ÍNDICE

Estudios de Economía Aplicada
Nº 14, 2000. Págs. 47-72

Una revisión de los sistemas generadores y modelos de probabilidad descriptivos de la distribución de la Renta

ESTEBAN GARCÍA, J.
LÓPEZ RODRÍGUEZ, M.I.
RUIZ PONCE, F.
Universidad de Valencia

Esta versión incluye todas las correcciones sugeridas por el evaluador, las cuales nos han parecido oportunas y por las que les quedamos agradecidos.

RESUMEN

La importancia innegable de la modelización de la distribución de la renta es el origen del presente trabajo en el que se realiza un estudio, básicamente teórico, acerca de los sistemas generadores de renta y se lleva a cabo una recopilación de los modelos de probabilidad que se han utilizado, de forma más o menos generalizada a lo largo del último siglo, para explicar la renta. El estudio realizado es más exhaustivo en unos casos que en otros, poniendo de manifiesto el carácter pionero de la distribución de Pareto, y analizando en muchos de los casos las medidas más importantes de las distribuciones estudiadas, así como la relación de algún parámetro de las mismas con la desigualdad en el reparto.

Palabras clave: Desigualdad, Distribuciones de Probabilidad, Renta, Sistemas Generadores.

ABSTRACT

The undeniable relevance of the incomes distribution modeling is the origin of this work in which a basically theoretical study about the generating systems of incomes is realized and also has been carried out a collection of the probability models that had been used, in a more or less general approach along last century, in order to explain the income. The present work is more exhaustive in some cases than in

ÍNDICE

others, revealing the pioneer character of Pareto distribution, and analyzing in many cases the most important measures of the studied distributions, any way the relationship between some parameters from the same ones and the Pareto inequality.

Key-Words: Inequality, Probability Distributions, Income, Generating Systems.

Código Unesco: 0501.

Artículo recibido el 14 de junio de 1999. Aceptado en noviembre de 1999.

1. Introducción

La importancia económica y social de la distribución de la renta y de la desigualdad es innegable, partiendo del consenso generalizado de que no puede hacerse referencia al bienestar de una sociedad sin tener presente cual es la distribución de los Ingresos dentro de la misma, así como que, cada vez con mayor fuerza, las estrategias de los gobiernos van encaminadas a favor del auge de la vía del crecimiento y la igualdad en detrimento de la que persigue como único objetivo el crecimiento económico.

Son numerosas las teorías propuestas para explicar la "distribución de la renta", aunque a modo de síntesis podrían considerarse dos vías básicas: una que pretende obtener un conjunto de factores económicos, sociales e institucionales que permitan la explicación de la distribución[1] y otra que se basa en la construcción de procesos estocásticos[2]. Sin embargo hay que destacar que, junto a los trabajos que siguen alguna de las vías expuestas, se desarrollaron otros que no pretendían encontrar explicaciones para la distribución de la renta, sino que consideraban a tal distribución como un dato que permitía analizar diversos aspectos de la realidad social. Este es el caso del estudio de Bartels (1977), aunque centrándose en los realizados en España hay que destacar que, considerando esta perspectiva del estudio de la distribución de la renta, se observa un claro impulso de las investigaciones sobre el bienestar, la desigualdad y la pobreza, a raíz de la construcción del Estado de las Autonomías. Estos análisis corresponden a un interés por parte de los gobiernos central y autonómicos acerca de dichos temas con el objetivo de diseñar un conjunto de medidas políticas destinadas a paliar los posibles desequilibrios existentes entre las diversas CC.AA.

En definitiva, dada la importancia de la modelización de la distribución de la renta, por las razones expuestas con anterioridad, en el presente trabajo se realiza un estudio, desde el punto de vista teórico, de los sistemas generadores de probabilidad así como de las diferentes distribuciones de probabilidad descriptivas de la distribución de renta.

---

1. Dentro de esta vía se encuentran, entre otros, los siguientes trabajos: Becker, G. S. (1967); Dougherty, C. R. S. (1971) y Tinbergen, J. (1975).
2. Dentro de esta vía cabe mencionarse los siguientes trabajos: Champernowne, D. G. (1953) y Rutherford, R. S. G. (1955).

2. Sistemas Generadores

La gran cantidad de modelos existentes y que pueden ser utilizados para ajustar la distribución de Ingresos, Gastos u otras variables relacionadas con la renta o consumo, ya sea por hogares o per cápita, lleva a la necesidad de crear un conjunto de sistemas generadores de dichas distribuciones, entendiendo por tales el conjunto formado por una función de transformación (función de la variable ingresos o gastos, a la cual se notará por X a partir de aquí) y una función generadora, que dependiendo de varios parámetros dará lugar a los distintos modelos de probabilidad. Esta afirmación realizada por Dagum (1981) es recogida por Joan Baró (1982), quien en su tesis doctoral dedica el capítulo V a recopilar y estudiar en profundidad sistemas generadores que pueden ser de utilidad para el campo del estudio de la renta.

A modo de síntesis se expondrán los tres sistemas más destacados así como algunas de las distribuciones derivadas de los mismos.

2.1. Sistema generador de Pearson

En este caso la *función transformación* tiene la forma:

$$h(x) = a + bx + cx^2$$

y la *función generadora:*

$$f(x) = e^{\int \frac{x+k}{h(x)}dx} = e^{\int \frac{x+k}{a+bx+cx^2}dx}$$

Así, distinguiendo entre que las dos raíces del denominador $a + bx + cx^2$, con expresión general:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2c} \\ x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2c} \end{cases}$$

sean números reales o complejos junto con las propiedades de asimetría y curtosis, se derivan las distribuciones Beta, Gamma, t de Student, Exponencial y Pareto entre otras.

ÍNDICE

Así, Baró (1982, pág. 269) recoge la vía alternativa propuesta por Pearson (1910) consistente en estudiar el valor que toma $\frac{b^2}{4ac} = D$, a partir del cual se obtienen los siguientes casos:

Analicemos los diferentes casos, supuesto que ninguno de los coeficientes a, b y c son nulos y que no se contempla el caso de raíz doble: D=1 $\Leftrightarrow b^2 = 4ac$

a) Si D < 0, las raíces de la ecuación son reales de signo opuesto y la distribución de probabilidad que se genera es la Beta.

Efectivamente si D <0 $\Rightarrow 4ac < 0 \Rightarrow b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow x_1 y x_2$ son raíces reales y dado que D<0 entonces sg(a)≠sg(c), por lo que x_1 es positiva y x_2 es negativa, según el teorema del número de permanencias y variaciones de los signos de los coeficientes del polinomio[3].

