

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA
DEPARTAMENT D'ÒPTICA
FACULTAT DE FÍSICA



FLUCTUACIONS QUÀNTIQUES
EN CAVITATS ÒPTIQUES NO LINEALS

Tesi presentada per
Ferran Vicent Garcia Ferrer
per optar al grau de
Doctor en Física

En Germán J. de Valcàrcel Gonzalvo, Doctor en Física, Catedràtic d'Universitat al departament d'Òptica de la Universitat de València, i N'Eugenio Roldán Serrano, Doctor en Física, Catedràtic d'Universitat del mateix departament

CERTIFIQUEN

que la memòria present “Fluctuacions quàntiques en cavitats òptiques no lineals”, resumeix el treball d'investigació realitzat, sota la seua direcció, per En Ferran Vicent Garcia Ferrer i constitueix la seua Tesi per optar al grau de Doctor en Ciències Físiques.

I per a que així conste, i en compliment de la legislació vigent, signen el present certificat a València, el dos de juny de l'any dos mil onze.

Dr. Germán J. de Valcàrcel Gozalvo

Dr. Eugenio Roldán Serrano

Agraïments

Com que aquells qui han eixamplat els horitzons de la nostra cultura fins a fites impensables abans de la seua aportació afirmen que s'assentem sobre els muscles dels gegants i que si hem descobert nous paisatges és gràcies a l'alçària des de la qual podem abocar-nos; els qui hem trepitjat tantes espatlles d'aquestos gegants per poder veure unes poques passes més enllà, estem obligats a reconèixer el deute adquirit amb la immensa colla de castellers sobre la que descansem i gràcies a la qual avancem.

La limitació de l'espai però, i el desig de no abusar de la paciència de les persones que puguen llegir-ho, m'obliguen a fer sols unes poques mencions i vull fer palès el meu agraïment a aquelles persones que dia rere dia han posat el seu temps i els seus recursos a la meua disposició per recórrer aquest camí:

A Pau, Saül i Maria, que des de l'inici de cada jornada i fins el seu final, han estat suport i contrafort per poder mantindre'm despert i en marxa.

A totes les companyes i companys de la FE CCOO PV que han posat el seu muscle (i també la seua esquena) per empenyar i recolzar en incomputables ocasions.

A Ramon Vilaseca, que va obrir i continua obrint camí per encarar el cim.

A Carlos Navarrete, que recorre incansablement les senderes que remunten els turons de la ciència i m'ha permès recórrer-les amb ell.

A Fernando Silva, que sempre hi és per fer costat, en tots els revolts i en tots els indrets.

A Isabel Pérez, que a l'inici d'aquest recorregut em va ajudar a llevar tanta brossa i a buscar el camí adient.

Especialment a Germán i a Eugenio, que m'han servit de guies, rereguardes, puntals i companys en tota aquesta ascensió.

A Raymond Quenau, mestre en recórrer, en totes les direccions, molts i diversos camins que porten al mateix lloc.

I a totes aquelles persones que formeu la pinya sobre la qual he pogut caminar tot aquest temps, de vegades a les fosques, de vegades molt lentament, però sempre comptant amb l'empenta de totes i tots vosaltres.

*nos esse quasi nanos,
gigantium humeris insidentes,
ut possimus plura eis et remotiora videre,
non utique proprii visus acumine,
aut eminentia corporis,
sed quia in altum subvenimur et extollimur magnitudine gigantea.*
Bernard de Chartres, s. XII

*Per la incertesa
de molts camins faig via.*
Miquel Martí i Pol, Haikús en temps de guerra.

Want you to know, I go for your squeezing
Duke Ellington, Just Squeeze Me (But Please Don't Tease Me).

Índex

I	Prefaci	6
II	Introducció	9
1	Estats coherents	9
1.1	L'estat "natural" de la llum	9
1.2	Les propietats dels estats coherents	10
1.2.1	Nombre de fotons	11
1.2.2	Camp elèctric	12
1.2.3	Base sobrecompleta de l'espai d'Hilbert	13
1.2.4	Els estats coherents s'obtenen mitjançant l'operador desplaçament	13
1.2.5	Els estats "no-clàssics" de la llum	14
1.3	Les quadratures del camp electromagnètic	15
1.3.1	Definició dels operadors quadratura	16
1.3.2	Medició de les quadratures del camp electromagnètic	17
2	Llum comprimida: descripció, detecció i aplicacions	18
2.1	Revisió de les incertituds en el cas de la llum	18
2.2	Les incertituds del buit coherent	19
2.3	Definició de llum comprimida	20
2.4	Exemples de llum comprimida	21
2.5	Detecció de la llum comprimida	23
2.6	Estats comprimits de la llum: notació i influència de l'ordenació dels operadors	25
3	Endinsant-se en l'estudi de la reducció quàntica del soroll: estructura del treball i descripció del mètode d'estudi	28
III	Eines d'anàlisi	30
4	Descripció quàntica d'un sistema òptic: Hamiltonià i equacions d'evolució	30
4.1	La cavitat Kerr i els camps implicats	30
4.2	Hamiltonià de l'evolució lliure del camp electromagnètic i Hamiltonià del camp injectat	31
4.3	Hamiltonià d'interacció	32

4.4	Hamiltonià total. Imatge d'interacció	33
4.5	Simetrització de l'Hamiltonià	35
4.6	L'Hamiltonià de la biestabilitat òptica dispersiva	37
4.7	Acoblament del sistema amb la resta de l'univers i la incorporació del superoperador Liouvillià	38
5	Tractament estadístic i quàntic del camp electromagnètic: les distribucions de quasiprobabilitat	40
5.1	Expansió de la matriu densitat en la base d'estats coherents: definició implícita de la funció P	40
5.2	Les funcions característiques	41
5.3	Les funcions P , Q i W a partir de la seua funció característica	42
5.4	Utilització de les funcions de quasiprobabilitat per calcular equacions d'evolució a partir de la ME	44
6	Equacions de Fokker-Planck i Langevin	47
6.1	L'equació de Fokker-Planck	47
6.2	Equacions de Langevin i llur relació amb l'equació de Fokker-Planck	47
6.3	L'equació de Fokker-Planck i les equacions de Langevin en les diverses representacions de quasiprobabilitat	49
6.3.1	La matriu de difusió de l'equació de Fokker-Planck en les distribucions W_s	50
6.3.2	Les equacions de Langevin per a la biestabilitat òptica i les seues solucions estacionàries	52
6.4	Equacions de Langevin linealitzades	54
7	Reducció del soroll quàntic dins i fora de les cavitats òptiques: teoria input - output	55
8	Correlacions a temps diferents: espectre de correlacions i espectre de <i>squeezing</i>	58
8.1	Espectre de <i>squeezing</i> per a les diverses distribucions de quasiprobabilitat	58
8.2	Espectre de <i>squeezing</i> per al cas de la biestabilitat òptica . . .	59
9	Les distribucions P generalitzades	62
9.1	La solució al problema de la matriu de difusió no definida semipositiva	62
9.2	Aplicació de la P -positiva al cas de la biestabilitat òptica . . .	63

10 Guia per no perdre's en l'estudi de la reducció quàntica del soroll	66
IV Generació de llum comprimida en cavitats no lineals	67
11 <i>Squeezing</i> de polarització i de quadratura al model de cavitat Kerr vectorial	67
11.1 Introducció	67
11.2 Model	68
11.3 Model en el límit clàssic	71
11.4 Espectre linealitzat de l' <i>squeezing</i> de quadratures	74
11.5 Anàlisi de l' <i>squeezing</i> de quadratura en les bifurcacions de la solució monomode	75
11.5.1 Bifurcació de polarització	76
11.5.2 Bifurcacions de biestabilitat	78
11.6 Paràmetres de Stokes quàntics	81
11.7 Espectre de fluctuacions dels paràmetres de Stokes	84
11.7.1 <i>Squeezing</i> de polarització en les bifurcacions de la solució monomode	86
11.7.2 <i>Squeezing</i> de polarització per sobre de les bifurcacions en la solució bimode	88
11.8 Conclusions	90
12 <i>Squeezing</i> via ruptura de la simetria rotacional en una cavitat de barreja de quatre ones	92
12.1 Introducció	92
12.2 Model	94
12.2.1 Els camps	95
12.2.2 L'Hamiltonià	97
12.2.3 Equacions quàntiques d'evolució	99
12.2.4 Model reduït	101
12.3 Límit Clàssic	103
12.4 Anàlisi quàntica	106
12.4.1 Linealització de les equacions de Langevin	106
12.4.2 Esbrinant la solució de les equacions de Langevin linealitzades	108
12.4.3 Dinàmica de l'orientació del mode brillant	112
12.4.4 Propietats de l' <i>squeezing</i> no crític del mode obscur	113
12.5 Conclusió	115

13	Obtenció de <i>squeezing</i> de quadratures no crític mitjançant el trencament de la simetria de polarització	117
13.1	Introducció	117
13.2	Descripció del sistema: cavitat $\chi^{(3)}$ i Hamiltonià	119
13.3	Anàlisi dinàmica quàntica	121
13.4	Estudi de l' <i>squeezing</i> de polarització	124
13.5	Comentaris i conclusió	126
V	Conclusions	128
VI	Apèndixs	131
14	Apèndix I: equivalències entre operadors i derivades parcials per a la correspondència quàntico-clàssica	131
14.1	Grups de dos operadors	131
14.2	Grups de quatre operadors	132
15	Apèndix II: Expressions algebraiques per a l'<i>squeezing</i> de quadratura i polarització en la cavitat Kerr vectorial	134
15.1	Espectre de quadratures eixint	134
15.2	Espectre de les quadratures per a la solució monomode	134
15.3	Variàncies normalitzades dels operadors de Stokes als punts de bifurcació de la solució monomode	135
16	Apèndix III: Modes propis de la cavitat en un resonador Fabry-Perot amb espills esfèrics	136
16.1	Espectre modal d'un resonador Fabry-Perot amb espills esfèrics	136
16.2	Aproximació per igualar les freqüències dels diversos modes	139
17	Apèndix IV Expressions algebraiques i càlculs per a la compressió per trencament de simetria en una cavitat FWM	140
17.1	Deducció de l'Hamiltonià	140
17.2	Solucions clàssiques i anàlisi d'estabilitat	144
17.2.1	Solucions amb desintonia nul·la	144
17.2.2	Inestabilitat de la solució apagada amb desintonia no nul·la	144
17.2.3	Solució engegada	145
17.2.4	Eliminació de la fase depenent del bombeig	148
17.3	Solució del problema lineal i espectres de <i>squeezing</i> de les quadratures rellevants	149

Part I

Prefaci

Aquesta tesi doctoral tracta sobre alguns aspectes de la generació de llum comprimida en cavitats no lineals tipus Kerr i resumeix el treball d'investigació que he dut a terme al si del Grup d'Òptica Quàntica i Òptica No Lineal de la Universitat de València els darrers set anys.

La llum comprimida és un dels tipus de "llum quàntica", és a dir, un tipus de llum que posseeix propietats relatives a les fluctuacions en els valors esperats dels seus observables de les què no es pot donar compte si no és mitjançant l'ús de la teoria quàntica de la radiació. De forma molt resumida i esquemàtica es pot dir què l'estat buit del camp electromagnètic posseeix fluctuacions d'acord amb la concepció del buit electromagnètic com un conjunt d'infinits oscil·ladors harmònics, tots ells en equilibri i en estat de mínima energia, i l'aplicació del principi d'incertitud d'Heisenberg als seus observables implica l'existència de fluctuacions en els infinits modes possibles. En aquest context, denominem llum comprimida a un tipus de radiació que presenta en algun dels seus observables fluctuacions menors que les corresponents a l'estat buit, açò és, un tipus de radiació en el què les fluctuacions dels seus observables han estat "redistribuïdes" de forma que un d'ells fluctua menys que l'estat buit i el seu parell canònic conjugat incrementa les seues fluctuacions (el principi d'incertitud ens deixa jugar, però no que trenquem la baralla).

La història d'aquest tipus d'estat de la llum és relativament recent, tot i que existeixen formulacions *avant la lettre* que daten dels inicis de la mecànica quàntica en els anys 20 i 30 [18, 40]. La seua primera formulació explícita es data habitualment en la segona meitat dels anys 70 del segle passat [11, 90] i les primeres comprovacions experimentals del fenomen [72] pertanyen a la meitat de la dècada següent. La constatació que la seua evolució ha estat notable es desprèn del fet que la reducció del soroll a l'experiment pioner de Slusher i col·laboradors fou del 20% i actualment s'han assolit reduccions de 11'5 dB o, el que és el mateix, eliminar més del 90% de les fluctuacions del buit [50].

Aquest tipus especial de radiació, la llum comprimida, ha assolit força importància per diverses raons. D'una banda, està la seua importància com a estudi fonamental ja que l'estudi dels mecanismes de la seua producció i del seu comportament és rellevant per a l'avanç de l'òptica quàntica. D'una altra banda, des del punt de vista de la metrologia, també permet anar més enllà dels límits de la precisió que la mecànica quàntica imposa per a les

mesures realitzades emprant estats coherents - estats que es caracteritzen com radiació clàssica a la qual se li afegeixen les fluctuacions del buit i que són semblants als camps produïts pels làsers -. Per aquest darrer motiu, la llum comprimida s'ha proposat per a la detecció d'ones gravitatòries, per al posicionament ultraprecís i per altres aplicacions que demanden altíssima precisió [41, 63, 68, 79]. A més a més, cal afegir que una nova àrea d'aplicació ha fet créixer l'interès per la llum comprimida de forma renovada: el camp de la informació quàntica amb variable contínua [4]; coincidència d'interessos ja que compressió de la llum i entrellaçat quàntic (*entanglement*) són dues cares de la mateixa moneda i l'*entanglement* és l'element fonamental aportat per la naturalesa quàntica responsable dels avantatges de la informació quàntica respecte de la informació clàssica [24].

Donat que l'estudi d'aquest tipus de llum implica l'anàlisi quàntica i aquesta empra com una de les seues eines fonamentals la descripció dels sistemes en base a operadors, cal remarcar que en aquest treball únicament donarem acompte dels operadors bossònics; és a dir, que descriurem quànticament la radiació electromagnètica, però obviarem la quantització de la matèria i de les interaccions a les quals puguera donar lloc. Així doncs, si partim d'aquesta descripció, l'obtenció d'aquesta llum comprimida exigeix que estiga generada per processos òptics no lineals, és a dir, processos l'Hamiltonià dels quals siga no lineal en els operadors creació, \hat{a}^\dagger , i destrucció, \hat{a} , quàntics; ja que els Hamiltonians lineals en \hat{a} i \hat{a}^\dagger generen llum coherent. La interacció no lineal pot ocórrer en forma d'ona d'una única passada, el que vol dir que un feix de llum travessa un medi no lineal i a l'eixida està més o menys comprimit, o també a l'interior d'un ressonador o cavitat òptica, i és ben conegut que amb aquest segon mètode s'obtenen majors nivells de compressió i per tant és el més habitual. La dinàmica seguida en la interacció entre el medi no lineal i el camp electromagnètic aporta aquests graus alts de compressió per alguns valors dels paràmetres del sistema i dels camps injectats, els punts que anomenem crítics i que corresponen als valors per als quals l'evolució del sistema presenta una bifurcació o bé perquè entra en un règim de biestabilitat o bé perquè s'engega un altre mode del camp electromagnètic. Pel que fa a les interaccions no lineals, també poden ser de diversos tipus, però les de tipus $\chi^{(2)}$ i les del tipus $\chi^{(3)}$ són les més emprades, ja que les interaccions ressonants són freqüentment acompanyades de processos d'emissió espontània que devaluen la compressió. En aquesta tesi s'estudien les propietats per a produir llum comprimida de les cavitats no lineals del tipus $\chi^{(3)}$ també conegudes com cavitats Kerr.

Les contribucions originals del grup han estat publicades als següents articles:

[25] F. V. Garcia-Ferrer, I. Pérez-Arjona, G. J. de Valcárcel and E.

Roldán, *Squeezing spectra from s-ordered quasiprobability distributions: application to dispersive optical bistability*, J. Mod. Opt. **52** (2005) 763-773.

[26] F. V. Garcia-Ferrer, I. Pérez-Arjona, G. J. de Valcárcel and E. Roldán, *Quadrature and polarization squeezing in a dispersive optical bistability model*, Phys. Rev. A **75** (2007) 063823 (1-11).

[27] F. V. Garcia-Ferrer, C. Navarrete-Benlloch, G. J. de Valcárcel and E. Roldán, *Squeezing via spontaneous rotational symmetry breaking in a four-wave mixing cavity*, IEEE J. Quantum Electron. **4** (2009) 1404-1414.

[28] F. V. Garcia-Ferrer, C. Navarrete-Benlloch, G. J. de Valcárcel and E. Roldán, *Noncritical quadrature squeezing through spontaneous polarization symmetry breaking*, Optics Letters **35** (2010) 2194-2196.

I, pel que fa a la redacció i organització d'aquesta tesi, es poden agrupar en dos grans blocs. Per una part, hem dut a terme una contribució en el domini de les eines matemàtiques que són necessàries per estudiar aquests processos; eines que s'exposen a la primera part de la tesi (distribucions de quasiprobabilitat, equacions quàntiques de Langevin, teoria input-output i altres) per tal de fer d'aquest text també una eina per a afrontar l'estudi de les fluctuacions quàntiques. La nostra contribució, relativa a l'ús de les distribucions de quasiprobabilitat [25], apareix dins d'aquesta exposició. A la segona part de la tesi s'aborden la resta d'aportacions: generació de llum amb polarització comprimida en una cavitat Kerr vectorial [26], obtenció de compressió no crítica per trencament espontani de la simetria de rotació [27] i també per trencament espontani de la simetria de polarització [28]. Aquestes dues últimes contribucions constitueixen exemples particulars d'un mecanisme de generació de llum comprimida que ha estat proposat originalment pel nostre grup d'investigació [54] i tot fa pensar que aquesta tècnica farà possible obtenir nivells de compressió encara millors que els detectats fins aquest moment.

El treball es tanca amb una recapitulació crítica dels resultats obtinguts així com de les perspectives de futur que s'obren amb la seua cloenda.

Part II

Introducció

Aquesta introducció, es dedica a descriure què són els estats quàntics de la llum, què és la llum comprimida i les seues aplicacions i com s'organitza la resta de l'escrit per afrontar les dues parts esmentades al prefaci.

1 Estats coherents

Els estats coherents del camp electromagnètic [34, 74] juguen un paper central en l'òptica quàntica, si més no, per tres raons: d'una banda, són els estats més semblants a la radiació coherent clàssica i són produïts, de forma ideal, per làsers; d'altra banda, venen acompanyats d'incertituds (sorolls) iguals als propis del buit electromagnètic i, en conseqüència, marquen un límit entre estats clàssics i quàntics; i per últim, matemàticament es caracteritzen per ser estats propis de l'operador destrucció quàntic \hat{a} .

1.1 L'estat "natural" de la llum

A la teoria quàntica i pel que fa al camp electromagnètic hi ha una distinció essencial entre els observables del camp (allò que pot mesurar-se, com l'energia o les quadratures del camp i que es representa mitjançant un operador Hermític) i l'estat en el que es troba aquest camp (que ve representat per un vector estat a l'espai d'Hilbert). Aquesta distinció és essencial i fa que expressions com ara "la llum està feta de fotons" aporten ben poca cosa a l'hora de precisar de quin estat estem parlant o quina és la magnitud mesurable.

Així i tot sembla que parlar de fotons en parlar de l'estat del camp electromagnètic siga una proposta "natural" per descriure la llum ja que, idealment, es pot pensar que conèixer el nombre de fotons i l'estat de cadascun és conèixer un estat de la llum. En aquest sentit, els estats propis per descriure quants fotons hi ha en un determinat camp serien els estats de Fock, una base particularment útil i senzilla d'emprar. Val a dir que un estat de Fock és un estat d'energia ben definida, un estat propi de l'operador número $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ ja que l'energia del camp lliure és proporcional a aquest operador. Malgrat açò, un estat número no és, ni de bon tros, un estat "natural" per al camp electromagnètic (a excepció de l'estat buit, $|\{0\}\rangle = |0, \dots, 0\rangle$) i, pot ser, de l'estat amb un sol fotó en algun mode, $|0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0\rangle$) tant pel fet que les seues propietats resulten força excepcionals d'observar en la llum (per exemple, la

seua fase està totalment indeterminada fins i tot en els estats monomode) com per l'alta dificultat que suposa generar-los i evitar que es degraden.

Per aquest motiu, semblen més "naturals" els estats coherents en el sentit que les seues propietats encaixen be amb les que hom espera poder observar quan mesura un estat monomode clàssic. Els estats coherents poden, de fet, introduir-se com els anàlegs quàntics dels estats coherents clàssics: són aquells estats en els quals els seus valors mitjans de l'energia i del camp electromagnètic coincideixen amb els valors clàssics. Es tracta per tant d'estats quasi-clàssics, depenent de si mirem a les magnituds que els caracteritzen (equivalents a la caracterització del camp clàssic) o al fet que posseeix algunes propietats purament quàntiques. Aquestes propietats de caràcter quàntic són les relatives al valor de les fluctuacions dels observables. Aquests valors són sempre no nuls, però el seu valor relatiu (és a dir el quocient entre les fluctuacions de l'observable i el seu valor esperat) tendeixen a zero en créixer la intensitat de l'estat coherent.

Així doncs, els estats coherents posseeixen les propietats adequades per a representar les propietats d'un mode coherent clàssic. Cal afegir, a més a més, a aquesta "naturalitat" de les seues propietats físiques el fet que mostren també una versatilitat matemàtica molt alta en formar una base sobrecompleta de l'espai d'Hilbert, versatilitat que els fa molt adients per a la descripció i estudi de l'evolució del camp electromagnètic com es veurà en els següents apartats d'aquest treball.

1.2 Les propietats dels estats coherents

La primera descripció matemàtica dels estats coherents correspon a la definició que Schrödinger va donar al 1926 [69] dels paquets d'ona de l'oscil·lador harmònic que no pateixen eixamplament al llarg de la seua evolució temporal (la seua "coherència" es manté). A la notació actual, aquests paquets es poden escriure (en unitats de $\hbar = m = \omega = 1$) com

$$\langle x | \alpha \rangle = \pi^{-1/4} \exp \left(-\frac{1}{2}x^2 + \sqrt{2}x\alpha - \frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{2}|\alpha|^2 \right). \quad (1)$$

El paràmetre complex α determina els valors mitjans de la posició i el moment d'acord amb les relacions

$$\langle \hat{x} \rangle = \sqrt{2} \operatorname{Re} \alpha, \quad \langle \hat{p} \rangle = \sqrt{2} \operatorname{Im} \alpha. \quad (2)$$

Les variàncies dels operadors posició i moment, $V_x = \langle \hat{x}^2 \rangle - \langle \hat{x} \rangle^2$ i $V_p = \langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2$, tenen valors iguals, $V_x = V_p = 1/2$, per la qual cosa llur producte assumeix el valor mínim permès per la relació d'incertitud d'Heisenberg,

$$(V_x V_p)_{\min} = 1/4. \quad (3)$$

La forma més senzilla però, d'arribar a la fórmula (1) és esbrinar els estats propis de l'operador anti-Hermític d'aniquilació

$$\hat{a} = (\hat{x} + i\hat{p})/\sqrt{2} \quad (4)$$

que satisfà la relació de commutació

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1. \quad (5)$$

Aquest operador aniquilació amb la propietat de commutació (5) fou introduït per Fock [23], juntament amb els estats propis $|n\rangle$ de l'operador número $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$, coneguts des d'aleshores com "estats de Fock" o "estats número".

Aquesta recerca dels estats propis de l'operador d'aniquilació la va dur a bon terme Iwata en 1951 [39]: els estats coherents de la definició (1) són els estats propis de l'operador d'aniquilació, és a dir $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$, i va formular la seua expansió sobre la base d'estats número:

$$|\alpha\rangle = \exp(-|\alpha|^2/2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (6)$$

Aquests estats tenen doncs una ampla "tradició" dins de l'estudi quàntic del camp electromagnètic i pel que fa al camp de l'estudi de les seues fluctuacions suposen un estàndard de referència per algunes de les seues propietats que ara es detallen

1.2.1 Nombre de fotons

A partir de la definició d'estat coherent com estat propi de l'operador aniquilació és fàcil deduir les expressions dels valors esperats de l'operador número i del seu quadrat

$$\langle \hat{n} \rangle = |\alpha|^2, \quad \langle \hat{n}^2 \rangle = |\alpha|^4 + |\alpha|^2, \quad (7)$$

i també, d'acord amb la definició de la indeterminació

$$\Delta \hat{n} = \sqrt{\langle \hat{n}^2 \rangle - \langle \hat{n} \rangle^2}, \quad (8)$$

el valor de les seues fluctuacions

$$\Delta \hat{n} = |\alpha|, \quad (9)$$

és a dir que els estats coherents no tenen ben definit el nombre de fotons, però la seua indeterminació relativa tendeix a zero per a estats coherents macroscòpics, ja que

$$\frac{\Delta \hat{n}}{\langle \hat{n} \rangle} \xrightarrow{\langle \hat{n} \rangle \rightarrow \infty} 0. \quad (10)$$

Es dedueix a més que la variància en el nombre de fotons (el quadrat de $\Delta\hat{n}$) coincideix amb el valor mitjà d'aquest nombre i per tant, es tracta d'una distribució de tipus Poissonià. La comprovació d'aquesta caracterització és senzilla si es calcula la probabilitat de trobar n fotons en un estat $|\alpha\rangle$ a partir de la definició d'aquesta probabilitat $P_n = |\langle n | \alpha \rangle|^2$ i fent ús de la seua expansió en la base de Fock (6)

$$P_n = \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} e^{-|\alpha|^2}, \quad (11)$$

que és una distribució de Poisson amb valor mitjà $|\alpha|^2$.

1.2.2 Camp elèctric

Donada, en la imatge de Schrödinger, l'expressió d'operador camp (per a un mode caracteritzat pels vectors unitari de direcció \mathbf{e} i nombre d'ones \mathbf{k})

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = i\mathcal{E} (\mathbf{e}\hat{a}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \mathbf{e}^*\hat{a}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}), \quad (12)$$

amb $\mathcal{E}^2 = \hbar\omega/2\epsilon_0V$, $\omega = ck$ i V el volum de quantització.

A partir d'aquesta definició i recordant que en aquesta imatge:

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi\rangle = \hat{H}|\psi\rangle \quad (13)$$

i per tant

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\omega t\hat{a}^\dagger\hat{a}}|\alpha\rangle \quad (14)$$

ja que hem considerat $|\psi(0)\rangle = |\alpha\rangle$ i l'hamiltonià d'evolució lliure $\hat{H} = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a}$; és fàcil calcular el valor esperat de l'operador camp

$$\langle\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t)\rangle = -2\mathcal{E}|\alpha|\sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t + \theta), \quad (15)$$

on s'ha emprat el teorema $f(\hat{a}^\dagger\hat{a})\hat{a} = \hat{a}f(\hat{a}^\dagger\hat{a} - 1)$ i s'ha descomposat $\alpha = |\alpha|e^{i\theta}$. Igualment, les seues fluctuacions seran

$$\Delta\hat{\mathbf{E}} = \mathcal{E} = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0V}} \quad (16)$$

de forma que es comprova que la indeterminació del camp elèctric és la mateixa per a qualsevol estat coherent, independentment de α . D'igual forma, és evident que la indeterminació relativa del camp tendeix a zero en el cas d'excitacions grans o el que és el mateix, que els estats coherents s'aproximen a la radiació clàssica coherent quan $|\alpha|$ és gran.

1.2.3 Base sobrecompleta de l'espai d'Hilbert

La base d'estats coherents és sobrecompleta i aquesta propietat és bàsica a l'hora de definir una de les eines matemàtiques fonamentals en l'estudi de les fluctuacions quàntiques del camp electromagnètic, les distribucions de quasiprobabilitat.

Aquesta propietat es basa en altres dues: una, que aquests estats formen un generador de l'espai d'Hilbert i l'altra, que aquesta base és sobrecompleta.

El fet que siguin un generador es segueix del fet que es pot donar una resolució de la identitat en funció dels estats coherents, o de forma equivalent, que l'operador $A = \frac{1}{\pi} \int d^2\alpha |\alpha\rangle \langle\alpha|$ és la identitat; i el fet que siga una base sobrecompleta es degut a que no existeixen dos estats coherents ortogonals entre si, ja que

$$|\langle\beta|\alpha\rangle|^2 = e^{-|\alpha-\beta|^2} \quad (17)$$

què és diferent de zero per a qualsevol valor de α i β .

1.2.4 Els estats coherents s'obtenen mitjançant l'operador desplaçament

Aquests estats coherents (6) poden ser obtinguts matemàticament a partir de l'estat buit, emprant l'operador unitari anomenat operador desplaçament de Glauber:

$$\begin{aligned} \hat{D}(\alpha) &= \exp(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}), \\ |\alpha\rangle &= \hat{D}(\alpha)|0\rangle. \end{aligned} \quad (18)$$

Anàlogament l'operador desplaçament aplicat a un estat coherent produeix un nou estat coherent

$$\hat{D}(\alpha)\hat{D}(\beta)|0\rangle = \hat{D}(\alpha)|\beta\rangle = e^{\frac{1}{2}(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta)}|\alpha + \beta\rangle. \quad (19)$$

Aquesta propietat es pot interpretar com que els estats coherents són resultat d'una polarització clàssica interaccionant amb un camp quantitzat. Veient-ho amb més detall: si s'escriu la polarització anàlogament a com s'ha fet amb el camp (12)

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}p e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \mathbf{e}^*p^* e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (20)$$

es pot calcular l'Hamiltonià d'interacció matèria-camp

$$\begin{aligned} \hat{H}_{int} &= - \int_V d^3\mathbf{r} (\mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{E}}) \\ &= i\mathcal{E}V (p\hat{a}^\dagger - p^*\hat{a}) \end{aligned} \quad (21)$$

on \mathcal{E} és l'amplitud del camp (veure (12)) i Vp és el dipol total al volum de quantització.

Si ara afegim el terme corresponent a l'evolució lliure del camp, l'Hamiltonià serà

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{H}_{int}, \\ \hat{H}_{int} &= i\hbar(\beta\hat{a}^\dagger - \beta^*\hat{a}),\end{aligned}\tag{22}$$

amb $\beta = \frac{1}{\hbar}\mathcal{E}Vp$, Hamiltonià que ens dona l'evolució dels estats quàntics d'acord amb la imatge d'Schrödinger:

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi\rangle = \hat{H}|\psi\rangle$$

i si canviem a la imatge de Dirac (d'aquí les títles)

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\bar{\psi}\rangle = i\hbar(\beta\hat{a}^\dagger - \beta^*\hat{a})|\bar{\psi}\rangle\tag{23}$$

és a dir que s'obté

$$|\bar{\psi}(t)\rangle = e^{t(\beta\hat{a}^\dagger - \beta^*\hat{a})}|\bar{\psi}(0)\rangle\tag{24}$$

on es pot reconèixer el vector desplaçament (18) si identifiquem $\alpha = \beta.t$; de forma que la comprovació de l'equivalència entre l'efecte de la polarització agafada com un paràmetre clàssic i el vector de desplaçament és immediata si es substitueix $|\bar{\psi}(0)\rangle$ per $|0\rangle$ o $|\alpha\rangle$.

1.2.5 Els estats "no-clàssics" de la llum

La versatilitat i utilitat dels estats coherents han quedat paleses a la breu descripció anterior a l'igual que el seu estatus d'estats "clàssics" dins de la descripció quàntica de la llum. El fet és que a partir dels treballs de Glauber i Sudarshan [34, 74] i especialment el treball sobre les funcions de correlació de Glauber [35] en els anys seixanta del segle passat, els estats coherents han estat profusament emprats a l'estudi de la física quàntica del camp electromagnètic, però considerats com els "més clàssics", front als estats quàntics "purs".

S'escau ara, ni que siga breument, descriure que es pot entendre per estats quàntics de la llum i per fer-ho es poden distingir al menys dos criteris: un en termes de les distribucions de quasiprobabilitat i l'altre en termes de les seues fluctuacions.

Pel que fa a les distribucions i d'acord amb les primeres definicions [35], i també d'acord amb les més habituals, parlar d'estats "no-clàssics" de la

llum és parlar en termes de la distribució P de Glauber-Sudarshan, de la qual en aquest apartat introduiré la seua definició i deixaré la descripció més exhaustiva i la seua utilitat com a eina d'estudi de les fluctuacions quàntiques per a l'apartat dedicat a les distribucions de quasiprobabilitat que apareix més endavant.

La distribució de quasiprobabilitat P de Glauber-Sudarshan fou introduïda en [34] per representar estats tèrmics i en [74] per qualsevol matriu densitat

$$\begin{aligned}\hat{\rho} &= \int P(\alpha) |\alpha\rangle \langle\alpha| d(\operatorname{Re} \alpha) d(\operatorname{Im} \alpha), \\ 1 &= \int P(\alpha) d(\operatorname{Re} \alpha) d(\operatorname{Im} \alpha).\end{aligned}\tag{25}$$

A partir d'aquí a l'article [35] es dona la següent definició: "Si les singularitats de $P(\alpha)$ són de tipus més forts que la funció delta, i.e. derivades de la funció delta, el camp representat no té analogia clàssica".

En aquest sentit, els camps tèrmics (caòtics) són clàssics, ja que llurs funcions P són distribucions de probabilitat definides positives i no tenen singularitats. Els estats d'aquests camps, són mescles d'estats quàntics i es descriuen en termes de la matriu densitat. També els estats coherents són clàssics per tant, ja que la distribució P de Glauber per a l'estat $|\beta\rangle$ és, òbviament, la funció delta, $P_\beta(\alpha) = \delta(\alpha - \beta)$. Així i tot, aquests estats cauen 'en el límit' del que considerem estats 'clàssics', ja que la funció delta és la distribució més singular admissible en la teoria clàssica.

Diverses variacions dels estats coherents es solen mostrar com exemples d'estats no clàssics [18] i es denominen 'estats coherents generalitzats'. Igualment des de 1965 [78] s'ha estudiat la 'no-classicitat' dels estats número i la mirada ha estat posada en la magnitud de la incertesa dels seus observables, les seues fluctuacions o si es vol la seua variància. D'acord amb aquest criteri - en tot compatible amb l'anterior [18] - es consideren no-clàssics aquells estats en els quals la variància dels observables queda per sota de la dels estats coherents (d'alguna forma estats de soroll comprimit, per tant) i en eixe supòsit es troben per exemple els estats número, però també els estats gat [93] i qualsevol altre estat comprimit - *squeezed* - com els aconseguits amb les tècniques descrites i obtingudes a partir d'aquest treball.

1.3 Les quadratures del camp electromagnètic

Comptem amb un operador hermític que descriu el camp, però el nostre interès principal rau en aconseguir observables fàcilment mesurables tècnicament i que ens permeten calcular valors mitjans observables i per tant dur-nos de les

prediccions a les comprovacions. Les magnituds emprades habitualment per descriure el camp són, en aquest sentit, les quadratures del camp i s'exposa a continuació la seua definició i propietats i els mètodes per mesurar-les. Les quadratures seran de rellevància especial a més per aquest treball donat que la compressió del soroll estudiada és la corresponent a les quadratures.

1.3.1 Definició dels operadors quadratura

Una forma alternativa d'expressar el camp elèctric (12) és en termes de les seues quadratures que es defineixen com

$$\hat{X} = \hat{a} + \hat{a}^\dagger, \quad (26)$$

$$\hat{Y} = -i(\hat{a} - \hat{a}^\dagger). \quad (27)$$

En termes d'aquests operadors quadratura, i agafant el cas de polarització lineal $\mathbf{e} = \mathbf{e}^*$ per simplicitat, el camp $\hat{\mathbf{E}}$ (12) s'escriu

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) &= \mathbf{e}\hat{E}(\mathbf{r}) \\ \hat{E}(\mathbf{r}) &= i\mathcal{E}(\hat{a}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \hat{a}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) \\ &= -\mathcal{E}[\hat{X}\sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) + \hat{Y}\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})] \end{aligned} \quad (28)$$

motiu pel qual se'ls denomina quadratures. Aquests operadors posseeixen la següent relació de commutació:

$$[\hat{X}, \hat{Y}] = 2i, \quad (29)$$

anàloga a la dels operadors moment i posició d'una partícula puntual, i per tant verifiquen la següent relació d'incertitud d'Heisenberg

$$\Delta\hat{X}_{|\psi\rangle}\Delta\hat{Y}_{|\psi\rangle} \geq \frac{1}{2}|\langle\psi|[\hat{X}, \hat{Y}]|\psi\rangle| = 1 \quad (30)$$

Vegem ara les propietats que presenten els estats coherents des del punt de vista dels operadors quadratura. Si mirem el seu valor esperat:

$$\langle\alpha|\hat{X}|\alpha\rangle = \alpha + \alpha^* = 2\operatorname{Re}\alpha \quad (31)$$

$$\langle\alpha|\hat{Y}|\alpha\rangle = -i(\alpha - \alpha^*) = 2\operatorname{Im}\alpha \quad (32)$$

queda palès que els seus valors esperats són equivalents, excepte per un factor de proporcionalitat, als operadors posició i moment (2).

Pel que fa a les seues indeterminacions (8) és fàcil veure que

$$\Delta\hat{X}_{|\alpha\rangle} = 1 \quad (33)$$

$$\Delta\hat{Y}_{|\alpha\rangle} = 1 \quad (34)$$

i per tant, $\Delta\hat{X}_{|\alpha\rangle}\Delta\hat{Y}_{|\alpha\rangle} = 1$, què és el valor mínim del producte d'incertituds per als operadors quadratura (30); la qual cosa es permet comprovar que els estats coherents són estats de mínima incertitud (MUS: *Minimum Uncertainty States*) respecte de les quadratures.

1.3.2 Medició de les quadratures del camp electromagnètic

Les quadratures del camp es poden mesurar emprant la tècnica coneguda com detecció homodina compensada. Tot i que l'esquema i els detalls d'aquesta detecció s'expliquen en el següent capítol, aquí exposaré breument els seus fonaments i la seua aplicació per al cas que ens ocupa: Per dur endavant aquesta tècnica s'envia la llum de la qual volem mesurar les quadratures a una làmina separadora 50/50 on es barreja amb un feix coherent estabilitzat i intens anomenat oscil·lador local. A les eixides de la làmina es col·loquen dos detectors d'intensitat i les mesures obtingudes en els dos es resten, de forma que la diferència d'intensitats que s'obté és

$$\delta I = 2|\alpha_{LO}|(X \cos \theta_{LO} + Y \sin \theta_{LO}) \quad (35)$$

amb $\alpha_{LO} = |\alpha_{LO}|e^{i\theta_{LO}}$ l'amplitud del camp de l'oscil·lador local que considerem força intens. L'expressió de δI indica que escollint la fase de l'oscil·lador local es pot detectar una quadratura o altra, o bé una combinació lineal d'ambdues que serà també una quadratura.

2 Llum comprimida: descripció, detecció i aplicacions

En aquest apartat descriuré el que entenem per llum comprimida, quin és el seu procés de detecció i les aplicacions que se'n deriven. Per a la caracterització de la llum comprimida i la descripció dels processos de detecció seguiré de prop un article de M. C. Teich i B. E. A. Saleh [77] de l'any 1989. D'aquest article estan també agafades totes les figures d'aquest capítol, tal i com s'indica en cadascuna.

2.1 Revisió de les incertituds en el cas de la llum

D'acord amb la definició d'operador camp donada abans (12) és útil identificar l'amplitud complexa del camp (15) amb un fasor. Un fasor pot ser descrit en termes de la seua amplitud complexa α i un factor depenent del temps $e^{-i\omega t}$.

S'escau també recordar la definició de quadratura (26,27) i la seua relació amb l'amplitud complexa del camp juntament amb la seua proporcionalitat amb els operadors posició i moment (31,32).

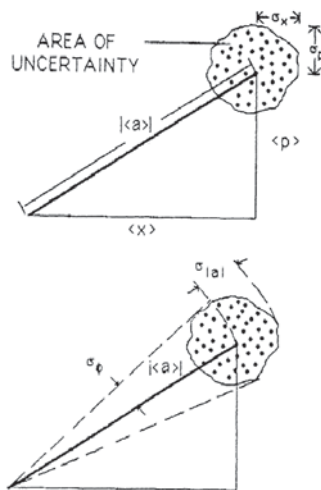


Figura 1: Representacions en coordenades cartesianes i polars de l'àrea d'incertitud quàntica associada a un camp electromagnètic. Figura de [77]

Establerta aquesta notació es poden comparar les incertituds associades a cadascuna de les quadratures tal i com estan il·lustrades a la figura (1). Els valors mitjans $\langle x \rangle$ i $\langle p \rangle$, i les seues incertituds σ_x i σ_p es mostren a la part

superior de la figura (on s'ha emprat la notació (x, p) per a les quadratures, en lloc de (X, Y) , per tal de no canviar la notació de Teich i Saleh). A la part inferior, la incertitud de \hat{a} està representada en coordenades polars. Hi apareixen la incertitud $\sigma_{|a|}$, la incertitud en el angle de la fase σ_ϕ i el valor mitjà $|\langle \hat{a} \rangle|$.

És clar que ambdues representacions, cartesianes i polars, descriuen les incertituds associades al camp elèctric i als apartats següents ens seran útils per analitzar la llum comprimida en fase o quadratura.

2.2 Les incertituds del buit coherent

En aquest apartat es descriuen dos estats de la llum que abans ja s'han comentat com a casos límits clàssics: l'estat coherent i l'estat buit.

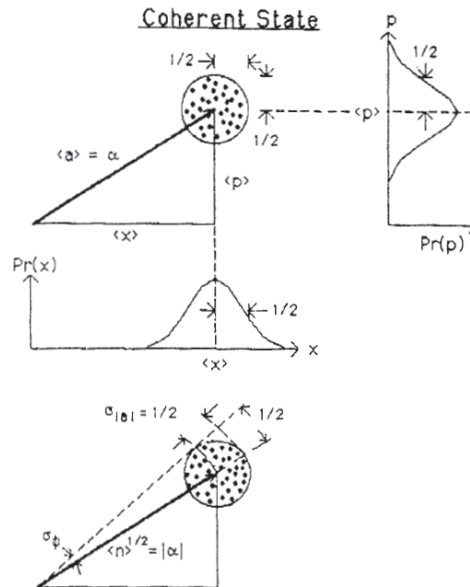


Figura 2: Representació de les incertituds en fase, amplitud i quadratures d'un estat coherent. Figura de [77]

A la figura (2) l'estat coherent està representat per un fasor de magnitud mitjana $|\langle a \rangle| = \alpha$ i l'envolta una àrea d'incertitud. La densitat de probabilitat $Pr(x)$ de trobar el valor x és gaussiana, amb, mitjana $\langle x \rangle$ i incertitud $\sigma_x = \frac{1}{2}$. Les seues quadratures es comporten simètricament d'acord amb la relació d'incertitud definida a dalt (33,34) i per tant, aquest estat es qualifica de MUS.

El segon exemple és l'estat buit, mostrat a la figura (3). Aquest també és un estat coherent però amb $\alpha = 0$ i per tant $\langle x \rangle = \langle p \rangle = 0$. Així mateix, també és un estat de mínima incertitud (MUS) que també compleix la relació (3).

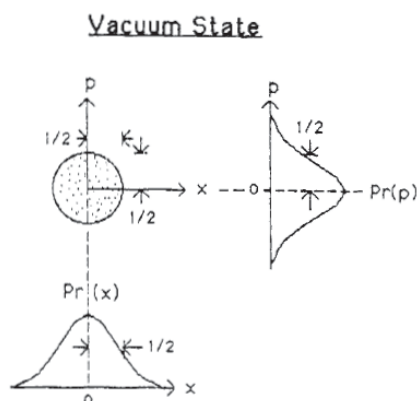


Figura 3: Representació de les incertituds associades a les quadratures de l'estat buit. Figura de [77]

Aquestos dos estats, equivalents pel que fa al nivell de les fluctuacions de les seues quadratures, pel fet de ser MUS serviran de referència per a descriure què és un estat amb un nivell de soroll comprimit.

2.3 Definició de llum comprimida

Un estat és *comprimit en quadratura*, per definició, si una de les seues quadratures té una variància menor que la de l'estat coherent (o de l'estat buit) que val la unitat. La incertitud d'una quadratura ha de ser comprimida per sota de la unitat per tant, però açò és assolible solament a expenses d'augmentar la incertitud a l'altra quadratura per sobre d'u, com s'il·lustra a la figura (4). Com que el producte d'aquestes incertituds pot assolir un valor de la unitat o major, d'acord amb el principi d'incertitud d'Heisenberg, un estat comprimit en quadratura pot ser un MUS però no ho ha de ser necessàriament.

D'altra banda, l'estat *comprimit en número* es defineix com un estat de la llum en el qual la variància del nombre de fotons cau per sota del valor de l'estat coherent (9). Aquesta Δ_n està relacionada amb la d'amplitud $\Delta_{|a|}$ (cf. figura 1). La incertitud en n pot ser comprimida a expenses d'augmentar la incertitud de fase tal i com es veu a la figura (4). La llum comprimida en número rep molts altres noms, com ara: llum sub-Poissoniana, llum quieta,

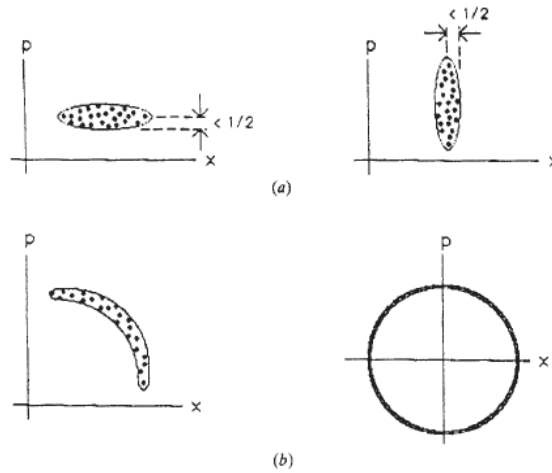


Figura 4: Representació gràfica de l'squeezing de quadratura (a) i de número (b). Figura de [77]

llum silent, i llum *comprimida en amplitud* (equivalent a un tipus particular de llum comprimida en quadratura).

2.4 Exemples de llum comprimida

Des d'un punt de vista matemàtic un camp en un estat de mínima incertitud pot ser comprimit en quadratura si es multiplica la seua component X per un factor e^{-r} i la seua component Y per un factor e^r . La quantitat r s'anomena 'paràmetre d'squeezing'. Si a més s'afegeix un factor fase $e^{i\xi}$ en una de les quadratures, l'expressió per al camp queda

$$E_s(t) = xe^{-r}e^{i\xi} \cos \omega t + pe^r \sin \omega t \quad (36)$$

El resultat d'aquesta modificació és una compressió en la incertitud de la quadratura X , en un factor $e^{-r}\Delta_x$ i simultàniament un augment de la incertitud de l'altra quadratura en un factor $e^r\Delta_p$. Tal i com es veu a la figura (5), l'estat buit esdevé aleshores l'estat buit comprimit. Ambdós són MUS.

Un estat coherent pot ser transformat de forma semblant en un estat coherent comprimit, tal i com es pot veure a la figura (6). A la figura l'angle θ entre l'eix major de l'el·lipse i el fasor $\alpha = \langle a \rangle$ és controlat pel canvi en l'angle ξ relatiu a l'angle de α .

El seu nombre mitjà de fotons

$$\langle n \rangle = |\alpha|^2 + \sinh^2 r \quad (37)$$

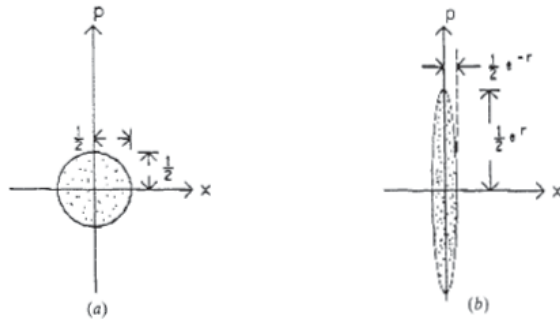


Figura 5: Comparació entre les incertituds del buit (a) i del buit comprimit (b). Figura de [77]

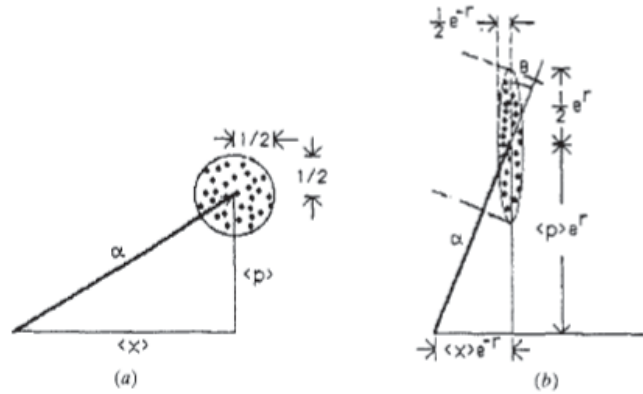


Figura 6: Representació gràfica de les incertituds d'un estat coherent (a) i d'un estat coherent comprimit (b). Figura de [77]

compta amb la contribució coherent $|\alpha|^2$ i la de compressió $\sinh^2 r$. La seua variància és

$$\Delta_n^2 = \langle n \rangle (e^{2r} \cos^2 \theta + e^{-2r} \sin^2 \theta); |\alpha|^2 \gg e^{2r}. \quad (38)$$

L'estat coherent comprimit, pel que fa al nombre de fotons, pot respondre a una distribució super-Poissonianà o sub-Poissoniana, depenent de l'angle θ tal i com es veu a la gràfica de la figura (7) per a l'exemple $r = \frac{1}{2}$. La variància assoleix un màxim quan θ és un enter parell múltiple de $\pi/2$. Aquesta situació de màxim correspon a l'alineació entre el fasor i l'eix major de l'el·lipse d'incertitud (cf. figura 6), açò suposa per tant una elongació en la direcció radial i per tant un augment en la variància del nombre de fotons. Per contra, la variància assoleix valors mínims quan θ és un enter senar

múltiple de $\pi/2$. En aquest cas l'eix menor de l'el·lipse indica una incertitud menor a la direcció radial i per tant en la variància del nombre de fotons.

