Comprensiones categoriales y subrecursión

Joaquín Díaz Boïls

Director: Jose Pedro Úbeda Rives

Tesis presentada al programa de doctorado

Razón, Lenguaje e Historia

Departamento de Lógica y Filosofía de la Ciencia.

Universidad de Valencia.

Valencia, 2012.

III

Uf -dijo él.

Agradecimientos. Agradezco la colaboración, a lo largo todo el proceso de estudio y redacción de esta tesis, de los profesores Noson Yanofsky del *Brooklyn College* de Nueva York, Robin Cockett y todo su grupo de estudio en la *University of Calgary* y Giuseppe Rosolini de la *Università di Genova.*

Agradezco especialmente la ayuda y la confianza de mi director de tesis, el profesor José Pedro Úbeda Rives del Departamento de Lógica y Filosofía de la Ciencia de la Universitat de València. Quiero destacar el esfuerzo autodidacta que hemos llevado a cabo juntos.

Dedico esta tesis a todas esas personas improductivas desde el punto de vista financiero que me han dado su afecto durante este tiempo. De esa tribu extensa María, Manuela y Rut serán siempre las primeras.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Distintas clases de funciones recursivas han sido caracterizadas por medio de Teoría de Categorías. Ello se ha logrado considerando diferentes clases de categorías a las que se ha dotado de un esquema de recursión. La más conocida de esas caracterizaciones es la que proporciona la clase de las Funciones Recursivas Primitivas (en adelante $\mathcal{RP}$) por medio únicamente de una categoría cartesiana y un *Objeto de Números Naturales* (véase [L. Román]).

Un *Objeto de Números Naturales* (en adelante un *nno*) en una categoría $\mathcal{C}$ dotada de un objeto terminal 1 es una terna (N, z, s)[1] dada por un diagrama $1 \xrightarrow{z} N \xrightarrow{s} N$ que es inicial entre todos los diagramas en la forma

$$1 \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A$$

en $\mathcal{C}$. Esto se expresa en un solo diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "z"] \arrow[d] & N \arrow[r, "s"] \arrow[d, "m"] & N \arrow[d, "m"] \\
1 \arrow[r, "f"'] & A \arrow[r, "g"'] & A
\end{tikzcd}$$

Otra caracterización se obtiene al adoptar el *Axioma del Infinito* o *Axioma de Peano-Lawvere*, que postula la existencia de un *nno* en cualquier objeto de una categoría dada. Una categoría $\mathcal{C}$ cumple el *Axioma de Peano-Lawvere* si para todo objeto X en $\mathcal{C}$ existe un diagrama

[1] El morfismo z representa en el modelo de funciones en $\mathcal{RP}$ al cero y s al sucesor.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "z_X"] & N_X \arrow[loop above, "s_X"] \end{tikzcd}$$

tal que para todo diagrama en $\mathcal{C}$ de la forma $\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[loop above, "g"] \end{tikzcd}$ existe un único morfismo $m: \ N_X \longrightarrow Y$ que cumple: $m \circ z_X = f$ y $m \circ s_X = g \circ m$.

Dicho Axioma dota de sentido a la introducción de una clase de categorías en [A. Burroni] que contendrá descripciones de las funciones $\mathcal{RP}$. Una categoría que satisface el Axioma de Peano-Lawvere se llamará *categoría de Peano-Lawvere* o abreviadamente *categoría PL*.[2]

Román y Paré en [Román-Paré] por su parte generalizan las definiciones anteriores a categorías monoidales deduciendo que los resultados obtenidos en categorías cartesianas con *nno* pueden también establecerse para dichas categorías. Ello se logra dotándolas de un *nno* definido en ellas introduciendo el producto tensorial en los esquemas de recursión. Dicha caracterización representa una generalización de la construcción a base de categorías cartesianas.

Un *nno a la izquierda* (*nnoi*) en una categoría monoidal $\mathcal{V}$ con unidad $\top$ e identidad izquierda i es una terna $(N, 0, s)$ tal que para todo par de morfismos $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow B$ en $\mathcal{V}$ existe un único morfismo $m : N \otimes A \longrightarrow B$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \top \otimes A \arrow[r, "0 \otimes A"] \arrow[d, "i"'] & N \otimes A \arrow[r, "s \otimes A"] \arrow[d, "m"] & N \otimes A \arrow[d, "m"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \arrow[r, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

conmuta.

Esta definición es equivalente a la introducida en [A. Burroni] en el sentido de que una categoría monoidal con *nnoi* es *PL* y el recíproco también se cumple (ver [Román-Paré] página 363).

Un *nno* parametrizado en una categoría cartesiana, esto es, un *nno* (N, z, s) para el cual existe un diagrama conmutativo[3]

[2]Una caracterización importante de las categorías *PL* viene dada en [A. Burroni] por medio de extensiones de Kan.

[3]Se obtiene un *nno* parametrizado a partir de un *nno* directamente en un topos e incluso en una categoría cartesiana cerrada.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "zX"] \arrow[d] & N \times X \arrow[r, "sX"] \arrow[d, "m"] & N \times X \arrow[d, "m"] \\
X \arrow[r, "f"'] & A \arrow[r, "g"'] & A
\end{tikzcd}$$

proporciona unas ecuaciones equivalentes al esquema de recursión primitiva de la clase $\mathcal{RP}$ y por tanto equivale en su contenido semántico a la operación *recursión* del conjunto de funciones $\mathcal{RP}$. Podemos entonces afirmar que una categoría cartesiana con un *nno* parametrizado permite definir toda la clase $\mathcal{RP}$**.**

Es sabido también que pueden obtenerse otras clases *por encima de* (conteniendo a) $\mathcal{RP}$ añadiendo alguna estructura más a la categoría sobre la que se trabaja: considerando por ejemplo un topos (en [Lambek-Scott]), una categoría cartesiana cerrada (en [Thibault]) o una categoría con límites finitos (en [L. Román[2]]).[4]

Menos trabajo, sin embargo, se ha presentado sobre la caracterización categorial de las clases de funciones *subrecursivas*, esto es, aquéllas contenidas en $\mathcal{RP}$ (consultar por ejemplo [Cockett-Redmond]).

En la clase de las funciones $\mathcal{RP}$ hay al menos una sucesión de funciones tal que cada función en ella tiene un crecimiento sustantivamente más complejo que la función que la precede en la sucesión. Tal escala de funciones nos permite definir una *jerarquía* en $\mathcal{RP}$ con la cual podremos clasificar a las funciones recursivas primitivas en diversos *niveles de complejidad*. Éste es el caso de la *Jerarquía de Grzegorzcyk*.

Una de las razones de contar con menos estudios sobre clases de funciones subrecursivas es que no se dispone de un diagrama recursivo con suficiente expresividad que caracterice la *recursión acotada* respecto a la cual están cerradas dichas clases y que tiene el aspecto siguiente

$$\begin{cases} f(u,0) = g(u) \\ f(u,x+1) = h(u,x,f(u,x)) \\ f(u,x) \leq j(u,x) \end{cases}$$

Los intentos de introducir un diagrama al estilo *Objeto de Números Naturales* en una categoría monoidal con una condición de acotación basada

[4]Para un resumen de estos resultados consultar [Zalamea].

en la función *sustracción no negativa* $\dot{-}$ en la forma

$$\begin{tikzcd} \top \otimes X \arrow[r, "0\otimes X"] \arrow[d, "i"'] & N \otimes X \arrow[r, "s\otimes X"] \arrow[d, "f"] & N \otimes X \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "g"'] & Y \arrow[r, "h"'] & Y \end{tikzcd}$$

sujeto a las condiciones

$$f(u,x)\dot{-}j(u,x) = 0 \text{ y } g(u)\dot{-}j(u,0) = 0$$

no permiten una caracterización categorial adecuada.

El problema surge al plantear cuándo, dadas las funciones g, h y j del esquema de recursión acotada, existe la función f que satisface las tres condiciones. Para saber si existe un algoritmo que decida esa pregunta o si pueden enumerarse las funciones en cada una de las clases de la jerarquía se ha intentado caracterizar la jerarquía por otros procedimientos, entre ellos el uso de la diferencia no negativa antes planteada o de esquemas diferentes como la *recursión segura* y la *recursión ramificada*.

El *esquema de recursión segura* fue introducido en [Bellantoni-Cook] como una forma de sustituir la condición de acotación del esquema de recursión acotada por una condición de tipo sintáctico. En concreto la idea central de S. Bellantoni y S. Cook en [Bellantoni-Cook] es definir dos tipos de variables (variables *normales* y variables *seguras*) según el uso que de ellas se hace en el proceso de computación. Al hacer la recursión el valor de la función para el argumento anterior sólo pueden introducirse en el lugar de las variables seguras.

En [Bellantoni-Cook] se consigue por este método una caracterización de la clase de funciones de tiempo polinomial. A partir de esa idea varias clases de funciones, de acuerdo con su grado de complejidad, han sido caracterizadas usando la recursión segura. Generalizando los tipos de variables y el esquema de recursión y usando funciones iniciales nuevas se obtienen nuevas clases de funciones que se ha demostrado que son equivalentes a las clases subrecursivas $\mathcal{E}^n$ de la *Jerarquía de Grzegorzcyk* (ver [Wirz] y [Bellantoni-Niggl]).

La *recursión ramificada* es una forma de afrontar los problemas de *impredicación*. La definición impredicativa de un conjunto en términos de una clase de la cual él mismo es miembro se ha intentado soslayar restringiéndola a definiciones de subconjuntos propios. Eso significaría asumir la existencia del conjunto de las partes antes que la del propio conjunto. Generalmente un sistema ramificado es aquél en el cual los objetos se definen usando niveles tales que la definición de un objeto en el nivel i se refiere únicamente a los objetos pertenecientes a niveles por debajo de i. Tales definiciones son *predicativas* en el sentido de que no contienen ninguna circularidad.

Según [Leivant], si se considera la recursión sobre un algebra de palabras $\mathbb{A}$, podemos considerar una colección de niveles $\mathbb{A}_j$ de $\mathbb{A}$ vistos también como tipos o universos donde cada uno tiene asociada una copia de los constructores c_i^j y una medida como sigue. Llamamos *nivel de una variable* $x \in \mathbb{A}_i$ al valor i y lo denotamos $t(x) = i$. Análogamente definimos *nivel de una función* como $t(f) = i$ cuando f tiene codominio $\mathbb{A}_i$.[5]

La recurrencia ramificada de este modo conlleva una formulación diferente. Llamaremos *argumento de recurrencia* al valor de la variable a_j y *argumentos críticos* a los diferentes valores $f(a_j, \overline{x})$. Para cada constructor c_i^j se tiene una ecuación:

$$f(c_i^j(a_1, ..., a_{r_i}), \overline{x}) = g_{c_i^j}(f(a_1, \overline{x}), ..., f(a_{r_i}, \overline{x}), \overline{a}, \overline{x})$$

donde el nivel j del argumento de recurrencia para f debe ser mayor que el nivel de los argumentos críticos. De este modo tenemos dos casos:

1. todas las funciones de recursión son tales que no dependen de sus argumentos críticos o son inesenciales, en cuyo caso la recursión se llama *recursión plana* o

2. el argumento de recursión de f está en un nivel superior que $t(f)$.

Damos ahora un ejemplo para el caso de que el álgebra de palabras $\mathbb{A}$ se base en el alfabeto que consta únicamente del 0 y el 1. La recursión ramificada con todos los argumentos críticos presentes sobre $\mathbb{A}$ está definida, para todas las funciones $g_\epsilon : A \longrightarrow \mathbb{A}_n$, $g_0, g_1 : \mathbb{A}_n \times \mathbb{A}_m \times A \longrightarrow \mathbb{A}_n$ donde $A = \mathbb{A}_1 \times ... \times \mathbb{A}_{r_i}$ y $m > n$, por una única función $f : \mathbb{A}_m \times A \longrightarrow \mathbb{A}_n$ tal que[6]

$$\begin{cases} f(\epsilon, \overline{x}) = g_\epsilon(\overline{x}) \\ f(0a, \overline{x}) = g_0(f(a, \overline{x}), a, \overline{x}) \\ f(1a, \overline{x}) = g_1(f(a, \overline{x}), a, \overline{x}) \end{cases}$$

si el valor de g_0 y g_1 no dependiera del valor de su primer argumento, tendríamos un caso de recursión plana. Como cada una de las definiciones

[5] Traducción libre del inglés *tier* referido a *nivel de abstracción de orden i*.

[6] Aquí 0 y 1 son constructores. Estas condiciones sobre los niveles de $\mathbb{A}$ constituyen el denominado el *principio de ramificación.*

de funciones dadas de este modo dependen de otras dadas, decimos que esa defición es circular.

El método que usaremos para deshacer esta circularidad será considerar una colección de copias de $\mathbb{N}$, que denominamos $\mathbb{N}_k$. Las funciones que se consideran definidas en cada uno de estos conjuntos isomorfos son:

- en $\mathbb{N}_0$ unas funciones iniciales entre las que siempre figuran las funciones cero y sucesor, que permiten caracterizar los números naturales
- en $\mathbb{N}_{k+1}$ las funciones definibles usando las definidas en las $\mathbb{N}_j$ con $j \leq k$ y unos operadores dados, entre los que figuran operadores de recursión cuyos valores críticos estan en $\mathbb{N}_s$ con $s \leq k$.

Llamaremos a estos $\mathbb{N}_i$ *niveles de los números naturales* y tienen relación con diferentes clases de funciones según su grado de complejidad. Usaremos esos niveles para ir definiendo nuevas funciones.

De este modo pueden definirse las funciones

- *predecesor* por el esquema

  $$\begin{cases} pre(0) = 0 \\ pre(sn) = n \end{cases}$$

  de recursión plana sobre $\mathbb{N}$

- *suma* por medio del esquema

  $$\begin{cases} \oplus(0, m) = m \\ \oplus(sn, m) = s(\oplus(n, m)) \end{cases}$$

  que en general produce una función $\oplus_{j,k,k} : \mathbb{N}_j \times \mathbb{N}_k \longrightarrow \mathbb{N}_k$ siempre que $j > k$

- *multiplicación*

  $$\begin{cases} \otimes(0, m) = 0 \\ \otimes(sn, m) = \oplus(n, \otimes(n, m)) \end{cases}$$

  que en general produce una función $\otimes_{i,j,k} : \mathbb{N}_i \times \mathbb{N}_j \longrightarrow \mathbb{N}_k$ siempre que $j > k$ y $i > k$.[7]

[7]Si $i = j$ se utilizan dos niveles de recursión, si $i \neq j$ se usan tres niveles.

En [Bellantoni-Niggl] se trabaja, en cambio, con el concepto de *grado de una función* $f \in \mathcal{RP}$, denotado aquí por $gr(f)$, y definido por casos del siguiente modo:

1. si f es una función inicial se tiene $gr(f) = 0$
2. si f es una función definida por composición a partir de las funciones $h, g_1, \ldots, g_m$ se tiene
$$gr(f) = max\{gr(h), gr(g_1), \ldots, gr(g_m)\}$$
3. si f es una función definida por recursión a partir de las funciones h y g se tiene
$$gr(f) = max\{gr(h) + 1, gr(g)\}$$

Con ello se obtiene la siguiente caracterización de las clases de la *Jerarquía de Grzegorzcyk* para todo $n \geq 2$:

$$\mathcal{E}^{n+1} = \{f \in \mathcal{RP} / gr(f) \leq n\}$$

Esta igualdad proporciona una caracterización de las clases $\mathcal{E}^{n+1}$ en términos de la *profundidad de su recursión*, esto es, un conteo de las operaciones de recursión hechas para el cálculo de cada función de cada clase $\mathcal{E}^{n+1}$. El exponente de las clases $\mathcal{E}$, además, indica ese conteo.[8]

En los primeros textos sobre caracterización categorial de funciones recursivas ([A. Burroni, L. Román, Lambek-Scott] por ejemplo) se trabaja con una construcción sintáctica, esto es, una categoría inicial de una clase de categorías con un esquema de recursión, cuya imagen en la categoría *Set* proporciona la clase de funciones que se busca.

Una aproximación al problema de caracterizar las clases de funciones subrecursivas en Teoría de Categorías supone encontrar un modo categorial de expresar la semántica de caracterizaciones tales como la *recursión segura* o la *recursión ramificada*. El trabajo hecho en la tesis presentada por J. R. Otto en 1995 ([Otto]) se basa en el uso de las categorías de números ordinales[9]. A partir de ellas se define unas *categorías flecha extendidas* que dan lugar a *endofuntores de coerción* con idea de recoger las condiciones de ramificación de las funciones a definir, y trabajar con las estructuras definidas tal como se hacía en los primeros estudios antes citados. Por este método se

[8] El concepto de *nivel de una función*, introducido en la Sección 5.2 de esta tesis, tiene una interpretación similar al de *grado* en [Bellantoni-Niggl].

[9] Aquí y en adelante consideraremos siempre solamente los ordinales finitos.

trata de caracterizar en [Otto] las clases de funciones recursivas de tiempo lineal, espacio lineal, espacio polinomial, tiempo polinomial y los niveles 2 y 3 de la *Jerarquía de Grzegorzcyk*.

En concreto, en [Otto] se trata de construir, a partir de la introducción de las 2 y 3-Comprensiones respectivamente, las clases $\mathcal{E}^2$ (que coincide con la clase de *Funciones de Espacio Lineal* en términos de complejidad, ver [Bellantoni], página 21) y $\mathcal{E}^3$ (*Funciones de Kalmar*, ver [Grzegorczyk]).

Dichas caracterizaciones se basan en emular categorialmente los importantes resultados de D. Leivant en [Leivant] y S. Bellantoni y S. Cook en [Bellantoni-Cook]. Posteriores trabajos ([Bellantoni-Niggl] y también [Wirz]) han generalizado la idea de la recursión segura de [Bellantoni-Cook] para definir clases de funciones con un número indeterminado de variables de tipo distinto. Se verá en el Capítulo 5, sin embargo, que las construcciones sintácticas de [Otto] con profundidad de recursión igual a 3 se reducen a los niveles anteriores y se dará una solución a tal problema.

Esta tesis corrige los problemas señalados en el párrafo anterior y ofrece una caracterización de toda la *Jerarquía de Grzegorzcyk* en términos de Teoría de Categorías. Ello se lleva a cabo usando ciertas herramientas que consideramos pueden ser útiles para caracterizar nuevas clases de funciones subrecursivas, esto es, una aportación a una lectura más amplia de la Teoría de la Computabilidad en términos de la lógica categorial, usando la terminología de J. Lambek y P. Scott en [Lambek-Scott].

La idea de [Otto], que aquí generalizamos, consiste en introducir unas ciertas *doctrinas* en las cuales hay representantes de los números naturales de distintos niveles y que se construyen a partir de las categorias $\mathbf{n}$ y las *n-Comprensiones* para categorías simétricas monoidales.

En concreto, considerando la categoría generada por el orden parcial

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow n-1$$

que denominamos $\mathbf{n}$, se define la categoría de los endofuntores sobre ella, denominada aquí M_n y que tiene una estrecha relación con las funciones monótonas sobre el conjunto $\{1, 2, ..., n\}$. Esos endofuntores actuarán como *coerciones* sobre los dominios de las funciones recursivas cuando se introduzcan los *niveles de los números naturales*[10]

Una *n-Comprensión simétrica monoidal* (*SM* en adelante) se define como una estructura de endofuntores y transformaciones naturales sobre una categoría *SM* donde se exige que conmuten exactamente los mismos diagramas que en M_n. Dicha estructura se extiende a cualquier otra construida

[10]Cuya interpretación filosófica (como una forma de *impredicación* sobre conjuntos de números) puede consultarse en [Bellantoni-Niggl].

a partir de la primera en la forma de una *categoría cotensor* $n \multimap \mathcal{C}$. Es en esta última categoría con $\mathcal{C} = Set$ en la que se definen los niveles de los números naturales $\mathbb{N}_i$ que tienen la forma de cadenas de $n-1$ morfismos.

Las doctrinas $\mathcal{O}^n$ definidas en el Capítulo 4 constan de n-Comprensiones *SM* dotadas de ciertos diagramas de recursión. Las doctrinas $\mathcal{A}^n$, introducidas en el mismo Capítulo, constan de n-Comprensiones *SM* dotadas de los llamados diagramas de *recursión dependiente segura* (o diagramas *RDS*) que incluyen a los de $\mathcal{O}^n$.

Hemos utilizado para $\mathcal{A}^n$ un diagrama unario (llamado *diagrama inicial*)

$$\top \xrightarrow{0} N_0 \xrightarrow{s} N_0$$

tal que podemos generar todos los diagramas iniciales en la forma

$$\top \xrightarrow{0_j} N_j \xrightarrow{s_j} N_j$$

y otros diagramas (los *diagramas RDS*) en la forma

$$\begin{tikzcd}
\top \otimes X \arrow[r, "0_{k+1}\otimes X"] \arrow[dr, "(0_{k+1}\otimes X){,}g\circ\pi_1"'] & N_{k+1} \otimes X \arrow[r, "s_{k+1}\otimes X"] \arrow[d, "id{,}f"] & N_{k+1} \otimes X \arrow[d, "f"] \\
 & (N_{k+1} \otimes X) \otimes Y \arrow[r, "h"'] & Y
\end{tikzcd}$$

sujetos a una sola condición de acotación sobre el objeto Y que nos permiten imitar el *principio de ramificación* de Leivant en [Leivant]. Sin embargo, y según las necesidades de la caracterización, hemos introducido otros diagramas como por ejemplo

$$\begin{tikzcd}
\top \otimes X \arrow[r, "0_{k+1}\otimes X"] \arrow[d, "i"'] & N_{k+1} \otimes X \arrow[r, "s_{k+1}\otimes X"] \arrow[d, "\pi_1{,}f"] & N_{k+1} \otimes X \arrow[d, "f"] \\
X \arrow[r, "id{,}g"'] & X \otimes Y \arrow[r, "h"'] & Y
\end{tikzcd}$$

denominados *diagramas RRPS* y sujetos a la misma condición de acotación sobre Y. Veremos que cada función definible a partir del esquema *RRPS* puede ser definida a partir de *RDS*.

Siguiendo el contenido de [Román-Paré] se prueba que la doctrina inicial $\mathcal{I}^n$ de $\mathcal{O}^n$ es *SM cartesiana*, de modo que se puede trabajar en ella utilizando nuevos morfismos y operaciones. Ello nos permite el uso de estos dos diagramas en $\mathcal{I}^n$ y también en $\mathcal{J}^n$, la doctrina inicial en $\mathcal{A}^n$.

A partir de $\mathcal{J}^n$ se introducen las clases $\mathcal{K}^n$, contenidas respectivamente en cada $\mathcal{J}^n$ y que nos permiten solucionar el problema que se produce a partir de $n = 3$ con las especies de los morfismos definibles en $\mathcal{J}^n$. Por encima de $\mathcal{J}^2$ la estructura definida no permite caracterizar clases de funciones con complejidad creciente como se desea. Esta situación, que se da en [Otto], concuerda con el hecho, demostrado en [Leivant] y posteriormente corregido en [Leivant[2]], de que las clases de funciones definidas por recursión ramificada en ambos textos colapsan a partir del nivel tres. Este hecho se explica en detalle al comienzo de la Sección 5.6.

Es en esas clases $\mathcal{K}^n$ donde se van a caracterizar las clases de la *Jerarquía de Grzegorzcyk*. Sus objetos (productos cartesianos de potencias de N_i) tienen una lectura en *Set* como productos cartesianos de potencias de $\mathbb{N}_i$ por medio de su *cobertura de Freyd*. De hecho, la imagen de $\mathcal{K}^n$ por el funtor

$$\Gamma : \mathcal{J}^n \longrightarrow Set$$

considerando todas las variables de la especie máxima es la clase de nivel n de la *Jerarquía de Grzegorzcyk.* Ello se demuestra en el Capítulo 5 siguiendo la construcción de M. Wirz en *[Wirz].* La operación de *composición segura*, clave en ese artículo, viene recogida en la estructura de la doctrina $\mathcal{J}^n$ mediante una interpretación adecuada de los diagramas dados por las transformaciones naturales de la n-Comprensión, tal como se explica en el Capítulo 5.

Esta tesis está estructurada en seis capítulos más un Apéndice que contiene información complementaria pero importante para la lectura y comprensión de la misma. En el Capítulo 2 se presentan las categorías de números ordinales finitos, y otras de orden superior en base a los funtores de las primeras, estudiándolos como funciones monótonas y se cita la conexión existente entre estas estructuras y la *categoría simplicial*. En el Capítulo 3 se introduce el concepto de *n-Comprensión simétrica monoidal*, para lo cual se definen las *categorías tensor* y *cotensor* y se considera las extensiones de una n-Comprensión por medio de ese cotensor. Estas n-Comprensiones, dotadas de los diagramas antes citados, serán los objetos de la doctrina, mientras que las categorías cotensor nos permitirán definir los niveles de los números naturales en órdenes superiores cuando la categoría simétrica monoidal considerada es *Set*. Asimismo se ofrece una descripción de la categoría cotensor $\mathbf{n} \multimap \mathcal{C}$. En el Capítulo 4 se define en detalle toda la estructura categorial requerida para caracterizar funciones subrecursivas por medio de doctrinas, se desarrolla la doctrina inicial sobre la cual se trabajará en el Capítulo 5, se presentan los diferentes diagramas de recursión que se usará y se considera la semántica obtenida por medio de la *cobertura de Freyd*. En el Capítulo 5 se caracteriza la composición segura en términos de las doctrinas del Capítulo anterior, se introducen las clases $\mathcal{K}^n$ y se demuestra un Teorema de caracterización de la *Jerarquía de Grzegorczyk* por medio de ellas. El Capítulo 6 , Conclusiones, se dedica a destacar los resultados novedosos de la tesis y las futuras líneas de investigación que consideramos interesantes y que podrían desarrollarse a partir de los contenidos de esta tesis.

Se ha introducido, por último, hasta cinco Apéndices indexados por las letras *A*, *B*, *C*, *D* y *E* que corresponden a contenidos de los Capítulos 2, 3, 4, 5 y 6 respectivamente. Se ha llevado a ellos los cálculos y demostraciones largos y exahustivos con idea de agilizar la lectura. Asimismo se ha tratado de ofrecer ejemplos de forma sistemática de todo cuanto hay de nuevo intentado ponerlo en relación con conceptos ya conocidos.

El Apéndice A contiene cálculos y desarrollos pertenecientes a resultados del Capítulo 2, el Apéndice B contiene ejemplos relevantes de los conceptos del Capítulo 3. El C contiene la descripción de las categorías iniciales $\mathcal{I}^n$ y $\mathcal{J}^n$ y de la categoría coma ${}^{(n\multimap Set)}/_{\Gamma_n}$ así como la demostración de que $\mathcal{I}^n$ es simétrica monoidal cartesiana, hecho necesario para definir los diagramas parametrizados, y se prueba resultados sobre la relación entre dichos esquemas. El Apéndice D describe una caracterización de la *Jerarquía de Grzegorczyk*, la dada en *[Leivant[2]]*, en la que puede observarse algunas similitudes con la ofrecida aquí y se desarrolla una interpretación de la composición segura en $\mathcal{J}^n$. El Apéndice E está dedicado a exponer nuevas ideas relacionadas con el uso de fibrados para una caracterización análoga a la presentada en esta tesis.

Una posible interpretación fibracional de los resultados de los capítulos previos, principal línea de trabajo futuro, viene desarrollada en el Apéndice E.2 y ha sido elaborada en colaboración con el profesor Giuseppe Rosolini de la Universidad de Génova.

Capítulo 2

Estructuras básicas

En este Capítulo se presentan las *2-categorías de los números ordinales finitos* y se establecen algunas de sus propiedades. Se introducirá un orden parcial sobre las funciones monótonas, que resultan ser los endofuntores en las categorías mencionadas, y se verá que tienen una relación estrecha con la *categoría simplicial* Δ.

2.1. La 2-categoría 2

Definición 2.1.1. El orden parcial **2** puede ser visto como una categoría cuyos objetos son los elementos del conjunto

$$2 = \{0, 1\}$$

y el conjunto de sus flechas, expresando el hecho de que **2** es un ordinal, es

$$\{m_{0,0} : 0 \to 0, m_{0,1} : 0 \to 1, m_{1,1} : 1 \longrightarrow 1\}$$

En este caso $m_{0,0}$ y $m_{1,1}$ son las identidades sobre 0 y 1 respectivamente.

Definición 2.1.2. El conjunto M_2 de endomorfismos o funtores de **2** es el conjunto

$$\{T, G, id\}$$

donde $T : \mathbf{2} \longrightarrow \mathbf{2}$ actuando sobre los objetos es tal que

$$T(0) = T(1) = 1$$

y actuando sobre funciones es tal que

$$T(m_{0,0}) : T(0) \longrightarrow T(0) \Rightarrow T(m_{0,0}) : 1 \longrightarrow 1 \Rightarrow T(m_{0,0}) = m_{1,1}$$

$$T(m_{0,1}) : T(0) \longrightarrow T(1) \Rightarrow T(m_{0,1}) : 1 \longrightarrow 1 \Rightarrow T(m_{0,1}) = m_{1,1}$$
$$T(m_{1,1}) : T(1) \longrightarrow T(1) \Rightarrow T(m_{1,1}) : 1 \longrightarrow 1 \Rightarrow T(m_{1,1}) = m_{1,1}.$$

$G : \mathbf{2} \longrightarrow \mathbf{2}$ actuando sobre los objetos es tal que

$$G(0) = G(1) = 0$$

y actuando sobre funciones es tal que

$$G(m_{0,0}) : 0 \longrightarrow 0 = m_{0,0}$$
$$G(m_{0,1}) : 0 \longrightarrow 0 = m_{0,0}$$
$$G(m_{1,1}) : 0 \longrightarrow 0 = m_{0,0}$$

$id : \mathbf{2} \longrightarrow \mathbf{2}$ actuando sobre los objetos es tal que

$$id(0) = 0 \text{ y } id(1) = 1$$

y actuando sobre las flechas es tal que

$$id(m_{0,0}) : 0 \longrightarrow 0 = m_{0,0}$$
$$id(m_{0,1}) : 0 \longrightarrow 1 = m_{0,1}$$
$$id(m_{1,1}) : 1 \longrightarrow 1 = m_{1,1}$$

Hecho. *M_2 es justamente el conjunto de las funciones monótonas de* 2 *en* 2*.*

Definición 2.1.3. M_2 con la composición como producto es un monoide donde el elemento unidad es *id* y su tabla de multiplicar es

$x \circ y$	id	T	G
id	id	T	G
T	T	T	T
G	G	G	G

Entonces M^{op} es un monoide cuyo producto tiene la siguiente tabla de multiplicar

xy	id	T	G
id	id	T	G
T	T	T	G
G	G	T	G

El conjunto de transformaciones naturales entre funtores (o elementos de M_2) es el siguiente:

$$\{1_T, 1_G, 1_{id}, \eta, \epsilon, \eta \circ \epsilon\}$$

donde

1. $1_T : T \Rightarrow T$ es tal que $1_T(0) = 1_T(1) = m_{1,1}$
2. $1_G : G \Rightarrow G$ es tal que $1_G(0) = 1_G(1) = m_{0,0}$
3. $1_{id} : id \Rightarrow id$ es tal que $1_{id}(0) = m_{0,0}$ y $1_{id}(1) = m_{1,1}$
4. $\eta : id \Rightarrow T$ es tal que $\eta(0) = m_{0,1}$ y $\eta(1) = m_{1,1}$
5. $\epsilon : G \Rightarrow id$ es tal que $\epsilon(0) = m_{0,0}$ y $\epsilon(1) = m_{0,1}$
6. $\eta \circ \epsilon : G \Rightarrow T$ es tal que $\eta \circ \epsilon(0) = \eta \circ \epsilon(1) = m_{0,1}$.

Debido a que no hay flechas de 1 a 0 en **2** no hay ninguna transformación natural α tal que

1. $\alpha(0) = m_{0,1}$ y $\alpha(1) = m_{0,0}$
2. $\alpha(0) = m_{1,1}$ y $\alpha(1) = m_{0,0}$
3. $\alpha(0) = m_{1,1}$ y $\alpha(1) = m_{0,1}$

En el Apéndice A.1 se da una lista de productos de funtores y transformaciones naturales.

2.2. La 2-categoría n

En esta Sección se estudiará las 2-categorías **n** para $n \in \mathbb{N}$.

Definición 2.2.1. Para cada $n \in \mathbb{N}$ la categoría **n** es la categoría cuyos objetos son los números naturales menores que n:

$$n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$$

y cuyas flechas, que corresponden al orden lineal de n determinada por el diagrama:

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow n-1$$

serán denotadas por $m_{i,j}$ con $0 \leq i \leq j < n$ de tal modo que $m_{i,j} : i \longrightarrow j$ es la única flecha cuyo dominio es i y cuyo codominio es j.[1]

[1] Es fácil ver que **n** tiene n objetos y $n(n+1)/2$ flechas.

El monoide M_n^{op} de endomorfismos de **n** en el cual el producto fg corresponde a la composición $g \circ f$ es exactamente el conjunto de funciones monótonas de n a n.

La 2-categoría **n** es aquella cuya celda de nivel cero es el conjunto n con las flechas $m_{i,j}$; su celda de nivel uno es el monoide de las funciones monótonas y sus flechas las transformaciones naturales entre funciones monótonas consideradas como funtores y que corresponden al orden entre las funciones monótonas inducidas por el orden lineal en n.

Observación. Las categorías **n** son los objetos de la *categoría simplicial*, denotada usualmente por Δ, y que tiene una interpretación geométrica en términos de *conjuntos simpliciales* a través del funtor

$$\Delta \longrightarrow Set$$

Véase el Apéndice A.4 para una exposición más amplia de estos conceptos.

Una función monótona $h : \mathbf{n} \longrightarrow \mathbf{n}$ puede ser descrita por medio de la palabra

$$a_0a_1 \ldots a_{n-1}$$

tal que, para cada $i = 0, ..., n-1$, $h(i) = a_i$ y cuya longitud es n y cuyo vocabulario es el conjunto **n**.

Una palabra que describe a una función monótona tiene la propiedad de que cada símbolo en ella es menor o igual que el siguiente. Así para cada $a_i \in \mathbf{n}$ con $i = 0, \ldots, n-1$ la palabra $a_0a_1 \ldots a_{n-1}$ representa una función monótona de **n** a **n** si y sólo si

$$a_0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_{n-1}$$

En el Apéndice A.2 se realiza un conteo de las funciones monótonas de **n** a **n**.

2.3. El orden parcial de las funciones monótonas

Si definimos un orden parcial entre las funciones monótonas $f \leq g$ de **n** a **n** tal que

$$f \leq g \Leftrightarrow \forall i \in \mathbf{n}(f(i) \leq g(i))$$

obtenemos un orden total cuando $n = 2$:

$$00 \longrightarrow 01 \longrightarrow 11.$$

En el caso de $n = 3$ podemos expresar este orden por medio del diagrama:

$$\begin{tikzcd}
000 \arrow[d] & & & \\
001 \arrow[r] \arrow[d] & 002 \arrow[d] & & \\
011 \arrow[r] \arrow[d] & 012 \arrow[r] \arrow[d] & 022 \arrow[d] & \\
111 \arrow[r] & 112 \arrow[r] & 122 \arrow[r] & 222
\end{tikzcd}$$

Como puede observarse hay

1. 1 función con 0 sucesores: 222;
2. 6 funciones con 1 sucesor: 000, 002, 022, 111, 112 y 122;
3. 3 funciones con 2 sucesores: 001, 011 y 012.

En el caso $n = 4$ en el correspondiente diagrama de orden parcial de funciones monótonas se puede comprobar que tenemos

1. 1 función con 0 sucesores: 3333;
2. 12 funciones con 1 sucesor:

$$0000,\ 0003,\ 0033,\ 0333,\ 1111,\ 1113$$

$$1133,\ 1333,\ 2222,\ 2223,\ 2233,\ 2333;$$

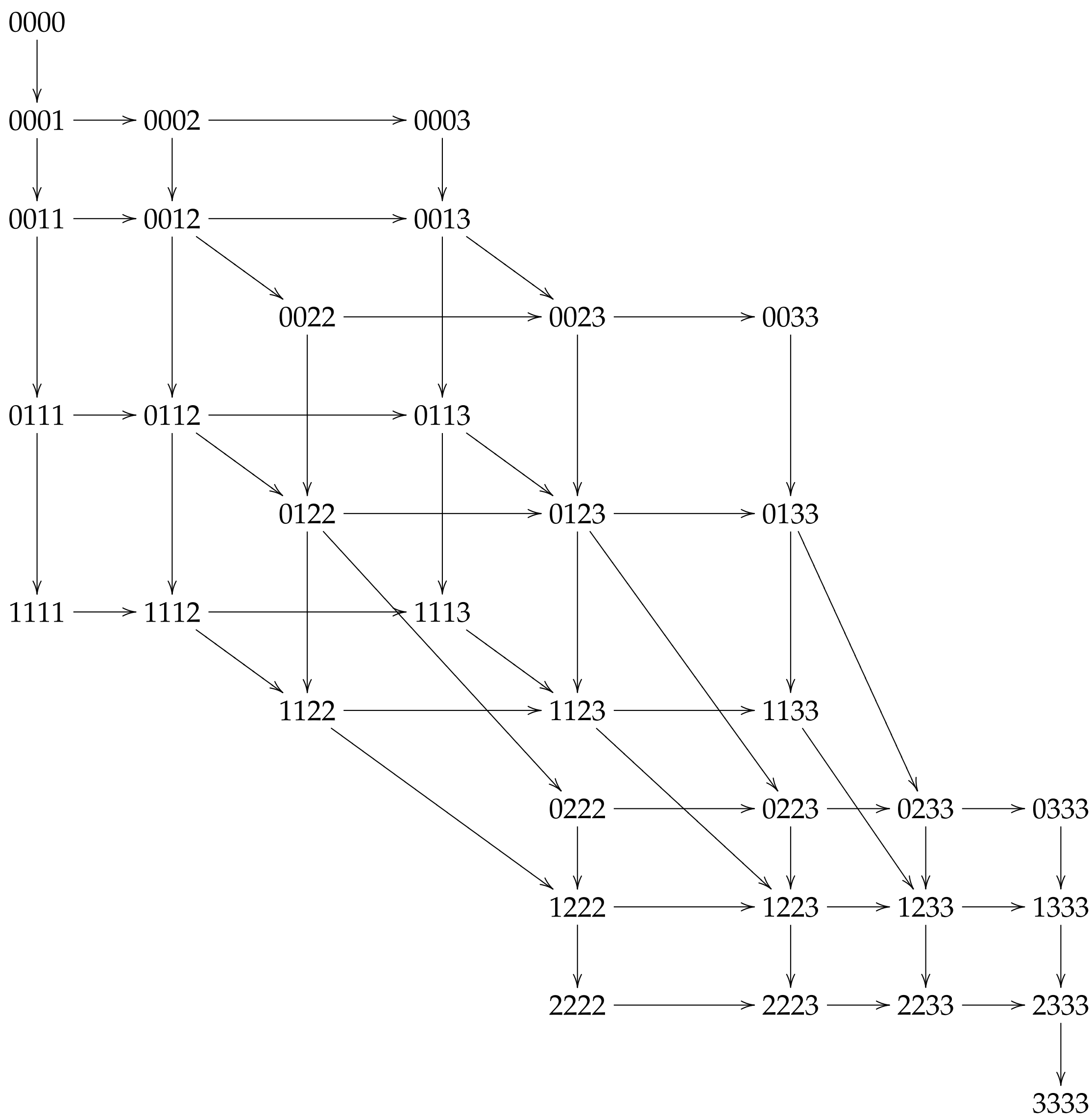
3. 18 funciones con 2 sucesores:

$$0001,\ 0002,\ 0011,\ 0013,\ 0022,\ 0023,\ 0111,\ 0113,\ 0133$$

$$0222,\ 0223,\ 0233,\ 1112,\ 1122,\ 1123,\ 1222,\ 1223,\ 1233;$$

4. 4 funciones con 3 sucesores: 0012, 0112, 0122 y 0123.

El diagrama del orden parcial de las funciones monótonas de **4** a **4** es



Para cada $n > 1$ tenemos n funciones monótonas de $\mathbf{n}$ a $\mathbf{n}$ con $n-1$ sucesores.

Para $n = 2$ con 1 sucesor tenemos las funciones 00 y 01.

Para $n = 3$ con 2 sucesores tenemos las funciones 001, 011 y 012.

Para $n = 4$ con 3 sucesores tenemos las funciones 0012, 0112, 0122 y 0123.

Para $n = 5$ con 4 sucesores tenemos las funciones

$$00123,\ 01123,\ 01223,\ 01233,\ 01234.$$

Para $n = 6$ con 5 sucesores tenemos las funciones

$$001234,\ 011234,\ 012234,\ 012334,\ 012344,\ 012345.$$

Y en general para $n > 3$ con $n - 1$ sucesores tenemos las funciones

$$\begin{array}{c} 0012\cdots(n-2) \\ 0112\cdots(n-2) \\ \vdots \\ 0123\cdots(n-2)(n-2) \\ 0123\cdots(n-2)(n-1) \end{array}$$

Proposición 2.3.1. *Si $s(n,m)$ es la función que para cada $m < n$ nos da el número de funciones monótonas en $\mathbf{n}$ que tienen m sucesores, entonces*

$$s(n,m) = \binom{n}{m} \cdot \binom{n-1}{m}$$

Corolario 2.3.2. *El número de funciones monótonas en $\mathbf{n}$ es igual a*[2]

$$\sum_{i=0}^{n-1} s(n,i)$$

2.4. Los generadores del monoide M_n^{op}

Vamos a establecer un conjunto de elementos de M_n^{op} a partir de los cuales pueden generarse todos los restantes por medio de la multiplicación. Este conjunto se usa en [Otto] en el caso de $n = 2$ y 3.

Definición 2.4.1. Sean para cada $0 \leq k < n - 1$ los funtores $id : \mathbf{n} \longrightarrow \mathbf{n}$, $T_k : \mathbf{n} \longrightarrow \mathbf{n}$ y $G_k : \mathbf{n} \longrightarrow \mathbf{n}$ tales que para cada $j \in \mathbb{N}$:

$$id(j) = j$$

$$T_k(j) = \begin{cases} j+1 & \text{si } j = k \\ j & \text{si } j \neq k \end{cases}$$

[2] Otro conteo de las funciones monótonas en $\mathbf{n}$ puede encontrarse en el Apéndice A.2.

$$G_k(j) = \begin{cases} j-1 & \text{si } j = k+1 \\ j & \text{si } j \neq k+1 \end{cases}$$

que gráficamente toman las formas

$$T_0 = \begin{tikzcd} 0 \arrow[dr] & 0 \\ 1 \arrow[r] & 1 \\ 2 \arrow[r] & 2 \\ \vdots & \vdots \\ n-1 \arrow[r] & n-1 \end{tikzcd} \quad T_1 = \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & 0 \\ 1 \arrow[dr] & 1 \\ 2 \arrow[r] & 2 \\ \vdots & \vdots \\ n-1 \arrow[r] & n-1 \end{tikzcd} \quad \cdots \quad T_{n-2} = \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & 0 \\ 1 \arrow[r] & 1 \\ \vdots & \vdots \\ n-2 \arrow[dr] & n-2 \\ n-1 \arrow[r] & n-1 \end{tikzcd}$$

y

$$G_0 = \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & 0 \\ 1 \arrow[ur] & 1 \\ 2 \arrow[r] & 2 \\ \vdots & \vdots \\ n-1 \arrow[r] & n-1 \end{tikzcd} \quad G_1 = \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & 0 \\ 1 \arrow[r] & 1 \\ 2 \arrow[ur] & 2 \\ \vdots & \vdots \\ n-1 \arrow[r] & n-1 \end{tikzcd} \quad \cdots \quad G_{n-2} = \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & 0 \\ 1 \arrow[r] & 1 \\ \vdots & \vdots \\ n-2 \arrow[r] & n-2 \\ n-1 \arrow[ur] & n-1 \end{tikzcd}$$

Proposición 2.4.2. *Para cada $n \in \mathbb{N}$ el monoide M_n^{op} puede ser generado por medio del conjunto finito*

$$\{id, G_0, \cdots, G_{n-2}, T_0, \cdots, T_{n-2}\}$$

Demostración. Ver el Apéndice A.3. □

Observación. Los endofuntores T_k y G_k se expresan por medio de los operadores *cara* y *degeneración* que dan razón de la combinatoria asociada a un conjunto simplicial y cuyas propiedades tienen sus análogas en 6.2 . Véase el Apéndice A.4 .

Ejemplo 2.4.3. Veamos algunos casos

- con $n = 2$ cada endomorfismo puede expresarse por medio de un sólo generador:

$$00 \equiv G_0 \quad 01 \equiv id \quad 11 \equiv T_0$$

- con $n = 3$ cada endomorfismo puede expresarse utilizando uno o dos generadores:

$$\begin{array}{lllll} 000 \equiv G_1G_0 & 001 \equiv G_0G_1 & 002 \equiv G_0 & 011 = G_1 & 012 = id \\ 022 \equiv T_1 & 111 \equiv G_1T_0 & 112 \equiv T_0 & 122 \equiv T_1T_0 & 222 \equiv T_0T_1 \end{array}$$

- con $n = 4$ cada endomorfismo puede expresarse usando uno, dos, tres o cuatro generadores:

$$\begin{array}{llll} 0000 \equiv G_2G_1G_0 & 0001 \equiv G_1G_2G_0G_1 & 0002 \equiv G_1G_2G_0 & 0003 \equiv G_1G_0 \\ 0011 \equiv G_0G_2G_1 & 0012 \equiv G_0G_1G_2 & 0013 \equiv G_0G_1 & 0022 \equiv G_0G_2 \\ 0023 \equiv G_0 & 0033 \equiv T_2G_0 & 0111 \equiv G_2G_1 & 0112 \equiv G_1G_2 \\ 0113 \equiv G_1 & 0122 \equiv G_2 & 0123 \equiv id & 0133 \equiv T_2 \\ 0222 \equiv G_2T_1 & 0223 \equiv T_1 & 0233 \equiv T_2T_1 & 0333 \equiv T_1T_2 \\ 1111 \equiv G_2G_1T_0 & 1112 \equiv G_1G_2T_0 & 1113 \equiv G_1T_0 & 1122 \equiv T_0G_2 \\ 1123 \equiv T_0 & 1133 \equiv T_2T_0 & 1222 \equiv G_2T_1T_0 & 1223 \equiv T_1T_0 \\ 1233 \equiv T_2T_1T_0 & 1333 \equiv T_1T_2T_0 & 2222 \equiv G_2T_0T_1 & 2223 \equiv T_0T_1 \\ 2233 \equiv T_0T_2T_1 & 2333 \equiv T_1T_2T_0T_1 & 3333 \equiv T_0T_1T_2 & \end{array}$$

En general podemos establecer el siguiente resultado.

Proposición 2.4.4. *En M_n, cuando $n > 2$, se necesita una tira de $2(n-2)$ operadores T y G para representar $00\ldots001$ y $(n-2)(n-1)(n-1)...(n-1)(n-1)$.*

Algunas propiedades de los generadores de M_n^{op} se dan en los Teoremas siguientes.

Teorema 2.4.5. *Sean $m,\ i,\ i+1,\ j,\ k \in n-1$. Entonces:*

1. *id, T_k y G_k son idempotentes.*
2. *$T_kG_k = G_k$ y $G_kT_k = T_k$.*
3. *$T_{i+1}G_i = T_{i+1}$ y $G_iT_{i+1} = G_i$.*
4. *$T_kG_m = G_mT_k$ cuando $k \neq m, m+1$.*
5. *$T_kT_j = T_jT_k$ cuando $j \neq k-1, k+1$.*
6. *$G_kG_j = G_jG_k$ cuando $j \neq k-1, k+1$.*
7. *$T_iT_{i+1} \neq T_{i+1}T_i$ y $G_iG_{i+1} \neq G_{i+1}G_i$.*
8. *$T_iT_{i+1}T_i = T_iT_{i+1}$ y $G_iG_{i+1}G_i = G_{i+1}G_i$.*

Demostración. Ver Apéndice A.5. □

Teorema 2.4.6. *Sean j y k tal que $0 \leq j, k < n-1$.*

1. *Si $j \neq k$ entonces $G_kT_jG_k = G_kT_j$ y $T_kG_jT_k = T_kG_j$.*
2. *Si $k \neq j+1$ entonces $T_kG_jT_k = G_jT_k$ y $G_jT_kG_j = T_kG_j$.*
3. *Si $k \neq j+1$ entonces $T_kT_jT_k = T_kT_j$ y $G_jG_kG_j = G_jG_k$.*

Demostración. Ver Apéndice A.6 . □

Para ver que las funciones monótonas en **n** son funtores tenemos que establecer el valor de cada función monótona cuando actúa sobre una flecha de **n**. La forma de hacer esto es como sigue.

Definición 2.4.7. Sea F una función monótona y $m_{l,j}$ una flecha de **n**. Definimos

$$F(m_{l,j}) = m_{F(l),F(j)}$$

sabiendo que $0 \leq l \leq j \leq n-1$.

Ejemplo 2.4.8. En el caso de id, T_k y G_k tendremos, si $0 \leq l \leq j < n$,

$$id(m_{lj}) = m_{lj}$$

$$T_k(m_{lj}) = \begin{cases} m_{lj} & \text{si } l \neq k \text{ y } j \neq k \\ m_{(k+1)j} & \text{si } l = k \text{ y } j \neq k \\ m_{l(k+1)} & \text{si } l \neq k \text{ y } j = k \\ m_{(k+1)(k+1)} & \text{si } l = j = k \end{cases}$$

$$G_k(m_{lj}) = \begin{cases} m_{lj} & \text{si } l \neq k+1 \text{ y } j \neq k+1 \\ m_{(k-1)j} & \text{si } l = k+1 \text{ y } j \neq k+1 \\ m_{l(k-1)} & \text{si } l \neq k+1 \text{ y } j = k+1 \\ m_{(k-1)(k-1)} & \text{si } l = j = k+1 \end{cases}$$

2.5. Transformaciones naturales en n

En esta Sección se verá cómo se puede caracterizar, dados dos funtores H y F en **n**, una transformación natural de H a F.

Sea α una función tal que, para todo $i \in n$

$$\alpha(i) : H(i) \longrightarrow F(i)$$

Para que α sea una transformación natural $\alpha(i)$ para cada $i \in n$ ha de ser una flecha de **n**, lo cual implica que $H(i) \leq F(i)$. Esto es

$$H \leq F$$

Proposición 2.5.1. *Si $H \leq F$ y, para todo $i \in n$, tenemos $\alpha(i) = m_{Hi,Fi}$, entonces α es una transformación natural.*

Demostración. Sea $m : j \longrightarrow k$ una flecha de **n**. El siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} Hj \arrow[r, "\alpha(j)"] \arrow[d, "H(m)"'] & Fj \arrow[d, "F(m)"] \\ Hk \arrow[r, "\alpha(k)"'] & Fk \end{tikzcd}$$

dado que $\alpha(k) \circ H(m) : Hj \longrightarrow Fk$ y $F(m) \circ \alpha(j) : Hj \longrightarrow Fk$ son flechas de n y hay una sola flecha de Hj a Fk. $\square$

Definimos a continuación algunas transformaciones naturales que se usarán más adelante.

Definición 2.5.2. Sean $\epsilon_k : G_k \Rightarrow id$ y $\eta_k : id \longrightarrow T_k$ $(0 \leq k \leq n-2)$ tales que

$$\epsilon_k(i) = \begin{cases} m_{i,i} & \text{si } i \neq k+1 \\ m_{i-1,i} & \text{si } i = k+1 \end{cases}$$

$$\eta_k(i) = \begin{cases} m_{i,i} & \text{si } i \neq k \\ m_{i,i+1} & \text{si } i = k \end{cases}$$

Ejemplo 2.5.3. Para cada flecha $m_{lj} : l \longrightarrow j$ de $\mathbf{n}$ tenemos:

$$\begin{tikzcd} G_k l \arrow[r, "(\eta_k \circ \epsilon_k)l"] \arrow[d, "G_k m_{l,j}"'] & T_k l \arrow[d, "T_k m_{l,j}"] \\ G_k j \arrow[r, "(\eta_k \circ \epsilon_k)j"'] & T_k j \end{tikzcd}$$

que se convierte en

$$\begin{tikzcd} l \arrow[r, "m_{l,l}"] \arrow[d, "m_{l,j}"'] & l \arrow[d, "m_{l,j}"] \\ j \arrow[r, "m_{j,j}"'] & j \end{tikzcd}$$

si $k \neq j$ y $k \neq l$ o en

$$\begin{tikzcd} k-1 \arrow[r, "m_{(k-1),(k+1)}"] \arrow[d, "m_{(k-1),(k-1)}"'] & k+1 \arrow[d, "m_{(k+1),(k+1)}"] \\ k-1 \arrow[r, "m_{(k-1),(k+1)}"'] & k+1 \end{tikzcd}$$

si $k = j = l$. En ambos casos los diagramas conmutan.

Ejemplo 2.5.4. Otros diagramas como

$$\begin{tikzcd} k-1 \arrow[r, "m_{(k-1),(k+1)}"] \arrow[d, "m_{(k-1),k}"'] & k+1 \arrow[d, "m_{(k+1),k}"] \\ k \arrow[r, "m_{k,k}"'] & k \end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd} k \arrow[r, "m_{k,k}"] \arrow[d, "m_{k,(k-1)}"'] & k \arrow[d, "m_{k,(k+1)}"] \\ k-1 \arrow[r, "m_{(k-1),(k+1)}"'] & k+1 \end{tikzcd}$$

no son válidos en el orden $\mathbf{n}$ puesto que ni $m_{(k+1),k}$ ni $m_{k,(k-1)}$ son flechas de $\mathbf{n}$.

Teorema 2.5.5. *Toda transformación natural en* **n** *puede ser generada por medio de una composición de transformaciones naturales y por la multiplicación de una transformación natural y un funtor a partir de T_k, G_k, ϵ_k, η_k y las transformaciones identidad ($k = 0, \dots, n-2$).*

Demostración. Es suficiente probar que si F y H son funciones monótonas tales que F es un sucesor inmediato de H entonces la transformación natural $\alpha : H \Rightarrow F$ puede ser escrita como la transformación natural 1_F si $F = H$ o como un producto de funtores (que por la Proposición 2.4.2 puede expresarse como un producto de T_k y G_k) y de una ϵ_j o una η_j. La propiedad general se sigue por composición.

Sea F un sucesor inmediato de H y $\alpha : H \Rightarrow F$ entonces existe un $x \in n$ tal que

$$\begin{array}{ll} F(y) = H(y), & \text{si } y \neq x \\ F(x) = H(x) + 1, & \text{en otro caso} \end{array}$$

Tenemos los siguientes casos:

- si $x = 0$ entonces $H(0) < H(1)$ porque en otro caso tendríamos $F(0) = H(0) + 1 \geq H(1) = F(1)$ contradiciendo el hecho de que F sea monótona. En este caso $F = HT_{H(0)}$ y $\alpha = H\eta_{H(0)}$.

- si $x = n - 1$ entonces $H = FT_{H(n-1)}$ y $\alpha = F\epsilon_{H(n-1)}$.

- si $0 < x < n - 1$ y $H(x-1) = H(x)$ entonces $H = G_{x-1}F$ ya que G_{x-1} es la función $0 \cdots (x-1)(x-1)(x+1) \cdots (n-1)$ que aplicada a F da la función $F(0) \cdots F(x-1)F(x-1)F(x+1) \cdots F(n-1)$ que es exactamente H. Entonces $\alpha = \epsilon_{x-1}F$.

- si $0 < x < n-1$ y $H(x-1) < H(x)$ entonces tenemos $H(x) < H(x+1)$ (si fuera igual entonces $F(x) = H(x) + 1 > H(x+1) = F(x+1)$ contradiciendo el hecho de que F es monótona) y $F = HT_{H(x)}$. Así tenemos $\alpha = H\eta_{H(x)}$.

□

Ejemplo 2.5.6. Las transformaciones naturales en **2** pueden obtenerse del orden entre funciones monótonas de **2** a **2**:

$$00 \longrightarrow 01 \longrightarrow 11$$

que en la notación de [Otto] corresponden a

$$G \longrightarrow id \longrightarrow T.$$

Y éstas son (6 en total)

$$00 \Rightarrow 00; 00 \Rightarrow 01; 00 \Rightarrow 11; 01 \Rightarrow 01; 01 \Rightarrow 11; 11 \Rightarrow 11$$

que corresponden respectivamente a

$$1_G; \epsilon; \eta \circ \epsilon; 1_{id}; \eta; 1_T$$

Ejemplo 2.5.7. Las transformaciones naturales en **3** (50 en total) se obtienen análogamente del orden entre funciones monótonas de **3** a **3**:

$$\begin{tikzcd}
000 \equiv G_1G_0 \equiv G_1G_0G_1 \arrow[d, "\epsilon_1 G_0 G_1"'] & & & \\
001 \equiv G_0G_1 \arrow[r, "G_0\epsilon_1"] \arrow[d, "\epsilon_0 G_1"'] & 002 \equiv G_0 \arrow[d, "\epsilon_0"] & & \\
011 \equiv G_1 \arrow[r, "\epsilon_1"] \arrow[d, "G_1\eta_0"'] & 012 \equiv id \arrow[r, "\eta_1"] \arrow[d, "\eta_0"] & 022 \equiv T_1 \arrow[d, "T_1\eta_0"] & \\
111 \equiv G_1T_0 \arrow[r, "\epsilon_1 T_0"'] & 112 \equiv T_0 \arrow[r, "\eta_1 T_0"'] & 122 \equiv T_1T_0 \arrow[r, "\eta_0 T_1 T_0"'] & 222 \equiv T_0T_1T_0
\end{tikzcd}$$

En el Apéndice A.7 hay un listado de las transformaciones naturales a que dan lugar este diagrama así como el diagrama correspondiente al orden **4**.

La composición de transformaciones naturales y funtores tiene las propiedades expresadas en el Teorema siguiente.

Teorema 2.5.8.

