

AVALUACIÓ PSICOMÈTRICA DE L'ESTIMACIÓ EN NUMERACIÓ I CÀLCUL A L'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

*Mercè Pañellas i Valls**

Resum

L'estimació en numeració i càlcul ha pres rellevància en les dues darreres dècades per la seva importància i necessitat social i, per aquest motiu, ha estat progressivament inclosa en els currículums de matemàtiques de l'educació obligatòria. Tanmateix, el treball de l'estimació a l'aula es veu reduït freqüentment a les tècniques d'arrodoniment i els alumnes no es mostren hàbils a l'hora de desenvolupar estratègies d'estimació o de decidir quan un càlcul estimat és adient per a una situació problemàtica.

En aquest article es presenta un test adreçat a estudiar els processos utilitzats en tasques d'estimació en numeració i càlcul per infants que han acabat l'educació primària. S'explica el mètode seguit per a la seva elaboració i s'indiquen els resultats després d'aplicar-lo a una mostra de dinou grups classe.

Aquest test està dissenyat estructuralment des de dues visions complementàries, tot i que es dona més èmfasi a la primera: quatre àmbits d'estimació i els objectius i continguts generals de numeració i càlcul de l'educació primària referents als conjunts numèrics dels nombres naturals i dels nombres decimals.

Paraules clau: estimació i càlcul mental, psicometria, educació primària.

* Membre del grup de recerca PSITIC.

Facultat de Psicologia, Ciències de l'Educació i de l'Esport Blanquerna,
Universitat Ramon Llull.

NOTA DE L'AUTORA: Els continguts d'aquest article són una part de la tesi de doctorat de l'autora. Si voleu fer cap comentari sobre aquest treball, podeu adreçar-vos a l'autora: Facultat de Psicologia, Ciències de l'Educació i de l'Esport *Blanquerna*, Universitat Ramon Llull, carrer del Císter 34, 08022 Barcelona. Correu electrònic: <mercepv@blanquerna.url.edu>.

Abstract

Estimating in numbering and calculus has become more significant in the last two decades due to its importance and social need. For this reason, it has been progressively included in Maths curricula in compulsory education. However, working with estimates in the classroom frequently comes down to rounding techniques, and students have no skills when developing estimating strategies or when deciding when an estimate is appropriate for a problem situation.

This article presents a test aimed at studying processes used by children in estimating tasks for numbering and calculus at the end of primary education. The method followed to create the test is explained, and results are presented after its application in a sample of 19 class-groups.

This test is structurally designed from two complementary visions, although the first one is given more emphasis: four estimating areas and general objectives and content of numbering and calculus in primary education concerning natural numbers and decimal numbers.

Key words: estimation and mental computation, psychometrics, elementary school.

AVALUACIÓ PSICOMÈTRICA DE L'ESTIMACIÓ EN NUMERACIÓ I CÀLCUL A L'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

El treball que presentem se centra en els processos utilitzats pels infants per resoldre tasques d'estimació en numeració i càlcul en acabar l'educació primària. Té com a finalitat conèixer la seva habilitat en aquest aspecte de l'estimació i, a partir de l'anàlisi dels processos, descobrir les estratègies que fan servir. Creiem que comprendre els processos que usen els infants revesteix una gran importància en la pràctica pedagògica, ja que fonamenta la intervenció instruccional que cal fer a l'aula. Des de les primeres experiències que l'infant té en matemàtiques, l'estimació ha de ser un element continu en l'aprenentatge. És important que els infants aprenguin diversos mètodes d'estimació, ja que amb l'estimació desenvoluparan l'agilitat per donar respostes ràpides quan aquestes són més convenients que no les respostes exactes o quan aquestes són més difícils de trobar, i augmentarà el sentit numèric, que no és un contingut propi del currículum de matemàtiques, sinó una manera d'entendre el treball amb nombres a l'aula (Llinares, 2001). No és, però, una tasca fàcil, perquè no hi ha regles concretes per fer una estimació i, a més, s'ha d'arribar a comprendre: què s'entén per *fer una estimació*, quan és apropiat estimar i quina precisió requereix una estimació tenint en compte la situació.

Per al coneixement del càlcul en general és rellevant conèixer i dominar els processos que requereixen interpretar les condicions de les situacions proble-

màtiques i, consegüentment, prendre decisions referents al tipus més adequat de càlcul que cal utilitzar. Aleshores, caldrà decidir quines són les transformacions més convenientes de les dades, el procés que s'ha de fer servir, les compensacions que s'ha de fer, etc.; és a dir, escollir les estratègies més adients. També cal que els alumnes comprovin sempre les seves estimacions prèvies per fer-hi posteriorment estimacions addicionals, de manera que l'experiència serveixi per anar refinant la destresa en aquest aspecte.

