MATERIAL DE PRÀCTIQUES DE MATEMÀTIQUES II

CURS 2013-2014

GRAU D'ECONOMIA
GRAU D'ADMINISTRACIÓ I DIRECCIÓ D'EMPRESES
GRAU DE FINANCES I COMPTABILITAT

CARÀCTER: TRONCAL

CURS: PRIMER

SEMESTRE: 2

Autor: D. Robert Meneu Gaya. Professor Titular d'Universitat del Departament de Matemàtiques per a l'Economia i l'Empresa.

Aquest material ha rebut un dels incentius de la convocatòria 2012 per a la qualitat en l'elaboració de materials docents del Servei de Política Lingüística de la Universitat de València, servei que també ha revisat lingüísticament el text.

ÍNDEX

PART 1. EXERCICIS RESOLTS DELS APUNTS DE TEORIA

Tema 1. Introducció a l'optimització

Exercici 2 Estudia si els conjunts següents són fitats i si són convexos:

a) $\boldsymbol{S_1} = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{2}} / \boldsymbol{2x} + \boldsymbol{4y} \leq \boldsymbol{8}\}$

No és fitat perquè la desigualtat no defineix valors fitats per a les variables.

Sí que és convex perquè és un semiespai.

b) $\boldsymbol{S_2} = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{2}} / \boldsymbol{2x} + \boldsymbol{4y} \leq \boldsymbol{8}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}\}$

Sí que és fitat perquè la desigualtat i les condicions de no-negativitat impliquen fites per a les variables: $0 \leq x \leq 4$, $0 \leq y \leq 2$.

Sí que és convex perquè és una intersecció de semiespais.

c) $\boldsymbol{S_3} = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{2}} / \boldsymbol{x^2} + \boldsymbol{4y^2} \leq \boldsymbol{16}\}$

Sí que és fitat perquè la desigualtat implica fites per a les variables: $-4 \leq x \leq 4$, $-2 \leq y \leq 2$.

Sí que és convex perquè és un conjunt de nivell inferior amb funció convexa en el primer membre, donat que la hessiana és $H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$, una matriu diagonal amb elements positius en la diagonal principal i, per tant, definida positiva.

d) $\boldsymbol{S_4} = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{3}} / \boldsymbol{2x} + \boldsymbol{4y} - \boldsymbol{3z} \leq \boldsymbol{12}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{0}\}$

No és fitat perquè no es poden trobar fites superiors per a les variables.

Sí que és convex perquè és una intersecció de semiespais.

Exercici 3 Donats els enunciats següents de problemes de programació matemàtica, analitzeu primer si són lineals o no lineals. Després, si són lineals, enuncieu-los en forma estàndard i si són no lineals, enuncieu-los en forma canònica.

$$\begin{array}{ll} \boldsymbol{Min.} & \boldsymbol{2x + y} \\ \boldsymbol{s.a}: & \boldsymbol{4x + y \leq 12} \\ & \boldsymbol{x + 2y \geq 6} \\ & \boldsymbol{x \geq 0} \end{array}$$

És lineal. En forma estàndard:

$$\begin{array}{ll} Min. & 2x + y_1 - y_2 \\ s.a: & 4x + y_1 - y_2 + s_1 = 12 \\ & x + 2y_1 - 2y_2 - s_2 = 6 \\ & x, y_1, y_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \boldsymbol{Max.} & \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{s.a}: & \boldsymbol{-x^2+y \leq 0} \\ & \boldsymbol{x+2y \geq 6} \\ & \boldsymbol{x \geq 0} \end{array}$$
És no lineal. En forma canònica:
$$\begin{array}{ll} Màx. & y \\ s.a: & -x^2+y \leq 0 \\ & -x-2y \leq -6 \\ & -x \leq 0 \end{array}$$

Exercici 4 Estudieu si els problemes de programació matemàtica següents compleixen les hipòtesis del teorema de Weierstrass i les hipòtesis del teorema local-global:

$$\begin{array}{ll} \boldsymbol{Max.} & \boldsymbol{2x+3y} \\ \boldsymbol{s.a}: & \boldsymbol{4x+y \geq 15} \\ & \boldsymbol{x+3y \leq 60} \\ & \boldsymbol{x,y \geq 0} \end{array}$$