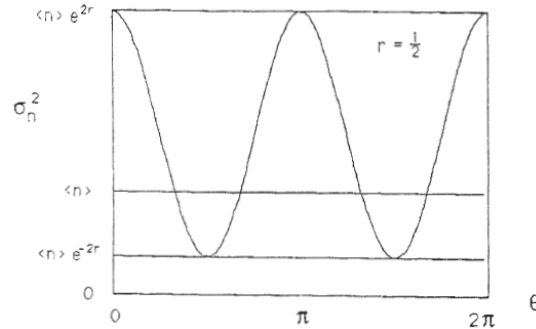


Figura 7: Dependència de la variància del nombre de fotons en un estat coherent comprimit, σ_n^2 , amb l'angle θ . La llum és super- o sub-Poissoniana depenent de θ . Figura de [77]

2.5 Detecció de la llum comprimida

Es poden emprar diversos mètodes per detectar la llum comprimida: detecció directa, detecció homodina simple (*single-ended*) i detecció homodina compensada (*balanced*). La detecció directa recorre al recompte de fotons. L'estat buit comprimit però té una variància del nombre de fotons super-Poissonà i en conseqüència amb un alt nivell de soroll. La detecció directa no és, conseqüentment, practicable per detectar llum comprimida en quadratura a causa de la dificultat de discriminar la quadratura comprimida de la no comprimida.

La detecció homodina pot ser emprada per separar la quadratura del camp amb fluctuacions reduïdes. En la configuració simple (cf. figura 8), la llum del buit comprimit és combinada en un separador (*beam splitter*) 50/50 amb llum coherent, a_c , provenint d'un laser estabilitzat i intens que s'anomena oscil·lador local (LO). Si el coeficient de transmissió de la làmina separadora s'acosta a la unitat, amb un LO suficientment potent, el camp superposat mostra característiques semblants al de l'estat comprimit. Si la fase del LO és escollida de forma que θ és un enter senar múltiple de $\pi/2$, la superposició dels camps serà comprimida en nombre de fotons, sub-Poissoniana, és a dir amb un espectre per sota del soroll de dispar (*sub-shot-noise*). Un problema associat a la detecció homodina simple és que és necessari un LO molt potent per assolir les condicions òptimes. A més a més, les fluctuacions de potència

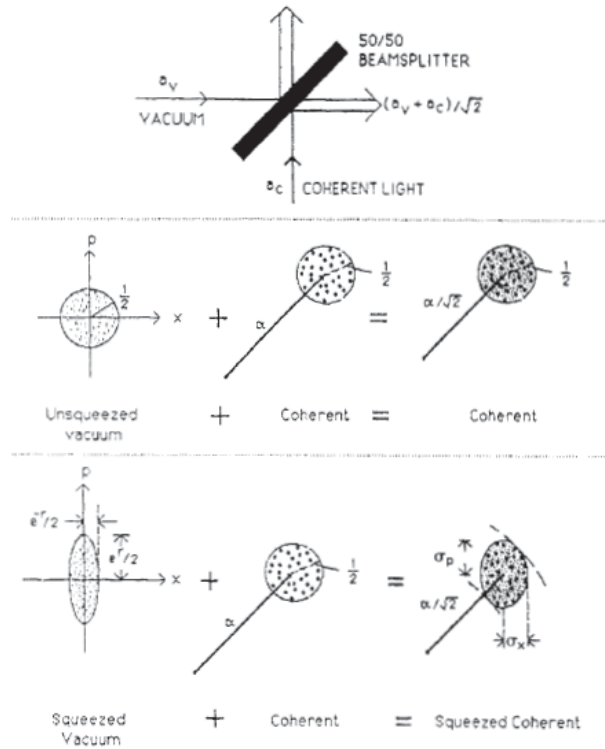


Figura 8: Incertituds de les quadratures de la superposició de un camp coherent amb buits no -comprimit i comprimit en un separador de feixos (beam-splitter) 50/50. Figura de [77]

del LO poden incrementar el soroll en el feix de superposició i aleshores emmascarar la compressió. Per millorar aquesta situació, Yuen i Chang [91] suggeriren a principis dels vuitanta una modificació del sistema de detecció simple, basada en les idees de detecció compensada (*balanced*) en mescladors de microones i sistemes òptics. Aquest mètode té implicacions importants en eliminar el soroll quàntic de l'oscil·lador local, així com l'excés de soroll del LO, com es pot veure a la figura (9). Dues senyals es barregen en una làmina separadora 50/50: un LO coherent i un camp buit comprimit. La llum de les dues branques es mesura i per tant no hi ha pèrdua d'energia. A causa de la diferència de fase incorporada per la làmina separadora, les contribucions del buit a cadascun dels detectors difereixen en el seu signe, La diferència d'intensitats entre els dos feixos detectats proporciona el senyal compensat tal i com es descriu matemàticament a les expressions anteriors (35) relatives a les quadratures.

El procés està descrit gràficament a la segona part de la figura (9). Les

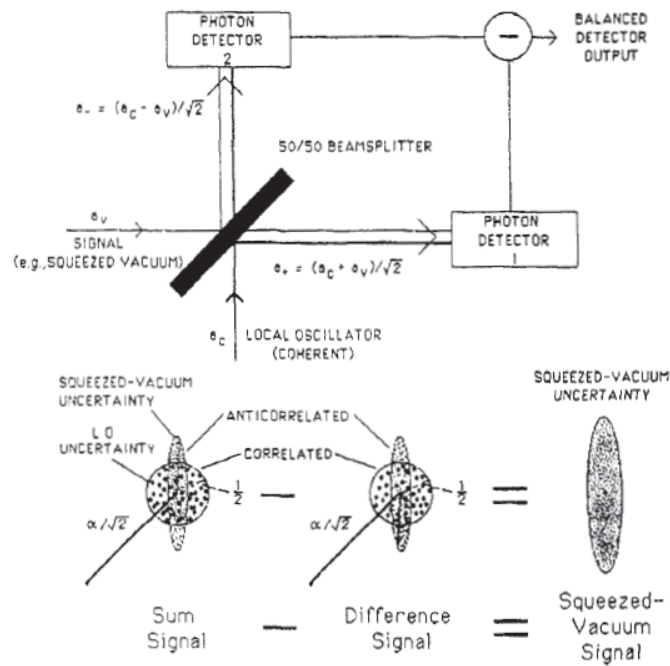


Figura 9: Detecció homodina comparada d'un estat buit comprimit. Figura de [77]

línies i cercles representen l'estat coherent; les el·lipses representen l'estat buit comprimit. Les incertituds provinents de l'estat coherent LO apareixen en ambdós detectors; i com que estan correlacionades poden ser sostretes. En canvi, les incertituds associades a l'estat buit comprimit estan anticorrelacionades i per tant es sumen quan fem la diferència de senyals. El resultat net és que el soroll original del buit es mesura superposat a la contribució del LO sense soroll quàntic ni excés de soroll d'aquest últim.

2.6 Estats comprimits de la llum: notació i influència de l'ordenació dels operadors

Dedique el punt final d'aquest apartat a aclarir quina notació empraré per a les quadratures del camp electromagnètic en funció dels operadors quàntics i com influeix en el càlcul de les seues variàncies l'ordenació d'aquestos operadors.

Si es considera un camp monomode es poden definir les seues quadratures en funció dels operadors creació i destrucció, tal i com s'ha explicat abans

(26,27),

$$\hat{X} = \hat{a}^\dagger + \hat{a} \quad (39)$$

$$\hat{Y} = -i(\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \quad (40)$$

i coneguda la seua relació de commutació (29)

$$[\hat{X}, \hat{Y}] = 2i,$$

recordem que acompliran la relació d'incertitud

$$\Delta\hat{X}_{|\psi\rangle}\Delta\hat{Y}_{|\psi\rangle} \geq 1; V(X)V(Y) \geq 1; \quad (41)$$

on $V(X) = (\Delta\hat{X})^2$ i que, tal i com s'ha comentat a dalt, per al cas dels estats coherents, incloent-hi el buit

$$(\Delta\hat{X}_{|\alpha\rangle})^2 = (\Delta\hat{Y}_{|\alpha\rangle})^2 = 1; \quad (42)$$

i per tant s'anomena estat comprimit aquell per al qual \hat{X} o \hat{Y} presenten una variància menor que la unitat. Si es considera que la quadratura comprimida està girada (cf. figura 6) un angle φ (angle de l'oscil·lador local), es pot redefinir

$$\hat{X}_\varphi = (\hat{a}e^{i\varphi} + \hat{a}^\dagger e^{-i\varphi}); \quad (43)$$

$$\hat{Y}_\varphi = \left[\hat{a}e^{i(\varphi+\frac{\pi}{2})} + \hat{a}^\dagger e^{-i(\varphi+\frac{\pi}{2})} \right] = \hat{X}_{\varphi+\frac{\pi}{2}}. \quad (44)$$

Fins aquí l'aclariment relatiu a la notació. Ara cal avançar que al llarg d'aquest treball els càlculs relatius a les incertituds es fan mitjançant tècniques matemàtiques que depenen de l'ordenació dels operadors escollida i per tant convé abans de continuar amb la descripció d'aquestes tècniques exposar com depén el valor de les variàncies d'aquesta ordenació.

La variància de la quadratura \hat{X}

$$(\Delta\hat{X})^2 = \langle \hat{X}^2 \rangle - \langle \hat{X} \rangle^2, \quad (45)$$

escrita d'acord amb la seua definició (43) i en funció dels operadors creació i destrucció queda

$$\begin{aligned} V(\hat{X}_\varphi) &= \langle (\hat{a}e^{i\varphi} + \hat{a}^\dagger e^{-i\varphi})^2 \rangle - \langle (\hat{a}e^{i\varphi} + \hat{a}^\dagger e^{-i\varphi}) \rangle^2 \\ &= \langle \hat{a}, \hat{a} \rangle e^{i2\varphi} + \langle \hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger \rangle e^{-i2\varphi} + \langle \hat{a}^\dagger, \hat{a} \rangle + \langle \hat{a}, \hat{a}^\dagger \rangle; \end{aligned} \quad (46)$$

on s'ha emprat la notació

$$\langle \hat{A}, \hat{B} \rangle = \langle \hat{A}\hat{B} \rangle - \langle \hat{A} \rangle \langle \hat{B} \rangle \quad (47)$$

expressió a partir de la qual es pot obtenir l'expressió per a la quadratura Y fent el canvi $\varphi \rightarrow \varphi + \frac{\pi}{2}$.

Si s'escull l'ordenació normal, l'expressió de la variància és

$$\begin{aligned} V^n(\hat{X}_\varphi) &= \langle \hat{a}^2 \rangle e^{i2\varphi} + \langle \hat{a}^{\dagger 2} \rangle e^{-i2\varphi} + 2 \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle \\ &\quad - \left(\langle \hat{a} \rangle^2 e^{i2\varphi} + \langle \hat{a}^\dagger \rangle^2 e^{-i2\varphi} + 2 \langle \hat{a}^\dagger \rangle \langle \hat{a} \rangle \right) + 1, \end{aligned} \quad (48)$$

i per a l'ordre antinormal

$$\begin{aligned} V^a(\hat{Y}_\varphi) &= V_\varphi^a(\hat{X}_{\varphi+\pi/2}) = \langle \hat{a}^2 \rangle e^{i2\varphi} + \langle \hat{a}^{\dagger 2} \rangle e^{-i2\varphi} + 2 \langle \hat{a}\hat{a}^\dagger \rangle \\ &\quad - \left(\langle \hat{a} \rangle^2 e^{i2\varphi} + \langle \hat{a}^\dagger \rangle^2 e^{-i2\varphi} + 2 \langle \hat{a}^\dagger \rangle \langle \hat{a} \rangle \right) - 1; \end{aligned} \quad (49)$$

on els superíndex fan referència a l'ordenació dels operadors.

Aquestes tres expressions estan relacionades, tal i com es dedueix de les regles de commutació (l'absència de superíndex indica, en aquest cas, ordenació simètrica):

$$V(\hat{X}_\varphi) = V^n(\hat{X}_\varphi) + 1 = V^a(\hat{X}_\varphi) - 1. \quad (50)$$

Relació que serà emprada més endavant per obtenir els primers resultats d'aquest treball.

3 Endinsant-se en l'estudi de la reducció quàntica del soroll: estructura del treball i descripció del mètode d'estudi

Com ja s'ha exposat al principi d'aquesta introducció, aquesta tesi s'estructura al voltant de dos objectius principalment: descriure les eines d'anàlisi necessàries per estudiar la reducció de la incertitud en els observables associats al camp electromagnètic d'una banda i descriure la forma en que podem aconseguir la llum comprimida a partir de la interacció del camp electromagnètic amb medis no lineals, de l'altra.

En els dos primers apartats de la introducció he repassat els conceptes d'estats quàntics de la llum i de llum comprimida, com a conceptes bàsics necessaris per entendre el text. Pertoca ara descriure l'estructura de les dues parts corresponents als dos objectius esmentats al paràgraf anterior.

Els resultats obtinguts a partir de la pròpia investigació apareixeran a la segona part i es basen en l'estudi de l'obtenció d'squeezing a partir de la interacció del camp electromagnètic en cavitats que contenen un medi no lineal en la seua resposta, un medi Kerr.

A l'apartat dedicat a les eines d'anàlisi es prova de presentar-les de forma resumida i el més clara possible donat que seran emprades després en cadascun de les deduccions i resultats presentats. Per tal d'organitzar aquesta primera part partiré del model del sistema a partir del qual he estudiat les interaccions no lineals i la reducció de soroll.

El model consisteix en una cavitat òptica amb un medi Kerr al seu interior i per caracteritzar-lo i estudiar els estats del camp electromagnètic obtinguts empraré les següents eines:

I) Per descriure el sistema des d'un punt de vista quàntic cal el seu Hamiltonià i les seues equacions d'evolució.

II) Per donar compte de les fluctuacions del camp electromagnètic amb la seua interacció cal incorporar el tractament quàntic del soroll i ho faré amb l'acoblament del sistema amb la resta de l'univers (el rebost) i la incorporació d'un superoperador: el Liouvillià.

III) Per poder tractar matemàticament les equacions que descriuen la variació del soroll del camp electromagnètic des d'un punt de vista quàntic ens calen les distribucions de quasiprobabilitat que transformen les equacions amb operadors en equacions de funcions estadístiques.

IV) Per estudiar les fluctuacions es recorre a un seguit d'equacions - Fokker-Planck, Langevin - que conformen un mètode de resolució d'aquestos problemes i en aquest apartat s'exposa com s'obtenen, sota quines condicions són adients i com es relacionen amb les equacions d'evolució i d'estabilitat

clàssiques.

V) Per estudiar com afecta el camp la interacció i el pas de l'interior a l'exterior de la cavitat òptica cal conèixer i aplicar la teoria input-output.

VI) Els valors dels observables que volem estudiar s'obtenen a partir de la utilització de correlacions a temps diferents de les distribucions de quasiprobabilitat descrites a dalt i per això s'explica que és l'espectre de correlacions i en particular l'espectre de *squeezing*.

Aquest seguit d'eines d'anàlisi es presenten amb la seua forma general i també aplicades a un sistema exemple, el ressonador Kerr, en particular el règim de funcionament que dona lloc a la biestabilitat òptica, per fer més senzilla la seua exposició i comprensió.

Part III

Eines d'anàlisi

4 Descripció quàntica d'un sistema òptic: Hamiltonià i equacions d'evolució

D'acord amb el que s'ha vist a la Introducció, la quantització del camp electromagnètic implica la seua caracterització amb un Hamiltonià (21-24), l'estudi del qual ens donarà informació sobre els observables i per tant sobre les propietats mesurables de la llum i les seues propietats quàntiques.

En aquest apartat plantejaré l'Hamiltonià corresponent a una cavitat Kerr vectorial, de forma que a l'apartat d'investigació quan estude diversos sistemes i formes d'obtenir *squeezing* treballaré amb adaptacions, simplificacions o ampliacions d'aquest Hamiltonià.

Un cop escrit l'Hamiltonià, per estudiar la seua dinàmica empraré l'operador densitat i la seua equació d'evolució o equació de Schrödinger - Von Neumann. Aquesta equació d'evolució l'obtindrè d'acord amb la mecànica quàntica en la imatge d'Heisenberg per a qualsevol operador i un cop obtinguda li afegiré un terme que donarà acompte de les fluctuacions des d'un punt de vista quàntic (equació de Schrödinger - Von Neumann - Liouville).

Amb aquestes operacions quedarà completada la descripció del problema: es descriuen la cavitat òptica no lineal i els modes del camp electromagnètic al seu interior mitjançant l'Hamiltonià i es descriu l'intercanvi amb l'exterior de la cavitat (pèrdues i entrada de fluctuacions) en incorporar un terme a l'equació d'evolució de l'operador densitat. S'obté així una equació que s'anomena Equació Mestra o *Master Equation*, que permetrà calcular, si s'és capaç de resoldre-la, el valor de qualsevol observable del sistema.

El primer pas serà per tant, escriure l'Hamiltonià: consideraré una cavitat Kerr vectorial i estudiaré per separat l'Hamiltonià dels camps al seu interior, el d'interacció amb el medi i el del camp injectat. Els últims passos consistiran en aplicar diverses aproximacions i considerar les variacions que introduiran les diverses ordenacions dels operadors.

4.1 La cavitat Kerr i els camps implicats

Considere una cavitat òptica en la qual el medi interior és isòtrop i està caracteritzat per un tensor de susceptibilitat de tercer ordre, $\chi^{(3)}$.

Sobre un dels espills es fa incidir des de l'exterior un camp coherent polaritzat linealment en la direcció x .

A la cavitat considere dos modes d'ona plana, polaritzats linealment. Aquests fronts d'ona plana són uniformes en la direcció perpendicular a la seua propagació i avancen en la direcció positiva de l'eix z .

Un dels modes és polaritzat en la mateixa direcció que el camp injectat i, per la interacció no lineal amb el medi, es pot excitar un segon mode que oscil·la en la direcció y en un fenomen anomenat inestabilitat de polarització. Aquest segon camp l'anomenem "camp generat" i quan es genera a la cavitat ocorren diferents processos no lineals com ara l'efecte Kerr autoinduït (self-phase modulation, apartir d'ara SPM) i induït (cross-phase modulation, al text CPM) i mescla de quatre ones (four-wave mixing, d'ara endavant FWM).

Respecte al medi material, pot ser descrit quànticament o clàssica. A tots els treballs d'investigació realitzats hem considerat una descripció clàssica de forma que el medi està caracteritzat per un tensor de susceptibilitat de tercer ordre, $\chi^{(3)}$, i és algebraicament equivalent a un paràmetre.

El camp electromagnètic l'escrivim

$$\hat{\mathbf{E}} = \left(\hat{E}_1 + \hat{E}_1^\dagger \right) \mathbf{e}_1 + \left(\hat{E}_2 + \hat{E}_2^\dagger \right) \mathbf{e}_2, \quad (51)$$

on \mathbf{e}_1 i \mathbf{e}_2 són els unitaris en la direcció x i y respectivament. Aquesta notació és convenient per al desenvolupament de l'expressió relativa a la polarització no lineal i també coherent amb la definició de camp donada al principi del treball (12) i per tant les amplituds dels operadors són de la forma

$$\hat{E}_j = i\mathcal{E}\hat{a}_j e^{ikz}; j = 1, 2 \quad (52)$$

$$\mathcal{E} = \sqrt{\frac{\hbar\omega_c}{2\varepsilon V}} \quad (53)$$

sent \hat{a}_j^\dagger i \hat{a}_j els operadors creació i destrucció pel mode j , ω_c la freqüència de ressonància de la cavitat, V el volum de la cavitat o de integració i ε la constant dielèctrica del medi, $\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \chi^{(1)})$.

Desenvoluparé a continuació la deducció de l'Hamiltonià en dos apartats: primer, l'evolució lliure del camp electromagnètic al si de la cavitat juntament amb el camp injectat i després, la interacció entre el medi no lineal i el camp injectat.

4.2 Hamiltonià de l'evolució lliure del camp electromagnètic i Hamiltonià del camp injectat

L'Hamiltonià corresponent a l'evolució lliure del camp electromagnètic al si de la cavitat s'escriu per als dos modes del model escollit [19]

$$H_0 = \hbar\omega_c \left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \right). \quad (54)$$

D'altra banda, l'Hamiltonià del camp de bombeig és el terme que dóna compte de la injecció d'un camp extern polaritzat en la direcció x (\mathbf{e}_1); i, si es modelitza com un camp coherent s'escriu [19]

$$H_{ext} = i\hbar E_0 \left(\hat{a}_1^\dagger e^{-i\omega_0 t} - \hat{a}_1 e^{i\omega_0 t} \right), \quad (55)$$

on ω_0 és la freqüència del camp injectat, i E_0 és proporcional a la seua amplitud que s'ha pres real sense falta de generalitat.

4.3 Hamiltonià d'interacció

Ara tindré en compte la interacció no lineal deguda a $\chi^{(3)}$. Escric la polarització no lineal com

$$\hat{\mathbf{P}}^{NL} = \hat{P}_j e^{ikz} \mathbf{e}_j + h.c., \quad (56)$$

on

$$\hat{P}_j =: \hat{P}_j: = 6\varepsilon_0 \chi_{1122}^{(3)} \left(\hat{E}_1^\dagger \hat{E}_1 + \hat{E}_2^\dagger \hat{E}_2 \right) \hat{E}_j + 3\varepsilon_0 \chi_{1221}^{(3)} \hat{E}_j^\dagger \left(\hat{E}_1^2 + \hat{E}_2^2 \right),$$

què correspon a un medi isòtrop [3, 5] i on s'han substituït les amplituds dels camps pels operadors corresponents; aquesta substitució s'ha realitzat mantenint l'ordre normal (indicat per les marques $::$ al voltant de l'operador). D'aquesta manera, l'Hamiltonià d'interacció serà la integral (veure [19])

$$\begin{aligned} H_{int} &= - \int_{cav} d^3 \mathbf{r} : \hat{\mathbf{P}}^{NL} \cdot \hat{\mathbf{E}}: \\ &= - \sum_{j=1,2} \int_{cav} d^3 \mathbf{r} : \left(\hat{P}_j \hat{E}_j^\dagger + h.c. \right) : \end{aligned} \quad (57)$$

on els productes d'operadors són

$$\begin{aligned} : \hat{P}_j \hat{E}_j^\dagger : &= 6\varepsilon_0 \chi_{1122}^{(3)} \hat{E}_j^\dagger \left(\hat{E}_1^\dagger \hat{E}_1 + \hat{E}_2^\dagger \hat{E}_2 \right) \hat{E}_j \\ &\quad + 3\varepsilon_0 \chi_{1221}^{(3)} \hat{E}_j^{\dagger 2} \left(\hat{E}_1^2 + \hat{E}_2^2 \right), \end{aligned} \quad (58)$$

i el resultat de la integral (57)

$$\begin{aligned} - \left(6\varepsilon_0 V \chi_{1111}^{(3)} \right)^{-1} H_{int} &= \left(\mathcal{A} + \frac{\mathcal{B}}{2} \right) \hat{E}_1^{\dagger 2} \hat{E}_1^2 + \left(\mathcal{A} + \frac{\mathcal{B}}{2} \right) \hat{E}_2^{\dagger 2} \hat{E}_2^2 \\ &\quad + 2\mathcal{A} \hat{E}_1^\dagger \hat{E}_1 \hat{E}_2^\dagger \hat{E}_2 + \frac{\mathcal{B}}{2} \hat{E}_1^{\dagger 2} \hat{E}_2^2 + \frac{\mathcal{B}}{2} \hat{E}_2^{\dagger 2} \hat{E}_1^2, \end{aligned} \quad (59)$$

on s'han introduït els coeficients de Maker i Terhune [3]

$$\mathcal{A} = \frac{2\chi_{1122}^{(3)}}{\chi_{1111}^{(3)}}, \quad \mathcal{B} = \frac{2\chi_{1221}^{(3)}}{\chi_{1111}^{(3)}}, \quad (60)$$

Escrivint els camps en termes dels operadors bosònics i tenint en compte que, per a medis isòtrops [3]

$$\mathcal{A} + \frac{\mathcal{B}}{2} = 1, \quad (61)$$

queda,

$$H_{int} = -\hbar\eta g \left[\frac{1}{2} \left(\hat{a}_1^{\dagger 2} \hat{a}_1^2 + \hat{a}_2^{\dagger 2} \hat{a}_2^2 \right) + \mathcal{A} \hat{a}_1^{\dagger} \hat{a}_1 \hat{a}_2^{\dagger} \hat{a}_2 + \frac{\mathcal{B}}{4} \left(\hat{a}_1^2 \hat{a}_2^{\dagger 2} + \hat{a}_1^{\dagger 2} \hat{a}_2^2 \right) \right], \quad (62)$$

on s'ha definit

$$g = \left| \chi_{1111}^{(3)} \right| \frac{12\varepsilon_0 V}{\hbar} \left(\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon V} \right)^2, \quad \eta = \text{sgn} \left(\chi_{1111}^{(3)} \right), \quad (63)$$

i on $\eta = +1$ indica no linealitat autoenfocant (*self-focussing*) i $\eta = -1$ no linealitat autodesenfocant (*self-defocussing*).

És important insistir en què, en substituir la formulació clàssica per la quàntica, hem triat en tot moment l'ordenació normal dels operadors. Aquesta ordenació és clarament arbitrària, però està d'acord amb altres estudis publicats sobre aquest sistema [21, 94].

Des d'un punt de vista estricte [51] per quantitzar l'Hamiltonià de qual-sevol sistema cal simetritzar l'ordenació dels operadors resultants; però, per preservar la claredat, realitzaré la simetrització quan escriga l'Hamiltonià complet i veure les diferències que aporta.

Per altra banda, tots els termes obtinguts en (62) corresponen a processos a quatre fotons, però cadascun implica uns mecanismes diferents tal i com s'ha enunciat en la descripció dels camps implicats: Així, el terme primer correspon a l'anomenat efecte Kerr autoinduït o *Self-Phase Modulation* (SPM) que implica la destrucció i creació de dos fotons del mateix camp; el segon a l'efecte Kerr induït o *Cross-Phase Modulation* (CPM) que implica la destrucció d'un fotó de cada camp i la creació d'un per cada camp també; i l'últim sumand és el procés anomenat mescla de quatre ones o *four wave mixing* (FWM) que implica la destrucció de dos fotons d'un camp i la creació de dos fotons de l'altre camp (figura 10).

4.4 Hamiltonià total. Imatge d'interacció

Si es sumen totes les contribucions (54,55,62), l'Hamiltonià total queda

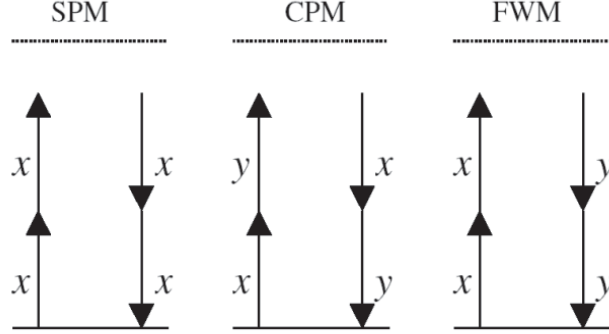


Figura 10: Il·lustració dels processos a quatre fotons que ocorren en una cavitat Kerr: SPM o automodulació de fase (implica processos de destrucció i creació de quatre fotons del mateix mode), CPM o modulació de fase creuada (implica destrucció de fotons de dos modes i emissió de dos fotons dels dos modes) i FWM o barreja de quatre ones (implica destrucció de dos fotons d'un mode i emissió de dos fotons de l'atre)

$$\begin{aligned}
H = & \hbar\omega_c \left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \right) + i\hbar E_0 \left(\hat{a}_1^\dagger e^{-i\omega_0 t} - \hat{a}_1 e^{+i\omega_0 t} \right) \\
& - \hbar\eta g \left[\frac{1}{2} \left(\hat{a}_1^{\dagger 2} \hat{a}_1^2 + \hat{a}_2^{\dagger 2} \hat{a}_2^2 \right) + \mathcal{A} \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + \frac{\mathcal{B}}{4} \left(\hat{a}_1^2 \hat{a}_2^{\dagger 2} + \hat{a}_1^{\dagger 2} \hat{a}_2^2 \right) \right],
\end{aligned} \tag{64}$$

expressió en la qual, donat que els únics operadors que queden són els de destrucció i creació de cada mode, s'han eliminat les títles per claredat.

D'altra banda, fins ara he treballat a la imatge d'Schrödinger; però convé canviar a la imatge d'interacció ja que així s'eliminen les freqüències altes i solament queda la diferència entre les oscil·lacions del camp injectat i del mode propi de la cavitat.

El canvi d'imatge, el realitzem mitjançant l'operador unitari

$$U(t) = \exp \left[i\omega_0 t \left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \right) \right]; \tag{65}$$

per fer el canvi d'imatge fem actuar l'operador unitari sobre el vector estat del sistema

$$|\Psi\rangle_I = U |\Psi\rangle_S. \tag{66}$$

Si calculem l'evolució de l'estat, es pot veure que

$$i\hbar \left| \dot{\Psi} \right\rangle_I = \left(i\hbar \dot{U} U^{-1} + U H_S U^{-1} \right) |\Psi\rangle_I \equiv H_I |\Psi\rangle_I, \tag{67}$$

on els subíndexs S, I indiquen la imatge d'Schrödinger i d'Interacció respectivament. en conseqüència, la transformació de l'Hamiltonià serà

$$H_I = i\hbar\dot{U}U^{-1} + UH_SU^{-1}. \quad (68)$$

Aplicant la transformació i després de realitzar la RWA, l'Hamiltonià total queda, finalment

$$\begin{aligned} H_I = & \hbar\theta \left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \right) + i\hbar E_0 \left(\hat{a}_1^\dagger - \hat{a}_1 \right) \\ & - \hbar\eta g \left[\frac{1}{2} \left(\hat{a}_1^{\dagger 2} \hat{a}_1^2 + \hat{a}_2^{\dagger 2} \hat{a}_2^2 \right) + \mathcal{A} \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + \frac{\mathcal{B}}{4} \left(\hat{a}_1^2 \hat{a}_2^{\dagger 2} + \hat{a}_1^{\dagger 2} \hat{a}_2^2 \right) \right] \end{aligned} \quad (69)$$

on

$$\theta = \omega_c - \omega_0 \quad (70)$$

és la desintonia entre la freqüència de la cavitat, ω_c , i la del camp injectat, ω_0 .

Com aquesta és la imatge en la qual treballaré a partir d'ara; si no es diu explícitament el contrari, H_I passa a denominar-se H .

4.5 Simetrització de l'Hamiltonià

Com ja s'ha assenyalat, per simplificar la deducció matemàtica de l'Hamiltonià, he emprat des del principi l'ordenació normal. Ordenació emprada en altres treballs sense plantejar-se els problemes associats a l'elecció realitzada; potser les raons siguen de caire experimental, ja que per estimar les mesures dels detectors fotoelèctrics cal emprar aquest tipus d'ordenació.

Així que, per establir un Hamiltonià de referència, reescriu l'ordenació dels operadors en forma simètrica i després els ordene en forma normal per veure quina és la contribució deixada de banda en obviar la influència de l'ordenació.

El terme a simetritzar és el d'interacció, ja que a l'Hamiltonià lliure la contribució de l'ordenació dels operadors correspon a un canvi a l'origen d'energies i el del camp de bombeig solament té un operador en cada sumand.

Pel que fa al terme d'interacció i d'acord amb l'equació (69) podem escriure

$$H_{int} = -\hbar\eta g \left[\frac{1}{2} (Q_1 + Q_2) + \mathcal{A}Q_{12} + \frac{\mathcal{B}}{4} (F_{12} + F_{21}) \right]; \quad (71)$$

on els termes que cal simetritzar són els Q . Comence, en primer lloc, pel de la SPM i anomenem $S(Q_i)$ el resultat de simetritzar el grup d'operadors,

$$\begin{aligned} S(Q_i) &= S\left(a_i^{\dagger 2} a_i^2\right) \\ &= \frac{1}{6} \left(a_i^{\dagger} a_i^{\dagger} a_i a_i + a_i^{\dagger} a_i a_i^{\dagger} a_i + a_i^{\dagger} a_i a_i a_i^{\dagger} + a_i a_i a_i^{\dagger} a_i^{\dagger} + a_i a_i^{\dagger} a_i a_i^{\dagger} + a_i a_i^{\dagger} a_i^{\dagger} a_i \right), \end{aligned} \quad (72)$$

on emprant el valor del commutador $[a_i, a_j^{\dagger}] = \delta_{ij}$ es poden escriure tots els termes en forma normal i queda

$$S(Q_i) = a_i^{\dagger} a_i^{\dagger} a_i a_i + 2a_i^{\dagger} a_i; \quad (73)$$

on s'ha eliminat el sumand 1/2 mitjançant una redefinició de l'origen d'energies.

En segon, el sumand de la CPM

$$\begin{aligned} S(Q_{12}) &= S\left(a_1^{\dagger} a_1 a_2^{\dagger} a_2\right) \\ &= \frac{1}{4} \left(a_1^{\dagger} a_1 a_2^{\dagger} a_2 + a_1^{\dagger} a_1 a_2 a_2^{\dagger} + a_1 a_1^{\dagger} a_2^{\dagger} a_2 + a_1 a_1^{\dagger} a_2 a_2^{\dagger} \right), \end{aligned} \quad (74)$$

que es pot ordenar de forma anàloga a l'anterior

$$S(Q_{12}) = \frac{1}{4} \left(4a_1^{\dagger} a_1 a_2^{\dagger} a_2 + 2a_1^{\dagger} a_1 + 2a_2^{\dagger} a_2 \right). \quad (75)$$

Així l'Hamiltonià d'interacció simetritzat és

$$\begin{aligned} S(H_{int}) &= -\hbar\eta g \left[\frac{1}{2} \left(a_1^{\dagger} a_1^{\dagger} a_1 a_1 + 2a_1^{\dagger} a_1 + a_2^{\dagger} a_2^{\dagger} a_2 a_2 + 2a_2^{\dagger} a_2 \right) \right. \\ &\quad + \frac{\mathcal{A}}{4} \left(4a_1^{\dagger} a_1 a_2^{\dagger} a_2 + 2a_1^{\dagger} a_1 + 2a_2^{\dagger} a_2 \right) \\ &\quad \left. + \frac{\mathcal{B}}{4} \left(a_1 a_1 a_2^{\dagger} a_2^{\dagger} + a_1^{\dagger} a_1^{\dagger} a_2 a_2 \right) \right] \end{aligned} \quad (76)$$

El resultat de simetritzar l'expressió de l'Hamiltonià en la imatge d'interacció (69) és doncs,

$$\begin{aligned} H &= \hbar\theta \left(a_1^{\dagger} a_1 + a_2^{\dagger} a_2 \right) + i\hbar E_0 \left(a_1^{\dagger} - a_1 \right) \\ &\quad - \hbar\eta g \left[\frac{1}{2} \left(a_1^{\dagger 2} a_1^2 + 2a_1^{\dagger} a_1 + a_2^{\dagger 2} a_2^2 + 2a_2^{\dagger} a_2 \right) \right. \\ &\quad + \mathcal{A} \left(a_1^{\dagger} a_1 a_2^{\dagger} a_2 + \frac{1}{2} a_1^{\dagger} a_1 + \frac{1}{2} a_2^{\dagger} a_2 \right) \\ &\quad \left. + \frac{\mathcal{B}}{4} \left(a_1^2 a_2^{\dagger 2} + a_1^{\dagger 2} a_2^2 \right) \right]; \end{aligned} \quad (77)$$

on s'ha canviat la notació i d'ara endavant $S(H)$ l'escriuré H .

Per últim, reordenant els termes s'arriba a

$$H = \hbar \left[\theta - \eta g \left(1 + \frac{\mathcal{A}}{2} \right) \right] (a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2) + i\hbar E_0 (a_1^\dagger - a_1) \quad (78)$$

$$- \hbar \eta g \left[\frac{1}{2} (a_1^{\dagger 2} a_1^2 + a_2^{\dagger 2} a_2^2) + \mathcal{A} a_1^\dagger a_1 a_2^\dagger a_2 + \frac{\mathcal{B}}{4} (a_1^2 a_2^{\dagger 2} + a_1^{\dagger 2} a_2^2) \right]$$

que, en principi i per comparació amb (69), ens permet avaluar la contribució de les diferents ordenacions a la descripció del nostre sistema i que es pot resumir en un desplaçament del valor de la desintonia

$$\tilde{\theta} = \theta - s\eta g \left(1 + \frac{\mathcal{A}}{2} \right) \quad (79)$$

amb $s = 1$, per a l'ordenació normal; $s = 0$, per a l'ordenació simètrica; $s = -1$, per a l'ordenació antinormal. Aquest desplaçament és equivalent a redefinir la freqüència del mode de la cavitat ja que $\theta = \omega_c - \omega_0$, i per tant podem entendre que $\tilde{\theta} = \tilde{\omega}_c - \omega_0$, amb

$$\tilde{\omega}_c = \omega_c - s\eta g \left(1 + \frac{\mathcal{A}}{2} \right) \quad (80)$$

on el segon sumand a la dreta de (80) és la contribució del buit, que depen de l'ordenació via el valor de s .

4.6 L'Hamiltonià de la biestabilitat òptica dispersiva

El model descrit correspon a un cas general d'interacció del camp electromagnètic amb un medi $\chi^{(3)}$ que s'estudia més endavant i que, a més a més, serveix com a paradigma d'altres models utilitzats també més endavant. Però per a l'exposició de l'aplicació de diverses tècniques relacionades amb l'estudi del soroll quàntic i la seua compressió empraré un cas més senzill, el qual em servirà per il·lustrar aquestes tècniques. El sistema proposat és la biestabilitat òptica dispersiva estudiada per Drummond i Walls [19] i que consisteix en un cavitat òptica amb un espill opac, amb un medi $\chi^{(3)}$ dispersiu i isotròpic i a la qual se l'injecta un camp coherent de freqüència ω_0 , proper a la freqüència de la cavitat ω_c , és a dir, una cavitat Kerr escalar.

El seu Hamiltonià es pot obtenir considerant l'Hamiltonià anterior (78) i restringint-se al cas en el qual no s'ha generat el segon camp, de forma que $\hat{a}_2^\dagger = \hat{a}_2 = 0$ i s'obté, prenent $\eta = +1$,

$$H = \hbar \left[\theta \hat{a}^\dagger \hat{a} + iE_0 (\hat{a}^\dagger - \hat{a}) - \frac{g}{2} \hat{a}^{\dagger 2} \hat{a}^2 \right], \quad (81)$$

On s'ha emprat el mateix criteri de notació que a l'Hamiltonià anterior i la desintonia (79), $\tilde{\theta} = \theta - g$ en aquest cas, l'escrivim sense titlla per simplicitat.

A partir d'ara i amb l'expressió completada de l'Hamiltonià cal estudiar la seua evolució, estudi per al qual caldrà emprar l'operador densitat [33]. Aquest operador densitat permet calcular valors esperats de qualsevol altre operador mitjançant l'expressió [33]

$$\langle \hat{O} \rangle = Tr \langle \hat{\rho} \hat{O} \rangle. \quad (82)$$

És clar, per tant, que si coneguem l'evolució de l'operador, o dit d'una altra manera si podem resoldre l'equació corresponent a l'evolució de $\hat{\rho}$, podrem calcular l'evolució de qualsevol operador. A l'apartat següent s'explica com es troba aquesta equació d'evolució i com s'incorpora el terme relatiu a les interaccions amb l'exterior de la cavitat. L'equació d'evolució resultant serà l'anomenada *Master Equation*.

4.7 Acoblament del sistema amb la resta de l'univers i la incorporació del superoperador Liouvillià

En la descripció de la cavitat Kerr feta fins aquí es fa referència a l'evolució del sistema (camp dins de la cavitat) incloent-hi la interacció no lineal i la injecció d'un camp extern. Aquesta descripció però, és incompleta ja que no té en compte que el sistema és obert: el mateix fet que permet que pugam injectar un camp, permet també que part del camp dins de la cavitat pugui eixir d'ella, així com altres camps (fluctuacions externes) entren al sistema.

Una forma d'incorporar aquestos fets (pèrdua d'energia del sistema i entrada de fluctuacions) és afegir a la descripció un rebost (R), amb el qual el sistema (S) intercanvia energia i a través d'aquest intercanvi o dissipació s'esmorteix [8, 47].

D'acord amb aquesta aproximació el decaïment s'incorpora en desenvolupar l'equació d'evolució de l'operador densitat o *Master Equation* (ME), de forma que afegint un terme que done compte d'aquesta interacció entre el sistema i el seu entorn modifiquem la ME.

En particular, per a un mode de la cavitat acoblat amb un rebost d'oscil·ladors harmònics en equilibri tèrmic (què modelitza els modes dels camps fora de la cavitat), s'arriba a la ME

$$\dot{\hat{\rho}} = \frac{1}{i\hbar} [H, \hat{\rho}] + \Lambda \hat{\rho}, \quad (83)$$

on H és l'Hamiltonià del sistema i Λ és un Liouvillià o un superoperador, definit com

$$\Lambda \hat{\rho} = \gamma ([\hat{a}, \hat{\rho} \hat{a}^\dagger] + [\hat{a} \hat{\rho}, \hat{a}^\dagger]) + \gamma \bar{n} ([\hat{a} \hat{\rho}, \hat{a}^\dagger] + [\hat{a}^\dagger, \hat{\rho} \hat{a}]), \quad (84)$$

on 2γ és la constant de decaïment de la intensitat o nombre de fotons (*cavity photon loss rate*) i \bar{n} és el nombre mitjà de fotons corresponents a la temperatura del rebost. Si a més el nostre sistema es troba a temperatura ambient i el mode de la cavitat oscil·la a freqüències òptiques podem menysprear el terme multiplicat pel nombre mitjà de fotons tèrmics i el Liouvillià queda en forma més senzilla

$$\Lambda\hat{\rho} = \gamma ([\hat{a}, \hat{\rho}\hat{a}^\dagger] + [\hat{a}\hat{\rho}, \hat{a}^\dagger]) .$$

D'acord amb aquest resultat, a la imatge d'interacció, l'evolució de l'operador densitat (83), en substituir l'Hamiltonià pel seu valor en (81), i desenvolupar el commutador queda

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\rho}} = & -i\theta (\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a}) \\ & + E_0 (\hat{a}^\dagger\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}^\dagger - \hat{a}\hat{\rho} + \hat{\rho}\hat{a}) \\ & + i\frac{g}{2} (\hat{a}^{\dagger 2}\hat{a}^2\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}^{\dagger 2}\hat{a}^2) \\ & + \gamma (2\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger - \hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho}) , \end{aligned} \tag{85}$$

Aquesta és la ME per a la biestabilitat òptica dispersiva i conté tota la informació necessària per calcular l'evolució en el temps de qualsevol observable. La dificultat radica en resoldre una equació que conte grups de fins a cinc operadors i aquesta dificultat és, fins on nosaltres sabem, insalvable. La forma d'afrontar aquest problema es basa en la transformació d'aquesta equació d'operadors en una equació que conté derivades parcials de variables complexes. Aquesta tècnica de resolució és la que s'explica al capítol següent.

5 Tractament estadístic i quàntic del camp electromagnètic: les distribucions de quasiprobabilitat

Les distribucions de quasiprobabilitat són eines de gran utilitat a l'estudi estadístic del soroll en els camps electromagnètics des d'un punt de vista quàntic. La seua principal virtut radica en què permeten superar les dificultats que hom es troba si parteix d'una *Master Equation* amb grups de dos o més operadors. La utilització de les funcions de quasiprobabilitat permet projectar la matriu densitat sobre una base d'operadors sobrecompleta, la dels estats coherents [88] la qual cosa transforma l'equació d'evolució de la matriu densitat, la ME, en una equació en derivades parcials [8] que pot agafar la forma de les equacions de Fokker-Planck. Aquestes equacions de Fokker-Planck, tal i com es descriu a l'apartat corresponent, permeten un tractament analític de les equacions estocàstiques.

Vejam doncs, què són i com s'utilitzen les distribucions de quasiprobabilitat

5.1 Expansió de la matriu densitat en la base d'estats coherents: definició implícita de la funció P

Per desenvolupar algebraicament l'operador densitat hom pot recórrer a la seua expansió en estats número a partir de la resolució de la unitat en aquesta base

$$\hat{\rho} = \sum_{n,m=0}^{\infty} |m\rangle \langle m| \hat{\rho} |n\rangle \langle n|, \quad (86)$$

expressió que es pot interpretar des d'un punt de vista probabilístic si reescriuim

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \sum_{n,m=0}^{\infty} |m\rangle \rho_{mn} \langle n|, \\ \rho_{mn} &= \langle m| \hat{\rho} |n\rangle, \end{aligned} \quad (87)$$

on els elements diagonals, $P_n = \rho_{nn}$, són justament les probabilitats de trobar n fotons en l'estat descrit per l'operador densitat.

Aquesta expansió en sumes infinites de la matriu densitat fa impossible, en la pràctica, la resolució de les equacions d'evolució dels coeficients ρ_{mn} per a qualsevol camp que supere uns valors de n moderats, és a dir, qualsevol

camp no molt feble. Per tal de salvar aquest escull es pot recórrer a l'expansió de l'operador en la base d'estats coherents, una base sobrecompleta i no ortogonal [1] tal i com s'ha explicat a la descripció de les propietats d'aquestos estats (17) i la seua resolució de la identitat $1 = \frac{1}{\pi} \int d^2\alpha |\alpha\rangle \langle\alpha|$

$$\hat{\rho} = \int \int \langle\alpha' | \hat{\rho} | \alpha''\rangle |\alpha'\rangle \langle\alpha''| \frac{d^2\alpha' d^2\alpha''}{\pi^2}. \quad (88)$$

Expansió que permet passar l'expressió discreta (86) al continu.

Aquesta base pot permetre encara una altra forma de representar $\hat{\rho}$

$$\hat{\rho} = \int \int P(\alpha) |\alpha\rangle \langle\alpha| d^2\alpha \quad (89)$$

on $P(\alpha)$ representa l'equivalent de les funcions de pes estadístic i es coneix com la P de Glauber - Sudarshan (introduïda independentment per Glauber [35] i Sudarshan [74]).

Aquesta distribució és útil per calcular valors esperats d'operadors en ordre normal com es pot veure en un cas general (on es fa ús de la propietat cíclica de la traça)

$$\begin{aligned} \langle \hat{a}^{\dagger p} \hat{a}^q \rangle &\equiv \text{tr} (\hat{\rho} \hat{a}^{\dagger p} \hat{a}^q) \\ &= \text{tr} \left(\int d^2\alpha |\alpha\rangle \langle\alpha| P(\alpha) \hat{a}^{\dagger p} \hat{a}^q \right) \\ &= \text{tr} \left(\int d^2\alpha P(\alpha) \langle\alpha| \hat{a}^{\dagger p} \hat{a}^q |\alpha\rangle \right) \\ &= \int d^2\alpha P(\alpha) \alpha^{*p} \alpha^q. \end{aligned} \quad (90)$$

Aquesta propietat fa evident l'analogia de la distribució P amb una distribució de probabilitat clàssica, analogia que ha d'establir-se amb alguna reserva a causa del fet que la base no és ortogonal i de què pot agafar valors negatius. Per aquestos motius és freqüent referir-se a ella (i a la resta de representacions en la base d'estats coherents) com una distribució de quasiprobabilitat o una quasidistribució de probabilitat.

5.2 Les funcions característiques

Si es considera una variable aleatòria clàssica x i la seua densitat de probabilitat associada $\rho(x)$, el moment n-èssim de x es defineix com

$$\langle x^n \rangle = \int dx x^n \rho(x). \quad (91)$$

Amb la qual cosa $\rho(x)$ està completament especificada si el coneixen tots els moments $\langle x^n \rangle$. Afirmació que es pot comprovar en introduir la funció característica

$$\begin{aligned}\chi(k) &= \langle e^{ikx} \rangle = \int dx e^{ikx} \rho(x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} \langle x^n \rangle\end{aligned}\quad (92)$$

I com que, evidentment, la densitat de probabilitat és la transformada de Fourier de la funció característica:

$$\rho(x) = \frac{1}{2\pi} \int dx e^{-ikx} \chi(k); \quad (93)$$

si es coneixen tots els moments $\langle x^n \rangle$, aleshores es coneix $\chi(k)$ i per tant es coneix $\rho(x)$. D'altra banda, si hom coneix la funció característica es poden calcular els moments d'acord amb

$$\langle x^n \rangle = \frac{1}{i^n} \left. \frac{d^n \chi(k)}{dk^n} \right|_{k=0}. \quad (94)$$

A l'àmbit de la mecànica quàntica també es poden introduir les funcions característiques. Així, depenent de l'ordre dels operadors escollit es defineixen tres d'aquestes funcions

$$\chi_W(z) = Tr \left[\hat{\rho} e^{z\hat{a}^\dagger - z^*\hat{a}} \right] \quad (95)$$

$$\chi_P(z) = Tr \left[\hat{\rho} e^{z\hat{a}^\dagger} e^{-z^*\hat{a}} \right] \quad (96)$$

$$\chi_Q(z) = Tr \left[\hat{\rho} e^{-z^*\hat{a}} e^{z\hat{a}^\dagger} \right] \quad (97)$$

on els subíndex indiquen l'ordenació dels operadors: W per a l'ordenació simètrica, P per a l'ordenació normal i Q per a l'ordenació antinormal.

5.3 Les funcions P , Q i W a partir de la seua funció característica

A partir de les funcions característiques definides a dalt (95-97) es poden definir les diferents distribucions de quasiprobabilitat en funció de les ordenacions dels operadors.

