

DEPARTAMENT DE MATEMÀTICA APLICADA

MODELOS DE DECONVOLUCIÓN FRACCIONARIA.
APLICACIONES A LA RESTAURACIÓN DIGITAL DE
OBRAS PICTÓRICAS

PANTALEÓN DAVID ROMERO SÁNCHEZ

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA
Servei de Publicacions
2009

Aquesta Tesi Doctoral va ser presentada a València el dia 30 de març de 2009 davant un tribunal format per:

- Dr. Antonio Marquina Vila
- Dr. Bertomeu Coll Vicens
- Dr. Miguel Ángel Moscoso Castro
- Dr. Antonio Falcó Montesinos
- Dr. Vicente Martínez García

Va ser dirigida per:

Dr. Vicente Candela Pomares

©Copyright: Servei de Publicacions
Pantaleón David Romero Sánchez

Dipòsit legal: V-1037-2010

I.S.B.N.: 978-84-370-7562-4

Edita: Universitat de València

Servei de Publicacions

C/ Arts Gràfiques, 13 baix

46010 València

Spain

Telèfon:(0034)963864115

Modelos de Deconvolución Fraccionaria. Aplicaciones a la Restauración Digital de Obras Pictóricas



Pantaleón David Romero Sánchez †

† *Departamento de Matemática Aplicada*

Área de Análisis Numérico

e-mail: pantaleon.romero@uv.es

Dedicado con todo mi amor y corazón a mis Padres, a mi hermano, mi tía Mari Fé y mi abuelo, Juan Francisco. En especial a Catarina Mendes.

También lo dedico a aquellos de la familia que no están con nosotros, en particular, a mi abuela Salud, que seguramente hubiera disfrutado de este momento.

A José Vicente Arnau Córdoba, por enseñarme la forma de ver las cosas de diversos ángulos, que no hay nada pequeño por descubrir y por ser una voz crítica de éste trabajo y sobre todo por ser un gran profesor y amigo.

A Vicente Candela por su apoyo, empeño, crítica e ilusión y ayuda en los trabajos que hemos realizado conjuntamente; y también por su amistad.

Vox Veritatis non Tacet.

San Agustín de Hipona

*La medida del amor
es amar sin medida.*

Agustín de Hipona

*«... buscad y encontraréis; llamad y se os
abrirá ... Porque el que busca encuentra,
y al que llama se le abre ...»*

Lc 11,9-13

**Dedicado de corazón a Bienservida
y a todos los bienservideños.**

Agradecimientos

Agradezco, la colaboración de *Juan Ángel Navarro* párroco de la Iglesia San Bartolomé Apóstol, por su ayuda a la hora de realizar el trabajo, permitir el acceso a la documentación de la Iglesia de la Diócesis y permitir la toma de fotografías del retablo, así como su disposición en aspectos logísticos y de divulgación del trabajo.

A los miembros del *Grupo Ábside Restauración*, equipo de restauración que realizó los trabajos de conservación del retablo, en particular a Guadalupe. Gracias a sus explicaciones y críticas constructivas, he podido mejorar los resultados del trabajo de investigación que presenté en 2004, y aumentar conocimientos y técnicas que han sido consideradas en esta tesis.

Gracias a los *miembros del Departamento de Matemática Aplicada (PAS y PDI)*, por su ayuda y confianza.

También agradecer al *Departamento de Ciencias Físicas, Matemáticas y de la Computación de la Universidad CEU- Cardinal Herrera*, la ayuda en todos los ámbitos, personal y laboral para realizar y presentar la tesis.

¡¡ GRACIAS A TODOS !!

Prefacio

Esta tesis tiene su origen en los cursos de doctorado de matemática aplicada en la Universidad de Valencia, en el año 2003. De la amplia variedad de los cursos, encontré uno que me llamó poderosamente la atención: restauración numérica de imágenes, que impartió el profesor Pep Mulet. Este curso supuso un particular acercamiento al mundo del tratamiento de imágenes por el cual siempre tuve mucha curiosidad. Durante esta época José Vicente Arnau Córdoba, profesor de numérico de Valencia, me enseñó un trabajo que trataba de deconvolución y eliminación de ruido de un mosaico medieval de la Catedral de Praga, ([BJF02]), usando imágenes que fueron tomadas cien años atrás. El curso de doctorado y este artículo fueron los precursores de la restauración digital que ahora presento en esta tesis.

Durante muchos años contemplé el retablo de la Iglesia San Bartolomé de Bienservida. Un retablo que tenía muchas particularidades: la primera, que no podía distinguir los elementos que figuraban (tablas y tallas), en el que había información, pero, ¿era posible extraerla?. Entonces, asocié los cursos de doctorado y el trabajo mencionado anteriormente para iniciar el proyecto de restauración digital del retablo. Este fue el proyecto que propuse a mi director de tesis, Vicente Candela. Tras presentar el ambicioso trabajo que consistía en la restauración digital del retablo, Vicente dio luz verde al trabajo, pese a las dificultades que planteaba, carecíamos de conocimientos de técnicas de restauración, y de colorimetría, que no estaba muy desarrollada en aquella época.

Así, durante el mes de agosto de 2003, tras pedir permiso al párroco de la iglesia (por aquella época era Manolo Valenzuela) estuve tomando fotografías

de todo el retablo, con diferentes condiciones de luz y exposición. Realicé del orden de mil tomas fotográficas, eliminé aquellas que no ofrecían información (muy oscuras o con excesiva luz) de manera que pudiesen ser lo más representativas de todos los elementos originales.

Después de la sesión fotográfica y el proceso de selección, Vicente y yo, empezamos a diseñar las líneas maestras del trabajo de investigación, que posteriormente presenté en 2004. En primer lugar, deconvolver las imágenes y, posteriormente, rellenar los agujeros.

La deconvolución era el paso previo. Pero planteaba dos problemas. El primero, cómo deconvolver una imagen en color y el segundo, qué tipo de deconvolución elegir, puesto que en este caso desconocíamos el núcleo.

Estudiamos la literatura y nos encontramos con un artículo que hacía referencia a la deconvolución ciega y nos daba un procedimiento para determinar el núcleo ([Car01]), pero para matrices cuadradas; e imágenes en escalas de grises. La tarea fundamental era adaptar la deconvolución en escala de grises al color. El procedimiento habitual, es descomponer la imagen original en tres imágenes que representan las frecuencias más importantes, verde, rojo y azul. De hecho cada uno de los canales se comporta como una imagen en escala de grises donde podía aplicar el proceso.

Implementé el método APEX descrito en [Car01], para la obtención de los parámetros del núcleo Lévy, usando el método de la secante ([ADA⁺02]) y no Newton como sugería el autor. Esta novedad la introduje porque la función a ajustar no era diferenciable en el origen y por tanto no era adecuado en este caso.

Posteriormente estudié el método de deconvolución [CMS03], basado en la forma integral de Tikhonov. Este método directo, junto con el método APEX para determinar los parámetros es un método de deconvolución ciega, pero tenía un problema: el laplaciano aproxima las discontinuidades de la segunda derivada por funciones suaves. La consecuencia es, que deconvuelve la imagen pero no elimina completamente el suavizado; conservando el contraste de la imagen restaurada. Por otro lado está el método *SECB* basado en resolver la ecuación generalizada del calor. La ventaja del método es que permite realzar los perfiles pero, a cambio, se pierde contraste.

Basándome en las ventajas y minimizando los inconvenientes, pensé en un método que permitiese alcanzar un equilibrio entre ambos. Así nació el *método híbrido*, que es una de las aportaciones de la tesis, publicado en [RC06]. Está basado en un método predictor-corrector: la forma integral de Tikhonov mejora los perfiles y el contraste, pero no elimina el suavizado (predicción). En el siguiente paso se renormaliza el núcleo y eliminamos el suavizado del paso anterior con el método SECB (corrección).

Posteriormente (como deconvolución permite realzar los detalles, en especial las lagunas de las pinturas) procedí a la reintegración de las tablas (inpainting) y no de las tallas (necesitan un tratamiento diferente basado en texturas). Este método está basado en difundir información, suavemente, desde la zona donde la tenemos hasta la que carece de ella.

Con estos dos métodos (deconvolución e inpainting) conseguí leer mi trabajo de investigación el 17 de septiembre de 2004.

Meses después de la lectura del DEA comenzaron los trabajos de restauración del retablo mayor. Los restauradores, a petición del párroco, que en esta ocasión era y es Juan Ángel Navarro, se pusieron en contacto conmigo para explicar detalladamente el trabajo que había desarrollado. El interés estaba en que el trabajo podía dar una forma de intervención inocua sobre tablas que carecían de un porcentaje muy alto de información.

Presenté el trabajo ante el grupo Ábside Restauración, que asesoró y propuso muchas mejoras. El tipo de imágenes con las que estaba trabajando, no estaban limpias y por tanto era necesario para obtener mejores resultados digitalmente, obtener mejores imágenes. De esta manera, empezó la colaboración entre el equipo de restauración y nosotros en el que tuvimos que adaptar nuestros lenguajes para llegar a un lenguaje intermedio que nos permitiese entendernos, para mejorar el trabajo.

El inicio de la colaboración fue la crítica constructiva del trabajo. La deconvolución que al realizarla sobre cada uno de los canales, introducía colores que no eran los reales (falseado de color), lo cual implicaba un cambio de modelo. Propusieron usar un modelo en el que se podía separar la luminancia y la cromaticidad. El objetivo de esta observación era preservar el contraste de la imagen original, cuando se realizaba la deconvolución.

Respecto al inpainting (reintegración), pidieron la presencia en el algoritmo de datos históricos referentes al retablo y la época, que suministraron posteriormente, así como la regeneración de las texturas. La excesiva difusión producida por el método era un gran inconveniente, pues impedía la correcta visualización de los resultados. Para corregir esta última parte, realicé una estancia en Bienservida de unos días para ver cómo reintegraban los elementos y estudiar todo el procedimiento, para orientarme en el trabajo futuro. Todas las correcciones y sugerencias que el equipo de restauración contribuyeron de manera decisiva en la tesis.

La primera fase fue estudiar modelos colorimétricos; para ello necesité un tiempo de retiro para estudiar dichos modelos que he recogido en el capítulo 2. De todos los modelos de color el que mejor permitía separar los perfiles y cromatismo era el modelo LUV.

Pero también el modelo de deconvolución era decisivo, en el sentido que los resultados de este último se usarían para el inpainting. Para ello desarrollé una estrategia para determinar los parámetros del modelo híbrido, que conjuntamente con el uso del modelo LUV, dio lugar a la publicación [RC06].

Posteriormente a la publicación del modelo anteriormente descrito, comencé a estudiar un modelo que permitiese aumentar la resolución y mejorar los resultados del modelo híbrido. El modelo híbrido es un modelo fraccional, pero tiene algunos inconvenientes, respecto a la elección de parámetros que intervienen. Lo que implicó un cambio en la estrategia de la elección de los parámetros del núcleo y la regularización basada en potencias del operador laplaciano ([RC08]). Este método nuevo, es un método adaptativo recursivo, puesto que, para determinar el núcleo, usa como información las deconvoluciones previas. A nivel del color, no perdemos contraste porque realiza pequeños pasos que permiten preservar la luminancia de la imagen original, minimizando la diferencia entre el gradiente de la luminancia obtenida en cada paso y la original.

El inpainting también tuvo avances. La deconvolución fraccionaria permite definir unas condiciones específicas para la reintegración. Para evitar la excesiva difusión que provocaba el método original, introduje un nuevo parámetro adicional relacionado con la curvatura, puesto que en el estilo que

trabajamos hay mucha presencia de perfiles y en este caso no podemos usar directamente el operador laplaciano, sino que usamos la curvatura media, como una forma de continuar los perfiles de una forma anisotrópica, usando el laplaciano únicamente para aquellas regiones que carecen de perfiles. También, la regeneración de las texturas por convolución es un reto que tuve que afrontar.

Introducción

Digitalizar obras de arte es una tarea que se realiza habitualmente, en procesos de patrimonio, para tener constancia de la intervención y también como ayuda a la hora de la restauración manual en los talleres. Esto nos permite establecer el nexo entre Restauración y Matemática: la digitalización es una representación de la obra a tratar (fotografía) y es un puente de unión con la matemática, a través de la modelización (abstracción).

La restauración de imágenes es una de las partes más conocidas en el tratamiento de imágenes. Consiste en recuperar algunas características deterioradas de la imagen, y a nivel artístico significa limpiar y modificar un trabajo deteriorado de modo que se parezca al original.

Los profesionales de la restauración artística tienen una formación multidisciplinar en arte y ciencia. Actualmente el uso de ordenadores y, en particular, de paquetes informáticos, permite ayudar en algunas de las tareas que realizan. Claramente, el ordenador no puede sustituir el factor humano, pero puede ser de gran ayuda a la hora de recuperar algunos elementos, realce de detalles que pueden ser importantes en el proceso de restauración.

Desde el punto de vista matemático, las obras pictóricas pueden considerarse como un tipo de imágenes muy particulares, pues cada período y cada artista tiene sus propias características, que las diferencian de otro tipo de imágenes, como las médicas o las astronómicas.

En la restauración artística se consideran dos tareas que son muy importantes: *reintegración o inpainting* (rellenar regiones perdidas de la pintura) y la *limpieza*. La limpieza consiste en eliminar aquellos detalles espurios que impiden la visualización de la obra (partículas de grasa, suciedad, etc). En

matemáticas, se corresponde con la *deconvolución* cuyo objetivo es realzar los detalles que impiden ver partes de la obra con claridad.

Las piezas que tratamos pertenecen al Renacimiento y Barroco Español. Sin introducirnos en un análisis artístico exhaustivo, podemos deducir algunas consecuencias matemáticas, que son de ayuda a la hora de realizar este proceso:

1. *En el estilo artístico, los perfiles de la obra original no están perfectamente definidos, esto es, se introdujo un «blur» (difuminado) cuando la obra fue pintada.*
2. *Factores climatológicos (humedad, luz, temperaturas extremas ...) y el paso del tiempo degradaron las obras de una manera determinista e isotrópica. No hay prácticamente presencia estocástica del ruido (despreciable), porque la suciedad, grasa y otros tipos de partículas crearon una capa uniforme; **ningún algoritmo que se precie introduce ruido**. Prácticamente es el caso de la deconvolución pura, sin ruido. Los desperfectos se extienden a grandes zonas de la pintura, por lo que podemos considerar modelos globales. Sí nos hace pensar en un tipo de blur o emborronamiento: la aparición de factores de tipo uniforme nos permite suponer que este blur, está producido por la convolución de un kernel de tipo *quasi-gaussiano*.*

El primer punto permite dar una aproximación al realce de la imagen, en el sentido de que estamos mas preocupados por la localización que por el realce de perfiles para obtener calidad artística. Usaremos la transformada de Fourier, pues el fenómeno de Gibbs está controlado, como veremos.

El segundo, nos permite considerar un tipo computacional de *blur*. Matemáticamente, tenemos que tener cuidado con el ruido introducido por nuestro algoritmo y no por el de la imagen.

Nótese que durante el proceso no está permitido el llamado *falseado histórico*, es decir, añadir información adicional, pues alteraría el original y restaría protagonismo a los elementos originales, al contrario de lo que hacen los restauradores artísticos, que utilizan información adicional como parte

del proceso. Es artísticamente permisible, pero no científicamente (matemáticamente) admisible.

Otras dificultades, a nivel matemático, con las que nos enfrentamos:

- **Tratamiento del color:** El método que proponemos no se puede realizar en el modelo estándar RGB . El modelo RGB , como explicaremos, es un modelo que únicamente considera los colores primarios y, por tanto, la deconvolución puede producir falseado de color. Para solventar este problema buscamos un modelo equivalente que permita separar luminancia y cromatismo (tono y saturación, componentes cromáticas), de manera que el proceso se realiza únicamente en el canal de luminancia, con lo que garantizamos que no se alteran los colores originales.
- **Deconvolución en color:** El objetivo de la deconvolución es determinar la imagen exacta a partir de la imagen degradada, el núcleo e información estadística acerca del ruido, preservando las discontinuidades de la imagen. *Proponemos una deconvolución ciega* (carecemos de información del kernel original), determinando un kernel equivalente al original, para posteriormente aplicar técnicas asociadas con la transformada de Fourier, que implican resolución de modelos lineales y no lineales.

La solución de los modelos lineales, [CMS03], conservan el contraste original pero a cambio los perfiles se suavizan.

En cambio, la solución de los modelos no lineales [Car01, HMO04, CKS00, CM95] permiten mejorar los perfiles pero hay pérdida del contraste en la imagen. Para evitar ambos inconvenientes, hemos diseñado dos métodos, **aportaciones de la tesis**. *El primer método*, es tipo predictor-corrector: el modelo lineal predice la imagen que el método no lineal corrige, principalmente en los perfiles, que nos permite aprovechar las características locales de la deconvolución y no aumentar el ruido [RC06]. Además hay que tener en cuenta que se realiza en color, como se ha argumentado. *El segundo método*, [RC08], basado en la regularización por potencias fraccionarias, es una deconvolución basada

en recuperar pequeñas frecuencias de la imagen (multifrecuencia). Además la regularización fraccionaria permite conservar a cada paso (los pasos son pequeños) el contraste de la imagen inicial.

Nos centraremos en obras del Renacimiento y Barroco español, en contraposición con otro tipo de imágenes, con diversas características: la amplia gama de colores, la iluminación, torsión de los perfiles (dibujo) en la obra y los contrastes lumínicos. Aplicaremos los procesos descritos al caso particular del Retablo Mayor de la Iglesia San Bartolomé de Bienservida, que fue restaurado en el año 2005. Hemos desarrollado estas técnicas siguiendo también indicaciones de los técnicos de restauración. El retablo es una obra de finales del Renacimiento y principios del Barroco, que combina en su estructura pinturas y esculturas. El interés surge a raíz del tipo de pintura y escultura así como el estudio matemático que permite recuperar a nivel digital los elementos perdidos.

Índice general

| | |
|--------------------------------------------------------------------------------|----------|
| I Modelos de Deconvolución. Modelo Fraccionario | 1 |
| 1. Deconvolución | 2 |
| 1.1. Modelo de degradación | 4 |
| 1.2. El problema de la deconvolución | 9 |
| 1.2.1. Regularización de Tikhonov | 11 |
| 1.2.2. Forma integral de la regularización de Tikhonov | 12 |
| 1.2.3. Restauración por variación total (TV) | 15 |
| 1.2.4. Métodos para la obtención del mínimo de la variación total | 17 |
| 1.2.4.1. Time Marching | 18 |
| 1.2.4.2. Método del punto fijo | 19 |
| 1.2.4.3. Método de Newton | 20 |
| 1.2.4.4. Método Primal-Dual | 22 |
| 1.2.5. Elección del parámetro λ de la variación total | 23 |
| 1.2.6. Restauración por SECB | 23 |
| 1.2.6.1. Método de Tikhonov - Miller | 23 |
| 1.2.6.2. Método Slow Evolution Constraint (SECB) | 24 |
| 1.3. Modelos de deconvolución ciega | 26 |
| 1.3.1. Ecuación generalizada del calor | 26 |
| 1.3.2. Modelo SECB | 30 |
| 1.3.3. Método Híbrido | 33 |
| 1.4. Regularización por potencias fraccionarias | 37 |

| | |
|------------------------------------------------------------------|------------|
| 1.4.1. Modelo de deconvolución fraccionaria | 42 |
| 1.4.2. Deconvolución de imágenes ruidosas | 46 |
| 1.4.3. Ejemplos | 48 |
| 1.5. Deconvolución Fraccionaria en Color | 56 |
| 2. Fundamentos del Color | 64 |
| 2.1. Introducción | 64 |
| 2.2. Transformaciones lineales de espacios de color | 68 |
| 2.3. Modelos Lineales de Color | 68 |
| 2.3.1. Modelo RGB | 68 |
| 2.3.2. Modelos CMY y CMYK | 70 |
| 2.3.3. Modelos YUV | 70 |
| 2.4. Transformaciones no lineales de espacios de color | 71 |
| 2.4.1. Método CIE | 71 |
| 2.4.2. CIELAB | 72 |
| 2.4.3. Modelo <i>HSV</i> | 73 |
| II Aplicación de la deconvolución | 76 |
| 3. Restauración Digital del Retablo Mayor | 77 |
| 3.1. Bienservida | 78 |
| 3.2. El retablo como transmisor de la cultura | 80 |
| 3.3. Reintegración Artística | 85 |
| 4. Reintegración Digital | 87 |
| 4.1. Antecedentes del Inpainting | 88 |
| 4.2. El algoritmo de reintegración | 91 |
| 4.2.1. Hipótesis del Inpainting | 93 |
| 4.2.2. El algoritmo de retoque | 93 |
| 4.3. Resultados de la Reintegración | 97 |
| III Conclusiones y Líneas Futuras | 110 |

Índice de figuras

| | |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.1. Evolución la ecuación del calor para la función delta Dirac. Aplicamos la ecuación (1.30), con diferentes pasos: $t_0 = 20$ pasos, $t_1 = 80$ pasos, $t_2 = 500$ pasos | 27 |
| 1.2. Distribución Lévy, con diferentes valores de α, β | 28 |
| 1.3. <i>Superior izquierda</i> : Imagen original; <i>Superior derecha</i> : Imagen original convuelta con un núcleo procedente de aplicar 80 pasos de la ecuación del calor a una función delta $\left(\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = \frac{1}{2}\right)$; <i>Parte central izquierda</i> : <i>Deconvolución con el modelo lineal</i> ; <i>Parte central derecha</i> : <i>Deconvolución con SECB</i> ; <i>Parte inferior</i> : <i>Modelo híbrido</i> | 35 |
| 1.4. Derivadas de orden fraccionario $t \in [0, 1]$, para la función diente de sierra. Podemos comprobar el comportamiento del término de regularización de (1.38). De esta forma podemos ver la suma de las contribuciones de las derivadas de orden fraccionario para aproximar derivadas de orden entero de funciones no suaves | 40 |
| 1.5. Derivadas de orden fraccionario $t \in [0, 1]$, para la función gaussiana. Podemos comprobar el comportamiento del término de regularización de (1.38). De esta forma podemos ver la suma de las contribuciones de las derivadas de orden fraccionario para aproximar derivadas de orden entero de funciones suaves | 41 |
| 1.6. Derivada fraccional de la función diente de sierra, para $\beta < 0$. Notar que en este caso estamos integrando, lo que implica un suavizado de la función original. | 47 |

| | |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.7. Derivadas de orden fraccionario $t \in [0, 1]$, para la función gaussiana, para $\beta < 0$. Notar que en este caso estamos integrando, lo que implica un suavizado de la función original. En el caso de la gaussiana cuando $\beta = -1$ tenemos la función de distribución normal | 48 |
| 1.8. Parte superior: Imagen convuelta y el núcleo (satélite). Parte inferior: Secuencia de deconvoluciones ciegas con los correspondientes núcleos detectados. | 49 |
| 1.9. Parte superior: Imagen convuelta y núcleo (Lena). Parte inferior: Secuencia de deconvoluciones ciegas con sus correspondientes núcleos detectados. | 50 |
| 1.10. Deconvolución de 1.9 con diferentes modelos. (1): Deconvolución con el Modelo Lineal. (2): Restauración por variación total. (3) SECB. (4) Deconvolución ciega fraccionaria. | 51 |
| 1.11. Parte superior: Satélite convuelto con ruido gaussiano $\sigma = 2$ y $SNR = 5.14$. Deconvoluciones: Parte central izquierda: Modelo fraccionario. Parte central derecha: Modelo lineal. Parte inferior izquierda: SECB. Parte superior derecha: TV | 52 |
| 1.12. Detalles de la deconvolución y denoising del satélite de 1.11. | 52 |
| 1.13. Parte superior: Satélite convuelto con $\sigma = 6$ con ruido gaussiano $SNR = 5.28$. Deconvoluciones: Parte central izquierda: Modelo fraccional. Parte central derecha: Modelo lineal. Parte inferior izquierda: SECB. Parte superior derecha: TV | 53 |
| 1.14. Detalles de la deconvolución y denoising del satélite 1.13 | 53 |
| 1.15. Núcleo de desenfoque: $R = 5$, Parte superior izquierda: Imagen convuelta con núcleo de desenfoque. Parte superior derecha: Nuestro modelo (fraccional). Parte inferior izquierda: Restauración por variación total. Parte inferior derecha: Restauración SECB. | 54 |

| | |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.16. Núcleo de movimiento: $R = 10, \theta = 45$, Parte superior izquierda: Imagen convuelta con un núcleo de movimiento. Parte superior derecha: Nuestro modelo (fraccional). Parte inferior izquierda: Restauración por variación total. Parte inferior derecha: Restauración SECB | 55 |
| 1.17. Superior izquierda: Original, La Anunciación. Superior Derecha: Deconvolución en RGB con el modelo Fraccionario. Inferior izquierda: Deconvolución en YUV con el modelo Fraccionario, con parámetros $t = 0.2, \lambda = 100$. Inferior derecha: Deconvolución en HSV con el modelo Fraccionario, con parámetros $t = 0.32, \lambda = 100$ | 57 |
| 1.18. (a) <i>La Anunciación</i> ; (b) <i>Modelo Lineal</i> , $\lambda = 10^7$; (c) <i>SECB</i> : $s = 0.00001, K = 10^4, t = 0$; (d) <i>Método híbrido</i> , $\lambda = 10^7, s = 0.1, K = 10^2, t = 0.9$; (e) <i>Modelo Fraccional</i> : $t = 0, \lambda = 4$; (f) <i>Variación Total (AM)</i> : 10 iteraciones, $\lambda_1 = 10^{-3}, \lambda_2 = 9.18 \times 10^{-1}$ | 60 |
| 1.20. (a) <i>La Circuncisión</i> ; (b) <i>Modelo Fraccional</i> : $\lambda = 7, t = 0.0012$; (c) <i>Variación Total (AM)</i> : 1 iteración, $\lambda_1 = 10^{-7}, \lambda_2 = 10^{-6}$; (d) <i>Modelo Híbrido</i> : $\lambda = 10^7, t = 0.93$ | 62 |
| 1.21. (a) <i>Camino al Calvario</i> ; (b) <i>Variación Total</i> $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.1 \times 10^{-3}$; (c) <i>Modelo Fraccional</i> : $t = 0.0000017, \lambda = 2$ | 63 |
| 2.1. Colores Primarios y Secundarios | 66 |
| 2.2. Colores Primarios pigmentados | 66 |
| 2.3. Representación de un color por sus «coordenadas» de tono, saturación y brillo. El punto P representa un color, de <i>tono</i> $= \theta$, <i>saturación</i> $= r$ y <i>brillo</i> $= z$ | 68 |
| 2.4. Cubo de Color para el modelo RGB | 69 |
| 2.5. Relación entre el modelo RGB y LUV. | 73 |
| 2.6. Representación del Cono de Color del modelo HSV | 73 |
| 3.1. <i>Bienservida (izquierda). Parte derecha, plano de localización</i> | 78 |

-
- 3.2. *Superior izquierda, Vista Exterior de la Iglesia. Puerta Principal, Superior derecha, puerta de la Citara (siglo XVIII). Vista interior de la Iglesia (Central). Parte inferior, capillas dedicadas a la Epístola. Parte inferior izquierda dedicada al Santísimo, parte inferior derecha, capilla de Nuestra Señora de Turruchel, Patrona del Pueblo* 79
- 3.3. Retablo del Real Monasterio de San Lorenzo de El Escorial (Basílica) 82
- 3.4. **RETABLO MAYOR.** 1. Apóstoles; 2. Apóstoles; 3. San Pedro y San Juan; 4. Custodia; 5. Apóstoles; 6. Apóstoles; 7. Apóstoles; 8. Evangelista; 9. Anunciación; 10. Evangelista; 11. Evangelista; 12. Adoración de los Pastores; 13. Evangelista; 14. San Esteban; 15. Epifanía; 16. San Juan Bautista; 17. San Bartolomé; 18. San Sebastián; 19. (Ilegible); 20. San Lorenzo; 21. Santo Mártir; 22. Ecce Homo; 23. Flagelación; 24. Santo Obispo; 25. Santa Mónica; 26. Santa; 27. Oración del Huerto; 28. Nazareno; 29. Santo Obispo; 30. Descendimiento; 31. San Agustín; 32. Calvario; 33. San Jerónimo; 34. Crucifixión; 35. Padre Eterno; *Las zonas que están en oscuro, son elementos perdidos mientras que los que están a rayas son prácticamente irre recuperables.* 84
- 4.1. Curvas de Nivel de Lena 92
- 4.2. Lena vista como un mapa topográfico 92
- 4.3. Superior izquierda: La Anunciación; Superior derecha: La Circuncisión; inferior izquierda: Camino al Calvario; inferior derecha: La flagelación. *Las tablas que mostramos corresponden al estado original del Retablo (2005)* 98
- 4.4. Superior derecha: Anunciación, Superior izquierda: Circuncisión; Inferior derecha: Camino al Calvario; Inferior izquierda: Flagelación 100

- 4.5. Superior Derecha: Tabla de *La Anunciación*; Superior Izquierda: **Deconvolución con el método fraccional**; Inferior Izquierda: **Reintegración digital**; Inferior Derecha: Restauración artística (retablo) 2006 101
- 4.6. Superior Derecha: Tabla de *La Circuncisión*; Superior Izquierda: **Deconvolución con el método fraccional**; Inferior Izquierda: **Reintegración digital**; Inferior Derecha: Restauración artística (retablo) 2006 102
- 4.7. Superior Derecha: Tabla de *El camino al Calvario*; Superior Izquierda: **Deconvolución con el método fraccional**; Inferior Izquierda: **Reintegración digital**; Inferior Derecha: Restauración artística (retablo) 2006 104
- 4.8. Superior Derecha: Tabla de *La oración en el Huerto*; Superior Izquierda: **Deconvolución con el método fraccional**; Inferior Izquierda: **Reintegración digital**; Inferior Derecha: Restauración artística (retablo) 2006 105
- 4.9. Superior Derecha: Tabla de *El Escarnio*; Superior Izquierda: **Deconvolución con el método fraccional**; Inferior Izquierda: **Reintegración digital**; Inferior Derecha: Restauración artística (retablo) 2006 106
- 4.10. Superior Derecha: Tabla de *La Flagelación*; Superior Izquierda: **Deconvolución con el método fraccional**; Inferior Izquierda: **Reintegración digital**; Inferior Derecha: Restauración artística (retablo) 2006 107
- 4.11. Retablo Mayor en la actualidad después de la restauración artística 108

Parte I

Modelos de Deconvolución.

