

DEPARTAMENT INFORMÀTICA

PROPUESTA DE NUEVOS MODELOS DINÁMICOS DE
CABLES DE ELEVACIÓN PARA SIMULACIÓN EN TIEMPO
REAL

IGNACIO GARCÍA FERNÁNDEZ

UNIVERSITAT DE VALENCIA
Servei de Publicacions
2009

Aquesta Tesi Doctoral va ser presentada a València el dia 23 de febrer de 2009 davant un tribunal format per:

- D. Pedro J. Gil Vicente
- D. Roberto A. Vivó Hernando
- D. Luis M. Matey
- D. José Manuel Abete Huici
- D. Marcos Fernández Marín

Va ser dirigida per:

D. Rafael J. Martínez Durá

©Copyright: Servei de Publicacions
Ignacio García Fernández

Depòsit legal:

I.S.B.N.:978-84-370-7451-1

D.L.:V-1342-2009

Edita: Universitat de València
Servei de Publicacions
C/ Artes Gráficas, 13 bajo
46010 València
Spain
Telèfon: 963864115



VNIVERSITAT D VALÈNCIA

Escola Tècnica Superior d'Enginyeria

Departament d'Informàtica

TESIS DOCTORAL

PROPUESTA DE NUEVOS MODELOS
DINÁMICOS DE CABLES DE ELEVACIÓN
PARA SIMULACIÓN EN TIEMPO REAL

Presentado por:

D. Ignacio García Fernández

Valencia, enero de 2009

Trabajo dirigido por:

Dr. D. Rafael Martínez Durá

D. RAFAEL JAVIER MARTÍNEZ DURÁ, profesor titular del área de Arquitectura y Tecnología de Computadores de la Universitat de València

CERTIFICA que la presente memoria

“Propuesta de nuevos modelos dinámicos de cables de elevación para simulación en tiempo real”

ha sido realizada bajo su dirección, en el Departamento de Informática de la Universitat de València por **Ignacio García Fernández**, y constituye su tesis para optar al grado de Doctor.

Y para que conste, en cumplimiento de la legislación vigente, presentamos ante la Escuela Técnica Superior de Ingeniería (ETSE) de la Universitat de València, a 7 de enero de 2009.

EL DIRECTOR

Rafael Javier Martínez Durá

*A Marta,
por estar siempre a mi lado. . .*

*. . . y a Andrea,
por enseñarme el significado
de la palabra futuro*

Resumen

La evolución y abaratamiento de los costes de los equipos informáticos y, en especial, de los procesadores gráficos, han potenciado el uso de las herramientas de entrenamiento basadas en simulación, aplicadas al ámbito civil. Sin embargo, a pesar de los avances que se han producido en el modelado dinámico, existen carencias importantes en los modelos de cables y polipastos utilizados para los simuladores de entrenamiento de grúas y otras máquinas de elevación.

En primer lugar, no existe ningún trabajo que determine de forma clara cómo simular un polipasto que considere tanto la oscilación del cable como el sistema de poleas. En segundo lugar, diversos autores muestran la aparición de problemas de inestabilidad numérica en la simulación de cables de elevación. En tercer lugar, a pesar de la diversidad de modelos existentes de cables y poleas, resulta difícil encontrar modelos suficientemente flexibles para todo el rango de situaciones que requieren las simulaciones interactivas en tiempo real.

El objetivo principal de esta investigación es conseguir modelos dinámicos de sistemas de elevación basados en las propiedades físicas de los cables y las poleas para la simulación interactiva en tiempo real. Para alcanzar este objetivo se recurrirá a una metodología de modelado consistente en el desarrollo de un modelo abstracto del sistema, que permitirá construir modelos dinámicos adecuados para la simulación interactiva.

La principal contribución de este trabajo es el desarrollo de un modelo de polipasto adecuado para aplicaciones de simulación para entrenamiento, que contempla la interacción entre el cable y las poleas, la oscilación transversal del cable o la variación de la longitud de éste. El modelo desarrollado permite además la interacción con otros objetos del entorno virtual, por medio de fuerzas y de colisiones.

Por medio de la modularización del sistema, se definirán diferentes modelos dinámicos para cada subsistema y se combinarán por medio del modelo abstracto. Esto permitirá integrar cualquiera de estos modelos en el mode-

lo dinámico de polipasto, e incluso intercambiar los modelos en tiempo de ejecución, ampliando el rango de validez del modelo obtenido y mejorando la estabilidad numérica en situaciones de tensión elevada.

Los modelos desarrollados se implementarán, junto con aplicaciones de demostración, desarrollando aquellas técnicas que puedan ser necesarias para su incorporación a un entorno virtual. Las principales propiedades de los modelos se analizarán por medio de experimentos numéricos y se validará su comportamiento.

Agradecimientos

Gracias a todos los que han estado ahí a lo largo de estos años.

A Rafa, por confiar en mí y brindarme la oportunidad de recorrer este camino bajo su dirección.

A mis compañeros del grupo de investigación LSYM por todo el apoyo y por todo el trabajo que han sacado adelante para que yo pudiera terminar este proyecto. Especialmente a Alejandro Reyes, por los modelos gráficos utilizados en esta tesis y por todos los cafés.

Al Prof. Juan Lladó, por sus enseñanzas y sus numerosos consejos a lo largo de estos años y por su ayuda en la preparación de los experimentos de validación.

A mi familia. Por todo el apoyo que me han dado.

A Marta y a Andrea. Por su infinita paciencia. Por cada hora que les he robado.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1. Introducción	1
1.1. Contexto y motivación	2
1.2. Requisitos de los modelos	5
1.3. Objetivos	7
1.4. Metodología	9
1.5. Estructura de la tesis	10
CAPÍTULO 2. Modelos para la simulación de cables y poleas	13
2.1. Cuerdas, cables y poleas	14
2.1.1. Vibración de una cuerda	16
2.1.2. Simulación de maquinaria de elevación	18
2.1.3. Desplazamiento longitudinal y variación de la longitud de una cuerda o cable	20
2.1.4. Dinámica de una polea	21
2.2. Modelos utilizados en entornos virtuales	24
2.2.1. Modelos discretos	25
2.2.2. Modelos continuos	37
2.2.3. Modelos de animación	43
2.3. Análisis crítico de los modelos y técnicas existentes	45

2.3.1. Modelado de un polipasto	46
2.3.2. Simulación en situaciones de tensión elevada	46
2.3.3. Requisitos para simulación interactiva	47
2.3.4. Conclusión	48
CAPÍTULO 3. Definición de un modelo abstracto del sistema	51
3.1. Elección de la metodología de modelado	51
3.1.1. Descripción de la metodología de modelado	53
3.1.2. Utilización de la metodología para el desarrollo de modelos de simulación	55
3.2. Definición de un modelo abstracto de polipasto	56
3.2.1. Análisis del sistema	56
3.2.2. Entradas y salidas del sistema	59
3.2.3. Definición de las entradas y salidas de los subsistemas	65
3.2.4. Definición formal de las relaciones entre los subsistemas	70
3.2.5. Definición del modelo formal	72
3.3. Contribuciones de la metodología de modelado propuesta .	73
CAPÍTULO 4. Propuesta de un modelo de polea	77
4.1. Descripción de una polea	78
4.1.1. Parámetros y variables de una polea	78
4.1.2. Posición de los puntos de anclaje del cable en la polea	81
4.2. Interacción mecánica con el entorno	82
4.2.1. Evolución del estado de la polea	83
4.2.2. Acción de la polea sobre el entorno	85
4.3. Control del rango de las entradas de una polea	86
4.3.1. Ángulo de contacto del cable con la polea	87
4.3.2. Ángulo de incidencia del cable en la polea	89
4.4. Modificaciones sobre el modelo	91
4.5. Conclusión	93
CAPÍTULO 5. Cables con longitud variable	95

5.1. Modelo de cable sin masa	96
5.1.1. Simulación del cable por medio de un resorte elástico	96
5.1.2. Simulación de un polipasto	99
5.1.3. Principal contribución del modelo	100
5.2. Sistema de partículas con longitud variable	100
5.2.1. Variación de la longitud del cable	103
5.2.2. Elección del intervalo $[\ell_-, \ell_+]$	106
5.2.3. Posición de las nuevas partículas	112
5.2.4. Predicción del punto de inserción	117
5.2.5. Estabilidad numérica	120
5.2.6. Ventajas y limitaciones del modelo	121
5.3. Conclusiones	122

CAPÍTULO 6. Simulación estable en situaciones de tensión elevada **125**

6.1. Modelo para una cable flexible y elástico	126
6.1.1. Descripción del modelo de partida	126
6.1.2. Cable con extremos y longitud variables con el tiempo	129
6.1.3. Modelos de tensión	132
6.1.4. Simulación de un segmento de cable	138
6.2. Reducción del modelo a ecuaciones unidimensionales	141
6.2.1. Proyección del sistema sobre una base local	141
6.2.2. Modelo de oscilación plano	145
6.2.3. Interpretación del modelo a través de la ecuación de ondas clásica	149
6.2.4. Discretización de la ecuación de ondas	151
6.3. Utilización de niveles de detalle dinámicos	155
6.3.1. Niveles de detalle en entornos virtuales	156
6.3.2. Adaptación del modelo al estado del sistema	157
6.4. Conclusión	161

CAPÍTULO 7. Análisis y validación de los modelos **165**

7.1. Análisis de la dinámica de un segmento de cable	166
7.1.1. Frecuencia de oscilación de un segmento de cable	166
7.1.2. Análisis de la vibración de una cuerda excitada longitudinalmente	170
7.2. Análisis de la dinámica de un polipasto de grúa torre	178
7.2.1. Energía del gancho	180
7.2.2. Frecuencia de oscilación del péndulo	185
7.2.3. Otros efectos de la masa del cable	187
7.3. Análisis de prestaciones	190
7.3.1. Complejidad de los modelos	191
7.3.2. Resultados numéricos	193
7.3.3. Comparación con la metodología multicuerpo	197
7.4. Conclusión	200

CAPÍTULO 8. Integración del modelo en entornos virtuales 203

8.1. Detección de colisiones	204
8.1.1. Estrategia de detección de colisiones	205
8.1.2. Reacción del cable a una colisión	209
8.1.3. Simulación interactiva	213
8.2. Representación gráfica del cable	214
8.2.1. Primitiva para visualización	214
8.2.2. Deslizamiento de texturas	218
8.3. Aplicaciones de los modelos	218
8.4. Conclusión	221

CAPÍTULO 9. Conclusiones 223

9.1. Consecución de los objetivos de la tesis	224
9.1.1. Aportación de la metodología empleada	227
9.2. Principales contribuciones científicas del trabajo	229
9.2.1. Contribuciones al estado de la técnica	230
9.2.2. Aplicación y difusión de los resultados	232

9.3. Trabajo futuro	234
9.3.1. Futuras líneas de trabajo relacionadas con la tesis . .	234
9.3.2. Nuevas líneas de investigación	235
APÉNDICE A. Notación utilizada	237
APÉNDICE B. Minimización de la energía de una partí- cula	241
Bibliografía	245

ÍNDICE DE TABLAS

3.1. Cuadro de entradas y salidas del modelo abstracto de polipasto.	63
3.2. Cuadro de entradas y salidas del modelo abstracto de una polea.	67
3.3. Cuadro de entradas y salidas del modelo abstracto de un nodo terminal.	68
3.4. Cuadro de entradas y salidas del modelo abstracto de un cable.	69
4.1. Variables y parámetros del modelo dinámico de polea. . . .	79
7.1. Frecuencia principal de vibración del cable. Para cada valor de T/ρ se muestran los siguientes datos. FT: frecuencia en el modelo teórico. FOTC: frecuencia en la ecuación de ondas de tensión constante. ε : error. FSP: frecuencia en el sistema de partículas. FOTV: frecuencia en la ecuación de ondas de tensión variable. ΔF : diferencia las dos últimas, en%. . . .	168
7.2. Coste, en ms , del cálculo de un paso de simulación con el modelo de partículas para diferentes valores de N y M . . .	194
7.3. Coste, en ms , del cálculo de un paso de simulación con el modelo de la ecuación de ondas para diferentes valores de N y M	195

7.4. Coste, en ms., del cálculo de un paso de simulación para $N = 2$ y diferentes valores de M . SP: sistema de partículas. EO: ecuación de ondas. MC1: sistema multicuerpo con sobre-relajación. MC2 método de sistema multicuerpo con complejidad cuadrática.	198
--	-----

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1. Uno de los campos en los que se están aplicando con mayor éxito las herramientas para entrenamiento basadas en simulación es el entrenamiento de operadores de maquinaria de elevación.	3
1.2. Representación del sistema considerado, objeto de esta tesis. Un cable y un conjunto de poleas situadas sobre diferentes objetos, sobre una estructura fija o siguiendo una trayectoria predefinida.	4
2.1. La utilización de poleas móviles permite reducir la fuerza necesaria para levantar una carga. Figuras de <i>Opfindelsernes Bog (El libro de los inventos)</i> de A. Lütken. 1878. Fuente, Wikimedia Commons.	15
2.2. El equilibrio estático sobre el disco de una polea resulta en el cambio de dirección de la fuerza aplicada F_1	22
2.3. Un cable simulado por medio de un sistema de partículas.	26
2.4. El modelo propuesto por Rosenblum (Rosenblum et al., 1991) aplica dos fuerzas a cada partícula, simulado resistencia a la variación de longitud y a la flexión de un cabello.	27

2.5. Deformaciones consideradas habitualmente en la simulación de tejido y otras estructuras bidimensionales (a). El estiramiento y la flexión son aplicables también a un filamento o cuerda (b).	28
2.6. El modelo propuesto por Provot (Provot, 1995) considera tres tipos de muelles.	29
2.7. Un cable simulado por medio de una cadena de sólidos o eslabones enlazados entre sí.	34
2.8. Cada eslabón de la cadena está unido con el siguiente por medio de un enlace cinemático.	34
3.1. Representación un ejemplo del sistema considerado. Cada polea puede estar sujeta a un sólido o seguir una trayectoria prefijada.	57
3.2. El sistema está compuesto por una sucesión de poleas y un cable que pasa a través de ellas. El cable puede descomponerse en una sucesión de tramos suspendidos entre cada par de poleas consecutivas.	57
3.3. Un polipasto se descompone en dos tipos de subsistemas; poleas y segmentos de cable. En el diagrama se representan sus principales propiedades y las relaciones existentes entre ellas.	59
3.4. Polea anclada sobre un sólido.	61
3.5. Sistema formado por una polea simple sujeta a una carga y un cable empotrado en el techo y sometido a una fuerza de tracción. Para poder determinar la trayectoria de la carga es necesario conocer las fuerzas que actúan entre ésta y la polea.	62
3.6. Modelo sencillo de ascensor, compuesto por una polea motorizada, la cabina y un contrapeso.	64
3.7. Variables de una polea.	66
3.8. Variables de un cable.	69
3.9. Polea que comunica dos segmentos de cable.	71

3.10. Segmento de cable que une dos poleas.	72
3.11. Esquema de cajas para el modelo abstracto de polipasto constituido por módulos de dos tipos: cables y poleas.	73
4.1. Sistema de referencia local de una polea.	80
4.2. Para la integración de un modelo de polipasto en una simulación es necesario poder transmitir las fuerzas sobre los sólidos del sistema. Esto permite, por ejemplo, la elevación de una carga.	83
4.3. La tensión del cable ejerce una fuerza sobre el disco de la polea que puede generar un momento.	85
4.4. El ángulo entre las direcciones de entrada y salida del cable a la polea no puede ser mayor de 180°	87
4.5. Cuando las direcciones de entrada del cable son paralelas indica que se pierde el contacto entre el cable y la polea. . .	88
4.6. Un cable está alineado con una polea cuando su dirección es perpendicular al eje de giro de ésta.	89
4.7. La dirección de giro de la polea puede influir en la salida del cable de la garganta.	91
5.1. Relaciones consideradas en el sistema formado por un cable elástico sin masa y un conjunto de poleas.	97
5.2. Figura del cable modelado por medio de partículas.	101
5.3. Cuando la longitud del primer muelle del cable ℓ_0 supera el extremo superior del intervalo, ℓ_+ , se inserta una nueva partícula reduciendo de nuevo el valor de ℓ_0	105
5.4. Cuando la longitud del primer muelle del cable ℓ_0 es inferior al extremo inferior del intervalo, ℓ_- , se elimina la primera partícula del sistema, \mathbf{r}_1 aumentando de nuevo el valor de ℓ_0	106
5.5. Un tramo de cable suspendido por sus extremos, con velocidad longitudinal.	109

5.6.	Las alturas de la primera partícula del sistema y de la nueva partícula insertada muestran la aparición de oscilaciones en el sistema (a). Estas oscilaciones son más visibles para valores altos de ℓ_+ (b).	110
5.7.	La oscilación provocada por la inserción de una nueva partícula apenas es apreciable en un cable en movimiento.	111
5.8.	En el modelo CORDE (Spillmann and Teschner, 2008), para calcular la posición del nuevo nodo insertado (representado por un círculo vacío) se modifica su posición y la del vecino, minimizando la energía potencial.	113
5.9.	Las alturas de las partículas del sistema muestran que la inserción de un partícula en la posición de mínima energía también causa oscilaciones en el sistema (a). Las oscilaciones siguen siendo más visibles para valores altos de ℓ_+ (b).	115
5.10.	Oscilación de la partícula \mathbf{r}_2 , insertando la partícula en el punto intermedio (a) y por el método de la minimiación de la energía (b).	116
5.11.	Evolución de la altura de las dos primeras partículas con $\ell_+^0 = 0,01$. El procedimiento propuesto que inserta una partícula <i>estática</i> en el sistema permite conseguir una simulación sin oscilaciones.	120
6.1.	Sistema de referencia local de una polea $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$	142
6.2.	El estado del cable, determinado por la curva $\mathbf{u}(x, t)$ puede expresarse como la proyección de las vibraciones del cable en los vectores de la base \mathbf{e}_1 y \mathbf{e}_2	143
6.3.	Variables del modelo de pequeñas oscilaciones para una cuerda descrito por la ecuación de ondas (6.63).	150
6.4.	Variables del modelo de oscilación transformado.	150
7.1.	Esquema del sistema empleado para el experimento destinado al análisis espectral de los modelos.	167

7.2.	Frecuencia principal de vibración del cable para diferentes valores de densidad y longitud, utilizando los distintos modelos considerados.	169
7.3.	Esquema del sistema empleado para el análisis de las oscilaciones de un cable sometido a un desplazamiento longitudinal.	171
7.4.	Estado de los dos modelos simulados para diferentes valores de D , con $\omega = 1/2$	172
7.5.	Secuencia del movimiento de un cable cuyos extremos se desplazan con velocidad variable a lo largo de la dirección longitudinal. Cada instantánea muestra el estado del modelo basado en un sistema de partículas, junto al modelo de la ecuación de ondas. Superpuesta, aparece la posición de equilibrio, representada por una línea de trazos.	173
7.6.	Para comparar el modelo basado en la ecuación de ondas (EO) con el modelo basado en un sistema de partículas (SP) se ha interpolado este último en los puntos x_k por medio de splines.	175
7.7.	Diferencia, en $\ \cdot\ _\infty$, de la curva descrita por el cable en los modelos estudiados para diferentes valores de ω y de D	175
7.8.	Las situaciones en las que el desplazamiento de las partículas supera los extremos del cable no puede ser reproducido con la ecuación de ondas.	177
7.9.	Esquema del polipasto simulado, consistente en 6 nodos, cuatro de ellos fijos y dos sujetos a la carga.	179
7.10.	Evolución de la energía total del gancho. Se observa que diferentes valores de la masa dan lugar a oscilaciones transitorias con diferente frecuencia. Sin embargo, la evolución a largo plazo es equivalente en todos los casos. La figura corresponde a un cable con un coeficiente de amortiguación $b = 0,1$	182

- 7.11. Evolución de la energía total del sistema para diferentes valores de amortiguación y un cable de 2kg/m. El comportamiento es similar en los diferentes casos, con un acortamiento de la fase de oscilaciones transitorias debido a la amortiguación. 184
- 7.12. Esquema del polipasto empleado en la medición del movimiento pendular del gancho. Con el fin de provocar este movimiento, se ha iniciado el sistema con una velocidad de 5m/s en el eje x 185
- 7.13. Evolución de la posición del péndulo para diferentes valores de la densidad del cable. Puede apreciarse una reducción del periodo del péndulo para valores altos de la densidad. . . . 186
- 7.14. En la secuencia puede observarse el efecto de la masa del cable. El gancho no se elevará de la plataforma hasta que la catenaria se reduzca lo suficiente como para crear la tensión necesaria. 188
- 7.15. Experimento realizado para mostrar el efecto de la masa del cable durante la elevación de una carga. Cuando se inicia la maniobra de elevación, la carga no se eleva hasta que no se reduce la catenaria de los tramos horizontales del cable. . . 189
- 7.16. Altura del gancho a lo largo del tiempo durante las maniobras de elevación (a) y descenso (b) de la carga. 190
- 7.17. Coste promedio de la ejecución de un paso de integración para diferentes valores de $\Pi = N \times N$, utilizando el sistema de partículas (SP) y la ecuación de ondas (EO). Se ha representado también un ajuste de los datos por regresión lineal. 196

7.18. Coste, en ms., del cálculo de un paso de simulación para $N = 2$ y diferentes valores de M , con los diferentes métodos simulados: sistema de partículas (SP), ecuación de ondas (EO), sistema multicuerpo con sobre-relajación (MC1) y sistema multicuerpo con complejidad cuadrática (MC2). <i>Figura interior</i> : La misma figura, en el rango de 0ms a 0,5ms, mostrando los diferentes métodos de coste lineal.	199
8.1. La simulación en un entorno realista compuesto por multitud de objetos requiere la detección de colisiones.	204
8.2. Caja envolvente para el modelo del segmento de cable basado en la ecuación de ondas.	206
8.3. Caja envolvente para el modelo del segmento de cable basado en un sistema de partículas.	206
8.4. El contacto de una poligonal con un poliedro puede reducirse a los tres casos mostrados. El contacto de un vértice del cable con una arista (izquierda), el contacto de una arista del cable con una arista del objeto (centro) y el contacto de un vértice del cable con una cara del objeto (derecha).	208
8.5. La posición en la que se crea el nuevo nodo del polipasto asegura que el cable queda fuera del objeto.	210
8.6. La utilización de cilindros tiene como inconveniente que se aprecian discontinuidades en ausencia de técnicas de anti-aliasing por <i>hardware</i>	215
8.7. La anchura de una primitiva de tipo línea no puede ajustarse correctamente al diámetro aparente del cable cuando el rango de distancias al observador es grande.	216
8.8. La utilización de cilindros no es adecuada, ya que se aprecian discontinuidades en ausencia de técnicas de anti-aliasing. La técnica propuesta permite solucionar este problema en la visualización.	217

- 8.9. Se ha desarrollado un demostrador que simula una grúa torre de forma interactiva, utilizando los modelos de cable presentados en este trabajo. 219
- 8.10. El sistema de formación de operadores de grúa torre utiliza los modelos desarrollados a lo largo de esta tesis. 220

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

La evolución y abaratamiento de los costes de los equipos informáticos y, en especial, de los procesadores gráficos, han potenciado el uso de las herramientas de entrenamiento basadas en simulación. Esto ha permitido que en la última década la simulación para entrenamiento se haya extendido del terreno militar y de la aviación a muchos otros ámbitos de la sociedad civil.

Una de las aplicaciones de la Realidad Virtual en el ámbito civil es la simulación de grúas y de maquinaria pesada, como herramienta para la formación y el entrenamiento de los manipuladores de este tipo de maquinaria. Esta tecnología aplicada a la formación se encuentra actualmente en auge gracias a las múltiples ventajas que supone respecto a la utilización de maquinaria real en las tareas de entrenamiento.

Desde el punto de vista de la formación permite un entrenamiento más seguro, evitando los riesgos de la utilización por manos inexpertas de un equipo de decenas de toneladas ya de por sí peligroso. Además, permite el entrenamiento y la formación en situaciones que no pueden entrenarse con una máquina real, como pueden ser las averías o el trabajo en condiciones meteorológicas adversas. Por otra parte, el simulador representa una gran ayuda al instructor, al proporcionar elementos objetivos para la evaluación de los aprendices.

Desde una perspectiva económica, un simulador supone un beneficio desde varios puntos de vista. La adquisición de un sistema de simulación para formar a un grupo de aprendices resulta más económico que la adquisición o el alquiler de una grúa real. Además, en aquellos entornos en los que la formación debe realizarse con equipos que se encuentran en producción, como es el caso del entorno portuario, el coste asociado a la formación es muy elevado; al coste asociado a la parada de una máquina en producción hay que añadir el tiempo y el coste derivados de las averías causadas por los operarios inexpertos.

1.1. CONTEXTO Y MOTIVACIÓN

Durante la última década, el Laboratorio de Simulación y Modelado, adscrito al Instituto de Robótica de la Universidad de Valencia, ha desarrollado simuladores y aplicaciones de realidad virtual para la formación, principalmente en el ámbito de la maquinaria de elevación.

Entre los sistemas desarrollados por el equipo de investigadores destacan varios simuladores de grúas portuarias. Estos simuladores están siendo utilizados actualmente en el centro de formación del Puerto de Valencia, tanto para la formación de los nuevos manipuladores de estas grúas como para el reciclado de operadores destinados anteriormente a otras tareas, y está siendo implantado en varios puertos de Latinoamérica.

Recientemente se ha desarrollado también un sistema de formación para operadores de grúa torre. Este simulador ha sido homologado en 6 comunidades autónomas para que pueda ser utilizado como sustitución de una parte de las horas prácticas que, por ley, deben cumplir los candidatos a la obtención del carnet de operador de grúa torre.

En aras a conseguir sistemas de entrenamiento que no produzcan fatiga en los usuarios y que minimicen el tiempo de aprendizaje, deben emplearse técnicas que permitan dotar a los simuladores de un alto grado de *presencia*. El concepto de presencia se refiere a la *sensación de estar allí* que experimenta un usuario en un entorno de Realidad Virtual. Para conseguir que



Figura 1.1: *Uno de los campos en los que se están aplicando con mayor éxito las herramientas para entrenamiento basadas en simulación es el entrenamiento de operadores de maquinaria de elevación.*

un simulador proporcione la mayor sensación de presencia, éste debe contar con una reproducción del entorno lo más fiel posible a la realidad.

La consecución de entornos virtuales cada vez más realistas para este tipo de aplicaciones supone un enorme reto desde el punto de vista del modelado. Con el fin de conseguir nuevos modelos que proporcionen mayor realismo y nivel de detalle en la dinámica de los sistemas simulados, el modelado basado en la física ha sustituido a las técnicas tradicionales de animación. Sin embargo, los modelos deben ajustarse a las exigencias de las aplicaciones interactivas en tiempo real. Al requisito indispensable de la eficiencia se suman la necesidad de proporcionar modelos flexibles y robustos que garanticen la calidad de las aplicaciones.

En el caso de la maquinaria de elevación, es frecuente la utilización de cables de acero y poleas formando polipastos. Un polipasto consiste en dos grupos de poleas, fijas (situadas sobre la máquina) y móviles (sujetas a la carga), junto con un cable o cuerda que pasa a través de las mismas.

En el ámbito de la Realidad Virtual y la animación, el modelado de diferentes tipos de cuerdas y cables esta suscitando un interés creciente por parte de la comunidad de investigadores. Prueba de ello es la cantidad

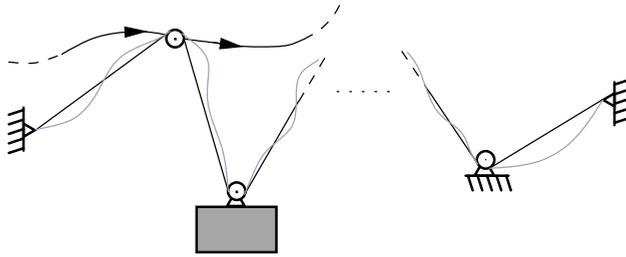


Figura 1.2: *Representación del sistema considerado, objeto de esta tesis. Un cable y un conjunto de poleas situadas sobre diferentes objetos, sobre una estructura fija o siguiendo una trayectoria predefinida.*

de trabajos relacionados con este tipo de objetos que han sido publicados recientemente en las principales revistas y congresos de este campo (Bertails et al., 2006; Hadap, 2006; Chang et al., 2007; Spillmann and Teschner, 2007; Servin and Lacoursière, 2007; Hadap et al., 2007; Spillmann and Teschner, 2008; Bergou et al., 2008; Servin and Lacoursière, 2008).

Sin embargo, en los modelos utilizados habitualmente para los simuladores de entrenamiento, los cables suelen simularse por medio de modelos muy simplificados, mientras que la simulación de los polipastos suele descartarse, considerándolo como un sistema secundario. A pesar de que en ingeniería la dinámica de cables y poleas es un tema extensamente tratado desde diversas metodologías (Irvine, 1981; Shapiro et al., 1999; Antman, 2005) los modelos que se ofrecen carecen habitualmente de la flexibilidad y la eficiencia necesarios para su utilización en aplicaciones interactivas.

Como resultado se desprecian las oscilaciones de los cables de elevación y la influencia de los diferentes tramos de cable presentes en un polipasto. Esto da lugar a simuladores de menor calidad desde el punto de vista de la sensación de realismo que transmiten y desde el punto de vista formativo.

La presente tesis doctoral está motivada por este problema, que se ha detectado en la simulación de cables de elevación pero que es extensible a otras situaciones que puedan requerir la simulación de polipastos o aparejos.

1.2. REQUISITOS DE LOS MODELOS

El modelado dinámico destinado a una aplicación de simulación para entrenamiento se ve sometido a un conjunto de restricciones que deben ser tenidas en cuenta. En primer lugar, se establece un conjunto de requisitos que debe cumplir un modelo dinámico de polipasto que sea adecuado para la simulación interactiva en tiempo real de maquinaria de elevación.

Simulación de cable y poleas. La simulación de un polipasto requiere que se consideren sus dos elementos constituyentes principales; un cable y un conjunto arbitrario de poleas. Los modelos deben contemplar:

- Modelado de la oscilación transversal del cable. Este requisito es fundamental para obtener simulaciones creíbles, que proporcionen una reproducción de calidad del sistema simulado.
- Variación de la longitud del cable. Con el fin de poder simular la elevación de la carga y el movimiento de las poleas es necesario que el cable pueda variar su longitud.

Flexibilidad y Robustez. La simulación interactiva de cualquier sistema en un entorno de realidad virtual a menudo da lugar a situaciones que están fuera del rango de validez de los modelos empleados. Por este motivo los modelos deben ser flexibles, para considerar el mayor abanico posible de situaciones, y cuando se supere su rango de validez deben estar preparados para responder de forma robusta.

Estabilidad. Para permitir la simulación de situaciones en las que el cable está sometido a una tensión mecánica elevada, es necesario articular los mecanismos que permitan garantizar que la simulación se ejecutará libre de problemas de estabilidad numérica.

Eficiencia y escalabilidad. En un entorno virtual interactivo, la visualización debe actualizarse con una frecuencia suficiente como para garantizar la sensación de inmersión del usuario. Por este motivo, los

modelos dinámicos utilizados deben ser capaces de calcular la evolución del sistema en un tiempo muy reducido. Idealmente, deben poder garantizar una cota superior para el tiempo necesario para su actualización.

Asimismo, es necesario que los modelos puedan crecer en tamaño sin que el crecimiento del coste computacional haga inviable su utilización. Esto es importante en el caso de la simulación de cables porque la longitud del mismo puede variar enormemente a lo largo de una simulación.

Credibilidad. El objetivo de la utilización de modelos dinámicos es conseguir que el comportamiento del entorno virtual sea percibido por el usuario como real. Además, si los modelos están destinados a la simulación para entrenamiento, los modelos deberán reproducir los aspectos de cada sistema que sean más relevantes para la formación.

Interactividad. Además de los modelos dinámicos que se diseñen, es necesario proporcionar también un conjunto de técnicas que aseguren que se va a poder realizar una simulación interactiva. Esto incluye:

- Detección y respuesta ante colisiones
- Posibilidad de introducir las entradas del sistema de forma flexible a partir de las acciones del usuario

Representación gráfica. Uno de los elementos principales de los entornos virtuales es la representación gráfica del escenario. Las soluciones propuestas deben tener en cuenta este factor y permitir una representación gráfica eficiente.

Aplicación. Los modelos deben poderse integrar en un entorno virtual con el fin de poder utilizar los resultados en aplicaciones reales. Asimismo, deben poder interactuar adecuadamente con otros sistemas mecánicos, como los sistemas multicuerpo empleados habitualmente en este tipo de aplicaciones.

1.3. OBJETIVOS

El objetivo principal de esta investigación es conseguir modelos dinámicos de sistemas de elevación basados en las propiedades físicas de los cables y de las poleas, que sean adecuados para la simulación interactiva en tiempo real.

El fin de los modelos desarrollados no debe ser la obtención de una simulación muy precisa de los diferentes aspectos involucrados en la dinámica, sino conseguir animaciones visualmente creíbles, que permitan reproducir los aspectos más identificativos de la dinámica de estos sistemas, muchos de los cuales han sido obviados hasta el momento en simulaciones en tiempo real.

Este trabajo contribuirá a solucionar las deficiencias detectadas en la simulación de sistemas de poleas y cables en entornos virtuales, por medio del diseño de las técnicas y los modelos necesarios para ello. No obstante, para alcanzar este objetivo es necesario plantear un conjunto de objetivos más concretos. A continuación se describen estos objetivos.

- **Analizar y definir adecuadamente el problema.** Se plantea como objetivo preliminar conocer, de la manera más amplia posible, las técnicas existentes relacionadas con el problema abordado en este trabajo, para determinar de forma precisa los motivos por los que aún no existe una solución satisfactoria.
- **Proponer una estrategia para la resolución del problema.** Proponer una metodología que permita desarrollar modelos dinámicos adecuados al problema y a las situaciones que se abordan.
- **Definir un modelo abstracto de polipasto.** Definir un modelo abstracto del sistema, que sirva como marco para el desarrollo de modelos de simulación adecuados a las necesidades planteadas. Obtener un modelo a partir de un conjunto mínimo de requisitos, de forma que sea aplicable a un mayor número de situaciones.

- **Definir un modelo para la simulación de un polipasto.** Definir un modelo dinámico para la simulación de un polipasto que mejore las propiedades de los modelos anteriores. Para ello, a partir del marco establecido por medio del modelo abstracto, se pretende definir los siguientes elementos:
 - **Definir un modelo de polea.** Definir un modelo dinámico de polea, que permita la simulación de las principales propiedades de estas máquinas simples y analizar los límites de su rango de validez para asegurar su robustez.
 - **Definir un modelo de cable con longitud variable.** Definir un modelo dinámico de cable que permita la variación de la longitud del cable. Determinar la metodología más adecuada para el modelado del cable y definir las técnicas que permitirán la variación de su longitud de forma estable y robusta.
- **Definir un modelo para situaciones de tensión elevada.** Definir un modelo que garantice la simulación estable y robusta del sistema en las situaciones en las que la tensión sea muy elevada, como las que aparecen en la simulación de maquinaria de elevación.
- **Ampliar el rango de validez del modelo de polipasto.** Proporcionar mecanismos que permitan construir un modelo con un rango de validez más amplio, utilizando los diferentes modelos de cable y de polea propuestos, y explotando la flexibilidad proporcionada por el modelo abstracto. Para ello, será necesario diseñar las estrategias que permitan elegir el modelo dinámico más adecuado según las características de la simulación.
- **Analizar y validar los modelos.** Analizar los diferentes modelos obtenidos, para determinar con precisión sus propiedades y su rango de aplicación. Obtener resultados que permitan garantizar que las simulaciones que se obtendrán por medio de estos modelos alcanzan unos niveles mínimos de credibilidad.

Mostrar en qué manera los nuevos modelos proporcionan mejoras en la descripción del sistema simulado y en las prestaciones computacionales, en comparación con otros modelos anteriores.

- **Aplicar los resultados obtenidos.** Desarrollar aplicaciones de demostración, que muestren las principales propiedades de los modelos. Para ello se deberán desarrollar las técnicas auxiliares necesarias para alcanzar este objetivo, como la representación gráfica o la detección de colisiones. Se plantea también como objetivo integrar los modelos en aplicaciones reales.

Extender las principales contribuciones a otros ámbitos, como los entornos virtuales interactivos y la animación, cuyos requisitos son, en muchos casos, comunes con los de la simulación para entrenamiento.

1.4. METODOLOGÍA

El esquema metodológico seguido está enfocado al desarrollo de nuevos modelos para la simulación en entornos de realidad virtual. Esto se conseguirá por medio del diseño de un modelo abstracto que facilitará especialmente la consecución de un modelo flexible, robusto y estable.

Con el fin de poder abordar los problemas planteados, se realizará en primer lugar un análisis de los trabajos anteriores relacionados con la tesis. Este análisis permitirá conocer las soluciones propuestas hasta el momento en diferentes campos científicos y técnicos y determinar de forma precisa cuales son las carencias que deben ser cubiertas.

Una vez analizado convenientemente el problema, se abordará el modelado del sistema. Para ello se recurrirá a la metodología de refinamiento sucesivo, o metodología *Top-Down*. Como resultado, se obtendrá un modelo abstracto del sistema, basado en su descomposición en módulos y en la identificación de los flujos de información.

Este modelo abstracto permitirá posponer el modelado de la dinámica de los subsistemas, evitando así la influencia de éstos en el diseño del modelo global. Una vez definido el modelo abstracto, se obtendrán modelos dinámi-

cos para los diferentes módulos definidos. Cada nuevo modelo se ajustará a las especificaciones determinadas en el modelo abstracto y éste actuará como vía de comunicación entre los distintos módulos.

Los modelos desarrollados se implementarán con el fin, en primer lugar, de validar y mostrar su comportamiento. La validación permitirá analizar y rediseñar, cuando sea necesario, los modelos desarrollados. Esta implementación servirá también para desarrollar las técnicas necesarias para garantizar su aplicación en sistemas de realidad virtual y simulación. Se tratarán especialmente la interacción y la representación gráfica del modelo, y se desarrollará un demostrador de la tecnología, consistente en una aplicación informática.

Por medio de la definición de las estrategias adecuadas, esta metodología permitirá alcanzar los principales objetivos propuestos. El modelo abstracto obtenido será flexible, ya que se define en base a un conjunto muy reducido de suposiciones previas sobre el sistema. Se verá que la utilización de diferentes modelos dinámicos para cada módulo permite ampliar el rango de situaciones que pueden simularse. Por otra parte, la descomposición de la dinámica en módulos permitirá identificar y controlar las fuentes de posible inestabilidad de forma independiente.

1.5. ESTRUCTURA DE LA TESIS

La memoria de esta tesis está organizada en 9 capítulos, incluyendo la presente introducción, de acuerdo con la estructura que se describe a continuación.

En el **Capítulo 2** se estudian los trabajos existentes en la bibliografía relativos a la simulación de cables y poleas, prestando especial atención a aquéllos que puedan ser de utilidad en el problema de la simulación de grúas y maquinaria de elevación.

En el **Capítulo 3** se describe la metodología de modelado aplicada y se presenta un modelo abstracto para la simulación de sistemas formados por cables y poleas. Este modelo proporciona una descripción modular del

problema basada en la descomposición del sistema simulado.

En el **Capítulo 4** se desarrolla un modelo de polea que se emplea en la metodología propuesta en el Capítulo 3. Se propone un modelo que describe la dinámica de una polea a partir de sus entradas y la manera de conseguir las salidas correspondientes.

En el **Capítulo 5** se presenta un nuevo modelo de cable. La principal contribución es la variación de la longitud del cable, lo que permitirá emplearlo como un módulo en el modelo abstracto de polipasto.

En el **Capítulo 6** se presentan dos nuevos modelos dinámicos que permiten una simulación de cables eficiente y estable para las situaciones de mayor tensión mecánica. En primer lugar se deriva la dinámica de un cable en el espacio. A continuación se asumen ciertas simplificaciones para llegar a un modelo más eficiente y sencillo. Por último, se propone un procedimiento para el intercambio de los modelos de cable, de acuerdo con las necesidades de precisión y estabilidad de la simulación en curso.

En el **Capítulo 7** se analizan y estudian los modelos propuestos desde diferentes puntos de vista. Por una parte se analizan sus propiedades dinámicas, con el fin de validar cada modelo frente a otros modelos de cable existentes. Por otra parte, se analiza también la eficiencia de cada modelo y su validez para la animación y simulación en tiempo real.

En el **Capítulo 8** se describen los detalles técnicos de los procedimientos empleados para la implementación de los modelos, y se presentan aplicaciones de demostración. Se describen aspectos como la integración de los modelos en aplicaciones de informática gráfica, la representación gráfica del cable a partir de la descripción propuesta o la detección de colisiones y su gestión.

En el **Capítulo 9** se realiza un resumen de las conclusiones que pueden extraerse a partir del trabajo realizado, las principales contribuciones de la tesis y los principales problemas abiertos, indicando las posibles líneas de trabajo futuro.

TÉCNICAS Y MODELOS PARA LA SIMULACIÓN DE CABLES Y POLEAS

La dinámica de una cuerda es un problema clásico de la física matemática. Desde la ecuación de ondas clásica hasta la actual teoría no lineal de la elasticidad, este problema ha motivado numerosos trabajos de algunos de los más importantes matemáticos desde la antigüedad (Ribnikov, 1987).

Cables y cuerdas, junto con los sistemas de poleas, son máquinas con una gran utilidad práctica que han sido usadas durante milenios. Permiten transmitir y transformar la fuerza mecánica, por lo que están presentes en máquinas más complejas como sistemas de transmisión, ascensores, grúas, . . . Esto hace que la investigación de este tipo de sistemas sea un campo de trabajo muy activo en ingeniería, física y matemáticas.

Sin embargo, la utilización de modelos de estos sistemas en entornos virtuales interactivos supone un gran reto. Los modelos deben ser eficientes y robustos ante cualquier situación. A esto se suma, en el caso de los modelos de maquinaria de elevación, la necesidad de garantizar la estabilidad numérica ante las elevadas frecuencias de vibración que experimentan este tipo de sistemas.

En este capítulo se va a realizar una revisión y un análisis de los principales trabajos anteriores relacionados con este problema. Entre ellos, se prestará especial atención a aquéllos que permitan simular el comportamiento de los sistemas de elevación compuestos por cables y poleas. Este

análisis permitirá conocer los principales problemas que permanecen aún sin resolver, identificando sus causas y realizando una propuesta para su mejora.

2.1. CUERDAS, CABLES Y POLEAS

Las cuerdas son objetos fabricados con fibras trenzadas o enrolladas para conseguir mayor elasticidad y resistencia. Suponen una herramienta económica y ligera para la transmisión de grandes fuerzas mecánicas, por lo que se han empleado en el transporte y la elevación de cargas durante siglos. Se tiene constancia de la utilización de cuerdas como medio para la elevación de cargas pesadas en el antiguo Egipto, así como de la existencia de procesos complejos para su elaboración. Con la revolución industrial y la mecanización de los procesos de fabricación, la utilización de cuerdas se sustituyó en muchos ámbitos por cables de acero.

La polea es una de las conocidas en mecánica como *máquinas simples*. La misión de una máquina simple es *aumentar o disminuir una fuerza o cambiar su dirección* (Navarro, 2003). Una polea es una *máquina simple* que permite cambiar la dirección de la fuerza aplicada por medio de un cable o una cuerda.

Sin embargo, la gran utilidad de estas máquinas se consigue gracias a la combinación de varias poleas y un cable, formando un polipasto. Por medio de la utilización de dos grupos de poleas, uno fijo y otro móvil, es posible cambiar la magnitud de la fuerza aplicada y desplazar o elevar grandes cargas. Plutarco, en su obra *Vidas Paralelas*, relata cómo Arquímedes de Siracusa (287–212 a.C.) fue capaz de mover un barco con una sola mano:

Arquímedes, pues, pariente y amigo de Hierón, le escribió que, con una potencia dada, se puede mover un peso igualmente dado; y [...] le aseguró que si le dieran otra Tierra movería ésta después de pasar a aquella. Maravillado Hierón, y pidiéndole que verificara con obras este problema [...] compró para ello un gran transporte de tres velas del arsenal del rey, que fue sacado a tierra con mucho trabajo y a fuerza

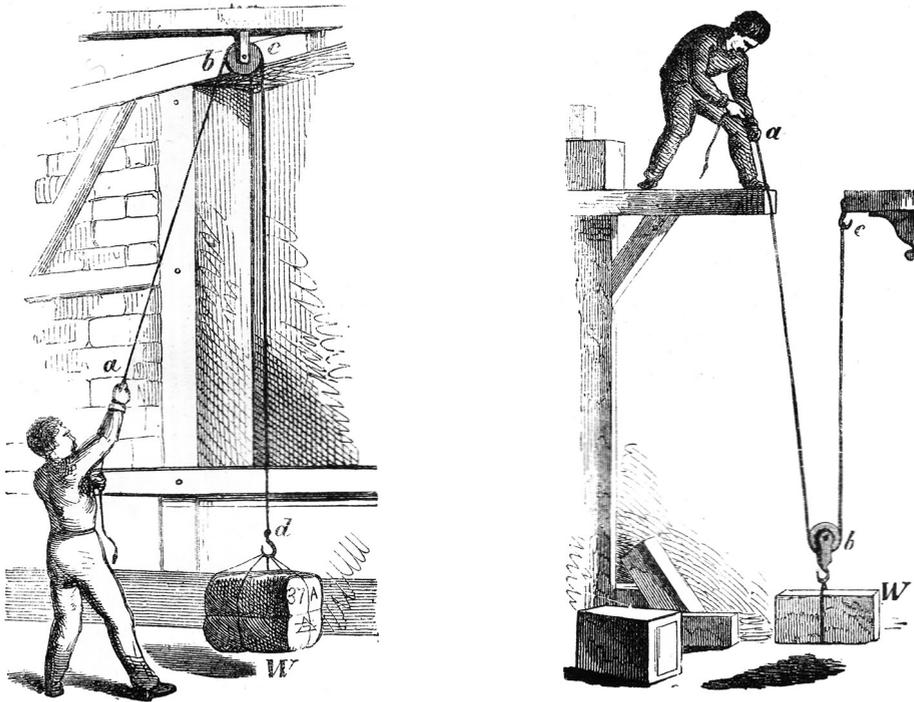


Figura 2.1: La utilización de poleas móviles permite reducir la fuerza necesaria para levantar una carga. Figuras de Opfindelsernes Bog (El libro de los inventos) de A. Lütken. 1878. Fuente, Wikimedia Commons.

de un gran número de brazos; cargó de gente y del peso que solía echársele, y sentado lejos de él, sin esfuerzo alguno y con sólo mover con la mano el cabo de una máquina de gran fuerza atractiva lo llevó así derecho y sin detención, como si corriese por el mar. (Plutarco. *Vidas paralelas*. Ed. Gredos. 2007).

lo que permite asegurar que el uso de esta máquina tiene más de dos mil años de antigüedad. Gracias a esta propiedad de los polipastos su utilización está presente en muchos ámbitos pero especialmente en la maquinaria de elevación, donde constituye el elemento fundamental para la elevación de la carga.

2.1.1. Vibración de una cuerda

Como problema matemático, el comportamiento de una cuerda vibrante ha sido uno de los problemas clásicos abordados por algunos de los matemáticos más importantes. Los pitagóricos se interesaron por el problema, y descubrieron la relación entre la longitud de una cuerda y los acordes emitidos por sus vibraciones (Rey Pastor and Babini, 1997a).

A principios del S. XVIII el problema de la vibración de una cuerda sirvió como estímulo para el desarrollo del cálculo infinitesimal. Taylor estableció que la aceleración de un punto de una cuerda tensa, suspendida por sus extremos, es inversamente proporcional al radio de curvatura de la cuerda en dicho punto

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]^{3/2}}. \quad (2.1)$$

D'Alembert, Euler y D. Bernoulli obtuvieron soluciones para esta ecuación y establecieron un intenso debate sobre sus propiedades. A principios del S. XIX los trabajos de Fourier sobre el calor permitieron demostrar que la solución puede representarse por medio de una serie infinita de sumas de senos y cosenos (Ribnikov, 1987; Rey Pastor and Babini, 1997b).

En la actualidad, la ecuación de ondas sigue utilizándose para describir y analizar la vibración de cuerdas y cables (Guo, 2000; Cepon and Boltezar, 2007; Chen et al., 2008). Sin embargo, este modelo parte de un conjunto de hipótesis muy estricto que limita su aplicación a un conjunto reducido de situaciones.

La ecuación de ondas (2.1) modela una cuerda de densidad ρ suspendida por sus extremos. La cuerda se supone sometida a una tensión longitudinal T suficientemente elevada como para que la posición de cada partícula pueda expresarse como una desviación respecto del segmento que une los extremos de la cuerda.

Este modelo no considera el efecto de la torsión y la flexión de la cuerda, ni las deformaciones longitudinales, y es habitual suponer además que las vibraciones son suficientemente pequeñas como para que $1 \gg \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$. En este

caso se obtiene la forma habitual de la ecuación de ondas

$$\rho u_{tt} = T u_{xx},$$

donde se ha usado el subíndice para denotar la derivada parcial $u_\alpha = \frac{\partial u}{\partial \alpha}$.

Modelos para desplazamientos grandes

Con el fin de poder reflejar situaciones más generales era necesario considerar la cuerda como un objeto elástico en un sentido más amplio. A mediados del S. XIX varios autores, entre los que destaca Kirchhoff, dan lugar a una teoría de las cuerdas que introduce el concepto de *deformación* (Antman, 2005). A principios del S. XX los hermanos Cosserat presentaron una teoría de la elasticidad que proporciona una generalización del modelo de Kirchhoff.

El modelo de cuerda de Cosserat considera una curva arbitraria que corresponde a la región del espacio ocupada por la cuerda. Sobre cada punto de la curva se fija un sistema de referencia que permite determinar en cada instante la deformación de la cuerda a causa del estiramiento, la torsión y la flexión (Rubin, 2000; Antman, 2005). Estas teorías permiten describir de forma más precisa una cuerda en situaciones de muy baja tensión, en las que la resistencia a la flexión y la torsión determinan su dinámica.

Modelos discretos. Simulación de cables

A lo largo de la segunda mitad del S. XX la introducción de los ordenadores como herramienta de análisis dio lugar a la aparición de modelos discretos de cuerdas y cables, adecuados para su resolución por medio de métodos numéricos.

Estos modelos corresponden habitualmente a discretizaciones de los modelos continuos anteriores realizadas por medio de elementos finitos (Wei et al., 1999; Aamo and Fossen, 2000; Gattulli et al., 2004; Spillmann and Teschner, 2007), diferencias finitas (Srinil et al., 2003; Chen et al., 2005) u otros procedimientos (Srinil et al., 2004; Gregoire and Schömer, 2007). Entre los modelos discretos han ganado también cierta popularidad los modelos

basados en masas puntuales y elementos elásticos (Burgess, 1993; Buckham and Nahon, 1999) o en sistemas multicuerpo (Dreyer and van Vuuren, 1999; Kamman and Huston, 2001; Servin and Lacoursière, 2008).

La dinámica de una cuerda o un cable ha motivado una gran cantidad de investigación con aplicaciones en numerosos ámbitos. El presente trabajo de investigación se centra en el modelado de polipastos y de las situaciones que se producen en la simulación de maquinaria de elevación relacionadas con la dinámica de los cables. Por este motivo, a continuación se presta atención al modelado de este tipo de sistemas y a algunos aspectos que son de interés en el modelado de los cables de elevación.

2.1.2. Modelado de cables para simulación de maquinaria de elevación

La simulación de grúas y maquinaria de elevación involucra situaciones con características propias. Un cable de elevación habitualmente no supera los 6kg por metro de longitud, por lo que es un objeto muy ligero comparado con aquellos componentes a los que va unido; la grúa y la carga. Además, durante su trabajo está sometido a grandes tensiones que pueden ser, en muchos casos, del orden de 100KN. Por estos motivos, su modelado supone un reto desde el punto de vista de la estabilidad computacional, ya que la aparición de vibraciones de alta frecuencia está asegurada (Servin and Lacoursière, 2008).

En el ámbito de la ingeniería mecánica existen numerosos estudios sobre las oscilaciones de la carga de un sistema de elevación compuesto por cables. El objetivo de la mayor parte de estos trabajos es el análisis del balanceo de la carga para el diseño de sistemas de control. Abdelrahman presenta una revisión de los principales trabajos en el ámbito más concreto del control de grúas (Abdel-Rahman et al., 2003).

Dinámica del cable de elevación

En estos trabajos, los modelos empleados para la simulación del cable y la carga no suelen considerar la dinámica del cable. Debido a las vibraciones de alta frecuencia la consideración de los cables suele dar lugar a problemas de inestabilidad numérica, por lo que se despreja el efecto de la vibración de los cables en el problema de control. Por este motivo, frecuentemente el cable sólo aparece como una fuerza aplicada sobre la carga (Chin et al., 1998; Abdel-Rahman and Nayfeh, 2003; Masoud et al., 2004) o sobre la carga y la grúa (Ju et al., 2006; Al-Sweiti and SÖffker, 2007), sin considerar la dinámica del propio cable. Esto permite evitar los problemas de estabilidad numérica ocasionados por la vibración del cable y reducir el coste de los modelos.

Algunos autores han planteado la utilización de la ecuación de ondas en los modelos de cables de grúa (D'Andrea-Novel and Boustany, 1991; Martindale et al., 1995; Joshi and Rahn, 1995; Canbolat et al., 1997; Alli and Singh, 1999). Estos modelos consideran que el cable permanece prácticamente vertical y que las oscilaciones son reducidas. Uno de los aspectos más destacables de estos modelos es que se tiene en cuenta la masa del propio cable para el cálculo de la tensión. Para un cable vertical la tensión de cada punto viene dada por

$$T(s) = mg + s\rho g; \quad s \in [0, L] \quad (2.2)$$

donde ρ es la densidad lineal del cable, m es la masa de la carga, g es la aceleración de la gravedad y la altura del cable aumenta con el parámetro s . Este modelo de tensión distribuida da lugar a la ecuación de ondas

$$\rho u_{tt} = (Tu_x)_x$$

Estos modelos presentan el inconveniente de tener una validez limitada. No son capaces de reproducir grandes vibraciones, ni situaciones en las que la carga queda apoyada en el suelo, de forma que la tensión se reduce, por poner únicamente algunos ejemplos.

2.1.3. Desplazamiento longitudinal y variación de la longitud de una cuerda o cable

Dentro de los problemas que son de interés en el ámbito de este trabajo se encuentra el comportamiento de una cuerda que se desplaza en la dirección de su eje, pues permite reproducir un segmento de una cuerda que se encuentra suspendido entre dos poleas y que se desplaza por el giro de éstas.

Este problema se analiza habitualmente a partir del modelo de la ecuación de ondas para pequeñas vibraciones. Por medio de la introducción de una velocidad de desplazamiento del material se obtiene la ecuación de ondas para material en movimiento (Sack, 1954; Mahalingam, 1957; Miranker, 1960; Perkins and Mote Jr., 1987),

$$\begin{aligned} \rho(u_{tt} + \dot{v}u_x + 2vu_{xt}) &= (T - \rho v^2)u_{xx}; & x \in [0, L] & \quad (2.3) \\ u(0, t) &= 0; & u(L, t) &= 0. \end{aligned}$$

La dinámica de una cuerda de longitud L suspendida entre dos puntos y con velocidad variable $v(t)$ se describe por medio de la ecuación de ondas (2.3) siempre que $T - \rho v^2 > 0$ (Lee and Mote Jr., 1999). Una partícula en la cuerda experimenta tres aceleraciones, la aceleración perpendicular a la cinta u_{tt} , la aceleración de Coriolis $2vu_{xt}$ y la aceleración centrípeta v^2u_{xx} (Wickert and Mote Jr., 1989).

Más recientemente, Pakdemirli et al. (Pakdemirli et al., 1994) y Guo y Wang (Guo and Wang, 2000) proporcionan soluciones analíticas para el problema. Guo y Wang demuestran además que la energía del sistema puede no estar acotada para ciertos comportamientos periódicos de la velocidad longitudinal v .

Este tipo de sistemas tienen una dinámica altamente no lineal y, en la mayoría de aplicaciones en las que aparecen, el control de las vibraciones es un problema de gran interés (Wang and Li, 2004). En los últimos años, la mayoría de trabajos están destinados al control del sistema bajo diferentes suposiciones (Baicu et al., 1996; Li et al., 1999; van Horssen, 2003; Rienstra, 2005; Chen, 2006; Cepon and Boltezar, 2007). Chen et al. presentan una revisión actualizada de este problema (Chen et al., 2008).

Variación de la longitud de un cable

El problema de la variación de la longitud es también relevante para el problema de la simulación de un polipasto. Por una parte, en un polipasto es fundamental que exista la posibilidad de arrollar el cable sobre un tambor para conseguir la elevación de la carga. Por otra parte, el movimiento del cable a lo largo de las poleas, unido al desplazamiento de éstas, puede dar lugar a la variación de la longitud del tramo de cable suspendido entre dos poleas consecutivas.

El comportamiento de un cable de longitud variable puede modelarse por medio de las ecuaciones de movimiento de un cable con velocidad axial que se acaban de revisar. Este modelo se emplea, por ejemplo, en la simulación de ascensores (Fung et al., 1997; Terumichi et al., 1997; Kaczmarczyk and Ostachowicz, 2003; Zhu and Xu, 2003; Arrasate et al., 2007), de cintas transportadoras (Guo, 2000; Zhang et al., 2005) o de grúas (Moustafa et al., 2005)

Otra aplicación de los cables de longitud variable es la simulación de cables marinos. Kamman y Huston (Kamman and Huston, 1999; Kamman and Huston, 2001) presentan modelos basados en dinámica de sistemas multicuerpo, con restricciones cinemáticas, y Prabhakar y Buckham (Prabhakar and Buckham, 2005) proponen un modelo basado en la discretización de un modelo de cuerda continuo.

2.1.4. Dinámica de una polea

Para la simulación de un polipasto, además de la dinámica del cable es necesario conocer también el comportamiento de las poleas. A continuación se revisan los modelos de polea que describen la manera en que éstas se relacionan con los cables y con su dinámica.

Una polea consiste típicamente en un disco acanalado con un rodamiento que la permite girar libremente. A lo largo del canal o garganta de la polea pasa un cable o una cuerda.

Las poleas se utilizan para cambiar la dirección de aplicación de una

fuerza. Gracias a la aplicación del equilibrio estático al sistema de fuerzas que actúa sobre una polea (véase el diagrama de sólido libre de la Figura 2.2) es posible demostrar que el resultado de la aplicación de una fuerza F_1 sobre uno de los extremos del cable que pasa por la polea resulta en una fuerza de igual magnitud pero diferente dirección en el extremo opuesto (French, 1974).

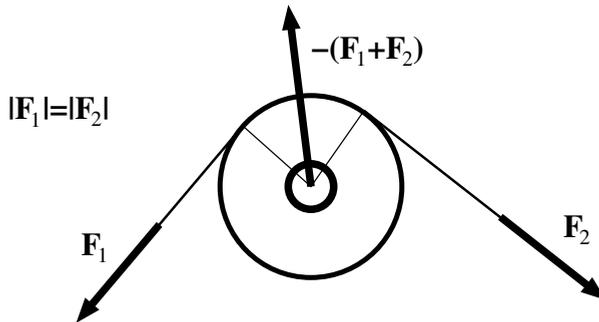


Figura 2.2: *El equilibrio estático sobre el disco de una polea resulta en el cambio de dirección de la fuerza aplicada F_1 .*

Si se considera la masa y la inercia de la polea, su aceleración angular vendrá determinada por la diferencia de tensión a ambos lados del disco. Esta situación se produce, habitualmente, por una variación en la tensión sobre uno de los extremos del cable.

Las poleas se estudian habitualmente como elementos de máquinas y mecanismos más complejos (Shingley and Mitchell, 1983; Calero Pérez and Carta González, 1999) como sistemas de transmisión (González Rey et al., 2001) de transporte (Zhang and Agrawal, 2006) o de elevación (Lee et al., 2003; Arrasate et al., 2007). A continuación se describen algunos de estos modelos de poleas.

Modelos de polea sin fricción

Los modelos más sencillos consideran una polea como una simple restricción que obliga a que el cable o la cuerda pase por un determinado punto. Este modelo desprecia la masa y el rozamiento de la polea y asume que la tensión del cable es la misma a ambos lados de cada polea. Aufaure (Aufaure, 1993; Aufaure, 2000) propone dos modelos de elementos finitos de un cable que pasa a través de una polea con estas propiedades.

Estos modelos se emplean para el análisis estático de máquinas o estructuras que cuentan con cables suspendidos entre sus componentes. El análisis numérico del sistema utilizando este modelo da como resultado la fuerza aplicada sobre la estructura y la configuración del cable en el estado de equilibrio. Zhou (Zhou et al., 2004) presenta un modelo similar para la dinámica de una polea sin fricción ni masa.

Servin y Lacoursière (Servin and Lacoursière, 2007) proponen un modelo simplificado para simular un aparejo de elevación en tiempo real. Consideran el conjunto de poleas y el cable como una restricción cinemática sobre los sólidos que componen la estructura de la grúa. La distancia total entre los nodos que representan las poleas debe ser igual a la longitud total del cable. El sistema permite simular un aparejo arbitrario y además permite simular la variación de la longitud del cable.

Modelos de polea con fricción

Sin embargo la fricción del cable con las poleas causa una pérdida de tensión en cada polea que puede modelarse por medio de un *coeficiente de pérdida* (Shapiro et al., 1999). Ravikumar et al. (Ravikumar, 1995; Ravikumar and Chattopadhyay, 1999) realizan un análisis más complejo de una polea en el que reproducen esta pérdida de tensión. Se centran en el estudio de una polea motriz de una cinta, considerando la distribución de la presión del cable sobre el cilindro. De acuerdo con estos modelos, la tensión es mayor en el lado en el que la cinta o el cable se desplaza hacia la polea que en el lado en el que se aleja.

Ju et al. (Ju and Choo, 2005) se apoyan en el modelo de fricción de Shapiro et al. (Shapiro et al., 1999) para proponer un modelo de un sistema, formado por una sucesión de poleas y un cable que pasa a través de ellas, que tiene en cuenta esta diferencia de tensión en cada polea. El modelo es un elemento finito que permite analizar el equilibrio de fuerzas en sistemas complejos de poleas. En (Ju and Choo, 2005) se analiza el sistema de elevación de una grúa autodesplegable y un aparejo formado por traviesas.

Consideración de los cables en los modelos de polea

La mayoría de modelos de poleas existentes consideran los cables como elementos elásticos sin masa, por lo que se desprecia la oscilación transversal de los cables y el efecto de la masa.

El modelo de Servin y Lacoursière (Servin and Lacoursière, 2007) no considera la elasticidad de los cables por tratarse de un enlace cinemático. Para conseguir un comportamiento elástico se regulariza la restricción y se ajustan los parámetros para la simulación de esta propiedad de los cables.

La excepción la presentan los trabajos destinados al análisis de vibraciones en equipos de elevación. En estos modelos suele considerarse la vibración longitudinal del cable de elevación de un ascensor a partir de métodos variacionales (Kaczmarczyk and Ostachowicz, 2003; Arrasate et al., 2007) o por medio de modelos discretos (Roberts, 1998).

2.2. MODELOS UTILIZADOS EN ENTORNOS VIRTUALES

Las necesidades de reproducir entornos cada vez más realistas tanto en simulación como en animación ha dado lugar a la introducción de modelos dinámicos basados en física cada vez más precisos en este ámbito (Eberly, 2004; Erleben et al., 2005). No obstante, tanto los requisitos como los objetivos son completamente diferentes en una aplicación de Realidad Virtual y en un problema de análisis o diseño de una máquina.