Per això, un element clau i primordial per al coneixement matemàtic és donar al càlcul un enfocament diversificat que porti els alumnes a elaborar, discutir, analitzar estratègies, justificar l'aplicació de determinats processos i validar la raonabilitat de les respostes atenent a la situació plantejada. Pel que hem dit, és important que en l'ensenyament primari s'inclogui, com a destresa bàsica, la capacitat dels alumnes per emetre una resposta aproximada abans de fer qualsevol càlcul, i que anticipin la solució d'un problema abans de fer els càlculs per resoldre'l. Aquesta funció de l'estimació com a eina de predicció i de control de resultats fa que l'estimació no hagi de ser ensenyada com un procediment aïllat. Tanmateix, l'ensinistrament en la resolució de problemes comporta aconseguir que l'infant desenvolupi la capacitat d'encarar-se a situacions noves i canviants, on no hi ha regles fixes i la solució pot estar dins un interval d'acceptabilitat. Aquesta manera de treballar implica una millor formació matemàtica i professional i acostava la realitat a l'aula. Com diu Gómez (2002), una visió dels continguts matemàtics més ajustada a la realitat ens permet mostrar les matemàtiques com quelcom proper i com una de les eines més útils que posseïm.

La gran diversitat de situacions que requereix l'estimació i la quantitat d'opcions de resolució fan que, per arribar a assolir competència estimativa, faci falta que l'infant vagi fent propi el procediment de manera progressiva i, per això, requerirà una acció continuada a llarg termini que no es pot fer de manera mecànica. El *National Council of Teachers of Mathematics* (2000) afirma que la competència numèrica no s'adquireix ràpidament ni amb facilitat, per això no es pot exigir en nivells inicials; però sí que tots els alumnes poden arribar a sentir-se competents numèricament amb un programa de qualitat de l'aprenentatge matemàtic.

La pretensió de la nostra recerca es concreta en l'objectiu específic de copsar la competència dels alumnes en estimació en numeració i càlcul, tot elaborant una prova diagnòstica que consisteix en un test de 73 ítems, que anomenarem Test d'estimació en numeració i càlcul (TENC).¹

1. Podeu trobar el test TENC en M. Pañellas (2005): *L'estimació en numeració i càlcul a primària. Tipificació i categorització d'estratègies, dificultats i errors*. Tesi doctoral, Universitat Ramon Llull, Barcelona.

MÈTODE

SUBJECTES

La mostra per a l'elaboració del test està constituïda per 442 subjectes de primer curs de l'educació secundària obligatòria de set centres escolars de Catalunya, amb un total de dinou grups classe.

Els centres escolars es van triar amb característiques diferents atenent a quatre criteris:

- a) Titularitat del centre: religiosos concertats, instituts d'ensenyament secundari municipals, centres privats no confessionals i institucions educatives creades per un grup de pares i mares.
- b) Situació del centre: comarques del Barcelonès, Baix Llobregat, Vallès Oriental i Maresme.
- c) Nombre d'habitants de la població: ciutat gran, poblacions amb més de 10.000 habitants i poblacions amb menys de 10.000 habitants.
- d) Procedència majoritària dels alumnes de primer de secundària: del mateix centre, d'escoles de l'entorn, d'escoles de pobles veïns, molta diversitat de centres d'origen dels alumnes.

ESTRUCTURA, CONTINGUT I PUNTUACIÓ DEL TEST

El test que hem elaborat és una prova d'aprofitament basada en la norma de grup, que pretén analitzar l'aprenentatge adquirit durant tota l'educació primària pel que fa a estimació en numeració i càlcul.

En aquest tipus de prova és molt difícil definir i fitar l'univers que s'ha d'estudiar. En el nostre cas, la determinació del contingut del test s'ha fet atenent a quatre àmbits lligats estretament a l'estimació en numeració i càlcul, dividits en diferents subàmbits, cadascun amb una col·lecció d'ítems que permetin avaluar el màxim d'aspectes (explicitem els àmbits i els subàmbits en la figura 1). Els conjunts numèrics considerats són els nombres naturals i els nombres decimals.

Malgrat que es pugui avaluar cada àmbit o subàmbit per separat segons el continguts que interressi, no considerem el test com un conjunt de subtests, sinó com un test unitari.

El contingut dels quatre àmbits s'estructura en deu situacions properes a la realitat dels alumnes. Les situacions 1, 9 i 10 es troben emmarcades en l'àmbit 4 i fan referència a l'anàlisi de la raonabilitat de resultats, tant pel que fa a la conveniència o no d'un resultat estimat en cada cas, com a la interpretació del