En este caso, y descomponiendo factorialmente el polinomio h(x) se tiene que:

$$\frac{x+k}{h(x)} = \frac{x+k}{c\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}$$

con

$$A = \frac{k+x_1}{c\left(x_1-x_2\right)} \quad y \quad B = \frac{k+x_2}{c\left(x_2-x_1\right)}$$

con lo que la función generadora f(x) quedará:

$$f(x) = e^{\log\left[\left(x-x_1\right)^{\frac{k+x_1}{c\left(x_1-x_2\right)}}\left(x-x_2\right)^{\frac{k+x_2}{c\left(x_2-x_1\right)}}\right]} = \left(x-x_1\right)^{\frac{k+x_1}{c\left(x_1-x_2\right)}}\left(x-x_2\right)^{\frac{k+x_2}{c\left(x_2-x_1\right)}} =$$

$$= \left(\frac{x}{x_1}-1\right)^A \left(\frac{x}{x_2}-1\right)^B x_1^A x_2^B = \left(1+\frac{x}{x_1}\right)^A \left(1-\frac{x}{x_2}\right)^B Cte$$

---

3. Teorema que recibe el nombre de teorema de Descartes, según el cual: "El número de raíces POSITIVAS de una ecuación, contada cada una tantas veces como indique su orden de multiplicidad, no supera al número de variaciones que presenta la sucesión de coeficientes, y ambos números tienen la misma paridad" (Rey Pastor, pág. 51)

con

$$x_1^{'} = -x_1, \;\; Cte = x_1^{A} x_2^{B} (-1)^{A} (-1)^{B} \;\; y \;\; x_1 < x < x_2$$

función de densidad que corresponde a la de una Beta.

b) Si 0 < D < 1, las raíces son números complejos conjugados ya que:
si 0 <D <1 $\Rightarrow b^2 < 4ac \Rightarrow b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow x_1 \; y \; x_2$ son raíces complejas conjugadas en este caso las distribuciones que se deducen son muy poco utilizadas, al ser difícil trabajar con ellas desde el punto de vista analítico.

c) Si D > 1, las raíces de la ecuación son reales con signo coincidente, ya que:

como $D = \dfrac{b^2}{4ac} > 1 \Rightarrow b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow las\ raices\ son\ reales$

Por otra parte, para ver que las raíces son de signo coincidente, teniendo en cuenta que D>1>0, entonces sg(a)=sg(c), por lo que aplicando nuevamente el teorema de Descartes:

- ∃ 2 variaciones si el sg(b)≠sg(a) y por tanto las dos raíces son positivas.
  ó
- ∃ 2 permanencias si el sg(b)=sg(a), y por consiguiente las dos raíces son negativas.

En este caso se obtiene, entre otras, la distribución de Pareto.

Teniendo además en cuenta criterios que hacen referencia a los coeficientes de asimetría y curtosis es posible generar las distribuciones Gamma, t de Student y F - Snedecor.

2.2. Sistema generador de D'Addario

En este caso se parte de cierto nivel x_0 de Ingresos o Gastos y de una *función de transformación:*

$$y = h(x)$$

verificando que:

$$y^m \frac{dy}{dx} = \frac{H}{x-k}, \; con \;\; k \leq x_0$$

así, la función de densidad que se propone como función generadora en este caso, según puede observarse en Dagum (1981), es la siguiente:

$$f(y) = a\frac{1}{\left(b + e^{y^{1/c}}\right)}$$

Con lo que para distintos valores de m, H y k se obtienen distintas funciones transformadas Y y para distintos valores de b y c distintas distribuciones de probabilidad generadas para la variable Y (y en consecuencia para la variable X). Así, por ejemplo:

1) para b = 0, c = 1, k = 0, m = 0 y H > 0 se obtiene la distribución de Pareto, ya que:

si c = 1 y b = 0 $\Rightarrow f(y) = ae^{-y}$

si k = 0 y m = 0 $\Rightarrow \frac{H}{x}dx = dy \Rightarrow y = H\log x + Cte \Rightarrow \quad f(x) = f(y)\left|\frac{dy}{dx}\right| = ae^{-(H\log x + Cte)} \bullet \frac{H}{x}$

Considerando que f(x) es función de densidad se deduce que:

$$\int ae^{-y}dy = \left|-ae^{-y} + C'\right|_{h(x_0)}^{\infty} = ae^{-h(x_0)} = 1 \Rightarrow a = e^{H\log x_0 + Cte} = C''x_0^H$$

por tanto:

$$f(x) = C''x_0^H e^{-\left(\log x^H + Cte\right)}\frac{H}{x} = C''\frac{Hx_0^H}{x^{H+1}}$$

fácilmente se deduce que el valor C" es 1 para que f(x) sea una densidad, por lo que:

$$f(x) = \frac{Hx_0^H}{x^{H+1}}\forall x > x_0$$

que corresponde con la expresión de la función de densidad de Pareto.

2) para b = 0, c = 1/2, k = 0, m = 0 y H > 0 se obtiene la distribución Log-Normal; ya que:

si m = 0 y k = 0 $\Rightarrow y = H\log x + Cte$

si b = 0 y c = 1/2 $\Rightarrow f(y) = ae^{-y^2} \Rightarrow f(x) = f(y)\left|\frac{dy}{dx}\right| = ae^{-(H\log x + Cte)^2}\frac{H}{x}$

donde, para que f(y) sea función de densidad debe de verificarse que

$$a = \frac{1}{\sqrt{p}}$$

por otra parte, dado que la función de densidad de Y se corresponde a la de una Normal con media cero y varianza 1/2, se deduce que:

$$0 = E(y) = HE(\log x) + Cte \Rightarrow E(\log x) = \frac{-Cte}{H}$$

$$\frac{1}{2} = Var(y) = s^2 = H^2 Var(\log x) \Rightarrow Var(\log x) = \frac{1}{2H^2}$$

luego:

$$f(x) = \frac{H}{x} \bullet \frac{e^{-H^2\left(\log x + \frac{Cte}{H}\right)^2}}{\sqrt{p}} = \frac{1}{x s \sqrt{2p}} \bullet e^{-\frac{1}{2s^2}(\log x - E(\log x))^2}$$

que coincide con la expresión de la función de densidad de una log-normal.

