	**16,6**
total	**14,8**	**23,2**	**43,3**	**28,0**

Tabla 5.24.- Porcentaje de entre las igualdades que usan dos letras que son correctas

De la observación de ambas tablas se deduce:

- que considerando la totalidad de los problemas y estudiantes la eficiencia del uso de una letra es ligeramente superior: 37,4 % frente al 28%.

- que considerando individualmente los problemas y la totalidad de los estudiantes la eficiencia del uso de una o dos letras, ver Fig. 5.4, parece depender del problema aunque el uso de una letra muestra ser más eficiente en la subfamilia móviles.

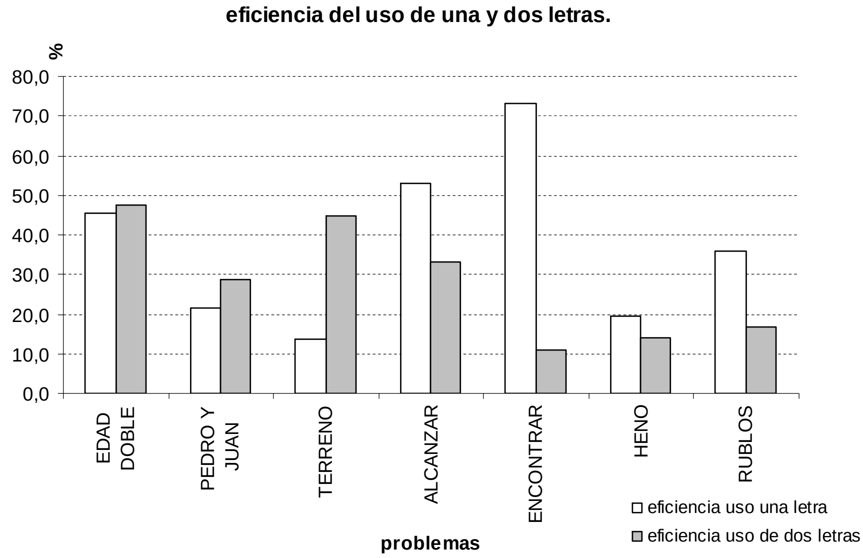


Fig.5.4- Eficiencia del uso de una o dos letras en cada uno de los problemas que requieren el uso de una letra. Población: totalidad de los estudiantes

- que considerando la totalidad de los problemas y los cursos a lo que pertenecen los estudiantes, ver tabla 5.25, la eficiencia del uso de una o dos letras depende del curso siendo semejante para los cursos 2º y 3º pero diferente para el curso 1º en el que la eficiencia del uso de una letra es superior: 43,2% frente al 14,8%. La superioridad de la eficiencia en el uso de una letra en el curso 1º es manifiesta en la totalidad de los problemas, esto se afirma tras la comparación de las columnas correspondientes al curso 1º en las tablas 5.23 y 5.24.

nº de letras y porcentaje de igualdades correctas		
	1-letra	**2-letras**
curso 1º	43,2	14,8
curso 2º	21,8	23,2
curso 3º	47,3	43,3
	37,4	28,0

Tabla 5.25.- Eficiencia del uso de una o dos letras en la totalidad de los problemas que requieren el uso de una letras. Cursos 1º,2º,3º.

- que considerando individualmente los problemas y los cursos puede verse que los estudiantes del curso 1º para algunos problemas nunca usan dos letras, caso del problema ALCANZAR o cuando lo hacen su eficiencia es nula, caso de los problemas ENCONTRAR, HENO y RUBLOS. Que los estudiantes de 2º curso tienen asimismo una eficiencia nula cuando usan dos letras con problemas de la subfamilia MÓVILES. Que los estudiantes de 3º aunque tengan menor eficiencia cuando usan dos letras que una, 43,3% frente a 47, 3% la eficiencia es más regular con el conjunto de los problemas cuando usan dos letras, obsérvese que la eficiencia varia entre el 9,1% y 100% para el uso de una letra y entre el 22,9% y el 69,8% para los problemas de dos letras.

c) El número de letras y el número de cantidades por las que pregunta el problema.

La tabla 5.26 muestra el porcentaje de igualdades que contienen una letra, según el problema pregunte por una o por dos cantidades. La tabla muestra que cuando el problema pregunta por una cantidad, el predominio corresponde a las igualdades que usan una sola letra, 69,2%, y cuando el problema pregunta por dos cantidades las igualdades que usan una o dos letras se reparten en partes iguales, 50,3% . El análisis de lo que ocurre en los diferentes cursos es un reflejo de la apuntada tendencia a usar más letras en los cursos 2º y 3º, esto es, un predominio menor de igualdades con una letra cuando se pregunta por una cantidad y un desempate a favor del uso de dos letras cuando se pregunte por dos cantidades.

problemas que requieren el uso de una letra.

Uso de 1-letra en las igualdades	*Los problemas preguntan por*	*Los problemas preguntan por*
curso	*1-cantidad*	*2-cantidades*
1º	81,6	63,8
2º	57	40,4
3º	68,9	46,8
total	**69,2**	**50,3**

Tabla 5.26.-Porcentaje de igualdades con 1-letra según el número de cantidades por las que pregunta el problema. Cursos. El complementario a 100 corresponde a igualdades con dos letras.

5.3.4.- Estudio de las igualdades incorrectas.

5.3.4.1.- De la diversidad de las igualdades incorrectas.

En las tablas del anexo **A.5.1** se pueden observar para cada uno de los problemas, las producciones incorrectas concretas encontradas en las resoluciones y la frecuencia de cada una de ellas, en cada uno de los cursos. La tabla 5.27 contiene para cada problema el número total de igualdades incorrectas producidas, por los estudiantes de entre los 258 a los que se les propuso el problema y que produjeron una igualdad incorrecta. En la tabla 5.27 consta asimismo el número de producciones diferentes para cada uno de los problemas.

Antes de comentar cualquier resultado, es menester señalar que lo que se diga respecto de los problemas ALCANZAR, ENCONTRAR y CAVAR; a la hora de ser tomado como general, debe de tenerse en cuenta que proviene de un escaso número de igualdades incorrectas, ello a pesar del tamaño de la muestra de estudiantes utilizada.

Lo primero que puede llamar la atención, en la tabla 5.27, es el elevado número de producciones incorrectas que contiene cada uno de los problemas, donde el número de producciones diferentes se mueve entre las dos y las tres decenas. Dicho número sobrepasa el número de errores diferentes contenidos en el catalogo de errores de trabajo

Problema	numero de igualdades incorrectas producidas	numero de producciones diferentes
MIT Y TERC P	89,0	**20**
DES EN 4 PAR	136,0	**21**
EDAD DOBLE	127,0	**33**
PEDRO YJUAN	142,0	**20**
TERRENO	103,0	**30**
ALCANZAR	*23,0*	**11**
ENCONTRAR	*14,0*	**10**
LIEBRE Y GA	56,0	**30**
CAVAR	*20,0*	**15**
HENO	44,0	**23**
RUBLOS	75,0	**31**
MECA	149,0	**32**
DINERO	159,0	**28**

Tabla 5.27.- Número total de igualdades incorrectas encontradas y número de producciones diferentes. N=258.

Debe de decirse para aclarar esto que: en la concepción de error usada en la confección de catalogo de errores, los errores se conciben como consecuencia del uso inadecuado de los operadores del espacio del problema, requiriendo el proceso de traducción en su completitud del uso reiterado de alguno de estos operadores.

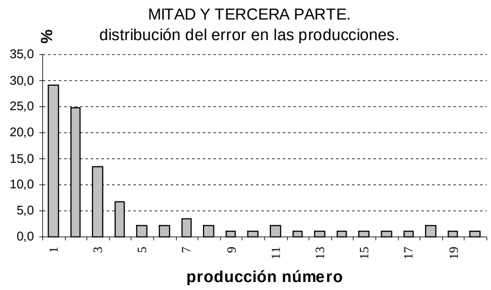
Así, si en un determinado proceso de traducción se han usado los operadores a, b, c, d, e, en la siguiente secuencia: a, b, c, c, b, b, a, c, b, b, d, d, a, e, y un determinado uso inadecuado del operador b ocurre en cualquiera de los momentos en los que este actúa; su actuación conducirá a declarar, que el proceso de traducción o la igualdad producida por dicha secuencia de operadores contiene el error tal, -aquel con el que se ha calificado el uso inadecuado del operador b- y el aspecto de la igualdad será diferente según el uso inadecuado se haya producido la primera vez que actúa el operador b, la segunda,.., o la última.

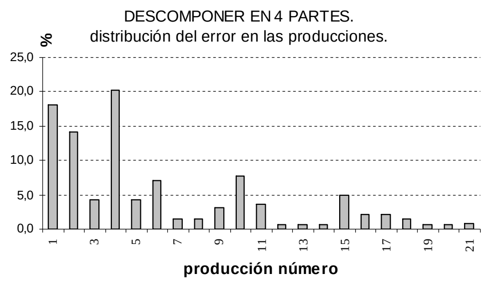
Por otro lado, las igualdades incorrectas se han agrupado en producciones y únicamente constan en una producción las igualdades que son unas replicas de las otras. Ello conlleva, que una producción difiere de otra bien cuando contiene un error diferente o una combinación de ellos diferente, o bien cuando contiene los mismos errores y combinaciones de ellos pero teniendo lugar en distintos momentos de la construcción de las distintas expresiones algebraicas e igualdades que el proceso de traducción requiere. Esta manera de mirar las cosas conduce teóricamente a esperar para un problema, un número apreciable de producciones incorrectas diferentes para cada problema, como ha sucedido.

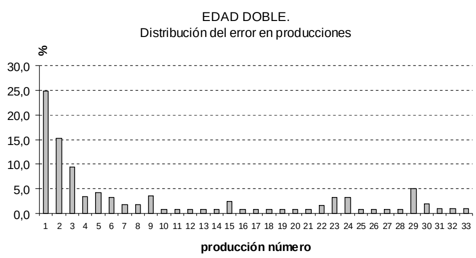
Así, lo sucedido y la metodología adoptada de agrupar las igualdades en producciones puede ser es un inconveniente, pues dificulta la catalogación del error pretendida. Ahora bien, dicha manera también conduce teóricamente a esperar una distribución relativamente homogénea de las igualdades en producciones. De modo que, cuando los datos nos muestren para un problema una producción con una frecuencia apreciable, los datos nos están indicando que no estamos ante una producción meramente casual, debida a un uso inadecuado esporádico de los operadores por algunos estudiantes, sino ante una producción tal que se ha producido quizá porque alguna de las características del problema inducen, a que se haga un mal uso de los mismos operadores y en los mismos momentos por un número significativo de los estudiantes. No obstante lo dicho, un conjunto de producciones diferentes de frecuencia baja pueden contener todas ellas el mismo error, como consecuencia del mal uso de un determinado operador en distintas aristas o vértices.

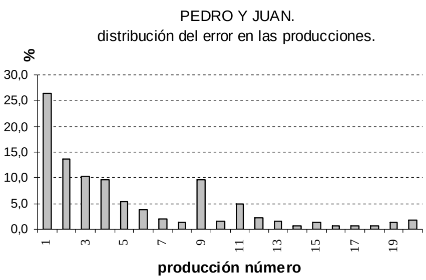
5.3.4.2.-La distribución del error en las producciones incorrectas.

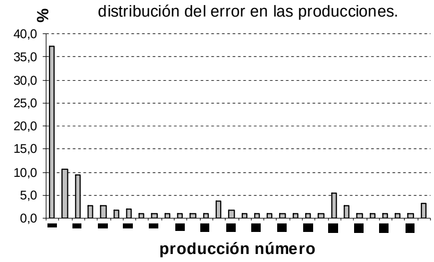
La frecuencia de cada una de las producciones incorrectas fue muy desigual como se muestra en las figuras 5.5.

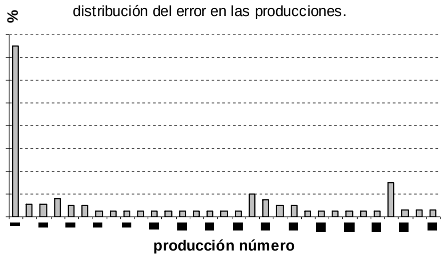


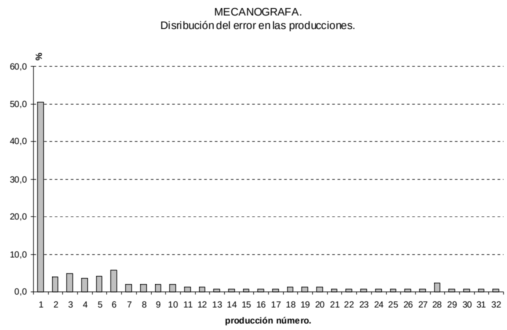


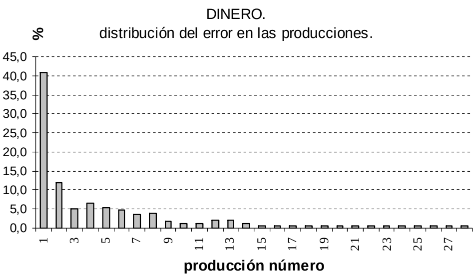


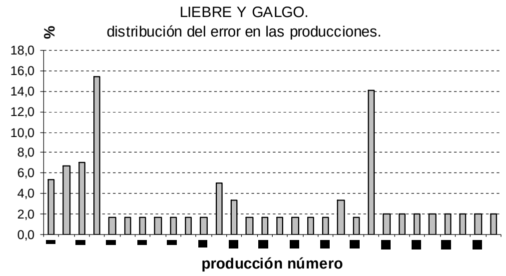


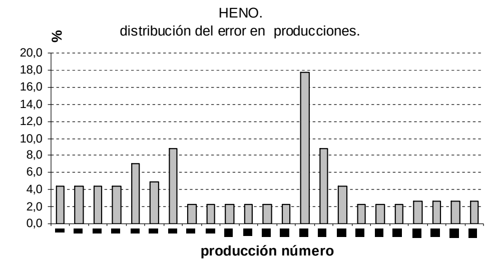


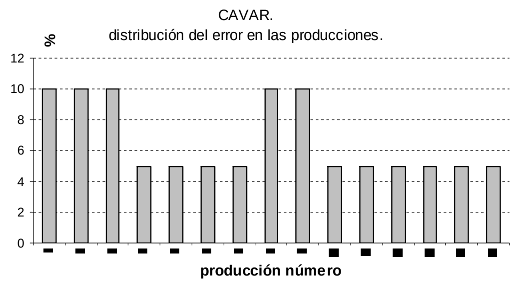


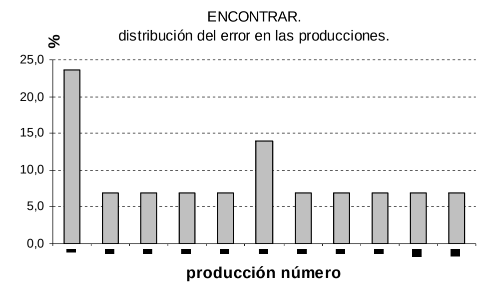












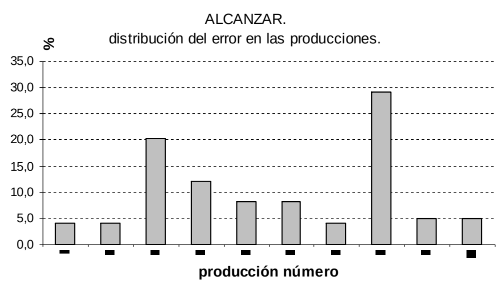


Fig.5.5.- Para cada problema. Distribución del error en producciones o Frecuencia relativa de cada producción.

Nota.- Para la observación de la distribución del error en producciones debe de recordarse que la numeración de las producciones está ordenada, no sólo por frecuencia sino también en función de si la producción fue encontrada en tres, dos o un curso, ver 5.2.

De la observación de la figura 5.5, se desprende que en 8 de los problemas el error tiende a acumularse en unas cuantas producciones, pero que a pesar de este hecho el resto de las producciones suponen un porcentaje considerable del error. Las producciones en las cuales tiende a acumularse el error son las que tienen una numeración más baja, esto es, las que fueron encontradas en más de un curso. La distribución del error en los problemas LIEBRE Y GALGO y HENO es diferente a la de los 8 problemas anteriores, esto puede deberse o bien al tamaño de la muestra, 56 y 44 igualdades respectivamente, que nos podría indicar que la muestra no nos daría una representación significativa de la distribución del error en estos problemas, o bien si consideramos la muestra suficiente, de una distribución del error diferente debido a las características de estos problemas. Por su lado, en los ya mencionados ENCONTRAR, ALCANZAR, y CAVAR donde la muestra de igualdades utilizadas no supera la treintena la distribución del error es casi uniforme en las producciones, apenas apuntando a alguna de ellas como la mas frecuente.

5.3.4.3.-Las producciones incorrectas. Distribución en cursos. Producciones incorrectas persistentes, compartidas y propias.

No en todos los cursos se encontraron para cada problema las mismas producciones incorrectas, además, como se muestra en la Tabla 5.28 el número de producciones de cada problema difirió de un curso a otro, ocurriendo que el número de producciones incorrectas en cada curso no superó la veintena, siendo este número menor en el curso 3º, prácticamente la totalidad de los problemas, mientras que dicho número fue superior en primero o en segundo dependiendo del problema considerado.

Por otro lado, se encontraron producciones incorrectas que fueron producidas por estudiantes de los tres cursos, de dos cursos y de un solo curso, a las producciones encontradas en los tres cursos les diremos aquí producciones persistentes, compartidas a las encontradas en dos cursos y propias de dicho curso a las encontradas exclusivamente en un curso.

El número de producciones persistentes sólo superó la media docena en el problema DINERO, ver Tabla 5.29, ocurriendo que para algunos problemas CAVAR, ALCANZAR, ENCONTRAR no se encontró ninguna producción persistente. Asimismo, tampoco se encontró ninguna producción persistente en el problema HENO y la única producción persistente encontrada en el problema LIEBRE Y GALGO únicamente daba cuenta de un 5,4% del error total de dicho problema.

El número de producciones compartidas por cualesquiera dos cursos fue menor que el número de producciones persistentes en los problemas en que éstas últimas se encontraron, excepto en caso de los problemas RUBLOS y MITAD Y TERCERA PARTE. Esto contribuye a señalar a las producciones persistentes como las que contendrían los errores propios del problema. Además, el número de producciones propias de cada curso fue mayor que el número de producciones persistentes o compartidas en los cursos 1º y 2º en todos los problemas excepto en el problema DINERO. Sin embargo, el número de producciones propias del curso 3ª fue menor al número de producciones persistentes en la mayoría de los problemas.

problema/curso	1º	2º	3º	**total**
MIT Y TERC P	17	6	4	**20**
DES EN 4 PAR	12	17	7	**21**
EDAD DOBLE	18	17	13	**33**
PEDRO YJUAN	10	17	12	**20**
TERRENO	21	14	5	**30**
ALCANZAR	2	5	3	**11**
ENCONTRAR	4	7	1	**10**
LIEBRE Y GALG	10	13	12	**30**
CAVAR	6	10	1	**15**
HENO	12	12	6	**23**
RUBLOS	16	12	8	**31**
MECA	15	18	13	**32**
DINERO	21	17	12	**28**

Tabla 5.28.- Número de producciones incorrectas encontradas en cada uno de los cursos.

Problemas	1ºy 2ºy 3º	1ºy2º	1ºy3º	2ºy3º	dos o más cursos	sólo 1º	sólo 2º	sólo 3º
MIT Y TERC P	**2**	*3*	*2*	*0*	***7***	17	3	0
DES EN 4 PAR	**4**	*2*	*1*	*2*	***11***	3	6	1
EDAD DOBLE	**4**	*2*	*1*	*2*	***9***	10	9	5
PEDRO YJUAN	**6**	*2*	*2*	*3*	***13***	0	6	1
TERRENO	**3**	*3*	*0*	*1*	***7***	15	7	1
ALCANZAR	**0**	*0*	*0*	*0*	***0***	2	5	3
ENCONTRAR	**0**	*0*	*0*	*1*	***1***	4	6	0
LIEBRE Y GALGO	**1**	*1*	*1*	*1*	***4***	7	10	9
CAVAR	**0**	*1*	*0*	*1*	***2***	5	8	0
HENO	**0**	*2*	*1*	*2*	***5***	6	6	4
RUBLOS	**1**	*0*	*2*	*1*	***4***	12	10	4
MECA	**6**	*0*	*0*	*2*	***8***	9	10	5
DINERO	**8**	*3*	*0*	*3*	***14***	10	3	1
total	**35**	*19*	*11*	*19*	***86***	102	90	34

Tabla 5.29.- Número de producciones encontradas en tres, dos o un curso.

El examen del porcentaje del error en el conjunto de problemas en los que se encontraron producciones persistentes, excepto LIEBRE y GALGO, que explican las producciones persistentes compartidas o propias se presenta en la Tabla 5.30.

persistentes	compartidas	propias
60,8	15,7	23,5

Tabla 5.30.- Porcentaje del error que corresponde a producciones persistentes, compartidas o propias.

Como se desprende de dicha tabla 5.30 el conjunto de producciones persistentes representa la parte más sustancial del error. Esto es también así cuando se examinan individualmente los problemas como se hace en la Tabla 5.31 Dicho porcentaje es superior al 50% excepto en el caso de los problemas RUBLOS (37,6%) y superior al 75% en los problemas MECANOGRAFA y DINERO.

El 15,7 % del error que suponen las producciones compartidas se distribuye 1º y 2º (7,3%), 2º y 3º (5%) 1º y 3º(3,8%) de modo de es mayor cuando los cursos están mas próximos en el currículo. Por su lado el porcentaje que corresponde a producciones propias es similar en 1º y en 2º , 9,7% y 9,2% respectivamente y menor en 3º (5,1%).

cursos	1ºy2ºy3º	1ºy2º	1ºy3º	2ºy3º	más de dos cursos	sólo 1º	sólo 2º	sólo 3º
MIT Y TERC	**53,9**	*22,5*	*5,6*	*0*	***82,0***	13,5	3,4	0
DES EN 4 P	**56,8**	*14*	*3,1*	*11,3*	***85,2***	2,1	11,9	6,8
EDAD DOBL	**53,1**	*7,5*	*1,8*	*5,5*	***67,9***	10	13,3	10
PEDRO YJUA	**69,2**	*3*	*11*	*8*	***91,2***	0	5,6	1,7
TERRENO	**57,3**	*7,3*	*0*	*2*	***66,6***	19	8	3
ALCANZAR	**0,0**	*0*	*0*	*0*	***0,0***	8,1	52,8	39,1
ENCONTRAR	**0,0**	*0*	*0*	*0*	***0,0***	23,6	27,8	48,6
LIEBRE Y G	**5,4**	*6,7*	*7*	*15,4*	***34,5***	11,7	23,5	30,2
CAVAR	**0,0**	*10*	*0*	*10*	***20,0***	30	50	0
HENO	**0,0**	*17,7*	*7,1*	*4,9*	***29,7***	22,1	37,6	10,6
RUBLOS	**37,6**	*0*	*5,6*	*4,1*	***47,3***	17,7	21,6	13,5
MECA	**76,8**	*0*	*0*	*4*	***80,8***	9,5	8,3	5,3
DINERO	**81,9**	*4,2*	*0*	*5,3*	***91,4***	6	1,8	0,7
total(*)	**60,8**	*7,3*	*3,8*	*5,0*	***76,5***	9,7	9,2	5,1

Tabla 5.31.- Porcentaje del error que suponen las producciones encontradas en tres, dos o un curso

Respecto de las producciones persistentes, es importante señalar, que cuando se examina el error que suponen del error total de cada problema en cada curso, ver tabla 5.32 y fig. 5.6, este muestra ser también sustancial en cada uno de los cursos con escasas desviaciones respecto al error total correspondiente a los tres cursos. Esto nos podría, por fin, permitir señalar a las producciones persistentes como aquellas que dan cuenta de los errores que son fruto de las características propias del problema dado que se pueden encontrar no sólo en un porcentaje sustancial en cada curso sino que éstas producciones se siguen encontrando en porcentajes parecidos cursos sucesivos.

problema	error total	**error en 1º**	**error en 2º**	**error en 3º**
MIT Y TERC P	53,9	44,7	51,9	86,7
DES EN 4 PAR	56,8	64,9	40,6	74,3
EDAD DOBLE	53,1	57,8	47,6	53,6
PEDRO YJUAN	69,2	84,2	75,4	47,2
TERRENO	57,3	43,9	34,5	87,9
RUBLOS	37,6	29,2	40,6	42,1
MECA	76,8	57,1	82,2	82,9
DINERO	81,9	69,6	87,0	86,0

Tabla 5.32.- Porcentaje del error que suponen las producciones persistentes. Del error total y en cada uno de los cursos. No se incluyen los problemas que carecen de producciones persistentes.

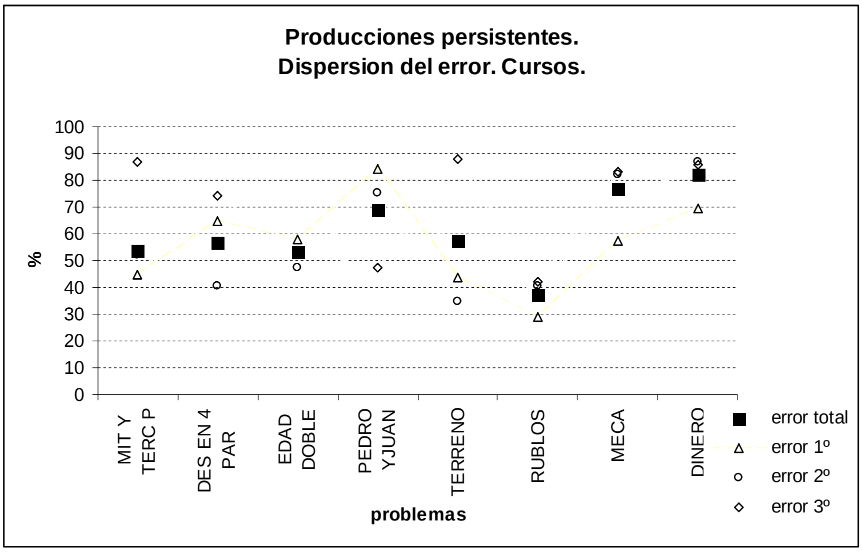


Fig. 5.6.- Problemas y producciones persistentes. Porcentajes del error total y del error en cada uno de los cursos.

5.3.4.4.- Los errores concretos encontrados en las resoluciones.

La totalidad de las producciones incorrectas concretas encontradas en las resoluciones pueden observarse en el anexo **A5.1**, el examen de las mismas con el diagnóstico de los errores concretos que contienen en los informes del anexo **A5.3**, aquí nos centraremos fundamentalmente en exponer los errores encontrados en las producciones persistentes para cada uno de los problemas en los que se encontraron producciones persistentes. Para la calificación de los errores concretos encontrado nos serviremos del catalogo provisional de errores que consta en **2.4.3**.

Las producciones incorrectas persistentes encontradas en cada uno de los problemas y el porcentaje que representa cada una en cada curso y del total del error vienen dados en las tablas que siguen.

Subfamilia: Ábaco.

MITAD Y TERCERA PARTE.-Estoy pensando en un número tal que la suma de su mitad y su tercera parte es 7 unidades mayor que su cuarta parte. ¿Cuál es dicho número?

Producciones incorrectas	**1º**	**2º**	**3º**	**Total**
1 $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=7\frac{x}{4}$	14,9	25,9	80,0	**29,2**
2 $x+\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=\frac{x}{4}+7$	29,8	25,9	6,7	**24,7**

La producción nº 1 contiene un error de operación en la expresión algebraica $7\frac{x}{4}$ fruto de tomar una comparación aditiva por una comparación multiplicativa.

La producción nº 2 se interpreta como consecuencia de una posible tendencia a "no dejar aislada la incógnita del problema".

Además de estas producciones persistentes se encontraron otras producciones compartidas que contenían errores de inversión: las producciones nº 4 y 6, del error total del que daban cuenta dichas producciones era el 8,9 %.

nº 4 : $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=\frac{x}{4}-7$ nº 6: $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+7=\frac{x}{4}$

DESCOMPONER EN 4 PARTES.- Descomponer un número en cuatro partes de modo que si se resta 4 de la primera, se suma 4 a la segunda, la tercera se multiplica por 4, y la cuarta se divide por 4, se obtiene el mismo número en todos los casos.

Producciones incorrectas	**1º**	**2º**	**3º**	**total**
1 $(x-4)+(x+4)+4x+\frac{x}{4}=x$	32,4	14,1	11,1	**18,0**
2 $\frac{x}{4}-4+\frac{x}{4}+4+4\frac{x}{4}+\frac{x}{4}:4=x$	21,6	17,2	2,9	**14,1**

3 $\frac{x}{4}-4=y$ $\frac{x}{4}+4=y$ $\frac{x}{4}\cdot 4=y$ $\frac{x}{4}:4=y$	5,4	4,7	2,9	**4,3**
4 a–4=x b+4=x c*4=x d:4=x	5,4	4,7	57,1	**20,3**

La producción incorrecta nº 1 contiene un error de polisemia, ya que se utiliza la misma letra x para representar al número que se descompone y a cada una de las partes en las que éste se descompone, las partes en que el número se descompone se consideran además iguales. Por otro lado, esta producción contiene un error de igualdad, ya que se suman las partes, transformadas por las operaciones indicadas, para obtener el número que se descompone.

En la producción incorrecta nº 2 se comienza por suponer equivocadamente que las partes en que el número se descompone son iguales, se representan por $\frac{x}{4}$ - un error de concepto-, conteniendo además esta producción un error de igualdad por las razones apuntadas anteriormente.

En la producción incorrecta nº 3 también se supone que las partes en que el número se descompone son iguales.

La producción incorrecta nº 4 no contiene ningún error es meramente una producción inacabada.

En este problema además abundan producciones compartidas o propias que contienen el citado error conceptual.

Subfamilia: Edades

EDAD DOBLE.-La edad de una persona es doble de la de otra. Hace siete años la suma de las edades de las dos personas era igual a la edad actual de la primera. ¿Cuál es la edad de cada una?

Producciones incorrectas	**1º**	**2º**	**3º**	**Total**
1 (x–7) + (2x–7) = x	20,0	35,7	17,9	**24,9**
2 (2x+x) –7 = 2x	33,3	2,4	7,1	**15,3**
3 x=2y (x+y)–7 =x	2,2	4,8	25,0	**9,5**

4 y=2x (x+y)–7=2x	2,2	4,8	3,6	**3,5**

La producción nº 1 contiene un error de igualdad, ya que la suma de las edades se ha igualado a la edad de la segunda persona -la más joven- y no la primera como dice el enunciado del problema.

Las producciones nº 2, 3 y 4 contienen una expresión algebraica arbitraria (x+y)–7, que tiene la intención de expresar la suma de las edades de las dos personas hace siete años. La comparación de la expresión (x+y)–7 con la expresión correcta (x-7) + (y-7) lleva a denominar a este error, error de distribución.

Por otro lado, es de destacar en este problema otro error probablemente relacionado con la lectura que los estudiantes hacen de la igualdad. De este hecho, observado en varias producciones con dos literales, podemos dar cuenta examinando la producción nº 29 : x=2y, (x–7)+(2y–7)=x; en ésta producción, establecida la primera igualdad, para la expresión de las edades de la 1ª y 2ª persona hace siete años, (x-7) y (2y-7), no se utilizan las literales x e y en la segunda igualdad, sino el primero y el segundo miembro de la primera igualdad establecida –a la izquierda-, como si en uno y otro miembro de esta primera igualdad se refiriesen precisamente las edades de las dos personas y no la edad de una de ellas referida de dos modos diferentes.

PEDRO Y JUAN.- Pedro dice a Juan: Tengo dos veces la edad que tenía cuando tenía la edad que tienes tú. Cuando tú tengas la edad que yo tengo ahora, entre los dos tendremos 63 años. ¿Cuáles son nuestras edades actuales?

Producciones incorrectas	**1º**	**2º**	**3º**	**Total**
1 p = 2j p+2j = 63	18,4	3,3	8,3	**26,4**
2 p = 2j 2j+j = 63	42,1	1,6	5,6	**13,6**
3 2p = j p+j = 63	10,5	11,5	8,3	**10,3**
4 2p = j 2p+j = 63	2,6	13,1	11,1	**9,7**
5 j, 2j 2j+4j = 63	5,3	3,3	8,3	**5,3**
6 j, 2j 2j+2j = 63	5,3	1,6	5,6	**3,8**

La edad de una persona es una cantidad variable, digamos *x*, que se modifica irremisiblemente con el transcurso del tiempo. Aun así, en el contexto de los problemas de edades cuando se designa por *x* a la edad de una persona, esta *x* no suele designar la edad de dicha persona en cualquier momento, sino en un momento determinado donde *x* tiene un valor preciso. Ello, obliga a que en los problemas verbales en los que se menciona, la edad de una misma persona en distintos momentos, si estas edades tienen valores desconocidos deban de referirse por letras diferentes, lo contrario, esto es la asignación de una letra a la edad de una persona y considerar que esta letra designa la edad de dicha persona en cualquier instante que se considere, conlleva un uso polisémico de dicha letra.

Por otro lado, una vez designadas por letras las edades de Pedro, Juan o Pedro y Juan, deben de designarse por medio de expresiones algebraicas las edades de las dichas personas en otros momentos pasados o futuros lo que supone una cierta dificultad. Además constando en el enunciado una relación de comparación multiplicativa entre las edades cabe esperar ciertos errores de inversión. Pues bien:

Las producciones nº 3 y nº 4 contienen un error de inversión $2p = j$. La producción nº 3 contiene además un claro error de polisemia ya que en la primera igualdad p y j pueden ser leídas como edades actuales y en la segunda como edades futuras.

En la producción nº 1: $p = 2j$, $p+2j = 63$; en la segunda igualdad la expresión $p+2j$ es arbitraria, si p designa la edad de Pedro en el futuro tenemos un uso polisémico de la letra p, y si p designa la edad de Juan en el futuro la expresión 2j designaría la edad de Pedro en el futuro, en contra de lo afirmado en la primera de las igualdades. Esto es, lo que parece haber ocurrido en esta segunda igualdad, así, como en otras de las producciones persistentes nº 2 o nº 6 es que solamente se ha expresado la edad de uno de los personajes en el futuro.

La producción nº 5 : j, 2j, $2j+4j = 63$ es singular y puede considerarse como la expresión de una creencia: si la edad de una persona se duplica, la edad de la otra persona debe de proceder de modo análogo, esto es, duplicándose. Este patrón de conservación, de la constante de proporcionalidad entre las edades de dos personas en el transcurso del tiempo, está en contradicción con la conservación en la realidad, de la diferencia de edades entre las mismas.

Subfamilia: Geometría.

TERRENO.- El ancho de un terreno rectangular es 2/3 de su largo. Si ambas dimensiones se aumentan en 2m, el área aumenta en 64 m^2. ¿Cuáles son las dimensiones de este terreno?

Producciones incorrectas	1º	2º	3º	Total
1 $(\frac{2}{3}x+2)(x+2)=64$	31,7	17,2	57,6	**37,2**
2 $x=\frac{2}{3}y$ $(x+2)(y+2)=64$	2,4	3,4	24,2	**10,6**
3 $x+\frac{2}{3}x+2+2=64$	9,8	13,8	6,1	**9,5**

Lo que es característico de las tres producciones persistentes encontradas en este problema es la presencia en ellas de un error de igualdad. Esto es, concibiendo este problema como una generalización de los problemas aditivos de cambio, la cantidad final es igualada a la cantidad de cambio. En la producción nº 3, además, en el primer miembro la expresión algebraica que se encuentra en el primer miembro, no designa al área sino al semi-perímetro, ello puede deberse a un confusión o a un error conceptual como muestran otras producciones de este problema, donde en el primer miembro figura asimismo una expresión algebraica carente de toda estructura multiplicativa.

Subfamilia: Móviles.

El único problema de esta subfamilia en la que se encontraron producciones persistentes fue en el problema LIEBRE Y GALGO.

LIEBRE Y GALGO. Una liebre era perseguida por un galgo al que llevaba 50 saltos de ventaja. La liebre daba 4 saltos mientras que el galgo daba 3, pero 2 saltos del galgo miden tanto como 3 saltos de liebre. ¿Cuántos saltos deberá dar el galgo para alcanzar a la liebre?

Producciones incorrectas	**1º**	**2º**	**3º**	**Total**
1 3l=2g 4g=3l +50	7,7	4,0	5,6	**5,4**

La producción que puede ser tomada como un resumen del enunciado escrito a la manera algebraica, nos muestra dos igualdades que se pueden leer como correctas siempre que en la primera de las igualdades se entienda que *l* y *g* designan la medida de un salto de liebre y de galgo. En la segunda igualdad, como 50 es un numero de saltos 3l debe serlo, al igual que 4g; esto es, 3l y 4g son el número de saltos dados por el galgo y por la liebre en el tiempo que transcurre hasta alcanzarse, en contra de lo que parece sugerir la igualdad producida (que aun leída como resumen del texto contiene un error de inversión, no puede dar más saltos el galgo que la liebre). Luego *l* designa tiempo y *g* también designa tiempo (precisamente el mismo) luego se están usando dos literales para designar la misma cantidad. Para terminar, en esta producción, para poder leer con cierto sentido lo producido, se debe proceder con un uso polisémico de las letras y suponer la designación múltiple del tiempo transcurrido hasta alcanzarse y percatarse del error de inversión entre 3l y 4g.

Este problema, que en mi opinión tiene como una de las primeras dificultades la elección de incógnitas con un significado preciso, conduce a que los estudiantes en su resoluciones se den dos literales con el significado de l- libre o g-galgo y asocien cualquier cantidad con que pueda describirse el movimiento de estos animales con l o g. Otra de las dificultades, que tiene este problema, es la dificultad en la comparación de los espacios recorridos, que debe hacerse con los espacios medidos por la misma unidad, o bien saltos de liebre o bien saltos de galgo. Ello conduce, a que en una inmensa mayoría de las producciones de este problema consten las expresiones 3l y 2g, 4g y 3l, involucradas de alguna manera en una y otra de las igualdades, la segunda de las igualdades contiene en general expresiones algebraicas arbitrarias y la primera es en general 3l = 2g siendo de anotar que no falta la igualdad 2l = 3g que muestra el *error de inversión* casi siempre presente en toda relación de comparación multiplicativa.

Es de anotar asimismo que algunas producciones de las más frecuentes en este problema contienen tres ecuaciones y dos incógnitas. Así:

4l=3g 3l=2g (4 ∗3)l+(3 ∗ 2)g=50
4l=3g 3l=2g l=g+50

Subfamilia: Otros.

RUBLOS.-Una escuela rusa compra libros para la biblioteca. Si los paga con billetes de 3 rublos, la escuela tiene que dar 8 billetes más que si los paga con billetes de 5 rublos. ¿Cuánto cuestan los libros?

Producciones incorrectas	1º	2º	3º	total
1 3**x**+8 = 5**x**	29,2	40,5	42,1	**37,6**

La única producción persistente encontrada contiene un error de polisemia, **x** se emplea para designar el número de billetes de 3 y el número de billetes de 5. Y también contiene un error de homogeneidad en la expresión 3x+8 donde se suman rublos y billetes. Este mismo error de homogeneidad aparece asimismo en otras producciones que contienen las expresiones 3x+8, 3x–8, 5x+8, 3+5y, 5y–8.

En el anexo A5.3 se discute la producción nº 1 junto con otras encontradas en el problema RUBLOS buscando una posible explicación de la alta frecuencia con que esta producción es encontrada y se acaba proponiendo que:

a la producción 3x+8 = 5x puede encontrársele sentido siempre que:

1.– El signo igual no se entienda como que iguala las cantidades referidas por las expresiones algebraicas que aparecen a su izquierda y a su derecha sino que lo que iguala es el significado que se les atribuye a dichas expresiones.

2.– Las expresiones algebraicas no se consideren expresiones algebraicas formales – bien construidas en un uso competente del MC - sino expresiones de aspecto algebraico, lo que quiere decir que operaciones y literales se entremezclan por signos de operaciones que no pueden entenderse como representando operaciones estrictamente aritméticas.

3.– Las literales utilizadas en la construcción de las expresiones algebraicas tengan un estatus polisémico (por ejemplo, que *x* represente el nº de billetes, sean de la clase que sean,) cuando representen cantidades, o incluso que tengan otros estatus de uso que no apunten ni siquiera a que la literal pueda referir una cantidad, (como por ejemplo: ser una marca para billetes).

MECANOGRAFA.-Una mecanógrafa piensa que si escribe al día 2 páginas más de lo establecido normalmente, acabará el trabajo 3 días antes de lo previsto, mientras que si escribe 4 páginas más al día, acabará 5 días antes de lo previsto. ¿Cuántas páginas tiene que escribir y en cuánto tiempo?

Producciones incorrectas	**1º**	**2º**	**3º**	**total**
1 p+2 = d–3 p+4 = d–5	34,3	57,5	51,2	**50,4**
2 x+2=–3y x+4=–5y	5,7	4,1	2,4	**3,9**
3 x+2=3–y x+4=5–y	2,9	4,1	7,3	**4,8**
4 x+2=3y x+4=5y	2,9	1,4	7,3	**3,6**
5 x+2——y–3 x+4——y–5 (x+2)(x+4)=(y–3)(y–5)	2,9	2,7	7,3	**4,2**
6 x+2=3 x+4=5	8,6	6,8	2,4	**5,9**

DINERO.-Una cierta suma de dinero se repartió a partes iguales entre cierto número de niños. Si hubiera habido dos niños más, cada uno hubiera recibido 100 pts menos; si hubiera habido dos niños menos, cada uno hubiera recibido 200 pts más. ¿Cuántos niños había y cuánto recibió cada uno?

Producciones incorrectas	**1º**	**2º**	**3º**	**total**
1 n+2=d-100 n-2=d+200	30,4	50,7	37,2	**40,9**
2 x+2=100-y x-2=y+200	15,2	11,6	9,3	**11,9**
3 2+y=100-x 2-y=200+x	6,5	5,8	2,3	**4,9**
4 y+2 = (x/y+2) -100 y-2 =(x/y-2)+200	4,3	5,8	9,3	**6,5**
5 (x-2)/(y+200)= (x+2)/(y-100)	4,3	2,9	9,3	**5,3**
6 x/y+2 = z-100 x/y-2 = z+200	2,2	2,9	9,3	**4,7**
7 x+2 = (y/x)-100 x-2 = (y/x) +200	4,3	4,3	2,3	**3,7**
8 (x+2)(y-100) = (x-2)(y+200)	2,3	2,9	7,0	**4,0**

Las producciones persistentes con mayor frecuencia encontradas en los problemas isomorfos MECANOGRAFA y DINERO son:

p+2 = d–3 p+4 = d–5 n+2 = d-100 n-2 = d+200

producciones que muestran un error de igualdad, la primera en el problema MECANOGRAFA cuando una cantidad que se refiere a un cierto número de días se declara igual a otra cantidad que refiere a un cierto número de paginas diarias y la segunda en el problema DINERO que contiene el mismo error, aquí al declarar iguales las cantidades de niños y dinero correspondientes. El resto de las producciones contienen además expresiones algebraicas arbitrarias.

5.3.4.4.-Errores y problemas.

Dado que todos los problemas no presentan los mismos errores persistentes, cabe la posibilidad de indagar, si es posible asociar algunos de los errores encontrados con alguna de las características de los problemas, o del proceso de traducción donde tal error es encontrado. Esto, puede intentarse examinando la tabla 5.33, donde se da cuenta, para los distintos problemas, del porcentaje que representan cada uno de los errores del total de las producciones incorrectas persistentes.

Error	**En el uso de letras**	**Expresión algebraica**	**Expresión algebraica**	**Expresión algebraica**	**Expresión algebraica**	**De igualdad**
problemas	polisemia	inversión	operación	concepto	arbitrarie.	
MIT Y TERC P			66,5		33,5	
DES EN 4 PAR	49,4			50,5		88,1
EDAD DOBLE					53,2	46,8
PEDRO YJUAN	61,9	28,9			7,6	
TERRENO				19,1		100
RUBLOS	100				100	
MECA					29,3	95,1
DINERO					51,1	87

Tabla 5. 33.- Problemas y tipo de error. Porcentaje del tipo de error del error persistente.

En la tabla 5.33, puede observarse que:

-Un uso inadecuado de las letras, concretamente un error de polisemia sólo se encontró en los problemas DESCOMPONER EN 4 PARTES, PEDRO Y JUAN y RUBLOS , precisamente aquellos problemas en los que se usó una letra para designar “un número” y el mismo término número se usaba el enunciado del problema para designar a dos números distintos desconocidos. Se usó una letra para designar la “edad de Pedro” o la “edad de Juan” y siendo esta cantidad por si misma una cantidad variable, la letra asignada se usó como tal y no como incógnita, esto es como la edad que tendrían Pedro o Juan en cada uno de los momentos contemplados en el enunciado del problema y finalmente se usó una letra para designar una cantidad de billetes desconocida y se obvió que los billetes considerados podían ser de dos clases diferentes.

-Solamente se encontró el error de inversión como persistente en el problema PEDRO y JUAN precisamente al expresar mediante una relación de igualdad una relación de comparación multiplicativa entre cantidades, en otros problemas que contienen relaciones de comparación como MITAD y TERCERA PARTE, EDAD DOBLE Y TERRENO también cabría encontrar tal error de inversión en las producciones persistentes. Sin embargo, sólo se encontraron en producciones compartidas o propias. No obstante, es posible que tal error se diese de hecho en el momento de la producción de las resoluciones de los problemas EDAD DOBLE y TERRENO sin embargo por las características de los enunciados de dichos problemas tales errores son indetectables en las producciones acabadas. Por su parte en el problema MITAD y TERCERA PARTE la dificultad que puede representar la traducción mediante una igualdad una relación de comparación entre cantidades se manifiesta como un error de operación al confundir una comparación aditiva con una comparación multiplicativa.

-Los errores de concepto se han encontrado en los problemas DESCOMPONER EN 4 PARTES y TERRENO en el primero manifestando la tendencia a considerar que cuando un número se divide en partes, las partes en que el número se divide deben ser iguales o al menos a designarlas como si lo fuesen , así, si x designa a un número y este se descompone en cuatro partes entonces x/4 designa a cada una de las partes; y en el segundo invocando una relación equivocada, la suma de las dimensiones del rectángulo para expresar el área de un rectángulo.

-Las expresiones algebraicas arbitrarias, se han encontrado prácticamente en todos los problemas, las expresiones algebraicas arbitrarias son expresiones que no refieren ningún número o cantidad del diccionario teórico de cantidades del problema y tales que restaurados en dichas expresiones los errores de inversión o de concepto que contienen debido a un uso inadecuado y puntual de algún operador , estas expresiones seguirían sin referir a cantidad alguna ya que sólo se pueden producir incorporando arcos y vértices que no contiene el grafo teórico del problema, esto es usando relaciones inexistentes.

La finalidad de estas expresiones algebraicas es intentar referir cantidades desconocidas consideradas intermedias por el resolutor. Las expresiones algebraicas arbitrarias suelen contener errores de homogeneidad cuando el problema contempla cantidades de distintos espacios de medida, por ejemplo las expresiones 3x+8, (y–3)(y–5), (x/y-2)+200 de las producciones de los problemas RUBLOS, MECANOGRA y DIDERO.

La presencia de expresiones algebraicas arbitrarias junto con su persistencia indica no sólo la dificultad de un análisis correcto de dichas cantidades intermedias o la adecuada expresión algebraica de dicho análisis sino que la concreta y la misma incorrección en el análisis o la expresión del mismo cae fuera de la ocurrencia personal. Carentes, si la hay, de otra nota general aplicable al conjunto de las diversas expresiones algebraicas arbitrarias del conjunto de los problemas queda como posible atender a algunas de estas expresiones conjeturando una posible explicación individualizada de su producción. Así, las observaciones realizadas en los protocolos que constan en el anexo **A5.3** que son del estilo que sigue::

La expresión arbitraria $x+\frac{x}{2}+\frac{x}{3}$ encontrada en el 33,5 de las producciones del problema MITAD Y TERCERA PARTE persistentes es un hecho difícilmente explicable.

La expresión arbitraria (2x+x) –7 encontrada en el 53,2 de las producciones persistentes del problema EDAD DOBLE se puede atribuir a un error de distribución debido a la no correspondencia de la secuencia textual de las expresiones verbales y algebraicas que expresan una relación concreta entre cantidades.

La expresión arbitraria 2j +4j encontrada en el 7,6 de las producciones persistentes del problema PEDRO y JUAN puede tomarse como la expresión de la concepción errónea de que la relación de proporcionalidad que existe entre dos personas en un determinado momento de su historia (j, 2j) se mantiene invariante en el transcurso del tiempo.

La expresión arbitraria 3**x**+8 encontrada en el 100% de las producciones persistentes del problema RUBLOS puede entenderse en función de algunas de las razones aportadas en **5.3.4.3**

La expresión arbitraria (y–3)(y–5) encontrada en el 4,2% de las producciones persistentes del problema MECANOGRAFA como fruto de un posible uso incorrecto del esquema de la regla de tres.

La expresión (x/y-2)+200 y otras del mismo estilo encontradas en el 51,1 % de las producciones persistentes del problema DINERO como fruto erróneo de la determinación de alguna cantidad cuando habían dos niños menos y tocaron a 200 Pts.más.

- Todas las producciones incorrectas contienen un error de igualdad si consideramos que el número o cantidad que refriere la expresión algebraica en el primer miembro de la igualdad no es la misma que la que refiere la expresión que consta en el segundo miembro. No obstante, en la reconstrucción de la resolución que produce una determinada producción mediante la aplicación de operadores, puede considerarse que en algún momento debe actuar el operador que produce el signo igual. E independiente de la localización temporal del momento de la resolución en que el signo igual se produce, o de que la totalidad de la resolución venga guiada por la pretensión de situar el signo igual entre dos referencias a una cantidad cuyos sentidos se han identificado, o entre dos cantidades que tienen el mismo valor. Parece pertinente decir, como aquí se dice, que el error que contiene una producción es de igualdad cuando en el examen de la producción acabada las cantidades referidas en los miembros izquierdo y derecho ocurra que:

a) refiriendo las expresiones que constan en el miembro izquierdo y derecho cantidades que constan en el diccionario de cantidades del problema, las mencionadas expresiones no refieren la misma cantidad.

b) que no refiriendo las expresiones algebraicas que constan en el miembro izquierdo y derecho cantidades que consten en el diccionario teórico de cantidades del problema, pero que si lo harían, si en las expresiones algebraicas se restaurasen los errores de polisemia, inversión, operación o concepto que contienen dichas expresiones, las mencionadas expresiones restauradas no refieren la misma cantidad.

Y por ultimo, no considerar que contienen propiamente un error de igualdad las producciones que contienen expresiones algebraicas arbitrarias por ser de imposible restauración y por tanto la atribución a esta de una cantidad a la que pretendan referir, considerando meramente a estas igualdades como patológicas en su totalidad.

La tabla 5.33 muestra que se encontraron errores de igualdad en las producciones de los problemas DESCOMPONER EN 4 PARTES, EDAD DOBLE, TERRENO, MECA y DINERO y en todos ellos, tal error en un alto porcentaje de dichas producciones.

En el problema EDAD DOBLE el error consiste en igualar la suma de las edades de las personas hace siete años a la edad de la segunda persona y no a la edad de la primera como declara el enunciado del problema. Las referencias a las dos personas como “una y otra”, en la primera frase del problema, y como “primera” e implícitamente segunda, en la segunda de las frases del problema, hace comprensible dicho error.

En el problema DESCOMPONER EN 4 PARTES el error consiste en la igualación del número que descompone mediante la suma de las partes resultantes de transformar las partes en que este ha sido descompuesto donde en una interpretación favorable se supondría que como cada una de las partes ha sufrido transformaciones inversas estas se neutralizarían y la suma de dichas partes transformadas nos permitiría obtener de nuevo dicho número.

Estos es, en los problemas EDAD DOBLE y DESCOMPONER EN 4 PARTES se igualan cantidades diferentes, se podrían aducir razones para decir que las cantidades que se han igualado tendrían alguna posibilidad de ser iguales. Sin embargo, en los problemas TERRENO, MECANOGRAFA y DINERO el signo igual se interpone entre cantidades que son manifiestamente diferentes, e incluso de espacios de medida diferentes, como en el caso de MECANOGRAFA y DINERO. Así, el área del terreno toda vez que se han incrementado su longitud y anchura y el aumento del área en el problema TERRENO. En los problemas de MECANOGRAFA y DINERO se produce la interposición del signo igual entre cantidades de distintos espacios de medida (p+2 = d–3 , p+4 = d–5 y n+2=d-100 , n-2=d+200) , tal uso del signo igual está lejos de su uso competente y se usa como para indicar que las cantidades entre las que se interpone están asociadas de alguna manera en el enunciado del problema.

5.5.-Resumen de resultados y observaciones empíricas.

1.- Del análisis cuantitativo,

1.1- Para la colección de problemas y las igualdades producidas por los estudiantes se encontraron para las siguientes razones valores que son:

igualdades producidas/ estudiantes = 49, 8 %
igualdades correctas/estudiantes= 16, 2 %
igualdades correctas/ igualdades producidas = 32, 1 %.

1.2.-Los valores de estas razones varían según el curso, siendo superiores en el curso 3º, sobre todo, para la razón igualdades correctas/ igualdades producidas, 46,4%, que llega a doblar el de los cursos 1º y 2º. Para todos los problemas el valor de la razón igualdades correctas/igualdades producidas fue más elevado en el curso 3º que en los cursos 1º y 2º , con la única excepción del problema EDAD DOBLE.

1.3.-El valor de la razón igualdades correctas/ igualdades producidas varia según curso y problema, entre el 0% y el 93,5%. Esto es, cubre casi la totalidad del rango.

1.4.- Para los problemas de las subfamilias ABACO, EDADES y GEOMETRIA se encontró una correlación significativa y alta, del orden de 0.9, entre lo valores de las razones igualdades producidas/estudiantes e igualdades correctas/ igualdades producidas.

2.- De las producciones correctas,

2.1.- Para todos los problemas se encontraron producciones correctas diferentes, con la excepción del problema DESCOMPONER EN 4 PARTES, en más de la mitad de los problemas el número de producciones correctas diferentes es igual o superior a cinco.

2.2.- Para los problemas, en general, en el curso 3º se encontró un mayor número de producciones correctas diferentes que en los cursos 1º y 2º.

2.2.- Dado un problema, ninguna de las producciones correctas diferentes puede considerarse como representativa de la solución del problema, ya que ninguna tuvo una frecuencia superior al 50%. Deben de excluirse de esta afirmación los problemas de la subfamilia ABACO.

2.3.- Para un problema, no parece posible asociar una determinada producción con un curso determinado. Ahora bien, para la mayoría de los problemas hay determinadas producciones que sólo es posible encontrarlas en el curso 3º.

2.4.- En los problemas estudiados se encontraron producciones correctas que eran ecuaciones diferentes -no equivalentes- con la excepción de MITAD Y TERCERA PARTE, DESCOMPONER EN 4 PARTES y CAVAR.

2.5.- Para un problema, siempre hay una ecuación o conjunto de ecuaciones equivalentes que acapara más del 50% de las igualdades correctas, lo que indica que existe una cierta preferencia por la elección de las cantidades que deben ser designadas con una letra.

2.7.- Para un problema, las producciones correctas no contienen siempre un número de letras igual al número de cantidades por las que se pregunta en el problema.

2.8.- Para la mayoría de los problemas, las ecuaciones encontradas como solución del problema contienen aproximadamente en la mitad de los casos más letras del mínimo requerido para ello. Además, cuando se usan más letras del mínimo requerido, la incógnita o una de las incógnitas del problema suelen ser designadas con una letra.

2.9.-Las expresiones algebraicas que contienen las igualdades correctas provienen de una única lectura algebraica del problema. Esto ocurre para la inmensa mayoría de los problemas estudiados. La lectura algebraica considerada es precisamente la postulada por el investigador.

2.11.-Para cada problema, existe una tendencia a igualar una determinada cantidad.

2.12.- Del examen de las expresiones algebraicas que figuran en los miembros izquierdo y derecho de la igualdad, se podría conjeturar que: en los problemas estudiados pueden distinguirse dos modos de construir la igualdad, modo A y modo B.

Modo A.- Donde las expresiones algebraicas que se igualan representan a tres cantidades relacionadas, y una de ellas se dice igual en función de la relación aritmética existente entre ellas.

Modo B.- Donde las expresiones que se igualan representan cuatro cantidades de dos relaciones ternarias que comparten una cantidad. La igualdad refiere la cantidad compartida en cada uno de sus miembros según su pertenencia a una u otra relación.

2.13.- En las subfamilias MOVILES y OTROS se observa una tendencia a construir igualdades según el modo B y del modo A en el resto de subfamilias.

3.- Del número de letras usado en las igualdades, bien sean correctas incorrectas,

a) Problemas que requieren el uso de sólo una letra.

3.1.- Considerando la totalidad de los problemas y el total de los estudiantes el 58,9% de las igualdades contiene sólo una letra; esto es, en aproximadamente un 40% de las igualdades se usan más letras de las necesarias.

3.2.- Considerando el total de los problemas, el uso de sólo una letra lo es en el 71,5%. 47,3% y 53,8% de los estudiantes de los cursos 1º, 2º y 3º respectivamente, de donde se infiere que los estudiantes de los cursos avanzados tienden a usar más letras de las necesarias.

3.3.- Considerando la totalidad de los problemas y estudiantes la eficiencia del uso de sólo una letra es ligeramente superior: 37,4 % frente al 28%. Además, en el curso 1º, la superioridad de la eficiencia en el uso de una letra es manifiesta en la todos y cada uno de los problemas.

3.4.- Cuando el problema pregunta por una cantidad, el predominio corresponde a las igualdades que usan una sola letra, 69,2%, y cuando el problema pregunta por dos cantidades las igualdades que usan una o dos letras se reparten en partes iguales, 50,3%.

b) Para los problemas que requieren del uso de dos letras y no son indeterminados.

3.5.- Para los dos problemas estudiados aquí no se encontraron producciones incorrectas con el uso de tres letras. No obstante lo anterior, entre las producciones correctas, las producciones correctas con el uso de dos letras fueron superiores en porcentaje a las que se usaron tres letras.

4.- De las producciones incorrectas,

4.1.- Para cada problema se encontró un elevado número de producciones incorrectas diferentes. El número de producciones incorrectas diferentes en los distintos problemas está entre las dos y las tres decenas.

4.2.- Para un problema dado, en todos los cursos no se encontraron las mismas producciones incorrectas.

4.3.- El número de producciones compartidas por cualesquiera dos cursos fue menor que el número de producciones persistentes.

4.4.- En la mayoría de los problemas, la frecuencia de cada una de las producciones incorrectas fue muy desigual.

4.5.- En 8 de los 13 problemas, el error tiende a acumularse en unas cuantas producciones, pero que a pesar de este hecho el resto de las producciones suponen un porcentaje considerable del error.

4.6.- En cada problema, el conjunto de producciones persistentes representa la parte más sustancial del error. Dicho porcentaje es superior al 50%.

4.7.- Cuando para las producciones persistentes, se examina el error que suponen del error total de cada problema en cada curso, este muestra ser también sustancial en cada uno de los cursos, con escasas desviaciones respecto al error total correspondiente a los tres cursos.

4.8.- Cabe conjeturar que las producciones persistentes son las que señalan los errores que son propios de un problema.

5.-De los errores concretos encontrados,

5.1.- En las producciones incorrectas se encontró un amplio número de errores cuya descripción de detalle o diagnóstico sólo puede entenderse poniéndolo en relación con el problema concreto en que el error es encontrado o con un uso peculiar del SMS del algebra.

5.2.- La catalogación de los errores en tres categorías: en el uso de letras, en expresiones algebraicas, en igualdades, permitió detectar errores de cada una de éstas y diagnosticarlos de modo más preciso.

5.3.- La presencia de errores de estas categorías en las producciones persistentes de distintos problemas permitiría hablar de estos errores como errores del proceso de traducción algebraico.

5.4.- En los problemas estudiados se diagnosticaron errores de polisemia, de inversión, de concepto, de arbitrariedad y de igualdad.

5.5.- El uso polisémico de una letra, se detectó en problemas en los que en el enunciado un mismo término se usaba en la designación, o como parte de la designación verbal de dos cantidades, por ejemplo: número, edad, billetes.

5.6.- El error de inversión apareció ligado a las expresiones algebraicas que tenían la intención de expresar una cantidad que interviene en una relación de comparación.

5.7.-Las expresiones algebraicas arbitrarias fueron abundantes en todos los problemas y se pueden interpretar como la manifestación de la dificultad del análisis de la cantidad que pretendan expresar, o de que el análisis de alguna cantidad no se ha realizado del modo adecuado.

5.8.- Una de las maneras en que se manifestó el error de igualdad fue así: se declararon iguales cantidades, que sin ser la misma o tener el mismo valor, estas cantidades se podían considerar fuertemente relacionadas, como por ejemplo: por una relación hipotética o de causa efecto.

Capítulo 6

Conclusiones.

En este capitulo, de titulo obligado, que cierra la tesis, me propongo sustancialmente reunir y resumir los apartados de conclusiones, resumen de resultados u observaciones empíricas que figuran en los distintos capítulos, además haré una recapitulación que dé cuenta de las aportaciones que en mi opinión creo haber hecho en esta tesis, bien sean estas aportaciones conceptuales, metodológicas, bien resultados u observaciones fruto de los estudios experimentales realizados, tratando también de poner algunas de estas aportaciones en consonancia. Espero que lo dicho bajo pueda ser tomado como conclusiones.

En cuanto a las aportaciones metodológicas, la aportación más visible ha consistido en usar la noción de grafo trinomial, presentado por Fridman como metalenguaje para los problemas. En primer lugar, se ha adaptado la noción de este objeto matemático para que fuese un objeto útil para representar estructuras de cantidades y relaciones no sólo de problemas de la FPAA sino también de problemas de otras familias como los problemas de probabilidad condicional (Cerdán y Huerta, 2007). Posteriormente, la capacidad de representación de los grafos ha llevado a considerar a éstos como medios idóneos de expresión de algunas nociones teóricas introducidas o precisadas en esta tesis, así la noción de lectura analítica. Además, reuniendo los grafos capacidad de representación y capacidad operativa, también se han usado grafos como: el grafo de la resolución, para expresar lo producido en la resolución o la reconstrucción de la resolución, el grafo de la lectura analítica, para decidir si ésta es aritmética o algebraica, en función del tipo de grafo. Por último, se ha usado un constructo ideal, el grafo teórico del problema como el grafo que contendría todas las cantidades y relaciones que pueden o podrían ser usadas en la obtención de soluciones del problema, indicando además una manera de aproximarse a él. Esta aportación metodológica es fundamental porque permite representar los problemas por objetos matemáticos, pudiendo así reformular las cuestiones que se plantean sobre los problemas en términos de los objetos matemáticos que los representan. Habiéndose sustituido en esta tesis, la correspondencia problemas-ecuaciones, vía modelo de ecuación que proporciona el resultado del problema, por la correspondencia problemas-grafos, vía lectura analítica del problema. Entre otras cosas, porque la lectura analítica puede considerarse un producto anterior en el proceso de traducción algebraica y la fuente de la que obtener la multiplicidad de ecuaciones que pueden escribirse para encontrar posteriormente el resultado del problema.

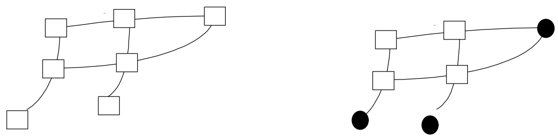
En cuanto a las nociones utilizadas en el estudio teórico se han precisado, reformulado o introducido en esta tesis: cantidad, diccionario de cantidades, lectura analítica, problemas de lectura aritmética y algebraica, problemas isomorfos o equivalentes, complejidad del problema, situación, espacio de problemas de una situación; la mayor parte de ellas expresables o dependientes del grafo, nociones que son exportables a otras familias de problemas. Además, se ha apuntado lo que puede significarse calificando a un problema de aritmético o algebraico y reflexionado sobre lo que supone el uso del método de Análisis-Síntesis o del Modelo Cartesiano como guía en la resolución.

Aquí, donde se tratan problemas en los que la materia de expresión de su enunciado es meramente verbal, tomo como una novedad indicar que lo que se considera como cantidad puede designarse por una tripleta (**x**, **u**, **n**), **x** como valor, **u** como unidad de medida y **n** como nombre o expresión verbal que la refiere e identifica. Esta concepción de cantidad ya permite distinguir en el enunciado del problema las cantidades conocidas y desconocidas, se distinguen por el estado en blanco o no de las componentes **x** o **n**, y también permite observar en el transcurso de la resolución los distintos sentidos en que son referidas dichas componentes, bien sea por expresiones verbales, aritméticas o algebraicas y se ha utilizado como un instrumento metodológico esencial, por ejemplo, para examinar los razonamientos de los estudiantes o para diagnosticar errores.

Esbozada en Puig (1996) la noción de diccionario de cantidades y con la anterior noción de cantidad se ha precisado aquí la noción de diccionario de cantidades, asociándolo a un problema y considerándolo como un diccionario dinámico, de uso, dispuesto siempre a aceptar nuevos términos y nuevas acepciones, nuevas cantidades y nuevos sentidos en que referir las componentes **x** o **n** de cantidades que ya constan en el diccionario. Así, para un problema dado, se pueden considerar varios diccionarios asociados a él, un primer diccionario que contiene las cantidades mencionadas en el enunciado del problema, el diccionario de cantidades de la resolución propio de cada resolución particular y que contiene más cantidades que el anterior sobre todo nuevas acepciones y el diccionario teórico del problema que contendría el conjunto de cantidades susceptibles de uso en cualquier solución del problema.

La noción de lectura analítica se ha introducido aquí de la mano de la discusión del carácter aritmético o algebraico del problema. Una lectura analítica de un problema es la expresión organizada mediante un grafo de la lista de cantidades y relaciones, se obtiene de una lectura del enunciado del problema que presta atención a estos dos elementos: cantidades y relaciones y de un trabajo posterior que las dispone conjuntamente en forma de grafo. Aquí, se ha puesto de manifiesto que diferentes sujetos pueden proporcionar diferentes lecturas analíticas de un mismo problema. También se ha puesto de manifiesto que a partir de una lectura algebraica de un problema se pueden determinar para ella, el mínimo número de letras que se requieren para encontrar una solución y el conjunto de ecuaciones solución del problema.

Los calificativos aritméticos y algebraicos se ven aquí ligados al del sistema matemático de signos aritmético o algebraico que se pone en juego para encontrar una solución del problema. El tipo de grafo que expresa la lectura analítica y suficiente de un problema permite, sin encontrar la solución concreta, decidir sobre el sistema matemático de signos en que es posible encontrarla utilizando esa lectura. Así, en primera instancia se ha decidido aquí no calificar de aritmético o algebraico a un problema sino a su lectura. Dada la multiplicidad de lecturas analíticas de un problema, no es posible clasificar los problemas en aritméticos y algebraicos, sino simplemente hablar de problemas de lectura aritmética o algebraica sin que sea contradictorio que un problema posea ambas lecturas. Si se insiste en llamar a un problema algebraico cuando sólo con el uso del SMS del algebra puede encontrarse o expresarse una solución del mismo, esta cuestión se responde: en teoría, en el gráfico teórico del problema, en la práctica, indagando si tales o cuales problemas se pueden resolver con el uso de tal o cual SMS. Aquí se ha encontrado, que estudiantes de 4º de la licenciatura de matemáticas que encuentran soluciones con el sólo uso del SMS de la aritmética a problemas de lectura algebraica de la situación que se presenta en la figura de la izquierda no pueden encontrar solución sin el uso del SMS del álgebra a un problema cuya lectura algebraica se exprese mediante la figura de la derecha.



La asignación de una letra en la lectura algebraica del problema de la derecha, lleva a formular una ecuación de segundo grado, que se puede reducir a la forma canónica $ax^2+bx+c=0$ con a, b, c, no cero. Esto, podría llevar a pensar que en la práctica, para los problemas que conducen a ecuaciones de 2º grado de la citada forma canónica, los estudiantes, incluso aquellos que están a punto de finalizar su licenciatura, no son capaces de encontrar soluciones sin el uso del SMS del algebra; pero esta es una conclusión, de la que para formularse debería de indagarse al menos en problemas provenientes de otras situaciones.

Es posible la partición de la familia de problemas en clases de problemas mediante la definición de problemas isomorfos y equivalentes. Además, esta partición se puede hacer de distintas maneras, según se quiera precisar en el detalle tanto del tipo de las cantidades consideradas en el problema como en la calificación aritmética o semántica de las relaciones entre ellas. Dos problemas se dicen isomorfos cuando poseen lecturas analíticas que se expresan mediante grafos equivalentes. Y se dicen equivalentes cuando precisando el tipo de cantidades y calificando de modo preciso aritmética y semánticamente las relaciones entre ellas los grafos de lecturas analíticas de los mismos son equivalentes. Por mera deducción teórica los problemas isomorfos o equivalentes comparten el conjunto de soluciones. En la práctica, en el examen de las resoluciones de los estudiantes deberíamos de encontrar para problemas equivalentes soluciones de los estudiantes que fuesen coincidentes. En las indagaciones empíricas realizadas, esto ha sido objeto de observación, y se ha encontrado que los estudiantes 4º de licenciatura han proporcionado idéntica solución aritmética para los problemas LANA y ALGODÓN y RUBLOS que los estudiantes de secundaria para GALLINAS Y CONEJOS y ALCANZAR respectivamente equivalentes a los anteriores. Para las resoluciones en el SMS del álgebra donde el conjunto de ecuaciones solución es muy amplio, se ha encontrado que en el conjunto de igualdades escritas en resolución del problema MECANOGRAFA y su equivalente DINERO se puede constatar la presencia no sólo de igualdades correctas idénticas sino también que muchas de las igualdades incorrectas son también idénticas. Sin embargo, de la otra pareja de problemas equivalentes considerada en los estudios empíricos en el SMS del algebra ALCANZAR y RUBLOS estas observaciones respecto de las igualdades producidas no se pueden confirmar en igual grado dado el pequeño número de igualdades del problema ALCANZAR que se disponían para observar. Que la partición de la familia de problemas en clases de problemas equivalentes se corresponda en la práctica con valores de dificultades similares para problemas pertenecientes a una de las clases solamente se ha explorado y obtenido confirmación de que es una conjetura con base sobre la que indagar.

La complejidad del problema se ha tomado aquí como descrita por la lectura analítica, y para poder decir que un problema es más complejo que otro se ha recurrido a determinadas características del grafo que fuesen cuantificables, como: el orden del grafo, el número de vértices claros, el orden de los vértices, etc.. Como decir que un problema es más complejo que otro es distinto de decir que un problemas es más difícil que otro, lo que se ha explorado en los estudios empíricos es si para problemas de los que unos eran más complejos que los otros, en cuanto que las lecturas analíticas de unos contenían más relaciones elementales que las de los otros, sus dificultades eran asimismo mayores. Lo que se ha encontrado es: que para problemas de complejidad 3,5,7 la dificultad de la solución, del proceso de traducción algebraica y el porcentaje de problemas cuyas resoluciones están inacabadas o contienen errores son significativamente diferentes y se pueden ordenar como los números: 3, 5, 7.

En resumen, en esta tesis, los problemas de la familia no se ven inicialmente como aritméticos ni algebraicos ni como si fuesen de una incógnita, de dos incógnitas, de primer grado, de segundo grado, etc. sino que se ven conformados por clases de problemas que comparten una lectura analítica y es, a posteriori y en función de la decisión que se tome en la lectura analítica para encontrar la solución: asignar o no letras, el número mínimo de letras que tiene que ser asignado y el tipo de ecuación resultante lo que permite utilizar para los problemas los términos utilizados en primer lugar.

Una situación es una generalización de un problema, pero no por la vía de considerar que las cantidades dadas pueden adoptar cualquier valor, que nos conduciría a lo que suele llamarse un modelo. Situación se considera la especificación de un conjunto de cantidades y relaciones entre ellas, sin distinción alguna de si las cantidades especificadas son conocidas o desconocidas. No hay en una situación distinción entre datos e incógnitas. La concreción de cuales de estas cantidades son conocidas o desconocidas nos conduce a un problema, las distintas posibilidades de concreción al espacio de problemas de la situación. Esta sería una manera de mirar los problemas de la FPAA, atendiendo a lo que en ellos permanece invariante: las cantidades y las relaciones entre ellas[57]. Un estudio de esa manera no se ha realizado aquí, sino que se ha procedido de forma inversa, por un lado, explorando el espacio de problemas de una situación mostrando teóricamente que este es tan amplio que tienen cabida problemas con soluciones aritméticas y algebraicas y, por otro, indagando en las resoluciones de problemas del espacio de una situación y observando que los estudiantes ponen en juego en esas resoluciones gran parte de su repertorio de habilidades, lo que ya en si mismo podría ser utilizado en la instrucción. De todos modos lo que se propone no es nuevo ya que así ocurre cuando se estudian por ejemplo el mundo de los problemas de probabilidad condicional, o los problemas que se plantean en torno a un sistema físico o químico. En esos casos las cantidades que se consideran son las probabilidades de lo sucesos y las igualdades son las leyes básicas de la probabilidad junto con los teoremas de Bayes y en un sistema físico o químico lo serían las magnitudes consideradas y las leyes que regulan el sistema.

Entre las reflexiones teóricas realizadas sobre los modos de resolver, se encuentra la de un uso del MC, que explicita como en su funcionamiento el MC invoca a su vez el uso del método de Análisis-Síntesis. Se defiende que esta puede ser una de las maneras en la cual, en la resolución de problemas puede concebirse y entenderse el “tránsito del aritmética al álgebra”. De esa reflexión proviene lo que he llamado: ingredientes del pensamiento algebraico en resolución de problemas, ingredientes que porque considero importantes reitero:

---

[57] Nótese que de nuevo lo que se propone no es considerar los problemas en función del tipo de ecuaciones a que da lugar su resolución, o a las formas canónicas que son reducibles, ya que a partir de las igualdades que constituyen las leyes básicas que regulan un conjunto de cantidades, cuando se consideran distintos subconjuntos de ellas como cantidades conocidas los problemas correspondientes son reducibles a ecuaciones de distinto tipo o a distintas formas canónicas.

1.- La consideración inicial de todas las cantidades del problema en el mismo status, sin distinción alguna entre cantidades conocidas y desconocidas. Cualquiera de ellas, como cantidad susceptible de ser usada en la determinación de cualquier otra cantidad.

2.- El cambio de status de desconocido a conocido que sufre una cantidad por su mera designación por una letra.

3.-La aceptación de expresiones algebraicas como modo de expresión de cantidades.

4.- La consideración de cantidades que son conocidas (datos) como susceptibles de ser analizadas y determinadas.

5.- La disposición de al menos dos sentidos para referir el valor de algunas cantidades que posibilite la escritura de ecuaciones.

La noción concreta de espacio de problema contemplada en esta tesis se concibe como una estructura cuyas componentes son: estados de conocimiento, operadores concretos que permiten los cambios de estado, un repertorio de habilidades del resolutor que incluye un catálogo de modos de resolver, mecanismos de gestión, control y decisión, y conjunto de soluciones. Este espacio del problema, en tres contrastes empíricos, se ha mostrado satisfactorio para describir lo actuado por los resolutores; de ahí que se considere que sus componentes puedan ser tomadas como parte de un modelo cognitivo de la resolución.

La apelación al grafo y diccionario teórico del problema permite decidir, en todo momento, cuando un estado de conocimiento está prohibido y consecuentemente a la identificación del uso del operador que produjo tal cambio de estado. La ocurrencia en el transcurso de la resolución de un estado prohibido se califica de ocurrencia de un error y el error se atribuye al uso inadecuado del operador que cambió el estado. Un análisis de posibilidades sobre el conjunto de operadores, que finalmente acaban actuando sobre el diccionario de cantidades, permite delimitar el conjunto de errores que en teoría son posibles. Esto permite organizar el catalogo de errores que, cuando se buscan soluciones algebraicas, contempla tres categorías: errores en el uso de letras, errores en la construcción de expresiones algebraicas, errores en la construcción de la igualdad. Errores, que han sido diagnosticados en la práctica, esto es, en las igualdades producidas por los estudiantes.

En cuanto a las aportaciones con soporte empírico, algunas ya han sido puntualmente mencionadas, el resto permiten dibujar distintos panoramas de los problemas de lectura algebraica, descritos mediante las resoluciones por los estudiantes a los que se les han propuesto los problemas y los modos de resolver en que éstos hayan sido instruidos o se les permita usar para resolver. Así:

Para estudiantes de secundaria, en el momento en que van a ser iniciados en el modo de resolver algebraico:

Para cualquier problema encontramos que al menos un tercio de los estudiantes intentan obtener una resolución del problema, resoluciones que expresan en el SMS de la aritmética. En las resoluciones de los problemas, se sirven de los modos de resolver: aritmético, mediante tanteo, o de ambos modos, esto último sobre todo en los problemas de mayor complejidad relacional. La eficiencia que muestran los modos de resolver es diferente, siendo el tanteo, por si sólo, ineficiente en los problemas de mayor complejidad relacional o de números no manejables y más eficiente que el modo de resolver aritmético en los problemas que se usan ambos modos de resolver. Los porcentajes de estudiantes que encuentran soluciones se pueden situar en tres niveles: 50, 30, y 10%, niveles dependientes del modo de resolver utilizado y la complejidad relacional del problema. Las soluciones encontradas con el uso del modo de resolver aritmético son idénticas para cada problema y en todas ellas usan cantidades y relaciones que no constan en la lectura algebraica del problema. Las resoluciones que no contienen una solución, un tercio de ellas están inacabadas y dos tercios contienen errores de homogeneidad o que determinan una cantidad arbitraria. La posibilidad de encontrar soluciones para los problemas de lectura algebraica tiene límites, uno de los cuales está en los problemas de las estructuras señaladas.

Para los estudiantes de 4º de la licenciatura de Matemáticas, muchos de ellos futuros profesores de secundaria, encontramos que a pesar de que se les prohíba usar ecuaciones un quinto de ellos parece no concebir la resolución de tales problemas sin su uso. Cuando no lo hacen, en las resoluciones se sirven de los modos de resolver aritmético y mediante tanteo, mostrando en la resolución de algunos problemas el uso de herramientas heurísticas como la sustitución de una incógnita por otra o el uso de casos límite o ideales. Cuando los problemas planteados son los mismos, las soluciones aritméticas que encuentran son idénticas a las que encuentran los estudiantes de secundaria. Las resoluciones mediante tanteo para encontrar el resultado hacen uso de recipientes de tanteo que se corresponden con ecuaciones a que se hubiese podido traducir el problema partiendo de la lectura algebraica y asignando literales a los valores de tanteo. Para establecer relaciones y determinar cantidades razonan utilizando la polisemia de las cantidades o apreciando relaciones numéricas entre ellas, en términos de razón, la inmersión en el mundo de la proporcionalidad hace que posteriormente usen esta razón para la determinación de otras cantidades y por último tampoco consiguen encontrar soluciones aritméticas a los problemas citados.

Para el conjunto de estudiantes de secundaria, cuando ya han sido instruidos en el modo de resolver algebraico, el conjunto de los problemas de la familia son ciertamente difíciles. Difíciles por los valores medios de las dificultades asociadas a los problemas superior al 30, para la dificultad apreciada, en torno al 80, para la dificultad de la solución y casi en los 70 la dificultad del proceso de traducción algebraico, en una escala de 0 a 100. Dificultades que para cada problema se mueven en un rango muy amplio como corresponde a la diversidad de los problemas de la familia y que se ha determinado que en su conjunto e individualmente dependen significativamente de la subfamilia a la cual pertenece el problema, de la complejidad del mismo y de la interacción de ambas, dependiendo las dificultades también del curso a que pertenecen los estudiantes y siendo menores para los estudiantes del curso superior.

Las resoluciones-planteamientos escritas solicitadas de los estudiantes nos dicen que para el conjunto de problemas de lectura algebraica, lo que ocurre por termino medio es más o menos esto: no nos encontramos con el 30% de las resoluciones que nos debíamos de encontrar, están en blanco. Cuando no están en blanco, el proceso de traducción ha sido generalmente algebraico, la pertinencia de su uso está en torno al 85%. Ahora bien, aunque los estudiantes están instruidos en el modo de resolver algebraico, a veces usan el modo de resolver aritmético, el uso del modo de resolver aritmético suele darse fundamentalmente en problemas que pertenecen a las subfamilias MOVILES, TRABAJO y OTROS que poseen lecturas aritméticas. En el conjunto de problemas que se usan ambos modos de resolver, la pertinencia del proceso de traducción algebraico, 61,5% indica que este modo de resolver es el predominante pero la eficiencia de ambos modos de resolver resulta ser similar en torno al 30%. Cuando se usa el modo de resolver algebraico, los estudiantes toda vez que dan muestra de haber iniciado el proceso de traducción mediante el uso de letras no tienen reparo en producir, casi el 95% construyen expresiones algebraicas y en torno al 80% producen alguna igualdad o igualdades, esto es así en la casi totalidad de los problemas. Ahora bien, las igualdades producidas no suelen conducir al resultado del problema, para el conjunto de los problemas sólo en un 30% de los casos en que se inició el proceso y esto depende significativamente de la subfamilia, complejidad del problema y del curso a que pertenezca el estudiante que ha producido la o las igualdades.

Consideradas las igualdades concretas producidas por los estudiantes y que éstos dan como planteamiento de los problemas. El estudio de las igualdades correctas nos permite afirmar: en primer lugar, que para cualquier problema, casi sin excepción, todas las igualdades se obtienen partiendo de la misma lectura analítica del problema, indicando que la percepción de las cantidades y relaciones entre éstas de que puede dar cuenta el enunciado del problema y que debe ser usado para encontrar la solución es compartido por los estudiantes; en segundo lugar, que los estudiantes en su conjunto muestran, por un lado, que el MC puede ser usado con flexibilidad para resolver estos problemas, así, para un mismo problema producen un cierto número de ecuaciones diferentes, usan distinto número de letras y designan con ellas distintas cantidades, y por otro lado, que los mismos estudiantes muestran tendencias de uso y que unos usos son más eficientes que otros, por ejemplo: tienden a usar más letras de las necesarias, notablemente cuando están en cursos superiores, a designar por letras la o una de las incógnitas del problema, y a construir la igualdad de un modo determinado, dependiendo de la subfamilia a que pertenece el problema, y son más eficientes cuando usan una letra en lugar de dos, notablemente en primer curso. El estudio de las igualdades incorrectas permite afirmar que aunque para cada problema se encuentre un número elevado de igualdades incorrectas diferentes, en torno a las dos o tres decenas, en la mayoría de los problemas únicamente unas cuantas de estas igualdades incorrectas son persistentes, en el sentido de que se producen independientemente del curso al que pertenezca el estudiante que las produce, estas producciones suponen el 50% del error y contienen los errores que podemos llamar propios de cada problema. El amplio número de errores concretos hace que su descripción de detalle o su diagnóstico sólo pueda entenderse poniéndolo en relación con el problema concreto en el que el error es encontrado. Sin embargo, la catalogación de los errores en las categorías: en uso de letras, expresiones algebraicas e igualdad, permite diagnosticar muchos de los errores persistentes al encuadrarlos en estas categorías. Así, se diagnosticaron errores de polisemia, de inversión, de concepto, de arbitrariedad y de igualdad, El uso polisémico de una letra, se detectó en problemas en los que en el enunciado un mismo término se usaba en la designación, o como parte de la designación, verbal de dos cantidades. vg: número, edad, billetes. El error de inversión apareció ligado a las expresiones algebraicas que tenían la intención de expresar una cantidad que interviene en una relación de comparación. Las expresiones algebraicas arbitrarias fueron abundantes en todos los problemas y se pueden interpretar como la manifestación de la dificultad el análisis de la cantidad que pretendan expresar, o de que el análisis de alguna cantidad no se ha realizado del modo adecuado. Y, una de las maneras en que se manifestó el error de igualdad fue: cuando se declararon iguales cantidades, que sin ser la misma o tener el mismo valor, si se podían considerar fuertemente relacionadas, como por una relación hipotética o de causa efecto.

Capítulo 7

Referencias

Arnau, D. y Puig, L. (2004). Un instrumento para analizar la estructura de los problemas aritmético-algebraicos cuando se resuelven en el entorno de la hoja de cálculo: los grafos. En E. De la Torre (Ed*) Comunicaciones en los grupos de investigación en el VIII Simposio de la SEIEM*. La Coruña.

Arnau, D. y Puig, L. (2006). Naming and referring to quantities when solving word problems in a spreadsheet environment. En Novotná, J.; Moraová, H.; Krátká, M.; Stehlíková, N. (Ed.) *Proceedings of the 30 PME Conference*. (p.216). Praha:PME

Aristóteles. (s.f.). *Tratados de Lógica (Organon). I . Tópicos. Libro I.*. Madrid: Ed. Gredos.

Bednarz, N. and Janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: Continuities and discontinuities with arithmetic. In N. Bednarz, C. Kieran, and L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching* (pp. 115–136). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic

Bednarz, N., Kieran, C., and Lee, L. (Eds.) (1996). *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic

Bell, A. (1966). Problem-Solving apporaches to algebra., *Approaches to Algebra. Perspecties forResearch and Teaching.* In N. Bednarz, C. Kieran, and L. Lee (Eds.) (pp. 167-186) Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic

Bell, A., McGregor, M., & Stacey, K. (1993). Algebraic Manipulation: Actions, Rules and Rationales. In B. Atweh, C. Kanes, M. Carss and G. Booker (Eds.), *Contexts in Mathematics Education: Proceedings of the Sixteenth Annual Conference of the Mathematics Eucation Research Group of Australasia*, (pp.101-109) Brisbane: Mathematics Education Group of Australasia.

Booth L. (1984). *Algebra: Children Strategies and Errors. A Report of the Strategies and Errors on Secondary Mathematics Education Project*. Windsor, Berks. NFER-Nelson.

Butts, T. (1980) . Posing Problems Properly. In S. Krulick and R. E. Reis (Eds) *Problem Solving in School Mathematics* (23-33) Reston:VA.

Carifio J., Nasser R. (1994). Algebra Word Problems: A review of the theoretical models and Related Research Literature. *Paper presented at the annual conference of the Amerucan Educational Research Assotiation*. New Orleans , April,1994. ERIC.

Castro, E. (1994). *Niveles de comprensión en problemas verbales de comparación multiplicativa*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Castro, E.; Rico, L.; Castro, E. y Gutiérrez, J. (1994). Two-Step Addition Arithmetic Problems. *Proceedings of the First Italian-Spanish Research Symposium in Mathematics Education* (pp. 139- 146). Modena (Italia).

Cerdán, F.; Puig, L. (1983). Los problemas de matemáticas en el curriculum de E.G.B (ciclo medio): un estudio cuantitativo-descriptivo desde el punto de vista de su potencial heurístico. *Enseñanza de las ciencias*, *1*(3), 168-185.

Cerdán, F.; Puig, L. (1986). La resolución de problemas y la formación de profesorado: descripción de un curso para la formación inicial. *II Jornadas de Profesores de matemáticas de las Escuelas Universitarias de Magisterio de Andalucia*, Cadiz 2-4 de julio.