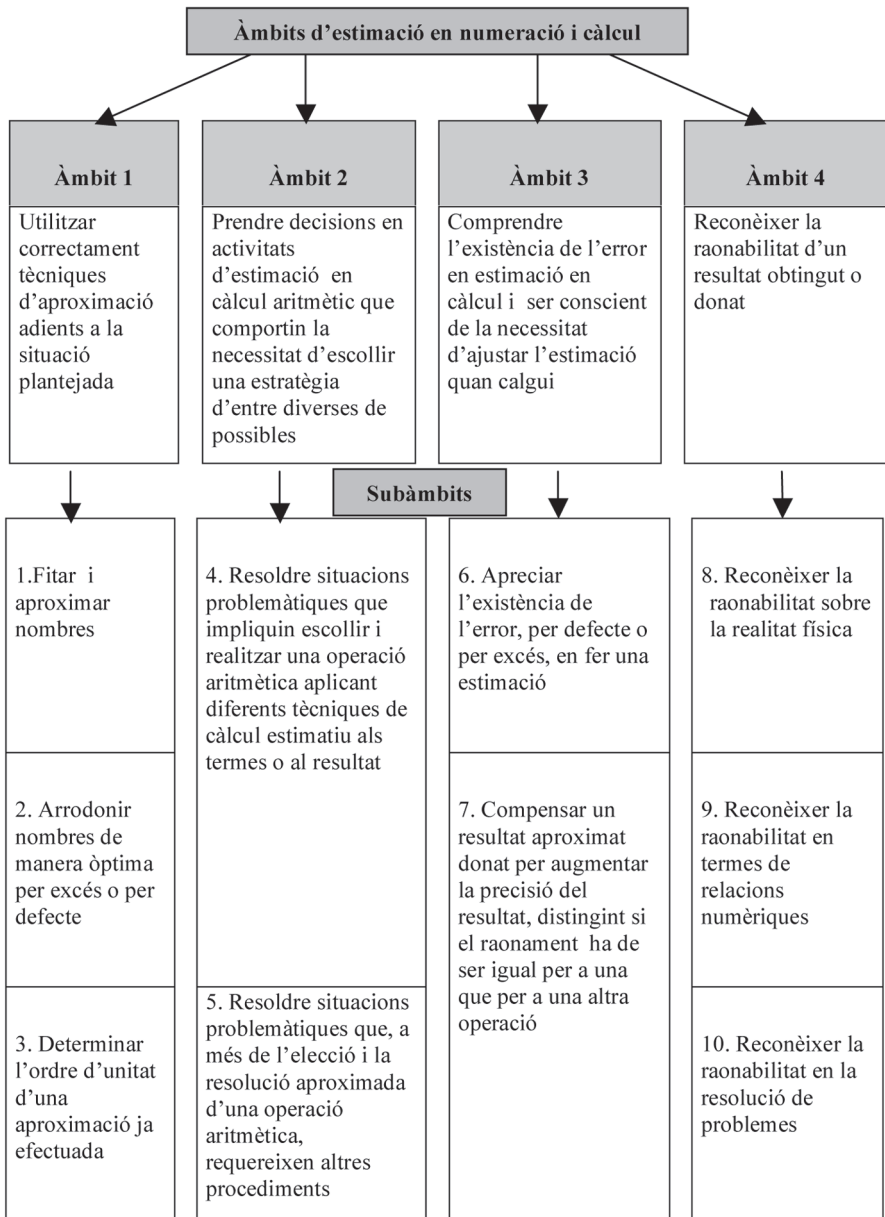


Figura 1. Àmbits de l'estimació en numeració i càlcul, dividits en diferents subàmbits.

resultat d'un càlcul numèric, fonamentalment l'ordre de magnitud d'aquest, o a la valoració del resultat d'un problema atenent al context i a les dades. Segons Johnson (1979), la raonabilitat dels resultats es pot valorar sobre la realitat física i en termes de relacions numèriques, i Gorgorió, Deulofeu i Bishop (2000) indiquen la coexistència de solucions matemàtiques i solucions de món real. Tanmateix, Mathews (1997) diu que, al voltant dels onze anys, els infants han de saber comprovar la sensatesa d'un resultat.

En les situacions 2 i 3, emmarcades en l'àmbit 1, es plantegen exercicis que requereixen la utilització de l'arrodoniment de nombres naturals i decimals. En alguns casos s'indica l'ordre d'unitat i en d'altres l'ha de determinar el subjecte. Els alumnes han de comprendre com és construït el sistema numèric i, per aquest motiu, és important el coneixement del valor de posició, la potenciació en base 10, l'enquadrament de nombres amb fites predeterminades, l'habilitat per comparar nombres per la magnitud que tenen i el coneixement de fets bàsics.

Més endavant, en les situacions 4, 5, 6 i 7, que es troben emmarcades en l'àmbit 2, es proposen activitats que impliquen la presa de decisions per part dels alumnes en tasques de càlcul additiu i multiplicatiu que comportin la necessitat d'escollir una estratègia adient atenent a les característiques de cada exercici concret. Per això, en la redacció d'aquests s'ha tingut en compte que puguin sorgir els processos clau utilitzats pels bons resolutors, que segons Sowder (1992), Reys, Bestgen, Rybolt i Wyatt (1980,1982), Segovia, Castro, Castro i Rico (1989) i Hanson i Hogan (2000) són essencialment: reformulació (arrodoniment, truncament i substitució), translació i compensació. Val a dir que el procés de compensació com a tal no s'ha inclòs en aquestes situacions, perquè, per la importància que té, el considerem a part, la qual cosa no significa que en els exercicis d'aquest àmbit els alumnes no hagin d'ajustar el resultat quan calgui segons l'estratègia utilitzada. Concretament, en la situació 8, emmarcada en l'àmbit 3, es presenten exercicis propis de compensació amb l'objectiu de valorar el fet de saber comparar resultats, l'apreciació de l'error comès i, consegüentment, la capacitat de saber quan cal compensar, és a dir, el fet de saber fer ajustaments durant el càlcul o després de realitzar-lo. Gorgorió, Deulofeu i Bishop (2000) i Hilton i Pedersen (1986) diuen que el futur adult ha de comprendre els principis de l'aritmètica aproximada, i en particular, els principis dels errors d'arrodoniment.