Por este motivo, no todas las metodologías de modelado empleadas en

física e ingeniería son adecuadas para la generación de gráficos por ordenador en tiempo real, especialmente cuando van destinados a aplicaciones interactivas.

A continuación se revisan los trabajos más relevantes cuyo objetivo es la simulación y animación de cables, cuerdas, etc. en entornos virtuales interactivos en tiempo real.

2.2.1. Modelos discretos

El tipo de sólidos que son el objeto de esta tesis, cables, cuerdas, etc. se tratan habitualmente como objetos deformables (Antman, 2005). Dentro del campo de la animación de objetos deformables en informática gráfica, los primeros modelos basados en física se basan en una discretización del objeto en partículas sobre las que actúan fuerzas elásticas (Haumann, 1987; Chadwick et al., 1989). De forma natural, este planteamiento se extiende a la animación de cables, cuerdas, cabello y, en general, a cualquier tipo de filamento, como estructuras deformables unidimensionales.

Sistemas de partículas

Los primeros modelos de animación de estructuras deformables lineales se encuentran en trabajos destinados a la simulación de cabello (Rosenblum et al., 1991). En este primer trabajo, cada cabello se representa por un sistema discreto formado por partículas que se unen entre ellas utilizando resortes longitudinales y torsionales. Tras calcular la suma de todas las fuerzas que actúan sobre cada partícula, se obtiene su aceleración utilizando la segunda ley de Newton. La Figura 2.3 muestra la representación de un cable por medio de esta metodología.

El modelo de Rosenblum consiste en una sucesión de partículas de masa m , cuyas posiciones se denotarán por $\mathbf{r}_i, i = 1, \dots, M$, conectadas entre sí por medio de muelles sin masa con igual longitud en reposo ℓ . Para cada par de partículas \mathbf{r}_i y \mathbf{r}_{i+1} se considera el estiramiento del muelle que las une $\delta\ell_i$ como la diferencia entre la longitud del muelle en reposo y el estiramiento

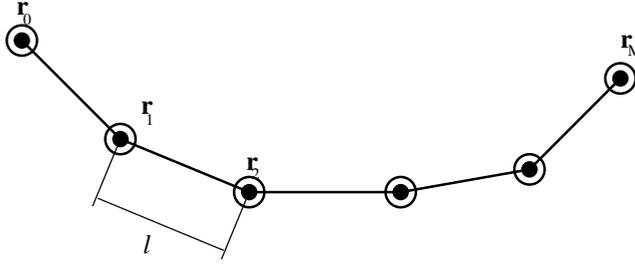


Figura 2.3: Un cable simulado por medio de un sistema de partículas.

en cada instante de la simulación $\delta\ell_i = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i+1}| - \ell$. Aplicando la ley de Hooke, cada muelle genera una fuerza

$$\mathbf{F}_i = k\delta\ell_i\mathbf{d}_i \quad (2.4)$$

donde

$$\mathbf{d}_i = \frac{\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i|} \quad (2.5)$$

y k es la constante de elasticidad del muelle considerado y viene dada por el módulo de Young del material E , por el área de la sección del cable A y por la longitud del tramo considerado para el muelle ℓ por medio de

$$k = \frac{EA}{\ell}. \quad (2.6)$$

Para cada sistema formado por tres partículas consecutivas \mathbf{r}_{i-1} , \mathbf{r}_i y \mathbf{r}_{i+1} Rosenblum considera un resorte torsional, cuya fuerza aumenta con el ángulo formado por los dos segmentos que las unen (véase la Figura 2.4)

$$\theta = \arctan\left(\frac{|\mathbf{d}_i \times \mathbf{d}_{i-1}|}{\mathbf{d}_i^T \mathbf{d}_{i-1}}\right) \quad (2.7)$$

Este resorte torsional aplica una fuerza

$$\mathbf{F}_{\theta,i} = k_t\theta \frac{\mathbf{d}_{i-1} - \mathbf{d}_i}{|\mathbf{d}_{i-1} - \mathbf{d}_i|} \quad (2.8)$$

sobre cada una de las partículas de los extremos. Sobre la partícula central se aplica la suma de ambas fuerzas, en sentido opuesto.

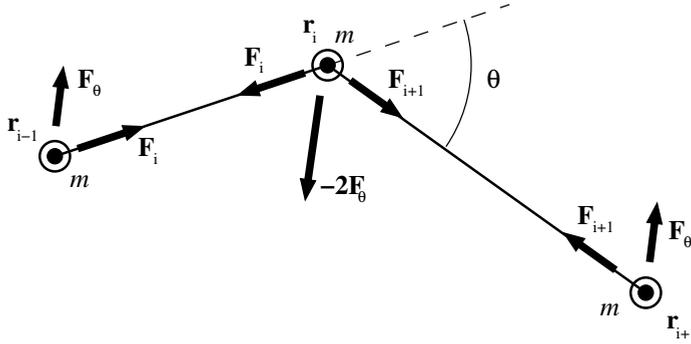


Figura 2.4: El modelo propuesto por Rosenblum (Rosenblum et al., 1991) aplica dos fuerzas a cada partícula, simulado resistencia a la variación de longitud y a la flexión de un cabello.

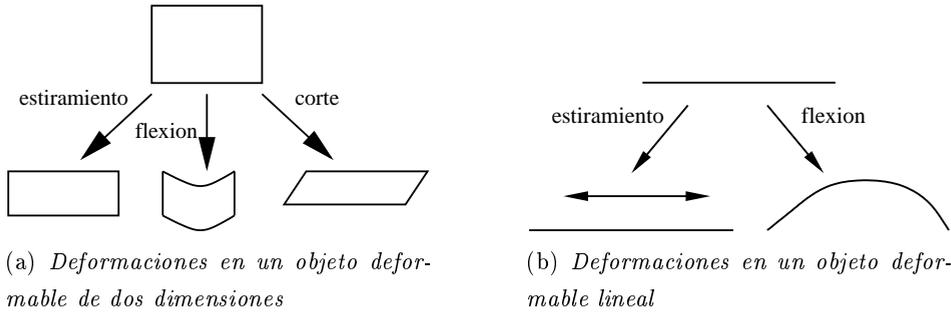
En definitiva, sobre cada una de las partículas del sistema actúa una fuerza

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_i - \mathbf{F}_{i-1} + \mathbf{F}_{\theta,i-1} + \mathbf{F}_{\theta,i+1} - 2\mathbf{F}_{\theta,i}.$$

Además de las fuerzas internas debidas a la elasticidad del material, Rosenblum considera el rozamiento con el aire y la acción de la gravedad sobre cada partícula.

Esta metodología, sin embargo, fue descartada en el ámbito de la simulación de cabello, al menos para el modelado de cabellos individuales, a causa del elevado número de partículas que es necesario considerar. Sin embargo, pronto sería aplicada a la simulación de tejidos (Breen et al., 1992; Breen et al., 1994), utilizando partículas y resortes elásticos organizados en una malla bidimensional.

En este tipo de modelos, los resortes elásticos se oponen a tres deformaciones: el estiramiento, la flexión y la deformación de corte. De ellas, tanto la flexión como el estiramiento pueden aplicarse convenientemente a la simulación de estructuras unidimensionales de partículas y muelles. La Figura 2.5 muestra las tres deformaciones sobre una pieza rectangular de tejido.



(a) Deformaciones en un objeto deformable de dos dimensiones

(b) Deformaciones en un objeto deformable lineal

Figura 2.5: Deformaciones consideradas habitualmente en la simulación de tejido y otras estructuras bidimensionales (a). El estiramiento y la flexión son aplicables también a un filamento o cuerda (b).

A partir de esta metodología, diferentes autores proponen técnicas para la simulación de la resistencia al estiramiento y la flexión, basadas principalmente en el número y disposición de los resortes elásticos. Algunos modelos se basan en mallas arbitrarias, que permiten animar cualquier modelo geométrico (Volino et al., 1995; Baraff and Witkin, 1998). Sin embargo otros utilizan mallas regulares cuadradas, de forma que las técnicas empleadas, son fácilmente aplicables a estructuras unidimensionales.

Provot (Provot, 1995) utiliza tres tipos de muelles que denomina muelles *estructurales*, muelles *de corte* y muelles *de flexión*. La Figura 2.6 muestra los tres tipos de muelle en el modelo de tejido, y los muelles aplicables al modelo de cable. Provot utiliza este método, integrando numéricamente las ecuaciones de movimiento por medio del método de Euler Explícito. En su modelo emplea muelles que unen las masas adyacentes y otros que unen masas que se encuentran a una distancia de dos muelles. Esto permite simular la resistencia al estiramiento y a la flexión.

En el caso unidimensional, únicamente se consideran los muelles estructurales y de flexión. Si el cable se representa por medio de la sucesión de partículas de masas m_i y con posiciones \mathbf{r}_i , entonces sobre la partícula i actúan fuerzas debidas a la posición de las partículas $i + 1$ e $i - 1$, debido

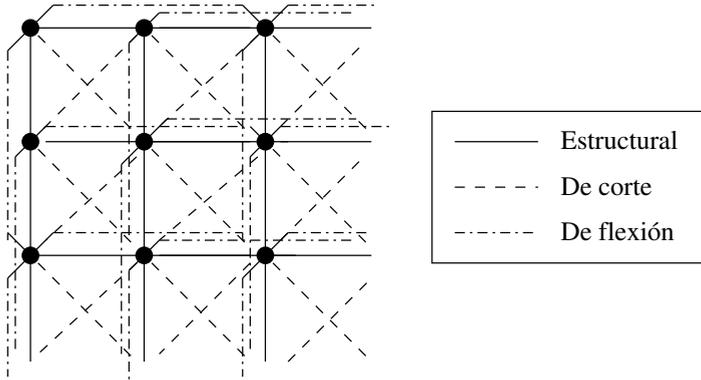


Figura 2.6: El modelo propuesto por Provot (Provot, 1995) considera tres tipos de muelles.

a los muelles estructurales, y también fuerzas debidas a la posición de las partículas $i + 2$ e $i - 2$, por los muelles de flexión. Si a la suma de fuerzas que actúan sobre la partícula i se denota por \mathbf{f}_i , entonces la trayectoria de cada partícula se calcula a partir de las ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}}_i &= \mathbf{v}_i \\ \dot{\mathbf{v}}_i &= \mathbf{f}_i/m_i.\end{aligned}\tag{2.9}$$

Si se denota por \mathbf{r} , \mathbf{v} y \mathbf{f} respectivamente a los vectores compuestos por las posiciones y las de velocidades de todas las partículas y al vector de las fuerzas que actúan sobre todas ellas

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= \left[\mathbf{r}_0^T \quad \cdots \quad \mathbf{r}_M^T \right]^T \\ \mathbf{v} &= \left[\mathbf{v}_0^T \quad \cdots \quad \mathbf{v}_M^T \right]^T \\ \mathbf{f} &= \left[\mathbf{f}_0^T \quad \cdots \quad \mathbf{f}_M^T \right]^T\end{aligned}$$

y por \mathbf{M} a la matriz de masas, $\mathbf{M} = m\mathbf{I}$, entonces el sistema de ecuaciones

(2.9) puede expresarse en forma matricial

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{r}} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f} \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

El objetivo es determinar el estado del sistema en un instante de tiempo $t_0 + h$ a partir del estado del sistema en el instante de tiempo t_0

$$\begin{pmatrix} \mathbf{r}(t_0 + h) \\ \mathbf{v}(t_0 + h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}(t_0) \\ \mathbf{v}(t_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta\mathbf{r} \\ \Delta\mathbf{v} \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

Se utilizará la siguiente notación; $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0)$, $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(t_0)$, $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_0 + h) - \mathbf{r}(t_0)$, $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}(t_0 + h) - \mathbf{v}(t_0)$ y $\mathbf{f}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)$. El método de Euler explícito utiliza la siguiente aproximación

$$\begin{pmatrix} \Delta\mathbf{r} \\ \Delta\mathbf{v} \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} \mathbf{v}_0 \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}_0 \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Este método numérico tiene la ventaja de que únicamente es necesaria una evaluación del vector de fuerzas \mathbf{f}_0 y el cálculo de los nuevos valores de las variables por medio de (2.11). Los métodos de orden superior utilizan el estado del sistema en pasos anteriores a t_0 . Sin embargo, estos métodos sólo consiguen una mejor precisión cuando la continuidad de la función y de sus derivadas está garantizada y en una simulación interactiva no se cumple esta condición a causa de los contactos y otras interacciones.

El principal inconveniente de la metodología basada en un sistema de partículas es que los sistemas de ecuaciones diferenciales que resultan están mal condicionados numéricamente. Es lo que en la terminología anglosajona se conoce como *stiff systems*. Por tanto, a menos que se utilice un paso de integración numérica muy pequeño, la utilización de métodos explícitos da lugar a inestabilidades.

Para evitar este problema, Baraff y Witkin (Baraff and Witkin, 1998) proponen la utilización de esquemas de integración numérica implícitos. Los aplican sobre una malla desestructurada, como la empleada por Volino (Volino et al., 1995), obteniendo las fuerzas que actúan sobre cada partícula.

A diferencia de los métodos explícitos, como el utilizado por Provot en el caso anterior, en los que para obtener la posición del sistema en el tiempo $t + h$ se utilizan las velocidades del sistema en el tiempo t , en los métodos implícitos se utilizan las velocidades en el tiempo $t + h$, que se están calculando.

$$\begin{pmatrix} \Delta \mathbf{r} \\ \Delta \mathbf{v} \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} \mathbf{v}_0 + \Delta \mathbf{v} \\ \mathbf{M}^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{r}_0 + \Delta \mathbf{r}, \mathbf{v}_0 + \Delta \mathbf{v}) \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Esto da lugar a un sistema no lineal de ecuaciones algebraicas que es necesario resolver antes de integrar el sistema. Baraff y Witkin linealizan la función \mathbf{f} por medio de su desarrollo en serie de Taylor de orden 1

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}_0 + \Delta \mathbf{r}, \mathbf{v}_0 + \Delta \mathbf{v}) = \mathbf{f}_0 + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{r}} \Delta \mathbf{r} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{v}} \Delta \mathbf{v} \quad (2.14)$$

utilizan el gradiente conjugado (Baraff and Witkin, 1998; Volino and Magnenat-Thalmann, 2000)

Si bien la resolución del sistema de ecuaciones algebraicas implica un coste computacional elevado respecto a la evaluación de la derivada en el método explícito, algunos métodos implícitos son incondicionalmente estables, lo que, en principio, permite utilizar cualquier tamaño de paso de integración (Baraff and Witkin, 1998).

Sin embargo, estos métodos no son siempre los más adecuados para simulaciones en tiempo real. La gestión de las discontinuidades debidas a los contactos y a la interacción del usuario complican la implementación de estos métodos. Por este motivo muchos autores prefieren la utilización de métodos explícitos o de métodos predictor-corrector (Desbrun et al., 1999; Spillmann and Teschner, 2007).

Este es, por ejemplo, el caso de la metodología propuesta por Desbrun et al. (Desbrun et al., 1999), que proponen la utilización de un esquema predictor-corrector para la integración de las ecuaciones diferenciales resultantes de un modelo de partículas genérico, aplicado a la simulación de tejido y estructuras unidimensionales. Para ello utilizan el método de Euler explícito, y posteriormente corrigen la posición y velocidades resultantes para garantizar la conservación del momento.

Además del método numérico utilizado, otro de los aspectos novedosos de este trabajo es la utilización de técnicas de dinámica inversa para mejorar el comportamiento del tejido. Bajo la suposición de que en una pieza de tela la relación entre la deformación y la tensión no tiene un comportamiento elástico lineal, una vez ha finalizado un paso de integración reducen las deformaciones que son mayores que un cierto valor. De esta forma consiguen animaciones que resultan visualmente más creíbles.

En animación de personajes y, en especial, del cabello, esta metodología ha sido recuperada con éxito, gracias a la utilización de técnicas como la agrupación de los cabellos en mechones. Plante et al., por ejemplo, (Plante et al., 2001; Plante et al., 2002) utilizan un sistema de partículas para modelar el centro de un mechón de cabello, de forma que el número total de partículas no es tan elevado como en el modelo propuesto por Rosenblum. Choe et al. (Choe et al., 2005) proponen un modelo basado en partículas y muelles con gestión robusta de las colisiones, mientras que Selle et al. (Selle et al., 2008) presentan una geometría compleja de partículas y muelles para la simulación de diferentes tipos de pelo.

Modelos de cables en prototipado virtual. A principios de esta década empezaron a aparecer artículos destinados explícitamente a la simulación y animación de cables, la mayoría de ellos destinados a las aplicaciones de diseño y prototipado virtual empleadas en la industria del automóvil.

Hergenröther y otros (Hergenröther and Dähne, 2000; Hergenröther and Müller, 2001) proponen un enfoque cinemático del problema. Su objetivo es determinar la posición de reposo de un cable estático, suspendido por sus extremos, para poder situar cables en prototipos virtuales de coches, en el interior de salpicaderos y dentro del habitáculo del motor.

Como punto de partida toman el segmento que une los extremos del cable, y por medio de un proceso iterativo, en el que van introduciendo nuevas partículas en el centro de cada segmento, refinan el modelo. De esta manera obtienen la forma que minimiza la energía potencial del cable. Para el cálculo de la energía utilizan, además de los muelles que unen cada par de partículas, resortes torsionales para simular la resistencia del cable a la

flexión.

Loock y Schömer (Loock and Schömer, 2001) utilizan una versión unidimensional del método de Baraff y Witkin (Baraff and Witkin, 1998), que considera tanto la flexión como la torsión del cable, para el desarrollo de una aplicación de características similares. En su trabajo, utilizan un esquema de integración numérica implícito. Para la simulación de la resistencia a la flexión, plantean la posibilidad de utilizar los *muelles de flexión* propuestos por Provot (Provot, 1995), o resortes torsionales, decantándose por estos últimos al haber observado un comportamiento más creíble.

No obstante, la simulación de cables por medio de sistemas de partículas en situaciones de escasa tensión longitudinal no es muy frecuente debido, principalmente, a que no consideran el efecto de la torsión (Servin and Lacoursière, 2008).

Simulación de cables de elevación por medio de sistemas de partículas. Desde el punto de vista de la simulación de cables de elevación, esta metodología sigue teniendo su principal limitación en el mal condicionamiento numérico de las ecuaciones de movimiento, que obligan a utilizar métodos numéricos implícitos para su integración. Por otra parte, no existen modelos que consideren la simulación de poleas o de cables con longitud variable.

La estabilidad numérica de los modelos de partículas ha sido analizada en profundidad por Servin y Lacoursière (Servin and Lacoursière, 2008). Los resultados indican que la proporción entre la masa de las partículas y la masa de un objeto suspendido no puede ser elevada a menos que se consideren los enlaces torsionales que se oponen a la flexión del cable. Con el fin, principalmente, de solucionar este problema proponen un modelo basado en dinámica de sistemas multicuerpo, que se discute a continuación.

Sistemas multicuerpo con restricciones cinemáticas

Una aproximación más general a la discretización de un cable puede obtenerse considerando sólidos rígidos en lugar de partículas puntuales y

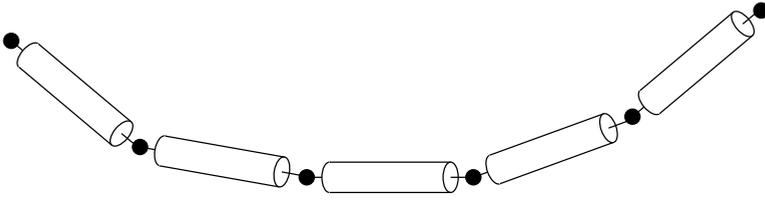


Figura 2.7: Un cable simulado por medio de una cadena de sólidos o eslabones enlazados entre sí.

enlaces cinemáticos en lugar de resortes elásticos.

Un cable de longitud L se representará por medio de una sucesión de M sólidos o eslabones \mathcal{S}_i , $i = 1, \dots, M$ como la representada en la Figura 2.7. La posición de estos sólidos viene determinada por sus posiciones \mathbf{R}_i y sus orientaciones en el espacio, que se expresarán por medio de las coordenadas generalizadas θ_i . A partir de la orientación θ_i es posible obtener una matriz de rotación \mathbf{A}_i que permite transformar las coordenadas de un punto expresado en un sistema de referencia del sólido y que determinan sus matrices de rotación. Sin pérdida de generalidad supondrá que todos los eslabones son cilindros de longitud $\ell = L/M$, con masa m y radio r .

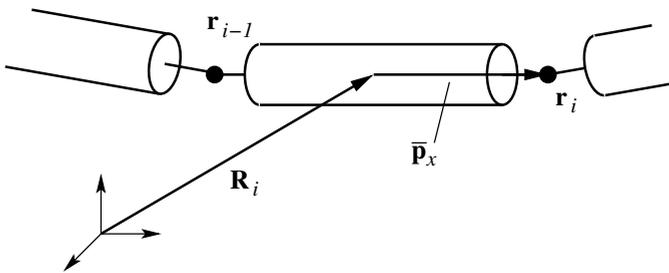


Figura 2.8: Cada eslabón de la cadena está unido con el siguiente por medio de un enlace cinemático.

Cada eslabón de la cadena \mathcal{S}_i está enlazado con el siguiente \mathcal{S}_{i+1} por

medio de la restricción cinemática

$$\mathbf{C}_i = \mathbf{R}_i + \mathbf{A}_i \bar{\mathbf{p}}_x - (\mathbf{R}_{i+1} - \mathbf{A}_{i+1} \bar{\mathbf{p}}_x) = 0 \quad (2.15)$$

donde el vector $\bar{\mathbf{p}}_x = (\ell/2, 0, 0)$ indica la posición, en el sistema de referencia local de cada sólido, del punto del enlace que lo une con el siguiente y se considera igual para todos los elementos del cable (véase la Figura 2.8). La posición de cada uno de estos puntos de enlace se denotará por

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R}_i + \mathbf{A}_i \bar{\mathbf{p}}_x. \quad (2.16)$$

Para la simulación de un cable, además del enlace definido por medio de la relación (2.15), que elimina los tres grados de libertad correspondientes a la posición, si se desea considerar la resistencia del cable a la torsión se utilizarán enlaces universales. Este enlace elimina un grado de libertad adicional que impide la rotación relativa de los cilindros respecto a sus ejes.

Los extremos del cable corresponden al punto

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{R}_1 - \mathbf{A}_1 \bar{\mathbf{p}}_x, \quad (2.17)$$

situado bajo el primer sólido \mathcal{S}_1 , y al punto

$$\mathbf{r}_M = \mathbf{R}_M - \mathbf{A}_M \bar{\mathbf{p}}_x, \quad (2.18)$$

situado sobre el último sólido \mathcal{S}_M . Si se desea fijar los extremos respectivamente en los puntos \mathbf{p}_0 y \mathbf{p}_1 se considerarán los enlaces cinemáticos necesarios. Estos enlaces deberán imponer, al menos, las restricciones $\mathbf{r}_0 = \mathbf{p}_0$ y $\mathbf{r}_M = \mathbf{p}_1$.

Hadap (Hadap and Magnenat-Thalmann, 2001; Hadap, 2006) utiliza modelos basados en sólido rígido para la simulación de cabello. Explotando la estructura del cabello consideran métodos de integración basados en la formulación recursiva (Armstrong, 1979; Featherstone, 1983). Esta formulación, específica para cadenas de sólidos, tiene un coste lineal respecto del número de cuerpos considerados. Sin embargo, no es fácilmente aplicable a simulaciones de propósito general ni permite la consideración de bucles cinemáticos, habituales cuando se consideran polipastos.

Kamman y Huston (Kamman and Huston, 2001) proponen un modelo basado en masas puntuales enlazadas por medio de enlaces cinemáticos, y abordan el problema de la reducción de la longitud del cable por un extremo. Este modelo, sin embargo, considera el cable como un objeto inelástico, debido a la utilización de enlaces cinemáticos. En este caso, la formulación se realiza también por medio de coordenadas recursivas.

Uno de los inconvenientes de la utilización de enlaces cinemáticos es que la elasticidad del cable se considera despreciable. Esto supone una limitación considerable desde el punto de vista de la simulación de cables de elevación, porque la elevada tensión a la que están sometidos hace que la elasticidad sea un elemento muy importante en su dinámica.

Para solucionar este problema Servin y Lacoursière (Servin and Lacoursière, 2008) presentan un modelo en el que se emplea la regularización de los enlaces cinemáticos para la simulación de la elasticidad. Las técnicas de regularización de restricciones se utilizan habitualmente para la estabilización de los métodos numéricos asociados a la metodología de sistemas multicuerpo. Permitiendo una cierta violación de las restricciones, y añadiendo un potencial que obliga a los enlaces a volver a su posición, se consigue una mayor estabilidad numérica. Este modelo se integra utilizando un método que permite controlar la relajación del cumplimiento de los enlaces con lo que se consigue simular la elasticidad del cable.

Otro inconveniente asociado a esta metodología es su coste computacional. Debe observarse que en un sistema multicuerpo con enlaces cinemáticos, el número de grados de libertad del sistema se reduce. Para integrar las ecuaciones de movimiento es necesario realizar cálculos que permitan reducir la dimensión del sistema para obtener un conjunto de aceleraciones independientes, o bien, obtener el conjunto de fuerzas que actúan en los enlaces sobre coordenadas generalizadas (García de Jalón and Bayo, 1994). Esto obliga a resolver sistemas de ecuaciones lineales o no lineales, que elevan el coste de los métodos numéricos asociados al orden cuadrático respecto al número de sólidos (Shabana, 1998). Aunque diferentes técnicas proporcionan algoritmos de coste lineal, el coste de esta metodología sólo permite

la simulación de unos pocos eslabones en tiempo real (Hadap, 2006; Servin and Lacoursière, 2008)

En resumen, se puede afirmar que la metodología de sistemas multicuerpo ofrece, como ventaja respecto a los sistemas de partículas, una mayor estabilidad en situaciones de tensión elevada y la posibilidad de simular la torsión del cable.

Como inconveniente, presentan dificultades para la simulación de la elasticidad longitudinal, que se modela por medio de técnicas destinadas a estabilizar los métodos numéricos. Además, su coste computacional es mayor, incluso cuando se emplean métodos que permiten que crezca linealmente con el número de sólidos del sistema.

Respecto a las necesidades propias de la simulación para elevación, ninguno de estos trabajos considera la simulación de cables pasando a través de poleas ni la variación de la longitud del cable a excepción, en este último caso, de los modelos propuestos por Kamman (Kamman and Huston, 1999; Kamman and Huston, 2001).

2.2.2. Modelos continuos

El caso opuesto a la aproximación discreta consiste en considerar un filamento o cuerda como un objeto continuo en el espacio. Esta aproximación da lugar a modelos que describen la posición o la dinámica de una cuerda por medio de ecuaciones diferenciales. Estas ecuaciones involucran las derivadas de la posición del cordel con las fuerzas internas, que surgen de considerarlo como un objeto deformable, y las fuerzas externas.

En simulación de cabello, por ejemplo, Anjyo et al. (Anjyo et al., 1992; Kurihara et al., 1993) propone la utilización de un modelo de viga empujada para determinar la forma que adopta el cabello bajo la acción de la gravedad. Este modelo relaciona el momento causado por la flexión de un cabello con su posición, dando lugar a una ecuación diferencial ordinaria, que contempla también fuerzas externas, como las colisiones o el efecto del aire.

Daldegan et al. (Daldegan et al., 1993) revisan el modelo de Anjyo, para

permitir la simulación eficiente de un número mayor de cabellos gracias a la utilización de mechones, en lugar de simular cada cabello de forma individual. En su trabajo mejoran además la gestión de colisiones, para permitir una interacción entre los cabellos más realista, con una implementación eficiente. Este modelo, sin embargo, considera expresamente la simulación de filamentos con un extremo libre. Además, la dinámica se basa, principalmente, en los efectos de la flexión del filamento, muy importante en el caso del cabello, pero mucho menos relevante en el caso que cables de elevación.

Teoría de cuerdas de Cosserat

Los modelos de Cosserat representan una estructura casi uno-dimensional por medio de una curva paramétrica. Se asocia un sistema de referencia local a cada punto de la curva, y se obtienen potenciales asociados a las deformaciones del objeto. Debido a su capacidad de reproducir tanto la flexión como la torsión se usa a menudo para simular cables sin tensión.

Esta metodología fue empleada por primera vez en el ámbito de la informática gráfica por Pai (Pai, 2002) para simulación de hilo quirúrgico. Spillmann y Teschner proponen el modelo CORDE (Spillmann and Teschner, 2007) destinado a la simulación de una cuerda por medio de modelos de Cosserat. Gregoire y Schömer ofrecen también una buena revisión de la metodología (Gregoire and Schömer, 2007). A continuación se detalla esta metodología.

La teoría de cuerdas de Cosserat considera una cuerda como un sólido que puede representarse por medio de una curva en el espacio que depende de un parámetro $\mathbf{u}(x)$. Sobre esta curva se considera el sistema de referencia local compuesto por los vectores $\mathbf{e}_1(x)$, $\mathbf{e}_2(x)$ y $\mathbf{e}_3(x)$, que expresan la orientación de cada punto material del hilo. Se impone que el tercer elemento de la base \mathbf{e}_3 esté alineado con la dirección tangente a la curva en cada punto,

$$\frac{\mathbf{u}'}{\|\mathbf{u}'\|} - \mathbf{e}_3 = 0, \quad (2.19)$$

donde \mathbf{u}' indica la derivada respecto del parámetro de la curva $\mathbf{u}' = d\mathbf{u}/dx$.

A partir de la geometría diferencial, se sabe que existe un vector, \mathbf{w} , conocido como vector de Darboux, que cumple que

$$\mathbf{e}'_k = \mathbf{w} \times \mathbf{e}_k \quad (2.20)$$

donde la prima “ \prime ” denota la derivada respecto al parámetro x ,

$$\mathbf{e}'_k = \frac{d\mathbf{e}_k}{dx}. \quad (2.21)$$

En cada punto de la curva x , la cuerda o hilo tendrá una tensión $\mathbf{n}(x)$ y un momento interno $\mathbf{m}(x)$. Si se consideran además las fuerzas externas por unidad de longitud $\mathbf{f}(x)$ las ecuaciones de equilibrio son

$$\mathbf{0} = \frac{d\mathbf{n}}{dx} + \mathbf{f}; \quad (2.22)$$

$$\mathbf{0} = \frac{d\mathbf{m}}{dx} + \frac{d\mathbf{u}}{dx} \times \mathbf{n}. \quad (2.23)$$

Para que estas ecuaciones permitan determinar la configuración de equilibrio del hilo, es necesario establecer una relación entre un estado arbitrario y las tensiones y momentos que aparecen.

Pai (Pai, 2002) propone utilizar la relación lineal

$$\mathbf{n} = a(\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}) \quad (2.24)$$

$$\mathbf{m} = b(\mathbf{w} - \hat{\mathbf{w}}) \quad (2.25)$$

donde $\hat{\mathbf{v}}$ y $\hat{\mathbf{w}}$ describen el estado de la cuerda en su estado original (no deformado) y a , b son constantes.

Grégoire y Schömer (Gregoire and Schömer, 2007) y Spillmann y Teschner (Spillmann and Teschner, 2007) expresan el vector \mathbf{w} en la base

$$\mathbf{w} = k_1\mathbf{e}_1 + k_2\mathbf{e}_2 + \tau\mathbf{e}_3. \quad (2.26)$$

donde $k_1 = \mathbf{w}\mathbf{e}_1$, $k_2 = \mathbf{w}\mathbf{e}_2$ y $\tau = \mathbf{w}\mathbf{e}_3$ son medidas de la deformación de la cuerda en cada punto y plantean expresiones para la energía potencial a partir de estos valores de deformación.

Simulación del cable Tanto el modelo propuesto por Pai (Pai, 2002) como el propuesto por Grégoire y Schömer (Gregoire and Schömer, 2007) simulan los cables como objetos estáticos. Para ello calculan el estado de equilibrio para las ecuaciones planteadas como un problema de condiciones de contorno.

En el caso del trabajo de Pai (Pai, 2002) el objeto es la simulación de hilo quirúrgico. Por este motivo se considera adecuado utilizar unas condiciones de contorno que fijan el valor de la posición de un extremo del hilo y el valor de la tensión en el extremo opuesto. Para simular el movimiento del hilo cada vez que cambian las condiciones de contorno, ya sea la posición o la tensión, se calcula una nueva posición de equilibrio del hilo. Para ello se resuelve el nuevo problema de contorno por medio de la integración numérica de las ecuaciones diferenciales.

Grégoire y Schömer (Gregoire and Schömer, 2007), por su parte, utilizan el modelo para la representación de cables en simulación de tareas de ensamblaje de vehículos. En este caso, la información que resulta relevante para el usuario es la posición de los extremos, por lo que las condiciones de contorno y el método numérico propuestos por Pai (Pai, 2002) no son adecuados. Por este motivo proponen una metodología basada en la minimización de la energía potencial del cable.

Sustituyen la utilización de la matriz de rotación para representar el sistema de referencia local de cada punto de la cuerda por un cuaternio. Haciendo esto, obtienen la variación de la orientación por medio de la derivada del cuaternio a lo largo de la curva. Este cambio en la descripción de la cuerda les permite obtener la discretización de la energía potencial del sistema y de la energía debida a las fuerzas externas. El valor de la energía se lleva a su mínimo local utilizando diferentes algoritmos para la obtención de raíces y la minimización de funciones, obteniendo así la posición del cable en el espacio.

Obsérvese, por tanto, que los trabajos de Pai y de Grégoire no consideran la dinámica del sistema, ya que no plantean ecuaciones de movimiento sino que resuelven el problema de equilibrio para unas condiciones de contorno

cambiantes.

Esta metodología es adecuada cuando la desviación de la posición real del cable respecto de la posición de reposo en cada instante es suficientemente pequeña como para ser despreciada (Pai, 2002; Gregoire and Schömer, 2007). Para esto son necesarias dos condiciones. En primer lugar, que la tensión sea baja. De hecho, en ambos casos se está suponiendo que el cable es inextensible y se pretenden simular situaciones en las que los extremos no tensan el hilo. En segundo lugar, que la velocidad de desplazamiento de los extremos sea pequeña. De lo contrario, se producirían grandes velocidades en el conjunto del cable, haciendo que la hipótesis de no vibración no fuera válida.

El modelo CORDE

Con el fin de poder simular la dinámica de un cordel, Spillmann y Teschner presentan su modelo CORDE (Spillmann and Teschner, 2007; Spillmann, 2008), basado también en la teoría de cuerdas de Cosserat, pero que permite la integración de las ecuaciones de movimiento respecto de la variable temporal.

Al igual que en el trabajo de Grégoire y Schömer, aquí se utiliza un cuaternio $\mathbf{q}(x)$ para representar la orientación de cada sistema de referencia en el espacio. A partir de esta descripción del modelo de cuerda, se deriva el valor de las diferentes energías involucradas en el sistema, utilizando el vector de coordenadas generalizadas $\mathbf{q} = [\mathbf{u}^T \ \mathbf{q}^T]^T$.

Las ecuaciones de movimiento se obtienen por medio del lagrangiano $\mathcal{L} = K - V + D$ sujeto a las restricciones

$$\mathbf{C}_1 = \frac{\mathbf{u}'}{\|\mathbf{u}'\|} - \mathbf{e}_3 = 0, \quad (2.27)$$

$$\mathbf{C}_2 = \|\mathbf{q}\| - 1 = 0, \quad (2.28)$$

donde K es la energía cinética, V es la energía potencial y D es el término que expresa la disipación de energía definido por Baraff y Witkin (Baraff and Witkin, 1998).

A partir del lagrangiano, aplicando cálculo variacional, se obtiene

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial K}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial D}{\partial \dot{\mathbf{q}}} + \boldsymbol{\lambda} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{q}} = \int_0^1 \mathbf{f}(s) ds \quad (2.29)$$

donde $\boldsymbol{\lambda}$ es el vector de multiplicadores de Lagrange, y \mathbf{f} es el vector de fuerzas externas.

Tras plantear las ecuaciones de movimiento, se obtiene una discretización de las diferentes expresiones de la energía por medio de elementos finitos. Para ello se descompone la cuerda en pequeños segmentos con longitudes l_i a los que se asigna valores de posición, orientación y energía, obtenidas por integración a lo largo del elemento.

Para el cumplimiento de la restricción (2.27), que fuerza que el sistema de referencia local esté alineado con el vector tangente a la curva, se utiliza un potencial, aplicando así el método de las penalizaciones. Para conseguir el cumplimiento de la restricción (2.28), que fuerza a que los cuaternios tengan norma 1, éstos se normalizan tras cada paso de integración.

Gracias a la aplicación de la restricción \mathbf{C}_1 por medio de un potencial, las posiciones, las rotaciones y las aceleraciones generalizadas dejan de estar acopladas, lo que permite la obtención explícita de éstas últimas (Spillmann and Teschner, 2007). Todo este desarrollo da lugar a un problema de valores iniciales que se integra por medio de un esquema de Euler semi-implícito.

Utilización de puntos de control

La aplicación del formalismo lagrangiano permite la expresión del sistema por medio de cualquier conjunto de coordenadas generalizadas. Esto permite la representación de una cuerda por medio de una familia paramétrica de funciones considerando como variables los puntos de control, lo que reduce la dimensionalidad del sistema.

Lenoir (Lenoir et al., 2002; Lenoir et al., 2004) propone la utilización de los puntos de control de splines para la representación de hilo de suturar.

Expresan la posición de la curva a partir de la suma

$$\mathbf{u}(x, t) = \sum_{k=0}^M \mathbf{q}_k(t) b_k(s) \quad (2.30)$$

donde las funciones $b_k(s)$ son los polinomios interpolantes.

A partir de esta representación de la curva, calculan la velocidad generalizada

$$\dot{\mathbf{u}}(x, t) = \sum_{k=0}^M \dot{\mathbf{q}}_k(t) b_k(s) \quad (2.31)$$

y las energías cinética K y potencial V , obteniendo el lagrangiano como

$$\frac{\partial \frac{\partial K}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i}}{\partial t} + \frac{\partial K}{\partial \mathbf{q}_i} = \mathbf{Q}_i + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}_i} \quad (2.32)$$

Principales propiedades de los modelos continuos

La utilización de la Teoría de Cuerdas de Cosserat se ha popularizado enormemente en el campo de la animación durante los últimos años. El motivo es que permite la obtención de simulaciones realistas del comportamiento de cuerdas ante grandes deformaciones causadas por la flexión y la deformación de este tipo de objetos.

Dado que en estas situaciones la tensión longitudinal es casi inexistente, este tipo de modelos la descartan en la mayoría de los casos. En definitiva, esta metodología de modelado, que está proporcionando muy buenos resultados en la animación de objetos cotidianos (cuerdas, hilos, cordones, etc.), no es adecuada para la simulación de cables de acero sometidos a una elevada tensión longitudinal. En estos casos la resistencia a la flexión o a la torsión tiene una importancia menor, mientras que la tensión longitudinal condiciona completamente la dinámica.

2.2.3. Modelos de animación

En el ámbito de la animación por ordenador para la producción de películas, el comportamiento de los elementos que aparecen en una escena debe resultar creíble (Barzel et al., 1996). Sin embargo, a menudo se utilizan

técnicas para exagerar el movimiento y la deformación de los objetos similares a las que se han usado en animación durante décadas (Lasseter, 1987; Pentland and Williams, 1989; Barzel, 1997). En este campo, la utilización de modelos deformables es fundamental para dotar de expresividad a los personajes y a los objetos.

Por tanto, los modelos utilizados no tienen por qué ser físicamente correctos. La principal necesidad por parte del animador es el control sobre la forma de los objetos por medio de un conjunto reducido de parámetros. Una metodología utilizada habitualmente en animación de objetos deformables está basada en la superposición de modelos a capas. Estos modelos sirven para la simulación de diferentes propiedades del objeto en términos de simples submodelos que se acoplan juntos. El trabajo de Chadwick et al. (Chadwick et al., 1989) puede considerarse como un precursor de esta metodología, aplicada a la animación de objetos deformables los músculos.

Barzel utiliza también la superposición de modelos (Barzel, 1997) para animar cuerdas y muelles en términos de lo que él denomina *dinámica de pega* (en inglés, *fake dynamics*). El objetivo de su trabajo es la animación para desarrollo de películas. La forma del objeto puede modificarse dinámicamente por el animador utilizando un conjunto reducido de parámetros. Utiliza una catenaria como una forma básica de colgar una cuerda, que es modificada por ondas sinusoidales.

Animación de cabello En el campo de la animación de personajes, esta aproximación ha sido aplicada con éxito para la animación del cabello y para obtener modelos complejos de peinados.

Watanabe and Suenaga (Watanabe and Suenaga, 1992) proponen un modelo sencillo para la animación y representación gráfica del cabello. Al igual que en los modelos basados en sistemas de partículas, con el fin de reducir el coste computacional agrupan los cabellos en mechones, pero en este caso sustituyen el modelo dinámico por un conjunto de parámetros que permiten definir la forma de cada cabello. La animación del cabello la consiguen gracias al desplazamiento de los puntos de control a lo largo de parábolas.

Kim y Neumann (Kim and Neumann, 2000) proponen un modelo para la simulación de cabello liso por medio de una superficie. El modelo considera una familia de funciones paramétricas que se suman entre ellas para obtener diferentes aspectos del cabello. El comportamiento deseado se consigue por medio del ajuste de los parámetros de las funciones.

Bertails et al. (Bertails et al., 2003) consideran un modelo jerárquico de cabello en el que definen un conjunto de modelos para la simulación de los diferentes comportamientos del cabello. La adición de los diferentes submodelos sobre un esqueleto permite la obtención de peinados complejos. Algunos de los submodelos utilizados están basados en la Teoría de Cuerdas de Cosserat.

Desde el punto de vista del comportamiento de los objetos, estos modelos empleados en animación no son adecuados para la simulación realista de cables o cuerdas. Sin embargo, la metodología basada en la utilización de diferentes modelos sencillos que se superponen para conseguir un comportamiento más complejo guarda ciertas analogías con la metodología que se va a seguir en este trabajo.

2.3. ANÁLISIS CRÍTICO DE LOS MODELOS Y TÉCNICAS EXISTENTES

El análisis que se ha llevado a cabo sobre los modelos existentes para la simulación de cables y poleas permite poner de manifiesto tres importantes carencias. En primer lugar, no existe ningún trabajo que determine de forma clara cómo simular un polipasto, que considere tanto la oscilación del cable como el sistema de poleas. En segundo lugar, diversos autores muestran la existencia de problemas de inestabilidad numérica cuando se trata de la simulación de cables de elevación. En tercer lugar, a pesar de la diversidad de modelos existentes resulta difícil encontrar modelos suficientemente flexibles para el rango de situaciones que requieren las simulaciones interactivas en tiempo real.

2.3.1. Modelado de un polipasto

La simulación de un polipasto requiere la combinación de poleas y cables, considerando las interacciones existentes entre ellos y reflejando las propiedades más relevantes de cada uno de ellos.

Es posible encontrar diferentes metodologías de modelado de cables que reproducen sus propiedades más importantes en diferentes situaciones. Modelos basados en la Teoría de Krichhoff o de Cosserat permiten simular cables y cuerdas en situaciones de baja tensión, mientras que la ecuación de ondas o diferentes modelos discretos permiten reproducir el comportamiento de cables en situaciones de tensión más elevada.

Por otra parte, diferentes modelos de poleas permiten analizar el comportamiento de ascensores, sistemas de transmisión o incluso de polipastos de maquinaria de elevación. En la mayoría de los casos los modelos son sencillos, considerando un número muy reducido de variables, aunque también se encuentran modelos que describen con gran detalle el comportamiento del material de una polea.

Sin embargo, en los trabajos que involucran de alguna manera la simulación de poleas se descarta sistemáticamente la oscilación transversal de los cables, mientras que los modelos de cables que consideran la oscilación transversal no contemplan la simulación de poleas.

La propuesta de un modelo que reproduzca tanto el comportamiento de un sistema de cable y poleas como la dinámica de las vibraciones del cable es, por tanto, una deficiencia patente.

2.3.2. Simulación en situaciones de tensión elevada

Las situaciones de tensión elevada que se producen en la elevación de cargas pesadas requieren un tratamiento cuidadoso de ciertos aspectos, especialmente en lo que respecta a la estabilidad numérica.

Un cable es un elemento elástico que, sometido a una tensión de tracción muy elevada, da lugar a vibraciones de alta frecuencia. Como ya se ha indicado, la proporción entre la masa del cable y la masa de la carga que puede

soportar es extraordinariamente alta. Esto da lugar a que las ecuaciones diferenciales que describen su dinámica tengan un comportamiento de tipo *stiff*. Es decir, son difíciles de integrar por medio de métodos explícitos.

En estas situaciones, los cables tienen un comportamiento completamente diferente al de una cuerda en una situación de tensión baja o moderada. Para un cable tenso, aspectos como la resistencia a la flexión o a la torsión tienen una influencia reducida en su comportamiento, mientras que su deformación elástica longitudinal se vuelve muy relevante.

En estas condiciones de tensión mecánica un cable puede comportarse casi como un resorte elástico. Este hecho es el que permite utilizar esta representación para multitud de aplicaciones, obviando así la oscilación transversal.

Sin embargo, en una aplicación de Realidad Virtual el realismo visual es muy importante. Por este motivo, la representación de un cable por medio de un resorte elástico resulta muy deficiente, aunque sea una aproximación aceptable desde el punto de vista mecánico.

Por tanto, es necesario proporcionar alternativas de calidad al modelado del cable por medio de un muelle sin masa o de un péndulo simple. Esto requiere, en cualquier caso, modelos que permitan superar los problemas de inestabilidad detectados por numerosos autores.

2.3.3. Requisitos para simulación interactiva

Una de las características de las aplicaciones interactivas en tiempo real es el hecho de que los sistemas involucrados se ven sometidos a situaciones muy variadas. Las acciones del usuario son, en principio, impredecibles y como consecuencia de estas acciones los parámetros de entrada de la simulación pueden abarcar un rango de valores muy amplio.

Sin embargo, cuando se desarrolla un modelo dinámico es necesario acotar las condiciones del entorno y del sistema para poder describir de forma adecuada el comportamiento del sistema bajo esas situaciones. Además se selecciona un conjunto de propiedades que deben ser reflejadas por el modelo, descartando aquellas que serán menos relevantes en el rango de entradas

establecido.

En el caso de que el modelo vaya a ser utilizado en aplicaciones en tiempo real esta selección es aún más exigente; se deben descartar aquellas propiedades del sistema que supongan un elevado coste para poder ser reflejadas en el modelo. Cuando se desarrollan modelos para este tipo de aplicaciones debe buscarse siempre un compromiso entre la calidad del modelo, en cuanto a su descripción precisa del sistema real, y el coste computacional del modelo.

La simulación de cables y cuerdas es un claro ejemplo de esta situación. En un extremo encontramos los modelos basados en la teoría de cuerdas de Cosserat, que centran su atención en el efecto de la torsión y la flexión de una cuerda sobre la curva que describe en el espacio, pero que descartan el estiramiento longitudinal (Pai, 2002; Spillmann and Teschner, 2007; Bergou et al., 2008). Estos modelos únicamente son aplicables en situaciones de tensión reducida y algunos de ellos rechazan incluso la dinámica de la vibración del cable (Pai, 2002; Gregoire and Schömer, 2007).

En el extremo opuesto se encuentran los modelos de cable sin masa (Abdel-Rahman et al., 2003; Servin and Lacoursière, 2007) que descartan todas las propiedades del cable menos su resistencia al estiramiento. Estos modelos son mucho más eficientes y describen de forma adecuada el comportamiento de una grúa cuando la tensión del cable es suficientemente elevada.

Esto supone un problema cuando se trata de determinar la mejor metodología de modelado para aplicaciones como los simuladores para formación y otras aplicaciones de realidad virtual interactivas. La variedad de entradas a las que, con toda probabilidad, se enfrentará el modelo dinámico hace que ninguna de las opciones disponibles garantice, por sí sola, un comportamiento correcto de los modelos.

2.3.4. Conclusión

Queda patente de esta manera que es necesario mejorar la calidad de los modelos de maquinaria de elevación en lo que concierne a la simulación

de cables y polipastos.

Para alcanzar el nivel de realismo que se requiere en las aplicaciones de Realidad Virtual es necesario proporcionar modelos de polipasto que no descarten la oscilación transversal del cable. Además, es necesario hacerlo de forma que se garantice la estabilidad de los modelos numéricos empleados para la simulación, ya que los cables tienen un comportamiento que involucra vibraciones de alta frecuencia. Por último, se deberá proporcionar una metodología que permita contemplar todo el espectro de situaciones que pueden aparecer en una simulación interactiva.

El presente trabajo de investigación aborda estos tres retos por medio de la aplicación de una metodología de modelado basada en la descomposición sucesiva del sistema, o metodología *Top-Down*, que se detalla en el Capítulo 3 y se desarrolla a lo largo de toda la memoria.

DEFINICIÓN DE UN MODELO ABSTRACTO PARA UN SISTEMA DE POLEAS Y CABLE

El análisis llevado a cabo en el Capítulo 2 muestra la necesidad de desarrollar modelos dinámicos de cable y poleas que se ajusten mejor a las necesidades de la simulación interactiva en tiempo real. En el presente capítulo se expone y desarrolla, en primer lugar, la metodología que va a emplearse para el modelado de este sistema.

En segundo lugar, y una vez definida la metodología, ésta se aplicará a la construcción de un modelo abstracto de polipasto. Este modelo servirá como un marco formal para la definición, en los siguientes capítulos, de modelos dinámicos destinados a la simulación.

3.1. ELECCIÓN DE LA METODOLOGÍA DE MODELADO

Un modelo es una descripción de una porción de la realidad que se realiza con un fin determinado. Cuando se aborda el modelado de un sistema es imprescindible tener en cuenta la aplicación que se le va a dar al modelo. A continuación se discuten las necesidades asociadas a las aplicaciones de Realidad Virtual en cuanto a modelado dinámico para, posteriormente, proponer una metodología que permita alcanzarlas.

Cuando se construyen modelos destinados a aplicaciones de realidad virtual, como en el caso de los simuladores para entrenamiento, es necesario

tener en cuenta que se trata de simulaciones *interactivas*. Es decir, son simulaciones en las que una parte de las entradas vendrán determinadas por las acciones del usuario.

Para conseguir la necesaria sensación de inmersión, la reproducción del entorno debe ser creíble independientemente de cuáles sean estas acciones del usuario. Por tanto, los modelos dinámicos utilizados deberán ser capaces de proporcionar un comportamiento adecuado en el mayor rango posible de situaciones y valores de entrada.

Por otra parte, la falta de control sobre las entradas del sistema puede dar lugar a la aparición de inestabilidades numéricas en el esquema computacional utilizado para la implementación del modelo. Por este motivo la metodología de modelado debe permitir establecer mecanismos que garanticen la estabilidad y robustez del modelo computacional.

En física es habitual la construcción de los modelos por medio de herramientas matemáticas que dan lugar a una descripción muy precisa y unívoca del sistema. Para ello es necesario limitar y determinar de forma clara el *rango de validez* del modelo, que corresponde al conjunto de situaciones que éste es capaz de reproducir. Esta decisión define en cierta manera cuál es el problema que se va a estudiar.

Una vez decidido el rango de validez, es posible determinar qué variables son las que mejor describen el sistema bajo esas condiciones. Basándose normalmente en el conocimiento previo sobre el sistema, el físico o el ingeniero establece relaciones entre estas variables por medio de las herramientas matemáticas más adecuadas.

Este proceso de acotación del problema permite sacar conclusiones sobre las propiedades del sistema estudiado con mayor precisión y facilita que otros investigadores reproduzcan los resultados obtenidos con el modelo. Como contrapartida, esta metodología limita el rango de validez de los modelos, ya que únicamente podrán reproducir correctamente las situaciones para las que han sido diseñados.

Si bien la utilización de modelos basados en física es necesaria para conseguir el realismo deseado, la consideración de técnicas de modelado pro-

cedentes de ámbitos diferentes al de la física, como los sistemas complejos, permitirá ampliar el rango de validez de los modelos obtenidos.

En disciplinas como el estudio de los sistemas sociales, los sistemas estudiados son lo que se conoce como *sistemas complejos*. En el estudio de este tipo de sistemas, a menudo se emplean descripciones cualitativas frente a las descripciones cuantitativas más frecuentes en física (López Díaz-Delgado and Martínez Vicente, 2000). En estos casos, los modelos se basan en entidades más abstractas y suelen permitir la descripción y simulación de un rango más amplio de situaciones.

La utilización de elementos muy abstractos proporciona una gran flexibilidad en el modelado y permite la reproducción de un conjunto de sistemas amplio con una única formalización común. Esta técnica es similar a la construcción de un modelo por medio de clases abstractas, empleado en el modelado orientado a objetos en ingeniería del software (Rumbaugh et al., 1996; Joyanes Aguilar, 1999).

Sobre este modelo formal se podrán definir diferentes modelos dinámicos para la simulación de cada una de las clases los subsistemas. Sin embargo, la definición de los modelos dinámicos concretos se pospone para una fase posterior, de la misma manera que en modelado orientado a objetos se separa diseño de implementación (Booch et al., 1999).

3.1.1. Descripción de la metodología de modelado

La metodología que se propone se va a basar en la construcción de un modelo que describirá el sistema a partir de los elementos que lo componen, de los flujos de entrada y salida de información de cada elemento y de las relaciones existentes entre ellos. La metodología se estructura en cinco fases:

- Análisis del sistema e identificación de subsistemas y relaciones
- Definición de las entradas y salidas del sistema
- Definición de las entradas y salidas de los subsistemas. Clasificación
- Definición formal de las relaciones

- Definición formal del modelo

Esta metodología puede aplicarse de forma recursiva a cada uno de los subsistemas identificados, construyendo así un modelo basado en una jerarquía de módulos. A continuación se detallan las diferentes fases de la metodología y se describe la forma en que el modelo obtenido puede aplicarse a la definición de modelos dinámicos para simulación interactiva.

Análisis del sistema. Como primera fase de la metodología se realizará un análisis del sistema que se pretende simular. El objetivo es identificar los subsistemas que lo constituyen y las relaciones o flujos de información que existen entre ellos. Se identificará también el entorno, describiendo los sistemas externos que interactúan con el sistema estudiado así como el flujo de información con este entorno.

Este análisis se llevará a cabo utilizando la terminología y los conceptos propios del ámbito del sistema, sin emplear necesariamente un alto grado de formalización.

Definición de las entradas y salidas del sistema. La descripción del intercambio de información entre el sistema y el entorno realizada en el análisis anterior, permitirá la definición de un conjunto de variables de entrada y salida del sistema bajo estudio. Se definirán de forma precisa estas variables y se identificará el significado de cada una de ellas en la descripción informal realizada durante el análisis del sistema.

Definición de las entradas y salidas de los subsistemas. Clasificación. Se utilizará la descripción del flujos de información entre los diferentes subsistemas para definir las variables de entrada y salida de cada uno de ellos. A partir de esta descripción, los subsistemas se clasificarán utilizando como criterio sus variables de entrada y salida. Dos subsistemas que tengan el mismo interfaz de entradas y salidas se considerarán como pertenecientes a una misma categoría.

Este concepto es similar al de clases abstractas en diseño orientado a objetos (Joyanes Aguilar, 1999) en el sentido de que una clase no representa a un objeto, sino al conjunto de objetos que comparten unas mismas

propiedades. En el caso de la metodología que se está definiendo, las propiedades que van a identificar cada clase son las variables de entrada/salida. Por analogía con este concepto, se utilizará el término *clases* para referirse a las categorías.

Definición formal de las relaciones. Para cada uno de los diferentes flujos de información existentes entre los subsistemas se definirá formalmente una relación. Cada relación se definirá como un enunciado lógico o una ecuación que involucre las variables de entrada y salida de dos o más clases de subsistemas.

Se enunciarán relaciones similares para aquellas variables de entrada o de salida de una clase que correspondan a una variable de entrada o salida del sistema. Como resultado de esta fase todas las variables de entrada deberán quedar determinadas por medio de alguna de las relaciones.

Definición formal del modelo. Finalmente se describirá el modelo por medio de las formalizaciones de los subsistemas y de las relaciones entre ellos, especificadas durante las fases anteriores. Este modelo constituirá, a su vez, una formalización de la descripción realizada durante la primera fase de la metodología.

3.1.2. Utilización de la metodología para el desarrollo de modelos de simulación

La metodología propuesta conduce a un modelo abstracto del sistema que se desea simular. Sin embargo, no permite la obtención de un modelo que pueda ser aplicado de forma inmediata para la realización de simulaciones. Para ello es necesario, en primer lugar, definir modelos dinámicos concretos para cada uno de los módulos del sistema abstracto. Estos modelos dinámicos proporcionan procedimientos para transformar las entradas de cada módulo en las salidas correspondientes.

Una vez definidos los modelos dinámicos de los subsistemas, el modelo abstracto actúa como esqueleto o armazón para el desarrollo del modelo dinámico del sistema completo. En este armazón, las relaciones estableci-

das entre los módulos sirven como vías de comunicación entre sus modelos dinámicos.

Desde el punto de vista de la implementación, la metodología propuesta presenta gran cantidad de analogías con el diseño orientado a objetos utilizado en programación. Esto facilita el desarrollo de bibliotecas de simulación basadas en el paradigma de la programación orientada a objetos.

Aplicación de la metodología al desarrollo de un modelo de polipasto para simulación

La metodología de modelado propuesta se desarrollará a lo largo de este trabajo con el fin de obtener un modelo de polipasto para simulación. La definición del modelo abstracto de un polipasto se realiza a continuación y, a lo largo de los siguientes capítulos se desarrollan los modelos dinámicos para los diferentes subsistemas, así como las estrategias que permitirán intercambiar diferentes modelos dinámicos de cable durante la simulación.

3.2. DEFINICIÓN DE UN MODELO ABSTRACTO DE UN POLIPASTO O APAREJO

A continuación se aplica la metodología propuesta, obteniendo como resultado un modelo abstracto para representar un polipasto. Este modelo se empleará posteriormente en el diseño de diferentes modelos dinámicos de polipasto.

3.2.1. Análisis del sistema

El sistema utilizado habitualmente en maquinaria de elevación es lo que se conoce como polipasto o aparejo. Consiste en un cable de elevación que pasa a través de dos grupos de poleas; uno fijo o sujeto a la máquina, y el otro móvil, sujeto a la carga o al dispositivo de enganche utilizado.

La posición de dichas poleas puede ser fija en el espacio, pero también puede tener moverse siguiendo trayectoria prefijada o moverse solidariamente con un sólido del entorno, simulando una polea anclada al mismo. El

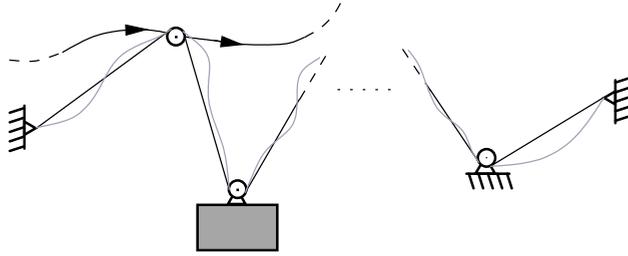


Figura 3.1: *Representación un ejemplo del sistema considerado. Cada polea puede estar sujeta a un sólido o seguir una trayectoria prefijada.*

cable queda suspendido entre cada par de poleas consecutivas. La Figura 3.1 muestra un diagrama de un ejemplo de este tipo de sistemas.

El cable, al atravesar las diferentes poleas, puede descomponerse en una sucesión de segmentos de cable, cada uno de ellos correspondientes al tramo que queda suspendido entre dos poleas consecutivas (véase la Figura 3.2).

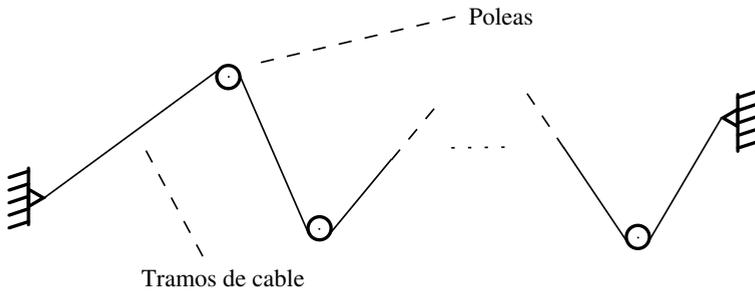


Figura 3.2: *El sistema está compuesto por una sucesión de poleas y un cable que pasa a través de ellas. El cable puede descomponerse en una sucesión de tramos suspendidos entre cada par de poleas consecutivas.*

Identificación de los subsistemas

El sistema *Polipasto* se denotará por medio del símbolo \mathcal{A} . Este sistema, a su vez, está compuesto por un conjunto de poleas, a las que se denotará

por medio del símbolo \mathcal{P} , y por un conjunto de segmentos o tramos de cable, a los que denotaremos por medio del símbolo \mathcal{C} . Un polipasto contendrá un conjunto de $N + 1$ subsistemas de tipo *polea*, \mathcal{P}^i , y N subsistemas de tipo *segmento de cable*, \mathcal{C}^i .

Como elementos externos al sistema y pertenecientes, por tanto, al entorno, se considerará un conjunto de sólidos, a los que se denotará por medido del símbolo \mathcal{S} .

Descripción del comportamiento del sistema

El cable se encuentra sometido a varios factores que influyen en su movimiento. Por una parte el movimiento de las poleas modifica la distancia entre los extremos de cada tramo de cable. Este movimiento provoca además, junto con la gravedad, oscilaciones transversales. Las oscilaciones del cable provocan una deformación, provocando también cambios en su tensión. Estos cambios en la tensión influyen a su vez en la dinámica de las oscilaciones (frecuencia y velocidad de propagación) debido a la naturaleza elástica del cable.

Por su parte, las poleas del sistema soportan la tensión del cable en forma de fuerzas. Fuerzas que, aplicadas sobre las poleas y sobre los sólidos a los que pueden estar ancladas, influyen en la evolución de sus trayectorias. La acción de estas fuerzas es lo que permite, por ejemplo, la elevación de una carga cuando se oponen al efecto de la gravedad. Estas fuerzas provocan además el giro de las poleas, haciendo que varíe la longitud de cada tramo de cable y, por lo tanto, influyendo en la tensión de los mismos.

El diagrama mostrado en la Figura 3.3 muestra los elementos que se han descrito y las relaciones entre ellos. Se trata de un sistema en el que se puede identificar dos subsistemas principales relacionados entre sí y en el que existen bucles de realimentación. Cada flecha indica que existe una posible influencia del elemento de origen sobre el elemento de destino.