Teorema de Weierstrass: La hipòtesi 1, funció objectiu contínua, és compleix perquè és un polinomi. La hipòtesi 2, conjunt d'oportunitats (S) no buit i compacte (tancat i fitat), també perquè:

- No buit: $(5,0) \in S$
- Tancat: totes les restriccions inclouen la igualtat i, per tant, la frontera del conjunt està inclosa en el conjunt.
- Fitat: amb la segona restricció i les condicions de domini s'obtenen les fites següents per a les variables, $0 \leq x \leq 60,\ \ 0 \leq y \leq 20$.

La conseqüència és que en el problema hi ha màxim global.

Teorema Local-Global: La hipòtesi 1, funció objectiu còncava, es compleix perquè és lineal. La hipòtesi 2, S convex, també perquè és una intersecció de semiespais. La conseqüència és que si tenim un màxim local es podrà assegurar que és màxim global.

$$\begin{array}{ll} \boldsymbol{Max.} & \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{s.a}: & \boldsymbol{x^2+y^2 \geq 9} \\ & \boldsymbol{x+4y \leq 12} \\ & \boldsymbol{x \geq 0} \end{array}$$

Teorema de Weierstrass: La hipòtesi 1, funció objectiu contínua, es compleix perquè és un polinomi. La hipòtesi 2, conjunt d'oportunitats (S) no buit i compacte (tancat i fitat), no es compleix perquè no és fitat, x no té fita superior i y no en té d'inferior. a conseqüència és que en el problema no queda assegurada l'existència de màxim global.

Teorema Local-Global: La hipòtesi 1, funció objectiu còncava, es compleix perquè és lineal. La hipòtesi 2, S convex, no perquè la primera restricció és un conjunt de nivell superior amb funció convexa en el primer membre (hessiana definida positiva) quan hauria de ser còncava. La conseqüència és que si tenim un màxim local no es podrà assegurar que siga màxim global.

Exercici 5 Siga el problema següent:

$$\begin{array}{ll} \boldsymbol{Max.} & \boldsymbol{f(x,y,z)} \\ \boldsymbol{s.a:} & \boldsymbol{g_1(x,y,z) \geq b_1} \\ & \boldsymbol{g_2(x,y,z) = b_2} \\ & \boldsymbol{x \geq 0, y \geq 0} \end{array}$$

a) Marca quines condicions de concavitat i/o convexitat han de tenir necessàriament f, g_1 i g_2 perquè el problema complisca les hipòtesis del teorema local-global.

■ *f* ha de ser còncava □ *f* ha de ser convexa □ *f* ha de ser lineal

■ g_1 ha de ser còncava □ g_1 ha de ser convexa □ g_1 ha de ser lineal

□ g_2 ha de ser còncava □ g_2 ha de ser convexa ■ g_2 ha de ser lineal

b) Enuncia el mateix problema en forma canònica

$$\begin{array}{ll} Max. & f(x,y,z) \\ s.a: & -g_1(x,y,z) \leq -b_1 \\ & g_2(x,y,z) \leq b_2 \\ & -g_2(x,y,z) \leq -b_2 \\ & -x \leq 0, -y \leq 0 \end{array}$$

Exercici 7 Donat el problema general de programació matemàtica amb 2 variables:

$$\begin{array}{ll} \boldsymbol{Min.} & \boldsymbol{F(x,y)} \\ \boldsymbol{s.a:} & \boldsymbol{(x,y) \in S} \end{array}$$

a) Enuncia el teorema de Weierstrass per a aquest problema.

Si *F* és contínua i *S* és no buit i compacte, aleshores hi ha mínim global.

b) Escriu la definició de mínim global estricte per a aquest problema.

$(x^*, y^*) \in S$ és mínim global estricte si $F(x^*, y^*) < F(x,y),\ \forall (x,y) \in S$

c) Si $F(x,y) = 2x + y$ i $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / xy \geq 32, x + y \leq 20, x \geq 0, y \geq 0\}$, obteniu gràficament el mínim global.