*Modelo Fraccionario para
imágenes en color*

Capítulo 1

Deconvolución

En dispositivos ópticos (cámaras digitales, telescopios, microscopios ...) la convolución modeliza matemáticamente el proceso de formación de una imagen, que ocurre cuando un sensor (ojo, cámara) registra la luz que ha interactuado con ciertos objetos físicos (PSF o núcleo). La imagen obtenida por el sensor se puede ver como una función bidimensional, $u(x, y)$, donde el valor de la función corresponde a la intensidad o brillantez en cada punto de la imagen (x, y) (imágenes *en escalas de grises*). Las intensidades las consideramos normalizadas en el intervalo $[0, 1]$. En la práctica, consideramos una imagen como una función real en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ($\Omega = [0, 1]^2 := [0, 1] \times [0, 1]$).

Consideraremos una *imagen en color* como varias imágenes en escala de grises, es decir, cada una de ellas representará una de las tres bandas espectrales que son, rojo (Red), verde (Green) y azul (Blue) y por tanto la podemos considerar como $\vec{u} : \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\} \rightarrow \mathbb{R}^3$. Como veremos posteriormente, trataremos el caso de imágenes en color de una manera distinta al de las imágenes en niveles de grises, pues tienen una serie de problemas a considerar: la correlación entre luminancia y cromatismo (colores espurios o falseado de color), y problemas relacionados con el contraste.

El objetivo de la restauración de imágenes, es recuperar las discontinuidades de la imagen que han sido degradadas por «blur» (emborronado) y por el ruido. El blur corresponde a causas deterministas: variación de temperatura, humedad, exposición al sol o desenfoque de la cámara. Se representa por un operador lineal. El ruido está relacionado con la parte estocástica correspondiente a errores (mala transmisión, errores computacionales,

interferencias, . . .).

En la literatura referente a la deconvolución, hay dos partes diferenciadas. En la *primera el núcleo es de tipo gaussiano* (responde a un tiempo de exposición alto para capturar un punto). Destacamos, [CMS03], que presenta dos modelos: un modelo lineal que usa como término de regularización el laplaciano, que se resuelve usando métodos espectrales y el segundo, un modelo no lineal. El laplaciano se sustituye por un término relacionado con la curvatura resuelto localmente por métodos espectrales. Otros modelos utilizan normas no euclídeas como la variación total o *TV* norma. Un ejemplo [CKS00], que usa dicha norma para eliminar el ruido y realzar imágenes en color, en espacios *HSV*, *CB* (Chromaticity - Brightness) pero no trata directamente la deconvolución en color y la consecuente alteración del brillo. *El segundo bloque* a considerar son los *modelos de deconvolución ciega*, que tratan de recuperar la imagen, sin conocimiento del núcleo que la degradó. En [Car01, Car99a, Car99b, Car02] se proponen núcleos basados en la distribución Lévy pura. En [HMO04] los autores aplican la regularización iterativa, haciendo uso de la *TV* norma e introduciendo el núcleo como término de información adicional al funcional a minimizar.

El capítulo se estructura de la siguiente forma: En la sección §1.1, se introduce el fundamento matemático y el problema de deconvolución. En las subsecciones §1.2.1, §1.2.2, §1.2.3 trataremos con detalle dos de las regularizaciones más conocidas en la literatura: la regularización de Tikhonov, también en su fórmula integral y la variación total. En §1.2.6 el modelo SECB basado en resolver la ecuación generalizada del calor.

En la sección §3.5 **están las aportaciones principales de la tesis**: regularización por potencias fraccionarias del operador laplaciano §1.4, publicado en [RC08] y el modelo híbrido [RC06]. En la subsección §1.4.2, veremos la deconvolución de imágenes ruidosas, tema en el que estamos investigando y en el que analizamos el comportamiento del modelo explicado en §1.4 para deconvolver y eliminar ruido simultáneamente. En este caso el método fraccionario propuesto en §1.4 elimina ruido y deconvuelve pero a cambio introduce un pequeño suavizado en la imagen, lo que es un comportamiento habitual en deconvolución con ruido.

En §1.4.3 veremos los ejemplos de la deconvolución fraccionaria y compararemos los resultados con otros modelos expuestos en la literatura. En §1.5 desarrollaremos la deconvolución fraccionaria pero en el caso de imágenes en color, ilustrando la necesidad de la separación de los canales y justificaremos el modelo *LUV* como el modelo adecuado para la deconvolución. Analizaremos también los resultados comparándolos con otros modelos de la literatura.

1.1. Modelo de degradación

Antes de introducir el modelo matemático daremos una descripción heurística del problema que vamos a abordar.

Supongamos que tenemos una habitación con una fuente de calor en el centro. Con el paso del tiempo este calor va propagándose por la habitación en círculos concéntricos. Como podemos intuir, estos círculos van perdiendo «intensidad» a medida que se propagan. Es decir, el calor avanza alejándose de su fuente y va perdiéndose. Esto se debe a que la temperatura de la habitación tiende a homogeneizarse, a equipararse a la de la fuente de calor.

Supongamos ahora que esta fuente emite en un instante t_0 y a partir de este instante deja de emitir calor. A medida que la temperatura va aumentando hacia la periferia de la habitación, va disminuyendo en el centro de la misma. En otras palabras, el calor tiende a uniformizarse, pero esta vez en un valor intermedio entre la temperatura original de la habitación y la de la fuente.

Pensemos por un momento en la habitación como una imagen y que hay un punto únicamente de calor. Si aplicamos el fenómeno descrito anteriormente, obtenemos que conforme va evolucionando el tiempo la imagen queda cada vez más degradada (difundida); es decir, el dibujo (perfiles) se pierde y tenemos lo que llamamos *desenfoque*. Como veremos posteriormente, el efecto de difusión o desenfoque se produce al actuar un operador lineal y compacto sobre la imagen real.

Matemáticamente, el modelo de degradación viene dado por:

$$u_0(x, y) = \mathcal{K}u(x, y) + n(x, y) \quad (1.1)$$

El problema que queremos resolver es obtener una aproximación a la imagen real, u , a partir de una imagen degradada u_0 , teniendo en cuenta, que ha sido degradada por un operador lineal \mathcal{K} y por el ruido n . El núcleo \mathcal{K} es lo que llamamos «blur» o difusión, que es determinista; n , ruido aleatorio, es la parte estocástica, que consideraremos aditiva.

Recordemos las siguientes definiciones conocidas:

Definición 1 Un operador \mathcal{K} es **lineal** si cumple:

$$\mathcal{K}[\alpha u_1(x, y) + \beta u_2(x, y)] = \alpha \mathcal{K}u_1(x, y) + \beta \mathcal{K}u_2(x, y) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Un operador \mathcal{K} es **homogéneo**, si:

$$\mathcal{K}[\alpha u_1(x, y)] = \alpha \mathcal{K}u_1(x, y) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Un operador \mathcal{K} es **aditivo**, si:

$$\mathcal{K}[u_1(x, y) + u_2(x, y)] = \mathcal{K}u_1(x, y) + \mathcal{K}u_2(x, y)$$

Definición 2 Un operador \mathcal{K} , es **independiente de la posición (invariante por translación)**, si verifica:

$$u_0(x, y) = \mathcal{K}[u(x, y)] \Rightarrow u_0(x - \alpha, y - \beta) = \mathcal{K}u(x - \alpha, y - \beta)$$

para cualquier u y $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Es bien sabido que en el caso continuo cualquier función $u(x, y)$ se puede escribir:

$$u_0(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} u(\alpha, \beta) \delta(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta$$

Siendo δ la distribución delta de Dirac.

Tomamos $n(x, y) = 0$ en la ecuación (1.1):

$$u_0(x, y) = \mathcal{K}[u(x, y)] = \mathcal{K} \left[\int_{\mathbb{R}^2} u(\alpha, \beta) \delta(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta \right] =$$

Por linealidad (*Definición 1*) tenemos:

$$= \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{K} [u(\alpha, \beta) \delta(x - \alpha, y - \beta)] d\alpha d\beta$$

Como u no depende de x, y , entonces por la propiedad de homogeneidad (véase *Definición 1*), tenemos que:

$$u_0(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} u(\alpha, \beta) \mathcal{K}[\delta(x - \alpha, y - \beta)] d\alpha d\beta$$

Si definimos $k(x, y, \alpha, \beta) := \mathcal{K}[\delta(x - \alpha, y - \beta)]$ y sustituimos en la ecuación anterior:

$$u_0(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} u(\alpha, \beta) k(x, y, \alpha, \beta) d\alpha d\beta \quad (1.2)$$

Tenemos una ecuación de Fredholm de primera especie. A k se le llama *núcleo* o *kernel*.

Si \mathcal{K} es invariante por translaciones (*definición 2*) tenemos: $\mathcal{K}[\delta(x - \alpha, y - \beta)] = k(x - \alpha, y - \beta)$, y sustituyendo en (1.2), tenemos:

$$u_0(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} u(\alpha, \beta) k(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta$$

En presencia del ruido aditivo, la expresión anterior describe un modelo de degradación lineal:

$$u_0(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} u(\alpha, \beta) k(x, y, \alpha, \beta) d\alpha d\beta + n(x, y) \quad (1.3)$$

Si añadimos que \mathcal{K} es invariante por translaciones:

$$u_0(x, y) = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^2} u(\alpha, \beta) k(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta}_{:=\mathcal{K}u} + n(x, y) = \quad (1.4)$$

Denotamos por $*$ al operador de convolución definido por:

Definición 3 Si $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ funciones medibles, dado $t \in \mathbb{R}^n$, si la función $\tau \rightsquigarrow f(\tau)g(t - \tau)$ es integrable, llamaremos **convolución de f con**

g en el punto t y lo denotaremos como $*$ a la integral

$$(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\tau)g(t - \tau)d\tau$$

podemos reescribir la ecuación (1.4) de la siguiente forma:

$$u_0(x, y) = k(x, y) * u(x, y) + n(x, y) \quad (1.5)$$

En algunas aplicaciones (como las que presentamos en restauración artística ([RC06])) el ruido no está presente en el proceso y por tanto el problema es el de la *deconvolución pura*:

$$u_0(x, y) = k(x, y) * u(x, y) \quad (1.6)$$

El problema de recuperar los datos originales (u) a partir de la imagen desenfocada (u_0) es un ejemplo de *problema inverso* que tiene solución mal puesta. Hadamard en un artículo publicado en 1902, introdujo el concepto de *problema bien puesto* como aquél que tiene solución, es única y depende regularmente de un conjunto arbitrario de datos. Por tanto, un problema mal puesto es aquél cuya solución, si la tiene, no es única o es inestable.

Fundamentalmente, este problema inverso consiste en resolver la ecuación integral de Fredholm de primera especie cuyo núcleo es suave y no degenerado. Este es un problema mal puesto, ya que pequeñas perturbaciones en los datos iniciales, pueden producir grandes variaciones cuando se obtienen los datos finales (sensibilidad a las condiciones iniciales). Para obtener una estimación de u haremos uso de la transformada de Fourier, cuya definición recordamos:

Definición 4 Dada $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ se llama *transformada de Fourier de f* a la función $\hat{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ dada por:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \xi} f(x) dx$$

También recordamos el concepto de antitransformada o transformada in-

versa de Fourier:

Definición 5 Dada $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ se llama **transformada inversa de Fourier** o **antitransformada** de f a la función $f^\vee : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ dada por:

$$f^\vee = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot \xi} f(x) dx = \widehat{f}(-\xi)$$

Algunas propiedades fundamentales son: que es una transformada lineal y que permite representar la función original en la base de Fourier que es una base ortogonal, por ello, tanto la inversa como la transformada están bien condicionadas numéricamente y no amplifican los errores de redondeo.

Pero la propiedad más importante viene dada por el **teorema de convolución**, que probamos a continuación:

Teorema 1 (Teorema de Convolución) Dadas $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, se verifica:

$$\widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$$

Demostración 1 Para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$, aplicando los teoremas de Tonelli-Hobson y Fubini y haciendo el cambio de variable $v = x - y, w = y$ se tiene:

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i v \cdot \xi} f(v) dv \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i w \cdot \xi} g(w) dw = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} e^{-2\pi i (v+w) \cdot \xi} f(v)g(w) d(v, w) = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(x-y)g(y) d(x, y) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) dy \right) dx = \widehat{f * g}(\xi) \end{aligned}$$

□

Gracias a este teorema podemos transformar la convolución de funciones en producto. Si aplicamos el teorema 1.1 a la ecuación (1.6) obtenemos:

$$u_0 = k * u \xrightarrow{\text{Teorema 1}} \widehat{u}_0 = \widehat{k} \cdot \widehat{u} \quad (1.7)$$

Para obtener u , bastaría despejar de la ecuación (1.7):

$$\widehat{u} = \frac{\widehat{u}_0}{\widehat{k}} \implies u = \left(\frac{\widehat{u}_0}{\widehat{k}} \right)^\vee \quad (1.8)$$

La formulación anterior plantea un serio problema cuando $\widehat{k} \rightarrow 0$ (lo que ocurre cuando k es regular). Las altas frecuencias de \widehat{u}_0 se ven amplificadas y por tanto el problema está mal puesto. De aquí la necesidad de regularizar el problema. Nuestro objetivo es estimar u a partir del ruido, el «blur» y algún conocimiento sobre la imagen (suavidad o existencia de perfiles). Este conocimiento se incorpora a un funcional \mathcal{R} que mide la calidad de u . En otras palabras, el proceso de regularización consiste en elegir la imagen de mejor calidad entre las restricciones dadas por el ruido y el blur inducido por k .

1.2. El problema de la deconvolución

Como hemos visto anteriormente, a consecuencia del mal condicionamiento del problema, tenemos que replantear el problema de la deconvolución para §1.6 y pasar de un problema mal puesto a otro en el que tengamos solución y sea única, es decir, tenemos que regularizar el problema.

La aproximación usual consiste en resolver el siguiente problema de optimización con restricciones:

$$\left. \begin{array}{l} \min_{u \in L^2(\mathbb{R})} \mathcal{R}(u) \\ \text{sujeto a: } \|k * u - u_0\|_2^2 \approx |\Omega| \sigma^2 \end{array} \right\} \quad (1.9)$$

Notar que $n = u_0 - k * u$ y $E \left(\int_{\Omega} n^2 dx \right) = |\Omega| \sigma^2$ ($E(\cdot)$ representa la media o valor esperado o esperanza matemática).

Ejemplos de funcionales de regularización conocidos son el de *Tikhonov*, [TA77] y la *variación total*, [LS94], que detallaremos posteriormente. La regularización de Tikhonov es adecuada para métodos que usan transformadas de Fourier.

Una regularización basada en Tikhonov se utiliza en los métodos de Slow Evolution Constraint Backwards (SECB), que están asociados a resolver la

ecuación generalizada del calor ([Car01, Car99a]).

En general, deseamos minimizar funciones del tipo de la ecuación (1.9) con \mathcal{R} un operador que no es siempre lineal, sujeto a una serie de restricciones que permite obtener diferentes soluciones para diferentes elecciones de \mathcal{R} . Para obtener el mínimo de la ecuación, usaremos el *método de los multiplicadores de Lagrange*:

Paso 1 Creamos el *lagrangiano*:

$$L(u, \mu) = \mathcal{R}(u) + \mu (\|k * u - u_0\|_2^2 - \sigma^2)$$

Paso 2 Calculamos las derivadas parciales primeras e igualamos a cero:

$$\left. \begin{aligned} \nabla L(u, \mu) &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \mu}(u, \mu) &= \|k * u - u_0\|_2^2 - \sigma^2 = 0 \end{aligned} \right\}$$

Lo que reformula el problema variacional anterior como un problema sin restricciones. Ahora nuestro problema se reduce a determinar el mínimo de $L(u, \mu)$.

$$L(u, \mu) = 2\mu \left(\frac{1}{2\mu} \mathcal{R}(u) + \frac{1}{2} \|k * u - u_0\|_2^2 \right) - \mu \sigma^2$$

Calcular el mínimo de $L(u, \mu)$ es equivalente a calcular

$$\min_{u \in L^2(\Omega)} \alpha \mathcal{R}(u) + \frac{1}{2} \|k * u - u_0\|_{L^2}^2 \quad \alpha := \frac{1}{2\mu} \quad (1.10)$$

Notar que $\alpha > 0$ y que $\mu \sigma^2$ es constante.

Consideramos el siguiente funcional:

$$\begin{aligned} T(u) &= \alpha \mathcal{R}(u) + \frac{1}{2} (\|k * u - u_0\|_{L^2}^2) = \\ &= \alpha \mathcal{R}(u) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (k * u - u_0)^2 d\mathbf{x} \end{aligned}$$

Queremos determinar $u^* \in L^2(\Omega)$ tal que:

$$T(u^*) = \min_{u \in L^2(\Omega)} T(u)$$

Elegiremos el funcional \mathcal{R} según el tipo de solución que queremos obtener a la que contribuye el valor α , puesto que un valor de α grande implica que determinamos soluciones suaves, mientras que, α pequeño, nos dice que la soluciones serán menos regulares.

1.2.1. Regularización de Tikhonov

En general es el método más común de regularización para problemas mal puestos. En estadística el método de Levenberg-Marquard se basa en Tikhonov para ajustes no lineales de mínimos cuadrados. La aproximación estándar para resolver un sistema sobredeterminado de ecuaciones lineales es:

$$Ax = b$$

es conocido como mínimos cuadrados y permite minimizar el residual:

$$\|Ax - b\|_2^2$$

La matriz A puede estar mal condicionada o ser singular. Si queremos dar preferencia a un tipo de solución con unas propiedades deseadas, el término de regularización debe ser incluido:

$$\|Ax - b\|_2^2 + \|Lx\|_2^2$$

siendo L la *matriz de Tikhonov*. En muchos casos L es elegida como la identidad $L = I$, dando preferencia a soluciones con normas pequeñas. En otros casos operadores de paso alto (por ejemplo, operadores que incluyen derivadas) pueden ser usados para asegurar la suavidad si el vector subyacente es continuo.

En el caso de las imágenes, se puede entender como un criterio basado en la correlación entre la imagen y el ruido. En este caso Tikhonov se plantea

como:

$$\min_{u \in L^2\Omega} \|Ku - u_0\|_2^2 + \lambda \|u\|_2^2$$

cuya ecuación de Euler-Lagrange correspondiente:

$$(K^*K + \lambda I)^{-1}K^*u$$

Notar que con una elección adecuada de L , podemos obtener el *filtro de Wiener* que es el que minimiza el error cuadrático medio.

1.2.2. Forma integral de la regularización de Tikhonov

Esta regularización (o función de penalización) viene dada por un funcional $\mathcal{R}(x) = \int_{\Omega} x^2 dx$. Supone que los datos son suaves y continuos.

$$T(u) = \int_{\Omega} \left(\alpha |\nabla u|^2 + \frac{1}{2} (k * u - u_0)^2 \right) dx dy$$

Para obtener el mínimo procederemos a calcular la *primera derivada de T (Gâteaux)*. Dados u, v , definimos el funcional $\rho(\varepsilon) = T(u + \varepsilon v)$. La primera derivada es $\rho'(0) = [T'(u)](v)$.

Desarrollamos la ecuación anterior:

$$T(u) = \int_{\Omega} \left(\alpha [u_x^2 + u_y^2] + \frac{1}{2} (k * u - u_0)^2 \right) dx dy$$

Sustituimos u por $u + \varepsilon v$, tenemos:

$$\begin{aligned} \rho(\varepsilon) &= \int_{\Omega} \alpha [(u + \varepsilon v)_x^2 + (u + \varepsilon v)_y^2] + \frac{1}{2} (k * (u + \varepsilon v) - u_0)^2 dx dy \Rightarrow \\ \rho'(\varepsilon) &= \int_{\Omega} 2\alpha [(u + \varepsilon v)_x] v_x + [(u + \varepsilon v)_y] v_y + [(k * (u + \varepsilon v) - u_0)] (k * v) dx dy \end{aligned}$$

Evalúamos ρ en 0 y tenemos:

$$\rho'(0) = 2\alpha \int_{\Omega} [u_x v_x + u_y v_y + [k * u - u_0] (k * v)] dx dy = 2\alpha \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + [k * u - u_0] (k * v) dx dy$$

Para simplificar la notación llamaremos $Ku = k * u$ y $Kv = k * v$. La

expresión anterior queda de la siguiente forma:

$$\rho'(0) = 2\alpha \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + [Ku - u_0]Kv \, dx dy$$

Expresamos la fórmula $[T'(u)](v) = \int_{\Omega} \Psi(u)v \, dx dy$ tal que $T'(u) = \Psi(u)$

Reescribimos $\rho'(0)$ de la forma:

$$\begin{aligned} \rho'(0) &= 2\alpha \int_{\Omega} [u_x v_x + u_y v_y + [Ku - u_0]Kv \, dx dy = \\ &= 2\alpha \int_{\Omega} \underbrace{\nabla u \cdot \nabla v}_{I_1} \, dx dy + [Ku - u_0]Kv \, dx dy \end{aligned}$$

En I_1 , llamamos $w = \nabla u$. Sabemos que

$$\nabla u \cdot w = -v \operatorname{div}(w) + \operatorname{div}(vw) \quad (1.11)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx dy = \int_{\Omega} \nabla v w \stackrel{(1.11)}{=} \int_{\Omega} -v \operatorname{div}(w) + \operatorname{div}(vw) \, dx dy \\ &= \int_{\Omega} -v \operatorname{div}(\nabla u) + \operatorname{div}(v \nabla u) \, dx dy = \int_{\Omega} -v \operatorname{div}(\nabla u) \, dx dy + \int_{\Omega} \operatorname{div}(v \nabla u) \, dx dy \end{aligned}$$

Por el *teorema de la divergencia* (a la segunda integral), tenemos:

$$- \int_{\Omega} v \Delta u \, dx dy + \int_{\Omega} \operatorname{div}(v \nabla u) \, dx dy = - \int_{\Omega} v \Delta u + \int_{\partial \Omega} v \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

Suponiendo condiciones Neumann en la frontera, $\partial_{\mathbf{n}} u = 0$, tenemos:

$$I_1 = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx dy = - \int_{\Omega} v \Delta u \, dx dy$$

Por lo tanto:

$$\rho'(0) = -2\alpha \int_{\Omega} v \Delta u + [Ku - u]Kv \, dx dy = -2\alpha \int_{\Omega} v \Delta u + K^*[Ku - u_0]v \, dx dy$$

Siendo K^* , el operador adjunto de K . Igualamos a cero la expresión anterior: Tenemos que $T'(u) = -2\alpha\Delta u + K^*[Ku - u_0]$. Por tanto las ecuaciones de Euler-Lagrange son:

$$\left. \begin{array}{l} -2\alpha\Delta u + K^*[Ku - u_0] = 0 \\ \partial_{\mathbf{n}}u = 0 \end{array} \right\} \iff \left. \begin{array}{l} \Delta u + \lambda K^*[Ku - u_0] = 0 \\ \partial_{\mathbf{n}}u = 0 \end{array} \right\} \lambda := \frac{1}{-2\alpha}$$

Para obtener u , recurrimos a la transformada de Fourier teniendo en cuenta las siguientes propiedades

Teorema 2 (Propiedad de la derivada) *Dada una función f para la que existe $\partial^\alpha f$ para cualquier multiíndice $\alpha \leq \beta$ dado, entonces:*

$$\partial^\alpha \widehat{f} = \widehat{g} \quad \text{con} \quad g(x) = (-2\pi i x)^\alpha f(x)$$

Proposición 3

$$Ku = k * u; \quad K^*u := \widetilde{k} * u; \quad \text{tal que} \quad \widehat{\widetilde{k}} = \overline{\widehat{k}} \quad (1.12)$$

\widetilde{k} representa el operador adjunto de k

Aplicando el teorema 2 y la propiedad 3, tenemos:

$$\Delta u + \lambda K^*(Ku - u_0) = 0 \iff \Delta u + \lambda \widetilde{k} * (k * u - u_0) = 0$$

Por Fourier y aplicando el teorema de convolución:

$$-\widehat{\Delta}u + \lambda \widehat{\widetilde{k}} \cdot (\widehat{k} \cdot \widehat{u} - \widehat{u}_0) = 0$$

Por el teorema de la derivada y (1.12):

$$\begin{aligned} -4\pi^2(\xi^2 + \eta^2) \widehat{u} + \lambda \overline{\widehat{k}} (\widehat{k} \widehat{u} - \widehat{u}_0) &= 0 \\ -4\pi^2(\xi^2 + \eta^2) \widehat{u} + \lambda |\widehat{k}|^2 \widehat{u} - \widehat{k} \widehat{u}_0 &= 0 \\ \widehat{u} (-4\pi^2(\xi^2 + \eta^2) + \lambda |\widehat{k}|^2) - \widehat{k} \widehat{u}_0 &= 0 \end{aligned}$$

Despejando \widehat{u} :

$$\widehat{u} = \frac{\widehat{k}\widehat{u}_0}{-4\pi^2(\xi^2 + \eta^2)\lambda + |\widehat{k}|^2} \quad (1.13)$$

Como podemos observar, la elección del funcional penaliza las discontinuidades, puesto que encontramos soluciones suaves. El objetivo es determinar soluciones discontinuas, que son las adecuadas en nuestro problema. Una aproximación es reemplazar la norma de $L^2(\Omega)$ en la regularización de Tikhonov §1.2.2 por la norma de $L^1(\Omega)$, es decir, soluciones en L^1 correspondientes a la primera variación espacial. Esta es la llamada regularización por *variación total* (TV) que veremos a continuación.

1.2.3. Restauración por variación total (TV)

El inconveniente de usar funcionales cuadráticos está en que no permite recuperar las discontinuidades de la imagen. Rudin et al ([LS94]), propusieron la *variación total*, como funcional de regularización:

$$TV(u) = \int_{\Omega} |\nabla u| d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \sqrt{u_x^2 + u_y^2} dx dy$$

Deduciremos, la regularización de forma análoga al caso de la regularización de Tikhonov.

Deseamos minimizar el funcional:

$$T(u) = \int_{\Omega} \alpha |\nabla u| + \frac{1}{2} (Ku - u_0)^2 dx dy \quad (1.14)$$

Definimos el funcional $\rho(\varepsilon) := T(u + \varepsilon v)$. La primera variación de T es $[T'(u)](v) = \rho'(0)$

$$\rho(\varepsilon) = \int_{\Omega} \alpha \sqrt{(u_x + \varepsilon v_x)^2 + (u_y + \varepsilon v_y)^2} + \frac{1}{2} (Ku + \varepsilon Kv - u_0)^2 dx dy$$

$$\rho'(\varepsilon) = \int_{\Omega} \alpha \left(\frac{v_x(u_x + \varepsilon v_x) + v_y(u_y + \varepsilon v_y)}{\sqrt{(u_x + \varepsilon v_x)^2 + (u_y + \varepsilon v_y)^2}} \right) + (Ku + \varepsilon Kv - u_0)Kv dx dy$$

$$\rho'(0) = \int_{\Omega} \alpha \left(\frac{v_x u_x + v_y u_y}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}} \right) + (Ku - u_0)Kv \, dx dy$$

Tenemos:

$$[T'(u)](v) = \int_{\Omega} \alpha \left(\frac{\nabla u \cdot \nabla v}{|\nabla u|} \right) + (Ku - u_0)Kv \, dx dy$$

Integramos por partes y tenemos: $\nabla u \cdot w = -v \operatorname{div}(w) + \operatorname{div}(vw)$ y realizando el cambio $w = \frac{\nabla u}{|u|}$, tenemos:

$$\int_{\Omega} \nabla v \frac{\nabla u}{|\nabla u|} = - \int_{\Omega} v \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) + \int_{\Omega} \operatorname{div} \left(v \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right)$$

Por el teorema de la divergencia:

$$\int_{\Omega} \nabla v \frac{\nabla u}{|\nabla u|} = - \int_{\Omega} v \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \, dx dy + \int_{\partial\Omega} v \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \mathbf{n} dS$$

Si elegimos condiciones homogéneas $\partial_{\mathbf{n}} u = 0$, donde \mathbf{n} denota normal exterior:

$$\begin{aligned} [T'(u)](v) &= \int_{\Omega} -\alpha v \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) + K^*(Ku - u_0)v \, d\mathbf{x} \\ [T'(u)](v) &= \int_{\Omega} -\alpha v \left(\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) + K^*(Ku - u_0) \right) \, d\mathbf{x} \end{aligned}$$

Por tanto:

$$T'(u) = -\alpha \nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) + K^*(Ku - u_0)$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange son:

$$\left. \begin{aligned} -\alpha \nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) + K^*(Ku - u_0) &= 0 \\ \partial_{\mathbf{n}} u &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

Como podemos ver el funcional de la variación total (TV) definido:

$$TV(u) = \int_{\Omega} |\nabla u| \, d\mathbf{x}$$

No es diferenciable en cero. Para evitar este problema añadimos una pequeña constante β a la ecuación anterior:

$$TV_{\beta}(u) = \int_{\Omega} \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + \beta^2} d\mathbf{x}$$

La cantidad $\sqrt{|\nabla u|^2 + \beta^2}$ es la *magnitud o módulo del gradiente*, que nos da información sobre las discontinuidades de la imagen, es decir un β grande difunde los perfiles (adecuado para la eliminación del ruido), mientras que para la deconvolución se opta por un β pequeño, que está relacionado con la escala.