Definim el contingut d'aquestes deu situacions en la taula 1.

Recolzat en el pensament operatori concret, al començament de l'adolescència s'inicia el pensament operatori formal que té, entre altres característiques, les funcionals que són trets generals d'aquest pensament que representen enfocaments o estratègies per resoldre problemes. El test que hem elaborat ens permetrà estudiar i categoritzar els tipus d'estratègies utilitzades pels alumnes que han acabat l'educació primària, en una edat que ja es dona la possibilitat del

pensament de funcionar flexiblement, podent tenir en compte dues o més variables de forma simultània. Així, en l'àmbit 3, quan s'ha d'estudiar la necessitat de compensar l'error en un càlcul estimat, cal considerar el resultat i el tipus d'operació aritmètica.

Tanmateix, davant d'un problema molts infants no aconsegueixen aprofitar totes les seves habilitats o competències, per la qual cosa el seu rendiment final o actuació dista molt de les seves possibilitats. La distància entre la competència i l'actuació és deguda en part a les variables de la tasca: de format o de contingut.

Taula 1
Contingut de les situacions del Test d'estimació en numeració i càlcul

Situacions	Contingut de les situacions
Situació 1	Anàlisi de la raonabilitat de resultats sobre la realitat física amb nombres naturals i decimals i reconeixement del valor numèric més adient a la qüestió plantejada.
Situació 2	Comparació de nombres naturals i decimals, per afitament o aproximació i dins unes fites establertes, amb nombres propers o amb potències de 10, que implica ordenar-los.
Situació 3	Arrodoniment de nombres naturals i decimals a un ordre d'unitat donat, o determinació de l'ordre d'unitat al qual s'ha fet l'aproximació.
Situació 4	Càlcul estimatiu additiu (addició i subtracció) de nombres naturals en problemes d'una sola operació o de comparació d'operacions.
Situació 5	Càlcul estimatiu additiu de nombres decimals en problemes d'una o dues operacions.
Situació 6	Càlcul estimatiu multiplicatiu (multiplicació i divisió) de nombres naturals en problemes que requereixen una sola operació.
Situació 7	Càlcul estimatiu, multiplicatiu, de nombres decimals per nombres naturals, en problemes que requereixen una sola operació.
Situació 8	L'error en estimació. Magnitud de l'error. Compensació d'un resultat donat o obtingut en fer operacions de suma, resta, multiplicació i divisió de nombres naturals.
Situació 9	Anàlisi de la raonabilitat en termes de relacions numèriques, en operacions aritmètiques de nombres naturals i decimals, aplicant les propietats pròpies de cadascuna.
Situació 10	Anàlisi de la raonabilitat de resultats en la resolució de problemes els elements numèrics dels quals són nombres naturals o decimals.

En el test TENC, aspectes de format rellevants per a la solució final del problema són el tipus d'instrucció, molt marcada com en els ítems de l'àmbit 1, on cal aplicar una tècnica prefixada, o més oberta com en els de l'àmbit 2, on per fer correctament un càlcul de manera estimativa cal optar per l'estratègia més adient, o la manera de donar les dades numèriques, si cal buscar-les o no o si estan donades amb símbols numèrics o no. Una altra d'aquestes variables és la impossibilitat d'escriure i, per tant, el fet d'haver de realitzar tots els càlculs mentalment.

El contingut de la tasca té una influència definitiva sobre la resolució final del problema. Així, per exemple, en la situació 10 de l'àmbit 4 es plantegen problemes tals que, per trobar-ne una solució raonable, no s'ha de fer directament l'operació aritmètica que sembla derivar-se de l'enunciat.

Per altra banda, en la valoració dels resultats del test, caldrà tenir en compte que el pensament formal no es desenvolupa espontàniament per un simple procés maduratiu i que, perquè l'alumne domini una àrea de coneixement, no només és necessari que comenci a tenir un raonament formal, sinó també que posseeixi coneixements específics d'aquesta àrea, i el càlcul estimatiu encara és, a les nostres escoles, un contingut força oblidat al qual es dona poca importància. Per això, tasques com les de les situacions 8 i 9 de l'àmbit 4 són difícils per als infants, més pel tipus d'ensenyament del càlcul, molt mecanitzat, que per l'evolució incipient del pensament formal.

Cadascuna de les situacions del test esmentades incorpora una sèrie d'ítems, els quals atenent al tipus de resposta es poden classificar en ítems en què l'examinand ha de donar una resposta i ítems en què ha de triar una resposta entre diverses de donades. Respecte la primera categoria, els ítems són de resposta oberta; pel que fa a la segona, podem distingir-ne dos tipus: d'elecció de resposta correcta amb dues alternatives i d'elecció de la millor resposta amb quatre alternatives. La classificació dels ítems atenent als quatre àmbits queda com s'indica en la taula 2.