1. *$T_k\epsilon_{k+1} = \epsilon_{k+1}T_k$ si $0 \leq k < n-2$.*
2. *$\eta_k G_{k+1} = G_{k+1}\eta_k$ si $0 \leq k < n-2$.*
3. *$\eta_k T_k = T_k \eta_k = 1_{T_k}$ si $0 \leq k < n-1$.*
4. *$\epsilon_k G_k = G_k \epsilon_k = 1_{G_k}$ si $0 \leq k < n-1$.*
5. *$T_k\epsilon_k = \eta_k \circ \epsilon_k$ y $G_k\eta_k = \eta_k \circ \epsilon_k$ si $0 \leq k < n-1$.*
6. *$\eta_{k+1}G_k = \eta_{k+1} \circ \epsilon_k$ y $\epsilon_k T_{k+1} = \eta_{k+1}\epsilon_k$ si $0 \leq k < n-2$.*
7. *Sea $0 \leq i, j < n-1$. Si $j \neq i+1$ y $j \neq i-1$ entonces $\eta_i T_j = T_j \eta_i$ y $\epsilon_i G_j = G_j \epsilon_i$.*

8. $T_k T_{k+1}\eta_k = 1_{T_k T_{k+1}}$, $\epsilon_k G_{k+1} G_k = 1_{G_{k+1}G_k}$, $T_{k+1}T_k\eta_k = 1_{T_{k+1}T_k}$ *y* $\epsilon_k G_k G_{k+1} = 1_{G_k G_{k+1}}$ *si* $0 \leq k < n-1$.

9. $\eta_k G_k = 1_{G_k}$ *si* $0 \leq k < n-1$.

10. $\epsilon_k T_k = 1_{T_k}$ *si* $0 \leq k < n-1$.

11. $T_{k+1}\epsilon_k = 1_{T_{k+1}}$ *si* $0 \leq k < n-2$.

12. $G_k \eta_{k+1} = 1_{G_k}$ *si* $0 \leq k < n-2$.

13. *Sean* F *y* H *dos funciones monótonas, entonces* $F1_H = 1_{FH}$ *y* $1_H F = 1_{HF}$.

Demostración. Ver Apéndice A.8. □

Teorema 2.5.9. *Sea* H *una función monótona y* l, m, $k \in \mathbf{n}$ *tales que tengan sentido las expresiones en las que figuren en las siguientes ecuaciones*

1. $T_l H T_m \eta_m = 1_{T_l H T_m} = \eta_l T_l H T_m$.

2. $H T_m \epsilon_{m-1} = 1_{HT_m}$.

3. $G_m H G_l \epsilon_l = 1_{G_m H G_l} = \epsilon_m G_m H G_l$.

4. $H G_l \eta_{l+1} = 1_{HG_l}$.

5. $\epsilon_k T_{k+1} = \eta_{k+1} G_k = \eta_{k+1} \circ \epsilon_k$.

Demostración. Ver Apéndice A.9. □

Capítulo 3

Comprensiones

En este Capítulo se define el concepto de *Comprensión* en una categoría simétrica monoidal. Para ello definimos los conceptos de *categoría monoidal* (Sección 3.1), a partir del cual se definen las $\mathcal{V}$*-categorías* y las categorías *tensor* y *cotensor* (Sección 3.2). Finalmente, se definen las *2-Comprensiones* (Sección 3.3), las *n-Comprensiones* (Sección 3.4) y la *extensión de una n-Comprensión* (Sección 3.5).

3.1. Categorías monoidales

Definición 3.1.1. Una *categoría monoidal* es un 6-tuplo $\mathcal{V} = (\mathcal{V}_0, \otimes, \top, a, i, d)$ donde $\mathcal{V}_0$ es una categoría, $\otimes$ es un funtor $\mathcal{V}_0 \times \mathcal{V}_0 \longrightarrow \mathcal{V}_0$ llamado *producto tensorial*, $\top$ es un objeto , llamado *unidad del producto tensorial*, de $\mathcal{V}_0$ y a, i, d son isomorfismos naturales llamados *asociatividad, identidad izquierda* e *identidad derecha* respectivamente[1]

$$a_{ABC} : A \otimes (B \otimes C) \longrightarrow (A \otimes B) \otimes C$$

$$i_A : \top \otimes A \longrightarrow A$$

$$d_A : A \otimes \top \longrightarrow A$$

sujetos a los diagramas conmutativos siguientes

[1]En el caso de las categorías **n** con el orden total estos isomorfismos son identidades ya que entre dos objetos sólo hay como mucho un morfismo o flecha.

- *condición de coherencia pentagonal* dada por el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} D \otimes (A \otimes (B \otimes C)) \arrow[r, "a"] \arrow[d, "D\otimes a"'] & (D \otimes A) \otimes (B \otimes C) \arrow[r, "a"] & ((D \otimes A) \otimes B) \otimes C \arrow[d, "a\otimes C"] \\ D \otimes ((A \otimes B) \otimes C) \arrow[rr, "a"'] & & (D \otimes (A \otimes B)) \otimes C \end{tikzcd}$$

- *condición triangular* dada por el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} (A \otimes \top) \otimes B \arrow[rr, "a"] \arrow[dr, "d\otimes B"'] & & A \otimes (\top \otimes B) \arrow[dl, "A\otimes i"] \\ & A \otimes B & \end{tikzcd}$$

Ejemplo 3.1.2. A partir de la categoría **2** se obtiene una categoría monoidal, que llamaremos $\mathcal{V}_{\mathbf{2}}$, añadiendo el producto como producto tensorial y 1 como la unidad del producto tensorial.

Ejemplo 3.1.3. A partir de la categoría *Set* (respectivamente *Cat*) se obtiene una categoría monoidal, que llamaremos $\mathcal{V}_{Set}$ (respectivamente $\mathcal{V}_{Cat}$), añadiendo el producto cartesiano como producto tensorial y el objeto terminal como la unidad del producto tensorial.

Definición 3.1.4. Una *simetría* para una categoría monoidal $\mathcal{V}$ es un isomorfismo natural s tal que para cualesquiera objetos A y B de $\mathcal{V}$ el morfismo $s_{AB} : A \otimes B \longrightarrow B \otimes A$ es un morfismo en $\mathcal{V}$ tal que se satisfacen tres condiciones de coherencia expresadas por los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd} A \otimes B \arrow[r, "s"] \arrow[dr, "A\otimes B"'] & B \otimes A \arrow[d, "s"] \\ & A \otimes B \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} (A \otimes B) \otimes C \arrow[r, "a^{-1}"] \arrow[d, "s\otimes C"'] & A \otimes (B \otimes C) \arrow[r, "s"] & (B \otimes C) \otimes A \arrow[d, "a^{-1}"] \\ (B \otimes A) \otimes C \arrow[r, "a^{-1}"'] & B \otimes (A \otimes C) \arrow[r, "B\otimes s"'] & B \otimes (C \otimes A) \end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd} \top \otimes A \arrow[rr, "s"] \arrow[dr, "i"'] & & A \otimes \top \arrow[dl, "d"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Definición 3.1.5. Una categoría monoidal con una simetría se llama *categoría simétrica monoidal* (en adelante *categoría SM*).

En el Apéndice B.1 puede consultarse una amplia lista de categorías *SM* que serán relevantes en las secciones sucesivas.

Damos una idea de cómo puede montarse una categoría *SM* inicial que denotaremos aquí y en lo sucesivo por $\mathcal{I}$. Sus objetos pueden obtenerse por medio de los siguientes pasos:

- en el paso 1 existe el objeto $\top$
- para todos X e Y obtenidos en el paso n obtenemos en el paso $n+1$ los objetos X, Y y $(X \otimes Y)$ o pueden ser generados usando las reglas siguientes

$$X \longrightarrow \top$$

$$X \longrightarrow (X \otimes X)$$

Entonces los objetos de $\mathcal{I}$ que aparecen por primera vez en los tres primeros pasos son (omitiendo los paréntesis externos):

$$\top$$

$$\top \otimes \top$$

$$\top \otimes (\top \otimes \top), (\top \otimes \top) \otimes \top, (\top \otimes \top) \otimes (\top \otimes \top)$$

Usando el isomorfismo natural a podemos decir que todo objeto de $\mathcal{I}$ es isomorfo a un objeto de la forma $\top^{\otimes n}$ donde $n > 0$ y

$$\top^{\otimes 1} = \top$$

$$\top^{\otimes (n+1)} = \top \otimes \top^{\otimes n}$$

Dado que $\top$ es isomorfo a $\top \otimes \top$ entonces todos los objetos de $\mathcal{I}$ son isomorfos.

Las flechas de $\mathcal{I}$ son las identidades más todas las flechas que surgen de los isomorfismos naturales a, i y d cerradas bajo producto tensorial y composición..

3.2. Categorías tensor y cotensor

En la presente sección se introducen las $\mathcal{V}-$categorías, las categorías tensor y cotensor y se da una descripción de la categoría $\mathcal{V} - Cat$ que se usará posteriormente.

Definición 3.2.1. Dada una categoría monoidal $\mathcal{V}$ una $\mathcal{V}-$*categoría* $\mathcal{A}$ consiste en

1. un conjunto de *objetos* que denominamos $obj(\mathcal{A})$

2. con cada par de objetos A y B en $\mathcal{A}$ un objeto en $\mathcal{V}_0$ que denominamos $\mathcal{A}(A,B)$ y llamamos el *morfismo objeto de* A *y* B

3. una *ley de composición* denominada M y que aplicada a tres objetos A, B, C de $\mathcal{A}$ nos da una flecha
$$M_{ABC} : \mathcal{A}(B,C) \otimes \mathcal{A}(A,B) \longrightarrow \mathcal{A}(A,C)$$
de $\mathcal{V}_0$

4. para todo A en $\mathcal{A}$ un *elemento identidad* dado por el morfismo
$$j_A : \top \longrightarrow \mathcal{A}(A,A)$$

Sujetos a dos *condiciones de coherencia*: la de *asociatividad* dada por el diagrama conmutativo[2]

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{A}(C,D) \otimes \mathcal{A}(B,C)) \otimes \mathcal{A}(A,B) \arrow[rr, "a^{-1}"] \arrow[d, "M\otimes 1"'] & & \mathcal{A}(C,D) \otimes (\mathcal{A}(B,C) \otimes \mathcal{A}(A,B)) \arrow[d, "1\otimes M"] \\
\mathcal{A}(B,D) \otimes \mathcal{A}(A,B) \arrow[dr, "M"'] & & \mathcal{A}(C,D) \otimes \mathcal{A}(A,C) \arrow[dl, "M"] \\
& \mathcal{A}(A,D) &
\end{tikzcd}$$

y la de *identidad* dada por el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}(B,B) \otimes \mathcal{A}(A,B) \arrow[r, "M"] & \mathcal{A}(A,B) & \mathcal{A}(A,B) \otimes \mathcal{A}(A,A) \arrow[l, "M"'] \\
\top \otimes \mathcal{A}(A,B) \arrow[u, "j\otimes 1"] \arrow[ur, "i"'] & & \mathcal{A}(A,B) \otimes \top \arrow[u, "1\otimes j"'] \arrow[ul, "d"]
\end{tikzcd}$$

[2]En los diagramas siguientes no ponemos los subíndices en las M y las j.

Ejemplo 3.2.2. La categoría **2** junto con el producto tensorial y su unidad dan lugar a $\mathcal{V}_{\mathbf{2}}$. Una $\mathcal{V}_{\mathbf{2}} -$ *categoría* $\mathcal{A}$ tiene estructura de *conjunto preordenado* con la condición de que $A \leq B$ si y sólo si $\mathcal{A}(A, B) = 1$.

Ejemplo 3.2.3. Puede igualmente construirse la categoría $\mathcal{V}_{Set}$. Con ella cualquier categoría $\mathcal{C}$ puede ser vista como una $\mathcal{V}_{Set}-$categoría dado que los morfismos objeto serían simplemente los *homofuntores* $\mathcal{C}(-,-)$.

En el Apéndice B.2 puede consultarse otros ejemplos de $\mathcal{V}-$categoría.

Definición 3.2.4. Dadas dos $\mathcal{V}-$categorías $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, un $\mathcal{V}-$*funtor* $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ consiste en una función $F : obj\mathcal{A} \longrightarrow obj\mathcal{B}$ y, para todos $A, B \in \mathcal{A}$, en los morfismos $F_{AB} : \mathcal{A}(A, B) \longrightarrow \mathcal{B}(FA, FB)$ en $\mathcal{V}$ sujetos a dos diagramas de coherencia. La de *conservación de la composición* dada por el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}(B,C) \otimes \mathcal{A}(A,B) \arrow[r, "M"] \arrow[d, "F\otimes F"'] & \mathcal{A}(A,C) \arrow[d, "F"] \\
\mathcal{B}(FB,FC) \otimes \mathcal{B}(FA,FB) \arrow[r, "M"'] & \mathcal{B}(FA,FC)
\end{tikzcd}$$

y la de *conservación de la identidad* dada por el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{A}(A,A) \arrow[dd, "F"] \\
\top \arrow[ur, "j"] \arrow[dr, "j"'] & \\
 & \mathcal{B}(FA,FA)
\end{tikzcd}$$

Ejemplo 3.2.5. Con $\mathcal{V}_{\mathbf{2}}$ tendremos funciones crecientes como $\mathcal{V}_{\mathbf{2}}-$funtores.

Definición 3.2.6. Dados dos $\mathcal{V}-$funtores $F, G : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ una $\mathcal{V}-$*transformación natural* $\alpha : F \longrightarrow G$ es una familia indexada por $ob\mathcal{A}$ de componentes naturales

$$\alpha_A : \top \longrightarrow \mathcal{B}(FA, GA)$$

para todo A en $\mathcal{A}$ sujetas a un axioma de coherencia dado por el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & \top \otimes \mathcal{A}(A,B) \arrow[r, "\alpha_B \otimes F"] & \mathcal{B}(FB,GB) \otimes \mathcal{B}(FA,FB) \arrow[dr, "M"] & \\
\mathcal{A}(A,B) \arrow[ur, "i^{-1}"] \arrow[dr, "d^{-1}"'] & & & \mathcal{B}(FA,GB) \\
 & \mathcal{A}(A,B) \otimes \top \arrow[r, "G \otimes \alpha_A"'] & \mathcal{B}(GA,GB) \otimes \mathcal{B}(FA,GA) \arrow[ur, "M"'] &
\end{tikzcd}$$

Definición 3.2.7. $\mathcal{V} - Cat$ consta de las $\mathcal{V}-$categorías como objetos, de los $\mathcal{V}-$funtores como flechas y de las $\mathcal{V}-$transformaciones naturales como transformaciones naturales.

Teorema 3.2.8. *$\mathcal{V} - Cat$ es una 2-categoría.*

Demostración. Ver [Kelly] pagina 10. □

Definición 3.2.9. La $\mathcal{V}-$*categoría unidad* $\mathcal{T}$ es la $\mathcal{V} -$ *categoría* con un objeto $\star$ y el único morfismo objeto $\mathcal{T}(\star,\star) = \top$.

El $\mathcal{V}-$funtor $A : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{A}$ puede identificarse con un objeto A de $\mathcal{A}$. La $\mathcal{V}-$transformación natural f de A en B tal que $A : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{A}$ y $B : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{A}$ es igual a $f : \top \longrightarrow \mathcal{A}(A,B)$.

Definición 3.2.10. Dadas dos $\mathcal{V}-$categorías $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ con $\mathcal{V}$ una categoría *SM*, la $\mathcal{V}-$categoría $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ llamada *categoría tensor* es aquélla cuyos objetos son los pares (A,B) con $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{B}$ y sus *morfismos objetos*, para cualesquiera dos pares (A,B) y (A',B'), son

$$(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})((A,B),(A',B')) = \mathcal{A}(A,A') \otimes \mathcal{B}(B,B')$$

cuya composición $\widetilde{M}$ viene dada por el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{A}(A',A'') \otimes \mathcal{B}(B',B'')) \otimes (\mathcal{A}(A,A') \otimes \mathcal{B}(B,B')) \arrow[r, "\widetilde{M}"] \arrow[d, "m"'] & \mathcal{A}(A,A'') \otimes \mathcal{B}(B,B'') \\
(\mathcal{A}(A',A'') \otimes \mathcal{A}(A,A')) \otimes (\mathcal{B}(B',B'') \otimes \mathcal{B}(B,B')) \arrow[ur, "M \otimes M"'] &
\end{tikzcd}$$

donde el morfismo m está generado por la composición de diferentes a y s de modo que

$$m : (W \otimes X) \otimes (Y \otimes Z) \longleftrightarrow (W \otimes Y) \otimes (X \otimes Z)$$

En notación de flechas m es por ejemplo

$$a(a^{-1} \otimes Y)((W \otimes s) \otimes Z)(a \otimes Z)(a^{-1})$$

Las identidades son

$$\top \equiv \top \otimes \top \xrightarrow{j_A \otimes j_B} \mathcal{A}(A, A) \otimes \mathcal{B}(B, B)$$

Proposición 3.2.11. *Se cumplen en $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ los axiomas que hacen de ella una $\mathcal{V}-$categoría.*

En el Apéndice B.4 hay más ejemplos de $\mathcal{V}-$categorías tensoriales.

Definición 3.2.12. Dados dos $\mathcal{V}-$funtores $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ y $G : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}'$ podemos construir el *producto tensorial de* $\mathcal{V}-$funtores

$$F \otimes G : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}' \otimes \mathcal{B}'$$

en la siguiente forma: $F \otimes G$ sobre el objeto (A, B) nos da el objeto (FA, GB). Sobre el morfismo objeto $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})((A, B), (A', B'))$ nos da el morfismo objeto $(\mathcal{A}' \otimes \mathcal{B}')((FA, GB), (FA', GB'))$.

Podemos asimismo construir el *producto tensorial de* $\mathcal{V}$-transformaciones naturales $\alpha : F \longrightarrow F'$ y $\beta : G \longrightarrow G'$ como

$$\alpha \otimes \beta : F \otimes G \longrightarrow F' \otimes G'$$

actuando del modo siguiente para cada (A, B):

$$\alpha \otimes \beta_{(A,B)} : F \otimes G(A, B) \longrightarrow F' \otimes G'(A, B) : (FA, GB) \longrightarrow (F'A, G'B)$$

de modo que existe un $2-$funtor $\otimes : \mathcal{V} - Cat \times \mathcal{V} - Cat \longrightarrow \mathcal{V} - Cat$.

Teorema 3.2.13. *$\mathcal{V} - Cat$ es SM cuando $\mathcal{V}$ es SM.*

Demostración. Ver [Kelly] página 12. □

Definición 3.2.14. A partir de una $\mathcal{V}-$categoría $\mathcal{A}$ se define la *$\mathcal{V}-$categoría dual* $\mathcal{A}^{op}$ con $\mathcal{A}^{op}(B, A) = \mathcal{A}(A, B)$ y la composición definida por el morfismo de $\mathcal{V}$

$$M_{ABC} : \mathcal{A}^{op}(B, C) \otimes \mathcal{A}^{op}(A, B) \longrightarrow \mathcal{A}^{op}(A, C)$$

que funciona del modo siguiente

$$\mathcal{A}(C, B) \otimes \mathcal{A}(B, A) \xrightarrow{s} \mathcal{A}(B, A) \otimes \mathcal{A}(C, B) \xrightarrow{M} \mathcal{A}(C, A)$$

Definición 3.2.15. Un $\mathcal{V}-$*funtor* $F : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ puede ser visto como un *funtor de dos variables*, los *funtores parciales* $F(A,-) : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ y $F(-,B) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}$ indexados por $ob(\mathcal{A})$ y $ob(\mathcal{B})$ respectivamente vienen dados por la composición

$$\mathcal{B} \equiv \mathcal{T} \otimes \mathcal{B} \xrightarrow{A\otimes 1} \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \xrightarrow{F} \mathcal{C}$$

y análogamente para $F(-,B)$

$$\mathcal{A} \equiv \mathcal{A} \otimes \mathcal{T} \xrightarrow{1\otimes B} \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \xrightarrow{F} \mathcal{C}$$

Aquí $\mathcal{T}$ es la $\mathcal{V}-$categoría que consta de un único objeto y cuyo único morfismo objeto es justamente $\top$ en $\mathcal{V}$ definida en 3.2.9.

Definición 3.2.16. Una categoría monoidal $\mathcal{V}$ es *cerrada* si todo funtor

$$- \otimes B : \mathcal{V}_0 \longrightarrow \mathcal{V}_0$$

tiene un adjunto derecho $[B,-]$.

Hecho. *Esto supone la existencia de un isomorfismo natural*

$$\mathcal{V}_0(A \otimes B, C) \equiv \mathcal{V}_0(A, [B,C])$$

Ejemplo 3.2.17. Si consideramos $D \otimes A$ en lugar de A en el isomorfismo anterior y tomamos el isomorfismo de asociatividad

$$a : (D \otimes A) \otimes B \equiv D \otimes (A \otimes B)$$

tendremos

$$\mathcal{V}(D \otimes (A \otimes B), C) = \mathcal{V}(D, [A \otimes B, C]) = \mathcal{V}(D, [A, [B,C]])$$

de lo que se sigue

$$[A \otimes B, C] \equiv [A, [B,C]]$$

Observación. $\mathcal{V}$ es ella misma una $\mathcal{V}-$categoría siempre que sea cerrada considerando sus objetos los de $\mathcal{V}_0$ y sus morfismos objetos

$$\mathcal{V}(A,B) = [A,B]$$

con la ley de composición obvia

$$M_{ABC} : [B,C] \otimes [A,B] \longrightarrow [A,C]$$

Algunos ejemplos relevantes para la construcción sintáctica posterior vienen en el Apéndice B.4.

Definición 3.2.18. Sea $\mathcal{V}$ una categoría *SM* cerrada (*categoría SMC* en adelante) con $\mathcal{V}_0$ completa[3], $\mathcal{A}$ una $\mathcal{V}-$categoría y $F : \mathcal{A}^{op} \otimes \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{V}$ un $\mathcal{V}-$funtor. Si existe una $\mathcal{V}$-transformación natural φ con $\varphi_A : K \longrightarrow F(A, A)$ tal que toda familia $\mathcal{V}-$natural $\alpha_A : X \longrightarrow F(A, A)$ viene dada por

$$\alpha_A = \varphi_A f$$

para cada objeto A en $\mathcal{A}$ y para un único $f : X \longrightarrow K$ en $\mathcal{V}$, entonces llamamos al par (K, φ) el *final* de F.[4] A la transformación $\mathcal{V}-$natural φ le llamaremos la *counidad del final de F*. Escribiremos

$$\int_A F(A, A)$$

por el objeto $K \in \mathcal{A}$.

En el Apéndice B.5 puede consultarse algunas propiedades y ejemplos.

Definición 3.2.19. Un $\mathcal{V}-$funtor $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{V}$ es *representable* si existe un objeto $K \in \mathcal{A}$ y un isomorfismo natural $\alpha : \mathcal{A}(K, -) \longrightarrow F$. En este caso al par (K, α) le llamamos la *representación de F*.

Teorema 3.2.20. *Un par como el de la Definición anterior es único en el sentido de que si existe otro par (K', α') representando a F entonces existe un único isomorfismo $k : K \longrightarrow K'$ tal que $\alpha' = \alpha\mathcal{A}(k, -)$.*

Definición 3.2.21. Bajo las condiciones del Teorema anterior al morfismo $\mu : \top \longrightarrow FK$ le llamamos la *unidad de la representación* o la *counidad de la representación* si ésta se refiere a un funtor $F : \mathcal{A}^{op} \longrightarrow \mathcal{V}$ con un isomorfismo $\beta : \mathcal{A}(-, K) \longrightarrow F$.

Sea $F : \mathcal{B}^{op} \otimes \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{V}$ un $\mathcal{V}-$funtor tal que para todo B en $\mathcal{B}$ hay una función $K : ob(\mathcal{B}) \longrightarrow \mathcal{A}$ tal que el funtor $F(B, -) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{V}$ admite una representación dada por el par $(KB, \alpha_B : \mathcal{A}(KB, -) \longrightarrow F(B, -))$. Entonces hay una única familia de morfismos

$$K_{BC} : \mathcal{B}(B, C) \longrightarrow \mathcal{A}(KB, KC)$$

tal que K es un $\mathcal{V}$-funtor y $\alpha_{BA} : \mathcal{A}(KB, A) \longrightarrow F(B, A)$ es $\mathcal{V}-$natural en A y B.

[3] Entendemos por *categoría completa* aquella categoría dotada de límites.

[4] K y X son realmente el resultado de aplicar dos funtores a (A, A), de forma que no dependen de A y que siempre toman el valor K y X respectivamente, donde ambos son objetos de $\mathcal{V}$.

Notación. Para $\mathcal{V}$-funtores $T, S : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ introducimos la notación

$$[\mathcal{A}, \mathcal{B}](T, S) = \int_{A \in \mathcal{A}} \mathcal{B}(TA, SA)$$

Definición 3.2.22. Dado un $\mathcal{V}-$funtor $F : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{V}$ podemos considerarlo como un tipo de *índice* de otro $\mathcal{V}-$funtor $G : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{B}$ que puede considerarse como un *diagrama en $\mathcal{B}$ de tipo F*. En este contexto podemos tomar para cada B en $\mathcal{B}$ el $\mathcal{V}-$funtor $\mathcal{B}(B, G-) : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{V}$ y el objeto

$$[\mathcal{K}, \mathcal{V}](F, \mathcal{B}(B, G-))$$

de $\mathcal{V}$. Si este objeto existe para cada objeto B de $\mathcal{B}$, se obtiene un funtor $H : \mathcal{B}^{op} \longrightarrow \mathcal{V}$, que aplicado a cada objeto B nos da $[\mathcal{K}, \mathcal{V}](F, \mathcal{B}(B, G-))$. Si existe un objeto $\{F, G\} \in \mathcal{B}$ tal que H admite la representación

$$\mathcal{B}(B, \{F, G\}) \equiv [\mathcal{K}, \mathcal{V}](F, \mathcal{B}(B, G-))$$

con counidad $\mu : F \longrightarrow \mathcal{B}(\{F, G\}, G-)$ decimos que el par $(\{F, G\}, \mu)$ es el *límite de G indexado por F*.[5]

Dado un $\mathcal{V}-$funtor $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{V}$ y un objeto K of $\mathcal{A}$ tenemos la familia de morfismos de $\mathcal{V}$ indexada por los objetos de $\mathcal{A}$, tal que para cada objeto A de $\mathcal{A}$

$$F_{KA} : \mathcal{A}(K, A) \longrightarrow [FK, FA]$$

que es $\mathcal{V}-$natural en A. La transformación natural

$$\phi_A : FK \longrightarrow [\mathcal{A}(K, A), FA]$$

de F_{KA} bajo la adjunción $\mathcal{V}_0(X, [Y, Z]) \equiv \mathcal{V}_0(Y, [X, Z])$ es $\mathcal{V}-$natural en A (ver [Kelly] página 33).

Lema 3.2.23. *(Lema de Yoneda para $\mathcal{V}-$categorías) ϕ_A expresa FK como el final $\int_A [\mathcal{A}(K, A), FA]$.*

De este modo tenemos un isomorfismo

$$\phi : FK \equiv [\mathcal{A}, \mathcal{V}](\mathcal{A}(K, -), F)$$

[5] En este caso $[\mathcal{K}, \mathcal{V}](F, \mathcal{B}(B, G-))$ es un $\mathcal{V}-$funtor

$$\mathcal{B}^{op} \longrightarrow \mathcal{V}$$

y μ es la counidad de la representación de la Definición anterior.

El límite indexado puede ser definido igualmente considerando al par $(\{F, G\}, \mu)$ como el final para el funtor

$$[\mathcal{K}, \mathcal{V}](F, \mathcal{B}(B, G-))$$

Es decir, puede afirmarse que existe un isomorfismo

$$\mathcal{B}(B, \{F, G\}) \equiv [\mathcal{K}, \mathcal{V}](F, \mathcal{B}(B, G-)) =$$

$$\int_K \mathcal{V}(FK, \mathcal{B}(B, GK)) = \int_K [FK, \mathcal{B}(B, GK)]$$

con $K \in \mathcal{K}$.

La counidad del límite indexado nos permite considerar componentes naturales μ_K que inducen (por el *Lema de Yoneda* para $\mathcal{V}$-categorías) una familia de funtores $\mathcal{V} - $ *naturales*

$$\int_K [FK, \mathcal{B}(B, GK)] = \int_K \mathcal{V}(FK, \mathcal{B}(B, GK)) \equiv$$

$$\mathcal{B}(B, \{F, G\}) \longrightarrow [FK, \mathcal{B}(B, GK)]$$

y $(\{F, G\}, \mu)$ es el límite cuando esa familia es un final sobre K para cada $B \in \mathcal{B}$.

Proposición 3.2.24. *Toda categoría* SMC *tiene productos tensoriales y cotensoriales para todo par de objetos y el producto cotensorial es el morfismo objeto formado por dichos objetos.*

Ejemplo 3.2.25. Un caso especial de límite indexado se produce si consideramos $\mathcal{K} = 1$ la $\mathcal{V}-$categoría unitaria, en este caso el funtor G puede verse como un objeto C de $\mathcal{B}$ y el funtor F como un objeto X de $\mathcal{V}$.

El objeto $\{X, C\}$ se escribe en este caso $X \multimap C$ con $X \in \mathcal{V}$ y $C \in \mathcal{B}$ y se llama *producto cotensorial* en $\mathcal{B}$ de X y C. Dicho objeto se define por el $\mathcal{V}-$isomorfismo natural

$$\mathcal{B}(B, X \multimap C) \equiv [X, \mathcal{B}(B, C)]$$

con counidad $X \longrightarrow \mathcal{B}(X \multimap C, B)$ y si existe para todos X y C (lo que es cierto si $\mathcal{V}$ es *SMC* completa) entonces la $\mathcal{V}-$categoría $\mathcal{B}$ se dice que es *cotensorial*.

En este caso también se tiene el isomorfismo $\mathcal{B}(X \otimes C, B) \equiv [X, \mathcal{B}(C, B)]$ lo cual supone, cuando $\mathcal{V}$ es *SMC* y $\mathcal{V}_0$ es completa, el isomorfismo

$$\mathcal{B}(C \otimes X, B) \equiv \mathcal{B}(C, X \multimap B)$$

Ejemplo 3.2.26. Siguiendo con las estructuras de los ejemplos anteriores podemos tomar $\mathcal{B} = \mathcal{SM}, \mathcal{V} = Cat\ y\ \mathcal{K} = 1_{Cat}$ y los 2-funtores

$$G : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{SM}$$

y

$$F : 1_{Cat} \longrightarrow Cat$$

tales que G determina la categoría $\mathcal{D}$ y F la categoría $\mathbf{n}$, entonces, para toda $\mathcal{C} \in \mathcal{SM}$, tenemos

$$\mathcal{SM}(\mathbf{n} \otimes \mathcal{D}, \mathcal{C}) \equiv \mathcal{SM}(\mathcal{D}, \mathbf{n} \multimap \mathcal{C}) \equiv [\mathbf{n}, \mathcal{SM}(\mathcal{D}, \mathcal{C})]$$

y también, tomando $\mathcal{D} = \mathcal{C}$,

$$\mathcal{SM}(\mathbf{n} \otimes \mathcal{C}, \mathcal{C}) \equiv \mathcal{SM}(\mathcal{C}, \mathbf{n} \multimap \mathcal{C}) \equiv [\mathbf{n}, \mathcal{SM}(\mathcal{C}, \mathcal{C})]$$

donde la 2-categoría de la derecha es isomorfa a $\mathcal{SM}(\mathcal{C}, \mathcal{C})^{\mathbf{n}}$.

Esta construcción tiene sentido en cuanto que $\mathbf{n} \multimap \mathcal{C} \in \mathcal{SM}$ siempre que $\mathcal{C} \in \mathcal{SM}$ por el Teorema 3.2.29, a cuyo enunciado nos adelantamos. $\mathcal{SM}$ puede ella misma ser vista como una $\mathcal{V}-$categoría con $\mathcal{V} = Cat$ una categoría *SMC*. De hecho podemos afirmar que el objeto cotensor es exactamente el morfismo objeto, es decir

$$\mathbf{n} \multimap \mathcal{C} = [\mathbf{n}, \mathcal{C}]$$

dado que $\mathcal{SM}$ es también una categoría *SMC* y podemos aplicar la Proposición 3.2.24.

Ésta es la forma en la cual se obtienen las *extensiones* de las n-Comprensiones.

Ejemplo 3.2.27. Siguiendo la construcción previa con $\mathcal{C} = \mathbf{2}$ y $n = 2$, y considerando los endofuntores de coerción G y T de la Definición 2.1.2, tendremos el isomorfismo

$$\mathcal{SM}(\mathbf{2}, \mathbf{2})^2 \equiv \mathcal{SM}(\mathbf{2}, (\mathbf{2}, \mathbf{2}))$$

donde

$$(\mathbf{2}, \mathbf{2}) = \{G, id, T\} \text{ y } (\mathbf{2}, \mathbf{2})^2 = \{1_G, \epsilon, \eta \circ \epsilon, 1_{id}, \eta, 1_T\}$$

y los elementos de $(\mathbf{2}, (\mathbf{2}, \mathbf{2}))$ son

$$F_1 : \mathbf{2} \longrightarrow (\mathbf{2}, \mathbf{2}) \quad \text{tal que} \quad \begin{array}{l} F_1(0) = G \\ F_1(1) = G \end{array}$$

$$F_2 : \mathbf{2} \longrightarrow (\mathbf{2}, \mathbf{2}) \quad \text{tal que} \quad \begin{matrix} F_2(0) = G \\ F_2(1) = id \end{matrix}$$

$$F_3 : \mathbf{2} \longrightarrow (\mathbf{2}, \mathbf{2}) \quad \text{tal que} \quad \begin{matrix} F_3(0) = G \\ F_3(1) = T \end{matrix}$$

$$F_4 : \mathbf{2} \longrightarrow (\mathbf{2}, \mathbf{2}) \quad \text{tal que} \quad \begin{matrix} F_4(0) = id \\ F_4(1) = id \end{matrix}$$

$$F_5 : \mathbf{2} \longrightarrow (\mathbf{2}, \mathbf{2}) \quad \text{tal que} \quad \begin{matrix} F_5(0) = id \\ F_5(1) = T \end{matrix}$$

$$F_6 : \mathbf{2} \longrightarrow (\mathbf{2}, \mathbf{2}) \quad \text{tal que} \quad \begin{matrix} F_6(0) = T \\ F_6(1) = T \end{matrix}$$

de modo que le asignamos a cada F_i un miembro de $(\mathbf{2}, \mathbf{2})^2$ en el orden en que se han presentado para cada $i = 1, ..., 6$.

Ejemplo 3.2.28. En particular, si denotamos por χ al funtor F_3, tenemos una asignación biyectiva

$$\chi \longrightarrow \begin{bmatrix} [0 \to 1_G] = G \\ [1 \to 1_T] = T \end{bmatrix}$$

Donde hemos identificado respectivamente los funtores G y T con las asignaciones $[0 \to 1_G]$ y $[1 \to 1_T]$ entre $\mathbf{2}$ y $(\mathbf{2}, \mathbf{2})$ siendo 1_G y 1_T los funtores identidad de $(\mathbf{2}, \mathbf{2})$. Si además $\chi : G \longrightarrow T$ es un funtor en la forma $(\mathbf{2}, \mathbf{2}) \longrightarrow (\mathbf{2}, \mathbf{2})$ tenemos la asignación

$$\mathbf{2} \Longrightarrow (M_2, M_2)$$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[d] & & G \arrow[d, "\chi"] \\ 1 & \Longrightarrow & T \end{tikzcd}$$

Teorema 3.2.29. $\mathbf{n} \multimap \mathcal{C} \in \mathcal{SM}$ *para todo* $\mathcal{C} \in \mathcal{SM}$.

Demostración. La estructura simétrica monoidal de $\mathbf{n} \multimap \mathcal{C}$ viene dada por los siguientes objetos y morfismos:como unidad se toma la cadena de $n-1$ morfismos

$$\top \longrightarrow \top \longrightarrow \dots \longrightarrow \top$$

- el producto tensorial de dos objetos (dos cadenas de morfismos en este caso)

$$Y_0 \xrightarrow{y_0} \quad \cdots \quad \xrightarrow{y_{n-2}} Y_{n-1}$$

  y

$$X_0 \xrightarrow{x_0} \quad \cdots \quad \xrightarrow{x_{n-2}} X_{n-1}$$

  se define por

$$Y_0 \otimes X_0 \xrightarrow{y_0 \otimes x_0} \quad \cdots \quad \xrightarrow{y_{n-2} \otimes x_{n-2}} Y_{n-1} \otimes X_{n-1}$$

- el producto tensorial de un objeto

$$Y_0 \xrightarrow{y_0} \quad \cdots \quad \xrightarrow{y_{n-2}} Y_{n-1}$$

  y una flecha (una cadena de cuadrados)

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, "x_0"] \arrow[d, "f_0"'] & \cdots \arrow[r, "x_{n-2}"] & X_{n-1} \arrow[d, "f_{n-1}"] \\ X'_0 \arrow[r, "x'_0"] & \cdots \arrow[r, "x'_{n-2}"] & X'_{n-1} \end{tikzcd}$$

  se define por

$$\begin{tikzcd} Y_0 \otimes X_0 \arrow[r, "y_0 \otimes x_0"] \arrow[d, "Y_0 \otimes f_0"'] & \cdots \arrow[r, "y_{n-2} \otimes x_{n-2}"] & Y_{n-1} \otimes X_{n-1} \arrow[d, "Y_{n-1} \otimes f_{n-1}"] \\ Y_0 \otimes X'_0 \arrow[r, "y_0 \otimes x'_0"] & \cdots \arrow[r, "y_{n-2} \otimes x'_{n-2}"] & Y_{n-1} \otimes X'_{n-1} \end{tikzcd}$$

- mientras que las simetrías serán

$$\begin{tikzcd} Y_0 \otimes X_0 \arrow[r, "y_0 \otimes x_0"] \arrow[d, "s_{X_0,Y_0}"'] & \cdots \arrow[r, "y_{n-2} \otimes x_{n-2}"] & Y_{n-1} \otimes X_{n-1} \arrow[d, "s_{X_{n-1},Y_{n-1}}"] \\ X_0 \otimes Y_0 \arrow[r, "x_0 \otimes y_0"] & \cdots \arrow[r, "x_{n-2} \otimes y_{n-2}"] & X_{n-1} \otimes Y_{n-1} \end{tikzcd}$$

Y el resto de diagramas que dan la estructura simétrica monoidal donde la conmutatividad se da en cada diagrama inducida por la estructura simétrica monoidal de $\mathcal{C}$.

□

3.3. 2-Comprensiones

En esta Sección se introduce el concepto de *2-Comprensión SM* junto con una descripción de la *2-Comprensión SM* inicial.

Definición 3.3.1. Una 2-Comprensión *SM* consiste en

- una categoría *SM* $\mathcal{C}$
- funtores (que también denominaremos *coerciones*) $T, G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ preservando $\top$, $\otimes$, a, i y d:
  - $T\top = G\top = \top$
  - $T(f \otimes Y) = Tf \otimes TY$ y $G(f \otimes Y) = Gf \otimes GY$
  - $Ta_{XYZ} = a_{(TX)(TY)(TZ)}$ y $Ga_{XYZ} = a_{(GX)(GY)(GZ)}$
  - $Ts_{XY} = s_{(TX)(TY)}$ y $Gs_{XY} = s_{(GX)(GY)}$
  - $Td_X = d_{TX}$ y $Gd_X = d_{GX}$

  y satisfaciendo las relaciones:

$$TG = G \qquad GT = T$$

- transformaciones naturales $\eta : id \Rightarrow T$ y $\epsilon : G \Rightarrow id$ satisfaciendo las relaciones

$$\eta T = 1_T \qquad T\eta = 1_T \qquad G\eta = \eta \circ \epsilon \qquad \epsilon G = 1_G$$
$$T\epsilon = \eta \circ \epsilon \qquad G\epsilon = 1_G \qquad \eta\top = 1_\top \qquad \epsilon\top = 1_\top$$
$$\eta(X \otimes Y) = \eta X \otimes \eta Y \qquad \epsilon(X \otimes Y) = \epsilon X \otimes \epsilon Y$$

El hecho de que T son G son idempotentes se prueba por el cálculo

$$TT = T(GT) = (TG)T = GT = T$$

$$GG = G(TG) = (GT)G = TG = G$$

A lo que se puede añadir las igualdades

$$\epsilon T = 1_T \epsilon T = \epsilon GT = 1_G T = 1_{GT} = 1_T$$

y

$$\eta G = 1_G \eta G = \eta TG = 1_T G = 1_{TG} = 1_G$$

3.4. n-Comprensiones

En esta Sección veremos que una $n-$Comprensión *SM*, del mismo modo que una $2-$Comprensión, es realmente un 2-funtor

$$M_n \longrightarrow \mathcal{SM}$$

donde $\mathcal{SM}$ es la 2-categoría de todas las categorías *SM*.

Para ello se necesita considerar un concepto de *modelo* que nos permita definir estructuras categoriales a partir de otras estructuras en base a unas ciertas propiedades que las nuevas *heredan* de las primeras.

El concepto de *modelo* entre 2-categorías que aquí se define puede ser expresado por medio del concepto más general de *Teoría Algebraica de Lawvere*[6]. Los modelos son los funtores entre teorías algebraicas de Lawvere.

Informalmente, una categoría con una cierta estructura algebraica 2-categorial es un *modelo* de otra categoría con la misma estructura si existe un funtor entre ellas que la preserva. En particular, sea el $(4n-3)$-tuplo $(\mathbf{n}, T_k, G_k, \eta_k, \epsilon_k)$ con $0 \leq k < n-1$. Diremos que, dada una categoría *SM* $\mathcal{C}$, un $(4n-3)$-tuplo $(\mathcal{C}, T_k^{\mathcal{C}}, G_k^{\mathcal{C}}, \eta_k^{\mathcal{C}}, \epsilon_k^{\mathcal{C}})$ es un *modelo* de $(\mathbf{n}, T_k, G_k, \eta_k, \epsilon_k)$ si $T_k^{\mathcal{C}}, G_k^{\mathcal{C}}, \eta_k^{\mathcal{C}}$ y $\epsilon_k^{\mathcal{C}}$ satisfacen los mismos diagramas conmutativos que T_k, G_k, η_k y ϵ_k.

Definición 3.4.1. Una *n-Comprensión SM* es un $(4n-3)$-tuplo

$$(\mathcal{C}, T_k^{\mathcal{C}}, G_k^{\mathcal{C}}, \eta_k^{\mathcal{C}}, \epsilon_k^{\mathcal{C}})$$

donde

1. $\mathcal{C}$ es una categoría *SM*

2. para cada k tal que $0 \leq k < n-1$ los funtores $T_k^{\mathcal{C}}, G_k^{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ son *funtores SM* en el sentido de que conservan $\top$, $\otimes$ y las transformaciones a, s y d:

   a) $T_k^{\mathcal{C}}\top = G_k^{\mathcal{C}}\top = \top$
   b) $T_k^{\mathcal{C}}(f \otimes Y) = T_k^{\mathcal{C}}f \otimes T_k^{\mathcal{C}}Y$ y $G_k^{\mathcal{C}}(f \otimes Y) = G_k^{\mathcal{C}}f \otimes G_k^{\mathcal{C}}Y$
   c) $T_k^{\mathcal{C}}aXYZ = a(T_k^{\mathcal{C}}X)(T_k^{\mathcal{C}}Y)(T_k^{\mathcal{C}}Z)$ y $G_k^{\mathcal{C}}aXYZ = a(G_k^{\mathcal{C}}X)(G_k^{\mathcal{C}}Y)(G_k^{\mathcal{C}}Z)$
   d) $T_k^{\mathcal{C}}sXY = s(T_k^{\mathcal{C}}X)(T_k^{\mathcal{C}}Y)$ y $G_k^{\mathcal{C}}sXY = s(G_k^{\mathcal{C}}X)(G_k^{\mathcal{C}}Y)$
   e) $T_k^{\mathcal{C}}dX = dT_k^{\mathcal{C}}X$ y $G_k^{\mathcal{C}}dX = dG_k^{\mathcal{C}}X$

[6] Que se introduce formalmente en la Sección 4.6

3. para cada k tal que $0 \leq k < n-1$ las transformaciones naturales $\eta_k^{\mathcal{C}} : id \Rightarrow T_k^{\mathcal{C}}$ y $\epsilon_k^{\mathcal{C}} : G_k^{\mathcal{C}} \Rightarrow id$ son *transformaciones SM* en el sentido de que cumplen las relaciones

$$\eta_k^{\mathcal{C}} \top = 1_\top, \quad \epsilon_k^{\mathcal{C}} \top = 1_\top, \qquad \eta_k^{\mathcal{C}}(X \otimes Y) = \eta_k^{\mathcal{C}} X \otimes \eta_k^{\mathcal{C}} Y,$$
$$\epsilon_k(X \otimes Y) = \epsilon_k^{\mathcal{C}} X \otimes \epsilon_k^{\mathcal{C}} Y.$$

4. $(\mathcal{C}, T_k^{\mathcal{C}}, G_k^{\mathcal{C}}, \eta_k^{\mathcal{C}}, \epsilon_k^{\mathcal{C}})$ es un modelo de $(\mathbf{n}, T_k, G_k, \eta_k, \epsilon_k)$.

Teorema 3.4.2. *$(\mathcal{C}, T_k^{\mathcal{C}}, G_k^{\mathcal{C}}, \eta_k^{\mathcal{C}}, \epsilon_k^{\mathcal{C}})$ es un modelo de $(\mathbf{n}, T_k, G_k, \eta_k, \epsilon_k)$ si y sólo si la asignación*

$$\begin{aligned} T_k &\rightsquigarrow T_k^{\mathcal{C}} \\ G_k &\rightsquigarrow G_k^{\mathcal{C}} \\ \eta_k &\rightsquigarrow \eta_k^{\mathcal{C}} \\ \epsilon_k &\rightsquigarrow \epsilon_k^{\mathcal{C}} \end{aligned}$$

puede extenderse a un 2-funtor SM.

En lo sucesivo denotaremos T_k, G_k, ϵ_k y η_k a $T_k^{\mathcal{C}}, G_k^{\mathcal{C}}, \eta_k^{\mathcal{C}}$ y $\epsilon_k^{\mathcal{C}}$ respectivamente cuando no exista ambigüedad.

Veamos cómo se componen los endofuntores de M_n. El siguiente Teorema generaliza algunas propiedades de la Sección 2.4 para productos de longitud indeterminada.

Teorema 3.4.3. *Sea $(\mathcal{C}, T_k, G_k, \eta_k, \epsilon_k)$ una n-Comprensión* SM. *Tenemos las siguientes propiedades para todo $j < k$:*

1. $T_j T_k T_j = T_j T_k$ *si* $k+1 \neq j$
2. $G_k T_0 T_1 ... T_j G_k = G_k T_0 T_1 ... T_j$
3. $G_{n-2} ... G_1 G_0 T_0 T_1 ... T_j = G_{n-2} ... G_{j+1} T_0 T_1 ... T_j$
4. $T_k G_{k+j} = G_{k+j} T_k$ *si* $j \neq 0, 1$
5. $G_k T_{k+j} = T_{k+j} G_k$ *con* $j \neq 1$
6. $T_0 ... T_l T_j T_{l+1} ... T_k = T_0 ... T_k$ *con* $0 \leq j < l < k$
7. $G_0 ... G_l G_j G_{l+1} ... G_k = G_0 ... G_k$ *con* $0 \leq j < l < k$

Demostración. Se sigue de las propiedades de los Teoremas 2.4.5 y 2.4.6. □

Teorema 3.4.4. *En una n-Comprensión* SM $(\mathcal{C}, T_k, G_k, \eta_k, \epsilon_k)$ *tenemos la siguiente cadena de adjunciones*

$$T_k \dashv G_k \dashv T_{k+1} \dashv G_{k+1}$$

para todo $k \in \{0, 1, ..., n-3\}$.

Demostración. Para demostrarlo usaremos el siguiente Lema de caracterización de adjuntos tomado de [MacLane] (página 81):

Lema. *Toda adjunción* $F \dashv G$ *con* $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{A}$ *y* $G : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}$ *está completamente determinada por los funtores F y G y por las transformaciones naturales*

$$\eta : id_{\mathcal{C}} \longrightarrow GF \text{ y } \varepsilon : FG \longrightarrow id_{\mathcal{A}}$$

tales que las composiciones $G \xrightarrow{\eta G} GFG \xrightarrow{G\epsilon} G$ *y* $F \xrightarrow{F\eta} FGF \xrightarrow{\epsilon F} F$ *son las transformaciones identidad.*

Esto es cierto en nuestro caso dado que si tomamos las transformaciones naturales $\eta_k : id \longrightarrow T_k$ y $\epsilon_k : G_k \longrightarrow id$ tenemos realmente $\eta_k : id \longrightarrow G_k T_k$ y $\epsilon_k : T_k G_k \longrightarrow id$ y las composiciones

$$G_k \xrightarrow{\eta_k G_k} G_k T_k G_k \xrightarrow{G_k \epsilon_k} G_k$$

y

$$T_k \xrightarrow{T_k \eta_k} T_k G_k T_k \xrightarrow{\epsilon_k T_k} T_k$$

ya que $G_k T_k G_k = G_k T_k = G_k$ recordando que $G_k \epsilon_k = id$ y

$$\eta_k G_k : G_k \longrightarrow T_k G_k$$

pero también

$$\eta_k G_k = \eta_k T_k G_k = T_k \eta_k G_k = id_{G_k}$$

dado que $T_k \eta_k = id$. Por lo tanto $\eta_k G_k = id_{G_k}$ y de este modo finalmente la composición

$$G_k \xrightarrow{\eta_k G_k} G_k T_k G_k \xrightarrow{G_k \epsilon_k} G_k$$

se transforma en

$$G_k \xrightarrow{id} G_k \xrightarrow{id} G_k$$

Razonamos igual con

$$T_k \xrightarrow{T_k\eta_k} T_kG_kT_k \xrightarrow{\epsilon_k T_k} T_k$$

para obtener

$$T_k \xrightarrow{id} T_k \xrightarrow{id} T_k$$

ya que

$$\epsilon_k T_k = \epsilon_k G_k T_k = G_k \epsilon_k T_k = id_{T_k}$$

dado que $G_k\epsilon_k = id$ y por lo tanto $\epsilon_k = id_{T_k}$

Con todo esto tenemos $T_k \dashv G_k$.

Análogamente se obtiene $T_{k+1} \dashv G_{k+1}$ mientras que $G_k \dashv T_{k+1}$ se demuestra aplicando el mismo Lema y considerando que las transformaciones naturales

$$id_{\mathcal{C}} \xrightarrow{\eta} T_{k+1}G_k \text{ y } G_kT_{k+1} \xrightarrow{\epsilon} id_{\mathcal{C}}$$

se convierten en

$$id_{\mathcal{C}} \xrightarrow{\eta} T_{k+1} \text{ y } G_k \xrightarrow{\epsilon} id_{\mathcal{C}}$$

y por lo tanto las transformaciones

$$T_{k+1} \xrightarrow{\eta T_{k+1}} T_{k+1}G_kT_{k+1} \xrightarrow{T_{k+1}\epsilon} T_{k+1}$$

y

$$G_k \xrightarrow{G_k\eta} G_kT_{k+1}G_k \xrightarrow{\epsilon G_k} G_k$$

se convierten en

$$T_{k+1} \xrightarrow{id} T_{k+1} \xrightarrow{id} T_{k+1}$$

y

$$G_k \xrightarrow{id} G_k \xrightarrow{id} G_k$$

□

3.5. Extensión de una n-Comprensión

Las transformaciones naturales η_k y ϵ_k dan lugar como en los casos $n = 2, 3$ en [Otto] a extensiones sobre el *cotensor* $\mathbf{n} \multimap Set$. Dichas construcciones se desarrollarán en lo que sigue.

Se va a definir la *extensión de una n-Comprensión* SM $(\mathcal{C}, T_k, G_k, \eta_k, \epsilon_k)$ como la n-Comprensión *SM* $(\mathbf{n} \multimap \mathcal{C}, T_k, G_k, \eta_k, \epsilon_k)$ construida a partir de una 2-transformación natural χ en $Cat(\mathbf{n}, \mathcal{SM}(\mathcal{C}, \mathcal{C}))$. Dicha construcción se realiza a partir de las definiciones siguientes.

Sea $\chi_k = \eta_k \circ \epsilon_k$ el funtor de G_k a T_k. Para χ_k tenemos la igualdad obvia

$$T_k\epsilon_k = G_k\eta_k = \chi_k$$

Veamos por ejemplo cómo puede definirse χ. Para ello tomamos los endofuntores en $\mathcal{C}$ que dan valores constantes en $\mathbf{n}$[7]

$$G_{n-2}...G_kT_0...T_{k-1}$$

para $0 \leq k \leq n-1$.

Notación. Denotaremos $\overline{k}$ por $G_{n-2}...G_kT_0...T_{k-1}$ para $1 \leq k \leq n-2$ con $\overline{n-1} = T_0...T_{n-2}$ y $\overline{0} = G_{n-2}...G_0$.

La asignación χ dada por

$$\chi(k) = \overline{k}$$

$$\chi(m_{k,k+1}) = \overline{k}\chi_k$$

y

$$\chi(f \circ g) = \chi(f) \circ \chi(g)$$

para todo $i = 0, 1, ..., n-2$ y para cualquier par de morfismos f y g en $\mathbf{n}$, nos da la siguiente tabla:

[7]Teniendo en cuenta que, a diferencia de lo que sucede en la Sección 2.4, éstos actúan ahora al revés, es decir, de derecha a izquierda.

$$\mathbf{n} \overset{\chi}{\Longrightarrow} \mathcal{SM}(\mathcal{C},\mathcal{C})$$

$$\begin{array}{ccc}
0 & & \overline{0} \\
\Big\downarrow{\scriptstyle m_{0,1}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \overline{0}\chi_0} \\
1 & & \overline{1} \\
\Big\downarrow{\scriptstyle m_{1,2}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \overline{1}\chi_1} \\
2 & \Longrightarrow & \overline{2} \\
\Big\downarrow{\scriptstyle m_{2,3}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \overline{2}\chi_2} \\
\vdots & & \vdots \\
\Big\downarrow{\scriptstyle m_{n-3,n-2}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \overline{(n-3)}\chi_{n-3}} \\
n-2 & & \overline{(n-2)} \\
\Big\downarrow{\scriptstyle m_{n-2,n-1}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \overline{(n-2)}\chi_{n-2}} \\
n-1 & & \overline{(n-1)}
\end{array}$$

donde $\chi_k : G_k \longrightarrow T_k$.

Debe tenerse en cuenta aquí que χ_i son transformaciones naturales para endofuntores en $\mathcal{C}$ mientras que χ es una 2-transformación natural entre 2-funtores con dominio $\mathbf{n}$, vista como una 2-categoría con los funtores constantes como 2-células, y con codominio la 2-categoría $\mathcal{SM}(\mathcal{C},\mathcal{C})$.

Aplicamos ahora los resultados de la Sección 3.2 y, en particular, del Ejemplo 3.2.26 donde se ha introducido el isomorfismo[8]

$$\mathcal{SM}(\mathcal{C}, \mathbf{n} \multimap \mathcal{C}) \equiv Cat(\mathbf{n}, \mathcal{SM}(\mathcal{C},\mathcal{C}))$$

Para la categoría $\mathbf{n} \multimap \mathcal{C}$ los funtores constantes son cadenas de transformaciones naturales en la forma

$$\overline{k}\chi_k$$

con $1 \leq k \leq n-1$. Esto es, a partir del único $(n-1)-$tuplo de transformaciones naturales

$$[\overline{0}\chi_0, \overline{1}\chi_1, ..., \overline{(n-2)}\chi_{n-2}]$$

[8]Consultar la Sección siguiente para una descripción de los objetos y morfismos de la categoría cotensor $\mathbf{n} \multimap \mathcal{C}$.

en $(\mathcal{C},\mathcal{C})$, que puede verse como la asignación de la 2-transformación natural

$$\chi : \mathbf{n} \Longrightarrow \mathcal{SM}(\mathcal{C},\mathcal{C})$$

para valores constantes en Cat, se puede generar como se verá otra 2-transformación natural

$$\overline{\chi} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{n} \multimap \mathcal{C}$$

en $\mathcal{SM}$ que en el caso de una n-Comprensión SM tiene entre otras la forma que hemos enunciado.

3.6. El cotensor $\mathbf{n} \multimap \mathcal{C}$

Damos ahora una descripción de los objetos y morfismos de la categoría cotensor $\mathbf{n} \multimap \mathcal{C}$ actuando sobre las cadenas de endofuntores constantes, que dan objetos de una n-Comprensión extendida.

Veamos cómo actúa $\overline{\chi}$.

- Sobre un objeto X de $\mathcal{C}$ produce $(n-1)-$tuplos de flechas en la forma

$$\overline{k}X \longrightarrow \overline{k+1}X$$

que realmente son cadenas de longitud $n-1$ como

$$\begin{tikzcd} \overline{0}X \arrow[d, "\overline{0}\chi_0 X"] \\ \overline{1}X \arrow[d, "\overline{1}\chi_1 X"] \\ \vdots \arrow[d, "\overline{n-2}\chi_{n-2} X"] \\ \overline{n-1}X \end{tikzcd}$$

Estos son los objetos de la categoría $\mathbf{n} \multimap \mathcal{C}$ que resultan al aplicar $\overline{\chi}$.