Cerdán, F. (1993) El diseño de un instrumento de medida para estudiar la puesta de un problema en ecuaciones. En Filloy, E., Puig,L.; Rojano, T. (Eds.) *Memorias del tercer Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática. Historia de las Ideas Algebraicas. Valencia 1991*. (pp. 1-9). México. Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV

Cerdán, F. (2005) Carácter isomorfía y complejidad de los problemas de la Familia de problemas aritmético-algebraicos. En Gomez, B., Moreno M. Bolea, P. Flores, P. y Camacho, M. *Comunicaciones en los grupos de investigación en el IX Simposio de la SEIEM*. Córdoba. ISBN 84-8102-413-p

Cerdán, F., Huerta, M. P. (2007). Problemas ternarios de Probabilidad Condicional y Grafos Trinomiales. *Educación Matemática, 19*(1), 27-63.

Clement, J., Lochead, J.; Monk, G. (1981). Translations difficulties in learning Mathematics. *American Mathematical Monthly,* 88, 286-290.

Clement, J. (1982). Algebra Word Problem solutions: Thought Processes underlying a Common Misconception. *Journal for Research in Mathematics Education*, *13*(1), 16-30.

Cooper, M. (1984) The mathematical "reversal error" and attempts to correct it. En B. Southbell, R. Eiland, M. Cooper, J. Conroy y K. Collis (Eds.). *Proceedings of the 8 PME Conference.* (162-171).Sidney : PME.

Cortes, A. (1998) Implicit cognitive work putting word problems into equation form. En A. Olivier y K. Newstead (Ed.) *Proceedings of de 22 PME Conference,* vol II, pp. 208-216.University of Stellenbosch. Stellenbosch, South Africa.

Chartoff, B. T. (1977) *An exploratory investigation using a multidimensional scaling procedure to discover classification criteria for algebra word problems used by students in grades 7-13*. Doctoral dissertation. Northwerstern, 1976). Dissertation Abstract International, 1977,37,7006A.(University Microfilms No. 77-10,0129).

Days, H.C. (1977). Classifying Algebra Problems Acording to the Complexity of Their Mathematical Represetations. En Goldin G, McClintock (eds.) *Task Variales in Mathematical Problem Solving*.(pp. 297- 310). ERIC.

Descartes, R. (1954). *The geometry of René Descartes*. D.E. Smith & M.L.Latham (Ed.). New York. Dover.

Descartes, R. (1984). *Reglas para la dirección del espíritu* Traducción de J. M. Navarro. Alianza . Madrid

Espinosa, M.L. (2004). *Tipología de resolutores de problemas de álgebra elemental y creencias sobre la evaluación con profesores en formación inicial*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Euler, L. (1984) *Elementes of Algebra* Traducción. J. Hewlet. Con una introducción de C. Truesdell. Springer-Verlag.

Fernández F. (1997) *Evaluación de competencias en Algebra Elemental a través de problemas verbales*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Filloy, E. and Rojano, T. (1985). Operating the unknown and models of teaching (a clinical study with 12-13 year olds with a high proficiency in Pre-Algebra). In S. K. Damarin and M. Shelton (eds.), *Proceedings of the Seventh Annual Meeting for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter* (pp. 75–79). Columbus, OH.

Filloy, E.(1999).*Aspectos teóricos del álgebra educativa*. Grupo Editorial Iberoamérica: México.

Filloy, E., Rojano, T., Rubio, G. (2001). Propositions concerning the resolution of arithmetical-algebraic problems. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell and R. Lins (Eds.), *Perspectives on School Algebra* (pp. 155-175). Dordrecht / Boston / London: Kluwer Academic Publishers.

Filloy, E., Rojano, T., Puig, L. (2007). *Educational Algebra. A Theoretical an Empirical Approach*.New york: Springer.

Fridman, L. M. (1990). Los grafos trinomiales como metalenguaje de los problemas. *Matemáticas. Revista del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora, 17-18*, 51–59.

Galvin, G., Bell, A. (1977). *Aspects of dificulties in the solutions of problems involving the formulations of equations.* Manuscrito no publicado. Notttingham Skill Centre for Mathematical Education. University of Notttingham.

Gascón, J. (1989). *El aprendizaje de métodos de resolución de problemas*. Tesis doctoral no publicada. Universidad Autónoma de Barcelona.

Goldin G, McClintock E. (Eds.) (1979). *Task Variales in Mathematical Problem Solving*. ERIC

Gutierrez A., P. Boero (eds.), (2007) *Handbook of Research on the Psychology of Mathemaical Education: Past, Present and Future*.Roterdam. Sense Publishers

Hershkovics, N. (1989). Cognitive obstacles encountered in the learning of algebra. En Wagner S., Kieran C. Eds.(1989) *Reseach Issues in the Learning and Theaching of Algebra,* (pp.. 60-86). NCTM. Reston, Virginia.

Hershkovitz, S., Nesher, P. (1991). Two- step Problems, The Scheme Approach. In F. Furinghetti (Ed.) *Proceedings of the 15 PME Conference,* Vol II, pp..189-196. Assissi, Italy.

Hershkovitz, S., Nesher, P. (1996) . The role of Schemes in designing computerized environnements. *Educational Studies in Mathematics*, *30,* 330-336.

Huesca, B. (2006). *Resolución de Problemas Verbales Aritmético-Algebraicos con el Uso del CAS (Computer Algebra Systems) como Manipulador Simbólico. Estudio Clínico sobre la Relación Sintaxis-Semántica Algebraicas.* Tesis doctoral. Cinvestav. Instituto Politecnico Nacional. Mexico. D.F.

Jonassen D.H. (2003) Designing Research-Based Instruction for Story Problems. *Eductional Psychiology Review* Vol,15, nº3, págs. 267-296.

Johanning D.J (2004) Supporting the developmenent of algebraic thinking in middle scool: a closer look at students informal strategies. *Journal of Mathematical Behavior 23*(4), 371-378.

Kalmikova, Z.I. (1979) Processes of Analysis and Synthesis in the Solution of Arithmetic Problems. En . Kilpatrick, I. Wirszup, E. G. Begle & J. W. Wilson (Eds.) *Soviet Studies in the Psychology of Learning and teaching Mathematics.* Vol XI. pp.1-171.School Mathematics Study Group Stanford University S and Survey of Recent east European Mathematical Literature the University of Chicago.

Kaput, J. Sims-Knight, J.E. (1983) . Errors in Translations to algebraic equations: roots and implications. *Focus on The Learnins Problems in Mathematics.* 5 (3), 63-78

Kaput, J. (1986) “Quantity Structure of Algebra Word Problem: A preliminary Analisis”. Southeastern. Massachussetts University. Manuscrito.

Kieran, C. y Filloy, E. (1989) "El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica" en *Enseñanza de las Ciencias* Vol. 7. Universidad Autónoma de Barcelona

Kieran C. (1992) The learning and Teaching of School Algebra. En D.A. Grows (Ed.) *Handbook of Research on Matehmatics Teaching and Learning. NCTM.* Macmillan. New York. USA.

Kieran C. (2006). Research on the Learning and Teaching of Algebra. A. Gutierrez , P. Boero (eds.) *Handbook of Research on the Psychology of Mathemaical Education: Past, Presen and Future,* (pp. 11-49).Rotredam Sense Publishers.

Khulm, G. (1979) The Clasification of problem Research Variables. En Goldin G, McClintock (eds.) *Task Variales in Mathematical Problem Solving.* pp.1-21.Columbus. Ohio. ERIC.

Kilpatrick, J., Wirszup, I, Begle, E. G. & Wilson, J. W. (Eds.) (1969-1975). *Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics. Vosl. I-XIV.* Stanford, CA: NCTM.

Krulick , S. y. Reis, S.E. (Eds.) (1980). *Problem Solving in School Mathematics*. 1980. Yearbook. NCTM. Reston, VA.

Krutestkii, V. A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in School Children Mathematics*. Chicago. University of Chicago Press.

Kutscher, B. Linchevski, l. (1997) Number instantiation as mediator in solving word problems. En E. Pehkonen (Ed.) *Proceedings of de 21 PME Conference* 3, (pp.168-175).

Laborde, C. (1990) Language and Mathematics. In P. Nesher P. and J. Kilpatrick. (Eds.) *Mathematics and Cognitions*, (pp.53- 69). Cambridge University Press.

Lakatos, I. (1978). The method of analysis-synthesis. In I. Lakatos, *Mathematics, science and epistemology. Philosophical Papers Vol. 2,* edited by J. Worrall & G. Currie (pp. **) Cambridge: Cambridge University Press. [Traducción castellana de Diego Ribes: El método de análisis y síntesis. En I. Lakatos, *Matemáticas, ciencia y epistemología, vol 2*. (pp. 103-144) Madrid: Alianza, 1981.]

Leonardo Pisano. (2002) *Fibonacci´s Liber Abaci*. Traducción de L.E. Sigler. Springer-Verlag. NY.

Levey, M. (1966). *The algebra of Abu-Kamil*. The University of Wisconsin Press.

Malara N. (1999) An aspect of a long-term research on algebra: The solution of verbal problems. En O. Zalavski (Ed.) *Proceedings of de 23 PME Conference* 3, (pp.257-264).

Matz , M. (1980). Towards a computational Therory of an algebraic competence" *Journal of Children´s Mathematical Behavior, 3*(1), 93-166.

Mayer, R.E. (1981) Frecuency Norms and Structural Analisys of Algebra Story Problems into Families, Categories, and Templates. *Instructional Science* 10, 135-175.

Mestre, J. P. (1988). The role of the language comprehension in mathematics and problem solving. En *Linguistic and cultural influences on learning Mathematics*, (pp. 201-220). Hillsdalle, NJ. Erlbaum.

Nardi, W. A. (1991). How to Solve Algebra Word Problems. New York. Prentice Hall.

Nathan, M,J; Kintsch, W; Young,, E. (1992). A Theory of Algebra-Word-Problem Comprehension and Its Implicatios for the Design of Learning Environmentes. *Cognitions and Instruction, 9* (4) 329-389.

Nesher, P.; Greeno, J. G : Riley, M.S. (1982) The development of Semantic Categories for Addition and Substraction. *Educational Studies in Mathematics*, 8, 373-394.

Newell, A., Simon, H. (1972). *Human Problem Solving*. New Jersey . Prentice Hall, Inc.

Newton, I. (1802) *Aritmética Universal*. Traducción Noel Beaudeux. Chez Bernard. Paris.

Newton, I. (1972) *The Mathematical Papers of Isaac Newton* . Volume V. Whiteside D.T. Editor. Cambridge University Press.

Pluvinage F. (1993) Didactique de la résolution de problemas. *Petit X*. nº3. IREM de Grenoble.

Polya, G. (1966). *Mathematical Discovery. 2 vols*. New York: John Wiley and Sons.

Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton University Press. Princeton, NJ. [Traducción castellana de Julián Zugazagoitia. *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas. Mexico. 1965)].

Puig, L y Cerdán, F. (1987). Buceando en el proceso de resolución de problemas, en ÁLVAREZ, A., comp., *Psicología y Educación. Realizaciones y tendencias actuales en la investigación y en la práctica*. Madrid: Visor-MEC, págs. 329-339.

Puig, L y Cerdán, F. (1989). *Problemas Aritméticos Escolares*. Síntesis. Madrid.

Puig, L y Cerdán, F. (1990a). La estructura de los problemas aritméticos de varias operaciones combinadas. *Conferencia plenaria invitada en la Cuarta Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa.* Acapulco, Guerrero, México, 8-10 de julio de 1990.

Puig, L y Cerdán, F. (1990b). Acerca del carácter aritmético o algebraico de los problemas verbales. *Conferencia invitada al grupo de Álgebra del Segundo Simposio Internacional de Educación Matemática*. Cuernavaca, Morelos, México, 12-14 de julio de 1990.

Puig, L. (1994) "Semiótica y Matemáticas" en *Eutopías 2ª - época.* Centro de Semiótica y Teoría del Espectáculo de la Universidad de Valencia & Asociación Vasca De Semiótica, vol. 51

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de Problemas*. Comares. Granada.

Radford, L. (1994). Moving through Systems of Mathematical Knowledge: from algebra with a single unknown to algebra with two unknowns. In J. P. da Ponte & J. F. Matos (Eds.). *Proceedings of the 18 PME Conference* (Vol. 4, pp. 73-80). Lisboa, Portugal: PME.

Radford, L. (1996). On dialectical relationships between signs and algebraic ideas. In A. Gutierrez & L. Puig (Eds.). *Proceedings of the 20 PME Conference* (Vol. 4, pp. 179-187): Valencia, Spain: PME.

Reed, S. K. (1987) A Structure- Maping Model for Word Problems. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, *13*(1), 124-139

Reed, S. K. (1985) Usefulness of Analogous Solutions foe Solving Algebra Word Problems. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition, 11*(1), 106-125.

Reed, S. K. (1991). Use of examples and Procedures in Problem Solving. . *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition 17*(4), 753-766.

Reed, Stephen K (1999). *Word Problems. Resarch and Curruculum Reform*. Lawrence Erlbaum Associates Inc. New Jersey.

Reusser, K. (1993). Tutoring Systemms and Pedagogical Theory: representational tools for understanding, planning and reflection in problem solving. En S. P. Lajoie and S.J. Devry J.(Eds.).*Computers as Cognitive Tools*.(pp. 147-178). Lawrence Earlbaum. Hinsdale. N.J.

Rojano, T. (1985) *De la aritmética al álgebra*. Tesis doctoral. CINVESTAV-IPN, México

Rojano, T., Sutherland, R. (1997). Pupils' Strategies and the Cartesian Method for Solving Problems: The Role of Spreadsheets. In E. Pehkonen (Eds.*). Proceedings of the 21 PME Conference* (Vol. 4, pp. 72-79). Lahti, Finland: PME.

Rosen, F. (1831). *The algebra of Mohammed Ben Nusa*. London: Oriental Translation Fund.

Rico, L.; Castro, E.; González, E., Castro, E. (1994). Two-Step Addition Problems with Duplicated Semantic Structure. *Proceedings of the 18 PME Conference,* (Vol. 4, pp. 121-128). Lisboa, Portugal: PME.

Rico, L. (s.f.) *Errores en el aprendizaje de las matemáticas*. Manuscito no publicado. Departamento de Didáctica de la Matemática.Universidad de Granada.

Rubio G. (1994) *Modelos didácticos para resolver problemas aritmético- algebraicos. Tesis teóricas y observación empírica*. Tesis Doctoral. Cinvestav . Instituto Politecnico Nacional. Mexico. D.F.

Schoenfeld, A.H. (1992) Learning to Think Mathematically:Problem solving, Metacognition and Making sense in Mathematics. En D.A. Grows (Ed.) *Handbook of Research on Matehmatics Teaching and Learning. NCTM*. Macmillan. New York.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Florida: Academic Press Inc.

Schmidt, S.; Bednarz, N. (1997) Raisonements aritmétiques et algebriques dans un contexte de résolution de problèmes: difficultés rencontres par les futures enseignants. *Educational Studies in Mathematics, 32*, 122-155.

Schroeder, T., Lester, F. (1989). Developping understanding in mathematics via problem solving. En P Trafton & A. Shulte (Eds) . *New directions for elementary school mathematics*.(1989 Yearbook). Reston, VA, NCTM.

Silver, E.A. (1981) Recall of Mathematical Problem Information: Soling Related Problems. *Journal for Research in Mathematical Education 12*(1), 54-64.

Socas, M.; Paralea, M. (1997). Las fuentes de significado, los sistemas de representación y errores en el algebra escolar. Monografia sobre Lenguajes algebraicos. *Uno*. 14 , 7-24.

Sokal, R.R (1974).Taxonomía númerica. En *Matemáticas en las ciencias del comportamiento*. (pp.372-380. Edtorial Alianza, Alianza Universidad. Madrid.

Stacey, K., MacGregor, M. (1993). Origins of Students' Errors in Writing Equations. In Annette Baturo & Tom Cooper (Eds.) *New Directions in Algebra Education.* (pp. 205-212) Brisbane: Queensland University of Technology

Stacey, K., MacGregor, M. (2000). Learning the Algebraic Method of Problem Solving. *Journal of Mathematical Behavior, 18*(2), 149-167.

Stacey, K., Chick H, Kendal ,M.(Eds.) (2004) *The Future of the Teaching and Learning of Algebra.* Kluver Academic Publishers. Dordretch. ND.

Swetz, F.J. (1987). *Capitalism and Arithmetic*. The New Math of the 15th Century. La Salle, Illonois. Open Court, 1989.

Trujillo, M. (1987). Uso del lenguaje algebraico en la resolución de problemas verbales. . Tesis de Maestría. CINVESTAV. México.D.F.

Van Ameron B.A. (2003). Focusing on informal stategies. When linking arithmetic to early algebra. *Educational Studies in Mathematics, 54*, 63-75

Wim Van Dooren, Lieven Verschaffel and Patrick Onghena **(**2002). The Impact of Preservice Teachers' Content Knowledge on Their Evaluation of Students' Strategies for Solving Arithmetic and Algebra Word Problems. *Journal for Research in M;athematics Education , 33*(5), 319 - 351

Wagner, S y Kieran, C. (eds.) (1989). *Research issues in the learning and teaching of algebra.* Lawrence Erlbaum Associates, NCTM, Hillsdale, NJ. Reston, VA.

Wickelgren, W.A. (1974). *How to solve Problems*. W.H. Freeman & Company. San Francisco.

Wollman, W. (1983). Determining the Sources of Error in Translation from sentence to equation. *Journal for Research in Mathematics Education 14* (3),169-181.

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

FACULTAT DE MATEMÀTIQUES

Departament de Didàctica de la Matemàtica

Estudios sobre la Familia de problemas Aritmético-Algebraicos.

Anexos a la

Tesis Doctoral

PRESENTADA POR:

Fernando Cerdán Pérez

DIRIGIDA POR:

Dr.Eugenio Filloy Yague

Dr.Luis Puig Espinosa

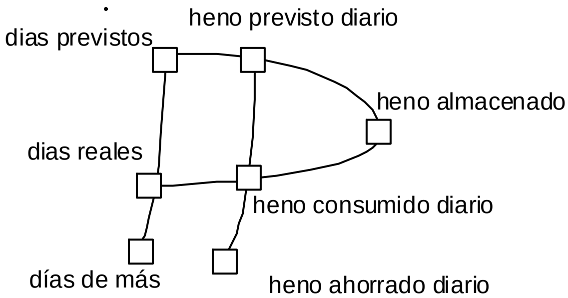
Valencia 2007

Anexo A1.1.- Estudio del espacio de problemas de una situación concreta.

El espacio de problemas que se estudia en éste anexo es el de la situación concreta "HENO", situación que reza así:

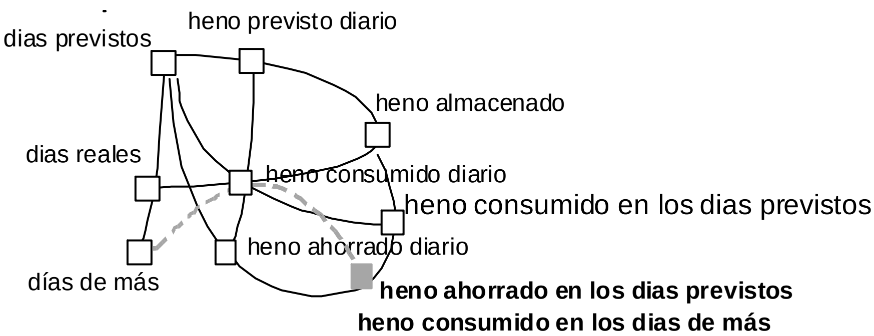
Si unos granjeros almacenan heno para ciertos días y ahorran tanto cada día entonces tienen heno para más días.

La descripción de la situación "HENO" viene dada en la fig. (a) por el grafo esquema y su diccionario de cantidades :



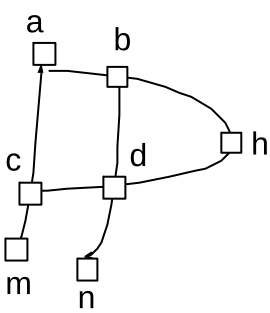
(a)

La situación "HENO" ampliada a más cantidades con referencia viene dada en la fig. (b) con la arista extra que indica la polisemia del nodo *heno ahorrado en los días previstos* como *heno consumido en los días de más* nodo en gris y la arista a trazos.



(b)

La situación correspondiente se describe en (c):



$a \cdot b = h$

$c \cdot d = h$

$c - a = m$

$b - d = n$

(c)

A la vista del grafo esquema, en la situación se consideran siete cantidades entrelazadas por cuatro relaciones, cinco de las cantidades están situadas sobre nodos de orden dos, y dos de ellas en vértices terminales. De las cuatro relaciones dos son multiplicativas y dos aditivas. Cuatro de las cantidades son extensivas pertenecientes a dos espacios de medida: días y kg. Tres de ellas al primero de los espacios de medida y una al segundo, si bien en la situación ampliada hay dos nuevas cantidades que pertenecen al segundo. Las otras tres cantidades son intensivas y pertenecen al cociente de dichos espacios: kg./día.

Las cantidades pueden determinarse a partir de otras dadas puede decidirse en cada caso, por el tipo de grafo problema en que se transforma el grafo esquema, utilizando los criterios de **1.7,** o en las igualdades, por sustitución y evaluación del carácter determinado o indeterminado del sistema de ecuaciones resultante, tras la sustitución de los valores de las cantidades dadas.

Sin embargo, algunas consideraciones generales permiten precisar esto en general:

El núcleo básico de la situación lo constituye la relación de proporcionalidad inversa de las cuatro cantidades a, b, c, d, que se deduce de las dos primeras igualdades $a \cdot b = c \cdot d$, o que se observa en el nodo h del grafo esquema. Esta relación de proporcionalidad inversa es la que condiciona que :

si a es mayor que c entonces b es menor que d, o también que:
si c es mayor que a entonces d es menor que d

lo que explica las cantidades que se sustraen de las dos últimas igualdades.

Sabemos por otro lado, que de la relación de proporcionalidad podemos deducir:

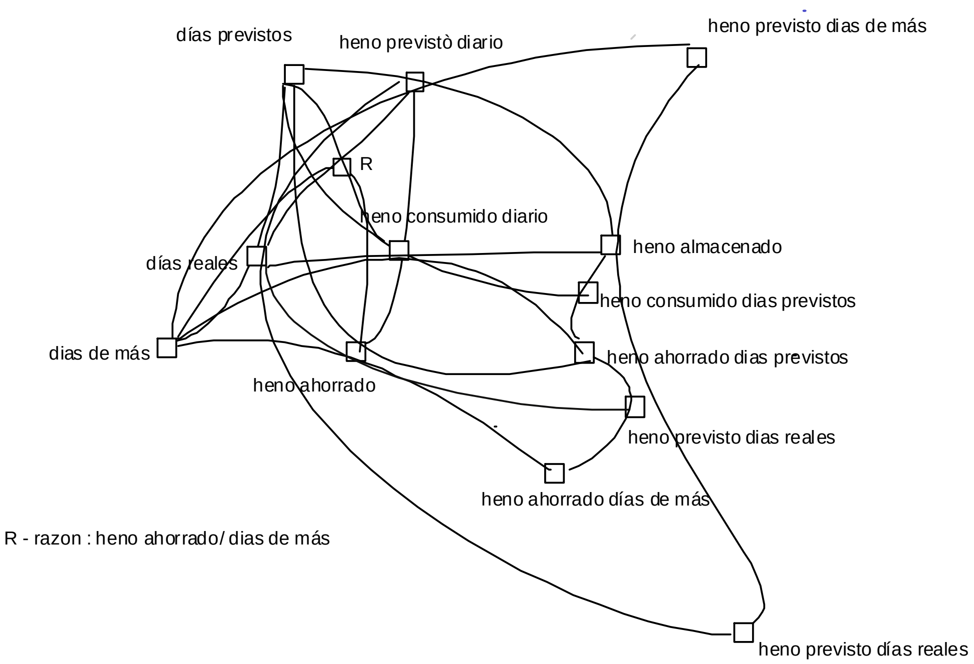
$$d = (n/m)\, a \qquad y \qquad b = (n/m)\, c$$

Lo que permite concluir que tres cantidades cualesquiera que no estén sobre la misma arista o relacionadas en una igualdad permiten determinar todas las demás.

El grafo teórico de la situación consta en la figura (d) .

En lo que sigue del anexo, se estudian 7 grupos de problemas de la situación ”HENO”, uno para cada una de las siete cantidades tomada como incógnita del problema y un último grupo, el 8, un subgrupo de la situación ampliada, en el cual la incógnita del problema es el valor del heno almacenado y el heno ahorrado en los días previsto es un dato. De los grupos se presenta: Su estructura de datos, el carácter de sus soluciones y otros detalles, los grafos correspondientes y los enunciados.

Nota.- El carácter de la solución se obtiene considerando los grafos de los problemas que constan en las tablas correspondientes (carácter en la situación) u obscureciendo las cantidades que son datos del problema en el grafo teórico,(carácter en el grafo teórico, carácter del problema).



Fig(d)

Grupo 1.- H : Problemas con el valor del HENO ALMACENADO como incógnita

Tabla **Hdatos.-** Estructura de datos de los problemas.

Dás previstos	Días reales	Días de más	Heno Previsto diario	Heno consumido Diario	Heno ahorrado diario	Heno almacenado	**problema**
d	d				d	i	**H1**
d		d			d	i	**H2**
	d	d			d	i	**H3**
d			d	d		i	**H4**
d			d		d	i	**H5**
d				d	d	i	**H6**
d		d		d		i	**H7**
	d	d	d			i	**H8**
	d		d		d	i	**H9**
d				d	d	i	**H10**

Tabla **Hsoluciones**.- Carácter de la solución de los problemas **H**

	Aritmética	Algebraica
En la Situación	**H7, H8, H9, H10**	**H1, H2, H3. H4. H5. H6**
En el grafo teórico, carácter del problema.	**Todos ellos**.	

..

Enunciados de los problemas con la estructura de datos de la Tabla **Hdatos**

H1.-Unos granjeros almacenaron heno para *40 días.* Sin embargo, el heno era de mejor calidad de la que pensaban y *ahorraron 100 kg por día.* Así tuvieron heno para *60 días. ¿Cuánto heno almacenaron?*

H2.-Unos granjeros almacenaron heno para *40 días.* Sin embargo, el heno era de mejor calidad de la que pensaban y *ahorraron 100 kg por día.* Así tuvieron heno para *20 días más. ¿Cuánto heno almacenaron?*

H3.-Unos granjeros almacenaron heno para cierta cantidad de dias. Sin embargo, el heno era de mejor calidad de la que pensaban y *ahorraron 100 kg por día.* Así tuvieron heno *para 60 días, 20 días más* de los previstos *¿Cuánto heno almacenaron?*

H4.-Unos granjeros almacenaron heno para cierta cantidad de días. Sin embargo, el heno era de mejor calidad de la que pensaban y de los *300 kg previstos para cada día, consumieron 200 kg.* Así tuvieron heno para *20 días más. ¿Cuánto heno almacenaron*

H5.-Unos granjeros almacenaron heno para cierta cantidad de días. Sin embargo, el heno era de mejor calidad de la que pensaban y de los *300 kg previstos por día, ahorraron 100 kg cada día.* Así tuvieron heno para *20 días más. ¿Cuánto heno almacenaron?*

H6.-Unos granjeros almacenaron heno para cierta cantidad de días. Sin embargo, el heno era de mejor calidad de la que pensaban y sólo *consumieron 200 kg cada día,* lo que les suponía *un ahorro de 100 kg por día..* Así tuvieron heno para *20 días más. ¿Cuánto heno almacenaron?*

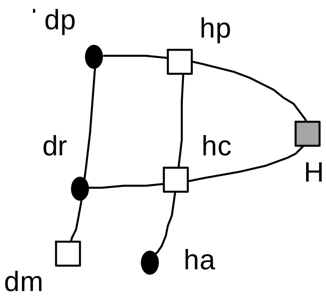
H7.-Unos granjeros almacenaron heno para *40 días.* Sin embargo, el heno era de mejor calidad de la que pensaban y sólo *consumieron 200 kg por día.* Así tuvieron heno para *20 días más. ¿Cuánto heno almacenaron?*

H8.-Unos granjeros almacenaron heno para cierta cantidad de días. Sin embargo, el heno era de mejor calidad de la que pensaban y no consumieron los *300 kg previstos por día,.* Así tuvieron heno para *60 días, 20 días más de los previstos. ¿Cuánto heno almacenaron?*

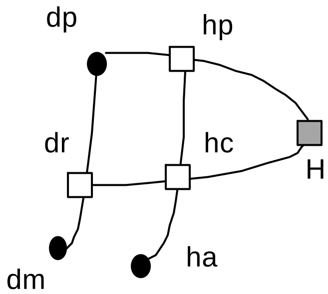
H9.-Unos granjeros almacenaron heno para cierta cantidad de días. Sin embargo, el heno era de mejor calidad de la que pensaban y de los *300 kg previstos por día,. ahorraron 100 hg cada dia* Así tuvieron heno para *60 días. ¿Cuánto heno almacenaron?*

H10.-Unos granjeros almacenaron heno para *40 días*. Sin embargo, el heno era de mejor calidad de la que pensaban y sólo *consumieron 200 kg cada día,* lo que les suponía *un ahorro de 100 kg por día.100 hg cada dia* Así tuvieron heno para más días. *¿Cuánto heno almacenaron?*

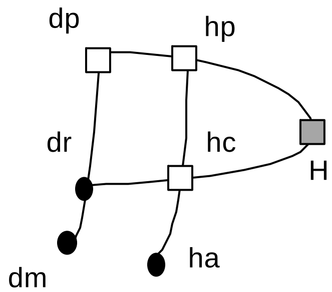
Grafos de los problemas correspondientes a la tabla **Hdatos**



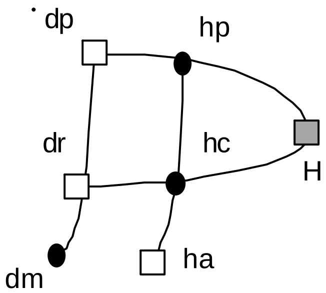
H1



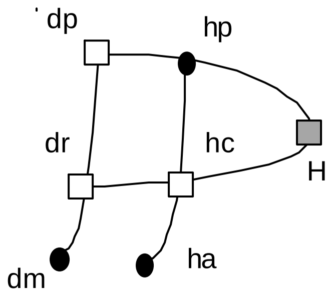
H2



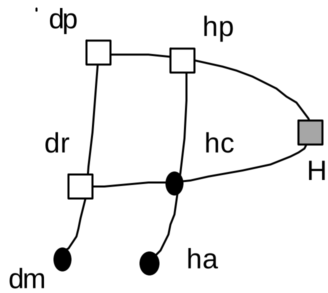
H3



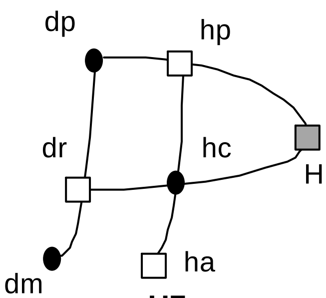
H4



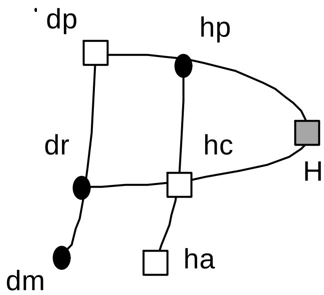
H5



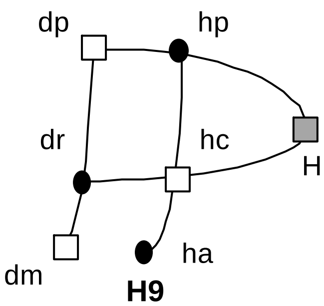
H6



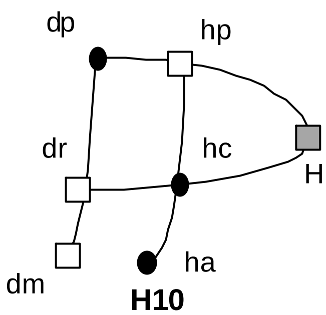
H7



H8



H9



H10

Grupo 2.- hp: Problemas con el valor del HENO PREVISTO DIARIAMENTE como incógnita.

Tabla **hpdatos.-** Estructura de datos de los problemas.

Dás previstos	Días reales	Días de más	Heno Previsto diario	Heno consumido Diario	Heno ahorrado diario	Heno almacenado	**problema**
d	d		i	d			**hp1**
d		d	i	d			**hp2**
	d	d	i	d			**hp3**
d	d		i		d		**hp4**
d		d	i		d		**hp5**
	d	d	i		d		**hp6**
		d	i	d		d	**hp7**
	d		i		d	d	**hp8**
	d	d	i		d	d	**hp9**
		d	i			d	**hp10**

Tabla **hpsoluciones**.- Carácter de la solución de los problemas **hp**

	Aritmética	Algebraica
En la Situación	**hp1, hp2, hp3, hp7, hp8, hp10**	**hp4, hp5, hp6**
En el grafo teórico, carácter del problema.	**hp1, hp2, hp3, hp4, hp5, hp6 hp7, hp8, hp10**	**hp9**

Nota.- La estructura de datos **hp1** y **hp3** es redundante.

Enunciados correspondientes a la estructura de la Tabla **hpdatos**

hp1.-Unos granjeros almacenaron heno para *40 días.* Sin embargo, el heno era de mejor calidad de la que pensaban y sólo consumieron *200 kg por dia.* Así tuvieron heno para *60 días. ¿Cuántos kg de heno habían previsto los granjeros para cada día?*

hp2.-Unos granjeros almacenaron heno para *40 días.* Sin embargo, el heno era de mejor calidad de la que pensaban y sólo consumieron *200 kg por dia.* Así tuvieron heno para *20 días más ¿Cuántos kg de heno habían previsto los granjeros para cada día?*

hp3.-Unos granjeros almacenaron heno para ciertos días Sin embargo, el heno era de mejor calidad de la que pensaban y sólo consumieron *200 kg por dia.* Así tuvieron heno para *60 días, 20 más de los previstos.¿Cuántos kg de heno habían previsto los granjeros para cada día?*

hp4.-Unos granjeros almacenaron heno para *40 días.* Sin embargo, el heno era de mejor calidad de la que pensaban y *ahorraron 100 kg por dia.* Así tuvieron heno para *60 días. ¿Cuántos kg de heno habían previsto los granjeros para cada día?*

hp5.-Unos granjeros almacenaron heno para *40 días.* Sin embargo, el heno era de mejor calidad de la que pensaban y *ahorraron 100 kg por dia.* Así tuvieron heno para *20 días más. ¿Cuántos kg de heno habían previsto los granjeros para cada día?*

hp6.-Unos granjeros almacenaron heno para ciertos días. Sin embargo, el heno era de mejor calidad de la que pensaban y *ahorraron 100 kg por dia.* Así tuvieron heno para *60 días, 20 más de los previstos. ¿Cuántos kg de heno habían previsto los granjeros para cada día?*

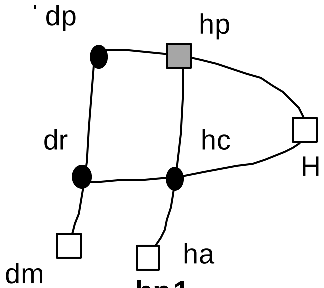
hp7.-Unos granjeros *almacenaron 12.000 kg. de heno* para ciertos días. Sin embargo, el heno era de mejor calidad de la que pensaban y sólo consumieron *200 kg por día.* Así tuvieron heno para *20 días más de los previstos. ¿Cuántos kg de heno habían previsto los granjeros para cada día?*

hp8.-Unos granjeros *almacenaron 12.000 kg. de heno* para ciertos días. Sin embargo, el heno era de mejor calidad de la que pensaban y *ahorraron100 kg por día.* Así tuvieron heno para *60 días. ¿Cuántos kg de heno habían previsto los granjeros para cada día?*

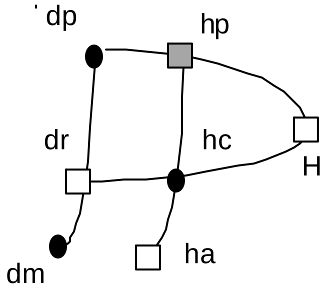
hp9.-Unos granjeros *almacenaron 12.000 kg. de heno* para ciertos días. Sin embargo, el heno era de mejor calidad de la que pensaban y *ahorraron100 kg por día.* Así tuvieron heno para *20 días más. ¿Cuántos kg de heno habían previsto los granjeros para cada día?*

hp10.-Unos granjeros *almacenaron 12.000 kg. de heno* para ciertos días. Sin embargo, el heno era de mejor calidad de la que pensaban. Así que tuvieron heno para *60 días, 20 días más de los previstos. ¿Cuántos kg de heno habían previsto los granjeros para cada día?*

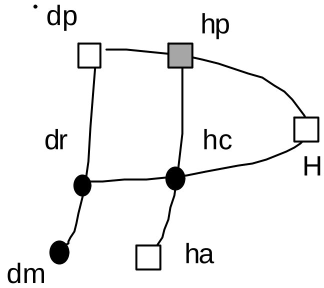
Grafos correspondientes a Tabla **hpdatos**.



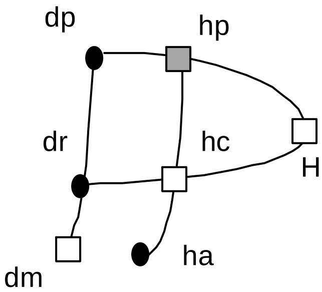
hp1



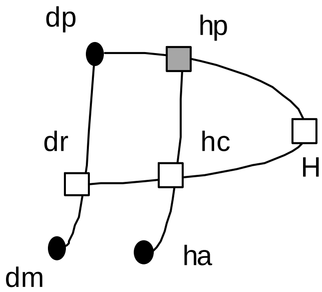
hp2



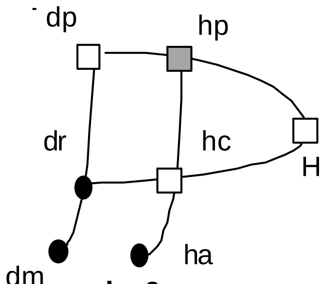
hp3



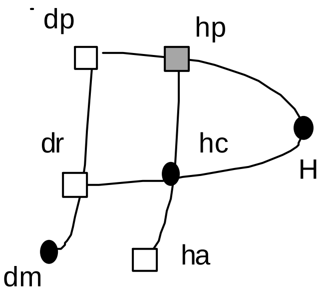
hp4



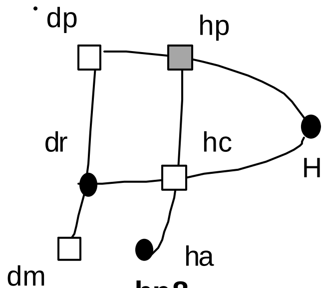
hp5



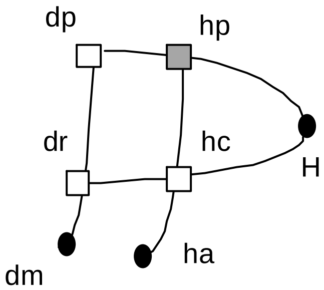
hp6



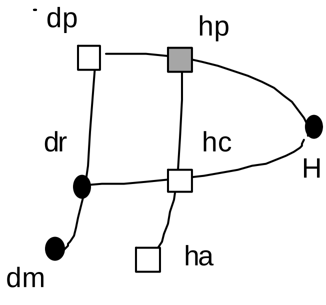
hp7



hp8



hp9



hp10

Grupo 3.- dp: problemas con el valor de los DIAS PREVISTOS como incógnita.

Grupo que se puede estudiar a partir del grupo **hp:**

- en la estructura de datos por el intercambio de las columnas hp y dp

- los grafos de los problemas correspondientes, -igualmente numerados- serán isomorfos, por lo que el carácter de la solución se conservará.

- ahora bien al no ser la isomorfía operacional, las expresiones aritméticas que expresen el valor de las cantidades hp y dp –o las ecuaciones- serán diferentes, ahora bien, si quieren aprovecharse las soluciones de un grupo para otro deberán transformarse productos en cocientes e intercambiar minuendo y sustraendo en las diferencias.

Grupo 4.- hc: Problemas con el valor del HENO CONSUMIDO DIARIAMENTE como incógnita.

Grupo 5.- dr: Problemas con el valor de los DIAS REALES como incógnita.

Que puesto la arista del grafo que contiene a éstas cantidades hc, dr, H como vértices puede intercambiarse con la arista que contiene a dp, dp, H resultando grafos orientados isomorfos: el estudio de estos grupos puede reducirse al estudio de los anteriores. grupos **hp**, **dp**. Las expresiones aritméticas o ecuaciones que den o permitan obtener el valor de hc,dr pueden obtenerse de las de hp, dp, transformándolas convenientemente.

Grupo 6.- dm: Problemas con el valor de DIAS DE MAS como incógnita

Tabla **dmdatos.-** Estructura de datos de los problemas.

Dás previstos	Días reales	Días de más	Heno Previsto diario	Heno consumido Diario	Heno ahorrado diario	Heno almacenado	**problema**
	d	i	d	d			**dm1**
	d	i	d		d		**dm2**
	d	i		d	d		**dm3**
d		i	d	d			**dm4**
d		i	d		d		**dm5**
d		i		d	d		**dm6**
d		i		d		d	**dm7**
d		i			d	d	**dm8**
	d	i	d			d	**dm9**
	d	i			d	d	**dm10**

Tabla **dmsoluciones**.- Carácter de la solución de los problemas **dm**

	Aritmética	Algebraica
En la Situación	**Todos ellos**	
En el grafo teórico, carácter del problema.		

La complejidad de las expresiones aritméticas que proporcionan el valor de la cantidad dm puede evaluarse por medio del número de aristas del grafo que es preciso destruir para alcanzar dm .Asi:

Todas las aristas del grafo (4): Problemas:

dm2, dm3, dm4, dm6, dm8, dm9, dm10.

No todas. Unicamente 3 aristas: Problemas:

dm1, dm4, dem7

Enunciados de problemas correspondientes a la tabla **dmdatos**

dm1.-Unos granjeros almacenaron heno para ciertos días. Sin embargo, el heno era de mejor calidad de la que pensaban y de los *300 kg previstos para cada día, consumieron 2000 kg*.. Así tuvieron heno para *60 días*. *¿Para cuántos días más de los previstos tuvieron heno?*

dm2.-Unos granjeros almacenaron heno para ciertos días. Sin embargo, el heno era de mejor calidad de la que pensaban y de los *300 kg previstos para cada día, ahorraron 100kg*.. Así tuvieron heno para *60 días*. *¿Para cuántos días más de los previstos tuvieron heno?*

dm3.-Unos granjeros almacenaron heno para ciertos días. Sin embargo, el heno era de mejor calidad de la que pensaban y sólo *consumieron 200 kg por día, ahorrando 100kg cada día*. Así tuvieron heno para *60 días*. *¿Para cuántos días más de los previstos tuvieron heno?*

dm4.-Unos granjeros almacenaron heno para *40 días*. Sin embargo, el heno era de mejor calidad de la que pensaban y de los *300 kg previstos para cada día, consumieron 2000 kg*..*¿Para cuántos días más de los previstos tuvieron heno?*

dm5.-Unos granjeros almacenaron heno para *40 días*. Sin embargo, el heno era de mejor calidad de la que pensaban y de los *300 kg previstos para cada día, ahorraron 100kg*..*¿Para cuántos días más de los previstos tuvieron heno?*

dm6.-Unos granjeros almacenaron heno para *40 días*. Sin embargo, el heno era de mejor calidad de la que pensaban y sólo *consumieron 200 kg por día, ahorrando 100kg cada día*. *¿Para cuántos días más de los previstos tuvieron heno?*

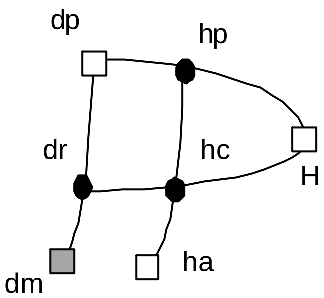
dm7.-Unos granjeros *almacenaron 12.000 kg. de heno* para *40 días*. Sin embargo, el heno era de mejor calidad de la que pensaban y sólo consumieron *200 kg por día*.*¿Para cuántos días más de los previstos tuvieron heno?*

dm8.-Unos granjeros *almacenaron 12.000 kg. de heno* para *40 días*. Sin embargo, el heno era de mejor calidad de la que pensaban y *ahorraron100 kg por día*. *¿Para cuántos días más de los previstos tuvieron heno?*

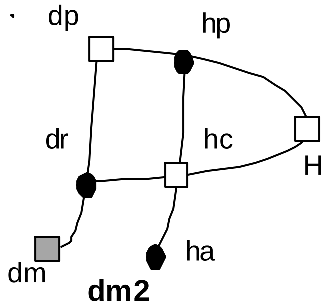
dm9.-Unos granjeros *almacenaron 12.000 kg. de heno* para ciertos días. Sin embargo, el heno era de mejor calidad de la que pensaban y *ahorraron100 kg por día*. Así tuvieron heno para *60 díass ¿Para cuántos días más de los previstos tuvieron heno?*

dm10.-Unos granjeros *almacenaron 12.000 kg. de heno* para ciertos días. Sin embargo, el heno era de mejor calidad de la que pensaban y sólo consumieron *200 kg por día*, *ahorrando 100kg cada día*. *¿Para cuántos días más de los previstos tuvieron heno?*

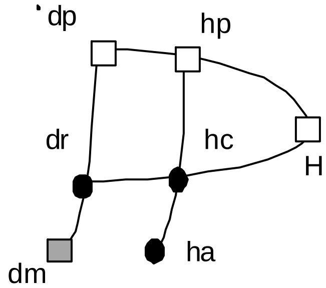
Grafos correspondientes a la tabla **dmdatos.**



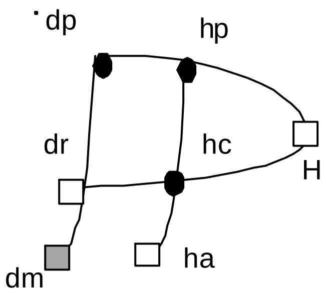
dm1



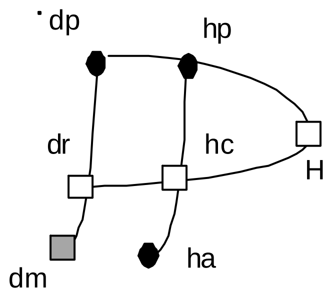
dm2



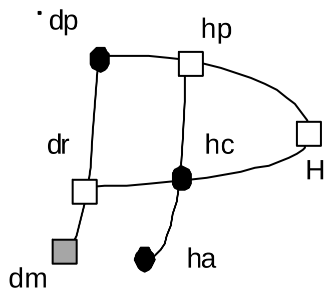
dm3



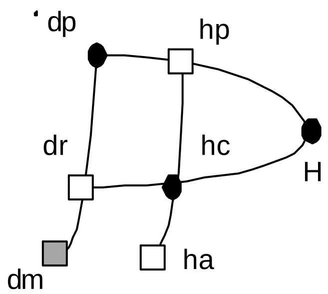
dm4



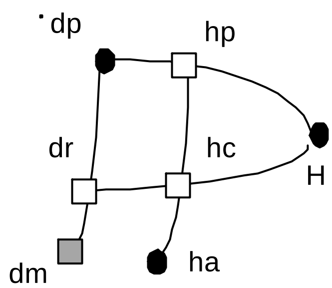
dm5



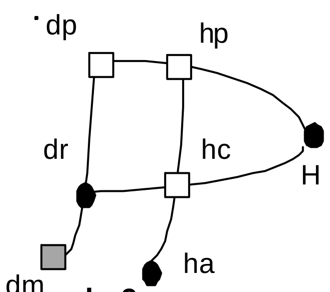
dm6



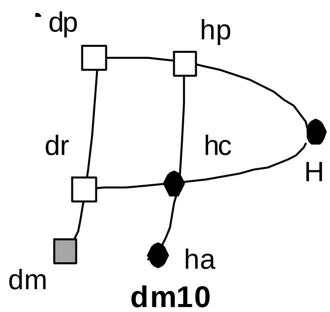
dm7



dm8



dm9



dm10

Grupo 7.- **ha** Problemas con el valor del HENO AHORRADO DIARIAMENTE como incógnita.

El estudio de este grupo, por los antes dicho se puede reducir al estudio del grupo **dm**.

Estudio de un grupo de problemas de la situación ampliada.

Grupo 8.- **AH** Problemas con el valor del HENO ALMACENADO como incógnita y con el *heno ahorrado en los dias previstos* como dato fijo extra.

Tabla **HAdatos.-** Estructura de datos de los problemas.

días previstos	días reales	días de más	heno previsto diario	heno consumido diario	heno ahorrado diario	heno ahorrado en los días previstos	heno almacenado	**problema**
d			d			d	i	**HA1**
d				d		d	i	**AH2**
d					d	d	i	**AH3**
	d		d			d	i	**AH4**
	d			d		d	i	**AH5**
	d		d		d	d	i	**AH6**
		d		d		d	i	**AH7**
		d				d	i	**AH8**
		d			d	d	i	**AH9**
d	d					d	i	**AH10**
d		d				d	i	**AH11**
d	d	d				d	i	**AH12**
			d	d		d	i	**AH13**
			d		d	d	i	**AH14**
				d	d	d	i	**AH15**

Nota.-Los problema **AH1, AH5** quedan excluidos por datos redundantes.
Los problemas **AH3, AH5** porque los tres datos están sobre la misma arista.

Todos los problemas tienen son aritméticos excepto **AH4** y **AH6** que son algebraicos.

Los problemas **AH2, AH13, AH14, AH15** no requieren para su solución de la polisemia del nodo *heno ahorrado en los días previstos*.

Enunciados correspondientes a la Tabla **AHdatos**

AH2.-Unos granjeros almacenaron heno para *40 días*,. Sin embargo, el heno era de mejor calidad de la que pensaban y sólo *consumieron 200 kg por día*. Así *ahorraron 4000 kg*. *¿Cuánto heno almacenaron?*

AH4.-Unos granjeros almacenaron heno para ciertos días con una *previsión de 300 kg por día*. Sin embargo, el heno era de mejor calidad de la que pensaban. Así *ahorraron 4000 kg*. y tuvieron heno para *60 días. ¿Cuánto heno almacenaron?*

AH6.-Unos granjeros almacenaron heno para ciertos días., Sin embargo, el heno era de mejor calidad de la que pensaban y *ahorraron 4000 kg,, 100 kg por día.* Así tuvieron heno para *60 días. ¿Cuánto heno almacenaron?*

AH7.-Unos granjeros almacenaron heno para ciertos días con una *previsión de 300 kg por día*, Sin embargo, el heno era de mejor calidad de la que pensaban. Así *ahorraron 4000 kg*. y tuvieron heno para*20 días más. ¿Cuánto heno almacenaron?*

AH9.-Unos granjeros almacenaron heno para ciertos días., Sin embargo, el heno era de mejor calidad de la que pensaban y *ahorraron 4000 kg,, 100 kg por día.* Así tuvieron heno para *20 días más. ¿Cuánto heno almacenaron?*

AH10.-Unos granjeros almacenaron heno para *40 días*,. Sin embargo, el heno era de mejor calidad de la que pensaban y *ahorraron 4000 kg.* Así tuvieron heno para *60 días. ¿Cuánto heno almacenaron?*

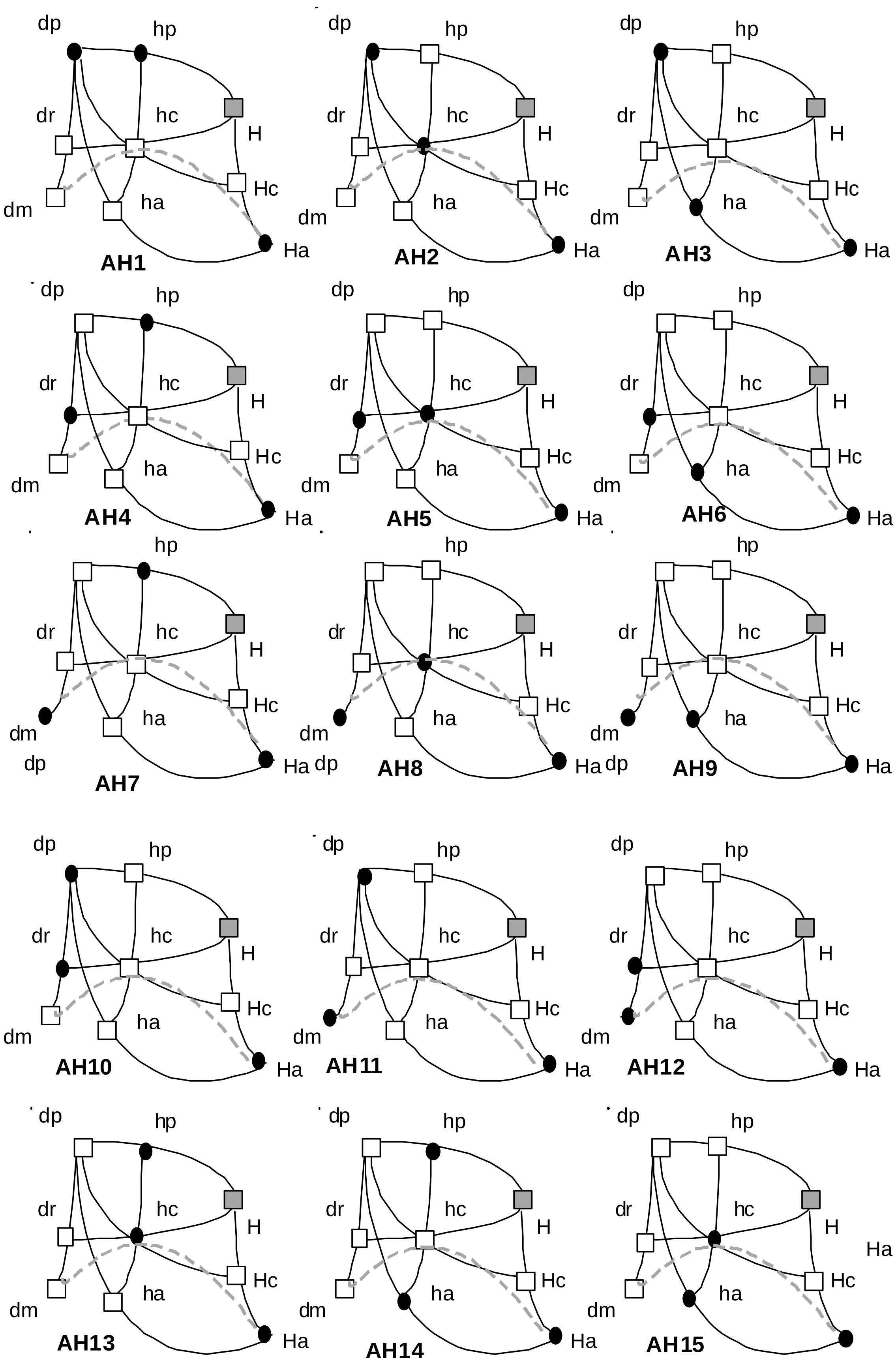
AH12.-Unos granjeros almacenaron heno para *40 días*,. Sin embargo, el heno era de mejor calidad de la que pensaban y *ahorraron 4000 kg.* Así tuvieron heno para *20 días más. ¿Cuánto heno almacenaron?.*

AH13.-Unos granjeros almacenaron heno para ciertos días,. Sin embargo, el heno era de mejor calidad de la que pensaban y solo consumieron *200 kg por día de los 300 kg. previstos*. Así ahorraron *4000 kg.¿Cuánto heno almacenaron?.*

AH14.-Unos granjeros almacenaron heno para ciertos días,. Sin embargo, el heno era de mejor calidad de la que pensaban y *ahorraron 100 kg por día de los 300 kg. previstos.* Así ahorraron *4000 kg.¿Cuánto heno almacenaron?.*

AH15.-Unos granjeros almacenaron heno para ciertos días,. Sin embargo, el heno era de mejor calidad de la que pensaban y solo consumieron *200 kg por día, ahorrándose 100 kg.*. Así ahorraron *4000 kg.¿Cuánto heno almacenaron?.*

Grafos correspondientes a la tabla **AHdato**s



A3.1.- Instrumento nº 1. Enunciados de los problemas.

CHOCOLATES Y CARAMELOS

1.-Una educadora tiene 120 chocolates y 192 caramelos que va a repartir entre los alumnos de su clase. Si cada alumno recibe 3 caramelos más que chocolates. ¿Cuántos son los alumnos?

DAFNE

2.-Dafne y Fabiola vendieron 124 boletos para un concierto de jazz. Si el número de boletos que vendió Fabiola fue el triple de los que vendió Dafne. ¿Cuántos ha vendido cada una?

BOLETOS

3.-En una fiesta se vendieron boletos, los de dama costaron 8.000 pesos y los de caballero 12.000 pesos. Los boletos de dama fueron 100 más que los de caballero. La recaudación total fue de 3.000.000 pesos. ¿Cuántos boletos se vendieron de cada tipo?

GALLINAS Y CONEJOS

4.- En un corral hay pollos y conejos. Se cuentan las cabezas y son dieciséis; se cuentan las patas y son cincuenta y dos.¿ Cuántos pollos y conejos hay en el corral?

ADRIAN

5.-Adrián tiene 15 años, Tania tiene 40 años. ¿Cuándo tendrá Tania el doble de la edad de Adrián?

COLECTA

6-Un grupo de alumnos tiene que hacer una colecta para pagar una visita guiada. Si cada uno de ellos aportara 6.200 pesos les faltarían 50.000 pesos. Si cada uno de ellos contribuyera con 8.200 pesos entonces les sobrarían 50.000 pesos. ¿Cuántos alumnos constituyen el grupo?

DINERO

7.-Un señor que llegó del extranjero tenia una suma de dinero que repartió a partes iguales entre cierto número de niños. Si hubiera habido dos niños más, cada uno de ellos habría recibido un dólar menos; si hubiera habido dos niños menos, cada uno habría recibido dos dólares más.¿Cuántos niños había y cuánto recibió cada niño?

ALCANZAR

8.- Un tren sale de la estación hacia el norte recorriendo 72 kilometros cada hora. Tres horas después un segundo tren parte en vía paralela también hacia el norte y recorre 120 kilometros cada hora. ¿Cuánto le llevará al segundo tren alcanzar al primero?

A3.2 Instrumento nº 2. Enunciados de los problemas.

CHOCOLATES Y CARAMELOS.

1.-Una educadora tiene 120 chocolates y 192 caramelos que va a repartir entre los alumnos de su clase .Si cada alumno recibe 3 caramelos más que chocolates. ¿Cuántos son los alumnos?

DAFNE

2.-Dafne y Fabiola vendieron 124 boletos para un concierto de jazz. Si el número de boletos que vendió Fabiola fue el triple de los que vendió Dafne.¿Cuántos ha vendido cada una?

BOLETOS

3.-En una fiesta se vendieron boletos, los de dama costaron 8 euros y los de caballero 12 euros. Los boletos de dama fueron 100 más que los de caballero. La recaudación total fue de 3000 euros. ¿Cuántos boletos se vendieron de cada tipo?

ADRIAN

4.-Adrián tiene 15 años, Tania tiene 40 años. ¿Cuándo tenia Tania el doble de la edad de Adrián?

COLECTA

5.-Un grupo de alumnos tiene que hacer una colecta para pagar una visita guiada. Si cada uno de ellos aportara 6.2 euros les faltarían 50 euros. Si cada uno de ellos contribuyera con 8.2 euros entonces les sobrarían 50 euros. ¿Cuántos alumnos constituyen el grupo?

DINERO

6.-Un señor que llegó del extranjero tenia una suma de dinero que repartió a partes iguales entre cierto número de niños .Si hubiera habido dos niños más, cada uno de ellos habría recibido un dólar menos; si hubiera habido dos niños menos, cada uno habría recibido un dólar más.¿Cuántos niños había y cuánto recibió cada niño?

RUBLOS

7.-En una escuela rusa compran libros para la biblioteca. Si pagan con billetes de 3 rublos necesitan 8 billetes más que si pagan con billetes de 5 rublos. ¿Cuál es el precio de los libros?

ENCONTRAR

8.-Un tren parte de Madrid a Valencia con una velocidad de 120 km/ hora y otro de Valencia a Madrid con una velocidad de 100 km /hora. La distancia por tren de Valencia a Madrid es de 440 km. Dígase a que distancia de Valencia se cruzan ambos trenes.

LANA Y ALGODON

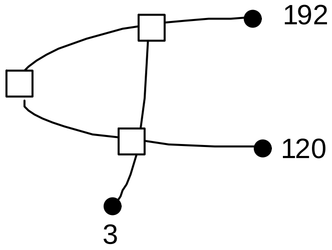
9.-Se dispone de tela de lana y de tela de algodón. En total 12 metros. El precio del metro de lana es de 2 euros y el de algodón de 4 euros. El valor total de la tela que se dispone es de 32 euros.¿De cuántos metros de tela y de cuántos de algodón se dispone?

AVIONETA

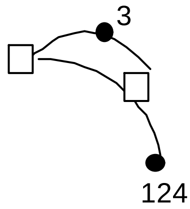
10.-Una avioneta parte del aeropuerto en contra de la dirección del viento un día en que éste sopla a la velocidad de 20 km/hora. La velocidad de la avioneta es de 200 km/hora. La avioneta puede llevar carburante para 4 horas. ¿A qué distancia puede alejarse del aeropuerto si desea regresar a éste con la ultima gota de carburante?

A3.3.- GT de las lecturas algebraicas de los problemas de los instrumentos nº 1 y 2.

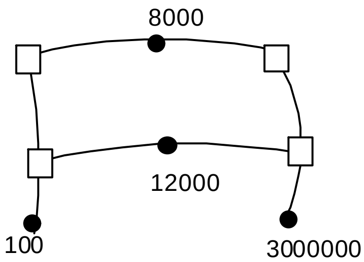
CHOCOLATES Y CARAMELOS



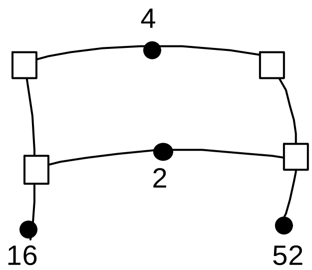
DAFNE



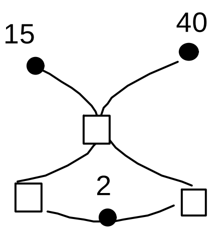
BOLETOS



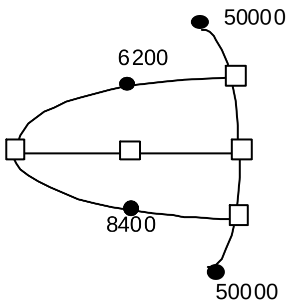
GALLINAS Y CONEJOS



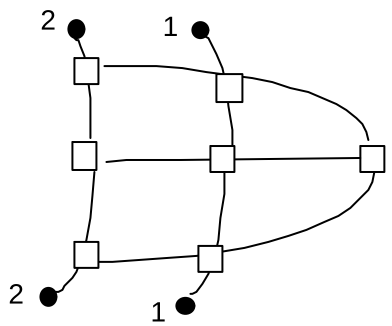
ADRIAN



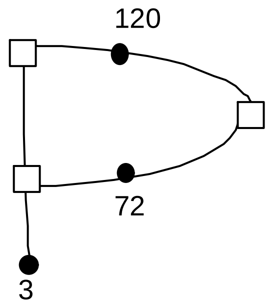
COLECTA



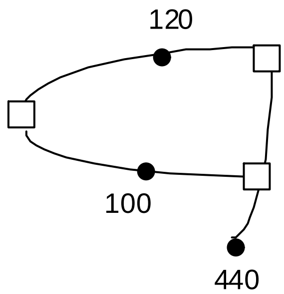
COLECTA



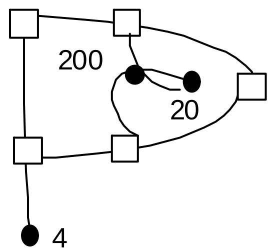
ALCANZAR



ENCONTRAR



AVIONETA



A3.4.- Resoluciones con soluciones aritméticas de los problemas de los instrumentos nº 1 y 2.

Para cada problema en a), b), c), d), e), f), g) se trata.:

a) el enunciado del problema.
b) el GT de una lectura algebraica y un texto intermedio algebraico.
c) un apunte de la solución usando el SMS del álgebra geométrica
d) la ecuación obtenida a partir del texto intermedio algebraico y la solución de ésta.
e) las cantidades que se leen en dicha solución.
f) un subgrafo del Grafo teórico del problema conteniendo una solución aritmética y el texto intermedio aritmético de dicha solución.
g) anotaciones sobre razonamientos aritméticos susceptibles de uso.

Lo siguiente debe ser recordado –ver **1.5-**, para aclarar lo que se dice en “e) las cantidades que se leen en dicha solución”. A partir del GT de un PLA siempre podemos obtener textos intermedios algebraicos o ecuaciones cuya resolución conduce al resultado del problema. Las soluciones de las ecuaciones son expresiones aritméticas que determinan cantidades y en las que intervienen únicamente los datos del problema. Para una expresión que determina una cantidad puede buscarse sentido a esa expresión en el campo semántico del problema. Un procedimiento para ello consiste en la descomposición de la expresión en partes, prestar atención a dichas partes e indagar a qué cantidades pueden referirse en concordancia con el sentido que son referidas mediante datos. Las cantidades así referidas son las cantidades que decimos que "se leen".

Los problemas ENCONTRAR, ALCANZAR, AVIONETA pertenecen a la subfamilia móviles -ver **1.18-** y puede considerarse dicho todo lo allí expuesto que sea pertinente respecto a los GTTSP de éstos problemas. Por otro lado, el problema ALCANZAR pertenece a una situación equivalente a la situación HENO y por tanto posee un GTTSP equivalente al GTTSP del problema HENO.

Los razonamientos aritméticos en los problemas de esta familia pueden derivarse de las leyes del movimiento uniforme:

"Si los tiempos son iguales, los espacios recorridos en ese tiempo son proporcionales a las velocidades".

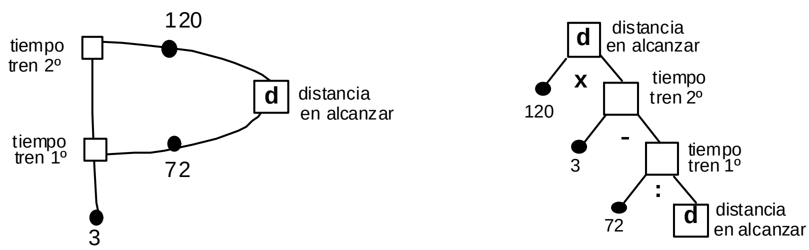
"Si los espacios son iguales, los tiempos utilizados en recorrerlos son inversamente proporcionales a las velocidades".

ALCANZAR

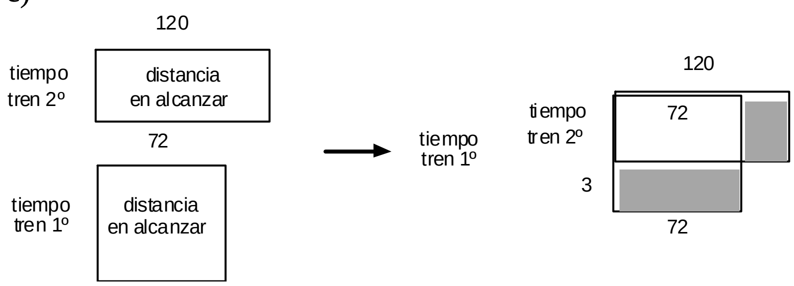
a)

Un tren sale de la estación hacia el norte recorriendo 72 kilómetros cada hora. Tres horas después un segundo tren parte en vía paralela también hacia el norte y recorre 120 kilómetros cada hora. ¿Cuánto le llevará al segundo tren alcanzar al primero?

b)



c)



d)

$$d = [((d / 72) - 3)] \cdot 120 \qquad d = [(3 \cdot 72) / (120 - 72)] \cdot 120$$

e)

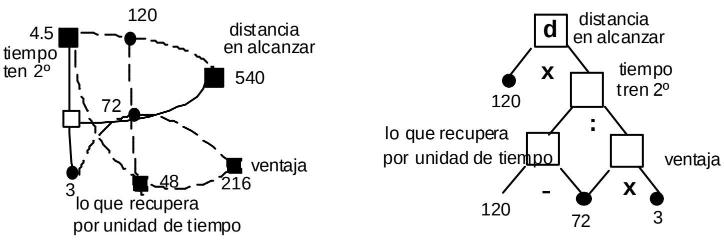
“ventaja” , “3 ·72” , “tiempo retraso · velocidad del mas lento”

“recuperado por hora “ , “120 – 72” , “vel. mas rápido – vel. mas lento”

“tiempo en alcanzar “ , “(3 · 72)/ (120 -72)” , “ ventaja / recuperado por hora”

“d” , “ distancia al alcanzar “ , “ tiempo en alcanzar · velocidad mas rápido”

f)



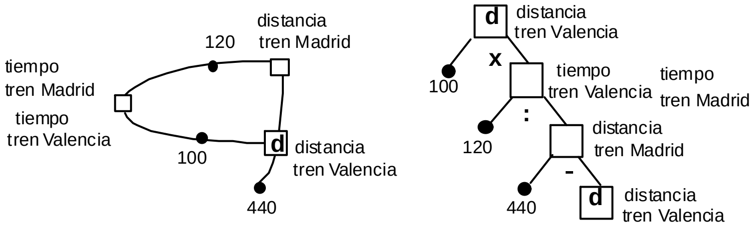
g) A partir del reconocimiento del hecho de que los espacios recorridos son iguales, puede invocarse que en ese caso “los tiempos son inversamente proporcionales a las velocidades” para a partir de ahí, argüir que lo propio ocurrirá con las diferencias y mediante uso de la proporción correspondiente o el esquema de la regla de tres, determinar el tiempo en alcanzar.

ENCONTRAR

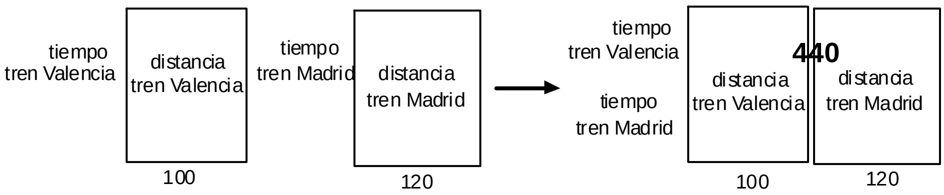
a)

Un tren parte de Madrid a Valencia con una velocidad de 100 km / hora y otro de Valencia a Madrid con una velocidad de 120 km/hora. La distancia por tren de Valencia a Madrid es de 440 km. Dígase a que distancia de Valencia se cruzan ambos trenes.

b)



c)



d)

$$d = [(440 – d) / 120] \cdot 100 \qquad d = [440 / (120 +100)] \cdot 100$$

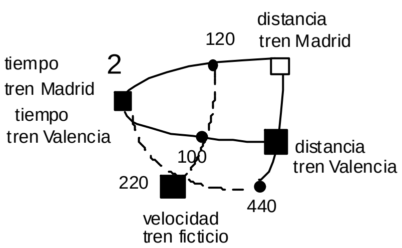
e)

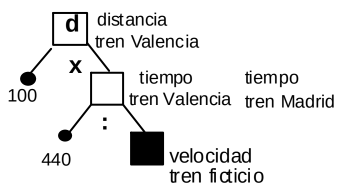
“440 / (120 +100) “ , “tiempo en encontrarse”
“120 +140” , “velocidad de un tren ficticio”, “tren que recorre la distancia Valencia Madrid en el mismo tiempo que los dos trenes tardan en encontrarse”

o bien .

si se escribe “tiempo en encontrarse” , “440 · [1/ (120+ 100)] ” entonces se tiene que “ 1/ (120 + 100)” , “tiempo empleado en recorrer un kilómetro entre ambos trenes”.

f)





g)

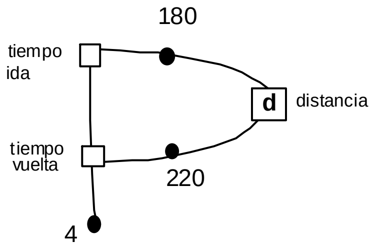
A partir del reconocimiento del hecho de que los tiempos son iguales, puede invocarse que en ese caso “los espacios recorridos son proporcionales a las velocidades” y a partir de ahí proceder a un reparto proporcional.

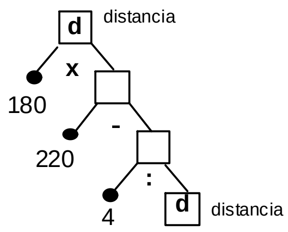
AVIONETA

a)

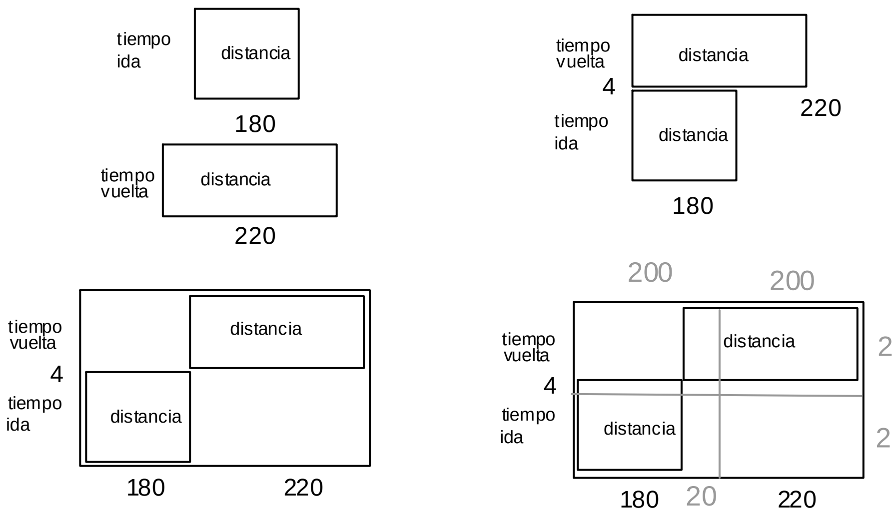
Una avioneta parte del aeropuerto en contra de la dirección del viento un dia en que éste sopla a la velocidad de 20km/hora. La velocidad de la avioneta es de 200 km/hora. La avioneta puede llevar carburante para 4 horas. A qué distancia puede alejarse del aeropuerto si desea regresar a éste con la ultima gota de carburante?

b)





c)



d)

d = [4 – (d /220)] · 180 d = 4/ [(1/180) + (1/220)]

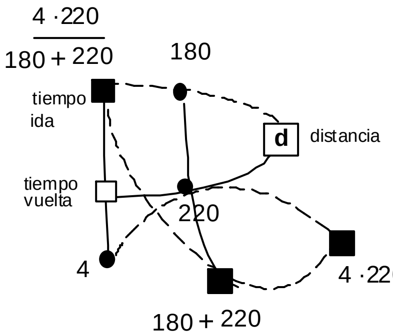
e)

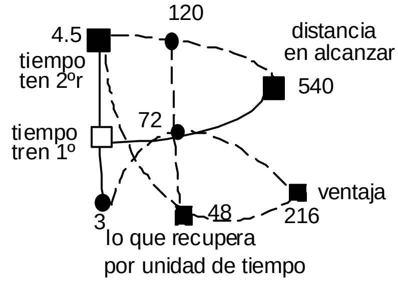
“1/180” “tiempo empleado en recorrer un kilómetro a la ida”
“1/ 220” “tiempo empleado en recorrer un kilómetro a la vuelta”
“(1/180) + (1/220) “ “tiempo empleado en recorrer un kilómetro de ida y uno de vuelta”
“4/ [(1/180) + (1/220)]” “ número de kilómetros de ida y vuelta recorridos”

f y g)

Si hacemos operaciones en d = 4/ [(1/180) + (1/220)] nos encontramos con d = [(4 · 180)/ (180 + 20)] · 220 y si tales operaciones las representamos en el GT del problema obtenemos el GT de la solución aritmética (a) en la figura que sigue , solución que puede compararse con el obtenido para el problema ALCANZAR (b)

(a) (b)





A partir de esta comparación podemos encontrarle sentido a algunas de las expresiones aritméticas utilizadas e incluso mencionar las cantidades a que hacen referencia en un mundo posible. Así "4 · 220", "distancia desde la que vuelve una avioneta que se encuentra a 4 horas del aeropuerto" ; " 4 · 180 " , " distancia a que hubiese llegado la avioneta si hubiese estado alejándose del aeropuerto hasta agotar el combustible", etc. Sin embargo, éstas cantidades son cuanto menos difícil de concebir en el mundo posible al cual nos parece que refiere el enunciado del problema.

Otras lecturas de la expresión aritmética que determina "d " son posibles. Así el reconocimiento de la proporcionalidad inversa de tiempos y velocidades cuando los espacios recorridos son iguales permite leer, leídas las expresiones una vez efectuado el reparto del tiempo de vuelo de la avioneta.

" [4 · / (180 + 220)] · 220" " la parte del tiempo que corresponde a la ida"
" { [4 · / (180 + 220)] · 220 } · 180" " la distancia recorrida a la ida"

y

" [4 · / (180 + 220)] · 180" " la parte del tiempo que corresponde a la vuelta"
" { [4 · / (180 + 220)] · 180 } · 220 " " la distancia recorrida a la vuelta"

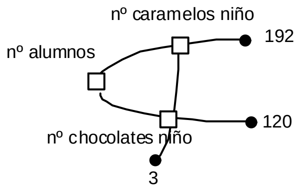
Además, el uso de las cantidades anotadas en e) esto es las inversas de las velocidades, nos hubiese conducido como se anotó en **1.19** transformar el GT de la AVIONETA en un GT isomorfo al del problema ENCONTRAR donde espacios y tiempo intercambian papeles.

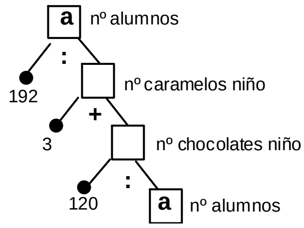
CHOCOLATES Y CARMELOS

a)

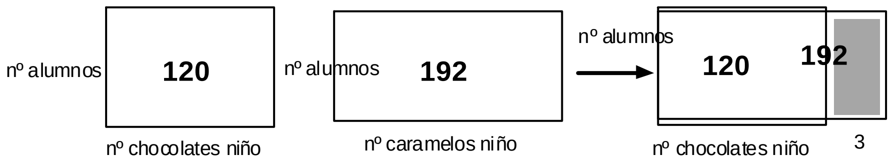
1.-Una educadora tiene 120 chocolates y 192 caramelos que va a repartir entre los alumnos de su clase.Si cada alumno recibe 3 caramelos más que chocolates. ¿Cuántos son los alumnos?

b)





c)



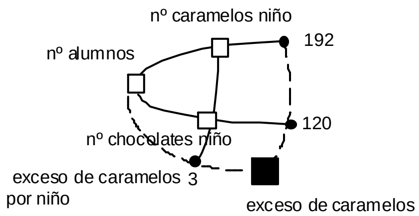
d)

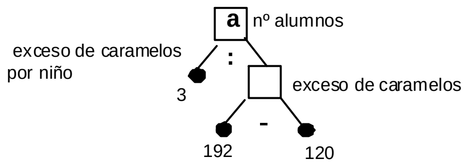
a = [192 / ((a/120) +3)]   a = (192 – 120) / 3

e)

“192 -120 “ , “ diferencia de dulces”, “exceso de caramelos”
“3 “, “diferencia de dulces por niño”, “exceso de caramelos por niño”

f)





g)

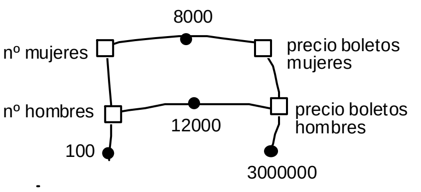
A partir del reconocimiento del hecho que en repartos equitativos de distintas clases de dulces entre un número dado de niños: “dulces y dulces por niño” son cantidades proporcionales. La constante de proporcionalidad es el número de niños. Se puede argüir que las diferencias son asimismo igualmente proporcionales y utilizar dichas diferencias para determinar la constante de proporcionalidad.

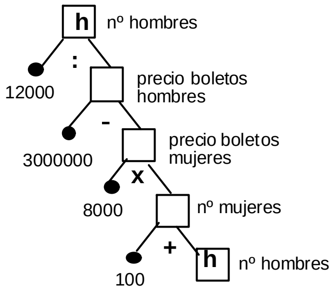
BOLETOS

a)

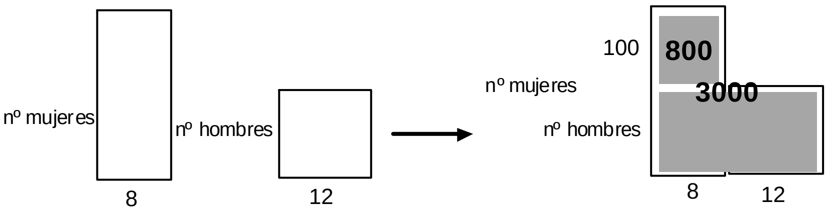
En una fiesta se vendieron boletos, los de dama costaron 8.000 pesos y los de caballero 12 pesos.Los boletos de dama fueron 100 más que los de caballero. La recaudación total fue de 3.000.000 de pesos. ¿Cuántos boletos se vendieron de cada tipo?

b)





c)



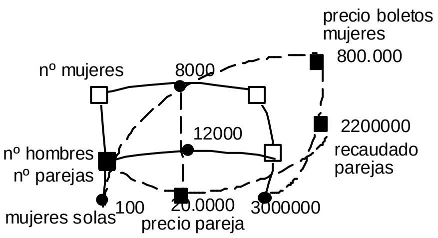
d)

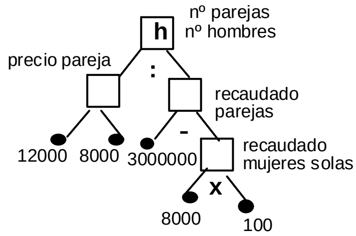
h = [3000 – ((h +100) .8))] / 12   h = (3000 – 8 .100) / (12 + 8)

e)

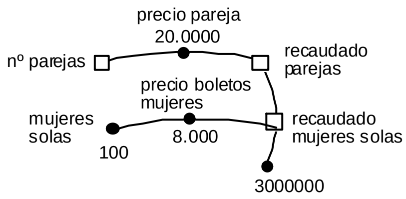
“12 + 8 “, “ precio hombre + precio mujer “ , “precio pareja”
“8 ·100 “, “ lo recaudado mujeres de más” ,
“100”, “ mujeres sin pareja”
“nº hombres” , “ nº parejas”
 “ 3000 – 8.100” , “ recaudado parejas”
“ (3000 – 8 .100) / (12 + 8)” , “nº parejas”, “recaudado parejas /precio pareja”

f)





El GT del problema BOLETOS cuando se leen “parejas” y “precio por pareja”

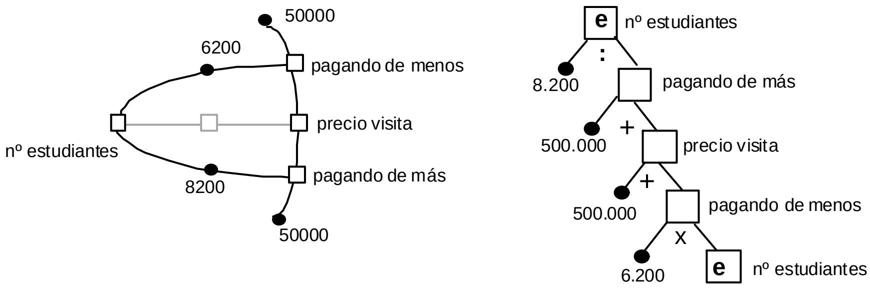


COLECTA

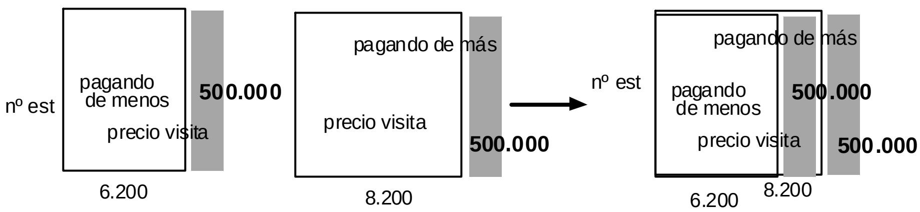
a)

Un grupo de alumnos tiene que hacer una colecta para pagar una visita guiada. Si cada uno de ellos aportara 6.2 euros les faltarían 50 euros. Si cada uno de ellos contribuyera con 8.2 euros entonces les sobrarían 50 euros. ¿Cuántos alumnos constituyen el grupo?

b)



c)



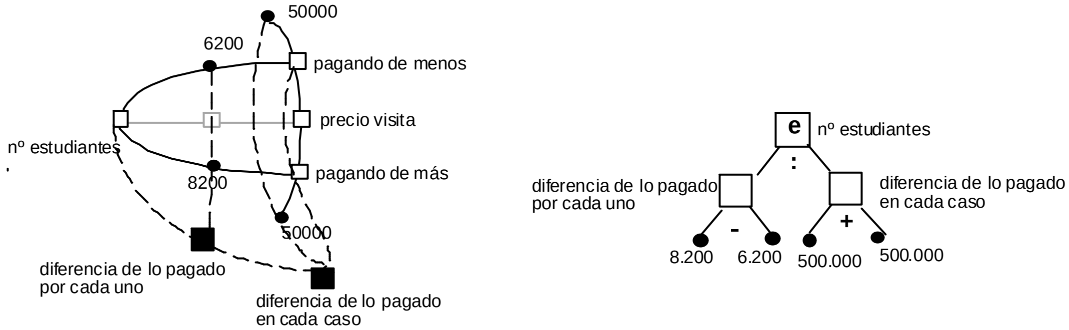
d)

$e = [(6,2 \cdot e + 500)+ 500] / 8.2 \qquad e = (500 + 500)/ (8,2 – 6,2)$

e)

" 8,2 – 6,2" , " diferencia de lo pagado por cada estudiante en cada caso"
"500 + 500" , "suma de las diferencias con el precio de la visita"
"500 + 500" , " diferencia de – entre- lo pagado en cada caso"

f)



g)

Cuando todo el mundo paga por igual , lo pagado en cada caso depende del nº de gente que paga. En ese caso, cuando todo el mundo paga por igual una cantidad cada vez que se paga, "lo pagado cada vez en total" y "la cantidad que cada uno paga" son cantidades proporcionales. La constante de proporcionalidad es el nº de gente que paga A partir de ahí, como en problemas anteriores, se puede argüir que lo propio ocurrirá con las diferencias.

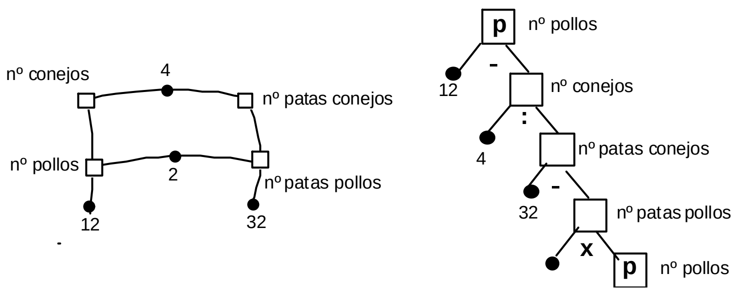
Lo que hay de nuevo, en el problema que nos ocupa, es que lo pagado en total cada vez no se conoce y por tanto no tampoco sus diferencias. Lo que obliga a que se debe de recurrir a determinar éstas diferencias recurriendo a lo que se conoce, las diferencias con el precio de la visita. Y argüir ahora para determinar cómo las diferencias entre lo pagado cada vez pueden determinarse mediante las diferencias con el precio de la visita.