El mínim global és el punt: $(x^*, y^*) = (4{,}8)$ amb $F(4{,}8) = 16$

Exercici 8 Donat el problema general de programació matemàtica amb 3 variables:

$$\begin{array}{ll} \boldsymbol{Max.} & \boldsymbol{F(x,y,z)} \\ \boldsymbol{s.a:} & \boldsymbol{(x,y,z) \in S} \end{array}$$

a) Si $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + y^2 \leq 10, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$, estudieu si verifica les condicions adequades del teorema de Weierstrass. Com a conseqüència d'aquest estudi i suposant que $F(x,y,z)$ és contínua, quina conclusió se n'extrau al voltant de l'existència de màxim global?

   No verifica les condicions del teorema de Weierstrass perquè el conjunt S no és fitat: en concret, la variable z no té fita superior. La conclusió és que no queda garantida l'existència de màxim global.

b) Enuncieu el teorema local-global per a aquest problema. Verifiqueu si el conjunt S de l'apartat anterior compleix la condició adequada del teorema local-global.

   Si $F(x,y,z)$ és còncava i S és convex, aleshores si tenim un màxim local serà també màxim global.

   El conjunt S de l'apartat anterior sí que verifica que és convex. Les condicions de no-negativitat són semiespais i la primera restricció és un conjunt de nivell inferior amb funció convexa perquè la hessiana és semidefinida positiva, $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, ja que és una matriu diagonal amb elements en la diagonal principal majors o iguals que zero. Per tant, S és convex perquè és intersecció de convexos.

c) Escriviu la definició matemàtica de màxim global no estricte per a aquest problema. Si $F(x,y,z) = 2x + 3y + 4z$ i S és el conjunt de l'apartat a), demostreu que el punt $(x,y,z) = (5,0,10)$ no és el màxim global no estricte del problema.

   Definició: $(x^*,y^*,z^*) \in S$ és màxim global no estricte si:

$$F(x^*,y^*,z^*) \geq F(x,y,z), \qquad \forall (x,y,z) \in S$$

   Amb la funció objectiu $F(x,y,z) = 2x + 3y + 4z$, el punt $(x,y,z) = (5,0,10)$ no és el màxim global no estricte del problema perquè fàcilment es pot trobar un altre punt factible amb millor valor de la funció objectiu, per exemple, el punt $(x,y,z) = (0,0,20)$ és factible i millor: $F(0,0,20) = 80 > 50 = F(5,0,10)$.

Exercici 9 Siguen les restriccions i condicions de domini següents:

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + y^2 \geq 1, x + y \leq 2, x + y \geq 2, x \geq 0, y \geq 0}$$

a) Creeu 4 conjunts d'oportunitats, utilitzant correctament la notació de conjunt ($S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ldots\}$) en definir-los, i trieu convenientment entre les restriccions anteriors, de manera que tingueu un conjunt no buit amb cadascuna de les característiques següents:

i. **Fitat i convex:** $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$
ii. **Fitat i no convex:** $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \geq 1, x + y \leq 2, x \geq 0, y \geq 0\}$
iii. **No fitat i convex:** $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y \leq 2, x \geq 0\}$
iv. **No fitat i no convex:** $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \geq 1\}$

b) Amb el conjunt d'oportunitats de l'apartat ii), calculeu gràficament el mínim global de la funció $f(x, y) = x - y$.

El mínim global és el punt (0,2) amb un valor de la funció objectiu $f(0{,}2) = -2$

c) Amb el conjunt d'oportunitats de l'apartat iii), poseu un exemple de funció objectiu amb màxim global i un exemple de funció objectiu sense màxim global.