1.2.4. Métodos para la obtención del mínimo de la variación total

La ecuación (1.14) presenta una serie de retos ([CM95]):

- El operador $\nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right)$ es no lineal y presenta problemas de mal condicionamiento (cuando se linealiza se convierte en un operador elíptico de segundo orden).
- Cuando se linealiza el operador $\nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right)$ puede presentar grandes oscilaciones como consecuencia del término $\frac{1}{|\nabla u|}$.

Hay varios métodos propuestos en la literatura para obtener el mínimo de la ecuación (1.14). Rudin, Osher y Fatemi, propusieron en [LS94] obtener la solución de (1.15), usando un esquema de *evolución en tiempo* (time marching), que detallamos posteriormente, para obtener el estado estacionario de la ecuación parabólica:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -g(u) \\ \partial_{\mathbf{n}} u &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

con condición inicial en $t = 0$, $u = u_0$ y condiciones de contorno Neumann. Debido a las condiciones de estabilidad, este algoritmo converge lentamente.

te. En contraste Vogel y Omen, [VO98], desarrollaron el método de *punto fijo con difusión retardada*. Esta idea se usa habitualmente en el campo de la dinámica de fluidos. En [VO98, Cha95, CM95] consideran métodos tipo Newton pero no funcionan adecuadamente a causa del término $\frac{1}{|\nabla u|}$ que presenta una singularidad en el origen. El método *primal-dual* es una técnica que permite linealizar el término anterior desarrollada en [CGM99].

1.2.4.1. Time Marching

Es una de las técnicas conocidas para resolver (1.15), desarrollada en [LRF92]. Consiste en encontrar el estado estacionario de la ecuación:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -g(u) \\ u(x, 0) &= u_0 \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

Siendo $g(u) = -\alpha \nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) + K^*(Ku - u_0)$. Por tanto, pasamos de una ecuación elíptica a una parabólica $u_t = -g(u)$ con condición inicial $u(0) = u_0$ y resolvemos con métodos explícitos hasta obtener la solución.

En primer lugar discretizamos Ω :

$$(x_i, y_j) = (ih_1, jh_2) \quad \text{para } i = 0, \dots, n \text{ y } j = 0, \dots, m$$

Además:

$$u_{i,j} \approx u \left(ih - \frac{h}{2}, jh - \frac{h}{2} \right)$$

Discretizamos el tiempo $t \in [0, \infty[$ con paso L :

$$t_n = nL \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Queremos obtener una solución discreta de manera que el valor de la solución correspondiente a cada punto (x_i, y_i, t_n) de la malla computacional, que denotaremos por $u_{i,j}^n$ sea una aproximación a la solución de la ecuación

en derivadas parciales, en ese mismo punto:

$$u_{i,j}^n \approx u(x_i, y_j, t_n)$$

por tanto es necesario que la solución discreta cumpla una ecuación en diferencias que no es más que un análogo discreto del problema continuo original. Vamos a reescribir (1.17):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \alpha \left(\left(\frac{u_x}{|\nabla u|} \right)_x + \left(\frac{u_y}{|\nabla u|} \right)_y \right) - K^*(Ku - u_0) \\ u(x, y, 0) &= u_0(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (1.18)$$

Usamos el método de Euler Explícito (Forward) para discretizar (1.18). Denotamos por:

$$\begin{aligned} \text{Diferencia progresiva: } \Delta_i^+ u_{i,j}^n &= u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n \\ \text{Diferencia regresiva: } \Delta_i^- u_{i,j}^n &= u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n \end{aligned} \quad (1.19)$$

Consideremos la discretización:

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{L} = \alpha \left[\Delta_i^- \left(\frac{\Delta_i^+ u_{i,j}^n}{|\nabla u_{i,j}^n|} \right) + \Delta_j^- \left(\frac{\Delta_j^+ u_{i,j}^n}{|\nabla u_{i,j}^n|} \right) \right] + K_{i,j}^* (K_{i,j} u_{i,j}^n - (u_0)_{i,j})$$

Para el $|\nabla u_{i,j}^n|$:

$$|\nabla u_{i,j}^n| = \sqrt{\Delta_i^+ u_{i,j}^n + \Delta_j^+ u_{i,j}^n + \beta^2}$$

Arreglamos la expresión anterior y obtenemos:

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + \alpha L \left[\left[\Delta_i^- \left(\frac{\Delta_i^+ u_{i,j}^n}{|\nabla u_{i,j}^n|} \right) + \Delta_j^- \left(\frac{\Delta_j^+ u_{i,j}^n}{|\nabla u_{i,j}^n|} \right) \right] + K_{i,j}^* (K_{i,j} u_{i,j}^n - (u_0)_{i,j}) \right]$$

1.2.4.2. Método del punto fijo

En [VO98], los autores propusieron el método de punto fijo de difusión retardada. Este método consiste en linealizar el coeficiente de difusión $\frac{1}{|\nabla u|}$

retrasando una iteración.

Denotamos por $\mathcal{L}(u)$ al operador de difusión cuya acción sobre v viene dada por:

$$\mathcal{L}(u)v = -\nabla \cdot \left(\frac{1}{|\nabla u|} \nabla v \right)$$

En un mínimo se cumple que $g(u) = 0$, lo que equivale a decir:

$$g(u) = 0 \Leftrightarrow -\alpha \mathcal{L}(u)u + K^*(Ku - u_0) = 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

Por tanto expresamos la iteración de punto fijo:

$$\alpha \mathcal{L}(u^n)u^{n+1} + K^*(Ku^{n+1} - u_0) = 0$$

Desarrollando la expresión anterior tenemos:

$$-\alpha \left(\frac{1}{|\nabla u^n|} \nabla u^{n+1} \right) + K^*(Ku^{n+1} - u_0) = 0 \quad (1.20)$$

El método usa como valor inicial, la imagen degradada u_0 . Cada iteración, u^{n+1} , aproxima el valor de u , resolviendo la ecuación convolución-diferencial(1.20), cuyos coeficientes se calculan en la iteración anterior. Este método converge linealmente, tal y como se demuestra en [CM99]. Como podemos observar el método del punto fijo puede ser visto como un *time marching* semi-implícito. El método de punto fijo es convergente pero tiene convergencia lineal [CM99].

1.2.4.3. Método de Newton

Este método converge rápidamente cerca del mínimo siempre que el funcional dependa suavemente de u . Pero cuando $\beta = 0$ el término TV_β no es diferenciable. Para pequeños valores de β la no diferenciable del funcional da una pérdida de eficiencia para métodos de alto orden tipo Newton. En [Cha95] los autores demuestran que el método no funciona bien, porque tiene un dominio de convergencia reducido cuando β es pequeño. Por tanto el valor inicial debe ser elegido cerca de la solución verdadera para asegurar la

convergencia; para ello emplean el *método de continuación*. La idea esencial es empezar con un valor de β grande, para el que el dominio de convergencia es grande. La solución obtenida se usa como valor inicial para ir reduciendo gradualmente β hasta alcanzar el valor deseado. Controlar el proceso no resulta fácil y se utilizan métodos heurísticos para que el método sea eficiente en su conjunto.

Como sabemos, el método de Newton en $1D$, para una función $y = g(x)$ dada, consiste en aproximar las soluciones de $g(x) = 0$, por rectas tangentes. Consideremos x_0 una raíz de $g(x)$. Si aplicamos el desarrollo de Taylor, para obtener una aproximación a la raíz $x_0 = p$:

$$g(x_0) = g(x - x_0) + g'(x - x_0) + \mathcal{O}((x - x_0)^2)$$

Como x_0 es raíz de $g(x) \Rightarrow g(x_0) = 0$

$$x_0 = p - \frac{g(p)}{g'(p)}$$

Denotamos por $\delta p = -\frac{g(p)}{g'(p)}$; el método Newton es conocido: $x_0 = p + \delta p$.

Usaremos el mismo método expuesto anteriormente pero con la función $g(u) = \mathcal{L}(u)$. Denotamos por $\mathcal{J}(u)$ el jacobiano de $\mathcal{L}(u)$. Entonces para cualquier función suave p :

$$\mathcal{J}(u)p = \nabla \cdot \left(\frac{\nabla p}{|\nabla u|} \right) - \nabla \cdot \left(\frac{\nabla p \cdot \nabla u}{|\nabla u|^3} \nabla u \right) - \lambda K^* K p$$

el método de Newton es:

$$u^{n+1} = u^n - \mathcal{J}^{-1}(u^n) \mathcal{L}(u^n), \quad n = 0, 1, \dots$$

Notar que el término $\mathcal{J}^{-1}(u^n) \mathcal{L}(u^n)$, puede calcularse por el método del gradiente conjugado; pues está comprobado en [Cha95] que la matriz jacobiana del sistema es simétrica y definida positiva ($\alpha > 0$).

1.2.4.4. Método Primal-Dual

Vamos a describir una técnica desarrollada en [CGM99], para linealizar la ecuación (1.15), y así evitar los inconvenientes de la singularidad que presenta el denominador.

La clave está en introducir una variable (dual) auxiliar suave:

$$w = \frac{\nabla u}{|\nabla u|}$$

Reescribimos la ecuación (1.15) como un sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} f(w, u) &= w|\nabla u| - \nabla u = 0 \\ h(w, u) &= -\alpha \nabla \cdot w + K^*(K u - u_0) = 0 \end{aligned}$$

La linealización del sistema en u nos da:

$$\left[-\alpha \nabla \cdot \left(\frac{1}{|\nabla u|} \left(I - \frac{\nabla u \nabla u^T}{|\nabla u|^2} \right) \nabla \right) + K^* K \right] \delta u = -g(u)$$

Podemos linealizar este sistema en (u, v) por el método de Newton:

$$\begin{bmatrix} |\nabla u| & - \left(I - \frac{w \nabla u^T}{|\nabla u|} \right) \\ -\alpha \nabla \cdot & K^* K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u \\ \delta w \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} f(w, u) \\ g(w, u) \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

Resolvemos (1.21), eliminando δu :

$$\left(-\alpha \nabla \cdot \left(\frac{1}{|\nabla u|} \left(I - \frac{w \nabla u^T}{|\nabla u|} \right) \nabla \right) + I \right) \delta u = -g(w, u) \quad (1.22)$$

Después obtenemos δw :

$$\delta w = \frac{1}{|\nabla u|} \left(I - \frac{w \nabla u^T}{|\nabla u|} \right) \nabla \delta u - w + \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \quad (1.23)$$

La principal diferencia entre el método de punto fijo y el primal dual es la *ratio* de convergencia en sus dominios de convergencia. El último converge

cuadráticamente a la solución.

1.2.5. Elección del parámetro λ de la variación total

Es importante elegir un valor apropiado λ para obtener una buena restauración. Para obtener el λ más «adecuado» aplicaremos el método de *curva-L*, publicado por Hansen [Han01]. Este método permite obtener el λ , dibujando para un número de iteraciones fijas diferentes valores del parámetro frente al error relativo cometido. La gráfica que esperamos, es monótona decreciente y alcanzará el mínimo en algún valor en particular λ^* . El mínimo de esta curva (que se aproxima experimentalmente) nos da el valor óptimo.

1.2.6. Restauración por SECB

Es un método directo para deconvolver imágenes de clase \mathbf{W} , que definiremos posteriormente. Está fundamentado en el método de Tikhonov - Miller (en el sentido de mínimos cuadrados) y en el uso de una constante de regularización, que permite obtener la imagen con ciertas garantías.

1.2.6.1. Método de Tikhonov - Miller

Esta técnica fue diseñada para resolver ecuaciones integrales mal puestas, como la ecuación (1.6). En su forma más simple, requiere de una cota *a priori* en L^2 , para el ruido ε y otra para la imagen deseada M , de manera que

$$\|Ku - u_0\| \leq \varepsilon \quad \text{y} \quad \|u\| \leq M \quad (1.24)$$

cumpliéndose la relación $\frac{\varepsilon}{M} < 1$, es decir, tenemos más señal que ruido. En el artículo [Mil70], el autor propone minimizar funciones del tipo $\|u\|^2$ sujeto a la restricción

$$\|Ku - u_0\|^2 = \|n\|^2$$

Consiste en obtener u_{TM} tal que:

$$u_{TM} = \min_{u \in L^2(\Omega)} \|Ku - u_0\|_2^2 + \left(\frac{\varepsilon}{M}\right) \|u\|^2$$

cuyo mínimo es $u_{TM} = Q_{TM}^{-1} K^* u$ con Q_{TM} , el operador auto-adjunto positivo definido por:

$$Q_{TM} = K^* K + \left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^2 I$$

La diferencia entre éste método y el de Tikhonov § 1.2.1 está en que Miller determinó el valor de $\lambda = \frac{\varepsilon}{M}$ (el nivel de ruido/señal) de la imagen.

1.2.6.2. Método Slow Evolution Constraint (SECB)

La característica fundamental está en el uso de una constante que permite acotar el error en la imagen reconstruida, $u(x, y)$ en función del ruido ε , en la imagen degradada $u_0(x, y)$, que es posible gracias al método de Tikhonov - Miller. La diferencia con el anterior, está en que no se imponen restricciones de suavidad para la función $u(x, y)$ que queremos obtener.

Sean ε, M constantes conocidas y positivas, tales que

$$\|Ku - u_0\|_2 \leq \varepsilon, \quad \|u\| < M \quad (1.25)$$

Con $\varepsilon < M$. Para cualquier constante $\tilde{K} > 0$ que cumpla $\tilde{K} < \frac{M}{\varepsilon}$, suponemos que:

$$\|K^s u - u\| \leq \tilde{K} \varepsilon, \quad \frac{\varepsilon}{M} \ll 1 \quad (1.26)$$

siendo K^s el operador definido:

$$K^s u := \{\hat{k}^s(\xi, \eta) \hat{u}(\xi, \eta)\}^\vee$$

que está relacionado con las funciones de Green de la ecuación generalizada del calor que veremos en §1.32.

Dado \tilde{K} tal que $0 < \tilde{K} \ll \frac{M}{\varepsilon}$, entonces s^* , lo determinamos según la fórmula:

$$1 - \left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^{s^*} = \frac{\tilde{K} \varepsilon}{M} \Rightarrow s^* = \frac{\log\left(\frac{M}{M - \tilde{K} \varepsilon}\right)}{\log\left(\frac{M}{\varepsilon}\right)}$$

A s^* lo llamaremos *constante de evolución lenta*. Permite determinar el nivel de resolución máximo al que llega el método. Notar que cuando $s = 0$, el método *SECB* se convierte en el método Tikhonov-Miller.

Dados \tilde{K}, s , la *solución del SECB*, asociado a la ecuación (1.32), está definido como la solución del problema de optimización:

$$u_{secb} = \min_{u^* \in L^2(\Omega)} \|Ku^* - u_0\|_2^2 + \left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^2 \|u^*\|^2 + \tilde{K}^{-2} \|u^* - K^s u^*\|_2^2 \quad (1.27)$$

cuya solución es la función u_{secb} :

$$u_{secb} = Q_{secb}^{-1} K^* u_0 \quad Q_{secb} = K^* K + \tilde{K}^{-2} (I - K^s)^* (I - K^s)$$

bajo las condiciones expuestas en (1.26) sobre la imagen y el ruido; también supondremos que k es invariante por translaciones y determinamos u_{secb} por la transformada de Fourier, obteniendo:

$$\hat{u}_{secb}(\xi, \eta) = \frac{\hat{k}(\xi, \eta) \hat{u}_0(\xi, \eta)}{|\hat{k}(\xi, \eta)|^2 + (\varepsilon/M)^2 + \tilde{K}^{-2} |1 - \hat{k}^s(\xi, \eta)|^2} \quad (1.28)$$

Para conseguir u_{secb} , aplicamos la fórmula (1.33) a la ecuación anterior, que nos permite obtener una *restauración parcial* a cada paso.

Las imágenes de clase **W**, son aquellas cuyo $\log |\hat{f}^*(\xi, \eta)|$ es monótono decreciente en cualquier línea $r e^{i\theta}$ respecto a r , siendo $\hat{f}^*(\xi, \eta) = \frac{\hat{f}(\xi, \eta)}{\hat{f}(0, 0)}$.

Este método es adecuado para imágenes de clase **W** para las cuales, podemos estimar el valor K de la siguiente forma:

$$\tilde{K} \approx \frac{\|K^s f - f\|_2}{\varepsilon}$$

El método realiza los perfiles en una escala más fina, pero, para ser estable, tenemos que elegir entre una pérdida de contraste cuando aproximamos $u(s)$ para s cercano a cero, frente a un parámetro de regularización grande o un pequeño realce eligiendo un parámetro de regularización pequeño aunque no permita invertir la ecuación cuando s es cercano a 1.

1.3. Modelos de deconvolución ciega

En los métodos expuestos en secciones anteriores, el núcleo es conocido y habitualmente, suele ser gaussiano:

$$k(x, y) = \frac{1}{4\pi\alpha} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{4\alpha}}$$

La *deconvolución ciega* trata el mismo problema que la deconvolución cuando el núcleo es desconocido. En este caso tenemos que estimar un núcleo equivalente al que degradó la imagen original.

Presentaremos algunos de los métodos de la literatura que están asociados a la resolución de la ecuación (1.32).

1.3.1. Ecuación generalizada del calor

En los párrafos anteriores, §1.2.3, hemos hablado de los métodos de deconvolución más conocidos en la literatura. En estos trabajos, el núcleo procede de la ecuación del calor:

$$\left. \begin{aligned} u_t &= \Delta u \\ u(x, y, 0) &= u_0 \end{aligned} \right\} \quad (1.29)$$

cuya solución analítica es:

$$u(x, y, t) = u_0(x, y) * k(x, y, t) \quad (1.30)$$

$$k(x, y, t) = \frac{1}{t\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2t^2}} \quad (1.31)$$

Donde t representa el tiempo, u_t es la derivada de u respecto de t , Δ el operador laplaciano y $*$ el operador convolución.

Como es de esperar, cuando $t \rightarrow \infty$, la imagen original se volverá poco interesante pues se pierden sus detalles, es decir, se vuelve borrosa. Esto equivale a convolucionar la imagen con gaussianas de media nula y de amplitud variable, en función del tiempo.

La ecuación (1.30) es una ecuación integral de Fredholm de primera es-

pecie con núcleo k gaussiano. En la figura 1.1, mostramos la evolución de las soluciones de la ecuación del calor para diferentes valores del tiempo t .

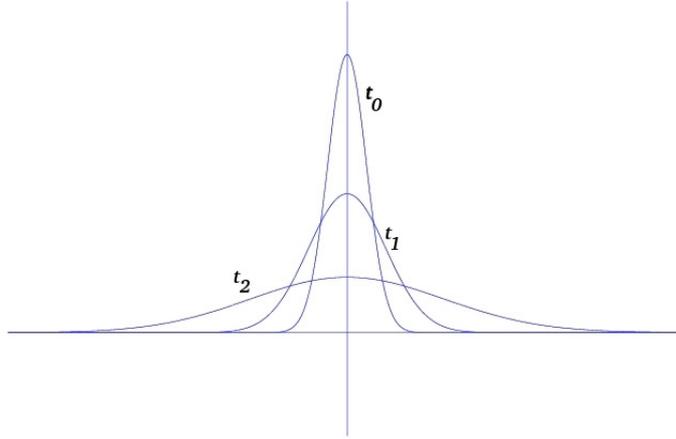


Figura 1.1: Evolución la ecuación del calor para la función delta Dirac. Aplicamos la ecuación (1.30), con diferentes pasos: $t_0 = 20$ pasos, $t_1 = 80$ pasos, $t_2 = 500$ pasos

Como hemos visto anteriormente, la solución fundamental (o función de Green), asociada a la ecuación de difusión, es una función de densidad de probabilidad normal cuya varianza es proporcional al tiempo.

El problema de la ecuación generalizada del calor que planteamos, es equivalente a determinar la distribución de temperatura en un instante inicial t ; en imágenes se traduce en reescribir u_0 como $u(x, y, 1)$ siendo $u(x, y, t)$ la única solución acotada del problema bien puesto:

$$\left. \begin{aligned} v_t &= - \sum_i \lambda_i (-\Delta)^{\beta_i} v & 0 < t \leq 1 \\ v(x, y, 1) &= u_0(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (1.32)$$

Con $\lambda_i = \alpha_i (4\pi^2)^{-\beta_i}$ y el $(-\Delta)^{\beta_i}$ definido en términos del dominio frecuencia como:

$$(-\Delta)^{\beta_i} u = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (\xi^2 + \eta^2)^{\beta_i} \widehat{u}(\xi, \eta) e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi \right) d\eta$$

Este problema lo podemos abordar vía transformada de Fourier. Las soluciones de (1.32) se obtienen definiendo potencias fraccionarias del operador de convolución:

$$K^t u := \{\widehat{k}^t(\xi, \eta) \widehat{u}(\xi, \eta)\}^\vee \quad (1.33)$$

Notar que si $\beta_i = 1$ entonces (1.32) es la ecuación de difusión clásica, pero cuando $\beta_i \in]0, 1[$, entonces tenemos un proceso de *difusión generalizada* y por tanto resolver (1.6) es matemáticamente equivalente a resolver la ecuación (1.32) empezando con la condición inicial en $t = 1$, $v(x, y, 1) = u_0(x, y)$ e ir resolviendo en fracciones de tiempo (1.32) hasta alcanzar $t = 0$, donde teóricamente tenemos la solución exacta $v(x, y, 0) = u(x, y)$. Este proceso recibe el nombre de *regresión en el tiempo* (*backwards-in-time*, [Car01]).

Para que el proceso sea *estable*, es necesario introducir una cota a priori en L^2 :

$$\|v(x, y, 0)\|_2 \leq M$$

siendo M una constante positiva.

Íntimamente relacionada con la *ecuación generalizada del calor*, tenemos las distribuciones Lévy, cuya transformada de Fourier satisface:

$$\widehat{k}(\xi, \eta) = e^{-\alpha(\xi^2 + \eta^2)^\beta} \quad (1.34)$$

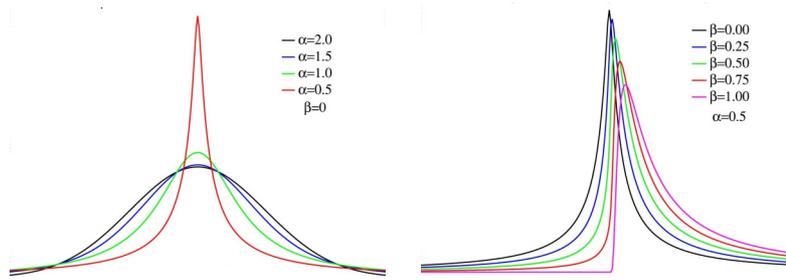


Figura 1.2: Distribución Lévy, con diferentes valores de α, β

Estas funciones de densidad (figura 1.2) tienen una serie de propiedades, entre las que destacamos:

1. Tienen infinitos momentos de orden entero. Los momentos absolutos de orden entero, que denotamos por δ , son finitos $\Leftrightarrow 0 < \delta < \frac{1}{2}$

2. Tienen media y varianza infinita, pero mediana finita.

Dada una función de densidad de probabilidad $f(x)$, su *función característica* viene dada por:

$$\varphi(f(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{izx} f(x) dx$$

La función característica puede interpretarse por el logaritmo:

$$\begin{cases} \ln(\varphi(f(x))) = i\mu z - v^\alpha |z|^\alpha \left(1 - \beta(\text{sig}(z)) \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right) & \text{para } \alpha \neq 1 \\ \ln(\varphi(f(x))) = i\mu z - v|z|^\alpha \left(1 - \beta(\text{sig}(z)) \left(\frac{2}{\pi} \ln(|z|)\right)\right) & \text{para } \alpha = 1 \end{cases}$$

El $\ln(\varphi(f(x)))$ tiene cuatro parámetros que lo caracterizan:

- *Índice de estabilidad* (α) que está en el rango $(0, 2]$ que mide la frecuencia de las grandes dispersiones. Está relacionado con el apuntamiento o kurtosis de la distribución, que describe lo picuda o plana que es la distribución. Es decir, si los datos se concentran demasiado o no, comparados con una distribución normal.
- *Sesgo* (β) que está en el intervalo $[-1, 1]$. Si $\beta = 0$ los datos son simétricos respecto a la media; valores negativos, implican asimetría izquierda y análogamente con los valores positivos, asimetría derecha.
- *Media* ($\mu \in \mathbb{R}$), es la media de la distribución.
- *parámetro de dispersión o de escala* (v): mide la variación de los datos.

Para $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 1$ tenemos la distribución Lévy y para $\alpha = 2$ la distribución gaussiana. Las distribuciones Gauss y Lévy constituyen una clase de distribuciones llamadas *estables*, caracterizadas por un índice de estabilidad $\alpha \in]0, 2]$. En particular para las distribuciones gaussianas, $\alpha = 2$ y en las de Lévy es $\alpha = \frac{1}{2}$.

Todas las funciones de densidad estables son unimodales y tienen forma de campana, varianza finita y son simétricas respecto a su media, para $0 < \gamma < 2$ y un grado de asimetría (*skewness*) arbitrario ($\gamma \notin]0, 2]$).

Como hemos visto anteriormente, la *deconvolución* consiste en recuperar la función original u a partir de k y de n . Los métodos expuestos anteriormente presuponen un conocimiento de k para obtener u . En la *deconvolución ciega*, para obtener u , es necesario formular una serie de hipótesis acerca del núcleo, k , que nos permitirán estimarlo. En el caso de pinturas o esculturas, dichas hipótesis que fueron formuladas en el capítulo (página XIII), nos conducen a núcleos *quasi-gaussianos* correspondientes a la ecuación generalizada del calor:

$$\widehat{k}(\xi, \eta) = e^{-\alpha(\xi^2 + \eta^2)^\beta} \quad \alpha > 0, \beta \in [0, 1]$$

que están relacionados con procesos de difusión generalizada del calor que hemos visto en §1.3.1.

1.3.2. Modelo SECB

En [Car01], se presenta el modelo SECB y un proceso basado en núcleos de clase \mathbf{G} , son los que verifican:

1. $\int_{\mathbb{R}^2} k(x, y) dx dy = 1$
2. $k(x, y) \geq 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$
3. $\widehat{k}(\xi, \eta) = e^{-\alpha(\xi^2 + \eta^2)^\beta} \quad \alpha > 0, 0 < \beta \leq 1$
4. $K^t f \equiv \left\{ \widehat{k}^t(\xi, \eta) \widehat{f}(\xi, \eta) \right\}^\vee, \quad f \in L^2(\mathbb{R}^2)$

Las condiciones 1 y 2, son condiciones que establecen que el núcleo es una función de densidad de probabilidad; las condiciones 3, 4 son fundamentales. La 3, determina el tipo de núcleo, *Lévy « puro »* que permite generalizar un gran número de distribuciones, como, por ejemplo, gaussianas y lorentzianas. Es decir, para $\beta = 1$ tenemos la *distribución gaussiana*, mientras que con $\beta = \frac{1}{2}$ tenemos la *distribución lorentziana o de Cauchy*. La 4 es importante, pues nos dice que \widehat{k} es solución de la ecuación (1.32) y permite definir potencias fraccionarias del operador convolución (ecuación (1.33)).

El método *SECB* funciona adecuadamente para imágenes \mathbf{W} y núcleos de clase \mathbf{G} . Adaptamos el método expuesto en la sección anterior se convierte en un método de deconvolución ciega. El problema ahora se centra en determinar el núcleo adecuado. En [Car01], da un procedimiento para determinar los parámetros, (α, β) . Para deducir las ecuaciones de ajuste logarítmico, utilizaremos dos métodos:

- **MÉTODO BEAK:** Suponemos que conocemos la imagen exacta u y estudiamos el comportamiento de $\log |\widehat{u}^*(\xi, \eta)|$ a lo largo de la línea $\eta = 0$ en el espacio de Fourier. Se puede elegir cualquier línea. Para simplificar tomaremos la línea $\eta = 0$, porque se obtienen resultados semejantes en otras direcciones.

Suponemos que la función $-a|\xi|^b$, $a, b > 0$, ajusta $\log |\widehat{u}^*(\xi, \eta)|$.

Partimos del modelo:

$$u_0(x, y) = k(x, y) * u(x, y) + n(x, y)$$

siendo $k(x, y)$ densidad Lévy pura.