GALLINAS Y CONEJOS

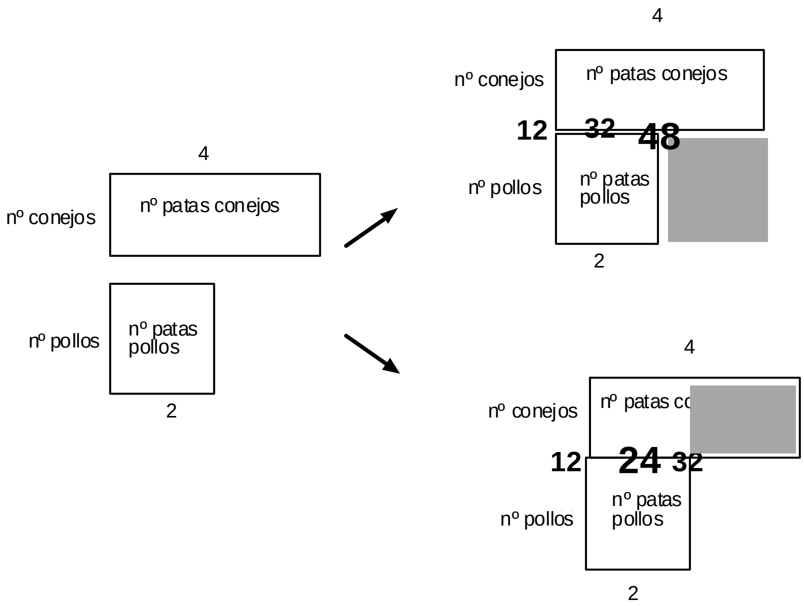
a)

En un corral hay pollos y conejos. Se cuentan las cabezas y son doce; se cuentan las patas y son treinta y dos.¿ Cuántos pollos y conejos hay en el corral?

b)



c)



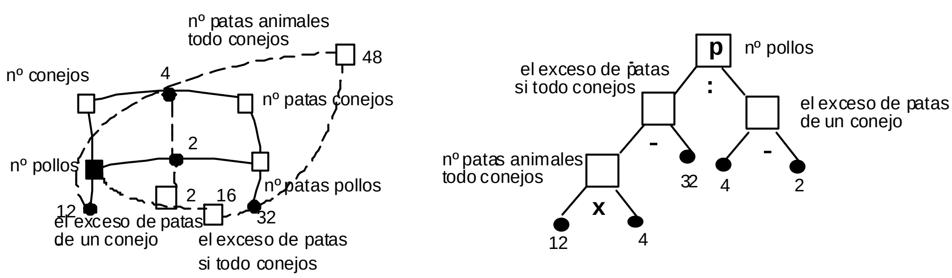
d)

p = 12 - [(32 -2 ·p) / 4] p = [(4 ·12) – 32] / (4 – 2)

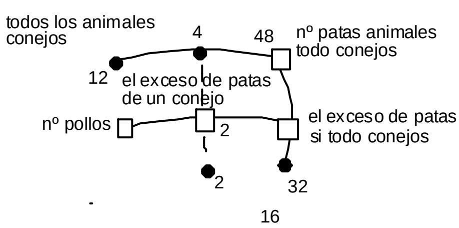
e)

“4 - 2 “ , “diferencia de patas entre un conejo y un pollo”
“4 - 2 “ , “diferencia de patas por cabeza”
“4 · 12” , “ nº de patas de 12 conejos”
“12 “, “cabezas” , “¿ de conejos?”
“4 · 12” , “ nº de patas que habría en el corral si todo conejos”
“(4 ·2) -32” , “diferencia de patas , entre las que habría y las que hay”
“[(4 ·12) – 32] / (4 – 2)” , “ nº de pollos” “ el cociente de las dos diferencias mencionadas”

f)



El GT del problema GALLINAS Y CONEJOS con las cantidades mencionadas.

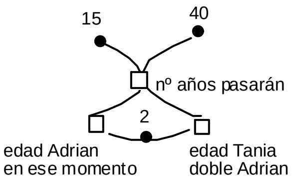


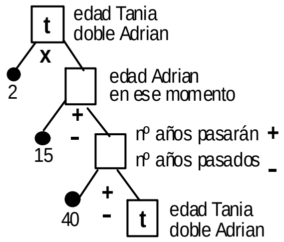
ADRIAN

a)

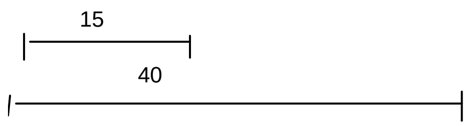
Adrián tiene 15 años, Tania tiene 40 años. ¿Cuándo tendrá Tania el doble de la edad de Adrián?

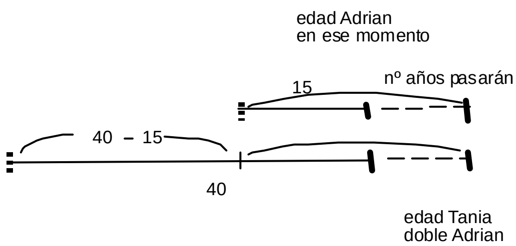
b)





c)





d)

$[(t -40) + 15] \cdot 2 = t$ $\qquad$ $t = 2 \cdot (40 -15) / (2-1)$

e)

"40 -15" "diferencia de edades"
"40-15" "edad de Tania al nacer Adrián"
"2 " , para "el doble "
"2 – 1" , "¿? "

f)

g) Comentarios : En este problema las cantidades que se consideran son las edades de Adrián y Tania en dos momentos diferentes: el momento presente y un momento del futuro, momento que será aquel en que las edades de Tania y Adrián sean una doble que la otra. La ubicación precisa de un momento futuro partiendo del momento presente se hace mediante los años transcurridos. Con estas cantidades la situación descrita en el problema se ha representado en a). Y se considerado conveniente responder a la pregunta del problema con la edad de Tania, así el TIAL ha sido elaborado con ese propósito.

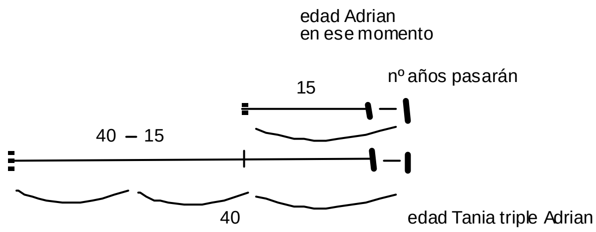
Se podría igualmente considerar adecuado responder con los años transcurridos en cuyo caso el TIAL correspondiente hubiese proporcionado la ecuación y solución.

$a = [(a + 15) . 2] - 40$ $\qquad$ $a = (40 – 2 \cdot 15) / (2-1)$

"$2 \cdot 15$ " , " doble de la edad de Adrián"
"$2 \cdot 15$" , " edad de Adrián en el momento del futuro requerido"
" $40 – 2\cdot15$" , " diferencia de las edades de Tania en el momento presente y de Adrián en el futuro"
" $2 – 1$" , "¿?"

En ambos casos, podemos decir que no es fácil idear las cantidades que deben introducirse ni indicar las operaciones aritméticas que deben hacerse. Por otro lado no es trivial encontrar otro sentido que el aritmético a la expresión "2-1"y ningún referente en el mundo del problema.

A esta búsqueda ayuda considerar el problema para que "sea el triple" donde deberíamos dar sentido a "3-1"



A partir de ahí podemos entender que la diferencia es una parte determinada de la edad de Tania cuando su edad sea doble, triple, etc, de la edad de Adrián y reformulando este problema en un esquema parte-todo se puede obtener una solución aritmética procediendo como se hace en dicho esquema. Ver DAFNE.

**Las cantidades que aparecen el los problemas son "edades" que expresan "los años transcurridos desde el nacimiento" y las relaciones entre "edades" están expresadas en el problema de modo aritmético. La edad es una cantidad extensiva y los escalares que aparecen en los problemas pueden ser considerados cocientes de edades. Así, las cantidades que pueden introducirse devienen en relaciones aritméticas entre "números"que tienen por referente edades en un determinado momento, años transcurridos entre momentos o comparación de edades. No parece dar mas de si el "mundo posible" en cuanto a la ideación de diferentes cantidades.

La multiplicidad de cantidades proviene de la intervención de las "edades" de varias personas, ahí las relaciones aritméticas entre las edades de las personas se dan mediante que expresan su edad en un momento determinado, localización de momento, que se ha hecho usando momentos diferentes según señala el calendario en el que constan sus fechas de nacimiento. La diferencia de las edades de las personas se refiere al calendario y será constante para cada pareja de personas determinadas. Este es el escenario de los problemas de edades.

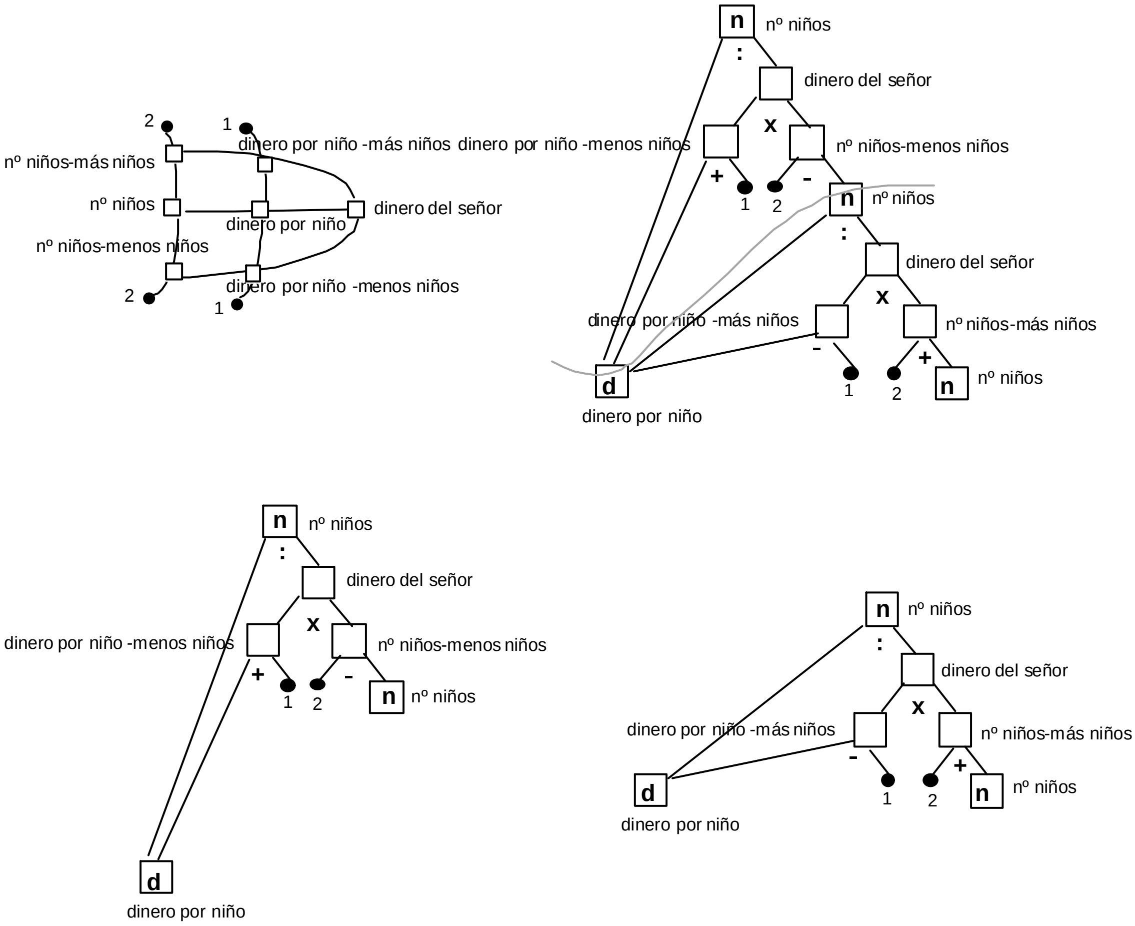
La reducción de estos problemas de edades a problemas de ábaco no parece posible. Al menos el uso de los significados de las relaciones aritméticas aprehendidos o de los modelos implícitos elaborados a partir de los problemas de ábaco sólo parece que pueda hacerse para cuando se trate de la edad de una persona. Baste mencionar a este respecto, que en el problema que nos ocupa “la edad de una persona – Tania- se hará el doble que la de otra- Adrián- “ sin que hayan duplicado ni uno ni otro su edad , y este aparente conflicto es el objeto del problema.**

DINERO

a)

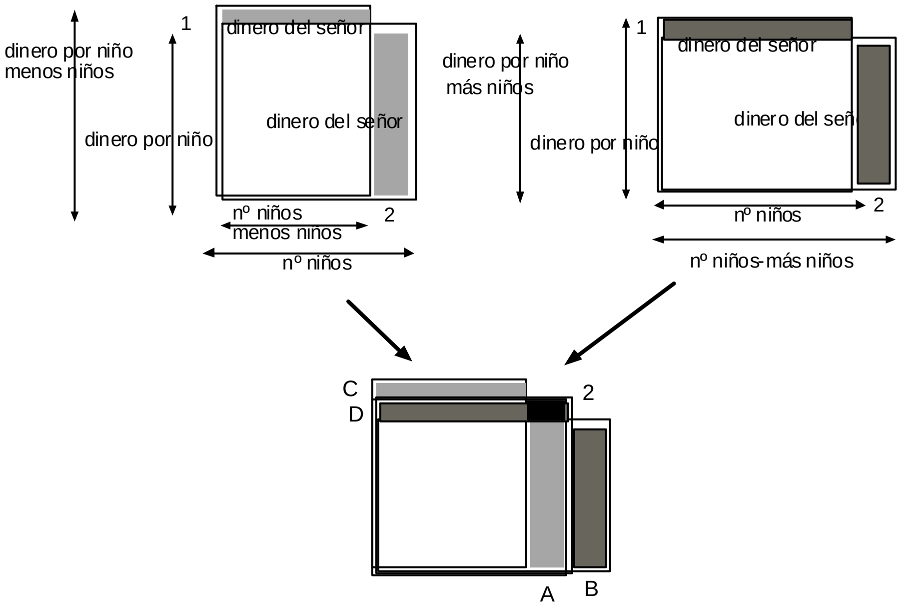
Un señor que llegó del extranjero tenia una suma de dinero que repartió a partes iguales entre cierto número de niños. Si hubiera habido dos niños más, cada uno de ellos habría recibido un dolar menos; si hubiera habido dos niños menos, cada uno habría recibido un dolar más.¿Cuántos niños había y cuánto recibió cada niño?

b)



Sobre la posibilidad de obtener un texto untermedio con el uso de una única literal ver **1.13**

c)



d)

$$(n - 2) (d + 1) = n \cdot d$$
$$(n + 2) (d -1) = n \cdot d \qquad 0 = 4$$

e)

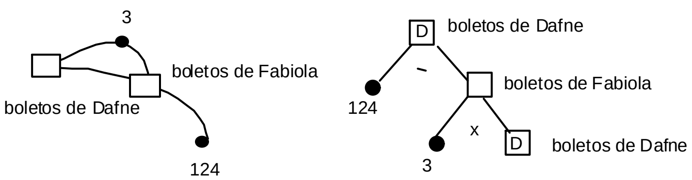
En el mundo posible del problema es contradictorio hablar o no puede hablarse de esas relaciones con esas cantidades concreta.

DAFNE y FABIOLA

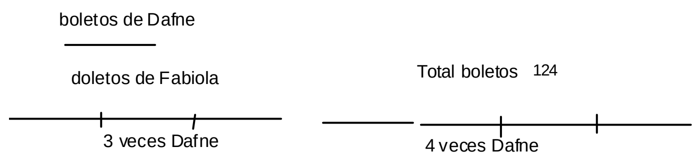
a)

Dafne y Fabiola vendieron 124 boletos para un concierto de jazz. Si el número de boletos que vendió Fabiola fue el triple de los que vendió Dafne.¿Cuántos ha vendido cada una?

b)



c)



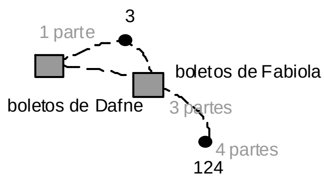
d)

D = 124 – 3D D = 124 / (3+1)

e)

“3 +1 “ “ nº de partes en que se dividen los Boletos vendidos”, “ boletos Dafne, una parte”

f)



A3.5.- Diccionario teórico de cantidades de las soluciones de los problemas del Instrumento nº 2

Se señalan en función de que en el enunciado sean:
Mencionadas o *no mencionadas*.
Y en el GT correspondiente a la lectura algebraica se tomen como:
Conocidas o desconocidas

CHOCOLTALES Y CARAMELOS.

Extensivas: nº caramelos , nº chocolates, nº alumnos
Intensivas *:* *nº caramelos por niño****, nº chocolates por niño.***
Diferencias: *exceso de caramelos*
exceso de caramelos por niño .

DAFNE

Extensivas: nº boletos vendidos por Dafne y Fabiola, nº boletos vendidos por Dafne ,nº boletos vendidos por Fabiola.
Escalar : el triple

nº boletos – *el todo dividido en cuatro partes iguales- cuarto partes*
nº boletos vendidos por Dafne, *una parte*
nº boletos vendidos por Fabiola , *tres partes*

BOLETOS

Extensivas: nº de boletos, nº de boletos de dama, nº de boletos de caballero.
Recaudación total.
Intensivas: precio boletos de dama, precio boletos de caballero.
Diferencias : exceso boletos de dama

nº boletos hombres, nº de hombres
nº de boletos dama, nº de mujeres
nº de parejas
exceso boletos de dama , *nº mujeres sin pareja*
Precio pareja.
Recaudado mujeres sin pareja,
Recaudado parejas.

COLECTA

Extensivas: nº de alumnos.
Intensivas: aportación o contribución por cada alumno cuando sobra o falta.
Diferencias: dinero que falta, dinero que sobra

Diferencias: *entre lo pagado en cada caso*
entre lo pagado por cada uno.
precio de la visita del grupo, *precio de la visita por alumno.*
precio de la visita del grupo pagando de menos o de más.

POLLOS Y CONEJOS

Extensivas: nº de cabezas y nº de patas en el corral
nº de pollos y nº de conejos.
Intensivas : nº patas de cada pollo y de cada conejo

nº de patas que corresponden a pollos y a conejos.
nº de patas si todo fuesen conejos o pollos.
el exceso o falta de patas en cada caso.

ALCANZAR

Extensivas: distancia
Intensivas : velocidades de los trenes.
Diferencia de tiempos : horas después.

Diferencias: *tiempo retraso, recuperado por hora*
velocidad del más rápido, velocidad del más lento,
ventaja, tiempo en alcanzar.

ENCONTRAR

Extensivas: distancia Valencia –Madrid, distancia Valencia.
Intensivas : velocidades de los trenes.

velocidad tren ficticio, tiempo en encontrarse.

AVIONETA

Extensivas : distancia, carburante para 4 horas - tiempo de vuelo-
Intensivas : velocidad avioneta, velocidad del viento.

velocidad ida, velocidad vuelta, tiempo en un kilómetro ida, vuelta, ida y vuelta.

ADRIAN

Extensivas: edad de Tania y edad de Adrián. Cuando tendrá el doble de la edad de Adrián.
Escalar : el doble

Diferencias: *Entre Tania y Adrián, la edad de Tania cuando nació Adrián.*
Edad de Tania en el futuro o pasado,
Edad de Adrián en el futuro o pasado.

DINERO

Extensivas: Dinero, niños.
Intensivas : dinero por niño.

Diferencias: niños de más, niños de menos
dinero por niño (más niños)
dinero por niño (menos niños)

A.3.5.-Descripción de la situación MECA y construcción del test-meca.

La situación MECA es una situación que comienza poniendo en escena a una mecanógrafa que escribe habitualmente un número determinado de páginas diarias para cumplimentar un trabajo. La mecanógrafa lleva el trabajo a buen fin en un número determinado de días. A partir de ese cuadro se sitúa a la mecanógrafa ante dos casos hipotéticas opuestos, uno, en la que cumplimenta el trabajo escribiendo diariamente algunas páginas diarias más, y otro, en la que lo hace escribiendo algunas paginas diarias menos.

Es un supuesto implícito de la situación que el trabajo es un trabajo determinado, esto es, un trabajo concreto que consta de un número determinado de páginas.

Como la mecanógrafa tanto en su ejercicio habitual como en cualquiera de los casos hipotéticos se limita a mecanografiar tantas páginas como páginas consta el trabajo, la consecuencia que deriva de ello es que encontramos a la mecanógrafa en el primero de los casos, dando cuenta de su trabajo en menos días de los determinados, y en el segundo, en más días de los determinados.

Supuesta la mecanógrafa en su ritmo de trabajo habitual y en el sólo caso hipotético segundo tendríamos una situación que lamamos MECA (-) –donde escribiría diariamente menos páginas de las habituales- y que describimos concretamente así:

MECA (-)

Una mecanógrafa escribe “tantas” paginas diarias durante “tantos” días para realizar un trabajo. Si escribiese “tantas” paginas diarias *menos* tardaría “tantos” días *más*.

Y supuesta la mecanógrafa en su ritmo habitual y en el sólo caso hipotético primero tendríamos una situación MECA (+) –donde escribiría diariamente más páginas de las habituales-

MECA (+)

Una mecanógrafa escribe “tantas” paginas diarias durante “tantos” días para realizar un trabajo. Si escribiese “tantas” paginas diarias *más* tardaría “tantos” días *menos*.

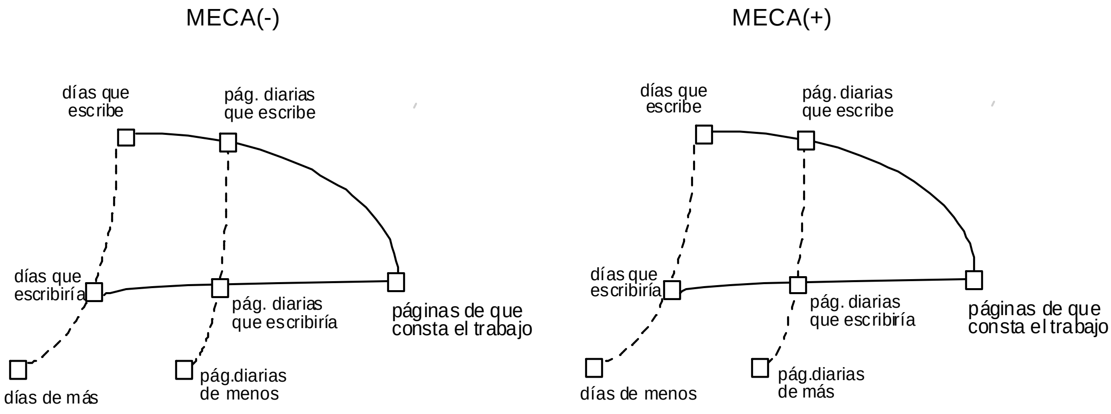
Y por superposición de ambas situaciones tendríamos la situación MECA

MECA

Una mecanógrafa escribe “tantas” paginas diarias durante “tantos” días para realizar un trabajo. Si escribiese “tantas” paginas diarias *más* tardaría “tantos” días *menos*. Si escribiese “tantas” paginas diarias *menos* tardaría “tantos” días *más*.

Por como hemos descrito MECA (-) y MECA(+) , cada una de estas dos situaciones comparan dos modos de realizar un trabajo mediante las paginas diarias que la mecanógrafa escribe y las que escribiría en una situación hipotética, al mismo tiempo que los días que escribe y que escribiría En lo que toca a las cantidades “paginas diarias”, para su comparación se toma como referente la cantidad de “páginas diarias que escribe habitualmente la mecanógrafa” y como comparado “la cantidad de paginas que escribiría” la mecanógrafa en una situación hipotética”. La comparación se expresa en términos de la diferencia que puede existir en *menos* o en *más* entre comparado y referente. En lo que toca a las cantidades “días”, se procede de manera análoga. Debiendo anotarse, que en la descripción de las situaciones, ni referentes ni comparados, en ninguno de los casos “paginas diarias” o “días”, se mencionan en la expresiones verbales que comparan las cantidades. Por su lado, las cantidades referentes se mencionan en la primera de las dos frases de que consta la descripción de las situaciones mientras que las cantidades comparadas no se mencionan.

Los grafos esquemas correspondientes a estas situaciones, contienen siete vértices y cuatro aristas que representan a siete cantidades, dos relaciones multiplicativas y dos relaciones aditivas. La confluencia en un nodo de las dos aristas multiplicativas indica que las otras cuatro cantidades que pertenecen a dichas aristas están involucradas en una relación de proporcionalidad. Proporcionalidad inversa entre las cantidades “días” y “paginas diarias”.



Los grafos de la situaciones MECA(-) o MECA(+) que se presentan en la figura superior-a trazos las aristas aditivas-son isomorfos, multiplicativamente isomorfos y semánticamente isomorfos, no son equivalentes porque no son aditivamente isomorfos dado que difieren en el tipo de problema de comparación aditivo subyacente en las aristas que representan relaciones aditivas, tipos que se intercambian en el paso de una situación a otra.

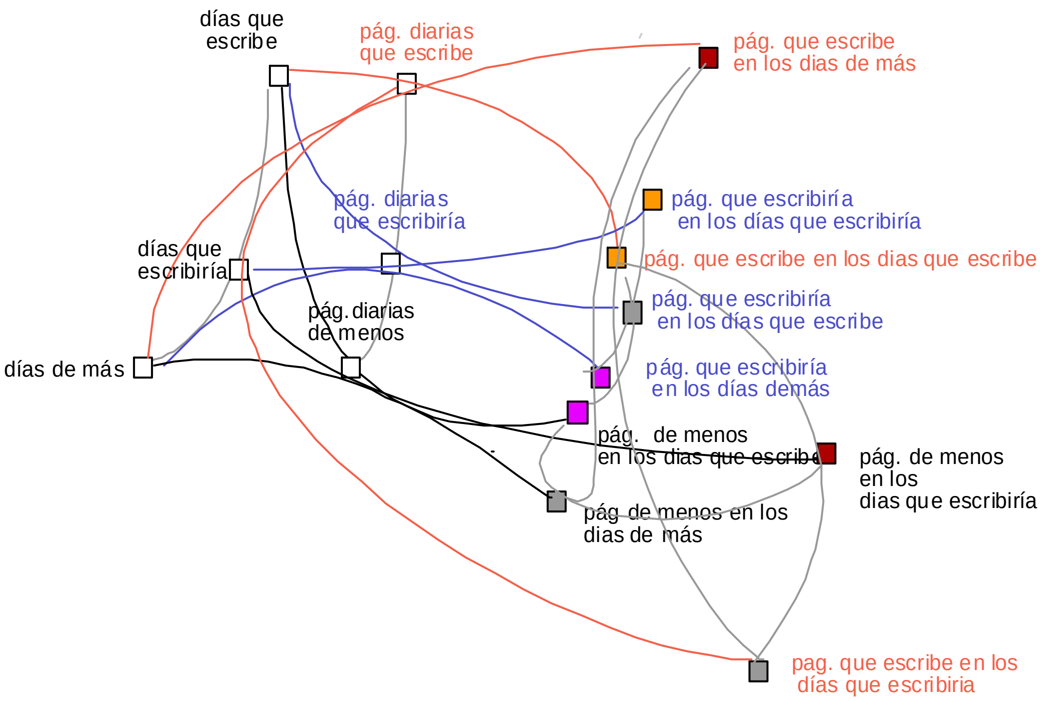
La situación MECA (-) es equivalente a la situación HENO. Dado que sus grafos esquemas son equivalentes y se puede establecer una correspondencia que intercambie las cantdades kilogramos de heno por número de páginas, kilogramos diarios por páginas diarias de la siguiente manera:

MECA(-)	HENO
dias que escribe	días previstos
días que escribiría	días reales
días de más que tardaría	días de más
páginas diarias que escribe	heno diario previsto
páginas diarias que escribiría	heno diario consumido
páginas diarias menos que escribe	heno diario ahorrado
páginas de que consta el trabajo	heno almacenado

La situación HENO fue estudiada en **1.15.-** y en el Anexo **1.-..** Por otro lado, la situación es MECA (-) es semejante a la situación MECA(+), semejantes porque, como se ha dicho, puede pasarse de la una a la otra intercambiando los tipos de problemas de comparación.

Dada la equivalencia entre las situaciones HENO y MECA (-), los Grafos Teóricos y los Diccionarios Teóricos de Cantidades de ambas situaciones son también equivalentes.

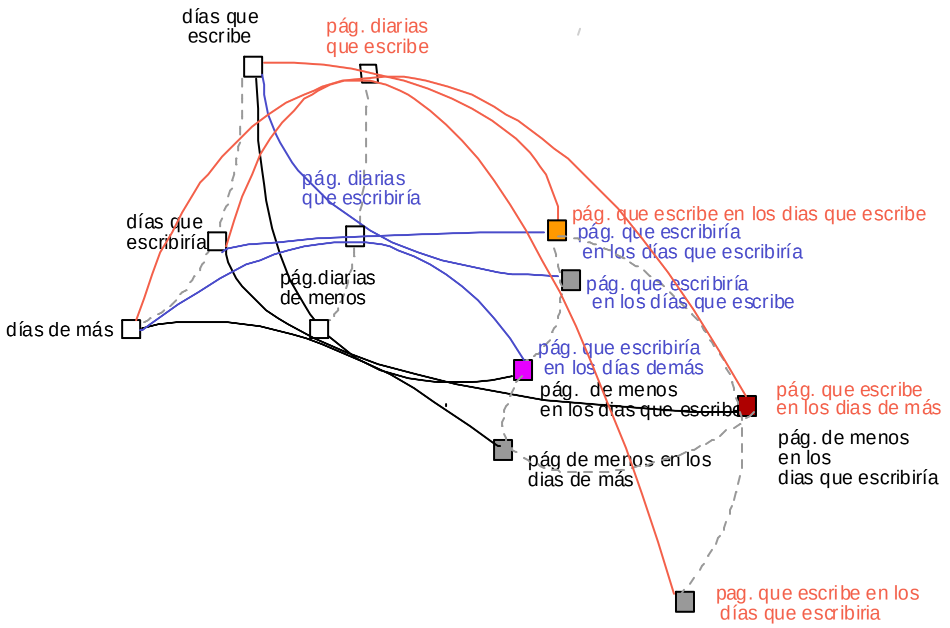
Así en la figura (a) se muestra un grafo de la situación MECA(-) , en analogía a lo hecho en **1.15** para el problema HENO, en el que se han reescrito los nombres de las cantidades, para adaptarlos a la situación MECA(-). En el grafo de la figura, los colores en los nombres de las cantidades negro, azul, rojo, están en consonancia con los colores de los nombres de las cantidades paginas diarias "de menos", "que escribiría" y "que escribe". Las aristas que representan relaciones multiplicativas en las que intervienen esas cantidades se han coloreado asimismo en consonancia. Y este color se ha utilizado también para las cantidades extensivas producidas.



fig(a)

En el grafo los vértices coloreados en gris representan cantidades sin referencia pero con sentido en un mundo posible del problema, y los vértices que tienen el mismo color representan a dos cantidades que son iguales o a una cantidad que presenta polisemia, esto es, representan la misma cantidad expresada de dos modos diferentes.

Representando cada cantidad por un único vértice, y conservando las dobles denominaciones de las cantidades, obtenemos un grafo de la situación MECA(-) y los nombres de su diccionario teórico de cantidades sobrepuesto en los vértices.Este grafo se muestra en la fig., donde las aristas aditivas tienen trazo discontinuo, para que se distingan con claridad.



fig(b)

Hasta aquí, el grafo y el diccionario de cantidades de la situación MECA(-) sólo contiene las cantidades y relaciones -que podemos decir- que se podrían considerar partiendo del grafo esquema y atendiendo al significado de las cantidades y relaciones que este representa. Por otro lado, atendiendo a la proporcionalidad inversa entre las cantidades a partir de la primera proporción de la lista inferior, se peden deducir, entre otras, las proporciones que le siguen.

pág diarias que escribiría **:** días que escribe **: :** pág diarias que escribe **:** días que escribiría

pág diarias que escribe **:** días que escribiría **: :** pág. diarias de menos **:** días de más

pág diarias que escribiría **:** días que escribe **: :** pág. diarias de menos **:** días de más

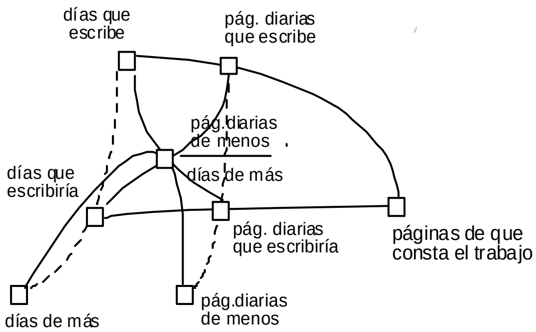
pág diarias que escribe **:** pág. diarias de menos **: :** días que escribiría **:** días de más

pág diarias que escribiría **:** pág. diarias de menos **: :** días que escribe **:** días de más

La consideración de alguna de estas proporciones permite incluir en el grafo teórico del problema nuevos vértices y aristas. Así, por ejemplo:la consideración de las segunda y tercera de las proporciones y la incorporación al grafo esquema de la situación MECA(-) de la razón :

páginas diarias de menos / días de más

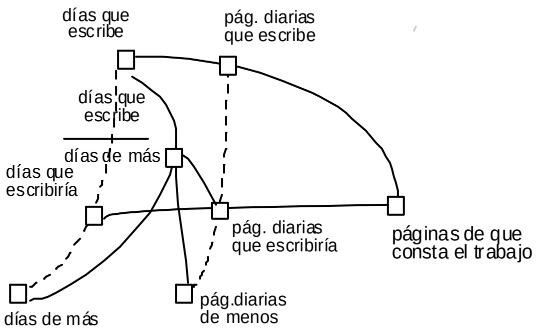
permite incluir otras en el grafo otras dos aristas , fig (c) que relacionan las cantidades días que escribe , pág. diarias que escribiría y días que escribiría , pág. diarias que escribe que forman las otra razones a las que es proporcional la razón incluida en el grafo.

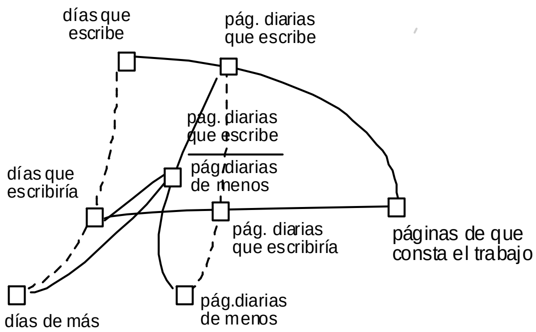


La consideración de las dos últimas proporciones, de forma análoga permite construir los grafos de la fig.(d) onde las razones introducidas han sido:

días que escribe / días de más

pág. diarias que escribe / pág. diarias de menos





Así, el gafo teórco de la situación MECA(-) contiene por un lado todas las aristas y cantidades señaladas en la fig.- y por otro todas las aristas provenientes de introducir “cantidades” que son razones entre las cantidades anteriores y las relaciones de proporcionalidad entre ellas. De éstas últimas nos hemos limitado a señalar algunas de ellas. Por su lado, el Diccionario Teórico de Cantidades contiene además de las cantidades señaladas en la fig- las razones apuntadas.

El grafo teórico de la situación MECA(+) , es semejante y se diferencia, como se dijo antes, en la carga operativa de las aristas aditivas. El diccionario de cantidades se obtiene sustituyendo “de más” por “de menos” en días y “ de menos” por “de más” en páginas diarias modificaciones que se deben asimismo incorporar a las consiguientes cantidades extensivas.

La construcción del test MECA.

El espacio de problemas de la situación MECA(-) nos es conocido pues los problemas que contiene dicho espacio son isomorfos a los problemas que contiene la situación HENO, situación ya estudiada en el anexo **A1.1** . Lo que queda por hacer es elegir problemas de dicho espacio de modo que sean adecuados al propósito de la investigación que es el siguiente.

“En estudiantes con un alto grado de capacitación matemática (4º Facultad de Matemáticas) y a los que se les exige resolver problemas sin usar ecuaciones:

1.-Estudiar con detalle las cantidades, relaciones entre éstas y razonamientos que se usan en las resoluciones de PLA de una situación concreta.

2.-Indagar si estudiantes a los que se propone a su vez la resolución de diversos problemas PLA de una situación, lo que debe suponer implícitamente la familiaridad con cantidades, relaciones y razonamientos susceptibles de uso en esa situación, son capaces de resolver sin el uso de ecuaciones problemas a los que hasta aquí hemos llamado algebraicos. Esto es, problemas cuyos grafos vienen dados en la figura inferior:

Fig.-Grafos de problemas algebraicos.

Con este propósito, los problemas que se elijan para el test deberían:

- procurar entre todos ellos contener como datos la mayor parte de las cantidades del diccionario de cantidades de la situación.

- facilitar en lo posible, por separado y conjuntamente, el uso en los resoluciones de otras cantidades y relaciones que las contenidas en el problema.

- facilitar, en lo posible, el manejo de relaciones de proporcionalidad. Razón esta última, debida a que conocíamos que estas relaciones son de escaso uso en situaciones de proporcionalidad inversa. Conocimiento que proviene tanto de los resultados anteriores como de pilotajes de versiones previas del test que a continuación se describe con estudiantes de CAP.

En este sentido se consideró que el test debía contener:

-problemas de lectura aritmética donde la pregunta del problema o los datos fuesen la “cantidad de paginas que escribiría en un número distinto de dias de los que habitualmente escribe”,“ la cantidad de paginas que escribe escribiendo algunas paginas diarias de más o de menos”, “ las páginas que escribe de más”, .., esto es cantidades que pertenecen al Diccionario teórico de cantidades y que introducidas en la situación deberían facilitar el hallazgo una solución aritmética para los problemas de lectura algebraica de la situación MECA..

-problemas que facilitasen el uso del razonamiento proporcional. Para ello, se consideró conveniente proporcionar para las cantidades que fuesen datos valores cuya relación numérica evocara una razón. Se decidió usar para éste propósito las cantidades "días y días de más o de menos" por un lado y "páginas diarias y paginas diarias" de más o de menos por otro.

-problemas de los que hemos considerado algebraicos.

En esas condiciones y ante los requerimientos mencionados, se constató que el número de problemas necesario era demasiado elevado para que se contemplasen como un único test. Ya que si el test pretendía cumplir efectivamente con su misión, este debía afrontarse sin que se llegase al agotamiento o al hastío de los estudiantes que lo abordaran. Para evitar esto último se decidió dividir el test varios subtest. Como eran dos los problemas supuestamente algebraicos considerados, se consideró que los problemas se podrian disponer en 4 subtest, lo que haría posible que en cada uno de los subtest se presentasen dos versiones de estos dos problemas con distintos datos.

La elección de la pregunta y los datos del problema.

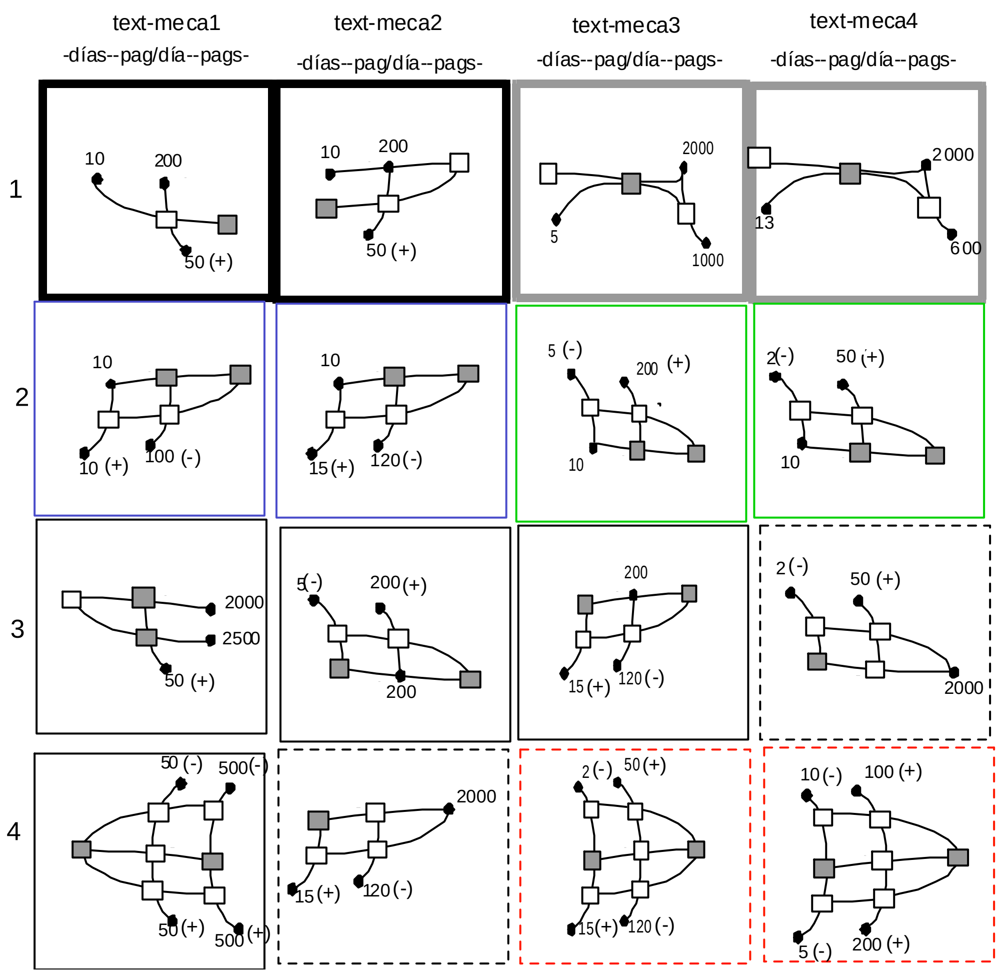
Las cantidades que se decidió que su valor sería el objeto de la pregunta del problema en los problemas del test fueron: "días que escribe", "páginas diarias que escribe", "páginas de que consta el trabajo", bien uno, bien dos de dichos valores.

Para la elección de las cantidades de la situación MECA cuyos valores serian datos en los problemas del test se tuvo en cuenta en primer lugar las cantidades que eran datos en los problemas algebraicos "días de más o de menos" y "páginas diarias de más o de menos", y se decidió que estos serian datos de todos los PLA del test. Como para que cualquier problema de la situación MECA(-) o MECA(+) sea determinado son necesarios tres datos(ver anexo 1.-sit HENO) se decidió que el tercer dato de los problemas sería preferentemente bien el valor de la cantidad "días que escribe" o "paginas diarias que escribe" y nunca el valor de las cantidades "días que escribiría" o "páginas diarias que escribiría" . El valor de la cantidad "páginas de que consta el trabajo" sería el otro dato en última instancia, como lo es en uno de los problemas algebraicos del test.

Para la elección de los valores concretos de las cantidades que iban a ser datos se partió de los valores de las cantidades que describen lo que la mecanógrafa hace habitualmente. "días que escribe páginas diarias que escribe", "páginas de que consta el trabajo" debían ser los mismos para todos los problemas, independientemente de que estos fuesen datos o constituyesen la pregunta del problema. Dado que éstos de valores junto con los valores de las cantidades "días de más o de menos" o " páginas diarias de más o de menos" debían inducir a la observación y formulación de relaciones numéricas, se eligieron 10 y 200 para el número de días y páginas diarias que la mecanógrafa escribe habitualmente. Tales valores facilitan la elección de los otros datos para que razones como 1:2 o de 1:5 u otras igualmente sencillas salten a la vista.

El test- MECA utilizado en el estudio.

Tenidas en cuenta todas estas consideraciones, 16 fué el número de problemas que pareció suficiente para los propósitos del estudio. 16 problemas que se agruparon en 4 subtest de 4 problemas cada uno. Los enunciados de los problemas de cada uno de los subtest figuran en el cuadro 3. 9 y los grafos de los problemas en el cuadro 3.10. donde vienen coloreados en gris los vértices que representan a las cantidades por las que cuyo valor pregunta problema. En el cuadro 3.10 nos hemos servido del grosor o trazo del cuadrado en que está inscrito el grafo del problema para señalar la clase de problemas . Y de los colores: rojo, azul, verde o gris para señalar los problemas de cada clase que son equivalentes.



Cuadro 3.10.- Grafos de los problemas del test-MECA.

Los problemas del test MECA corresponden a clases de problemas de lecturas analíticas diferentes- ver **1.16**-:

4) LA, problemas de lectura analítica aritmética. (cuadrado en trazo grueso) Problemas 1.1, 2.1, 3.1, 4.1

5) PLA, problemas que poseen una lectura analítica algebraica , que dividimos en dos categorías:

   -PLAr.- los problemas que tienen una solución aritmética. (cuadrado en trazo fino) Problemas 1.2,1.3,1.4,2.2, 2.3, 3.2, 3.3, 4.2,

   -PLAg.-los problemas sobre los que nos cuestionamos la posibilidad que los estudiantes obtengan una solución aritmética. (cuadrado en trazo discontinuo)

Los problemas de cada una de estas clases contienen problemas que son isomorfos en algún sentido y equivalentes en última instancia.

Para empezar, cualquier isomorfía de los problemas implica una isomorfía semántica ya que todos las aristas aditivas corresponden a problemas de comparación aditiva y las aristas multiplicativas a problemas de isomorfismo de mediadas. Además:

-De entre los problemas PLAr, los problemas 1.2, 2.2, 3.2, 4.2 son isomorfos multiplicativamente, aditivamente además y equivalentes 1.2, 2.2 por un lado y 3.2, 4.2 . Los problemas 2.3, 3.3 son relacionalmente isomorfos a los anteriores y no son isomorfos multiplicativamente porque la isomorfía multiplicativa la deseamos para distinguir tipos de cantidades y aquí los problemas 2.3 y 3.3 tienen intercambiados los datos días y páginas diarias respecto de los problemas 1.2, 2.2, 3.2, 4.2. El resto de los problemas PLAr 1.3, 1.4 son problemas equivalente a los problemas CHOCOLATES y CARAMELOS y COLECTA de los instrumentos nº 1 y nº 2 del Estudio1.

--De entre los problemas PLAg, los problemas 3.4 y 4.4 son problemas equivalentes y los problemas 2.4 y 4.3 relacionalmente isomorfos.

Por otro lado, la secuencia de los problemas en cada uno de los subtest como en la totalidad del test es intencionada. Así. los primeros problemas de cada subtest (1.1, 2.1, 3.1, 4.1) son de la clase LA, y los últimos (2.4, 3.4, 4.3, 4.4) son de la clase PLAg y el resto de los problemas son de la clase PLAr. El subtest MECA1 no contiene ningún problema PLAg mientras el subtest MECA4 contiene dos problemas PLAg.

La intencionalidad de la secuencia se conserva al proporcionar valores a los datos con la intención de sugerir relaciones numéricas, procurando que los problemas que sugieren relaciones numéricas más familiares o fáciles siempre ocupen lugares anteriores en el test. Esta preferencia de orden se combinó con el tipo de cantidades donde la abundancia de datos de cantidades extensivas precedía a las intensivas, por ejemplo en la secuencia 1.2, 2.2, 3.2, 4.2.

MECA-1

1.- Una mecanógrafa escribe 200 páginas diarias durante 10 días, para realizar un trabajo. Si escribiese 50 páginas diarias más. ¿Cuántas páginas escribiría durante esos 10 días?.

2.-Una mecanógrafa escribe cierta cantidad de páginas durante 10 días, para realizar un trabajo. Si escribiese 100 páginas menos diarias tardaría 10 días más. ¿Cuántas páginas escribe al día, cuántas páginas tiene que escribir en total?.

3.- Una mecanógrafa escribe 2000 páginas en cierto número de días. Si escribiese 50 páginas diarias más escribiría 2500 páginas en esos días. ¿Cuántas páginas diarias escribe en ambos casos?.

4.- Una mecanógrafa piensa que si escribe al día 50 páginas más realiza 500 páginas más de lo previsto, y si escribe 50 páginas menos al día realiza 500 menos de lo previsto. ¿Cuántas páginas tiene que escribir y en cuanto tiempo?.

MECA-2

1.- Una mecanógrafa debe escribir 200 páginas diarias durante 10 días, para realizar un trabajo. Si escribe 50 páginas diarias más. ¿En cuántos días podrá completar su trabajo?.

2.- Una mecanógrafa escribe cierta cantidad de páginas durante 10 días, para realizar un trabajo. Si escribiese 120 páginas menos diarias tardaría 15 días más. ¿Cuántas páginas escribe al día, cuántas páginas tiene que escribir en total?.

3.- Una mecanógrafa, para realizar un trabajo, escribe 200 páginas durante un cierto número de días. Si escribiese 200 páginas más cada día tardaría 5 días menos. ¿Cuántas páginas escribe al día, cuántas páginas tenía que escribir en total?.

4.-Una mecanógrafa escribe un total de 2000 páginas en un cierto número de días. Si escribiese 120 páginas menos al día tardaría 15 días más. ¿Cuántos días ha tardado en escribirlo?.

MECA-3

1.-Una mecanógrafa escribe durante un cierto número de días un total de 2000 páginas, para realizar un trabajo. Si escribiera 5 días escribiría 1000 páginas menos. ¿Cuántas páginas ha escrito durante esos 5 días?.

2.- Una mecanógrafa, para realizar un trabajo, escribe cierta cantidad de páginas durante 10 días. Si escribiese 200 páginas diarias más, tardaría 5 días menos. ¿Cuántas páginas escribe al día, cuántas páginas tenía que escribir en total?.

3.- Una mecanógrafa escribe 200 páginas diarias durante un cierto número de días, para realizar un trabajo, si escribiese 120 páginas diarias menos, tardaría 15 días más. ¿Cuántas páginas escribe al día, cuántas tiene que escribir en total?.

4.- Una mecanógrafa tiene que realizar un cierto trabajo. Si escribiese 120 páginas menos al día tardaría 15 días más en hacerlo, y si escribiese 50 páginas más al día tardaría 2 días menos. ¿Cuántas páginas tiene que escribir y en cuanto tiempo?

MECA-4

1.-Una mecanógrafa escribe durante un cierto número de días un total de 2000 páginas, para realizar un trabajo. Si escribiera 13 días escribiría 600 páginas más. ¿Cuántas páginas ha escrito durante esos 13 días?

2.- Una mecanógrafa escribe cierta cantidad de páginas durante 10 días. Si escribiese 50 páginas más diarias tardaría 2 días menos. ¿Cuántas páginas escribe al día, cuántas páginas tenía que escribir en total?

3.- Una mecanógrafa escribe 2000 páginas durante un cierto número de días. Si escribiese 50 páginas más al día tardaría 2 días menos. ¿Cuántos días ha tardado en escribirlo?

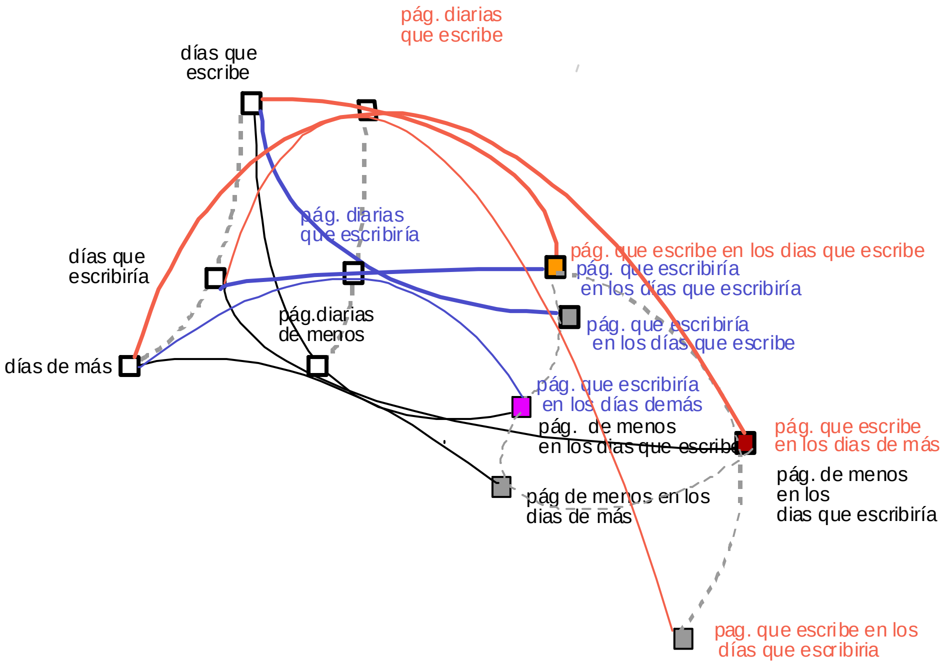
4.- Una mecanógrafa tiene que realizar un cierto trabajo. Si escribiese 100 páginas menos al día tardaría 10 días más en hacerlo, y si escribiese 200 páginas más al día tardaría 5 días menos. ¿Cuántas páginas tiene que escribir y en cuanto tiempo?

Por último como entre los que exigimos al conjunto de los problemas del test constaba:

- procurar entre todos ellos contener como datos la mayor parte de las cantidades del diccionario de cantidades de la situación.

- facilitar en lo posible, por separado y conjuntamente, el uso en los resoluciones de otras cantidades y relaciones que las contenidas en el problema.

en el grafo teórico de la situación MECA(+) se han señalado en trazo grueso los vértices oscuros y aristas que contienen el conjunto de los grafos de los problemas del test-MECA., resultando así el grafo de la figura:



Anexo A3.6.- Resoluciones de los estudiantes del test-MECA

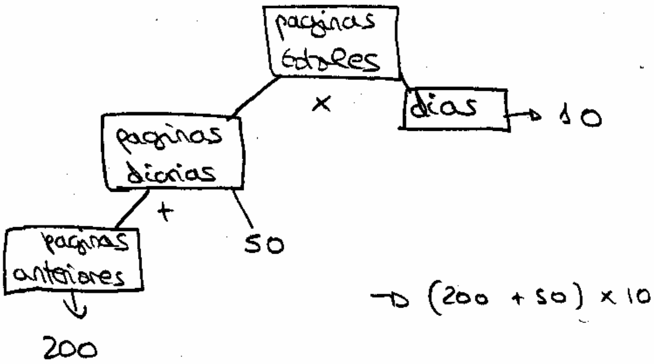
Diagramas

Inmaculada Berber Serrano

12

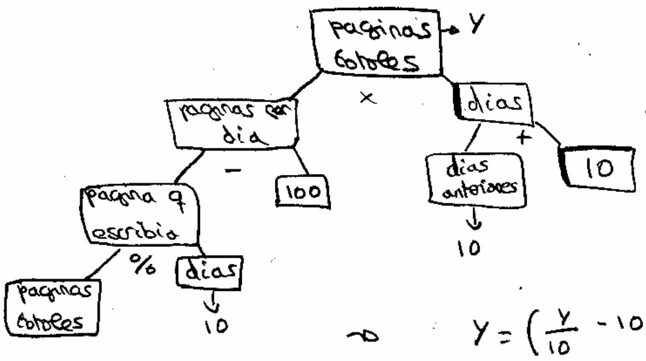
MECA1

1.- Una mecanógrafa escribe 200 páginas diarias durante 10 días, para realizar un trabajo. Si escribiese 50 páginas diarias más. ¿Cuántas páginas escribiría durante esos 10 días?.



$\rightarrow (200 + 50) \times 10 = \underline{2500}$

2.-Una mecanógrafa escribe cierta cantidad de páginas durante 10 días, para realizar un trabajo. Si escribiese 100 páginas menos diarias tardaría 10 días más. ¿Cuántas páginas escribe al día, cuántas paginas tiene que escribir en total?



$\rightarrow \quad y = \left(\frac{y}{10} - 100\right)20 = \left(\frac{y-1000}{10}\right)20$

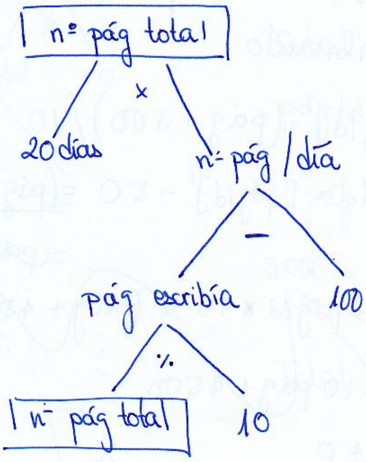
$10y = 20y - 20000$

$10y = 20000 \rightarrow \boxed{y = 2000}$

$= 2400 + 100 = 2500$ pág

2.-Una mecanógrafa escribe cierta cantidad de páginas durante 10 días, para realizar un trabajo. Si escribiese 100 páginas menos diarias tardaría 10 días más. ¿Cuántas páginas escribe al día, cuántas paginas tiene que escribir en total?

Utilizando el método análisis – síntesis



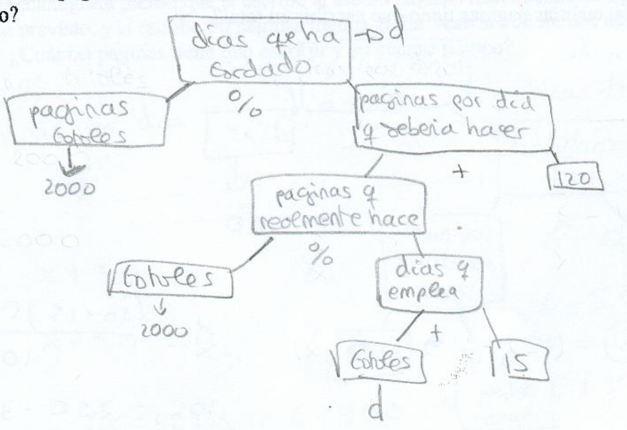
. $\text{pág escribía} = \dfrac{\text{n: pág total}}{10}$

. $\text{n: pág / día} = \text{pág escribía} - 100 = \dfrac{\text{n: pag total}}{10} - 100.$

$\text{n: pág total} = 20 \cdot (\text{n: pág / día}) = 20 \cdot \left(\dfrac{\text{n: pág total}}{10} - 100\right) = 2 \text{ n: pág total} - 2000$

$\Rightarrow \boxed{\text{n: pág total} = 2000}$

4.-Una mecanógrafa escribe un total de 2000 páginas en un cierto número de días. Si escribiese 120 páginas menos al día tardaría 15 días más. ¿Cuántos días ha tardado en escribirlo?



$$\begin{array}{r} 120 \\ 3 \\ \hline 360 \\ 5 \\ \hline 1800 \end{array}$$

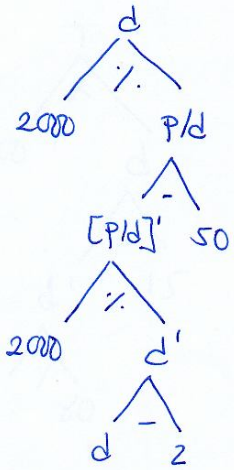
$$d = \frac{2000}{\frac{2000}{d+15} + 120} = \frac{2000(d+15)}{2000 + 120d + 1800}$$

$$200\cancel{0d} + 120d^2 + 180\cancel{0d} = 2\cancel{000d} + 30000$$

$$12\cancel{0} d^2 = 3000\cancel{0}$$

$$d^2 = \frac{1000}{4} =$$

3.- Una mecanógrafa escribe 2000 páginas durante un cierto número de días. Si escribiese 50 páginas más al día tardaría 2 días menos. ¿Cuántos días ha tardado en escribirlo?



$$d' = d - 2$$

$$[P/d]' = \frac{2000}{d'} = \frac{2000}{d-2}$$

$$P/d = [P/d]' - 50 = \frac{2000}{d-2} - 50$$

$$d = \frac{2000}{P/d} = \frac{2000}{\frac{2000-50d+100}{d-2}} =$$

$$= \frac{2000d - 4000}{1900 - 50d}$$

$$1900d - 50d^2 = 2000d - 4000$$

$$50d^2 + 100d - 4000 = 0$$

$$d^2 + 2d - 80 = 0 \quad 8 \quad -10$$

$\Rightarrow \boxed{8 \text{ días}}$

Regla de tres

3.- Una mecanógrafa escribe 200 páginas diarias durante un cierto número de días, para realizar un trabajo, si escribiese 120 páginas diarias menos, tardaría 15 días más. ¿Cuántas páginas escribe al día, cuántas tiene que escribir en total?.

Al día escribe 200 paginas diarias y si escribe 120 menos, escribiría 200 - 120 = 80 pag diarias con estos datos he resuelto antes un problema, MECA2-2 por lo que, en total escribirá 2000 pag, es decir,

	pag/dia		dias		pag totales
si	200	→	10	→	2000
	80	→	$\underset{10+15}{\overset{25}{\shortparallel}}$	→	2000

4.- Una mecanógrafa tiene que realizar un cierto trabajo. Si escribiese 120 páginas menos al día tardaría 15 días más en hacerlo, y si escribiese 50 páginas más al día tardaría 2 días menos. ¿Cuántas paginas tiene que escribir y en cuanto tiempo?

Según el problema MECA 2-1 y MECA2-2

pag /dia		dias		pag. Totales
200+50 = 250	→	10-2 = 8	→	$\boxed{2000}$
200-120 = 80	→	10+15 = 25	→	$\boxed{2000}$

Si escribe 250 pag/dia, tardará 8 dias y si escribe 80 pag/dia, tardará 25 dias en escribir las 2000 pag del trabajo

MECA1

1.- Una mecanógrafa escribe 200 páginas diarias durante 10 días, para realizar un trabajo. Si escribiese 50 páginas diarias más. ¿Cuántas páginas escribiría durante esos 10 días?.

200pg ⟶ 10 dias ⇒ En 10 dias escribe 2000 pag
250pg ⟶ 10dias ⟶ En 10 dias escribe 2500 pag.

nº dias	nº paginas al dia	total pagina
10	200	2000
	250	2500

2.-Una mecanógrafa escribe cierta cantidad de páginas durante 10 días, para realizar un trabajo. Si escribiese 100 páginas menos diarias tardaría 10 días más. ¿Cuántas páginas escribe al día, cuántas paginas tiene que escribir en total?

x ⟶ 10 dias
x-100 ⟶ 20 dias

$x = \frac{10(x-100)}{20}$

~~20x = 10x - 1000~~
~~10x = -1000~~

No sale porque es proporcionalidad inversa. si disminuyes el nº de paginas diarias aumentan los dias

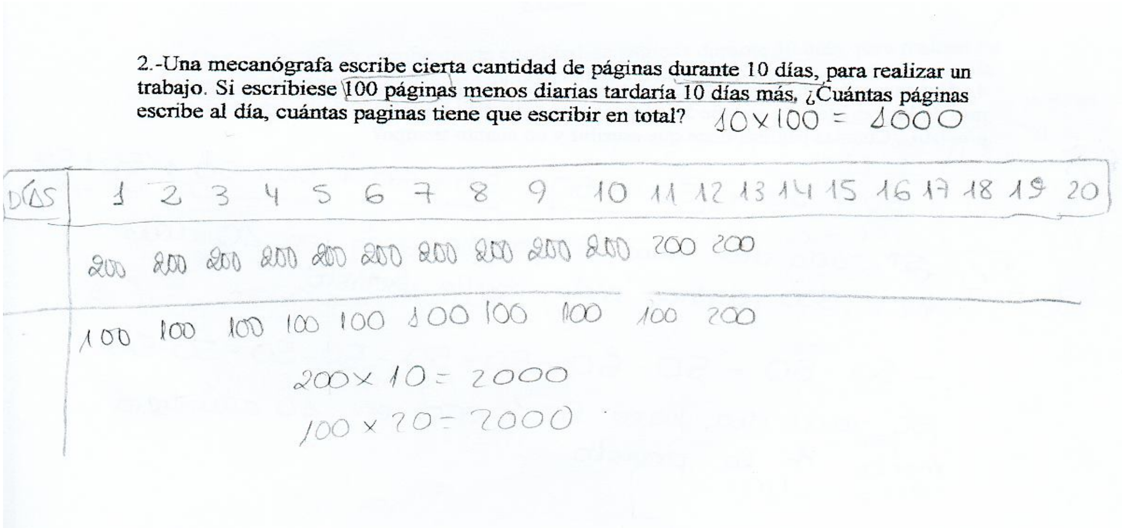
nº dias	nº pag /dia	totales
10	x	◯
20	x- 100	

$10x = 20(x-100)$ ⇒ $x = 100$
$10x - 20x = -2000$ No puede ser.

2.- Una mecanógrafa escribe cierta cantidad de páginas durante 10 días, para realizar un trabajo. Si escribiese 120 páginas menos diarias tardaría 15 días más. ¿Cuántas páginas escribe al día, cuántas paginas tiene que escribir en total?

	Paginas diarias	Total dias	
Diferencia 120 pág diarias.	?	10 dias.	Diferencia 15 dias
	120 pág menos	25 dias.	

Tanteo

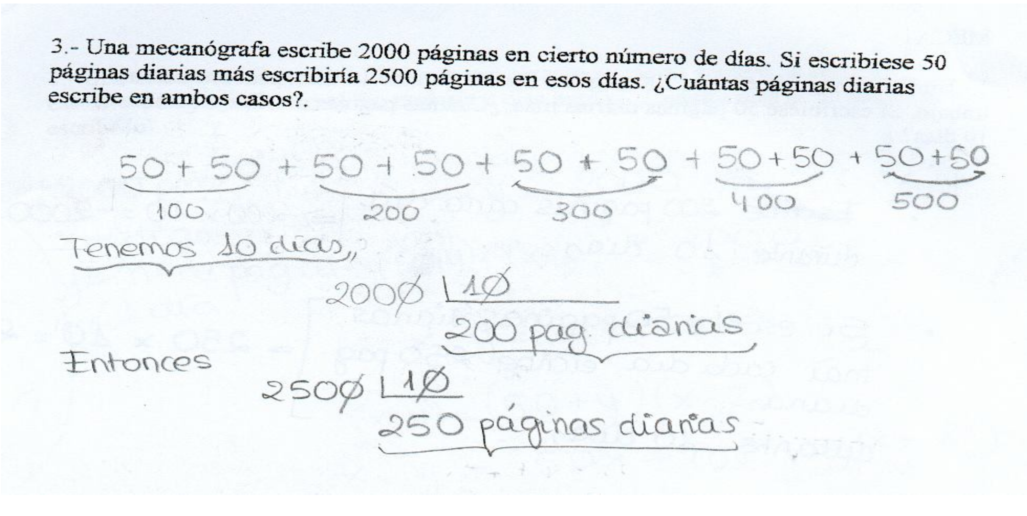


2.-Una mecanógrafa escribe cierta cantidad de páginas durante 10 días, para realizar un trabajo. Si escribiese 100 páginas menos diarias tardaría 10 días más, ¿Cuántas páginas escribe al día, cuántas paginas tiene que escribir en total? $10 \times 100 = 1000$

DÍAS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200								
	100	100	100	100	100	100	100	100	100	200										

$200 \times 10 = 2000$

$100 \times 20 = 2000$



3.- Una mecanógrafa escribe 2000 páginas en cierto número de días. Si escribiese 50 páginas diarias más escribiría 2500 páginas en esos días. ¿Cuántas páginas diarias escribe en ambos casos?.

$\underbrace{50+50}_{100} + \underbrace{50+50}_{200} + \underbrace{50+50}_{300} + \underbrace{50+50}_{400} + \underbrace{50+50}_{500}$

Tenemos 10 días,

2000 | 10
200 pag. diarias

Entonces

2500 | 10
250 páginas diarias

2.- Una mecanógrafa, para realizar un trabajo, escribe cierta cantidad de páginas durante 10 días. Si escribiese 200 páginas diarias más, tardaría 5 días menos. ¿Cuántas páginas escribe al día, cuántas paginas tenía que escribir en total?

200 pag × 5 = 1000 pag

Días	1er	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º
Pag	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200
Pag	400	400	400	400	400					

En total tendría que escribir 2000 paginas
Escribiría 200 pag cada día (10 días)
Escribiría 400 pag cada día (5 días)

4.-Una mecanógrafa escribe un total de 2000 páginas en un cierto número de días. Si escribiese 120 páginas menos al día tardaría 15 días más. ¿Cuántos días ha tardado en escribirlo?

Días que tarda 2ª en hacer 2000 pág.	15	20	25	
Días que tarda 1ª en hacer 2000 pág.	0	5	10	
Pag. día del 1º)	0	2000 ÷ 5 = 400	2000 ÷ 10 = 200	
Pag. total del 2º)		400 − 120 = 280 280 × 20 = 5.600	200 − 120 = 80 80 × 25 = 2000	

← Lo tendremos así que tengamos 2000 pag.

4.- Una mecanógrafa tiene que realizar un cierto trabajo. Si escribiese 120 páginas menos al día tardaría 15 días más en hacerlo, y si escribiese 50 páginas más al día tardaría 2 días menos. ¿Cuántas paginas tiene que escribir y en cuanto tiempo?

1° Trabajo en cierto tiempo

2° 120 pag. menos dia ⇒ 15 dias más.

3° 50 pag. mas dia → 2 dias más

Pag. dia 1°	150	200	250
Pag. dia 2°	30	80	130
Pag. dia 3°	200	250	300

Se prueba con los distintos valores, y para calcular el nº total de páginas hacemos el m.c.m. de las cantidades redondeadas. Tenemos el dato de los días que lo debe cumplir.

m.c.m. (80, 250, 200) = 2.000

⇒ Pag. total 1°) = 2000 →

→ 2000 ÷ 200 = 10 dias

⇒ 2°) 10 + 15 = 25
3°) 10 − 2 = 8 y vemos que se cumple

	1°)	2°)	3°)
Pag. dia	200	80	250
Pág. total	2000	2000	2.000
Dias total	10	25	8

25 × 80 = 2.000
8 × 250 = 2.000

3.- Una mecanógrafa escribe 2000 páginas durante un cierto número de días. Si escribiese 50 páginas más al día tardaría 2 días menos. ¿Cuántos días ha tardado en escribirlo?

1° 2000 pág. en cierto nº de dias
2° 50 pág. mas al dia

Pág. dia 1	100	150	200	250
Pág. dia 2	150	200	250	300
Dias que tardaría 1	2000 ÷ 100 20	13'3	$\boxed{10}$	8
Dias que tard. 2	2000 ÷ 150 13'3	10	$\boxed{8}$	6'6

Este es el único caso en que la diferencia de días es 2. luego ha tardado 10 días.

Razonamientos RC

a5 4.2

2.- Una mecanógrafa escribe cierta cantidad de páginas durante 10 días. Si escribiese 50 páginas más diarias tardaría 2 días menos. ¿Cuántas páginas escribe al día, cuántas paginas tenía que escribir en total?

Si escribiese 50 paginas + diarias tardaría 8 días

En 8 días hace 8x50 = 400 pág más

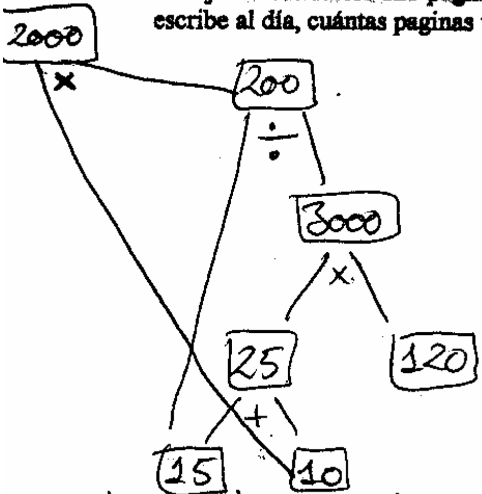
que son las que haría en 2 días

⇒ En un día hace 200 pag

En total escribe 200 x 10 = 2000 pag.

a9 2.2

2.- Una mecanógrafa escribe cierta cantidad de páginas durante 10 días, para realizar un trabajo. Si escribiese 120 páginas menos diarias tardaría 15 días más. ¿Cuántas páginas escribe al día, cuántas paginas tiene que escribir en total?



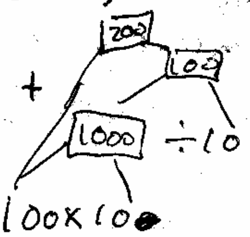
~~Si escribiese 120 páginas menos diarias necesitaría un total de 15 + 10 = 25 días. El total escrito a lo largo de las cuales escribiría un total de 25 x 120 = 3000 páginas menos [illegible] respecto a lo que habría escrito de [illegible] haberlo hecho durante 25 días al ritmo que realmente empleó. Por tanto a diario escribió 3000 ÷ 15 = 200 pág~~

Si escribiese 120 páginas menos diarias necesitaría un total de 15 + 10 = 25 días para completar el trabajo. Notar que si suponemos que en lugar de escribir sólo 10 días al ritmo adecuado para terminar el trabajo, escribiera durante 25 días al mismo ritmo, al cabo de esos 25 días habría escrito el trabajo (que corresponde a 10 días al ritmo establecido) más 25 x 120 = 3000 páginas adicionales, que forzosamente deben corresponder a los 15 días restantes al ritmo establecido. Así pues 3000 ÷ 15 = 200 es el nº de páginas/día, por lo tanto en total se escriben 200 x 10 = 2000 páginas.

a10 2.2

2.-Una mecanógrafa escribe cierta cantidad de páginas durante 10 días, para realizar un trabajo. Si escribiese 100 páginas menos diarias tardaría 10 días más. ¿Cuántas páginas escribe al día, cuántas paginas tiene que escribir en total?

Si en diez días habría hecho 1000 menos, si resulta 10 días, ~~quiere~~ decir que eran 1000 ~~de~~ pasaban 10 días, a de. eso hacía 100 por día, Sólo hacía 200 día.



El total que ha de escribir es 2000.

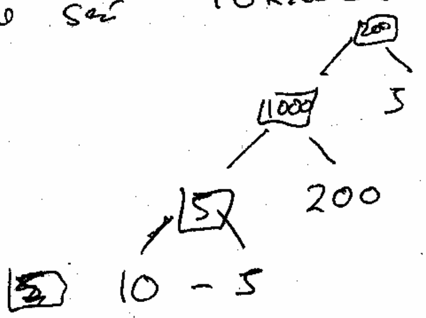
a10 3.2

2000 1000

2.- Una mecanógrafa, para realizar un trabajo, escribe cierta cantidad de páginas durante 10 días. Si escribiese 200 páginas diarias más, tardaría 5 días menos. ¿Cuántas páginas escribe al día, cuántas paginas tenía que escribir en total?

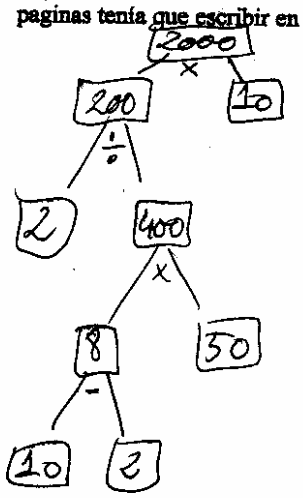
El aumento de que a 5 días habría acabado ~~hecho~~ 1000 páginas ~~más~~ (5 x200) luego eran 1000 páginas al dividir por los 5 días no queda nos da la cantidad diaria de páginas $\frac{1000}{5}=\boxed{200}$.

El total será 10x200=2000.



a10 4.2

2.- Una mecanógrafa escribe cierta cantidad de páginas durante 10 días. Si escribiese 50 páginas más diarias tardaría 2 días menos. ¿Cuántas páginas escribe al día, cuántas paginas tenía que escribir en total?



Si escribiese 50 páginas más diarias tardaría 10 − 2 = 8 días, a lo largo de los cuales escribiría 8 · 50 = = 400 páginas más, que equivalen a 2 días de trabajo al ritmo inicial, luego al día escribe 400 ÷ 2 = 200 páginas y en total tenía que escribir 200 · 10 = 2000 páginas.

a16 1.2

2.-Una mecanógrafa escribe cierta cantidad de páginas durante 10 días, para realizar un trabajo. Si escribiese 100 páginas menos diarias tardaría 10 días más. ¿Cuántas páginas escribe al día, cuántas paginas tiene que escribir en total?

100 · 10 = 1000 páginas que escribe en 10 días. Luego escribe por día 1000/10 = 100 páginas cuando suponemos que escribe 100 páginas menos. Es decir, por día escribe 200 páginas y como es durante 10 días, escribe 2000 páginas.

a16 3.2

2.- Una mecanógrafa, para realizar un trabajo, escribe cierta cantidad de páginas durante 10 días. Si escribiese 200 páginas diarias más, tardaría 5 días menos. ¿Cuántas páginas escribe al día, cuántas paginas tenía que escribir en total?

Si escribiese 200 pag/día más tardaría 5 días menos, haría $200 \cdot 5 = 1000$ páginas, que será lo que hace en los 5 días sin suponer que hace 200 pag/dia más. luego escribe 200 páginas al dia y tiene que escribir $200 \cdot 10 = 2000$ páginas

a2 2.2

2.- Una mecanógrafa escribe cierta cantidad de páginas durante 10 días, para realizar un trabajo. Si escribiese 120 páginas menos diarias tardaría 15 días más. ¿Cuántas páginas escribe al día, cuántas paginas tiene que escribir en total?

120 pag/día menos en 10 días son 1200 páginas menos

Si necesita 15 días para hacer esas 1200 pag. entonces

escribiría $\frac{1200}{15} = 80$ pag/día.

Así pues escribe $120 + 80 = 200$ pag/día.

En total escribirá $200 \cdot 10 = 2000$

a2 3.3

3.- Una mecanógrafa escribe 200 páginas diarias durante un cierto número de días, para realizar un trabajo, si escribiese 120 páginas diarias menos, tardaría 15 días más. ¿Cuántas páginas escribe al día, cuántas tiene que escribir en total?.

Escribe al día 200 páginas.

Tarda en escribir el total en $\frac{80 \cdot 15}{120} = 10$ días

Escribirá $200 \cdot 10 = 2000$ páginas.

a3 3.3

3.- Una mecanógrafa escribe 200 páginas diarias durante un cierto número de días, para realizar un trabajo, si escribiese 120 páginas diarias menos, tardaría 15 días más. ¿Cuántas páginas escribe al día, cuántas tiene que escribir en total?.

200 − 120 = 80 páginas en el último 2

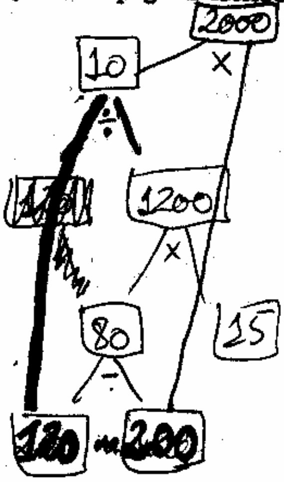
80 · 15 = 1200 páginas hace en los 15 días de más

Esas páginas se tienen que compensar con el nº de días "iniciales": $\frac{1200}{120} = 10$

escribe $\boxed{200 \text{ pag/día}}$ y escribe $\boxed{2000 \text{ páginas}}$

a9 3.3

3.- Una mecanógrafa escribe 200 páginas diarias durante un cierto número de días, para realizar un trabajo, si escribiese 120 páginas diarias menos, tardaría 15 días más. ¿Cuántas páginas escribe al día, cuántas tiene que escribir en total?



La respuesta a la primera pregunta está en el enunciado: son 200. Si escribe 120 páginas menos, escribe 200 − 120 = = 80 páginas, que a lo largo de los 15 días más suponen 80 × 15 = 1200 páginas. Por otro lado 1200 ÷ 120 = 10 nos da el nº de días que escribe, que a razón de 200 páginas diarias son 10 × 200 = 2000 págin

Razonamientos RP

a1 1.2

2.-Una mecanógrafa escribe cierta cantidad de páginas durante 10 días, para realizar un trabajo. Si escribiese 100 páginas menos diarias tardaría 10 días más. ¿Cuántas páginas escribe al día, cuántas paginas tiene que escribir en total?

al día	tarda	Total pag.
¿? →	10 días →	¿? páginas
		=
−100 →	20 días →	¿? páginas

Si escribe 100 pag menos al día, tardará el doble de días para escribir la misma cantidad de páginas
→ al día escribe 200 páginas y en total (r
ha de escribir 200·10 = 2000 páginas en 10 días

a15 1.2

2.-Una mecanógrafa escribe cierta cantidad de páginas durante 10 días, para realizar un trabajo. Si escribiese 100 páginas menos diarias tardaría 10 días más. ¿Cuántas páginas escribe al día, cuántas paginas tiene que escribir en total?

Al escribir 100 paginas menos; tarda 10 dias más, que son un total de **20** dias (o sea, el doble de 10 días)
Por tanto 100 paginas tiene que ser la mitad de páginas que escribía en diez dias, luego escribe 200 pag/dia.
En total 200 pag/dia · 10 dias = **2000 pag.**

a15 2.3

2.-Una mecanógrafa escribe cierta cantidad de páginas durante 10 días, para realizar un trabajo. Si escribiese 100 páginas menos diarias tardaría 10 días más. ¿Cuántas páginas escribe al día, cuántas paginas tiene que escribir en total?

Al escribir 100 paginas menos; tarda 10 dias más, que son un total de 20 dias (o sea, el doble de 10 dias)

Por tanto 100 paginas tiene que ser la mitad de páginas que escribia en diez dias, luego escribe 200 pag/dia.

En total 200 pag/dia · 10 dias = 2000 pag.

a15 3.2

2.- Una mecanógrafa, para realizar un trabajo, escribe cierta cantidad de páginas durante 10 días. Si escribiese 200 páginas diarias más, tardaría 5 días menos. ¿Cuántas páginas escribe al día, cuántas paginas tenía que escribir en total?

Si con 200 paginas diarias de más, tarda 5 dias menos que es la mitad de 10 dias.

Entonces las que escribia más 200 es el doble de lo que escribia.

Por tanto escribe al dia 200 paginas.

En total 200 pag/dia · 10 dias = 2000 paginas

a3 1.2

2.-Una mecanógrafa escribe cierta cantidad de páginas durante 10 días, para realizar un trabajo. Si escribiese 100 páginas menos diarias tardaría 10 días más. ¿Cuántas páginas escribe al día, cuántas paginas tiene que escribir en total?

Si escribiendo 100 páginas menos tarda el doble escribe la mitad de páginas al día

Entonces escribe $200 = 2(\underset{200-100}{\underset{\shortparallel}{100}})$. paginas al día

y escribe 2000 páginas en total.

Conclusion 200 pag/día
2000 páginas en total

a3 4.2

2.- Una mecanógrafa escribe cierta cantidad de páginas durante 10 días. Si escribiese 50 páginas más diarias tardaría 2 días menos. ¿Cuántas páginas escribe al día, cuántas paginas tenía que escribir en total?

Como el numero de páginas es constante

(= nº páginas escritas al día × n días)

y el número de día $10 \xrightarrow{\times 8/10 = 4/5} 8$

entonces el numero de páginas/día $\xrightarrow{\times 5/4}$

multiplicar por $\frac{5}{4}$ es lo mismo que suma $\frac{1}{4}$ por

la cantidad desconocida

$1/4$ por la cantidad desconocida es 50 →

la cantidad desconocida (nº pag día) es 200

y las páginas son 2000

a5 3.2

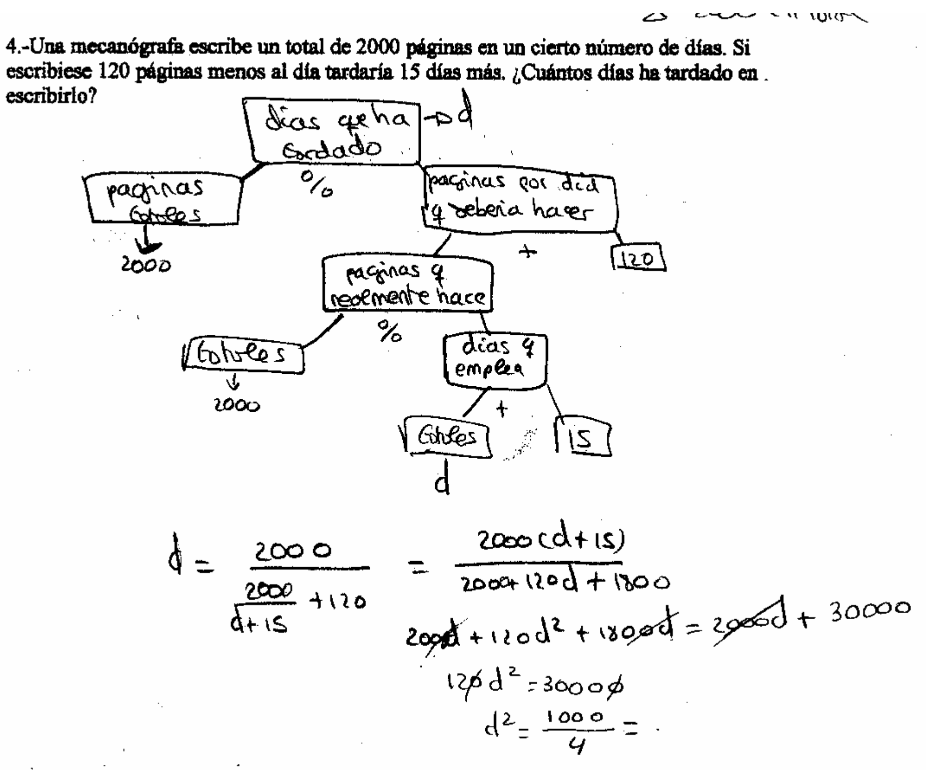
2.- Una mecanógrafa, para realizar un trabajo, escribe cierta cantidad de páginas durante 10 días. Si escribiese 200 páginas diarias más, tardaría 5 días menos. ¿Cuántas páginas escribe al día, cuántas paginas tenía que escribir en total?

200 paginas diarias más → tarda 5 días.
Haciendo 200 páginas diarias más - tarda la mitad
Entonces lo que quiere decir es que hace el
doble por día → Al día escribe 200 páginas
diarias (si aumentamos 200 es el doble)

Tenía que escribir 2000 páginas.

Problemas PLAg

diagrama a12 2.4



argumentos 16 2.4

4.-Una mecanógrafa escribe un total de 2000 páginas en un cierto número de días. Si escribiese 120 páginas menos al día tardaría 15 días más. ¿Cuántos días ha tardado en escribirlo?

$120 \cdot 15 = 1800$ páginas que deja de escribir al bajar en 120 el nº de pág que escribe por día.

– NO ↑

2000

nº días × ritmo por día

nº días +15 × ritmo − 120

supongo que hace 140 día → tardaría 14,28 → 15 días

120 día. si le resto 120 haría 20 por día. 15·20

en 15 días llevaría hecho 300 págs,

con otros 15 días no haría 1700.

luego 140 no es.

Iría probando hasta suponer los 200 por día con lo q obtendría 10 días.

a16 3.4

4.- Una mecanógrafa tiene que realizar un cierto trabajo. Si escribiese 120 páginas menos al día tardaría 15 días más en hacerlo, y si escribiese 50 páginas más al día tardaría 2 días menos. ¿Cuántas paginas tiene que escribir y en cuanto tiempo?

120

50

El número de páginas ha de ser múltiplo de la cantidad de páginas que escribe por día, de esa cantidad de 120 y de esa cantidad más 50. También ha de ser múltiplo del número de días que tarde, de ese nº +15 y de ese nº −2.