Els diferents tipus d'ítems descrits requereixen puntuacions adients a cadascun, però de manera que la correcció de la prova es faci de forma objectiva. Per això indiquem en la taula 3 la manera d'obtenir un valor numèric parcial (per àmbits o subàmbits) o global de la prova.

Per normalitzar aquestes puntuacions originals, s'ha dividit la distribució en setze intervals d'amplitud 5. De cada interval es considera la mitjana de classe (vegeu la taula 4). Calculem també l'escala percentual, perquè és una manera senzilla de fer comparacions entre puntuacions de diferents distribucions i perquè permet estimar els valors de les puntuacions individuals en relació amb altres puntuacions de la mateixa població. Per fer aquesta transformació hem considerat que dintre de cada interval de classe, els individus estan distribuïts regularment.

Taula 2
Classificació dels ítems del Test d'estimació en numeració i càlcul

Àmbits d'estimació	Situacions	Número dels ítems	Ítems per àmbit	Percentatge d'ítems per àmbit
Utilitzar correctament tècniques d'aproximació adients a la situació plantejada	2, 3	10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26	17	23,3%
Prendre decisions en activitats d'estimació en càlcul aritmètic que comportin la necessitat d'escollir una estratègia entre diverses de possibles	4, 5, 6, 7	27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51	25	34,2%
Comprendre l'existència de l'error en estimació en càlcul i ser conscient de la necessitat d'ajustar l'estimació quan calgui	8	52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59	8	11%
Reconèixer la raonabilitat d'un resultat obtingut o donat	1, 9, 10	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73	23	31,5%

Taula 3
Puntuació dels ítems del Test d'estimació en numeració i càlcul

Número d'ítem	Tipus de pregunta ^a			
	Pregunta amb resposta dicotòmica	Pregunta amb resposta múltiple	Pregunta amb resposta oberta	
			Sense estimació d'un càlcul	Amb estimació d'un càlcul
1, 2, 3, 4, 5, 31, 52, 53, 54, 55	Encertada: 1,5 punts Errònia: 0 punts Omesa: 0 punts			
6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 22, 23, 24, 72, 73		Encertada: 1,5 punts Errònia: 0 punts Omesa: 0 punts		
17, 18, 19		Arrodoniment òptim: 1,5 punts Arrodoniment no òptim: 0,5 punts Altres: 0 punts Omesa: 0 punts		
27, 28, 29, 40, 41, 44, 45, 48, 49, 50		$E \leq 10\%$ 1,5 punts $10\% < E \leq 20\%$ 1 punt $20\% < E \leq 30\%$ 0,5 punts $E > 30\%$ 0 punts Omesa: 0 punts		
20, 21, 25, 26, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71			Encertada: 1,5 punts Errònia: 0 punts Omesa: 0 punts	
30, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 42, 43, 46, 47, 51, 56, 57, 58, 59				$E \leq 10\%$ 1,5 punts $10\% < E \leq 20\%$ 1 punt $20\% < E \leq 30\%$ 0,5 punts $E > 30\%$ 0 punts Omesa: 0 punts

^a La distribució de les puntuacions globals del test oscil·la entre 22,5 i 102,5.

En els ítems de la situació 5 s'ha ajustat l'error a 0,5 unitats, per sobre o per sota del resultat exacte, per poder copsar millor com s'efectua el càlcul amb decimals a nivell de l'apreciació de la part decimal.

Taula 4
*Puntuacions estàndard normalitzades i escala percentual
del Test d'estimació en numeració i càlcul*

Puntuacions brutes	Puntuació estàndard normalitzada	Puntuacions percentuals
25	-2,57	0,45
30	-2,12	1,69
35	-1,75	3,96
40	-1,32	9,28
45	-0,93	17,65
50	-0,57	28,51
55	-0,24	40,50
60	0,07	52,71
65	0,40	65,62
70	0,73	76,82
75	1,04	85,07
80	1,35	91,18
85	1,69	95,36
90	2,00	97,74
95	2,33	98,98
100	2,75	99,66

RESULTATS

Si considerem les puntuacions totals, la mitjana aritmètica, sobre una puntuació màxima de 109,5, se situa en 59,44, amb desviació típica de 14,5; la mediana és de 58,50 i el percentatge d'alumnes que superen el valor mitjà de la puntuació del test és del 62,7%. Aquests resultats indiquen que els subjectes de la mostra donen resultats pobres en tasques d'estimació en numeració i càlcul. Això és consistent amb altres resultats obtinguts per diversos investigadors en diferents nivells educatius, tot i que la utilització d'instruments diferents al nostre faci que els resultats no siguin directament comparables. Goodman (1991) obté una mitjana similar, encara que en el seu estudi consten, a més a més, tasques d'estimació amb fraccions i percentatges.

