

DEPARTAMENTO DE ASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA

ESTUDIO DE FOLIACIONES EN RELATIVIDAD

VICENTE JOSÉ BOLÓS LACAVE

UNIVERSITAT DE VALENCIA
Servei de Publicacions
2003

Aquesta Tesi Doctoral va ser presentada a València el dia 14 de Gener de 2003 davant un tribunal format per:

- D. Jesús Martín Martín
- D. Ramón Lapiedra i Civera
- D. Joseph Manel Parra Serra
- D. Vicente del Olmo Muñoz
- D. Miguel Barreda Rochera

Va ser dirigida per:

D. Vicente Liern Carrión

D. Joaquín Olivert Pellicer

©Copyright: Servei de Publicacions
Vicente José Bolós Lacave

Depòsit legal:

I.S.B.N.:84-370-5804-X

Edita: Universitat de València
Servei de Publicacions
C/ Artes Gráficas, 13 bajo
46010 València
Spain
Telèfon: 963864115

ESTUDIO DE FOLIACIONES EN RELATIVIDAD

Vicente José Bolós Lacave
Departament Matemàtica Aplicada
Universitat de València

Índice general

CAPÍTULO 0.. Introducción	7
0.1. Motivaciones	7
0.2. Análisis de la Memoria	8
0.3. Preliminares	11
0.3.1. Distribuciones y foliaciones	11
0.3.2. La variedad espacio-tiempo	12
0.3.3. Ejemplos de espacio-tiempos	13
0.3.4. Observadores	17
0.3.5. Geodésicas y Ley de Movimiento	18
0.3.6. Frecuencia en geodésicas nulas	19
0.3.7. Entornos normales y entornos normales convexos ...	20
CAPÍTULO 1.. Caracterización local de foliaciones nulas ..	23
1.1. Bases asociadas a congruencias de observadores	23
1.1.1. Bases asociadas de 1-distribuciones nulas	24
1.1.2. Cambio de base asociada de una 1-distribución nula	25
1.1.3. Bases asociadas de 3-distribuciones nulas	28
1.1.4. Cambio de base asociada de una 3-distribución nula	33
1.1.5. Interpretaciones físicas y geométricas	35
1.2. Igualdad salvo orientaciones para una congruencia de ob-	
servadores	36
1.2.1. 1-Distribuciones nulas	37
1.2.2. 3-Distribuciones nulas	40
1.2.3. Otras propiedades	49
1.2.4. Congruencias de observadores distintas con bases	
asociadas iguales	56
1.3. 3-Foliaciones nulas	58
1.3.1. Interpretación física y geométrica	59

1.3.2.	Relaciones de integrabilidad	62
1.4.	Algunas interpretaciones físicas	70
CAPÍTULO 2..	Foliaciones de simultaneidad	73
2.1.	Subvariedad tangencial y causalidad tangencial.....	74
2.2.	Subvariedades de Landau: Definición y causalidad	76
2.3.	Subvariedades de horismos: Definición y causalidad	84
2.4.	Foliaciones de Landau	90
2.5.	Foliaciones de horismos	95
2.6.	Adaptaciones vectoriales	97
2.6.1.	Adaptaciones vectoriales mediante foliaciones de Landau	98
2.6.2.	Adaptaciones vectoriales mediante foliaciones de horismos	99
2.6.3.	Aplicación a los observadores. Emisiones puntuales .	102
2.6.4.	Aberración de la luz y dirección propia.....	104
2.6.5.	Efecto Doppler y frecuencia propia	104
2.6.6.	Distancias	105
2.7.	Igualdad salvo orientaciones entre foliaciones de horismos orientadas al futuro y al pasado	107
CAPÍTULO 3..	Estabilidad entre foliaciones	113
3.1.	Distribuciones estables	114
3.1.1.	Definiciones de estabilidad	114
3.1.2.	Distribuciones planas respecto a otras distribuciones y estabilidad regular	125
3.1.3.	Campos geodésicos y auto-estabilidad regular	135
3.2.	Subvariedades estables	136
3.3.	Relaciones de estabilidad entre Ω y $\Omega_{\bar{U}}$	142
3.3.1.	Estabilidad y estabilidad regular en general	143
3.3.2.	Auto-estabilidad	148
3.4.	Estabilidad de p -distribuciones respecto a campos.....	158
3.4.1.	Estabilidad de 3-distribuciones nulas respecto a congruencias de observadores.....	162
APÉNDICE A..	Ejemplos de estabilidad	165
A.1.	Estabilidad de una 3-distribución respecto a un campo	165
A.1.1.	Ejemplo I (Minkowski).....	167
A.1.2.	Ejemplo II (Minkowski).....	169
A.1.3.	Ejemplo III (Schwarzschild)	172
A.1.4.	Ejemplo IV (Robertson-Walker)	179
A.2.	Auto-estabilidad	185
A.2.1.	Ejemplo V (Schwarzschild)	185
A.2.2.	Ejemplo VI (Robertson-Walker)	187
A.2.3.	Ejemplo VII (Schwarzschild)	189

A.2.4. Ejemplo VIII (Robertson-Walker)	193
A.2.5. Ejemplo IX (Robertson-Walker)	195
A.2.6. Ejemplo X	197
A.2.7. Ejemplo XI (pp-wave).....	198
A.3. Estabilidad en general.....	199
A.3.1. Ejemplo XII (Schwarzschild)	199
A.3.2. Ejemplo XIII (Robertson-Walker)	200
APÉNDICE B.. Fibrados espigados	201
B.1. Introducción a fibrados	202
B.2. Fibrados simplécticos en Relatividad	210
B.3. Estructura espigada	212
B.4. Análisis de estabilidad	218
APÉNDICE C.. Conclusiones	223
C.1. Resultados obtenidos	223
C.2. Problemas abiertos	225
Bibliografía.....	227

0. Introducción

0.1. Motivaciones

Desde finales de los años sesenta, y sobre todo a partir de los trabajos de J. M. Souriau, se propone una nueva forma de estudiar la evolución de los sistemas dinámicos a través de la Mecánica Simpléctica. Un sistema dinámico (F, σ_F) se representa mediante una variedad simpléctica y el espacio de evolución de este sistema, (V, σ_V) , constituye una variedad presimpléctica. La evolución de F puede describirse mediante la foliación característica de V , es decir

$$\Omega = \text{Ker}\sigma_V.$$

Esta técnica resultó muy útil para trabajar en el espacio-tiempo de Minkowski, sin embargo, resultaba insuficiente para trabajar en Relatividad General.

Una de las formas de extender este método a un espacio-tiempo arbitrario es trabajar con estructuras fibradas. Tras los éxitos de los fibrados principales con conexión para describir la Teoría Gauge (Wu y Yang, 1975), aparecen trabajos en los que se recurre a estas estructuras para analizar sistemas dinámicos desde diferentes ramas de la Física.

A principios de los noventa, Liern y Olivert (1992) propusieron la estructura de fibrado espigado, que cubre estos dos objetivos: permite analizar la evolución mediante foliaciones y extiende a la Relatividad General los resultados de la Mecánica Simpléctica. En esencia, en estas estructuras, las foliaciones (por la forma de construcción) aportan la mayoría del contenido físico de los fenómenos. Conscientes de este hecho, hemos creído necesario un estudio en profundidad de las foliaciones que pueden ser usadas en estas estructuras.

Siguiendo con la línea marcada por Liern y Olivert (1995), el estudio de la evolución de partículas libres sin masa puede describirse, al menos de forma aproximada, mediante foliaciones nulas de codimensión 1 en el espacio-tiempo. Por lo tanto, nuestro interés se ha centrado especialmente en este tipo de foliaciones para dimensión o codimensión 1.

Para estudiar las foliaciones en el espacio-tiempo es conveniente tener en cuenta los puntos de vista cuatridimensional y tridimensional de la Relatividad. Una buena interrelación entre ellos permitirá que se entiendan mejor las observaciones, a pesar de pertenecer al espacio físico tridimensional del observador. Cuando el sistema dinámico está descrito por las variedades integrales de una foliación en el espacio-tiempo, la forma de vincularlo a la observación es a través de bases ligadas a un observador U . Para ello introducimos la nueva noción de U -base, presente a lo largo de todo el trabajo, que nos permite interpretar de forma novedosa el efecto Doppler y la aberración de la luz. En nuestro formalismo, ambos fenómenos se explican mediante un simple cambio de base.

Abordamos también el estudio de la simultaneidad mediante foliaciones. Uno de los problemas que plantea trabajar con variedades de simultaneidad es garantizar la existencia de foliaciones cuyas hojas son precisamente estas variedades de simultaneidad. Este hecho nos permitirá estudiar fenómenos físicos, como los frentes de onda, en diferentes puntos. Por otro lado, se distinguen dos tipos de simultaneidad relacionadas con la causalidad y que generarán, para entornos adecuados, foliaciones de simultaneidad espaciales o nulas.

Por último, en los fibrados espigados, la evolución de los sistemas dinámicos viene dada por un Ley de Movimiento que es equivalente a que la foliación sea totalmente geodésica. Hemos generalizado esta Ley introduciendo condiciones geométricas, que hemos denominado de “estabilidad” y que nos han permitido relacionarlo con la curvatura del espacio-tiempo.

0.2. Análisis de la Memoria

En el **Capítulo 0** hemos expuesto de forma resumida aquellos conceptos preliminares y resultados previos necesarios para desarrollar adecuadamente la presente memoria. En el primer epígrafe se dan las definiciones y propiedades necesarias acerca de las distribuciones y las foliaciones, que forman el núcleo del estudio. En los dos epígrafes siguientes introducimos la variedad espacio-tiempo y ejemplos particulares de métricas que serán estudiadas posteriormente, tales como las de Minkowski, Schwarzschild, Robertson-Walker y pp -wave. Dedicamos el siguiente epígrafe a introducir el importante concepto de observador y congruencia de observadores. Posteriormente, damos la Ley de Movimiento para foliaciones que será generalizada en el Capítulo 3. En el sexto epígrafe introducimos el campo frecuencia en geodésicas nulas y por último damos las definiciones y algunas propiedades acerca de los entornos normales y los entornos normales convexos, muy importantes para el desarrollo del segundo Capítulo.

En el **Capítulo 1** introducimos un nuevo formalismo que nos permite estudiar mejor las propiedades cinemáticas de las foliaciones nulas de dimensión ó codimensión 1. Para ello, dedicamos el primer apartado

al concepto de *base asociada a una congruencia de observadores* para distribuciones nulas de dimensión ó codimensión 1. Al estudiar el cambio de base asociada (es decir, al cambiar de congruencia de observadores) se obtienen expresiones para la aberración de la luz y el efecto Doppler. Finalmente damos algunas interpretaciones físicas y geométricas relacionadas con estas bases asociadas y definimos las *distribuciones de frentes de onda temporales y espaciales* asociadas a 3-distribuciones nulas.

En el segundo apartado introducimos una nueva relación entre las distribuciones nulas de dimensión ó codimensión 1, la *igualdad salvo orientaciones para una congruencia de observadores*. También introducimos una nueva relación entre congruencias de observadores, la Ω -relación. Estudiamos diversas propiedades de estas relaciones, en algunos casos, con ayuda de diagramas. Finalmente, gracias a las propiedades de la Ω -relación, estudiamos cuándo dos congruencias de observadores distintas tienen bases asociadas idénticas.

Hasta ahora hemos estudiado distribuciones sin importarnos si son o no foliaciones. En el siguiente apartado estudiamos cuándo una distribución nula de dimensión 3 o las subdistribuciones de frentes de onda (temporales y espaciales) son integrables. Finalmente, damos algunas interpretaciones físicas de estas propiedades y aplicamos la Ω -relación entre congruencias de observadores a la aberración de la luz.

Hemos dedicado el **Capítulo 2** a la simultaneidad, necesaria para estudiar los frentes de onda, siempre dentro de entornos normales convexos. Para ello, hemos empezado estudiando la causalidad de las subvariedades de Landau (responsables de la simultaneidad espacial) y de las subvariedades de horismos (responsables de la simultaneidad nula u observada). Debido a que no podemos asegurar que la causalidad de las subvariedades de Landau sea siempre espacial, hemos definido en el primer apartado un nuevo concepto de causalidad que se puede interpretar como una “causalidad observada”, la *causalidad tangencial*, y probamos que las subvariedades de Landau son siempre tangencialmente espaciales. Por otro lado, en el tercer apartado obtenemos que las subvariedades de horismos son siempre nulas y tangencialmente nulas.

En los dos siguientes apartados estudiamos las condiciones necesarias para que existan foliaciones cuyas hojas son subvariedades de Landau o de horismos, exigiendo que sean espaciales o nulas respectivamente. No siempre existen las foliaciones de Landau espaciales dentro de cualquier entorno normal convexo, pero sí existen las foliaciones de horismos nulas.

En el sexto apartado introducimos una nueva forma de adaptar vectores mediante foliaciones. Aplicamos este método a las foliaciones de Landau y de horismos. Esta última aplicación nos permite trabajar con *emisiones puntuales* y con sus respectivos *observadores propios* asociados. Con estos conceptos podemos estudiar los efectos de la aberración de la luz en la *dirección propia* y el efecto Doppler en la *frecuencia propia* de una emisión puntual. Además, la forma de adaptar vectores mediante

foliaciones de horismos orientados al futuro nos permite construir congruencias de observadores a partir de observadores individuales, con lo que los resultados obtenidos en el Capítulo 1 para congruencias de observadores son aplicables también a los observadores individuales.

Por último, dedicamos un epígrafe al estudio de la igualdad salvo orientaciones entre foliaciones de horismos orientadas al futuro y al pasado. Se obtiene un resultado que relaciona la propiedad de igualdad salvo orientaciones, las foliaciones de horismos y las adaptaciones vectoriales estudiadas en el apartado anterior.

En el **Capítulo 3**, hemos generalizado la Ley de Movimiento introduciendo una nueva propiedad entre distribuciones: la *estabilidad*. Todo el primer apartado está dedicado a los conceptos y propiedades que guardan relación con la estabilidad. Definimos la estabilidad general entre distribuciones así como la *auto-estabilidad*, la *estabilidad regular* y la *auto-estabilidad regular*. Obtenemos un resultado muy útil, el *lema de dualidad*, que asegura que una distribución y su ortogonal se comportan igual ante la estabilidad. Además estudiamos propiedades que simplifican el estudio de la estabilidad en general, estableciendo cuándo la estabilidad y la estabilidad regular son equivalentes. En el segundo apartado hemos realizado un estudio análogo de estabilidad para subvariedades, obteniendo propiedades similares.

En el tercer apartado relacionamos la estabilidad con el primer Capítulo, analizando cuándo una 3-distribución nula y sus frentes de onda espaciales y temporales son estables de algún u otro modo. Se estudia tanto la estabilidad como la estabilidad regular y la auto-estabilidad. De la misma forma, en el cuarto apartado relacionamos la estabilidad con el segundo Capítulo, analizando cuándo las foliaciones de simultaneidad son estables.

Por último, se hace hincapié en el estudio de la estabilidad respecto campos, y más especialmente en la estabilidad de 3-distribuciones nulas respecto congruencias de observadores, ya que en este caso particular, la interpretación física y geométrica resulta interesante.

Hemos optado por insertar en dos Apéndices los resultados que complementan la memoria pero no forman parte del grueso de la misma. En el **Apéndice 1** mostramos una recopilación de ejemplos de estabilidad entre distribuciones en diferentes espacio-tiempos. Además de la utilidad práctica de cada uno de estos ejemplos, en algunos de ellos se muestran dos maneras diferentes de llegar a la misma solución: una, haciendo los cálculos directos; y otra mucho más breve, utilizando los resultados obtenidos en esta memoria. De hecho, en muchos casos el cálculo directo resulta inviable.

En el **Apéndice 2** analizamos las leyes de movimiento de los fibrados espigados con el formalismo expuesto en esta tesis. Sólo hemos desarrollado las demostraciones que no aparecen en ningún otro trabajo y que en muchos casos corrigen y/o complementan trabajos anteriores.

0.3. Preliminares

0.3.1. Distribuciones y foliaciones

Antes de introducir los conceptos preliminares necesarios, vamos a fijar la notación que se seguirá. Si V es un espacio vectorial, V^* denotará el espacio dual. La envoltura lineal se representará como $\langle \cdot \rangle$. Si v es un vector, $|v|$ es su norma. Si A es un subespacio, A^\perp es el subespacio ortogonal de A , formado por los vectores normales a A . Si no se especifica, I será un intervalo real conexo. Cuando se dice que un campo es distinto de cero queremos decir que no vale cero en ningún punto. Hechas estas aclaraciones, pasemos a definir y estudiar algunas propiedades de las distribuciones y las foliaciones en una variedad diferenciable en general.

Definición 0.3.1. *Un campo de espacios vectoriales de dimensión d en una variedad n -dimensional V ($d \leq n$) es una aplicación Ω de V en $\mathcal{P}(TV)$ (el conjunto de las partes de TV), de manera que $\Omega(p)$ sea un subespacio vectorial de T_pV de dimensión d , para todo p del dominio de Ω .*

Definición 0.3.2. *Una d -distribución (o distribución de dimensión d) es un campo de espacios vectoriales Ω , de dimensión d , tal que cada punto del dominio de Ω posea un entorno W , en el que existan campos vectoriales X_1, \dots, X_d , de modo que, para todo $p \in W$, $X_1(p), \dots, X_d(p)$ formen una base de $\Omega(p)$. Este conjunto de campos vectoriales se denomina base de Ω en W .*

Definición 0.3.3. *Una carta F de funciones coordenadas x_1, x_2, \dots, x_n se dice que es plana con respecto a una d -distribución Ω de una variedad V , si los campos vectoriales $\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ ($\alpha = 1, \dots, d$) forman en cada punto p del dominio de F una base de $\Omega(p)$.*

Definición 0.3.4. *Una d -distribución Ω se dice que es integrable o foliación de dimensión d si*

- el dominio de Ω se encuentra dentro de V ,
- para todo p del dominio de Ω existe una carta plana F , tal que p está en el dominio de F .

Por ejemplo, toda n -distribución Ω , definida como $\Omega(p) = T_pV$, para todo $p \in V$, es una foliación de dimensión n , y toda 1-distribución sobre una variedad V es foliación. Ya que sólo existe una forma de definir una distribución de dimensión n , la primera distribución será denotada TV .

Definición 0.3.5. *Se dice que un campo vectorial X pertenece a una distribución Ω , es decir $X \in \Omega$, si*

$$X_p \in \Omega(p)$$

para todo p del dominio de X .

Definición 0.3.6. Se dice que una d -distribución Ω es involutiva, si para todo par de campos vectoriales $X, Y \in \Omega$ se verifica que el paréntesis ¹ de Lie $[X, Y] \in \Omega$.

Nota 0.3.7.

Teorema 0.3.8. (Teorema de Frobenius) Una distribución es integrable si y sólo si es involutiva.

Definición 0.3.9. Sea Ω una distribución sobre una variedad V . Se dice que H es variedad integral (o hoja) de Ω si es subvariedad de V , de manera que para todo $p \in H$

$$\Omega(p) = i_{*p}(T_p H),$$

en donde $i : H \rightarrow V$ es la inmersión canónica.

Obviamente, tenemos que la dimensión de una distribución coincide con la dimensión de sus variedades integrales.

Teorema 0.3.10. (Criterio de integrabilidad) Una condición necesaria y suficiente para que una distribución Ω sobre una variedad V sea una foliación, es que admita en cada punto de V una variedad integral.

0.3.2. La variedad espacio-tiempo

El espacio-tiempo M es considerado como una variedad diferenciable de dimensión $m = 4$ (salvo en algunos casos generales, que será considerado de dimensión $1 < m \leq 4$), pseudo-Riemanniana, hiperbólica de signatura $(3, 1)$, conexa, orientable y de tipo Hausdorff, dotada de un campo tensorial métrico g . En M se define una conexión lineal, ∇ , que es la única compatible con g y sin torsión. En cada $p \in M$, el espacio tangente $T_p M$, es un espacio vectorial de dimensión 4, hiperbólico y con métrica de signatura $(3, 1)$.

Al considerar M conexa, la signatura de g no depende del punto, y al ser de Hausdorff, en Brickell y Clark (1970) se demuestra que las soluciones de las ecuaciones diferenciables de primer orden no dependen de la carta en la que se resuelven.

Un vector tangente al espacio-tiempo es espacial, temporal o nulo según su métrica sea positiva, negativa o nula respectivamente. Un campo vectorial en M es espacial, temporal o nulo según lo sea en cada punto el vector correspondiente, lo cual tiene sentido puesto que es independiente de la carta elegida. Una distribución es temporal si contiene al menos un campo temporal; es nula si contiene al menos un campo nulo y ninguno temporal; es espacial si todos sus campos son espaciales. La proyección

¹Denotamos el paréntesis de Lie de dos campos vectoriales X, Y como el campo vectorial $[X, Y]$ que al actuar sobre una función diferenciable arbitraria f verifica $[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$.

espacial del tensor métrico g se denotará como γ (también llamado Tensor de Eckart).

La coordenada $x^4 = t$ de un punto, relativa al entorno de una carta de la variedad espacio-tiempo, coincide con el tiempo coordinado del sistema que tal carta describe.

A lo largo de toda la tesis, trabajaremos siempre de una forma local dentro de entornos abiertos (incluso cuando no quede explícitamente indicado), que, por ser subvariedades regulares de M de su misma dimensión, poseerán estructura de espacio-tiempo de forma natural.

0.3.3. Ejemplos de espacio-tiempos

En esta sección vamos a introducir las métricas de espacio-tiempo que vamos a usar en la tesis, sobre todo en el Capítulo 4. Sea M un espacio-tiempo 4-dimensional de coordenadas (x_1, x_2, x_3, x_4) . Dado un campo vectorial X , vamos a denotar sus componentes de la forma

$$(X^1, X^2, X^3, X^4) \equiv X^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + X^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + X^3 \frac{\partial}{\partial x^3} + X^4 \frac{\partial}{\partial x^4}.$$

En coordenadas cartesianas

$$(X^x, X^y, X^z, X^t) \equiv X^x \frac{\partial}{\partial x} + X^y \frac{\partial}{\partial y} + X^z \frac{\partial}{\partial z} + X^t \frac{\partial}{\partial t}$$

y en coordenadas esféricas

$$(X^r, X^\theta, X^\varphi, X^t) \equiv X^r \frac{\partial}{\partial r} + X^\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + X^\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} + X^t \frac{\partial}{\partial t}.$$

Métrica de Minkowski:

En coordenadas cartesianas

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2.$$

Los símbolos de Christoffel son todos cero al igual que las componentes del tensor curvatura.

Métrica de Schwarzschild:

En coordenadas esféricas

$$ds^2 = \frac{1}{a} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) - a dt^2$$

en donde

$$a = 1 - \frac{2m}{r}.$$

Vicente José Bolós Lacave

Los símbolos de Christoffel distintos de cero son

$$\begin{aligned}\Gamma_{tt}^r &= \frac{a'a}{2}; & \Gamma_{tr}^t &= \Gamma_{rt}^t = \frac{a'}{2a} \\ \Gamma_{rr}^r &= -\frac{a'}{2a}; & \Gamma_{r\theta}^\theta &= \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r}; & \Gamma_{r\varphi}^\varphi &= \Gamma_{\varphi r}^\varphi = \frac{1}{r} \\ \Gamma_{\theta\theta}^r &= -ra; & \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi &= \cot \theta \\ \Gamma_{\varphi\varphi}^r &= -ra \sin^2 \theta; & \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta &= -\sin \theta \cos \theta\end{aligned}$$

en donde

$$a' = \frac{da}{dr} = \frac{2m}{r^2}.$$

Las componentes distintas de cero del tensor curvatura son

$$\begin{aligned}R_{ttr}^r &= -R_{trt}^r = \frac{a'a}{r}; & R_{rtr}^t &= -R_{rrt}^t = \frac{a'}{ar} \\ R_{tt\theta}^\theta &= -R_{t\theta t}^\theta = -\frac{a'a}{2r}; & R_{\theta t\theta}^t &= -R_{\theta\theta t}^t = -\frac{m}{r} \\ R_{tt\varphi}^\varphi &= -R_{t\varphi t}^\varphi = -\frac{a'a}{2r}; & R_{\varphi t\varphi}^t &= -R_{\varphi\varphi t}^t = -\frac{m}{r} \sin^2 \theta \\ R_{rr\theta}^\theta &= -R_{r\theta r}^\theta = \frac{a'}{2ar}; & R_{\theta r\theta}^r &= -R_{\theta\theta r}^r = -\frac{m}{r} \\ R_{rr\varphi}^\varphi &= -R_{r\varphi r}^\varphi = \frac{a'}{2ar}; & R_{\varphi r\varphi}^r &= -R_{\varphi\varphi r}^r = -\frac{m}{r} \sin^2 \theta \\ R_{\theta\theta\varphi}^\varphi &= -R_{\theta\varphi\theta}^\varphi = -\frac{2m}{r}; & R_{\varphi\theta\varphi}^\theta &= -R_{\varphi\varphi\theta}^\theta = \frac{2m}{r} \sin^2 \theta.\end{aligned}$$

Métrica de Robertson-Walker:

En coordenadas esféricas

$$ds^2 = \frac{F^2}{a^2} (dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)) - dt^2$$

en donde

$$\begin{aligned}F &= F(t) \geq 0 \\ a &= \left(1 + \frac{1}{4}kr^2\right)\end{aligned}$$

con $k = -1, 0, 1$. Si $k = -1$ entonces $r \in [0, 2[$. Los símbolos de Christoffel distintos de cero son

$$\begin{aligned}\Gamma_{tr}^r &= \Gamma_{rt}^r = \Gamma_{t\theta}^\theta = \Gamma_{\theta t}^\theta = \Gamma_{t\varphi}^\varphi = \Gamma_{\varphi t}^\varphi = \frac{F'}{F} \\ \Gamma_{rr}^t &= FF' \frac{1}{a^2}; & \Gamma_{rr}^r &= -\frac{k}{2} \frac{r}{a}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{r\theta}^\theta &= \Gamma_{\theta r}^\theta = \Gamma_{r\varphi}^\varphi = \Gamma_{\varphi r}^\varphi = \left(1 - \frac{1}{4}kr^2\right) \frac{1}{ar} \\
 \Gamma_{\theta\theta}^t &= FF' \frac{r^2}{a^2}; \quad \Gamma_{\theta\theta}^r = -\left(1 - \frac{1}{4}kr^2\right) \frac{r}{a} \\
 \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi &= \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi = \cot \theta \\
 \Gamma_{\varphi\varphi}^t &= FF' \frac{r^2}{a^2} \sin^2 \theta; \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^r = -\left(1 - \frac{1}{4}kr^2\right) \frac{r}{a} \sin^2 \theta
 \end{aligned}$$

en donde

$$F' = \frac{dF}{dt}.$$

Las componentes distintas de cero del tensor curvatura son

$$\begin{aligned}
 R_{ttr}^r &= -R_{trt}^r = \frac{F''}{F}; \quad R_{rtr}^t = -R_{rrt}^t = FF'' \frac{1}{a^2} \\
 R_{tt\theta}^\theta &= -R_{t\theta t}^\theta = \frac{F''}{F}; \quad R_{\theta t\theta}^t = -R_{\theta\theta t}^t = FF'' \frac{r^2}{a^2} \\
 R_{tt\varphi}^\varphi &= -R_{t\varphi t}^\varphi = \frac{F''}{F}; \quad R_{\varphi t\varphi}^t = -R_{\varphi\varphi t}^t = FF'' \frac{r^2}{a^2} \sin^2 \theta \\
 R_{rr\theta}^\theta &= -R_{r\theta r}^\theta = -(F'^2 + k) \frac{1}{a^2}; \quad R_{\theta r\theta}^r = -R_{\theta\theta r}^r = (F'^2 + k) \frac{r^2}{a^2} \\
 R_{rr\varphi}^\varphi &= -R_{r\varphi r}^\varphi = -(F'^2 + k) \frac{1}{a^2} \\
 R_{\varphi r\varphi}^r &= -R_{\varphi\varphi r}^r = (F'^2 + k) \frac{r^2}{a^2} \sin^2 \theta \\
 R_{\theta\theta\varphi}^\varphi &= -R_{\theta\varphi\theta}^\varphi = -(F'^2 + k) \frac{r^2}{a^2} \\
 R_{\varphi\theta\varphi}^\theta &= -R_{\varphi\varphi\theta}^\theta = (F'^2 + k) \frac{r^2}{a^2} \sin^2 \theta
 \end{aligned}$$

en donde

$$F'' = \frac{dF'}{dt} = \frac{d^2F}{dt^2}.$$

Las componentes distintas de cero del tensor de Einstein son

$$\begin{aligned}
 G_{tt} &= \frac{3}{F^2} (F'^2 + k) \\
 G_{rr} &= -(2FF'' + F'^2 + k) \frac{1}{a^2} \\
 G_{\theta\theta} &= -(2FF'' + F'^2 + k) \frac{r^2}{a^2} \\
 G_{\varphi\varphi} &= -(2FF'' + F'^2 + k) \frac{r^2}{a^2} \sin^2 \theta.
 \end{aligned}$$

Las condiciones para que el tensor de Einstein sea definido positivo (y por lo tanto, también lo será el tensor energía-impulso) son

$$F'^2 + k \geq 0 \quad (0.3.1)$$

$$2FF'' + F'^2 + k \leq 0. \quad (0.3.2)$$

Nótese que la primera condición sólo hay que tenerla en cuenta en el caso $k = -1$, ya que en los casos $k = 0, 1$ siempre se cumple.

Si suponemos $F'^2 + k = 0$ (esto es sólo posible con $k = -1$) también tenemos que $F'' = 0$, ya que $F' = 1$. Por lo tanto estamos en un espacio-tiempo plano, ya que todas las componentes del tensor curvatura son cero.

Por otro lado, si suponemos $F'' = 0$ entonces por (0.3.1) y (0.3.2) llegamos a que $F'^2 + k = 0$ y por lo tanto también estamos en un espacio-tiempo plano.

A partir de ahora supondremos que la métrica de Robertson-Walker no es plana, y por lo tanto supondremos que F'' no es idénticamente cero (esto incluye también el caso en el que $F'^2 + k$ no es idénticamente cero) para no trabajar en un espacio-tiempo plano.

Métrica pp-wave:

En coordenadas estándar

$$ds^2 = dy^2 + dz^2 - 2Hdu^2 - 2dudv$$

en donde u, v son los tiempos avanzado y retrasado respectivamente, y

$$H = H(u, y, z)$$

Los símbolos de Christoffel distintos de cero son

$$\begin{aligned} \Gamma_{uu}^u &= -H_{,u}; & \Gamma_{uu}^v &= 2H_{,u} \\ \Gamma_{uu}^y &= H_{,y}; & \Gamma_{uu}^z &= H_{,z} \\ \Gamma_{uy}^v &= \Gamma_{yu}^v = H_{,y}; & \Gamma_{uz}^v &= \Gamma_{zu}^v = H_{,z} \end{aligned}$$

en donde $H_{,}$ representa a la parcial de H . Las componentes distintas de cero del tensor curvatura son

$$\begin{aligned} R_{uuy}^u &= -R_{uyu}^u = H_{,uy}; & R_{uuz}^u &= -R_{uzu}^u = H_{,uz} \\ R_{uuy}^v &= -R_{uyu}^v = H_{,u}H_{,y} - H_{,uy} \\ R_{uuz}^v &= -R_{uzu}^v = H_{,u}H_{,z} - H_{,uz} \\ R_{yuy}^v &= -R_{yyu}^v = -H_{,yy}; & R_{yuz}^v &= -R_{yzu}^v = -H_{,yz} \\ R_{zuy}^v &= -R_{zyu}^v = -H_{,zy}; & R_{zuz}^v &= -R_{zzu}^v = -H_{,zz} \\ R_{uuy}^y &= -R_{uyu}^y = -H_{,yy}; & R_{uuz}^y &= -R_{uzu}^y = -H_{,yz} \\ R_{uuy}^z &= -R_{uyu}^z = -H_{,zy}; & R_{uuz}^z &= -R_{uzu}^z = -H_{,zz}. \end{aligned}$$

Las componentes distintas de cero del tensor de Einstein son

$$\begin{aligned} G_{uu} &= H_{,yy} + H_{,zz} \\ G_{uy} &= H_{,uy} \\ G_{uz} &= H_{,uz} \end{aligned}$$

La condición para que el tensor de Einstein sea definido positivo (y por lo tanto, también lo será el tensor energía-impulso) es

$$H_{,yy} + H_{,zz} \geq 0.$$

0.3.4. Observadores

Una línea de universo es una curva diferenciable C^∞ en el espacio-tiempo, y la llamaremos espacial, temporal o nula según lo sea su campo vectorial tangente. Un observador en el espacio-tiempo viene determinado por una línea de universo temporal $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$, en donde los puntos de β son las posiciones del observador. La cuadrivelocidad U del observador (o de la línea de universo temporal) es un campo vectorial definido en βI cuyos vectores son unitarios y tangentes a la línea de universo que define el observador, es decir

$$U = \frac{\partial \beta}{\partial \tau},$$

que los escogemos orientados al futuro, en donde $ds^2 = -d\tau^2$ es la métrica a lo largo de la línea de universo β , ds^2 es negativa y τ es el tiempo propio. Por lo tanto

$$g(U, U) = g_{ij} \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau} = \frac{ds^2}{d\tau^2} = -1.$$

En otras palabras, dada una línea de universo temporal $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$, definimos el campo U en βI como

$$U_{\beta(t)} = \frac{\dot{\beta}(t)}{\sqrt{-g(\dot{\beta}(t), \dot{\beta}(t))}} \quad (0.3.3)$$

en donde $t \in I$ y $\dot{\beta}(t)$ está orientado al futuro. Así pues, se tiene que U es un campo temporal unitario orientado al futuro definido en βI y representa a la cuadrivelocidad de un observador cuya evolución viene dada por β .

Una congruencia de observadores viene dada por una congruencia de líneas de universo temporales, y las cuadrivelocidades de esta congruencia de observadores forman un campo unitario temporal orientado al futuro U .

No obstante, para agilizar la notación, el término “observador” se entenderá también a su cuadrivelocidad. Por lo tanto, normalmente llamaremos *observador* a la cuadrivelocidad de una línea de universo temporal (ver (0.3.3)) y llamaremos *congruencia de observadores* a los campos unitarios temporales orientados al futuro.

Definición 0.3.11. Dado $p \in M$, $u \in T_p M$ vector temporal, llamaremos espacio físico S_u asociado a u al subespacio ortogonal

$$S_u = u^\perp$$

que es espacial y de dimensión 3.

Definición 0.3.12. Dado U un campo temporal definido en un abierto \mathcal{U} , llamaremos distribución de espacios físicos de U en \mathcal{U} a la distribución S_U definida en \mathcal{U} como

$$S_U(p) = S_{U_p}$$

para todo $p \in \mathcal{U}$, en donde S_{U_p} es el espacio físico asociado al vector temporal U_p , es decir, $S_{U_p} = (U_p)^\perp$.

Definición 0.3.13. Dada una congruencia de observadores U definida en un abierto \mathcal{U} , diremos que es sincronizable en \mathcal{U} cuando la distribución de espacios físicos de U sea foliación en \mathcal{U} . En este caso, S_U recibirá el nombre de foliación de espacios físicos de U en \mathcal{U} .

Definición 0.3.14. Dado un entorno \mathcal{U} , llamaremos tétrada en \mathcal{U} a un conjunto de campos vectoriales formado por 1 campo temporal unitario orientado al futuro (congruencia de observadores) y por 3 campos espaciales unitarios ortogonales entre sí y pertenecientes al espacio físico S_U de U .

Evidentemente, una tétrada es una base de la foliación TM en un entorno dado.

0.3.5. Geodésicas y Ley de Movimiento

Sea c una curva con dominio I . Consideramos

$$\tau_t^c : T_{c(0)} \longrightarrow T_{c(t)}M, \quad t \in I$$

el transporte paralelo a lo largo de la curva c con la conexión ∇ .

Una curva γ es geodésica si

$$\tau_t^\gamma \dot{\gamma}(0) \propto \dot{\gamma}(t), \quad t \in I.$$

En este caso, existe una reparametrización de γ tal que

$$\tau_s^\gamma \dot{\gamma}(0) = \dot{\gamma}(s), \quad s \in I'.$$

Una subvariedad N es geodésica en un punto $p \in N$ si

$$\tau_t^c T_p N = T_{c(t)} N, \quad t \in I$$

siendo $c : I \rightarrow N$ una curva tal que $c(0) = p$. En este caso, N contendrá a todas las geodésicas que pasen por p cuyo vector tangente en p esté contenido en $T_p N$. Una subvariedad N es totalmente geodésica si es geodésica en todos sus puntos.

Sea X un campo vectorial, diremos que X es geodésico si sus curvas integrales son curvas geodésicas. Inmediatamente se obtiene que si X es un campo geodésico entonces

$$\nabla_X X \propto X.$$

Sea Ω una foliación, X un campo vectorial arbitrario de la foliación Ω y c una curva integral del campo X con dominio I . Diremos que Ω es totalmente geodésica si

$$\tau_t^c \Omega(c(0)) = \Omega(c(t)), \quad t \in I.$$

Una foliación totalmente geodésica se dice que cumple una Ley de Movimiento (Liern y Olivert, 1992). Además, las variedades integrales de una foliación totalmente geodésica son subvariedades totalmente geodésicas. Por lo tanto, si la foliación es de dimensión 1, esta ley de movimiento origina geodésicas, y si es de dimensión entre 1 y 4, genera variedades integrales totalmente geodésicas.

0.3.6. Frecuencia en geodésicas nulas

Una geodésica cuyos vectores tangentes son nulos puede ser interpretada como un rayo de luz. Por lo tanto, es razonable definir la *frecuencia* de una geodésica nula (también denotada como rayo de luz).

Definición 0.3.15. *Dado un rayo de luz $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$, se define el campo frecuencia en γI como un campo F definido en γI , tangente a γ tal que*

$$\nu_p = -g(F_p, U_p),$$

en donde $p \in \gamma I$, U_p es un observador cualquiera en p y ν_p es la frecuencia (magnitud escalar) de γ observada por U_p en p .

Esta definición es una generalización de la definición de campo frecuencia dada en Synge (1965) para Relatividad Especial. El campo frecuencia definido para un rayo de luz puede ser definido también para una congruencia de rayos de luz de la siguiente forma:

Definición 0.3.16. *Dada Λ una 1-foliación nula totalmente geodésica en un abierto \mathcal{U} , cuyas curvas integrales son rayos de luz, se define el campo*

frecuencia en \mathcal{U} como un campo F que restringido a una curva integral γ de Λ coincide con el campo frecuencia de γ de la Definición 0.3.15. Por lo tanto, dada una congruencia de observadores U en \mathcal{U} , la frecuencia ν de Λ observada por U viene dada por

$$\nu = -g(F, U).$$

0.3.7. Entornos normales y entornos normales convexos

En esta Sección vamos a introducir algunos conceptos previos necesarios para poder realizar en el Capítulo 2 el estudio de las subvariedades de Landau (Olivert, 1980) y de las subvariedades de horismos (Helgason, 1962).

Definición 0.3.17. Sea $p \in M$. La aplicación exponencial en p se define como

$$\begin{aligned} \exp_p : T_p M &\longrightarrow M \\ v &\longmapsto \gamma_v(1) \end{aligned}$$

en donde γ_v es la única geodésica tal que $\gamma_v(0) = p$, $\dot{\gamma}_v(0) = v$.

Teorema 0.3.18. Sea $p \in M$. Existe un entorno abierto \mathcal{N}_0 del origen en $T_p M$ y un entorno abierto \mathcal{N}_p de p en M tal que la aplicación exponencial \exp_p es un difeomorfismo de \mathcal{N}_0 sobre \mathcal{N}_p .

Definición 0.3.19. Sea $p \in M$. Un entorno abierto \mathcal{N}_0 del origen en $T_p M$ es un entorno normal si y sólo si:

- (a) La aplicación $\exp_p|_{\mathcal{N}_0}$ está bien definida y es un difeomorfismo sobre su imagen.
- (b) Si $0 \leq t \leq 1$ entonces $tX \in \mathcal{N}_0$ para todo $v \in \mathcal{N}_0$.

La existencia de entornos normales del origen en el tangente de una variedad está garantizada por el Teorema 0.3.18.

Definición 0.3.20. Sea $p \in M$. Un entorno abierto \mathcal{N}_p de p en M es un entorno normal de p si y sólo si $\mathcal{N}_p = \exp_p \mathcal{N}_0$ para algún entorno normal \mathcal{N}_0 del origen en $T_p M$.

Teorema 0.3.21. Sea $p \in M$ y sea \mathcal{U} un entorno de p . Existe un entorno normal \mathcal{N}_p de p tal que $\mathcal{N}_p \subset \mathcal{U}$ y es entorno normal de todos sus puntos.

Definición 0.3.22. Un entorno normal convexo en M es un entorno no vacío $\mathcal{V} \subset M$ tal que \mathcal{V} es entorno normal de todos sus puntos. Es decir, para todo $p \in \mathcal{V}$ se tiene que $\mathcal{V} = \exp_p \mathcal{N}_0$ para algún entorno normal \mathcal{N}_0 del origen en $T_p M$.

La existencia de entornos normales convexos queda garantizada por el Teorema 0.3.21.

Por ejemplo, los entornos normales convexos en el espacio-tiempo de Minkowski son los subconjuntos abiertos no vacíos que son convexos en el sentido de \mathbb{R}^4 .

Más generalmente, supongamos que $\mathcal{V} \subset M$ es un entorno normal convexo con $p, q \in \mathcal{V}$ y $p \neq q$. Entonces las definiciones anteriores implican que existe una única geodésica de la forma $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{V}$ que une p con q .

Veamos ahora un ejemplo general de entornos normales convexos:

Definición 0.3.23. Sea $p \in M$ y sea $\varphi : q \mapsto (x_1(q), \dots, x_m(q))$ un sistema de coordenadas en un entorno \mathcal{U} de p tal que $\varphi(\mathcal{U})$ sea un cubo $\{(x_1, \dots, x_m) : |x_i| < c\}$ en donde c es un número real positivo y $\varphi(p) = 0$. Si $q \in \mathcal{U}$ y $0 < \delta \leq c - \max_i |x_i(q)|$, llamaremos entorno esférico de q con radio δ al subconjunto de \mathcal{U} dado por

$$\mathcal{V}_\delta(q) = \left\{ r \in \mathcal{U} : \sum_{i=1}^m (x_i(r) - x_i(q))^2 < \delta^2 \right\}.$$

Ejemplo 0.3.24. Sea $p \in M$, existe un δ^* tal que si $0 < \delta \leq \delta^*$, el entorno esférico $\mathcal{V}_\delta(p)$ es un entorno normal convexo.

1. Caracterización local de foliaciones nulas

La teoría de foliaciones es un marco de trabajo adecuado para el estudio de algunos frentes de onda (Souriau, 1970, 1997; Liern y Olivert, 1995a, 1995b). Está claro que una foliación Ω no describe siempre una onda, y si lo hiciese, no podría reflejar todas sus propiedades físicas, como por ejemplo los fenómenos de difracción e interferencia. Sin embargo la potencia de esta teoría hace evidente su utilidad en Física.

Si nos ceñimos a la Mecánica Simpléctica, la evolución de un sistema dinámico viene determinada por las hojas de una foliación asociada a una variedad presimpléctica (V, σ_V) que es el espacio de evolución de un sistema dinámico (F, σ_F) , cuya foliación característica, $\ker \sigma_{V_s}$, describe (Souriau, 1970, 1997) la evolución de (F, σ_F) . Como caso particular, en relatividad especial, la evolución de una partícula elemental libre sin masa se describe para cualquier observador mediante 2-planos que se mueven en su dirección normal a la velocidad de la luz (Souriau, 1970), es decir, frentes de onda nulos desde el punto de vista cuadridimensional. Este resultado que se da en la métrica de Minkowski, no es trivialmente generalizado a relatividad general (Liern y Olivert, 1995a, 1995b).

En este Capítulo hemos tratado de completar esta descripción de las ondas utilizando nuevos conceptos o propiedades de distribuciones y foliaciones nulas de dimensión 1 y 3.

1.1. Bases asociadas a congruencias de observadores

El método de trabajo de la Relatividad admite enfoques distintos que se complementan. El enfoque general es global (cuadridimensional) y estudia las foliaciones en toda su generalidad. Otro enfoque tiene en cuenta la necesidad de la observación (tridimensional) y por lo tanto supone la existencia de un observador. En estas condiciones, parece adecuado estructurar un formalismo que relacione ambos enfoques. Para ello vamos a introducir lo que hemos llamado *bases asociadas a congruencias de observadores*. Estas bases estarán relacionadas con las foliaciones nulas tanto

de dimensión 1 como de dimensión 3. Veamos pues el primer caso.

1.1.1. Bases asociadas de 1-distribuciones nulas

Se puede ver fácilmente que toda 1-distribución nula tiene una base de la forma

$$\{S + U\} \quad (1.1.1)$$

en donde U es una congruencia de observadores y $S \in S_U$ es un campo vectorial unitario. Dada una base basta con descomponerla en un campo con la dirección de U , otro campo ortogonal a U y posteriormente normalizarlos.

Por otro lado, cualquier 1-distribución con una base de la forma (1.1.1) es nula.

Definición 1.1.1. *Dada una 1-distribución nula Λ y una congruencia de observadores cualquiera U , llamaremos base de Λ asociada a U (o U -base de Λ) a una base de Λ con un campo de la forma*

$$S + U,$$

en donde $S \in S_U$ unitario.

Una U -base está completamente determinada, como se muestra en la siguiente Proposición:

Proposición 1.1.2. *Dadas una 1-distribución nula y una congruencia de observadores U , sólo existe un campo $S \in S_U$ tal que $S + U$ es U -base.*

PRUEBA:

Supongamos que tanto $\{S + U\}$ como $\{S' + U\}$ son U -bases de una misma 1-distribución nula. Entonces, como $S + U$ y $S' + U$ generan la misma 1-distribución, existe una función α tal que

$$S + U = \alpha(S' + U)$$

con lo que

$$g(S + U, U) = g(\alpha(S' + U), U)$$

y por lo tanto

$$g(S, U) + g(U, U) = \alpha g(S', U) + \alpha g(U, U).$$

Como S, S' están en el espacio físico de U , se cumple $g(S, U) = g(S', U) = 0$ y por lo tanto

$$\alpha = 1,$$

con lo que

$$S' = S.$$

□

1.1.2. Cambio de base asociada de una 1-distribución nula

Ahora estudiaremos el cambio de una U -base a una U' -base de la misma 1-distribución nula. Es decir, dada una U -base, a partir del campo S , que por la Proposición 1.1.2 es único, obtendremos otro campo que forme una U' -base. Dada una congruencia de observadores U , cualquier campo V puede escribirse como combinación lineal de U y un campo $X \in S_U$ unitario, ya que U junto con una base ortonormal de S_U forman una tétrada. Por lo tanto, dada otra congruencia de observadores U' , podemos escribirlo de la forma

$$U' = \gamma(U + vX) \quad (1.1.2)$$

en donde γ y v son funciones diferenciables. Además escogeremos $0 \leq v < 1$, con lo que esta descomposición es única. Por ser U' temporal y unitario tenemos que $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$, con lo que

$$U' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(U + vX). \quad (1.1.3)$$

Dadas dos congruencias de observadores U y U' , las coordenadas de U en el sistema propio de U son $(0, 0, 0, 1)$, y las de U' vienen dadas por

$$U' = \frac{dx^i}{d\tau} = \frac{dx^i}{dT} \frac{dT}{d\tau} = \left(\frac{v^\alpha}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \right),$$

en donde T es el tiempo natural asociado a U , τ es el tiempo propio de U' y v^α son las componentes espaciales del campo velocidad relativa de U' respecto U . Es decir, $(v^\alpha, 0) = vX$ en donde v es la velocidad relativa de U' respecto U y X es un campo espacial unitario ortogonal a U que marca la dirección de la velocidad relativa de U' respecto U .

Este hecho nos permite dar la siguiente definición:

Definición 1.1.3. *Dadas dos congruencias de observadores U y U' , podemos descomponer U' de la forma dada en (1.1.3). Diremos que v es la velocidad relativa de U' respecto U y que X es la dirección de la velocidad relativa de U' respecto U . Como consecuencia, γ es el factor gamma correspondiente a la velocidad v .*

Además, dado un punto $p \in M$ se cumple que $U'_p = U_p$ si y sólo si $v(p) = 0$. Si $U'_p \neq U_p$ entonces el vector X_p es la proyección unitaria de U'_p sobre el espacio físico de U_p , es decir, si π_{S_U} es la función proyección de un vector sobre el espacio físico de U tenemos

$$X_p = \frac{1}{v(p)} \left(\sqrt{1-v^2(p)} U'_p - U_p \right) = \frac{\sqrt{1-v^2(p)}}{v(p)} \pi_{S_U}(U'_p).$$

Sean $\{S + U\}$ y $\{S' + U'\}$ una U -base y una U' -base respectivamente de una misma 1-distribución nula. Como $S+U$ y $S'+U'$ generan la misma 1-distribución, existe una función α tal que

$$S' + U' = \alpha(S + U), \quad (1.1.4)$$

es decir

$$S' = \alpha(S + U) - \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(U + vX). \quad (1.1.5)$$

Hallemos α :

Como $S' + U' = \alpha(S + U)$, multiplicando (1.1.5) por U' obtenemos

$$\begin{aligned} -1 &= \alpha g(S + U, U') = \frac{\alpha}{\sqrt{1-v^2}} g(S + U, U + vX) \\ &= \frac{\alpha}{\sqrt{1-v^2}} (-1 + vg(X, S)) \end{aligned}$$

con lo que

$$\alpha = \frac{\sqrt{1-v^2}}{1-vg(X, S)}. \quad (1.1.6)$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta (1.1.3) y (1.1.6)

$$S' = \frac{\sqrt{1-v^2}}{1-vg(X, S)}(S + U) - \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(U + vX). \quad (1.1.7)$$

El hecho de que S' sea distinto a S es el llamado efecto de *aberración*. Estudiemos este efecto aplicado a las congruencias de rayos de luz, es decir, cuando Λ es totalmente geodésica:

Sea θ el ángulo que forma $-S$ con X , es decir, el ángulo entre la dirección de donde proviene el rayo de luz según U y la dirección de la velocidad relativa de U' respecto U . Su coseno viene dado por

$$\cos \theta = g(X, -S), \quad (1.1.8)$$

ya que tanto X como $-S$ son espaciales. Sea θ' el ángulo que forma $-S'$ con la proyección de X al espacio físico de U' , es decir, $\pi_{S_{U'}}(X)$. El ángulo θ' es el “equivalente” a θ pero en el espacio físico de U' . Su coseno viene dado por

$$\cos \theta' = \frac{g(\pi_{S_{U'}}(X), -S')}{\sqrt{g(\pi_{S_{U'}}(X), \pi_{S_{U'}}(X))}}.$$

Ahora bien, teniendo en cuenta (1.1.2) y

$$\pi_{S_{U'}}(X) = X + g(X, U')U', \quad (1.1.9)$$

obtenemos

$$\cos \theta' = \frac{1}{\gamma} g(X + g(X, U')U', -S'). \quad (1.1.10)$$

Aplicando (1.1.2), (1.1.3), (1.1.8) y (1.1.9) en (1.1.10) obtenemos

$$\cos \theta' = \frac{v + \cos \theta}{1 + v \cos \theta}$$

y por lo tanto

$$\cos \theta = \frac{\cos \theta' - v}{1 - v \cos \theta'}. \quad (1.1.11)$$

La expresión (1.1.11) se puede encontrar en Synge (1965) y es la expresión matemática del fenómeno de aberración ¹ de la luz.

Definición 1.1.4. *El escalar dado por $\theta' - \theta$ es el ángulo de aberración de U' respecto U correspondiente a Λ .*

Por otro lado, teniendo en cuenta (1.1.4) y la expresión de α dada en (1.1.6), llegamos a

$$S' + U' = \frac{\sqrt{1 - v^2}}{1 - vg(X, S)} (S + U). \quad (1.1.12)$$

Para interpretar físicamente este factor de proporcionalidad α entre los campos $(S' + U')$ y $(S + U)$, hemos de plantearnos el caso en el que la 1-foliación nula Λ generada por $S + U$ es totalmente geodésica. En este caso, las curvas integrales de Λ son rayos de luz y por lo tanto Λ representa una congruencia de rayos de luz, en donde U es una congruencia de observadores y S es la dirección relativa (espacial) de propagación de los rayos de luz respecto U . Teniendo en cuenta las Definiciones 0.3.15 y 0.3.16 de campo frecuencia, tenemos que

$$F = \nu(S + U) = \nu'(S' + U'),$$

en donde ν, ν' son las frecuencias de Λ observadas por U, U' respectivamente. Aplicando 1.1.12, obtenemos

$$\nu' = \gamma(1 - vg(X, S))\nu. \quad (1.1.13)$$

La expresión (1.1.13) es lo que se conoce como *efecto Doppler*² para $c = 1$. Por ejemplo, si $X = S$, es decir, la dirección de la velocidad relativa de U' respecto U coincide con la dirección de la velocidad relativa de Λ respecto U tenemos

$$\nu' = \sqrt{\frac{1 - v}{1 + v}}\nu. \quad (1.1.14)$$

Teniendo en cuenta este ejemplo, si un observador observa los rayos de luz provenientes de una galaxia con una cierta frecuencia ν , otro observador

¹El efecto de aberración volverá a ser estudiado en la última sección de este Capítulo y en el Capítulo 2.

²El efecto Doppler volverá a ser estudiado en el Capítulo 2.

que se aleja del primero con velocidad v en dirección opuesta a la dirección de la galaxia, observará los rayos de luz provenientes de dicha galaxia con otra frecuencia ν' dada por la expresión (1.1.14), que será menor que ν .

Veamos ahora un ejemplo del cambio de observador en la métrica de Minkowski:

Ejemplo 1.1.5. *En el espacio-tiempo de Minkowski, con la métrica g en coordenadas rectangulares (x, y, z, t) , consideramos la 1-distribución*

$$\Lambda = \left\langle \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle.$$

Dada la congruencia de observadores

$$U = \frac{\partial}{\partial t},$$

se tiene que $\left\{ \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t} \right\}$ es una base de Λ asociada a U de la forma $\{S + U\}$ en donde

$$S = \frac{\partial}{\partial z}$$

es un campo vectorial espacial unitario ortogonal a U . Pero dada la congruencia de observadores

$$U' = \sqrt{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial x} \right),$$

la base de Λ asociada a U' vendría dada por

$$\{S' + U'\}$$

en donde

$$S' = \sqrt{2} \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

es un campo vectorial espacial unitario ortogonal a U' . Lógicamente, $S+U$ y $S' + U'$ representan la misma dirección nula, pero son diferentes.

1.1.3. Bases asociadas de 3-distribuciones nulas

Vamos a realizar un estudio análogo al ya desarrollado para distribuciones nulas de dimensión 1, ahora para el caso de dimensión 3. No obstante, en este caso se obtienen más propiedades y dificultades que en el anterior.

Teorema 1.1.6. *Toda 3-distribución nula tiene una base de la forma*

$$\{X_1, X_2, X_3 = S + U\} \quad (1.1.15)$$

en donde U es una congruencia de observadores cualquiera y X_1, X_2, S forman una base ortonormal del espacio físico S_U asociado a U . Es decir, $\{X_1, X_2, S, U\}$ es una tétrada. Además, toda 3-distribución con una base de la forma (1.1.15) es nula.

PRUEBA:

Sea una 3-distribución nula con una base de la forma

$$\begin{aligned} Y_1 &= S_1 + \alpha_1 U \\ Y_2 &= S_2 + \alpha_2 U \\ Y_3 &= S_3 + \alpha_3 U \end{aligned}$$

en donde $S_1, S_2, S_3 \in S_U$ y $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ son funciones parámetro. Por tratarse de una 3-distribución nula, podemos suponer que algún $\alpha_i \neq 0$, ya que de lo contrario sería una 3-distribución espacial. Sin pérdida de generalidad, suponemos $\alpha_3 \neq 0$. Por lo tanto, también tendrá como base a

$$\begin{aligned} X_1 &= Y_1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_3} Y_3 \in S_U \\ X_2 &= Y_2 - \frac{\alpha_2}{\alpha_3} Y_3 \in S_U \\ X'_3 &= \frac{1}{\alpha_3} Y_3 = S'_3 + U \end{aligned}$$

con $S'_3 \in S_U$. Ahora bien, si consideramos $\{X_1, X_2, S\}$ como una base de S_U , siendo S un campo normal unitario a X_1, X_2 en S_U , entonces si $S'_3 = \alpha X_1 + \beta X_2 + \delta S$ definimos

$$X_3 = X'_3 - \alpha X_1 - \beta X_2 = \delta S + U$$

y por lo tanto, $\{X_1, X_2, X_3\}$ será otra base.

Sea N el campo normal que cumple

$$g(X_1, N) = 0, \quad (1.1.16)$$

$$g(X_2, N) = 0, \quad (1.1.17)$$

$$g(X_3, N) = 0. \quad (1.1.18)$$

De (1.1.16) y (1.1.17) obtenemos

$$N = \alpha' S + \beta' U,$$

sustituyendo en (1.1.18) obtenemos

$$\alpha' \delta = \beta',$$

y por lo tanto

$$N = \alpha' (S + \delta U).$$

Como la 3-distribución es nula, el campo normal N ha de ser nulo, y tenemos

$$g(N, N) = 0 \longrightarrow g(S, S) = -\delta g(U, U) = \delta.$$

Vicente José Bolós Lacave

Como S es unitario, $\delta = 1$ y por lo tanto

$$X_3 = S + U.$$

Para ver que toda 3-distribución con una base de la forma anterior es nula, basta comprobar que

$$\begin{aligned} g(X_1, X_3) &= g_{ij}X_1^iX_3^j = g_{ij}X_1^iS^j = g(X_1, S) = 0 \\ g(X_2, X_3) &= g_{ij}X_2^iX_3^j = g_{ij}X_2^iS^j = g(X_2, S) = 0 \\ g(X_3, X_3) &= g_{ij}X_3^iX_3^j = g_{ij}S^iS^j - U_iU_jU^iU^j = 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

y por lo tanto, X_3 es el campo normal, que es nulo. □

Definición 1.1.7. Dada una 3-distribución nula Ω y una congruencia de observadores cualquiera U , llamaremos base de Ω asociada a U (o U -base de Ω) a una base de Ω con campos de la forma

$$\{X_1, X_2, X_3 = S + U\}$$

en donde X_1, X_2, S forman una base ortonormal del espacio físico S_U asociado a U .

Siempre se podrá hallar una U -base aplicando procesos de ortonormalización y tendremos que $\{X_1, X_2, S, U\}$ forman una tétrada.

En el caso de dimensión 1, dada una congruencia de observadores U y una 1-distribución nula Λ , existía una única U -base de Λ . Pero según la Definición 1.1.7, dada una 3-distribución nula Ω , parece que cada congruencia de observadores U tenga asociada una base (o más bien, un conjunto de bases) y con ello varios campos nulos que marquen la evolución, es decir, varios $S + U$ que representan diferentes direcciones nulas. Veamos que, al igual que ocurría con las 1-distribuciones nulas, una 3-distribución nula sólo tiene una única dirección nula:

Proposición 1.1.8. Sea Ω una 3-distribución nula con U -base y U' -base

$$\{X_1, X_2, X_3 = S + U\},$$

$$\{X'_1, X'_2, X'_3 = S' + U'\}$$

respectivamente. Entonces los campos X_3 y X'_3 son proporcionales y por lo tanto representan la misma dirección nula.

PRUEBA:

Como se trata de la misma 3-distribución, X'_3 podrá escribirse de la forma

$$X'_3 = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3. \quad (1.1.19)$$

Como X'_3 es nulo cumplirá $g(X'_3, X'_3) = 0$ y por lo tanto

$$g(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3, \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3) = 0. \quad (1.1.20)$$

Ahora bien, como X_1, X_2 son normales a X_3 que es nulo, (1.1.20) queda

$$g(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2, \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2) = 0.$$

Pero como $X_1, X_2 \in S_U$ tendremos que $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 \in S_U$ y por lo tanto se trata de un campo espacial no nulo, ya que X_1, X_2 son linealmente independientes. Así pues, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ y por lo tanto (1.1.19) queda

$$X'_3 = \alpha_3 X_3.$$

□

Así pues, la dirección nula es la misma para cualquier congruencia de observadores y además es una base de la 1-distribución normal a la 3-distribución, es decir, el campo $S + U$ es una U -base de la 1-distribución nula Ω^\perp .

Trivialmente, una dirección nula define unívocamente una 1-distribución nula. Veamos ahora que una dirección nula también define unívocamente una 3-distribución nula:

Proposición 1.1.9. Sean Ω, Ω' dos 3-distribuciones nulas y sea N un campo nulo tal que $N \in \Omega \cap \Omega'$. Entonces $\Omega = \Omega'$.

PRUEBA:

Existen α función y $X \in S_U$ campo unitario tales que $N = \alpha(X + U)$. Sean $\{X_1, X_2, S + U\}$ y $\{X'_1, X'_2, S' + U\}$ U -bases de Ω, Ω' respectivamente.

Como $N \in \Omega$ resulta

$$\alpha(X + U) = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3(S + U) \quad (1.1.21)$$

con lo que

$$\alpha_3 = \alpha. \quad (1.1.22)$$

Como N es nulo cumplirá $g(N, N) = 0$ y por lo tanto, teniendo en cuenta (1.1.21) y (1.1.22) tenemos

$$g(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha(S + U), \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha(S + U)) = 0. \quad (1.1.23)$$

Ahora bien, como X_1, X_2 son normales a $S + U$ que es nulo, tendremos que (1.1.23) queda de la forma

$$g(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2, \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2) = 0.$$

Vicente José Bolós Lacave

Pero como $X_1, X_2 \in S_U$ tendremos que $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 \in S_U$ y por lo tanto se trata de un campo espacial distinto de cero, ya que X_1, X_2 son linealmente independientes. Así pues, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ y por lo tanto

$$\alpha(X + U) = \alpha(S + U) \longrightarrow X = S.$$

Por otro lado, como $N \in \Omega'$, procediendo de forma análoga, $X = S'$, con lo que $S = S'$, teniéndose así que $\Omega = \Omega'$.

□

Por lo tanto hay una relación biunívoca entre 1-distribuciones nulas y 3-distribuciones nulas, que podemos expresar de la forma siguiente:

Corolario 1.1.10. Sean Ω, Ω' dos 3-distribuciones nulas. Dadas una U -base $\{X_1, X_2, S + U\}$ de Ω y una U' -base $\{X'_1, X'_2, S' + U'\}$ de Ω' , entonces $S + U$ es proporcional a $S' + U'$ si y sólo si $\Omega = \Omega'$. Es decir, $\Omega^\perp = \Omega'^\perp$ si y sólo si $\Omega = \Omega'$.

Entonces, para comprobar si $\Omega = \Omega'$ en realidad sólo hace falta comprobar que $\Omega^\perp = \Omega'^\perp$, es decir, dada una U -base de Ω y dada una U' -base de Ω' **sólo hace falta comprobar que los campos nulos de las dos bases son proporcionales**. En otras palabras, una 3-distribución nula Ω viene caracterizada por un solo campo nulo N contenido en ella, que representa la dirección nula que determina unívocamente tanto a Ω como a Ω^\perp .

Nota 1.1.11. Si se parte del hecho de que $\Omega^{\perp\perp} = \Omega$ (Sachs y Wu, 1977), el corolario anterior es trivial.

Veamos ahora qué relación tienen los campos de dos U -bases distintas de una 3-distribución nula Ω :

Proposición 1.1.12. Sea Ω una 3-distribución nula con U -bases

$$\begin{aligned} \{X_1, X_2, X_3 = S + U\}, \\ \{X'_1, X'_2, X'_3 = S' + U'\}. \end{aligned}$$

Entonces $X'_3 = X_3$.