Supondremos que el ruido tiene que cumplir:

$$\int_{\mathbb{R}^2} |n(x, y)| dx dy \ll \int_{\mathbb{R}^2} |u(x, y)| dx dy = \sigma > 0$$

Consideremos $\Psi_\omega = \{(\xi, \eta) : \xi^2 + \eta^2 \leq \omega\}$ entorno del origen tal que:

$$e^{-\alpha(\xi^2 + \eta^2)^\beta} |\widehat{u}^*(\xi, \eta)| \gg |\widehat{n}(\xi, \eta)|$$

Teniendo en cuenta lo anterior:

$$\begin{aligned} \log |\widehat{u}_0^*(\xi, \eta)| &= \log |e^{-\alpha(\xi^2 + \eta^2)^\beta} \widehat{u}^*(\xi, \eta) + \widehat{n}^*(\xi, \eta)| \approx \\ &\approx \log |e^{-\alpha(\xi^2 + \eta^2)^\beta} \widehat{u}^*(\xi, \eta)| \cdot \log |\widehat{n}^*(\xi, \eta)| \approx \\ &\approx \log |e^{-\alpha(\xi^2 + \eta^2)^\beta} \widehat{u}^*(\xi, \eta)| \approx \log |e^{-\alpha(\xi^2 + \eta^2)^\beta}| + \log |\widehat{u}^*(\xi, \eta)| \approx \\ &\approx -\alpha(\xi^2 + \eta^2)^\beta + \log |\widehat{u}^*(\xi, \eta)| \end{aligned}$$

Tomando la línea $\eta = 0$ en el espacio de Fourier:

$$\approx -\alpha|\xi^2|^\beta + \log \widehat{u}^*(\xi, 0)$$

Como sabemos que la curva de ajuste para $\log |\widehat{u}^*(\xi, 0)|$ es

$$-a|\xi|^b, a, b > 0$$

A partir de la ecuación anterior, definimos $v(\xi)$ como la ecuación que mejor ajusta el $\log |\widehat{u}_0^*(\xi, 0)|$ de la siguiente forma:

$$v(\xi) = -\alpha|\xi|^{2\beta} - a|\xi|^b$$

para $|\xi| \leq \omega$, que usaremos para determinar (α, β) cuando la imagen u es conocida. Notar que a, b se determinan previamente ajustando directamente $\log |\widehat{u}^*(\xi, 0)|$.

- **MÉTODO APEX:** Si no hay conocimiento de la imagen exacta, u , entonces no conocemos $\log |\widehat{u}^*(\xi, 0)|$. En este caso sustituimos $\log |\widehat{u}^*(\xi, 0)|$ por una constante $A > 0$, fijada con anterioridad, que llamaremos *apex (pico)* y se obtiene a partir de la observación del diagrama de $\log |u^*(\xi, 0)|$, en la frecuencia nula, que es el que nos da el pico.

La ecuación de ajuste para la determinación de los parámetros del kernel es:

$$\log |\widehat{u}_0^*(\xi, 0)| \approx -\alpha|\xi|^{2\beta} - A; \quad (\xi, 0) \in \Psi_\omega \quad (1.35)$$

Nótese que, cuando aumentamos el valor de A , decrece la curvatura de $\log |\widehat{u}_0^*(\xi, 0)|$ y que, cuando bajamos el valor de A se produce el efecto contrario.

Los parámetros α, β se determinan por ajuste no lineal por mínimos cuadrados (ver [ADA⁺02, Mon98]); posteriormente usamos la ecuación (1.28) para recuperar la imagen.

La forma integral de regularización de Tikhonov, §1.2.2, y el modelo SECB (ecuación (1.28)), tienen una serie de ventajas e inconvenientes, que

detallaremos en la siguiente sección. El algoritmo que vamos a presentar, que recibe el nombre de *híbrido* (que hemos desarrollado y publicado en [RC06]) permite aprovechar las ventajas de ambos métodos y disminuir sus inconvenientes.

1.3.3. Método Híbrido

La regularización de Tikhonov, en su forma integral, la podemos tratar como un método multirresolución, donde λ es el parámetro de resolución a partir del cual no hay variación en la deconvolución (salvo errores de redondeo). Por otro lado, con SECB se pueden recuperar escalas más finas, a cambio de aumentar la regularización y perder contraste.

Nuestra primera aportación es el método híbrido ([RC06]), que permite deconvolver las escalas finas, evitando la pérdida del contraste. El método está basado en los siguientes pasos:

1. A partir de la imagen degradada u_0 , obtenemos (α_0, β_0) para construir el núcleo k_1 , usando el método APEX (1.35).
2. Con el núcleo k_1 deconvolvemos u_0 usando la fórmula integral de Tikhonov, que denotamos u_{tri} .
3. Renormalizamos el núcleo de u_{tri} , es decir, usando el método APEX obtenemos los parámetros (α_1, β_1) para construir k_2 . Es necesario este paso, porque el operador laplaciano aproxima las discontinuidades por funciones suaves, preservando la textura, pero introduciendo un difuminado en la solución obtenida. Así obtenemos una predicción de la imagen que será corregida en el siguiente paso.
4. Aplicamos *SECB* (1.28) a la imagen u_{tri} para corregir el efecto de la difusión introducido en el paso anterior.

Este método lo podemos considerar como un método multiescala: detectamos el núcleo y deconvolvemos la imagen usando el modelo lineal en las escalas más groseras y corregimos los perfiles en las escalas más finas usando el *SECB*. Este proceso tiene la ventaja de que podemos alcanzar valores de

$t = 0$ reduciendo la pérdida del contraste, puesto que, al recuperar frecuencias muy altas, permite realzar los bordes en reducidos intervalos de t .

Esta idea permite obtener un método rápido, preservando características de la imagen (sin ruido), efectuando una regularización estable, como podemos ver en la figura 1.3. En este ejemplo hemos deconvuelto la imagen de Lena que fue degradada por convolución con un núcleo que procede de aplicar la ecuación del calor a una delta. En este caso podemos comprobar que el modelo lineal, recupera parte de los perfiles y las texturas. Aquí podemos observar el efecto que produce el laplaciano, que determina soluciones suaves. El modelo *SECB* (parte central derecha) necesita un parámetro $s = 0.001$, pequeño y un $K = 5$ pero a partir de $t = 0.632$ la imagen obtenida se caracteriza por la pérdida de contraste a medida que nos vamos acercando a 0. En la parte inferior podemos comprobar el resultado del modelo híbrido, que permite recuperar la imagen con valores de λ altos y permite alcanzar $t = 0$, pero conserva el contraste y recupera las texturas y perfiles respecto de los anteriores métodos pero la difusión es menor.

Este método, al igual que el que posteriormente introduciremos, no produce efectos ringing ni ruido en el proceso debido a su estabilidad y a las adecuadas condiciones de frontera.

La primera dificultad que presenta el modelo híbrido es la elección de la constante adecuada para realizar el ajuste por mínimos cuadrados, puesto que el autor en [Car01] propone determinarlo por inspección visual. Nosotros especificamos el valor de A como:

$$\int_{\Psi_\omega} \log |\hat{f}^*(\xi, 0)| d\xi$$

siendo $f(x, y)$ la función a ajustar en $0 \leq |\xi| \leq \omega$.

La segunda dificultad que presenta es la elección de los parámetros λ, s, K, t , de forma que permitan deconvolver la imagen con garantías. Es decir que permita recuperar la imagen en pequeños intervalos de t pero sin pérdida de contraste.

En primer lugar, la elección del λ tiene que ser grande $\lambda \approx 10^{10}$, que es un



Figura 1.3: *Superior izquierda*: Imagen original; *Superior derecha*: Imagen original convuelta con un núcleo procedente de aplicar 80 pasos de la ecuación del calor a una función delta $\left(\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = \frac{1}{2}\right)$; *Parte central izquierda*: *Deconvolución con el modelo lineal*; *Parte central derecha*: *Deconvolución con SECB*; *Parte inferior*: *Modelo híbrido*

parámetro que fijamos al principio. Esta λ es tan grande por la ausencia de ruido. En algunos casos hay que reducirlo si hay problemas con el contraste.

Los parámetros s, t, K para el método *SECB* también hay que aproximarlos. Para el nivel de resolución s , le asignamos el valor de α . Esto permite relacionar el parámetro de la escala de la distribución Lévy con el nivel de resolución del método.

Por otro lado, están los valores de t, K , que son los que controlan la estabilidad y contraste en la deconvolución. Para identificarlos, usamos un proceso que consiste en dividir el intervalo $[0, 1]$ en dos partes $[0, 1] = [0, \frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 1]$. Llamamos $M = \|u_0\|_2$. Deconvolvemos la imagen usando la ecuación (1.33) aplicado a $K^t u_{tri}$ en ambos intervalos correspondiente al rango de t , discretizándolo con paso $h = \frac{1}{2n}$, siendo n el número de evaluaciones deseadas. Elegimos $K = 10t$, de manera que este valor está asociado al t . Si $\|K^{t+1}u_{tri} - K^t u_{tri}\|_2$ está cercano a M o es menor que la tolerancia dada en algún intervalo, éste se desecha y cambiamos de intervalo, pues en este caso, nos dice que no hay variación entre la imagen original y la deconvuelta. En otro caso la $\|K^{t+1}u_{tri} - K^t u_{tri}\|_2 < tol$ siendo tol la tolerancia prefijada, en ambos intervalos. El algoritmo finaliza tomando como la imagen deconvuelta aquella cuya norma sea mayor que M .

El método híbrido es un método fraccionario. Fue el primer método que usamos como primera aproximación a la deconvolución fraccionaria ([RC06]), pero planteó una serie de problemas (que veremos posteriormente) y que dio lugar a la regularización basada en potencias fraccionarias del operador laplaciano ([RC08]), que nos permite recuperar con más precisión los perfiles y las texturas. Esto supone una nueva regularización, puesto que permite establecer una relación entre los parámetros del núcleo y la regularización. Otra de las mejoras del método publicado en [RC08], es ampliar el método APEX a una gran variedad de imágenes, de manera que no esté restringido a la clase \mathbf{W} . Otra de las ventajas es automatizar el procedimiento de deconvolución, reduciendo el número de parámetros que será usado por personas que no son especialistas en la materia (restauradores). En caso que los resultados puedan ser insatisfactorios, el algoritmo permite la intervención del usuario.

El método híbrido es el precursor de la siguiente aportación,

basada en la regularización por operadores fraccionarios [RC08], y que presentaremos en la próxima sección. La ventaja de usar operadores fraccionarios es que nos permite «deformar» el espacio escala, aproximando las discontinuidades a través del laplaciano fraccional. También analizaremos la deconvolución y el *denoising* así como los dos problemas conjuntamente, comparando los resultados con otros métodos expuestos en la literatura.

1.4. Regularización por potencias fraccionarias del operador laplaciano

Las limitaciones expuestas anteriormente han dado lugar a la aportación más importante de esta tesis: el *modelo lineal fraccionario recursivo* que usa como regularizador potencias fraccionarias del laplaciano, determinando a cada paso el núcleo en un rango de frecuencias, lo que permite ampliar la clase de imágenes a la que podemos aplicar dicho método (ahora no necesitamos que las imágenes sean de clase \mathbf{W}) y una nueva regularización basada en las potencias del laplaciano, recuperando las escalas intermedias.

Este modelo lo hemos aplicado tanto a imágenes académicas como reales. En particular, el modelo fraccionario ha sido aplicado al caso del retablo de la Iglesia San Bartolomé, que comprende períodos desde el renacimiento hasta el neoclasicismo. Esta clase de imágenes tiene varias particularidades: amplia gama de colores y contrastes, como juegos de luz y torsión, lo que plantea serias dificultades a la hora de recuperar estas características que se deterioraron por el proceso de difusión en la toma de imágenes. En el futuro lo extenderemos a otro tipo de estilos, como puntillismo, realismo, cubismo, etc.

En este apartado, presentaremos los núcleos casi-gaussianos o núcleos generalizados, definidos como funciones de Green de la ecuación generalizada del calor (1.32). Esta ecuación aparece en acústica, como un modelo de atenuación dependiente de las frecuencias; en cinética, para difusión limitada a modelos de agregación, ritmo cardíaco, entre otras aplicaciones [Fra00].

Los núcleos casi-gaussianos están definidos como convoluciones de funcio-

nes G^{β_i} , de manera que su transformada de Fourier es una potencia fraccionaria de la gaussiana (núcleos divisibles finitamente):

$$\widehat{G^{\beta_i}}(\omega, \eta) = \exp(-\alpha_i(\omega^2 + \eta^2)^{\beta_i})$$

Un kernel k es *casi-gaussiano* si:

$$k = G^{\beta_1} * G^{\beta_2} * \dots * G^{\beta_n} \quad (1.36)$$

Los núcleos gaussianos son claramente casi-gaussianos. La descomposición (1.36) implica:

$$\widehat{k}(\omega, \eta) = \exp\left(-\sum_i \alpha_i(\omega^2 + \eta^2)^{\beta_i}\right) \quad (1.37)$$

Por tanto, cualquier kernel casi-gaussiano lo podemos aproximar por descomposiciones del tipo (1.36), en un determinado rango de frecuencias. $G(\omega, \eta) = \exp(-\alpha(\omega^2 + \eta^2)^\beta)$ lo podemos aproximar por (1.36) si:

$$\alpha(\omega^2 + \eta^2)^\beta \approx \sum_i \alpha_i(\omega^2 + \eta^2)^{\beta_i}$$

Si $\beta_i \leq 0.5$, entonces la aproximación no es polinómica puesto que la parte derecha de la ecuación anterior no es diferenciable; en este caso presenta varios grados de suavidad basados no solamente en la varianza de la distribución, como ocurre cuando es gaussiano, sino que afecta también a la diferenciabilidad del núcleo, que nos permite discriminar perfiles en escalas finas al contrario de lo que ocurre con las gaussianas.

Los parámetros α, β tienen un papel muy relevante: α mide la dispersión (notar que no es la varianza como en las gaussianas, puesto que las distribuciones Lévy pueden tener varianza infinita); por otro lado, β mide la diferenciabilidad, que está asociada al proceso lineal: cuanto más lineal (uniforme), mayor regularización y el β es más grande. En otras palabras, en el contexto de la ecuación generalizada del calor, α está relacionado con la escala espacial y β con la temporal.

Una sucesión de convoluciones de núcleos suaves puede ser aproximada

por descomposiciones del tipo (1.36). Los núcleos casi-gaussianos introducen una descomposición del espacio-escala, adecuado para análisis de imágenes ([DBIW05]). La ventaja de usar potencias fraccionarias es que éstas permiten analizar el espacio-escala de forma lineal (según la dispersión) y no lineal (regularización), esto es el análisis espacio-frecuencia-escala.

Otra dificultad, después de discretizar, es que hay diferentes núcleos que pueden dar la misma convolución, es decir, dados u y u_0 con una determinada resolución, hay diferentes núcleos k tales que $u_0 \approx k * u$ (el símbolo \approx significa que ambas funciones son iguales en una resolución dada y en la correspondiente discretización). Esto no es un grave inconveniente puesto que, por un lado, en la deconvolución ciega estamos más interesados en recuperar u que k y por otro, el problema de la unicidad no es fundamental en este contexto.

Para esta clase amplia de núcleos proponemos el siguiente modelo:

$$-(-\Delta)^\beta u + \lambda k * (k * u - u_0) = 0 \quad (1.38)$$

Esta ecuación está definida para funciones $u \in H^{\frac{\beta}{2}}$, permite soluciones menos regulares que otras presentes en la literatura, que necesitan derivadas de al menos primer orden, como por ejemplo en [CMS03], donde usan la regularización de Tikhonov o la TV-norma (como en [LNN06] basada en el modelo Mumford-Shah). En la TV-norma aparecen funciones discontinuas. Es la regularización $|\nabla u|$ (gradiente) la que exige regularidad.

En primer lugar, el operador $-\Delta$ es positivo y $(-\Delta)^\beta$ está bien definido y, además, lo podemos evaluar vía transformada de Fourier:

$$\widehat{(-\Delta)^\beta u} = c \cdot (\omega^2 + \eta^2)^\beta \cdot \widehat{u}(\omega, \eta)$$

Donde c es una constante de normalización.

El caso $\beta = 1$, se corresponde con la regularización de Tikhonov. La regularización de la variación total no se corresponde con ningún valor de β . β reduce el grado de suavidad de u , en el sentido de que si $u \in \mathcal{C}^p$ entonces $(-\Delta)^\beta u \in \mathcal{C}^{p-2\beta}$.

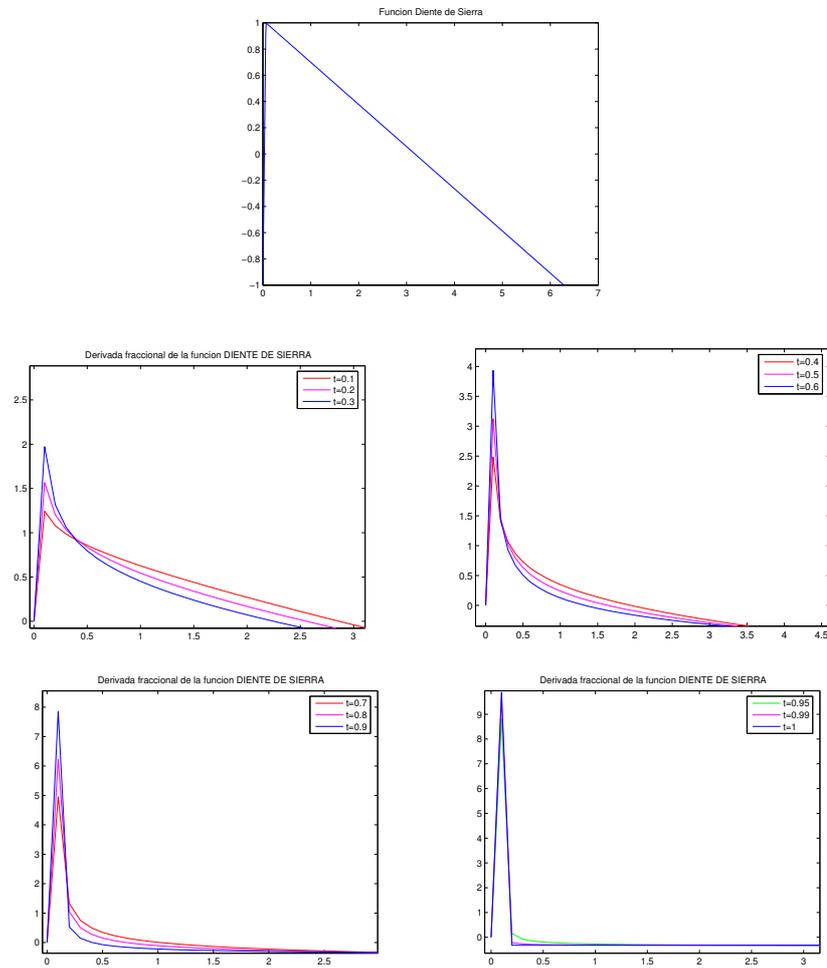


Figura 1.4: Derivadas de orden fraccionario $t \in [0, 1]$, para la función diente de sierra. Podemos comprobar el comportamiento del término de regularización de (1.38). De esta forma podemos ver la suma de las contribuciones de las derivadas de orden fraccionario para aproximar derivadas de orden entero de funciones no suaves

$\beta = \frac{1}{2}$ equivale a usar la regularización del gradiente. Para $0 < \beta < \frac{1}{2}$, la clase de funciones para las que podemos evaluar la expresión (1.38) es muy extensa respecto a los modelos anteriormente expuestos y son menos restrictivas respecto a la diferenciabilidad (ver figuras 1.4 y 1.5).

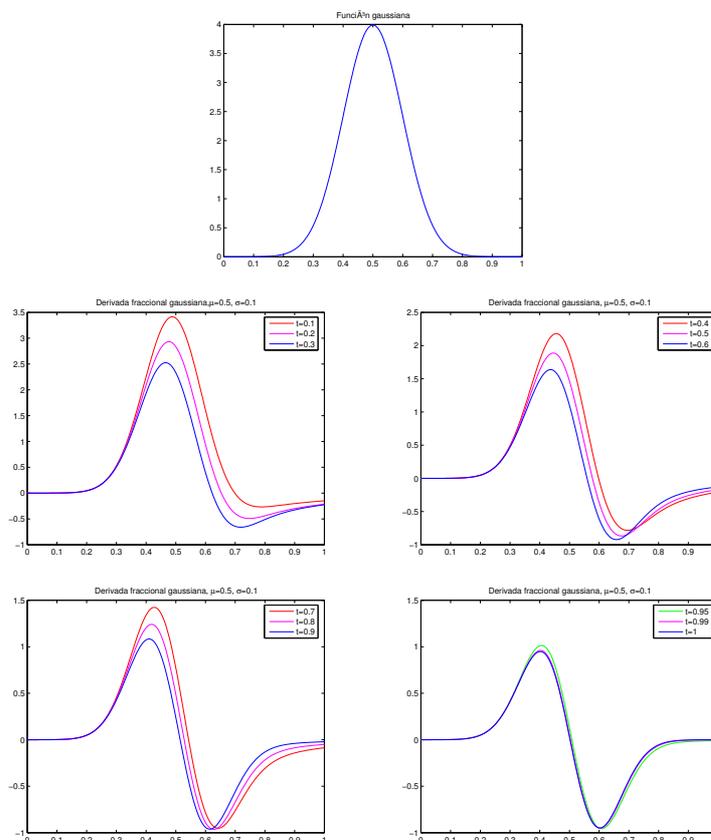


Figura 1.5: Derivadas de orden fraccionario $t \in [0, 1]$, para la función gaussiana. Podemos comprobar el comportamiento del término de regularización de (1.38). De esta forma podemos ver la suma de las contribuciones de las derivadas de orden fraccionario para aproximar derivadas de orden entero de funciones suaves

La ecuación (1.38) permite recuperar altas frecuencias (y por tanto imágenes nítidas) cuando β es pequeña. Por otro lado, podemos obtener la misma regularización en altas frecuencias cuando λ es más grande, y por lo tanto regularizamos menos en las bajas frecuencias. Equilibrando λ y β , podemos conseguir la cantidad deseada de suavidad en el rango de frecuencias que elijamos. Aunque nuestro modelo se concibió para solventar el problema de la deconvolución pura, comprobaremos que funciona mejor que la regularización de Tikhonov en presencia del ruido para $\beta < 1$, porque permite recuperar altas frecuencias sin amplificarlas. La solución al modelo propuesto, (1.38), la obtenemos por transformada de Fourier:

$$\widehat{u}(\omega, \eta) = \frac{\widehat{k}(\omega, \eta) \widehat{u}_0(\omega, \eta)}{\phi(\omega^2 + \eta^2)^\beta + \widehat{k}(\omega, \eta)^2}; \quad \phi = \frac{c}{\lambda} \quad (1.39)$$

En la fórmula anterior podemos ver el efecto del parámetro β : con la misma regularización, ϕ , obtenemos frecuencias altas. Notar que tanto ϕ como β desarrollan papeles diferentes (regularización lineal y no lineal, respectivamente). Un análisis similar al realizado en [CMS03] puede ser aplicado en parte a este modelo. La transformada coseno discreta es una forma rápida de obtener u y el modelo permite localizar las condiciones de frontera cuando son adecuadas.

El modelo es válido para cualquier β (con distinta precisión). Cuando el núcleo es una potencia fraccionaria de una gaussiana, G^γ , es especialmente interesante si β y γ son iguales. Se deduce de (1.39) que en este caso podemos recuperar frecuencias más regularizadas. Un β mayor que γ permite recuperar menos frecuencias y las frecuencias obtenidas con un β menor son redundantes, porque están por debajo de la resolución, lo que produce efecto *aliasing* y oscilaciones tipo *ringing*. El modelo que presentamos permite reducir el β pero, a su vez, recuperan frecuencias altas, de manera que, en el rango de frecuencias donde trabajamos, no hay efecto aliasing.

1.4.1. Modelo de deconvolución fraccionaria

El modelo anterior lo empleamos para la deconvolución de imágenes donde conocemos el núcleo. La elección de la clase de los núcleos que hemos considerado se puede aplicar a la deconvolución ciega.

Como hemos explicado anteriormente, la deconvolución la podemos conectar con la resolución de una ecuación parabólica, por ejemplo, la ecuación del calor, pero invirtiendo el tiempo, es decir:

$$v_t = a v_{xx}$$

con condición final:

$$v(1) = u_0$$

La deconvolución es equivalente a obtener $u = v(0)$. Aunque es un problema

mal puesto (no tiene solución única y además no es estable), para un paso pequeño del tiempo puede ser resuelta. Este es el principio presente en el método SECB, §1.2.6, ([Car01, Car99a]). El punto clave de la deconvolución que presentamos es que (1.38) es estable para β pequeño.

Por su propia definición, G^β depende de dos parámetros: α, β . Para estimar el núcleo, tenemos que ajustar ambos parámetros, uno de ellos mediante el método APEX ([Car02]). Adaptamos algunas ideas del método y proponemos el siguiente, cuyo fundamento está en fijar una de las frecuencias, por ejemplo $\eta = 0$, y realizar un ajuste logarítmico de la transformada de Fourier de los datos. Recordamos el método APEX:

$$u_0 = G^\beta * u$$

$$\widehat{u}_0 \approx \widehat{G}^\beta \widehat{u}$$

(De hecho, podemos considerar que para la deconvolución pura, \approx se convierte en igualdad).

$$\widehat{u}_0(\omega, \eta) \approx \exp(-\alpha(\omega^2 + \eta^2)^\beta) \cdot \widehat{u}(\omega, \eta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log(|\widehat{u}_0(\omega, \eta)|) \approx -\alpha(\omega^2 + \eta^2)^\beta + \log(|\widehat{u}(\omega, \eta)|)$$

Para obtener una buena aproximación para α, β podemos fijar una de las frecuencias. Por simplicidad consideramos $\eta = 0$:

$$\log(|\widehat{u}(\omega, 0)|) - \log(|\widehat{u}_0(\omega, 0)|) \approx \alpha|\omega|^{2\beta} \quad (1.40)$$

u es desconocido. Una buena estrategia consiste en aproximar u por una constante A . Si la media se conserva después de la convolución, $\widehat{u}(0, 0) = \widehat{u}_0(0, 0)$, escogemos $A = \widehat{u}_0(0, 0)$, cuando la imagen es de clase \mathbf{W} , es decir, $\widehat{u}_0(0, 0) \geq \widehat{u}_0(\omega, 0) \forall \omega$. Actualmente hemos modificado este algoritmo para extenderlo a aquellas imágenes que no son estrictamente de clase \mathbf{W} , ajustando sólo en un pequeño rango de frecuencias y eligiendo la constante $A = \max_{\omega} \{\widehat{u}_0(\omega, 0)\}$, que nos permite extender el algoritmo a una clase más amplia de imágenes.

Los parámetros α, β de la fórmula :

$$A - \log(|\widehat{u}_0(\omega, 0)|) \approx \alpha|\omega|^{2\beta} \quad (1.41)$$

los obtenemos por mínimos cuadrados.

El algoritmo de deconvolución ciega combina (1.40) y (1.41) para obtener el núcleo:

Algoritmo 1.4.1: Algoritmo para el método fraccionario

Entradas: u_0

Salidas: Imagen deconvuelta: u_k

$$k_0 : \log(|\widehat{u}_0(\xi, 0)|) - \int_{\Psi_\omega} |\log \widehat{u}_0|;$$

$$u_1 = -(-\Delta)^\beta u_0 + \lambda k_0 * (k_0 * u_0 - u_0) = 0;$$

while $|\alpha_m - \alpha_{m+1}| < \varepsilon$ & $|\beta_m - \beta_{m+1}| < \varepsilon$ **do**

$$\left[\begin{array}{l} k_j : -\alpha|\xi|^{2\beta} + \log(|\widehat{u}_{j-1}(\xi, 0)|); \\ -(-\Delta)^\beta u_j - \lambda k_j * (k_j * u_j - u_0) = 0; \end{array} \right.$$

$$u = \lim_k u_k ;$$

El proceso finaliza cuando $|\alpha_k - \alpha_{k+1}| < \varepsilon$ y $|\beta_k - \beta_{k+1}| < \varepsilon$ o $\beta_{k+1} > \beta_k$. La primera condición muestra que entre dos iteraciones no hay cambio en los parámetros, lo que indica que no hay variación en la deconvolución y por tanto alcanzamos el estado estacionario, mientras que la segunda desigualdad, pérdida de monotonía, implica pérdida de la calidad de la imagen. Estas condiciones permiten dar un criterio de parada. En la práctica son pocos los pasos necesarios (en los experimentos realizados, entre tres y cuatro pasos suelen ser suficientes).

A partir de la ecuación (1.39), cada iterado u_k resultante del proceso anterior, es una deconvolución de u_0 para el núcleo $G = G_0^{\beta_0} * G_1^{\beta_1} * \dots * G_{k-1}^{\beta_{k-1}}$, de acuerdo con la ecuación:

$$-\sum_{m=0}^{k-1} \phi_m(-\Delta)^{\beta_m} (H_m * u_k) + G * (G * u_k - u_0) = 0 \quad (1.42)$$

donde $H_m = G_0^{\beta_0} * \dots * G_{m-1}^{\beta_{m-1}} * \dots * G_{m+1}^{\beta_{m+1}} * \dots * G_{k-1}^{\beta_{k-1}}$, si los parámetros

$\phi_m = \frac{1}{\lambda_m}$ son suficientemente pequeños para considerar los productos $\phi_m \phi_k$ despreciables.

En la práctica (1.42) es una deconvolución del tipo (1.38), que regulariza cada término de la descomposición con diferente orden. Cuando los exponentes de la gaussiana y el laplaciano son iguales, todos los términos que intervienen en la suma son homogéneamente suavizados y por tanto equilibra la parte de la deconvolución en la ecuación. Aunque este tipo de recurrencia no se recomienda normalmente cuando se utiliza la regularización de Tikhonov, porque el ruido puede amplificarse ([Car01]), en este modelo la homogeneidad de los exponentes controla la regularización en cada iteración. En este caso, *ambos*, regularización y núcleo, son descompuestos al mismo tiempo, con el fin de estabilizar el proceso.

En resumen, el algoritmo descompone la regularización añadiendo una pequeña parte del suavizado (la más adecuada) en cada iteración, relacionada con la escala (frecuencias que son resueltas en cada paso). En este sentido, el auto-proceso iterativo regulariza dinámicamente (el término de regularización cambia a cada iteración), controlando el ruido que produce el algoritmo y el *blur*. El resultado es que la mayoría de las frecuencias pueden recuperarse, como veremos en la siguiente sección.