Així, per a l'ordre antinormal la funció característica també es pot escriure

$$\begin{aligned}
\chi_Q(z) &= Tr \left[\hat{\rho} e^{-z^* \hat{a}} e^{z \hat{a}^\dagger} \right] \\
&= Tr \left[e^{z \hat{a}^\dagger} \hat{\rho} e^{-z^* \hat{a}} \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \int d^2 \alpha \langle \alpha | e^{z \hat{a}^\dagger} \hat{\rho} e^{-z^* \hat{a}} | \alpha \rangle \\
&= \int d^2 \alpha Q(\alpha) e^{z \alpha^* - z^* \alpha}, \tag{98}
\end{aligned}$$

què és justament la transformada de Fourier bidimensional de la distribució Q o d'Husimi. La transformada inversa per tant ens dóna la distribució buscada

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\pi^2} \int \chi_Q(z) e^{z^* \alpha - z \alpha^*} d^2 z, \tag{99}$$

Anàlogament es pot obtenir la distribució W de Wigner, corresponent a l'ordenació simètrica

$$W(\alpha) = \frac{1}{\pi^2} \int \chi_W(z) e^{z^* \alpha - z \alpha^*} d^2 z, \tag{100}$$

i tornar a definir la distribució P

$$P(\alpha) = \frac{1}{\pi^2} \int \chi_P(z) e^{z^* \alpha - z \alpha^*} d^2 z. \tag{101}$$

Aquestes tres expressions es poden escriure en forma compacta si s'empra la propietat dels operadors

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-[A,B]/2} \tag{102}$$

que requereix

$$[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0 \tag{103}$$

de forma que

$$\begin{aligned}
\chi_s(z) &= Tr \left[\hat{D}_s \hat{\rho} \right] \\
\hat{D}_s &= e^{\frac{1}{2}(1+s)zz^*} e^{-z^* \hat{a}} e^{z \hat{a}^\dagger}
\end{aligned} \tag{104}$$

on $s = 1$ per a la P de Glauber, $s = -1$ per a la Q i $s = 0$ per a la W de Wigner; i la definició conjunta queda

$$W_s(\alpha) = \int \chi_s(z) e^{z^* \alpha - z \alpha^*} d^2 z \tag{105}$$

5.4 Utilització de les funcions de quasiprobabilitat per calcular equacions d'evolució a partir de la ME

A partir de les funcions característiques i de la ME que dona una expressió per a l'evolució de la matriu densitat es poden obtenir equacions d'evolució de les distribucions i a partir d'elles les correlacions que es necessiten per avaluar el grau de compressió de la incertitud dels estats estudiats. Per descriure el procés agafe un exemple senzill en el qual l'evolució de l'operador densitat vinga donada per la ME

$$\dot{\hat{\rho}} = \hat{a}^\dagger \hat{\rho} \quad (106)$$

I d'acord amb la definició de funció característica:

$$\begin{aligned} \dot{\chi}_s(z) &= Tr \left\{ \hat{D}_s \dot{\hat{\rho}} \right\} \\ &= Tr \left\{ \hat{D}_s \hat{a}^\dagger \hat{\rho} \right\}, \end{aligned} \quad (107)$$

ara per realitzar aquesta transformació, cal veure com actua \hat{D}_s sobre els operadors. Així per transformar l'expressió $\hat{D}_s \hat{a}^\dagger$ escric \hat{D}_s en ordre antinormal aprofitant l'expressió (104) i derivant

$$\frac{\partial}{\partial z} \hat{D}_s = (1+s) \frac{z^*}{2} \hat{D}_s + \hat{D}_s \hat{a}^\dagger \quad (108)$$

per obtenir l'equivalència

$$\hat{D}_s \hat{a}^\dagger = \left[\frac{\partial}{\partial z} - (1+s) \frac{z^*}{2} \right] \hat{D}_s \quad (109)$$

què aplicada al terme buscat

$$\begin{aligned} \dot{\chi}_s(z) &= Tr \left\{ \hat{D}_s \hat{a}^\dagger \hat{\rho} \right\} \\ &= Tr \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial z} - (1+s) \frac{z^*}{2} \right] \hat{D}_s \hat{\rho} \right\} \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial z} - (1+s) \frac{z^*}{2} \right] \chi_s(z) \end{aligned} \quad (110)$$

expressió què, per a l'exemple escollit, és l'equació d'evolució de la funció característica, $\chi_s(z)$.

Ara cal calcular la transformació de $\chi_s(z)$ en la distribució de quasiprobabilitat $W_s(\alpha)$ a través l'equació (105)

$$\begin{aligned}
\dot{W}_s(\alpha) &= \int e^{z^*\alpha - z\alpha^*} \dot{\chi}_s(z) d^2z \\
&= \int e^{z^*\alpha - z\alpha^*} \left[\frac{\partial}{\partial z} - (1+s) \frac{z^*}{2} \right] \chi_s(z) d^2z \\
&= - \int \frac{\partial}{\partial z} e^{z^*\alpha - z\alpha^*} \chi_s(z) d^2z - \frac{(1+s)}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \int e^{z^*\alpha - z\alpha^*} \chi_s(z) d^2z \\
&= \left[\alpha^* - \frac{(1+s)}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right] W_s(\alpha) \tag{111}
\end{aligned}$$

Aleshores, seguint el procediment d'aquest exemple, és fàcil obtenir les equivalències per a grups d'operadors de la ME que ens permetran passar a l'equació d'evolució de les tres distribucions; per exemple, per a un operador

$$\hat{\rho}\hat{a}^\dagger \Leftrightarrow \left(\alpha^* + \frac{1-s}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) W_s, \tag{112}$$

$$\hat{a}^\dagger\hat{\rho} \Leftrightarrow \left(\alpha^* - \frac{1+s}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) W_s, \tag{113}$$

$$\hat{\rho}\hat{a} \Leftrightarrow \left(\alpha - \frac{1+s}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \right) W_s, \tag{114}$$

$$\hat{a}\hat{\rho} \Leftrightarrow \left(\alpha + \frac{1-s}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \right) W_s. \tag{115}$$

De forma semblant es poden deduir les equivalències corresponents als grups de dos o quatre operadors tal i com apareix a l'Apèndix I i es poden obtenir les equacions d'evolució de les diferents quasidistribucions relatives a l'Hamiltonià i la Master Equation de la biestabilitat òptica dispersiva (85).

$$\begin{aligned}
\dot{W}_s &= \left\{ -\frac{\partial}{\partial \alpha} [E_0 - (\gamma + i\theta)\alpha + ig\alpha^2\alpha^*] \right. \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial \alpha^*} [E_0 - (\gamma - i\theta)\alpha^* - ig\alpha\alpha^{*2}] \\
&\quad + \gamma(1-s) \frac{\partial^2}{\partial \alpha\alpha^*} + i\frac{g}{2} \left[s \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \alpha^2 - s \frac{\partial^2}{\partial \alpha^{*2}} \alpha^{*2} \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{2} (1-s^2) \frac{\partial^3}{\partial \alpha^2\alpha^*} \alpha - \frac{1}{2} (1-s^2) \frac{\partial^3}{\partial \alpha\alpha^{*2}} \alpha^* \right] \right\} W_s \tag{116}
\end{aligned}$$

Que amb els diferents valors de $s = 1, -1, 0$ donarà les distribucions P de Glauber - Sudarshan, Q i W respectivament.

6 Equacions de Fokker-Planck i Langevin

6.1 L'equació de Fokker-Planck

A l'apartat anterior s'ha mostrat com l'ús de les distribucions de quasi-probabilitat i la correspondència quàntico-clàssica serveix per transformar la descripció d'un sistema dissipatiu via operadors quàntics en una altra descripció amb el llenguatge de la física estadística clàssica. La distribució que representa l'operador densitat no necessàriament satisfà totes les condicions exigides a una densitat de probabilitat; però en molts casos obeeix una equació de Fokker-Planck, la qual cosa permet emprar directament el llenguatge i els mètodes de l'estadística clàssica.

L'equació de Fokker-Planck (al text F-P) va ser emprada per Fokker en 1915 i per Planck en 1917 per descriure el moviment Brownià. Per més exactitud, sobre el moviment brownià publicà Einstein un article on establia una versió reduïda de l'equació F-P i on assumia aproximacions que després foren generalitzades per Fokker i Planck ([29], cap.1.2). Aquesta equació, formalment, és

$$\frac{\partial P(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \left[-\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} A_i(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} D_{i,j}(\mathbf{x}) \right] P(\mathbf{x}, t), \quad (117)$$

i el procés modelitzat es conegut matemàticament com un *procés de difusió*, el vector $\vec{A}(\mathbf{x})$ es conegut com el vector de *deriva* i la matriu $D(\mathbf{x})$ com la matriu de *difusió*. La matriu de difusió és semidefinida positiva (els seus autovalors són no negatius en una base real) i simètrica com a resultat de la seua definició dins de l'equació de Champman-Kolmogorov ([29], cap.3.4).

L'equació de F-P pot ser transformada, per les regles d'Ito [8], en una equació diferencial estocàstica o equació de Langevin des de la què podrem calcular les fluctuacions del soroll; d'aquí que el mètode seguit per avaluar aquestes fluctuacions consistirà en identificar l'equació de F-P en cadascuna de les equacions d'evolució esbrinades per tal de transformar-les en equacions de Langevin i resoldre-les d'acord amb els mètodes emprats habitualment a la mecànica estadística.

6.2 Equacions de Langevin i llur relació amb l'equació de Fokker-Planck

Al treball presentat al 1908, poc temps després del d'Einstein sobre el moviment Brownià (1905), Langevin presentà un altre formalisme per deduir la

variància de la trajectòria d'una partícula sotmesa a aquest tipus de moviment ([29], cap. 1.2.2). El seu formalisme descansava en la idea de que la partícula seguiria una trajectòria d'acord amb la llei de Newton

$$m\ddot{x} = -6\pi\eta a\dot{x} + X, \quad (118)$$

on η és la viscositat del medi, a el diàmetre de la partícula assumida com esfèrica i X una *força fluctuant* que representa els múltiples impactes de la partícula amb les molècules del líquid en el qual està submergida. Partint d'aquesta equació i assumint que l'energia cinètica de la partícula en mitjana és

$$\left\langle \frac{1}{2}mv^2 \right\rangle = k_B T, \quad (119)$$

amb k_B la constant de Boltzmann i T la temperatura del líquid, així com que la correlació

$$\langle xX \rangle = 0, \quad (120)$$

a causa de la independència de les dues variables, l'equació anterior també es pot escriure

$$\frac{d\langle x^2 \rangle}{dt} = \frac{k_B T}{3\pi\eta a} + C \exp\left(\frac{-6\pi\eta a t}{m}\right), \quad (121)$$

on C és una constant arbitrària.

L'equació de Langevin fou el primer exemple d'*equació diferencial estocàstica* (una equació diferencial amb un terme aleatori, la solució de la qual serà, en algun sentit, aleatòria). Cada solució de l'equació de Langevin representa una trajectòria aleatòria diferent i, emprant solament les propietats de X , en podem derivar resultats mesurables.

En forma més general, l'equació de Langevin s'escriu habitualment

$$\frac{dx}{dt} = a(x, t) + b(x, t)\xi(t), \quad (122)$$

on x és la variable estudiada, $a(x, t)$ i $b(x, t)$ són funcions conegudes i $\xi(t)$ és el terme aleatori de fluctuació ràpida. Una modelització matemàtica del concepte d'una "funció altament irregular i ràpidament variant" consisteix en establir que per a $t \neq t'$, $\xi(t)$ i $\xi(t')$ són estadísticament independents. També es pot imposar que $\langle \xi(t) \rangle = 0$, ja que si el resultat és no nul es pot incorporar a $a(x, t)$. Aquests dos requisits es poden resumir en la condició $\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \delta(t - t')$ que aconsegueix les dues condicions anteriors però que mostra una variància infinita. Aquest comportament no pot respondre a una situació "realista", però encaixa a la definició usual de *soroll blanc* com una idealització d'un senyal fluctuant.

Les equacions de Langevin juguen un paper important a l'estudi de fluctuacions en sistemes quàntics ja que a cada equació de F-P li podem associar un sistema d'equacions de Langevin. Aquest sistema té les mateixes propietats estadístiques que l'equació de F-P i resulta, en general, més tractable tant analíticament com numèrica. Per establir aquesta relació cal veure que a l'equació de Langevin un únic valor inicial de la variable no determina una única solució, sinò una infinita col·lecció de trajectòries corresponents a diferents concrecions de $\xi(t)$. Un conjunt d'aquestes trajectòries pot ser promitjat en cada instant t per tal d'obtenir les mitjanes dependents del temps que, alternativament, poden ser calculades mitjançant la F-P.

En general hom pot demostrar, emprant les regles d'integració d'Ito, que l'equació de F-P per a diverses variables (117) és equivalent, en el sentit estadístic descrit abans, a

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}(\mathbf{x}) + B(\mathbf{x}) \boldsymbol{\xi}(t) \quad (123)$$

sempre que la matriu $D(\mathbf{x}, t)$ admeta la descomposició

$$D(\mathbf{x}) = B(\mathbf{x}) B^T(\mathbf{x}) \quad (124)$$

i on $\boldsymbol{\xi}(t)$ és un vector de forces de fluctuació amb les següents propietats

$$\langle \xi_i(t) \rangle = 0, \quad (125)$$

$$\langle \xi_i(t) \xi_j(t') \rangle = \delta_{ij} \delta(t - t'). \quad (126)$$

Es transforma així la F-P en un sistema d'equacions de Langevin.

Passa ara a analitzar l'aplicació d'aquestes eines i els mètodes de resolució associats a elles per al cas de la biestabilitat òptica dispersiva i a la descripció de la seua evolució via distribucions de quasiprobabilitat.

6.3 L'equació de Fokker-Planck i les equacions de Langevin en les diverses representacions de quasiprobabilitat

Per construcció, els termes de les equacions d'evolució de les distribucions de quasiprobabilitat P i Q obtingudes per al sistema estudiat corresponen formalment als termes d'una equació de Fokker-Planck, donat que no contenen derivades d'ordre superior a dos. Aquest no és però, el cas de la distribució W de Wigner i el que es mostra a continuació és que, malgrat aquest fet, en algun límit, les terceres derivades de l'equació (116) poden ser menyspreades si s'empra l'aproximació anomenada *system size expansion*

[85]. Per comprovar-ho cal considerar les magnituds involucrades al sistema estudiat i realitzar un desenvolupament en sèrie basat en l'alt nombre mig de fotons a l'interior de la cavitat $\langle a^\dagger a \rangle \approx |\alpha|^2 \sim \gamma/g$ [86, 87]. Per exemple, per a uns valors de $V = 1\text{cm}^3$, $|\chi| = 5 \times 10^{-23} \text{m}^2 V^{-2}$, $\varepsilon = 4\varepsilon_0$, $\omega_c = 3 \times 10^{15} \text{s}^{-1}$, s'obté $|g| \approx 10^{-9} \text{s}^{-1} t$ i, prenent $\gamma = 10^9 \text{s}^{-1}$ s'arriba a $\gamma/|g| \approx 10^{18}$. Si ara es normalitza el temps a γ i α a $(\gamma/g)^{1/2}$, s'obté una equació equivalent a la (116) en la qual les terceres derivades estan multiplicades per $(g/\gamma)^2$, mentre que les segones derivades porten un factor g/γ i les primeres derivades formen part del desenvolupament a primer ordre. Menysprear les terceres derivades sembla, doncs, una bona aproximació. Cal adonar-se, malgrat açò, que les prediccions d'aquesta equació truncada poden diferir significativament dels valors correctes en alguns casos crítics [86, 87].

De cara a analitzar el soroll, més pròpiament la seua reducció, en cadascuna de les representacions, convé identificar el vector A o de deriva i la matriu D o de difusió en cada distribució de quasiprobabilitat. Així, a partir de la Equació Mestra (116) obtenim:

$$\begin{aligned} A_1 &= E_0 - (\gamma + i\theta) \alpha + ig\alpha^2 \alpha^*, \\ A_2 &= E_0 - (\gamma - i\theta) \alpha^* - ig\alpha \alpha^{*2}, \end{aligned} \quad (127)$$

i per a la matriu D

$$D = \begin{pmatrix} isg\alpha^2 & (1-s)\gamma \\ (1-s)\gamma & -isg\alpha^{*2} \end{pmatrix} \quad (128)$$

i de nou amb la correspondència dels $s = 1, -1, 0$ per a les distribucions P (Glauber - Sudarshan), Q (Husimi) i W (Wigner) respectivament.

6.3.1 La matriu de difusió de l'equació de Fokker-Planck en les distribucions W_s

L'equació d'evolució obtinguda per a les W_s (116) sembla per tant una equació de Fokker-Planck tal i com s'ha dit a dalt. En puritat però, és una pseudo-equació de Fokker-Planck [86, 87] donat que la matriu de difusió $D^{(s)}$ (128) no és semidefinida positiva en general i per tant l'equació no pot ser interpretada en el sentit de descriure un moviment Brownià generalitzat. Es pot veure fàcilment que $D^{(s)}$ no és semidefinida positiva si s'escriu l'equació (116) en termes de variables reals $x = \text{Re } \alpha$, $y = \text{Im } \alpha$. Per aquestes noves variables s'obté una equació similar a l'esmentada amb una matriu de difusió $D_{xy}^{(s)}$ donada per [86]

$$D_{xy}^{(s)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1-s)\gamma - 2sgxy & sg(x^2 - y^2) \\ sg(x^2 - y^2) & (1-s)\gamma - 2sgxy \end{pmatrix} \quad (129)$$

Els autovalors de la qual $d_{\pm}^{(s)}$ són

$$d_{\pm}^{(s)} = \frac{1}{2} [(1-s)\gamma \pm |sg|(x^2 - y^2)]. \quad (130)$$

Per a que $D_{xy}^{(s)}$ siga semidefinida positiva cal per tant que $d_{-}^{(s)} > 0$:

$$|\alpha|^2 < \frac{\gamma}{|g|} \frac{1-s}{|s|}. \quad (131)$$

(Recordem que $|\alpha|^2 = x^2 + y^2$). És clar que solament per a $s = 0$ (distribució de Wigner) la condició (131) es complirà per a qualsevol valor de α i en eixe cas ja s'ha vist que solament es poden seguir les regles d'integració d'Ito si es realitza l'aproximació consistent en truncar l'equació d'evolució amb l'eliminació de les terceres derivades.

D'altra banda, per a $s = +1$ (distribució P), la condició (131) no es compleix mai i aquest fet impedeix aplicar aquesta descripció mitjançant les funcions P , Q i W per obtenir correlacions dels grups d'operadors en ordre normal, tal i com exigeix l'estudi de les fluctuacions.

La forma de salvar aquest escull l'aportaren Drummond i Gardiner i la seua descripció la deixe per al penúltim capítol d'aquesta primera part, dedicat a les distribucions P generalitzades.

L'anàlisi exposat a continuació sobre la matriu $D^{(s)}$ i el mètode de càlcul emprat, consistent en utilitzar combinacions de distribucions de quasiprobabilitat amb diversos valors dels paràmetres, tot i ser una aproximació vàlida solament a l'ordre lineal, s'expliciten aquí pel fet de constituir la primera aportació original del nostre grup en aquesta tesi [25] i pel fet que serveixen d'exemple senzill per entendre l'aplicació de la resta d'eines matemàtiques necessàries per abordar l'estudi de les fluctuacions quàntiques i en concret la reducció de soroll necessària per tal d'aconseguir llum comprimida.

Tornem-hi doncs, a la condició d'ésser semidefinida positiva imposada a la matriu de difusió. En general, per a qualsevol $s \neq 0, 1$, aquesta condició es verifica dins d'una regió limitada de l'espai de fases i per tant $D^{(s)}$ no és, estrictament parlant, mai semidefinida positiva. Malgrat açò, si α es substitueix per la seua solució estacionària clàssica $\bar{\alpha}$, $D^{(s)}$ serà semidefinida positiva en la regió de l'espai de paràmetres en la qual la condició (131) siga complida per la solució $\bar{\alpha}$. Aquesta aproximació ja va ser emprada per al cas de la generació del segon harmònic per Savage [67] i es pot interpretar en el sentit que hom assumeix que W_s és "picuda" al voltant del valor de la solució estacionària i que els paràmetres del sistema són tals que solament una part negligible de la distribució incumpleix la condició $d_{-}^{(s)} > 0$. Sota aquesta aproximació $D^{(s)}$ és una matriu de difusió adient i l'equació d'evolució de W_s

és una equació de Fokker-Planck per a qualsevol valor de s excepte $s = +1$. L'aplicació d'aquesta aproximació i la combinació de les diverses funcions de distribució W_s permetran proseguir amb el calcul, però cal primer detenir-se un moment en la equivalència entre les equacions de Langevin per a la biestabilitat òptica i les equacions clàssiques per tal d'acabar de caracteritzar el sistema estudiat.

6.3.2 Les equacions de Langevin per a la biestabilitat òptica i les seues solucions estacionàries

D'acord amb el formalisme i les correspondències exposades als apartats anteriors, partint de les equacions d'evolució de l'Equació Mestra en la representació de les funcions de quasiprobabilitat (116), si obviem les limitacions imposades pel mal comportament de la matriu de difusió per a les funcions de distribució emprades, s'obtenen directament les equacions de Langevin corresponents al model escalar de la cavitat Kerr o biestabilitat òptica dispersiva (127). A partir d'aquestes equacions, en aquest apartat centraré l'atenció sobre el fet que si s'anul·len els termes corresponents a les fluctuacions, les equacions que resten es corresponen exactament amb les equacions d'evolució clàssiques referides al mateix sistema. Aquest extrem és important perquè gran part dels estudis sobre *squeezing* estan relacionats en les bifurcacions o valors crítics del sistema i per tant cal caracteritzar aquests valors en primer lloc per poder després estudiar les possibilitats i propietats de la compressió de soroll.

Així, per a al cas que ens ocupa, si escrivim les equacions de Langevin (123), a partir de l'equació de Fokker-Planck descrita abans (127,128)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\alpha &= E_0 - (\gamma + i\theta)\alpha + ig\alpha^2\alpha^* + B_{11}\xi_1(t) + B_{12}\xi_2(t), \\ \frac{d}{dt}\alpha^* &= E_0 - (\gamma - i\theta)\alpha^* - ig\alpha\alpha^{*2} + B_{21}\xi_1(t) + B_{22}\xi_2(t);\end{aligned}\quad (132)$$

on ξ_i són les components del vector de fluctuacions descrit a (125,126) i B_{ij} són els elements de la matriu $B(\mathbf{x})$ relacionada amb la matriu de difusió de l'equació de FP d'acord amb (124). Val a dir que la descripció explícita d'aquests elements no és necessària per a l'obtenció dels resultats que cerquem en aquest treball.

A partir d'aquestes expressions es poden obtenir les equacions clàssiques corresponents a l'evolució del sistema si eliminem els termes relatius al soroll

i, per tant es, poden buscar les solucions estacionàries a partir de

$$\begin{aligned} 0 &= E_0 - (\gamma + i\theta)\alpha + ig\alpha^2\alpha^*; \\ 0 &= E_0 - (\gamma - i\theta)\alpha^* - ig\alpha\alpha^{*2}. \end{aligned} \quad (133)$$

L'estat estacionari $(\bar{\alpha}, \bar{\alpha}^*)$, així esbrinat, ve donat per

$$\mu = I [1 + (I - \Delta)^2], \quad (134)$$

$$e^{i\phi} = \frac{1 + i(I - \Delta)}{\sqrt{1 + (I - \Delta)^2}}. \quad (135)$$

on s'han introduït les quantitats:

$$\Delta = \frac{\theta}{\gamma}, \quad \mu = \gamma^{-3} |g| E_0^2, \quad \sqrt{I} e^{i\phi} = \sqrt{\frac{|g|}{\gamma}} \bar{\alpha}, \quad (136)$$

A partir d'aquestes expressions es dedueix a més, que la intensitat del camp escalada d'acord amb els canvis de dalt (136), I , a l'interior de la cavitat en funció del bombeig, també escalat, μ , presenta biestabilitat [66] per a $\Delta > \sqrt{3}$. Els valors per a la intensitat en els puns de retorn $I = I_{\pm}$ venen donats per

$$I_{\pm} \equiv \frac{2\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 - 3}}{3}. \quad (137)$$

Es pot veure també [66] que per als valors $I_- < I < I_+$, l'estat estacionari és inestable i fora d'aquest domini és linealment estable. A partir d'aquestes solucions (134,135) es fàcil constatar que els valors de la intensitat venen determinats pel camp injectat μ i per aquest motiu, aquest últim s'agafa com a paràmetre de control. Aquestos punts de bifurcació o punts d'inestabilitat (137) són els punts crítics on es pot esperar obtenir compressió del soroll del camp electromagnètic.

Per estudiar aquesta possible compressió del soroll és suficient amb l'anàlisi de les equacions de Langevin descrites (132) ja que aquestes equacions caracteritzen completament el comportament del sistema. No obstant això, en la majoria de sistemes estudiats la informació què contenen només pot ser extreta mitjançant simulació numèrica. Existeix però una forma aproximada d'estudiar les fluctuacions quàntiques consistent en assumir que el sistema es troba en un estat caracteritzat per valors mitjans donats pels corresponents clàssics, al qual se li afegeixen fluctuacions quàntiques, assumides menudes. Al següent apartat s'exposen el mètode i els resultats per aquesta aproximació lineal.

6.4 Equacions de Langevin linealitzades

Les equacions de Langevin poden ser linealitzades al voltant de l'estat d'equil·libri clàssic ([29], cap. 6.2), permetent extraure informació, tot i que aproximada, de forma analítica i independent de simulacions.

Una modelització del procés de càlcul és la següent: en primer lloc, trobem la solució estacionària del sistema d'equacions de Langevin sense soroll i desenvolupem en sèrie de Taylor l'equació de Langevin. El resultat és

$$\frac{d}{dt}\delta\mathbf{x} = \tilde{A}\delta\mathbf{x} + \tilde{B}\boldsymbol{\xi}(t) + \mathcal{O}(\delta\mathbf{x}^2), \quad (138)$$

on $\delta\mathbf{x}$ son fluctuacions al voltant de la solució estacionària, $\mathcal{O}(\delta\mathbf{x}^2)$ representa termes d'ordre igual o superior a 2 en les fluctuacions (els quals menysprearem) i les matrius \tilde{A} i \tilde{B} estan definides com

$$\tilde{A}_{ij} = \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right)_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}}, \quad (139)$$

$$\tilde{B} = B(\bar{\mathbf{x}}). \quad (140)$$

En el cas de la biestabilitat òptica, les equacions de Langevin (132), una vegada linealitzades són

$$\frac{d}{dt}\delta\boldsymbol{\alpha} = \tilde{A}\delta\boldsymbol{\alpha} + \tilde{B}\boldsymbol{\xi}(t), \quad (141)$$

on

$$\delta\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \delta\alpha \\ \delta\alpha^* \end{pmatrix},$$

la matriu \tilde{B} serà l'obtinguda a partir de l'expressió (140) (tot i que no serà necessària la seua expressió explícita) i la matriu \tilde{A} serà, d'acord amb (132,139),

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -(\gamma + i(\theta - sg)) + i2g|\alpha_s|^2 & ig\alpha_s^2 \\ -ig\alpha_s^{*2} & -(\gamma - i(\theta - sg)) - i2g|\alpha_s|^2 \end{pmatrix}. \quad (142)$$

Es interessant fer notar que aquesta matriu \tilde{A} és, per identitat del procediment algebraic seguit, proporcional a la matriu L que apareix en fer l'anàlisi d'estabilitat del sistema.

Aquestes equacions (141) són les emprades a partir d'aquest moment per avaluar les correlacions a temps diferents i l'espectre d'aquestes correlacions relatiu a aquest sistema i més concretament a la possibilitat de que s'hi produisca compressió de la llum o no. Però abans d'abordar aquesta deducció faig un parèntesi per exposar la diferència entre el soroll dins i fora de les cavitats òptiques, distinció que es decisiva per calcular correctament el grau d'*squeezing* assolit en una determinada configuració d'un sistema físic.

7 Reducció del soroll quàntic dins i fora de les cavitats òptiques: teoria input - output

Des de la primera meitat de la dècada dels vuitanta del segle passat es va demostrar, principalment i de forma inicial en el treball de Yurke [92] i més tard per altres, que la reducció del soroll en el camp transmesit pot ser bastant diferent, i fins i tot molt més alta, de la del camp dins d'una cavitat òptica. Aquesta troballa de Yurke propicià diversos estudis, com els de Collet i Gardiner [14, 15] als quals se'ls pot atribuir la fundació del formalisme input-output i també el de Carmichael [7] que aporta alguns arguments claus per entendre aquesta subtil propietat de la llum comprimida i la seua generació. Més recent encara, el treball de Gea-Banacloche i altres [31] busca explicar amb més rigorositat i a l'hora de forma més intuïtiva perquè el grau de compressió de la llum dins de la cavitat és diferent del grau de compressió fora de la cavitat.

Aquests treballs mostren clarament que la reducció del soroll quàntic és en general diferent a l'interior i a l'exterior de la cavitat. Aquesta distinció és crucial tal i com es pot il·lustrar amb exemples com el cas de l'oscil·lador paramètric degenerat, en el qual el màxim *squeezing* dins de la cavitat està limitat al 50% [53] mentre que el camp que ix a l'exterior pot estar perfectament comprimit o a l'altre extrem, tal i com mostra l'article de Gea-Banacloche [32], un camp perfectament comprimit a l'interior de la cavitat d'un làser en mode *phase-locked* dona lloc a un *output* sense cap tipus de compressió.

Les argumentacions des del punt de vista físic per explicar aquest comportament es poden basar o bé en introduir operadors de soroll de Langevin *ad hoc*, com ho fan Collet i Gardiner [14, 15] (treball en el qual es basen Walls i Milburn (cf.[88] cap.7) per desenvolupar el formalisme que empraré en aquest treball) a partir d'arguments de la simetria temporal o bé com Carmichael [7] a partir de les condicions de contorn a l'espill.

L'explicació donada per Gea-Banacloche i altres [31] en canvi, es basa en una aproximació més fonamental al problema d'acord amb la línia iniciada per Lang, Scully i Lamb [44, 45] i desenvolupada més tard per Ujihara [81]. Aquests autors quantitzen rigorosament el camp en una cavitat ampla ("l'univers"), la qual subsumeix la cavitat laser. En particular, val a dir que a partir d'aquest model, foren Lang i Scully [45] els qui primer introduïren els termes de "soroll" de Langevin sense recórrer a la idea de "rebot".

Però, més enllà de la modelització del procés, i d'acord amb la línia seguida en aquest treball, per deduir la relació entre les correlacions i també de l'espectre de correlacions (eina fonamental tal i com es veurà més enda-

vant) seguiré la tècnica exposada per Walls i Milburn [88].

La diferència amb el model emprat fins ara radica en què fins ací s'ha tractat el camp exterior a la cavitat com un rebost en equilibri tèrmic. Aquest bany tèrmic és simplement un sistema passiu amb el qual el sistema gradualment va arribant a l'equilibri. Es tracta, ara, explícitament el rebost com un camp extern a la cavitat, per tal de determinar l'efecte de la dinàmica d'allò que ocorre a l'interior de la cavitat sobre l'estadística quàntica del camp extern (precisió necessària per al cas de la generació dels estats comprimits a causa de la diferència de la interfase entre el camp a l'interior de la cavitat i el camp eixint). Des d'aquest punt de vista, es tracta també el camp que s'introdueix a la cavitat explícitament.

Aquesta formulació, què dóna compte tant dels camps que s'introdueixen a la cavitat com dels que n'ixen, és citada com la teoria input-output, formulada, tal i com s'ha comentat, per primera vegada per Collet i Gardiner [14], i parteix de les equacions d'evolució per a un operador a la imatge d'Heisenberg de les quals se n'obté la relació entre operadors

$$\hat{a}_{out}(t) + \hat{a}_{in}(t) = \sqrt{2\gamma^{out}}\hat{a}(t), \quad (143)$$

on $\hat{a}_{out}(t)$ correspon al camp que ix de la cavitat, $\hat{a}_{in}(t)$ al camp que introduïm, $\hat{a}(t)$ al camp dins de la cavitat i γ^{out} és la corresponent a les pèrdues per transmissió de l'espill a través del qual ix el camp a l'exterior (com s'ha vist una constant d'acoblament amb l'exterior).

Partint d'aquesta relació es pot obtenir ([88],cap.7), per a les correlacions a temps diferents, l'equivalència

$$: \langle \hat{a}_{out}^\dagger(t), \hat{a}_{out}(t') \rangle : = 2\gamma^{out} : \langle \hat{a}^\dagger(t), \hat{a}(t') \rangle : , \quad (144)$$

on el símbol $::$ indica ordenació normal per als operadors i on s'ha emprat la notació $\langle A, B \rangle$ definida abans (47).

L'ordenació normal de les correlacions a temps diferents implica també l'ordre temporal dels operadors interns que ens cal per tal de calcular les correlacions a l'exterior. Aquesta relació es pot veure si se n'adonem que l'evolució del sistema barrejarà \hat{a}^\dagger i \hat{a} . Aleshores $\hat{a}(t + \tau)$ conté ambdós operadors. En productes en ordre normal $\hat{a}(t + \tau)$ ha d'estar sempre a l'esquerra de $\hat{a}(t)$ i d'igual manera $\hat{a}^\dagger(t + \tau)$ ha de romandre a la dreta de $\hat{a}^\dagger(t)$. És a dir

$$\langle \alpha(t + \tau) \alpha(t) \rangle_P = \langle \hat{a}(t + \tau) \hat{a}(t) \rangle, \quad (145)$$

$$\langle \alpha^*(t + \tau) \alpha(t) \rangle_P = \langle \hat{a}^\dagger(t) \hat{a}^\dagger(t + \tau) \rangle, \quad (146)$$

per a valors de τ positius, en cas contrari cal escriure

$$\langle \alpha(t + \tau) \alpha(t) \rangle_P = \langle \hat{a}(t) \hat{a}(t + \tau) \rangle, \tau < 0; \quad (147)$$

$$\langle \alpha^*(t + \tau) \alpha(t) \rangle_P = \langle \hat{a}^\dagger(t + \tau) \hat{a}^\dagger(t) \rangle, \tau < 0; \quad (148)$$

on els membres de l'esquerre representen les mitjanes sobre la funció P .

D'aquesta manera si es defineix la matriu de correlació en ordre normal "fora" com

$$: C_{out}(\tau) : = \begin{pmatrix} \langle \hat{a}_{out}(t + \tau), \hat{a}_{out}(t) \rangle & \langle \hat{a}_{out}^\dagger(t), \hat{a}_{out}(t + \tau) \rangle \\ \langle \hat{a}_{out}^\dagger(t + \tau), \hat{a}_{out}(t) \rangle & \langle \hat{a}_{out}^\dagger(t), \hat{a}_{out}^\dagger(t + \tau) \rangle \end{pmatrix}, \quad (149)$$

està relacionada amb la matriu

$$C_P(\tau) = \begin{pmatrix} \langle \alpha(t + \tau), \alpha(t) \rangle_P & \langle \alpha^*(t), \alpha(t + \tau) \rangle_P \\ \langle \alpha^*(t + \tau), \alpha(t) \rangle_P & \langle \alpha^*(t), \alpha^*(t + \tau) \rangle_P \end{pmatrix}; \quad (150)$$

a través de la relació

$$: C_{out}(\tau) : = 2\gamma^{out} C_P(\tau); \quad (151)$$

on s'ha considerat, per simplicitat, solament el cas $\tau > 0$.

Si es fa la transformada de Fourier es troba

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau, \quad (152)$$

que, d'acord amb el teorema de Wiener-Khinchin, és l'espectre de correlacions i permet calcular aquest espectre "fora" de la cavitat

$$: S_{out}(\omega) : = 2\gamma^{out} S_P(\omega); \quad (153)$$

on el subíndex P fa referència, de nou, tant a l'ordenació dels operadors com a la distribució de quasiprobabilitat corresponent.

Cal fer encara dos afitaments a la relació que s'acaba d'establir; d'una banda, sols és vàlida per a l'ordre normal - distribució P en conseqüència -, ja que per a l'ordre antinormal i el simètric no existeix cap relació senzilla. De l'altra, les constants de relaxació de la relació input-output γ^{out} (143) definida com les pèrdues a través de l'espill i la definida en el Liouvillià γ (84) definida com taxa de pèrdua de fotons, no tenen perquè ser iguals ja que γ incorpora totes les pèrdues del sistema i γ^{out} solament les que es produeixen a través de l'espill d'eixida. Malgrat açò, com que, per construcció, sempre es compleix $\gamma > \gamma^{out}$ a partir d'ací empraré, i sempre que no es faça menció explícita del formalisme input-output, γ per a totes les expressions i deduccions.

8 Correlacions a temps diferents: espectre de correlacions i espectre de *squeezing*

Tal i com s'apunta a l'apartat anterior una eina apropiada per estudiar les fluctuacions d'un camp electromagnètic quàntic $\hat{E}(t)$ és el seu espectre, el qual es defineix com la transformada de Fourier de les correlacions del camp $\langle \hat{E}(t+\tau), \hat{E}(t) \rangle$ on es torna a emprar la notació explicada a dalt (47) i que es manté al llarg del treball.

En particular, quan s'estudien les fluctuacions de les quadratures del camp eixint, hom empra l'espectre de fluctuacions [14, 16] definit com

$$V(\hat{X}^\varphi; \omega) = 1 + \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\omega\tau} \langle : \hat{X}_{out}^\varphi(t+\tau), \hat{X}_{out}^\varphi(t) : \rangle, \quad (154)$$

on la notació i la definició de les quadratures és l'emprada al segon capítol (43,44), la notació \hat{X}_{out}^φ indica que la relació entre aquestos operadors i els operadors quadratura és l'establerta a la teoria input-output (144), $::$ indica ordenació normal i el sumand unitat correspon al soroll del buit (30).

A partir d'aquesta darrera definició també es pot escriure l'espectre de fluctuacions com

$$V(\hat{X}^\varphi; \omega) = 1 + 2\gamma^{out} S_P(\hat{X}^\varphi; \omega), \quad (155)$$

on s'ha introduït l'espectre de *squeezing*

$$S_P(\hat{X}^\varphi; \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\omega\tau} \langle \hat{X}^\varphi(t+\tau), \hat{X}^\varphi(t) \rangle_P. \quad (156)$$

8.1 Espectre de *squeezing* per a les diverses distribucions de quasiprobabilitat

Tal i com s'exposa a l'article esmentat com a primera contribució original d'aquest treball [25] una combinació de dues s -ordenacions [6] de correlacions temporals, per exemple antinormals ($s = 1$) i simètriques ($s = 0$) tal i com s'obtenen a partir de les representacions Q (Husimi) i W (Wigner) [8, 30, 88], poden servir per obtenir l'espectre de *squeezing* enunciat a dalt.

Expose en primer lloc l'exemple de les distribucions Q i W . Si s'observa que per construcció es compleix

$$2 \langle \alpha(t+\tau), \alpha(t) \rangle_W = \langle \alpha(t+\tau), \alpha(t) \rangle_P + \langle \alpha(t+\tau), \alpha(t) \rangle_Q, \quad (157)$$

on el subíndex indica, de nou, la distribució emprada per obtenir les correlacions. Es segueix que

$$\langle : \alpha(t + \tau), \alpha(t) : \rangle = 2 \langle \alpha(t + \tau), \alpha(t) \rangle_W - \langle \alpha(t + \tau), \alpha(t) \rangle_Q, \quad (158)$$

i per tant,

$$S_P(\hat{X}^\varphi; \omega) = 2S_W(\hat{X}^\varphi; \omega) - S_Q(\hat{X}^\varphi; \omega), \quad (159)$$

i l'espectre de fluctuacions (154) queda

$$V(\hat{X}^\varphi; \omega) = 1 + 2\gamma^{out} \left[2S_W(\hat{X}^\varphi; \omega) - S_Q(\hat{X}^\varphi; \omega) \right]. \quad (160)$$

Aquesta relació es pot generalitzar per a qualsevol parell de correlacions a temps diferents s -ordenades. A partir de la definició d'una correlació a temps diferents s -ordenada

$$\langle \alpha(t + \tau), \alpha(t) \rangle_s = \frac{1 + s}{2} \langle \alpha(t + \tau), \alpha(t) \rangle_P + \frac{1 - s}{2} \langle \alpha(t + \tau), \alpha(t) \rangle_Q,$$

amb $s \in [-1, 1]$, es dedueix que

$$\langle \alpha(t + \tau), \alpha(t) \rangle_P = \frac{1 - s'}{s - s'} \langle \alpha(t + \tau), \alpha(t) \rangle_s + \frac{1 - s}{s' - s} \langle \alpha(t + \tau), \alpha(t) \rangle_{s'}, \quad (161)$$

per a qualsevol $s \neq s'$. Equació general (161) de la qual es pot deduir l'equivalència (157) si $s = 0$ (ordre simètric, obtingut a partir de la distribució W) i $s' = -1$ (ordre antinormal, obtingut a partir de la distribució Q). Ara a partir de la mateixa argumentació que porta a l'equació (160), es pot obtenir

$$S_P(\hat{X}^\varphi; \omega) = \frac{1 - s'}{s - s'} S_s(\hat{X}^\varphi; \omega) + \frac{1 - s}{s' - s} S_{s'}(\hat{X}^\varphi; \omega) \quad (162)$$

i l'espectre de fluctuacions queda

$$V(\hat{X}^\varphi; \omega) = 1 + 2\gamma^{out} \left[\frac{1 - s'}{s - s'} S_s(\hat{X}^\varphi; \omega) + \frac{1 - s}{s' - s} S_{s'}(\hat{X}^\varphi; \omega) \right]. \quad (163)$$

8.2 Espectre de *squeezing* per al cas de la biestabilitat òptica

El camí seguit en aquest apartat consisteix en deduir l'espectre de correlacions per al cas de la biestabilitat òptica a partir de les equacions de Langevin linealitzades i a partir d'ell obtenir el seu espectre de *squeezing* i el de fluctuacions.

El primer pas serà doncs, calcular la matriu espectral de correlacions $C^{(s)}(\omega)$ d'elements

$$C_{ij}^{(s)}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\omega\tau} \langle \alpha_i(t+\tau), \alpha_j(t) \rangle_s, \quad (164)$$

la qual es pot deduir fàcilment de les equacions de Langevin linealitzades (141), si emprem [12]

$$C^{(s)}(\omega) \approx C_{approx}^{(s)}(\omega), \quad (165)$$

$$C_{approx}^{(s)}(\omega) = \left(\tilde{A} + i\omega I \right)^{-1} \tilde{D}^{(s)} \left(\tilde{A}^T - i\omega I \right)^{-1}, \quad (166)$$

on I denota la matriu identitat de 2×2 , $\tilde{D}^{(s)} = D^{(s)}(\boldsymbol{\alpha} = \bar{\boldsymbol{\alpha}})$ i $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$ la solució estacionària tal i com es descriu a (139-142). Per calcular aquesta matriu $C_{approx}^{(s)}(\omega)$ cal recórrer per tant a la solució estacionària (134,135), tal i com ja s'ha deduit a l'apartat 6.3.2. A partir d'aquesta solució el resultat obtingut per a la matriu espectral és

$$C_{11}^{(s)}(\omega) = \gamma I e^{2i\phi} \frac{2(\Delta - 2I) + i\eta[2 + s(\Omega^2 - \mathcal{I})]}{(\Omega^2 - \mathcal{I})^2 + 4\Omega^2}, \quad (167)$$

$$C_{12}^{(s)}(\omega) = \gamma \frac{2I^2 + (1-s)[\Omega^2 + \mathcal{I} - 2\eta\Omega(2I - \Delta)]}{(\Omega^2 - \mathcal{I})^2 + 4\Omega^2},$$

$$C_{22}^{(s)}(\omega) = \left[C_{11}^{(s)}(\omega) \right]^*, \quad C_{21}^{(s)}(\omega) = C_{12}^{(s)}(-\omega),$$

on s'ha emprat la notació

$$\Omega = \omega/\gamma \quad \mathcal{I} = 3(I - I_+)(I - I_-), \quad (168)$$

i s'han emprat els mateixos canvis de notació que a l'estudi de les solucions estacionàries (136).

Aquesta expressió mostra, a més a més, que en els punts de la bifurcació ($I = I_+$ ó $I = I_-$), $\mathcal{I} = 0$ i en conseqüència tots els $C_{ij}^{(s)}(\omega)$ divergeixen en $\omega = 0$.

L'espectre de *squeezing* del camp fora de la cavitat es pot calcular (cf. 162) a partir de l'equació

$$S_s(X^\varphi; \omega) = \frac{1}{4} \left[C_{11}^{(s)}(\omega) e^{-i2\varphi} + C_{22}^{(s)}(\omega) e^{+i2\varphi} + C_{12}^{(s)}(\omega) + C_{21}^{(s)}(\omega) \right]. \quad (169)$$

que duu a l'expressió

$$2\gamma S_s(X^\varphi; \omega) = \left[2I(\Delta - 2I) \cos \psi - \eta I [2 + (\Omega^2 - \mathcal{I})] \sin \psi \right. \\ \left. + 2I^2 + (1-s)(\Omega^2 + \mathcal{I}) \right] \left[(\Omega^2 - \mathcal{I})^2 + 4\Omega^2 \right]^{-1}; \quad (170)$$

$$\psi = 2(\phi - \varphi). \quad (171)$$

Quantitat que permet calcular $S_{out}(X^\varphi; \omega)$ tal i com es dedueix de l'equació (153) i del fet que s'ha establert la indentitat $\gamma_{out} \equiv \gamma$.

Per comprovar la validesa d'aquest resultat i per salvar l'escull de la inexactitud de les equacions de Fokker-Planck utilitzades fins aquí, al proper apartat es desenvolupa el formalisme relatiu a les distribucions P generalitzades que serà l'emprat a partir d'ara i en els treballs del grup donada la seua idoneïtat per a l'estudi de les fluctuacions quàntiques.

9 Les distribucions P generalitzades

9.1 La solució al problema de la matriu de difusió no definida semipositiva

Drummond i Gardiner introduïren en 1980 [20] una classe de representacions d'operadors quàntics en ordre normal, que generalitzen la P de Glauber-Sudarshan, emprant una projecció no diagonal sobre operadors d'estats coherents.

Com s'ha escrit abans la P de Glauber-Sudarshan és una projecció de la matriu densitat en una base diagonal d'operadors propis dels estats coherents (89), però a causa de la sobrecompletitud dels estats coherents, l'expansió en la base diagonal, $P(\alpha, \alpha^*)$, no és única i per tant no és una funció ben-definida.

La idea de Drummond i Gardiner fou la d'emprar una classe de generalització de la P a partir de la projecció no diagonal sobre operadors d'estat coherent. La seua generalització es basa en una nova definició de la mètrica d'integració i la introducció de l'operador

$$\Lambda(\alpha, \beta) = |\alpha\rangle \langle \beta^*| / (\langle \beta^* | \alpha \rangle) = \exp(\alpha a^\dagger - \alpha \beta) |0\rangle \langle 0| \exp(\beta a)$$

de forma que:

$$\rho = \int P(\alpha, \beta) \Lambda(\alpha, \beta) d\mu(\alpha, \beta) \quad (172)$$

on es manté la denominació P i no es defineix la mètrica $d\mu(\alpha, \beta)$ ja que en funció d'aquesta definició es pot optar entre diverses generalitzacions de la funció P :

En primer lloc, si a partir de l'expressió (172) s'escull la mètrica

$$d\mu(\alpha, \beta) = \delta^2(\alpha^* - \beta) d\alpha d\beta, \quad (173)$$

s'obté la P de **Glauber**.

En segon lloc, la representació resultant d'escollir

$$d\mu(\alpha, \beta) = d\alpha d\beta, \quad (174)$$

on α i β són tractades com variables complexes independents (tot i que compleixen $\langle \alpha \rangle^* = \langle \beta \rangle$) les quals han de ser integrades en contorns individuals C, C' . És l'anomenada **P -complexa**, donat que $P(\alpha, \beta)$ agafa valors en el pla complex.

I per últim, si es tria

$$d\mu(\alpha, \beta) = d^2\alpha d^2\beta, \quad (175)$$

en la qual les variables α, β varien independentment en el pla complex, és a dir $\alpha = \alpha_r + i\alpha_i$; $\beta = \beta_r + i\beta_i$; s'obté la representació que s'anomena ***P*-positiva**.

Aquesta serà la distribució que empraré en la resta de treballs d'investigació ja que al mateix article de Drummond i Gardiner es demostra que aquesta representació $P(\alpha, \beta)$ existeix per a qualsevol operador densitat i sempre potser escollida positiva, motiu pel qual es anomenada *P*-positiva.

Igualment es pot provar que si existeix l'equació de Fokker-Planck en la representació de Glauber-Sudarshan, existirà una Fokker-Planck corresponent, per a la *P*-positiva, amb el coeficient de difusió semidefinit positiu que ens permetrà aplicar totes les tècniques descrites en els capítols anteriors per a les distribucions de quasiprobabilitat i permet obtenir les correlacions a temps diferents d'operadors ordenats en ordre normal i per tant aplicar el formalisme "input-output" sense recórrer a la combinació de dues distribucions *s*-ordenades.

La forma de procedir és la següent: es converteix, a ulls tancats (*naively* en paraules de Drummond i Gardiner [20]) l'equació de Fokker-Planck obtinguda a partir de la distribució P de Glauber (i per tant amb una matriu de difusió no necessàriament semidefinida positiva) en les equacions de Langevin corresponents a la integració per les regles d'Ito i es substitueixen les variables (α, α^*) per (α, β) (veure (132))

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}^{(s)} &= E_0 - (\gamma + i(\theta - sg))\alpha + ig\alpha^2\beta + B_{11}\xi_1(t) + B_{12}\xi_2(t); \\ \dot{\beta}^{(s)} &= E_0 - (\gamma - i(\theta - sg))\beta - ig\alpha\beta^2 + B_{21}\xi_1(t) + B_{22}\xi_2(t);\end{aligned}\quad (176)$$

9.2 Aplicació de la *P*-positiva al cas de la biestabilitat òptica

Tal i com es dedueix d'allò afirmat a l'apartat anterior, la utilització de la distribució *P*-positiva (d'ara endavant distribució \mathcal{P}) permet cercar el seu espectre de *squeezing* de forma exacta (dins de l'aproximació lineal que emprem a les tècniques descrites). Així l'expressió (155) relativa a l'ordenació normal dels operadors es pot escriure

$$\begin{aligned}V(X^\varphi; \omega) &= 1 + 2\gamma^{out}S_{\mathcal{P}}(X^\varphi; \omega), \\ S_{\mathcal{P}}(X^\varphi; \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\omega\tau} \left\langle \hat{X}^\varphi(t + \tau), \hat{X}^\varphi(t) \right\rangle_{\mathcal{P}}.\end{aligned}\quad (177)$$

Valor que es pot calcular a partir de les equacions estocàstiques obtingudes per al sistema estudiat (176) i de les seues equacions de Langevin linealitzades

$$\frac{d}{dt}\delta\boldsymbol{\alpha} = \tilde{A}\delta\boldsymbol{\alpha} + \tilde{B}\boldsymbol{\xi}(t) \quad (178)$$

on

$$\delta\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \delta\alpha \\ \delta\beta \end{pmatrix}, \quad (179)$$

i les matrius \tilde{A} i \tilde{B} , són idèntiques a les definides en (139,140).