Amb màxim global: $f(x, y) = -x + y$

Sense màxim global: $f(x, y) = x - y$

Tema 2. Programació no lineal

Exercici 10 Escriviu les condicions de Kuhn i Tucker dels problemes següents:

$$\begin{array}{ll} \boldsymbol{Max.} & \boldsymbol{x - y} \\ \boldsymbol{s.a:} & \boldsymbol{x + 2y \leq 10} \\ & \boldsymbol{x^2 - 8x + y \geq -12} \\ & \boldsymbol{y \geq 0} \end{array}$$

- Funció Lagrangiana:

$$L = x - y + \lambda_1(10 - x - 2y) + \lambda_2(-12 - x^2 + 8x - y) + \lambda_3(-y)$$

- Condicions de Kuhn i Tucker:
  - Factibilitat: $x + 2y \leq 10$; $x^2 - 8x + y \geq -12$; $y \geq 0$
  - Punt crític: $1 - \lambda_1 - 2x\lambda_2 + 8\lambda_2 = 0$; $-1 - 2\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0$
  - Signe dels multiplicadors: $\lambda_1 \geq 0$; $\lambda_2 \leq 0$; $\lambda_3 \leq 0$
  - Marge complementari:

$$\lambda_1(10 - x - 2y) = 0; \quad \lambda_2(-12 - x^2 + 8x - y) = 0 \quad \lambda_3(-y) = 0$$

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{Min.} && \boldsymbol{6x+4y+z} \\ &\boldsymbol{s.a:} && \boldsymbol{x+y+z^{1/2} \geq 92} \\ & && \boldsymbol{x+2y \leq 100} \end{aligned}$$

- Funció Lagrangiana:

$$L = 6x + 4y + z + \lambda_1\left(92 - x - y - z^{1/2}\right) + \lambda_2(100 - x - 2y)$$

- Condicions de Kuhn i Tucker:
  - Factibilitat: $x + y + z^{1/2} \geq 92; \quad x + 2y \leq 100$
  - Punt crític: $6 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0; \quad 4 - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0; \quad 1 - \frac{1}{2}z^{-1/2}\lambda_1 = 0$
  - Signe dels multiplicadors: $\lambda_1 \geq 0; \quad \lambda_2 \leq 0$
  - Marge complementari: $\lambda_1\left(92 - x - y - z^{1/2}\right) = 0; \quad \lambda_2(100 - x - 2y) = 0$

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{Max.} && \boldsymbol{x^{1/2}+y^{1/2}} \\ &\boldsymbol{s.a:} && \boldsymbol{2x+y \leq 12} \\ & && \boldsymbol{x \geq 1} \\ & && \boldsymbol{y \geq 1} \end{aligned}$$

- Funció Lagrangiana:

$$L = x^{1/2} + y^{1/2} + \lambda_1(12 - 2x - y) + \lambda_2(1 - x) + \lambda_3(1 - y)$$

- Condicions de Kuhn i Tucker:
  - Factibilitat: $2x + y \leq 12; \quad x \geq 1; \quad y \geq 1$
  - Punt crític: $\frac{1}{2}x^{-1/2} - 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0; \quad \frac{1}{2}y^{-1/2} - \lambda_1 - \lambda_3 = 0$
  - Signe dels multiplicadors: $\lambda_1 \geq 0; \quad \lambda_2 \leq 0; \quad \lambda_3 \leq 0$
  - Marge complementari: $\lambda_1(12 - 2x - y) = 0; \quad \lambda_2(1 - x) = 0; \quad \lambda_3(1 - y) = 0$

Exercici 12 Estudieu el teorema de suficiència de Kuhn i Tucker en els enunciats de l'exercici 10. Si disposàreu d'un punt de Kuhn i Tucker de cada problema, raoneu si seria òptim global.

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{Max.} && \boldsymbol{x-y} \\ &\boldsymbol{s.a:} && \boldsymbol{x+2y \leq 10} \\ & && \boldsymbol{x^2-8x+y \geq -12} \\ & && \boldsymbol{y \geq 0} \end{aligned}$$

1. Funció objectiu còncava (és de maximitzar)?: Sí, perquè és lineal.

2. S convex?:

- Primera i tercera restricció són semiespais → convexos
- Segona restricció és un conjunt de nivell superior, però amb funció còncava? No, perquè la hessiana del primer membre és $H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ i, per tant, convexa (matriu diagonal amb elements majors o iguals que zero en la diagonal principal) → conjunt no necessàriament convex.
- No es pot aplicar la propietat de la intersecció de convexos → S no és pot garantir que és convex.