El método ha sido probado con dos tipos de núcleos: desenfoque («out-of-focus») y el núcleo de movimiento, («motion blur»), cuyas ecuaciones vienen dadas por:

- «*Out of focus*»:

$$k(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi R^2}, & \text{Si } (x, y) \in \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq R^2\} \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases} \quad (1.43)$$

- «*Motion blur*»

$$k(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{L}, & \text{Si } \sqrt{x^2 + y^2} \leq \frac{L}{2}, \frac{x}{y} = -\tan(\varphi) \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases} \quad (1.44)$$

Este tipo de núcleos tienen interés dentro del tratamiento de imágenes, porque el primero modeliza los errores cometidos por una mala distancia focal y el segundo, el movimiento aparente a gran velocidad de objetos en una imagen fija (fotografía) o una secuencia de imágenes como una película o animación.

El método ha sido usado para los núcleos presentados anteriormente, que no son gaussianos. El método también funciona en estos casos más generales pero los resultados no son tan favorables como cuando se aplican a núcleos casi-gaussianos, como veremos la sección de ejemplos, §1.4.3, fundamentalmente porque no consideramos la fase, así como el estudio de núcleos asimétricos que será objeto de líneas futuras de investigación.

1.4.2. Deconvolución de imágenes ruidosas

En esta sección vamos a tratar el problema de *deconvolver y eliminar ruido al mismo tiempo*. El problema conlleva una serie de dificultades. Para eliminar el ruido, tenemos que hacer un suavizado de la imagen. La deconvolución amplifica las diferencias aumentando el ruido. En este caso tenemos que establecer un equilibrio en los parámetros que nos permita deconvolver y eliminar el ruido al mismo tiempo. Otra de las dificultades del ruido es la determinación del núcleo, puesto que el ruido «aleatoriza» el diagrama de datos que usamos para determinar α, β . Por tanto el núcleo determinado distribuye el ruido en la imagen, es decir, el ruido no se elimina completamente.

Nuestro modelo es válido para deconvolver imágenes ruidosas. En este caso, la idea está en que no es necesario que $\beta = \gamma$, es decir, que la potencia del laplaciano y la gaussiana no tienen porqué ser idénticas.

La clave del método está en la elección óptima de parámetros de forma que nos permita deconvolver la imagen y reducir el ruido. El parámetro adicional λ tiene un rol decisivo, actúa como un coeficiente de eliminación de ruido, mientras que β determina las frecuencias a deconvolver que permiten un buen resultado (ver figuras 1.6, 1.7). Una estrategia para aproximar estos parámetros es relacionarlos de acuerdo con la cantidad de ruido estimado en la imagen degradada. Como regla general, pequeños valores de β permiten

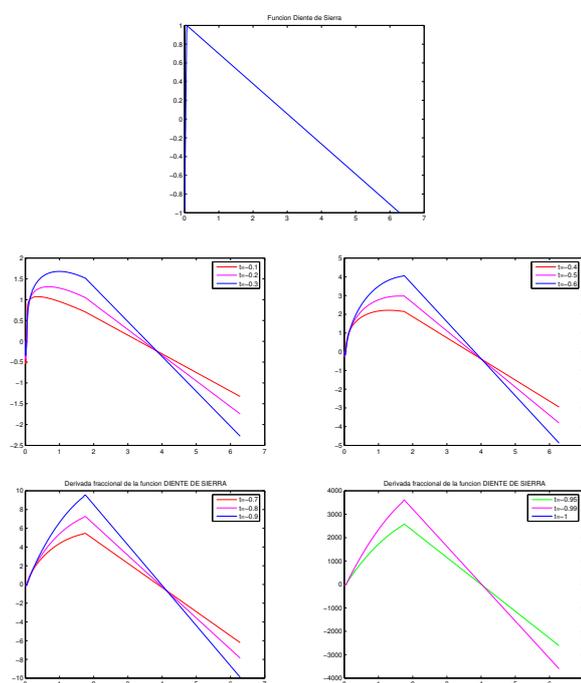


Figura 1.6: Derivada fraccional de la función diente de sierra, para $\beta < 0$. Notar que en este caso estamos integrando, lo que implica un suavizado de la función original.

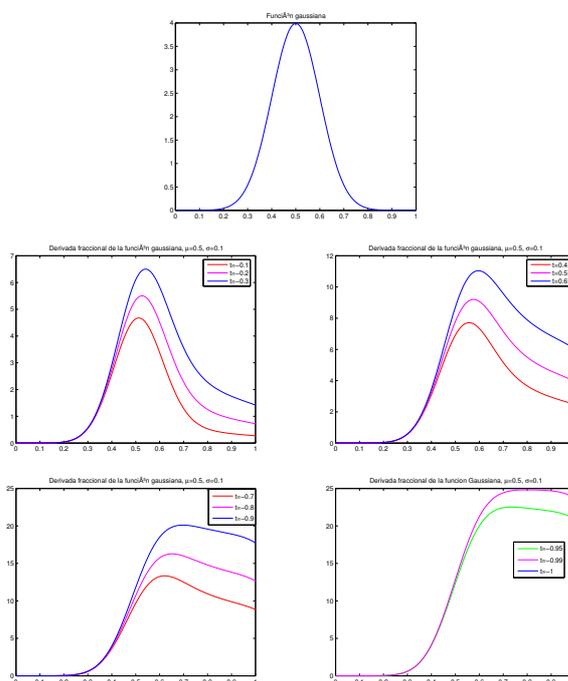


Figura 1.7: Derivadas de orden fraccionario $t \in [0, 1]$, para la función gaussiana, para $\beta < 0$. Notar que en este caso estamos integrando, lo que implica un suavizado de la función original. En el caso de la gaussiana cuando $\beta = -1$ tenemos la función de distribución normal

valores de λ mayores que podemos usar para las imágenes ruidosas.

En los ejemplos que presentamos, hemos implementado la elección de parámetros automática e independientemente del usuario.

1.4.3. Ejemplos

En esta sección presentamos algunos ejemplos ilustrativos sobre el método presentado. En las *figuras 1.8 y 1.9* mostramos cómo deconvolucionamos el algoritmo (página 44) a cada paso y la secuencia de núcleos detectados.

Como podemos ver, la suavidad de los núcleos depende de las características de la imagen. En la *figura 1.9*, alguna textura puede detectarse en el paso inicial, y para nosotros, el exponente es grande (el kernel es próximo al laplaciano); mientras que en el ejemplo (*figura 1.8*) los rasgos no los podemos distinguir en los primeros pasos y el núcleo está próximo a una función delta.

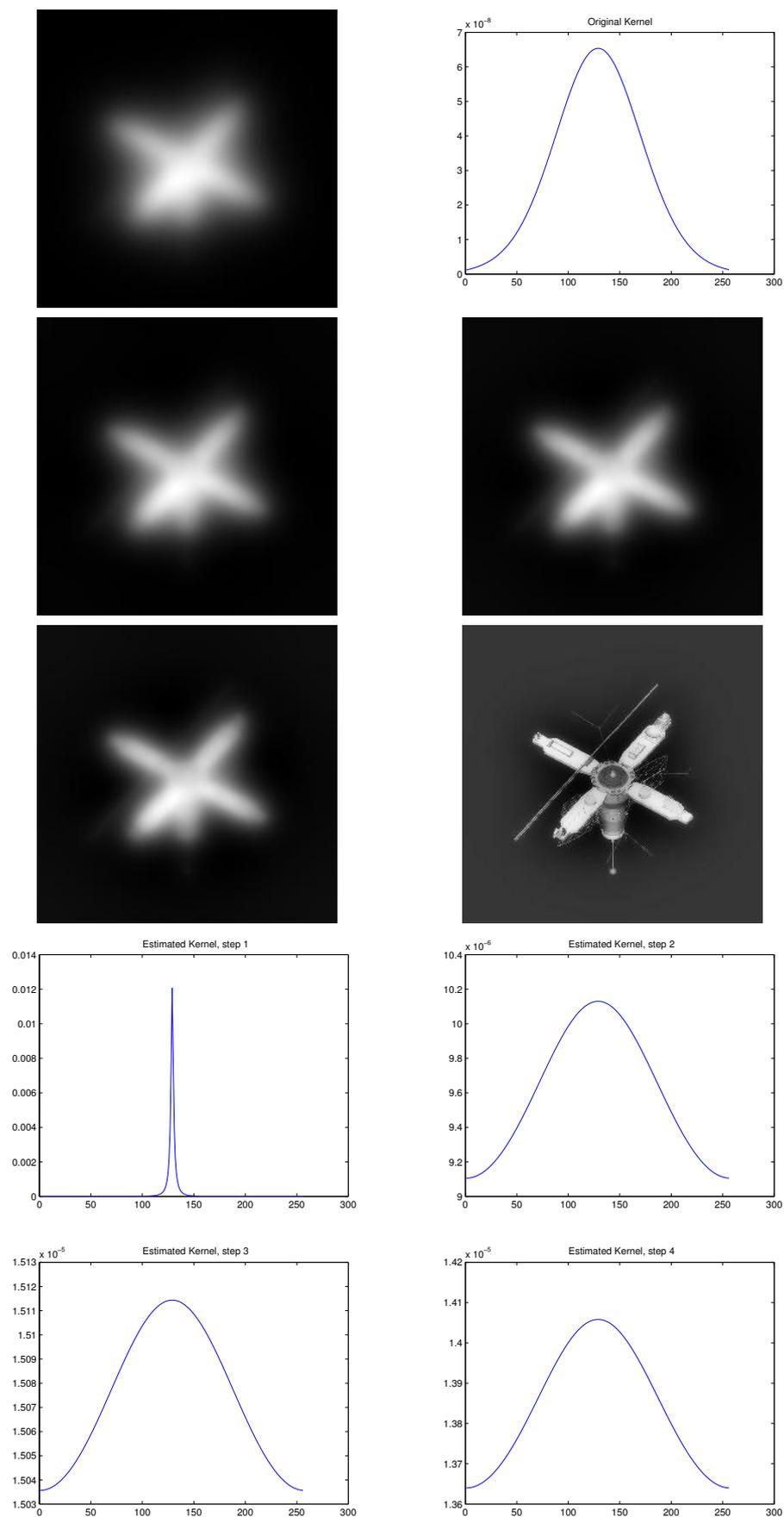


Figura 1.8: Parte superior: Imagen convuelta y el núcleo (satélite). Parte inferior: Secuencia de deconvoluciones ciegas con los correspondientes núcleos detectados.

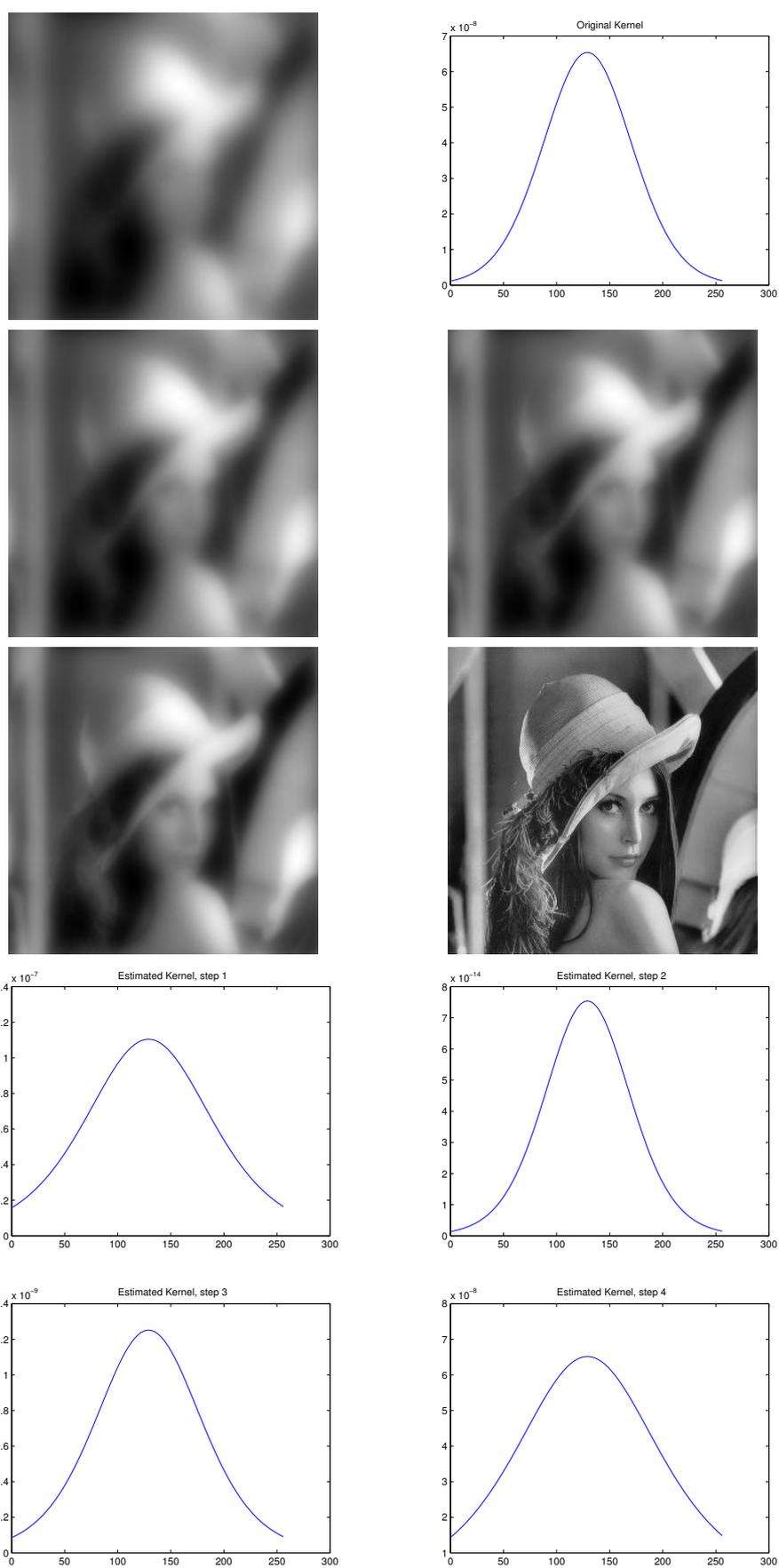


Figura 1.9: Parte superior: Imagen convuelta y núcleo (Lena). Parte inferior: Secuencia de deconvoluciones ciegas con sus correspondientes núcleos detectados.

En ambos casos, obtenemos una deconvolución convincente en cuatro pasos. Los núcleos son suavizados a cada paso, tal y como expusimos en la sección §1.4.

Notar el hecho de que el núcleo obtenido al final del proceso es una buena aproximación al núcleo original. Como hemos dicho anteriormente, el problema de la deconvolución está mal puesto: núcleos distintos puedan dar resultados similares. Compararemos con otros métodos propuestos en la literatura, como el modelo lineal ([CMS03]), la implementación de la variación total basada en el algoritmo de minimización alternada (AM), [CW98] y el SECB [Car01]. El algoritmo fraccional funciona mejor que otros, en especial cuando hay presencia de gaussianas con varianza grande (ver *figura 1.10*).



Figura 1.10: Deconvolución de 1.9 con diferentes modelos. (1): Deconvolución con el Modelo Lineal. (2): Restauración por variación total. (3) SECB. (4) Deconvolución ciega fraccional.

Notar que en éstos ejemplos no hay presencia de ruido (el método tampoco lo introduce) ni *ringing*.

En los ejemplos (*figura 1.11*, *figura 1.13*), mostramos la importancia del método para imágenes ruidosas con diferentes núcleos gaussianos. Como podemos comprobar, el ruido se reduce pero no hay pérdida en la calidad de la imagen deconvuelta. Estos ejemplos son muy ilustrativos respecto al ruido después de la deconvolución: en los detalles podemos ver la dificultad que hay para equilibrar deconvolución y eliminación del ruido, que es reducido pero no eliminado por completo (*figuras 1.12*, *1.14*).

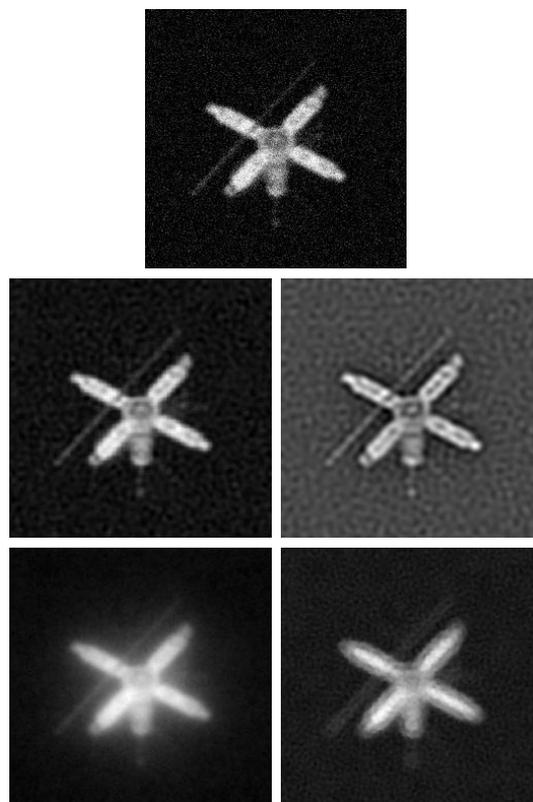


Figura 1.11: Parte superior: Satélite convuelto con ruido gaussiano $\sigma = 2$ y $SNR = 5.14$. Deconvoluciones: Parte central izquierda: Modelo fraccionario. Parte central derecha: Modelo lineal. Parte inferior izquierda: SECB. Parte superior derecha: TV

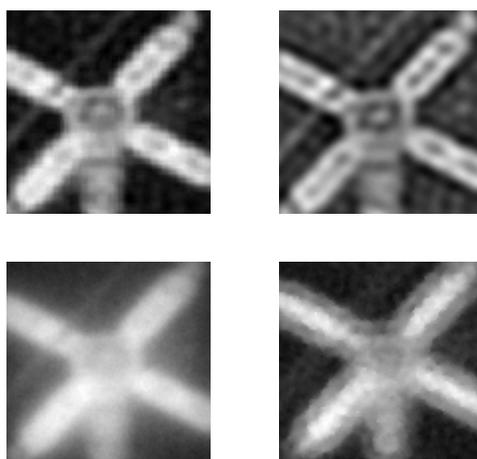


Figura 1.12: Detalles de la deconvolución y denoising del satélite de 1.11.

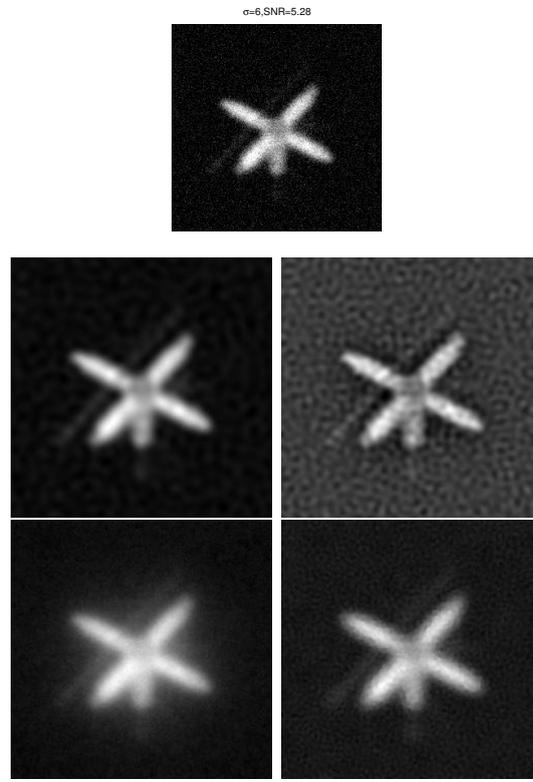


Figura 1.13: Parte superior: Satélite convuelto con $\sigma = 6$ con ruido gaussiano $SNR = 5.28$. Deconvoluciones: Parte central izquierda: Modelo fraccional. Parte central derecha: Modelo lineal. Parte inferior izquierda: SECB. Parte superior derecha: TV

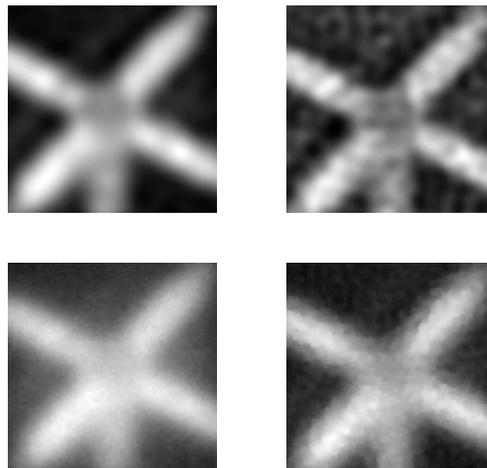


Figura 1.14: Detalles de la deconvolución y denoising del satélite 1.13



Figura 1.15: Núcleo de desenfoque: $R = 5$, Parte superior izquierda: Imagen convuelta con núcleo de desenfoque. Parte superior derecha: Nuestro modelo (fraccional). Parte inferior izquierda: Restauración por variación total. Parte inferior derecha: Restauración SECB.

Finalmente, vemos otros ejemplos para otros tipos de núcleos: *out-of-focus* (ecuación (1.43)) y *kernel de movimiento (motion blur)* (ecuación (1.44)) que no son tan alentadores como los anteriores ejemplos, pero sí indicativos acerca de la adaptación del modelo en casos más generales. Para el *desenfoque*, figura 1.15, el modelo muestra resultados interesantes. El primer requisito sobre estos núcleos es la simetría radial (correspondiente a simetrías en el espacio de frecuencias). Aunque el núcleo de movimiento, tiene simetría axial, $k(x, y) = k(-x, -y)$, no tiene simetría radial, porque depende del ángulo, en el que está orientado en el plano de fases. No incluimos resultados de la deconvolución lineal porque no está diseñado para este tipo de núcleos. Como vemos, nuestro algoritmo no deteriora la imagen, pero creemos que es posible mejorar los resultados si introducimos un parámetro de asimetría (que es posible en distribuciones Lévy).



Figura 1.16: Núcleo de movimiento: $R = 10, \theta = 45$, Parte superior izquierda: Imagen convuelta con un núcleo de movimiento. Parte superior derecha: Nuestro modelo (fraccional). Parte inferior izquierda: Restauración por variación total. Parte inferior derecha: Restauración SECB .

En nuestro proyecto, debido a las peticiones de los restauradores, quienes no usan ordenadores computacionalmente potentes, los ejemplos mostrados, fueron ejecutados en un PC, Pentium II, con *GNU/LINUX*. Los tiempos de *CPU* varían entre 1.2 segundos y 3.6 segundos; es rápido gracias al uso de la FFT. En comparación con otros algoritmos, únicamente SECB ([Car01] es más rápido (es directo pero usa otro algoritmo que requiere el uso de la FFT después de ajustar los parámetros). El modelo que hemos expuesto es diez veces más rápido que el algoritmo AM ([CW98]).

1.5. Deconvolución Fraccionaria en Color

La pregunta es: ¿Podemos extender el modelo presentado en §1.4 a imágenes en color?. La respuesta es afirmativa. De nuevo el precursor en el sentido de los operadores fraccionarios es el modelo publicado en ([RC06]).

En esta sección analizaremos los algoritmos expuestos en secciones para imágenes en color. El modelo más conocido es el *RGB* por sus múltiples aplicaciones, almacenamiento de fotografías, monitores ... El *RGB* está configurado por tres canales, formados por colores primarios que están altamente correlacionados. Esta correlación entre frecuencias impide el tratamiento por separado de frecuencias, porque una dada depende de otras frecuencias. De hecho este problema se manifiesta en la deconvolución provocando lo que se conoce como *falseado de color*, tal y como podemos comprobar en la *figura 1.17*. Este efecto está producido por que la deconvolución realza frecuencias altas, penalizando otras que dependen de las anteriores.

La tarea más importante dentro de la deconvolución para imágenes en color es la elección del modelo de color. En el caso de la deconvolución para una imagen en *RGB*, una primera aproximación es descomponer la imagen degradada en frecuencias y deconvolverla. Pero la alta correlación de las frecuencias implica el falseado de color tal y como comentamos en el párrafo anterior. Para ilustrar esto último usaremos la tabla correspondiente a la *Anunciación*, que tiene una amplia gama de colores. La deconvolución en *RGB* muestra la predominancia de un color verdoso en la imagen; este es un color dominante y es lo que se conoce como *falso color* respecto de la imagen original.

Para evitar este problema se propusieron diferentes espacios que permiten tratar la luminancia y la cromaticidad por separado. Es decir separamos las frecuencias más extremas, que están en el canal luminante, de otras que no lo son y que por su baja correlación no afecta al canal luminante (cromaticidad). En este caso tenemos que recurrir a los modelos *YUV* o bien *YCbCr*, (cfr 2); que son modelos equivalentes al *RGB* dónde podemos (a través de transformaciones lineales) obtener la luminancia y cromaticidad.

En el modelo *YUV*, tenemos el canal *Y* que actúa como luminante o brillo

y UV correspondientes al croma azul y rojo. La luminancia es el brillo producido por los tres colores primarios, lo que significa que el parámetro Y incluye información cromática (capítulo 2). En este caso realizamos la deconvolución propuesta (ecuación (1.38)) únicamente en el canal Y . Como ejemplo, vemos en la *figura 1.17*, el resultado de aplicar el modelo (ecuación (1.38)) al canal Y de la imagen correspondiente a *La Anunciación*.



Figura 1.17: Superior izquierda: Original, La Anunciación. Superior Derecha: Deconvolución en RGB con el modelo Fraccionario. Inferior izquierda: Deconvolución en YUV con el modelo Fraccionario, con parámetros $t = 0.2$, $\lambda = 100$. Inferior derecha: Deconvolución en HSV con el modelo Fraccionario, con parámetros $t = 0.32$, $\lambda = 100$

Claramente observamos que tras la deconvolución hay colores que pueden hallarse fuera de la gama de color que inicialmente representa el modelo. Por ejemplo, en la figura 1.17, el resultado de la deconvolución fraccionaria en color, presenta dominancia de un color verdoso como ocurría en el RGB, que no está definido en el modelo YUV (falso color). Notar que las componentes cromáticas (colores) están basadas en los componentes rojo y azul del modelo RGB .

Entre los modelos basados en el modo que tenemos los humanos de percibir los colores, tenemos HSL , HSV , HSB (capítulo 2); son equivalentes y las diferencias entre sí están en la representación gráfica del modelo del color. Como apuntamos en el capítulo 2 el HSV es el más adecuado cuando se trabaja con tonalidades.

El inconveniente de HSV , es que los valores de saturación y de la componente V están ligados a la hora de conseguir diferentes luminosidades, es decir, un valor (V) del 100 % no tiene porqué corresponder a un color blanco, y depende de la saturación. En la deconvolución implica que no podemos llegar a valores próximos a 0, como por ejemplo la figura 1.17, dónde podemos comprobar que algunos colores los recupera, pero en cambio el rojo aparece como un color marrón.

El espacio LUV es derivado del XYZ y permite separar luminancia, L , y cromaticidad. Por las características que posee, que describiremos en el capítulo 2, es un candidato para el objetivo que perseguimos: deconvolver la imagen de manera que no haya influencia de determinadas frecuencias asociadas al color y con la mayor información posible de los perfiles. De esta manera eliminamos el problema de *falseado de color*.

El canal L guarda la información de los perfiles y el brillo; por tanto nos interesa deconvolver utilizando la ecuación (1.38) en este canal. El color no lo consideramos, en el sentido de que no es necesario renormalizar algunas frecuencias tras la deconvolución, tal y como ocurre, por ejemplo, con otros modelos vistos con anterioridad ([CKS00]).

La dificultad de la deconvolución en color radica en que los métodos pierden contraste, debido a que el núcleo usado, renormaliza las intensidades, provocando la pérdida del brillo y por tanto del contraste. Este fenómeno,

se manifiesta cuando realizamos el cambio del modelo LUV al RGB, pues muchas de las frecuencias no pueden representarse al cambiar de LUV a RGB.

El hecho de que la regularización usada en (1.38) sea fraccional, permite controlar adecuadamente el contraste. La razón es que el método ajusta el núcleo en un rango específico. En el primer paso el modelo ajusta los parámetros adecuados para el brillo de la imagen original. Como el algoritmo recupera la imagen en pequeños intervalos, entonces las variaciones en cada paso de la función de densidad son mínimas, preservando la moda de la distribución entre pasos sucesivos.

El primer ejemplo que mostramos, corresponde a *La Anunciación* (figura 1.18): vemos que el modelo lineal y SECB realzan los perfiles. El primero, preserva contraste y por tanto la luminancia, mientras que el segundo realza los detalles, pero no preserva la luminancia, lo que significa que disminuye el contraste (variación de intensidades elevada). Esto es debido a que los parámetros necesarios para llegar a un valor del tiempo próximo a cero, son elevados. El método híbrido §1.3.3 mejora el realce y la calidad de la luminancia. El modelo de la variación total (AM) recupera los perfiles a cambio de introducir pequeños errores que se pueden observar así como inestabilidades a la hora de recuperar la imagen, *ringing* (figura 1.21) que no introduce el modelo fraccional recursivo por las razones expuestas en el párrafo anterior. Consecuentemente, el método fraccionario permite ver con claridad detalles que no pueden verse en el original.

En la *figura 1.20*, podemos observar con nitidez los detalles de la ropa. Evidentemente el tratamiento químico que los restauradores realizaron en las tablas, permite aumentar la calidad de la pintura y ofrecen una información necesaria para una buena restauración.