PRUEBA:

Por la Proposición 1.1.2 sólo existe un campo $S \in S_U$ tal que $S + U$ es U -base de Ω^\perp . Así pues, $S = S'$.

□

Corolario 1.1.13. Sea Ω una 3-distribución nula con dos U -bases como las anteriores. Entonces

$$\begin{aligned} S' &= S \\ \langle X'_1, X'_2 \rangle &= \langle X_1, X_2 \rangle. \end{aligned}$$

A diferencia del caso de dimensión 1, no existe una única U -base de una 3-distribución nula dada, debido a que los campos $\{X_1, X_2\}$ no están completamente determinados. La única exigencia es que, junto con S (que sí está completamente determinado), completen una base ortonormal del espacio físico S_U . O lo que es lo mismo, han de completar junto con $\{S, U\}$ una base ortonormal y por lo tanto $\{X_1, X_2, S, U\}$ será una tétrada. No obstante, el campo nulo de una U -base sí que está completamente determinado por U .

1.1.4. Cambio de base asociada de una 3-distribución nula

Ahora estudiaremos el cambio de una U -base a una U' -base de la misma 3-distribución nula Ω . Es decir, dada una U -base, a partir de sus campos vamos a construir una U' -base, ayudándonos del caso de dimensión 1 anteriormente estudiado. Como ya hemos visto en (1.1.3), U' puede escribirse de la forma

$$U' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(U + vX)$$

en donde $X \in S_U$ es unitario y v es una función tal que $0 \leq v < 1$.

Sean $\{X_1, X_2, S + U\}$ y $\{X'_1, X'_2, S' + U'\}$ una U -base y una U' -base de Ω . Entre otras cosas, esto quiere decir que tanto el conjunto $\{X_1, X_2, S, U\}$ como $\{X'_1, X'_2, S', U'\}$ son tétradas. Vamos a expresar los campos de la segunda tétrada como combinación lineal de los de la primera. Supongamos que

$$X = X^1 X_1 + X^2 X_2 + X^3 S$$

es la expresión de X en la tétrada $\{X_1, X_2, S, U\}$, con

$$(X^1)^2 + (X^2)^2 + (X^3)^2 = 1,$$

ya que X es unitario. Por lo tanto, S' viene dado por la expresión (1.1.7).

Como $\{X_1, X_2\}$ completan con $\{S', U'\}$ una base ortonormal, podemos hallarla de la siguiente forma:

■ Sea

$$\begin{aligned} Y_1 &= X_1 + g(X_1, U')U' - g(X_1, S')S' \\ &= X_1 + \frac{vX^1}{\sqrt{1-v^2}}(S' + U') \\ &= X_1 + \frac{vX^1}{\sqrt{1-v^2}}\alpha(S + U) = X_1 + \frac{vX^1}{1-vX^3}(S + U). \end{aligned}$$

Entonces, como resulta que Y_1 es ya unitario

$$X'_1 = Y_1 = X_1 + \frac{vX^1}{1-vX^3}(S + U).$$

■ Sea

$$\begin{aligned}
 Y_2 &= X_2 + g(X_2, U')U' - g(X_2, S')S' - g(X_2, X'_1)X'_1 \\
 &= X_2 + \frac{vX^2}{\sqrt{1-v^2}}(S' + U') = X_2 + \frac{vX^2}{\sqrt{1-v^2}}\alpha(S + U) \\
 &= X_2 + \frac{vX^2}{1-vX^3}(S + U).
 \end{aligned}$$

Entonces, como resulta que Y_2 es ya unitario

$$X'_2 = Y_2 = X_2 + \frac{vX^2}{1-vX^3}(S + U).$$

Resumiendo, si

$$U' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(U + v(X^1X_1 + X^2X_2 + X^3S))$$

entonces,

$$S' = \frac{\sqrt{1-v^2}}{1-vX^3}(S + U) - \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(U + v(X^1X_1 + X^2X_2 + X^3S))$$

$$X'_1 = X_1 + \frac{vX^1}{1-vX^3}(S + U)$$

$$X'_2 = X_2 + \frac{vX^2}{1-vX^3}(S + U).$$

Ejemplo 1.1.14. En el espacio-tiempo de Minkowski, con la métrica g en coordenadas rectangulares (x, y, z, t) , consideramos la 3-distribución Ω con base asociada a U dada por los campos

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad S + U = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t}$$

en donde $S = \frac{\partial}{\partial z}$ y $U = \frac{\partial}{\partial t}$.

Dado $U' = \frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{2}\frac{\partial}{\partial t}$, entonces $S' = -\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial t}$ y

$$X'_1 = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial t}$$

$$X'_2 = \frac{\partial}{\partial y}$$

$$S' + U' = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial t}.$$

Por otra parte, dado $U'' = \frac{\partial}{\partial z} + \sqrt{2}\frac{\partial}{\partial t}$ entonces $S'' = \sqrt{2}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t}$ y

$$X''_1 = \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\begin{aligned} X_2'' &= \frac{\partial}{\partial y} \\ S'' + U'' &= (1 + \sqrt{2}) \frac{\partial}{\partial z} + (1 + \sqrt{2}) \frac{\partial}{\partial t}. \end{aligned}$$

Nótese que $S + U$, $S' + U'$ y $S'' + U''$ son proporcionales, de acuerdo con el Corolario 1.1.10.

1.1.5. Interpretaciones físicas y geométricas

Para interpretar físicamente las U -bases, conviene tener en cuenta algunas propiedades de las distribuciones nulas de dimensión 1 y 3:

Una 1-distribución nula Λ es un subespacio nulo y una 3-distribución nula Ω es una distribución de dimensión 3 de subespacios cuyo campo ortogonal es un campo vectorial nulo, que está contenido en la misma distribución Ω . Así pues, tanto las 1-distribuciones como las 3-distribuciones están completamente determinadas por un campo vectorial nulo N , que representa la dirección nula de la distribución (salvo factores de escala). Por lo tanto, si tenemos dos distribuciones nulas Λ y Ω (de dimensión 1 y 3 respectivamente) entonces son ortogonales si y sólo si tienen la misma dirección nula N . En este caso, la 1-distribución está contenida en la 3-distribución:

$$\Lambda \perp \Omega \iff N \in \Lambda \subset \Omega.$$

Esta dirección nula siempre puede ser expresada como la suma de una congruencia de observadores U y de un campo espacial unitario S ortogonal a U , que representa la dirección relativa (espacial) de N para U . Así pues, $\{S + U\}$ es la U -base de Λ que está completamente determinada.

Por otra parte, una 3-distribución nula Ω sólo contiene 2 campos espaciales independientes. Estos campos $\{X_1, X_2\}$ se pueden escoger ortogonales a U (pertenecientes al espacio físico S_U) de forma que completen con S una base ortonormal de S_U y en consecuencia $\{X_1, X_2, S, U\}$ será una tétrada. Así pues, $\{X_1, X_2, S + U\}$ es una U -base de Ω .

En el caso en el que Ω sea foliación, sus hojas pueden ser interpretadas como frentes de onda. Dada una congruencia de observadores U , la dirección relativa de movimiento de estos frentes de onda es la proyección del campo nulo N sobre el espacio físico S_U asociado a U . Esta proyección viene representada por el campo S . Por otra parte, los campos X_1, X_2 son los tangentes a los 2-frentes de onda espaciales que resultan de la intersección de las hojas de Ω con el espacio físico S_U y por lo tanto forman una subdistribución, que en el caso de ser foliación, tiene como hojas a los 2-frentes de onda espaciales observados por U . Por lo tanto, los campos vectoriales de una U -base describen la distribución desde el punto de vista de U .

Estas interpretaciones sugieren el estudio de otras distribuciones obtenidas a partir de Ω y de U .

Definición 1.1.15. Sea Ω una 3-distribución nula con U -base de la forma $\{X_1, X_2, S + U\}$. Llamaremos

- *distribución de frentes de onda temporales de Ω asociadas a U a la 3-distribución temporal $\langle X_1, X_2, U \rangle$.*
- *distribución de frentes de onda espaciales de Ω asociadas a U a la 2-distribución espacial $\langle X_1, X_2 \rangle$.*

Estas dos distribuciones están bien definidas por el Corolario 1.1.13, ya que queda asegurado que el subespacio $\langle X_1, X_2 \rangle$ es independiente de la U -base escogida.

La distribución de frentes de onda espaciales de Ω asociadas a U es la resultante de la intersección

$$\Omega \cap S_U.$$

Dada una U -base $\{X_1, X_2, S + U\}$ de Ω tendremos

$$(\Omega \cap S_U)^\perp = \langle S, U \rangle = \langle S \rangle \oplus \langle U \rangle$$

y por lo tanto $(\Omega \cap S_U) \oplus (\Omega \cap S_U)^\perp$ es TM , con lo que todo campo X se puede descomponer de la forma

$$X = X_{\parallel} + X_{\perp}$$

en donde $X_{\parallel} \in \Omega \cap S_U$ y $X_{\perp} \in (\Omega \cap S_U)^\perp$.

La distribución de frentes de onda temporales de Ω asociadas a U es la resultante de

$$(\Omega \cap S_U) \oplus \langle U \rangle.$$

Por otro lado, el espacio físico asociado a U no depende de la 3-distribución original Ω sino del campo temporal U escogido. Dada una U -base $\{X_1, X_2, S + U\}$ tendremos que

$$S_U = \langle X_1, X_2, S \rangle$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} S_U &= (\Omega \cap S_U) \oplus \langle S \rangle \\ &= \langle X_1, X_2 \rangle \oplus \langle S \rangle. \end{aligned}$$

1.2. Igualdad salvo orientaciones para una congruencia de observadores

En esta Sección de nuevo tratamos por separado las 1-distribuciones nulas y las 3-distribuciones nulas. No obstante, teniendo en cuenta lo dicho en el Corolario 1.1.10, una 3-distribución nula Ω viene caracterizada unívocamente por su 1-distribución ortogonal Λ , que también es nula.

Así que para que esta propiedad sea consistente, habrá que comprobar que las definiciones dadas con 1-distribuciones son equivalentes a las dadas con 3-distribuciones. Una vez comprobado esto, podremos estudiar estas propiedades indistintamente en dimensión 1 ó 3.

1.2.1. 1-Distribuciones nulas

Definición 1.2.1. Diremos que dos 1-distribuciones nulas con U -bases dadas por los campos $\{S + U\}$, $\{S' + U\}$ respectivamente son iguales salvo orientaciones para U , y lo denotaremos $\Lambda \stackrel{U}{=} \Lambda'$ s. o., cuando $S' = \pm S$.

Esta relación está bien definida por la unicidad de U -bases de 1-distribuciones nulas.

Definición 1.2.2. Dada una 1-distribución nula Λ con U -base de la forma $\{S + U\}$, llamaremos Λ_U^- a la 1-distribución nula con U -base de la forma $\{-S + U\}$, y recibirá el nombre de 1-distribución opuesta a Λ para U .

Se cumple

$$(\Lambda_U^-)_U^- = \Lambda_U^- = \Lambda.$$

Nota 1.2.3. Dada una 1-distribución nula Λ y una congruencia de observadores U sólo existe una 1-distribución nula igual a Λ salvo orientaciones para U que no sea la propia Λ , y esa 1-distribución es Λ_U^- . En otras palabras,

$$\Lambda \stackrel{U}{=} \Lambda' \text{ s. o. si y sólo si } \Lambda' = \Lambda \text{ o bien } \Lambda' = \Lambda_U^-.$$

Esto define una relación binaria de equivalencia entre las 1-distribuciones nulas.

Proposición 1.2.4. Sea Λ una 1-distribución nula y sea U una congruencia de observadores. Si $N \in \Lambda$, entonces el plano definido por los campos N y U corta al cono de luz en Λ y en Λ_U^- . Es decir, si $N' \in \Lambda_U^-$ entonces los campos N, U, N' son coplanarios³ y no proporcionales.

PRUEBA:

Dada una U -base $\{S + U\}$ de Λ se tiene que $\{-S + U\}$ es una U -base de Λ_U^- . Sean $N \in \Lambda$ y $N' \in \Lambda_U^-$. Entonces

$$\{N, N'\} \in \langle S, U \rangle$$

y por lo tanto N, N', U, S son coplanarios. Además N, N' no son proporcionales, ya que si lo fuesen, entonces

$$S + U \propto -S + U$$

³Cuando se dice que 3 campos son coplanarios se quiere decir que sus vectores son coplanarios en cada uno de los espacios tangentes.

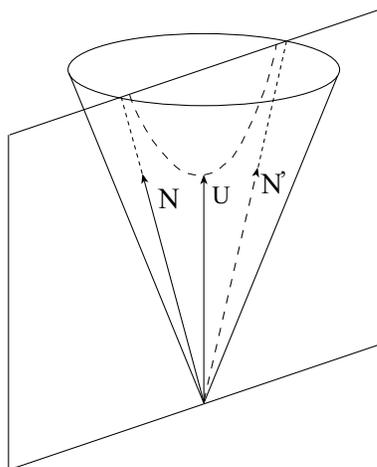


Figura 1.1: Cono de luz futuro en los espacios tangentes, en donde se encuentran las 1-distribuciones nulas generadas por los campos nulos N y N' , que son coplanarios con el campo temporal U en cada uno de estos espacios tangentes. En este tipo de figuras, como se encuentran representados todos los espacios tangentes, los campos se describen como vectores.

con lo que se llegaría a

$$S = 0,$$

caso que no se puede dar.

□

Lo que se dice en la Proposición 1.2.4 se puede expresar gráficamente como en la Figura 1.1, ya que las 1-distribuciones nulas en el espacio tangente son rectas contenidas en el cono de luz y los vectores temporales orientados al futuro (observadores) están en el interior del cono de luz futuro. Esquemáticamente, esto se puede representar solamente por una sección transversal del cono, como se muestra en la Figura 1.2.

Definición 1.2.5. Sean Λ una 1-distribución nula y U, U' dos congruencias de observadores. Diremos que U, U' están relacionados mediante Λ si y sólo si N, U, U' son coplanarios para todo campo $N \in \Lambda$ y lo denotaremos

$$U \overset{\Lambda}{\approx} U'$$

Trivialmente, se tiene que

$$\Lambda_{\bar{U}} = \Lambda_{\bar{U}'} \iff U \overset{\Lambda}{\approx} U'$$

(ver Figura 1.3), y esto define una relación binaria de equivalencia entre las congruencias de observadores.

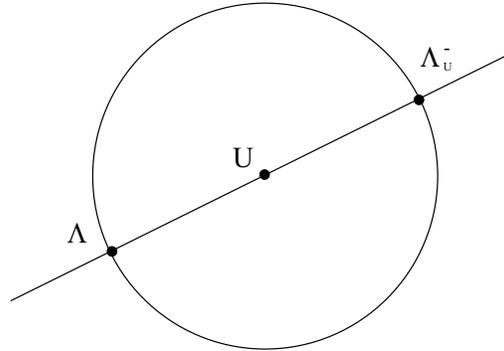


Figura 1.2: Sección transversal del cono de luz futuro en los espacios tangentes. El cono de luz futuro es representado por un círculo, las direcciones nulas son representadas por puntos del círculo, los campos temporales por puntos dentro del círculo y el 2-plano definido por Λ y Λ_U^- es representado por una línea recta que une las dos direcciones nulas. Como las direcciones nulas N y N' determinan unívocamente a las 1-distribuciones nulas Λ y Λ_U^- respectivamente, estas direcciones nulas son representadas por el nombre de la 1-distribución que determina. Así pues, la dirección nula de Λ es representada por “ Λ ” y la dirección nula de Λ_U^- es representada por “ Λ_U^- ”.

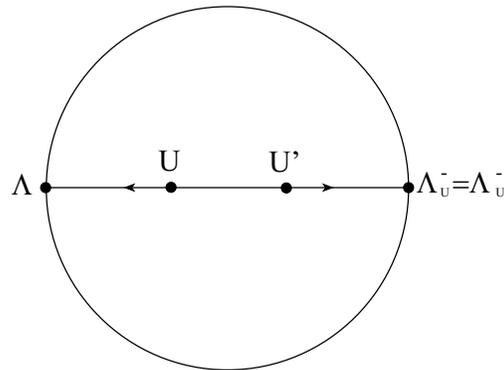


Figura 1.3: Esquema de 2 congruencias de observadores, U y U' , relacionadas mediante una 1-distribución Λ . Todas las congruencias de observadores relacionadas mediante una misma 1-distribución se encuentran en el mismo plano, teniéndose así una relación binaria de equivalencia entre congruencias de observadores.

1.2.2. 3-Distribuciones nulas

Ahora construiremos 3-distribuciones nulas a partir de 2-distribuciones espaciales. Dada una 2-distribución espacial con base ortonormal X_1, X_2 y dada una congruencia de observadores U tal que $X_1, X_2 \in S_U$ espacio físico de U , podemos considerar los campos

$$\{X_1, X_2, X_3 = S + U\}$$

en donde X_1, X_2, S forman una base ortonormal del espacio físico S_U asociado a U . Así tendremos una 3-distribución nula considerando estos campos como una U -base. Además, como el vector $-S \in S_U$ también es normal a X_1, X_2 y unitario, podemos considerar

$$\overline{X}_3 = -S + U$$

que es un campo nulo, y tendremos otra U -base asociada a otra 3-distribución nula distinta a la anterior. Así, dados dos campos espaciales X_1, X_2 y una congruencia de observadores U , cuyo espacio físico contenga a los anteriores, se puede generar un par de 3-distribuciones nulas tomando S ó $-S$.

Definición 1.2.6. Diremos que dos 3-distribuciones nulas Ω, Ω' con U -bases dadas por los campos $\{X_1, X_2, S + U\}, \{X'_1, X'_2, S' + U\}$ respectivamente son iguales salvo orientaciones para U , y lo denotaremos $\Omega \stackrel{U}{=} \Omega'$ s. o., cuando $S' = \pm S$.

La relación dada en la Definición 1.2.6 está bien definida, ya que si tuviésemos otras U -bases $\{\overline{X}_1, \overline{X}_2, \overline{S} + U\}, \{\overline{X}'_1, \overline{X}'_2, \overline{S}' + U\}$ de Ω, Ω' respectivamente, por el Corolario 1.1.13 tendríamos que $\overline{S} = S$ y que $\overline{S}' = S'$. En este caso, también tendríamos que $\langle X_1, X_2 \rangle = \langle X'_1, X'_2 \rangle = \langle \overline{X}_1, \overline{X}_2 \rangle = \langle \overline{X}'_1, \overline{X}'_2 \rangle$.

Nota 1.2.7. Teniendo en cuenta la Definición 1.2.1 para 1-distribuciones nulas, se cumple que $\Omega \stackrel{U}{=} \Omega'$ s. o. si y sólo si $\Omega^\perp \stackrel{U}{=} \Omega'^\perp$ s. o.

Definición 1.2.8. Dada una 3-distribución nula Ω con U -base definida por los campos $\{X_1, X_2, S + U\}$, llamaremos Ω_U^- a la 3-distribución isotropa con U -base $\{X_1, X_2, -S + U\}$, y recibirá el nombre de 3-distribución opuesta de Ω para U .

La 3-distribución de la Definición 1.2.8 está bien definida, ya que si tuviésemos $\{\overline{X}_1, \overline{X}_2, \overline{S} + U\}$ otra U -base de Ω , por el Corolario 1.1.13 tendríamos que $\overline{S} = S$ y que $\langle X_1, X_2 \rangle = \langle \overline{X}_1, \overline{X}_2 \rangle$, con lo que

$$\Omega_U^- = \langle X_1, X_2, -S + U \rangle = \langle \overline{X}_1, \overline{X}_2, -\overline{S} + U \rangle.$$

Además se cumple

$$(\Omega_U^-)_U^- = \Omega_{UU}^- = \Omega.$$

Nota 1.2.9. Teniendo en cuenta la Definición 1.2.2 para 1-distribuciones nulas, se cumple

$$(\Omega_U^-)^\perp = (\Omega^\perp)_U^-.$$

Nota 1.2.10. Dada una 3-distribución nula Ω y una congruencia de observadores U sólo existe una 3-distribución nula igual a Ω salvo orientaciones para U que no sea la propia Ω , y esa 3-distribución es Ω_U^- . En otras palabras, $\Omega \stackrel{U}{=} \Omega'$ s. o. si y sólo si $\Omega' = \Omega$ o bien $\Omega' = \Omega_U^-$. Esto define una relación binaria de equivalencia entre las 3-distribuciones nulas.

Ejemplo 1.2.11. Con la 3-distribución Ω , las congruencias de observadores y los campos del Ejemplo 1.1.14, tenemos

$$\begin{aligned}\Omega_U^- &= \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle, \\ \Omega_{U'}^- &= \left\langle \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial y}, 2\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle, \\ \Omega_{U''}^- &= \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, (1 - \sqrt{2}) \frac{\partial}{\partial z} + (\sqrt{2} - 1) \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle.\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\Omega_U^- &\neq \Omega_{U'}^-, \\ \Omega_U^- &= \Omega_{U''}^-.\end{aligned}$$

Sea Ω una 3-distribución nula y sea U una congruencia de observadores. Si $N \in \Omega$ es un campo nulo (es decir $N \in \Omega^\perp$) entonces, por lo dicho en la Proposición 1.2.4, el plano definido por los campos N y U corta al cono de luz en Ω^\perp y en $(\Omega^\perp)_U^-$. Es decir, si $N' \in \Omega_U^-$ es un campo nulo entonces los campos N, U, N' son coplanarios y no proporcionales. Por lo tanto, la Figura 1.2 es válida también para el estudio de la igualdad salvo orientaciones para una congruencia de observadores en dimensión 3. Además, tanto una 1-distribución nula Λ como su 3-distribución nula ortogonal Ω vienen unívocamente determinadas por una dirección nula N contenida en ellas, con lo que se puede denotar a esta dirección nula por el nombre de la 3-distribución nula Ω que determina. Con esta notación se puede hacer un estudio general tanto de 1-distribuciones nulas como de 3-distribuciones nulas, tal y como se muestra en la Figura 1.4.

Teniendo en cuenta las p -distribuciones de la Definición 1.1.15, las distribuciones de frentes de onda espaciales y temporales de Ω asociadas a U coinciden con las distribuciones de frentes de onda espaciales y temporales de Ω_U^- asociadas a U . Vamos a ver una definición que se basa en la igualdad de las 2-distribuciones de frentes de onda espaciales de Ω asociadas a dos congruencias de observadores U y U' :

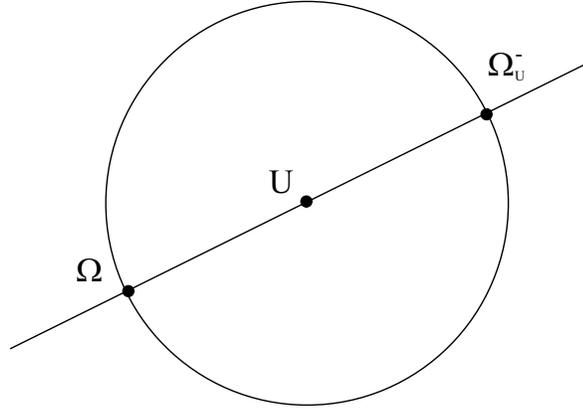


Figura 1.4: Sección transversal del cono de luz futuro en los espacios tangentes, en donde se representan los campos temporales y las 3-distribuciones nulas de una forma equivalente a la expuesta en la Figura 1.2.

Definición 1.2.12. Sean Ω 3-distribución nula y U, U' dos congruencias de observadores. Diremos que U y U' están relacionados mediante Ω (o Ω -relacionados) si y sólo si $\Omega \cap S_U = \Omega \cap S_{U'}$ y lo denotaremos

$$U \stackrel{\Omega}{\approx} U'.$$

La Definición 1.2.12 establece además una relación binaria de equivalencia entre congruencias de observadores.

Nota 1.2.13. Dada Ω una 3-distribución nula, sean U, U' dos congruencias de observadores y $\{X_1, X_2, S + U\}$ una U -base de Ω . Si

$$U' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} (U + vX)$$

como en (1.1.3), entonces $U' \in (\Omega \cap S_U)^\perp$ si y sólo si $X = \pm S$ si y sólo si $X_\parallel = 0$.

Proposición 1.2.14. Dados una 3-distribución nula Ω y dos congruencias de observadores U, U' , se tiene que $U \stackrel{\Omega}{\approx} U'$ si y sólo si $U' \in (\Omega \cap S_U)^\perp$.

PRUEBA:

Sea

$$U' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(U + vX)$$

como en (1.1.3). El caso $U = U'$ está claro y por lo tanto supondremos que $v \neq 0$.

→ Por reducción al absurdo: Si $U' \notin (\Omega \cap S_U)^\perp$ por la Nota 1.2.13 $X_\parallel \neq 0$. Este campo pertenece a $\Omega \cap S_U$, pero como

$$\begin{aligned} g(X_\parallel, U') &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}g(X_\parallel, U + vX) \\ &= \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}g(X_\parallel, X_\parallel) \neq 0 \end{aligned}$$

resulta que $X_\parallel \notin S_{U'}$ y por lo tanto no pertenece a $\Omega \cap S_{U'}$, con lo que $\Omega \cap S_U \neq \Omega \cap S_{U'}$.

← Sea $Y \in \Omega \cap S_U$. Veamos que $Y \in S_{U'}$:

$$g(Y, U') = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}g(Y, U + vX) = 0$$

ya que tanto U como $X = \pm S$ pertenecen a $(\Omega \cap S_U)^\perp$. Por lo tanto, $Y \in \Omega \cap S_{U'}$, es decir

$$\Omega \cap S_U \subseteq \Omega \cap S_{U'}.$$

Como se trata de espacios de la misma dimensión (dimensión 2) resultará que

$$\Omega \cap S_U = \Omega \cap S_{U'}.$$

□

Proposición 1.2.15. Sean Ω una 3-distribución nula y U, U' dos congruencias de observadores. Entonces $\Omega_{\bar{U}} = \Omega_{\bar{U}'}$ si y sólo si $U \stackrel{\Omega}{\approx} U'$.

PRUEBA:

→ Tomamos una U -base de Ω de la forma $\{X_1, X_2, S + U\}$ y una U' -base de Ω de la forma $\{X'_1, X'_2, S' + U'\}$. Sabemos que

$$\begin{aligned} \Omega_{\bar{U}} &= \langle X_1, X_2, -S + U \rangle, \\ \Omega_{\bar{U}'} &= \langle X'_1, X'_2, -S' + U' \rangle. \end{aligned}$$

Así, como $X'_1 \in \Omega$

$$X'_1 = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 (S + U) \quad (1.2.24)$$

y como además $X'_1 \in \Omega_{U'}^- = \Omega_U^-$

$$X'_1 = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 (-S + U). \quad (1.2.25)$$

Por tratarse $\{X_1, X_2, S, U\}$ de una tétrada, igualando los coeficientes de (1.2.24) y (1.2.25), tenemos

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \beta_1, \\ \alpha_2 &= \beta_2, \\ \alpha_3 &= -\beta_3, \\ \alpha_3 &= \beta_3, \end{aligned}$$

con lo que $\alpha_3 = \beta_3 = 0$ y por lo tanto X'_1 es combinación lineal de $\{X_1, X_2\}$. Igualmente se prueba que X'_2 es combinación lineal de $\{X_1, X_2\}$ con lo que

$$\langle X_1, X_2 \rangle = \langle X'_1, X'_2 \rangle,$$

y por lo tanto

$$\Omega \cap S_U = \Omega \cap S_{U'} \longrightarrow U \stackrel{\Omega}{\approx} U'.$$

← Tomamos una U -base de Ω de la forma $\{X_1, X_2, S + U\}$ y una U' -base de Ω de la forma $\{X'_1, X'_2, S' + U'\}$. Se tiene

$$\begin{aligned} \Omega_U^- &= \langle X_1, X_2, -S + U \rangle, \\ \Omega_{U'}^- &= \langle X'_1, X'_2, -S' + U' \rangle. \end{aligned}$$

Como $\Omega \cap S_U = \Omega \cap S_{U'}$ tenemos que $\langle X_1, X_2 \rangle = \langle X'_1, X'_2 \rangle$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} S' &= \alpha_1 S + \alpha_2 U, \\ U' &= \beta_1 S + \beta_2 U. \end{aligned}$$

Por la Proposición 1.1.8 tenemos que $S' + U'$ es proporcional a $S + U$, con lo que

$$\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2. \quad (1.2.26)$$

Además, $g(S', U') = 0$, con lo que

$$\alpha_1 \beta_1 = \alpha_2 \beta_2. \quad (1.2.27)$$

Tenemos así que (1.2.26) y (1.2.27) forman un sistema no lineal. De (1.2.26) despejamos α_2 y la sustituimos en (1.2.27), con lo que

$$\alpha_1 \beta_1 = (\alpha_1 + \beta_1 - \beta_2) \beta_2 \longrightarrow (\alpha_1 - \beta_2) (\beta_1 - \beta_2) = 0$$

y como U' es distinto de cero $\beta_1 \neq \beta_2$, con lo que llegamos a

$$\beta_2 = \alpha_1.$$

Sustituyendo en (1.2.26) obtenemos

$$\beta_1 = \alpha_2.$$

De esta forma

$$\begin{aligned} -S' + U' &= -(\alpha_1 S + \alpha_2 U) + (\alpha_2 S + \alpha_1 U) \\ &= (\alpha_1 - \alpha_2)(-S + U), \end{aligned}$$

con lo que

$$\Omega_{\bar{U}} = \langle X_1, X_2, -S + U \rangle = \langle X'_1, X'_2, -S' + U' \rangle = \Omega_{\bar{U}'},$$

□

Esta propiedad se puede ver gráficamente en las Figuras 1.5 y 1.6.

Corolario 1.2.16. Sean Ω una 3-distribución nula y U, U' dos congruencias de observadores. Dado $N \in \Omega$ nulo, se tiene que N, U, U' son coplanarios si y sólo si $U \stackrel{\Omega}{\approx} U'$.

Así pues, teniendo en cuenta la Definición 1.2.5 y haciendo $\Lambda = \Omega^\perp$, podemos afirmar que

$$U \stackrel{\Omega}{\approx} U' \iff U \stackrel{\Lambda}{\approx} U'.$$

Corolario 1.2.17. Dados Ω una 3-distribución nula y U, U' dos congruencias de observadores, tenemos que $\Omega_{\bar{U}\bar{U}'} = \Omega$ si y sólo si $U \stackrel{\Omega}{\approx} U'$.

PRUEBA:

Como $\Omega_{\bar{U}'\bar{U}'} = \Omega$ tenemos

$$\Omega_{\bar{U}\bar{U}'} = \Omega \iff \Omega_{\bar{U}} = \Omega_{\bar{U}'},$$

Por la Proposición 1.2.15

$$\Omega_{\bar{U}} = \Omega_{\bar{U}'} \iff U \stackrel{\Omega}{\approx} U'.$$

□

Un esquema de esta propiedad se puede ver en las Figuras 1.5 y 1.6.

Corolario 1.2.18. Sean Ω, Ω' dos 3-distribuciones nulas tales que se cumpla $\Omega = \Omega'$ salvo orientaciones para U y U' no Ω -relacionadas. Entonces $\Omega = \Omega'$.

PRUEBA:

Sea

$$U' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} (U + vX)$$

como en (1.1.3). Como U y U' no están Ω -relacionados, resulta que $\Omega_U^- \neq \Omega_{U'}^-$. Por lo tanto, si $\Omega = \Omega'$ salvo orientaciones para U y U' , teniendo en cuenta la Nota 1.2.10:

- Si $\Omega \stackrel{U}{=} \Omega'$ s. o. entonces $\Omega' = \Omega$ o bien $\Omega' = \Omega_U^-$.
- Si $\Omega \stackrel{U'}{=} \Omega'$ s. o. entonces $\Omega' = \Omega$ o bien $\Omega' = \Omega_{U'}^-$.

Como $\Omega_U^- \neq \Omega_{U'}^-$, resultará

$$\Omega' = \Omega.$$

□

En principio, a partir de X_1, X_2 se pueden crear tantos pares de 3-distribuciones nulas como congruencias de observadores U tales que $X_1, X_2 \in S_U$. Veámoslo en el siguiente Teorema:

Teorema 1.2.19. *Sean Ω, Ω' dos 3-distribuciones nulas y X_1, X_2 dos campos espaciales linealmente independientes. Si $\{X_1, X_2\} \subset \Omega \cap \Omega'$ entonces $\Omega \stackrel{U}{=} \Omega'$ s. o. para cualquier congruencia de observadores U normal a $\{X_1, X_2\}$.*

PRUEBA:

Como $\{X_1, X_2\}$ son espaciales, la 2-distribución que generan es espacial. Por lo tanto, la 2-distribución normal es temporal y existirá al menos una congruencia de observadores U normal a $\{X_1, X_2\}$.

Consideremos una U -base de Ω de la forma

$$\{Y_1, Y_2, X_3 = S + U\}.$$

Como $\{X_1, X_2\} \subset \Omega$ tendremos

$$\begin{aligned} X_1 &= \alpha_1 Y_1 + \beta_1 Y_2 + \delta_1 X_3, \\ X_2 &= \alpha_2 Y_1 + \beta_2 Y_2 + \delta_2 X_3. \end{aligned} \tag{1.2.28}$$

Además, como $\{X_1, X_2, Y_1, Y_2\} \subset S_U$ espacio físico de U

$$\begin{aligned} X_1 - \alpha_1 Y_1 + \beta_1 Y_2 &\in S_U, \\ X_2 - \alpha_2 Y_1 + \beta_2 Y_2 &\in S_U, \end{aligned} \tag{1.2.29}$$

es decir, teniendo en cuenta (1.2.28) y (1.2.29), tenemos

$$\begin{aligned}\delta_1 X_3 &\in S_U \\ \delta_2 X_3 &\in S_U\end{aligned}$$

y por lo tanto, al ser X_3 nulo

$$\delta_1 = \delta_2 = 0$$

con lo que $\langle X_1, X_2 \rangle = \langle Y_1, Y_2 \rangle$. Así pues, otra U -base de Ω será

$$\{X_1, X_2, X_3 = S + U\}.$$

Procediendo análogamente para una U -base de Ω'

$$\{Y'_1, Y'_2, X'_3 = S' + U\},$$

otra U -base de Ω' será

$$\{X_1, X_2, X'_3 = S' + U\}.$$

Ahora bien, S, S' son unitarios y ortogonales a $\{X_1, X_2\}$ en el espacio físico de U , que es de dimensión 3. Así

$$S = \pm S'.$$

Por lo tanto $\Omega \stackrel{U}{=} \Omega'$ s. o. para cualquier congruencia de observadores U normal a $\{X_1, X_2\}$.

□

De acuerdo con este resultado, si Ω y Ω' son 3-distribuciones nulas que contienen a $\{X_1, X_2\}$ (campos espaciales linealmente independientes) y U es una congruencia de observadores normal a $\{X_1, X_2\}$, por la Nota 1.2.10 resulta que o bien $\Omega' = \Omega$ o bien $\Omega' = \Omega_U^-$. Así, a partir de una 2-distribución espacial se obtiene un único par de 3-distribuciones nulas, que serán iguales salvo orientaciones para congruencias de observadores normales a esta 2-distribución espacial. Hay que notar que si U, U' son normales a $\{X_1, X_2\} \subset \Omega$ se tiene que $\Omega \cap S_U = \Omega \cap S_{U'} = \langle X_1, X_2 \rangle$ y por lo tanto $U \stackrel{\Omega}{\approx} U'$.

En el siguiente ejemplo, vamos a obtener a partir de dos campos espaciales linealmente independientes las dos 3-distribuciones nulas que los contienen, en el espacio-tiempo de Minkowski:

Ejemplo 1.2.20. *Para la métrica de Minkowski con coordenadas cartesianas, podemos considerar una 2-distribución espacial con una base de la forma*

$$\begin{aligned}X_1 &= a \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \equiv (a, 1, 0, 0) \\ X_2 &= b \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \equiv (b, 0, 1, 0)\end{aligned}$$

Vicente José Bolós Lacave

en donde a, b son funciones de (t, x, y, z) tales que $|a|, |b| < 1$. Los campos temporales U tales que $X_1, X_2 \in S_U$ han de ser proporcionales a uno de la forma

$$U = (1, a, b, d)$$

con d una función de (t, x, y, z) tal que $d^2 < 1 - (a^2 + b^2) = \alpha^2$. Así, el campo S asociado a U tendrá la forma

$$S = \left(\frac{d}{\alpha}, \frac{d}{\alpha}a, \frac{d}{\alpha}b, \alpha \right),$$

en donde α tiene libertad de signo, quedando así representadas las dos direcciones normales. Por lo tanto,

$$S + U = \left(1 + \frac{d}{\alpha} \right) \left(1, a, b, \frac{\alpha}{\alpha + d} (d + \alpha) \right) = \left(1 + \frac{d}{\alpha} \right) (1, a, b, \alpha).$$

Pero como cualquier campo proporcional generaría lo mismo, se puede escoger

$$S + U = (1, a, b, \alpha)$$

que es independiente de d y por lo tanto es independiente de la elección que se haga de U . Como α puede ser positivo o negativo, tendremos un par de 3-distribuciones nulas asociadas a la 2-distribución espacial del principio, cada una de ellas asociada a una dirección normal distinta.

Por ejemplo, si consideramos $a = b = 0$ tendremos una 2-foliación cuyas variedades integrales son planos con z, t constantes. Considerando $U = (1, 0, 0, 0)$, el vector S puede ser $(0, 0, 0, \pm 1)$ y por lo tanto, $S + U = (1, 0, 0, \pm 1)$. Con el signo positivo, las variedades integrales de la 3-foliación nula resultante son planos que se mueven en la dirección de las z positivas, es decir, en la dirección espacial normal $(0, 0, 0, 1)$, mientras que con el signo negativo, son planos que se mueven en la dirección de las z negativas, es decir, en la dirección espacial normal $(0, 0, 0, -1)$.

Corolario 1.2.21. Sean Ω, Ω' dos 3-distribuciones nulas y U una congruencia de observadores. Entonces las 2-distribuciones de frentes de onda espaciales de Ω y Ω' asociadas a U coinciden, $\Omega \cap S_U = \Omega' \cap S_U$, si y sólo si $\Omega \stackrel{U}{=} \Omega'$ s. o.

PRUEBA:

—> Sean los campos X_1, X_2 linealmente independientes tales que se cumpla $\langle X_1, X_2 \rangle = \Omega \cap S_U = \Omega' \cap S_U$. Por lo tanto

$$\langle X_1, X_2 \rangle \in \Omega \cap \Omega'.$$

Aplicando el Teorema 1.2.19 tenemos que $\Omega = \Omega'$ salvo orientaciones para toda congruencia de observadores normal a $\{X_1, X_2\}$, en particular para U .

← Si $\Omega = \Omega'$ salvo orientaciones para U , por la Nota 1.2.10 resulta que $\Omega' = \Omega$ o bien $\Omega' = \Omega_{\bar{U}}$. En cualquiera de los dos casos se tiene

$$\Omega \cap S_U = \Omega' \cap S_U.$$

□

Corolario 1.2.22. *Dados Ω una 3-distribución nula y U, U' dos congruencias de observadores, las 2-distribuciones de frentes de onda espaciales de Ω y $\Omega_{\bar{U}}$, asociadas a U coinciden, $\Omega \cap S_U = \Omega_{\bar{U}} \cap S_U$, si y sólo si $U \stackrel{\Omega}{\approx} U'$.*

PRUEBA:

Por el Corolario 1.2.21, con $\Omega' = \Omega_{\bar{U}}$, tenemos que $\Omega \cap S_U = \Omega_{\bar{U}} \cap S_U$ si y sólo si $\Omega = \Omega_{\bar{U}}$, salvo orientaciones para U . Por la Nota 1.2.10 tenemos que $\Omega = \Omega_{\bar{U}}$, salvo orientaciones para U si y sólo si o bien $\Omega_{\bar{U}} = \Omega$ o bien $\Omega_{\bar{U}} = \Omega_{\bar{U}}$. El primer caso no se puede dar, ya que $\Omega_{\bar{V}} \neq \Omega$ para toda congruencia de observadores V . Por la Proposición 1.2.15 tenemos que $\Omega_{\bar{U}} = \Omega_{\bar{U}}$, si y sólo si $U \stackrel{\Omega}{\approx} U'$.

□

Corolario 1.2.23. *Sean Ω, Ω' 3-distribuciones nulas y U una congruencia de observadores. Entonces las 3-distribuciones de frentes de onda temporales de Ω y Ω' asociadas a U coinciden, $(\Omega \cap S_U) \oplus \langle U \rangle = (\Omega' \cap S_U) \oplus \langle U \rangle$, si y sólo si $\Omega \stackrel{U}{=} \Omega'$ s. o.*

Corolario 1.2.24. *Dados Ω una 3-distribución nula y U, U' dos congruencias de observadores, las 2-distribuciones de frentes de onda espaciales de Ω y $\Omega_{\bar{U}}$, asociadas a U coinciden, $(\Omega \cap S_U) \oplus \langle U \rangle = (\Omega_{\bar{U}} \cap S_U) \oplus \langle U \rangle$, si y sólo si $U \stackrel{\Omega}{\approx} U'$.*

1.2.3. Otras propiedades

En esta Sección se estudiarán propiedades de la igualdad salvo orientaciones para congruencias de observadores entre distribuciones nulas de dimensión 1 y 3. Estas propiedades se han recopilado fuera de la Sección 1.2.2 para no prolongarla más de lo necesario, ya que allí se encuentra un gran número de definiciones.

Debido a la relación biunívoca entre 1-distribuciones nulas y 3-distribuciones nulas, la mayoría de resultados obtenidos para dimensión 3 se pueden probar reduciéndolos a casos de dimensión 1, tal y como se puede apreciar en la demostración de la Proposición 1.2.25.

Proposición 1.2.25. *Sea Ω una distribución nula de dimensión 1 ó 3 y U, U' dos congruencias de observadores. Entonces*

$$\Omega_{\overline{U}\overline{U'}} = \Omega_{\overline{U'}\overline{U}} \iff U \stackrel{\Omega}{\approx} U'.$$

PRUEBA:

De acuerdo con lo dicho al principio de esta Sección, basta probarlo para una 1-distribución nula Λ . Probaremos

$$\Lambda_{\overline{U}\overline{U'}} = \Lambda_{\overline{U'}\overline{U}} \iff U \stackrel{\Lambda}{\approx} U',$$

y entonces, para el caso de una 3-distribución nula Ω se tendría

$$\begin{aligned} \Omega_{\overline{U}\overline{U'}} &= \Omega_{\overline{U'}\overline{U}} \iff (\Omega_{\overline{U}\overline{U'}})^\perp = (\Omega_{\overline{U'}\overline{U}})^\perp \\ &\iff \left((\Omega_{\overline{U}})^\perp \right)_{\overline{U'}}^- = \left((\Omega_{\overline{U'}})^\perp \right)_{\overline{U}}^- \\ &\iff (\Omega^\perp)_{\overline{U}\overline{U'}}^- = (\Omega^\perp)_{\overline{U'}\overline{U}}^- \\ &\iff U \stackrel{\Omega^\perp}{\approx} U' \iff U \stackrel{\Omega}{\approx} U'. \end{aligned}$$

→ Sea $\{S + U\}$ la U -base de Λ y sea $\{X_1, X_2, S, U\}$ una tétrada.

- Vamos a construir una U' -base de $\Lambda_{\overline{U}\overline{U'}}$:

Tenemos que $\Lambda_{\overline{U}} = \langle -S + U \rangle$. Si $\{-Y' + U'\}$ es la U' -base de $\Lambda_{\overline{U'}}$, entonces $\{Y' + U'\}$ es la U' -base de $\Lambda_{\overline{U}\overline{U'}}$. Veamos lo que vale $Y' + U'$: Podemos escribir U' de la forma

$$U' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} (U + vX)$$

como en (1.1.3), con $X = X^1 X_1 + X^2 X_2 + X^3 S \in S_U$ y v una función tal que $|v| < 1$. Como $-S + U$ y $-Y' + U'$ generan la misma 1-distribución, son proporcionales, es decir, existe una función β tal que

$$-Y' + U' = \beta(-S + U) \quad (1.2.30)$$

y multiplicando (1.2.30) por U'

$$\begin{aligned} -1 &= \beta g(-S + U, U') = \beta (-g(S, U') + g(U, U')) \\ &= \beta \left(- \left(\frac{vX^3}{\sqrt{1-v^2}} \right) - \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \right) \\ &= - \frac{\beta}{\sqrt{1-v^2}} (1 + vX^3) \end{aligned}$$

con lo que

$$\beta = \frac{\sqrt{1-v^2}}{1+vX^3}.$$

Así pues, despejando Y' en (1.2.30) tenemos

$$Y' = -\beta(-S+U) + U'$$

con lo que

$$\begin{aligned} Y' + U' &= -\frac{\sqrt{1-v^2}}{1+vX^3}(-S+U) + 2U' \\ &= \frac{2v}{\sqrt{1-v^2}}(X^1X_1 + X^2X_2) + \\ &+ \left(\frac{2vX^3}{\sqrt{1-v^2}} + \frac{\sqrt{1-v^2}}{1+vX^3} \right) S + \left(\frac{2}{\sqrt{1-v^2}} - \frac{\sqrt{1-v^2}}{1+vX^3} \right) U. \end{aligned} \tag{1.2.31}$$

- Vamos a construir una U -base de $\Lambda_{\bar{U}'\bar{U}}$:

Sea $\{-S' + U'\}$ la U' -base de $\Lambda_{\bar{U}'}$, y sea $\{X'_1, X'_2, S', U'\}$ una tétrada. Si $\{-Y + U\}$ es la U -base de $\Lambda_{\bar{U}'}$, entonces $\{Y + U\}$ es la U -base de $\Lambda_{\bar{U}'\bar{U}}$. Veamos lo que vale $Y + U$: Como en el caso anterior, podremos escribir U' de la forma

$$U' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(U + vX)$$

como en (1.1.3), con $X = X^1X_1 + X^2X_2 + X^3S \in S_U$ y v una función tal que $|v| < 1$ y además

$$S' + U' = \alpha(S + U)$$

con

$$\alpha = \frac{\sqrt{1-v^2}}{1-vX^3}.$$

Como $-S' + U'$ y $-Y + U$ generan la misma 1-distribución, son proporcionales, es decir, existe una función β (sin relación con la β del caso anterior) tal que

$$-Y + U = \beta(-S' + U') \tag{1.2.32}$$

y multiplicando (1.2.32) por U

$$\begin{aligned} -1 &= \beta g(-S' + U', U) = \beta(-g(S', U) + g(U', U)) \\ &= \beta \left(-\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}} - \alpha \right) - \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \right) \\ &= -\frac{\beta}{\sqrt{1-v^2}} \left(\frac{2}{\sqrt{1-v^2}} - \alpha \right). \end{aligned}$$

con lo que

$$\beta = \frac{\sqrt{1-v^2}}{2-\alpha\sqrt{1-v^2}}.$$

Así pues, despejando Y en (1.2.32) tenemos

$$Y = -\beta(-S' + U') + U$$

con lo que

$$\begin{aligned} Y + U &= -\frac{\sqrt{1-v^2}}{2-\alpha\sqrt{1-v^2}}(-S' + U') + 2U \\ &= -\frac{\sqrt{1-v^2}}{2-\alpha\sqrt{1-v^2}}\left(-\alpha(S+U) + \frac{2}{\sqrt{1-v^2}}(U+vX)\right) + 2U \\ &= -\frac{2v}{2-\alpha\sqrt{1-v^2}}(X^1X_1 + X^2X_2) + \left(\frac{\alpha\sqrt{1-v^2}-2vX^3}{2-\alpha\sqrt{1-v^2}}\right)S \\ &\quad + U. \end{aligned} \tag{1.2.33}$$

Ahora, como $\Lambda_{\bar{U}\bar{U}'} = \Lambda_{\bar{U}'\bar{U}}$ resultará que los campos $Y' + U'$ y $Y + U$ han de ser proporcionales. Igualando los coeficientes de U de (1.2.31) y (1.2.33) obtenemos que el factor de proporcionalidad ha de ser

$$Y' + U' = \left(\frac{2}{\sqrt{1-v^2}} - \frac{\sqrt{1-v^2}}{1+vX^3}\right)(Y + U).$$

Si suponemos $X^3 \neq \pm 1$, entonces $X^1 \neq 0$ y/o $X^2 \neq 0$. Por lo tanto, igualando coeficientes de X^1 ó X^2 de (1.2.31) y (1.2.33) obtenemos

$$\frac{2v}{\sqrt{1-v^2}} = \left(\frac{2}{\sqrt{1-v^2}} - \frac{\sqrt{1-v^2}}{1+vX^3}\right)\left(\frac{-2v}{2-\alpha\sqrt{1-v^2}}\right). \tag{1.2.34}$$

Despejando X^3 de (1.2.34), suponiendo $v \neq 0$

$$X^3 = \pm\sqrt{\frac{v^2+1}{2v^2}},$$

pero $v^2 < 1$, con lo que

$$\frac{v^2+1}{2v^2} > 1$$

y por lo tanto no hay solución con $(X^3)^2 < 1$.

Como X ha de ser unitario, $(X^3)^2 \leq 1$. En el caso $X^3 = \pm 1$ (en el que $X = \pm S$) sí que se cumple la proporcionalidad entre $Y' + U'$ y $Y + U$, y también en el caso $v = 0$ (en el que $U' = U$). Por lo tanto, teniendo en cuenta la Proposición 1.2.14 y la Nota 1.2.13 se tiene que si $\Lambda_{\bar{U}\bar{U}'} = \Lambda_{\bar{U}'\bar{U}}$ entonces $U \stackrel{\Omega}{\approx} U'$.

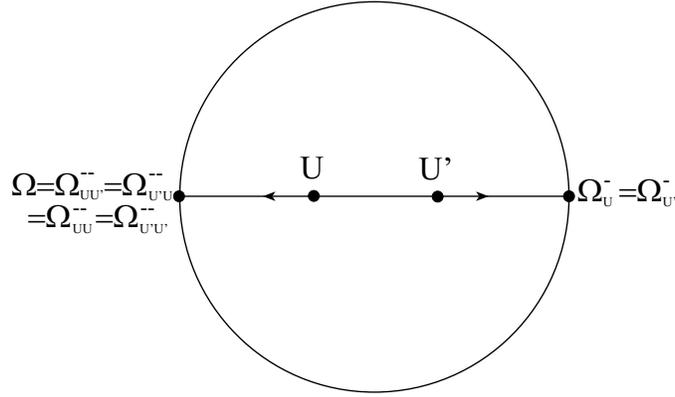


Figura 1.5: Esquema de 2 congruencias de observadores Ω -relacionados en donde se muestran varias igualdades.

← Si $U \stackrel{\Omega}{\approx} U'$, por la Proposición 1.2.15 y la Nota 1.2.7 se tiene que $\Lambda_U^- = \Lambda_{U'}^-$. Por lo tanto

$$\Lambda_{UU'}^- = \Lambda = \Lambda_{U'U}^-.$$

□

En el caso de la Proposición 1.2.25, se cumplirá además

$$\Omega_{UU'}^- = \Omega_{U'U}^- = \Omega,$$

como se puede fácilmente observar en la Figura 1.5 (si U y U' están Ω -relacionados) y en la Figura 1.6 (si no lo están). Los esquemas de las Figuras 1.5 y 1.6 engloban pues a la Proposición 1.2.15 y al Corolario 1.2.17.

Nota 1.2.26. *Teniendo en cuenta los resultados anteriores, podemos afirmar que dados una 3-distribución nula Ω , una 1-distribución nula $\Lambda = \Omega^\perp$ y dos congruencias de observadores U, U' , las siguientes afirmaciones equivalen:*

- (i) $U \stackrel{\Omega}{\approx} U'$
- (ii) $U \stackrel{\Lambda}{\approx} U'$
- (iii) $U' \in (\Omega \cap S_U)^\perp$
- (iv) $\Omega_U^- = \Omega_{U'}^-$
- (v) $\Lambda_U^- = \Lambda_{U'}^-$

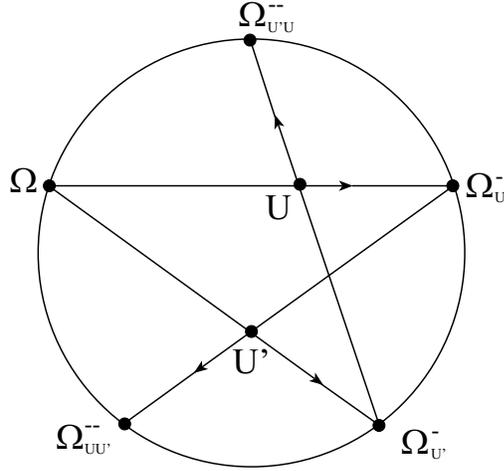


Figura 1.6: Esquema de 2 congruencias de observadores no Ω -relacionados en donde se puede comprobar que $\Omega_{U'U'}^- \neq \Omega_{U'U}^-$.

- (vi) $\Omega_{U'U'}^- = \Omega_{U'U}^- = \Omega$
- (vii) $\Lambda_{U'U'}^- = \Lambda_{U'U}^- = \Lambda$
- (viii) $\Omega \cap S_U = \Omega_{U'}^- \cap S_U$
- (ix) $(\Omega \cap S_U) \oplus \langle U \rangle = (\Omega_{U'}^- \cap S_U) \oplus \langle U \rangle$

Nota 1.2.27. *Teniendo en cuenta los resultados anteriores, podemos afirmar que dados dos 3-distribuciones nulas Ω, Ω' , dos 1-distribuciones nulas $\Lambda = \Omega^\perp$, $\Lambda' = \Omega'^\perp$ y una congruencia de observadores U , las siguientes afirmaciones equivalen:*

- (i) $\Omega \stackrel{U}{=} \Omega'$ s. o.
- (ii) $\Lambda \stackrel{U}{=} \Lambda'$ s. o.
- (iii) $\Omega' = \Omega$ o bien $\Omega' = \Omega_{U'}^-$
- (iv) $\Lambda' = \Lambda$ o bien $\Lambda' = \Lambda_{U'}^-$
- (v) $\Omega \cap S_U = \Omega' \cap S_U$
- (vi) $(\Omega \cap S_U) \oplus \langle U \rangle = (\Omega' \cap S_U) \oplus \langle U \rangle$

Lema 1.2.28. *Dado $p \in M$, sean $v_1, v_2 \in T_p M$ dos vectores nulos orientados al futuro no proporcionales. Entonces*

- $g_p(v_1, v_2) < 0$,
- $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$ es temporal orientado al futuro,

- $\alpha_1 v_1 - \alpha_2 v_2$ es espacial,
- $g_p(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, \alpha_1 v_1 - \alpha_2 v_2) = 0$,

para todo $\alpha_1, \alpha_2 > 0$.

Teorema 1.2.29. Sean Ω, Ω' dos distribuciones nulas de la misma dimensión (1 ó 3) tales que $\Omega(p) \neq \Omega'(p)$ para todo $p \in M$. Entonces, existe una familia uniparamétrica de congruencias de observadores tal que

$$\Omega_U^- = \Omega'$$

para todo U de esa familia.

PRUEBA:

Como ya se ha dicho, basta probarlo para 1-distribuciones nulas Λ, Λ' . Sean $N \in \Lambda, N' \in \Lambda'$. Estos campos son nulos y pueden elegirse orientados al futuro. Por hipótesis $\Lambda(p) \neq \Lambda'(p)$ para todo $p \in M$ y por lo tanto N, N' no son proporcionales en ningún punto. Dada una función $\alpha > 0$, construimos los campos unitarios

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2\alpha} N - \frac{\alpha}{g(N, N')} N' \\ S &= \frac{1}{2\alpha} N + \frac{\alpha}{g(N, N')} N' \end{aligned}$$

que están bien definidos por el Lema 1.2.28. Además, por el mismo lema, U es una congruencia de observadores, S es espacial y son normales entre sí. Además,

$$\begin{aligned} N &= \alpha(U + S) \\ N' &= \frac{-g(N, N')}{2\alpha}(U - S) \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\Lambda_U^- = \Lambda'.$$

□

La familia uniparamétrica de congruencias de observadores del Teorema 1.2.29 está formada por las congruencias de observadores que se encuentran en los planos definidos por los campos nulos orientados al futuro N, N' , que caracterizan a Ω, Ω' respectivamente, tal y como se muestra en la Figura 1.7.

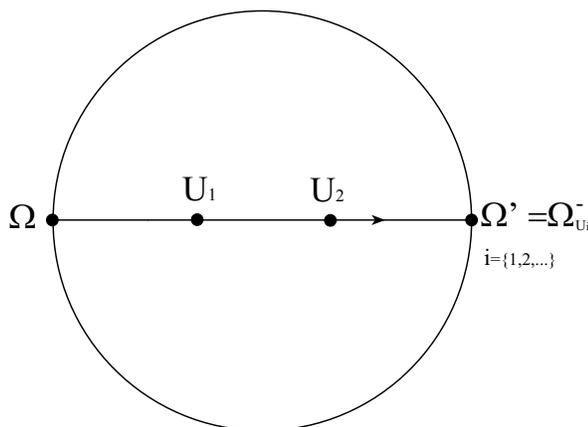


Figura 1.7: Representación esquemática de la familia de congruencias de observadores que son coplanarios con las direcciones nulas de Ω y Ω' , en donde se puede comprobar que $\Omega_U^- = \Omega'$ para toda congruencia de observadores U perteneciente a esta familia.

1.2.4. Congruencias de observadores distintas con bases asociadas iguales

En esta Sección vamos a ver cuándo dos congruencias de observadores U, U' distintas tienen bases asociadas idénticamente iguales. Primero vamos a estudiar este hecho para una 1-distribución nula Λ .

Sea $\{S + U\}$ una U -base de una 1-distribución nula Λ . Vamos a construir todas las diferentes congruencias de observadores U' con U' -base de Λ idénticamente igual a la U -base de Λ . Teniendo en cuenta (1.1.5), tenemos que esto se cumple si y sólo si $\alpha = 1$, que aplicado a (1.1.6) y despejando X^3 obtenemos

$$g(X, S) = \frac{1 - \sqrt{1 - v^2}}{v}. \quad (1.2.35)$$

La función $\frac{1 - \sqrt{1 - v^2}}{v} :]0, 1[\rightarrow]0, 1[$ es biyectiva. Así, dado un campo espacial unitario X ortogonal a U tal que $0 < g(X, S) < 1$, existe una única v tal que (1.2.35) se cumple. Entonces, teniendo en cuenta (1.1.3), U' tiene la forma

$$U' = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} (U + vX).$$

Entonces, tenemos un U' distinto para cada campo X que satisfaga todas las condiciones anteriores.

Ejemplo 1.2.30. *En el espacio-tiempo de Minkowski, consideremos la*

1-distribución nula Λ generada por

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t} \right\}. \quad (1.2.36)$$

Si consideramos

$$U = \frac{\partial}{\partial t},$$

entonces (1.2.36) es la U -base de Λ , de la forma $\{S + U\}$ en donde

$$S = \frac{\partial}{\partial z}.$$

Si consideramos, por ejemplo, el campo espacial unitario

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

ortogonal a U , tenemos que

$$g(X, S) = \frac{1}{\sqrt{2}} \in]0, 1[$$

y entonces, podemos calcular v a partir de la expresión (1.2.35):

$$v = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Así pues, dado

$$U' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} (U + vX) = 3 \frac{\partial}{\partial t} + 2 \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

tenemos que la U' -base de Λ es idénticamente igual a la U -base de Λ .

En el caso de dimensión 3, necesitamos el concepto de *congruencias de observadores Ω -relacionadas*. Dada Ω una 3-distribución nula y dada U una congruencia de observadores con $\{X_1, X_2, S + U\}$ una U -base de Ω , queremos encontrar una congruencia de observadores U' que tenga una U' -base de Ω idénticamente igual a $\{X_1, X_2, S + U\}$. Si $\{X'_1, X'_2, S' + U'\}$ es una U' -base de Ω , entonces tenemos que imponer las dos condiciones siguientes:

- $S + U = S' + U'$
- $\langle X_1, X_2 \rangle = \langle X'_1, X'_2 \rangle$, es decir $\Omega \cap S_U = \Omega \cap S_{U'}$.

La primera condición es equivalente, de acuerdo con el caso de dimensión 1, a la existencia de un campo espacial unitario X ortogonal a U tal que $0 < g(X, S) < 1$.

La segunda condición es debida a que tenemos cierta libertad en la elección de X'_1 y X'_2 , y es equivalente, de acuerdo con la Definición 1.2.12, a que $U \stackrel{\Omega}{\approx} U'$. Entonces, S, U, U' están en el mismo 2-plano, es decir U' puede expresarse como combinación lineal de S y U . Como $U' = \gamma(U + vX)$ tal y como se muestra en (1.1.3), obtenemos que X puede también expresarse como combinación lineal de S y U . Pero X es ortogonal a U (por definición) y entonces, la única posibilidad es $X = \pm S$ ya que son campos unitarios. Así pues, $g(X, S) = \pm 1$, y esto no es posible, de acuerdo con la primera condición.

Así, dadas dos congruencias de observadores distintas, U y U' , y una 3-distribución nula Ω , tenemos que una U -base de Ω es siempre diferente a cualquier U' -base de Ω .

1.3. 3-Foliaciones nulas

En este apartado vamos a analizar algunas condiciones de integrabilidad de 3-distribuciones nulas. Dada Ω una 3-distribución con U -base $\{X_1, X_2, X_3 = S + U\}$, aplicamos el método de Pfaff: Dada una 1-forma $\omega = \omega_i dx^i$

$$\omega(X_1) = 0 \longrightarrow \omega_i X_1^i = 0$$

como $\omega_i = g_{ij}\omega^j = \gamma_{ij}\omega^j - U_i U_j \omega^j$

$$\gamma_{ij} X_1^i \omega^j - U_i U_j X_1^i \omega^j = 0$$

y como $U_i X_1^i = 0$ por ser $X_1 \in S_U$

$$\gamma_{ij} X_1^i \omega^j = 0.$$

Obtenemos lo mismo para X_2

$$\gamma_{ij} X_2^i \omega^j = 0.$$

Por lo tanto, la proyección a S_U del campo de componentes ω^j es un múltiplo del campo S . Es decir, $\gamma_i^j \omega^i = \alpha S^j$, o lo que es lo mismo

$$\omega^j = \alpha S^j + \beta U^j. \quad (1.3.37)$$

Exigiendo $\omega(X_3) = 0$ obtenemos de la misma forma

$$\gamma_{ij} X_3^i \omega^j - U_i U_j X_3^i \omega^j = 0.$$

Como $X_3 = S + U$

$$\gamma_{ij} S^i \omega^j - U_i U_j U^i \omega^j = 0 \longrightarrow \gamma_{ij} S^i \omega^j + U_j \omega^j = 0 \quad (1.3.38)$$

y sustituyendo la expresión obtenida en (1.3.37) en la expresión (1.3.38) de ω^j se tiene

$$\alpha \gamma_{ij} S^i S^j + \beta U_j U^j = 0 \longrightarrow \alpha = \beta$$

y por lo tanto, (1.3.37) nos indica que

$$\omega^j = X_3^j.$$

Exigiendo $\omega = 0$,

$$\omega_i dx^i = 0 \longrightarrow (\gamma_{ij}\omega^j - U_i U_j \omega^j) dx^i = 0 \longrightarrow \alpha (\gamma_{ij} S^j + U_i) dx^i = 0$$

y por lo tanto

$$\gamma_{ij} S^j dx^i = -U_i dx^i = dT \quad (1.3.39)$$

en donde dT es el tiempo natural asociado a U .

Si el sistema (1.3.39) tiene solución, esta solución determinará las hojas de la foliación.