Conclusió: no és aplicable el primer teorema de suficiència i, per tant, si disposàrem d'un punt de Kuhn i Tucker en aquest problema no es podria assegurar que és màxim global.

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{Min.} && \boldsymbol{6x + 4y + z} \\ &\boldsymbol{s.a}: && \boldsymbol{x + y + z^{1/2} \geq 92} \\ & && \boldsymbol{x + 2y \leq 100} \end{aligned}$$

1. Funció objectiu convexa (és de minimitzar)?: Sí, perquè és lineal.

2. S convex?:

- Primera restricció és un conjunt de nivell superior, però amb funció còncava? Sí, perquè la hessiana del primer membre és $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} z^{-3/2} \end{pmatrix}$ i, per tant, còncava (matriu diagonal amb elements menors o iguals que zero en la diagonal principal per a tot punt del domini) → conjunt convex.
- Segona restricció és un semiespai → convex.
- Es pot aplicar la propietat de la intersecció de convexos → S és convex.

Conclusió: és aplicable el primer teorema de suficiència i, per tant, si disposàrem d'un punt de Kuhn i Tucker en aquest problema es podria assegurar que és màxim global.

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{Max.} && \boldsymbol{x^{1/2} + y^{1/2}} \\ &\boldsymbol{s.a}: && \boldsymbol{2x + y \leq 12} \\ & && \boldsymbol{x \geq 1} \\ & && \boldsymbol{y \geq 1} \end{aligned}$$

1. Funció objectiu còncava (és de maximitzar)?: No, perquè la hessiana és $H = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x^{-1/2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}y^{-1/2} \end{pmatrix}$ i, per tant, convexa (matriu diagonal amb elements majors o iguals que zero en la diagonal principal en els punts del domini).

2. S convex?: Sí perquè és la intersecció de tres convexos perquè les tres restriccions són semiespais.

Conclusió: no és aplicable el primer teorema de suficiència i, per tant, si disposàrem d'un punt de Kuhn i Tucker en aquest problema no es podria assegurar que és màxim global.

Exercici 14 Donat el problema d'optimització matemàtica següent:

$$\begin{array}{ll} \boldsymbol{Min.} & \boldsymbol{x - 4y} \\ \boldsymbol{s.a:} & \boldsymbol{-4x + 6z = 0} \\ & \boldsymbol{2x^2 + y^2 + z^2 \leq 9} \\ & \boldsymbol{x \geq 0} \end{array}$$

a) Analitzeu si està garantida l'existència de mínim global.

Aquesta anàlisi es fa estudiant el teorema de Weierstrass. La funció objectiu és contínua perquè és polinòmica i el conjunt d'oportunitats és no buit, (0,0,0) és un punt factible i tancat perquè totes les restriccions inclouen la igualtat. A més, també és un conjunt fitat perquè la segona restricció permet deduir fites inferiors i superiors per a les tres variables: $-\sqrt{\frac{9}{2}} \leq x \leq \sqrt{\frac{9}{2}}$; $-3 \leq y \leq 3$; $-3 \leq z \leq 3$. En conseqüència, el conjunt d'oportunitats és compacte. Es verifiquen les condicions del teorema de Weierstrass i està assegurada l'existència de mínim global.

b) Escriviu les condicions de Kuhn i Tucker.

- Funció Lagrangiana:

$$L = x - 4y + \lambda_1(4x - 6z) + \lambda_2(9 - 2x^2 - y^2 - z^2) + \lambda_3(-x)$$

- Condicions de Kuhn i Tucker:
  - Factibilitat: $-4x + 6z = 0$; $2x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$; $x \geq 0$
  - Punt crític: $1 + 4\lambda_1 - 4x\lambda_2 - \lambda_3 = 0$; $-4 - 2y\lambda_2 = 0$; $-6\lambda_1 - 2z\lambda_2 = 0$
  - Signe dels multiplicadors: $\lambda_2 \leq 0$; $\lambda_3 \geq 0$
  - Marge complementari: $\lambda_2(9 - 2x^2 - y^2 - z^2) = 0$ $\lambda_3(-x) = 0$

c) Estudieu si el punt $(x, y, z) = (0,3,0)$ compleix les condicions de Kuhn i Tucker.