Si supongo (paso al álgebra) x = nº de páginas q tiene q escribir

pag = nº de páginas por día, d = nº de días.

$$x = pag \cdot d$$
$$x = (pag-120)(d+15)$$
$$x = (pag+50)(d-2)$$

→ de este sistema sacaremos

pag = 200 por día

d = 10 días

y x = 2000 páginas a escribir.

a16 3.3 y 3.4

3.- Una mecanógrafa escribe 2000 páginas durante un cierto número de días. Si escribiese 50 páginas más al día tardaría 2 días menos. ¿Cuántos días ha tardado en escribirlo?

2000 → 100 pag/dia

$2000 \div 100 = 20$ días.

150 pag/dia

$2000 \div 150 = 13,\hat{3}$ días — No es.

150 pag/dia

13'3 dias. No es.

200 pag/dia

10 días

250 pag/dia. →

8 dias.

Tarda 10 dias, y 8 si escribe 50 pag/dia +.

4.- Una mecanógrafa tiene que realizar un cierto trabajo. Si escribiese 100 páginas menos al día tardaría 10 días más en hacerlo, y si escribiese 200 páginas más al día tardaría 5 días menos. ¿Cuántas paginas tiene que escribir y en cuanto tiempo?

Me pasa igual que en el problema anterior he de pasarme al álgebra porque desconozco 3 datos y hacer una tabla parece o se complica mucho.

x = páginas q ha de escribir.

pag = páginas por dia

d = nº de días.

$$\left.\begin{array}{l} x = pag \cdot d \\ x = (pag-100)(d+10) \\ x = (pag+200)(d-5) \end{array}\right] \rightarrow$$

de aqui sacamos lo de siempre x = 2000

pag = 200 pag/dia

d = 10 dias.

a20 2.4

4.-Una mecanógrafa escribe un total de 2000 páginas en un cierto número de días. Si escribiese 120 páginas menos al día tardaría 15 días más. ¿Cuántos días ha tardado en escribirlo?

Hace 2000 paginas en un cierto numero de di as

$120 \times 15 = 1800$

Por tanto hara $2000 - 1800 = 200$ paginas diarias en esos 15 dias

luego tarda 10 dias a razon de 200 paginas / diarias

y ~~25~~ 25 a razon de 80 paginas / diarias

a20 3.4

4.- Una mecanógrafa tiene que realizar un cierto trabajo. Si escribiese 120 páginas menos al día tardaría 15 días más en hacerlo, y si escribiese 50 páginas más al día tardaría 2 días menos. ¿Cuántas paginas tiene que escribir y en cuanto tiempo?

La diferencia entre escribir 120 paginas menos diarias y escribir 50 paginas mas es de 17 dias.

$120 - (-50) = 170$

$2 - (-15) = 17$ dias

10 dias

A razon de 200 paginas al dia son 2000 paginas si

→ + 50 pag ⇒ 250 pag / diarias × 8 dias = 2000 paginas

→ - 120 pag ⇒ 80 pag / diarias × 25 dias = 2000 paginas a20 4.3 y 4.4

3.- Una mecanógrafa escribe 2000 páginas durante un cierto número de días. Si escribiese 50 páginas más al día tardaría 2 días menos. ¿Cuántos días ha tardado en escribirlo?

nº paginas totales = 2000 pag

2000 pag | 50 paginas/dia
40 dias a razon de 50 paginas diarias

Como dicen que son 50 paginas mas, haciendolo el doble

2000 | 100
20 dias ⟹ 20 dias a razon de 100 pag dias

2000 | 150 pag
13'33 dias ⟹ No lo cumple

Por tanto 10 dias a razon de 200 paginas diarias implica que para 250 paginas diarias tardaria

2000 | 250
8 dias Correcto

4.- Una mecanógrafa tiene que realizar un cierto trabajo. Si escribiese 100 páginas menos al día tardaría 10 días más en hacerlo, y si escribiese 200 páginas más al día tardaría 5 días menos. ¿Cuántas paginas tiene que escribir y en cuanto tiempo?

100 pag − ⟹ 10 dias +
→ 1000 pag

200 pag + ⟹ 5 dias −
→ 1000 paginas

~~2000 pag~~ Sabemos que haciendo la mitad sale el doble de dias que si hacemos 200 pag, que salen 5 dias

⇓

10 dias x 200 pag/diarias → 2000 paginas.

a7 2.4

4.-Una mecanógrafa escribe un total de 2000 páginas en un cierto número de días. Si escribiese 120 páginas menos al día tardaría 15 días más. ¿Cuántos días ha tardado en escribirlo?

Sabemos que 2000 pag es el total de pag. al día
por el número de días. Como nos dicen que
si escribiéramos 120 pag menos al día tardaríamos
15 días más si multiplicamos 120×15 = 1800
tendremos las pag. que perdería en esos 15 días
de más lo cual significa que las 200 que
faltan son las que realizaba anteriormente
diariamente. Entonces 2000 |200
0 10
10 días es lo que tarda en escribirlo.

a10 2.4

4.-Una mecanógrafa escribe un total de 2000 páginas en un cierto número de días. Si escribiese 120 páginas menos al día tardaría 15 días más. ¿Cuántos días ha tardado en escribirlo?

~~120×15 = [illegible]~~
~~En en 15 días de más la mecanógrafa [illegible]~~
~~Que escribía 120×15 que es lo que se habría hecho~~,
~~120 página menos diarias~~
1800, ~~Con lo que haciendo~~
~~en la día que tarda~~, hace ~~2000 1800 200~~.
El total de ~~días~~ página por día ha de ser
divisor de 2000 además de mayor de 120,
luego la posible cosas son 2000, 1000, 500, 400,
250, 200, 125,
Descartamos 2000, 1000, 500, 400 (ya en 15 días
serían ~~restándole~~ 120 pasaría más de 2000)
125 por defecto.
Si fuera 250 en esos 15 días haría 1450, luego
haría más ya que el otro día haría otros 130.
Resultado 200 páginas por día (10 días total.

tanteo

a17 2.4

4.-Una mecanógrafa escribe un total de 2000 páginas en un cierto número de días. Si escribiese 120 páginas menos al día tardaría 15 días más. ¿Cuántos días ha tardado en escribirlo?

Dias que tarda 2º en hacer 2000 pág.	15	20	25
Dias que tarda 1º en hacer 2000 pág.	0	5	10
Pag. dia del 1º)	0	2000 ÷ 5 = 400	2000 ÷ 10 = 200
Pag. total del 2º)		400 − 120 = 280 280 × 20 = 5.600	200 − 120 = 80 80 × 25 = 2000

← Lo tendremos así que tengamos 2000 pag.

a17 3.4

4.- Una mecanógrafa tiene que realizar un cierto trabajo. Si escribiese 120 páginas menos al día tardaría 15 días más en hacerlo, y si escribiese 50 páginas más al día tardaría 2 días menos. ¿Cuántas paginas tiene que escribir y en cuanto tiempo?

1º Trabajo en cierto tiempo

2º 120 pag. menos dia ⇒ 15 dias más.

3º 50 pag. mas dia → 2 dias más

Pag. dia 1º	150	200	250
Pag. dia 2º	30	80	130
Pag. dia 3º	200	250	300

Se prueba con los distintos valores, y para calcular el nº total de páginas hacemos el m.c.m. de las cantidades redondeadas. Tenemos tb el dato de los días que la debe cumplir.

	1º)	2º)	3º)
Pág dia	200	80	250
Pág total	2000	2000	2.000
Dias total	10	25	8

m.c.m. (80, 250, 200) = 2,000

→ Pag. total 1º) = 2000 →

→ 2000 ÷ 200 = 10 dias

→ 2º) 10 + 15 = 25
3º) 10 − 2 = 8 y vemos que se cumple 25 × 80 = 2,000
8 × 250 = 2.000

a17 4.3

3.- Una mecanógrafa escribe 2000 páginas durante un cierto número de días. Si escribiese 50 páginas más al día tardaría 2 días menos. ¿Cuántos días ha tardado en escribirlo?

1º 2000 pág. en cierto nº de días
2º 50 pág. mas al día

Pág. día 1	100	150	200	250
Pág. día 2	150	200	250	300
Días que tardaría 1	2000÷100 20	13'3	$\boxed{10}$	8
Días que tard. 2	2000÷150 13'3	10	$\boxed{8}$	6'6

Este es el único caso en que la diferencia de días es 2. luego ha tardado 10 días.

a17 4.4

4.- Una mecanógrafa tiene que realizar un cierto trabajo. Si escribiese 100 páginas menos al día tardaría 10 días más en hacerlo, y si escribiese 200 páginas más al día tardaría 5 días menos. ¿Cuántas paginas tiene que escribir y en cuanto tiempo?

① Trabajo en cierto tiempo

② 100 pag. menos al día → 10 días más
③ 200 pag. mas al día → 5 días menos
→ ③ tardaría 15 días menos que ②. Por lo tanto hay un mínimo de 16 días para②.

	a	b	c
Pag. dia ①	150	200	250
Pag. dia ②	50	100	150
Pag. dia ③	350	400	450

Dias que tarda en

Para a) con un mínimo de 16 días
② = 16×50 = 800
150 = ... 900, 1050, 1200... → 7 = 1050 ÷ 150
50 = ... 850, 900, 950, 1000, 1050, ... → 21 = 1050 ÷ 50
350 = ... 1050, 1400, 1750 → 3 = 1050 ÷ 350

No cumple los datos de los días

Para b) " " " " "
② 16×100 = 1600
200 = 1900, 2000, 2200, 2400...
100 = 1700, 1800, 1900, 2000, 2100...
400 = 2000, 2400, 2800...

10 = 2000 ÷ 200
20 = 2000 ÷ 100
5 = 2000 ÷ 400

Si que cumple la condición.

c) tampoco cumple la condición de los días.

Errores

a4

2.- Una mecanógrafa escribe cierta cantidad de páginas durante 10 días, para realizar un trabajo. Si escribiese 120 páginas menos diarias tardaría 15 días más. ¿Cuántas páginas escribe al día, cuántas paginas tiene que escribir en total?

$$\begin{cases} P \times 10 = T \\ (P-120) \times 15 = T \end{cases}$$

$$10P = (P-120) \times 15$$

$$10P - 15P = -1800$$

$$5P = 1800$$

$$P = \frac{1800}{5} = \underline{360 \text{ pg al día}}$$

$$\boxed{\text{Total} = 3600}$$

2.- Una mecanógrafa, para realizar un trabajo, escribe cierta cantidad de páginas durante 10 días. Si escribiese 200 páginas diarias más, tardaría 5 días menos. ¿Cuántas páginas escribe al día, cuántas paginas tenía que escribir en total?

$$\begin{cases} P \times 10 = T \\ (P+200) \times 5 = T \end{cases}$$

a3 2.1

MECA2

1.- Una mecanógrafa debe escribir 200 páginas diarias durante 10 días, para realizar un trabajo. Si escribe 50 páginas diarias más. ¿En cuántos días podrá completar su trabajo?.

$\frac{200}{10}=20$ Escribe 20 páginas diarias

$20+50=70$ Si escribe 70 páginas diarias,

tardaría $\frac{200}{70} = \frac{20}{7} = 2+\frac{6}{7}$ días

a6 3.2

2.- Una mecanógrafa, para realizar un trabajo, escribe cierta cantidad de páginas durante 10 días. Si escribiese 200 páginas diarias más, tardaría 5 días menos. ¿Cuántas páginas escribe al día, cuántas paginas tenía que escribir en total?

10 $\frac{\text{200 páginas diarias más}}{\text{5 días menos}}$ = 400 páginas diarias

En total 4000 páginas.

a6 4.2

2.- Una mecanógrafa escribe cierta cantidad de páginas durante 10 días. Si escribiese 50 páginas más diarias tardaría 2 días menos. ¿Cuántas páginas escribe al día, cuántas paginas tenía que escribir en total?

En 10 días ——— x páginas /día

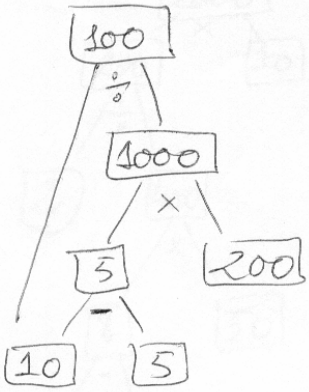
8 días ——— $x+50$ pág día

$\frac{10x+500}{8} = x$ páginas día

$\Rightarrow$ $x \cdot 10$ páginas totales.

a9 3.2

2.- Una mecanógrafa, para realizar un trabajo, escribe cierta cantidad de páginas durante 10 días. Si escribiese 200 páginas diarias más, tardaría 5 días menos. ¿Cuántas páginas escribe al día, cuántas paginas tenía que escribir en total?



El trabajo dura diez días. Si al escribir 200 páginas/día más tarda 5 días menos es que al escribir 200 páginas/día más tarda 10 - 5 = 5 días, ~~a razón~~, que a razón de 200 páginas/día son 1000 páginas en total, que entre 10 días tocan a 1000 ÷ 10 = 100 páginas por día.

alumno 8

1.2

Como escribe 100 pag. menos diarias, en 10 días escribire 1000 paginas menos y como tarda 10 días mas es escribir esas 1000 paginas eso quiere decir que escribe 100 paginas al dia

1.3

3.- Una mecanógrafa escribe 2000 páginas en cierto número de días. Si escribiese 50 páginas diarias más escribiría 2500 páginas en esos días. ¿Cuántas páginas diarias escribe en ambos casos?.

Si escribe 50 pagina mas escribe en total $\frac{1}{4}$ mas

Por tanto 50 pagina sera $\frac{1}{4}$ mas de lo que escribe de normal en un dia. Asi un dia normal escribe $50 \cdot 4 = 200$ paginas

2.2

2.- Una mecanógrafa escribe cierta cantidad de páginas durante 10 días, para realizar un trabajo. Si escribiese 120 páginas menos diarias tardaría 15 días más. ¿Cuántas páginas escribe al día, cuántas paginas tiene que escribir en total?

Si escribe 120 pag. menos durante 10 dias, en esos dias no escribiría 1200 paginas que son las que escribe en 15 dias, así en esos 15 dias escribe $\frac{1200}{15} = 80$ paginas diarias

Así en principio escribiría $80 + 120 = 200$ paginas diarias, lo que nos hace un total de $200 \times 10 = 2000$ paginas en total que tengo que escribir

2.3

3.- Una mecanógrafa, para realizar un trabajo, escribe 200 páginas durante un cierto número de días. Si escribiese 200 páginas más cada día tardaría 5 días menos. ¿Cuántas páginas escribe al día, cuántas paginas tenía que escribir en total?

Al escribir 400 paginas diarias $(200+200)$ hacemos el doble de trabajo que de normal por tanto tardamos la mitad de tiempo, así si me ahorro 5 dias, es que de normal trabajo 10 dias

Por tanto escribe $200 \cdot 10 = 2000$ pagina en total

2.4

4.-Una mecanógrafa escribe un total de 2000 páginas en un cierto número de días. Si escribiese 120 páginas menos al día tardaría 15 días más. ¿Cuántos días ha tardado en escribirlo?

No se hacerlo sin ecuaciones

n= numero de paginas que hago al dia

d= numero de dias que tardo en escribir 2000 paginas a ritmo normal

$$\left.\begin{array}{l} 2000 = nd \\ 2000 = (n-120)(d+15) \end{array}\right\} \quad d = \frac{2000}{n} \Rightarrow 2000 = (n-120)\left(\frac{2000}{n} + 15\right)$$

$$2000 = 2000 + 15n - \frac{240000}{n} - 1800$$

$$\Rightarrow 15n^2 - 1800n - 240000 = 0 \Leftrightarrow n^2 - 120n - 16000 = 0$$

$$n = \frac{120 \pm \sqrt{14400 - 64000}}{2} = \frac{120 \pm 280}{2} = \begin{cases} 200 \\ -80 \end{cases}$$

-80 No puede hacer negativo

$$\Rightarrow \underline{\underline{n = 200}} \Rightarrow \underline{\underline{d = 10}}$$

3.2

2.- Una mecanógrafa, para realizar un trabajo, escribe cierta cantidad de páginas durante 10 días. Si escribiese 200 páginas diarias más, tardaría 5 días menos. ¿Cuántas páginas escribe al día, cuántas páginas tenía que escribir en total?

Al escribir 200 paginas mas, tarda la mitad de tiempo, entonces

escrito en eos 5 dias (10 - 5) 400 paginas lo que hace un

total de 400 × 5 = 2000 paginas al dia.

3.3

3.- Una mecanógrafa escribe 200 páginas diarias durante un cierto número de días, para realizar un trabajo, si escribiese 120 páginas diarias menos, tardaría 15 días más. ¿Cuántas páginas escribe al día, cuántas tiene que escribir en total?.

Si escribe 120 paginas menos, entonces escribe 200 - 120 = 80 paginas al dia

Y como tarda para hacer $\frac{3}{5}$ partes del total 15 dias $\left(\frac{120}{200} = \frac{3}{5}\right)$

entonces para hacer las $\frac{2}{5}$ partes restantes tardara 10 dias

(ya que si $\frac{3}{5}$ son 15 dias entonces los $\frac{5}{5}$ seran 25 dias)

Por tanto si escribe 25 dias 80 pagina escribira

$25 \cdot 80 = 1000$ paginas

3.4

4.- Una mecanógrafa tiene que realizar un cierto trabajo. Si escribiese 120 páginas menos al día tardaría 15 días más en hacerlo, y si escribiese 50 páginas más al día tardaría 2 días menos. ¿Cuántas paginas tiene que escribir y en cuanto tiempo?

No se hacerlo sin ecuaciones

t= paginas totales , n y d como antes

$$\left.\begin{array}{l} t=nd \\ t=(n-120)(d+15) \\ t=(n+50)(d-2) \end{array}\right\}$$

Lo resolvemos y saldría

$t=2000$

$n=200$

$d=10$

4.2

2.- Una mecanógrafa escribe cierta cantidad de páginas durante 10 días. Si escribiese 50 páginas más diarias tardaría 2 días menos. ¿Cuántas páginas escribe al día, cuántas paginas tenía que escribir en total?

Si escribe 50 paginas mas se ahorra un quinto del tiempo total $\left(\frac{2}{10}=\frac{1}{5}\right)$. Por tanto 50 paginas es $\frac{1}{5}$ de lo que escribe en un día. Por tanto en un dia escribe $50 \cdot 5 = 250$ paginas en cada uno de esos 8 días. Si ahora queremos saber lo que escribia cada dia si tarda 10 dias basta con restarle las 50 que escribia de mas. Asi escribe $250-50=200$ paginas

4.3

3.- Una mecanógrafa escribe 2000 páginas durante un cierto número de días. Si escribiese 50 páginas más al día tardaría 2 días menos. ¿Cuántos días ha tardado en escribirlo?

No se hacerlo sin ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} 2000 = nd \\ 2000 = (n+50)(d \ast 2) \end{array}\right\}$$

Lo resolvemos y nos quedan

$n = 200$

$d = 10$

4.4

4.- Una mecanógrafa tiene que realizar un cierto trabajo. Si escribiese 100 páginas menos al día tardaría 10 días más en hacerlo, y si escribiese 200 páginas más al día tardaría 5 días menos. ¿Cuántas paginas tiene que escribir y en cuanto tiempo?

$$\left.\begin{array}{l} t = nd \\ t = (n-100)(d+10) \\ t = (n+200)(d-5) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} t = 20\dot{0} \\ d = 10 \\ n = 200 \end{array}$$

A4.1.- La construcción del instrumento.

1.-Del número de problemas del instrumento y los que debe resolver cada estudiante.

Para organizar la selección de los problemas del instrumento se decidió dar preferencia a la variable de la tarea Subfamilia[58]. Dado que el número de subfamilias consideradas son siete, y además, la subfamilia OTROS cuando se mira desde el detalle contextual es extremadamente diversa, el número de problemas que debía contener el instrumento era elevado.

Así, se decidió inicialmente que el número de problemas sería de 32, lo que venía a suponer cuatro problemas por subfamilia y ocho para la subfamilia OTROS. Esta cantidad permitiría jugar con la complejidad de los problemas dentro de cada subfamilia. La necesidad de dividir el instrumento era evidente y la consideración de los estudiantes, a los cuales se les debía administrar el instrumento, hacía preciso disminuir la cantidad de problemas considerados. No obstante, estaba en nuestra intención examinar, al menos, esa cantidad de problemas para cada una de las subfamilias. Como los estudiantes a que se les iba a administrar el instrumento cursaban 1º, 2º y 3º de bachillerato, se decidió que al menos para 12 de los problemas fuesen examinadas resoluciones de todos los estudiantes. En el pilotaje de las variables de producto, habíamos comprobado que ocho problemas por test era un número apropiado, ya que en la tarea requerida de los estudiantes, es obligatorio plantear y no obligatorio resolver. Así pues, se decidió que a cada estudiante le fuesen administrados tres test de 8 problemas. Lo que era factible si la administración de los sucesivos test se espaciaba en el tiempo. Entonces, cada estudiante contemplaría 24 problemas, entre los cuales se encontrarían los 12 problemas comunes para todos los estudiantes. La información sobre el resto de los 20 problemas se podía extraer de los 12 problemas no comunes a todos los estudiantes, que contemplaría cada estudiante. De algunos de estos 20 problemas se podría obtener la información a partir de más estudiantes, haciendo que se compartiesen por los estudiantes de dos cursos. Así, se decidió que los estudiantes de 2º curso compartiesen todos los problemas, bien con 1º y 3º, bien solo con 1º, bien solo con 3º. Así, la distribución de los problemas del test, mirada desde los estudiantes, sería:

Estudiante de 1º : 12 problemas comunes, 6 problemas compartidos con 2º, 6 problemas no compartidos con ningún otro curso.

Estudiante de 2º : 12 problemas comunes, 6 problemas compartidos con 1º, 6 problemas compartidos con 3º.

Estudiante de 3º : 12 problemas comunes, 6 problemas compartidos con 2º, 6 problemas no compartidos con ningún otro curso.

2.-De las fuentes para la selección de los problemas.

Con estos números en la mano, respecto de la cantidad de problemas del instrumento, las subfamilias a las que los problemas debían pertenecer y las variables de

[58] Ello se hizo porque en el momento en que se diseñó el instrumento no se disponía de una información tan elaborada y detallada sobre las estructuras de los problemas de la FPAA como la que se muestra en el Capitulo **1**

la tarea que se querían considerar, se consultaron las siguientes textos para seleccionar los problemas:

-Libros de texto 8º EGB y BUP
-Manuales de aritmética y de algebra (de los siglos XVIII-XIX y principios del XX)
-El algebra de Euler y Bezout..
-Manuales para la formación de maestros.
-Los problemas que los investigadores más próximos en el tiempo a nosotros han venido utilizando para el estudio de esta familia de problemas en particular de la escuela rusa: Kalmikova y Kutestkii y mexicana: Trujillo y Rubio.

Así, se confeccionó una relación de unas siete docenas de problemas para todos los cuales se determinó su grafo.

3.-De los criterios para la selección de los problemas concretos.

Para la selección concreta de los problemas del instrumento de entre los problemas de la relación citada se utilizaron los siguientes criterios, criterios que se consideraron a medio camino entre orientación y prescripción:

- que cada subfamilia estuviera representada por la cantidad de problemas apuntada.
- que los grafos de los problemas seleccionados tuviesen preferentemente ordenes entre 3 y 5[59].
- que cada subfamilia contuviese problemas con grafos de ordenes diferentes.
- que entre los grafos de los problemas seleccionados con un orden determinado la cantidad de aristas aditivas y multiplicativas difiriese.
- que entre los problemas seleccionados constasen problemas equivalentes o con alguna isomorfía.
-que entre los problemas seleccionados constasen problemas de situaciones concretas equivalentes.
- que entre los problemas seleccionado constase algún problema indeterminado y sobredeterminado.
- que, ante características estructurales semejantes, tuviesen preferencia los enunciados de los problemas utilizados por otros investigadores o ya estudiados por nosotros mismos.

Criterios que como puede verse tratan de prestar atención aparte de la subfamilia a la que pertenece el problema a otras variables de la tarea. Y, se decidió además, que tales criterios fuesen tenidos en cuenta con mayor atención en los problemas comunes para todos los estudiantes.

4.-Los problemas del instrumento

La relación de los nombres de los 32 problemas seleccionados organizados por subfamilias consta en la tabla 1.A4.1 donde se han resaltado en negrita los problemas comunes a todos los estudiantes.

[59] Este criterio, limita tanto el número de expresiones algebraicas que es necesario producir como la complejidad sintáctica de dichas expresiones.

Los enunciados de los problemas de cada una de las familias, indicando su fuente, constan en las Tablas 2.A4.1 a 8.A4.acompañados por sus grafos. En los grafos, los vértices coloreados en gris indican las cantidades por las que cuyo valor se pregunta en el problema.

Los problemas del instrumento, como puede observarse contemplando sus grafos, son Problemas de Lectura Algebraica con la excepción de los problemas CAVAR y EJE VIARIO de la subfamilia TRABAJO.

Debe decirse, que no todos los grafos de los problemas son grafos trinomiales. Así, se han utilizado grafos generales para representar problemas de las subfamilias ABACO y HERENCIAS. En estas subfamilias se han utilizado aristas aditivas que contienen más de tres vértices. En la subfamilia ABACO en el problema DESCOMPONER EN 4 PARTES y en la subfamilia REPARTOS –HERENCIAS en todos los problemas de la subfamilia.

La complejidad de cada uno de los problemas del instrumento, obtenida a partir de los grafos, se encuentra en las tablas 9.A4.1 a 15.A4.1. Los problemas del instrumento de acuerdo con los criterios de selección tiene complejidades entre 3 y 5. La excepción la constituyen los problemas: RESTA Y RESTA, FORTUNA, ARTEL, MECANOGRAFA y DINERO. De ellos, únicamente los problemas MECANOGRAFA y DINERO forman parte de la colección de problemas comunes a todos los estudiantes, y los otros problemas no fueron propuestos a estudiantes de 1º, ver tabla 16 .A4.1.

El instrumento contiene también algunos problemas indeterminados y sobredeterminados, esto puede observarse apreciando en las tablas de complejidad, si el número de aristas supera o es inferior al número de vértices claros. En las tablas se ha remarcado en negrita el número de vértices claros cuando esto ocurre. Los problemas indeterminados son DESCOMPONER EN 4 PARTES, HOJA DE ALUMINIO y ROTATIVA[60] y el problema sobredeterminado HACE DIEZ de ellos únicamente el problema DESCOMPONER EN 4 PARTES consta entre los problemas comunes a todos los estudiantes.

Las complejidades contempladas en el instrumento y los problemas determinados que las poseen son:

Complejidad (3, 1, 2, 3)
FRACCION
LUIS Y SU PADRE
REPARTIR 1200

Complejidad (3, 2, 1, 3)
ENTERO
ALCANZAR
ENCONTRAR
RUBLOS
CHOCOLATES Y CARAMELOS
HENO
PERIMETRO

Complejidad (4, 0, 4, 4)
BOLSAS DE CARAMELOS

Complejidad (4, 1, 3, 4)
EDAD DOBLE

[60] ROTATIVA por decisión discutible del investigador, que no ha querido expresar con número alguno el trabajo de impresión que tienen que realizan las rotativas. Así esta cantidad aparece en el grafo como un vértice claro.

Complejidad (4, 3, 1, 4)
CAVAR
EJE VIARIO

Complejidad (5, 1, 4, 5)
PEDRO Y JUAN
HERMANOS

Complejidad (5, 4, 1, 5)
REPARTIR ENTRE 5
COMERCIANTES.

Complejidad (5, 2, 3, 5)
MITAF Y TERCERA PARTE

Complejidad (6, 3, 3, 6)
RESTA Y RESTA
TERRENO
EDITORIAL

Complejidad (7, 3, 4, 7)
ARTEL

Complejidad (7, 4, 3, 7)
MECA
DINERO

Complejidad (8, 5, 3, 8)
FORTUNA

Por último, el instrumento contiene problemas que son equivalentes como MECA y DINERO, ALCANZAR y RUBLOS y también problemas que pertenecen a situaciones concretas equivalentes ALCANZAR, HENO y RUBLOS.

Tabla 1.A4.1 **ABACO**	**MITAD Y TERCERA PARTE** **DESCOMPONER EN 4 PARTES** ENTERO FRACCION RESTA Y RESTA
REPARTOS-HERENCIAS	REAPARTIR 1200 BOLSAS DE CARAMELOS FORTUNA REPARTIR ENTRE 5
EDADES	**EDAD DOBLE** **PEDRO Y JUAN** LUIS Y SU PADRE HACE DIEZ HERMANOS
TRABAJO	**CAVAR** EJE VIARIO ROTATIVA ARTEL
GEOMETRIA	**TERRENO** PERIMETRO HOJA DE ALUMINIO EDITORIAL
MOVILES	**ALCANZAR** **ENCONTRAR** **LIEBRE Y GALGO** AVIONETA
OTROS	**RUBLOS** **HENO** **MECANOGRAFA** **DINERO** CHOCO Y CALRAMELOS COMERCIANTES

MITAD Y TERCERA PARTE (Anonimo)

Estoy pensando en un número tal que la suma de su mitad y su tercera parte es 7 unidades mayor que su cuarta parte. ¿Cuál es dicho número?

DESCOMPONER EN 4 PARTES (Krutestki modificado para que sea indeterminado).

Descomponer un número en cuatro partes de modo que si se resta 4 de la primera, se suma 4 a la segunda, la tercera se multiplica por 4, y la cuarta se divide por 4, se obtiene el mismo número en todos los casos

ENTERO (Trujillo)
El doble de un entero es igual al cuadruple del entero anterior a él. ¿Cuál es ese entero?

FRACCION (Trujillo)

Si se resta 1/4 a una fracción cuyo denominador es dos unidades mayor que su numerador se obtiene 1. ¿Cuál es la fracción?

RESTA Y RESTA (Euler)

Encontrar un número tal que si se resta 1 de su doble, el resto se dobla, a esto se resta 2 y lo que queda se divide por cuatro; al final queda uno más que el número inicial.

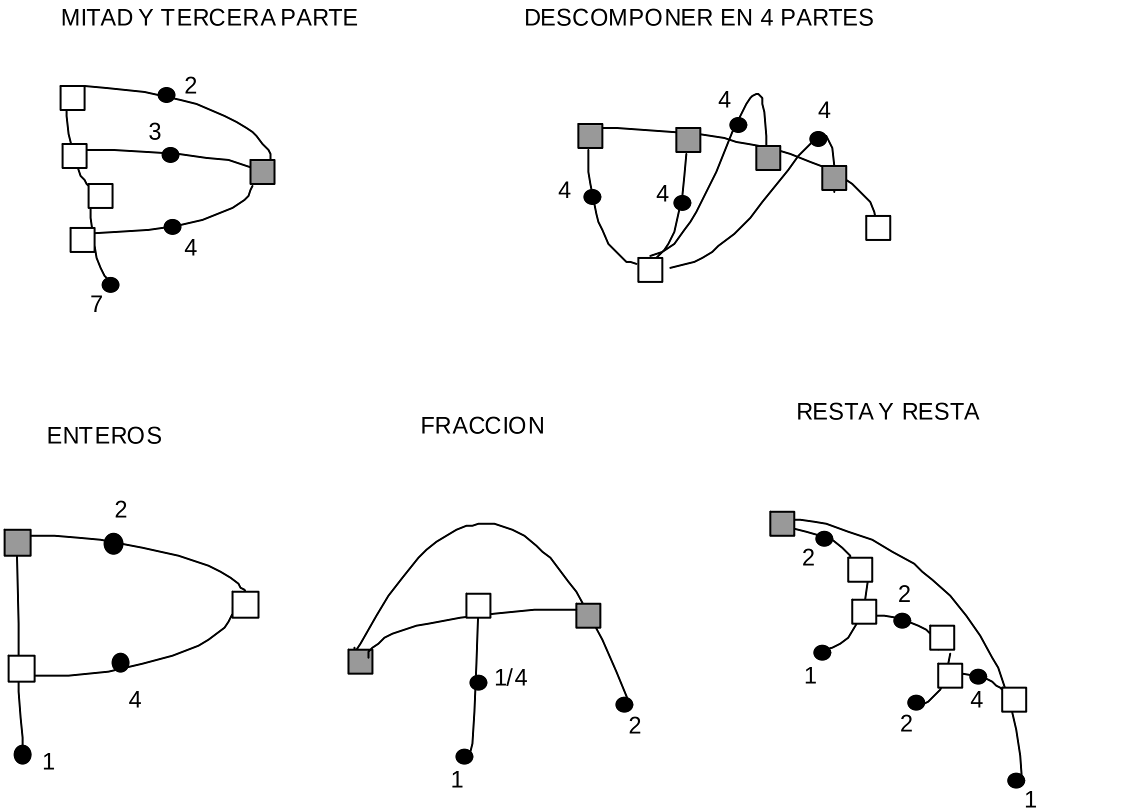


Tabla 2.A4.1.- Enunciados y grafos de los problemas de la subfamilia **ABACO**

REPARTIR 1200 (Anónimo)

Repartir 1200 pts entre tres personas de modo que la primera tenga la mitad que la segunda y la tercera lo que entre las otras dos juntas.

BOLSAS DE CARAMELOS (G. Rubio)

En tres bolsas había igual número de caramelos. Se quitaron 600 de cada bolsa. Entre todas quedó entonces el mismo número de caramelos que había en cada una al principio. ¿Cuántos caramelos había en cada bolsa?

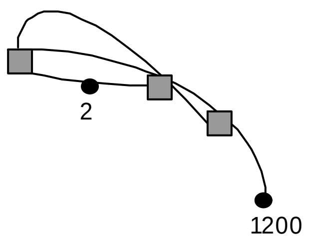
FORTUNA (Euler)

Un padre murió dejando cuatro hijos. Estos se repartieron la herencia de la manera siguiente: El primero cogió la mitad de la fortuna menos 3000 libras. El segundo cogió un tercio de ella menos 1000 libras. El tercero cogió exactamente un cuarto de ella. El cuarto cogió 600 libras, más la quinta parte de la fortuna. ¿Cuál era la fortuna del padre y qué cantidad recibió cada uno de los hijos?

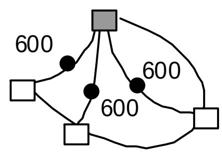
REPARTIR ENTRE 5 (Euler)

Cinco personas se reparten 8591 pts. Encontrar la parte que recibe cada una sabiendo que la segunda recibe 3/4 de lo que ha recibido la primera, la tercera 3/4 de lo que recibe la segunda y así sucesivamente.

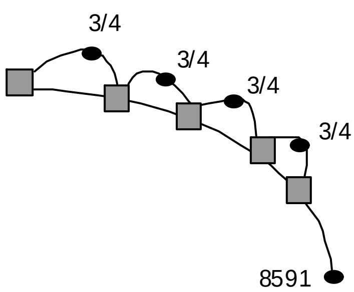
REPARTIR 1200



BOLSAS DE CARAMELOS



REPARTIR ENTRE 5



FORTUNA

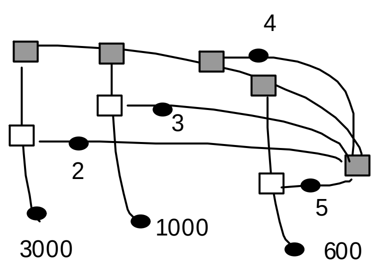


Tabla 3.A4.1.- <u>Enunciados y grafos de los problemas de la subfamilia</u> **REPARTOS- HERENCIAS**

EDAD DOBLE (texto bachillerato)

La edad de una persona es doble de la de otra. Hace siete años la suma de las edades de las dos personas era igual a la edad actual de la primera. ¿Cuál es la edad de cada una?

PEDRO Y JUAN (Tradicional)

Pedro dice a Juan: Tengo dos veces la edad que tenía cuando tenía la edad que tienes tú. Cuando tú tengas la edad que yo tengo ahora, entre los dos tendremos 63 años. ¿Cuáles son nuestras edades actuales?

LUIS Y SU PADRE (Anónimo)

Luis tiene 22 años y su padre 40 años. ¿Cuántos años tienen que transcurrir para que la edad de su padre sea el doble que la de Luis?

HACE DIEZ (Anónimo, modificado para que sea sobredeterminado)

Hace diez años era dos veces más joven que lo soy ahora. Dentro de veinte años seré dos veces más viejo. ¿Cuál es mi edad actual?

HERMANOS (krutestki)

Soy ahora tres veces más viejo que lo era cuando mi hermano tenía mi edad. Cuando tenga la edad que mi hermano tiene ahora, habremos vivido 96 años entre los dos. ¿Cuáles son nuestras edades ahora?

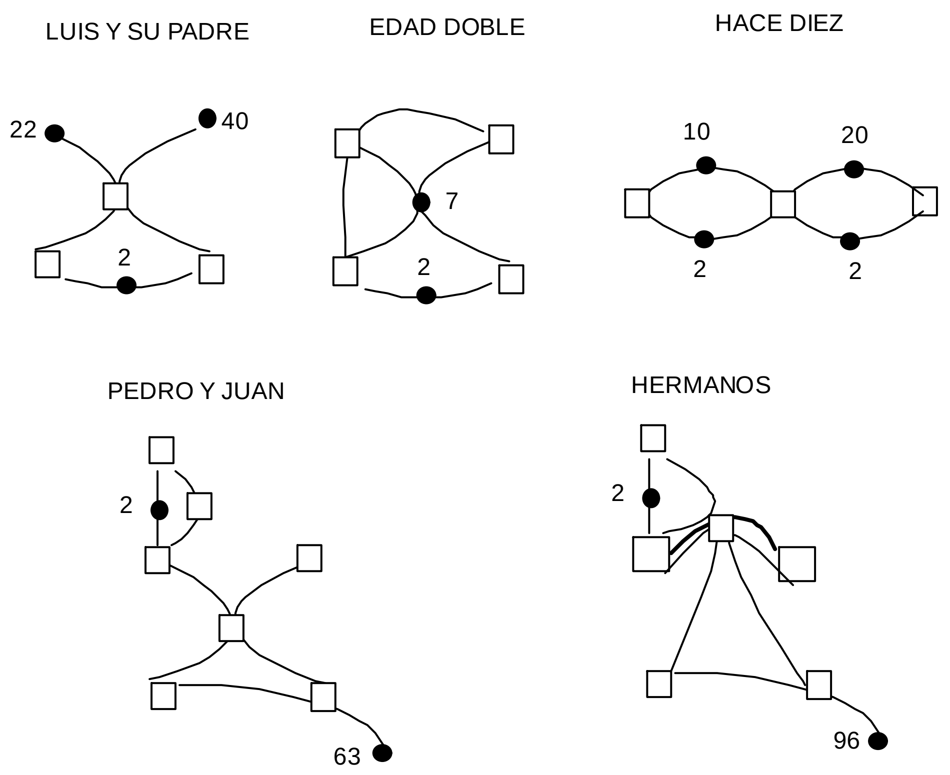


Tabla 4.A4.1.-<u>Enunciados y grafos de los problemas de la subfamilia</u> **EDADES**

CAVAR (Anónimo)

La superficie de un campo es de 6 ha. Juan puede cavarlo en 2 días. Antonio lo hace en 3 días. Si trabajan los dos juntos en el campo, ¿cuánto tiempo tardarán en cavarlo?

EJE VIARIO (Rubio)

Una persona contrata el acondicionamiento de un eje viario para realizarlo en 72 días. Sabe que para ello necesitaría 72 hombres. Cuando empieza los trabajos, emplea 50 hombres, y al cabo de cierto tiempo contrata a 30 hombres más para poder dar cumplimiento a su contrato. ¿Durante cuántos días trabajan estos 30 hombres?

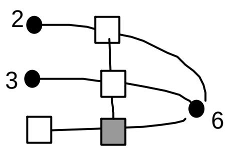
ROTATIVA (Rubio)

La rotativa de cierto diario imprime los periódicos de un día en 4 horas. Otra rotativa de mayor velocidad puede hacerlo en 2 horas. Se pregunta por el tiempo que emplearán las dos rotativas trabajando a la vez.

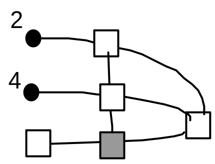
ARTEL(Euler)

Un artel de segadores debía segar dos prados, uno de los cuales tenia el doble superficie que el otro. Durante medio día trabajó todo el personal del artel en el prado grande; después de la comida, una mitad de la gente quedó en el prado grande y la otra mitad trabajó en el pequeño. Durante esa tarde fueron terminados los dos tajos, a excepción de un reducido sector del prado pequeño, cuya siega ocupó a un segador toda la jornada siguiente. ¿Cuántos segadores componían el artel?

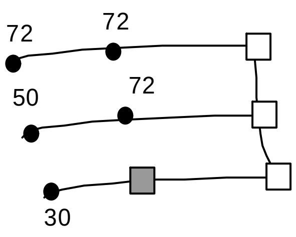
CAVAR



ROTATIVA



EJE VIARIO



ARTEL

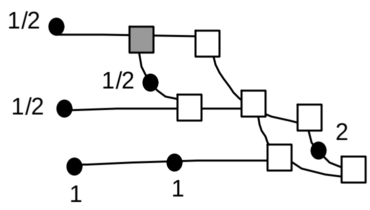


Tabla 5.A4.1.-<u>Enunciados y grafos de los problemas de la subfamilia</u> **TRABAJO**

TERRENO

El ancho de un terreno rectangular es 2/3 de su largo. Si ambas dimensiones se aumentan en 2 m, el area aumenta en 64 m^2. ¿Cuáles son las dimensiones de este terreno?

PERIMETRO

El perímetro de un rectángulo es 2500 m y el ancho es 2/3 del largo. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

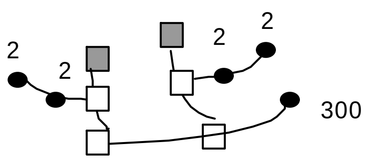
HOJA DE ALUMINIO

Una hoja de aluminio se recorta en sus esquinas para hacer una caja. Los cortes son cuadrados de 2 cm de lado. ¿Cuáles son las dimensiones de la hoja, si la base de la caja debe tener 300 cm^2 de superficie?

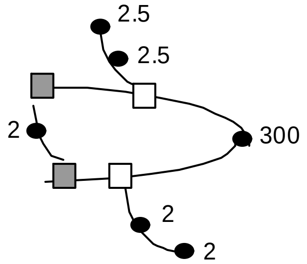
EDITORIAL (Rubio)

Una editorial necesita cortar hojas rectangulares, cuyo ancho es la mitad de su largo, para imprimir en cada página una superficie de 300 cm^2. Si los márgenes son de 2 cm arriba y abajo y 2'5 cm en cada lado, ¿cuáles son las dimensiones de la hoja?

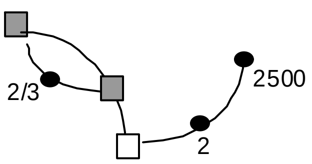
HOJA ALUMINIO



EDITORIAL



PERIMETRO



TERRENO

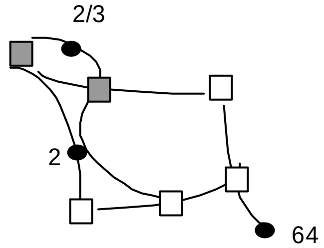


Tabla 6.A4.1.-Enunciados y grafos de los problemas de la subfamilia **GEOMETRIA**

ALCANZAR

Un automóvil parte de un punto A con velocidad uniforme de 40 km/h hacia otro punto B. Dos horas después sale de A hacia B otro automóvil con velocidad uniforme de 60 km/h. Dígase a qué distancia de A se encuentran.

ENCONTRAR

Un tren parte a las 16 h de Madrid con destino a Valencia con una velocidad de 120 km/h. A la misma hora sale de Valencia otro tren con destino Madrid y a una velocidad de 140 km/h. Dígase a qué distancia de Madrid se encuentran y a qué hora, si la distancia Madrid-Valencia es de 430 km.

LIEBRE Y GALGO

Una liebre era perseguida por un galgo al que llevaba 50 saltos de ventaja. La liebre daba 4 saltos mientras que el galgo daba 3, pero 2 saltos del galgo miden tanto como 3 saltos de liebre. ¿Cuántos saltos deberá dar el galgo para alcanzar a la liebre?

AVIONETA

Una avioneta vuela a 220 kilómetros por hora cuando no hay viento. Puede llevar carburante para 4 horas. Un día en que el viento sopla a 20 kilómetros por hora, la avioneta sale del aeropuerto en la dirección del viento. ¿Hasta qué distancia podrá llegar si ha de regresar al aeropuerto sin agotar el carburante?

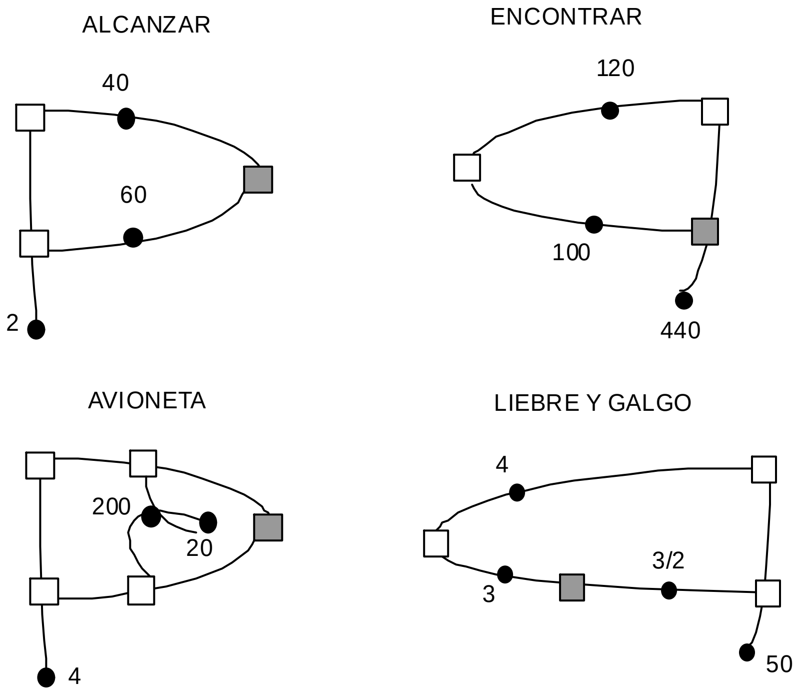


Tabla 7.A4.1.-<u>Enunciados y grafos de los problemas de la subfamilia</u> **MOVILES**

RUBLOS (Krutestkii)

Una escuela rusa compra libros para la biblioteca. Si los paga con billetes de 3 rublos, la escuela tiene que dar 8 billetes más que si los paga con billetes de 5 rublos. ¿Cuánto cuestan los libros?

HENO (Kalmikova)

Unos granjeros almacenaron heno para 40 días. Sin embargo el heno era de mejor calidad de la que pensaban y ahorraron 100 kg por día. Así tuvieron heno para 60 días. ¿Cuánto heno almacenaron?

MECANOGRAFA (Rubio)

Una mecanógrafa piensa que si escribe al día 2 páginas más de lo establecido normalmente, acabará el trabajo 3 días antes de lo previsto, mientras que si escribe 4 páginas más al día, acabará 5 días antes de lo previsto. ¿Cuántas paginas tiene que escribir y en cuánto tiempo?

DINERO (Rubio)

Una cierta suma de dinero se repartió a partes iguales entre cierto. número de niños. Si hubiera habido dos niños más, cada uno hubiera recibido 100 pts menos; si hubiera habido dos niños menos, cada uno hubiera recibido 200 pts más. ¿Cuántos niños había y cuánto recibió cada uno?

CHOCOLATES Y CALRAMELOS (Rubio)

Una profesora tiene 120 chocolates y 192 caramelos para repartir —a partes iguales cada tipo de dulce— entre los alumnos de su grupo. Si cada alumno recibe tres caramelos más que chocolates, ¿cuántos son los alumnos?COMERCIANTES

COMERCIANTES (Bezout)

Dos comerciantes se presentaron en el mercado con 100 cartones de huevos. Uno de ellos llevaba más cartones que el otro, pero despues de vendidos obtuvieron el mismo provecho. Así fue que, uno le dijo al otro: si hubiera tenido tus huevos, les hubiera sacado 45000 pts.; por supuesto que, si yo hubiera tenido los tuyos, tendría ahora 20000 pts., respondió el otro. Averiguar los cartones de huevos que llevó cada uno.

Tabla 8.A4.1.-Enunciados de los problemas de la subfamilia **OTROS**

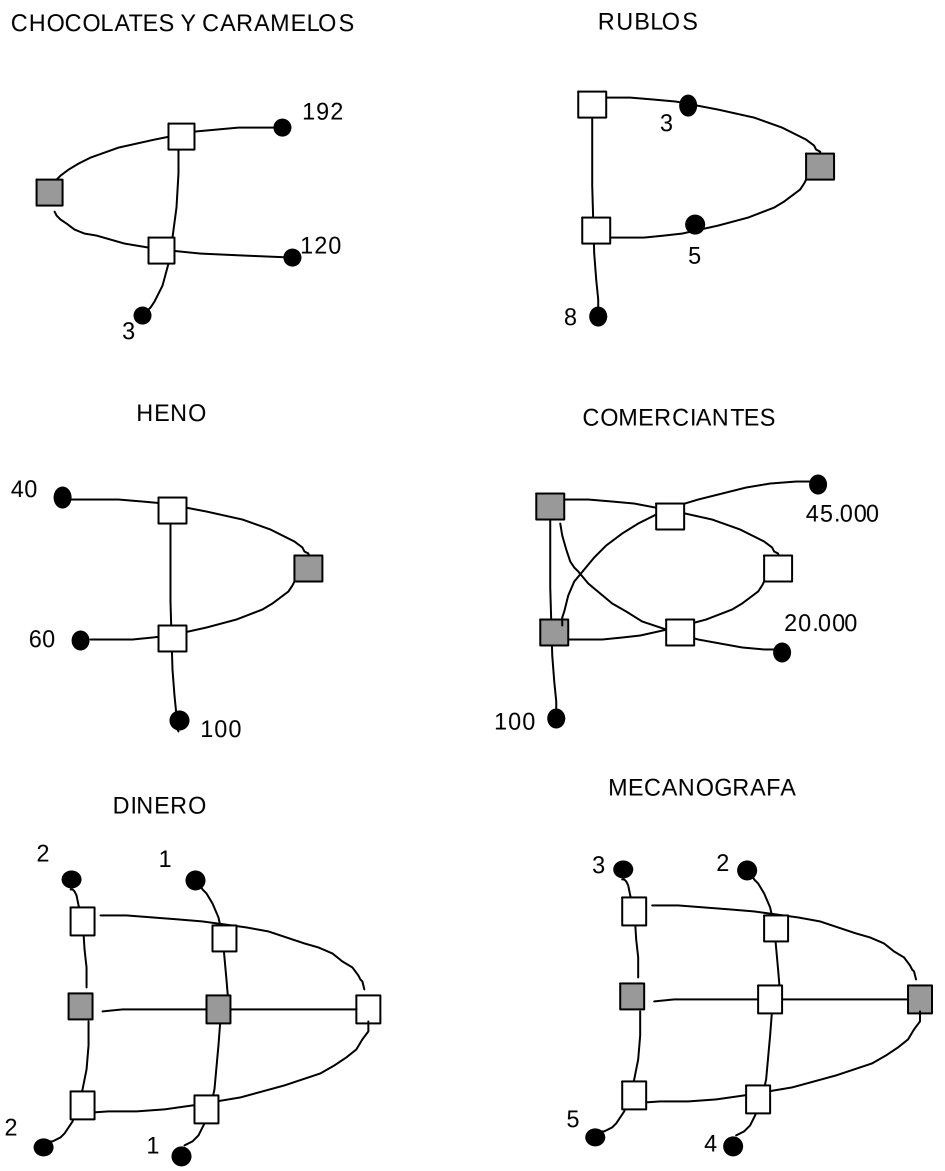


Tabla 8.A4.1,- <u>Grafos de los problemas de la subfamilia </u>**OTROS**

Problemas **ABACO**	Nº aristas	Aristas multiplicativas	Aristas Aditivas	Vértices. claros
MITAD Y TERCERA PARTE	5	3	2	5
DESCOMPONER EN 4 PARTES	5	2	3	**6**
ENTERO	3	2	1	3
FRACCION	3	1	2	3
RESTA Y RESTA	6	3	3	3

Tabla 9.A4.1.- Complejidad de los problemas de la subfamilia **ABACO**

Problemas **REPARTOS HERENCIAS**	Nº aristas	Aristas multiplicativas	Aristas Aditivas	Vértices. claros
REAPARTIR 1200	3	1	2	3
BOLSAS DE CARAMELOS	4	0	4	4
FORTUNA	8	5	3	8
REPARTIR ENTRE 5	5	4	1	5

Tabla 10.A4.1.- Complejidad de los problemas de la subfamilia **REPARTOS-HERENCIAS**

Problemas **EDADES**	Nº aristas	Aristas multiplicativas	Aristas Aditivas	Vértices. claros
EDAD DOBLE	4	1	3	4
LUIS Y SU PADRE	3	1	2	3
PEDRO Y JUAN	5	1	4	4
HERMANOS	5	1	4	4
HACE DIEZ	4	2	2	**3**

Tabla 11.A4.1.- Complejidad de los problemas de la subfamilia **EDADES**

Problemas **TRABAJO**	Nº aristas	Aristas multiplicativas	Aristas Aditivas	Vértices. claros
CAVAR	4	3	1	4
EJE VIARIO	4	3	1	4
ROTATIVA	4	3	1	**5**
ARTEL	7	4	3	7

Tabla 12.A4.1.- Complejidad de los problemas de la subfamilia **TRABAJO**

Problemas **GEOMETRIA**	Nº aristas	Aristas multiplicativas	Aristas Aditivas	Vértices. claros
TERRENO	6	3	3	6
PERIMETRO	3	2	1	3
HOJA DE ALUMINIO	5	1	4	**6**
EDITORIAL	5	3	2	5

Tabla 13.A4.1.- Complejidad de los problemas de la subfamilia **GEOMETRIA**

Problemas **MÓVILES**	Nº aristas	Aristas multiplicativas	Aristas Aditivas	Vértices. claros
ALCANZAR	3	2	1	3
ENCONTRAR	3	2	1	3
LIEBRE Y GALGO	4	3	1	4
AVIONETA	5	2	3	5

Tabla 14.A4.1.- Complejidad de los problemas de la subfamilia **MÓVILES**

Problemas **OTROS**	Nº aristas	Aristas Aditivas	Aristas multiplicativas	Vértices. claros
RUBLOS	3	2	1	3
HENO	3	2	1	3
CHOLATES y CARAMELOS	3	2	1	3
COMERCIANTES	5	4	1	5
MECA	7	3	4	7
DINERO	7	3	4	7

Tabla 15.A4.1.- Complejidad de los problemas de la subfamilia **OTROS**

	COMUNES 1º 2º 3º	COMUNES 1º y 2º	COMUNES 2º y 3º	SOLO 1º	SOLO 3º
A BA CO	MITAD Y TERCERA PARTE DESCOMPONER EN 4 PARTES	FRACCION	RESTA Y RESTA	ENTERO	
HE REN CIAS		REPARTIR ENTRE 5	FORTUNA	REAPARTIR 1200 BOLSAS DE CARAMELOS	
E DA DES	EDAD DOBLE PEDRO Y JUAN	HACE DIEZ	HERMANOS	LUIS Y SU PADRE	
TRA BA JO	CAVAR	ROTATIVA	EJE VIARIO		ARTEL
GEO ME TRIA	TERRENO	HOJA DE ALUMINIO		PERIMETRO	EDITORIAL
MO VI LES	ALCANZAR ENCONTRAR LIEBRE Y GALGO		AVIONETA		
O TROS	RUBLOS HENO MECANOGRAFA DINERO			CHOCO Y CALRAMELOS	COMERCIANTES

Tabla 16.A4.1.- Distribución de los problemas según cursos

	1º	2º	3º
1º parte	ENTERO FRACCION REAPARTIR 1200 MECANOGRAFA CHOCO Y CALRAMELOS HACE DIEZ LIEBRE Y GALGO PERIMETRO	FRACCION MECANOGRAFA HACE DIEZ LIEBRE Y GALGO HERMANOS AVIONETA FORTUNA	MECANOGRAFA COMERCIANTES LIEBRE Y GALGO HERMANOS AVIONETA FORTUNA MEZCLAS
2º parte	DESCOMPONER EN 4 PARTES CAVAR HOJA DE ALUMINIO LUIS Y SU PADRE EDAD DOBLE ENCONTRAR RUBLOS REPARTIR ENTRE 5	DESCOMPONER EN 4 PARTES CAVAR HOJA DE ALUMINIO EJE VIARIO EDAD DOBLE ENCONTRAR RUBLOS REPARTIR ENTRE 5	DESCOMPONER EN 4 PARTES CAVAR ARTEL EJE VIARIO EDAD DOBLE ENCONTRAR RUBLOS
3º parte	MITAD Y TERCERA PARTE DINERO HENO PEDRO Y JUAN ALCANZAR TERRENO ROTATIVA BOLSAS DE CARAMELOS	MITAD Y TERCERA PARTE DINERO PEDRO Y JUAN ALCANZAR TERRENO ROTATIVA HENO RESTA Y RESTA	MITAD Y TERCERA PARTE DINERO PEDRO Y JUAN ALCANZAR EDITORIAL HENO RESTA Y RESTA

Tabla 16.A4.1.- Composición de las tres partes del instrumento para cada curso.

A4.2,- Variables de proceso, dificultades, pertinencia del proceso y perfiles de los de los problemas

A4.2.1.- Variables de proceso.

Curso 1º	aborda.	uso de letras	exp algeb.	igualdades	solución	sol,por ec.
Alumnos 91	A	UL	EA	IG	S	SEC.
ENTEROS	84	82	82	75	37	37
FRACCIÓN	74	74	74	73	28	28
MIT Y TERC P	85	85	80	76	29	29
DES EN 4 PAR	71	71	65	38	1	1
REP. 1200	60	60	60	57	48	48
REP. ENTRE 5	51	50	50	48	17	17
BOLSAS D CA	72	66	66	64	48	47
LUIS Y SU PAD	61	44	44	32	9	9
HACE DIEZ	62	57	54	51	23	23
EDAD DOBLE	71	71	71	69	24	24
PEDRO YJUAN	55	54	53	47	9	9
PERIMETRO	55	53	45	43	26	26
TERRENO	59	59	57	49	9	9
HOJA DE ALUM	30	15	13	9	1	1
ALCANZAR	44	30	18	2	8	1
ENCONTRAR	42	25	25	15	14	11
LIEBRE Y GALG	28	27	25	11	3	0
CAVAR	47	29	18	16	14	10
ROTATIVA	32	15	13	11	3	0
CHOCO Y CARA	63	44	44	37	25	12
HENO	45	28	23	19	4	2
RUBLOS	43	36	36	33	12	8
MECA	44	44	43	37	3	3
DINERO	60	58	56	53	6	6

Tabla I.-Valores de las variables de proceso para cada problema. Curso 1º.

Curso 2º	aborda.	uso de letras	exp algeb.	igualdad	solución	sol. por ec.
Alumnos 92	A	UL	EA	IG	S	SEC
FRACCIÓN	85	84	84	84	39	39
MIT Y TERC P	89	89	89	62	53	53
DES EN 4 PAR	75	75	74	72	7	7
RESTA Y REST	67	67	67	56	15	15
REP. ENTRE 5	49	49	49	39	22	22
FORTUNA	71	71	71	70	64	39
HACE DIEZ	81	81	81	74	49	49
EDAD DOBLE	80	80	80	80	38	38
PEDRO YJUAN	80	80	75	67	5	5
HERMANOS	68	68	57	49	1	1
TERRENO	63	63	57	53	18	18
HOJA DE ALUM	30	20	16	9	1	1
ALCANZAR	35	34	28	18	11	5
ENCONTRAR	25	12	12	11	5	3
LIEBRE Y GALG	52	43	38	26	4	0
AVIONETA	23	8	8	2	7	1
CAVAR	38	29	19	14	4	2
ROTATIVA	28	27	19	11	1	0
EJE VIARIO	28	8	8	2	7	1
HENO	39	32	32	30	11	8
RUBLOS	50	45	43	41	10	9
MECA	75	74	74	68	2	2
DINERO	77	77	75	73	2	2

Tabla II.-Valores de las variables de proceso para cada problema. Curso 2º.

Curso 3º	aborda.	uso de letras	exp algeb.	igualdad	solución	sol. por ec.
Alumnos 75	A	UL	EA	IG	S	Sec
MIT Y TERC P	72	71	71	71	56	56
DES EN 4 PAR	62	61	61	47	12	12
RESTA Y RESTA	44	44	44	40	13	13
FORTUNA	72	72	72	63	61	61
EDAD DOBLE	71	71	69	67	27	27
PEDRO YJUAN	50	49	48	46	9	9
HERMANOS	54	54	52	45	0	0
TERRENO	70	68	68	67	33	33
EDITORIAL	35	35	31	25	9	9
ALCANZAR	69	48	48	43	42	35
ENCONTRAR	64	34	34	31	40	29
LIEBRE Y GALGO	37	24	24	19	4	0
AVIONETA	21	9	9	7	0	2
CAVAR	58	9	9	9	32	8
EJE VIARIO	33	10	10	6	0	6
ARTEL	36	9	9	7	5	3
HENO	37	23	23	21	15	11
RUBLOS	44	38	36	36	18	15
MECA	46	46	46	46	5	5
DINERO	54	54	53	53	8	8
COMERCIANTES	37	31	30	30	8	8

Tabla III.-Valores de las variables de proceso para cada problema. Curso 2º.

A4.2.2.- Dificultades, diferencia entre dificultades y pertinencia del proceso.

Curso 1º					
problema	dif.apre.pro.	dif.solución	diferencias	pertinencia	dif.proceso
ENTEROS	7,7	59,3	51,6	97,6	54,9
FRACCIÓN	18,7	69,2	50,5	100,0	62,2
MIT Y TERC P	6,6	68,1	61,5	100,0	65,9
DES EN 4 PAR	22,0	98,9	76,9	100,0	98,6
REP. 1200	34,1	47,3	13,2	100,0	20,0
REP. ENTRE 5	44,0	81,3	37,4	98,0	66,0
BOLSAS D CA	20,9	47,3	26,4	91,7	28,8
LUIS Y SU PAD	33,0	90,1	57,1	72,1	79,5
HACE DIEZ	31,9	74,7	42,9	91,9	59,6
EDAD DOBLE	22,0	73,6	51,6	100,0	66,2
PEDRO YJUAN	39,6	90,1	50,5	98,2	83,3
PERIMETRO	39,6	71,4	31,9	96,4	50,9
TERRENO	35,2	90,1	54,9	100,0	84,7
HOJA DE ALUM	67,0	98,9	31,9	50,0	93,3
ALCANZAR	51,6	91,2	39,6	68,2	96,7
ENCONTRAR	53,8	84,6	30,8	59,5	56,0
LIEBRE Y GALG	69,2	96,7	27,5	96,4	100,0
CAVAR	48,4	84,6	36,3	61,7	65,5
ROTATIVA	64,8	96,7	31,9	46,9	100,0
CHOCO Y CARA	30,8	72,5	41,8	69,8	72,7
HENO	50,5	95,6	45,1	62,2	92,9
RUBLOS	52,7	86,8	34,1	83,7	77,8
MECA	51,6	96,7	45,1	100,0	93,2
DINERO	34,1	93,4	59,3	96,7	89,7

Tabla IV.- Valores de las variables dependientes: Dificultades, diferencia entre dificultades y pertinencia del proceso de resolución. Curso 1º

Curso 2º					
problema	dif.apre.pro.	dif.solución	diferencias	pertinencia	dif.proceso
FRACCIÓN	7,6	57,6	50,0	98,8	53,6
MIT Y TERC P	3,3	32,6	29,3	100,0	30,3
DES EN 4 PAR	18,5	92,4	73,9	100,0	90,7
RESTA Y REST	27,2	83,7	56,5	100,0	77,6
REP. ENTRE 5	46,7	76,1	29,3	100,0	55,1
FORTUNA	22,8	30,4	7,6	100,0	9,9
HACE DIEZ	12,0	46,7	34,8	100,0	39,5
EDAD DOBLE	13,0	58,7	45,7	100,0	52,5
PEDRO YJUAN	13,0	94,6	81,5	100,0	93,8
HERMANOS	26,1	98,9	72,8	100,0	98,5
TERRENO	31,5	80,4	48,9	100,0	71,4
HOJA DE ALUM	67,4	98,9	31,5	66,7	95,0
ALCANZAR	62,0	88,0	26,1	97,1	85,3
ENCONTRAR	72,8	94,6	21,7	48,0	75,0
LIEBRE Y GALG	43,5	95,7	52,2	82,7	100,0
AVIONETA	75,0	92,4	17,4	34,8	87,5
CAVAR	58,7	95,7	37,0	76,3	93,1
ROTATIVA	69,6	98,9	29,3	96,4	100,0
EJE VIARIO	69,6	92,4	22,8	28,6	87,5
HENO	57,6	88,0	30,4	82,1	75,0
RUBLOS	45,7	89,1	43,5	90,0	80,0
MECA	18,5	97,8	79,3	98,7	97,3
DINERO	16,3	97,8	81,5	100,0	97,4

Tabla V.- Valores de las variables dependientes: Dificultades, diferencia entre dificultades y pertinencia del proceso de resolución. Curso 2º

Curso 3º					
problema	dif.apre.pro.	dif.solución	diferencias	pertinencia	dif.proceso
MIT Y TERC P	4,0	25,3	21,3	98,6	21,1
DES EN 4 PAR	17,3	84,0	66,7	98,4	80,3
RESTA Y RESTA	41,3	82,7	41,3	100,0	70,5
FORTUNA	4,0	18,7	14,7	100,0	15,3
EDAD DOBLE	5,3	64,0	58,7	100,0	62,0
PEDRO YJUAN	33,3	88,0	54,7	98,0	81,6
HERMANOS	28,0	100,0	72,0	100,0	100,0
TERRENO	6,7	56,0	49,3	97,1	51,5
EDITORIAL	53,3	88,0	34,7	100,0	74,3
ALCANZAR	8,0	44,0	36,0	69,6	27,1
ENCONTRAR	14,7	46,7	32,0	53,1	14,7
LIEBRE Y GALG	50,7	94,7	44,0	64,9	100,0
AVIONETA	72,0	100,0	28,0	42,9	77,8
CAVAR	22,7	57,3	34,7	15,5	11,1
EJE VIARIO	56,0	100,0	44,0	30,3	40,0
ARTEL	52,0	93,3	41,3	25,0	66,7
HENO	50,7	80,0	29,3	62,2	52,2
RUBLOS	41,3	76,0	34,7	86,4	60,5
MECA	38,7	93,3	54,7	100,0	89,1
DINERO	28,0	89,3	61,3	100,0	85,2
COMERCIANTES	50,7	89,3	38,7	83,8	74,2

Tabla VI.- Valores de las variables dependientes: Dificultades, diferencia entre dificultades y pertinencia del proceso de resolución. Curso 3º

A4.2.3.- Perfiles de los problemas.

Curso 1º	perfiles			
problemas	UL	EA	IG	SEC
ENTEROS	100,0	100,0	91,5	45,1
FRACCIÓN	100,0	100,0	98,6	37,8
MIT Y TERC P	100,0	94,1	89,4	34,1
DES EN 4 PAR	100,0	91,5	53,5	1,4
REP. 1200	100,0	100,0	95,0	80,0
REP. ENTRE 5	100,0	100,0	96,0	34,0
BOLSAS D CA	100,0	100,0	97,0	71,2
LUIS Y SU PAD	100,0	100,0	72,7	20,5
HACE DIEZ	100,0	94,7	89,5	40,4
EDAD DOBLE	100,0	100,0	97,2	33,8
PEDRO YJUAN	100,0	98,1	87,0	16,7
PERIMETRO	100,0	84,9	81,1	49,1
TERRENO	100,0	96,6	83,1	15,3
HOJA DE ALUM	100,0	86,7	60,0	6,7
ALCANZAR	100,0	60,0	6,7	3,3
ENCONTRAR	100,0	100,0	60,0	44,0
LIEBRE Y GALG	100,0	92,6	40,7	0,0
CAVAR	100,0	62,1	55,2	34,5
ROTATIVA	100,0	86,7	73,3	0,0
CHOCO Y CAR	100,0	100,0	84,1	27,3
HENO	100,0	82,1	67,9	7,1
RUBLOS	100,0	100,0	91,7	22,2
MECA	100,0	97,7	84,1	6,8
DINERO	100,0	96,6	91,4	10,3

Tabla VII.- Perfiles de los problemas del curso 1º.

Curso 2º	perfiles			
problemas	UL	EA	IG	SEC
FRACCIÓN	100,0	100,0	100,0	46,4
MIT Y TERC P	100,0	100,0	69,7	59,4
DES EN 4 PAR	100,0	98,7	96,0	9,3
RESTA Y REST	100,0	100,0	83,6	22,4
REP. ENTRE 5	100,0	100,0	79,6	44,9
FORTUNA	100,0	100,0	98,6	90,1
HACE DIEZ	100,0	100,0	91,4	60,5
EDAD DOBLE	100,0	100,0	100,0	47,5
PEDRO YJUAN	100,0	93,8	83,8	6,3
HERMANOS	100,0	83,8	72,1	1,5
TERRENO	100,0	90,5	84,1	28,6
HOJA DE ALUM	100,0	80,0	45,0	5,0
ALCANZAR	100,0	82,4	52,9	14,7
ENCONTRAR	100,0	100,0	91,7	25,0
LIEBRE Y GALG	100,0	88,4	60,5	0,0
AVIONETA	100,0	100,0	25,0	12,5
CAVAR	100,0	65,5	48,3	6,9
ROTATIVA	100,0	70,4	40,7	0,0
EJE VIARIO	100,0	100,0	25,0	12,5
HENO	100,0	100,0	93,8	25,0
RUBLOS	100,0	95,6	91,1	20,0
MECA	100,0	100,0	91,9	2,7
DINERO	100,0	97,4	94,8	2,6

Tabla VIII.- Perfiles de los problemas del curso 2º.

Curso 3º	perfiles			
problemas	UL	EA	IG	SEC
MIT Y TERC P	100,0	100,0	100,0	78,9
DES EN 4 PAR	100,0	100,0	77,0	19,7
RESTA Y RESTA	100,0	100,0	90,9	29,5
FORTUNA	100,0	100,0	87,5	84,7
EDAD DOBLE	100,0	97,2	94,4	38,0
PEDRO YJUAN	100,0	98,0	93,9	18,4
HERMANOS	100,0	96,3	83,3	0,0
TERRENO	100,0	100,0	98,5	48,5
EDITORIAL	100,0	88,6	71,4	25,7
ALCANZAR	100,0	100,0	89,6	72,9
ENCONTRAR	100,0	100,0	91,2	85,3
LIEBRE Y GALG	100,0	100,0	79,2	0,0
AVIONETA	100,0	100,0	77,8	22,2
CAVAR	100,0	100,0	100,0	88,9
EJE VIARIO	100,0	100,0	60,0	60,0
ARTEL	100,0	100,0	77,8	33,3
HENO	100,0	100,0	91,3	47,8
RUBLOS	100,0	94,7	94,7	39,5
MECA	100,0	100,0	100,0	10,9
DINERO	100,0	98,1	98,1	14,8
COMERCIANTES	100,0	96,8	96,8	25,8

Tabla IX..- Perfiles de los problemas del curso 3º.

A4.3. Población bajo estudio.

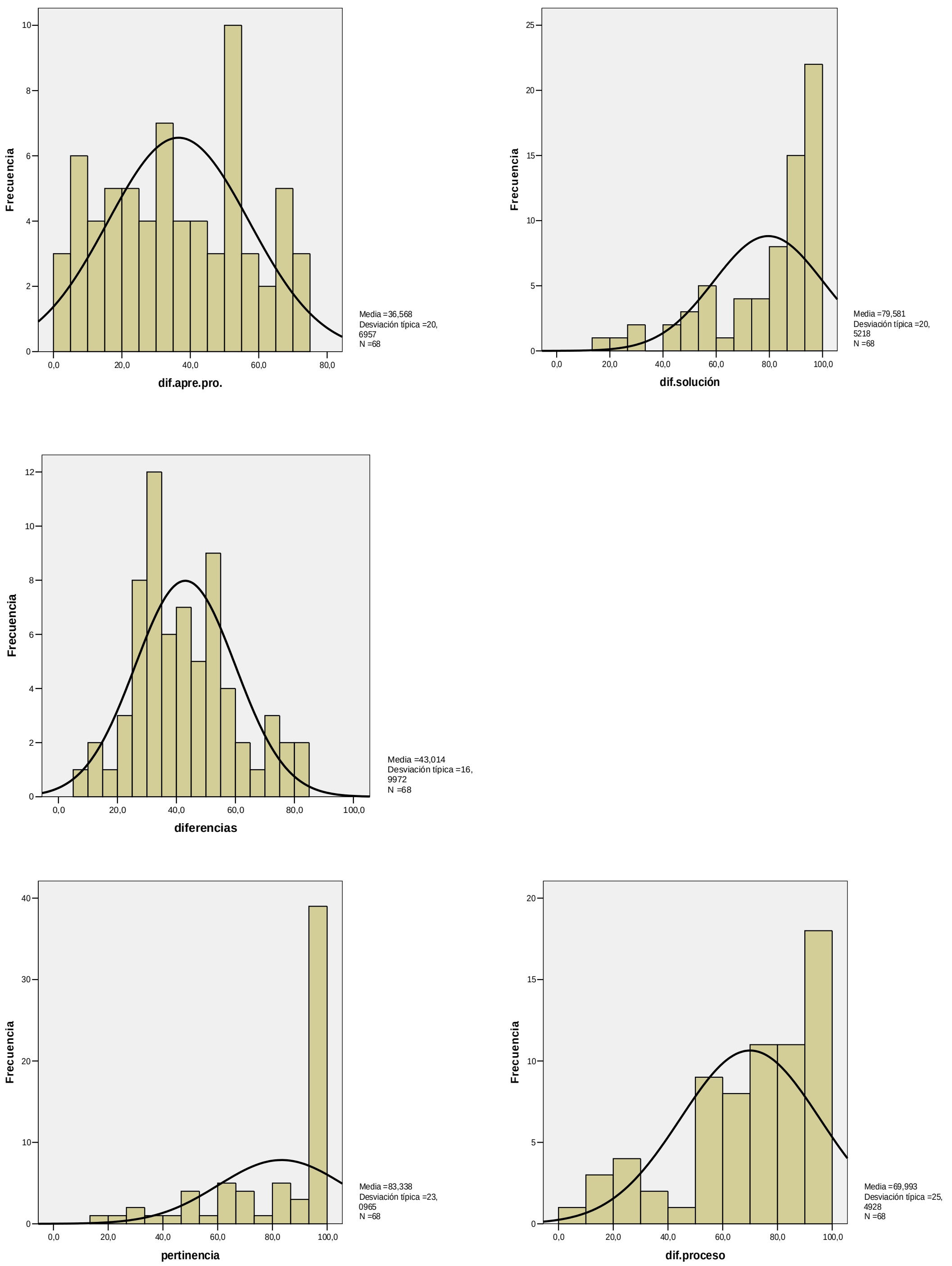
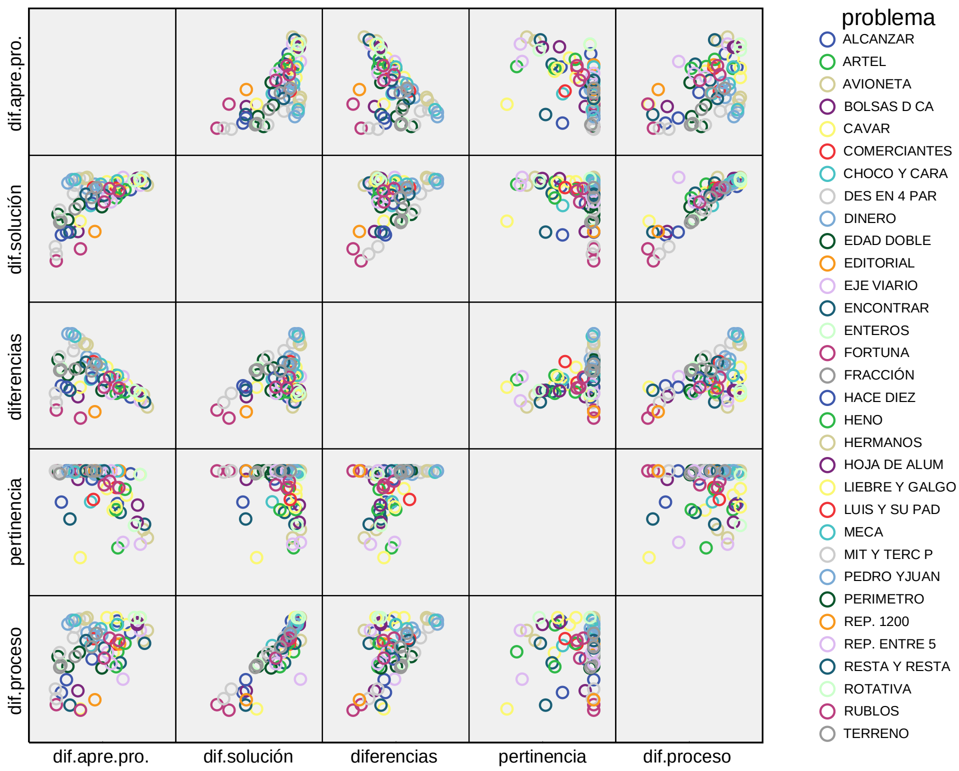


Tabla I.- Distribuciones de las variables dependientes.

Matriz de dispersiones.



Correlaciones

		dif.apre.pro.	dif.solución	diferencias	pertinencia	dif.proceso
dif.apre.pro.	Correlación de Pearson	1	,660(**)	-,421(**)	-,522(**)	,480(**)
	Sig. (bilateral)		,000	,000	,000	,000
	N	68	68	68	68	68
dif.solución	Correlación de Pearson	,660(**)	1	,404(**)	-,221	,892(**)
	Sig. (bilateral)	,000		,001	,070	,000
	N	68	68	68	68	68
diferencias	Correlación de Pearson	-,421(**)	,404(**)	1	,369(**)	,493(**)
	Sig. (bilateral)	,000	,001		,002	,000
	N	68	68	68	68	68
pertinencia	Correlación de Pearson	-,522(**)	-,221	,369(**)	1	,044
	Sig. (bilateral)	,000	,070	,002		,719
	N	68	68	68	68	68
dif.proceso	Correlación de Pearson	,480(**)	,892(**)	,493(**)	,044	1
	Sig. (bilateral)	,000	,000	,000	,719	
	N	68	68	68	68	68

** la correlación es significativa al nivel 0.01. (bilateral)

Tabla II.- Variables dependientes. Matrices de dispersión y correlación.

Efecto		Valor	F	Gl de la hipótesis	Gl del error	Significación
Intersección	Traza de Pillai	,999	2284,361(a)	3,000	10,000	,000
	Lambda de Wilks	,001	2284,361(a)	3,000	10,000	,000
	Traza de Hotelling	685,308	2284,361(a)	3,000	10,000	,000
	Raíz mayor de Roy	685,308	2284,361(a)	3,000	10,000	,000
subfamilia	Traza de Pillai	2,453	8,962	18,000	36,000	,000
	Lambda de Wilks	,002	12,368	18,000	28,770	,000
	Traza de Hotelling	27,822	13,396	18,000	26,000	,000
	Raíz mayor de Roy	17,634	35,268(b)	6,000	12,000	,000
curso	Traza de Pillai	,875	2,851	6,000	22,000	,033
	Lambda de Wilks	,199	4,133(a)	6,000	20,000	,007
	Traza de Hotelling	3,645	5,467	6,000	18,000	,002
	Raíz mayor de Roy	3,540	12,978(b)	3,000	11,000	,001
complejidad	Traza de Pillai	2,088	3,435	24,000	36,000	,000
	Lambda de Wilks	,009	4,938	24,000	29,604	,000
	Traza de Hotelling	18,317	6,615	24,000	26,000	,000
	Raíz mayor de Roy	14,478	21,716(b)	8,000	12,000	,000
subfamilia * curso	Traza de Pillai	2,027	2,273	33,000	36,000	,009
	Lambda de Wilks	,026	2,229	33,000	30,166	,014
	Traza de Hotelling	8,066	2,118	33,000	26,000	,026
	Raíz mayor de Roy	4,857	5,298(b)	11,000	12,000	,004
subfamilia * complejidad	Traza de Pillai	2,154	2,778	33,000	36,000	,002
	Lambda de Wilks	,012	3,182	33,000	30,166	,001
	Traza de Hotelling	12,996	3,413	33,000	26,000	,001
	Raíz mayor de Roy	8,561	9,339(b)	11,000	12,000	,000
curso * complejidad	Traza de Pillai	1,604	1,148	36,000	36,000	,340
	Lambda de Wilks	,057	1,377	36,000	30,274	,186
	Traza de Hotelling	6,400	1,541	36,000	26,000	,127
	Raíz mayor de Roy	4,560	4,560(b)	12,000	12,000	,007
subfamilia * curso * complejidad	Traza de Pillai	1,360	2,487	12,000	36,000	,017
	Lambda de Wilks	,103	3,043	12,000	26,749	,008
	Traza de Hotelling	4,603	3,324	12,000	26,000	,005
	Raíz mayor de Roy	3,570	10,710(b)	4,000	12,000	,001

a Estadístico exacto
b El estadístico es un límite superior para la F el cual ofrece un límite inferior para el nivel de significación.
c Diseño: Intercept+subfamilia+curso+complejidad+subfamilia * curso+subfamilia * complejidad+curso * complejidad+subfamilia * curso * complejidad

Tabla III.- Contrastes multivariados. Variables sujeto (curso) y tarea (Subfamilia, complejidad)

Fuente	Variable dependiente	Suma de cuadrados tipo III	gl	Media cuadrática	F	Significación
Modelo corregido	dif.apre.pro.	27946,785(a)	55	508,123	8,127	,000
	dif.solución	27711,552(b)	55	503,846	11,968	,000
	dif.proceso	41903,166(c)	55	761,876	5,578	,001
Intersección	dif.apre.pro.	61858,292	1	61858,292	989,414	,000
	dif.solución	271832,344	1	271832,344	6456,685	,000
	dif.proceso	212055,363	1	212055,363	1552,655	,000
subfamilia	dif.apre.pro.	12467,192	6	2077,865	33,235	,000
	dif.solución	6619,573	6	1103,262	26,205	,000
	dif.proceso	8517,086	6	1419,514	10,394	,000
curso	dif.apre.pro.	1303,902	2	651,951	10,428	,002
	dif.solución	1551,069	2	775,535	18,421	,000
	dif.proceso	3323,665	2	1661,832	12,168	,001
complejidad	dif.apre.pro.	3240,752	8	405,094	6,479	,002
	dif.solución	6594,633	8	824,329	19,580	,000
	dif.proceso	10393,794	8	1299,224	9,513	,000
subfamilia * curso	dif.apre.pro.	1340,028	11	121,821	1,949	,134
	dif.solución	1263,219	11	114,838	2,728	,049
	dif.proceso	2587,608	11	235,237	1,722	,182
subfamilia * complejidad	dif.apre.pro.	3467,798	11	315,254	5,042	,005
	dif.solución	4234,019	11	384,911	9,143	,000
	dif.proceso	5686,159	11	516,924	3,785	,015
curso * complejidad	dif.apre.pro.	1393,555	12	116,130	1,857	,149
	dif.solución	2064,170	12	172,014	4,086	,011
	dif.proceso	2244,399	12	187,033	1,369	,297
subfamilia * curso * complejidad	dif.apre.pro.	946,115	4	236,529	3,783	,033
	dif.solución	560,112	4	140,028	3,326	,047
	dif.proceso	740,294	4	185,073	1,355	,306
Error	dif.apre.pro.	750,242	12	62,520		
	dif.solución	505,211	12	42,101		
	dif.proceso	1638,912	12	136,576		
Total	dif.apre.pro.	119625,981	68			
	dif.solución	458873,334	68			
	dif.proceso	376671,313	68			
Total corregida	dif.apre.pro.	28697,026	67			
	dif.solución	28216,763	67			
	dif.proceso	43542,078	67			

Tabla IV.- Dificultades. Contrastes del efecto de las variables de la tarea y del sujeto.

Pruebas de los efectos inter-sujetos

Variable dependiente: diferencias

Fuente	Suma de cuadrados tipo III	gl	Media cuadrática	F	Significación
Modelo corregido	18878,110(a)	55	343,238	8,608	,000
Intersección	74344,655	1	74344,655	1864,409	,000
subfamilia	4708,988	6	784,831	19,682	,000
curso	10,789	2	5,394	,135	,875
complejidad	2971,711	8	371,464	9,316	,000
subfamilia * curso	987,254	11	89,750	2,251	,090
subfamilia * complejidad	1603,361	11	145,760	3,655	,018
curso * complejidad	873,792	12	72,816	1,826	,155
subfamilia * curso * complejidad	1147,639	4	286,910	7,195	,003
Error	478,509	12	39,876		
Total	145168,715	68			
Total corregida	19356,619	67			

a R cuadrado = ,975 (R cuadrado corregida = ,862)

Tabla V.- Efectos sobre la diferencia entre dificultades de las variables de la tarea y del sujeto.

Variable dependiente: pertinencia

Fuente	Suma de cuadrados tipo III	gl	Media cuadrática	F	Significación
Modelo corregido	33878,238(a)	55	615,968	3,968	,006
Intersección	315296,113	1	315296,113	2031,246	,000
subfamilia	13628,116	6	2271,353	14,633	,000
complejidad	2520,554	8	315,069	2,030	,130
curso	659,379	2	329,690	2,124	,162
subfamilia * complejidad	2827,596	11	257,054	1,656	,199
subfamilia * curso	1000,439	11	90,949	,586	,808
complejidad * curso	1977,796	12	164,816	1,062	,459
subfamilia * complejidad * curso	991,069	4	247,767	1,596	,238
Error	1862,677	12	155,223		
Total	508011,630	68			
Total corregida	35740,915	67			

a R cuadrado = ,948 (R cuadrado corregida = ,709)

Tabla VI.- Efectos sobre la pertinencia de las variables de la tarea y del sujeto.

Variable dependiente	curso	Media	Error típ.	Intervalo de confianza al 95%.	
dif.apre.pro.	1	38,500(a)	1,707	34,780	42,220
	2	38,696(a)	1,700	34,991	42,401
	3	32,510(a)	1,801	28,585	36,435
dif.solución	1	81,164(a)	1,401	78,112	84,217
	2	79,783(a)	1,395	76,742	82,823
	3	73,843(a)	1,478	70,622	77,064
diferencias	1	42,664(a)	1,364	39,693	45,635
	2	41,087(a)	1,358	38,128	44,046
	3	41,333(a)	1,439	38,199	44,468
pertinencia	1	86,119(a)	2,690	80,257	91,981
	2	86,412(a)	2,679	80,574	92,250
	3	76,021(a)	2,838	69,837	82,206
dif.proceso	1	72,101(a)	2,524	66,603	77,599
	2	73,616(a)	2,513	68,140	79,092
	3	58,415(a)	2,662	52,614	64,216

a Basada en la media marginal poblacional modificada.

Tabla VII.- Medias estimadas de las variables dependientes. Cursos.