1.3.1. Interpretación física y geométrica

Veamos la descomposición de dx^i en parte espacial y temporal:

Proposición 1.3.1. *Dada una tétrada $\{S_\alpha, U\}$ con $\{S_\alpha\}_{\alpha=1}^3$ campos espaciales y U campo temporal, se cumple*

$$dx^i = \sum_{\alpha} (S_\alpha)_j dx^j (S_\alpha)^i - U_j dx^j U^i.$$

PRUEBA:

De momento tenemos

$$\left(\sum_{\alpha} (S_\alpha)_j dx^j (S_\alpha)^i - U_j dx^j U^i \right) \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \right) = \sum_{\alpha} (S_\alpha)_k (S_\alpha)^i - U_k U^i.$$

Si consideramos esto como una matriz A de índices (i, k) , hemos de probar $A = I$.

Veamos primero que A es invertible:

$$A = \sum_{\alpha} (S_\alpha)_k (S_\alpha)^i - U_k U^i = g_{jk} \left(\sum_{\alpha} (S_\alpha)^j (S_\alpha)^i - U^j U^i \right)$$

y teniendo en cuenta las matrices de componentes

$$A = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S_1^1 & S_2^1 & S_3^1 & -U^1 \\ S_1^2 & S_2^2 & S_3^2 & -U^2 \\ S_1^3 & S_2^3 & S_3^3 & -U^3 \\ S_1^4 & S_2^4 & S_3^4 & -U^4 \end{pmatrix}$$

Vicente José Bolós Lacave

$$\cdot \begin{pmatrix} S_1^1 & S_1^2 & S_1^3 & S_1^4 \\ S_2^1 & S_2^2 & S_2^3 & S_2^4 \\ S_3^1 & S_3^2 & S_3^3 & S_3^4 \\ U^1 & U^2 & U^3 & U^4 \end{pmatrix}$$

que son matrices invertibles.

Veamos ahora que $A \cdot A = A$:

$$A \cdot A = \left(\sum_{\alpha} (S_{\alpha})_k (S_{\alpha})^i - U_k U^i \right) \cdot \left(\sum_{\alpha'} (S_{\alpha'})_k (S_{\alpha'})^i - U_k U^i \right)$$

y por ortonormalidad

$$\begin{aligned} A \cdot A &= \sum_{\alpha} (S_{\alpha})_j (S_{\alpha})^i (S_{\alpha})_k (S_{\alpha})^j + U_j U^i U_k U^j \\ &= \sum_{\alpha} (S_{\alpha})_k (S_{\alpha})^i - U_k U^i = A. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$A \cdot A = A \longrightarrow (A \cdot A) \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} \longrightarrow A = I.$$

□

Por lo tanto, si

$$dx^i = d\sigma^i + dT^i$$

en donde $d\sigma^i$ es la parte espacial y dT^i es la parte temporal, tenemos

$$\begin{aligned} d\sigma^i &= \sum_{\alpha} (S_{\alpha})_j dx^j (S_{\alpha})^i \\ dT^i &= -U_j dx^j U^i \end{aligned}$$

en donde $\{S_{\alpha}\}_{\alpha=1}^3$ forman una base ortonormal del espacio físico S_U .

Nota 1.3.2. Estas definiciones de $d\sigma^i, dT^i$ son consistentes con las definiciones de $d\sigma^2, dT^2$, es decir, se cumple

- $g_{ij} d\sigma^i d\sigma^j = d\sigma^2$
- $g_{ij} dT^i dT^j = dT^2$

puesto que

- $g_{ij} d\sigma^i d\sigma^j = \gamma_{ij} d\sigma^i d\sigma^j = \gamma_{ij} dx^i dx^j = d\sigma^2$
- $g_{ij} dT^i dT^j = g_{ij} U^i U^j U_k dx^k U_m dx^m = -U_k U_m dx^k dx^m = dT^2$.

Por lo tanto, $\gamma_{ij}dx^i = \gamma_{ij}d\sigma^i$, y entonces

$$\gamma_{ij}S^j d\sigma^i = dT \longrightarrow \gamma\left(S, \frac{d\sigma}{dT}\right) = 1 = \gamma(S, S).$$

Además, por ser $\frac{d\sigma}{dT}$ un vector velocidad

$$ds^2 \leq 0 \longrightarrow d\sigma^2 - dT^2 \leq 0 \longrightarrow \gamma\left(\frac{d\sigma}{dT}, \frac{d\sigma}{dT}\right) \leq 1 = \gamma(S, S).$$

Veamos el siguiente Lema:

Lema 1.3.3. *Dada γ una métrica definida positiva, y los vectores x, y tales que*

$$\begin{aligned}\gamma(x, y) &= \gamma(x, x) \\ \gamma(y, y) &\leq \gamma(x, x),\end{aligned}$$

se tiene $x = y$.

PRUEBA:

Como $\gamma(x, y) = \gamma(x, x)$, entonces

$$\gamma(x, y - x) = 0.$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}\gamma(y, y) &\leq \gamma(x, x) \Rightarrow \gamma(x, y) \geq \gamma(y, y) \Rightarrow \gamma(x - y, y) \geq 0 \\ &\Rightarrow \gamma(y - x, y) \leq 0 \Rightarrow \gamma(y, y - x) \leq 0\end{aligned}$$

y teniendo en cuenta lo anterior

$$\gamma(y, y - x) - \gamma(x, y - x) \leq 0 \Rightarrow \gamma(y - x, y - x) \leq 0.$$

Ahora bien, como la métrica γ es definida positiva, entonces

$$y = x.$$

□

Como γ sobre S_U es una métrica definida positiva, aplicando el Lema 1.3.3 se tiene

$$\left. \begin{aligned}\gamma\left(S, \frac{d\sigma}{dT}\right) &= \gamma(S, S) \\ \gamma\left(\frac{d\sigma}{dT}, \frac{d\sigma}{dT}\right) &\leq \gamma(S, S)\end{aligned}\right\} \implies \frac{d\sigma}{dT} = S.$$

Por lo tanto, si se cumple esto, tenemos una foliación nula. Esta condición se puede interpretar de la siguiente forma: Cada punto que forma el

frente de onda se mueve en dirección normal a éste a velocidad luz, sea cual sea el observador.

Los puntos que forman los frentes de onda describirán líneas de universo. Considerando un campo temporal U sincronizable en tiempo natural, sea $\alpha(T)$ la curva que describen con el parámetro tiempo natural T , y sean

$$x^i(T) = x_i \alpha(T).$$

Se cumplirá

$$d\sigma^i = S^i dT,$$

y sustituyendo en la expresión $dx^i = d\sigma^i + U^i dT$ obtenemos

$$dx^i = (S^i + U^i) dT \implies \frac{d\alpha}{dT} = S + U.$$

La curva $\alpha(T)$ tendrá como vectores tangentes a $S + U$, que son vectores nulos. Por lo tanto, las curvas $\alpha(T)$ serán curvas integrales de la foliación ortogonal generada por el tercer campo de la base $X_3 = S + U$, y por ser un campo nulo, éstas serán curvas con vector velocidad espacial S .

Por otro lado, dada Λ una 1-foliación nula con U -base $\{S + U\}$, sus curvas integrales tendrán como vector tangente a $S + U$ en cada punto. El vector velocidad espacial $\frac{d\sigma}{dT}$ (con $dT = -U_i dx^i$ tiempo natural) será proporcional a la proyección de $S + U$ en el espacio físico y tendrá su misma dirección. Además, como se trata de un vector nulo

$$0 = ds^2 = d\sigma^2 - dT^2$$

con $d\sigma^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j$ y por lo tanto

$$\gamma\left(\frac{d\sigma}{dT}, \frac{d\sigma}{dT}\right) = 1 = \gamma(S, S).$$

Así, tenemos

$$\frac{d\sigma}{dT} = S.$$

1.3.2. Relaciones de integrabilidad

En este Capítulo hemos estudiado propiedades para distribuciones a las que en ocasiones hemos impuesto condiciones de integrabilidad si la situación física así lo requería. Sin embargo, conviene expresar de forma explícita las implicaciones que se obtienen cuando algunas de las distribuciones estudiadas son foliación. Así pues, en esta Sección veremos algunas relaciones entre las condiciones de integrabilidad de las distribuciones dadas en la Definición 1.1.15 para una 3-distribución nula Ω .

Tal y como se muestra en el Capítulo 0, dada una congruencia de observadores U , su espacio físico asociado S_U es foliación si y sólo si U es

sincronizable. Aunque nosotros trabajaremos con congruencias de observadores sincronizables, podríamos trabajar igualmente con congruencias de observadores localmente sincronizables para realizar un estudio local. Por lo tanto, exigiremos que al menos exista una congruencia de observadores localmente sincronizable.

Proposición 1.3.4. *Si Ω es una foliación entonces la 2-distribución de frentes de onda espaciales de Ω asociadas a U , $\Omega \cap S_U$, es foliación para toda congruencia de observadores sincronizable U .*

PRUEBA:

Dada una congruencia de observadores sincronizable U , tomamos una U -base de Ω

$$\{X_1, X_2, S + U\}.$$

Como Ω es foliación se tiene

$$[X_1, X_2] \in \Omega.$$

Además, como S_U es foliación al ser U sincronizable, se tiene

$$[X_1, X_2] \in S_U$$

y por lo tanto

$$[X_1, X_2] \in \Omega \cap S_U = \langle X_1, X_2 \rangle$$

con lo que la 2-distribución de frentes de onda espaciales de Ω asociadas a U es foliación.

□

Proposición 1.3.5. *Si la 3-distribución de frentes de onda temporales de Ω asociadas a U , $(\Omega \cap S_U) \oplus \langle U \rangle$, es foliación para alguna congruencia de observadores U sincronizable, entonces la 2-distribución de frentes de onda espaciales de Ω asociadas a U , $\Omega \cap S_U$, es foliación.*

PRUEBA:

Sea una U -base de Ω

$$\{X_1, X_2, S + U\}.$$

Como $\langle X_1, X_2, U \rangle$ es foliación se tiene

$$[X_1, X_2] \in \langle X_1, X_2, U \rangle.$$

Además, como S_U es foliación, se tiene

$$[X_1, X_2] \in S_U = \langle X_1, X_2, S \rangle$$

y por lo tanto

$$[X_1, X_2] \in \langle X_1, X_2, U \rangle \cap \langle X_1, X_2, S \rangle = \langle X_1, X_2 \rangle = \Omega \cap S_U$$

con lo que la 2-distribución de frentes de onda espaciales de Ω asociadas a U es foliación.

□

Dados una 3-foliación nula Ω y una congruencia de observadores U , no está asegurado que Ω_U^- sea foliación. De hecho, si tomamos una 3-distribución nula Ω' no integrable tal que

$$\Omega'(p) \neq \Omega(p)$$

para todo $p \in M$, por el Teorema 1.2.29 está asegurado ⁴ que existe una congruencia de observadores U tal que

$$\Omega_U^- = \Omega'$$

y por lo tanto Ω_U^- no es foliación. Para tener asegurado que Ω_U^- sea foliación hay que añadir algunas hipótesis:

Proposición 1.3.6. *Sea Ω una 3-foliación nula y U una congruencia de observadores sincronizable. Entonces Ω_U^- es foliación si y sólo si la 3-distribución de frentes de onda temporales de Ω (ó de Ω_U^-) asociadas a U , $(\Omega \cap S_U) \oplus \langle U \rangle$, es foliación.*

PRUEBA:

—→ Tomamos una U -base de Ω

$$\{X_1, X_2, S + U\}.$$

Por la Proposición 1.3.4, como Ω es foliación también lo será la 2-distribución de frentes de onda espaciales de Ω asociadas a U , $\langle X_1, X_2 \rangle$. Sólo falta comprobar que $[X_1, U]$ y $[X_2, U]$ están en $\langle X_1, X_2, U \rangle$.

Como Ω es foliación,

$$[X_1, S + U] \in \Omega$$

y por lo tanto, teniendo en cuenta que S_U es foliación

$$\begin{aligned} [X_1, S + U] &= [X_1, S] + [X_1, U] = (\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 S) \\ &\quad + (\beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 S + \beta_4 U) \\ &= \gamma_1 X_1 + \gamma_2 X_2 + \gamma_3 (S + U). \end{aligned}$$

⁴Es más, existe toda una familia de congruencias de observadores

Tenemos pues

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1 &= \alpha_1 + \beta_1 \\ \gamma_2 &= \alpha_2 + \beta_2 \\ \gamma_3 &= \beta_4 \end{aligned} \right\} \longrightarrow \beta_4 = \alpha_3 + \beta_3.$$

Por otro lado, como Ω_U^- es foliación

$$[X_1, -S + U] \in \Omega_U^-$$

y por lo tanto, teniendo en cuenta que S_U es foliación

$$\begin{aligned} [X_1, -S + U] &= -[X_1, S] + [X_1, U] = -(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 S) \\ &\quad + (\beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 S + \beta_4 U) \\ &= \delta_1 X_1 + \delta_2 X_2 + \delta_3 (-S + U). \end{aligned}$$

Entonces se tiene

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 &= \alpha_1 + \beta_1 \\ \delta_2 &= \alpha_2 + \beta_2 \\ \delta_3 &= \beta_4 \end{aligned} \right\} \longrightarrow \beta_4 = \alpha_3 - \beta_3.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \beta_3 &= 0, \\ \beta_4 &= \alpha_3 \end{aligned}$$

y entonces

$$[X_1, U] = (\beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_4 U) \in \langle X_1, X_2, U \rangle.$$

De forma análoga se prueba que

$$[X_2, U] \in \langle X_1, X_2, U \rangle.$$

← Tomamos una U -base de Ω

$$\{X_1, X_2, S + U\}.$$

Por la Proposición 1.3.4, como Ω es foliación también lo será la 2-distribución de frentes de onda espaciales de Ω asociadas a U , $\langle X_1, X_2 \rangle$. Debemos comprobar que $[X_1, -S + U]$ y $[X_2, -S + U]$ están en $\Omega_U^- = \langle X_1, X_2, -S + U \rangle$.

Vicente José Bolós Lacave

Como $\langle X_1, X_2, U \rangle$ es foliación,

$$[X_1, U] = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 U.$$

Por otro lado, como Ω es foliación

$$[X_1, S + U] \in \Omega$$

y por lo tanto, teniendo en cuenta que S_U es foliación

$$\begin{aligned} [X_1, S + U] &= [X_1, S] + [X_1, U] = (\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 S) \\ &\quad + (\beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 U) \\ &= \gamma_1 X_1 + \gamma_2 X_2 + \gamma_3 (S + U). \end{aligned}$$

Tenemos pues

$$\gamma_3 = \alpha_3 = \beta_3.$$

Entonces

$$\begin{aligned} [X_1, -S + U] &= -[X_1, S] + [X_1, U] = -(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 S) \\ &\quad + (\beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 U) \\ &= (-\alpha_1 + \beta_1) X_1 + (-\alpha_2 + \beta_2) X_2 + \alpha_3 (-S + U) \\ &\in \Omega_U^-. \end{aligned}$$

Razonando de forma análoga se tiene que

$$[X_2, -S + U] \in \Omega_U^-.$$

□

Llegados a este punto, podemos plantearnos si para toda 3-foliación nula Ω y para toda congruencia de observadores sincronizable U , se tiene que Ω_U^- es foliación. No obstante, a continuación veremos un contraejemplo de esta afirmación:

Ejemplo 1.3.7. *En la métrica de Minkowski con coordenadas cartesianas, consideramos los campos*

$$\begin{aligned} U &= \frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} + d \frac{\partial}{\partial z} = (1, a, b, d) \\ X_1 &= a \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} = (a, 1, 0, 0) \\ X_2 &= b \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} = (b, 0, 1, 0) \\ S &= \frac{d}{\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\alpha^2}{d} \frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{d}{\alpha} \left(1, a, b, \frac{\alpha^2}{d} \right) \end{aligned}$$

Caracterización local de foliaciones nulas

con a, b, d funciones de (t, x, y, z) tales que $d^2 < 1 - (a^2 + b^2) = \alpha^2$. En este caso tenemos que U es temporal y $\{X_1, X_2, S\}$ son campos espaciales que forman una base ortogonal del espacio físico S_U asociado a U . Consideramos

$$\Omega = \langle X_1, X_2, S + U \rangle$$

en donde

$$S + U = \left(1 + \frac{d}{\alpha}\right) (1, a, b, \alpha).$$

Veamos las condiciones que hemos de exigir a las funciones a, b, d para que Ω y S_U sean foliaciones:

- $[X_1, X_2] \in \langle X_1, X_2 \rangle$. Para esto exigiremos

$$g([X_1, X_2], S) = g([X_1, X_2], U) = 0$$

y obtendremos

$$a \frac{\partial b}{\partial t} + \frac{\partial b}{\partial x} = b \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial y}. \quad (1.3.40)$$

- $[X_1, S] \in \langle X_1, X_2, S \rangle$. Para esto exigiremos

$$g([X_1, S], U) = 0$$

teniendo en cuenta lo anterior, y obtendremos

$$a \frac{\partial d}{\partial t} + \frac{\partial d}{\partial x} = d \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial z}. \quad (1.3.41)$$

- $[X_2, S] \in \langle X_1, X_2, S \rangle$. Para esto exigiremos

$$g([X_2, S], U) = 0$$

teniendo en cuenta lo anterior, y obtendremos

$$b \frac{\partial d}{\partial t} + \frac{\partial d}{\partial y} = d \frac{\partial b}{\partial t} + \frac{\partial b}{\partial z}. \quad (1.3.42)$$

- $[X_1, S + U] \in \langle X_1, X_2, S + U \rangle$. Para esto exigiremos

$$g([X_1, S + U], S) = -g([X_1, S + U], U)$$

teniendo en cuenta lo anterior, y obtendremos

$$\frac{\partial a}{\partial t} + a \frac{\partial a}{\partial x} + b \frac{\partial a}{\partial y} + \frac{d^2}{\alpha} \frac{\partial a}{\partial z} = 0. \quad (1.3.43)$$

Vicente José Bolós Lacave

- $[X_2, S + U] \in \langle X_1, X_2, S + U \rangle$. Para esto exigiremos

$$g([X_2, S + U], S) = -g([X_2, S + U], U)$$

teniendo en cuenta lo anterior, y obtendremos

$$\frac{\partial b}{\partial t} + a \frac{\partial b}{\partial x} + b \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{d^2}{\alpha} \frac{\partial b}{\partial z} = 0. \quad (1.3.44)$$

Veamos las condiciones que hemos de exigir a las funciones a, b, d para que la distribución $(\Omega \cap S_U) \oplus \langle U \rangle = \langle X_1, X_2, U \rangle$ no sea foliación teniendo en cuenta lo anterior. Por la Proposición 1.3.6, estas condiciones serán las mismas que para exigir que la 3-distribución $\Omega_{\bar{U}} = \langle X_1, X_2, -S + U \rangle$ no sea foliación:

- $[X_1, U] \notin \langle X_1, X_2, U \rangle$. Para esto exigiremos

$$g([X_1, U], S) \neq 0$$

y obtendremos

$$\left(\frac{d^2 + \alpha^2}{2d} - \frac{d^2}{\alpha} \right) \frac{\partial a}{\partial z} \neq 0. \quad (1.3.45)$$

O bien

- $[X_2, U] \notin \langle X_1, X_2, U \rangle$. Para esto exigiremos

$$g([X_2, U], S) \neq 0$$

y obtendremos

$$\left(\frac{d^2 + \alpha^2}{2d} - \frac{d^2}{\alpha} \right) \frac{\partial b}{\partial z} \neq 0. \quad (1.3.46)$$

Buscaremos un ejemplo con

$$\begin{aligned} a &= a(x, z) \\ b &= 0. \end{aligned}$$

Como de la ecuación (1.3.43) podemos despejar d en función de a , entonces tenemos que

$$d = d(x, z).$$

Por lo tanto, las ecuaciones (1.3.40), (1.3.42), (1.3.44) siempre se cumplirán, mientras que la ecuación (1.3.46) no se cumplirá, por lo que habrá que exigir la ecuación (1.3.45). No obstante, en la ecuación (1.3.45) se tiene que

$$\frac{d^2 + \alpha^2}{2d} - \frac{d^2}{\alpha} \neq 0 \iff d \neq \alpha,$$

cosa que se ha de cumplir con la exigencia de $d^2 < \alpha^2$. Exigiendo las ecuaciones (1.3.41), (1.3.43) tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial d}{\partial x} + \frac{\alpha}{a} \frac{\partial \alpha}{\partial z} &= 0 \\ d^2 \frac{\partial d}{\partial x} - \alpha^2 \frac{\partial \alpha}{\partial x} &= 0.\end{aligned}$$

De la segunda obtenemos

$$d = (f(z) + \alpha^3)^{1/3}$$

en donde $f(z)$ es una función arbitraria, y sustituyendo en la primera

$$\alpha \sqrt{1 - \alpha^2} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + (f(z) + \alpha^3)^{2/3} \frac{\partial \alpha}{\partial z} = 0$$

que es una ecuación en derivadas parciales cuasi-lineal. Considerando $f(z) = K$ constante arbitraria no nula, una solución particular de esta ecuación puede venir dada implícitamente por

$$\frac{x}{\alpha \sqrt{1 - \alpha^2}} - \frac{z}{(K + \alpha^3)^{2/3}} = C$$

en donde C es otra constante arbitraria.

Ahora tenemos que comprobar que $0 < d^2 < 1 - \alpha^2 = \alpha^2 < 1$ en algún abierto, para que U sea una congruencia de observadores bien definida y se cumpla la ecuación (1.3.45). Si hacemos $x = 1, z = 0$ obtenemos

$$\frac{1}{C^2} = \alpha^2 (1 - \alpha^2)$$

y al despejar α^2

$$\alpha^2 = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1 - 4/C^2}}{2}.$$

Si escogemos $C = 2$ entonces

$$\alpha^2(x = 1, z = 0) = \frac{1}{2} < 1$$

con lo que, por continuidad, existirá un entorno abierto del conjunto de puntos $\{(t, x, y, z) / x = 1, z = 0\}$ en donde $0 < \alpha^2 < 1$. En los puntos de la forma $x = 1, z = 0$ tendremos

$$d^2 = \left(K + \left(\frac{1}{2} \right)^{3/2} \right)^{2/3}.$$

Si escogemos $K = \left(\frac{1}{4} \right)^{3/2} - \left(\frac{1}{2} \right)^{3/2} \neq 0$ entonces

$$0 < d^2(x = 1, z = 0) = \frac{1}{4} < \frac{1}{2} = \alpha^2(x = 1, z = 0) < 1.$$

Como antes, existirá un abierto en el que estas desigualdades se seguirán cumpliendo. En este abierto sucede que Ω es foliación, U es sincronizable y $\Omega_{\bar{U}}$ no es foliación.

Definición 1.3.8. Llamaremos 3-frentes de onda temporales de Ω asociadas a U a las hojas de la 3-foliación de frentes de onda temporales de Ω asociadas a U , $(\Omega \cap S_U) \oplus \langle U \rangle$.

Definición 1.3.9. Llamaremos 2-frentes de onda espaciales de Ω asociadas a U a las hojas de la 2-foliación de frentes de onda espaciales de Ω asociadas a U , $\Omega \cap S_U$.

1.4. Algunas interpretaciones físicas

Una congruencia de curvas nulas (rayos de luz, por ejemplo) es el conjunto de hojas (curvas integrales) de una 1-foliación nula Λ . Por otra parte, una congruencia de frentes de onda nulos son las hojas de una 3-foliación nula Ω . Precisamente, dada una congruencia de observadores U , las hojas de $\Omega \cap S_U$ pueden ser interpretadas como los frentes de onda espaciales (2-dimensionales sin movimiento) para U (Souriau, 1970, 1997; Liern y Olivert, 1995a, 1995b). Pero no todas las 1-foliaciones nulas pueden ser interpretadas como congruencias de rayos de luz ni todas las 3-foliaciones pueden ser interpretadas como congruencias de frentes de onda nulos. Por ejemplo, Λ y Ω deberían ser foliaciones totalmente geodésicas. Además, en el caso de dimensión 3, la Proposición 1.3.4 debería ser necesaria y suficiente: Ω es integrable si y sólo si $\Omega \cap S_U$ es integrable (dado U una congruencia de observadores sincronizable). Este hecho es razonable, ya que la observación de los frentes de onda (como hojas de $\Omega \cap S_U$) debería implicar la existencia de los frentes de onda (como hojas de Ω) y viceversa. En esta Sección, vamos a trabajar sólo con foliaciones que pueden ser interpretadas de esta forma (como congruencias de rayos de luz o frentes de onda nulos) para poder dar algunas interpretaciones físicas de algunos resultados anteriormente obtenidos.

No obstante, a lo largo de este Capítulo ya se han visto algunas interpretaciones físicas, como el *efecto Doppler* y la *aberración de la luz*, que aparecían cuando se cambiaba de congruencia de observadores. En esta Sección vamos a ver algunas propiedades más acerca de la aberración de la luz:

Sea Ω una foliación nula de dimensión 1 ó 3, y sean U, U' dos congruencias de observadores. Si N representa la dirección nula de Ω , sean S, S' tales que representen la dirección relativa (espacial) de N para los observadores U, U' respectivamente (es decir, $S+U$ y $S'+U'$ son proporcionales a N). Estas direcciones relativas son las direcciones espaciales de propagación de los rayos nulos (dimensión 1) o de los frentes de onda nulos (dimensión 3) para estas congruencias de observadores respectivamente. Así pues, tenemos que

Caracterización local de foliaciones nulas

- si $U \stackrel{\Omega}{\approx} U'$ (es decir, están Ω -relacionados), entonces S y S' son proporcionales. En este caso, representan la misma dirección relativa.
- si U y U' no están Ω -relacionados, entonces S , S' representan diferentes direcciones relativas, originando el fenómeno de la aberración (ver (1.1.7)) .

2. Foliaciones de simultaneidad

En este Capítulo se abordan problemas abiertos relacionados con la simultaneidad. Por ejemplo, muchos trabajos estudian localmente la simultaneidad relativista aceptando que las subvariedades de Landau generadas por un observador son hojas de una foliación espacial. Sin embargo, esta propiedad no puede asegurarse en ningún entorno si no exigimos algunas condiciones geométricas adicionales. Así pues, si se trabaja en un entorno que no cumple estas propiedades, aparecen algunas dificultades para establecer un estudio dinámico satisfactorio, ya que las subvariedades de Landau dependen tanto de la posición como de la velocidad del observador que la genera. El estudio de algunas de estas condiciones es uno de los principales objetivos de este Capítulo.

Consideraremos dos clases de simultaneidad:

- *simultaneidad espacial*, que describe sucesos que son simultáneos en el sistema propio de inercia local del observador. Los puntos del espacio-tiempo simultáneos en este sentido forman la anteriormente citada subvariedad de Landau.
- *simultaneidad nula*, que describe sucesos que son observados simultáneamente por el observador. Los puntos del espacio-tiempo que son simultáneos en este sentido forman una subvariedad llamada subvariedad de horismos orientada al pasado (Beem y Ehrlich, 1981).

Además, también se estudia la causalidad relacionada con estos dos conceptos de simultaneidad. Sin este estudio, la interpretación geométrica de los resultados obtenidos podría carecer de interés, ya que las subvariedades de Landau deberían ser espaciales y las subvariedades de horismos deberían ser nulas en el entorno en donde se trabaja. Para ello, se introduce un nuevo concepto (llamado *causalidad tangencial*) que generaliza al conocido concepto de causalidad. Más adelante se probará que las subvariedades de Landau son siempre tangencialmente espaciales, pero no necesariamente espaciales. Por otra parte, también se probará que las subvariedades de horismos son siempre tangencialmente nulas y además también son siempre nulas.

Para concluir el Capítulo, se va a realizar un estudio de foliaciones cuyas hojas son subvariedades de Landau o subvariedades de horismos. En Física, es usual trabajar con campos temporales sincronizables cuya foliación ortogonal es considerada una *foliación de simultaneidad* (es decir, cuyas hojas son consideradas *subvariedades de simultaneidad*). Se prueba que dada una curva causal C^∞ orientada al futuro (es decir, la línea de universo de un observador), existe, en un cierto entorno tubular de esta curva, un campo temporal sincronizable que extiende a los vectores tangentes a esta curva (es decir, los contiene). Además, este campo vectorial es ortogonal a la foliación de subvariedades de Landau generadas por este observador. Por otra parte, también se prueba que existe, en un entorno tubular de la curva, una foliación cuyas hojas son subvariedades de horismos orientados al futuro y al pasado de los puntos de la curva. La mayor parte de los resultados obtenidos en este Capítulo se encuentran en Bolós, Liern y Olivert (2002a).

2.1. Subvariedad tangencial y causalidad tangencial

En esta Sección se va a introducir un nuevo concepto llamado *causalidad tangencial*. Para ello, vamos a dotar a los espacios tangentes de una estructura de variedad Lorentziana, es decir, definiremos una métrica Lorentziana en los tangentes de los tangentes. Una vez definida esta métrica pasaremos a estudiar las diferentes causalidades de subvariedades en los espacios tangentes, definiendo el concepto de causalidad tangencial, que puede interpretarse físicamente como la *causalidad observada*.

Si V es un espacio vectorial n -dimensional con estructura de variedad diferenciable C^∞ , puede ser canónicamente identificado con cualquiera de sus espacios tangentes mediante la identificación de las coordenadas en el tangente con las coordenadas en V , para una base dada (que hace el papel de una carta global). Sin embargo esta identificación es independiente de la base escogida y una manera de verlo es la siguiente:

Proposición 2.1.1. *Para cada $v \in V$ existe un isomorfismo $\phi_v : T_v V \rightarrow V$ tal que*

$$\omega(\phi_v w) = w(\omega)$$

para todo $w \in T_v V$ y para todo $\omega \in V^$ (Sachs y Wu, 1977). Además, dada una base $\{e_i\}_{i=1}^n$ en V se tiene*

$$\phi_v \left(w^i \frac{\partial}{\partial e^i} \Big|_v \right) = w^i e_i.$$

Si (V, g) es un espacio vectorial Lorentziano y definimos un $(0, 2)$ -campo tensorial \mathbf{g} sobre TV de la forma

$$\mathbf{g}(w, z) = g(\phi_v w, \phi_v z)$$

para todo $v \in V$ y para todo $w, z \in T_v V$, entonces $(T_v V, \mathbf{g}|_{T_v V})$ es un espacio vectorial Lorentziano para todo $v \in V$ y por lo tanto (V, \mathbf{g}) es una variedad Lorentziana (Sachs y Wu, 1977).

En la variedad espacio-tiempo, dado un $p \in M$ tenemos que $T_p M$ es un espacio vectorial con estructura de variedad diferenciable C^∞ . Por lo tanto, para cada $v \in T_p M$ podremos definir un isomorfismo canónico ϕ_v que identifique $T_v(T_p M)$ con $T_p M$.

Si (M, g) es una variedad espacio-tiempo Lorentziana, dado un $p \in M$ tenemos que $(T_p M, g_p)$ es un espacio vectorial Lorentziano, en donde se denota $g_p \equiv g|_{T_p M}$. Definiendo \mathbf{g}_p en $T(T_p M)$ a partir de g_p como anteriormente se tiene que $(T_p M, \mathbf{g}_p)$ es una variedad Lorentziana.

Definición 2.1.2. Dada N una subvariedad regular en M con $p \in N$, dentro de un entorno normal \mathcal{N}_p de p consideramos

$$\exp_p^{-1} N \quad (2.1.1)$$

que es una subvariedad regular en $T_p M$ (concretamente en $\mathcal{N}_0 = \exp_p^{-1} \mathcal{N}_p$) a la que llamaremos subvariedad tangencial a N en p .

Como se ha dotado a cada espacio tangente de una estructura de variedad Lorentziana, podemos estudiar la causalidad de la subvariedad tangencial $\exp_p^{-1} N$ en un punto v de $\mathcal{N}_0 \subset T_p M$. Esta causalidad recibirá el nombre de causalidad p -tangencial de N en v .

Dentro de un entorno normal convexo \mathcal{V} , la causalidad p -tangencial de N está definida para todo $p \in N$.

Nota 2.1.3. Dada una subvariedad N con $p \in N$ y $v \in \exp_p^{-1} N$, si $q = \exp_p v \in N$ entonces

$$T_q N = \exp_{p*v} (T_v (\exp_p^{-1} N)).$$

En particular, con $v = 0$, como $\exp_{p*0} \equiv \phi_0$ (Beem y Ehrlich, 1981) se cumple

$$T_p N = \phi_0 (T_0 (\exp_p^{-1} N)).$$

La Nota 2.1.3 da lugar a la siguiente Proposición:

Proposición 2.1.4. Sea N subvariedad y $p \in N$. La causalidad de N en p coincide con la causalidad p -tangencial de N en el origen.

PRUEBA:

Por la Nota 2.1.3, como $T_p N = \phi_0 (T_0 (\exp_p^{-1} N))$, dado un $v \in T_p N$ se tiene que $w = \phi_0^{-1} v \in T_0 (\exp_p^{-1} N) \subset T_0 T_p M$ y por lo tanto

$$g(v, v) = g(\phi_0 w, \phi_0 w) = \mathbf{g}_p(w, w),$$

con lo que la causalidad de N en p coincide con la causalidad de $\exp_p^{-1} N$ en el origen.

□

Visto este resultado, cabe decir que la causalidad de N en p no tiene por qué coincidir con

- la causalidad p -tangencial de N en cualquier otro punto de $T_p M$ que no sea el origen
- la causalidad q -tangencial de N en cualquier punto de $T_q M$.

No obstante, si la causalidad de N en p es no nula, por continuidad del tensor métrico y teniendo en cuenta la Proposición 2.1.4, existe un entorno del origen en $T_p M$ en el que la causalidad p -tangencial de N en cualquier punto de este entorno coincide con la causalidad de N en p . Además, existe un entorno de p en M en el que dado un punto q de N existe un entorno del origen en $T_q M$ en el que la causalidad q -tangencial de N en cualquier punto de este entorno coincide con la causalidad de N en p .

Corolario 2.1.5. *Dada una subvariedad N que tiene la misma causalidad p -tangencial en el origen para todo punto $p \in N$, se tiene que la causalidad de N coincide con esta causalidad p -tangencial.*

2.2. Subvariedades de Landau: Definición y causalidad

En esta Sección vamos a obtener las subvariedades de Landau asociadas a un observador dado. Posteriormente vamos a estudiar tanto la causalidad como la causalidad tangencial de las subvariedades de Landau en general.

Teorema 2.2.1. *Sea $p \in M$, $u \in T_p M$ temporal unitario y orientado al futuro¹ y S_u su espacio físico. Existe una única subvariedad regular $L_{p,u}$ de dimensión 3 tal que S_u es tangente a $L_{p,u}$ en p y sus puntos son simultáneos con p en el sistema local de inercia propio de u , llamada subvariedad de simultaneidad o subvariedad de Landau (Olivert, 1980).*

Como el espacio-tiempo M posee conexión lineal, en cada punto $p \in M$ existe un entorno normal \mathcal{N}_p de p (es más, existe un entorno normal convexo de p). Con el vector cuadrivelocidad u de p y el tensor métrico g , definimos la submersión

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{N}_p &\longrightarrow \mathbb{R} \\ q &\longmapsto g(\exp_p^{-1} q, u) \end{aligned} .$$

¹Se escoge así para que represente un observador en p

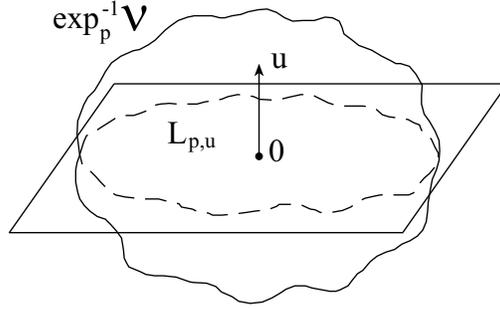


Figura 2.1: Representación de una subvariedad de Landau llevada a $\exp_p^{-1} \mathcal{V}$ mediante \exp_p^{-1} , dentro del espacio tangente $T_p M$.

La subvariedad de Landau $L_{p,u}$ se define como la fibra del 0 de la submersión ϕ :

$$L_{p,u} = \phi^{-1}(0).$$

Por lo tanto la subvariedad de Landau $L_{p,u}$ tiene estructura de subvariedad regular de dimensión 3 en un entorno normal \mathcal{N}_p del punto p .

Nota 2.2.2. Sea $p \in M$ y \mathcal{V} un entorno normal convexo de p . Si $q \in \mathcal{V}$ se tiene que la aplicación

$$\exp_q^{-1} \circ \exp_p : \exp_p^{-1} \mathcal{V} \longrightarrow \exp_q^{-1} \mathcal{V}$$

es composición de difeomorfismos, y por lo tanto es un difeomorfismo, con lo que \mathcal{V} , $\exp_p^{-1} \mathcal{V}$ y $\exp_q^{-1} \mathcal{V}$ son difeomorfos. Las subvariedades de Landau llevadas a $\exp_p^{-1} \mathcal{V}$ mediante \exp_p^{-1} son planos (ver Figura 2.1) y en cualquier $\exp_q^{-1} \mathcal{V}$ con $q \in \mathcal{V}$ serán difeomorfas. Además, las subvariedades de Landau serán también difeomorfas a estos planos en \mathcal{V} .

Estudiemos ahora la causalidad p -tangencial de las subvariedades de Landau $L_{p,u}$ en donde $p \in M$, $u \in T_p M$.

Lema 2.2.3. Sea V un espacio vectorial n -dimensional con estructura de variedad diferenciable C^∞ y sea g un producto interior en V . Dado $u \in V$, si definimos la función $g_u : V \rightarrow \mathbb{R}$ de la forma $g_u(v) = g(u, v)$ entonces

$$w(g_u) = g(u, \phi_v w)$$

para todo $v \in V$ y para todo $w \in T_v V$.

PRUEBA:

Vicente José Bolós Lacave

Sea $\{e_i\}_{i=1}^n$ una base de V , $u = u^i e_i$, $v = v^j e_j$, $w = w^k \frac{\partial}{\partial e^k} \Big|_v$. Entonces $g_u(v) = g_{ij} u^i v^j$ y por lo tanto

$$w(g_u) = g_{ij} u^i w^k \delta_k^j = g_{ik} u^i w^k = g(u, \phi_v w).$$

□

Proposición 2.2.4. *Dados $p \in M$, $u \in T_p M$ y \mathcal{N}_0 un entorno normal del origen en $T_p M$, la variedad tangencial $\exp_p^{-1} L_{p,u}$ es espacial en \mathcal{N}_0 .*

PRUEBA:

Supongamos $v \in \exp_p^{-1} L_{p,u}$ dentro de $\mathcal{N}_0 \subset T_p M$ tal que $v \neq 0$. Entonces $g(u, v) = 0$ con $v \neq 0$. Definimos $g_u : \mathcal{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ de la forma $g_u(u') = g(u, u')$ para todo $u' \in \mathcal{N}_0$. Entonces, en \mathcal{N}_0 , un vector v' pertenece a $\exp_p^{-1} L_{p,u}$ si y sólo si $g_u(v') = 0$. Dado un $w \in T_v \mathcal{N}_0$ tenemos que w pertenece a $T_v(\exp_p^{-1} L_{p,u})$ si y sólo si $w(g_u) = 0$ y aplicando el Lema 2.2.3, si y sólo si $g(u, \phi_v w) = 0$, es decir, si y sólo si $\mathbf{g}(\phi_v^{-1} u, w) = 0$. Entonces

$$T_v(\exp_p^{-1} L_{p,u}) = (\phi_v^{-1} u)^\perp.$$

Pero $\phi_v^{-1} u \in T_v \mathcal{N}_0$ es un vector temporal, ya que $\mathbf{g}(\phi_v^{-1} u, \phi_v^{-1} u) = g(u, u) < 0$. Por lo tanto $(\phi_v^{-1} u)^\perp$ es un subespacio espacial y $\exp_p^{-1} L_{p,u}$ es una subvariedad espacial en cualquier \mathcal{N}_0 entorno normal del origen en $T_p M$.

□

Como ya se ha dicho, dentro de un entorno normal de un punto p , la causalidad p -tangencial de una subvariedad en principio no tiene por qué coincidir con la causalidad de dicha subvariedad. No obstante, en ciertos casos sí que podemos asegurarlo para las subvariedades de Landau:

Proposición 2.2.5. *Si M es un espacio-tiempo en el que las subvariedades conexas geodésicas en un punto p conservan la causalidad en los entornos normales de p , entonces las subvariedades de Landau son espaciales en cualquier entorno normal de p .*

PRUEBA:

Como las subvariedades de Landau $L_{p,u}$ están definidas en cualquier entorno normal de p y son subvariedades conexas geodésicas en p cuyo espacio tangente en p , $T_p L_{p,u} = u^\perp$, es espacial, teniendo en cuenta la hipótesis, podemos asegurar que $L_{p,u}$ son subvariedades espaciales en cualquier entorno normal de p .

□

La hipótesis de la Proposición 2.2.5 en particular se cumplirá en las variedades espacio-tiempo M cuyas subvariedades conexas N de dimensión $s \geq 2$ que sean geodésicas en un punto sean también totalmente

geodésicas. Esto es debido a que N es totalmente geodésica si y sólo si el M -transporte paralelo a lo largo de curvas en N siempre transporta tangentes a N en tangentes a N (Helgason, 1962) y a que el transporte paralelo conserva la causalidad. Pero si no se cumple esta hipótesis, de momento no podemos asegurar nada acerca de la causalidad de las subvariedades de Landau.

Dada una subvariedad N con $p \in N$ y $v \in \exp_p^{-1} N$, si todos los vectores $w \in T_v(T_p M)$ tangentes a la subvariedad tangencial $\exp_p^{-1} N$ cumplieren que $\exp_{p^*v} w$ tienen la misma causalidad que $\phi_v w$, entonces la causalidad p -tangencial de N coincidiría con la causalidad de N , por la Nota 2.1.3. Estudiemos esto con más detalle viendo propiedades de \exp_{p^*v} dadas en Helgason (1962):

Definición 2.2.6. Sea $p \in M$ y \mathcal{N}_p un entorno normal de p . Sea $v \in T_p M$, para cada $q \in \mathcal{N}_p$ definimos el campo vectorial adaptado al vector v en \mathcal{N}_p como

$$(v^*)_q \equiv v_q^* = \tau_{pq} v$$

en donde τ_{pq} es el transporte paralelo a lo largo del único segmento de geodésica en \mathcal{N}_p que une p con q .

Está claro que v_q^* depende diferenciablemente de q y por lo tanto está bien definido.

Nota 2.2.7. Denotaremos² $\theta(X)$ a la derivada de Lie respecto del campo vectorial X , así tendremos

$$\theta(X)(Y) = XY - YX.$$

Además, denotaremos $\theta(X)^0(Y) = Y$ y por inducción definimos

$$\theta(X)^n(Y) = \theta(X)\left(\theta(X)^{n-1}(Y)\right)$$

para $n > 0$ natural, es decir

$$\begin{aligned} \theta(X)^0(Y) &= Y \\ \theta(X)^1(Y) &= [X, Y] \\ \theta(X)^2(Y) &= [X, [X, Y]] \\ &\vdots \end{aligned}$$

El siguiente Teorema se encuentra en Helgason (1962).

²Hemos preferido respetar la notación de Helgason (1962) porque consideramos que en este caso resulta operativa

Teorema 2.2.8. Si M es una variedad analítica con g una métrica analítica, $p \in M$, $v \in T_p M$, $w \in T_v(T_p M)$, $\phi_v : T_v(T_p M) \rightarrow T_p M$ isomorfismo canónico, entonces, siempre que estemos dentro de un entorno normal de p , se cumple

$$\exp_{p^*v} w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} (\theta(v^*)^n ((\phi_v w)^*))_q$$

con $q = \exp_p v$.

Según el Teorema 2.2.8, $\exp_{p^*v} w$ se puede expresar de la forma

$$\exp_{p^*v} w = \tau_{pq}(\phi_v w) - \frac{1}{2} [v^*, (\phi_v w)^*]_q + \frac{1}{6} [v^*, [v^*, (\phi_v w)^*]]_q - \dots$$

ya que $(\theta(v^*)^0 ((\phi_v w)^*))_q = (\phi_v w)^*_q = \tau_{pq}(\phi_v w)$.

En general, no se puede asegurar que $\exp_{p^*v} w$ tenga la misma causalidad que $\phi_v w$. No obstante, en casos particulares, como por ejemplo cuando $\phi_v w$ es proporcional a v , sí que lo podemos asegurar:

Proposición 2.2.9. Si $\phi_v w$ es proporcional a v entonces $\exp_{p^*v} w$ tiene la misma causalidad que $\phi_v w$.

PRUEBA:

Se tiene que $(\phi_v w)^*$ es proporcional a v^* , con lo que

$$[v^*, (\phi_v w)^*] = 0$$

y por lo tanto

$$\exp_{p^*v}(w) = \tau_{pq}(\phi_v w),$$

con $q = \exp_p v$. Debido a que el transporte paralelo conserva la causalidad, $\exp_{p^*v} w$ tiene la misma causalidad que $\phi_v w$. □

En general, si $\phi_v w$ es espacial o temporal, por continuidad existe un entorno de p lo suficientemente pequeño como para que $\exp_{p^*v} w$ siga siendo espacial o temporal. Esto último aplicado a una subvariedad de Landau $L_{p,u}$ nos dice que es localmente espacial alrededor de p , es decir, existe un entorno de p en el que $L_{p,u}$ es espacial, pero dado un entorno normal \mathcal{N}_p de p no tiene por qué ser espacial en todo punto de $\mathcal{N}_p \cap L_{p,u}$:

Proposición 2.2.10. $L_{p,u}$ es espacial en un entorno de p .

No obstante, dada una subvariedad de Landau $L_{p,u}$, $v \in \exp_p^{-1} L_{p,u}$ y un $w \in T_v(\exp_p^{-1} L_{p,u})$ podemos asegurar que $\exp_{p^*v} w$ tiene la misma causalidad que $\phi_v w$ (es decir, espacial) en un entorno normal \mathcal{N}_p de p si se cumple que la adaptación del vector u en ese entorno normal es sincronizable:

Proposición 2.2.11. *Dados $p \in M$, $u \in T_p M$ temporal orientado al futuro, y un entorno normal \mathcal{N}_p de p , si la adaptación de u (es decir u^*) es sincronizable en \mathcal{N}_p entonces*

$$T_q L_{p,u} = S_{u_q^*}$$

para todo $q \in \mathcal{N}_p \cap L_{p,u}$.

PRUEBA:

Sea $\mathcal{N}_0 = \exp_p^{-1} \mathcal{N}_p \subset T_p M$. Dado $q \in \mathcal{N}_p \cap L_{p,u}$, sea $v = \exp_p^{-1} q \in \mathcal{N}_0$. Se tiene

$$T_v (\exp_p^{-1} L_{p,u}) = (\phi_v^{-1} u)^\perp$$

con lo que

$$\begin{aligned} T_q L_{p,u} &= \exp_{p^*v} (T_v (\exp_p^{-1} L_{p,u})) \\ &= \{ \exp_{p^*v} w : w \in T_v (T_p M), \phi_v w \perp u \}. \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Dado $w \in (\phi_v^{-1} u)^\perp$, sean $u^*, v^*, (\phi_v w)^*$ campos adaptados de $u, v, \phi_v w$ respectivamente. Debido a que el transporte paralelo conserva la ortogonalidad se tiene que $g(u^*, (\phi_v w)^*) = 0$ y que $g(u^*, v^*) = 0$. Así, tanto $(\phi_v w)^*$ como v^* son campos que pertenecen a la 3-distribución de espacios físicos de u^* en \mathcal{N}_p , denotada por S_{u^*} . Como, por hipótesis, el campo u^* es sincronizable en \mathcal{N}_p , se tiene que S_{u^*} es foliación en \mathcal{N}_p y por lo tanto $[v^*, (\phi_v w)^*]_q \in S_{u_q^*}$, con lo que

$$(\theta(v^*)((\phi_v w)^*))_q \in S_{u_q^*}$$

para todo $w \in (\phi_v^{-1} u)^\perp$, es decir, para todo $w \in T_v (T_p M)$ tal que $(\phi_v w)_q^* \in S_{u_q^*}$. Por lo tanto, por inducción

$$(\theta(v^*)^n((\phi_v w)^*))_q \in S_{u_q^*}$$

para todo $w \in (\phi_v^{-1} u)^\perp$ con n natural. Como $\exp_{p^*v} w$ es combinación lineal de $(\theta(v^*)^n((\phi_v w)^*))_q$ y $S_{u_q^*}$ es un subespacio vectorial, se tiene

$$\exp_{p^*v} w \in S_{u_q^*}$$

y como la dimensión de $T_q L_{p,u}$ coincide con la de $S_{u_q^*}$, teniendo en cuenta (2.2.2) llegamos a

$$T_q L_{p,u} = S_{u_q^*}.$$

□

Corolario 2.2.12. *Dados $p \in M$, $u \in T_p M$ temporal orientado al futuro, y un entorno normal \mathcal{N}_p de p , si u^* es sincronizable en \mathcal{N}_p entonces la subvariedad de Landau $L_{p,u}$ es espacial en \mathcal{N}_p .*

PRUEBA:

Por la Proposición 2.2.11 se tiene que $T_q L_{p,u} = S_{u_q^*}$ para todo $q \in \mathcal{N}_p \cap L_{p,u}$. Como $S_{u_q^*}$ es un subespacio espacial resulta que $L_{p,u}$ es espacial en \mathcal{N}_p . □

Nota 2.2.13. Como el transporte paralelo conserva la causalidad, u^* es un campo temporal definido en un entorno normal y por lo tanto, es razonable preguntarse si es o no es sincronizable.

Nota 2.2.14. En la demostración de la Proposición 2.2.11 se ha visto que $T_q L_{p,u} = S_{u_q^*}$. Como $u_q^* = \tau_{pq} u$ y el transporte paralelo conserva la ortogonalidad, se tiene

$$S_{u_q^*} = \tau_{pq} S_u.$$

Por último, como $S_u = T_p L_{p,u}$ se tiene

$$T_q L_{p,u} = \tau_{pq} T_p L_{p,u}.$$

Por lo tanto, si la adaptación de u en un entorno normal \mathcal{N}_p de p es sincronizable se tiene que el M -transporte³ paralelo a lo largo de geodésicas de $L_{p,u}$ que pasen por p transporta vectores tangentes a $L_{p,u}$ en vectores tangentes a $L_{p,u}$. Además, como el transporte paralelo conserva la causalidad, se tendrá que $L_{p,u}$ es espacial en \mathcal{N}_p .

Nota 2.2.15. Debido a la condición dada en la Proposición 2.2.11 de que la adaptación de u sea sincronizable en \mathcal{N}_p , se tiene que la 3-distribución de espacios físicos S_{u^*} (ver Definición 0.3.12) forma una foliación en \mathcal{N}_p y la hoja que pasa por p es la subvariedad de Landau $L_{p,u}$.

Como sólo nos interesa el caso en el que las subvariedades de Landau $L_{p,u}$ sean espaciales en cualquier entorno normal en el que estén definidas, a partir de ahora exigiremos que la adaptación de u en cualquier entorno normal \mathcal{N}_p de p sea sincronizable, no obstante, podemos dar una condición necesaria y suficiente inspirada en la Proposición 2.2.11:

Proposición 2.2.16. Dados $p \in M$, $u \in T_p M$ temporal orientado al futuro, y un entorno normal \mathcal{N}_p de p . Sea $q \in \mathcal{N}_p \cap L_{p,u}$. Entonces las siguientes afirmaciones equivalen:

- (i) $T_q L_{p,u} = S_{u_q^*}$.
- (ii) Existe un entorno normal \mathcal{N}'_p de p tal que
 - $\mathcal{N}'_p \cap L_{p,u} = \mathcal{N}_p \cap L_{p,u}$.
 - u^* es sincronizable en \mathcal{N}'_p .

³Denotaremos M -transporte paralelo al transporte paralelo en la variedad M

PRUEBA:

← Ya demostrado en la Proposición 2.2.11.

→ En \mathcal{N}_p está bien definida una 3-distribución $(u^*)^\perp$ que tiene una hoja $(L_{p,u})$. Por diferenciabilidad en la hoja y en la construcción de $(u^*)^\perp$, existe un entorno lo suficientemente pequeño de la hoja (que puedo considerar normal para que todo esté bien definido, y puedo llamarlo \mathcal{N}'_p , que al ser entorno de la hoja $L_{p,u}$ cumplirá $\mathcal{N}'_p \cap L_{p,u} = \mathcal{N}_p \cap L_{p,u}$) en el que $(u^*)^\perp$ es foliación. Por lo tanto tenemos que u^* es sincronizable en \mathcal{N}'_p .

□

Corolario 2.2.17. *Dados $p \in M$, $u \in T_p M$ temporal orientado al futuro, y un entorno normal \mathcal{N}_p de p , las siguientes afirmaciones equivalen:*

- (i) $L_{p,u}$ es espacial en \mathcal{N}_p .
- (ii) Existe un entorno normal \mathcal{N}'_p de p tal que
 - $\mathcal{N}'_p \cap L_{p,u} = \mathcal{N}_p \cap L_{p,u}$.
 - u^* es sincronizable en \mathcal{N}'_p .

Acabamos la sección con una Proposición que relaciona las subvariedades espaciales totalmente geodésicas con las subvariedades de Landau:

Proposición 2.2.18. *Si L es una subvariedad conexa de M totalmente geodésica, espacial y de codimensión 1, entonces se tiene que L es un abierto de $L_{p,u}$ para todo $p \in L$ y para todo $u \in (i_{*p}T_p L)^\perp$ en donde $i : L \rightarrow M$ es la inclusión canónica.*

PRUEBA:

Sea $p \in L$ y sea $u \in (i_{*p}T_p L)^\perp$. Por ser L espacial de codimensión 1 tenemos que u es un vector temporal y por lo tanto

$$S_u = i_{*p}T_p L$$

Por ser conexa y totalmente geodésica, si $q \in L$ entonces la geodésica que une p con q está contenida en L y por lo tanto es $\exp_p v$ para algún $v \in S_u$, con lo que $q \in L_{p,u}$ teniéndose así la inclusión

$$L \subset L_{p,u}$$

por construcción de $L_{p,u}$. Como L es subvariedad de M y $L_{p,u}$ es subvariedad regular de M , al estar contenida la primera en la segunda, se tiene que L es subvariedad de $L_{p,u}$. Al ser de la misma dimensión se tiene que L es un abierto de $L_{p,u}$.

□

Nota 2.2.19. En la Proposición 2.2.18 no se ha exigido que L fuese una subvariedad regular, con lo que una subvariedad de M totalmente geodésica, espacial y de codimensión 1 es subvariedad de Landau y en particular es subvariedad regular.

Nota 2.2.20. En Cartan (1963) se dice que la implicación contraria no es cierta. Sin embargo, queda como un problema abierto el dar un contraejemplo de una subvariedad de Landau que sólo sea geodésica en el punto p . No obstante, es fácil comprobar que en el espacio-tiempo de Minkowski sí que es cierta, pero en las demás métricas de momento no se puede afirmar nada.

2.3. Subvariedades de horismos: Definición y causalidad

En esta Sección vamos a definir las subvariedades de horismos siguiendo la notación usada en Beem y Ehrlich (1981). Posteriormente, al igual que en la Sección anterior se hizo con las subvariedades de Landau, vamos a estudiar tanto la causalidad como la causalidad tangencial de las subvariedades de horismos en general.

Al igual que con las subvariedades de Landau, en cada punto $p \in M$ existe un entorno normal \mathcal{N}_p (es más, existe un entorno normal convexo de p). Definimos la función

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{N}_p - \{p\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ q &\longmapsto g(\exp_p^{-1} q, \exp_p^{-1} q) \end{aligned} .$$

Veamos que esta función es submersión. Para ello bastará probar que la función diferenciable

$$\begin{aligned} \varphi : \exp_p^{-1} \mathcal{N}_p - \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto g(v, v) \end{aligned}$$

es submersión, ya que $\phi = \varphi \circ \exp_p^{-1}$ en donde \exp_p^{-1} es un difeomorfismo.

Para ello estudiaremos su rango: Sea $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right\}_{i=1}^4$ una base de $T_p M$, entonces $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$ y $g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p\right)$ con lo que $g(v, v) = g_{ij} v^i v^j$. Con esto

$$rg\varphi = rg\left(g_{ij} \left(\delta_k^i v^j + v^i \delta_k^j\right)\right)_{k=1}^4 = rg(g_{kj} v^j + g_{ik} v^i)_{k=1}^4 .$$

Como el tensor métrico g es simétrico

$$rg\varphi = rg(g_{kj} v^j + g_{ki} v^i)_{k=1}^4 = rg(2g_{kj} v^j)_{k=1}^4 = rg(g_{kj} v^j)_{k=1}^4 .$$

Por lo tanto, $rg\varphi = 0$ si y sólo si $g_{kj} v^j = 0$ para $k = 1, \dots, 4$. Como el tensor métrico g es no degenerado, $rg\varphi = 0$ si y sólo si $v = 0$. Así pues, $rg\varphi = 1$

en todos sus puntos menos en $v = 0$ y por lo tanto φ es submersión en todo su dominio, con lo que ϕ es submersión.

La subvariedad de horismos de p , E_p , se define como la fibra del 0 de la submersión ϕ :

$$E_p = \phi^{-1}(0).$$

Así pues, la subvariedad de horismos de p , E_p , tiene estructura de subvariedad regular de dimensión 3 en un entorno normal reducido $\mathcal{N}_p - \{p\}$ del punto p .

Nota 2.3.1. Sea $p \in M$ y \mathcal{V} un entorno normal convexo de p . Como vimos en la Nota 2.2.2, si $q \in \mathcal{V}$ entonces $\exp_p^{-1} \mathcal{V}$ y $\exp_q^{-1} \mathcal{V}$ son difeomorfos. Dada una tétrada ortonormal $\{X_i, U\}_{i=1}^3$ definida en \mathcal{V} , los vectores nulos de $T_q M$ en las coordenadas de esta tétrada con $q \in \mathcal{V}$ son los de la forma

$$\sum_{i=1}^3 \alpha^i X_i + \alpha^4 U \quad (2.3.3)$$

en q , en donde

$$\sum_{i=1}^3 (\alpha^i)^2 = (\alpha^4)^2$$

en q . Por lo tanto, los conos de luz en $T_q M$ en las coordenadas de una tétrada ortonormal tiene la misma forma que en Minkowski para todo $q \in \mathcal{V}$. Teniendo en cuenta (2.3.3), en $\exp_p^{-1} \mathcal{V}$ (que es un entorno normal del origen en $T_p M$) los conos de luz tendrán la forma que se muestra en la Figura 2.2, y en cualquier $\exp_q^{-1} \mathcal{V}$ con $q \in \mathcal{V}$ serán difeomorfos. Además, la subvariedad de horismos de p , E_p , será también difeomorfa a esto en \mathcal{V} .

Además, se puede probar que tiene dos componentes conexas:

Proposición 2.3.2. Sea $p \in M$ y sea \mathcal{N}_p un entorno normal de p . Entonces la subvariedad de horismos de p , E_p , tiene dos componentes conexas en $\mathcal{N}_p - \{p\}$, separadas por p .

PRUEBA:

Dada una tétrada ortonormal $\{X_i, U\}_{i=1}^3$ definida en $T_p M$, los vectores nulos son de la forma $\alpha(S + U)$ en donde $S = \sum_{i=1}^3 \beta^i X_i$ es unitario, es decir $\sum_{i=1}^3 (\beta^i)^2 = 1$, y α es un escalar (en realidad las tétradas son campos vectoriales, pero en este caso, sólo necesitamos una base ortonormal de vectores en $T_p M$ con las características de las tétradas, es decir uno temporal y 3 espaciales). Si consideramos en $T_p M$ el conjunto de los vectores nulos dentro del entorno normal reducido $\mathcal{N}_0 - \{0\}$ en donde $\mathcal{N}_0 = \exp_p^{-1} \mathcal{N}_p$, tendremos definida en $\mathcal{N}_0 - \{0\}$ la subvariedad E_p como

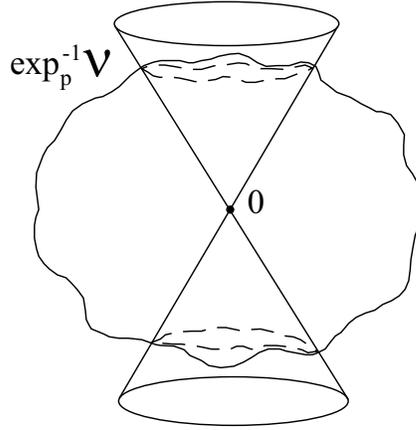


Figura 2.2: Representación del cono de luz en un espacio tangente $T_p M$, dentro de $\exp_p^{-1} \mathcal{V}$.

la imagen por \exp_p de estos vectores nulos, y por ser \exp_p un difeomorfismo resultará que $\exp_p^{-1} E_p$ será una subvariedad regular en $\mathcal{N}_0 - \{0\}$ con las mismas propiedades de conectabilidad que E_p .

El hiperplano espacial generado por $\{X_i\}_{i=1}^3$ divide a \mathcal{N}_0 en dos partes disconexas. Los vectores nulos pertenecientes a este hiperplano cumplirán $\alpha U = 0$ y entonces $\alpha = 0$, con lo que el vector es el 0 (es decir, este hiperplano no contiene vectores nulos distintos del vector 0). Por lo tanto el vector 0 es un punto separador de los que tienen $\alpha > 0$ y de los que tienen $\alpha < 0$. Además cada parte de éstas es conexa: Dados dos vectores nulos distintos de cero en \mathcal{N}_0 , $v_1 = \alpha_1 (S_1 + U)$ y $v_2 = \alpha_2 (S_2 + U)$ en donde α_1, α_2 tienen el mismo signo y dado $\delta > 0$ lo suficientemente pequeño como para que el disco euclídeo

$$D_\delta(0) = \left\{ \sum_{i=1}^3 \alpha^i X_i + \alpha^4 U : \sum_{k=1}^4 (\alpha^k)^2 = \delta^2 \right\}$$

esté contenido en \mathcal{N}_0 , pueden unirse teniendo en cuenta los caminos siguientes (ver Figura 2.3):

- Se unen $v_1 = \alpha_1 (S_1 + U)$ con $\delta (S_1 + U)$ mediante el camino

$$\gamma_1(t) = ((1-t)\alpha_1 + t\delta)(S_1 + U)$$

con $t \in [0, 1]$, que está contenido en \mathcal{N}_0 por ser un entorno normal.

- Se unen $\delta (S_1 + U)$ con $\delta (S_2 + U)$ mediante el camino

$$\gamma_2(t) = \delta (\Gamma(t) + U)$$

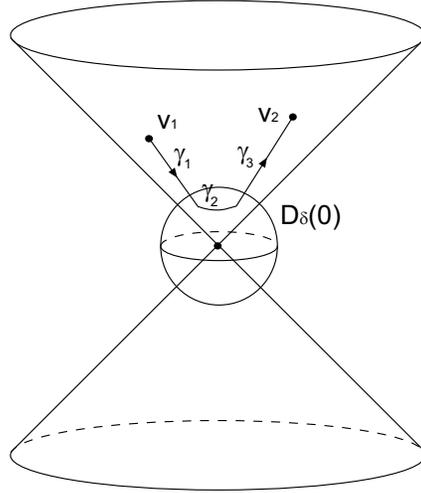


Figura 2.3: Camino a seguir para unir dos vectores v_1 y v_2 pertenecientes al cono de luz futuro, para permanecer en un entorno normal del origen \mathcal{N}_0 .

con $\Gamma(t)$ camino en la esfera unidad que une S_1 con S_2 , que está contenido en $D_\delta(0) \subset \mathcal{N}_0$.

- Se unen $\delta(S_2 + U)$ con $v_2 = \alpha_2(S_2 + U)$ mediante el camino

$$\gamma_3(t) = ((1-t)\delta + t\alpha_2)(S_2 + U)$$

con $t \in [0, 1]$, que está contenido en \mathcal{N}_0 por ser un entorno normal.