2.3. Sistema generador de Dagum

Como generalización de varios de sus modelos[4] y basándose en el decrecimiento de la elasticidad de la función de distribución F(x) para modelos que se utilizan para describir el reparto, Dagum propone que se ha de verificar que:

$$\frac{\frac{dF(x)}{F(x)}}{\frac{dx}{x}} = \frac{d(\log F(x) - a)}{d \log x} = \left(1 - \frac{F(x) - a}{1 - a}\right)^b \bullet C; a < 1, C > 0 \ y \ b > 0$$

a partir de esta ecuación diferencial surge el sistema generador de Dagum suponiendo éste que $\frac{d(\log F(x) - a)}{d \log x}$ se puede descomponer como un producto de una función de X y de una función de F(x) del siguiente modo:

$$\frac{d(\log F(x) - a)}{d \log x} = h(x) \bullet k(F(x)), con\ k(F(x)) > 0 \quad \textbf{(2.3.1)}$$

4. Pueden estudiarse en los trabajos: Dagum, C. (1977) y Dagum, C. (1978).

siendo h(x) la función de transformación en este caso y f(x) la función generadora que se obtiene a partir de la relación que existe entre la función de densidad y la de distribución; teniendo en cuenta que a partir de (2.3.1) se deduce que:

$$F(x) = a + (1-a)\left(1 + ce^{-\int h(x)dx}\right)^{-b^{-1}} \quad con\ c = \left(1 - \frac{a}{Cte}\right)^{b}$$

Al igual que en el resto de sistemas generadores los distintos valores de los parámetros a, C y b y diferentes funciones h(x) y k(F(x)) darán lugar a otros tantos modelos de probabilidad. En este caso se obtienen, entre otros, los siguientes:

1) el caso particular:

$$k\left(F(x)\right) = \frac{1-F(x)}{F(x)}; h(x) = \frac{C \bullet b}{x}; a = 0; C \bullet b > 1$$

da lugar a la distribución de Pareto.

2) si

$$k\left(F(x)\right) = 1 - F(x)^{b}; h(x) = \frac{C \bullet b}{x}; a = 0; C \bullet b > 1$$

se obtiene el modelo Dagum - tipo I.

3) para:

$$k\left(F(x)\right) = 1 - F(x)^{b}; h(x) = \frac{C \bullet b}{x}; a \in (0,1); C \bullet b > 1$$

se consigue la distribución Dagum - tipo II.

4) en el caso de que:

$$k\left(F(x)\right) = 1 - F(x)^{b}; h(x) = \frac{C \bullet b}{x}; a < 0; C \bullet b > 1$$

se deduce el modelo Dagum - tipo III.

5) y si:

$$k\left(F(x)\right) = \frac{\left(1-F(x)\right)^{d}}{F(x)}; h(x) = \alpha X; a = 0; C \bullet b > -1 \ \ con\ d > 0$$

la distribución de Singh - Maddala (1976).

3. Modelos de probabilidad descriptivos de la distribución de la Renta

Dentro de este epígrafe se pretenden recoger algunos de los modelos que se han utilizado, de forma más o menos generalizada, a lo largo del último siglo. Como podrá observarse, el estudio es más exhaustivo en unos que en otros, no pretendiéndose más que poner de manifiesto el carácter pionero de la distribución de Pareto "…uno de los modelos de distribución de renta más estudiados", según comenta Fernández (1992, pág. 138) en su tesis doctoral, haciendo referencia al amplio estudio que sobre este modelo se puede encontrar en Arnold (1983), así como los buenos resultados que este modelo produce para las rentas altas, y por otra parte profundizar en algunas de las que han sido más utilizadas por sus buenas conclusiones.

3.1. Distribución Pareto

Partiendo de la observación de los datos, Pareto (1896) formula una distribución para la renta asimétrica. Considerando tres clases sociales, según el nivel de renta:

1ª.- Formada por las rentas más bajas, derivadas mayormente del trabajo, donde los individuos incluidos en esta clase padecen problemas de desnutrición.

2ª.- Constituida por rentas procedentes del trabajo y derivadas de algunas propiedades de pequeño tamaño.

3ª.- Esta clase corresponde a las rentas de las clases altas, procedentes en su mayoría por ingresos de la propiedad física y/o intelectual.

Esta clasificación, para Pareto (1896), es válida para todos los países capitalistas observados, siendo variables los límites existentes entre las tres clases consideradas, dependiendo de los datos disponibles para la realización del estudio y de la calidad del mismo.

A partir de aquí Pareto (1896)expone su teoría de "la circulación de élites", consistente en un intento de la conquista del poder llevada a cabo por los mejor dotados económicamente de la segunda y tercera clase social y un retroceso de los menos agraciados en este sentido de dichas clases, cuya existencia explicaba (siguiendo siempre al autor) la renovación de los individuos que componían las tres clases consideradas. En cualquier caso persiste la consideración de tres clases económicas, aunque con la posibilidad de que los límites entre ellas sea distinto.

Es en el año 1895 cuando Pareto propone la hipérbola truncada como función que permitirá obtener el porcentaje de perceptores con una renta superior o igual a cierto valor X_0:

$$P_X = \frac{K}{X^D} \quad \forall X > X_0, K > 0, D > 0$$

donde X_0 es el valor mínimo de renta percibible y el hecho de que K>0 y D>0 se debe a que, por una parte la proporción de perceptores no puede ser negativa y por otra la relación existente entre P_X y X debe ser inversa (es decir, cuanto mayor es el nivel de renta menor deberá ser, lógicamente, el porcentaje de individuos que perciben dicha cantidad o más).

Pareto construye, a partir de su propuesta, una medida de la desigualdad considerando el siguiente índice:

$$I_X = \frac{P_X}{P_{X_0}}$$

que proporciona el tanto por uno de individuos con un nivel de rentas superior o igual a X.

La polémica que surge alrededor de la interpretación respecto a la relación entre la desigualdad y el valor del índice es ampliamente recogida por Joan Baró (1982, pp. 302-305), aunque se puede sintetizar del siguiente modo:

- Podría argumentarse que una disminución de I_X se traduce en una disminución de P_X (siendo esto cierto, sea cual sea el enfoque que quiera darse a la interpretación) y por consiguiente existe menos desigualdad, al ser menor el número de personas que pertenecen a la clase social definida por aquellos perceptores de una renta superior a X.
- El otro razonamiento posible consiste en la afirmación contraria, es decir una disminución de I_X conlleva un aumento de la desigualdad, ya que al ser menor el porcentaje de individuos con renta superior a X implica que la proporción de individuos con rentas altas es menor.