- Factibilitat: verifiquen les tres i, a més, saturen les dues desigualtats.
- Marge complementari: verifiquen les dues perquè satura les dues restriccions (anul·la els parèntesis) i no queda determinat cap valor dels multiplicadors.
- Punt crític: si se substitueix el punt (0,3,0), queda el sistema d'equacions següent, $\left.\begin{array}{r} 1 + 4\lambda_1 - \lambda_3 = 0 \\ -4 - 6\lambda_2 = 0 \\ -6\lambda_1 = 0 \end{array}\right\}$ la solució del qual és: $\lambda_1 = 0; \quad \lambda_2 = -\frac{2}{3}; \quad \lambda_3 = 1$
- Signe dels multiplicadors: els anteriors valors verifiquen les dues condicions de signe $\lambda_2 \leq 0; \quad \lambda_3 \geq 0$

Conclusió: el punt $(x, y, z) = (0,3,0)$ verifica les condicions de Kuhn i Tucker.

d) Estudieu, amb algun teorema de suficiència, si aquest punt és el mínim global.

En primer lloc, s'estudia el teorema de suficiència de Kuhn i Tucker:

1. Funció objectiu convexa (és de minimitzar)?: Sí, perquè és lineal

2. S convex?:

- Primera restricció és un hiperplà → convex.
- Segona restricció és un conjunt de nivell inferior, però amb funció convexa? Sí, perquè la hessiana del primer membre és $H = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ i, per tant, convexa (matriu diagonal amb elements majors o iguals que zero en la diagonal principal) → conjunt convex.
- Tercera restricció és un semiespai → convex.
- Es pot aplicar la propietat de la intersecció de convexos → S és convex.

Conclusió: és aplicable el primer teorema de suficiència i, per tant, $(x, y, z) = (0,3,0)$, que és punt de K-T, és també mínim global.

Tema 3. Introducció a la programació lineal

Exercici 16 Passeu els problemes següents a forma estàndard i escriviu la matriu *A* en cada cas.

$$\begin{array}{ll} \boldsymbol{Max.} & \boldsymbol{2x+y} \\ \boldsymbol{s.a:} & \boldsymbol{4x+y\le 15} \\ & \boldsymbol{x+2y\le 6} \\ & \boldsymbol{x,y\ge 0} \end{array}$$

L'única transformació que cal fer és passar desigualtats a igualtats. La forma estàndard i la matriu *A* són:

$$\begin{array}{ll} Max. & 2x+y \\ s.a: & 4x+y+s_1=15 \\ & x+2y+s_2=6 \\ & x,y,s_1,s_2\ge 0 \end{array} \qquad A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ll} \boldsymbol{Max.} & \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{s.a:} & \boldsymbol{-3x+y\le 0} \\ & \boldsymbol{x+2y\le 16} \\ & \boldsymbol{x\ge 0} \end{array}$$

Ara, a més de passar desigualtats a igualtats, cal un canvi de variable per tal de passar a variables no negatives, concretament $y=y_1-y_2$. La forma estàndard i la matriu *A* són:

$$\begin{array}{ll} Max. & y_1-y_2 \\ s.a: & -3x+y_1-y_2+s_1=0 \\ & x+2y_1-2y_2+s_2=16 \\ & x,y_1,y_2,s_1,s_2\ge 0 \end{array} \qquad A=\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ll} \boldsymbol{Min.} & \boldsymbol{x+y} \\ \boldsymbol{s.a:} & \boldsymbol{2x-y\ge 0} \\ & \boldsymbol{x+2y=6} \\ & \boldsymbol{x\le 0} \end{array}$$

En aquest problema, falta una variable de marge en la primera restricció i cal transformar les dues variables, $x=-x_1;\ y=y_1-y_2$. La forma estàndard i la matriu *A* són:

$$\begin{array}{ll} Min. & -x_1+y_1-y_2 \\ s.a: & -2x_1-y_1+y_2-s=0 \\ & -x_1+2y_1-2y_2=6 \\ & x_1,y_1,y_2,s\ge 0 \end{array} \qquad A=\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercici 20 Siga $F(x,y,z) = x + y + 2z$ la funció objectiu d'un problema lineal que volem fer màxima. Les 3 variables són no negatives:

a) Afegiu una única restricció de manera que el problema tinga solució única o de vèrtex, calculeu totes les SFB i el valor de la funció objectiu en cadascuna.