□

Definición 2.3.3. Dada una tétrada ortonormal $\{X_i, U\}_{i=1}^3$ definida en un entorno normal \mathcal{N}_0 del origen en T_pM , se llamará subvariedad de horismos orientada al futuro de p a la parte conexa de E_p cuyos puntos q cumplan $\exp_p^{-1}q = \alpha(S + U)$ con $\alpha > 0$ y se denotará E_p^+ . Se llamará subvariedad de horismos orientada al pasado de p a la parte conexa de E_p cuyos puntos q cumplan $\exp_p^{-1}q = \alpha(S + U)$ con $\alpha < 0$ y se denotará E_p^- .

Tanto E_p^+ como E_p^- son subvariedades regulares de dimensión 3 en un entorno normal reducido de p .

Estudiaremos la causalidad tangencial teniendo en cuenta lo dicho en el estudio de la causalidad de las subvariedades de Landau (Sachs y Wu, 1977):

Vicente José Bolós Lacave

Lema 2.3.4. *Sea V un espacio vectorial n -dimensional con estructura de variedad diferenciable C^∞ y sea g un producto interior en V . Si definimos la función $\tilde{g} : V \rightarrow \mathbb{R}$ de la forma $\tilde{g}(v) = g(v, v)$ entonces $w(\tilde{g}) = 2g(\phi_v w, v)$ para todo $v \in V$ y para todo $w \in T_v V$.*

PRUEBA:

Sea $\{e_i\}_{i=1}^n$ una base de V , $v = v^i e_i$, $w = w^k \frac{\partial}{\partial e^k} \Big|_v$. Entonces $\tilde{g}(v) = g_{ij} v^i v^j$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} w(\tilde{g}) &= g_{ij} w^k \delta_k^i v^j + g_{ij} v^i w^k \delta_k^j = g_{kj} w^k v^j + g_{ik} v^i w^k = 2g_{kj} w^k v^j \\ &= 2g(\phi_v w, v). \end{aligned}$$

□

Proposición 2.3.5. *Sea $p \in M$ y sea \mathcal{N}_0 un entorno normal del origen en $T_p M$. La variedad tangencial $\exp_p^{-1} E_p$ es nula en $\mathcal{N}_0 - \{0\}$.*

PRUEBA:

Supongamos $v \in \exp_p^{-1} E_p$ dentro de $\mathcal{N}_0 \subset T_p M$ tal que $v \neq 0$. Entonces $g(v, v) = 0$. Definimos $\tilde{g} : \mathcal{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ de la forma $\tilde{g}(u) = g(u, u)$. Entonces, en \mathcal{N}_0 , un vector v' pertenece a $\exp_p^{-1} E_p$ si y sólo si $\tilde{g}(v') = 0$. Dado un $w \in T_v \mathcal{N}_0$ tenemos que w pertenece a $T_v(\exp_p^{-1} E_p)$ si y sólo si $w(\tilde{g}) = 0$ y aplicando el Lema 2.3.4, si y sólo si $g(\phi_v w, v) = 0$, es decir, si y sólo si $\mathbf{g}(w, \phi_v^{-1} v) = 0$. Entonces

$$T_v(\exp_p^{-1} E_p) = (\phi_v^{-1} v)^\perp.$$

Pero $\phi_v^{-1} v \in T_v \mathcal{N}_0$ es un vector nulo, ya que $\mathbf{g}(\phi_v^{-1} v, \phi_v^{-1} v) = g(v, v) = 0$. Por lo tanto $(\phi_v^{-1} v)^\perp$ es un subespacio nulo y $\exp_p^{-1} E_p$ es una subvariedad nula en cualquier $\mathcal{N}_0 - \{0\}$ entorno normal reducido en $T_p M$.

□

El Lema 2.3.4 y la Proposición 2.3.5 son el equivalente al Lema 2.2.3 y a la Proposición 2.2.4 en el estudio de la causalidad tangencial de las subvariedades de horismos en vez de en las subvariedades de Landau.

Veamos ahora una Proposición acerca de la causalidad en M , equivalente a la Proposición 2.2.11 de la Sección anterior. Pero antes necesitaremos un Lema previo.

Lema 2.3.6. *(Helgason, 1962). Dados X, Y, Z campos vectoriales de una variedad pseudo-Riemanniana con conexión ∇ , se tiene*

$$Zg(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y).$$

Proposición 2.3.7. Sea $p \in M$ y \mathcal{N}_p un entorno normal de p , entonces

$$T_q E_p = (v_q^*)^\perp$$

para todo $q \in \mathcal{N}_p \cap E_p$, en donde $v = \exp_p^{-1} q$.

PRUEBA:

Sea $\mathcal{N}_0 = \exp_p^{-1} \mathcal{N}_p \subset T_p M$. Dado $q \in \mathcal{N}_p \cap E_p$, sea $v = \exp_p^{-1} q \in \mathcal{N}_0$. Se tiene

$$T_v (\exp_p^{-1} E_p) = (\phi_v^{-1} v)^\perp$$

con lo que

$$T_q E_p = \exp_{p^*v} (T_v (\exp_p^{-1} E_p)) = \{ \exp_{p^*v} w : w \in T_v (T_p M), \phi_v w \perp v \}.$$

Dado $w \in (\phi_v^{-1} v)^\perp$, sean $v^*, (\phi_v w)^*$ campos adaptados de $v, \phi_v w$ respectivamente. Debido a que el transporte paralelo conserva la ortogonalidad se tiene que $g(v^*, (\phi_v w)^*) = 0$ y que $g(v^*, v^*) = 0$, es decir, tanto $(\phi_v w)^*$ como v^* pertenecen a la 3-distribución $(v^*)^\perp$. Por el Lema 2.3.6, con $Z = (\phi_v w)^*$ y con $X, Y = v^*$ se tiene

$$0 = 2g(\nabla_{(\phi_v w)^*} v^*, v^*)$$

ya que g es simétrica. Además, como la torsión es cero, se tiene

$$(\nabla_{(\phi_v w)^*} v^*)_q = (\nabla_{(\phi_v w)^*} v^*)_q - (\nabla_{v^*} (\phi_v w)^*)_q = -[v^*, (\phi_v w)^*]_q$$

ya que $(\nabla_{v^*} (\phi_v w)^*)_q = 0$ debido a que el campo $(\phi_v w)^*$ se traslada paralelamente a lo largo de la geodésica que une p con q (curva integral de v^* que pasa por q). Por lo tanto $[v^*, (\phi_v w)^*]_q \in (v_q^*)^\perp$, es decir, teniendo en cuenta la notación dada en la Nota 2.2.7 para el corchete de Lie

$$(\theta(v^*)((\phi_v w)^*))_q \in (v_q^*)^\perp$$

para todo $w \in (\phi_v^{-1} v)^\perp$, es decir, para todo $w \in T_v(T_p M)$ tal que $(\phi_v w)_q^* \in (v_q^*)^\perp$. Por lo tanto, por inducción

$$(\theta(v^*)^n((\phi_v w)^*))_q \in (v_q^*)^\perp$$

para todo $w \in (\phi_v^{-1} v)^\perp$ con n natural. Como $\exp_{p^*v} w$ es combinación lineal de $(\theta(v^*)^n((\phi_v w)^*))_q$ y $(v_q^*)^\perp$ es un subespacio vectorial, se tiene

$$\exp_{p^*v} w \in (v_q^*)^\perp$$

Vicente José Bolós Lacave

y como la dimensión de $T_q E_p$ coincide con la de $(v_q^*)^\perp$

$$T_q E_p = (v_q^*)^\perp$$

que es un subespacio nulo. □

Corolario 2.3.8. *Sea $p \in M$ y \mathcal{N}_p un entorno normal de p , entonces la subvariedad de horismos E_p es nula en $\mathcal{N}_p - \{p\}$.*

PRUEBA:

Por la Proposición 2.3.7 se tiene que $T_q E_p = (v_q^*)^\perp$ para todo $q \in \mathcal{N}_p \cap E_p$. Como $(v_q^*)^\perp$ es un subespacio nulo resulta que E_p es nulo en $\mathcal{N}_p - \{p\}$. □

Nota 2.3.9. *En la demostración de la Proposición 2.3.7 se ha visto que dado $q \in E_p$ y $v = \exp_p^{-1} q$ vector nulo, se tiene que $T_q E_p = (v_q^*)^\perp$. Como $v_q^* = \tau_{pq} v$ y el transporte paralelo conserva la ortogonalidad, se tiene*

$$(v_q^*)^\perp = \tau_{pq} v^\perp$$

y por lo tanto

$$T_q E_p = \tau_{pq} v^\perp.$$

2.4. Foliaciones de Landau

Dentro de los entornos normales convexos podemos definir sin problemas las subvariedades de Landau para todos sus puntos.

Dada $\beta : I \rightarrow M$ una línea de universo de un observador, podemos considerar el conjunto de las subvariedades de Landau L_{q, u_q} con $q = \beta(t)$, $u_q = \dot{\beta}(t)$, $t \in I$. Nuestro objetivo en esta sección es ver cuándo estas subvariedades de Landau son hojas de una foliación.

Definición 2.4.1. *(Sakai, 1996). Sea N una subvariedad de M , consideremos el fibrado tangente normal TN^\perp como el formado por los espacios $T_p N^\perp$. En un entorno abierto de la sección cero $O(TN^\perp) = \{0_p \in T_p N^\perp : p \in N\}$ se puede definir la aplicación exponencial normal de N de la forma*

$$\begin{aligned} \exp^\perp : TN^\perp &\longrightarrow M \\ v \in T_p N^\perp &\longmapsto \exp_p v. \end{aligned}$$

Nota 2.4.2. Tomando βI como una subvariedad de M se puede definir la aplicación exponencial normal de βI en un entorno abierto de la sección cero de $T\beta I^\perp$. Siguiendo el razonamiento dado en Sakai (1996) se demuestra que dado un $p \in \beta I$ existe un entorno abierto de p en el que \exp^\perp es un difeomorfismo.

Teorema 2.4.3. Sea $\beta : I \rightarrow M$ una línea de universo y sea $t_0 \in I$ con $p = \beta(t_0)$. Entonces existe un entorno normal convexo \mathcal{V} de p en el que existe una foliación cuyas hojas son las subvariedades de Landau de los puntos de $\beta I \cap \mathcal{V}$ con cuadrivelocidades los vectores tangentes a $\beta I \cap \mathcal{V}$ en cada punto.

PRUEBA:

Por la Nota 2.4.2 existe un entorno abierto \mathcal{V} de p , que podemos considerar normal convexo, en el que la aplicación exponencial normal a βI es un difeomorfismo. Por lo tanto, por cada punto de \mathcal{V} pasa una y sólo una subvariedad de Landau de la forma L_{q,u_q} con $q \in \beta I \cap \mathcal{V}$ y u_q el vector tangente a $\beta I \cap \mathcal{V}$ en q . Como estas variedades son regulares se tiene que son hojas de una foliación en \mathcal{V} .

□

Definición 2.4.4. A la foliación del Teorema 2.4.3 se le llamará foliación de Landau generada por β y se denotará L_β , siendo $\beta : I \rightarrow M$ la línea de universo del observador a partir del cual se ha construido la foliación. Es decir

$$L_\beta(q) = T_q L_{\beta(t_1), \dot{\beta}(t_1)}$$

en donde $t_1 \in I$ tal que $q \in L_{\beta(t_1), \dot{\beta}(t_1)}$.

En realidad nada me asegura que las subvariedades de Landau generadas por una línea de universo de un observador formen una foliación en un entorno normal convexo dado debido a que las subvariedades de Landau pueden cortarse (Ejemplo 2.4.5). Pero podemos asegurar que forman una foliación en algún entorno de p . Si la curva temporal que genera las subvariedades de Landau no es C^∞ ni siquiera podemos asegurar esto último (Ejemplo 2.4.6). Debido a esto se ha exigido que los observadores sean de clase C^∞ . No obstante, si la línea de universo del observador es una geodésica queda por probar que las subvariedades de Landau generadas no se cortan en todo entorno normal convexo que la contenga.

Ejemplo 2.4.5. En el espacio-tiempo de Minkowski consideremos $\beta : I \rightarrow M$ una línea de universo de un observador no geodésica. Dado $t_0 \in I$, sea $p = \beta(t_0)$ y sea $u = \dot{\beta}(t_0)$. Dado un sistema de coordenadas, la función \exp_p es la identidad. Por lo tanto las subvariedades de Landau $L_{p,u}$ en Minkowski son hiperplanos ortogonales al vector temporal u . Al ser β no geodésica habrá vectores no paralelos tangentes a βI , con lo que

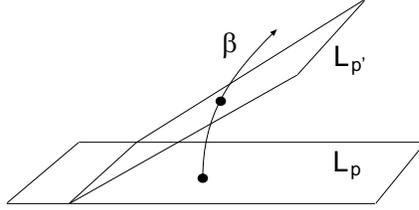


Figura 2.4: En el espacio-tiempo de Minkowski, si la línea de universo β no es geodésica, las subvariedades de Landau definidas por β se cortan.

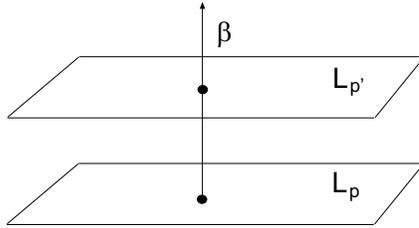


Figura 2.5: En cambio, si β es geodésica, estas subvariedades de Landau no se cortan.

sus subvariedades de Landau se cortarían (ver Figura 2.4). En cambio, si tenemos una línea de universo de un observador $\gamma : I \rightarrow M$ geodésica, los vectores tangentes a γI son paralelos y las subvariedades de Landau son disjuntas (ver Figuras 2.5 y 2.6).

Ejemplo 2.4.6. Consideremos el espacio bidimensional de Minkowski, es decir sólo con una coordenada espacial x y otra temporal t . Sea

$$\begin{aligned} \beta : I &\longrightarrow M \\ t &\longmapsto (x(t), t) \end{aligned}$$

una curva temporal parametrizada con el tiempo que cumpla $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$. Si $p = (x(t_0), t_0)$ y $u = (x'(t_0), 1)$ con $t_0 \in I$ entonces la subvariedad de Landau $L_{p,u}$ es la recta que pasa por p con vector director un vector normal a u , por ejemplo $(1, x'(t_0))$. Esta recta viene dada por la expresión

$$(x - x(t_0)) = \frac{(t - t_0)}{x'(t_0)}.$$

La subvariedad de Landau $L_{(0,0),(0,1)}$ que pasa por el origen será el eje x . Por lo tanto, el punto de corte de $L_{p,u}$ con $L_{(0,0),(0,1)}$ será $(x_{\text{corte}}, 0)$ en donde

$$x_{\text{corte}} = -\frac{t_0}{x'(t_0)} + x(t_0)$$

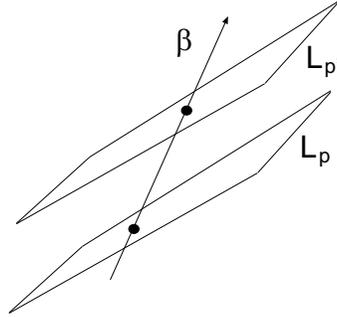


Figura 2.6: Otro ejemplo de que en el espacio-tiempo de Minkowski, las subvariedades de Landau definidas por una geodésica β no se cortan.

depende de t_0 . Si escogemos

$$x(t) = t^a$$

con $a \in]1, 2[$ tendremos una curva temporal en $I =]-1, 1[$ con las condiciones $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$. Así pues, la x de corte en t_0 será

$$x_{\text{corte}} = -\frac{t_0}{at_0^{a-1}} + t_0^a = -\frac{1}{a}t_0^{2-a} + t_0^a.$$

Por lo tanto

$$\lim_{t_0 \rightarrow 0} x_{\text{corte}} = 0$$

con lo que no hay ningún entorno de $(0, 0)$ en el que no se corten las subvariedades de Landau. Esto es debido a que la segunda derivada de $x(t)$ no está bien definida en el origen y por lo tanto esta curva temporal no es una línea de universo.

Con respecto a la causalidad, teniendo en cuenta el Corolario 2.2.12 y el Teorema 2.4.3 se puede enunciar el siguiente resultado:

Corolario 2.4.7. Sea $\beta : I \rightarrow M$ una línea de universo de un observador y sea $t_0 \in I$ con $p = \beta(t_0)$. Entonces existe un entorno normal convexo \mathcal{V} de p en el que la foliación de Landau L_β está bien definida y es espacial.

Dada una foliación de Landau L_β definida en un entorno normal convexo \mathcal{V} y generada por una línea de universo de un observador $\beta : I \rightarrow M$, una condición suficiente para que sea espacial en todo \mathcal{V} , por el Corolario 2.2.12, es que los campos adaptados de $\dot{\beta}(t)$ con $t \in I$ sean sincronizables en \mathcal{V} . Como se dijo en la Sección 2.3, sólo nos interesa el caso en el que las subvariedades de Landau sean espaciales en cualquier entorno

normal convexo en el que estén definidas, y por lo tanto, a partir de ahora exigiremos esta condición.

De este modo, si consideramos la foliación de los espacios físicos de la adaptación de $\dot{\beta}(t)$ con $t \in I$ en \mathcal{V} , denotada $S_{\dot{\beta}(t)^*}$, por la Nota 2.2.15 se tiene que la hoja que pasa por $\beta(t)$ es la subvariedad de Landau $L_{\beta(t), \dot{\beta}(t)}$.

Con la condición anterior, la foliación de Landau L_β generada por β será espacial en cualquier entorno normal convexo en el que esté definida, y por lo tanto será normal a una 1-foliación (campo vectorial) temporal cuyos espacios físicos forman la foliación de Landau L_β . Así queda definido un campo temporal a partir también de la línea de universo de un observador β , que será estudiado más tarde, en la Sección de Adaptaciones vectoriales mediante foliaciones de Landau.

Nota 2.4.8. *Sea L_β una foliación de Landau generada por una línea de universo de un observador $\beta : I \rightarrow M$ en un entorno normal convexo \mathcal{V} . Debido a que se exige que los campos adaptados de $\dot{\beta}(t)$ con $t \in I$ sean sincronizables en \mathcal{V} , por la Nota 2.2.14 se tiene que $T_q L_{p,u} = \tau_{pq} T_p L_{p,u}$, en donde $p = \beta(t_0)$, $u = \dot{\beta}(t_0)$ con $t_0 \in I$ y $q \in L_{p,u} \cap \mathcal{V}$. Por lo tanto, como el transporte paralelo conserva la ortogonalidad y $(L_\beta)_p^\perp = u$, se tiene*

$$(L_\beta)_q^\perp = \tau_{pq} u.$$

Además, β será una curva integral del campo temporal definido. Si escogemos otra curva integral β' de este campo temporal podemos generar a partir de ella otra foliación de Landau $L_{\beta'}$ que puede coincidir con la anterior o no:

Proposición 2.4.9. *Sea L_β una foliación de Landau generada por una línea de universo de un observador $\beta : I \rightarrow M$ en un entorno normal convexo \mathcal{V} y sea $\beta' : I' \rightarrow M$ una curva integral del campo temporal $(L_\beta)^\perp$. Si la foliación de Landau $L_{\beta'}$ generada por β' está bien definida y las subvariedades de Landau (hojas) que componen L_β (o $L_{\beta'}$) son totalmente geodésicas, entonces $L_{\beta'} = L_\beta$.*

PRUEBA:

Sea $p = \beta(t_0)$ y $u = \dot{\beta}(t_0)$ con $t_0 \in I$. Sea $p' = \beta'(t'_0)$ y $u' = \dot{\beta}'(t'_0)$ con $t'_0 \in I'$ tal que $p' \in L_{p,u}$.

Como $(L_\beta)_{p'}^\perp = u'$, por la Nota 2.4.8 se tiene que $u' = \tau_{pp'} u$, con lo que

$$u' \in (i_{*p'} T_{p'} L_{p,u})^\perp,$$

en donde $i : L_{p,u} \rightarrow M$ es la inclusión canónica.

Así, como $L_{p,u}$ es totalmente geodésica, por la Proposición 2.2.18 se tiene

$$L_{p,u} = L_{p',u'}$$

y por lo tanto $L_{\beta'} = L_{\beta}$, ya que sus hojas coinciden.

□

2.5. Foliaciones de horismos

Dentro de los entornos normales convexos podemos definir sin problemas las subvariedades de horismos para todos sus puntos. Así pues, dentro de estos entornos se podrá realizar un estudio de las subvariedades de horismos como hojas de una foliación que recibirá el nombre de *foliación de horismos*.

Dada $\beta : I \rightarrow M$ una línea de universo de un observador, podemos considerar el conjunto de las subvariedades de horismos orientadas al futuro (pasado) de puntos de βI . Nuestro objetivo en esta sección es ver cuándo estas subvariedades de horismos orientadas al futuro (pasado) son hojas de una foliación.

Sea $\gamma : I \rightarrow M$ una geodésica y sea $\tilde{\gamma}$ una reparametrización afín positiva de γ (entonces $\tilde{\gamma}$ también es una geodésica). Podemos denotar como $[\gamma]$ a la correspondiente clase de equivalencia de geodésicas. En este caso, dada γ geodésica y $\tilde{\gamma}$ una curva, resultará que $\tilde{\gamma} \in [\gamma]$ si y sólo si $\tilde{\gamma}$ es una geodésica con la misma orientación que γ cuya imagen coincide con la de γ .

A continuación vamos a enunciar una Proposición que se puede encontrar en Sachs y Wu (1977). Pero antes necesitamos introducir el concepto *señal de luz* tal y como se hace en Sachs y Wu (1977): Sea $\lambda : I \rightarrow M$ una geodésica nula orientada al futuro (rayo de luz). Se llamará señal de luz a la clase de equivalencia $[\lambda]$.

Sea $\beta : I \rightarrow M$ una línea de universo de un observador. Veamos desde qué puntos puede β recibir señales de luz y hacia qué puntos puede enviarlas:

Proposición 2.5.1. *(Sachs y Wu, 1977). Sea $\beta : I \rightarrow M$ una línea de universo de un observador y sea $t_0 \in I$. Existe un intervalo abierto $J \subset I$ que contiene a t_0 y un entorno normal convexo \mathcal{V} de $\beta(t_0)$ tales que para todo $x \in \mathcal{V} - \beta J$ existen $t_{-1}, t_1 \in J$ con $t_{-1} < t_0 < t_1$, una señal de luz $[\lambda]$ desde x hasta $\beta(t_1)$ y una señal de luz $[\lambda']$ desde $\beta(t_{-1})$ hasta x . Además $t_{-1}, t_1, [\lambda], [\lambda']$ son únicos.*

Nota 2.5.2. *El intervalo J de la Proposición 2.5.1 se puede tomar de forma que $\beta(t) \in \mathcal{V}$ si y sólo si $t \in J$.*

Teorema 2.5.3. *Sea $\beta : I \rightarrow M$ una línea de universo de un observador y sea $t_0 \in I$. Existe un intervalo abierto $J \subset I$ que contiene a t_0 y un entorno normal convexo \mathcal{V} de $\beta(t_1)$ tales que en $\mathcal{V} - \beta J$ existe una foliación cuyas hojas son las subvariedades de horismos orientadas al futuro (pasado) de los puntos de βJ .*

PRUEBA:

Por la Proposición 2.5.1 existe un intervalo abierto $J \subset I$ que contiene a t_0 y un entorno normal convexo \mathcal{V} de $\beta(t_0)$ tales que para todo $x \in \mathcal{V} - \beta J$ existe $t_{-1}, t_1 \in J$ con $t_{-1} < t_0 < t_1$, una señal de luz $[\lambda]$ desde x hasta $\beta(t_1)$ y una señal de luz $[\lambda']$ desde $\beta(t_{-1})$ hasta x . Por lo tanto, si consideramos un punto de \mathcal{V} , o bien pertenece a βJ o bien pasa por él una geodésica nula orientada al futuro (pasado) que parte de un punto de βJ . Además, debido a la unicidad de $t_{-1}, t_1, [\lambda], [\lambda']$ no puede haber intersecciones de subvariedades de horismos orientadas al futuro (pasado) de los puntos de βJ . □

Definición 2.5.4. *A la foliación del Teorema 2.5.3 se le llamará foliación de horismos orientada al futuro (pasado) generada por β y se denotará E_β^+ (E_β^-), siendo $\beta : I \rightarrow M$ la línea de universo de un observador a partir de la cual se ha construido la foliación. Es decir,*

$$E_\beta^+(q) = T_q E_{\beta(t_1)}^+$$

$$E_\beta^-(q) = T_q E_{\beta(t_1)}^-$$

en donde $t_1 \in I$ tal que $q \in E_{\beta(t_1)}^+ (E_{\beta(t_1)}^-)$.

Al contrario que pasaba con las subvariedades de Landau, con las subvariedades de horismos podemos asegurar que, dado un observador que las genere, no se cortan en ningún entorno normal convexo que contenga al observador.

Dada $\beta : I \rightarrow M$ una línea de universo de un observador y \mathcal{V} un entorno normal convexo que la contenga, sea \mathcal{E}^+ el conjunto de puntos de \mathcal{V} que forman parte de subvariedades de horismos orientadas al futuro de puntos de βI y sea \mathcal{E}^- el conjunto de puntos de \mathcal{V} que forman parte de subvariedades de horismos orientadas al pasado de puntos de βI . Tanto \mathcal{E}^+ como \mathcal{E}^- son abiertos, y como están dentro de un entorno normal convexo, de la forma en la que están definidos resulta que también son entornos normales convexos.

Por lo tanto, se tiene que existe una foliación de horismos orientada al futuro E_β^+ generada por β en \mathcal{E}^+ . Análogamente, se tiene que existe una foliación de horismos orientada al pasado E_β^- generada por β en \mathcal{E}^- . A partir de ahora, siempre que consideremos un entorno normal convexo \mathcal{V} en el que hay definida una foliación de horismos orientada al futuro (pasado) consideraré que \mathcal{V} es de la forma $\mathcal{E}^+ (\mathcal{E}^-)$.

Nota 2.5.5. *Por el Corolario 2.3.8, la foliación de horismos generada por una línea de universo de un observador en un entorno normal convexo \mathcal{V} es siempre una foliación nula.*

Para finalizar esta Sección vamos a realizar algunas interpretaciones físicas de las subvariedades de Landau y de las subvariedades de horismos orientadas al pasado y al futuro definidas dentro de un entorno normal convexo.

- Foliación de Landau: Los puntos pertenecientes a una misma hoja L_{p,u_p} son simultáneos con p en el sistema propio de inercia local de u , es decir, son síncronos con p .
- Foliación de horismos orientada al pasado: Los puntos pertenecientes a una misma hoja E_p^- son observados simultáneamente por p , es decir, pertenecen a señales de luz que llegan a p simultáneamente.
- Foliación de horismos orientada al futuro: Los puntos pertenecientes a una misma hoja E_p^+ son emitidos simultáneamente por p , es decir, pertenecen a señales de luz que parten de p simultáneamente.

2.6. Adaptaciones vectoriales

En la Definición 2.2.6 se introdujo el concepto de campo vectorial adaptado a un vector en un entorno normal. Ahora bien, dada una foliación Ω y una curva β que corte a cada hoja de Ω en un único punto, si Ω es geodésica en todo punto de corte con β , existen otras formas de adaptar vectores (o campos definidos solamente en β) a todo el espacio.

Definición 2.6.1. *Sea \mathcal{V} un entorno normal convexo. Sea Ω una foliación en \mathcal{V} y β una curva en \mathcal{V} que corta a cada hoja de Ω en un único punto. Además, sea cada hoja geodésica en el punto de intersección con β . Sea X un campo vectorial definido solamente en β . Para cada $q \in \mathcal{V}$, sea H_q la hoja de Ω que contiene a q . Definimos el campo vectorial adaptado a X mediante Ω y β en \mathcal{V} como*

$$X^*(\Omega; \beta)_q = \tau_{pq} X_p$$

en donde $p = H_q \cap \beta$ y τ_{pq} es el transporte paralelo a lo largo del único segmento de geodésica en \mathcal{V} que une p con q (ver Figura 2.7)

Hay varios casos:

- Si X es el tangente a β (es decir $X_{\beta(t)} = \dot{\beta}(t)$ en donde $\beta : I \rightarrow M$ con $t \in I$) entonces definimos el campo vectorial adaptado a X mediante Ω en \mathcal{V} como

$$X^*(\Omega)_q = \tau_{pq} X_p$$

en donde $p = H_q \cap \beta$.

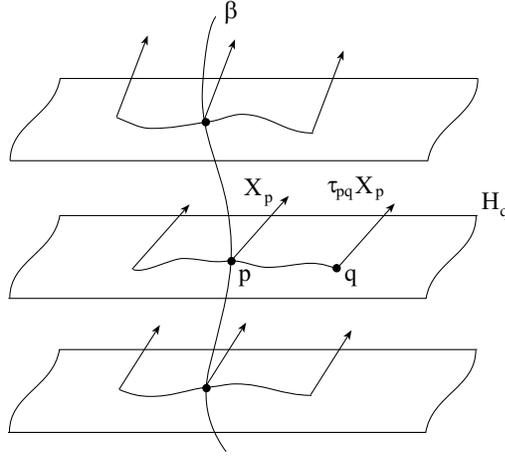


Figura 2.7: Campo vectorial adaptado a X mediante la foliación Ω y la curva β , en donde X sólo está definido en la curva β . Se denota como $X^*(\Omega; \beta)$.

- Si X se traslada paralelamente a lo largo de β , entonces sólo necesitamos conocer X en un punto de β , es decir, sólo necesitaremos conocer un vector v en el tangente a un punto de β . Por lo tanto estaremos adaptando el vector v mediante Ω y β . Esta forma de adaptar un vector mediante Ω y β se denotará

$$v^*(\Omega; \beta). \quad (2.6.4)$$

Ambos casos sucederán, por ejemplo, cuando tengamos una curva γ geodésica y estemos adaptando su vector tangente, tal y como se muestra en la Figura 2.8.

Todos estos tipos de adaptaciones coincidirán en todo \mathcal{V} si la curvatura del espacio-tiempo es nula, como por ejemplo en Minkowski. Pero si estamos en un espacio-tiempo no plano, no tienen por qué coincidir. Si $\gamma : I \rightarrow \mathcal{V}$ es geodésica, $v = \dot{\gamma}(t_0)$ y $p = \gamma(t_0)$ con $t_0 \in I$, entonces

$$v^*(\Omega; \gamma)|_{H_p \cup \gamma I} = v^*|_{H_p \cup \gamma I}$$

en donde H_p es la hoja de Ω que contiene a p .

2.6.1. Adaptaciones vectoriales mediante foliaciones de Landau

Dada β una curva temporal orientada al futuro definida en un entorno normal convexo \mathcal{V} , se tiene que L_β es la foliación de Landau generada

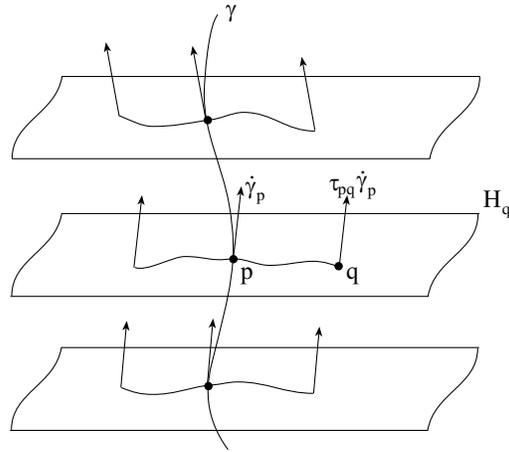


Figura 2.8: Caso particular de la adaptación de un vector v tangente a una geodésica γ mediante una foliación Ω y la geodésica γ , que se puede denotar como $\dot{\gamma}^*$ (Ω) ó bien como v^* ($\Omega; \gamma$).

por β en \mathcal{V} . Podemos adaptar el tangente a β mediante L_β de la forma anteriormente descrita en la Definición 2.6.1, como se muestra en la Figura 2.9. El resultado será un campo temporal que representa una congruencia de observadores sincronizados con β .

Por otro lado, dada $\gamma : I \rightarrow \mathcal{V}$ geodésica temporal orientada al futuro, se tiene que L_γ es la foliación de Landau generada por γ en el entorno normal convexo \mathcal{V} . Si $u = \dot{\gamma}(t_0)$ con $t_0 \in I$, podremos adaptar u mediante L_γ y γ en \mathcal{V} de la forma descrita en (2.6.4). Así pues, esta adaptación se denotará

$$u^*(L_\gamma; \gamma).$$

De esta forma, su espacio físico $S_{u^*(L_\gamma; \gamma)}$ será la foliación de Landau L_γ generada por γ (ver Figura 2.10). El resultado será un campo temporal que representa una congruencia de observadores sincronizados con γ . Dejamos para trabajos futuros la caracterización de cuándo esta congruencia es geodésica o no.

2.6.2. Adaptaciones vectoriales mediante foliaciones de horismos

Dado un punto $p \in M$, aunque las subvariedades de horismos E_p^- (E_p^+) no están definidas en p , también se pueden adaptar vectores de $T_p M$ a E_p^- (E_p^+).

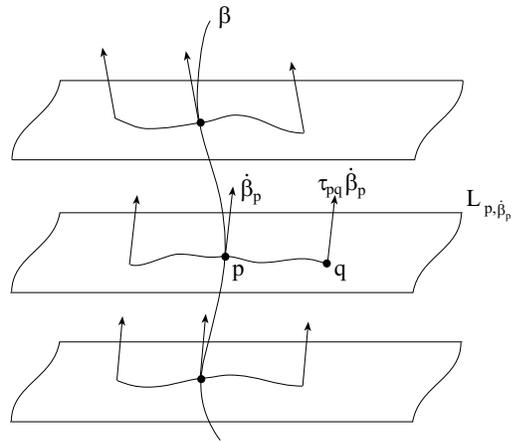


Figura 2.9: Adaptación vectorial de $\dot{\beta}$ mediante la foliación de Landau L_β generada por la curva temporal β , denotada por $\dot{\beta}^*(L_\beta; \beta)$.

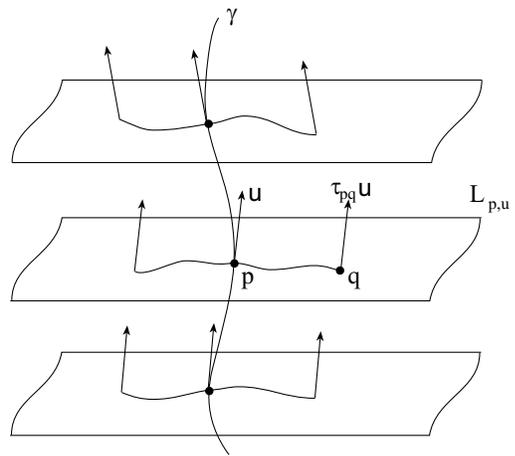


Figura 2.10: Adaptación vectorial de un vector temporal u tangente a una geodésica temporal γ mediante la foliación de Landau L_γ generada por γ , denotada por $u^*(L_\gamma; \gamma)$.

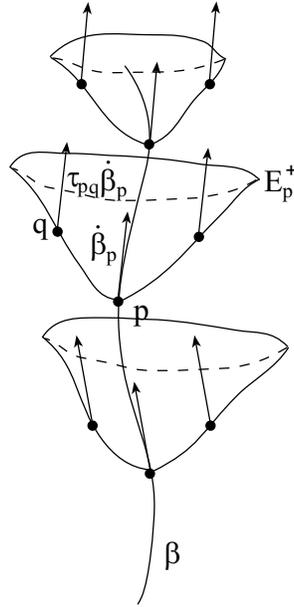


Figura 2.11: Adaptación vectorial de $\dot{\beta}$ mediante la foliación de horismos orientada al futuro E_β^+ generada por la curva temporal β , denotada por $\dot{\beta}^*(E_\beta^+; \beta)$.

Dada β una curva temporal orientada al futuro definida en un entorno normal convexo \mathcal{V} , se tiene que $E_\beta^- (E_\beta^+)$ es la foliación de horismos orientada al pasado (futuro) generada por β en \mathcal{V} . Podemos adaptar el tangente a β mediante $E_\beta^- (E_\beta^+)$ de la forma descrita en la Definición 2.6.1, como se muestra en la Figura 2.11.

Por otro lado, dada $\gamma : I \rightarrow \mathcal{V}$ geodésica temporal orientada al futuro, se tienen que $E_\gamma^- (E_\gamma^+)$ es la foliación de horismos orientada al pasado (futuro) generada por γ en el entorno normal convexo \mathcal{V} . Si $u = \dot{\gamma}(t_0)$ con $t_0 \in I$, podremos adaptar u mediante $E_\gamma^- (E_\gamma^+)$ y γ en \mathcal{V} de la forma descrita en (2.6.4) (ver Figura 2.12), aunque en realidad, las foliaciones de horismos no estén definidas en los puntos de γ . Así pues, esta adaptación se denotará

$$u^*(E_\gamma^-; \gamma)$$

o bien

$$u^*(E_\gamma^+; \gamma).$$

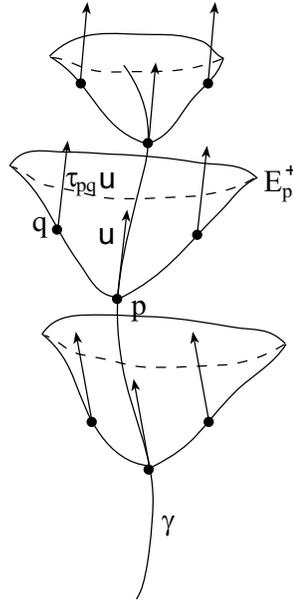


Figura 2.12: Adaptación vectorial de un vector temporal u tangente a una geodésica temporal γ mediante la foliación de horismos orientada al futuro E_γ^+ generada por γ , denotada por $u^*(E_\gamma^+; \gamma)$.

2.6.3. Aplicación a los observadores. Emisiones puntuales

A lo largo de todo el Capítulo 1, se trabaja generalmente con congruencias de observadores que son campos temporales unitarios orientados al futuro. Así pues, todos los resultados obtenidos utilizando estos campos temporales (como el efecto Doppler y la aberración de la luz) son resultados obtenidos para congruencias de observadores. Sin embargo, todos estos resultados son aplicables también a los observadores individuales gracias a las adaptaciones vectoriales, tal y como veremos en este apartado.

Dentro de un entorno normal convexo de la forma \mathcal{E}^+ , el campo U de la expresión (0.3.3) puede ser extendido a todo \mathcal{E}^+ de tal forma que la extensión de U en un punto $p \in \mathcal{E}^+$ sea en realidad la observación de U en p . Formalmente, esta extensión se realiza mediante la foliación de horismos orientados al futuro generados por β , es decir E_β^+ , que según la Definición 2.6.1, se denotaría

$$U^*(E_\beta^+; \beta).$$

El resultado de la extensión es un campo temporal unitario orientado al futuro definido en todo \mathcal{E}^+ , es decir, representa una congruencia de observadores. Dentro de un entorno normal convexo \mathcal{E}^+ siempre se puede realizar esta extensión, y por lo tanto se logra transformar observadores individuales en congruencias de observadores de una forma físicamente aceptable, con lo que todos los resultados obtenidos para congruencias de observadores (como por ejemplo, el efecto Doppler y la aberración de la luz) son ahora aplicables a observadores individuales.

Teniendo en cuenta la expresión (0.3.3), tenemos la siguiente definición:

Definición 2.6.2. *Dada una línea de universo temporal β , llamaremos congruencia de observadores asociada a β al campo $U^*(E_\beta^+; \beta)$ definido en todo el entorno normal convexo \mathcal{E}^+ .*

Por ejemplo, dadas dos líneas de universo temporales $\beta : I \rightarrow M$ y $\beta' : I' \rightarrow M$ dentro de un entorno normal convexo \mathcal{E}^+ , con congruencias de observadores asociadas U y U' respectivamente, ahora se puede calcular la velocidad relativa de U' respecto a U según la Definición 1.1.3. De esta forma, v y X se pueden calcular en todo punto de \mathcal{E}^+ , aunque adquieren su pleno sentido físico en los puntos de βI , ya que un observador siempre observa a través de los espacios tangentes de los puntos de su línea de universo. Así pues, dado un punto $p \in \beta I$, se tiene que $v(p)$ representa la velocidad relativa de U' respecto a U observada por U en ese punto p y X_p representa la dirección de la velocidad relativa de U' respecto a U observada por U en p .

Veamos ahora la definición de *emisión puntual* y de *congruencia de observadores propia*:

Definición 2.6.3. *Sea \mathcal{E}^+ un entorno normal convexo y sea $\beta : I \rightarrow M$ una línea de universo temporal en \mathcal{E}^+ , llamaremos emisión puntual asociada a β a la 1-foliación nula Λ definida en $\mathcal{E}^+ - \beta I$ dada por*

$$\Lambda = \left(E_\beta^+\right)^\perp,$$

que es totalmente geodésica, es decir, sus curvas integrales son rayos de luz. En este caso, β representa la evolución del punto emisor. A su congruencia de observadores asociada la llamaremos congruencia de observadores propia de Λ y la denotaremos por U^0 .

En la práctica, una emisión puntual es la emisión realizada por un objeto lo suficientemente lejano al observador. Para observadores situados en la Tierra las emisiones puntuales pueden ser por ejemplo, galaxias y estrellas lejanas. Las congruencias de observadores asociadas pueden considerarse como congruencias de observadores solidarios al movimiento del punto emisor, y siempre estarán definidas dentro de un entorno normal convexo del tipo \mathcal{E}^+ , aunque no quede explícitamente indicado.

2.6.4. Aberración de la luz y dirección propia

Definición 2.6.4. *Sea Λ una emisión puntual con congruencia de observadores propia U^0 . Si la U^0 -base de Λ viene dada por $\{S^0 + U^0\}$, llamaremos dirección propia de Λ al campo espacial unitario S^0 .*

Un rayo de luz por sí solo no tiene una dirección propia establecida. Se necesita conocer la “fuente” para poder construir una congruencia de observadores a partir de ella, que será la congruencia de observadores propia U^0 . La dirección propia S^0 es, en este caso, la dirección de este rayo observada por U^0 , es decir, si Λ es una emisión puntual con congruencia de observadores propia U^0 y dirección propia S^0 se tiene que $\{S^0 + U^0\}$ es la U^0 -base de Λ . Teniendo en cuenta (1.1.7), el siguiente resultado resulta trivial:

Proposición 2.6.5. *Sea Λ emisión puntual con congruencia de observadores propia U^0 . Dada una congruencia de observadores U , si $\{S + U\}$ es la U -base de Λ , entonces la dirección propia de Λ viene dada por*

$$S^0 = \frac{\sqrt{1-v^2}}{1-vg(X, S)} (S + U) - U^0,$$

en donde v , X vienen dados unívocamente por la descomposición

$$U^0 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} (U + vX)$$

en donde X es un campo espacial unitario ortogonal a U y v es una función tal que $0 \leq v < 1$. En este caso, v es la velocidad relativa de U^0 respecto a U y X es la dirección de la velocidad relativa de U^0 respecto a U (ver (1.1.3)).

Además, teniendo en cuenta la Definición 1.1.4 de ángulo de aberración, se puede definir el *ángulo de aberración propio* de Λ respecto a un observador U de la forma siguiente:

Definición 2.6.6. *Sea Λ una emisión puntual con congruencia de observadores propia U^0 . Dada una congruencia de observadores U , definimos el ángulo de aberración propio de Λ respecto a U como el ángulo de aberración de U^0 respecto a U correspondiente a Λ (ver Definición 1.1.4).*

2.6.5. Efecto Doppler y frecuencia propia

Definición 2.6.7. *Sea Λ una emisión puntual con congruencia de observadores propia U^0 . Definimos la frecuencia propia ν^0 de Λ como la frecuencia con la que observa U^0 a Λ .*

Un rayo de luz por sí solo no tiene frecuencia propia en el sentido de la Definición 2.6.7. Al igual que en el caso de la dirección propia,

se necesita conocer la “fuente” para poder construir una congruencia de observadores a partir de ella, que será la congruencia de observadores propia. La frecuencia propia es, en este caso, la frecuencia de este rayo observada por los observadores de la congruencia de observadores propia. Teniendo en cuenta (1.1.13), el siguiente resultado resulta trivial:

Proposición 2.6.8. *Sea Λ una emisión puntual con congruencia de observadores propia U^0 . Dada una congruencia de observadores U , si el conjunto $\{S + U\}$ es la U -base de Λ , entonces la frecuencia propia de Λ viene dada por*

$$\nu^0 = \frac{1 - vg(X, S)}{\sqrt{1 - v^2}} \nu,$$

en donde ν es la frecuencia de Λ observada por U , v es la velocidad relativa de U^0 respecto a U y X es la dirección de la velocidad relativa de U^0 respecto a U .

Entonces, dado un observador cualquiera, podemos calcular la frecuencia propia de una emisión puntual a partir de la frecuencia observada por este observador. Obviamente, la frecuencia propia no depende del observador elegido para calcularla.

2.6.6. Distancias

Definición 2.6.9. *Sea Λ una emisión puntual asociada a una línea de universo $\beta : I \rightarrow M$. Dada una congruencia de observadores U y un punto $p \in M$, la distancia de p al punto emisor de Λ (cuya evolución viene dada por β) respecto a U , es el módulo de la proyección de $\exp_p^{-1} q$ al espacio físico de U_p , en donde q es el único punto de βI tal que la geodésica que une q con p es un rayo de luz (es decir, $p \in E_q^+$, o bien $q \in E_p^-$). Esta distancia será denotada d_p .*

Se define la función distancia d al punto emisor de Λ respecto a U como aquella función tal que en un punto $p \in M$ toma el valor d_p .

En $T_p M$ se tiene que Λ_p y $\exp_p^{-1} q$ tienen la misma dirección pero sentidos opuestos. Si $\{S + U\}$ es la U -base de Λ , entonces

$$\exp_p^{-1} q = -d_p(S_p + U_p),$$

teniendo en cuenta la Definición 2.6.9. Dada otra congruencia de observadores U' , en p se cumplirá

$$\exp_p^{-1} q = -d'_p(S'_p + U'_p),$$

en donde $\{S' + U'\}$ es la U' -base de Λ y d'_p es la distancia de p al punto emisor de Λ respecto a U' . Por lo tanto, si d y d' son las funciones distancia correspondientes, se tiene

$$S' + U' = \frac{d}{d'}(S + U).$$

Teniendo en cuenta (1.1.4) y (1.1.6) obtenemos

$$d' = \frac{1 - vg(X, S)}{\sqrt{1 - v^2}} d,$$

en donde v es la velocidad relativa de U' respecto a U y X es la dirección de la velocidad relativa de U' respecto a U .

Como caso particular, si U' es la congruencia de observadores propia U^0 de Λ , se obtiene la función distancia propia d^0 al punto emisor de Λ :

Definición 2.6.10. *Sea Λ una emisión puntual con congruencia de observadores propia U^0 . Dada una congruencia de observadores U , la función distancia propia d^0 al punto emisor de Λ se define como*

$$d^0 = \frac{1 - vg(X, S)}{\sqrt{1 - v^2}} d,$$

en donde $\{S + U\}$ es la U -base de Λ , d es la función distancia al punto emisor de Λ respecto a U , v es la velocidad relativa de U^0 respecto a U y X es la dirección de la velocidad relativa de U^0 respecto a U .

En Minkowski, dada una emisión puntual Λ asociada a una línea de universo β geodésica con congruencia de observadores propia U^0 , se tiene que la función distancia propia d^0 al punto emisor de Λ se mantiene constante a lo largo de las curvas integrales de U^0 , es decir, los observadores de la congruencia propia son solidarios al punto emisor de Λ . Si β no es geodésica, esta propiedad no se cumple.

Proposición 2.6.11. *Sea Λ una emisión puntual asociada a una línea de universo $\beta : I \rightarrow M$. Dada una congruencia de observadores U y un punto $p \in M$, sea q el punto de βI que se une con p mediante un rayo de luz y sea $\{S + U\}$ la U -base de Λ . Entonces, si parametrizamos la geodésica nula λ que une p con q de forma que $\lambda(0) = p$, $\dot{\lambda}(0) = -(S_p + U_p)$, entonces se tiene que*

$$\lambda(d_p) = q,$$

en donde d_p es la distancia de p al punto emisor de Λ respecto a U .

PRUEBA:

Debido a la forma en que está parametrizada λ , tenemos que

$$\lambda(s) = \exp_p(-s(S_p + U_p)).$$

Por lo tanto

$$\lambda(d_p) = \exp_p(-d_p(S_p + U_p)) = q.$$

□

Por lo tanto, dada una emisión puntual Λ y una congruencia de observadores U , podemos interpretar la distancia de p al punto emisor de Λ respecto a U como la distancia que recorre el rayo de luz de Λ que llega hasta p medida por un observador que pasa por p con cuadrivelocidad U_p .

Corolario 2.6.12. *Sea Λ una emisión puntual asociada a una línea de universo $\beta : I \rightarrow M$ con congruencia de observadores propia U^0 y sea λ un rayo de luz de Λ que une $q \in \beta I$ con $p \in M$. Si parametrizamos λ de forma que $\lambda(0) = q$ y $\dot{\lambda}(0) = S_q + U_q^0$ (en donde S_q es un vector espacial unitario ortogonal a U_q), entonces*

$$\lambda(d_p^0) = p,$$

siendo d_p^0 la distancia propia de p al punto emisor de Λ . Además

$$\dot{\lambda}(d_p) = S_p^0 + U_p^0,$$

en donde $\{S^0 + U^0\}$ es la U^0 -base de Λ .

PRUEBA:

Basta parametrizar a la inversa la geodésica nula de la Proposición 2.6.11. La segunda propiedad se obtiene directamente de la definición de congruencia de observadores propia.

□

El parámetro usado en los rayos de luz del Corolario 2.6.12 es precisamente la distancia propia.

Por último, veamos lo que pasa con las distancias entre dos puntos emisores: Si tenemos dos emisiones puntuales Λ_1, Λ_2 , podemos determinar la función distancia entre los puntos emisores de Λ_1 y Λ_2 respecto a una congruencia de observadores U dada. Esta función viene dada por

$$|d_1 S_1 - d_2 S_2|,$$

en donde $\{S_1 + U\}, \{S_2 + U\}$ son las U -bases de Λ_1, Λ_2 respectivamente y d_1, d_2 son las funciones distancia al punto emisor de Λ_1, Λ_2 respectivamente respecto a U . Dada otra congruencia de observadores U' , con $\{S'_1 + U'\}, \{S'_2 + U'\}$ las U' -bases de Λ_1, Λ_2 respectivamente y d'_1, d'_2 las funciones distancia al punto emisor de Λ_1, Λ_2 respectivamente respecto a U' , tenemos que

$$|d'_1 S'_1 - d'_2 S'_2| = \sqrt{\frac{1 - v^2}{(1 + vg(X, S_1))(1 + vg(X, S_2))}} |d_1 S_1 - d_2 S_2|, \quad (2.6.5)$$

en donde v es la velocidad relativa de U' respecto a U y X es la dirección de la velocidad relativa de U' respecto a U .

2.7. Igualdad salvo orientaciones entre foliaciones de horismos orientadas al futuro y al pasado

Teniendo en cuenta el Teorema 1.2.29 del Capítulo 1, dado \mathcal{V} un entorno normal convexo y β una línea de universo de un observador en \mathcal{V} ,

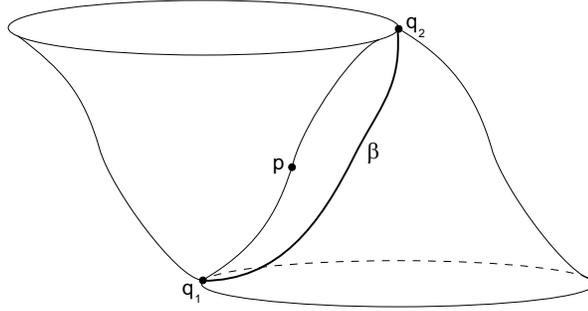


Figura 2.13: Caso en el que $E_{\beta}^{+}(p) = E_{\beta}^{-}(p)$. La curva β pierde su carácter temporal en algún punto entre q_1 y q_2 .

si $E_{\beta}^{+}(p) \neq E_{\beta}^{-}(p)$ para todo $p \in \mathcal{V}$, entonces existe una congruencia de observadores U (en realidad existirá toda una familia de congruencias de observadores) tal que

$$\left(E_{\beta}^{+}\right)_{U}^{-} = E_{\beta}^{-}$$

y por lo tanto E_{β}^{+} y E_{β}^{-} son iguales salvo orientaciones para U :

$$E_{\beta}^{+} \stackrel{U}{=} E_{\beta}^{-} \quad s.o.$$

Pero la condición $E_{\beta}^{+}(p) \neq E_{\beta}^{-}(p)$ para todo $p \in \mathcal{V}$ se cumple por lo menos localmente. No obstante, se puede comprobar que si existiese un punto $p \in \mathcal{V}$ tal que $E_{\beta}^{+}(p) = E_{\beta}^{-}(p)$, entonces la curva β perdería su carácter temporal en algún punto (tal y como se muestra en la Figura 2.13) y por lo tanto podemos asegurar que no se da la igualdad en ningún punto de \mathcal{V} .

Aunque tengamos una línea de universo γ geodésica, no está asegurado que U sea alguna adaptación del vector u tangente a γ en un punto dado, ya sea u^* , $u^*(L_{\gamma}; \gamma)$, $u^*(E_{\gamma}^{+}; \gamma)$ o bien $u^*(E_{\gamma}^{-}; \gamma)$. Lo único que está asegurado es su existencia.

Proposición 2.7.1. *Sea M un espacio-tiempo en el que las subvariedades (de dimensión 2) geodésicas en un punto son totalmente geodésicas. Dada una línea de universo temporal geodésica $\gamma : I \rightarrow \mathcal{V}$, en donde \mathcal{V} es un entorno normal convexo como el del Teorema 2.5.3 (en donde están definidas las foliaciones de horismos orientadas al futuro y al pasado generadas por γ), se tiene*

$$\left(E_{\gamma}^{+}\right)_{U}^{-} = E_{\gamma}^{-}$$

en \mathcal{V} , en donde U es una adaptación cualquiera en \mathcal{V} de un vector tangente a γ en un punto dado.

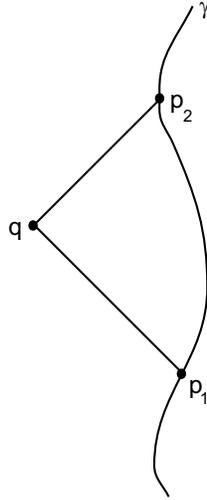


Figura 2.14: Representación de un punto q perteneciente a $E_{p_1}^+ \cap E_{p_2}^-$.

PRUEBA:

Sea $q \in \mathcal{V} - \gamma I$ y sean $p_1, p_2 \in \gamma I$ tales que $q \in E_{p_1}^+ \cap E_{p_2}^-$ (esto es posible debido a que en \mathcal{V} están definidas tanto la foliación de horismos orientada al futuro como la orientada al pasado generadas por γ), tal y como se muestra en la Figura 2.14. Entonces existe una subvariedad W de dimensión 2 geodésica en q que contiene a p_1, p_2 . Por hipótesis, esta subvariedad W es totalmente geodésica, y por lo tanto contiene a γ .

Entonces, toda adaptación U en \mathcal{V} de un vector tangente a γ en un punto dado cumplirá

$$U_q \in T_q W$$

ya que las adaptaciones se definen mediante traslados paralelos a lo largo de geodésicas, W es totalmente geodésica (que contiene a γ y a q) y el traslado paralelo a lo largo de geodésicas contenidas en W transporta vectores tangentes a W en vectores tangentes a W .

Por otra parte, se cumple

$$\begin{aligned} (E_\gamma^+)_q^\perp &\in T_q W \\ (E_\gamma^-)_q^\perp &\in T_q W \end{aligned}$$

debido a la forma en la que está definida W . Así pues, se tiene

$$U_q, (E_\gamma^+)_q^\perp, (E_\gamma^-)_q^\perp \in T_q W$$

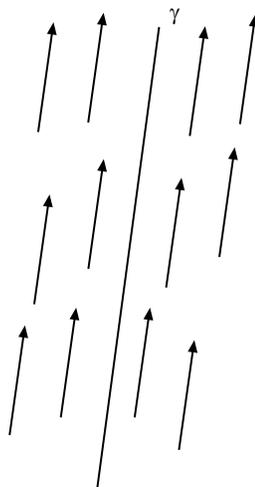


Figura 2.15: Todas las posibles adaptaciones estudiadas de un vector tangente a una geodésica en el espacio-tiempo de Minkowski nos dan idéntico resultado.

y por lo tanto son coplanarios, al ser W de dimensión 2. Como hemos trabajado con un $q \in \mathcal{V} - \gamma I$ arbitrario, se tiene

$$(E_{\gamma}^{+})_{U}^{-} = E_{\gamma}^{-}$$

en \mathcal{V} , en donde U es una adaptación cualquiera en \mathcal{V} de un vector tangente a γ en un punto dado.

□

Ejemplo 2.7.2. *En la métrica de Minkowski, dada una línea de universo temporal $\gamma : I \rightarrow M$ geodésica, se tiene que γ es una recta, y por lo tanto, el vector tangente es siempre el mismo (siempre que identifiquemos todos los espacios tangentes). Sea $u = \dot{\gamma}(t_0)$ con $t_0 \in I$. Las adaptaciones de u mediante una foliación y γ son siempre iguales: En cada punto tendremos el mismo vector u (ver Figura 2.15).*

Sea U el campo temporal adaptado de u . En este caso, se tiene que

$$U_p, (E_{\gamma}^{+})_p^{\perp}, (E_{\gamma}^{-})_p^{\perp}$$

son coplanarios para todo $p \in M - \gamma I$. Por lo tanto

$$(E_{\gamma}^{+})_{U}^{-} = E_{\gamma}^{-}.$$

En cambio, si no consideramos una geodésica, esto no se cumple en general.

Folaciones de simultaneidad

Este resultado se podría haber obtenido mediante la Proposición 2.7.1, ya que en el espacio-tiempo de Minkowski las subvariedades geodésicas en un punto también son totalmente geodésicas.

3. Estabilidad entre foliaciones

A lo largo de las últimas décadas, las aplicaciones de las foliaciones a la Física Teórica se han incrementado considerablemente (Donato, 1991). En la década de los sesenta, J. M. Souriau usó foliaciones asociadas a espacios de evolución de partículas elementales para estudiar su evolución (Souriau, 1970, 1997). Más tarde, el estudio de las foliaciones en Relatividad y en Física Cuántica ha resultado muy fructífero, usando variedades foliadas (Morvan, 1984) o dentro de estructuras matemáticas más complejas. Las condiciones exigidas a las foliaciones dependen del formalismo empleado, pero, en general, pueden expresarse mediante algún tipo de invarianza.

En este Capítulo, se estudian las distribuciones que permanecen invariantes por traslados paralelos (es decir, son *estables*), haciendo especial hincapié en el caso de las foliaciones. Si una foliación se conserva por traslados paralelos a lo largo de curvas integrales de sus propios campos, esta foliación satisface una *ley de movimiento* (Liern y Olivert, 1995a) equivalente a afirmar que sus hojas son totalmente geodésicas. Teniendo en cuenta esto, se podría estudiar si una foliación se conserva por traslados paralelos a lo largo de curvas integrales de campos de cualquier foliación, y por lo tanto, introduciendo nuevos conceptos como *estabilidad* o *estabilidad regular*, se podrían obtener leyes de movimiento mucho más generales.

Precisamente, hemos obtenido una caracterización de la estabilidad regular que nos permite dar (en un caso particular) una ley de movimiento para foliaciones cuyas hojas son planas. Además, este resultado es útil para dar una caracterización de los espacio-tiempo que admiten foliaciones cuyas hojas son totalmente geodésicas y planas, como los espacio-tiempo *pp-wave* (Maartens y Maharaj, 1991). En particular, se obtiene que los espacio-tiempo de Schwarzschild y de Robertson-Walker no admiten esta clase de foliaciones. Todo este tipo de ejemplos se encuentran en el Apéndice A. La mayor parte de los resultados obtenidos en este Capítulo se encuentran en Bolós, Liern y Olivert (2002b).

3.1. Distribuciones estables

En otros trabajos (Liern y Olivert, 1992, 1993, 1995a) y en el Capítulo 0, hemos introducido el concepto de *ley de movimiento* usando foliaciones: Sea Ω una foliación, X un campo vectorial de Ω , c una curva integral de X y

$$\tau_t^c : T_{c(0)}M \longrightarrow T_{c(t)}M$$

el transporte paralelo a lo largo de $c(t)$, para todo $t \in I$, en donde I es el dominio de c . La foliación Ω verifica una ley de movimiento si y sólo si

$$\tau_t^c \Omega(c(0)) = \Omega(c(t)), \quad t \in I.$$

Esta ley de movimiento es útil en Relatividad General, ya que generaliza el *principio de las geodésicas* cuando la dimensión de Ω es 1 y la *propiedad de ser totalmente geodésica* para superficies cuando la dimensión de Ω es mayor que 1 (ver Apéndice B).

Intuitivamente, la curvatura de las hojas se tiene que ‘adaptar’ a la curvatura del espacio-tiempo, en el sentido que la métrica inducida coincide con la métrica restringida. En esta Sección vamos a estudiar cómo generalizar esta idea intuitiva con la intención de recuperar el concepto de frente de ondas plano introducido en Souriau (1970) en el espacio-tiempo de Minkowski.

3.1.1. Definiciones de estabilidad

Para llevar a cabo nuestro estudio, es necesario introducir los nuevos conceptos de *estabilidad* y *estabilidad regular*, que simplifican considerablemente la notación.

Definición 3.1.1. *Dados dos campos distintos de cero X, Y diremos que X es estable respecto a Y si*

$$\nabla_Y X \propto X.$$

Dadas dos distribuciones Ω, Ω' diremos que Ω es estable respecto a Ω' , y lo denotaremos

$$\nabla_{\Omega'} \Omega \subset \Omega,$$

cuando

$$\nabla_Y X \in \Omega$$

para todo campo $X \in \Omega, Y \in \Omega'$.

El concepto de distribuciones estables generaliza el concepto de campos estables si consideramos los campos como bases de distribuciones de dimensión 1 (i.e. 1-foliaciones). Es decir, dados dos campos distintos de

cero X, Y , si Λ, Λ' son las 1-foliaciones que generan respectivamente, entonces la estabilidad de X respecto a Y equivale a la estabilidad de Λ respecto a Λ' :

$$\nabla_Y X \propto X \equiv \nabla_{\Lambda'} \Lambda \subset \Lambda.$$

Además, la estabilidad de una distribución Ω respecto a un campo Y equivale a la estabilidad de Ω respecto a la 1-foliación Λ' generada por Y :

$$\nabla_Y \Omega \subset \Omega \equiv \nabla_{\Lambda'} \Omega \subset \Omega.$$

Del mismo modo, la estabilidad de un campo X respecto a una distribución Ω' equivale a la estabilidad de la 1-foliación Λ generada por X respecto a Ω :

$$\nabla_{\Omega'} X \propto X \equiv \nabla_{\Omega'} \Lambda \subset \Lambda.$$

Nota 3.1.2. Dadas $\{X_i\}_{i=1}^p, \{Y_j\}_{j=1}^{p'}$ dos bases de Ω y Ω' respectivamente, basta comprobar

$$\nabla_{Y_j} X_i \in \Omega, \quad \begin{cases} i = 1, \dots, p \\ j = 1, \dots, p' \end{cases}.$$

Veamos que esto implica la estabilidad de Ω respecto a Ω' :

Dadas $X \in \Omega, Y \in \Omega'$, existen funciones $\{\alpha^i\}_{i=1}^p, \{\beta^j\}_{j=1}^{p'}$ tales que $X = \alpha^i X_i, Y = \beta^j Y_j$ y por lo tanto

$$\nabla_Y X = \nabla_{\beta^j Y_j} \alpha^i X_i = \beta^j (Y_j (\alpha^i) X_i + \alpha^i \nabla_{Y_j} X_i) \in \Omega.$$

Nota 3.1.3. Teniendo en cuenta la Nota 3.1.2, dadas $\Omega, \Omega', \Omega''$ tres distribuciones tales que

$$\begin{aligned} \nabla_{\Omega'} \Omega &\subset \Omega \\ \nabla_{\Omega''} \Omega &\subset \Omega \end{aligned}$$

se tiene que

$$\nabla_{\langle \Omega', \Omega'' \rangle} \Omega \subset \Omega.$$

Nota 3.1.4. TM es foliación, ya que

$$[X, Y] \in TM$$

para todo $X, Y \in TM$, como ya se vio en el Capítulo 0 para una variedad diferenciable en general. Además, TM es estable respecto a cualquier distribución Ω , ya que

$$\nabla_Y X \in TM$$

para todo $X \in TM$ y para todo $Y \in \Omega$.