Variable dependiente	complejidad	Media	Error típ.	Intervalo de confianza al 95%.	
dif.apre.pro.	3	36,300(a)	1,955	32,040	40,560
	4	39,853(a)	2,500	34,405	45,301
	5	38,688(a)	2,063	34,194	43,183
	6	28,372(a)	3,536	20,668	36,077
	7	36,395(a)	3,126	29,586	43,205
	8	13,413(a)	5,591	1,231	25,595
	14	21,912(a)	5,591	9,730	34,094
	24	67,200(a)	5,591	55,018	79,382
	25	38,443(a)	3,536	30,738	46,147
dif.solución	3	73,718(a)	1,604	70,222	77,214
	4	80,760(a)	2,052	76,290	85,231
	5	78,264(a)	1,693	74,576	81,952
	6	78,581(a)	2,902	72,259	84,904
	7	94,387(a)	2,565	88,799	99,975
	8	24,551(a)	4,588	14,554	34,547
	14	60,732(a)	4,588	50,736	70,729
	24	97,808(a)	4,588	87,812	107,805
	25	94,621(a)	2,902	88,299	100,944
diferencias	3	37,418(a)	1,561	34,016	40,820
	4	40,908(a)	1,997	36,557	45,259
	5	39,575(a)	1,647	35,986	43,164
	6	50,209(a)	2,824	44,056	56,362
	7	57,991(a)	2,496	52,553	63,430
	8	11,138(a)	4,465	1,409	20,866
	14	38,820(a)	4,465	29,091	48,549
	24	30,608(a)	4,465	20,879	40,337
	25	56,179(a)	2,824	50,025	62,332
pertinencia	3	77,232(a)	3,081	70,520	83,945
	4	75,623(a)	3,940	67,039	84,207
	5	86,654(a)	3,250	79,572	93,735
	6	99,429(a)	5,572	87,289	111,568
	7	80,671(a)	4,925	69,941	91,401
	8	100,000(a)	8,810	80,805	119,195
	14	95,968(a)	8,810	76,773	115,163
	24	71,652(a)	8,810	52,457	90,847
	25	83,011(a)	5,572	70,871	95,151
dif.proceso	3	58,909(a)	2,890	52,613	65,205
	4	70,247(a)	3,696	62,195	78,299
	5	68,191(a)	3,049	61,549	74,833
	6	71,142(a)	5,226	59,755	82,530
	7	85,648(a)	4,620	75,583	95,713
	8	12,568(a)	8,264	-5,436	30,573
	14	49,578(a)	8,264	31,573	67,583
	24	100,000(a)	8,264	81,995	118,005
	25	91,584(a)	5,226	80,197	102,971

Tabla VIII.- Medias estimadas de las variables dependientes. Complejidad.

Variable dependiente	subfamilia	Media	Error típ.	Intervalo de confianza al 95%.	
dif.apre.pro.	1	16,095(a)	2,437	10,785	21,405
	2	28,744(a)	3,228	21,711	35,778
	3	22,993(a)	2,485	17,579	28,407
	4	42,953(a)	2,989	36,442	49,465
	5	55,231(a)	2,520	49,741	60,721
	6	55,210(a)	2,796	49,119	61,301
	7	41,691(a)	2,283	36,718	46,665
dif.solución	1	68,962(a)	2,000	64,605	73,320
	2	50,169(a)	2,649	44,397	55,940
	3	76,527(a)	2,039	72,084	80,970
	4	83,398(a)	2,452	78,055	88,742
	5	87,995(a)	2,068	83,490	92,501
	6	89,868(a)	2,294	84,869	94,866
	7	88,380(a)	1,873	84,298	92,461
diferencias	1	52,868(a)	1,946	48,627	57,108
	2	21,424(a)	2,578	15,807	27,041
	3	53,534(a)	1,985	49,210	57,858
	4	40,445(a)	2,387	35,245	45,645
	5	32,764(a)	2,012	28,380	37,149
	6	34,658(a)	2,233	29,793	39,522
	7	46,688(a)	1,823	42,716	50,660
pertinencia	1	99,463(a)	3,840	91,096	107,830
	2	98,284(a)	5,086	87,202	109,366
	3	95,694(a)	3,915	87,163	104,225
	4	87,168(a)	4,709	76,908	97,428
	5	64,924(a)	3,970	56,273	73,575
	6	47,589(a)	4,405	37,992	57,187
	7	87,625(a)	3,597	79,789	95,461
dif.proceso	1	64,709(a)	3,602	56,861	72,557
	2	32,504(a)	4,771	22,109	42,900
	3	69,962(a)	3,673	61,960	77,964
	4	74,458(a)	4,417	64,834	84,082
	5	80,332(a)	3,724	72,217	88,446
	6	70,487(a)	4,132	61,485	79,490
	7	79,470(a)	3,374	72,119	86,820

Tabla IX.- Medias estimadas de las variables dependientes. Subfamilias.
1.-ABACO, 2.- HERENCIAS-REPARTOS, 3.-EDADES, 4.-GEOMETRIA
5.-MOVILES, 6.- TRABAJO, 7.-OTROS.

Comparaciones múltiples

DMS

Variable dependiente	(I) subfamilia	(J) subfamilia	Diferencia entre medias (I-J)	Error típ.	Significación
dif.apre.pro.	1	2	-12,914	8,1530	,118
		3	-7,549	6,8499	,275
		4	-27,123(*)	7,7671	,001
		5	-36,290(*)	6,8499	,000
		6	-39,380(*)	7,4645	,000
		7	-24,681(*)	6,4726	,000
	2	1	12,914	8,1530	,118
		3	5,365	8,1530	,513
		4	-14,209	8,9374	,117
		5	-23,376(*)	8,1530	,006
		6	-26,466(*)	8,6758	,003
		7	-11,767	7,8387	,138
	3	1	7,549	6,8499	,275
		2	-5,365	8,1530	,513
		4	-19,574(*)	7,7671	,014
		5	-28,741(*)	6,8499	,000
		6	-31,831(*)	7,4645	,000
		7	-17,132(*)	6,4726	,010
	4	1	27,123(*)	7,7671	,001
		2	14,209	8,9374	,117
		3	19,574(*)	7,7671	,014
		5	-9,167	7,7671	,242
		6	-12,257	8,3141	,146
		7	2,442	7,4364	,744
	5	1	36,290(*)	6,8499	,000
		2	23,376(*)	8,1530	,006
		3	28,741(*)	6,8499	,000
		4	9,167	7,7671	,242
		6	-3,090	7,4645	,680
		7	11,609	6,4726	,078
	6	1	39,380(*)	7,4645	,000
		2	26,466(*)	8,6758	,003
		3	31,831(*)	7,4645	,000
		4	12,257	8,3141	,146
		5	3,090	7,4645	,680
		7	14,699(*)	7,1198	,043
	7	1	24,681(*)	6,4726	,000
		2	11,767	7,8387	,138
		3	17,132(*)	6,4726	,010
		4	-2,442	7,4364	,744
		5	-11,609	6,4726	,078
		6	-14,699(*)	7,1198	,043
dif.solución	1	2	18,368(*)	9,0130	,046
		3	-11,416	7,5725	,137
		4	-14,861	8,5864	,089
		5	-15,873(*)	7,5725	,040

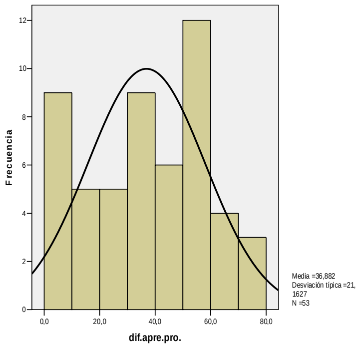
		6	-21,331(*)	8,2519	,012
		7	-20,454(*)	7,1553	,006
	2	1	-18,368(*)	9,0130	,046
		3	-29,784(*)	9,0130	,002
		4	-33,229(*)	9,8802	,001
		5	-34,242(*)	9,0130	,000
		6	-39,699(*)	9,5909	,000
		7	-38,823(*)	8,6655	,000
	3	1	11,416	7,5725	,137
		2	29,784(*)	9,0130	,002
		4	-3,445	8,5864	,690
		5	-4,457	7,5725	,558
		6	-9,915	8,2519	,234
		7	-9,038	7,1553	,211
	4	1	14,861	8,5864	,089
		2	33,229(*)	9,8802	,001
		3	3,445	8,5864	,690
		5	-1,012	8,5864	,907
		6	-6,470	9,1911	,484
		7	-5,593	8,2208	,499
	5	1	15,873(*)	7,5725	,040
		2	34,242(*)	9,0130	,000
		3	4,457	7,5725	,558
		4	1,012	8,5864	,907
		6	-5,457	8,2519	,511
		7	-4,581	7,1553	,524
	6	1	21,331(*)	8,2519	,012
		2	39,699(*)	9,5909	,000
		3	9,915	8,2519	,234
		4	6,470	9,1911	,484
		5	5,457	8,2519	,511
		7	,876	7,8708	,912
	7	1	20,454(*)	7,1553	,006
		2	38,823(*)	8,6655	,000
		3	9,038	7,1553	,211
		4	5,593	8,2208	,499
		5	4,581	7,1553	,524
		6	-,876	7,8708	,912
diferencias	1	2	31,282(*)	6,8818	,000
		3	-3,867	5,7819	,506
		4	12,262	6,5560	,066
		5	20,417(*)	5,7819	,001
		6	18,049(*)	6,3007	,006
		7	4,227	5,4634	,442
	2	1	-31,282(*)	6,8818	,000
		3	-35,150(*)	6,8818	,000
		4	-19,021(*)	7,5439	,014
		5	-10,866	6,8818	,120
		6	-13,233	7,3231	,076
		7	-27,056(*)	6,6165	,000
	3	1	3,867	5,7819	,506
		2	35,150(*)	6,8818	,000
		4	16,129(*)	6,5560	,017

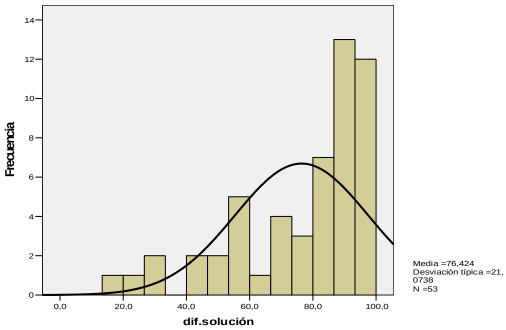
	5	24,284(*)	5,7819	,000
	6	21,916(*)	6,3007	,001
	7	8,094	5,4634	,144
4	1	-12,262	6,5560	,066
	2	19,021(*)	7,5439	,014
	3	-16,129(*)	6,5560	,017
	5	8,155	6,5560	,218
	6	5,787	7,0178	,413
	7	-8,035	6,2769	,205
5	1	-20,417(*)	5,7819	,001
	2	10,866	6,8818	,120
	3	-24,284(*)	5,7819	,000
	4	-8,155	6,5560	,218
	6	-2,367	6,3007	,708
	7	-16,190(*)	5,4634	,004
6	1	-18,049(*)	6,3007	,006
	2	13,233	7,3231	,076
	3	-21,916(*)	6,3007	,001
	4	-5,787	7,0178	,413
	5	2,367	6,3007	,708
	7	-13,822(*)	6,0097	,025
7	1	-4,227	5,4634	,442
	2	27,056(*)	6,6165	,000
	3	-8,094	5,4634	,144
	4	8,035	6,2769	,205
	5	16,190(*)	5,4634	,004
	6	13,822(*)	6,0097	,025

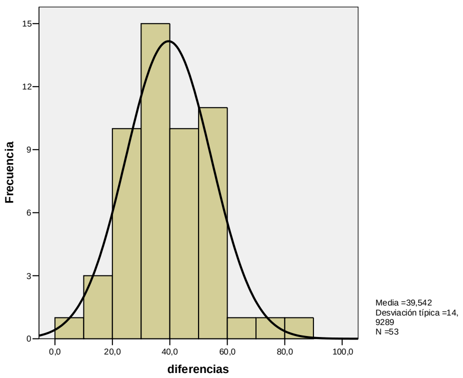
Basado en las medias observadas.
* La diferencia de medias es significativa al nivel ,05.

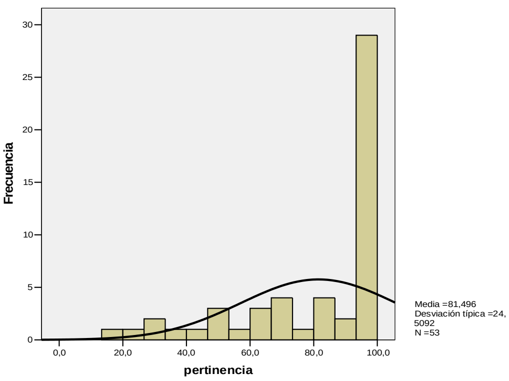
Tabla X.- Dificultad apreciada, dificultad de la solución diferencia entre dificultades. Comparación de Medias de las subfamilias. (1.-ABACO , 2.- HER-REPAT, 3.-EDADES, 4.-GEOMETRIA,5.-MOVILES, 6.-TRABAJO, 7.-OTROS)

A4.4.- Población reducida.









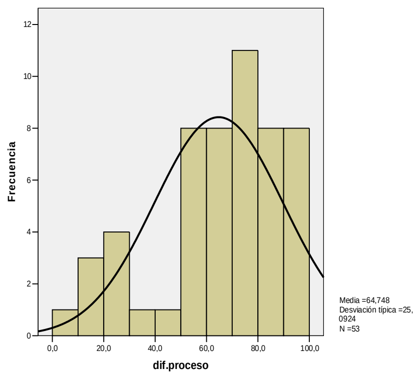
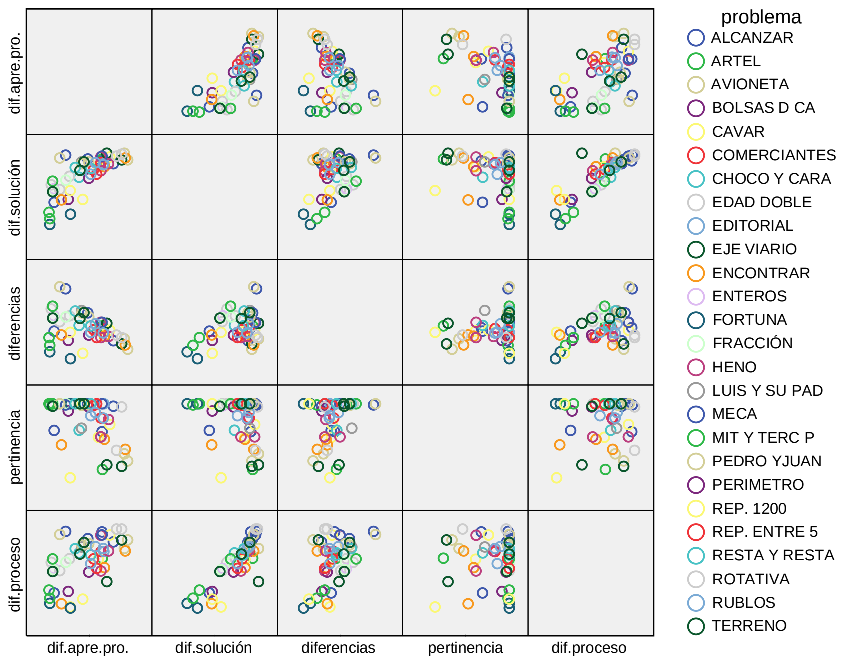


Tabla I - Histogramas de las variables dependientes.



Correlaciones

		dif.apre.pro.	dif.solución	diferencias	pertinencia	dif.proceso
dif.apre.pro.	Correlación de Pearson	1	,750(**)	-,359(**)	-,489(**)	,559(**)
	Sig. (bilateral)		,000	,008	,000	,000
	N	53	53	53	53	53
dif.solución	Correlación de Pearson	,750(**)	1	,348(*)	-,284(*)	,873(**)
	Sig. (bilateral)	,000		,011	,040	,000
	N	53	53	53	53	53
diferencias	Correlación de Pearson	-,359(**)	,348(*)	1	,294(*)	,440(**)
	Sig. (bilateral)	,008	,011		,033	,001
	N	53	53	53	53	53
pertinencia	Correlación de Pearson	-,489(**)	-,284(*)	,294(*)	1	,009
	Sig. (bilateral)	,000	,040	,033		,949
	N	53	53	53	53	53
dif.proceso	Correlación de Pearson	,559(**)	,873(**)	,440(**)	,009	1
	Sig. (bilateral)	,000	,000	,001	,949	
	N	53	53	53	53	53

** La correlación es significativa al nivel 0,01 (bilateral).
* La correlación es significante al nivel 0,05 (bilateral).

Tabla II.- Matrices de dispersiones y correlaciones.

Contrastes multivariados(c)

Efecto		Valor	F	Gl de la hipótesis	Gl del error	Significación
Intersección	Traza de Pillai	,999	2097,675(a)	3,000	7,000	,000
	Lambda de Wilks	,001	2097,675(a)	3,000	7,000	,000
	Traza de Hotelling	899,004	2097,675(a)	3,000	7,000	,000
	Raíz mayor de Roy	899,004	2097,675(a)	3,000	7,000	,000
subfamilia	Traza de Pillai	2,188	4,040	18,000	27,000	,001
	Lambda de Wilks	,002	9,585	18,000	20,284	,000
	Traza de Hotelling	40,803	12,845	18,000	17,000	,000
	Raíz mayor de Roy	26,113	39,169(b)	6,000	9,000	,000
curso	Traza de Pillai	,817	1,842	6,000	16,000	,154
	Lambda de Wilks	,226	2,570(a)	6,000	14,000	,068
	Traza de Hotelling	3,225	3,225	6,000	12,000	,040
	Raíz mayor de Roy	3,164	8,437(b)	3,000	8,000	,007
complejidad	Traza de Pillai	1,901	3,112	15,000	27,000	,005
	Lambda de Wilks	,013	5,056	15,000	19,725	,001
	Traza de Hotelling	17,092	6,457	15,000	17,000	,000
	Raíz mayor de Roy	13,584	24,451(b)	5,000	9,000	,000
subfamilia * curso	Traza de Pillai	2,162	2,320	30,000	27,000	,015
	Lambda de Wilks	,010	2,713	30,000	21,222	,010
	Traza de Hotelling	17,134	3,237	30,000	17,000	,007
	Raíz mayor de Roy	13,827	12,444(b)	10,000	9,000	,000
subfamilia * complejidad	Traza de Pillai	1,745	1,564	24,000	27,000	,130
	Lambda de Wilks	,023	2,348	24,000	20,903	,026
	Traza de Hotelling	12,897	3,045	24,000	17,000	,011
	Raíz mayor de Roy	10,338	11,630(b)	8,000	9,000	,001
curso * complejidad	Traza de Pillai	1,608	1,486	21,000	27,000	,165
	Lambda de Wilks	,028	2,447	21,000	20,650	,024
	Traza de Hotelling	12,898	3,480	21,000	17,000	,006
	Raíz mayor de Roy	10,934	14,058(b)	7,000	9,000	,000
subfamilia * curso * complejidad	Traza de Pillai	,707	1,460	6,000	16,000	,254
	Lambda de Wilks	,397	1,370(a)	6,000	14,000	,292
	Traza de Hotelling	1,256	1,256	6,000	12,000	,346
	Raíz mayor de Roy	,991	2,643(b)	3,000	8,000	,121

a Estadístico exacto
b El estadístico es un límite superior para la F el cual ofrece un límite inferior para el nivel de significación.
c Diseño: Intercept+subfamilia+curso+complejidad+subfamilia * curso+subfamilia * complejidad+curso * complejidad+subfamilia * curso * complejidad

Tabla III.-Contrastes multivariados. Variables sujeto (curso) y tarea (Subfamilia, complejidad)

Pruebas de los efectos inter-sujetos

Fuente	Variable dependiente	Suma de cuadrados tipo III	gl	Media cuadrática	F	Significación
Modelo corregido	dif.solución	22588,892(a)	43	525,323	9,369	,001
	dif.apre.pro.	22715,817(b)	43	528,275	8,298	,001
	dif.proceso	30623,276(c)	43	712,169	3,027	,040
Intersección	dif.solución	201089,770	1	201089,770	3586,261	,000
	dif.apre.pro.	43065,553	1	43065,553	676,441	,000
	dif.proceso	147382,768	1	147382,768	626,432	,000
subfamilia	dif.solución	6727,736	6	1121,289	19,997	,000
	dif.apre.pro.	10700,834	6	1783,472	28,013	,000
	dif.proceso	7225,275	6	1204,212	5,118	,015
curso	dif.solución	1564,723	2	782,362	13,953	,002
	dif.apre.pro.	1188,482	2	594,241	9,334	,006
	dif.proceso	3854,651	2	1927,326	8,192	,009
complejidad	dif.solución	4059,351	5	811,870	14,479	,000
	dif.apre.pro.	2223,989	5	444,798	6,987	,006
	dif.proceso	6103,063	5	1220,613	5,188	,016
subfamilia * curso	dif.solución	1294,416	10	129,442	2,308	,112
	dif.apre.pro.	1408,935	10	140,893	2,213	,124
	dif.proceso	2781,324	10	278,132	1,182	,406
subfamilia * complejidad	dif.solución	3663,932	8	457,992	8,168	,002
	dif.apre.pro.	2390,217	8	298,777	4,693	,016
	dif.proceso	3357,672	8	419,709	1,784	,203
curso * complejidad	dif.solución	1527,974	7	218,282	3,893	,031
	dif.apre.pro.	1133,551	7	161,936	2,544	,096
	dif.proceso	1212,951	7	173,279	,736	,649
subfamilia * curso * complejidad	dif.solución	296,213	2	148,106	2,641	,125
	dif.apre.pro.	535,547	2	267,774	4,206	,051
	dif.proceso	330,592	2	165,296	,703	,521
Error	dif.solución	504,650	9	56,072		
	dif.apre.pro.	572,984	9	63,665		
	dif.proceso	2117,459	9	235,273		
Total	dif.solución	332644,510	53			
	dif.apre.pro.	95382,296	53			
	dif.proceso	254933,265	53			
Total corregida	dif.solución	23093,543	52			
	dif.apre.pro.	23288,801	52			
	dif.proceso	32740,736	52			

a R cuadrado = ,978 (R cuadrado corregida = ,874)
b R cuadrado = ,975 (R cuadrado corregida = ,858)
c R cuadrado = ,935 (R cuadrado corregida = ,626)

Tabla IV.- Dificultades. Contraste del efecto de las variables de la tarea y del producto.

Pruebas de los efectos inter-sujetos

Variable dependiente: diferencias

Fuente	Suma de cuadrados tipo III	gl	Media cuadrática	F	Significación
Modelo corregido	11394,493(a)	43	264,988	12,244	,000
Intersección	58036,628	1	58036,628	2681,633	,000
subfamilia	3981,090	6	663,515	30,658	,000
curso	26,180	2	13,090	,605	,567
complejidad	1458,725	5	291,745	13,480	,001
subfamilia * curso	1498,910	10	149,891	6,926	,004
subfamilia * complejidad	643,630	8	80,454	3,717	,034
curso * complejidad	1260,081	7	180,012	8,318	,003
subfamilia * curso * complejidad	93,855	2	46,928	2,168	,170
Error	194,780	9	21,642		
Total	94458,829	53			
Total corregida	11589,273	52			

a R cuadrado = ,983 (R cuadrado corregida = ,903)

Tabla V.- Efecto sobre la diferencia de dificultades de las variables de tarea la tarea y del sujeto

Pruebas de los efectos inter-sujetos

Variable dependiente: pertinencia

Fuente		Suma de cuadrados tipo III	gl	Media cuadrática	F	Significación
Intersección	Hipótesis	254116,442	1	254116,442	2116,202	,000
	Error	321,842	2,680	120,081(a)		
subfamilia	Hipótesis	13791,199	6	2298,533	20,857	,030
	Error	260,822	2,367	110,207(b)		
curso	Hipótesis	360,185	2	180,092	5,603	,335
	Error	26,127	,813	32,144(c)		
complejidad	Hipótesis	586,565	5	117,313	1,198	,555
	Error	137,405	1,404	97,887(d)		
subfamilia * curso	Hipótesis	1665,734	10	166,573	3,239	,387
	Error	56,750	1,104	51,421(e)		
subfamilia * complejidad	Hipótesis	1003,522	8	125,440	1,287	,413
	Error	457,945	4,699	97,461(f)		
curso * complejidad	Hipótesis	359,575	7	51,368	,595	,743
	Error	314,055	3,638	86,327(g)		
subfamilia * curso * complejidad	Hipótesis	132,632	2	66,316	,140	,871
	Error	4266,560	9	474,062(h)		

Tabla VI.- Efectos sobre la pertinencia de las variables de tarea la tarea y del sujeto.

ANOVA

		Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
dif.apre.pro.	Inter-grupos	577,481	2	288,741	,636	,534
	Intra-grupos	22711,319	50	454,226		
	Total	23288,801	52			
dif.solución	Inter-grupos	811,483	2	405,741	,910	,409
	Intra-grupos	22282,060	50	445,641		
	Total	23093,543	52			
diferencias	Inter-grupos	132,810	2	66,405	,290	,750
	Intra-grupos	11456,463	50	229,129		
	Total	11589,273	52			

Tabla VII.- Efecto de la variable del sujeto curso sobre las variables dependientes dificultad apreciada y de la solución del problema y diferencia entre dificultades

Comparaciones múltiples

DMS

Variable dependiente	(I) subfamilia	(J) subfamilia	Diferencia entre medias (I-J)	Error típ.	Significación
dif.apre.pro.	1	2	-14,201	8,8922	,117
		3	-8,208	8,5216	,340
		4	-18,706	9,3866	,052
		5	-36,700(*)	8,2326	,000
		6	-40,667(*)	8,2326	,000
		7	-29,892(*)	7,6507	,000
	2	1	14,201	8,8922	,117
		3	5,993	9,1604	,516
		4	-4,505	9,9702	,654
		5	-22,499(*)	8,8922	,015
		6	-26,466(*)	8,8922	,005
		7	-15,691	8,3564	,067
	3	1	8,208	8,5216	,340
		2	-5,993	9,1604	,516
		4	-10,498	9,6410	,282
		5	-28,492(*)	8,5216	,002
		6	-32,459(*)	8,5216	,000
		7	-21,684(*)	7,9608	,009
	4	1	18,706	9,3866	,052
		2	4,505	9,9702	,654
		3	10,498	9,6410	,282
		5	-17,994	9,3866	,061
		6	-21,961(*)	9,3866	,024
		7	-11,186	8,8807	,214
	5	1	36,700(*)	8,2326	,000
		2	22,499(*)	8,8922	,015
		3	28,492(*)	8,5216	,002
		4	17,994	9,3866	,061

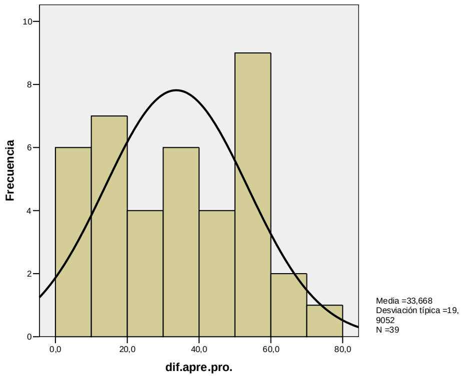
		6	-3,967	8,2326	,632
		7	6,808	7,6507	,378
	6	1	40,667(*)	8,2326	,000
		2	26,466(*)	8,8922	,005
		3	32,459(*)	8,5216	,000
		4	21,961(*)	9,3866	,024
		5	3,967	8,2326	,632
		7	10,775	7,6507	,166
	7	1	29,892(*)	7,6507	,000
		2	15,691	8,3564	,067
		3	21,684(*)	7,9608	,009
		4	11,186	8,8807	,214
		5	-6,808	7,6507	,378
		6	-10,775	7,6507	,166
dif.solución	1	2	9,658	9,3188	,305
		3	-20,045(*)	8,9304	,030
		4	-17,368	9,8369	,084
		5	-20,359(*)	8,6276	,023
		6	-30,041(*)	8,6276	,001
		7	-27,929(*)	8,0178	,001
	2	1	-9,658	9,3188	,305
		3	-29,704(*)	9,5999	,003
		4	-27,026(*)	10,4485	,013
		5	-30,018(*)	9,3188	,002
		6	-39,699(*)	9,3188	,000
		7	-37,587(*)	8,7573	,000
	3	1	20,045(*)	8,9304	,030
		2	29,704(*)	9,5999	,003
		4	2,678	10,1036	,792
		5	-,314	8,9304	,972
		6	-9,995	8,9304	,269
		7	-7,883	8,3427	,350
	4	1	17,368	9,8369	,084
		2	27,026(*)	10,4485	,013
		3	-2,678	10,1036	,792
		5	-2,992	9,8369	,762
		6	-12,673	9,8369	,204
		7	-10,561	9,3067	,262
	5	1	20,359(*)	8,6276	,023
		2	30,018(*)	9,3188	,002
		3	,314	8,9304	,972
		4	2,992	9,8369	,762
		6	-9,681	8,6276	,268
		7	-7,570	8,0178	,350
	6	1	30,041(*)	8,6276	,001
		2	39,699(*)	9,3188	,000
		3	9,995	8,9304	,269
		4	12,673	9,8369	,204
		5	9,681	8,6276	,268
		7	2,112	8,0178	,793
	7	1	27,929(*)	8,0178	,001
		2	37,587(*)	8,7573	,000

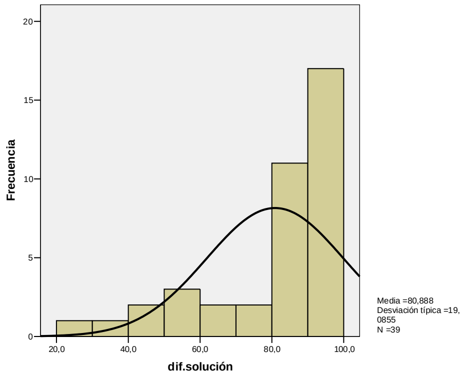
		3	7,883	8,3427	,350
		4	10,561	9,3067	,262
		5	7,570	8,0178	,350
		6	-2,112	8,0178	,793
diferencias	1	2	23,860(*)	6,0900	,000
		3	-11,837(*)	5,8361	,048
		4	1,339	6,4286	,836
		5	16,341(*)	5,6382	,006
		6	10,626	5,6382	,066
		7	1,963	5,2397	,710
	2	1	-23,860(*)	6,0900	,000
		3	-35,697(*)	6,2737	,000
		4	-22,521(*)	6,8283	,002
		5	-7,519	6,0900	,223
		6	-13,233(*)	6,0900	,035
		7	-21,896(*)	5,7230	,000
	3	1	11,837(*)	5,8361	,048
		2	35,697(*)	6,2737	,000
		4	13,176	6,6028	,052
		5	28,178(*)	5,8361	,000
		6	22,463(*)	5,8361	,000
		7	13,800(*)	5,4521	,015
	4	1	-1,339	6,4286	,836
		2	22,521(*)	6,8283	,002
		3	-13,176	6,6028	,052
		5	15,002(*)	6,4286	,024
		6	9,287	6,4286	,155
		7	,624	6,0821	,919
	5	1	-16,341(*)	5,6382	,006
		2	7,519	6,0900	,223
		3	-28,178(*)	5,8361	,000
		4	-15,002(*)	6,4286	,024
		6	-5,714	5,6382	,316
		7	-14,377(*)	5,2397	,009
	6	1	-10,626	5,6382	,066
		2	13,233(*)	6,0900	,035
		3	-22,463(*)	5,8361	,000
		4	-9,287	6,4286	,155
		5	5,714	5,6382	,316
		7	-8,663	5,2397	,105
	7	1	-1,963	5,2397	,710
		2	21,896(*)	5,7230	,000
		3	-13,800(*)	5,4521	,015
		4	-,624	6,0821	,919
		5	14,377(*)	5,2397	,009
		6	8,663	5,2397	,105

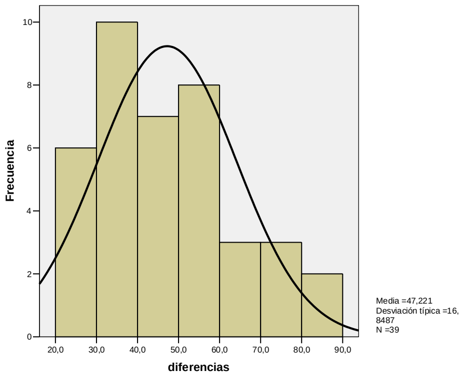
Basado en las medias observadas.
* La diferencia de medias es significativa al nivel ,05.

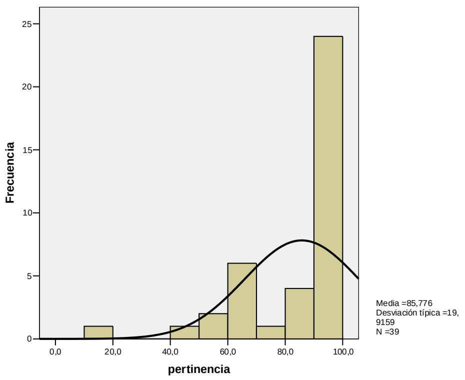
Tabla VIII.- Dificultad apreciada, dificultad de la solución diferencia entre dificultades. Comparación de Medias de las subfamilias. (1.-ABACO , 2.- HER-REPAT, 3.-EDADES, 4.-GEOMETRIA,5.-MOVILES, 6.-TRABAJO, 7.-OTROS)

A4.5.- Población problemas comunes.









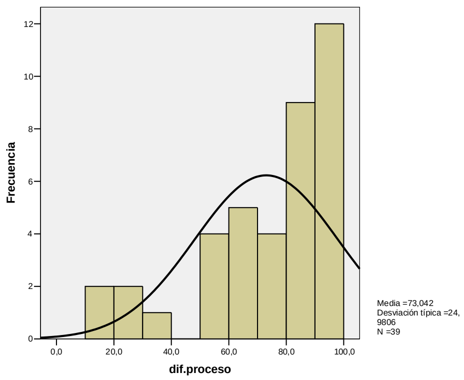
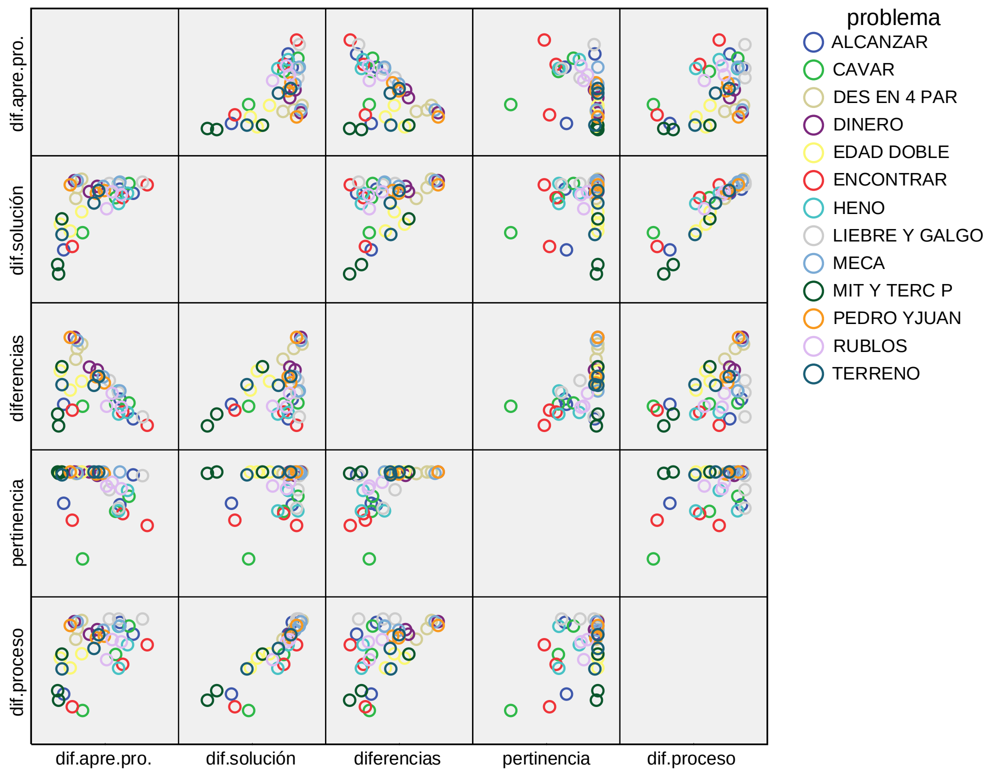


Tabla I.-Distribución de las variables dependientes.



Correlaciones

		dif.apre.pro.	dif.solución	diferencias	pertinencia	dif.proceso
dif.apre.pro.	Correlación de Pearson	1	,627(**)	-,471(**)	-,335(*)	,457(**)
	Sig. (bilateral)		,000	,002	,037	,003
	N	39	39	39	39	39
dif.solución	Correlación de Pearson	,627(**)	1	,392(*)	,104	,913(**)
	Sig. (bilateral)	,000		,014	,528	,000
	N	39	39	39	39	39
diferencias	Correlación de Pearson	-,471(**)	,392(*)	1	,514(**)	,494(**)
	Sig. (bilateral)	,002	,014		,001	,001
	N	39	39	39	39	39
pertinencia	Correlación de Pearson	-,335(*)	,104	,514(**)	1	,397(*)
	Sig. (bilateral)	,037	,528	,001		,012
	N	39	39	39	39	39
dif.proceso	Correlación de Pearson	,457(**)	,913(**)	,494(**)	,397(*)	1
	Sig. (bilateral)	,003	,000	,001	,012	
	N	39	39	39	39	39

** La correlación es significativa al nivel 0,01 (bilateral).
* La correlación es significante al nivel 0,05 (bilateral).

Tabla II.-Matrices de dispersión y correlaciones.

Contrastes multivariados(c)

Efecto		Valor	F	Gl de la hipótesis	Gl del error	Significación
Intersección	Traza de Pillai	1,000	30750,150(a)	4,000	4,000	,000
	Lambda de Wilks	,000	30750,150(a)	4,000	4,000	,000
	Traza de Hotelling	30750,150	30750,150(a)	4,000	4,000	,000
	Raíz mayor de Roy	30750,150	30750,150(a)	4,000	4,000	,000
curso	Traza de Pillai	1,370	2,721	8,000	10,000	,070
	Lambda de Wilks	,004	15,446(a)	8,000	8,000	,000
	Traza de Hotelling	168,269	63,101	8,000	6,000	,000
	Raíz mayor de Roy	167,665	209,581(b)	4,000	5,000	,000
subfamilia	Traza de Pillai	2,728	3,753	16,000	28,000	,001
	Lambda de Wilks	,000	16,445	16,000	12,858	,000
	Traza de Hotelling	321,355	50,212	16,000	10,000	,000
	Raíz mayor de Roy	308,910	540,593(b)	4,000	7,000	,000
complejidad	Traza de Pillai	2,231	2,208	16,000	28,000	,032
	Lambda de Wilks	,000	12,574	16,000	12,858	,000
	Traza de Hotelling	471,173	73,621	16,000	10,000	,000
	Raíz mayor de Roy	464,264	812,463(b)	4,000	7,000	,000
curso * subfamilia	Traza de Pillai	2,102	1,107	28,000	28,000	,395
	Lambda de Wilks	,002	2,665	28,000	15,844	,022
	Traza de Hotelling	101,351	9,049	28,000	10,000	,000
	Raíz mayor de Roy	98,471	98,471(b)	7,000	7,000	,000
curso * complejidad	Traza de Pillai	2,192	1,061	32,000	28,000	,439
	Lambda de Wilks	,002	2,371	32,000	16,346	,034
	Traza de Hotelling	80,298	6,273	32,000	10,000	,002
	Raíz mayor de Roy	76,050	66,544(b)	8,000	7,000	,000
subfamilia * complejidad	Traza de Pillai	,990	94,248(a)	4,000	4,000	,000
	Lambda de Wilks	,010	94,248(a)	4,000	4,000	,000
	Traza de Hotelling	94,248	94,248(a)	4,000	4,000	,000
	Raíz mayor de Roy	94,248	94,248(a)	4,000	4,000	,000
curso * subfamilia * complejidad	Traza de Pillai	,788	3,715(a)	4,000	4,000	,116
	Lambda de Wilks	,212	3,715(a)	4,000	4,000	,116
	Traza de Hotelling	3,715	3,715(a)	4,000	4,000	,116
	Raíz mayor de Roy	3,715	3,715(a)	4,000	4,000	,116

a Estadístico exacto
b El estadístico es un límite superior para la F el cual ofrece un límite inferior para el nivel de significación.
c Diseño: Intercept+curso+subfamilia+complejidad+curso * subfamilia+curso * complejidad+subfamilia * complejidad+curso * subfamilia * complejidad

Tabla III.-Contrastes multivariantes.Variables de la tarea (subfamilia, complejidad) y del sujeto (curso). Población problemas comunes.

Fuente	Variable dependiente	Suma de cuadrados tipo III	gl	Media cuadrática	F	Significación
Modelo corregido	dif.apre.pro.	14756,228(a)	31	476,007	11,109	,001
	dif.solución	13743,068(b)	31	443,325	31,462	,000
	pertinencia	13454,889(c)	31	434,029	1,878	,197
	dif.proceso	22628,915(d)	31	729,965	4,713	,020
Intersección	dif.apre.pro.	30711,374	1	30711,374	716,721	,000
	dif.solución	204696,934	1	204696,934	14527,021	,000
	pertinencia	229646,390	1	229646,390	993,795	,000
	dif.proceso	168105,171	1	168105,171	1085,376	,000
curso	dif.apre.pro.	1512,130	2	756,065	17,645	,002
	dif.solución	2136,299	2	1068,150	75,805	,000
	pertinencia	708,136	2	354,068	1,532	,281
	dif.proceso	3642,490	2	1821,245	11,759	,006
subfamilia	dif.apre.pro.	5260,719	4	1315,180	30,693	,000
	dif.solución	4482,459	4	1120,615	79,528	,000
	pertinencia	3931,055	4	982,764	4,253	,047
	dif.proceso	3593,358	4	898,339	5,800	,022
complejidad	dif.apre.pro.	1912,207	4	478,052	11,156	,004
	dif.solución	4615,150	4	1153,787	81,882	,000
	pertinencia	1553,266	4	388,317	1,680	,257
	dif.proceso	6288,793	4	1572,198	10,151	,005
curso * subfamilia	dif.apre.pro.	326,599	7	46,657	1,089	,457
	dif.solución	915,376	7	130,768	9,280	,004
	pertinencia	1481,989	7	211,713	,916	,544
	dif.proceso	1688,681	7	241,240	1,558	,287
curso * complejidad	dif.apre.pro.	862,358	8	107,795	2,516	,121
	dif.solución	1099,251	8	137,406	9,752	,004
	pertinencia	561,942	8	70,243	,304	,941
	dif.proceso	1816,577	8	227,072	1,466	,314
subfamilia * complejidad	dif.apre.pro.	44,523	1	44,523	1,039	,342
	dif.solución	1112,791	1	1112,791	78,973	,000
	pertinencia	174,331	1	174,331	,754	,414
	dif.proceso	2727,792	1	2727,792	17,612	,004
curso * subfamilia * complejidad	dif.apre.pro.	801,045	1	801,045	18,694	,003
	dif.solución	71,420	1	71,420	5,069	,059
	pertinencia	5,322	1	5,322	,023	,884
	dif.proceso	152,935	1	152,935	,987	,353
Error	dif.apre.pro.	299,949	7	42,850		
	dif.solución	98,635	7	14,091		
	pertinencia	1617,562	7	231,080		
	dif.proceso	1084,174	7	154,882		
Total	dif.apre.pro.	59263,460	39			
	dif.solución	269016,634	39			
	pertinencia	302016,740	39			
	dif.proceso	231782,380	39			

Tabla IV.- dificultades. Contrate del efecto de las variables de la tarea y del sujeto.

Pruebas de los efectos inter-sujetos

Variable dependiente: diferencias

Fuente	Suma de cuadrados tipo III	gl	Media cuadrática	F	Significación
Modelo corregido	10544,242(a)	31	340,137	9,794	,002
Intersección	76833,101	1	76833,101	2212,392	,000
subfamilia	1430,056	4	357,514	10,295	,005
curso	183,911	2	91,956	2,648	,139
complejidad	4443,054	4	1110,764	31,984	,000
subfamilia * curso	1137,073	7	162,439	4,677	,030
subfamilia * complejidad	712,139	1	712,139	20,506	,003
curso * complejidad	1171,268	8	146,408	4,216	,037
subfamilia * curso * complejidad	394,089	1	394,089	11,348	,012
Error	243,100	7	34,729		
Total	97749,309	39			
Total corregida	10787,342	38			

Tabla V.-Efecto sobre la diferencia de dificultades de las variables de la tarea y del sujeto.

Pruebas de los efectos inter-sujetos

Variable dependiente: pertinencia

Fuente	Suma de cuadrados tipo III	gl	Media cuadrática	F	Significación
Modelo corregido	13454,889(a)	31	434,029	1,878	,197
Intersección	229646,390	1	229646,390	993,795	,000
subfamilia	3931,055	4	982,764	4,253	,047
curso	708,136	2	354,068	1,532	,281
complejidad	1553,266	4	388,317	1,680	,257
subfamilia * curso	1481,989	7	211,713	,916	,544
subfamilia * complejidad	174,331	1	174,331	,754	,414
curso * complejidad	561,942	8	70,243	,304	,941
subfamilia * curso * complejidad	5,322	1	5,322	,023	,884
Error	1617,562	7	231,080		
Total	302016,740	39			
Total corregida	15072,451	38			

Tabla VI.-Efecto sobre la pertinencia de las variables de la tarea y del sujeto.

Comparaciones múltiples

DMS

Variable dependiente	(I) subfamilia	(J) subfamilia	Diferencia entre medias (I-J)	Error típ.	Significación
dif.apre.pro.	1	3	-9,108	9,2621	,333
		4	-12,510	11,3437	,278
		5	-35,428(*)	8,4551	,000
		6	-31,297(*)	11,3437	,009
		7	-28,536(*)	8,0212	,001
	3	1	9,108	9,2621	,333
		4	-3,402	11,3437	,766
		5	-26,320(*)	8,4551	,004
		6	-22,189	11,3437	,059
		7	-19,428(*)	8,0212	,021
	4	1	12,510	11,3437	,278
		3	3,402	11,3437	,766
		5	-22,918(*)	10,6950	,040
		6	-18,787	13,0986	,161
		7	-16,026	10,3554	,131
	5	1	35,428(*)	8,4551	,000
		3	26,320(*)	8,4551	,004
		4	22,918(*)	10,6950	,040
		6	4,131	10,6950	,702
		7	6,892	7,0741	,337
	6	1	31,297(*)	11,3437	,009
		3	22,189	11,3437	,059
		4	18,787	13,0986	,161
		5	-4,131	10,6950	,702
		7	2,761	10,3554	,791
	7	1	28,536(*)	8,0212	,001
		3	19,428(*)	8,0212	,021
		4	16,026	10,3554	,131
		5	-6,892	7,0741	,337
		6	-2,761	10,3554	,791
dif.solución	1	3	-11,272	10,7538	,302
		4	-8,621	13,1707	,517
		5	-14,897	9,8169	,139
		6	-12,306	13,1707	,357
		7	-23,441(*)	9,3131	,017
	3	1	11,272	10,7538	,302
		4	2,651	13,1707	,842
		5	-3,625	9,8169	,714
		6	-1,034	13,1707	,938
		7	-12,169	9,3131	,200
	4	1	8,621	13,1707	,517
		3	-2,651	13,1707	,842
		5	-6,276	12,4175	,617
		6	-3,685	15,2082	,810
		7	-14,820	12,0232	,226
	5	1	14,897	9,8169	,139
		3	3,625	9,8169	,714
		4	6,276	12,4175	,617

		6	2,591	12,4175	,836
		7	-8,544	8,2134	,306
	6	1	12,306	13,1707	,357
		3	1,034	13,1707	,938
		4	3,685	15,2082	,810
		5	-2,591	12,4175	,836
		7	-11,135	12,0232	,361
	7	1	23,441(*)	9,3131	,017
		3	12,169	9,3131	,200
		4	14,820	12,0232	,226
		5	8,544	8,2134	,306
		6	11,135	12,0232	,361
diferencias	1	3	-2,164	8,9096	,810
		4	3,890	10,9120	,724
		5	20,531(*)	8,1333	,017
		6	18,991	10,9120	,091
		7	5,095	7,7159	,514
	3	1	2,164	8,9096	,810
		4	6,054	10,9120	,583
		5	22,695(*)	8,1333	,009
		6	21,155	10,9120	,061
		7	7,259	7,7159	,354
	4	1	-3,890	10,9120	,724
		3	-6,054	10,9120	,583
		5	16,641	10,2879	,115
		6	15,102	12,6000	,239
		7	1,206	9,9612	,904
	5	1	-20,531(*)	8,1333	,017
		3	-22,695(*)	8,1333	,009
		4	-16,641	10,2879	,115
		6	-1,540	10,2879	,882
		7	-15,436(*)	6,8048	,030
	6	1	-18,991	10,9120	,091
		3	-21,155	10,9120	,061
		4	-15,102	12,6000	,239
		5	1,540	10,2879	,882
		7	-13,896	9,9612	,172
	7	1	-5,095	7,7159	,514
		3	-7,259	7,7159	,354
		4	-1,206	9,9612	,904
		5	15,436(*)	6,8048	,030
		6	13,896	9,9612	,172

Basado en las medias observadas.
* La diferencia de medias es significativa al nivel ,05.

Tabla VII.- Dificultad apreciada, dificultad de la solución diferencia entre dificultades. Comparación de Medias de las subfamilias. (1.-ABACO , 3.-EDADES, 4.-GEOMETRIA,5.-MOVILES, 6.-TRABAJO, 7.-OTROS)

A 4.6- Diferencias de los valores de las variables de proceso.

Población curso 1º.

Curso 1º

problemas	UL-EA	EA-IG	UL-IG	IG-SEC	UL-SEC
ENTEROS	0	7	7	38	45
FRACCIÓN	0	1	1	45	46
MIT Y TERC P	5	4	9	47	56
DES EN 4 PAR	6	27	33	37	70
REP. 1200	0	3	3	9	12
REP. ENTRE 5	0	2	2	31	33
BOLSAS D CA	0	2	2	17	19
LUIS Y SU PAD	0	12	12	23	35
HACE DIEZ	3	3	6	28	34
EDAD DOBLE	0	2	2	45	47
PEDRO YJUAN	1	6	7	38	45
PERIMETRO	8	2	10	17	27
TERRENO	2	8	10	40	50
HOJA DE ALUM	2	4	6	8	14
ALCANZAR	12	16	28	1	29
ENCONTRAR	0	10	10	4	14
LIEBRE Y GALG	2	14	16	11	27
CAVAR	11	2	13	6	19
ROTATIVA	2	2	4	11	15
CHOCO Y CARA	0	7	7	25	32
HENO	5	4	9	17	26
RUBLOS	0	3	3	25	28
MECA	1	6	7	34	41
DINERO	2	3	5	47	52

Tabla I..- Diferencia de los valores de las variables de proceso para cada problema. Curso 1º.

Curso 2º

problemas	UL-EA	EA-IG	UL-IG	IG-SEC	UL-SEC
FRACCIÓN	0	0	0	45	45
MIT Y TERC P	0	27	27	0	27
DES EN 4 PAR	1	2	3	65	68
RESTA Y REST	0	11	11	41	52
REP. ENTRE 5	0	10	10	17	27
FORTUNA	0	1	1	6	7
HACE DIEZ	0	7	7	25	32
EDAD DOBLE	0	0	0	42	42
PEDRO YJUAN	5	8	13	62	75
HERMANOS	11	8	19	48	67
TERRENO	6	4	10	35	45
HOJA DE ALUM	4	7	11	8	19
ALCANZAR	6	10	16	13	29
ENCONTRAR	0	1	1	8	9
LIEBRE Y GALG	5	12	17	26	43
AVIONETA	0	6	6	1	7
CAVAR	10	5	15	12	27
ROTATIVA	8	8	16	11	27
EJE VIARIO	0	6	6	1	7
HENO	0	2	2	22	24
RUBLOS	2	2	4	32	36
MECA	0	6	6	66	72
DINERO	2	2	4	71	75

Tabla II.- Diferencia de los valores de las variables de proceso para cada problema. Curso 2º.

Curso 3º

problemas	UL-EA	EA-IG	UL-IG	IG-SEC	UL-SEC
MIT Y TERC P	0	0	0	15	15
DES EN 4 PAR	0	14	14	35	49
RESTA Y RESTA	0	4	4	27	31
FORTUNA	0	9	9	2	11
EDAD DOBLE	2	2	4	40	44
PEDRO YJUAN	1	2	3	37	40
HERMANOS	2	7	9	45	54
TERRENO	0	1	1	34	35
EDITORIAL	4	6	10	16	26
ALCANZAR	0	5	5	8	13
ENCONTRAR	0	3	3	2	5
LIEBRE Y GALG	0	5	5	19	24
AVIONETA	0	2	2	5	7
CAVAR	0	0	0	1	1
EJE VIARIO	0	4	4	0	4
ARTEL	0	2	2	4	6
HENO	0	2	2	10	12
RUBLOS	2	0	2	21	23
MECA	0	0	0	41	41
DINERO	1	0	1	45	46
COMERCIANTES	1	0	1	22	23

Tabla III .- Diferencia de los valores de las variables de proceso para cada problema. Curso 2º.

Curso 1º diferencias en %

problemas	UL-EA	EA-IG	UL-IG	IG-SEC	UL-SEC
ENTEROS	0,0	8,5	8,5	46,3	54,9
FRACCIÓN	0,0	1,4	1,4	60,8	62,2
MIT Y TERC P	5,9	4,7	10,6	55,3	65,9
DES EN 4 PAR	8,5	38,0	46,5	52,1	98,6
REP. 1200	0,0	5,0	5,0	15,0	20,0
REP. ENTRE 5	0,0	4,0	4,0	62,0	66,0
BOLSAS D CA	0,0	3,0	3,0	25,8	28,8
LUIS Y SU PAD	0,0	27,3	27,3	52,3	79,5
HACE DIEZ	5,3	5,3	10,5	49,1	59,6
EDAD DOBLE	0,0	2,8	2,8	63,4	66,2
PEDRO YJUAN	1,9	11,1	13,0	70,4	83,3
PERIMETRO	15,1	3,8	18,9	32,1	50,9
TERRENO	3,4	13,6	16,9	67,8	84,7
HOJA DE ALUM	13,3	26,7	40,0	53,3	93,3
ALCANZAR	40,0	53,3	93,3	3,3	96,7
ENCONTRAR	0,0	40,0	40,0	16,0	56,0
LIEBRE Y GALGO	7,4	51,9	59,3	40,7	100,0
CAVAR	37,9	6,9	44,8	20,7	65,5
ROTATIVA	13,3	13,3	26,7	73,3	100,0
CHOCO Y CARA	0,0	15,9	15,9	56,8	72,7
HENO	17,9	14,3	32,1	60,7	92,9
RUBLOS	0,0	8,3	8,3	69,4	77,8
MECA	2,3	13,6	15,9	77,3	93,2
DINERO	3,4	5,2	8,6	81,0	89,7

Tabla IV.- Diferencia en % de los valores de las variables de proceso para cada problema. Curso 1º

Curso 2º diferencias en %

problemas	UL-EA	EA-IG	UL-IG	IG-SEC	UL-SEC
FRACCIÓN	0,0	0,0	0,0	53,6	53,6
MIT Y TERC P	0,0	3,0	30,3	0,0	30,3
DES EN 4 PAR	1,3	0,3	4,0	87,8	90,7
RESTA Y REST	0,0	1,6	16,4	61,2	77,6
REP. ENTRE 5	0,0	2,0	20,4	34,7	55,1
FORTUNA	0,0	0,1	1,4	8,5	9,9
HACE DIEZ	0,0	0,9	8,6	30,9	39,5
EDAD DOBLE	0,0	0,0	0,0	52,5	52,5
PEDRO YJUAN	6,3	1,0	16,3	82,7	93,8
HERMANOS	16,2	1,2	27,9	84,2	98,5
TERRENO	9,5	0,6	15,9	61,4	71,4
HOJA DE ALUM	20,0	3,5	55,0	50,0	95,0
ALCANZAR	17,6	2,9	47,1	46,4	85,3
ENCONTRAR	0,0	0,8	8,3	66,7	75,0
LIEBRE Y GALG	11,6	2,8	39,5	68,4	100,0
AVIONETA	0,0	7,5	75,0	12,5	87,5
CAVAR	34,5	1,7	51,7	63,2	93,1
ROTATIVA	29,6	3,0	59,3	57,9	100,0
EJE VIARIO	0,0	7,5	75,0	12,5	87,5
HENO	0,0	0,6	6,3	68,8	75,0
RUBLOS	4,4	0,4	8,9	74,4	80,0
MECA	0,0	0,8	8,1	89,2	97,3
DINERO	2,6	0,3	5,2	94,7	97,4

Tabla V.- Diferencia en % de los valores de las variables de proceso para cada problema. Curso 2º.

Curso 3º	diferncias en %				
problemas	UL-EA	EA-IG	UL-IG	IG-SEC	UL-SEC
MIT Y TERC P	0,0	0,0	0,0	21,1	21,1
DES EN 4 PAR	0,0	23,0	23,0	57,4	80,3
RESTA Y RESTA	0,0	9,1	9,1	61,4	70,5
FORTUNA	0,0	12,5	12,5	2,8	15,3
EDAD DOBLE	2,8	2,8	5,6	56,3	62,0
PEDRO YJUAN	2,0	4,1	6,1	75,5	81,6
HERMANOS	3,7	13,0	16,7	83,3	100,0
TERRENO	0,0	1,5	1,5	50,0	51,5
EDITORIAL	11,4	17,1	28,6	45,7	74,3
ALCANZAR	0,0	10,4	10,4	16,7	27,1
ENCONTRAR	0,0	8,8	8,8	5,9	14,7
LIEBRE Y GALGO	0,0	20,8	20,8	79,2	100,0
AVIONETA	0,0	22,2	22,2	55,6	77,8
CAVAR	0,0	0,0	0,0	11,1	11,1
EJE VIARIO	0,0	40,0	40,0	0,0	40,0
ARTEL	0,0	22,2	22,2	44,4	66,7
HENO	0,0	8,7	8,7	43,5	52,2
RUBLOS	5,3	0,0	5,3	55,3	60,5
MECA	0,0	0,0	0,0	89,1	89,1
DINERO	1,9	0,0	1,9	83,3	85,2
COMERCIANTES	3,2	0,0	3,2	71,0	74,2

Tabla VI.- Diferencia en % de los valores de las variables de proceso para cada problema. Curso 3º.

A4.7.- Perfiles de los problemas de cada Subfamilia. Cursos.

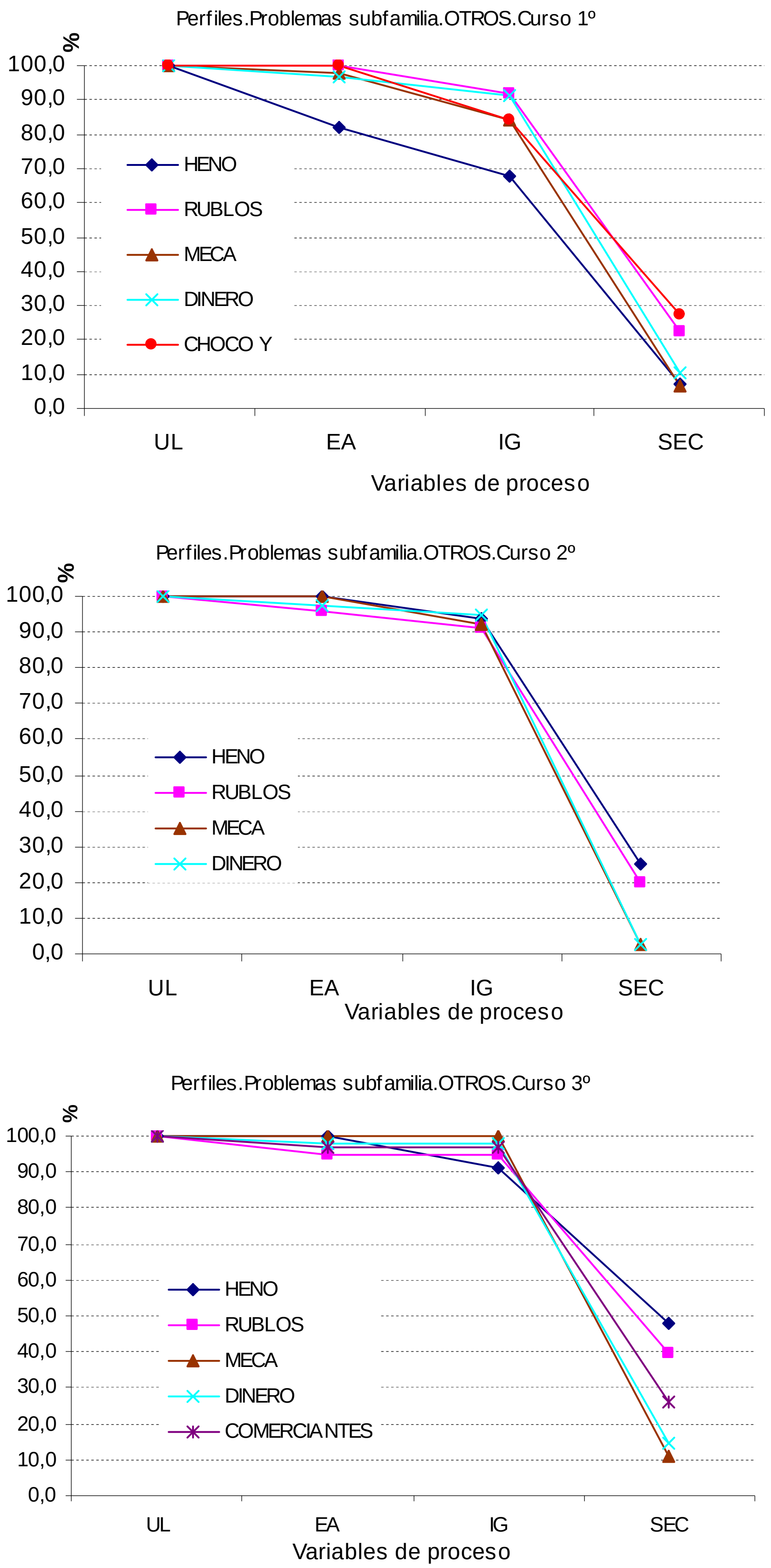
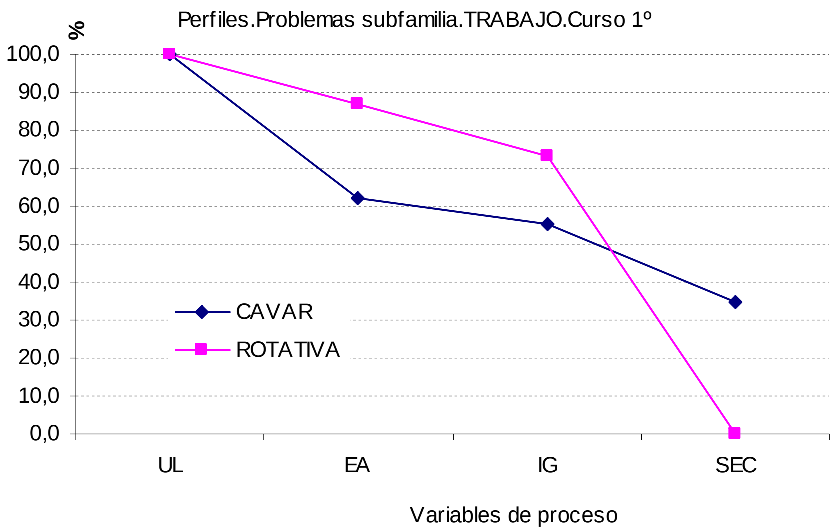
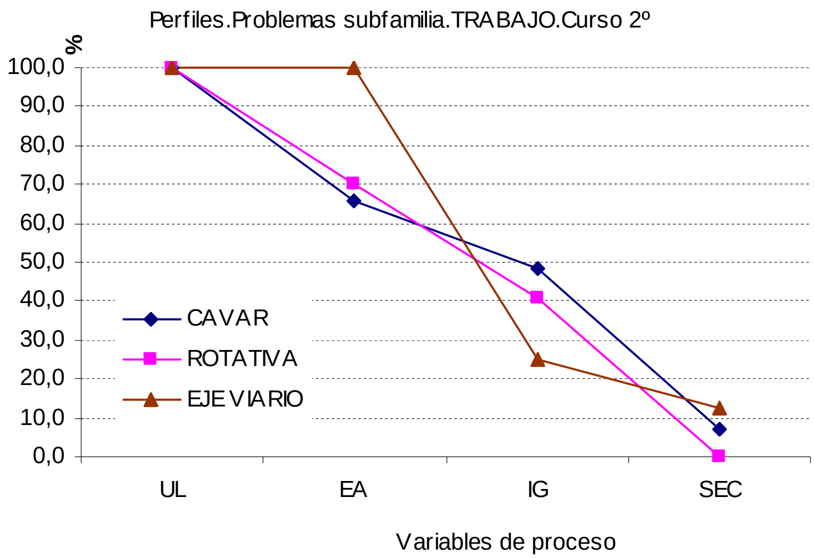


Fig.. 1.- Perfiles de los problemas de la subfamilia OTROS. Cursos 1º,2º,3º.





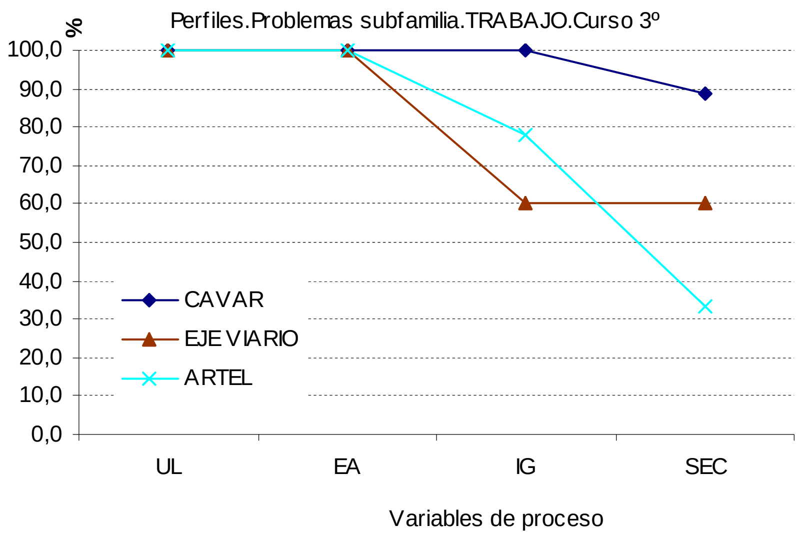


Fig.. 2.- Perfiles de los problemas de la subfamilia TRABAJO. Cursos 1º,2º,3º.

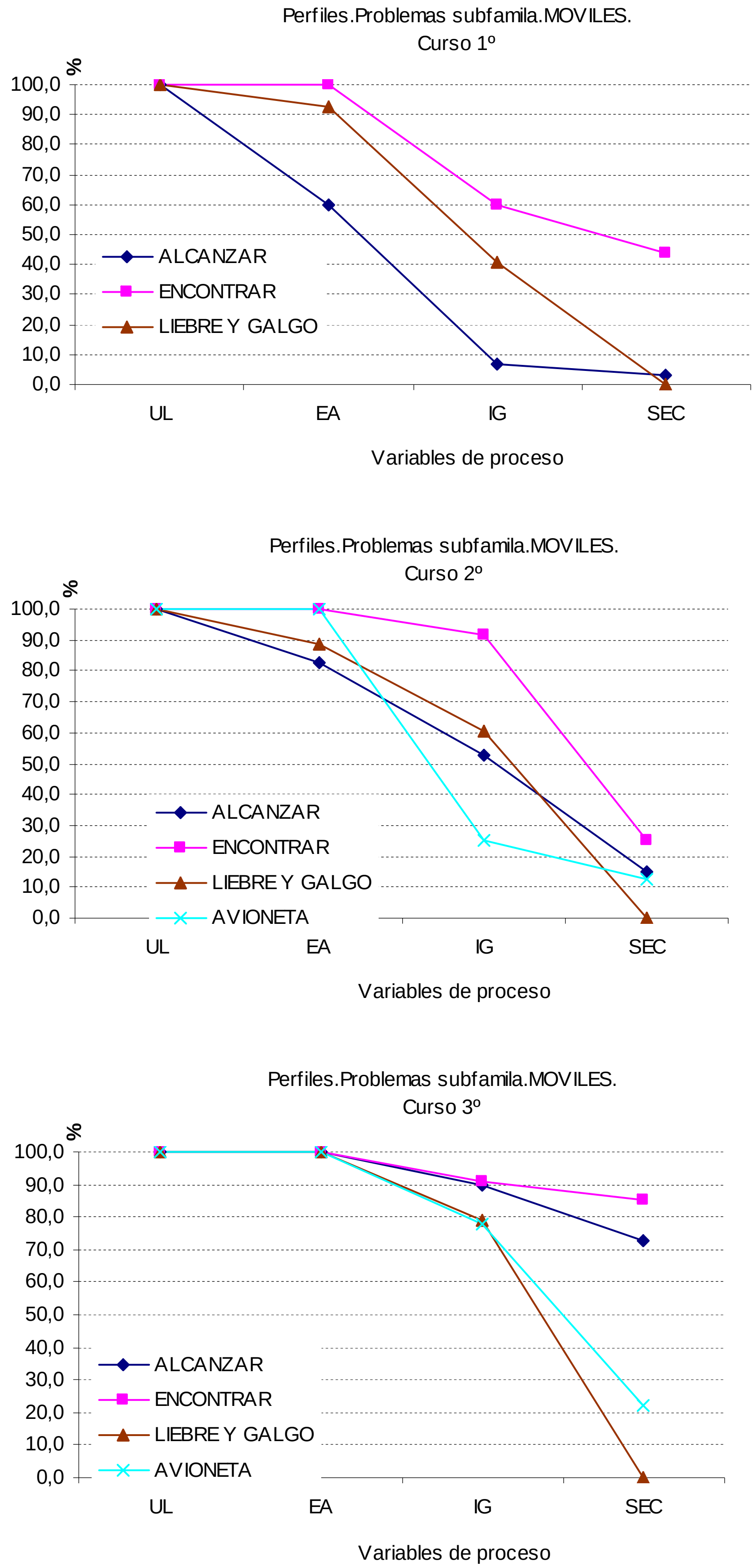


Fig.. 3.- Perfiles de los problemas de la subfamilia MOVILES. Cursos 1º,2º,3º.

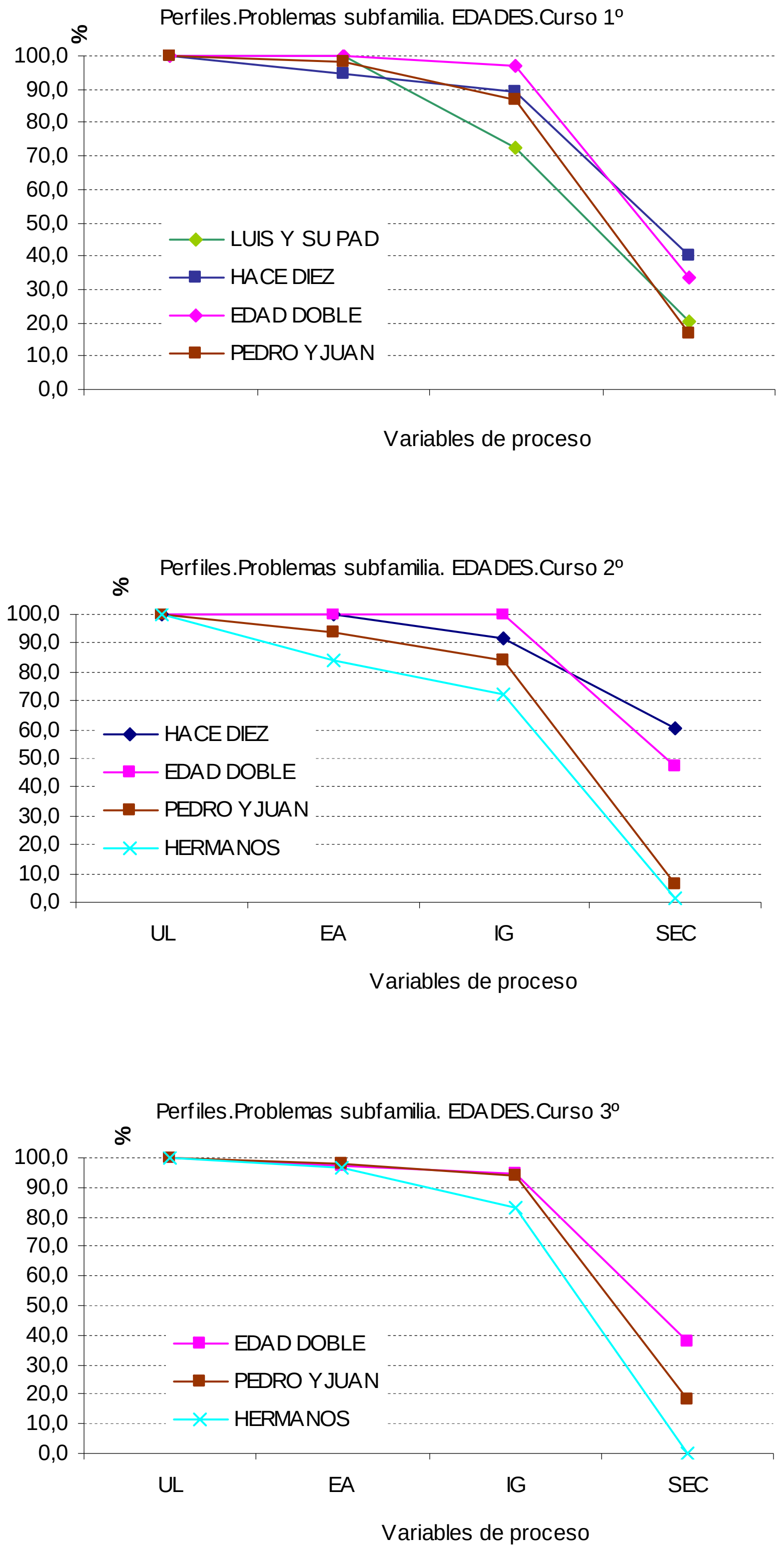
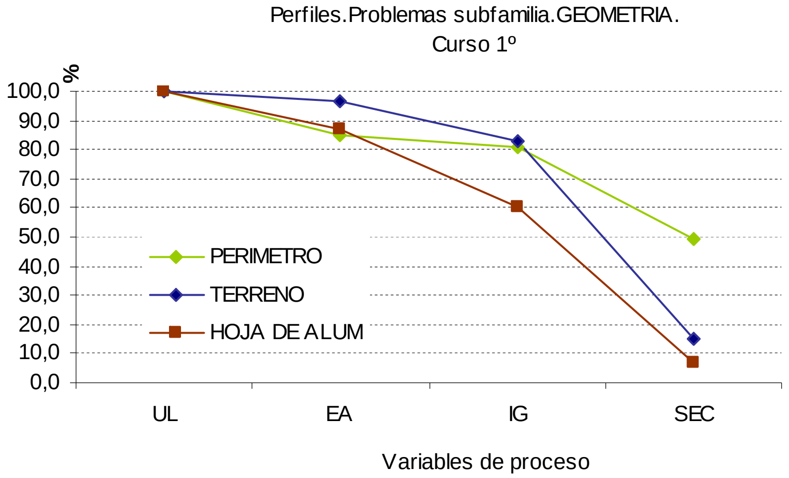
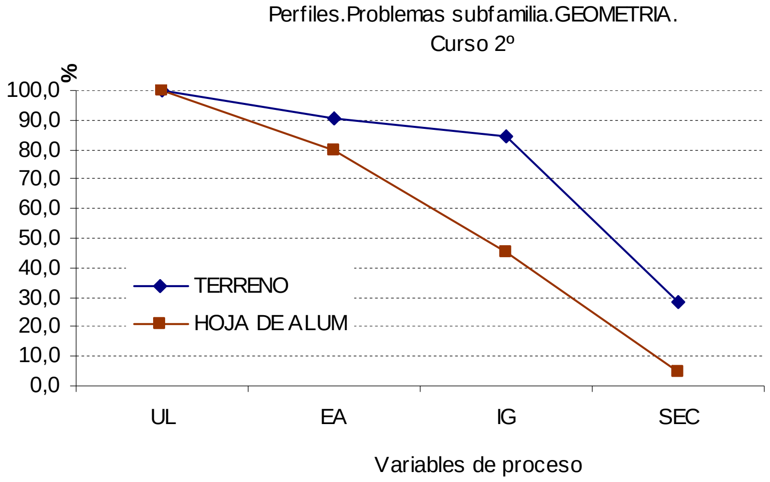


Fig.. 4.- Perfiles de los problemas de la subfamilia EDADES. Cursos 1º,2º,3º.





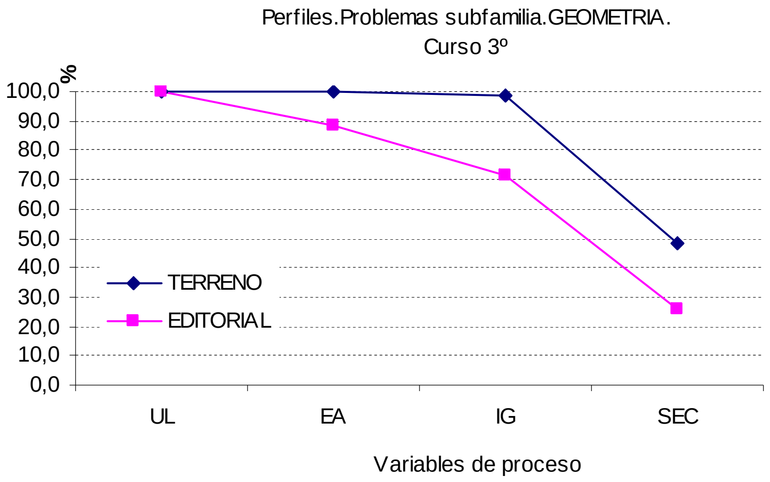
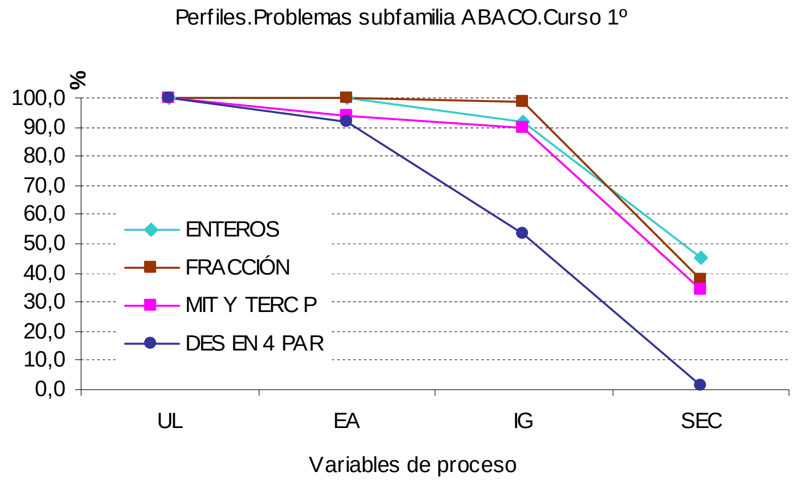
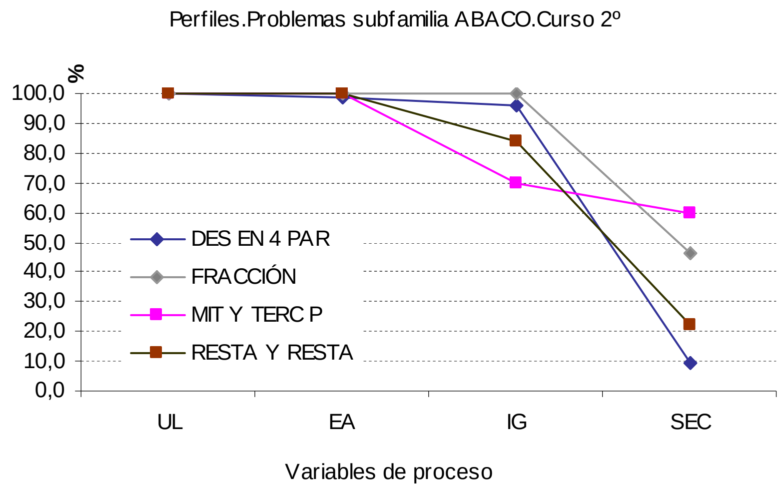


Fig.. 5.- Perfiles de los problemas de la subfamilia GEOMETRIA. Cursos 1º,2º,3º.





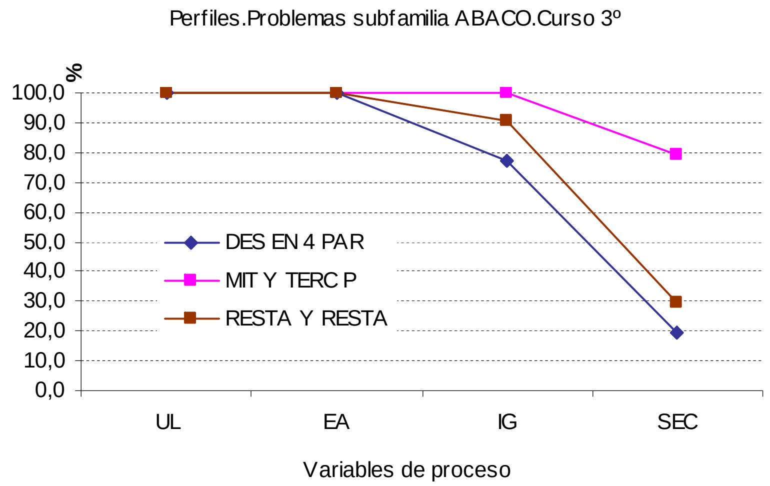


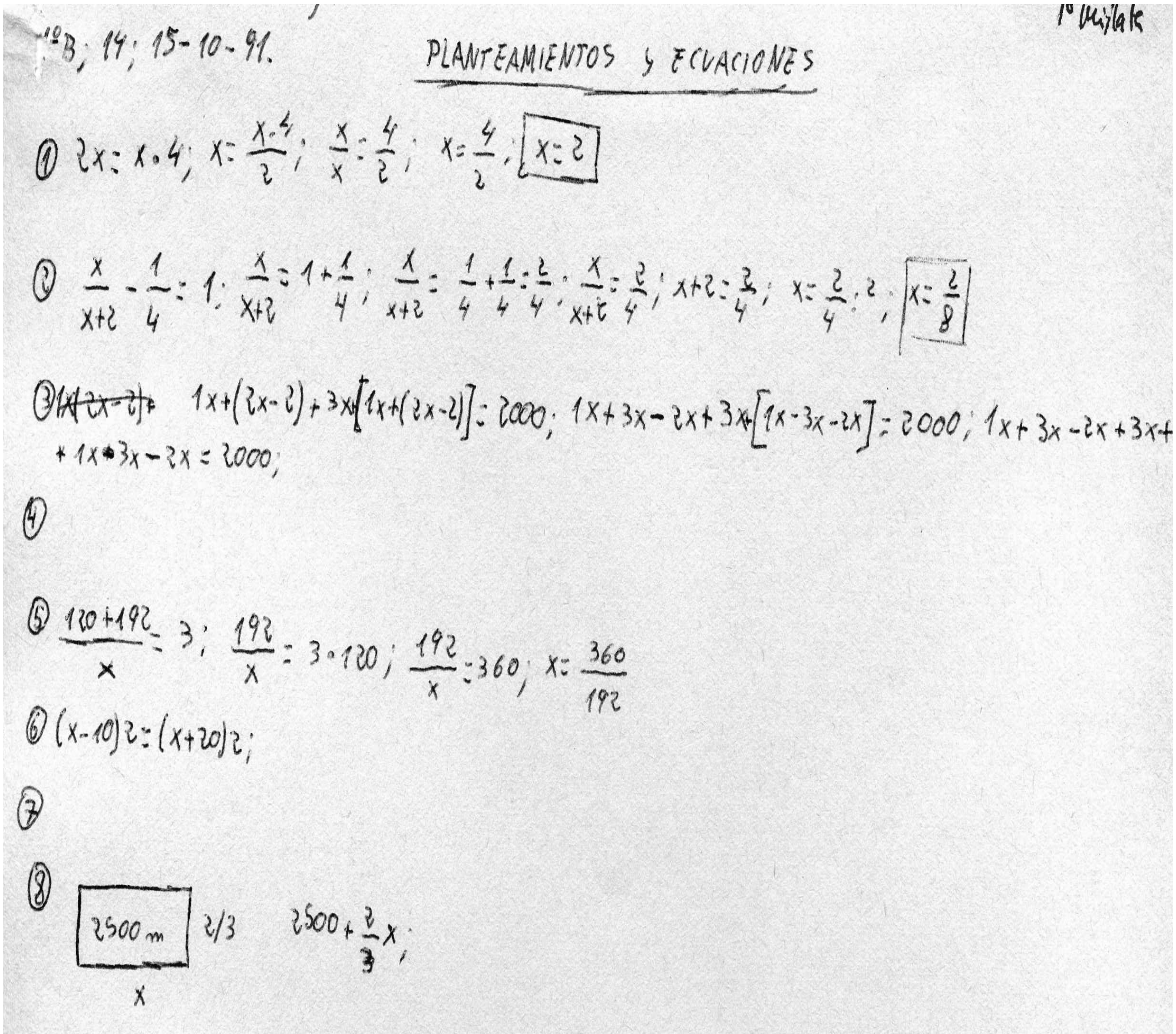
Fig.. 6.- Perfiles de los problemas de la subfamilia ABACO. Cursos 1º,2º,3º.

A4.8.-Resoluciones de los estudiantes.

INB de Mislata. Mislata. Valencia.

<u>Curso 1º</u>

test-1



1º Mislata

1ºB; 14; 15-10-91.

PLANTEAMIENTOS y ECUACIONES

① $2x = x \cdot 4;\ x = \frac{x \cdot 4}{2};\ \frac{x}{x} = \frac{4}{2};\ x = \frac{4}{2};\ \boxed{x = 2}$

② $\frac{x}{x+2} - \frac{1}{4} = 1;\ \frac{x}{x+2} = 1 + \frac{1}{4};\ \frac{x}{x+2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4};\ \frac{x}{x+2} = \frac{2}{4};\ x+2 = \frac{3}{4};\ x = \frac{2}{4} : 2;\ \boxed{x = \frac{2}{8}}$

③ $\cancel{1x + (2x-2) +}$ $1x + (2x-2) + 3x + [1x + (2x-2)] = 2000;\ 1x + 3x - 2x + 3x + [1x - 3x - 2x] = 2000;\ 1x + 3x - 2x + 3x +$
$+ 1x + 3x - 2x = 2000;$

④

⑤ $\frac{120+192}{x} = 3;\ \frac{192}{x} = 3 \cdot 120;\ \frac{192}{x} = 360;\ x = \frac{360}{192}$

⑥ $(x-10)2 = (x+20)2;$

⑦

⑧ 2500 m   2/3 $2500 + \frac{2}{3}x;$

x

test -2

1-B; 14; 17-10-91.