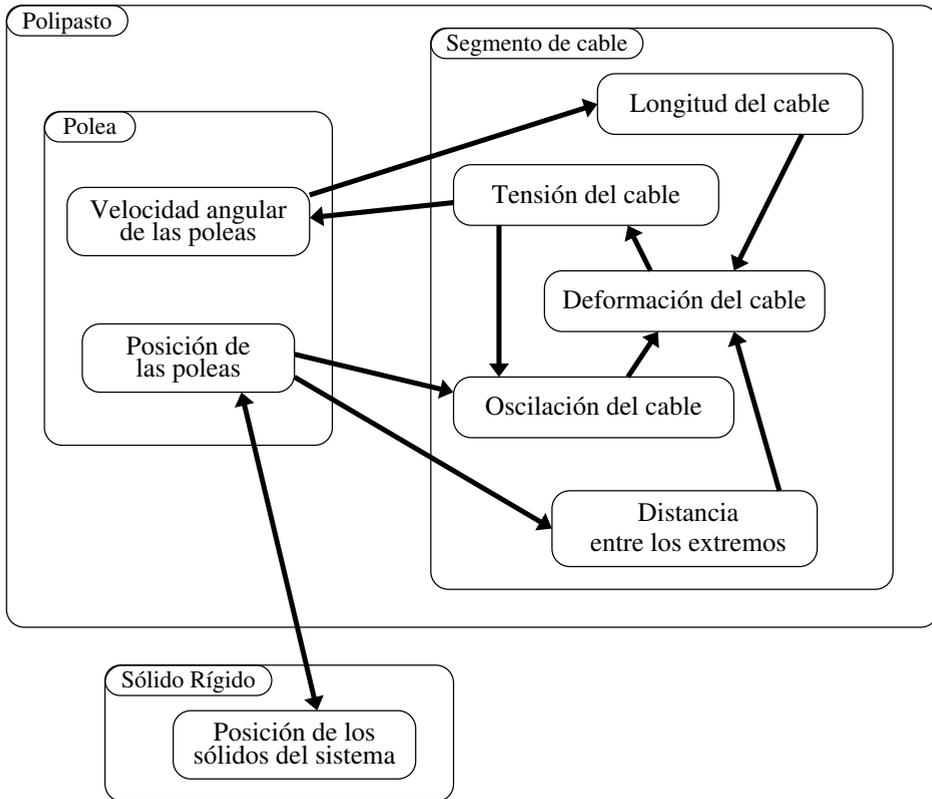


Figura 3.3: Un polipasto se descompone en dos tipos de subsistemas; poleas y segmentos de cable. En el diagrama se representan sus principales propiedades y las relaciones existentes entre ellas.

3.2.2. Entradas y salidas del sistema

En el polipasto descrito anteriormente, la relación con el entorno se produce principalmente a causa de la interacción mecánica de las poleas con otros sólidos.

En el caso de aquellas poleas que se encuentre anclada rígidamente a un sólido, en general se considerará que la masa de las mismas es despreciable respecto a la de los sólidos. De esta forma, cada polea se desplazará solidariamente con el sólido asociado sin influir en su dinámica. Por tanto la

posición de la polea y la orientación de su eje de giro en cada instante se considerarán como datos que dependen únicamente de la posición y orientación de cada uno de estos sólidos, y podrán considerarse como datos de entrada. En caso de que se quiera considerar una polea aislada, que no se encuentre sujeta al mundo o a un sólido mayor, bastará considerar un sólido de las dimensiones y peso de la polea y anclarla al mismo.

Como consecuencia de considerar la masa de las poleas como nula, la tensión que el cable ejerce sobre ellas, junto con los momentos que generan, se transmitirán directamente al sólido. Las fuerzas se aplicarán sobre el punto en el que se encuentra fija cada polea y los momentos se ejercerán sobre un eje perpendicular a su eje de giro.

A continuación se establecen de manera más detallada estas variables definiendo la notación necesaria.

Definición de las entradas del sistema

Considérese un polipasto compuesto por $N + 1$ poleas \mathcal{P}^i , $i = 0, \dots, N$. La posición en cada instante de tiempo de la polea i se denotará como $\mathbf{P}^i(t) \in \mathbb{R}^3$ y la dirección de su eje de rotación se denotará como \mathbf{e}_0^i .

De acuerdo con la descripción del sistema del Apartado 3.2.1 una polea del sistema \mathcal{P}^i puede tener una trayectoria y orientación impuestas de forma explícita, por medio de dos funciones vectoriales $\mathbf{P}^i(t) = \mathbf{p}^i(t)$, $\mathbf{e}_0^i(t) = \mathbf{j}^i(t)$. Como caso particular, si ambas funciones son constantes la polea se considerará empotrada en un elemento inmóvil del mundo $\mathbf{P}^i(t) \equiv \mathbf{p}^i(0)$, $\mathbf{e}_0^i(t) \equiv \mathbf{j}^i(0)$. El conjunto de vectores $\{\mathbf{p}^i, \mathbf{j}^i\}_{i=0}^N \subset \mathbb{R}^3$ se considerará como las entradas del polipasto.

Por otra parte, considérese también el caso en que la polea se encuentra anclada a un sólido del sistema. Sea $\bar{\mathbf{p}}$ la posición de la polea sobre el sólido en su sistema de referencia local y $\bar{\mathbf{j}}$ la orientación del eje de giro de la polea expresado también en el sistema de referencia local del sólido. Sea $\mathbf{R}(t)$ la posición del sólido en el espacio y $\mathbf{A}(t)$ la matriz de rotación que expresa la rotación del mismo (véase la Figura 3.4). La trayectoria de la polea \mathcal{P}^i , y la

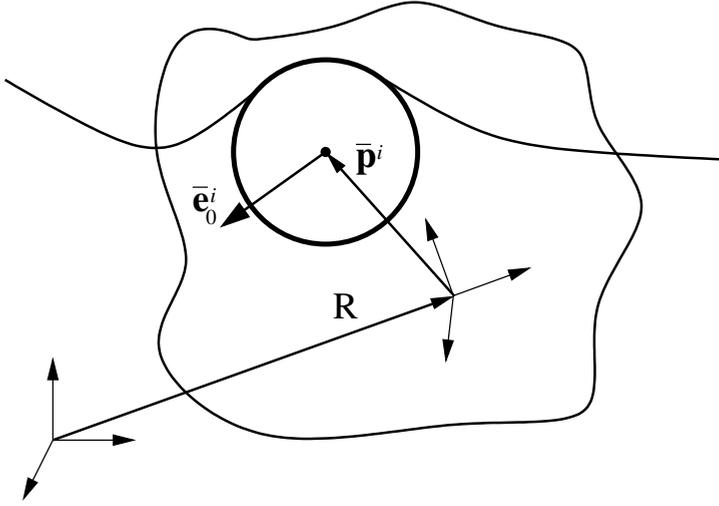


Figura 3.4: Polea anclada sobre un sólido.

orientación de su eje de giro, vendrán dadas por medio de la curvas

$$\mathbf{p}^i(t) = \mathbf{R}(t) + \mathbf{A}(t)\bar{\mathbf{p}}^i; \quad (3.1)$$

$$\mathbf{j}^i(t) = \mathbf{A}(t)\bar{\mathbf{j}}^i. \quad (3.2)$$

Salidas del sistema

Como variables de salida del sistema se considerarán las fuerzas y momentos que actúan sobre cada polea. Cuando la polea se encuentre empujada en un sólido, las fuerzas se aplicarán directamente sobre éste. Considérese un polipasto compuesto por $N + 1$ poleas \mathcal{P}^i , $i = 0, \dots, N$. Sus salidas vendrán dadas por el conjunto de vectores $\{\mathbf{F}^i, \boldsymbol{\tau}^i\}_{i=0}^N \subset \mathbb{R}^3$.

Los vectores \mathbf{F}^i se interpretarán como las fuerzas ejercidas por cada polea sobre el punto en que se encuentran ancladas, mientras que los vectores $\boldsymbol{\tau}^i$ se interpretarán como los momentos angulares aplicados.

Esta información tiene una gran importancia desde el punto de vista de la simulación interactiva, porque permitirá que el comportamiento del sistema se refleje en el resto de elementos del entorno. Considérese, por ejemplo,

la situación sencilla de elevación de cargas de la Figura 3.5, en la que una carga está sujeta a una polea simple. Un extremo del cable se encuentra empotrado en el techo y el otro se encuentra sujeto a un dispositivo que aplicará una fuerza. Si las fuerzas aplicadas no se transmiten a la carga, en ningún caso se podrá conseguir la elevación de la misma.

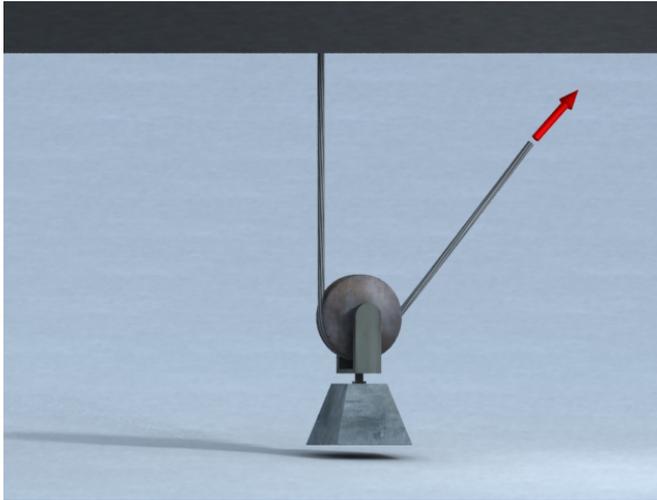


Figura 3.5: *Sistema formado por una polea simple sujeta a una carga y un cable empotrado en el techo y sometido a una fuerza de tracción. Para poder determinar la trayectoria de la carga es necesario conocer las fuerzas que actúan entre ésta y la polea.*

La forma particular en que se aplicarán estas fuerzas y momentos dependerá de la metodología de modelado que se esté utilizando para los sólidos del entorno. Comúnmente, estas fuerzas se aplicarán como fuerzas externas sobre el sólido al que se encuentra anclada la polea, aplicadas sobre el punto \bar{p} . En el Capítulo 4 se detallan algunos casos.

Resumen de las variables de entrada y salida del sistema

A partir de la descripción que se ha realizado, a continuación se recogen el conjunto de entradas y salidas que se han definido para el modelo de

polipasto. El Cuadro 3.1 muestra estas variables junto con su interpretación.

Polipasto	Variable	Descripción
Entradas	\mathbf{j}^i	Eje de giro de la polea \mathcal{P}^i
	\mathbf{p}^i	Posición de la polea \mathcal{P}^i
Salidas	\mathbf{F}^i	Fuerza ejercida por la polea \mathcal{P}^i
	$\boldsymbol{\tau}^i$	Momento ejercido por la polea \mathcal{P}^i

Cuadro 3.1: *Cuadro de entradas y salidas del modelo abstracto de polipasto.*

Otras variables de entrada y salida

Estas variables constituyen un conjunto mínimo de variables de entrada y salida que serán comunes a cualquier polipasto considerado para su modelado. En función de las necesidades de cada modelo dinámico concreto, este conjunto se ampliará para considerar cualquier otro intercambio de información con el entorno. A continuación se indican algunas entradas o salidas adicionales que pueden resultar útiles.

Poleas motrices. Un caso frecuente en un sistema de cables y poleas es la consideración de una o más poleas motrices. En Arrasate et al. (Arrasate et al., 2007) se presenta un modelo de ascensor con una única polea fija motorizada. El cable tiene sus extremos empotrados en la cabina y en el contrapeso (véase la Figura 3.6). La elevación y el descenso de la cabina se consigue por medio de la aplicación de un par de fuerza a la polea por parte del motor τ_m .

En este caso, además del conjunto de variables definido se considerará como variable de entrada el par aplicado sobre la polea τ_m . Obviamente, para poder realizar una simulación del sistema será necesario que el modelo dinámico de polea que se utilice sea capaz de utilizar este dato como una entrada.

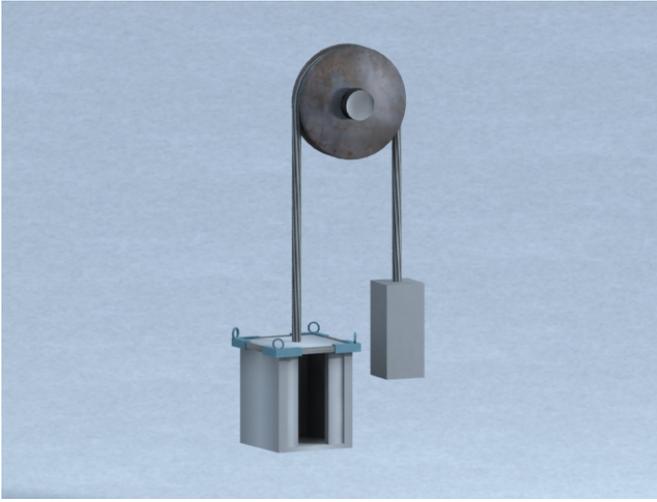


Figura 3.6: *Modelo sencillo de ascensor, compuesto por una polea motorizada, la cabina y un contrapeso.*

Recíprocamente, el modelo de motor utilizado puede requerir información sobre la velocidad o la aceleración angular de la polea forzada. Esta información se considerará como una salida adicional del sistema cuando los modelos utilizados lo requieran.

Interacción con los cables. Considérese una simulación en la que se desee poder actuar sobre el cable por medio del interfaz de usuario, aplicando fuerzas arbitrarias sobre un punto o modificando su longitud.

El modelo de polipasto deberá considerar como entradas las acciones del usuario en la forma que sea necesaria para conseguir el efecto deseado; una fuerza y un punto de aplicación, una velocidad de alargamiento o acortamiento del cable, etc.

De forma similar, cuando se considere la detección de colisiones entre el sistema y el entorno, los resultados de las pruebas de colisión deberán introducirse en el sistema para su utilización en el cálculo de la dinámica del cable.

3.2.3. Definición de las entradas y salidas de los subsistemas

Siguiendo el esquema metodológico propuesto, a continuación se describen los elementos que componen el polipasto por medio de la definición precisa de las entradas y salidas de cada uno de ellos.

Descripción de una polea \mathcal{P}

De acuerdo con la descripción del sistema realizada en el Apartado 3.2.1 y de las relaciones con el resto de entidades establecidas allí para las poleas, se definen las siguientes variables para el subsistema.

Variables de entrada. Como variables de entrada de la polea se consideraran los cuatro vectores \mathbf{t}_0 , \mathbf{t}_1 , \mathbf{P} y $\mathbf{e}_0 \in \mathbb{R}^3$.

Los vectores \mathbf{t}_0^i , \mathbf{t}_1^i se interpretarán como las tensiones ejercidas por los dos segmentos de cable adyacente a la polea \mathcal{P}^i ; la tensión \mathbf{t}_0^i , causada por el segmento cable que la conecta con el nodo \mathcal{P}^{i-1} , y la tensión \mathbf{t}_1^i , causada por el segmento de cable que la conecta con el nodo \mathcal{P}^{i+1} . Dado que la polea puede desplazarse anclada rígidamente a un sólido o a una trayectoria prescrita, se considerarán también como datos de entrada la trayectoria a lo largo del tiempo de su centro, \mathbf{P}^i , y su orientación en el espacio, expresada por medio del eje de giro \mathbf{e}_0^i .

Variables de salida. Como variables de salida de la polea se consideraren los vectores \mathbf{p}_0 , \mathbf{p}_1 , \mathbf{F} y $\boldsymbol{\tau}$, y el valor real v .

En la polea \mathcal{P}^i , los dos puntos \mathbf{p}_0^i y \mathbf{p}_1^i pueden interpretarse como los puntos en los que se aplican, respectivamente, las tensiones \mathbf{t}_0^i y \mathbf{t}_1^i . El valor real v^i se interpretará como la velocidad tangencial de la polea en su parte exterior y los vectores \mathbf{F}^i y $\boldsymbol{\tau}^i$ como la fuerza y el momento angular que actúan sobre el punto de anclaje.

En definitiva, el modelo abstracto aquí definido considera como una polea a cualquier sistema que tenga las siguientes entradas y salidas: como entradas dos vectores correspondientes a las tensiones ejercidas sobre la polea, y dos vectores correspondientes a su posición y eje de giro; como salidas, dos magnitudes vectoriales, correspondientes a los puntos en los

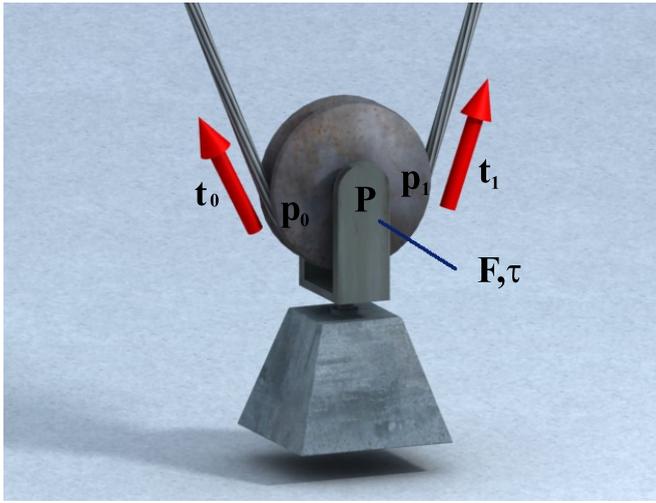


Figura 3.7: *Variables de una polea.*

que los cables inciden tangencialmente en la polea, y una magnitud escalar que representa la velocidad angular de la misma respecto del eje de giro. El Cuadro 3.2 resume el conjunto de variables de entrada y de salida de la polea.

Nodos terminales \mathcal{P}

Nótese que el significado de los nodos 0 y $N + 1$ es diferente al del resto de nodos, ya que no representan realmente a una polea. Esto es así debido a que el cable finaliza en ambos nodos de forma que no tienen otro segmento de cable sobre el que se puedan transmitir fuerzas o velocidades. Por este motivo, a estos nodos, a los que se mencionará en ocasiones como *nodos terminales* o, simplemente, *terminales*, les corresponde únicamente como entrada una tensión y una posición en el espacio. Los nodos terminales se denotarán por medio del símbolo \mathcal{P} , al igual que las poleas.

Variables de entrada. Un nodo terminal toma como variables de entrada dos vectores \mathbf{t} y \mathbf{P} .

Estos nodos pueden representar desde un empotramiento en un muro,

Polea (\mathcal{P})	Variable	Descripción
Entradas	\mathbf{t}_0	Tensión del cable 0
	\mathbf{t}_1	Tensión del cable 1
	\mathbf{P}	Posición de la polea
	\mathbf{e}_0	Eje de giro de la polea
Salidas	\mathbf{p}_0	Punto de aplicación de \mathbf{t}_0
	\mathbf{p}_1	Punto de aplicación de \mathbf{t}_1
	\mathbf{F}	Fuerza que actúa sobre el punto de anclaje
	$\boldsymbol{\tau}$	Momento angular que actúa sobre el punto de anclaje
	v	Velocidad tangencial en el exterior de la polea

Cuadro 3.2: *Cuadro de entradas y salidas del modelo abstracto de una polea.*

de forma que su posición será fija, hasta un carrete o bobina en la que se arrolla el cable, variando la longitud del mismo.

Variables de salida. Un nodo terminal tiene como variables de salida un vector \mathbf{F} y un escalar v .

A los nodos terminales se les denotará por el mismo símbolo que a las poleas, \mathcal{P} , ya que comparten con ellas muchas propiedades. El Cuadro 3.3 resume el conjunto de variables de entrada y de salida de un nodo terminal.

Descripción de un cable \mathcal{C}

Un cable permite la transmisión de una fuerza mecánica aplicada en un punto situado en un extremo del mismo, sobre el punto situado en el otro extremo. Sin embargo, esta descripción del cable no resulta la más adecuada, ya que otorga un papel diferente a sus dos extremos.

En su lugar, considérese un segmento de cable de longitud L suspendido por sus extremos, que se encuentran entre sí a una distancia $l > L$. Como

Terminal (\mathcal{P})	Variable	Descripción
Entradas	\mathbf{t}	Tensión aplicada sobre la polea
	\mathbf{P}	Posición de la polea
Salidas	\mathbf{F}	Fuerza que actúa sobre el punto de anclaje
	v	Velocidad de liberación de cable

Cuadro 3.3: Cuadro de entradas y salidas del modelo abstracto de un nodo terminal.

consecuencia de la naturaleza elástica del cable, éste ejercerá una fuerza de tracción sobre los puntos en los que se encuentra anclado que, según la ley de Hooke, será proporcional al estiramiento del cable. De acuerdo con este planteamiento, el cable se considera como un resorte que ejerce una tensión sobre sus extremos en función de la posición de los mismos.

El modelo de entradas y salidas que se propone para el cable es el siguiente: los datos que requiere son la posición en el espacio de los extremos del cable y su longitud sin deformar. Dado que en un polipasto la longitud en ausencia de deformación de cada segmento de cable varía si giran las poleas en sus extremos, para determinar la longitud se tomará como entrada la velocidad del cable en ambos extremos.

Variables de entrada. El sistema que representa a un segmento de cable debe recibir como entradas dos puntos en el espacio \mathbf{p}_0 y \mathbf{p}_1 y dos valores escalares v_0 y v_1 .

Los puntos \mathbf{p}_0 y $\mathbf{p}_1 \in \mathbb{R}^3$ corresponderían a las posiciones de los extremos del segmento de cable, mientras que los escalares v_0 y v_1 serán la velocidad de variación de la longitud del segmento de cable en cada uno de sus extremos.

Variables de salida. Como resultado o salida, el cable proporciona dos magnitudes vectoriales \mathbf{T}_0 y \mathbf{T}_1 .

Las direcciones de los dos vectores \mathbf{T}_0 y \mathbf{T}_1 indican las direcciones tan-

gentes al cable en cada extremo, mientras que el módulo de los mismos representa el valor de la tensión en cada extremo, obtenido a partir de las propiedades mecánicas del cable.

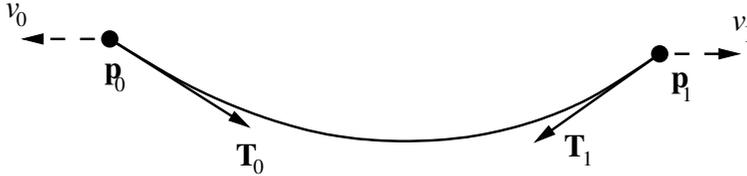


Figura 3.8: *Variables de un cable.*

En el modelo de polipasto o aparejo, compuesto por una sucesión de segmentos de cable, las variables asociadas al segmento \mathcal{C}^i , comprendido entre las poleas o nodos \mathcal{P}^i e \mathcal{P}^{i+1} , se identificarán por medio del superíndice i (\mathbf{p}_0^i , \mathbf{p}_1^i , etc.). El Cuadro 3.4 resume el conjunto de variables de entrada y de salida del cable.

Cable (\mathcal{C})	Variable	Descripción
Entradas	\mathbf{p}_0	Posición del inicio del segmento de cable
	\mathbf{p}_1	Posición del final del segmento de cable
	v_0	Velocidad de variación de la longitud del segmento de cable en su inicio
	v_1	Velocidad de variación de la longitud del segmento de cable en su final
Salidas	\mathbf{T}_0	Tensión del cable en el punto de inicio
	\mathbf{T}_1	Tensión del cable en el punto final

Cuadro 3.4: *Cuadro de entradas y salidas del modelo abstracto de un cable.*

3.2.4. Definición formal de las relaciones entre los subsistemas

Una vez establecidos los tipos de elementos que componen el polipasto y definidas sus entradas y salidas, utilizando los flujos de información que se describieron en el Apartado 3.2.1 se describirá la manera en que éstos se relaciona entre sí.

El modelo de polipasto se ha descompuesto en una sucesión de módulos de dos tipos: poleas y segmentos de cable. En la descripción modular que se hace del sistema únicamente se presta atención a sus entradas y salidas, sin tener en cuenta los procesos internos que llevan de las primeras a las últimas. A continuación se completa la descripción del sistema relacionando formalmente los diferentes subsistemas que lo componen.

Para ello se va a formalizar el significado de la relación *La polea \mathcal{P} comunica a los segmentos de cable \mathcal{C}^a y \mathcal{C}^b* y el significado de la relación *El segmento de cable \mathcal{C} une las poleas \mathcal{P}^a y \mathcal{P}^b* .

Polea que comunica dos segmentos de cable

Considérese una polea \mathcal{P} y sus variables de entrada y salida

$$\{\mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1, \mathbf{P}, \mathbf{e}_0; \mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau}, v\},$$

y dos segmentos de cable \mathcal{C}^a y \mathcal{C}^b , con sus respectivas variables de entrada y de salida

$$\{\mathbf{p}_0^k, \mathbf{p}_1^k, v_1^k, v_2^k; \mathbf{T}_0^k, \mathbf{T}_1^k\}, \quad k = a, b.$$

\mathbf{F}^i y el momento angular $\boldsymbol{\tau}^i$

Se dirá que *La polea \mathcal{P} comunica a los segmentos de cable \mathcal{C}^a y \mathcal{C}^b* cuando se cumplan las siguientes relaciones entre sus entradas y sus salidas:

$$\mathbf{t}_0 = \mathbf{T}_1^a; \quad \mathbf{t}_1 = \mathbf{T}_0^b; \quad (3.3)$$

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_1^a; \quad \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_0^b; \quad (3.4)$$

$$v = v_1^a; \quad v = v_0^b. \quad (3.5)$$

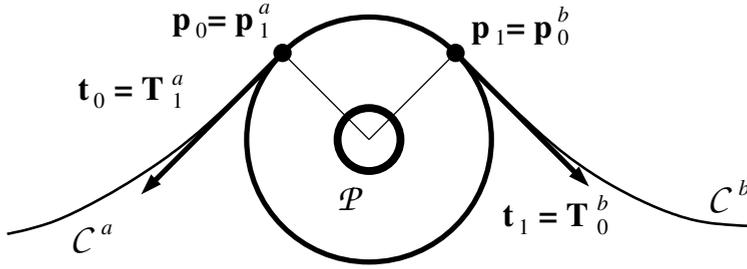


Figura 3.9: Polea que comunica dos segmentos de cable.

Segmento de cable que une dos poleas

Considérese un segmento de cable \mathcal{C} y sus variables de entrada y salida

$$\{\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, v_1, v_2; \mathbf{T}_0, \mathbf{T}_1\}$$

y dos poleas \mathcal{P}^a y \mathcal{P}^b , con sus respectivas variables de entrada y de salida

$$\{\mathbf{t}_0^k, \mathbf{t}_1^k, \mathbf{P}^k, \mathbf{e}_0^k; \mathbf{p}_0^k, \mathbf{p}_1^k, \mathbf{F}^k, \boldsymbol{\tau}^k, v^k\}, \quad k = a, b.$$

Se dirá que *El segmento de cable \mathcal{C} une las poleas \mathcal{P}^a y \mathcal{P}^b* cuando se cumplan las siguientes relaciones entre sus entradas y sus salidas:

$$\mathbf{t}_1^a = \mathbf{T}_0; \quad \mathbf{t}_0^b = \mathbf{T}_1; \quad (3.6)$$

$$\mathbf{p}_1^a = \mathbf{p}_0; \quad \mathbf{p}_0^b = \mathbf{p}_1; \quad (3.7)$$

$$v^a = v_0; \quad v^b = v_1. \quad (3.8)$$

Relación de los subsistemas con el entorno

El valor de algunas de las variables de entrada de los subsistemas no proceden en los flujos de información internos. El valor de estas variables se determina en el entorno del sistema. De la misma manera, algunas de las variables de salida de los subsistemas se emplean como salidas del sistema completo.

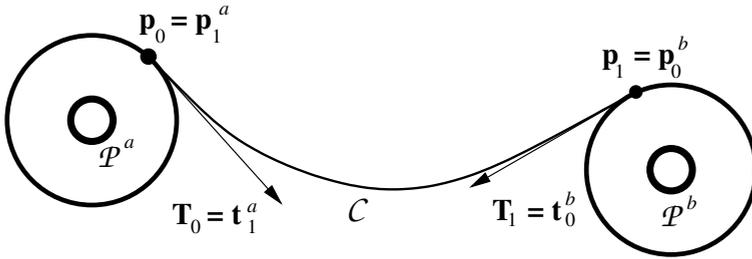


Figura 3.10: Segmento de cable que une dos poleas.

Las variables de entrada y de salida de los subsistemas que corresponden con las variables de entrada y de salida del sistema completo \mathcal{A} , definidas en el Apartado 3.2.2, son algunas de las variables de las poleas. Por un aparte, las entradas de la polea correspondientes a su posición y orientación \mathbf{p}^i y \mathbf{j}^i toman su valor directamente de las entradas del polipasto \mathbf{P}^i y \mathbf{e}_0^i . Por otra parte, las salidas de la polea \mathbf{F}^i y $\boldsymbol{\tau}^i$ dan valor a las variables homónimas del polipasto.

3.2.5. Definición del modelo formal

Para proponer un modelo formal de polipasto se va a determinar qué elementos lo componen de manera precisa y se van a establecer relaciones entre las variables de entrada y las variables de salida de cada uno de los subsistemas. Habitualmente identificaremos a un polipasto por el número de poleas que lo componen. Considérese un polipasto o aparejo \mathcal{A} con $N + 1$ poleas y un cable que pasa por todas ellas. Este sistema se define formalmente de la siguiente forma.

Definición de un polipasto \mathcal{A} . Un polipasto \mathcal{A} con $N + 1$ poleas se compone de los siguientes elementos. En primer lugar, $N + 1$ subsistemas de tipo Polea (\mathcal{P}), numeradas según el orden por el que el cable debe atravesarlas, $\{\mathcal{P}^i, i = 0, \dots, N\}$. De este conjunto de poleas, las poleas correspondientes a los índices 0 y N son nodos terminales. En segundo lugar, N segmentos de cable $\{\mathcal{C}^i, i = 0, \dots, N - 1\}$.

Por último, se establece el siguiente conjunto de relaciones entre las poleas y los segmentos de cable:

El segmento de cable \mathcal{C}^i une las poleas \mathcal{P}^i y \mathcal{P}^{i+1} para $i = 0, \dots, N - 1$.

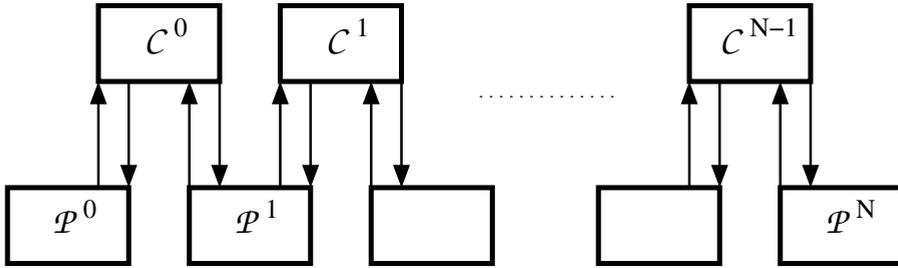


Figura 3.11: *Esquema de cajas para el modelo abstracto de polipasto constituido por módulos de dos tipos: cables y poleas.*

A partir de las definiciones de las relaciones entre poleas y segmentos de cable, es inmediato probar que el conjunto de relaciones propuesto es equivalente al siguiente:

La polea \mathcal{P}^i comunica los segmentos de cable \mathcal{C}^{i-1} y \mathcal{C}^i para $i = 1, \dots, N - 1$.

El segmento de cable \mathcal{C}^j une las poleas \mathcal{P}^j y \mathcal{P}^{j+1} para $j = 0$ y $j = N - 1$.

Con este conjunto de definiciones se concluye la aplicación de la metodología a la definición de un modelo abstracto de polipasto.

3.3. CONTRIBUCIONES DE LA METODOLOGÍA DE MODELADO PROPUESTA

Se ha presentado una metodología de modelado que consiste en la descomposición del sistema en un conjunto de subsistemas y en la identificación de las relaciones entre ellos. Esta metodología es utilizada habitualmente en

ingeniería, especialmente para el desarrollo de sistemas mecánicos complejos, que no admiten un único modelo para describir toda su dinámica. Se ha empleado, por ejemplo, en modelado de vehículos (Buzdugan et al., 1999; Kübler and Schiehlen, 2000), donde además puede servir como herramienta para el desarrollo de un modelo por varios equipos de ingenieros dedicados cada uno al desarrollo de un módulo independiente (Hulbert et al., 1999).

Habitualmente esta metodología se emplea para la separación de subsistemas de diferente naturaleza; sistemas mecánicos, eléctricos, hidráulicos, etc. con el objetivo de dividir un problema complejo en un conjunto de subproblemas más sencillos. Sin embargo, no es tan habitual su utilización en la descomposición de sistemas mecánicos simples como el que se aborda aquí.

Cuando se modela un sistema en este ámbito, la metodología de modelado se selecciona teniendo en cuenta los objetivos del estudio, de forma que permita obtener la información más relevante. Habitualmente, esta metodología condiciona la forma en la que los distintos subsistemas se relacionan.

Como se verá a lo largo del presente trabajo, la principal contribución de la formalización propuesta es la posibilidad de definir un modelo abstracto del sistema antes de decidir la metodología de modelado que va a emplearse en cada uno de los subsistemas. Por otra parte, el modelo abstracto sirve también para definir de forma clara cuáles son los requisitos de modelado para cada uno de los módulos.

Este planteamiento, que seguramente no es el más adecuado cuando el objetivo es describir con precisión una propiedad particular de un sistema, resulta muy útil si se busca flexibilidad, ya que el modelo se define con un conjunto de restricciones muy reducido.

Por otra parte, la descripción modular del sistema y la definición precisa de los flujos de información ayudan a aislar los posibles problemas o necesidades de los subsistemas, especialmente si esta modularidad se refleja en la implementación. El control de la estabilidad o del rango de las entradas puede realizarse de forma independiente para cada módulo sin necesidad de condicionar el diseño del resto.

Esta descripción modular, de hecho, ayuda a la implementación de programas para simular el sistema modelado. Como han puesto de manifiesto las analogías establecidas durante la definición del modelo, su implementación puede realizarse de forma directa por medio de la metodología de modelado orientada a objetos, pudiendo iniciarse desde el momento en que queda definido el modelo abstracto.

Resumen de las contribuciones de este capítulo

Se ha presentado una metodología que, a pesar de ser poco frecuente en el modelado de sistemas mecánicos simples, ofrece los siguientes beneficios cuando los modelos están destinados a la realización de simulaciones interactivas en entornos virtuales:

- Permite el desarrollo de modelos flexibles con muy pocas suposiciones previas.
- Permite el desarrollo de modelos robustos, que pueden enfrentarse a situaciones muy dispares, gracias a la modularidad.
- Permite tratar de forma independiente la problemática relacionada con la implementación y simulación numérica de cada subsistema.
- Facilita la implementación de los modelos por medio del paradigma de la programación orientada a objetos.

Los resultados obtenidos en este capítulo cubren, además, los objetivos de este trabajo correspondientes al diseño de una metodología de modelado y al desarrollo de un modelo abstracto de polipasto.

PROPUESTA DE UN MODELO DE POLEA PARA LA SIMULACIÓN DE SISTEMAS DE ELEVACIÓN

En este capítulo se define un modelo dinámico para la simulación de una polea en el marco de la metodología propuesta en el Capítulo 3. Allí se ha propuesto una descripción modular de un polipasto por medio de poleas y segmentos de cable, y una polea se ha definido como un sistema que tiene como entradas al menos los cuatro vectores \mathbf{t}_0 , \mathbf{t}_1 , \mathbf{P} y $\mathbf{e}_0 \in \mathbb{R}^3$, y como salidas al menos los vectores \mathbf{p}_0 , \mathbf{p}_1 , \mathbf{F} y $\boldsymbol{\tau}$, y el valor real v .

Sin embargo, esta descripción no permite simular la dinámica de una polea debido a que no proporciona la forma en que están relacionadas las variables de entrada y de salida. En este capítulo se parte de la definición abstracta de polea que describe únicamente sus entradas y salidas para proponer un modelo dinámico.

Además se analiza el rango de validez de las entradas, identificando sus límites, junto con el significado físico de las situaciones en las que las variables de entrada alcanzan estos límites. Para cada una de las variables consideradas, se proponen estrategias para considerar estas situaciones de forma realista. Por último, se proponen también diferentes modificaciones del modelo de polea, que representan simplificaciones del modelo o casos particulares, como la simulación de contactos.

4.1. DESCRIPCIÓN DE UNA POLEA

De acuerdo con la descripción de una polea realizada en el Capítulo 3, se considerará que su posición y orientación están determinadas por su eje de giro \mathbf{e}_0 y la posición de su centro, denotada por \mathbf{P} .

Estas variables se introdujeron como variables de entrada de la polea, y no como variables de estado. El motivo es que la polea se considera como un elemento que está empotrado en un sólido fijo o móvil, de forma que su posición y orientación vienen determinadas por las de éste sólido. A continuación se definen los parámetros y variables de estado que se emplearán para definir la dinámica de una polea.

4.1.1. Parámetros y variables de una polea

Desde el punto de vista mecánico una polea es un disco, que puede suponerse sólido, y que rota respecto a su eje. Este eje está fijo en otro sólido o en el mundo. Para determinar sus propiedades es necesario conocer su masa m y sus dimensiones, dadas por su radio R y su espesor d . El momento de inercia de la polea respecto a su eje de giro es $I_1 = \frac{1}{2}mR^2$, mientras que el momento de inercia respecto de cualquier eje perpendicular a éste viene dado por $I_2 = \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}md^2$. Además, de estos parámetros, se considerará un coeficiente de rozamiento μ para el giro de la polea respecto a su eje.

Dado que tanto la posición del centro de la polea como la orientación del eje de giro están determinados como variables de entrada, únicamente es necesario conocer el giro de la polea respecto de \mathbf{e}_0 . Sin embargo, gracias a la simetría de la polea, en lugar del ángulo, se considerará su velocidad angular ω respecto al eje \mathbf{e}_0 como variable de estado. El Cuadro 4.1 muestra un resumen de las variables y parámetros que se han descrito, y que se emplearán en el modelo de polea.

	Símbolo	Descripción
Parámetros	m	Masa de la polea
	R	Radio de la polea
	d	Espesor de la polea
	μ	Coefficiente de rozamiento
Variable de estado	ω	Velocidad angular a lo largo del eje \mathbf{e}_0

Cuadro 4.1: *Variables y parámetros del modelo dinámico de polea.*

Sistema de referencia local de una polea y variables auxiliares

Además de la variable de estado ω , se va a definir un conjunto de variables auxiliares que permitirán obtener la evolución de la polea. En primer lugar, se considerará un sistema de referencia que se desplazará solidariamente con la polea. Este sistema de referencia permitirá descomponer cualquier vector en su proyección sobre el eje de giro de la polea \mathbf{e}_0 , más su proyección sobre el plano de la polea.

Considérese un polipasto que tenga al menos dos segmentos de cable, y sea \mathcal{P}^i una polea del sistema que no sea un nodo terminal. Sea $l^i = \|\mathbf{P}^{i+1} - \mathbf{P}^i\|$ la distancia entre las poleas \mathcal{P}^i y \mathcal{P}^{i+1} y $\mathbf{d}^i = (\mathbf{P}^{i+1} - \mathbf{P}^i)/l^i$ el vector unitario que genera el segmento que une sus centros. Se define el siguiente sistema de referencia:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b}_1^i &= \mathbf{e}_0^i \\
 \mathbf{b}_2^i &= -\mathbf{b}_1^i \times \mathbf{d}^i \\
 \mathbf{b}_3^i &= \mathbf{b}_1^i \times \mathbf{b}_2^i
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Obsérvese que el sistema de referencia del primer nodo está bien definido por medio de (4.1). El sistema de referencia del último nodo \mathcal{P}^M puede fijarse usando el vector que marca la dirección del nodo anterior, \mathbf{d}_{M-1} .

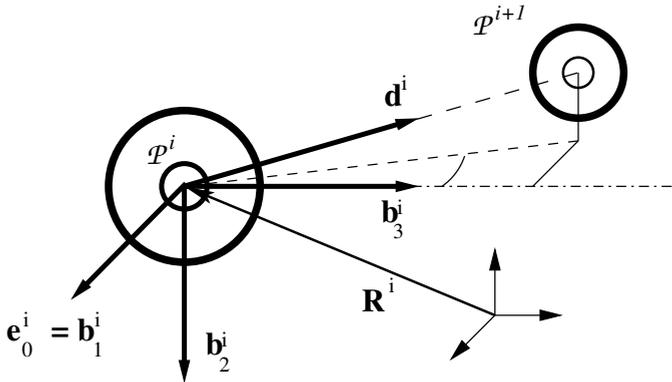


Figura 4.1: *Sistema de referencia local de una polea.*

Este sistema de referencia estará definido siempre que $\mathbf{e}_0^i \times \mathbf{d}^i \neq 0$. Esto es equivalente a que el vector \mathbf{d}^i , que indica la dirección que une la polea \mathcal{P}^i con la polea \mathcal{P}^{i+1} , no es paralelo al eje de giro de la polea \mathbf{e}_0^i . Pero esta condición es necesaria para que el cable se mantenga dentro de la canaladura de la polea, por lo que se cumplirá siempre que las condiciones del sistema sean adecuadas para que la polea tenga un comportamiento *normal*.

Para garantizar que $\mathbf{e}_0^i \times \mathbf{d}^i \neq 0$, el modelo dinámico que rijan el comportamiento del cable y la polea deberá emplear el módulo de este vector como una medida de la desviación del cable respecto del plano de la polea. En caso de que esta desviación sea mayor que un cierto ángulo, que dependerá de las propiedades geométricas de la polea (radio de la polea, y profundidad y anchura de la canaladura) y del radio del cable, se deberá contemplar la situación en la que el cable se sale de la polea. Este problema se analizará con más detalle en el Apartado 4.3, en este mismo capítulo.

Además del sistema de referencia definido, se considerarán varios elementos geométricos adicionales, que tienen influencia en el estado y en la evolución del sistema.

Por un lado, se considerará el ángulo que forma la tensión de cada uno de los dos segmentos de cable respecto del plano de la polea. Este ángulo se

denotará por medio de α_k^i , donde $k = 0, 1$. Estos ángulos pueden obtenerse por medio del ángulo de \mathbf{t}_k^i respecto del vector \mathbf{e}_0^i ,

$$\alpha_0^i = \frac{\pi}{2} - \arccos \left(\frac{\mathbf{t}_0^i \mathbf{e}_0^i}{|\mathbf{t}_0^i| |\mathbf{e}_0^i|} \right); \quad (4.2)$$

$$\alpha_1^i = \frac{\pi}{2} - \arccos \left(\frac{\mathbf{t}_1^i \mathbf{e}_0^i}{|\mathbf{t}_1^i| |\mathbf{e}_0^i|} \right), \quad (4.3)$$

Estos ángulos determinan cuánto se desvía la dirección de incidencia del cable respecto del plano de la polea. Como ya se ha indicado, permite determinar si el estado del sistema permite que la polea funcione correctamente.

4.1.2. Posición de los puntos de anclaje del cable en la polea

Antes de abordar el modelo dinámico del sistema se van a desarrollar los cálculos necesarios para obtener los puntos de anclaje del cable sobre la polea, \mathbf{p}_0^i y \mathbf{p}_1^i , que corresponden a dos de las salidas del modelo formal de polea. Para ello se utilizarán las variables de entrada del sistema y el sistema de referencia que se acaba de definir.

La información de la que se dispone es la dirección tangente de ambos segmentos de cable en sus puntos de contacto con la polea, \mathbf{t}_0^i y \mathbf{t}_1^i . Por tanto, estas direcciones se proyectarán en el plano de la polea y se tomarán como puntos de anclaje los puntos en los que estas direcciones son tangentes.

Considérese, en primer lugar, el vector que indica la tensión del cable de entrada a la polea \mathbf{t}_0^i . Este vector es paralelo a la dirección tangente al cable en el punto de anclaje \mathbf{p}_0^i . El vector que une el centro de la polea, \mathbf{P}^i , con el punto de anclaje, \mathbf{p}_0^i , será

$$\bar{\mathbf{p}}_0^i = \mathbf{p}_0^i - \mathbf{P}^i,$$

Este vector debe ser perpendicular a \mathbf{t}_0^i y a \mathbf{e}_0^i . Por tanto, el vector $\bar{\mathbf{p}}_0^i$ puede definirse como

$$\bar{\mathbf{p}}_0^i = R^i \frac{\mathbf{e}_0^i \times \mathbf{t}_0^i}{|\mathbf{e}_0^i \times \mathbf{t}_0^i|}$$

obteniendo así dos posibles puntos de anclaje para el cable, dados por $\mathbf{p}_0^i = \mathbf{P}^i \pm \bar{\mathbf{p}}_0^i$.

Para determinar cuál de estos dos puntos corresponde al punto de anclaje del cable se debe definir la región de la polea que se encuentra en contacto con el cable. Esta información debe introducirse como parámetro durante la inicialización de la polea.

De forma completamente análoga se obtiene $\mathbf{p}_1^i = \mathbf{P}^i + \bar{\mathbf{p}}_1^i$, donde

$$\bar{\mathbf{p}}_1^i = R^i \frac{\mathbf{e}_0^i \times \mathbf{t}_1^i}{|\mathbf{e}_0^i \times \mathbf{t}_1^i|},$$

que corresponde al punto de anclaje del cable en el otro lado de la polea.

Una vez definidos los puntos de anclaje, se define el vector unitario

$$\mathbf{n} = \frac{\bar{\mathbf{p}}_0^i + \bar{\mathbf{p}}_1^i}{|\bar{\mathbf{p}}_0^i + \bar{\mathbf{p}}_1^i|}$$

al que se denominará vector normal de la polea, y que está dirigido en la dirección de la bisectriz del ángulo formado por los dos vectores $\bar{\mathbf{p}}_0$ y $\bar{\mathbf{p}}_1$. A este ángulo se le denomina habitualmente *ángulo de contacto de la polea con el cable*, y se denotará por β . Este vector \mathbf{n} permite almacenar la información relativa a la dirección de los vectores $\bar{\mathbf{p}}_k$ a lo largo de la simulación.

4.2. INTERACCIÓN MECÁNICA CON EL ENTORNO

Como se indicó en el Apartado 3.2.2, para conseguir la integración del modelo de polipasto que se ha propuesto en un sistema mecánico más amplio se utilizan las entradas y salidas del modelo de polea. La polea actúa, en cierta manera, como interfaz entre el entorno y el modelo de polipasto, ya que actúa como transmisor de la fuerza mecánica entre los cables y los sólidos a los que está sujeto el polipasto. Por tanto, para poder simular una polea es necesario definir la manera en que interactúa con el entorno y su evolución a partir de esta interacción.

La simulación de los elementos mecánicos de la escena es un problema complejo en si mismo, para el que existen diferentes metodologías. Por este motivo, no resulta sencillo proponer un procedimiento concreto para la implementación de la interacción entre el modelo de polipasto y los modelos mecánicos del resto de los objetos de la escena.



Figura 4.2: *Para la integración de un modelo de polipasto en una simulación es necesario poder transmitir las fuerzas sobre los sólidos del sistema. Esto permite, por ejemplo, la elevación de una carga.*

Se supondrá, al menos, que el entorno virtual se modela como un sistema multicuerpo, en el que diferentes sólidos rígidos o flexibles interactúan por medio de enlaces cinemáticos y de contactos. Para una revisión en mayor profundidad los textos de Shabana (Shabana, 2001) y García de Jalón y Bayo (García de Jalón and Bayo, 1994) ofrecen sendas monografías muy completas al respecto.

A continuación se detalla, en primer lugar, la forma en que el cable influye sobre el comportamiento de la polea. Posteriormente, se analiza la forma en que la polea influye en el entorno.

4.2.1. Evolución del estado de la polea

La variable que determina el estado de la polea, su velocidad angular ω , es una variable continua, por lo que el modelo dinámico se va a expresar por medio de la ecuación de movimiento de esta variable. Para ello se considerarán los momentos que actúan sobre el disco de la polea en la dirección de su eje de rotación \mathbf{e}_0 ; el momento ejercido por el cable, el rozamiento

de la polea con su eje y el momento de inercia cuando existe una velocidad angular en el sólido al que está anclada.

En primer lugar, la polea se encuentra sometida a las tensiones ejercidas por el cable sobre ella, \mathbf{t}_0 y \mathbf{t}_1 . Para calcular el momento que actúa sobre la polea debido a estas tensiones, se consideran por separado las fuerzas perpendiculares al plano de la polea y las fuerzas contenidas en éste. Para determinar estas fuerzas se proyectarán las tensiones sobre cada uno de los vectores de la base local definida por (4.1).

$$\mathbf{t}_0 = (\mathbf{t}_0\mathbf{b}_1)\mathbf{b}_1 + (\mathbf{t}_0\mathbf{b}_2)\mathbf{b}_2 + (\mathbf{t}_0\mathbf{b}_3)\mathbf{b}_3 \quad (4.4)$$

$$\mathbf{t}_1 = (\mathbf{t}_1\mathbf{b}_1)\mathbf{b}_1 + (\mathbf{t}_1\mathbf{b}_2)\mathbf{b}_2 + (\mathbf{t}_1\mathbf{b}_3)\mathbf{b}_3 \quad (4.5)$$

Las tensiones que actúan en el plano de la polea, que generan un momento a lo largo del eje de giro de ésta, serán

$$\mathbf{t}_{0,t} = (\mathbf{t}_0\mathbf{b}_2)\mathbf{b}_2 + (\mathbf{t}_0\mathbf{b}_3)\mathbf{b}_3 \quad (4.6)$$

$$\mathbf{t}_{1,t} = (\mathbf{t}_1\mathbf{b}_2)\mathbf{b}_2 + (\mathbf{t}_1\mathbf{b}_3)\mathbf{b}_3 \quad (4.7)$$

Sea una polea \mathcal{P}^i que no sea un nodo terminal, y sean las tensiones aplicadas sobre la polea \mathbf{t}_0 y \mathbf{t}_1 . En primer lugar se proyecta cada una de las dos tensiones sobre el plano de la polea, definido por los vectores \mathbf{b}_2^i y \mathbf{b}_3^i . Para ello, se calcula el producto escalar de \mathbf{t}_0^i y \mathbf{t}_1^i con los vectores que forman una base plano de la polea \mathbf{b}_2^i y \mathbf{b}_3^i , obteniendo en este sistema de referencia.

Estas tensiones se aplican sobre los puntos \mathbf{p}_0^i y \mathbf{p}_1^i , generando un momento a lo largo del eje \mathbf{e}_0 (véase la Figura 4.3)

$$\boldsymbol{\tau}_e = \bar{\mathbf{p}}_0 \times \mathbf{t}_{0,t} + \bar{\mathbf{p}}_1 \times \mathbf{t}_{1,t}. \quad (4.8)$$

Por otra parte, a causa del rozamiento debido a la rotación de la polea, aparece un momento que se opone al giro de la polea $\boldsymbol{\tau}_r$. Este rozamiento es proporcional a la velocidad angular de la polea, con constante de proporcionalidad μ . El momento debido al rozamiento vendrá dado por

$$\boldsymbol{\tau}_r = -\mu\omega\mathbf{e}_0. \quad (4.9)$$

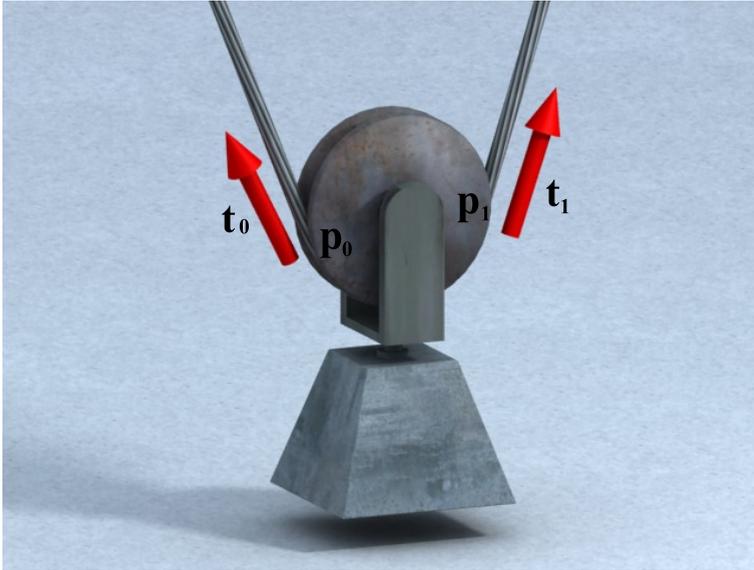


Figura 4.3: La tensión del cable ejerce una fuerza sobre el disco de la polea que puede generar un momento.

Si la masa de la polea es suficientemente grande, puede considerarse además el momento de inercia τ_ω , debido al giro de la polea en el espacio ω que resultará de la velocidad de giro del disco respecto a \mathbf{e}_0 y de la velocidad angular del sólido al que se encuentra anclada la polea.

La evolución de la velocidad angular de la polea vendrá dada por la ecuación diferencial de primer grado

$$\frac{1}{2}mR^2\dot{\omega} - \tau_e + \tau_r + \tau_\omega = 0 \quad (4.10)$$

que expresa la conservación del momento angular de la polea.

4.2.2. Acción de la polea sobre el entorno

Una polea \mathcal{P} proporciona entre sus salidas una fuerza \mathbf{F} y un momento τ que resultan de la aplicación de las fuerzas del cable sobre ella. Si la polea se encuentra anclada a un punto fijo en el sistema de referencia del mundo,

o tiene una trayectoria definida explícitamente, no ligada a ningún objeto, entonces estas salidas se descartan, ya que no tienen ninguna influencia sobre los objetos de la escena.

Si por el contrario la polea se considera anclada a un sólido \mathcal{S} sobre un punto $\bar{\mathbf{p}}$, expresado en coordenadas locales del sólido, entonces la posición de la polea vendrá dada por $\mathbf{P} = \mathbf{R} + \mathbf{A}\bar{\mathbf{p}}$, donde \mathbf{R} y \mathbf{A} son la posición y la matriz de orientación del sólido \mathcal{S} .

En este caso, la fuerza \mathbf{F} que ejerce la polea se aplicará directamente sobre el sólido \mathcal{S} sobre el punto $\bar{\mathbf{p}}$. El momento generado se introducirá también como un momento externo aplicado sobre el sólido.

La fuerza resultante aplicada en \mathbf{P} sobre el sólido al que está anclada la polea será la suma de las fuerzas que actúan sobre la polea,

$$\mathbf{F} = \mathbf{t}_0 + \mathbf{t}_1 \quad (4.11)$$

mientras que el momento aplicado sobre el sólido vendrá dado por el producto vectorial de la componente perpendicular al plano de la polea de estas fuerzas por los puntos sobre los que se aplican, respecto del centro del sólido. Estas proyecciones vienen dadas por:

$$\mathbf{t}_{0,n} = (\mathbf{t}_0 \mathbf{b}_1) \mathbf{b}_1; \quad \mathbf{t}_{1,n} = (\mathbf{t}_1 \mathbf{b}_1) \mathbf{b}_1. \quad (4.12)$$

y los momentos generados sobre el sólido vendrán dados por

$$\boldsymbol{\tau}_0 = \mathbf{t}_{0,n} \times (\mathbf{A}\bar{\mathbf{p}} + \bar{\mathbf{p}}_0); \quad \boldsymbol{\tau}_1 = \mathbf{t}_{1,n} \times (\mathbf{A}\bar{\mathbf{p}} + \bar{\mathbf{p}}_1). \quad (4.13)$$

A estos momentos se deben añadir el momento debido al rozamiento $\boldsymbol{\tau}_r = \mu\omega \mathbf{e}_0$ y el momento de inercia de la polea $-\boldsymbol{\tau}_\omega$. Por tanto, el momento aplicado sobre el sólido será

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_0 + \boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_r - \boldsymbol{\tau}_\omega. \quad (4.14)$$

4.3. CONTROL DEL RANGO DE LAS ENTRADAS DE UNA POLEA

El modelo de polea presentado hasta el momento no impone ninguna restricción a la relación entre las diferentes variables de entrada y de salida.

Sin embargo, una polea real no permite todas las situaciones posibles sin que su comportamiento se vea afectado.

A continuación se revisan dos situaciones en las que el comportamiento de la polea deja de corresponder al modelo presentado. Son situaciones que pueden ser habituales en una simulación interactiva, y que deben ser consideradas para conseguir un comportamiento realista. Estas situaciones corresponden a los casos extremos del ángulo de contacto del cable sobre la polea, β , y de los ángulos de incidencia del cable sobre la polea, α_k .

4.3.1. Ángulo de contacto del cable con la polea

Las dos direcciones de entrada del cable a la polea proyectadas sobre el plano del disco determinan el ángulo de contacto entre el cable y la polea. Este ángulo indica la cantidad de cable que se encuentra en contacto con el disco de la polea, y permite determinar si el cable pierde el contacto con una polea, de forma que ésta deja de formar parte del sistema.

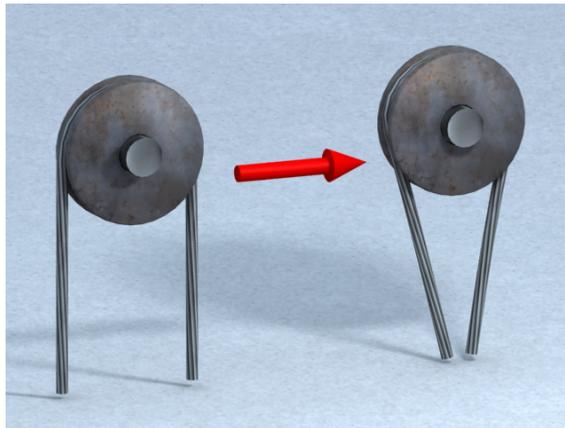


Figura 4.4: *El ángulo entre las direcciones de entrada y salida del cable a la polea no puede ser mayor de 180° .*

En primer lugar, el ángulo de contacto no puede ser mucho mayor de 180° , ya que en este caso se producirá una colisión de los dos segmentos de

cable (véase la Figura 4.4). A continuación veremos como gestionar estas situaciones. Esta situación deberá tratarse por medio del procedimiento de gestión de colisiones que se emplee para los contactos entre segmentos de cable. No obstante, en el marco de este trabajo no se contemplan este tipo de colisiones. En caso de que sea necesario considerar esta situación, se introducirá un rozamiento en la polea, simulando la fricción causada por el contacto entre ambos segmentos de cable.

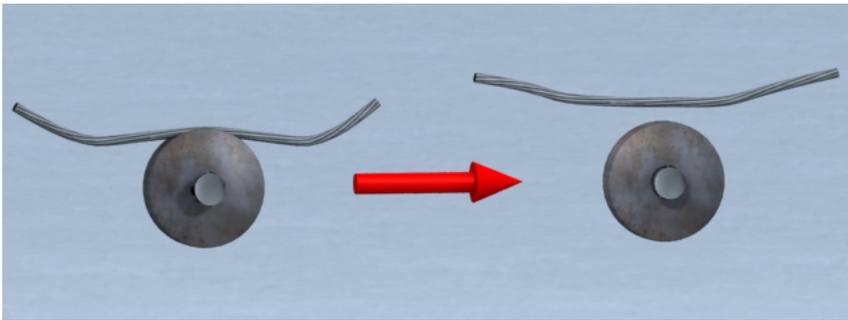


Figura 4.5: *Cuando las direcciones de entrada del cable son paralelas indica que se pierde el contacto entre el cable y la polea.*

Por otra parte, el valor de β debe ser, en cualquier caso, mayor que cero, de forma que exista contacto con la polea en una región no puntual. Cuando el ángulo entre los dos segmentos se anula el cable se hace tangente a la polea. En este caso, se pierde el contacto entre la polea y el cable, de forma que el sistema debe reconfigurarse para considerar esta situación. En este caso, la polea correspondiente dejará de pertenecer al sistema (Figura 4.5).

En el caso en que $R = 0$ no es posible la determinación del ángulo β por medio de los vectores $\bar{\mathbf{p}}_k$. En este caso, se empleará el vector normal a la polea \mathbf{n} , definido en el Apartado 4.1.2 para determinar cuál de los dos ángulos comprendidos entre los vectores \mathbf{t}_0 y \mathbf{t}_1 corresponde al ángulo de contacto de la polea con el cable.

4.3.2. Ángulo de incidencia del cable en la polea

Considérese una polea como una máquina simple que cambia la dirección de aplicación de una fuerza. La polea se deberá situar de forma que su eje de giro sea perpendicular a la fuerza aplicada y a la fuerza resultante, de forma que se evita que el cable roce en las paredes de la garganta de la polea, y que genere momento de fuerza sobre su eje. Partiendo de la suposición de que la tensión del cable se aplica en la dirección tangente al mismo, esto equivale a decir que el cable ha de estar contenido en el plano perpendicular al eje de giro de la polea. En este caso se dirá que el cable está *alineado* con la polea (véase la Figura 4.6).

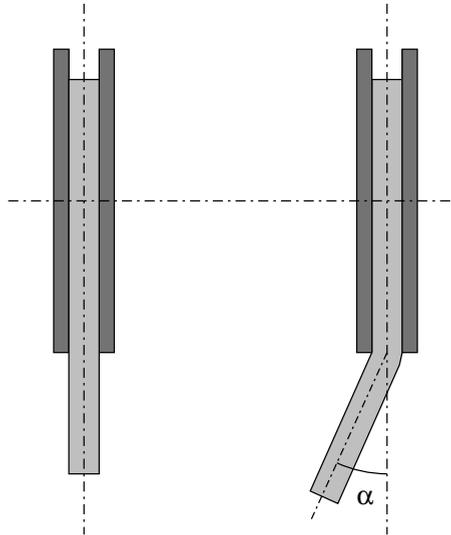


Figura 4.6: Un cable está alineado con una polea cuando su dirección es perpendicular al eje de giro de ésta.

Sin embargo, en el modelo propuesto se permite que el cable entre en la polea desde una dirección arbitraria determinada por las tensiones \mathbf{t}_0 y \mathbf{t}_1 . Esto permite simular situaciones más generales, pero obliga a tener en cuenta las consecuencias de que el cable y la polea no estén alineados. A continuación se presenta un modelo para el aumento de fricción entre

el cable y la polea y el procedimiento que se debe seguir para simular la pérdida del cable por parte de la polea.

Aumento de la fricción entre el cable y la polea

Considérese una polea por la que pasa un cable. Supóngase que el cable, en uno de sus dos cabos no está alineado con la polea. A causa de una incorrecta alineación entre el cable y la polea, el cable roza con la pared de la garganta de la polea provocando una fricción que frena el giro de ésta. A esta fricción se suma el rozamiento debido a la aparición de un momento sobre el rodamiento de la polea en un eje perpendicular a su eje de giro.

Por tanto, en cada instante se comprobará el ángulo entre el eje de giro de la polea \mathbf{e}_0 y la dirección de aplicación de las dos tensiones incidentes sobre ella

$$\alpha_k = \frac{\pi}{2} - \arccos(\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{t}_k), \quad k = 1, 2 \quad (4.15)$$

y se utilizará para calcular un momento que se opondrá al giro de la polea

$$\boldsymbol{\tau}_{\alpha_k} = \mu \alpha_k \omega \mathbf{e}_0 \quad (4.16)$$

donde μ es el coeficiente de rozamiento.

El producto $\mu \alpha_k \omega$ puede sustituirse por una función creciente $\tau(\alpha_k, \omega)$ que exprese la dependencia de la magnitud del rozamiento respecto al ángulo α_k y a la velocidad angular de la polea.

Pérdida del cable

La situación anterior considera el efecto en la dinámica de la polea de una desviación del cable respecto de la posición *ideal*. Sin embargo, esta modificación en el modelo de rozamiento no cambia el comportamiento general del sistema. Pero si alguno de los dos ángulos α_k crece acercándose a $\pi/2$, el cable puede acabar apoyándose sobre el borde de la garganta y saliéndose de ésta.

Cuando esto ocurra durante la simulación de un aparejo, los dos segmentos de cable comunicados por la polea en cuestión se unirán en un único segmento de cable y la polea que ha perdido el cable dejará de actuar.

Para determinar cuándo debe ocurrir esta situación se considerará un límite para la desviación admisible del ángulo para el trabajo de una determinada polea con un cable, α_{max} . Este valor dependerá del diámetro del cable y de las dimensiones de la garganta de la polea.

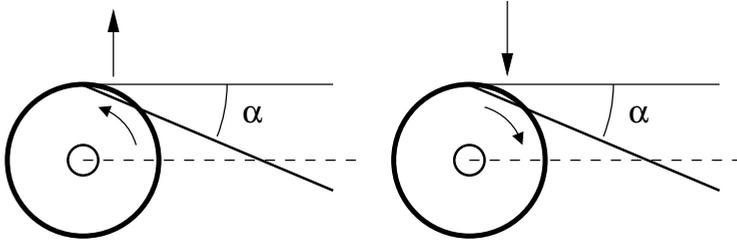


Figura 4.7: La dirección de giro de la polea puede influir en la salida del cable de la garganta.