Una vez realizadas estas consideraciones, Pareto obtiene la distribución de probabilidad que explica la renta teniendo en cuenta que:

$$F(x) = 1 - p(X \geq x) = 1 - P_x = 1 - KX^{-D} \quad \forall x > x_0, K > 0, D > 0$$

de donde:

$$f(X) = \begin{cases} KDX^{-D-1} & \forall X > X_0 \\ 0 & \forall X \leq X_O \end{cases}$$

o equivalentemente, siendo $K = X_0^D$ al ser f(X) función de densidad:

$$f(X) = \begin{cases} \dfrac{DX_0^D}{X^{D+1}} & \forall X > X_0 \\ 0 & \forall X \leq X_O \end{cases}$$

Algunas medidas de interés de la distribución propuesta por Pareto son:

1 .- $m = E(X) = \int_{X_0}^{\infty} X \frac{DX_0^D}{X^{D+1}} dx = \frac{D}{D-1} X_0$; D>1

2.- $s^2 = Var(x) = \frac{DX_0^2}{D-2} - \left(\frac{D}{D-1} X_0 \right)^2 = \frac{D}{(D-2)(D-1)^2} X_0^2$; D>2

3.- De la definición de Mediana, se desprende que:

$$\int_{Me}^{\infty} \frac{DX_0^D}{X^{D+1}} dX = DX_0 \left| \frac{X^{-D}}{-D} \right|_{Me}^{\infty} = DX_0^D \frac{Me^{-D}}{D} = \frac{1}{2} \Rightarrow Me^D = 2X_0^D \Rightarrow Me = 2^{1/D} X_0$$

Hay que destacar, en cualquier caso, que la importancia del parámetro D radica fundamentalmente en la relación inversa que mantiene con la desigualdad, es decir:

$$\Delta D \Leftrightarrow \nabla desigualdad$$

en efecto, obsérvese que a partir de la expresión de la media se deduce que:

$$D = \frac{m}{m - X_0}$$

por tanto cuanto menor es la diferencia $m - X_0$, lo que se traduce en un aumento de la igualdad por estar la media más próxima al valor mínimo de renta X_0, mayor será el valor de D. El argumento en el otro sentido también es válido, es decir, si el valor de D disminuye entonces el de $m - X_0$ aumenta y por consiguiente también se incrementa la desigualdad.

A la misma conclusión se habría llegado si en lugar de partir de la expresión de la media se hubiera considerado el índice de Gini:

$$I = 2\left[0'5 - \int_0^1 q(X) dFX \right]$$

donde q(X) corresponde a la función que proporciona el porcentaje de renta acumulada, necesaria para la construcción de la curva de Lorenz:

$$q(x) = \frac{1}{m} \int_{X_0}^{x} Xf(X) dX = \frac{1}{m} \int_{X_0}^{x} X \frac{DX_0^D}{X^{D+1}} dX = 1 - \left(\frac{X_0}{x} \right)^{D-1} = 1 - (1 - F(x))^{\frac{D-1}{D}} \quad \forall x \geq X_0$$

ÍNDICE

de lo que se deduce que:

$$\int_0^1 q(X)dF(X) = \frac{D-1}{2D-1} \Rightarrow I = \frac{1}{2D-1}$$

es decir, si el valor de D aumenta disminuirá el de I, lo que conduce a un mejor reparto de la renta. En caso contrario, D disminuye, el índice de Gini es mayor y por consiguiente hay más desigualdad.

Este modelo, base de otros muchos estudios sobre modelización de distribuciones de renta, ha sido contestado[5] por sus pobres resultados al realizar ajustes salvo en lo que concierne a altos niveles de renta (cola de la derecha).

3.2. Distribuciones de Dagum

Aunque ya se ha hecho referencia a las distribuciones de Dagum tipo I, tipo II y tipo III, como casos particulares del sistema generador de Dagum, en este apartado se ampliará el conocimiento de las mismas, indicando las expresiones de las funciones de distribución y de densidad de cada tipo.

Recordar, en cualquier caso, que todas ellas se basan en el decrecimiento de la elasticidad de la función de distribución F(x), por lo que se cumple:

$$\frac{d \log F(x)}{dx} = C \bullet \left(1 - (F(x))^b\right), \ x > 0, C > 0, b > 0 \quad \textbf{(3.2.1)}$$

la resolución de esta ecuación diferencial da como resultado la función de distribución del modelo de Dagum triparamétrico:

$$F(x) = \begin{cases} \left(1 + cx^{-d}\right)^{-b^{-1}} & x > 0, b > 0, c > 0, d > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

donde $d = C \cdot b$ y b^{-1} son parámetros de desigualdad, siendo c un parámetro de escala.

Si en lugar de partir de la ecuación diferencial (3.2.1), se supone que:

$$\frac{d \log (F(x) - a)}{dx} = C \bullet \left(1 - \left(\frac{F(x) - a}{1 - a}\right)^b\right), x \geq x_0 \geq 0, a < 1, C > 0, b > 0$$

5. Véase, por ejemplo, el trabajo de Creedy, J. (1977).

se obtienen los modelos de Dagum tetraparamétricos, según se distingan diferentes casos para el valor de a, donde la finalidad de considerar este nuevo parámetro es la de recoger aquellos casos en los que se producen rentas nulas (caso del desempleo) o negativas (como pudiera ser el caso de dueños de empresas en las que se han registrado pérdidas), teniendo además en cuenta que x_0 es la renta mínima.

Así, resolviendo la anterior ecuación diferencial se obtiene

$$F(x) = a + (1-a)\left(1+cx^{-d}\right)^{-b^{-1}}, x \geq x_0 \geq 0, b > 0, c > 0, d > 0, a < 1$$

y para distintas bandas de valores de a, concretamente para a = 0, 0 < a < 1 y a < 0, se deducen los tres modelos de Dagum.

1) si a = 0, se obtiene la distribución de Dagum -tipo I, que es el modelo triparámetrico que se obtuvo a partir de la ecuación diferencial (3.2.1), al que corresponde la función de densidad:

$$f(x) = b^{-1}cdx^{-d-1}\left(1+cx^{-d}\right)^{-b^{-1}-1}, x > 0$$

2) si 0 < a < 1, se obtiene el modelo de Dagum -tipo II, al que corresponde una función de distribución con expresión:

$$F(x) = a + (1-a)\left(1+cx^{-d}\right)^{-b^{-1}} = aF_1(x) + (1-a)F_2(x), b > 0, c > 0, d > 0, 0 < a < 1$$

donde:

$$F_1(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}; \quad F_2(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \left(1+cx^{-d}\right)^{-b^{-1}} & x > 0 \end{cases}$$

ya que, siguiendo al propio autor, esta se puede descomponer de la forma indicada por aplicación del teorema de descomposición de Jordan.

De aquí se puede deducir que la función de densidad correspondiente es:

$$f(x) = \begin{cases} a, x = 0 \\ (1-a)b^{-1}c\,dx^{-d-1}\left(1+cx^{-d}\right)^{-b^{-1}-1}, x > 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$$

Este modelo es útil cuando en los datos de los que se dispone existen rentas nulas o negativas, por las razones aducidas anteriormente.