Per tant, les equacions linealitzades de Langevin (178) són, per construcció, idèntiques a les obtingudes amb la distribució P de Glauber. Aleshores, l'espectre de *squeezing* que obtenim a partir d'elles és també el que hem obtingut en apartats anteriors amb la P de Glauber. Això sembla paradoxal perquè implica que tot i que la les equacions de Langevin obtingudes a partir de la distribució P de Glauber no es comporten bé (matriu de difusió no semidefinida positiva), es pot ignorar aquest fet i obtindre l'espectre de *squeezing* correcte.

D'acord amb el que s'acaba de demostrar sembla innecessari introduir la distribució P -positiva per arribar als resultats finals; però aquest extrem no és cert, ja que aquesta darrera distribució és necessària per interpretar els resultats que proporcionen les equacions de Langevin no lineals provinents de la P de Glauber. En conseqüència, l'espectre de *squeezing* donat per l'equació (170) amb $s = 1$ és correcte dintre de l'aproximació lineal i no es requereix cap altre càlcul.

Arribats a aquest punt es poden interpretar els resultats obtinguts. Si hom reescriu primer l'equació (162) per a $s = 0$ i $s' = -1$

$$S_P(X^\varphi; \omega) = 2S_W(X^\varphi; \omega) - S_Q(X^\varphi; \omega), \quad (180)$$

es fàcil veure que pel que s'acaba de discutir respecte a la P -positiva es pot reescriure com (atenció al subíndex de l'esquerra)

$$S_{\mathcal{P}}(X^\varphi; \omega) = 2S_W(X^\varphi; \omega) - S_Q(X^\varphi; \omega). \quad (181)$$

Aquesta equació afirma que tot i que l'equació de la distribució de Wigner ha estat mutilada en llevar-li els termes amb terceres derivades i que la matriu de difusió per a la distribució Q no es sempre semidefinida positiva (únicament ho és en un domini de l'espai de paràmetres), l'espectre de *squeezing* que obtenim a partir d'elles mitjançant l'equació anterior és correcte dintre de l'aproximació lineal. Sembla doncs, que les terceres derivades de l'equació de la distribució de Wigner no juguen cap paper en l'aproximació lineal, com no

ho juga el fet que la matriú de difusió no siga semidefinida positiva. Aquesta és la principal conclusió que es pot extraure de la comparació entre els càlculs realitzats mitjançant la P -positiva i els realitzats amb les distribucions s -ordenades (cf. [25]).

10 Guia per no perdre's en l'estudi de la reducció quàntica del soroll

Amb les tècniques descrites en aquesta primera part és possible establir una guia per poder estudiar la compressió (o no) del soroll quàntic associat a les quadratures d'un camp electromagnètic en diversos sistemes físics i en els diferents processos que hi puguen tindre lloc.

El resum de la tècnica a emprar es pot redactar a partir dels enunciats dels diversos capítols desenvolupats fins ara:

- 1.- Obtenció de l'Hamiltonià del sistema.
- 2.- Obtenció de la Master Equation.
- 3.- Obtenció de l'Equació de Fokker-Planck i les equacions estocàstiques corresponents mitjançant la distribució P -positiva.
- 4.- Obtenció de les solucions estacionàries corresponents a les equacions de Langevin sense els termes de soroll.
- 5.- Deducció de les equacions de Langevin linealitzades.
- 6.- Deducció de l'espectre de *squeezing*.
- 7.- Anàlisi del resultat i elaboració de conclusions

Aquest serà doncs, el camí seguit a partir d'ara amb els sistemes estudiats a la segona part d'aquest treball i una bona guia per a totes aquelles persones que desitgen endinsar-se en el món de l'estudi de la reducció quàntica del soroll associat a un camp electromagnètic.

Part IV

Generació de llum comprimida en cavitats no lineals

11 *Squeezing* de polarització i de quadratura al model de cavitat Kerr vectorial

11.1 Introducció

La biestabilitat òptica dispersiva fa temps que va ser objecte d'estudi per la seua capacitat d'assolir *squeezing* de quadratures [19, 48, 58, 87, 88] i a la primera part d'aquest treball s'ha emprat aquest sistema, anomenat cavitat Kerr escalar pel fet de que el règim a l'interior de la cavitat és d'un sol mode del camp amb polarització lineal, per exposar un exemple d'estudi de reducció quàntica del soroll.

En el capítol que inicia aquesta part caracteritzaré una generalització del sistema esmentat: la cavitat Kerr vectorial [26, 66]. Aquest sistema és l'escollit al principi d'aquest treball al capítol 4 "*Descripció quàntica d'un sistema òptic: Hamiltonià i equacions d'evolució*" i partiré per tant de l'Hamiltonià descrit (78) per esbrinar les equacions d'evolució i les seues propietats relatives al soroll quàntic del camp electromagnètic.

Un cop descrit el model emprat, hi estudiaré l'*squeezing* de polarització i de quadratures en el camp eixint de la cavitat; ja que com es veurà més endavant, la cavitat vectorial Kerr mostra *squeezing* de polarització (un tipus de compressió que també es definirà més endavant). En particular, veurem que aquesta compressió de polarització és òptima en els punts de bifurcació de la biestabilitat, quan el camp amb polarització ortogonal a la del camp injectat no s'ha engegat i d'aquesta forma es mostrarà que aquest procés pot actuar com un compressor de polarització.

El capítol s'estructura de la següent manera (d'acord amb la guia explicada al final de la primera part): A l'apartat 2 es dedueixen les equacions de Langevin per a la cavitat Kerr quan s'injecta un camp coherent polaritzat linealment, equacions derivades de l'equació de Fokker-Planck que verifica la distribució P -positiva. A l'apartat 3 es repassen les solucions estacionàries i les propietats d'estabilitat del sistema. Les equacions de Langevin linealitzades al voltant de la solució estacionària i l'espectre de les fluctuacions quàntiques s'introdueixen a l'apartat 4. L'apartat 5 es dedica a l'anàlisi de l'*squeezing* de quadratures. Aleshores a l'apartat 6 s'introdueixen la defini-

ció dels operadors quàntics de Stokes i la de *squeezing* de polarització. A l'apartat 7 s'estableixen les relacions entre les variàncies dels paràmetres de Stokes i l'espectre de *squeezing* de quadratures i també s'analitza la compressió de la polarització en aquest sistema de forma que dedique especial atenció al fet que l'*squeezing* que ocorre a les bifurcacions afecta principalment a la solució linealment polaritzada, però considerant també la compressió en polarització en el cas particular de la solució polaritzada el·lípticament. Finalment, l'apartat 8 el dedique a resumir les conclusions assolides.

11.2 Model

Tal i com s'acaba d'exposar el sistema físic escollit, cavitat Kerr vectorial, coincideix, fil per randa, amb el descrit al capítol 4 "*Descripció quàntica d'un sistema òptic: Hamiltonià i equacions d'evolució*" i aquí recordem que es considera una cavitat òptica amb un medi Kerr isotròpic al seu interior i s'assumeixen pèrdues per a la cavitat solament en un dels espills de forma també isotròpa, és a dir les mateixes pèrdues per a les dues polaritzacions independents possibles. S'injecta un camp laser extern, la freqüència del qual és suficientment llunyana de qualsevol ressonància en el medi no lineal (condició que fa possible que la interacció siga descrita per una susceptibilitat no lineal cúbica) però de freqüència propera a algun mode de la cavitat òptica. S'assumeix que el camp injectat és linealment polaritzat, concretament en la direcció x . Com que les pèrdues no afavoreixen especialment la polarització del camp injectat, sota certes circumstàncies [66] el camp intracavitat pot experimentar una inestabilitat de polarització permetent la generació d'un camp polaritzat ortogonalment respecte de l'injectat (en aquest cas, polarització en la direcció y), d'aquí la denominació de cavitat Kerr vectorial.

Recordem que l'Hamiltonià que descriu el sistema (69) és, en la imatge d'interacció

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{ext} + \hat{H}_{int}, \quad (182)$$

amb

$$\hat{H}_0 = \hbar(\omega_c - \omega_0) (\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2), \quad (183)$$

$$\hat{H}_{ext} = i\hbar E_0 (\hat{a}_1^\dagger - \hat{a}_1), \quad (184)$$

$$\begin{aligned} \hat{H}_{int} = & -\hbar\eta g \left[\frac{1}{2} (\hat{a}_1^{\dagger 2} \hat{a}_1^2 + \hat{a}_2^{\dagger 2} \hat{a}_2^2) \right], \quad (185) \\ & + \mathcal{A} \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + \frac{\mathcal{B}}{4} (\hat{a}_1^2 \hat{a}_2^{\dagger 2} + \hat{a}_1^{\dagger 2} \hat{a}_2^2) \end{aligned}$$

on les parelles d'operadors creació i destrucció $(\hat{a}_1^\dagger, \hat{a}_1)$ i $(\hat{a}_2^\dagger, \hat{a}_2)$ corresponen als dos modes ortogonals intracavitat, els subíndex 1, 2 fan referència a les direccions x, y de polarització, \hat{H}_0 correspon a l'Hamiltonià lliure dels dos modes ortogonals intracavitat, \hat{H}_{ext} descriu el camp injectat coherent, \hat{H}_{int} és l'Hamiltonià d'interacció i la resta de notació és en tot concordant amb la definida al capítol 4.

A partir d'aquest Hamiltonià i tractant el buit extern com un rebost, seguint de nou, el camí definit als capítols 4 i 10, es pot obtenir l'Equació Mestra que governa l'evolució de la matriu densitat ρ dels modes intracavitat

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}] + \hat{\Lambda}, \quad (186)$$

$$\hat{\Lambda} = \gamma \sum_{i=1,2} \left([\hat{a}_i, \hat{\rho} \hat{a}_i^\dagger] + [\hat{a}_i \hat{\rho}, \hat{a}_i^\dagger] \right), \quad (187)$$

on el terme $\hat{\Lambda}$ és el Liouvillià i γ denota les pèrdues de la cavitat i , a l'igual que s'ha definit a l'apartat 4.7, la constant de relaxació de la intensitat o *cavity photon loss rate* ve donada per la quantitat 2γ .

Ara, la representació P -positiva ens permet establir una correspondència entre els operadors i els números-c $\alpha_i(t)$ i $\alpha_i^+(t)$ respectivament, que satisfan en valor mitjà

$$\langle \alpha_i(t) \rangle^* = \langle \alpha_i^+(t) \rangle. \quad (188)$$

Si hom calcula, d'acord amb les tècniques descrites abans, l'equació d'evolució d'aquesta distribució $P(\boldsymbol{\alpha}, t)$, pot obtenir l'equació de Fokker-Planck

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \left[-\sum_{i=1}^4 \frac{\partial}{\partial \alpha_i} A_i(\boldsymbol{\alpha}) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^4 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} D_{i,j}(\boldsymbol{\alpha}) \right] P, \quad (189)$$

amb $\boldsymbol{\alpha} = \text{col}(\alpha_1, \alpha_1^+, \alpha_2, \alpha_2^+)$ i

$$A_1(\boldsymbol{\alpha}) = E_0 - \gamma(1 + i\eta\Delta)\alpha_1 + i\eta g \quad (190)$$

$$\times \left[\alpha_1^2 \alpha_1^+ + \mathcal{A}\alpha_1 \alpha_2 \alpha_2^+ + \frac{\mathcal{B}}{2} \alpha_1^+ \alpha_2^2 \right],$$

$$A_2(\boldsymbol{\alpha}) = E_0 - \gamma(1 - i\eta\Delta)\alpha_1^+ - i\eta g \quad (191)$$

$$\times \left[\alpha_1 (\alpha_1^+)^2 + \mathcal{A}\alpha_1^+ \alpha_2 \alpha_2^+ + \frac{\mathcal{B}}{2} \alpha_1 (\alpha_2^+)^2 \right],$$

$$A_3(\boldsymbol{\alpha}) = -\gamma(1 + i\eta\Delta)\alpha_2 + i\eta g \quad (192)$$

$$\times \left[\alpha_2^2 \alpha_2^+ + \mathcal{A}\alpha_1 \alpha_1^+ \alpha_2 + \frac{\mathcal{B}}{2} \alpha_1^2 \alpha_2^+ \right],$$

$$A_4(\boldsymbol{\alpha}) = -\gamma(1 - i\eta\Delta)\alpha_2^+ - i\eta g \quad (193)$$

$$\times \left[\alpha_2 (\alpha_2^+)^2 + \mathcal{A}\alpha_1 \alpha_1^+ \alpha_2^+ + \frac{\mathcal{B}}{2} (\alpha_1^+)^2 \alpha_2 \right],$$

on el paràmetre de desintonia Δ és

$$\Delta = \frac{1}{\eta\gamma} \left[\omega_c - \omega_0 - \eta g \left(1 + \frac{\mathcal{A}}{2} \right) \right] = \frac{1}{\eta\gamma} (\bar{\omega}_c - \omega_0), \quad (194)$$

amb $\bar{\omega}_c = \omega_c - \eta g (1 + \mathcal{A}/2)$ la freqüència del mode propi de la cavitat desplaçada a causa de la contribució de les fluctuacions del buit (que depenen de l'ordenació dels operadors com ja s'ha vist a l'apartat 4.5). Finalment, els elements de la matriu de difusió són

$$D_{11} = i\eta g \left(\alpha_1^2 + \frac{\mathcal{B}}{2} \alpha_2^2 \right), \quad (195)$$

$$D_{22} = -i\eta g \left[(\alpha_1^+)^2 + \frac{\mathcal{B}}{2} (\alpha_2^+)^2 \right], \quad (196)$$

$$D_{33} = i\eta g \left(\alpha_2^2 + \frac{\mathcal{B}}{2} \alpha_1^2 \right), \quad (197)$$

$$D_{44} = -i\eta g \left[(\alpha_2^+)^2 + \frac{\mathcal{B}}{2} (\alpha_1^+)^2 \right], \quad (198)$$

$$D_{13} = D_{31} = -i\eta g \mathcal{A} \alpha_1 \alpha_2, \quad (199)$$

$$D_{24} = D_{42} = i\eta g \mathcal{A} \alpha_1^+ \alpha_2^+, \quad (200)$$

estant nuls la resta d'elements.

Aquesta equació de Fokker-Planck ben definida dóna lloc, tal i com també s'ha explicat al capítol 6, a una sèrie d'equacions de Langevin via regles d'Ito. La descripció i notació d'aquestes equacions és en tot igual a la descrita en

l'apartat corresponent (123), igual que succeeix amb les propietats verificades pels termes del soroll (125,126). Escric a continuació la forma general de les equacions per fer explícits els canvis de notació

$$\frac{d\boldsymbol{\alpha}}{dt} = \mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha}) + B(\boldsymbol{\alpha}) \boldsymbol{\xi}(t) \quad (201)$$

on $\mathbf{A} = \text{col}(A_1, A_2, A_3, A_4)$, $\boldsymbol{\xi} = \text{col}(\xi_1, \xi_1^+, \xi_2, \xi_2^+)$, amb $\xi_i(t)$ i $\xi_i^+(t)$ sorolls gaussians independents i $B(\boldsymbol{\alpha})$ la matriu resultat de realitzar la descomposició $D(\boldsymbol{\alpha}) = B(\boldsymbol{\alpha}) \cdot B^T(\boldsymbol{\alpha})$ de la matriu de difusió de l'equació de Fokker-Planck (189).

11.3 Model en el límit clàssic

Les equacions (201) si s'eliminen els termes de soroll i s'interpreta α_i^+ com α_i^* d'acord amb la definició donada en (188), corresponen al límit clàssic

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_1}{dt} &= E_0 - \gamma(1 + i\eta\Delta)\alpha_1 \\ &+ i\eta g \left[|\alpha_1|^2 \alpha_1 + \mathcal{A}\alpha_1 |\alpha_2|^2 + \frac{\mathcal{B}}{2} \alpha_1^* \alpha_2^2 \right], \end{aligned} \quad (202)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_2}{dt} &= -\gamma(1 + i\eta\Delta)\alpha_2 \\ &+ i\eta g \left[|\alpha_2|^2 \alpha_2 + \mathcal{A}|\alpha_1|^2 \alpha_2 + \frac{\mathcal{B}}{2} \alpha_1^2 \alpha_2^* \right]. \end{aligned} \quad (203)$$

Equacions que exhibeixen la simetria $\{\alpha_1, \alpha_2, \eta\} \leftrightarrow \{\alpha_1^*, \alpha_2^*, -\eta\}$ (recordem que hem pres E_0 real sense pèrdua de generalitat).

Si s'introdueixen els canvis

$$\tau = \gamma t, \quad E = \frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{g}{\gamma}} E_0, \quad A_i = \sqrt{\frac{g}{\gamma}} \alpha_i, \quad (204)$$

les equacions (202,203) coincideixen amb les descrites als treballs sobre la cavitat Kerr vectorial publicats pel nostre equip per caracteritzar el sistema [66, 59] i per tant es pot aplicar el seu anàlisi en tot allò que fa referència als punts i tipus de bifurcació.

Aquestes equacions tenen dos tipus de solucions estacionàries: la **solució monomode** (o solució polaritzada linealment en la direcció de la polarització

del mode injectat), d'expressió

$$E_0^2 = \gamma^2 \left[1 + \left(\Delta - \frac{g}{\gamma} I_{1s} \right)^2 \right] I_{1s}, \quad (205a)$$

$$\phi_{1s} = \arccos \left(\gamma \frac{\sqrt{I_{1s}}}{E_0} \right) \quad (205b)$$

$$I_{2s} = 0, \quad (205c)$$

on $\alpha_j = \sqrt{I_{js}} e^{i\phi_{js}}$ a l'estat estacionari ($j = 1, 2$); i la **solució bimode** (o polaritzada el·lípticament)

$$E_0^2 I_{1s} = \gamma^2 (I_{1s} + I_{2s})^2 + g^2 (I_{1s} - I_{2s})^2 (I_{1s} + I_{2s} - \frac{\gamma \Delta}{g})^2, \quad (206a)$$

$$I_{2s} = \frac{\gamma \Delta}{g} - \mathcal{A} I_{1s} \pm \sqrt{\left(\frac{\mathcal{B}}{2} \right)^2 I_1^2 - \left(\frac{\gamma}{g} \right)^2}, \quad (206b)$$

$$\phi_{1s} = \arccos \left[\frac{\gamma \sqrt{I_{1s}}}{E_0} \left(1 + \frac{I_{2s}}{I_{1s}} \right) \right], \quad (206c)$$

$$\phi_{2s} = \phi_{1s} + \frac{1}{2} \arccos \left(\frac{\gamma \Delta - g I_{1s} - \mathcal{A} g I_{2s}}{\frac{\mathcal{B}}{2} g I_{1s}} \right). \quad (206d)$$

Destaque aquí que per al present estudi i per simplicitat en la seua exposició, em restringiré al cas dels líquids, per als quals [3] $\mathcal{A} = 1/4$ i $\mathcal{B} = 3/2$ (s'ha de dir però, que el cas més general, incloent-hi possibles anisotropies en les pèrdues de la cavitat està estudiat a l'article esmentat [66]). És interessant afegir que no existeix un valor llindar per als coeficients de Maker-Terhune per a l'existència de la solució bimode, sinó que el que ocorre és que la injecció necessària per tal que la solució bimode existisca tendeix a infinit quan $\mathcal{B} \rightarrow 0$ (límit que correspon als medis homogenis en els quals l'electrostricció és l'origen físic de la no linealitat [3]).

Tornant a les dues possibles solucions, la solució monomode ($\alpha_1 \neq 0, \alpha_2 = 0$) pot patir dues bifurcacions: una tangent (bifurcació que pot donar lloc a l'aparició de biestabilitat) i una bifurcació tipus forca o *pitchfork* (bifurcació que dóna lloc al canvi de la solució monomode a la solució bimode i, per tant, a un canvi en la polarització del camp emès). Ressaltem que la solució monomode no pot patir bifurcacions tipus Hopf.

La biestabilitat de la solució monomode o polaritzada linealment requereix que $\Delta > \sqrt{3}$ i la regió de multisolucions existeix per a valors de la injecció entre $E_{0,-}^2$ i $E_{0,+}^2$ amb

$$E_{0,\mp}^2 = \frac{2\gamma^3}{27g} \left[\Delta (\Delta^2 + 9) \mp \eta (\Delta^2 - 3)^{\frac{3}{2}} \right], \quad (207)$$

o, de forma equivalent, per als valors de la intensitat a l'interior de la cavitat entre $I_{1s,-}$ i $I_{1s,+}$ amb

$$I_{1s,\pm} = \gamma \frac{2\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 - 3}}{3g}. \quad (208)$$

La bifurcació de polarització, ocorre quan la injecció assoleix el valor

$$E_{0,pol}^2 = \frac{3\gamma^3}{g} \left[\left(\Delta^2 + \frac{1}{2} \right) \left(\sqrt{9\Delta^2 + 8} - 3\Delta \right) - \Delta \right], \quad (209)$$

o, de forma equivalent, per als valor de la intensitat a l'interior de la cavitat

$$I_{1s,pol} = \gamma \frac{-\Delta + \sqrt{9\Delta^2 + 8}}{2g}. \quad (210)$$

Per valors més grans que $E_{0,pol}^2$ (o $I_{1s} > I_{1s,pol}$) la solució és sempre polaritzada el·lípticament i existeix per a qualsevol valor de Δ .

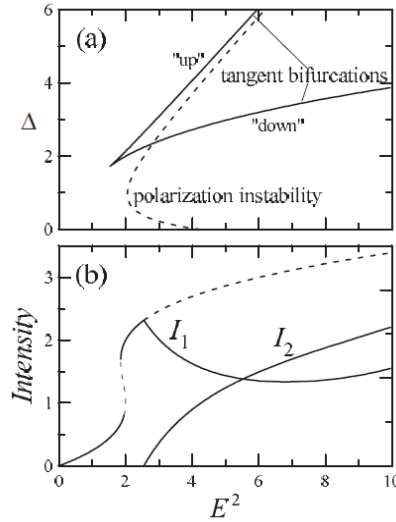


Figura 11: En (a) representem en el pla $\langle E^2, \Delta \rangle$ les dues bifurcacions tangents (línies contínues) i de la bifurcació de polarització (línia discontinua). Les bifurcacions *down* i *up* reben aquestos noms a causa de que ocorren, respectivament, en la branca més baixa o en la més alta del cicle d'histèresi. En (b) les intensitats d'eixida estan representades en funció del valor de la injecció E^2 per a $\Delta = 2$. Les línies discontinues en (b) indiquen solucions inestables.

En la figura (11) es representen les localitzacions de les dues bifurcacions tangents i la inestabilitat de polarització en el pla $\langle \Delta, E^2 \rangle$ (notació ja definida en (204)).

11.4 Espectre linealitzat de l'squeezing de quadratures

Torne ara a la descripció quàntica del sistema: Per tal de descriure la dinàmica de les fluctuacions quàntiques, i de nou seguint el camí traçat a la primera part d'aquest treball, es linealitzen les equacions quàntiques de Langevin al voltant de les solucions estacionàries del camp. És a dir, escrivim $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_s + \delta\boldsymbol{\alpha}$ i d'acord amb el procés algebraic descrit a l'apartat 6.4 l'expressió final d'aquestes equacions és (veure 141),

$$\frac{d}{dt}\delta\boldsymbol{\alpha} = \tilde{A}\delta\boldsymbol{\alpha} + \tilde{B}\boldsymbol{\xi}(t), \quad (211)$$

amb

$$\tilde{A}_{ij} = \left(\frac{\partial A_i}{\partial \delta\alpha_j} \right)_{\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_s}, \quad \tilde{B} = B(\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_s). \quad (212)$$

D'altra banda, recordem que les fluctuacions quàntiques és caracteritzen mitjançant el seu espectre, el qual ve donat per la matriu espectral

$$S_{ij}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \langle \delta\alpha_i(0), \delta\alpha_j(t) \rangle, \quad (213)$$

matriu que també hem descrit a dalt (152) i que, d'acord amb les deduccions de Chaturvedi i altres [12], pot ser obtinguda directament des de l'equació de Fokker-Planck (190-200) mitjançant

$$\mathbf{S}(\omega) = \left(\tilde{A} + i\omega\mathbf{I} \right)^{-1} \tilde{D} \left(\tilde{A}^T - i\omega\mathbf{I} \right)^{-1} \quad (214)$$

amb $\tilde{D} = \tilde{B}\tilde{B}^T$ (en relació a les equacions de Langevin linealitzades) i \mathbf{I} la matriu identitat. Expressió llarga, però senzilla d'esbrinar.

El que interessa ara és trobar les fluctuacions dels camps fora de la cavitat i per a això cal emprar la teoria input-output. Teoria que, com s'ha vist al capítol 7, ens dóna per al cas de la distribució P -positiva.

$$S_{ij}^{out}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \langle \delta\alpha_i^{out}(0), \delta\alpha_j^{out}(t) \rangle = 2\gamma S_{ij}(\omega). \quad (215)$$

Però per estudiar l'espectre d'squeezing la matriu de correlacions així definida (215) no és una eina útil i el que cal emprar són les expressions de les fluctuacions de les quadratures (veure (26,43))

$$\delta X_{j,\beta}^{out} = \delta\alpha_j^{out}(t) e^{-i\beta} + \delta\alpha_j^{+out}(t) e^{i\beta}, \quad (216)$$

on β és l'angle (arbitrari) de la quadratura.

En conseqüència es pot definir l'espectre de quadratures eixint com

$$: S^{out} \left(X_j^\beta; \omega \right) := \int_{-\infty}^{\infty} \langle : \delta X_{j,\beta}^{out}(t), \delta X_{j,\beta}^{out}(t + \tau) : \rangle e^{i\omega\tau} d\tau, \quad (217)$$

l'expressió dels quals en funció de la matriu espectral (215) apareix a l'apèndix II.

Per al seu ús posterior, convé també introduir l'espectre de compressió creuat, definit com:

$$: S^{out} \left(X_j^{\beta_j}, X_k^{\beta_k}; \omega \right) := \int_{-\infty}^{\infty} \langle : \delta X_{j,\beta_j}^{out}(t), \delta X_{k,\beta_k}^{out}(t + \tau) : \rangle e^{i\omega\tau} d\tau, \quad (218)$$

l'expressió del qual en funció de la matriu espectral també apareix a l'apèndix II.

Donat l'ordre normal escollit, l'absència completa de fluctuacions en una quadratura del camp implica $: S^{out} \left(X_j^\beta; \omega \right) := -1$. D'altra banda, si es vol tindre en compte el soroll de dispar fora de la cavitat, cal adonar-se que l'espectre de fluctuacions (154) valdrà

$$V \left(X_j^\beta; \omega \right) = 1 + : S^{out} \left(X_j^\beta; \omega \right) :, \quad (219)$$

$$V \left(X_j^{\beta_j}, X_k^{\beta_k}; \omega \right) = : S^{out} \left(X_j^{\beta_j}, X_k^{\beta_k}; \omega \right) :. \quad (220)$$

11.5 Anàlisi de l'*squeezing* de quadratura en les bifurcacions de la solució monomode

És un resultat ben conegut que a les bifurcacions o punts crítics sempre hi ha una quadratura, del mode afectat per eixa bifurcació, perfectament comprimida. Al present treball per tant, s'escau estudiar els valors dels espectres de *squeezing* en eixos punts crítics cercant tres objectius principalment: el primer, comprovar que efectivament les equacions i les tècniques emprades donen resultats contrastats anteriorment; el segon, estudiar si el segon mode (l'ortogonal a la injecció) pateix també alguna compressió en alguna de les seues quadratures i el tercer, estudiar si en aquestos punts apareixerà també compressió en les fluctuacions dels valors esperats dels paràmetres de Stokes quàntics (que s'introduiran més endavant). Els dos darrers objectius són propostes originals de l'article publicat pel nostre grup de treball [26].

Per analitzar l'*squeezing* de quadratura en les bifurcacions de la solució monomode cal, en primer lloc, calcular el valor de les fluctuacions $: S^{out} \left(X_1^\beta; \omega \right) :,$
 $: S^{out} \left(X_2^\beta; \omega \right) :$ i $: S^{out} \left(X_1^{\beta_1}, X_2^{\beta_2}; \omega \right) :$ per a la solució monomode, on $I_{2s} =$

0, (resultats que aparèixen a l'apèndix II (391-393)) per després substituir els valors de les variables corresponents als punts crítics.

Considere ara les diferents bifurcacions separadament.

11.5.1 Bifurcació de polarització

En aquesta bifurcació, equació (210), s'acompleix $I_{1s} = I_{1s,pol}$ i els valors de les fluctuacions $S^{out}(X_1^\beta; \omega)$ i $S^{out}(X_2^\beta; \omega)$ es calculen substituint el valor de la intensitat del camp al llindar de la bifurcació (210) en les equacions de l'espectre de correlacions de les quadratures ja especificat per a la solució monomode (391-393).

Compressió de les quadratures del camp polaritzat en la direcció ortogonal X_2^β

Seguint per tant el procés de substitució esmentat, es comprova que hi ha una quadratura del mode α_2 (el mode que s'engega en la bifurcació) que està perfectament comprimida per a la freqüència $\omega = 0$ tal i com es mostra a la figura (12).

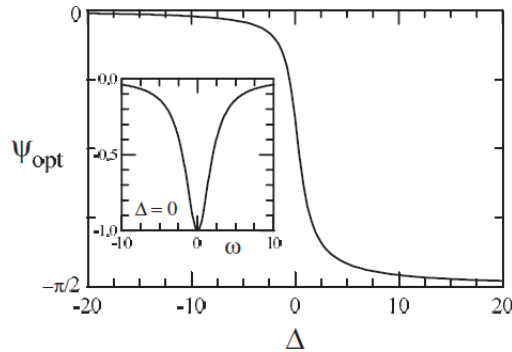


Figura 12: La compressió òptima de la quadratura del mode α_2 en la bifurcació de polarització esdevé per a $\beta = (\psi_{pol,opt}/2 + \phi_{1s})$. $\psi_{pol,opt}$ es representa aquí front a la desintonia. En el quadre interior, l'espectre de *squeezing* d'aquesta quadratura per a $\Delta = 0$.

Analitzant el valor de l'angle de la quadratura, β , que fa màxima la compressió, es pot demostrar que per a la quadratura comprimida, X_2^β , el valor de l'angle que aporta la màxima compressió és $\beta = (\psi_{pol,opt}/2 + \phi_{1s})$,

amb

$$\psi_{pol,opt} = -\frac{1}{2} \arccos \left[\frac{1 - \Delta \sqrt{8 + 9\Delta^2}}{3(1 + \Delta^2)} \right], \quad (221)$$

quantitat que tendeix a zero per a valors grans negatius de Δ i a $-\pi/2$ per a valors grans positius de Δ (veure figura 12).

De cara a avaluar la tolerància a variacions en l'angle β , a l'estudi realitzat i per comoditat en la notació, emprem a l'anàlisi d'aquestes equacions l'angle ψ , definit (a l'apèndix II (398)) com dues vegades la diferència entre la fase de la quadratura, β , i la fase de l'estat estacionari ϕ_s .

Fet aquest aclariment i centrant-nos al resultat deduït d'aquesta anàlisi, és interessant denotar que el rang de valors de ψ , al voltant de $\psi_{pol,opt}$, per als quals s'assoleix l'*squeezing* és molt estret i per tant la tolerància a variacions de l'angle de la quadratura és molt reduïda.

Compressió de les quadratures del camp polaritzat en la direcció del camp injectat X_1^β

A més a més, l'altre mode, α_1 , assolix valors alts de compressió del soroll en aquesta bifurcació (fins i tot si la bifurcació solament afecta el mode α_2). Aquests nivells de *squeezing* tendeixen a la compressió perfecta quan s'incrementa el valor positiu de la desintonia. En la figura (13) es mostra l'*squeezing* de la quadratura $X_1^{\beta=\phi_{1s}}$ per a dos valors de la desintonia.

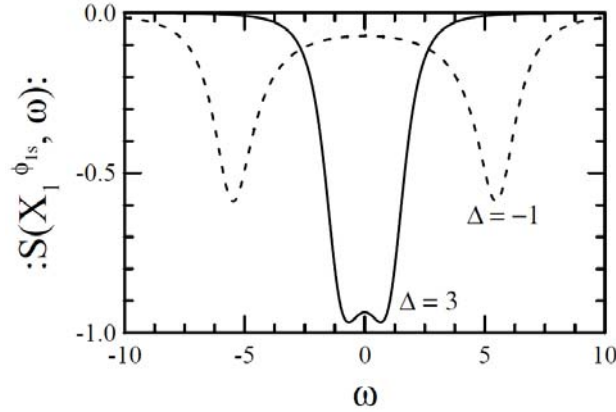


Figura 13: Espectre de *squeezing* per al mode α_1 per a la quadratura comprimida òptimament en la bifurcació de polarització per als dos valors de la desintonia indicats en la figura.

Tal i com s'escriu a l'eix vertical de la figura (13), l'angle β per al qual

aquesta quadratura X_1^β assolix la màxima compressió és $\beta = \phi_{1s}$ (o el que és el mateix $\psi = 0$, ja que recordem, (cf. 398), $\beta = (\psi_{pol,opt}/2 + \phi_{1s})$). Es mostra a més en aquesta figura l'espectre de squeezing d'aquesta quadratura que sofreix la màxima compressió i es veu que ocorre a la freqüència

$$\omega_{opt} = \sqrt{5 - \frac{7}{2}\Delta \left(-3\Delta + \sqrt{8 + 9\Delta^2}\right)}. \quad (222)$$

A la següent figura (14) es representen tant el nivell de compressió màxima per aquesta quadratura $X_1^{\phi_{1s}}$ com la freqüència a la qual esdevé en funció de la desintonia.

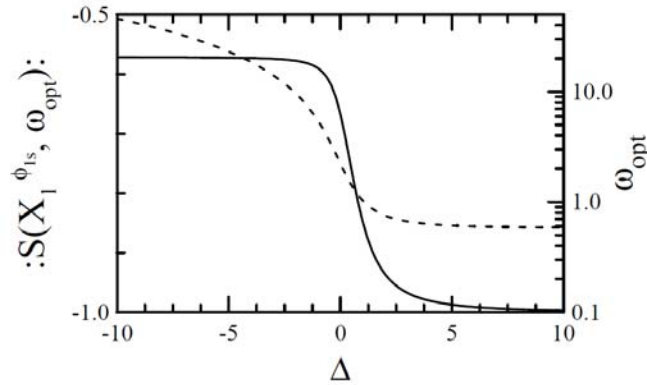


Figura 14: Nivell màxim de *squeezing* (línia contínua, eix vertical esquerre) i la freqüència a la qual s'assoleix (línia discontinua, eix vertical dret) per al mode α_1 en la bifurcació de polarització

En aquest punt paga la pena recordar que pel que fa a les bifurcacions del sistema, quan Δ s'incrementa la bifurcació de polarització i una de les branques de la bifurcació de biestabilitat s'acosten, veure figura (11). Aquesta propietat és deguda a que els autovalors de la matriu d'estabilitat de les solucions estacionàries (equivalent a la matriu \tilde{A} de la linealització de les equacions de Langevin, com ja s'ha dit per al cas de la biestabilitat òptica a l'apartat 6.4 d'aquest treball) corresponents a les dues bifurcacions tenen valors cada vegada més pròxims. Aquest punt de codimensió 2 propicia l'aparició d'aquests nivells de compressió del soroll tan alts.

11.5.2 Bifurcacions de biestabilitat

Les bifurcacions de biestabilitat han estat estudiades des de fa molt de temps (cf.[88]) i no s'escau aquí descriure en detall aquestes conclusions, a més de

que no són necessàries per analitzar l'*squeezing* de polarització al següent apartat. En aquest text és suficient remarcar els valors de variables i paràmetres que porten a la màxima compressió per cercar després en eixos punts crítics la possibilitat de compressió en els paràmetres de Stokes.

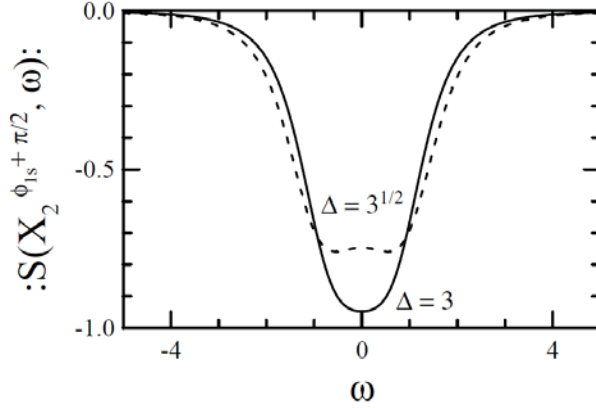


Figura 15: Espectre de *squeezing* per al mode α_2 (polarització ortonormal respecte a la injecció) de la quadratura amb compressió màxima en la bifurcació tangent superior soferta pel mode α_1 , per als dos valors de la desintonia de la cavitat indicats en la figura.

Compressió de les quadratures del mode polaritzat en la direcció del camp injectat X_1^β

Per aquest mode, la compressió perfecta, és a dir : $S^{out}(X_1^\beta, \omega) := -1$, ocorre en $\omega = 0$ per a un valor de l'angle β en particular. Si de nou recorrem al canvi definit a l'apèndix II (398), els valors de l'angle ψ que indiquen les quadratures que estan perfectament comprimides, és a dir $X_1^{\psi_{up,opt}}$ i $X_1^{\psi_{down,opt}}$, són

$$\psi_{up,opt} = -\arccos\left[\frac{2 + \Delta\sqrt{\Delta^2 - 3}}{1 + \Delta^2}\right], \quad (223)$$

$$\psi_{down,opt} = -\arccos\left[\frac{2 - \Delta\sqrt{\Delta^2 - 3}}{1 + \Delta^2}\right], \quad (224)$$

on els subíndexs "up" i "down" indiquen les branques superior i inferior, respectivament, de la solució estacionària tal i com es representa a la figura (11). Val a dir que per a $\Delta \rightarrow \infty$, $\psi_{up,opt} \rightarrow 0$ i $\psi_{down,opt} \rightarrow \pi$. És a dir que,

per a $\Delta \rightarrow \infty$ en la bifurcació superior hi ha compressió d'intensitat i en la inferior de fase.

Pase ara a analitzar en més detall la reducció de soroll, en aquestes bifurcacions, en les quadratures de l'altre mode (l'ortogonal en aquest cas) α_2 , que roman apagat per al valor de la injecció al qual ocorren aquestes bifurcacions.

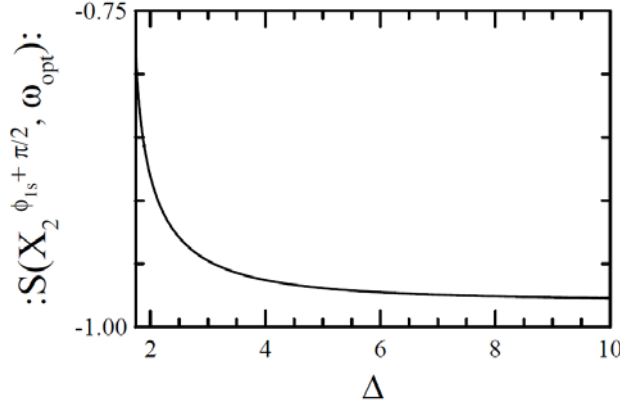


Figura 16: *Squeezing* màxim per al mode α_2 en la bifurcació superior.

Compressió de les quadratures del mode polaritzat en la direcció ortogonal X_2^β

a) Branca superior Si es substitueix $I_{1s} = I_{1s,+}$ de l'expressió (208) a l'equació (392) de l'apèndix II, què dona l'expressió de l'espectre de la quadratura X_2^β , es pot demostrar que la compressió màxima ocorre per a $\psi = 2(\beta - \phi_{1s}) = \pi$, per a freqüències properes a zero i amb $\Delta \sim \sqrt{3}$ (recordem que la bifurcació de biestabilitat requereix $\Delta \geq \sqrt{3}$) i per a la freqüència zero per als valors $\Delta > 1.89$ tal i com es veu a la figura (15). El nivell de compressió augmenta amb la desintonia, com es veu en la figura (16), passant per $S^{out}(X_2^{\phi_{1s} + \pi/2}, \omega_{opt}) := -0.75$ per a $\Delta = \sqrt{3}$ fins a $S^{out}(X_2^{\phi_{1s} + \pi/2}, \omega_{opt}) := -0.98$ per a Δ tendint a infinit.

És important per a les properes deduccions recordar que la compressió màxima ocorre en $\psi = \pi$, és a dir $\beta = \phi_{1s} + \pi/2$.

b) Branca inferior Si, anàlogament a com s'ha fet amb la branca inferior, es substitueix $I_{1s} = I_{1s,-}$ de l'expressió (208) a l'equació (392) es pot demostrar que la compressió màxima ocorre en $\psi = 2(\beta - \phi_{1s}) = \pi$, per a

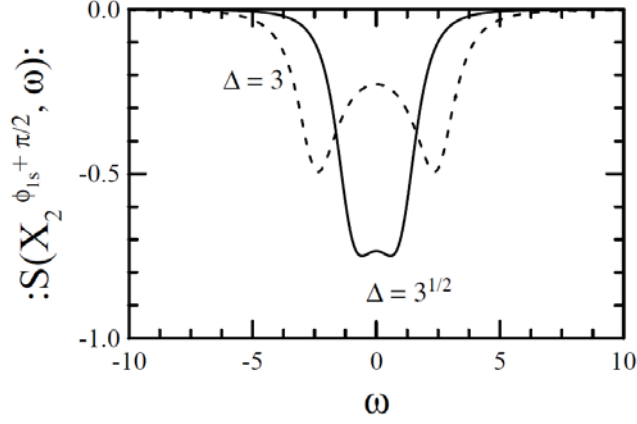


Figura 17: Idem que a la figura (15) per a la bifurcació tangent inferior soferta pel mode α_1 , per als dos valors de la desintonia de la cavitat indicats a la figura.

$\omega_{opt}^2 = \frac{1}{8} [7\Delta (\Delta + \sqrt{\Delta^2 - 3}) - 15]$, una freqüència que s'incrementa monòtonament amb Δ des del seu valor mínim $\omega = 1/\sqrt{3}$ en $\Delta = \sqrt{3}$. La figura (17) mostra l'espectre de *squeezing* $S^{out} \left(X_2^{\phi_{1s} + \pi/2}, \omega \right)$ per a dos valors de la desintonia de la cavitat, i la figura (18) mostra la compressió màxima juntament amb la freqüència a la qual ocorre. La compressió no és perfecta [el nivell màxim és $: S^{out} \left(X_2^{\phi_{1s} + \pi/2}; \omega_{opt} = 1/\sqrt{3} \right) := -0.75$ per a $\Delta = \sqrt{3}$], i decreix amb l'increment de la desintonia. Com en el cas anterior, cal recordar que el màxim *squeezing* ocorre en $\psi = \pi$, és a dir $\beta = \phi_{1s} + \pi/2$.

Per últim i per tancar aquest apartat dedicat a la compressió de les quadratures en el règim monomode, resumisc de forma esquemàtica quins són els punts clau de la caracterització del ressonador Kerr vectorial: a la bifurcació de polarització es produeix *squeezing* perfecte per al mode α_2 i *squeezing* molt alt per al mode α_1 . A la bifurcació de biestabilitat, en canvi, es produeix *squeezing* perfecte per al mode α_1 i *squeezing* no perfecte per al mode α_2 que serà molt alt en la branca superior (98% de compressió quan la desintonia creix asimptòticament) i menor en la branca inferior (75% com a valor màxim per al valor de la desintonia $\Delta = \sqrt{3}$).

11.6 Paràmetres de Stokes quàntics

L'estat de polarització de la llum és descrit clàssicament emprant els paràmetres de Stokes [2]. Els operadors Hermítics de Stokes es defineixen directa-

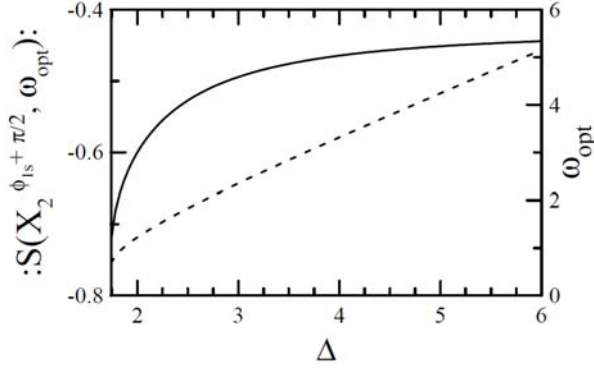


Figura 18: Nivell màxim de *squeezing* (línia contínua, eix vertical esquerre) i la freqüència a la qual aquesta compressió hi té lloc (línia discontinua, eix vertical dret) per al mode α_2 a la bifurcació tangent inferior.

ment per analogia amb els paràmetres clàssics

$$\begin{aligned} \hat{S}_0 &= \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2, & \hat{S}_1 &= \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 - \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2, \\ \hat{S}_2 &= \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1, & \hat{S}_3 &= i \left(\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 - \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 \right). \end{aligned} \quad (225)$$

L'operador \hat{S}_0 es refereix a la intensitat del feix (nombre total de fotons), mentre que \hat{S}_1 , \hat{S}_2 i \hat{S}_3 descriuen l'estat de polarització. El paràmetre \hat{S}_0 commuta amb tots els altres

$$\left[\hat{S}_0, \hat{S}_j \right] = 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad (226)$$

mentre que la resta de paràmetres satisfà les relacions de commutació de l'àlgebra de Lie $SU(2)$

$$\left[\hat{S}_k, \hat{S}_l \right] = 2i \varepsilon_{klm} \hat{S}_m. \quad (227)$$

En conseqüència, la mesura exacta i simultània dels paràmetres de Stokes és impossible en general. El commutador no nul de l'equació (227) implica una restricció sobre les variàncies dels tres operadors de Stokes en ella relacionats, d'acord amb les relacions d'incertitud

$$V_k V_l \geq \frac{1}{4} \left| \left\langle \left[\hat{S}_k, \hat{S}_l \right] \right\rangle \right|^2 \geq \left| \left\langle \hat{S}_m \right\rangle \right|^2, \quad l \neq m \neq k, \quad l \neq k, \quad (228)$$

on

$$V_k = \left\langle \hat{S}_k^2 \right\rangle - \left\langle \hat{S}_k \right\rangle^2, \quad (229)$$

és la variància del paràmetre d'Stokes quàntic \hat{S}_k . Com que per a les discussions posteriors és convenient emprar les variàncies normalitzades a la intensitat mitjana s'emprarà la definició

$$\tilde{V}_k = \frac{\langle \hat{S}_k^2 \rangle - \langle \hat{S}_k \rangle^2}{\langle \hat{S}_0 \rangle}, \quad (230)$$

i la desigualtat (228) queda

$$\tilde{V}_k \tilde{V}_l \geq \left| \frac{\langle \hat{S}_m \rangle}{\langle \hat{S}_0 \rangle} \right|^2, \quad l \neq m \neq k. \quad (231)$$

Convé ressaltar que com les relacions d'incertitud (228) depenen del valor esperat dels operadors, la definició dels estats polaritzats comprimits [37, 49] no és trivial.

Tal i com s'ha comentat al segon capítol quan es parlava de la llum comprimida, en termes de les quadratures del camp, un estat comprimit es aquell que (a) és un estat de mínima incertitud (MUS) i (b) les fluctuacions d'una de les seues quadratures cauen per sota de les corresponents a l'estat buit (o, de forma equivalent, de les d'un estat coherent). Òbviament la reducció de fluctuacions en una quadratura es produeix a expenses de l'increment que sofreixen les de la quadratura ortogonal. En el cas de l'*squeezing* de polarització no es pot aplicar aquesta definició a causa, tal i com s'ha comentat, de l'aparició del valor esperat en la desigualtat (228). Amb més detall: un estat coherent verifica $\tilde{V}_k = 1$ per a tots els paràmetres d'Stokes [37]; però un estat coherent no és, en general, un MUS en termes de la polarització (açò depèn del seu estat de polarització i si per algun m verifica $\langle \hat{S}_m \rangle < \langle \hat{S}_0 \rangle$, aleshores òbviament $\tilde{V}_k \tilde{V}_l \geq \left| \langle \hat{S}_m \rangle / \langle \hat{S}_0 \rangle \right|^2$ per a aquest estat coherent ja que $\tilde{V}_k \tilde{V}_l = 1$). És tanmateix obvi que poden haver-hi estats per als quals algun $\tilde{V}_k < 1$ i no siguin estats comprimits en polarització si, per exemple, el valor esperat per algun m és $\langle \hat{S}_m \rangle = 0$. És clar que d'aquesta forma no hi ha cap transferència de fluctuacions d'un paràmetre d'Stokes a un altre. El buit quàntic, per tant, no és una referència per a definir l'estat de polarització comprimit.

Per aquestos motius l'*squeezing* de polarització es defineix d'una altra forma: Un estat de polarització es diu comprimit si [37]

$$\tilde{V}_l < \left| \frac{\langle \hat{S}_m \rangle}{\langle \hat{S}_0 \rangle} \right| < \tilde{V}_k; \quad l \neq m \neq k \neq 0, \quad (232)$$

per algun l , per exemple, un estat comprimit en polarització és un estat per al qual la variància d'un dels paràmetres d'Stokes cau no solament per sota del límit coherent, sino també per sota del límit del corresponent MUS. Si en un estat de polarització es verifica aquesta condició, estem davant d'una redistribució de les fluctuacions quàntiques entre els diferents paràmetres d'Stokes i per tant és un estat comprimit.

Aquest, (232), és el criteri adoptat per nosaltres, però el debat sobre quin és el criteri més apropiat per a definir l'*squeezing* de polarització ha progressat i s'aporten aquí les referències bibliogràfiques [43, 37, 49] que n'hi tracten.

11.7 Espectre de fluctuacions dels paràmetres de Stokes

A l'apartat dedicat a la compressió de les quadratures ja s'ha vist que les dues components de la polarització del camp emès per la cavitat Kerr vectorial mostren alts graus de compressió en algunes de les seues quadratures a les rodalies de les bifurcacions que afecten a la solució monomode. Ens preguntem ara si aquesta compressió de les quadratures implica o no *squeezing* de l'estat de polarització del camp.

Per esbrinar-ho és convenient, per tal de simplificar l'anàlisi, escriure l'espectre de les correlacions dels paràmetres de Stokes en termes de l'espectre de *squeezing* de les quadratures (217 i 218) i mostrar així la relació entre ells.