- Sobre una flecha $f : X \longrightarrow Y$ de $\mathcal{C}$ produce tuplos de cuadrados en la forma

$$\begin{tikzcd}
\overline{k}X \arrow[r, "\overline{k}f"] \arrow[d, "\overline{k}\chi_k X"'] & \overline{k}Y \arrow[d, "\overline{k}\chi_k Y"] \\
\overline{k+1}X \arrow[r, "\overline{k+1}f"'] & \overline{k+1}Y
\end{tikzcd}$$

esto es

$$\begin{tikzcd}
\overline{0}X \arrow[r, "\overline{0}f"] \arrow[d, "\overline{0}\chi_0 X"'] & \overline{0}Y \arrow[d, "\overline{0}\chi_0 Y"] \\
\overline{1}X \arrow[r, "\overline{1}f"] \arrow[d, "\overline{1}\chi_1 X"'] & \overline{1}Y \arrow[d, "\overline{1}\chi_1 Y"] \\
\vdots & \vdots \\
{} \arrow[d] & {} \arrow[d] \\
\overline{n-2}X \arrow[r, "\overline{n-2}\chi_{n-2}f"] \arrow[d, "\overline{n-2}\chi_{n-2}X"'] & \overline{n-2}Y \arrow[d, "\overline{n-2}\chi_{n-2}Y"] \\
\overline{n-1}X \arrow[r, "\overline{n-1}f"] & \overline{n-1}Y
\end{tikzcd}$$

Estas son las flechas de $\mathbf{n} \multimap \mathcal{C}$ que resultan al aplicar $\overline{\chi}$.

Todo junto tiene la forma de un diagrama de 2-células como el de la página siguiente

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[d, bend right=50, "\bar{1}"'] \arrow[d, bend left=50, "\bar{0}"] \arrow[d, phantom, "\overset{\bar{0}\chi_0}{\Longrightarrow}"] \\
\mathcal{C} \arrow[d, bend right=50, "\bar{2}"'] \arrow[d, bend left=50, "\bar{1}"] \arrow[d, phantom, "\overset{\bar{1}\chi_1}{\Longrightarrow}"] \\
\mathcal{C}
\end{tikzcd}
$$

$$\vdots$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[d, bend right=50, "\overline{n-1}"'] \arrow[d, bend left=50, "\overline{n-2}"] \arrow[d, phantom, "\overset{\overline{n-2}\chi_{n-2}}{\Longrightarrow}"] \\
\mathcal{C}
\end{tikzcd}
$$

Proposición 3.6.1. *La asignación*

$$\overline{\chi} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{n} \multimap \mathcal{C}$$

es al mismo tiempo un funtor y una 2-transformación natural entre las n-Comprensiones SM $(\mathcal{C}, T_k, G_k, \eta_k, \epsilon_k)$ *y* $(\mathbf{n} \multimap \mathcal{C}, T_k^{\mathbf{n}}, G_k^{\mathbf{n}}, \eta_k^{\mathbf{n}}, \epsilon_k^{\mathbf{n}})$.

Demostración. Probaremos que $\overline{\chi}$ es un funtor demostrando que respeta la composición entre flechas de $\mathcal{C}$, es decir

$$\overline{\chi}(g \circ f) = \overline{\chi}(g) \circ \overline{\chi}(f)$$

para cada $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow Z$ en $\mathcal{C}$. Tomamos para ello los tuplos de cuadrados conmutativos de los funtores constantes en la forma

$$\begin{tikzcd}
\overline{k}X \arrow[r, "\overline{k}f"] \arrow[d, "\overline{k}\chi_k X"'] & \overline{k}Y \arrow[r, "\overline{k}g"] \arrow[d, "\overline{k}\chi_k Y"'] & \overline{k}Z \arrow[d, "\overline{k}\chi_k Z"] \\
\overline{(k+1)}X \arrow[r, "\overline{(k+1)}f"'] & \overline{(k+1)}Y \arrow[r, "\overline{(k+1)}g"'] & \overline{(k+1)}Z
\end{tikzcd}$$

con $1 \leq k \leq n-1$.

Estas cadenas de cuadrados conmutan porque lo hace cada uno de los que las forman, dado que χ_k son transformaciones naturales en $\mathcal{SM}(\mathcal{C},\mathcal{C})$.

Probaremos que $\overline{\chi}$ es una 2-transformación natural, considerando por ejemplo T_k, por medio de la conmutatividad de diagramas en la forma

$$\begin{tikzcd}
T_k X \arrow[r, "T_k f"] \arrow[d, "\overline{\chi}T_k X"'] & T_k Y \arrow[d, "\overline{\chi}T_k Y"] \\
T_k^{\mathbf{n}} X \arrow[r, "T_k^{\mathbf{n}} f"'] & T_k^{\mathbf{n}} Y
\end{tikzcd}$$

para todo $0 \leq k \leq n-2$ y para cada $f : X \longrightarrow Y$ en $\mathcal{C}$. Esto es, de diagramas en la forma

$$\begin{tikzcd}
T_k\bar{j}X \arrow[r, "T_k\bar{j}f"] \arrow[d, "\overline{\chi}T_k\bar{j}\chi_k X"'] & T_k\bar{j}Y \arrow[d, "\overline{\chi}T_k\bar{j}\chi_k Y"] \\
T_k^{\mathbf{n}}\overline{(j+1)}X \arrow[r, "T_k^{\mathbf{n}}\overline{(j+1)}f"'] & T_k^{\mathbf{n}}\overline{(j+1)}Y
\end{tikzcd}$$

para todo $0 \leq j \leq n-2$, que son, en su forma extendida, cubos conmutativos cuyos cuadrados superiores tienen la forma

$$\begin{tikzcd}
T_k\bar{j}X \arrow[r, "T_k\bar{j}f"] \arrow[d, "T_k\bar{j}\chi_k X"'] & T_k\bar{j}Y \arrow[d, "T_k\bar{j}\chi_k Y"] \\
T_k\overline{(j+1)}X \arrow[r, "T_k\overline{(j+1)}f"'] & T_k\overline{(j+1)}Y
\end{tikzcd}$$

y cuyos cuadrados inferiores la forma

$$
\begin{tikzcd}
T_k^{\mathbf{n}}\bar{j}X \arrow[r, "T_k^{\mathbf{n}}\bar{j}f"] \arrow[d, "T_k^{\mathbf{n}}\bar{j}\chi_k X"'] & T_k^{\mathbf{n}}\bar{j}Y \arrow[d, "T_k^{\mathbf{n}}\bar{j}\chi_k Y"] \\
T_k^{\mathbf{n}}\overline{(j+1)}X \arrow[r, "T_k^{\mathbf{n}}\overline{(j+1)}f"'] & T_k^{\mathbf{n}}\overline{(j+1)}Y
\end{tikzcd}
$$

Obtendríamos diagramas análogos si consideramos G_k.

Consideramos entonces la forma de actuar de los endofuntores de coerción sobre $\bar{j}$. Los resultados de dichas actuaciones vienen recogidos en la siguiente tabla generada por los endofuntores T_k y G_k y los constantes en $(\mathcal{C}, T_k, G_k, \eta_k, \epsilon_k)$:[9]

	T_0	T_1	$\cdots$	T_{n-3}	T_{n-2}	G_0	G_1	$\cdots$	G_{n-3}	G_{n-2}
$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\cdots$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\cdots$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\cdots$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\cdots$	$\bar{1}$	$\bar{1}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$		$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$		$\bar{2}$	$\bar{2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\overline{n-3}$	$\overline{n-3}$	$\overline{n-3}$	$\cdots$	$\overline{n-2}$	$\overline{n-3}$	$\overline{n-3}$	$\overline{n-3}$	$\cdots$	$\overline{n-3}$	$\overline{n-3}$
$\overline{n-2}$	$\overline{n-2}$	$\overline{n-2}$	$\cdots$	$\overline{n-2}$	$\overline{n-1}$	$\overline{n-2}$	$\overline{n-2}$	$\cdots$	$\overline{n-3}$	$\overline{n-2}$
$\overline{n-1}$	$\overline{n-1}$	$\overline{n-1}$	$\cdots$	$\overline{n-1}$	$\overline{n-1}$	$\overline{n-1}$	$\overline{n-1}$	$\cdots$	$\overline{n-1}$	$\overline{n-2}$

Esta tabla se deduce de los Teoremas 2.4.5 y 2.4.6. $\square$

Ejemplo 3.6.2. Con $n = 3$ tendríamos una tabla como la siguiente

	T_0	T_1	G_0	G_1
$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Definición 3.6.3. Sean X un objeto en una categoría *SM* $\mathcal{C}$. Llamamos *niveles de X* a las cadenas

[9] La misma tabla tendríamos para $(\mathbf{n} \multimap \mathcal{C}, T_k^{\mathbf{n}}, G_k^{\mathbf{n}}, \eta_k^{\mathbf{n}}, \epsilon_k^{\mathbf{n}})$.

$$
\begin{tikzcd}
X_0 = X \arrow[d] & X_1 = X \arrow[d, "id_X"] & X_2 = X \arrow[d, "id_X"] & \cdots & X_{n-1} = X \arrow[d, "id_X"] \\
\top \arrow[d] & X \arrow[d] & X \arrow[d, "id_X"] & & X \arrow[d, "id_X"] \\
\top \arrow[d] & \top \arrow[d] & X \arrow[d] & & X \arrow[d, "id_X"] \\
\top \arrow[d] & \top \arrow[d] & \top \arrow[d] & & X \arrow[d, "id_X"] \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\top & \top & \top & & X
\end{tikzcd}
$$

en la categoría $\mathbf{n} \multimap \mathcal{C}$.

Todos los objetos X_k con $k = 1, ..., n-1$ pueden generarse a partir de X_0 por medio de las ecuaciones

$$X_k = G_{k-1}X_{k-1}$$

o bien, excluyendo X_{n-1}, por medio de

$$X_k = T_{k+1}X_{k+1}$$

si $k = 0, ..., n-2$.

Definición 3.6.4. Igualmente podría generarse un objeto que denotamos X_{-1} y responde a la cadena $\top \longrightarrow ... \longrightarrow \top$ por medio de

$$X_{-1} = T_0...T_k(X_k)$$

para todo $k = 0, ..., n-2$.

Notar en este punto que los productos tensoriales de elementos de $\mathbf{n}$ con elementos de $\mathcal{C}$ dan los objetos de la Definición 5.2 según la fórmula

$$k \otimes X = X_k$$

con $k \in \mathbf{n}$ y $X \in \mathcal{C}$.

Tomando los funtores T_k y G_k con $0 \leq k \leq n-2$ actuando sobre los objetos $X_0, X_1, ..., X_{n-1}$ en una n-Comprensión *SM* $\mathbf{n} \multimap \mathcal{C}$ tenemos la tabla

	X_{-1}	X_0	X_1	...	X_{n-3}	X_{n-2}	X_{n-1}
T_0	$\top$	$\top$	X_1	...	X_{n-3}	X_{n-2}	X_{n-1}
G_0	$\top$	X_1	X_1	...	X_{n-3}	X_{n-2}	X_{n-1}
T_1	$\top$	X_0	X_0	...	X_{n-3}	X_{n-2}	X_{n-1}
G_1	$\top$	X_0	X_2	...	X_{n-3}	X_{n-2}	X_{n-1}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
G_{n-3}	$\top$	X_0	X_1	...	X_{n-2}	X_{n-2}	X_{n-1}
T_{n-2}	$\top$	X_0	X_1	...	X_{n-3}	X_{n-3}	X_{n-1}
G_{n-2}	$\top$	X_0	X_1	...	X_{n-3}	X_{n-1}	X_{n-1}

Con esta tabla tenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.6.5. *Los objetos $\top$ y X_{n-1} en una n-Comprensión* SM *son puntos fijos para los endofuntores T_i y G_i con $i = 0, ..., n-2$.*

Capítulo 4

Construcciones sintácticas

En el presente Capítulo se va a definir toda la estructura sintáctica que se usará para caracterizar las *clases de Grzegorczyk*. Se utilizará para ello las $n-$Comprensiones extendidas sobre *Set* como un modo de introducir unas determinadas *doctrinas* que recogerán toda la semántica de dichas clases.

Las doctrinas se definirán en base a $n-$Comprensiones con un diagrama para números

$$\top \longrightarrow N_0 \longrightarrow N_0$$

y unos diagramas de recursión que expresan la recursión ramificada.

En este Capítulo se trabajará apoyándose en algunas investigaciones realizadas sobre clases de funciones subrecursivas que contemplan diferentes *niveles de recursión* con la idea de controlarla. La idea de *recursión ramificada*, tal como se entiende en la presente tesis, supone ampliar el concepto de *recursión segura* de [Bellantoni-Cook] a un número de tipos de variables mayor de dos. Se trata de realizar un conteo de las recursiones realizadas en cada paso de la computación de una función, dicho conteo se realiza por medio de los niveles antes citados.

De este modo se obtienen clases equivalentes a las conseguidas por medio de *esquemas de recursión acotada*, como es el caso de las clases introducidas en [Grzegorczyk]. En las siguientes secciones expondremos formalmente todos estos conceptos.

4.1. Las doctrinas $\mathcal{O}^n$

En esta Sección se van a definir, a partir de los conceptos del Capítulo anterior, una serie de *doctrinas*. Entendemos aquí una doctrina como una categoría formada por $2-$funtores, en particular diremos que una doctrina está formada por modelos de *Teorías monoidales de Lawvere* en la $2-$categoría $\mathcal{SM}$ según se verá en la Sección 4.6. Esta intuición se expuso al comienzo de la Sección 3.4 motivando la definición de n-Comprensión.

Dichas doctrinas recogen de forma secuencial la semántica que se necesita para obtener clases de funciones subrecursivas como se verá a continuación.

Definición 4.1.1. Definimos las doctrinas $\mathcal{O}^n$ como aquellas cuyos objetos son n-Comprensiones SM $(\mathcal{C}, T_k, G_k, \eta_k, \epsilon_k)$ con $0 \leq k \leq n-2$

- dotadas de un diagrama unario (llamado *diagrama inicial*)

$$\top \xrightarrow{0} N_0 \xrightarrow{s} N_0$$

  en $\mathcal{C}$ tal que

$$T_0(\top \xrightarrow{0} N_0 \xrightarrow{s} N_0) = \top \xrightarrow{1_\top} \top \xrightarrow{1_\top} \top$$

  y además, si definimos recursivamente para cada $i = 1, 2, ..., n-2$ los objetos N_i por las reglas

$$N_1 = G_0 N_0$$

$$N_{i+1} = G_i N_i$$

  tenemos para cada $i = 0, 1, ..., n-2$ y $j = 0, 1, ..., n-1$

$$T_i N_j = \begin{cases} \top & \text{si } i = j = 0 \\ N_{i-1} & \text{si } i = j \neq 0 \\ N_j & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad G_i N_j = \begin{cases} N_{i+1} & \text{si } i = j \\ N_j & \text{en otro caso} \end{cases}$$

  Con esto podemos generar todos los diagramas iniciales en la forma

$$\top \xrightarrow{0_j} N_j \xrightarrow{s_j} N_j$$

- y cerradas bajo

  - *recursión plana* (RP):
    para todos $g : X \longrightarrow Y$ y $h : N_0 \otimes X \longrightarrow Y$ donde $T_0 X$ y $T_0 Y$ son isomorfos a $\top$ existe un único morfismo $f : N_0 \otimes X \longrightarrow Y$ en

$\mathcal{C}$, que denotaremos por $RP(g,h)$, tal que el siguiente diagrama conmuta[1]

$$\begin{tikzcd} \top \otimes X \arrow[r, "0\otimes X"] \arrow[dr, "g\circ i"'] & N_0 \otimes X \arrow[d, "f"] & N_0 \otimes X \arrow[l, "s\otimes X"'] \arrow[dl, "h"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

- *recursión ramificada segura* en cada nivel k (RRS_k):
  para cada $k = 0, 1, ..., n-2$ y para todos los morfismos

  $$g : X \longrightarrow Y \text{ y } h : Y \longrightarrow Y$$

  donde $T_{k+1}...T_0Y$ es isomorfo a $\top$ existe un único

  $$f : N_{k+1} \otimes X \longrightarrow Y$$

  en $\mathcal{C}$ tal que conmuta el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \top \otimes X \arrow[r, "0\otimes X"] \arrow[d, "i"'] & N_{k+1} \otimes X \arrow[r, "s\otimes X"] \arrow[d, "f"] & N_{k+1} \otimes X \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "g"'] & Y \arrow[r, "h"'] & Y \end{tikzcd}$$

Es importante en este punto destacar varios aspectos de la Definición anterior:

1. los objetos en la doctrina $\mathcal{O}^n$ son entonces n-Comprensiones *SM* con tres tipos de diagramas diferentes y unas condiciones de acotación respecto a los objetos sobre los que éstos diagramas actúan

2. hay tantos objetos en $\mathcal{O}^n$ como categorías *SM* multiplicadas por los posibles $(4n-3)$ tuplos que cumplan las condiciones para que sea n-Comprensión (para una $\mathcal{C}$ que sea una categoría *SM* puede haber distintos tuplos satisfaciendo esas condiciones)

3. para cada $k = 0, 1, ..., n-2$ a través de los diagramas RRS_k podemos medir el anidamiento de las recursiones, ése es el sentido de la condición de acotación sobre Y y el punto de vista que ofrece la presente tesis sobre la relación de las clases de *Grzegorzcyk* y el número de recursiones anidadas.[2]

---

[1] Este es realmente un diagrama de coproducto.

[2] Véase en la Introducción la interpretación dada en [Bellantoni-Niggl] utilizando el concepto de *grado de una función*.

4.2. La doctrina inicial $\mathcal{I}^n$

Se define la categoría inicial de la doctrina $\mathcal{O}^n$ cuyos objetos tendrán la forma de productos tensoriales de diferentes potencias de N_i con $i \leq n$.

Proposición 4.2.1. *La doctrina $\mathcal{O}^n$ está dotada de una categoría inicial.*

Demostración. Ver [Otto] página 25. □

Definición 4.2.2. Llamaremos *categoría inicial de la doctrina $\mathcal{O}^n$* a la $n-$Comprensión *SM* $(\mathcal{I}^n, T_k, G_k, \eta_k, \epsilon_k)$ en $\mathcal{O}^n$.[3]

Damos a continuación una descripción de la categoría $(\mathcal{I}^n, T_k, G_k, \eta_k, \epsilon_k)$ en forma recursiva, mientras que una descripción en términos de *Universos de Herbrand* puede encontrarse en el Apéndice C.1.

Los objetos de $\mathcal{I}^n$ son los siguientes, donde el índice del nivel se mide por la profundidad del árbol de construcción del objeto en función del producto tensorial:

1. Nivel 0: $\top, N_0, \ldots, N_{n-1}$.
2. Nivel 1: $X \otimes Y$, donde X, Y están en el nivel 0.
3. Nivel $k+1$: $X \otimes Y$, donde X, Y están en niveles menores o iguales que k y uno de ellos está en el nivel k.

En concreto cualquier objeto de $\mathcal{I}^n$ es isomorfo (utilizando únicamente composiciones de los isomorfismos naturales a, d, i y s y sus inversas) a un objeto de la forma

$$N_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \otimes N_{n-2}^{\alpha_{n-2}} \otimes \cdots \otimes N_0^{\alpha_0},$$

donde $X^0 = \top$, $X^{k+1} = X \otimes X^k$.[4]

Las flechas de $\mathcal{I}^n$ son las siguientes:

1. Nivel 0:

   a) Las identidades de los objetos de nivel 0: $1_\top, 1_{N_0}, \ldots, 1_{N_{n-1}}$.

   b) Las funciones 0_j y s_j para $j = 0, 1, \ldots, n-1$ donde

   $$0_{m+1} = G_m(0_m) \text{ y } s_{m+1} = G_k(s_m)$$

   para $m = 0, \ldots, n-2$.

[3] En adelante nos referiremos a ella de este modo pero también como $\mathcal{I}^n$.

[4] Esta forma podra simplificarse eliminando todas las ocurrencias de $\top$, aceptando que cuando se elimina todo, se obtiene $\top$.

c) Las funciones procedentes de todas las transformaciones naturales generadas por ϵ_k, η_k, G_k y T_k que pueden reducirse a todas las obtenidas por composición a partir de

$\eta_0(N_0) : N_0 \longrightarrow \top; \epsilon_k(N_k) : N_{k+1} \longrightarrow N_k$, para $k = 0, 1, \ldots, n-2$

2. Nivel $k+1$:

a) Las identidades de los objetos de nivel k.[5]

b) Las funciones $0_j \circ s_j^k$ y s_j^{k+1} para $j = 0, 1, \ldots, n-2$ donde $s_j^1 = s_j$ y $s_j^{m+1} = s_j^m \circ s_j$.

c) Los productos tensoriales de dos flechas de nivc

d) el menor o igual que k cuando al menos una de ellas es del nivel k.

e) Las composiciones posibles de dos flechas de nivel menor o igual que k que no sean igual que alguna de las flechas de esos niveles.

f) Las flechas que surgen de los isomorfismos naturales a, d y s y sus inversas[6] al aplicarlos a objetos del nivel k, siempre que haya objetos en el nivel k que tengan la forma $X \otimes (Y \otimes Z)$ para el caso de a y su inversa o de la forma $X \otimes Y$ para las restantes transformaciones.

g) Las flechas que surgen de las aplicaciones de los endofuntores id, T_j y G_j con $0 \leq j < n-1$ sobre los morfismos del nivel k.

h) Las funciones obtenidas al aplicar el diagrama RP a funciones $g : X \longrightarrow Y$ y $h : N_0 \otimes X \longrightarrow Y$ que ocurren en un nivel menor o igual que k y al menos una de ella ocurre en el nivel k, donde $T_0 X$ es isomorfo a $T_0 Y$ y a $\top$.[7]

i) Las funciones obtenidas al aplicar el diagrama RRS de nivel m, para $m = 0, \ldots, n-2$ a funciones $g : X \longrightarrow Y$ y $h : Y \longrightarrow Y$ que ocurren en un nivel menor o igual que k y al menos una de ella ocurre en el nivel k, donde $T_m T_{m-1} \cdots T_0 Y$ es isomorfo a $\top$.[8]

Los endofuntores de $\mathcal{I}^n$ son los siguientes:

[5]No son necesarias ya que son idénticas a productos tensoriales de flechas identidad de objetos no generados usando $\otimes$.

[6]No es necesario aplicar el isomorfismo i ya que es definible a partir de d y s.

[7]Es decir, X e Y son productos tensoriales construidos a partir de $\top$ y/o N_0.

[8]Es decir Y es un producto tensorial construido a partir de $\top, N_0, \ldots, N_m$.

1. Nivel 0:

    a) El endomorfismo identidad id.

    b) El endomorfismo $\otimes$.

    c) Los endomorfismos T_k, G_k para $k = 0, \ldots, n-2$ y todas sus composiciones (el conjunto es finito y con el mismo número de elementos como funciones monótonas de n en n).

2. Nivel $k+1$:

    Los obtenidos al aplicar el producto tensorial a dos endofuntores de niveles menores uno de los cuales debe pertenecer al nivel k.

Las transformaciones naturales:

1. Nivel 0:

    a) Los isomorfismos naturales a, s, d e i

    b) Las transformaciones naturales entre los endomorfismos generados por las T_k y G_k.

2. Nivel $k+1$:

    Las obtenidas al aplicar el producto tensorial a dos transformaciones de niveles menores una de las cuales debe pertenecer al nivel k.

4.3. $\mathcal{I}^n$ como categoría simétrica monoidal cartesiana

En esta Sección se va a demostrar que la categoría inicial $\mathcal{I}^n$ es cartesiana. La demostración se basa en los resultados de [Román-Paré] para la categoría *SM* inicial con *Objeto de Números Naturales a la Izquierda*.

Las propiedades de dicha categoría y las de $\mathcal{I}^n$ son muy similares dado que el esquema utilizado allí es el mismo que el utilizado en la presente tesis sin la condición de acotación sobre los objetos que conllevan los diagramas *RRS* aquí introducidos.

Para terminar se demostrará la equivalencia de dicho esquema con otros ampliados que reproducen con mayor fidelidad los esquemas introducidos en [Grzegorczyk] donde se definen las clases que queremos caracterizar. Estos nuevos esquemas conllevan el uso de *morfismos de proyección* y de la operación *tuplo* sobre los morfismos de $\mathcal{I}^n$ y por lo tanto una estructura cartesiana.

Definición 4.3.1. Una *categoría simétrica monoidal cartesiana* (*categoría SM cartesiana* en adelante) es una categoría simétrica monoidal cuya estructura monoidal viene dada por el producto cartesiano.

De la Definición anterior se extrae el hecho de que la unidad del producto tensorial es un objeto terminal de la categoría.

Proposición 4.3.2. *Toda categoría SM cartesiana está dotada para cada objeto X de* morfismos duplicación *en la forma $\delta_X : X \to X \otimes X$ y* morfismos de borrado *en la forma $\tau_X : X \to \top$.*

Observación. Podemos pensar en la interpretación *informática* de los morfismos δ y τ como *el que duplica un dato* y *el que borra un dato* respectivamente.

Estos morfismos conllevan una estructura de *comonoide* sobre cualquier objeto de la categoría. Estos conceptos se estudian con más detalle en el Apéndice C.3.

Teorema 4.3.3. *Si $(\mathcal{C}, \otimes, \top, a, i, d)$ es una categoría* SM, *$\triangle$ el funtor*

$$\triangle : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C} \otimes \mathcal{C}$$

tal que $\triangle(X) = X \otimes X$ y t el funtor

$$t : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$$

tal que $t(X) = \top$ para todo objeto X de $\mathcal{C}$ con transformaciones naturales monoidales

$$\delta : 1_{\mathcal{C}} \longrightarrow \triangle$$

y

$$\tau : 1_{\mathcal{C}} \longrightarrow t$$

tales que las composiciones

$$X \xrightarrow{\delta_X} X \otimes X \xrightarrow{\tau_X \otimes X} \top \otimes X \xrightarrow{i} X$$

y

$$X \xrightarrow{\delta_X} X \otimes X \xrightarrow{X \otimes \tau_X} X \otimes \top \xrightarrow{d} X$$

son los morfismos identidad para todo objeto X en $\mathcal{C}$, entonces $\mathcal{C}$ es SM *cartesiana.*

De este modo las componentes naturales de δ y τ en cada objeto son los morfismos *duplicación* y *borrado* respectivamente.

Observación. Desde un punto de vista informático el Teorema anterior dice esencialmente que cualquier categoría *SM* es *SM* cartesiana si podemos duplicar y borrar datos e, informalmente: *duplicar y posteriormente borrar un mismo dato es lo mismo que no hacer nada*.

En la categoría $\mathcal{I}^n$ podemos definir los morfismos duplicación y borrado de manera que se satisfagan las hipótesis del Teorema 4.3.3.

Los morfismos de borrado $\tau_X : X \longrightarrow \top$ en $\mathcal{I}^n$ se definen recursivamente considerando:

1. si $X = \top$ tomamos $\tau_\top = 1_\top$
2. si $X = N_0$ tomamos $\tau_{N_0} = \eta_0(N_0)$
3. si $X = N_k$ con $k = 1, ..., n-1$ por recursión plana tenemos

$$\begin{tikzcd}
\top \otimes \top \arrow[r, "0_k \otimes \top"] \arrow[dr, "i"'] & N_k \otimes \top \arrow[r, "s_k \otimes \top"] \arrow[d, "f"] & N_k \otimes \top \arrow[d, "f"] \\
 & \top \arrow[r] & \top
\end{tikzcd}$$

   entonces tomamos $\tau_{N_k} = f \circ d^{-1}$

4. si $X = Y \otimes Z$ con Y y Z en alguno de los casos anteriores entonces tenemos igualmente el morfismo de borrado tomando

$$\tau_X X = \tau_X Y \otimes \tau_X Z$$

De esta manera obtenemos los morfismos de borrado para cualquier objeto de $\mathcal{I}^n$.

Los morfismos de duplicación δ_{N_k} se obtienen por los diagramas

$$\begin{tikzcd}
\top \otimes \top \arrow[r, "0_{k+1} \otimes \top"] \arrow[dr, "0_k \otimes 0_k"'] & N_{k+1} \otimes \top \arrow[r, "s_{k+1} \otimes \top"] \arrow[d, "f"] & N_{k+1} \otimes \top \arrow[d, "f"] \\
 & N_k \otimes N_k \arrow[r, "s_k \otimes s_k"'] & N_k \otimes N_k
\end{tikzcd}$$

para todo $k = 1, ..., n-2$, tomando $\delta_{N_{k+1}} = G_k(f \circ d^{-1})$.

El caso de δ_{N_0} cuando $n > 2$ se obtiene tomando

$$\delta_{N_0} = T_0(f \circ d^{-1})$$

cuando $k = 0$ en el diagrama anterior.

Cuando $n = 2$ se da el problema de que no disponemos ni de un diagrama que nos lo proporcione ni unos funtores de coerción que nos permitan bajar un nivel el objeto sobre el que actúa.

Con estas definiciones tenemos un comonoide coconmutativo a partir de cada objeto X de $\mathcal{I}^n$ cuando $n > 2$ (véase el Apéndice C.3). De este modo, al trabajar en $\mathcal{I}^n$, estamos realmente trabajando en una categoría de comonoides coconmutativos.

Ahora estamos en condiciones de definir en $\mathcal{I}^n$ los *morfismos proyección* y la operación *tuplo* entre morfismos de $\mathcal{I}^n$ siempre que $n > 2$.

Definición 4.3.4. Para todos X, Y en $\mathcal{I}^n$ con $n > 2$ los diagramas

$$X \otimes Y \xrightarrow{X \otimes \tau_Y} X \otimes \top \xrightarrow{d} X$$

y

$$X \otimes Y \xrightarrow{\tau_X \otimes Y} \top \otimes Y \xrightarrow{i} Y$$

cuyas composiciones dan respectivamente *el morfismo primera proyección*, que denotamos por π_0, y *el morfismo segunda proyección*, que denotamos por π_1.

Definición 4.3.5. Sean $f : X \longrightarrow Y$ y $g : X \longrightarrow Z$ dos morfismos en $\mathcal{I}^n$. Denominamos *tuplo de f y g*, y lo denotamos por (f, g),[9] al morfismo que se obtiene de la composición

$$X \xrightarrow{\delta_X} X \otimes X \xrightarrow{f \otimes g} Y \otimes Z$$

como

$$(f \otimes g) \circ \delta_X = (f, g)$$

Con estas definiciones se prueba en el Apéndice C.3 que $\mathcal{I}^n$ con $n > 2$ es cartesiana y se da la expresión del producto en términos de los morfismos δ_X y τ_X para un objeto X en $\mathcal{I}^n$.[10]

[9] En adelante expresaremos (f, g) simplemente por f, g cuando no sean necesarios los paréntesis.

[10] De hecho el resultado que se demuestra es que la categoría de comonoides coconmutativos de cualquier categoría *SM* es cartesiana.

4.4. Esquemas de recursión acotada

En esta Sección probamos que ciertos diagramas que utilizamos en las diferentes doctrinas son un caso particular de otros utilizados en descripciones de las clases de la *Jerarquía de Grzegorzcyk* mientras que los recíprocos, que probarían la equivalencia de todos ellos, sólo es cierta bajo ciertas condiciones de acotación. Esta intuición se explica en lo que sigue.

Denominamos *esquema de recursión ramificada segura* (o *esquema RRS*) en $\mathcal{I}^n$ con $n > 2$ al dado por la siguiente Definición:

Definición 4.4.1. Para todos morfismos $g : X \longrightarrow Y$ y $h : Y \longrightarrow Y$ con $T_k...T_0Y$ isomorfo a $\top$ existe un único $f : N_{k+1} \otimes X \longrightarrow Y$ en $\mathcal{I}^n$ con $n > 2$ tal que

$$\begin{tikzcd}
\top \otimes X \arrow[r, "0_{k+1}\otimes X"] \arrow[d, "i"'] & N_{k+1} \otimes X \arrow[r, "s_{k+1}\otimes X"] \arrow[d, "f"] & N_{k+1} \otimes X \arrow[d, "f"] \\
X \arrow[r, "g"'] & Y \arrow[r, "h"'] & Y
\end{tikzcd}$$

conmuta. Expresamos $RRS_k(g, h) = f$.

Denominamos *esquema de recursión ramificada segura parametrizada* (o *esquema RRSP*) en $\mathcal{I}^n$ con $n > 2$ al dado por la siguiente Definición:

Definición 4.4.2. Para todos morfismos $g : X \longrightarrow Y$ y $h : X \otimes Y \longrightarrow Y$ con $T_k...T_0Y$ isomorfo a $\top$ existe un único morfismo $f : N_{k+1} \otimes X \longrightarrow Y$ en $\mathcal{I}^n$ con $n > 2$ tal que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\top \otimes X \arrow[r, "0_{k+1}\otimes X"] \arrow[d, "i"'] & N_{k+1} \otimes X \arrow[r, "s_{k+1}\otimes X"] \arrow[d, "{\pi_1, f}"] & N_{k+1} \otimes X \arrow[d, "f"] \\
X \arrow[r, "{id, g}"'] & X \otimes Y \arrow[r, "h"'] & Y
\end{tikzcd}$$

conmuta. Expresamos $RRSP_k(g, h) = f$.

Teorema 4.4.3. *Toda función definida por el esquema RRS puede definirse usando el esquema RRSP.*[11]

Demostración. Ver el Apéndice C.4. □

[11] Esto es tanto como asegurar que el esquema RRS es un caso particular del esquema $RRSP$.

El recíproco sólo es cierto bajo ciertas condiciones tal como se muestra a continuación.

Denominamos *esquema RRSP acotado* en $\mathcal{I}^n$ con $n > 2$ al dado por la siguiente Definición:

Definición 4.4.4. Para todos morfismos $g : X \longrightarrow Y$ y $h : X \otimes Y \longrightarrow Y$ con $T_k ... T_0 X$ y $T_k ... T_0 Y$ isomorfos a $\top$ existe un único $f : N_{k+1} \otimes X \longrightarrow Y$ en $\mathcal{I}^n$ con $n > 2$ tal que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\top \otimes X \arrow[r, "0_{k+1} \otimes X"] \arrow[d, "i"'] & N_{k+1} \otimes X \arrow[r, "s_{k+1} \otimes X"] \arrow[d, "\pi_1, f"] & N_{k+1} \otimes X \arrow[d, "f"] \\
X \arrow[r, "id, g"'] & X \otimes Y \arrow[r, "h"'] & Y
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Teorema 4.4.5. *Toda función definida usando el esquema RRSP acotado puede definirse usando el esquema RRS.*

Demostración. Ver el Apéndice C.4. $\square$

Denominamos *esquema de recursión dependiente segura* (o *esquema RDS*) en $\mathcal{I}^n$ con $n > 2$ al dado por la siguiente Definición:

Definición 4.4.6. Para todos los morfismos $g : X \longrightarrow Y$ y $h : (N_{k+1} \otimes X) \otimes Y \longrightarrow Y$ donde $T_k ... T_0 Y$ es isomorfo a $\top$ existe un único $f : N_{k+1} \otimes X \longrightarrow Y$ en $\mathcal{I}^n$ con $n > 2$ tal que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\top \otimes X \arrow[r, "0_{k+1} \otimes X"] \arrow[dr, "(0_{k+1} \otimes X), g \circ \pi_1"'] & N_{k+1} \otimes X \arrow[r, "s_{k+1} \otimes X"] \arrow[d, "id, f"] & N_{k+1} \otimes X \arrow[d, "f"] \\
 & (N_{k+1} \otimes X) \otimes Y \arrow[r, "h"'] & Y
\end{tikzcd}$$

conmuta. Expresamos $RDS_k(g, h) = f$.

Teorema 4.4.7. *Toda función definida usando el esquema RRS puede definirse usando el esquema RDS.*

Demostración. Ver el Apéndice C.4. $\square$

Por último tenemos:

Teorema. *Toda función definida usando el esquema RRPS puede definirse usando el esquema RDS.*

Demostración. Ver el Apéndice C.4. $\square$

4.5. Las doctrinas $\mathcal{A}^n$

Introducimos a continuación las doctrinas $\mathcal{A}^n$ para las cuales las doctrinas $\mathcal{O}^n$ son un caso particular. En concreto, $\mathcal{A}^n$ son aquellas doctrinas cuyas n-Comprensiones SM contienen una clase de objetos cerrada bajo el producto cartesiano.[12]Las doctrinas $\mathcal{A}^n$ además están cerradas respecto a los diagramas RDS definidos en la Sección anterior, cuando X e Y son objetos cartesianos, y que como hemos visto son más generales que los RRS bajo los que estaban cerradas las doctrinas $\mathcal{O}^n$.

Denotamos en la siguiente Definición por $\otimes$ igualmente al producto cartesiano en $\mathcal{C}$ y por $\top$ a la unidad de ese producto, mientras que π_0 y π_1 denotan las proyecciones primera y segunda y f, g es la operación *tuplo* de morfismos en $\mathcal{C}$. Véase la Sección 4.3.

Definición 4.5.1. Definimos las doctrinas $\mathcal{A}^n$ como aquellas cuyos objetos son n-Comprensiones SM $(\mathcal{C}, T_k, G_k, \eta_k, \epsilon_k)$ con $0 \leq k \leq n-2$

- dotadas de un diagrama unario (llamado *diagrama inicial*)

$$\top \xrightarrow{0} N_0 \xrightarrow{s} N_0$$

en $\mathcal{C}$ tal que

$$T_0(\top \xrightarrow{0} N_0 \xrightarrow{s} N_0) = \top \xrightarrow{1_\top} \top \xrightarrow{1_\top} \top$$

y además, si definimos recursivamente para cada $i = 1, 2, ..., n-2$ los objetos N_i por las reglas

$$N_1 = G_0 N_0$$

$$N_{i+1} = G_i N_i$$

tenemos para cada $i = 0, 1, ..., n-2$ y $j = 0, 1, ..., n-1$

$$T_i N_j = \begin{cases} \top & \text{si } i = j = 0 \\ N_{i-1} & \text{si } i = j \neq 0 \\ N_j & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad G_i N_j = \begin{cases} N_{i+1} & \text{si } i = j \\ N_j & \text{en otro caso} \end{cases}$$

con $1 \leq j \leq n-2$. Con esto podemos generar todos los diagramas iniciales en la forma

$$\top \xrightarrow{0_j} N_j \xrightarrow{s_j} N_j$$

[12]Esto es, donde la operación tensor es además un producto cartesiano. Véase la Sección 4.3 para estos conceptos.

- cerradas bajo

  - *recursión plana* (RP):
    para todos $g : X \longrightarrow Y$ y $h : N_0 \otimes X \longrightarrow Y$ donde T_0X y T_0Y son isomorfos a $\top$ para cada X e Y existe un único morfismo $f : N_0 \otimes X \longrightarrow Y$ en $\mathcal{C}$, que denotaremos por $RP(g,h)$, tal que el siguiente diagrama conmuta[13]

$$\begin{tikzcd} \top \otimes X \arrow[r, "0\otimes X"] \arrow[dr, "g\circ\pi_1"'] & N_0 \otimes X \arrow[d, "f"] & N_0 \otimes X \arrow[l, "s\otimes X"'] \arrow[dl, "h"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

  - *recursión ramificada segura* en cada nivel k (RRS_k):
    para cada $k = 0, 1, ..., n-2$ y para todos los morfismos

$$g : X \longrightarrow Y \text{ y } h : Y \longrightarrow Y$$

    donde $T_k...T_0Y$ es isomorfo a $\top$ existe un único

$$f : N_{k+1} \otimes X \longrightarrow Y$$

    en $\mathcal{C}$ tal que conmuta el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \top \otimes X \arrow[r, "0\otimes X"] \arrow[d, "i"'] & N_{k+1} \otimes X \arrow[r, "s\otimes X"] \arrow[d, "f"] & N_{k+1} \otimes X \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "g"'] & Y \arrow[r, "h"'] & Y \end{tikzcd}$$

- y donde para cualquier par de objetos X e Y en $\mathcal{C}$ en la forma

$$\bigotimes_{i=0}^{n-1} N_i^{\alpha_i}$$

  el producto tensorial $X \otimes Y$ es también cartesiano (llamamos a estos objetos *cartesianos*)

- para los objetos cartesianos las n-Comprensiones $(\mathcal{C}, T_k, G_k, \eta_k, \epsilon_k)$ también están cerradas bajo el esquema de *recursión dependiente segura* en cada nivel k (RDS_k):

[13] Este es realmente un diagrama de coproducto.

para cada $k = 0, 1, ..., n-2$ y para todos los morfismos

$$g : X \longrightarrow Y \text{ y } h : (N_{k+1} \otimes X) \otimes Y \longrightarrow Y$$

donde $T_k...T_0Y$ es isomorfo a $\top$ y X e Y son objetos cartesianos existe un único

$$f : N_{k+1} \otimes X \longrightarrow Y$$

en $\mathcal{C}$ tal que conmuta el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\top \otimes X \arrow[r, "0_{k+1} \otimes X"] \arrow[dr, "(0_{k+1} \otimes X), g \circ \pi_1"'] & N_{k+1} \otimes X \arrow[r, "s_{k+1} \otimes X"] \arrow[d, "id, f"] & N_{k+1} \otimes X \arrow[d, "f"] \\
 & (N_{k+1} \otimes X) \otimes Y \arrow[r, "h"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Al igual que $\mathcal{O}^n$ la doctrina $\mathcal{A}^n$ está dotada de una doctrina inicial que denotaremos por $\mathcal{J}^n$. Su descripción es la misma que la de $\mathcal{I}^n$ excepto que en el nivel $k+1$ cambiamos las *funciones generadas por RRS* por *funciones generadas por RDS*. Los objetos de $\mathcal{I}^n$ y $\mathcal{J}^n$ son los mismos, todas las flechas de $\mathcal{I}^n$ son flechas de $\mathcal{J}^n$, todos los endomorfismos y transformaciones naturales son iguales.

4.6. *Set* como doctrina $\mathcal{A}^n$

En la presente Sección se va a estudiar un ejemplo importante de doctrina como las definidas en la Sección anterior. *Set* no solo satisface las condiciones que hacen de ella una doctrina $\mathcal{A}^n$ sino que es un caso importante puesto que se utilizará en el capítulo siguiente para la caracterización de clases de funciones subrecursivas.

Si consideramos *Set* como categoría *SM* (en realidad *SM cartesiana* con el producto tensorial dado por $(\times, 1)$) podemos considerar el 2-funtor *SM*

$$(\mathbf{n}, T_k^{\mathbf{n}}, G_k^{\mathbf{n}}, \eta_k^{\mathbf{n}}, \epsilon_k^{\mathbf{n}}) \longrightarrow (Set, T_k, G_k, \eta_k, \epsilon_k)$$

como un modelo entre n-Comprensiones *SM*.

Definición 4.6.1. Sean $\mathbb{N}_k = \{(k, n)/n \in \mathbb{N}\}$ con $k = 0, 1, ..., n-1$. Cada par (k, n) lo denotaremos por n_k.

Veamos cómo puede definirse una doctrina $\mathcal{A}^n$ a partir de la categoría *SM Set*:

De aquí en adelante k toma los valores $0, ..., n-2$. Sea $s_k(n_k) = (n+1)_k$. Para cada $n_k \in \mathbb{N}_k$ tenemos que s_k es la función sucesor en $\mathbb{N}_k$.

Sea T_k el endofuntor en *Set* definido por

$$T_k X = \begin{cases} \emptyset & \text{si } k = 0 \text{ y } X = (0, n) \text{ con } n \in \mathbb{N} \\ 1 & \text{si } k = 0 \text{ y } X = \mathbb{N}_0 \\ (k-1, n) & \text{si } k \neq 0 \text{ y } X = (k, n) \text{ con } n \in \mathbb{N} \\ \mathbb{N}_{k-1} & \text{si } k \neq 0 \text{ y } X = \mathbb{N}_k \\ T_k Y \otimes T_k Z & \text{si } X = Y \otimes Z \\ X & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Análogamente se define el endofuntor G_k por

$$G_k X = \begin{cases} (k+1, n) & \text{si } X = (k, n) \text{ con } n \in \mathbb{N} \\ \mathbb{N}_{k+1} & \text{si } X = \mathbb{N}_k \\ G_k Y \otimes G_k Z & \text{si } X = Y \otimes Z \\ X & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Con esto puede demostrarse, de acuerdo con la Definición 4.1.1, que $(Set, T_k, G_k, \eta_k, \epsilon_k)$ es una n-Comprensión *SM*.

Definición 4.6.2. La doctrina Set^n es aquella cuyos objetos son n-Comprensiones *SM cartesianas* $(Set, T_k, G_k, \eta_k, \epsilon_k)$ con $0 \leq k \leq n-2$

- dotadas de un diagrama unario (llamado *diagrama inicial*)[14]

  $$1 \xrightarrow{0} \mathbb{N}_0 \xrightarrow{s} \mathbb{N}_0$$

  en *Set* tal que

  $$T_0(1 \xrightarrow{0} \mathbb{N}_0 \xrightarrow{s} \mathbb{N}_0) = 1 \xrightarrow{id} 1 \xrightarrow{id} 1$$

  y entonces tenemos todos los diagramas:[15]

  $$1 \xrightarrow{0_j} \mathbb{N}_j \xrightarrow{s_j} \mathbb{N}_j$$

[14] 0 es en este caso la función constantemente igual a cero y s es la función que, dado un númeor natural, devuelve su siguiente.

[15] Donde 0_j y s_j son las copias de las funciones cero y sucesor en cada nivel $\mathbb{N}_j$.

- y cerradas bajo
  - *recursión plana* (RP) análoga a 4.5.1 y
  - *recursión ramificada segura* en cada nivel k (RDS_k) análoga a 4.5.1.

4.7. *Cobertura de Freyd* de una doctrina

La *cobertura de Freyd*, construcción categorial que usaremos como técnica para probar determinadas propiedades de las construcciones sintácticas, es un caso particular de un concepto más general que introducimos en la siguiente Definición.

Definición 4.7.1. Dado un funtor $\Gamma : \mathcal{C} \longrightarrow Set$ llamamos *adherencia de Artin* a la categoría coma ${}^{Set}/_{\Gamma}$ generada a partir de Γ:

- cuyos objetos son 3-tuplos (X, f, U) donde
  - X es un conjunto
  - U es un objeto de $\mathcal{C}$
  - f es una función $X \longrightarrow \Gamma U$
- cuyos morfismos entre los objetos (X, f_1, U) y (Y, f_2, V) son cuadrados conmutativos

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h_1"] \arrow[d, "f_1"'] & Y \arrow[d, "f_2"] \\ \Gamma U \arrow[r, "\Gamma h_2"'] & \Gamma V \end{tikzcd}$$

  esto es, pares (h_1, h_2) donde $X \xrightarrow{h_1} Y$ y $U \xrightarrow{h_2} V$.

Definición 4.7.2. Si $\mathcal{C}$ es una categoría con un objeto terminal 1 su *cobertura de Freyd* es la adherencia de Artin para el funtor $\Gamma = \mathcal{C}(1, -)$.

Dado que hemos definido una doctrina (entendida como una 2-categoría) podemos considerar la teoría algebraica en la que ésta se inscribe. En particular consideraremos la *Teoría Algebraica de Lawvere* bajo la cual se define la doctrina aquí introducida. Expresamos así el modo categorial de construir un álgebra universal para categorías con una cierta propiedad (ser simétrica monoidal en nuestro caso).

Definición 4.7.3. Una *Teoría monoidal de Lawvere* es una categoría monoidal $(\mathcal{X}, \otimes, \top)$ en la cual cada objeto es isomorfo a un producto tensorial finito $\bigotimes_{j=0}^{n} X^j$ de un objeto distinguido X denominado el *objeto genérico de la teoría* $\mathcal{X}$.

Definición 4.7.4. Un *homomorfismo de las teorías monoidales* $\mathcal{X}$ y $\mathcal{X}'$ es un funtor que preserva la estructura monoidal.

Definición 4.7.5. Sea $(\mathcal{C}, \otimes, \top)$ una categoría monoidal y sea $(\mathcal{X}, \otimes, \top)$ una Teoría monoidal de Lawvere. Un *modelo de* $\mathcal{X}$ *en* $(\mathcal{C}, \otimes, \top)$ es un funtor $\mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{C}$ que preserva la estructura monoidal y un *homomorfismo entre modelos de* $\mathcal{X}$ es una transformación natural entre esos funtores.

A partir de este momento, y a lo largo de esta Sección, todo lo que se referiera a $\mathcal{J}^n$ valdrá también para $\mathcal{I}^n$.

Los morfismos en $\mathcal{J}^n$ que denominamos *formales*, por su parecido con los términos en los lenguajes formales, pueden identificarse con programas generados en dicha categoría. Para dar una descripción de cuáles son esos morfismos consideraremos el *modelo inicial* de la Teoría monoidal de Lawvere que hemos definido.

Denominaremos *modelo estandar* al modelo en $n \multimap Set$ de la categoría inicial $\mathcal{J}^n$.

Definición 4.7.6. El *modelo estandar de los morfismos formales* es el funtor Γ_n expresado por el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{J}^n \arrow[rr, "\Gamma_n"] \arrow[dr, "\overline{\chi}"'] & & n \multimap Set \\
& n \multimap \mathcal{J}^n \arrow[ur, "n \multimap \Gamma"'] &
\end{tikzcd}$$

esto es

$$\Gamma_n = (n \multimap \Gamma) \circ \overline{\chi}$$

donde Γ es el funtor

$$\Gamma : \mathcal{J}^n \longrightarrow Set$$

definido por $\Gamma X = \mathcal{J}^n(\top, X)$ y $\Gamma f = f \circ -$.

Teniendo en cuenta que el funtor Γ_n actúa sobre los objetos $\top$ y N_{n-1} de $\mathcal{J}^n$ según[16]

$$\Gamma_n \top = 1 \longrightarrow 1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow 1$$

[16]Ver el Apéndice C.2.

y

$$\Gamma_n N_{n-1} = \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathbb{N}$$

donde las flechas son las identidades, sus expresiones sobre los elementos de $\mathcal{J}^n$ son:[17]

- sobre los objetos N_j de $\mathcal{J}^n$ para $0 \leq j \leq n-2$ tenemos

  $$\Gamma_n N_j = [(n \multimap \Gamma) \circ \overline{\chi}](N_j)$$

  que es igual a $n \multimap \Gamma$ aplicado a[18]

  $$\begin{tikzcd}
  \overline{0}N_j \arrow[d] \\
  \overline{1}N_j \arrow[d] \\
  {} \\
  \vdots \\
  {} \arrow[d] \\
  \overline{n-2}N_j \arrow[d] \\
  \overline{n-1}N_j
  \end{tikzcd}$$

[17] Usaremos a partir de aquí la notación $\overline{k}$ establecida en la Sección 3.5.

[18] Debe notarse aquí que se da la igualdad por casos siguiente:

$$\overline{k}N_j = \begin{cases} \top & \text{si } 0 \leq j \leq k-1 \\ N_{n-1} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y que nos proporciona[19]

$$\begin{tikzcd}
\overline{0}\mathbb{N}_j \arrow[d] \\
\overline{1}\mathbb{N}_j \arrow[d] \\
\vdots \arrow[d] \\
\overline{n-2}\mathbb{N}_j \arrow[d] \\
\overline{n-1}\mathbb{N}_j
\end{tikzcd}$$

Esto es al mismo tiempo un objeto en $n \multimap Set$ y una composición de funciones en Set.[20]

- sobre los morfismos $f : N_k \longrightarrow N_j$ de $\mathcal{J}^n$ para $1 \leq k, j \leq n-2$ viene representado por cuadrados conmutativos en la forma

$$\Gamma_n f = [(n \multimap \Gamma) \circ \overline{\chi}](f) = (n \multimap \Gamma)(\overline{\chi}N_k \longrightarrow \overline{\chi}N_j)$$

[19] Y se da la igualdad:

$$\bar{k}\mathbb{N}_j = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq j \leq k-1 \\ \mathbb{N}_{n-1} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

[20] En términos de secuencias de 1 y $\mathbb{N}$ tendríamos $n-1$ series de cuadrados conmutativos.

que es igual a $n \multimap \Gamma$ aplicado a

$$
\begin{tikzcd}
\bar{0}N_k \arrow[r, "\bar{0}f"] \arrow[d, "\bar{0}\chi_0 N_k"'] & \bar{0}N_j \arrow[d, "\bar{0}\chi_0 N_j"] \\
\bar{1}N_k \arrow[r, "\bar{1}f"] \arrow[d, "\bar{1}\chi_1 N_k"'] & \bar{1}N_j \arrow[d, "\bar{1}\chi_1 N_j"] \\
{} & {} \\
\vdots & \vdots \\
{} \arrow[d] & {} \arrow[d] \\
\overline{n-2}N_k \arrow[r, "\overline{n-2}\chi_{n-2}f"] \arrow[d, "\overline{n-2}\chi_{n-2}N_k"'] & \overline{n-2}N_j \arrow[d, "\overline{n-2}\chi_{n-2}N_j"] \\
\overline{n-1}N_k \arrow[r, "\overline{n-1}f"] & \overline{n-1}N_j
\end{tikzcd}
$$

y que nos proporciona

$$\begin{tikzcd}
\bar{0}\mathbb{N}_k \arrow[r, "\bar{0}f"] \arrow[d, "\bar{0}\chi_0\mathbb{N}_k"'] & \bar{0}\mathbb{N}_j \arrow[d, "\bar{0}\chi_0\mathbb{N}_j"] \\
\bar{1}\mathbb{N}_k \arrow[r, "\bar{1}f"] \arrow[d, "\bar{1}\chi_1\mathbb{N}_k"'] & \bar{1}\mathbb{N}_j \arrow[d, "\bar{1}\chi_1\mathbb{N}_j"] \\
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
\overline{n-2}\mathbb{N}_k \arrow[r, "\overline{n-2}\chi_{n-2}f"] \arrow[d, "\overline{n-2}\chi_{n-2}\mathbb{N}_k"'] & \overline{n-2}\mathbb{N}_j \arrow[d, "\overline{n-2}\chi_{n-2}\mathbb{N}_j"] \\
\overline{n-1}\mathbb{N}_k \arrow[r, "\overline{n-1}f"] & \overline{n-1}\mathbb{N}_j
\end{tikzcd}$$

Esto es al mismo tiempo una flecha de $n \multimap Set$ y una secuencia de cuadrados conmutativos en *Set*.[21]

De un modo más general puede considerarse objetos en la forma $N_j^{\alpha_j}$. En este caso, dado que los endofuntores T y G preservan el producto tensorial, tendríamos cadenas en la forma

$$[\bar{0}\mathbb{N}_j \otimes \overset{\alpha_j}{\cdots} \otimes \bar{0}\mathbb{N}_j \to ... \to \overline{n-1}\mathbb{N}_j \otimes \overset{\alpha_j}{\cdots} \otimes \overline{n-1}\mathbb{N}_j]$$

y una expresión análoga para los morfismos. Dada la longitud de estas expresiones se va a trabajar en lo sucesivo *módulo potencias tensoriales*.

[21] En términos de secuencias de 1 y $\mathbb{N}$ tendríamos $n-1$ series de cubos.

Ejemplo 4.7.7. Cuando $j = 2$ y $n = 5$ tenemos

$$\Gamma_n N_2 = \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \longrightarrow 1 \longrightarrow 1$$

Proposición 4.7.8. *Salvo isomorfismo Γ_n es el único funtor en $\mathcal{A}^n$ en la forma*

$$\mathcal{J}^n \longrightarrow Set^n$$

Demostración. Ver [Otto] página 48. □

Definición 4.7.9. La cobertura de Freyd de $\mathcal{J}^n$ en el caso de la n-Comprensión $n \multimap Set$ viene dada por la *categoría coma* ${}^{(n \multimap Set)}/{}_{\Gamma_n}$ asociada a $\mathcal{J}^n$ por el funtor $\Gamma_n : \mathcal{J}^n \longrightarrow n \multimap Set$ cuyos

- objetos son triplos (X, f, U) donde
  - X es un objeto de $n \multimap Set$, es decir, una cadena en la forma

    $$[X_0 \to X_1 \to ... \to X_{n-1}]$$

  - U es un objeto de $\mathcal{J}^n$, es decir, el producto tensorial de distintas potencias de objetos N_k en la forma

    $$\bigotimes_{j=0}^{n-1} N_j^{\alpha_j}$$

  - f es una función $X \longrightarrow \Gamma_n U$ en $n \multimap Set$, es decir, una cadena de cuadrados como los del Apéndice C.2

- morfismos entre los objetos (X, f_1, U) y (Y, f_2, V) son cuadrados conmutativos

  $$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h_1"] \arrow[d, "f_1"'] & Y \arrow[d, "f_2"] \\ \Gamma_n U \arrow[r, "\Gamma_n h_2"'] & \Gamma_n V \end{tikzcd}$$

  esto es, pares (h_1, h_2) donde $X \xrightarrow{h_1} Y$ en $n \multimap Set$ y $U \xrightarrow{h_2} V$ en $\mathcal{J}^n$ y por lo tanto $\Gamma_n U \xrightarrow{\Gamma_n h_2} \Gamma_n V$ también en $n \multimap Set$.

  Dichos cuadrados pueden ser vistos, según el Apéndice C.2, como cadenas de cubos conmutativos en $n \multimap Set$.

Completando la Sección 4.6 tenemos los dos siguientes resultados que conectan la estructura sintáctica aquí descrita con la semántica de las funciones numéricas.

Proposición 4.7.10. *La imagen de los objetos N_k por medio del funtor Γ son conjuntos cuyos elementos tienen la forma $\Gamma N_k = \{std_k n / n \in \mathbb{N}\}$ donde $std_k : \mathbb{N} \longrightarrow \Gamma N_k$ se define por el esquema*

$$\begin{cases} std_k 0 = 0_k \\ std_k(sn) = s_k(std_k n) \end{cases}$$

con $k = 0, 1, ..., n-1$.

Demostración. Ver [Otto] página 48. □

Corolario 4.7.11. $\Gamma N_k = \mathbb{N}_k$ *para todo $k = 0, 1, ..., n-1$.*

Demostración. Ver la Sección 4.6. □

Esta Proposición nos indica que los conjuntos que se generan por medio del funtor Γ aplicado a los niveles de los números naturales de $\mathcal{J}^n$ en *Set* se comportan como los propios números naturales.

En adelante por lo tanto tendremos copias de los conjuntos de los números naturales en la forma $\mathbb{N}_k$, indexados por niveles y que se definen análogamente a los niveles N_k según la Sección 4.6.