Este valor puede considerarse independiente de la velocidad angular de la polea. Sin embargo, cuando el tramo de cable esté *entrando* a la polea, el rozamiento de éste con la pared de la garganta empujará al cable hacia fuera, de forma que la salida del cable de la garganta se producirá con un ángulo menor que en el caso en que el cable está alejándose de la polea. La Figura 4.7 muestra ambos casos.

Por este motivo, puede considerarse un valor de corrección α_c , cuyo valor será positivo cuando el cable esté acercándose a la polea, será negativo cuando se esté alejando se tomará como negativo y valdrá cero cuando la polea no esté girando. A cada paso de simulación se comprobará si $\alpha_k + \alpha_c > \alpha_{max}$. Si se cumple esta condición se simulará la salida del cable de la garganta de la polea eliminando la polea del polipasto.

4.4. MODIFICACIONES SOBRE EL MODELO

El modelo presentado contempla la mayoría de factores relevantes en la dinámica de una polea. Sin embargo, puede ser conveniente la consideración de modelos más sencillos, realizando algunas suposiciones adicionales sobre

el sistema. A continuación se considera la posibilidad de eliminar la masa y el radio de las poleas. Esta última suposición permitirá definir un modelo para la simulación de contactos con objetos del escenario.

Poleas sin masa ni rozamiento La primera simplificación que se realiza es la consideración de poleas sin masa ni rozamiento. Esta suposición puede aplicarse en algunas situaciones en las que la velocidad del paso del cable por las poleas sea suficientemente baja como para que el rozamiento y la aceleración de la polea sean despreciables.

Esta suposición, da lugar a que la tensión sea la misma a ambos lados de la polea, de forma que $|\mathbf{t}_0| = |\mathbf{t}_1|$. Esta igualdad puede tener dos implicaciones sobre el modelo global.

En primer lugar, si se considera tensión variable a lo largo del cable, obligará a la resolución de un sistema de ecuaciones lineal para determinar cuál es la tensión del cable en cada nodo. Dependiendo del modelo de cable empleado esto puede dar lugar a un sistema indeterminado, y no tener por tanto solución.

En segundo lugar, puede considerarse la tensión constante a lo largo de todo el cable. Esto da lugar a un modelo mucho más sencillo, en el que el cálculo de la tensión se realiza de forma global teniendo en cuenta el estado de cada segmento de cable (se volverá sobre este tema en el Capítulo 5, con un análisis de los modelos de cable que pueden ser empleados bajo esta situación, y con un modelo especialmente eficiente basados en esta suposición).

Poleas puntuales Otra simplificación adicional que puede considerarse es la eliminación de los radios de las poleas. Esta simplificación puede realizarse para el cálculo de la geometría de la polea, o también para el cálculo de la dinámica de la misma.

Si únicamente se elimina el radio en la geometría de la polea, esta simplificación supone la consideración del mismo punto de contacto para ambos segmentos de cable unidos por una polea. Esto elimina la aparición de momento sobre el sólido anclado a la polea.

Si además se elimina en el cálculo de la dinámica de la polea, no tendrá sentido la consideración de un momento de inercia ni de una velocidad angular en la polea. Por tanto, se dará además la situación de la polea sin masa.

Modelado de un contacto Una posibilidad que ofrece el modelo de polea es la simulación de un contacto entre un cable y una arista de un objeto del escenario. Cuando un cable colisiona con un objeto, las fuerzas de contacto impiden que el cable avance dentro del objeto. Esta situación puede formularse como una obligación a que el cable pase por el punto de contacto.

Una polea puntual permite modelar adecuadamente esta situación y determinar, además, el instante de finalización del contacto, gracias a la comprobación del ángulo de incidencia del cable descrito en el Apartado 4.3.1.

Este contacto tendrá como característica propia el hecho de que su posición a lo largo de la arista en contacto puede variar debido a las fuerzas tangenciales sobre la superficie de contacto. En el Apartado 8.1.2 se detalla el procedimiento a seguir para simular esta situación.

4.5. CONCLUSIÓN

En el presente capítulo se ha propuesto un modelo dinámico para la simulación de una polea. Este modelo corresponde a uno de los módulos definidos en el modelo abstracto presentado en el Capítulo 3. El modelado de la polea se realiza a partir de la conservación del momento angular, obteniendo un modelo sencillo y eficiente.

Frente a la mayoría de modelos existentes, que únicamente consideran la dinámica de poleas como un problema plano, el modelo presentado permite la simulación tridimensional de una polea. Esto permite considerar el ángulo de incidencia del cable respecto al plano de la polea.

Se ha prestado especial atención a las variables de entrada del sistema y al rango de validez del modelo de acuerdo con estas variables. Se han identificado los límites de validez de las variables y se han relacionado estos límites con su significado físico.

Una vez identificadas estas situaciones, correspondientes a los límites de validez del modelo, se han definido modelos para simularlas, garantizando así un comportamiento robusto del modelo. En particular, por medio del modelo propuesto es posible simular la pérdida del cable por parte de la polea.

En el marco de la metodología propuesta, el desarrollo de este modelo supone la concreción del modelo dinámico del subsistema de tipo *Polea*. Este modelo, junto con los modelos de segmento de cable que se definirán en los próximos capítulos, se empleará para la simulación de un polipasto.

Resumen de las contribuciones de este capítulo

El modelo presentado, por tanto, contribuye a la consecución de los objetivos de la investigación

- Presenta un modelo dinámico de polea que permitirá simular un polipasto por medio de la metodología propuesta.
- El modelo dinámico considera el comportamiento tridimensional del sistema y el rozamiento de las poleas.
- Se han desarrollado modelos para gestionar los extremos de validez del modelo, garantizando así su robustez y flexibilidad.
- El modelo permite simular situaciones en las que el cable se sale de la polea.

MODELOS PARA LA SIMULACIÓN DE CABLES CON LONGITUD VARIABLE

En la modularización del sistema propuesta en el Capítulo 3 queda pendiente la definición de modelos dinámicos para la simulación de los segmentos de cable. La dinámica de un cable puede modelarse por medio de numerosas técnicas y metodologías. No obstante, el modelo abstracto ha puesto de manifiesto que, para que un modelo dinámico sea adecuado para la simulación de un polipasto, es necesario que permita la simulación del movimiento de los extremos del cable y la variación de su longitud.

En la revisión de los modelos existentes para la simulación de cables realizada en el Capítulo 2 quedó patente que la variación de la longitud del cable es un problema tratado desde una perspectiva de análisis de sistemas mecánicos, por medio de modelos definidos para situaciones particulares. Por otra parte, en el ámbito de los modelos destinados a la simulación en entornos virtuales no se han publicado hasta el momento modelos que consideren este proceso.

En este capítulo se proponen dos nuevos modelos para la simulación de cables que permiten la variación de la longitud en sus extremos. En primer lugar se presenta un modelo de cable sin masa que permite una simulación extremadamente eficiente y que puede ser empleado cuando el resto de alternativas no sean viables. En segundo lugar se presenta un modelo basado en un sistema de partículas con longitud variable y se abordan las

principales dificultades que presenta este problema.

5.1. MODELO DE CABLE SIN MASA

En la revisión de los modelos utilizados para la simulación de cables de elevación se vio que, con frecuencia, el problema se resuelve por medio de la utilización de un péndulo simple en el que se desprecia cualquier oscilación. En dicho análisis se revisó el trabajo de Servin y Lacoursière (Servin and Lacoursière, 2007) en el que proponen un modelo de cable y poleas basado en la consideración del cable como un cuerpo elástico, también sin masa y sin oscilación.

El principal inconveniente de este modelo es la estrecha relación que existe entre la formulación de la elasticidad en el modelo y la formulación del sistema multicuerpo empleada. Debido a la utilización de enlaces cinemáticos, que no permiten considerar la elasticidad, utilizan una técnica de regularización del enlace para determinar esta propiedad del cable. Esto limita la utilización de diferentes metodologías de modelado del sistema multicuerpo que se incluye en la formulación, así como la utilización de bibliotecas de programación que no permitan la ampliación de sus enlaces.

A continuación se presenta un nuevo modelo de cable sin masa que puede considerarse como una formulación más general del modelo propuesto por Servin y Lacoursière. El planteamiento que es más general en el sentido de que es aplicable a cualquier metodología de modelado de los sistemas multicuerpo y tiene la ventaja adicional de que puede implementarse fácilmente utilizando la interfaz de programación de cualquier biblioteca de dinámica de sistemas multicuerpo.

5.1.1. Simulación del cable por medio de un resorte elástico

Considérese un segmento de cable \mathcal{C} . La configuración más simple que puede considerarse es un segmento de recta que une sus dos extremos $\mathbf{p}_0(t)$

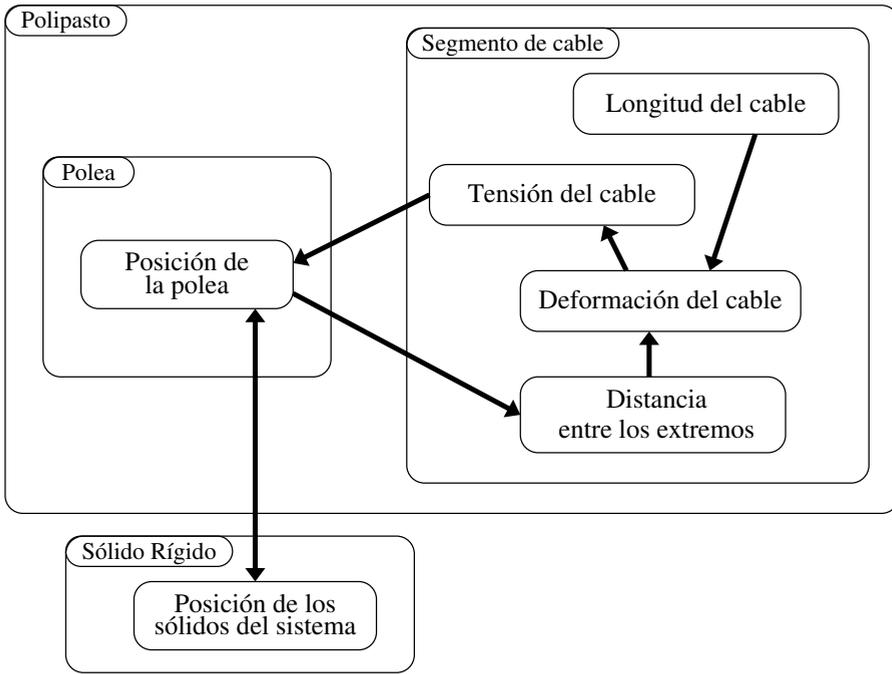


Figura 5.1: Relaciones consideradas en el sistema formado por un cable elástico sin masa y un conjunto de poleas.

y $\mathbf{p}_1(t)$. Esta configuración vendrá dada por (5.1),

$$\mathbf{u}(x, t) = \frac{(L - x)\mathbf{p}_0(t) + x\mathbf{p}_1(t)}{L}, \quad x \in [L_1, L_2], \quad (5.1)$$

y corresponde a la configuración de equilibrio estático en ausencia de fuerzas externas sobre el cable. La posición de las poleas determina la longitud real del segmento de cable en cada instante.

En este modelo, el cable se considera elástico, pero inflexible y sin masa, por lo que no se consideran oscilaciones de los puntos del cable en ninguna dirección, ni longitudinal ni transversal. Sin embargo, debido a su elasticidad su longitud sí puede variar, causando la aparición de una tensión longitudinal en el mismo. La Figura 5.1 muestra los elementos involucrados en este modelo y las relaciones consideradas.

Cálculo de la tensión del cable

El modelo de deformación longitudinal que se propone considera el cable como un muelle (Antman, 2005). Gracias a la ley de Hooke, es posible obtener la tensión del segmento de cable, a partir de la diferencia entre la longitud real, deformada, y la longitud de referencia del mismo.

De acuerdo con la teoría de elasticidad, la constante de rigidez del cable vendrá dada por la longitud L , la sección transversal A y el módulo de Young E del cable, por medio de la expresión $k = EA/L$ (Filonenko-Borodich, 1968; Timoshenko and Goodier, 1975).

Si se denota la distancia euclídea entre los extremos del segmento como $l = |\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0|$ y $\mathbf{d} = (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0)/l$ y el estiramiento del cable respecto de su longitud de referencia como $\delta L = l - L$, la tensión T se calcula a partir de la deformación del cable

$$\epsilon = \frac{\delta L}{L} \quad (5.2)$$

por medio de la expresión

$$T = \begin{cases} EA\epsilon & \text{si } \epsilon > 0 \text{ y } T > 0 \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases} \quad (5.3)$$

La aplicación de las entradas y salidas del modelo de segmento de cable se realizará de la siguiente manera. Las posiciones de los extremos \mathbf{p}_0 y \mathbf{p}_1 se aplican de acuerdo con las expresiones anteriores, para determinar el valor de l . Las velocidades v_0 y v_1 proporcionan la variación de la longitud de referencia del cable $\dot{L} = v_0 + v_1$, lo que permite simular la variación de la longitud total de cable que se encuentra entre dos poleas a causa del giro de éstas.

Por otra parte, este modelo permite obtener de forma sencilla y eficiente las salidas \mathbf{T}_0 y \mathbf{T}_1 , correspondientes a las fuerzas que se aplica sobre estas poleas. La tensión en los extremos vendrá dada por

$$\mathbf{T}_0 = T\mathbf{d}, \quad \mathbf{T}_1 = -T\mathbf{d}.$$

5.1.2. Simulación de un polipasto

La simulación de un polipasto por medio de este modelo de segmento de cable se realiza considerando una sucesión de segmentos de cable, comunicados por medio de poleas. Cada segmento de cable \mathcal{C}^i tiene su propia longitud de referencia L^i , su propia longitud deformada l^i y su propia deformación $\epsilon^i = (l^i - L^i)/L^i$.

A partir de estos valores, de las tensiones \mathbf{T}_k^i y de la variación de la longitud de referencia de cada segmento de cable, que puede calcularse como

$$\dot{L}^i = v_0^i + v_1^i \quad (5.4)$$

es posible obtener la evolución de la posición de las poleas y la evolución de la longitud de referencia de cada segmento de cable.

Simulación con poleas sin fricción

En caso de considerarse poleas sin fricción, como las descritas en el Apartado 4.4, el modelo abstracto de *segmento de cable* requerirá una variable de entrada adicional, correspondiente a su tensión T^i .

Si las poleas no tienen fricción, entonces la tensión a ambos lados de cada polea será idéntica, por lo que todo el cable, comprendido por los diferentes segmentos de cable, tendrá la misma tensión. En este caso, se considerarán la longitud y la tensión del cable como una variable del modelo de polipasto \mathcal{A} .

Dado que la longitud total de referencia del cable es una cantidad conocida, dada por $L = \sum L^i$, es posible determinar la deformación del cable como un único elemento elástico, por medio de su longitud total deformada $l = \sum l^i$. A partir de estos valores se obtiene la tensión T a la que están sometidos todos los diferentes segmentos de cable que componen el polipasto, por medio de (5.3). Esta tensión será considerada como una variable del modelo de segmento de cable \mathcal{C}^i , que se empleará para el cálculo de las fuerzas a aplicar sobre las poleas \mathbf{T}_0^i y \mathbf{T}_1^i por medio de (5.2) y (5.4).

5.1.3. Principal contribución del modelo

El modelo de poleas sin fricción presenta las mismas propiedades que el modelo presentado por Servin y Lacoursière (Servin and Lacoursière, 2007). En consecuencia, también impone una restricción a la posición de los puntos \mathbf{P}^i de las poleas de forma que $\sum l^i < L$.

Sin embargo, en el nuevo modelo que se ha propuesto, la implementación de la restricción se realiza por medio de la aplicación de fuerzas externas sobre los sólidos, por lo que no afecta a la metodología elegida para el modelado del sistema mecánico compuesto por los sólidos del entorno. Esto hace, además, que la implementación del modelo propuesto aquí sea más eficiente, al no introducir restricciones en el sistema algebraico-diferencial que describe la dinámica del sistema multicuerpo (Shabana, 1998; Servin and Lacoursière, 2007).

Por otra parte, la introducción de la fricción en el modelo de poleas supone una novedad respecto al modelo de Servin y Lacoursière, y permite la simulación de aspectos como la pérdida de tensión a lo largo del cable en maniobras de elevación (Shapiro et al., 1999), dando un mayor realismo a la simulación.

Este modelo, sin embargo, no reproduce vibraciones transversales del cable, ni la formación de la catenaria a causa del peso del propio cable. A continuación se propone un nuevo modelo que permite simular estos efectos y que presenta, como principal novedad, la posibilidad de variar la longitud del cable, permitiendo su utilización en el modelo de polipasto propuesto en el Capítulo 3.

5.2. SISTEMA DE PARTÍCULAS CON LONGITUD VARIABLE

De acuerdo con los objetivos de esta investigación, el modelo de cable sin masa es insuficiente ya que no permite la simulación de las oscilaciones transversales de los cables. Por otra parte, los modelos revisados en el Capítulo 2 que consideran dicha oscilación no permiten la variación de la

longitud del cable en la mayoría de casos.

Se va a proponer un modelo de cable que permite la variación de la longitud basado en la descripción del sistema por medio de un sistema de partículas. En esta representación, toda la masa del cable se concentra un número finito de puntos que se unen entre sí por medio de resortes elásticos.

A partir de la definición de *segmento de cable* del Apartado 3.2.3 se va a considerar un tramo de cable suspendido por sus extremos, que vendrán dados por las entradas del modelo abstracto \mathbf{p}_0 y \mathbf{p}_1 .

Un segmento de cable se modela por medio de un sistema formado por $M + 1$ partículas. El estado del sistema viene determinado por la posición de las partículas, \mathbf{r}_k , y su velocidad $\mathbf{v}_k = \dot{\mathbf{r}}_k$, para $k = 0, \dots, M$.

Cada par de partículas consecutivas, correspondientes a las posiciones \mathbf{r}_k y \mathbf{r}_{k+1} , están unidas por medio de un resorte elástico longitudinal. Sobre cada partícula, además, un resorte elástico torsional se opone a la flexión del cable. La Figura 5.2 muestra el sistema compuesto por partículas de masa puntual y resortes elásticos.

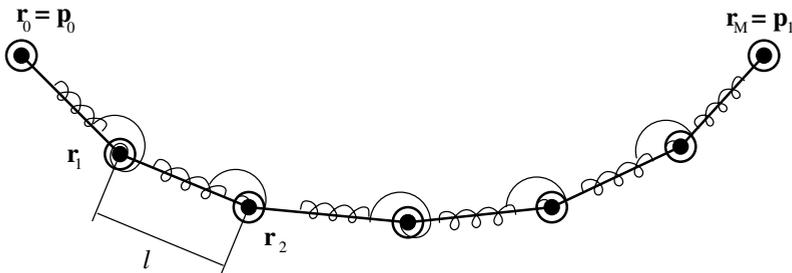


Figura 5.2: *Figura del cable modelado por medio de partículas.*

A la longitud del cable sin deformar, L , se la denomina *longitud de referencia* del segmento de cable. Se considerará que la longitud de todos los resortes elásticos es la misma $\ell_k = \frac{\ell}{M}$, $\forall k$, y en adelante se denotará por ℓ . Considérese el espacio tridimensional \mathbb{R}^3 y una base ortonormal orientada positivamente $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$. Se denominará *configuración del sistema* al conjunto de puntos ocupados por las partículas en un momento determinado.

A la configuración del sistema dada por

$$\mathbf{p}_0 = 0; \quad \mathbf{p}_1 = L\mathbf{x}; \quad \mathbf{r}_i = i\ell\mathbf{x}, \quad i = 1, \dots, M - 1,$$

en la que todos los resortes están en reposo, se la denomina *configuración de referencia del sistema*.

Entradas y salidas del sistema

Con el fin de poder aplicar la metodología propuesta en el Capítulo 3, es necesario describir la forma en que este modelo corresponde a un elemento de la clase *segmento de cable*. Las entradas del sistema correspondientes a las posiciones de los extremos \mathbf{p}_0 y \mathbf{p}_1 se emplean para definir condiciones de contorno del sistema, que vendrán dadas por $\mathbf{r}_0 = \mathbf{p}_0(t)$ y $\mathbf{r}_M = \mathbf{p}_1(t)$. Esto reduce el número de partículas del sistema, considerándose en adelante que únicamente tiene las $M - 1$ partículas correspondientes a los nodos \mathbf{r}_i , $i = 1, \dots, M - 1$.

Por medio de las fuerzas internas debidas a los resortes elásticos y de las fuerzas externas que puedan actuar sobre cada partícula, la evolución del sistema se obtiene integrando las ecuaciones de movimiento planteadas por medio de la Segunda Ley de Newton.

Las fuerzas aplicadas sobre los puntos \mathbf{p}_0 y \mathbf{p}_1 , causadas por el primer y último resortes lineales y por los resortes torsionales situados sobre las partículas \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_{M-1} , se tomarán como las salidas del modelo de *segmento de cable*, \mathbf{T}_0 y \mathbf{T}_1 .

Sin embargo el modelo de partículas no considera la variación de la longitud del cable, necesaria para poder considerar las variables de entrada v_0 y v_1 . Por este motivo es necesario proponer un modelo de variación de la longitud para cables modelados por medio de esta metodología.

A continuación se propone un modelo que se basa en la incorporación de nuevas partículas en los extremos del segmento de cable cuando su longitud aumenta y en la eliminación de partículas cuando ésta se reduce.

5.2.1. Variación de la longitud del cable

Considérese el segmento de cable que une los puntos \mathbf{p}_0 y \mathbf{p}_1 con longitud de referencia L y sean \mathbf{r}_i , $i = 1, \dots, M - 1$ las posiciones de las $M - 1$ partículas que lo constituyen. Sea $\ell_i = \ell = \frac{L}{M}$ la longitud en reposo de cada uno de los resortes elásticos. Supóngase que $v_0 \neq 0$. Es decir, la longitud del cable está variando en el extremo \mathbf{p}_0 . Para el caso en que $v_1 \neq 0$, el procedimiento a seguir es completamente análogo al que se describe a continuación, aplicado al extremo opuesto del segmento de cable.

En primer lugar, para poder prolongar o acortar el cable se utiliza la metodología propuesta por Kamman y Huston (Kamman and Huston, 2001). La metodología se presenta en un modelo de cable basado en la dinámica de sistemas multicuerpo con enlaces cinemáticos. La variación de la longitud se realiza cambiando la restricción del primer enlace del sistema, por medio del cual el cable está unido a un barco.

Aquí, la metodología se aplicará variando la longitud del primer resorte elástico ℓ_0 que une \mathbf{p}_0 y \mathbf{r}_1 . La velocidad de variación del primer resorte vendrá dada por la variable de entrada $\dot{\ell}_0 = v_0$. Sin embargo, la aplicación de esta metodología, basada únicamente en la modificación del valor de ℓ_0 , está limitada a variaciones reducidas de la longitud del cable.

Por una parte, la longitud del primer resorte elástico no puede tomar valores negativos. Por otra parte, ℓ_0 tampoco puede crecer de forma indefinida, ya que el comportamiento del sistema perdería realismo cuando su valor fuer mucho mayor que la longitud del resto de resortes del sistema, ℓ .

Además de estas limitaciones, la reducción del valor de ℓ_0 da lugar a la aparición de problemas numéricos. Los sistemas compuestos por masas bajo la fuerza de resortes elásticos son conocidos como ejemplos de sistemas numéricamente rígidos (*stiff*). Esta rigidez está directamente relacionada con la constante de rigidez de los muelles considerados.

El valor de la tensión del muelle vendrá dado por

$$T = EA\epsilon_0 = \frac{EA}{\ell_0}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{p}_0| - \ell_0)$$

donde A y E corresponden a la sección del cable y a su módulo de Young. Este modelo corresponde a la Ley de Hooke para un muelle con una constante de rigidez inversamente proporcional a su longitud.

Por otra parte, la fuerza debida a los resortes torsionales depende del ángulo θ_1 entre el resorte lineal $\mathbf{p}_0 \leftrightarrow \mathbf{r}_1$ y el resorte lineal $\mathbf{r}_1 \leftrightarrow \mathbf{r}_2$, dado por

$$\theta_i = \arctan \left(\frac{|\mathbf{d}_i \times \mathbf{d}_{i-1}|}{\mathbf{d}_i^T \mathbf{d}_{i-1}} \right) \quad (5.5)$$

donde $\mathbf{d}_i = (\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i)/|\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i|$.

Si $\ell_0 \rightarrow 0$, cualquier pequeña variación en la posición de la partícula \mathbf{r}_1 o del extremo del cable \mathbf{p}_0 darán lugar a un cambio mucho mayor en las fuerzas que actúan sobre \mathbf{r}_1 y sobre \mathbf{r}_2 . Como consecuencia, el sistema de ecuaciones diferenciales podrá sufrir problemas de inestabilidad numérica durante la integración del mismo, especialmente en las situaciones de tensión del cable elevada habituales en maquinaria de elevación.

Por tanto, se debe proponer un procedimiento que permita reducir el impacto de estos problemas durante la variación de la longitud del cable. El objetivo es obtener un procedimiento que permita variar la longitud del cable de forma indefinida, manteniendo el valor de ℓ_0 acotado dentro de un intervalo que evite un comportamiento incorrecto del cable y la aparición de problemas de inestabilidad numérica.

Variación del número de partículas del sistema

Con el objeto de solucionar los problemas anteriores se define un intervalo determinado por dos valores $\ell_- < \ell_+$ que actuarán como límites para la variación de ℓ_0 . Cuando la longitud del primer resorte ℓ_0 alcance cualquiera de los dos extremos del intervalo se añadirá o eliminará una partícula del sistema, de forma que el valor de ℓ_0 se mantenga siempre dentro del mismo intervalo $\ell_0 \in [\ell_-, \ell_+]$.

La variación del número de partículas en el extremo correspondiente a \mathbf{p}_0 requiere la reasignación de los índices que definen cada una de las partículas. Cuando se considere una modificación del número de partículas,

por la inserción o eliminación de una masa, se denotará por medio de prima ‘’ a las posiciones de las partículas tras la modificación. De esta manera, si se inserta una partícula, $\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}'_3 = \mathbf{r}_2, \dots$ y \mathbf{r}'_1 indicará la posición de inserción del nuevo nodo. Por el contrario, si se elimina una partícula $\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_3, \dots$

Inserción de nuevas partículas en el sistema. Cuando la longitud del primer muelle ℓ_0 alcance el extremo superior del intervalo se insertará una nueva partícula. La nueva partícula, \mathbf{r}'_1 , se situará entre \mathbf{r}_1 y \mathbf{p}_0 , unida a éstas por medio de dos muelles. El muelle que une $\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_1$ con \mathbf{r}'_1 tendrá longitud en reposo ℓ , al igual que el resto de resortes del sistema, mientras que la longitud del otro resorte deberá ser $\ell'_0 = \ell_0 - \ell$, para conservar la longitud total del cable. De esta forma se ha reducido la longitud de ℓ_0 impidiendo que crezca de forma indefinida (véase la Figura 5.3).

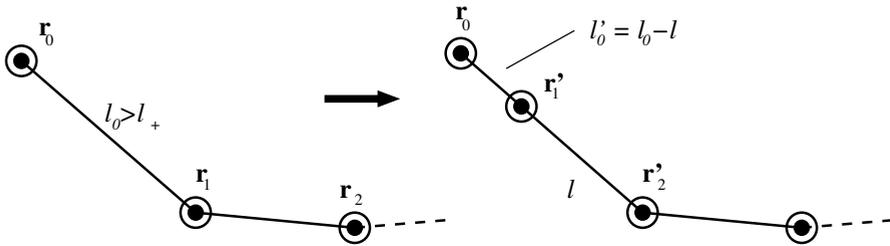


Figura 5.3: Cuando la longitud del primer muelle del cable ℓ_0 supera el extremo superior del intervalo, ℓ_+ , se inserta una nueva partícula reduciendo de nuevo el valor de ℓ_0 .

Eliminación de partículas del sistema. Por otra parte, cuando la longitud del primer muelle ℓ_0 desciende por debajo del valor ℓ_- se realiza el proceso inverso; se elimina la partícula \mathbf{r}_1 de forma que la longitud del primer muelle aumenta a $\ell'_0 = \ell_0 + \ell$, impidiendo que se aproxime a cero. La Figura 5.4 muestra la eliminación de una partícula.

El Algoritmo 5.1 muestra en pseudocódigo el procedimiento que se ha descrito en este apartado para la variación de la longitud del cable por

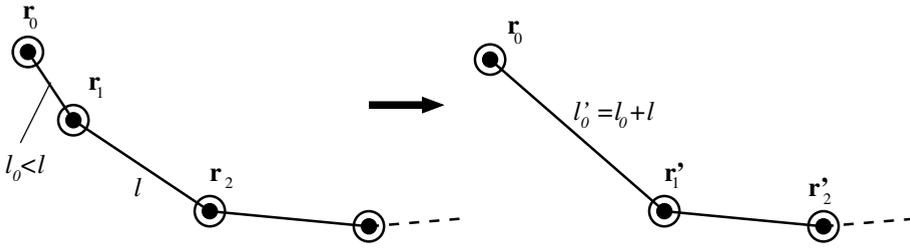


Figura 5.4: Cuando la longitud del primer muelle del cable ℓ_0 es inferior al extremo inferior del intervalo, ℓ_- , se elimina la primera partícula del sistema, \mathbf{r}_1 aumentando de nuevo el valor de ℓ_0 .

medio de la inserción y eliminación de partículas.

5.2.2. Elección del intervalo $[\ell_-, \ell_+]$

Para realizar una adecuada elección de los extremos del intervalo es necesario tener en cuenta los problemas que surgen por la variación de la longitud de ℓ_0 , permitiendo una simulación creíble y numéricamente estable. Deberán evitarse muelles excesivamente cortos que darán lugar a inestabilidades numéricas y muelles excesivamente largos que causarán un comportamiento menos creíble.

Además, se debe procurar un intervalo suficientemente amplio como para garantizar que el proceso descrito actúa de la forma esperada y se debe analizar el impacto que tiene la introducción de una nueva partícula, ya que se provoca una discontinuidad en el sistema que deberá controlarse.

Longitud del intervalo. De acuerdo con el procedimiento descrito, cada vez que se inserta o elimina una partícula la longitud ℓ_0 varía según $\ell'_0 = \ell_0 \pm \ell$. La longitud del intervalo elegido debe garantizar que cuando se inserte una partícula $\ell_0 - \ell > \ell_-$ y cuando se elimine $\ell_0 + \ell < \ell_+$. De lo contrario se producirán situaciones en las que una partícula será insertada y eliminada a cada paso de simulación. Para garantizar esta condición el intervalo debe tener un diámetro mayor que ℓ .

Entradas:

```

 $\ell_0$ : longitud del primer resorte
 $\ell$ : longitud de los resortes del cable
 $\ell_-, \ell_+$ : intervalo de inserción
si  $\ell_0 > \ell_+$  entonces
     $\ell_0 \leftarrow \ell_0 - \ell$ ;
    // Se calcula la posición y velocidad de la nueva partícula
     $\mathbf{p} \leftarrow \mathbf{r}_0 + (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)/2$ ;
     $\mathbf{v} \leftarrow (\dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_0)/2$ ;
    // Se inserta una partícula, con posición  $\mathbf{p}$  y velocidad  $\mathbf{v}$ 
    // delante de la actual partícula 1
    insertar_particula(1,  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{v}$ );
si no
    si  $\ell_0 < \ell_-$  entonces
         $\ell_0 \leftarrow \ell_0 + \ell$ ;
        // Se elimina la actual partícula 1
        eliminar_particula(1);
    fin si
fin si

```

Algoritmo 5.1: *Procedimiento de inserción de una nueva partícula en el sistema*

Es conveniente, incluso, que el diámetro del intervalo no sea demasiado próximo a ℓ para evitar situaciones en las que una partícula es insertada y eliminada un elevado número de veces en poco tiempo. Esto ocurrirá si el valor de v_0 oscila alrededor de 0 en un momento en el que $\ell \simeq \ell_+$. Cada inserción o eliminación introduce un cambio en la topología del modelo que puede ser apreciable en su comportamiento.

Valor de los extremos. La elección de los extremos del intervalo está condicionada principalmente por dos factores. Por una parte, la elección de un valor muy próximo a 0 para el extremo inferior ℓ_- no evita los problemas

de inestabilidad detectados. Por otra parte, la elección de un valor elevado para ℓ_- hace que el valor de $\ell_+ > \ell_- + \ell$ sea también elevado, dando lugar a un comportamiento menos realista y a la aparición de discontinuidades.

A continuación se analiza en profundidad el comportamiento del sistema en función del valor de ℓ_+ y se propone un conjunto de técnicas que permitirán una simulación correcta y creíble.

Continuidad en la dinámica del sistema

La inserción o eliminación de una partícula en el sistema supone una perturbación del mismo cuyo efecto no puede ser despreciado sin un análisis adecuado. Se ha comprobado que la eliminación de partículas con valores de ℓ_- del orden de $\ell/2$ o menores no da lugar a grandes perturbaciones. Esto es suficiente para permitir la simulación del cable de longitud variable. Sin embargo, la inserción de nuevas partículas provoca oscilaciones muy visibles en el cable. A continuación se analiza el problema y se proponen soluciones para evitar este comportamiento.

Considérese un tramo de cable al que se acaba de insertar una partícula \mathbf{r}'_1 entre las partículas \mathbf{r}_0 y \mathbf{r}'_2 . Sea ϵ_0 la deformación del resorte elástico que unía \mathbf{p}_0 y \mathbf{r}'_2 antes de la inserción de la nueva partícula

$$\epsilon_0 = \frac{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0| - \ell_0}{\ell_0} = \frac{|\mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}_0| - \ell_0}{\ell_0}.$$

Si la nueva partícula se inserta en el segmento de recta que une \mathbf{r}_0 y \mathbf{r}'_2 (véase de nuevo la Figura 5.3 de la página 105) a una distancia $\ell'_0 \epsilon_0$ del punto \mathbf{r}_0 , entonces se comprueba fácilmente que las fuerzas de los dos resortes elásticos que actúan sobre \mathbf{r}'_1 se cancelan mutuamente, evitando la aparición de aceleración longitudinal en la nueva partícula.

Sin embargo, esto no deja a las partículas en una situación de equilibrio, ya que los muelles torsionales y la fuerza de la gravedad también introducen energía potencial en el sistema. Como consecuencia de este alejamiento del equilibrio, cuando se inserte una nueva partícula ésta *caerá* hasta la posición de mínima energía.

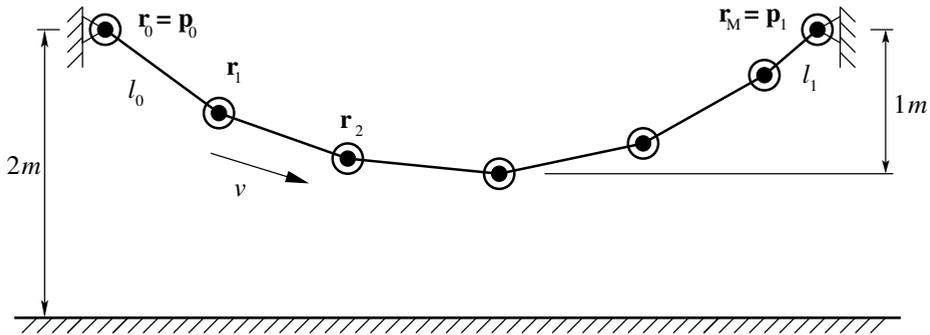
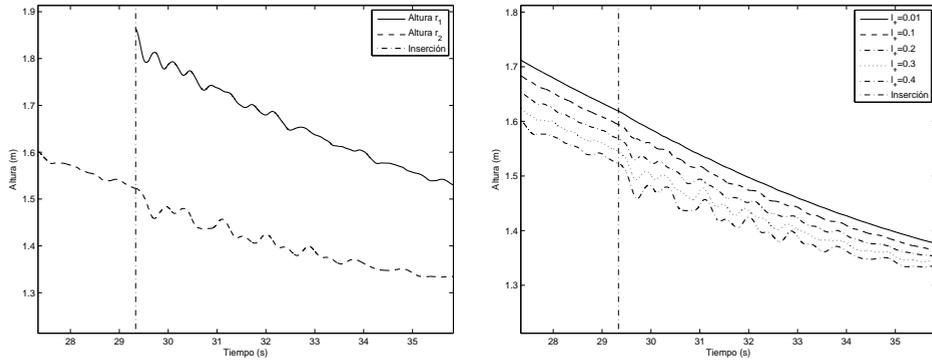


Figura 5.5: Un tramo de cable suspendido por sus extremos, con velocidad longitudinal.

Para mostrar este problema se ha considerado el segmento de cable suspendido por sus extremos de la Figura 5.5. El cable tiene una velocidad longitudinal v , de forma que $v_0 = v$ y $v_1 = -v$. A medida que el resorte ℓ_0 aumenta su longitud se insertarán nuevas partículas en el extremo \mathbf{p}_0 .

La Figura 5.6 (a) muestra la evolución de la altura de las dos primeras partículas, \mathbf{r}'_1 y \mathbf{r}'_2 , en un intervalo de tiempo que contiene el instante de la inserción. Este instante se indica por medio de una línea vertical. En la figura se puede apreciar cómo la altura de la partícula insertada, representada por una línea continua en la figura, *cae* hacia la posición de equilibrio, arrastrando a su vecina y provocando una oscilación en el cable.

Dado que la constante de rigidez de los muelles es inversamente proporcional a su longitud en reposo, cuanto mayor sea la longitud ℓ'_0 tras la introducción de la nueva partícula, mayor será la distancia que recorra la partícula insertada para alcanzar el mínimo de energía potencial. Por tanto, cuanto menor sea el valor de ℓ_+ menos apreciable será la oscilación observada. La Figura 5.6 (b) muestra la oscilación de la partícula \mathbf{r}'_2 tras la inserción de una nueva partícula \mathbf{r}'_1 para diferentes valores de ℓ_+ . Puede apreciarse claramente que la oscilación es mayor cuando la posición de inserción es más alejada del nodo \mathbf{p}_0 .

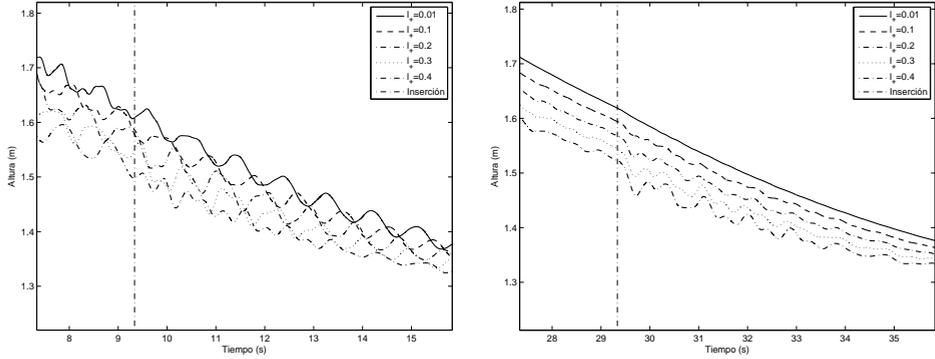


(a) Altura de la partícula insertada r_1' y de la primera partícula vecina a ésta r_2' . (b) Altura de la partícula r_2' , vecina de la insertada, para diferentes valores de l_+ . La oscilación es mayor con valores altos de l_+ .

Figura 5.6: Las alturas de la primera partícula del sistema y de la nueva partícula insertada muestran la aparición de oscilaciones en el sistema (a). Estas oscilaciones son más visibles para valores altos de l_+ (b).

Influencia del estado del sistema. Otro aspecto relevante a tener en cuenta es el estado del sistema en el instante de inserción de una partícula. La influencia del nuevo elemento se apreciará especialmente cuando el sistema se encuentre en reposo o en una situación próxima al reposo. Por el contrario, cuando el sistema se encuentre lejos del estado de reposo, la influencia de la discontinuidad provocada por la nueva partícula será mucho menos apreciable. Si en el momento en que se inserta la partícula el cable está sometido a vibraciones importantes, este movimiento del cable *enmascarará* las vibraciones producidas por la introducción de la partícula en el sistema.

Este comportamiento puede apreciarse en la Figura 5.7 que muestra la oscilación que se produce en la primera partícula r_2' tras la inserción de una nueva partícula en el cable cuando está siendo sometido a una excitación en uno de sus extremos y, de nuevo, la oscilación provocada en el cable en reposo.



(a) *Altura de la primera partícula para diferentes valores de ℓ_+ cuando se inserta una partícula en un cable en movimiento.* (b) *Altura de la primera partícula para diferentes valores de ℓ_+ cuando se inserta una partícula en un cable en reposo.*

Figura 5.7: *La oscilación provocada por la inserción de una nueva partícula apenas es apreciable en un cable en movimiento.*

Se han realizado diferentes experimentos numéricos destinados a determinar la influencia en cables en movimiento y en todos los casos los resultados han sido similares; cuando, en el instante de inserción de la nueva partícula, las partículas del cable oscilan visiblemente, no se aprecia un comportamiento incorrecto en el movimiento del cable.

Teniendo en consideración que el principal objetivo de los modelos que se presentan a lo largo de este trabajo es conseguir una simulación realista, destinada a aplicaciones de realidad virtual, las técnicas que se han desarrollado se centran en evitar las vibraciones observadas en las situaciones próximas al estado de reposo. El motivo es que estas vibraciones son las que mayor pérdida de credibilidad causan en el comportamiento del sistema simulado. A continuación, los Apartados 5.2.3 y 5.2.4 se centrarán en determinar la mejor posición para la nueva partícula con el fin de evitar estas oscilaciones.

5.2.3. Posición de las nuevas partículas

La introducción de una nueva partícula en el sistema da lugar a un conjunto de discontinuidades que afectan a su comportamiento. Causa la aparición de discontinuidades en la energía del sistema y en la dirección de aplicación de las fuerzas internas. En las Figuras 5.6 y 5.7 queda patente que las consecuencias de estos problemas son perfectamente observables a simple vista cuando el sistema se encuentra en un estado próximo al reposo.

Por este motivo, para evitar que la validez del modelo y la calidad visual de la simulación se vean afectadas seriamente, es necesario ajustar la posición y la velocidad de la nueva partícula, de forma que se minimice el impacto sobre la dinámica del sistema. Para ello, la partícula se insertará en la posición que minimice la energía potencial del sistema.

Algunos autores han aplicado esta estrategia para modificar la configuración de un modelo de cable, aunque no con el fin de variar su longitud. Spillmann y Teschner dividen los elementos de cable definidos en su modelo CORDE (Spillmann and Teschner, 2008) con el fin de mejorar la respuesta a las colisiones.

Tras la inserción de un nuevo elemento en el modelo de cable, Spillmann y Teschner hacen bascular el nuevo nodo insertado y el nodo adyacente para conseguir que la configuración que se obtiene tenga la mínima energía potencial posible (véase la Figura 5.8). Sin embargo, el procedimiento propuesto por Spillmann y Teschner plantea dos inconvenientes.

En primer lugar, si bien mejora el comportamiento del sistema, no garantiza la continuidad del mismo. Si, tras la introducción de la partícula \mathbf{r}'_1 , se desplazan ésta y su vecina \mathbf{r}'_2 , entonces la siguiente partícula del sistema, \mathbf{r}'_3 quedará de nuevo en una situación de inestabilidad. Además, para reducir una discontinuidad en la segunda derivada del sistema, se introduce una discontinuidad en las posiciones de las partículas. Esto supone un riesgo desde el punto de vista de la detección de colisiones, además de ser apreciable visualmente en una simulación.

En segundo lugar, al reducir la energía potencial de las dos primeras partículas del sistema, se introduce una amortiguación artificial sobre la se-

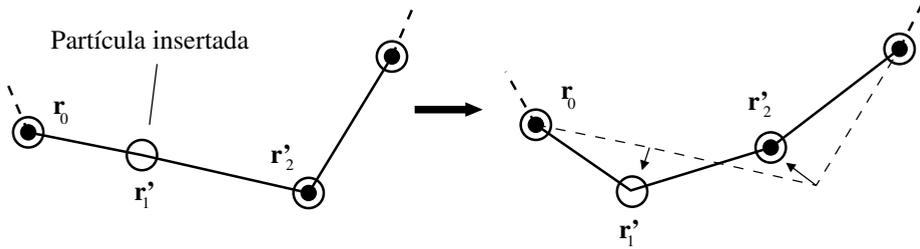


Figura 5.8: En el modelo CORDE (Spillmann and Teschner, 2008), para calcular la posición del nuevo nodo insertado (representado por un círculo vacío) se modifica su posición y la del vecino, minimizando la energía potencial.

gunda partícula. En el marco del modelo CORDE, destinado a situaciones en las que la posición de la cuerda siempre es próxima a la de mínima energía, la amortiguación del sistema puede ser aceptable. Sin embargo, en el caso de cables sometidos a una tensión moderada o grande, esta amortiguación puede resultar apreciable en una simulación interactiva.

A continuación se propone una nueva técnica que permite conseguir un comportamiento sin discontinuidades por medio de una adecuada elección de la posición de la nueva partícula insertada en el sistema. El objetivo que se persigue es determinar un valor para \mathbf{r}'_1 que evite la aparición de las oscilaciones observadas en las trayectorias de las partículas.

Inserción de la partícula en la posición de mínima energía

Considérese de nuevo el segmento de cable formado por partículas tras la inserción de la partícula correspondiente a la posición \mathbf{r}'_1 . Esta partícula se encuentra unida al extremo del cable \mathbf{p}_0 por medio de un resorte de longitud ℓ_0 y a la partícula de posición \mathbf{r}'_2 por medio de otro resorte de longitud ℓ . Sobre cada una de las partículas existe, además, un resorte torsional que fuerza a las partículas a situarse en una línea recta. Dado que no se va a hacer referencia al estado del sistema antes de la inserción, se

Entradas: l_0 : longitud del primer resorte l : longitud de los resortes del cable l_-, l_+ : intervalo de inserción**si** $l_0 > l_+$ **entonces** $l_0 \leftarrow l_0 - l;$

// Se inicializa la posición y velocidad de la nueva partícula

 $\mathbf{p} \leftarrow \mathbf{r}_0 + (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)/2;$ $\mathbf{v} \leftarrow (\dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_0)/2;$

// La nueva partícula se coloca en la posición de mínima energía

 $\mathbf{p} \leftarrow \text{calcular_posicion_me}(\mathbf{p});$ // Se inserta una partícula, con posición \mathbf{p} y velocidad \mathbf{v}

// delante de la actual partícula 1

insertar_particula(1, \mathbf{p} , \mathbf{v});**si no****si** $l_0 < l_-$ **entonces** $l_0 \leftarrow l_0 + l;$

// Se elimina la actual partícula 1

eliminar_particula(1);

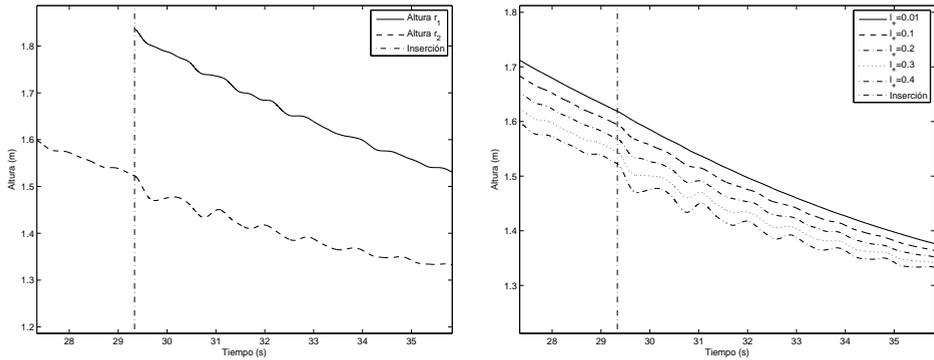
fin si**fin si**

Algoritmo 5.2: *Procedimiento de inserción de una nueva partícula en el sistema en la posición de mínima energía potencial*

prescindirá de las primas ‘’, denotando a las posiciones de las partículas directamente como \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 .

En primer lugar, se analiza la aplicación del método de minimización de la energía descrito anteriormente, aplicado sólo a la partícula insertada. Cuando se inserte un nuevo nodo en el sistema de partículas, se calculará la posición que da lugar a la menor energía potencial de dicha partícula, teniendo en cuenta la energía potencial elástica de los diferentes resortes. El

procedimiento para obtener el mínimo, por medio del descenso por gradiente se describe en el Apéndice B. La velocidad de la partícula insertada \mathbf{r}_1 se interpolará linealmente respecto a las velocidades del extremo del cable \mathbf{p}_0 y \mathbf{r}_2 . El Algoritmo 5.2 muestra en pseudocódigo el procedimiento que se ha descrito en este apartado para la variación de la longitud del cable por medio de la inserción y eliminación de partículas.



(a) Altura de la partícula insertada \mathbf{r}_1 y de la primera partícula vecina a ésta \mathbf{r}_2 . (b) Altura de la partícula \mathbf{r}'_2 , vecina de la insertada, para diferentes valores de ℓ_+ .

Figura 5.9: Las alturas de las partículas del sistema muestran que la inserción de un partícula en la posición de mínima energía también causa oscilaciones en el sistema (a). Las oscilaciones siguen siendo más visibles para valores altos de ℓ_+ (b).

Tras implementar el método se observa, no obstante, que el resultado no mejora sustancialmente. El resultado de la aplicación de este procedimiento se puede apreciar en la Figura 5.9. Por un lado, en la Figura 5.9 (a) se observa que la altura de la nueva partícula descende, debido a la velocidad del cable, pero no se produce una *caída* tan abrupta como en el caso anterior. En este caso la partícula \mathbf{r}_2 , vecina de la partícula insertada, es la que *cae* por no encontrarse en un mínimo de energía potencial.

El comportamiento del método respecto al valor del extremo superior del intervalo ℓ_+ es similar al obtenido por medio de la inserción de la partícula

en el sistema sin la búsqueda del mínimo. Los valores más altos de ℓ_+ dan lugar a mayores oscilaciones, mientras que con valores suficientemente pequeños, el efecto de la inserción de una partícula es casi inapreciable. La Figura 5.9 (b) muestra la trayectoria de la partícula \mathbf{r}_2 para diferentes valores de ℓ_+ .

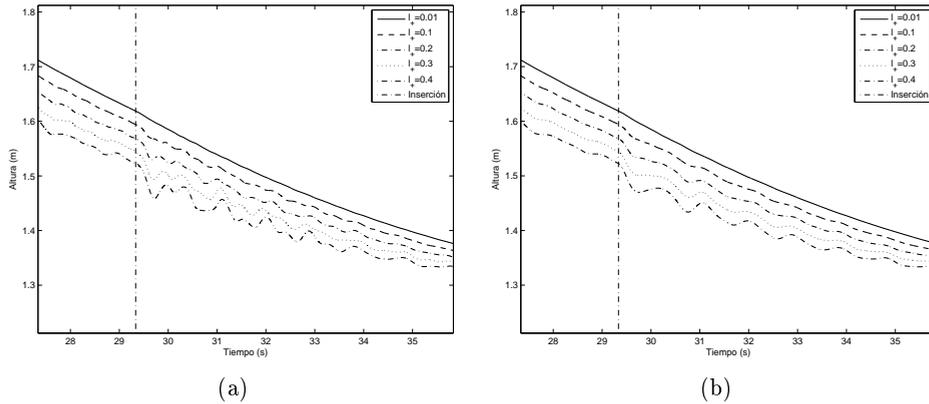


Figura 5.10: *Oscilación de la partícula \mathbf{r}_2 , insertando la partícula en el punto intermedio (a) y por el método de la minimización de la energía (b).*

La comparación de estos resultados con los obtenidos por medio de la inserción directa de la partícula, indican que la minimización de la energía de la partícula insertada no es suficiente para conseguir una mejora en el comportamiento del cable. La Figura 5.10 muestra de nuevo los resultados para la inserción directa de la partícula (a) y la inserción en el punto de mínima energía (b).

Otro inconveniente de esta técnica para insertar las nuevas partículas deriva del hecho de que el modelo está destinado a aplicaciones de realidad virtual y simulación, en las que el cable se representará gráficamente. Si, cuando se inserta una nueva partícula, la longitud del resorte $\ell'_0 = \ell_0 - \ell_+$ es grande, el cambio resultará visible en la representación gráfica, ya que supondrá la aparición de un vértice de forma repentina.

5.2.4. Predicción del punto de inserción

La inserción de la nueva partícula en el punto de mínima energía potencial no es suficiente para controlar el comportamiento del sistema y obtener una simulación creíble. Es necesario, por tanto, buscar mejoras en el procedimiento utilizado.

Para mejorar este método, se va a tomar como referencia el comportamiento del sistema cuando se toma un valor de ℓ_+ muy próximo a ℓ . En los experimentos numéricos llevados a cabo, se ha observado que si la inserción de la partícula se realiza tomando un valor de ℓ_+ muy próximo a ℓ , el comportamiento del sistema es mucho más adecuado y creíble, no produciéndose oscilaciones visibles en el cable.

El motivo para no tomar un valor de ℓ_+ muy próximo a ℓ es que, con los métodos numéricos explícitos aparecen inestabilidades numéricas a causa de la constante de rigidez del primer muelle. Lo que se propone es insertar la nueva partícula en un punto muy próximo al extremo del cable, pero retrasando su integración numérica hasta que la estabilidad está garantizada. De esta manera se evitan la discontinuidad y la inestabilidad numérica debidas a la inserción de la partícula. A continuación se detalla este esquema.

Inserción de una partícula estática

En primer lugar, se consideran dos umbrales superiores para el valor de la longitud del primer resorte ℓ_0 : el valor ℓ_+ considerado anteriormente, y un nuevo valor ℓ_+^0 . Este segundo umbral se tomará $\ell < \ell_+^0 < \ell_+$, muy próximo a ℓ .

Cuando el valor de ℓ_0 supere el umbral ℓ_+^0 se insertará la nueva partícula en la posición de mínima energía, siguiendo el esquema del Apartado 5.2.3, junto con los resortes elásticos asociados.

A partir de este instante, la posición de la nueva partícula \mathbf{r}'_1 se obtendrá resolviendo el problema de equilibrio estático. Para ello se aplica el método del descenso por gradiente, descrito en el Apéndice B, teniendo en cuenta el estado del cable en el instante de tiempo anterior. El procedimiento ite-

rativo se detiene cuando se alcanza la convergencia o cuando se alcanza un número máximo de iteraciones, establecido con anterioridad. En las diferentes simulaciones realizadas, este límite para el número de iteraciones se ha fijado en 10. Sin embargo, en prácticamente todos los casos se ha obtenido convergencia en 6-8 iteraciones.

Tras obtener la nueva posición para esta partícula, se integra el estado del resto de las partículas normalmente. Mientras dure este proceso, a la partícula insertada se la denominará *partícula estática*.

Una vez el valor del nuevo primer resorte ℓ'_0 cumple $\ell'_0 + \ell > \ell_+$ la partícula *estática* se libera, integrando su posición normalmente con el resto de partículas del sistema.

El Algoritmo 5.1 muestra, en pseudocódigo el procedimiento propuesto para la inserción de nuevas partículas utilizando la técnica de predicción de la nueva posición. Por simplicidad, únicamente se muestra el procedimiento para la inserción ante la primera partícula del cable.

Es importante destacar que, en este caso, el método del descenso por gradiente para la minimización de la energía coincide con el método de integración de ecuaciones diferenciales de Euler explícito. Como consecuencia de esto, se desprende que el coste asociado a este proceso se limita al del cálculo de diez pasos de integración de una partícula o, equivalentemente, al cálculo de un paso de integración de diez partículas. Por tanto, el impacto del método propuesto sobre el coste computacional del modelo es muy reducido. Este aspecto se analizará con más detalle en el Capítulo 7.

La ventaja más evidente de este nuevo procedimiento es que se salva la discontinuidad en la representación gráfica del cable. Al aparecer la nueva partícula en un punto muy próximo al extremo \mathbf{p}_0 la sensación visual que proporciona el método es la aparición del nuevo vértice o nodo a través del propio punto \mathbf{p}_0 .

Los experimentos numéricos realizados para analizar el comportamiento del sistema con este procedimiento muestran, además, que la oscilación desaparece completamente, obteniéndose un comportamiento prácticamente idéntico independientemente del valor de ℓ_+ empleado.

Entradas: ℓ_0 : longitud del primer resorte ℓ : longitud de los resortes del cable ℓ_+^0, ℓ_+ : umbrales para inserciónbool `particula_insertada` \leftarrow false;`iniciar_simulacion()`;**while** Simulando **haz** **si** `particula_insertada` == false & $\ell_0 > \ell_+^0$ **entonces**

// Se inicia la partícula y se calcula la posición de mínima energía

 $\mathbf{p}_i \leftarrow \mathbf{r}_0 + (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)/2$; $\mathbf{p}_i \leftarrow \text{calcular_posicion_me}(\mathbf{p})$; // `particula_insertada=true` indica que se ha insertado una partícula `particula_insertada` \leftarrow true; **si no** **si** `particula_insertada` == true **entonces**

// Si se ha insertado una partícula, a cada paso se calcula la posición

 // de mínima energía tomando como iterado inicial el propio \mathbf{p}_i $\mathbf{p}_i \leftarrow \text{calcular_posicion_me}(\mathbf{p}_i)$; **fin si** **fin si** **si** $\ell_0 > \ell_+$ **entonces** // Cuando se supera el valor de ℓ_+ , se inserta definitivamente en el sistema $\ell_0 \leftarrow \ell_0 - \ell$;

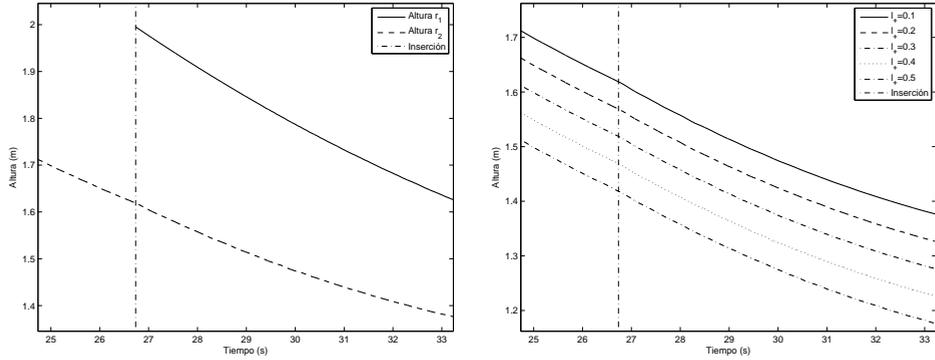
// Se calcula la posición y velocidad de la nueva partícula

 $\mathbf{p}_i \leftarrow \text{calcular_posicion_me}(\mathbf{p}_i)$; $\mathbf{v} \leftarrow (\dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_0)/2$; // Se inserta una partícula, con posición \mathbf{p}_i y velocidad \mathbf{v}

// delante de la actual partícula 1

`insertar_particula(1, \mathbf{p}_i , \mathbf{v})`; **fin si****fin while**

Algoritmo 5.3: *Procedimiento de inserción de una nueva partícula en el sistema con predicción de la posición*



(a) Comportamiento de las partículas insertada y de su vecina con $\ell_+^0 = 0,01$ y $\ell_+ = 0,4$. (b) Altura de la partícula r_2 , vecina de la insertada, para diferentes valores de ℓ_+ , con $\ell_+^0 = 0,01$.

Figura 5.11: Evolución de la altura de las dos primeras partículas con $\ell_+^0 = 0,01$. El procedimiento propuesto que inserta una partícula estática en el sistema permite conseguir una simulación sin oscilaciones.

La Figura 5.11 (a) muestra de nuevo el comportamiento de la partícula insertada y de su partícula vecina para el procedimiento basado en la inserción de una partícula *estática*. La figura corresponde a los valores de $\ell_+^0 = 0,01\ell$ y $\ell_+ = 0,4\ell$. La Figura 5.11 (b) muestra cómo el método permite evitar la aparición de oscilaciones con independencia del valor de ℓ_+ que se emplee. En esta figura se ha empleado un valor de $\ell_+^0 = 0,01\ell$ en todos los casos.

5.2.5. Estabilidad numérica

El procedimiento propuesto para la inserción de partículas permite evitar que la inserción de nuevas partículas cause una inestabilidad numérica. Es decir, el modelo permite la integración del modelo de longitud variable en las mismas condiciones de estabilidad que el modelo con longitud fija.

Sin embargo, esto no impide la aparición de la inestabilidad propia de un cable modelado por medio de un sistema de partículas. Una de las limi-

taciones conocidas de los sistemas de partículas enlazadas por muelles es la inestabilidad numérica de sus ecuaciones de movimiento. La simulación de cables con un elevado módulo de Young darán lugar a unos valores de la constante de rigidez que no pueden ser integrados numéricamente por medio de métodos explícitos. Concretamente, por medio del método de integración de Euler explícito, utilizando un paso de integración de $1/500s$ no ha sido posible simular cables con módulo de Young superior a $E = 2 \cdot 10^6 N/m^2$ y utilizando un paso de integración de $1/1000s$ no se ha podido superar el valor $E = 10^7 N/m^2$.

La utilización de métodos implícitos permite obtener una simulación estable del modelo. Sin embargo, los métodos implícitos presentan ciertos inconvenientes respecto a los explícitos en simulaciones interactivas. Los métodos implícitos involucran el estado futuro del sistema para conocer su evolución. Sin embargo, la aparición de contactos o la imposibilidad de predecir las acciones del usuario, que actúan como entradas del sistema de ecuaciones, suponen dificultades adicionales.

Según se mostrará en el Capítulo 7, la utilización de otras metodologías de modelado alternativas, como los modelos basados en sistemas multicuerpo, suponen un considerable incremento del coste computacional, debido a la complejidad asociada a la integración numérica de las ecuaciones de movimiento.

Por este motivo, es necesario plantear estrategias que, permitiendo una integración eficiente de la dinámica del cable garantice además la estabilidad numérica necesaria para simular maquinaria de elevación. En el Capítulo 6 se aborda este problema por medio de la propuesta de un nuevo modelo para la dinámica de un segmento de cable.

5.2.6. Ventajas y limitaciones del modelo

Se ha propuesto un nuevo modelo de cable basado en un sistema de partículas y resortes elásticos que permite la variación de su longitud. El procedimiento empleado consiste en la introducción y eliminación de partículas en el sistema para controlar la longitud máxima de los resortes.

Gracias al cálculo de la posición de las nuevas partículas es posible evitar las oscilaciones causadas por la discontinuidad introducida en el sistema. El procedimiento propuesto es especialmente necesario en las situaciones en las que el sistema se encuentra en reposo, ya que en estos casos las oscilaciones que se producen resultan inaceptables desde el punto de vista de la credibilidad y la validez del modelo.

Al igual que en los métodos dedicados al refinamiento de sistemas de partículas, el nuevo método de variación de la longitud se basa en el cálculo de un mínimo de la energía potencial. Sin embargo, al modificar únicamente estado de la nueva partícula insertada, el método introduce menos amortiguación y evita la aparición de discontinuidades en las posiciones de las partículas.

Por otra parte, la utilización de partículas *estáticas* permite introducir las nuevas partículas desde el mismo extremo del cable mejorando la representación gráfica. Este procedimiento impide además que la inserción de partículas de lugar a inestabilidades numéricas. Esto permite la utilización estable de métodos numéricos explícitos siempre que el modelo de longitud fija también sea estable.

La estabilidad del modelo basado en sistemas de partículas, con independencia de si se considera longitud variable, tiene limitaciones cuando la tensión es muy elevada. Este problema ya ha sido estudiado en profundidad por diversos autores, y aquí se han confirmado estos análisis.

Queda, por tanto, abierto el problema de la simulación de cables con longitud variable en las situaciones de mayor tensión. Con el fin de evitar la utilización de modelos basados en la metodología de sistemas multicuerpo, computacionalmente más costosos, en el Capítulo 6 se propone un nuevo modelo para la simulación de cables en estas situaciones.