Vicente José Bolós Lacave

Nota 3.1.5. Sean Ω, Ω' dos distribuciones tales que $\nabla_{\Omega'}\Omega \subset \Omega$. Si Ω'' es una subdistribución de Ω' entonces

$$\nabla_{\Omega''}\Omega \subset \Omega.$$

Por lo tanto, si Ω es estable respecto a TM entonces será estable respecto a cualquier distribución de M .

Veamos a continuación una propiedad que relaciona a una distribución con su distribución ortogonal mediante la estabilidad:

Proposición 3.1.6. (Lema de Dualidad). Dadas Ω, Ω' dos distribuciones, Ω es estable respecto a Ω' sii Ω^\perp es estable respecto a Ω' :

$$\nabla_{\Omega'}\Omega \subset \Omega \iff \nabla_{\Omega'}\Omega^\perp \subset \Omega^\perp.$$

PRUEBA:

Dados tres campos X, Y, Z se tiene (Lema 2.3.6)

$$Zg(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y).$$

→ Dadas Ω, Ω' dos distribuciones tales que

$$\nabla_{\Omega'}\Omega \subset \Omega,$$

sean los campos

$$\begin{aligned} X &\in \Omega \\ Y &\in \Omega^\perp \\ Z &\in \Omega' \end{aligned}$$

con lo que

$$\begin{aligned} g(X, Y) &= 0 \\ g(\nabla_Z X, Y) &= 0. \end{aligned}$$

Por el Lema 2.3.6 se tiene

$$0 = g(X, \nabla_Z Y)$$

y por lo tanto

$$\nabla_Z Y \in \Omega^\perp.$$

Como Y, Z son arbitrarios

$$\nabla_{\Omega'}\Omega^\perp \subset \Omega^\perp.$$

← Dadas Ω, Ω' dos distribuciones tales que

$$\nabla_{\Omega'} \Omega^\perp \subset \Omega^\perp,$$

sean los campos

$$\begin{aligned} X &\in \Omega^\perp \\ Y &\in \Omega \\ Z &\in \Omega' \end{aligned}$$

con lo que

$$\begin{aligned} g(X, Y) &= 0 \\ g(\nabla_Z X, Y) &= 0. \end{aligned}$$

Por el Lema 2.3.6 se tiene

$$0 = g(X, \nabla_Z Y)$$

y por lo tanto

$$\nabla_Z Y \in \Omega.$$

Como Y, Z son arbitrarios

$$\nabla_{\Omega'} \Omega \subset \Omega.$$

□

Es conocido que una distribución Ω viene unívocamente determinada por su distribución ortogonal Ω^\perp . La Proposición 3.1.6, además nos indica que

Ω y Ω^\perp tienen las mismas propiedades de estabilidad.

Es decir, estudiar la propiedad $\nabla_{\Omega'} \Omega \subset \Omega$ es lo mismo que estudiar la propiedad $\nabla_{\Omega'} \Omega^\perp \subset \Omega^\perp$. Así pues, a la Proposición 3.1.6 la llamaremos *Lema de dualidad*.

Nota 3.1.7. *Un caso particular del Lema de dualidad resulta bastante interesante: Cuando Ω es una 3-foliación nula representa un fotón considerado como una onda. Su 1-foliación ortogonal Ω^\perp resulta que es también nula y representa al mismo fotón pero considerado como un corpúsculo. El Lema de dualidad en este caso pone de manifiesto la dualidad onda-corpúsculo de los fotones. Este caso lo veremos con más detalle en la última Sección.*

Definición 3.1.8. Sea X un campo distinto de cero. Diremos que X es auto-estable sii es estable respecto a sí mismo, es decir

$$\nabla_X X \propto X.$$

Sea Ω una distribución. Diremos que Ω es auto-estable si es estable respecto a sí misma, es decir

$$\nabla_\Omega \Omega \subset \Omega.$$

Al igual que en la Definición 3.1.1, el concepto de distribuciones auto-estables generaliza el concepto de campos auto-estables. Es decir, si X es un campo distinto de cero y Λ es la 1-foliación que genera, entonces la auto-estabilidad de X equivale a la auto-estabilidad de Λ :

$$\nabla_X X \propto X \equiv \nabla_\Lambda \Lambda \subset \Lambda.$$

Con la Definición 3.1.8:

- Una distribución Ω es totalmente geodésica (cumple la Ley de Movimiento) sii Ω es auto-estable.
- Una distribución Ω es autoparalela sii Ω^\perp es auto-estable:

$$\nabla_{\Omega^\perp} \Omega^\perp \subset \Omega^\perp.$$

Nota 3.1.9. Si Ω es una p -distribución totalmente geodésica (i.e. auto-estable), dada una base $\{X_i\}_{i=1}^p$ de Ω se tiene

$$\nabla_{X_i} X_j \in \Omega, \quad i, j = 1, \dots, p.$$

Considerando que M tiene torsión cero resulta

$$[X_i, X_j] = \nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i \in \Omega, \quad i, j = 1, \dots, p$$

y por lo tanto Ω es foliación. Así pues, las distribuciones auto-estables en variedades de torsión cero (por ejemplo, cualquier espacio-tiempo) en realidad son foliaciones auto-estables.

Nota 3.1.10. El fibrado tangente TM es un ejemplo trivial de foliación auto-estable, ya que

$$\nabla_Y X \in TM$$

para todo $X, Y \in TM$. También podemos hacer $\Omega = TM$ en la Nota 3.1.4.

La Proposición 3.1.6 tiene el siguiente Corolario:

Corolario 3.1.11. Dada Ω una distribución, es auto-estable sii Ω^\perp es estable respecto a Ω :

$$\nabla_\Omega \Omega \subset \Omega \iff \nabla_\Omega \Omega^\perp \subset \Omega^\perp.$$

El Corolario 3.1.11 puede formularse de las formas siguientes:

- Ω es totalmente geodésica sii Ω^\perp es estable respecto a Ω .
- Ω es autoparalela sii Ω es estable respecto a Ω^\perp .

Nota 3.1.12. Ω y Ω^\perp se comportan igual ante la estabilidad, pero no tienen por qué comportarse igual ante la auto-estabilidad. Esto ocurre sólo en algunos casos. Por ejemplo, en el espacio-tiempo de Minkowski se tiene

$$\nabla_\Omega \Omega \subset \Omega \iff \nabla_{\Omega^\perp} \Omega^\perp \subset \Omega^\perp.$$

Esto se puede ver sabiendo que en el espacio-tiempo de Minkowski, las p -foliaciones auto-estables son las que tienen como variedades integrales a p -planos. Así pues, las variedades integrales de la $(4-p)$ -foliación ortogonal son planos de dimensión $(4-p)$, con lo que también es auto-estable. Este caso se estudiará para 3-foliaciones nulas en el último apartado.

Definición 3.1.13. Dadas dos distribuciones Ω, Ω' diremos que Ω es regularmente estable respecto a Ω' , y lo denotaremos

$$\nabla_{\Omega'} \Omega = 0,$$

cuando exista una base $\{X_i\}_{i=1}^p$ de Ω tal que

$$\nabla_{\Omega'} X_i = 0, \quad i = 1, \dots, p,$$

es decir

$$\nabla_Y X_i = 0, \quad i = 1, \dots, p$$

para todo campo $Y \in \Omega'$.

En este caso diremos que la base $\{X_i\}_{i=1}^p$ de Ω es regularmente estable respecto a Ω' .

El concepto de estabilidad regular para campos tendría dos posibles definiciones:

- (a) Dados dos campos X, Y distintos de cero diremos que X es regularmente estable respecto a Y sii

$$\nabla_Y X = 0.$$

- (b) Dados dos campos distintos de cero X, Y diremos que X es regularmente estable respecto a Y sii existe una función α tal que

$$\nabla_Y (\alpha X) = 0.$$

La definición (b) es menos restrictiva que (a), ya que tomando $\alpha = 0$ en (b) obtenemos (a). No obstante, el concepto de estabilidad regular para distribuciones generaliza solamente a (b). Es decir, dados dos campos distintos de cero X, Y , si Λ, Λ' son las 1-foliaciones que generan respectivamente, entonces la estabilidad regular de X respecto a Y equivale a la estabilidad regular de Λ respecto a Λ' :

$$\nabla_Y(\alpha X) = 0 \equiv \nabla_{\Lambda'}\Lambda = 0.$$

Además, la estabilidad regular de una distribución Ω respecto a un campo Y equivale a la estabilidad regular de Ω respecto a la 1-foliación Λ' generada por Y :

$$\nabla_Y\Omega = 0 \equiv \nabla_{\Lambda'}\Omega = 0.$$

Del mismo modo, la estabilidad regular de un campo X respecto a una distribución Ω' equivale a la estabilidad regular de la 1-foliación Λ generada por X respecto a Ω :

$$\nabla_{\Omega'}(\alpha X) = 0 \equiv \nabla_{\Omega'}\Lambda = 0.$$

Nota 3.1.14. Dada $\{Y_j\}_{j=1}^q$ una base de Ω' basta comprobar

$$\nabla_{Y_j}X_i = 0, \quad \begin{cases} i = 1, \dots, p \\ j = 1, \dots, q \end{cases}.$$

Veamos que esto implica la estabilidad regular de Ω respecto a Ω' :

Sean $Y \in \Omega'$. Se tiene que existen funciones $\{\beta^j\}_{j=1}^q$ tales que $Y = \beta^j Y_j$ y por lo tanto

$$\nabla_Y X_i = \nabla_{\beta^j Y_j} X_i = \beta^j \nabla_{Y_j} X_i = 0, \quad i = 1, \dots, p.$$

No todas las bases de una distribución regularmente estable tienen esta propiedad. Basta con que una sola la tenga. Además, si $X \in \Omega$, $Y \in \Omega'$ cumplen

$$\nabla_Y X = 0$$

entonces, dada una función α se tiene que αX sigue estando en Ω , pero su derivada covariante

$$\nabla_Y(\alpha X) = Y(\alpha)X + \alpha \nabla_Y X = Y(\alpha)X$$

no tiene por qué ser cero.

Nota 3.1.15. Sean Ω, Ω' una p -distribución y una q -distribución respectivamente tales que Ω es regularmente estable respecto a Ω' , i.e

$$\nabla_{\Omega'}\Omega = 0.$$

Si $\{X_i\}_{i=1}^p$ es una base regularmente estable de Ω respecto a Ω' se cumple

$$\nabla_{\Omega'} X_i = 0, \quad i = 1, \dots, p.$$

Por lo tanto, cualquier subdistribución de Ω generada por cualquier subconjunto de $\{X_i\}_{i=1}^p$ es también una distribución regularmente estable respecto a Ω' .

Nota 3.1.16. Sean Ω, Ω' dos distribuciones tales que $\nabla_{\Omega'} \Omega = 0$. Al igual que en la Nota 3.1.5, si Ω'' es una subdistribución de Ω' entonces

$$\nabla_{\Omega''} \Omega = 0.$$

Por lo tanto, si Ω es regularmente estable respecto a TM entonces será regularmente estable respecto a cualquier distribución de M .

Estudiemos la relación existente entre dos bases regularmente estables de una misma p -distribución Ω :

Definición 3.1.17. Sea $\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función y Ω una distribución. Diremos que α es constante para Ω si

$$X(\alpha) = 0$$

para todo $X \in \Omega$.

Proposición 3.1.18. Sean Ω, Ω' una p -distribución y una q -distribución respectivamente, tales que $\nabla_{\Omega'} \Omega = 0$ y sea $\{X_i\}_{i=1}^p$ una base regularmente estable de Ω respecto a Ω' . Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) $\{Y_i\}_{i=1}^p$ es una base regularmente estable de Ω respecto a Ω' .

(ii) Existen funciones $\{\alpha_i^j\}_{i,j=1}^p$ tales que

- $Z(\alpha_i^j) = 0$ con $i, j = 1, \dots, p$ para todo $Z \in \Omega'$ (i.e. $\{\alpha_i^j\}_{i,j=1}^p$ son constantes para Ω').
- $\det \alpha_i^j \neq 0$.
- $Y_i = \alpha_i^j X_j$ con $i = 1, \dots, p$.

PRUEBA:

→ Como $\{Y_i\}_{i=1}^p$ es una base de Ω , existen $\{\alpha_i^j\}_{i,j=1}^p$ tales que

$$Y_i = \alpha_i^j X_j, \quad i = 1, \dots, p$$

y además

$$\det \alpha_i^j \neq 0.$$

Veamos que debido a que $\{Y_i\}_{i=1}^p$ es además base regularmente estable de Ω respecto a Ω' se tiene que $\{\alpha_i^j\}_{i,j=1}^p$ son constantes para Ω' :

Sea $Z \in \Omega'$. Entonces

$$0 = \nabla_Z Y_i = \nabla_Z (\alpha_i^j X_j) = Z (\alpha_i^j) X_j + \alpha_i^j \nabla_Z X_j, \quad i = 1, \dots, p.$$

Como $\{X_i\}_{i=1}^p$ una base regularmente estable de Ω respecto a Ω' , tenemos que $\nabla_Z X_j = 0$ para todo $j = 1, \dots, p$, y por lo tanto

$$Z (\alpha_i^j) X_j = 0, \quad i = 1, \dots, p.$$

Como $\{X_i\}_{i=1}^p$ son linealmente independientes, se tiene

$$Z (\alpha_i^j) = 0, \quad i, j = 1, \dots, p$$

y por lo tanto, como esto se puede hacer para todo $Z \in \Omega'$, tenemos que $\{\alpha_i^j\}_{i,j=1}^p$ son constantes para Ω' .

← Como $\det \alpha_i^j \neq 0$ se tiene que $\{Y_i\}_{i=1}^p$ es base de Ω .

Además, dado $Z \in \Omega'$ se tiene

$$\nabla_Z Y_i = \nabla_Z (\alpha_i^j X_j) = Z (\alpha_i^j) X_j + \alpha_i^j \nabla_Z X_j, \quad i = 1, \dots, p.$$

Como $\{\alpha_i^j\}_{i,j=1}^p$ son constantes para Ω' resulta que $Z (\alpha_i^j) = 0$ para todo $i, j = 1, \dots, p$. Además, como $\{X_i\}_{i=1}^p$ es una base regularmente estable de Ω respecto a Ω' , tenemos que $\nabla_Z X_j = 0$ para todo $j = 1, \dots, p$. Así pues

$$\nabla_Z Y_i = 0, \quad i = 1, \dots, p$$

y por lo tanto $\{Y_i\}_{i=1}^p$ es una base regularmente estable de Ω respecto a Ω' .

□

La Proposición 3.1.18 puede ser vista como unicidad de bases regularmente estables de Ω respecto a Ω' salvo constantes para Ω' .

Ejemplo 3.1.19. En el espacio-tiempo de Minkowski, dado un campo Y , los campos X tales que $\nabla_Y X = 0$ son de la forma $X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ en donde $Y(X^i) = 0$, ya que

$$\nabla_Y X = Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} = Y(X^i) \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Así pues, las p -foliaciones que son regularmente estables respecto a TM han de tener una base cuyas componentes son constantes, es decir, sus variedades integrales han de ser planos (de dimensión p). Por lo tanto, teniendo en cuenta el Capítulo 2, las foliaciones de Landau generadas por un observador geodésico son las únicas 3-foliaciones espaciales regularmente estables respecto a TM y por lo tanto serán regularmente estables respecto a cualquier distribución de M .

Proposición 3.1.20. *Sea Λ una 1-distribución no nula y Ω una distribución, tales que Λ es regularmente estable respecto a Ω :*

$$\nabla_{\Omega}\Lambda = 0.$$

Si el campo $X \in \Lambda$ cumple $g(X, X) = cte$, entonces $\{X\}$ es una base regularmente estable de Λ respecto a Ω .

PRUEBA:

Sea $Z \in \Omega$, por el Lema 2.3.6

$$Zg(X, X) = g(\nabla_Z X, X) + g(X, \nabla_Z X).$$

Como $g(X, X) = cte$ se tiene

$$0 = g(\nabla_Z X, X).$$

Ahora bien, como $\nabla_{\Omega}\Lambda = 0$, en particular que $\nabla_Z X \in \Lambda$ y por lo tanto $\nabla_Z X \propto X$. Así pues, como X es no nulo se tiene

$$\nabla_Z X = 0$$

con lo que $\{X\}$ es una base regularmente estable de Λ respecto a Ω . \square

Si $\nabla_{\Omega'}\Omega = 0$ entonces se cumple $\nabla_{\Omega'}\Omega \subset \Omega$, pero no tiene por qué cumplirse el recíproco. Sin embargo, hay casos en los que se da la equivalencia, resultando así más sencillo el estudio de las distribuciones estables. Por ejemplo, es fácil ver que esta equivalencia se da para 1-foliaciones (ó para campos):

Proposición 3.1.21. *Dadas Λ, Λ' dos 1-foliaciones, se tiene la equivalencia*

$$\nabla_{\Lambda'}\Lambda \subset \Lambda \iff \nabla_{\Lambda'}\Lambda = 0.$$

Es decir, si X, Y son campos distintos de cero (bases) de Λ, Λ' respectivamente, se tiene la equivalencia

$$\nabla_Y X \propto X \iff \nabla_Y \Lambda = 0.$$

PRUEBA:

Sólo hay que probar la condición suficiente, ya que la condición necesaria es trivial.

Por hipótesis, existe una función k tal que

$$\nabla_Y X = kX.$$

Sea f la única solución distinta de cero (salvo multiplicación por constantes para Y) de la ecuación diferencial lineal

$$Y(f) + kf = 0, \quad (3.1.1)$$

entonces

$$\nabla_Y (fX) = Y(f)X + f\nabla_Y X = (Y(f) + kf)X = 0$$

y por lo tanto

$$\nabla_{\Lambda'} \Lambda = 0.$$

□

Nota 3.1.22. La ecuación (3.1.1) puede resolverse. La solución general viene dada por

$$f = C_Y e^{-\int_Y k}$$

en donde C_Y representa el conjunto de funciones constantes para el operador diferencial Y , es decir

$$Y(C_Y) = 0,$$

y la función $\int_Y k$ es una función primitiva para Y , es decir

$$Y\left(\int_Y k\right) = k.$$

Definición 3.1.23. Sea Ω una distribución. Diremos que Ω es regularmente auto-estable si es regularmente estable respecto a sí misma, es decir

$$\nabla_{\Omega} \Omega = 0.$$

Nota 3.1.24. Si Ω es una p -distribución regularmente auto-estable (que será en realidad p -foliación, por la Nota 3.1.9), existe una base $\{X_i\}_{i=1}^p$ de Ω que cumple

$$\nabla_{X_i} X_j = 0, \quad i, j = 1, \dots, p.$$

Considerando que M tiene torsión cero resulta

$$[X_i, X_j] = \nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = 0, \quad i, j = 1, \dots, p$$

y por lo tanto los campos $\{X_i\}_{i=1}^p$ de la base conmutan entre sí.

Nota 3.1.25. Sea Ω una p -foliación regularmente auto-estable con una base regularmente auto-estable dada por los campos $\{X_i\}_{i=1}^p$. Teniendo en cuenta la Nota 3.1.15, cualquier subdistribución de Ω generada por cualquier subconjunto de $\{X_i\}_{i=1}^p$ también es una foliación regularmente auto-estable. En particular, los campos de una base regularmente auto-estable son campos geodésicos (ver Sección 3.1.3 Campos geodésicos y auto-estabilidad regular).

3.1.2. Distribuciones planas respecto a otras distribuciones y estabilidad regular

En esta Sección estudiaremos un nuevo concepto, el de distribuciones planas respecto a otras distribuciones, y lo relacionaremos con la estabilidad regular definida en la Sección 3.1.1.

Definición 3.1.26. Dadas dos distribuciones Ω, Ω' diremos que Ω' es plana respecto a Ω , y lo denotaremos

$$R(\Omega')\Omega = 0,$$

cuando

$$R(Y_1, Y_2)X = 0$$

para todo $X \in \Omega$ y para todo $Y_1, Y_2 \in \Omega'$.

Nota 3.1.27. Dadas $\{X_i\}_{i=1}^p, \{Y_i\}_{i=1}^q$ dos bases de Ω y Ω' respectivamente, exigir

$$R(Y_1, Y_2)X = 0$$

para todo $X \in \Omega$ y para todo $Y_1, Y_2 \in \Omega'$ es equivalente a exigir

$$R(Y_i, Y_j)X_k = 0, \quad \begin{cases} i, j = 1, \dots, q \\ k = 1, \dots, p \end{cases} \quad (3.1.2)$$

debido a la linealidad de la curvatura. Así pues, en una variedad plana (por ejemplo, el espacio-tiempo de Minkowski) todas las distribuciones son planas respecto a cualquier otra distribución.

Nota 3.1.28. Si la distribución Ω' es de dimensión 1, entonces Ω' es plana respecto a toda distribución Ω , ya que

$$R(Y, Y)X = 0$$

para todo $X, Y \in TM$.

Además, se puede definir también el concepto de distribuciones planas respecto a campos: Una distribución Ω' es plana respecto a un campo X , y lo denotaremos

$$R(\Omega')X = 0$$

cuando

$$R(Y_1, Y_2)X = 0$$

para todo $Y_1, Y_2 \in \Omega'$. En este caso, si Λ es la 1-distribución generada por el campo X , se tiene

$$R(\Omega')X = 0 \iff R(\Omega')\Lambda = 0.$$

Proposición 3.1.29. *Dadas dos distribuciones Ω, Ω' tales que Ω' es plana respecto a Ω*

$$R(\Omega')\Omega = 0$$

se cumple que

- *Toda subdistribución de Ω' es plana respecto a Ω .*
- *Ω' es plana respecto a cualquier subdistribución de Ω .*

En definitiva, se tiene que

- *Toda subdistribución de Ω' es plana respecto a cualquier subdistribución de Ω .*

Teniendo en cuenta el concepto de distribuciones planas respecto a otras distribuciones, se pueden estudiar condiciones para asegurar la equivalencia entre estabilidad y estabilidad regular de una distribución respecto a una foliación. En el siguiente Teorema vamos a caracterizar esta equivalencia:

Teorema 3.1.30. *Sean Ω una p -distribución y Ω' una q -foliación tales que $\nabla_{\Omega'}\Omega \subset \Omega$. Entonces*

$$\nabla_{\Omega'}\Omega = 0 \iff R(\Omega')\Omega = 0.$$

En otras palabras

$$(\nabla_{\Omega'}\Omega \subset \Omega \iff \nabla_{\Omega'}\Omega = 0) \iff R(\Omega')\Omega = 0.$$

PRUEBA:

Sean $\{X_i\}_{i=1}^p, \{Y_i\}_{i=1}^q$ dos bases de Ω y Ω' respectivamente. Por hipótesis, existen funciones $\{h_{ij}^k\}_{i=1, \dots, q}^{j,k=1, \dots, p}$ tales que

$$\nabla_{Y_i}X_j = h_{ij}^k X_k, \quad \begin{cases} i = 1, \dots, q \\ j = 1, \dots, p \end{cases} \quad (3.1.3)$$

Hay que probar la existencia de funciones $\{f_i^j\}_{i,j=1}^p$ tales que

$$\nabla_{Y_i}(f_j^k X_k) = 0, \quad \begin{cases} i = 1, \dots, q \\ j = 1, \dots, p \end{cases}, \quad (3.1.4)$$

y que además $\{f_i^j X_j\}_{i=1}^p$ genere lo mismo que $\{X_i\}_{i=1}^p$, es decir, que $\{f_i^j X_j\}_{i=1}^p$ sea otra base de Ω . Planteando las ecuaciones para $\{f^j\}_{j=1}^p$ se tiene

$$\nabla_{Y_i} (f^j X_j) = 0 \implies Y_i (f^j) X_j + f^j \nabla_{Y_i} X_j = 0, \quad i = 1, \dots, q$$

y aplicando (3.1.3)

$$Y_i (f^j) X_j + f^j h_{ij}^k X_k = 0, \quad i = 1, \dots, q.$$

Cambiando la notación de los índices mudos y sacando factor común a X_j obtenemos

$$\left(Y_i (f^j) + f^k h_{ik}^j \right) X_j = 0, \quad i = 1, \dots, q.$$

Ahora bien, como $\{X_i\}_{i=1}^p$ es una base de Ω resulta que sus campos son linealmente independientes, y por lo tanto

$$Y_i (f^j) + f^k h_{ik}^j = 0, \quad \begin{cases} i = 1, \dots, q \\ j = 1, \dots, p \end{cases}. \quad (3.1.5)$$

- Caso $q = 1$: El sistema (3.1.5) es un sistema lineal homogéneo de primer orden de p ecuaciones diferenciales con p incógnitas, en donde sólo aparece el operador diferencial Y_1 . Las soluciones de este sistema tienen la forma

$$f^j = C^i g_i^j, \quad j = 1, \dots, p$$

en donde $\{C^i\}_{i=1}^p$ son funciones parámetro constantes para el operador Y_1 (es decir, $Y_1 (C^i) = 0$ para $i = 1, \dots, p$) y $\{g_i^j\}_{i,j=1}^p$ son funciones tales que

$$\det g_i^j \neq 0. \quad (3.1.6)$$

Por lo tanto, si llamamos

$$f_i^j = g_i^j, \quad i, j = 1, \dots, p$$

tenemos que

$$\nabla_{Y_1} \left(f_i^j X_j \right) = 0, \quad i = 1, \dots, p$$

y por lo tanto se cumple (3.1.4). Además, por (3.1.6) se cumple que $\{f_i^j X_j\}_{i=1}^p$ genera lo mismo que $\{X_i\}_{i=1}^p$.

- Caso $q > 1$: El sistema (3.1.5) está formado por q sistemas lineales homogéneos de primer orden de p ecuaciones diferenciales con p incógnitas cada uno, en donde en cada sistema aparece un operador

diferencial Y_i para $i = 1, \dots, q$. Como los q sistemas comparten las funciones incógnita, para que haya solución es suficiente y necesario que se cumplan unas condiciones de compatibilidad entre dichos sistemas. Estas condiciones de compatibilidad se construyen aplicando Y_l a cada ecuación, con $l = 1, \dots, q$. Es decir

$$Y_l \left(Y_i (f^j) + f^k h_{ik}^j \right) = 0, \quad \begin{cases} i, l = 1, \dots, q \\ j = 1, \dots, p \end{cases}$$

en donde $l \neq i$, y por lo tanto se puede expresar en 2 bloques de condiciones

$$Y_l (Y_i (f^j)) + Y_l (f^k) h_{ik}^j + f^k Y_l (h_{ik}^j) = 0, \quad \begin{cases} i = 2, \dots, q \\ l = 1, \dots, i - 1 \\ j = 1, \dots, p \end{cases}$$

$$Y_l (Y_i (f^j)) + Y_l (f^k) h_{ik}^j + f^k Y_l (h_{ik}^j) = 0, \quad \begin{cases} i = 1, \dots, q - 1 \\ l = i + 1, \dots, q \\ j = 1, \dots, p \end{cases} .$$

Si cambiamos la notación de índices del segundo bloque de condiciones obtenemos

$$\begin{cases} Y_l (Y_i (f^j)) + Y_l (f^k) h_{ik}^j + f^k Y_l (h_{ik}^j) = 0 \\ Y_i (Y_l (f^j)) + Y_i (f^k) h_{lk}^j + f^k Y_i (h_{lk}^j) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} i = 2, \dots, q \\ l = 1, \dots, i - 1 \\ j = 1, \dots, p \end{cases} .$$

Dados $\begin{cases} i = 2, \dots, q \\ l = 1, \dots, i - 1 \\ j = 1, \dots, p \end{cases}$ restamos las ecuaciones del primer bloque a las del segundo bloque, obteniendo

$$0 = Y_i (Y_l (f^j)) + Y_i (f^k) h_{lk}^j + f^k Y_i (h_{lk}^j) - \left(Y_l (Y_i (f^j)) + Y_l (f^k) h_{ik}^j + f^k Y_l (h_{ik}^j) \right). \quad (3.1.7)$$

Ahora bien, como por hipótesis Ω' es foliación, entonces existen funciones $\{\alpha_{il}^r\}_{i,l,r=1}^q$ tales que

$$[Y_i, Y_l] = Y_i Y_l - Y_l Y_i = \alpha_{il}^r Y_r, \quad i, l = 1, \dots, q. \quad (3.1.8)$$

Aplicando (3.1.8) a (3.1.7) obtenemos

$$0 = \alpha_{il}^r Y_r (f^j) + Y_i (f^k) h_{lk}^j + f^k Y_i (h_{lk}^j) - Y_l (f^k) h_{ik}^j - f^k Y_l (h_{ik}^j), \quad \begin{cases} i = 2, \dots, q \\ l = 1, \dots, i - 1 \\ j = 1, \dots, p \end{cases} ,$$

pero teniendo en cuenta (3.1.5)

$$0 = -\alpha_{il}^r f^k h_{rk}^j - f^r h_{ir}^k h_{lk}^j + f^k Y_i \left(h_{lk}^j \right) + f^r h_{lr}^k h_{ik}^j - f^k Y_l \left(h_{ik}^j \right), \begin{cases} i = 2, \dots, q \\ l = 1, \dots, i-1 \\ j = 1, \dots, p \end{cases} .$$

Si cambiamos la notación de los índices mudos y sacamos factor común a f^k obtenemos

$$0 = \left(-\alpha_{il}^r h_{rk}^j - h_{ik}^r h_{lr}^j + Y_i \left(h_{lk}^j \right) + h_{lk}^r h_{ir}^j - Y_l \left(h_{ik}^j \right) \right) f^k, \begin{cases} i = 2, \dots, q \\ l = 1, \dots, i-1 \\ j = 1, \dots, p \end{cases} .$$

Ahora bien, f^k es cualquier familia de soluciones distintas de cero del sistema y si hay solución existen soluciones linealmente independientes y por lo tanto obtenemos

$$0 = -\alpha_{il}^r h_{rk}^j - h_{ik}^r h_{lr}^j + Y_i \left(h_{lk}^j \right) + h_{lk}^r h_{ir}^j - Y_l \left(h_{ik}^j \right), \begin{cases} i = 2, \dots, q \\ l = 1, \dots, i-1 \\ j = 1, \dots, p \end{cases} . \quad (3.1.9)$$

Así pues, (3.1.9) son las condiciones de compatibilidad del sistema (3.1.5). Veamos que estas condiciones son equivalentes a exigir

$$R(Y_i, Y_l) X_j = 0, \quad \begin{cases} i, l = 1, \dots, q \\ j = 1, \dots, p \end{cases} . \quad (3.1.10)$$

Tenemos

$$0 = R(Y_i, Y_l) X_j = \nabla_{Y_i} \nabla_{Y_l} X_j - \nabla_{Y_l} \nabla_{Y_i} X_j - \nabla_{[Y_i, Y_l]} X_j, \quad \begin{cases} i, l = 1, \dots, q \\ j = 1, \dots, p \end{cases} .$$

Aplicando (3.1.3) y (3.1.8) obtenemos

$$0 = \nabla_{Y_i} (h_{lj}^k X_k) - \nabla_{Y_l} (h_{ij}^k X_k) - \alpha_{il}^r \nabla_{Y_r} X_j, \quad \begin{cases} i, l = 1, \dots, q \\ j = 1, \dots, p \end{cases}$$

y por lo tanto

$$0 = Y_i (h_{lj}^k) X_k + h_{lj}^k \nabla_{Y_i} (X_k) - Y_l (h_{ij}^k) X_k - h_{ij}^k \nabla_{Y_l} (X_k) - \alpha_{il}^r h_{rj}^k X_k, \quad \begin{cases} i, l = 1, \dots, q \\ j = 1, \dots, p \end{cases}$$

con lo que, aplicando de nuevo (3.1.3) obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= Y_i (h_{lj}^k) X_k + h_{lj}^k h_{ik}^r X_r \\ &\quad - Y_l (h_{ij}^k) X_k - h_{ij}^k h_{lk}^r X_r - \alpha_{il}^r h_{rj}^k X_k, \quad \begin{cases} i, l = 1, \dots, q \\ j = 1, \dots, p \end{cases} . \end{aligned}$$

Cambiando la notación de los índices mudos y sacando factor común a X_k obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= (Y_i (h_{lj}^k) + h_{lj}^r h_{ir}^k \\ &\quad - Y_l (h_{ij}^k) - h_{ij}^r h_{lr}^k - \alpha_{il}^r h_{rj}^k) X_k, \quad \begin{cases} i, l = 1, \dots, q \\ j = 1, \dots, p \end{cases} \end{aligned}$$

y como $\{X_k\}_{k=1}^p$ son linealmente independientes obtenemos

$$0 = Y_i (h_{lj}^k) + h_{lj}^r h_{ir}^k - Y_l (h_{ij}^k) - h_{ij}^r h_{lr}^k - \alpha_{il}^r h_{rj}^k, \quad \begin{cases} i, l = 1, \dots, q \\ j = 1, \dots, p \end{cases} . \quad (3.1.11)$$

Como las expresiones (3.1.11) y (3.1.9) son la misma, tras un cambio en la notación de índices mudos, las condiciones (3.1.10) son equivalentes a las condiciones de compatibilidad (3.1.9) del sistema (3.1.5). Si estas condiciones se cumplen, entonces, al igual que en el caso $q = 1$, las soluciones de (3.1.5) tienen la forma

$$f^j = C^i g_i^j, \quad j = 1, \dots, p$$

en donde $\{C^i\}_{i=1}^p$ son funciones parámetro constantes para los operadores $\{Y_k\}_{k=1}^q$ (es decir, $Y_k (C^i) = 0$ para $i = 1, \dots, p$ y para $k = 1, \dots, q$) y $\{g_i^j\}_{i,j=1}^p$ son funciones tales que

$$\det g_i^j \neq 0. \quad (3.1.12)$$

Por lo tanto, si llamamos

$$f_i^j = g_i^j, \quad i, j = 1, \dots, p$$

tenemos que (3.1.4) se cumple y además, por (3.1.12) se cumple que $\{f_i^j X_j\}_{i=1}^p$ genera lo mismo que $\{X_i\}_{i=1}^p$.

□

Corolario 3.1.31. *En una variedad plana, dada Ω una p -distribución y Ω' una q -foliación se tiene la equivalencia*

$$\nabla_{\Omega'} \Omega \subset \Omega \iff \nabla_{\Omega'} \Omega = 0.$$

PRUEBA:

Aplicar el Teorema 3.1.30 teniendo en cuenta que en una variedad plana se tiene

$$R(X, Y) \equiv 0, \quad \forall X, Y \in \Omega'.$$

□

Corolario 3.1.32. *Dada Λ una 1-foliación y Ω una p -distribución, se tiene la equivalencia*

$$\nabla_{\Lambda}\Omega \subset \Omega \iff \nabla_{\Lambda}\Omega = 0.$$

Es decir, si Y es un campo distinto de cero (base) de Λ , se tiene la equivalencia

$$\nabla_Y\Omega \subset \Omega \iff \nabla_Y\Omega = 0$$

y por lo tanto, existe una base de Ω regularmente estable respecto a Y .

PRUEBA:

Aplicar el Teorema 3.1.30 teniendo en cuenta que

$$R(Y, Y) = \nabla_Y\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_Y - \nabla_{[Y, Y]} \equiv 0, \quad \forall Y \in \Lambda.$$

□

Teniendo en cuenta la Proposición 3.1.29:

Corolario 3.1.33. *Dadas dos distribuciones Ω, Ω' tales que Ω' es plana respecto a Ω*

$$R(\Omega')\Omega = 0,$$

se tiene que cualquier subdistribución de estable respecto a Ω' es además regularmente estable respecto a Ω' .

Nota 3.1.34. *Según la Nota 3.1.4, TM es estable respecto a cualquier distribución. Por lo tanto, dada una foliación Ω , por el Teorema 3.1.30 se tendrá*

$$\nabla_{\Omega}TM = 0 \iff R(X, Y) \equiv 0, \quad \forall X, Y \in \Omega.$$

Así pues, TM es regularmente estable respecto a Ω si y sólo si la curvatura en Ω es cero, i.e. si Ω es una foliación plana. Por lo tanto, la afirmación “ Ω es plana respecto a TM ” es equivalente a “ Ω es plana”.

Nota 3.1.35. *Además, dado un campo Y , se tendrá que TM es regularmente estable respecto a Y*

$$\nabla_Y TM = 0$$

y por lo tanto existirá una base $\{X_i\}_{i=1}^n$ de TM tal que

$$\nabla_Y X_i = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Ejemplo 3.1.36. Ahora estudiaremos un caso particular del Teorema 3.1.30, en donde $p = 1$. En este caso, si $\Omega = \langle X \rangle$ se puede hallar explícitamente la solución del sistema (3.1.5) dándose así una demostración constructiva de cómo obtener una base regularmente estable de Ω respecto a Ω' a partir de X (i.e. a partir de una base cualquiera de Ω). En este caso particular, se tiene que existen funciones $\{h_i\}_{i=1}^q$ tales que

$$\nabla_{Y_i} X = h_i X, \quad i = 1, \dots, q$$

y por lo tanto, el sistema (3.1.5) es de la forma

$$Y_i(f) + fh_i = 0, \quad i = 1, \dots, q. \quad (3.1.13)$$

Al ser Ω' foliación resulta que los campos $\{Y_i\}_{i=1}^q$ que generan Ω' son involutivos, y por lo tanto existen funciones $\{\alpha_{il}^r\}_{i,l,r=1}^q$ tales que

$$[Y_i, Y_l] = Y_i Y_l - Y_l Y_i = \alpha_{il}^r Y_r, \quad i, l = 1, \dots, q.$$

Teniendo en cuenta la expresión (3.1.9), las condiciones de compatibilidad del sistema (3.1.13) son

$$0 = -\alpha_{il}^r h_r - h_i h_l + Y_i(h_l) + h_l h_i - Y_l(h_i), \quad \begin{cases} i = 2, \dots, q \\ l = 1, \dots, i-1 \end{cases},$$

es decir

$$Y_i(h_l) - Y_l(h_i) = \alpha_{il}^r h_r, \quad \begin{cases} i = 2, \dots, q \\ l = 1, \dots, i-1 \end{cases}.$$

Esto es equivalente a que exista una función potencial F tal que

$$h_i = Y_i(F), \quad i = 1, \dots, q$$

y por lo tanto, la solución general de (3.1.13) es de la forma

$$f = C e^{-F}$$

en donde C es una función constante para los operadores diferenciales $\{Y_i\}_{i=1}^q$ (i.e. $Y_i(C) = 0$ para $i = 1, \dots, q$). Así pues, $e^{-F} X$ es una base regularmente estable de Ω respecto a Ω' .

Definición 3.1.37. Sea Ω una distribución. Diremos que Ω es autoplana sii es plana respecto a sí misma, es decir

$$R(\Omega)\Omega = 0.$$

Nota 3.1.38. No es lo mismo foliación plana que foliación autoplana:

- Ω es una foliación plana sii

$$\bar{R}(\Omega)\Omega = 0$$

en donde \bar{R} es el tensor curvatura de la métrica \bar{g} inducida en Ω

- Ω es foliación autoplana sii

$$R(\Omega)\Omega = 0$$

en donde R es el tensor curvatura de g restringido a campos de Ω .

Por ejemplo, en un espacio-tiempo plano, toda foliación es autoplana (por la Proposición 3.1.29) pero no tiene por qué ser plana (en el espacio-tiempo de Minkowski, la esfera es autoplana pero obviamente no es plana).

Pero si Ω cumple la Ley de Movimiento (i.e. es auto-estable) entonces

$$\overline{R} \equiv R$$

y viceversa. Así pues, si Ω es auto-estable entonces es plana si y sólo si es autoplana.

En un espacio-tiempo plano, si Ω es plana, entonces, como también es autoplana resulta que es auto-estable. En cambio, en un espacio-tiempo no plano, Ω puede ser plana y no ser autoplana (i.e. no es auto-estable).

Según el Teorema 3.1.30, una distribución auto-estable será regularmente auto-estable si y sólo si es autoplana. No obstante, pueden existir distribuciones autoplanas que por no ser auto-estables tampoco son regularmente auto-estables.

Nota 3.1.39. Para que TM sea una foliación regularmente auto-estable, aplicando el Teorema 3.1.30, ha de existir una base $\{X_i\}_{i=1}^m$ de TM tal que

$$R(X_i, X_j)X_k = 0, \quad i, j, k = 1, \dots, m.$$

Por linealidad de la curvatura, exigir esta condición es equivalente a exigir

$$R(X, Y)Z = 0$$

para todo campo $X, Y, Z \in TM$. Por lo tanto, TM será una foliación regularmente auto-estable si y sólo si el tensor curvatura es cero en M , i.e. si M es una variedad plana.

Sin embargo, esto se puede ver sin recurrir al Teorema 3.1.30 de la siguiente forma: Para que TM sea una foliación regularmente auto-estable, por definición, ha de existir una base $\{X_i\}_{i=1}^m$ de TM tal que

$$\nabla_{X_i}X_j = 0, \quad i, j = 1, \dots, m.$$

Como los símbolos de Christoffel para la base $\{X_i\}_{i=1}^m$ se definen

$$\nabla_{X_i}X_j = \Gamma_{ij}^k X_k, \quad i, j = 1, \dots, m,$$

entonces se tiene

$$\Gamma_{ij}^k = 0, \quad i, j = 1, \dots, m$$

y por lo tanto M es una variedad plana.

Por lo tanto, la afirmación “ TM es autoplana” es equivalente a “ M es plana”.

A continuación, veremos un Corolario de la Proposición 3.1.29

Corolario 3.1.40. *Dada Ω distribución autoplana, cualquier subdistribución de Ω también es autoplana.*

Además, teniendo en cuenta el Teorema 3.1.30:

Corolario 3.1.41. *Dada Ω distribución autoplana, cualquier subdistribución auto-estable de Ω es además regularmente auto-estable.*

Interpretación física y geométrica de la auto-estabilidad regular:

Sea Ω una p -foliación regularmente auto-estable. Aplicando el Teorema 3.1.30, se tiene que Ω es auto-estable y autoplana, con lo que también es plana.

- Por ser auto-estable se tiene que cada hoja tiene estructura de subvariedad diferenciable con la métrica inducida:
 - Si Ω es espacial, la métrica inducida es definida positiva y por lo tanto es Riemanniana.
 - Si Ω es temporal, la métrica inducida es Lorentziana.
 - Si Ω es nula, la métrica inducida es definida positiva pero degenerada.
- Por ser autoplana se tiene que cada hoja (subvariedad diferenciable) con la métrica inducida es plana:
 - Si Ω es espacial, la métrica inducida es Riemanniana plana y por lo tanto es una métrica euclídea.
 - Si Ω es temporal, la métrica inducida es Lorentziana plana y por lo tanto es la métrica de Minkowski.
 - Si Ω es nula, la métrica inducida es definida positiva degenerada plana (euclídea degenerada).

Por lo tanto, la auto-estabilidad regular es una Ley de Movimiento para foliaciones planas.

Además, existen bases $\{X_i\}_{i=1}^p$ (ya caracterizadas en la Proposición 3.1.18) de Ω para las que $\nabla_X X_i = 0$ para todo $X \in \Omega$ y para $i = 1, \dots, p$, es decir, los campos de estas bases se trasladan paralelamente a lo largo de cualquier curva contenida en las variedades integrales de Ω .

En el caso en el que Ω es una 3-foliación regularmente auto-estable nula con una base adaptada dada por $\{X_1, X_2, X_3\}$, podemos suponer que X_1, X_2 son espaciales y que X_3 es nulo. Dada una línea de universo de un observador U , los “frentes de onda” de Ω relativos a U son las hojas

de la intersección de Ω con la foliación de Landau \mathcal{L}_U asociada a U (ver Capítulo 2). Podemos asumir entonces que existe una línea de universo de un observador U tal que los frentes de onda de Ω relativos a U son las hojas de la foliación $\langle X_1, X_2 \rangle$:

$$\Omega \cap \mathcal{L}_U = \langle X_1, X_2 \rangle.$$

Como $\{X_1, X_2\}$ es también una base regularmente auto-estable, las hojas de $\langle X_1, X_2 \rangle$ son totalmente geodésicas y planas. Así pues, U observa los frentes de onda de Ω como 2-planos espaciales totalmente geodésicos (y planos) que se mueven en la dirección relativa de X_3 (i.e. X_3 proyectado en las hojas de \mathcal{L}_U) a la velocidad de la luz. Pero no podemos asegurar en general que los frentes de onda de Ω relativos a cualquier observador sean 2-planos totalmente geodésicos.

3.1.3. Campos geodésicos y auto-estabilidad regular

Los campos geodésicos son aquellos campos X que cumplen

$$\nabla_X X = 0,$$

por lo tanto, si Λ es una 1-foliación generada por un campo geodésico X , se cumplirá que Λ es regularmente auto-estable y además se tendrá que $\{X\}$ es una base regularmente auto-estable de Λ . Entonces, por la Proposición 3.1.21 (o por el Teorema 3.1.30), Λ es auto-estable sii Λ es regularmente auto-estable y se puede formular con campos de la forma siguiente: Un campo X es auto-estable sii existe una función $\alpha \neq 0$ tal que αX es un campo geodésico.

Veremos un Corolario de la Proposición 3.1.20:

Corolario 3.1.42. *Sea X un campo no nulo auto-estable tal que se cumpla $g(X, X) = cte$. Entonces X es geodésico.*

Otra forma de enunciarlo sería:

Corolario 3.1.43. *Sea Λ una 1-distribución no nula regularmente auto-estable y sea $X \in \Lambda$ un campo tal que $g(X, X) = cte$. Entonces X es geodésico y $\{X\}$ es una base regularmente auto-estable de Λ .*

Nota 3.1.44. *Si Ω es una p -distribución regularmente auto-estable*

$$\nabla_\Omega \Omega = 0$$

y $\{X_i\}_{i=1}^p$ es una base regularmente auto-estable de Ω . En particular, esta base cumple

$$\nabla_{X_i} X_i = 0, \quad i = 1, \dots, p$$

con lo que los campos $\{X_i\}_{i=1}^p$ de la base son campos geodésicos.

Además, como se dijo en la Nota 3.1.24, los campos $\{X_i\}_{i=1}^p$ de la base regularmente auto-estable conmutan entre sí.

Es conocido que en cualquier espacio-tiempo (variedad) M , dado un punto, existe un entorno de éste en el que hay definida una base de campos geodésicos. Este resultado local se puede extender de forma global con las bases regularmente auto-estables, ya que estas bases están compuestas por campos geodésicos y están definidas en todo el dominio de la foliación Ω que generan. No obstante, una base regularmente auto-estable es una base de la foliación Ω y por lo tanto tiene la misma dimensión que esta foliación, que en general, va a ser menor que la dimensión del espacio-tiempo (variedad) M . Sólo en el caso en el que TM sea regularmente auto-estable, podremos afirmar que existe una base global de campos geodésicos (que será una base regularmente auto-estable de TM). Pero como ya se ha visto en la Sección 3.1.2, esto implicaría que M es una variedad plana.

3.2. Subvariedades estables

Aunque hasta ahora sólo hayamos trabajado con distribuciones, todas las definiciones anteriores pueden hacerse con subvariedades. En esta Sección se definirán los conceptos relacionados con la estabilidad para subvariedades anteriormente introducidos para distribuciones, y se comprobará la compatibilidad de las nuevas definiciones con las anteriores de la Sección 3.1 teniendo en cuenta que las hojas de una foliación son subvariedades. No obstante, debido al paralelismo entre las dos Secciones (3.1 y 3.2), la mayoría de propiedades se estudiarán brevemente. En lo referente a la notación, ∇ denotará tanto a la conexión de M como a la restricción de ∇ a una subvariedad y lo mismo sucederá con el tensor curvatura R . Además, un campo $X \in TN$ es un campo solamente definido en N tal que $X_p \in T_pN$ para todo $p \in N$, y una distribución $\Omega \subset TN$ es una distribución solamente definida en N tal que $\Omega(p) \subset T_pN$ para todo $p \in N$.

Definición 3.2.1. *Dada una subvariedad N y un campo X distinto de cero, diremos que X es estable respecto a N , y lo denotaremos*

$$\nabla_{TN}X \propto X$$

cuando

$$\nabla_YX \propto X$$

para todo $Y \in TN$.

Dada una subvariedad N y una distribución Ω , diremos que Ω es estable respecto a N , y lo denotaremos

$$\nabla_{TN}\Omega \subset \Omega$$

cuando

$$\nabla_YX \in \Omega$$

para todo $Y \in TN$ y para todo $X \in \Omega$.

El concepto de distribuciones estables respecto a subvariedades generaliza el concepto de campos estables respecto a subvariedades si consideramos los campos como bases de distribuciones de dimensión 1. Es decir, dada una subvariedad N y un campo X distinto de cero, si Λ es la 1-distribución generada por X , entonces la estabilidad de X respecto a N equivale a la estabilidad de Λ respecto a N :

$$\nabla_{TN}X \propto X \equiv \nabla_{TN}\Lambda \subset \Lambda.$$

Además, esta definición es compatible con la de distribuciones estables: Una distribución Ω es estable respecto a una foliación Ω' sii Ω es estable respecto a cada hoja de Ω' , consideradas como subvariedades. Así pues, las Definiciones 3.1.1 y 3.2.1 son compatibles.

Nota 3.2.2. Dadas $\{X_i\}_{i=1}^p, \{Y_j\}_{j=1}^{p'}$ dos bases de Ω y TN respectivamente, basta comprobar

$$\nabla_{Y_j}X_i \in \Omega, \quad \begin{cases} i = 1, \dots, p \\ j = 1, \dots, p' \end{cases}.$$

Nota 3.2.3. Sean N una subvariedad y Ω una distribución tales que $\nabla_{TN}\Omega \subset \Omega$. Si N' es una subvariedad contenida en N entonces

$$\nabla_{TN'}\Omega \subset \Omega.$$

Proposición 3.2.4. Dada una subvariedad N y una distribución Ω , se tiene que Ω es estable respecto a N sii Ω^\perp es estable respecto a N :

$$\nabla_{TN}\Omega \subset \Omega \iff \nabla_{TN}\Omega^\perp \subset \Omega^\perp.$$

Definición 3.2.5. Dada una subvariedad N y un campo $Y \in TN$ distinto de cero, diremos que N es estable respecto a Y , y lo denotaremos

$$\nabla_Y TN \subset TN$$

cuando

$$\nabla_Y X \subset TN$$

para todo $X \in TN$.

Dada una subvariedad N y una distribución $\Omega \subset TN$, diremos que N es estable respecto a Ω , y lo denotaremos

$$\nabla_\Omega TN \subset TN$$

cuando

$$\nabla_Y X \subset TN$$

para todo $X \in TN$ y para todo $Y \in \Omega$.

El concepto de subvariedades estables respecto a distribuciones generaliza el concepto de subvariedades estables respecto a campos si consideramos los campos como bases de distribuciones de dimensión 1. Es decir, dada una subvariedad N y un campo $Y \in TN$ distinto de cero, si $\Lambda \subset TN$ es la 1-distribución generada por Y , entonces la estabilidad de N respecto a Y equivale a la estabilidad de N respecto a Λ :

$$\nabla_Y TN \subset TN \equiv \nabla_\Lambda TN \subset TN.$$

Nota 3.2.6. Dadas $\{X_i\}_{i=1}^p, \{Y_j\}_{j=1}^{p'}$ dos bases de TN y Ω respectivamente, basta comprobar

$$\nabla_{Y_j} X_i \in \Omega, \quad \begin{cases} i = 1, \dots, p \\ j = 1, \dots, p' \end{cases}.$$

Esta clase de estabilidad implica que la dimensión de Ω no puede ser mayor que la de N , ya que se necesita $\Omega \subset TN$.

Definición 3.2.7. Sea N una subvariedad. Diremos que N es auto-estable, sii N es estable respecto a TN (o lo que es lo mismo, TN es estable respecto a N), es decir

$$\nabla_{TN} TN \subset TN.$$

Una subvariedad auto-estable también recibe el nombre de totalmente geodésica.

Esta definición es compatible con la de foliaciones auto-estables: Una foliación es auto-estable sii cada hoja, considerada como subvariedad, es auto-estable. Así pues, las Definiciones 3.1.8 y 3.2.7 son compatibles.

Definición 3.2.8. Dada una subvariedad N y un campo X , diremos que X es regularmente estable respecto a N cuando exista una función α tal que

$$\nabla_{TN} (\alpha X) = 0,$$

es decir

$$\nabla_Y (\alpha X) = 0$$

para todo $Y \in TN$.

Dada una subvariedad N y una distribución Ω , diremos que Ω es regularmente estable respecto a N , y lo denotaremos

$$\nabla_{TN} \Omega = 0$$

cuando exista una base $\{X_i\}_{i=1}^p$ de Ω tal que

$$\nabla_{TN} X_i = 0, \quad i = 1, \dots, p,$$

es decir

$$\nabla_Y X_i = 0, \quad i = 1, \dots, p$$

para todo $Y \in TN$.

En este caso diremos que la base $\{X_i\}_{i=1}^p$ de Ω es regularmente estable respecto a N .

El concepto de distribuciones regularmente estables respecto a subvariedades generaliza el concepto de campos regularmente estables respecto a subvariedades si consideramos los campos como bases de distribuciones de dimensión 1. Es decir, dada una subvariedad N y un campo X distinto de cero, si Λ es la 1-distribución generada por X , entonces la estabilidad regular de X respecto a N equivale a la estabilidad regular de Λ respecto a N :

$$\nabla_{TN}(\alpha X) = 0 \equiv \nabla_{TN}\Lambda = 0.$$

Además, esta definición es compatible con la de distribuciones regularmente estables: Una distribución Ω es regularmente estable respecto a una foliación Ω' sii Ω es regularmente estable respecto a cada hoja de Ω' , consideradas como subvariedades. Así pues, las Definiciones 3.1.13 y 3.2.8 son compatibles.

Nota 3.2.9. Dada $\{Y_j\}_{j=1}^{p'}$ una base de TN , basta comprobar

$$\nabla_{Y_j} X_i \in \Omega, \quad \begin{cases} i = 1, \dots, p \\ j = 1, \dots, p' \end{cases}$$

en donde $\{X_i\}_{i=1}^p$ es una base de Ω regularmente estable respecto a N .

Nota 3.2.10. Sean N una subvariedad y Ω una p -distribución tales que Ω es regularmente estable respecto a N , i.e

$$\nabla_{TN}\Omega = 0.$$

Si $\{X_i\}_{i=1}^p$ es una base regularmente estable de Ω respecto a N se cumple

$$\nabla_{TN}X_i = 0, \quad i = 1, \dots, p.$$

Por lo tanto, cualquier subdistribución de Ω generada por cualquier subconjunto de $\{X_i\}_{i=1}^p$ es también una distribución regularmente estable respecto a N .

Nota 3.2.11. Sean N una subvariedad y Ω una distribución tales que $\nabla_{TN}\Omega = 0$. Al igual que en la Nota 3.2.3, si N' es una subvariedad contenida en N entonces

$$\nabla_{TN'}\Omega = 0.$$

A continuación veremos una Proposición equivalente a la Proposición 3.1.18 dada en la Sección de distribuciones estables, acerca de la unicidad salvo constantes de bases regularmente estables, cuya demostración es análoga:

Proposición 3.2.12. Sean N una subvariedad y Ω una p -distribución tales que $\nabla_{TN}\Omega = 0$ y sea $\{X_i\}_{i=1}^p$ una base regularmente estable de Ω respecto a N . Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (i) $\{Y_i\}_{i=1}^p$ es una base regularmente estable de Ω respecto a N .
- (ii) Existen funciones $\{\alpha_i^j\}_{i,j=1}^p$ tales que
 - $Z(\alpha_i^j) = 0$ con $i, j = 1, \dots, p$ para todo $Z \in TN$ (i.e. $\{\alpha_i^j\}_{i,j=1}^p$ son constantes en N).
 - $\det \alpha_i^j \neq 0$.
 - $Y_i = \alpha_i^j X_j$ con $i = 1, \dots, p$.

También tenemos que las Proposiciones 3.1.18 y 3.2.12 son compatibles.

Proposición 3.2.13. Sea Λ una 1-distribución no nula y N una subvariedad, tales que Λ es regularmente estable respecto a N :

$$\nabla_{TN}\Lambda = 0.$$

Si el campo $X \in \Lambda$ cumple $g(X, X) = \text{cte}$ en N , entonces $\{X\}$ es una base regularmente estable de Λ respecto a N .

Definición 3.2.14. Dada una subvariedad N y un campo $Y \in TN$, diremos que N es regularmente estable respecto a Y , y lo denotaremos

$$\nabla_Y TN = 0$$

cuando exista una base $\{X_i\}_{i=1}^p$ de TN tal que

$$\nabla_Y X_i = 0, \quad i = 1, \dots, p,$$

Dada una subvariedad N y una distribución $\Omega \subset TN$, diremos que N es regularmente estable respecto a Ω , y lo denotaremos

$$\nabla_\Omega TN = 0$$

cuando exista una base $\{X_i\}_{i=1}^p$ de TN tal que

$$\nabla_\Omega X_i = 0, \quad i = 1, \dots, p,$$

es decir

$$\nabla_Y X_i = 0, \quad i = 1, \dots, p$$

para todo $Y \in \Omega$.

En este caso diremos que la base $\{X_i\}_{i=1}^p$ de TN es regularmente estable respecto a Ω .

El concepto de subvariedades regularmente estables respecto a distribuciones generaliza el concepto de subvariedades regularmente estables respecto a campos si consideramos los campos como bases de distribuciones de dimensión 1. Es decir, dada una subvariedad N y un campo $Y \in TN$ distinto de cero, si $\Lambda \subset TN$ es la 1-distribución generada por Y , entonces la estabilidad regular de N respecto a Y equivale a la estabilidad regular de N respecto a Λ :

$$\nabla_Y TN = 0 \equiv \nabla_\Lambda TN = 0.$$

Nota 3.2.15. Dada $\{Y_j\}_{j=1}^{p'}$ base de Ω , basta comprobar

$$\nabla_{Y_j} X_i \in \Omega, \quad \begin{cases} i = 1, \dots, p \\ j = 1, \dots, p' \end{cases}$$

en donde $\{X_i\}_{i=1}^p$ es una base de TN regularmente estable respecto a Ω .

Esta clase de estabilidad implica que la dimensión de Ω no puede ser mayor que la de N , ya que necesito $\Omega \subset TN$.

Definición 3.2.16. Dada una subvariedad N y una distribución Ω diremos que N es plana respecto a Ω , y lo denotaremos

$$R(TN)\Omega = 0,$$

cuando

$$R(Y_1, Y_2)X = 0$$

para todo $X \in \Omega$ y para todo $Y_1, Y_2 \in TN$.

Esta definición es compatible con la de distribuciones planas: Una foliación Ω es plana respecto a una distribución Ω' sii cada hoja de Ω considerada como subvariedad es plana respecto a Ω' . Así pues, las Definiciones 3.1.26 y 3.2.16 son compatibles.

Definición 3.2.17. Dada una subvariedad N y una distribución $\Omega \subset TN$ diremos que Ω es plana respecto a N , y lo denotaremos

$$R(\Omega)TN = 0,$$

cuando

$$R(Y_1, Y_2)X = 0$$

para todo $X \in TN$ y para todo $Y_1, Y_2 \in \Omega$.

Se pueden formular teoremas equivalentes al Teorema 3.1.30 en subvariedades:

Vicente José Bolós Lacave

Teorema 3.2.18. Sean N una subvariedad y Ω una distribución tales que $\nabla_{TN}\Omega \subset \Omega$. Entonces

$$\nabla_{TN}\Omega = 0 \iff R(TN)\Omega = 0.$$

En otras palabras

$$(\nabla_{TN}\Omega \subset \Omega \iff \nabla_{TN}\Omega = 0) \iff R(TN)\Omega = 0.$$

Teorema 3.2.19. Sean N una subvariedad y $\Omega \subset TN$ una distribución tales que $\nabla_{\Omega}TN \subset TN$. Entonces

$$\nabla_{\Omega}TN = 0 \iff R(\Omega)TN = 0.$$

En otras palabras

$$(\nabla_{\Omega}TN \subset TN \iff \nabla_{\Omega}TN = 0) \iff R(\Omega)TN = 0.$$

Definición 3.2.20. Sea N una subvariedad. Diremos que N es regularmente auto-estable si es regularmente estable respecto a sí misma, es decir

$$\nabla_{TN}TN = 0.$$

Las Definiciones 3.1.23 y 3.2.20 son compatibles. Además, esta característica para una subvariedad es más fuerte que la de ser totalmente geodésica.

Definición 3.2.21. Sea N una subvariedad. Diremos que N es autoplana si es plana respecto a sí misma, es decir

$$R(TN)TN = 0.$$

Se cumple que las Definiciones 3.1.37 y 3.2.21 son compatibles. Además, según el Teorema 3.2.19, una subvariedad auto-estable (caso $\Omega = TN$) será regularmente auto-estable si y sólo si es autoplana. No obstante, pueden existir subvariedades autoplanas que por no ser auto-estables tampoco son regularmente auto-estables.

3.3. Relaciones de estabilidad entre Ω y Ω_U^-

En esta Sección vamos a estudiar diferentes relaciones de estabilidad entre todos los tipos de distribuciones definidos en el Capítulo 1, es decir, dada una congruencia de observadores U y dos 3-distribuciones nulas Ω y Ω' , estudiaremos distintas relaciones de estabilidad entre Ω , Ω_U^- , Ω' , Ω'_U^- , la distribución de espacios físicos S_U , las distribuciones de frentes de onda espaciales $\Omega \cap S_U$ y $\Omega' \cap S_U$, y las distribuciones de frentes de onda temporales $(\Omega \cap S_U) \oplus U$ y $(\Omega' \cap S_U) \oplus U$.

3.3.1. Estabilidad y estabilidad regular en general

Empezaremos estudiando relaciones de estabilidad y estabilidad regular entre las anteriormente citadas distribuciones, dejando para la Sección siguiente las relaciones de auto-estabilidad y auto-estabilidad regular. No obstante, la mayoría de resultados también son aplicables a la auto-estabilidad tomando $\Omega' = \Omega$.

Proposición 3.3.1. *Dados Ω 3-distribución nula, Ω' distribución y U congruencia de observadores, si tanto la distribución de espacios físicos, S_U , como Ω son estables respecto a Ω' , entonces la distribución de frentes de onda espaciales de Ω asociadas a U , $\Omega \cap S_U$, es también estable respecto a Ω' :*

$$\left. \begin{array}{l} \nabla_{\Omega'} S_U \subset S_U \\ \nabla_{\Omega'} \Omega \subset \Omega \end{array} \right\} \implies \nabla_{\Omega'} (\Omega \cap S_U) \subset \Omega \cap S_U.$$

PRUEBA:

Escogemos una U -base de Ω

$$\{X_1, X_2, S + U\}.$$

Como Ω es estable respecto a Ω' se tiene

$$\left. \begin{array}{l} \nabla_{\Omega'} X_1 \\ \nabla_{\Omega'} X_2 \end{array} \right\} \in \Omega$$

Además, como S_U es estable respecto a Ω' , se tiene

$$\left. \begin{array}{l} \nabla_{\Omega'} X_1 \\ \nabla_{\Omega'} X_2 \end{array} \right\} \in S_U$$

y por lo tanto

$$\left. \begin{array}{l} \nabla_{\Omega'} X_1 \\ \nabla_{\Omega'} X_2 \end{array} \right\} \in \Omega \cap S_U = \langle X_1, X_2 \rangle$$

con lo que la distribución de frentes de onda espaciales de Ω asociadas a U es estable respecto a Ω' .