ÍNDICE

3) si $a<0$ se obtiene el modelo de Dagum - tipo III, útil cuando todas las rentas se sitúan por encima de un valor mínimo x_0 positivo. En este caso, las expresiones de las funciones de distribución y densidad son las siguientes:

$$F(x)=\begin{cases} a+(1-a)\left(1+cx^{-d}\right)^{-b^{-1}} & x\geq x_0, b>0, c>0, d>0, a<0 \\ 0 & x=x_0 \end{cases}$$

$$f(x)=(1-a)b^{-1}cdx^{-d-1}\left(1+cx^{-d}\right)^{-b^{-1}-1}, x>x_0>0$$

Por otra parte, las distribuciones de Dagum son las seleccionadas en el trabajo de Pena, B.; Callealta, J.; Casas, J.M.; Merediz, A. y Núñez, J (1996). Concretamente, parten de los datos aportados por las Encuestas Básicas de Presupuestos Familiares (EBPF) de los años 1973/74, 1980/81 y 1990/91, y tras realizar un estudio descriptivo en el que justifican la ocultación de rentas, se presenta un conjunto de métodos de corrección que los autores proponen, eligiendo el que consideran más conveniente: "método de corrección mediante tasas de ocultación progresiva" que será utilizado de forma general, si bien también presentan resultados aplicando el "método de corrección mediante tasas de ocultación constante". Una vez llevada a cabo la corrección, y tras abordar el problema de la modelización teórica de las distribuciones de renta, partiendo de los resultados de los ajustes (por el método de máxima-verosimilitud) para cada comunidad, categoría socio-profesional y tamaño de municipio, se decantan por la Familia de Dagum.

3.3. Distribución de Singh-Maddala

La distribución de Singh-Maddala, referida anteriormente como un modelo triparamétrico deducible del sistema generador de Dagum, fue propuesto por Singh, S.K. y Maddala, G.S. en 1976 al caracterizar la tasa proporcional de riesgo, también denominada función de proporción de fracasos (PFR, siguiendo la nomenclatura de Dagum (1991)), siendo de gran aplicación en la teoría de fiabilidad y definida como:

$$\frac{f(\ln x)}{1-F(\ln(x))}$$

dichos autores suponen que, siendo dicha PFR un indicador del grado de dificultad que existe en cada nivel de renta para acceder a otros niveles de renta superiores, es creciente para los niveles de renta bajos y decreciente para el resto (niveles medios y altos de renta)[6]. Se puede deducir, teniendo en cuenta las consideraciones expuestas, que la expresión de la función de distribución es:

$$F(x) = 1 - \left(1 + ax^b\right)^{-c} \quad x \geq 0, a > 0, b > 0, c > 0$$

a partir de la cual se obtiene la de la función de densidad

$$f(x) = abcx^{b-1}\left(1 + ax^b\right)^{-c-1} \quad x \geq 0, a > 0, b > 0, c > 0$$

otro punto de partida alternativo, consiste en suponer que la función de distribución debe verificar la ecuación diferencial:

$$\frac{dF(x)}{dx} = dx^m\left(1 - F(x)\right)^n \quad x > 0, d > 0, m > -1, n > 1 \qquad \textbf{(3.3.1)}$$

es decir, se corresponde a la composición de los elementos que determinan a las funciones de distribución de Pareto y Weibull, para las que se verifica que:

$$\frac{dF(x)}{dx} = d\left(1 - F(x)\right)^{1+\frac{1}{d}} \quad x \geq x_0 > 0, d > 0$$ (para el caso de la de Pareto)

$$\frac{dF(x)}{dx} = dx^m\left(1 - F(x)\right) \quad x > 0, d > 0, m > -1$$ (para el caso de la de Weibull)

en este caso, por resolución de la ecuación diferencial (3.3.1), se obtendría la misma expresión de las funciones de distribución y densidad, teniendo en cuenta que:

$$a = \frac{d(n-1)}{m+1}; b = m+1; c = \frac{1}{n-1}$$

3.4. Distribución de Champernowne

Fue en el año 1937 cuando Champernowne, quien afirmaba que las rentas, o más precisamente el logaritmo de la renta, no tienen un buen ajuste a la distribución de Pareto o cualquier otra procedente del sistema generador de Pearson, propuso

---

6. Una crítica posterior al uso de la tasa proporcional de riesgo como aplicación al estudio de la renta realizada por Cramer, y aceptada por Singh y Maddala (1978) es recogida en la tesis doctoral de Fernández Morales, A. (1992).

ÍNDICE

una familia de distribuciones con objeto de describir los ingresos brutos. No es hasta el año 1952 cuando dicho autor formula el modelo tetraparamétrico con función de densidad para $z = \log x$:

$$f(z) = \frac{n}{\cosh\left(ab\left(z - z_0\right)\right) + c}$$

En el caso de que $c < 1$, lo que sucedía en la mayoría de las distribuciones de renta estudiadas por Champernowne según consta en Kakwani (1980, pág. 25), la función de distribución para x toma la forma:

$$F(x) = 1 - \frac{1}{\boldsymbol{q}} arctag\left(\frac{\operatorname{sen}\boldsymbol{q}}{\cos\boldsymbol{q} + \left(\frac{x}{x_0}\right)^a}\right) \quad x > 0, a > 0, 0 \leq \boldsymbol{q} < \boldsymbol{p}$$

donde $\cos\theta = c$ y $z_0 = \log x_0$.

Se ha obtenido, por tanto, un modelo de tres parámetros donde la interpretación de los mismos es poco nítida para el caso de θ, aunque sin embargo puede demostrarse que x_0 coincide con la mediana de la distribución de la renta y a corresponde a la constante de Pareto, más precisamente a la pendiente de la asíntota oblicua en los tramos altos del ingreso.

3.5. Distribución Normal

La distribución Normal de parámetros μ y σ, debida a Gauss-Laplace, corresponde a una variable de tipo continuo con función de densidad:

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \quad \forall X \in \left]-\infty, \infty\right[$$

Aunque su utilización para la descripción de la renta no es aceptada por la casi totalidad de autores, debe tenerse en cuenta que en algunos estudios empíricos, sobre grupos de perceptores que presentaban cierta homogeneidad, dio resultados bastante aceptables. Basta citar a algunos contemporáneos de Pareto, como Moore, Westergaard y Nyboelle[7] y otros más cercanos en el tiempo, como Bowley.

---

7. Moore realiza el estudio tomando datos de obreros cualificados americanos (1911), mientras que Westergaard y Nyboelle se basan en los datos disponibles sobre los asalariados y artesanos de Copenhague (1928).