5.3. CONCLUSIONES

El presente capítulo ha abordado el modelado dinámico de un cable, atendiendo a las necesidades detectadas durante el desarrollo del modelo

abstracto definido en el Capítulo 3. Allí se observó que es necesario simular la variación de la longitud del cable en cada extremo, con el fin de establecer la interacción con las poleas.

En primer lugar se ha presentado un modelo que descarta la simulación de las oscilaciones transversales del cable, pero que permite simular la variación de su longitud y su interacción con un conjunto arbitrario de poleas. Desde el punto de vista de su dinámica, las características del modelo son similares a las de otros modelos anteriores que también desprecian la masa del cable. Sin embargo, el modelo propuesto aquí presenta la ventaja de utilizar una formalización más flexible, independiente del modelo de sistema multicuerpo empleado para el resto del sistema mecánico.

En segundo lugar se ha presentado un modelo que representa el cable por medio de un sistema de partículas y resortes elásticos. Sobre este modelo se ha definido un procedimiento para variar su longitud, consistente en la inserción y eliminación de nuevas partículas en los extremos, aplicando técnicas de minimización de la energía potencial habituales en animación de cuerdas. Estas técnicas, sin embargo, daban lugar a la aparición de oscilaciones en el cable y de discontinuidades en su representación gráfica. Utilizando un nuevo procedimiento, que predice la posición de la partícula con anterioridad a su inserción, se han resuelto ambos problemas.

El modelo propuesto en este capítulo representa el primer modelo dinámico de cable con longitud variable en el ámbito de los gráficos por ordenador y la simulación interactiva. Además, en combinación con el modelo de poleas definido en el Capítulo 4 permite completar el modelo de simulación de polipasto, alcanzando así uno de los objetivos principales de este trabajo.

En el ámbito de los gráficos por ordenador, el modelo de polipasto resultante es también el primer modelo que permite simular un sistema arbitrario de poleas considerando además la oscilación transversal del cable.

Resumen de las contribuciones de este capítulo

Los diferentes resultados y contribuciones obtenidos a lo largo del presente capítulo son los siguientes:

- Se ha propuesto un modelo de polipasto con cable sin masa, más flexible en su implementación que los modelos existentes anteriormente.
- Se ha propuesto un nuevo modelo de cable con longitud variable, basado en un sistema de partículas.
- De acuerdo con la bibliografía estudiada, se trata del primer modelo de cable con longitud variable en el ámbito de la Realidad Virtual.
- El modelo utiliza una nueva versión de algoritmos para insertar nuevas partículas. El algoritmo propuesto aquí, basado en la predicción de la posición de la nueva partícula:
 - elimina las oscilaciones en el cable debidas a la inserción de las partículas,
 - evita la aparición de discontinuidades en la posición de la nueva partícula, mejorando la calidad visual,
 - no requiere la utilización de resortes de longitud próxima a cero, evitando una mayor rigidez (*stiffness*) en el modelo numérico.
- El modelo de cable de longitud variable, junto con el modelo de polea propuesto en el Capítulo 4, permite alcanzar el objetivo de obtener un modelo de polipasto que considere la oscilación transversal del cable.
- Este modelo de polipasto, es el primer modelo que permite simular un sistema arbitrario de poleas considerando además la oscilación transversal del cable en el ámbito de la Realidad Virtual.

SIMULACIÓN ESTABLE EN SITUACIONES DE TENSIÓN ELEVADA

A partir del modelo abstracto propuesto en el Capítulo 3, se ha definido un modelo dinámico de polea y un modelo dinámico de segmento de cable basado en un sistema de partículas. Por medio de estos dos modelos dinámicos es posible simular un polipasto de forma interactiva y en tiempo real.

Sin embargo, las situaciones que se producen habitualmente durante la simulación de una grúa dan lugar a tensiones muy elevadas sobre el cable. En estos casos, la integración numérica del sistema de partículas presenta dificultades debido a la aparición de inestabilidad.

A continuación se presenta un modelo basado en ecuaciones en derivadas parciales cuyas principales características son la eficiencia y la posibilidad de predecir y detectar inestabilidades numéricas. El objetivo de este modelo será la simulación del cable en aquellas situaciones en las que la tensión es más elevada.

Con el fin de considerar las entradas y salidas del modelo de *segmento de cable* que se ha definido, se parte del modelo propuesto por Antman para la ecuación de ondas en el espacio (Antman, 1980) y se generaliza para permitir la variación de los extremos y de la longitud del cable. A partir de estas premisas se deriva un nuevo modelo de vibración de una cuerda. A continuación, explotando las propiedades del sistema simulado

en situaciones de elevada tensión, se simplifica el modelo para su utilización en aplicaciones en tiempo real.

Gracias al planteamiento modular desarrollado durante el Capítulo 3 y a los diferentes modelos de segmento de cable que se han desarrollado, es posible decidir cuál de estas representaciones del cable es la más adecuada en función de las necesidades de la simulación. En este capítulo se discute también la implementación de *niveles de detalle dinámicos* que utilizarán diferentes modelos en función de las necesidades de la simulación.

6.1. MODELO PARA UNA CABLE FLEXIBLE Y ELÁSTICO

Uno de los modelos clásicos para la representación de una cuerda o un cable es la ecuación de ondas, revisada en el Apartado 2.1.1. Este modelo tiene la limitación de presentarse siempre bajo un conjunto de suposiciones muy restrictivas, que lo hacen poco general para las necesidades de modelado que se han definido. Sin embargo, como ha demostrado S. S. Antman (Antman, 1980) este modelo puede generalizarse para conseguir representar un conjunto de situaciones más amplio del habitual.

Partiendo del modelo propuesto por Antman, a continuación se propone un modelo de cable flexible que permite una posición arbitraria del cable, representado por una curva \mathbf{u} . Para ello se utiliza la metodología de modelado empleada en (Antman, 1980), basada en la conservación del momento lineal de una porción del cable. Aquí se presenta como novedad la posibilidad de introducir tanto las velocidades en los extremos del cable, como una velocidad de variación de la longitud del mismo.

6.1.1. Descripción del modelo de partida

Una cuerda o un cable se considera como un sistema compuesto por partículas o puntos materiales que ocupan la región de \mathbb{R}^3 definida por una curva. Considérese el espacio tridimensional \mathbb{R}^3 y una base ortonormal orientada positivamente $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$. Se denominará configuración de una cuerda o

cable a una curva continua $\mathbf{u}(x) \subset \mathbb{R}^3$, $x \in [0, 1]$.

Considérese la configuración definida por $\mathbf{u}(x) = x\mathbf{x}$, $x \in [0, 1]$. A esta configuración se la denominará *configuración de referencia* y puede interpretarse como el estado del cable no deformado. Cada punto material del cable se identificará por medio de la coordenada x que ocupa en esta configuración. En este punto se considerará un cable que en su estado no deformado tiene longitud constante unidad y, posteriormente, se generalizará a cables de longitud arbitraria y variable.

La posición del cable en los extremos se supone fija, y dada por las condiciones de contorno

$$\mathbf{u}(0, t) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}(1, t) = (L, 0, 0).$$

La posición y velocidad iniciales del cable vendrán dadas por

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x), \quad \mathbf{u}_t(x, 0) = \mathbf{v}_0(x),$$

donde se cumplirá también que $\mathbf{u}_0(0) = \mathbf{0}$ y $\mathbf{u}_0(1) = (L, 0, 0)$.

El vector $\mathbf{u}_x(x, t)$ es el vector tangente a $\mathbf{u}(x, t)$. Se supondrá que $|\mathbf{u}_x(x, t)|$ no se anula para ningún punto del cable. El estiramiento o *deformación* de la cuerda en un instante y en un punto material viene dado por $\epsilon(x, t) = |\mathbf{u}_x(x, t)| - 1$, que expresa su compresión o estiramiento respecto de la configuración de referencia. Cuando este valor de $\epsilon(x, t)$ sea negativo indicará que el cable está comprimido, mientras que si el valor es positivo indicará que el cable está estirado respecto a su configuración de referencia. A continuación se obtienen las ecuaciones de movimiento para este sistema.

Sea $\mathbf{n}^+(x, t)$ la fuerza interna ejercida por el segmento $[x, 1]$ sobre el segmento $[0, x]$. De igual manera, se define $\mathbf{n}^-(x, t)$ como la fuerza interna ejercida por el segmento $[0, x]$ sobre el segmento $(x, 1]$.

Si se considera el segmento $(a, b) \subset (0, 1)$, la fuerza externa aplicada sobre el material por unidad de longitud, $\mathbf{f}(x, t)$, y la densidad del material por unidad de longitud $\rho(x)$, entonces debe cumplirse la conservación del

momento lineal del segmento (a, b) :

$$\mathbf{n}^+(b, t) - \mathbf{n}^-(a, t) + \int_a^b \mathbf{f}(x, t) dx = \frac{d}{dt} \int_a^b \rho(x) \mathbf{u}_t(x, t) dx \quad (6.1)$$

$$= \int_a^b \rho(x) \mathbf{u}_{tt}(x, t) dx \quad (6.2)$$

para cualquier $(a, b) \subset (0, 1)$.

Dado que \mathbf{n}^+ y \mathbf{n}^- se han supuesto continuas se obtiene que $\mathbf{n}^+(a, t) = \lim_{b \rightarrow a} \mathbf{n}^+(b, t)$. A causa de la continuidad de todas las demás funciones que se han considerado, si se toma el límite de $b \rightarrow a$ se obtiene que $\mathbf{n}^+(a, t) - \mathbf{n}^-(a, t) = 0$ para cualquier $a \in [0, 1]$. Por tanto, en adelante se prescindirá del superíndice y se denotará la fuerza únicamente como $\mathbf{n}(x, t)$.

Sustituyendo b por x en (6.1–6.2),

$$\mathbf{n}^+(x, t) - \mathbf{n}^-(a, t) + \int_a^x \mathbf{f}(s, t) ds = \int_a^x \rho(s) \mathbf{u}_{tt}(s, t) ds \quad (6.3)$$

y derivando la expresión obtenida respecto de x se obtiene la ecuación de ondas

$$\mathbf{n}_x(x, t) + \mathbf{f}(x, t) = \rho(x) \mathbf{u}_{tt}(x, t) \quad (6.4)$$

Este modelo es una generalización de la ecuación de ondas (Antman, 1980) en la que no se parte de ninguna suposición sobre las propiedades físicas del cable. El término \mathbf{n}_x , que corresponde a la tasa de variación de las fuerzas internas a lo largo del cable, reflejará esa información por medio del modelo que sea más adecuado en cada caso.

Al contrario de lo que ocurre habitualmente en la ecuación de ondas, en la que se supone que las oscilaciones son pequeñas, este modelo no impone ninguna restricción sobre la posición de la curva en el espacio que representa la posición del cable. Únicamente se supone que la longitud del cable y la posición de los extremos son fijas.

A continuación se deriva un nuevo modelo a partir de esta formalización. Por una parte, se generalizará este modelo para considerar el movimiento de los extremos y la variación de la longitud del cable. Por otra parte, aprovechando que el modelo va a destinarse a la simulación de situaciones

de tensión elevada, se impondrán ciertas restricciones que permitirán su simplificación.

6.1.2. Cable con extremos y longitud variables con el tiempo

Con el fin de considerar la variación de la longitud del cable se generalizará, en primer lugar, la descripción de la configuración del sistema. La configuración del cable vendrá dada por la curva $\mathbf{u}(x, t) : [L_0(t), L_1(t)] \rightarrow \mathbb{R}^3$. La configuración de referencia del cable vendrá dada de nuevo por el segmento $\mathbf{u}(x) = x\mathbf{x}$, $x \in [L_0(t), L_1(t)]$. El intervalo de definición de la configuración de referencia se considerará siempre acotado. La variación de la posición de los extremos da lugar a las condiciones de contorno

$$\mathbf{u}(L_0(t), t) = \mathbf{p}_0(t), \quad \mathbf{u}(L_1(t), t) = \mathbf{p}_1(t),$$

donde las funciones $\mathbf{p}_0(t)$ y $\mathbf{p}_1(t)$ se supondrán derivables dos veces, y con derivadas conocidas.

Dado que el objetivo del modelo es la simulación del cable en situaciones de tensión elevada se puede partir de la suposición habitual en la ecuación de ondas de que la deformación longitudinal del cable está en la configuración de equilibrio estático.

Considérense las variables de entrada del modelo de segmento de cable correspondientes a la velocidad de variación de la longitud, v_0 y v_1 . Bajo la suposición de equilibrio para la deformación longitudinal, la velocidad de cada punto vendrá dada por

$$v = x_t = \frac{(v_0 + \dot{\mathbf{p}}_0(t)\mathbf{d}(t))(L_1(t) - x) + (L_0(t) - x)(v_1 + \dot{\mathbf{p}}_1(t)\mathbf{d}(t))}{L_1(t) - L_0(t)} \quad (6.5)$$

Como consecuencia de la dependencia de x respecto a t , la conservación del momento en la ecuación (6.1) no dependerá de \mathbf{u}_x , sino de la derivada total

$$\frac{D\mathbf{u}(x, t)}{dt} = \mathbf{u}_t + \mathbf{u}_x v, \quad (6.6)$$

por lo que el lado derecho de (6.1) se escribirá como

$$\frac{d}{dt} \int_a^b \rho(x) \frac{D\mathbf{u}(x,t)}{dt} dx = \frac{d}{dt} \int_a^b \rho(x) (\mathbf{u}_t + \mathbf{u}_x v) dx \quad (6.7)$$

$$= \int_a^b \rho(x) \frac{d}{dt} (\mathbf{u}_t + \mathbf{u}_x v) dx \quad (6.8)$$

Desarrollando esta expresión, y denotando $x_t = v$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_a^b \rho(x) \frac{D\mathbf{u}(x,t)}{dt} dx &= \\ &= \int_a^b \rho(x) (\mathbf{u}_{tt} + \mathbf{u}_{tx}v + \mathbf{u}_{xt}v + \mathbf{u}_{xx}v^2 + \mathbf{u}_x v_t) dx, \end{aligned} \quad (6.9)$$

con lo que la conservación del momento del segmento (a, x) se expresa como

$$\begin{aligned} \mathbf{n}(x,t) - \mathbf{n}(a,t) + \int_a^x \mathbf{f}(s,t) ds &= \\ &= \int_a^b \rho(x) (\mathbf{u}_{tt} + \mathbf{u}_{tx}v + \mathbf{u}_{xt}v + \mathbf{u}_{xx}v^2 + \mathbf{u}_x v_t) dx. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Siguiendo la misma técnica aplicada en (6.3), derivando (6.10) respecto de x se obtiene la ecuación de ondas generalizada para una cuerda que se traslada axialmente con velocidad v

$$\mathbf{n}_x + \mathbf{f} = \rho(\mathbf{u}_{tt} + 2\mathbf{u}_{xt}v + \mathbf{u}_{xx}v^2 + \mathbf{u}_x v_t) \quad (6.11)$$

El movimiento de los extremos del cable contribuye a la dinámica del sistema por medio de dos vías. Por una parte, debido a su aportación a la velocidad longitudinal del cable por medio de (6.5). Por otra parte, la variación de las condiciones de contorno, $\mathbf{p}_0(t)$ y $\mathbf{p}_1(t)$, supone una modificación en la derivada parcial $\mathbf{u}_x(x,t)$ que indica la deformación del cable en cada punto. A continuación se establece la relación entre esta deformación y la dinámica del cable.

Obtención del término de fuerzas internas \mathbf{n}

Llegados a este punto es necesario obtener una relación entre el término de fuerzas internas \mathbf{n} y el estado de la cuerda \mathbf{u} , de forma que pueda conocerse la evolución de la curva a partir de su configuración en cada instante.

Esto se llevará a cabo por medio de una ecuación diferencial, obtenida a partir de las propiedades físicas del cable que se desean reflejar en el modelo.

Dado que la flexión puede despreciarse en las situaciones en las que la tensión longitudinal del cable es elevada, el cable se supondrá perfectamente flexible. Como consecuencia de esto, el momento sobre el segmento considerado (a, b) será nulo. Esto lleva a que el momento ejercido por \mathbf{n} sobre el segmento será también nulo, de forma que $\mathbf{u}_x \times \mathbf{n} = 0$.

Dado que el vector \mathbf{u}_x es el vector tangente a la curva, la igualdad $\mathbf{u}_x \times \mathbf{n} = 0$ implica que \mathbf{n} actúa a lo largo de esta dirección tangente. Por tanto, la fuerza aplicada sobre el segmento puede expresarse como $\mathbf{n}(x, t) = T(x, t)\mathbf{t}(x, t)$, donde $\mathbf{t}(x, t)$ es el vector tangente unitario $\mathbf{t} = \mathbf{u}_x(x, t)/|\mathbf{u}_x(x, t)|$. A la función $T(x, t)$ se la denominará *tensión del cable*. Utilizando esta propiedad, es posible desarrollar la derivada del vector \mathbf{n} como

$$\mathbf{n}_x(x, t) = T_x(x, t)\mathbf{t}(x, t) + T(x, t)\mathbf{t}_x(x, t) \quad (6.12)$$

Considérese la derivada del vector tangente unitario a la curva

$$\mathbf{t}_x(x, t) = \frac{\mathbf{u}_{xx}(x, t)}{|\mathbf{u}_x(x, t)|} - \frac{\xi(x, t)}{|\mathbf{u}_x(x, t)|^2}\mathbf{u}_x(x, t) \quad (6.13)$$

donde $\xi(x, t)$ es la derivada del módulo del vector \mathbf{u}_x

$$\xi(x, t) = \frac{d}{dx}|\mathbf{u}_x(x, t)| = \frac{\mathbf{u}_x(x, t)\mathbf{u}_{xx}(x, t)}{|\mathbf{u}_x(x, t)|}. \quad (6.14)$$

Sustituyendo (6.13) en (6.12) y utilizando que $\mathbf{t} = \mathbf{u}_x(x, t)/|\mathbf{u}_x(x, t)|$

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_x(x, t) &= T_x(x, t)\mathbf{t}(x, t) + T(x, t)\mathbf{t}_x(x, t) \\ &= T_x(x, t)\frac{\mathbf{u}_x(x, t)}{|\mathbf{u}_x(x, t)|} + T(x, t)\left(\frac{\mathbf{u}_{xx}(x, t)}{|\mathbf{u}_x(x, t)|} - \frac{\xi(x, t)}{|\mathbf{u}_x(x, t)|^2}\mathbf{u}_x(x, t)\right) \\ &= \frac{T(x, t)}{|\mathbf{u}_x(x, t)|}\mathbf{u}_{xx}(x, t) + \\ &\quad + \left(\frac{T_x(x, t)}{|\mathbf{u}_x(x, t)|} - \frac{T(x, t)\xi(x, t)}{|\mathbf{u}_x(x, t)|^2}\right)\mathbf{u}_x(x, t). \end{aligned} \quad (6.15)$$

Sustituyendo (6.15) en la ecuación de movimiento (6.4) se obtiene la forma general de la ecuación de ondas

$$\frac{T}{|\mathbf{u}_x|} \mathbf{u}_{xx} + \left(\frac{T_x}{|\mathbf{u}_x|} - \frac{T\xi}{|\mathbf{u}_x|^2} \right) \mathbf{u}_x + \mathbf{f} = \rho(\mathbf{u}_{tt} + 2\mathbf{u}_{xt}v + \mathbf{u}_{xx}v^2 + \mathbf{u}_xv_t). \quad (6.16)$$

Propiedades y aplicación del modelo

Se ha obtenido una generalización de la ecuación de ondas, que considera la posibilidad de desplazar arbitrariamente sus extremos de forma diferenciable y de variar la longitud del segmento de cable. La utilización del modelo de Antman como punto de partida para la derivación del modelo permite, además, que los desplazamientos del cable no estén limitados a oscilaciones pequeñas, como es habitual en la ecuación de ondas clásica.

El modelo proporciona, por una parte, un modelo geométrico del estado de un cable, dado por la curva \mathbf{u} . Por otra parte, proporciona una descripción de su dinámica a partir de las fuerzas, internas y externas, que actúan a lo largo del cable, dada por las ecuaciones de movimiento (6.16).

Queda por determinar el término $T(x, t)$ que expresa la forma en que el estado del sistema influye en las fuerzas. A continuación se analizan diferentes maneras de definir la tensión y posteriormente se propone una discretización del modelo que permite su integración numérica.

6.1.3. Modelos de tensión

A continuación se presentan varios modelos para la forma de la tensión T , que permiten reproducir propiedades como la gravedad o la aceleración del cable. Para cada caso se presenta además la forma que adquiere la ecuación de ondas (6.16) tras utilizar los valores de T y de T_x correspondientes. Cada uno de estos modelos puede emplearse de forma independiente.

Para finalizar el apartado, tras analizar los diferentes modelos de tensión se realiza un breve análisis de la deformación del cable y de las simplificaciones que se van a realizar al respecto en el modelo que se ha propuesto.

Tensión elástica. Ley de Hooke

De acuerdo con las propiedades elásticas del cable, y para un material perfectamente flexible, la tensión debe estar relacionada directamente con la deformación local del cable en cada punto. Es decir, la tensión será de la forma $T(x, t) = T(\epsilon(x, t))$. De acuerdo con la ley de Hooke, la relación entre la deformación y la tensión es lineal, y la constante de proporcionalidad viene dada por EA , donde E es el módulo de young del material y A es el área de la sección transversal del cable o cuerda. La tensión viene dada por

$$T(x, t) = EA\epsilon(x, t) = EA(|\mathbf{u}_x(x, t)| - 1), \quad (6.17)$$

de donde, utilizando que $\xi(x, t) = \epsilon_x(x, t)$, se obtiene la derivada de $T(x, t)$

$$T_x(x, t) = EA\xi(x, t). \quad (6.18)$$

Sustituyendo (6.17) y (6.18) en (6.16) se obtiene la ecuación de ondas

$$EA \left(\frac{|\mathbf{u}_x| - 1}{|\mathbf{u}_x|} \mathbf{u}_{xx} + \frac{\xi}{|\mathbf{u}_x|^2} \mathbf{u}_x \right) + \mathbf{f} = \rho(\mathbf{u}_{tt} + 2\mathbf{u}_{xt}v + \mathbf{u}_{xx}v^2 + \mathbf{u}_xv_t). \quad (6.19)$$

Este modelo considera el efecto de las oscilaciones transversales del cable en cada punto para la determinación de la tensión y será adecuado en las situaciones en las que estas oscilaciones son grandes.

Los modelos de tensión que se presentan a continuación descartan este efecto y obtienen la distribución de $T(x)$ a partir de suposiciones sobre la deformación longitudinal del cable, que se considera estática.

Tensión constante

En el caso de una cuerda sometida a una tensión elevada, es frecuente considerar constante la tensión a lo largo de la longitud del cable, tomándola como un dato de entrada. El valor de la tensión será, típicamente

$$T(x, t) = \frac{EA}{L} \delta L, \quad \forall x \in [L_0, L_1]. \quad (6.20)$$

donde δL representa la diferencia entre la longitud real, dada por la distancia entre los extremos del cable y la longitud de referencia del cable L ,

$$\delta L = |\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0| - (L_1 - L_0). \quad (6.21)$$

dando lugar a la ecuación de ondas

$$\frac{T}{|\mathbf{u}_x|} \mathbf{u}_{xx} + \mathbf{f} = \rho(\mathbf{u}_{tt} + 2\mathbf{u}_{xt}v + \mathbf{u}_{xx}v^2 + \mathbf{u}_xv_t). \quad (6.22)$$

En ausencia de velocidad longitudinal en el cable ($v = 0$), esto da lugar a la ecuación de ondas clásica

$$\mathbf{u}_{tt}(x, t) - a^2 \mathbf{u}_{xx} = 0; \quad x \in [L_0, L_1], \quad (6.23)$$

donde $a^2 = T/(|\mathbf{u}_x|\rho)$.

Si las oscilaciones son suficientemente pequeñas, el valor de $|\mathbf{u}_x|$ se puede aproximar adecuadamente por una constante, correspondiente al estiramiento del cable. Aplicando esta suposición, en los textos de modelos matemáticos de la física se presenta habitualmente el modelo (6.23) sin $|\mathbf{u}_x|$ en el denominador, de forma que $a^2 = T/\rho$.

Tensión en un cable vertical bajo la acción de la gravedad

En ocasiones, el modelo (6.23) se presenta para situaciones particulares en las que se desea reflejar el efecto de ciertos factores externos. Este es el caso de un cable suspendido verticalmente y con una carga.

Considérese un cable suspendido verticalmente por un extremo, y sometido a una tensión de tracción T_0 en el extremo inferior. Se considerará que $\mathbf{u}(L_0, t)$ corresponde a este extremo. Si se desea considerar el efecto del peso del propio cable, se puede sustituir el valor de la tensión constante T que da lugar al modelo clásico (6.23) por la expresión

$$T(x) = T_0 + \rho g x.$$

donde ρ es la densidad del material y g es la constante de la aceleración de la gravedad.

D'Andrea-Novel (D'Andrea-Novel and Boustany, 1991) y Rahn y sus colaboradores (Joshi and Rahn, 1995; Martindale et al., 1995; Canbolat et al., 1997) entre otros, han utilizado este planteamiento para proponer algoritmos de control de oscilación en grúas.

En este caso, el valor de la derivada de la tensión es constante $T_x = \rho g$, y la ecuación de ondas resulta

$$\begin{aligned} \frac{T_0 + \rho g x}{|\mathbf{u}_x|} \mathbf{u}_{xx} + \left(\frac{\rho g}{|\mathbf{u}_x|} - \frac{(T_0 + \rho g x)\xi}{|\mathbf{u}_x|^2} \right) \mathbf{u}_x + \mathbf{f} = \\ = \rho(\mathbf{u}_{tt} + 2\mathbf{u}_{xt}v + \mathbf{u}_{xx}v^2 + \mathbf{u}_xv_t). \end{aligned} \quad (6.24)$$

Tensión en un cable con aceleración longitudinal de los extremos

La aceleración longitudinal de los extremos del cable se refleja en el modelo de ecuación de ondas 6.16 por medio del término que involucra la aceleración de cada punto del cable \mathbf{u}_xv_t . Sin embargo, este modelo no refleja la forma en que las aceleraciones afectan a la tensión del cable.

A continuación se obtiene la distribución de la tensión a lo largo del cable cuando se aplica una aceleración arbitraria a cada uno de los dos extremos. Este modelo es una generalización del modelo que tiene en cuenta el efecto de la gravedad.

La consideración de estas aceleraciones es importante para conseguir un movimiento creíble en el cable. Si se considera un cable suspendido entre dos puntos, y estos puntos se desplazan a lo largo de la dirección \mathbf{d} , se producirá un movimiento de balanceo del cable a lo largo de esta dirección. Este desplazamiento se refleja parcialmente en el modelo de cable con velocidad longitudinal, pero el modelo de tensión que se presenta a continuación permitirá conseguir un comportamiento más realista.

Considérese la situación más general en la que ambos extremos, \mathbf{p}_0 y \mathbf{p}_1 , se desplazan con una aceleración longitudinal independiente la una de la otra $\ddot{x}_0 = \ddot{\mathbf{p}}_0 \cdot \mathbf{d}$ y $\ddot{x}_1 = \ddot{\mathbf{p}}_1 \cdot \mathbf{d}$. Asumiendo de nuevo que la deformación del cable se encuentra en el estado de equilibrio, se puede considerar que la aceleración de un punto del cable será el promedio de ambas aceleraciones, ponderado por la distancia del punto a cada uno de los extremos $\ddot{x} = x\ddot{x}_1 + (1-x)\ddot{x}_0$. En caso de que las aceleraciones de ambos extremos sean iguales, todos los puntos del cable tendrán la misma aceleración.

Supóngase, en primer lugar, que únicamente el extremo \mathbf{p}_1 está sometido

a una aceleración \ddot{x}_1 . En ese caso, la tensión a la que somete a un punto del cable s es

$$T(x) = T_0 + \int_0^s \rho \ddot{x}_1(\omega) d\omega = T_0 + \int_0^x \rho \ddot{x}_1 \omega d\omega = T_0 + \frac{1}{2} \rho \ddot{x}_1 x^2$$

De forma análoga, si la aceleración se produce únicamente en el extremo \mathbf{p}_0 , con un valor \ddot{x}_0 , entonces, la tensión a la que se somete un punto del cable será

$$\begin{aligned} T(x) &= T_0 + \int_x^1 \rho \ddot{x}_0(\omega) d\omega = T_0 + \int_x^1 \rho \ddot{x}_0(1 - \omega) d\omega = \\ &= T_0 + \left[\rho \ddot{x}_0 \omega - \frac{1}{2} \rho \ddot{x}_0 \omega^2 \right]_x^1 = \\ &= T_0 + \frac{1}{2} \rho \ddot{x}_0 - (\rho \ddot{x}_0 x - \frac{1}{2} \rho \ddot{x}_0 x^2) = \\ &= T_0 + \frac{1}{2} \rho \ddot{x}_0 (1 - 2x + x^2) = \\ &= T_0 + \frac{1}{2} \rho \ddot{x}_0 (1 - x)^2 \end{aligned}$$

Se considerará la fuerza de inercia $f(x) = -\rho \ddot{x}$, que depende de la aceleración en los extremos del cable. El valor de la tensión del cable a lo largo de su longitud será

$$T(x) = T_0 + x f(x) \tag{6.25}$$

donde T_0 es la tensión a la que está sometido el cable en ausencia de aceleración en los extremos.

Sustituyendo el valor de la aceleración en la ecuación (6.25), se obtiene la expresión que proporciona la tensión del cable a lo largo del segmento en función de la coordenada longitudinal

$$T(x) = T_0 + x\rho(x\ddot{x}_2 + (1-x)\ddot{x}_1).$$

Con el fin de poder ver de una manera gráfica el significado de este modelo, considérese la situación en la que $\ddot{x}_1 = 0$. En este caso, la contribución de la aceleración \ddot{x}_1 a la tensión del tramo de cable es

$$T(x) = T_0 + \rho \ddot{x}_2 x^2.$$

Es decir, el efecto de la aceleración sobre la tensión aumenta con el cuadrado de la variable espacial x , de forma que su influencia en el extremo sin aceleración es mucho menor que en el extremo en el que se produce la aceleración. Cuando la aceleración longitudinal es idéntica en ambos extremos se obtiene el modelo equivalente al de tensión de un cable vertical bajo la acción de la gravedad. El Apartado 7.1.2 presenta un análisis del comportamiento del cable sometido a aceleraciones longitudinales.

Análisis de la deformación del cable. Simplificación del modelo de deformación

En un cable sometido a una tensión suficientemente elevada, las oscilaciones se consideran habitualmente como desplazamientos transversales respecto de la configuración de referencia. Dado que la frecuencia de oscilación longitudinal es mucho mayor que la frecuencia de oscilación transversal y que la amplitud es siempre mucho menor, en la ecuación de ondas habitualmente se asume que el estado de deformación longitudinal del cable es el estado de equilibrio.

Esta deformación se reflejará en la tensión por medio de la elección de uno de los modelos de tensión expuestos, o de cualquier otro que se considere adecuado a las necesidades de la simulación. Sin embargo, el desplazamiento longitudinal de los puntos materiales del cable no se reflejará, considerando en todo instante una distribución uniforme, ya que esto supone una desviación pequeña respecto de la configuración de equilibrio.

En base a estos principios, independientemente de la distribución de tensión elegida, se asumirá que $(\mathbf{u}(x) - \mathbf{p}_0) \cdot \mathbf{d} = x$, donde $\mathbf{d} = (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0)/l$ y $l = \|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0\|$. Esta restricción implica que la configuración del sistema será siempre de forma que la distancia relativa entre los puntos materiales del cable es constante a lo largo de su longitud.

La principal ventaja de esta suposición es que se evita la integración de las vibraciones longitudinales del cable permitiendo la integración numérica de la ecuación diferencial de forma más eficiente y el control sobre la estabilidad del modelo. Otra consecuencia es que, gracias a esta suposición se

podrá expresar la ecuación (6.11) por medio de dos ecuaciones diferenciales unidimensionales proyectando el sistema sobre un sistema de referencia no inercial.

6.1.4. Simulación de un segmento de cable

El modelo propuesto por medio de la ecuación de ondas (6.16), junto con un modelo de tensión, como los presentados en el Apartado 6.1.3, permiten la simulación de un segmento de cable.

No obstante, para ello es necesario emplear una discretización del modelo que permita el cálculo de la evolución temporal del sistema a través de la integración numérica de las ecuaciones de movimiento.

Además, con el fin de incorporar el modelo a la metodología de modelado propuesta en el Capítulo 3, se deben precisar la forma de aplicar las variables de entrada y la forma de obtener las variables de salida del modelo de *segmento de cable*.

Discretización del modelo

El modelo presentado por medio de (6.16) es una ecuación en derivadas parciales hiperbólica que pueden integrarse numéricamente por medio de la discretización de las variables espacial y temporal.

Para ello, considérese el cable en la configuración de reposo $\mathbf{u}(x, t)$, y una discretización del intervalo de definición de la curva, dada por el conjunto de puntos $\{x_k : k = 0, \dots, M\}$ en la que $x_0 = L_0$ y $x_M = L_1$. Los puntos del cable correspondientes a dichas posiciones se denotarán por \mathbf{u}_k y la longitud de cada elemento de cable situado entre dos nodos consecutivos se denotará por $\ell_k = x_{k+1} - x_k$. Para llevar a cabo la integración numérica se realizará también una partición de la variable temporal, t , con un paso de integración fijo, $h = \delta t$. El instante de tiempo m se denotará por $t^m = t^0 + hm$.

A continuación se expresan los diferentes términos que aparecen en el modelo, utilizando esta discretización. El valor de \mathbf{u} en el punto de la discretización (x_k, t^m) se denotará por $\mathbf{u}_k^m := \mathbf{u}(x_k, t^m)$, y a las aproximaciones a

sus derivadas se denotarán por $\mathbf{u}_{x,k}^m$, $\mathbf{u}_{xx,k}^m$, $\mathbf{u}_{t,k}^m$, $\mathbf{u}_{xt,k}^m$ y $\mathbf{u}_{xt,k}^m$.

La derivada de \mathbf{u} respecto de la coordenada x , que corresponde al vector tangente a la curva, se define como el límite

$$\mathbf{u}_x(x, t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{u}(x + h, t) - \mathbf{u}(x, t)}{h} \quad (6.26)$$

y en el modelo discreto se aproximará por medio de la expresión

$$\mathbf{u}_x(x_k) \simeq \mathbf{u}_{x,k} = \frac{\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k}{\ell_k}. \quad (6.27)$$

De igual manera, la segunda derivada respecto de x se aproximará por medio de

$$\mathbf{u}_{xx}(x_k) \simeq \mathbf{u}_{xx,k} = \frac{\mathbf{u}_{x,k+1} - \mathbf{u}_{x,k}}{\ell_k} = \frac{\mathbf{u}_{k+2} - 2\mathbf{u}_{k+1} + \mathbf{u}_k}{\ell_k^2}. \quad (6.28)$$

La discretización temporal se realizará utilizando la diferencia dividida de orden uno para obtener la primera derivada respecto al tiempo,

$$\mathbf{u}_t(x_k, t^m) \simeq \mathbf{u}_{t,k}^m = \frac{\mathbf{u}_k^m - \mathbf{u}_k^{m-1}}{h}, \quad (6.29)$$

se empleará la diferencia centrada de orden dos para obtener la segunda derivada,

$$\mathbf{u}_{tt}(x_k, t^m) \simeq \mathbf{u}_{tt,k}^m = \frac{\mathbf{u}_{t,k}^m - \mathbf{u}_{t,k}^{m-1}}{h} = \frac{\mathbf{u}_k^{m+1} - 2\mathbf{u}_k^m + \mathbf{u}_k^{m-1}}{h^2}, \quad (6.30)$$

y se utilizará la diferencia dividida de orden uno sobre la discretización de la derivada espacial para obtener la derivada cruzada

$$\mathbf{u}_{xt}(x_k, t^m) \simeq \mathbf{u}_{xt,k}^m = \frac{\mathbf{u}_{x,k}^m - \mathbf{u}_{x,k}^{m-1}}{h}. \quad (6.31)$$

Por otra parte, también será necesario discretizar el valor de la tensión T y de su derivada T_x , así como el valor de la velocidad $v(x, t)$ y de la aceleración $v_t(x, t)$ del cable. Estos términos se denotarán respectivamente por medio de T_k^m , $T_{x,k}^m$, v_k^m y $v_{t,k}^m$.

Para obtener la evolución de cada punto de la discretización respecto al tiempo, la ecuación de ondas (6.16) se expresará de la siguiente forma:

$$\mathbf{u}_{tt} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{T}{|\mathbf{u}_x|} - v^2 \right) \mathbf{u}_{xx} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{T_x}{|\mathbf{u}_x|} - \frac{T\xi}{|\mathbf{u}_x|^2} \right) \mathbf{u}_x + \frac{\mathbf{f}}{\rho} - (2\mathbf{u}_{xt}v + \mathbf{u}_xv_t). \quad (6.32)$$

Utilizando las diferentes discretizaciones propuestas, esta expresión puede discretizarse como

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_k^{m+1} = 2\mathbf{u}_k^m - \mathbf{u}_k^{m-1} &+ h^2 \left[\left(\frac{1}{\rho} \frac{T_k^m}{|\mathbf{u}_{x,k}^m|} - (v_k^m)^2 \right) \mathbf{u}_{x,k}^m + \right. \\ &+ \frac{1}{\rho} \left(\frac{T_{x,k}^m}{|\mathbf{u}_{x,k}^m|} - \frac{T_k^m \xi_k^m}{|\mathbf{u}_{x,k}^m|^2} \right) \mathbf{u}_{x,k}^m \\ &\left. + \frac{\mathbf{f}_k^m}{\rho} - (2\mathbf{u}_{xt,k}^m v_k^m + \mathbf{u}_{x,k}^m v_{t,k}^m) \right] \quad (6.33) \end{aligned}$$

La discretización dada por (6.33) corresponde a un método de diferencias finitas explícito, aunque es posible considerar otros métodos con diferentes propiedades de estabilidad o precisión. A continuación se indica la manera de considerar este modelo dinámico como un elemento de la clase de *segmentos de cable* definida en el Capítulo 3.

Utilización de las variables de entrada y de salida

El modelo dinámico propuesto, discretizado por medio de (6.33), presenta un esquema numérico para la simulación de un segmento de cable, suspendido entre dos puntos móviles y con longitud de referencia variable. Para integrarlo en el modelo abstracto de poleas y cable propuesto en el Capítulo 3 se repasan a continuación las variables de entrada y de salida para identificarlos convenientemente en el modelo anterior.

Un segmento de cable \mathcal{C} tiene como entradas las variables \mathbf{p}_0 y \mathbf{p}_1 , y las velocidades v_0 y v_1 . Estos datos se utilizan para la obtención de las condiciones de contorno del modelo y para la obtención del valor de la velocidad en cada punto del cable como $v(x) = v_0(1-x) + v_1x$. Estos valores, junto con el valor de T obtenido por medio de alguno de los modelos de tensión disponibles, permiten el cálculo de la expresión (6.33).

Por otra parte, para la obtención de las salidas del modelo, \mathbf{T}_0 y \mathbf{T}_1 , se considerará el modelo de tensión empleado para obtener el valor de T en los extremos del segmento. La dirección de aplicación de la tensión vendrá determinada por el vector tangente unitario de la curva \mathbf{u} .

6.2. REDUCCIÓN DEL MODELO A ECUACIONES UNIDIMENSIONALES

El Apartado 6.1 ha presentado un nuevo modelo de cable y una discretización que permite su utilización en simulaciones numéricas. Este modelo permite la simulación de las oscilaciones de un cable cuando los desplazamientos son arbitrariamente grandes.

Sin embargo, en las situaciones de tensión elevada que pretenden simularse, es posible realizar una serie de simplificaciones adicionales que permitirán obtener un modelo más sencillo y eficiente.

La simplificación que se va a realizar se basa en expresar la posición de los puntos del cable en un sistema de referencia local, que se desplaza solidariamente con el segmento de cable, reduciendo el modelo tridimensional a dos modelos unidimensionales. El modelo obtenido se analiza, interpretando los principales términos de las ecuaciones resultantes, y se propone una discretización para permitir la simulación numérica.

6.2.1. Proyección del sistema sobre una base local

Considérese un segmento de cable \mathcal{C} que une las poleas \mathcal{P}^a y \mathcal{P}^b . Considérese de nuevo la base $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ de \mathbb{R}^3 , asociada a la polea \mathcal{P}^a , y definida en el Apartado 4.1.1 como

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_1^i &= \mathbf{e}_0^i \\ \mathbf{b}_2^i &= -\mathbf{b}_1^i \times \mathbf{d}^i \\ \mathbf{b}_3^i &= \mathbf{b}_1^i \times \mathbf{b}_2^i\end{aligned}$$

que, para mayor claridad, se ha mostrado en la Figura 6.1.

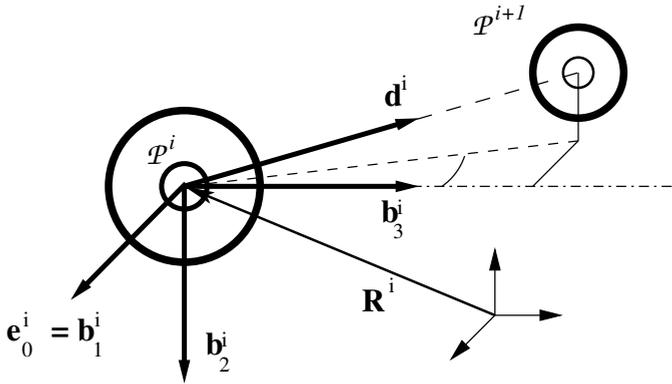


Figura 6.1: Sistema de referencia local de una polea $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$.

A continuación se define una base de \mathbb{R}^3 , $E = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, que se desplazará solidariamente con el segmento de cable \mathcal{C} , y que está definida por

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_2 &= \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{e}_3 &= \mathbf{d} = \frac{\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0}{|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0|} \\ \mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (6.34)$$

donde \mathbf{b}_2 es el segundo elemento de la base B de la polea \mathcal{P}^a .

La suposición de que $(\mathbf{u} - \mathbf{p}_0) \cdot \mathbf{d} = x$ permite descomponer \mathbf{u} como la suma de las proyecciones sobre los tres vectores de la base por medio de

$$\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{p}_0(t) + u_1(x, t)\mathbf{e}_1 + u_2(x, t)\mathbf{e}_2 + x\mathbf{d} \quad (6.35)$$

donde $u_1(x, t)$ y $u_2(x, t)$ son las proyecciones de $\mathbf{u}(x, t) - \mathbf{p}_0$ sobre los elementos de la base contenidos en plano perpendicular a \mathbf{d} que pasa por $\mathbf{p}_0(t) + x\mathbf{d}$:

$$u_1(x, t) = (\mathbf{u}(x, t) - \mathbf{p}_0(t))\mathbf{e}_1; \quad (6.36)$$

$$u_2(x, t) = (\mathbf{u}(x, t) - \mathbf{p}_0(t))\mathbf{e}_2. \quad (6.37)$$

La Figura 6.2 muestra la descomposición de la curva $\mathbf{u}(x, t)$ en este sistema de referencia.

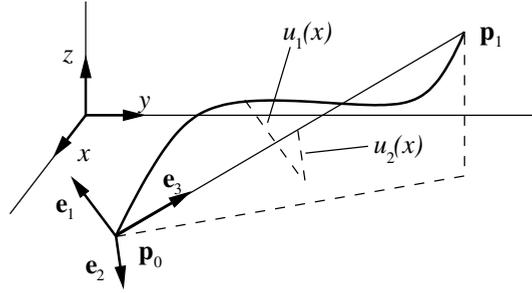


Figura 6.2: El estado del cable, determinado por la curva $\mathbf{u}(x, t)$ puede expresarse como la proyección de las vibraciones del cable en los vectores de la base \mathbf{e}_1 y \mathbf{e}_2 .

Para poder obtener la ecuación de ondas utilizando (6.35) es necesario calcular las derivadas parciales de \mathbf{u} a partir de las derivadas de las funciones u_k . Utilizando la siguiente notación para las derivadas:

$$\begin{aligned} v &= \frac{dx}{dt}; \\ \dot{\mathbf{e}}_j &= \frac{d\mathbf{e}_j}{dt}, \quad j = 1, 2, 3; \\ u_{kx} &= \frac{\partial u_k}{\partial x}, \quad u_{kt} = \frac{\partial u_k}{\partial t}, \quad k = 1, 2. \end{aligned}$$

se obtienen las derivadas de \mathbf{u} como:

$$\mathbf{u}_x(x, t) = \mathbf{d}(t) + u_{1x}(x, t)\mathbf{e}_1 + u_{2x}(x, t)\mathbf{e}_2; \quad (6.38)$$

$$\mathbf{u}_{xx}(x, t) = u_{1xx}(x, t)\mathbf{e}_1 + u_{2xx}(x, t)\mathbf{e}_2; \quad (6.39)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t(x, t) &= \dot{\mathbf{p}}_0(t) + \mathbf{d}(t)v + x\dot{\mathbf{d}}(t) + \\ &+ u_{1t}(x, t)\mathbf{e}_1 + u_1(x, t)\dot{\mathbf{e}}_1 + \\ &+ u_{2t}(x, t)\mathbf{e}_2 + u_2(x, t)\dot{\mathbf{e}}_2; \end{aligned} \quad (6.40)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{tt}(x, t) &= \ddot{\mathbf{p}}_0(t) + \mathbf{d}(t)v_t + 2\dot{\mathbf{d}}(t)v + x\ddot{\mathbf{d}}(t) + \\ &+ u_{1tt}(x, t)\mathbf{e}_1 + 2u_{1t}(x, t)\dot{\mathbf{e}}_1 + u_1(x, t)\ddot{\mathbf{e}}_1 + \\ &+ u_{2tt}(x, t)\mathbf{e}_2 + 2u_{2t}(x, t)\dot{\mathbf{e}}_2 + u_2(x, t)\ddot{\mathbf{e}}_2; \end{aligned} \quad (6.41)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_{xt}(x, t) &= \dot{\mathbf{d}}(t) + \\
&\quad + u_{1xt}(x, t)\mathbf{e}_1 + u_{1x}(x, t)\dot{\mathbf{e}}_1 + \\
&\quad + u_{2xt}(x, t)\mathbf{e}_2 + u_{2x}(x, t)\dot{\mathbf{e}}_2.
\end{aligned} \tag{6.42}$$

Sustituyendo (6.38–6.42) en (6.11), se obtiene

$$\mathbf{n}_x + \mathbf{f} = \rho(U_1\mathbf{e}_1 + U_2\mathbf{e}_2 + 2v_t\mathbf{e}_3 + \mathbf{R}(x, t)) \tag{6.43}$$

donde

$$U_k(x, t) = u_{ktt} + 2u_{kxt}v + u_{kxx}v^2 + u_{kx}v_t, \quad k \in \{1, 2, 3\} \tag{6.44}$$

y el término $\mathbf{R}(x, t)$ recoge todos los términos que contienen elementos con derivadas respecto del tiempo de los elementos de la base B :

$$\begin{aligned}
\mathbf{R} &= (u_1 + 2u_{1t} + u_{1x})\dot{\mathbf{e}}_1 + u_1\ddot{\mathbf{e}}_1 + \\
&\quad + (u_2 + 2u_{2t} + u_{2x})\dot{\mathbf{e}}_2 + u_2\ddot{\mathbf{e}}_2 + \\
&\quad + (x + 2v + 1)\dot{\mathbf{e}}_3 + x\ddot{\mathbf{e}}_3 + \dot{\mathbf{p}}_0 + \ddot{\mathbf{p}}_0.
\end{aligned} \tag{6.45}$$

La ecuación diferencial (6.43) expresa las aceleraciones por medio de su proyección sobre los elementos de la base B más el término \mathbf{R} , que corresponde a los términos inerciales que surgen a causa del cambio de sistema de referencia inercial por uno no inercial.

Para poder descomponer la ecuación (6.43) en las proyecciones sobre los vectores de la base \mathbf{e}_1 y \mathbf{e}_2 , obteniendo así dos ecuaciones diferenciales unidimensionales para u_1 y u_2 , se deben proyectar \mathbf{n}_x , \mathbf{f} y \mathbf{R} .

Las proyecciones de \mathbf{n}_x vendrán dadas por el valor de \mathbf{u}_x y \mathbf{u}_{xx} en la base

$$\begin{aligned}
\mathbf{n}_x &= \frac{T}{|\mathbf{u}_x|} (u_{1xx}\mathbf{e}_1 + u_{2xx}\mathbf{e}_2) + \\
&\quad + \left(\frac{T_x}{|\mathbf{u}_x|} - \frac{T\xi}{|\mathbf{u}_x|^2} \right) (u_{1x}\mathbf{e}_1 + u_{2x}\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3).
\end{aligned} \tag{6.46}$$

donde $|\mathbf{u}_x|^2 = 1 + u_{1x}^2 + u_{2x}^2$, mientras que las proyecciones de \mathbf{f} se denotarán por f_1 y f_2 , asumiendo que el valor de f_3 es nulo.

Dado que todos los términos que aparecen en \mathbf{R} dependen únicamente de las derivadas de orden uno de \mathbf{u} y de las derivadas respecto del tiempo de la base B , es posible conocer su valor antes de iniciar los cálculos del paso de integración. Por tanto, conocida la base y su variación respecto al tiempo, es posible proyectar todos los elementos que aparecen en este vector sobre el sistema de referencia y obtener todos los términos de cada una de las ecuaciones diferenciales. Las componentes de \mathbf{R} en la base se denotarán por $R_1 = \mathbf{R}\mathbf{e}_1$ y $R_2 = \mathbf{R}\mathbf{e}_2$.

A partir de (6.43) y (6.46), las ecuaciones de movimiento del cable se expresan como

$$\frac{T}{|\mathbf{u}_x|}u_{1xx} + \left(\frac{T_x}{|\mathbf{u}_x|} - \frac{T\xi}{|\mathbf{u}_x|^2} \right) u_{1x} + f_1 = \rho(u_{1tt} + 2u_{1xt}v + u_{1xx}v^2 + u_{1x}v_t + R_1) \quad (6.47)$$

$$\frac{T}{|\mathbf{u}_x|}u_{2xx} + \left(\frac{T_x}{|\mathbf{u}_x|} - \frac{T\xi}{|\mathbf{u}_x|^2} \right) u_{2x} + f_2 = \rho(u_{2tt} + 2u_{2xt}v + u_{2xx}v^2 + u_{2x}v_t + R_2) \quad (6.48)$$

Como resultado de este desarrollo se han obtenido las ecuaciones de movimiento expresadas en un sistema de referencia local que se mueve solidariamente con el segmento de cable. A partir de la suposición de que $(\mathbf{u} - \mathbf{p}_0) \cdot \mathbf{d} = x$, se ha obtenido además que la dinámica del sistema puede expresarse por medio de dos ecuaciones de ondas escalares. La tercera ecuación no es necesaria para la resolución del sistema, dado que se ha considerado la aproximación $u_3(x, t) = x$.

6.2.2. Modelo de oscilación plano

Las ecuaciones de movimiento obtenidas proporcionan una descomposición del modelo tridimensional en dos ecuaciones unidimensionales, (6.47) y (6.48). Estas ecuaciones corresponden a una forma general de la ecuación de ondas. En determinados casos será adecuado disponer de un modelo de oscilación plano que resultará más eficiente.

El modelo plano será adecuado, por ejemplo, para simular situaciones en las que las derivadas de los vectores de la base respecto al tiempo sean

despreciables, permitiendo desacoplar los términos de R_1 y R_2 . A continuación se supone esta situación y se deriva un modelo que se reduce a una única ecuación en derivadas parciales.

Considérese de nuevo el cable, representado por la curva $\mathbf{u}(x, t)$ bajo la suposición de que $(\mathbf{u} - \mathbf{p}_0) \cdot \mathbf{d}$. De acuerdo con la discusión realizada en el Apartado 6.1.3, esta suposición es consistente con las suposiciones habituales en la ecuación de ondas y se asume en el modelo clásico de forma implícita.

En este caso, se supondrá que todas las oscilaciones del cable y los movimientos de los extremos tienen lugar en el plano formado por los ejes Ox y Oz , tomando $\mathbf{e}_2 = \mathbf{y}$, que corresponde al vector coordenado del sistema de referencia del mundo en la dirección del eje Oy . En esta situación, la función u_2 es idénticamente nula y la posición del cable en el sistema de referencia local viene dada por $\mathbf{u}(x, t) = (x, 0, u(x, t))$.

$$\begin{aligned} \frac{T}{|\mathbf{u}_x|} u_{xx} + \left(\frac{T_x}{|\mathbf{u}_x|} - \frac{T\xi}{|\mathbf{u}_x|^2} \right) u_x + f_1 = \\ = \rho(u_{tt} + 2u_{xt}v + u_{xx}v^2 + u_xv_t + R_1) \end{aligned} \quad (6.49)$$

donde el valor de la norma de la derivada de \mathbf{u} viene dado por

$$|\mathbf{u}_x| = \sqrt{1 + u_x^2}. \quad (6.50)$$

En el modelo clásico presentado en la mayoría de textos se supone además que las oscilaciones son suficientemente pequeñas como para que en $|\mathbf{u}_x|^2 = 1 + u_x^2$ pueda despreciarse el término u_x^2 , con lo que $|\mathbf{u}_x| = 1$. Además, en este caso la derivada del módulo de \mathbf{u}_x se anula

$$\xi(x, t) = \frac{d}{dx} |\mathbf{u}_x(x, t)| = 0$$

lo que simplifica la ecuación (6.49)

$$Tu_{xx} + T_x u_x + f_1 = \rho(u_{tt} + 2u_{xt}v + u_{xx}v^2 + u_xv_t + R_1)$$

dando lugar a la ecuación de ondas clásica para un cable con velocidad longitudinal v (Wickert and Mote Jr., 1989).

Para calcular el valor de \mathbf{R} se ha de tener en cuenta que $\mathbf{e}_2 \equiv \mathbf{y}$, con lo que sus derivadas respecto al tiempo son nulas. De aquí se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{R} = & (u_1 + 2u_{1t} + u_{1x})\dot{\mathbf{e}}_1 + u_1\ddot{\mathbf{e}}_1 + \\ & +(x + 2v + 1)\dot{\mathbf{e}}_3 + x\ddot{\mathbf{e}}_3 + \dot{\mathbf{p}}_0 + \ddot{\mathbf{p}}_0 \end{aligned} \quad (6.51)$$

A partir de (6.51) es posible obtener $R_1(x, t)$ multiplicando escalarmente \mathbf{R} por el vector de la base \mathbf{e}_1 . Para ello se van a desarrollar las derivadas de los vectores involucrados con el fin de expresarlos de nuevo en los vectores de la base.

Dado que $|\mathbf{e}_1| = 1$ se tiene de forma inmediata que $\dot{\mathbf{e}}_1\mathbf{e}_1 = 0$. Además, por ser B una base ortogonal $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 = 0$ y dado que todo el movimiento está restringido al plano $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3\}$ la derivada de \mathbf{e}_1 debe ser paralela al vector de la base \mathbf{e}_3 , por lo que puede expresarse como

$$\dot{\mathbf{e}}_1 = V_1\mathbf{e}_3 \quad (6.52)$$

donde $V_1 = |\dot{\mathbf{e}}_1|$. De aquí, la segunda derivada de \mathbf{e}_1 puede calcularse como

$$\ddot{\mathbf{e}}_1 = \dot{V}_1\mathbf{e}_3 - V_1\dot{\mathbf{e}}_3. \quad (6.53)$$

Por otra parte, recuérdese que \mathbf{e}_3 se define como $\mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}$ donde $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0$. El módulo de \mathbf{p} , correspondiente a la distancia entre los extremos del cable en cada instante, se denotará, como se ha hecho anteriormente, como $l = |\mathbf{p}|$, y su derivada por \dot{l} . Por tanto, las derivadas de \mathbf{e}_3 son

$$\dot{\mathbf{e}}_3 = \frac{1}{l}\dot{\mathbf{p}} - \frac{\dot{l}}{l^2}\mathbf{p} \quad (6.54)$$

y

$$\ddot{\mathbf{e}}_3 = \frac{1}{l}\ddot{\mathbf{p}} - 2\frac{\dot{l}}{l^2}\dot{\mathbf{p}} - \frac{\ddot{l} - 2\dot{l}^2}{l^3}\mathbf{p} \quad (6.55)$$

Multiplicando escalarmente estas expresiones por \mathbf{e}_1 , y aplicando que

tanto $\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 = 0$ como $\mathbf{p}\mathbf{e}_1 = 0$ y que $\mathbf{e}_k\dot{\mathbf{e}}_k = 0$ se obtiene

$$\dot{\mathbf{e}}_1\mathbf{e}_1 = 0 \quad (6.56)$$

$$\ddot{\mathbf{e}}_1\mathbf{e}_1 = -V_1\dot{\mathbf{e}}_3\mathbf{e}_1 = -V_1\left(\frac{1}{l}\dot{\mathbf{p}} - \frac{\dot{l}}{l^2}\mathbf{p}\right)\mathbf{e}_1 = -V_1\frac{\dot{\mathbf{p}}\mathbf{e}_1}{l} \quad (6.57)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_3\mathbf{e}_1 = \frac{\dot{\mathbf{p}}\mathbf{e}_1}{l} \quad (6.58)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{e}}_3\mathbf{e}_1 &= \left(\frac{1}{l}\ddot{\mathbf{p}} - 2\frac{\dot{l}}{l^2}\dot{\mathbf{p}} - \frac{\ddot{l} - 2\dot{l}^2}{l^3}\mathbf{p}\right)\mathbf{e}_1 \\ &= \frac{1}{l}\ddot{\mathbf{p}}\mathbf{e}_1 - 2\frac{\dot{l}}{l^2}\dot{\mathbf{p}}\mathbf{e}_1 \end{aligned} \quad (6.59)$$

Para obtener el valor de R_1 se multiplica escalarmente por \mathbf{e}_1 en (6.51) y se sustituyen las derivadas (6.56–6.59)

$$\begin{aligned} R_1 = \mathbf{R}\mathbf{e}_1 &= -\frac{u_1V_1}{l}\dot{\mathbf{p}}\mathbf{e}_1 + \frac{x+2v+1}{l}\dot{\mathbf{p}}\mathbf{e}_1 + \\ &+ x\left(\frac{1}{l}\ddot{\mathbf{p}}\mathbf{e}_1 - 2\frac{\dot{l}}{l^2}\dot{\mathbf{p}}\mathbf{e}_1\right) + \dot{\mathbf{p}}_0\mathbf{e}_1 + \ddot{\mathbf{p}}_0\mathbf{e}_1 \end{aligned} \quad (6.60)$$

Este término está completamente determinado a partir del estado del sistema en un momento dado y de los valores de las entradas del sistema \mathbf{p}_0 , \mathbf{p}_1 , v_0 y v_1 . Por tanto, permite la simulación numérica del sistema, siempre que se disponga de la discretización adecuada.

Con el fin de poder interpretar convenientemente los diferentes términos que aparecen en la expresión (6.60) a continuación se va a sustituir de nuevo el valor de $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0$ y sus derivadas $\dot{\mathbf{p}} = \dot{\mathbf{p}}_1 - \dot{\mathbf{p}}_0$ y $\ddot{\mathbf{p}} = \ddot{\mathbf{p}}_1 - \ddot{\mathbf{p}}_0$ en algunos de los términos, obteniendo

$$\begin{aligned} R_1 &= \\ &= \left[\frac{x}{l}\dot{\mathbf{p}}_1 + \left(1 - \frac{x}{l}\right)\dot{\mathbf{p}}_0 + \frac{x}{l}\ddot{\mathbf{p}}_1 + \left(1 - \frac{x}{l}\right)\ddot{\mathbf{p}}_0 + \left(\frac{2v+1}{l} + \frac{u_1V_1}{l} - \frac{2\dot{l}}{l^2}\right)\dot{\mathbf{p}} \right] \mathbf{e}_1 \end{aligned} \quad (6.61)$$

Si se denota por γ al segmento de recta que une los puntos \mathbf{p}_0 y \mathbf{p}_1

$$\gamma(x) = \frac{x}{l}\mathbf{p}_1 + \left(1 - \frac{x}{l}\right)\mathbf{p}_0$$

y por γ' y γ'' a los segmentos que unen respectivamente las primeras y segundas derivadas de \mathbf{p}_0 y \mathbf{p}_1

$$\begin{aligned}\gamma'(x) &= \frac{x}{l}\dot{\mathbf{p}}_1 + \left(1 - \frac{x}{l}\right)\dot{\mathbf{p}}_0; \\ \gamma''(x) &= \frac{x}{l}\ddot{\mathbf{p}}_1 + \left(1 - \frac{x}{l}\right)\ddot{\mathbf{p}}_0,\end{aligned}$$

entonces la expresión para R_1 dada por (6.61) puede escribirse de forma más compacta como

$$R_1 = \left[\gamma'(x) + \gamma''(x) + \left(\frac{2v+1}{l} + \frac{u_1 V_1}{l} - \frac{2\dot{l}}{l^2} \right) \dot{\mathbf{p}} \right] \mathbf{e}_1. \quad (6.62)$$

Es importante observar que tanto l como x son variables que dependen del tiempo. Por este motivo γ' y γ'' no corresponden a las derivadas de γ salvo en el caso en que $\dot{l} = 0$ y $v = 0$. No obstante, esta notación permite realizar una interpretación de la ecuación (6.62) más intuitiva.

6.2.3. Interpretación del modelo a través de la ecuación de ondas clásica

El término de aceleraciones no inerciales (6.62) puede interpretarse de forma intuitiva a partir de la ecuación de ondas clásica. La evolución de una cuerda elástica y flexible, sujeta por sus extremos, viene determinada por la ecuación en derivadas parciales

$$T v_{xx} = \rho v_{tt}; \quad v(0, t) = g(t); \quad v(l, t) = h(t) \quad (6.63)$$

donde $h(t)$ y $g(t)$ expresan el movimiento vertical de los extremos. Siguiendo la notación habitual, la constante ρ es la densidad del cable, y $T > 0$ es la tensión del cable. Los puntos $P_0 = (0, g(t))$ y $P_1 = (l, h(t))$ representan la posición de los extremos del cable (véase la Figura 6.3).

Este modelo supone que no se producen vibraciones longitudinales en el cable, y que las vibraciones transversales son pequeñas. Una derivación de este modelo de la ecuación de ondas puede encontrarse, por ejemplo, en (Folland, 1992).

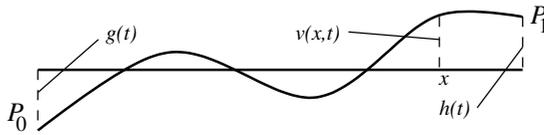


Figura 6.3: Variables del modelo de pequeñas oscilaciones para una cuerda descrito por la ecuación de ondas (6.63).

Considérese el segmento de recta que une los puntos P_0 y P_1 dado, en forma paramétrica, por $\gamma(x, t) = g(t)(1 - x) + h(t)x$, y sea $u(x, t) = v(x, t) - \gamma(x, t)$; $\forall x \in [0, l]$.

La función $u(x, t)$ representa la distancia vertical de la solución $v(x, t)$ al segmento $\gamma(x)$ y, en consecuencia, $u(0, t) = 0$; $u(1, t) = 0$ (véase la Figura 6.4). Calculando las derivadas parciales de u , e introduciéndolas en (6.63) el modelo puede expresarse como

$$\begin{aligned} Tu_{xx}(x, t) &= \rho u_{tt}(x, t) + \gamma_{tt}(x, t); & x \in [0, l] \\ u(0, t) &= 0; & u(l, t) = 0; \end{aligned} \quad (6.64)$$

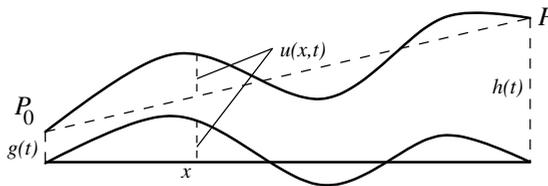


Figura 6.4: Variables del modelo de oscilación transformado.