Ejemplo 4.7.12. Si tomamos la *n-Comprensión SM* $(\mathbf{n} \multimap Set, T_k^{\mathbf{n}}, G_k^{\mathbf{n}}, \eta_k^{\mathbf{n}}, \epsilon_k^{\mathbf{n}})$ tenemos en particular secuencias

$$X = X_0 \to X_1 \to ... \to X_{n-1}$$

y

$$Y = Y_0 \to Y_1 \to ... \to Y_{n-1}$$

que son objetos de $\mathbf{n} \multimap Set$ y, usando la notación de la Sección 3.5 por facilitar la lectura,

$$\Gamma_n N_j = [\overline{0}\mathbb{N}_j \to \overline{1}\mathbb{N}_j \to ... \to \overline{n-2}\mathbb{N}_j]$$

y

$$\Gamma_n N_l = [\overline{0}\mathbb{N}_l \to \overline{1}\mathbb{N}_l \to ... \to \overline{n-2}\mathbb{N}_l]$$

que son elementos de $\Gamma_n \mathcal{J}^n$.

Trabajando módulo potencias tensoriales, tendremos cuadrados conmutativos

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "h_1"] \arrow[d, "f_1"'] & Y \arrow[d, "f_2"] \\
\Gamma_n N_j \arrow[r, "\Gamma_n h_2"'] & \Gamma_n N_l
\end{tikzcd}
$$

y por lo tanto $n-2$ cubos conmutativos en la forma

$$
\begin{tikzcd}
 & X_k \arrow[rr, "h_1^k"] \arrow[dl] \arrow[dd, dotted, "f_1^k"' near end] & & Y_k \arrow[dl] \arrow[dd, "f_2^k"] \\
X_{k+1} \arrow[rr, "h_1^{k+1}" near start] \arrow[dd, "f_1^{k+1}"'] & & Y_{k+1} \arrow[dd, "f_2^{k+1}" near start] & \\
 & \bar{k}\mathbb{N}_j \arrow[rr, dotted, "\Gamma_n h_2^k"' near end] \arrow[dl, dotted, "\bar{k}\chi_k\mathbb{N}_j"'] & & \bar{k}\mathbb{N}_l \arrow[dl, "\bar{k}\chi_k\mathbb{N}_l"] \\
\overline{k+1}\mathbb{N}_j \arrow[rr, "\Gamma_n h_2^{k+1}"'] & & \overline{k+1}\mathbb{N}_l &
\end{tikzcd}
$$

para cada $k \in \{0, ..., n-3\}$.[22]

[22]En términos de secuencias de $\top$ y N tendríamos $n-1$ series de cubos.

Capítulo 5

Subrecursión y doctrinas

El presente Capítulo está dedicado a presentar una caracterización de la *Jerarquía de Grzegorczyk* por medio de las estructuras introducidas hasta el momento. En la primera Sección se da una definición clásica de dicha jerarquía y de algunas de sus propiedades estableciendo su relación con el conjunto de las funciones recursivas primitivas mientras que en las dos siguientes se presentan varias caracterizaciones por medio de esquemas recursivos no acotados. En particular se mencionan los trabajos de J. Bellantoni y J. Cook, D. Leivant y M. Wirz.

La Sección 5.4 da cuenta de cómo se interpreta la operación de *composición segura* en las doctrinas del Capítulo anterior, en la Sección 5.5 se introducen las clases $\mathcal{K}^n$ y en la 5.6 se explica cómo se generan funciones recursivas en las doctrinas iniciales presentadas. La Sección 5.7 contiene el Teorema de caracterización que da sentido a la presente tesis.

5.1. La *Jerarquía de Grzegorczyk*

Las clases de funciones subrecursivas introducidas en [Grzegorczyk] se definen del siguiente modo:

Definición 5.1.1. La secuencia de funciones binarias F_j para $j \in \mathbb{N}$ se define recursivamente como:

$$F_0(x, y) = y + 1$$
$$F_1(x, y) = x + y$$
$$F_2(x, y) = (x + 1)(y + 1)$$

y el esquema

$$\begin{cases} F_{n+1}(0, y) = F_n(y + 1, y + 1) \\ F_{n+1}(x + 1, y) = F_{n+1}(x, F_{n+1}(x, y)) \end{cases}$$

para n>1.

Definición 5.1.2. La *Jerarquía de Grzegorzcyk* es la secuencia de las clases $\mathcal{E}^n$ de *funciones numéricas,* donde $\mathcal{E}^n$ es la menor clase tal que:[1]

1. incluye a las funciones sucesor, proyecciones primera y segunda y $F_n(x, y)$ como iniciales y
2. está cerrada con respecto a las operaciones de *sustitución* y *recursión acotada* que se definen a continuación.

Definición 5.1.3. Diremos que una clase de funciones $\mathcal{X}$ *está cerrada respecto a la operación de recursión acotada* si dadas tres funciones g, h, j en $\mathcal{X}$, entonces toda función f que satisface las tres siguientes condiciones

$$\begin{cases} f(u, 0) = g(u) \\ f(u, x + 1) = h(u, x, f(u, x)) \\ f(u, x) \leq j(u, x) \end{cases}$$

pertenece a $\mathcal{X}$.

Teorema 5.1.4. *Las clases de la* Jerarquía de Grzegorzcyk *están en la relación*

$$\mathcal{E}^n \subset \mathcal{E}^{n+1}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

[1]Las funciones numéricas son aquellas cuyos argumentos son números naturales y sus valores son números naturales.

Demostración. Ver [Grzegorczyk] página 32. □

Teorema 5.1.5. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{E}^n = \mathcal{RP}$.[2]

Demostración. Ver [Grzegorczyk] página 39. □

5.2. La *Jerarquía de Grzegorczyk* por recursión segura

La forma de definir la *Jerarquía de Grzegorczyk* plantea el problema del cierre respecto a la recursión acotada. En concreto se quiere responder a la cuestión de si dadas dos funciones g y h existe una función j que cumpla la tercera condición de la Definición 5.1.3. Dicho de otro modo: si dadas tres funciones g, h y j, la función f definida usando las primeras dos cláusulas de la recursión acotada cumple también la tercera condición.

Para resolver este problema se han propuesto formas distintas para caracterizar la *Jerarquía de Grzegorczyk*. Una de ellas es la introducida por Leivant en [Leivant[2]] considerando *funciones de coerción*.[3]

Bellantoni y Cook consideraron el *esquema de recursión segura,* introducido por en [Bellantoni-Cook], como una forma de sustituir la condición de acotación del *esquema de recursión acotada* de la Definición 5.1.3 por una condición de tipo sintáctico. La idea de Bellantoni y Cook en [Bellantoni-Cook] es definir dos tipos de variables según el uso que de ellas se hace. Con ese esquema y otras funciones iniciales se obtienen nuevas clases de funciones que se ha demostrado que son equivalentes a las clases subrecursivas $\mathcal{E}^n$ de Grzegorczyk ([Wirz] y [Bellantoni-Niggl]).

La caracterización de [Wirz], que generaliza la de Bellantoni-Cook al considerar en lugar de dos tipos de variables n tipos o especies de variables, se describe en lo que sigue.

Se va a definir una serie de clases que denotaremos $\mathcal{B}^n$. Para ello usaremos un lenguaje que contiene n *especies de variables* diferentes que denotaremos por los números $0, 1, ..., n-1$.

Notación. Usaremos en lo sucesivo las siguientes reglas:

1. para las variables de la especie n usaremos los símbolos

$$x_n, x_{n,1}, x_{n,2}, ...$$

[2] $\mathcal{RP}$ denota aquí, como en la Introducción, la clase de las funciones Recursivas Primitivas.

[3] Esta primera utilización del *esquema de recursión coercitiva* para la descripción de la *Jerarquía de Grzegorczyk* es el publicado por [Leivant[2]] y viene descrito en el Apéndice D.2.

$$y_n, y_{n,1}, y_{n,2}, ...$$

2. una sucesión de variables de la especie n

$$x_{n,1}, ..., x_{n,m}$$

la denotaremos por $\overline{x_n}$ [4]

3. cada función f de la clase $\mathcal{B}^n$ contendrá variables de las especies $0, 1, ..., n-1$ separadas por un punto y coma y ordenadas de mayor a menor y de izquierda a derecha:

$$f(\overline{x_{n-1}}; \overline{x_{n-2}}; ...; \overline{x_0})$$

En el caso de que la sucesión de variables de una especie sea vacía no se escribe y habrá dos puntos y coma seguidos. Si ello se produce en la primera de las especies consideradas tendremos, en el caso de la anterior

$$f(\overline{x_{n-1}}; \overline{x_{n-2}}; ...; \overline{x_1};)$$

y si se produce en la última

$$f(; \overline{x_{n-2}}; ...; \overline{x_0})$$

4. el valor de una función se clasifica también en una especie.[5]

Establecemos ahora las diferentes formas de denotar una función definida por especies. Estas notaciones tienen relación con el número de recursiones computadas para el cálculo de la salida de la función y es comparable al concepto de *grado de una función* de [Bellantoni-Niggl], del cual se ha hablado en la Introducción.

- Diremos que una función f es de *tipo* $(a_k, a_{k-1}, ..., a_0; a_m)$ si sus argumentos son de las especies $a_k, a_{k-1}, ..., a_0; a_m$ en su dominio y su codominio es de la especie a_m. La expresaremos por

$$\underset{a_k a_{k-1} ... a_0; a_m}{f}$$

- Definimos el *nivel de una función* f como la especie de su codominio.[6]

[4]La sucesión puede ser vacía.
[5]Si una variable es de la especie n también es de la especie $n+1$.
[6]Si una variable es del nivel n también es del nivel $n+1$.

Definición 5.2.1. Para cada $n \geq 0$ definimos la clase $\mathcal{B}^{n+1}$ como la más pequeña de las clases de funciones conteniendo las funciones iniciales

1. (*constante cero*) 0 (nivel 0)
2. *(proyecciones)*
$$\pi_{k,j}(x_{n,1}, ..., x_{n,r_n}; ...; x_{0,1}, ..., x_{0,r_0}) = x_{k,j}$$
para cada $0 \leq k \leq n$ y $1 \leq j \leq r_k$ (nivel k)
3. (*sucesor*) $S(x_0) = x_0 + 1$ (nivel 0)
4. (*predecesor*) $P(0_0) = 0$, $P(x_0 + 1) = x_0$ (nivel 0)
5. (*condicional*) $C(0_0, y_0, z_0) = y_0$, $C(x_0 + 1, y_0, z_0) = z_0$ (nivel 0)

y está cerrada bajo las operaciones

1. (*recursión segura*)
$$\begin{cases} f(\overline{x_n}; ...; \overline{x_{k+2}}; \overline{x_{k+1}}, 0_{k+1}; \overline{x_k}) = g(\overline{x_n}; ...; \overline{x_{k+2}}; \overline{x_{k+1}}; \overline{x_k}) \\ f(\overline{x_n}; ...; \overline{x_{k+2}}; \overline{x_{k+1}}, v_{k+1} + 1; \overline{x_k}) = \\ h(\overline{x_n}; ...; \overline{x_{k+2}}; \overline{x_{k+1}}, v_{k+1}; \overline{x_k}, f(\overline{x_n}; ...; \overline{x_{k+2}}; \overline{x_{k+1}}, v_{k+1}; \overline{x_k})) \end{cases}$$
donde g y h están en $\mathcal{B}^{n+1}$ y el nivel de f es el máximo de los niveles de g y de h
2. (*composición segura*)
$$f(\overline{x_n}; ...; \overline{x_0}) = h(\overline{r_n}(\overline{x_n};); \overline{r_{n-1}}(\overline{x_n}; \overline{x_{n-1}}); ...; \overline{r_0}(\overline{x_n}; ...; \overline{x_0}))$$
donde $\overline{r_0}, ..., \overline{r_n}$ y h están en $\mathcal{B}^{n+1}$, el nivel de las $\overline{r_n}$ es menor o igual que n y el de r_0 es 0. El nivel de f es el nivel de h.

La definición de $\mathcal{B}^n$ presupone conocer de antemano el nivel de algunas de las funciones que forman esas clases.

De acuerdo con [Wirz], que generaliza [Bellantoni-Cook], las clases $\mathcal{B}^n$ dan lugar a otras que resultan ser equivalentes a las clases de funciones $\mathcal{E}^n$ que forman la *Jerarquía de Grzegorzcyk*. Las nuevas clases se obtienen considerando aquellas funciones de $\mathcal{B}^n$ cuyas variables se han colocado de forma que todas son de la misma especie.

Definición 5.2.2. Sean $(\mathcal{B}^n)^\star$ las clases de funciones que coinciden con $\mathcal{B}^n$ considerando que todas sus variables hacen referencia a los números naturales.

Observación. Esta Definición supone considerar las funciones en $(\mathcal{B}^n)^\star$ como si las especies no existieran.

Teorema 5.2.3. $(\mathcal{B}^n)^\star = \mathcal{E}^n$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Ver [Wirz]. □

Se ha utilizado la notación $(\mathcal{B}^n)^\star$ para designar las clases de funciones que se obtienen en [Wirz] aunque no utilice dicha notación sino la traducción de las clases $\mathcal{B}^n$ a otras análogas a $(\mathcal{B}^n)^\star$ por medio de un Lema que permite esa traducción bajo una cierta condición de acotación.[7]

5.3. Composición segura y niveles de recursión

La composición segura, tal como se ha introduce en [Wirz], supone la existencia de un número indeterminado de variables de distinto tipo (aquí los denominamos especies, siguiendo la notación de la Sección anterior). Hay una cantidad denumerable de variables de cada especie que denotamos por los números naturales con un subíndice que indica la especie. Clasificamos las funciones por la especie más alta de sus argumentos y escribimos las especies de mayor a menor de izquierda a derecha separados por puntos y coma.[8]

La idea de la composición segura se basa esencialmente en el hecho de que cada variable a la izquierda no puede moverse a una posición más a la derecha pero las variables a la derecha pueden ser cambiadas a posiciones a la izquierda. Esta intuición se explica en lo que sigue.

Esta operación se usa en [Bellantoni-Cook] con dos tipos diferentes de variables (*normal* a la izquierda y *segura* a la derecha) y generalizada a n tipos diferentes en [Wirz].[9]

Ejemplo 5.3.1. Si tenemos una función $h(x;y)$ podemos definir por *composición segura* una función $f(x,y;)$ por

$$f(x,y;) = h(\pi_{1,1}(x,y;);\pi_{1,2}(x,y;)) = h(x;y)$$

pero no podemos, en general, definir $g(;x,y) = h(x;y)$.

[7] Dicha traducción, prescindible en el presente estudio, puede consultarse en [Wirz] páginas 4 y 5.

[8] La composición usual no tiene en cuenta las especies, los subíndices no indican especies dado que sólo hay una.

[9] Una definición similar se puede encontrar en [Bellantoni-Niggl] bajo el nombre de *composición completa*.

Ejemplo 5.3.2. Si tomamos las funciones iniciales de las clases $\mathcal{B}^n$ de [Wirz] de la Definición 5.2.1 vemos que podemos expresarlas igualmente por medio de variables seguras o normales a través de las siguientes expresiones

$$s(x;) = S(;\pi_{1,1}(x;)) = S(;x)$$

$$p(x;) = P(;\pi_{1,1}(x;)) = P(;x)$$

y

$$C(x,y,z;;) = c(\pi_{2,1}(x,y,z;;),\pi_{2,2}(x,y,z;;),\pi_{2,3}(x,y,z;;)) = c(;;x,y,z)$$

Estos ejemplos pueden generalizarse como sigue.

Teorema 5.3.3. *Para cada función*

$$h(\overline{x}_n;...;\overline{x_{k+1}};z,\overline{x_k};...;\overline{x_0})$$

donde $0 \leq k < n$ *existe una función*

$$f(\overline{x}_n;...;\overline{x_{k+1}},z;\overline{x_k};...;\overline{x_0})$$

obtenida por composición segura a partir de h y proyecciones tal que

$$h(\overline{x}_n;...;\overline{x_{k+1}};z,\overline{x_k};...;\overline{x_0}) = f(\overline{x}_n;...;\overline{x_{k+1}},z;\overline{x_k};...;\overline{x_0})$$

Demostración. Supongamos que la sucesión de variables $\overline{x_j}$ tenga m_j elementos para $j = n,...,0$. Tomamos

1. $\overline{r_s}(\overline{x_n};...;\overline{x_s};)$ la sucesión $\pi_{s,i}(\overline{x_n};...;\overline{x_s};)$ para $i = 1,...,m_s$ y para cada $s = 0,...,n$
2. $\overline{r_{k+1}}(\overline{x_n};...;\overline{x_{k+1}};)$ la sucesión $\pi_{k+1,i}(\overline{x_n};...;\overline{x_{k+1}},z;)$ para $i = 1,...,m_{k+1}+1$ y
3. $\overline{r_k}(\overline{x_n};...;\overline{x_k};)$ la sucesión $\pi_{k,i}(\overline{x_n};...;\overline{x_k};)$ para $i = 1,...,m_k$.

Entonces tenemos

$$\begin{gathered} f(\overline{x_n};...;\overline{x_{k+1}},z;\overline{x_k};...;\overline{x_0}) \\ = h(\overline{r_n}(\overline{x_n});...;\overline{r_{k+1}}(\overline{x_n};...;\overline{x_{k+1}};);\overline{r_k}(\overline{x_n};...;\overline{x_k});...;\overline{r_0}(\overline{x_n};...;\overline{x_0}) \\ = h(\overline{x_n};...;\overline{x_{k+1}};z,\overline{x_k};...;\overline{x_0}) \end{gathered}$$

□

Es decir, cualquier variable que figure en el lugar argumental de especie k puede pasar a un lugar argumental de especie $t > k$. Así para cualquier función

$$h(\overline{x_n}; ...; \overline{x_{k+1}}; \overline{x_k}; ...; \overline{x_0})$$

existe una función f que sólo tiene variables de la especie n y que toma los mismos valores que h.

Con este Teorema podemos establecer el Teorema siguiente.

Teorema 5.3.4. *Sean*

$$f^{\flat} : \prod_{i=0}^{n-1} \mathbb{N}_i^{\alpha_i} \longrightarrow \mathbb{N}_j \, , \, f^{\sharp} : \mathbb{N}_{n-1}^{\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i} \longrightarrow \mathbb{N}_{n-1} \, , \, f : \mathbb{N}^{\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i} \longrightarrow \mathbb{N}$$

las funciones tales que, si identificamos los números n_k $(k = 0, ..., n-1)$ con n, las funciones f, f^b y $f^{\sharp}$ dan el mismo valor para los argumentos apropiados que sean iguales en la identificación anterior. Entonces

$$f^b \in \mathcal{B}^n \longrightarrow f^{\sharp} \in \mathcal{B}^n \longleftrightarrow f \in (\mathcal{B}^n)^{\star}$$

Demostración. Se sigue de la definición de $(\mathcal{B}^n)^{\star}$ y el Teorema 5.3.3. □

Concluimos que f^b puede ser exactamente $f^{\sharp}$ o pueden ser distintas, así que no hay una única. Recíprocamente para una f^b sí hay una única función $f^{\sharp}$.

5.4. Composición segura en $\mathcal{J}^n$

La composición segura, tal como se ha definido en 5.2.1, tiene su representación en la doctrina $\mathcal{J}^n$ por medio de diagramas asociados a las transformaciones naturales η_k. Para ello tomaremos transformaciones naturales en la forma $T_0...T_{k-1}\eta_k$.[10]

Proposición 5.4.1. *Sea* $f : \bigotimes_{j=0}^{n-1} N_j^{\alpha_j} \longrightarrow N_m^{\beta}$ *un morfismo en $\mathcal{J}^n$. Para η_k tenemos diagramas conmutativos en la forma siguiente:*

[10]Recordar que escribimos los multiplicatorios tensoriales en la forma $\bigotimes$ y las potencias significarán *potencias tensoriales*.

$$\begin{tikzcd}
T_0 ... T_{k-1}(\bigotimes_{j=k}^{n-1} N_j^{\alpha_j}) \arrow[r, "T_0 ... T_{k-1} f"] \arrow[d, "T_0 ... T_{k-1}\eta_k(\bigotimes_{j=k}^{n-1} N_j^{\alpha_j})"'] & T_0 ... T_{k-1} N_m^{\beta} \arrow[d, "T_0 ... T_{k-1}\eta_k N_m^{\beta}"] \\
T_0 ... T_k(\bigotimes_{j=k}^{n-1} N_j^{\alpha_j}) \arrow[r, "T_0 ... T_k f"'] & T_0 ... T_k N_m^{\beta}
\end{tikzcd}$$

con $k = 0, 1, ..., n-2$.[11]

Demostración. Se utiliza la propia definición de transformación natural. □

Sea ψ la transformación natural que surge de la composición

$$\eta_0[T_0\eta_1][T_0T_1\eta_2]...[T_0...T_{n-3}\eta_{n-2}]$$

De este modo podemos construir el diagrama siguiente considerando la transformación natural $T_0...T_{n-3}\eta_{n-2}$:[12]

$$\begin{tikzcd}
\bigotimes_{j=0}^{n-1} N_j^{\alpha_j} \arrow[r, "idf"] \arrow[d, "\psi(\bigotimes_{j=0}^{n-1} N_j^{\alpha_j})"'] & N_m^{\beta} \arrow[d, "\psi N_m^{\beta}"] \\
T_0 ... T_{n-2}(\bigotimes_{j=0}^{n-1} N_j^{\alpha_j}) \arrow[r, "T_0 ... T_{n-2} f"'] & T_0 ... T_{n-2} N_m^{\beta}
\end{tikzcd}$$

[11] Estamos realizando cálculos del tipo

$$T_0...T_k(N_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \otimes ... \otimes N_{k+1}^{\alpha_{k+1}} \otimes N_k^{\alpha_k}) = N_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \otimes ... \otimes N_{k+1}^{\alpha_{k+1}}$$

[12] Estamos realizando aquí cálculos del tipo

$$T_0...T_k(N_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \otimes ... \otimes N_0^{\alpha_0}) = N_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \otimes ... \otimes N_{k+1}^{\alpha_{k+1}}$$

La explicación detallada de la manera en que surge este diagrama se encuentra en el Apéndice D.3.

que se convierte, si $m = n - 1$, en

$$\begin{tikzcd} \bigotimes_{j=0}^{n-1} N_j^{\alpha_j} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\psi(\bigotimes_{j=0}^{n-1} N_j^{\alpha_j})"'] & N_{n-1}^{\beta} \arrow[d, "\psi N_{n-1}^{\beta}"] \\ N_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \arrow[r, "T_0 ... T_{n-2} f"'] & N_{n-1}^{\beta} \end{tikzcd}$$

o, si $m < n - 1$, en

$$\begin{tikzcd} \bigotimes_{j=0}^{n-1} N_j^{\alpha_j} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\psi(\bigotimes_{j=0}^{n-1} N_j^{\alpha_j})"'] & N_m^{\beta} \arrow[d, "\psi N_m^{\beta}"] \\ N_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \arrow[r, "T_0 ... T_{n-2} f"'] & \top \end{tikzcd}$$

El primer diagrama, cuando $m = n - 1$, puede reescribirse como

$$\begin{tikzcd} \bigotimes_{j=0}^{n-1} N_j^{\alpha_j} \arrow[d, "\psi(\bigotimes_{j=0}^{n-1} N_j^{\alpha_j})"'] \arrow[dr, "f"] & \\ N_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \arrow[r, "T_0 ... T_{n-2} f"'] & N_{n-1}^{\beta} \end{tikzcd}$$

con ello tendremos una expresión del morfismo f en términos de las coerciones T_k dada por

$$f = [T_0 ... T_{n-2} f] \circ \psi(\bigotimes_{j=0}^{n-1} N_j^{\alpha_j})$$

o, si $m < n - 1$, como

$$[N_m^{\beta} \longrightarrow \top] \circ f = [T_0 ... T_{n-2} f] \circ \psi(\bigotimes_{j=0}^{n-1} N_j^{\alpha_j})$$

dado que el morfismo $T_0 ... T_{n-2} f$ es

$$N_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \longrightarrow N_{n-1}^{\beta}$$

si $m = n - 1$ y

$$N_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \longrightarrow \top$$

si $m < n - 1$.

Esto reproduce la formulación del esquema de composición segura de la Definición 5.2.1 dado que se obtiene una expresión de cada morfismo en $\mathcal{J}^n$ en términos de otros morfismos cuyas variables tienen como mucho las mismas especies que el morfismo inicial. El output de especie $n-1$, por lo tanto, no depende de los inputs de especie inferior cuando estamos en $\mathcal{J}^n$. Y, en general, un output de especie s no depende de los inputs de especie inferior a s.

5.5. La clase $\mathcal{K}^n$

Como se ha señalado en la Introducción, en $\mathcal{J}^3$ se produce la situación de que la especie de las variables de los morfismos puede ser llevada hasta el cero por medio de endofuntores T_0 y T_1. Ello provoca que todas las funciones numéricas definibles en $\mathcal{J}^3$ cuyo dominio y codominio no contenga N_2 pueden reducirse a funciones cuyo dominio y codominio sean productos tensoriales de N_0, lo cual obviamente nos situaría fuera de cualquier jerarquía de funciones subrecursivas de crecimiento progresivo tal como se han presentado en la Introducción. Este hecho se hace explícito en lo que sigue.

Si tomamos la doctrina $\mathcal{J}^3$ y consideramos la aplicación del funtor T_1 sobre la suma $\bigoplus_{10;0}$, obtenemos una copia de ésta en la forma $\bigoplus_{00;0}$. De este modo en $\mathcal{J}^3$ la multiplicación dada por $\bigotimes_{11;0}$ puede transformarse en $\bigotimes_{00;0}$ haciendo actuar de nuevo a T_1. De este modo la exponenciación $\uparrow$ puede definirse en $\mathcal{J}^3$ por el diagrama $RRSP$

$$\begin{tikzcd}
\top \otimes N_0 \arrow[r, "0_1 \otimes N_0"] \arrow[d, "\pi_1"'] & N_1 \otimes N_0 \arrow[r, "s_1 \otimes N_0"] \arrow[d, "\pi_1, \uparrow"] & N_1 \otimes N_0 \arrow[d, "\uparrow"] \\
N_0 \arrow[r, "id, s0"'] & N_0 \otimes N_0 \arrow[r, "G_0 \bigotimes"'] & N_0
\end{tikzcd}$$

de modo que tendría la forma $\underset{10;0}{\uparrow}$ y, aplicándole de nuevo T_1, se quedaría en $\underset{00;0}{\uparrow}$. Igual sucedería con la tetración.

Pasamos a continuación por tanto a definir una clase $\mathcal{K}^n$ de flechas de $\mathcal{J}^n$. Su descripción, definición y construcción es la misma que la de $\mathcal{I}^n$ en la Sección 4.2 con respecto a los objetos y flechas, excepto que en el nivel $k+1$ introducimos dos cambios:[13]

1. cambiamos las *funciones generadas por RRS* por *funciones generadas por RDS* y
2. en el apartado *f)* de flechas en dicho nivel, donde dice *las flechas que surgen de las aplicaciones de los endofuntores id, T_j y G_j con* $0 \leq j < n-1$ *sobre los morfismos del nivel k,* pondremos *las flechas que surgen de las aplicaciones de los endofuntores id y G_k sobre los morfismos del nivel k* .

Los objetos de $\mathcal{I}^n$ y $\mathcal{K}^n$ son los mismos.

Es importante notar que en $\mathcal{J}^n$ hay una única clase $\mathcal{K}^n$. Además tenemos el siguiente resultado.

Proposición 5.5.1. *$\mathcal{K}^j \subset \mathcal{K}^s$ siempre que $j < s$.*

5.6. Secuencias de funciones en $\mathcal{K}^n$

En esta y en la siguiente Sección se va a caracterizar cada clase $\mathcal{E}^n$ de la *Jerarquía de Grzegorzcyk* por medio de la clase $\mathcal{K}^n$. Para ello se definirá una secuencia de funciones, llamada *Secuencia de Hiperoperaciones*, que permite ordenar de una forma fácil las distintas clases $\mathcal{E}^n$. Se mostrará su representación en las distintas n-doctrinas iniciales.

Las funciones que aparecen en cada clase siguen la denominada *Secuencia de Hiperoperaciones* que se define a continuación.

Definición 5.6.1. La *Secuencia de Hiperoperaciones* es la secuencia de operaciones binarias $H_n : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ indexadas por $n \in \mathbb{N}$ y definidas

[13] Obsérvese que $\mathcal{K}^n$ ya no satisfacen las condiciones que harían de ellas unas doctrinas en $\mathcal{A}^n$.

recursivamente por

$$H_n(a,b) = \begin{cases} b+1 & si \quad n=0 \\ a & si \quad n=1, b=0 \\ 0 & si \quad n=2, b=0 \\ 1 & si \quad n \geq 3, b=0 \\ H_{n-1}(a, H_n(a, b-1)) & en \quad otro \quad caso \end{cases}$$

Para $n = 0, 1, 2, 3$ esta Definición reproduce las operaciones básicas aritméticas *sucesor*, *suma*, *multiplicación*, *exponenciación y tetración* respectivamente en la forma[14]

- $H_0(a,b) = b+1$
- $H_1(a,b) = a+b$ que se puede definir por el esquema

$$\begin{cases} H_1(a,0) = a \\ H_1(a,sb) = H_0(a, H_1(a,b) = H_1(a,b)+1 \end{cases}$$

- $H_2(a,b) = a \cdot b$ que se puede definir por el esquema

$$\begin{cases} H_2(a,0) = 0 \\ H_2(a,sb) = H_1(a, H_2(a,b)) = a + H_2(a,b) \end{cases}$$

- $H_3(a,b) = a^b$ que se puede definir por el esquema

$$\begin{cases} H_3(a,0) = 1 \\ H_3(a,sb) = H_2(a, H_3(a,b)) = a \cdot H_3(a,b) \end{cases}$$

- $H_4(a,b) =^b a$ que se puede definir por el esquema[15]

$$\begin{cases} H_4(a,0) = a \\ H_4(a,sb) = H_3(H_4(a,b), a) \end{cases}$$

Teorema 5.6.2. $H_n \in \mathcal{E}^n \setminus \mathcal{E}^{n-1}$.

[14]Téngase en cuenta que alguna de estas operaciones, a pesar de la forma en que han sido definidas, son unarias.

[15]La función H_4 se denomina *tetración*. $H_4(a,b) =^b a$ significa aquí $a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}$ $^{(b \text{ veces})}$.

Demostración. Ver [Grzegorczyk]. □

De la descripción anterior se desprende que la *Jerarquía de Grzegorczyk* puede darse en términos de la *Secuencia de Hiperoperaciones*:

- $\mathcal{E}^0$ contiene funciones tales como $x+1, x+n$
- $\mathcal{E}^1$ contiene funciones tales como $x+y, 4x$
- $\mathcal{E}^2$ contiene funciones tales como xy, x^n
- $\mathcal{E}^3$ contiene funciones tales como $x^y, 3^{3^{3^x}}$
- $\mathcal{E}^4$ contiene funciones tales como la *tetración* $x^{x^{x^x}}$

Las funciones pertenecientes a la *Secuencia de Hiperoperaciones* pueden representarse en los esquemas de recursión de los que están dotadas las doctrinas $\mathcal{A}^n$. Ello se desarrolla en lo que sigue.

Con el esquema $RRSP$ podemos construir los diagramas de recursión segura que corresponden a cada nivel de la *Secuencia de Hiperoperaciones* en las diferentes clases de la *Jerarquía de Grzegorczyk* como sigue.[16]

- en $\mathcal{K}^2$ la suma $\bigoplus\limits_{10;0} : N_1 \otimes N_0 \longrightarrow N_0$ dada por

$$\begin{tikzcd}
\top \otimes N_0 \arrow[r, "0 \otimes N_0"] \arrow[d, "\pi_1"'] & N_1 \otimes N_0 \arrow[r, "s \otimes N_0"] \arrow[d, "\pi_1{,}\bigoplus"] & N_1 \otimes N_0 \arrow[d, "\bigoplus"] \\
N_0 \arrow[r, "id{,}id"'] & N_0 \otimes N_0 \arrow[r, "s\pi_1"'] & N_0
\end{tikzcd}$$

  tal que

$$\begin{cases} \bigoplus(0, n) = n \\ \bigoplus(sx, n) = s(\bigoplus(x, n)) \end{cases}$$

- en $\mathcal{K}^2$ la multiplicación $\bigotimes\limits_{11;0} : N_1 \otimes N_1 \longrightarrow N_0$ dada por

$$\begin{tikzcd}
\top \otimes N_1 \arrow[r, "0_1 \otimes N_1"] \arrow[d, "\pi_1"'] & N_1 \otimes N_1 \arrow[r, "s_1 \otimes N_1"] \arrow[d, "\pi_1{,}\bigotimes"] & N_1 \otimes N_1 \arrow[d, "\bigotimes"] \\
N_1 \arrow[r, "id{,}\epsilon_1 N_1"'] & N_1 \otimes N_0 \arrow[r, "\bigoplus"'] & N_0
\end{tikzcd}$$

[16]Usamos aquí la notación establecida en la Sección 5.2 sobre el *tipo de una función*.

tal que
$$\begin{cases}\bigotimes(0,y)=0\\ \bigotimes(sx,y)=\bigoplus(y,\bigotimes(x,y))\end{cases}$$

- en $\mathcal{K}^3$ la exponencial $\underset{21;1}{\uparrow}: N_2\otimes N_1 \longrightarrow N_1$ dada por

$$\begin{tikzcd}
\top\otimes N_1 \arrow[r, "0_2\otimes N_1"] \arrow[d, "\pi_1"'] & N_2\otimes N_1 \arrow[r, "s_2\otimes N_1"] \arrow[d, "{\pi_1,\uparrow}"] & N_2\otimes N_1 \arrow[d, "\uparrow"] \\
N_1 \arrow[r, "{id,s0}"'] & N_1\otimes N_1 \arrow[r, "G_0\bigotimes"'] & N_1
\end{tikzcd}$$

tal que
$$\begin{cases}\uparrow(0,y)=s0\\ \uparrow(sx,y)=G_0\bigotimes(y,\uparrow(x,y))\end{cases}$$

- en $\mathcal{K}^4$ la *tetración* $\underset{32;1}{\uparrow\uparrow}: N_3\otimes N_2 \longrightarrow N_1$ dada por

$$\begin{tikzcd}
\top\otimes N_2 \arrow[r, "0_3\otimes N_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & N_3\otimes N_2 \arrow[r, "s_3\otimes N_2"] \arrow[d, "{\pi_1,\uparrow\uparrow}"] & N_3\otimes N_2 \arrow[d, "\uparrow\uparrow"] \\
N_2 \arrow[r, "{id,\epsilon_2 N_2}"'] & N_2\otimes N_1 \arrow[r, "{\uparrow(\pi_1,\pi_0)}"'] & N_1
\end{tikzcd}$$

tal que
$$\begin{cases}\uparrow\uparrow(0,y)=y\\ \uparrow\uparrow(sx,y)=\uparrow(\pi_1,\pi_0)(y,\uparrow\uparrow(x,y))\end{cases}$$

Además la mayor de las especies de las variables de cada función de la *Secuencia de Hiperoperaciones* definida por un esquema $RRSP_k$ es $k+1$ según la Definición 5.2.1.[17]

Puede darse una definición equivalente de la *Jerarquía de Grzegorzcyk* usando, en lugar de las funciones F_n introducidas en la Definición 5.1.1, las funciones de la Definición siguiente en $\mathcal{K}^n$ (ver [Wirz]).[18]

[17] Y además en este caso pertenece a la clase $\mathcal{E}^{k+1}$ según la igualdad
$$\mathcal{E}^{k+1}=\{f\in\mathcal{RP}/gr(f)\leq k\}$$
de [Bellantoni-Niggl] como se ha señalado en la Introducción.

[18] Se usará igualmente la letra F dada su equivalencia.

Definición 5.6.3. Definimos para toda k las funciones

$$
\begin{aligned}
&F_1(x) = x^2 + 2 \\
&F_{k+1}(0) = 2 \\
&F_{k+1}(x+1) = F_k(F_{k+1}(x))
\end{aligned}
$$

Proposición 5.6.4. *Las funciones F_k con $k < n$ pertenecen a $\mathcal{K}^n$ si las reescribimos como*

$$
\begin{aligned}
&F_1(x_1) = s \circ (s \circ (\otimes(x_1, x_1))) \\
&F_{k+1}(0_{k+1}) = s_{k+1}(s_{k+1}(0_{k+1})) = 2 \\
&F_{k+1}(s_{k+1}(x_k)) = F_k(F_{k+1}(x_{k+1}))
\end{aligned}
$$

sujeto a las reglas

$$
\begin{gathered}
F_k^0(x_k) = x_k \\
F_k^{m+1}(x_k) = F_k(F_k^m(x_k))
\end{gathered}
$$

donde $x_k \in \mathbb{N}_k$ y F_k^m representa la $m-$ésima recursión de la función F_k.

Demostración. Cuando $k > 1$ las funciones F_k se definen en $\mathcal{K}^n$ por medio de los diagramas

$$
\begin{tikzcd}
\top \arrow[r, "0_{k+1}"] \arrow[d, "id"'] & N_{k+1} \arrow[r, "s_{k+1}"] \arrow[d, "F_{k+1}"] & N_{k+1} \arrow[d, "F_{k+1}"] \\
\top \arrow[r, "c_2"'] & N_k \arrow[r, "F_k"'] & N_k
\end{tikzcd}
$$

donde c_2 representa a la función con valor constante 2. □

5.7. Caracterización por medio de n-Comprensiones

Se va a presentar en la presente Sección la caracterización de las clases $\mathcal{E}^n$ por medio de las clases $\mathcal{K}^n$ con $n > 2$.

Definición 5.7.1. Denominamos $\mathcal{G}^n$ al conjunto de funciones[19]

$$\{\Gamma_n T_{n-2} ... T_0 f \, / \, f \in \mathcal{K}^n \text{ y } cod(f) = N_{n-1}\}$$

[19] $cod(f)$ significa aquí codominio de la función f.

Teorema 5.7.2. $\mathcal{G}^n = \{\Gamma_n f : \mathbb{N}_{n-1}^{\alpha} \longrightarrow \mathbb{N}_{n-1} / f \in \mathcal{K}^n\}$.

Demostración. Utilícese la definición de los funtores Γ_n y T_k y el Teorema 5.3.3. □

Antes de pasar a la demostración del Teorema principal recordamos que cada función f de $\mathcal{B}^n$ tiene la forma

$$f(\overline{x_{n-1}}; \overline{x_{n-2}}; \ldots; \overline{x_0})$$

de lo que se deduce, ordenando al revés sus argumentos, que tiene la forma

$$f : \prod_{i=0}^{n-1} \mathbb{N}_i^{\alpha_i} \longrightarrow \mathbb{N}_{n-1}$$

donde algunos α_j pueden ser ceros.[20]

Teorema 5.7.3. *$\mathcal{B}^n = \mathcal{G}^n$ para todo $n > 2$.*

Demostración. Probaremos las dos inclusiones basándonos en [Wirz].

1. $\boxed{\mathcal{B}^n \subseteq \mathcal{G}^n}$

   Vamos a demostrar en su lugar que para cada función $f \in \mathcal{B}^n$ tal que

   $$f : \prod_{i=0}^{n-1} \mathbb{N}_i^{\alpha_i} \longrightarrow \mathbb{N}_k$$

   hay una f' en $\mathcal{K}^n$ tal que

   $$f' : \bigotimes_{i=0}^{n-1} N_i^{\alpha_i} \longrightarrow N_k$$

   Además f y f' toman los mismos valores aplicados a los argumentos adecuados (se considera que los números en $\mathbb{N}_j$ se corresponden con los de N_j). Diremos que f y f' *concuerdan*. Esto lo demostramos por inducción sobre la construcción o definición de la función f en $\mathcal{B}^n$.

   - Si f es una función inicial tenemos los casos

     a) f es la función cero: $0 : 1 \longrightarrow \mathbb{N}_j$ concuerda con

     $$0_j : \top \longrightarrow N_j$$

[20]Suponemos que tanto el producto cartesiano como el tensorial asocian por la derecha.

b) f es la función sucesor: $s : \mathbb{N}_j \longrightarrow \mathbb{N}_j$ concuerda con

$$s_j : N_j \longrightarrow N_j$$

c) la proyección $\pi_{k,j} : \prod_{i=0}^{n-1} \mathbb{N}_i^{\alpha_i} \longrightarrow \mathbb{N}_k$ concuerda con la función[21]

$$\bigotimes_{i=0}^{k-1} \tau_i^{\alpha_i} \otimes \bigotimes_{i=1}^{j-1} \tau_k \otimes 1_{N_k} \otimes \bigotimes_{i=j+1}^{\alpha_k - j} \tau_k \otimes \bigotimes_{i=k+1}^{n-1} \tau_i^{\alpha_i}$$

d) f es la función predecesor. Concuerda con la función

$$RP(0, 1_{N_0}) : N_0 \longrightarrow N_0$$

e) f es la función condicional. Concuerda con la función

$$RP(\pi_0 \circ i, \pi_1 \circ \pi_1) : N_0 \otimes (N_0 \otimes N_0) \longrightarrow N_0$$

- f se obtiene por composición segura en la forma

$$f(\overline{x_{n-1}}; \ldots; \overline{x_0}) = h(\overline{r_{n-1}}(\overline{x_n}; \overline{x_{n-1}};); \ldots; \overline{r_0}(\overline{x_n}; \overline{x_{n-1}}; \ldots; \overline{x_0}))$$

  Así tendremos $h : \prod_{i=0}^{n-1} \mathbb{N}_i^{\alpha_i} \longrightarrow \mathbb{N}_j$ para cada $s = 0, \ldots, n-1$ una sucesión de funciones

$$\{r_{s,t} : \prod_{l=s}^{n-1} \mathbb{N}_l^{\beta_l} \longrightarrow \mathbb{N}_s\}_{1 \leq t \leq \alpha_s}$$

  y $f : \prod_{1=0}^{n-1} \mathbb{N}_i^{\beta_i} \longrightarrow \mathbb{N}_m$. Para simplificar la demostración vamos a considerar que

$$h : \mathbb{N}_{n-1} \times \mathbb{N}_{n-2}^2 \longrightarrow \mathbb{N}_j$$

$$r : \mathbb{N}_{n-1}^3 \longrightarrow \mathbb{N}_{n-1}$$

$$t : \mathbb{N}_{n-1}^3 \times \mathbb{N}_{n-2}^2 \longrightarrow \mathbb{N}_{n-2}$$

$$s : \mathbb{N}_{n-1}^3 \times \mathbb{N}_{n-2}^2 \longrightarrow \mathbb{N}_{n-2}$$

  Entonces $f : \mathbb{N}_{n-1}^3 \times \mathbb{N}_{n-2}^2 \longrightarrow \mathbb{N}_j$. Por hipótesis de inducción suponemos que h, r, t, s concuerdan con las funciones h', r', t', s' entonces f concuerda con la siguiente composición

[21] Esta función la denotaremos por $\pi'_{k,j}$.

$$\mathbb{N}^3_{n-1} \times \mathbb{N}^2_{n-2} \xrightarrow{r' \circ p_{0,3}, t', s'} \mathbb{N}_{n-1} \times \mathbb{N}^2_{n-2} \xrightarrow{h'} \mathbb{N}_j$$

donde $p_{e,d}$ con $e < d$ es la función cuyo dominio tiene la forma $\bigotimes_{i=0}^{k} X_i$ para $d \leq k$, su codominio es $\bigotimes_{i=e}^{d} X_i$ y es igual a

$$a^{d-e}\pi_0 \circ a^{-d+e} \circ \overbrace{\pi_1 \circ \pi_1}^{e \text{ veces}}$$

- f se obtiene por recursión segura a partir de $g, h \in \mathcal{B}^n$:

$$f(\overline{x_{n-1}}; \ldots; \overline{x_{k+2}}; \overline{x_{k+1}}, 0_{k+1}; \overline{x_k}) = g(\overline{x_{n-1}}; \ldots; \overline{x_{k+2}}; \overline{x_{k+1}}; \overline{x_k})$$

$$f(\overline{x_{n-1}}; \ldots; \overline{x_{k+2}}; \overline{x_{k+1}}, z_{k+1} + 1; \overline{x_k}) =$$

$$h(\overline{x_{n-1}}; \ldots; \overline{x_{k+2}}; \overline{x_{k+1}}, v_{k+1}; \overline{x_k}, f(\overline{x_{n-1}}; \ldots; \overline{x_{k+2}}; \overline{x_{k+1}}, z_{k+1}; \overline{x_k}))$$

  por hipótesis de inducción g y h concuerdan cambiando el orden de los argumentos con las funciones g' y h' en $\mathcal{K}^n$

$$g' : \bigotimes_{i=k+1}^{n-1} N_i^{\alpha_i} \otimes N_k^{\alpha_k} \longrightarrow N_k$$

$$h' : N_{k+1} \otimes \bigotimes_{i=k+1}^{n-1} N_i^{\alpha_i} \otimes N_k^{\alpha_k} \otimes N_k \longrightarrow N_k$$

  Sea $X = \bigotimes_{i=k}^{n-1} N_i^{\alpha_i}$ e $Y = N_k$, es fácil ver que la única función f' que existe por el esquema RDS

$$\begin{tikzcd}
\top \otimes X \arrow[r, "0 \otimes X"] \arrow[dr, "(0\otimes X), g' \circ \pi_1"'] & N_{k+1} \otimes X \arrow[r, "s \otimes X"] \arrow[d, "id, f'"] & N_{k+1} \otimes X \arrow[d, "f'"] \\
 & (N_{k+1} \otimes X) \otimes Y \arrow[r, "h'"'] & Y
\end{tikzcd}$$

  concuerda cambiando el orden de los argumentos con la función f.

2. $\boxed{\mathcal{G}^n \subseteq \mathcal{B}^n}$

   Vamos a demostrar que con cada función $f \in \mathcal{K}^n$ tal que

$$cod(f) = \bigotimes_{i=0}^{n-1} N_i^{\beta_i}$$

para cada $j \in n$ con $\beta_j \neq 0$ las β_j funciones $f_{j,k}$ con $k = 1, \ldots, \beta_j$, a las que llamaremos *proyecciones de* f, tales que

$$f_{j,k} = \pi'_{j,k} \circ f$$

hay una función en $\mathcal{B}^n$ que concuerda con $f_{j,k}$. La demostración se hace por inducción en el nivel de las funciones en $\mathcal{K}^n$.

- f es de nivel 0:
  - *a*) f es la función cero o sucesor. Concuerdan con las correspondientes en $\mathcal{B}^n$.
  - *b*) f es la función $\epsilon_k(N_k) : N_{k+1} \longrightarrow N_k$ que concuerda con la función definida por la recursión segura

    $$\begin{cases} f(0; \ldots ;) = 0 \\ f(n+1; \ldots ;) = s(; f(n; \ldots ;)) \end{cases}$$

    al elevar la especie del valor de f.
- f se obtiene por producto tensorial de g y h. Las proyecciones de f son g o h o las proyecciones de g o las de h.
- f surge de los isomorfismos naturales a, s o d, las proyecciones de f concuerdan con alguna de las proyecciones $\pi_{j,k}$.
- f es la composición $h \circ g$. Para simplificar consideremos que

  $$g : N_j \longrightarrow N_s \otimes N_t \qquad y \qquad h : N_s \otimes N_t \longrightarrow N_i \otimes N_k \otimes N_u$$

  Entonces $f : N_j \longrightarrow N_i \otimes N_k \otimes N_u$. Por hipótesis, con las dos proyecciones de g, g_1 y g_2, y con las tres de h, h_1, h_2 y h_3, existen las funciones g'_1, g'_2, h'_1, h'_2, h'_3 que concuerdan con ellas. Vamos a ver que con cada proyección de f, f_1, f_2 y f_3, hay una función en $\mathcal{B}^n$ que concuerda con ella.

  $$f'_1(x_j;) = h'_1(g'_1(x_j); g'_2(x_j))$$

  $$f'_2(x_j;) = h'_2(g'_1(x_j); g'_2(x_j))$$

  $$f'_3(x_j;) = h'_3(g'_1(x_j); g'_2(x_j))$$
- f se obtiene por recursión plana a partir de

  $$g : X \longrightarrow Y \text{ y } h : N_0 \otimes X \longrightarrow Y$$

donde $Y = N_0^k$ (eliminamos el caso en que $Y = \top$ que no da lugar a funciones numéricas y el caso en que uno de sus factores en el producto tensorial sea $\top$):

$$\begin{tikzcd}
\top \otimes X \arrow[r, "0\otimes X"] \arrow[dr, "g\circ i"'] & N_0 \otimes X \arrow[d, "f"] & N_0 \otimes X \arrow[l, "s\otimes X"'] \arrow[dl, "h"] \\
 & Y &
\end{tikzcd}$$

entonces tenemos

$$f \circ (0 \otimes X) = g \circ i$$

$$f \circ (s \otimes X) = h$$

Por hipótesis de inducción con cada proyección de g, g_i ($j = 1, \dots, k$) concuerda una función $g_j' \in \mathcal{B}^n$ y con cada proyección de h, h_j ($j = 1, \dots, k$) concuerda una función $h_j' \in \mathcal{B}^n$. Es fácil ver que si f_j ($j = 1, \dots, k$) son las proyecciones de f, tenemos

$$f_j \circ (0 \otimes X) = g_j \circ i$$

$$f_j \circ (s \otimes X) = h_j$$

Así tenemos que con f_j concuerda la función f_j' definida por la recursión segura que sigue

$$f_j'(0, \bar{x}) = g_j'(\bar{x})$$

$$f_j'(n+1, \bar{x}) = h_j'(\bar{x})$$

- f se obtiene por recursión dependiente segura de nivel k a partir de las funciones $g : X \longrightarrow Y$ y $h : N_{k+1} \otimes X \otimes Y \longrightarrow Y$ (suponemos que Y es el producto tensorial de k factores de la forma N_s con $s < k+1$):

$$\begin{tikzcd}
\top \otimes X \arrow[r, "0\otimes X"] \arrow[dr, "{(0\otimes X), g\circ\pi_1}"'] & N_{k+1} \otimes X \arrow[r, "s\otimes X"] \arrow[d, "{id, f}"] & N_{k+1} \otimes X \arrow[d, "f"] \\
 & (N_{k+1} \otimes X) \otimes Y \arrow[r, "h"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Por hipótesis de inducción con cada proyección g_i de g concuerda una función g_i' y con cada proyección h_i de h concuerda una función h_i'. Es fácil ver que con cada proyección f_i de f concuerda la función f'_i. Las funciones f'_i se definen por recursión simultánea donde no ponemos las especies de las variables, pero que es fácil ver que se cumplen los requisitos de la recursión segura:

$$\begin{aligned}
&f'_i(0,\bar{x}) = g'_i(\bar{x}) \text{ para } i = 1,\ldots,s\\
&f'_1(n+1,\bar{x}) = h'_i(n,\bar{x},f'_1(n,\bar{x}),\ldots,f'_s(n,\bar{x}))\\
&f'_2(n+1,\bar{x}) = h'_2(n,\bar{x},f'_1(n,\bar{x}),\ldots,f'_s(n,\bar{x}))\\
&\qquad\qquad\ldots\ldots\ldots\\
&f'_s(n+1,\bar{x}) = h'_s(n,\bar{x},f'_1(n,\bar{x}),\ldots,f'_s(n,\bar{x}))
\end{aligned}$$

Análogamente a como se demuestra que las funciones recursivas primitivas están cerradas respecto a la recursión simultánea, puede demostrarse que $\mathcal{B}^3$ está cerrada respecto a la recursión segura simultánea, ya que puede reducirse a la segura usando la función

$$\varphi(n,\bar{x}) = \prod_{i=1}^{k} p_i^{f'_i(n,\bar{x})}$$

que pertenece a $\mathcal{B}^n$ si las f'_i pertenecen a $\mathcal{B}^n$.

□

Capítulo 6

Conclusiones

6.1. Conclusiones

Con los resultados del último Capítulo se ha completado la caracterización por medio de Teoría de Categorías de las clases de la *Jerarquía de Grzegorzcyk*. Se han corregido, extendido y generalizado los resultados de [Otto] a cualquier estadio de los números naturales. Esto ha supuesto afrontar la dificultad de definir una estructura monoidal cuando lo más sencillo era trabajar directamente con productos cartesianos al modo de los textos clásicos. En este sentido hemos adaptado y generalizado los resultados de [Román-Paré] al contexto de una n-Comprensión proporcionando una visión más amplia.

Es destacable la dificultad que entraña caracterizar en términos categoriales conceptos intuitivos como la composición y la recursión seguras de [Bellantoni-Cook] o la idea de ramificación de [Leivant]. Una vez definida toda la estructura sintáctica y recopilados los resultados es más fácil comprender la semántica de las funciones cuyas variables están separadas por puntos y coma. Abrir el campo de las caracterizaciones categoriales de la subrecursión supone plantear cómo se puede, desde una rama de la Lógica, dar una visión de conjunto de un campo de estudio con unas implicaciones tan prácticas como es la *Complejidad Computacional*.

Es reseñable, asimismo, que el presente estudio está basado de manera muy importante en el trabajo de autores desaparecidos de la práctica investigadora por razones diversas. Esta tesis puede suponer de algún modo la rehabilitación de algunos de ellos.

6.2. Trabajo futuro

La presente tesis puede ser extendida en varios sentidos, dado que se han utilizado construcciones novedosas, tales como las n-Comprensiones simétricas monoidales o los endofuntores de coerción sobre la categoría **n**. Destacamos tres de esas vías posibles de extensión.

1. El planteamiento más obvio, a raíz de los conceptos introducidos en el Capítulo 2, sería plantear la construcción de clases de funciones recursivas partiendo de órdenes no totales. Esto es, en lugar de considerar el orden (total en realidad) dado por

$$\cdot \longrightarrow \cdot \longrightarrow \cdots \longrightarrow \cdot$$

se trataría de trabajar con otros en la forma

$$\begin{tikzcd}
 & & \cdots \\
 & \cdot \arrow[ur] & \\
\cdot \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
 & \cdot \arrow[dr] & \\
 & & \cdots
\end{tikzcd}$$

de modo que los endofuntores sobre una categoría *SM* actuarían de modo distinto. Puede ser interesante construir en base a ello un concepto distinto de Comprensión a partir del cual se pudiera montar unas doctrinas muy diferentes de las definidas aquí. Esta idea se basa en la construcción hecha en [Otto] sobre el orden parcial

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[dr] & & {} \arrow[dl] \\
 & \cdot &
\end{tikzcd}$$

que da lugar a una caracterización de la clase de *Funciones de Espacio Polinomial*.

2. Una línea de investigación más teórica puede consistir en dar una interpretación del trabajo hecho en la presente tesis desde el punto de vista de *fibrados cartesianos*. La idea sería definir una cadena de fibrados que nos permitieran trabajar sin coerciones. Esto es, tomando por

ejemplo *fibrados codominio* en cada categoría exponencial en la forma $\mathcal{C}^n$ de modo que se suprimiera en cada actuación del fibrado uno o varios morfismos de las cadenas de que constan esas categorías. Sea la cadena de *funtores de olvido*[1]

$$Set^{\mathbf{n}} \xrightarrow{d^1} ... \xrightarrow{d^1} Set^{\mathbf{2}} \xrightarrow{d^1} Set$$

tales que para cada cadena de morfismos $\cdot \xrightarrow{f_{n-1}} \cdot \xrightarrow{f_{n-2}} \cdot \ldots \cdot \xrightarrow{f_1} \cdot$ en $Set^{\mathbf{n}}$ actúan del modo siguiente

$$d^1(\cdot \xrightarrow{f_{n-1}} \cdot \xrightarrow{f_{n-2}} \cdot \ldots \cdot \xrightarrow{f_1} \cdot) = \cdot \xrightarrow{f_{n-2}} \cdot \ldots \cdot \xrightarrow{f_1} \cdot$$

Del mismo modo pueden definirse por composición más funtores a partir de los d^1 para la cadena anterior dados por diagramas del tipo

$$\begin{tikzcd}
Set^{\mathbf{n}} \arrow[r, "d^1"] \arrow[rr, bend right, "d^2"'] \arrow[rrr, bend right=50, "d^3"'] & Set^{\mathbf{n-1}} \arrow[r, "d^1"] \arrow[rr, bend left, "d^2"] & Set^{\mathbf{n-2}} \arrow[r, "d^1"] & Set^{\mathbf{n-3}} \arrow[r, "d^1"] & \cdots \arrow[r, "d^1"] & Set
\end{tikzcd}$$

Formalmente, sean los funtores

$$d^{k-l} = d^1 \circ \overset{k-l}{\ldots} \circ d^1 : Set^{\mathbf{k}} \longrightarrow Set^{\mathbf{l}}$$

con $k > l$ y que actúan para una cadena de morfismos

$$\cdot \xrightarrow{f_{k-1}} \cdot \xrightarrow{f_{k-2}} \cdot \ldots \cdot \xrightarrow{f_1} \cdot$$

en $Set^{\mathbf{k}}$ del modo siguiente

$$d^{k-l}(\cdot \xrightarrow{f_{k-1}} \cdot \xrightarrow{f_{k-2}} \cdot \ldots \cdot \xrightarrow{f_1} \cdot) = \cdot \xrightarrow{f_{l-1}} \cdot \xrightarrow{f_{l-2}} \cdot \ldots \cdot \xrightarrow{f_1} \cdot$$

Los funtores d^i son fibrados con productos finitos fibrados. Sea $\mathcal{C}$ una categoría cartesiana. Definimos las categorías $\mathcal{C}^{\mathbf{n}}$ como aquéllas cuyos objetos son las cadenas

$$\cdot \xrightarrow{f_{n-1}} \cdot \xrightarrow{f_{n-2}} \cdot \ldots \cdot \xrightarrow{f_1} \cdot$$

[1] El contenido teórico necesario para este y el siguiente ejemplos de posible trabajo futuro puede encontrarse en el Apéndice E.1.

y cuyos morfismos son n-tuplos de morfismos que hacen conmutar a cuadrados generados por esas cadenas. Si se toma la siguiente cadena de funtores

$$\mathcal{C}^{\mathbf{n}} \xrightarrow{p^1} ... \xrightarrow{p^1} \mathcal{C}^{\mathbf{2}} \xrightarrow{p^1} \mathcal{C}^{\mathbf{1}}$$

Podemos definir análogamente a lo anterior los funtores

$$p^{k-l} : \mathcal{C}^{\mathbf{k}} \longrightarrow \mathcal{C}^{\mathbf{l}}$$

para cualquier $k > l$. Denominamos $\mathcal{C}^{\mathbf{n}}_Y$ a las fibras de los funtores p^i con dominio en $\mathcal{C}^{\mathbf{n}}$. En particular éstas se definen como los conjuntos

$$\mathcal{C}^{\mathbf{n}}_Y = \{X \in \mathcal{C}^{\mathbf{n}} / p^i X = Y\}$$

A partir de la cadena de fibrados p^{n-m} con $n > m$ tenemos las fibras

$$\mathcal{C}^{\mathbf{n}}_{1^{\to m}} = \{X \in \mathcal{C}^{\mathbf{n}} / p^{n-m} X = 1^{\to m}\}$$

donde $1^{\to m} = 1 \longrightarrow 1 \longrightarrow \overset{m-1}{\cdots} \longrightarrow 1$ de modo que los objetos de estas fibras son cadenas

$$X_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_m \longrightarrow 1 \longrightarrow 1 \longrightarrow \overset{m-1}{\cdots} \longrightarrow 1$$

y los morfismos son cuadrados

$$\begin{tikzcd}
X_n \arrow[r] \arrow[d] & X_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & X_m \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[r] \arrow[d] & \overset{m}{\cdots} \arrow[r] & 1 \arrow[d] \\
Y_n \arrow[r] & Y_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & Y_m \arrow[r] & 1 \arrow[r] & \overset{m}{\cdots} \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

La idea consistiría en definir categorías fibradas en la forma $\mathcal{C}^{\mathbf{n}}_{1^{\to m}}$ con $m = 0, 1, ..., n$, obtenidas a partir de los fibrados p^{n-m} , y dotadas de diagramas *inicial*

$$1 \xrightarrow{0} N_j \xrightarrow{s} N_j$$

con $j = 0, 1, ..., n-1$ donde los objetos N_j son los del Capítulo 3, y *recursión ramificada*

$$\begin{tikzcd}
1 \times X \arrow[r, "0 \times X"] \arrow[d, "\pi_1"'] & N_{j+1} \times X \arrow[r, "s \times X"] \arrow[d, "\pi_1, f"] & N_{j+1} \times X \arrow[d, "f"] \\
X \arrow[r, "id, g"'] & X \times Y \arrow[r, "h"'] & Y
\end{tikzcd}$$

donde $f : N_{j+1} \times X \longrightarrow Y$ es único para todos $g : X \longrightarrow Y$ y $h : X \times Y \longrightarrow Y$, con las condiciones $k, l > j+1$ para $X \in \mathcal{C}^{\mathbf{n}}_{1\to k}$ e $Y \in \mathcal{C}^{\mathbf{n}}_{1\to l}$. Puede tomarse la imagen de esas categorías fibradas en las categorías $Set^{\mathbf{n}}$ para obtener caracterizaciones análogas de la *Jerarquía de Grzegorzcyk*.