Per assolir-ho cal recordar que per a l'estudi perturbatiu escrivim

$$\begin{aligned}\hat{a}_j &= \alpha_{js} + \delta\hat{a}_j, \\ \alpha_{js} &= \sqrt{I_{js}}e^{i\phi_{js}};\end{aligned}\tag{233}$$

on I_{js} i ϕ_{js} corresponen als valors de l'estat estacionari clàssic donats per les equacions (205a,205b) i (206a-206d) per a les solucions monomode i bimode respectivament.

Si a partir d'aquestes expressions reescrivim, per exemple, el paràmetre de Stokes $\hat{S}_0 = \sum_j \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j$, ($j = 1, 2$), obtenim

$$\hat{S}_0 = \sum_{j=1,2} \left[\alpha_{js}^* \alpha_{js} + \alpha_{js}^* \delta\hat{a}_j + \alpha_{js} \delta\hat{a}_j^\dagger + \mathcal{O}(\delta^2 \hat{a}_j) \right],\tag{234}$$

i substituint la descomposició polar

$$\hat{S}_0 = \sum_{j=1,2} \left[I_{js} + \sqrt{I_{js}} \left(e^{-i\phi_{js}} \delta\hat{a}_j + e^{i\phi_{js}} \delta\hat{a}_j^\dagger \right) \right],\tag{235}$$

expressió en la qual podem identificar les quadratures de cada mode, tal i com s'han definit en (216), de forma que podem escriure

$$S_0 = \sum_{j=1,2} \left[I_{js} + \sqrt{I_{js}} \delta X_{j,\phi_{js}} \right].\tag{236}$$

Aquesta última expressió permet calcular fàcilment que la correlació $\langle S_0(t), S_0(t + \tau) \rangle$ es pot escriure

$$\begin{aligned} \langle S_0, S_0 \rangle &= I_{1s} \langle \delta X_{1, \phi_{1s}}, \delta X_{1, \phi_{1s}} \rangle + I_{2s} \langle \delta X_{2, \phi_{2s}}, \delta X_{2, \phi_{2s}} \rangle \\ &\quad + \sqrt{I_{1s} I_{2s}} \left(\langle \delta X_{1, \phi_{1s}}, \delta X_{2, \phi_{2s}} \rangle + \langle \delta X_{2, \phi_{2s}}, \delta X_{1, \phi_{1s}} \rangle \right), \end{aligned} \quad (237)$$

i d'aquí es senzill establir la relació entre els espectres de fluctuacions del paràmetre de Stokes S_0 i els espectres de *squeezing* de les quadratures dels modes implicats si s'aplica directament la definició d'espectre de correlacions (215)

$$\begin{aligned} S^{out}(S_0; \omega) &= I_{1s} S^{out}(X_1^{\phi_{1s}}; \omega) + I_{2s} S^{out}(X_2^{\phi_{2s}}; \omega) \\ &\quad + \sqrt{I_{1s} I_{2s}} S^{out}(X_1^{\phi_{1s}}, X_2^{\phi_{2s}}; \omega) \\ &\quad + \sqrt{I_{1s} I_{2s}} S^{out}(X_2^{\phi_{2s}}, X_1^{\phi_{1s}}; \omega). \end{aligned} \quad (238)$$

Anàlogament, per a la resta de paràmetres s'obté:

$$\begin{aligned} S^{out}(S_1; \omega) &= I_{1s} S^{out}(X_1^{\phi_{1s}}; \omega) + I_{2s} S^{out}(X_2^{\phi_{2s}}; \omega) \\ &\quad - \sqrt{I_{1s} I_{2s}} S^{out}(X_1^{\phi_{1s}}, X_2^{\phi_{2s}}; \omega) \\ &\quad - \sqrt{I_{1s} I_{2s}} S^{out}(X_2^{\phi_{2s}}, X_1^{\phi_{1s}}; \omega), \end{aligned} \quad (239)$$

$$\begin{aligned} S^{out}(S_2; \omega) &= I_{2s} S^{out}(X_1^{\phi_{2s}}; \omega) + I_{1s} S^{out}(X_2^{\phi_{1s}}; \omega) \\ &\quad + \sqrt{I_{1s} I_{2s}} S^{out}(X_1^{\phi_{2s}}, X_2^{\phi_{1s}}; \omega) \\ &\quad + \sqrt{I_{1s} I_{2s}} S^{out}(X_2^{\phi_{1s}}, X_1^{\phi_{2s}}; \omega), \end{aligned} \quad (240)$$

$$\begin{aligned} S^{out}(S_3; \omega) &= I_{2s} S^{out}(X_1^{\phi_{2s} + \frac{\pi}{2}}; \omega) + I_{1s} S^{out}(X_2^{\phi_{1s} + \frac{\pi}{2}}; \omega) \\ &\quad - \sqrt{I_{1s} I_{2s}} S^{out}(X_1^{\phi_{2s} + \frac{\pi}{2}}, X_2^{\phi_{1s} + \frac{\pi}{2}}; \omega) \\ &\quad - \sqrt{I_{1s} I_{2s}} S^{out}(X_2^{\phi_{1s} + \frac{\pi}{2}}, X_1^{\phi_{2s} + \frac{\pi}{2}}; \omega), \end{aligned} \quad (241)$$

Es pot veure en aquestes expressions (238 - 241) que l'espectre de compressió creuat (218) diferencia l'*squeezing* de polarització d'una simple combinació d'espectres de compressions de les quadratures.

Passa ara a analitzar el comportament de $\tilde{V}(S_k; \omega) = V(S_k; \omega) / \langle \hat{S}_0 \rangle$, amb $\langle \hat{S}_0 \rangle = I_{1s} + I_{2s}$. En primer lloc, analitzaré aquest comportament en les bifurcacions de la solució monomode i després es descriurà també el comportament de $\tilde{V}(S_k; \omega)$ en funció del bombeig per a un valor particular de la desintonia per a la solució bimode.

11.7.1 *Squeezing* de polarització en les bifurcacions de la solució monomode

Es pot començar aquest estudi si recordem que per a la solució monomode $I_{2s} = 0$ i traslladem aquest valor a les equacions que relacionen els espectres de fluctuacions dels paràmetre d'Stokes i els de les quadratures (238 - 241), de forma que s'obté directament

$$\tilde{V}(S_0; \omega) = \tilde{V}(S_1; \omega) = 1 + : S^{out}(X_1^{\phi_{1s}}; \omega) :, \quad (242)$$

$$\tilde{V}(S_2; \omega) = 1 + : S^{out}(X_2^{\phi_{1s}}; \omega) :, \quad (243)$$

$$\tilde{V}(S_3; \omega) = 1 + : S^{out}(X_2^{\phi_{1s} + \frac{\pi}{2}}; \omega) :, \quad (244)$$

expressions en les quals s'ha tingut en compte les relacions (219) i la normalització de les variàncies dels paràmetres de Stokes (230).

Aquestes expressions mostren que en la solució monomode les variàncies dels dos primers paràmetres de Stokes corresponen a les fluctuacions de les quadratures del mode emès (paral·lel) α_1 per al valor particular de l'angle de la quadratura $\beta = \phi_{1s}$ (és a dir, les fluctuacions de la intensitat) la qual, en general, no és la quadratura que exhibeix menys fluctuacions. Pel contrari, els dos últims paràmetres de Stokes corresponen a les fluctuacions del mode apagat (ortogonal) α_2 per als valors particulars dels angles de les quadratures $\beta = \phi_{1s}$ i $\beta = \phi_{1s} + \frac{\pi}{2}$.

Aquestes expressions de les variàncies $\tilde{V}(S_i; \omega)$ es concreten per al cas de les bifurcacions a l'apèndix II i en aquest apartat passa a analitzar els seus valors en cadascuna de les possibles bifurcacions que afecten a la solució monomode.

Convé recordar, abans d'entrar en detall, que per estar a la solució monomode ($I_{2s} = 0$) els valors mitjans dels paràmetres d'Stokes són $\langle \hat{S}_0 \rangle = \langle \hat{S}_1 \rangle = I_{1s}$ i $\langle \hat{S}_2 \rangle = \langle \hat{S}_3 \rangle = 0$ i aleshores l'equació (232) implica que els únics paràmetres d'Stokes que poden estar comprimits són \hat{S}_2 i \hat{S}_3 , i per a ells s'ha de verificar

$$\tilde{V}_i < \left| \frac{\langle \hat{S}_1 \rangle}{\langle \hat{S}_0 \rangle} \right| < \tilde{V}_j, \quad i, j = 2, 3, \quad i \neq j. \quad (245)$$

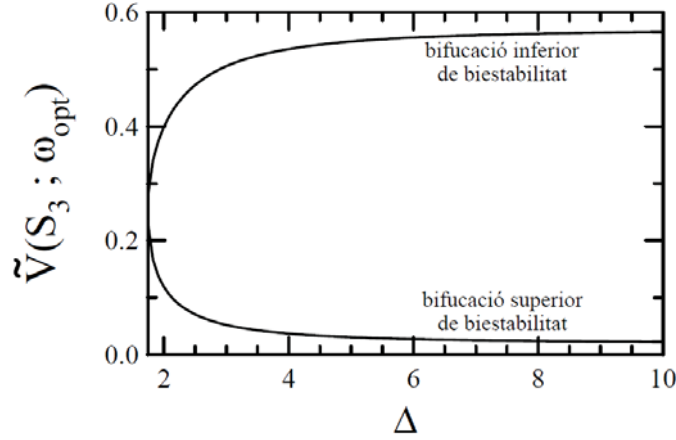


Figura 19: Variància normalitzada del paràmetre de Stokes S_3 en la bifurcació superior i inferior de biestabilitat en funció de la desintonia. Es mostra el valor màxim de l'*squeezing*

a) Bifurcació de polarització En aquest cas $I_{1s} = I_{1s,pol}$, de l'equació (210) i és bastant senzill veure que ni $\tilde{V}(S_2; \omega)$ ni $\tilde{V}(S_3; \omega)$ estan comprimits. A l'apartat 12.5.1 ja s'ha vist que la compressió màxima de quadratures X_2^β ocorre en aquesta bifurcació per a $\beta = (\psi_{pol,opt}/2 + \phi_{1s})$ amb $\psi_{pol,opt}$ tendint a 0 per a $\Delta \rightarrow -\infty$ i tendint a $-\pi/2$ per a $\Delta \rightarrow \infty$. És immediat veure a partir d'açò que solament per a $\Delta \rightarrow -\infty$ pot ocórrer que \tilde{V}_2 estiga comprimida (veure equacions (242-244 i 398)); però aquesta condició porta a que aquesta situació no siga possible per a valors finits de la desintonia a causa, com s'ha comentat a l'apartat 12.5.1, de que el nivell de compressió és extremadament sensible al valor de ψ . No hi ha, per tant, *squeezing* de polarització en aquesta bifurcació.

b) Bifurcació de biestabilitat En aquest cas $I_{1s} = I_{1s,\pm}$, de l'equació (208). El fet que la compressió òptima per a les quadratures X_2^β esdevinga per a $\beta = \phi_{1s} + \pi/2$ (veure apartat 12.5.2.) implica que $\tilde{V}(S_3; \omega)$ estiga comprimida, tal i com es veu a les equacions (242-244). En aquest cas particular, per tant, l'*squeezing* de quadratura implica *squeezing* de polarització. En la figura (19) es representa el valor de $\tilde{V}(S_3; \omega)$ mínim per a les dues bifurcacions de biestabilitat, la qual cosa esdevé a les freqüències indicades a l'apartat 12.5.2.

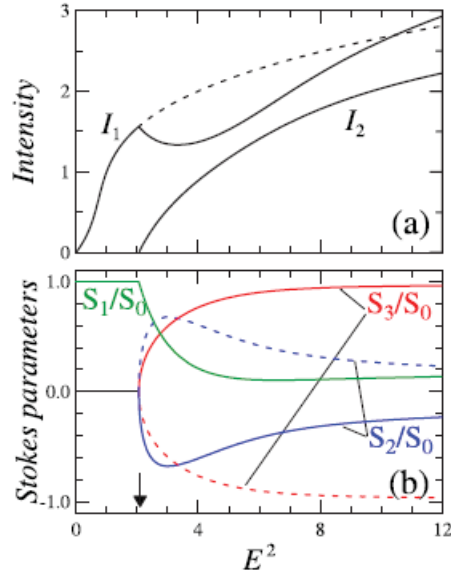


Figura 20: (a) Valors de la intensitat per als dos modes a l'interior de la cavitat i (b) valor medi normalitzat dels paràmetres de Stokes per a $\Delta = 1$. La inestabilitat de polarització està marcada amb una fletxa en l'eix horitzontal. Les línies contínua i discontinua en (b) corresponen als dos possibles valors dels paràmetres de Stokes com a conseqüència de la biestabilitat de fase de les equacions (202,203) per al mode α_2 .

11.7.2 *Squeezing* de polarització per sobre de les bifurcacions en la solució bimode

Donada la complexitat del cas general, en aquest apartat s'estudia la dependència de les fluctuacions en funció de la intensitat del bombeig per a un valor en particular de la desintonia. He escollit $\Delta = 1$ donat que per a aquest valor l'única bifurcació soferta per la solució monomode és la bifurcació de polarització (cf. figura (11) on es mostra que per a que existisca la bifurcació de biestabilitat cal que $\Delta > \sqrt{3}$). En aquesta situació no hi ha *squeezing* de polarització a la bifurcació tal i com s'ha vist a l'apartat 12.7.1.a. Convé recordar que a més sabem [66] que per a $\Delta = 1$ no hi ha cap bifurcació secundària que afecte a la solució bimode. Estudie ara què passa un cop sobrepassada la bifurcació.

Em centre per tant, en les fluctuacions de la solució bimode. En la figura (20) es representen la intensitat de l'estat estacionari i els valors mitjans de les variàncies dels paràmetres de Stokes en funció del bombeig, i en la figura (21) es representen conjuntament el mínim valor de les variàncies dels

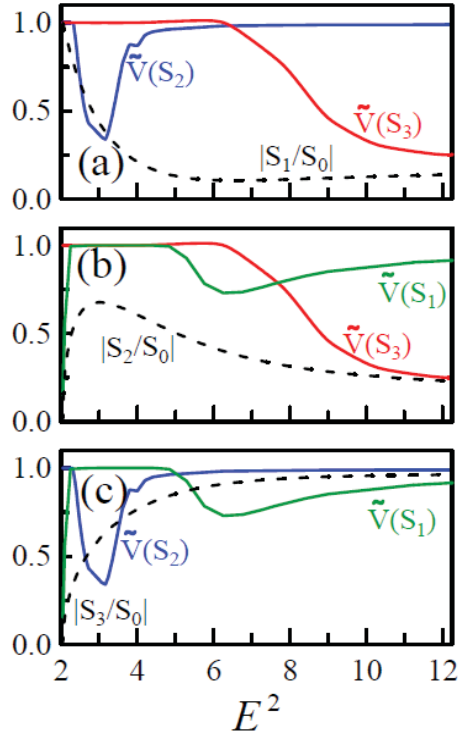


Figura 21: Valor mínim de les variàncies dels paràmetres de Stokes normalitzades (línies contínues) i valors mitjans dels paràmetres de Stokes (línies discontinúes) en funció de la intensitat del bombeig per a $\Delta = 1$. El paràmetre S_2 està comprimit en un domini petit de valors al voltant de $E^2 = 3$, com es pot veure en (a) i (c), mentre que S_1 està comprimit per a $E^2 > 5$, com es pot veure en (c). Per valors més grans de la intensitat del bombeig, l'*squeezing* de polarització desapareix.

paràmetres de Stokes amb els valors mitjans d'aquestos paràmetres (no es mostra en aquesta gràfica la freqüència a la qual s'assoleix el mínim valor de les variàncies). Cal adonar-se que la compressió de la polarització esdevé quan les variàncies representades cauen per sota del valor mig del corresponent paràmetre de Stokes, paràmetre que també es representa en cada figura (veure equació 232).

Es veu per tant, que malgrat no existir *squeezing* de polarització a la bifurcació de polarització, com s'ha vist a l'apartat anterior, quan s'incrementa el bombeig, els paràmetres S_1 i S_2 estan comprimits per algun rang de valors del bombeig (val a dir que V_3 incrementa el seu valor per a valors del bombeig superiors als representats en les figures). La compressió de polarització observada en aquest cas ha de ser atribuïda a l'efecte de l'espectre creuat de les equacions (238-241). Voldria remarcar que, tot i que sempre hi ha algun paràmetre per al qual $\tilde{V}(S_i; \omega) < 1$, tal i com es veu a la figura (21), i que no es tracta de compressió de la polarització [37], és clar que el camp eixint exhibeix menys fluctuacions que un estat coherent i aquesta propietat pot ser útil per ser una forma de *squeezing* d'intensitat.

Aquestos resultats mostren per tant que la cavitat Kerr vectorial exhibeix compressió de polarització no solament en les bifurcacions i a més hem estudiat per a quins altres valors dels paràmetres ocorre. Descarte ara seguir l'estudi general de la solució bimode a causa de la seua extremada complexitat.

11.8 Conclusions

En aquest capítol s'ha estudiat la compressió de quadratura i de polarització en un model vectorial de la cavitat Kerr. Després de deduir les equacions de Langevin per a les fluctuacions quàntiques a partir d'una equació de Fokker-Planck, equació d'evolució de la distribució P -positiva, s'han deduït les expressions per a les fluctuacions quàntiques de les quadratures del camp eixint; i en funció d'aquestes s'ha expressat l'espectre de fluctuacions dels paràmetres d'Stokes del camp eixint. Aquestes darreres expressions són particularment útils per entendre la connexió entre l'*squeezing* de quadratures i de polarització i faciliten l'estudi d'aquest últim.

Mitjançant l'anàlisi de l'espectre de fluctuacions de les quadratures i de la polarització, s'han analitzat les condicions sota les quals ocorre l'*squeezing*. M'he centrat principalment a la compressió que afecta la solució monomode (polaritzada linealment), però també he considerat la compressió de polarització en la solució bimode (polaritzada el·lípticament) en un cas particular. En particular, s'ha demostrat que la compressió de polarització s'assoleix en aquest sistema i és especialment alta en la bifurcació tangent superior

(biestabilitat) de la solució monomode.

Malgrat que els casos mostrats han estat deduïts per a uns valors determinats dels coeficients Maker-Terhune (el cas dels líquids), l'estudi d'altres casos mostra que aquestos resultats tenen un caràcter qualitativament general: excepte per al cas $\mathcal{B} = 0$ (que descriu un medi isòtrop en el qual la no-linealitat Kerr és deguda solament a l'electrostricció) en el que el mode α_2 és un buit coherent independentment del valor de bombeig (és a dir, no hi ha inestabilitat de polarització en aquest cas), per qualsevol altre $\mathcal{B} \neq 0$ existirà compressió de polarització en les bifurcacions tangents (és clar, que el valor d'aquesta compressió depèn del valor particular de \mathcal{B}).

A partir d'aquestos resultats es pot concloure que el model de la cavitat Kerr vectorial (incloent-hi tant la CPM com la FWM dels dos modes ortogonals a l'interior de la cavitat, cf. apartat 4.1) constitueix una generalització força interessant del model escalar de la biestabilitat òptica dispersiva des del punt de vista de les fluctuacions quàntiques, ja que prediu l'existència de l'squeezing de polarització, un fenomen que, òbviament, no pot ser descrit emprant el model escalar, i que es dona sempre que esdevé la FWM (o el que és el mateix, sempre que $\mathcal{B} \neq 0$). És especialment interessant el fet que la compressió de polarització esdevé en el règim de la solució monomode, estant òptim en les bifurcacions tangents (biestabilitat), sense necessitat d'arribar a la bifurcació de polarització.

12 *Squeezing* via ruptura de la simetria rotacional en una cavitat de barreja de quatre ones

12.1 Introducció

Hem vist al capítol anterior que als punts de bifurcació del sistema (cavitat Kerr vectorial) hi ha una quadratura que està perfectament comprimida, això és, que no té fluctuacions, un resultat que és, d'altra banda, ben conegut [8, 30, 52, 88]. Tanmateix aquest resultat és un artifici ja que s'ha deduït després de reduir el problema mitjançant el procés de linealització, hipòtesi que deixa de ser vàlida molt a prop de la bifurcació a causa de que en aquesta situació fluctuacions petites en una quadratura impliquen grans fluctuacions en l'altra (el principi d'incertitud d'Heisenberg de nou) i la linealització deixa de ser vàlida. En qualsevol cas, és clar que a la bifurcació (o molt a prop d'ella) l'*squeezing* serà màxim, degradant-se a mesura que els valors dels paràmetres s'allunyen d'ella i hem de ressaltar que aquesta és la forma usual de produir *squeezing*: acostar-se al dintell d'emissió de la cavitat òptica no lineal.

Malgrat açò, la compressió perfecta és possible si les fluctuacions infinites, corresponents a les fluctuacions nul·les de l'altre observable, no s'han de donar en una quadratura (per a la qual cosa caldria una energia infinita) sinó en una fase relativa, per exemple. Aquest és el cas dels oscil·ladors òptics paramètrics no degenerats (OPOs) en els que la diferència d'intensitats entre els modes senyal i vague (*idler*) no té fluctuacions perquè la fase entre aquests modes està completament indeterminada [65].

El nostre grup ha estès aquesta idea per aconseguir *squeezing* de quadratura perfecte [54]. La idea pot resumir-se de la següent manera: considerem un procés òptic no lineal en el qual dos fotons, amb igual freqüència, es generen en els modes Gauss-Laguerre amb moment angular orbital (OAM) oposat i igual a ± 1 . Aquesta situació és equivalent a generar dos fotons en un mode Gauss-Hermite TEM_{10} l'orientació del qual en el pla transversal $x - y$ està determinat per la fase relativa entre els dos fotons Gauss-Laguerre, fase que anomenarem ϕ . Assumim, a més, que ϕ no està fixat, com esdevé per exemple en el procés de *down-conversion* que ocorre en els OPOs. Açò vol dir que l'orientació del mode de Gauss-Hermite no està fixada donat que ϕ és l'angle format per aquest mode amb l'eix x . Sota aquestes condicions, es pot esperar que les fluctuacions en l'orientació d'aquest mode Gauss-Hermite siguin il·limitades doncs el seu valor estarà governat únicament per les fluctuacions quàntiques, la qual cosa suggereix que el par canònic de ϕ , és a dir,

el moment angular $-i\partial/\partial\phi$, pot estar perfectament fixat, és a dir comprimit. Però el moment angular d'un TEM_{10} que forma un angle ϕ amb l'eix x és un altre TEM_{10} amb un angle $\phi + \pi/2$ respecte a l'eix x , aquest mode pot, per tant, presentar compressió perfecta en una de les seues quadratures. Val a dir que el concepte de bifurcació no es veu involucrat en aquest raonament i que la variable que exhibeix fluctuacions il·limitades és un angle. Aleshores, *a priori*, es possible assolir *squeezing* perfecte en aquest procés ja que les fluctuacions infinites en l'orientació de ϕ són factibles i es tractaria, a més a més, d'un *squeezing* no crític, és a dir, independent dels valors dels paràmetres a diferència de l'usual *squeezing* de bifurcació.

Altres treballs del grup [55, 56] han desenvolupat aquesta idea en el DOPO i en aquest capítol estudiaré un model de cavitat no lineal $\chi^{(3)}$ en el qual apareix la compressió quàntica del soroll deguda al trencament espontani de simetria rotacional [27]. L'interès d'aplicar aquest estudi a la cavitat FWM és doble: d'una banda, em permetrà demostrar que el trencament de simetria rotacional és un mitjà robust per generar compressió quàntica de la llum en el sentit que no està limitat a una cavitat no lineal $\chi^{(2)}$ tal com el DOPO; d'altra banda, com que assolir la invariància rotacional perfecta pot ésser complicat en sistemes $\chi^{(2)}$ a causa de que els requisits de *phase-matching* poden implicar canviar l'orientació del cristall de forma que es trenque aquesta simetria, el medi $\chi^{(3)}$ presenta l'avantatge que el *phase-matching* ocorre fàcilment. I finalment, cal mencionar la dificultat d'aconseguir experimentalment un OPO que treballi amb degeneració en freqüència. En realitat, i fins on sabem a hores d'ara, aquesta dificultat és una impossibilitat experimental ja que els OPOs degenerats en freqüència amb que és produeix *squeezing* treballen per sota del dintell d'emissió, però si el bombeig s'incrementa per damunt d'aquesta bifurcació esdevenen OPOs no degenerats. Com que el fenomen que estudiem requereix treballar per damunt del dintell, els OPOs no serviran (fins on sabem actualment) i per contra, a les cavitats $\chi^{(3)}$ l'emissió degenerada en freqüència és possible [84].

El tipus de cavitat $\chi^{(3)}$ proposat per aquest estudi és original del nostre grup [27] i per tant, iniciaré el treball descrivint el model quàntic, després estudiaré les seues propietats d'emissió clàssiques i a partir d'aquí descriure les seues propietats quàntiques. Es demostrarà a continuació que el sistema exhibeix compressió perfecta originada en el trencament de simetria rotacional i finalment, com és habitual i recomanable, resumiré els resultats obtinguts.

12.2 Model

Es considera una cavitat òptica amb miralls esfèrics que contè un medi $\chi^{(3)}$. El bombeig està constituït per dos feixos coherents de perfil gaussià i de freqüències ω_1 i ω_2 ; aquestos feixos corresponen a dos modes longitudinals consecutius de la cavitat. A causa de la interacció no lineal, es produeix el procés anomenat FWM (barreja de quatre ones) en el qual dos fotons de la injecció generen dos camps de freqüència ω_s tal que $\omega_1 + \omega_2 = 2\omega_s$ (veure figura (26) de l'apèndix III). Assumim també que a causa de la geometria de la cavitat el perfil dels camps generats (camps senyal) és el de dos modes Gauss-Laguerre de primer ordre i donat que els modes Gauss-Laguerre tenen moment angular orbital (veure [22], per exemple), al que denominarem OAM d'ara endavant, i que l'OAM total ha de conservar-se en el procés de FWM, els modes senyal han de tenir OAM oposat (+1 i -1, respectivament) ja que els modes gaussians de bombeig tenen OAM nul (veure figura (22)). Igualment assumim que només una component de polarització és rellevant, és a dir, que la component ortogonal té unes pèrdues molt grans a la cavitat, de forma que la descripció escalar és aplicable.

Per a que el procés de FWM siga possible és precís que els modes de la cavitat i les freqüències del camp siguen escollits apropiadament. Una elecció que verifica aquesta condició és un resonador simètric confocal, en el qual els modes d'OAM parell i senar estan màximament separats en freqüència (a l'apèndix III es fa un breu repàs a l'estructura modal d'un resonador).

En un resonador confocal, la freqüència de resonància del mode longitudinal q corresponent a la família transversal $f = 2p + l$ (p és l'índex del mode radial i l el valor absolut del seu OAM) és [38]

$$\omega_{qf} = \frac{\pi c}{L} \left[q + \frac{1+f}{2} \right] \quad (246)$$

on L és la longitud òptica de la cavitat.

En l'esquema més simple, els feixos de bombeig del model escollit corresponen a dos modes longitudinals consecutius q i $q + 1$ amb $f = 0$. Els modes senyal aleshores correspondran als modes de la cavitat amb índexs q i $f = 1$, i verifiquen $2\omega_s = \omega_{q,0} + \omega_{q+1,0} = 2\omega_{q,1}$. Certament, hi ha altres modes al resonador confocal amb OAM parell, però es poden menysprear si es considera que eixos modes de Gauss-Laguerre d'ordre superior presenten un acoblament feble amb els modes de bombeig i en conseqüència no seran amplificats [55]. La tècnica per evitar aquesta amplificació és senzilla: emprar un iris que incremente les pèrdues per als modes d'OAM més alt, donat que aquestos tenen un perfil (o "cintura", *waist*) més ample.

Passa ara a formular el model matemàtic corresponent a aquest sistema.

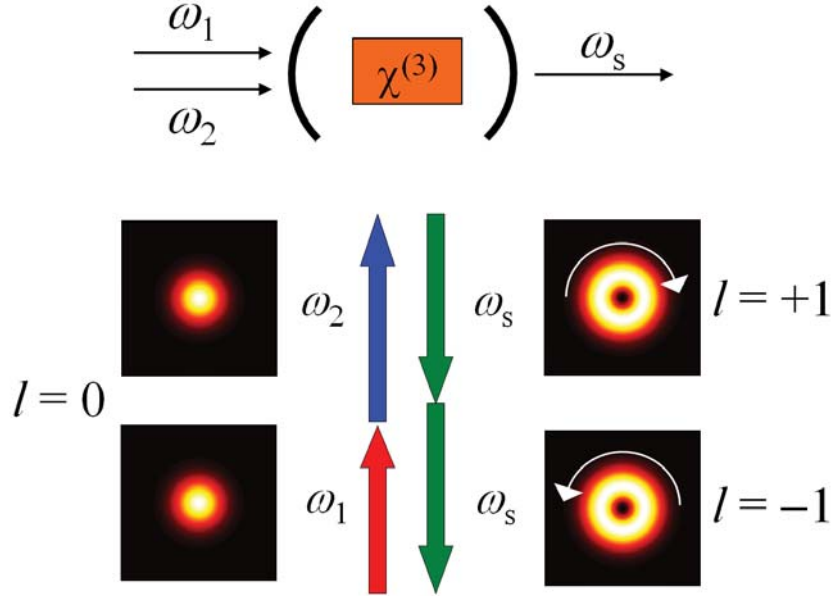


Figura 22: Esquema del sistema. Un medi $\chi^{(3)}$ a l'interior d'una cavitat i el bombeig el constitueixen dos feixos de perfil gaussià de freqüències ω_1 i ω_2 . La freqüència de resonància de la cavitat és tal que es generen dos modes senyal de freqüència $\omega_s = (\omega_1 + \omega_2)/2$. Els dos modes generats són degenerats en freqüència però difereixen en el mode espacial, un d'ells correspon a un Laguerre-Gauss d'OAM +1 i l'altre -1.

12.2.1 Els camps

Es supossa que el medi $\chi^{(3)}$ està situat a la cintura del resonador i és prou prim com per realitzar l'aproximació de camp uniforme que consisteix en menysprear la dependència dels camps amb la coordenada longitudinal z . D'aquesta forma el camp total a l'interior de la cavitat, en la "cintura" del feix, es pot escriure

$$\begin{aligned}
 \hat{E}(\mathbf{r}, t) &= \hat{E}_p(\mathbf{r}, t) + \hat{E}_s(\mathbf{r}, t) & (247) \\
 \hat{E}_p(\mathbf{r}, t) &= \sum_{j=1,2} i\mathcal{F}_j \hat{A}_j(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega_j t} + H.c. \\
 \hat{E}_s(\mathbf{r}, t) &= i\mathcal{F}_s \hat{A}_s(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega_s t} + H.c.
 \end{aligned}$$

on $\mathbf{r} = r(\cos\phi, \sin\phi)$ és el vector posició en el pla transversal escrit en coordenades polars, els subíndex p i s denoten bombeig (*pump*) i senyal

respectivament, $\mathcal{F}_k^2 = \hbar\omega_k / (\varepsilon_0 n L)$, amb $k = 1, 2, s$ i n és l'índex de refracció (es menysprea la dispersió lineal del medi per simplicitat) i L és la longitud òptica del resonador.

Les envolvents de variació lenta són

$$\begin{aligned}\hat{A}_j(\mathbf{r}, t) &= \hat{a}_j(t) G_j(\mathbf{r}), \quad j = 1, 2 \\ \hat{A}_s(\mathbf{r}, t) &= \hat{a}_+(t) L_+(\mathbf{r}) + \hat{a}_-(t) L_-(\mathbf{r}),\end{aligned}\quad (248)$$

on la dependència espacial ve donada per [38]

$$G_j(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{w_j} e^{-(r/w_j)^2}, \quad j = 1, 2 \quad (249)$$

$$L_{\pm 1}(\mathbf{r}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{r}{w_s^2} e^{-(r/w_s)^2} e^{\pm i\phi}. \quad (250)$$

per als modes gaussians i de Gauss-Laguerre de primer ordre, respectivament. En tots els casos $w_j \propto 1/\sqrt{\omega_j}$, $j = 1, 2, s$. Val a dir que al domini òptic, en el qual $\omega_1 \sim 10^{15} s^{-1}$, es pot agafar $\omega_1 \simeq \omega_2 \simeq \omega_s$ donat que la longitud òptica del resonador no és molt menuda (aproximació que apareix detallada a l'apèndix III i que permet simplificar les expressions) i d'aquí es dedueix que el radi del cercle w és el mateix per a tots els modes a l'igual que la part de l'amplitud que no descriu la distribució espacial de cada mode, \mathcal{F} .

Per altra banda, com que al llarg del capítol caldrà emprar les relacions entre els modes Gauss-Laguerre i Gauss-Hermite, es descriu ara com a partir dels modes Gauss-Laguerre $L_{\pm 1}$ es poden trobar els modes de Gauss-Hermite ortogonals H_{10}^σ i H_{01}^σ :

$$H_{10}^\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{-i\sigma} L_{+1} + e^{i\sigma} L_{-1}) = \sqrt{2} |L_{\pm 1}(\mathbf{r})| \cos(\phi - \sigma), \quad (251)$$

$$H_{01}^\sigma = -\frac{i}{\sqrt{2}} (e^{-i\sigma} L_{+1} - e^{i\sigma} L_{-1}) = \sqrt{2} |L_{\pm 1}(\mathbf{r})| \sin(\phi - \sigma). \quad (252)$$

on els modes de Gauss-Hermite H_{10}^σ i H_{01}^σ presenten una orientació de σ i $\sigma + \pi/2$ respecte de l'eix x respectivament. En conseqüència, les envolvents lentes a freqüència ω_s es poden escriure també com

$$\hat{A}_s(\mathbf{r}, t) = \hat{a}_{10,\sigma}(t) H_{10}^\sigma + \hat{a}_{01,\sigma}(t) H_{01}^\sigma, \quad (253)$$

amb

$$\begin{aligned}\hat{a}_{10,\sigma} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{i\sigma} \hat{a}_+ + e^{-i\sigma} \hat{a}_-), \\ \hat{a}_{01,\sigma} &= \frac{i}{\sqrt{2}} (e^{i\sigma} \hat{a}_+ - e^{-i\sigma} \hat{a}_-).\end{aligned}\quad (254)$$

Anàlogament, s'introdueixen les quadratures del camp d'aquestos modes de Gauss-Hermite

$$\hat{X}_{j,\sigma}^\varphi = e^{-i\varphi}\hat{a}_{j,\sigma} + e^{i\varphi}\hat{a}_{j,\sigma}^\dagger, \quad j = 10, 01 \quad (255)$$

amb $\hat{a}_{10,\sigma}$ i $\hat{a}_{01,\sigma}$ donats per (254).

12.2.2 L'Hamiltonià

El procés seguit per a la deducció de l'Hamiltonià és anàleg a l'explicat al capítol 4 i, d'acord amb l'expressió (57) que allí s'ha descrit, l'Hamiltonià d'interacció s'obté a partir de

$$\hat{H}_{int} = - \int_{cavitat} d^3\mathbf{r} : \hat{E}(\mathbf{r}; t) \cdot \hat{D}^{NL}(\mathbf{r}; t) : , \quad (256)$$

on, a l'igual que es va fer al capítol explicatiu, s'ha optat per l'ordre normal dels operadors sabent que el resultat d'observar la simetrització a l'ordre dels operadors és un canvi en la definició de l'energia del buit i un conseqüent corriment en el valor de la freqüència pròpia de la cavitat.

Anàlogament a com s'ha fet també al capítol 4, es calcularan per separat els termes

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{ext} + \hat{H}_{int}, \quad (257)$$

on \hat{H}_0 correspon a les energies dels modes a la seua evolució lliure a l'interior de la cavitat, \hat{H}_{ext} correspon a la injecció externa i \hat{H}_{int} a la interacció no lineal. La deducció de \hat{H}_{int} es mostra en detall a l'apèndix IV i aquí exposaré el resultat final ja a la imatge d'interacció i descriuré la notació per facilitar el seguiment de les deduccions i resultats posteriors.

Primer, l'Hamiltonià d'evolució lliure

$$\hat{H}_0 = \sum_{j=1,2,+,-} \hbar\delta_j a_j^\dagger a_j, \quad (258)$$

amb $\delta_j = (\omega_{Cj} - \omega_j)$ la desintonia de la cavitat per al mode amb freqüència ω_j , estant ω_{Cj} la freqüència de resonància més propera al mode. En un resonador confocal, aquesta desintonia és la mateixa per a tots els modes si la freqüència relativa dels feixos de bombeig està fixada al *free spectral range* de la cavitat, p. ex., $\omega_2 - \omega_1 = \pi c/L$. A partir d'ara, per tant, s'agafarà $\delta_j = \delta$.

Ara, l'Hamiltonià extern o d'injecció

$$\hat{H}_{ext} = i\hbar\mathcal{E}_1 (\hat{a}_1^\dagger - \hat{a}_1) + i\hbar\mathcal{E}_2 (\hat{a}_2^\dagger - \hat{a}_2), \quad (259)$$

\mathcal{E}_j són els paràmetres del bombeig, relacionats [56] amb els paràmetres experimentals d'acord amb

$$\mathcal{E}_j = \sqrt{\frac{n\gamma_j}{\hbar\omega_j} P_j} \quad (260)$$

estant $\gamma_j = cT_j/2L$ la taxa de decaïment de la cavitat a la freqüència considerada (T_j és le factor de transmissió corresponent a través de l'espill d'entrada) i P_j la potència del làser de bombeig. Per les condicions de simetria imposades, també assumiré a partir d'ara que $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}$.

I per últim, l'Hamiltonià de la interacció no lineal, que tal i com ja s'ha vist en altres apartats d'aquest treball, es pot escriure com la suma de tres contribucions

$$\hat{H}_{int} = -\hbar g \left(\hat{H}_{spm} + \hat{H}_{cpm} + \hat{H}_{fwm} \right), \quad (261)$$

amb

$$\hat{H}_{spm} = \hat{a}_1^{\dagger 2} \hat{a}_1^2 + \hat{a}_2^{\dagger 2} \hat{a}_2^2 + \frac{1}{2} \left(\hat{a}_+^{\dagger 2} \hat{a}_+^2 + \hat{a}_-^{\dagger 2} \hat{a}_-^2 \right), \quad (262)$$

$$\begin{aligned} \hat{H}_{cpm} = & 4\hat{a}_1^{\dagger} \hat{a}_2^{\dagger} \hat{a}_1 \hat{a}_2 + 2\hat{a}_+^{\dagger} \hat{a}_-^{\dagger} \hat{a}_+ \hat{a}_- \\ & + 2 \left(\hat{a}_1^{\dagger} \hat{a}_1 + \hat{a}_2^{\dagger} \hat{a}_2 \right) \left(\hat{a}_+^{\dagger} \hat{a}_+ + \hat{a}_-^{\dagger} \hat{a}_- \right), \end{aligned} \quad (263)$$

$$\hat{H}_{fwm} = 2 \left(\hat{a}_1^{\dagger} \hat{a}_2^{\dagger} \hat{a}_+ \hat{a}_- + \hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{a}_+^{\dagger} \hat{a}_-^{\dagger} \right), \quad (264)$$

cadascuna de les quals descriu l'automodulació de fase (SPM), la modulació de fase creuada (CPM) i la barreja de quatre ones (FWM). La constant d'acoblament ve donada per

$$g = \frac{3\varepsilon_0 \mathcal{F}^4 l_m \chi}{\pi \hbar w^2}, \quad (265)$$

amb w la cintura del feix i, l_m la longitud del medi no lineal, χ la susceptibilitat no lineal de tercer ordre i \mathcal{F} la part de l'amplitud dels modes implicats que no conté descripció de la distribució espacial.

Aquest Hamiltonià (257-265) descriu els mateixos processos físics que l'hamiltonià emprat als capítols anteriors, com es pot veure comparant-lo amb (69) i (182-185), però amb diferències notables en els termes que descriuen la interacció no lineal donat que en aquest cas s'involucra un major nombre de modes i que en aquestos camps sí donem acompte de la seua distribució espacial en incorporar la descripció de cada mode.

12.2.3 Equacions quàntiques d'evolució

Aplique en aquest apartat les tècniques aplicades anteriorment per estudiar l'evolució quàntica d'un resonador no lineal mitjançant la resolució de l'equació mestra emprant la representació P -positiva.

Així, a partir de l'expressió de l'Hamiltonià (257-265), mitjançant la introducció de les constants de decaïment per a cada mode γ_j ; ($j = 1, 2, +, -$) (però amb $\gamma_+ = \gamma_- = \gamma_s$, donada la simetria rotacional del sistema) s'obté l'equació mestra per a l'evolució de l'operador densitat (veure (83))

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho} = & -i \left[\delta \left(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 \right), \hat{\rho} \right] + \mathcal{E} \left[\left(\hat{a}_1^\dagger - \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger - \hat{a}_2 \right), \hat{\rho} \right] + \\
& + ig \left[\left\{ \hat{a}_1^{\dagger 2} \hat{a}_1^2 + 2 \left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_+^\dagger \hat{a}_1 \hat{a}_+ + \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_-^\dagger \hat{a}_1 \hat{a}_- \right) \right. \right. \\
& + \hat{a}_2^{\dagger 2} \hat{a}_2^2 + 2 \left(\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_+^\dagger \hat{a}_2 \hat{a}_+ + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_-^\dagger \hat{a}_2 \hat{a}_- \right) \\
& + 4 \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 \hat{a}_2 + 2 \left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_+ \hat{a}_- + \hat{a}_+^\dagger \hat{a}_-^\dagger \hat{a}_1 \hat{a}_2 \right) \\
& \left. + \frac{1}{2} \left(\hat{a}_+^{\dagger 2} \hat{a}_+^2 + \hat{a}_-^{\dagger 2} \hat{a}_-^2 + 4 \hat{a}_+^\dagger \hat{a}_-^\dagger \hat{a}_+ \hat{a}_- \right) \right\}, \hat{\rho} \Big] \\
& + \gamma_j \sum_{j=1,2} \left(\left[\hat{a}_j, \hat{\rho} \hat{a}_j^\dagger \right] + \left[\hat{a}_j \hat{\rho}, \hat{a}_j^\dagger \right] \right) \\
& + \gamma_s \sum_{k=+,-} \left(\left[\hat{a}_k, \hat{\rho} \hat{a}_k^\dagger \right] + \left[\hat{a}_k \hat{\rho}, \hat{a}_k^\dagger \right] \right). \tag{266}
\end{aligned}$$

A partir d'aquesta equació passem a una equació diferencial amb derivades parcials mitjançant la representació P -positiva (172,175) i les equivalències que s'han derivat a partir de la seua definició (112-115,378-386). Aquesta equació diferencial per a la distribució de quasiprobabilitat P -positiva correspon a una equació de Fokker-Planck

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\boldsymbol{\alpha}; t) = \left[-\frac{\partial}{\partial \alpha_i} A_i + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \mathcal{D}_{i,j} \right] P(\boldsymbol{\alpha}; t), \tag{267}$$

on el vector $\boldsymbol{\alpha}$ és

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_+, \alpha_-, \alpha_1^+, \alpha_2^+, \alpha_+^+, \alpha_-^+), \tag{268}$$

i les components del vector desplaçament $\mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha})$ són

$$A_{\alpha_1} = \mathcal{E}_p - (\gamma_1 + i\delta) \alpha_1 + ig4\alpha_2^+ \alpha_2 \alpha_1 + ig2(\alpha_1^+ \alpha_1^2 + \alpha_+^+ \alpha_+ \alpha_1 + \alpha_-^+ \alpha_- \alpha_1 + \alpha_2^+ \alpha_+ \alpha_-), \quad (269)$$

$$A_{\alpha_2} = \mathcal{E}_p - (\gamma_2 + i\delta) \alpha_2 + ig4\alpha_1^+ \alpha_1 \alpha_2 + ig2(\alpha_2^+ \alpha_2^2 + \alpha_+^+ \alpha_+ \alpha_2 + \alpha_-^+ \alpha_- \alpha_2 + \alpha_1^+ \alpha_+ \alpha_-), \quad (270)$$

$$A_{\alpha_+} = -(\gamma_s + i\delta) \alpha_+ + ig\alpha_+^+ \alpha_+^2 + ig2(\alpha_-^+ \alpha_- \alpha_+ + \alpha_1^+ \alpha_1 \alpha_+ + \alpha_2^+ \alpha_2 \alpha_+ + \alpha_-^+ \alpha_1 \alpha_2), \quad (271)$$

$$A_{\alpha_-} = -(\gamma_s + i\delta) \alpha_- + ig\alpha_-^+ \alpha_-^2 + ig2(\alpha_+^+ \alpha_+ \alpha_- + \alpha_1^+ \alpha_1 \alpha_- + \alpha_2^+ \alpha_2 \alpha_- + \alpha_+^+ \alpha_1 \alpha_2), \quad (272)$$

i la resta de components $A_{\alpha_k^+}$ són com A_{α_k} després de la conjugació dels termes complexos i canviant α_k per α_k^+ . Pel que fa a la matriu de difusió $\mathcal{D}(\boldsymbol{\alpha})$ és de la forma

$$\mathcal{D} = 2ig \begin{pmatrix} \mathcal{D}^{(-)} & 0 \\ 0 & -\mathcal{D}^{(+)} \end{pmatrix}, \quad (273)$$

estant $\mathcal{D}^{(-)}$ una matriu 4×4 d'elements

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{11}^{(-)} &= \alpha_1^2, \quad \mathcal{D}_{22}^{(-)} = \alpha_2^2, \quad \mathcal{D}_{33}^{(-)} = \frac{\alpha_+^2}{2}, \quad \mathcal{D}_{44}^{(-)} = \frac{\alpha_-^2}{2}, \\ \mathcal{D}_{12}^{(-)} &= \mathcal{D}_{21}^{(-)} = 2\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_+ \alpha_-, \quad \mathcal{D}_{34}^{(-)} = \mathcal{D}_{43}^{(-)} = \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_+ \alpha_-, \\ \mathcal{D}_{13}^{(-)} &= \mathcal{D}_{31}^{(-)} = \alpha_1 \alpha_+, \quad \mathcal{D}_{14}^{(-)} = \mathcal{D}_{41}^{(-)} = \alpha_1 \alpha_-, \\ \mathcal{D}_{23}^{(-)} &= \mathcal{D}_{32}^{(-)} = \alpha_2 \alpha_+, \quad \mathcal{D}_{24} = \mathcal{D}_{42} = \alpha_2 \alpha_-, \end{aligned} \quad (274)$$

i estant $\mathcal{D}^{(+)}$ igual que $\mathcal{D}^{(-)}$ intercanviant α_k per α_k^+ .

Coneguda l'equació de Fokker-Planck, mitjançant les regles d'Ito es poden obtenir les equacions estocàstiques equivalents: les equacions de Langevin

$$\frac{d}{dt} \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha}) + \mathcal{B}(\boldsymbol{\alpha}) \cdot \boldsymbol{\eta}(t), \quad (275)$$

on el vector $\mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha})$ és el mateix que a l'equació FP (269-272), la matriu $\mathcal{B}(\boldsymbol{\alpha})$ compleix (124)

$$\mathcal{D}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathcal{B}(\boldsymbol{\alpha}) \mathcal{B}^T(\boldsymbol{\alpha}); \quad (276)$$

i les components de $\boldsymbol{\eta}(t)$ són sorolls reals gaussians que verifiquen (125,126)

$$\langle \eta_i(t) \rangle = 0, \quad (277)$$

$$\langle \eta_i(t) \eta_j(t') \rangle = \delta_{ij} \delta(t - t'). \quad (278)$$

Aquesta equivalència entre l'equació mestra i les equacions de Langevin s'estableix d'acord amb la igualtat (cf. apartat 7, equacions 144-151)

$$\langle : f(\hat{a}_m, \hat{a}_m^\dagger) : \rangle = \langle f(\alpha_m, \alpha_m^\dagger) \rangle_{estocàstica} . \quad (279)$$

de forma que els valors esperats per a les funcions en ordre normal dels operadors bosònics són iguals a les mitjanes estocàstiques de les mateixes funcions després de canviar els operadors bosònics per les variables estocàstiques complexes independents. Tenim per tant, les equacions diferencials estocàstiques, ((275) juntament amb (269-272) i (273)) que regeixen l'evolució dels camps dins de la cavitat.

Aquest model es pot simplificar encara, tractant de retenir allò essencial, però fent més senzilla la manipulació de les equacions. Aquesta simplificació consisteix en menysprear l'evolució temporal dels camps injectats, és a dir el bombeig, i es basa en realitat en dues aproximacions successives: la primera, anomenada aproximació adiabàtica, rau en considerar que $\gamma_1, \gamma_2 \gg \gamma_s$ i per tant, tal i com es dedueix de les expressions (269-272) aplicades en l'equació (275) les variables $\alpha_{1,2}$ es poden eliminar adiabàticament fent $\dot{\alpha}_1 = \dot{\alpha}_2 = 0$; i la segona, anomenada *non depleting pump approximation*, parteix de reescriure els camps de (269-272) un cop s'ha fet l'eliminació adiabàtica de la forma

$$\alpha_1 = \frac{1}{\gamma_1 + i\delta_1} \mathcal{E}_p + 2i \frac{g}{\gamma_1 + i\delta} (2\alpha_2^\dagger \alpha_2 \alpha_1 + \alpha_1^\dagger \alpha_1^2 + \alpha_+^\dagger \alpha_+ \alpha_1 + \alpha_-^\dagger \alpha_- \alpha_1 + \alpha_2^\dagger \alpha_+ \alpha_-), \quad (280)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{\gamma_2 + i\delta_2} \mathcal{E}_p + 2i \frac{g}{\gamma_2 + i\delta} (2\alpha_1^\dagger \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2^\dagger \alpha_2^2 + \alpha_+^\dagger \alpha_+ \alpha_2 + \alpha_-^\dagger \alpha_- \alpha_2 + \alpha_1^\dagger \alpha_+ \alpha_-), \quad (281)$$

i considerar que $\gamma_i \gg g$, aproximació que, obviament, implica $\alpha_{1,2} \propto \mathcal{E}_p$.

Clarament, d'aquesta manera es perd certa riquesa a la dinàmica del sistema. En concret, al considerar $\alpha_{1,2}$ com a paràmetres del sistema, es perden bifurcacions que podrien afectar la solució "engegada" ($\alpha_\pm \neq 0$), però aquesta pèrdua de riquesa de l'anàlisi dinàmica no afecta les conclusions essencials, tal i com es comenta més endavant.