El término $\gamma_{tt}(x, t)$ aparece en (6.64) como una fuerza inercial sobre el cable que recoge el efecto del movimiento del cable expresado en el sistema de referencia del segmento que une los extremos del cable.

6.2.4. Discretización de la ecuación de ondas

El modelo de oscilación presentado por medio de la ecuación de ondas (6.49), expresa la evolución del cable como una ecuación en derivadas parciales de orden dos respecto al tiempo y respecto a la variable espacial. Para obtener la evolución del sistema a lo largo del tiempo es necesario integrar numéricamente esta ecuación diferencial.

El objetivo es obtener la evolución del estado del cable a lo largo del tiempo a partir de un estado inicial del sistema y de las condiciones de contorno, que se considerarán como datos de entrada del problema. El problema anterior es lo que se conoce como un *Problema de Valores Iniciales*. La resolución numérica de los problemas de valores iniciales en ecuaciones en derivadas parciales es un tema amplio y admite estrategias de resolución muy variadas.

En este caso, estamos interesados en obtener una solución que exprese el estado de los puntos del cable en el espacio. Además, las condiciones de contorno no se conocen previamente, sino que se obtienen tras cada paso de integración como datos de entrada del modelo de oscilación. Por este motivo se ha seleccionado la metodología de las diferencias finitas para su resolución. El libro de Strikwerda (Strikwerda, 2004) es un buen punto de partida para el estudio de esta metodología.

Ecuaciones en diferencias finitas

La metodología conocida como diferencias finitas se basa en la discretización de las variables espacial y temporal de la ecuación diferencial. La solución de la ecuación se expresa en términos de esta discretización y las derivadas se aproximan a partir de diferencias divididas, utilizando el desarrollo en serie de Taylor.

Sea la región $\Omega = [0, 1] \times [0, \infty)$ y sea $u(x, t)$ una solución de la ecuación de ondas

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0. \quad (6.65)$$

Sea $x^m = mh$ y $t_n = nk$, donde $h = \frac{1}{M}$ y k es el paso de integración

temporal elegido. Sea v una aproximación a la solución u . Considérese la discretización de Ω dada por el conjunto de puntos

$$\{(x^m, t_n) \in \Omega : m = 0, \dots, M; n = 0, 1, \dots\}, \quad (6.66)$$

se denotará por $v_n^m(t) = v(x^m, t_n)$ a los valores de la discretización de la solución numérica v que aproxima a la solución u de la ecuación (6.65) en los puntos de la discretización.

Un método de integración en diferencias finitas expresa una relación lineal entre los valores de v_n^m para $m = 0, \dots, M$ y $n = n_o, n_o - 1, \dots, n_o - r$.

Dentro de esta familia de métodos numéricos, existe una gran variedad de métodos con diferentes propiedades. Desde el punto de vista de los objetivos planteados en esta tesis, los aspectos más relevantes a tener en cuenta son la eficiencia, la estabilidad y la robustez ante discontinuidades en las entradas.

Eficiencia Uno de los objetivos principales de este trabajo es proporcionar modelos de simulación que sean adecuados para la simulación en tiempo real. Por tanto, la eficiencia del método es fundamental para que permita alcanzar este objetivo.

Estabilidad El sistema considerado muestra oscilaciones de alta frecuencia, que dan lugar a inestabilidades numéricas. Esto obliga a elegir entre utilizar un método explícito con un paso de integración muy pequeño o emplear un método implícito.

Capacidad de gestionar discontinuidades Los métodos numéricos para la resolución de ecuaciones en derivadas parciales suponen, en general, la derivabilidad de las funciones involucradas en el sistema. Sin embargo, en nuestro caso, es frecuente la aparición de discontinuidades, al menos en la primera derivada de los datos de entrada, cuando se producen colisiones, por ejemplo. Por este motivo no está justificada la utilización de métodos numéricos de orden superior ya que supondría un aumento en el coste computacional sin una mejora en las prestaciones.

Se propone la utilización de dos métodos numéricos basados en diferencias finitas. Por una parte, un método implícito, que permitirá la simulación

del sistema en las condiciones de elevada tensión que se producen en cables de elevación y por otra parte un método explícito que permite un cálculo más eficiente de cada paso de integración.

Métodos implícitos

En primer lugar, se utiliza un método de integración implícito para la solución de la ecuación en derivadas parciales. Considérense las siguientes aproximaciones discretas a las derivadas

$$u_{tt}(x^m, t_n) \simeq \frac{v_{n+1}^m - 2v_n^m + v_{n-1}^m}{k^2}; \tag{6.67}$$

$$u_{xx}(x^m, t_n) \simeq \frac{v_n^{m+1} - 2v_n^m + v_n^{m-1}}{h^2}, \tag{6.68}$$

se empleará el método implícito dado por

$$u_{tt}(x^m, t_n) = a^2 \frac{1}{4} (u_{xx}(x_m, t_{n-1}) + 2u_{xx}(x_m, t_n) + u_{xx}(x_m, t_{n+1})) \tag{6.69}$$

Si se considera

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

este método puede expresarse de forma matricial como (Mitchell and Griffiths, 1980)

$$\left(\frac{4}{a^2 \lambda^2} \mathbf{I} + \mathbf{K} \right) \mathbf{u}_{n+1} + \mathbf{b} = \left(\frac{4}{a^2 \lambda^2} \mathbf{I} - \mathbf{K} \right) \mathbf{u}_n - \left(\frac{4}{a^2 \lambda^2} \mathbf{I} + \mathbf{K} \right) \mathbf{u}_{n-1} - 3\mathbf{b},$$

donde λ representa la relación entre el paso de integración temporal y el intervalo utilizado en la discretización espacial, $\lambda = \frac{k}{h}$.

Métodos explícitos

La segunda solución que se propone se apoya en la descomposición modular del sistema para evitar las situaciones de inestabilidad, explotando

las propiedades del sistema simulado. El método propuesto es el esquema explícito de diferencias centradas de orden dos

$$\frac{v_{n+1}^m - 2v_n^m + v_{n-1}^m}{k^2} = a^2 \frac{v_n^{m+1} - 2v_n^m + v_n^{m-1}}{h^2} \quad (6.70)$$

A partir de la expresión (6.70) es posible calcular la evolución de cada uno de los valores de la discretización despejando el valor de v_{n+1}^m

$$v_{n+1}^m = 2v_n^m - v_{n-1}^m + \lambda^2 a^2 (v_n^{m+1} - 2v_n^m + v_n^{m-1}) \quad (6.71)$$

donde, de nuevo, $\lambda = \frac{k}{h}$.

Este método tiene la siguiente región de estabilidad, a partir de las dimensiones de la discretización h y k ; el método es estable si y sólo si el valor $\lambda = \frac{k}{h}$ cumple la condición $\lambda a < 1$, donde a es la constante de la ecuación de ondas (6.65). Esta condición, que habitualmente se presenta para ecuaciones en derivadas parciales con coeficientes constantes, es aplicable también para ecuaciones con coeficientes variables para cualesquier valores de los coeficientes que cumplan la condición (Strikwerda, 2004).

Esto permite aplicar esta condición al modelo (6.49) en el que el coeficiente a se interpreta como $a^2 = T/\rho$, donde T es la tensión del cable y ρ su densidad. El hecho de que la condición de estabilidad no se satisfaga se debe a un aumento en la tensión a la que está sometido el cable, dando lugar a una oscilación de alta frecuencia.

Con el fin de garantizar la estabilidad de la simulación se utilizará el hecho de que cuando la frecuencia de oscilación es muy elevada, su amplitud se verá reducida rápidamente a causa de la fricción y de la disipación de energía. Por tanto, aquellas situaciones que puedan dar lugar a inestabilidad se producirán, en la mayoría de los casos, junto con vibraciones de alta frecuencia y baja amplitud.

Esta situación, en una simulación destinada a la representación gráfica del sistema y que va a mostrarse a una frecuencia menor de 60 imágenes por segundo, resulta prácticamente irrelevante desde el punto de vista de la percepción visual.

Por tanto, asumiendo el riesgo de que en un conjunto reducido de situaciones se pueda producir una pérdida de calidad visual, se propone la eliminación del modelo de oscilación siempre que se detecte que la estabilidad no está garantizada. Para ello se utilizará la condición de estabilidad de Courant, que garantiza que el método elegido es estable siempre que se cumpla la condición

$$\lambda a < \sqrt{2}. \quad (6.72)$$

En los casos en los que no se cumpla la condición de estabilidad, el cálculo de la evolución de la ecuación (6.49) se detendrá y la solución se anulará. Durante el tiempo que la oscilación permanezca suspendida, la simulación se llevará a cabo por medio del cable sin masa, que evita el cálculo de la oscilación.

Obsérvese que, durante este tiempo, la diferencia entre la solución correcta y el segmento de recta utilizado será muy pequeña a causa de la elevada tensión del cable.

Tras cada paso de integración del sistema se comprobará la condición, de forma que el cálculo de las oscilaciones se pueda reanudar en cuanto el método de diferencias sea estable de nuevo.

6.3. UTILIZACIÓN DE NIVELES DE DETALLE DINÁMICOS

De acuerdo con la metodología propuesta, el modelo abstracto definido en el Capítulo 3 debe permitir la simulación flexible y robusta de un conjunto amplio de situaciones.

El Apartado 6.2.4 ya hace uso de esta propiedad de la metodología que se ha desarrollado. En primer lugar, gracias a la descomposición en módulos del sistema que se desea simular, es posible aislar el origen de la inestabilidad numérica. En segundo lugar, esta misma modularización del sistema permite intercambiar, en tiempo de ejecución incluso, dos modelos dinámicos que correspondan al mismo módulo.

En este caso, se ha explotado la modularidad con el fin de controlar la

estabilidad del modelo. Se ha utilizado la caracterización de la inestabilidad del método numérico empleado y se ha resuelto el problema por medio de la sustitución del modelo inestable por otro modelo estable.

A continuación se analizan las posibilidades que ofrece el modelo abstracto desde el punto de vista, no sólo de la estabilidad, sino también de la mejora de su respuesta ante las entradas.

6.3.1. Niveles de detalle en entornos virtuales

Un concepto bien conocido en el campo de los gráficos por ordenador es el de los niveles de detalle (Heckbert and Garland, 1994). La utilización de *niveles de detalle* en el modelado geométrico de un objeto consiste en la creación de un conjunto de modelos diferentes, cada uno de ellos correspondiente a una simplificación del anterior.

En función de las necesidades de la aplicación, puede utilizarse uno u otro para representar la escena. Típicamente se emplean para reducir la carga del sistema por medio de criterios de distancia. Cuando el punto de vista de la escena se encuentra lejos del objeto, se emplean los modelos de menor calidad y menos costosos. Cuando el punto de vista se encuentra próximo al objeto se emplea la mejor representación. Esta técnica aprovecha que la calidad de un modelo sencillo puede ser suficiente en función del estado de la aplicación.

Este concepto ha sido transferido a la simulación por medio de los Niveles de Detalle en Simulación (SLODs, del inglés *Simulation Levels of Detail* (Carlson and Hodgins, 1997; Redon et al., 2005), que permiten aplicar las mismas ideas a la animación y simulación de objetos dinámicos.

El modelo abstracto de polipasto que se ha desarrollado facilita la utilización de niveles de detalle dinámicos para la simulación de los cables. Para ello se van a establecer dos criterios para la decisión del modelo más adecuado en cada instante para la simulación de un segmento; la estabilidad y la calidad del modelo.

Debe observarse que el modelo empleado para cada segmento de cable o polea en particular, no impone ninguna restricción respecto al modelo que

debe emplearse en el resto de segmentos o poleas. De esta manera es posible aprovechar los beneficios de la utilización de niveles de detalle cuando las condiciones de simulación sean diferentes en distintas zonas del cable.

6.3.2. Adaptación del modelo al estado del sistema

Uno de los problemas que se ha mostrado de forma patente a lo largo de esta tesis es el hecho que los modelos dinámicos basados en física tienen, en muchos casos, un rango de validez insuficiente para una aplicación interactiva.

La utilización de niveles de detalle dinámicos permite extender este rango de validez del modelo de polipasto gracias al intercambio de los modelos dinámicos de cada uno de los módulos. De esta manera, cuando la evolución del sistema de lugar a un estado en el que el modelo dinámico que se está empleando deja de tener validez, éste se sustituirá por otro más adecuado.

Este principio puede aplicarse al conjunto de modelos dinámicos de cable desarrollados a lo largo de este trabajo. Pueden considerarse tres modelos diferentes, con diferentes rangos de validez.

Modelo de cable sin masa. Representa cada segmento de cable por medio de un resorte elástico. Es adecuado en las situaciones de tensión más elevada, cuando la oscilación del cable es inapreciable. Si la tensión del cable se reduce, la calidad de este modelo es muy pobre.

Modelos de ecuación de ondas. Permiten una simulación muy eficientes en situaciones de tensión elevada. Su rango de validez está limitado por la suposición de que la deformación puede representarse siempre como una distancia al segmento de recta que une los extremos. Este modelo no considera resistencia a la flexión del cable.

Modelo de partículas. El modelo de sistema de partículas permite representar un cable en una posición arbitraria. La definición del modelo no impone, a priori, ninguna restricción respecto a la configuración permitida. Este modelo contempla la rigidez del cable frente a la flexión. Es el más adecuado para la simulación de situaciones de menor tensión, en las que no

son válidas las suposiciones de la ecuación de ondas.

La estrategia para realizar un intercambio de modelos requiere la definición de dos elementos. En primer lugar, una medida de la calidad de cada modelo, para decidir la necesidad de realizar el cambio. En segundo lugar, una vez tomada la decisión de realizar el cambio, es necesario determinar el estado del modelo que se va a activar a partir del estado del modelo que va a ser desactivado.

A continuación se detalla el criterio y el procedimiento para intercambiar cada par de modelos. De acuerdo con la descripción que se acaba de realizar de las propiedades de los modelos en cuanto a su validez, únicamente se considerará el intercambio entre el modelo de partículas y la ecuación de ondas, y entre la ecuación de ondas y el modelo de muelle sin masa.

Activación y desactivación del resorte elástico

Uno de los principales objetivos del presente trabajo es el desarrollo de un modelo de polipasto que contemple la oscilación transversal de cada tramo de cable comprendido entre dos poleas. Por tanto, la utilización del resorte elástico debe estar limitada a aquellas situaciones en las que no haya diferencia aparente entre el estado del sistema y un segmento de recta. Esta diferencia se empleará como criterio para decidir la utilización del modelo de cable sin masa.

Considérese el segmento de cable \mathcal{C} , modelado por medio de la ecuación de ondas. Recuérdese que, gracias a la proyección del modelo sobre la base local del cable, la posición de cada punto del cable viene dada por dos funciones escalares u_1 y u_2 .

Sean $u_{1,k}$ y $u_{2,k}$, $k = 1, \dots, M - 1$, los valores de estas funciones correspondientes a la discretización utilizada para la integración numérica del modelo. Se define el valor

$$\varepsilon = \text{máx}\{u_{1,k}^2 + u_{2,k}^2; k = 1, \dots, M - 1\},$$

que corresponde al cuadrado de la máxima diferencia entre el sistema modelado por medio de la ecuación de ondas y el resorte elástico. Cuando el valor

de ε sea menor que una tolerancia definida previamente, ε_0 , se aceptará la utilización del modelo sin masa.

Para la activación del modelo de resorte elástico es posible realizar la comprobación a partir del estado del sistema. Sin embargo, la desactivación tiene el inconveniente de que no se conoce el estado del sistema modelado por medio de la ecuación de ondas.

En este caso, se tomará como medida de la desviación el estado de equilibrio del cable ante las fuerzas externas existentes. Para ello, considérese la ecuación de ondas, en ausencia de velocidad longitudinal, con tensión constante y sometida a una fuerza externa F

$$\rho u_{tt} = T u_{xx} + F$$

El valor de F corresponde, en este caso, a la proyección de la gravedad sobre la dirección perpendicular al segmento del cable.

El estado de equilibrio del cable debe cumplirse $u_{tt} = 0$, por lo que

$$0 = T u_{xx} + F.$$

de donde, integrando, se obtiene que

$$u(x) = \frac{F}{T} x^2 + Ax + B$$

siendo A y B las constantes de integración. Por simplicidad en la notación, el cociente $\frac{F}{T}$ se denotará por c .

A partir de las condiciones de contorno $u(0) = 0$ y $u(l) = 0$ se obtiene que $B = 0$ y $A = -cl$. Por tanto, el estado de equilibrio de la cuerda vendrá dado por

$$u(x) = cx^2 - clx, \tag{6.73}$$

que tiene un extremo local en $x = l/2$, con valor

$$u(l/2) = \frac{cl^2}{4} - \frac{cl^2}{2} = -\frac{cl^2}{4} \tag{6.74}$$

El valor absoluto del extremo local, $\varepsilon = |u(l/2)|$ se tomará como medida del error que se comete en cada instante por el modelo basado en un resorte

elástico respecto al modelo basado en la ecuación de ondas. Cuando se detecte que ε supera un umbral preestablecido, ε_1 , se activará el modelo basado en la ecuación de ondas, fijando su estado en la posición indicada por (6.74).

Activación y desactivación del sistema de partículas

La principal diferencia entre la ecuación de ondas y un sistema de partículas estriba en que la ecuación de ondas asume que la posición de cada nodo únicamente se desvía transversalmente, en la dirección perpendicular al segmento que une los extremos del cable.

Esta suposición va ligada al hecho de que la tensión del cable sea suficientemente alta como para que las desviaciones transversales sean reducidas. En este caso, una desviación longitudinal fuerza a una deformación longitudinal del cable. Sin embargo, cuando las desviaciones transversales son suficientemente grandes, una desviación de una partícula en la dirección paralela a la recta que une los extremos del cable no requiere, necesariamente, una deformación longitudinal del cable. En este caso, el modelo basado en partículas es más adecuado.

Considérense de nuevo las funciones que determinan el estado de la ecuación, u_1 y u_2 , y sea $u_{1x,k}$ y $u_{2x,k}$, $k = 1, \dots, M - 1$ la discretización de la derivada de u_1 y u_2 respecto de la variable espacial x . Se tomará como medida de la validez del modelo de la ecuación de ondas el valor

$$\varepsilon = \text{máx}\{u_{1x,k}^2 + u_{2x,k}^2; k = 1, \dots, M - 1\},$$

Recíprocamente, dado el sistema de partículas, deberá establecerse una medida equivalente a partir del conjunto de posiciones de las partículas \mathbf{r}_i . Considérese el vector unitario \mathbf{d} , ya definido anteriormente, paralelo a la recta que pasa por los extremos del cable. Sea también el vector \mathbf{d}_i , unitario y paralelo al resorte elástico que une la partícula \mathbf{r}_i y \mathbf{r}_{i+1} .

Se define el ángulo de desviación de cada resorte del sistema de partículas respecto del vector \mathbf{d} como

$$\beta_i = \text{arc cos} (\mathbf{d}_i^T \mathbf{d}). \quad (6.75)$$

En este caso debe tenerse en cuenta una restricción adicional. Esta restricción se debe al hecho de que la distancia entre los nodos en la ecuación de ondas proyectada sobre el vector \mathbf{d} es constante, mientras que en el modelo de partículas esta condición no tiene por qué cumplirse.

Se considerarán, por tanto, dos medidas. La primera basada en el máximo ángulo β_i para el segmento de cable, y la segunda basada en la máxima desviación del cada resorte respecto de su longitud de referencia. Cuando ambas medidas se encuentren por debajo del umbral establecido, se retirará el modelo basado en partículas, para emplear el modelo basado en la ecuación de ondas.

En el caso del intercambio entre el modelo basado en la ecuación de ondas y el modelo basado en un sistema de partículas, debe tenerse en cuenta además la forma de determinar la posición y velocidad de los nodos o partículas del modelo que se esté activando.

Con el objetivo de evitar que se produzca un salto en el estado del sistema, apreciable por parte del usuario, y que pueda suponer un problema desde el punto de vista de la detección de colisiones, tanto la posición como la velocidad de los nuevos nodos se iniciará interpolando las posiciones y velocidades de los nodos del modelo que está siendo detenido.

6.4. CONCLUSIÓN

El modelo basado en sistemas de partículas presentado el Capítulo 5 tiene, como principal limitación, la aparición de problemas de estabilidad numérica durante la simulación de equipos de elevación. El presente capítulo proporciona nuevos modelos más adecuados para las situaciones de tensión elevada.

El modelo se obtiene a partir del principio de conservación del momento aplicado a un pequeño segmento de cable y permite la variación de su longitud, así como el movimiento arbitrario de sus extremos.

Por medio de la definición de un sistema de referencia local, el modelo puede expresarse como dos ecuaciones en derivadas parciales unidimensio-

nales, que se discretizan por medio de diferencias divididas y se integran de forma muy eficiente.

Desde el punto de vista de la simulación de maquinaria de elevación, este modelo supone una mejora respecto al modelo basado en un sistema de partículas, ya que es más estable y eficiente.

Con este capítulo se alcanza el objetivo de la obtención de un modelo para la simulación de un polipasto, que sea capaz de considerar la oscilación transversal y de reproducir situaciones de tensión elevada.

Por otra parte, se ha demostrado la utilidad de la metodología propuesta basada en el desarrollo de modelos de forma modular. Para ello se han definido estrategias que permiten intercambiar los diferentes modelos propuestos durante la simulación. De esta manera se consiguen los objetivos de estabilidad y robustez y se amplía el rango de validez del modelo.

Por medio de esta estrategia se garantiza también la estabilidad de la simulación de las oscilaciones del cable explotando las propiedades de su dinámica. La técnica propuesta permite una simulación estable y una respuesta robusta ante valores de entrada extremos, aspectos que son fundamentales para el desarrollo de una simulación interactiva.

Resumen de las contribuciones de este capítulo

El presente capítulo presenta los siguientes resultados

- Se ha definido un modelo de cable, que utiliza una generalización de la ecuación de ondas en el espacio.
- El modelo permite:
 - la variación de la longitud del cable en ambos extremos,
 - la posición arbitraria de los extremos del cable, sin las restricciones de las ecuaciones de ondas clásicas.
- Se ha propuesto un sistema de referencia local que permite expresar el estado del cable por medio de dos ecuaciones de ondas unidimensionales.

- Se ha proporcionado una discretización de los modelos.
- El modelo mejora el cable simulado por medio de un sistema de partículas al ser más eficiente y estable.
- Gracias a la metodología de modelado empleada, y haciendo uso de la modularización que resulta de la misma, se ha propuesto un esquema de sustitución de modelos de cable que permite implementar *niveles de detalle dinámicos*.
- Estos niveles de detalle permiten obtener un modelo de polipasto, con un rango dinámico ampliado al proporcionar más estabilidad y mejor respuesta ante situaciones muy diferentes.

ANÁLISIS Y VALIDACIÓN DE LOS MODELOS

En este capítulo se va a realizar un análisis de los modelos desarrollados a lo largo del presente trabajo. El objetivo de este análisis será determinar hasta que punto estos modelos permiten la simulación interactiva en tiempo real de cables y de un polipasto. De acuerdo con los objetivos planteados, los modelos deben comportarse de forma creíble y deben ser suficientemente eficientes como para ser ejecutados bajo las restricciones de tiempo real habituales en este tipo de aplicaciones.

La validación del modelo se ha realizado por medio de un conjunto de experimentos numéricos que se han dividido en tres bloques. En primer lugar, se han realizado una serie de simulaciones destinadas al análisis del modelo de ecuación de ondas, en las que se muestra la vibración del cable en diferentes situaciones. En segundo lugar, se han realizado una serie de experimentos destinados a determinar el comportamiento de un polipasto de grúa torre, mostrando la importancia de considerar la masa del cable y su influencia en la evolución del gancho. Por último se muestran los resultados de un conjunto de pruebas para analizar las prestaciones, que muestran que el coste computacional de los modelos es muy bajo, mejorando los resultados obtenidos con modelos anteriores.

En cada caso, se han definido criterios para evaluar los resultados obtenidos en los diferentes experimentos numéricos. Siempre que ha sido posible,

estos criterios se han fundamentado en trabajos anteriores realizados por otros autores, con el fin de que sean contrastables. No obstante, esta investigación persigue la *credibilidad* de los modelos, mucho más difícil de objetivar que la precisión de una solución numérica. Por tanto no ha sido posible encontrar criterios de validación aplicables a todas las pruebas realizadas. En estos casos, se han propuesto nuevos criterios de evaluación objetivos y se han presentado argumentos que permiten valorar los resultados en el contexto del presente trabajo.

7.1. ANÁLISIS DE LA DINÁMICA DE UN SEGMENTO DE CABLE

A continuación se realiza un análisis del modelo de segmento de cable presentado en el Capítulo 6. En primer lugar se realiza un análisis espectral de las vibraciones y posteriormente se analiza la dinámica del cable ante una excitación longitudinal en los extremos. Se pretende comprobar que se conservan las propiedades fundamentales de la cuerda vibrante y analizar la influencia del modelo de aceleración longitudinal propuesto en el Apartado 6.1.3.

7.1.1. Frecuencia de oscilación de un segmento de cable

El primer experimento numérico realizado con el modelo de cable propuesto en el Capítulo 6 es el análisis de la frecuencia de vibración de un cable tenso para determinar el error que comete el modelo en esta situación.

El modo principal de vibración del cable influye en los modos de vibración de los diferentes sistemas que se encuentren conectados él, por lo que es importante validar este aspecto del comportamiento del modelo.

Es importante observar que en el modelo descrito en el Capítulo 6, la tensión del cable se determina a partir de la longitud del arco de la curva que describe. Esto da lugar a un modelo que considera la tensión como un valor variable a lo largo del tiempo, por lo que difieren ligeramente del modelo teórico de la ecuación de ondas clásica, en el que la tensión es constante.

Por tanto, el experimento numérico realizado deberá también determinar la influencia de esta modificación sobre el comportamiento del modelo. Para ello se ha considerado el modelo de tensión constante, correspondiente a la ecuación de ondas clásica y posteriormente se ha considerado la oscilación del modelo de oscilación en el que la tensión varía con el arco de la deformación del cable.

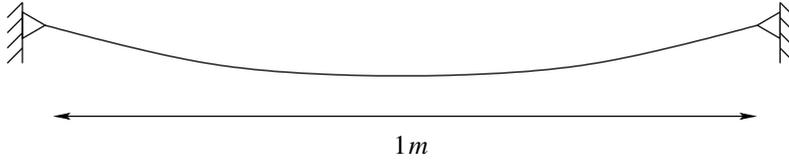


Figura 7.1: *Esquema del sistema empleado para el experimento destinado al análisis espectral de los modelos.*

El experimento se ha realizado por medio de un cable suspendido de dos puntos fijos a una distancia entre sí de 1m (véase la Figura 7.1). El cable se encuentra estirado de forma que, en ausencia de ninguna oscilación, tiene un grado de deformación de 1,1. El cable tiene un módulo de Young de $10^6 N/m^2$ y una sección de radio $r = 0,01m$. El experimento se ha realizado variando el valor de T/ρ , por medio de la variación de la densidad lineal del cable. La oscilación se ha medido registrando la trayectoria del punto central del cable en un modelo con 10 subdivisiones.

Como valor de referencia para la frecuencia fundamental de vibración de una cuerda de longitud L sometida a una tensión constante T y con una densidad lineal de $\rho kg/m$ se ha empleado la frecuencia de vibración de la ecuación de ondas, dada, en Hz, por la expresión (7.1).

$$f_1 = \frac{\sqrt{T/\rho}}{2L} \quad (7.1)$$

Para las vibraciones de un cable con tensión variable no se dispone de un modelo teórico similar a la ecuación de ondas. Sin embargo, en el sistema de partículas la vibración del cable provoca oscilaciones en la longitud de los

T/ρ	FT	FOTC	ε	FSP	FOTV	ΔF
314	8.8623	8.7934	-0.8 %	9.2820	9.2819	5.6 %
943	12.5331	12.4573	-0.6 %	13.1900	13.0679	5.9 %
628	15.3499	15.2662	-0.5 %	16.1212	15.9990	5.6 %
1257	17.7245	17.7088	-0.1 %	18.8080	18.5638	6.2 %
1571	19.8166	19.7851	-0.2 %	21.0064	20.7621	6.2 %
1885	21.7080	21.7391	0.1 %	23.4489	22.7162	7.9 %

Cuadro 7.1: *Frecuencia principal de vibración del cable. Para cada valor de T/ρ se muestran los siguientes datos. FT: frecuencia en el modelo teórico. FOTC: frecuencia en la ecuación de ondas de tensión constante. ε : error. FSP: frecuencia en el sistema de partículas. FOTV: frecuencia en la ecuación de ondas de tensión variable. ΔF : diferencia las dos últimas, en %.*

muelles, modificando la tensión de la misma forma que ocurre en el modelo continuo propuesto en el Capítulo 6 de esta memoria. Por este motivo se ha comparado la vibración del modelo continuo de tensión variable con la vibración del sistema de partículas. El análisis comparativo que se realiza entre estos dos modelos puede resultar útil, además, para el procedimiento de utilización de niveles de detalle dinámicos propuesto en el Apartado 6.3.

El Cuadro 7.1 muestra los resultados obtenidos para los diferentes valores de T/ρ para los que se han realizado mediciones. Para cada valor, se muestran dos bloques de resultados. En primer lugar, se muestra la frecuencia teórica esperada, obtenida a partir de la ecuación (7.1), seguida de la frecuencia medida en el modelo de ecuación de ondas con tensión constante y del porcentaje de error obtenido. En segundo lugar, se muestran las frecuencias medidas en el sistema de partículas y en el modelo de ecuación de ondas con tensión variable, acompañadas también del porcentaje de diferencia del modelo continuo respecto al de partículas. No se hablará de error en este caso, ya que no se otorga la misma validez al modelo numérico basado

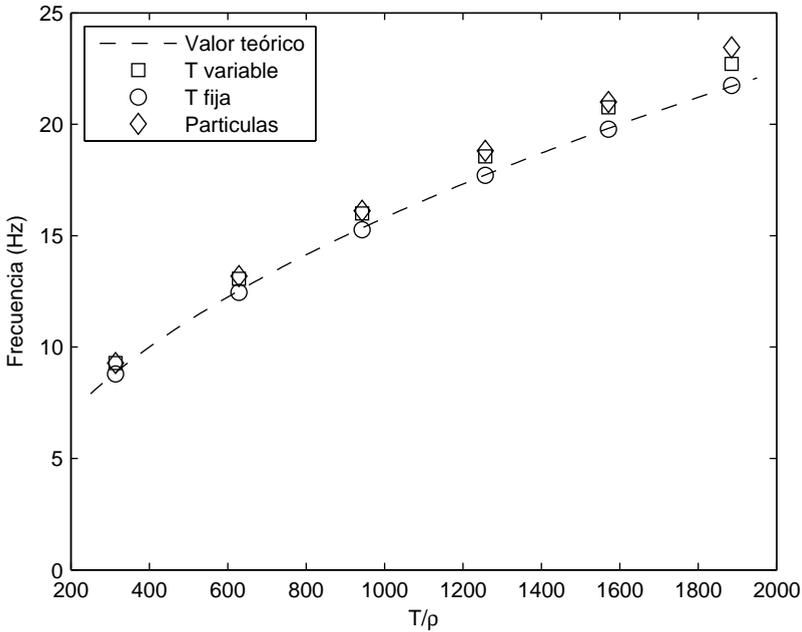


Figura 7.2: *Frecuencia principal de vibración del cable para diferentes valores de densidad y longitud, utilizando los distintos modelos considerados.*

en el sistema de partículas que al modelo que representa la expresión (7.1).

La Figura 7.2 muestra gráficamente estos resultados. La frecuencia teórica obtenida a partir de la ecuación (7.1) se muestra con una línea discontinua, mientras que las diferentes mediciones se muestran por medio de puntos. Como puede observarse en la figura y en la tabla de valores, el modelo con tensión constante se ajusta perfectamente a la predicción teórica, con un error por debajo del 1 %. El modelo con tensión variable, al igual que el modelo de partículas, muestra una frecuencia de oscilación más elevada.

Este comportamiento puede explicarse debido a que el valor de T en el modelo de tensión constante es una cota inferior para el valor de T en el modelo con tensión variable. En ausencia de oscilaciones el valor de deformación coincide en ambos modelos, pero tan pronto como aparece cualquier

oscilación en el cable, el valor de T aumenta en el modelo de tensión variable, produciendo mayores aceleraciones en el cable. Las diferencias obtenidas para el caso con tensión variable son más elevadas que en el caso de tensión constante, aunque permanecen siempre por debajo del 10 %.

Estos resultados muestran que el comportamiento del cable, simulado por medio del modelo de oscilación presentado en el Capítulo 6, es correcto en el espectro de frecuencias. Se ha reproducido incluso el aumento de la frecuencia esperado en el modelo de tensión variable a causa del aumento de la tensión, observándose un comportamiento coherente con el del sistema de partículas. Esta coherencia entre los dos modelos propuestos en este trabajo es importante para permitir su intercambio como diferentes niveles de detalle en el esquema propuesto en el Apartado 6.3 sin que se produzcan saltos apreciables en las vibraciones.

7.1.2. Análisis de la vibración de una cuerda excitada longitudinalmente

Uno de los comportamientos del cable que pretenden ser reproducidos por medio de los modelos presentados es la oscilación longitudinal de la catenaria. Esta oscilación puede aparecer como consecuencia de las aceleraciones longitudinales de sus extremos. A continuación se realiza un análisis de este movimiento, obtenido por medio de los modelos presentados. De acuerdo con los objetivos planteados en esta investigación, se pretende comprobar que esta oscilación es observable en la dinámica del modelo y que tiene un comportamiento creíble.

El análisis se lleva a cabo por medio de un experimento numérico que simula un cable en el que se provoca esta oscilación. El sistema considerado, que se muestra en la Figura 7.3, consiste en un cable de longitud $L = 2m$ suspendido por sus extremos, que se encuentran a una distancia D , bajo la acción de la gravedad.

Para provocar las oscilaciones se han desplazado los extremos del cable en la dirección longitudinal del mismo utilizando un movimiento periódico

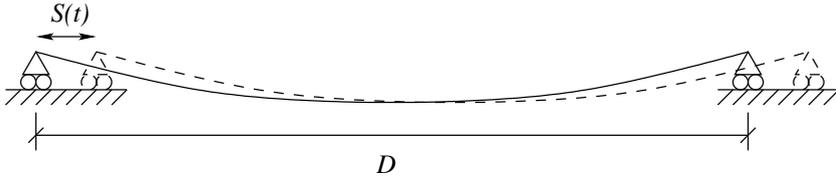


Figura 7.3: Esquema del sistema empleado para el análisis de las oscilaciones de un cable sometido a un desplazamiento longitudinal.

dado por la función

$$S(t) = \frac{1}{2} \sin^2 2\pi\omega t,$$

cuya aceleración viene dada por

$$S''(t) = (2\pi\omega)^2(\cos^2 2\pi\omega t - \sin^2 2\pi\omega t).$$

Se ha simulado el comportamiento del cable para diferentes valores de ω y de la separación entre los extremos D , dando lugar a diferentes valores máximos de desviación del cable en reposo respecto de la horizontal. Concretamente, el experimento se ha repetido para D tomando valores entre 1,4 y 2,6 a intervalos de 0,2, y para $\omega = 1/2$, $\omega = 1/4$ y $\omega = 1/6$. Valores de ω menores de $1/6$ dan lugar a oscilaciones muy pequeñas, que apenas son apreciables, mientras que valores de ω mayores de $1/2$ daban lugar a un comportamiento muy irregular, causado por las elevadas aceleraciones que aparecen, y que no es de interés en el tipo de situaciones que se pretenden simular en el marco de esta tesis.

Los experimentos se han realizado utilizando el modelo basado en la ecuación de ondas y el modelo basado en un sistema de partículas. Esto permite, por una parte, comprobar la capacidad del modelo basado en la ecuación de ondas para reproducir la oscilación simulada, empleando el sistema de partículas como referencia. Por otra parte, permite analizar la diferencia de comportamiento entre los dos modelos (ecuación de ondas frente a sistema de partículas) en función de las condiciones del experimento.

Resultados

A partir de los resultados obtenidos, cabe destacar, en primer lugar, que el experimento realizado muestra que el comportamiento del cable, simulado por medio de la ecuación de ondas corresponde al comportamiento esperado, coincidiendo con el comportamiento del sistema de partículas. En ambos casos la curva descrita por el cable se deforma, perdiendo la simetría, y aumentando su curvatura en la dirección opuesta a la aceleración longitudinal experimentada.

La Figura 7.4 muestra el estado del cable en el instante de tiempo $t = 0,57s$ para $\omega = 1/2$ y tres valores diferentes de D . La Figura 7.5 muestra diferentes instantes de la simulación para el caso en el que $\omega = 1/4$

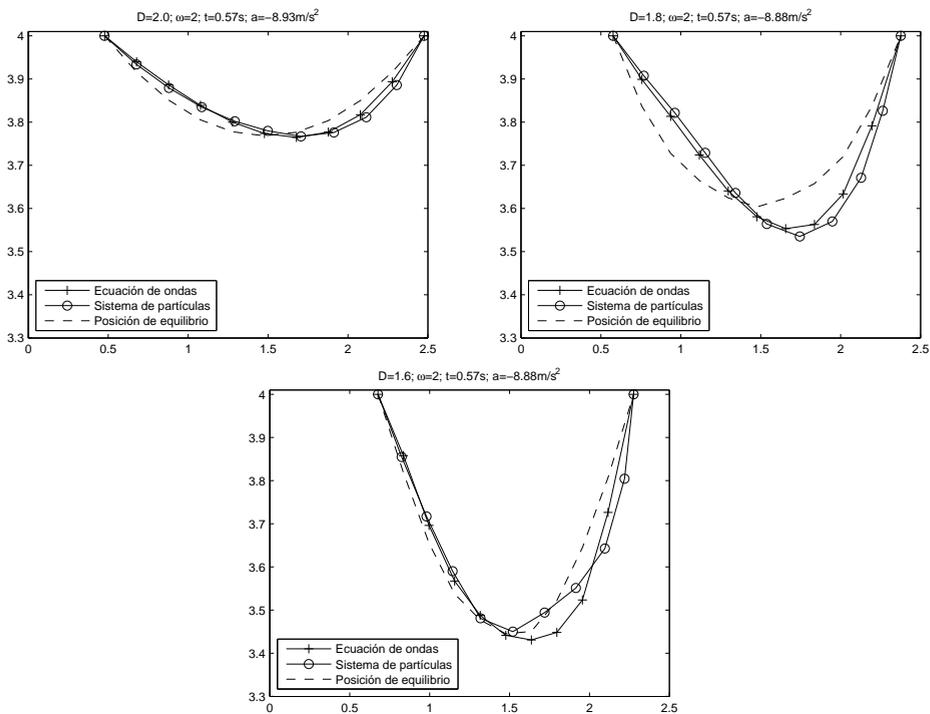


Figura 7.4: Estado de los dos modelos simulados para diferentes valores de D , con $\omega = 1/2$.

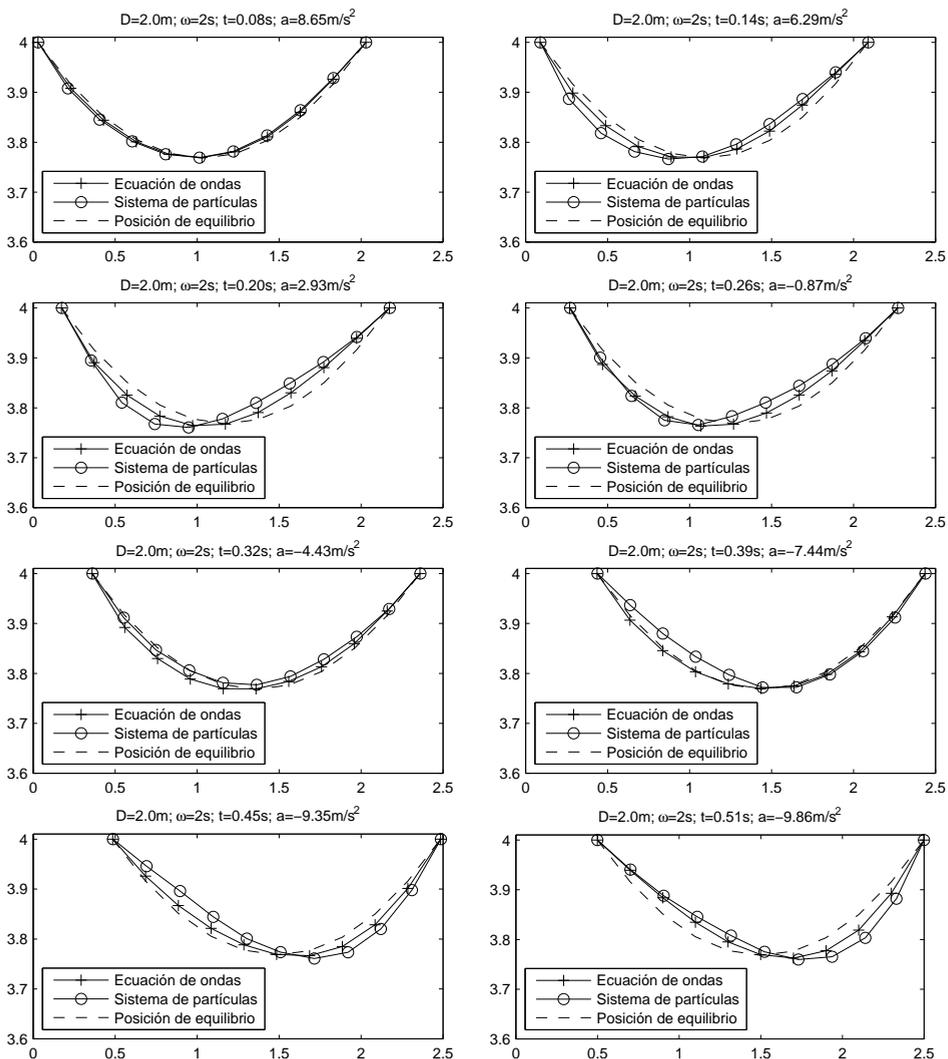


Figura 7.5: Secuencia del movimiento de un cable cuyos extremos se desplazan con velocidad variable a lo largo de la dirección longitudinal. Cada instantánea muestra el estado del modelo basado en un sistema de partículas, junto al modelo de la ecuación de ondas. Superpuesta, aparece la posición de equilibrio, representada por una línea de trazos.

y $D = 2$. En las dos figuras se puede observar que, cualitativamente, el comportamiento del cable es similar en ambos modelos; en ambos casos se aprecia cómo la curvatura del cable es mayor en la mitad opuesta a la dirección de la aceleración.

En estas figuras puede apreciarse también diferencias entre ambos modelos, que varían con el valor de D y ω . En la Figura 7.4, en particular, se observa la existencia de una relación con el parámetro D ; la diferencia entre ambos modelos en algunos puntos es mayor al disminuir el valor del parámetro.

Con el fin de determinar de forma más concreta la relación entre los parámetros D y ω y la diferencia entre los modelos, se ha medido distancia vertical entre las poligonales que representan el cable en ambos casos. En el caso de la ecuación de ondas, se considera la poligonal en el plano xz dada por los puntos $\{(x_1, u_1), \dots, (x_M, u_M)\}$, mientras que en el caso del sistema de partículas se considera la poligonal definida por los puntos $\{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_M\}$.

Obsérvese que la proyección de los puntos \mathbf{r}_k sobre el eje horizontal no coincidirá, en la mayoría de los casos, con los puntos x_k que definen la ecuación de ondas. Por tanto, para medir la distancia entre ambas poligonales, se ha obtenido un conjunto de valores v_k interpolando el conjunto de nodos $\{\mathbf{r}_k\}$ en los puntos $\{x_k\}$ por medio de splines cúbicos (véase la Figura 7.6). De esta manera, se obtienen dos vectores $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_M)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_M)$, ambos de \mathbf{R}^M . A partir de estos vectores, se toma como medida de la diferencia

$$\varepsilon = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_\infty = \max(|u_i - v_i|),$$

realizando las mediciones a lo largo de un intervalo de tiempo correspondiente al periodo de oscilación de los extremos del cable. Se ha obtenido el valor promedio de ε a lo largo del intervalo de tiempo simulado, $\bar{\varepsilon}$, así como su valor máximo, $\hat{\varepsilon}$.

La Figura 7.7 muestra los resultados obtenidos para los diferentes valores de ω y de D . Los resultados muestran que, cuando $\omega \leq 1/4$, la diferencia media entre ambos modelos es inferior a 0,1 y para valores de D mayores

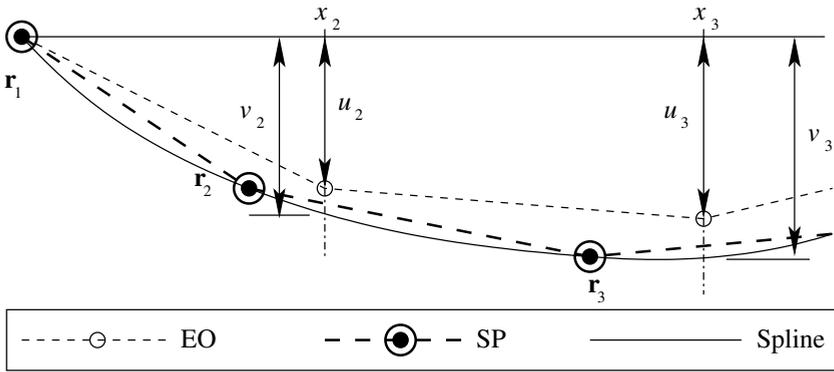


Figura 7.6: Para comparar el modelo basado en la ecuación de ondas (EO) con el modelo basado en un sistema de partículas (SP) se ha interpolado este último en los puntos x_k por medio de splines.

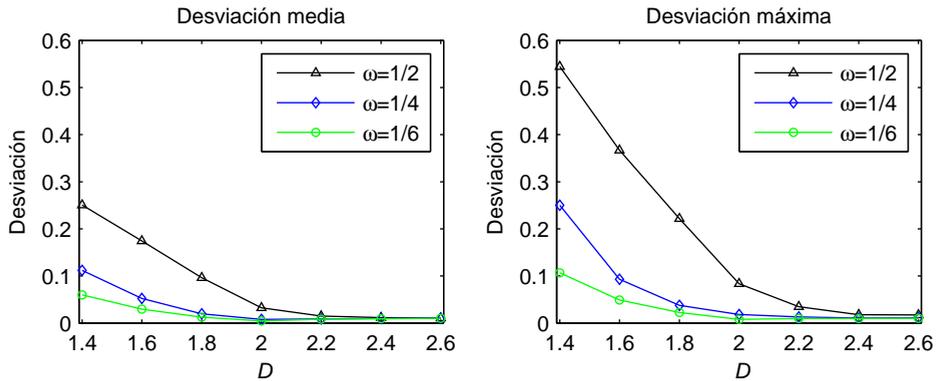


Figura 7.7: Diferencia, en $\|\cdot\|_\infty$, de la curva descrita por el cable en los modelos estudiados para diferentes valores de ω y de D .

de $1,6 = 0,8L$, el valor de $\bar{\varepsilon}$ cae rápidamente por debajo de 0,05. El valor de $\hat{\varepsilon}$ tiene un comportamiento similar, aunque para valores de D a partir de $D = L = 2$.

No obstante, es importante destacar que, incluso en las situaciones de mayor discrepancia entre ambos modelos, el comportamiento de la ecuación

de ondas es perfectamente coherente con la oscilación esperada, de forma que la dinámica del sistema sigue resultando creíble en los valores de D comprobados.

Discusión

El origen de las diferencias observadas entre ambos modelos se debe a sus diferentes hipótesis de partida. Debe observarse que la oscilación obtenida por medio del modelo de ecuación de ondas se debe a la combinación de dos factores: el efecto de la velocidad longitudinal reflejado en la ecuación de ondas, y el efecto de la aceleración sobre la tensión, según el modelo propuesto en el Apartado 6.1.3. Sin embargo, a diferencia de lo que ocurre en el modelo de partículas, no existe un desplazamiento longitudinal de los puntos materiales del cable respecto a la posición de los extremos.

En el modelo de cable basado en un sistema de partículas, a medida que el valor de D disminuye, la aceleración de los extremos provoca que las partículas se queden *rezagadas*, agolpándose junto al extremo opuesto a la dirección de aceleración. Este efecto puede apreciarse claramente en la Figura 7.4, en el que varias partículas se sitúan prácticamente bajo la vertical del extremo derecho del cable. Por este motivo, el comportamiento de ambos modelos no puede coincidir completamente, en especial cuando estos desplazamientos son muy elevados.

En caso de que el valor de D continúe disminuyendo, algunas de estas partículas rebasarán incluso la posición de los extremos del cable. Un ejemplo de esta situación se muestra en la Figura 7.8, correspondiente a una simulación con $D = 1,2$ y $\omega = 4$.

El estado del cable que proporciona el modelo de partículas en estas situaciones no es compatible con la hipótesis principal de la ecuación de ondas. Esta hipótesis establece, en primer lugar, que las oscilaciones son de amplitud reducida y, como consecuencia de ello, se asume que la oscilación puede expresarse como una desviación perpendicular del cable respecto de un segmento de recta.

La evolución del parámetro D hacia valores menores de $0,8L$ da lugar,

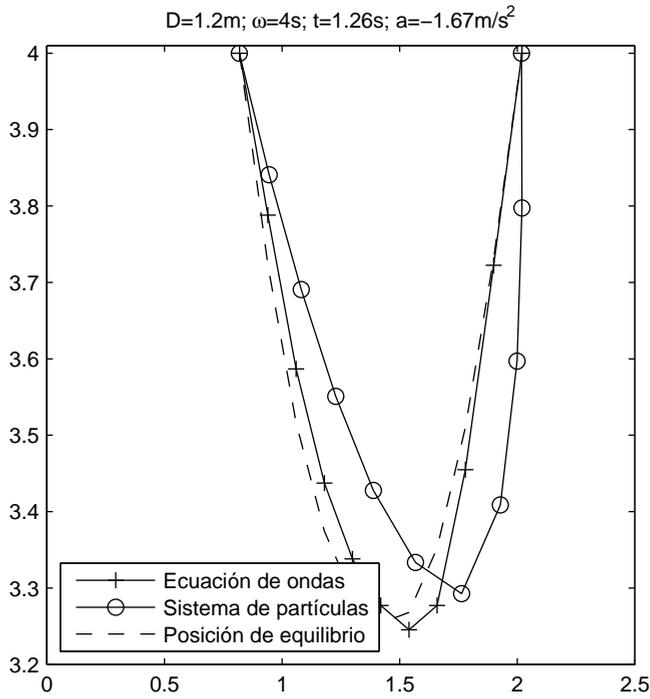


Figura 7.8: *Las situaciones en las que el desplazamiento de las partículas supera los extremos del cable no puede ser reproducido con la ecuación de ondas.*

por tanto, a un escenario en el que el modelo de ecuación de ondas abandona el conjunto de situaciones que es capaz de describir adecuadamente. Igualmente ocurre para valores de ω mayores que $1/4$.

La situación puesta de manifiesto por medio de este experimento muestra claramente la validez de una de las hipótesis de partida de este trabajo, según la cual no es posible conseguir la reproducción de un rango amplio de situaciones por medio de un único modelo dinámico.

En cualquier caso, un ajuste adecuado de los parámetros de los procedimientos descritos en el Apartado 6.3, harán que se sustituya el modelo de ecuación de ondas por el modelo basado en partículas antes de que se

alcance una situación inadecuada. De hecho, los resultados obtenidos aquí pueden ayudar a ajustar, en algunos casos, dichos parámetros.

Conclusión

El experimento realizado confirma, en primer lugar, que el modelo de ecuación de ondas, junto con el modelo de variación de la tensión propuesto en el Apartado 6.1.3, permite reproducir la oscilación del cable ante una aceleración longitudinal en sus extremos.

Además, por medio de la comparación de los dos modelos simulados, es posible establecer límites a la validez del modelo de ecuación de ondas a partir de los parámetros D y L y de las aceleraciones longitudinales. Esta información puede ser utilizada en la implementación de los niveles de detalle dinámicos propuestos en el Apartado 6.3.

7.2. ANÁLISIS DE LA DINÁMICA DE UN POLIPASTO DE GRÚA TORRE

En los modelos de grúa destinados a entrenamiento, es fundamental que la dinámica de la carga y el gancho sea lo más parecida posible a la que se puede observar en la máquina real. Si los principales modos de vibración o la amortiguación del sistema no se reproducen adecuadamente, el aprendiz puede aprender hábitos sesgados. Esto redundará en una peor calidad del entrenamiento y en mayores tiempos de adaptación a la grúa real.

Ya se ha comprobado que el modelo propuesto para la oscilación de un segmento de cable se comporta correctamente respecto al principal modo de vibración. A continuación se describen los resultados sobre el conjunto de mediciones que se han realizado con el fin de analizar el comportamiento dinámico de un polipasto. Estas pruebas están destinadas a la consecución de dos objetivos. En primer lugar analizar la influencia de los parámetros del modelo de ecuación de ondas sobre el comportamiento del polipasto. En segundo lugar, mostrar que el modelo de polipasto que resulta del presente trabajo permite reproducir comportamientos observables en grúas reales

que no han sido contemplados hasta el momento en modelos anteriores.

De forma más concreta, se ha analizado, en primer lugar, la influencia de la amortiguación empleada en la ecuación de ondas y de la masa del cable sobre la disipación de energía del gancho. Después se ha analizado el movimiento pendular del gancho, con el fin de determinar la influencia de estos mismos parámetros, densidad y amortiguación, sobre el periodo de oscilación del péndulo. Por último se ha analizado el comportamiento del gancho durante las maniobras de inicio de la elevación y final del descenso de una carga, con el fin de mostrar algunos comportamientos más complejos que pueden observarse en las grúas torre y que únicamente pueden reproducirse con un modelo de polipasto que considere las oscilaciones del cable.

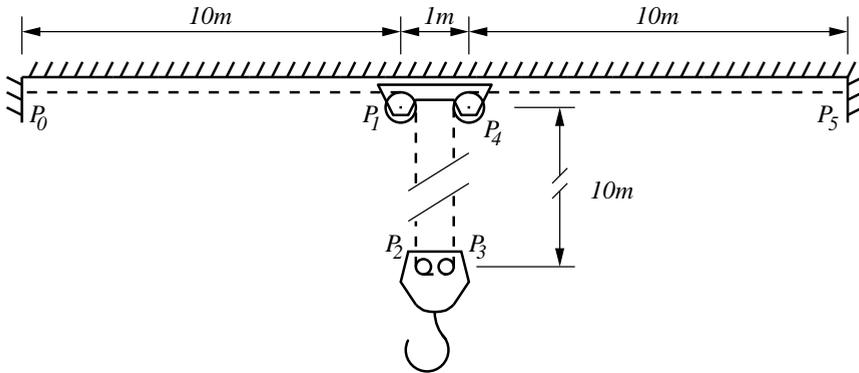


Figura 7.9: Esquema del polipasto simulado, consistente en 6 nodos, cuatro de ellos fijos y dos sujetos a la carga.

Para este conjunto de pruebas se ha considerado el polipasto mostrado en la Figura 7.9, que corresponde a un polipasto típico de una grúa torre. Las poleas se encuentran situadas en los puntos P_1 , P_2 , P_3 y P_4 , mientras que los puntos P_0 y P_5 corresponden a los extremos del cable. Los nodos P_0 , P_1 , P_4 y P_5 se encuentran anclados a la grúa y los nodos P_2 y P_3 se encuentran anclados al gancho. En todas las pruebas se ha considerado una amortiguación lineal sobre el gancho del 5%. Es decir, en cada instante se ha aplicado sobre el gancho una fuerza $\mathbf{f}_a = -0,05\mathbf{v}$, donde \mathbf{v} es su velocidad.

A partir de este sistema se ha estudiado el efecto de los dos parámetros principales que determinan el modelo en ausencia de velocidad longitudinal: la densidad del cable y la amortiguación de la ecuación de ondas. Esta última se introduce en la ecuación de ondas con el fin de simular la disipación de energía debida, entre otras posibles causas, a la fricción con el aire. Para ello se introduce el término bu_t , dando lugar a la ecuación de ondas amortiguada

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - bu_t.$$

Para determinar su influencia se han comparado los resultados para diferentes valores de los parámetros con los resultados obtenidos con el cable sin masa, que corresponde con la situación en la que no se considera oscilación.

Todas las pruebas se han realizado utilizando las mismas condiciones iniciales y para diferentes valores de la densidad del cable por metro y de la amortiguación, en el modelo de la ecuación de ondas. Los valores de densidad considerados han sido 0,4Kg/m, 1,2Kg/m y 2Kg/m. Este rango cubre la mayoría de cables utilizados habitualmente en grúas torre. Para cada uno de estos valores se han realizado pruebas para cuatro valores del coeficiente de amortiguación b de la ecuación de ondas: 0,1, 0,2, 0,6 y 1.

A continuación se presentan los resultados que se han obtenido durante los experimentos, en los que se ha medido la energía del gancho, considerando la energía potencial gravitacional y energía cinética, y la trayectoria del gancho durante su movimiento pendular.

7.2.1. Energía del gancho

La disipación de la energía en el sistema es un parámetro relevante desde el punto de vista de la formación de operadores de grúa. Una de las acciones que debe llevar a cabo un operador durante la operativa es el control de la volada o balanceo de la carga y el gancho. Para ello debe conocer los tiempos de respuesta de los elementos del sistema, así como su ritmo de amortiguación. Una de las vibraciones que se producen durante la operación es la oscilación vertical de baja frecuencia del gancho.

Dado que en la implementación del modelo de ecuación de ondas se ha empleado una amortiguación para simular la fricción con el aire, es necesario conocer si esta amortiguación tiene una influencia importante en la disipación de la energía del gancho.

Relación entre la disipación de energía y la densidad del cable

Se ha medido la evolución de la energía del gancho para los diferentes valores de densidad del cable y para el modelo sin masa. En todos los casos el gancho se ha situado en la configuración mostrada por la Figura 7.9 y se ha dejado evolucionar bajo la acción de la gravedad.

Dado que se está considerando únicamente la energía del gancho, ésta puede aumentar de forma transitoria debido a la interacción con los cables; los aumentos de energía en el gancho corresponden a disminuciones equivalentes en la energía de los cables. De esta forma no se produce ningún aumento de la energía del sistema completo, que disminuye debido a la amortiguación introducida en los diferentes elementos.

La energía total del sistema en el estado inicial, incluyendo los cables, corresponde a la energía potencial de cada uno de los elementos. Por tanto, será mayor para cables con mayor masa. Como consecuencia, el modelo de cables sin masa debería mostrar valores de energía menores que el resto de modelos.

La Figura 7.10 muestra la evolución de la energía para los diferentes valores de la densidad con un valor de amortiguación de $b = 0,1$. Puede observarse cómo, además de la oscilación debida a la elasticidad del cable, en los modelos de cable con masa aparecen oscilaciones causadas por la vibración transversal de los segmentos P_0P_1 y P_4P_5 , especialmente durante los primeros segundos de la simulación. El valor de energía correspondiente al cable sin masa (representado por una línea continua) actúa como un límite para la energía del resto de modelos, de forma que la evolución de la energía a medio y largo plazo es similar en todos ellos.

Por otra parte, a pesar de las oscilaciones que se esperaba observar, debidas a la vibración del cable, la energía del modelo sin masa acota in-

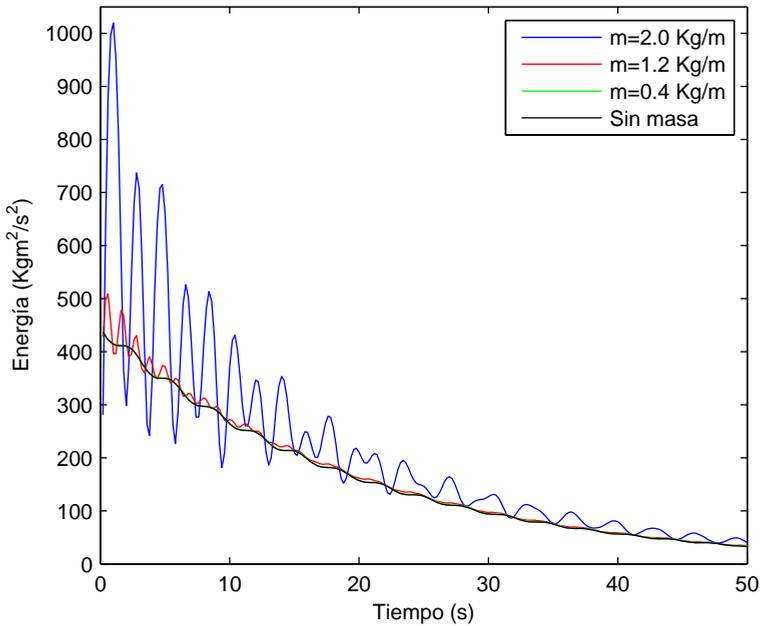


Figura 7.10: *Evolución de la energía total del gancho. Se observa que diferentes valores de la masa dan lugar a oscilaciones transitorias con diferente frecuencia. Sin embargo, la evolución a largo plazo es equivalente en todos los casos. La figura corresponde a un cable con un coeficiente de amortiguación $b = 0,1$.*

feriormente la energía de los modelos con masa una vez transcurridos los primeros segundos de la simulación, de acuerdo con el comportamiento predicho.

Otro aspecto observable en la Figura 7.10 es el hecho de que la fase inicial de oscilaciones se mantiene durante un intervalo de tiempo mayor para valores densidad más elevados. Esto es debido a que la disipación introducida en la ecuación de ondas por medio del término $-bu_t$ únicamente depende de la velocidad de vibración del cable, con lo que, para cables más densos, la energía tarda más en disiparse.

Como ya se ha indicado, los resultados mostrados en la Figura corresponden a una amortiguación $b = 0,1$. Este valor es el menor de todos los valores de amortiguación considerados. Los resultados obtenidos para valores del coeficiente de amortiguación b mayores de 0,1 son aún más claros, debido a que las oscilaciones que se producen en la fase inicial del experimento, causadas por la vibración de los cables, se disipan más rápidamente. En estos casos, la convergencia de la energía de los diferentes modelos al valor obtenido para el modelo sin masa es más rápida.

Estos resultados permiten afirmar, por tanto, que el modelo basado en la ecuación de ondas, que introduce el efecto de la masa del cable en la dinámica del polipasto, no modifica la tendencia de la disipación de energía del gancho en comparación con el modelo de cable sin masa, empleado por diversos autores en la simulación y control de grúas.

Relación entre la disipación de energía y la amortiguación de la ecuación de ondas

Las mediciones realizadas sobre la energía del gancho permiten también analizar su evolución en función del valor empleado para la amortiguación de la ecuación de ondas b . La amortiguación de la ecuación de ondas determina la velocidad a la que se disipa la oscilación transversal del cable. Por tanto, es de esperar que para valores más altos, la fase inicial de oscilaciones de la energía, observada en el experimento anterior, sea más corta.

Los resultados obtenidos para los diferentes valores de b considerados muestran un comportamiento similar al que se observó en el experimento anterior. Se confirma además la predicción de periodos de oscilación más breves para valores más altos de b .

La Figura 7.11 muestra la evolución del sistema para el cable de 2kg/m con los diferentes valores de amortiguación utilizados. En ella se observa como, a pesar de la amortiguación de las oscilaciones, la tasa de descenso de la energía a medio y largo plazo es similar, independientemente del valor de b .