□

Corolario 3.3.2. *Dados Ω 3-distribución nula, Ω' distribución y U congruencia de observadores, si la distribución de espacios físicos, S_U , es estable respecto a Ω' y Ω es regularmente estable respecto a Ω' , entonces*

Vicente José Bolós Lacave

la distribución de frentes de onda espaciales de Ω asociadas a U , $\Omega \cap S_U$, es también regularmente estable respecto a Ω' :

$$\left. \begin{array}{l} \nabla_{\Omega'} S_U \subset S_U \\ \nabla_{\Omega'} \Omega = 0 \end{array} \right\} \implies \nabla_{\Omega'} (\Omega \cap S_U) = 0.$$

PRUEBA:

Al tenerse $\nabla_{\Omega'} \Omega = 0$ resulta que, por el Teorema 3.1.30, $R(\Omega') \Omega = 0$, con lo que

$$R(\Omega') (\Omega \cap S_U) = 0,$$

puesto que $\Omega \cap S_U$ es una subdistribución de Ω . Por la Proposición 3.3.1, y aplicando el Teorema 3.1.30, se tiene

$$\nabla_{\Omega'} (\Omega \cap S_U) = 0.$$

□

De forma análoga se demuestra el siguiente Corolario:

Corolario 3.3.3. *Dadas Ω una 3-distribución nula, Ω' una distribución y U una congruencia de observadores, si la distribución de espacios físicos, S_U , es regularmente estable respecto a Ω' y Ω es estable respecto a Ω' , entonces la distribución de frentes de onda espaciales de Ω asociadas a U , $\Omega \cap S_U$, es también regularmente estable respecto a Ω' :*

$$\left. \begin{array}{l} \nabla_{\Omega'} S_U = 0 \\ \nabla_{\Omega'} \Omega \subset \Omega \end{array} \right\} \implies \nabla_{\Omega'} (\Omega \cap S_U) = 0.$$

Veamos otra Proposición que involucra a las distribuciones de frentes de onda temporales y espaciales:

Proposición 3.3.4. *Dadas Ω una 3-distribución nula, Ω' una distribución y U una congruencia de observadores, si la distribución de espacios físicos, S_U , y la distribución de frentes de onda temporales de Ω asociadas a U , $(\Omega \cap S_U) \oplus U$, son estables respecto a Ω' , entonces la distribución de frentes de onda espaciales de Ω asociadas a U , $\Omega \cap S_U$, es también estable respecto a Ω' :*

$$\left. \begin{array}{l} \nabla_{\Omega'} S_U \subset S_U \\ \nabla_{\Omega'} ((\Omega \cap S_U) \oplus U) \subset (\Omega \cap S_U) \oplus U \end{array} \right\} \implies \nabla_{\Omega'} (\Omega \cap S_U) \subset \Omega \cap S_U.$$

PRUEBA:

Sea una U -base de Ω

$$\{X_1, X_2, S + U\}.$$

Como $\langle X_1, X_2, U \rangle$ es estable respecto a Ω' se tiene

$$\left. \begin{array}{l} \nabla_{\Omega'} X_1 \\ \nabla_{\Omega'} X_2 \end{array} \right\} \in \langle X_1, X_2, U \rangle.$$

Además, como S_U es estable respecto a Ω' , se tiene

$$\left. \begin{array}{l} \nabla_{\Omega'} X_1 \\ \nabla_{\Omega'} X_2 \end{array} \right\} \in S_U = \langle X_1, X_2, S \rangle$$

y por lo tanto

$$\left. \begin{array}{l} \nabla_{\Omega'} X_1 \\ \nabla_{\Omega'} X_2 \end{array} \right\} \in S_U = \langle X_1, X_2, U \rangle \cap \langle X_1, X_2, S \rangle = \langle X_1, X_2 \rangle = \Omega \cap S_U$$

con lo que la distribución de frentes de onda espaciales de Ω asociadas a U es estable respecto a Ω' .

□

De la Proposición 3.3.4 se siguen los siguientes Corolarios, cuyas demostraciones se pueden realizar de forma análoga a la utilizada en el Corolario 3.3.2:

Corolario 3.3.5. *Dadas Ω una 3-distribución nula, Ω' una distribución y U una congruencia de observadores, si S_U es estable respecto a Ω' y la distribución de frentes de onda temporales de Ω asociadas a U , $(\Omega \cap S_U) \oplus U$, es regularmente estable respecto a Ω' , entonces la distribución de frentes de onda espaciales de Ω asociadas a U , $\Omega \cap S_U$, es regularmente estable respecto a Ω' :*

$$\left. \begin{array}{l} \nabla_{\Omega'} S_U \subset S_U \\ \nabla_{\Omega'} ((\Omega \cap S_U) \oplus U) = 0 \end{array} \right\} \implies \nabla_{\Omega'} (\Omega \cap S_U) = 0.$$

Corolario 3.3.6. *Dadas Ω una 3-distribución nula, Ω' una distribución y U una congruencia de observadores, si la distribución de frentes de onda temporales de Ω asociadas a U , $(\Omega \cap S_U) \oplus U$, es estable respecto a Ω' y la distribución de espacios físicos, S_U , es regularmente estable respecto a Ω' , entonces la distribución de frentes de onda espaciales de Ω asociadas a U , $\Omega \cap S_U$, es regularmente estable respecto a Ω' :*

$$\left. \begin{array}{l} \nabla_{\Omega'} S_U = 0 \\ \nabla_{\Omega'} ((\Omega \cap S_U) \oplus U) \subset (\Omega \cap S_U) \oplus U \end{array} \right\} \implies \nabla_{\Omega'} (\Omega \cap S_U) = 0.$$

Finalmente, veremos una Proposición que relaciona la estabilidad de Ω_U^- y la estabilidad de la distribución de frentes de onda temporales:

Proposición 3.3.7. *Dadas Ω una 3-distribución nula, Ω' una distribución y U una congruencia de observadores, si la distribución de espacios físicos, S_U , y Ω son estables respecto a Ω' , entonces Ω_U^- es estable respecto a Ω' si y sólo si la distribución de frentes de onda temporales de Ω (ó de Ω_U^-) asociadas a U , $(\Omega \cap S_U) \oplus U$, es estable respecto a Ω' :*

$$\left. \begin{array}{l} \nabla_{\Omega'} S_U \subset S_U \\ \nabla_{\Omega'} \Omega \subset \Omega \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\Omega'} \Omega_U^- \subset \Omega_U^- \iff \\ \iff \nabla_{\Omega'} ((\Omega \cap S_U) \oplus U) \subset (\Omega \cap S_U) \oplus U. \end{array} \right.$$

PRUEBA:

→ Escogemos una U -base de Ω

$$\{X_1, X_2, S + U\}.$$

Por la Proposición 3.3.1, la distribución de frentes de onda espaciales de Ω asociadas a U , $\langle X_1, X_2 \rangle$, es estable respecto a Ω' y por lo tanto

$$\left. \begin{array}{l} \nabla_{\Omega'} X_1 \\ \nabla_{\Omega'} X_2 \end{array} \right\} \in \langle X_1, X_2 \rangle \subset \langle X_1, X_2, U \rangle.$$

Así que sólo falta comprobar que $\nabla_{\Omega'} U$ sigue estando en $\langle X_1, X_2, U \rangle$.

Como Ω es estable respecto a Ω'

$$\nabla_{\Omega'} (S + U) \in \Omega$$

y por lo tanto, teniendo en cuenta que S_U es también estable respecto a Ω'

$$\begin{aligned} \nabla_{\Omega'} (S + U) &= \nabla_{\Omega'} S + \nabla_{\Omega'} U = (\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 S) \\ &\quad + (\beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 S + \beta_4 U) \\ &= \gamma_1 X_1 + \gamma_2 X_2 + \gamma_3 (S + U). \end{aligned}$$

Tenemos pues

$$\left. \begin{array}{l} \gamma_1 = \alpha_1 + \beta_1 \\ \gamma_2 = \alpha_2 + \beta_2 \\ \gamma_3 = \beta_4 \end{array} \right\} \longrightarrow \beta_4 = \alpha_3 + \beta_3. \quad (3.3.14)$$

Por otro lado, como Ω_U^- es estable respecto a Ω'

$$\nabla_{\Omega'} (-S + U) \in \Omega_U^-$$

y por lo tanto, teniendo en cuenta que S_U es también estable respecto a Ω'

$$\begin{aligned}\nabla_{\Omega'}(-S+U) &= -\nabla_{\Omega'}S + \nabla_{\Omega'}U = -(\alpha_1X_1 + \alpha_2X_2 + \alpha_3S) \\ &\quad + (\beta_1X_1 + \beta_2X_2 + \beta_3S + \beta_4U) \\ &= \delta_1X_1 + \delta_2X_2 + \delta_3(-S+U).\end{aligned}$$

Tenemos pues

$$\left. \begin{array}{l} \delta_1 = \alpha_1 + \beta_1 \\ \delta_2 = \alpha_2 + \beta_2 \\ \delta_3 = \beta_4 \end{array} \right\} \longrightarrow \beta_4 = \alpha_3 - \beta_3. \quad (3.3.15)$$

Por lo tanto, por (3.3.14) y (3.3.15)

$$\begin{aligned}\beta_3 &= 0 \\ \beta_4 &= \alpha_3\end{aligned}$$

y entonces

$$\nabla_{\Omega'}U = (\beta_1X_1 + \beta_2X_2 + \beta_4U) \in \langle X_1, X_2, U \rangle.$$

← Escogemos una U -base de Ω

$$\{X_1, X_2, S+U\}.$$

Por la Proposición 3.3.1, como Ω es estable respecto a Ω' , también lo será la distribución de frentes de onda espaciales de Ω asociadas a U , $\langle X_1, X_2 \rangle$ y por lo tanto

$$\left. \begin{array}{l} \nabla_{\Omega'}X_1 \\ \nabla_{\Omega'}X_2 \end{array} \right\} \in \langle X_1, X_2 \rangle \subset \Omega_U^-.$$

Así que sólo falta comprobar que $\nabla_{\Omega'}(-S+U)$ sigue estando en $\Omega_U^- = \langle X_1, X_2, -S+U \rangle$.

Como $\langle X_1, X_2, U \rangle$ es estable respecto a Ω'

$$\nabla_{\Omega'}U = \beta_1X_1 + \beta_2X_2 + \beta_3U.$$

Por otro lado, como Ω es también estable respecto a Ω'

$$\nabla_{\Omega'}(S+U) \in \Omega$$

y por lo tanto, teniendo en cuenta que S_U es estable respecto a Ω'

$$\begin{aligned}\nabla_{\Omega'}(S+U) &= \nabla_{\Omega'}S + \nabla_{\Omega'}U = (\alpha_1X_1 + \alpha_2X_2 + \alpha_3S) \\ &\quad + (\beta_1X_1 + \beta_2X_2 + \beta_3U) \\ &= \gamma_1X_1 + \gamma_2X_2 + \gamma_3(S+U).\end{aligned}$$

Vicente José Bolós Lacave

Tenemos pues

$$\gamma_3 = \alpha_3 = \beta_3.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \nabla_{\Omega'}(-S + U) &= -\nabla_{\Omega'}S + \nabla_{\Omega'}U = -(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 S) \\ &\quad + (\beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \alpha_3 U) \\ &= (-\alpha_1 + \beta_1) X_1 + (-\alpha_2 + \beta_2) X_2 + \alpha_3 (-S + U) \\ &\in \Omega_U^-. \end{aligned}$$

□

3.3.2. Auto-estabilidad

En esta Sección vamos a estudiar propiedades exclusivas de la auto-estabilidad y la auto-estabilidad regular de las anteriores distribuciones. Del Corolario 3.1.11 se siguen a su vez los siguientes Corolarios:

Corolario 3.3.8. *Una congruencia de observadores U es auto-estable si y sólo si su espacio físico S_U es estable respecto a U :*

$$\nabla_U U \propto U \iff \nabla_U S_U \subset S_U.$$

Corolario 3.3.9. *Dada Ω una 3-distribución nula auto-estable. Entonces Ω^\perp (que es una 1-distribución nula) es también auto-estable. Es decir*

$$\nabla_\Omega \Omega \subset \Omega \implies \nabla_{\Omega^\perp} \Omega^\perp \subset \Omega^\perp.$$

PRUEBA:

Por el Corolario 3.1.11 se tiene que Ω^\perp es estable respecto a Ω . Pero al ser Ω nula se tiene

$$\Omega^\perp \subset \Omega$$

y por lo tanto, en particular

$$\nabla_{\Omega^\perp} \Omega^\perp \subset \Omega^\perp.$$

□

El recíproco no es cierto. De hecho, en el ejemplo siguiente vamos a encontrar un campo nulo auto-estable tal que su 3-distribución ortogonal no sea auto-estable (totalmente geodésica). Así quedaría probado que la implicación contraria no es cierta en el Corolario 3.3.9.

Ejemplo 3.3.10. Este ejemplo, obviamente, se ha de buscar en un espacio tiempo con métrica de curvatura distinta de cero, como el espacio-tiempo de Schwarzschild:

$$ds^2 = \frac{1}{a} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) - a dt^2$$

con

$$a = 1 - \frac{2m}{r}.$$

Sea

$$Z = a \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial t} = (a, 0, 0, 1).$$

Este campo es nulo,

$$g(Z, Z) = \frac{1}{a} a^2 - a = 0,$$

y es auto-estable,

$$\begin{aligned} \nabla_Z Z &= (a(a' + \Gamma_{rr}^r a) + \Gamma_{tt}^r) \frac{\partial}{\partial r} + (a\Gamma_{rt}^t + \Gamma_{tr}^t a) \frac{\partial}{\partial t} \\ &= a' Z. \end{aligned}$$

Su 3-distribución ortogonal viene dada por

$$Z^\perp = \left\langle \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \varphi}, Z \right\rangle.$$

Pero

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial \theta}} \frac{\partial}{\partial \theta} = \Gamma_{\theta\theta}^r \frac{\partial}{\partial r} \notin Z^\perp,$$

con lo que Z^\perp no es auto-estable.

A continuación veremos una Proposición que indica cuándo la distribución de frentes de onda espaciales de una 3-distribución nula auto-estable es también auto-estable:

Proposición 3.3.11. Dadas Ω una 3-distribución nula y U una congruencia de observadores, si la distribución de espacios físicos, S_U , y Ω son auto-estables, entonces la distribución de frentes de onda espaciales de Ω asociadas a U , $\Omega \cap S_U$, es auto-estable:

$$\left. \begin{array}{l} \nabla_{S_U} S_U \subset S_U \\ \nabla_{\Omega} \Omega \subset \Omega \end{array} \right\} \implies \nabla_{(\Omega \cap S_U)} (\Omega \cap S_U) \subset \Omega \cap S_U.$$

PRUEBA:

Escogemos una U -base de Ω

$$\{X_1, X_2, S + U\}.$$

Como Ω es auto-estable se tiene

$$\left. \begin{array}{l} \nabla_{X_1} X_1 \\ \nabla_{X_1} X_2 \\ \nabla_{X_2} X_1 \\ \nabla_{X_2} X_2 \end{array} \right\} \in \Omega$$

Además, como S_U es auto-estable, se tiene

$$\left. \begin{array}{l} \nabla_{X_1} X_1 \\ \nabla_{X_1} X_2 \\ \nabla_{X_2} X_1 \\ \nabla_{X_2} X_2 \end{array} \right\} \in S_U$$

y por lo tanto

$$\left. \begin{array}{l} \nabla_{X_1} X_1 \\ \nabla_{X_1} X_2 \\ \nabla_{X_2} X_1 \\ \nabla_{X_2} X_2 \end{array} \right\} \in \Omega \cap S_U = \langle X_1, X_2 \rangle$$

con lo que la distribución de frentes de onda espaciales de Ω asociadas a U es auto-estable. \square

De la Proposición 3.3.11 se siguen los siguientes Corolarios, cuyas demostraciones son triviales:

Corolario 3.3.12. *Dadas Ω una 3-distribución nula y U una congruencia de observadores, si la distribución de espacios físicos, S_U , es auto-estable y Ω es regularmente auto-estable, entonces la distribución de frentes de onda espaciales de Ω asociadas a U , $\Omega \cap S_U$, es regularmente auto-estable:*

$$\left. \begin{array}{l} \nabla_{S_U} S_U \subset S_U \\ \nabla_{\Omega} \Omega = 0 \end{array} \right\} \implies \nabla_{(\Omega \cap S_U)} (\Omega \cap S_U) = 0.$$

Corolario 3.3.13. *Dadas Ω una 3-distribución nula y U una congruencia de observadores, si Ω es auto-estable y la distribución de espacios físicos, S_U , es regularmente auto-estable, entonces la distribución de frentes de onda espaciales de Ω asociadas a U , $\Omega \cap S_U$, es regularmente auto-estable:*

$$\left. \begin{array}{l} \nabla_{S_U} S_U = 0 \\ \nabla_{\Omega} \Omega \subset \Omega \end{array} \right\} \implies \nabla_{(\Omega \cap S_U)} (\Omega \cap S_U) = 0.$$

A continuación vamos a ver una Proposición que nos indica cuándo la distribución de frentes de onda espaciales de una 3-distribución nula es auto-estable:

Proposición 3.3.14. *Dadas Ω una 3-distribución nula y U una congruencia de observadores, si la distribución de espacios físicos, S_U , y la distribución de frentes de onda temporales de Ω asociadas a U , $(\Omega \cap S_U) \oplus U$, son auto-estables, entonces la distribución de frentes de onda espaciales de Ω asociadas a U , $\Omega \cap S_U$, es auto-estable:*

$$\left. \begin{array}{l} \nabla_{S_U} S_U \subset S_U \\ \nabla_{((\Omega \cap S_U) \oplus U)} ((\Omega \cap S_U) \oplus U) \subset (\Omega \cap S_U) \oplus U \end{array} \right\} \\ \implies \nabla_{(\Omega \cap S_U)} (\Omega \cap S_U) \subset \Omega \cap S_U.$$

PRUEBA:

Sea una U -base de Ω

$$\{X_1, X_2, S + U\}.$$

Como $\langle X_1, X_2, U \rangle$ es auto-estable se tiene

$$\left. \begin{array}{l} \nabla_{X_1} X_1 \\ \nabla_{X_1} X_2 \\ \nabla_{X_2} X_1 \\ \nabla_{X_2} X_2 \end{array} \right\} \in \langle X_1, X_2, U \rangle.$$

Además, como S_U es auto-estable, se tiene

$$\left. \begin{array}{l} \nabla_{X_1} X_1 \\ \nabla_{X_1} X_2 \\ \nabla_{X_2} X_1 \\ \nabla_{X_2} X_2 \end{array} \right\} \in S_U = \langle X_1, X_2, S \rangle$$

y por lo tanto

$$\left. \begin{array}{l} \nabla_{X_1} X_1 \\ \nabla_{X_1} X_2 \\ \nabla_{X_2} X_1 \\ \nabla_{X_2} X_2 \end{array} \right\} \in S_U = \langle X_1, X_2, U \rangle \cap \langle X_1, X_2, S \rangle = \langle X_1, X_2 \rangle = \Omega \cap S_U$$

con lo que la distribución de frentes de onda espaciales de Ω asociadas a U es auto-estable. \square

De la Proposición 3.3.14 se siguen los siguientes Corolarios:

Corolario 3.3.15. *Dadas Ω una 3-distribución nula y U una congruencia de observadores, si S_U es auto-estable y la distribución de frentes de onda temporales de Ω asociadas a U , $(\Omega \cap S_U) \oplus U$, es regularmente*

Vicente José Bolós Lacave

auto-estable, entonces la distribución de frentes de onda espaciales de Ω asociadas a U , $\Omega \cap S_U$, es regularmente auto-estable:

$$\left. \begin{array}{l} \nabla_{S_U} S_U \subset S_U \\ \nabla_{((\Omega \cap S_U) \oplus U)} ((\Omega \cap S_U) \oplus U) = 0 \end{array} \right\} \implies \nabla_{(\Omega \cap S_U)} (\Omega \cap S_U) = 0.$$

Corolario 3.3.16. Dadas Ω una 3-distribución nula y U una congruencia de observadores, si la distribución de frentes de onda temporales de Ω asociadas a U , $(\Omega \cap S_U) \oplus U$, es auto-estable y la distribución de espacios físicos, S_U , es regularmente auto-estable, entonces la distribución de frentes de onda espaciales de Ω asociadas a U , $\Omega \cap S_U$, es regularmente auto-estable:

$$\left. \begin{array}{l} \nabla_{S_U} S_U = 0 \\ \nabla_{((\Omega \cap S_U) \oplus U)} ((\Omega \cap S_U) \oplus U) \subset (\Omega \cap S_U) \oplus U \end{array} \right\} \implies \nabla_{(\Omega \cap S_U)} (\Omega \cap S_U) = 0.$$

Finalmente, vamos a ver una importante Proposición que relaciona la auto-estabilidad de una 3-distribución nula Ω , la de $\Omega_{\bar{U}}$ y la de la distribución de frentes de onda temporales $(\Omega \cap S_U) \oplus U$:

Proposición 3.3.17. Dadas Ω una 3-distribución nula y U una congruencia de observadores, si tanto la distribución de espacios físicos, S_U , como Ω son auto-estables, entonces $\Omega_{\bar{U}}$ es auto-estable y la distribución de frentes de onda temporales de Ω (ó de $\Omega_{\bar{U}}$) asociadas a U , $(\Omega \cap S_U) \oplus U$, también es auto-estable:

$$\left. \begin{array}{l} \nabla_{S_U} S_U \subset S_U \\ \nabla_{\Omega} \Omega \subset \Omega \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\Omega_{\bar{U}}} \Omega_{\bar{U}} \subset \Omega_{\bar{U}} \iff \\ \nabla_{((\Omega \cap S_U) \oplus U)} ((\Omega \cap S_U) \oplus U) \subset (\Omega \cap S_U) \oplus U. \end{array} \right.$$

PRUEBA:

→ Veamos que $(\Omega \cap S_U) \oplus U$ es auto-estable. Escogemos una U -base de Ω

$$\{X_1, X_2, S + U\}.$$

Por la Proposición 3.3.14, la distribución de frentes de onda espaciales de Ω asociadas a U , $\langle X_1, X_2 \rangle$, es auto-estable y por lo tanto

$$\left. \begin{array}{l} \nabla_{X_1} X_1 \\ \nabla_{X_1} X_2 \\ \nabla_{X_2} X_1 \\ \nabla_{X_2} X_2 \end{array} \right\} \in \langle X_1, X_2 \rangle \subset \langle X_1, X_2, U \rangle.$$

- Por ser S_U auto-estable, resulta que U es estable respecto a S_U y por lo tanto

$$\nabla_{X_1} U \in \langle U \rangle \subset (\Omega \cap S_U) \oplus U.$$

- Análogamente se prueba

$$\nabla_{X_2} U \in (\Omega \cap S_U) \oplus U.$$

- Al ser S_U auto-estable se tiene

$$\nabla_S X_1 \in \langle X_1, X_2, S \rangle. \quad (3.3.16)$$

Como Ω es auto-estable se tiene

$$\begin{aligned} \nabla_{S+U} X_1 &= \nabla_S X_1 + \nabla_U X_1 \in \Omega \\ &= \langle X_1, X_2, S + U \rangle. \end{aligned} \quad (3.3.17)$$

Además, como $\Omega_{\bar{U}}$ es también auto-estable, se tiene

$$\nabla_{-S+U} X_1 = -\nabla_S X_1 + \nabla_U X_1 \in \Omega_{\bar{U}} = \langle X_1, X_2, -S + U \rangle. \quad (3.3.18)$$

Teniendo en cuenta (3.3.16), (3.3.17) y (3.3.18) se tiene

$$g(\nabla_U X_1, S) = 0$$

con lo que

$$\nabla_U X_1 \in \langle X_1, X_2, U \rangle = (\Omega \cap S_U) \oplus U.$$

- Análogamente se prueba

$$\nabla_U X_2 \in (\Omega \cap S_U) \oplus U.$$

- Como Ω es auto-estable, por el Corolario 3.3.16 se tiene que $\Omega^\perp = \langle S + U \rangle$ es auto-estable

$$\nabla_{S+U} (S + U) \in \Omega^\perp = \langle S + U \rangle.$$

Aplicando el Lema 2.3.6 con $X = Y = Z = S + U$ se tiene

$$g(\nabla_{S+U} (S + U), S + U) = 0$$

con lo que

$$\nabla_{S+U} (S + U) = \nabla_S S + \nabla_S U + \nabla_U S + \nabla_U U = 0. \quad (3.3.19)$$

Al ser S_U auto-estable se tiene

$$\nabla_S S \in \langle X_1, X_2, S \rangle.$$

Aplicando el Lema 2.3.6 con $X = Y = Z = S$ se tiene

$$g(\nabla_S S, S) = 0$$

con lo que

$$\nabla_S S \in \langle X_1, X_2 \rangle. \quad (3.3.20)$$

Al ser S_U auto-estable, se tiene que U es estable respecto a S_U

$$\nabla_S U \in \langle U \rangle.$$

Aplicando el Lema 2.3.6 con $X = Y = U, Z = S$ se tiene

$$g(\nabla_S U, U) = 0$$

con lo que

$$\nabla_S U = 0. \quad (3.3.21)$$

Por último, usando el Lema 2.3.6 con $X, Y = S, Z = U$ se tiene

$$g(\nabla_U S, S) = 0$$

con lo que

$$\nabla_U S \in \langle X_1, X_2, U \rangle. \quad (3.3.22)$$

Teniendo en cuenta (3.3.19), (3.3.20), (3.3.21) y (3.3.22) se tiene

$$\nabla_U U \in \langle X_1, X_2, U \rangle = (\Omega \cap S_U) \oplus U.$$

← Veamos que Ω_U^- es auto-estable. Escogemos una U -base de Ω

$$\{X_1, X_2, S + U\}.$$

Por la Proposición 3.3.14, la distribución de frentes de onda espaciales de Ω asociadas a $U, \langle X_1, X_2 \rangle$, es auto-estable y por lo tanto

$$\left. \begin{array}{l} \nabla_{X_1} X_1 \\ \nabla_{X_1} X_2 \\ \nabla_{X_2} X_1 \\ \nabla_{X_2} X_2 \end{array} \right\} \in \langle X_1, X_2 \rangle \subset \langle X_1, X_2, U \rangle.$$

■ Al ser S_U auto-estable se tiene

$$\nabla_{X_1} S \in \langle X_1, X_2, S \rangle.$$

Aplicando el Lema 2.3.6 con $X = Y = S, Z = X_1$ se tiene

$$g(\nabla_{X_1} S, S) = 0$$

con lo que

$$\nabla_{X_1} S \in \langle X_1, X_2 \rangle. \quad (3.3.23)$$

Además, por ser S_U auto-estable, resulta que U es estable respecto a S_U y por lo tanto

$$\nabla_{X_1} U \in \langle U \rangle.$$

Aplicando el Lema 2.3.6 con $X = Y = U, Z = X_1$ se tiene

$$g(\nabla_{X_1} U, U) = 0$$

con lo que

$$\nabla_{X_1} U = 0. \quad (3.3.24)$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta (3.3.23) y (3.3.24) se tiene

$$\nabla_{X_1} (-S + U) = -\nabla_{X_1} S + \nabla_{X_1} U \in \langle X_1, X_2 \rangle \subset \Omega_U^-.$$

- Análogamente se prueba

$$\nabla_{X_2} (-S + U) \in \Omega_U^-.$$

- Al ser Ω auto-estable se tiene

$$\nabla_{S+U} X_1 = \nabla_S X_1 + \nabla_U X_1 \in \langle X_1, X_2, S + U \rangle. \quad (3.3.25)$$

Aplicando el Lema 2.3.6 con $X = X_1, Y = Z = (S + U)$ se tiene

$$g(\nabla_{S+U} X_1, S + U) + g(\nabla_{S+U} (S + U), X_1) = 0. \quad (3.3.26)$$

Pero como Ω es auto-estable se tiene que $\Omega^\perp = \langle S + U \rangle$ es auto-estable (por el Corolario 3.3.16), con lo que

$$\nabla_{S+U} (S + U) \in \Omega^\perp = \langle S + U \rangle$$

y resulta que

$$g(\nabla_{S+U} (S + U), X_1) = 0.$$

Así pues, (3.3.26) queda

$$g(\nabla_{S+U} X_1, S + U) = 0$$

y por lo tanto, (3.3.25) queda

$$\nabla_{S+U}X_1 = \nabla_S X_1 + \nabla_U X_1 \in \langle X_1, X_2 \rangle. \quad (3.3.27)$$

Al ser S_U auto-estable se tiene

$$\nabla_S X_1 \in \langle X_1, X_2, S \rangle. \quad (3.3.28)$$

Al ser $(\Omega \cap S_U) \oplus U$ auto-estable se tiene

$$\nabla_U X_1 \in \langle X_1, X_2, U \rangle. \quad (3.3.29)$$

Aplicando (3.3.28) y (3.3.29) en (3.3.27) se tiene

$$\begin{aligned} \nabla_S X_1 &\in \langle X_1, X_2 \rangle \\ \nabla_U X_1 &\in \langle X_1, X_2 \rangle. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\nabla_{-S+U}X_1 = -\nabla_S X_1 + \nabla_U X_1 \in \langle X_1, X_2 \rangle \subset \Omega_U^-.$$

- Análogamente se prueba

$$\nabla_{-S+U}X_2 \in \Omega_U^-.$$

- Al ser S_U auto-estable se tiene

$$\nabla_S S \in \langle X_1, X_2, S \rangle.$$

Aplicando el Lema 2.3.6 con $X = Y = Z = S$ se tiene

$$g(\nabla_S S, S) = 0$$

con lo que

$$\nabla_S S \in \langle X_1, X_2 \rangle. \quad (3.3.30)$$

Al ser S_U auto-estable, resulta que U es estable respecto a S_U y por lo tanto

$$\nabla_S U \in \langle U \rangle.$$

Aplicando el Lema 2.3.6 con $X = Y = U, Z = S$ se tiene

$$g(\nabla_S U, U) = 0$$

con lo que

$$\nabla_S U = 0. \quad (3.3.31)$$

Aplicando el Lema 2.3.6 con $X = Y = S, Z = U$ se tiene

$$g(\nabla_U S, S) = 0$$

con lo que

$$\nabla_U S \in \langle X_1, X_2, U \rangle. \quad (3.3.32)$$

Aplicando el Lema 2.3.6 con $X = Y = Z = U$ se tiene

$$g(\nabla_U U, U) = 0$$

con lo que

$$\nabla_U U \in \langle X_1, X_2, S \rangle. \quad (3.3.33)$$

Como Ω es auto-estable se tiene

$$\begin{aligned} \nabla_{S+U}(S+U) &= \nabla_S S + \nabla_S U + \nabla_U S + \nabla_U U \in \Omega \\ &= \langle X_1, X_2, S+U \rangle. \end{aligned} \quad (3.3.34)$$

Aplicando (3.3.30), (3.3.31), (3.3.32) y (3.3.33) en (3.3.34) se tiene

$$g(\nabla_U S, U) = g(\nabla_U U, S) \quad (3.3.35)$$

y por lo tanto, teniendo en cuenta (3.3.30), (3.3.31), (3.3.32), (3.3.33) y (3.3.35) se tiene

$$\nabla_{-S+U}(-S+U) = \nabla_S S - \nabla_S U - \nabla_U S + \nabla_U U \in \Omega_U^-.$$

□

Nota 3.3.18. *Teniendo en cuenta la demostración de la Proposición 3.3.17, dada $\{X_1, X_2, S+U\}$ una U -base de Ω , se puede afirmar*

$$\begin{aligned} & \left. \begin{array}{l} \nabla_{S_U} S_U \subset S_U \\ \nabla_{\Omega} \Omega \subset \Omega \\ g(\nabla_U X_1, S) = 0 \\ g(\nabla_U X_2, S) = 0 \end{array} \right\} \\ \implies & \left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\Omega_U^-} \Omega_U^- \subset \Omega_U^- \\ \nabla_{((\Omega \cap S_U) \oplus U)} ((\Omega \cap S_U) \oplus U) \subset (\Omega \cap S_U) \oplus U. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Estabilidad en foliaciones de simultaneidad

Teniendo en cuenta lo dicho en el Ejemplo 3.1.19, las foliaciones de Landau en el espacio-tiempo de Minkowski generadas por un observador geodésico son las únicas 3-foliaciones espaciales estables respecto a TM y por lo tanto serán estables respecto a cualquier distribución de M .

En el Capítulo 2 se enunció de forma equivalente la siguiente Proposición (ver Proposición 2.4.9):

Proposición 3.3.19. *Sea L_β una foliación de Landau generada por una línea de universo de un observador $\beta : I \rightarrow M$ en un entorno normal convexo \mathcal{V} y sea $\beta' : I' \rightarrow M$ una curva integral del campo temporal $(L_\beta)^\perp$. Si la foliación de Landau $L_{\beta'}$ generada por β' está bien definida y L_β es auto-estable, entonces $L_{\beta'} = L_\beta$.*

3.4. Estabilidad de p -distribuciones respecto a campos

Dada una p -distribución Ω y un campo U tales que Ω es estable respecto a U ,

$$\nabla_U \Omega \subset \Omega,$$

se tiene que además Ω es regularmente estable respecto a U ,

$$\nabla_U \Omega = 0,$$

y por lo tanto, existen bases $\{X_i\}_{i=1}^p$ de Ω cuyos campos se trasladan paralelamente a lo largo de las curvas integrales de U .

Si U es temporal orientado al futuro, entonces sus curvas integrales son líneas de universo de observadores y por lo tanto, cada observador detecta a Ω siempre igual a lo largo de su línea de universo.

Esto tiene pleno sentido físico cuando se trata con campos unitarios temporales orientados al futuro adaptados mediante una foliación de Landau (ver Capítulo 2), ya que éstos representan una congruencia de observadores sincronizados con otro observador. También tiene interés físico el caso de las congruencias de observadores asociadas a un observador (adaptados mediante foliaciones de horismos orientados al futuro). Además, cuando Ω es una 3-foliación nula, ésta representa la evolución de una partícula de masa cero. En este caso, la partícula descrita por Ω se detecta siempre igual para todos los observadores de la congruencia. Este caso lo vamos a estudiar con más detalle.

Si Ω es además una p -foliación, se tiene que la existencia de estas bases cuyos campos se trasladan paralelamente a lo largo de las curvas integrales de U hace posible que dada una sola hoja de Ω (que corta a las curvas integrales de U en un único punto a cada una), se pueda reconstruir Ω . Esta reconstrucción se llevaría a cabo trasladando paralelamente los vectores tangentes a la hoja a lo largo de las curvas integrales de U (ver Figura 3.1).

Con este método, dado un campo U podemos construir localmente p -foliaciones Ω tales que $\nabla_U \Omega \subset \Omega$. Nos podemos plantear el problema inverso: dada una p -distribución Ω ¿existe algún campo U distinto de cero tal que $\nabla_U \Omega \subset \Omega$? A continuación, vamos a realizar un estudio de acuerdo con la dimensión de Ω , que podrá ir de 1 hasta 3:

- **Caso $p=1$**

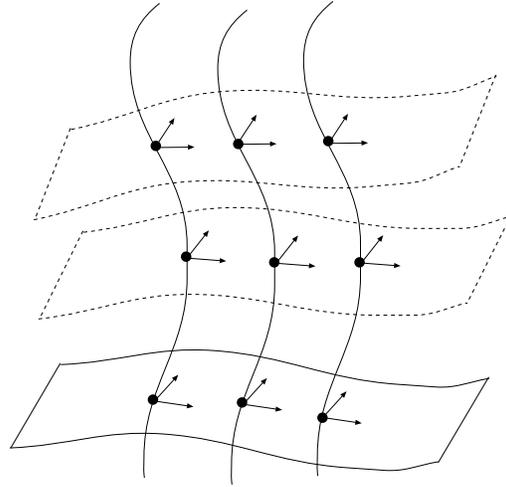


Figura 3.1: Construcción de una foliación mediante traslados paralelos a partir de una subvariedad y de un campo cuyas curvas integrales cortan en un único punto a la subvariedad.

En este caso, el planteamiento del problema es el siguiente: Dado un campo X distinto de cero, hay que encontrar un campo U distinto de cero y una función α tales que

$$\nabla_U X = \alpha X,$$

o lo que es lo mismo, tales que se cumpla el sistema

$$U^j \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^j} + \Gamma_{jk}^i X^k \right) = \alpha X^i, \quad i = 1, \dots, 4$$

que es un sistema lineal de 4 ecuaciones con 4 incógnitas representadas por (U^1, U^2, U^3, U^4) y con un parámetro α . Las soluciones que interesan son las distintas de cero.

En este sistema, la matriz de coeficientes A es 4×4 y viene dada por

$$A_{ij} = \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^j} + \Gamma_{jk}^i X^k \right), \quad i, j = 1, \dots, 4.$$

- Si $rgA = 4$ entonces, dado cualquier $\alpha \neq 0$ hay existencia y unicidad de solución distinta de cero.
- Si $rgA < 4$ entonces, con $\alpha = 0$, se trata de un sistema homogéneo compatible indeterminado en donde hay soluciones distintas de cero.

En definitiva, con $p = 1$ podemos asegurar que existen campos U distintos de cero tales que $\nabla_U \Omega \subset \Omega$.

■ **Caso p=2**

En este caso, el planteamiento del problema es el siguiente: Dados dos campos linealmente independientes X, Y , hay que encontrar un campo U distinto de cero y un conjunto de funciones $\{\alpha_i^r\}_{i,r=1}^2$ tales que

$$\begin{aligned}\nabla_U X &= \alpha_1^1 X + \alpha_2^1 Y \\ \nabla_U Y &= \alpha_1^2 X + \alpha_2^2 Y\end{aligned}$$

o lo que es lo mismo, tales que se cumpla el sistema

$$\begin{cases} U^j \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^j} + \Gamma_{jk}^i X^k \right) - \alpha_1^1 X^i - \alpha_2^1 Y^i = 0 \\ U^j \left(\frac{\partial Y^i}{\partial x^j} + \Gamma_{jk}^i Y^k \right) - \alpha_1^2 X^i - \alpha_2^2 Y^i = 0 \end{cases}, \quad i = 1, \dots, 4$$

que es un sistema lineal homogéneo de 8 ecuaciones con 8 incógnitas ($U^1, U^2, U^3, U^4, \alpha_1^1, \alpha_2^1, \alpha_1^2, \alpha_2^2$). Las soluciones que interesan son las distintas de cero y, precisamente, si el rango de la matriz de coeficientes es 8 entonces la única solución es la idénticamente cero.

Por ejemplo, en Minkowski, si escogemos los campos (dados en la base canónica $\left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial t} \right\}$)

$$\begin{aligned}X &= (x + y, y + 1, z, 0) \\ Y &= (x, y, z, t)\end{aligned}$$

el determinante de la matriz de coeficientes 8×8 es

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -x-y & -x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -y-1 & -y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -z & -z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -t & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x-y & -x \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y-1 & -y \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -z & -z \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -t \end{pmatrix} = -zt(y+1)$$

que es distinto de cero en el abierto

$$\{(x, y, z, t) \in M \mid z \neq 0, t \neq 0, y \neq -1\}.$$

En definitiva, con $p = 2$ no podemos asegurar que existan campos U distintos de cero tales que $\nabla_U \Omega \subset \Omega$.

■ **Caso p=3 (sin aplicar Proposición 3.1.6)**

En este caso, el planteamiento del problema es el siguiente: Dados tres campos linealmente independientes X, Y, Z , hay que encontrar un campo U distinto de cero y un conjunto de funciones $\{\alpha_l^r\}_{l,r=1}^3$ tales que

$$\begin{aligned}\nabla_U X &= \alpha_1^1 X + \alpha_1^2 Y + \alpha_1^3 Z \\ \nabla_U Y &= \alpha_2^1 X + \alpha_2^2 Y + \alpha_2^3 Z \\ \nabla_U Z &= \alpha_3^1 X + \alpha_3^2 Y + \alpha_3^3 Z\end{aligned}$$

o lo que es lo mismo, tales que se cumpla el sistema

$$\begin{cases} U^j \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^j} + \Gamma_{jk}^i X^k \right) - \alpha_1^1 X^i - \alpha_1^2 Y^i - \alpha_1^3 Z^i = 0 \\ U^j \left(\frac{\partial Y^i}{\partial x^j} + \Gamma_{jk}^i Y^k \right) - \alpha_2^1 X^i - \alpha_2^2 Y^i - \alpha_2^3 Z^i = 0 \quad , \quad i = 1, \dots, 4 \\ U^j \left(\frac{\partial Z^i}{\partial x^j} + \Gamma_{jk}^i Z^k \right) - \alpha_3^1 X^i - \alpha_3^2 Y^i - \alpha_3^3 Z^i = 0 \end{cases}$$

que es un sistema lineal de 12 ecuaciones con 12 incógnitas ($U^1, U^2, U^3, U^4, \alpha_1^1, \alpha_1^2, \alpha_1^3, \alpha_2^1, \alpha_2^2, \alpha_2^3, \alpha_3^1, \alpha_3^2, \alpha_3^3$) y con un parámetro (α_3^3). Las soluciones que interesan son las distintas de cero.

En este sistema, la matriz de coeficientes A es 12×12 .

- Si $rgA = 12$ entonces, dado cualquier $\alpha_3^3 \neq 0$ hay existencia y unicidad de solución distinta de cero.
- Si $rgA < 12$ entonces, con $\alpha_3^3 = 0$, se trata de un sistema homogéneo compatible indeterminado en donde hay soluciones distintas de cero.

Pero todavía no hemos acabado, ya que una solución distinta de cero podría tener $U^1, U^2, U^3, U^4 = 0$, puesto que las soluciones tienen 12 componentes y con que algún α_l^r de los considerados incógnita fuese distinto de cero la solución ya sería distinta de cero. Veamos que esto no puede ocurrir por reducción al absurdo:

Supongamos que existe una solución distinta de cero con $U^1, U^2, U^3, U^4 = 0$ (i.e. algún α_l^r de los considerados incógnita es distinto de cero). Por lo tanto, el sistema de ecuaciones queda

$$\begin{cases} \alpha_1^1 X^i + \alpha_1^2 Y^i + \alpha_1^3 Z^i = 0 \\ \alpha_2^1 X^i + \alpha_2^2 Y^i + \alpha_2^3 Z^i = 0 \quad , \quad i = 1, \dots, 4 \\ \alpha_3^1 X^i + \alpha_3^2 Y^i + \alpha_3^3 Z^i = 0 \end{cases}$$

con lo que todos los $\{\alpha_l^r\}_{l,r=1}^3$ son iguales a cero, ya que X, Y, Z son linealmente independientes.

En definitiva, con $p = 3$, al igual que con $p = 1$, podemos asegurar que existen campos U distintos de cero tales que $\nabla_U \Omega \subset \Omega$.

Nota 3.4.1. *Teniendo en cuenta la Proposición 3.1.6, el caso $p = 3$ se podría haber abordado de otra forma más sencilla: Dada Ω una 3-distribución, por el caso $p = 1$ se tiene que existen campos U distintos de cero tales que*

$$\nabla_U \Omega^\perp \subset \Omega^\perp,$$

ya que Ω^\perp es una 1-distribución. Aplicando la Proposición 3.1.6 se tiene que existen campos U distintos de cero tales que $\nabla_U \Omega \subset \Omega$.

Los resultados obtenidos se pueden generalizar a una variedad de dimensión m con idéntico resultado: Si la dimensión de Ω es p y $\{X_l\}_{l=1}^p$ es una base de Ω , el planteamiento de la existencia de un campo U distinto de cero tal que $\nabla_U \Omega \subset \Omega$ nos genera las ecuaciones

$$U^j \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^j} + \Gamma_{jk}^i X_l^k \right) - \alpha_l^r X_r^i = 0, \quad \begin{cases} i = 1, \dots, m \\ l = 1, \dots, p \end{cases},$$

en donde $\{\alpha_l^r\}_{l,r=1}^p$ son funciones. Estas ecuaciones forman un sistema lineal homogéneo de $p \cdot m$ ecuaciones con $m + p^2$ incógnitas (que son $\{U^j\}_{j=1}^m$ y $\{\alpha_l^r\}_{l,r=1}^p$). Sólo en los casos $p = 1$ y $p = m - 1$ el número de incógnitas es superior al número de ecuaciones. Exactamente, hay una incógnita más que el número de ecuaciones (que hará el papel de parámetro): Con $p = 1$ hay m ecuaciones y $m + 1$ incógnitas; Con $p = m - 1$ hay $(m - 1) \cdot m$ ecuaciones y $m + (m - 1)^2$ incógnitas, o lo que es lo mismo, $(m - 1) \cdot m + 1$ incógnitas:

<i>dimensión de Ω</i>	<i>ecuaciones</i>	<i>incógnitas</i>
p	$p \cdot m$	$m + p^2$
1	m	$m + 1$
$m - 1$	$(m - 1) \cdot m$	$(m - 1) \cdot m + 1$

En estos dos últimos casos, se puede hacer un estudio análogo al realizado anteriormente (en donde se tenía que $m = 4$), obteniendo que con $p = 1$ ó $p = m - 1$ puedo asegurar que existen campos U distintos de cero tales que $\nabla_U \Omega \subset \Omega$.

Por otro lado, si $p \neq 1$ y $p \neq m - 1$ no puedo asegurar que existan campos U distintos de cero tales que $\nabla_U \Omega \subset \Omega$.

3.4.1. Estabilidad de 3-distribuciones nulas respecto a congruencias de observadores

Como ya se ha dicho en la Nota 3.4.1, esto es un caso que merece un estudio aparte. Este caso se puede interpretar geoméricamente de la

siguiente forma: Si una 3-foliación nula Ω es estable respecto a una congruencia de observadores U , entonces cada observador, en cada instante, observa los frentes de onda de Ω siempre de la misma forma. Es decir, si las variedades integrales de Ω son planos, por ejemplo, que se mueven en una determinada dirección, los observadores de U siempre observarán los mismos planos que se mueven siempre en la misma dirección. Así pues, la propiedad de “ser estable respecto a una congruencia de observadores” se explica por sí misma.

Por la Proposición 3.1.6, encontrar 3-distribuciones estables respecto a un campo U distinto de cero equivale a encontrar 1-distribuciones estables respecto a U . Esto, además, por la Proposición 3.1.21, equivale a encontrar campos X distintos de cero tales que

$$\nabla_U X = 0.$$

De esta forma, la 3-distribución buscada es

$$\Omega = X^\perp.$$

Si además tratamos de hacer que estas 3-distribuciones sean nulas, tendremos que encontrar campos nulos X tales que se cumpla lo anterior. Y si además el campo U es una congruencia de observadores, entonces X se puede poner de la forma $S + U$ en donde S es un campo espacial ortogonal a U (ver Capítulo 1). Así pues, una U -base de la 3-distribución Ω buscada sería $\{X_1, X_2, S + U\}$ en donde X_1, X_2 son campos espaciales ortogonales a N y a U .

Por lo tanto, lo primero que nos tenemos que plantear es hallar los campos distintos de cero que sean regularmente estables respecto a U , para luego quedarnos sólo con los nulos. Algo a tener en cuenta es que debido a que

$$\nabla_U TM \subset TM$$

se tiene, por la Nota 3.1.35, que

$$\nabla_U TM = 0$$

y por lo tanto existe una base $\{X_i\}_{i=1}^4$ de TM que es regularmente estable respecto a U . Así pues, todo campo regularmente estable respecto a U será de la forma

$$\alpha^i X_i$$

en donde $\{\alpha^i\}_{i=1}^4$ son funciones constantes para U , i.e $U(\alpha^i) = 0$ para $i = 1, \dots, 4$.

Apéndice A: Ejemplos de estabilidad

A.1. Estabilidad de una 3-distribución respecto a un campo

Según el Corolario 3.1.32, una p -distribución estable respecto a un campo es también regularmente estable. Además, por la Proposición 3.1.6 (Lema de dualidad), encontrar una 3-distribución Ω estable (que en este caso también será regular) respecto a un campo U es equivalente a encontrar un campo X tal que

$$\nabla_U X = 0.$$

En este caso, se tendrá

$$\Omega = X^\perp.$$

No obstante, en esta Sección y en las siguientes, vamos a plantearnos los problemas de dos formas: Utilizando los resultados del Capítulo 3 (Teorema 3.1.30 y sus corolarios, así como el Lema de Dualidad) y sin utilizarlos (que resultará más largo y complicado, e incluso en algunos casos no podremos acabar el estudio). No obstante, para abordar los problemas sin utilizar los resultados, hay que hacer unas consideraciones previas:

Paralelizaciones de 3-distribuciones:

Si Ω es una 3-distribución, vamos a estudiar la forma que pueden tener las bases de Ω . De momento, siempre podemos encontrar una base del tipo

$$\{(X_1^1, X_1^2, 0, 0), (X_2^1, X_2^2, X_2^3, 0), (X_3^1, X_3^2, X_3^3, X_3^4)\}.$$

Vamos a hacer una discusión por casos de los distintos tipos de bases que podemos encontrar:

- $X_3^4 = 0$.

Siempre podemos encontrar una base del tipo

$$\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\}.$$

- $X_3^4 \neq 0$.

- $X_2^3 = 0$.

Siempre podemos encontrar una base del tipo

$$\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, X_3^3, 1)\}.$$

- $X_2^3 \neq 0$.

- $X_1^2 = 0$.

Siempre podemos encontrar una base del tipo

$$\{(1, 0, 0, 0), (0, X_2^2, 1, 0), (0, X_3^2, 0, 1)\}.$$

- $X_1^2 \neq 0$.

Siempre podemos encontrar una base del tipo base

$$\{(X_1^1, 1, 0, 0), (X_2^1, 0, 1, 0), (X_3^1, 0, 0, 1)\}.$$

Esta discusión se ha hecho de forma que las coordenadas (x_1, x_2, x_3, x_4) puedan escogerse de la forma mejor convenida.

Un caso especial es cuando Ω es una 3-distribución no espacial. Si x_4 es la coordenada temporal, en este caso se puede asegurar que existe una base en donde $X_3^4 \neq 0$, y a partir de ahí se discute de la forma anterior.

Ecuaciones de estabilidad:

Sea Ω una 3-distribución generada por $\{X_i\}_{i=1}^3$ y sea Y un campo vectorial, de modo que Ω es estable respecto a Y . Existen funciones $\{h_i^j\}$ con $i = 1, 2, 3, 4$ y $j = 1, 2, 3$ tales que

$$\nabla_Y X_i = h_i^j X_j, \quad i = 1, 2, 3.$$

Descomponiéndolo en componentes

$$Y^j \nabla_j X_i^k = h_i^l X_l^k, \quad \begin{cases} i = 1, 2, 3 \\ k = 1, 2, 3, 4 \end{cases} . \quad (\text{A.1.1})$$

Como

$$\nabla_j X_i^k = \frac{\partial X_i^k}{\partial x^j} + \Gamma_{jn}^k X_i^n, \quad \begin{cases} i = 1, 2, 3 \\ j, k = 1, 2, 3, 4 \end{cases} , \quad (\text{A.1.2})$$

sustituyendo (A.1.2) en (A.1.1) llegamos a que las ecuaciones de estabilidad de una 3-distribución Ω respecto a un campo Y son

$$Y^j \left(\frac{\partial X_i^k}{\partial x^j} + \Gamma_{jl}^k X_i^l \right) = h_i^n X_n^k, \quad \begin{cases} i = 1, 2, 3 \\ k = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

o lo que es lo mismo

$$Y^j (X_i^k) + Y^j \Gamma_{jl}^k X_i^l = h_i^n X_n^k, \quad \begin{cases} i = 1, 2, 3 \\ k = 1, 2, 3, 4 \end{cases} . \quad (\text{A.1.3})$$

A.1.1. Ejemplo I (Minkowski)

En la métrica de Minkowski con coordenadas cartesianas, sea un campo temporal unitario orientado al futuro

$$U_c = a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} + c \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t} \equiv (a, b, c, 1)$$

en donde a, b son funciones tales que $|a|, |b| < 1$ y c es una función tal que $c^2 < 1 - (a^2 + b^2) = \alpha^2$. Consideremos una 3-distribución Ω nula con una U_c -base de la forma

$$\begin{aligned} X_1 &= (1, 0, 0, a) \\ X_2 &= (0, 1, 0, b) \\ X_3 &= S_c + U_c = (a, b, \alpha, 1). \end{aligned}$$

Veamos qué forma han de tener las funciones a, b para que Ω sea estable respecto a U_c :

Sin utilizar los resultados:

Las ecuaciones de estabilidad son

$$U_c X_i^k = \alpha_i X_1^k + \beta_i X_2^k + \gamma_i X_3^k, \quad \begin{cases} i = 1, 2, 3 \\ k = x, y, z, t \end{cases}$$

con $\{\alpha_i, \beta_i, \gamma_i\}_{i=1}^3$ funciones parámetro a determinar.

Para $i = 1$, separando en componentes tenemos

$$\begin{aligned} U_c(a) &= \alpha_1 a + \beta_1 b + \gamma_1 \\ 0 &= \alpha_1 + \gamma_1 a \\ 0 &= \beta_1 + \gamma_1 b \\ 0 &= \gamma_1 \alpha \end{aligned}$$

y de las tres últimas ecuaciones,

$$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 = 0,$$

por lo tanto

$$U_c X_1^k = 0, \quad k = x, y, z, t.$$

Para $i = 2$

$$\begin{aligned} U_c(b) &= \alpha_2 a + \beta_2 b + \gamma_2 \\ 0 &= \alpha_2 + \gamma_2 a \\ 0 &= \beta_2 + \gamma_2 b \\ 0 &= \gamma_2 \alpha. \end{aligned}$$

Vicente José Bolós Lacave

De las tres últimas ecuaciones llegamos a

$$\alpha_2, \beta_2, \gamma_2 = 0$$

y por lo tanto

$$U_c X_2^k = 0, \quad k = x, y, z, t.$$

Para $i = 3$

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_3 a + \beta_3 b + \gamma_3 \\ U_c(a) &= \alpha_3 + \gamma_3 a \\ U_c(b) &= \beta_3 + \gamma_3 b \\ U_c(\alpha) &= \gamma_3 \alpha. \end{aligned}$$

Como $U_c(a) = 0$, $U_c(b) = 0$ de las tres primeras ecuaciones, tenemos

$$\alpha_3, \beta_3, \gamma_3 = 0$$

y por lo tanto

$$U_c X_3^k = 0, \quad k = x, y, z, t.$$

Además, la exigencia $U_c(\alpha) = 0$ equivale a exigir $aU_c(a) + bU_c(b) = 0$. Así, las 3-distribuciones Ω de este tipo estables respecto a U_c son las que tienen una U_c -base como la anterior con

$$\begin{aligned} U_c(a) &= 0 \\ U_c(b) &= 0. \end{aligned}$$

En este caso, se tiene además que esta U_c -base es regularmente estable respecto a U_c .

Utilizando los resultados:

Un campo ortogonal a Ω es el propio $X_3 = (a, b, \alpha, 1)$. Por lo tanto, una condición necesaria y suficiente para que Ω sea estable respecto a U_c es que lo sea X_3 . Es decir, que exista una función γ tal que

$$\nabla_{U_c} X_3 = \gamma X_3.$$

Separando en componentes obtenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned} U_c(a) &= \gamma a \\ U_c(b) &= \gamma b \\ U_c(\alpha) &= \gamma \alpha \\ 0 &= \gamma \end{aligned}$$

con lo que hay que exigir

$$\begin{aligned} U_c(a) &= 0 \\ U_c(b) &= 0, \end{aligned}$$

ya que la exigencia $U_c(\alpha) = 0$ equivale a exigir $aU_c(a) + bU_c(b) = 0$.

A.1.2. Ejemplo II (Minkowski)

Vamos a estudiar un caso más general de estabilidad de 3-distribuciones respecto a campos en el espacio-tiempo de Minkowski.

Sin utilizar los resultados:

Dado un campo Y y una 3-distribución Ω generada por los campos $\{X_i\}_{i=1}^3$, las ecuaciones de estabilidad de Ω respecto a Y son (A.1.3):

$$Y(X_i^k) = h_i^n X_n^k, \quad \begin{cases} i = 1, 2, 3 \\ k = x, y, z, t \end{cases},$$

ya que en Minkowski los símbolos de Christoffel son cero, en donde las funciones $\{h_i^n\}$ con $i, n = 1, 2, 3$ son funciones parámetro a determinar. Para analizar esta estabilidad vamos a hacer un estudio de estas ecuaciones en los casos de la Sección 1:

- $X_3^t = 0$.

Siempre podemos encontrar una base del tipo

$$\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\}. \quad (\text{A.1.4})$$

Las ecuaciones de estabilidad en componentes son

$$i = 1 \begin{cases} 0 = h_1^1 \\ 0 = h_1^2 \\ 0 = h_1^3 \\ 0 = 0 \end{cases}; \quad i = 2 \begin{cases} 0 = h_2^1 \\ 0 = h_2^2 \\ 0 = h_2^3 \\ 0 = 0 \end{cases}; \quad i = 3 \begin{cases} 0 = h_3^1 \\ 0 = h_3^2 \\ 0 = h_3^3 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

que nos determina las funciones parámetro $\{h_i^m\}$ con $i, m = 1, 2, 3$. Así pues, esta 3-distribución es estable respecto a Y . Además es regularmente estable respecto a Y , ya que la base (A.1.4) es regularmente estable respecto a Y .

- $X_3^t \neq 0$.

- $X_2^z = 0$.

Siempre podemos encontrar una base del tipo

$$\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, X_3^z, 1)\}. \quad (\text{A.1.5})$$

Las ecuaciones de estabilidad en componentes son

$$\begin{array}{l}
 i = 1 \left\{ \begin{array}{l} 0 = h_1^1 \\ 0 = h_1^2 \\ 0 = h_1^3 X_3^z \\ 0 = h_1^3 \end{array} \right. ; \quad i = 2 \left\{ \begin{array}{l} 0 = h_2^1 \\ 0 = h_2^2 \\ 0 = h_2^3 X_3^z \\ 0 = h_2^3 \end{array} \right. \\
 \\
 i = 3 \left\{ \begin{array}{l} 0 = h_3^1 \\ 0 = h_3^2 \\ Y(X_3^z) = h_3^3 X_3^z \\ 0 = h_3^3 \end{array} \right.
 \end{array}$$

y por lo tanto hay que exigir

$$Y(X_3^z) = 0 \quad (\text{A.1.6})$$

para que esta 3-distribución sea estable respecto a Y . Además, en este caso, será regularmente estable respecto a Y , ya que la base (A.1.5) con la condición (A.1.6) es regularmente estable respecto a Y .

- $X_2^z \neq 0$.
- $X_1^y = 0$.

Siempre podemos encontrar una base del tipo

$$\{(1, 0, 0, 0), (0, X_2^y, 1, 0), (0, X_3^y, 0, 1)\}. \quad (\text{A.1.7})$$

Las ecuaciones de estabilidad en componentes son

$$\begin{array}{l}
 i = 1 \left\{ \begin{array}{l} 0 = h_1^1 \\ 0 = h_1^2 X_2^y + h_1^3 X_3^y \\ 0 = h_1^2 \\ 0 = h_1^3 \end{array} \right. \\
 \\
 i = 2 \left\{ \begin{array}{l} 0 = h_2^1 \\ Y(X_2^y) = h_2^2 X_2^y + h_2^3 X_3^y \\ 0 = h_2^2 \\ 0 = h_2^3 \end{array} \right.
 \end{array}$$

$$i = 3 \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = h_3^1 \\ Y(X_3^y) = h_3^2 X_2^y + h_3^3 X_3^y \\ 0 = h_3^2 \\ 0 = h_3^3 \end{array} \right.$$

y por lo tanto hay que exigir

$$Y(X_2^y) = 0 \quad (\text{A.1.8})$$

$$Y(X_3^y) = 0 \quad (\text{A.1.9})$$

para que esta 3-distribución sea estable respecto a Y . Además, en este caso, será regularmente estable respecto a Y , ya que la base (A.1.7) con las condiciones (A.1.8) y (A.1.9) es regularmente estable respecto a Y .

o $X_1^y \neq 0$.

Siempre podemos encontrar una base del tipo

$$\{(X_1^x, 1, 0, 0), (X_2^x, 0, 1, 0), (X_3^x, 0, 0, 1)\}. \quad (\text{A.1.10})$$

Las ecuaciones de estabilidad en componentes son

$$i = 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} Y(X_1^x) = h_1^1 X_1^x + h_1^2 X_2^x + h_1^3 X_3^x \\ 0 = h_1^1 \\ 0 = h_1^2 \\ 0 = h_1^3 \end{array} \right.$$

$$i = 2 \quad \left\{ \begin{array}{l} Y(X_2^x) = h_2^1 X_1^x + h_2^2 X_2^x + h_2^3 X_3^x \\ 0 = h_2^1 \\ 0 = h_2^2 \\ 0 = h_2^3 \end{array} \right.$$

$$i = 3 \quad \left\{ \begin{array}{l} Y(X_3^x) = h_3^1 X_1^x + h_3^2 X_2^x + h_3^3 X_3^x \\ 0 = h_3^1 \\ 0 = h_3^2 \\ 0 = h_3^3 \end{array} \right.$$

y por lo tanto hay que exigir

$$Y(X_1^x) = 0 \quad (\text{A.1.11})$$

$$Y(X_2^x) = 0 \quad (\text{A.1.12})$$

$$Y(X_3^x) = 0 \quad (\text{A.1.13})$$

para que esta 3-distribución sea estable respecto a Y . Además, en este caso, será regularmente estable respecto a Y , ya que la base (A.1.10) con las condiciones (A.1.11), (A.1.12) y (A.1.13) es regularmente estable respecto a Y .

Así pues, obtenemos que una 3-distribución estable respecto a Y ha de tener una base $\{X_i\}_{i=1}^3$ tal que

$$Y(X_i^k) = 0, \quad \begin{cases} i = 1, 2, 3 \\ k = x, y, z, t \end{cases} .$$

Además, esta base es regularmente estable respecto a Y y por lo tanto, toda 3-distribución estable respecto a Y es también regularmente estable respecto a Y .

Utilizando los resultados:

Dado un campo Y y una 3-distribución Ω , el Teorema 3.1.30 nos dice que Ω es estable respecto a Y sii es regularmente estable respecto a Y . Por lo tanto, para que Ω sea estable respecto a Y ha de tener una base $\{X_i\}_{i=1}^3$ regularmente estable respecto a Y , es decir, tal que

$$Y(X_i^k) = 0, \quad \begin{cases} i = 1, 2, 3 \\ k = x, y, z, t \end{cases} .$$

A.1.3. Ejemplo III (Schwarzschild)

En este ejemplo vamos a estudiar la estabilidad de una 3-distribución Ω respecto al campo temporal $\frac{\partial}{\partial t}$, haciendo especial hincapié en el caso en el que Ω sea nula.

Sin utilizar los resultados:

Escogemos $(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv (r, \theta, \varphi, t)$. Dada una base $\{X_i\}_{i=1}^3$ de Ω , las ecuaciones de estabilidad son (A.1.3):

$$\frac{\partial X_i^k}{\partial t} + \Gamma_{tl}^k X_i^l = h_i^n X_n^k, \quad \begin{cases} i = 1, 2, 3 \\ k = r, \theta, \varphi, t \end{cases} ,$$

en donde $\{h_i^n\}$ con $i, n = 1, 2, 3$ son funciones parámetro a determinar. Para estudiar esta estabilidad analizaremos estas ecuaciones en los casos de la Sección 1.