Per altra banda, la nostra distribució empírica de les qualificacions globals del test s'ajusta a la llei normal atenent al resultat de la prova de Kolmogorov-Smirnov. S'obtenen diferències estadísticament significatives entre les mitjanes dels dinou grups, contrastant la hipòtesi d'igualtat de mitjanes, mitjançant el procediment ANOVA d'un factor aplicat a aquests grups classe, ja que el coeficient F per a 18 graus de llibertat intergrups (grups classe) i 423 intragrups

és 2,631 amb $p < 0,0001$, amb un nivell de significació del 0,05. També podem indicar diferències estadísticament significatives entre els dos grups que es formen en la mostra atenent al sexe, aplicant la prova *t* d'Student, per comparar mitjanes de grups independents, perquè obtenim un valor $t = 2,697$ amb un grau de significació de 0,007 considerant un nivell de confiança del 95%. És a dir, que la mitjana 61,291, obtinguda pels 223 nens, és significativament superior a la mitjana 57,596, obtinguda per les 219 nenes.

Si considerem els resultats obtinguts atenent als àmbits i subàmbits, podem fer-ne la valoració següent: L'àmbit 4 (Reconèixer la raonabilitat d'un resultat obtingut o donat) és el que dona un percentatge més alt (68,6%) d'infants que igualen o sobrepassen la meitat de la puntuació màxima assolible en les respostes als ítems que el configuren. Però aquest percentatge varia en els subàmbits en què es divideixen, i és el subàmbit 8 (Reconèixer la raonabilitat sobre la realitat física) el que presenta el major percentatge d'encerts superiors o iguals al 50%, de tot l'àmbit i de tots els subàmbits del test. Amb percentatges respectivament inferiors se situen els subàmbits 9 (Reconèixer la raonabilitat en termes de relacions numèriques) i 10 (Reconèixer la raonabilitat en la resolució de problemes). Tanmateix, els tres subàmbits assoleixen percentatges de superació de la qualificació mitjana superiors al 50%, tot i que en el subàmbit 10, constituït només per dos ítems, s'arriba a aquest percentatge quan es fa correctament un problema, però el percentatge d'estudiants que realitzen correctament tots dos exercicis és només del 10,4%.

L'àmbit 2 (Prendre decisions en activitats d'estimació en càlcul aritmètic que comportin la necessitat d'escollir una estratègia entre diverses de possibles) presenta un percentatge molt proper al de l'àmbit 4 (un 68,1%) i molta regularitat en els dos subàmbits en què es divideix, amb percentatges d'encerts superiors o iguals al 50%, molt similars al total de l'àmbit.

L'àmbit 1 (Utilitzar correctament tècniques d'aproximació adients a la situació plantejada) queda en el 51,1% d'alumnes que responen correctament a més de la meitat d'ítems, però observem diferències percentuals en els subàmbits. El subàmbit 1 (Fitar i aproximar nombres) dona un 68,1% d'alumnes que encerten la meitat o més de la meitat d'ítems, mentre que el 3 (Determinar l'ordre d'unitat d'una aproximació) queda amb un 57,7% i el 2 (Arrodonir nombres de manera òptima per excés o per defecte), amb un 31%.

L'àmbit 3 (Comprendre l'existència de l'error en estimació en càlcul i ser conscient de la necessitat d'ajustar l'estimació quan calgui) és l'àmbit que ha presentat més dificultat per als estudiants (37,6% d'alumnes que supera o iguala el 50%), però amb una diferència clara entre els dos subàmbits que el formen, ja que el 6 (Apreciar l'existència de l'error, per defecte o per excés, en fer una estimació) assoleix el 66,5%, mentre que el 7 (Compensar un resultat aproximat

donat per augmentar-ne la precisió, distingint si el raonament ha de ser igual per a una operació que per a una altra) és el subàmbit amb el percentatge més baix dels deu definits, situant-se en un 25,6%.

Resumint, podem dir que, en conjunt, els àmbits 4 i 2 són els que resulten més fàcils per als alumnes, i el 3 el que presenta més dificultat. Quant als subàmbits, el més fàcilment resoluble ha estat el 8, i el més difícil el 7.

Per estudiar la fiabilitat del test hem optat per l' α de Cronbach, que indica el grau en què tots els ítems mesuren el mateix rang i el mesuren amb precisió. El valor obtingut ha estat 0,8686, que podem dir que suposa un índex adequat per als objectius del nostre test. Ara bé, i tenint en compte que un nombre elevat d'ítems dóna coeficients alfa alts, per analitzar i seleccionar els ítems i augmentar el grau de fiabilitat hem fet servir el mètode de correlació ítem-total, que consisteix a calcular la correlació de cada ítem amb la suma de tots els altres.