3. Otra idea para desarrollar en el futuro partiendo de lo aquí expuesto, y aquella sobre la que más se ha trabajado, es otro punto de vista fibracional sobre las categorías sintácticas aquí presentadas. Se trata de ver los morfismos de la doctrina $\mathcal{I}^n$ como flechas de las categorías fibradas asociadas a unos ciertos fibrados. El desarrollo hecho hasta el momento viene en el Apéndice E.2.

Apéndices

Apéndice A.

A.1 Productos de funtores y transformaciones naturales en 2.

Posibles productos de funtores y transformaciones naturales son $T\eta$, $T\epsilon$, $G\eta$, $G\epsilon$, ηT, ηG, ϵT y ϵG. Veamos a qué transformaciones naturales dan lugar estos productos:

1. $\begin{tikzcd} \mathbf{2} \arrow[r, "T"] & \mathbf{2} \arrow[r, bend left, "id"] \arrow[r, bend right, "T"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathbf{2} \end{tikzcd}$ dando lugar a $\begin{tikzcd} \mathbf{2} \arrow[r, bend left, "Tid"] \arrow[r, bend right, "TT"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow T\eta"] & \mathbf{2} \end{tikzcd}$ y entonces

$$T\eta = 1_T$$

dado que $Tid = TT = T$.

2. $\begin{tikzcd} \mathbf{2} \arrow[r, "T"] & \mathbf{2} \arrow[r, bend left, "G"] \arrow[r, bend right, "id"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\epsilon"] & \mathbf{2} \end{tikzcd}$ dando lugar a $\begin{tikzcd} \mathbf{2} \arrow[r, bend left, "TG"] \arrow[r, bend right, "Tid"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow T\epsilon"] & \mathbf{2} \end{tikzcd}$ y entonces

$$T\epsilon = \eta \circ \epsilon$$

dado que $TG = G$ y $Tid = T$.

3. $\begin{tikzcd} \mathbf{2} \arrow[r, "G"] & \mathbf{2} \arrow[r, bend left, "id"] \arrow[r, bend right, "T"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathbf{2} \end{tikzcd}$ dando lugar a $\begin{tikzcd} \mathbf{2} \arrow[r, bend left, "Gid"] \arrow[r, bend right, "GT"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow G\eta"] & \mathbf{2} \end{tikzcd}$ y entonces

$$G\eta = \eta \circ \epsilon$$

dado que $Gid = G$ y $GT = T$.

4. $\begin{tikzcd} \mathbf{2} \arrow[r, "G"] & \mathbf{2} \arrow[r, bend left, "G"] \arrow[r, bend right, "id"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\epsilon"] & \mathbf{2} \end{tikzcd}$ dando lugar a $\begin{tikzcd} \mathbf{2} \arrow[r, bend left, "GG"] \arrow[r, bend right, "Gid"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow G\epsilon"] & \mathbf{2} \end{tikzcd}$ y entonces

$$G\epsilon = 1_G$$

dado que $GG = Gid = G$.

5. $\begin{tikzcd} \mathbf{2} \arrow[r, bend left, "id"] \arrow[r, bend right, "T"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathbf{2} \arrow[r, "T"] & \mathbf{2} \end{tikzcd}$ dando lugar a $\begin{tikzcd} \mathbf{2} \arrow[r, bend left, "idT"] \arrow[r, bend right, "TT"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \eta T"] & \mathbf{2} \end{tikzcd}$ y entonces

$$\eta T = 1_T$$

dado que $idT = TT = T$.

6. $\begin{tikzcd} \mathbf{2} \arrow[r, bend left, "id"] \arrow[r, bend right, "T"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathbf{2} \arrow[r, "G"] & \mathbf{2} \end{tikzcd}$ dando lugar a $\begin{tikzcd} \mathbf{2} \arrow[r, bend left, "idG"] \arrow[r, bend right, "TG"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \eta G"] & \mathbf{2} \end{tikzcd}$ y entonces

$$\eta G = 1_G$$

dado que $idG = TG = G$.

7. $\begin{tikzcd} \mathbf{2} \arrow[r, bend left, "G"] \arrow[r, bend right, "id"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\epsilon"] & \mathbf{2} \arrow[r, "T"] & \mathbf{2} \end{tikzcd}$ dando lugar a $\begin{tikzcd} \mathbf{2} \arrow[r, bend left, "GT"] \arrow[r, bend right, "idT"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \epsilon T"] & \mathbf{2} \end{tikzcd}$ y entonces

$$\epsilon T = 1_T$$

dado que $GT = idT = T$.

8. $\begin{tikzcd} \mathbf{2} \arrow[r, bend left, "G"] \arrow[r, bend right, "id"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\epsilon"] & \mathbf{2} \arrow[r, "G"] & \mathbf{2} \end{tikzcd}$ dando lugar a $\begin{tikzcd} \mathbf{2} \arrow[r, bend left, "GG"] \arrow[r, bend right, "idG"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \epsilon G"] & \mathbf{2} \end{tikzcd}$ y entonces

$$\epsilon G = 1_G$$

dado que $GG = idG = G$.

Resumiento tenemos las identidades:

$$T\eta = \eta T = 1_T \qquad G\epsilon = \epsilon G = 1_G \qquad T\epsilon = \eta \circ \epsilon$$

$$G\eta = \eta \circ \epsilon \qquad \eta G = 1_G \qquad \epsilon T = 1_T$$

A.2 Conteo de funciones monótonas de n a n

Vamos a establecer el número de funciones monótonas de **n** a **n** (objetos de M_n^{op}), para ello asignamos al conjunto **n** el orden total (u orden lineal) $<$ entre números naturales.

Proposición. *Sea f la función tal que $f(i,k)$ con $0 \leq i < k$ es el número de funciones monótonas h de $\mathbf{k}$ a $\mathbf{k}$ tales que $h(0) = i$. La función g tal que $g(k)$ con $k > 1$ y que da el número de funciones monótonas de $\mathbf{k}$ a $\mathbf{k}$ puede ser definida como*

$$g(k) = \sum_{i=0}^{k-1} f(i,k).$$

Con f definida por casos:

$$f(0,2) = 2 \qquad f(1,2) = 1$$

y para cada $k > 2$ con $0 \leq i < k$

$$f(i,k) = \begin{cases} 1 & si\ i = k-1, \\ \sum\limits_{j=i-1}^{k-2} f(j,k-1) & si\ 0 < i < k-1 \\ 2g(k-1) & si\ i = 0 \end{cases}$$

Demostración. El caso $f(i,k)$ cuando $k = 2$ se sigue del hecho de que las únicas funciones monótonas de **2** a **2** son

$$00, 01, 11.$$

Cuando $k > 0$ observamos que $f(k-1,k) = 1$ ya que la única función monótona h de $\mathbf{k}$ a $\mathbf{k}$ con $h(0) = k-1$ es tal que para todo $i = 0, \cdots, k-1$, $h(i) = k-1$. Si $0 < i < k-1$ las funciones monótonas h tales que $h(0) = i$ toman valores en $\{i, \cdots, k-1\}$ y entonces su número es la suma de las funciones monótonas cuya longitud es $k-1$ empezando por $i, i+1, \cdots, k-1$, que son las mismas que las palabras monótonas cuya longitud es $k-1$ empezando por $i-1, i, \cdots, k-2$ y tomando valores en $\{i-1, \cdots, k-2\}$. Para ver el valor de $f(0,k)$ pensemos que el número de funciones monótonas h de $\mathbf{k}$ a $\mathbf{k}$ tales que $h(0) = 0$ es la suma de las funciones monótonas s tales que $s(0) = 0$ y $s(1) \neq 0$ y las funciones t tales que $t(0) = t(1) = 0$. El número de funciones s es exactamente el de las funciones monótonas de $\mathbf{k-1}$ a $\mathbf{k-1}$, esto es, $g(k-1)$. Lo mismo sucede para las funciones t. □

Ejemplo. Damos una tabla con los primeros valores de f:

$i \backslash k$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	2	6	20	70	252	504	2172	8670	33920
1	1	3	10	35	126	252	1086	4335	16960
2		1	4	15	56	210	582	2163	8290
3			1	5	21	84	330	1077	3955
4				1	6	28	120	495	1792
5					1	7	36	165	715
6						1	8	45	220
7							1	9	55
8								1	19
9									1

y entonces los primeros valores de g son:

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g	3	10	35	126	452	1086	4335	16960	55918

A.3 Demostración de la Proposición 2.4.2

Proposición. *Para cada $n \in \mathbb{N}$ el monoide M_n^{op} puede ser generado por medio del conjunto finito*

$$\{id, G_0, \cdots, G_{n-2}, T_0, \cdots, T_{n-2}\}$$

Demostración. Probar que toda función monótona de n a n puede expresarse por medio de un producto de distintas T y G (posiblemente vacío y en ese caso igual a id) es lo mismo que ver que M_n^{op} está generado por id, T_k y G_k. Para ello se presentará un programa que, dada una función monótona f de n a n, dará como output su representación en términos de estos generadores. La idea es construir a partir de f una función g tomando tantos valores diferentes como f de tal modo que haya una función monótona de f a g y g tome los valores $\{0, 1, ..., s\}$ cuando f tome $s+1$ valores diferentes.

input f %La función monótona a generar
$pila = \emptyset$ %Una pila para colocar las T y G
$i = 0$ %Una variable corriendo en n
$g(0) = 0$
$a = 0$
mientras $i \leq n-2$ %Construcción de la función g
  si $f(i) \neq f(i+1)$ **entonces** $a = a+1$

```
        i = i + 1
        g(i) = a
si a = n − 1 entonces % f es la identidad
        pila = pila + id        %+ introduce un objeto en una pila
        fin
i = 0
mientras i ≤ n − 1 %Representación de g
        si g(i) = i entonces i = i + 1
        en otro caso
            si i < n − 1 entonces
                si g(i) = g(i + 1) entonces
                    sigue = verdadero
                    mientras sigue
                        i = i + 1
                        si i < n − 1 entonces
                            si g(i) ≠ g(i + 1) entonces sigue = falso
                        en otro caso sigue = falso
            k = i − 1
            mientras k ≥ g(i)
                pila = pila + G_k
                k = k − 1
            i = i + 1
i = n − 1
mientras i > 0        % Representación de f a partir de g
        si g(i) ≠ g(i − 1) entonces
            si g(i) ≠ f(i) entonces
                k = g(i)
                mientras k < f(i)
                    pila = pila + T_k
                    k = k + 1
        i = i − 1
k = g(0)
mientras k < f(0)
        pila = pila + T_k
        k = k + 1
```
□

A.4 La categoría simplicial

En este Apéndice se van a introducir los conceptos de *categoría simplicial*, *operadores cara* y *degeneración* y *conjunto simplicial* tratando de establecer una relación entre ellos y los conceptos definidos en el Capítulo 2.

En particular se verá que la categoría M_n es un funtor homomorfismo formado a partir de la *categoría simplicial* y que los endofuntores T_k y G_k pueden expresarse en términos de los *operadores cara* y *degeneración*. Los resultados de este Apéndice permiten una interpretación de los conceptos expuestos en términos geométricos y sugiere trabajos posteriores.

Definición. Sea Δ la categoría cuyos objetos son los conjuntos ordenados $\mathbf{n} = \{0, 1, ..., n-1\}$ y cuyos morfismos son las flechas entre esos conjuntos preservando el orden. Denominamos *categoría simplicial* a la categoría Δ.

La categoría Δ puede también ser vista como una $2-$categoría. De hecho puede ser vista como una subcategoría de Cat dado que sus objetos son, como se ha visto en la primera Sección, los *preórdenes* $\mathbf{n}$ y éstos pueden ser vistos como categorías.

Ejemplo. Si tomamos el funtor homomorfismo $\Delta(\mathbf{2}, \mathbf{3})$ sus flechas son 2-tuplos del tipo $(0 \longrightarrow 1, 1 \longrightarrow 3)$, o bien $(0 \longrightarrow 1, 1 \longrightarrow 2)$. De hecho:

$$\Delta(\mathbf{2}, \mathbf{3}) = \{(00, 10), (00, 11), (00, 12), (01, 11), (01, 12), (02, 12)\}$$

Definición. Sea $i \in \{0, 1, ..., n\}$ y sean

$$\delta_i : \mathbf{n-1} \longrightarrow \mathbf{n}$$

definido por

$$\delta_i(j) = \begin{cases} j & \text{si } j < i \\ j+1 & \text{si } j \geq i \end{cases}$$

y

$$\sigma_i : \mathbf{n} \longrightarrow \mathbf{n+1}$$

definido por

$$\sigma_i(j) = \begin{cases} j & \text{si } j \leq i \\ j-1 & \text{si } j > i \end{cases}$$

morfismos en Δ.[2] A las δ_i se les denomina *operadores degeneración* y a las σ_i *operador cara*.

Proposición. *Si $f : \mathbf{m} \longrightarrow \mathbf{n}$ es una flecha en Δ entonces f puede expresarse en términos de los operadores degeneración y cara.*

[2]Hay infinitos δ_i y σ_i, uno para cada $\mathbf{n}$ tal que n sea mayor o igual que i.

Demostración. Sean $i_1, ..., i_k$ los elementos de $\mathbf{n}$ en orden decreciente que no están en la imagen de $f(\mathbf{m})$ y sean $j_1, ..., j_l$ los elementos de $\mathbf{m}$ en orden creciente tales que

$$f(j) = f(j+1)$$

Bajo estas condiciones se satisface la ecuación

$$f = \delta_{i_1} \circ ... \circ \delta_{i_k} \circ \sigma_{j_1} \circ ... \circ \sigma_{j_l}$$

□

Esta Proposición expresa que cada flecha en la categoría simplicial puede generarse a partir de las flechas degeneración y cara.

Proposición. *Los operadores degeneración y cara satisfacen las ecuaciones*

1. $\delta_j \circ \delta_i = \delta_i \circ \delta_{j-1}$ si $i < j$
2. $\sigma_j \circ \sigma_i = \sigma_i \circ \sigma_{j+1}$ si $i \leq j$
3. $\sigma_j \circ \delta_i = \begin{cases} \delta_i \circ \sigma_{j-1} & \text{si } i < j \\ 1 & \text{si } i = j \text{ o } i = j+1 \\ \delta_{i-1} \circ \sigma_j & \text{si } i > j+1 \end{cases}$

Con estas definiciones tenemos las dos siguientes Proposiciones.

Proposición. $M_n^{op} = \Delta(\mathbf{n}, \mathbf{n})$.

De este modo sabemos que los endofuntores T_k y G_k junto con el endofuntor identidad en $\mathbf{n}$ generan la categoría $\Delta(\mathbf{n}, \mathbf{n})$, pero además se dan una serie de relaciones entre los operadores δ_i y σ_i y estos endofuntores que nos permite deducir que los primeros también generan M_n^{op}. Esta intuición se formaliza en lo siguiente.

Proposición. *Para los generadores de M_n^{op} y los de Δ tenemos las siguientes relaciones con $i \in \{0, 1, ..., n-2\}$*

1. $\sigma_i \delta_i = T_i$
2. $\delta_i \sigma_i = id$
3. $\sigma_i \delta_{i+1} = G_i$

Demostración.

1. Tomamos $i \in \{0, 1, ..., n-2\}$ con

$$\delta_i : \mathbf{n+1} \longrightarrow \mathbf{n} \text{ y } \sigma_i : \mathbf{n} \longrightarrow \mathbf{n+1}$$

y calculamos el valor de

$$(\delta_i(\sigma_i(j)) = \begin{cases} \sigma_i(j) & \text{si } \sigma_i(j) < i \\ \sigma_i(j)+1 & \text{si } \sigma_i(j) \geq i \end{cases} = \begin{cases} j & \text{si } \sigma_i(j) < i \text{ y } j \leq i \\ j-1 & \text{si } \sigma_i(j) < i \text{ y } j > i \\ j+1 & \text{si } \sigma_i(j) \geq i \text{ y } j \leq i \\ j & \text{si } \sigma_i(j) \geq i \text{ y } j > i \end{cases}$$

$$= \begin{cases} j & \text{si } j < i \text{ y } j \leq i \\ j+1 & \text{si } j = i \\ j & \text{si } j-1 \geq i \text{ y } j > i \end{cases} = \begin{cases} j & \text{si } j < i \text{ o } j > i \\ j+1 & \text{si } j = i \end{cases} = T_i(j)$$

dado que el caso correspondiente al valor $j-1$ es imposible según las definiciones hechas.

2. Tomamos $i \in \{0, 1, ..., n-2\}$ con

$$\delta_i : \mathbf{n+1} \longrightarrow \mathbf{n} \text{ y } \sigma_i : \mathbf{n} \longrightarrow \mathbf{n+1}$$

y calculamos el valor de

$$(\sigma_i(\delta_i(j)) = \begin{cases} \delta_i(j) & \text{si } \delta_i(j) \leq i \\ \delta_i(j)-1 & \text{si } \delta_i(j) > i \end{cases} = \begin{cases} j & \text{si } \delta_i(j) \leq i \text{ y } j \leq i \\ j+1 & \text{si } \delta_i(j) \leq i \text{ y } j \geq i \\ j-1 & \text{si } \delta_i(j) > i \text{ y } j < i \\ j & \text{si } \delta_i(j) > i \text{ y } j \geq i \end{cases}$$

$$\begin{cases} j & \text{si } j \leq i \\ j & \text{si } j \geq i \end{cases} = id(j)$$

dado que los casos correspondientes a los valores $j-1$ y $j+1$ son imposibles según las definiciones hechas.

3. Tomamos $i \in \{0, 1, ..., n-2\}$ con

$$\delta_i : \mathbf{n+1} \longrightarrow \mathbf{n} \text{ y } \sigma_i : \mathbf{n} \longrightarrow \mathbf{n+1}$$

y calculamos el valor de

$$(\delta_{i+1}(\sigma_i(j)) = \begin{cases} \sigma_i(j) & \text{si } \sigma_i(j) < i+1 \\ \sigma_i(j)+1 & \text{si } \sigma_i(j) \geq i+1 \end{cases} = \begin{cases} j & \text{si } \sigma_i(j) < i+1 \text{ y } j \leq i \\ j-1 & \text{si } \sigma_i(j) < i+1 \text{ y } j > i \\ j+1 & \text{si } \sigma_i(j) \geq i+1 \text{ y } j \leq i \\ j & \text{si } \sigma_i(j) \geq i+1 \text{ y } j > i \end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} j & \text{si } j < i+1 \text{ y } j \leq i \\ j-1 & \text{si } i < j < i+2 \\ j & \text{si } j \geq i+2 \text{ y } j > i \end{array}\right. = \left\{\begin{array}{ll} j & \text{si } j < i+1 \text{ o } j > i+1 \\ j-1 & \text{si } j = i+1 \end{array}\right. = G_i(j)$$

dado que el caso correspondiente al valor $j+1$ es imposible según las definiciones hechas.

$\square$

Definición. Un *conjunto simplicial* es un funtor

$$\Delta \longrightarrow Set$$

A.5 Demostración del Teorema 2.4.5

Teorema. *Sean* $m,\ i,\ i+1,\ j,\ k \in \mathbf{n-1}$*, entonces:*

1. id, T_k y G_k son idempotentes.
2. $T_kG_k = G_k$ y $G_kT_k = T_k$.
3. $T_{i+1}G_i = T_{i+1}$ y $G_iT_{i+1} = G_i$.
4. $T_kG_m = G_mT_k$ cuando $k \neq m, m+1$.
5. $T_kT_j = T_jT_k$ cuando $j \neq k-1, k+1$.
6. $G_kG_j = G_jG_k$ cuando $j \neq k-1, k+1$.
7. $T_iT_{i+1} \neq T_{i+1}T_i$ y $G_iG_{i+1} \neq G_{i+1}G_i$.
8. $T_iT_{i+1}T_i = T_iT_{i+1}$ y $G_iG_{i+1}G_i = G_{i+1}G_i$.

Demostración.

1. Sea $0 \leq k < n-1$ y $p \in n$, entonces

$$(T_kT_k)p = T_k(T_kp) = \left\{\begin{array}{ll} T_kp & \text{si } p \neq k \\ T_k(p+1) & \text{si } p = k \end{array}\right.$$

$$= \left\{\begin{array}{ll} p & \text{si } p \neq k \\ p+1 & \text{si } p = k \end{array}\right. = T_kp$$

Análogamente tenemos

$$G_kG_kp = \begin{cases} G_kp & \text{si } p \neq k+1 \\ G_k(p-1) & \text{si } p = k+1 \end{cases} = \begin{cases} p & \text{si } p \neq k+1 \\ p-1 & \text{si } p = k+1 \end{cases} = T_kp$$

2. Sea $0 \leq k < n-1$ y $p \in n$, entonces

$$(T_kG_k)p = \begin{cases} G_kp & \text{si } p \neq k \\ G_k(p+1) & \text{si } p = k \end{cases} = \begin{cases} G_kp & \text{si } p \neq k \\ p & \text{si } p = k \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} G_kp & \text{si } p \neq k \\ G_kp & \text{si } p = k \end{cases} = G_kp$$

ya que si $k = p$ entonces $p+1 = k+1$ y $G_k(p+1) = p$ y además, $p \neq k+1$ y $G_kp = p$.

Análogamente tenemos

$$(G_kT_k)p = \begin{cases} T_kp & \text{si } p \neq k+1 \\ T_k(p+1) & \text{si } p = k+1 \end{cases} = \begin{cases} T_kp & \text{si } p \neq k+1 \\ p & \text{si } p = k+1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} T_kp & \text{si } p \neq k+1 \\ T_kp & \text{si } p = k+1 \end{cases} = T_kp$$

ya que si $p = k+1$ entonces $p-1 = k$ y $T_k(p-1) = p$ y además $p \neq k$ y $T_kp = p$.

3. Sea $0 \leq k < n-2$ y $p \in n$, entonces

$$(T_{k+1}G_k)p = G_k(T_{k+1}p) = \begin{cases} G_kp & \text{si } p \neq k+1 \\ G_k(p+1) & \text{si } p = k+1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} p & \text{si } p \neq k+1 \\ p+1 & \text{si } p = k+1 \end{cases} = T_{k+1}p$$

ya que si $p = k+1$ entonces $p+1 \neq k+1$ y $G_k(p+1) = p+1$.

Análogamente tenemos

$$(G_kT_{k+1})p = T_{k+1}(G_kp) = \begin{cases} T_{k+1}p & \text{si } p \neq k+1 \\ T_{k+1}(p-1) & \text{si } p = k+1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} p & \text{si } p \neq k+1 \\ p-1 & \text{si } p = k+1 \end{cases} = G_kp$$

ya que si $p = k+1$ entonces $p-1 \neq k+1$ y $T_{k+1}(p-1) = p-1$.

4. Sea $k \neq m$, $k \neq m+1$, $0 \leq k < n-2$ y $p \in n$, entonces

$$(T_kG_m)p = G_m(T_kp) = \begin{cases} G_mp & \text{si } p \neq k \\ G_m(p+1) & \text{si } p = k \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} p & \text{si } p \neq k \text{ y } p \neq m+1 \\ m & \text{si } p \neq k \text{ y } p = m+1 \\ k+1 & \text{si } p = k \text{ y } k \neq m \ (p \neq m) \\ k & \text{si } p = k \text{ y } k = m \ (p = m) \end{cases}$$

El último caso no puede darse por ir contra la hipótesis. Por otra parte tenemos

$$(G_mT_k)p = T_k(G_mp) = \begin{cases} T_kp & \text{si } p \neq m+1 \\ T_km & \text{si } p = m+1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} p & \text{si } p \neq m+1 \text{ y } p \neq k \\ k+1 & \text{si } p \neq m+1 \text{ y } p = k \\ m & \text{si } p = m+1 \text{ y } k \neq m \\ m+1 & \text{si } p = m+1 \text{ y } k = m \end{cases}$$

El último caso no puede darse por ir contra la hipótesis. El segundo caso del primero coincide con el tercero caso del segundo y el tercero con el segundo, teniendo en cuenta las hipótesis.

5. Sea $j \neq i+1$ y $j \neq i-1$, entonces

$$(T_iT_j)p = T_j(T_ip) = \begin{cases} T_jp & \text{si } p \neq i \\ T_j(p+1) & \text{si } p = i \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} p & \text{si } p \neq i \text{ y } p \neq j \\ j+1 & \text{si } p \neq i \text{ y } p = j \\ i+1 & \text{si } p = i \text{ y } j \neq i+1 \\ i+2 & \text{si } p = i \text{ y } j = i+1 \end{cases}$$

La última no se cumple ya que va contra el supuesto. Por otra parte tenemos

$$(T_jT_i)p = T_i(T_jp) = \begin{cases} T_ip & \text{si } p \neq j \\ T_i(p+1) & \text{si } p = j \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} p & \text{si } p \neq j \text{ y } p \neq i \\ i+1 & \text{si } p \neq j \text{ y } p = i \\ j+1 & \text{si } p = j \text{ y } i \neq j+1 \\ j+2 & \text{si } p = j \text{ y } i = j+1 \end{cases}$$

La última línea no se cumple ya que va contra el supuesto. Y, además, si $p = j$ y $p = i$, obtenemos en ambos casos el mismo valor.

Respecto a la otra igualdad tenemos

$$(G_iG_j)p = G_j(G_ip) = \begin{cases} G_jp & \text{si } p \neq i+1 \\ G_ji & \text{si } p = i+1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} p & \text{si } p \neq i+1 \text{ y } p \neq j+1 \\ j & \text{si } p \neq i+1 \text{ y } p = j+1 \\ i & \text{si } p = i+1 \text{ y } i \neq j+1 \\ j & \text{si } p = i+1 \text{ y } i = j+1 \end{cases}$$

La última no se cumple ya que va contra el supuesto. Por otra parte tenemos

$$(G_jG_i)p = G_i(G_jp) = \begin{cases} G_ip & \text{si } p \neq j+1 \\ G_ij & \text{si } p = j+1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} p & \text{si } p \neq j+1 \text{ y } p \neq i+1 \\ i & \text{si } p \neq j+1 \text{ y } p = i+1 \\ j & \text{si } p = j+1 \text{ y } j \neq i+1 \\ i & \text{si } p = j+1 \text{ y } j = i+1 \end{cases}$$

La última línea no se cumple ya que va contra el supuesto. Y, además, si $p = j+1$ o $p = i+1$ obtenemos en ambos casos el mismo valor.

6. Sea $0 \leq p < n$, entonces

$$T_iT_{i+1}p = T_{i+1}(T_ip) = \begin{cases} T_{i+1}p & \text{si } p \neq i \\ T_{i+1}(p+1) & \text{si } p = i \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} p & \text{si } p \neq i \text{ y } p \neq i+1 \\ i+2 & \text{si } p = i+1 \\ i+2 & \text{si } p = i \end{cases} \qquad (A)$$

Por otra parte tenemos

$$T_{i+1}T_ip = T_i(T_{i+1}p) = \begin{cases} T_ip & \text{si } p \neq i+1 \\ T_i(i+2) & \text{si } p = i+1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} p & \text{si } p \neq i \text{ y } p \neq i+1 \\ i+1 & \text{si } p = i \\ i+2 & \text{si } p = i+1 \end{cases} \qquad (A1)$$

Análogamente tenemos

$$G_iG_{i+1}p = G_{i+1}(G_ip) = \begin{cases} G_{i+1}p & \text{si } p \neq i+1 \\ G_{i+1}(p+1) & \text{si } p = i+1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} p & \text{si } p \neq i+1 \text{ y } p \neq i+2 \\ i+1 & \text{si } p = i+2 \\ i & \text{si } p = i+1 \end{cases} \qquad (B)$$

Por otra parte tenemos

$$G_{i+1}G_ip = G_i(G_{i+1}p) = \begin{cases} G_ip & \text{si } p \neq i+2 \\ G_i(i+1) & \text{si } p = i+2 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} p & \text{si } p \neq i+1 \text{ y } p \neq i+2 \\ i & \text{si } p = i+1 \\ i & \text{si } p = i+2 \end{cases} \qquad (B1)$$

Como puede verse (B) y $(B1)$ son diferentes.

7. Sea $0 \leq p < n$, entonces

$$T_i T_{i+1} T_i p = \begin{cases} T_{i+1} T_i p & \text{si } p \neq i \\ T_{i+1} T_i (p+1) & \text{si } p = i \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} T_i p & \text{si } p \neq i \text{ y } p \neq i+1 \\ T_i (i+2) & \text{si } p = i+1 \\ T_i (i+2) & \text{si } p = i \end{cases}$$

$$= \begin{cases} p & \text{si } p \neq i \text{ y } p \neq i+1 \\ i+2 & \text{si } p = i+1 \\ i+2 & \text{si } p = i \end{cases}$$

Y puede verse por (A) que coincide con $T_i T_{i+1}$.

$$G_i G_{i+1} G_i p = \begin{cases} G_{i+1} G_i p & \text{si } p \neq i+1 \\ G_{i+1} G_i i & \text{si } p = i+1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} G_i p & \text{si } p \neq i+1 \text{ y } p \neq i+2 \\ G_i (i+1) & \text{si } p = i+2 \\ G_i (i+1) & \text{si } p = i+1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} p & \text{si } p \neq i+1 \text{ y } p \neq i+2 \\ i & \text{si } p = i+2 \\ i & \text{si } p = i+1 \end{cases}$$

Y puede verse por $(B1)$ que coincide con $G_{i+1} G_i$.

$\square$

A.6 Demostración del Teorema 2.4.6

Teorema. *Sean j y k tal que* $0 \leq j, k < n-1$.

1. *Si $j \neq k$ entonces $G_k T_j G_k = G_k T_j$ y $T_k G_j T_k = T_k G_j$.*
2. *Si $k \neq j+1$ entonces $T_k G_j T_k = G_j T_k$ y $G_j T_k G_j = T_k G_j$.*
3. *Si $k \neq j+1$ entonces $T_k T_j T_k = T_k T_j$ y $G_j G_k G_j = G_j G_k$.*

Demostración. Sea $j \neq k$.

$$G_kT_jG_kp = \begin{cases} T_jG_kp & \text{si } p \neq k+1 \\ T_jG_kk & \text{si } p = k+1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} G_kp & \text{si } p \neq k+1 \text{ y } p \neq j \\ G_k(j+1) & \text{si } p \neq k+1 \text{ y } p = j \\ G_kk & \text{si } p = k+1 \text{ y } k \neq j \\ G_k(k+1) & \text{si } p = k+1 \text{ y } k = j \end{cases}$$

$$= \begin{cases} p & \text{si } p \neq k+1 \text{ y } p \neq j \\ j+1 & \text{si } p \neq k+1 \text{ y } p = j \text{ y } j \neq k \\ j & \text{si } p \neq k+1 \text{ y } p = j \text{ y } j = k \\ k & \text{si } p = k+1 \text{ y } k \neq j \\ k+1 & \text{si } p = k+1 \text{ y } k = j \end{cases}$$

La tercera y quinta línea no puede tenerse por hipótesis. Por otra parte tenemos

$$G_kT_jp = \begin{cases} T_jp & \text{si } p \neq k+1 \\ T_jk & \text{si } p = k+1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} p & \text{si } p \neq k+1 \text{ y } p \neq j \\ j+1 & \text{si } p \neq k+1 \text{ y } p = j \\ k & \text{si } p = k+1 \text{ y } k \neq j \\ k+1 & \text{si } p = k+1 \text{ y } k = j \end{cases}$$

En la que no puede tenerse la cuarta línea por la hipótesis. Así tenemos $G_kT_jG_k = G_kT_j$. Análogamente

$$T_kG_jT_kp = \begin{cases} G_jT_kp & \text{si } p \neq k \\ G_jT_k(k+1) & \text{si } p = k \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} T_kp & \text{si } p \neq k \text{ y } p \neq j+1 \\ T_kj & \text{si } p \neq k \text{ y } p = j+1 \\ T_k(k+1) & \text{si } p = k \text{ y } k \neq j \\ T_kk & \text{si } p = k \text{ y } k = j \end{cases}$$

$$= \begin{cases} p & \text{si } p \neq k \text{ y } p \neq j+1 \\ j & \text{si } p \neq k \text{ y } p = j+1 \text{ y } j \neq k \\ j+1 & \text{si } p \neq k \text{ y } p = j+1 \text{ y } j = k \\ k+1 & \text{si } p = k \text{ y } k \neq j \\ k+1 & \text{si } p = k \text{ y } k = j \end{cases}$$

La tercera y quinta línea no puede tenerse por hipótesis. Por otra parte tenemos

$$T_kG_jp = \begin{cases} G_jp & \text{si } p \neq k \\ G_j(k+1) & \text{si } p = k \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} p & \text{si } p \neq k \text{ y } p \neq j+1 \\ j & \text{si } p \neq k \text{ y } p = j+1 \\ k+1 & \text{si } p = k \text{ y } k \neq j \\ k & \text{si } p = k \text{ y } k = j \end{cases}$$

En la que no puede tenerse la cuarta línea por la hipótesis. Así tenemos $T_kG_jT_k = T_kG_j$.

Sea $k \neq j+1$

$$T_kG_jT_kp = \begin{cases} G_jT_kp & \text{si } p \neq k \\ G_jT_k(k+1) & \text{si } p = k \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} T_kp & \text{si } p \neq k \text{ y } p \neq j+1 \\ T_kj & \text{si } p \neq k \text{ y } p = j+1 \\ T_k(k+1) & \text{si } p = k \text{ y } k \neq j \\ T_kk & \text{si } p = k \text{ y } k = j \end{cases}$$

$$= \begin{cases} p & \text{si } p \neq k \text{ y } p \neq j+1 \\ j & \text{si } p \neq k \text{ y } p = j+1 \text{ y } j \neq k \\ j+1 & \text{si } p \neq k \text{ y } p = j+1 \text{ y } j = k \\ k+1 & \text{si } p = k \text{ y } k \neq j \\ k+1 & \text{si } p = k \text{ y } k = j \end{cases}$$

Por otra parte tenemos

$$G_jT_kp = \begin{cases} T_kp & \text{si } p \neq j+1 \\ T_kj & \text{si } p = j+1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} p & \text{si } p \neq j+1 \text{ y } p \neq k \\ k+1 & \text{si } p \neq j+1 \text{ y } p = k \\ j & \text{si } p = j+1 \text{ y } k \neq j \\ j+1 & \text{si } p = j+1 \text{ y } k = j \end{cases}$$

Si $p \neq j+1$ y $p \neq k$ ambas coinciden. Si $p = k$, como $k \neq j+1$ por hipótesis, ambas toman el valor $k+1$. Si $p = j+1$ y $j = k$ ambas toman el valor $j+1$. Si $p = j+1$ y $j \neq k$ ambas toman el valor j. Así tenemos $T_kG_jT_k = G_jT_k$. Análogamente

$$G_jT_kG_jp = \begin{cases} T_kG_jp & \text{si } p \neq j+1 \\ T_kG_jj & \text{si } p = j+1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} G_j p & \text{si } p \neq j+1 \text{ y } p \neq k \\ G_j(k+1) & \text{si } p \neq j+1 \text{ y } p = k \\ G_j j & \text{si } p = j+1 \text{ y } k \neq j \\ G_j(j+1) & \text{si } p = k+1 \text{ y } k = j \end{cases}$$

$$= \begin{cases} p & \text{si } p \neq j+1 \text{ y } p \neq k \\ k+1 & \text{si } p \neq j+1 \text{ y } p = k \text{ y } j \neq k \\ k & \text{si } p \neq j+1 \text{ y } p = k \text{ y } j = k \\ j & \text{si } p = j+1 \text{ y } k \neq j \\ j & \text{si } p = j+1 \text{ y } k = j \end{cases}$$

Por otra parte tenemos

$$T_k G_j p = \begin{cases} G_j p & \text{si } p \neq k \\ G_j(k+1) & \text{si } p = k \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} p & \text{si } p \neq k \text{ y } p \neq j+1 \\ j & \text{si } p \neq k \text{ y } p = j+1 \\ k+1 & \text{si } p = k \text{ y } k \neq j \\ k & \text{si } p = k \text{ y } k = j \end{cases}$$

Si $p \neq k$ y $p \neq j+1$ ambas toman el valor p. Si $p = k$ y $k \neq j+1$ ambas toman el mismo valor $k+1$ si $k \neq j$ y k si $k = j$. Si $p = j+1$ y $k \neq j+1$ ambas toman el valor j. Así tenemos $G_j T_k G_j = T_k G_j$.

Sea $k \neq j+1$

$$T_k T_j T_k p = \begin{cases} T_j T_k p & \text{si } p \neq k \\ T_j T_k(k+1) & \text{si } p = k \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} T_k p & \text{si } p \neq k \text{ y } p \neq j \\ T_k(j+1) & \text{si } p \neq k \text{ y } p = j \\ T_k(k+1) & \text{si } p = k \text{ y } k+1 \neq j \\ T_k(k+2) & \text{si } p = k \text{ y } k+1 = j \end{cases}$$

$$= \begin{cases} p & \text{si } p \neq k \text{ y } p \neq j+1 \\ j+1 & \text{si } p \neq k \text{ y } p = j \text{ y } k \neq j+1 \\ j+2 & \text{si } p \neq k \text{ y } p = j \text{ y } k = j+1 \\ k+1 & \text{si } p = k \text{ y } k+1 \neq j \\ k+2 & \text{si } p = k \text{ y } k+1 = j \end{cases}$$

Por otra parte tenemos

$$T_j T_k p = \begin{cases} T_k p & \text{si } p \neq j \\ T_k(j+1) & \text{si } p = j \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} p & \text{si } p \neq j \text{ y } p \neq k \\ k+1 & \text{si } p \neq j \text{ y } p = k \\ j+1 & \text{si } p = j \text{ y } k \neq j+1 \\ j+2 & \text{si } p = j \text{ y } k = j+1 \end{cases}$$

Si $p \neq j$ y $p \neq k$ ambas coinciden. Si $p = k$, como $k \neq j+1$ por hipótesis, ambas toman el valor $k+1$. Si $p = j$ y $j = k$ ambas toman el valor $j+1$. Si $p = j$, $j \neq k$ y $k \neq j+1$ ambas toman el valor $j+1$. Si $p = j$, $j \neq k$ y $k = j+1$ ambas toman el valor $j+2$. Así tenemos $T_k T_j T_k = T_j T_k$. Análogamente

$$G_j G_k G_j p = \begin{cases} G_k G_j p & \text{si } p \neq j+1 \\ G_k G_j j & \text{si } p = j+1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} G_j p & \text{si } p \neq j+1 \text{ y } p \neq k+1 \\ G_j k & \text{si } p \neq j+1 \text{ y } p = k+1 \\ G_j j & \text{si } p = j+1 \text{ y } j \neq k+1 \\ G_j k & \text{si } p = j+1 \text{ y } j = k+1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} p & \text{si } p \neq j+1 \text{ y } p \neq k+1 \\ k & \text{si } p \neq j+1 \text{ y } p = k+1 \text{ y } k \neq j+1 \\ j & \text{si } p \neq j+1 \text{ y } p = k+1 \text{ y } k = j+1 \\ j & \text{si } p = j+1 \text{ y } j \neq k+1 \\ k & \text{si } p = j+1 \text{ y } j = k+1 \end{cases}$$

Por otra parte tenemos

$$G_j G_k p = \begin{cases} G_k p & \text{si } p \neq j+1 \\ G_k j & \text{si } p = j+1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} p & \text{si } p \neq j+1 \text{ y } p \neq k+1 \\ k & \text{si } p \neq j+1 \text{ y } p = k+1 \\ j & \text{si } p = j+1 \text{ y } j \neq k+1 \\ k & \text{si } p = j+1 \text{ y } j = k+1 \end{cases}$$

Si $p \neq k+1$ y $p \neq j+1$ ambas toman el valor p. Si $p = k+1$ y $k \neq j+1$ ambas toman el mismo valor k. Si $p = j+1$ y $j \neq k+1$ ambos toman el valor j. Si $p = j+1$ y $j = k+1$ ambas toman el valor k. Así tenemos $G_j G_k G_j = G_j G_k$. □

A.7 Transformaciones naturales en n

Estas son las transformaciones naturales (50 en total) en **3**:

$$000 \Rightarrow 000; 000 \Rightarrow 001; 000 \Rightarrow 002; 000 \Rightarrow 011; 000 \Rightarrow 012$$

$$000 \Rightarrow 022; 000 \Rightarrow 111; 000 \Rightarrow 112; 000 \Rightarrow 122; 000 \Rightarrow 222$$

$$001 \Rightarrow 001; 001 \Rightarrow 002; 001 \Rightarrow 011; 001 \Rightarrow 012; 001 \Rightarrow 022$$

$$001 \Rightarrow 111; 001 \Rightarrow 112; 001 \Rightarrow 122; 001 \Rightarrow 222; 002 \Rightarrow 002$$

$$002 \Rightarrow 012; 002 \Rightarrow 022; 002 \Rightarrow 112; 002 \Rightarrow 122; 002 \Rightarrow 222$$

$$011 \Rightarrow 011; 011 \Rightarrow 012; 011 \Rightarrow 022; 011 \Rightarrow 111; 011 \Rightarrow 112$$

$$011 \Rightarrow 122; 011 \Rightarrow 222; 012 \Rightarrow 012; 012 \Rightarrow 022; 012 \Rightarrow 112$$

$$012 \Rightarrow 122; 012 \Rightarrow 222; 022 \Rightarrow 022; 022 \Rightarrow 122; 022 \Rightarrow 222$$

$$111 \Rightarrow 111; 111 \Rightarrow 112; 111 \Rightarrow 122; 111 \Rightarrow 222; 112 \Rightarrow 112$$

$$112 \Rightarrow 122; 112 \Rightarrow 222; 122 \Rightarrow 122; 122 \Rightarrow 222; 222 \Rightarrow 222$$

Las transformaciones naturales en **4** se obtienen análogamente del orden entre funciones monótonas de **4** a **4**. Contando las flechas en el orden entre sus funciones monótonas se obtienen 466 transformaciones naturales. Las transformaciones naturales entre un funtor y su predecesor están en el siguiente diagrama, donde H y F se usan genéricamente para describir las transformaciones $H \Rightarrow F$.

$$
\begin{tikzcd}
0000 \arrow[d, "F\epsilon_0"'] & & & & & & & \\
0001 \arrow[r, "F\epsilon_2"] \arrow[d, "\epsilon_1 F"'] & 0002 \arrow[rr, "F\epsilon_2"] \arrow[d, "\epsilon_1 F"'] & & 0003 \arrow[d, "\epsilon_1 F"] & & & & \\
0011 \arrow[r, "F\epsilon_1"] \arrow[dd, "\epsilon_0 F"'] & 0012 \arrow[rr, "F\epsilon_2"] \arrow[dr, "H\eta_1"] \arrow[dd, "\epsilon_0 F"'] & & 0013 \arrow[dr, "H\eta_1"] \arrow[dd, "\epsilon_0 F"] & & & & \\
& & 0022 \arrow[rr, "F\epsilon_2"] \arrow[dd, "\epsilon_0 F"] & & 0023 \arrow[r, "H\eta_2"] \arrow[dd, "\epsilon_0"] & 0033 \arrow[dd, "\epsilon_0 F"] & & \\
0111 \arrow[r, "F\epsilon_1"] \arrow[dd, "H\eta_0"'] & 0112 \arrow[rr, "F\epsilon_2"] \arrow[dr, "\epsilon_1 F"] \arrow[dd, "H\eta_0"'] & & 0113 \arrow[dr, "\epsilon_1"] \arrow[dd, "H\eta_0"] & & & & \\
& & 0122 \arrow[rr, "\epsilon_0"] \arrow[dd, "H\eta_0"] \arrow[rrddd, "H\eta_1"] & & 0123 \arrow[r, "\eta_2"] \arrow[dd, "\eta_0"] \arrow[rddd, "\eta_1"] & 0133 \arrow[dd, "H\eta_0"] \arrow[rddd, "H\eta_1"] & & \\
1111 \arrow[r, "F\epsilon_1"] & 1112 \arrow[rr, "F\epsilon_2"] \arrow[dr, "\epsilon_1 F"'] & & 1113 \arrow[dr, "\epsilon_1 F"] & & & & \\
& & 1122 \arrow[rr, "F\epsilon_2"] \arrow[rrdd, "\epsilon_0 F"'] & & 1123 \arrow[r, "H\eta_2"] \arrow[rdd, "\epsilon_0 F"] & 1133 \arrow[rdd, "\epsilon_0 F"] & & \\
& & & & 0222 \arrow[r, "F\epsilon_2"'] \arrow[d, "H\eta_0"'] & 0223 \arrow[r, "\epsilon_1 F"'] \arrow[d, "H\eta_0"] & 0233 \arrow[r, "H\eta_2"] \arrow[d, "H\eta_0"] & 0333 \arrow[d, "H\eta_0"] \\
& & & & 1222 \arrow[r, "F\epsilon_2"'] \arrow[d, "H\eta_1"] & 1223 \arrow[r, "\epsilon_1 F"'] \arrow[d, "H\eta_1"] & 1233 \arrow[r, "H\eta_2"'] \arrow[d, "H\eta_1"] & 1333 \arrow[d, "H\eta_1"] \\
& & & & 2222 \arrow[r, "F\epsilon_2"'] & 2223 \arrow[r, "\epsilon_1 F"'] & 2233 \arrow[r, "\epsilon_0 F"'] & 2333 \arrow[d, "H\eta_2"] \\
& & & & & & & 3333
\end{tikzcd}
$$

A.8 Demostración del Teorema 2.5.8

Teorema.

1. $T_k \epsilon_{k+1} = \epsilon_{k+1} T_k$ *si* $0 \leq k < n-2$.
2. $\eta_k G_{k+1} = G_{k+1} \eta_k$ *si* $0 \leq k < n-2$.

3. $\eta_k T_k = T_k \eta_k = 1_{T_k}$*si* $0 \leq k < n-1$.

4. $\epsilon_k G_k = G_k \epsilon_k = 1_{G_k}$*si* $0 \leq k < n-1$.

5. $T_k \epsilon_k = \eta_k \circ \epsilon_k$ *y* $G_k \eta_k = \eta_k \circ \epsilon_k$ *si* $0 \leq k < n-1$.

6. $\eta_{k+1} G_k = \eta_{k+1} \circ \epsilon_k$ *y* $\epsilon_k T_{k+1} = \eta_{k+1} \epsilon_k$ *si* $0 \leq k < n-2$.

7. *Sea* $0 \leq i, j < n-1$. *Si* $j \neq i+1$ *y* $j \neq i-1$ *entonces* $\eta_i T_j = T_j \eta_i$ *y* $\epsilon_i G_j = G_j \epsilon_i$.

8. $T_k T_{k+1} \eta_k = 1_{T_k T_{k+1}}$, $\epsilon_k G_{k+1} G_k = 1_{G_{k+1} G_k}$, $T_{k+1} T_k \eta_k = 1_{T_{k+1} T_k}$ *y* $\epsilon_k G_k G_{k+1} = 1_{G_k G_{k+1}}$ *si* $0 \leq k < n-1$.

9. $\eta_k G_k = 1_{G_k}$ *si* $0 \leq k < n-1$.

10. $\epsilon_k T_k = 1_{T_k}$ *si* $0 \leq k < n-1$.

11. $T_{k+1} \epsilon_k = 1_{T_{k+1}}$ *si* $0 \leq k < n-2$.

12. $G_k \eta_{k+1} = 1_{G_k}$ *si* $0 \leq k < n-2$.

13. *Sean* F *y* H *dos funciones monótonas, entonces* $F 1_H = 1_{FH}$ *y* $1_H F = 1_{HF}$.

Demostración. □

1. Si ponemos ϵ en lugar de ϵ_{k+1} tenemos

$$\begin{tikzcd} \mathbf{n} \arrow[r, "T_k"] & \mathbf{n} \arrow[r, bend left, "G_{k+1}"] \arrow[r, bend right, "id"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\epsilon"] & \mathbf{n} \end{tikzcd} \quad y \quad \begin{tikzcd} \mathbf{n} \arrow[r, bend left, "G_{k+1}"] \arrow[r, bend right, "id"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\epsilon"] & \mathbf{n} \arrow[r, "T_k"] & \mathbf{n} \end{tikzcd}$$

que producen

$$\begin{tikzcd} \mathbf{n} \arrow[r, bend left, "T_k G_{k+1}"] \arrow[r, bend right, "T_k"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow T_k\epsilon"] & \mathbf{n} \end{tikzcd} \quad y \quad \begin{tikzcd} \mathbf{n} \arrow[r, bend left, "G_{k+1} T_k"] \arrow[r, bend right, "T_k"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \epsilon T_k"] & \mathbf{n} \end{tikzcd}$$

Y como por el Teorema 2.4.5 $T_k G_{k+1} = G_{k+1} T_k$ se tiene el resultado.

2. Si ponemos η en lugar de η_k tenemos

$$\begin{tikzcd} \mathbf{n} \arrow[r, "G_{k+1}"] & \mathbf{n} \arrow[r, bend left, "id"] \arrow[r, bend right, "T_k"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathbf{n} \end{tikzcd} \quad y \quad \begin{tikzcd} \mathbf{n} \arrow[r, bend left, "id"] \arrow[r, bend right, "T_k"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathbf{n} \arrow[r, "G_{k+1}"] & \mathbf{n} \end{tikzcd}$$

que producen

$$\begin{tikzcd} \mathbf{n} \arrow[r, bend left, "G_{k+1}"] \arrow[r, bend right, "G_{k+1}T_k"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow G_{k+1}\eta"] & \mathbf{n} \end{tikzcd} \quad y \quad \begin{tikzcd} \mathbf{n} \arrow[r, bend left, "id"] \arrow[r, bend right, "T_kG_{k+1}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \eta G_{k+1}"] & \mathbf{n} \end{tikzcd}$$

Y como por el Teorema 2.4.5 $T_kG_{k+1} = G_{k+1}T_k$ se tiene el resultado.

3. Si ponemos η en lugar de η_k tenemos que

$$\begin{tikzcd} \mathbf{n} \arrow[r, "T_k"] & \mathbf{n} \arrow[r, bend left, "id"] \arrow[r, bend right, "T_k"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \eta"] & \mathbf{n} \end{tikzcd} \quad y \quad \begin{tikzcd} \mathbf{n} \arrow[r, bend left, "id"] \arrow[r, bend right, "T_k"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \eta"] & \mathbf{n} \arrow[r, "T_k"] & \mathbf{n} \end{tikzcd}$$

producen

$$\begin{tikzcd} \mathbf{n} \arrow[r, bend left, "T_k"] \arrow[r, bend right, "T_kT_k"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow T_k\eta"] & \mathbf{n} \end{tikzcd} \quad y \quad \begin{tikzcd} \mathbf{n} \arrow[r, bend left, "T_k"] \arrow[r, bend right, "T_kT_k"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \eta T_k"] & \mathbf{n} \end{tikzcd}$$

y como $T_kT_k = T_k$ por el Teorema 2.4.5 tenemos el resultado.

4. Si ponemos ϵ en lugar de ϵ_k tenemos que

$$\begin{tikzcd} \mathbf{n} \arrow[r, "G_k"] & \mathbf{n} \arrow[r, bend left, "G_k"] \arrow[r, bend right, "id"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \epsilon"] & \mathbf{n} \end{tikzcd} \quad y \quad \begin{tikzcd} \mathbf{n} \arrow[r, bend left, "G_k"] \arrow[r, bend right, "id"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \epsilon"] & \mathbf{n} \arrow[r, "G_k"] & \mathbf{n} \end{tikzcd}$$

producen

$$\begin{tikzcd} \mathbf{n} \arrow[r, bend left, "G_kG_k"] \arrow[r, bend right, "G_k"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow G_k\epsilon"] & \mathbf{n} \end{tikzcd} \quad y \quad \begin{tikzcd} \mathbf{n} \arrow[r, bend left, "G_kG_k"] \arrow[r, bend right, "G_k"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \epsilon G_k"] & \mathbf{n} \end{tikzcd}$$

y como $G_kG_k = G_k$ por el Teorema 2.4.5 tenemos el resultado.

5. Si ponemos η y ϵ en lugar de η_k y ϵ_k

$$\begin{tikzcd} \mathbf{n} \arrow[r, "T_k"] & \mathbf{n} \arrow[r, bend left, "G_k"] \arrow[r, bend right, "id"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \epsilon"] & \mathbf{n} \end{tikzcd} \quad \text{produce} \quad \begin{tikzcd} \mathbf{n} \arrow[r, bend left, "T_kG_k"] \arrow[r, bend right, "T_k"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow T_k\epsilon"] & \mathbf{n} \end{tikzcd}$$

que es

$$\begin{tikzcd} \mathbf{n} \arrow[r, bend left, "G_k"] \arrow[r, bend right, "T_k"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \eta\circ\epsilon"] & \mathbf{n} \end{tikzcd}$$

al tenerse por el Teorema 2.4.5 $T_kG_k = G_k$.

Análogamente tenemos que $\mathbf{n} \xrightarrow{G_k} \mathbf{n}$ $\begin{tikzcd} \mathbf{n} \arrow[r, bend left, "id"] \arrow[r, bend right, "T_k"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathbf{n} \end{tikzcd}$ produce $\begin{tikzcd} \mathbf{n} \arrow[r, bend left, "G_k"] \arrow[r, bend right, "G_kT_k"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow G_k\eta"] & \mathbf{n} \end{tikzcd}$ que es

$$\begin{tikzcd} \mathbf{n} \arrow[r, bend left, "G_k"] \arrow[r, bend right, "T_k"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\eta\circ\epsilon"] & \mathbf{n} \end{tikzcd}$$

al tenerse por el Teorema 2.4.5 $G_kT_k = T_k$.