- $X_3^t = 0$

Siempre podemos encontrar una base del tipo

$$\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\}.$$

Las ecuaciones de estabilidad en componentes son

$$i = 1 \begin{cases} 0 = h_1^1 \\ 0 = h_1^2 \\ 0 = h_1^3 \\ \Gamma_{tr}^t = 0 \end{cases}; \quad i = 2 \begin{cases} 0 = h_2^1 \\ 0 = h_2^2 \\ 0 = h_2^3 \\ 0 = 0 \end{cases}; \quad i = 3 \begin{cases} 0 = h_3^1 \\ 0 = h_3^2 \\ 0 = h_3^3 \\ 0 = 0 \end{cases}.$$

Como $\Gamma_{tr}^t \neq 0$, esta 3-distribución no es estable respecto a $\frac{\partial}{\partial t}$.

- $X_3^t \neq 0$.

- $X_2^\varphi = 0$.

Siempre podemos encontrar una base del tipo

$$\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, X_3^\varphi, 1)\}.$$

Las ecuaciones de estabilidad en componentes son

$$i = 1 \begin{cases} 0 = h_1^1 \\ 0 = h_1^2 \\ 0 = h_1^3 X_3^\varphi \\ \Gamma_{tr}^t = h_1^3 \end{cases}; \quad i = 2 \begin{cases} 0 = h_2^1 \\ 0 = h_2^2 \\ 0 = h_2^3 X_3^\varphi \\ 0 = h_2^3 \end{cases}$$

$$i = 3 \begin{cases} \Gamma_{tt}^r = h_3^1 \\ 0 = h_3^2 \\ \frac{\partial X_3^\varphi}{\partial t} = h_3^3 X_3^\varphi \\ 0 = h_3^3 \end{cases}$$

y por lo tanto hay que exigir

$$X_3^\varphi = 0$$

para que esta 3-distribución sea estable respecto a $\frac{\partial}{\partial t}$. En este caso, Ω es una 3-distribución temporal. Además, se puede comprobar que es regularmente estable respecto a $\frac{\partial}{\partial t}$, ya que la base de Ω dada por los campos

$$\left\{ e^{a't/2}(-a, 0, 0, 1), \quad (0, 1, 0, 0), \quad e^{-a't/2}(a, 0, 0, 1) \right\}$$

es una base regularmente estable respecto a $\frac{\partial}{\partial t}$.

- $X_2^\varphi \neq 0$.

- $X_1^\theta = 0$.

Siempre podemos encontrar una base del tipo

$$\{(1, 0, 0, 0), \quad (0, X_2^\theta, 1, 0), \quad (0, X_3^\theta, 0, 1)\}.$$

Las ecuaciones de estabilidad en componentes son

$$\begin{aligned}
 i = 1 & \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = h_1^1 \\ 0 = h_1^2 X_2^\theta + h_1^3 X_3^\theta \\ 0 = h_1^2 \\ \Gamma_{tr}^t = h_1^3 \end{array} \right. \\
 i = 2 & \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = h_2^1 \\ \frac{\partial X_2^\theta}{\partial t} = h_2^2 X_2^\theta + h_2^3 X_3^\theta \\ 0 = h_2^2 \\ 0 = h_2^3 \end{array} \right. \\
 i = 3 & \quad \left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{tt}^r = h_3^1 \\ \frac{\partial X_3^\theta}{\partial t} = h_3^2 X_2^\theta + h_3^3 X_3^\theta \\ 0 = h_3^2 \\ 0 = h_3^3 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

y por lo tanto hay que exigir

$$\begin{aligned}
 X_3^\theta &= 0 \\
 \frac{\partial X_2^\theta}{\partial t} &= 0
 \end{aligned}$$

para que esta 3-distribución sea estable respecto a $\frac{\partial}{\partial t}$. En este caso, Ω también es una 3 -distribución temporal. Además, al igual que en el caso anterior, se puede comprobar que es regularmente estable respecto a $\frac{\partial}{\partial t}$, ya que la base de Ω dada por los campos

$$\left\{ e^{a't/2} (-a, 0, 0, 1), \quad (0, X_2^2, 1, 0), \quad e^{-a't/2} (a, 0, 0, 1) \right\}$$

es una base regularmente estable respecto a $\frac{\partial}{\partial t}$.

o $X_1^\theta \neq 0$.

Siempre podemos encontrar una base del tipo

$$\{(X_1^r, 1, 0, 0), \quad (X_2^r, 0, 1, 0), \quad (X_3^r, 0, 0, 1)\}. \quad (\text{A.1.14})$$

Las ecuaciones de estabilidad en componentes son

$$\begin{aligned}
 i = 1 & \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial X_1^r}{\partial t} = h_1^1 X_1^r + h_1^2 X_2^r + h_1^3 X_3^r \\ 0 = h_1^1 \\ 0 = h_1^2 \\ \Gamma_{tr}^t X_1^r = h_1^3 \end{array} \right. \\
 i = 2 & \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial X_2^r}{\partial t} = h_2^1 X_1^r + h_2^2 X_2^r + h_2^3 X_3^r \\ 0 = h_2^1 \\ 0 = h_2^2 \\ \Gamma_{tr}^t X_2^r = h_2^3 \end{array} \right. \\
 i = 3 & \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial X_3^r}{\partial t} + \Gamma_{tt}^r = h_3^1 X_1^r + h_3^2 X_2^r + h_3^3 X_3^r \\ 0 = h_3^1 \\ 0 = h_3^2 \\ \Gamma_{tr}^t X_3^r = h_3^3 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

y por lo tanto hay que exigir

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial X_1^r}{\partial t} &= \Gamma_{tr}^t X_1^r X_3^r \\
 \frac{\partial X_2^r}{\partial t} &= \Gamma_{tr}^t X_2^r X_3^r
 \end{aligned} \quad (\text{A.1.15})$$

$$\frac{\partial X_3^r}{\partial t} + \Gamma_{tt}^r = \Gamma_{tr}^t X_3^r X_3^r.$$

Este sistema nos indica cuándo una 3-distribución Ω con una base de la forma (A.1.14) es estable respecto a $\frac{\partial}{\partial t}$. La última ecuación del sistema (A.1.15) se puede reducir mediante un cambio de variable a una ecuación del tipo Bernoulli, cuya solución general es

$$X_3^r = a \frac{\pm e^{-a't} - C}{e^{-a't} + C}$$

en donde C es constante respecto al tiempo. Si escogemos el signo positivo tenemos

$$\begin{aligned} X_3^r &= a \frac{e^{-a't} - C}{e^{-a't} + C} \\ X_1^r &= K_1 \frac{e^{a't/2}}{C e^{a't} + 1} \\ X_2^r &= K_2 \frac{e^{a't/2}}{C e^{a't} + 1} \end{aligned} \quad (\text{A.1.16})$$

y si escogemos el signo negativo tenemos

$$\begin{aligned} X_3^r &= -a \\ X_1^r &= K_1 e^{-a't/2} \\ X_2^r &= K_2 e^{-a't/2} \end{aligned} \quad (\text{A.1.17})$$

en donde $\{K_i\}_{i=1}^2$ son constantes respecto al tiempo. Llegados a este punto, se podría comprobar que una 3-distribución Ω con una base dada de esta forma es además regularmente estable respecto a $\frac{\partial}{\partial t}$, pero esto resulta demasiado largo y tedioso.

Vamos a hacer hincapié en las 3-distribuciones nulas estables respecto a $\frac{\partial}{\partial t}$. Si exigimos que Ω sea nula, entonces, el campo normal Z

$$\begin{aligned} g(X_1, Z) = 0 &\longrightarrow \frac{1}{a} X_1^r Z^r + r^2 Z^\theta = 0 \\ &\longrightarrow Z^\theta = -\frac{1}{ar^2} X_1^r Z^r \\ g(X_2, Z) = 0 &\longrightarrow \frac{1}{a} X_2^r Z^r + r^2 \sin^2 \theta Z^\varphi = 0 \\ &\longrightarrow Z^\varphi = -\frac{1}{ar^2 \sin^2 \theta} X_2^r Z^r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(X_3, Z) = 0 &\longrightarrow \frac{1}{a} X_3^r Z^r - a Z^t = 0 \\ &\longrightarrow Z^t = \frac{1}{a^2} X_3^r Z^r \end{aligned}$$

ha de ser nulo

$$\begin{aligned} g(Z, Z) &= 0 \\ &\longrightarrow \frac{1}{a} Z^r Z^r + r^2 Z^\theta Z^\theta + r^2 \sin^2 \theta Z^\varphi Z^\varphi - a Z^t Z^t = 0 \end{aligned}$$

y sustituyendo las expresiones de Z^θ, Z^φ, Z^t obtenidas anteriormente, con $Z^r \neq 0$ llegamos a la condición de nulidad

$$1 + \frac{1}{ar^2} X_1^r X_1^r + \frac{1}{ar^2 \sin^2 \theta} X_2^r X_2^r - \frac{1}{a^2} X_3^r X_3^r = 0. \quad (\text{A.1.18})$$

Vamos a estudiar esta relación entre las componentes X_1^r, X_2^r, X_3^r teniendo en cuenta las ecuaciones de estabilidad (A.1.16) y (A.1.17). Sustituyendo las expresiones de X_1^r, X_2^r, X_3^r de (A.1.16) en (A.1.18), para que Ω sea nula, obtenemos

$$K_1^2 \sin^2 \theta + K_2^2 + 4Car^2 \sin^2 \theta = 0$$

con lo que

$$C = \frac{-K_1^2 \sin^2 \theta - K_2^2}{4ar^2 \sin^2 \theta}.$$

Por otra parte, sustituyendo las expresiones de X_1^r, X_2^r, X_3^r de (A.1.17) en (A.1.18), obtenemos

$$K_1^2 \sin^2 \theta + K_2^2 = 0$$

con lo que

$$K_1 = K_2 = 0.$$

Teniendo en cuenta todas estas posibilidades, se tendrán todas las 3-distribuciones nulas estables respecto a $\frac{\partial}{\partial t}$, que serán además regularmente estables.

Utilizando los resultados:

Aplicando el Teorema 3.1.30, toda 3-distribución Ω estable respecto a $\frac{\partial}{\partial t}$ es también regularmente estable respecto a $\frac{\partial}{\partial t}$, por lo que existirá una base de Ω regularmente estable respecto a $\frac{\partial}{\partial t}$. Además, para determinar las 3-distribuciones Ω estables respecto a $\frac{\partial}{\partial t}$, bastará con hallar los campos estables respecto a $\frac{\partial}{\partial t}$ (que serán ortogonales a las 3-distribuciones que buscamos y las caracterizarán biunívocamente). Así pues, vamos a hallar

la forma que ha de tener un campo X regularmente estable respecto a $\frac{\partial}{\partial t}$. Las ecuaciones de estabilidad regular en componentes son

$$\begin{cases} \frac{\partial X^r}{\partial t} + \Gamma_{tt}^r X^t = 0 \\ \frac{\partial X^\theta}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial X^\varphi}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial X^t}{\partial t} + \Gamma_{tr}^t X^r = 0 \end{cases} .$$

La solución general de este sistema es

$$\begin{cases} X^r = -aK_1 e^{a't/2} + aK_4 e^{-a't/2} \\ X^\theta = K_2 \\ X^\varphi = K_3 \\ X^t = K_1 e^{a't/2} + K_4 e^{-a't/2} \end{cases} \quad (\text{A.1.19})$$

en donde $\{K_i\}_{i=1}^4$ son constantes respecto al tiempo.

Nota A.1.1. Se pueden hallar cuatro campos linealmente independientes $\{W_i\}_{i=1}^4$ que tengan las componentes de esta forma (esto se podría haber visto de antemano sabiendo que el fibrado tangente TM es regularmente estable respecto a cualquier campo y en particular existirá una base de TM que sea regularmente estable respecto a $\frac{\partial}{\partial t}$), escogiendo para W_i los valores $K_j = \delta_{ij}$:

$$\begin{cases} W_1 = e^{a't/2} (-a, 0, 0, 1) \\ W_2 = (0, 1, 0, 0) \\ W_3 = (0, 0, 1, 0) \\ W_4 = e^{-a't/2} (a, 0, 0, 1) \end{cases}$$

y por lo tanto, toda 3-distribución Ω estable (regularmente) respecto a $\frac{\partial}{\partial t}$ ha de tener una base $\{X_i\}_{i=1}^3$ de la forma

$$X_i = \alpha_i^j W_j, \quad \begin{cases} i = 1, 2, 3 \\ j = 1, 2, 3, 4 \end{cases} \quad (\text{A.1.20})$$

en donde $\{\alpha_i^j\}_{i=1,2,3}^{j=1,2,3,4}$ son constantes respecto al tiempo y el rango de la matriz α_i^j es 3.

Así pues, las 3-distribuciones estables respecto a $\frac{\partial}{\partial t}$ tendrán un campo ortogonal de la forma (A.1.19). Aquí estarán representados todos los casos de 3-distribuciones estables (regularmente) respecto a $\frac{\partial}{\partial t}$ halladas anteriormente sin utilizar los resultados.

Ahora vamos a hallar las 3-distribuciones nulas estables (regularmente) respecto a $\frac{\partial}{\partial t}$. Para ello, vamos a hacer uso del Corolario 3.1.32 y del Lema de Dualidad (Proposición 3.1.6), y vamos a hallar los campos ortogonales que las caracterizan, que serán también nulos. Si exigimos que un campo X de la forma (A.1.19) sea nulo, tenemos

$$g(X, X) = 0 \longrightarrow r^2 (K_2^2 + K_3^2 \sin^2 \theta) = 4aK_1K_4,$$

en donde están representados todos los casos hallados anteriormente si utilizar los resultados.

A.1.4. Ejemplo IV (Robertson-Walker)

Al igual que en el Ejemplo III, en este ejemplo vamos a estudiar la estabilidad de una 3-distribución Ω respecto al campo temporal $\frac{\partial}{\partial t}$.

Sin utilizar los resultados:

Escogemos $(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv (r, \theta, \varphi, t)$. Dada una base $\{X_i\}_{i=1}^3$ de Ω , las ecuaciones de estabilidad son (A.1.3):

$$\frac{\partial X_i^k}{\partial t} + \Gamma_{tl}^k X_i^l = h_i^n X_n^k, \quad \begin{cases} i = 1, 2, 3 \\ k = r, \theta, \varphi, t \end{cases},$$

en donde $\{h_i^n\}$ con $i, n = 1, 2, 3$ son funciones parámetro a determinar. Para estudiar esta estabilidad vamos a hacer un estudio de estas ecuaciones en los casos de la Sección 1.

- $X_3^t = 0$

Siempre podemos encontrar una base del tipo

$$\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\}.$$

Las ecuaciones de estabilidad en componentes son

$$i = 1 \begin{cases} \Gamma_{tr}^r = h_1^1 \\ 0 = h_1^2 \\ 0 = h_1^3 \\ 0 = 0 \end{cases} ; \quad i = 2 \begin{cases} 0 = h_2^1 \\ \Gamma_{t\theta}^\theta = h_2^2 \\ 0 = h_2^3 \\ 0 = 0 \end{cases} ; \quad i = 3 \begin{cases} 0 = h_3^1 \\ 0 = h_3^2 \\ \Gamma_{t\varphi}^\varphi = h_3^3 \\ 0 = 0 \end{cases}.$$

Esta 3-distribución es estable respecto a $\frac{\partial}{\partial t}$. En este caso, Ω es una 3-distribución espacial. Además, se puede comprobar que es regularmente estable respecto a $\frac{\partial}{\partial t}$, ya que la base de Ω dada por los campos

$$\left\{ \left(\frac{1}{F}, 0, 0, 0 \right), \left(0, \frac{1}{F}, 0, 0 \right), \left(0, 0, \frac{1}{F}, 0 \right) \right\}$$

es una base regularmente estable respecto a $\frac{\partial}{\partial t}$.

■ $X_3^t \neq 0$.

• $X_2^\varphi = 0$.

Siempre podemos encontrar una base del tipo

$$\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, X_3^\varphi, 1)\}.$$

Las ecuaciones de estabilidad en componentes son

$$i = 1 \quad \begin{cases} \Gamma_{tr}^r = h_1^1 \\ 0 = h_1^2 \\ 0 = h_1^3 X_3^\varphi \\ 0 = h_1^3 \end{cases} ; \quad i = 2 \quad \begin{cases} 0 = h_2^1 \\ \Gamma_{t\theta}^\theta = h_2^2 \\ 0 = h_2^3 X_3^\varphi \\ 0 = h_2^3 \end{cases}$$

$$i = 3 \quad \begin{cases} 0 = h_3^1 \\ 0 = h_3^2 \\ \frac{\partial X_3^\varphi}{\partial t} + \Gamma_{t\varphi}^\varphi X_3^\varphi = h_3^3 X_3^\varphi \\ 0 = h_3^3 \end{cases}$$

y por lo tanto hay que exigir

$$\frac{\partial X_3^\varphi}{\partial t} + \frac{F'}{F} X_3^\varphi = 0$$

para que esta 3-distribución sea estable respecto a $\frac{\partial}{\partial t}$. La solución general de esta ecuación es

$$X_3^\varphi = \frac{K}{F}$$

en donde K es una función constante respecto al tiempo. Además, se puede comprobar que es regularmente estable respecto a $\frac{\partial}{\partial t}$, ya que la base de Ω dada por los campos

$$\left\{ \left(\frac{1}{F}, 0, 0, 0 \right), \left(0, \frac{1}{F}, 0, 0 \right), \left(0, 0, \frac{K}{F}, 1 \right) \right\}$$

es una base regularmente estable respecto a $\frac{\partial}{\partial t}$.

- $X_2^\varphi \neq 0$.

- $X_1^\theta = 0$.

Siempre podemos encontrar una base del tipo

$$\{(1, 0, 0, 0), (0, X_2^\theta, 1, 0), (0, X_3^\theta, 0, 1)\}.$$

Las ecuaciones de estabilidad en componentes son

$$i = 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{tr}^r = h_1^1 \\ 0 = h_1^2 X_2^\theta + h_1^3 X_3^\theta \\ 0 = h_1^2 \\ 0 = h_1^3 \end{array} \right.$$

$$i = 2 \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = h_2^1 \\ \frac{\partial X_2^\theta}{\partial t} + \Gamma_{t\theta}^\theta X_2^\theta = h_2^2 X_2^\theta + h_2^3 X_3^\theta \\ \Gamma_{t\varphi}^\varphi = h_2^2 \\ 0 = h_2^3 \end{array} \right.$$

$$i = 3 \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = h_3^1 \\ \frac{\partial X_3^\theta}{\partial t} + \Gamma_{t\theta}^\theta X_3^\theta = h_3^2 X_2^\theta + h_3^3 X_3^\theta \\ 0 = h_3^2 \\ 0 = h_3^3 \end{array} \right.$$

y por lo tanto hay que exigir

$$\frac{\partial X_2^\theta}{\partial t} + \frac{F'}{F} X_2^\theta = \frac{F'}{F} X_2^\theta \longrightarrow \frac{\partial X_2^\theta}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial X_3^\theta}{\partial t} + \frac{F'}{F} X_3^\theta = 0$$

para que esta 3-distribución sea estable respecto a $\frac{\partial}{\partial t}$.
Las soluciones generales de estas ecuaciones son

$$X_2^\theta = K_1$$

$$X_3^\theta = \frac{K_2}{F}$$

en donde $\{K_i\}_{i=1}^2$ son funciones constantes respecto al tiempo. Además, se puede comprobar que es regularmente estable respecto a $\frac{\partial}{\partial t}$, ya que la base de Ω dada por los campos

$$\left\{ \left(\frac{1}{F}, 0, 0, 0 \right), \left(0, \frac{K_1}{F}, \frac{1}{F}, 0 \right), \left(0, 0, \frac{K_2}{F}, 1 \right) \right\}$$

es una base regularmente estable respecto a $\frac{\partial}{\partial t}$.

o $X_1^\theta \neq 0$.

Siempre podemos encontrar una base del tipo (A.1.14):

$$\{(X_1^r, 1, 0, 0), (X_2^r, 0, 1, 0), (X_3^r, 0, 0, 1)\}.$$

Las ecuaciones de estabilidad en componentes son

$$i = 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial X_1^r}{\partial t} + \Gamma_{tr}^r X_1^r = h_1^1 X_1^r + h_1^2 X_2^r + h_1^3 X_3^r \\ \Gamma_{t\theta}^\theta = h_1^1 \\ 0 = h_1^2 \\ 0 = h_1^3 \end{array} \right.$$

$$i = 2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial X_2^r}{\partial t} + \Gamma_{tr}^r X_2^r = h_2^1 X_1^r + h_2^2 X_2^r + h_2^3 X_3^r \\ 0 = h_2^1 \\ \Gamma_{t\varphi}^\varphi = h_2^2 \\ 0 = h_2^3 \end{array} \right.$$

$$i = 3 \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial X_3^r}{\partial t} + \Gamma_{tr}^r X_3^r = h_3^1 X_1^r + h_3^2 X_2^r + h_3^3 X_3^r \\ 0 = h_3^1 \\ 0 = h_3^2 \\ 0 = h_3^3 \end{array} \right.$$

y por lo tanto hay que exigir

$$\frac{\partial X_1^r}{\partial t} + \frac{F'}{F} X_1^r = \frac{F'}{F} X_1^r \longrightarrow \frac{\partial X_1^r}{\partial t} = 0$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial X_2^r}{\partial t} + \frac{F'}{F} X_2^r &= \frac{F'}{F} X_2^r \longrightarrow \frac{\partial X_2^r}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial X_3^r}{\partial t} + \frac{F'}{F} X_3^r &= 0\end{aligned}$$

para que esta 3-distribución sea estable respecto a $\frac{\partial}{\partial t}$. Las soluciones generales de estas ecuaciones son

$$\begin{aligned}X_1^r &= K_1 \\ X_2^r &= K_2 \\ X_3^r &= \frac{K_3}{F}\end{aligned}$$

en donde $\{K_i\}_{i=1}^3$ son funciones constantes respecto al tiempo. Además, se puede comprobar que es regularmente estable respecto a $\frac{\partial}{\partial t}$, ya que la base de Ω dada por los campos

$$\left\{ \left(\frac{K_1}{F}, \frac{1}{F}, 0, 0 \right), \left(\frac{K_2}{F}, 0, \frac{1}{F}, 0 \right), \left(\frac{K_3}{F}, 0, 0, 1 \right) \right\}$$

es una base regularmente estable respecto a $\frac{\partial}{\partial t}$.

Utilizando los resultados:

Aplicando el Teorema 3.1.30, toda 3-distribución Ω estable respecto a $\frac{\partial}{\partial t}$ es también regularmente estable respecto a $\frac{\partial}{\partial t}$, por lo que existirá una base de Ω regularmente estable respecto a $\frac{\partial}{\partial t}$. Además, para determinar las 3-distribuciones Ω estables respecto a $\frac{\partial}{\partial t}$, bastará con hallar los campos estables respecto a $\frac{\partial}{\partial t}$ (que serán ortogonales a las 3-distribuciones que busquemos y las caracterizarán biunívocamente). Así pues, vamos a hallar la forma que ha de tener un campo X regularmente estable respecto a $\frac{\partial}{\partial t}$. Las ecuaciones de estabilidad regular de un campo X respecto a $\frac{\partial}{\partial t}$ son

$$\begin{cases} \frac{\partial X^i}{\partial t} + \frac{F'}{F} X^i = 0, & i = r, \theta, \varphi \\ \frac{\partial X^t}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

La segunda ecuación nos dice que X^t no ha de depender de t , y la primera

$$F \frac{\partial X^i}{\partial t} + F' X^i = 0 \longrightarrow \frac{\partial}{\partial t} (F X^i) = 0, \quad i = r, \theta, \varphi$$

nos dice que $F X^i$ tampoco ha de depender de t para $i = r, \theta, \varphi$. Por lo tanto, las componentes de un campo X regularmente estable respecto a

$\frac{\partial}{\partial t}$ son de la forma

$$\begin{cases} X^r = \frac{K_1}{F} \\ X^\theta = \frac{K_2}{F} \\ X^\varphi = \frac{K_3}{F} \\ X^t = K_4 \end{cases} \quad (\text{A.1.21})$$

en donde $\{K_i\}_{i=1}^4$ son funciones de (r, θ, φ) .

Nota A.1.2. Se pueden hallar cuatro campos linealmente independientes $\{W_i\}_{i=1}^4$ que tengan las componentes de esta forma (esto se podría haber visto de antemano sabiendo que el fibrado tangente TM es regularmente estable respecto a cualquier campo y en particular existirá una base de TM que sea regularmente estable respecto a $\frac{\partial}{\partial t}$), escogiendo para W_i los valores $K_j = \delta_{ij}$:

$$\begin{cases} W_1 = (\frac{1}{F}, 0, 0, 0) \\ W_2 = (0, \frac{1}{F}, 0, 0) \\ W_3 = (0, 0, \frac{1}{F}, 0) \\ W_4 = (0, 0, 0, 1) \end{cases}$$

y por lo tanto, toda 3-distribución Ω estable (regularmente) respecto a $\frac{\partial}{\partial t}$ ha de tener una base $\{X_i\}_{i=1}^3$ de la forma

$$X_i = \alpha_i^j W_j, \quad \begin{cases} i = 1, 2, 3 \\ j = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

en donde $\{\alpha_i^j\}$ con $i = 1, 2, 3$ y $j = 1, 2, 3, 4$ son constantes respecto al tiempo y el rango de la matriz α_i^j es 3.

Así pues, las 3-distribuciones estables respecto a $\frac{\partial}{\partial t}$ tendrán un campo ortogonal de la forma (A.1.21). Aquí estarán representados todos los casos de 3-distribuciones estables (regularmente) respecto a $\frac{\partial}{\partial t}$ halladas anteriormente sin utilizar los resultados.

Ahora vamos a hallar las 3-distribuciones nulas estables (regularmente) respecto a $\frac{\partial}{\partial t}$, cosa que no hemos hecho sin utilizar los resultados, ya que resultaría demasiado largo y tedioso. Para ello, vamos a hacer uso del Corolario 3.1.32 y del Lema de Dualidad, y vamos a hallar los campos ortogonales que las caracterizan, que serán también nulos. Si exigimos que un campo X de la forma (A.1.21) sea nulo, tenemos

$$g(X, X) = 0 \longrightarrow K_1^2 + r^2 (K_2^2 + K_3^2 \sin^2 \theta) = a^2 K_4^2.$$

A.2. Auto-estabilidad

A.2.1. Ejemplo V (Schwarzschild)

Vamos a estudiar propiedades de la 2-distribución temporal

$$\Omega = \left\langle \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle.$$

Es foliación, ya que

$$\left[\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial t} \right] = 0.$$

Además, sus variedades integrales son esferas con $r = cte$, $t = cte$.

Veamos que Ω es auto-estable:

$$\begin{aligned} \nabla_r \frac{\partial}{\partial t} &= \Gamma_{rt}^t \frac{\partial}{\partial t} \in \Omega \\ \nabla_r \frac{\partial}{\partial r} &= \Gamma_{rr}^r \frac{\partial}{\partial r} \in \Omega \\ \nabla_t \frac{\partial}{\partial r} &= \Gamma_{tr}^t \frac{\partial}{\partial t} \in \Omega \\ \nabla_t \frac{\partial}{\partial t} &= \Gamma_{tt}^r \frac{\partial}{\partial r} \in \Omega. \end{aligned}$$

Ahora vamos a estudiar si además Ω es regularmente auto-estable.

Sin utilizar los resultados:

Como se ha visto en el Ejemplo III, en la métrica de Schwarzschild, las componentes de un campo X regularmente estable respecto a $\frac{\partial}{\partial t}$ son de la forma

$$\begin{cases} X^r = -aK_1 e^{a't/2} + aK_4 e^{-a't/2} \\ X^\theta = K_2 \\ X^\varphi = K_3 \\ X^t = K_1 e^{a't/2} + K_4 e^{-a't/2} \end{cases} \quad (\text{A.2.22})$$

en donde $\{K_i\}_{i=1}^4$ son constantes respecto al tiempo.

Por otro lado, las ecuaciones de estabilidad regular en la métrica de Schwarzschild de un campo X respecto a $\frac{\partial}{\partial r}$ son

$$\begin{cases} \frac{\partial X^r}{\partial r} - \frac{a'}{2a} X^r = 0 \\ \frac{\partial X^\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} X^\theta = 0 \\ \frac{\partial X^\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} X^\varphi = 0 \\ \frac{\partial X^t}{\partial r} + \frac{a'}{2a} X^t = 0 \end{cases}.$$

Así pues, las componentes de un campo X regularmente estable respecto a $\frac{\partial}{\partial r}$ son de la forma

$$\begin{cases} X^r = C_1\sqrt{a} \\ X^\theta = \frac{C_2}{r} \\ X^\varphi = \frac{C_3}{r} \\ X^t = \frac{C_4}{\sqrt{a}} \end{cases} \quad (\text{A.2.23})$$

en donde $\{C_i\}_{i=1}^4$ son funciones de (θ, φ, t) .

Teniendo en cuenta (A.2.22) y (A.2.23), los campos regularmente estables respecto a $\frac{\partial}{\partial t}$ y $\frac{\partial}{\partial r}$ han de verificar

$$\begin{cases} -aK_1e^{a't/2} + aK_4e^{-a't/2} = C_1\sqrt{a} \\ K_2 = \frac{C_2}{r} \\ K_3 = \frac{C_3}{r} \\ K_1e^{a't/2} + K_4e^{-a't/2} = \frac{C_4}{\sqrt{a}} \end{cases} \quad (\text{A.2.24})$$

Las ecuaciones segunda y tercera del sistema (A.2.24) obligan a rK_2, rK_3 a ser funciones de (θ, φ) , y por lo tanto C_2, C_3 también serán funciones de (θ, φ) . Las ecuaciones primera y cuarta de (A.2.24) obligan a $\sqrt{a}K_1, \sqrt{a}K_4$ a ser funciones de (θ, φ) , pero también obligan a que a' no dependa de r , a menos que $K_1 = K_4 = C_1 = C_4 = 0$. Por lo tanto, los campos regularmente estables respecto a $\frac{\partial}{\partial t}$ y $\frac{\partial}{\partial r}$ en la métrica de Schwarzschild han de ser de la forma

$$\left(0, \frac{C_2}{r}, \frac{C_3}{r}, 0\right)$$

en donde $\{C_i\}_{i=2}^3$ son funciones de (θ, φ) . Por lo tanto, como Ω no puede ser generada por campos de esta forma, no es regularmente auto-estable.

Utilizando los resultados:

Planteando la condición de que Ω sea autoplanea se tiene

$$\begin{cases} R\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial r} = R_{rrt}^t\frac{\partial}{\partial t} = 0 \\ R\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial t} = R_{trt}^r\frac{\partial}{\partial r} = 0 \end{cases}$$

y por lo tanto hay que exigir

$$\begin{cases} R_{rrt}^t = -\frac{a'}{ar} = 0 \\ R_{trt}^r = -\frac{a'a}{r} = 0 \end{cases},$$

lo cual no sucede. Por lo tanto, por el Teorema 3.1.30, Ω no es regularmente auto-estable en la métrica de Schwarzschild.

A.2.2. Ejemplo VI (Robertson-Walker)

Al igual que en el Ejemplo V, vamos a estudiar propiedades de la 2-distribución temporal

$$\Omega = \left\langle \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle$$

pero en este caso en la métrica de Robertson-Walker.

Es foliación, ya que

$$\left[\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial t} \right] = 0.$$

Además, sus variedades integrales son esferas con $r = cte$, $t = cte$.

Veamos que Ω es auto-estable:

$$\begin{cases} \nabla_r \frac{\partial}{\partial t} = \Gamma_{rt}^r \frac{\partial}{\partial r} \in \Omega \\ \nabla_r \frac{\partial}{\partial r} = \Gamma_{rr}^r \frac{\partial}{\partial r} + \Gamma_{rr}^t \frac{\partial}{\partial t} \in \Omega \\ \nabla_t \frac{\partial}{\partial r} = \Gamma_{tr}^r \frac{\partial}{\partial r} \in \Omega \\ \nabla_t \frac{\partial}{\partial t} = 0 \in \Omega \end{cases}.$$

Ahora vamos a estudiar si además Ω es regularmente auto-estable.

Sin utilizar los resultados:

Como se ha visto en el Ejemplo IV, las componentes de un campo X regularmente estable respecto a $\frac{\partial}{\partial t}$ son de la forma

$$\begin{cases} X^r = \frac{K_1}{F} \\ X^\theta = \frac{K_2}{F} \\ X^\varphi = \frac{K_3}{F} \\ X^t = K_4 \end{cases} \quad (\text{A.2.25})$$

en donde $\{K_i\}_{i=1}^4$ son funciones de (r, θ, φ) .

Por otro lado, las ecuaciones de estabilidad regular de un campo X

respecto a $\frac{\partial}{\partial r}$ son

$$\begin{cases} \frac{\partial X^r}{\partial r} - \frac{k}{2} \frac{r}{a} X^r + \frac{F'}{F} X^t = 0 \\ \frac{\partial X^\theta}{\partial r} + \left(1 - \frac{1}{4} k r^2\right) \frac{1}{ar} X^\theta = 0 \\ \frac{\partial X^\varphi}{\partial r} + \left(1 - \frac{1}{4} k r^2\right) \frac{1}{ar} X^\varphi = 0 \\ \frac{\partial X^t}{\partial r} + F F' \frac{1}{a^2} X^r = 0 \end{cases} .$$

Si consideramos los casos $k = -1, 1$ el sistema formado por las ecuaciones primera y cuarta es lineal de coeficientes no constantes, lo cual resulta bastante tedioso de resolver. Pero si consideramos sólo el caso $k = 0$, entonces este sistema pasa a ser lineal de coeficientes constantes. Las componentes de un campo X regularmente estable respecto a $\frac{\partial}{\partial t}$ con $k = 0$ son de la forma de la solución general del sistema anterior:

$$\begin{cases} X^r = C_1 e^{F'r} + C_4 e^{-F'r} \\ X^\theta = \frac{C_2}{r} \\ X^\varphi = \frac{C_3}{r} \\ X^t = -F C_1 e^{F'r} + F C_4 e^{-F'r} \end{cases} \quad (\text{A.2.26})$$

en donde $\{C_i\}_{i=1}^4$ son funciones de (θ, φ, t) .

Teniendo en cuenta (A.2.25) y (A.2.26), los campos regularmente estables respecto a $\frac{\partial}{\partial t}$ y $\frac{\partial}{\partial r}$ con $k = 0$ han de verificar

$$\begin{cases} \frac{K_1}{F} = C_1 e^{F'r} + C_4 e^{-F'r} \\ \frac{K_2}{F} = \frac{C_2}{r} \\ \frac{K_3}{F} = \frac{C_3}{r} \\ K_4 = -F C_1 e^{F'r} + F C_4 e^{-F'r} \end{cases} . \quad (\text{A.2.27})$$

Las ecuaciones segunda y tercera del sistema (A.2.27) obligan a rK_2, rK_3 a ser funciones de (θ, φ) , y por lo tanto FC_2, FC_3 también serán funciones de (θ, φ) . Las ecuaciones primera y cuarta de (A.2.27) obligan a FC_1, FC_4 a ser funciones de (θ, φ) y a F' a ser constante, a menos que $K_1 = K_4 = C_1 = C_4 = 0$. Por lo tanto, como en la métrica de Robertson-Walker F'' no es idénticamente cero, los campos regularmente estables respecto a $\frac{\partial}{\partial t}$ y $\frac{\partial}{\partial r}$ con $k = 0$ son de la forma

$$\left(0, \frac{h_2}{F'r}, \frac{h_3}{F'r}, 0\right)$$

en donde $\{h_i\}_{i=2}^3$ son funciones de (θ, φ) . Por lo tanto, como Ω no puede ser generada por campos de esta forma, no es regularmente auto-estable.

Utilizando los resultados:

Planteando la condición de que Ω sea autoplanea se tiene

$$\begin{cases} R\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial}{\partial r} = R_{rrt}^t \frac{\partial}{\partial t} = 0 \\ R\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial}{\partial t} = R_{trt}^r \frac{\partial}{\partial r} = 0 \end{cases}$$

y por lo tanto hay que exigir

$$\begin{cases} R_{rrt}^t = -F F'' \frac{1}{a^2} = 0 \\ R_{trt}^r = -\frac{F''}{F} = 0 \end{cases} \longrightarrow F'' = 0.$$

Así, como en la métrica de Robertson-Walker F'' no es idénticamente cero, se puede concluir por el Teorema 3.1.30 que Ω no es regularmente auto-estable en ningún espacio-tiempo de Robertson-Walker.

Utilizando el Teorema 3.1.30 se ve mucho más fácilmente cuándo Ω es una foliación regularmente auto-estable. Si no lo utilizamos tenemos que hallar una base regularmente auto-estable para poder demostrarlo. Además, sin utilizar el Teorema 3.1.30 sólo hemos resuelto el problema parcialmente (suponiendo $k = 0$).

A.2.3. Ejemplo VII (Schwarzschild)

En esta sección vamos a demostrar que no existen distribuciones autoplaneas en la métrica de Schwarzschild. Por lo tanto, según el Teorema 3.1.30, tampoco existirán distribuciones regularmente auto-estables. Además, vamos a probar que tampoco existen subvariedades autoplaneas.

Proposición A.2.1. *En el espacio-tiempo de Schwarzschild no existen distribuciones autoplaneas. Además, tampoco existen subvariedades autoplaneas.*

PRUEBA:

El objetivo es encontrar una 2-distribución Ω con base $\{X, Y\}$ tal que

$$\begin{cases} R(X, Y) X = 0 \\ R(X, Y) Y = 0 \end{cases}.$$

Para ello vamos a realizar un estudio por casos. De momento, siempre podemos encontrar una base de la forma

$$\{(X^r, X^\theta, X^\varphi, 0), (Y^r, Y^\theta, Y^\varphi, Y^t)\}.$$

- $Y^t = 0$.

En este caso podemos suponer $Y^r = 0$.

- $X^r = 0$.

Existe una base de la forma

$$\{(0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\},$$

pero en este caso, Ω no es autoplanea.

- $X^r \neq 0$.

- $Y^\theta = 0$.

Existe una base de la forma

$$\{(1, X^\theta, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\}.$$

En este caso

$$R(X, Y)Y = R_{\varphi r \varphi}^r \frac{\partial}{\partial r} + X^\theta R_{\varphi \theta \varphi}^\theta \frac{\partial}{\partial \theta} = 0$$

implica

$$\begin{cases} R_{\varphi r \varphi}^r = 0 \\ X^\theta R_{\varphi \theta \varphi}^\theta = 0 \end{cases}.$$

Pero esto no se cumple, ya que aunque exijamos $X^\theta = 0$ siempre ocurrirá que $R_{\varphi r \varphi}^r \neq 0$.

- $Y^\theta \neq 0$.

Existe una base de la forma

$$\{(1, 0, X^\varphi, 0), (0, 1, Y^\varphi, 0)\}.$$

En este caso

$$R(X, Y)Y = R_{\theta r \theta}^r \frac{\partial}{\partial r} + X^\varphi R_{\theta \varphi \theta}^\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} + X^\varphi Y^\varphi R_{\varphi \varphi \theta}^\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + X^\varphi X^\varphi R_{\varphi r \varphi}^r \frac{\partial}{\partial r}$$

y si lo igualamos a cero, implica

$$\begin{cases} R_{\theta r \theta}^r + X^\varphi X^\varphi R_{\varphi r \varphi}^r = 0 \\ X^\varphi Y^\varphi R_{\varphi \varphi \theta}^\theta = 0 \\ X^\varphi R_{\theta \varphi \theta}^\varphi = 0 \end{cases}.$$

Pero esto no se cumple, ya que aunque exijamos $X^\varphi = Y^\varphi = 0$ siempre ocurrirá que $R_{\theta r \theta}^r \neq 0$.

- $Y^t \neq 0$.

Existe una base de la forma

$$\{(X^r, X^\theta, X^\varphi, 0), (Y^r, Y^\theta, Y^\varphi, 1)\}.$$

En este caso

$$\begin{aligned} R(X, Y)X = & X^r X^r R_{rrt}^t \frac{\partial}{\partial t} + X^r X^r Y^\theta R_{rr\theta}^\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + X^r X^r Y^\varphi R_{rr\varphi}^\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ & + X^\theta X^r Y^r R_{r\theta r}^\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + X^\varphi X^r Y^r R_{r\varphi r}^\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ & + X^r X^\theta Y^\theta R_{\theta r \theta}^r \frac{\partial}{\partial r} + X^\theta X^\theta R_{\theta \theta t}^t \frac{\partial}{\partial t} + X^\theta X^\theta Y^r R_{\theta \theta r}^r \frac{\partial}{\partial r} \\ & + X^\theta X^\theta Y^\varphi R_{\theta \theta \varphi}^\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} + X^\varphi X^\theta Y^\theta R_{\theta \varphi \theta}^\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ & + X^r X^\varphi Y^\varphi R_{\varphi r \varphi}^r \frac{\partial}{\partial r} + X^\theta X^\varphi Y^\varphi R_{\varphi \theta \varphi}^\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + X^\varphi X^\varphi R_{\varphi \varphi t}^t \frac{\partial}{\partial t} \\ & + X^\varphi X^\varphi Y^r R_{\varphi \varphi r}^r \frac{\partial}{\partial r} + X^\varphi X^\varphi Y^\theta R_{\varphi \varphi \theta}^\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \end{aligned}$$

y si lo igualamos a cero, implica

$$\begin{cases} X^r X^\theta Y^\theta R_{\theta r \theta}^r + X^\theta X^\theta Y^r R_{\theta \theta r}^r + X^r X^\varphi Y^\varphi R_{\varphi r \varphi}^r + X^\varphi X^\varphi Y^r R_{\varphi \varphi r}^r \\ = 0 \\ X^r X^r Y^\theta R_{rr\theta}^\theta + X^\theta X^r Y^r R_{r\theta r}^\theta + X^\theta X^\varphi Y^\varphi R_{\varphi \theta \varphi}^\theta + X^\varphi X^\varphi Y^\theta R_{\varphi \varphi \theta}^\theta \\ = 0 \\ X^r X^r Y^\varphi R_{rr\varphi}^\varphi + X^\varphi X^r Y^r R_{r\varphi r}^\varphi + X^\theta X^\theta Y^\varphi R_{\theta \theta \varphi}^\varphi + X^\varphi X^\theta Y^\theta R_{\theta \varphi \theta}^\varphi \\ = 0 \\ X^r X^r R_{rrt}^t + X^\theta X^\theta R_{\theta \theta t}^t + X^\varphi X^\varphi R_{\varphi \varphi t}^t = 0 \end{cases} \quad (\text{A.2.28})$$

Si desarrollamos la cuarta ecuación del sistema (A.2.28)

$$(X^\theta)^2 \frac{m}{r} + (X^\varphi)^2 \frac{m}{r} \sin^2 \theta = (X^r)^2 \frac{a'}{ar}$$

vemos que $X^r \neq 0$. Por lo tanto, podemos hacer

$$X^r = \sqrt{\frac{a}{2}} r \quad (\text{A.2.29})$$

y de este modo, la cuarta ecuación de (A.2.28) queda

$$(X^\theta)^2 + (X^\varphi)^2 \frac{m}{r} \sin^2 \theta = 1. \quad (\text{A.2.30})$$

Además, como $X^r \neq 0$ podemos hacer

$$Y^r = 0. \quad (\text{A.2.31})$$

Si desarrollamos la primera ecuación de (A.2.28) llegamos a

$$X^\theta Y^\theta + X^\varphi Y^\varphi \sin^2 \theta = 0. \quad (\text{A.2.32})$$

Si desarrollamos la segunda ecuación de (A.2.28) llegamos a

$$-\frac{1}{2}Y^\theta + 2(X^\varphi)^2 Y^\theta \sin^2 \theta - 2X^\theta X^\varphi Y^\varphi \sin^2 \theta = 0. \quad (\text{A.2.33})$$

Utilizando (A.2.30) y (A.2.32) en (A.2.33) obtenemos

$$Y^\theta = 0 \quad (\text{A.2.34})$$

y por lo tanto, (A.2.32) queda

$$X^\varphi Y^\varphi = 0. \quad (\text{A.2.35})$$

Si desarrollamos la tercera ecuación de (A.2.28) teniendo en cuenta (A.2.29), (A.2.31) y (A.2.34) llegamos a

$$Y^\varphi \left(\frac{1}{2} - 2(X^\theta)^2 \right) = 0. \quad (\text{A.2.36})$$

Si consideramos $Y^\varphi \neq 0$ entonces (A.2.36) queda

$$(X^\theta)^2 = \frac{1}{4}, \quad (\text{A.2.37})$$

pero utilizando (A.2.35) obtenemos

$$X^\varphi = 0 \quad (\text{A.2.38})$$

y sustituyendo (A.2.38) en (A.2.30) obtenemos

$$(X^\theta)^2 = 1,$$

que entra en contradicción con (A.2.37).

Por lo tanto

$$Y^\varphi = 0.$$

Así pues, los campos X, Y tienen la forma

$$\left\{ \left(\sqrt{\frac{a}{2}} r, X^\theta, X^\varphi, 0 \right), (0, 0, 0, 1) \right\}$$

respectivamente, en donde se exige (A.2.30) a X^θ, X^φ .

Si hacemos

$$R(X, Y)Y = \sqrt{\frac{a}{2}} r R_{trt}^r \frac{\partial}{\partial r} + X^\theta R_{t\theta t}^\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + X^\varphi R_{t\varphi t}^\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

y lo igualamos a cero, se tiene

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{a}{2}} r R_{trt}^r = 0 \\ X^\theta R_{t\theta t}^\theta = 0 \\ X^\varphi R_{t\varphi t}^\varphi = 0 \end{cases} .$$

Pero esto no se cumple, ya que $R_{trt}^r \neq 0$.

Por lo tanto, se puede concluir que no existen distribuciones auto-planas en la métrica de Schwarzschild, ya que de lo contrario contendrían subdistribuciones de dimensión 2 autoplanas, cosa que acabamos de demostrar que no puede ocurrir.

Además, como las componentes del tensor curvatura son distintas de cero en todo punto del espacio-tiempo, también queda probado que no existen subvariedades autoplanas.

□

A.2.4. Ejemplo VIII (Robertson-Walker)

Al igual que en el Ejemplo VII, en esta sección vamos a demostrar que no existen distribuciones autoplanas en la métrica de Robertson-Walker. Por lo tanto, según el Teorema 3.1.30, tampoco existirán distribuciones regularmente auto-estables.

Proposición A.2.2. *En el espacio-tiempo de Robertson-Walker no existen distribuciones autoplanas.*

PRUEBA:

Exigiendo que el espacio-tiempo de Robertson-Walker no sea plano tenemos

$$\begin{cases} F'' \neq 0 \\ F'^2 + k \neq 0 \end{cases}$$

Así pues, las componentes del tensor curvatura distintas de cero son las mismas que en la métrica de Schwarzschild, y por lo tanto, si nos planteamos encontrar una 2-distribución Ω con base $\{X, Y\}$ tal que

$$\begin{cases} R(X, Y)X = 0 \\ R(X, Y)Y = 0 \end{cases}$$

entonces, siguiendo el mismo procedimiento que en el Ejemplo VII llegamos a que la única posibilidad es considerar una base de la forma

$$\{(X^r, X^\theta, X^\varphi, 0), (Y^r, Y^\theta, Y^\varphi, 1)\}.$$

En este caso

$$\begin{aligned} R(X, Y)X &= X^r X^r R_{rrt}^t \frac{\partial}{\partial t} + X^r X^r Y^\theta R_{rr\theta}^\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + X^r X^r Y^\varphi R_{rr\varphi}^\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ &+ X^\theta X^r Y^r R_{r\theta r}^\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + X^\varphi X^r Y^r R_{r\varphi r}^\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ &+ X^r X^\theta Y^\theta R_{\theta r \theta}^r \frac{\partial}{\partial r} + X^\theta X^\theta R_{\theta\theta t}^t \frac{\partial}{\partial t} + X^\theta X^\theta Y^r R_{\theta\theta r}^r \frac{\partial}{\partial r} \\ &+ X^\theta X^\theta Y^\varphi R_{\theta\theta\varphi}^\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} + X^\varphi X^\theta Y^\theta R_{\theta\varphi\theta}^\theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ &+ X^r X^\varphi Y^\varphi R_{\varphi r \varphi}^r \frac{\partial}{\partial r} + X^\theta X^\varphi Y^\varphi R_{\varphi\theta\varphi}^\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \\ &+ X^\varphi X^\varphi R_{\varphi\varphi t}^t \frac{\partial}{\partial t} \\ &+ X^\varphi X^\varphi Y^r R_{\varphi\varphi r}^r \frac{\partial}{\partial r} + X^\varphi X^\varphi Y^\theta R_{\varphi\varphi\theta}^\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \end{aligned}$$

y si lo igualamos a cero, implica

$$\begin{cases} X^r X^\theta Y^\theta R_{\theta r \theta}^r + X^\theta X^\theta Y^r R_{\theta\theta r}^r + X^r X^\varphi Y^\varphi R_{\varphi r \varphi}^r + X^\varphi X^\varphi Y^r R_{\varphi\varphi r}^r = 0 \\ X^r X^r Y^\theta R_{rr\theta}^\theta + X^\theta X^r Y^r R_{r\theta r}^\theta + X^\theta X^\varphi Y^\varphi R_{\varphi\theta\varphi}^\theta + X^\varphi X^\varphi Y^\theta R_{\varphi\varphi\theta}^\theta = 0 \\ X^r X^r Y^\varphi R_{rr\varphi}^\varphi + X^\varphi X^r Y^r R_{r\varphi r}^\varphi + X^\theta X^\theta Y^\varphi R_{\theta\theta\varphi}^\varphi + X^\varphi X^\theta Y^\theta R_{\theta\varphi\theta}^\theta = 0 \\ X^r X^r R_{rrt}^t + X^\theta X^\theta R_{\theta\theta t}^t + X^\varphi X^\varphi R_{\varphi\varphi t}^t = 0 \end{cases} \quad (\text{A.2.39})$$

al igual que en el Ejemplo VII. Si desarrollamos la cuarta ecuación del sistema (A.2.39)

$$(X^r)^2 + r^2 \left((X^\theta)^2 + (X^\varphi)^2 \sin^2 \theta \right) = 0$$

vemos que

$$\begin{cases} X^r = 0 \\ X^\theta = 0 \\ X^\varphi = 0 \end{cases}$$

y por lo tanto X ha de ser un campo idénticamente cero.

Por lo tanto, se puede concluir que tampoco existen distribuciones autoplanas en la métrica de Robertson-Walker, ya que de lo contrario tendrían subdistribuciones de dimensión 2 autoplanas, cosa que acabamos de demostrar que no puede ocurrir.

□

A.2.5. Ejemplo IX (Robertson-Walker)

Vamos a dar un ejemplo de métrica de tipo Robertson-Walker que acepta subvariedades autoplanas. Para ello, primero vamos a hallar una $F(t)$ adecuada para que existan subvariedades autoplanas, suponiendo $k = 0$ para facilitar los cálculos. Así pues, teniendo en cuenta (0.3.1), la condición que ha de cumplir $F(t)$ aparte de ser positiva y de que su derivada segunda F'' no sea idénticamente cero, es

$$2FF'' + F'^2 \leq 0. \quad (\text{A.2.40})$$

La subvariedad candidata a ser autopлана es la definida por

$$F'^2(t_0) = 0, \quad (\text{A.2.41})$$

ya que así las componentes del tensor curvatura R^i_{jkl} con $i, j, k, l = r, \theta, \varphi$ son cero. Además, por la forma en la que está definida la subvariedad tenemos que el espacio tangente a la subvariedad es precisamente

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\rangle$$

y por lo tanto

$$R(X, Y)Z = 0$$

para todo X, Y, Z de la subvariedad, ya que las componentes implicadas del tensor curvatura son cero. Así pues, vamos a hallar una $F(t)$ que cumpla (A.2.40) y que su derivada $F'(t)$ se haga cero al menos en un punto t_0 para que se cumpla (A.2.41) y así se pueda definir una subvariedad autopлана.

Si buscamos una F de la forma

$$F(t) = -t^2 + At + B,$$

exigiendo (A.2.41) obtenemos

$$F'(t_0) = -2t_0 + A = 0 \longrightarrow A = 2t_0$$

y por lo tanto

$$F(t) = -t^2 + 2t_0t + B.$$

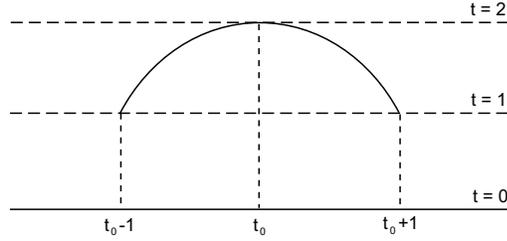


Figura A.1: Gráfica de la función $F(t)$ entre $t_0 - 1$ y $t_0 + 1$.

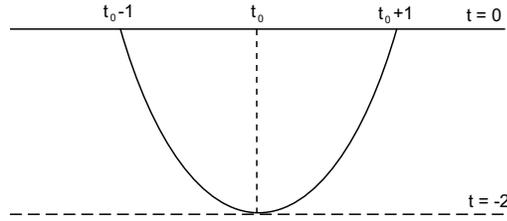


Figura A.2: Gráfica de la función $2F(t)F''(t) + F'^2(t)$, que entre $t_0 - 1$ y $t_0 + 1$ es negativa.

Exigiendo (A.2.40) obtenemos

$$\begin{aligned} 2FF'' + F'^2 &= 2(-t^2 + 2t_0t + B)(-2) + 4(t_0 - t)^2 \leq 0 \\ &\rightarrow 2t^2 - 4t_0t - B + t_0^2 \leq 0 \\ &\rightarrow B \geq 2t^2 - 4t_0t + t_0^2. \end{aligned}$$

Si escogemos

$$B = 2 - t_0^2$$

entonces, con $t \in]t_0 - 1, t_0 + 1[$ se tiene

$$\left\{ \begin{array}{l} F(t) = -t^2 + 2t_0t + 2 - t_0^2 > 0 \\ F'(t_0) = 0 \\ 2FF'' + F'^2 \leq 0 \end{array} \right. .$$

tal y como se muestra en las Figuras A.1 y A.2.

La interpretación geométrica de este espacio-tiempo es la siguiente: En $t = t_0 - 1$ el espacio-tiempo se reduce a un punto singular $r = 0$. Hasta $t = t_0$ se va expandiendo, y a partir de t_0 se va contrayendo hasta $t = t_0 + 1$, en el que vuelve a convertirse en un punto singular, $r = 0$, tal y como se puede apreciar en la Figura A.3.

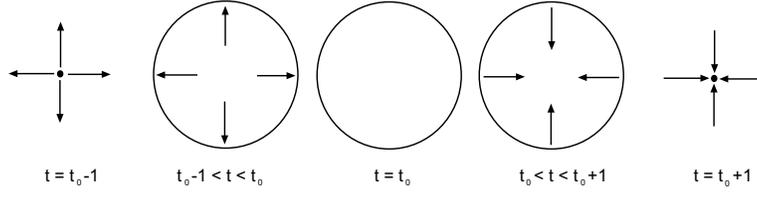


Figura A.3: Representación esquemática de un espacio-tiempo que en $t = t_0 - 1$ es un punto singular $r = 0$, hasta $t = t_0$ se expande y hasta $t = t_0 + 1$ se contrae, hasta convertirse otra vez en un punto singular $r = 0$.

La subvariedad definida por $t = t_0$ es autoplana, y coincide con el tiempo de equilibrio del espacio-tiempo. No obstante, esta subvariedad no es auto-estable.

A.2.6. Ejemplo X

En este ejemplo vamos a estudiar un caso de espacio-tiempo no plano en el que hay una 2-foliación regularmente auto-estable. Consideraremos una métrica en coordenadas cartesianas de la forma

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + a(z) dz^2 - b(z) dt^2.$$

Entonces, los símbolos de Christoffel distintos de cero

$$\begin{aligned} \Gamma_{zz}^z &= \frac{a'}{2a} \\ \Gamma_{tt}^z &= \frac{b'}{2a} \\ \Gamma_{tz}^t &= \Gamma_{zt}^t = \frac{b'}{2b} \end{aligned}$$

en donde

$$\begin{aligned} a' &= \frac{da}{dz} \\ b' &= \frac{db}{dz}. \end{aligned}$$

Las componentes distintas de cero del tensor curvatura son

$$\begin{aligned} R_{ztz}^t &= -R_{zzt}^t = \frac{1}{4ab^2} (a'bb' + ab'^2 - 2abb'') \\ R_{ttz}^z &= -R_{tzt}^z = \frac{1}{4ba^2} (a'bb' + ab'^2 - 2abb'') \end{aligned}$$

en donde

$$b'' = \frac{db'}{dz} = \frac{d^2b}{dz^2}.$$

Vicente José Bolós Lacave

Las componentes distintas de cero del tensor de Einstein son

$$G_{xx} = G_{yy} = -\frac{1}{4a^2b^2} (a'bb' + ab'^2 - 2abb'').$$

Para que sea definido positivo

$$a'bb' + ab'^2 - 2abb'' \leq 0$$

y por lo tanto hay que exigir

$$a \left(\frac{b'}{b} \right)' + b \left(\frac{b'}{a} \right)' \geq 0. \quad (\text{A.2.42})$$

Si escogemos

$$\begin{aligned} a &= z \\ b &= \frac{1}{z} \end{aligned}$$

entonces (A.2.42) queda

$$-\frac{4}{z^3} \leq 0$$

si consideramos $z > 0$. Entonces la métrica

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + z dz^2 - \frac{1}{z} dt^2$$

es válida para el abierto $z > 0$ y no es plana. Además, la foliación espacial

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle$$

es autoplanea y auto-estable. Por lo tanto, aplicando el Teorema 3.1.30, es también regularmente auto-estable.

A.2.7. Ejemplo XI (pp-wave)

Sea la 3-foliación nula

$$\Omega = \left\langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle$$

cuyas variedades integrales tienen $u = cte$. Es autoplanea y auto-estable, por lo tanto es regularmente auto-estable. Efectivamente, una base regularmente auto-estable es

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}.$$

Por lo tanto, las subfoliaciones

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle, \left\langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle, \left\langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle$$

son 2-foliaciones regularmente auto-estables. Las dos primeras son nulas y la tercera es espacial.

Además, la 2-foliación temporal

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle$$

también es regularmente auto-estable. Una base regularmente auto-estable es

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right\}.$$

A.3. Estabilidad en general

A.3.1. Ejemplo XII (Schwarzschild)

Sean las dos 2-foliaciones siguientes

$$\Omega = \left\langle \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\rangle$$

$$\Omega' = \left\langle \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle.$$

Veamos que Ω es estable respecto a Ω' :

$$\left. \begin{array}{l} \nabla_r \frac{\partial}{\partial \theta} = \Gamma_{r\theta}^{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \in \Omega \\ \nabla_r \frac{\partial}{\partial \varphi} = \Gamma_{r\varphi}^{\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \in \Omega \\ \nabla_t \frac{\partial}{\partial \theta} = 0 \in \Omega \\ \nabla_t \frac{\partial}{\partial \varphi} = 0 \in \Omega \end{array} \right\} \longrightarrow \nabla_{\Omega'} \Omega \subset \Omega.$$

Además, Ω es plana respecto a Ω' :

$$\left. \begin{array}{l} R\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial}{\partial \theta} = 0 \\ R\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial}{\partial \varphi} = 0 \end{array} \right\} \longrightarrow R(\Omega') \Omega = 0.$$

Por lo tanto, aplicando el Teorema 3.1.30, resulta que Ω es regularmente estable respecto a Ω' :

$$\nabla_{\Omega'} \Omega = 0.$$

Efectivamente, la base de Ω dada por los campos

$$\left\{ \left(0, \frac{1}{r}, 0, 0 \right), \left(0, 0, \frac{1}{r}, 0 \right) \right\}$$

es una base regularmente estable respecto a Ω' .

A.3.2. Ejemplo XIII (Robertson-Walker)

Sean Ω, Ω' las 2-foliaciones del Ejemplo XII. Veamos que Ω es estable respecto a Ω' :

$$\left. \begin{array}{l} \nabla_r \frac{\partial}{\partial \theta} = \Gamma_{r\theta}^\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \in \Omega \\ \nabla_r \frac{\partial}{\partial \varphi} = \Gamma_{r\varphi}^\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \in \Omega \\ \nabla_t \frac{\partial}{\partial \theta} = \Gamma_{t\theta}^\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \in \Omega \\ \nabla_t \frac{\partial}{\partial \varphi} = \Gamma_{t\varphi}^\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \in \Omega \end{array} \right\} \longrightarrow \nabla_{\Omega'} \Omega \subset \Omega.$$

Además, Ω es plana respecto a Ω' :

$$\left. \begin{array}{l} R \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} = 0 \\ R \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} = 0 \end{array} \right\} \longrightarrow R(\Omega') \Omega = 0.$$

Por lo tanto, aplicando el Teorema 3.1.30, resulta que Ω es regularmente estable respecto a Ω' :

$$\nabla_{\Omega'} \Omega = 0.$$

Efectivamente, la base de Ω dada por los campos

$$\left\{ \left(0, \frac{a}{Fr}, 0, 0 \right), \left(0, 0, \frac{a}{Fr}, 0 \right) \right\}$$

es una base regularmente estable respecto a Ω' .

Apéndice B: Fibrados espigados

En los trabajos de Mecánica Simpléctica de J. M. Souriau se presentan, estrechamente relacionadas, un par de estructuras simplécticas: una variedad simpléctica y otra presimpléctica (Souriau, 1970). La primera representa los posibles movimientos de un sistema dinámico y la segunda su espacio de evolución, de manera que las hojas de la foliación característica describen los movimientos del sistema. Este formalismo funciona bien para casos de partículas libres, tanto relativistas como no relativistas; pero no se ha conseguido un estudio general satisfactorio para partículas en interacción.

Los fibrados espigados se definieron con el propósito inicial de abordar esta cuestión del modo más general posible. Una clave se vio en la *Teoría Gauge*. En esta teoría, el campo de interacción se describe mediante una forma de conexión en un fibrado principal, y las partículas que interactúan son representadas por secciones diferenciables de un fibrado vectorial asociado al principal de partida (Wu y Yang, 1975). El “*Principio de acoplamiento mínimo*” no es más que emplear derivadas covariantes generadas a partir de la conexión dada en el fibrado vectorial en vez de las derivadas parciales ordinarias.

Como el movimiento tiene que ser observado de alguna forma, debe ser descrito en la variedad base del fibrado, que puede ser el espacio-tiempo, si se trabaja en Relatividad; o el espacio euclídeo ordinario, si se hace el estudio en Física Clásica. El movimiento, que es representado por las hojas de una foliación característica, debe de ser proyectado a la variedad base. Esto se consigue si se sitúa la foliación característica en la distribución horizontal que posee todo fibrado asociado, heredada de la conexión de Ehresmann definida en el fibrado principal inicial. Entonces las variedades presimplécticas no pueden ser fibras tipo de los nuevos fibrados. Ahora bien, siguiendo a Souriau, tiene que haber un par formado por una variedad presimpléctica y otra simpléctica, de manera que ésta es variedad cociente de la primera. Esto motivó a que la fibra tipo fuera simpléctica, y que cada una de las fibras estuviese revestida por una variedad presimpléctica.