① $x \begin{cases} x-4 \\ x+4 \\ x\cdot 4 \\ x:4 \end{cases}$ $\frac{4 \; +4}{8}$ $\frac{12 \; -4}{8}$ $\frac{2 \; +4}{8}$ $\frac{36 \; -24}{8}$ 412 . 232

② $\boxed{6 \text{ ha}}$

③ x
2^2 $x-(2^2\cdot 4)=300$; $x-4^2=300$;

④ $22x+40x=22\cdot 2$; $62x=44$; $\boxed{x=\frac{62}{44}}$

⑤ $\cancel{(2x+4)\cdot 7=1x}$ $(1x\cdot 2+2x)-7=1x$; $(2x+2x)-7=1x$; $4x-7=1x$; $4x-1x=7$; $3x=7$; $\boxed{x=\frac{7}{3}}$

⑥

⑦ No sale.

⑧ ~~8591: 2x+3/4+1x+3x+3/4+2x+4x+3/4+3x+5x+3/4+4x~~

test-3

: 14; 18-10-91.

1. $\cancel{x+\left(x\cdot 2+\frac{x}{3}\right):7+\left(\frac{x}{3}\right)}$; $x+\frac{1}{2}x+\frac{3}{1}x=7+\frac{4}{1}$; $\frac{2x}{2}+\frac{1}{2}x+\frac{6}{2}x=\frac{14}{2}+\frac{8}{2}$; $\cancel{\frac{9x}{2}=\frac{22}{2}}$; $2x+1x+6x=14+8$;
   $9x=22$; $x=\frac{22}{9}$;

2. $\cancel{1x\cdot 2(2x)+2x(1x\cdot 2)=}$ $\cancel{4x\cdot 2}$

3. $\cancel{2x+y+x=63}$

4.

5.  $(x-2/3)+2=64$;

6.

7. $x:40+x\cdot 100=60$;

8. $600-(1x+2x+3x)=1x$;

<u>2º Curso</u>

test-1

(1) $\frac{x}{x+2} - \frac{1}{4}$

(2) Días = Y
Páginas = X

$X+2 = Y-3$
$X+4 = Y-5$

(3) Años ahora = X

$X - 10 = \frac{X}{2}$
$X + 20 = 2X$

(4) $\boxed{\begin{array}{l} X = \text{saltos liebre} \\ Y = \text{saltos galgo} \end{array}}$

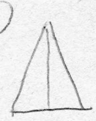
v = e.t

$4X = 3Y - 50$
$\boxed{3X = 2Y}$

(5) Años ahora X
Años hermano Y

$3X = y$

(6)



Al =

(7) v = 220 km/h
espacio = X

e = v.t

220 − 20 = 200

x = 200 · 4
x = 800 km

(8) X = hijos Y: dinero

$X1 = \frac{Y}{2} - 3000$

X2 =

test-2

(1) $\cancel{X = 1(Y) + 2(Z) + 3(H) + 4(X)}$

$X = Y + Z + H + A$

$Y - 4 = Z + 4 = H \cdot 4 = \frac{A}{4}$

$Y - 4 = Z + 4$ } $Y = Z + 8$

$H \cdot 4 = \frac{A}{4}$ } $H = A$

$X = Z + 8 + Z + A + A$

$2Z + 8 = 2A$

$A = \frac{2Z + 8}{2} \rightarrow A = Z$

$16 \times 4 = 64$

$X = Z + 8 + Z + Z + 4 + Z + 4$ } $X = 4Z + 16$ } $Z = \frac{X}{4} + 16$

$X = 4\left(\frac{X}{4} + 16\right) + 16$ } $X = X + 64 + 16$ } $2X = 80$ 48 $X = 24$

$Z = [illegible] - 10$

$Y = -2$

$A =$

(2) 6 = 2 días

6 = 3 días

2 días Juan = X

3 días Antonio = Y

Días X

$X + 2 = 6$

$Y + 3 = 6$

$(X + Y) Z = 6$

Un día

$2X = 6$

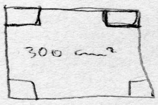
$3X = 6$

$5X = 6$

$X = 6 - 5$

$X = 1$

(3)



(4) Y = barriles

X = Tiempo

$X = 72$

$72 = 50$

(5) X = 1°

Y = 2°

$X = 2Y$

$X - 7 + Y - 7 = X$

(6) 16 h

120 Km/h

140 Km/h

Madrid

Valencia

430 Km

$T = \frac{E}{V}$

$Y = \frac{430 - X}{140}$

$E = 430$

$T = Y$

(7) X Billetes

$\cancel{(3(X) + 3) - (5X)}$

$X + 8 = Y$

X = 3 an

Y =

test-3

① $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=7\cdot\frac{x}{4}$ $\cancel{3x+2x=7\cdot\frac{x}{4}}$ $x=\frac{7x}{\frac{4}{3}}$ $\frac{21x}{3}$

$\frac{5x}{\frac{x}{4}}=7$ $\cancel{5x=7\cdot 4}$

② x = numero de niños

y = dinero

$x+2=y-100$; $x-2=y+200$ $\Big\}$ $x=y-102$; $x=y+202$; $y-102=y+202$; $y=$

$\cancel{y-102-2=y+200}$

③ Pedro = y

Juan = x

$y=2x$; $y+2x=63$ $\Big\}$ $4x=63$; $x=\frac{63}{4}=15{,}75$

Juan 15

Pedro 30

④ Tiempo = T

$40.T+2$

$60.T$

$40(T+2)=60.T$

$\cancel{2=60.T-40.T}$

$\cancel{2=20.T}$

$\cancel{\frac{40(T+2)}{60}=T}$

4 horas

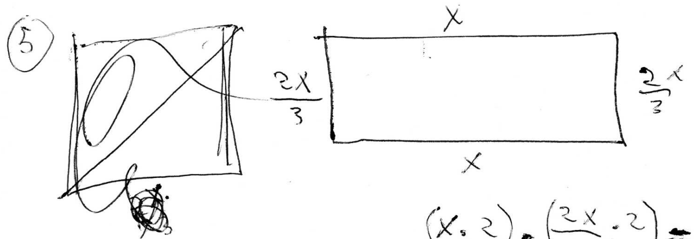
$40T+80=60T$

$80=20T$

$\frac{80}{20}=T$

$4=T$

⑤



$(x\cdot 2)\cdot\left(\frac{2x}{3}\cdot 2\right)=64\,m^2$

$2x\cdot\frac{4x}{3}=64\,m^2=10x=64\,m^2$

$x=64\,m^2$

⑥ $x=42$

$y=2h$

$x+y=$

⑦ $40-60=20$

$20\times 100=2000$ Kg

2.000
x3

$\boxed{6.000 \text{ Kg}}$

⑧

Curso 3º

test-1

1. Número $= x$

$$\boxed{\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=\frac{x}{4}+7}$$

$$\frac{3x+2x}{6}=\frac{x+28}{4}$$

$$12x+8x=6x+168$$

$$12x+8x-6x=168$$

$$20x-6x=168$$

$$14x=168$$

$$x=\frac{168}{14}=\boxed{12}$$

2. ~~Cantidad total de dinero = x~~

Nº de niños $= y$

Dinero que se da a cada uno $= x$

$$\boxed{\begin{cases} y+2 = x-200 \\ y-2 = x+200 \end{cases}}$$

3. Edad de Pedro $= x$ $\quad$ $x = 2y$

Edad de Juan $= y$ $\quad$ x

4. ② $V = 60\ km/h$

① $V = 40\ km/h$

A ——— B

$e = \frac{v}{t}$; $\quad$ ① $e = \frac{40}{2}$

② $e = \frac{60}{t}$ $\quad$ $\frac{40}{2} = \frac{60}{t}$;

$$40t = 120$$

$$t = \frac{120}{40} = 3 \text{ horas}$$

$$e = \frac{60}{3} = \boxed{20\ km}$$

5. $\boxed{A = b \cdot h}$ $\quad$ ancho $= x$, largo $= y$

$h = 2/3\,y$

$b = y$

$$\boxed{64\,m^2 = (2/3\,y + 2)\cdot(y+2)}$$

test-2

(1) 1 litro de solución de agua y alcohol al 90%
Agua pura

1 litro de solución al 80% → { 80% alcohol, 20% agua pura }   { 90% alcohol, 10% agua pura }

~~1 litro de solución al 90% de alcohol~~

Añadir a un 10% de agua pura (respecto a un litro) el 80% de alcohol.

(2) establecido el día (pag) = x
día previsto de finalizar = y

$$\left.\begin{aligned} x+2 &= y-3 \\ x+4 &= y-5 \end{aligned}\right\}$$

(3) 100 cartones de huevos   Y = precio de los ~~huevos~~ cartones

1^er^ comerciante = x (cartones)
2º " = $100 - x$ "

$\boxed{x + (100-x) = 100}$

$$\left.\begin{aligned} x \cdot y &= 45.000 \text{ ptas} \\ (100-x)\, y &= 10.000 \text{ "} \end{aligned}\right\}$$

(4) Una liebre lleva 50 saltos de ventaja al galgo.
4 saltos de la liebre y el galgo daba 3
2 saltos del galgo = 3 saltos de liebre

3 saltos de la liebre ——→ 2 saltos del galgo
50 " " " ——→ x

~~$x = \frac{150}{4} = 37'5$~~ $x = \frac{100}{3} = \boxed{33'3}$ del galgo

(5) Edad suya anterior = x
" " más viejo = $3x$
" de su hermano = $96 - 3x$

$3x + (96 - 3x) = 96$

3.2

6. Una persona $= x$ $= 14$ años

otra " $= 2x$ $= 28$ "

$(x-7)+(2x-7) = 2x$

$3x - 2x = 7+7$

$\boxed{x = 14}$

7. 4h de Madrid parte un tren

$V = 120$ km/h

4h de Valencia parte un tren

$V = 140$ kmh

$V = \frac{e}{t}$

$120 = \frac{e}{\quad}$

continuación del 5.

50 hombres ——— x

30 " ——— 22 días

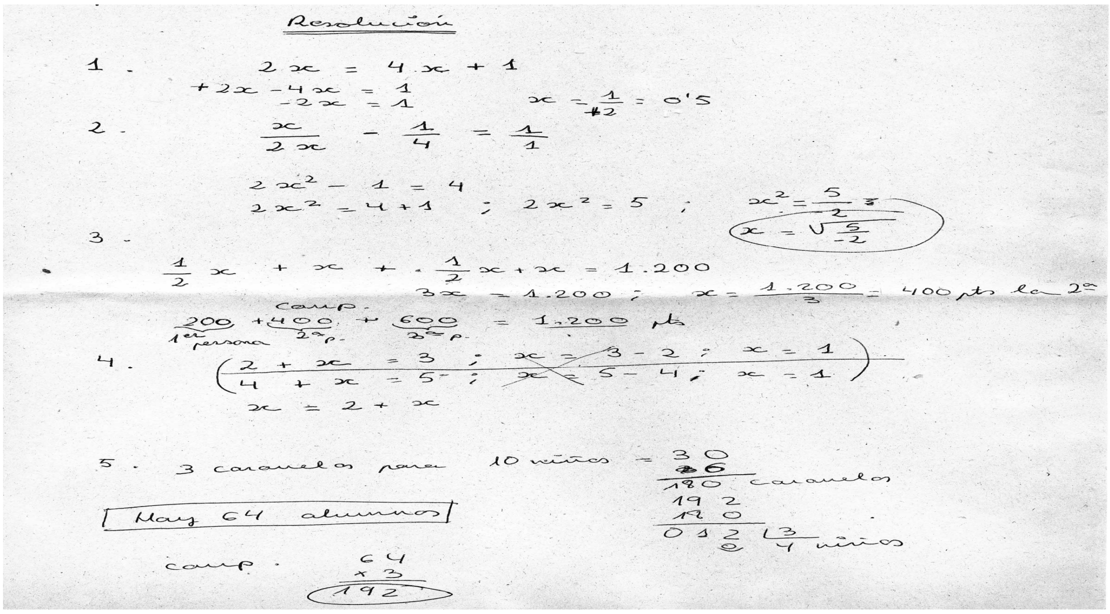
$x = \frac{50 \cdot 22}{30} = 36'6$ días

30 hombres trabajan durante 35'4 días

INB "Virrey Morcillo". Villarrobledo. Albacete.

Curso 1º.

test-1



Resolución

1. $2x = 4x + 1$

$+2x - 4x = 1$ $\quad x = \frac{1}{\cancel{+}2} = 0'5$

$-2x = 1$

2. $\frac{x}{2x} - \frac{1}{4} = \frac{1}{1}$

$2x^2 - 1 = 4$

$2x^2 = 4 + 1$; $2x^2 = 5$; $x^2 = \frac{5}{-2}$; $x = \sqrt{\frac{5}{-2}}$

3. $\frac{1}{2}x + x + \frac{1}{2}x + x = 1.200$

$3x = 1.200$; $x = \frac{1.200}{3} = 400$ pts la 2ª

comp.

$200 + 400 + 600 = 1.200$ pts

1ª persona 2ª p. 3ª p.

4. $\left(\begin{array}{l} 2 + x = 3 \; ; \; x = 3 - 2 \; ; \; x = 1 \\ 4 + x = 5 \; ; \; x = 5 - 4 \; ; \; x = 1 \end{array} \right)$

$x = 2 + x$

5. 3 caramelos para 10 niños = 30

$\times 6$ (36)

180 caramelos

19 2

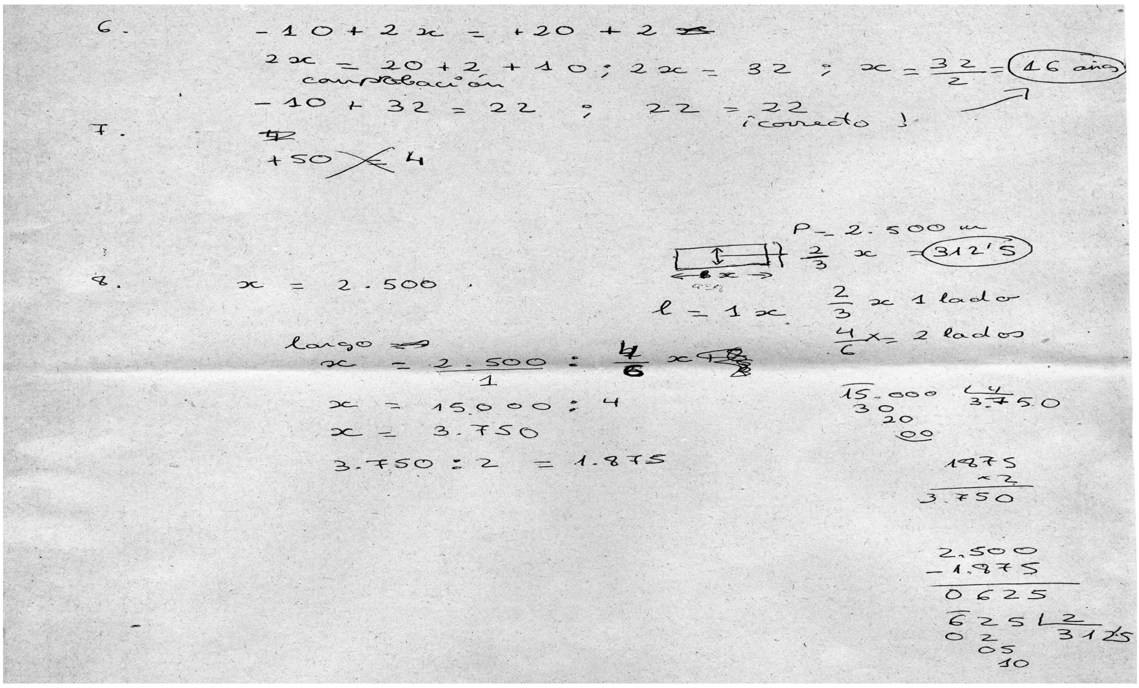
18 0

0 1 2 | 3

4 niños

Hay 64 alumnos

comp. $64 \times 3 = 192$



6. $-10 + 2x = +20 + 2x$

$2x = 20 + 2 + 10$; $2x = 32$; $x = \frac{32}{2} = 16$ años

comprobación

$-10 + 32 = 22$; $22 = 22$ ¡correcto!

7. ~~4~~

$+50 \cancel{\times} 4$

8. $x = 2.500$

P = 2.500 m

$\frac{2}{3}x = 312'5$

$l = 1x$ $\quad \frac{2}{3}x$ 1 lado

$\frac{4}{6}x$ = 2 lados

largo

$x = \frac{2.500}{1} : \frac{4}{6}$

$x = 15.000 : 4$

$x = 3.750$

$3.750 : 2 = 1.875$

15.000 | 4 → 3.750

1875 × 2 = 3.750

2.500 − 1.875 = 0625

625 | 2 → 312'5

test-2

Mª José Castillo Cañadas, 1º

SOLUCIÓN

$14x = -28$

$x = \frac{-28}{14} = -2$

1. $\frac{x}{4} = 4x+1 + 4x+2 + 4\cdot(x+3)$

$\frac{x+4}{4} = x$

1º = $x+1$
2º = $x+2$
3º = $x+3$
4º = $x+4$

$\frac{x}{4} - \frac{4x}{1} + \frac{1}{1} + \frac{4x}{1} + \frac{2}{1} + 4\cdot(x+3) + \frac{x+4}{4} = \frac{x}{1}$

$\frac{4x}{1} + \frac{3}{1} +$

$x - 16x + 4 + 16x + 8 + 16x + 12 + x + 4 = 4x$

$x - 16x + 16x + 16x + x - (4x) = -4 - 8 - 12 - 4$

2. 3 días —— 6 ha
5 días —— x

$x = \frac{5\cdot 6}{3} = \frac{30}{3} = 10$ ha

~~En 5 días trabajan 10 ha~~

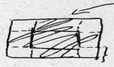
5 días —— 12 ha
x —— 6 ha
$x = \frac{5\cdot 6}{12} = \frac{30}{12} = 2'5$ días

3 días —— 6 ha
6 días —— x

$x = \frac{6\cdot 6}{3} = \frac{36}{3} = 12$ h

~~En 6 días 12 h, en 3 días 6 ha~~

3. 300 cm² la base



Superficie del cuadrado $= l^2 = 2^2 = 4$

4 cm² = 1 cuadrado

$4\cdot 4 = 16$ cm² los 4 cuadrados

S. ~~total~~ = 300 + 16 = $\boxed{316 \text{ cm}^2}$

316 + 32 = $\boxed{348}$ es la S. total

4. $x = 40 + (2\cdot 22)$

$x = 40 + 44$

$x = \boxed{84}$ ~~años han de transcurrir~~

comp

$84 = 40 + 44$

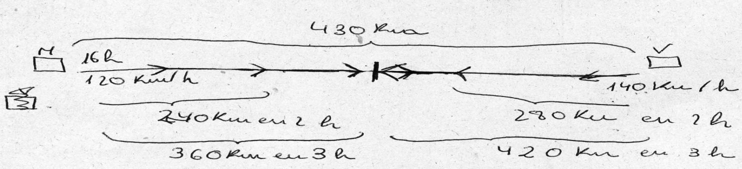
$84 = 84$

5. $x = 2x + 1$

$-7x + x + 1 = 2x + 1$

190
35
225

6.



7. ~~3 = 8x~~

$+\frac{3}{2}$

24 billetes de 3 rublos

8. 1º = x ; 2º = $x+1$; 3º = $x+2$; 4º = $x+3$
5º = $x+4$

$\frac{8.591}{5} = \frac{x+1}{1}\cdot\frac{3}{4}x + \frac{x+2}{1}\cdot\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{x+1}{1}\right)$

$34364 = 20x + 20\cdot 15x + 20x + 40\cdot(15\cdot 20x + 20)$

$34.364 = 20x + 20\cdot 15x + 20x + 40\cdot(300x + 20)$

$34.364 = 20x + 20\cdot 15x + 20x + 40\cdot 320x$

$34.364 = 20x + 20\cdot 15x + 20x + \cancel{40}\ 12.800$

$34.364 = 20x + 300x + 20x + 12.800$

~~$20x$~~

~~$20x$~~ ~~34.364~~

$-20x - 300x - 20x = +12.800 - 34.364$

$-340x = -21.564$

$x =$

-34.364

Curso 2º

test-1

1/ $\frac{x}{y=x+2} = \frac{1}{4} = 1$

x = numerador

y = denominador

2º/ x = paginas debo escribir al día

y = ~~día~~ tiempo lo previsto

$x + 2 = y - 3$

$x + 4 = y - 6$

3º/ $x - 10y = \frac{x}{2}$;

$\left.\begin{array}{l} x + 10y = \frac{x}{2} \\ x + 20y = x \cdot 2 \end{array}\right\}$

x0 = x = mi edad actual

años = y

$x + 20y = x \cdot 2$

4º/ x = salto del galgo

y = salto de la liebre

$2x = 3y$

$4y$

5º/ edad mi hermano = x

" mía = y

8º x = la herencia

$x = \frac{1}{2}x - 3000 + \frac{1}{3}x - 1000 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{5}x + 600$

5º/ $A = \frac{b \times a}{2}$; b − 10% ; a − 10% = $A = \frac{b - 10\% \cdot a - 10\%}{2}$

7º/ x = Kilometros, distancia

y = tiempo de vuelo, tiempo del carburante

$\left.\begin{array}{l} 220x = 4y \\ 220x - 20x = 2 \end{array}\right\}$ $220x = 4y$; $200x = 2$; $\cancel{220 - 20x} + 20x$; $220x - 20x + 2$

test-2

1º) ~~4 4+1+1+1+1+1~~

$y = x + x + x + x$

$y = (x - 4) + (x + 2) + (x \cdot 4) + \left(\frac{x}{4}\right)$

5º] 1º = x = 1ª persona

2º = y = 2ª ''

$x = 2y$

$(x - 7) + (y - 7) = x$

2º] ~~72 hombres — 72 días~~

~~30 '' — x~~

~~$x = \frac{30 \cdot 72}{72}$~~

6 = 2 días

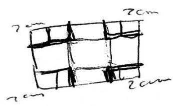
6 = 3 días

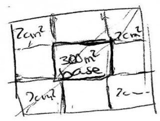
8º) 8591

x = la primera

$8591 = x + 3/4\,x + (3/4\,x)\,3/4 + (3/4\,(3/4\,x))\,3/4 + [3/4\,(3/4\,x))\,3/4]\,3/4$

7º)





~~$y = 3x + 8$~~

x = billetes de 3 rublos

y = '' '' 5 rublos

$x + 8 = y$

test-3

1º x = número

$(1/2\,x) + \frac{1}{3}x = \frac{1}{4}x - 7$

2º x = suma de dinero
y = cierto número niños

$x + 2 = y - 100$
$x - 2 = y + 200$

3º x

y $+2/3x$

$A = b \times a$

$x = 2/3x = y$
$(x+2)\cdot(2/3x)+2 = y + 64m^2$

3º x = un número

$(1/2x - 1) =$ resto

$\frac{(\frac{1}{2}) \cdot 2 - 2}{4} = x + 1$

$2x - 1 = r$

$\frac{(r \cdot 2) - 2}{4} = \cancel{x} + 1$

?º x = edad Pedro
y = " Juan

$x = 2y$
$2y + x = 63$

7º x = Kg heno almecenado
y = días

$x = 40y$

$x + 9000Kg = 60y$

40 Km/h 80 Km/h 2 horas después

4º A D

A D se encuentra
coche Z coche Y
- 120 - 80 60
200 - 180
240 - - 240 Km se encuentran

Curso 3º

test-1

8) 1º → $\frac{x}{2} - 3000$
2º → $\frac{x}{3} - 1000$
3º → $\frac{x}{4}$
4º → $\frac{x}{5} + 600$ } x

$\frac{x}{2} - 3000 + \frac{x}{3} - 1000 + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} + 600 = \cancel{x}$

$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} = 4000600$

$\frac{30x + 20x + 15x + 12x}{60} = 3400$

$x = \boxed{Y}$ fortuna total

Y luego sustituimos en cada uno de los hijos, ~~el valor~~ la x por el valor de esta, sabiendo así lo que obtuvo cada hijo.

4) liebre ⇒ 50 saltos + x
galgo ⇒ x
4 liebre ~~=~~ } 2 galgo = 3 liebre
3 galgo
(galgo = x
liebre = y)

2x ⟶ 3y
3x ⟶ ?
$? = \frac{9}{2} = \boxed{4'5\ y}$

Si el galgo cada cuatro saltos que da la liebre, con 3 saltos suyos la pasa con medio salto...

50 saltos que le faltan
4'5 saltos equivalentes a los de la liebre = X saltos equivalentes a los de la liebre

3x ——— 4'5 y
~~X saltos~~ ——— X saltos
i

i = saltos del galgo en sí

Cuando mi hermano tenía mi edad ⟶ x años
~~\#~~ { Ahora ⟶ 3x años + años diferencia

~~hermano~~ { Ahora ⟶ Y años

~~y + 3x + = 96 años~~

Edad mía = $\frac{\text{edad de mi hermano} - \text{años de diferencia}}{2} = M$

Edad de mi hermano = 96 − M

6) $A = \frac{b \cdot a}{2}$; $A' = \frac{(b-10) \cdot (a-10)}{2} = \frac{ba - 10b - 10a + 100}{2}$

$A - A' = ?$

7) 220 Km / h avioneta
20 Km / h viento } velocidad avioneta 240 Km / h

4 horas combustible

3 horas · 240 Km/h = 720 Km ida y vuelta

$\frac{720\ \text{Km}}{2} = 360\ \text{Km}$

le sobra 1 hora de carburante

3) x huevos un comerciante
y huevos otro " } x + y = 100 huevos

x = y + k ⟹ (y+k) + y = 100 huevos

(y + k) pts = y pts

(y + k) ~~+y~~ = 100 huevos
(y + k) ~~−y~~ = 0 pesetas

2y + 2k = 100

y = ? ⟹ x + ? = 100 ⟹ x = ?'

2/ ~~2x pa~~ x ⟹ páginas establecidas / y − plazo de días.
2 + x páginas ——— y − 3 días
4 + x " ——— y − 5 días

test-2

1) número $= 4x$

$x_1 - 4$ } 1ª parte
$x_2 + 4$ } 2ª "
$x_3 \cdot 4$ } 3ª parte
$x_4 : 4$ } 4ª parte

$(x_1 - 4) = y$, $(x_2 + 4) = y$ } $(x_1 - 4) = (x_2 + 4)$

$x_3 \cdot 4 = y$, $x_4 : 4 = y$ } $4x_3 = \frac{x_4}{4}$

Igualar

2) Juan cava 3 ha diarias
Antonio cava 2 ha diarias

Entre los dos ~~tardan~~ cavan 5 ha diarias
y como el campo es de 6 ha,
tardarán 1 día y la ~~sexta~~ quinta parte del siguiente día

3) $x =$ un prado
$2x =$ otro prado
~~hay dos~~ segadores ?

5) si 72 h $\xrightarrow{\text{trabajan en}}$ 72 días
50 h $\longrightarrow$ x

$x = \underline{50 \text{ días}}$

Los 30 hombres de más deben trabajar $72 - 50 = \underline{22 \text{ días}}$

6) x edad de uno
$2x$ edad de otro

$x - 7 + 2x - 7 = x$

$3x - x = 14$

$2x = 14$

$\boxed{x = 7 \text{ años}}$ el 1º

$\boxed{2x = 14 \text{ años}}$ el 2º

test-3

1) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 7 + \frac{x}{4}$

$\frac{3x+2x}{6} = 7 + \frac{x}{4}$

$\frac{3x+2x}{6} = \frac{28+x}{4}$

$4\cdot(3x+2x) = 6(28+x)$

$12x+8x = 168+6x$

$12x+8x-6x = 168$

$14x = 168$

$x = \frac{168}{14}$ $\boxed{x = 12}$

5) $\frac{2}{3}x$; x

$A_1 = \left(\frac{2}{3}x\right)\cdot x = \frac{2x^2}{3}$

$A_2 = \left(\frac{2}{3}x+2\right)\cdot(x+2) = \frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 2x + 4 =$

$= \frac{2x^2+4x+6x+12}{3}$

$= \frac{2x^2+10x+12}{3}$

$\cancel{A_1 = A_2}$

$A_1 + 64 = A_2$

$64 + \frac{2x^2}{3} = \frac{2x^2+10x+12}{3}$

$\frac{192+2x^2}{3} = \frac{2x^2+10x+12}{3}$

$576+6x^2 = 6x^2+30x+36$

$576+\cancel{6x^2}-\cancel{6x^2}+30x-36 = 0$

$-30x = -540$; $30x = 540$

$\boxed{x = 18\ m}$ ancho

ETC.

8) ~~x = número inicial~~

$\cancel{\frac{(2x-1)\cdot 2 - 2}{4} = x+1}$

$\cancel{\frac{(4x-2)-2}{4} = x+1}$

$(2x-1)$

$x-(2x-1) = -x+1$

$(-x+2)2 - 2$

$x-(-x+2)2-2 = \cancel{x+x-2}$

$= x-(-2x+4)-2 = x+2x-4-2$

$\frac{x+2x-6}{4} = x+1$

$\frac{3x-6}{4} = x+1$

$3x-6 = 4x+4$

$\boxed{x = 2}$

6) $300\ m^2$; x ; $\frac{x}{2}$; $x-4$; $\frac{x}{2}-5$

$300 = \frac{x}{2}\cdot x$; $A_2 = \left(\frac{x}{2}-5\right)\cdot(x-4)$

$300 = \frac{x^2}{2}$; $A_2 = \frac{x^2}{2} - \frac{4x}{2} - 5x + 20$

$600 = x^2$; $A_2 = \frac{x^2-4x-10x+40}{2}$

$x = \sqrt{600}$; $2A_2 = x^2-4x-10x+40$

$x =$; $2A_2 = x^2-14x+40$

Ecuación de 2º grado o sustituir por valor x

2) x = nº niños; y = dinero total

$(x+2)\cdot\left(\frac{y}{x}-100\right) = y$

$(x-2)\cdot\left(\frac{y}{x}+200\right) = y$

3)

INB "Benliiure" . Valencia.

Curso 1º.

test-1

1) Entero $\rightarrow x$

$2x = 4 \cdot (x-1)$

2) $\frac{x}{x+2} - \frac{1}{4} = 1$

3)

1pers $\rightarrow x$
2 pers $\rightarrow 2x$
3 pers $\rightarrow 3x$

$x + 2x + 3x = 1200$

4) paginas x
dias 7

$\frac{x+2}{7-3} = \frac{x+4}{7-5}$

5) 120 chocolates
192 caramelos.

$\frac{192}{x+3} = \frac{120}{x}$

1º $\frac{192}{x+3}$

2º $\frac{120}{x}$

6) $x - 10 = \frac{x}{2}$
$x + 20 = 2 \cdot x$:

7) liebre $4x$
galgo $3x$

$x = 7 + 50$.
$27 = 3x$
$4x = 34 + 50$.

8) $2x + 2 \cdot (\frac{2}{3} x) = 2500$.

largo $= x$
ancho $= \frac{2}{3} x$

test-2

4) $2 \cdot (22 + x) = 40 + x$

$44 + 2x = 40 + x$

$44 - 40 = x - 2x$

$4 = -x$

$\boxed{-4 = x}$

5) 1 pers → x
2º pers → 2x

$(2x - 7) + (x - 7) = x$

7) $3x + 8 = 5x$

$8 = 5x - 3x$

$8 = 2x$

$\frac{8}{2} = x$

$\boxed{4 = x}$

8. pts → 8591

1ª → x

2º → $\frac{3}{4}x$

3º → $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}x = \frac{9}{16}x$

4º → $\frac{3}{4} \cdot \frac{9}{16}x = \frac{18}{54}x$

5ª → $\frac{18}{54}x \cdot \frac{3}{4} = \frac{54}{216}x$

$x + \frac{3}{4}x + \frac{9}{16}x + \frac{18}{54}x + \frac{54}{216}x = 8591$

3)

Curso 2º

test-1

1) $\frac{1}{4} - \frac{x}{6} = 1$

2) x = Número de página

$x+2 \Rightarrow 3$ acabar

$y \Rightarrow$ tiempo.

$x+2 = y-3 \Rightarrow x = y-3-2 \Rightarrow x = y-5$

$x+4 = y-5$ }

7) $v = 220$ Km/h $t = 4h$

$\bar{v} = 20$ Km/h

$v = 220 + 20 = 240$ Km

$Km = \frac{240}{4} = 60Km$

3) x = edad de ahora

y = el tiempo

$x - 10 = \frac{x}{2}$

$x + 20 = 2x$

4) x = saltos

$\{(4 \cdot 3) y + (3 \cdot 2) x = 50$ x = saltos de galgo y = saltos de la liebre

$2x = 34$

5) x = edad1

y = edad2 } $x + y = 96$

$3y = x$

8) x = fortuna

1º hijo $= \frac{x}{2} - 3000$

2º hijo $= \left(\frac{x}{2} + 3000\right) - 1000$

3º hijo $= \frac{x}{4}$

4º hijo $= \frac{x}{5} + 600$

6) $A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{(x-10) \cdot (y-10)}{2}$

$A = \frac{2 \cdot 4}{2} = 2$

10 — 100%   10 — 100

2 — x   4 — x

x = 20%   40%

test-2

(8)

total → 8591

1ª — x

2 — $\frac{3}{4}x$

3 — $\frac{3}{4}$ de $\frac{3}{4}x$

$$8591 = x + \frac{3x}{4} + \frac{9x}{16}$$

(5) $x = 24$

$(x-7)+(4-7)=x$

(1)

$a-4=x$

$b+4=x$

$c \cdot 4 = x$

$\frac{d}{4}=x$

$$4x = (a-4)+(b+4)+(c\cdot 4)+\frac{d}{4}$$

(7)

$x \to$ rublos

$4 \to$ [illegible]

$3x+8=5x$

$x = 5$

(2)

$2x=6$

$3y=6$

(3)

$S=l^2$

$S=2^2=4$

$S=4\cdot 4=16$

(4)

72 → 72

50 → x $\quad x=3$

72 → 72 $\quad x=50$

30 → x

$50+30=80$

$80-72=8$

$30-8=22$

(6)

test-3

① $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 7 + \frac{x}{4}$

x=número

② y=número de niñas

x= cantidad de dinero

$2 + y = x - 100$

$y - 2 = x + 200$

③ x=edad de Pedro

y = edad de Juan

$x = 2y$

$x + 2y = 63$

④ ~~y=horas~~

~~y=kilometros~~

~~$40y = 60y$~~

x=velocidades.

~~$y = 40x$~~ y=km

~~$= 40y + 100$~~

$40y = 60y + 2y$

④ x=días

y=cantidades de heno

$x = 40y + 100$

$y = 40x$

⑥ 4

⑧ $x = \frac{2(2x-1)-2}{4}$

⑤ x $\frac{2x}{3}$

$a_f = b \cdot c - a$ $x \cdot \frac{2}{3}x$

Curso 3º

test-1

3/

$$\begin{array}{r} 45000 \\ 20000 \\ \hline 65.000 \end{array}$$

65.000 ——— 100
20.000 ——— x

$x = \frac{20.000 \cdot 100}{65.000} = 30'7$ cartones el de 20.000 pts

El que gana 45.000 pts tiene 69'3

4/

Liebre ——— Galgo

50 saltos

4x = saltos de la liebre

4x = 3y

2y = 3x

$\left.\begin{array}{l} 4x-3y=0 \\ 2y-3x=0 \end{array}\right\}$

5/

y = mi hermano

x = 40

$y = \frac{x}{3}$

~~x = 4 · 48~~

3x = 4

$x = \frac{4}{3}$

$\left.\begin{array}{l} 96 = x+4 \\ 4 = 3x \end{array}\right\}$ 96 = 3x + x

96 = 4x

96/4 = x

x = 24

x = 3·4

96 = 3y + 4

x = 72 años

6/ x: herencia

1º $\frac{x}{2} - 3000$

2º $\frac{x}{3} - 1000$

3º $\frac{x}{4}$

4º $\frac{x}{5} + 600$

$x = \left(\frac{x}{2} - 3000\right) + \left(\frac{x}{3} - 1000\right) + \left(\frac{x}{4}\right) + \left(\frac{x}{5} + 600\right)$

$\frac{60x}{60} = \frac{30x - 180.000 + 20x - 60000 + 15x + 12x + 36000}{60}$

$60x = 30x - 180.000 + 20x - 60000 + 15x + 12x + 36000$

$60x = 77x - 204000$

$204000 = 17x$

$x = \frac{204000}{17} = 12000$ libras

Cada hija recibió 3000 libras.

test-2

1

$$\frac{x}{4} - 4 = \frac{x}{4} + 4 = \frac{4x}{4} = \frac{\frac{x}{4}}{4}$$

7

$x_A = x_{0A} + V_0 t$

$x_B = x_{0B} - V_0 t$

$x_A = x_B$

$x_A = 0 + 33'3t$

$x_B = 430.000 - 38'8t$

$33'3t = 430.000 - 38'8t$

$72'1t = 430000$

$t = \frac{430.000}{72'1} = 5963\ s$

$x_A = 33'3 \cdot 5963$

$x_T = 198599\ m$

6

x 2 per

$2x$ 1 per

$(x-7) + (2x-7) = 2x$

3

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{4} = 1$$

8

$x \cdot 3 + 8 \cdot 3 = x \cdot 5$

$3x = 24 = 5x - 3x$

$24 = 2x$

$\boxed{x = 12}$

test-3

①

x = numero

$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = \cancel{7}\,\frac{x}{4}$

③

x – mi edad

y = tu edad

$2y = x$

$x + 2y = 63$

⑤ largo = x

ancho = $\frac{2}{3}x$

$x + 2 \cdot \frac{2}{3}x + 2 = 64$

⑥

largo x

ancho = 2x

$(x-5) \cdot (2x-4) = 300$

⑧

$2x-1 + 2(2x-1) + 2(2x-1) - 2 + \frac{2(2x-1)-2}{4} = x+1$

Anexo 5.1.- Listado de las producciones encontradas en las resoluciones de los problemas. Cursos y frecuencia[61]

Subfamilia : Ábaco

Problema: MITAD Y TERCERA PARTE

Estoy pensando en un número tal que la suma de su mitad y su tercera parte es 7 unidades mayor que su cuarta parte. ¿Cuál es dicho número?			
Producciones correctas	**1º**	**2º**	**3º**
1 $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=\frac{x}{4}+7$	29	59	54
2 $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}-7=\frac{x}{4}$		3	1
3 $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}-\frac{x}{4}=7$			1

Estoy pensando en un número tal que la suma de su mitad y su tercera parte es 7 unidades mayor que su cuarta parte. ¿Cuál es dicho número?			
Producciones incorrectas	**1º**	**2º**	**3º**
1 $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=7\frac{x}{4}$	7	7	12
2 $x+\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=\frac{x}{4}+7$	14	7	1
3 $x+\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=7\frac{x}{4}$	7	5	
4 $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=\frac{x}{4}-7$	3	3	
5 $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=7(\frac{x}{4}-x)$	1	1	

[61] En la lectura de las frecuencias de cada producción debe de considerarse que éstas provienen de 91,92 y 75 alumnos de 1º,2º y 3º de bachillerato respectivamente.

6 $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+7=\frac{x}{4}$	1		1
7 $x+2+3=7+\frac{1}{4}$	2		1

8 $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=7-\frac{x}{4}$	2		
9 $\frac{x}{2}+x=7\frac{x}{4}$	1		
10 $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=\frac{x+7}{4}$	1		
11 $\frac{2}{x}+3/x=\frac{4}{x}+7$ *	2		
12 $\frac{x}{2}+x=7$	1		
13 $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=x-7$	1		
14 $x+\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=\frac{4}{1}+7$	1		
15 $x+\frac{1}{2}x+\frac{3}{1}=\frac{4}{1}x+7$	1		
16 $\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x}=\frac{1}{4}+7$	1		
17 $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}7=x$	1		
18 $x+\frac{x}{2}+\frac{x}{3}-7=\frac{x}{4}$		2	
19 $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=x+7+\frac{x}{4}$		1	
20 $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+7=x$		1	

Problema: DESCOMPONER EN 4 PARTES

DESCOMPONER EN 4 PARTES.- Descomponer un número en cuatro partes de modo que si se resta 4 de la primera, se suma 4 a la segunda, la tercera se multiplica por 4, y la cuarta se divide por 4, se obtiene el mismo número en todos los casos.

Producciones correctas	**1º**	**2º**	**3º**
1 $a+b+c+d = n$ $a–4=x \quad b+4=x \quad c*4=x \quad d:4=x$	1	5	12

Producciones incorrectas	**1º**	**2º**	**3º**
1 $(x–4) +(x+4)+ 4x +\frac{x}{4} = x$	12	9	4
2 $\frac{x}{4} –4 + \frac{x}{4} +4 +4\frac{x}{4} +\frac{x}{4} : 4 = x$	8	11	1
3 $\frac{x}{4} –4 = y \quad \frac{x}{4} +4 = y$ $\frac{x}{4} \infty 4 =y \quad \frac{x}{4} :4 = y$	2	3	1
4 $a–4=x \; b+4=x \quad c*4=x \; d:4=x$	2	3	20
5 $(x–4) +(x+4)+ 4x +\frac{x}{4} = \frac{x}{4}$	4	2	
6 $x–4=y \quad x+4=y \quad 4x=y \quad x : 4=y$	2	8	
7 y – número a descomponer $(y–4)+(y+4)+4y+\frac{y}{4} = x$	1	1	
8 $\frac{x}{4} –4=a–4 \quad \frac{x}{4} +4=b+4$ $\frac{x}{4} *a=c*4 \quad \frac{x}{4} :4=d:4$	1	1	
9 $x = (a–4)+(b–4)+(4c)+(d:4)$	2		2
10 $\frac{x}{4} –4 = \frac{x}{4} +4 = \frac{x}{4} *4 = \frac{x}{4} : 4$		5	5

11 $a–4=x$ $b+4=x$ $c*4=x$ $d:4=x$ $x=(a–4)+(b+4)+(c*4)+(d:4)$		4	1

12 $(x–4)+(x+4)+4x+\frac{x}{4}=4x$	1		
13 $(x–4)=(x+4)=4x=\frac{x}{4}$	1		
14 $x=a+b+c+d$ $a–4=x$ $b+4=x$ $c*4=x$ $d:4=x$	1		
15 $\frac{x}{4}–4=y$ $\frac{x}{4}+4=y$ $(\frac{x}{4}–4)+(\frac{x}{4}+4)+(\frac{x}{4}\ 4)+(\frac{x}{4}:4)=x$		7	
16 $(x–4)(x+4)(4x)(x:4)=x$		3	
17 $(\frac{x}{4}–4)(\frac{x}{4}+4)(4\frac{x}{4})(\frac{x}{4}:4)=x$		3	
18 $y=x+x+x+x$ $y=(x–4)+(x+4)+(4x)+(x:4)$		2	
19 a, b, c, d $(a–4)+(b–4)+c*4+(d:4)=abcd$		1	
20 $x–4=a$ $y+4=b$ $z*4=c$ $t:4=d$ $x+y+z+t=n$		1	
21 $x–4=x$ $x_1+40=x_1$ $x_2*4=x_2$ $x_3:4=x_3$		1	
22 $(\frac{x}{4}–4)(\frac{x}{4}+4)=(\frac{x}{4}*4)(\frac{x}{4}:4)$			1

Subfamilia: Edades

Problema: EDAD DOBLE

La edad de una persona es doble de la de otra. Hace siete años la suma de las edades de las dos personas era igual a la edad actual de la primera. ¿Cuál es la edad de cada una?

Producciones correctas	1º	2º	3º
1 $(2x-7)+(x-7)=2x$	18	9	16
2 $x=2y \quad (y-7)+(x-7)=x$	4	6	10
3 $y=\frac{x}{2} \quad (y-7)+(x-7)=x$	2	2	1
4 $x=2y \quad (x-7)+(y-7)=2y$		19	14
5 $2x+x-14=2x$		1	
6 $(x-7)+(\frac{x}{2}-7)=x$		1	

Producciones incorrectas	1º	2º	3º
1 $(x-7)+(2x-7)=x$	9	15	5
2 $(2x+x)-7=2x$	15	1	2
3 $x=2y \quad (x+y)-7=x$	1	2	7
4 $y=2x \quad (x+y)-7=2x$	1	2	1
5 $2x+x-7=x$	4	1	
6 $x=2y \quad x+y=x+7$	2	2	
7 $x,2y\ 7(x+2y)=x$	1		1
8 $7-(2x+x)=2x$		1	1

9 y=2x (x–7)+(y–7) = x		2	2

10 (x+7) + (2x+7) = x	1		
11 (x–7) + (2x+7) = 2x	1		
12 7–x+2x = x	1		
13 7+x+2x = x	1		
14 (1x*2 +2x) – 7 = 1x	1		
15 x=2x, hace siete x+2x=x	3		
16 y=2x x+y – 7 = x+7	1		
17 y=2x 7–x+y = x	1		
18 x–1º 2x–2º 7+x+2x=x x+2x=y	1		
19 x,y x=2y x+y=7x	1		
20 2x–7 = 2x+x		1	
21 (7–x) +(2x–7) = 2x		1	
22 (x+7) + (2x–7) = x		2	
23 x=2y (x–7)=(y–7)=2x		4	
24 x=2y –7(x+2y) = x		4	
25 x=2y 2x–7+y–7 = 2x		1	
26 x=2y (7–x)+(7–2y) = x		1	
27 x=2y (x+2y)–7=x		1	
28 x=2y x+y=x		1	
29 x=2y (x–7)+(2y–7)=x			5
30 x=2y x–7 +2y = x			2
31 y=2x 7+2x+y = 2x			1

32 $y=\frac{x}{2}(x+y)-7=x$			1
33 $2y=x$ $2x+y$ $2y+x-7=2y$			1

Problema: PEDRO Y JUAN

PEDRO Y JUAN.- Pedro dice a Juan: Tengo dos veces la edad que tenía cuando tenía la edad que tienes tú. Cuando tú tengas la edad que yo tengo ahora, entre los dos tendremos 63 años. ¿Cuáles son nuestras edades actuales?

Producciones correctas	**1º**	**2º**	**3º**
1 $p=2j$ $p+p+j=63$	3	2	4
2 $p=2j$ $2j+p+j=63$		3	3
3 $p/2=j$ $p+(p+(p-j))=63$	1		
4 $p=2j$ $j+p/2+p+p/2=63$			1
5 $(2j+j)+(j+j)=63$	2		1
6 $2j+j+2j=63$	3		

Producciones incorrectas	**1º**	**2º**	**3º**
1 $p=2j$ $p+2j=63$	7	27	3
2 $p=2j$ $2j+j=63$	16	1	2
3 $2p=j$ $p+j=63$	4	7	3
4 $2p=j$ $2p+j=63$	1	8	4
5 $j, 2j$ $2j+4j=63$	2	2	3
6 $j, 2j$ $2j+2j=63$	2	1	2
7 $p+j=63$ $2p-j=j$	1	2	
8 $2p=1/2j$ $p+j=63$	1	1	

9 p = 2j p+j = 63	3		9
10 1/2 p = j 2j+p = 63	1		1
11 j, 2j 2j+j = 63		1	5
12 p=2j cuando j=p p=p+(p–j)		2	1
13 j, 2j 2j+2j+p = 63		1	1

14 2j+j=j+p j+p = 63		1	
15 p,j 2p+j+2p = 63		2	
16 2p=j cuando j=p p+j = 63		1	
17 j=2p j=p		1	
18 Pedro x antes Pedro 2x ahora Juan x/2 antes Juan x ahora 2x+x =63		1	
19 antes futuro *y* tiempo transcurre J–x J–2x P–2x P–63–x x+y =2x 2x+y=63–x		2	
20 J–x P–y P–J–z x–z=y x=2(x–z) x+(x+z)=63			2

Subfamilia: Geometría.

Problema: TERRENO

TERRENO.- El ancho de un terreno rectangular es 2/3 de su largo. Si ambas dimensiones se aumentan en 2m, el área aumenta en 64 m^2. ¿Cuáles son las dimensiones de este terreno?

Producciones correctas	**1º**	**2º**	**3º**
1 $(x+2)(\frac{2}{3}x+2)=x\frac{2}{3}x+64$	8	2	3

3 $y=\frac{2}{3}x \qquad (x+2)(y+2)=xy+64$	1	1	5
2 $y=\frac{2}{3}x\infty x \qquad y+64=(x+2)(\frac{2}{3}x+2)$		15	20

Producciones incorrectas	**1º**	**2º**	**3º**
1 $(\frac{2}{3}x+2)(x+2)=64$	13	5	19
2 $x=\frac{2}{3}y \qquad (x+2)(y+2)=64$	1	1	8
3 $x+\frac{2}{3}x+2+2=64$	4	4	2
4 $(\frac{2}{3}x+x)2=64$	2	1	
5 $x=\frac{2}{3}y \qquad (x+2)(y+2)=a+64$	1	2	
6 $(x+2)(\frac{2}{3}x+2)=a+64$	1	1	
7 $A=(\frac{2}{3}l+2)(a+2)$		1	1
8 $(x+2)(y+2)=64$	1		
9 $x\infty\frac{2}{3}x+64=y$	1		
10 $2x\infty 2y=64$	1		
11 $(\frac{2}{3}x+x)2=64+\frac{2}{3}x\infty x$	1		
12 $\frac{2}{3}x+x+2=3996$	1		
13 $\frac{2}{3}x+x+2=64$	1		

14 $x+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}x+2=64$	4		
15 $2(2x+2)+2(\frac{2}{3}x)=64$	2		
16 $x+\frac{2}{3}x=64$	1		
17 $2x+\frac{2}{3}=64$	1		
18 $2+\frac{2}{3}x=64$	1		
19 $2\infty\frac{2}{3}x+x+2=64$	1		
20 $2(x+2)+2(\frac{2}{3}x+2)=64$ $+2x+\frac{4}{3}x$	1		
21 $2(2x+2)+2(\frac{2}{3}x+2)=y+64\infty64$	1		
22 $a=\frac{2}{3}x+x$	1		
23 $(\frac{2}{3}x\infty2)(x\infty2)=64$		6	
24 $x=\frac{2}{3}y$ $(x+2)(y+2)=4x+64$		3	
25 $\frac{2}{3}x+x=y$ $\frac{2}{3}x+x=64$		1	
26 $x+2=\frac{2}{3}$ $y+2\,x\infty y=64$		1	
27 $\frac{4}{3}\infty2x=64$ $x=\frac{2}{3}y$		1	
28 $x+2=y+64$ $\frac{2}{3}x+2=y+64$		1	
29 $a=\frac{2}{3}l$ $a+2=\frac{2}{3}l+2$		1	

30 $x+2=64 \quad \frac{2}{3}x+2=y$			3

Subfamilia : Móviles

Problema: ALCANZAR

ALCANZAR.-Un automóvil parte de un punto A con velocidad uniforme de 40 km/h hacia otro punto B. Dos horas después sale de A hacia B otro automóvil con velocidad uniforme de 60 km/h. Dígase a qué distancia de A se encuentran.

Producciones correctas	1º	2º	3º
1 $40x=60(x-2)$		4	26
2 $40(x+2)=60x$		1	5
3 $x=40t \ x=60(t-2)$			4
4 $\frac{60t}{t+2}=40$	1		

Producciones incorrectas	1º	2º	3º
1 $40(x-2)+60x=x$	1		
2 $40\text{-}2x+60 = x$	1		
3 $40y=60y+2y$		5	
4 $\frac{e}{v}=\frac{40}{x} \ \frac{e}{v}=\frac{60}{x-2}$		3	
5 $40x=60x$		2	
6 $40y=60y+2x$		2	
7 $40t+2=60t$		1	
8 $60(t+2)=40t$			6
9 $\frac{x}{y}=40 \ \frac{x}{y+2}=60$			1
10 $x=40t \ x=60t$			1

Problema: ENCONTRAR

ENCONTRAR .-Un tren parte a las 16 h de Madrid con destino a Valencia con una velocidad de 120 km/h. A la misma hora sale de Valencia otro tren con destino Madrid y a una velocidad de 140 km/h. Dígase a qué distancia de Madrid se encuentran y a qué hora, si la distancia Madrid–Valencia es de 430 km.

Producciones correctas	1º	2º	3º
1 430=120x+140x	11	2	3
2 120t= 430 –140t		1	20
3 x=120t 430–x=140t			3
4 $\frac{430-x}{120} = \frac{x}{140}$			1
5 120(t–16)=430–140(t–16)			5

Producciones incorrectas	1º	2º	3º
1 $\frac{120x}{430} = \frac{140y}{430}$		1	2
2 120x+140x2=430	1		
3 120+140+x+ x´= 430	1		
4 16x=120 16y=140	1		
5 120x=430 140y=430	1		
6 x+140+x+120=430		2	
7 120x– 140x=430		1	
8 4(120x+140x)=430		1	
9 x+120=x+140		1	
10 16x+y =120 16x+y =140		1	
11 $y=\frac{430-x}{140}$		1	

Problema: LIEBRE Y GALGO

Una liebre era perseguida por un galgo al que llevaba 50 saltos de ventaja. La liebre daba 4 saltos mientras que el galgo daba 3, pero 2 saltos del galgo miden tanto como 3 saltos de liebre. ¿Cuántos saltos deberá dar el galgo para alcanzar a la liebre?			
Producciones correctas	**1º**	**2º**	**3º**

No se encontró ninguna producción correcta.

Producciones incorrectas	**1º**	**2º**	**3º**
1 3l=2g 4g=3l +50	1	1	1
2 2l=3g g+50=l	2	2	
3 2g=3l g+ 50=l	3		1
4 4l=3g 3l=2g (4 ∗3)l+(3 ∗ 2)g=50		8	1
5 2g=3l 50=3g–4l	1		
6 50g=50l+l	1		
7 liebre–3x galgo–4x l+3x=50+4x	1		
8 50+4x=6x	1		
9 50+4x=3+2x–3x	1		
10 M l———— l—————l 50x N 50x+Nx=My $\frac{M}{N}=\frac{3}{4}$ 2y=3x	1		
11 6g=9l el g. da 9 mientras la l. da 8 9x–8x=50 ∗8	1		
12 2g=3l 50=4l–3g		3	
13 3l=2g 4l=3g –50		2	
14 3l=2g 4l=3g+50		1	
15 2g=3l l+50=4 g–50=3		1	

16	2g=3l 50=4l+3g		1	
17	l+4=g+3 l+50=g		1	
18	4l–3g=50 $\frac{3}{2}$ g + $\frac{2}{3}$ l = 50		1	
19	x–y=50 2x=3y		1	
20	2x=3(x+50)		2	
21	2 ∗4x = 3(x–50)		1	
22	2g=3l 50+4l=3g			7
23	4l=3g 3l=2g l=g+50			1
24	2 ($\frac{g}{3}$) = 3 $\frac{l}{4}$ $\frac{g}{3}$ = $\frac{l}{4}$ + 50 (¡)			1
25	2g=3l 50=4l+3g			1
26	$\frac{x}{2}$ =3 50 +$\frac{x}{4}$ = $\frac{x}{3}$			1
27	x–y=50 4x=3y 2y=3x			1
28	g+50=l 3l+4g=l+g			1
29	l+50+g(2l)=(2l)3			1
30	l–g=50 3 ∗2 l = 3 ∗4 g (¡)			1

Subfamilia: Trabajo.

Problema: CAVAR

La superficie de un campo es de 6 ha. Juan puede cavarlo en 2 días. Antonio lo hace en 3 días. Si trabajan los dos juntos en el campo, ¿cuánto tiempo tardarán en cavarlo?			
Producciones correctas	**1º**	**2º**	**3º**
2 $2x+3x=6$	8	1	3
1 $\frac{6}{3+2}=x$	2	1	1
3 $(3+2)x=6$			2
4 $5x=6$			1
5 $\frac{6}{x}=\frac{6}{2}+\frac{6}{3}$			1

Producciones incorrectas	**1º**	**2º**	**3º**
1 $2x=6\ 3y=6$	1	1	
2 $\frac{1}{x}=\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$		1	1
3 $x+2+3+6=\frac{x}{2}$	2		
4 $\frac{6}{2}+\frac{6}{3}=x$	1		
5 $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=6$	1		
6 $\frac{2x+3x}{2}=6$	1		
7 $3x+2x=12$	1		
8 $2x=6\quad 3x=6\quad 2x+3x=6$		2	
9 $x+y=64\quad 2x+3y=6$		2	

10 $(x+2)+(x+3) = 6$		1	
11 6∞2x=12x 6∞3x=18x 12x+18x=6		1	
12 2x=6 3y+x=6		1	
13 2x=6y 3y=6x x+y=6		1	
14 2x=6 3y=6 2x+3y=6		1	
15 $x+y = \frac{6}{2+3}$		1	

Subfamilia: Otros

Problema: HENO

HENO.-Unos granjeros almacenaron heno para 40 días. Sin embargo el heno era de mejor calidad de la que pensaban y ahorraron 100 kg por día. Así tuvieron heno para 60 días. ¿Cuánto heno almacenaron?			
Producciones correctas	**1º**	**2º**	**3º**
1 $40x + 4000 = 60x$	1	2	
2 $\frac{x}{40} - 100 = \frac{x}{60}$	1		3
3 $y=40x \qquad y=60(x-100)$		1	2
4 $60x = 40(x+100)$		3	
5 $x=40y \qquad x+4000 = 60y$		1	
6 x———$40 \qquad x+4000$———60 $\frac{x}{40} = \frac{x+4000}{60}$		1	
7 $(x-100)60 = 40x$			4
8 $60(\frac{x}{40} - 100) = x$			1
9 $\frac{x}{40} = y \qquad \frac{x}{60} = y-100$			1

Producciones incorrectas	**1º**	**2º**	**3º**
1 $40x = 100 + 60$	1	1	
2 $40-100x = 60$	1	1	
3 $\frac{40}{x} + 100 = \frac{60}{x}$	1	1	
4 $44x+100 = 60$	1	1	
5 $100x = 60y \qquad 40y = x$	2		1
6 $\frac{x}{40} + 100 = 60$		1	1

7	$\frac{x}{60}+100=x$	4		
8	$40+100x = 60$	1		
9	$40x+100+60=x$	1		
10	$\frac{x}{40}-100 = 60$	1		
11	$40x - 100 \infty 40 = 60x$	1		
12	$\frac{x}{40}+(x-100) = 60$	1		
13	$x = 40y \qquad -100x = 60y$	1		
14	$-100y\ x = 60\ x \qquad 40x(-100y)=60x$	1		
15	$x = 40y \qquad x = 40y+100$		8	
16	$40x = y-100 \qquad 60x = y$		4	
17	$40x-100 = 60$		2	
18	$\frac{40}{x+100} = \frac{60}{x}$		1	
19	$\frac{x}{40} = \frac{x-100}{60}$		1	
20	$x = 40y \qquad x+100 = 60y$		1	
21	$x-4000 = 60$			1
22	$\frac{x}{40} = y \qquad y-100 = 60$			1
23	$\frac{x}{40}\ 100 = \frac{x}{60}$			1
24	$\frac{x}{40}+x-100 = x$			1

Problema: RUBLOS

RUBLOS.-Una escuela rusa compra libros para la biblioteca. Si los paga con billetes de 3 rublos, la escuela tiene que dar 8 billetes más que si los paga con billetes de 5 rublos. ¿Cuánto cuestan los libros?

Producciones correctas		1º	2º	3º
1	$3(x+8)=5x$	1	3	1
2	$\frac{x}{3}-8=\frac{x}{5}$	4	1	
3	$3x+3*8=5x$	3		9
4	$\frac{x}{3}-\frac{x}{5}=8$		1	
5	$y=3x$ $\quad$ $y=5(x-8)$		3	
6	$y=5x$ $\quad$ $y=3(x+8)$		1	
7	x– rublos $\quad$ y– billetes $\frac{x}{3}=y+8$ $\quad$ $\frac{x}{5}=y$			3
8	$\frac{x}{3}=8+\frac{x}{5}$			2

Producciones incorrectas		1º	2º	3º
1	$3x+8 = 5x$	7	13	8
2	x– precio $\quad$ y– monedas $y+8=x$	1		1
3	$x=x+8$ $\quad$ 5x lo que cuestan	1		1
4	x– billetes de 5 $\quad$ y– precio $x=y$ $\quad$ $x+8=y$		2	1
5	$x+24=y$	2		

6 3x∗8 = 5x	2		
7 (x+3)8 = 5x	1		
8 x=3x+8 x=5x	1		
9 $\frac{x\infty 3}{8} = 5x$	1		
10 $x + \frac{3}{8} = x+5$	1		
11 y=3x y=5x+8	1		
12 y=5x 3x=y+8	1		
13 3x+8 = y 5y–8 =x	1		
14 3+8y=x 3+5y=x	1		
15 x 1 rublo 3x+8=5x	1		
16 x– 3 rublos x–billetes x–5 rublos 3x+8x+5x=y	1		
17 x=3+x+8+5x	1		
18 x–libros y–rublos y– nº billetes x=3y+8 x=5y		4	
19 3———x+8 5———x $x=\frac{5(x+8)}{3}$		3	
20 3———x+8 5———x 3x=3x+40		2	
21 3x–8= 5x		2	
22 x–valor libros y– billetes de 3 x=8y x=y		1	
23 $\frac{x}{3} + 8 = \frac{x}{5}$		1	
24 x+24 = x		1	
25 x=(y+3)8		1	

26 x=y+5 x=8+(y+5)		1	
27 x – billetes 3 y – billetes 5 8+x=y 3x+3∞8=5y		1	
28 x–rublos y– precio y=3x+8 5x=y			5
29 x–precio y– billetes 3x=8+y y=x+5			1
30 x– libros y– rublos x=y 3y+8=5y			1
31 x– bill 3 y– bill 5 x=y+8 $\frac{x}{3} = y+8$ $\frac{x}{5} = y$			1

Problema: MECA

Una mecanógrafa piensa que si escribe al día 2 páginas más de lo establecido normalmente, acabará el trabajo 3 días antes de lo previsto, mientras que si escribe 4 páginas más al día, acabará 5 días antes de lo previsto. ¿Cuántas páginas tiene que escribir y en cuánto tiempo?

Producciones correctas	**1º**	**2º**	**3º**
1 xy=(x+2)(y–3) xy=(x+4)(y–5)		2	1
3 $\frac{t}{d} = x$ $\frac{t}{d-3} = x+2$ $\frac{t}{d-5} = x+4$	2		
5 $z=\frac{x}{y}$ (z+2)(y–3)=x (z+4)(y–5)=x	1		
2 (x+2)(y–3)=n (x+4)(y–5)=n xy=n			3
4 $(\frac{x}{y}+2)(y-3)=x$ $(\frac{x}{y}+4)(y-5)=x$			1

Producciones incorrectas	1º	2º	3º
1 p+2 = d–3 p+4 = d–5	12	42	21
2 x+2=–3yx+4=–5y	2	3	1
3 x+2=3–yx+4=5–y	1	3	3
4 x+2=3y x+4=5y	1	1	3
5 x+2——y–3 x+4——y–5 (x+2)(x+4)=(y–3)(y–5)	1	2	3
6 x+2=3 x+4=5	3	5	1
7 (x+2)y = y–3 (x+4)y=y–5		2	1
8 x+2=3 y+4=5		2	1
9 $\frac{x+2}{y-3} = \frac{x+4}{y-5}$	3		
10 2x+4x=3x+5x	3		
11 2x=3y 4x=5y 2x+3y=4x+5y	2		
12 x+2=3–xx+4=5–x	2		
13 2x+3=4x+5	1		
14 2x+4x=3+5	1		
15 $x + \frac{x+2}{y-3} = x + \frac{x+4}{y-5}$	1		
16 2+x———y–3 4+x———y–5 (y–3) =y(x+2) x————y (y–5)=y(x+4)	1		
17 2——x+3 4——x+5 2(x+5)=4(x+3)	1		
18 x+2y=y–3 x+4y=y–5		2	
19 x+2x=3yx+4x=5y		2	

20 x+2y=3 x+4y=5		2	
21 x–6=y x–20=y		1	
22 x+2x=y–3y x+4x=y–5y		1	
23 x +2= –3y+4= –5		1	
24 x–2=3 x–4=5		1	
25 x+2=x–3x+4=x–5		1	
26 x+2x=3 x+4x=5		1	
27 y+2(x–3)=y+4(x–5)		1	
28 2+x——y–3 x+4——y–5 x———y x———y x(y–3)=y(2+x)			3
29 (x+2)3=y–3 (x+4)5=y–5			1
30 y=(x+2)pg día(y–3)día=(x+4)(y–5)			1
31 $\frac{x+2}{y} = y–3$ $\frac{x+4}{y} = y–5$			1
32 $\frac{2+x}{3} = \frac{4+x}{5}$ $\frac{2x}{3} + \frac{4+x}{5} = x$			1

9 2-y=100 y-2x=200	2	1	
10 x+2y=-100 x-2y =200	1	1	
11 x/(y+2) = 100 x/(y-2)=200	1	1	
12 (x/y) +2 = x-100 (x/y)-2 =x+200	1	1	
13 y+2 = (x-100)y y-2 = (x+200)y		1	2
14 (x+2)/y = y-100 (x-2)/y = y +200		1	2
15 y =(x+2)100 y = (x-2)200		1	1

Problema: DINERO

Una cierta suma de dinero se repartió a partes iguales entre cierto número de niños. Si hubiera habido dos niños más, cada uno hubiera recibido 100 pts menos; si hubiera habido dos niños menos, cada uno hubiera recibido 200 pts más. ¿Cuántos niños había y cuánto recibió cada uno?			
Producciones correctas	1º	2º	3º
1 c=d/n c+200=d/n-2 c-100= d/n+2	2	1	3
2 (x/y -100) (y+2) =x (x/y +200) (y-2) =x	1	1	1
3 x y = (x+2) (y-100) xy = (x-2)(y+200)	1		1
4 xy=z (x+2) (y-100) =z (x-2)(y+200) =z	2		2

Producciones incorrectas			
1 x+2=y-100 x-2=y+200	14	35	16
2 x+2=100-y x-20=y+200	7	8	4
3 2+y=100-x 2-y=200+x	3	4	1
4 y+2 = (x/y+2) -100 y-2 =(x/y-2)+200	2	4	4
5 (x-2)/(y+200)= (x+2)/(y-100)	2	2	4
6 x/y+2 = z-100 x/y-2 = z+200	1	2	4
7 x+2 = (y/x)-100 x-2 = (y/x) +200	2	3	1
8 (x+2)(y-100) = (x-2)(y+200)	1	2	3
9 2-y=100 y-2x=200	2	1	
10 x+2y=-100 x-2y =200	1	1	
11 x/(y+2) = 100 x/(y-2)=200	1	1	
12 (x/y) +2 = x-100 (x/y)-2 =x+200	1	1	
13 y+2 = (x-100)y y-2 = (x+200)y		1	2

14 (x+2)/y = y-100 (x-2)/y = y +200		1	2
15 y =(x+2)100 y = (x-2)200		1	1
16 x+2x=-100y x-2x=200y	1		
17 x+2x = -100x x-2x=200x	1		
18 x+2 =-100 x-2 = 200	1		
19 x+2-100 = y-2+200	1		
20 (x+2)+(y-100) = (x+2) +(y-200)	1		
21 x+2-100=x-2+200	1		
22 x+2 =x-100 x-2=x+200	1		
23 x+2x=-100 x-2=200	1		
24 2x=-100 -2x=200	1		
25 2+y = x/(y+2)(-100) y-2 = x/(y-2)200	1		
26 x+2=y-100x x-2 =y +200x		1	
27 x+2 =100y x-2 = 200y		1	
28 (x+2)y = y-100 (x-2)y = y +200		1	
29 x/(y+2) = 0 x/(y-2)=0			1

A5.2.- Valores de las variables dependientes: Porcentajes de Igualdades e igualdades correctas, número de producciones correctas e incorrectas.

curso 1º	**%Igualdades**	**% Ig. correctas**	**nº prod. Correc.**	**nº prod. Incorr.**
Alumnos 91	PIG	PC	ProC	ProI
ENTEROS	82,4	49,3	1	10
FRACCIÓN	80,2	38,4	1	15
MIT Y TERC P	83,5	38,2	1	17
DES EN 4 PAR	41,8	2,6	1	12
REP. 1200	62,6	84,2	3	9
REP. ENTRE 5	52,7	35,4	2	16
BOLSAS D CA	70,3	73,4	3	9
LUIS Y SU PAD	35,2	28,1	1	14
HACE DIEZ	56,0	45,1	4	20
EDAD DOBLE	75,8	34,8	3	17
PEDRO YJUAN	51,6	19,1	4	10
PERIMETRO	47,3	60,5	4	11
TERRENO	53,8	18,4	2	24
HOJA DE ALUM	9,9	11,1	1	8
ALCANZAR	2,2	50,0	1	1
ENCONTRAR	16,5	73,3	1	4
LIEBRE Y GALG	12,1	0,0	0	10
CAVAR	17,6	62,5	4	6
ROTATIVA	12,1	0,0	0	4
CHOCO Y CARA	40,7	32,4	6	20
HENO	20,9	10,5	2	13
RUBLOS	36,3	24,2	3	16
MECA	40,7	8,1	2	15
DINERO	58,2	11,3	4	22

Tabla A5.2.1.-Valores de las variables dependientes PIG,PC,ProC.ProI. Curso 1º

curso 2º	%Igualdades	% Ig. correctas	nº prod. Correc.	nº prod. Incorr.
Alumnos 92	PIG	PC	ProC	ProI
FRACCIÓN	92,3	46,4	2	12
MIT Y TERC P	97,8	69,7	1	8
DES EN 4 PAR	79,1	9,7	1	16
REP. ENTRE 5	42,9	56,4	1	3
FORTUNA	76,9	91,4	2	2
HACE DIEZ	81,3	66,2	1	16
EDAD DOBLE	87,9	47,5	1	17
PEDRO YJUAN	73,6	7,5	2	16
HERMANOS	53,8	2,0	1	18
TERRENO	58,2	34,0	3	15
HOJA DE ALUM	9,9	11,1	1	3
ALCANZAR	19,8	27,8	2	5
ENCONTRAR	12,1	27,3	2	7
LIEBRE Y GALG	28,6	0,0	0	13
AVIONETA	2,2	50,0	2	1
CAVAR	15,4	14,3	1	10
ROTATIVA	12,1	0,0	0	10
EJE VIARIO	2,2	50,0	0	1
HENO	33,0	26,7	5	10
RUBLOS	45,1	22,0	5	12
MECA	74,7	2,9	1	18
DINERO	80,2	2,7	2	18

Tabla A5.2.2.-Valores de las variables dependientes PIG,PC,ProC.ProI.
Curso 2º

curso 3º	%Igualdades	% Ig. correctas	nº prod. Correc.	nº prod. Incorr.
Alumnos 75	PIG	PC	ProC	ProI
MIT Y TERC P	94,7	78,9	3	4
DES EN 4 PAR	62,7	25,5	1	8
FORTUNA	84,0	96,8	2	2
EDAD DOBLE	89,3	40,3	4	12
PEDRO YJUAN	61,3	19,6	4	13
HERMANOS	60,0	0,0	0	14
TERRENO	89,3	49,3	3	6
ALCANZAR	57,3	81,4	3	4
ENCONTRAR	41,3	93,5	5	1
LIEBRE Y GALG	25,3	5,3	1	13
AVIONETA	9,3	28,6	2	4
CAVAR	12,0	88,9	1	1
EJE VIARIO	8,0	100,0	0	4
HENO	28,0	52,4	5	6
RUBLOS	48,0	41,7	4	9
MECA	61,3	10,9	3	13
DINERO	70,7	15,1	4	12

Tabla A5.2.3.-Valores de las variables dependientes PIG,PC,ProC.ProI.
Curso 3º

Anexo 5.3.- Informes protocolizados de las producciones.

Subfamilia: Ábaco

Problema: **DESCOMPONER EN 4 PARTES**

1.-Producciones Correctas

e) Número de producciones correctas : **1**

f) Distribución porcentual de las producciones correctas

producción nº	**%**
1	100

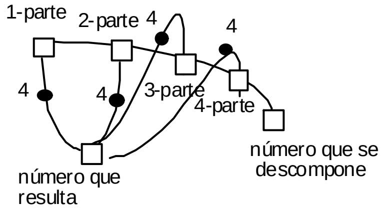
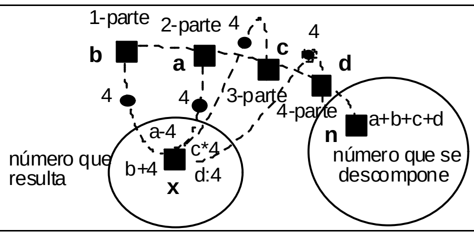
g) Número de producciones encontradas en cada curso

curso	**1º**	**2º**	**3º**
número	1	1	1

h) Distribución de la corrección en cursos

total corrección	en **1º**	en **2º**	en **3º**
100	4,9	24,5	70,6

i) Grafo de la resolución de cada producción.

DESCOMPONER EN 4 PARTES.- Descomponer un número en cuatro partes de modo que si se resta 4 de la primera, se suma 4 a la segunda, la tercera se multiplica por 4, y la cuarta se divide por 4, se obtiene el mismo número en todos los casos.	
1 $a+b+c+d = n$ $a–4=x$ $b+4=x$ $c*4=x$ $d:4=x$	

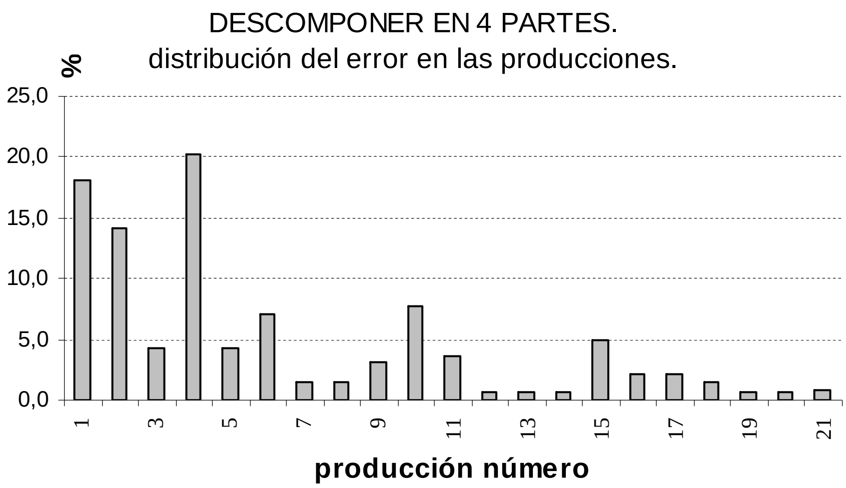
j) Comentarios

Sólo se ha encontrado una producción correcta,
Problema indeterminado para el que se han usado 6 letras y producido 5 igualdades. Cuatro de las igualdades para el número que resulta y otra para el número que hay que se descompone. Las cantidades que se utilizan para construir las igualdades son desconocidas y no son las incógnitas del problema.

2.-Producciones Incorrectas

C) Número de producciones incorrectas : **21**

B) Distribución porcentual de las 21 producciones incorrectas.



Nota.-La producción nº 4: a–4=x , b+4=x , c∗4=x , d:4=x , que supone el 20,3 % del error es una producción inacabada que no contiene ningún error.

C) Número de producciones incorrectas encontradas en cada curso

	total	1º	2º	3º
número de producciones	21	12	17	7

D) Distribución del error en cursos.

Total error	1º	2º	3º
100,0	25,9	44,8	29,4

E) Producciones encontradas en tres, dos o un curso : Número de producciones y porcentaje del error que suponen esas producciones.

cursos	**1º-2º-3º**	**1º-2º**	**1º-3º**	**2º-3º**	**sólo 1º**	**sólo 2º**	**sólo 3º**
número	4	2	1	2	3	6	1
porcentaje	56,8	14	3,1	11,3	2,1	11,9	0,8

F) Distribución del error en cada uno de los cursos de las producciones encontradas en tres cursos.

total error tres cursos	error en **1º**	error en **2º**	error en **3º**
56,8	64,9	40,6	74,3

Nota.- Al elevado porcentaje en 3º contribuye la alta frecuencia de la producción inacabada nº 4 (20,3%)

G) Diagnóstico y comentarios de los errores

El uso de letras.

Lo primero que llama la atención es la gran cantidad de producciones en las que se utiliza una única letra. En efecto, puede notarse que 69 igualdades, esto es aproximadamente el 50% de las igualdades incorrectas producidas, hacen uso de una única letra. Esto ocurre en las producciones más frecuentes como la nº 1 y 2 pero también en otras producciones menos frecuentes, como las producciones nº 5, 10, 12, 16,17.

En principio la explicación más plausible de este uso insuficiente de literales puede atribuirse al uso en el texto del problema de la misma palabra (número) tanto para el número que hay que descomponer como para el número que resulta de realizar las operaciones aritméticas con las partes. Así, tendríamos que la letra x para número podría jugar estos dos papeles. Sin embargo, si examinamos la producción nº 1 : $(x-4)+(x+4)+4x+\frac{x}{4} = x$, observamos que x se utiliza como una letra que designa tanto al número que hay que descomponer, como a las partes en las que éste se descompone, y que deben de considerarse iguales al denotarlos por la misma letra x.

El empleo de la misma letra: x para designar cada una de las partes en las que el número se descompone puede encontrarse también las producciones nº 1, 5, 12 y 18 ; de hecho, en esta última producción aparece explícitamente el número que hay que decomponer, *y*, como suma de sus partes, *x*, $y=x+x+x+x$.

Las producciones nº 8,9,11,14,20,21 utilizan cinco o más literales cuatro de ellas para designar a cada una de las partes en las que un número se descompone, pero ocurre que en las producciones nº 11 y 14 cuando una 5º letra x es utilizada, dicha letra es utilizada para referir tanto al número, que se descompone, "un número" en el enunciado del problema , como al número que resulta de realizar las operaciones aritméticas con cada una de las partes, del que se dice en el enunciado "se obtiene el mismo número". El uso del mismo término " número" en el enunciado para referirse a ambos números y una deficiente comprensión del mismo pueden inducir este error-Una muestra es la producción nº 14 $x = a+b+c+d$,$a–4=x$, $b+4=x$, $c*4=x$, $d:4=x$

El análisis de las expresiones algebraicas.

Es sorprendente el número de producciones en que puede encontrarse la expresión algebraica $\frac{x}{4}$ y apareciendo de modo tal que no puede interpretarse como la división de una de las partes por 4, como se dice en el enunciado del problema. Así observando, por ejemplo la producción nº 2 o la nº 3, parece que no cabe interpretar $\frac{x}{4}$ de otra manera que como refiriéndose a cada una de las 4 partes iguales en que se ha descompuesto el número.

Esta presuposición de la igualdad de las partes en las que se descompone el número, contra toda evidencia que pueda arrojar la lectura de lo que se dice de ellas en el enunciado, es la fuente de la mayor parte de las expresiones algebraicas elementales erróneas que encontramos en este problema. La expresión $\frac{x}{4}$ se encuentra en el 32% de las igualdades producidas y el uso de la misma letra x para designar a cada una de las partes en el 50% lo que mostraría la presencia de este error, atribuible a este modo de entender la descomposición en partes, en más del 80% de la igualdades producidas.

El análisis de las igualdades.

Las igualdades que cabria encontrar en este problema son por un lado la igualdad de las partes una vez que han sido transformadas por las operaciones aritméticas indicadas para producir el mismo número, y por otro la igualdad que recompone o expresar el número por medio de las partes en que éste ha sido descompuesto.

Cuando se utiliza una literal, las primeras igualdades no aparecen por lado alguno, por innecesarias, y cuando se usan varias literales éstas igualdades se formulan correctamente, véanse como ejemplo las producciones nº 3, 6 o 11. Además es importante señalar el modo de proceder para recomponer el número en función de las partes en que este ha sido descompuesto. La recomposición no se hace con las partes sino con las partes transformadas como muestra claramente la producción nº 9: $x = (a–4)+(b–4)+(4c)+(d:4)$ donde se utilizan a, b, c, d para cada una de las partes, la nº 2: $\frac{x}{4} –4 + \frac{x}{4} +4 +4\frac{x}{4} +\frac{x}{4} : 4 = x$ donde se utiliza $\frac{x}{4}$ para cualquiera de las partes o la nº1 $(x–4) +(x+4)+ 4x +\frac{x}{4} = x$ donde la letra *x* en el lado izquierdo hemos interpretado que refiere a cada una de las partes y en el lado derecho al número que se descompone.

La producción nº 18

$y=x+x+x+x$

$y= (x–4)+(x+4)+(4x)+(x:4)$

ilustra como puede concebirse el número y descompuesto y recompuesto después de las transformaciones de sus partes.

En resumen, los errores encontrados en este problema son: uso polisémico de la letra x, expresiones algebraicas arbitrarias y errores de igualdad. Una explicación plausible de los dos primeros ha sido conjeturada arriba, no cabe explicación del error de igualdad asociado a la recomposición del número mediante las partes transformadas. Y debe decirse para acabar, aunque de ello no se dé cuenta aquí, que alguno de los errores apuntados no se encuentran cuando este problema se plantea como un problema determinado "Descomponer el número 100 en cuatro partes….". .

Problema: **MITAD y TERCERA PARTE**

1.-Producciones Correctas

a) Número de producciones correctas : **3**

b) Distribución porcentual de las producciones correctas

producción nº	**%**
1	96,6
2	2,7
3	0,7

c) Número de producciones encontradas en cada curso

curso	**1º**	**2º**	**3º**
número	1	2	3

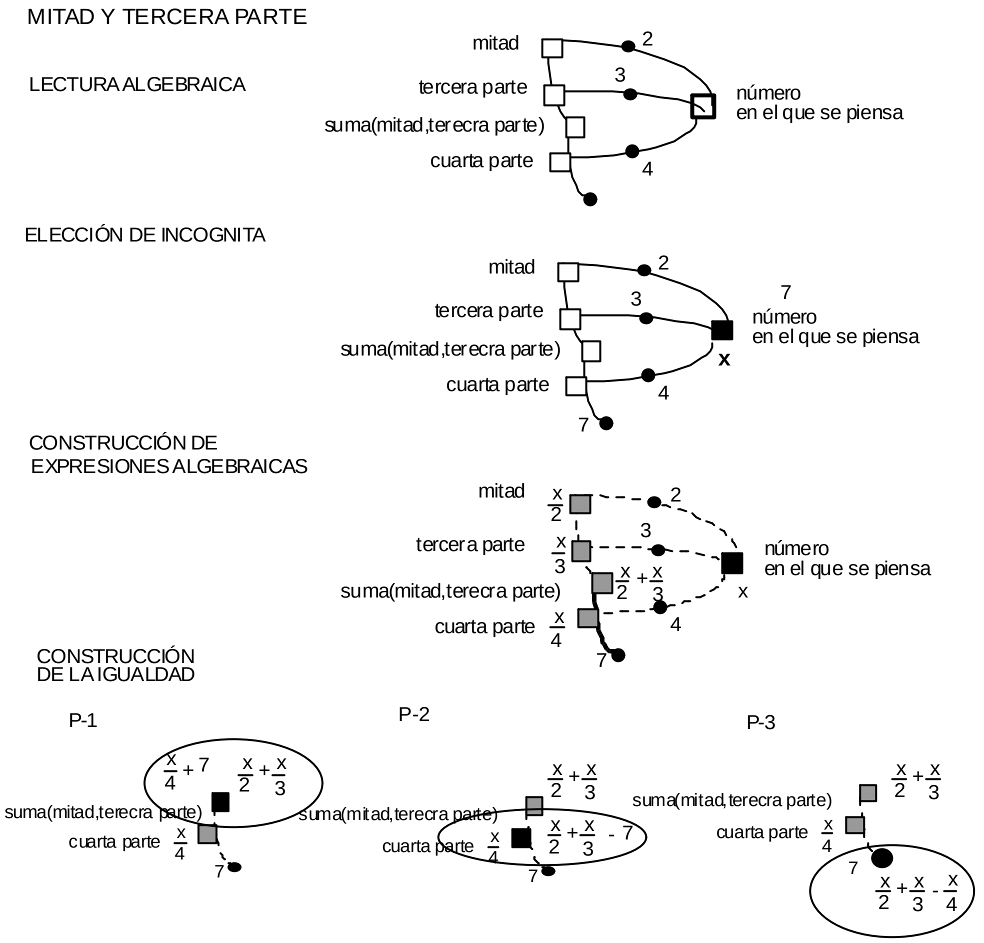
d) Distribución de la corrección en cursos

1º	**2º**	**3º**
18,3	39,2	35,4

e) Grafo de la resolución de cada producción.

MITAD Y TERCERA PARTE.-Estoy pensando en un número tal que la suma de su mitad y su tercera parte es 7 unidades mayor que su cuarta parte. ¿Cuál es dicho número?

La figura que sigue muestra partiendo de una lectura algebraica, la elección de incógnita, la construcción de expresiones algebraicas y por último la construcción de la igualdad, construcción ésta última que se hace de modo diferente en cada una de las producciones correctas P-1, P-2 y P-3.

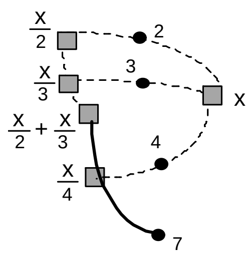


f) <u>Comentarios</u>

El problema MITAD Y TERCERA PARTE mirado globalmente puede entenderse como un problema de comparación aditivo, siendo la cantidad de referencia (R) la cuarta parte del número , la cantidad comparada (C) la suma de la mitad y la tercera parte y la diferencia (D) 7 unidades, siendo C > D. Así las relaciones de igualdad que pueden establecerse entre ambas cantidades son:

(1) C = R + D (2) C - D = R (3) C - R =D

Las 3 producciones correctas utilizan la letra **x** para indicar "el número en que se está pensando". En las producciones encontramos las expresiones algebraicas $\frac{x}{2}$, $\frac{x}{3}$, $\frac{x}{4}$ para la mitad , la tercera y la cuarta parte del número y la expresión algebraica $\frac{x}{2} + \frac{x}{3}$ correspondiente a la suma de la mitad y la tercera parte. Lo que se muestra en el grafo en el que se señalan a trazos las aristas utilizadas para producir dichas expresiones algebraicas.



Producidas estas expresiones algebraicas, lo que resta por hacer es utilizar la arista señalada en trazo grueso para establecer la igualdad. Tal arista representa una relación de comparación aditiva.

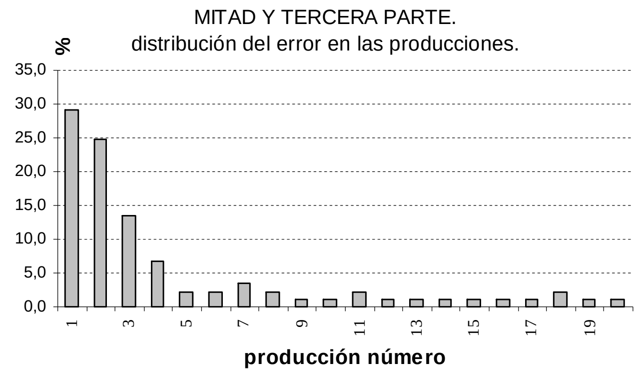
Las tres producciones correctas se corresponden con las tres maneras señaladas en (1) para expresar mediante una igualdad la relación entre las cantidades C, R, D y la numeración de las producciones coincide con la realizada arriba para las igualdades. Es de notar que la producción más frecuente corresponde a la igualdad C = R + D, lo que indicaría la preferencia de los estudiantes expresarse de modo aditivo cuando expresan una relación de comparación entre cantidades mediante una igualdad.