D'ara endavant, per tant, estudiaré un model reduït en el qual els camps injectats seran iguals (i reals sense pèrdua de generalitat), per exemple

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \rho \in \mathbb{R}. \quad (282)$$

12.2.4 Model reduït

Amb l'assumpció que els camps injectats romanen constants, i per tant satisfan (282), l'equació de Fokker-Planck del sistema continua sent com l'anterior

(267), però amb un vector desplaçament i una matriu de difusió més senzills. Ara la matriu de difusió (273) quedarà

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} \mathcal{D}^{(-)} & 0 \\ 0 & -\mathcal{D}^{(+)} \end{pmatrix}, \quad (283)$$

$$\mathcal{D}^{(-)} = ig \begin{pmatrix} \alpha_+^2 & 2\alpha_+\alpha_- + 2\rho^2 \\ 2\alpha_+\alpha_- + 2\rho^2 & \alpha_-^2 \end{pmatrix}, \quad (284)$$

$$\mathcal{D}^{(+)} = -ig \begin{pmatrix} \alpha_+^2 & 2\alpha_+\alpha_- + 2\rho^2 \\ 2\alpha_+\alpha_- + 2\rho^2 & \alpha_-^2 \end{pmatrix}, \quad (285)$$

i les components del vector desplaçament són

$$A_{\alpha_{\pm}} = -(\gamma_s + i\delta) \alpha_{\pm} + ig (\alpha_{\pm}^+ \alpha_{\pm} + 2\alpha_{\mp}^+ \alpha_{\mp} + 4\rho^2) \alpha_{\pm} + 2\rho^2 \alpha_{\mp}^+, \quad (286)$$

$$A_{\alpha_{\pm}^+} = -(\gamma_s - i\delta) \alpha_{\pm}^+ - ig (\alpha_{\pm}^+ \alpha_{\pm} + 2\alpha_{\mp}^+ \alpha_{\mp} + 4\rho^2) \alpha_{\pm}^+ + 2\rho^2 \alpha_{\mp}. \quad (287)$$

A l'igual que abans, un conjunt d'equacions de Langevin es poden obtenir a partir d'aquesta equació de Fokker-Planck. Així i tot, és convenient fer els següents canvis de variable

$$\beta_{\pm} = \sqrt{\frac{g}{\gamma_s}} \alpha_{\pm} e^{-i\psi}, \quad \beta_{\pm}^+ = \sqrt{\frac{g}{\gamma_s}} \alpha_{\pm}^+ e^{i\psi}, \quad (288)$$

$$p = 2\frac{g}{\gamma_s} \rho^2, \quad \Delta = \frac{\delta}{\gamma_s}, \quad \kappa = \frac{g}{\gamma_s}, \quad T = \gamma_s t,$$

amb

$$\sin 2\psi = \frac{\gamma_s}{g} \frac{1}{2\rho^2} = \frac{1}{p}, \quad (289)$$

de forma que les equacions de Langevin del model reduït queden ara

$$\dot{\beta}_{\pm} = -(1 + i\Delta) \beta_{\pm} + i (\beta_{\pm}^+ \beta_{\pm} + 2\beta_{\mp}^+ \beta_{\mp} + 2p) \beta_{\pm} + ipe^{-2i\psi} \beta_{\mp}^+ + \tilde{\mathcal{B}}_{\beta_{\pm},j} \xi_j(T), \quad (290)$$

$$\dot{\beta}_{\pm}^+ = -(1 - i\Delta) \beta_{\pm}^+ - i (\beta_{\pm}^+ \beta_{\pm} + 2\beta_{\mp}^+ \beta_{\mp} + 2p) \beta_{\pm}^+ - ipe^{2i\psi} \beta_{\mp} + \tilde{\mathcal{B}}_{\beta_{\pm}^+,j} \xi_j(T). \quad (291)$$

La fase ψ de (288) s'ha introduït amb el propòsit de fer que les solucions estacionàries de les equacions clàssiques, veure (294), satisfaguen $\bar{\beta}_- = \bar{\beta}_+^*$, la qual cosa simplifica l'anàlisi quàntica tal i com es pot veure en detall a les

deduccions realitzades per a l'obtenció de la solució estacionària a l'apèndix IV. D'altra banda, el punt sobre la variable β_{\pm} indica derivada respecte del temps adimensional T , i les quatre components del vector ξ satisfan les propietats de correlació enunciades anteriorment (125,126) per al soroll gaussià ara per al temps adimensional T . Anàlogament la matriu de soroll $\tilde{\mathcal{B}}$ es pot obtenir a partir de $\tilde{\mathcal{D}} = \tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{B}}^T$, com habitualment, però emprant la matriu de difusió després dels canvis (288)

$$\tilde{\mathcal{D}}^{(-)} = i\kappa \begin{pmatrix} \beta_+^2 & 2\beta_+\beta_- + p^2e^{-2i\psi} \\ 2\beta_+\beta_- + p^2e^{-2i\psi} & \beta_-^2 \end{pmatrix}, \quad (292)$$

$$\tilde{\mathcal{D}}^{(+)} = -i\kappa \begin{pmatrix} \beta_+^{+2} & 2\beta_+\beta_- + p^2e^{2i\psi} \\ 2\beta_+\beta_- + p^2e^{2i\psi} & \beta_-^{+2} \end{pmatrix}. \quad (293)$$

Aquestes equacions d'evolució quàntiques (290,291) constitueixen el model que analitzaré en detall a l'apartat següent.

12.3 Límit Clàssic

Abans d'endinsar-se a l'anàlisi de les fluctuacions quàntiques, cal conèixer els estats estacionaris del sistema i les seues propietats d'estabilitat, per assolir aquest objectiu cal escriure en primer lloc el límit clàssic de l'equació d'evolució (290). Com ja hem mencionat repetidament, el límit clàssic correspon a la mateixa equació, si s'eliminen els termes de soroll i s'estableix $\beta_j^+ = \beta_j^*$. D'aquesta forma s'obtenen les següents dues equacions diferencials per a les amplituds clàssiques β_{\pm} :

$$\dot{\beta}_{\pm} = - \left[1 + i \left(\Delta - |\beta_{\pm}|^2 - 2|\beta_{\mp}|^2 - 2p \right) \right] \beta_{\pm} + ipe^{-2i\psi} \beta_{\mp}^*. \quad (294)$$

Gràcies al reescalat (288), es pot apreciar que la dinàmica clàssica del sistema està governada solament per dos paràmetres, la desintonia normalitzada Δ i la intensitat del bombeig p .

L'estudi de les solucions estacionàries de (294) i les seues propietats d'estabilitat es mostra en detall a l'apèndix IV i aquí destacaré els resultats necessaris per continuar amb l'anàlisi quàntica del sistema.

Aquesta equació (294) té dos estats estacionaris. Primer, està l'estat estacionari trivial $\beta_{\pm} = 0$ l'estabilitat del qual està governada per dos autovalors

$$\lambda_{\pm} = -1 \pm \sqrt{p^2 - (\Delta - 2p)^2}, \quad (295)$$

la qual cosa implica que la solució trivial és estable excepte per als valors de l'amplitud de bombeig p que verifiquen $p_- < p < p_+$ amb

$$p_{\pm} = \frac{1}{3} \left(2\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 - 3} \right), \quad (296)$$

ja que en eixe cas la solució trivial esdevé linealment inestable donat que $\text{Re}(\lambda_+) > 0$. (òbviament existeix el prerequisit per tal que s'arribe a la desestabilització de la solució trivial de que $\Delta > \sqrt{3}$, ja que p és real i positiu).

En els punts d'inestabilitat, $\text{Re}(\lambda_+) = 0$, el sistema passa d'un estat trivial al no trivial, el qual es pot escriure

$$\bar{\beta}_{\pm} = \mu e^{\mp i\theta} \quad (297)$$

amb

$$\mu^2 = \frac{1}{3} \left(\Delta - 2p \pm \sqrt{p^2 - 1} \right) \quad (298)$$

i estant θ la meitat de la diferència de fase entre les amplituds dels dos modes de Gauss-Laguerre, què no està fixada per (294), i per tant resta arbitrària. En la figura (23) es mostra aquesta solució en funció de p per a tres valors de Δ .

Cal destacar que hi ha dos possibles valors de μ . Tal i com es mostra a l'apartat 17.2.3 de l'apèndix IV, la solució amb signe menys davant l'arrel (línies discontinues en la figura 23 (a)) és sempre inestable, mentre que la solució amb el signe més (línies contínues en la figura 23 (a)) és estable en tot el seu domini d'existència. Cal destacar també que si no es realitza l'aproximació de considerar el bombeig constant, com hem fet, probablement hi haurà alguna bifurcació secundària que afecte aquesta solució. Per últim, s'ha de remarcar que mentre la suma de les fases de les amplituds dels dos modes Gauss-Laguerre està fixada a zero (a causa del canvi de variables en (288)), la seua diferència de fase θ és arbitrària, la qual cosa reflecteix la invariancia rotacional del sistema ja que aquesta diferència de fase determina l'orientació en el pla transversal del mode de Gauss-Hermite emès, veure (300) més endavant.

De l'expressió (298) es dedueix que la condició necessària per a l'existència de la solució no trivial és $p > 1$, i el seu domini d'existència ve determinat per la condició

$$\Delta > 2p - \sqrt{p^2 - 1}, \quad (299)$$

condició que solament es pot satisfer si $\Delta > \sqrt{3}$, d'acord amb l'anàlisi de la solució trivial. En la figura (23 (b)) es representa el domini d'existència d'aquesta solució i també el domini d'estabilitat de la solució trivial.

A partir de les equacions anteriors es pot veure que l'estat clàssic no trivial té la següent amplitud d'envolvent lenta

$$\begin{aligned} A_s^{class}(\mathbf{r}) &= \mu [e^{-i\theta} L_+(\mathbf{r}) + e^{+i\theta} L_-(\mathbf{r})] \\ &= \left[\frac{2}{3} \left(\Delta - 2p + \sqrt{p^2 - 1} \right) \right]^{1/2} H_{10}^{\theta}(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (300)$$

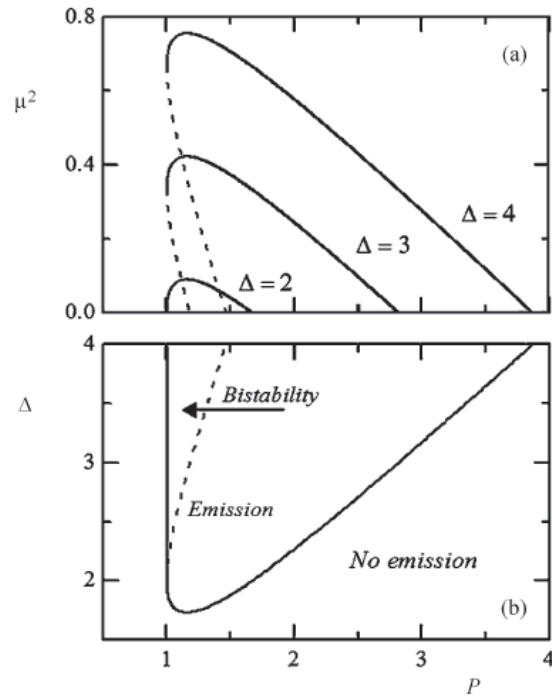


Figura 23: (a) Intensitat del feix senyal clàssic en funció de la intensitat del bombeig p per als valors indicats de la desintonia Δ . Les línies contínues indiquen les solucions lineals estables i les discontinúes les inestables. (b) Domini d'existència i estabilitat de les solucions. La solució no trivial existeix en el domini limitat per les dues línies contínues. La solució trivial és estable a l'esquerra de la línia discontinúta i a la dreta de la línia contínua de la dreta. Per tant, el sistema és biestable en la regió entre la línia discontinúta i la línia contínua esquerra, tal i com s'indica.

solució que correspon a un mode Gauss-Hermite rotat un angle θ respecte de l'eix x , estant el valor d'aquest angle arbitrari. Tal i com ja s'ha esmentat, l'arbitrarietat de θ és conseqüència de la simetria rotacional del sistema: com el bombeig i la cavitat tenen simetria rotacional, el mode Gauss-Hermite TEM_{10} senyal no pot tindre cap orientació preferent i per tant, totes les orientacions són igualment probables. Aquesta propietat és essencial per als resultat que ara es presenten sobre les fluctuacions quàntiques.

Finalment, cal adonar-se que el fet que l'emissió es produisca en un mode TEM_{10} , permet distingir entre dos modes diferents: el mode $H_{10}^\theta(\mathbf{r})$, generat clàssicament, i el seu mode ortogonal $H_{01}^\theta(\mathbf{r})$, el qual és buit de fotons en el límit clàssic. D'ara endavant, em referiré a aquestos modes com el **mode brillant i obscur**, respectivament, i els índexs passen a ser $b = (10, \theta)$ (bright) i $d = (01, \theta)$ (dark).

12.4 Anàlisi quàntica

Torne ara a la descripció quàntica del sistema. En aquest capítol, primer es dedueix l'equació de Langevin linealitzada i després es resol emprant el mètode introduït en [61] i [62] i emprat en [54, 55, 56]; a continuació es mostraran les propietats quàntiques més destacables del sistema: després de provar que el mode brillant gira aleatòriament en el pla transversal, es mostra que el mode obscur té reducció perfecta del soroll en una de les seues quadratures.

12.4.1 Linealització de les equacions de Langevin

Linealitze ara les equacions donades en (290), una aproximació vàlida per al límit del nombre alt de fotons i per tant adient per a l'objectiu marcat ja que vaig a analitzar les fluctuacions quàntiques per a la solució estacionària (297) dels camps senyal engegats lluny del seu llindar d'aparició. Conseqüentment es pot escriure

$$\beta_{\pm} = [\mu + b_{\pm}(T)] e^{\mp i\theta(T)}, \quad (301)$$

$$\beta_{\pm}^{\dagger} = [\mu + b_{\pm}^{\dagger}(T)] e^{\pm i\theta(T)}, \quad (302)$$

on la diferència de fase θ apareix explícitament per tal de mantenir b menuda ja que, com hem comentat a l'inici, $\theta(T)$ està totalment indeterminada i per tant no serà menuda. Aleshores, assumint que b_j (per construcció) i ξ_j (per definició) són quantitats menudes, i que, per ser un procés de Wiener, l'evolució de θ està governada pel soroll i aquest és petit, podem considerar $\dot{\theta}$ també menuda (aproximació vàlida lluny dels punts de la bifurcació supercrítica, tal i com es veurà als resultats de l'anàlisi); es poden linealitzar les

derivades temporals de les amplituds

$$\dot{\beta}_{\pm} = \left[\mp i\mu\dot{\theta} + \dot{b}_{\pm} \right] e^{\mp i\theta}, \quad (303)$$

$$\dot{\beta}_{\pm}^+ = \left[\pm i\mu\dot{\theta} + \dot{b}_{\pm}^+ \right] e^{\pm i\theta}, \quad (304)$$

la qual cosa ens permet escriure les equacions de Langevin linealitzades com

$$\dot{\mathbf{b}} + iN_0\mu\dot{\theta}\mathbf{v}_0 = \mathcal{L}\mathbf{b} + \mathcal{K}\bar{\mathcal{B}}\boldsymbol{\xi}, \quad (305)$$

on s'han definit els vectors

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= \text{col}(b_+, b_-, b_+^+, b_-^+), \\ \mathbf{v}_0 &= \frac{1}{N_0} \text{col}(-1, 1, 1, -1), \end{aligned}$$

estant N_0 un factor de normalització (veure (322) més endavant), \mathcal{L} és la matriu d'elements

$$\mathcal{L}_{ij} = \left. \frac{\partial A_i}{\partial \beta_j} \right|_{\beta=\bar{\beta}}, \quad (306)$$

i \mathcal{K} és la matriu diagonal

$$\mathcal{K} = \text{diag}(e^{i\theta}, e^{-i\theta}, e^{-i\theta}, e^{i\theta}). \quad (307)$$

Finalment, $\bar{\mathcal{B}}$ es refereix a la matriu $\tilde{\mathcal{B}}$ avaluada a l'estat estacionari (297). La seua expressió es pot derivar a partir de $\bar{\mathcal{D}} = \tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{B}}^T$ amb (veure (292,293))

$$\bar{\mathcal{D}} = \tilde{\mathcal{D}} \Big|_{\beta=\bar{\beta}} = \begin{pmatrix} \bar{\mathcal{D}}^{(-)} & 0 \\ 0 & \bar{\mathcal{D}}^{(+)} \end{pmatrix}, \quad (308)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{D}}^{(-)} &= [\bar{\mathcal{D}}^{(+)}]^*, \\ &= i\kappa \begin{pmatrix} \mu^2 e^{-2i\theta} & 2\mu^2 + p e^{-2i\psi} \\ 2\mu^2 + p e^{-2i\psi} & \mu^2 e^{2i\theta} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (309)$$

que depén explícitament de la diferència de fase θ . Els elements de la matriu $\bar{\mathcal{B}}$ no s'han de calcular explícitament ja que no calen per a la resta de càlculs necessaris per a l'anàlisi quàntica, però és interessant comprovar que el producte $\mathcal{K}\bar{\mathcal{B}}$ de les equacions de Langevin linealitzades no depén de la diferència de fase θ . Vejam-ho:

Escollim per a $\bar{\mathcal{B}}$ la forma general

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{B}} &= \begin{pmatrix} \bar{\mathcal{B}}^{(-)} & 0 \\ 0 & \bar{\mathcal{B}}^{(+)} \end{pmatrix}, \\ \bar{\mathcal{B}}^{(-)} &= [\bar{\mathcal{B}}^{(+)}]^* = \begin{pmatrix} a e^{-i\theta} & b e^{-i\theta} \\ c e^{i\theta} & d e^{i\theta} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (310)$$

on els elements (a, b, c, d) són números complexos i donat que $\bar{\mathcal{B}}^{(-)}\bar{\mathcal{B}}^{(-)T}$ té la forma

$$\bar{\mathcal{B}}^{(-)}\bar{\mathcal{B}}^{(-)T} = \begin{pmatrix} (a^2 + b^2) e^{-2i\theta} & ac + bd \\ ac + bd & (c^2 + d^2) e^{2i\theta} \end{pmatrix}, \quad (311)$$

hauran de complir les relacions

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = i\kappa\mu^2, \quad (312)$$

$$ac + bd = i\kappa(2\mu^2 + pe^{-2i\psi}). \quad (313)$$

com es dedueix immediatament de la seua equivalència amb (309). D'aquí es pot comprovar que el producte $\mathcal{K}\bar{\mathcal{B}}$ és independent de la diferència de fase, tal i com es mostra a continuació

$$\mathcal{K}\bar{\mathcal{B}}^{(-)} = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ae^{-i\theta} & be^{-i\theta} \\ ce^{i\theta} & de^{i\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \quad (314)$$

A més, ens serà útil el següent resultat. El producte

$$\mathcal{K}\bar{\mathcal{B}}(\mathcal{K}\bar{\mathcal{B}})^T = \mathcal{K}\bar{\mathcal{B}}\bar{\mathcal{B}}^T\mathcal{K} = \mathcal{K}\bar{\mathcal{D}}\mathcal{K}, \quad (315)$$

coincideix amb la matriu $\bar{\mathcal{D}}$ original amb $\theta = 0$. Explícitament:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}\bar{\mathcal{D}}\mathcal{K} &= \bar{\mathcal{D}}|_{\theta=0} \\ &= i\kappa \begin{pmatrix} \mu^2 & 2\mu^2 + pe^{-2i\psi} & 0 & 0 \\ 2\mu^2 + pe^{-2i\psi} & \mu^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu^2 & -2\mu^2 - pe^{-2i\psi} \\ 0 & 0 & -2\mu^2 - pe^{-2i\psi} & -\mu^2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (316)$$

com es comprova de forma trivial.

12.4.2 Esbrinant la solució de les equacions de Langevin linealitzades

Per resoldre les equacions linealitzades de Langevin (305), seguiré, com ja s'ha dit, un procediment anàleg al de [54, 55, 56, 61, 62]. El mètode consisteix en projectar (305) sobre els autovectors de l'operador \mathcal{L} , i d'aquesta forma, resoldre les equacions lineals. El fonament del mètode radica en què en un problema lineal, la dinàmica dels autovectors està governada pels seus autovalors. Per això un autovalor nul implicarà fluctuacions infinites per al seu autovector i un autovalor mínim implicarà fluctuacions mínimes en el seu autovector.

Passe ara al nostre problema: El conjunt d'autovalors i autovectors de l'operador \mathcal{L} no és un sistema ortonormal sinó biortonormal, la qual cosa vol

dir que existeix un sistema d'autovectors i autovalors per als operadors \mathcal{L} i \mathcal{L}^\dagger tal que es verifica

$$\mathcal{L}\mathbf{v}_j = \lambda_j\mathbf{v}_j \quad \mathcal{L}^\dagger\mathbf{w}_j = \lambda_j^*\mathbf{w}_j, \quad (317)$$

de forma que

$$\mathbf{w}_m^* \cdot \mathbf{v}_n = \delta_{mn}. \quad (318)$$

El càlcul dels autovalors dels operadors \mathcal{L} i \mathcal{L}^\dagger resulta

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 0, & \lambda_1 &= -2, \\ \lambda_2 &= \lambda_2(p, \Delta), & \lambda_3 &= -2 - \lambda_2, \end{aligned} \quad (319)$$

on es veu que l'autovalor λ_0 és sempre nul. Açò significa que el seu autovector, denominat mode de Goldstone, és neutralment estable, és a dir que l'observable associat a ell pot prendre qualsevol valor possible ja que les seues fluctuacions no seran ni esmorteïdes ni amplificades. Clarament, aquesta propietat reflecteix la indeterminació de la diferència de fase entre els dos modes Gauss-Laguerre, θ , o el que és el mateix, la indeterminació de l'orientació en el pla transversal del mode de Gauss-Hermite eixint. L'autovalor nul implica, per tant, que les fluctuacions introduïdes pel soroll quàntic en aquesta orientació no decauen i en conseqüència el soroll quàntic introduirà rotacions arbitràries en aquest mode eixint. Aleshores, el trencament de la simetria rotacional del sistema introduït per l'aparició del mode de Gauss-Hermite és, en cert sentit, contrarrestat pel soroll quàntic que fa possible qualsevol orientació.

Juntament amb l'autovalor $\lambda_0 = 0$, apareix l'autovalor $\lambda_1 = -2$ l'autovector del qual té la màxima taxa de decaïment possible per al valor dels paràmetres del sistema. Com es veurà ara de seguida, l'observable associat a l'autovector λ_1 és el que presenta *squeezing* perfecte.

D'altra banda, els dos altres autovalors, λ_2 i λ_3 , són complexos en general; però assoleixen els valors 0 i -2 en els punts de bifurcació (què són els punts de l'espai de paràmetres que separen les regions on la solució estacionària (297) existeix o no). Açò implica que els seus autovectors exhibeixen la compressió habitual associada únicament a les bifurcacions. Aquesta compressió no és perfecta (solament sembla perfecta en el tractament lineal del problema tal i com s'ha comentat a dalt) i es degrada ràpidament si els paràmetres del sistema s'aparten dels punts de bifurcació. Pel que fa a l'anàlisi d'aquest *squeezing*, en quines quadratures es produeix i amb quin percentatge, val a dir que és en tot anàleg a l'estudi realitzat al capítol anterior i per tant les conclusions relatives a l'obtenció de compressió del soroll seran també anàlogues i no contenen cap aportació novedosa. Per aquest darrer motiu, i pel

fet que les expressions dels autovectors i autovalors implicats és força complicada, obviaré aquest anàlisi en aquest capítol. Així que, d'ara endavant em centraré en l'anàlisi dels dos modes associats als dos autovalors que connecten amb el trencament de simetria.

No és difícil trobar que els dos autovectors de \mathcal{L} associats a λ_0 i λ_1 són

$$\mathbf{v}_0 = \frac{1}{N_0} \text{col}(-1, 1, 1, -1), \quad (320)$$

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{N_0} \text{col}(e^{i\phi_0}, -e^{i\phi_0}, e^{-i\phi_0}, -e^{-i\phi_0}), \quad (321)$$

amb

$$N_0 = -4 \cos \phi_0 \quad (322)$$

un factor de normalització i ϕ_0 una quantitat real donada per

$$e^{2i\phi_0} = \frac{\mu^2 + pe^{-i\psi}}{2(\mu^2 + p) - (\Delta + i)}. \quad (323)$$

I per als autovectors de \mathcal{L}^\dagger s'obté

$$\mathbf{w}_0 = \frac{1}{N_0} \text{col}(e^{i\phi_0}, -e^{i\phi_0}, -e^{-i\phi_0}, e^{-i\phi_0}), \quad (324)$$

$$\mathbf{w}_1 = \frac{1}{N_0} \text{col}(1, -1, 1, -1). \quad (325)$$

Un cop s'obtenen aquestos autovectors dels operadors lineals, es pot procedir a projectar sobre ells les fluctuacions quàntiques. Definim les projeccions

$$c_j = \mathbf{w}_j^* \cdot \mathbf{b}, \quad j = 0, 1. \quad (326)$$

que poden ser relacionades fàcilment amb les fluctuacions de les **quadra- tures associades als modes brillant i obscur** H_{10}^θ i H_{01}^θ . Per establir aquesta relació convé recordar (301,302) que

$$b_\pm = e^{\pm i\theta} \beta_\pm - \mu, \quad (327)$$

$$b_\pm^+ = e^{\mp i\theta} \beta_\pm^+ - \mu, \quad (328)$$

de forma que la projecció (326) per als dos primers autovectors serà

$$c_0 = e^{-i\phi_0} e^{i\theta} \beta_+ - e^{-i\phi_0} e^{-i\theta} \beta_- - e^{i\phi_0} e^{-i\theta} \beta_+^+ + e^{i\phi_0} e^{i\theta} \beta_-^+, \quad (329)$$

$$c_1 = e^{i\theta} \beta_+ - e^{-i\theta} \beta_- + e^{-i\theta} \beta_+^+ - e^{i\theta} \beta_-^+, \quad (330)$$

si recordem, per expansió de l'expressió dels operadors creació i destrucció dels modes Gauss-Hermite (254) en l'expressió de les quadratures d'aquestos modes (255), és immediat comprovar que

$$X_{10,\theta}^{\phi_0} = \frac{i}{\sqrt{2}}c_0, \quad X_{01,\theta}^{\pi/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}c_1. \quad (331)$$

Equivalència que també es pot aplicar als modes brillant i obscur (donat que, per definició, són els mateixos modes Gauss-Hermite) i per tant, reescriurem, de forma més senzilla i que permet entendre millor la descripció física del fenomen estudiat:

$$X_b^{\phi_0} = \frac{i}{\sqrt{2}}c_0, \quad X_d^{\pi/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}c_1. \quad (332)$$

Per solucionar el problema lineal, es projecta també l'equació de Langevin linealitzada (305), en multiplicar-la per \mathbf{w}_j^* per l'esquerra i s'obté

$$\dot{\theta}(T) = \frac{1}{iN_0\mu} \mathbf{w}_0^* \mathcal{K} \bar{\mathcal{B}} \boldsymbol{\xi}(T), \quad (333)$$

$$\dot{c}_1(t) = \lambda_1 c_1(T) + \mathbf{w}_1^* \mathcal{K} \bar{\mathcal{B}} \boldsymbol{\xi}(t), \quad (334)$$

on s'ha pres $c_0 = 0$ (es pot fer perquè la fase arbitrària θ pot ser redefinida de forma que reculla tota la informació d'eixe mode (veure [56])). Recordem ara, que tot i que tant \mathcal{K} com $\bar{\mathcal{B}}$ depenen de la fase θ , $\mathcal{K} \cdot \bar{\mathcal{B}}$ no en depèn, tal i com s'ha comprovat a l'expressió (314). Aquestes equacions estan per tant desacoblades per a θ i c_1 .

La solució d'aquestes equacions en el límit estacionari (veure apèndix IV, apartat 17.3), per a valors suficientment grans de T , és

$$\theta(T) = \theta(0) + \frac{\mathbf{w}_0^* \mathcal{K} \bar{\mathcal{B}}}{iN_0\mu} \int_0^T dT' \boldsymbol{\xi}(T'), \quad (335)$$

$$c_1(T) = \mathbf{w}_1^* \mathcal{K} \bar{\mathcal{B}} \int_0^T dT' \boldsymbol{\xi}(T') e^{-2(T'-T)}. \quad (336)$$

Finalment, de cara a l'estudi de la reducció del soroll, el que interessa és conèixer els espectres de fluctuacions de $\theta(T)$ i $c_1(T)$ ja que són les projeccions relacionades amb les quadratures del mode fosc.

D'acord amb els càlculs presentats a l'apèndix IV es veu que la funció de correlació de la projecció c_1 és

$$C_1(\tau) = \langle c_1(T) c_1(T + \tau) \rangle = \frac{\mathbf{w}_1^* \mathcal{K} \bar{\mathcal{D}} \mathcal{K} \mathbf{w}_1^*}{4} e^{-2|\tau|}, \quad (337)$$

i que els seu espectre de correlació serà

$$\tilde{C}_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\omega\tau} C_1(\tau) = -\frac{4\kappa}{4 + \omega^2}. \quad (338)$$

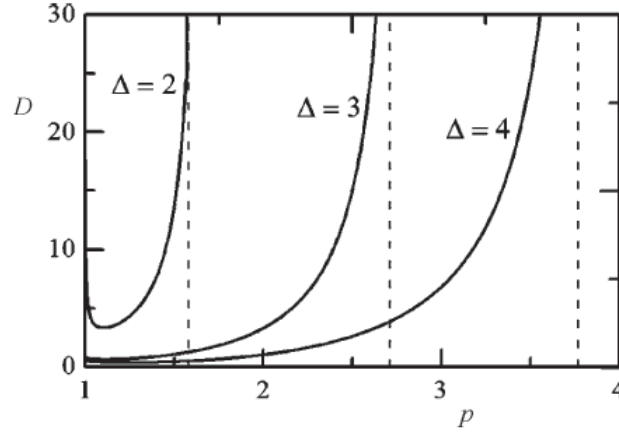


Figura 24: Dependència de la constant de difusió normalitzada $D = d_\theta/\kappa$ en funció de la intensitat del bombeig p per als valors de la desintonia indicats en la figura. Les línies verticals discontinúes indiquen els valors de p per als quals la solució no trivial deixa d'existir-hi.

12.4.3 Dinàmica de l'orientació del mode brillant

Primer analitzaré la dinàmica de l'orientació del patró transversal del camp eixint, governat per θ . L'equació (335) mostra que la fase θ difon amb el temps, la qual cosa implica que l'orientació del mode clàssic corresponent a l'emissió (300) exhibeix un comportament aleatori i després d'un cert temps, el patró de distribució del mode pot estar orientat en qualsevol angle comprès entre 0 i 2π . Aquest és el sentit que assoleix en aquesta cas la paraula indeterminació.

És important conèixer quant difon θ . Tal i com es dedueix a l'apartat 17.3 de l'apèndix IV, la variància de θ ve donada per

$$\langle \theta(T), \theta(T + \tau) \rangle = d_\theta T, \quad (339)$$

on es torna a emprar la notació usual (47) $\langle A, B \rangle = \langle AB \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle$, i

$$\begin{aligned} d_\theta &= -\frac{\mathbf{w}_0^* \mathcal{K} \bar{\mathcal{D}} \mathcal{K} \mathbf{w}_0^*}{N_0^2 \mu^2} \\ &= \kappa \frac{\mu^2 \sin 2\phi_0 + p \sin [2(\phi_0 + \psi)]}{4\mu^2 \cos^2 \phi_0}, \end{aligned} \quad (340)$$

amb ψ , μ , i ϕ_0 donats per (289), (298) i (323).

En la figura (24), es representa $D \equiv d_\theta/\kappa$ en funció de la intensitat del bombeig p per a diversos valors de Δ . Vull remarcar que per a $\mu \rightarrow 0$ (per

exemple, en la bifurcació supercrítica que ocorre en la branca superior del domini d'existència de (297), veure figura (23)), $D \rightarrow \infty$. Aquest és un resultat esperable intuïtivament si pensem que per a un nombre mitjà de fotons del mode eixint proper a zero, l'orientació del patró espacial pot canviar abruptament amb l'addició d'un parell de fotons. Tal i com el sistema s'allunya d'aquesta bifurcació, el nombre mitjà de fotons s'incrementa ràpidament i, en conseqüència, és més difícil per a la fluctuació canviar l'orientació del patró, la qual cosa és consistent amb el decreixement de D . Tal i com denota el valor quantitatiu, excepte molt a prop de les bifurcacions supercrítiques, D és una quantitat de l'ordre de la unitat, és a dir que la constant de difusió d_θ és bàsicament del mateix ordre de magnitud que $\kappa = g/\gamma_s$, el qual hem assumit que és un nombre molt petit. Conseqüentment, encara que el mode eixint TEM està girant aleatòriament en el pla transversal, la rotació és molt lenta excepte molt a prop dels punts de bifurcació supercrítica. Aquest resultat, a la seua vegada, indica en quin domini de l'espai de paràmetres és vàlida la linealització del problema, ja que per fer-la hem assumit que $\dot{\theta}$ era petit.

12.4.4 Propietats de l'*squeezing* no crític del mode obscur

Vaig ara a pel resultat principal del present capítol: la demostració de que el mode obscur té una reducció completa del soroll en la seua quadratura de fase independentment dels paràmetres del sistema. Amb aquest pròposit es tractaran les fluctuacions de quadratures en el sentit en el que es tracten en la detecció homodina (cf. apartat 2.5 "detecció de la llum comprimida"). Tal i com també s'ha dit a dalt, les fluctuacions de les quadratures a l'exterior de la cavitat òptica venen donades per l'espectre de fluctuacions, el qual per al problema general d'una quadratura X_m^φ (m es refereix a qualsevol dels modes transversals del problema tractat aquí) ve donat per

$$V(X_m^\varphi; \omega) = 1 + S^{out}(X_m^\varphi; \omega) \quad (341)$$

amb $S^{out}(X_m^\varphi; \omega)$ l'espectre de *squeezing* que, si es pren en compte el reescalat (288), es pot escriure com

$$S^{out}(X_m^\varphi; \omega) = \frac{2}{\kappa} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\omega\tau} \langle X_m^\varphi(T), X_m^\varphi(T + \tau) \rangle. \quad (342)$$

Definit d'aquesta forma, $V(\bar{\omega}) = 0$ implica absència completa de fluctuacions en $\omega = \bar{\omega}$, mentre que $V(\bar{\omega}) = 1$ implica que les fluctuacions en $\omega = \bar{\omega}$ són les corresponents a l'estat buit.

A la detecció homodina, el perfil espacial del camp oscil·lador local (LOF) selecciona el mode transversal que serà mesurat, mentre que la seua fase selecciona una quadratura en particular d'aquest mode. En conseqüència, per mesurar el grau de compressió de les fluctuacions, cal que el LOF estiga perfectament superposat al perfil del mode obscur $H_{01}^\theta(\mathbf{r})$. Mirem doncs, l'angle d'orientació de les quadratures: tal i com s'ha vist en (332) les quadratures independents d'aquest mode són $X_d^{\phi_0}$ i $X_d^{\pi/2}$, a partir de les quals es pot construir la quadratura general

$$X_d^\varphi = \frac{1}{\cos \phi_0} \left[X_d^{\phi_0} \cos \varphi + X_d^{\pi/2} \sin(\varphi - \phi_0) \right]. \quad (343)$$

Expressió obtinguda a partir de les més generals $X_d^\varphi = X_d^0 \cos \varphi + X_d^{\pi/2} \sin \varphi$ i $X_d^{\phi_0} = X_d^0 \cos \phi_0 + X_d^{\pi/2} \sin \phi_0$.

A partir d'aquí, emprant la relació entre les quadratures independents i les projeccions c_j (332), i recordant l'espectre de correlació esbrinat (338) i que $c_0 = 0$, és trivial trobar que l'espectre del soroll d'aquesta quadratura general serà

$$V(X_d^\varphi; \omega) = \frac{\cos^2 \varphi + \sin^2(\varphi - \phi_0)}{\cos^2 \phi_0} - \frac{\sin^2(\varphi - \phi_0)}{\cos^2 \phi_0} \frac{1}{1 + (\omega/2)^2}. \quad (344)$$

Aquesta expressió mostra que les propietats quàntiques del mode obscur del sistema estudiat són exactament les mateixes que el nostre grup va trobar en [54, 56] per al cas de la cavitat DOPO: per a $\omega = 0$, $V(X_d^\varphi; \omega = 0) = \cos^2 \varphi / \cos^2 \phi_0$, i per tant, aquest mode presenta absència total de fluctuacions en la seua quadratura de fase $\varphi = \pi/2$, mentre que l'altra quadratura ($\varphi = \phi_0$ en aquest cas) arrosega el nivell de fluctuacions del buit. Qualsevol altra quadratura amb φ entre $\pi/2$ i ϕ_0 està comprimida per sota del nivell del buit, amb un nivell d'*squeezing* més menut tal i com φ s'acost a ϕ_0 . Aquest resultat és independent dels paràmetres del sistema, tal i com s'esperava donat que la reducció de soroll jeu solament sobre el trencament de simetria.

Pot semblar, però, que aquest resultat viola el principi d'incertitud, ja que el producte de l'espectre de soroll corresponent a les dues quadratures ortogonals està per sota de la unitat. Però cal dir que aquest no és el cas, ja que - tal i com ja es va demostrar en [56] i s'ha recordat al principi d'aquest apartat - el parell canònic de les quadratures comprimides no és una altra quadratura, sinó l'orientació del mode obscur θ , el qual està de fet indeterminat a llarg termini.

12.5 Conclusió

En aquest capítol s'ha proposat un model per a una cavitat Kerr en la qual el trencament de simetria rotacional esdevé quan s'està per sobre del llindar d'emissió: la cavitat no lineal té una simetria rotacional perfecta i és bombejada amb feixos gaussians, però el mode senyal té la forma d'un mode TEM_{10} que trenca aquesta simetria rotacional. S'ha demostrat, en un límit especial (el límit en el qual els camps injectats són considerats constants), que el trencament de la simetria rotacional implica d'una banda, la difusió de l'orientació del mode eixint i de l'altra, la compressió perfecta en fase de la quadratura del mode TEM_{01} què està girat $\pi/2$ respecte del mode senyal TEM_{10} . Aquests resultats estan en total acord amb l'estudi previ del nostre grup sobre l'*squeezing* aconseguït amb el trencament de simetria en un model DOPO [54, 56]. L'interès dels resultats presentats en aquest treball és doble. D'un costat, s'ha proposat un sistema diferent al dels articles anteriors per tal d'observar el mateix fenomen, la qual cosa demostra la generalitat dels resultats i d'altre costat, s'ha vist que contràriament al DOPO, en el qual per aconseguir degeneració de freqüències se sol trencar la simetria rotacional [54, 56], en el cas d'un medi $\chi^{(3)}$ aquest problema no existeix.

Pel que fa a la configuració dels espills, el model proposat aquí és una cavitat confocal. Cal destacar però, que els ingredients essencials per al fenomen de l'*squeezing* obtingut mitjançant el trencament de simetria rotacional són: 1) invariança rotacional i 2) que els fotons senyals tenen OAM no nul. Aleshores, la dinàmica dels modes injectats és irrelevant excepte per als detalls quantitius. En aquest sentit, l'ús d'una cavitat confocal no és essencial i qualsevol altra cavitat $\chi^{(3)}$ en la qual els modes senyal siguen els adients exhibiria el mateix fenomen. En conseqüència, aquest fenomen pot ser observat en altres cavitats $\chi^{(3)}$ com ara els ressonadors en fibra òptiques. En aquest sentit, és de destacar que les fibres òptiques permeten l'oscil·lació òptica paramètrica tal i com s'ha demostrat [42, 71, 89] i per tant anàlogament poden presentar propietats quàntiques interessants.

Altre comentari s'escau sobre l'aproximació del camp injectat invariable: Com afectaria la dinàmica dels modes injectats als resultats que hem derivat? La inclusió de les equacions dels camps a l'estudi introduiria més autovalors obviament (els corresponents a l'estabilitat d'eixos modes) i modificaria alguns dels autovalors que governen la dinàmica dels modes senyal, però no modificaria l'existència d'un mode Goldstone un cop que el senyal s'ha engegat. Per tant, com que la dinàmica del bombeig no destrueix completament l'estabilitat de l'emissió de l'ona contínua (CW) del camp senyal, quan els modes senyal són estables el fenomen hi serà present. Podria ocórrer que el model general exhibira bifurcacions de Hopf que reduirien el domini

d'existència estable per als modes senyal CW, però seria un domini finit d'estabilitat per a aquests modes i en ell es donarien les propietats de compressió perfecta del soroll que s'han descrit en aquest treball.

Destaque, finalment, dues propietats importants. En [54], s'ha demostrat per al model DOPO que les petites imperfeccions en la simetria rotacional solament causen una degradació menuda del nivell d'*squeezing* (p. ex. una relació 2:1 entre les pèrdues de la cavitat que afecte les dues direccions ortogonals en el pla transversal encara permet una reducció de 10 dB pel que fa al nivell de soroll). D'altra banda, en treballs recents del nostre grup d'investigació [56] es demostra, emprant tècniques de simulació numèrica, que, tot i que la deducció de que la compressió de soroll aconseguida mitjançant el trencament de simetria rotacional és perfecta es realitza formalment dins de l'aproximació lineal, el resultat és vàlid igualment per als càlculs que donen acompte de les equacions no linealitzades.

13 Obtenció de *squeezing* de quadratures no crític mitjançant el trencament de la simetria de polarització

13.1 Introducció

Tal i com s'ha demostrat al capítol anterior, i a altres treballs del nostre grup de recerca [27, 54, 55, 56] que estudien el mateix fenomen en un model d'oscil·lador òptic paramètric, el trencament espontani de la simetria rotacional d'una cavitat òptica no lineal possibilita l'obtenció de compressió perfecta de quadratures no crítica, tant en oscil·ladors òptics paramètrics de tipus I degenerats en freqüència (DOPO) [54, 56] com en cavitats $\chi^{(3)}$ de barreja de quatre ones degenerades [27]. L'expressió *compressió no crítica* vol significar aquí que el grau de compressió assolit no depèn dels valors del paràmetres del sistema (és a dir, no depèn en l'espai de paràmetres de la distància a cap punt de bifurcació) una vegada el sistema es troba per sobre del llindar de generació del camp senyal.

Ara bé, no és el trencament de la simetria rotacional l'únic capaç de produir un resultat com el descrit. De fet, el nostre grup ho havia demostrat amb anterioritat en el trencament de la *simetria traslacional* en un model de DOPO de tipus I amb cavitat d'espills plans [60, 61, 62]. En aquest sistema es formen de manera espontània el que s'anomenen estructures dissipatives [73] que són patrons formats al pla transversal a l'eix òptic del sistema [46, 57, 80, 83]. Aquests patrons poden ser regulars (com ara patrons hexagonals, quadrats, de tires o altres), irregulars (com els patrons laberíntics), o formats per estructures localitzades. En tots els casos l'aparició d'un patró concret implica un trencament de la simetria traslacional, al llarg de les direccions ortogonals a l'exi òptic del sistema. En aquest cas, més complexe des d'un punt de vista analític donat el fet que el nombre de modes senyal involucrats és infinit, també hi apareix un mode de Goldstone (que reflecteix la simetria traslacional del sistema) i un mode company amb dissipació màxima que és el que mostra compressió perfecta de la variable canònica respecte de la posició del patró que és el seu moment lineal (més concretament, el gradient espacial del patró desplaçat $\pi/2$ en fase).

Així doncs, sembla que el trencament de qualsevol simetria poguera donar lloc al fenomen de generació de llum perfectament comprimida de forma no crítica. La qüestió que ens plantejem en aquest capítol és com aconseguir aquest fenomen amb el trencament d'una altra simetria diferent: la simetria de polarització d'una cavitat òptica no lineal adequada. Anomenarem a aquest trencament de simetria SPSB (*Spontaneous Polarization Symmetry*

Breaking).

A partir del què hem après al capítol anterior respecte al trencament de la simetria rotacional, per tal d'assolir compressió perfecta del soroll a les quadratures mitjançant SPBS, la cavitat no lineal ha de verificar alguns requisits previs. Aquests són els següents:

i) En primer lloc ha de posseir el què anomenarem un parametre lliure de polarització (FPP, *Free Polarization Parameter*), és a dir que algun paràmetre de la polarització del camp senyal no ha d'estar fixat per les equacions dinàmiques del sistema. Aquest paràmetre pot ser, per exemple, l'excentricitat o l'orientació de l'el·lipse de polarització.

És interessant destacar el fet que la variació contínua d'un d'aquests paràmetres de la polarització es correspon amb rotacions sobre l'esfera de Poincaré, definida pels paràmetres de Stokes de l'estat de polarització [2]. Per exemple, una polarització lineal es correspon amb un punt sobre l'equador de l'esfera de Poincaré, i variar la orientació d'aquesta polarització lineal es correspon amb desplaçar-se al llarg d'aquest equador. Es veu així una analogia i una connexió entre el trencament de la simetria rotacional (que suposava la deslocalització de l'angle d'orientació d'un mode induïda pel soroll) i el trencament de la simetria de polarització (que suposa la deslocalització del punt sobre l'esfera de Poincaré que representa l'estat de polarització pel mateix motiu [36]).

ii) Obviament el sistema ha de permetre l'existència d'una solució de mitjana no nula per al camp senyal; de forma que un cop es supere el llindar per a la generació d'un tal mode senyal, l'assoliment aleatori d'un valor concret per a l'FPP - aleatori donat que el valor concret es deurà únicament al soroll (més precisament, a les fluctuacions quàntiques) - automàticament produirà un SPBS ja que el sistema haurà adquirit un valor concret (de l'orientació de l'el·lipse de polarització, per exemple) d'entre el continu de valors possibles.

Des d'un punt de vista matemàtic, un sistema com aquest ha de tenir un mode de Goldstone (un mode amb un autovalor nul a la matriu d'estabilitat independentment dels paràmetres del sistema), que com hem comentat repetidament, reflecteix la igualtat de probabilitats de trobar qualsevol valor de l'FPP. Sabem, d'altra banda per l'estudi dels trencaments de les simetries rotacional i traslacional, que associat al mode de Goldstone hi ha un mode company què és un mode amb decaïment màxim, i també què es pot provar que aquest nou mode és el parell canònic del mode de Goldstone i que coincideix amb una quadratura del mode ortogonal a aquell en què ocorre l'emissió clàssica [56, 61]. En el capítol anterior hem utilitzat la nomenclatura de mode brillant per aquell mode en què ocorre l'emissió clàssica i mode obscur per al mode ortogonal al mode brillant (obscur perquè l'emissió clàssica en aquest mode és zero en tot instant). Mantindrem aquí la mateixa

notació.

Així doncs, les fluctuacions quàntiques actuaran lliurement sobre l'FPP, convertint-lo en totalment indeterminat. Això implica que el mode brillant, què és seleccionat inicialment per les fluctuacions quàntiques, no és un mode estàtic doncs està afectat per difusió. Això és el què permet la reducció completa del soroll del seu parell canònic conjugat (una quadratura del mode obscur), d'acord amb el principi d'incertitud d'Heisenberg.

Els requisits què hem exposat es poden trobar, en principi, tan en cavitats no lineals de tipus $\chi^{(2)}$ com de tipus $\chi^{(3)}$. L'estudi de la cavitat $\chi^{(2)}$ ha quedat reflectit a l'article publicat pel nostre grup d'investigació [56] i en aquest treball no hi desenvoluparé més detalls donat que la present tesi es limita a l'estudi de cavitats tipus Kerr. Solament destaque que el principal problema dels DOPO tipus-II (què són els sistemes $\chi^{(2)}$ que poden mostrar SPBS) és que no existeixen, és a dir, que no tenen emissió degenerada; a la qual cosa cal afegir que, tot i que aquesta degeneració pot forçar-se experimentalment, les tècniques emprades impliquen el trencament de la simetria i per tant, en conclusió, els resultats obtinguts relatius al DOPO tipus-II amb freqüència degenerada no són assolibles tècnicament al menys pel que sabem avui, tal i com s'ha explicat al capítol anterior (veure apartat 12.1 i [56]).

13.2 Descripció del sistema: cavitat $\chi^{(3)}$ i Hamiltonià

Atenent a allò comentat adés, un model de cavitat $\chi^{(3)}$ en la què un trencament de la simetria de polarització, un SPBS, siga possible, òbviament ha de posseir aquesta simetria. Això es verifica si el medi no lineal és isòtrop i la cavitat òptica no afavoreix cap polarització particular. Més encara: donat que hem d'injectar camps de bombeig des de l'exterior, aquests camps no han de privilegiar cap polarització en el camp senyal que es genere. Això suggereix que els camps de bombeig han d'ésser dos camps de freqüències diferents a la que tindrà el camp senyal i que han d'estar polaritzats ortogonalment entre si. Després vorem que per tal de no afavorir cap polarització en el camp senyal, la polarització dels camps de bombeig haurà d'ésser circular.

Així doncs sembla què un esquema semblant a l'utilitzat en el capítol anterior seria un bon candidat, reemplaçant el paper jugat pel moment angular orbital (OAM) pel moment angular intrínscic, és a dir, l'estat de polarització dels camps. Passem a descriure el sistema amb tot el detall necessari.

El sistema escollit és de nou un resonador Kerr en el qual el SPBS pot comprimir el mode obscur eixint. Es considera un medi $\chi^{(3)}$ isotròpic a l'interior d'una cavitat isotròpica a la polarització, bombejat per dos modes copropagants ortogonalment polaritzats de freqüències ω_1 i ω_2 , de tal forma que la freqüència del mode senyal ω_s acomplisca $\omega_s = (\omega_1 + \omega_2) / 2$ i estiga a

prop del mode resonant a la cavitat ω_c (veure figura (25)).