Pel que fa a la validesa, creiem que no hauria de ser considerada una propietat dels instruments de mesura, sinó un procés continu que requereix l'acumulació de dades procedents de diferents recerques. Per aquest motiu, en el nostre estudi no hem avaluat la validesa, sinó una aproximació que contribueix a tenir-ne evidències, mesurant el grau en què la prova està relacionada amb un criteri. Hem calculat la correlació entre la puntuació global del test i una variable extrínseca però influent: la qualificació de l'avaluació de l'alumne en conceptes i procediments de l'assignatura de matemàtiques durant el primer trimestre del primer curs d'ensenyament secundari obligatori. La correlació total obtinguda és de 0,627 ($p=0,01$, bilateral), oscil·lant les correlacions per grups classe de 0,41 ($p=0,05$, bilateral) a 0,86 ($p=0,01$, bilateral). Del Rincón i altres (1995) estableixen el valor mínim acceptable per a la validesa en 0,45 i indiquen que són rares les proves que sobrepassen el valor 0,65. Atinent a aquest criteri, i tenint en compte l'elevat nombre de subjectes de la mostra, podem considerar que un valor de 0,627 és acceptable per donar una estimació de la validesa de la prova.

Per tots els resultats descrits, podem concloure que el TENC és adequat per al diagnòstic i el pronòstic didàctic de l'aprenentatge de l'estimació en numeració i càlcul, dintre de l'àrea de matemàtiques, i per als alumnes que han acabat l'educació primària.

DISCUSSIÓ

De l'anàlisi dels resultats del test apreciem diverses dificultats dels alumnes que han finalitzat recentment l'educació primària en tasques d'estimació en numeració i càlcul. L'aplicació de l'arrodoniment com a tècnica de càlcul aproximat ha resultat molt difícil per als alumnes, ja que només en tres dels deu ítems en

què expressament es demana, s'assoleixen percentatges d'encert superiors al 50%. La major part de les dificultats provenen de la incomprensió del sistema de numeració decimal i de l'aplicació incorrecta de la tècnica de l'arrodoniment. Això comporta efectuar l'arrodoniment a ordres d'unitat incorrectes, aplicar-lo per excés quan ha de ser per defecte, o viceversa, fer transformacions del nombre original que no el simplifiquen, convertir el nombre original en un altre que té un nombre de xifres inferior, fer substitució enlloc d'arrodonir, etc.

Hem observat conceptualitzacions equivocades del sistema de numeració decimal, com la incomprensió del valor de posició, fonamentalment en els nombres decimals que condueixen a errors en la comparació i ordenació d'aquests, la confusió dels ordres d'unitat de la part decimal amb els de la part entera que tenen denominació similar, com desena i dècima, centena i centèsima, la concepció del nombre decimal com a parell d'enters i la confusió entre l'ordre de magnitud d'un nombre i el valor numèric. Els problemes en la comprensió del sistema de numeració es fan palesos també en la determinació de l'ordre de magnitud del resultat d'un càlcul tant additiu com multiplicatiu, però majorment quan s'ha d'estimar l'ordre de magnitud del producte o del quocient. Observem una manca d'habilitat per operar amb la unitat seguida de zeros, confusió entre l'ordre de magnitud del producte (o del quocient) i el producte mateix (o quocient), desconeixement del significat dels termes de les operacions i de l'estructura numèrica mateixa de l'operació. Així, observem respostes als ítems que impliquen afirmar que la suma de dos nombres de tres xifres té cinc xifres, o bé que la diferència en té cinc, quan el minuend només en té quatre. Observem també poca flexibilitat en l'ús dels nombres i desconeixement de fets bàsics que els alumnes, en acabar l'educació primària, haurien de saber. Expressar que el producte de 632×7 té tres xifres, quan el doble de 632 ja en té quatre i, per tant, multiplicar aquest nombre per un nombre natural més gran que 2 mai no reduirà la magnitud del producte, n'és un exemple.

De la mateixa manera, en les situacions que comporten efectuar un càlcul detectem major dificultat en el càlcul multiplicatiu que no en l'additiu, fonamentalment en la divisió, ja que els quocients donats s'allunyen excessivament del resultat exacte i, a més a més, en cap dels ítems dels exercicis que requereixen efectuar una multiplicació o una divisió no se supera el 50% d'encerts, al contrari dels exercicis additius, on aquest percentatge s'assoleix en tots, tot i que algun ítem de subtracció també presenta dificultat alta.

Cal esmentar que en els ítems de resposta oberta d'aquestes situacions, el nombre de respostes en blanc és bastant alt, sobretot en els de divisió, que és del 38% quan el dividend té cinc xifres. Val a dir que, per exemple, el percentatge d'encerts a l'hora d'estimar el quocient de la divisió $20.500 : 72$, és només del 8,60%.

En les situacions de càlcul multiplicatiu detectem una concepció errònia de la multiplicació de nombres decimals en les respostes en els ítems que impliquen aplicar aquesta operació. Hi ha infants que pensen que el producte sempre ha de ser més gran que els dos factors, pel coneixement que tenen d'aquesta propietat de la multiplicació amb nombres naturals i que atorguen de manera idèntica als nombres decimals.

També en aquestes situacions observem incorreccions en la concepció i utilització de les propietats de les operacions. En podem destacar: la confusió entre les propietats associativa de la multiplicació i distributiva de la multiplicació respecte la suma, la commutació dels termes de la resta i l'aplicació de la propietat distributiva i de les descomposicions additives i factorials que provoquen un conjunt d'errors: l'oblit dels productes creuats; multiplicar només per un dels dos factors després de fer una descomposició factorial; confondre una descomposició factorial amb una d'additiva, o aplicar la distributivitat de la multiplicació respecte a la pròpia multiplicació, com per exemple, quan es resol $(20 \times 5) \times 6$ fent $(20 \times 6) \times (5 \times 6)$.