1.-Producciones Incorrectas

A) Número de producciones incorrectas. Distribución por cursos.

	total	**1º**	**2º**	**3º**
número	20	17	6	4
porcentaje	100,0	51,1	29,3	19,6

D) Distribución del error en las 20 producciones incorrectas.



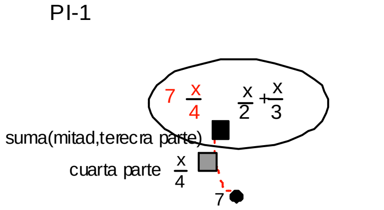
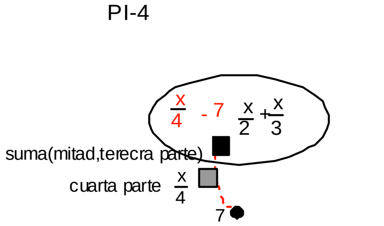
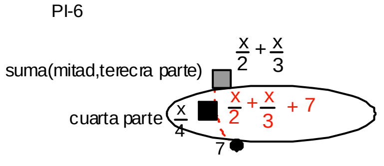
E) Número de producciones encontradas en tres, dos o un curso y porcentaje del error que suponen

cursos	**1º-2º-3º**	**1º-2º**	**1º-3º**	**2º-3º**	**sólo 1º**	**sólo 2º**	**sólo 3º**
Número de producciones	2	3	2	0	10	2	1
porcentaje	53,9	22,5	5,6	0	3,4	3,4	1,1

F) Distribución del error en cada uno de los cursos de las producciones encontradas en tres cursos.

total error tres cursos	error en **1º**	error en **2º**	error en **3º**
53,9	44,7	51,9	86,7

E) <u>Diagnóstico y comentarios de los errores</u>

1 $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=7\frac{x}{4}$		Error de operación
4 $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=\frac{x}{4}-7$		Error de inversión
6 $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+7=\frac{x}{4}$		Error de inversión

La producción incorrecta nº 1: $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=7\frac{x}{4}$ contiene un error de operación en la expresión algebraica que aparece en el segundo miembro de la igualdad. La igualdad producida sería correcta caso de ser la relación de comparación multiplicativa en vez de aditiva. La expresión algebraica $7\,\frac{x}{4}$ no sólo se encuentra en ésta producción sino también en otras como las producciones nº 3 o nº 9 .La presencia de $7\,\frac{x}{4}$ en el lugar que debería ocupar $\frac{x}{4}+7$ indicaría que se está produciendo una confusión entre un tipo de comparación y otro. Una posible explicación sería la siguiente: las expresiones mitad, tercera parte, cuarta parte de un número vienen acompañadas naturalmente de las expresiones doble, triple, cuádruple de dicho número, unas se expresan mediante fracciones del número y otras como producto del número por 2, 3, 4. Una falta de atención a la expresión de la comparación ha podido llevar a interpretar "7 unidades mayor" como "7 veces mayor" que quizá era la comparación esperada.

Los errores de inversión de las producciones nº 4 y nº 6 denotan que las igualdades C=R-D y C+D=R -ver (1) arriba, en producciones correctas- utilizadas para expresar la relación de comparación son inapropiadas. Otra igualdad inapropiada para expresar la relación de comparación C=D-R es usada en la producción nº 15.

Entre las producciones más frecuentes se encuentra la producción nº 2 : $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} = \frac{x}{4} + 7$ que sería correcta si en su primer miembro en lugar de constar la expresión $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3}$ constase meramente la expresión $\frac{x}{2} + \frac{x}{3}$, que sobre esta "x" , la incógnita del problema y que esté ligada al resto de la expresión algebraica por el signo "+" es un hecho cuando menos sorprendente por su frecuencia y su ocurrencia en igualdades que contienen además un error de operación de errores como la producción nº 3: $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 7\frac{x}{4}$. El hecho es de difícil interpretación y sólo podría entenderse como una lectura inadecuada del enunciado del problema o una traducción secuencial del enunciado del problema, así : anotado "x" , para el *número,* se prosigue escribiendo en la misma línea "+" para *la suma* , " $\frac{x}{2}$ " para *su mitad* , "+" para *y,* " $\frac{x}{3}$ " para *su tercera parte.*

Los tres hechos comentados: expresión inadecuada mediante una igualdad entre cantidades la relación de comparación entre las mismas cantidades, la confusión entre comparación aditiva y multiplicativa , y la probable traducción superficial y secuencial, aislada o conjuntamente podrían explicar la mayor parte de las producciones incorrectas. El resto de las producciones incorrectas, encontradas generalmente en el curso 1º son producciones en las que: se puede encontrar la expresión algebraica $\frac{x}{2}$ pero no $\frac{x}{3}$ o $\frac{x}{4}$, la expresión $\frac{2}{x}$ para expresar la mitad de un número y las análogas para la tercera y cuarta parte, o producciones como la nº 18 donde 2 , 3, y 1/4 parecen usarse para expresar la mitad, la tercera y la cuarta parte del número.

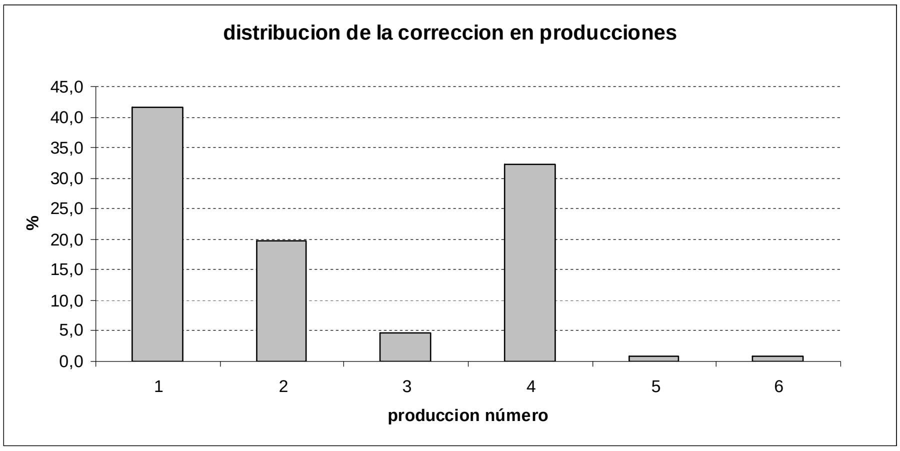
Subfamilia: Edades

Problema: **EDAD DOBLE**

1.-Producciones Correctas

a) Número de producciones correctas : **6**

b) Distribución porcentual de las producciones correctas



c) Número de producciones encontradas en cada curso

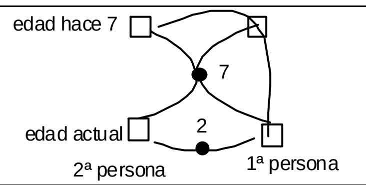
1º	2º	3º
3	6	4

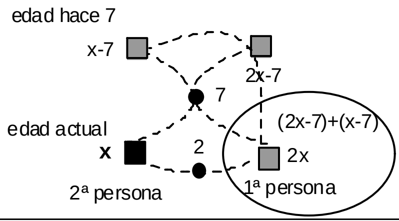
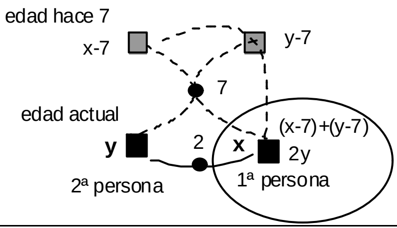
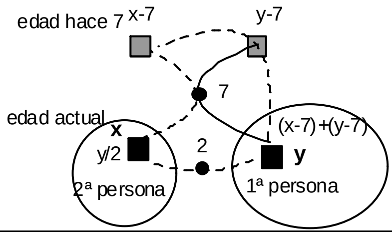
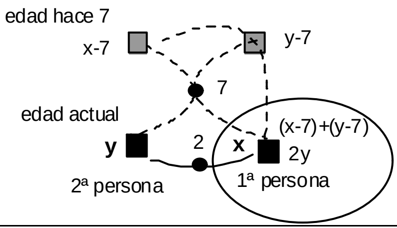
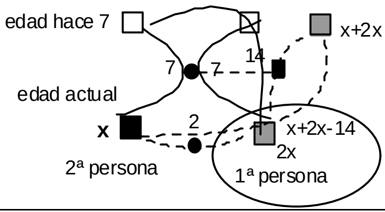
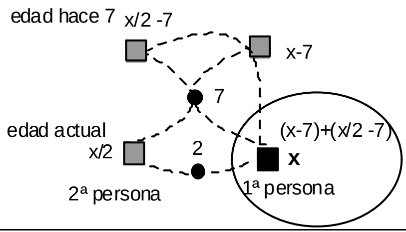
d) Distribución de la corrección en cursos

1º	2º	3º
21,8	33,6	44,6

e) Grafo de la resolución de cada producción

El grafo de una lectura algebraica del problema EDAD DOBLE figura en la primera fila de la tabla que sigue, en dicho grafo la persona que se considera como la 1ª persona es la que su edad se menciona en primer lugar en el enunciado del problema. Esto es, la persona cuya edad actual se compara con la de la 2ª persona en la primera frase del enunciado del problema.

La edad de una persona es doble de la de otra. Hace siete años la suma de las edades de las dos personas era igual a la edad actual de la primera. ¿Cuál es la edad de cada una?	

<table>
<tr><td>1
$(2x-7)+(x-7)=2x$</td><td>PC-1

</td></tr>
<tr><td>2
$x=2y \quad (y-7)+(x-7)=x$</td><td>PC-2

</td></tr>
<tr><td>3
$y=\frac{x}{2} \quad (y-7)+(x-7)=x$</td><td>PC-3

</td></tr>
<tr><td>4
$x=2y \quad (x-7)+(y-7)=2y$</td><td>PC-2

</td></tr>
<tr><td>5
$2x+x-14=2x$</td><td>PC-5

</td></tr>
<tr><td>6
$(x-7)+(\frac{x}{2}-7)=x$</td><td>PC-6

</td></tr>
</table>

f) <u>Comentarios</u>

En las producciones que hacen uso de una letra, x se usa para designar la edad de la 1ª persona, -ver producción nº 1, la más frecuente y producción nº 5 -, cuando de utiliza una sola letra, el uso de ésta letra para designar la edad de 2ª persona es ocasional – ver producción nº 6 -, quizá porque ésta se menciona en segundo lugar en el enunciado y además obliga a expresar la edad de la 1ª persona mediante una fracción.

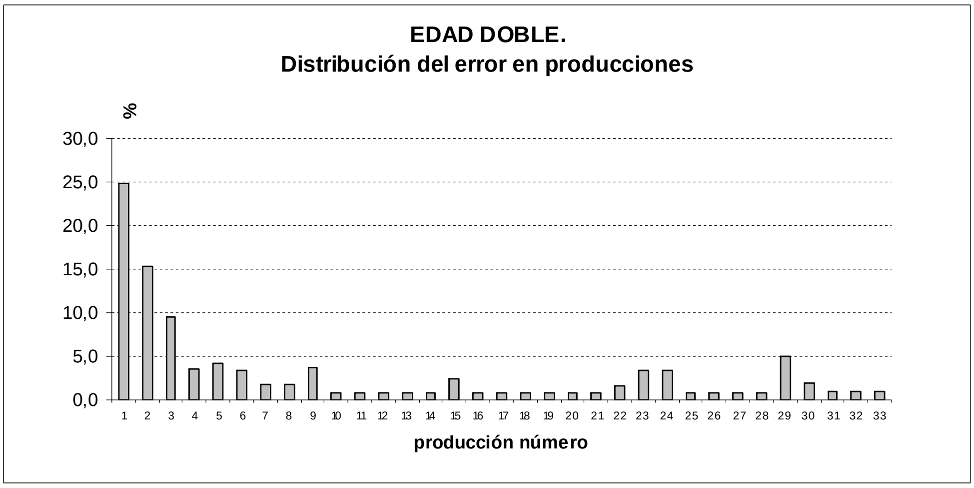
En las producciones que hacen uso de dos letras, éstas indican las edades de la 1ª y 2ª persona.

La cantidad igualada es casi sin excepción la edad de la 1º persona tanto si se usa una letra como si se usan dos letras. La excepción la constituye la producción nº 3 que utiliza dos letras y en una de las igualdades se iguala la edad de la 2ª persona y en la otra la edad de la 1ª persona.

2.-Producciones Incorrectas

A) Número de producciones incorrectas : **33**

B) Distribución porcentual de las 33 producciones incorrectas



C) Número de producciones incorrectas encontradas en cada curso

1º	2º	3º
18	17	13

D) Distribución del error en cursos.

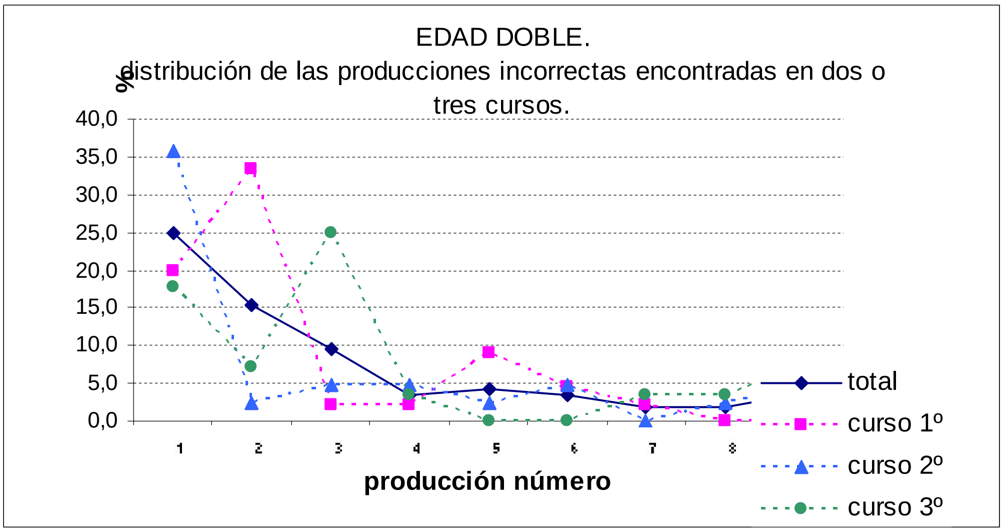
1º	2º	3º
35,3	33,0	26,4

H) Producciones encontradas en tres, dos o un curso : Número de producciones y porcentaje del error que suponen esas producciones

cursos	1º-2º-3º	sólo1º-2º	sólo1º-3º	sólo2º-3º	sólo 1º	sólo 2º	sólo 3º
número	4	2	1	2	10	9	5
porcentaje	53,1	7,5	1,8	5,5	10	13,3	10

I) Distribución del error en cada uno de los cursos de las producciones encontradas en tres cursos.

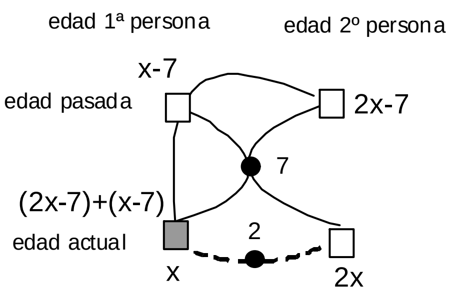
1º	2º	3º	total
57,8	47,6	53,6	53,1



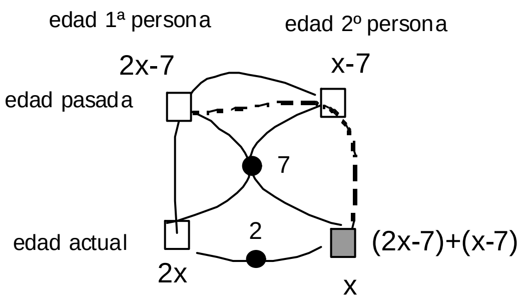
G) <u>Diagnóstico y comentarios de los errores</u>

En la producción nº 1: (x–7) + (2x–7) = x, los estudiantes no indicaron en su resolución la cantidad que se indicaba con la literal elegida. Para su estudio:

- supongamos en primer lugar que la literal x designe la edad de la 1ª persona –figura inferior (a)-, en ese caso estaríamos ante un *error de inversión* que se muestra en el grafo (a) en la arista a trazos-, la edad de la segunda persona se expresa con 2x cuando se debería expresar con x/2; descontado dicho error la igualdad se establece correctamente.



(a)



(b)

- supongamos en segundo lugar que la literal x designe la edad de la 2ª persona -figura superior grafo (b)-, en ese caso la edad de la primera persona viene correctamente referida al igual que las edades de ambas personas hace siete años, sin embargo cuando se iguala la suma de esas edades a la edad de la segunda persona, estamos ante un *error de igualación*, que se muestra en el grafo (b) mediante la incorporación de la arista a trazos que debería de existir en el grafo teórico para que dicha igualación fuese posible.

En la producción incorrecta nº 2 : (2x+x)–7 = 2x, cuando se presta atención al primer miembro de la igualdad se observa que siete se resta de la suma de edades y no de cada una de las edades. El texto del problema dice “hace siete años la suma de las edades de las dos personas” que se traduce (2x+x)–7. La traducción de que da cuenta esta producción no tiene en cuenta las distintas reglas uso de los lenguajes algebraico y vernáculo. El significado del término edad, bien forjado por el uso pragmático del mismo, no debería permitir lecturas ambiguas del texto verbal. Esto es, en la frase “hace siete años la suma de las edades de las dos personas" no cabe equívoco al considerar que edades deben de ser sumadas y se conoce que "hace siete años" no suele decirse de una suma de edades puesto que no tiene excesivo sentido. Lo que corresponde entender es que ese "hace siete años" se dice para invocar la edad en un momento concreto del pasado tenía cada una de las personas cuya suma de edades en ese momento se considera. Esto es, en el lenguaje vernáculo se "distribuye" el "hace siete años" entre los sumandos que se consideran y se dice de su suma. En el lenguaje algebraico, considerados los dos sumandos x y 2x las edades de ambas personas y su suma de edades (x +2x) y procediendo, en correspondencia con el lenguaje vernáculo, a indicar "hace siete años la suma de las edades de las dos personas" por (x+2x) -7 , no podemos pretender que ese "7" se entienda distribuido entre los dos sumandos que componen la suma indicada porque no lo permiten las reglas de uso de dicho lenguaje, entre las que no cuenta la distributividad de la diferencia. Así, si intentamos traducir la expresión algebraica (x+2x) -7 al lenguaje vernáculo producimos este texto: "siete años menos que la suma de las edades de dos personas", donde el verbo se ha omitido pues no puede hablarse de los sumandos.

En las producciones con dos literales también encontramos producciones en las que pueden observarse los dos hechos señalados anteriormente en las producciones con una literal. Así, en la producción nº 9: y=2x ; (x–7)+(y–7) = x encontramos la igualación de la suma de edades con la edad de la 2ª persona y en la producción más frecuente con dos literales, la producción nº 3 : x=2y ; (x+y)–7 =x , los 7 años restados de la suma de las edades. Este último hecho se repite en las producciones nº 4 o 27.

Otro hecho es de destacar en las producciones con dos literales del que podemos dar cuenta examinando la producción nº 29 :

$$x=2y \qquad (x-7)+(2y-7)=x$$

en ésta producción establecida la primera igualdad , para la expresión de las edades de la 1ª y 2ª persona hace siete años -(x-7) y (2y-7) en la segunda igualdad- no se utilizan las literales x e y sino el primero y el segundo miembro de la primera igualdad establecida – a la izquierda- , como si en uno y otro miembro de esta primera igualdad refiriesen precisamente las edades de las dos personas y no la edad de una de ellas referida de dos modos diferentes. Este hecho, puede encontrarse también en las producciones nº 26, 27, 30 y 31 .

En el resto de las producciones no comentadas pueden observarse alguno de los hechos señalados o varios de ellos en la misma producción y ocasionalmente errores de inversión aditivos.

Por último, cabría señalar la producción nº 15 : x=2x, hace siete x+2x=x , en esta producción que puede considerarse un resumen del enunciado del problema "escrito al modo algebraico" la literal x se usa como incógnita universal tanto para designar la edad de cada una de las personas como la de éstas hace siete años.

Problema:**PEDRO Y JUAN**

1.-Producciones Correctas

a) Número de producciones correctas : **6**

b) Distribución porcentual de las **6** producciones correctas

producción nº	%
1	39,5
2	26,6
3	4,0
4	4,8
5	12,9
6	12,1

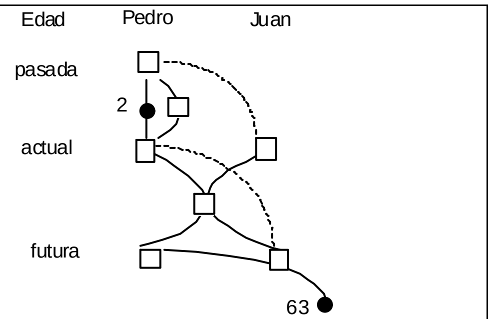
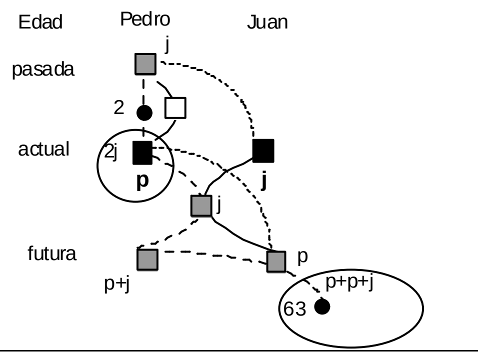
c) Número de producciones encontradas en cada curso

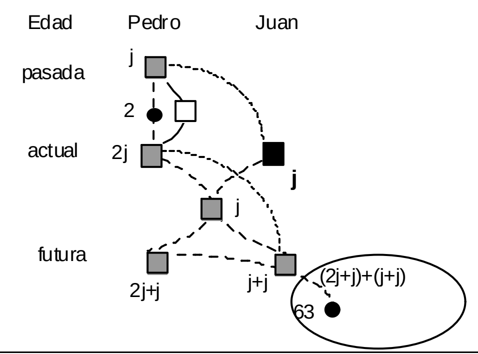
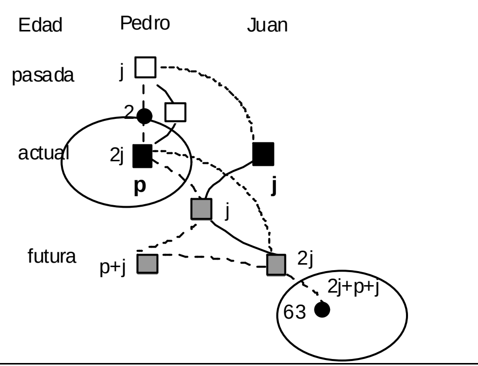
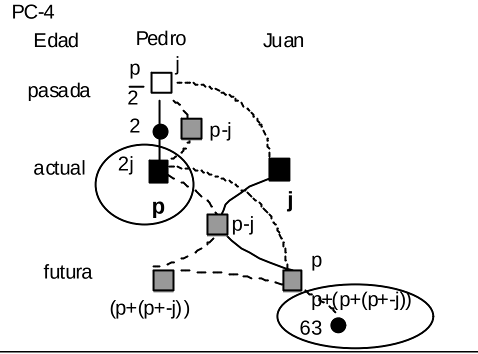
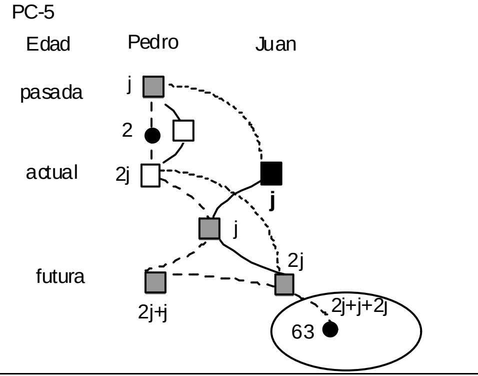
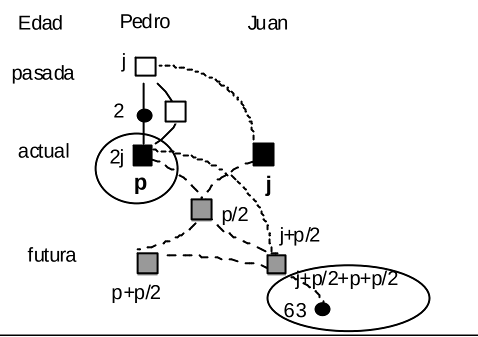
1º	2º	3º
4	2	4

d) Distribución de la corrección en cursos

1º	2º	3º
36,3	20,2	43,5

e) Grafo de la resolución de cada producción

<table>
<tr>
<td>PEDRO Y JUAN.- Pedro dice a Juan: Tengo dos veces la edad que tenía cuando tenía la edad que tienes tú. Cuando tú tengas la edad que yo tengo ahora, entre los dos tendremos 63 años. ¿Cuáles son nuestras edades actuales?</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>1
p=2j p+p+j =63</td>
<td>PC-1

</td>
</tr>
</table>

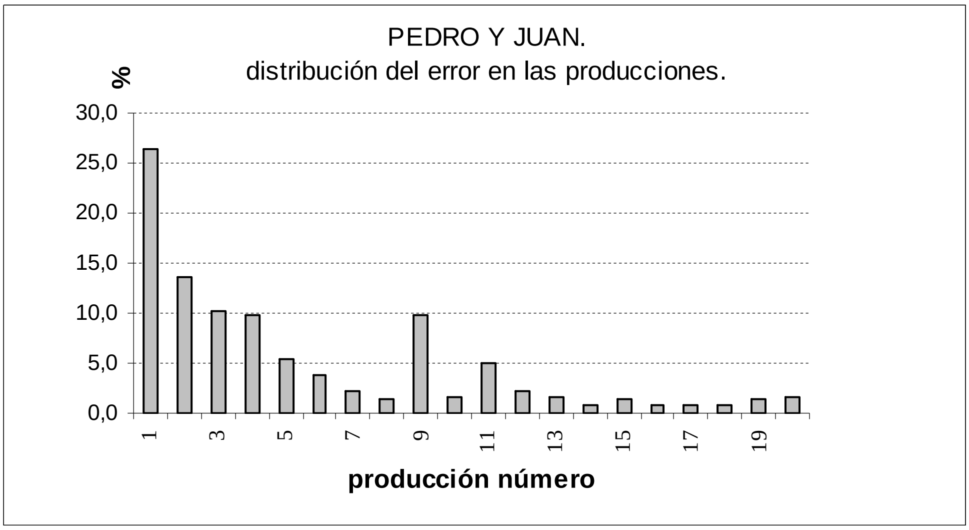
<table>
<tr><td>2
$(2j+j)+(j+j)=63$</td><td>PC-2
</td></tr>
<tr><td>3
$p=2j \quad 2j+p+j=63$</td><td>PC--3
</td></tr>
<tr><td>4
$p=2j \quad p+p+(p-j)=63$</td><td>PC-4
</td></tr>
<tr><td>5
$2j+j+2j = 63$</td><td>PC-5
</td></tr>
<tr><td>6
$p=2j \quad j+ p/2 + p + p/2 =63$</td><td>PC-6
</td></tr>
</table>

k) Comentarios
Las letras designan una o las dos incógnitas del problema, esto es las edades actuales de Juan y Pedro. Es de notar que cuando se utiliza una sola letra esta corresponde a la edad de Juan, que posibilita que la edad de Pedro se exprese como 2j. La suma de las edades futuras, que es un dato, siempre se usa para construir una igualdad, cuando se construyen dos igualdades se usa además la edad actual de Pedro. Las ecuaciones difieren en las distintas maneras de expresar la diferencia de edades o las edades futuras.

2.-Producciones Incorrectas

A) Número de producciones incorrectas : **20**

B) Distribución porcentual de las 20 producciones incorrectas



C) Número de producciones incorrectas encontradas en cada curso

1º	2º	3º
10	17	12

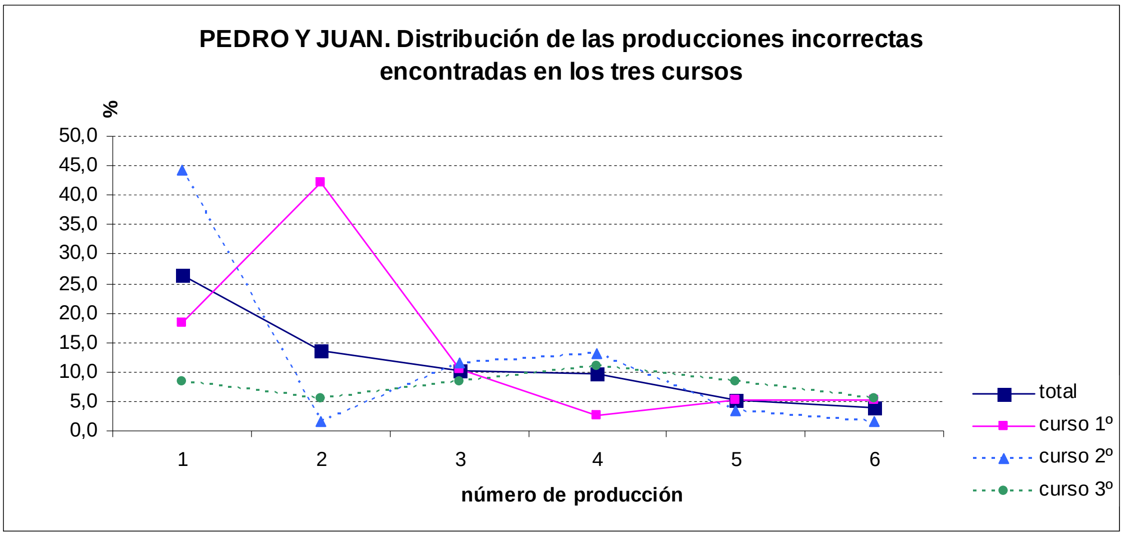
D) Distribución del error en cursos.

1º	2º	3º
26,7	42,9	30,4

E) <u>Producciones encontradas en tres, dos o un curso : Número de producciones y porcentaje del error que suponen esas producciones</u>

cursos	1º-2º-3º	sólo1º-2º	sólo1º-3º	sólo2º-3º	sólo 1º	sólo 2º	sólo 3º
número	6	2	2	3	0	6	1
porcentaje	69,2	3,5	11,35	8,7	0	5,6	1,7

F) <u>Porcentaje del error en cada uno de los cursos de las producciones encontradas en tres cursos.</u>



G) <u>Diagnóstico y comentarios de los errores</u>

<u>La elección de incógnitas</u>:

Al igual que en las producciones correctas, en la mayoría de las producciones incorrectas se utilizan dos literales, *p* y *j*, para las edades actuales de Pedro y Juan. Sin embargo, hay que decir que en alguna producción incorrecta se utiliza una sola literal, en otras se utilizan 3, y en alguna de las que se utilizan dos literales, éstas se asignan a otras edades.

- En las producciones nº 5, nº 6 y nº 11 se utiliza una sola literal, *j*, para la edad actual de Juan, y *2j* es la expresión algebraica que se utiliza para indicar la edad actual de Pedro.
- En la producción nº 18 se utiliza una sola literal, *x*, para indicar la edad de Pedro antes.
- En la producción nº 19 las dos literales utilizadas indican, *x*, la edad de Juan antes e *y* el tiempo que transcurre.
- Y en la producción nº 20 encontramos el uso de tres literales: *x* para la edad de Juan, *y* para la edad de Pedro y *z* para la diferencia de edades entre ambos.

<u>De las igualdades, uso de literales y errores.</u>

Las producciones incorrectas se comentan por grupos según los errores que presentan

- Producciones que muestran un claro ejemplo del uso polisémico de las literales, de las que podemos tomar como ejemplo las producciones nº 2 y nº 9.

En las producciones nº 2: p = 2j , 2j+j = 63 y nº 9 : p = 2j , p+j = 63 hay dos igualdades: una de ellas expresa la relación de comparación y la otra la relación aditiva; las relaciones que el texto del problema establece expresamente entre las edades.

Estas producciones establecen una relación entre las edades que podrían considerarse correctas; sin embargo, dados los momentos de la historia en que el texto del problema establece una y otra relación, debemos considerar que las igualdades p+j=63 ó 2j+j=63, que se repite en otras producciones (la nº 3, la nº 8, la nº 11,..), son incorrectas ya que las cantidades indicadas por *p, j* según el referente que para ellas se desprende de la construcción de la primera igualdad (p=2j), esto es p y *j* para la edad actuales de Pedro y Juan no corresponden a las que tienen que ser utilizadas en la segunda, esto es *p* y *j* para las edades futuras de Pedro y Juan. Hay por tanto aquí un claro ejemplo del uso polisémico de las literales *p, j,* que en una igualdad indican las edades actuales de Pedro y Juan y en la otra las edades futuras.

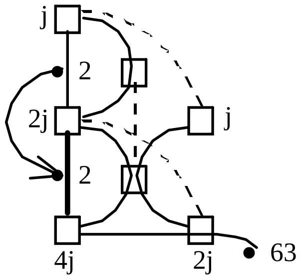
Además el uso de *p* ó *j* para indicar las edades en distintos momentos puede observarse también en las producciones nº 12, nº 16; en ellas se escriben dos ecuaciones y las literales, por deseo expreso del resolutor, deben interpretarse polisémicamente

-Producciones en que únicamente la edad de uno de los protagonistas se expresa en dos momentos diferentes.

Las producciones nº 1, nº 5, nº 6, nº 13 intentan de modo diverso expresar las edades de Juan y Pedro en el futuro para construir la igualdad que exprese la relación aditiva entre las edades. Así, en la producción nº 1, la mas frecuente, encontramos la igualdad p+2j=63, y la producción nº 6 contiene la igualdad 2j+2j = 63. En estas igualdades únicamente se expresa la edad de Juan en el futuro, pero no la de Pedro; esto es, únicamente una de las edades ha sido transformada y se ha olvidado transformar la otra.

La producción nº 5: j, 2j 2j+4j = 63 merece una mención especial dado que es un ejemplo de la expresión de la siguiente creencia " si una relación entre las edades de dos personas se da en un determinado momento de la historia esta relación se conserva aún cuando transcurra el tiempo"[62]

El grafo ayuda a interpretar la expresión algebraica, 2j+4j, que aparece en esta producción para las edades futuras. Si la expresión algebraica 2j corresponde a la edad de Juan en el futuro, la expresión algebraica 4j debe de corresponder a la edad de Pedro en el futuro.



Grafo 6.16

[62] De hecho, lo que sabemos con certeza es que la relación entre las edades de dos personas que se conserva con el transcurso del tiempo es la diferencia de sus edades.

Esto es, si Juan pasa de tener la edad j a la edad 2j, Pedro pasa de tener la edad 2j a tener la edad 4j, con lo cual las transformaciones que corresponden a las edades de los personajes siguen un patrón de proporcionalidad. Hay aquí obviamente un error conceptual que se puede observar explícitamente en la producción nº 18. En ella, *x* –para la edad de Pedro antes– se transforma en *2x* –en el ahora–, a la vez que la edad de Juan que era *x/2* –antes– pasa a ser *x* –ahora.

-Por último, consideremos las producciones que utilizan una literal para indicar el tiempo transcurrido. Este es el caso de las producciones nº 19 y nº 20.
En la producción nº 19:

antes	futuro	*y* tiempo transcurre	
J–x	J–2x		x+y =2x
P–2x	P–63–x		2x+y=63-x

ya puede observarse un error en la expresión de la edad de Pedro en el futuro "P-63-x" , ya que "x" designa a la edad de Juan antes y "63" a la suma de las edades futuras. Las igualdades con la omisión de dicho error serían correctas.

La producción nº 20

J–x   P–y   P–J–z

x–z=y   x=2(x–z)   x+(x+z)=63

utiliza tres literales x, y, z para las edades de Juan y de Pedro y para la diferencia de edades. En ésta producción:

- *x–z= y* no expresa la edad de Pedro a menos que se suponga un error de inversión aditiva (x+z=y sería la correcta).
- *x= 2(x–z),* que se lee según lo escrito como que la edad de Juan es dos veces la edad de Pedro, contiene un error de inversión multiplicativa.
- *x+(x+z)= 63* es una igualdad que expresa que la suma de las edades actuales de Pedro y de Juan es igual a la suma de las edades futuras.

Para acabar señalar, que como en otros problemas que contienen relaciones de comparación entre cantidades se encuentran errores de inversión, error de inversión que aquí se encuentra en las producciones que contienen la igualdad 2p = j.

Subfamilia: Geometría

Problema: **TERRENO**

1.-Producciones Correctas

a) Número de producciones correctas : **3**

b) Distribución porcentual de las producciones correctas

producción nº	**%**
1	22,4
2	13,2
3	64,4

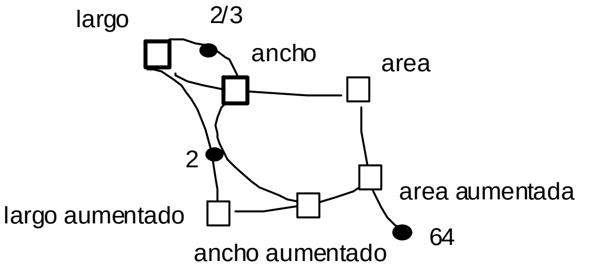
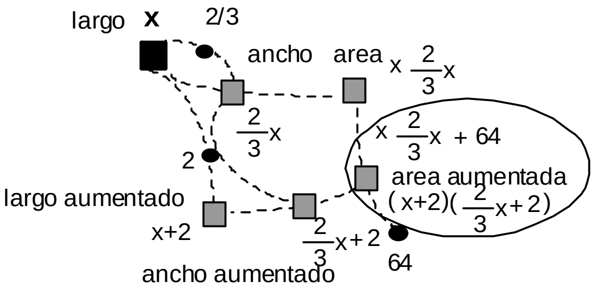
c) Número de producciones encontradas en cada curso

1º	**2º**	**3º**
2	3	3

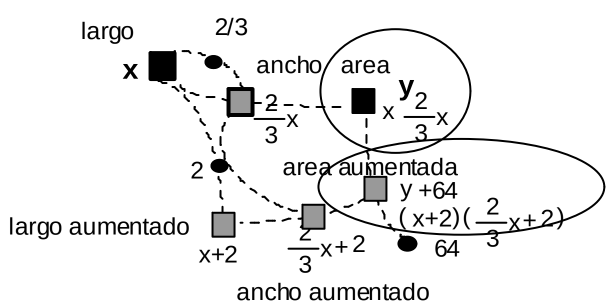
d) Distribución de la corrección en cursos

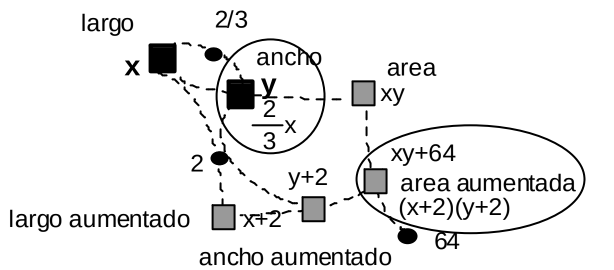
1º	**2º**	**3º**
14,9	29,7	55,4

e) Grafo de la resolución de cada producción

<table>
<tr>
<td>TERRENO.- El ancho de un terreno rectangular es 2/3 de su largo. Si ambas dimensiones se aumentan en 2m, el área aumenta en 64 m^2. ¿Cuáles son las dimensiones de este terreno?</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>1
$(x+2)(\frac{2}{3}x+2)=x\frac{2}{3}x+64$</td>
<td>PC-1

</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td>2

$y=\frac{2}{3}x\;(x+2)(y+2)=xy+64$</td><td>PC-2
</td></tr>
<tr><td>3

$y=\frac{2}{3}\;x\bullet x \qquad y+64=(x+2)(\frac{2}{3}\;x+2)$</td><td>PC-3
</td></tr>
</table>

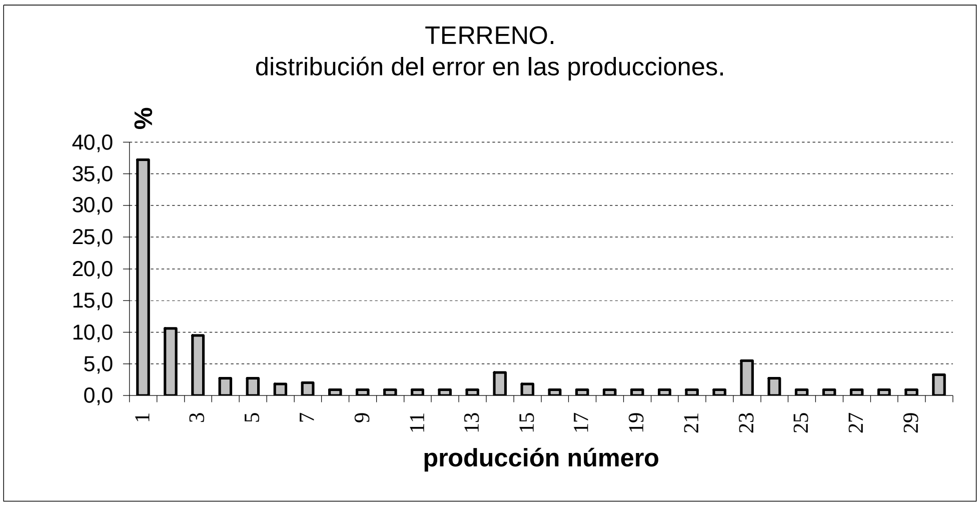
f) <u>Comentarios</u>

Las letras utilizadas han sido una o dos que designan a una de las dimensiones del terreno, a las dos dimensiones o a una de ellas y su superficie inicial, esto es una o dos de las letras designando a las incógnitas del problema. El área aumentada es la cantidad que se usa para construir una igualdad en las tres producciones y cuando se usan dos letras la segunda igualdad se establece usando la relación que compara las dimensiones del terreno o expresando el valor de su área .inicial.

2.-Producciones Incorrectas

A) <u>Número de producciones incorrectas</u> : **30**

B) <u>Distribución porcentual de las 30 producciones incorrectas</u>



C) Número de producciones incorrectas encontradas en cada curso

1º	2º	3º
21	14	5

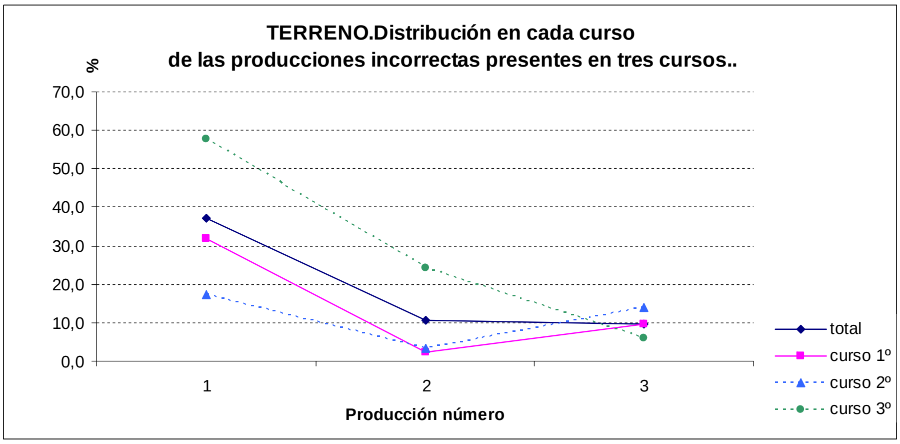
D) Distribución del error en cursos.

1º	2º	3º
37,4	26,5	36,1

E) Producciones encontradas en tres, dos o un curso : Número de producciones y porcentaje del error que suponen esas producciones

cursos	1º-2º-3º	sólo1º-2º	sólo1º-3º	sólo2º-3º	sólo 1º	sólo 2º	sólo 3º
número	3	3	0	1	15	7	1
porcentaje	57,3	7,3	0	2	19,3	12,8	3,3

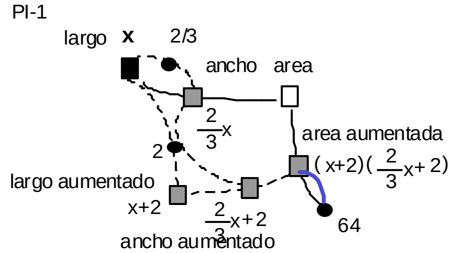
F) Distribución del error en cada uno de los cursos de las producciones encontradas en tres cursos.



J) Diagnóstico y comentarios de los errores

Dos hechos llaman la atención cuando se examina el listado de producciones incorrectas: uno, la abundancia de igualdades que en el segundo miembro de la igualdad figura meramente 64, los m^2 en los que la superficie del terreno ha aumentado y dos, la abundancia asimismo de igualdades tales que en el primer miembro de la igualdad contienen expresiones algebraicas que no denotan primordialmente una estructura multiplicativa. Tan es así, que el listado de producciones incorrectas se puede dividir en dos grupos por la ocurrencia de unas 15 producciones por la ocurrencia o no de uno de los hechos citados.

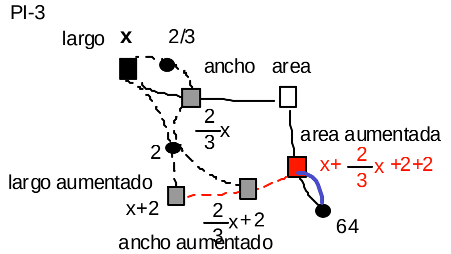
Comentaremos el primero de los hechos utilizando la producción incorrecta más frecuente, la producción nº 1 $(\frac{2}{3}x+2)(x+2) = 64$. Aquí encontramos en el primer miembro de la igualdad una expresión algebraica para referir el área del terreno después de que las dimensiones de éste hayan aumentado, la superficie final y en el segundo miembro 64, el incremento de la superficie. –ver tabla inferior-

1 $(\frac{2}{3}x+2)(x+2)= 64$		Error de igualdad

Concebido globalmente el problema TERRENO como un *problema aditivo de cambio*, donde la superficie inicial de un terreno, tras ciertas transformaciones efectuadas en sus dimensiones cambia su valor en 64 m^2 para terminar el terreno teniendo cierta superficie final. Suponiendo que se apele a esta estructura global del problema para la formulación de la igualdad en el proceso de traducción y se recurra a la igualdad existente entre las cantidades inicial, final y de cambio; lo que ocurre en ésta producción es que se igualan la cantidad final y la cantidad de cambio.

La anteriormente mencionada igualación no sólo se realiza en la producción nº 1 sino también en las producciones números 2,4, 8, 9, 11, 14, 15, 18,19, 28. De donde nos informamos que los dos hechos apuntados pueden darse por separado o conjuntamente.

El segundo de los hechos, la ausencia de expresiones algebraicas de estructura primordialmente multiplicativa apunta inmediatamente a una confusión entre área y perímetro. La producción más frecuente de este estilo la producción nº 3 $x+\frac{2}{3}x+2+2 = 64$ presenta en su primer miembro no el perímetro sino el semiperimetro y en su segundo miembro el incremento del área. –ver tabla inferior-

3 $x+\frac{2}{3}x+2+2=64$		Error de igualdad y Concepto equivocado

Otras producciones como la nº 20 hacen constar en su primer miembro la expresión algebraica precisa para referir al perímetro del terreno una vez que sus dimensiones han aumentado y en segundo la expresión algebraica precisa para referir el perímetro inicial. Que tal confusión sea conceptual , terminológica o se deba a la necesidad de evocar una fórmula para expresar su valor y confundir la fórmula, nada podemos decir. Lo único que podemos objetivamente decir es que expresiones algebraicas que deberían referir la superficie del terreno refieren el perímetro, semiperímetro u otra medida de carácter lineal del terreno. Evaluando frecuencia con que esto se hace en este problema a través de las producciones que contienen expresiones multiplicativas o aditivas y su frecuencia encontramos la tabla M que nos indica que esto ocurre en menor grado según se va ascendiendo de curso. Para acabar a este respecto, debe hacerse notar, que en el problema PERIMETRO propuesto únicamente a los estudiantes de 1º no se usaron, salvo una excepción, expresiones multiplicativas cuando dicha medida debía referirse mediante expresiones algebraicas,

Curso	**1º**	**2º**	**3º**	**total**
Exp. multiplic.	19	20	36	75
Exp. aditivas	23	14	6	43

Tabla M.- Nº de igualdades por curso que contienen expresiones algebraicas aditivas o multiplicativas.

Subfamilia : Móviles

Problema : **ALCANZAR**

1.-Producciones Correctas

a) Número de producciones correctas : **4**

b) Distribución porcentual de las producciones correctas

produccion nº	%
1	73,3
2	14,6
3	10,0
4	2,1

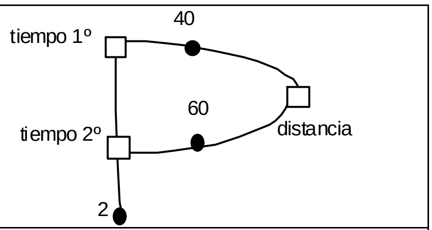
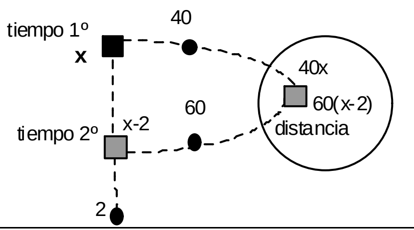
c) Número de producciones encontradas en cada curso

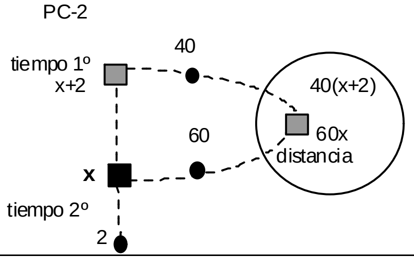
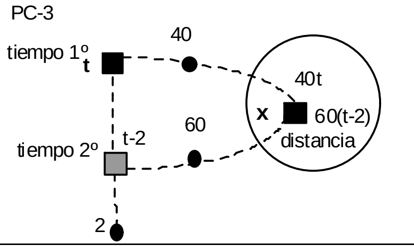
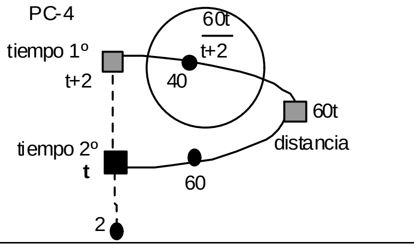
1º	2º	3º
1	2	4

d) Distribución de la corrección en cursos

1º	2º	3º
2,1	10,4	87,5

e) Grafo de la resolución de cada producción

<table>
<tr><td>ALCANZAR.-Un automóvil parte de un punto A con velocidad uniforme de 40 km/h hacia otro punto B. Dos horas después sale de A hacia B otro automóvil con velocidad uniforme de 60 km/h. Dígase a qué distancia de A se encuentran.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>1
$40x=60(x-2)$</td><td>PC-1

</td></tr>
</table>

2	$40(x+2)=60x$	
3	$x=40t$ $x=60(t–2)$	
4	$\frac{60t}{t+2}=40$	

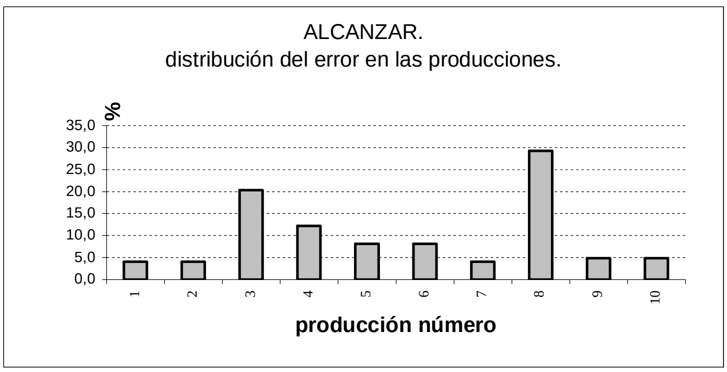
f) Comentarios

En las producciones se ha utilizado una sola letra que designa tiempo empleado en alcanzar o dos letras que designan tiempo empleado y distancia recorrida, aunque en este último caso la distancia no ha sido usada en la construcción de expresiones algebraicas. La distancia recorrida hasta darse alcance es la cantidad que se iguala excepto en la producción nº 4, una producción singular en la que se iguala la velocidad de uno de los móviles.

2.-Producciones Incorrectas

A) Número de producciones incorrectas :**10**

B) Distribución porcentual de las 10 producciones incorrectas



C) Número de producciones incorrectas encontradas en cada curso

1º	2º	3º
2	5	3

D) Distribución del error en cursos.

1º	2º	3º
8,1	52,8	39,0

E) Producciones encontradas en tres, dos o un curso : Número de producciones y porcentaje del error que suponen esas producciones

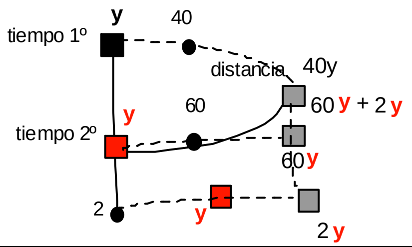
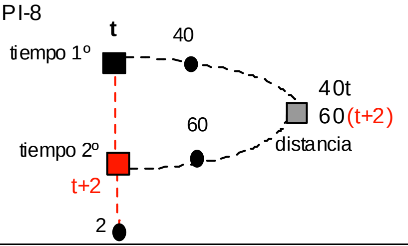
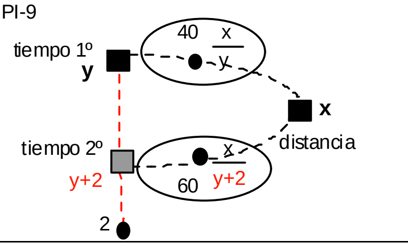
cursos	1º-2º-3º	sólo1º-2º	sólo1º-3º	sólo2º-3º	sólo 1º	sólo 2º	sólo 3º
número	0	0	0	0	2	5	3
porcentaje	0	0	0	0	8,1	52,8	39,0

F) Distribución del error en cada uno de los cursos de las producciones encontradas en tres cursos.

No se encontraron producciones compartidas por dos o tres cursos.

G) Diagnóstico y comentarios de los errores

Un error de inversión se encuentra en las producciones nº 8 y 9 –ver tabla inferior-que expresan el tiempo empleado por el segundo móvil como dos horas (t+2) que el primero, error atribuible a que el enunciado habla de “dos horas después”.
La producción nº 3 –ver tabla inferior-puede interpretarse si hacemos jugar a la letra “y” un extraño papel designando tanto a los tiempos de cada uno de los móviles para que las expresiones algebraicas 40y 60y tengan sentido como a una velocidad para que la expresión 60y pueda ser sumada a la expresión 2y. De ello, podemos desprender que esta producción es una narración al modo algebraico del enunciado de la historia del problema. Cosa ella ciertamente posible que ocurra como en el caso de la producción nº2 40-2x+60 = x a la que podemos calificar como un sumario del texto del problema en el que los datos aparecen en el mismo orden que en el enunciado.
Por su lado las producciones nº 5 y 10 se limitan a expresar la relación e=vt para cada uno de los móviles utilizando la misma literal para el tiempo de ambos móviles igualando los espacios así obtenidos.

3 40y=60y+2y	PI-3 	
8 60(t+2)=40t	PI-8 	Error de inversion
9 $\frac{x}{y}=40 \qquad \frac{x}{y+2}=60$	PI-9 	Error de inversión

Problema : **ENCONTRAR**

1.-Producciones Correctas

a) <u>Número de producciones correctas</u> : **5**

b) <u>Distribución porcentual de las producciones correctas</u>

producción nº	**%**
1	31,7
2	47,7
3	6,9
4	2,3
5	11,5

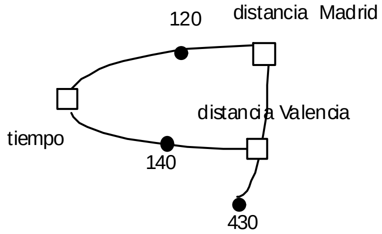
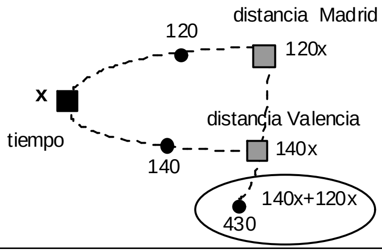
c) <u>Número de producciones encontradas en cada curso</u>

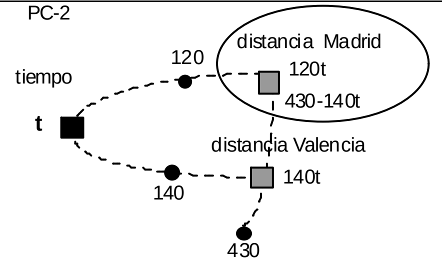
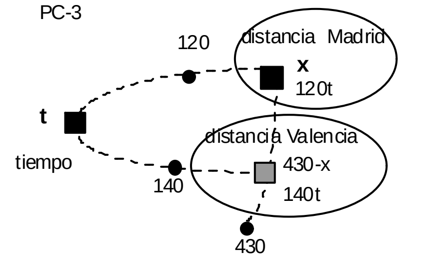
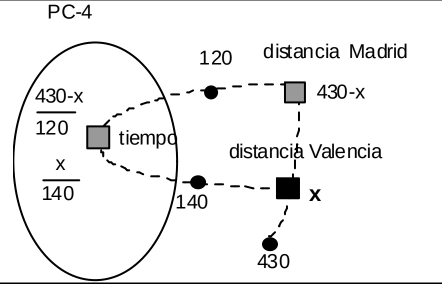
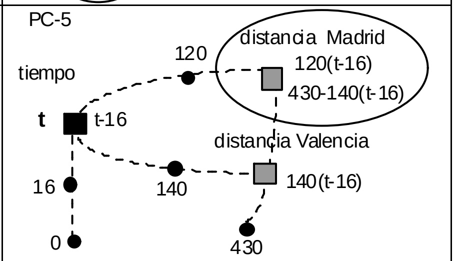
1º	**2º**	**3º**
1	2	5

d) <u>Distribución de la corrección en curso</u>

1º	**2º**	**3º**
21,0	5,7	73,3

e) <u>Grafo de la resolución de cada producción</u>

<table>
<tr><td>ENCONTRAR .-Un tren parte a las 16 h de Madrid con destino a Valencia con una velocidad de 120 km/h. A la misma hora sale de Valencia otro tren con destino Madrid y a una velocidad de 140 km/h. Dígase a qué distancia de Madrid se encuentran y a qué hora, si la distancia Madrid–Valencia es de 430 km.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>1
430=120x+140x</td><td>PC-1

</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>2
$120t = 430 - 140t$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>3
$x=120t \quad 430-x=140t$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>4
$\frac{430-x}{120} = \frac{x}{140}$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>5
$120(t-16)=430-140(t-16)$</td><td>
</td></tr>
</table>

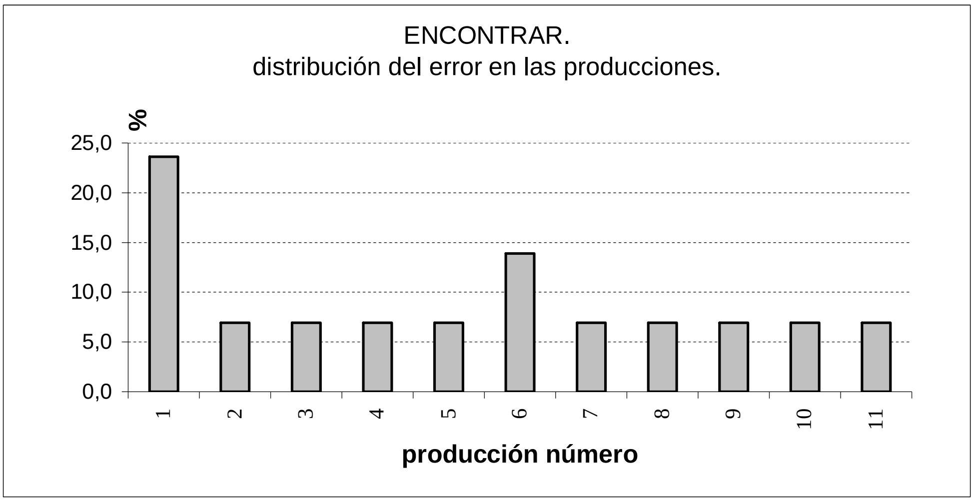
f) <u>Comentarios</u>

Se han usado una o dos letras que designan el tiempo o el tiempo y una de las distancias a Madrid o Valencia, esto es, siempre designando incógnitas del problema. Las cantidades que se igualan son distancias con la excepción de la producción nº4 en la que se iguala el tiempo. Es de observar que en la producción más frecuente se iguala una expresión algebraica que refiere la suma de las distancias recorridas por cada tren a 430, cantidad que es un dato que nos informa del recorrido total.

2.-Producciones Incorrectas

A) <u>Número de producciones incorrectas</u> : **11**

B) <u>Distribución porcentual de las 11 producciones incorrectas</u>



C) Número de producciones incorrectas encontradas en cada curso

1º	2º	3º
4	7	1

D) Distribución del error en cursos.

1º	2º	3º
27,8	55,6	16,7

E) Producciones encontradas en tres, dos o un curso : Número de producciones y porcentaje del error que suponen esas producciones

cursos	1º-2º-3º	sólo1º-2º	sólo1º-3º	sólo2º-3º	sólo 1º	sólo 2º	sólo 3º
número	0	0	0	1	4	6	0
porcentaje	0	0	0	23,6	27,6	48,6	0

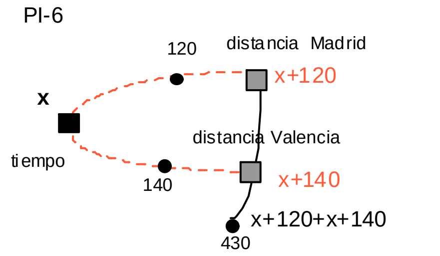
F) Distribución del error en cada uno de los cursos de las producciones encontradas en tres cursos.

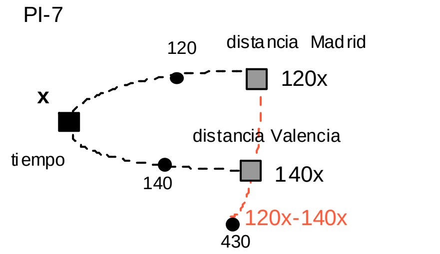
No se encontraron producciones incorrectas compartidas por tres cursos.

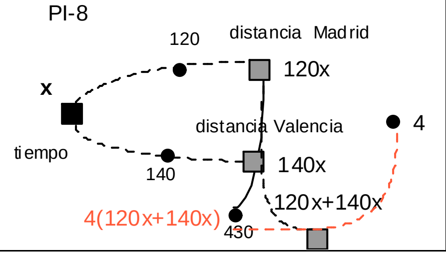
G) Diagnóstico y comentarios de los errores

La tabla inferior muestra los grafos de la resolución de tres de la producciones incorrectas y un intento de diagnostico de los errores presentes en ellas. Sin embargo la bajisima frecuencia de cada una de las producciones incorrectas y su extrañeza hace difícil catalogar los errores o que ello sea significativo. Así por ejemplo es inexplicable la estructura meramente aditiva de las producción 6 o de las producciones nº 3 y 9.

El error de inversión de la producción nº 7 es un error familiar, sin embargo la arbitrariedad del factor 4 en la producción nº 8 es inexplicable y el propio número 4 sólo cabria interpretarlo como la hora de salida de los trenes.

<table>
<tr>
<td>6
x+140+x+120=430</td>
<td>
</td>
<td>Error de operacion</td>
</tr>
<tr>
<td>7
120x– 140x=430

Frecuencia:</td>
<td>
</td>
<td>Error de inversión.</td>
</tr>
<tr>
<td>8
4(120x+140x)=430

Frecuencia:</td>
<td>
</td>
<td>Error de arbitrariedad.</td>
</tr>
</table>

Problema : **LIEBRE Y GALGO**

1.-Producciones Correctas

a) Número de producciones correctas : **0**

f) Comentarios

Como se desprende del hecho que no se encontrara ninguna producción correcta entre los 258 estudiantes de los tres cursos considerados se debe concluir que los estudiantes no logran hacer un uso competente del MC en el problema LIEBRE Y GALGO. Los comentarios que siguen sobre el problema y el posterior análisis de las producciones incorrectas quizá nos ayuden a comprender las dificultades que tienen para ello.

LIEBRE Y GALGO es un problema de la subfamilia MOVILES del tipo alcanzar, el galgo debe dar alcance a la liebre. Sin embargo, la manera de describir la situación en el enunciado del problema es digamos peculiar vista desde el punto de vista escolar, aunque más cercana a la descripción que podría hacer un observador que presencia el fenómeno desprovisto de instrumentos de medida elaborados. La descripción no se hace usando las magnitudes espacio, velocidad, tiempo en la manera habitual y tampoco se proporcionan valores relativos a éstas cantidades empleando las unidades de un sistema de unidades medida estándar. Por ello antes de pasar al análisis parece conveniente exponer:

-Unos apuntes sobre el modo de cómo pueden verse referidas en el enunciado del problema las magnitudes habituales y su medida.

-Un estudio mediante un grafo - que represente una lectura algebraica del problema análoga a los problemas de tipo alcanzar –y a partir de el las posibles traducciones del problema a ecuaciones cuando se usan diferentes elecciones de incógnita. Esto es, una pequeña exploración del diccionario teórico de cantidades y del conjunto de soluciones del problema.

Sobre las magnitudes y sus medidas.

La velocidad de la liebre y el galgo se puede desprender de la frase que dice: “La liebre daba 4 saltos mientras que el galgo daba 3". La expresión “mientras que” iguala los tiempos empleados en dar los dichos saltos por ambos liebre y galgo y los números señalan el número de saltos bien de liebre bien de galgo en ese tiempo. Tomado ese tiempo como unidad de medida, se tienen las velocidades en saltos de cada uno para cada uno, 3 para el galgo 4 para la liebre. Ambas velocidades no son comparables por su valor ya que el tamaño del salto no es el mismo para liebre y galgo como se señala en el enunciado.

El espacio que tienen que recorrer el galgo y la liebre son desconocidos. La cantidad de espacio recorrido se puede medir como “tantos saltos de liebre”, “tantos saltos de galgo”. La correspondencia entre los valores de tales medidas se puede obtener de la frase "2 saltos del galgo miden tanto como 3 saltos liebre", que comprara las unidades de medida, saltos. Esta frase nos informa que la razón 2/3 usada como operador nos transforma el valor de la medida de una cantidad de espacio en saltos de liebre a su valor en saltos de galgo y que la razón inversa 3/2 lo hace inversamente. Dichas razones pueden asimismo utilizarse para expresar las velocidades de liebre y galgo con una medida común.

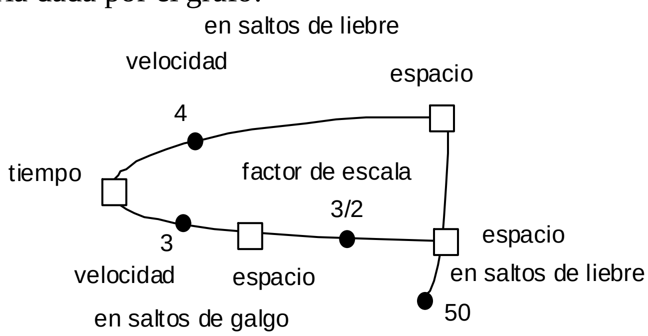
En el uso del MC se igualan los valores de medida de una cantidad de magnitud, ello hace obligatorio usar la misma unidad de medida para la magnitud que se iguala.

La decisión sobre cuales de las dos unidades posibles conviene utilizar para medir la cantidad de espacio requiere un análisis del enunciado del problema. La pregunta del problema es cuántos saltos debe dar el galgo, pero el único dato referente a un espacio recorrido es "50 saltos de ventaja".

La primera frase del problema reza. "Una liebre era perseguida por un galgo al que llevaba 50 saltos de ventaja", donde no menciona explícitamente si los 50 saltos de ventaja son saltos de liebre o saltos de galgo. Una liebre pesimista y un galgo optimista pensarían que los 50 saltos mencionados son saltos de liebre, y en caso contrario pensarían que los 50 saltos son de galgo. Del lado del cazador, digamos que los 50 saltos son de liebre y procedamos. En caso contrario bastaría trasformar esos 50 saltos de liebre en saltos de galgo.

Sobre el grafo del problema y las ecuaciones.

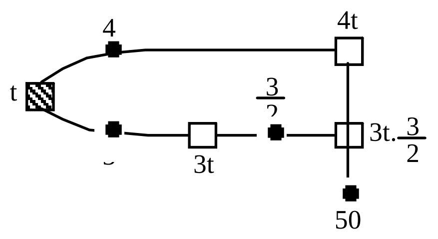
Con lo dicho anteriormente y empleando las magnitudes espacios, velocidades y tiempos, una lectura analítica del problema análoga a las de los problemas del tipo alcanzar vendría dada por el grafo:

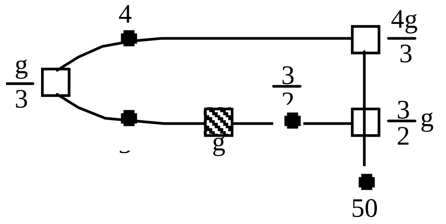
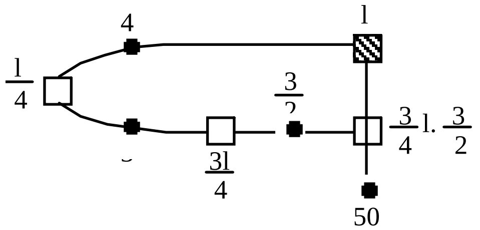
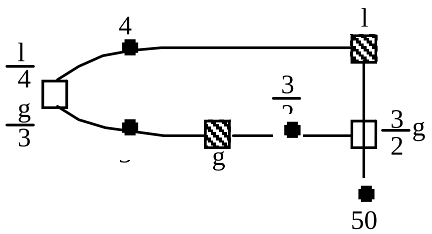


en la lectura del problema elaborada puede observarse que el tiempo es igual para ambos liebre y galgo y que el espacio recorrido por ambos difiere en 50 saltos de liebre. Para hacer esta comparación se ha tenido que medir el espacio recorrido por el galgo en saltos de liebre. Se podría haber optado asimismo por expresar la velocidad del galgo en saltos de liebre, intercalando con anterioridad el factor de escala.

A partir de este grafo, se puede proceder como habitualmente a distintas elecciones de incógnitas y examinar las distintas ecuaciones no equivalentes que se pueden obtener como solución.

.

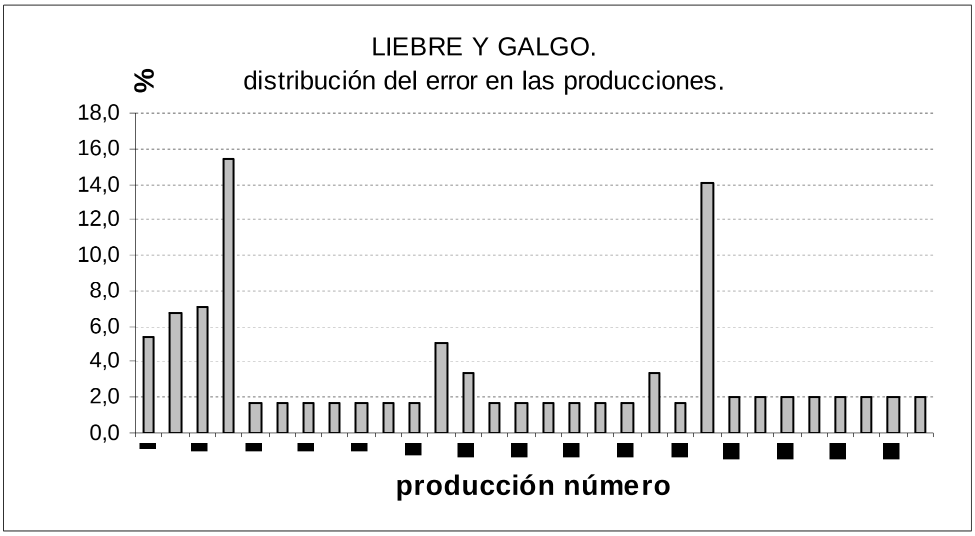
1) La elección de *t* como las unidades de tiempo requeridas para alcanzar.	 $3t.\frac{3}{2} = 4t + 50$

2) La elección de *g* como el nº de saltos de galgo	 $\frac{3}{2}g = \frac{4g}{3} + 50$
3) La elección de *l* como el nº de saltos de liebre.	 $\frac{3}{4}l.\frac{3}{2} = l + 50$
4) La elección de *l* como el nº de saltos de liebre y de *g* como el nº de saltos de galgo	 $\frac{l}{4} = \frac{g}{3}$ (3l = 4g) $\frac{3}{2}g = l + 50$

2.-Producciones Incorrectas

A) <u>Número de producciones incorrectas</u> : **30**

B) <u> Distribución porcentual de las **30** producciones incorrectas</u>



C) <u> Número de producciones incorrectas encontradas en cada curso</u>

1º	2º	3º
10	13	12

D) Distribución del error en cursos.

1º	2º	3º
21,8	41,9	36,2

E) Producciones encontradas en tres, dos o un curso : Número de producciones y porcentaje del error que suponen esas producciones

cursos	1º-2º-3º	sólo1º-2º	sólo1º-3º	sólo2º-3º	sólo 1º	sólo 2º	sólo 3º
número	1	1	1	1	7	10	9
porcentaje	5,4	6.7	7	15,4	11,7	23,5	30,2

F) Distribución del error en cada uno de los cursos de las producciones encontradas en tres cursos.

G) Diagnóstico y comentarios de los errores

Este problema es el único de los estudiados en que los estudiantes escriben más ecuaciones que letras se utilizan en una producción, esto ocurre concretamente en las producciones nº 4, 15 y 23 producciones que suponen un 19,1% del error ya que la producción nº 4 es la más frecuente.

4

4l=3g 3l=2g (4 ∗3)l+(3 ∗ 2)g=50

15

2g=3l l+50=4g–50=3

23

4l=3g 3l=2g l=g+50

En la producción nº 4 la primera de las igualdades 4l=3g que es una igualdad incorrecta cuando *l* y *g* refieran el número de saltos de la liebre y del galgo se escribe como igualdad la afirmación siguiente "para cualquier tiempo t que se considere si la liebre ha dado 4t saltos el galgo ha dado 3t saltos" que se desprende de la frase del enunciado ""La liebre daba 4 saltos mientras que el galgo daba 3".siendo la unidad el tiempo o invertido en dar esos 4 o 3 saltos el que es igual para ambos animales pero no es el número de saltos dados que son en un tiempo t : l=4t para la liebre y g=3t para el galgo. Luego la igualdad 4l=3g que aparece en esta producción intenta traducir la frase del enunciado es incorrecta. La igualdad correcta se puede obtener en forma de razón, así como el tiempo que transcurre desde la situación inicial –la liebre con ventaja- hasta que es alcanzada por el galgo es el mismo para los dos animales si *l* y *g* son los saltos dados por ambos animales en ese tiempo t: l/g = 4t/3t =4/3 o en la forma anterior 3l=4g. De donde podría desprenderse que a los estudiantes esquemas del tipo "por cada cuatro tres" no les sugiere que están ante la presencia de una razón. La única razón encontrada en las producciones se encuentra en la difícilmente legible producción nº 10:

10 M

l———— l—————l

50x N

$$50x+Nx=My \quad \frac{M}{N}=\frac{3}{4} \qquad 2y=3x$$

La segunda igualdad de la producción nº 4 3l=2g que permite transformar la medida de una longitud expresada en saltos de liebre a la medida de esta misma longitud expresada en saltos de galgo es una igualdad correcta y la podemos encontrar asimismo tanto en la producción 23 como en otras muchas así las nº 1, 3, 9, 12, 13, 14, 15,16, 19, 22, 25; sin que falte para esta igualdad una producción que contiene un error de inversión la producción nº 2 en la que encontramos 2l =3g.

La tercera de las igualdades (4 ∗3)l+(3 ∗ 2)g=50 es de difícil lectura pues trata de una suma de saltos de liebre y de galgo que se iguala a 50. Sin embargo la 3º igualdad de la producción nº 23: 4l=3g 3l=2g l=g+50 es una clara traducción (aunque incorrecta, debería escribirse g=l+50) de que *l* y *g* cumpliendo las dos condiciones impuestas en las igualdades anteriores tienen que ser tales que el número de saltos dado por el galgo sea 50 más de los dados por la liebre, saltos que son los que esta le lleva de ventaja. Así la producción nº 23 es una traducción con 2 letras y tres ecuaciones puesto que las tres condiciones que se observan en el problema deben ser expresadas aunque ello se haga de modo superficial.

La mayoría de las producciones incorrectas contiene la igualdad ya mencionada 2g=3l que permite obtener el factor de escala y una segunda igualdad que puede juzgarse como un intento de comparar los espacios recorridos teniendo en cuenta que el galgo debe recorrer los 50 saltos de ventaja que le lleva la liebre. En unas de las producciones se opta sin más como en la producción nº 23 por g+50 =l, lo que ocurre en las producciones nº 2, 3 con el consiguiente error de inversión –otros errores aparte- o sin error de inversión l+50 = g en la producción nº 17. En otras producciones se opta para esta igualación de espacios por introducir las expresiones 4l y 3g como medida de los saltos dados por la liebre y el galgo –este error ya se ha comentado anteriormente- olvidando siempre que ambos deben de expresarse en la misma unidad de medida que los 50 saltos que son datos. Un ejemplo de producciones de este tipo pueden ser las nº 5, 12,13, 14,16 donde esta comparación se hace mediante las igualdades 50=3g-4l o sea 50 es la diferencia entre los saltos dados por la liebre y el galgo, 50 =4l-3g donde se expresa la ventaja inicial y no cuando se da alcance- un error de inversión- o algunas otras del mismo estilo 4l =3g-50, 4l=3g+50 , 50=4l+3g donde no se puede saber muy bien si estas expresiones expresan la ventaja inicial comparan los espacios recorridos por la liebre y el galgo o contienen errores de inversión según el propósito del resolutor.

Subfamilia: Trabajo.

Problema : **CAVAR**

1.-Producciones Correctas

a) Número de producciones correctas : **5**

b) Distribución porcentual de las producciones correctas

producción nº	**%**
1	58,3
2	19,4
3	11,1
4	5,6
5	5,6

c) Número de producciones encontradas en cada curso

1º	**2º**	**3º**
2	2	5

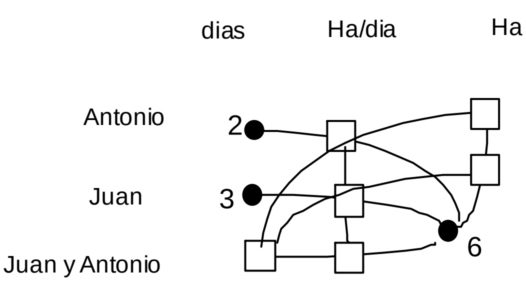
d) Distribución de la corrección en cursos

1º	**2º**	**3º**
37,0	9,3	53,7

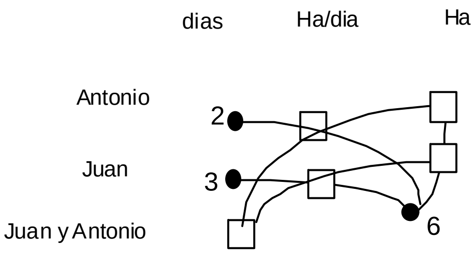
e) Grafo de la resolución de cada producción

Comentarios previos

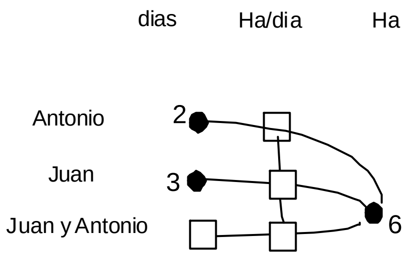
Debe decirse en primer lugar que la estructura de datos del problema CAVAR denota la presencia en su enunciado de un dato redundante, la superficie del campo. Así, considerando un subgrafo del grafo teórico del problema CAVAR como el de la figura



podemos considerar en dicho gafo los subgrafos (a) o (b) de la fig. que corresponden a una lectura algebraica (a) y a una lectura aritmética (b)

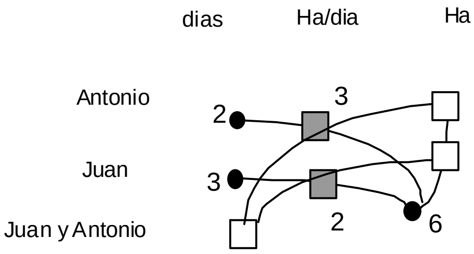


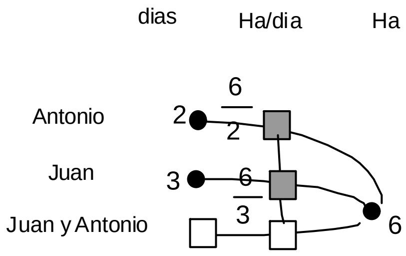
(a)



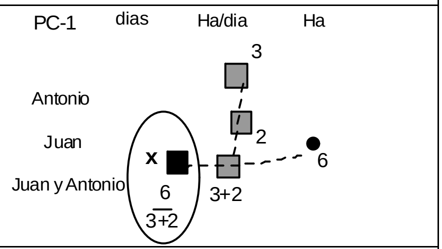
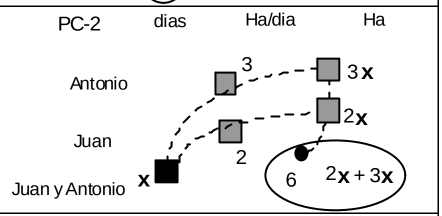
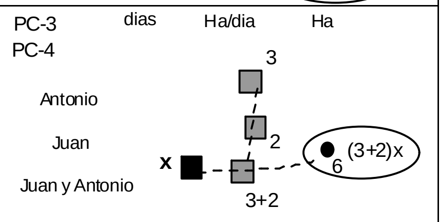
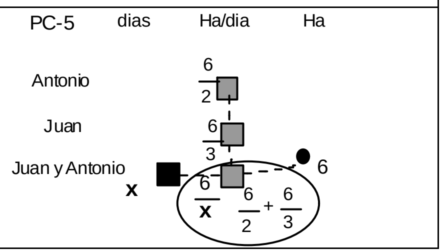
(b)

destruyendo en ellos las aristas que poseen entradas y oscureciendo los vértices correspondientes obtenemos los grafos (a´) (b´) que usaremos para el análisis de las producciones correctas.





(a´) **(b´)**

La superficie de un campo es de 6 ha. Juan puede cavarlo en 2 días. Antonio lo hace en 3 días. Si trabajan los dos juntos en el campo, ¿cuánto tiempo tardarán en cavarlo?	
1 $\frac{6}{3+2}=x$	
2 $2x+3x=6$	
3 $(3+2)x=6$ 4 $5x=6$	
5 $\frac{6}{x}=\frac{6}{2}+\frac{6}{3}$	

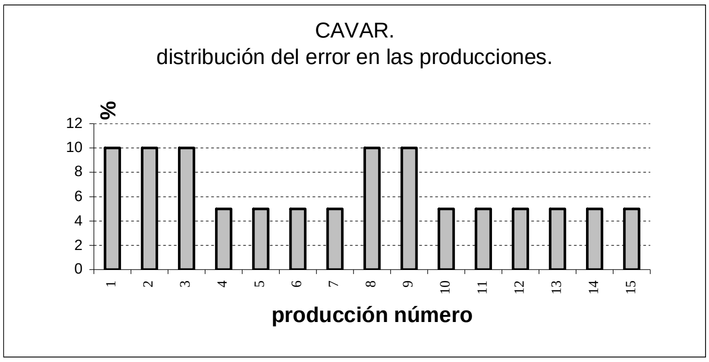
f) Comentarios

Cuatro de las producciones correctas utilizan la lectura aritmética y una de ellas la lectura algebraica. La producción nº 1 es una solución aritmética que solo utiliza la letra para designar a la incógnita del problema, pero nunca para obtener otras cantidades a partir de ella. Ninguna de las producciones usa más de una letra y siempre designa a la incógnita del problema. Las cantidades que se utilizan para construir la igualdad son la superficie del campo, que es un dato, en tres de las producciones y las Ha/dia cavadas conjuntamente en una producción.

2.-Producciones Incorrectas

A) Número de producciones incorrectas : **15**

B) Distribución porcentual de las 15 producciones incorrectas



C) Número de producciones incorrectas encontradas en cada curso

1º	2º	3º
6	10	1

D) Distribución del error en cursos.

1º	2º	3º
35	60	5

E) Producciones encontradas en tres, dos o un curso : Número de producciones y porcentaje del error que suponen esas producciones

cursos	1º-2º-3º	sólo1º-2º	sólo1º-3º	sólo2º-3º	sólo 1º	sólo 2º	sólo 3º
número	0	1	0	1	6	8	0
porcentaje	0	10	0	10	30	50	0

F) Distribución del error en cada uno de los cursos de las producciones encontradas en tres cursos.

No existen producciones compartidas por los tres cursos.

G) Diagnóstico y comentarios de los errores

La producción incorrecta nº 8 muestra una traducción en igualdades de las frase del problema, ello se hace mediante un uso polisémico de la literal *x* : en la primera igualdad indica los días utilizados por Juan, en la segunda igualdad, los días utilizados por Antonio y en la tercera, los días que utilizarían cuando cavaran conjuntamente. Las producciones nº 4, 13 y 1 parecen proceder de análoga forma. Así:

-la producción nº 4 es un calco de la producción nº 8, con el uso de dos literales: una para Juan y otra para Antonio.

-la producción nº 13, con tres ecuaciones y dos literales, además de un uso polisémico de las literales hay un exceso de ecuaciones.

la producción nº 1, que usa dos literales, sólo transcribe las relaciones de lo cavado por Juan y Antonio.

-las producciones nº 6 y nº 7 apuntan a conclusiones que pueden extraerse de cómo se pasa la situación descrita en el problema a lenguaje algebraico; ésta se expresa así: lo hecho, 2x+3x, entre dos, $\frac{2x+3x}{2}$, son 6. O bien “lo hecho entre los dos es el doble”: 3x+2x=12.

-la producción incorrecta nº 12 puede leerse : "lo hecho por Juan –que puede determinarse en la primera igualdad– unido a lo que hará Antonio - que consta en la segunda igualdad-, nos permite tener el trabajo acabado". Así, la literal *x* que resulta de la primera igualdad, y que representa hectáreas/día, se suma a la expresión algebraica 3y, que representa hectáreas, en una clara transgresión de la ley de la homogeneidad, y la suma de estas dos cantidades conduce a hectáreas; por lo que se igualan cantidades que son de tipo diferente.

Es de de señalar que asumir traducciones del texto del problema como las supuestas anteriormente conlleva asumir la comisión de los errores apuntados. Ahora bien, pensamos por el contrario, que la presencia en una producción de tal cuadro de errores es lo que permite interpretaciones de lo traducido en la producción como lo hemos hecho. Para una interpretación apropiada de la misma habría que consultar obviamente con su autor y aclarar lo que nos pretende referir.

En la producción nº 5 es difícil dotar de un referente a la literal *x* que contiene, dadas las expresiones algebraicas y la igualdad que se han construido.

En las producciones s nº 10 y nº 3 se hacen intervenir relaciones aditivas entre las cantidades que son incomprensibles en el contexto del problema.

La producción nº 8 contiene dos identidades.

La producción nº 11 puede interpretarse como una producción correcta en la que se han utilizado dos literales para señalar que el resultado es “entre los dos”.