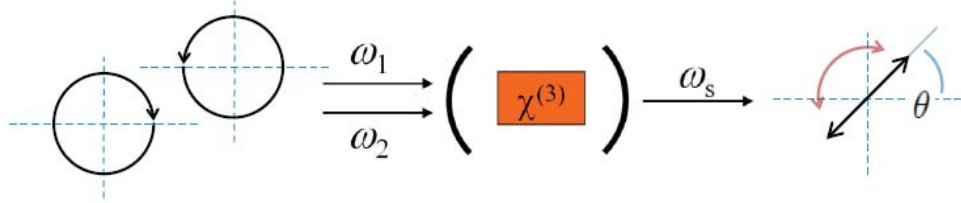


Figura 25: Il·lustració sobre el sistema estudiat: dos modes polaritzats circularment i ortogonal (dextrògir i levògir) incideixen a la cavitat Kerr amb freqüències ω_1 i ω_2 . En virtut dels processos de Four Wave Mixing, el mode senyal té una freqüència $\omega_s = (\omega_1 + \omega_2) / 2$, està polaritzat linealment i la seua orientació respecte a un eix en el pla transversal difon amb total indeterminació (és l'FPF del sistema).

Per més simplicitat es fixa que els modes injectats tenen un comportament clàssic i, a l'igual que en l'aproximació adiabàtica del capítol anterior, s'ignora la seua evolució arran de la interacció amb els modes senyal intracavitat.

El camp total al pla de la cintura de la cavitat, on es troba el medi $\chi^{(3)}$, es pot descomposar en la seua part clàssica i quàntica: $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_p(\mathbf{r}, t) + \hat{\mathbf{E}}_s(\mathbf{r}, t)$ amb

$$\mathbf{E}_p = i\mathcal{F}G(\mathbf{r}) \sum_{j=1,2} (\mathbf{e}_x \alpha_{jx} + \mathbf{e}_y \alpha_{jy}) e^{-i\omega_j t} + c.c., \quad (345)$$

$$\hat{\mathbf{E}}_s = i\mathcal{F}G(\mathbf{r}) [\mathbf{e}_x \hat{a}_x(t) + \mathbf{e}_y \hat{a}_y(t)] e^{-i\omega_s t} + H.c., \quad (346)$$

on

$$\mathcal{F}^2 = \frac{\hbar\omega_s}{2\varepsilon_0 n L}, \quad (347)$$

amb n l'índex de refracció i L la longitud òptica.

A més, el mode de la cavitat TEM₀₀ amb radi w es considera el mateix per als modes senyal i injectat (aproximació basada en la consideració de que $\omega_1 \simeq \omega_2 \simeq \omega_s$ tal i com s'explica en detall a l'apèndix III)

$$G(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{w} e^{-r^2/w^2}. \quad (348)$$

Si a més d'adonar-nos que es tracta d'un medi isotròpic, ignorem la seua dispersió en el rang de freqüència considerat (cf. apèndix III), la forma del

tensor de susceptibilitat serà [3]:

$$\chi_{ijkl}(\omega_a + \omega_b - \omega_c; \omega_a, \omega_b, -\omega_c) = \chi_{xxyy}(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl}) + \chi_{xyyx}\delta_{il}\delta_{jk}, \quad (349)$$

i això permet escriure l'Hamiltonià del sistema en la imatge d'interacció com $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{int}$, amb

$$\hat{H}_0 = \hbar\delta(\hat{a}_x^\dagger\hat{a}_x + \hat{a}_y^\dagger\hat{a}_y), \quad (350)$$

$$\hat{H}_{int} = \frac{3}{4}\hbar g \left(\hat{H}_{spm} + \hat{H}_{cpm} + \hat{H}_{fwm} \right), \quad (351)$$

amb

$$\delta = \omega_c - \omega_s, \quad (352)$$

$$g = \frac{-8\varepsilon_0 l_m \chi_{xxxx} \mathcal{F}^4}{\hbar\pi w^2}, \quad (353)$$

on la notació és la mateixa que s'ha emprat en (265) i on s'ha assumit que la longitud del medi $\chi^{(3)}$ és menor que la longitud Rayleigh de la cavitat. En \hat{H}_{int} els termes \hat{H}_{spm} , \hat{H}_{cpm} i \hat{H}_{fwm} corresponen, d'acord amb la notació emprada en aquest treball, als processos de *Selph-Phase*, *Cross-Phase Modulation* i *Four Wave Mixing* respectivament i la seua expressió és

$$\hat{H}_{spm} = \hat{a}_x^{\dagger 2}\hat{a}_x^2 + \hat{a}_y^{\dagger 2}\hat{a}_y^2, \quad (354)$$

$$\begin{aligned} \hat{H}_{cpm} = & 4\mathcal{A}\hat{a}_x^\dagger\hat{a}_x\hat{a}_y^\dagger\hat{a}_y \\ & + \sum_{j=1,2} 4(|\alpha_{jx}|^2 + \mathcal{A}|\alpha_{jy}|^2)\hat{a}_x^\dagger\hat{a}_x \sum_{j=1,2} 4(|\alpha_{jy}|^2 + \mathcal{A}|\alpha_{jx}|^2)\hat{a}_y^\dagger\hat{a}_y, \end{aligned} \quad (355)$$

$$\begin{aligned} \hat{H}_{fwm} = & \mathcal{B}\hat{a}_x^{\dagger 2}\hat{a}_y^2 + 2(\alpha_{1x}\alpha_{2x} + \mathcal{B}\alpha_{1y}\alpha_{2y})\hat{a}_x^{\dagger 2} \\ & + 2(\alpha_{1y}\alpha_{2y} + \mathcal{B}\alpha_{1x}\alpha_{2x})\hat{a}_y^{\dagger 2} \\ & + \sum_{j=1,2} 4(\mathcal{B}\alpha_{jx}^*\alpha_{jy} + \mathcal{A}\alpha_{jx}\alpha_{jy}^*)\hat{a}_x^\dagger\hat{a}_y \\ & + 4\mathcal{A}(\alpha_{1x}\alpha_{2y} + \alpha_{1y}\alpha_{2x})\hat{a}_x^\dagger\hat{a}_y^\dagger + H.c., \end{aligned} \quad (356)$$

amb $\mathcal{A} = \chi_{xxyy}/\chi_{xxxx}$ i $\mathcal{B} = \chi_{xyyx}/\chi_{xxxx}$ que verifiquen $2\mathcal{A} + \mathcal{B} = 1$ [3].

13.3 Anàlisi dinàmica quàntica

Per tal de preservar la simetria de polarització, els camps clàssics inyectats han de tenir necessàriament polaritzacions circulars ortogonals (figura

25) ja que qualsevol altra polarització privilegiaria una direcció espacial en el pla transversal. En conseqüència es prenen polaritzacions circulars per al bombeig, és a dir, $\alpha_{1x} = \alpha_{2x} = \rho/\sqrt{2}$ i $\alpha_{1y} = -\alpha_{2y} = i\rho/\sqrt{2}$. I en reescriure l'Hamiltonià en la base dels estats polaritzats circularment $\hat{a}_{\pm} = (\hat{a}_x \mp i\hat{a}_y)/\sqrt{2}$, s'obté

$$\hat{H}_0 = \hbar\delta \left(\hat{a}_+^\dagger \hat{a}_+ + \hat{a}_-^\dagger \hat{a}_- \right), \quad (357)$$

$$\hat{H}_{spm} = (1 - \mathcal{B}) \left(\hat{a}_+^{\dagger 2} \hat{a}_+^2 + \hat{a}_-^{\dagger 2} \hat{a}_-^2 \right), \quad (358)$$

$$\hat{H}_{cpm} = 2(1 + \mathcal{B}) \hat{a}_+^\dagger \hat{a}_+ \hat{a}_-^\dagger \hat{a}_- + 2\rho^2 (3 - \mathcal{B}) \left(\hat{a}_+^\dagger \hat{a}_+ + \hat{a}_-^\dagger \hat{a}_- \right), \quad (359)$$

$$\hat{H}_{fwm} = 2\rho^2 (1 + \mathcal{B}) \left(\hat{a}_+^\dagger \hat{a}_- + \hat{a}_-^\dagger \hat{a}_+ \right). \quad (360)$$

L'Hamiltonià en la base d'estats polaritzats circularment (357-360) poseix la simetria $(\hat{a}_+, \hat{a}_-) \rightarrow (\hat{a}_+ e^{i\theta}, \hat{a}_- e^{-i\theta})$, estant $\hat{c} = \hat{a}_+^\dagger \hat{a}_+ - \hat{a}_-^\dagger \hat{a}_-$ la constant de moviment associada a la simetria ja que $[\hat{H}, \hat{c}] = 0$. Constant que dóna acompte del fet que esperem obtindre igual nombre de fotons dextro i levo, però amb una fase relativa arbitrària. El resultat observable serà per tant un "mode" que conserva la intensitat total dels camps injectats i hi serà linealment polaritzat però amb una orientació arbitrària.

Ara podriem procedir tal i com ho hem fet al capítol anterior, és a dir, podriem escriure les equacions de Langevin del sistema (introduint el terme Liouvillià a l'equació mestra per a l'operador densitat i fent ús posteriorment de la representació P -positiva per obtindre l'equació de Fokker-Planck a partir de la qual s'obtenen les equacions quàntiques de Langevin), estudiar-les trobant l'estat estacionari no trivial (en el què hi ha una solució no nul·la per a l'amplitud dels modes senyal), analitzant les seues propietats d'estabilitat, linealitzant-les al voltant de l'estat estacionari, i finalment calculant l'espectre de *squeezing*. Afortunadament no ens serà necessari fer aquests càlculs com es veurà a continuació.

Intentem simplement pensar com seria l'estat estacionari no trivial. Per suposat l'existència d'aquest estat exigirà que la intensitat del camp de bombeig ρ^2 sobrepassi un cert valor llindar. Una vegada això està garantit, apareixerà un mode brillant (amb el significat del capítol anterior i que hem repassat al principi del present capítol) què tindrà una certa polarització \mathbf{e}_b . Aquesta polarització serà lineal doncs l'amplitud dels dos camps senyal és idèntica, i la podem escriure com

$$\mathbf{e}_b = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_+ e^{-i\theta} + \mathbf{e}_- e^{i\theta}) = \mathbf{e}_\theta, \quad (361)$$

on θ és la direcció de la polarització lineal del mode brillant. Ja hem vist que θ és arbitrari doncs l'Hamiltonià presenta la simetria abans discutida i sabem, pel que hem vist al capítol anterior, que això implica que aquesta quantitat estarà governada per les fluctuacions quàntiques únicament, és a dir, dinfondrà amb el temps seguint un process de Wiener. Aquest angle θ juga el paper de l'FPP que hem comentat abans.

El fet que θ siga el mode de Goldstone del sistema implica que una quadratura (concretament la de fase) del mode ortogonal al mode brillant, el mode obscur, estiga perfectament comprimida de forma no crítica. El mode obscur tindrà, per tant, una polarització

$$\mathbf{e}_d = \frac{-i}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_+ e^{-i\theta} - \mathbf{e}_- e^{i\theta}) = \mathbf{e}_{\theta+\pi/2}. \quad (362)$$

Així doncs la llum amb aquesta polarització estarà perfectament comprimida en la seua quadratura de fase.

Per suposat tot això hauria d'èsser demostrat analíticament seguint les passes enumerades més a dalt però no serà necessari. La raó és ben senzilla: si a l'Hamiltonià anterior prenem el valor $\mathcal{A} = \mathcal{B} = 1/3$, elecció dels paràmetres de Maker–Terhune que correspón a un medi $\chi^{(3)}$ isòtrop en el que la no linealitat té el seu origen en la resposta electrònica (no resonant) i al què, per tant, és aplicable la simmetria de Kleinman [3], l'Hamiltonià descrit a dalt (357-360) resulta ser isomorf al del capítol anterior (258-265). Així doncs no és necessari fer els càlculs per la senzilla raó de què ja estan fets. Per tal d'èsser més concrets, tal i com s'ha dit a l'apartat 12.3, de l'expressió (298) es dedueix que la condició necessària per a l'existència de la solució no trivial és $p > 1$ (on p és la intensitat del bombeig), sabent a més que el valor de p està afitat, tal i com marca l'expressió (296). Si, a més a més, s'empren els canvis descrits en (288), és clar que per a intensitats de bombeig ρ^2 que cumplisquen

$$\frac{\gamma_s}{2g} < \rho^2 < \frac{2\delta + \sqrt{\delta^2 - 3\gamma_s^2}}{6g}, \quad (363)$$

i per a $\delta > 3\gamma_s$ (veure de nou (296)) es verifica l'existència d'un camp senyal no nul en mitjana a partir d'una bifurcació de força (*Pitchfork*) subcrítica.

Val a dir, finalment, que, excepte pels resultats quantitius, aquestes conclusions valen també per a casos en els que $\mathcal{A} \neq \mathcal{B}$ tot i què, obviament, el domini d'existència de l'estat no trivial del camp senyal dependrà dels valors d'aquests paràmetres.

13.4 Estudi de l'*squeezing* de polarització

Tal i com s'ha vist al capítol 11 la compressió de quadratures no necessàriament implica compressió dels paràmetres de Stokes, és a dir *squeezing* de polarització. En el sistema estudiat en aquest capítol cal preguntar-se per tant si la compressió observada en trencar-se la simetria de polarització genera la compressió de les fluctuacions dels paràmetres que caracteritzen aquest estat de polarització.

Val a dir en primer lloc, que la definició dels paràmetres de Stokes feta anteriorment (225) és pot redefinir per a una altra base d'estats polaritzats ortogonals de forma que tota la resta d'estats de polarització es puguin escriure en funció d'eixa base i per tant, en aquest cas escollim el mode brillant i el mode obscur com a modes base per a la definició dels paràmetres,

$$\begin{aligned}\hat{S}_0 &= \hat{a}_b^\dagger \hat{a}_b + \hat{a}_d^\dagger \hat{a}_d, & \hat{S}_1 &= \hat{a}_b^\dagger \hat{a}_b - \hat{a}_d^\dagger \hat{a}_d, \\ \hat{S}_2 &= \hat{a}_b^\dagger \hat{a}_d + \hat{a}_d^\dagger \hat{a}_b, & \hat{S}_3 &= i \left(\hat{a}_d^\dagger \hat{a}_b - \hat{a}_b^\dagger \hat{a}_d \right).\end{aligned}\quad (364)$$

On \hat{a}_b , \hat{a}_d són els operadors bossònics associats als modes brillant i obscur (tal i com s'han definit a l'apartat 12.3, veure també (254)), l'expressió dels quals es recorda aquí per facilitar la lectura

$$\hat{a}_b = \hat{a}_{10,\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{i\sigma} \hat{a}_+ + e^{-i\sigma} \hat{a}_-), \quad (365)$$

$$\hat{a}_d = \hat{a}_{01,\sigma} = \frac{i}{\sqrt{2}} (e^{i\sigma} \hat{a}_+ - e^{-i\sigma} \hat{a}_-). \quad (366)$$

L'avantatge d'escollir aquestos modes és que d'ells coneguem alguns valors promitjos com ara:

$$\begin{aligned}\langle \hat{a}_b^\dagger \hat{a}_b \rangle &\neq 0, \\ \langle \hat{a}_d^\dagger \hat{a}_d \rangle &= 0, \\ \langle \hat{a}_b^\dagger \rangle &= \langle \hat{a}_d^\dagger \rangle = \langle \hat{a}_b \rangle = \langle \hat{a}_d \rangle = 0,\end{aligned}\quad (367)$$

i el seu principal desavantatge rau però, en el fet que el procés descrit per al trencament de simetria de polarització, i per tant per a la producció de *squeezing*, suposa la difusió constant i aleatòria de l'angle d'orientació dels modes brillant i obscur. Aquest desavantatge implica no poder mesurar les característiques d'aquestos modes en no poder fixar la seua orientació; però es pot obviar si, per exemple, fixem aquesta orientació en introduir una lleugera anisotropia al sistema. El resultat d'aquest procediment, tal i com s'explica

en [54], no afecta el resultat en allò referent a aconseguir una alta compressió de la llum.

Tal i com s'estableix la definició d'squeezing de polarització (232), per estudiar si es pot assolir necessitem calcular els valors mitjans dels paràmetres $\langle \hat{S}_i \rangle$ i la seua variància $\tilde{V}(S_i; \omega)$.

Els valors mitjans dels paràmetres són evidents si hom retorna a la seua definició (364) i als valors mitjans coneguts (367) així com al fet que valors esparats del mode brillant i obscur estan descorrelacionats $\langle \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j \rangle = \langle \hat{a}_i^\dagger \rangle \langle \hat{a}_j \rangle$

$$\langle \hat{S}_0 \rangle = \langle \hat{S}_1 \rangle = \langle \hat{a}_b^\dagger \hat{a}_b \rangle, \quad (368)$$

$$\langle \hat{S}_2 \rangle = \langle \hat{S}_3 \rangle = 0. \quad (369)$$

Pel que fa a la seua variància, es pot calcular a partir de les expressions donades en (242-244), que relacionen les variàncies dels paràmetres d'Stokes $\tilde{V}(S_i; \omega)$ amb els espectres de correlacions de les quadratures dels dos modes ortogonals a la cavitat, en el nostre cas, $S^{out}(X_b^\varphi; \omega)$ i $S^{out}(X_d^\varphi; \omega)$. Expressions que aplicades al nostre problema queden

$$\tilde{V}(S_0; \omega) = \tilde{V}(S_1; \omega) = 1 + : S^{out}(X_b^{\bar{\varphi}}; \omega) :, \quad (370)$$

$$\tilde{V}(S_2; \omega) = 1 + : S^{out}(X_d^{\bar{\varphi}}; \omega) :, \quad (371)$$

$$\tilde{V}(S_3; \omega) = 1 + : S^{out}(X_d^{\bar{\varphi} + \frac{\pi}{2}}; \omega) :, \quad (372)$$

Estant $\bar{\varphi}$ la fase de la solució estacionària per al mode brillant.

Recordem també que al capítol anterior es va deduir (344) per al mode obscur

$$\begin{aligned} V(X_d^\varphi; \omega) &= 1 + : S^{out}(X_d^\varphi; \omega) : \\ &= \frac{\cos^2 \varphi + \sin^2(\varphi - \phi_0)}{\cos^2 \phi_0} \\ &= \frac{\sin^2(\varphi - \phi_0)}{\cos^2 \phi_0} \frac{1}{1 + (\omega/2)^2}, \end{aligned} \quad (373)$$

on ϕ_0 està fixada pels valors del bombeig i de la intensitat del camp senyal.

Abans però d'aplicar aquest resultat, recordem d'una banda que es pot definir la fase de referència de forma que $\bar{\varphi} = 0$ i també que podem afirmar per al paràmetre \hat{S}_1 :

$$\tilde{V}(S_0; \omega) = \tilde{V}(S_1; \omega) = 1 + S(X_b^{\bar{\varphi}}; \omega) \approx 1, \quad (374)$$

igualtat que prové del fet que el mode brillant es comporta com un mode coherent lluny de la bifurcació (i per tant no depèn de l'angle $\bar{\varphi}$).

Pel que fa als altres dos paràmetres, si apliquem les relacions assenyalades (370-373), queda per al cas de \hat{S}_2

$$\begin{aligned}\tilde{V}(S_2; \omega) &= 1 + S(X_d^{\bar{\varphi}}; \omega); \\ \tilde{V}(S_2; \omega = 0) &= \frac{1}{\cos^2 \phi_0}.\end{aligned}\quad (375)$$

Expressió que serà igual o major que la unitat. I per al cas del tercer paràmetre S_3

$$\begin{aligned}\tilde{V}(S_3; \omega) &= 1 + S(X_d^{\bar{\varphi} + \pi/2}; \omega), \\ \tilde{V}(S_3; \omega = 0) &= 0.\end{aligned}\quad (376)$$

Valor que ens dona el resultat de que aquest és l'únic paràmetre que presenta *squeezing* de polarització en complir (232).

$$\tilde{V}(S_3; \omega = 0) < \frac{\left| \langle \hat{S}_1 \rangle \right|}{\left| \langle \hat{S}_0 \rangle \right|} < \tilde{V}(S_2; \omega = 0); \quad (377)$$

d'acord amb els resultats (368,375,376).

La conclusió és clara: al menys per a la freqüència $\omega = 0$, existeix *squeezing* de polarització per les fluctuacions del paràmetre d'Stokes $\hat{S}_3 = i(\hat{a}_d^\dagger \hat{a}_b - \hat{a}_b^\dagger \hat{a}_d)$ referit als modes brillant i obscur o, si ens centrem a la lectura del fenomen físic [2], tenim un "mode" polaritzat linealment, ja que $\langle \hat{S}_1 \rangle = \langle \hat{S}_0 \rangle$ i $\langle \hat{S}_2 \rangle = \langle \hat{S}_3 \rangle = 0$ (368,369) amb molt poques fluctuacions al voltant d'aquest estat de polarització lineal.

13.5 Comentaris i conclusió

En primer lloc, cal fer esment de que pel que fa a l'aproximació emprada en considerar els camps injectats com camps clàssics que no varien en la seua interacció amb el mitjà $\chi^{(3)}$ valen exactament les mateixes reflexions que es van fer al capítol anterior sobre aquesta mateixa aproximació en el sentit que l'efecte de l'absorció del bombeig pot reduir el domini d'existència dels modes senyal, però el mode de Goldstone continua existint i per tant la possibilitat d'assolir una compressió perfecta no crítica. En segon lloc, i de cara a la seua comprovació empírica, es pot predicar d'aquest sistema

també el mateix que el del capítol anterior en allò que fa referència a les petites desviacions de la simetria de rotació perfecta que poden permetre una bona medició de l'*squeezing* via detecció homodina en fixar l'orientació de la polarització lineal del mode eixint i és que la degradació de la compressió és molt menuda. En tercer i últim lloc, es pot subratllar que tal i com s'ha definit a l'apartat dedicat als paràmetres de Stokes quàntics i la definició de *squeezing* de polarització, la compressió observada en una quadratura no implica necessàriament que existisca compressió del soroll en la polarització, però en escollir com a sistema de referència per a la definició dels paràmetres de Stokes els modes brillant i obscur és trivial comprovar que existeix un dels paràmetres amb nivells de soroll inferiors als exigits per parlar de compressió de polarització.

En conclusió, en aquest capítol s'ha demostrat que una cavitat $\chi^{(3)}$ pot generar compressió perfecta no crítica del soroll d'una quadratura del camp electromagnètic i que aquesta cavitat és un bona candidata per ser construïda i observar l'*squeezing* per trencament de simetria de polarització.

Part V

Conclusions

Per encetar les conclusions d'aquest treball vull recordar en primer lloc, que he escrit aquest text mirant d'exposar les dues vessants principals del treball d'investigació desenvolupat i els avanços assolits juntament amb els companys i companyes del grup d'investigació d'Òptica Quàntica i No Lineal de la Universitat de València. Tal i com es comentava al prefaci, una part d'aquesta tasca ha estat l'aprenentatge en l'ús de les tècniques matemàtiques necessàries per avaluar les propietats quàntiques dels camps electromagnètics i, en especial, el grau de compressió de les fluctuacions dels camps electromagnètics dins de la teoria quàntica i l'altra, la recerca de sistemes òptics que produeixen un alt nivell de squeezing basat en dos fenòmens principalment: d'una banda, els llindars crítics o punts de bifurcació, és a dir allà on s'engeguen els comportaments no lineals i de l'altra, el trencament de les simetries que comporten l'aparició d'un grau de llibertat del sistema.

Per motius metodològics obvis, ja que hom necessita conèixer les eines que emprarà per dur endavant qualsevol feina, l'organització del text ha seguit pràcticament un ordre cronològic: Aquest treball va començar, després de les classes de preparació al DEA l'any 2003, a partir de la decisió del grup de recerca d'òptica no lineal i quàntica de dedicar-se a l'estudi de la compressió del soroll en les senyals electromagnètiques, camp que com es descriu profusament a la bibliografia esmentada en aquest treball ha propiciat grans avanços en el estudi dels camps electromagnètics i ha estat en l'arrel de molts avanços en medicació ultra precisa, informació quàntica i altres. Els nostres primers avanços, incloent-hi el treball d'investigació del DEA, estan reflectits per tant, a la primera part d'aquesta tesi i inclouen la descripció i tractament del superoperador Liouvillia, el tractament estadístic i quàntic del camp electromagnètic mitjançant les distribucions de quasiprobabilitat, les característiques, utilitats i solucions de les equacions de Fokker-Planck i Langevin, la teoria input-output que relaciona la mesura de les fluctuacions quàntiques dins i fora de les cavitats òptiques, els espectres de correlacions i de squeezing associats a les correlacions a temps diferents i la utilització de les distribucions de quasiprobabilitat anomenades P-generalitzades. El resum de la forma en què aquestes eines s'apliquen a l'estudi dels problemes relacionats amb l'obtenció de llum comprimida s'ha presentat a l'apartat titulat "guia per no perdre's en l'estudi de la reducció quàntica del soroll", el contingut del qual vol ser un full de ruta per poder abordar els problemes que s'han estudiat en els tres apartats següents (i per tant, als tres treballs

d'investigació i articles corresponents) i serveix de manual per endinsar-se en aquest tipus d'estudis.

Abans d'entrar però en quines han estat les nostres aportacions originals, considere interessant subratllar dos aspectes d'aquesta part metodològica que valoren com a crucials pel que han suposat de millora de la nostra capacitat d'anàlisi dels problemes tractats. Un d'ells és la descripció i utilització de la distribució P-positiva que permet establir el formalisme que condueix a l'anàlisi dinàmica dels sistemes estudiats i de les seues propietats quàntiques. I l'altre, el salt que suposa passar del mètode algebraic consistent en emprar la matriu de correlacions obtinguda mitjançant la combinació de les matrius de difusió i de les deriva de les equacions de Fokker-Planck i de Langevin (tal i com es descriu als capítols 7 i 8 i tal com s'utilitza al capítol 12 dedicat a l'estudi de la producció de *squeezing* de polarització en un ressonador Kerr) per tal de trobar l'espectre de squeezing; al mètode consistent en la diagonalització de les equacions matricials provinents de les equacions de Langevin linealitzades per obtenir directament els valors de la compressió de les quadratures implicades (tal i com s'explica i aplica als capítols 12 i 13).

Igualment, i pel que fa als tres articles que condueixen la segona part del treball es poden fixar els següents tres centres d'interès: un, el de les quadratures del camp electromagnètic, associades a les bifurcacions aparegudes a la dinàmica no lineal; un altre, l'associat als paràmetres de Stokes quàntics i un tercer la reducció del soroll associada a l'aparició d'un grau de llibertat mitjançant el trencament de simetries.

Per destacar les aportacions originals, es poden agrupar en els següents camps:

1.- La utilització d'una combinació de les distribucions de quasiprobabilitat no ben definides per a l'equació de Fokker-Planck: la P de Glauber, la Q d'Husimi i la W de Wigner per tal d'obtenir un resultat exacte, a l'aproximació lineal, tal i com s'obté a partir de la P-positiva.

2.- La caracterització d'un ressonador Kerr vectorial en allò que fa referència a l'obtenció de squeezing de quadratures i dels paràmetres de Stokes.

3.- L'obtenció de compressió de les fluctuacions d'un mode del camp electromagnètic mitjançant el trencament de simetria rotacional en un sistema de resposta no lineal.

4.- L'obtenció de compressió de les fluctuacions d'un mode del camp electromagnètic mitjançant el trencament de l'augment d'un grau de llibertat en la polarització dels modes en un sistema de resposta no lineal.

Paga la pena destacar que les aportacions degudes al trencament de simetria apunten cap a l'obtenció d'una compressió perfecta del soroll en la senyal obtinguda i aquest és un resultat mai assolit en cap dels altres sistemes emprats fins a la data, en els quals, i tal i com s'explica a les conclusions de cada

article i apartat, la compressió solament és perfecta dins de l'aproximació lineal. La fita assolida és qualitativament diferent per tant, ja que estem parlant de *squeezing* perfecte a costa de la difusió infinita d'una altra variable (en el nostre cas l'orientació del mode emès) i no dependent dels paràmetres que fixe el sistema ja que es tracta d'un procés no lligat a les bifurcacions o a la superació d'un cert llindar en la injecció. Així i tot, convé ser moderat en aquesta afirmació ja que, de moment, la pròpia configuració dels sistemes fa que no puguem obtenir cap resultat mesurable i amenaça per tant en deixar-nos a l'àmbit de l'especulació teòrica. Tal i com s'ha dit a dalt, la solució a aquest miratge de la compressió perfecta és la introducció d'alguna anisotropia que trenque la simetria perfecta inicial del sistema i per tant permeta mesurar el resultat obtingut. Aquesta solució ens allunya per tan de la compressió ideal, però ens pot permetre obtenir nivells de compressió clarament inaudits.

En resum, en aquesta tesi s'han buscat dos objectius principalment: un, servir de manual per a l'estudi dels fenòmens de reducció de soroll a nivell quàntic i dos, presentar unes quantes aportacions originals sobre les possibilitats d'obtenir un fenomen que pot estar en la base de molts avanços en l'elaboració i tractament de senyals òptiques: la llum comprimida.

Per acabar, vull centrar l'atenció en allò que podria tindre major projecció de futur per a la tasca d'investigació del grup d'Òptica Quàntica i No Lineal com ara la possibilitat de desenvolupar la comprovació de l'obtenció d'alts nivells de compressió de la llum mitjançant el trencament de simetria dels sistemes, l'aplicació d'aquesta tècnica a altres sistemes físics i la utilització de les eines matemàtiques descrites en altres camps de l'òptica quàntica com ara la informació quàntica o la interacció entre matèria i radiació.

Part VI

Apèndixs

14 Apèndix I: equivalències entre operadors i derivades parcials per a la correspondència quàntico-clàssica

Tal i com s'ha vist a l'apartat dedicat a la utilització de les distribucions de quasiprobabilitat per calcular equacions d'evolució, a partir d'un exemple senzill (106-111) es poden deduir una sèrie d'equivalències (112-115) que permeten passar d'una equació d'evolució de l'operador densitat amb l'operador creació o amb l'operador destrucció a una equació amb derivades parcials de les funcions de distribució.

De forma semblant es poden deduir les equivalències corresponents als grups de dos o quatre operadors acompanyant a l'operador densitat [8, 70, 88].

14.1 Grups de dos operadors

$$\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho} \Leftrightarrow \left(-\frac{1-s}{2} + \alpha \alpha^* - \frac{1+s}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha + \frac{1-s}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \alpha^* - \frac{1-s^2}{4} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \alpha^*} \right) W_s \quad (378)$$

$$\hat{\rho} \hat{a}^\dagger \hat{a} \Leftrightarrow \left(-\frac{1-s}{2} + \alpha \alpha^* + \frac{1-s}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha - \frac{1+s}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \alpha^* - \frac{1-s^2}{4} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \alpha^*} \right) W_s \quad (379)$$

$$\hat{a} \hat{\rho} \hat{a}^\dagger \Leftrightarrow \left(-\frac{1-s}{2} + \alpha \alpha^* + \frac{1-s}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha + \frac{1-s}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \alpha^* + \frac{(1-s)^2}{4} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \alpha^*} \right) W_s \quad (380)$$

$$\hat{a} \hat{a} \hat{\rho} \Leftrightarrow \left(\alpha^2 + (1-s) \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \alpha + \frac{(1-s)^2}{4} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^{*2}} \right) W_s \quad (381)$$

$$\hat{\rho}\hat{a}\hat{a} \Leftrightarrow \left(\alpha^2 - (1+s) \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \alpha + \frac{(1+s)^2}{4} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^{*2}} \right) W_s \quad (382)$$

$$\hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{\rho} \Leftrightarrow \left(\alpha^{*2} - (1+s) \frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha^* + \frac{(1+s)^2}{4} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) W_s \quad (383)$$

$$\hat{\rho}\hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \Leftrightarrow \left(\alpha^{*2} + (1-s) \frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha^* + \frac{(1-s)^2}{4} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) W_s \quad (384)$$

14.2 Grups de quatre operators

$$\begin{aligned} \hat{a}^{\dagger 2} \hat{a}^2 \hat{\rho} \Leftrightarrow & \left[\frac{(1-s)^2}{2} - 2(1-s)\alpha\alpha^* + \alpha^2\alpha^{*2} \right. \\ & + (1-s^2) \frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha - (1+s) \frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha^2 \alpha^* \\ & - (1-s)^2 \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \alpha^* + (1-s) \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \alpha \alpha^{*2} \\ & + \frac{(1-s)^2}{4} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^{*2}} \alpha^{*2} + \frac{(1+s)^2}{4} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \alpha^2 \\ & + \frac{(1-s)^2(1+s)}{2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \alpha^*} - (1-s^2) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \alpha^*} \alpha \alpha^* \\ & - \frac{(1-s)^2(1+s)}{4} \frac{\partial^3}{\partial \alpha \alpha^{*2}} \alpha^* + \frac{(1+s)^2(1-s)}{4} \frac{\partial^3}{\partial \alpha^2 \alpha^*} \alpha \\ & \left. + \frac{(1-s)^2(1+s)^2}{16} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \alpha^{*2}} \right] W_s \end{aligned} \quad (385)$$

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}\hat{a}^{\dagger 2}\hat{a}^2 \Leftrightarrow & \left[\frac{(1-s)^2}{2} - 2(1-s)\alpha\alpha^* + \alpha^2\alpha^{*2} \right. \\
& - (1-s)^2 \frac{\partial}{\partial\alpha}\alpha + (1-s) \frac{\partial}{\partial\alpha}\alpha^2\alpha^* \\
& + (1-s^2) \frac{\partial}{\partial\alpha^*}\alpha^* - (1+s) \frac{\partial}{\partial\alpha^*}\alpha\alpha^{*2} \\
& + \frac{(1-s)^2}{4} \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\alpha^2 + \frac{(1+s)^2}{4} \frac{\partial^2}{\partial\alpha^{*2}}\alpha^{*2} \\
& + \frac{(1-s)^2(1+s)}{2} \frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\alpha^*} - (1-s^2) \frac{\partial^2}{\partial\alpha\alpha^*}\alpha\alpha^* \\
& - \frac{(1-s)^2(1+s)}{4} \frac{\partial^3}{\partial\alpha^2\alpha^*}\alpha + \frac{(1+s)^2(1-s)}{4} \frac{\partial^3}{\partial\alpha\alpha^{*2}}\alpha^* \\
& \left. + \frac{(1+s)^2(1-s)^2}{16} \frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\alpha^{*2}} \right] W_s
\end{aligned} \tag{386}$$

15 Apèndix II: Expresions algebraiques per a l'*squeezing* de quadratura i polarització en la cavitat Kerr vectorial

15.1 Espectre de quadratures eixint

En funció de la matriu espectral (215) i per a les quadratures pròpiament dites:

$$: S^{out} \left(X_1^\beta; \omega \right) := 2\gamma \left(S_{11}^{out} e^{-i2\beta} + S_{22}^{out} e^{i2\beta} \right) + 2\gamma \left(S_{12}^{out} + S_{21}^{out} \right), \quad (387)$$

$$: S^{out} \left(X_2^\beta; \omega \right) := 2\gamma \left(S_{33}^{out} e^{-i2\beta} + S_{44}^{out} e^{i2\beta} \right) + 2\gamma \left(S_{34}^{out} + S_{43}^{out} \right). \quad (388)$$

Per a les quadratures creuades

$$: S^{out} \left(X_1^{\beta_1}, X_2^{\beta_2}; \omega \right) := \frac{2\gamma \left(S_{13}^{out} e^{-i\sigma_{12}} + S_{42}^{out} e^{i\sigma_{21}} \right) + 2\gamma \left(S_{23}^{out} e^{i\delta_{12}} + S_{14}^{out} e^{-i\delta_{21}} \right)}{2}, \quad (389)$$

$$: S^{out} \left(X_2^{\beta_2}, X_1^{\beta_1}; \omega \right) := \frac{2\gamma \left(S_{31}^{out} e^{-i\sigma_{21}} + S_{42}^{out} e^{i\sigma_{21}} \right) + 2\gamma \left(S_{41}^{out} e^{i\delta_{21}} + S_{32}^{out} e^{-i\delta_{21}} \right)}{2}. \quad (390)$$

amb

$$\sigma_{jk} = \beta_j + \beta_k, \quad \delta_{jk} = \beta_j - \beta_k.$$

15.2 Espectre de les quadratures per a la solució monomode

El valor de les fluctuacions $: S^{out} \left(X_1^\beta; \omega \right) :: S^{out} \left(X_2^\beta; \omega \right) : i : S^{out} \left(X_1^{\beta_1}, X_2^{\beta_2}; \omega \right) :$ per a la solució monomode ($I_{2s} = 0$) són

$$: S^{out} \left(X_1^\beta; \omega \right) := \frac{4 |A_{1s}|^2 Q_{1n}}{(Q_{1d} - \omega^2)^2 + 4\omega^2}, \quad (391)$$

$$: S^{out} \left(X_2^\beta; \omega \right) := \frac{6 |A_{1s}|^2 Q_2}{(Q_{2d} + 2\omega^2)^2 + 16\omega^2}, \quad (392)$$

$$: S^{out} \left(X_1^{\beta_1}, X_2^{\beta_2}; \omega \right) := S^{out} \left(X_2^{\beta_2}, X_1^{\beta_1}; \omega \right) := 0, \quad (393)$$

on

$$Q_{1n} = - (3 |A_{1s}|^2 - 4 |A_{1s}|^2 \Delta + \Delta^2 - 1 - \omega^2) \sin \psi + 2 (\Delta - 2 |A_{1s}|^2) \cos \psi + 2 |A_{1s}|^2, \quad (394)$$

$$Q_{1d} = 3 |A_{1s}|^4 - 4 |A_{1s}|^2 \Delta + \Delta^2 + 1, \quad (395)$$

$$Q_2 = [|A_{1s}|^4 + \Delta |A_{1s}|^2 - 2 (\Delta^2 - 1 - \omega^2)] \sin \psi + (4\Delta - |A_{1s}|^2) \cos \psi + 3 |A_{1s}|^2, \quad (396)$$

$$Q_{2d} = |A_{1s}|^4 + \Delta |A_{1s}|^2 - 2\Delta^2 - 2, \quad (397)$$

i

$$\psi = 2 (\beta - \phi_{1s}), \quad (398)$$

és dues vegades la diferència entre la fase de la quadratura analitzada i la fase de l'estat estacionari, i $|A_{1s}|^2$ és la intensitat normalitzada de les equacions (204,205a,205b). Cal afegir a més, que a les equacions de dalt, la freqüència ω ha estat normalitzada en dividir-la per γ , però no s'ha canviat la notació per no complicar-la innecessàriament.

15.3 Variàncies normalitzades dels operadors de Stokes als punts de bifurcació de la solució monomode

En aquest cas, les expressions de les variàncies normalitzades dels operadors de Stokes als punts de bifurcació de la solució monomode són

$$\tilde{V}_0(\omega) = \tilde{V}_1(\omega) = 1 + \frac{4 |a_{1s}|^2 (\Delta - |a_{1s}|^2)}{C_1}, \quad (399)$$

$$\tilde{V}_2(\omega) = 1 + \frac{6 |a_{1s}|^2 (|a_{1s}|^2 + 2\Delta)}{C_2}, \quad (400)$$

$$\tilde{V}_3(\omega) = 1 + \frac{2 (|a_{1s}|^2 - \Delta)}{(|a_{1s}|^2 + 2\Delta)} \tilde{V}_2(\omega), \quad (401)$$

on

$$C_1 = (\omega^2 + 1 - 3 |a_{1s}|^4 + 4 |a_{1s}|^2 \Delta - \Delta^2)^2 + 4 (3 |a_{1s}|^4 - 4 |a_{1s}|^2 \Delta + \Delta^2), \quad (402)$$

$$C_2 = (2\omega^2 + 2 + |a_{1s}|^4 + |a_{1s}|^2 \Delta - 2\Delta^2)^2 - 8 (|a_{1s}|^2 - \Delta) (|a_{1s}|^2 + 2\Delta), \quad (403)$$

amb $\Delta = \theta/\theta\eta$ i $|a_{1s}|^2 = gI_{1s}/\gamma$, i amb la normalització de ω en dividir-la per γ .

16 Apèndix III: Modes propis de la cavitat en un resonador Fabry-Perot amb espills esfèrics

16.1 Espectre modal d'un resonador Fabry-Perot amb espills esfèrics

Es detallen en aquest apèndix les principals propietats dels modes propis de la cavitat en un resonador Fabry-Perot amb espills esfèrics (cf. [38] per més detalls).

Dins de l'aproximació paraxial, se sap que els modes Laguerre-Gauss formen un conjunt complet de modes espacials per descriure la llum dins del resonador. Siguen R_1, R_2 els radis de corbatura dels espills de la cavitat, i $L_{ef} = \bar{L} - (1 - 1/n_m) l_m$ la longitud efectiva de la cavitat, estant \bar{L} la longitud geomètrica del resonador, i l_m i n_m la longitud i l'índex de refracció, respectivament, del medi $\chi^{(3)}$. Aleshores, els modes Laguerre-Gauss al planol central del resonador es poden escriure

$$\Psi_p^{\pm l}(\mathbf{r}) = \mathcal{N}_p^l u_p^l(r) \exp(\pm il\phi) \quad (404)$$

amb $\mathbf{r} = (x, y)$ les coordenades transversals i $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\cos \phi, \sin \phi)$ la seua descomposició en coordenades polars, estant \mathcal{N}_p^l un factor de normalització i

$$u_p^l(r) = \frac{1}{w} \left(\frac{\sqrt{2}r}{w} \right)^l L_p^l \left(\frac{2r^2}{w^2} \right) e^{-r^2/w^2} \quad (405)$$

on L_p^l és el polinomi de Laguerre modificat amb índexs radial i polar $p, l \in \mathbb{N}$, el qual ve donat per la fórmula de Rodrigues

$$L_p^l(v) = \frac{1}{p!} e^v \frac{1}{v^l} \frac{d^p}{dv^p} (e^{-v} v^l v^p). \quad (406)$$

Si s'escull el factor de normalització

$$\mathcal{N}_p^l = \sqrt{\frac{2}{\pi} \frac{p!}{(p+l)!}} \quad (407)$$

s'acompleix la relació d'ortogonalitat

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty dr [\Psi_p^{\pm l}(\mathbf{r})]^* \Psi_{p'}^{\pm l'}(\mathbf{r}) = \delta_{ll'} \delta_{pp'}. \quad (408)$$

La grandària w del cercle del feix al centre de la cavitat val

$$w^2 = \frac{2cL_{ef}}{\omega} \frac{\sqrt{g_1 g_2 (1 - g_1 g_2)}}{g_1 + g_2 - 2g_1 g_2} \quad (409)$$

amb $g_i = 1 - L_{ef}/R_j$ i ω la freqüència del feix.

La base Laguerre-Gauss té l'avantatge que permet visualitzar fàcilment l'OAM del camp, ja que aquestos modes són estats propis de l'operador OAM $-i\partial_\phi$ amb autovalors $\pm l$. Pel que fa a la freqüència de resonància dels diferents $\Psi_p^{\pm l}$ modes, en general és diferent per a cada mode, en concret

$$\omega_{qpl} = \frac{\pi c}{L} \left(q + \frac{1 + 2p + l}{\pi} \arccos \pm \sqrt{g_1 g_2} \right) \quad (410)$$

amb q un enter (cada q correspon a un mode longitudinal de la cavitat), L la longitud òptica de la cavitat

$$L = \bar{L} + (n_m - 1) l_m, \quad (411)$$

i el signe més s'empra per a $g_1 > 0$ (i per tant, $g_2 > 0$ si el resonador ha de ser estable), mentres que el signe menys s'utilitza per al cas oposat ($g_1 < 0$ i $g_2 < 0$).

Per tant, els modes que són del mateix ordre $f = 2p + l$ tenen la mateixa freqüència i es diu que són membres de la mateixa família f (a partir d'ara aquesta freqüència s'anomenarà ω_{qf}). És clar que la família f consisteix en un conjunt de $f + 1$ modes de Laguerre-Gauss $\left\{ \Psi_{(f-l)/2}^{\pm l} \right\}$ amb $l = f, f - 2, \dots, l_0$, amb OAM $\pm f, \pm (f - 2), \dots, \pm l_0$. Els modes amb més baix OAM tenen $l_0 = 0$ o 1 per als f parells o senars, respectivament.

Tal i com s'ha comentat a l'apartat referent al model del capítol 13, es necessari que el resonador es sintonitzi de forma que la freqüència de resonància de una família $f = 1$ caiguen en mig de dos modes fonamentals $l = 0$. Per assolir-ho, els resonadors que satisfan $g_1 \cdot g_2 = 0$ són perfectes, ja que satisfan la condició imposada i a més a més donen la separació més ampla entre els modes $f = 0$ i $f = 1$ (la meitat del rang espectral, i.e., $\pi c/2L$). Malgrat açò la situació no és la ideal ja que aquestos resonadors també satisfan

$$\omega_{q,f} = \omega_{q-1,f+2} \quad (412)$$

i per tant modes que cauen en famílies d'ordre superior tenen la mateixa freqüència de resonància que les de $f = 1$. Així i tot, per les raons adduïdes a l'apartat corresponent al model, l'existència d'aquestos modes no suposa cap obstacle per al fenomen estudiat en aquest treball.

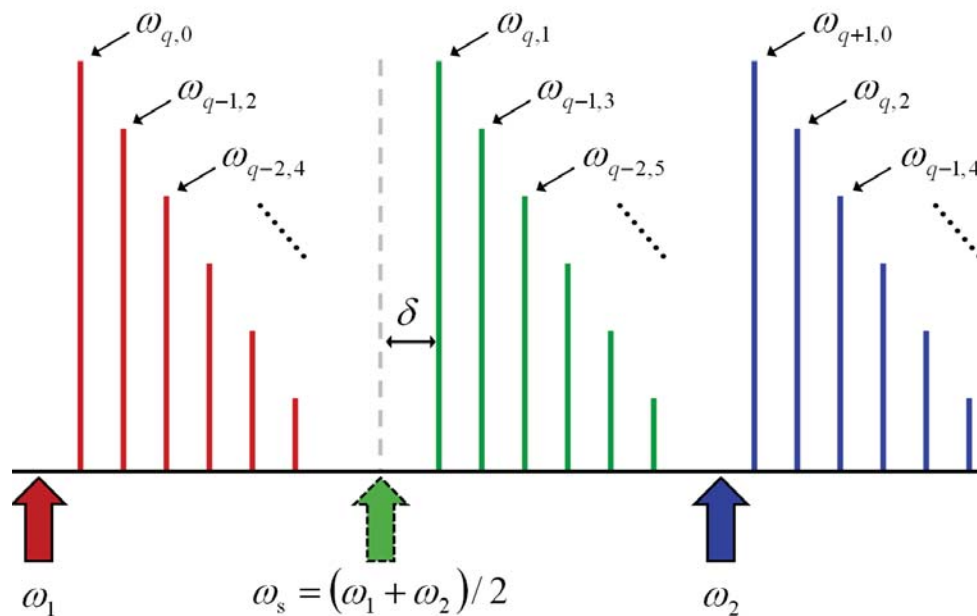


Figura 26: Espectre modal de una cavitat gairebé simètrica i gairebé confocal. En la figura s'han escollit els valors $g_1 = g_2 = 0.1$. Les freqüències del bombeig es denoten per ω_1 i ω_2 respectivament, mentres que la freqüència degenerada de la senyal és ω_s i presenta una desintonia δ respecte a la família de freqüència resonant $f = 1$

D'altra banda, a l'apartat dedicat a l'anàlisi clàssica, es mostra que per tal d'aconseguir el mode TEM_{10} desitjat, és necessària certa desintonia del camp de bombeig (desintonia positiva, p.ex., és a dir que la freqüència pròpia de la cavitat siga major que la dels camps injectats). Aquest comportament permet relaxar les restriccions per a les cavitats emprades. Per veure-ho, es mostra en la figura (26) l'estructura de resonàncies d'una cavitat amb $g_1 \cdot g_2 \simeq 0$. Els modes que cauen en famílies de la mateixa paritat no tenen la mateixa freqüència de resonància i per tant, es separen. Per tal de prevenir que qualsevol família $f \neq 1$ prenga part en la competició no lineal, exigim a més que g_1 i g_2 siguin negatius, i en aquest cas, la família $f = 1$ presenta la desintonia més baixa (δ en la figura (26)) respecte de la freqüència senyal (ω_s en la figura (26)).

En definitiva, queda clar que tot i que el model proposat és confocal

amb $g_1 \cdot g_2 = 0$, la família completa de cavitats pràcticament simètriques, pràcticament confocals pot ser emprada per assolir els objectius marcats.

16.2 Aproximació per igualar les freqüències dels diversos modes

Com s'ha descrit a l'apartat anterior (410), la freqüència de resonància d'un mode q longitudinal i de família transversal $f = 2p+l$ en una cavitat confocal ($g_1 \cdot g_2 = 0$) és

$$\omega_{qf} = \frac{\pi c}{L} \left[q + \frac{1+f}{2} \right] \quad (413)$$

on L és la longitud òptica (veure (411)) de la cavitat (per avaluar la comparació entre freqüències, prendré una longitud típica $L = 10$ cm). S'està suposant que els modes de bombeig corresponen a dos modes longitudinals consecutius amb $f = 0$, de forma que

$$\Delta_p = \omega_2 - \omega_1 = \omega_{q+1,0} - \omega_{q,0} = \frac{\pi c}{L} = \frac{3\pi \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{0.1 \text{ m}} \sim 10^{10} \text{ s}^{-1}. \quad (414)$$

D'altra banda, els modes senyal són d'índex longitudinal q i de la primera família transversal, $f = 1$. A més verifiquen

$$2\omega_s = \omega_1 + \omega_2 = \frac{2\pi c}{L} (q+1) \quad (415)$$

i per tant

$$\Delta_s = \omega_s - \omega_1 = \omega_2 - \omega_s = \frac{\pi c}{2L} = \frac{\pi \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{2 \cdot 0.1 \text{ m}} \sim 10^9 \text{ s}^{-1} \quad (416)$$

Finalment, com que treballem en el domini òptic, $\omega_1 \sim 10^{15} \text{ s}^{-1}$, les relacions seran

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\omega_1 + \Delta_p}{\omega_1} \cong 1 + 10^{-5} \quad (417)$$

$$\frac{\omega_s}{\omega_1} = \frac{\omega_1 + \Delta_s}{\omega_1} \cong 1 + 10^{-6} \quad (418)$$

la qual cosa permet aproximar

$$\omega_1 \cong \omega_2 \cong \omega_s. \quad (419)$$

17 Apèndix IV Expressions algebraiques i càlculs per a la compressió per trencament de simetria en una cavitat FWM

17.1 Deducció de l'Hamiltonià

Tal i com s'ha definit al treball, els camps injectats corresponen al mode gaussià transversal (249) i els modes Gauss-Laguerre per al camp generat, són els L_{+1} i L_{-1} modes transversals de la cavitat (250). el camp s'ha escrit per tant com (247)

$$\begin{aligned}\hat{E}(\mathbf{r}, t) &= \hat{E}_p(\mathbf{r}, t) + \hat{E}_s(\mathbf{r}, t) \\ \hat{E}_p(\mathbf{r}, t) &= \sum_{j=1,2} i\mathcal{F}_j \hat{A}_j(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega_j t} + H.c. \\ \hat{E}_s(\mathbf{r}, t) &= i\mathcal{F}_s \hat{A}_s(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega_s t} + H.c.\end{aligned}\quad (420)$$

D'acord amb allò vist al capítol 5, per calcular l'Hamiltonià el separem en els sumands

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{ext} + \hat{H}_{int}, \quad (421)$$

estant \hat{H}_0 la part de l'evolució lliure del camp al si de la cavitat, \hat{H}_{ext} la part dels camps injectats o de bombeig i \hat{H}_{int} l'Hamiltonià d'interacció.