Al igual que en el análisis anterior, se han mostrado los resultados pa-

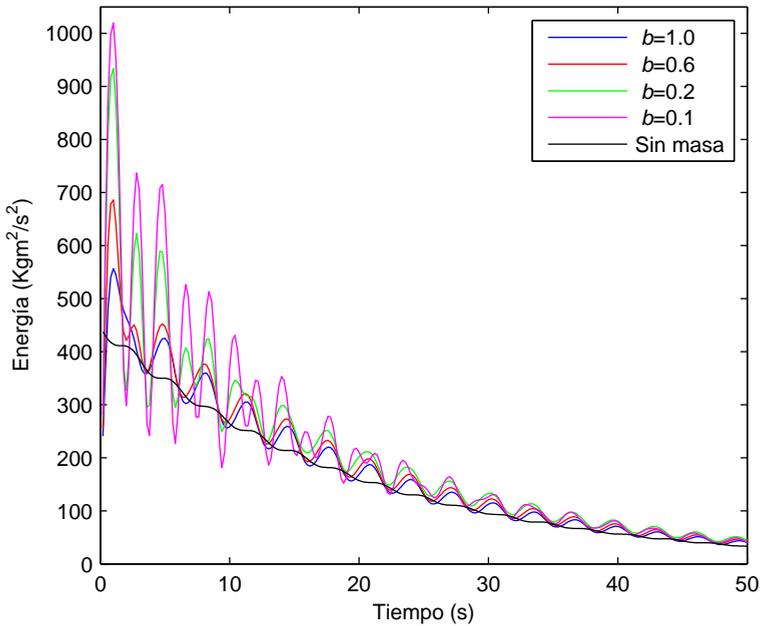


Figura 7.11: *Evolución de la energía total del sistema para diferentes valores de amortiguación y un cable de 2kg/m. El comportamiento es similar en los diferentes casos, con un acortamiento de la fase de oscilaciones transitorias debido a la amortiguación.*

ra el valor de la masa que da lugar a mayores oscilaciones. Los resultados obtenidos para valores menores de la densidad del cable presentan menos oscilaciones y una convergencia más rápida de las diferentes curvas de energía hacia la correspondiente al cable sin masa.

Independencia de la disipación de la energía del gancho respecto a los parámetros

Los resultados obtenidos por medio de los dos experimentos anteriores permiten la utilización del modelo de oscilación propuesto en el Capítulo 6 con la garantía de que los parámetros empleados no van a influir de forma

significativa en la disipación de la energía del sistema. En definitiva, estos resultados suponen la validación del modelo respecto a la disipación de energía en la oscilación del gancho, lo que avala su utilización en tareas de formación.

7.2.2. Frecuencia de oscilación del péndulo

La frecuencia de oscilación del gancho considerado como un péndulo es otro de los elementos clave para comprobar la validez del modelo, ya que tiene un impacto directo sobre las habilidades adquiridas por los aprendices de un simulador para entrenamiento de maquinaria de elevación.

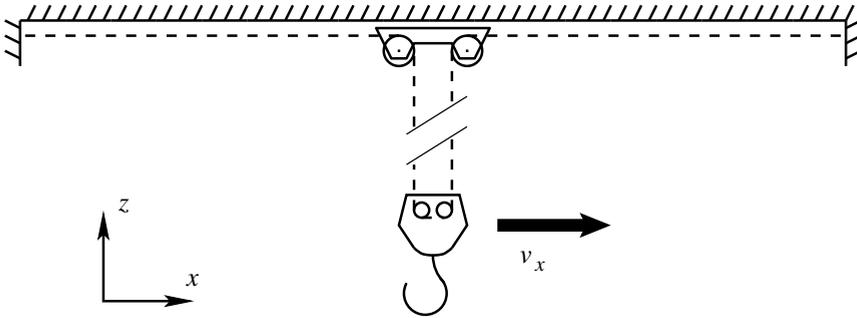


Figura 7.12: Esquema del polipasto empleado en la medición del movimiento pendular del gancho. Con el fin de provocar este movimiento, se ha iniciado el sistema con una velocidad de 5m/s en el eje x .

Por este motivo, se ha considerado importante analizar el comportamiento del gancho y se ha medido su oscilación, utilizando como estado inicial del sistema la misma configuración que en el experimento anterior, pero con una velocidad horizontal inicial de 5m/s en el eje x . La Figura 7.12 muestra la dirección en la que se aplica la velocidad inicial. El experimento se ha repetido utilizando diferentes valores de densidad del cable.

En la Figura 7.13 se muestra la posición horizontal del gancho en el eje x a lo largo del tiempo. En este caso, se ha observado una variación del

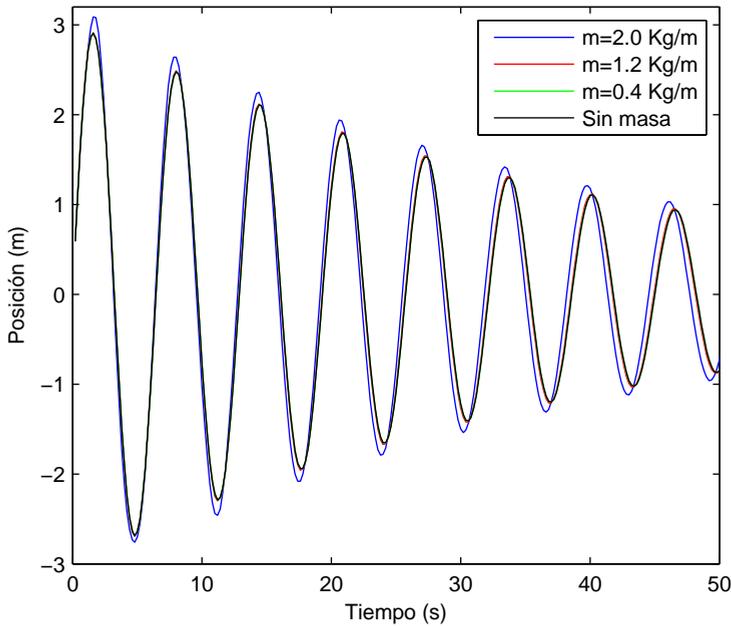


Figura 7.13: *Evolución de la posición del péndulo para diferentes valores de la densidad del cable. Puede apreciarse una reducción del periodo del péndulo para valores altos de la densidad.*

periodo para diferentes valores de la densidad del cable, de forma que para valores mayores de la masa se puede apreciar una reducción del periodo de oscilación.

Esta variación se justifica por la reducción en la longitud del cable vertical debido a la catenaria que se forma en los tramos horizontales P_0P_1 y P_4P_5 . Esta catenaria es mayor cuando el cable es más denso, debido al efecto de la gravedad, que provoca una reducción de los tramos P_1P_2 y P_3P_4 . Este comportamiento es consistente con el observado en grúas reales, como se verá a continuación. Por otra parte, como era de esperar no se ha observado ninguna influencia del coeficiente de amortiguación de la ecuación de ondas sobre el periodo del péndulo.

7.2.3. Otros efectos de la masa del cable

La introducción de la masa del cable tiene varios efectos interesantes sobre la dinámica del sistema en comparación con el comportamiento observado en modelos sin masa.

En las Figuras 7.10 y 7.13 se han mostrado las primeras consecuencias observadas a causa de la catenaria que se forma en los segmentos horizontales de cable. En primer lugar, una oscilación inicial del cable en la dirección vertical y, en segundo lugar, una reducción de la longitud del péndulo. Como ya se ha anticipado en el análisis de la evolución de la energía, esto supone una modificación del comportamiento del gancho que puede ser importante en la validez de los modelos para formación.

Otro efecto que también se ha comprobado a partir de los modelos desarrollados se presenta a continuación y es fácilmente observable en grúas torre reales.

Considérese la grúa torre de la Figura 7.14, con el gancho apoyado sobre el suelo. La catenaria de los segmentos horizontales es amplia, dando lugar a un elevado *consumo* de longitud del cable. Cuando se inicia el movimiento de elevación se produce un retardo hasta que el gancho empieza efectivamente a elevarse. Este retardo está directamente relacionado con la masa de la carga que esté colgada del gancho ya que, antes de iniciarse el movimiento de elevación, debe reducirse toda la catenaria hasta alcanzar la tensión necesaria para la elevación de la carga.

Este efecto se aprecia aún más claramente en la elevación de una carga. Consideremos la situación de la Figura 7.15. El gancho se encuentra suspendido sobre una carga, enganchada a él y apoyada sobre el suelo.

Supóngase que el sistema de elevación empieza a elevar el gancho a una velocidad constante. A medida que la longitud total del cable se reduce, la tensión aumenta. Sin embargo, de nuevo, esa tensión no permite elevar el gancho y la carga hasta que no se reduce la catenaria de los tramos horizontales del cable. Durante una maniobra de descenso se produce el proceso inverso a partir del instante en que la carga toca el suelo.

La Figura 7.16 muestra la evolución de la altura del gancho a lo largo del

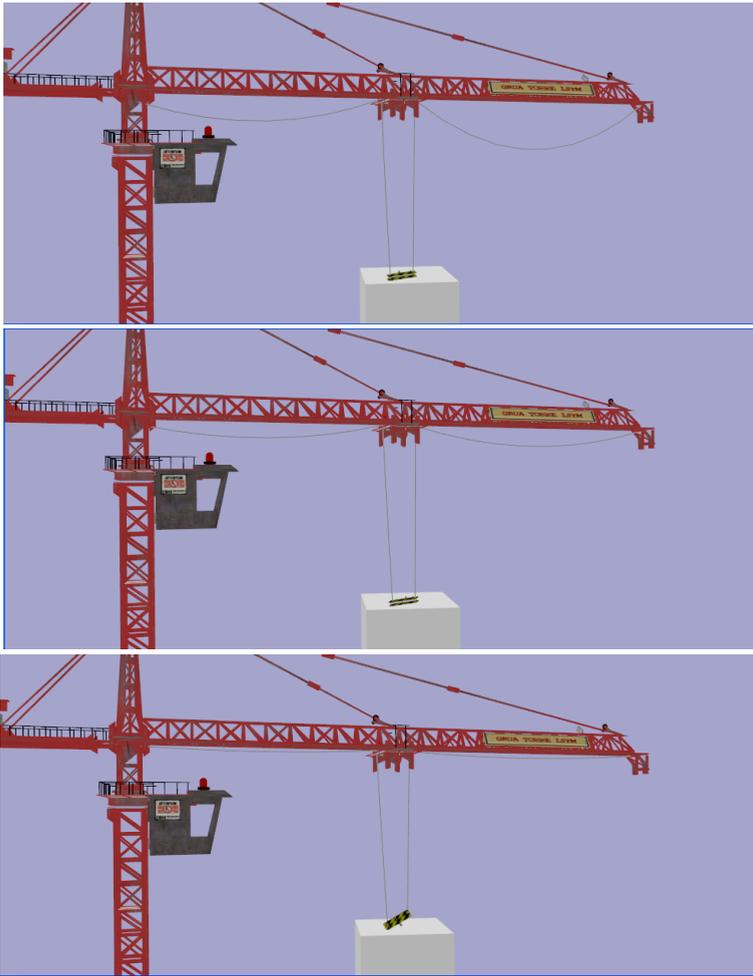


Figura 7.14: *En la secuencia puede observarse el efecto de la masa del cable. El gancho no se elevará de la plataforma hasta que la catenaria se reduzca lo suficiente como para crear la tensión necesaria.*

tiempo en una maniobra de elevación (a) y en una maniobra de descenso de la carga (b). Se han utilizado cables de diferente densidad, con un gancho de 200kg y una carga de 2000kg. El sistema de elevación aumenta la longitud del cable a una velocidad constante de 0.2m/s.



Figura 7.15: *Experimento realizado para mostrar el efecto de la masa del cable durante la elevación de una carga. Cuando se inicia la maniobra de elevación, la carga no se eleva hasta que no se reduce la catenaria de los tramos horizontales del cable.*

Las trayectorias representadas en las figuras muestran que el gancho ralentiza su elevación o su descenso durante un periodo de tiempo, que llega a superar los dos segundos en el caso del cable de 2kg/m. Este intervalo de tiempo corresponde al periodo durante el cual la catenaria está aumentando o reduciéndose.

La introducción de la masa en el modelo de cable para la simulación de un polipasto supone una contribución importante desde el punto de vista de la simulación para entrenamiento. El comportamiento predicho por el modelo, y confirmado en numerosas ocasiones en grúas torre reales, permite que los aprendices que utilizan el simulador conozcan y se habitúen al comportamiento real de la grúa.

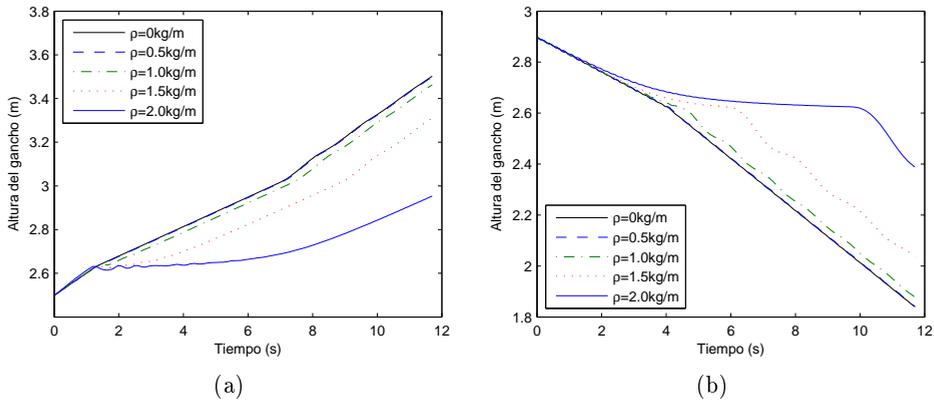


Figura 7.16: *Altura del gancho a lo largo del tiempo durante las maniobras de elevación (a) y descenso (b) de la carga.*

7.3. ANÁLISIS DE PRESTACIONES

La simulación para entrenamiento y, en general, las aplicaciones de Realidad Virtual, requieren que los modelos dinámicos permitan realizar simulaciones en tiempo real. Esto significa, de forma más precisa, que el cálculo de cada paso de la evolución del modelo debe poder calcularse en una cantidad de tiempo limitada. El límite lo impone, en cada caso, las características de la aplicación, de acuerdo con el coste computacional del resto de elementos que la componen. Típicamente, para el cálculo de un fotograma se dispone de $1/60$ s. De ese intervalo de tiempo es frecuente que la ejecución de los modelos dinámicos únicamente disponga de unos pocos milisegundos para calcular el estado que tendrá el sistema en el siguiente fotograma.

Dado que los modelos presentados en este trabajo de investigación están destinados a aplicaciones de Realidad Virtual, deben permitir el cálculo de un paso de la evolución de un sistema típico en un tiempo que se ajuste a estas restricciones. Servin y Lacoursière (Servin and Lacoursière, 2007) estiman que el tiempo que puede dedicarse a la integración numérica del

sistema dinámico en este tipo de simulaciones es de unos 5ms por fotograma, para un sistema que se ejecute a 60 fotogramas por segundo. Esto representa aproximadamente el 30 % del tiempo de cálculo en un ordenador con un único procesador.

Por tanto, se considerará conveniente que el tiempo de ejecución de un paso de integración del modelo sea inferior a los 0,3ms. Esto permitirá realizar hasta 1000 iteraciones por segundo sin rebasar el límite del 30 % del tiempo simulado.

Por otra parte, se considerará también como un elemento para valorar el coste de un modelo el hecho de que esté acotado. El motivo es que un modelo con un coste promedio muy bajo, pero que pueda tener picos de carga, podría dar lugar a situaciones puntuales en las que la aplicación perdiera la tasa de refresco establecida, lo que supondría una reducción de la calidad del sistema. Por tanto, no sólo se buscan modelos eficientes, sino que además, tengan un coste máximo acotado.

7.3.1. Complejidad de los modelos

Como es de esperar, el coste computacional de los modelos depende de la complejidad del mismo; un modelo con un mayor número de poleas, N , y un mayor número de divisiones por segmento de cable, M , tendrá un coste mayor. No obstante, para conocer los límites de usabilidad de los modelos es necesario conocer la relación existente entre el crecimiento de N y M y el crecimiento del coste computacional. Con el fin de asegurar que el modelo es adecuado para la simulación en tiempo real, a continuación se discute brevemente la complejidad de los modelos de oscilación propuestos.

Complejidad del modelo de partículas. La evaluación de las fuerzas que actúan sobre cada partícula requiere el cálculo de la distancia entre ellas, así como el cálculo del ángulo que forman los dos resortes que la unen con sus partículas vecinas. Por tanto, el número de operaciones necesarias para esta evaluación en cada partícula es independiente del número total partículas que componen el cable. En definitiva, el número total de cálculos

que deben realizarse para conocer el conjunto de fuerzas crece linealmente con el número total de partículas utilizado, al que denotaremos por Π . Si el cable consta de N tramos ($N + 1$ poleas) y cada tramo tiene M partículas, entonces $\Pi = N \times M$. En caso de usarse un método de integración explícito, el coste total del método crecerá linealmente con Π .

Coste del procedimiento de inserción de partículas. El procedimiento de inserción de partículas para variar la longitud del cable, descrito en el Apartado 5.2.4, consiste en la realización de un número de iteraciones del método de Euler explícito para una partícula. Este número de iteraciones está acotado, en el algoritmo, por una cantidad constante I . Esto es equivalente, salvo por pequeñas diferencias, al cálculo de la evolución de un número menor a I de partículas adicionales en el sistema. Por tanto, el coste del modelo, considerando el algoritmo de inserción de partículas, será menor que el de un sistema con $\Pi_i = N \times (M + I)$ partículas sin procedimiento de inserción.

Complejidad del modelo de ecuación de ondas. Dado que el método de integración utilizado es un método explícito, para cada segmento de cable con M divisiones para el cálculo de la ecuación de ondas, el número de cálculos necesarios para la integración numérica es lineal con M , incluyendo el cálculo de la longitud del cable. Por otra parte, para cada polea, la aplicación de las fuerzas y el cálculo de la velocidad angular involucra un número muy limitado de cálculos. Por tanto, si se cuenta con N segmentos de cable, el coste de los cálculos es lineal respecto al número total de particiones consideradas $\Pi = N \times M$.

De estos breves análisis se desprende que el crecimiento del coste de los modelos propuestos a lo largo del presente trabajo guarda una relación lineal con el número total de divisiones, Π , que se consideran en el cable a lo largo de toda su longitud. Por otra parte, la simplicidad de los modelos desde el punto de vista computacional permite asegurar, por simple análisis, que el coste está acotado para un determinado valor de N y M , ya que puede obtenerse una expresión analítica con dicho coste.

A continuación se muestran los resultados obtenidos de un conjunto de pruebas numéricas realizadas con los modelos, en las que se ha medido el coste promedio de ejecutar un paso de integración. Las pruebas muestran la eficiencia de los modelos propuestos, así como el crecimiento lineal del coste respecto al valor de Π .

7.3.2. Resultados numéricos

Las pruebas se han realizado integrando numéricamente varios modelos de polipasto con diferentes números de poleas, N , y de divisiones en cada segmento de cable, M . En concreto, se han empleado valores para ambos parámetros entre 10 y 100, a intervalos de 10 unidades. Debe observarse que estos valores abarcan un conjunto de sistemas más amplio que el que puede resultar necesario en muchos casos. Por ejemplo, en el caso de un polipasto de grúa torre, es suficiente un sistema de 6 u 8 tramos, que pueden tener de 10 a 15 divisiones cada uno de ellos. Sin embargo, se ha considerado relevante mostrar la evolución del coste para valores mayores, cubriendo así un espectro más amplio de aplicaciones.

Sobre una simulación con 10000 pasos de integración se ha obtenido el tiempo promedio empleado en la ejecución de un único paso para cada par de valores de N y M . Cada simulación se ha repetido 30 veces, con el fin de poder calcular intervalos de confianza. Estos intervalos, que no se han mostrado en la tabla, se encuentran en todos los casos por debajo del 10 % del valor obtenido. Los tiempos se han obtenido en un Intel PIV a 3.1 GHz con 1GB de RAM en un sistema dedicado a las pruebas.

Sistema de partículas. El Cuadro 7.2 presenta los resultados obtenidos para las diferentes simulaciones realizadas por medio del modelo de cable con un sistema de partículas. Estos resultados muestran, en primer lugar, que sistemas con $\Pi = 200$ puntos de discretización del cable, con un número de poleas de hasta $N = 20$ cumplen perfectamente con el criterio establecido de no superar los 0,3ms por paso.

Estas dimensiones para el sistema son más que suficientes para la simu-

M	N									
	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
10	0,13	0,31	0,45	0,60	0,74	0,88	1,02	1,14	1,29	1,49
20	0,29	0,58	0,88	1,15	1,43	1,71	2,01	2,27	2,56	3,27
30	0,42	0,85	1,28	1,71	2,13	2,56	2,98	3,39	3,82	4,38
40	0,55	1,13	1,69	2,26	2,83	3,40	4,44	4,51	5,09	5,65
50	0,68	1,40	2,10	2,81	3,52	4,23	5,01	5,62	6,35	7,06
60	0,83	1,66	2,51	3,36	4,22	5,05	5,90	6,75	7,62	8,46
70	0,94	1,93	2,93	3,92	4,91	5,91	6,88	7,90	8,89	9,88
80	1,06	2,20	3,34	4,53	5,61	6,74	7,88	10,14	10,36	11,28
90	1,19	2,93	3,75	5,02	6,32	7,59	8,84	10,46	11,65	12,69
100	1,32	2,89	4,16	5,58	7,00	8,42	9,84	11,26	13,05	14,09

Cuadro 7.2: *Coste, en ms, del cálculo de un paso de simulación con el modelo de partículas para diferentes valores de N y M .*

lación de la mayoría de sistemas de elevación habituales, incluyendo grúas sobre orugas o grúas móviles portuarias, en las que se utiliza un gran número de poleas, tanto para elevar la carga como para mover la estructura de la propia máquina.

Se observa, por otra parte, la falta de simetría en la tabla respecto de la diagonal principal, con un peso algo mayor en la mitad triangular superior. No obstante, la diferencia es inferior al 15 % entre dos entradas correspondientes al mismo valor de $\Pi = N \times M$. Esta diferencia refleja el coste del cálculo relacionado con el modelo de poleas, que supone una mayor carga cuando N es mayor para un mismo valor de Π .

Los valores mostrados en el cuadro no contemplan el coste del procedimiento de inserción de partículas. Debido a que el número de parámetros a considerar en este caso se amplía de forma considerable, no se ha realizado un análisis con suficiente rigor como para mostrar resultados concluyentes. Sin embargo, las diferentes pruebas realizadas muestran que el incremento en el coste no es sustancial, con aumentos inferiores al 15 %.

M	N									
	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
10	0,04	0,09	0,13	0,17	0,22	0,27	0,32	0,36	0,41	0,45
20	0,08	0,17	0,26	0,35	0,44	0,54	0,63	0,72	0,79	0,90
30	0,14	0,26	0,39	0,52	0,66	0,79	0,94	1,08	1,21	1,35
40	0,15	0,35	0,54	0,78	0,91	1,04	1,21	1,39	1,64	1,74
50	0,19	0,41	0,62	0,84	1,06	1,28	1,50	1,73	1,94	2,16
60	0,23	0,49	0,75	1,01	1,27	1,54	1,80	2,06	2,32	2,59
70	0,27	0,57	0,88	1,18	1,48	1,78	2,09	2,39	2,72	3,02
80	0,31	0,65	0,99	1,34	1,68	2,03	2,38	2,73	3,08	3,49
90	0,34	0,73	1,12	1,50	1,92	2,29	2,67	3,54	3,49	3,87
100	0,38	0,81	1,24	1,67	2,11	2,53	2,98	3,68	4,48	4,77

Cuadro 7.3: *Coste, en ms. del cálculo de un paso de simulación con el modelo de la ecuación de ondas para diferentes valores de N y M .*

Por otra parte, de acuerdo con el análisis que se ha realizado en el Apartado 7.3.1, para el coste del procedimiento de inserción de partículas, el valor de la entrada correspondiente al cable con parámetros (M, N) representa una cota superior para el coste de un cable con parámetros $(M + 10, N)$. Esto tiene gran importancia en el contexto de las aplicaciones en tiempo real; a pesar de que el procedimiento de inserción de partículas tiene elementos que, *a priori*, podrían suponer un incremento del coste, se demuestra que no es así, y se dispone de una cota que permite conocer el coste máximo que puede producirse durante una simulación.

Ecuación de ondas. El Cuadro 7.3 muestra el coste promedio de un paso de integración para cada uno de los valores de N y M simulados. La primera conclusión que puede extraerse de los datos mostrados es que el coste del modelo de ecuación de ondas es, aproximadamente, un tercio del coste del sistema de partículas. En este caso ha sido posible simular sistemas con 600 – 700 partículas y con un número de poleas nada despreciable de hasta $N = 60$ sin rebasar el límite impuesto de los 0,3ms. Estos resultados indican

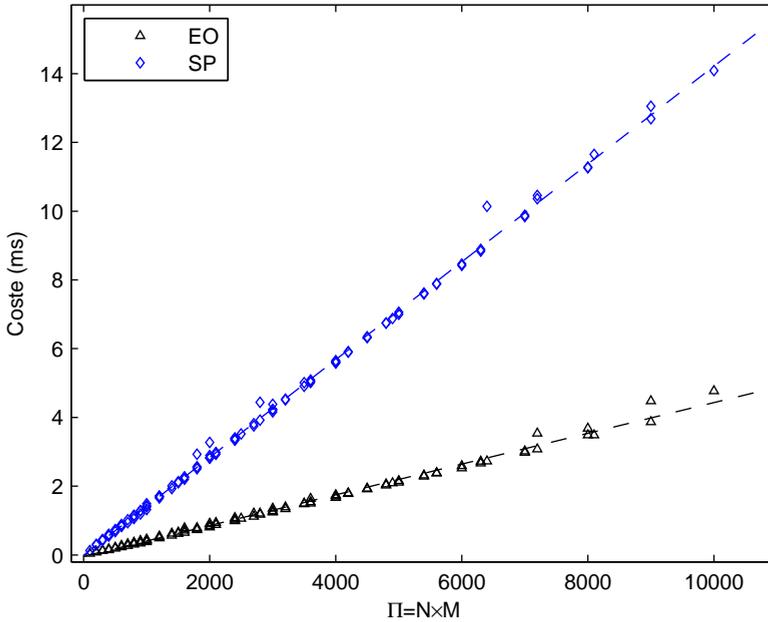


Figura 7.17: Coste promedio de la ejecución de un paso de integración para diferentes valores de $\Pi = N \times N$, utilizando el sistema de partículas (SP) y la ecuación de ondas (EO). Se ha representado también un ajuste de los datos por regresión lineal.

que el modelo permite la simulación de prácticamente cualquier sistema de elevación convencional sin suponer una gran carga para la aplicación.

De nuevo, al igual que ocurre con el sistema de partículas, se aprecia un aumento del coste para valores altos de N a igual número total de divisiones del cable Π , causado por la carga del cálculo de las poleas. En este caso, el incremento es de hasta un 20 %, ya que el coste del cálculo del cable es menor que en el caso de un sistema de partículas.

En los dos cuadros de datos presentados puede apreciarse que el crecimiento del tiempo por paso de integración tiene una relación lineal con el valor de Π . Se han analizado los datos obtenidos por medio de un ajuste

por mínimos cuadrados para confirmar esta apreciación. En ambos casos, se ha conseguido un ajuste a sendas rectas, con coeficiente de correlación de 0,997 para la ecuación de ondas y de 0,999 para el sistema de partículas. La Figura 7.17 muestra gráficamente esta relación lineal. Se han representado los tiempos medios por paso para los dos modelos, junto con las rectas resultantes del ajuste por mínimos cuadrados.

Conclusión. Los resultados mostrados indican que ambos modelos, tanto el cable representado por un sistema de partículas como la ecuación de ondas, son muy eficientes, permitiendo la simulación de polipastos complejos con un número de poleas elevado. Por otra parte se ha comprobado que el coste del procedimiento propuesto para la variación de la longitud del sistema de partículas tiene un coste acotado, que no supone una merma sustancial de las prestaciones del modelo. Se ha demostrado también, a la luz de los datos obtenidos, que el crecimiento del coste de ambos modelos es lineal respecto del número total de divisiones del cable, Π .

Con el fin de situar las prestaciones de los modelos en el marco de otros modelos existentes, a continuación se realiza una comparación con un modelo de cable basado en la metodología de los sistemas multicuerpo.

7.3.3. Comparación con la metodología multicuerpo

De entre las diferentes metodologías analizadas a lo largo del Capítulo 2 se mostró que los sistemas de partículas los sistemas multicuerpo son actualmente las metodologías más adecuadas para el modelado de cables de elevación (Servin and Lacoursière, 2008). En el presente trabajo se ha descartado la segunda a causa de su mayor coste computacional. Sin embargo, para justificar adecuadamente esta decisión es necesario mostrar de forma clara la ventaja que suponen los modelos aquí presentados.

Para ello se ha llevado a cabo el mismo experimento que en el análisis de prestaciones que se acaba de presentar, incorporando un modelo de cable desarrollado por medio de la metodología de sistemas multicuerpo. En este caso, se ha considerado un único tramo de cable, suspendido entre dos nodos

terminales ($N = 2$), y se han considerado diferentes valores para el número de divisiones $M = 5, 10, 15, \dots, 45$.

El sistema multicuerpo se ha integrado por medio de la biblioteca de dinámica Open Dynamics Engine (ODE) (Smith, 2004), que permite integrar las ecuaciones de movimiento por medio de dos métodos numéricos diferentes. Un método de complemento lineal (Anitescu and Potra, 1997), con coste cuadrático respecto al número de sólidos, y una variante de este método que utiliza un algoritmo de sobre-relajación, consiguiendo un orden de complejidad casi lineal, a costa de una cierta pérdida de precisión (Smith, 2006).

Método	$N = 2$								
	M								
	5	10	15	20	25	30	35	40	45
EO	0,004	0,005	0,008	0,010	0,012	0,013	0,015	0,016	0,018
SP	0,009	0,021	0,024	0,032	0,036	0,042	0,053	0,060	0,067
MC1	0,053	0,10	0,15	0,20	0,26	0,31	0,36	0,41	0,47
MC2	0,046	0,13	0,29	0,53	0,89	1,34	1,94	2,81	3,80

Cuadro 7.4: *Coste, en ms., del cálculo de un paso de simulación para $N = 2$ y diferentes valores de M . SP: sistema de partículas. EO: ecuación de ondas. MC1: sistema multicuerpo con sobre-relajación. MC2 método de sistema multicuerpo con complejidad cuadrática.*

Los resultados, mostrados en el Cuadro 7.4, validan la elección de las metodologías empleadas en este trabajo. Los métodos basados en sistemas multicuerpo tienen un coste, en el caso lineal, cinco veces superior al coste del sistema de partículas y más de veinte veces superior al de la ecuación de ondas. El coste del sistema multicuerpo con coste cuadrático se dispara por encima de 1ms a partir de 30 divisiones en el cable.

Para cada conjunto de datos se ha obtenido una recta de regresión, excepto en el caso de método de sistema multicuerpo de orden cuadrático, referido como MC2, que ha sido ajustado a una parábola. En todos los casos, el coeficiente de correlación es superior a 0,99.

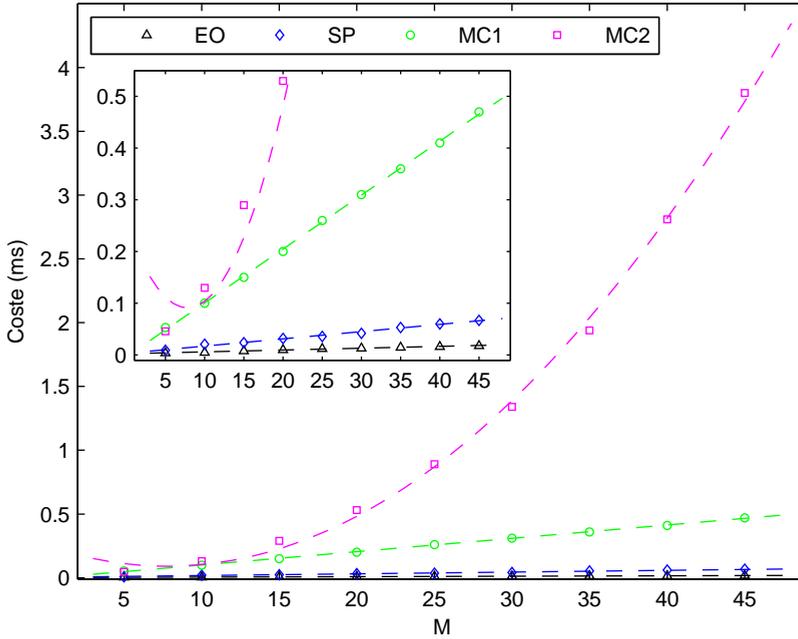


Figura 7.18: *Coste, en ms., del cálculo de un paso de simulación para $N = 2$ y diferentes valores de M , con los diferentes métodos simulados: sistema de partículas (SP), ecuación de ondas (EO), sistema multicuerpo con sobre-relajación (MC1) y sistema multicuerpo con complejidad cuadrática (MC2). Figura interior: La misma figura, en el rango de 0ms a 0,5ms, mostrando los diferentes métodos de coste lineal.*

La Figura 7.18 muestra gráficamente los resultados obtenidos. En ella se aprecia claramente la diferencia de orden de magnitud entre los métodos con complejidad lineal y el método de sistema multicuerpo con complejidad cuadrática. La figura interior muestra los mismos datos, pero en el rango de 0ms a 0,5ms, lo que permite apreciar mejor las diferencias entre los tres métodos con crecimiento lineal. En ella se ve que los modelos propuestos en este trabajo superan claramente a la metodología de sistemas multicuerpo en cuanto al coste computacional.

Otros autores, utilizando la metodología de los sistemas multicuerpo, han conseguido resultados similares a los obtenidos aquí para MC1. En el trabajo de Servin y Lacoursière (Servin and Lacoursière, 2008) se indica que el coste asociado al cálculo de un cable formado por 24 eslabones requiere un tiempo de aproximadamente 1ms por paso de integración, en un Pentium M a 1.7GHz y 512MB de RAM. Aunque los resultados no pueden compararse directamente, por haberse realizado con un equipo de inferiores prestaciones, muestran que el coste obtenido allí es, presumiblemente, varias veces superior al de los resultados obtenidos con los nuevos modelos.

7.4. CONCLUSIÓN

En este capítulo se han presentado un conjunto de pruebas numéricas que validan los aspectos más relevantes de la dinámica de los modelos propuestos. Los experimentos se han centrado principalmente en el análisis de un segmento de cable y de la dinámica de un polipasto de grúa torre.

Las pruebas realizadas sobre un segmento de cable suspendido por sus extremos muestran que el comportamiento en frecuencia de los modelos es coherente con los modelos teóricos y consistente entre los diferentes modelos propuestos. Se ha mostrado también que el modelo de ecuación de ondas permite reproducir el comportamiento de un cable suspendido cuando se somete a aceleraciones longitudinales, cuantificando las diferencias con el modelo de sistema de partículas.

Las diferentes pruebas realizadas con un polipasto de grúa torre muestran que el comportamiento del sistema conserva propiedades importantes, como el ritmo de disipación de energía o el periodo de oscilación del péndulo formado por el gancho. Se ha visto que la introducción de la masa en el sistema permite reproducir una serie de fenómenos observados en las grúas reales que no se podían simular con los modelos sin masa o sin poleas utilizados hasta ahora, especialmente en las maniobras de elevación y descenso de la carga.

Se ha mostrado también que los modelos presentados son extremada-

mente eficientes y que el coste del cálculo de un paso de integración está acotado, lo que los hace muy adecuados para la simulación en aplicaciones en tiempo real. En comparación, los modelos de sistema multicuerpo empleados en la simulación de cables de elevación, requieren hasta 7 veces el tiempo consumido por el sistema de partículas y hasta 25 veces el tiempo consumido por el modelo de ecuación de ondas.

Por todo lo anterior, y especialmente por la capacidad de los modelos de reproducir la influencia de la masa del cable en el comportamiento de un polipasto, los experimentos realizados muestran que los modelos de oscilación propuestos aquí suponen una contribución importante en la simulación de maquinaria de elevación y en la reproducción de la dinámica de sistemas de poleas en general.

Resumen de los resultados de este capítulo

En definitiva, por medio del presente capítulo se han alcanzado los siguientes resultados:

- Se han validado los modelos dentro de los objetivos principales planteados:
 - reproducción de los principales modos de vibración,
 - reproducción de la oscilación longitudinal del cable,
 - credibilidad en el comportamiento de los modelos,
 - capacidad para reproducir comportamientos de la maquinaria de elevación descartados hasta el momento.
- Se ha mostrado su eficiencia, que permite simular un polipasto en tiempo real, y que resulta superior a la de otros modelos empleados con los mismos fines.
- Se ha mostrado que el modelo crece con un orden lineal respecto a la longitud del cable, permitiendo la simulación de cables suficientemente largos como para simular cualquier equipo de elevación actualmente en uso.

INTEGRACIÓN DEL MODELO EN ENTORNOS VIRTUALES Y DE SIMULACIÓN

El modelo propuesto tiene como objetivo la simulación de cables en entornos de realidad virtual, entre las que se encuentra la simulación para entrenamiento, principal motivación del presente trabajo. A continuación se describen los principales elementos que deben tenerse en cuenta para poder realizar una correcta integración de los modelos en una aplicación de este tipo.

Se muestran, en primer lugar, las técnicas necesarias para la detección de colisiones y un modelo de respuesta ante un contacto. Se indica la información geométrica necesaria para poder simular la interacción entre el cable y los objetos del entorno, junto con los cambios que esto implica en la configuración del modelo.

A continuación se revisan las técnicas disponibles para la representación gráfica del cable, necesarias en el tipo de aplicaciones a las que van destinados los modelos, y se proponen algunas mejoras destinadas a la simulación en tiempo real en equipos de prestaciones limitadas.

Finalmente se muestran algunos ejemplos de aplicaciones que incorporen los modelos propuestos, incluyendo aplicaciones sencillas empleadas en demostraciones de diferentes propiedades del sistema y sistemas de formación basados simulación, que se encuentran actualmente en uso en diferentes centros de formación.

8.1. DETECCIÓN DE COLISIONES

Un aspecto fundamental en cualquier aplicación de realidad virtual es la detección de colisiones. Este problema ha sido extensamente tratado con anterioridad, y no se realizará aquí un análisis exhaustivo al respecto. Sin embargo, con el fin de conseguir una aplicación interactiva, es necesario proporcionar los elementos básicos para incorporar esta tarea a los modelos propuestos.

Se asumirá que se dispone de una biblioteca de detección de colisiones que permite detectar contactos entre objetos convexos representados por medio de poliedros. Para una revisión detallada sobre este problema puede consultarse (Ericson, 2005).



Figura 8.1: *La simulación en un entorno realista compuesto por multitud de objetos requiere la detección de colisiones.*

8.1.1. Estrategia de detección de colisiones

Durante la simulación se detectan colisiones entre objetos del escenario y los distintos segmentos de cable que componen el escenario. Para ello se establece una jerarquía de cajas envolventes que permite reducir el número de comprobaciones y cálculos necesarios para determinar los contactos.

Cada segmento de cable simulado se envolverá en un paralelepípedo o caja cuyos ejes estarán alineados con la base local definida sobre el segmento de cable. Las dimensiones de la caja se tomarán de forma que todos los puntos de la discretización del segmento de cable queden contenidos en su interior.

La forma de obtener estas dimensiones valores será diferente para los segmentos simulados por medio de un cable sin masa, para los segmentos simulados por medio de la ecuación de ondas y para los segmentos simulados por medio de sistemas de partículas.

Cable sin masa. El caso más sencillo corresponde al modelo de cable sin masa. En este caso se empleará una caja que tenga por lados menores el diámetro del cable y como lado mayor la distancia entre los extremos del segmento de cable.

Ecuación de ondas. La detección de colisiones con el cable simulado por medio de la ecuación de ondas, puede aprovechar el hecho de que todos los puntos del cable se pueden proyectar perpendicularmente sobre el segmento de recta que une sus extremos. Por otra parte, la posición del cable viene dada por la curva $\mathbf{u}(x, t)$ cuyas coordenadas en la base local del cable representan distancias desde el cable a dicho segmento. Por tanto, en este caso es sencillo conocer las dimensiones de los tres lados de la caja envolvente que se empleará. Basta comprobar la mayor distancia en cada uno de los dos ejes para conocer las dimensiones de los lados perpendiculares al segmento $\overline{\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1}$, mientras que la caja tendrá una longitud igual a la de éste segmento de recta.

Sistema de partículas. En el caso de un sistema de partículas no existe garantía de que la proyección de las partículas sobre la recta definida por

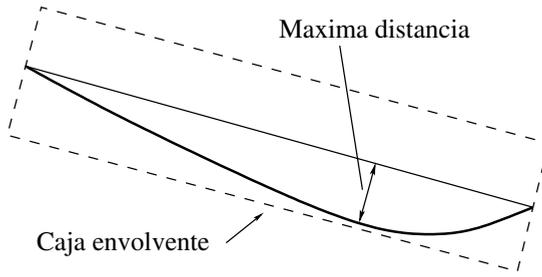


Figura 8.2: *Caja envolvente para el modelo del segmento de cable basado en la ecuación de ondas.*

los extremos del segmento de cable quede completamente contenida en el segmento $\overline{\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1}$. En este caso, se calculará la proyección de cada partícula sobre el sistema de referencia local y se tomarán los lados que permiten incluir a todas las partículas.

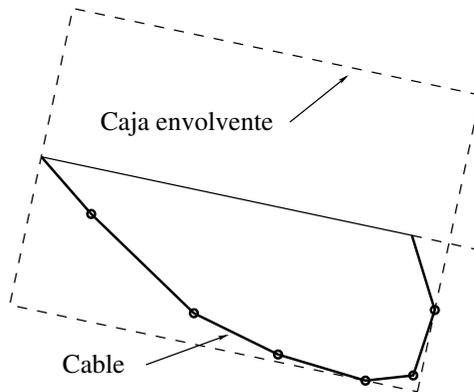


Figura 8.3: *Caja envolvente para el modelo del segmento de cable basado en un sistema de partículas.*

Consulta de proximidad

Si se detecta una colisión de un objeto de la escena con la caja envolvente de un segmento de cable, entonces se realizarán pruebas de proximidad con el fin de determinar si el cable ha entrado en contacto con dicho objeto.

Para ello, se considera cada uno de los segmentos de recta que unen dos nodos consecutivos en la discretización correspondiente. En el caso del cable sin masa, se tratará del segmento $\overline{\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1}$. En el caso del cable simulado por medio de un sistema de partículas, el segmento que une dos partículas consecutivas $\overline{\mathbf{r}_i\mathbf{r}_{i+1}}$. Por último, en el caso de la ecuación de ondas, el segmento que une dos puntos consecutivos de la discretización $\overline{\mathbf{u}_k\mathbf{u}_{k+1}}$.

La descripción de estas pruebas de proximidad requeriría una exposición extensa, que no contribuye a clarificar el proceso necesario para gestionar la interacción del cable con el entorno. Por este motivo no se detalla en esta memoria. En caso de que el lector requiera los detalles técnicos a este respecto, puede consultar el capítulo 5 del libro *Real-Time Collision Detection* (Ericson, 2005).

Establecimiento de un contacto

En adelante, se empleará el término *vértice del cable* para referirnos a cada vértice de la discretización del segmento de cable, que puede ser una partícula o un vértice de la aproximación basada en diferencias finitas, y el término *arista del cable* para referirnos al segmento de recta que une dos nodos.

Independientemente del modelo dinámico utilizado, cuando se detecte una colisión, ésta tendrá lugar por el cruce de una de las aristas del cable con una arista del objeto del escenario, por el cruce de un vértice del cable con una arista del objeto o bien por el cruce de un vértice del cable con una cara del objeto. La Figura 8.4 muestra los tres casos.

Para poder gestionar convenientemente los contactos, se definirá en cada caso un punto de contacto, que se denotará por \mathbf{p}_c y una dirección, que estará determinada por un vector unitario \mathbf{n}_c , y a la que se denominará

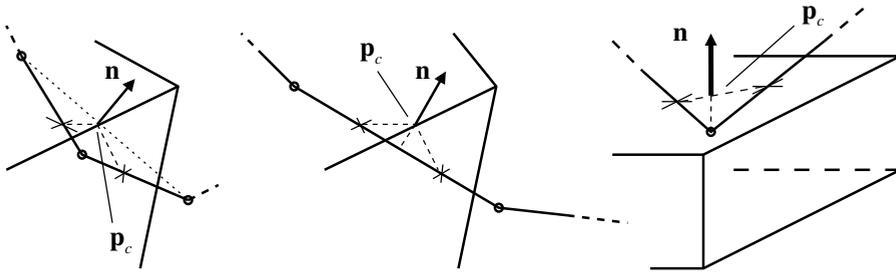


Figura 8.4: *El contacto de una poligonal con un poliedro puede reducirse a los tres casos mostrados. El contacto de un vértice del cable con una arista (izquierda), el contacto de una arista del cable con una arista del objeto (centro) y el contacto de un vértice del cable con una cara del objeto (derecha).*

dirección *normal*. A continuación se detalla la definición de cada uno de ellos en los tres casos considerados.

Contacto de un vértice del cable con una cara del objeto. En este caso se tomará como punto de contacto el punto más próximo al vértice del cable sobre la cara del objeto. Como dirección normal se tomará la dirección perpendicular a la cara del objeto.

Contacto de una arista del cable con una arista del objeto. En el caso del cruce de dos aristas, se tomará como punto de contacto el punto sobre la arista del objeto que se encuentre más próximo a la arista del cable. Como dirección normal se tomará la dirección perpendicular a ambas aristas que apunta hacia el exterior del objeto.

Contacto de un vértice del cable con una arista. El tercer caso es similar al anterior, con la diferencia de que, ahora, el tramo de cable que cruza una arista del objeto contiene un vértice que queda en el interior del objeto. En este caso, se tomará como punto de contacto el punto de la arista del objeto más próximo al vértice del cable. La dirección normal se calculará de la siguiente manera.

Se considerarán los dos vértices del cable vecinos al vértice que está colisionando, y el segmento de recta que los une. Utilizando la notación que se ha empleado para los sistemas de partículas, si el vértice que está en el interior el objeto es el vértice i , como dirección normal se tomará la dirección perpendicular al segmento $\overline{\mathbf{r}_{i-1}\mathbf{r}_{i+1}}$ y a la arista del objeto que se encuentra atravesada por el cable.

8.1.2. Reacción del cable a una colisión

Para simular el efecto de un contacto del cable con una objeto se empleará el modelo de polea desarrollado en el Apartado 4.4. Cada vez que se detecte un contacto entre el cable y un objeto, se añadirá una polea en el sistema, situada junto al punto de contacto, obligando al cable a pasar a través de ella. Esto permite controlar la penetración del cable en el objeto y explotar las técnicas ya desarrolladas para mantener y actualizar el contacto.

Creación de un contacto

Cuando el método de detección de colisiones determine que el cable está en contacto con un objeto del escenario, se calculará la posición del contacto \mathbf{p}_c , y la dirección normal \mathbf{n}_c . A partir de estos datos, se determina el punto de inserción de la polea de la manera siguiente.

Si el radio del cable es r , con el fin de evitar que el cable quede parcialmente en el interior del objeto, el punto para la posición de la polea se tomará separado del mismo. A partir del punto de contacto, la normal y el radio del cable r se determina el punto de inserción de la nueva polea como

$$\mathbf{P}_c = \mathbf{p}_c + r\mathbf{n}_c$$

de manera que se asegura que el cable quede en la parte exterior del objeto en contacto. La Figura 8.5 muestra la posición del punto de inserción del nuevo nodo a partir del radio del cable y la dirección normal.

Sistema de referencia local de la polea El sistema de referencia de la polea se toma de la forma definida en el Capítulo 4, tomando como

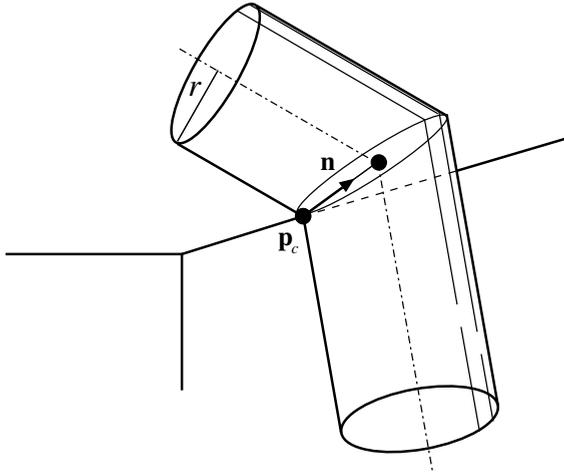


Figura 8.5: La posición en la que se crea el nuevo nodo del polipasto asegura que el cable queda fuera del objeto.

dirección normal de la polea el vector \mathbf{n}_c , determinado durante el proceso de detección de la colisión, y como eje de giro la dirección definida por la arista en contacto.

En el caso de contacto con una cara, se toma como eje de giro la dirección perpendicular al segmento de recta que une las partículas vecinas al nodo en contacto.

Inicialización de los segmentos de cable Como consecuencia de la inserción de la nueva polea ficticia para la simulación del contacto, el segmento de cable que ha colisionado queda dividido en dos nuevos segmentos de cable. Cada uno de estos segmentos debe ser inicializado adecuadamente.

Si el modelo dinámico empleado para la simulación de la oscilación del cable está basado en un sistema de partículas, será suficiente con mantener dichas partículas y dividir el resorte elástico en el que se encuentre el punto de contacto en dos nuevos resortes. La suma de las longitudes de ambos resortes debe igualar a la del resorte antiguo.

Si el modelo empleado se basa en la ecuación de ondas, las posiciones

de los nuevos puntos de la discretización de los dos segmentos de cable resultantes no coincidirá con las posiciones de los puntos del segmento de cable que ha sido dividido por la nueva polea. Por este motivo se utilizará interpolación lineal para determinar las nuevas posiciones y velocidades.

Esto conduce, de nuevo, a la aparición de discontinuidades en el estado del sistema. Sin embargo, en este caso, estas discontinuidades no van a afectar a la calidad de la simulación en un entorno de realidad virtual. El motivo es que la colisión, por si misma, da lugar a una discontinuidad mayor, con lo que el usuario percibirá cualquier efecto del reajuste de los modelos de vibración como el resultado del contacto. Por este motivo se asumirá como aceptable el error que pueda producirse a causa de esta interpolación lineal de los puntos de la ecuación de ondas.

Actualización de un contacto

La polea insertada permitirá conocer la tensión que se está aplicando en cada instante sobre el punto de contacto, así como las direcciones de incidencia del cable. Gracias a esta información es posible conocer la evolución del contacto. Por una parte se controlará la permanencia del contacto y por otra parte se actualizará la posición del mismo en función de las fuerzas que actúen.

Permanencia de un contacto. El modelo de polea insertado en el punto de contacto permitirá determinar si un contacto se debe mantener o si, por el contrario, la configuración del cable da lugar a su separación del objeto.

Gracias a la definición de la dirección normal sobre la polea, será posible gestionar en todo momento esta situación. Siguiendo los criterios especificados en el Capítulo 4, se detectará cuando la fuerza aplicada sobre la polea cambia de signo respecto a la dirección normal. En ese momento, la polea dejará de actuar y se eliminará el contacto.

Cuando se produzca la desaparición de un contacto, los dos segmentos de cable que estaban comunicados a través de la polea ficticia se unirán en uno solo. Este nuevo segmento deberá inicializarse a partir de las configu-

raciones de los dos segmentos eliminados. Para el sistema de partículas se mantendrán las partículas en las posiciones en las que se encuentren en el instante de la eliminación del contacto

En el caso de la ecuación de ondas, se volverá a emplear interpolación lineal para ubicar los nuevos nodos. Al igual que en el caso del establecimiento de un contacto, la discontinuidad provocada por la propia desaparición del contacto permite enmascarar el efecto de cualquier posible discontinuidad ocasionada por este reajuste de los puntos del modelo.

Deslizamiento del contacto. Cuando se produce el contacto de un cable con un objeto, el cable quedará fijo sobre éste sólo si la fricción es suficientemente alta como para impedir su desplazamiento por la superficie.

Con el fin de calcular la evolución de la posición de la polea de contacto, dada por el punto \mathbf{P}_c , la fuerza procedente de los dos segmentos de cable comunicados por la polea se descompone en la dirección de la normal de la polea, y la dirección de su eje de giro, que corresponde con la dirección de la arista.

A partir de la relación entre la fuerza normal y la fuerza en la dirección en el eje de giro, a la que se denominará tangencial, se empleará la ley de fricción seca de Coulomb para determinar si es posible que se produzca un desplazamiento.

De acuerdo con la ley de fricción seca, la fricción de un contacto depende de la fuerza normal, y aumenta linealmente con ésta. La fricción se opone a las fuerzas que actúan en favor del movimiento, impidiendo que este comience. Sin embargo, esta fuerza de fricción tiene un límite superior. Cuando se supera ese límite, la fricción no es capaz de contrarrestar al resto de fuerzas, y entonces se produce el deslizamiento en la zona de contacto (Erleben et al., 2005).

Empleando este principio se implementa la fricción del cable con la arista con la que está colisionando. Tras el cálculo de las tensiones del cable, se calcula la fuerza normal \mathbf{F}_n y la fuerza tangencial \mathbf{F}_t que actúan sobre el punto de contacto en la arista. A partir del coeficiente de fricción μ entre el cable y el material del objeto se determina si $\mu\mathbf{F}_n > \mathbf{F}_t$. Si es así, el contacto

se mantiene. En caso contrario se admite el deslizamiento del cable sobre la arista.

Para determinar el movimiento del cable sobre la arista se integran las ecuaciones de movimiento de una partícula sobre una recta sometida a una fuerza \mathbf{F}_t . La masa de la partícula se toma igual a la de uno de los tramos de cable considerados en la discretización. Durante el movimiento del cable a lo largo de la arista, se considera un coeficiente de rozamiento dinámico ν que da lugar a una fuerza $-\nu\mathbf{F}_n\mathbf{v}$, donde \mathbf{v} es la velocidad del punto de contacto sobre la arista.

El conjunto de técnicas que se han presentado para la detección y gestión de los contactos proporcionan un procedimiento para la simulación interactiva de un polipasto por medio de los modelos dinámicos que se han propuesto a lo largo de este trabajo.

8.1.3. Simulación interactiva

La existencia de una estrategia de detección y reacción a las colisiones es fundamental para la consecución de un modelo interactivo. El control sobre la longitud del cable y la posibilidad de controlar el movimiento de las poleas, ya sea fijando su posición a lo largo del tiempo o actuando sobre los sólidos asociados, unidas a la detección de colisiones, permiten una simulación completamente interactiva de un sistema de cable y poleas.

Por medio de la utilización de una polea se impide la penetración del cable en el interior del objeto. Además, el modelo dinámico propuesto para la simulación de una polea en el Capítulo 4, junto con el modelo de fricción propuesto, permite simular el rozamiento del cable con la superficie de contacto con diferentes parámetros. Por último, las condiciones impuestas allí para garantizar el correcto funcionamiento de una polea permitirán también aquí detectar la pérdida de contacto.

Por otra parte, desde el punto de vista de la implementación, la utilización del mismo formalismo para la gestión de los contactos que para las poleas facilita su integración en el modelo y reduce el tiempo necesario para el desarrollo de bibliotecas de programación que involucren este modelo.

8.2. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DEL CABLE

La representación gráfica del sistema simulado es un aspecto fundamental cuando se modelan sistemas dinámicos para entornos de realidad virtual. Por este motivo, no se pueden descuidar los aspectos relacionados con la representación gráfica del cable y, especialmente, con las estructuras de datos empleadas para almacenar el estado del sistema.

Si el modelo dinámico utiliza unos tipos abstractos de datos muy diferentes de las estructuras de datos empleadas durante las tareas de visualización, entonces será necesario traducir la información relativa al estado del sistema en las estructuras del modelo visual empleado y adecuarla a las necesidades de la aplicación gráfica.

Si por el contrario se emplean modelos que permiten una representación basada en las mismas estructuras de datos que se emplean habitualmente en gráficos 3D, entonces el volcado de los datos puede llevarse a cabo de forma directa. Incluso, cuando los requisitos del método numérico no lo impidan, puede plantearse como estrategia de optimización la utilización de las propias estructuras de datos del modelo gráfico para representar y calcular la física.

A continuación se revisan las principales primitivas y modelos que pueden emplearse para la representación de un cable.

8.2.1. Primitiva para visualización

Un modelo geométrico adecuado para la representación de un cable es la utilización de una sucesión de cilindros. Estos cilindros se pueden tomar de forma que representen cada uno de los elementos de la discretización del modelo general.

De esta manera, los cilindros coincidirán con los utilizados para la detección de colisiones, lo que garantiza una adecuada coherencia visual y además permite reutilizar los cálculos realizados para su representación en aquella tarea.

Sin embargo, tras la implementación de este método se ha observado un



Figura 8.6: *La utilización de cilindros tiene como inconveniente que se aprecian discontinuidades en ausencia de técnicas de anti-aliasing por hardware.*

inconveniente. Cuando los cables se representan sin la utilización de técnicas de anti-aliasing, además del esperado efecto de escalera que aparece cuando se inclinan, a partir de cierta distancia al observador, el cable aparece como una línea discontinua. La Figura 8.6 muestra este problema.

El motivo es que cuando el diámetro del cable tiene un tamaño aparente de un píxel o menos, algunos segmentos del cable no se representan haciendo que se muestre como una línea de trazos. Estos trazos van cambiando su

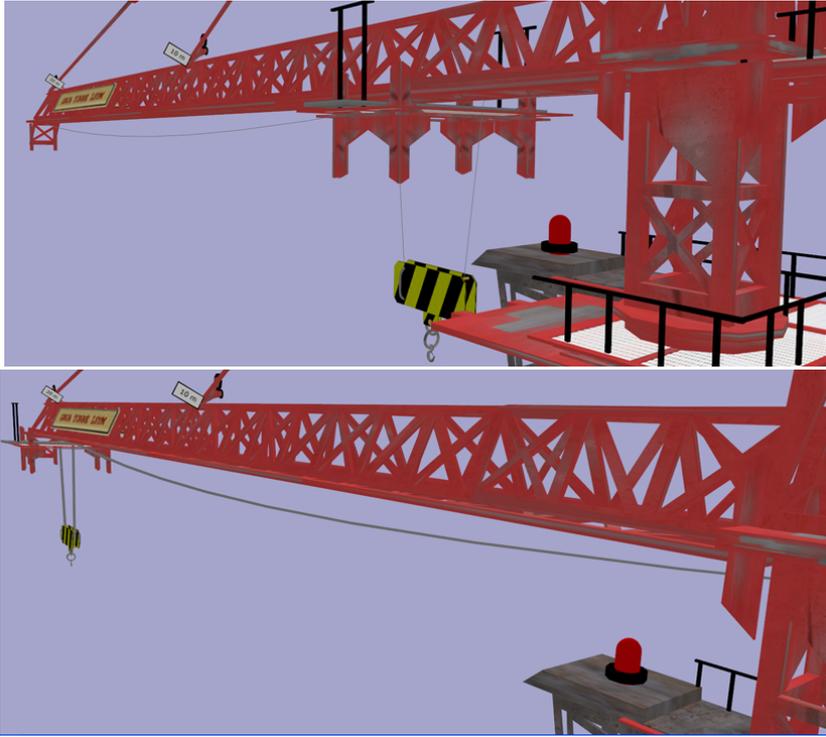


Figura 8.7: *La anchura de una primitiva de tipo línea no puede ajustarse correctamente al diámetro aparente del cable cuando el rango de distancias al observador es grande.*

posición a lo largo del cable cuando éste o el observador se mueven. Esto da lugar a un efecto muy llamativo en el que el cable parece tener luces parpadeantes.

Una primitiva que permite representar una línea sin interrupciones, incluso cuando las técnicas de anti-aliasing no se encuentran activas, es una línea. La anchura de la línea se ajustaría de forma dinámica, de forma que en cada fotograma tuviera la misma anchura aparente que el cable, de acuerdo con su distancia.

Sin embargo, esto no es viable. Piénsese, por ejemplo, en un cable que esté sujeto por un extremo a un punto próximo al observador, y que se

aleje de este, hasta alcanzar una gran distancia. En este caso, no sería posible determinar un valor para su tamaño aparente. En general, cualquier situación en la que un mismo cable se viera en un rango de distancias amplio no sería posible ajustar este valor. La Figura 8.7 muestra el problema asociado al grosor de la línea utilizada para representar los cables.

Otro de los inconvenientes de utilizar una primitiva de tipo línea es que no tiene definida una superficie ni un mapa de normales, de forma que no recibe iluminación. Por tanto, no da sensación de volumen cuando se observa desde una distancia suficientemente corta como para poder apreciar de forma clara el volumen del cable.

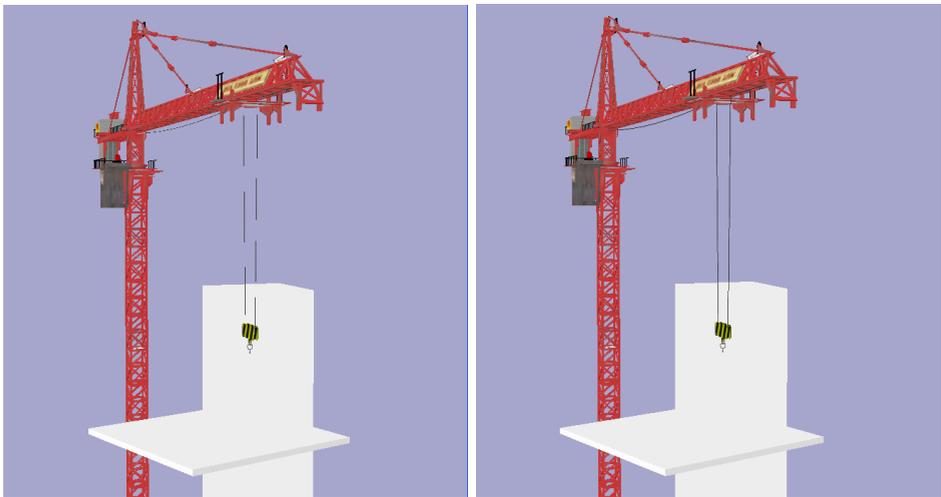


Figura 8.8: *La utilización de cilindros no es adecuada, ya que se aprecian discontinuidades en ausencia de técnicas de anti-aliasing. La técnica propuesta permite solucionar este problema en la visualización.*

Con el fin de superar estos inconvenientes, se propone la utilización de un enfoque híbrido, que consiste en la superposición de una serie de cilindros y de una primitiva de tipo línea. Utilizando este planteamiento, la primitiva lineal queda oculta en el interior de los cilindros cuando la distancia del observador al cable es pequeña. Sin embargo, cuando la distancia aumenta,

apareciendo las discontinuidades en la representación del cable por medio de cilindros, la primitiva de tipo línea queda a la vista manteniendo la continuidad. Esta sencilla técnica proporciona una transición suave entre ambos métodos de representación, beneficiándose de las ventajas de ambos, y superando sus inconvenientes con un coste computacional muy bajo. La Figura 8.8 muestra la aplicación de la técnica propuesta.

8.2.2. Deslizamiento de texturas

Uno de los elementos que ha aparecido de forma más recurrente a lo largo de esta tesis ha sido la velocidad del cable, relacionada a su vez con la velocidad angular de las poleas. La transmisión del trabajo por medio de un polipasto se hace, precisamente haciendo circular el cable a lo largo de las poleas que lo forman. Por tanto, para poder representar gráficamente los resultados de esta tesis de una forma realista, es necesario crear la sensación de que el cable se desplaza por las poleas.