Figura 1.18: (a) *La Anunciación*; (b) *Modelo Lineal*, $\lambda = 10^7$; (c) *SECB*: $s = 0.00001$, $K = 10^4$, $t = 0$; (d) *Método híbrido*, $\lambda = 10^7$, $s = 0.1$, $K = 10^2$, $t = 0.9$; (e) *Modelo Fraccional*: $t = 0$, $\lambda = 4$; (f) *Variación Total (AM)*: 10 iteraciones, $\lambda_1 = 10^{-3}$, $\lambda_2 = 9.18 \times 10^{-1}$

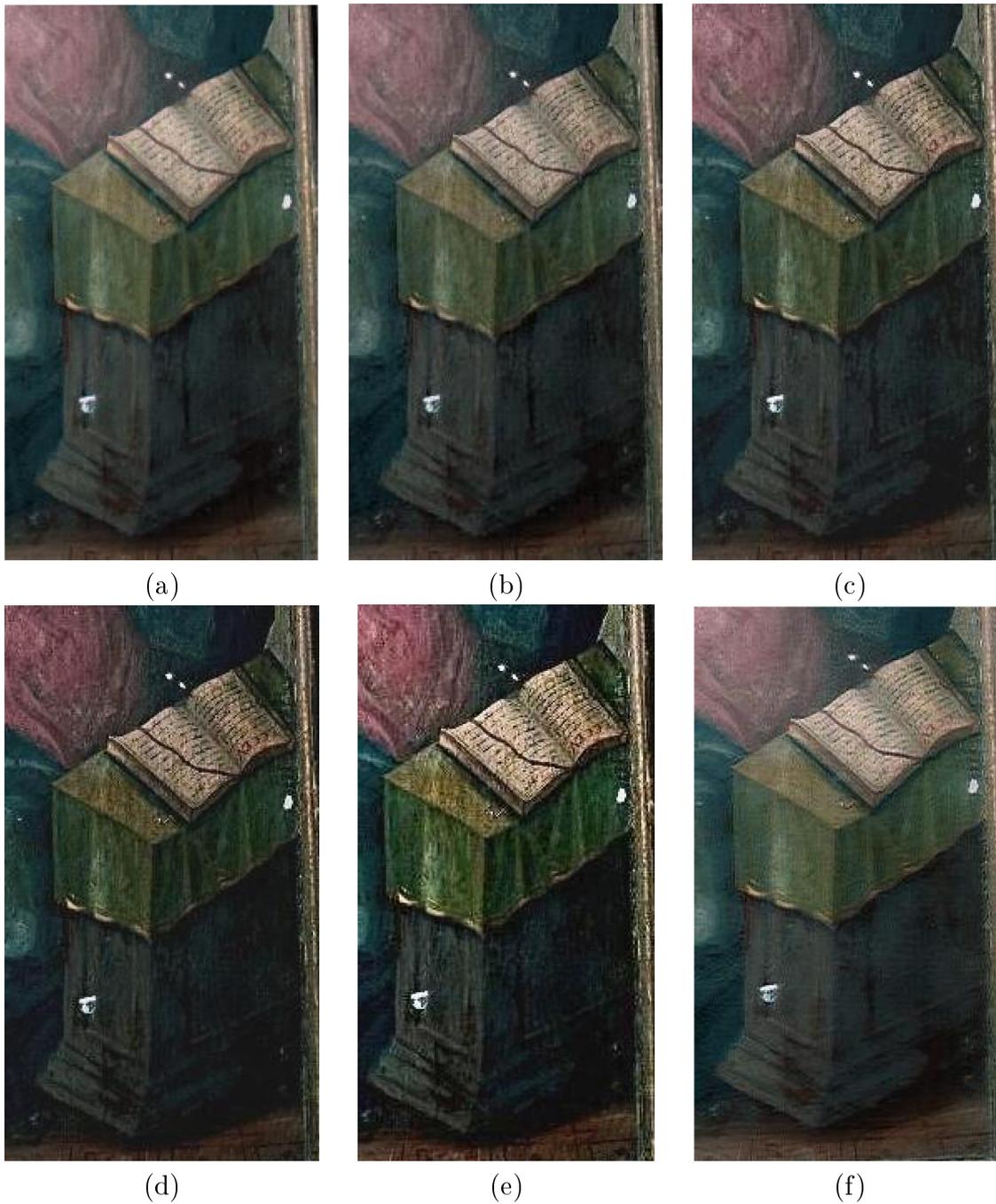


Figura 1.19: Detalle de diferentes técnicas de los tratamientos realizados a La Anunciación:
(a) Detalle original de La Anunciación;
(b) Modelo Lineal;
(c) SECB;
(d) Método Híbrido;
(e) Modelo Lineal Fraccionario;
(f) Variación Total (AM)



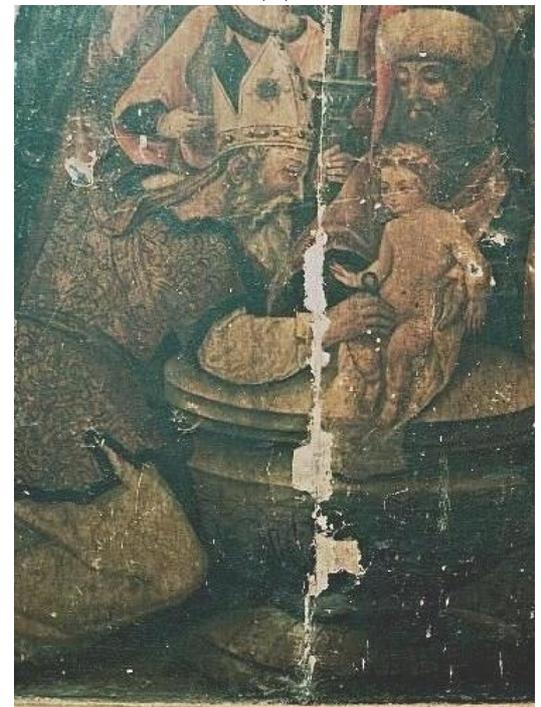
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 1.20: (a) *La Circuncisión*; (b) *Modelo Fraccional*; $\lambda = 7, t = 0.0012$; (c) *Variación Total (AM)* : 1 iteración, $\lambda_1 = 10^{-7}, \lambda_2 = 10^{-6}$; (d) *Modelo Híbrido*; $\lambda = 10^7, t = 0.93$



(a)



(b)



(c)

Figura 1.21: (a) *Camino al Calvario*; (b) Variación Total $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.1 \times 10^{-3}$; (c) Modelo Fraccional: $t = 0.0000017$, $\lambda = 2$

Fundamentos del Color

2.1. Introducción

En la literatura sobre la deconvolución y *denoising* en color,[CKS00, BCM05b, BCM05a], se supone que los modelos de convolución y ruido se hacen en los canales *RGB* por separado, es decir, la parte determinista (convolución) se realiza en cada canal, y tratan de encontrar los equivalentes no lineales (HSV, YUV ...). Esto es adecuado para un tipo de imágenes en las que es necesario descomponer en cada canal, por ejemplo las imágenes que toman los satélites. Las imágenes vienen representadas por frecuencias, por ejemplo, las fotografías que vemos sobre los planetas, galaxias, etc, son mapas de temperaturas y por tanto representan un determinado rango de frecuencias. Es también el caso de las imágenes que provienen de microscopios, donde es necesario descomponer frecuencias para realizar segmentación o determinar unas características específicas.

En el caso de las pinturas (al menos), el deterioro se produce de una manera isotrópica, es decir se deteriora el color y los perfiles de una misma forma, por diversos factores, que fueron explicados en la introducción del capítulo §III. En nuestro caso no es necesario el proceso anterior, pues lo que nos interesa recuperar son los perfiles y no el color, cuya pérdida es uniforme. Para ello el modelo más adecuado es el *LUV*. Este modelo se puede usar para realizar procesos en la luminancia que no afecten a los colores. Tiene la ventaja de que es menos sensible a errores (en la luminancia), tal y como vimos en el capítulo 1.

El capítulo se estructura de la siguiente forma: en §2.2 hablaremos del modelo más importante, *RGB*, y de los problemas que plantea y de las transformaciones lineales más conocidas. Justificaremos la necesidad de cambiar al modelo *XYZ* y usar derivados de este modelo según nuestras necesidades (§ 2.4). De hecho, el modelo fundamental con el que trabajaremos es el modelo *LUV*, que es el más usado en restauración artística y es el que usamos en el procedimiento de deconvolución fraccionaria. Presentamos un resumen de los modelos de color más conocidos que pueden consultarse en detalle en [CAP⁺02].

Durante el proceso de intervención digital tenemos que garantizar que todas las operaciones que realizamos no alteran características fundamentales como el brillo, el contraste o el color.

Como consecuencia del párrafo anterior, es necesario conocer qué se entiende por color y describir sus características (§ 2.1). Después estudiaremos la representación y modelos matemáticos del color (§ 2.2, §2.4), necesarios para cambiar de RGB a cualquier otra base en la que podamos separar las componentes del color, que justificaremos en el capítulo de deconvolución.

Una definición adoptada internacionalmente es la siguiente: *el color se compone de aquellas características de la luz distintas de las de espacio y tiempo, siendo la luz aquel aspecto de la energía radiante que percibimos a través de las sensaciones visuales que se producen por el estímulo de la retina.*

Los colores obtenidos directamente por descomposición de la luz solar o artificialmente mediante focos emisores de luz de una longitud de onda determinada, se denominan colores aditivos.

No es necesaria la unión de todas las longitudes del espectro visible para obtener el blanco, ya que si mezclamos solo rojo, verde y azul obtendremos el mismo resultado. Es por esto por lo que estos colores son denominados **colores primarios**, porque la suma de los tres produce el blanco. Además, todos los colores del espectro pueden obtenerse a partir de ellos.

Los **colores secundarios** se obtienen al combinar dos a dos los colores primarios: son *cian, magenta y amarillo*.

$$\text{primario} + \text{primario} = \text{secundario}$$

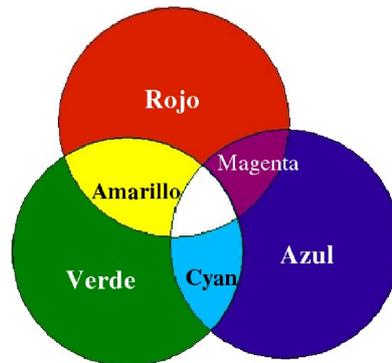


Figura 2.1: Colores Primarios y Secundarios

Los *colores secundarios* están presentes en la paleta de los pintores profesionales.

Los *colores primarios de pigmentos* son aquellos que absorben o sustraen completamente un color primario de luz y transmiten o reflejan los otros dos colores. Los colores se obtienen por sustracción de colores primarios. Notar que los colores primarios de pigmentos son secundarios de luz. Al unir los tres colores primarios de pigmentos se obtiene el negro, mientras que la ausencia de los tres produce el blanco.

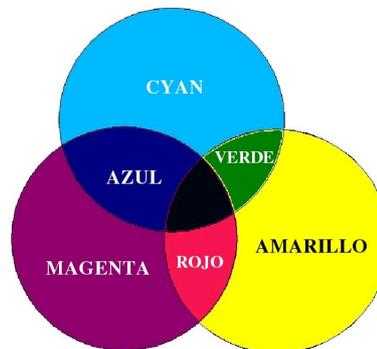


Figura 2.2: Colores Primarios pigmentados

Para **caracterizar o describir un color** utilizamos:

- **Tono o longitud de onda dominante:** Matriz de tonalidad color, que viene dada por su longitud de onda. Permite clasificar los colores como rojo, verde, azul, ...

- **Saturación o croma:** Indica la pureza relativa del color, es la magnitud de la diferencia que hay entre el color y el gris. Un tono muy saturado es brillante y tiene poco gris.
- **Valor o luminosidad:** Es la intensidad del color. Permite clasificar un tono como oscuro o claro.

Usamos los términos: **LUMINANCIA** para el brillo y **CROMATICIDAD**, para designar las *componentes cromáticas del color o cromaticidad*, que son el *tono* y *saturación*¹.

Se puede establecer una *escala de brillos*, representada por grises, que van desde el negro al blanco y una escala de tonos desde el rojo al violeta, con pequeñas discontinuidades que limitan los colores fundamentales del espectro continuo: *rojo, anaranjado, amarillo, amarillo verdoso, verde, verde azulado, azul, azul violáceo y violeta*. Si estos colores se disponen en un círculo, la única discontinuidad apreciable es el salto del violeta al rojo, que se evita introduciendo el color púrpura que no es un color espectral puro (no aparece en ningún espectro de la luz blanca), resulta como mezcla de rojo y violeta en distintas proporciones, permitiendo así cerrar el círculo de tonos sin discontinuidades.

Análogamente, se puede establecer una escala rectilínea de saturaciones y proporciones de gris. Con todo esto se puede hacer una representación geométrica tridimensional del color denominado *sólido de color* (figura 2.3). En este espacio «brillo-tono-saturación», cada color viene representado (en la mayoría de los casos) en coordenadas cilíndricas.

¹Notar que, los colores grises son acromáticos y el brillo es totalmente monocromático puesto que tienen colores puros o saturados

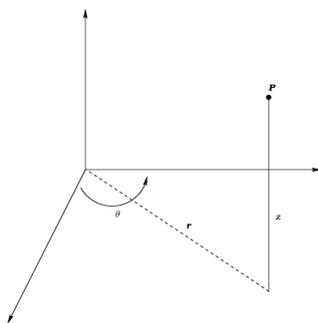


Figura 2.3: Representación de un color por sus «coordenadas» de tono, saturación y brillo. El punto P representa un color, de *tono* = θ , *saturación* = r y *brillo* = z

2.2. Transformaciones lineales de espacios de color

Permiten especificar un sistema de coordenadas 3D, y un subespacio dentro de ese sistema, donde cada color está representado por un único punto. Para representar el color es necesario hacer uso de los coeficientes tricromáticos que nos van a permitir cambiar de base (método CIE).

En esta sección explicaremos el modelo más conocido y usado: RGB. Este modelo es poco idóneo a la hora de realizar operaciones tales como la deconvolución, que describiremos en capítulos anteriores. En general, es necesario cambiar de espacio, pues este no cubre todas la gamas de valores perceptibles. Además no es uniforme, en el sentido de que las distancias geométricas entre colores no se corresponden con las distancias percibidas (mezclas muy distintas dan colores parecidos), por ello es necesario estudiar otros modelos de color.

2.3. Modelos Lineales de Color

2.3.1. Modelo RGB

Se representa por un sistema cartesiano, cuyo subespacio es el cubo unidad donde cada color es un punto determinado por un vector. El origen de

coordenadas representa el negro y cada eje está asociado a un color (R, G, B).

Usa los colores primarios, cuya combinación produce el resto de colores. Numéricamente, $RGB = (r, g, b)$ donde cada componente r, g, b son enteros del 0 al 255. En términos de bits: $RGB = (8 \text{ bits}, 8 \text{ bits}, 8 \text{ bits}) = 24 \text{ bits} = 3 \text{ bytes}$, por lo que se obtiene $2^{24} = 2.777.216$ posibles combinaciones de colores en cada pixel.

Las característica fundamental es que, el espectro visible se representa combinando las tres componentes básicas de la luz coloreada, en proporciones e intensidades diferentes (colores primarios), y los colores secundarios se obtienen superponiendo los colores primarios.

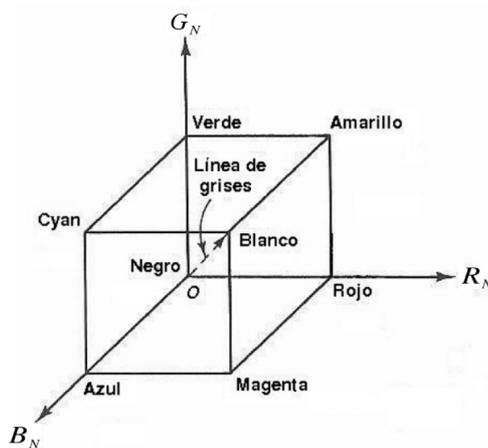


Figura 2.4: Cubo de Color para el modelo RGB

Se usa en:

- En la *televisión*, Cada punto que se visualiza, llamado pixel, está formado por una terna de elementos, que componen el RGB.
- *Falso color*, que se da en las imágenes procedentes de un satélite. Por ejemplo el LandSat: $R + G + \text{infrarrojos}$, los infrarrojos, sustituyen al canal B , no son visibles y de ahí su nombre: imágenes en falso color.

El inconveniente que presenta es que sus tres componentes mezclan cromaticidad (color) y luminancia (intensidad).

2.3.2. Modelos CMY y CMYK

El *modelo CMY* (Cyan (cian), Magenta, Yellow (amarillo)), formado combinando los colores primarios Rojo, Verde y Azul. Los valores de los colores son los complementarios del sistema RGB y se calculan según la fórmula:

$$\begin{pmatrix} C \\ M \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix}$$

suponemos que los colores están normalizados en $[0, 1]$. Se cumple:

- *Cyan*: mezcla de verde y azul, sin considerar el rojo.
- *Magenta*: es la combinación de azul y rojo. El verde está ausente.
- *Amarillo (Yellow)*: mezcla de rojo y verde pero el azul no está presente.

El modelo *CMYK* es un subespacio del cubo unidad sobre el sistema de coordenadas cartesianas.

Se basa en propiedades de absorción de la luz de la tinta de impresoras en papel. Cuando la luz blanca invade tintas translúcidas se absorbe parte del espectro de vuelta. El color que no es absorbido lo refleja el ojo.

Las impresoras usan cartucho de colores cian, magenta y amarillo para obtener colores combinándolos. Notar que los colores primarios son aditivos y los complementarios son sustractivos.

En el modelo *CMYK* los colores se forman mezclando los tres colores primarios, de forma análoga al *CMY*. El último valor *K* (negro) no añade color, sino que sirve para oscurecerlos.

2.3.3. Modelos YUV

Los modelos *YUV* y *YCbCr* son usados en el campo de vídeo digital. *YUV* se entiende como una combinación lineal de los valores RGB de una imagen:

- **Y**: Representa escala de grises o luminosidad (brillo). Está compuesto por un 30 % de rojo, 60 % de verde y 10 % de azul.
- **U**: $U = B - Y$, componente que representa la información del color (crominancia). Se calcula sustrayendo el brillo del color azul. Comprende colores desde el azul ($U > 0$) hasta el amarillo $U < 0$.
- **V**: $V = R - Y$, que representa la información del color. Se obtiene eliminando el brillo del color rojo. Abarca colores desde el magenta ($V > 0$) hasta el cyan ($V < 0$).

El modelo YUV está más próximo al modelo humano de percepción que el estándar RGB. El modelo YUV es usado en los sistemas PAL y NTSC de difusión de televisión que son estándar en todo el mundo.

2.4. Transformaciones no lineales de espacios de color

2.4.1. Método CIE

Fue creado en 1931 por la *Comisión Internationale de L'Eclairage (CIE)* que definió tres colores primarios, de manera matemática con funciones para igualar colores positivos, que especifican la cantidad de cada color primario necesaria para describir cualquier espectro. Esto ofrece una definición internacional para todos los colores.

Este modelo adquiere el nombre de XYZ porque cualquier color puede representarse como:

$$C_\lambda = X\mathbf{X} + Y\mathbf{Y} + Z\mathbf{Z} \quad (2.1)$$

donde $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ representan la base de vectores en un espacio tridimensional aditivo y X, Y, Z cantidades de colores primarios estándar necesarios para obtener C_λ . Las cantidades de la ecuación (2.1) se normalizan respecto de la luminancia $X + Y + Z$ de acuerdo con las siguientes ecuaciones:

$$x = \frac{x}{x + y + z} \quad y = \frac{y}{x + y + z} \quad z = \frac{z}{x + y + z} \quad (2.2)$$

Con $x + y + z = 1$, lo que permite representar cualquier color sólo con los valores de x, y . Al ser valores normalizados, los parámetros x, y se llaman valores de cromaticidad porque dependen del matiz y la pureza. En las sucesivas subsecciones veremos diferentes espacios de color, que son subespacios del CIE XYZ. La diferencia entre ellos es la modificación del modelo estándar XYZ según los fines a los cuales están orientados.

2.4.2. CIELAB

Este modelo reasigna el estándar XYZ para proporcionar una mejor distribución de los colores, donde cambios iguales de los valores, sean iguales en la percepción. Con este modelo los datos se transforman más fácilmente en modelos RGB y/o CMYK que son utilizados en monitores o impresoras, lo que no ocurre con el modelo CIE XYZ.

Las características de este modelo son: *luminiscencia* (L), es decir, luminosidad y dos componentes cromáticas:

- a : Saturación. Oscila entre el *verde y rojo*. $C_{ab} = (a^2 + b^2)^{1/2}$.
- b : Ángulo del tono. Oscila entre el *azul y amarillo*. Se calcula: $h_{ab} = \arctan(\frac{b}{a})$ entre 0 y 2π . Debido a convenciones técnicas, el ángulo se representa en grados.

Este sistema está indicado en la norma UNE 72031 – 83, que define las coordenadas colorimétricas, así como en la UNE 48073–94 parte 1 que trata de colorimetría en pinturas y barnices. Este modelo, por sus características, es el más adecuado para el problema que vamos a tratar.

El modelo LUV es similar al *lab* en las componentes cromáticas del color, pero no en su representación. Es usado en restauración artística (así como el modelo HSV). La relación entre el modelo RGB y LUV está expresada en la figura (2.5)

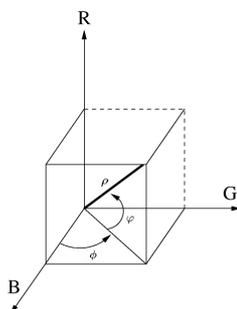


Figura 2.5: Relación entre el modelo RGB y LUV.

Para pasar de RGB a LUV, $(R, G, B) \rightarrow (\rho, \text{sen}(\phi), \text{sen}(\psi))$ Siendo

$$\rho = \sqrt{R^2 + G^2 + B^2} \quad \text{sen}(\phi) = \frac{R}{\sqrt{R^2 + B^2}} \quad \text{sen}(\psi) = \frac{G}{\rho} \quad (2.3)$$

Para pasar de LUV a RGB $(\rho, \text{sen}(\phi), \text{sen}(\psi)) \rightarrow (R, G, B)$

$$R = \rho(\sqrt{1 - \rho^2}) \text{sen}(\phi) \quad G = \rho \text{sen}(\psi) \quad B = \sqrt{\rho^2 - G^2 - R^2} \quad (2.4)$$

2.4.3. Modelo HSV

Fue creado por Alvy Smith en 1978. Está inspirado en la forma en que los artistas describen y mezclan el color. El HSV se representa a través del cono del color (figura 2.6).

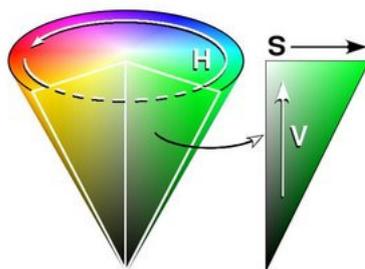


Figura 2.6: Representación del Cono de Color del modelo HSV

El modelo *HSV* (Hue, Saturation, Value), define un espacio de color en términos de tres componentes:

- **Tono**, correspondiente al tipo de color (rojo, verde o amarillo). El rango del tono está comprendido en $[0, 360]$ y se mide por el ángulo alrededor del eje vertical: 0° es el rojo, 60° amarillo, 120° verde, 180° cyan, 240° azul, 300° magenta. Los colores complementarios están 180° opuestos uno del otro.
- **Saturación**, Se refiere a la cantidad de blanco que contiene un color. Numéricamente es la proporción del cero al uno desde la línea central (eje V) hasta la cara del cono hexagonal. Un color 100% saturado no contiene blanco, entonces se dice que es puro.
- **Valor**, También llamado brillo, componente del brillo o luminosidad, es el grado de auto-luminosidad de un color (cantidad de luz que emite). Un color con luminosidad cercana a 1 es muy claro y cercano al 0 es muy oscuro. Notar que cuando $V = 1$ contiene todos los colores del sistema *RGB*.

Este modelo es el que usaremos en el trabajo, debido a que computacionalmente representa mejor el contraste entre los distintos colores de una imagen.

Podemos obtener los valores numéricos para cada canal de color, a partir de una transformación no lineal de los colores *RGB*:

$$H = \begin{cases} \theta & \text{Si } B \leq G \\ 360^\circ - \theta & \text{Si } B > G \end{cases} \quad \theta = \cos^{-1} \left\{ \frac{\frac{1}{2}(R - G) + (R - B)}{\sqrt{(R - G)^2 + (R - G)(G - B)}} \right\}$$

$$S = 1 - \frac{3}{R + G + B} [\text{mín}(R, G, B)]; \quad V = \frac{R + G + B}{3}$$

Para convertir de *HSV* a *RGB*, depende de H

- Si $H \in [0^\circ, 120^\circ]$ (H está en el sector *RG*):

$$R = \frac{1}{3}(1 - S) \quad G = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{S \cos(H)}{\cos(60^\circ - H)} \right) \quad B = 1 - (R + G)$$

- Si $H \in [120^\circ, 240^\circ]$ (H está en el sector *GB*):

$$H = H - 120^\circ$$

$$G = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{S \cos(H)}{\cos(60^\circ - H)} \right) \quad R = \frac{1}{3}(1 - S) \quad B = 1 - (R + G)$$

- Si $H \in [240^\circ, 360^\circ]$ (H está en el sector BR):

$$H = H - 240^\circ$$

$$G = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{S \cos(H)}{\cos(60^\circ - H)} \right) \quad R = \frac{1}{3}(1 - S) \quad B = 1 - (R + G)$$

Los valores R, G, B , son valores normalizados. Notar que estas ecuaciones están en grados, debido a convenciones técnicas pero el trabajo con funciones trigonométricas requiere, obviamente, la conversión a radianes.

El modelo HSV es muy importante, por dos razones fundamentales:

1. Es el preferido por los artistas puesto que coincide con la forma que tiene el ser humano de percibir los colores.
2. Análogamente a las paletas de los artistas, cada color puede ser obtenido mezclando colores primarios y oscureciendo por adición del negro. Por ejemplo, un verde oliva, tendrá el tono hacia el lado amarillo del verde (ángulo del tono aproximadamente 100° , una saturación alrededor de 0.4 y una luminosidad de 0.5. Los colores acromáticos ocupan el eje sólido correspondiendo a saturación $S = 0$ y con el tono H indefinido.

Parte II

Reintegración Digital del Retablo Mayor.

Iglesia San Bartolomé.
Bienservida (Albacete)

Capítulo 3

Restauración Digital del Retablo Mayor

El lector que sólo esté interesado en el modelo matemático puede saltar directamente a la sección §4. La sección §4.1 está dedicada a los antecedentes matemáticos del inpainting y en las secciones §4.2.1, §4.2.2, §4.1 están las hipótesis y el algoritmo de reintegración. Las secciones anteriores (§3.1, §3.2) forman parte de los informes histórico-artísticos que se requieren en toda restauración artística. Los antecedentes históricos son datos necesarios en la reintegración digital, para que el algoritmo respete el estilo y estructura con el que fueron pintados. En la sección §4.3 veremos cómo se aplicó la técnica y las modificaciones sobre el algoritmo para adecuarlo al tipo de restauración requerida usando los datos históricos.

Este capítulo lo dedicaremos a la aplicación a la restauración, que fue uno de los motivos de este trabajo. Paralelamente, empezaron los trabajos de restauración por el *Grupo Ábside* y gracias a ellos hemos profundizado en nuestras técnicas, desarrollando modelos que permitan dar una idea de cómo quedaría la obra a intervenir antes de usar determinados procedimientos manuales, basándonos en imágenes tomadas por ellos. Este proceso es válido para cualquier tipo de talla, cuadros, . . .

3.1. Bienservida



Figura 3.1: *Bienservida (izquierda). Parte derecha, plano de localización*

Bienservida está a 108 Km de Albacete. Limita con Villarrobledo, cuyo término lo marca el río Madre. Es el pueblo más cercano y dista 4Km.

Actualmente tiene 840 habitantes. Durante la época estival, en Semana Santa y en Navidad, ésta se triplica por la afluencia de bienservideños que durante los años 60 emigraron, principalmente a Cataluña, Comunidad Valenciana y Madrid, y de visitantes que desean conocer el pueblo, disfrutar de sus paisajes y de su oferta turística.

La economía está basada casi exclusivamente en la agricultura. Destacan como productos principales: aceite, trigo, cebada, maíz, vid, hortalizas y frutales. Actualmente está muy desarrollada la producción de aceite. La ganadería es ovina y caprina y se alimenta de los pastos.

Eclesiásticamente pertenece a la Diócesis de Albacete y al Arciprestazgo de Alcaraz. La Iglesia Parroquial continúa bajo la advocación de San Bartolomé Apóstol. La Iglesia parroquial San Bartolomé fue declarada Monumento Artístico Nacional el 7 de marzo de 1985. Lo más destacado es el Retablo Mayor que detallaremos posteriormente y que es el objeto de trabajo.



Figura 3.2: Superior izquierda, Vista Exterior de la Iglesia. Puerta Principal, Superior derecha, puerta de la Citará (siglo XVIII). Vista interior de la Iglesia (Central). Parte inferior, capillas dedicadas a la Epístola. Parte inferior izquierda dedicada al Santísimo, parte inferior derecha, capilla de Nuestra Señora de Turruchel, Patrona del Pueblo

3.2. El retablo como transmisor de la cultura

En esta parte vamos a comentar aspectos de la historia de Bienservida y el Retablo Mayor, para dar una visión general tanto del lugar donde está ubicado como de la propia historia.