6. Si ponemos η por η_{k+1} y ϵ por ϵ_k y recordamos el Teorema 2.4.5 tenemos que

$$\begin{tikzcd} \mathbf{n} \arrow[r, bend left, "id"] \arrow[r, bend right, "T_{k+1}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathbf{n} \arrow[r, "G_k"] & \mathbf{n} \end{tikzcd} \text{ produce } \begin{tikzcd} \mathbf{n} \arrow[r, bend left, "G_k"] \arrow[r, bend right, "T_{k+1}G_k"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\eta G_k"] & \mathbf{n} \end{tikzcd}$$

que es $\begin{tikzcd} \mathbf{n} \arrow[r, bend left, "G_k"] \arrow[r, bend right, "T_{k+1}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\eta G_k"] & \mathbf{n} \end{tikzcd}$ igual a $\begin{tikzcd} \mathbf{n} \arrow[r, bend left, "G_k"] \arrow[r, bend right, "T_{k+1}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\eta\circ\epsilon"] & \mathbf{n} \end{tikzcd}$. Análogamente

$$\begin{tikzcd} \mathbf{n} \arrow[r, bend left, "G_k"] \arrow[r, bend right, "id"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\epsilon"] & \mathbf{n} \arrow[r, "T_{k+1}"] & \mathbf{n} \end{tikzcd} \text{ produce } \begin{tikzcd} \mathbf{n} \arrow[r, bend left, "G_kT_{k+1}"] \arrow[r, bend right, "T_{k+1}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\epsilon T_{k+1}"] & \mathbf{n} \end{tikzcd}$$

que es $\begin{tikzcd} \mathbf{n} \arrow[r, bend left, "G_k"] \arrow[r, bend right, "T_{k+1}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\epsilon T_{k+1}"] & \mathbf{n} \end{tikzcd}$ igual a $\begin{tikzcd} \mathbf{n} \arrow[r, bend left, "G_k"] \arrow[r, bend right, "T_{k+1}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\eta\circ\epsilon"] & \mathbf{n} \end{tikzcd}$

7. Sea $j \neq i+1$ y $j \neq i-1$. Si ponemos η por η_i y ϵ por ϵ_i y recordamos el Teorema 2.4.5 tenemos que

$$\begin{tikzcd} \mathbf{n} \arrow[r, bend left, "id"] \arrow[r, bend right, "T_i"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathbf{n} \arrow[r, "T_j"] & \mathbf{n} \end{tikzcd} \text{ produce } \begin{tikzcd} \mathbf{n} \arrow[r, bend left, "T_j"] \arrow[r, bend right, "T_iT_j"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\eta T_j"] & \mathbf{n} \end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd} \mathbf{n} \arrow[r, "T_j"] & \mathbf{n} \arrow[r, bend left, "id"] \arrow[r, bend right, "T_i"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathbf{n} \end{tikzcd} \text{ produce } \begin{tikzcd} \mathbf{n} \arrow[r, bend left, "T_j"] \arrow[r, bend right, "T_jT_i"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow T_j\eta"] & \mathbf{n} \end{tikzcd}$$

lo que implica que $\eta_iT_j = T_j\eta_i$. Mientras que

$$\begin{tikzcd} \mathbf{n} \arrow[r, bend left, "G_i"] \arrow[r, bend right, "id"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\epsilon"] & \mathbf{n} \arrow[r, "G_j"] & \mathbf{n} \end{tikzcd} \text{ produce } \begin{tikzcd} \mathbf{n} \arrow[r, bend left, "G_iG_j"] \arrow[r, bend right, "G_j"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\epsilon G_j"] & \mathbf{n} \end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd} \mathbf{n} \arrow[r, "G_j"] & \mathbf{n} \arrow[r, bend left, "G_i"] \arrow[r, bend right, "id"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\epsilon"] & \mathbf{n} \end{tikzcd} \quad \text{produce} \quad \begin{tikzcd} \mathbf{n} \arrow[r, bend left, "G_jG_i"] \arrow[r, bend right, "G_j"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\; G_j\epsilon"] & \mathbf{n} \end{tikzcd}$$

lo que implica que $\epsilon_i G_j = G_j \epsilon_i$.

8. Si ponemos η por η_k y ϵ por ϵ_k tenemos que

$$\begin{tikzcd} \mathbf{n} \arrow[r, "T_kT_{k+1}"] & \mathbf{n} \arrow[r, bend left, "id"] \arrow[r, bend right, "T_k"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathbf{n} \end{tikzcd} \quad \text{produce} \quad \begin{tikzcd} \mathbf{n} \arrow[r, bend left, "T_kT_{k+1}"] \arrow[r, bend right, "T_kT_{k+1}T_k"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\; T_kT_{k+1}\eta"] & \mathbf{n} \end{tikzcd}$$

como $T_kT_{k+1}T_kT_k = T_kT_{k+1}$ por el Teorema 2.4.5 se sigue que $T_kT_{k+1}\eta_k = 1_{T_kT_{k+1}}$. Análogamente tenemos que

$$\begin{tikzcd} \mathbf{n} \arrow[r, bend left, "G_k"] \arrow[r, bend right, "id"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\epsilon"] & \mathbf{n} \arrow[r, "G_{k+1}G_k"] & \mathbf{n} \end{tikzcd} \quad \text{produce} \quad \begin{tikzcd} \mathbf{n} \arrow[r, bend left, "G_kG_{k+1}G_k"] \arrow[r, bend right, "G_{k+1}G_k"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\; \epsilon G_{k+1}G_k"] & \mathbf{n} \end{tikzcd}$$

como $G_{k+1}G_k = G_kG_{k+1}G_k$ por Teorema 2.4.5 tenemos $\epsilon_k G_{k+1}G_k = 1_{G_{k+1}G_k}$. Por otra parte tenemos que

$$\begin{tikzcd} \mathbf{n} \arrow[r, "T_{k+1}T_k"] & \mathbf{n} \arrow[r, bend left, "id"] \arrow[r, bend right, "T_k"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathbf{n} \end{tikzcd} \quad \text{produce} \quad \begin{tikzcd} \mathbf{n} \arrow[r, bend left, "T_{k+1}T_k"] \arrow[r, bend right, "T_{k+1}T_kT_k"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\; T_{k+1}T_k\eta"] & \mathbf{n} \end{tikzcd}$$

como $T_{k+1}T_kT_k = T_{k+1}T_k$ por el Teorema 2.4.5 se sigue que $T_{k+1}T_k\eta_k = 1_{T_{k+1}T_k}$. Análogamente

$$\begin{tikzcd} \mathbf{n} \arrow[r, bend left, "G_k"] \arrow[r, bend right, "id"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\epsilon"] & \mathbf{n} \arrow[r, "G_kG_{k+1}"] & \mathbf{n} \end{tikzcd} \quad \text{produce} \quad \begin{tikzcd} \mathbf{n} \arrow[r, bend left, "G_kG_kG_{k+1}"] \arrow[r, bend right, "G_kG_{k+1}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\; \epsilon G_kG_{k+1}"] & \mathbf{n} \end{tikzcd}$$

como $G_kG_kG_{k+1} = G_kG_{k+1}$ por el Teorema 2.4.5 se sigue que $\epsilon_k G_kG_{k+1} = 1_{G_kG_{k+1}}$.

9. Si ponemos η por η_k tenemos que

$$\begin{tikzcd} \mathbf{n} \arrow[r, bend left, "id"] \arrow[r, bend right, "T_k"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathbf{n} \arrow[r, "G_k"] & \mathbf{n} \end{tikzcd} \quad \text{produce} \quad \begin{tikzcd} \mathbf{n} \arrow[r, bend left, "G_k"] \arrow[r, bend right, "T_kG_k"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\eta G_k"] & \mathbf{n} \end{tikzcd}$$

como $T_kG_k = G_k$ por el Teorema 2.4.5 se sigue que $\eta_k G_k = 1_{G_k}$.

10. Si ponemos ϵ por ϵ_k tenemos que

$$\begin{tikzcd} \mathbf{n} \arrow[r, bend left, "G_k"] \arrow[r, bend right, "id"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\epsilon"] & \mathbf{n} \arrow[r, "T_k"] & \mathbf{n} \end{tikzcd} \quad \text{produce} \quad \begin{tikzcd} \mathbf{n} \arrow[r, bend left, "G_kT_k"] \arrow[r, bend right, "T_k"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\epsilon T_k"] & \mathbf{n} \end{tikzcd}$$

como $G_kT_k = T_k$ por el Teorema 2.4.5 se sigue que $\epsilon_k T_k = 1_{T_k}$.

11. Si ponemos ϵ por ϵ_k tenemos que

$$\begin{tikzcd} \mathbf{n} \arrow[r, "T_{k+1}"] & \mathbf{n} \arrow[r, bend left, "G_k"] \arrow[r, bend right, "id"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\epsilon"] & \mathbf{n} \end{tikzcd} \quad \text{produce} \quad \begin{tikzcd} \mathbf{n} \arrow[r, bend left, "T_{k+1}G_k"] \arrow[r, bend right, "T_{k+1}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow T_{k+1}\epsilon"] & \mathbf{n} \end{tikzcd}$$

como $T_{k+1}G_k = T_{k+1}$ por el Teorema 2.4.5 se sigue que $T_{k+1}\epsilon_k = 1_{T_{k+1}}$.

12. Si ponemos η por η_{k+1} tenemos que

$$\begin{tikzcd} \mathbf{n} \arrow[r, "G_k"] & \mathbf{n} \arrow[r, bend left, "id"] \arrow[r, bend right, "T_{k+1}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathbf{n} \end{tikzcd} \quad \text{produce} \quad \begin{tikzcd} \mathbf{n} \arrow[r, bend left, "G_k"] \arrow[r, bend right, "G_kT_{k+1}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow G_k\eta"] & \mathbf{n} \end{tikzcd}$$

como $G_kT_{k+1} = G_k$ por el Teorema 2.4.5 se sigue que $G_k\eta_{k+1} = 1_{G_k}$.

13. Sean F y H dos funtores. Entonces

$$\begin{tikzcd} \mathbf{n} \arrow[r, "F"] & \mathbf{n} \arrow[r, bend left, "H"] \arrow[r, bend right, "H"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow 1_H"] & \mathbf{n} \end{tikzcd} \quad \text{produce} \quad \begin{tikzcd} \mathbf{n} \arrow[r, bend left, "FH"] \arrow[r, bend right, "FH"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow F1_H"] & \mathbf{n} \end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd} \mathbf{n} \arrow[r, bend left, "H"] \arrow[r, bend right, "H"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow 1_H"] & \mathbf{n} \arrow[r, "F"] & \mathbf{n} \end{tikzcd} \quad \text{produce} \quad \begin{tikzcd} \mathbf{n} \arrow[r, bend left, "HF"] \arrow[r, bend right, "HF"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow 1_HF"] & \mathbf{n} \end{tikzcd}$$

Así, como dados dos funtores sólo puede existir una transformación natural entre ellos, tenemos $F1_H = 1_{FH}$ y $1_HF = 1_{HF}$.

Teorema. *Sea H una función monótona y l, m, $k \in \mathbf{n}$ tales que tengan sentido las expresiones en las que figuren en las siguientes ecuaciones*

1. $T_lHT_m\eta_m = 1_{T_lHT_m} = \eta_lT_lHT_m$.

2. $HT_m\epsilon_{m-1} = 1_{HT_m}$.

3. $G_mHG_l\epsilon_l = 1_{G_mHG_l} = \epsilon_mG_mHG_l$.

4. $HG_l\eta_{l+1} = 1_{HG_l}$.

5. $\epsilon_k T_{k+1} = \eta_{k+1} G_k = \eta_{k+1} \circ \epsilon_k$.

Demostración.

1. Ambas igualdades se siguen por los apartados 3 y 13 del Teorema 2.5.8.

2. Se sigue por 11 y 13 del Teorema 2.5.8.

3. Ambas igualdades se siguen por los apartados 4 y 13 del Teorema 2.5.8.

4. Ambas igualdades se siguen por los apartados 12 y 13 del Teorema 2.5.8.

5. Si ponemos ϵ en lugar de ϵ_k y η en lugar de η_{k+1} tenemos, por el Teorema 2.5.8 apartado 3,

$$\begin{tikzcd} \mathbf{n} \arrow[r, bend left, "G_k"] \arrow[r, bend right, "id"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \epsilon"] & \mathbf{n} \arrow[r, "T_{k+1}"] & \mathbf{n} \end{tikzcd}$$

que produce $\begin{tikzcd} \mathbf{n} \arrow[r, bend left, "G_k T_{k+1}"] \arrow[r, bend right, "T_{k+1}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \epsilon T_{k+1}"] & \mathbf{n} \end{tikzcd}$ y que es $\begin{tikzcd} \mathbf{n} \arrow[r, bend left, "G_k"] \arrow[r, bend right, "T_{k+1}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \epsilon T_{k+1}"] & \mathbf{n} \end{tikzcd}$ igual a

$$\begin{tikzcd} \mathbf{n} \arrow[r, bend left=50, "G_k"] \arrow[r, "id" description] \arrow[r, bend right=50, "T_{k+1}"'] \arrow[r, phantom, shift left=2ex, "\Downarrow\epsilon"] \arrow[r, phantom, shift right=2ex, "\Downarrow\eta"] & \mathbf{n} \end{tikzcd}$$

Análogamente

$$\begin{tikzcd} \mathbf{n} \arrow[r, bend left, "id"] \arrow[r, bend right, "T_{k+1}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \eta"] & \mathbf{n} \arrow[r, "G_k"] & \mathbf{n} \end{tikzcd}$$

que produce $\begin{tikzcd} \mathbf{n} \arrow[r, bend left, "G_k"] \arrow[r, bend right, "T_{k+1}G_k"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \eta G_k"] & \mathbf{n} \end{tikzcd}$ que es $\begin{tikzcd} \mathbf{n} \arrow[r, bend left, "G_k"] \arrow[r, bend right, "T_{k+1}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \eta G_k"] & \mathbf{n} \end{tikzcd}$ igual a

$$\begin{tikzcd} \mathbf{n} \arrow[r, bend left=40, "G_k"] \arrow[r, "id"] \arrow[r, bend right=40, "T_{k+1}"'] \arrow[r, phantom, shift left=2.5ex, "\Downarrow\epsilon"] \arrow[r, phantom, shift right=2.5ex, "\Downarrow\eta"] & \mathbf{n} \end{tikzcd}$$

□

Apéndice B

B.1 Ejemplos de categorías monoidales

Ejemplo. Veamos los posibles productos tensoriales que pueden definirse sobre la categoría **2**. En el conjunto $2 = \{0, 1\}$ pueden definirse las siguientes funciones binarias asociativas

c_0	0	1
0	0	0
1	0	0

c_3	0	1
0	0	0
1	1	1

c_5	0	1
0	0	1
1	0	1

c_{10}	0	1
0	1	0
1	1	0

c_{12}	0	1
0	1	1
1	0	0

c_{15}	0	1
0	1	1
1	1	1

c_1	0	1
0	0	0
1	0	1

c_6	0	1
0	0	1
1	1	0

c_7	0	1
0	0	1
1	1	1

c_9	0	1
0	1	0
1	0	1

Las seis primeras no pueden ser productos tensoriales al no tener unidad. Las últimas cuatro sí pueden ser productos tensoriales, todos ellos simétricos. La unidad es el 1 en c_1 y c_9; es el 0 en c_6 y c_7. Pero, c_6 y c_9 son tales que hay flechas $f : a \longrightarrow b$ y $g : c \longrightarrow d$ en **2** tales que no hay una flecha $h : a \otimes c \longrightarrow b \otimes d$. Así $\otimes$ en esos casos no sería un funtor.

Ejemplo. La categoría **3** puede dotarse con un producto tensorial para ser monoidal. Vamos a suponer que la unidad del posible tensor es el 1 y tal que $1 \otimes a = a$ y $a \otimes 1 = a$ para todo $a \in \mathbf{3}$. En ese caso el producto tensorial aplicado a objetos deber tener la siguiente forma:

$$\begin{array}{c|ccc} \otimes & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & a & 0 & b \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & c & 2 & d \end{array}$$

donde, para que sea asociativa, han de satisfacerse las siguientes igualdades:

$$\begin{array}{llll} a \otimes 0 = 0 \otimes a & b \otimes 0 = 0 \otimes c & c \otimes 0 = 2 \otimes a & d \otimes 0 = 2 \otimes c \\ a \otimes 2 = 0 \otimes b & b \otimes 2 = 0 \otimes d & c \otimes 2 = 2 \otimes b & d \otimes 2 = 2 \otimes d \end{array}$$

Todas las posibles soluciones son las siguientes, donde $x \in \{0,1,2\}$ y $y \in \{0,2\}$

$$\begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & x \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & y \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{array}$$

Todas estas operaciones son simétricas excepto

$$\begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{array}$$

Ahora falta comprobar que son funtores, es decir, que $f \otimes g$ para f, g flechas en $\mathbf{3}$ es una flecha en $\mathbf{3}$. Es decir, si $f : a \longrightarrow b$ y $g : c \longrightarrow d$ son flechas en $\mathbf{3}$ entonces debe existir una flecha $h : a \otimes c \longrightarrow b \otimes d$.

Sabemos que $f : a \longrightarrow b$ es una flecha en $\mathbf{3}$ si y sólo si $a \leq b$. Así, $\otimes$ será un funtor si se tiene, para todo $a, b, c, d \in 3$

$$a \leq b \wedge c \leq d \longrightarrow a \otimes c \leq b \otimes d$$

Esto hace que sólo puedan ser tensores las siguientes

	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	2

	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	2	2	2

	0	1	2
0	0	0	2
1	0	1	2
2	0	2	2

	0	1	2
0	0	0	2
1	0	1	2
2	2	2	2

Ejemplo. Otro producto tensorial en **3** está dado por la tabla

	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	1	2

donde el objeto identidad del producto tensorial es el objeto terminal de **3**, es decir el 2, un producto tensorial sería $i \otimes j = min(i, j)$. Este producto tensorial valdrá para toda categoría **n**.

Ejemplo. Para cada n podemos definir una categoría monoidal simétrica que denominaremos $\mathcal{V}_n$.

Ejemplo. Para **n** podemos elegir como producto tensorial el *mínimo de dos elementos*:

$$i \otimes j = min(i, j)$$

con $i, j \in \{0, 1, ..., n-1\}$ para obtener la tabla

$\otimes$	0	1	2	$\cdots$	$n-2$	$n-1$
0	0	0	0	$\cdots$	0	0
1	0	1	1	$\cdots$	1	1
2	0	1	2	$\cdots$	2	2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-2$	0	1	2	$\cdots$	$n-2$	$n-2$
$n-1$	0	1	2	$\cdots$	$n-2$	$n-1$

Ejemplo. Para $\mathcal{M}_n$ tenemos:

$$H \otimes M = \begin{cases} min(H(n-1), M(n-1)) & si \quad H < M \\ n-1 & si \quad H = M \\ 0 & en \quad otro \quad caso \end{cases}$$

B.2 Ejemplos de $\mathcal{V}-$categorías

Ejemplo. Sea $\mathcal{V}_2 = \{\mathbf{2}, c_1, 1, a, i, d\}$, vamos a construir sobre el conjunto $3 = \{0, 1, 2\}$ una $\mathcal{V}_2$-categoría que denominaremos 3.

Ejemplo. El *morfismo objeto* $3(A, B)$ puede definirse para los objetos de 3 por la siguiente tabla

$A \backslash B$	0	1	2
0	1	1	1
1	0	1	1
2	0	0	1

En este caso tenemos que $M_{ABC} : 3(B, C) \otimes 3(A, B) \longrightarrow 3(A, C)$ son las funciones en **2** dadas en la siguiente tabla:

A	B	C	$3(B,C) \otimes 3(A,B)$	$3(A,C)$	M_{ABC}
0	0	0	$1 \otimes 1$	1	$1 \longrightarrow 1$
0	0	1	$1 \otimes 1$	1	$1 \longrightarrow 1$
0	0	2	$1 \otimes 1$	1	$1 \longrightarrow 1$
0	1	0	$0 \otimes 1$	1	$0 \longrightarrow 1$
0	1	1	$1 \otimes 1$	1	$1 \longrightarrow 1$
0	1	2	$1 \otimes 1$	1	$1 \longrightarrow 1$
0	2	0	$0 \otimes 1$	1	$0 \longrightarrow 1$
0	2	1	$0 \otimes 1$	1	$0 \longrightarrow 1$
0	2	2	$1 \otimes 1$	1	$1 \longrightarrow 1$
1	0	0	$1 \otimes 0$	0	$0 \longrightarrow 0$
1	0	1	$1 \otimes 1$	1	$1 \longrightarrow 1$
1	0	2	$1 \otimes 1$	1	$1 \longrightarrow 1$
1	1	0	$0 \otimes 1$	0	$0 \longrightarrow 0$
1	1	1	$1 \otimes 1$	1	$1 \longrightarrow 1$
1	1	2	$1 \otimes 1$	1	$1 \longrightarrow 1$
1	2	0	$0 \otimes 1$	0	$0 \longrightarrow 0$
1	2	1	$0 \otimes 1$	1	$0 \longrightarrow 1$
1	2	2	$1 \otimes 1$	1	$1 \longrightarrow 1$
2	0	0	$1 \otimes 0$	0	$0 \longrightarrow 0$
2	0	1	$1 \otimes 0$	0	$0 \longrightarrow 0$
2	0	2	$1 \otimes 0$	1	$0 \longrightarrow 1$
2	1	0	$0 \otimes 0$	0	$0 \longrightarrow 0$
2	1	1	$1 \otimes 0$	0	$0 \longrightarrow 0$
2	1	2	$1 \otimes 0$	1	$0 \longrightarrow 1$
2	2	0	$0 \otimes 1$	0	$0 \longrightarrow 0$
2	2	1	$0 \otimes 1$	0	$0 \longrightarrow 0$
2	2	2	$1 \otimes 1$	1	$1 \longrightarrow 1$

Ejemplo. Vamos a definir una $\mathcal{V}_2$-categoría que denominaremos $\mathcal{M}_2$ cuyo conjunto de objetos es el conjunto de las flechas de **2**

$$\{G, T, id\} = \{f_{00}, f_{11}, f_{01}\}$$

y los *morfismos objetos* vienen definidos por la tabla

$\mathcal{M}_2$	G	id	T
G	1	1	1
id	0	1	1
T	0	0	1

Así la tabla de M_{ABC} es

A	B	C	$\mathcal{M}_2(B,C) \otimes \mathcal{M}_2(A,B)$	$\mathcal{M}_2(A,C)$	M_{ABC}
G	G	G	$1 \otimes 1$	1	$1 \longrightarrow 1$
G	G	id	$1 \otimes 1$	1	$1 \longrightarrow 1$
G	G	T	$1 \otimes 1$	1	$1 \longrightarrow 1$
G	id	G	$0 \otimes 1$	1	$0 \longrightarrow 1$
G	id	id	$1 \otimes 1$	1	$1 \longrightarrow 1$
G	id	T	$1 \otimes 1$	1	$1 \longrightarrow 1$
G	T	G	$0 \otimes 1$	1	$0 \longrightarrow 1$
G	T	id	$0 \otimes 1$	1	$0 \longrightarrow 1$
G	T	T	$1 \otimes 1$	1	$1 \longrightarrow 1$
id	G	G	$1 \otimes 0$	0	$0 \longrightarrow 0$
id	G	id	$1 \otimes 1$	1	$1 \longrightarrow 1$
id	G	T	$1 \otimes 1$	1	$1 \longrightarrow 1$
id	id	G	$0 \otimes 1$	0	$0 \longrightarrow 0$
id	id	id	$1 \otimes 1$	1	$1 \longrightarrow 1$
id	id	T	$1 \otimes 1$	1	$1 \longrightarrow 1$
id	T	G	$0 \otimes 1$	0	$0 \longrightarrow 0$
id	T	id	$0 \otimes 1$	1	$0 \longrightarrow 1$
id	T	T	$1 \otimes 1$	1	$1 \longrightarrow 1$
T	G	G	$1 \otimes 0$	0	$0 \longrightarrow 0$
T	G	id	$1 \otimes 0$	0	$0 \longrightarrow 0$
T	G	T	$1 \otimes 0$	1	$0 \longrightarrow 1$
T	id	G	$0 \otimes 0$	0	$0 \longrightarrow 0$
T	id	id	$1 \otimes 0$	0	$0 \longrightarrow 0$
T	id	T	$1 \otimes 0$	1	$0 \longrightarrow 1$
T	T	G	$0 \otimes 1$	0	$0 \longrightarrow 0$
T	T	id	$0 \otimes 1$	0	$0 \longrightarrow 0$
T	T	T	$1 \otimes 1$	1	$1 \longrightarrow 1$

Ejemplo. Vamos a ver que podemos construir una $\mathcal{V}_n - \textit{categoría}$ cuyos objetos son los elementos de M_n, que denominaremos $\mathcal{M}_n$ donde la unidad es el objeto terminal $n-1$ de $\mathbf{n}$. Se trata de la construcción generalizada de los Ejemplos anteriores para $n = 2, 3$.

Con cada elemento H de $\mathcal{M}_n$ asociamos el número k tal que H toma al menos una vez el valor k pero no toma nunca un valor mayor que k. Entonces k es justamente el valor de $H(n-1)$.

Cada objeto de $\mathcal{M}_n$ puede expresarse como una cadena de dígitos entre 0 y $n-1$ de forma que el dígito que ocupa el lugar k (estableciendo el primero como 0) en la cadena correspondiente al elemento H es $H(k)$.

Sean en general H y M dos elementos de $\mathcal{M}_n$, entonces definimos los morfismos objetos $\mathcal{M}_n(H, M)$ como 0 si H no es menor o igual que M, es decir, no hay una transformación lineal de H a M; igual a $n-1$ si $H = M$ y el mínimo de $H(n-1)$ y $M(n-1)$ cuando $H < M$.

B.3 Ejemplos de cotensores

Ejemplo. En $\mathcal{V}_2$ los endofuntores $- \otimes 0$ y $- \otimes 1$ son G e id respectivamente. Parece que id tiene un adjunto derecho que es id. Veremos que el adjunto derecho de G es justamente T.

Para cualquier $A, C \in 2$ tenemos que el conjunto $\mathcal{V}_2(A \otimes 0, C)$ consta de una única función. Como $\mathcal{V}_2(A, [0, C])$ debe constar para cada $A, B \in 2$ de una única función, esto es posible excepto en el caso de que A sea 1 y $[0, C]$ sea 0. Por tanto, para cada C tendremos que tener que $[0, C] = 1$, es decir $[0, -] = T$. Además es fácil ver que $[1, -] = id$. Así, la operación $[-, -]$ tiene la siguiente tabla

$[A, B]$	0	1
0	1	1
1	0	1

Los isomorfismos naturales unidad y counidad serán

$$d_0 : X \longrightarrow [0, X \otimes 0] = \eta$$

$$d_1 : X \longrightarrow [1, X \otimes 1] = id$$

$$e_0 : [0, Z] \otimes 0 \longrightarrow Z = \epsilon$$

$$e_1 : [1, Z] \otimes 1 \longrightarrow Z = id$$

Ahora la adjunción

$$\pi : \mathcal{V}_2(X \otimes Y, Z) \cong \mathcal{V}_2((X, [Y, Z])$$

es tal que

X	Y	Z	$\mathcal{V}_2(X \otimes Y, Z)$	$\mathcal{V}_2(X, [Y, Z])$	π
0	0	0	f_{00}	f_{01}	ϵ
0	0	1	f_{01}	f_{01}	id_{id}
0	1	0	f_{00}	f_{00}	id_G
0	1	1	f_{01}	f_{01}	id_{id}
1	0	0	f_{00}	f_{11}	$\eta \circ \epsilon$
1	0	1	f_{01}	f_{11}	η
1	1	0	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
1	1	1	f_{11}	f_{11}	id_T

Al ser $\mathcal{V}_2$ monoidal simétrica cerrada puede considerarse que es una $\mathcal{V}_2$-categoría donde la tabla de morfismos objetos es la siguiente:[3]

$\mathcal{V}_2(A,B)$	0	1
0	$[0,0]$	$[0,1]$
1	$[1,0]$	$[1,1]$

es decir

$\mathcal{V}_2(A,B)$	0	1
0	1	1
1	0	1

Cuya ley de composición viene dada por la tabla

A	B	C	M_{ABC}
0	0	0	$1 \longrightarrow 1$
0	0	1	$1 \longrightarrow 1$
0	1	0	$0 \longrightarrow 1$
0	1	1	$0 \longrightarrow 0$
1	0	0	$0 \longrightarrow 0$
1	0	1	$0 \longrightarrow 1$
1	1	0	$0 \longrightarrow 0$
1	1	1	$1 \longrightarrow 1$

Ejemplo. Para $\mathcal{V}_n$ los cotensores en la forma $[p,q]$ para todos $p,q \in \{0,1,...,n-1\}$ funcionan según la regla siguiente

$$[p,q] = \begin{cases} n-1 & \text{si } q \geq p \\ q & \text{en otro caso} \end{cases}$$

B.4 Ejemplos de $\mathcal{V}-$categorías tensoriales

Ejemplo. Como $\mathcal{V}_2$ y $\mathcal{M}_2$ son $\mathcal{V}_2$-categorías, podemos definir la $\mathcal{V}_2$-categoría tensor $\mathcal{V}_2 \otimes \mathcal{M}_2$ cuyo conjunto de objetos es

$$\{(0,G),(0,id),(0,T),(1,G),(1,id),(1,T)\}$$

y cuyos morfismos objetos vienen definidos como

$$(\mathcal{V}_2 \otimes \mathcal{M}_2)((A,B),(A',B')) = \mathcal{V}_2(A,A') \otimes \mathcal{M}_2(B,B')$$

[3] Ver [Kelly].

es decir, definidos por la tabla

$(\mathcal{V}_2 \otimes \mathcal{M}_2)(-,-)$	$(0,G)$	$(0,id)$	$(0,T)$	$(1,G)$	$(1,id)$	$(1,T)$
$(0,G)$	1	1	1	1	1	1
$(0,id)$	0	1	1	0	1	1
$(0,T)$	0	0	1	0	0	1
$(1,G)$	0	0	0	1	1	1
$(1,id)$	0	0	0	0	1	1
$(1,T)$	0	0	0	0	0	1

es decir, $(\mathcal{V}_2 \otimes \mathcal{M}_2)((A,B),(A',B')) = 1$ si y sólo si $A \longrightarrow A'$ es una flecha de **2** y $B \longrightarrow B'$ es una flecha de M_2^{op}, en otro caso vale 0.

Ejemplo. **n** es la $\mathcal{V}_n-$categoría cuyo conjunto de objetos es n y los morfismos objetos son $\mathbf{n}(x,y) = [x,y]$.

Ejemplo. La categoría tensor $\mathbf{n} \otimes \mathcal{M}_n$ tiene como conjunto de objetos $\mathbf{n} \otimes \mathcal{M}_n$, es decir los pares ordenados cuya primera componente es un elemento de **n** y su segunda componente un elemento de $\mathcal{M}_n$ y como morfismos objetos

$$\mathbf{n} \otimes \mathcal{M}_n((k,H),(l,M)) = \mathbf{n}(k,l) \otimes \mathcal{M}_n(H,M) =$$
$$\begin{cases} min(H(n-1), M(n-1), k, l) & si \quad H \geq M \\ min(k,l) & si \quad H = M \\ 0 & si \quad H < M \end{cases}$$

para objetos H y M en $\mathcal{M}_n$ y $k,l \in \{0,1,...,n-1\}$.

B.5 Propiedades y ejemplos del final de un funtor

Proposición. *El final de un funtor es único salvo isomorfismo.*

Demostración. Ver [Kelly] pagína 27. □

La condición de naturalidad nos permite ampliar los funtores counidad de modo que obtenemos, al aplicar el funtor $[X,-]$ a φ_A, el morfismo

$$[X,\varphi_A] : [X, \int_A F(A,A)] \longrightarrow [X, F(A,A)]$$

y la unicidad del final para un funtor dado nos permite asegurar que el final se preserva por morfismos objetos, es decir que se satisface la igualdad

$$[X, \int_A F(A,A)] \equiv \int_A [X, F(A,A)]$$

La construcción del final para un funtor, tal como se ha dado, permite ser ampliada para funtores de más variables. De este modo tendremos por ejemplo finales del tipo

$$\int_A F(A, A, B)$$

para funtores $F : \mathcal{A}^{op} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{V}$ y finales del tipo

$$\int_A F(A, B, A, C)$$

para funtores $F : (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})^{op} \otimes (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \longrightarrow \mathcal{V}$.

Definición. Dados dos $\mathcal{V}-$funtores $F, G : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ definimos el final del bifuntor $\mathcal{B}(F-, G-) : \mathcal{A}^{op} \otimes \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{V}$ como

$$[A, B](F, G) = \int_A \mathcal{B}(FA, GA)$$

con counidad $\varphi_{A,F,G} : [A, B](F, G) \longrightarrow \mathcal{B}(FA, GA)$.

Si $[\mathcal{A}, \mathcal{B}](T, S)$ existe para todos los funtores $T, S : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ entonces es el morfismo objeto de una $\mathcal{V}-$categoría $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$ cuyos objetos son todos los funtores $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$.

En este caso la ley de composición de dicha categoría es la inducida por el diagrama de coherencia de las $\mathcal{V}-$transformaciones naturales y tiene la forma para $\alpha : F \longrightarrow G$ y $\beta : G \longrightarrow H$ con $F, G, H : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$

$$\begin{tikzcd}
{[\mathcal{A},\mathcal{B}](G,H) \otimes [\mathcal{A},\mathcal{B}](F,G)} \arrow[r, "M"] \arrow[d, "\varphi_A \otimes \varphi_A"'] & {[\mathcal{A},\mathcal{B}](F,H)} \arrow[d, "\varphi_A"] \\
\beta(GA, HA) \otimes \beta(FA, GA) \arrow[r, "M"] & \beta(FA, HA)
\end{tikzcd}$$

mientras que las identidades vienen dadas por la ecuación $\varphi_A j_F = j_{FA}$.

Esto motiva la siguiente Definición.

Definición. $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$ es una $\mathcal{V}-$categoría llamada *categoría funtor.* Sus objetos son los funtores en la forma $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ y sus morfismos las transformaciones naturales entre esos funtores.

Definición. Llamamos $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]_0$ a la *categoría subyacente* de $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$. $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]_0$ es la categoría ordinaria de todos los $\mathcal{V}-$funtores de la forma $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$. Es decir: $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]_0 = \mathcal{V} - Cat$.

Denominamos los morfismos objetos de la categoría subyacente que hemos definido como

$$[A, B]_0(F, G) = \mathcal{V}[A, B](F, G)$$

cuyos elementos son $\alpha : \top \longrightarrow [A, B](F, G)$ para cada A, B en $\mathcal{A}$ y $F, G : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ y a partir de los cuales podemos considerar familias $\mathcal{V}-$naturales

$$\alpha_A = \varphi_A \alpha : \top \longrightarrow \mathcal{B}(FA, GA)$$

para cada $A \in \mathcal{A}$. Estas componentes naturales resultan ser por la Definición 3.2.6 las $\mathcal{V}-$transformaciones naturales $\alpha : F \longrightarrow G$.

Ejemplo. Cuando $[A, B](F, G)$ existe para cada $F, G : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ lo que obtenemos es exactamente los morfismos objeto de una $\mathcal{V}-$categoría $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$ que tiene por objetos los $\mathcal{V}-$funtores $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$.

Existe un $\mathcal{V}-$funtor[4] $E : [\mathcal{A}, \mathcal{B} \otimes \mathcal{A}] \longrightarrow \mathcal{B}$ cuyos funtores parciales son

$$E(-A) = \varphi_a : [\mathcal{A}, \mathcal{B}] \longrightarrow \mathcal{B}$$

$$E(T, -) = T : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$$

Este $\mathcal{V}-$funtor E induce para cada $\mathcal{V}$-categoría $\mathcal{C}$ un funtor

$$\mathcal{V} - Cat(\mathcal{C}, [\mathcal{A}, \mathcal{B}]) \longrightarrow \mathcal{V} - Cat(\mathcal{C} \otimes \mathcal{A}, \mathcal{B})$$

que envía $G : \mathcal{C} \longrightarrow [\mathcal{A}, \mathcal{B}]$ a la compuesta

$$G \otimes \mathcal{A} \xrightarrow{G \otimes 1} [\mathcal{A}, \mathcal{B}] \otimes \mathcal{A} \xrightarrow{E} \mathcal{B}$$

y, con G como antes, $\beta : G \longrightarrow G$ a la composición

$$E(\beta \otimes 1_{\mathcal{A}})$$

Teorema. $[\mathcal{C}, [\mathcal{A}, \mathcal{B}]] \equiv [\mathcal{C} \otimes \mathcal{A}, \mathcal{B}]$

Demostración. Ver [Kelly] pagina 31. □

Ejemplo. Si tomamos $\mathcal{C} = \mathcal{T}$ en el Teorema anterior, los objetos de $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$ son los $\mathcal{V}-$funtores $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$.

Ejemplo. Si tomamos $\mathcal{C} = \mathbf{2}$ en el Teorema anterior, entonces

$$[A, B](F, G) = \int_A \mathcal{B}(FA, GA)$$

como en la Definición 6.2.

[4]Denominado *funtor evaluación*.

Apéndice C

C.1 Descripción de la categoría inicial $\mathcal{I}^n$

Para describir la construcción de la categoría inicial $\mathcal{I}^n$ de la doctrina $\mathcal{O}^n$ con $n > 1$ vamos a tener en cuenta que es una 2-categoría, así en cada estadio de su construcción describiremos los objetos, flechas, endofuntores y transformaciones naturales que van apareciendo:

Estadio 0 en el que únicamente se ponen los datos exigidos por $\mathcal{O}^n$:

- Objetos: $\top$ y N_0
- Flechas:
  - Identidades: $1_\top : \top \longrightarrow \top$, $1_{N_0} : N_0 \longrightarrow N_0$
  - Morfismos del diagrama inicial: $0_0 : \top \longrightarrow N_0$ y $s_0 : N_0 \longrightarrow N_0$[5]
  - Endofuntores:
    - Binario: $\otimes$
    - Monádicos: id, T_k y G_k para $k = 0, \ldots, n-2$
  - Transformaciones naturales:
    - $1_{T_k} : T_k \Rightarrow T_k$, $1_{G_k} : G_k \Rightarrow G_k$, $\epsilon_k : G_k \Rightarrow id$, $\eta_k : id \Rightarrow T_k$ para $k = 0, \ldots, n-2$
    - $a_{XYZ} : X \otimes (Y \otimes Z) \Leftrightarrow (X \otimes Y) \otimes Z$, $i_X : \top \otimes X \Leftrightarrow X$, $d : X \otimes \top \Leftrightarrow X$, $s_{XY} : X \otimes Y \Leftrightarrow Y \otimes X$

Estadio 1 se aplican los funtores y las transformaciones naturales a los objetos y flechas del estadio anterior; la composición a las flechas, funtores y transformaciones del estadio anterior. Hay que indicar los objetos, flechas, endofuntores o transformaciones naturales que están repetidos (aparecen más de una vez en la unión de los dos estadios); lo que hacemos sólo en algunos casos, encerrando entre corchetes cuando aparecen por segunda vez.

- Objetos:
  - Productos tensoriales: $\top \otimes \top$, $\top \otimes N_0$, $N_0 \otimes \top$, $N_0 \otimes N_0$
  - Aplicación de funtores: $G_0 N_0 = N_1$, $T_0 N_0$, $T_k \top$ y $G_k \top$, para $k = 0, \ldots, n-2$ y $[T_k N_0$ y $G_k N_0$ para $k = 1, \ldots n-2]$

[5] No puede aplicarse ninguno de los diagramas de recursión ya que no hay ningún objeto de la forma $\top \otimes X$.

- Flechas:

  - Identidades: $1_{\top\otimes\top}$, $1_{\top\otimes N_0}$, $1_{N_0\otimes\top}$, $1_{N_0\otimes N_0}$, 1_{N_1}
  - Generadas por G: $G_0 0_0 = 0_1 : \top \longrightarrow N_1$, $G_0 s_0 = s_1 : N_1 \longrightarrow N_1$, $[T_0 0_0 : \top \longrightarrow \top$, $T_j 0_0 = G_j 0_0 = 0_0$ para $j = 1, \ldots, n-2]$
  - Composiciones: $s_0 \circ 0_0 : \top \longrightarrow N_0$, $s_0 \circ s_0 = s_0^2 : N_0 \longrightarrow N_0$
  - Por transformaciones naturales: $\epsilon_0(N_0) : N_1 \longrightarrow N_0$, $\eta_0(N_0) : N_0 \longrightarrow \top$, $[\eta_k(N_0) = \epsilon_k(N_0) : N_0 \longrightarrow N_0$ para $k = 1, \ldots, n-2]$[6] $\epsilon_j(\top) = \eta_j(\top) : \top \longrightarrow \top$ para $j = 0, 1, \ldots, n-2]$
  - Productos tensoriales: $1_\top \otimes 1_\top$, $1_\top \otimes 1_{N_0}$, $1_\top \otimes 0_0$, $1_\top \otimes s_0$, $1_{N_0} \otimes 1_\top$, $1_{N_0} \otimes 1_{N_0}$, $1_{N_0} \otimes 0_0$, $1_{N_0} \otimes s_0$, $0_0 \otimes 1_\top$, $0_0 \otimes 1_{N_0}$, $0_0 \otimes 0_0$, $0_0 \otimes s_0$, $s_0 \otimes 1_\top$, $s_0 \otimes 1_{N_0}$, $s_0 \otimes 0_0$, $s_0 \otimes s_0$ [7]

- Endofuntores:

  - Productos tensoriales: $T_k X \otimes Y$, $X \otimes T_i Y$, $G_k X \otimes Y$, $X \otimes G_i Y$, $T_k X \otimes T_i Y$, $T_k X \otimes G_i Y$, $G_k X \otimes T_i Y$, $G_k X \otimes G_i Y$
  - Composición: $T_k T_i$, $G_k T_i$, $T_k G_i$, $G_k G_i$ para $i, k = 0, \ldots, n-2$ [8]

- Transformaciones naturales:

  - Productos de funtores y transformaciones: $T_j \epsilon_k$, $\epsilon_k T_j$, $T_j \eta_k$, $\eta_k T_j$, $G_j \epsilon_k$, $\epsilon_k G_j$, $G_j \eta_k$, $\eta_k G_j$
  - Composición: $\eta_k \circ \epsilon_j$, para $j, k = 0, \ldots, n-2$.[9]

Estadio 2 se aplican los funtores a los objetos y flechas de los estadios anteriores; la composición a las flechas, funtores y transformaciones de los estadios anteriores.

- Objetos:

  - Productos tensoriales del estadio 0 y estadio 1:

[6] Todas producen la misma flecha.

[7] No se puede aplicar ningún diagrama de recursión, ya que en el nivel 0 no hay ningún morfismo cuyo dominio sea un producto tensorial.

[8] La X y la Y indican los lugares argumentales o uno de ellos es $\top$ o N_0. Habrá que poner entre corchetes algunos de estos endofuntores ya que son iguales a alguno aparecido en el estadio anterior o que aparecen antes en este estadio.

[9] Habrá que poner entre corchetes algunas de estas transformaciones naturales ya que son iguales a alguno aparecido en el estadio anterior o que aparecen antes en este estadio.

$(\top \otimes \top) \otimes \top$	$\top \otimes (\top \otimes \top)$	$(\top \otimes \top) \otimes N_0$	$\top \otimes (\top \otimes N_0)$
$(\top \otimes N_0) \otimes \top$	$\top \otimes (N_0 \otimes \top)$	$(\top \otimes N_0) \otimes N_0$	$\top \otimes (N_0 \otimes N_0)$
$(N_0 \otimes \top) \otimes \top$	$N_0 \otimes (\top \otimes \top)$	$(N_0 \otimes \top) \otimes N_0$	$N_0 \otimes (\top \otimes N_0)$
$(N_0 \otimes N_0) \otimes \top$	$N_0 \otimes (N_0 \otimes \top)$	$(N_0 \otimes N_0) \otimes N_0$	$N_0 \otimes (N_0 \otimes N_0)$
$\top \otimes N_1$	$N_0 \otimes N_1$	$N_1 \otimes \top$	$N_1 \otimes N_0$

- Productos tensoriales del estadio 1 con el 1:

$(\top \otimes \top) \otimes (\top \otimes \top)$	$(\top \otimes \top) \otimes (\top \otimes N_0)$	$(\top \otimes \top) \otimes (N_0 \otimes \top)$
$(\top \otimes \top) \otimes (N_0 \otimes N_0)$	$(\top \otimes \top) \otimes N_1$	$(\top \otimes N_0) \otimes (\top \otimes \top)$
$(\top \otimes N_0) \otimes (\top \otimes N_0)$	$(\top \otimes N_0) \otimes (N_0 \otimes \top)$	$(\top \otimes N_0) \otimes (N_0 \otimes N_0)$
$(\top \otimes N_0) \otimes N_1$	$(N_0 \otimes \top) \otimes (\top \otimes \top)$	$(N_0 \otimes \top) \otimes (\top \otimes N_0)$
$(N_0 \otimes \top) \otimes (N_0 \otimes \top)$	$(N_0 \otimes \top) \otimes (N_0 \otimes N_0)$	$(N_0 \otimes \top) \otimes N_1$
$(N_0 \otimes N_0) \otimes (\top \otimes \top)$	$(N_0 \otimes N_0) \otimes (\top \otimes N_0)$	$(N_0 \otimes N_0) \otimes (N_0 \otimes \top)$
$(N_0 \otimes N_0) \otimes (N_0 \otimes N_0)$	$(N_0 \otimes N_0) \otimes N_1$	$N_1 \otimes (\top \otimes \top)$
$N_1 \otimes (N_0 \otimes \top)$	$N_1 \otimes (\top \otimes N_0)$	$N_1 \otimes (N_0 \otimes N_0)$
$N_1 \otimes N_1$		

- Aplicación del funtor G_1: $G_1 N_1 = N_2$.[10]

- Flechas
  - Composiciones: $s_0 \circ s_0 \circ 0_0 = s_0^2 \circ 0_0$, $s^3 \circ 0_0$, s_0^3, s_0^4, $s_1 \circ 0_1$, s_1^2, $\eta_0(N_0) \circ 0_0 : \top \longrightarrow \top$, $0_0 \circ \eta_0(N_0)$, $s_0 \circ \epsilon_0(N_0)$, $\eta_0(N_0) \circ s_0$, $\eta_0(N_0) \circ s_0 \circ 0_0$, $s_0 \circ 0_0 \circ \eta_0(N_0)$, $s_0^2 \circ \epsilon_0(N_0)$, $\eta_0(N_0) \circ s_0^2$, $\epsilon_0(N_0) \circ 0_1$, $0_1 \circ \eta_0(N_0)$, $\epsilon_0(N_0) \circ s_1$, $\eta_0(N_0) \circ \epsilon_0(N_0)$
  - Aplicaciones de G_1: $G_1 s_1 = s_2$, $G_1 0_1 = 0_2$,
  - Transformaciones naturales: $d_\top = i_\top : \top \otimes \top \longrightarrow \top$, $i_\top^{-1}$, $i_{N_0} : \top \otimes N_0 \longrightarrow N_0$, $i_{N_0}^{-1}$, $d_{N_0} : N_0 \otimes \top \longrightarrow N_0$, $d_{N_0}^{-1}$, $[s_{\top,\top} = 1_{\top \otimes \top}]$, $s_{\top,N_0}$, $s_{N_0,\top}$, $[s_{N_0,N_0} = 1_{N_0 \otimes N_0}]$
  - Productos tensoriales:

[10] Aplicar los restantes endofuntores T_k y G_k a los objetos del estadio 2 no produce ningún nuevo objeto.

$$
\left|\begin{array}{c|c|c|c}
(1_\top \otimes 1_\top) \otimes 1_\top & 1_\top \otimes (1_\top \otimes 1_\top) & (1_\top \otimes 1_\top) \otimes 1_{N_0} & 1_\top \otimes (1_\top \otimes 1_{N_0}) \\
(1_\top \otimes 1_{N_0}) \otimes 1_\top & 1_\top \otimes (1_{N_0} \otimes 1_\top) & (1_\top \otimes 1_{N_0}) \otimes 1_{N_0} & 1_\top \otimes (1_{N_0} \otimes 1_{N_0}) \\
(1_{N_0} \otimes 1_\top) \otimes 1_\top & 1_{N_0} \otimes (1_\top \otimes 1_\top) & (1_{N_0} \otimes 1_\top) \otimes 1_{N_0} & 1_{N_0} \otimes (1_\top \otimes 1_{N_0}) \\
(1_{N_0} \otimes 1_{N_0}) \otimes 1_\top & 1_{N_0} \otimes (1_{N_0} \otimes 1_\top) & (1_{N_0} \otimes 1_{N_0}) \otimes 1_{N_0} & 1_{N_0} \otimes (1_{N_0} \otimes 1_{N_0})
\end{array}\right|
$$

$$
\left|\begin{array}{c|c|c}
(1_\top \otimes 1_\top) \otimes (1_\top \otimes 1_\top) & (1_\top \otimes 1_\top) \otimes (1_\top \otimes 1_{N_0}) & (1_\top \otimes 1_\top) \otimes (1_{N_0} \otimes 1_\top) \\
(1_\top \otimes 1_\top) \otimes (1_{N_0} \otimes 1_{N_0}) & (1_\top \otimes 1_{N_0}) \otimes (1_\top \otimes 1_\top) & (1_\top \otimes 1_{N_0}) \otimes (1_\top \otimes 1_{N_0}) \\
(1_\top \otimes 1_{N_0}) \otimes (1_{N_0} \otimes 1_\top) & (1_\top \otimes 1_{N_0}) \otimes (1_{N_0} \otimes 1_{N_0}) & (1_{N_0} \otimes 1_\top) \otimes (1_\top \otimes 1_\top) \\
(1_{N_0} \otimes 1_\top) \otimes (1_\top \otimes 1_{N_0}) & (1_{N_0} \otimes 1_\top) \otimes (1_{N_0} \otimes 1_\top) & (1_{N_0} \otimes 1_\top) \otimes (1_{N_0} \otimes 1_{N_0}) \\
(1_{N_0} \otimes 1_{N_0}) \otimes (1_\top \otimes 1_\top) & (1_{N_0} \otimes 1_{N_0}) \otimes (1_\top \otimes 1_{N_0}) & (1_{N_0} \otimes 1_{N_0}) \otimes (1_{N_0} \otimes 1_\top) \\
 & (1_{N_0} \otimes 1_{N_0}) \otimes (1_{N_0} \otimes 1_{N_0}) &
\end{array}\right|
$$

$$1_\top \otimes 1_{N_1}, 1_{N_0} \otimes 1_{N_1}, 1_{N_1} \otimes 1_\top, 1_{N_1} \otimes 1_{N_0}, 1_{N_1} \otimes 1_{N_1}$$

$1_{\top\otimes\top} \otimes (1_\top \otimes 1_\top), (1_\top \otimes 1_{N_0}) \otimes 1_{\top\otimes\top}, 1_{\top\otimes\top} \otimes (1_\top \otimes 1_\top), (1_\top \otimes 1_{N_0}) \otimes 1_{\top\otimes\top}, 1_{\top\otimes\top} \otimes (1_\top \otimes 1_\top), (1_\top\otimes 1_{N_0}) \otimes 1_{\top\otimes\top}, 1_{\top\otimes\top}\otimes(1_\top\otimes 0_0), (1_\top\otimes s_0)\otimes 1_{\top\otimes\top}, 1_{\top\otimes\top}\otimes(1_\top\otimes 0_0), (1_\top\otimes s_0)\otimes 1_{\top\otimes\top}, 1_{\top\otimes\top}\otimes(1_{N_0}\otimes 1_\top), (1_{N_0}\otimes 1_{N_0})\otimes 1_{\top\otimes\top}, 1_{\top\otimes\top}\otimes(1_{N_0}\otimes 1_\top), (1_{N_0}\otimes 1_{N_0})\otimes 1_{\top\otimes\top}, 1_{\top\otimes\top}\otimes(1_{N_0}\otimes 0_0), (1_{N_0}\otimes s_0)\otimes 1_{\top\otimes\top}, 1_{\top\otimes\top}\otimes(1_{N_0}\otimes 0_0), (1_{N_0}\otimes s_0)\otimes 1_{\top\otimes\top}, 1_{\top\otimes\top}\otimes(0_0\otimes 1_\top), (0_0\otimes 1_{N_0})\otimes 1_{\top\otimes\top}, 1_{\top\otimes\top}\otimes(0_0\otimes 1_\top), (0_0\otimes 1_{N_0})\otimes 1_{\top\otimes\top}, 1_{\top\otimes\top}\otimes(0_0\otimes 0_0), (0_0\otimes s_0)\otimes 1_{\top\otimes\top},1_{\top\otimes\top}\otimes(0_0\otimes 0_0), (0_0\otimes s_0)\otimes 1_{\top\otimes\top}, 1_{\top\otimes\top}\otimes(s_0\otimes 1_\top), (s_0\otimes 1_{N_0})\otimes 1_{\top\otimes\top},1_{\top\otimes\top}\otimes(s_0\otimes 1_\top), (s_0\otimes 1_{N_0})\otimes 1_{\top\otimes\top}, 1_{\top\otimes\top}\otimes(s_0\otimes 0_0), (s_0\otimes s_0)\otimes 1_{\top\otimes\top},1_{\top\otimes\top}\otimes(s_0\otimes 0_0), (s_0\otimes s_0)\otimes 1_{\top\otimes\top}1_{\top\otimes N_0}\otimes(1_\top\otimes 1_\top), (1_\top\otimes 1_{N_0})\otimes 1_{\top\otimes N_0}, 1_{\top\otimes N_0}\otimes(1_\top\otimes 1_\top), (1_\top\otimes 1_{N_0})\otimes 1_{\top\otimes N_0}, 1_{\top\otimes N_0}\otimes(1_\top\otimes 1_\top), (1_\top\otimes 1_{N_0})\otimes 1_{\top\otimes N_0}, 1_{\top\otimes N_0}\otimes(1_\top\otimes 0_0), (1_\top\otimes s_0)\otimes 1_{\top\otimes N_0}, 1_{\top\otimes N_0}\otimes(1_\top\otimes 0_0), (1_\top\otimes s_0)\otimes 1_{\top\otimes N_0}, 1_{\top\otimes N_0}\otimes(1_{N_0}\otimes 1_\top), (1_{N_0}\otimes 1_{N_0})\otimes 1_{\top\otimes N_0}, 1_{\top\otimes N_0}\otimes (1_{N_0}\otimes 1_\top), (1_{N_0}\otimes 1_{N_0})\otimes 1_{\top\otimes N_0}, 1_{\top\otimes N_0}\otimes(1_{N_0}\otimes 0_0), (1_{N_0}\otimes s_0)\otimes 1_{\top\otimes N_0}, 1_{\top\otimes N_0}\otimes(1_{N_0}\otimes 0_0), (1_{N_0}\otimes s_0)\otimes 1_{\top\otimes N_0}, 1_{\top\otimes N_0}\otimes(0_0\otimes 1_\top), (0_0\otimes 1_{N_0})\otimes 1_{\top\otimes N_0}, 1_{\top\otimes N_0}\otimes(0_0\otimes 1_\top), (0_0\otimes 1_{N_0})\otimes 1_{\top\otimes N_0}, 1_{\top\otimes N_0}\otimes(0_0\otimes 0_0), (0_0\otimes s_0)\otimes 1_{\top\otimes N_0}, 1_{\top\otimes N_0}\otimes(0_0\otimes 0_0), (0_0\otimes s_0)\otimes 1_{\top\otimes N_0}, 1_{\top\otimes N_0}\otimes(s_0\otimes 1_\top), (s_0\otimes 1_{N_0})\otimes 1_{\top\otimes N_0}, 1_{\top\otimes N_0}\otimes(s_0\otimes 1_\top), (s_0\otimes 1_{N_0})\otimes 1_{\top\otimes N_0}, 1_{\top\otimes N_0}\otimes(s_0\otimes 0_0), (s_0\otimes s_0)\otimes 1_{\top\otimes N_0}, 1_{\top\otimes N_0}\otimes(s_0\otimes 0_0), (s_0\otimes s_0)\otimes 1_{\top\otimes N_0}, 1_{N_0\otimes\top}\otimes(1_\top\otimes 1_\top), (1_\top\otimes 1_{N_0})\otimes 1_{N_0\otimes\top}, 1_{N_0\otimes\top}\otimes(1_\top\otimes 1_\top), (1_\top\otimes 1_{N_0})\otimes 1_{N_0\otimes\top}, 1_{N_0\otimes\top}\otimes(1_\top\otimes 1_\top), (1_\top\otimes 1_{N_0})\otimes 1_{N_0\otimes\top}, 1_{N_0\otimes\top}\otimes(1_\top\otimes 0_0), (1_\top\otimes s_0)\otimes 1_{N_0\otimes\top}, 1_{N_0\otimes\top}\otimes(1_\top\otimes 0_0), (1_\top\otimes s_0)\otimes 1_{N_0\otimes\top}, 1_{N_0\otimes\top}\otimes(1_{N_0}\otimes 1_\top), (1_{N_0}\otimes 1_{N_0})\otimes 1_{N_0\otimes\top}, 1_{N_0\otimes\top}\otimes(1_{N_0}\otimes 1_\top), (1_{N_0}\otimes 1_{N_0})\otimes 1_{N_0\otimes\top}, 1_{N_0\otimes\top}\otimes(1_{N_0}\otimes 0_0), (1_{N_0}\otimes s_0)\otimes 1_{N_0\otimes\top}, 1_{N_0\otimes\top}\otimes (1_{N_0}\otimes 0_0), (1_{N_0}\otimes s_0)\otimes 1_{N_0\otimes\top}, 1_{N_0\otimes\top}\otimes(0_0\otimes 1_\top), (0_0\otimes 1_{N_0})\otimes 1_{N_0\otimes\top}, 1_{N_0\otimes\top}\otimes (0_0\otimes 1_\top), (0_0\otimes 1_{N_0})\otimes 1_{N_0\otimes\top}, 1_{N_0\otimes\top}\otimes(0_0\otimes 0_0), (0_0\otimes s_0)\otimes 1_{N_0\otimes\top}, 1_{N_0\otimes\top}\otimes (0_0\otimes 0_0), (0_0\otimes s_0)\otimes 1_{N_0\otimes\top}, 1_{N_0\otimes\top}\otimes(s_0\otimes 1_\top), (s_0\otimes 1_{N_0})\otimes 1_{N_0\otimes\top}, 1_{N_0\otimes\top}\otimes (s_0\otimes 1_\top), (s_0\otimes 1_{N_0})\otimes 1_{N_0\otimes\top}, 1_{N_0\otimes\top}\otimes(s_0\otimes 0_0), (s_0\otimes s_0)\otimes 1_{N_0\otimes\top}, 1_{N_0\otimes\top}\otimes (s_0\otimes 0_0), (s_0\otimes s_0)\otimes 1_{N_0\otimes\top}, 1_{N_0\otimes N_0}\otimes(1_\top\otimes 1_\top), (1_\top\otimes 1_{N_0})\otimes 1_{N_0\otimes N_0}, 1_{N_0\otimes N_0}\otimes$