L'Hamiltonià d'interacció \hat{H}_{int} s'obté a partir de

$$\hat{H}_{int} = - \int_{cavitat} d^3\mathbf{r} : \hat{E}(\mathbf{r}; t) \cdot \hat{D}^{NL}(\mathbf{r}; t) : \quad (422)$$

tal i com també s'ha explicat al capítol 5 i on la part no lineal de l'operador desplaçament \hat{D}^{NL} ve donada per P^{NL} , és a dir, la part no lineal de l'operador de polarització.

Passe doncs, a deduir la part corresponent a la interacció no lineal. Donat que la polarització dels camps no està fixada, el coeficient $\chi^{(3)}$ el considere depent solament de la freqüència.

$$\chi^{(3)}(\omega_j; \omega_l, \omega_m, \omega_n) = \chi \in \mathbb{R}, \forall j, l, m, n \quad (423)$$

I empraré també l'aproximació

$$\mathcal{F}_1 \simeq \mathcal{F}_2 \simeq \mathcal{F}_s = \mathcal{F}. \quad (424)$$

Així, després de considerar totes les permutacions que es poden realitzar amb els arguments del tensor de susceptibilitat la polarització no lineal queda:

$$\begin{aligned} \hat{P}^{(NL)} = & 3i\varepsilon_0\mathcal{F}^3\chi \left[\left(\hat{A}_1^\dagger\hat{A}_1^2 + 2\hat{A}_2^\dagger\hat{A}_2\hat{A}_1 + 2\hat{A}_s^\dagger\hat{A}_s\hat{A}_1 + \hat{A}_2^\dagger\hat{A}_s^2 \right) e^{-i\omega_1 t} \right. \\ & + \left(\hat{A}_2^\dagger\hat{A}_2^2 + 2\hat{A}_1^\dagger\hat{A}_1\hat{A}_2 + 2\hat{A}_s^\dagger\hat{A}_s\hat{A}_2 + \hat{A}_1^\dagger\hat{A}_s^2 \right) e^{-i\omega_2 t} \\ & \left. + \left(\hat{A}_s^\dagger\hat{A}_s^2 + 2\hat{A}_1^\dagger\hat{A}_1\hat{A}_s + 2\hat{A}_2^\dagger\hat{A}_2\hat{A}_s + 2\hat{A}_s^\dagger\hat{A}_1\hat{A}_2 \right) e^{-i\omega_s t} \right] + h.c. \end{aligned} \quad (425)$$

I l'Hamiltonià d'interacció, si escrivim solament els termes que no tenen exponencials temporals - RWA - serà

$$\begin{aligned} \hat{H}_{int} = & - \int_{cavitat} d^3\mathbf{r} : \hat{E}(\mathbf{r}; t) \cdot \hat{P}^{(NL)}(\mathbf{r}; t) : \\ = & -3\varepsilon_0\mathcal{F}^4\chi l_m \int d^2\mathbf{r} \left[2\hat{A}_1^{\dagger 2}\hat{A}_1^2 + 2\hat{A}_2^{\dagger 2}\hat{A}_2^2 + 2\hat{A}_s^{\dagger 2}\hat{A}_s^2 + 8\hat{A}_1^\dagger\hat{A}_2^\dagger\hat{A}_1\hat{A}_2 \right. \\ & \left. + 8\hat{A}_1^\dagger\hat{A}_s^\dagger\hat{A}_1\hat{A}_s + 8\hat{A}_2^\dagger\hat{A}_s^\dagger\hat{A}_2\hat{A}_s + 4\hat{A}_1^\dagger\hat{A}_2^\dagger\hat{A}_s^2 + 4\hat{A}_s^{\dagger 2}\hat{A}_1\hat{A}_2 \right]. \end{aligned} \quad (426)$$

que, després de calcular les integrals i exigir que les combinacions d'operadors conserven l'OAM, queda

$$\begin{aligned} H_{int} = & -24\varepsilon_0\chi\mathcal{F}^4l_m \left[\frac{1}{4}I_1\hat{a}_1^{\dagger 2}\hat{a}_1^2 + I_3 \left(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1\hat{a}_+ + \hat{a}_1^\dagger\hat{a}_-^\dagger\hat{a}_1\hat{a}_- \right) \right. \\ & + \frac{1}{4}I_2\hat{a}_2^{\dagger 2}\hat{a}_2^2 + I_4 \left(\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_+^\dagger\hat{a}_2\hat{a}_+ + \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_-^\dagger\hat{a}_2\hat{a}_- \right) \\ & + I_{12}\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1\hat{a}_2 + I_5 \left(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_+\hat{a}_- + \hat{a}_+^\dagger\hat{a}_-^\dagger\hat{a}_1\hat{a}_2 \right) \\ & \left. + I_k \left(\frac{1}{4}\hat{a}_+^{\dagger 2}\hat{a}_+^2 + \frac{1}{4}\hat{a}_-^{\dagger 2}\hat{a}_-^2 + \hat{a}_+^\dagger\hat{a}_-^\dagger\hat{a}_+\hat{a}_- \right), \right. \end{aligned} \quad (427)$$

expressió que conté les següents integrals de solapament de les envoltants

(veure (248-250))

$$I_j(w_j) = \int d^2\mathbf{r} G_j^4(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi w_j^2}, \quad j = 1, 2, \quad (428)$$

$$I_{12}(w_1, w_2) = \int d^2\mathbf{r} G_1^2(\mathbf{r}) G_2^2(\mathbf{r}) = \frac{1}{\pi(w_1^2 + w_2^2)}, \quad (429)$$

$$I_s(w_s) = \int d^2\mathbf{r} L_+^2(\mathbf{r}) L_-^2(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi w_s^2}, \quad (430)$$

$$I_{js}(w_j, w_s) = \int d^2\mathbf{r} G_j^2(\mathbf{r}) L_+(\mathbf{r}) L_-(\mathbf{r}) \quad (431)$$

$$= \frac{w_j^2}{\pi(w_j^2 + w_s^2)^2}, \quad j = 1, 2,$$

$$I_{12s}(w_j, w_s) = \int d^2\mathbf{r} G_1(\mathbf{r}) G_2(\mathbf{r}) L_+(\mathbf{r}) L_-(\mathbf{r}) \quad (432)$$

$$= \frac{4}{\pi w_1 w_2 \left(2 + \frac{w_s^2}{w_1^2} + \frac{w_s^2}{w_2^2}\right)^2}, \quad j, k = 1, 2 \quad (j \neq k)$$

Si ara recordem que

$$w_j \propto \frac{1}{\sqrt{\omega_j}}, \quad (433)$$

i per a les freqüències del domini òptic

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\omega_1 + \Delta\omega}{\omega_1} \cong 1 + \varepsilon, \quad (434)$$

$$\frac{w_s}{w_2} = \frac{\omega_2}{\omega_s} = \frac{\omega_1 + \frac{\Delta\omega}{2}}{\omega_1 + \Delta\omega} \cong 1 + \varepsilon, \quad (435)$$

amb ε de l'ordre de 10^{-5} , es pot aproximar

$$w_1 \simeq w_2 \simeq w_s = w, \quad (436)$$

i l'Hamiltonià d'interacció queda

$$\begin{aligned} \hat{H}_{int} = & -\frac{3\varepsilon_0 \mathcal{F}^4 \chi^l m}{\pi w^2} \left[\hat{a}_1^{\dagger 2} \hat{a}_1^2 + \hat{a}_2^{\dagger 2} \hat{a}_2^2 \right. \\ & + \frac{1}{2} \left(\hat{a}_+^{\dagger 2} \hat{a}_+^2 + \hat{a}_-^{\dagger 2} \hat{a}_-^2 + 4\hat{a}_+^{\dagger} \hat{a}_-^{\dagger} \hat{a}_+ \hat{a}_- \right) + 4\hat{a}_1^{\dagger} \hat{a}_2^{\dagger} \hat{a}_1 \hat{a}_2 \\ & + 2 \left(\hat{a}_1^{\dagger} \hat{a}_+^{\dagger} \hat{a}_1 \hat{a}_+ + \hat{a}_1^{\dagger} \hat{a}_-^{\dagger} \hat{a}_1 \hat{a}_- \right) + 2 \left(\hat{a}_2^{\dagger} \hat{a}_+^{\dagger} \hat{a}_2 \hat{a}_+ + \hat{a}_2^{\dagger} \hat{a}_-^{\dagger} \hat{a}_2 \hat{a}_- \right) \\ & \left. + 2 \left(\hat{a}_1^{\dagger} \hat{a}_2^{\dagger} \hat{a}_+ \hat{a}_- + \hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{a}_+^{\dagger} \hat{a}_-^{\dagger} \right) \right]. \quad (437) \end{aligned}$$

Ara cal incorporar els termes de l'Hamiltonià lliure

$$\hat{H}_0 = \hbar \left(\omega_1 a_1^\dagger a_1 + \omega_2 a_2^\dagger a_2 + \omega_s a_+^\dagger a_+ + \omega_s a_-^\dagger a_- \right), \quad (438)$$

i el de bombeig

$$\hat{H}_{ext} = i\hbar\mathcal{E}_p \left(\hat{a}_1^\dagger e^{-i\omega_{1p}t} - \hat{a}_1 e^{i\omega_{1p}t} + \hat{a}_2^\dagger e^{-i\omega_{2p}t} - \hat{a}_2 e^{i\omega_{2p}t} \right), \quad (439)$$

on ω_{jp} es refereix a la freqüència del feix de bombeig, que no està necessàriament sintonitzada amb les freqüències de resonància de la cavitat ω_j .

Farem aquí una altra aproximació, ja que com estem en un ressonador confocal, suposem que la distància entre ω_{1p} i ω_{2p} és el *free spectral range* de la cavitat confocal on es troba el cristall $\chi^{(3)}$ i per tant

$$\omega_1 - \omega_{1p} = \omega_2 - \omega_{2p} = \omega_s - \omega_{sp} = \delta, \quad (440)$$

amb $2\omega_{sp} = \omega_{1p} + \omega_{2p}$. en aquesta notació ω_j són les freqüències de la cavitat més properes a la freqüència de cada mode ω_{jp} . Aquesta aproximació simplificarà l'expressió de l'Hamiltonià en la imatge d'interacció.

Per passar a la imatge d'interacció (tal i com s'explica a l'apartat 4.4) empraré l'operador

$$\hat{U} = e^{i\omega_{1p}t a_1^\dagger a_1} e^{i\omega_{2p}t a_2^\dagger a_2} e^{i\omega_{sp}t a_+^\dagger a_+} e^{i\omega_{sp}t a_-^\dagger a_-}, \quad (441)$$

Escrivim l'Hamiltonià total en la imatge d'interacció i el resultat (on es continua emprant la notació de \hat{H} sense modificar per simplicitat)

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{int} + \hat{H}_{ext}, \quad (442)$$

amb

$$\begin{aligned} \hat{H}_0 &= \hbar\delta \left(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 + a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_- \right) \quad (443) \\ \hat{H}_{int} &= -\hbar g \left[\hat{a}_1^{\dagger 2} \hat{a}_1^2 + \hat{a}_2^{\dagger 2} \hat{a}_2^2 + 4\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 \hat{a}_2 + \frac{1}{2} \left(\hat{a}_+^{\dagger 2} \hat{a}_+^2 + \hat{a}_-^{\dagger 2} \hat{a}_-^2 + 4\hat{a}_+^\dagger \hat{a}_-^\dagger \hat{a}_+ \hat{a}_- \right) \right. \\ &\quad + 2 \left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_+^\dagger \hat{a}_1 \hat{a}_+ + \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_-^\dagger \hat{a}_1 \hat{a}_- \right) + 2 \left(\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_+^\dagger \hat{a}_2 \hat{a}_+ + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_-^\dagger \hat{a}_2 \hat{a}_- \right) \\ &\quad \left. + 2 \left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_+ \hat{a}_- + \hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{a}_+^\dagger \hat{a}_-^\dagger \right) \right], \\ \hat{H}_{ext} &= i\hbar\mathcal{E}_p \left(\hat{a}_1^\dagger - \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger - \hat{a}_2 \right), \end{aligned}$$

i

$$g = \frac{3\varepsilon_0 \mathcal{F}^4 \chi^l l_m}{\pi \hbar \omega^2}. \quad (444)$$

17.2 Solucions clàssiques i anàlisi d'estabilitat

Les equacions clàssiques s'obtenen de les de Langevin (290,291) si anulem els termes de soroll i realitzem la substitució $\beta_j^+ \equiv \beta_j^*$. Ara cerquem solucions estacionàries per aquestes equacions i les denotem $\tilde{\beta}_j$, de forma que $\dot{\tilde{\beta}}_j = 0$. Les equacions de partida seran per tant

$$\dot{\tilde{\beta}}_+ = -(1 + i\Delta)\tilde{\beta}_+ + i\left(|\tilde{\beta}_+|^2 + 2|\tilde{\beta}_-|^2 + 2p\right)\tilde{\beta}_+ + ip\tilde{\beta}_-^*, \quad (445)$$

$$\dot{\tilde{\beta}}_- = -(1 + i\Delta)\tilde{\beta}_- + i\left(|\tilde{\beta}_-|^2 + 2|\tilde{\beta}_+|^2 + 2p\right)\tilde{\beta}_- + ip\tilde{\beta}_+^*, \quad (446)$$

expressió en la que s'ha emprat el reescalat (288) excepte per a la variable $\tilde{\beta}$ que aquí es defineix

$$\tilde{\beta}_\pm = \sqrt{\frac{g}{\gamma_s}}\alpha_\pm = \beta_\pm e^{i\psi} \quad (447)$$

per tal de fer els càlculs més senzills. Aquesta expressió mostra que la dinàmica clàssica del sistema està governada solament per dos paràmetres, la desintonia normalitzada Δ i la intensitat del bombeig p . El fet que aquestes equacions siguin invariants sota el canvi $(\tilde{\beta}_+, \tilde{\beta}_-) \rightarrow (\tilde{\beta}_+ e^{i\theta}, \tilde{\beta}_- e^{-i\theta})$, implica que la diferència de fase entre els modes senyal θ roman indeterminada, com esperàvem.

17.2.1 Solucions amb desintonia nul·la

Si el sistema està en sintonia, $\delta = 0$, és senzill demostrar que la solució "apagada", $\tilde{\beta}_\pm = 0$, (per sota del llindar de generació paramètrica) és estable per a qualsevol elecció de la resta de paràmetres, és a dir per a qualsevol valor del bombeig.

Aquesta demostració és basa en el fet que els autovalors de la matriu lineal associada a les equacions anteriors són doblement degenerats i valen

$$\lambda_\pm = -1 \pm \sqrt{3}ip \quad (448)$$

resultat que implica una part real negativa sempre i per tant una solució estable.

17.2.2 Inestabilitat de la solució apagada amb desintonia no nul·la

D'acord amb les deduccions anteriors és necessària una desintonia per que els modes senyal s'engeguen. Hem d'estudiar per tant, l'estabilitat de la solució apagada, $\tilde{\beta}_\pm = 0$, amb $\delta \neq 0$. En aquest cas podem trobar que els autovalors

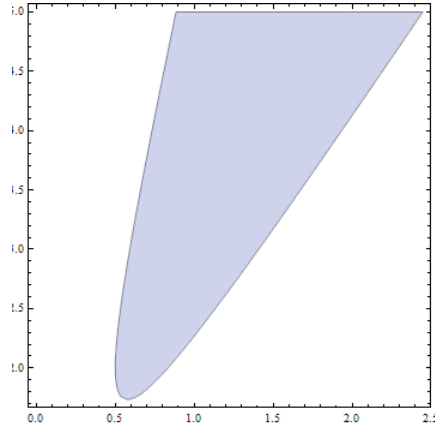


Figura 27: Zona en la qual la solució "apagada" (amb desintonia) és inestable. A l'eix horitzontal es representen els valors de p i l'eix vertical els de Δ

de la matriu d'estabilitat del sistema (igual, per construcció a la matriu \mathcal{L} de les equacions de Langevin linealitzades (306)) són

$$\lambda_{\pm} = -1 \pm \sqrt{p^2 - (\Delta - 2p)^2}, \quad (449)$$

de forma que per tal que existisca una regió d'inestabilitat per a la solució apagada (és a dir que s'engegaran els camps senyal) cal que el bombeig es trobe entre els valors

$$\frac{\Delta}{3} < p < \Delta, \quad (450)$$

així l'arrel serà real i l'autovalor pot ser real i positiu.

A partir d'aquestes expressions es pot trobar que $\text{Re}(\lambda_+)$ es fa positiu si el bombeig satisfà

$$\frac{1}{3} \left(2\Delta - \sqrt{\Delta^2 - 3} \right) < p < \frac{1}{3} \left(2\Delta + \sqrt{\Delta^2 - 3} \right), \quad (451)$$

que a l'espai de paràmetres es correspon amb la regió marcada en la figura (27).

Ressaltem el requisit de que $\Delta > \sqrt{3}$, per tal que la solució "apagada" es desestabilitze.

17.2.3 Solució engegada

Ara suposem que els modes senyal estan engegats, $\tilde{\beta}_{\pm} \neq 0$, i descomposem les seues amplituds en mòdul i fase

$$\tilde{\beta}_{\pm} = \mu_{\pm} e^{i\varphi_{\pm}}. \quad (452)$$

Així les equacions anteriors per a l'estat estacionari (445,446) es reescriuen com

$$[1 + i(\Delta - \mu_+^2 - 2\mu_-^2 - 2p)]\mu_+ = ip\mu_- e^{-i(\varphi_+ + \varphi_-)}, \quad (453)$$

$$[1 + i(\Delta - \mu_-^2 - 2\mu_+^2 - 2p)]\mu_- = ip\mu_+ e^{-i(\varphi_+ + \varphi_-)}. \quad (454)$$

expressions que es permeten deduir que els mòduls dels modes senyal han de ser iguals, $\mu_{\pm} = \mu$, i per tant

$$\sin(\varphi_+ + \varphi_-) = \frac{1}{p}, \quad (455)$$

$$\cos(\varphi_+ + \varphi_-) = \frac{1}{p}(\Delta - 2p - 3\mu^2), \quad (456)$$

resultat que fixa el valor de la suma de fases (però no la resta, que ja havíem indicat que restava indeterminada). D'altra banda, si ara elevem al quadrat les equacions anteriors i les sumem obtenim les solucions (on la notació μ_{\pm} es refereix a les dues solucions de l'equació i situa els signes de forma diferent a la notació modal que els duu de subíndex)

$$\mu_{\pm}^2 = \frac{(\Delta - 2p) \pm \sqrt{p^2 - 1}}{3}.$$

Observem per tant que la solució "engugada" solament existeix per sobre del llindar (requisit per a que $\mu^2 \in \mathbb{R}$)

$$p^2 > 1, \quad (457)$$

a més ha d'acomplir el requisit ($\mu^2 > 0$)

$$\Delta > 2p - \sqrt{p^2 - 1}, \quad (458)$$

per a l'existència de la solució μ_+ ; i el requisit

$$\Delta > 2p + \sqrt{p^2 - 1}, \quad (459)$$

per a l'existència de la solució μ_- .

En les figures (28) i (29) podem veure la regió (groc) de l'espai de paràmetres on es satisfan aquestes dues condicions ((457,458) a la figura (28) i (457,459) a la figura (29)) superposades a la regió on la solució apagada es torna inestable (blau). Observem que la solució μ_+ sí existeix on es torna inestable la solució apagada (figura 28), mentre que μ_- no (figura 29).

Es comprova així que la solució μ_+ és estable per a tota la regió d'existència, mentre que μ_- és completament inestable.

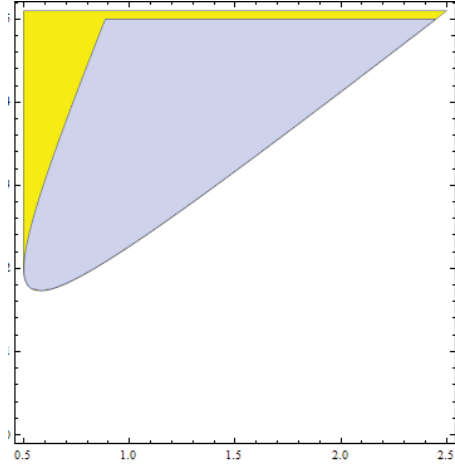


Figura 28: Zona (groc) de l'espai de paràmetres (p a les abscisses i Δ a les ordenades) on es satisfan aquestes dues condicions ((457,458) superposada a la regió on la solució apagada es torna inestable (blau). Observem que la solució $\mu+$ sí existeix on es torna inestable la solució apagada.

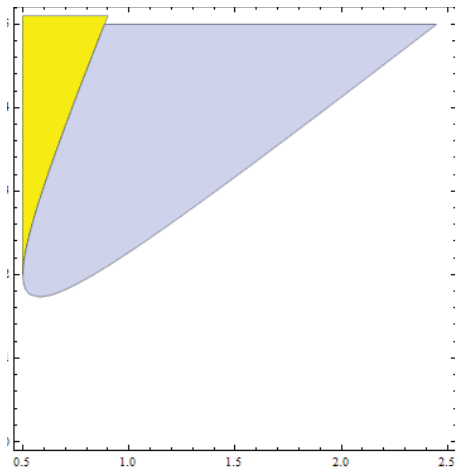


Figura 29: Zona (groc) de l'espai de paràmetres (p a les abscisses i Δ a les ordenades) on es satisfan aquestes dues condicions ((457,459) superposada a la regió on la solució apagada es torna inestable (blau). Observem que la solució $\mu-$ no existeix on es torna inestable la solució apagada.

Així doncs, la solució engegada tindrà mòdul

$$\mu^2 = \frac{(\Delta - 2p) + \sqrt{p^2 - 1}}{3}. \quad (460)$$

A més denotem

$$\psi = \frac{1}{2} (\varphi_- + \varphi_+), \quad (461)$$

$$\theta = \frac{1}{2} (\varphi_- - \varphi_+), \quad (462)$$

de forma que a partir de (455)

$$\sin 2\psi = \frac{1}{p} \quad (463)$$

i la solució clàssica engegada (452) queda per tant

$$\tilde{\beta}_{\pm} = \mu e^{i\psi} e^{\mp i\theta}. \quad (464)$$

En termes de la envoltant lenta del camp, la solució clàssica amb els modes senyals engegats (248) és per tant

$$A_s^{class}(\mathbf{r}) = \mu e^{i\psi} [e^{-i\theta} L_+(\mathbf{r}) + e^{+i\theta} L_-(\mathbf{r})] = \sqrt{2} \mu e^{i\psi} H_{10}^{\theta}(\mathbf{r}), \quad (465)$$

és a dir, el camp és un mode de Gauss-Hermite (251) TEM₁₀ rotat un angle arbitrari θ .

17.2.4 Eliminació de la fase dependent del bombeig

La solució estacionària en el cas dels modes senyals engegats (464) té una fase ψ que depen del bombeig p (463). Per tant, les quadratures rellevants del problema dependran igualment d'aquest paràmetre. Per eliminar aquesta complicació, fem un canvi de variable més respecte de l'anterior:

$$\beta_{\pm} = e^{-i\psi} \tilde{\beta}_{\pm}, \quad (466)$$

$$\beta_{\pm}^+ = e^{i\psi} \tilde{\beta}_{\pm}^+. \quad (467)$$

Convé destacar aquí que amb aquest darrer canvi la variable β_{\pm} coincideix amb la definida en el reescalat (288). Amb aquestes variables, la solució estacionària clàssica (464) és simplement

$$\bar{\beta}_{\pm} = \mu e^{\mp i\theta}, \quad (468)$$

amb θ qualsevol fase, i l'equació per a l'envoltant (465) quedarà, si substituïm el valor de μ per a la solució estable engegada (460)

$$\begin{aligned} A_s^{class}(\mathbf{r}) &= \mu [e^{-i\theta} L_+(\mathbf{r}) + e^{+i\theta} L_-(\mathbf{r})] \\ &= \left[\frac{2}{3} (\Delta - 2p + \sqrt{p^2 - 1}) \right]^{1/2} H_{10}^{\theta}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (469)$$

17.3 Solució del problema lineal i espectres de *squeezing* de les quadratures relevantes

Per projecció de les equacions de Langevin linealitzades (305) sobre els vectors \mathbf{w}_j^* de la base biortonormal (324,325) hem obtingut (333,334)

$$\dot{\theta}(T) = \frac{1}{iN_0\mu} \mathbf{w}_0^* \mathcal{K} \bar{\mathcal{B}} \boldsymbol{\xi}(T), \quad (470)$$

$$\dot{c}_1(t) = \lambda_1 c_1(T) + \mathbf{w}_1^* \mathcal{K} \bar{\mathcal{B}} \boldsymbol{\xi}(T), \quad (471)$$

on s'ha pres $c_0 = 0$, ja que sempre pot redefinir-se la fase θ (arbitrària) per tal que reculli tota la informació d'aquest mode.

Cerquem en primer lloc les solucions a aquestes dues equacions. La solució per a $\theta(T)$ s'obté per integració immediata amb la condició inicial $\theta(T=0) = 0$ escollida per simplicitat.

$$\theta(T) = \frac{\mathbf{w}_0^* \mathcal{K} \bar{\mathcal{B}}}{iN_0\mu} \int_0^T dT' \boldsymbol{\xi}(T'). \quad (472)$$

D'altra banda, per obtenir la solució per a $c_1(T)$ podem fer el canvi de variable (recordem que $\lambda_1 = -2$):

$$x(T) = e^{2T} c_1(T), \quad (473)$$

que ens permet escriure

$$\dot{x} = (\dot{c}_1 + 2c_1) e^{2T} = \mathbf{w}_i^* \mathcal{K} \bar{\mathcal{B}} \boldsymbol{\xi} e^{2T}, \quad (474)$$

de solució formal

$$x(T) = x(0) + \int_0^T dt' \mathbf{w}_i^* \mathcal{K} \bar{\mathcal{B}} \boldsymbol{\xi}(t') e^{2t'}, \quad (475)$$

si ara invertim el canvi de variable (473), obtenim la solució per a $c_1(T)$, després d'eliminar el terme $e^{-2T} x(0)$ donat que tendeix a zero per a temps suficientment grans

$$c_1(T) = \int_0^T dt' \mathbf{w}_i^* \mathcal{K} \bar{\mathcal{B}} \boldsymbol{\xi}(t') e^{2(t'-T)}. \quad (476)$$

Calcule ara les correlacions necessàries per a l'estudi del soroll a les quadratures.

En primer lloc, la difusió

$$\begin{aligned}
& \langle \theta(T), \theta(T + \tau) \rangle = \\
& = -\frac{1}{N_0^2 \mu^2} (\mathbf{w}_0^* \mathcal{K} \bar{\mathcal{B}})_k (\mathbf{w}_0^* \mathcal{K} \bar{\mathcal{B}})_n \int_0^T dt' \int_0^T dt'' \langle \xi_k(t') \xi_n(t'') \rangle \\
& = -\frac{1}{N_0^2 \mu^2} (\mathbf{w}_0^* \mathcal{K} \bar{\mathcal{B}})_k (\mathbf{w}_0^* \mathcal{K} \bar{\mathcal{B}})_n \int_0^T dt' \int_0^T dt'' \delta_{kn} \delta(t' - t'') \\
& = -\frac{\mathbf{w}_0^* \mathcal{K} \bar{\mathcal{D}} \mathcal{K} \mathbf{w}_0^*}{N_0^2 \mu^2} T \tag{477}
\end{aligned}$$

i l'autocorrelació de c_1 s'obté, de forma anàloga

$$\begin{aligned}
& \langle c_1(T) c_1(T + \tau) \rangle = \\
& = (\mathbf{w}_1^* \mathcal{K} \bar{\mathcal{B}})_q (\mathbf{w}_1^* \mathcal{K} \bar{\mathcal{B}})_n e^{-2T-2(T+\tau)} \int_0^T dt' \int_0^{T+\tau} dt'' e^{2t'} e^{2t''} \langle \xi_q(t') \xi_n(t'') \rangle \\
& = \frac{\mathbf{w}_1^* \mathcal{K} \bar{\mathcal{D}} \mathcal{K} \mathbf{w}_1^*}{4} \cdot \begin{cases} e^{-2\tau} & \text{si } \tau > 0 \\ e^{2\tau} & \text{si } \tau < 0 \end{cases} \tag{478}
\end{aligned}$$

d'altra banda, recordem (316) que la matriu $\mathcal{K} \bar{\mathcal{D}} \mathcal{K}$ es pot escriure com

$$\mathcal{K} \bar{\mathcal{D}} \mathcal{K} = \begin{pmatrix} iA & C & 0 & 0 \\ C & iA & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -iA & C^* \\ 0 & 0 & C^* & -iA \end{pmatrix}$$

amb

$$\begin{aligned}
A & = \kappa \mu^2 \in \mathbb{R} \tag{479} \\
C & = i\kappa (2\mu^2 + p e^{-2i\psi}) \in \mathbb{C},
\end{aligned}$$

de forma que tenim les expressions per a tots els $\mathbf{w}_i^* \mathcal{K} \bar{\mathcal{D}} \mathcal{K} \mathbf{w}_i^*$; ($i = 0, 1, 2, 3$) i per tant

$$d_{00} = \mathbf{w}_0^* \mathcal{K} \bar{\mathcal{D}} \mathcal{K} \mathbf{w}_0^* = -4 \operatorname{Re} \{ e^{-2i\phi_0} (C - iA) \}, \tag{480}$$

$$d_{11} = \mathbf{w}_1^* \mathcal{K} \bar{\mathcal{D}} \mathcal{K} \mathbf{w}_1^* = -4 \operatorname{Re} \{ C \}, \tag{481}$$

De forma que obtenim

$$\begin{aligned}
\langle \theta(T), \theta(T + \tau) \rangle & = -\frac{d_{00}}{N_0^2 \mu^2} T \\
& = 4\kappa \frac{\mu^2 \sin(2\phi_0) + p \sin(\phi_0 + \psi)}{N_0^2 \mu^2} T, \tag{482}
\end{aligned}$$

$$\langle c_1(T), c_1(T + \tau) \rangle = \frac{d_{11}}{4} e^{-2|\tau|} = -\frac{4\kappa p \sin(2\psi)}{4} e^{-2|\tau|}, \tag{483}$$

Les transformades de Fourier d'aquestes correlacions són els espectres de correlació buscats

$$\tilde{C}_{00}(\omega) = 0, \quad (484)$$

$$\tilde{C}_{11}(\omega) = \frac{d_{11}}{4 + \omega^2}. \quad (485)$$

Calulem ara els espectres de fluctuacions de les quadratures associades a aquestes projeccions (332). Aquest espectre es calcula d'acord amb (177)

$$V(X^\varphi; \omega) = 1 + S^{out}(X^\varphi; \omega), \quad (486)$$

amb

$$S^{out}(X^\varphi; \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\omega\tau} \langle : \hat{X}_{out}^\varphi(t + \tau), \hat{X}_{out}^\varphi(t) : \rangle \quad (487)$$

$$= \frac{2}{\kappa} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\omega\tau} \langle \hat{X}^\varphi(t + \tau), \hat{X}^\varphi(t) \rangle_{\mathcal{P}}, \quad (488)$$

on s'ha aplicat el formalisme input-output (veure cap. 7) amb les variables i paràmetres reescalats.

Però, tal i com ja hem vist (332), les fluctuacions de les quadratures $\hat{X}_d^{\phi_0}$ i $\hat{X}_d^{\pi/2}$ calculades en la representació P -positiva es poden escriure en termes de les projeccions definides en la diagonalització del problema lineal

$$X_d^{\phi_0} = \frac{i}{\sqrt{2}}c_0, \quad X_d^{\pi/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}c_1. \quad (489)$$

Per tant, els seus espectres de *squeezing* són:

$$S^{out}(X_d^{\phi_0}; \omega) = -\frac{1}{\kappa}\tilde{C}_{00}(\omega) = 0, \quad (490)$$

$$S^{out}(Y_{s,\varphi_d}; \omega) = \frac{1}{\kappa}\tilde{C}_{11}(\omega) = -\frac{1}{\kappa} \frac{4 \operatorname{Re}\{C\}}{4 + \omega^2} = -\frac{4}{4 + \omega^2}, \quad (491)$$

on s'ha utilitzat que $\sin(2\psi) = 1/p$ (veure (289)).

Part VII

Bibliografia

- [1] H.-A. Bachor, *A Guide to Experiments in Quantum Optics* (Wiley-VCH, Weinheim, 1996).
- [2] M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1999).
- [3] A. Boyd, *Nonlinear optics* (Academic Press, London, 2003).
- [4] S. L. Braunstein, *Quantum information with continuous variables*, Rev. Mod. Phys. **77** (2005) 513–577 .
- [5] B. Butcher, *The Elements of Nonlinear Optics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1990).
- [6] K. E. Cahill and R. J. Glauber, *Density Operators and Quasiprobability Distributions*, Phys. Rev. **177** (1969) 1882-1902 .
- [7] H. J. Carmichael, *Spectrum of squeezing and photocurrent shot noise: a normally ordered treatment*, J. Opt. Soc. Am. B **4** (1987) 1588-1603.
- [8] H. J. Carmichael, *Statistical Methods in Quantum Optics 1. Master Equations and Fokker-Planck Equations* (Springer, Berlin, 1999).
- [9] H. J. Carmichael, *Statistical Methods in Quantum Optics 2. Non-Classical Fields* (Springer, Berlin, 2008).
- [10] P. Carruthers and M. M. Nieto, *Phase and Angle Variables in Quantum Mechanics*, Rev. Mod. Phys. **40** (1968) 411-440 .
- [11] C. M. Caves, K. S. Thorne, R. W. P. Drever, V. D. Sandberg and M. Zimmermann, *On the measurement of a weak classical force coupled to a quantum mechanical oscillator: I. Issue of principle*, Rev. Mod. Phys. **52** (1980) 341–392.
- [12] S. Chaturvedi, C. W. Gardiner, I. Matheson, and D. F. Walls, *Stochastic analysis of a chemical reaction with spatial and temporal structures*, J. Stat. Phys. **17** (1977) 469-489.

- [13] S. Chaturvedi, K. Dechoum and P. D. Drummond, *Limits to squeezing in the degenerate optical parametric oscillator*, Phys. Rev. A **65** (2002) 033805 (1-15).
- [14] M. J. Collet and C. W. Gardiner, *Squeezing of intracavity and traveling-wave light fields produced in parametric amplification*, Phys. Rev. A **30** (1984) 1386-1391.
- [15] C. W. Gardiner and M. J. Collet, *Input and output in damped quantum systems: Quantum stochastic differential equations and the master equation*, Phys. Rev. A **31** (1985) 3761-3774.
- [16] M. J. Collet and D. F. Walls, *Squeezing spectra for nonlinear optical systems*, Phys. Rev. A **32** (1985) 2887-2892.
- [17] P. A. M. Dirac, *The Quantum Theory of the Emission and Absorption of Radiation*, Proc. R. Soc. Lond. A **114** (1927) 243-265.
- [18] V. V. Dodonov, *Nonclassical states in quantum optics: a 'squeezed' review of the first 75 years*, J. Opt. B **4** (2002) R1-R33.
- [19] P. D. Drummond and D. F. Walls, *Quantum theory of optical bistability. I: Nonlinear polarisability model*, J. Phys. A **13** (1980) 725-741.
- [20] P. D. Drummond and C. W. Gardiner, *Generalised P-representations in quantum optics*, J. Phys. A: Math. Gen. **13** (1980) 2353-2368.
- [21] P. D. Drummond, K. J. McNeil and D. F. Walls, *Non-equilibrium transitions in sub/second harmonic generation II*, Optica Acta **28** (1981) 211-225.
- [22] S. Franke-Arnold and A. S. Arnold, *Twisting Light to Trap Atoms*, Am. Sci. **96** (2008) 226-233.
- [23] V. Fock, *Verallgemeinerung und Lösung der Diracschen statistischen Gleichung*, Z. Phys **49** (1928) 339-357 .
- [24] A. Furusawa, J. L. Sørensen, S. L. Braunstein, C. A. Fuchs, H. J. Kimble and E. S. Polzik, *Unconditional Quantum Teleportation*, Science **282** (1998) 706-709 .
- [25] F. V. Garcia-Ferrer, I. Pérez-Arjona, G. J. de Valcárcel and E. Roldán, *Squeezing spectra from s-ordered quasiprobability distributions: application to dispersive optical bistability*, J. Mod. Opt. **52** (2005) 763-773.

- [26] F. V. Garcia-Ferrer, I. Pérez-Arjona, G. J. de Valcárcel and E. Roldán, *Quadrature and polarization squeezing in a dispersive optical bistability model*, Phys. Rev. A **75** (2007) 063823 (1-11).
- [27] F. V. Garcia-Ferrer, C. Navarrete-Benlloch, G. J. de Valcárcel and E. Roldán, *Squeezing via spontaneous rotational symmetry breaking in a four-wave mixing cavity*, IEEE J. Quantum Electron. **4** (2009) 1404-1414.
- [28] F. V. Garcia-Ferrer, C. Navarrete-Benlloch, G. J. de Valcárcel and E. Roldán, *Noncritical quadrature squeezing through spontaneous polarization symmetry breaking*, Opt. Lett. **35** (2010) 2194-2196 .
- [29] C. W. Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods* (Springer, Berlin, 1985).
- [30] C. W. Gardiner and P. Zoller, *Quantum Noise* (Springer, Berlin, 2000).
- [31] J. Gea-Banacloche, N. Lu, L. M. Pedrotti, S. Prasad, M. O. Scully and K. Wódkiewicz, *Treatment of the spectrum of squeezing based on the modes of the universe. I. Theory and a physical picture*, Phys. Rev. A **41** (1990) 369-380.
- [32] J. Gea-Banacloche, N. Lu, L. M. Pedrotti, S. Prasad, M. O. Scully and K. Wódkiewicz, *Treatment of the spectrum of squeezing based on the modes of the universe. II. Applications*, Phys. Rev. A **41** (1990) 381-387.
- [33] C. C. Gerry and P. L. Knight, *Introductory Quantum Optics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2005).
- [34] R. J. Glauber, *Photon correlations*, Phys. Rev. Lett. **10** (1963) 84-86.
- [35] R. J. Glauber, *Coherent and incoherent states of the radiation field*, Phys. Rev. **131** (1963) 2766-2788.
- [36] R. D. Guenther, *Modern Optics* (Wiley, New York, 1990).
- [37] J. Heersink, T. Gaber, S. Lorenz, O. Glöckl, N. Korolkova and G. Leuchs, *Polarization squeezing of intense pulses with a fiber-optic Sagnac interferometer*, Phys. Rev. A **68** (2003) 013815 (1-9).
- [38] N. Hodgson and H. Weber, *Laser Resonators and Beam Propagation* (Springer-Verlag, New York, 2005).

- [39] G. Iwata, *Non-Hermitian operators and eigenfunction expansions*, Prog. Theor. Phys. **6** (1951) 216-226.
- [40] E. H. Kennard, *Zur Quantenmechanik einfacher Bewegungstypen*, Z. Phys. **44** (1927) 326–352.
- [41] H. J. Kimble, Y. Levin, A. B. Matsko, K. S. Thorne and S. P. Vyatchanin, *Conversion of conventional gravitational-wave interferometers into quantum nondemolition interferometers by modifying their input and/or output optics*, Phys. Rev. D **65** (2001) 022002 (1-31).
- [42] T. J. Kippenberg, S. M. Spillane and K. J. Vahala, *Kerr-nonlinearity optical parametric oscillation in an ultrahigh-Q toroid microcavity*, Phys. Rev. Lett., **93** (2004) 083904 (1-4).
- [43] N. Korolkova, G. Leuchs, R. Loudon, T. C. Ralph and C. Silberhorn, *Polarization squeezing and continuous-variable polarization entanglement*, Phys. Rev. A **65** (2002) 052306 (1-12).
- [44] R. Lang, M. O. Scully and W. E. Lamb Jr., *Why is the Laser Line So Narrow? A Theory of Single-Quasimode Laser Operation*, Phys. Rev. A **1** (1973) 1788-1797.
- [45] R. Lang and M. O. Scully, *Fluctuations in mode locked “single-mode” laser oscillation*, Opt. Commun. **9** (1973) 331-337.
- [46] S. Longhi, *Localized structures in optical parametric oscillation*, Phys. Scr. **56** (1997) 611-618 .
- [47] W. H. Louisell, *Quantum Statistical Properties of Radiation* (Wiley, New York, 1990).
- [48] L. A. Lugiato, in *Progress in Optics XXI* (edited by E. Wolf, North Holland, Amsterdam, 1984).
- [49] A. Luís and N. Korolkova, *Polarization squeezing and nonclassical properties of light*, Phys. Rev. A **74** (2006) 043817.
- [50] M. Mehmet, H. Vahlbruch, N. Lastzka, K. Danzmann and R. Schnabel, *Observation of squeezed states with strong photon-number oscillations*, Phys. Rev. A **81** (2010) 013814 (1-7).
- [51] A. Messiah, *Quantum mechanics* (North-Holland, Amsterdam, 1961).

- [52] *Nonclassical Effects in Quantum Optics: A Collection of Reprints*, edited by P. Meystre and D. F. Walls (American Institute of Physics, New York, 1991).
- [53] G. Milburn and D. F. Walls, *Production of squeezed states in a degenerate parametric amplifier*, Opt. Commun. **39** (1981) 401-404 .
- [54] C. Navarrete-Benlloch, E. Roldán, G. J. de Valcárcel, *Noncritically squeezed light via spontaneous rotational symmetry breaking*, Phys. Rev. Lett. **100** (2008) 203601 (1-4).
- [55] C. Navarrete-Benlloch, G. J. de Valcárcel and E. Roldán, *Generating highly squeezed hybrid Laguerre–Gauss modes in large fresnel number degenerate optical parametric oscillators*, Phys. Rev. A. **79** (2009) 043820 (1-9).
- [56] C. Navarrete-Benlloch, A. Romanelli, E. Roldán and G. J. de Valcárcel, *Non-critical squeezing in 2-transverse-mode optical parametric oscillators*, Phys. Rev. A **81** (2010) 043829 (1-15).
- [57] G. L. Oppo, M. Brambilla, and L. A. Lugiato, *Formation and evolution of roll patterns in optical parametric oscillators*, Phys. Rev. A **49** (1994) 2028-2032.
- [58] L. A. Orozco, M. G. Raizen, M. Xiao, R. J. Brecha, and H. J. Kimble, *Squeezed-state generation in optical bistability*, J. Opt. Soc. Am. B **4** (1987) 1490-1500.
- [59] I. Pérez-Arjona, V. J. Sánchez-Morcillo, G. J. de Valcárcel and E. Roldán, *Bright cavity solitons in anisotropic vectorial Kerr cavities*, J. Opt. B **3** (2001) S118-S123 .
- [60] I. Pérez-Arjona, *Estudi sobre Estructures Dissipatives en Sistemes Òptics No-Lineals. Estructures Localitzades i Fluctuacions Quàntiques*, Tesi Doctoral (no publicada, València 2004).
- [61] I. Pérez-Arjona, E. Roldán, and G. J. deValcárcel, *Quantum squeezing of optical dissipative structures*, Europhys. Lett. **74** (2006) 247-253.
- [62] I. Pérez-Arjona, E. Roldán, and G. J. de Valcárcel, *Theory of quantum fluctuations of optical dissipative structures and its application to the squeezing properties of bright cavity solitons*, Phys. Rev. A **75** (2007) 063802 (1-15).

- [63] J. Pryde, *Quantum physics: Squeeze until it hurts* Nature, **457** (2009) 35-36 , News and Views.
- [64] D. T. Pegg and S. M. Barnett, *Reply to “Comment on ‘Phase properties of the quantized single-mode electromagnetic field’”*, Phys. Rev. A **43** (1991) 2579-2580.
- [65] S. Reynaud, C. Fabre, and E. Giacobino, *Quantum fluctuations in a two-mode parametric oscillator*, J. Opt. Soc. Am. B **4** (1987) 1520-1524.
- [66] V. J. Sánchez-Morcillo, G. J. de Valcárcel and E. Roldán, *Polarization instability in anisotropic-cavity degenerate four-wave mixing*, Opt. Commun. **173** (2000) 381-387.
- [67] C. M. Savage, *Oscillations and quantized second-harmonic generation*, Phys. Rev. A **37** (1988) 158-162 .
- [68] R. Schnabel, *Gravitational wave detectors: Squeezing up the sensitivity*, Nature Physics **4** (2008) 440-441, News and Views.
- [69] E. Schrödinger, *Der stetige Übergang von der Mikro- zur Makromechanik*, Naturwissenschaften **14** (1926) 664-666.
- [70] M. O. Scully and S. Zubairy, *Quantum Optics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1997).
- [71] J. E. Sharping, M. Fiorentino, P. Kumar, and R. S. Windeler, *Optical parametric oscillator based on four-wave mixing in microstructure fiber*, Opt. Lett., **27** (2002) 1675-1677.
- [72] R. E. Slusher, L. W. Hollberg, B. Yurke, J. C. Mertz and J. F. Valley, *Observation of squeezed states generated by four-wave mixing in an optical cavity*, Phys. Rev. Lett. **55** (1985) 2409-2412.
- [73] K. Staliunas and V.J. Sánchez–Morcillo, *Transverse Patterns in Non-linear Optical Resonators* (Springer, Berlín, 2002).
- [74] E. C. G. Sudarshan, *Equivalence of semiclassical and quantum mechanical descriptions of statistical light beams*, Phys. Rev. Lett. **10** (1963) 277-279.
- [75] I. Susskind and J. Glogower, *Physics* **1** (1964) 49.
- [76] Y. Takeno, Mi. Yukawa, H. Yonezawa, and A. Furusawa, *Observation of -9 dB quadrature squeezing with improvement of phase stability in homodyne measurement*, Opt. Expr. **15** (2007) 4321-4327.

- [77] M. C. Teich and B. E. A. Saleh, *Squeezed states of light*, Quantum Opt. **1** (1989) 152-191.
- [78] U. M. Titulaer and R. J. Glauber, *Correlation functions for coherent fields*, Phys. Rev. **140** (1965) B676-B682.
- [79] N. Treps, U. Andersen, B. Buchler, P. K. Lam, A. Maître, H.-A. Bachor, and C. Fabre, *Surpassing the standard quantum limit for optical imaging using nonclassical multimode light*, Phys. Rev. Lett. **88** (2002) 203601 (1-4).
- [80] S. Trillo, M. Haelterman and C. Sheppard, *Stable topological spatial solitons in optical parametric oscillators*, Opt. Lett. **22** (1997) 970-972.
- [81] K. Ujihara, *Quantum theory of a one-dimensional optical cavity with output coupling. Field quantization*, Phys. Rev. A **12** (1975) 148-158; *Theory of a One-Dimensional Laser with Output Coupling -Linear Theory-*, Jpn. J. Appl. Phys. **15** (1976) 1529-1541; *Quantum theory of a one-dimensional laser with output coupling. Linear theory*, Phys. Rev. A **16** (1977) 652-658.
- [82] H. Vahlbruch, M. Mehmet, S. Chelkowski, B. Hage, A. Franzen, N. Lastzka, S. Goßler, K. Danzmann and R. Schnabel, *Observation of squeezed light with 10-dB quantum-noise reduction*, Phys. Rev. Lett. **100** (2008) 033602 (1-4).
- [83] G.J. de Valcárcel, K. Staliunas, E. Roldán and V. J. Sánchez-Morcillo, *Transverse patterns in degenerate optical parametric oscillation and degenerate four-wave mixing*, Phys. Rev. A **54** (1996) 1606-1624.
- [84] M. Vallet, M. Pinard and G. Grynberg, *Generation of Twin Photon Beams in a Ring Four-Wave Mixing Oscillator*, Europhys. Lett. **11** (1990) 739-744.
- [85] N. G. Van Kampen, *Stochastic processes in physics and chemistry* (North-Holland, Amsterdam, 1992).
- [86] K. Vogel and H. Risken, *Quantum-tunneling rates and stationary solutions in dispersive optical bistability*, Phys. Rev. A **38** (1988) 2409-2422.
- [87] K. Vogel and H. Risken, *Quasiprobability distributions in dispersive optical bistability*, Phys. Rev. A **39** (1989) 4675-4683.
- [88] D. F. Walls and G. J. Milburn, *Quantum Optics* (Springer, Berlin, 1994).

- [89] G. K. L. Wong, A. Y. H. Chen, S. G. Murdoch, R. Leonhardt, J. D. Harvey, N. Y. Joly, J. C. Knight, W. J. Wadsworth and P. St. J. Russell, *Continuous-wave tunable optical parametric generation in a photonic-crystal fiber*, J. Opt. Soc. Amer. B **22** (2005) 2505-2511.
- [90] H. P. Yuen, *Two-photon coherent states of the radiation field*, Phys. Rev. A **13** (1976) 2226–2243.
- [91] H. P. Yuen and V. W. S. Chan, *Noise in homodyne and heterodyne detection*, Opt. Lett. **8** (1983) 177-179; errata **8** (1983) 345-345.
- [92] B. Yurke, *Use of cavities in squeezed-state generation*, Phys. Rev. A **29** (1984) 408-410.
- [93] B. Yurke and D. Stoler, *Generating quantum mechanical superpositions of macroscopically distinguishable states via amplitude dispersion*, Phys. Rev. Lett. **57** (1986) 13-16
- [94] R. Zambrini, M. Hoyuelos, A. Gatti, P. Colet, L. Lugiato and M. San Miguel, *Quantum fluctuations in a continuous vectorial Kerr medium model*, Phys. Rev. A **65** (2000) 063801 (1-13).