La historia de Bienservida comienza a estar documentada a partir del año 1213 por referencias ligadas a Alcaraz, que en este tiempo era aldea de esa ciudad. Entre los años 1400 y 1410 es declarada «Villa». Posteriormente, en el año 1434 Don Rodrigo Manrique, Conde de Paredes de Nava, tras importantes victorias contra los árabes, consigue Huéscar para la Corona de Castilla. El 20 de diciembre de 1436, Juan II, como recompensa, concede a Don Rodrigo, Maestre de Santiago, la Villa de Bienservida que formó parte de «Las Cinco Villas» que pertenecieron a los Condes de Paredes hasta el siglo XVIII, cuando fueron vendidas (con permiso real) al Conde de las Navas de Amores a los que perteneció hasta el 6 de agosto de 1811, fecha en la que desaparecen los Señoríos.

Como hemos comentado anteriormente, tras la declaración de «Villa», empezaron los trabajos de construcción de la iglesia de San Bartolomé sobre una antigua de la época del románico. Esta última fue derrumbada por el estado ruinoso que presentaba el tejado de la misma. La nueva iglesia fue construida en el siglo XV. La estructura de esta nueva iglesia es de una nave, una portada gótica final y cabecera cuadrada. En la actualidad la iglesia presenta la siguiente estructura:

De nave única, muestra dos zonas diferenciadas:

- **El presbiterio:** de planta cuadrada y cabecera plana cubierta por una bóveda de crucería de trazos góticos que se apoyan sobre capiteles y entablamiento renacentista
- Cinco tramos de la nave cubiertas por una bóveda de medio cañón rebajada, con lunetos correspondientes a reformas que sufrió la Iglesia durante el siglo *XVII*.

Actualmente consta de dos capillas (de las cuatro que existieron) pertenecientes a la Epístola. Se conserva la capilla dedicada a *Nuestra Señora de*

Turruchel, patrona del pueblo, donde se observan trazas barrocas sobre la planta de cruz griega (figura 3.2).

Se supone que fue la condesa de Paredes la que inició la construcción del retablo, porque semejante gasto sólo lo podía pagar una persona adinerada que habitase en estas tierras. Ella no solo vivió en estas tierras, sino que estuvo muy agradecida a la servicialidad de sus gentes. Tal es así que le dio el nombre a la villa, como Bienservida, la «bien servida».

Es posible que en agradecimiento a la villa y dada la alta religiosidad con que vivían sus habitantes, mandara construir este retablo. Alberga uno de los mejores retablos de la provincia, renacentista, aunque combinando elementos barrocos, y dividido en dos partes: la inferior, plateresca; y la superior, de los siglos XVI y XVII.

¿Qué es un retablo?. Es una obra de arte donde se combinan arquitectura, pintura y escultura en perfecta armonía, una unidad visual y una intencionalidad clara de servir a la piedad y fe del pueblo llano.

Como su nombre indica, según procede del latín, *re-tabula*, es aquello que está detrás de la mesa del altar. Efectivamente está detrás, pero el altar, en los siglos anteriores, estaba adosado al retablo, pues se celebraba la Eucaristía de espaldas al pueblo y de cara a Dios.

Un ejemplo de Retablo, es el de la Basílica del Real Monasterio de San Lorenzo de El Escorial diseñado por Juan de Herrera y construido por Leone y Pompeo Leoni, Jacopo da Trezzo, Giovanni Battista Comane y Pedro Castello. Se trata de un conjunto absolutamente magistral, de puro arte italiano y de gran complejidad técnica. Mide 14 metros de ancho por 26 de alto y fue realizado en mármoles de colores, bronce dorado al fuego y pinturas hechas con la modalidad pictórica de óleo sobre lienzo. En total son quince grandes esculturas en bronce dorado que se reparten, formando grupos o parejas, de abajo a arriba de la siguiente manera: Los cuatro Padres de la iglesia, los cuatro Evangelistas, Santiago el Mayor y San Andrés, San Pedro y San Pablo y, finalmente, coronando todo el conjunto el Calvario, la escena de «Cristo en la Cruz» entre la Virgen María y San Juan. En el centro del primer cuerpo está la manifestación más importante: la Eucaristía, para cuya custodia se creó el Tabernáculo (figura 3.3). En El Escorial es donde nace una de las

escuelas del Barroco, *el tenebrismo*.



Figura 3.3: Retablo del Real Monasterio de San Lorenzo de El Escorial (Basilica)

Si comparamos las dimensiones y forma del retablo de El Escorial, el de Bienservida tiene muchas similitudes, en altura y en materiales usados. La arquitectura escorialense (en particular el retablo) tiene en todas las regiones españolas una gran influencia, marcando la transición a la primera etapa del Barroco. En el siguiente párrafo recordamos algunos de los aspectos más importantes del Barroco.

Los óleos encargados son con frecuencia de gran tamaño; emplean colores vivos y variados, resaltados por varios focos de luz que provienen de todos lados, contrarrestándose unos a otros, creando grandes sombras y zonas iluminadas. Los personajes aparecen en posturas muy dinámicas, con rostros y gestos muy expresivos, puesto que el Barroco es la época del sentimiento. Las composiciones son grandiosas, con personajes vestidos ricamente, en alegorías religiosas o mitológicas, las grandes escenas de corte o batalla, son los ejemplos más evidentes. La tipología es muy variada. La más importante es el retablo, de origen gótico y mantenido durante el Renacimiento. La dife-

rencia con estilos anteriores es que el retablo barroco tiene menos escenas y de mayor tamaño, lo que ayuda a ser «leídos» por el fiel; además, los santos a los que se dedican son menos conocidos frecuentemente por responder al nombre del cliente que lo encargó. También las composiciones son diferentes, más complicadas y atendiendo a la normativa contrarreformista: colorido, naturalismo y cercanía al fiel para facilitarle el acceso al dogma católico.

Los artistas más conocidos y destacados durante este período son:

1. José de Ribera (1591–1652), que destaca con la obra *El Martirio de San Felipe* (conocido también como *el Martirio de San Bartolomé*) (1639)
2. Francisco de Zurbarán (1598 – 1664), que destaca con la obra *La aparición del Apóstol San Pedro a San Pedro Nolasco* (1628)
3. Diego Velázquez (1599–1660), con obras como *Las Meninas* (1634), *Las Hilanderas* (1634 – 1648) y *La Rendición de Breda (Las Lanzas)* (1634)

El Retablo de la Iglesia de San Bartolomé (figura 3.4), tiene 9 m de ancho por 14 m de alto. Construido con madera dorada y policromada, consta de cinco cuerpos y siete calles que albergan tablas pictóricas y esculturas, así como bajorrelieves en la predela. La calle principal está compuesta por el Sagrario (desaparecido), el titular (San Bartolomé), la Virgen María, El Calvario y Dios Padre. A izquierda y derecha tiene calles cuya composición es escultura-pintura-escultura. En la parte inferior, la predela se compone por seis tablas de madera tallada con los bustos de los Apóstoles de los que se conservan San Juan y San Pedro. El Retablo responde a una construcción renacentista entre el manierismo y el clasicismo herreriano. El retablo es *anónimo*, pero la autoría se atribuye a algún discípulo de la escuela de Valdemosilla.

El retablo quedó muy degradado por diversos factores. La superficie estaba cubierta de una capa de polvo y suciedad que provocaba la pérdida de las tonalidades y brillos originales. El paso del tiempo también se hacía notar en los desprendimientos y grietas que se podían apreciar en las policromías y en el oro, así como en las esculturas y elementos arquitectónicos, provocados por la contracción de la madera y el desencolado de las uniones. Además, la

carcoma dejó su rastro en forma de huecos y perforaciones, sobre todo en el área interior del sotabanco y banco.

A todo esto hay que añadir la manipulación que se ha podido dar sobre el retablo, directa o indirectamente, ya que presentaba arañazos, golpes, quemaduras de vela, salpicaduras de cera y clavos debidos al culto religioso.

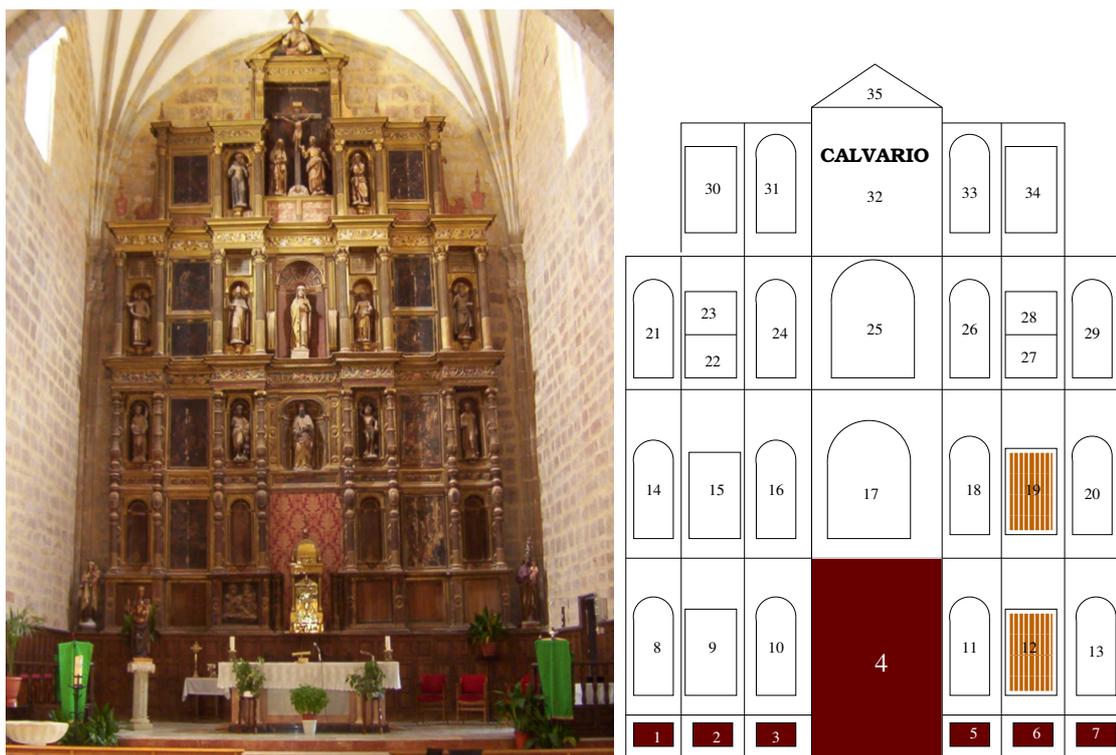


Figura 3.4: **RETABLO MAYOR**. 1. Apóstoles; 2. Apóstoles; 3. San Pedro y San Juan; 4. Custodia; 5. Apóstoles; 6. Apóstoles; 7. Apóstoles; 8. Evangelista; 9. Anunciación; 10. Evangelista; 11. Evangelista; 12. Adoración de los Pastores; 13. Evangelista; 14. San Esteban; 15. Epifanía; 16. San Juan Bautista; 17. San Bartolomé; 18. San Sebastián; 19. (Ilegible); 20. San Lorenzo; 21. Santo Mártir; 22. Ecce Homo; 23. Flagelación; 24. Santo Obispo; 25. Santa Mónica; 26. Santa; 27. Oración del Huerto; 28. Nazareno; 29. Santo Obispo; 30. Descendimiento; 31. San Agustín; 32. Calvario; 33. San Jerónimo; 34. Crucifixión; 35. Padre Eterno; *Las zonas que están en oscuro, son elementos perdidos mientras que los que están a rayas son prácticamente irrecuperables.*

En el año 2005, tuvo lugar la restauración del Retablo, por el *grupo Ábside*; gracias a ellos hemos desarrollado modelos (§3.3) que permiten, a través de una fotografía de la obra original, dar una idea general de cómo queda la obra en caso de intervención directa.

Esta colaboración permitió estudiar algunas técnicas que expondremos en (§3.3) y que dieron lugar a la reintegración digital que desarrollaremos en (§4.2).

3.3. Reintegración Artística

Uno de los procesos más importantes en la restauración y conservación artística es el de la reintegración de cuadros o tallas. Las lagunas o faltantes en una obra pictórica son la falta accidental o intencional de la capa de pintura o de la base de la preparación en determinadas zonas del cuadro. El faltante constituye un elemento que interrumpe la continuidad de la imagen.

La restauración y, más concretamente, el *proceso de reintegración cromática*, tiene por finalidad recomponer la unidad estética de la obra, integrando la laguna y estableciendo un equilibrio cromático. Para llevar a cabo la reintegración cromática existen diversos métodos. Según Nicolaus [Knu98], los métodos de reintegración aplicados a la práctica restauradora moderna se clasifican en:

- ☐ **retoques de cuadros «fragmentados»:** se usa esta terminología cuando de un cuadro sólo se conservan fragmentos y se renuncia sin más a reconstruirlo en su estado original. El cuadro mantiene su estado de «ruina».
- ☐ **retoques neutrales (acua esporca):** las lagunas se ajustan con un «tono neutral» adaptado al entorno original.
- ☐ **retoque normal:** en este caso el faltante se reintegra en cuanto a la forma y color con rayas y puntos finos de modelación, de modo que, contemplada desde una distancia normal, la capa pictórica vuelve a ser unitaria (*principio de buena continuación*).
- ☐ **retoque total (ilusionista):** Basado en el retoque normal, que se ajusta a escala de «lupa» en su contexto original. Para reconocer la reconstrucción, el experto tiene que recurrir a instrumentos ópticos tales

como análisis con filtro UV o infrarrojo o bien a documentación del restaurador.

- ▣ **tratteggio**: La palabra «tratteggio» significa «rayado», en el que el restaurador «reintegra» con líneas o rayas de colores el faltante por lo que la laguna desaparece a simple vista del espectador, sin que sea notorio desde una distancia prudente. Sin embargo, si el espectador se acerca al «reintegro», será capaz de distinguir entre la pintura original y el color aplicado.

En cuadros que están muy deteriorados suelen utilizarse varias técnicas de retoque conjuntamente.

Todas ellas se fundamentan en la reproducción de un color a través de la realización de múltiples trazos de diferentes colores; trazos que pueden ser en forma de puntos (puntillismo) o líneas como en el caso el tratteggio.

La reintegración tiene que respetar la estructura, fisonomía y estética del objeto de trabajo. Es importante reseñar que debe ceñirse exclusivamente a los límites de la laguna y tiene que dejar especialmente reconocible la reintegración en las zonas adyacentes a la original. Es decir, no se puede añadir información adicional que no esté presente en la obra puesto que supondría un falseado de la misma, y robaría el protagonismo a la obra ofreciéndoselo a los detalles añadidos.

Capítulo 4

Reintegración Digital

Esta parte está basada en el modelo publicado en [BBC⁺01, BSCB00], pero modificado y mejorado específicamente para la reintegración del retablo de la Iglesia de San Bartolomé siguiendo las directrices marcadas por los restauradores y las dificultades que las propias fotografías planteaban a nivel matemático. *Esta parte la consideramos como un complemento de la deconvolución como proceso previo para la reintegración.*

Matemáticamente hablando, el retoque normal recibe el nombre inglés de *inpainting*, término acuñado por los autores en [BSCB00]. Podemos plantearlo en el contexto de la cartografía digital. Se plantea un problema de reconstrucción de un modelo digital de elevación del terreno, a partir de una familia de sus curvas de nivel. Las curvas seleccionadas son representativas de la elevación real. Para evitar oscilaciones artificiales se debe usar un método de interpolación. Uno de los más sencillos es el que permite interpolar sus curvas de nivel a partir de su altura, mediante la ecuación de Laplace:

$$\Delta u = 0 \tag{4.1}$$

en el dominio Ω , que comprende dos curvas de nivel con condición de frontera dada por la altura a la que se encuentran dichas curvas de nivel. El uso del modelo anterior plantea el problema de los artefactos producidos. En el artículo [Fra96] se propone la siguiente estrategia:

- Calcular las líneas del gradiente de la solución.
- Interpolar a lo largo de dichas líneas a partir de los valores de la altura

donde la línea cruza las curvas de nivel.

Si en el paso 2 usamos interpolación lineal y llamamos v a la solución obtenida, podemos resumir el proceso anterior en la ecuación:

$$\langle D^2v(\nabla u), \nabla u \rangle = 0$$

en D , con las condiciones frontera $v|_{\partial D}$ dada por la altura de las curvas de nivel que configuran ∂D , donde D^2v es la matriz hessiana y ∇u el gradiente de u .

4.1. Antecedentes del Inpainting

Cuando un objeto oculta a otro, las fronteras adoptan una forma especial llamada *junción* (junction) en T en la que la parte visible de la frontera del objeto ocultado llega a la frontera del objeto que le oculta formando una T . En estas condiciones, nuestra vista continúa de forma suave la frontera oculta entre dos junciones en T (principio de buena continuación). En [Mum93] propusieron un funcional energía para segmentar objetos y la energía de las fronteras ocultas entre T -junciones, que intenta calcular curvas, lo más cortas posibles respetando el principio de buena continuación, es decir: dadas dos T -junciones p y q y las tangentes τ_p, τ_q a los contornos que determinan, propusieron la elástica como curva de buena continuación entre p, q , es decir la curva que minimiza la energía:

$$\int_C (\alpha + \beta \kappa^2) ds, \quad \alpha, \beta > 0 \tag{4.2}$$

Donde el mínimo se calcula entre todas las curvas C que unen p y q y tienen por tangentes τ_p y τ_q en esos puntos, siendo κ la curvatura de C y ds su longitud de arco.

Usando el modelo propuesto por Mumford-Nitzberg-Shiota, Masnou y Morel [Mas98] propusieron un modelo para interpolar curvas de nivel, uniendo los pares de junciones en T por rectas y llamaron a este proceso desocultación. La elástica ha inspirado modelos variacionales introducidos en

[BBC⁺01] que interpolan conjuntamente las curvas de nivel y su campo de direcciones.

En el siguiente párrafo veremos la definición de conjunto de nivel superior e inferior. Esta definición la usaremos para la formulación matemática del inpainting ([Mas98]).

Definición 6 Consideremos $u : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Llamaremos **conjunto de nivel superior (respectivamente inferior)** de u a los conjuntos de la forma

$$\begin{aligned} X^\lambda u &= \{x \in [0, 1]^2 : u(x) \geq \lambda\} \quad (\text{superior}) \\ X_\lambda u &= \{x \in [0, 1]^2 : u(x) \leq \lambda\} \quad (\text{inferior}) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Formulación matemática del inpainting. Sea $\tilde{\Omega} \subseteq D = [0, 1]^2$ abierto, con frontera Lipschitziana. Supongamos $u_0 : D \setminus \tilde{\Omega} \rightarrow [a, b]$ es la imagen que conocemos. El objetivo es reconstruir u_0 en $\tilde{\Omega}$ usando la información de u_0 en $D \setminus \tilde{\Omega}$. Supongamos que $u_0 \in BV(\Omega)$. Llamaremos a $\tilde{\Omega}$ *agujero o laguna* de la imagen. Sabemos que el mapa topográfico de u_0 en $D \setminus \tilde{\Omega}$ esta formado por las curvas de Jordan. Según vimos en el apartado anterior, casi todos los conjuntos de nivel de u_0 en $D \setminus \tilde{\Omega}$ tienen perímetro finito y pueden descomponerse en componentes conexas formadas por una curva de Jordan exterior y un conjunto numerable de curvas de Jordan interiores rectificables. Sea $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$ una familia de dichos niveles, Masnou [Mas98] formuló el inpainting como el problema de reconstruir el mapa topográfico de u_0 dentro de $\tilde{\Omega}$. Dado $\lambda \in \Lambda$ y $p, q \in X_\lambda u_0 \cap \partial \tilde{\Omega}$, sean τ_p, τ_q vectores tangentes a las curvas de nivel de $\partial^* X_\lambda u_0$ en p, q respectivamente. La unión de p, q propuesta por Masnou es la curva $\Gamma \subseteq \tilde{\Omega}$ que minimiza:

$$\int_\Gamma (\alpha + \beta |\kappa|^p d\mathcal{H}^1 + (\tau_p, \tau_\Gamma(p)) + (\tau_q, \tau_\Gamma(q))) \quad (4.4)$$

Donde κ representa la curvatura de Γ , $\tau_\Gamma(p)$ $\tau_\Gamma(q)$ las tangentes a los puntos p y q respectivamente y $(\tau_p, \tau_\Gamma(p))$ el ángulo que forman los vectores τ_p y $\tau_\Gamma(p)$ análogamente $(\tau_q, \tau_\Gamma(q))$. La solución del problema del inpainting se obtiene

minimizando el funcional:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{\Gamma \in \Gamma_\lambda} \left(\int_{\Gamma} (\alpha + \beta |\kappa|^p d\mathcal{H}^1) \right) + (\tau_p, \tau_\Gamma(p)) + (\tau_q, \tau_\Gamma(q)) \quad (4.5)$$

Con F_λ la unión de las curvas asociadas al conjunto $X^\lambda u$.

En [BBC⁺01] los autores propusieron el inpainting en los siguientes términos: Si consideramos D hiperrectángulo de \mathbb{R}^N , $N \geq 2$ dominio de la imagen y sean $\Omega, \tilde{\Omega}$, abiertos y acotados de \mathbb{R}^N cuya frontera es Lipschitz. Sean $\tilde{\tilde{\Omega}} \subseteq \Omega \subseteq D$. Definimos $\Omega \setminus \tilde{\tilde{\Omega}} := B$ banda región alrededor de $\tilde{\tilde{\Omega}}$. Sea $u_0 \in BV(D \setminus \tilde{\tilde{\Omega}})$. En [BBC⁺01] los autores propusieron restaurar el agujero $\tilde{\tilde{\Omega}}$ usando tanto los niveles como las tangentes (o normales) a las curvas de nivel conocidas en B , prolongando las curvas de nivel de u_0 hacia el interior de $\tilde{\tilde{\Omega}}$, de acuerdo con el principio de buena continuación.

Denotamos θ_0 el gradiente de u_0 en $D \setminus \tilde{\tilde{\Omega}}$, θ_0 es un campo de vectores con valores en \mathbb{R}^N que satisface $\theta_0(x) \cdot Du_0(x) = |Du_0|$ en B y $|\theta_0(x)| \leq 1$ c.p.p. en B .

Con esta notación en [BBC⁺01] plantean del problema el inpainting de la siguiente forma : ¿se puede extender (u_0, θ_0) definidos en B a (u, θ) en $\tilde{\tilde{\Omega}}$? Los autores dan una formulación variacional proponiendo el siguiente funcional:

$$\begin{aligned} & \min \int_{\Omega} |div(\theta)|^p (\gamma + \beta |\nabla K * u|) dx \\ & |\theta| \leq 1, |Du|Du| - \theta \cdot Du = 0, \text{ en } \Omega \\ & |u| \leq M \\ & u = u_0, \text{ en } B, \theta \cdot \nu^\Omega|_{\partial\Omega} = \theta_0 \cdot \nu^\Omega \cdot \nu^\Omega|_{\partial\Omega} \end{aligned} \quad (4.6)$$

para $p > 1$, $\gamma > 1$, $\beta \geq 0$, K es un núcleo de regularización \mathcal{C}^1 tal que $K(x) > 0$, $M = \sup_{x \in B} |u_0(x)|$ y ν^Ω es la normal unitaria exterior a Ω . Notar que la convolución de Du con K en el funcional (4.6) es necesaria para demostrar la existencia de mínimo.

En el caso de $N = 2$ y u es la función característica de la región interior a una curva regular de clase \mathcal{C}^2 , C entonces la integral expuesta en (4.6) la

podemos escribir:

$$\beta \int_{\Omega} |\operatorname{div}(\theta)|^p |Du| + \alpha \int_{\Omega} |Du| \quad (4.7)$$

íntimamente relacionada con $\int_C (\alpha + \beta|\kappa|^p) ds$, donde κ es la curvatura C . Notar que en el caso $p = 2$ la elástica de Euler (4.2) adopta la forma:

$$\int |\nabla u| \left(\alpha + \beta \left| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \right|^2 \right) \quad (4.8)$$

El funcional anterior puede considerarse como una relajación de la elástica de Euler. Introducimos un campo θ como variable independiente relacionada con u a través de $\theta \cdot Du = |Du|$. Esta restricción se incorpora al modelo como una constante. Elegimos incorporar esta constante como un término de penalización:

$$\int_{\tilde{\Omega}} |\nabla u| - \theta \cdot \nabla u \quad (4.9)$$

En la práctica usamos una versión más reducida de [BBC⁺01] que está expuesta en el artículo [BSCB00], que veremos §4.2.2.

4.2. El algoritmo de reintegración

Como es sabido, las funciones reales están dadas por sus curvas de nivel:

$$u : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

el conjunto

$$\{(x, y, \lambda) \in \mathbb{R}^3 : \lambda = u(x, y)\} \quad (4.10)$$

se llama **curva de nivel** de u . La razón de este nombre es clara, pues se trata del conjunto de los puntos, cuya λ , es decir cuya *cota o nivel* es *constante*, de la misma forma podemos entender una imagen $\lambda = \text{intensidades}$ (figura 4.2)

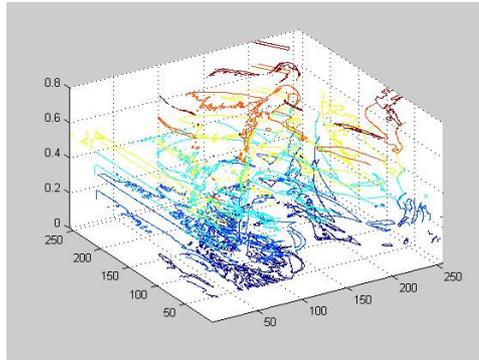


Figura 4.1: Curvas de Nivel de Lena

La descripción de la función altura en términos de las curvas de nivel es buena siempre y cuando por todo punto pase una y sola una curva, como ocurre con funciones suaves. El problema se presenta cuando la función a lo largo de la curva es discontinua: entonces no podemos afirmar lo anterior. Esto ocurre en un acantilado. Los acantilados de una imagen representan los contornos de los objetos que aparecen, discontinuidades en los niveles de gris. Para evitar esta complicación, usamos los conjuntos de nivel como descriptores de la topografía de una función real. Las curvas de nivel pueden recuperarse tomando las fronteras de los conjuntos de nivel, siempre que estas fronteras sean curvas.

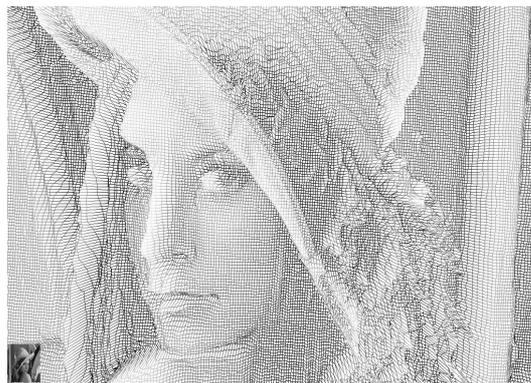


Figura 4.2: Lena vista como un mapa topográfico

Una vez que hemos fijado como punto de partida que toda imagen la po-

demos representar como un mapa topográfico, se pueden desarrollar técnicas que nos permiten intervenir sobre la imagen y recuperar aquellas zonas del cuadro dónde falta información (lagunas), según unas hipótesis que veremos posteriormente.

4.2.1. Hipótesis del Inpainting

El objetivo del *reintegración digital (inpainting)* es reconstruir aquellas zonas que están dañadas o que carecen de información (lagunas).

Esta técnica está basada en la manera de restaurar obras pictóricas que usan los profesionales de la restauración. Seguimos las mismas hipótesis que usan los restauradores:

1. Los elementos del cuadro determinan cómo rellenar los agujeros, lagunas o elementos faltantes, que denotaremos Ω . El objetivo es restaurar la unidad de la obra (todos los agujeros presentes), manteniendo la armonía del cuadro.
2. La zona que hay alrededor de Ω , denotada por $\partial\Omega$, es la que contiene la información que continuaremos hasta Ω , prolongando las curvas de nivel procedentes de $\partial\Omega$.
3. Las diferentes regiones dentro de Ω están definidas por las curvas de nivel, y son rellenadas con el mismo color de $\partial\Omega$.
4. Los pequeños detalles son «re-pintados» es decir añadimos «textura».

La técnica que aquí empleamos está basada en la técnica **del retoque normal**: Ω se reintegra en cuanto a la forma y color con rayas y puntos finos de modelación, de modo que contemplada desde una distancia normal, la capa pictórica vuelve a ser unitaria § 3.3.

4.2.2. El algoritmo de retoque

Siguiendo las técnicas de restauración presentadas en §3.3 y §4.2.1 apartados (2),(3); usamos el *principio de buena continuación* (principio que nos

asegura que la reintegración artística tendrá el mismo efecto sobre el ojo humano que la obtenida computacionalmente, §3.3), para extender los perfiles que se encuentran alrededor del agujero, $\partial\Omega$, conectando las curvas de un determinado nivel de gris con otras del mismo nivel, cruzando la parte dañada. Este principio, permite la continuación de los niveles de gris que están en $\partial\Omega$ a la región Ω de una manera continua. Por tanto hay que imponer una dirección a las curvas de nivel y una condición de contorno sobre el borde del agujero.

Llamamos L a la información que deseamos propagar. Una forma de propagar continuamente los niveles de gris es usar $L = \Delta u$. Llamamos $\nabla^\perp u$ la dirección de propagación:

$$u = \delta L \cdot \nabla^\perp u \quad (4.11)$$

δL es una medida del cambio en la información L . Con esta ecuación calculamos la variación de información necesaria a cada paso para completar Ω siguiendo la dirección $\nabla^\perp u$, de forma que, si la variación de L (que vendrá dada por su gradiente) es cercana a cero, entonces el método alcanza su estado estacionario:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla^\perp u \cdot \nabla \Delta u = 0 \quad (4.12)$$

La dirección de las curvas de nivel es definida como:

$$\nabla^\perp u = \left(-\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

Elegimos la dirección de la normal motivada por la continuidad de los niveles de gris. Además tenemos que tener en cuenta la variación de la dirección del campo de las curvas de nivel. El gradiente nos da la dirección de mayor cambio, mientras que la normal nos da la de menor cambio que nos permitirá alcanzar la deseada continuidad en $\partial\Omega$ para un campo de vectores fijo que implicará conocer la direcciones de las curvas de nivel desde el principio.