En cualquier caso, destacar que la importancia de la distribución Normal, en temas de renta, radica fundamentalmente en las distribuciones que de ella se derivan.

3.6. Distribución Log-Normal

Muchos son los trabajos que utilizan este modelo teórico como el adecuado para ajustar la distribución de renta y los autores que justifican y defienden su utilización[8].

Partiendo de un nivel mínimo de renta X_0, se puede admitir que la variable renta (X) puede expresarse de acuerdo a la igualdad:

$$X - X_0 = (1+u_1)(1+u_2)\ldots\ldots(1+u_j)\ldots$$

siendo $\{1+u_j\}_j$ el conjunto variables que recogen una serie de factores condicionantes (pautas de comportamiento, hábitos en el consumo, etc.), de carácter infinitesimal e independientes entre sí, que conforman la renta de cada individuo.

Luego:

$$\ln(X - X_0) = \ln(1+u_1) + \ln(1+u_2) + \ldots\ldots + \ln(1+u_j) + \ldots$$

La aplicación del Teorema Central del límite conduce a:

$$\ln(X - X_0) \approx N(m, s)$$

Pudiendo comprobarse que:

$$E(X) = e^{m+\frac{s^2}{2}} + X_0;\ Var(X) = e^{2m+2s^2} - e^{2m+s^2}$$

$$M_e = e^m + X_0;\ M_0 = e^{m-s^2} + X_0$$

De donde, para el caso particular de que $X_0 = 0$:

$$\frac{E(X)}{M_e} = e^{s^2/2};\ \frac{M_e}{M_0} = e^{s^2};\ \frac{E(X)}{M_0} = e^{3s^2/2}$$

por lo que el papel de σ, cuando se desea analizar la desigualdad de los ingresos, es fundamental.

---

8. En algunos casos el ajuste no es aceptable, como en el estudio de C. Dagum (1991) sobre la distribución de la Renta familiar en EEUU para 1969.

ÍNDICE

Por otra parte, la relación entre la distribución Log - Normal y la distribución de Pareto se establece, igualando las elasticidades de ambas distribuciones, estudiando la posible analogía entre los parámetros D y σ.

Si se tiene en cuenta la relación que dichos parámetros mantienen con la desigualdad (recuérdese que se comprobó con anterioridad que $\Delta D \Leftrightarrow \nabla desigualdad$) las consecuencias de dicha comparación serán concluyentes.

En el caso de la distribución Log - Normal la elasticidad es lineal respecto al ln X. Bastará comprobar que:

$$\varepsilon = \frac{\partial \ln f(X)}{\partial \ln X} = A + B \ln X$$

si

$$\ln f(X) = A \ln\left(X - X_0\right) + B \frac{\left(\ln\left(X - X_0\right)\right)^2}{2} + Cte$$

Siendo esto cierto para la Log - Normal, pues:

$$\ln f(X) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\ln\left(X - X_0\right) - \mu}{\sigma}\right)^2 - \ln\left(X - X_0\right) - \ln\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right) = \left(\frac{\mu}{\sigma^2} - 1\right)\ln\left(X - X_0\right) -$$
$$-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\ln\left(X - X_0\right)\right)^2 - \left(\frac{\mu^2}{2\sigma^2} + \ln\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right)\right)$$

por lo que considerando:

$$A = \frac{\mu}{\sigma^2} - 1;\ B = -\frac{1}{\sigma^2};\ Cte = -\left(\frac{\mu^2}{2\sigma^2} + \ln\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right)\right)$$

se deduce que, efectivamente:

$$\varepsilon = -\left(\frac{\ln\left(X - X_0\right) - \mu}{\sigma^2}\right) - 1$$

En el caso de la distribución de Pareto:

$$\varepsilon = \frac{\partial \ln f(X)}{\partial \ln X} = \frac{\partial\left(\ln D + \ln\left(X_0^D\right) - (D+1)\ln X\right)}{\partial \ln X} = -D$$

para niveles de renta suficientemente altos se puede comprobar que (Baró, 1982) la relación entre ambas elasticidades es directamente proporcional, atendiendo a la expresión:

$$\sigma = 1'525D$$

por lo que, en el caso de niveles de renta altos la utilización de una cualquiera de las distribuciones comparadas dará resultados similares. Si acaso tener en cuenta, cuando se pretenda elegir uno de ellos, que mientras que la distribución de Pareto presenta claras ventajas en el ajuste a la cola superior de la distribución de ingresos, la Log - Normal abarca un mayor intervalo de dicha distribución.

3.7. Distribución Beta

Dentro de la distribución Beta se distinguen, principalmente, la de primera y segunda especie. Así, se dice que una variable aleatoria X de tipo continuo sigue una distribución Beta de primera especie si su función de densidad obedece a la siguiente expresión:

$$f(X) = \frac{X^{p-1}(1-X)^{q-1}}{b(p,q)} \quad \forall X \in [0,1], p>0, q>0$$

siendo $b(p,q)$ la función Beta de Euler, definida como:

$$b(p,q) = \int_0^1 X^{p-1}(1-X)^{q-1}\,dX$$

o equivalentemente, realizando el cambio de variable $Z = \frac{1-X}{X}$:

$$b(p,q) = \int_0^\infty \frac{z^{q-1}}{(1+z)^{p+q}}\,dz$$

pudiéndose comprobar, haciendo uso de las definiciones de los principales parámetros estadísticos y de la simetría de la función beta de Euler (según la cual se verifica que $b(p,q) = b(q,p)$), que según se considere una $b(p,q)$ o una $b(q,p)$:

$$m = E(X) = \frac{p}{q+p}; s^2 = Var(X) = \frac{pq}{(q+p)^2(p+q+1)}; M_0 = \frac{p-1}{p+q-2}$$

$$\boldsymbol{m} = E(X) = \frac{q}{q+p};\ \boldsymbol{s}^2 = Var(X) = \frac{pq}{(q+p)^2(p+q+1)};\ M_0 = \frac{q-1}{p+q-2}$$

La aplicación de la distribución Beta de primera especie a análisis de renta está restringida, normalmente, a valores de los parámetros superiores a 1, $p > 1$ y $q > 1$, al adoptar en este caso la función de densidad correspondiente una forma campaniforme y asimétrica.