A l'hora de fer compensació de l'error d'estimació observem una dificultat alta i també notem un augment d'aquesta en els ítems de càlcul multiplicatiu. Les respostes no acceptables més freqüents ens assenyalen errors en el sentit de la compensació i la quantitat amb què cal modificar el resultat aproximat per minimitzar-ne l'error.

S'observen dificultats en la interpretació del significat d'ajustar el resultat, ja que es confon compensar-lo amb obtenir el resultat exacte o bé amb calcular un altre resultat aproximat.

La raonabilitat del resultat d'un problema no és avaluada sovint pels infants i això provoca una sèrie d'errors entre els quals destaquem els següents: aplicar una operació aritmètica sense valorar-ne la raonabilitat, atenent al context. Aquest error pot provenir de la rutina de resoldre problemes en què cal operar les dades tal com són donades, sense tenir la necessitat d'analitzar l'adequació de l'operació a la narració del text. Efectuar operacions sense sentit, si es té en compte la manca de raonabilitat del resultat. Així, es diu que el temps que dues persones esmercen per a fer una determinada feina és la suma dels temps que trigaria cada una, per separat, per fer la mateixa feina i amb el mateix ritme de treball.

Com hem dit, els infants es mostren poc hàbils en tasques que requereixen estimació, probablement perquè en la pràctica escolar l'estimació és un contingut al qual es dedica poc temps i, aleshores, les estratègies que desenvolupen intuïtivament són poques i les apliquen indiscriminadament a diferents situacions sense valorar-ne l'adequació. Cal, doncs, ensenyar estratègies a l'aula perquè els alumnes puguin generar estratègies pròpies i tenir criteri per decidir quina és la més adient en cada cas, i reflexionar conjuntament sobre els processos realitzats pels companys, per aconseguir-ne un conjunt més ampli.

És per això que s'ha de disminuir l'èmfasi sobre el càlcul escrit i la memorització de regles i donar rellevància al raonament matemàtic, a la cerca de relacions i a la comunicació.

Per altra banda, hi ha elements que no són específics de l'estimació en numeració i càlcul, però que hi incideixen directament, com les propietats de les operacions, els processos d'ordenació i comparació, les tècniques específiques de càlcul mental i el sistema posicional de numeració decimal. Tenint en compte que el càlcul estimatiu porta implícits tots aquests continguts i que en el nostre estudi hem trobat errors que els alumnes cometien reiteradament, és interessant que el professor conegui aquests errors per incidir-hi directament i evitar així que arrelin i siguin més difícils d'eradicar.

REFERÈNCIES

- DEL RINCÓN, D., i altres (1995): *Técnicas de investigación en ciencias sociales*. Madrid, Dykinson.
- GÓMEZ, J. (2002): *De la enseñanza al aprendizaje de las matemáticas*. Barcelona, Paidós.
- GOODMAN, T. (1991): «Computational estimation skills of pre-service elementary teachers», *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 22, 259-272.
- GORGORIÓ, N., J. DEULOFEU & A. BISHOP (coords.) (2000): *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional*. Barcelona, Graó.
- HANSON, S. A. & T. P. HOGAN (2000): «Computational estimation skill of college students», *Journal for Research in Mathematics Education*, 31 (4), 483-499.
- HILTON, P. & J. PEDERSEN (1986): «Approximation as an arithmetic process», en H. L. Schoen & M. J. Zweng (eds.), *Estimation and mental computation* (p. 16-30). Reston, VA, NCTM.
- JOHNSON, D. (1979): «Teaching estimation and reasonable results», *Arithmetic Teacher*, 27, 34-35.
- LLINARES, S. (2001): «El sentido numérico y la representación de los números naturales», en E. Castro (ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (p. 151-176). Madrid, Síntesis.
- MATTHEWS, J. (1997): «Mathematics results at key stages 1 and 2, 1995-96», *British Journal of Curriculum and Assessment*, 7 (3), 16-18.
- NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (2000): «Principles and standards for school mathematics», Reston VA, NCTM.

- PAÑELLAS, M. (2005): «L'estimació en numeració i càlcul a primària. Tipificació i categorització d'estratègies, dificultats i errors». Tesi doctoral. Barcelona, Universitat Ramon Llull.
- REYS, R. E., B. J. BESTGEN, J. F. RYBOLT & J. W. WYATT (1980): *Identification and characterization of computational estimation processes used by in school pupils and out-of-school adults*. Washington, DC, National Institute of Education.
- (1982): «Processes used by good computational estimators», *Journal for Research in Mathematics Education*, 12 (3), 183-201.
- SEGOVIA, I., E. CASTRO, E. CASTRO & L. RICO (1989): *Estimación en cálculo y medida*. Madrid, Síntesis.
- SOWDER, J. T. (1992): «Estimation and number sense», en D.A. Grouws (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (p. 371-389). New York, Macmillan Publishing Company.