$(1_\top \otimes 1_\top)$, $(1_\top \otimes 1_{N_0}) \otimes 1_{N_0\otimes N_0}$, $1_{N_0\otimes N_0} \otimes (1_\top \otimes 1_\top)$, $(1_\top \otimes 1_{N_0}) \otimes 1_{N_0\otimes N_0}$, $1_{N_0\otimes N_0} \otimes (1_\top \otimes 0_0)$, $(1_\top \otimes s_0) \otimes 1_{N_0\otimes N_0}$, $1_{N_0\otimes N_0} \otimes (1_\top \otimes 0_0)$, $(1_\top \otimes s_0) \otimes 1_{N_0\otimes N_0}$, $1_{N_0\otimes N_0} \otimes (1_{N_0} \otimes 1_\top)$, $(1_{N_0} \otimes 1_{N_0}) \otimes 1_{N_0\otimes N_0}$, $1_{N_0\otimes N_0} \otimes (1_{N_0} \otimes 1_\top)$, $(1_{N_0} \otimes 1_{N_0}) \otimes 1_{N_0\otimes N_0}$, $1_{N_0\otimes N_0} \otimes (1_{N_0} \otimes 0_0)$, $(1_{N_0} \otimes s_0) \otimes 1_{N_0\otimes N_0}$, $1_{N_0\otimes N_0} \otimes (1_{N_0} \otimes 0_0)$, $(1_{N_0} \otimes s_0) \otimes 1_{N_0\otimes N_0}$, $1_{N_0\otimes N_0} \otimes (0_0 \otimes 1_\top)$, $(0_0 \otimes 1_{N_0}) \otimes 1_{N_0\otimes N_0}$, $1_{N_0\otimes N_0} \otimes (0_0 \otimes 1_\top)$, $(0_0 \otimes 1_{N_0}) \otimes 1_{N_0\otimes N_0}$, $1_{N_0\otimes N_0} \otimes (0_0 \otimes 0_0)$, $(0_0 \otimes s_0) \otimes 1_{N_0\otimes N_0}$, $1_{N_0\otimes N_0} \otimes (0_0 \otimes 0_0)$, $(0_0 \otimes s_0) \otimes 1_{N_0\otimes N_0}$, $1_{N_0\otimes N_0} \otimes (s_0 \otimes 1_\top)$, $(s_0 \otimes 1_{N_0}) \otimes 1_{N_0\otimes N_0}$, $1_{N_0\otimes N_0} \otimes (s_0 \otimes 1_\top)$, $(s_0 \otimes 1_{N_0}) \otimes 1_{N_0\otimes N_0}$, $1_{N_0\otimes N_0} \otimes (s_0 \otimes 0_0)$, $(s_0 \otimes s_0) \otimes 1_{N_0\otimes N_0}$, $1_{N_0\otimes N_0} \otimes (s_0 \otimes 0_0)$, $(s_0 \otimes s_0) \otimes 1_{N_0\otimes N_0}$, $1_{N_1} \otimes (1_\top \otimes 1_\top)$, $(1_\top \otimes 1_{N_0}) \otimes 1_{N_1}$, $1_{N_1} \otimes (1_\top \otimes 1_\top)$, $(1_\top \otimes 1_{N_0}) \otimes 1_{N_1}$, $1_{N_1} \otimes (1_\top \otimes 1_\top)$, $(1_\top \otimes 1_{N_0}) \otimes 1_{N_1}$, $1_{N_1} \otimes (1_\top \otimes 0_0)$, $(1_\top \otimes s_0) \otimes 1_{N_1}$, $1_{N_1} \otimes (1_\top \otimes 0_0)$, $(1_\top \otimes s_0) \otimes 1_{N_1}$, $1_{N_1} \otimes (1_{N_0} \otimes 1_\top)$, $(1_{N_0} \otimes 1_{N_0}) \otimes 1_{N_1}$, $1_{N_1} \otimes (1_{N_0} \otimes 1_\top)$, $(1_{N_0} \otimes 1_{N_0}) \otimes 1_{N_1}$, $1_{N_1} \otimes (1_{N_0} \otimes 0_0)$, $(1_{N_0} \otimes s_0) \otimes 1_{N_1}$, $1_{N_1} \otimes (1_{N_0} \otimes 0_0)$, $(1_{N_0} \otimes s_0) \otimes 1_{N_1}$, $1_{N_1} \otimes (0_0 \otimes 1_\top)$, $(0_0 \otimes 1_{N_0}) \otimes 1_{N_1}$, $1_{N_1} \otimes (0_0 \otimes 1_\top)$, $(0_0 \otimes 1_{N_0}) \otimes 1_{N_1}$, $1_{N_1} \otimes (0_0 \otimes 0_0)$, $(0_0 \otimes s_0) \otimes 1_{N_1}$, $1_{N_1} \otimes (0_0 \otimes 0_0)$, $(0_0 \otimes s_0) \otimes 1_{N_1}$, $1_{N_1} \otimes (s_0 \otimes 1_\top)$, $(s_0 \otimes 1_{N_0}) \otimes 1_{N_1}$, $1_{N_1} \otimes (s_0 \otimes 1_\top)$, $(s_0 \otimes 1_{N_0}) \otimes 1_{N_1}$, $1_{N_1} \otimes (s_0 \otimes 0_0)$, $(s_0 \otimes s_0) \otimes 1_{N_1}$, $1_{N_1} \otimes (s_0 \otimes 0_0)$, $(s_0 \otimes s_0) \otimes 1_{N_1}$, $s_0 \circ 0_0 \otimes (1_\top \otimes 1_\top)$, $(1_\top \otimes 1_{N_0}) \otimes s_0 \circ 0_0$, $s_0 \circ 0_0 \otimes (1_\top \otimes 1_\top)$, $(1_\top \otimes 1_{N_0}) \otimes s_0 \circ 0_0$, $s_0 \circ 0_0 \otimes (1_\top \otimes 1_\top)$, $(1_\top \otimes 1_{N_0}) \otimes s_0 \circ 0_0$, $s_0 \circ 0_0 \otimes (1_\top \otimes 0_0)$, $(1_\top \otimes s_0) \otimes s_0 \circ 0_0$, $s_0 \circ 0_0 \otimes (1_\top \otimes 0_0)$, $(1_\top \otimes s_0) \otimes s_0 \circ 0_0$, $s_0 \circ 0_0 \otimes (1_{N_0} \otimes 1_\top)$, $(1_{N_0} \otimes 1_{N_0}) \otimes s_0 \circ 0_0$, $s_0 \circ 0_0 \otimes (1_{N_0} \otimes 1_\top)$, $(1_{N_0} \otimes 1_{N_0}) \otimes s_0 \circ 0_0$, $s_0 \circ 0_0 \otimes (1_{N_0} \otimes 0_0)$, $(1_{N_0} \otimes s_0) \otimes s_0 \circ 0_0$, $s_0 \circ 0_0 \otimes (1_{N_0} \otimes 0_0)$, $(1_{N_0} \otimes s_0) \otimes s_0 \circ 0_0$, $s_0 \circ 0_0 \otimes (0_0 \otimes 1_\top)$, $(0_0 \otimes 1_{N_0}) \otimes s_0 \circ 0_0$, $s_0 \circ 0_0 \otimes (0_0 \otimes 1_\top)$, $(0_0 \otimes 1_{N_0}) \otimes s_0 \circ 0_0$, $s_0 \circ 0_0 \otimes (0_0 \otimes 0_0)$, $(0_0 \otimes s_0) \otimes s_0 \circ 0_0$, $s_0 \circ 0_0 \otimes (0_0 \otimes 0_0)$, $(0_0 \otimes s_0) \otimes s_0 \circ 0_0$, $s_0 \circ 0_0 \otimes (s_0 \otimes 1_\top)$, $(s_0 \otimes 1_{N_0}) \otimes s_0 \circ 0_0$, $s_0 \circ 0_0 \otimes (s_0 \otimes 1_\top)$, $(s_0 \otimes 1_{N_0}) \otimes s_0 \circ 0_0$, $s_0 \circ 0_0 \otimes (s_0 \otimes 0_0)$, $(s_0 \otimes s_0) \otimes s_0 \circ 0_0$, $s_0 \circ 0_0 \otimes (s_0 \otimes 0_0)$, $(s_0 \otimes s_0) \otimes s_0 \circ 0_0$, $s_0^2 \otimes (1_\top \otimes 1_\top)$, $(1_\top \otimes 1_{N_0}) \otimes s_0^2$, $s_0^2 \otimes (1_\top \otimes 1_\top)$, $(1_\top \otimes 1_{N_0}) \otimes s_0^2$, $s_0^2 \otimes (1_\top \otimes 1_\top)$, $(1_\top \otimes 1_{N_0}) \otimes s_0^2$, $s_0^2 \otimes (1_\top \otimes 0_0)$, $(1_\top \otimes s_0) \otimes s_0^2$, $s_0^2 \otimes (1_\top \otimes 0_0)$, $(1_\top \otimes s_0) \otimes s_0^2$, $s_0^2 \otimes (1_{N_0} \otimes 1_\top)$, $(1_{N_0} \otimes 1_{N_0}) \otimes s_0^2$, $s_0^2 \otimes (1_{N_0} \otimes 1_\top)$, $(1_{N_0} \otimes 1_{N_0}) \otimes s_0^2$, $s_0^2 \otimes (1_{N_0} \otimes 0_0)$, $(1_{N_0} \otimes s_0) \otimes s_0^2$, $s_0^2 \otimes (1_{N_0} \otimes 0_0)$, $(1_{N_0} \otimes s_0) \otimes s_0^2$, $s_0^2 \otimes (0_0 \otimes 1_\top)$, $(0_0 \otimes 1_{N_0}) \otimes s_0^2$, $s_0^2 \otimes (0_0 \otimes 1_\top)$, $(0_0 \otimes 1_{N_0}) \otimes s_0^2$, $s_0^2 \otimes (0_0 \otimes 0_0)$, $(0_0 \otimes s_0) \otimes s_0^2$, $s_0^2 \otimes (0_0 \otimes 0_0)$, $(0_0 \otimes s_0) \otimes s_0^2$, $s_0^2 \otimes (s_0 \otimes 1_\top)$, $(s_0 \otimes 1_{N_0}) \otimes s_0^2$, $s_0^2 \otimes (s_0 \otimes 1_\top)$, $(s_0 \otimes 1_{N_0}) \otimes s_0^2$, $s_0^2 \otimes (s_0 \otimes 0_0)$, $(s_0 \otimes s_0) \otimes s_0^2$, $s_0^2 \otimes (s_0 \otimes 0_0)$, $(s_0 \otimes s_0) \otimes s_0^2$, $0_1 \otimes (1_\top \otimes 1_\top)$, $(1_\top \otimes 1_{N_0}) \otimes 0_1$, $0_1 \otimes (1_\top \otimes 1_\top)$, $(1_\top \otimes 1_{N_0}) \otimes 0_1$, $0_1 \otimes (1_\top \otimes 1_\top)$, $(1_\top \otimes 1_{N_0}) \otimes 0_1$, $0_1 \otimes (1_\top \otimes 0_0)$, $(1_\top \otimes s_0) \otimes 0_1$, $0_1 \otimes (1_\top \otimes 0_0)$, $(1_\top \otimes s_0) \otimes 0_1$, $0_1 \otimes (1_{N_0} \otimes 1_\top)$, $(1_{N_0} \otimes 1_{N_0}) \otimes 0_1$, $0_1 \otimes (1_{N_0} \otimes 1_\top)$, $(1_{N_0} \otimes 1_{N_0}) \otimes 0_1$, $0_1 \otimes (1_{N_0} \otimes 0_0)$, $(1_{N_0} \otimes s_0) \otimes 0_1$, $0_1 \otimes (1_{N_0} \otimes 0_0)$, $(1_{N_0} \otimes s_0) \otimes 0_1$, $0_1 \otimes (0_0 \otimes 1_\top)$, $(0_0 \otimes 1_{N_0}) \otimes 0_1$, $0_1 \otimes (0_0 \otimes 1_\top)$, $(0_0 \otimes 1_{N_0}) \otimes 0_1$, $0_1 \otimes (0_0 \otimes 0_0)$, $(0_0 \otimes s_0) \otimes 0_1$, $0_1 \otimes (0_0 \otimes 0_0)$, $(0_0 \otimes s_0) \otimes 0_1$, $0_1 \otimes (s_0 \otimes 1_\top)$, $(s_0 \otimes 1_{N_0}) \otimes 0_1$, $0_1 \otimes (s_0 \otimes 1_\top)$, $(s_0 \otimes 1_{N_0}) \otimes 0_1$, $0_1 \otimes (s_0 \otimes 0_0)$, $(s_0 \otimes s_0) \otimes 0_1$, $0_1 \otimes (s_0 \otimes 0_0)$, $(s_0 \otimes s_0) \otimes 0_1$,

$s_1 \otimes (1_\top \otimes 1_\top)$, $(1_\top \otimes 1_{N_0}) \otimes s_1$, $s_1 \otimes (1_\top \otimes 1_\top)$, $(1_\top \otimes 1_{N_0}) \otimes s_1$, $s_1 \otimes (1_\top \otimes 1_\top)$, $(1_\top \otimes 1_{N_0}) \otimes s_1$, $s_1 \otimes (1_\top \otimes 0_0)$, $(1_\top \otimes s_0) \otimes s_1$, $s_1 \otimes (1_\top \otimes 0_0)$, $(1_\top \otimes s_0) \otimes s_1$, $s_1 \otimes (1_{N_0} \otimes 1_\top)$, $(1_{N_0} \otimes 1_{N_0}) \otimes s_1$, $s_1 \otimes (1_{N_0} \otimes 1_\top)$, $(1_{N_0} \otimes 1_{N_0}) \otimes s_1$, $s_1 \otimes (1_{N_0} \otimes 0_0)$, $(1_{N_0} \otimes s_0) \otimes s_1$, $s_1 \otimes (1_{N_0} \otimes 0_0)$, $(1_{N_0} \otimes s_0) \otimes s_1$, $s_1 \otimes (0_0 \otimes 1_\top)$, $(0_0 \otimes 1_{N_0}) \otimes s_1$, $s_1 \otimes (0_0 \otimes 1_\top)$, $(0_0 \otimes 1_{N_0}) \otimes s_1$, $s_1 \otimes (0_0 \otimes 0_0)$, $(0_0 \otimes s_0) \otimes s_1$, $s_1 \otimes (0_0 \otimes 0_0)$, $(0_0 \otimes s_0) \otimes s_1$, $s_1 \otimes (s_0 \otimes 1_\top)$, $(s_0 \otimes 1_{N_0}) \otimes s_1$, $s_1 \otimes (s_0 \otimes 1_\top)$, $(s_0 \otimes 1_{N_0}) \otimes s_1$, $s_1 \otimes (s_0 \otimes 0_0)$, $(s_0 \otimes s_0) \otimes s_1$, $s_1 \otimes (s_0 \otimes 0_0)$, $(s_0 \otimes s_0) \otimes s_1$, $\epsilon_0(N_0) \otimes (1_\top \otimes 1_\top)$, $(1_\top \otimes 1_{N_0}) \otimes \epsilon_0(N_0)$, $\epsilon_0(N_0) \otimes (1_\top \otimes 1_\top)$, $(1_\top \otimes 1_{N_0}) \otimes \epsilon_0(N_0)$, $\epsilon_0(N_0) \otimes (1_\top \otimes 1_\top)$, $(1_\top \otimes 1_{N_0}) \otimes \epsilon_0(N_0)$, $\epsilon_0(N_0) \otimes (1_\top \otimes 0_0)$, $(1_\top \otimes s_0) \otimes \epsilon_0(N_0)$, $\epsilon_0(N_0) \otimes (1_\top \otimes 0_0)$, $(1_\top \otimes s_0) \otimes \epsilon_0(N_0)$, $\epsilon_0(N_0) \otimes (1_{N_0} \otimes 1_\top)$, $(1_{N_0} \otimes 1_{N_0}) \otimes \epsilon_0(N_0)$, $\epsilon_0(N_0) \otimes (1_{N_0} \otimes 1_\top)$, $(1_{N_0} \otimes 1_{N_0}) \otimes \epsilon_0(N_0)$, $\epsilon_0(N_0) \otimes (1_{N_0} \otimes 0_0)$, $(1_{N_0} \otimes s_0) \otimes \epsilon_0(N_0)$, $\epsilon_0(N_0) \otimes (1_{N_0} \otimes 0_0)$, $(1_{N_0} \otimes s_0) \otimes \epsilon_0(N_0)$, $\epsilon_0(N_0) \otimes (0_0 \otimes 1_\top)$, $(0_0 \otimes 1_{N_0}) \otimes \epsilon_0(N_0)$, $\epsilon_0(N_0) \otimes (0_0 \otimes 1_\top)$, $(0_0 \otimes 1_{N_0}) \otimes \epsilon_0(N_0)$, $\epsilon_0(N_0) \otimes (0_0 \otimes 0_0)$, $(0_0 \otimes s_0) \otimes \epsilon_0(N_0)$, $\epsilon_0(N_0) \otimes (0_0 \otimes 0_0)$, $(0_0 \otimes s_0) \otimes \epsilon_0(N_0)$, $\epsilon_0(N_0) \otimes (s_0 \otimes 1_\top)$, $(s_0 \otimes 1_{N_0}) \otimes \epsilon_0(N_0)$, $\epsilon_0(N_0) \otimes (s_0 \otimes 1_\top)$, $(s_0 \otimes 1_{N_0}) \otimes \epsilon_0(N_0)$, $\epsilon_0(N_0) \otimes (s_0 \otimes 0_0)$, $(s_0 \otimes s_0) \otimes \epsilon_0(N_0)$, $\epsilon_0(N_0) \otimes (s_0 \otimes 0_0)$, $(s_0 \otimes s_0) \otimes \epsilon_0(N_0)$, $\epsilon_1(N_0) \otimes (1_\top \otimes 1_\top)$, $(1_\top \otimes 1_{N_0}) \otimes \epsilon_1(N_0)$, $\epsilon_1(N_0) \otimes (1_\top \otimes 1_\top)$, $(1_\top \otimes 1_{N_0}) \otimes \epsilon_1(N_0)$, $\epsilon_1(N_0) \otimes (1_\top \otimes 1_\top)$, $(1_\top \otimes 1_{N_0}) \otimes \epsilon_1(N_0)$, $\epsilon_1(N_0) \otimes (1_\top \otimes 0_0)$, $(1_\top \otimes s_0) \otimes \epsilon_1(N_0)$, $\epsilon_1(N_0) \otimes (1_\top \otimes 0_0)$, $(1_\top \otimes s_0) \otimes \epsilon_1(N_0)$, $\epsilon_1(N_0) \otimes (1_{N_0} \otimes 1_\top)$, $(1_{N_0} \otimes 1_{N_0}) \otimes \epsilon_1(N_0)$, $\epsilon_1(N_0) \otimes (1_{N_0} \otimes 1_\top)$, $(1_{N_0} \otimes 1_{N_0}) \otimes \epsilon_1(N_0)$, $\epsilon_1(N_0) \otimes (1_{N_0} \otimes 0_0)$, $(1_{N_0} \otimes s_0) \otimes \epsilon_1(N_0)$, $\epsilon_1(N_0) \otimes (1_{N_0} \otimes 0_0)$, $(1_{N_0} \otimes s_0) \otimes \epsilon_1(N_0)$, $\epsilon_1(N_0) \otimes (0_0 \otimes 1_\top)$, $(0_0 \otimes 1_{N_0}) \otimes \epsilon_1(N_0)$, $\epsilon_1(N_0) \otimes (0_0 \otimes 1_\top)$, $(0_0 \otimes 1_{N_0}) \otimes \epsilon_1(N_0)$, $\epsilon_1(N_0) \otimes (0_0 \otimes 0_0)$, $(0_0 \otimes s_0) \otimes \epsilon_1(N_0)$, $\epsilon_1(N_0) \otimes (0_0 \otimes 0_0)$, $(0_0 \otimes s_0) \otimes \epsilon_1(N_0)$, $\epsilon_1(N_0) \otimes (s_0 \otimes 1_\top)$, $(s_0 \otimes 1_{N_0}) \otimes \epsilon_1(N_0)$, $\epsilon_1(N_0) \otimes (s_0 \otimes 1_\top)$, $(s_0 \otimes 1_{N_0}) \otimes \epsilon_1(N_0)$, $\epsilon_1(N_0) \otimes (s_0 \otimes 0_0)$, $(s_0 \otimes s_0) \otimes \epsilon_1(N_0)$, $\epsilon_1(N_0) \otimes (s_0 \otimes 0_0)$, $(s_0 \otimes s_0) \otimes \epsilon_1(N_0)$.[11]

- Endofuntores:
  - Productos tensoriales:

$$X \otimes (Y \otimes Z),\ (X \otimes Y) \otimes Z^{12},\ (X \otimes Y) \otimes (Z \otimes U)^{13},$$

[11] No puede aplicarse la recursión plana, ya que no hay en los estadios anteriores dos funciones $g : X \longrightarrow Y$ y $h : N_0 \otimes X \longrightarrow Y$, ya que la X sólo puede ser N_0 o $\top$, las h que hay exigen que Y sea un producto tensorial o $N_0 \otimes N_0$ o $N_0 \otimes \top$ y, no existe ningún morfismo cuyo dominio sea N_0 o $\top$ y su codominio sea un producto tensorial. Tampoco puede aplicarse la recursión ramificada segura de nivel 0, ya que en el estadio 1 no hay ningún objeto de la forma $N_1 \otimes X$.

[12] Productos tensoriales de la identidad con el funtor $\otimes$.

[13] Producto tensorial de $\otimes$ por él mismo.

$Z\otimes(T_kX\otimes Y)$, $Z\otimes(X\otimes T_iY)$, $Z\otimes(G_kX\otimes Y)$, $Z\otimes(X\otimes G_iY)$, $Z\otimes(T_kX\otimes T_iY)$, $Z\otimes(T_kX\otimes G_iY)$, $Z\otimes(G_kX\otimes T_iY)$, $Z\otimes(G_kX\otimes G_iY)$, $Z\otimes T_kT_iX$, $Z\otimes G_kT_iX$, $Z\otimes T_kG_iX$, $Z\otimes G_kG_iX$, $(T_kX\otimes Y)\otimes Z$, $(X\otimes T_iY)\otimes Z$, $(G_kX\otimes Y)\otimes Z$, $(X\otimes G_iY)\otimes Z$, $(T_kX\otimes T_iY)\otimes Z$, $(T_kX\otimes G_iY)\otimes Z$, $(G_kX\otimes T_iY)\otimes Z$, $(G_kX\otimes G_iY)\otimes Z$, $T_kT_iX\otimes Z$, $G_kT_iX\otimes Z$, $T_kG_iX\otimes Z$, $G_kG_iX\otimes Z$, para $i,k=0,\dots,n-2$;[14] $T_jZ\otimes(T_kX\otimes Y)$, $T_jZ\otimes(X\otimes T_iY)$, $T_jZ\otimes(G_kX\otimes Y)$, $T_jZ\otimes(X\otimes G_iY)$, $T_jZ\otimes(T_kX\otimes T_iY)$, $T_jZ\otimes(T_kX\otimes G_iY)$, $T_jZ\otimes(G_kX\otimes T_iY)$, $T_jZ\otimes(G_kX\otimes G_iY)$, $T_jZ\otimes T_kT_iX$, $T_jZ\otimes G_kT_iX$, $T_jZ\otimes T_kG_iX$, $T_jZ\otimes G_kG_iX$, $(T_kX\otimes Y)\otimes T_jZ$, $(X\otimes T_iY)\otimes T_jZ$, $(G_kX\otimes Y)\otimes T_jZ$, $(X\otimes G_iY)\otimes T_jZ$, $(T_kX\otimes T_iY)\otimes T_jZ$, $(T_kX\otimes G_iY)\otimes T_jZ$, $(G_kX\otimes T_iY)\otimes T_jZ$, $(G_kX\otimes G_iY)\otimes T_jZ$, $T_kT_iX\otimes T_jZ$, $G_kT_iX\otimes T_jZ$, $T_kG_iX\otimes T_jZ$, $G_kG_iX\otimes T_jZ$;[15] $G_jZ\otimes(T_kX\otimes Y)$, $G_jZ\otimes(X\otimes T_iY)$, $G_jZ\otimes(G_kX\otimes Y)$, $G_jZ\otimes(X\otimes G_iY)$, $G_jZ\otimes(T_kX\otimes T_iY)$, $G_jZ\otimes(T_kX\otimes G_iY)$, $G_jZ\otimes(G_kX\otimes T_iY)$, $G_jZ\otimes(G_kX\otimes G_iY)$, $G_jZ\otimes T_kT_iX$, $G_jZ\otimes G_kT_iX$, $G_jZ\otimes T_kG_iX$, $G_jZ\otimes G_kG_iX$, $(T_kX\otimes Y)\otimes G_jZ$, $(X\otimes T_iY)\otimes G_jZ$, $(G_kX\otimes Y)\otimes G_jZ$, $(X\otimes G_iY)\otimes G_jZ$, $(T_kX\otimes T_iY)\otimes G_jZ$, $(T_kX\otimes G_iY)\otimes G_jZ$, $(G_kX\otimes T_iY)\otimes G_jZ$, $(G_kX\otimes G_iY)\otimes G_jZ$, $T_kT_iX\otimes G_jZ$, $G_kT_iX\otimes G_jZ$, $T_kG_iX\otimes G_jZ$, $G_kG_iX\otimes G_jZ$;[16] $(T_jU\otimes V)\otimes(T_kX\otimes Y)$, $(T_jU\otimes V)\otimes(X\otimes T_iY)$, $(T_jU\otimes V)\otimes(G_kX\otimes Y)$, $(T_jU\otimes V)\otimes(X\otimes G_iY)$, $(T_jU\otimes V)\otimes(T_kX\otimes T_iY)$, $(T_jU\otimes V)\otimes(T_kX\otimes G_iY)$, $(T_jU\otimes V)\otimes(G_kX\otimes T_iY)$, $(T_jU\otimes V)\otimes(G_kX\otimes G_iY)$, $(T_jU\otimes V)\otimes(T_kT_i)X$, $(T_jU\otimes V)\otimes(G_kT_i)X$, $(T_jU\otimes V)\otimes(T_kG_i)X$, $(T_jU\otimes V)\otimes(G_kG_i)X$, $(T_kX\otimes Y)\otimes(T_jU\otimes V)$, $(X\otimes T_iY)\otimes(T_jU\otimes V)$, $(G_kX\otimes Y)\otimes(T_jU\otimes V)$, $(X\otimes G_iY)\otimes(T_jU\otimes V)$, $(T_kX\otimes T_iY)\otimes(T_jU\otimes V)$, $(T_kX\otimes G_iY)\otimes(T_jU\otimes V)$, $(G_kX\otimes T_iY)\otimes(T_jU\otimes V)$, $(G_kX\otimes G_iY)\otimes(T_jU\otimes V)$, $(T_kT_i)X\otimes(T_jU\otimes V)$, $(G_kT_i)X\otimes(T_jU\otimes V)$, $(T_kG_i)X\otimes(T_jU\otimes V)$, $(G_kG_i)X\otimes(T_jU\otimes V)$,[17] $(U\otimes T_iV)\otimes(T_kX\otimes Y)$, $(U\otimes T_iV)\otimes(X\otimes T_iY)$, $(U\otimes T_iV)\otimes(G_kX\otimes Y)$, $(U\otimes T_iV)\otimes(X\otimes G_iY)$, $(U\otimes T_iV)\otimes(T_kX\otimes T_iY)$, $(U\otimes T_iV)\otimes(T_kX\otimes G_iY)$, $(U\otimes T_iV)\otimes(G_kX\otimes T_iY)$, $(U\otimes T_iV)\otimes(G_kX\otimes G_iY)$, $(U\otimes T_iV)\otimes(T_kT_i)X$, $(U\otimes T_iV)\otimes(G_kT_i)X$, $(U\otimes T_iV)\otimes(T_kG_i)X$, $(U\otimes T_iV)\otimes(G_kG_i)X$, $(T_kX\otimes Y)\otimes(U\otimes T_iV)$, $(X\otimes T_iY)\otimes(U\otimes$

[14] Producto tensorial por la izquierda y derecha de la identidad con $T_kX\otimes Y$, $X\otimes T_iY$, $G_kX\otimes Y$, $X\otimes G_iY$, $T_kX\otimes T_iY$, $T_kX\otimes G_iY$, $G_kX\otimes T_iY$, $G_kX\otimes G_iY$, T_kT_i, G_kT_i, T_kG_i, G_kG_i, para $i,k=0,\dots,n-2$.

[15] Producto tensorial de T_jZ por la izquierda y derecha con $T_kX\otimes Y$, $X\otimes T_iY$, $G_kX\otimes Y$, $X\otimes G_iY$, $T_kX\otimes T_iY$, $T_kX\otimes G_iY$, $G_kX\otimes T_iY$, $G_kX\otimes G_iY$, T_kT_i, G_kT_i, T_kG_i, G_kG_i, para $i,k=0,\dots,n-2$.

[16] Producto tensorial de G_jZ por la izquierda y derecha con $T_kX\otimes Y$, $X\otimes T_iY$, $G_kX\otimes Y$, $X\otimes G_iY$, $T_kX\otimes T_iY$, $T_kX\otimes G_iY$, $G_kX\otimes T_iY$, $G_kX\otimes G_iY$, T_kT_i, G_kT_i, T_kG_i, G_kG_i, para $i,k=0,\dots,n-2$.

[17] Producto tensorial de $T_jU\otimes V$ por la izquierda y derecha con $T_kX\otimes Y$, $X\otimes T_iY$, $G_kX\otimes Y$, $X\otimes G_iY$, $T_kX\otimes T_iY$, $T_kX\otimes G_iY$, $G_kX\otimes T_iY$, $G_kX\otimes G_iY$, T_kT_i, G_kT_i, T_kG_i, G_kG_i para $i,k=0,\dots,n-2$.

$T_iV)$, $(G_kX \otimes Y) \otimes (U \otimes T_iV)$, $(X \otimes G_iY) \otimes (U \otimes T_iV)$, $(T_kX \otimes T_iY) \otimes (U \otimes T_iV)$, $(T_kX \otimes G_iY) \otimes (U \otimes T_iV)$,$(G_kX \otimes T_iY) \otimes (U \otimes T_iV)$, $(G_kX \otimes G_iY) \otimes (U \otimes T_iV)$, $(T_kT_i)X \otimes (U \otimes T_iV)$, $(G_kT_i)X \otimes (U \otimes T_iV)$, $(T_kG_i)X \otimes (U \otimes T_iV)$, $(G_kG_i)X \otimes (U \otimes T_iV)$,[18]$(G_kU \otimes V) \otimes (T_kX \otimes Y)$, $(G_kU \otimes V) \otimes (X \otimes T_iY)$, $(G_kU \otimes V) \otimes (G_kX \otimes Y)$, $(G_kU \otimes V) \otimes (X \otimes G_iY)$, $(G_kU \otimes V) \otimes (T_kX \otimes T_iY)$, $(G_kU \otimes V) \otimes (T_kX \otimes G_iY)$, $(G_kU \otimes V) \otimes (G_kX \otimes T_iY)$, $(G_kU \otimes V) \otimes (G_kX \otimes G_iY)$, $(G_kU \otimes V) \otimes (T_kT_i)X$, $(G_kU \otimes V) \otimes (G_kT_i)X$, $(G_kU \otimes V) \otimes (T_kG_i)X$, $(G_kU \otimes V) \otimes (G_kG_i)X$, $(T_kX \otimes Y) \otimes (G_kU \otimes V)$, $(X \otimes T_iY) \otimes (G_kU \otimes V)$, $(G_kX \otimes Y) \otimes (G_kU \otimes V)$, $(X \otimes G_iY) \otimes (G_kU \otimes V)$, $(T_kX \otimes T_iY) \otimes (G_kU \otimes V)$, $(T_kX \otimes G_iY) \otimes (G_kU \otimes V)$, $(G_kX \otimes T_iY) \otimes (G_kU \otimes V)$, $(G_kX \otimes G_iY) \otimes (G_kU \otimes V)$, $(T_kT_i)X \otimes (G_kU \otimes V)$, $(G_kT_i)X \otimes (G_kU \otimes V)$, $(T_kG_i)X \otimes (G_kU \otimes V)$, $(G_kG_i)X \otimes (G_kU \otimes V)$,[19]$(U \otimes G_iV) \otimes (T_kX \otimes Y)$, $(U \otimes G_iV) \otimes (X \otimes T_iY)$, $(U \otimes G_iV) \otimes (G_kX \otimes Y)$, $(U \otimes G_iV) \otimes (X \otimes G_iY)$, $(U \otimes G_iV) \otimes (T_kX \otimes T_iY)$, $(U \otimes G_iV) \otimes (T_kX \otimes G_iY)$, $(U \otimes G_iV) \otimes (G_kX \otimes T_iY)$, $(U \otimes G_iV) \otimes (G_kX \otimes G_iY)$, $(U \otimes G_iV) \otimes (T_kT_i)X$, $(U \otimes G_iV) \otimes (G_kT_i)X$, $(U \otimes G_iV) \otimes (T_kG_i)X$, $(U \otimes G_iV) \otimes (G_kG_i)X$, $(T_kX \otimes Y) \otimes (U \otimes G_iV)$, $(X \otimes T_iY) \otimes (U \otimes G_iV)$, $(G_kX \otimes Y) \otimes (U \otimes G_iV)$, $(X \otimes G_iY) \otimes (U \otimes G_iV)$, $(T_kX \otimes T_iY) \otimes (U \otimes G_iV)$, $(T_kX \otimes G_iY) \otimes (U \otimes G_iV)$, $(G_kX \otimes T_iY) \otimes (U \otimes G_iV)$, $(G_kX \otimes G_iY) \otimes (U \otimes G_iV)$, $(T_kT_i)X \otimes (U \otimes G_iV)$, $(G_kT_i)X \otimes (U \otimes G_iV)$, $(T_kG_i)X \otimes (U \otimes G_iV)$, $(G_kG_i)X \otimes (U \otimes G_iV)$,[20]$(T_kU \otimes T_iV) \otimes (T_kX \otimes Y)$, $(T_kU \otimes T_iV) \otimes (X \otimes T_iY)$, $(T_kU \otimes T_iV) \otimes (G_kX \otimes Y)$, $(T_kU \otimes T_iV) \otimes (X \otimes G_iY)$, $(T_kU \otimes T_iV) \otimes (T_kX \otimes T_iY)$, $(T_kU \otimes T_iV) \otimes (T_kX \otimes G_iY)$, $(T_kU \otimes T_iV) \otimes (G_kX \otimes T_iY)$, $(T_kU \otimes T_iV) \otimes (G_kX \otimes G_iY)$, $(T_kU \otimes T_iV) \otimes (T_kT_i)X$, $(T_kU \otimes T_iV) \otimes (G_kT_i)X$, $(T_kU \otimes T_iV) \otimes (T_kG_i)X$, $(T_kU \otimes T_iV) \otimes (G_kG_i)X$, $(T_kX \otimes Y) \otimes (T_kU \otimes T_iV)$, $(X \otimes T_iY) \otimes (T_kU \otimes T_iV)$, $(G_kX \otimes Y) \otimes (T_kU \otimes T_iV)$, $(X \otimes G_iY) \otimes (T_kU \otimes T_iV)$, $(T_kX \otimes T_iY) \otimes (T_kU \otimes T_iV)$, $(T_kX \otimes G_iY) \otimes (T_kU \otimes T_iV)$, $(G_kX \otimes T_iY) \otimes (T_kU \otimes T_iV)$, $(G_kX \otimes G_iY) \otimes (T_kU \otimes T_iV)$, $(T_kT_i)X \otimes (T_kU \otimes T_iV)$, $(G_kT_i)X \otimes (T_kU \otimes T_iV)$, $(T_kG_i)X \otimes (T_kU \otimes T_iV)$, $(G_kG_i)X \otimes (T_kU \otimes T_iV)$,[21], $(T_kU \otimes G_iV) \otimes (T_kX \otimes Y)$, $(T_kU \otimes G_iV) \otimes (X \otimes T_iY)$, $(T_kU \otimes G_iV) \otimes (G_kX \otimes$

---

[18]Producto tensorial de $U \otimes T_iV$ por la izquierda y derecha con $T_kX \otimes Y, X \otimes T_iY, G_kX \otimes Y, X \otimes G_iY, T_kX \otimes T_iY, T_kX \otimes G_iY, G_kX \otimes T_iY, G_kX \otimes G_iY, T_kT_i, G_kT_i, T_kG_i, G_kG_i$ para $i,k = 0,\dots,n-2$.

[19]Producto tensorial de $G_kU \otimes V$ por la izquierda y derecha con $T_kX \otimes Y, X \otimes T_iY, G_kX \otimes Y, X \otimes G_iY, T_kX \otimes T_iY, T_kX \otimes G_iY, G_kX \otimes T_iY, G_kX \otimes G_iY, T_kT_i, G_kT_i, T_kG_i, G_kG_i$ para $i,k = 0,\dots,n-2$.

[20]Producto tensorial de $U \otimes G_iV$ por la izquierda y derecha con $T_kX \otimes Y, X \otimes T_iY, G_kX \otimes Y, X \otimes G_iY, T_kX \otimes T_iY, T_kX \otimes G_iY, G_kX \otimes T_iY, G_kX \otimes G_iY, T_kT_i, G_kT_i, T_kG_i, G_kG_i$ para $i,k = 0,\dots,n-2$.

[21]Producto tensorial de $T_kU \otimes T_i$ por la izquierda y derecha con $T_kX \otimes Y, X \otimes T_iY, G_kX \otimes Y, X \otimes G_iY, T_kX \otimes T_iY, T_kX \otimes G_iY, G_kX \otimes T_iY, G_kX \otimes G_iY, T_kT_i, G_kT_i, T_kG_i, G_kG_i$ para $i,k = 0,\dots,n-2$.

$Y), (T_kU \otimes G_iV) \otimes (X \otimes G_iY), (T_kU \otimes G_iV) \otimes (T_kX \otimes T_iY), (T_kU \otimes G_iV) \otimes (T_kX \otimes G_iY), (T_kU \otimes G_iV) \otimes (G_kX \otimes T_iY), (T_kU \otimes G_iV) \otimes (G_kX \otimes G_iY), (T_kU \otimes G_iV) \otimes (T_kT_i)X, (T_kU \otimes G_iV) \otimes (G_kT_i)X, (T_kU \otimes G_iV) \otimes (T_kG_i)X, (T_kU \otimes G_iV) \otimes (G_kG_i)X, (T_kX \otimes Y) \otimes (T_kU \otimes G_iV), (X \otimes T_iY) \otimes (T_kU \otimes G_iV), (G_kX \otimes Y) \otimes (T_kU \otimes G_iV), (X \otimes G_iY) \otimes (T_kU \otimes G_iV), (T_kX \otimes T_iY) \otimes (T_kU \otimes G_iV), (T_kX \otimes G_iY) \otimes (T_kU \otimes G_iV), (G_kX \otimes T_iY) \otimes (T_kU \otimes G_iV), (G_kX \otimes G_iY) \otimes (T_kU \otimes G_iV), (T_kT_i)X \otimes (T_kU \otimes G_iV), (G_kT_i)X \otimes (T_kU \otimes G_iV), (T_kG_i)X \otimes (T_kU \otimes G_iV), (G_kG_i)X \otimes (T_kU \otimes G_iV),$[22]$(G_kU \otimes T_iV) \otimes (T_kX \otimes Y), (G_kU \otimes T_iV) \otimes (X \otimes T_iY), (G_kU \otimes T_iV) \otimes (G_kX \otimes Y),(G_kU \otimes T_iV) \otimes (X \otimes G_iY), (G_kU \otimes T_iV) \otimes (T_kX \otimes T_iY),(G_kU \otimes T_iV) \otimes (T_kX \otimes G_iY), (G_kU \otimes T_iV) \otimes (G_kX \otimes T_iY), (G_kU \otimes T_iV) \otimes (G_kX \otimes G_iY), (G_kU \otimes T_iV) \otimes (T_kT_i)X, (G_kU \otimes T_iV) \otimes (G_kT_i)X, (G_kU \otimes T_iV) \otimes (T_kG_i)X, (G_kU \otimes T_iV) \otimes (G_kG_i)X, (T_kX \otimes Y) \otimes (G_kU \otimes T_iV), (X \otimes T_iY) \otimes (G_kU \otimes T_iV), (G_kX \otimes Y) \otimes (G_kU \otimes T_iV), (X \otimes G_iY) \otimes (G_kU \otimes T_iV), (T_kX \otimes T_iY) \otimes (G_kU \otimes T_iV), (T_kX \otimes G_iY) \otimes (G_kU \otimes T_iV), (G_kX \otimes T_iY) \otimes (G_kU \otimes T_iV), (G_kX \otimes G_iY) \otimes (G_kU \otimes T_iV), (T_kT_i)X \otimes (G_kU \otimes T_iV), (G_kT_i)X \otimes (G_kU \otimes T_iV), (T_kG_i)X \otimes (G_kU \otimes T_iV), (G_kG_i)X \otimes (G_kU \otimes T_iV), (G_kX \otimes G_iY) \otimes (T_kX \otimes Y),$[23]$(G_kX \otimes G_iY) \otimes (X \otimes T_iY), (G_kX \otimes G_iY) \otimes (G_kX \otimes Y), (G_kX \otimes G_iY) \otimes (X \otimes G_iY), (G_kX \otimes G_iY) \otimes (T_kX \otimes T_iY), (G_kX \otimes G_iY) \otimes (T_kX \otimes G_iY), (G_kX \otimes G_iY) \otimes (G_kX \otimes T_iY), (G_kX \otimes G_iY) \otimes (G_kX \otimes G_iY), (G_kX \otimes G_iY) \otimes (T_kT_i)X, (G_kX \otimes G_iY) \otimes (G_kT_i)X, (G_kX \otimes G_iY) \otimes (T_kG_i)X, (G_kX \otimes G_iY) \otimes (G_kG_i)X, (T_kX \otimes Y) \otimes (G_kX \otimes G_iY), (X \otimes T_iY) \otimes (G_kX \otimes G_iY), (G_kX \otimes Y) \otimes (G_kX \otimes G_iY), (X \otimes G_iY) \otimes (G_kX \otimes G_iY), (T_kX \otimes T_iY) \otimes (G_kX \otimes G_iY), (T_kX \otimes G_iY) \otimes (G_kX \otimes G_iY), (G_kX \otimes T_iY) \otimes (G_kX \otimes G_iY), (G_kX \otimes G_iY) \otimes (G_kX \otimes G_iY), (T_kT_i)X \otimes (G_kX \otimes G_iY), (G_kT_i)X \otimes (G_kX \otimes G_iY), (T_kG_i)X \otimes (G_kX \otimes G_iY), (G_kG_i)X \otimes (G_kX \otimes G_iY)$

para $i, j, k = 0, \ldots, n-2$[24]

$T_jT_mU \otimes (T_kX \otimes Y), T_jT_mU \otimes (X \otimes T_iY), T_jT_mU \otimes (G_kX \otimes Y), T_jT_mU \otimes (X \otimes G_iY), T_jT_mU \otimes (T_kX \otimes T_iY), T_jT_mU \otimes (T_kX \otimes G_iY), T_jT_mU \otimes (G_kX \otimes T_iY), T_jT_mU \otimes (G_kX \otimes G_iY), T_jT_mU \otimes (T_kT_i)X, T_jT_mU \otimes (G_kT_i)X, T_jT_mU \otimes$

[22]Producto tensorial de $T_kU \otimes G_iV$ por la izquierda y derecha con $T_kX \otimes Y, X \otimes T_iY, G_kX \otimes Y, X \otimes G_iY, T_kX \otimes T_iY, T_kX \otimes G_iY, G_kX \otimes T_iY, G_kX \otimes G_iY, T_kT_i, G_kT_i, T_kG_i, G_kG_i$ para $i, k = 0, \ldots, n-2$.

[23]Producto tensorial de $G_kU \otimes T_iV$ por la izquierda y derecha con $T_kX \otimes Y, X \otimes T_iY, G_kX \otimes Y, X \otimes G_iY, T_kX \otimes T_iY, T_kX \otimes G_iY, G_kX \otimes T_iY, G_kX \otimes G_iY, T_kT_i, G_kT_i, T_kG_i, G_kG_i$ para $i, k = 0, \ldots, n-2$.

[24]Producto tensorial de $G_kX \otimes G_iY$ por la izquierda y derecha con $T_kX \otimes Y, X \otimes T_iY, G_kX \otimes Y, X \otimes G_iY, T_kX \otimes T_iY, T_kX \otimes G_iY, G_kX \otimes T_iY, G_kX \otimes G_iY, T_kT_i, G_kT_i, T_kG_i, G_kG_i$ para $i, k = 0, \ldots, n-2$.

$(T_kG_i)X, T_jT_mU \otimes (G_kG_i)X, (T_kX \otimes Y) \otimes T_jT_mU, (X \otimes T_iY) \otimes T_jT_mU, (G_kX \otimes Y) \otimes T_jT_mU, (X \otimes G_iY) \otimes T_jT_mU, (T_kX \otimes T_iY) \otimes T_jT_mU, (T_kX \otimes G_iY) \otimes T_jT_mU, (G_kX \otimes T_iY) \otimes T_jT_mU, (G_kX \otimes G_iY) \otimes T_jT_mU, (T_kT_i)X \otimes T_jT_mU, (G_kT_i)X \otimes T_jT_mU, (T_kG_i)X \otimes T_jT_mU, (G_kG_i)X \otimes T_jT_mU$[25]$G_jT_mU \otimes (T_kX \otimes Y), G_jT_mU \otimes (X \otimes T_iY), G_jT_mU \otimes (G_kX \otimes Y), G_jT_mU \otimes (X \otimes G_iY), G_jT_mU \otimes (T_kX \otimes T_iY), G_jT_mU \otimes (T_kX \otimes G_iY), G_jT_mU \otimes (G_kX \otimes T_iY), G_jT_mU \otimes (G_kX \otimes G_iY), G_jT_mU \otimes (T_kT_i)X, G_jT_mU \otimes (G_kT_i)X, G_jT_mU \otimes (T_kG_i)X, G_jT_mU \otimes (G_kG_i)X, (T_kX \otimes Y) \otimes G_jT_mU, (X \otimes T_iY) \otimes G_jT_mU, (G_kX \otimes Y) \otimes G_jT_mU, (X \otimes G_iY) \otimes G_jT_mU, (T_kX \otimes T_iY) \otimes G_jT_mU, (T_kX \otimes G_iY) \otimes G_jT_mU, (G_kX \otimes T_iY) \otimes G_jT_mU, (G_kX \otimes G_iY) \otimes G_jT_mU, (T_kT_i)X \otimes G_jT_mU, (G_kT_i)X \otimes G_jT_mU, (T_kG_i)X \otimes G_jT_mU, (G_kG_i)X \otimes G_jT_mU$[26]$T_jG_mU \otimes (T_kX \otimes Y), T_jG_mU \otimes (X \otimes T_iY), T_jG_mU \otimes (G_kX \otimes Y), T_jG_mU \otimes (X \otimes G_iY), T_jG_mU \otimes (T_kX \otimes T_iY), T_jG_mU \otimes (T_kX \otimes G_iY), T_jG_mU \otimes (G_kX \otimes T_iY), T_jG_mU \otimes (G_kX \otimes G_iY), T_jG_mU \otimes (T_kT_i)X, T_jG_mU \otimes (G_kT_i)X, T_jG_mU \otimes (T_kG_i)X, T_jG_mU \otimes (G_kG_i)X, (T_kX \otimes Y) \otimes T_jG_mU, (X \otimes T_iY) \otimes T_jG_mU, (G_kX \otimes Y) \otimes T_jG_mU, (X \otimes G_iY) \otimes T_jG_mU, (T_kX \otimes T_iY) \otimes T_jG_mU, (T_kX \otimes G_iY) \otimes T_jG_mU, (G_kX \otimes T_iY) \otimes T_jG_mU, (G_kX \otimes G_iY) \otimes T_jG_mU, (T_kT_i)X \otimes T_jG_mU, (G_kT_i)X \otimes T_jG_mU, (T_kG_i)X \otimes T_jG_mU, (G_kG_i)X \otimes T_jG_mU$[27], $G_jG_mU \otimes (T_kX \otimes Y), G_jG_mU \otimes (X \otimes T_iY), G_jG_mU \otimes (G_kX \otimes Y), G_jG_mU \otimes (X \otimes G_iY), G_jG_mU \otimes (T_kX \otimes T_iY), G_jG_mU \otimes (T_kX \otimes G_iY), G_jG_mU \otimes (G_kX \otimes T_iY), G_jG_mU \otimes (G_kX \otimes G_iY), G_jG_mU \otimes (T_kT_i)X, G_jG_mU \otimes (G_kT_i)X, G_jG_mU \otimes (T_kG_i)X, G_jG_mU \otimes (G_kG_i)X, (T_kX \otimes Y) \otimes G_jG_mU, (X \otimes T_iY) \otimes G_jG_mU, (G_kX \otimes Y) \otimes G_jG_mU, (X \otimes G_iY) \otimes G_jG_mU, (T_kX \otimes T_iY) \otimes G_jG_mU, (T_kX \otimes G_iY) \otimes G_jG_mU, (G_kX \otimes T_iY) \otimes G_jG_mU, (G_kX \otimes G_iY) \otimes G_jG_mU, (T_kT_i)X \otimes G_jG_mU, (G_kT_i)X \otimes G_jG_mU, (T_kG_i)X \otimes G_jG_mU, (G_kG_i)X \otimes G_jG_mU$[28]

para $i, j, k, m = 0, \ldots, n-2$

- Aplicación de funtores monádicos:

  $T_jT_kX \otimes Y, T_jG_kX \otimes Y, T_jT_kX \otimes T_iY, T_jT_kX \otimes G_iY, T_jG_kX \otimes T_iY, T_jG_kX \otimes$

[25] Producto tensorial de T_jT_mU por la izquierda y derecha con $T_kX \otimes Y, X \otimes T_iY, G_kX \otimes Y, X \otimes G_iY, T_kX \otimes T_iY, T_kX \otimes G_iY, G_kX \otimes T_iY, G_kX \otimes G_iY, T_kT_i, G_kT_i, T_kG_i, G_kG_i$ para $i, k = 0, \ldots, n-2$.

[26] Producto tensorial de G_jT_mU por la izquierda y derecha con $T_kX \otimes Y, X \otimes T_iY, G_kX \otimes Y, X \otimes G_iY, T_kX \otimes T_iY, T_kX \otimes G_iY, G_kX \otimes T_iY, G_kX \otimes G_iY, T_kT_i, G_kT_i, T_kG_i, G_kG_i$ para $i, k = 0, \ldots, n-2$.

[27] Producto tensorial de T_jG_mU por la izquierda y derecha con $T_kX \otimes Y, X \otimes T_iY, G_kX \otimes Y, X \otimes G_iY, T_kX \otimes T_iY, T_kX \otimes G_iY, G_kX \otimes T_iY, G_kX \otimes G_iY, T_kT_i, G_kT_i, T_kG_i, G_kG_i$ para $i, k = 0, \ldots, n-2$.

[28] Producto tensorial de G_jG_mU por la izquierda y derecha con $T_kX \otimes Y, X \otimes T_iY, G_kX \otimes Y, X \otimes G_iY, T_kX \otimes T_iY, T_kX \otimes G_iY, G_kX \otimes T_iY, G_kX \otimes G_iY, T_kT_i, G_kT_i, T_kG_i, G_kG_i$ para $i, k = 0, \ldots, n-2$.

G_iY, $T_jT_kT_iX$, $T_jG_kT_i$, $T_jT_kG_i$, $T_jG_kG_i$, $X \otimes T_jT_iY$, $X \otimes T_jG_iY$, $T_kX \otimes T_jT_iY$, $T_kX \otimes T_jG_iY$, $G_kX \otimes T_jT_iY$, $G_kX \otimes T_jG_iY$, $G_kT_iT_j$, $G_kG_iT_j$,[29] $G_jT_kX \otimes Y$, $G_jG_kX \otimes Y$, $G_jT_kX \otimes T_iY$, $G_jT_kX \otimes G_iY$, $G_jG_kX \otimes T_iY$, $G_jG_kX \otimes G_iY$, $G_jG_kT_i$, $G_jT_kG_i$, $G_jG_kG_i$, $X \otimes G_jT_iY$, $X \otimes G_jG_iY$, $T_kX \otimes G_jT_iY$, $T_kX \otimes G_jG_iY$, $G_kX \otimes G_jT_iY$, $G_kX \otimes G_jG_iY$, $T_kG_iG_j$;[30]

para $i, j, k = 0, \ldots, n-2$

$T_iT_jT_kT_m$, $T_iT_jT_kG_m$, $T_iT_jG_kT_m$, $T_iT_jG_kG_m$, $T_iG_jT_kT_m$, $T_iG_jT_kG_m$, $T_iG_jG_kT_m$, $T_iG_jG_kG_m$, $G_iT_jT_kT_m$, $G_iT_jT_kG_m$, $G_iT_jG_kT_m$, $G_iT_jG_kG_m$, $G_iG_jT_kT_m$, $G_iG_jT_kG_m$, $G_iG_jG_kT_m$, $G_iG_jG_kG_m$

para $i, j, k, m = 0, \ldots, n-2$.

- Transformaciones naturales:

$$\begin{array}{cccccccc}
T_iT_j\epsilon_k & T_i\epsilon_kT_j & T_iT_j\eta_k & T_i\eta_kT_j & T_j\epsilon_kT_i & \epsilon_kT_jT_i & T_j\eta_kT_i & \eta_kT_jT_i \\
G_iT_j\epsilon_k & G_i\epsilon_kT_j & G_iT_j\eta_k & G_i\eta_kT_j & T_j\epsilon_kG_i & \epsilon_kT_jG_i & T_j\eta_kG_i & \eta_kT_jG_i \\
T_iG_j\epsilon_k & T_i\epsilon_kG_j & T_iG_j\eta_k & T_i\eta_kG_j & G_j\epsilon_kT_i & \epsilon_kG_jT_i & G_j\eta_kT_i & \eta_kG_jT_i \\
G_iG_j\epsilon_k & G_i\epsilon_kG_j & G_iG_j\eta_k & G_i\eta_kG_j & G_j\epsilon_kG_i & \epsilon_kG_jG_i & G_j\eta_kG_i & \eta_kG_jG_i
\end{array}$$

para $i, j, k = 0, \ldots, n-2$.

Estadio $m+1$:

1. Objetos: Los obtenidos por el siguiente procedimiento:

    a) Aplicar el producto tensorial a dos objetos cualesquiera de los estadios anteriores con al menos uno de los dos del estadio m.

    b) Aplicar el funtor G_m a N_m para obtener N_{m+1} si $m < n-1$, las restantes aplicaciones de G_k no producen nuevos objetos.

    c) La aplicación de los funtores T_k ($k = 0, \ldots, n-2$) no produce nuevos objetos.

2. Flechas: Las obtenidas por el siguiente procedimiento:

[29] T_j aplicada, si no está, a cada uno de los factores de $T_kX \otimes Y$, $X \otimes T_iY$, $G_kX \otimes Y$, $X \otimes G_iY$, $T_kX \otimes T_iY$, $T_kX \otimes G_iY$, $G_kX \otimes T_iY$, $G_kX \otimes G_iY$, T_kT_i, G_kT_i, T_kG_i, G_kG_i para $i, k = 0, \ldots, n-2$.

[30] G_j aplicada, si no está, a cada uno de los factores de $T_kX \otimes Y$, $X \otimes T_iY$, $G_kX \otimes Y$, $X \otimes G_iY$, $T_kX \otimes T_iY$, $T_kX \otimes G_iY$, $G_kX \otimes T_iY$, $G_kX \otimes G_iY$, T_kT_i, G_kT_i, T_kG_i, G_kG_i, para $i, k = 0, \ldots, n-2$.

a) Las identidades de los nuevos objetos obtenidos.

b) Si $m < n-1$ las flechas $G_m(0_{m-1})$ y $G_m(s_{m-1})$.

c) Las funciones de la forma $0_j \circ s_j^k$ y s_j^{k+s} que no ocurran en estadios anteriores, para $j = 0, 1, \ldots, n-2$[31] y 0_j, s_j^k, s_j^k y s_j^s están en estadios anteriores.

d) Los productos tensoriales de dos flechas de estadio menor o igual que m cuando al menos una de ellas es del nivel m.

e) Las composiciones posibles de dos flechas de estadio menor o igual que m que no sean igual que alguna de las flechas de esos niveles.

f) las flechas obtenidas al aplicar los endofuntores T_j y G_j a las flechas obtenidas en el estadio m.

g) Las flechas que surgen del isomorfismo natural a y su inversa al aplicarlo a objetos X, Y y Z tales que $X \otimes (Y \otimes Z)$ sea un objeto del estadio m.

h) Las flechas que surgen del isomorfismo d y su inversa al aplicarlo a objetos X tal que $X \otimes \top$ sea un objeto del estadio m.

i) Las flechas que surgen del isomorfismo s al aplicarlo a objetos X e Y tales que $X \otimes Y$ sea un objeto del estadio m.

j) Las funciones obtenidas al aplicar el diagrama de recursión plana a funciones $g : X \longrightarrow Y$ y $h : N_0 \otimes X \longrightarrow Y$ que ocurren en un estadio menor o igual que m y al menos una de ella ocurre en el estadio m donde T_0X es isomorfo a T_0Y y a $\top$.[32]

k) Las funciones obtenidas al aplicar el diagrama de recursión ramificada segura de nivel s, para $s = 0, \ldots, n-1$, a funciones $g : X \longrightarrow Y$ y $h : Y \longrightarrow Y$ que ocurren en un estadio menor o igual que m y al menos una de ella ocurre en el nivel m, donde $T_sT_{s-1}\cdots T_0Y$ es isomorfo a $\top$.[33]

Observación. Si se modifica este apartado *k)* cambiando *recursión ramificada segura* por *recursión dependiente segura* se obtiene la descripción de $\mathcal{J}^n$.

3. Endofuntores:

[31] Si $m < n-2$ sólo se tiene que hacer para $j = 0, 1, ..., m$. $s_j^1 = s_j$ y $s_j^{m+1} = s_j^m \circ s_j$.

[32] Es decir, X e Y son productos tensoriales construidos a partir de $\top$ y/o N_0.