Por otra parte, la distribución Beta de segunda especie de parámetros p y q se corresponde a la de una variable de tipo continuo, con recorrido en el intervalo $]0,\infty[$, siendo su función de densidad:

$$f(x) = \frac{X^{q-1}}{(1+X)^{p+q}\beta(p,q)}\ \forall X \in\ ]0,\infty[, p>0, q>0.$$

en la que se verifica que:

$$\boldsymbol{m} = E(X) = \frac{q}{p-1};\ \boldsymbol{s}^2 = Var(X) = \frac{q(p+q-1)}{(p-1)^2(p-2)};\ M_0 = \frac{q-1}{p+1}$$

A pesar de ser distribuciones que no han gozado de una gran aceptación, hay que destacar que en la última década son varias las investigaciones que, relacionadas con dichas distribuciones, se han realizado con buenos resultados. Así McDonald y Xu (1992), proponen las distribuciones Beta tetraparamétricas y pentaparamétricas como modelos explicativos de la distribución de la renta. Más recientemente Herrerías, Palacios y Callejón (1996), partiendo de los datos proporcionados por la E.P.F. del 90-91, proponen utilizar una distribución perteneciente al sistema generador de Pearson, que resulta ser una distribución Beta de primera especie. Ante la limitación que supone el recorrido de la variable teórica proponen una alternativa, que dado su interés no puede dejarse de comentar.

Partiendo, al igual que en el caso de la Beta, de una distribución perteneciente al sistema generador de Pearson, en el que se verifica que:

$$f(x) = e^{\int \frac{x+k}{h(x)}dx} = e^{\int \frac{x+k}{a+bx+cx^2}dx}$$

si se denota por:

$$g(X) = \frac{f'(X)}{f(X)}$$

plantean como opción que g(X) sea una función polinómica de grado impar (s), es decir:

$$g(X) = \sum_{i=0}^{s} c_i X^i$$

comprueban que las distribuciones de probabilidad obtenidas no presentan limitaciones en cuanto al intervalo de variación de la variable y llegan a dos conclusiones de gran importancia: los estimadores de los parámetros c_i obtenidos por el método de los momentos coinciden con los máximo-verosímiles (Callejón y Santos, 1994), y ponen de manifiesto la flexibilidad, ya que es posible realizar el análisis para los distintos grados del polinomio, al objeto de seleccionar aquel cuya bondad de ajuste sea mayor.

3.8. Distribución Gamma

La distribución Gamma generalizada de parámetros α y λ, utilizada por primera vez como modelo teórico de distribución de renta por Ammon y March a finales del siglo pasado, según C. Dagum (1980), resurge con el trabajo de Salem y Mount (1974) al cumplir las cotas de Gastwirth (1972 a, 1972 b, 1974). En España ha sido utilizado este modelo por Esteban (1996), Esteban et al. (1994,1995), Rojo (1993) y López (1997). Este modelo corresponde a la de una variable de tipo continuo con función de densidad:

$$f(x) = \frac{\lambda^{\alpha} e^{-\lambda x} x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \quad \forall x \in]0,\infty[, \alpha > 0, \lambda > 0$$

siendo $\Gamma(\alpha)$ la función gamma de Euler, es decir:

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$$

Medidas de interés de la distribución Gamma generalizada son:

1. $m = E(X) = \frac{a}{l}$

2. $s^2 = Var(x) = \frac{a}{l^2}$

3. $M_o = \frac{a-1}{l}$

4.- A partir de la fórmula empírica de Doodson,

$$\mu - M_o = 3(\mu - M_e)$$

válida para distribuciones unimodales con asimetría hacia la derecha, se deduce una aproximación de la mediana, como:

$$M_e = \frac{3\alpha - 1}{3\lambda}$$

5.- El coeficiente de asimetría es:

$$\gamma_3 = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}$$

De las expresiones de las distintas medidas estadísticas consideradas, se deduce que:

- el único que no depende del parámetro λ es el coeficiente de asimetría, guardando una relación inversa con α, de forma que las distribuciones Gamma con mayores valores de alfa presentarán mayor simetría.
- todos, exceptuando el coeficiente de asimetría, guardan una relación directa con α e inversa con λ, de manera que consideradas dos distribuciones Gamma con valores iguales de α, aquella que posea un valor de mayor λ tendrá una media, varianza, moda y mediana de menor magnitud.
- λ es un factor de escala, es decir si se considera la variable:

$$Y = kX$$

obtenida, haciendo un cambio de unidad en la variable X, siguiendo esta una distribución Gamma de parámetros α y λ, entonces Y sigue también una distribución Gamma con parámetros α y λ/k. Efectivamente, la función de densidad de Y toma la expresión:

$$f(y) = f(x)\left|\frac{dx}{dy}\right| = \frac{\lambda^{\alpha} e^{-\lambda\left(\frac{y}{K}\right)}\left(\frac{y}{K}\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \bullet \frac{1}{K} = \frac{\left(\frac{\lambda}{K}\right)^{\alpha} e^{-\left(\frac{\lambda}{K}\right)y} y^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$$

que corresponde a la de una $\Gamma\left(\alpha, \frac{\lambda}{K}\right)$.

Esta interpretación del parámetro λ será útil cuando deseen realizarse comparaciones temporales de una misma población, o espaciales de poblaciones con rentas medidas con distinta unidad monetaria.

3.9.- La ley Pareto-Levy

No puede dejar de mencionarse, antes de finalizar el recorrido por el conjunto de distribuciones de probabilidad que se ha ido efectuando a lo largo del presente epígrafe, la ley Pareto - Levy por su conexión con la distribución de Pareto. Así, teniendo en cuenta la validez del modelo propuesto por Pareto para los niveles superiores de la renta, Mandelbrot (1960) introduce la ley débil de Pareto, según la cual:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{R(x)}{\left(\dfrac{x}{x_0}\right)^{-D}} = 1$$

siendo R(x) = 1-F(x).

A partir de dicha ley, Mandelbrot define la ley Pareto - Levy como el conjunto de leyes de probabilidad estable[9] que verifican la ley débil de Pareto con 1 < D < 2. La función de densidad de esta familia de distribuciones no puede expresarse de forma analítica, aunque para valores de x grandes la función de distribución de probabilidad atiende a la expresión:

$$F(x) \approx 1 - x^{-D} \left(u * \Gamma(1-D)\right)^{D}$$

siendo u* un escalar positivo, D el parámetro de la distribución de Pareto y Γ(1-D) la función Gamma:

$$\Gamma(1-D) = \int_0^\infty e^{-x} x^{-D} dx$$

9. Acerca de la ley de probabilidad estable, que subyace bajo la idea de que la distribución de renta es la misma independientemente del número de componentes que constituyan la renta y, por tanto, aunque el conjunto de componentes difieren de país a país, el perfil de la distribución de renta es el mismo en cada país, puede encontrarse más información en: Kakwani, N. C. (1980).