Para asegurar la correcta evolución del campo de vectores, introducimos la curvatura media de la imagen κ , como un estimador de la curvatura en $\partial\Omega$,

que permitirá adicionalmente continuar los perfiles, deformando los conjuntos de nivel en la imagen, conservando la curvatura, y no afectará a aquellas regiones donde el $|u|$ sea grande:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa(x, y, t) |\nabla u(x, y, t)| = \nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \quad (4.13)$$

Este proceso de difusión permite a las sucesivas curvas de nivel *alabearse* durante la propagación. De esta manera los conjuntos de nivel se mueven en la dirección normal a una velocidad proporcional a su curvatura media.

Para la implementación del proceso descrito anteriormente y cuyas ecuaciones básicas son (4.12) y (4.13), usamos el método de diferencias centrales y esquemas *upwind*, por su estabilidad frente a errores de redondeo.

Para describir el proceso, consideremos u_0 la imagen a procesar. El inpainting construirá una familia de imágenes que denotamos por u^n tal que

$$u^0 = u_0 \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u^n = u_R$$

con u_R imagen retocada o reintegrada.

Como consecuencia del proceso de retoque artístico, el algoritmo tiene que ser necesariamente iterativo:

$$u^{n+1} = u^n + dt u_t^n \quad \forall (i, j) \in \Omega \quad (4.14)$$

siendo

- n el número de iteraciones de inpainting
- dt el incremento
- u_t^n la imagen actualizada a partir de la ecuación (4.12)

Usamos la ecuación (4.13), para la difusión anisotrópica y realizamos un número de iteraciones de difusión anisotrópica (*ndifan*), con el objetivo de corregir el campo de vectores y garantizar que los ángulos de salida y llegada que cruzan el agujero se preserven. Llamamos *npas* a la iteración del inpainting, en la cual intercalamos *ndifan* pasos de difusión anisotrópica.

Una de nuestras aportaciones es añadir un parámetro μ que acompaña a la curvatura media, puesto que no siempre podemos aplicar la fórmula (4.12), debido a que el laplaciano suaviza los bordes. Tenemos que realizar un estudio previo de la $\partial\Omega$ para saber si la información que vamos a «extrapolar» contiene perfiles. Para ello usamos la curvatura media como indicador:

$$\mu(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{Si } \kappa(x, y) \geq 1, \forall (x, y) \in \partial\Omega \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases} \quad (4.15)$$

De la ecuación (4.15), se deduce que, si μ vale 1, la zona que vamos a reintegrar tiene perfiles y que por tanto tiene preferencia la ecuación (4.13) sobre (4.12). Esto implica que aumentamos el paso, dt , en (4.12) y que aumentamos el número $npas$; de esta manera aseguramos la buena continuación, de modo que podemos reconstruir los perfiles sin difundirlos excesivamente, puesto que la difusión es ortogonal. Si μ vale 0 entonces la zona es suave, así tenemos que reducir dt y aumentar $npas$. Podemos reducir $npas$ siempre que Ω sea muy pequeño (en torno a los 10 píxeles).

Otra de nuestras aportaciones, la integración de inpainting con el proceso de deconvolución y la estabilidad numérica. Las imágenes procesadas provienen de una toma de fotografías que se realizan previamente a las obras de arte y que tras el proceso de deconvolución fraccional explicado anteriormente, define una serie de condiciones de contorno para el uso de (4.12). Una de las ventajas del uso del método fraccional, es la calidad que se obtiene del detalle de los perfiles y de los faltantes. Como la deconvolución no introduce ruido en la imagen, no es necesario aplicar pasos de difusión anisotrópica para controlar el posible ruido. En la actualidad, diferentes autores están intentando realizar inpainting y deconvolución conjuntamente [CYP04], pero una de las dificultades está en determinar las condiciones de frontera adecuadas.

Otra de las novedades es el caso en el que el campo normal es nulo. El algoritmo presenta un problema serio, puesto que carece de dirección en la que queremos realizar el inpainting. Sucede cuando estamos en una fase de transición entre un máximo y un mínimo. En este caso, como en la reproducción de texturas, usamos un algoritmo basado en reintegrar

usando patrones en la imagen, de manera que el algoritmo «aprende» de la información que tiene alrededor del agujero. De esta forma, el algoritmo consigue generar los píxeles que configuran una plantilla que usará posteriormente para rellenar, usando el gradiente y la curvatura media (por ejemplo, el *Escarnio* o el *Camino al Calvario*), como estimadores de la información para rellenar el faltante.

La reintegración o inpainting, tampoco se puede realizar directamente en *RGB*, por los motivos expuestos en el capítulo 2, y por tanto justifica el cambio al modelo *LUV* para evitar colores espurios, debido a la alta correlación entre los tres canales que representan los colores fundamentales del espectro. En restauración artística el filtro *LUV*, se usa para determinar los perfiles (3.3).

Basándonos en esta información hemos implementado el modelo cuyas ecuaciones están en §2.4.2. Las ecuaciones (4.12) y (4.13) se aplican en los tres canales al mismo tiempo. El canal luminante, *L*, permite prolongar los perfiles (dibujos) y las componentes cromáticas permiten mezclar color y difundirlo de una forma anisotrópica en la imagen, proceso que en términos artísticos se llama pigmentación, como veremos en la siguiente sección.

4.3. Resultados de la Reintegración

Los restauradores, antes de iniciar el proceso de intervención, hacen fotografías (después de tratarlas químicamente) de las obras que tienen que retocar, como ayuda durante la restauración manual que realizan en los talleres. Teniendo en cuenta esta información, hemos desarrollado un procedimiento de reintegración matemática (§4.2.2): una forma de tratar cualquier elemento artístico sin necesidad de trabajar con la obra físicamente (evitando los riesgos que conlleva esto último).



Figura 4.3: Superior izquierda: La Anunciación; Superior derecha: La Circuncisión; inferior izquierda: Camino al Calvario; inferior derecha: La flagelación. *Las tablas que mostramos corresponden al estado original del Retablo (2005)*

El procedimiento previo a la intervención es la toma de fotografías (*figura 4.3*) de los elementos a intervenir y hacer un análisis químico. Posteriormente, los elementos a tratar se someten a un tratamiento químico para eliminar el óxido de los materiales, como aquellos defectos que impiden la correcta visualización (ver *figura 4.4*). En nuestro caso, el retablo es una obra anónima, lo que añade una dificultad para los restauradores, puesto que no hay reproducciones anteriores que permitan reintegrarlo con fidelidad al original, ni obras del mismo autor con que compararlas. Los restauradores, recurrieron a las técnicas que estamos desarrollando en la actualidad; después de realizar el proceso anteriormente descrito se realizaron las imágenes que mostramos

en la *figura 4.4*, con las que trabajamos posteriormente.

Un detalle significativo es el desenfoco considerable, producido por la distancia focal, la iluminación y temperatura. En estas condiciones es preferible no aplicar el proceso de reintegración digital puesto que el mal enfoque oculta información imprescindible. Como los perfiles están suavizados, al difundir la información usando el operador laplaciano se producirá un suavizado mayor en los perfiles. Por ello es necesario aplicar previamente el proceso de deconvolución visto en (§1.5) para realzar los detalles de la imagen y, en particular, aquellos que posteriormente serán sometidos a un proceso de reintegración (en 4.4). En esta parte vamos a comentar los resultados tras aplicar el proceso explicado en (§4.2).

En el primer ejemplo que mostramos, *La Anunciación (figura 4.5)*, cabe destacar algunos detalles sorprendentes, como la reconstrucción del hombro de la Virgen María y la curvatura del papiro que rodea el báculo sostenido por el arcángel San Gabriel en su mano, así como la parte del ala de San Gabriel. Percibimos que el suelo está reconstruido preservando los detalles y colores del original. Pero podemos observar, entre el manto de la Virgen María y el suelo, una zona que no está recuperada completamente y aparece un color totalmente oscuro, porque en esta parte la información no está bien definida. Debido a la autoría anónima de las tablas, esta zona debe ser reintegrada a criterio de los restauradores tal y como podemos ver en la *figura 4.5 (derecha)*. Los restauradores siguieron el criterio de reintegrar esta parte continuando la parte superior del suelo y el manto sin curvatura, pese a que el algoritmo determina que dicha curvatura existe.

La deconvolución es necesaria y tanto el ejemplo anterior como el de *La Circuncisión (figura 4.6)* lo constatan. La deconvolución fraccionaria permitió la reproducción de la cara, de uno de los presentes en el acto de la circuncisión de Jesús, presente a la izquierda de la escena y que soporta uno de los cirios, presentando una diferencia considerable con la *figura 4.6 derecha*, donde prevalece el criterio histórico.

En este caso el papel fundamental lo realiza la difusión anisotrópica, du-

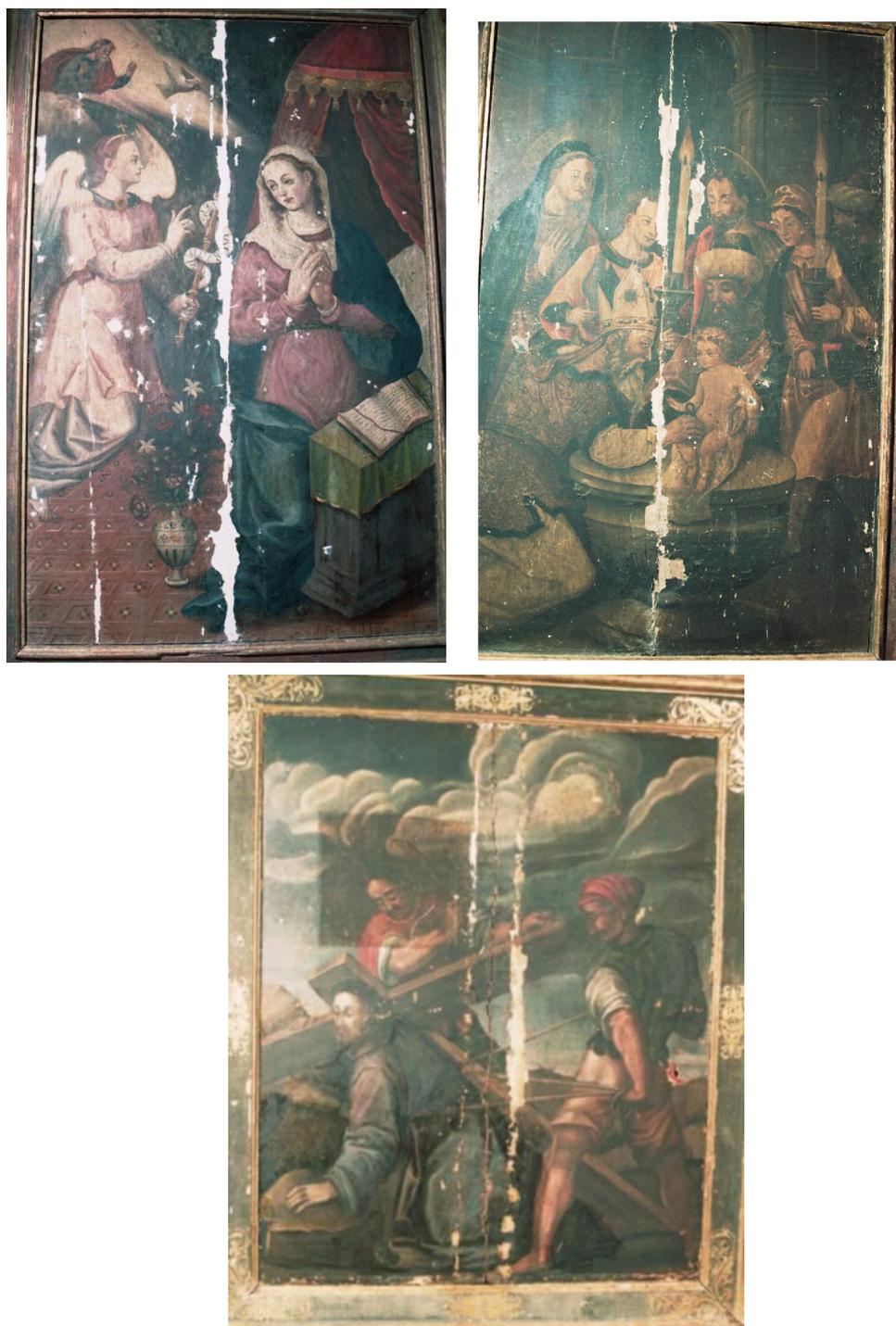


Figura 4.4: Superior derecha: Anunciación, Superior izquierda: Circuncisión; Inferior derecha: Camino al Calvario; Inferior izquierda: Flagelación



Figura 4.5: Superior Derecha: Tabla de *La Anunciación*; Superior Izquierda: *Deconvolución con el método fraccional*; Inferior Izquierda: *Reintegración digital*; Inferior Derecha: Restauración artística (retablo) 2006



Figura 4.6: Superior Derecha: Tabla de *La Circuncisión*; Superior Izquierda: *Deconvolución con el método fraccional*; Inferior Izquierda: *Reintegración digital*; Inferior Derecha: Restauración artística (retablo) 2006

rante la resolución de la ecuación (4.12), intercalándola durante más pasos. Por ello la deconvolución es necesaria para determinar aquellos detalles ocultos que son relevantes para recuperar detalles específicos. Otro elemento a destacar es la reproducción de la parte inferior (líneas curvadas) dónde el Niño Jesús está sentado, que es semejante a la reintegrada artísticamente (*figura 4.6*, izquierda).

Una de las dificultades de la reintegración se manifiesta cuando el algoritmo carece de dirección en la que transmitir la información de la frontera al faltante. Se atribuye al caso en el que no tenemos curvatura porque tenemos un punto de inflexión, esto es, *la normal es nula*. Es el caso de la tabla de *El Camino al Calvario*, *figura 4.7*. Como podemos observar, en el personaje que con unas cuerdas está apoyando la cruz y el fragmento del monte Calvario. El proceso explicado en §4.2 no es válido.

En este caso, recurrimos a un algoritmo que en la actualidad estamos desarrollando, rellenando con un conjunto de píxeles en las cercanías de hueco que queremos rellenar. Usamos este conjunto de píxeles para convolverlo con la zona a reintegrar y la combinamos con la ecuación (4.12), que incorpora éstos últimos, proporcionando un efecto de uniformidad, y evitamos el uso excesivo de la difusión, que podemos comprobar en la *figura 4.7*, izquierda, semejante a la realizada por los restauradores.

El tiempo invertido en recuperar los faltantes fue de 15 minutos. Este proceso ha sido aplicado con éxito a la tabla de *La Oración en el Huerto*, en la reconstrucción de la zona, el árbol y los Apóstoles (*figura 4.8*).

Otra de las dificultades que presenta este procedimiento es el tamaño de la laguna. Experimentalmente hemos comprobado que si el diámetro de Ω es superior a 40 píxeles, conseguimos recuperar parte de Ω los contornos siguen suavemente la dirección de los niveles de gris que parten de $\partial\Omega$ pero no consiguen cruzar completamente el agujero, preservando el ángulo inicial. Esto implica aumentar el número de iteraciones y conlleva el problema de la inestabilidad afectando tanto a los perfiles como al color. Para resolver el problema usamos la *multirresolución* por dos razones: la primera para acelerar el proceso, reduciendo el número de iteraciones y asegurar el principio de buena continuación de los niveles que proceden de $\partial\Omega$. La técnica aplicada



Figura 4.7: Superior Derecha: Tabla de *El camino al Calvario*; Superior Izquierda: *Deconvolución con el método fraccional*; Inferior Izquierda: **Reintegración digital**; Inferior Derecha: Restauración artística (retablo) 2006



Figura 4.8: Superior Derecha: Tabla de *La oración en el Huerto*; Superior Izquierda: *Deconvolución con el método fraccional*; Inferior Izquierda: *Reintegración digital*; Inferior Derecha: Restauración artística (retablo) 2006

en la tabla de *El Escarnio* (figura 4.9) a casi todos los agujeros, combinada con la técnica explicada anteriormente, reintegró la tabla, usando entre 2 y 4 niveles de resolución, reduciendo el tiempo de cálculo en un 75%. El tiempo de *CPU* fue de 10 minutos.



Figura 4.9: Superior Derecha: Tabla de *El Escarnio*; Superior Izquierda: **Deconvolución con el método fraccional**; Inferior Izquierda: **Reintegración digital**; Inferior Derecha: Restauración artística (retablo) 2006

El algoritmo está actualmente diseñado en Matlab 7 y ejecutado en un *PC*, Pentium II con *GNU/LINUX*. El tiempo medio fue entre 3 y 15 minutos de *CPU*, dependiendo del tamaño de Ω .



Figura 4.10: Superior Derecha: Tabla de *La Flagelación*; Superior Izquierda: *Deconvolución con el método fraccional*; Inferior Izquierda: *Reintegración digital*; Inferior Derecha: Restauración artística (retablo) 2006



Figura 4.11: Retablo Mayor en la actualidad después de la restauración artística

En conclusión, hemos empezado a desarrollar un algoritmo rápido, eficiente y orientado a la restauración artística entre los períodos medieval y barroco. Notar que cada época tiene una serie de características que tenemos que tener en cuenta en el algoritmo.

En resumen, anteriormente hemos explicado que no podemos prescindir de la deconvolución como un elemento fundamental para revelar determinados detalles que están ocultos (*figura 4.6* y *figura 4.10*). Por tanto, podemos determinar una relación entre *inpainting* y *deconvolución ciega* que trataremos como un trabajo futuro. Adelantamos que tenemos expectativas de que pueda realizarse, pero está sujeto a cambiar la ecuación (4.12) que difunda suavemente sin pérdida en los perfiles.

Otra de las mejoras que vamos a tener en cuenta próximamente, es la reintegración por patrones históricos. Es decir, si el elemento a restaurar procede de una escuela de arte, podemos aprovechar los criterios y colores que son habituales en dicha escuela.

El color es otra de las partes fundamentales del trabajo. Aprovechando muestras de espectrografías de los elementos a reintegrar, podemos transformarlas en números que adquieren una representación en el cubo de color y que podemos cambiar directamente a un modelo *LUV* según estos colores, lo que dará un realismo al trabajo, completando parte de la virtualidad necesaria para alcanzar unos resultados más reales.

Parte III

Conclusiones y Líneas Futuras

En esta tesis hemos mostrado la capacidad de la matemática para poder resolver un problema real. No se trata de aplicar las matemáticas, sino de modelizar un problema real (restauración de un retablo) para poder abordarlo desde el punto de vista matemático (matemática aplicada): la restauración artística. El objetivo es construir modelos que orienten dentro de la restauración. Estos modelos son de utilidad para obtener información y actuar inocuamente sobre una obra de arte, además de dar objetividad dentro de este campo.

Para llevar a cabo este objetivo, planteamos en primer lugar la deconvolución como el paso fundamental para obtener aquellos detalles que quedan *enmascarados* por un núcleo, que nos permitirá definir con precisión aquellas regiones que posteriormente vamos a reintegrar. Este núcleo procede de la toma de fotografías. En la mayoría de ocasiones, las condiciones de luz o de humedad en este proceso interfieren generando un suavizado que eliminamos vía deconvolución. El núcleo es indeterminado en la mayoría de ocasiones y bajo unas consideraciones que hemos expuesto en el capítulo (página XIII), debido al proceso en el que se realizan las tomas. En este caso procedemos por *deconvolución ciega*.

La primera aportación es el método híbrido, [RC06], que permite deconvolver las escalas finas, evitando la pérdida del contraste; siempre que la imagen sea de clase **W**. Este modelo ha sido adaptado para imágenes en color, con resultados muy satisfactorios, comparado con otros modelos existentes en la literatura.

Nuestra segunda aportación en la deconvolución, frente a otras más conocidas en la literatura, es el *modelo fraccionario recursivo* ([RC08]). En L^1 tenemos la norma de la variación total (§1.2.3) que mide valores del gradiente elevados. En L^2 tenemos la regularización de Tikhonov (§1.2.1) que determina soluciones suaves. En cambio el método fraccional es una regularización en $H^{\beta/2}$, $0 \leq \beta \leq 1$ y *tiene la ventaja* de que permite obtener desde soluciones suaves hasta soluciones con gradiente elevado pero usando la información de variaciones intermedias (frecuencias en el espacio de Fourier), a cada paso, lo que permite la adaptabilidad de la solución y la convergencia en pocos pasos. Además, la determinación del núcleo es adaptativa, porque

para calcular el núcleo de un paso necesita la información del anterior.

Gracias al uso de la transformada de Fourier, el método es mucho más rápido y estable que en la variación total o en el SECB, tal y como podemos comprobar en la sección §1.4.3. Además permite recuperar frecuencias intermedias, lo que se traduce en que, cuando determinamos el núcleo, no se altera en exceso el contraste de la imagen, preservando el mismo en cada paso. Esto es fundamental de cara a tratar con imágenes en color donde es necesario que la regularización sea estable y las variaciones del contraste sean mínimas para garantizar que, al invertir el modelo de color (pasar de LUV a RGB), no tengamos problemas al representar determinados valores (por ejemplo aquellos en los que la luminancia sea negativa).

Nuestras líneas de investigación futuras, en deconvolución ciega fraccionaria, se basan en el estudio de otro tipo de núcleos como son, **el núcleo de movimiento**, (en esta parte tenemos que tener en cuenta el efecto de la fase), **el núcleo de desenfoque** (que requiere un cambio en la definición propia de la Lévy y estudiar la función generatriz, explicada en el capítulo 1, *SEC* 1.3.1). Otra de las líneas que también continuaremos (más importante) es **la deconvolución con ruido**. En esta parte, queremos estudiar el modelo planteado en la ecuación (1.42), así como modificar el procedimiento de determinación de parámetros y los parámetros de regularización, por aproximantes de Padé.

En la segunda parte mostramos la aplicación del paso anterior: *la reintegración digital o inpainting*. En esta parte hemos adaptado el modelo publicado en [BSCB00] para el caso del retablo. En este caso **nuestras aportaciones** se basan en modificar el algoritmo anterior, para *recomponer las texturas*. *Los perfiles los continuamos usando la curvatura media*. Cuando la imagen tiene un agujero superior a 40 píxeles, usamos multirresolución y *filtros de realce de perfiles* (deconvolución ciega fraccionaria) para eliminar el efecto de interpolación conforme va aumentando el nivel de resolución.

Como líneas futuras en la reintegración digital, proponemos reintegrar por patrones históricos, de manera que tengamos una base de datos en la que figuren tanto artistas como colores que emplearon, además de introducir el análisis espectrográfico para generar en el ordenador otra base de datos

para los colores. De esta manera podemos reintegrar los cuadros o esculturas siguiendo un criterio específico. Aunque esto es más bien técnico, abre perspectivas a un mayor conocimiento del análisis de imágenes en color.

Bibliografía

- [ADA⁺02] S. Amat, R. Donat, J.V. Arnau, R. Peris, F. Arandiga, and P. Mulet. *Aproximació Numérica*. Servei de Publicacions de la Universitat de València, 2002.
- [BBC⁺01] C. Ballester, M. Bertalmio, V. Caselles, G. Sapiro, and J. Verdera. Filling-in by joint interpolation of vector fields and gray levels. *IEEE Transactions Image Processing*, 10:1200–1211, August 2001.
- [BCM05a] A. Buades, B. Coll, and J.M. Morel. Image denoising by non-local averaging. *Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 2(1):25–28, 2005.
- [BCM05b] A. Buades, B. Coll, and J.M. Morel. A non-local algorithm for image denoising. *Computer Vision and Pattern Recognition. IEEE Computer Society Conference on*, 2(2):60–65, 2005.
- [BJF02] Zitová Barbara, Flusser Jan, and Šroubek Filip. Application of image processing for the conservation of the medieval mosaic. *IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence*, III:993–996, 2002.
- [BSCB00] Marcelo Bertalmio, Guillermo Sapiro, Vicent Caselles, and Coloma Ballester. Image inpainting. *SIGGRAPH 2000*, pages 417–424, July 2000.

- [CAP⁺02] P. Capilla, JM Artigas, J Pujol, MJ Luque, J Malo, and Martínez-Verdú. *Fundamentos de Colorimetría*. Publicacions de la Universitat de València, 2002.
- [Car99a] Alfred Carasso. Linear and nonlinear image deblurring: A document study. *SIAM J. Numer. Anal.*, 36(6):1659–1689, 1999.
- [Car99b] Alfred S. Carasso. Logarithmic convexity and the "slow evolution" constraint in ill-posed initial value problems. *SIAM. J. MATH. ANAL.*, 30(3):479–496, 1999.
- [Car01] Alfred Carasso. Direct blind deconvolution. *SIAM J. Appl. Math.*, 61(6):1980–2007, 2001.
- [Car02] Alfred S. Carasso. The apex method in image sharpening and the use of low exponent lévy stable laws. *SIAM J. APPL. MATH.*, 63(2):593–618, 2002.
- [CGM99] Tony F. Chan, Gene H. Golub, and Pep Mulet. A nonlinear primal-dual method for total variation-based image restoration. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 20:1964–1977, 1999.
- [Cha95] *Continuation Method for Total Variation Denoising Problems*, volume 2563. SPIE Symposium on Advance Signal Processing: Algorithms, Architectures and Implementations, 1995.
- [CKS00] Tony F. Chan, Sung Ha Kang, and Jianhong Shen. Total variation denoising and enhancement of color images based on CB and HSV color models. Technical report, UCLA CAM REPORTS, 2000.
- [CM95] Tony F. Chan and Pep Mulet. Iterative methods for total variation image restoration. Technical report, UCLA-CAM REPORTS, 1995.
- [CM99] Tony F. Chan and Pep Mulet. On the convergence of the lagged diffusivity fixed point method in total variation image restoration. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 36(2):354 – 367, 1999.

- [CMS03] V. Candela, A. Marquina, and S. Serna. A local spectral inversion of a linearized tv model for denoising and deblurring. *IEEE Transactions on Image Processing*, 12(7):808–816, July 2003.
- [CW98] T. Chan and C.K. Wong. Total variation blind deconvolution. *IEEE Transactions on Image Processing*, 7(3):370–375, 1998.
- [CYP04] Tony F. Chan, Andy Yip, and Frederick E Park. Simultaneous total variation image inpainting and blind deconvolution. Technical report, UCLA CAM Reports, 2004.
- [DBIW05] S. Didas, B. Burgeth, A. Imiya, and J. Weickert. Regularity and scale space properties of fractional high order linear filtering. *Lecture Notes in Computer Sciences*, pages 13–25, 2005.
- [Fra96] Wm Randolph Franklin. Lossy compression of elevation data. In *In Proc. 7th Int. Symp. on Spatial Data Handling*, pages 385–404. Springer-Verlag, 1996.
- [Fra00] *Applications of Fractional Calculus in Physics*. World Scientific, River Edge, NJ, 2000.
- [Han01] P. C. Hansen. The L-curve and its use in the numerical treatment of inverse problems. In *Computational Inverse Problems in Electrocardiology*, number 5 in Advances in Computational Bioengineering, pages 119–142. WIT Press, Southampton, 2001.
- [HMO04] Lin He, Antonio Marquina, and Stanley Osher. Blind deconvolution using tv regularization and bregman iteration. Technical report, UCLA CAM REPORTS, 2004.
- [Knu98] Nicolas Knut. *Manual de restauración de cuadros*. Könemann Verlagsgesellschaft mbH, Eslovenia, 1998.
- [LNN06] B. Leah, S.Ñir, and K.Ñahum. Semi-blind image restoration via mumford-shah regularization. *IEEE Transactions on Image Processing*, 15(2):483–493, 2006.

- [LRF92] S. Osher L. Rudin and E. Fatemi. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Physica D*, 60:259 – 268, 1992.
- [LS94] L.Rudin and S.Osher. Total variation based image restoration with free local constraints. In *Proc.IEEE Internat. Conf.Imag.Proc.*, pages 31–35, 1994.
- [Mas98] S. Masnou. *Filtratge et Desocclusion d’Images per Methodes d’Ensemble de Niveau*. PhD thesis, Universite Paris-Dauphine, 1998.
- [Mil70] K. Miller. Least squares methods for ill-posed problems with prescribed bound. *SIAM, J. Math. Anal.*, pages 52–74, 1970.
- [Mon98] Antonio Caselles Moncho. Regint: a tool for discovery by complex function fitting. *R. Trappl(ed), Cybernetics and Systems’98, Austrian Society for Cybernetic Studies*, pages 787–792, 1998.
- [Mum93] *Filtering Segmentation and Depth*. Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [RC06] Pantaleón D. Romero and Vicente F. Candela. *Advanced Concepts for Intelligent Vision Systems*, chapter Mathematical Models for Restoration of Baroque Paintings. Springer Berlin / Heidelberg, 2006.
- [RC08] Pantaleón D. Romero and Vicente F. Candela. Blind deconvolution models regularized by fractional powers of the laplacian. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, On line, 2008.
- [TA77] A. Tichonov and V. Arsenin. *Solution of ill-posed problems*. Wiley, New York, 1977.
- [VO98] C.R. Vogel and M.E. Oman. Fast, robust total variation-based reconstruction of noisy, blurred image. *Image Processing, IEEE Transactions*, 7(6):813–824, 1998.