La producción incorrecta nº 14 es una solución aritmética incorrecta.

La producción incorrecta nº 2 podría interpretarse como una escritura intermedia en la búsqueda de relaciones de tipo inverso, evocando la estrategia habitual para resolver problemas de la subfamilia TRABAJO.

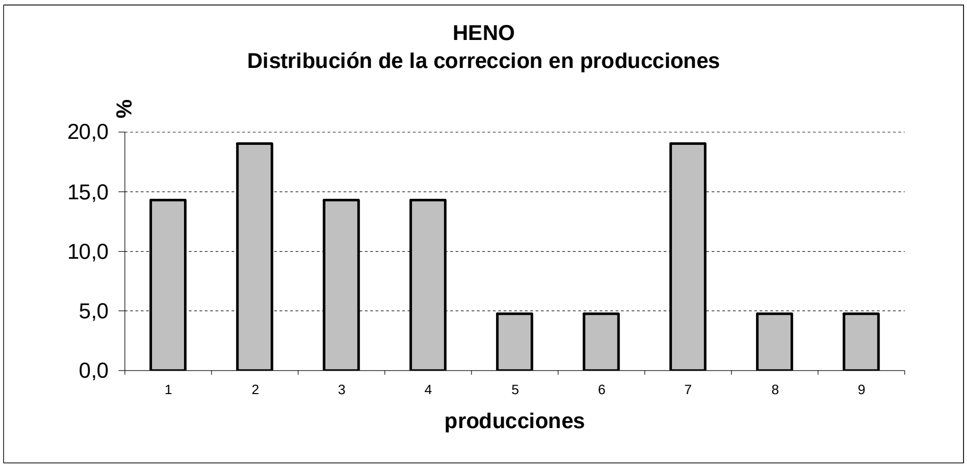
Subfamilia: Otros

Problema : **HENO**

1.-Producciones Correctas

a) Número de producciones correctas : **9**

b) Distribución porcentual de las 9 producciones correctas



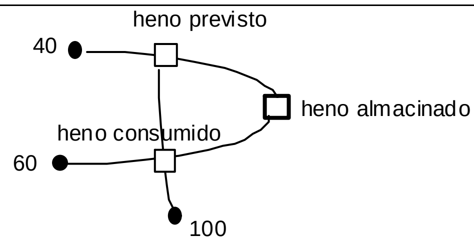
c) Número de producciones encontradas en cada curso

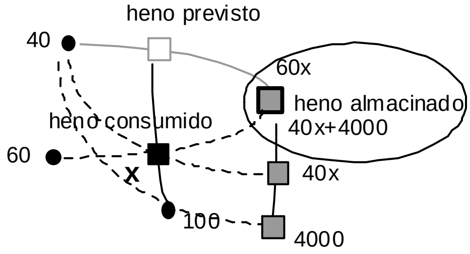
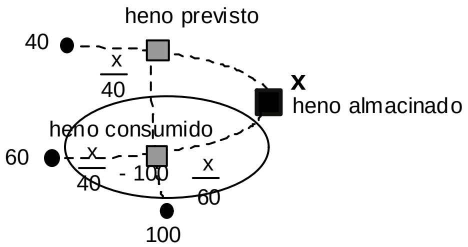
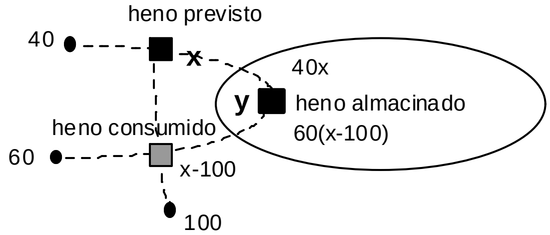
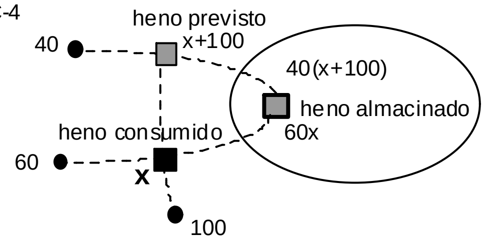
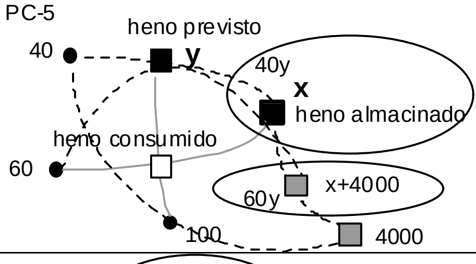
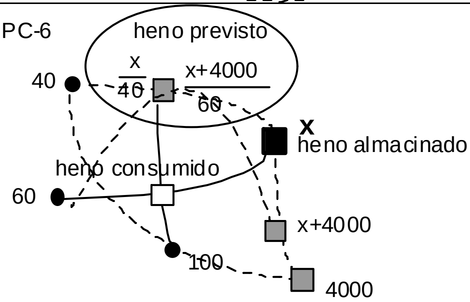
1º	2º	3º
2	5	5

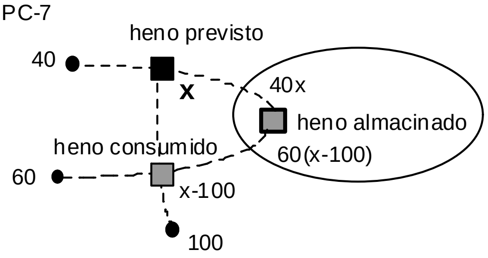
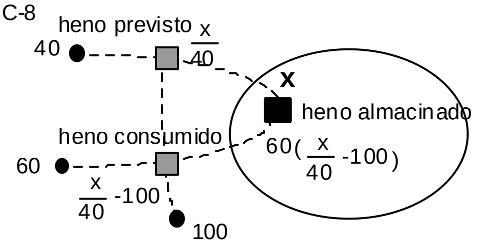
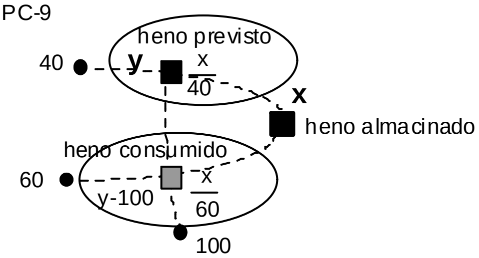
d) Distribución de la corrección en cursos

1º	2º	3º
9,5	38,1	52,4

e) Grafo de la resolución de cada producción

HENO.-Unos granjeros almacenaron heno para 40 días. Sin embargo el heno era de mejor calidad de la que pensaban y ahorraron 100 kg por día. Así tuvieron heno para 60 días. ¿Cuánto heno almacenaron?	

1 $40x + 4000 = 60x$	PC-1 
2 $\frac{x}{40} - 100 = \frac{x}{60}$	PC-2 
3 $y=40x$ $y=60(x-100)$	PC-3 
4 $60x = 40(x+100)$	PC-4 
5 $x=40y$ $x+4000 = 60y$	PC-5 
6 x———40 x+4000———60 $\frac{x}{40} = \frac{x+4000}{60}$	PC-6 

7 $(x-100)60 = 40x$	PC-7 
8 $60(\frac{x}{40}-100) = x$	PC-8 
9 $\frac{x}{40} = y$ $\frac{x}{60} = y-100$	PC-9 

f) <u>Comentarios</u>

Una letra se usa en las producciones nº 1,2,4,6,7,8 designando heno almacenado, previsto o consumido. Cuando se utilizan heno previsto o consumido la cantidad que se iguala es heno almacenado, pero cuando se utiliza el heno almacenado son las otras dos cantidades las que se igualan excepto en la producción nº 8. Esto es, no es frecuente encontrar ecuaciones de la forma x=f(x).

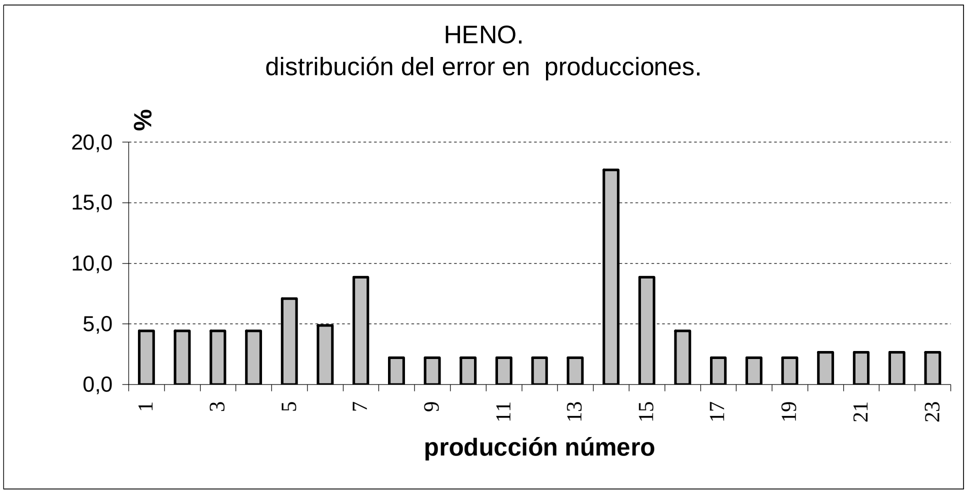
Cuando se usan dos letras una de ellas designa al heno almacenado y la otra al heno previsto, siendo la cantidad de heno almacenado usada para construir una igualdad mientras que cualquiera de las otras cantidades de heno se utiliza para construir la otra.

Es de notar que ninguna de las cantidades que son datos se utilizan para construir igualdades.

2.-Producciones Incorrectas

A) <u>Número de producciones incorrectas</u> :**23**

B) <u>Distribución porcentual de las 23 producciones incorrectas</u>



C) Número de producciones incorrectas encontradas en cada curso

1º	2º	3º
12	12	6

D) Distribución del error en cursos

1º	2º	3º
35,4	48,7	15,9

E) Producciones encontradas en tres, dos o un curso : Número de producciones y porcentaje del error que suponen esas producciones

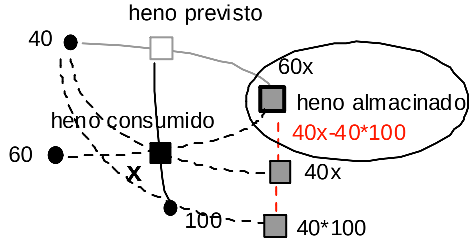
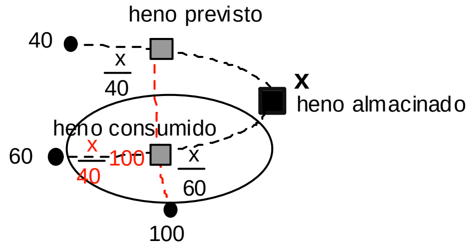
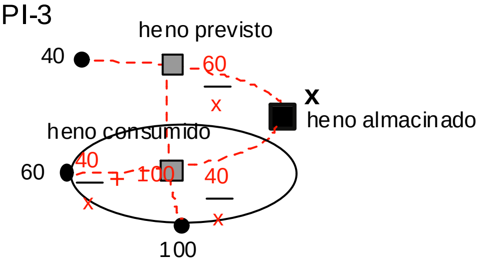
cursos	1º-2º-3º	1º-2º	1º-3º	2º-3º	sólo 1º	sólo 2º	sólo 3º
número	0	2	1	2	7	6	4
porcentaje	0	17,7	7,1	4,9	22,1	37,6	10,6

F) Distribución del error en cada uno de los cursos de las producciones encontradas en tres cursos.

No se encontraron producciones compartidas por tres cursos. En el caso de las producciones compartidas por dos cursos.- cinco de ellas, ver tabla superior- el porcentaje de error que suponía esa producción en cada curso no difería del 3%.

G) Diagnóstico y comentarios de los errores

Un grupo de producciones con errores puntuales y semejantes a las producciones correctas- ver tabla bajo-

11 $40x - 100 * 40 = 60x$	PI-11 	Error de inversión aditivo
23 $\frac{x}{40}\ 100 = \frac{x}{60}$	PI-23 	Error de inversión aditivo
3 $\frac{40}{x} + 100 = \frac{60}{x}$	PI-3 	Errores de inversión multiplicativo y Error de inversión aditivo

Entre las producciones incorrectas se encuentra un grupo de 9 producciones en los que una expresión algebraica se iguala a 60 días, a saber:

PI-2 $\quad 40-100x = 60$ $\qquad$ PI-8 $\quad 40+100\,x=60$

PI-4 $\quad 40x+100 = 60$ $\qquad$ PI-17 $\quad 40x-100 = 60$

PI-6 $\quad \frac{x}{40} + 100 = 60$ $\qquad$ PI- 10 $\quad \frac{x}{40} - 100 = 60$

PI-12 $\quad \frac{x}{40} + (x-100) = 60$ $\qquad$ PI- 21 $\quad x-4000 = 60$

PI-22 $\quad \frac{x}{40} = y \qquad y-100 = 60$

en todas estas expresiones se igualan cantidades que pertenecen a dos espacios de medida diferentes , así por ejemplo el grafo de las resoluciones de PI-10 y PI-22 (fig. a)

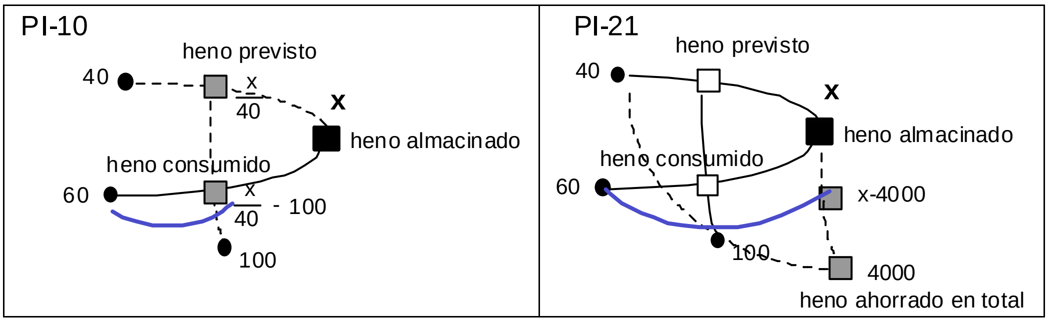


fig.a

puede observarse que no existe ninguna expresión algebraica incorrecta sino que una determinada cantidad de heno se iguala a 60 días. Observando en detalle las producciones PI-10 y PI-21 las cantidad de heno que se iguala a 60 días no es una cantidad de heno arbitraria. Así en PI-10 la cantidad que se iguala a 60 es el heno consumido diario, esto es, la cantidad de kilos de heno que se estuvieron realmente consumiendo cada uno de esos 60 días y en PI-21 la cantidad de heno que se iguala a 60 días es la cantidad de heno que los granjeros tienen en su almacén al haber ahorrado permite que los granjeros tener heno para 60 días.

De la anterior interpretación se deriva que este error de igualdad puede deberse a la interposición del signo igual no entre una misma cantidad expresada de dos maneras diferentes sino entre dos cantidades tales que "una cantidad explica la otra cantidad", en nuestro caso, "como consumieron esto tuvieron para 60 días", "como les quedaba esto llegaron a 60 días" .

PI-6 es análoga a PI-11 con un error de inversión aditivo y la interpretación subsodicha puede aplicarse para leer P-22 que contiene las dos etapas de la explicación "pensaban gastar $\frac{x}{40}$, esto es *y* pero como ahorraron *100* con *y-100* tuvieron para *60* días". Es posible que este modo de hacer conciba el proceso de traducción como una explicación realizada en "lenguaje algebraico" de las claves de lo enigmático del problema que podrían expresarse también en lenguaje natural.

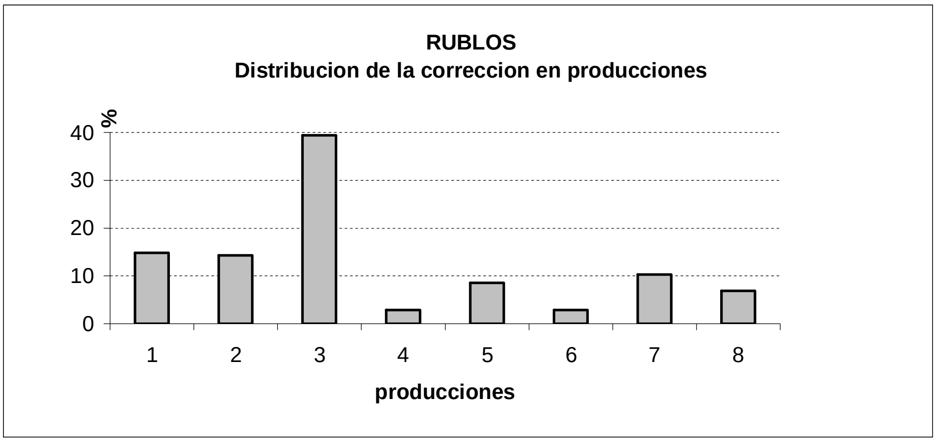
Las 4 primeras producciones de las 9 consideradas contienen expresiones algebraicas arbitrarias , difícil es asignar un referente a 100x o a 40x+100 .Por otro lado, puesto que lo único que tienen en común es que los números que aparecen en dichas producciones son datos en el enunciado del problema, podemos considerar estas producciones como resúmenes del enunciado del texto del problema en lenguaje algebraico donde: las letras pueden ser abreviaturas de días o kilos, los signos aritméticos más y menos interpretan el sentido del ahorro y el signo igual se escribe para completar "la frase " tal y como está indicado que se haga cuando se traduce a ecuaciones.

Problema **: RUBLOS**

1.-Producciones Correctas

a) Número de producciones correctas : **8**

b) Distribución porcentual de las producciones correctas



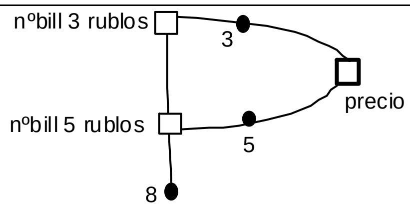
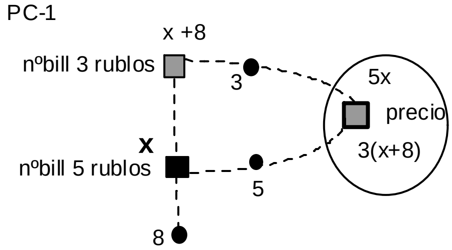
c) Número de producciones encontradas en cada curso

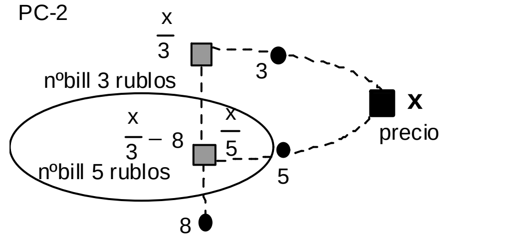
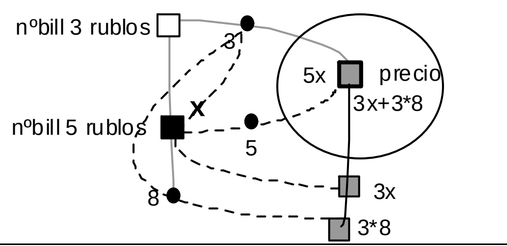
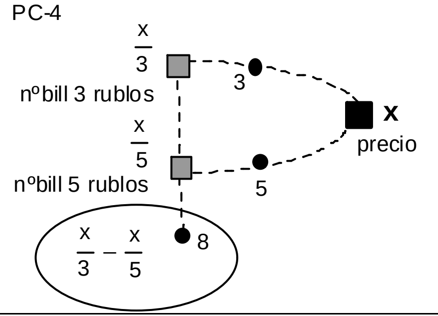
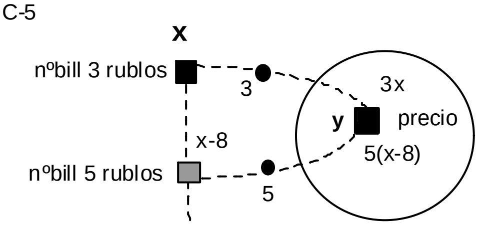
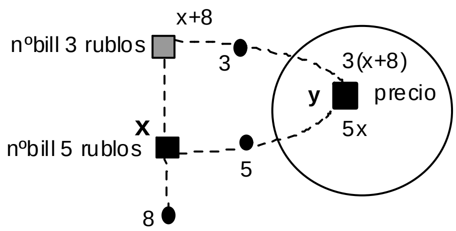
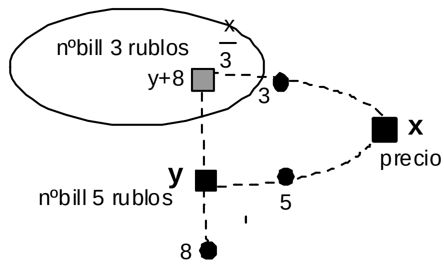
1º	**2º**	**3º**
3	5	4

d) Distribución de la corrección en cursos

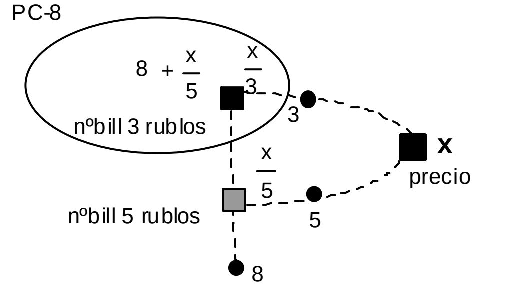
1º	**2º**	**3º**
22,9	25,7	51,4

e) Grafo de la resolución de cada producción

RUBLOS.-Una escuela rusa compra libros para la biblioteca. Si los paga con billetes de 3 rublos, la escuela tiene que dar 8 billetes más que si los paga con billetes de 5 rublos. ¿Cuánto cuestan los libros?	
3(x+8)=5x	PC-1 

$\frac{x}{3} - 8 = \frac{x}{5}$	PC-2 
3x+3∗8=5x	PC-3 
$\frac{x}{3} - \frac{x}{5} = 8$	PC-4 
y=3x y=5(x–8)	PC-5 
y=5x y=3(x+8)	PC-6 
x– rublos y– billetes $\frac{x}{3} = y+8$ $\frac{x}{5} = y$	PC-7 

$$\frac{x}{3} = 8+\frac{x}{5}$$

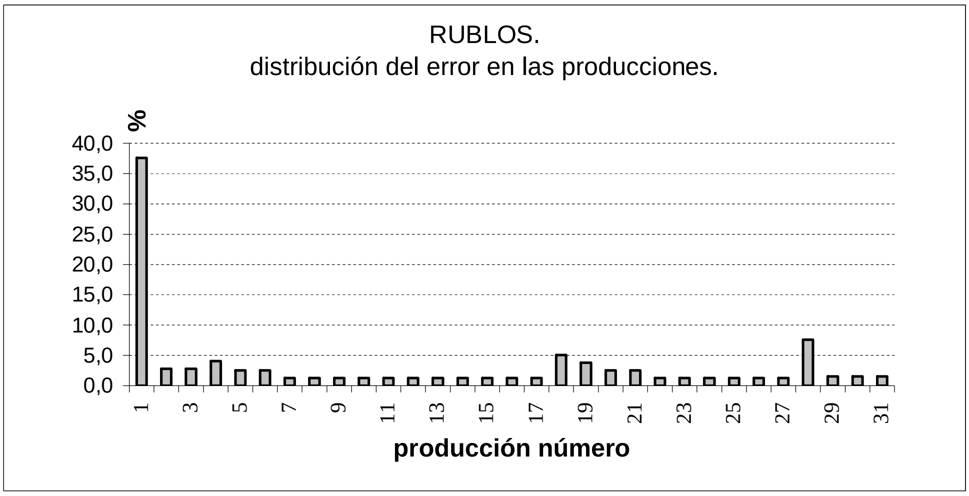


f) Comentarios

2.-Producciones Incorrectas

A) Número de producciones incorrectas : **31**

B) Distribución porcentual de las 31 producciones incorrectas



C) Número de producciones incorrectas encontradas en cada curso

1º	2º	3º
16	12	8

D) Distribución del error en cursos.

1º	2º	3º
30,4	40,6	29,0

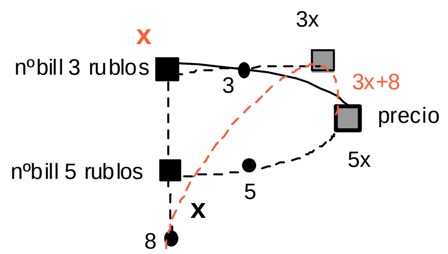
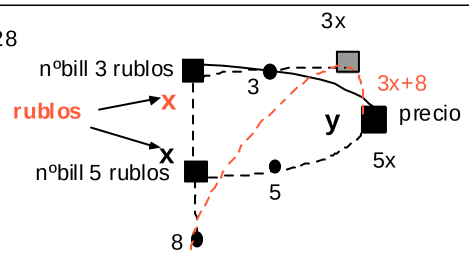
E) Producciones encontradas en tres, dos o un curso : Número de producciones y porcentaje del error que suponen esas producciones

cursos	1º-2º-3º	sólo1º-2º	sólo1º-3º	sólo2º-3º	sólo 1º	sólo 2º	sólo 3º
número	1	0	2	1	12	10	4
porcentaje	37,6	0	5,6	4,1	17,7	21,6	13,5

F) Distribución del error en cada uno de los cursos de las producciones encontradas en tres cursos.

1º	2º	3º	total
29,2	40,6	42,1	37,6

G) Diagnóstico y comentarios de los errores

1 3x+8 = 5x	PI-1  	Error en uso de letras. Polisemia
28 x–rublos y– precio y=3x+8 5x=y	PI-28  	Error en uso de letras. Polisemia

La producción incorrecta nº 1, 3x+8 = 5x, es la más frecuente de las producciones incorrectas. Supone el 37,6 % de las producciones incorrectas y el error que supone en los cursos 1º,2º y 3º como puede verse en F es el 39,2, 40,6, 42,1 respectivamente. El grafo de la resolución de la producción ver tabla superior y la representación en él de las literales usadas y las expresiones algebraicas construidas indican una polisemia de la literal *x*, y la carencia de una cantidad como referente de la expresión algebraica 3x+8 .

La comparación de esta igualdad con la igualdad correcta 3(x+8) = 5x sugiere que algunos alumnos podían haber omitido el paréntesis, con lo que estaríamos ante un error sintáctico. Sin embargo, en otras muchas producciones incorrectas aparecen expresiones como 3x+8, 3x–8, 5x+8, 3+5y, 5y–8... que son asimismo arbitrarias al no respetar la ley de la homogeneidad, esto nos indicaría que la citada expresión 3x+8 no puede tomarse simplemente como la manifestación de un error sintáctico, la omisión del paréntesis.

Las siguientes producciones incorrectas que vamos a considerar son aquellas en las que encontramos igualdades e indicaciones de los alumnos de lo que significan las literales que utilizan: libros, rublos, monedas, precio, billetes 3, billetes 5... Nos referimos a las producciones incorrectas nº 2, 3, 4, 15, 16, 18,... Para empezar, encontramos que en alguna de ellas a una literal se le atribuye expresamente más de una referencia. Detengámonos en las producciones incorrectas nº 18 y nº 28, que después de la producción incorrecta nº 1 son las más frecuentes en los alumnos de 2º y 3º.

- En la producción incorrecta nº 18 *x* indica rublos e *y* el precio, o sea, una cantidad de dinero que se expresa en rublos. El precio se indica en rublos por medio de las expresiones 3x+8 y 5x.
- En la producción incorrecta nº 28 –ver tabla superior- *x* indica libros e *y* indica rublos, y también nº de billetes; con lo cual los libros –entendemos que se refieren al precio– se expresa con 3y+8 o 5y; la polisemia de la *y* permite leer el precio de los libros en rublos o en billetes.

Con la lectura hecha para la producción incorrecta nº 18, volvamos a la producción incorrecta nº 1, 3x+8=5x, y empecemos por suponer que tiene algún sentido para quien la produce.

Si rechazamos la transgresión de la ley de la homogeneidad en la expresión algebraica 3x +8, dado que 8 es claramente una cantidad de billetes de 3 rublos, 3x debe de ser una cantidad de billetes de 3 rublos; así, *x* sería el nº de billetes y 3 no sería un factor multiplicativo sino una marca que indica que los billetes que se consideran son billetes de 3 rublos. Análoga interpretación cabe hacerse de la expresión 5x. Queda ahora por entender qué es lo que se iguala, ya que no podemos suponer que lo que se iguala es la cantidad de billetes de 3 rublos y de 5 rublos que el problema dice que son diferentes. Las producciones incorrectas nº 18 y nº 28, que producen por separado estas expresiones, igualan éstas a libros o a precio. Esto es, ahora las expresiones 3x+8 y 5x (o 3y+8 y 5y) no representan una cantidad de billetes sino el dinero en rublos que suponen unos u otros billetes.

En resumen, la producción 3x+8 = 5x es una tiene sentido siempre que:

1.–El signo igual no se entienda como que iguala las cantidades referidas por las expresiones algebraicas que aparecen a su izquierda y a su derecha sino que lo que iguala es el significado que se les atribuye a dichas expresiones.

2.–Las expresiones algebraicas no se consideren expresiones algebraicas formales –y bien construidas en un uso competente del MC sino expresiones de aspecto algebraico, lo que quiere decir que operaciones y literales se entremezclan por signos de operaciones que no pueden entenderse como representando operaciones estrictamente aritméticas, y las literales y operaciones no se usan con las reglas que su uso demandan.

3.–Las literales utilizadas en la construcción de las expresiones algebraicas tengan un estatus polisémico (por ejemplo, que *x* represente el nº de billetes, sean de la clase que sean) cuando representen cantidades, o tengan otros estatus de uso que no apunten ni siquiera a que la literal pueda ser la representación de una cantidad.

Las producciones incorrectas que mencionamos a continuación son aquellas en las que, independientemente de la lectura que se haga de la producción, podemos encontrar: igualdades que contienen errores de inversión o errores de operación e igualdades en las que alguna de las literales elegidas presentan polisemia. Así, por ejemplo:

En la producción incorrecta nº 21, 3x–8 =5x, encontramos un error de inversión aditiva

La producción incorrecta nº 6, 3x·8=5x, contiene un error de operación.

En la producción incorrecta nº 23, $\frac{x}{3}+8 = \frac{x}{5}$, se encuentra un error de inversión aditiva.

La polisemia de *x* se manifiesta también en las producciones incorrectas nº 8 y nº 16. En la producción nº 8 *x* representa precio y billetes, y en la produccion nº 16, representa billetes y clases de billetes.

Por último. vamos a considerar las producciones incorrectas nº 19 y 20,

3———x+8
5———x $\qquad$ $x=\frac{5(x+8)}{3}$

3———x+8
5———x $\qquad$ 3x=3x+40

que atienden al esquema de la regla de tres. Estas producciones señalan como espacios de medida los rublos de cada billete y el nº de billetes de cada clase:

–Espacio de medida 1: Billetes de 3 rublos y billetes de 5 rublos.
–Espacio de medida 2: Nº de billetes de cada clase.

En ambas producciones *x* indica el nº de billetes de 5 rublos. Con este esquema, para determinar *x* se procede con las acciones indicadas por la regla de proporcionalidad directa, en lugar de con la inversa; se llega así a las igualdades :

$x=\frac{5(x+8)}{3}$, 3x = 3x+40 -aquí tras una multiplicación equivoca-, en lugar de a la igualdad correcta 5x=3(x+8) (la producción correcta nº 5) a la que hubiera dado lugar la regla de la proporcionalidad inversa.

Problema : **MECANOGRAFA**

1.-Producciones Correctas

a) Número de producciones correctas : 5

b) Distribución porcentual de las producciones correctas

producción nº	%
1	30
2	20
3	10
4	30
5	10

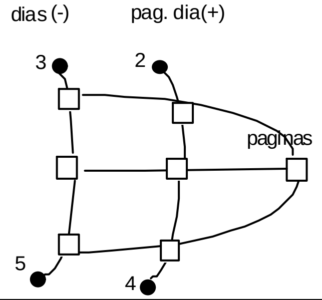
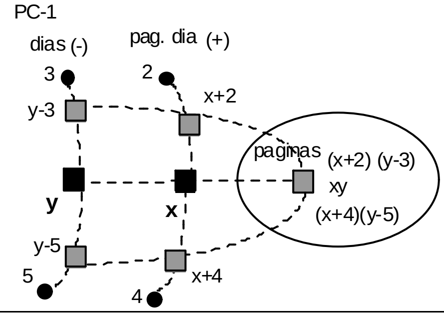
c) Número de producciones encontradas en cada curso

1º	2º	3º
2	1	3

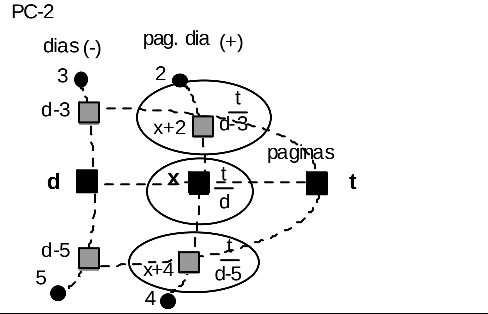
d) Distribución de la corrección en cursos

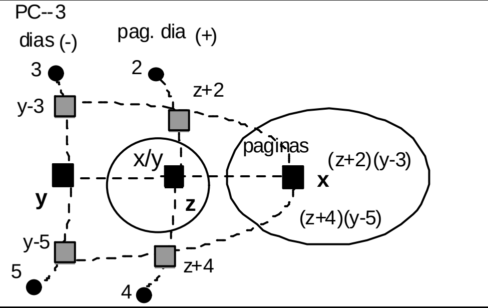
1º	2º	3º
30	20	50

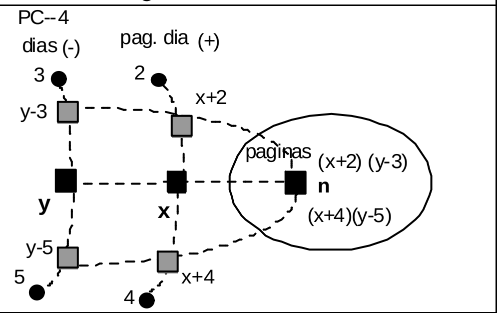
e) Grafo de la resolución de cada producción

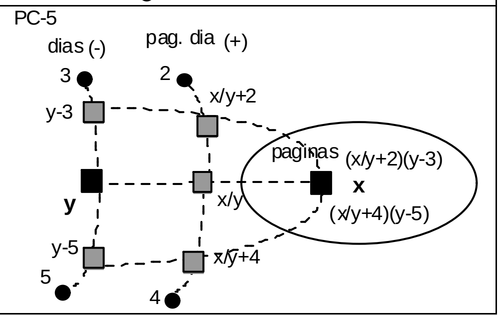
<table>
<tr><td>Una mecanógrafa piensa que si escribe al día 2 páginas más de lo establecido normalmente, acabará el trabajo 3 días antes de lo previsto, mientras que si escribe 4 páginas más al día, acabará 5 días antes de lo previsto. ¿Cuántas páginas tiene que escribir y en cuánto tiempo?</td><td>
</td></tr>
<tr><td>1
xy=(x+2)(y–3)
xy=(x+4)(y–5)</td><td>PC-1

</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>2

$\frac{t}{d}=x$ $\frac{t}{d-3}=x+2$ $\frac{t}{d-5}=x+4$</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>3

$z=\frac{x}{y}$ $(z+2)(y-3)=x$ $(z+4)(y-5)=x$</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>4

$(x+2)(y-3)=n$
$(x+4)(y-5)=n$ $xy=n$</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>5

$(\frac{x}{y}+2)(y-3)=x$ $(\frac{x}{y}+4)(y-5)=x$</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

f) <u>Comentarios</u>

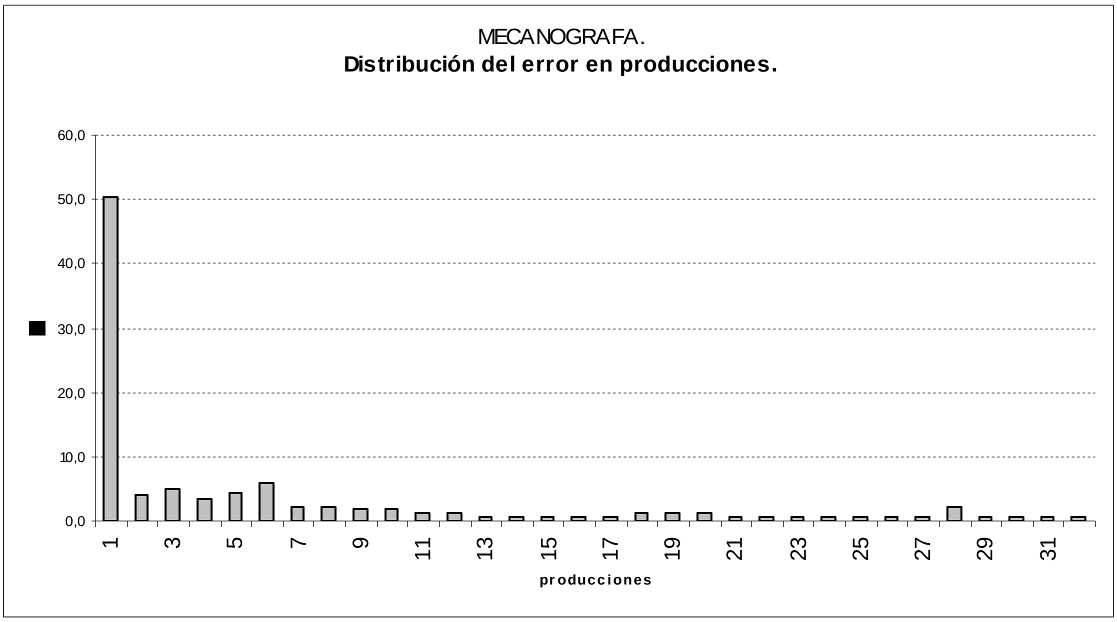
Se utilizan dos letras en dos de las producciones refiriéndose a las cantidades paginas diarias y días en una de ellas y páginas totales y días en la otra la cantidad que se iguala en ambos casos son las páginas totales escritas.

En tres de las producciones se utilizan tres letras refiriéndose a las cantidades días, páginas diarias y páginas totales; las cantidades que se igualan son páginas totales en una de ellas, páginas totales y páginas diarias en otra y días, páginas diarias y páginas totales en la tercera.

2.-Producciones Incorrectas

A<u>) Número de producciones incorrectas</u>: 32

B) Distribución del error en las 32 producciones incorrectas



C) Número de producciones incorrectas encontradas en cada curso

1º	2º	3º
15	18	13

D) Distribución del error en cursos

1º	2º	3º
22,2	46,4	31,2

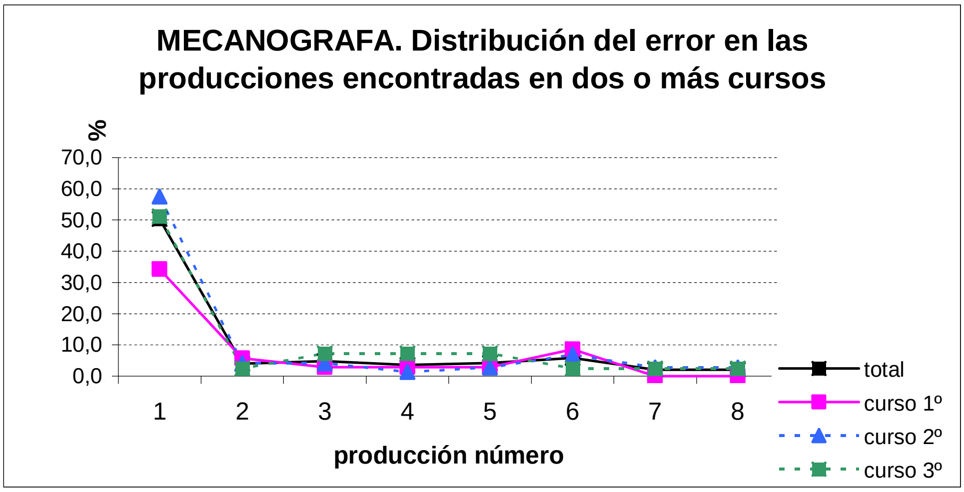
E) Número de producciones encontradas en tres, dos o un curso y porcentaje del error que suponen.

	1º-2º-3º	1º-2º	1º-3º	2º-3º	sólo 1º	sólo 2º	sólo 3º
número de producciones	6	0	0	2	9	10	5
porcentaje error	72,8	0	0	4,0	9,5	8,3	5

F) Distribución del error en cada uno de los cursos de las producciones encontradas en dos o más cursos.

Puede observase en la tabla del punto C) que 8 fueron las producciones incorrectas encontradas en dos o más cursos (producciones 1 a 8 de la tabla de producciones incorrectas). El porcentaje del total del error y del error encontrado en cada uno de los cursos que suponen estas 8 producciones viene dado en la tabla que sigue y la distribución del error en las 8 producciones en la figura

1º	2º	3º	**Total error**
57,1	82,2	82,9	**76,8**

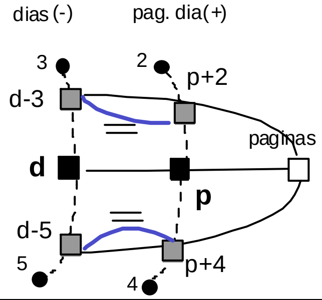
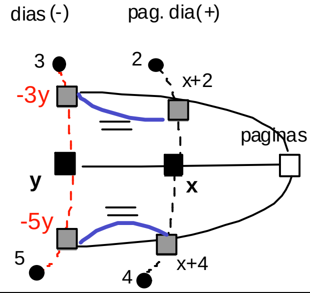


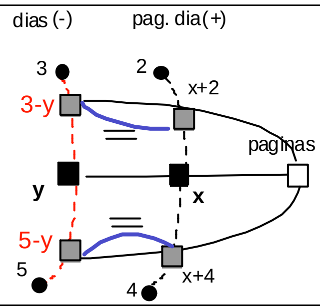
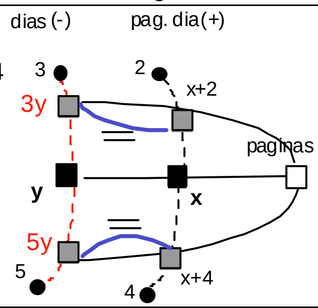
De hecho el error de las 8 producciones es acaparado en su mayor parte por la producción incorrecta nº 1 como se muestra en el grafico. La distribución del error en dicha producción nº 1 es la siguiente:

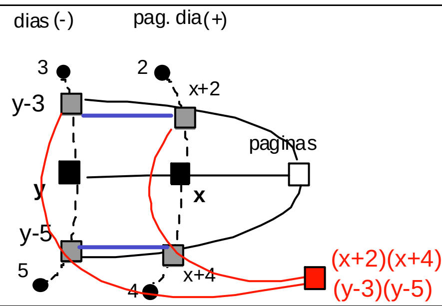
1º	2º	3º	**Total error**
34,3	57,5	51,2	50,4

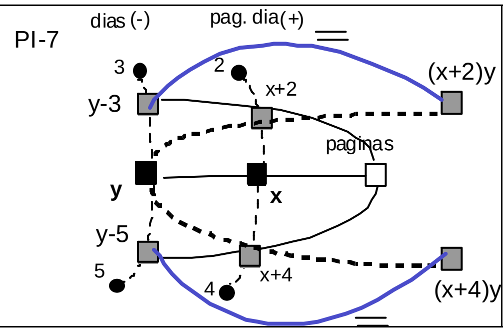
G) Diagnóstico y comentarios de los errores

Los errores más significativos se diagnostican en la tabla que sigue. El conjunto de las producciones incorrectas es analizado a continuación.

1 p+2 = d–3 p+4 = d–5	PI-1 	Error de igualdad. Una expresión que refiere a una cantidad de páginas diarias (p+2) se iguala a otra expresión (d-3) que refiere a una cantidad de días.
2 x+2= –3y x+4= –5y	PI-2 	Error de arbitrariedad. Las expresiones -3y y -5y no refieren a cantidad alguna del DTC. Error de igualdad.

3 x+2=3–y x+4=5–y	PI-3 	Error de inversión en las expresiones 3-y , 5-y. Error de igualdad.
4 x+2=3y x+4=5y	PI-4 	Error de operación. Error de igualdad.

5 x+2———y–3 x+4———y–5 (x+2)(x+4)=(y–3)(y–5)	PI-5 	Error de arbitrariedad. Error de igualdad.

7 $(x+2)y=y–3$ $(x+4)y=y–5$		Error de igualdad.

En el análisis vamos a distinguir dos grupos de producciones: las que pueden caracterizarse en general por una ausencia de la percepción o la no simbolización de las relaciones multiplicativas, y las que comparten la percepción de las relaciones multiplicativas.
Al primer grupo pertenecen las producciones incorrectas nº 1,2,4,8,10,11,12,13,14,18,19,20,21,22,23,24,25,26 producciones que vamos a analizar a continuación.

Comenzamos con la producción incorrecta más frecuente: la producción nº 1:

$$p+2 = d–3; \quad p+4 = d–5.$$

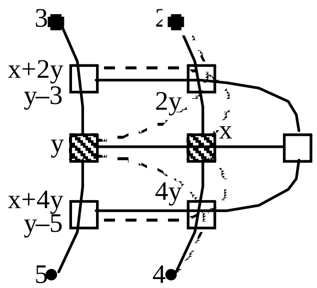
El grafo de la resolución de ésta producción –ver tabla superior- muestra que las literales *p*, *d*, utilizadas en esta producción indican las páginas diarias y los días. y que as expresiones algebraicas p+2, p+4, d–3, d–5, junto con las literales *p* y *d*, casi agotan los vértices claros del grafo. La única cantidad desconocida no representada son las páginas totales. Por otro lado, si observamos la producción en el grafo veremos también que ésta únicamente da cuenta de las relaciones aditivas entre las cantidades, ignorando cualquier tipo de relación multiplicativa. Esto es, el problema tiene 7 aristas y las expresiones algebraicas se han producido usando 4de ellas, precisamente las que representan relaciones aditivas. En el grafo también está representado que las igualdades se construyen con las expresiones algebraicas de las que se dispone, lo que lleva a igualar las páginas diarias y los días, que son cantidades de magnitudes diferentes. Aquí el signo igual no expresa una igualdad entre cantidades sino una relación entre magnitudes: la que existe entre las pg/día que escribe la meca y los días que utiliza para escribirlas. Respecto de este hecho es interesante detallar que en muchas producciones en las que los alumnos escriben estas igualdades, encontramos también las expresiones p+2, d+3, p+4, d–5, escritas una al lado de otra, por separado, o en columna, ligadas a veces por guiones o flechas. Esto indica que nos hallamos en la presencia de escrituras intermedias que se utilizan para comprender el texto, escrituras que se sirven de literales y expresiones algebraicas elementales y que probablemente, en una fase posterior de relectura y análisis del texto, dan lugar a la escritura del signo igual para la expresión del hecho "la meca escribiendo esas páginas diarias acaba su trabajo en esos días".

Comentada la producción incorrecta más frecuente vamos a prestar atención a las producciones incorrectas nº 2,3, -ver tabla superior- o a otras que contienen también expresiones algebraicas como 3y, 5y, –3y, –5y, 3–y, 5–y, junto a las anteriores expresiones algebraicas x+2, x+4. Situando en el grafo *x* e *y* , para las páginas/día y para los días, las expresiones 3y, 5y, –3y, –5y, 3–y, 5–y, sólo se entienden como la expresión de los días de mas o de menos. No se puede decir que la literal *y* sea una literal que se refiera a una cantidad, sino una abreviatura para días, que en los últimos casos, en su estatus de menos, se anota multiplicativa o aditivamente. Las cantidades que se igualan en esas producciones siguen siendo las relacionadas con el acabado de la mecanografía.

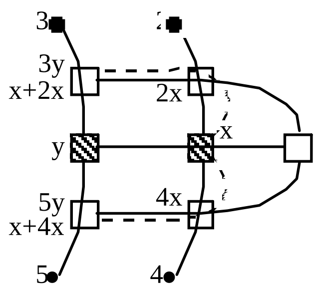
Otras producciones incorrectas siguen la misma pauta que las producciones incorrectas ya comentadas, y contienen además expresiones como 2x, 4x, 2y, 4y, para referirse a las páginas/día; y expresiones como x+2x, x+4x, x+2y, x+4y, y –3y, y–5y, para referirse a los días, o a los días que hay de más o de menos. Las cantidades que se igualan corresponden a páginas/día y días, o a días y días de más o de menos que se emplearía. El signo igual tiene de nuevo un carácter relacional. Veamos dos de estas producciones.

x+2y=y–3	x+2x=3y
x+4y=y–5	x+4x=5y

- Él grafo (a) corresponde a la primera y el grafo (b) a la segunda. En ellos puede observarse que las literales *x, y,* serian utilizadas en estas producciones indicando las páginas diarias y los días; y entonces las expresiones algebraicas 2y, 4y, 2x, 4x, para las páginas /día; y las expresiones x+2y, y–3, x+4y, y–5, x+2x, x+4x, 3y, 5y, para los días. En ambas producciones, las cantidades que se igualan corresponden a días.



(a)



(b)

La tabla que sigue muestra que los porcentajes de estudiantes de los diferentes cursos que escribieron igualdades sin la más mínima estructura multiplicativa fueron bastante altos, de ahí que podamos concluir que la mayor parte de los alumnos de 1º, 2º y 3º escriben igualdades que podemos calificar de traducciones superficiales o resúmenes del texto verbal del problema. Estas traducciones no apuntan a la comprensión de la estructura del problema en su globalidad.

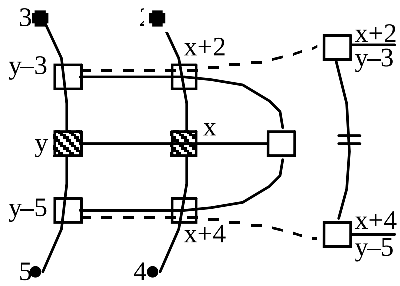
% del error en producciones sin estructura multiplicativa

1º	**2º**	**3º**	**total**
80,0	93,2	73,2	84,0

Las producciones incorrectas que comparten la percepción de las estructuras multiplicativas del problema se pueden dividir en dos grupos según aparezca en ellas o no explicito el uso del esquema de la regla de tres.

De las que no la hacen, empecemos por prestar atención a dos de ellas: $\frac{x+2}{y-3} = \frac{x+4}{y-5}$, $x + \frac{x+2}{y-3} = x + \frac{x+4}{y-5}$ que contienen expresiones algebraicas en forma de cociente, y que únicamente aparecen en un alumno de 1º y otro de 3º.

El grafo corresponde la primera produccion. Las literales *x*, *y* simbolizan las pag/día y los días. Las expresiones algebraicas nuevas son: $\frac{x+2}{y-3}$, $\frac{x+4}{y-5}$ · En la primera de las expresiones algebraicas, x+2 se refiere a las pag/día (cuando se escribe de más) e y–3 a los días en los que se escriben esas páginas. Y en el siguiente cociente ocurre lo mismo para las expresiones x+4, y–5.



Estos cocientes representarían una cantidad del tipo intensiva/ extensiva, que en este caso es $\frac{\text{páginas/día}}{\text{día}}$ · O sea, la razón entre las páginas diarias que se escriben de menos o de más y los días en que se escriben esas páginas. A partir de ahí el resto de ambas producciones difiere. En la segunda producción, las expresiones algebraicas que siguen $x+\frac{x+2}{y-3}$, $x+\frac{x+4}{y-5}$ tansgreden la ley de la homogeneidad, son arbitrarias y difícilmente interpretables, la primera producción únicamente contiene la igualación entre las expresiones algebraicas $\frac{x+2}{y-3}$ e $\frac{x+4}{y-5}$. La igualdad de esas razones asume una relación de proporcionalidad directa entre páginas diarias escritas y días en que se escriben esas páginas, relación de proporcionalidad que es inexistente.

Otra producción en la que aparecen expresiones algebraicas multiplicativas es la producción nº 7 : (x+2)y=y–3 (x+4)y=y–5 cuyo grafo puede observarse la tabla inicial de este apartado. En ella, una cantidad de paginas "(x+2)y" "las paginas que escribiria la mecanografa en los dias previstos escribiendo 2 paginas diarias más" es igualada a "y–3 " esto es una cantidad de días, dias que son precisamente los que tarda la mecanografa en escribir las paginas anteriores. Esta interposición del signo igual entre cantidades que guardan entre si cierta relación causa- efecto y ayudan a entender el misterio del problema ya no lo hemos encontrado en el problema HENO.

Por último, consideraremos las producciones incorrectas que hacen uso del esquema de la regla de tres. En estas producciones, la expresiones algebraicas que corresponden a días y a páginas diarias se encuentran situadas en dos columnas. La obtención de las igualdades en estas producciones es diversa. En unas de ellas las igualdades, se obtienen mediante la puesta en acción de la regla de tres directa. Asi en las producciones:

2——x+3
4——x+5 2(x+5)=4(x+3)

2+x———y–3 x+4———y–5
x————y x————y
x(y–3)=y(2+x)

En otras como:

x+2———y–3
x+4———y–5 (x+2)(x+4)=(y–3)(y–5)

se podrían haber utilizando un esquema incorrecto para la regla de tres inversa, o bien simplemente multiplicado en columna.

Y en otras como :

2+x———y–3
4+x———y–5 (y–3) =y(x+2)
x————y (y–5)=y(x+4)

que contiene tres filas es inexplicable el mecanismo utilizado para obtener igualdades que terminan igualando paginas diarias y paginas.

Problema : **DINERO**

1.-Producciones Correctas

a) Número de producciones correctas : **4**

b) Distribución porcentual de las **4** producciones correctas

producción nº	%
1	40,2
2	19,5
3	13,4
4	26,8

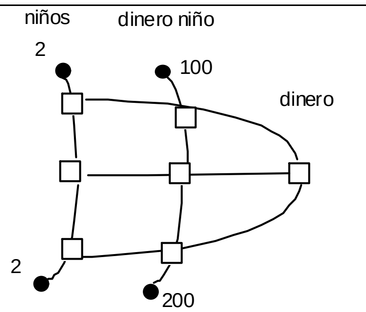
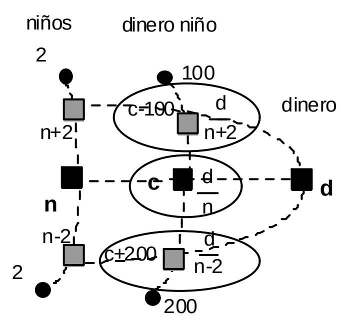
b) Número de producciones encontradas en cada curso

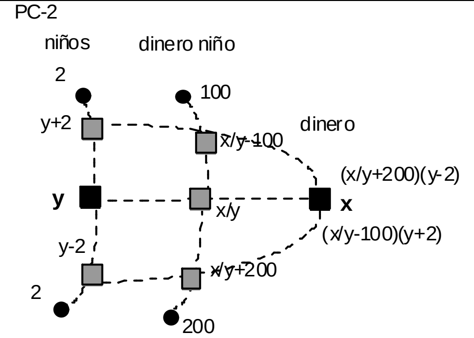
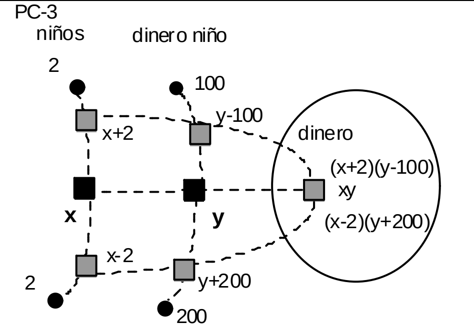
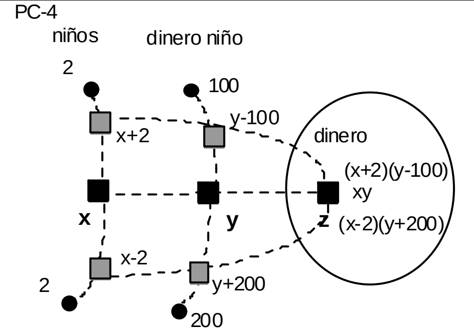
1º	2º	3º
4	2	4

d) Distribución de la corrección en cursos

1º	2º	3º
36,6	12,2	51,2

e) Grafo de la resolución de cada producción

<table>
<tr>
<td>DINERO.-Una cierta suma de dinero se repartió a partes iguales entre cierto número de niños. Si hubiera habido dos niños más, cada uno hubiera recibido 100 pts menos; si hubiera habido dos niños menos, cada uno hubiera recibido 200 pts más. ¿Cuántos niños había y cuánto recibió cada uno?</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>1
c=d/n
c+200=d/n-2
c-100= d/n+2</td>
<td>PC-1

</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td>2
:</td><td>(x/y -100) (y+2) =x
(x/y +200) (y-2) =x</td><td>
</td></tr>
<tr><td>3</td><td>x y = (x+2) (y-100)
xy = (x-2)(y+200)</td><td>
</td></tr>
<tr><td>4</td><td>xy=z
(x+2) (y-100) =z
(x-2)(y+200) =z</td><td>
</td></tr>
</table>

f) <u>Comentarios</u>

Como se ha dicho de manera reiterada el problema DINERO es un problema isomorfo al problema MECANOGRAFA la correspondencia que intercambia cantidades es la siguiente: número de niños por número de días, dinero por niño por páginas diarias y dinero por páginas totales. Establecida esta correspondencia las producciones correctas del problema DINERO y del problema MECANOGRAFA pueden aparearse de la siguiente manera:

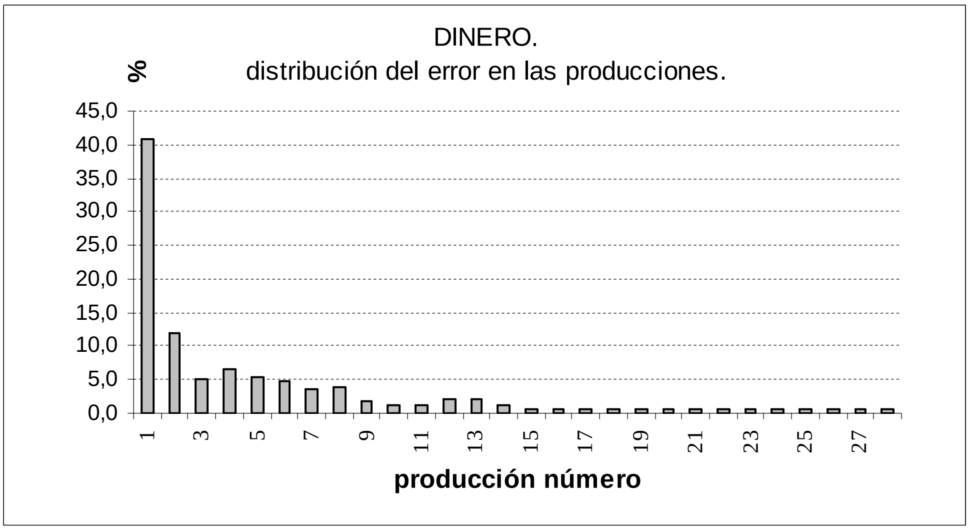
DINERO	MECA
producción nº	**producción nº**
1	2
2	5
3	1
4	4
	3

En la tabla se observa que no encontramos una producción equivalente en el problema DINERO a la producción nº 3 del problema MECANOGRAFA , es de notar que dicha producción nº 3 es la que utiliza tres incógnitas y construye tres igualdades y cada igualdad utiliza una cantidad diferente.

2.-Producciones Incorrectas

A) Número de producciones incorrectas : **28**

B) Distribución porcentual de las **28** producciones incorrectas



C) Número de producciones incorrectas encontradas en cada curso

1º	2º	3º
21	17	12

D) Distribución del error en cursos.

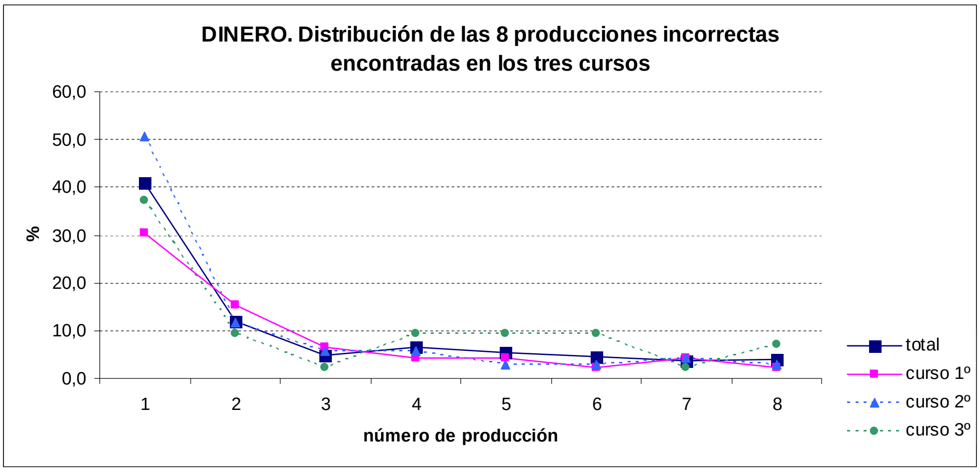
1º	2º	3º
27,6	41,4	31,0

E) Producciones encontradas en tres, dos o un curso : Número de producciones y porcentaje del error que suponen esas producciones

cursos	1º-2º-3º	sólo1º-2º	sólo1º-3º	sólo2º-3º	sólo 1º	sólo 2º	sólo 3º
número	8	3	0	3	10	3	1
porcentaje	81,9	4,2	0	5,3	6	1,8	0,7

F) Porcentaje del error en cada uno de los cursos de las 8 producciones encontradas en tres cursos.

1º	2º	3º
69,6	87,0	86,0



G) Diagnóstico y comentarios de los errores

Al igual que en las producciones correctas las producciones incorrectas del problema DINERO son bastante semejantes a las del problema MECANOGRAFA, así los comentarios de las producciones de este problema se limitaran a indicar los grupos de producciones que son semejantes y anotar también las producciones que se encuentran en uno de los problemas y no en otro.

Así en primer lugar, al igual que en el problema MECANOGRAFA podemos encontrar en el problema DINERO un amplio grupo de producciones en las que no se aprecia la simbolización de las relaciones multiplicativas, en DINERO las producciones nº 1, 2, 3, 9, 10, 11, 16, 17, 18, 19, 10,21,22, 23, 24, 26, 27. La comparación del error que suponen estas producciones en el problema MECAGRAFA y DINERO se encuentra en la tabla inferior en la que se aprecia que las producciones que calificamos en MECANOGRAFA como traducciones superficiales o resúmenes del texto verbal del problema representan un porcentaje inferior del error en el problema DINERO el 72,6 frente al 84,0 y que este tipo de traducciones en éste problema es sensiblemente inferior en los estudiantes de los cursos 2º y 3º.

% del error en producciones sin estructura multiplicativa

curso	1º	2º	3º	total
MECA	80,0	93,2	73,2	84,0
DINERO	82,6	76,8	58,1	72,6

Por su lado, la producción más frecuente x+2=y-100 ; x-2=y+200 es equivalente a la producción p+2 = d–3; p+4 = d–5 del problema MECAGRAFA representando asimismo un porcentaje del error menor en este problema 40,9 frente al 50,4 y suponiendo asimismo menos porcentaje del error en los tres cursos.

% del error de la producción más frecuente

curso	1º	2º	3º	total
MECA	34,3	57,5	51,2	50,4
DINERO	30,4	50,7	37,2	40,9

En las producciones sin simbolización de las relaciones multiplicativas también podemos encontrar en el problema DINERO expresiones algebraicas del tipo 100-y, 2-y, x+2y, y-2x, a las que resulta difícil atribuir una referencia e incluso simplemente "-100" probablemente para indicar que se toca a 100 pts menos.

En las producciones que muestran una simbolización de relaciones multiplicativas aunque existan aquí algunas que son semejantes a las del problema MECANOGRAFA, así la producción nº 13 y+2 = (x-100)y y-2 = (x+200)y análoga a la producción nº 7 : (x+2)y=y–3 (x+4)y=y–5 comentada en el problema MECANOGRAFA o las producciones en forma de cociente como la nº 5 (x-2)/(y+200) = (x+2)/ (y-100) que igualan aquí las razones "niño/dinero por niño" en uno y otro reparto, por los signos encontrados en las resoluciones no parece que pueda concluirse aquí la presencia de un esquema de regla de tres que haya conducido a este tipo de producciones. Más bien, la mayor frecuencia en este problema de expresiones algebraicas en forma de cociente, por ejemplo (x/y+2)-100, (x/y-2)+200 (x/y)+2, (x/y)-2 , (x+2)/y, (x-2)/y sugiere que la idea de reparto mencionada en el problema ha sido la invocada para la construcción de estas expresiones algebraicas.

En las producciones en que un esquema de reparto puede haberse invocado los errores que se encuentran en las producciones pueden calificarse como errores de igualdad.

Así en la producción nº 4.

y+2 = (x/y+2) -100 y-2 =(x/y-2)+200

Mientras las expresiones y+2, y-2 refieren la cantidad de niños que habrían en cada uno de los casos las cantidades a que se igualan (x/y+2) -100, (x/y-2)+200 expresiones que refieren a una cierta suma de dinero por niño, suma de dinero que no es exactamente el dinero que les toca en cada caso que viene referido por la expresión algebraica (x/y+2) o (x/y-2) sino a esta suma -100 o +200 que intentan traducir la comparación con el reparto real efectuada en el enunciado. En resumen podemos conjeturar que aquí se ha traducido el enunciado del problema utilizando expresiones algebraicas de esta manera "si hubiera y+2 niños habrían tocado a (x/y+2) pesetas y son 100 pesetas menos" donde el signo igual cumple la función de explicar lo que ocurre con y+2 niños.

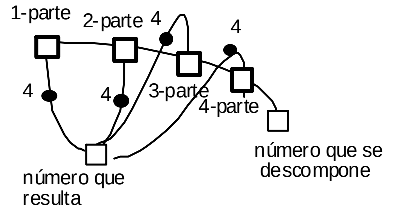
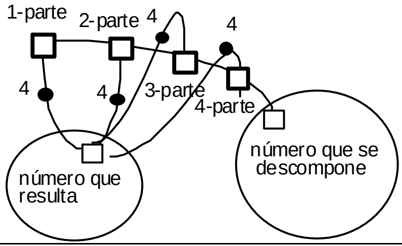
Una interpretación semejante puede hacerse de la producción nº 7 :

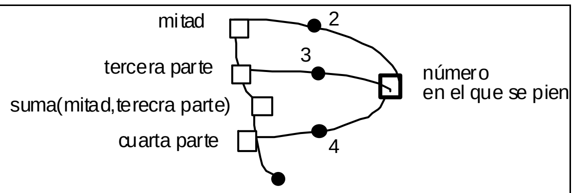
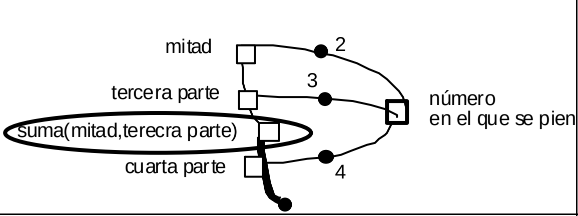
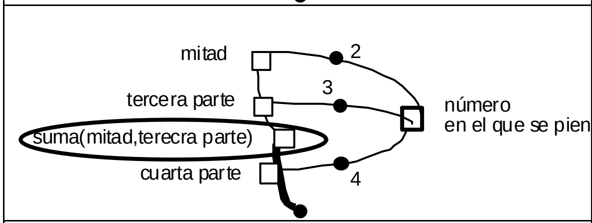
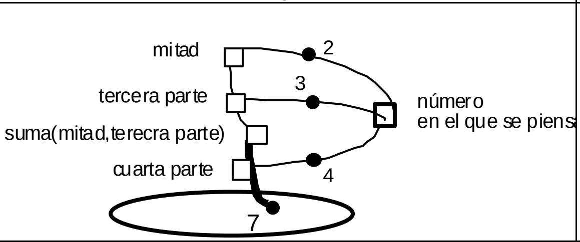
x+2 = (y/x)-100 x-2 = (y/x) +200

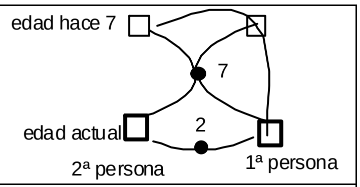
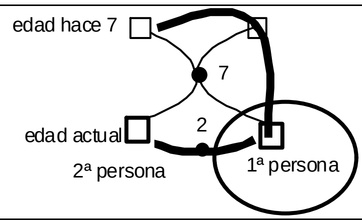
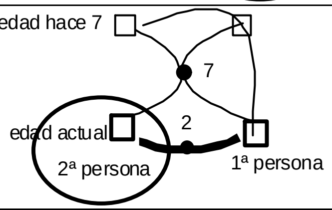
en esta producción se iguala el número de niños en cada uno de los casos x+2,x-2 al dinero que recibiría cada uno de los niños que habría (y/x)-100, (y/x) +200 donde podríamos leer la igualdad en el sentido "si hay tantos niños a tanto dinero tocan".

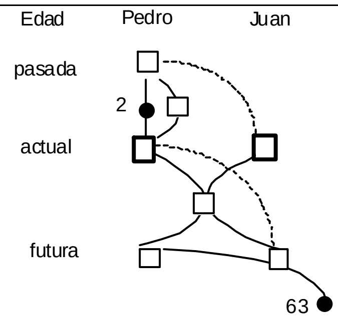
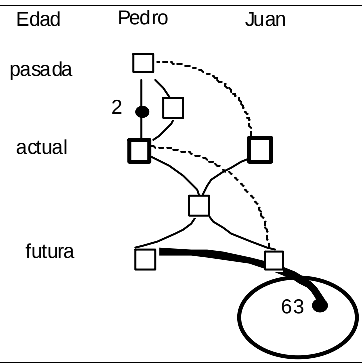
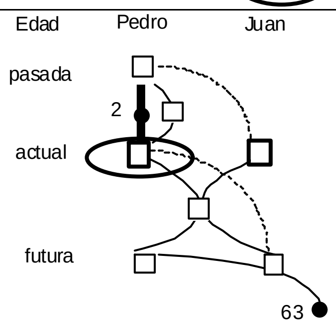
Anexo 5.4.- Cantidades igualadas y relaciones utilizadas en la construcción de la igualdad.

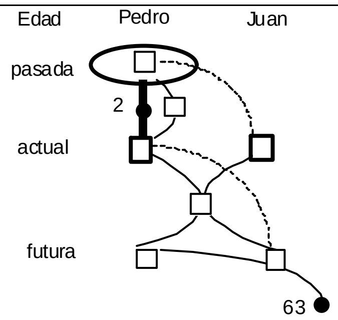
En los grafos se encuentran señaladas rodeados por una elipse los vértices que representan la cantidad igualada. En trazo grueso se encuentran señaladas las aristas usadas en última instancia en la construcción de las expresiones algebraicas que se igualan. El porcentaje que acompaña a cada uno de los grafos indica el porcentaje que suponen las producciones donde se encontró dicha igualdad.

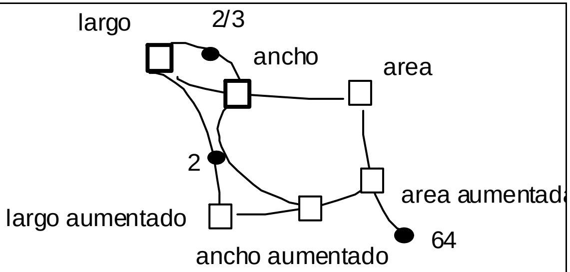
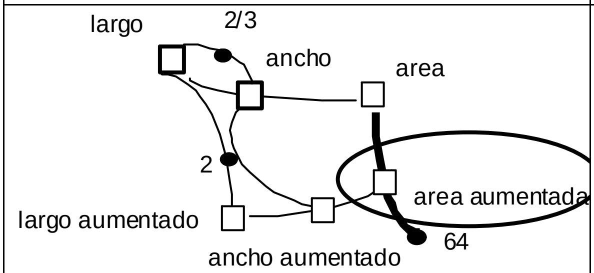
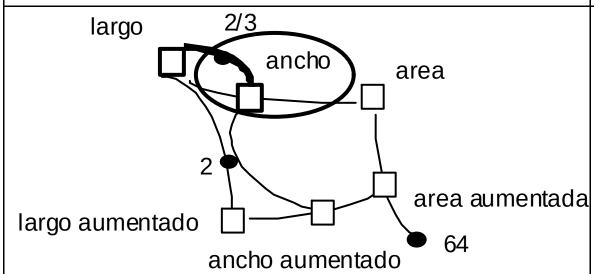
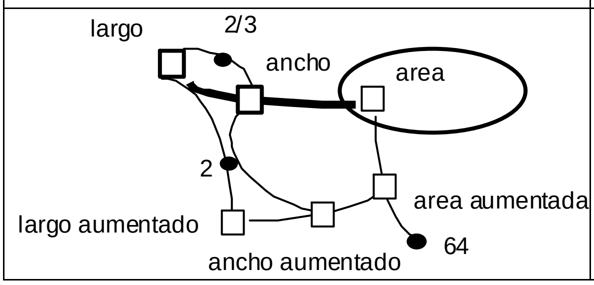
DESCOMPONER EN 4 PARTES.- Descomponer un número en cuatro partes de modo que si se resta 4 de la primera, se suma 4 a la segunda, la tercera se multiplica por 4, y la cuarta se divide por 4, se obtiene el mismo número en todos los casos.	
	**100%**

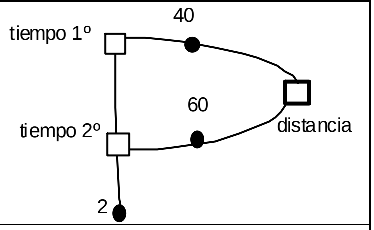
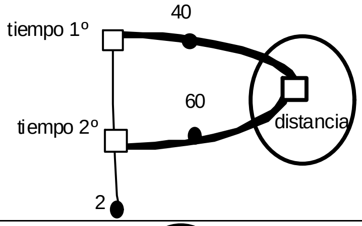
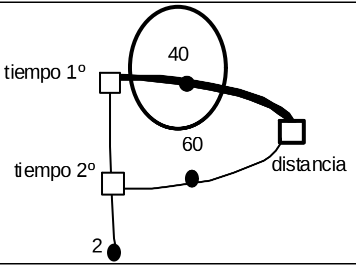
MITAD Y TERCERA PARTE.-Estoy pensando en un número tal que la suma de su mitad y su tercera parte es 7 unidades mayor que su cuarta parte. ¿Cuál es dicho número?	
	**96,6 %**
	**2,7 %**
	0,7 %

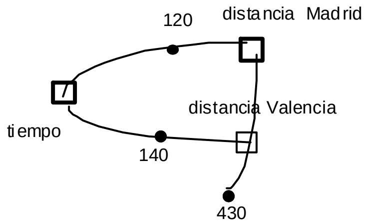
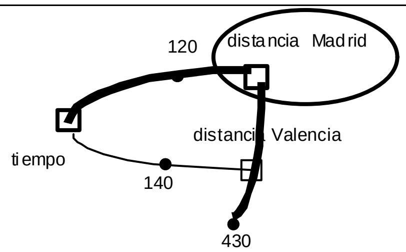
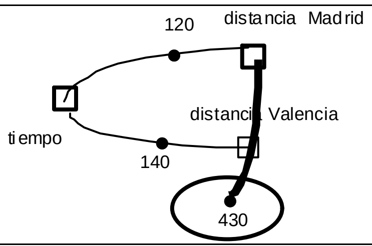
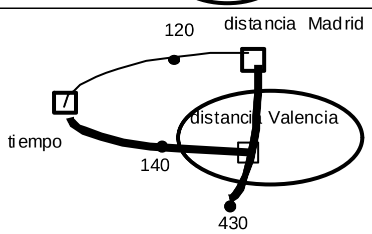
<table>
<tr><td>La edad de una persona es doble de la de otra. Hace siete años la suma de las edades de las dos personas era igual a la edad actual de la primera. ¿Cuál es la edad de cada una?</td><td>
</td></tr>
<tr><td>
</td><td>100%</td></tr>
<tr><td>
</td><td>4,7 %</td></tr>
</table>

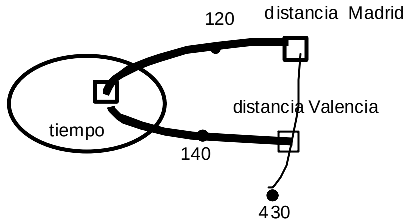
<table>
<tr><td>PEDRO Y JUAN.- Pedro dice a Juan: Tengo dos veces la edad que tenía cuando tenía la edad que tienes tú. Cuando tú tengas la edad que yo tengo ahora, entre los dos tendremos 63 años. ¿Cuáles son nuestras edades actuales?</td><td>
</td></tr>
<tr><td>
</td><td>100%</td></tr>
<tr><td>
</td><td>55,6 %</td></tr>
</table>

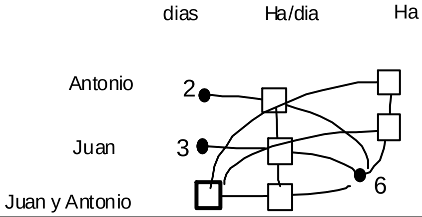
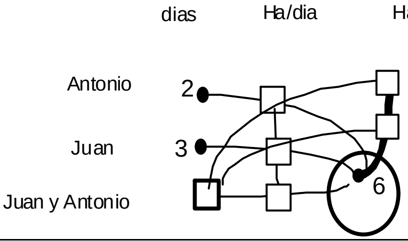
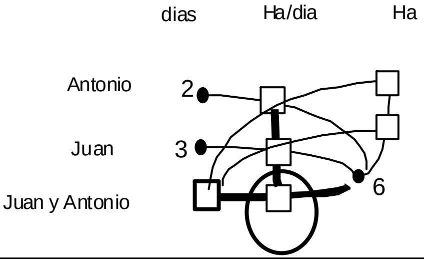
<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>4,8%</td>
</tr>
</table>

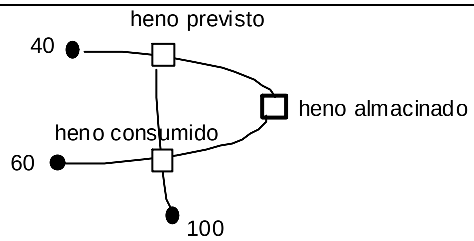
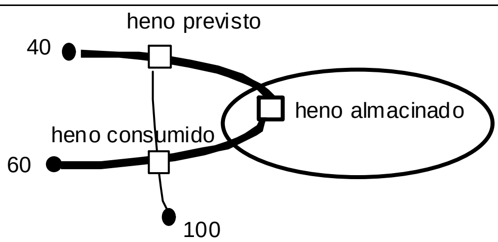
<table>
<tr>
<td>TERRENO.- El ancho de un terreno rectangular es 2/3 de su largo. Si ambas dimensiones se aumentan en 2m, el área aumenta en 64 m^2. ¿Cuáles son las dimensiones de este terreno?</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>100%</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>64,4 %</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>13,2 %</td>
</tr>
</table>

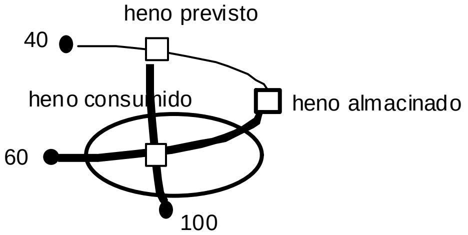
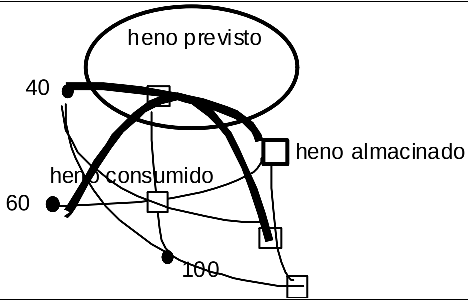
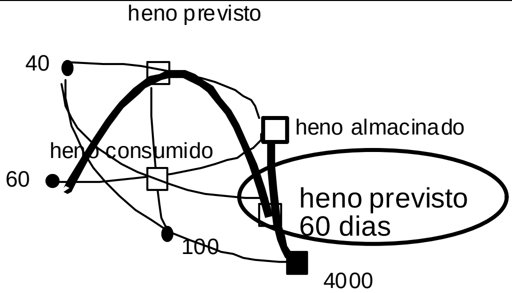
ALCANZAR.-Un automóvil parte de un punto A con velocidad uniforme de 40 km/h hacia otro punto B. Dos horas después sale de A hacia B otro automóvil con velocidad uniforme de 60 km/h. Dígase a qué distancia de A se encuentran.	
	**97,9%**
	**2,1%**

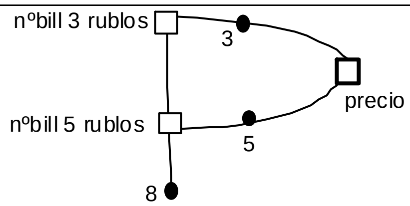
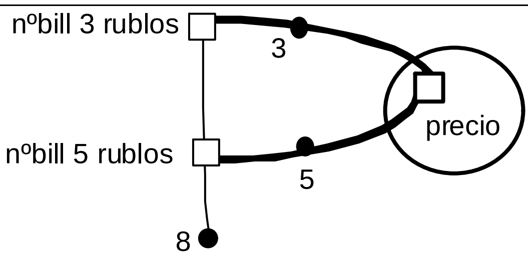
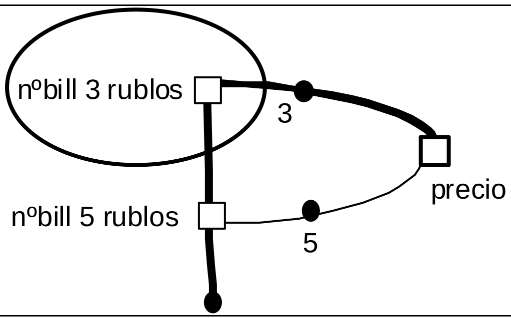
ENCONTRAR .-Un tren parte a las 16 h de Madrid con destino a Valencia con una velocidad de 120 km/h. A la misma hora sale de Valencia otro tren con destino Madrid y a una velocidad de 140 km/h. Dígase a qué distancia de Madrid se encuentran y a qué hora, si la distancia Madrid–Valencia es de 430 km.	
	**66,1%**
	**31,7 %**
	**6,9%**

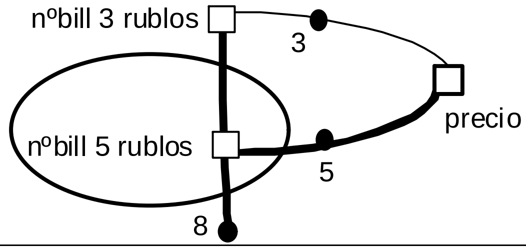
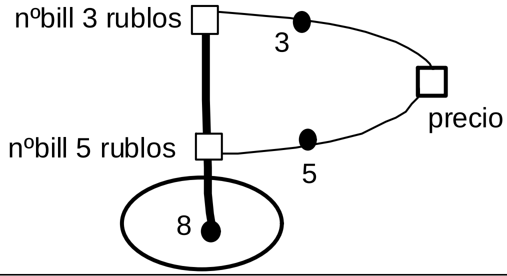
<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>11,5%</td>
</tr>
</table>

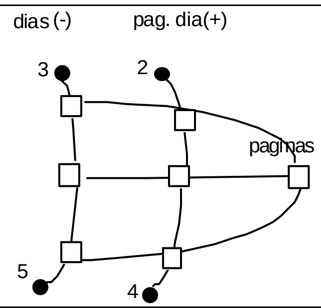
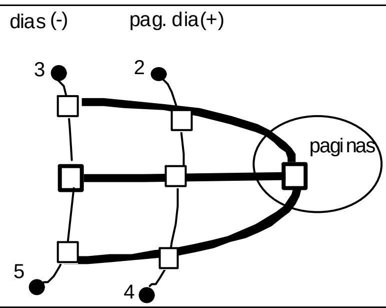
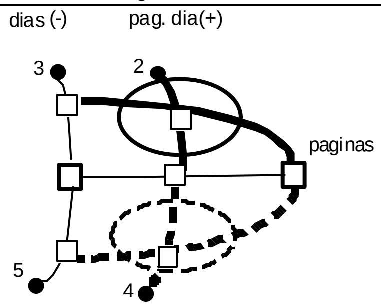
<table>
<tr>
<td>CAVAR.-La superficie de un campo es de 6 ha. Juan puede cavarlo en 2 días. Antonio lo hace en 3 días. Si trabajan los dos juntos en el campo, ¿cuánto tiempo tardarán en cavarlo?</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>36,1% (86,5%)</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>5,6% (13,5%)</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Los números entre paréntesis se refieren al % de igualdades que provienen de soluciones algebraicas.</td>
</tr>
</table>

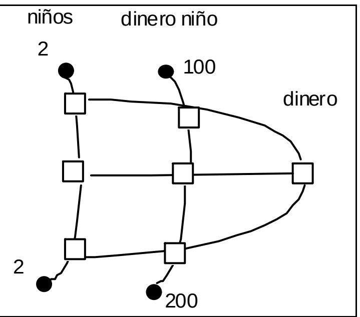
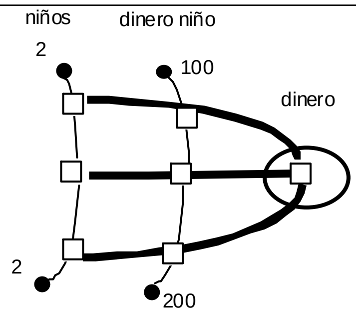
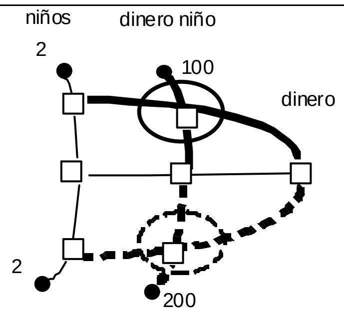
<table>
<tr>
<td>HENO.-Unos granjeros almacenaron heno para 40 días. Sin embargo el heno era de mejor calidad de la que pensaban y ahorraron 100 kg por día. Así tuvieron heno para 60 días. ¿Cuánto heno almacenaron?</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>71,4%</td>
</tr>
</table>

	**23,8%**
	**9,6%**
	**4,8%**

RUBLOS.-Una escuela rusa compra libros para la biblioteca. Si los paga con billetes de 3 rublos, la escuela tiene que dar 8 billetes más que si los paga con billetes de 5 rublos. ¿Cuánto cuestan los libros?	
	**65.7%**
	**17%**

	**14,2%**
	**2,8%**

MECANOGRAFA.-Una mecanógrafa piensa que si escribe al día 2 páginas más de lo establecido normalmente, acabará el trabajo 3 días antes de lo previsto, mientras que si escribe 4 páginas más al día, acabará 5 días antes de lo previsto. ¿Cuántas páginas tiene que escribir y en cuánto tiempo?	
	**90%**
	**10%**

<table>
<tr>
<td>DINERO.-Una cierta suma de dinero se repartió a partes iguales entre cierto número de niños. Si hubiera habido dos niños más, cada uno hubiera recibido 100 pts menos; si hubiera habido dos niños menos, cada uno hubiera recibido 200 pts más. ¿Cuántos niños había y cuánto recibió cada uno?</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>59,8%</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>40,2%</td>
</tr>
</table>