ÍNDICE

Bibliografía

ARNOLD, B.C. (1983): "Pareto Distribution", en Jonhson, N. L. y Kotz, S. *The Encyclopedy of Statistical Sciences.* Ed. Wiley and Sons, New York. pp.569-574.

BARÓ LLINAS, J. (1982): "Distribución personal de la renta. Medidas y leyes de desigualdad". Tesis Doctoral. Universidad Central de Barcelona.

BARTELS, C. P. A. (1977): "Economía del Bienestar, Distribución del Ingreso y Desempleo". Fondo de Cultura Económica. México.

BECKER, G. S. (1967): "Human capital and the personal distribution of income: An analytical approach". Woytynsh Lecture, Nº 1. University of Michigan.

BOWLEY, A.L. (1932): "Studies in National Income". Londres.

CALLEALTA, J.; CASAS, J.M.; MEREDIZ, A.; NÚÑEZ, J.; PENA, B. (1996): "Distribución Personal de la Renta en España". Ed. Pirámide.

CALLEJÓN, J.; SANTOS, M. (1994): "Comparación de dos métodos de estimación: Estimación máximo- verosímil y método de los momentos". VIII Reunión Anual de ASEPELT - España. Vol. I. pp. 245-249.

CREEDY, J. (1977): "Pareto and the distribution of income". The Review of Income and Wealt. Series 23, nº 4. pp. 405-411.

CHAMPERNOWNE, D. G. (1953): "A model of Income Distribution". Economic Journal, Vol. 63. pp. 318-351.

CRAMER, J.S. (1978): "A function for size distribution of incomes: Comment". Econometrica. Vol. 46, Nº 2. Pp. 459-460.

DAGUM, C. (1977): "A New Model of Personal Income Distribution: Specification and Estimation". Economie Appliquée. Vol. XXX nº 3. pp. 413-436.

DAGUM, C. (1978): "Toward a General Model of Production and Distribution". Hommage à Francois Perroux. Presses Universitaires de Grenoble. pp.539-553.

DAGUM, C. (1980): "The generation and distribution of income, the Lorenz curve and the Gini ratio". Economie Appliquée, tomo XXXIII, nº 2. pp. 327-367.

DAGUM, C. (1981): "Sistemas Generadores de Distribución del Ingreso y la Ley de Pareto". Journal of the Inter-American Statistical Institute 125. pp. 143-183.

DAGUM, C. (1991): "Renta y distribución de la riqueza, desigualdad y pobreza: teoría, modelos y aplicaciones". Cuaderno 22. Seminario Internacional de Estadística en Euskadi. pp. 30-33, 41-55.

DOUGHERTY, C. R. S. (1971): "Estimates of labour aggregate functions". Harvard Center for International Affairs, Economic Development Report Nº 190. Cambridge: Development Research Group.

ESTEBAN, J. (1996): "Changes in income inequality in Spain. An approach from Gamma models". Procee- dings 20th Conference on Regional and Urban Statistics. SCORUS. Madrid. October.

ESTEBAN, J., BACHERO J.M., ROJO C., RUIZ F. (1994): "Evolution of Income Inequality in Spain. Period 1980-1990". Proceedings Seminar on the Measurement and Analysis of Social Exclusion. Centre for Research in European Social and Employment Policy. Bath. June .

(1995): "Inequality income distribution and real economy". Proceedings Social Exclusion and social integration research theory, indicators and models. European Seminar. Brussels. May.

FERNÁNDEZ , A. (1992): "Los índices de pobreza FGTε. Estimación para la distribución del Ingreso en España". Tesis Doctoral. Universidad de Málaga.

GASTWIRTH,J.L.(1972): "The Estimation of the Lorenz Curve and the Gini Index". The Review of Economics and Statistics.p.306-316.

GASTWIRTH,J.L. AND KRIEGER, A.M.,(1974): "On Bounding Moments from Grouped Data". Journal of the American Statistical Association. pp.468-471.

GASTWIRTH,J.L. AND J.T. SMITH, (1972): "A New Goodness-of-Fit Test". Proceedings of the American Statistical Association. pp.315-321.

HERRERÍAS, R.; PALACIOS, F.; CALLEJÓN, J. (1996): "Distribución de la renta en la comunidad de Castilla y León: dos métodos de estimación". Actas del 5º Congreso de Economía Regional de Castilla - León. Comunicaciones 2. pp. 978-990.

KAKWANI, N.C. (1980): "Income Inequality and Poverty. Methods of Estimation and Policy Applications". Oxford University Press.

MANDELBROT, B. (1960): "The Pareto-Lévy Law and the Distribution of Income". International Economic Review, 1. May. pp. 79-106.

MCDONALD, J. B.; XU, Y. J. (1992): "A generalization of the Beta of the First and Second Kind with an Application". American Statistical Association: Proceedings of the Business and Economic Statistics". pp. 155-160.

MOORE, H.L. (1911): "The Law of Wages". New York.

LÓPEZ, M. I. (1997): "La desigualdad en España desde la perspectiva de los ingresos y los gastos. Evolución en el periodo 1980-1990". Tesis Doctoral. Universidad de Valencia. España.

PARETO, V. (1896): "Ecrits sur la Courbe de la Repartition de la Richesse". (Eubres complètes de Vilfredo Pareto publiées sous la direction de Giovanni Busino, Genève, Librairie Droz, 1965).

PEARSON, K. (1910): "Contribution to the Mathematical Theory of Evolution". Londres.

REY PASTOR, J. (1960): "Lecciones de Algebra" (5ª edición). Nuevas Gráficas, S.A. Madrid.

ROJO, C. (1993): "La distribución de renta en España: Un análisis comparativo de las diferentes Comunidades Autónomas". Tesis Doctoral. Universidad de Valencia. España.

RUTHERFORD, R. S. G. (1955): "Income Distribution: a new model". Econometrica, Nº 23. pp. 277-294.

SALEM, A.B. y T.D. MOUNT,(1974): "A Convenient Descriptive Model of Inco-me Distribution:The Gamma Density".Econometrica. Vol.42. Nº 3. pp.1115-1127.

SINGH S.K.; MADDALA, G.S. (1976): "A Function for Size Distributions of Income". Econometrica. Vol. 44. Nº 5. pp. 963-970.

SINGH S.K.; MADDALA, G.S. (1978): "A Function for Size Distributions of Income: Reply". Econometrica. Vol. 46. Nº 2. pág. 461.

TINBERGEN, J. (1975): "Income Distribution: Analysis and Policy". Amsterdam: North Holland.

WESTERGAARD y NYBOELLE (1928): "Grundzugeder Theorie der Statistik". Jena.