El razonamiento anterior permite enlazar las estructuras simplécticas

dadas en Relatividad Especial con la Relatividad Generalizada. Por un lado sabemos que en un entorno “suficientemente pequeño” de un punto arbitrario del espacio–tiempo, éste se comporta como un espacio de Minkowski, pero además, el formalismo fibrado, al ser más flexible, permite relacionar otras estructuras distintas a la del espacio de Minkowski. Por ejemplo, podemos asignar a cada punto del espacio–tiempo, una variedad simpléctica dada para partículas libres, que es como decir partículas de la relatividad especial desprovistas de cualquier tipo de interacción. Este modo de proceder concuerda con la idea de que el espacio–tiempo se comporta en cada punto como un sistema inercial, y en consecuencia tiene cabida las estructuras simplécticas desarrolladas en tales sistemas. Estudiar cómo se modifican bajo un campo de interacción es dar el modo de relacionarse entre sí las fibras del fibrado en función de la conexión responsable de la interacción.

B.1. Introducción a fibrados

En este apartado presentamos los resultados de fibrados que utilizamos en lo sucesivo. Por supuesto no pretende ser un repaso exhaustivo sino que nuestra intención ha sido homogeneizar la notación y hacer más cómoda la lectura de este Apéndice.

Dadas dos variedades diferenciables P , M y una aplicación diferenciable y suprayectiva $\pi: P \rightarrow M$, decimos que la terna $\xi = (P, M, \pi)$ es una *fibración diferenciable*. A P le llamamos espacio total, a M base y a π proyección.

Dos fibraciones $\xi = (P, M, \pi)$ y $\xi' = (P', M', \pi')$ se dice que son *isomorfas* cuando existen dos difeomorfismos u y f de modo que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 P & \xrightarrow{u} & P' \\
 \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\
 M & \xrightarrow{f} & M'
 \end{array} \tag{B.1.1}$$

Esta propiedad puede darse localmente, es decir dada la fibración diferenciable ξ y un abierto $U \subset M$, denotaremos por $\xi|_U$ a

$$\xi|_U = (\pi^{-1}(U), U, \pi|_{\pi^{-1}(U)}). \tag{B.1.2}$$

Diremos que dos fibraciones diferenciables $\xi = (P, M, \pi)$ y $\mu = (P', M', \pi')$ son *localmente isomorfas* si para todo $m \in M$ existe un abierto $U \subset M$ conteniendo a m de modo que $\xi|_U$ y $\mu|_U$ son isomorfas.

Dada una fibración diferenciable $\xi = (P, M, \pi)$ y un punto $m \in M$ llamaremos *fibra* de ξ sobre m al conjunto $\pi^{-1}(m)$. En general, se puede

suponer que cada fibra tiene estructura de subvariedad regular de P (basta, por ejemplo, que π sea una submersión). Una variedad diferenciable N se dice que es *fibra tipo de la fibración* ξ si es difeomorfa a cada fibra de ξ .

Una fibración $\xi = (P, M, \pi)$ decimos que es *trivial con fibra tipo* N si es isomorfa a la fibración $(M \times N, M, p_1)$, donde la aplicación p_1 es la proyección sobre el primer factor y la aplicación f dada en (B.4.28) es la identidad. Y por tanto, se dice que ξ es *localmente trivial con fibra tipo* N si es localmente isomorfa a la fibración $(M \times N, M, p_1)$, es decir, que $\forall m \in M$, existe un abierto $U \subset M$ conteniendo a m y un difeomorfismo $\lambda: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times N$ verificando

$$p_1 \lambda = \pi. \quad (\text{B.1.3})$$

A estas aplicaciones les llamamos *cartas de la fibración o trivializaciones*.

Consideramos G un grupo de Lie que actúa libremente a derecha sobre P (el espacio total de ξ), de manera que $\frac{P}{G}$ tiene estructura de variedad cociente de modo que

$$\dim \frac{P}{G} = \dim P - \dim G.$$

Si ξ es isomorfa a la fibración $\mu = (P, \frac{P}{G}, \pi')$ con $\pi': P \rightarrow \frac{P}{G}$ la proyección canónica, diremos que ξ es una G -fibración diferenciable. En este caso, existe un difeomorfismo $f: \frac{P}{G} \rightarrow M$, de manera que $f\pi' = \pi$. Por tanto, π es una submersión, puesto que π' lo es y f es un difeomorfismo.

En Husemoller (1966), por ejemplo, se prueba que las fibras de una G -fibración principal son difeomorfas a G , y en Dieudonné (1981) se demuestra la siguiente condición suficiente para que una fibración diferenciable sea G -fibración principal:

Teorema B.1.1. *Sean P una variedad diferenciable, G un grupo de Lie que actúa a derecha y libremente sobre P , $M = P/G$ la variedad cociente de modo que*

$$\dim M = \dim P - \dim G,$$

y $\pi: P \rightarrow M$ la submersión canónica.

Entonces $\xi = (P, M, \pi)$ es una G -fibración principal localmente trivial.

Antes de introducir el concepto de fibrado asociado, vamos a recordar los conceptos de G -espacio derecha e izquierda. Llamamos G -espacio derecha a un espacio topológico X con una aplicación continua $\nu: X \times G \rightarrow X$ definida por

$$\nu(x, g) = xg \quad x \in X, g \in G,$$

de manera que:

i) $\forall x \in X, s, t \in G$ se tiene que $x(st) = (xs)t$

ii) $\forall x \in X, xe = x$, donde e es el neutro de G .

Un G -espacio derecha X genera un G -espacio izquierda si definimos la actuación del grupo a la izquierda del modo siguiente:

$$sx = xs^{-1}, \quad \forall x \in X, \forall t \in G.$$

Definición B.1.2. Dados una G -fibración $\xi = (P, M, \pi)$, y N un G -espacio izquierda, denimos la relación

$$(p, y)s = (ps, s^{-1}y) \quad \forall p \in P, \forall y \in N, \forall s \in G$$

que convierte a $P \times N$ en un G -espacio derecha que denotaremos como $P_N = \frac{P \times N}{G}$. Consideramos $\pi_N: P_N \rightarrow M$, la aplicación dada por

$$\pi_N((p, y)G) = \pi(p), \quad p \in P, y \in N. \quad (\text{B.1.4})$$

Llamamos *fibrado sobre M con fibra tipo N asociado a ξ* a la G -fibración $\xi[N] = (P_N, M, \pi_N)$. Al grupo G se le llama *grupo estructural*.

Cuando la fibra tipo es $N = \mathbb{R}^s$, y el grupo estructural es el grupo lineal sobre \mathbb{R}^s o cualquier subgrupo de Lie de éste, decimos que es un *fibrado vectorial*.

En Husemoller (1966) se demuestra que $\xi[N]$ es una fibración diferenciable localmente trivial, y sus cartas se construyen del modo siguiente: Dada $\phi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G$ una carta de ξ , podemos construir una carta de $\xi[N]$ mediante la aplicación $\varphi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times N$ definida por

$$\varphi((p, y)G) = (p_1\phi(p), p_2\phi(p)y) \quad (\text{B.1.5})$$

donde p_1 y p_2 son las proyecciones de $U \times G$ sobre U y G respectivamente.

Como las fibras de una G -fibración principal ξ son isomorfas al grupo G y ξ y $\xi[G]$ son isomorfos, al fibrado $\xi[G]$ se le llama *fibrado principal* o *G -fibrado principal*.

Dado el interés de los G -fibrados principales en este Apéndice, preferimos resumir sus características en la siguiente definición (Kobayashi y Nomizu, 1963):

Definición B.1.3. Dada una variedad diferenciable M y un grupo de Lie G , un G -fibrado principal (diferenciable) sobre M con grupo estructural G consiste en una variedad diferenciable P y una acción de G sobre P verificando las siguientes condiciones:

1. G actúa libremente a la derecha de P ;
2. M es el espacio cociente de P por la relación de equivalencia inducida por G , $M = P/G$, y la proyección canónica $\pi: P \rightarrow M$ es diferenciable;

3. P es localmente trivial, es decir, cada punto m de M tiene un entorno U tal que $\pi^{-1}(U)$ es isomorfo con $U \times G$ en el sentido que existe un difeomorfismo $\psi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G$, tal que $\psi(p) = (\pi(p), \varphi(p))$, donde φ es una aplicación de $\pi^{-1}(U)$ en G verificando $\varphi(ps) = (\varphi(p))s$ para cada $p \in \pi^{-1}(U)$ y $s \in G$.

A este G -fibrado principal lo denotaremos $\xi = (P, M, \pi, G)$.

Definición B.1.4. Dado un G -fibrado principal $\xi = (P, M, \pi, G)$, diremos que un vector $v \in T_p P$ es *vertical en un punto* $p \in P$ si

$$v \in \ker \pi_{*p}. \quad (\text{B.1.6})$$

Denotaremos \mathcal{V}_p al conjunto de todos los vectores verticales en p . Este conjunto es un subespacio vectorial de $T_p P$ que recibe el nombre de *espacio vertical*.

Veamos algunas equivalencias de esta definición.

Proposición B.1.5. Dados un G -fibrado principal, $\xi = (P, M, \pi, G)$, un punto $p \in P$ y un vector $v \in T_p P$, las siguientes condiciones son equivalentes:

- i) v es vertical.
- ii) v es tangente a la subvariedad $\pi^{-1}(p)$.
- iii) v es el valor que toma un campo de Killing inducido por la acción del grupo estructural.

Esto nos permite definir el concepto de conexión de la forma siguiente:

Definición B.1.6. Sea M una variedad de dimensión q . Dado un G -fibrado principal sobre M , $\xi = (P, M, \pi, G)$, una conexión \mathcal{H} sobre P es una q -distribución que verifica

- i) $T_p P = \mathcal{H}_p \oplus \mathcal{V}_p, \quad \forall p \in P.$
- ii) \mathcal{H} es invariante a derecha, es decir

$$R_{a*} \mathcal{H}_p = \mathcal{H}_{pa}, \quad \forall p \in P, \forall a \in G.$$

A los espacios vectoriales \mathcal{H}_p , con $p \in P$, se les denomina *espacios horizontales*, y los vectores de \mathcal{H}_p se denominan *vectores horizontales*. Es inmediato comprobar que los espacios \mathcal{H}_p son isomorfos a $T_{\pi(p)} M$ haciendo uso de la aplicación

$$\pi_{*p}: \mathcal{H}_p \longrightarrow T_{\pi(p)} M \quad (\text{B.1.7})$$

Definición B.1.7. Sea m un elemento de M . Dado un vector $v \in T_m M$, llamamos *levantamiento horizontal* de v al vector $\bar{v} \in \mathcal{H}_p$ de modo que $\pi(p) = m$, y $\pi_{*p}(\bar{v}) = v$.

En Kobayashi y Nomizu (1963) se demuestra que dada c una curva diferenciable de M que parte de un punto x_0 , para un punto arbitrario $u_0 \in \pi^{-1}(x_0)$, existe una única curva diferenciable \bar{c} en P , de manera que \bar{c} sea levantamiento horizontal de c y $\pi\bar{c} = c$.

Definición B.1.8. Dado un G -fibrado principal provisto de una conexión, un vector $v \in TP$ se descompone en un vector horizontal h y otro vertical $Z_P(p)$ de la forma siguiente:

$$v = Z_P(p) + h, \quad (\text{B.1.8})$$

donde $Z_P(p)$ es el valor del campo fundamental (o de Killing) en p , y por tanto vertical (según la Proposición B.1.5).

Se llama *forma de conexión* a la 1-forma w , a valores en el álgebra de Lie del grupo estructural G , definida por

$$w_p: T_pP \longrightarrow T_eG, \quad (\text{B.1.9})$$

dada por $w_p(v) = Z$. Esta 1-forma es diferenciable (Kobayashi y Nomizu, 1963), y gracias a ella se puede caracterizar de los vectores horizontales de la forma siguiente:

$$v \in T_pP \text{ es horizontal} \iff w_p(v) = 0. \quad (\text{B.1.10})$$

Conexiones en fibrados asociados

Los conceptos de horizontal y vertical pueden trasladarse a fibrados asociados de la forma siguiente:

Dados $\xi = (P, M, \pi, G)$ y $\xi[N] = (P_N, M, \pi_N, G)$ un G -fibrado principal y el fibrado asociado a ξ con fibra tipo N respectivamente. Dado $w \in P_N$, llamamos *subespacio vertical*, y lo denotamos N_w , al espacio tangente a la fibra $\pi_N^{-1}(\pi_N(w))$ en w , es decir

$$N_w = T_w\pi_N^{-1}(\pi_N(w)). \quad (\text{B.1.11})$$

Como en los fibrados principales, se demuestra que

$$N_w = \ker \pi_{*w}. \quad (\text{B.1.12})$$

Dada la proyección canónica $\mu: P \times N \longrightarrow P_N$, podemos construir la aplicación

$$\mu_\zeta: P \longrightarrow P_N,$$

dada por $\mu_\zeta(u) = \mu(u, \zeta)$ con $\zeta \in N$, que es una aplicación diferenciable y por propia construcción verifica

$$\pi = \pi_N \mu_\zeta.$$

Definición B.1.9. Sean $\xi = (P, M, \pi, G)$ un G -fibrado principal y \mathcal{H}_u el subespacio horizontal en $u \in P$. Llamamos *subespacio horizontal* de P_N en $w = \mu(u, \zeta)$ al subespacio $\mathcal{Q}_w \subset T_w P_N$ definido por

$$\mathcal{Q}_w = \mu_{\zeta_*} \mathcal{H}_u. \quad (\text{B.1.13})$$

En Kobayashi y Nomizu (1963) se demuestran las siguientes propiedades:

Teorema B.1.10.

- 1) \mathcal{Q}_w no depende de las antiimágenes de w por μ .
- 2) $\mathcal{Q}_w \cap \mathcal{F}_w = \{0\}$.
- 3) μ_{ζ_*} es inyectiva en \mathcal{H}_u .
- 4) $\mathcal{F}_w \oplus \mathcal{Q}_w = T_w P_N$.

Con estas propiedades, la aplicación

$$\pi_{N*}|_{\mathcal{Q}_w}: \mathcal{Q}_w \longrightarrow T_{\pi_N(w)} M, \quad (\text{B.1.14})$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Como ocurre en los fibrados principales, dada una curva c diferenciable a trozos en M , existe una curva k en P_N que es levantamiento horizontal de c .

Proposición B.1.11. *Dada una curva k diferenciable a trozos de P_N , es levantamiento horizontal de una curva c diferenciable a trozos en M si y sólo si el levantamiento canónico de la curva diferenciable que coincide con k en el intervalo I pertenece al subespacio de $k(t)$, $\forall t \in I$.*

Una vez conocidos los conceptos de vector vertical y horizontal, así como el de levantamiento canónico de una curva, tanto en fibrados principales como asociados, nuestro objetivo será estudiar los transportes paralelos a lo largo de curvas en un fibrado asociado. Haciendo uso de que el grupo estructural actúa libremente, en Kobayashi y Nomizu (1963) se demuestra la siguiente proposición:

Proposición B.1.12. *Dado un G -fibrado principal $\xi = (P, M, \pi, G)$ y un fibrado $\xi[N] = (P_N, M, \pi_N, G)$ asociado a ξ con fibra tipo N , para cada $u \in P$ podemos definir la aplicación*

$$\underline{u}: N \longrightarrow \pi_N^{-1}(\pi(u)) \quad (\text{B.1.15})$$

dada por $\underline{u}(y) = (u, y)G$ que verifica:

- 1) $(u\alpha)y = \underline{u}(\alpha y)$, $\alpha \in G$
- 2) \underline{u} es una biyección.

Definición B.1.13. Sea un G -fibrado principal $\xi = (P, M, \pi, G)$ provisto de una conexión. Sean c una curva diferenciable de M y \bar{c} su levantamiento horizontal. Un *traslado paralelo* a lo largo de c , de la fibra $\pi_N^{-1}(c(t))$ a la fibra $\pi_N^{-1}(c(t+h))$ está definido por

$$\tau_t^h = \underline{\bar{c}(t+h)} \underline{\bar{c}(t)}^{-1}. \quad (\text{B.1.16})$$

En el caso particular de fibrados vectoriales, además de las propiedades del epígrafe anterior, se verifican muchas más de las cuales entresacamos algunas:

Definición B.1.14. Una *sección* de una fibración $\lambda = (L, B, p)$ es una aplicación $s: B \rightarrow L$ de manera que $ps = 1_B$.

En un fibrado vectorial $\xi[E]$, asociado al G -fibrado principal ξ , se define la *derivada covariante de secciones* del modo siguiente:

Definición B.1.15. Dada una curva c de M , y φ una sección del fibrado $\xi[E]$ de modo que $\text{def } \varphi \cap \text{Im } c \neq \emptyset$, llamamos derivada covariante de φ respecto a $\dot{c}(t)$ a

$$\nabla_{\dot{c}(t)} \varphi = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\tau_t^h)^{-1} \left(\varphi(c(t+h)) - \varphi(c(t)) \right)}{h}. \quad (\text{B.1.17})$$

En Choquet *et al.* (1982) se enuncia y demuestra el siguiente resultado:

Teorema B.1.16. *La derivada covariante de una sección diferenciable Y en un fibrado $\xi[E]$, asociado al G -fibrado principal ξ y con fibra tipo E (un espacio vectorial), respecto a una dirección $\dot{c}(t)$ existe y su expresión es*

$$\nabla_{\dot{c}(t)} Y = \underline{\bar{c}(t)} \left(\rho_{a(t)_*}^{-1} \dot{V}_t - \rho_{V_t} \psi_* R_{a(t)_*} (s^* w) \dot{c}(t) \right), \quad (\text{B.1.18})$$

donde

$R_{a(t)}$ es una traslación a derecha de G correspondiente al elemento $a(t)$.

ρ es la acción a izquierda sobre E .

s es una sección diferenciable de ξ , de manera que

$$\text{def } Y = U \subset \text{def } s, \quad \text{Im } c \subset U.$$

ψ es la aplicación de G en G tal que $\psi(a) = a^{-1} \quad \forall a \in G$.

V_t es la imagen de $Y(c(t))$ en la fibra tipo E respecto a la trivialización de $\xi[E]$ inducida por s .

$a(t)$ es la curva del grupo G que determina el levantamiento horizontal de $c(t)$ en el fibrado principal ξ de acuerdo con $\bar{c}(t) = (sc(t))a(t)$.

La derivada covariante sobre secciones permite dar una caracterización de las secciones diferenciables que se trasladan paralelamente de la forma siguiente:

Teorema B.1.17. *La condición necesaria y suficiente para que una sección diferenciable Y de un fibrado vectorial $\xi[E]$ se traslade paralelamente a lo largo de una curva c (con dominio I), es que se verifique*

$$\nabla_{\dot{c}(t)}Y = 0, \quad \forall t \in I.$$

Ahora nuestro objetivo será extender el concepto de derivada covariante de secciones respecto a campos vectoriales de la variedad base.

Definición B.1.18. Sea X un campo vectorial de la variedad base M y φ una sección diferenciable del fibrado $\xi[N]$. La derivada covariante de φ en la dirección de X en un punto $m \in M$, se define como

$$\nabla_X \varphi(m) = \nabla_{\dot{c}(0)}\varphi,$$

donde c es la curva integral de X que pasa por m .

Definición B.1.19. Una *conexión lineal* es una conexión de un fibrado principal ξ cuyo grupo estructural es $G = GL(n, \mathbb{R})$, donde n es la dimensión de la base.

En el fibrado ξ podemos definir Λ , una 1-forma en P , a la que llamaremos *forma canónica*, y viene dada por

$$\Lambda_u(\zeta) = \underline{u}^{-1}(\pi_*\zeta), \quad \zeta \in T_uP, \quad (\text{B.1.19})$$

donde \underline{u} está definida en el fibrado vectorial asociado con fibra tipo \mathbb{R}^n .

El siguiente resultado se encuentra en Kobayashi y Nomizu (1963).

Proposición B.1.20. *Sea $\{e_i\}_{i=1}^n$ una paralelización local definida en un abierto U de una variedad diferenciable M . Entonces,*

$$\nabla_X e_{i|U} = ((sw^*)(X))_i^k e_k,$$

siendo X un campo vectorial de M , y s la sección del fibrado de las referencias de M definida por la paralelización de la forma

$$s(x) = (e_1(x), e_2(x), \dots, e_n(x)).$$

Dada una carta F de funciones coordenadas (x_1, x_2, \dots, x_n) consideramos la base natural $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right\}$. Esta base se puede considerar

como generadora de referencias en el fibrado $(R(M), M, \pi)$. Construimos la siguiente sección $s: B \rightarrow L$ dada por

$$s(x) = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} x, \frac{\partial}{\partial x^2} x, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} x \right\},$$

donde $U = \text{def } F$.

Si representamos por $\chi(M)$ al conjunto de los campos vectoriales sobre M y consideramos la aplicación $\Phi: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$, dada por

$$\Phi(X, Y) = \nabla_X Y, \quad (\text{B.1.20})$$

satisfaciendo las condiciones de una conexión de Koszul, existe una única conexión lineal en M de manera que $\nabla_X Y$ es la derivada covariante de Y en la dirección de X para esta conexión.

B.2. Fibrados simplécticos en Relatividad

A partir del éxito de los fibrados principales con conexión para explicar la teoría gauge (Wu y Yang, 1975), el uso de fibrados para estudiar fenómenos físicos ha experimentado un notable incremento. En concreto, una de las tendencias de la Mecánica Simpléctica ha sido la construcción de fibrados asociados cuya fibra tipo es una variedad simpléctica que representa el sistema dinámico que se va a estudiar (Souriau, 1970) y en los que la interacción se explica a partir de una conexión. Dependiendo de la estructura geométrica que se imponga al sistema dinámico, los fibrados simplécticos que se obtienen serán vectoriales o no. Analicemos brevemente las dos posibilidades.

Definición B.2.1. (Morvan, 1984) *Sea $\lambda = (M, B, \pi, E)$ un fibrado vectorial con base B y fibra tipo el espacio vectorial simpléctico E . Decimos que δ es un fibrado vectorial simpléctico si existe una dos forma ω de manera que para cada $b \in B$, ω_b es una forma simpléctica en la fibra $\pi^{-1}(b)$.*

Este tipo de fibrados es muy útil para estudiar subvariedades Lagrangianas asociadas con el concepto de polarización en cuantización geométrica (Morvan, 1984), pero no permite estudiar sistemas dinámicos que no puedan representarse como espacios vectoriales. Por ejemplo, J. M. Souriau describe las partículas elementales con spin mediante la variedad simpléctica $\mathbb{R}^6 \times S^2$, cuando tienen masa, y mediante $\mathbb{R}^4 \times S^2$ cuando no tienen masa (Souriau, 1970, 1997). Obviamente un fibrado vectorial simpléctico no permite describir la evolución de estos sistemas dinámicos.

Guillemin, Lerman y Sternberg proponen (Guillemin *et al.*, 1996) una estructura más general que permite resolver estos inconvenientes:

Definición B.2.2. (Guillemin *et al.*, 1996) *Una fibración (M, B, π, U) con base B y fibra tipo la variedad simpléctica U es una fibración simpléctica si se verifica:*

i) Las fibras $\pi^{-1}(b)$, $b \in B$, son variedades simplécticas.

ii) Existe una 2-forma ω en M de manera que

$$i(v_1 \wedge v_2) d\omega = 0$$

para cada par de campos vectoriales v_1 y v_2 .

iii) La restricción de ω a cada fibra, $\omega|_{\pi^{-1}(b)}$, es la forma simpléctica de la fibra.

En una fibración simpléctica existe una conexión simpléctica Γ compatible con la 2-forma ω y los traslados paralelos de Γ son simplectomorfismos.

Esta estructura permite reformular la Mecánica Simpléctica en términos de fibrados, pero no considera explícitamente algunos aspectos fundamentales. Estas fibriciones simplécticas, no están asociadas a ningún fibrado principal y no tienen ningún grupo estructural que permita incorporar la teoría de frupos dinámicos. Además, es conocido (Souriau, 1970) que la evolución de un sistema dinámico (U, σ) cuyo espacio de evolución es una variedad presimpléctica (V, σ_V) puede obtenerse estudiando la foliación característica de V , es decir $\ker(\sigma_{V_b})$. La Definición B.2.2 no implica la existencia de variedades presimplécticas ni de ninguna foliación capaz de describir la evolución de la fibra tipo, por tanto, en nuestra opinión, las fibriciones simplécticas son demasiado generales para resultar operativa.

Desde principios de los 90, Liern y Olivert propusieron trabajar (Liern y Olivert, 1992) con la estructura de fibrado espigado. Esta estructura, a pesar que fue concebida de forma independiente, puede obtenerse a partir de la Definición B.2.2 añadiendo algunas condiciones:

- (C1) La fibrición (M, π, B, U) es un G -fibrado asociado a un G -fibrado principal con conexión.
- (C2) El fibrado contiene una foliación que muestra la evolución del sistema dinámico.
- (C3) El espacio total del fibrado contiene variedades presimplécticas que son los espacios de evolución de los sistemas dinámicos.

Sin embargo, no creemos conveniente manejarla de esta forma sino como lo hacemos en la sección siguiente.

B.3. Estructura espigada

Definición B.3.1. Sea $\delta = (P, B, \pi, G)$ una G -fibración principal provista de una conexión \mathcal{H} y (F, σ) una variedad simpléctica de Hausdorff G -espacio izquierda, tal que G actúa sobre F por simplectomorfismos. El fibrado asociado a δ con fibra tipo F , se llama fibrado espigado si existe una foliación S contenida en la distribución horizontal \mathcal{H} tal que cada fibra corta en un punto (a lo sumo) a cada hoja de S .

Al fibrado espigado para la foliación S lo denotamos

$$\delta[F](S) = (P_F, B, \pi_F, G; S).$$

Como se verá más adelante, la foliación S no es única, por tanto hemos preferido que aparezca de forma explícita en la notación.

Proposición B.3.2. Dado $\delta[F](S) = (P_F, B, \pi_F, G; S)$ un fibrado espigado, cada fibra $F_b = \pi_F^{-1}(b)$ tiene una estructura simpléctica canónica.

PRUEBA:

Al actuar G por simplectomorfismos sobre F , podemos definir sobre cada fibra $F_b = \pi_F^{-1}(b)$ una estructura simpléctica σ_b de manera natural de la forma siguiente:

Sean $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times G$ difeomorfismos locales para δ tales que $\varphi_\alpha(p) = (\pi(p), \psi_\alpha(p))$. A partir de ellos definimos otros para $\delta[F]$ denotados por $\tilde{\varphi}_\alpha : \pi_F^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times F$ y dados por

$$\tilde{\varphi}_\alpha([p, f]) = (\pi(p), \psi_\alpha(p) \cdot f),$$

donde $[p, f] = (p, f)G \in P_F$.

Como las fibras F_b son subvariedades de P_F , las inyecciones canónicas $i_b : F_b \rightarrow P_F$ son aplicaciones diferenciables, con lo que construimos las aplicaciones

$$\tilde{\varphi}_\alpha(b) = pr_2 \circ \tilde{\varphi}_\alpha \circ i_b : F_b \rightarrow F,$$

donde $pr_2 : U_\alpha \times F \rightarrow F$ es la proyección sobre la segunda componente. Se tiene que $\tilde{\varphi}_{\beta\alpha}(b) = \tilde{\varphi}_\beta(b) \circ \tilde{\varphi}_\alpha(b)^{-1} : F \rightarrow F$ viene dado por

$$\tilde{\varphi}_{\beta\alpha}(b)(f) = g_{\beta\alpha}(b) \cdot f$$

donde $g_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$ son las funciones de transición del fibrado principal δ . Como G actúa por simplectomorfismos sobre F , las aplicaciones $\tilde{\varphi}_{\beta\alpha}(b)$ son simplectomorfismos $\forall b \in U_\alpha \cap U_\beta$, es decir,

$$\tilde{\varphi}_{\alpha\beta}^* \sigma = \sigma.$$

Si se define la estructura simpléctica σ_b sobre F_b mediante

$$\sigma_b = \tilde{\varphi}_\alpha(b)^* \sigma$$

que está bien definida, ya que de

$$\sigma = \tilde{\varphi}_{\alpha\beta}^* \sigma = \tilde{\varphi}_\beta(b)^{-1*} \circ \tilde{\varphi}_\alpha(b)^* \sigma,$$

resulta

$$\tilde{\varphi}_\beta(b)^* \sigma = \tilde{\varphi}_\alpha(b)^* \sigma.$$

□

Teorema B.3.3. *Sea $\delta[F](S) = (P_F, B, \pi_B, G; S)$ un fibrado espigado. La foliación S contenida en la distribución horizontal induce una foliación Ω sobre B dada por*

$$\Omega = \{X \text{ campo de } B : \pi_{F*} Y = X \circ \pi_F, \quad Y \in \mathcal{S}\}. \quad (\text{B.3.21})$$

de manera que $\dim \Omega = \dim S$.

PRUEBA:

Sabemos que la proyección $\pi_F: P_F \rightarrow B$ es una submersión. Si defino

$$\begin{aligned} X : B &\longrightarrow TB \\ b &\longmapsto \pi_{F*} Y_m, \quad m \in \pi_F^{-1}(b) \end{aligned}$$

como $\pi_{F*} Y_m = \pi_{F*} Y_{m'}$ con $m, m' \in \pi_F^{-1}(b)$, tendré bien definido el campo X de B .

Entonces, para cada campo vectorial Y de la foliación $\mathcal{S} \subset \mathcal{Q} \subset TP_F$ existe un campo vectorial X de B que verifica $\pi_{F*} Y = X \circ \pi_F$, por tanto tiene sentido considerar (B.3.21).

Supongamos que $\dim S = p$. Para cada $m \in B$, $\Omega(m)$ es un subespacio vectorial de $T_m B$. Como $\pi_{F*}: \mathcal{Q}_m \rightarrow T_m B$ es un isomorfismo,

$$\dim \mathcal{S}_m = \dim \Omega(m) = p.$$

Entonces, Ω es una p -distribución. Veamos que Ω es también una foliación:

Sean Y_1, Y_2 dos campos vectoriales de \mathcal{S} . Existen dos campos $X_1, X_2 \in \Omega$ tales que

$$\pi_{F*} Y_1 = X_1 \circ \pi_F$$

$$\pi_{F*} Y_2 = X_2 \circ \pi_F.$$

Entonces, $\pi_{F*}[Y_1, Y_2] = [X_1, X_2] \circ \pi_F$, y por definición de la foliación Ω , el corchete $[X_1, X_2] \in \Omega$. □

En Liern (1995), Liern y Olivert (1995b) y Moreno (1996) se impuso a los fibrados espigados que la foliación S y la foliación vertical $\mathcal{R}(p) = \mathbf{Ker} \pi_{F*}$ debían poseer el mismo atlas de cartas planas. Sin embargo, en la siguiente proposición veremos que esta condición es redundante.

Proposición B.3.4. Dado $\delta[F](S) = (P_F, B, \pi_F, G; S)$ un fibrado espigado, las foliaciones S y $\mathcal{R}(p) = \mathbf{Ker} \pi_{F_*p}$ admiten el mismo atlas de cartas planas.

PRUEBA:

Suponemos que $\dim B = n$, $\dim F = r$, por tanto $\dim P_F = n + r$.

Sea φ una carta de B con funciones coordenadas (x_1, \dots, x_n) que es plana para la foliación Ω . Por ser π_F una submersión existe una carta de Φ de P_F con funciones coordenadas $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+r})$ de modo que

$$\varphi\pi_F\Phi^{-1}(z_1, \dots, z_n, z_{n+1}, \dots, z_{n+r}) = (z_1, \dots, z_n),$$

para todo $(z_1, \dots, z_n) \in \text{def}(\varphi\pi_F\Phi^{-1})$.

Por ser π_F submersión, $\mathbf{ker} \pi_{F_*} \left(\frac{\partial}{\partial x^{n+j}} \right) = 0$, $1 \leq j \leq r$, por tanto $\frac{\partial}{\partial x^{n+j}}$, $1 \leq j \leq r$, son elementos de la foliación vertical. \square

A continuación caracterizaremos la estructura de fibrado espigado, pero antes expondremos, a modo de Lema, una idea que se utilizará varias veces a lo largo de la memoria.

Lema B.3.5. Sea Ω una foliación en una variedad diferenciable de Hausdorff V . Sea Σ una subfoliación de Ω . Entonces, Σ induce una foliación Σ' en $V(\Omega)$ isomorfa a Σ' . Además, las hojas de Σ'^1 están contenidas en las hojas de Ω .

PRUEBA:

Sean X, Y dos campos de la foliación Ω . Como $V(\Omega)$ es variedad integral de Ω , es subvariedad de V . Sea la inmersión canónica $i: V(\Omega) \rightarrow V$, que verifica $i_*(T_x V(\Omega)) = \Omega(x)$. Por consiguiente los campos de la foliación son tangentes a $V(\Omega)$, y por tanto existen X', Y' campos vectoriales de $V(\Omega)$ de modo

$$j_*X' = X \circ j, \quad j_*Y' = Y \circ j,$$

es decir,

$$i_*[X', Y'] = [X, Y] \circ i. \quad (\text{B.3.22})$$

Sea

$$\Sigma' := \{X' : i_*X' = X \circ i, \quad X \text{ campo de } \Sigma\} \quad (\text{B.3.23})$$

Sabemos que $\Sigma' \neq \emptyset$ puesto que $\Sigma \neq \emptyset$. Teniendo en cuenta (B.3.22) y el Teorema de Frobenius se tiene que Σ' es una foliación de $V(\Omega)$ que, claramente es isomorfa a Σ .

¹Cuando no sea necesario distinguir entre ambas foliaciones a Σ' la seguiremos llamando Σ para no recargar la notación.

Además, toda hoja de Σ' es un conexo de $V(\Omega)$, luego estará contenida en una componente conexas de $V(\Omega)$, y ésta necesariamente es una hoja de Ω . \square

Necesitamos también caracterizar las foliaciones regulares mediante la existencia de subvariedades transversales a las mismas:

Proposición B.3.6. *Sea V una variedad diferenciable de dimensión n . Una foliación Ω de dimensión p ($p < n$) sobre V es regular si y sólo si en cada punto $m \in V$ existe una subvariedad M , que contiene a m , transversal a Ω tal que corta a las hojas en un solo punto a lo más.*

PRUEBA:

Consideremos que Ω sea una foliación regular; tomemos un punto $m \in V$ y una carta plana F de entorno coordinado conexo de manera que $m \in \text{def } F$. Sea H la hoja que contiene a m . Como la foliación es regular, existe una placa U_a tal que

$$m \in U_a = F^{-1}(\mathbb{R}^p \times \{a\}) = H \cap \text{def } F,$$

donde

$$(\alpha, a) = F(m).$$

Por el Teorema de caracterización de subvariedades regulares, $F^{-1}(\{\alpha\} \times \mathbb{R}^{n-p})$ será subvariedad de V . Por construcción esta subvariedad es transversal a H y corta a ésta en el punto m .

Estudiemos la implicación contraria:

Sea i la inmersión canónica de M en V : $i: M \rightarrow V$. Por la condición de transversalidad,

$$i_{*x}(M) + \Omega(x) = T_x V, \quad \forall x \in M,$$

y como M corta las hojas en un solo punto, se tiene que $\dim M = n - p$.

Sea F una carta plana para la foliación Ω de tal manera que su entorno coordinado, $\text{def } F$, sea conexo, y construimos la aplicación

$$pr_2 \circ F \circ i: i^{-1}(\text{def } F) \longrightarrow \mathbb{R}^{n-p}.$$

Esta aplicación es diferenciable y de rango $n - p$. Para ver que es un difeomorfismo (y por tanto carta de M), basta probar que $pr_2 \circ F \circ i$ sea inyectiva.

Partimos de

$$pr_2 \circ F(x_1) = pr_2 \circ F(x), \quad \text{con } x_1, x \in M.$$

Esto hace que x_1, x pertenezcan a una misma placa de F , que es conexa debido a que $\text{def } F$ se ha elegido conexo. Entonces esta placa estará contenida en una hoja H' , y por tanto

$$x_1, x \in H' \cap M;$$

pero por hipótesis esta intersección sólo contiene un punto, de donde

$$x_1 = x.$$

Llamemos $\varphi = pr_2 \circ F \circ i$ la carta de M , y sea f una carta de $V(\Omega)$ inducida por F . Debido a que el entorno coordinado de F es conexo, $\text{def } f$ e $\text{Im } f$ son conexos y, por tanto, $\text{def } f$ estará contenido en alguna hoja. Tomemos un punto arbitrario $m \in V$. Existe una hoja H y una subvariedad M transversal a H que corta a la hoja H en el punto m . Elegimos una carta plana (que podemos seguir llamando F) de entorno coordinado conexo tal que $m \in \text{def } F$ y que $\text{Im } F$ sea un entorno cúbico $C_1 \times C_2$ de $F(m)$. Entonces

$$\{m\} = M \cap H \cap \text{def } F.$$

Si consideramos φ la carta de M inducida por F por el método que hemos descrito, tenemos

$$F(M \cap \text{def } F) = C'_1 \times \text{Im } \varphi, \quad F(H \cap \text{def } F) = \text{Im } f \times C'_2,$$

con $C'_1 \subset \text{Im } f \subset C_1$ y $C'_2 \subset \text{Im } \varphi \subset C_2$.

Si llamamos $(\alpha, a) = F(m)$,

$$\begin{aligned} \{(\alpha, a)\} &= \{F(m)\} = F(M \cap H \cap \text{def } F) \\ &= F(M \cap \text{def } F) \cap F(H \cap \text{def } F) \\ &= (C'_1 \times \text{Im } \varphi) \cap (\text{Im } f \times C'_2) \\ &= (C'_1 \cap \text{Im } f) \times (\text{Im } \varphi \cap C'_2). \end{aligned}$$

Esto conduce a

$$\{\alpha\} = C'_2 \cap \text{Im } f \quad \{a\} = C'_2 \cap \text{Im } \varphi,$$

de donde

$$\{a\} = C'_2.$$

En consecuencia,

$$F(H \cap \text{def } F) = \text{Im } f \times \{a\},$$

y por tanto

$$H \cap \text{def } F = F^{-1}(\mathbb{R}^p \times \{a\}) = U_a.$$

que es una placa de F . Debido a que m es arbitrario, resulta que Ω es foliación regular. \square

En Liern (1995), Liern y Olivert (1995b) se prueba el siguiente teorema de caracterización:

Teorema B.3.7. (Teorema de caracterización) Sea $\delta = (P, B, \pi, G)$ una G -fibración principal provista de una conexión \mathcal{H} . Sea (F, σ) una variedad simpléctica Hausdorff G -espacio izquierda sobre la que G actúa por simplectomorfismos. Un fibrado asociado $\delta[F] = (P_F, B, \pi_F, G)$ con fibra tipo F es espigado si y sólo si para cada $b \in B$ existe $(V_b, \sigma_{V_b}) \subset P_F$ variedad presimpléctica regular de modo que:

- a) La familia $\{V_b | b \in B\}$ recubre todo P_F , como conjuntos.
- b) $\dim V_b = k$ (constante) $\forall b \in B$
- c) Existe $\psi_b : V_b \rightarrow \pi_F^{-1}(b)$ una submersión suprayectiva tal que cada fibra $\pi_F^{-1}(b)$ es una variedad cociente de la variedad V_b por la foliación característica de σ_{V_b} .
- d) Dados $b, d \in B$, si $V_b \cap V_d \neq \emptyset$, entonces $V_b = V_d$.
- e) $\ker(\sigma_{V_b})_w \subset \mathcal{Q}_w$ donde \mathcal{Q} es la distribución horizontal de P_F inducida por la conexión \mathcal{H} y $w \in V_b$

Este teorema permite analizar la estructura interna de $\delta[F](S)$ como un fibrado de fibraciones. Para cada elemento de la base, $b \in B$, por la Proposición B.3.2, existe una variedad simpléctica $\pi_F^{-1}(b)$, y por el Teorema B.3.7 existen una variedad presimpléctica V_b y una submersión suprayectiva $\psi_b : V_b \rightarrow \pi_F^{-1}(b)$ de manera que cada fibra, $\pi_F^{-1}(b)$ es una variedad cociente de V_b por la foliación S . Entonces, para cada $b \in B$ la terna $\beta_b = (V_b, \pi_F^{-1}(b), \psi_b)$ es una fibración contenida en P_F .

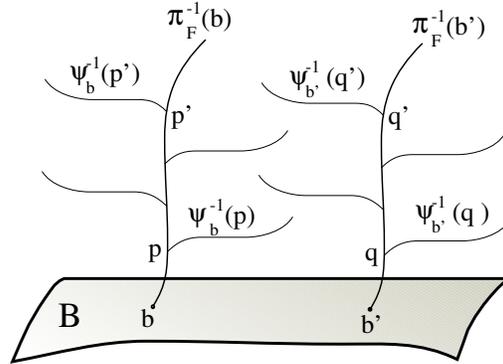


Fig 1. Esquema de un fibrado espigado

El Teorema B.3.7 implica que $E = \{V_b | b \in B\}$, sea una variedad presimpléctica. Dado $z \in E$, por (d) del Teorema B.3.7, existe una única variedad presimpléctica V_m de manera que $z \in V_m$. La 2-forma presimpléctica de E viene dada por

$$\sigma_E(X_z, Y_z) = \sigma_{V_m}(X'_z, Y'_z), \tag{B.3.24}$$

donde X', Y' son campos vectoriales i -relacionados con X, Y , respectivamente, e $i: V_m \rightarrow E$ es la inmersión canónica.

Nota B.3.8. La Proposición B.3.2 garantiza que la estructura de fibrado espigado satisface las condiciones (i) y (iii) de la Definición B.2.2 y la expresión (B.3.24) muestra la forma explícita de la 2-forma ω dada en (ii) de la Definición B.2.2. Además, un fibrado espigado satisface las condiciones (C1) y (C2) de la sección anterior de forma evidente y la condición (C3) es una consecuencia inmediata del Teorema B.3.7.

B.4. Análisis de estabilidad

En trabajos previos (por ejemplo, Liern y Olivert, 1995b), se muestra que la utilidad de los fibrados para describir fenómenos físicos viene determinada por la ley de movimiento. Sin embargo, a partir de Liern y Olivert (1999) surge el concepto de c -estabilidad en fibrados espigados como una condición geométrica sobre el espacio total del fibrado. Sin embargo, las relaciones entre la ley de movimiento sobre la variedad base y la c -estabilidad no han sido estudiadas. Precisamente los resultados obtenidos en el Capítulo 3 de esta Tesis permiten analizar algunas relaciones y marcan posibles líneas futuras de investigación en este tema.

En un fibrado espigado existen dos conexiones inducidas por la conexión del G -fibrado principal que lo generó, una en el espacio total del fibrado asociado y otra en el fibrado tangente de la variedad base del espigado. Por supuesto, puede ocurrir que la variedad base tenga otra conexión además de la inducida, en este caso necesitamos propiedades que relacionen ambas conexiones.

Definición B.4.1. Sea $\lambda[F](S) = (P_F, B, \pi_F, G; S)$ un fibrado espigado, de manera que B posee una conexión, sea X un campo vectorial arbitrario de la foliación Ω , y c una curva integral del campo X con dominio I . Consideremos

$$\tau_t^c: T_{c(0)}B \longrightarrow T_{c(t)}B, \quad t \in I,$$

el transporte paralelo a lo largo de la curva c . Se dirá que el fibrado $\lambda[F](S)$ está dotado de una Ley de Movimiento si se verifica

$$\tau_t^c \Omega(c(0)) = \Omega(c(t)), \quad t \in I. \quad (\text{B.4.25})$$

En Liern (1995) y Liern y Olivert (1995a), se prueba que

Teorema B.4.2. *Sea $\lambda[F](S)$ un fibrado espigado provisto con una conexión lineal y dotado de Ley de Movimiento.*

i) Si la foliación Ω es de dimensión 1, esta ley origina geodésicas.

ii) Si la foliación Ω es de dimensión k , $1 < k < \dim B$, esta ley genera variedades integrales totalmente geodésicas.

Esta ley no permite trabajar con ninguna familia de simplectomorfismos, ya que la variedad base, B , no es presimpléctica ni simpléctica. En consecuencia, difícilmente pueden conservarse las variedades integrales de la foliación Ω a lo largo del tiempo, de ahí que podamos entender que estas variedades no son estables. Es necesario, pues, dar otra ley de movimiento en la que intervengan simplectomorfismos con el fin de que las estructuras simplécticas se mantengan a lo largo del tiempo.

En este sentido Liern y Olivert introdujeron en (Liern, 1995; Liern y Olivert, 1997) una ley de movimiento en P_F de la forma siguiente:

Definición B.4.3. Sea c una curva diferenciable de P_F . Dado

$$\tau_t^c: \pi_F^{-1}(c(0)) \longrightarrow \pi_F^{-1}(c(t)), \quad t \in I,$$

el traslado paralelo en P_F a lo largo de c , para cada $p \in P_F$ definimos la curva

$$\gamma_t(p) = \tau_t^c(p), \quad t \in I, \quad \text{donde } p = \pi_F(c(0)).$$

Decimos que $\lambda[F](S)$ es c -estable si dado $t_o \in I$, la aplicación

$$\gamma_{t_o}: E \longrightarrow E, \quad t \in I,$$

es un simplectomorfismo.

Nótese que esta ley de movimiento implica que en P_F existen curvas que preservan la foliación de las variedades presimplécticas del fibrado espigado (dadas en el Teorema B.3.7) de modo que en las fibras coinciden con el traslado paralelo.

A continuación analizamos algunas consecuencias de la c -estabilidad. Sean L una subvariedad regular de B y $\gamma(t, q): \mathbb{R} \times P_F \longrightarrow P_F$ una familia de curvas diferenciables verificando la ley de estabilidad dada en la Definición B.4.3 de modo que

$$\pi_F \gamma \subset L.$$

Podemos definir

$$\gamma'(t, \pi_F(q)) = (\pi_F \gamma)'(t, q), \quad t \in \mathbb{R}, q \in P_F. \quad (\text{B.4.26})$$

Proposición B.4.4. γ' define una familia de curvas diferenciables.

PRUEBA:

Veamos que $(\pi_F \gamma)'$ es diferenciable:
 La aplicación $\pi_F \gamma: \mathbb{R} \times B \rightarrow B$ es diferenciable. En consecuencia, como L es subvariedad regular de B , $(\pi_F \gamma)': \mathbb{R} \times F \rightarrow L$ también es diferenciable.
 Teniendo en cuenta la expresión (B.4.26) se tiene

$$\gamma'(1_{\mathbb{R}} \times \pi_F) = (\pi_F \gamma)'. \quad (\text{B.4.27})$$

Como π_F es una submersión suprayectiva, γ' es diferenciable. \square

Dada L subvariedad de B , podemos construir el pull-back de $\xi[F]$ asociado a la inclusión canónica $i: L \rightarrow B$, que denotaremos

$$i^*(\lambda[F]) = (P_F^*, L, (pr_1)_F, G),$$

de la forma siguiente:

$$\begin{array}{ccc} P_U^* & \xrightarrow{pr_2} & P \\ pr_1 \downarrow & & \downarrow \pi_U \\ L & \xrightarrow{i} & M \end{array} \quad (\text{B.4.28})$$

donde

$$P_F^* = L \times_B P_F = \{(m, x) \in L \times P_F : i(m) = \pi_F(x)\} = \bigcup_{m \in L} (\{m\} \times \pi_F^{-1}(m))$$

$$(pr_1)_F(m, x) = m, \quad pr_2(m, x) = x, \quad \forall (m, x) \in P_F^*. \quad (\text{B.4.29})$$

En Liern y Olivert (1999) se demuestra que $i^*(\lambda[U])$ es un fibrado con la foliación

$$S_1 = \{X' = (\pi_{F*} X, X) : X \text{ campo vectorial de } S\},$$

que denotaremos $i^*(\lambda[U])(S_1) = (P_F^*, L, (pr_1)_U, G; S_1)$.

Teniendo en cuenta esta construcción, se tiene el siguiente resultado

Proposición B.4.5. *La ley de estabilidad dada en la Definición B.4.3 induce una ley de movimiento en $i^*(\lambda[F])(S_1)$.*

PRUEBA:

Por el Teorema B.3.7 sabemos que en P_F y P_F^* existen familias de variedades presimplécticas $\{(V_m, \sigma_{V_m})\}_{m \in B}$ y $\{(V_m^*, \sigma_{V_m^*})\}_{m \in L}$ respectivamente. Además,

$$E = \bigcup_{m \in B} V_m \quad \text{y} \quad E^* = \bigcup_{m \in L} V_m^*$$

pueden ser dotadas de estructura presimpléctica que denotaremos (E, σ) y $(E^*, \tilde{\sigma})$ respectivamente.

Definimos una familia de curvas $\tilde{\gamma}: \mathbb{R} \times P_F \rightarrow P_F$ verificando

$$\tilde{\gamma} = (\gamma', \gamma). \quad (\text{B.4.30})$$

Está bien definida porque de acuerdo con la expresión (B.4.26), $\pi_F \gamma' = \gamma$, y con ello $\text{Im } \tilde{\gamma} \subset P_U^*$. Además, son diferenciables porque sus dos componentes lo son.

Veamos que si fijamos $t_o \in I$ son simplectomorfismos:

Sabemos que $\tilde{\sigma} = pr_2^* \sigma$ (ver Abraham y Marsden, 1978) y por construcción $pr_2 \tilde{\gamma} = \gamma pr_2$. Como la curva γ_{t_o} es un simplectomorfismo se tiene que $\gamma_{t_o} \sigma = \sigma$. Entonces, dado $t_o \in I$,

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_{t_o}^* \tilde{\sigma} &= \tilde{\gamma}_{t_o}^* pr_2^* \sigma = (pr_2 \tilde{\gamma}_{t_o})^* \sigma \\ &= (\gamma_{t_o} pr_2)^* \sigma = pr_2^* \gamma_{t_o}^* \sigma = pr_2^* \sigma = \tilde{\sigma} \end{aligned}$$

Además, las restricciones de los simplectomorfismos a las fibras son los traslados paralelos porque las fibras de P_F y P_F^* coinciden y γ verifica la ley de movimiento de P_F . \square

Si en particular la subvariedad L es una variedad de Landau L_p De la construcción hecha en este epígrafe, podemos concluir que dado un punto $m_o \in L_p$ si aplicamos la ley de movimiento a curvas cerradas (que empiezan y terminan en m_o), las curvas del espacio total será, curvas de movimiento. Como además son traslados paralelos en las fibras, cada curva define un elemento del grupo de holonomía. Como el grupo de holonomía de $i^*(\lambda[F])(S_1)$ es discreto, el subconjunto de las curvas que describen movimientos también será discreto. Es decir que hay una cantidad numerable de simplectomorfismos en el espacio total.

Así, dada una hoja H de la foliación S_1 existe una cantidad numerable de hojas transformadas. Aplicando el Teorema de Noether a cada una de estas hojas se obtiene una cantidad discreta de magnitudes transformadas.

Relaciones entre c -estabilidad, ley de movimiento y estabilidad de foliaciones

Hasta ahora la condición de c -estabilidad y la ley de movimiento de un fibrado espigado se habían presentado por separado. Sin embargo, a partir de los resultados del Capítulo 3 de esta Tesis podemos ver que en realidad pueden verse como dos casos particulares de la estabilidad entre foliaciones.

Dado un fibrado espigado $\lambda[F](S)$ con ley de movimiento y c -estable para una curva c con dominio I .

- i) La ley de movimiento equivale a que Ω sea auto-estable.

- ii) Para cada $t_o \in I$, la aplicación $\gamma_{t_o}: E \rightarrow E$ es un simplectomorfismo. La variedad E es presimpléctica con 2-forma de Lagrange σ_E . La foliación característica $\ker \sigma$, es invariante por los simplectomorfismos. Como además estas curvas, γ , coinciden con los traslados paralelos, se tiene que la foliación permanece invariante por traslados paralelos. Esto puede interpretarse como estabilidad de la foliación característica respecto al tangente de c .

Apéndice C: Conclusiones

C.1. Resultados obtenidos

En esta memoria se ha introducido un nuevo formalismo para trabajar con distribuciones en general, se han estudiado sus propiedades y se ha analizado su aplicabilidad a diferentes aspectos físicos. En concreto, los resultados más destacables son los siguientes:

- A partir del concepto de base asociada a un observador, se han obtenido de forma natural expresiones para el efecto Doppler y la aberración de la luz en Relatividad General.
- Se han definido y estudiado nuevos conceptos que relacionan distribuciones mediante observadores y a la inversa, como la *igualdad salvo orientaciones entre dos distribuciones para un observador* y la *Ω -relación entre dos observadores*. Se han obtenido propiedades relacionadas con estos conceptos y se han aplicado a la aberración de la luz: Dada una distribución nula Ω de dimensión ó codimensión 1, dos congruencias de observadores U y U' están Ω -relacionadas si y sólo si no hay efectos de aberración entre los observadores de U y U' al observar Ω .
- Trabajando siempre dentro de un entorno normal convexo, se ha extendido el concepto de causalidad, introduciendo la *causalidad tangencial*, que se interpreta como una causalidad observada. Se han obtenido múltiples propiedades relacionadas con la causalidad tangencial en general y, en concreto, aplicada a las subvariedades de horismos y de Landau: las subvariedades de horismos son siempre nulas y tangencialmente nulas; sin embargo, no podemos asegurar que las subvariedades de Landau sean siempre espaciales, aunque sí podemos asegurar que son siempre tangencialmente espaciales.
- Se han estudiado las condiciones de existencia de foliaciones de Landau espaciales (cuyas hojas son subvariedades de Landau espaciales) generadas por una línea de universo temporal β . Como resultado se ha obtenido que para asegurar la existencia de estas foliaciones en

algún entorno es necesario que el campo adaptado del tangente β sea sincronizable en este entorno. Sin embargo, las foliaciones de horismos nulas (cuyas hojas son subvariedades de horismos) generadas por una línea de universo temporal siempre existen en los entornos normales convexos.

- Se ha estudiado un nuevo método para adaptar vectores mediante foliaciones en general. Este método sirve para extender un observador a toda una congruencia de observadores y hacer aplicables los resultados obtenidos en el Capítulo 1 a los observadores individuales. También nos permite definir el concepto de *emisión puntual* y estudiar su *dirección propia* y su *frecuencia propia* mediante la *congruencia de observadores propia* asociada, obteniéndose expresiones para la aberración de la luz y el efecto Doppler.
- Se ha generalizado la Ley de Movimiento (condición de totalmente geodésica) mediante el concepto de *estabilidad* entre distribuciones en general.

Dada una distribución Ω , el Lema de Dualidad nos asegura que Ω y Ω^\perp se comportan igual ante la estabilidad.

Se han estudiado diferentes aspectos de la estabilidad (*estabilidad regular, auto-estabilidad y auto-estabilidad regular*), así como la relación entre la estabilidad y la estabilidad regular, en la que entra en juego la curvatura: dadas dos distribuciones Ω y Ω' , si Ω es estable respecto a Ω' , entonces Ω es regularmente estable respecto a Ω' si y sólo si Ω' es plana respecto a Ω . Este resultado ha generado diversos subcasos importantes: si Ω' es de dimensión 1, o si estamos en un espacio-tiempo plano, entonces la estabilidad y la estabilidad regular son propiedades equivalentes. Este hecho tiene una especial relevancia, ya que estudiar la estabilidad regular es mucho más sencillo que estudiar la estabilidad.

Además, se ha realizado un estudio de estabilidad entre subvariedades análogo al hecho para distribuciones.

- Por último, se han recopilado en un Apéndice diversos ejemplos de estabilidad entre distribuciones en diferentes espacio-tiempos. Las principales conclusiones que se pueden extraer de estos ejemplos son las siguientes:
 - En Schwarzschild, no existen distribuciones autoplanas y por lo tanto no existen foliaciones regularmente auto-estables. Además, no existen subvariedades autoplanas.
 - En Robertson-Walker no existen distribuciones autoplanas y por lo tanto no existen foliaciones regularmente auto-estables. Sin embargo, existen subvariedades autoplanas.

- Existen espacio-tiempos no planos capaces de albergar 2-foliaciones espaciales regularmente auto-estables.
- Existen espacio-tiempos no planos capaces de albergar 3-foliaciones nulas regularmente auto-estables, como los del tipo *pp*-wave.
- La *c*-estabilidad y la Ley de Movimiento se habían presentado como dos propiedades independientes. A partir de la estabilidad entre foliaciones se comprueba que ambas son casos particulares de estabilidad aplicada a fibrados.

C.2. Problemas abiertos

- Búsqueda de ejemplos en los que dada una congruencia de observadores U sincronizable y una 3-distribución nula Ω , se cumpla que $(\Omega \cap S_U) \oplus \langle U \rangle$ sea foliación y Ω no sea foliación.
- Dar un ejemplo de vector temporal $v \in T_p M$ cuyo campo adaptado no sea sincronizable en un entorno normal de p . Caracterizar en qué casos las adaptaciones vectoriales de vectores temporales dan como resultado campos sincronizables.
- Para una variedad pseudo-Riemanniana M (podemos considerarla un entorno normal convexo) y una subvariedad conexa S de M , estudiar cuándo se cumple la siguiente propiedad: si S es geodésica en p , entonces el M -transporte paralelo a lo largo de geodésicas en S que pasen por p siempre transporta vectores tangentes a S en vectores tangentes a S . Con esto se podría demostrar que las subvariedades de Landau son espaciales siempre, ya que se tendría que las subvariedades geodésicas en un punto conservan la causalidad, es decir, todos los espacios tangentes de todos los puntos de la subvariedad tienen la misma causalidad dentro de un entorno normal de p . En caso contrario, dar un ejemplo de subvariedad de Landau que no sea siempre espacial y caracterizar en qué casos son espaciales.
- Estudiar si es posible que, dentro de un entorno normal convexo, dos subvariedades de Landau se intersequen en el caso de que pertenezcan a un mismo observador geodésico. Esto puede estudiarse mediante los puntos focales:

Sea H una subvariedad no degenerada del espacio-tiempo y sea $p \in H$. El vector $x \in T_p^\perp H$ es un punto focal de H si y sólo si $(\exp^\perp)_*$ es singular en x . El correspondiente punto $\exp^\perp x$ de M es un punto focal de H a lo largo del segmento geodésico $\exp^\perp(tx)$. Si q es un punto focal a lo largo de una geodésica c que es ortogonal a la subvariedad H , entonces algunas geodésicas cercanas a c

y ortogonales a H tienden a focalizarse en p . En nuestro caso, hay que estudiar si una geodésica temporal (subvariedad no degenerada) puede tener puntos focales dentro de un entorno normal convexo.

También sería interesante estudiar si las subvariedades de Landau $L_{p,u}$ pueden tener puntos focales en p .

- Sea $\gamma : I \rightarrow \mathcal{V}$ una geodésica temporal orientada al futuro y L_γ la foliación de Landau generada por γ en el entorno normal convexo \mathcal{V} . Si $u = \dot{\gamma}(t_0)$ con $t_0 \in I$, podremos adaptar u mediante L_γ y γ en \mathcal{V} , obteniendo el campo $u^*(L_\gamma; \gamma)$. Su espacio físico $S_{u^*(L_\gamma; \gamma)}$ es la foliación de Landau L_γ generada por γ . El resultado será un campo temporal que representa una congruencia de observadores sincronizados con γ . Caracterizar cuándo esta congruencia es geodésica o no.
- Comprobar si todos los espacio-tiempos cuatridimensionales no planos en los que existen foliaciones 3-dimensionales nulas regularmente auto-estables son del tipo pp -wave. En caso negativo, caracterizar estos espacio-tiempos.
- Si un fibrado espigado sirve para estudiar más de un sistema dinámico, aparecerá al menos una foliación por cada uno de ellos. Deberían encontrarse condiciones para que estas foliaciones fuesen estables. En el caso en que no sean estables, debería obtenerse qué subfoliaciones que sí lo fuesen.

Bibliografía

- R. Abraham y J.E. Marsden (1978): *Foundations of Mechanics*. The Benjamin / Cummings Massachussets.
- J.K. Beem y P.E. Ehrlich (1981): *Global Lorentzian Geometry*. Nueva York, Marcel Dekker Inc.
- V.J. Bolós, V. Liern y J. Olivert (2002a): Relativistic Simultaneity and Causality. *International Journal of Theoretical Physics*, **41**, 1007.
- V.J. Bolós, V. Liern y J. Olivert (2002b): Foliations conserved by parallel transport. Application to *pp*-wave spacetimes. *Classical and Quantum Gravity*, en proceso de arbitraje.
- V.J. Bolós (1998): *Foliaciones Invariantes Gauge*. Trabajo de Investigación de Tercer Ciclo, Universitat de València.
- F. Brickell y R.S. Clark (1970): *Differentiable manifolds*. Van Nostrand Reinhold.
- E. Cartan (1963): *Géométrie des espaces de Riemann*. París, Gauthier-Villars.
- F. De Felice y C.J.S. Clarke (1990): *Relativity on curved manifolds*. Cambridge, Cambridge University Press.
- J. Dieudonné (1981): *Elements d'Analyse (Tomo III)*. París, Gauthier-Villars.
- P. Donato (1991): *Symplectic Geometry and Mathematical Physics*. Boston, Birkhauser.
- V. Guillemin, E. Lerman y S. Sternberg (1996): *Symplectic fibrations and multiplicity diagrams*. Cambridge, Cambridge University Press.
- S. Helgason (1962): *Differential Geometry and Symmetric Spaces*. Londres, Academic Press Inc.
- D. Husemoller (1966): *Fibre Bundles*. Nueva York, Springer-Verlag.

Vicente José Bolós Lacave

- S. Kobayashi y K. Nomizu (1969): *Foundations of Differential Geometry (Volumen I)*. Interscience Publishers.
- V. Liern (1995): *Movimientos en Relatividad*. Tesis Doctoral, Universitat de València.
- V. Liern, J.M. Moreno y J. Olivert (2000): Noether's Theorem in Symplectic Bundles. *International Journal of Theoretical Physics*, **39**, 2707.
- V. Liern y J. Olivert (1992): Extensions of Geodesic Principle. *Proceedings of the Relativity Meeting 91. Bilbao (Spain)*. Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, World Scientific.
- V. Liern y J. Olivert (1993): Presymplectic Manifolds and Conservation Laws. *Lecture Notes in Physics*, **423**, 296. Berlín, Heidelberg, Nueva York, Londres, París, Springer-Verlag.
- V. Liern y J. Olivert (1995a): A Symplectic Interpretation of Some Wave Fronts in General Relativity. *Journal of Mathematical Physics*, **36** (2), 837.
- V. Liern y J. Olivert (1995b): Structures symplectiques dans des fibrés. *Comp. Rend. de l'Acad. des Sciences*, **320**, 203. París
- V. Liern y J. Olivert (1999): Symplectic Interpretation for the Discretization of Some Physical Magnitudes. *International Journal of Theoretical Physics*, **38**, 525.
- R. Maartens y S.D. Maharaj (1991): Conformal symmetries of *pp*-waves. *Classical and Quantum Gravity (UK)*, **8**, 503.
- J.M. Morvan (1984): *Une obstruction a la transversalité de deux champs de plans lagrangiens. Feuilletages et quantification géométrique*. París, Hermann.
- J. Olivert (1980): On the local simultaneity in General Relativity. *Journal of Mathematical Physics*, **21**, 1783.
- R.K. Sachs y H. Wu (1977): *General Relativity for mathematicians*. Berlín, Heidelberg, Nueva York, Springer-Verlag.
- T. Sakai (1996): *Riemannian Geometry*. Nueva York, American Mathematical Society.
- J.M. Souriau (1970): *Structure des systèmes dynamiques*. París, Dunod.
- J.M. Souriau (1997): *Structure of dynamical systems. A symplectic view of Physics*. Berlín, Birkhauser.
- J.L. Synge (1965): *Relativity: The Special Theory*. Amsterdam, North-Holland Publishing.

Bibliografía

T.T. Wu y C.N. Yang (1975): Concept of nonintegrable phase factors and global formulation of gauge fields. *Physical Rev. D*, **12**, 3845.