El procedimiento más sencillo es utilizar una textura para la representación del cable sobre los cilindros y realizar un desplazamiento de la coordenada de textura con el fin de dar la sensación de que el cable está avanzando.

Para ello se emplea el parámetro x de la curva $\mathbf{u}(x, t)$ que representa al cable. La velocidad del movimiento de la textura debe hacerse en función de la velocidad obtenida para cada polea. Además, debe gestionarse adecuadamente la variación de la longitud del cable con la coordenada de textura, de forma que la textura se alargue lo que sea necesario, sin producirse artefactos en la representación de las juntas entre dos cilindros del mismo tramo.

8.3. DESARROLLO DE UN DEMOSTRADOR Y OTRAS APLICACIONES DE LOS MODELOS

Con el fin de demostrar la validez de los modelos en el campo de la simulación interactiva en tiempo real, y de probar su aplicabilidad, se ha desarrollado una aplicación de demostración.



Figura 8.9: Se ha desarrollado un demostrador que simula una grúa torre de forma interactiva, utilizando los modelos de cable presentados en este trabajo.

La aplicación consiste en un modelo de grúa torre en el que se han empleado los modelos dinámicos desarrollados. La grúa puede controlarse de forma interactiva. En el escenario virtual se han introducido diferentes elementos para la comprobación de las técnicas de detección de colisiones.



Figura 8.10: *El sistema de formación de operadores de grúa torre utiliza los modelos desarrollados a lo largo de esta tesis.*

La Figura 8.9 muestra una imagen del demostrador en la que se aprecia la oscilación del cable, especialmente en los tramos horizontales del polipasto.

El sistema consta de cinco tramos de cable que se integran por medio de métodos numéricos explícitos. Cada segmento de cable se simula utilizando veinte puntos en la discretización y se consigue una tasa de refresco superior a 60Hz.

Este modelo dinámico se ha empleado también en el desarrollo de un sistema de formación para operadores de grúa torre que actualmente se encuentra en producción. El sistema de formación consta de un módulo teórico y de un simulador de grúa torre y está destinado a la formación de los candidatos a la obtención del carnet de operador de grúa torre.

El entorno de simulación de este sistema, que se muestra en la Figura 8.10, consta de un escenario muy complejo, con más de 45.000 polígonos,

que reproduce el entorno de obra. La simulación incluye avatares, con modelos de inteligencia artificial, y modelos dinámicos complejos para la grúa y otros vehículos simulados. La introducción del nuevo modelo dinámico para la simulación del polipasto no ha supuesto ninguna pérdida de prestaciones apreciable respecto a la utilización de los anteriores modelos de cables sin masa.

Este sistema está homologado en seis comunidades autónomas para la realización de prácticas, que pueden computarse como parte de las 150 horas de práctica en grúa exigidas por ley para la obtención del carnet de operador de grúa torre. En la actualidad se han distribuido más de 600 unidades, en virtud de diferentes convenios de colaboración con centros de formación, como el Instituto Gaudí de la Construcción o la Fundación Laboral de la Construcción.

8.4. CONCLUSIÓN

La principal contribución de este capítulo es demostrar que los diferentes modelos desarrollados son adecuados para la simulación interactiva en entornos virtuales y de simulación. Para ello se han desarrollado técnicas específicas para conseguir su implementación e integración en aplicaciones de realidad virtual.

Se ha propuesto un modelo de gestión de colisiones que permite la simulación interactiva del modelo. El modelo considera la interacción del cable con el entorno y la reacción del cable ante las colisiones. Gracias a la utilización de un modelo de polea, la implementación del modelo de colisiones resulta muy sencilla.

Se han revisado también las primitivas más adecuadas para la representación gráfica del modelo, con el fin de integrarlo en aplicaciones de realidad virtual. Se han detectado diversos problemas, causados por el reducido grosor del cable. Como solución, se ha propuesto una sencilla técnica que permite una representación de calidad, sin necesidad de utilizar técnicas de reducción de *aliasing* por hardware. Esto permite la obtención de un buen

resultado visual, incluso en equipos de prestaciones modestas.

En su conjunto, las técnicas presentadas permiten la simulación de maquinaria de elevación en entornos de simulación complejos, con gran cantidad de polígonos y un modelo dinámico costoso, como demuestran la aplicación de demostración desarrollada y la integración de los modelos en el sistema de simulación para formación de operadores de grúa torre, desarrollado por el grupo de investigación LSYM.

Resumen de los resultados de este capítulo

Podemos concluir, por tanto, que el conjunto de técnicas presentadas y discutidas en este capítulo permiten la integración de los modelos en aplicaciones de realidad virtual por medio de los siguientes logros.

- El desarrollo de un modelo de detección de colisiones, que permite la simulación interactiva y realista del polipasto.
- La utilización de un modelo particular de poleas para simular una colisión, facilitando la implementación e integración del modelo de colisiones.
- El diseño de técnicas que permiten una representación gráfica de calidad.
- La implementación de aplicaciones de demostración y la integración del modelo en simuladores en producción.

CONCLUSIONES

A lo largo del trabajo de investigación se ha desarrollado un modelo de polipasto adecuado para la simulación de maquinaria de elevación, especialmente en el marco de la simulación para entrenamiento. Esta investigación ha sido motivada principalmente porque, entre los modelos existentes, ninguno de ellos considera la posibilidad de simular sistemas de poleas contemplando, simultáneamente, la oscilación de los cables.

Se ha presentado un detallado análisis del problema y se ha propuesto una metodología que ha permitido la obtención de modelos de polipasto adecuados para este problema. Las contribuciones alcanzadas incluyen nuevos modelos para la simulación de las oscilaciones, simulación en las situaciones en las que la tensión es más elevada y técnicas para su implementación e integración en aplicaciones de realidad virtual. Por otra parte, se han presentado un conjunto de experimentos numéricos que proporcionan un análisis y validación del modelo propuesto.

A continuación, en este capítulo se realiza un resumen de las principales contribuciones obtenidas a lo largo del trabajo de investigación realizado. En primer lugar se analiza la consecución de los objetivos planteados en el Capítulo 1 de la memoria. A continuación se discuten las principales aportaciones científicas que ofrece el presente trabajo en el campo de la simulación y animación de cables. Por último, se indican algunas líneas de

trabajo futuro que surgen como a partir de los resultados obtenidos a lo largo de este trabajo de investigación.

9.1. CONSECUCCIÓN DE LOS OBJETIVOS DE LA TESIS

El trabajo desarrollado ha tenido como principal objetivo la obtención de modelos dinámicos de sistemas de elevación adecuados para la simulación interactiva en tiempo real. Los modelos obtenidos reproducen propiedades de estos sistemas que habían sido descartadas por modelos anteriores; permiten la simulación estable y robusta de las situaciones de elevada tensión, habituales en los cables de elevación; y tienen un rango de validez amplio, para proporcionar un comportamiento adecuado ante las entradas generadas por el usuario.

Durante el desarrollo del trabajo, y con el fin de alcanzar este objetivo central, se han conseguido una serie de hitos u objetivos intermedios, que a continuación se detallan.

Análisis del problema. A lo largo del Capítulo 2 se ha llevado a cabo un análisis del estado de las técnicas y métodos utilizados para la simulación de cables, poleas y polipastos. Se han revisado tanto los modelos utilizados habitualmente en aplicaciones de realidad virtual como modelos teóricos que permiten conocer las propiedades del sistema simulado. Este capítulo ha permitido establecer un conjunto de deficiencias y sus posibles causas.

Definición de una estrategia de solución. El Capítulo 3 presenta, en primer lugar, una metodología de modelado destinada a paliar las dificultades observadas en el análisis del problema. Esta metodología se ha utilizado a lo largo de la tesis, permitiendo alcanzar los objetivos planteados.

Definición de un modelo abstracto de polipasto. El Capítulo 3 presenta también la aplicación de la metodología al problema abordado

en este trabajo, por medio del desarrollo de un modelo abstracto de polipasto.

Obtención de un modelo de simulación. A lo largo del Capítulo 4 y del Capítulo 5 se han definido modelos dinámicos para la simulación de poleas y de tramos de cable con longitud variable. Por medio del modelo abstracto de polipasto definido en el Capítulo 3, y de estos modelos dinámicos, se ha obtenido un modelo para la simulación de un polipasto. Este modelo considera un conjunto arbitrario de poleas y la oscilación transversal del cable.

Obtención de un modelo para tensión elevada. Tras analizar las propiedades del modelo obtenido se ha constatado que las situaciones de tensión habituales en maquinaria de elevación dan lugar a problemas de inestabilidad numérica. Con el fin de solucionar este inconveniente el Capítulo 6 presenta un nuevo modelo de oscilación basado en la ecuación de ondas que presenta mejoras en estabilidad y eficiencia.

Mejora del rango de validez del modelo. Por medio de la combinación de los diferentes modelos de cable propuestos, en el Capítulo 6 se han diseñado técnicas que permiten extender el rango de validez del modelo de polipasto. Explotando el esqueleto que ofrece el modelo abstracto de polipasto, se ha presentado un procedimiento para poder emplear en cada instante de la simulación el modelo de cable más adecuado, por medio de *niveles de detalle dinámicos*. Esto permite, por ejemplo, simular situaciones con tensiones muy distintas o con diferentes aceleraciones sobre los extremos, usando en cada caso el modelo más conveniente.

Validación. Los modelos propuestos se han analizado con el fin de conocer de forma precisa su comportamiento, su validez y su coste computacional. El Capítulo 7 recoge la mayor parte de las tareas destinadas a este análisis, con la realización de un completo conjunto de experimentos numéricos. Estos experimentos han mostrado el comportamiento de

varios sistemas que se han simulado utilizando los modelos desarrollados en esta propuesta de tesis.

Esta validación se ha llevado a cabo en base a parámetros cualitativos, ya que las exigencias de precisión que surgen del campo de aplicación de los modelos no requieren una elevada precisión numérica. Los resultados obtenidos muestran que, tanto la evolución del sistema como la evolución de diversos parámetros, como la energía, son consistentes con los modelos teóricos.

Además de los análisis experimentales realizados, en el Capítulo 6 se ha llevado a cabo una validación analítica del modelo de oscilación propuesto para simulaciones en tiempo real por medio de su derivación desde un modelo teórico. Esto permite afirmar que el error cometido es reducido, especialmente en situaciones de elevada tensión, y además permite tener un conocimiento preciso de cuál es este error en cada instante.

Implementación y aplicación. En el Capítulo 8 se han abordado los detalles técnicos necesarios para conseguir la integración de los modelos en aplicaciones de simulación. Se ha diseñado un modelo de interacción y colisión del cable con el entorno, que de nuevo se apoya en la descripción abstracta realizada, ya que utiliza el modelo formal de polea para definir un modelo de contacto.

Se han analizado también los detalles de implementación de la representación gráfica de los cables, proponiendo las primitivas más adecuadas y las técnicas que permiten obtener una simulación de mayor calidad en un entorno virtual.

En el Capítulo 8 se ha desarrollado un demostrador que sirve para comprobar la validez y aplicabilidad de los modelos. Otra muestra de la esta aplicabilidad es el simulador de grúa torre que se ha desarrollado empleando los resultados de este trabajo, y que está siendo comercializado.

Aplicación en otros ámbitos. Aunque el modelo de polipasto presentado se ha desarrollado con el objetivo de realizar simulaciones de maquinaria de elevación, puede perfectamente emplearse en *ámbitos de aplicación diferentes* a éste. En primer lugar, permite la simulación de polipastos o aparejos en otros ámbitos, como en la navegación a vela, donde puede permitir realizar simulaciones interactivas, gracias a su eficiencia. Igualmente, algunos de los desarrollos intermedios destinados a la obtención del modelo de polipasto, como el modelo de cables de longitud variable, pueden ser aplicados en animación. Por otra parte, la metodología puede ser extendida para mejorar el control y la eficiencia de modelos de objetos deformables de carácter más general.

9.1.1. Aportación de la metodología empleada

Parte del trabajo realizado se ha centrado en el desarrollo de una metodología para el modelado de un polipasto, cumpliendo las exigencias de la simulación interactiva para entrenamiento en cuanto a eficiencia, estabilidad, robustez, flexibilidad y validez.

El análisis del conjunto de metodologías de modelado existentes ha mostrado, en primer lugar, la carencia ya detectada de modelos de polipasto que consideren la oscilación transversal del cable. Además, ha mostrado que las metodologías utilizadas habitualmente en mecánica no están destinadas a conseguir modelos flexibles ni robustos ante una amplia variedad de situaciones.

Por este motivo se ha propuesto una metodología de modelado novedosa en este ámbito, destinada a conseguir los objetivos indicados. La metodología de modelado consiste en la descomposición del sistema en módulos o subsistemas y en la identificación de las relaciones y los intercambios de información existentes entre los módulos.

Esta descomposición se materializa en un modelo abstracto que formaliza la descomposición anterior. Gracias a la modularización del sistema es posible utilizar diferentes metodologías de modelado para un mismo subsistema. El modelo abstracto actúa como marco para la integración de cada

una de ellas en el modelo dinámico del sistema global.

Esta metodología, aplicada al modelado de un polipasto, ha contribuido en gran medida a la consecución de algunos de los objetivos más importantes del presente trabajo y, en especial, a lograr que los modelos que se han obtenido cumplan con los requisitos establecidos. A continuación se indica, de forma más detallada, la forma en que la metodología seguida a lo largo de la investigación ha contribuido a ello.

Flexibilidad y Robustez. Gracias a la modularización del sistema es posible definir modelos dinámicos adecuados para una gran variedad de situaciones. La utilización del modelo abstracto durante el diseño permite después integrar cualquiera de estos modelos en el modelo dinámico de polipasto, e incluso intercambiar los modelos en tiempo de ejecución. Esto permite obtener un modelo de polipasto capaz de responder adecuadamente ante las situaciones más variadas.

En el modelo de polea desarrollado en el Capítulo 4 se han analizado los límites de validez del modelo para proponer estrategias de gestión de las situaciones que se producen en estos límites. El modelado de estas situaciones, permitiendo la salida del cable de la polea, confiere además un mayor realismo a la simulación.

Interactividad. Gracias a la identificación de subsistemas abstractos, el modelo definido para representar una polea resulta también adecuado para la implementación de los contactos del cable con objetos del escenario. Esto facilita el diseño e implementación del módulo de gestión de colisiones.

Implementación. La metodología de modelado utilizada guarda numerosas analogías con el modelado orientado a objetos utilizado en programación. Esto facilita las tareas de implementación de los modelos por medio de lenguajes como C++. De hecho, desde el momento que se define el modelo abstracto es posible iniciar el diseño y desarrollo de una biblioteca de programación.

Estabilidad. Los problemas de estabilidad detectados en los modelos de oscilación suponen un inconveniente para simular de forma eficiente las situaciones en las que la tensión del cable es muy elevada. En el Capítulo 6 se aborda este problema por medio de la estrategia de utilización de diferentes niveles de detalle dinámicos.

En primer lugar, gracias a la modularidad del modelo, se aíslan los módulos que dan lugar a la inestabilidad. A continuación se sustituye el modelo inestable por otro que garantice la estabilidad de la simulación, incluso en las situaciones de mayor tensión mecánica.

Eficiencia y escalabilidad. Con el fin de conseguir los objetivos de eficiencia y escalabilidad de los modelos, se ha recurrido a aquellas metodologías de modelado que ofrecían modelos más eficientes. Se han empleado modelos basados en partículas puntuales y en la discretización, por medio de diferencias finitas, de ecuaciones en derivadas parciales. Se han descartado metodologías como la dinámica de sistemas multicuerpo que, en el mejor de los casos, tiene un coste por paso de integración mucho mayor que las dos metodologías elegidas.

Entre los experimentos numéricos realizados se ha llevado a cabo también un análisis de prestaciones para los modelos de oscilación de cable, mostrando que los tiempos de ejecución son del orden de la décima parte de los que muestran los modelos con características equivalentes, basados en metodología multicuerpo.

9.2. PRINCIPALES CONTRIBUCIONES CIENTÍFICAS DEL TRABAJO

La presente investigación está motivado por la constatación de una carencia importante en cuanto al modelado de sistemas de poleas y cables, y su objetivo principal es contribuir a solucionar dicha carencia.

9.2.1. Contribuciones al estado de la técnica

A continuación se enumeran las principales carencias detectadas y la manera en que la presente tesis contribuye a mejorar su grado de resolución.

Modelado de un polipasto

La problemática central que motiva este trabajo es la ausencia de modelos de polipasto que permitan una simulación adecuada a las necesidades de los simuladores para entrenamiento.

Desde este punto de vista, la presente tesis realiza una importante contribución al proporcionar una metodología que permite la obtención de modelos de polipasto a partir de diferentes modelos de dinámica de un cable. Este modelo es el primer modelo de polipasto aplicable a simulación interactiva que contempla oscilación en los cables, y ha sido presentado recientemente en el ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation 2008 (García-Fernández et al., 2008).

Modelado de cables con longitud variable

Uno de los factores que ha causado la falta de modelos anteriores ha sido la necesidad de desarrollar modelos dinámicos de cable con longitud variable. Hasta el momento, la mayoría de modelos dinámicos que consideraban la variación de la longitud son modelos elementales destinados al análisis de la dinámica no lineal de las vibraciones, y se basan en la ecuación de ondas en una dimensión.

En este trabajo se ha desarrollado una metodología que permite la simulación de cables con longitud variable a partir de una de las principales metodologías de modelado discreto de cables. Este modelo, presentado aquí como un paso técnico para alcanzar el modelo de polipasto, supone una contribución en sí mismo que puede tener diversas aplicaciones en campos como la animación.

Control de la estabilidad en situaciones de tensión elevada

El otro eje principal de las dificultades existentes para la simulación de cables y polipastos es el problema de la inestabilidad numérica que acompaña a las vibraciones naturales del cable.

Gracias a la metodología seguida en este trabajo, que se basa en la descomposición sucesiva del sistema en subsistemas, ha sido posible aislar la parte de la dinámica que da lugar a estas inestabilidades y controlar su aparición sin sufrir un impacto en la calidad de la simulación.

Esto supone una doble aportación. Por una parte, se soluciona el problema particular de la simulación de cables en situaciones de elevada tensión. Y por otra parte, se plantea una metodología para el control de la inestabilidad que puede ser de utilidad en otras situaciones de carácter más general, con aplicaciones en animación y especialmente en la simulación de objetos deformables.

Detección de colisiones

Entre los trabajos existentes relacionados con la simulación de cuerdas, hilos, etc., la simulación de los contactos se ha planteado siempre como parte del modelado dinámico. Sin embargo, en el caso de la simulación de cables de elevación los trabajos existentes no han abordado el problema, dejándolo siempre como una cuestión secundaria.

En el presente trabajo se ha presentado por primera vez una estrategia de detección de colisiones junto con los procedimientos necesarios para su gestión y para obtener una respuesta realista del sistema aplicado al problema de cables de elevación.

Representación gráfica del sistema

De forma similar, la representación gráfica del cable es un aspecto que se suele obviar en la mayoría de trabajos relacionados con el tema. Sin embargo, como se ha mostrado aquí, el problema conlleva ciertos detalles que es necesario tratar con el debido cuidado para conseguir una visualización

de calidad.

Este trabajo ofrece una discusión detallada del problema y se proponen técnicas sencillas pero efectivas para conseguir esa mejora en la calidad de la representación gráfica del sistema.

Mejora de la calidad de las aplicaciones de formación

Cabe esperar que el campo o problema que origina y motiva el trabajo de investigación realizado reciba, de forma natural, mejoras y contribuciones a partir de los resultados del mismo.

Efectivamente, el conjunto de modelos desarrollados han supuesto una mejora en la calidad de las aplicaciones de formación para operadores de maquinaria de elevación. En especial, los usuarios del sistema de formación de operador de grúa torre han expresado su satisfacción por la mejora en la calidad visual que supone la consideración del polipasto de elevación de las grúas torre.

Pero aún más importante es el impacto en la dinámica de la carga y el gancho de estas grúas. Como se indicó en el Capítulo 7, la consideración de la masa en el cable permite la simulación de oscilaciones de baja frecuencia en el gancho que no son apreciables en otros modelos. La reproducción de este comportamiento ha mejorado la adquisición de habilidades por parte de los aprendices, que reducen la curva de aprendizaje posterior en su trabajo con grúas reales.

9.2.2. Aplicación y difusión de los resultados

Es trabajo de investigación que se presenta en esta memoria forma parte de las tareas de investigación vinculadas al desarrollo del sistema de formación de operadores de grúa torre desarrollado en el Instituto de Robótica de la Universidad de Valencia por el grupo de investigación LSYM.

En consecuencia, los resultados que se han derivado de esta investigación se han aplicado de forma íntegra a dicho sistema, como ya ha quedado patente en varias ocasiones a lo largo de la memoria. Actualmente se han

distribuido más de 600 licencias de esta aplicación informática, que se está utilizando actualmente en varios centros de formación repartidos por todo el territorio nacional.

Publicación de los resultados

Por otra parte, las contribuciones de carácter científico y técnico se han publicado en diversos foros científicos de ámbito internacional.

(García-Fernández et al., 2007b) I. García-Fernández, M. Pla-Castells and R.J. Martínez-Durá (2007). A Mixed Model for Real-Time, Interactive Simulation of a Cable Passing Through Several Pulleys. *Proceedings of the International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics*, publicado en la revista *AIP Proceedings*, 936:212–215.

(García-Fernández et al., 2007a) I. García-Fernández, M. Pla-Castells and R.J. Martínez-Durá (2007). Analysis of a cable model, considering mass and wave oscillations. *Proceedings of the IeCCS'07*, publicado en la revista *AIP Proceedings*, 1060.

(García-Fernández et al., 2008) I. García-Fernández, M. Pla-Castells and R.J. Martínez-Durá (2008). Elevation Cable Modeling for Interactive Simulation of Cranes. *SCA'08: Proceedings of the 2008 ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation*, 173–181.

Actualmente se encuentra en preparación la publicación del modelo de variación de longitud de cable basado en partículas, que será enviado próximamente como un artículo a la revista *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*.

9.3. TRABAJO FUTURO

Los resultados de esta investigación abren nuevas vías y líneas de trabajo para futuras investigaciones. Por una parte, hay aspectos de las soluciones propuestas que pueden ser mejorados. Por otra parte, algunas de las propuestas realizadas desde el punto de vista metodológico, abren nuevas vías de investigación.

9.3.1. Futuras líneas de trabajo relacionadas con la tesis

A raíz de los resultados obtenidos se plantean las siguientes líneas de trabajo destinadas, principalmente, a complementar o mejorar estos resultados.

Técnicas de optimización de la implementación

Como consecuencia de la modularidad de la metodología utilizada, los diferentes modelos dinámicos que se han presentado, pueden descomponerse en diferentes submodelos para su integración por medio de arquitecturas paralelas.

Esta línea de trabajo puede mejorar las prestaciones de los modelos, ya de por sí muy eficientes, y potenciar su utilización en ámbitos como la industria del video-juego que se apoya cada vez más en este tipo de arquitecturas, gracias a los procesadores multi-núcleo y a la arquitectura utilizada en las consolas de video-juegos.

De manera análoga, debe plantearse la implementación de los algoritmos de integración numérica para su ejecución en los procesadores gráficos, siguiendo los trabajos iniciados ya por algunos autores (Oshita, 2007).

Modelos adaptativos

Las características del sistema simulado, con una gran extensión espacial y con una velocidad finita de propagación de las características de la solución, permiten la utilización de técnicas de refinamiento selectivo de la discretización utilizada en el modelo.

Esta técnicas explotan las propiedades locales de la solución para reducir, cuando sea posible, el número de nodos utilizados en una región, ahorrando así tiempo de CPU y memoria.

De manera indirecta estas técnicas ya se están empleando, al permitir que cada segmento de cable de un polipasto cambie el modelo de oscilación en función de sus necesidades de estabilidad y calidad de la simulación. Este modelo debería hacerse extensivo a la densidad de puntos de la malla utilizada para representar cada segmento de cable.

9.3.2. Nuevas líneas de investigación

Entre las diferentes contribuciones que se obtienen de los resultados del presente trabajo de investigación, la metodología de modelado basada en la descomposición del sistema de forma jerárquica, puede dar lugar a nuevas contribuciones, especialmente en dos campos de investigación muy activos actualmente.

Simulación dinámica de ropa y objetos deformables

La metodología empleada para el modelado del cable, basada en la descomposición en un modelo de tensión y un modelo de oscilación, abre la vía para la simulación de otros objetos como la ropa o los objetos deformables.

Este tipo de objetos suponen un reto importante desde el punto de vista del modelado y los modelos tradicionales suelen dar lugar a simulaciones poco eficientes.

La metodología propuesta en esta tesis da lugar a modelos más eficientes que los que se obtienen a partir de sistemas de partículas. Su aplicación a la simulación de objetos bidimensionales o tridimensionales deberá ser estudiada.

Control de la estabilidad en modelos de objetos deformables

En este campo además, la aparición de inestabilidades es frecuente debido al carácter elástico de los objetos y a la aparición de vibraciones en su

comportamiento.

La utilización de una metodología basada en la descomposición del sistema en diferentes capas puede permitir aislar las fuentes de inestabilidades de forma similar a como se ha realizado en este trabajo.

APÉNDICE A

NOTACIÓN UTILIZADA

Símbolo	Descripción
\mathcal{S}	Símbolo que denota un sólido
\mathbf{R}	Posición de un sólido
\mathbf{A}	Matriz de rotación de un sólido
\mathcal{P}	Símbolo que denota una polea
\mathbf{P}	Posición de una polea
\mathbf{e}_0	Eje de giro de una polea
R	Radio de la polea
I	Momento de inercia de una polea
ω	Velocidad angular de la polea
α_k^i	ángulo de incidencia del cable en la polea
\mathbf{t}_0	Tensión del cable 0 (entrada de la polea)
\mathbf{t}_1	Tensión del cable 1 (entrada de la polea)
\mathbf{P}	Posición de la polea (entrada de la polea)
\mathbf{e}_0	Eje de giro de la polea (entrada de la polea)
\mathbf{p}_0	Punto de aplicación de \mathbf{t}_0 (salida de la polea)
\mathbf{p}_1	Punto de aplicación de \mathbf{t}_1 (salida de la polea)

Símbolo	Descripción
F	Fuerza que actúa sobre el punto de anclaje (salida de la polea)
τ	Momento angular que actúa sobre el punto de anclaje (salida de la polea)
v	Velocidad tangencial en el exterior de la polea (salida de la polea)
\mathcal{C}	Símbolo que denota un cable
ρ	Densidad lineal del cable, en kg por metro de longitud
L	Longitud de referencia de un tramo de cable
T	Tensión del cable
A	Sección transversal del cable
E	Módulo de Young del cable
k	Rigidez del cable
c	Coefficiente de rozamiento del cable
\mathbf{p}_0	Posición del inicio del segmento de cable (entrada del cable)
\mathbf{p}_1	Posición del final del segmento de cable (entrada del cable)
v_0	Velocidad de variación de la longitud del segmento de cable en su inicio (entrada del cable)
v_1	Velocidad de variación de la longitud del segmento de cable en su final (entrada del cable)
\mathbf{T}_0	Tensión del cable en el punto de inicio (salida del cable)
\mathbf{T}_1	Tensión del cable en el punto final (salida del cable)
l	Distancia euclídea entre dos poleas consecutivas
\mathbf{d}^i	vector unitario, que indica la dirección que une la polea \mathcal{P}^i con la polea \mathcal{P}^{i+1}
\mathbf{b}_k^i	Base local de la polea i
\mathbf{e}_k^i	Base local del segmento de cable i
g	Constante de la gravedad

Símbolo	Descripción
u	Desviación transversal del cable
x	Parámetro de la curva que describe el cable
$\mathbf{u}(x, t)$	Posición del cable
$\mathbf{n}(x, t)$	Fuerzas que actúan en un punto del cable a causa del resto del cable
$\mathbf{f}(x, t)$	Fuerzas externas que actúan en un punto del cable
$\mathbf{t}(x, t)$	Vector unitario tangente a la curva del cable
\mathbf{p}_c	Punto de contacto del cable con un objeto
\mathbf{n}_c	Dirección normal del contacto del cable con un objeto

MINIMIZACIÓN DE LA ENERGÍA EN EL MÉTODO DE INSERCIÓN DE PARTÍCULAS

El procedimiento propuesto para la inserción de una nueva partícula requiere el cálculo de la posición de mínima energía para la partícula insertada. Esto se realiza por medio del método de optimización del descenso por gradiente. En este tipo de aplicaciones es frecuente la utilización del método del gradiente conjugado (Gregoire and Schömer, 2007; Spillmann and Teschner, 2008) por ser un método con una convergencia mucho más rápida.

Sin embargo, las características del problema particular permiten acelerar la convergencia del método del descenso por gradiente hasta conseguir la convergencia en unas pocas iteraciones.

En primer lugar, debe observarse que en el caso de la minimización de la energía en un sistema mecánico, el método de descenso por gradiente equivale al método de integración de Euler Explícito para la integración de las ecuaciones de movimiento.

Si \mathbf{q} son las coordenadas generalizadas del sistema y E es su energía mecánica, el método de descenso por gradiente obtiene un mínimo local para la energía a partir de un valor inicial \mathbf{q}^0 por medio de la iteración

$$\mathbf{q}^k = \mathbf{q}^{k-1} - h \frac{\partial E}{\partial \mathbf{q}}.$$

y en el caso de un sistema mecánico, las fuerzas conservativas que actúan sobre el sistema son, precisamente, $\mathbf{f} = -\frac{\partial E}{\partial \mathbf{q}}$.

Dado que se quiere obtener el mínimo de energía para una partícula bajo la acción de un conjunto de resortes elásticos, lineales y torsionales, es posible conocer la región de estabilidad del método de Euler en este caso. A partir de esta información, también es posible conocer el mayor paso de integración que permite la simulación estable del sistema.

Por otra parte, a partir de la velocidad de la partícula \mathbf{r}'_2 y de la velocidad de variación de la longitud del cable v_0 , es posible interpolar linealmente un valor para la velocidad de la partícula \mathbf{r}'_1

$$\mathbf{r}'_1 = \frac{\dot{\mathbf{p}}_0 + v_0 \mathbf{d}_0 + \mathbf{r}'_2}{2}.$$

A partir de este valor, se calcula la posición de la partícula integrando la posición \mathbf{r}'_1 con el paso de integración empleado para la evolución del cable. Esta nueva posición se toma como iteración inicial del método de descenso por gradiente.

Utilizando este iterado inicial, junto con el valor obtenido para el paso de descenso, y aplicando una amortiguación a la partícula se consigue la convergencia del descenso por gradiente en menos de diez pasos.

Para poder aplicar el método es necesario obtener las derivadas de la energía del sistema respecto de las variables que vayan a modificarse durante el método iterativo. En el caso de la inserción de una partícula, las variables que se modificarán serán \mathbf{r}'_1 . A continuación se obtiene el valor de estas derivadas.

CÁLCULO DE LAS DERIVADAS DE LA ENERGÍA DEL SISTEMA

Para cada muelle longitudinal, la energía elástica viene dada por

$$E_{e,i} = \frac{1}{2}k(|\mathbf{d}_i| - \ell)^2 \quad (\text{B.1})$$

Por otra parte, para cada muelle torsional, la energía torsional elástica viene dada por

$$E_{\theta,i} = \frac{1}{2}c\theta_i^2 \quad (\text{B.2})$$

donde θ_i es el ángulo de los dos muelles que unen las partículas \mathbf{r}_{i-1} , \mathbf{r}_i y \mathbf{r}_{i+1} . Este ángulo puede calcularse como

$$\theta_i = \arctan \left(\frac{|\mathbf{d}_i \times \mathbf{d}_{i-1}|}{\mathbf{d}_i^T \mathbf{d}_{i-1}} \right) \quad (\text{B.3})$$

Por último, la energía potencial gravitacional de cada partícula viene dada por

$$V_i = mgr_i^T \mathbf{z} \quad (\text{B.4})$$

donde m es la masa de las partículas y \mathbf{z} es el vector unitario en la dirección vertical.

La energía potencial del sistema vendrá dada por la suma de las diferentes energías a lo largo de todo el sistema

$$E = E_e + E_\theta + V = \sum_i E_{e,i} + \sum_i E_{\theta,i} + \sum_i V_i \quad (\text{B.5})$$

Para aplicar el método del descenso por gradiente es necesario conocer las derivadas de la energía respecto a la posición de la partícula insertada. Las derivadas utilizadas en el método de minimización coinciden con las fuerzas debidas a estos potenciales

$$\mathbf{f} = -\frac{\partial E}{\partial \mathbf{q}} \quad (\text{B.6})$$

y las fuerzas sobre una determinada partícula vendrán dadas por las derivadas de las energías potenciales respecto de las posiciones de dicha partícula

$$\mathbf{f}_i = -\frac{\partial E}{\partial \mathbf{r}_i} \quad (\text{B.7})$$

La derivada de la energía elástica E_e respecto de la posición de la partícula i viene dada por

$$\frac{\partial E_e}{\partial \mathbf{r}_i} = \frac{\partial E_{e,i}}{\partial \mathbf{r}_i} + \frac{\partial E_{e,i-1}}{\partial \mathbf{r}_i} = k \left(1 - \frac{\ell}{|\mathbf{d}_{i-1}|} \right) \mathbf{d}_{i-1} - k \left(1 - \frac{\ell}{|\mathbf{d}_i|} \right) \mathbf{d}_i \quad (\text{B.8})$$

Por otra parte, la derivada de la energía potencial debida a la flexión del cable E_θ puede calcularse a partir de la expresión

$$\theta_i = \arctan \left(\frac{|\mathbf{d}_i \times \mathbf{d}_{i-1}|}{\mathbf{d}_i^T \mathbf{d}_{i-1}} \right) \quad (\text{B.9})$$

$$\frac{\partial E_\theta}{\partial \mathbf{r}_i} = \frac{\partial E_{\theta,i-1}}{\partial \mathbf{d}_{i-1}} + \frac{\partial E_{\theta,i}}{\partial \mathbf{d}_{i-1}} + \frac{\partial E_{\theta,i}}{\partial \mathbf{d}_i} + \frac{\partial E_{\theta,i+1}}{\partial \mathbf{d}_i}. \quad (\text{B.10})$$

Las derivadas de la energía $E_{\theta,i}$ respecto de los vectores \mathbf{d}_k vienen dadas por

$$\frac{\partial E_{\theta,i}}{\partial \mathbf{d}_k} = \theta_i \frac{\partial \theta_i}{\partial \mathbf{d}_k} \quad (\text{B.11})$$

y éstas a su vez vienen dadas por

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial \mathbf{d}_i} = \frac{\mathbf{d}_i \times (\mathbf{d}_i \times \mathbf{d}_{i-1})}{\mathbf{d}_i^2 |\mathbf{d}_i \times \mathbf{d}_{i-1}|}; \quad \frac{\partial \theta_i}{\partial \mathbf{d}_{i-1}} = \frac{\mathbf{d}_{i-1} \times (\mathbf{d}_{i-1} \times \mathbf{d}_i)}{\mathbf{d}_{i-1}^2 |\mathbf{d}_i \times \mathbf{d}_{i-1}|} \quad (\text{B.12})$$

A partir de estas expresiones para las derivadas de E es posible aplicar el método del descenso por gradiente. Para ello se parte de un iterado inicial \mathbf{r}_1^0 que se tomará, según se ha indicado anteriormente, a partir del último valor calculado para \mathbf{r}'_1 en el anterior paso de integración.

Teniendo en cuenta la mayor de las constantes de rigidez de los diferentes resortes que actúan sobre la partícula y la región de estabilidad del método de Euler Explícito, se obtiene un valor para el paso de iteración H que garantiza la estabilidad. Utilizando este valor se calcula una sucesión de iterados

$$\mathbf{r}_1^{k+1} = \mathbf{r}_1^k + H \mathbf{f}_1 \quad (\text{B.13})$$

hasta que el valor de las fuerzas \mathbf{f}_1 que actúan sobre la partícula sea menor que el umbral elegido.

Durante la primera fase del proceso, cuando el valor de ℓ_0 es pequeño, el valor de H resultante también será pequeño. Esto puede impedir conseguir la convergencia en un número reducido de iteraciones.

El proceso se detendrá cada vez que se supere el número de iteraciones máximo que se desee permitir por paso de integración. A medida que el valor de ℓ_0 aumenta y con él el valor de H , la convergencia se consigue en un número de iteraciones muy reducido. Durante las simulaciones realizadas el número máximo de iteraciones se ha fijado en diez y el proceso ha finalizado con convergencias en cinco o seis iteraciones.

BIBLIOGRAFÍA

- Aamo, O. and Fossen, T. (2000). Finite element modelling of mooring lines. *Mathematics and computers in simulation*, 53:415–422. 2.1.1
- Abdel-Rahman, E. and Nayfeh, A. (2003). Two-dimensional control for ship-mounted cranes: A feasibility study. *Journal of Vibration and Control*, 9(12):1327–1342. 2.1.2
- Abdel-Rahman, E., Nayfeh, A., and Masoud, Z. (2003). Dynamics and control of cranes: A review. *Journal of Vibration and Control*, 9(7):863–908. 2.1.2, 2.3.3
- Al-Sweiti, Y. and SÖffker, D. (2007). Modeling and control of an elastic ship-mounted crane using variable gain model-based controller. *Journal of Vibration and Control*, 13(5):657–685. 2.1.2
- Alli, H. and Singh, T. (1999). Passive control of overhead cranes. *Journal of Vibration and Control*, 5(3):443–459. 2.1.2
- Anitescu, M. and Potra, F. A. (1997). Formulating dynamic multi-rigid-body contact problems with friction as solvable linear complementarity problems. *Nonlinear Dynamics*, 14(3):231–247. 7.3.3
- Anjyo, K.-I., Y.Usami, and Kurihara, T. (1992). A simple method for extracting the natural beauty of hair. In *SIGGRAPH '92: Proceedings*

- of the 19th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 111–120. 2.2.2
- Antman, S. (1980). The equations for large vibrations of strings. *The American Mathematical Monthly*, 87(5):359–370. 6, 6.1, 6.1.1
- Antman, S. (2005). *Nonlinear Problems of Elasticity*, volume 107 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer New York, 2 edition. 1.1, 2.1.1, 2.2.1, 5.1.1
- Armstrong, W. (1979). Recursive solution of the equations of motion of an n-link manipulator. In *Proceedings of the Fifth World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*, volume 2, pages 359–382, Montreal, Canada. 2.2.1
- Arrasate, X., Abete, J., and Kaczmarczyk, S. (2007). Distributed longitudinal vibration model of a lift system including the machine dynamics. In *Proceedings of the 2nd IC-EpsMsO*. 2.1.3, 2.1.4, 2.1.4, 3.2.2
- Aufaure, M. (1993). A finite element of cable passing through a pulley. *Computers & Structures*, 46:807–812. 2.1.4
- Aufaure, M. (2000). A three-node cable element ensuring the continuity of the horizontal tension; a clamp-cable element. *Computers & Structures*, 74:243–251. 2.1.4
- Baicu, C., Rahn, C., and Nibali, B. (1996). Active boundary control of elastic cables: Theory and experiment. *Journal of Sound and Vibration*, 198(1):17–26. 2.1.3
- Baraff, D. and Witkin, A. (1998). Large steps in cloth simulation. In *Proceedings of SIGGRAPH'98*, pages 43–54. 2.2.1, 2.2.1, 2.2.1, 2.2.1, 2.2.2
- Barzel, R. (1997). Faking dynamics of ropes and springs. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 17:31–39. 2.2.3

- Barzel, R., Hughes, J., and Wood, D. (1996). Plausible motion simulation for computer graphics animation. In *Proceedings of the Eurographics Workshop on Computer Animation and Simulation, EG96*, pages 183–197. 2.2.3
- Bergou, M., Wardetzky, M., Robinson, S., Audoly, B., and Grinspun, E. (2008). Discrete elastic rods. In *SIGGRAPH '08: ACM SIGGRAPH 2008 papers*, pages 1–12. 1.1, 2.3.3
- Bertails, F., Audoly, B., Cani, M.-P., Querleux, B., Leroy, F., and Lévêque, J.-L. (2006). Super-helices for predicting the dynamics of natural hair. In *SIGGRAPH '06: ACM SIGGRAPH 2006 Papers*, pages 1180–1187, New York, NY, USA. ACM. 1.1
- Bertails, F., Kim, T.-Y., Cani, M.-P., and Neumann, U. (2003). Adaptive wisp tree: a multiresolution control structure for simulating dynamic clustering in hair motion. In *SCA '03: Proceedings of the 2003 ACM SIGGRAPH/Eurographics symposium on Computer animation*, pages 207–213. 2.2.3
- Booch, G., Rumbaugh, J., and Jacobson, I. (1999). *El Lenguaje Unificado de Modelado*. Addison Wesley Iberoamericana. 3.1
- Breen, D., House, D., and Getto, P. (1992). A physically-based particle model of woven cloth. *The Visual Computer*, 8(5):264–277. 2.2.1
- Breen, D., House, D., and Wozny, M. (1994). Predicting the drape of woven cloth using interacting particles. In *SIGGRAPH '94: Proceedings of the 21st annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 365–372. 2.2.1
- Buckham, B. and Nahon, M. (1999). Dynamics simulation of low tension tethers. In *Proceedings of Oceans '99 MTS/IEEE*, volume 2, pages 757–766. 2.1.1

- Burgess, J. (1993). Bending stiffness in a simulation of undersea cable deployment. *International Journal of Offshore and Polar Engineering*, 3(3):197–204. 2.1.1
- Buzdugan, L. I., Balling, O., Lee, P.-T., Balling, C., Freeman, J., and Huck, F. (1999). Multirate integration for real-time simulation of wheel loader hydraulics. In *Proceedings of DETC'99*, pages 291–302. 3.3
- Calero Pérez, R. and Carta González, J. (1999). *Fundamentos de mecanismos y máquinas para ingenieros*. McGraw-Hill Interamericana. 2.1.4
- Canbolat, H., Dawson, D., Rahn, C., and Nagarkatti, S. (1997). Boundary control of a flexible cable with actuator dynamics. In *Proceedings of the 1997 American Control Conference, 1997*, volume 6, pages 3547–3551 vol.6. 2.1.2, 6.1.3
- Carlson, D. A. and Hodgins, J. K. (1997). Simulation levels of detail for real-time animation. In *Proceedings Of Graphics Interface '97*, pages 1–8. 6.3.1
- Cepon, G. and Boltezar, M. (2007). Computing the dynamic response of an axially moving continuum. *Journal of Sound and Vibration*, 300(1-2):316–329. 2.1.1, 2.1.3
- Chadwick, J., Haumann, D., and Parent, R. (1989). Layered construction for deformable animated characters. In *Proceedings of SIGGRAPH'89*, pages 243–252. 2.2.1, 2.2.3
- Chang, Jian, Shepherd, Daniel, X., Zhang, and Jian, J. (2007). Cosserat-beam-based dynamic response modelling. *Computer Animation and Virtual Worlds*, 18(4-5):429–436. 1.1
- Chen, L.-Q. (2006). The energetics and the stability of axially moving strings undergoing planar motion. *International Journal of Engineering Science*, 44(18-19):1346–1352. 2.1.3

- Chen, L.-Q., Zhang, W., and Zu, J. (2008). Nonlinear dynamics for transverse motion of axially moving strings. *Chaos, Solitons & Fractals*, In Press, Corrected Proof. 2.1.1, 2.1.3
- Chen, L.-Q., Zhao, W.-J., and Zu, J. (2005). Simulations of transverse vibrations of an axially moving string: a modified difference approach. *Applied Mathematics and Computation*, 166(3):596–607. 2.1.1
- Chin, C., Nayfeh, A., and Mook, D. (1998). Dynamics and control of ship mounted cranes. In *Proceedings of the 39th Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*. 2.1.2
- Choe, B., Choi, M., and Ko, H.-S. (2005). Simulating complex hair with robust collision handling. In *SCA '05: Proceedings of the 2005 ACM SIGGRAPH/Eurographics symposium on Computer animation*, pages 153–160, New York, NY, USA. ACM. 2.2.1
- Daldegan, A., Magnenat-Thalmann, N., Kurihara, T., and Thalmann, D. (1993). An integrated system for modeling, animating and rendering hair. *Computer Graphics Forum*, 12(3):211–221. 2.2.2
- D’Andrea-Novel, B. and Boustany, F. (1991). Adaptive control of a class of mechanical systems using linearization and lyapunov methods: a comparative study on the overhead crane example. In *Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control, 1991*, pages 120–125 vol.1. 2.1.2, 6.1.3
- Desbrun, M., Schröder, P., and Barr, A. (1999). Interactive animation of structured deformable objects. In *Proceedings of the 1999 conference on Graphics interface '99*, pages 1–8. 2.2.1
- Dreyer, T. P. and van Vuuren, J. (1999). A comparison between continuous and discrete modelling of cables with bending stiffness. *Applied Mathematical Modelling*, 23:527–541. 2.1.1
- Eberly, D. (2004). *Game Physics*. Elsevier. 2.2

- Ericson, C. (2005). *Real-Time Collision Detection*. Morgan Kaufmann. 8.1, 8.1.1
- Erleben, K., Sporring, J., Henriksen, K., and Dohlmann, H. (2005). *Physics-Based Animation*. Charles River Media, Inc. 2.2, 8.1.2
- Featherstone, R. (1983). The calculation of robotic dynamics using articulated body inertias. *International Journal of Robotics Research*, 2(1):13–30. 2.2.1
- Filonenko-Borodich, M. (1968). *Theory of Elasticity*. Mir Publishers. 5.1.1
- Folland, G. (1992). *Fourier Analysis and its Applications*. Brooks/Cole, Pacific Grove, California. 6.2.3
- French, A. (1974). *Curso de física del MIT*. Reverté. 2.1.4
- Fung, R. F., Lin, J. H., and Yao, C. M. (1997). Vibration analysis and suppression control of an elevator string actuated by a pm synchronous servo motor. *Journal of Sound and Vibration*, 206(3):399–423. 2.1.3
- García de Jalón, J. and Bayo, E. (1994). *Kinematic and dynamic simulation of multibody systems*. Springer-Verlag, New York. 2.2.1, 4.2
- García-Fernández, I., Pla-Castells, M., and Martínez-Durá, R. (2007a). Analysis of a cable model, considering mass and wave oscillations. In *Proceedings of the IeCCS'07*. 9.2.2
- García-Fernández, I., Pla-Castells, M., and Martínez-Durá, R. (2007b). A mixed model for real-time, interactive simulation of a cable passing through several pulleys. In *Proceedings of the International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics*, pages 212–215. 9.2.2
- García-Fernández, I., Pla-Castells, M., and Martínez-Durá, R. (2008). Elevation cable modeling for interactive simulation of cranes. In *SCA '08: Proceedings of the 2008 ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation*, pages 173–181. 9.2.1, 9.2.2

- Gattulli, V., Martinelli, L., Perotti, F., and Vestroni, F. (2004). Nonlinear oscillations of cables under harmonic loading using analytical and finite element models. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(1-2):69–85. 2.1.1
- González Rey, A., García Toll, A., and Ortiz Cardona, T. (2001). Elementos de máquinas. Lecture notes, Instituto Superior Politécnico José A. Echeverría. 2.1.4
- Gregoire, M. and Schömer, E. (2007). Interactive simulation of one-dimensional flexible parts. *Computer-Aided Design*, 39(8):694–707. 2.1.1, 2.2.2, 2.2.2, 2.2.2, 2.3.3, B
- Guo, B.-Z. (2000). Asymptotic behavior of the energy of vibration of a moving string with varying lengths. *Journal of Vibration and Control*, 6(4):491–507. 2.1.1, 2.1.3
- Guo, B.-Z. and Wang, J. (2000). The unbounded energy solution for free vibration of an axially moving string. *Journal of Vibration and Control*, 6(5):651–665. 2.1.3
- Hadap, S. (2006). Oriented strands: dynamics of stiff multi-body system. In *SCA '06: Proceedings of the 2006 ACM SIGGRAPH/Eurographics symposium on Computer animation*, pages 91–100. 1.1, 2.2.1
- Hadap, S., Cani, M.-P., Lin, M., Kim, T.-Y., Bertails, F., Marschner, S., Ward, K., and Kačić-Alesić, Z. (2007). Strands and hair: modeling, animation, and rendering. In *SIGGRAPH '07: ACM SIGGRAPH 2007 courses*, pages 1–150. 1.1
- Hadap, S. and Magnenat-Thalmann, N. (2001). Modeling dynamic hair as a continuum. *Computer Graphics Forum*, 20(3):329–338. 2.2.1
- Haumann, D. (1987). Modeling the physical behavior of flexible objects. In *SIGGRAPH'87 course notes*. 2.2.1

- Heckbert, P. and Garland, M. (1994). Multiresolution modeling for fast rendering. In *Proc. Graphics Interface '94*, pages 43–50, Banff, Canada. Canadian Inf. Proc. Soc. 6.3.1
- Hergenröther, E. and Dähne, P. (2000). Real-time virtual cables based on kinematic simulation. In *Proceedings of WSCG '2000*, pages 402–409. 2.2.1
- Hergenröther, E. and Müller, S. (2001). Integration of cables in the virtual product development process. In *Proceedings of the IFIP TC5 / WG5.2 & WG5.3 Eleventh International PROLAMAT Conference on Digital Enterprise - New Challenges*, pages 84–94. 2.2.1
- Hulbert, G. M., Michelena, N., Ma, Z.-D., Tseng, F.-C., Fellini, R., Scheffer, C., Choi, K. K., Tang, J., Ogarevic, V., and Hardee, E. (1999). A case study for network-distributed collaborative design and simulation: Extended life optimization for m1 abrams tank road arm. *Mechanics of Structures and Machines*, 27:423–451. No lo tengo. 3.3
- Irvine, H. (1981). *Cable Structures*. The MIT Press. 1.1
- Joshi, S. and Rahn, C. (1995). Position control of a flexible cable gantry crane: theory and experiment. In *Proceedings of the American Control Conference, 1995*, volume 4, pages 2820–2824 vol.4. 2.1.2, 6.1.3
- Joyanes Aguilar, L. (1999). *Programacion orientada a objetos*. McGraw-Hill Interamericana. 3.1, 3.1.1
- Ju, F., Choo, Y., and Cui, F. (2006). Dynamics response of tower crane induced by the motion of the payload. *International Journal of Solids and Structures*, 43:376 – 389. 2.1.2
- Ju, F. and Choo, Y. S. (2005). Super element approach to cable passing through multiple pulleys. *International Journal of Solids and Structures*, 42:3533–3547. 2.1.4

- Kaczmarczyk, S. and Ostachowicz, W. (2003). Transient vibration phenomena in deep mine hoisting cables. part 1: Mathematical model. *Journal of Sound and Vibration*, 262(2):219–244. 2.1.3, 2.1.4
- Kamman, J. and Huston, R. (1999). Modeling of variable length towed and tethered cable systems. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 22(4):602–622. 2.1.3, 2.2.1
- Kamman, J. and Huston, R. (2001). Multybody dynamics modelling of variable length cable systems. *Multibody System Dynamics*, 5:211–221. 2.1.1, 2.1.3, 2.2.1, 5.2.1
- Kim, T.-Y. and Neumann, U. (2000). A thin shell volume for modeling human hair. In *Proceedings of Computer Animation 2000*, pages 104–111. 2.2.3
- Kurihara, T., ichi Anjyo, K., and Thalmann, D. (1993). Hair animation with collision detection. In *In Models and Techniques in Computer Animation*, pages 128–138. Springer-Verlag. 2.2.2
- Kübler, R. and Schiehlen, W. (2000). Modular simulation in multibody system dynamics. *Multibody Systems Dynamics*, 4:107–127. 3.3
- Lasseter, J. (1987). Principles of traditional animation applied to 3d computer animation. In *SIGGRAPH '87: Proceedings of the 14th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 35–44. 2.2.3
- Lee, K. H., Choo, Y. S., and Ju, F. (2003). Finite element modelling of frictional slip in heavy lift sling systems. *Computers & Structures*, 81(30-31):2673–2690. 2.1.4
- Lee, S.-Y. and Mote Jr., C. D. (1999). Wave characteristics and vibration control of translating beams by optimal boundary damping. *Journal of Vibration and Acoustics*, 121(1):18–25. 2.1.3

- Lenoir, J., Meseure, P., Grisoni, L., and Chaillou, C. (2002). Surgical thread simulation. In *Proceedings of ESAIM'02*, volume 12, pages 102–107. 2.2.2
- Lenoir, J., Meseure, P., Grisoni, L., and Chaillou, C. (2004). A suture model for surgical simulation. In et D. Metaxas, S. C., editor, *2nd Int. Symp. on Medical Simulation (ISMS)*, volume 3078 of *LNCS*, pages 105–113, Cambridge M.A. Springer Verlag. 2.2.2
- Li, Y., Aron, D., and Rahn, C. (1999). Vibration isolation control for axially moving strings. In *Proceedings of the American Control Conference, 1999.*, volume 4, pages 2708–2712. 2.1.3
- Loock, A. and Schömer, E. (2001). A virtual environment for interactive assembly simulation: From rigid bodies to deformable cables. In *Proceedings of the 5th world multiconference on systemics, cybernetics and informatics*, volume 3, pages 325–332. 2.2.1
- López Díaz-Delgado, E. and Martínez Vicente, S. (2000). *Iniciación a la Simulación Dinámica: Aplicaciones a sistemas económicos y empresariales*. Ed. Ariel. 3.1
- Mahalingam, S. (1957). Transverse vibrations of power transmission chains. *British Journal of Applied Physics*, 8(4):145–148. 2.1.3
- Martindale, S., Dawson, D., Zhu, J., and Rahn, C. (1995). Approximate nonlinear control for a two degree of freedom overhead crane: theory and experimentation. In *Proceedings of the American Control Conference, 1995*, volume 1, pages 301–305 vol.1. 2.1.2, 6.1.3
- Masoud, Z., Daqaq, M., and Nayfeh, N. (2004). Pendulation reduction on small ship-mounted telescopic cranes. *Journal of Vibration and Control*, 10(8):1167–1179. 2.1.2
- Miranker, W. (1960). The wave equation in a medium in motion. *IBM Journal of Research and Development*, 4(1):36–42. 2.1.3

- Mitchell, A. and Griffiths, D. (1980). *The Finite Difference Method in Partial Differential Equations*. Wiley. 6.2.4
- Moustafa, K., Gad, E., El-Moneer, A., and Ismail, M. (2005). Modelling and control of overhead cranes with flexible variable-length cable by finite element method. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 27(1):1–20. 2.1.3
- Navarro, F., editor (2003). *La enciclopedia*. Salvat Editores. 2.1
- Oshita, M. (2007). Real-time hair simulation on gpu with a dynamic wisp model. *Computer Animation and Virtual Worlds*, 18(4-5):583–593. 9.3.1
- Pai, D. (2002). Strands: Interactive simulation of thin solids using cosserat models. In *Proceedings of Eurographics '02*, volume 21. 2.2.2, 2.2.2, 2.2.2, 2.3.3
- Pakdemirli, M., Ulsoy, A. G., and Ceranoglu, A. (1994). Transverse vibration of an axially accelerating string. *Journal of Sound and Vibration*, 169(2):179–196. 2.1.3
- Pentland, A. and Williams, J. (1989). Good vibrations: Modal dynamics for graphics and animation. In *Proceedings of SIGGRAPH'89*, pages 215–222. 2.2.3
- Perkins, N. and Mote Jr., C. (1987). Three-dimensional vibration of travelling elastic cables. *Journal of Sound and Vibration*, 114(2):325–340. 2.1.3
- Plante, E., Cani, M.-P., and Poulin, P. (2001). A layered wisp model for simulating interactions inside long hair. In *Proceedings of the Eurographic workshop on Computer animation and simulation*, pages 139–148, New York, NY, USA. Springer-Verlag New York, Inc. 2.2.1
- Plante, E., Cani, M.-P., and Poulin, P. (2002). Capturing the complexity of hair motion. *Graphical Models*, 64(1):40–58. 2.2.1

- Prabhakar, S. and Buckham, B. (2005). Dynamics modeling and control of a variable length remotely operated vehicle tether. In *Proceedings of MTS/IEEE OCEANS, 2005*, volume 2, pages 1255–1262. 2.1.3
- Provot, X. (1995). Deformation constraints in a mass-spring model to describe rigid cloth behavior. In *Proceedings of Graphics Interface 1995*, pages 147–154. (document), 2.2.1, 2.6, 2.2.1
- Ravikumar, M. (1995). Studies on conveyor pulley design using finite element method. Master's thesis, IIT Madras, India. 2.1.4
- Ravikumar, M. and Chattopadhyay, A. (1999). Integral analysis of conveyor pulley using finite element method. *Computers & Structures*, 71(3):303–332. 2.1.4
- Redon, S., Galoppo, N., and Lin, M. (2005). Adaptive dynamics of articulated bodies. In *Proceedings of SIGGRAPH'05*, pages 936–945, New York, NY, USA. ACM. 6.3.1
- Rey Pastor, J. and Babini, J. (1997a). *Historia de la Matemática*, volume 1. Gedisa Editorial, 1 edition. 2.1.1
- Rey Pastor, J. and Babini, J. (1997b). *Historia de la Matemática*, volume 2. Gedisa Editorial, 1 edition. 2.1.1
- Ribnikov, K. (1987). *Historia de las matemáticas*. Ediorial Mir Moscú. 2, 2.1.1
- Rienstra, S. (2005). Nonlinear free vibrations of coupled spans of overhead transmission lines. *Journal of Engineering Mathematics*, 53(3-4):337–348. 2.1.3
- Roberts, R. (1998). Control of high-rise/high-speed elevators. In *Proceedings of the 1998 American Control Conference, 1998*, volume 6, pages 3440–3444. 2.1.4

- Rosenblum, R. E., Carlson, W. E., and Tripp, E. (1991). Simulating the structure and dynamics of human hair: Modelling, rendering and animation. *The Journal of Visualization and Computer Animation*, 2(4):141–148. (document), 2.2.1, 2.4
- Rubin, M. (2000). *Cosserat Theories: Shells, Rods and Points*. Springer. 2.1.1
- Rumbaugh, J., Blaha, M., Premerlani, W., Eddy, F., and Lorensen, W. (1996). *Modelado y diseño orientado a objetos*. Prentice-Hall. 3.1
- Sack, R. A. (1954). Transverse oscillations in travelling strings. *British Journal of Applied Physics*, 5(6):224–226. 2.1.3
- Selle, A., Lentine, M., and Fedkiw, R. (2008). A mass spring model for hair simulation. In *SIGGRAPH '08: ACM SIGGRAPH 2008 papers*, pages 1–11. 2.2.1
- Servin, M. and Lacoursière, C. (2007). Massless cable for real-time simulation. *Computer Graphics Forum*, 26:172–184. 1.1, 2.1.4, 2.1.4, 2.3.3, 5.1, 5.1.3, 7.3
- Servin, M. and Lacoursière, C. (2008). Rigid body cable for virtual environments. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 14(4):783–796. 1.1, 2.1.1, 2.1.2, 2.2.1, 2.2.1, 2.2.1, 7.3.3, 7.3.3
- Shabana, A. A. (1998). *Dynamics of Multibody Systems*. Cambridge University Press, 2 edition. 2.2.1, 5.1.3
- Shabana, A. A. (2001). *Computational Dynamics*. John Wiley & Sons, 2 edition. 4.2
- Shapiro, H., Shapiro, J., and Shapiro, L. (1999). *Cranes and Derricks*. McGraw-Hill, 3 edition. 1.1, 2.1.4, 5.1.3
- Shingley, J. and Mitchell, L. (1983). *Diseño en ingeniería mecánica*. McGraw-Hill Mexico. 2.1.4

- Smith, R. (2004). *Game Programming Gems IV*, chapter Constraints in Rigid Body Dynamics, pages 241–251. Charles River Media. 7.3.3
- Smith, R. (2006). *Open Dynamics Engine v0.5 User Guide*. 7.3.3
- Spillmann, J. (2008). *CoRDE: Cosserat Rod Elements for the Animation of Interacting Elastic Rods*. PhD thesis, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg im Breisgau. 2.2.2
- Spillmann, J. and Teschner, M. (2007). CoRDE: Cosserat rod elements for the dynamic simulation of one-dimensional elastic objects. In *SCA '07: Proceedings of the 2007 ACM SIGGRAPH/Eurographics symposium on Computer animation*, pages 63–72. 1.1, 2.1.1, 2.2.1, 2.2.2, 2.2.2, 2.2.2, 2.2.2, 2.3.3
- Spillmann, J. and Teschner, M. (2008). An adaptive contact model for the robust simulation of knots. *Computer Graphics Forum*, 27(2):497–506. (document), 1.1, 5.2.3, 5.8, B
- Srinil, N., Rega, G., and Chucheepsakul, S. (2003). Large amplitude three-dimensional free vibrations of inclined sagged elastic cables. *Nonlinear Dynamics*, 33(2):129–154. 2.1.1
- Srinil, N., Rega, G., and Chucheepsakul, S. (2004). Three-dimensional nonlinear coupling and dynamic tension in the large-amplitude free vibrations of arbitrarily sagged cables. *Journal of Sound and Vibration*, 269(3-5):823–852. 2.1.1
- Strikwerda, J. (2004). *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*. SIAM: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2 edition. 6.2.4, 6.2.4
- Terumichi, Y., Ohtsuka, M., Yoshizawa, M., Fukawa, Y., and Tsujioka, Y. (1997). Nonstationary vibrations of a string with time-varying length and a mass-spring attached at the lower end. *Nonlinear Dynamics*, 12(1):39–55. 2.1.3

- Timoshenko, S. and Goodier, J. (1975). *Teoría de la elasticidad*. Ediciones Urmo, 2 edition. 5.1.1
- van Horssen, W. (2003). On the influence of lateral vibrations of supports for an axially moving string. *Journal of Sound and Vibration*, 268(2):323–330. 2.1.3
- Volino, P., Courchesne, M., and Magnenat-Thalmann, N. (1995). Versatile and efficient techniques for simulating cloth and other deformable objects. In *SIGGRAPH '95: Proceedings of the 22nd annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 137–144. 2.2.1, 2.2.1
- Volino, P. and Magnenat-Thalmann, N. (2000). Implementing fast cloth simulation with collision response. In *Computer Graphics International*, pages 257–266. 2.2.1
- Wang, J. and Li, Q. (2004). Active Vibration Control Methods of Axially Moving Materials - A Review. *Journal of Vibration and Control*, 10(4):475–491. 2.1.3
- Watanabe, Y. and Suenaga, Y. (1992). A trigonal prism-based method for hair image generation. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 12(1):47–53. 2.2.3
- Wei, P., Bingnan, S., and Jinchun, T. (1999). A catenary element for the analysis of cable structures. *Applied Mathematics and Mechanics*, 20(5):532–534. 2.1.1
- Wickert, J. and Mote Jr., C. (1989). On the energetics of axially moving continua. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 85(3):1365–1368. 2.1.3, 6.2.2
- Zhang, Y. and Agrawal, S. (2006). Lyapunov controller design for transverse vibration of a cable-linked transporter system. *Multibody System Dynamics*, 15:287–304. 2.1.4

Zhang, Y., Agrawal, S. K., and Hagedorn, P. (2005). Longitudinal vibration modeling and control of a flexible transporter system with arbitrarily varying cable lengths. *Journal of Vibration and Control*, 11(3):431–456.

2.1.3

Zhou, B., Accorsi, M., and Leonard, J. (2004). Finite element formulation for modeling sliding cable elements. *Computers & Structures*, 82:271–280.

2.1.4

Zhu, W. D. and Xu, G. Y. (2003). Vibration of elevator cables with small bending stiffness. *Journal of Sound and Vibration*, 263(3):679–699.

2.1.3