[33] Es decir, Y es un producto tensorial construido a partir de $\top, N_0, \ldots, N_s$.

a) Los obtenidos al aplicar el producto tensorial a dos endofuntores de estadios anteriores uno de los cuales debe pertenecer al estadio m.

b) Los obtenidos al aplicar cada uno de los productos de endofuntores de una variable (los T y G) de estadios anteriores a los endofuntores del estadio m.[34]

4. Transformaciones naturales:

a) Las obtenidas al componer las transformaciones naturales de estadios anteriores con los endofuntores de una variable de estadios anteriores que no aparezcan en algún estadio anterior.

b) Las obtenidas al componer transformaciones naturales de estadios anteriores, si no aparecen en estadios anteriores.

C.2 La categoría coma $(n{-\circ}Set)/\Gamma_n$

Toda la estructura de las categorías contenidas en $\mathcal{G}^n$ debe ahora por tanto poder construirse según el modelo definido y, en particular, la semántica que éstas conllevan. Dicha estructura se describe a continuación en términos de su cobertura de Freyd.

Los resultados obtenidos en este apéndice para $\mathcal{J}^n$ valen igualmente para $\mathcal{I}^n$.

Se usará en el primer diagrama y en los siguientes la notación $st = std_{n-1}$.

1. El objeto unidad $\top$ de $\mathcal{J}^n$ tendrá una descripción en la forma

$$\begin{tikzcd}
\top \arrow[r] \arrow[d, "0\to id_\top"'] & \top \arrow[r] \arrow[d, "0\to id_\top"'] & \cdots \arrow[r] & \top \arrow[d, "0\to id_\top"] \\
\Gamma\top \arrow[r, "id_1"'] & \Gamma\top \arrow[r, "id_1"'] & \cdots \arrow[r, "id_1"'] & \Gamma\top
\end{tikzcd}$$

ya que $\Gamma\bar{k}\chi_k\top : 1 \longrightarrow 1$ es la identidad para todo $k \in \{0, 1, n-2\}$.

[34]Debe recordarse que los endofuntores T y G distribuyen respecto a los productos tensoriales y que cualquier tira de endofuntores T y G es igual a una de longitud como máximo $2(n-1)$.

2. Cada nivel de los números naturales N_j quedará descrito por un diagrama en la forma[35]

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \arrow[r] \arrow[d, "st"'] & \cdots \arrow[r] & \mathbb{N} \arrow[r] \arrow[d, "st"'] & 1 \arrow[r] \arrow[d, "0\to id_{\top}"'] & \cdots \arrow[r] & 1 \arrow[d, "0\to id_{\top}"'] \\
\Gamma N_{n-1} \arrow[r, "\Gamma_n \bar{0} \chi_0 N_j"'] & \cdots \arrow[r] & \Gamma N_{n-1} \arrow[r, "\Gamma_n \bar{j} \chi_j N_j"'] & \Gamma\top \arrow[r, "\Gamma_n \overline{j+1} \chi_{j+1} N_j"'] & \cdots \arrow[r] & \Gamma\top
\end{tikzcd}$$

con $j \in \{0, 1, ..., n-1\}$ donde $1 = \{0\}$ es el objeto terminal de *Set* que corresponde a la unidad $\top$ de $\mathcal{I}$. Este diagrama es en *Set* un diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \arrow[r] \arrow[d] & \overset{n}{\cdots} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{N} \arrow[d] \\
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
\mathbb{N} \arrow[r] \arrow[d] & \overset{n}{\cdots} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{N} \arrow[d] \\
1 \arrow[r] \arrow[d] & \overset{n}{\cdots} \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[d] \\
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
1 \arrow[r] & 1 \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

con j veces $\mathbb{N}$ y $n - j$ veces 1 en el que se aprecia claramente la estructura de niveles de los números naturales que se ha definido.

3. Un producto tensorial de objetos de $\mathcal{J}^n$ cualesquiera en la forma

$$N_k \otimes N_j$$

[35]Basado en el cálculo $\bar{k}N_j = \begin{cases} N_{n-1} & \text{si } j \geq k \geq 0 \\ \top & \text{si } k+1 \geq j \geq 0 \end{cases}$

con $k > j$ será

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \otimes \mathbb{N} \arrow[r, "st \otimes st"'] \arrow[d] & \Gamma N_{n-1} \otimes \Gamma N_{n-1} \arrow[d] \\
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
\mathbb{N} \otimes 1 \arrow[r, "st \otimes 0 \longrightarrow id_{\top}"'] \arrow[d] & \Gamma N_{n-1} \otimes \Gamma \top \arrow[d] \\
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
1 \otimes 1 \arrow[r, "0 \longrightarrow id_{\top} \otimes 0 \longrightarrow id_{\top}"'] \arrow[d] & \Gamma \top \otimes \Gamma \top \arrow[d] \\
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
1 \otimes 1 \arrow[r, "0 \longrightarrow id_{\top} \otimes 0 \longrightarrow id_{\top}"'] & \Gamma \top \otimes \Gamma \top
\end{tikzcd}$$

con j veces $\mathbb{N} \otimes \mathbb{N}$, $k - j$ veces $\mathbb{N} \otimes 1$ y $n - k - j$ veces $1 \otimes 1$ y con los morfismos de la columna derecha en la forma

$$\Gamma_n \bar{l} \chi_l (N_k \otimes N_j)$$

con $0 \leq l \leq n - 2$.

4. Los diagramas iniciales $\top \xrightarrow{0} N_j \xrightarrow{s} N_j$ tendrán el aspecto de $n - 2$ cubos conmutativos de los cuales j tienen caras en la forma

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{N} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{N} \arrow[d] \\
\Gamma \top \arrow[r] & \Gamma N_{n-1} \arrow[r] & \Gamma N_{n-1}
\end{tikzcd}$$

y otros $n-j$ la forma

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[d] \\
\Gamma\top \arrow[r] & \Gamma\top \arrow[r] & \Gamma\top
\end{tikzcd}$$

5. Los morfismos recursivos resultado de una recursión RDS_k en la forma $f : N_{k+1} \otimes X \longrightarrow Y$ a partir de $g : X \longrightarrow Y$ y $h : Y \longrightarrow Y$ bajo la condición de que $T_{k+1}...T_0Y$ sea isomorfo a $\top$ en $\mathcal{J}^n$ vendrán expresados por cubos con k caras en la forma

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \otimes X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\
\Gamma_n \bar{l} \chi_l (N_k \otimes X) \arrow[r] & \Gamma_n \bar{l} \chi_l Y
\end{tikzcd}$$

y otras $n-k$ en la forma

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \otimes X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\
\Gamma_n N \otimes \Gamma_n \bar{l} \chi_l X \arrow[r] & \Gamma_n \bar{l} \chi_l Y
\end{tikzcd}$$

para $l \in \{0, 1, n-2\}$.

C.3 Funciones recursivas en categorías monoidales

Siguiendo [Román-Paré], donde se introducen las estructuras categoriales que dan lugar a funciones recursivas primitivas en la categoría monoidal inicial con *Objeto de Números Naturales a la Izquierda*, podemos establecer en la categoría inicial $\mathcal{I}^n$ de la doctrina $\mathcal{O}^n$ algunos resultados análogos.

Se verá en lo que sigue que los morfismos que se generan en la categoría $\mathcal{I}^n$ son morfismos entre *comonoides coconmutativos* en una categoría simétrica monoidal.

Definición. Un *comonoide en una categoría SM $\mathcal{C}$* es una terna (A, δ_A, τ_A) donde A es un objeto de $\mathcal{C}$ y $\tau_A : A \longrightarrow \top$ y $\delta_A : A \longrightarrow A \otimes A$ son dos morfismos en $\mathcal{C}$ tales que los diagramas siguientes conmutan[36]

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\delta"'] & A \otimes A \arrow[d, "A\otimes\delta"] \\
A \otimes A \arrow[r, "\delta\otimes A"'] & A \otimes A \otimes A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, "d^{-1}"'] & A \otimes A \arrow[d, "A\otimes\tau"] \\
& A \otimes \top
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, "l^{-1}"'] & A \otimes A \arrow[d, "\tau\otimes A"] \\
& \top \otimes A
\end{tikzcd}
$$

Teorema. *Cualquier objeto en una categoría SM cartesiana puede definirse únicamente como un comonoide.*

Definición. Un comonoide (A, δ_A, τ_A) es *coconmutativo* si se satisface la igualdad $s\delta_A = \delta_A$.

Definición. Sea $\mathcal{C}$ una categoría *SM*. Denominamos $CC(\mathcal{C})$ a la categoría cuyos

- objetos son comonoides coconmutativos en $\mathcal{C}$
- *morfismos entre comonoides coconmutativos* (A, δ_A, τ_A) y (B, δ_B, τ_B) son morfismos $f : A \longrightarrow B$ en $\mathcal{C}$ tales que los siguientes diagramas conmutan

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\delta_A"'] & B \arrow[d, "\delta_B"] \\
A \otimes A \arrow[r, "f\otimes f"'] & B \otimes B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\tau_A"'] & & B \arrow[dl, "\tau_B"] \\
& \top &
\end{tikzcd}
$$

Teorema. *La categoría $CC(\mathcal{C})$ es cartesiana.*

Demostración. El producto viene dado por $(A \otimes B, \delta_{A\otimes B}, \tau_{A\otimes B})$ para (A, δ_A, τ_A) y (B, δ_B, τ_B) en $CC(\mathcal{C})$ ya que el diagrama siguiente conmuta para todo $f : C \longrightarrow A$ y $g : C \longrightarrow B$ en $CC(\mathcal{C})$

$$
\begin{tikzcd}
A & A \otimes B \arrow[l, "d\circ(A\otimes\tau_B)"'] \arrow[r, "i\circ(\tau_B\otimes B)"] & B \\
& C \arrow[ul, "f"] \arrow[u, "(f\otimes g)\circ\delta"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}
$$

□

[36] Usamos δ y τ sin subíndice cuando éste es obvio.

En el Teorema anterior se hace explícita la definición de las proyecciones en una categoría *SM*.

Proposición. (N_i, δ, τ) *son comonoides coconmutativos para todo* $i = 0, 1, ..., n - 1$.

Corolario. N_i^k *son comonoides coconmutativos para cada* $k \in \mathbb{N}$ *y para todo* $i = 0, 1, ..., n - 2$.

Teorema. *Los diagramas RRS conmutan en la categoría* $CC(\mathcal{I}^n)$.

Las demostraciones de la Proposición, el Corolario y el Teorema anteriores son análogas a las de [Román-Paré] dado que la condición de acotación no modifica nada en este caso.

Idénticos resultados a los de este Apéndice pueden demostarse para $\mathcal{J}^n$.

C.4 Relación entre esquemas

En este Apéndice se demuestran varios resultados sobre la relación existente entre los esquemas definibles en $\mathcal{I}^n$ con $n > 2$ de la Sección 4.4. Trabajamos con la doctrina $\mathcal{I}^n$ pero los mismos resultados valen para $\mathcal{J}^n$.

En las demostraciones que siguen no escribiremos el subíndice $k+1$ de N, 0 y s.

Teorema. *Toda función definida usando el esquema RRS puede definirse usando el esquema RRSP.*

Demostración. Sean $g : X \longrightarrow Y$ y $h : Y \longrightarrow Y$ dos morfismos en $\mathcal{I}^n$. Consideremos el morfismo

$$\overline{h} = h \circ \pi_1 : X \otimes Y \longrightarrow Y$$

en $\mathcal{I}^n$ para el cual, por el esquema *RRSP*, tenemos un único morfismo $f : N \otimes X \longrightarrow Y$ tal que se satisfacen las ecuaciones

$$\begin{cases} f \circ (s \otimes X) = \overline{h} \circ (\pi_1, f) & (1) \\ (\pi_1, f) \circ (0 \otimes X) = (id, g) \circ i & (2) \end{cases}$$

que se pueden desarrollar del modo siguiente para todo par $(n, x) \in N \otimes X$:

$$(1) \qquad \begin{array}{c} f \circ (s \otimes X)(n, x) = f(n+1, x) \\ \overline{h} \circ (\pi_1, f)(n, x) = \overline{h}(x, f(n, x)) = (h \circ \pi_1)(x, f(n, x)) = h(f(n, x)) \end{array}$$

de modo que tenemos

$$f(n+1,x) = h(f(n,x))$$

Para la segunda ecuación tendremos

$$(2) \qquad \begin{array}{c} (\pi_1, f) \circ (0 \otimes X)(n,x) = (\pi_1, f)(0,x) = (x, f(0,x)) \\ (id, g) \circ i(-,x) = (id, g)(x) = (x, g(x)) \end{array}$$

de modo que tenemos

$$f(0,x) = g(x)$$

Con todo esto concluimos que f es el morfismo único que se buscaba para el esquema RRS. □

Teorema. *Toda función definida usando el esquema RRSP acotado puede definirse usando* el esquema RRS.

Demostración. Sean $g : X \longrightarrow Y$ y $h : X \otimes Y \longrightarrow Y$ dos morfismos en $\mathcal{I}^n$ con $T_k \ldots T_0 X$ y $T_k \ldots T_0 Y$ isomorfos a $\top$. Consideremos los morfismos

$$\overline{g} = id, g : X \longrightarrow X \otimes Y \text{ y } \overline{h} = \pi_0, h : X \otimes Y \longrightarrow X \otimes Y$$

Podemos ver que $T_k \ldots T_0(X \otimes Y)$ es isomorfo a $\top$. Así, por el esquema RRS, tenemos un único morfismo $f = f_1, f_2 : N \otimes X \longrightarrow X \otimes Y$ con $f_1 : N \otimes X \longrightarrow X$ y $f_2 : N \otimes X \longrightarrow Y$ tal que se satisfacen las ecuaciones

$$\begin{cases} f \circ (s \otimes X) = \overline{h} \circ f & (1) \\ f \circ (0 \otimes X) = \overline{g} \circ i & (2) \end{cases}$$

La ecuación (1) se puede desarrollar del modo siguiente para todo par $(n,x) \in N \otimes X$:

$$\begin{array}{c} (f_1, f_2) \circ (s \otimes X)(n,x) = (f_1, f_2)(n+1,x) = (f_1(n+1,x), f_2(n+1,x)) \\ (\pi_0, h)(f_1, f_2)(n,x) = (f_1(n,x), h(f_1(n,x), f_2(n,x))) \end{array}$$

de modo que tenemos

$$\begin{array}{c} f_1(n+1,x) = f_1(n,x) \\ f_2(n+1,x) = h(f_1(n,x), f_2(n,x)) \end{array}$$

con lo que el morfismo f_1, por unicidad, es exactamente π_1 y la segunda ecuación se convierte en

$$f_2(n+1,x) = h(x, f_2(n,x))$$

Para la ecuación (2) tendremos

$$\begin{gathered}(f_1, f_2) \circ (0 \otimes X)(n, x) = (f_1, f_2)(0, x) = (x, f_2(0, x)) \\ \overline{g} \circ i(-, x) = \overline{g}(x) = (x, g(x))\end{gathered}$$

de modo que tenemos

$$f_2(0, x) = g(x)$$

Con todo esto concluimos que f_2 es el morfismo único que se buscaba para el esquema *RRSP* acotado. □

Teorema. *Toda función definida usando el esquema RRS puede definirse usando el esquema RDS.*

Demostración. Sean $g : X \longrightarrow Y$ y $h : Y \longrightarrow Y$ dos morfismos en $\mathcal{I}^n$. Consideremos el morfismo

$$\overline{h} = h \circ \pi_1 : (N \otimes X) \otimes Y \longrightarrow Y$$

en $\mathcal{I}^n$ para el cual, por el esquema *RDS*, tenemos un único morfismo $f : N \otimes X \longrightarrow Y$ tal que se satisfacen las ecuaciones

$$\begin{cases} f \circ (s \otimes X) = \overline{h} \circ (id, f) & (1) \\ (id, f) \circ (0 \otimes X) = (0 \otimes X), g \circ \pi_1 & (2) \end{cases}$$

que se pueden desarrollar del modo que sigue para todo $(n, x) \in N \otimes X$.

La ecuación (1) proporciona

$$f \circ (s \otimes X)(n, x) = f(n + 1, x)$$

y también

$$\begin{gathered}[\overline{h} \circ (id, f)](n, x) = \overline{h}((n, x), f(n, x)) = \\ (h \circ \pi_1)((n, x), f(n, x)))\end{gathered}$$

de modo que tenemos

$$f(n + 1, x) = h(f(n, x))$$

Para la segunda ecuación tendremos

$$\begin{gathered}(id, f) \circ (0 \otimes X)(-, x) = (id, f)(0, x) = ((0, x), f(0, x)) \\ ((0 \otimes X), g \circ \pi_1)(-, x) = ((0, x), g(x))\end{gathered}$$

de modo que tenemos

$$f(0, x) = g(x)$$

Con todo esto concluimos que f es el morfismo único que se buscaba para el esquema *RRS*. □

Teorema. *Toda función definida usando el esquema RRPS puede definirse usando el esquema RDS.*

Demostración. Análoga a la anterior demostración. Para cualquier par de morfismos $g : X \longrightarrow Y$ y $h : X \otimes Y \longrightarrow Y$ en $\mathcal{I}^n$ consideremos el morfismo

$$\overline{h} = (h \circ \pi_1) \circ a^{-1} : (N \otimes X) \otimes Y \longrightarrow Y$$

en $\mathcal{I}^n$ para el cual, por el esquema *RDS*, tenemos un único morfismo $f : N \otimes X \longrightarrow Y$ tal que se satisfacen las ecuaciones

$$\begin{cases} f \circ (s \otimes X) = \overline{h} \circ (id, f) & (1) \\ (id, f) \circ (0 \otimes X) = (0 \otimes X), g \circ \pi_1 & (2) \end{cases}$$

que se pueden desarrollar del modo que sigue para todo $(n, x) \in N \otimes X$.

La ecuación (1) proporciona

$$f \circ (s \otimes X)(n, x) = f(n + 1, x)$$

y también

$$[\overline{h} \circ (id, f)](n, x) = \overline{h}((n, x), f(n, x)) =$$

$$[(h \circ \pi_1) \circ a^{-1}]((n, x), f(n, x))) = (h \circ \pi_1)(n, (x, f(n, x)))$$

de modo que tenemos

$$f(n + 1, x) = h(x, f(n, x))$$

Para la segunda ecuación tendremos

$$(id, f) \circ (0 \otimes X)(-, x) = (id, f)(0, x) = ((0, x), f(0, x))$$
$$((0 \otimes X), g \circ \pi_1)(-, x) = ((0, x), g(x))$$

de modo que tenemos

$$f(0, x) = g(x)$$

Con todo esto concluimos que f es el morfismo único que se buscaba para el esquema *RRPS*. $\square$

Apéndice D

D.1 El *esquema de recursión coercitiva*

Vamos a considerar el *esquema de recursión ramificada* introducido en [Marion] para cualquier álgebra libre, trabajando aquí solamente con el álgebra de los números naturales, y daremos algunos ejemplos.

Notación. $\mathbb{N}_k$ se refiere a una copia de los números naturales que se llamará *nivel k de los números naturales* y $\mathbb{N}_k^\alpha$ es $\mathbb{N}_k \times \overset{\alpha}{\ldots} \times \mathbb{N}_k$. Las funciones 0_k y s_k representan respectivamente las funciones cero y sucesor en cada nivel k.

Definición. Una función

$$f : \mathbb{N}_{k+1} \times \mathbb{N}_{i_1}{}^{\alpha_1} \times \ldots \times \mathbb{N}_{i_n}{}^{\alpha_n} \longrightarrow \mathbb{N}_r{}^\beta$$

se define por *recursión primitiva ramificada* a partir de las funciones

$$g : \mathbb{N}_{i_1}{}^{\alpha_1} \times \ldots \times \mathbb{N}_{i_n}{}^{\alpha_n} \longrightarrow \mathbb{N}_r{}^\beta$$

y

$$h : \mathbb{N}_{i_1}{}^{\alpha_1} \times \ldots \times \mathbb{N}_{i_n}{}^{\alpha_n} \times \mathbb{N}_r{}^\beta \longrightarrow \mathbb{N}_r{}^\beta$$

si, para todo $\overline{y} \in \mathbb{N}_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \times \ldots \times \mathbb{N}_{i_n}^{\alpha_{i_n}}$ y para todo $x \in \mathbb{N}_{k+1}$

$$\begin{cases} f(0_{k+1}, \overline{y}) = g(\overline{y}) \\ f(s_{k+1}(x), \overline{y}) = h(\overline{y}, f(x, \overline{y})) \end{cases}$$

con la condición $k+1 > r$. Esta última condición se llamará el *principio de ramificación*.[37]

Las funciones se expresan a partir de aquí según se explica en la Sección 5.2.

Ejemplo. Definimos la suma $\bigoplus\limits_{10;0} : N_1 \otimes N_0 \longrightarrow N_0$ y el producto $\bigotimes\limits_{21;0} :$ $N_2 \otimes N_1 \longrightarrow N_0$ según los esquemas

$$\begin{cases} \bigoplus\limits_{10;0}(0, n) = id(n) \\ \bigoplus\limits_{10;0}(sx, n) = s(\bigoplus\limits_{10;0}(x, n)) \end{cases}$$

[37] Para nuestro propósito consideraremos la desigualdad $k+1 > r$ mientras que en el texto citado fue postulado también $k+1 \geq i_j$ para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$ y considerando funciones $f : \mathbb{N}_{i_1}^{\alpha_1} \times \ldots \times \mathbb{N}_{i_n}^{\alpha_n} \longrightarrow \mathbb{N}_r^\beta$ tales que $i_1 \geq \ldots \geq i_n$.

y

$$\begin{cases} \underset{21;0}{\bigotimes}(0,n) = 0 \\ \underset{21;0}{\bigotimes}(sx,n) = \underset{10;0}{\bigoplus}(n, \underset{21;0}{\bigotimes}(x,n)) \end{cases}$$

Tomando estas funciones podemos definir[38]

$$\underset{21;0}{f}(x,n) = h(\underset{21;0}{\bigotimes}(x,n), \underset{21;0}{\bigoplus}(x,n))$$

para una h adecuada y también funciones conteniendo a las *funciones potencia* $pw_n(x) = x^n$ que pueden ser definidas únicamente con dos niveles por el Teorema 2.4 de [Leivant] a partir de[39]

$$\underset{10;0}{tp_k} : (N_1)^k \otimes N_0 \longrightarrow N_0$$

definida como[40] $\underset{10;0}{tp_k}(y_1, ..., y_k, x) = y_1 \cdot ... \cdot y_k + x$ y por la recursión

$$\begin{gathered} \underset{10;0}{tp_0}(x) = sx \\ \underset{10;0}{tp_{k+1}}(0, y_1, y_2, ..., y_k, x) = x \\ \underset{10;0}{tp_{k+1}}(sy, y_1, y_2, ..., y_k, x) = \underset{10;0}{tp_k}(y_2, ..., y_k, \underset{10;0}{tp_{k+1}}(y, y_1, y_2, ..., y_k, x)) \end{gathered}$$

Es entonces claro que estamos generando polinomios.

Si se considera en cambio los resultados de [Bellantoni-Cook] y [Wirz] podemos definir un nuevo esquema de recursión que considera diferentes tipos de variables (dos tipos de variables denominadas *normales* y *seguras* en [Bellantoni-Cook] y n diferentes tipos en [Wirz]). Ver Sección 5.2.

Definición. Una función f se define por *recursión segura* a partir de las funciones g y h si

$$\begin{cases} f(\overline{x_n}; ...; \overline{x_{k+2}}; \overline{x_{k+1}}, 0_{k+1}; \overline{x_k}) = g(\overline{x_n}; ...; \overline{x_{k+2}}; \overline{x_{k+1}}; \overline{x_k}) \\ f(\overline{x_n}; ...; \overline{x_{k+2}}; \overline{x_{k+1}}, v_{k+1}+1; \overline{x_k}) = \\ h(\overline{x_n}; ...; \overline{x_{k+2}}; \overline{x_{k+1}}; v_{k+1}; \overline{x_k}, f(\overline{x_n}; ...; \overline{x_{k+2}}; \overline{x_{k+1}}, v_{k+1}; \overline{x_k})) \end{cases}$$

[38] La suma puede ser también definida como $\underset{21;0}{\bigoplus}$ ya que satisface las condiciones del principio de ramificación.

[39] Expresamos el subíndice de tp como $10;0$ para expresar de forma sencilla $1.\overset{k}{\ldots}.10;0$.

[40] Donde el símbolo $\cdot$ denota el producto usual.

Ejemplo. Tomando funciones que ya conocemos podemos expresar

$$\underset{43;2}{f}(x,y) = h(\underset{43;2}{\uparrow\uparrow}(x,y), \underset{43;3}{tp_k}(x,y))$$

para una h adecuada con la tetración en la forma

$$\begin{cases} \underset{43;2}{\uparrow\uparrow}(0,n) = n \\ \underset{43;2}{\uparrow\uparrow}(sx,n) = \underset{32;1}{\uparrow}(n, \underset{43;2}{\uparrow\uparrow}(x,n)) \end{cases}$$

que obviamente no son polinomiales.

En [Leivant[2]] se presenta una aproximación diferente al principio de ramificación y, de hecho, el que inspira el presente trabajo. Se basa en el uso de las denominadas *funciones de coerción* y da lugar a un nuevo esquema de recursión (el *esquema de recursión ramificada coercitiva*). La idea es incrementar el nivel del segundo input de la función h para que sea igual que el nivel del output tal como se requería en el esquema de recursión ramificada original.

Definición. Denominamos para todo $k = 0, 1, ..., n-2$ *funciones de coerción* a las funciones $G_k : \mathbb{N}_k \longrightarrow \mathbb{N}_{k+1}$ que se obtienen por los diagramas recursivos siguientes

$$\begin{cases} G_k(0_k) = 0_{k+1} \\ G_k(s_k x) = s_{k+1}(G_k(x)) \end{cases}$$

Análogamente tenemos las $T_k : \mathbb{N}_{k+1} \longrightarrow \mathbb{N}_k$ definidas por

$$\begin{cases} T_k(0_k) = 0_{k-1} \\ T_k(s_k x) = s_{k-1}(T_k(x)) \end{cases}$$

Definición. Una función

$$f : \mathbb{N}_{k+1} \times {\mathbb{N}_{i_1}}^{\alpha_1} \times ... \times {\mathbb{N}_{i_n}}^{\alpha_n} \longrightarrow {\mathbb{N}_p}^{\beta}$$

está definida por *recursión ramificada coercitiva* a partir de las funciones

$$g : {\mathbb{N}_{i_1}}^{\alpha_1} \times ... \times {\mathbb{N}_{i_n}}^{\alpha_n} \longrightarrow {\mathbb{N}_p}^{\beta}$$

y

$$h : {\mathbb{N}_{i_1}}^{\alpha_1} \times ... \times {\mathbb{N}_{i_n}}^{\alpha_n} \times {\mathbb{N}_p}^{\beta} \longrightarrow {\mathbb{N}_{p-1}}^{\beta}$$

si existen *funciones de coerción*

$$G_{p-1} : \mathbb{N}_{p-1}{}^{\beta} \longrightarrow \mathbb{N}_{p}{}^{\beta}$$

tales que, para todo $\overline{y} \in \mathbb{N}_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \times ... \times \mathbb{N}_{i_n}^{\alpha_{i_n}}$ y para todo $x \in \mathbb{N}_{k+1}$

$$\begin{cases} f(0_{k+1}, \overline{y}) = g(\overline{y}) \\ f(s_{k+1}(x), \overline{y}) = G_{p-1}h(\overline{y}, f(x, \overline{y})) \end{cases}$$

con la condición $k+1 > p > 0$. A esta última condición le llamaremos el *principio de ramificación coercitiva*.

Las funciones de coerción dejan las variables sobre las que actúan tal cual pero modificando su posición dentro del dominio de definición de la función sobre la que operan.

Estas definiciones pueden trasladarse a una n-Comprensión *SM* para obtener esquemas de recursión limitadas por unas ciertas condiciones. Ello puede hacerse siempre que en esa n-Comprensión tengamos definida una estructura de *categoría cartesiana monoidal*. En la Sección 4.4 se demuestra (emulando los resultados de [Román-Paré]) que éste es el caso cuando se trata de $\mathcal{I}^n$ y también de $\mathcal{J}^n$. De esta manera podremos usar tanto las *funciones proyección* como la operación *tuplo* entre los morfismos de una n-Comprensión *SM* tal como se definen en la Sección 4.4.

En las definiciones siguientes los objetos en la forma Y_p representan los dominios de definición de las variables de una función en forma ramificada, donde el subíndice p indica el lugar que ocupa la variable más a la izquierda en Y según la notación establecida en 5.2. A su vez X denota un producto tensorial de j potencias de objetos ocupando diferentes niveles de recursión.

Definición. Dada una $n-$Comprensión *SM* $(\mathcal{C}, T_k, G_k, \eta_k, \epsilon_k)$ dotada de un diagrama inicial como el de la Definición anterior decimos que está dotada de un *esquema de recursión ramificada coercitiva* (*RRC*) si para todos morfismos

$$g : X \longrightarrow Y_p$$

y

$$h : X \otimes Y_p \longrightarrow Y_{p-1}$$

donde las N en X tienen índice mayor o igual que p existe un único morfismo

$$f : N_{k+1} \otimes X \longrightarrow Y_p$$

haciendo conmutar el diagrama siguiente

$$\begin{tikzcd}
\top \otimes X \arrow[r, "0_{k+1} \otimes X"] \arrow[d, "\pi_1"'] & N_{k+1} \otimes X \arrow[r, "s_{k+1} \otimes X"] \arrow[d, "\pi_1, f"] & N_{k+1} \otimes X \arrow[d, "f"] \\
X \arrow[r, "id, g"'] & X \otimes Y_p \arrow[r, "G_{p-1} h"'] & Y_p
\end{tikzcd}$$

para *endofuntores de coerción* $G_{p-1} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ en la n-Comprensión *SM* $(\mathcal{C}, T_k, G_k, \eta_k, \epsilon_k)$ tales que

$$G_{p-1}({N_{p-1}}^{\beta}) = {N_p}^{\beta}$$

con $k + 1 > p \geq 0$.

Observación. Este esquema tiene una formulación análoga dada por

$$\begin{tikzcd}
\top \otimes X \arrow[r, "0_{k+1} \otimes X"] \arrow[d, "\pi_1"'] & N_{k+1} \otimes X \arrow[r, "s_{k+1} \otimes X"] \arrow[d, "\pi_1, f"] & N_{k+1} \otimes X \arrow[d, "T_p f"] \\
X \arrow[r, "id, g"'] & X \otimes Y_p \arrow[r, "h"'] & Y_{p-1}
\end{tikzcd}$$

cuando las N en X tienen índice mayor que p para *endofuntores de coerción* $T_p : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ tales que

$$T_p({N_p}^{\beta}) = {N_{p-1}}^{\beta}$$

Utilizando las funciones de coerción definidas más arriba podemos definir un esquema de recursión coercitiva generalizado basado en el introducido en [Leivant[2]].

Definición. Una función

$$f : \mathbb{N}_{k+1} \times {\mathbb{N}_{i_1}}^{\alpha_1} \times ... \times {\mathbb{N}_{i_n}}^{\alpha_n} \longrightarrow {\mathbb{N}_p}^{\beta}$$

está definida por *recursión general ramificada coercitiva* a partir de las funciones

$$g : {\mathbb{N}_{i_1}}^{\alpha_1} \times ... \times {\mathbb{N}_{i_n}}^{\alpha_n} \longrightarrow {\mathbb{N}_p}^{\beta}$$

y

$$h : {\mathbb{N}_{i_1}}^{\alpha_1} \times ... \times {\mathbb{N}_{i_n}}^{\alpha_n} \times {\mathbb{N}_p}^{\beta} \longrightarrow {\mathbb{N}_r}^{\beta}$$

con $p \geq r$ si existen funciones de coerción

$$G_l : {\mathbb{N}_l}^{\beta} \longrightarrow {\mathbb{N}_{l+1}}^{\beta}$$

para $l = r, ..., p-1$ tales que, para todo $\overline{y} \in \mathbb{N}_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \times ... \times \mathbb{N}_{i_n}^{\alpha_{i_n}}$ y para todo $x \in \mathbb{N}_{k+1}$

$$\begin{cases} f(0_{k+1}, \overline{y}) = g(\overline{y}) \\ f(s_{k+1}(x), \overline{y}) = G_{p-1}...G_r h(\overline{y}, f(x, \overline{y})) \end{cases}$$

con la condición $k+1 > p \geq r > 0$. Nos referiremos a esta condición como el *principio de recursión general ramificado coercitivo*.

Este esquema puede ser representado en una n-Comprensión *SM* de acuerdo a lo siguiente.

Definición. Dada una $n-$Comprensión *SM* $(\mathcal{C}, T_k, G_k, \eta_k, \epsilon_k)$ dotada de un diagrama inicial de la Definición 4.1.1 decimos que está dotada de un *esquema de recursión general ramificada coercitiva* (*RGC*) si para todos morfismos

$$g : X \longrightarrow Y_p$$

y

$$h : X \otimes Y_p \longrightarrow Y_r$$

existe un único

$$f : N_{k+1} \otimes X \longrightarrow Y_p$$

tal que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} \top \otimes X \arrow[r, "0_{k+1} \otimes X"] \arrow[d, "\pi_1"'] & N_{k+1} \otimes X \arrow[r, "s_{k+1} \otimes X"] \arrow[d, "\pi_1, f"] & N_{k+1} \otimes X \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "id, g"'] & X \otimes Y_p \arrow[r, "G_{p-1} G_p ... G_r h"'] & Y_p \end{tikzcd}$$

para endofuntores de coerción $G_l : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ tales que

$$G_l(N_{l-1}{}^{\beta}) = N_l{}^{\beta}$$

en una $n-$Comprensión *SM* $(\mathcal{C}, T_k, G_k, \eta_k, \epsilon_k)$ con $l = r+1, ..., p$ y con $k+1 > p \geq r$.

Observación. Este esquema tiene una formulación análoga utilizando los endofuntores T_l actuando sobre f

$$\begin{tikzcd} \top \otimes X \arrow[r, "0_{k+1} \otimes X"] \arrow[d, "\pi_1"'] & N_{k+1} \times X \arrow[r, "s_{k+1} \otimes X"] \arrow[d, "\pi_1, f"] & N_{k+1} \times X \arrow[d, "T_{r+1} ... T_p f"] \\ X \arrow[r, "id, g"'] & X \otimes Y_p \arrow[r, "h"'] & Y_p \end{tikzcd}$$

D.2 Uso del esquema de recursión coercitiva en [Leivant[2]]

Con las definiciones del Apéndice D.1 tenemos en [Leivant[2]] los siguientes resultados.

Teorema. *Una función sobre N es definible a partir de las funciones usuales, la composición y la recursión coercitiva si y sólo si es primitiva recursiva sobre N.*

Entonces podemos enumerar las clases resultantes pertenecientes a la clase de las funciones recursivas primitivas $\mathcal{RP}$ mediante el conteo de las recursiones coercitivas usadas en la definición de una función particular. La siguiente definición formaliza esta idea.

Definición. Los conjuntos C_i de *funciones recursivas primitivas sobre N de nivel predicativo i* están definidas por las siguientes reglas:

- C_1 son las funciones definidas usando recursiones ramificadas coercitivas no anidadas
- C_2 son las funciones definidas usando solamente el esquema de recursión ramificada coercitiva
- si f está definida por recursión ramificada coercitiva a partir de funciones $g_{c_1}, ..., g_{c_k}$ de las cuales $g_{c_1}, ..., g_{c_p}$ son aquéllas que usan sus argumentos críticos y $g_{c_i} \in C_{j_i}$ entonces $f \in C_l$ donde $l = max[1 + j_1, ..., 1 + j_p, j_{p+1}, ..., j_k]$
- cada C_i está cerrada bajo composición y para $i \geq 2$ también bajo recursión ramificada.

Teorema. $C_i = \mathcal{E}^i$ *para* $i \geq 3$.

D.3 Seguridad

A partir de las transformaciones naturales $T_0 ... T_{k-1}\eta_k$ podemos construir un diagrama formado por los cuadrados a que dan lugar esas transformaciones naturales actuando sobre un morfismo $f : \bigotimes_{j=0}^{n-1} N_j^{\alpha_j} \longrightarrow N_{n-1}^{\beta}$ en $\mathcal{J}^n$ y obtenemos lo siguiente:

$$
\begin{tikzcd}
\bigotimes_{j=0}^{n-1} N_j^{\alpha_j} \arrow[r, "idf"] \arrow[d, "\eta_0(\bigotimes_{j=0}^{n-1} N_j^{\alpha_j})"'] & N_{n-1}^{\beta} \arrow[d, "\eta_0 N_{n-1}^{\beta}"] \\
\bigotimes_{j=1}^{n-1} N_j^{\alpha_j} \arrow[r, "T_0 f"] \arrow[d, "\eta_1(\bigotimes_{j=1}^{n-1} N_j^{\alpha_j})"'] & T_0 N_{n-1}^{\beta} \arrow[d, "T_0\eta_1 N_{n-1}^{\beta}"] \\
\bigotimes_{j=2}^{n-1} N_j^{\alpha_j} \arrow[r, "T_0 T_1 f"] \arrow[d, "\eta_2(\bigotimes_{j=2}^{n-1} N_j^{\alpha_j})"'] & T_0 T_1 N_{n-1}^{\beta} \arrow[d, "T_0 T_1 \eta_2 N_{n-1}^{\beta}"] \\
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
\bigotimes_{j=n-2}^{n-1} N_j^{\alpha_j} \arrow[r, "T_0 ... T_{n-3} f"] \arrow[d, "\eta_{n-2}(\bigotimes_{j=n-2}^{n-1} N_j^{\alpha_j})"'] & T_0 ... T_{n-3} N_{n-1}^{\beta} \arrow[d, "T_0 ... T_{n-3}\eta_{n-2} N_{n-1}^{\alpha_{n-1}}"] \\
N_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \arrow[r, "T_0 ... T_{n-2} f"'] & T_0 ... T_{n-2} N_{n-1}^{\beta}
\end{tikzcd}
$$

En este diagrama se han usado las siguientes igualdades

$$
T_0 ... T_k(\bigotimes_{j=0}^{n-1} N_j^{\alpha_j}) = \bigotimes_{j=k+1}^{n-1} N_j^{\alpha_j}
$$

y el hecho de que la flecha

$$
\eta_{k+1}(\bigotimes_{j=k+1}^{n-1} N_j) : (\bigotimes_{j=k+1}^{n-1} N_j) \longrightarrow T_{k+1}(\bigotimes_{j=k+1}^{n-1} N_j)
$$

es en realidad una flecha

$$\bigotimes_{j=k+1}^{n-1} N_j^{\alpha_j} \longrightarrow \bigotimes_{j=k+2}^{n-1} N_j^{\alpha_j}$$

para cada $k = 0, 1, ..., n-2$.

Apéndice E

E.1 Fibrados

Definición. Sea $p : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{B}$ un funtor. Dado un objeto I en $\mathcal{B}$ llamaremos *fibra* o *categoría fibrada* a la categoría $\mathcal{C}_I = p^{-1}(I)$ sobre I cuyos

- objetos son $X \in \mathcal{C}$ tales que $pX = I$
- morfismos $X \longrightarrow Y$ en $\mathcal{C}_I$ son morfismos $f : X \longrightarrow Y$ en $\mathcal{C}$ para los cuales pf es el morfismo identidad sobre I en $\mathcal{B}$.

Definición. A un objeto X y un morfismo f como los de la Definición anterior se les llama *sobre* I y *sobre* u respectivamente.

Definición. Sea $p : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{B}$ un funtor. Un morfismo $f : X \longrightarrow Y$ en $\mathcal{C}$ es *cartesiano sobre* $u : I \longrightarrow J$ en $\mathcal{B}$ si $pf = u$ y para todo $g : Z \longrightarrow Y$ en $\mathcal{C}$ para el cual $pg = u \circ w$ para algún $w : pZ \longrightarrow I$ determina un único $h : Z \longrightarrow X$ en $\mathcal{C}$ sobre w tal que $f \circ h = g$. Diremos que f es *cartesiano en* $\mathcal{C}$ si lo es sobre su morfismo subyacente pf en $\mathcal{B}$.

Definición. El funtor $p : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{B}$ es un *fibrado* si para cada $Y \in \mathcal{C}$ y $u : I \longrightarrow pY$ en $\mathcal{B}$ hay un morfismo cartesiano $f : X \longrightarrow Y$ sobre u en $\mathcal{C}$.

Definición. Sea $p : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{B}$ un fibrado. Si podemos escoger para cada morfismo $u : I \longrightarrow J$ en $\mathcal{B}$ y cada objeto X en $\mathcal{C}$ un morfismo cartesiano sobre u en la forma

$$u^*(X) \longrightarrow X$$

entonces u determina un funtor

$$u^* : \mathcal{C}_J \longrightarrow \mathcal{C}_I$$

denominado *funtor de reindexado*.

E.2 Los fibrados r y q

En este último Apéndice se describe una construcción análoga a la hecha hasta aquí en términos de fibrados en el sentido categorial.

Para construir una semántica inducida por fibrados sobre categorías *SM* que emule lo hecho en las secciones anteriores tomamos los funtores de las siguientes definiciones, donde se introducirá una estructura general para probar posteriormente que proporciona resultados equivalentes a los de los capítulos anteriores.[41]

Notación. En lo sucesivo $(\mathcal{C}, T_k, G_k, \eta_k, \epsilon_k)$ o simplemente $\mathcal{C}$ con $k = 0, 1, ..., n-2$ se referirá a una n-Comprensión *SM* de acuerdo a la Definición 3.4.1 donde la operación tensor de la estructura *SM*, denotado por $(\otimes, \top, a, i, d)$, es también un producto cartesiano. Consideraremos también las siguientes reglas de notación:

- denotaremos por δ y τ los morfismos *duplicación* y *borrado* que dan lugar al producto cartesiano para $\mathcal{C}$
- no se mencionará subíndices cuando éstos sean obvios
- escribiremos A para el morfismo id_A dado un objeto A y
- trabajaremos *módulo asociatividad* e *isomorfismo*.

Definición. Sea $P^k(\mathcal{C})$ la categoría cuyos objetos son pares (X, A) de objetos en $\mathcal{C}$ y cuyos morfismos entre (X, A) y (Y, B) son pares (f, u) de morfismos en $\mathcal{C}$ donde

$$u : A \longrightarrow B \qquad f : A \otimes X \longrightarrow T_k Y$$

La composición entre las flechas (f, u) donde

$$u : A \longrightarrow B \qquad f : A \otimes X \longrightarrow T_k Y$$

y (g, v) donde

$$v : B \longrightarrow C \qquad g : B \otimes Y \longrightarrow T_k Z$$

en $P^k(\mathcal{C})$ viene dada por

$$(T_k g \circ T_k u \otimes T_k Y \circ T_k(A \otimes T_k Y) \circ (A \otimes f) \circ (\delta_A \otimes X), uv)$$

[41]El contenido teórico sobre fibrados que se usará en este Apéndice viene en el Apéndice E.1.

debido al siguiente diagrama sujeto a la notación descrita más arriba:

$$
\begin{tikzcd}
A \otimes X \arrow[rrrr, "f \bullet g"] \arrow[dd, "\delta \otimes X"'] & & & & T_k Z \arrow[d, leftrightarrow] \\
& & & & T_k T_k Z \\
A \otimes (A \otimes X) \arrow[r, "A \otimes f"'] & A \otimes T_k Y \arrow[r, "T_k"'] & T_k A \otimes T_k T_k Y \arrow[r, leftrightarrow] & T_k A \otimes T_k Y \arrow[r, "T_k u \otimes T_k Y"'] & T_k B \otimes T_k Y \arrow[u, "T_k g"']
\end{tikzcd}
$$

Escribimos $f \bullet g$ para esta secuencia y por tanto para la composición en $P^k(\mathcal{C})$.

La identidad en $P^k(\mathcal{C})$ vendrá dada por $(\overline{id}, id_X) : (X, A) \longrightarrow (X, A)$ donde $\overline{id}$ es el resultado de la composición

$$
\begin{tikzcd}
A \otimes X \arrow[r, "\overline{id}"] \arrow[d, "\tau \otimes X"'] & T_k X \\
\top \otimes X \arrow[r, "i"'] & X \arrow[u, "\epsilon_k"']
\end{tikzcd}
$$

$\overline{id}$ satisface la condición requerida para ser la identidad en $P^k(\mathcal{C})$

$$f \bullet \overline{id} = \overline{id} \bullet f = f$$

debido al hecho de que, para cualquier flecha $f : A \otimes X \longrightarrow T_k Y$ en $P^k(\mathcal{C})$, el diagrama siguiente

$$
\begin{tikzcd}
A \otimes X \arrow[r, "\delta\otimes X"] \arrow[rr, bend left=60, "A\otimes X"] \arrow[rr, phantom, bend left=35, "(1)"] & A \otimes (A \otimes X) \arrow[r, "i\circ(\tau\otimes X)"] & A \otimes X \arrow[r, "\epsilon_k(A\otimes X)"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & T_kA \otimes T_kX \arrow[d, "T_kf"] \\
 & & T_kY \arrow[r, "\epsilon_k"'] \arrow[dr, bend right, "T_kY"'] \arrow[dr, phantom, "(3)"] & T_kT_kY \\
 & & & T_kY \arrow[u, <->]
\end{tikzcd}
$$

conmuta porque conmutan los diagramas (1) por ser δ un comonoide, (2) por naturalidad de ϵ_k y (3) por ser T_k idempotente.

Mientras que el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
A \otimes X \arrow[r, "\delta\otimes X"] \arrow[dr, bend right, "i^{-1}\otimes(A\otimes X)"'] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & A \otimes (A \otimes X) \arrow[r, "A\otimes f"] \arrow[d, "\tau\otimes(A\otimes X)"] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & A \otimes T_kY \arrow[r, "\epsilon_k(A\otimes X)"] \arrow[d, "\tau\otimes T_kY"'] \arrow[dr, phantom, "(3)"] & T_kA \otimes T_kY \arrow[d, "T_k\tau\otimes T_kY"] \\
 & \top \otimes A \otimes X \arrow[r, "\top\otimes f"'] & \top \otimes T_kY \arrow[r, "\epsilon_k\otimes T_kY"'] \arrow[dr, bend right, "i"'] \arrow[dr, phantom, "(4)"] & T_k\top \otimes T_kY \arrow[d, "i"] \\
 & & & T_kY
\end{tikzcd}
$$

conmuta porque conmutan los diagramas (1) por ser δ un comonoide, (2) por funtorialidad de $\otimes$, (3) por naturalidad de ϵ_k y (4) por ser T_k funtores *SM*.

De este modo ambos diagramas dan el mismo morfismo.

La composición $\bullet$ satisface la *ley asociativa*

$$(f \bullet g) \bullet h = f \bullet (g \bullet h)$$

ya que si tomamos flechas $f : A \otimes X \longrightarrow T_k Y$, $g : A \otimes Y \longrightarrow T_k Z$ y $h : A \otimes Z \longrightarrow T_k W$ en $P^k(\mathcal{C})$ los diagramas

$$\begin{tikzcd}
A \otimes X \arrow[d, "\delta\otimes X"'] & & \\
(A \otimes A) \otimes X \arrow[r, "\delta\otimes(A\otimes X)"] \arrow[dd, "A\otimes(f\bullet g)"'] & (A \otimes A) \otimes A \otimes X \arrow[r, "(A\otimes A)\otimes f"] & A \otimes (A \otimes T_k Y) \arrow[d, "A\otimes T_k"'] \\
& & A \otimes (T_k A \otimes T_k T_k Y) \arrow[d, "A\otimes T_k g"] \\
A \otimes T_k Z \arrow[rr, "T_k"'] & & T_k A \otimes T_k T_k Z \arrow[d, "T_k h"'] \\
& & T_k W
\end{tikzcd}$$

y

$$
\begin{tikzcd}
A \otimes X \arrow[d, "\delta\otimes X"'] & & \\
(A \otimes A) \otimes X \arrow[r, "\delta\otimes(A\otimes X)"] \arrow[dddd, "A\otimes f"'] & (A \otimes A) \otimes A \otimes X \arrow[r, "(A\otimes A)\otimes f"] & A \otimes (A \otimes T_k Y) \arrow[d, "A\otimes T_k"'] \\
& & A \otimes (T_k A \otimes T_k T_k Y) \arrow[d, "A\otimes T_k g"'] \\
& & A \otimes T_k Z \arrow[d, "T_k"'] \\
& & T_k A \otimes T_k T_k Z \arrow[d, "T_k h"'] \\
A \otimes T_k Y \arrow[r, "T_k"'] & T_k A \otimes T_k T_k Y \arrow[r, "T_k(g\bullet h)"'] & T_k W
\end{tikzcd}
$$

conmutan y son iguales.

Definición. Sea $p : P^k(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}$ el funtor que asigna (f, u) a u y (X, A) a A.

Proposición. *p es un fibrado.*

Demostración. Las flechas cartesianas para p se obtienen considerando morfismos en $P^k(\mathcal{C})$ en la forma $(\overline{id} \circ (u \otimes Y), u) : (Y, A) \longrightarrow (Y, B)$.

Si tomamos cualquier flecha $(f, u) : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ podemos construir otra $(f, id) : (X, A) \longrightarrow (Y, A)$ tal que el siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}
(X, A) \arrow[rr, "(f,u)"] \arrow[dr, "(f,id)"'] & & (Y, B) \\
& (Y, A) \arrow[ur, "(\overline{id}\circ(u\otimes Y),u)"'] &
\end{tikzcd}
$$

commuta por la composición

$$
\begin{tikzcd}
A \otimes X \arrow[rrr, "f\bullet(\overline{id}\circ(u\otimes Y))"] \arrow[d, "\delta\otimes X"'] & & & T_k Y \\
A \otimes (A \otimes X) \arrow[r, "A\otimes f"'] & A \otimes T_k Y \arrow[r, "T_k"'] & T_k A \otimes T_k T_k Y \arrow[r, leftrightarrow] & T_k A \otimes T_k Y \arrow[u, "T_k(\overline{id}\circ(u\otimes Y))"']
\end{tikzcd}
$$

Finalmente (f, id) es obviamente único dados $(\overline{id} \circ (u \otimes Y), u)$ y (f, u). $\square$

Las fibras de p vienen dadas por la siguiente Definición.

Definición. Sean $(\mathcal{C}/A)_p$ las categorías inducidas por los conjuntos

$$\{(X, A) \in P^k(\mathcal{C}) / p(X, A) = A\}$$

cuyos objetos son $X \in \mathcal{C}$ y cuyos morfismos son[42]

$$A \otimes X \longrightarrow T_k Y$$

Los funtores de reindexado para el fibrado p tienen la forma

$$\mathcal{C} \longrightarrow (\mathcal{C}/A)_p$$

y son tales que cada objeto de $\mathcal{C}$ queda fijo y se envía cada flecha

$$f : X \longrightarrow Y$$

a una composición

$$A \otimes X \xrightarrow{\pi_1 \circ \epsilon_k X} T_k X \xrightarrow{T_k f} T_k Y$$

Consideraremos ahora dos casos particulares del fibrado que hemos introducido. Definiremos los fibrados q_k y r_k como casos de p y veremos que dan lugar a fibras que contienen a las funciones recursivas de $\mathcal{K}^n$.

Definición. Sean las categorías $R^k(\mathcal{C})$ aquellas cuyos objetos son pares (X, A) de objetos en $\mathcal{C}$ y cuyos morfismos entre (X, A) y (Y, B) son pares (f, u) de morfismos en $\mathcal{C}$ donde

$$u : A \longrightarrow B \qquad f : A \otimes X \longrightarrow T_{n-2}...T_{k+1} Y$$

para todo $k = 0, 1, ..., n-3$.

Definición. Sean $r_k : R^k(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}$ para todo $k = 0, 1, ..., n-3$ los funtores que asignan (f, u) a u y (X, A) a A.

Proposición. *r_k son fibrados para todo $k = 0, 1, ..., n-3$.*

Las fibras de r_k vienen dadas por la siguiente Definición.

[42] Esto es, los mismos que $P^k(\mathcal{C})$ donde A y u son fijos.

Definición. Sean $({}^{\mathcal{C}}/_{A})_{r_k}$ las categorías inducidas por los conjuntos

$$\{(X,A) \in R^k(\mathcal{C})/r_k(X,A) = A\}$$

cuyos objetos son $X \in \mathcal{C}$ y cuyos morfismos son

$$A \otimes X \longrightarrow T_{n-2}...T_{k+1}Y$$

Observación. $({}^{\mathcal{C}}/_{A})_{r_k}$ son categorías *SM* para todo $k = 0, 1, ..., n-3$ dado que $\mathcal{C}$ lo es.

Proposición. *Sea f un morfismo en $\mathcal{K}^n$ obtenido por medio de un diagrama RRS_k. Entonces $f \in ({}^{\mathcal{K}^n}/_{N_{k+1}})_{r_k}$ para todo $k = 1, ..., n-3$.*

Definición. Sean las categorías $Q^k(\mathcal{C})$ aquellas cuyos objetos son pares (X, A) de objetos en $\mathcal{C}$ y cuyos morfismos entre (X, A) y (Y, B) son pares (f, u) de morfismos en $\mathcal{C}$ donde

$$u : A \longrightarrow B \qquad f : A \otimes T_{n-2}...T_{k+1}X \longrightarrow T_{n-2}...T_{k+1}Y$$

para todo $k = 0, 1, ..., n-3$.

Definición. Sean $q_k : Q^k(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}$ para todo $k = 0, 1, ..., n-3$ los funtores que asignan (f, u) a u y (X, A) a A.

Proposición. *q_k son fibrados para todo $k = 0, 1, ..., n-3$.*

Las fibras de q_k vienen dadas por la siguiente Definición.

Definición. Sean $({}^{\mathcal{C}}/_{A})_{q_k}$ las categorías inducidas por los conjuntos

$$\{(X,A) \in Q^k(\mathcal{C})/q_k(X,A) = A\}$$

cuyos objetos son $X \in \mathcal{C}$ y cuyos morfismos son

$$A \otimes T_{n-2}...T_{k+1}X \longrightarrow T_{n-2}...T_{k+1}Y$$

Observación. $({}^{\mathcal{C}}/_{A})_{q_k}$ son categorías *SM* para todo $k = 0, 1, ..., n-3$ dado que $\mathcal{C}$ lo es.

Proposición. *Sea f un morfismo en $\mathcal{K}^n$ obtenido por medio de un diagrama RP. Entonces $f \in ({}^{\mathcal{K}^n}/_{N_0})_{q_0}$.*

Proposición. *Sea f un morfismo en $\mathcal{K}^n$ obtenido por medio de un diagrama $RRSP_k$ acotado. Entonces $f \in ({}^{\mathcal{K}^n}/_{N_{k+1}})_{q_k}$ para todo $k = 1, ..., n-3$.*

Bibliografía

[Bellantoni] S. Bellantoni. *Predicative Recursion and Computational Complexity.* PhD thesis. University of Toronto, 1992. 2.

[Bellantoni-Cook] S. Bellantoni and S. Cook, *New recursion-theoretic characterization of the polytime functions.* Comput. Complexity 2 (1992), pp. 97–110.

[Bellantoni-Niggl] Stephen J. Bellantoni, Karl-Heinz Niggl: Ranking Primitive Recursions: The Low Grzegorczyk Classes Revisited. SIAM J. Comput. 29(2): 401-415 (1999).

[A. Burroni] Albert Burroni. *Récursivité graphique (1e partie):catégorie des fonctions récursives primitives formelles*. Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques, 27 no. 1 (1986), p. 49-79.

[Cockett-Redmond] Robin Cockett y Brian Redmond. *A Categorical Setting for Lower Complexity.* Electronic Notes in Theoretical Computer Science (2010) Volume: 265, Publisher: Elsevier B.V., Pages: 277-300.

[Grzegorczyk] Grzegorczyk, A. (1953), Some classes of recursive functions, Rozprawy matematyczne, Vol 4, pp. 1–45.

[Kelly] G.M. Kelly (1989). *Elementary observations on 2-categorical limits.* Bulletin of the Australian Mathematical Society, 39, pp 301-317.

[Lambek-Scott] J. Lambek y P.J. Scott. *Introduction to Higher Order Categorical Logic*, CUP, 1986.

[Leivant] Daniel Leivant. *Ramified recurrence and computational complexity I: Word algebras and polytime.* In P. Clote and J Remmel, editors, Feasible Mathematics II. Birkhause, 1994.

[Leivant[2]] D. Leivant. *Stratified functional programs and computational complexity.* Proceeding POPL '93 Proceedings of the 20th ACM SIGPLAN-SIGACT symposium on Principles of programming languages

[Marion] Jean-Yves Marion. *On tiered small jump operators*. Logical Methods in Computer Science 5, 1 (2009) 1-19.

[MacLane] Mac Lane, Saunders (September 1998). Categories for the Working Mathematician (second ed.). Springer. ISBN 0-387-98403-8. (Volume 5 in the series Graduate Texts in Mathematics)

[Otto] J. Otto. *Complexity Doctrines.* Ph.D. thesis, McGill University, 1995.

[L. Román] L. Roman. *Cartesian Categories with Natural Numbers Object*. Journal of Pure and Applied Algebra. 58 (1989), 267-278.

[L. Román[2]] L. Roman. *Categories with finite limits and Natural Numbers Object*. Publicaciones preliminares del Instituto de Matemáticas. UNAM. 1990.

[Román-Paré] Robert Paré & Leopoldo Román (1988): Monoidal categories with natural numbers object. Studia Logica e a 48(3), pp. 361–376.

[Thibault] M.-F. Thibault. *Représentations des fonctions récursives dans les catégories.* Thesis, McGill University, Montreal (1977).

[Wirz] Marc Wirz (1999). *Characterizing the Grzegorczyk hierarchy by safe recursion*. CiteSeer. http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.42.3374. Retrieved on 2009-04-21.

[Zalamea] Fernando Zalamea. *Recursión en categorías.* Revista Colombiana de Matemáticas Volumen 29 (1995), págs. 127 - 144.