Observant que el coeficient de z en la funció objectiu és el més gran, una restricció que implica solució de vèrtex és, per exemple, $x + y + z = 1$. Aquesta restricció, juntament amb les condicions de no-negativitat, asseguren que el conjunt és fitat i que hi ha màxim global. Totes les SFB o vèrtex són: (1,0,0), (0,1,0) i (0,0,1). I clarament el (0,0,1) és l'únic que fa màxima la funció objectiu amb *F*=2 ja que en els altres dos punts el valor és *F*=1.

b) Afegiu una única restricció de manera que el problema tinga solució múltiple o d'aresta, calculeu totes les SFB i el valor de la funció objectiu en cadascuna.

Per a obtenir solució d'aresta és necessari que dos dels coeficients de la restricció siguen proporcionals als de la funció objectiu. Açò assegura que dos vèrtexs tinguen el mateix valor de la funció objectiu. També cal que els altres vèrtex no siguen millor que aquests. Un exemple de restricció que implica solució d'aresta és, per exemple, $x + y + 4z = 1$. Aquesta restricció assegura l'existència de màxim global pel mateix motiu que abans. Totes les SFB són: (1,0,0), (0,1,0) i (0,0,1/4). En les dues primeres la funció objectiu val *F*=1, que és millor que en la tercera, on val *F*=1/2. Per tant, els màxims globals són tots els punts de l'aresta que uneix els punts (1,0,0) i (0,1,0), aresta que es pot expressar analíticament com al conjunt de punts:

$$(x,y,z) = \lambda(1,0,0) + (1-\lambda)(0,1,0), \qquad 0 \le \lambda \le 1$$

c) Afegiu una única restricció de manera que el problema tinga solució no fitada.

En aquest cas la restricció no ha de donar lloc a un conjunt fitat i ser de forma que la funció objectiu cresca infinitament en punts factibles. Un exemple és $x + y = 1$. Com que la variable *z* no té fita superior, la funció objectiu pot millorar infinitament.

Exercici 21 Donat el problema següent:

$$\begin{array}{ll} \boldsymbol{Max.} & \boldsymbol{2x_1 + x_2} \\ \boldsymbol{s.a:} & \boldsymbol{4x_1 + x_2 \le 12} \\ & \boldsymbol{7x_1 + 2x_2 \le 16} \\ & \boldsymbol{x_1, x_2 \ge 0} \end{array}$$

a) Calculeu la SFB amb variables bàsiques $x_B = (x_2, s_1)$.

Després de passar el problema a forma estàndard, tenim que $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ i, per tant, la matriu bàsica associada a $x_B = (x_2, s_1)$ és $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, matriu que és regular, $|B| \neq 0$. El valor de les variables bàsiques és:

$$x_B = B^{-1}b \ \rightarrow \ \begin{pmatrix} x_2 \\ s_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 12 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

b) Calculeu la SB amb $x_B = (x_1, x_2)$. És SFB?

Ara, $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$. També és regular. El valor de les variables bàsiques és:

$$x_B = B^{-1}b \ \rightarrow \ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 12 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -20 \end{pmatrix}$$

Com que una variable bàsica és negativa, no és solució factible bàsica.

c) Raoneu si $(x_1, x_2, s_1, s_2) = (2,1,3,0)$ és SF, SB o SFB.

Aquest punt compleix les restriccions en forma estàndard i les condicions de no-negativitat, per tant és solució factible. A fi de veure si és bàsica, observem que hi ha d'haver dues variables bàsiques (perquè hi ha dues restriccions) i dues no bàsiques (la resta), és a dir, hi ha d'haver almenys dues variables iguals a zero i això no es compleix, per tant no és solució bàsica ni solució factible bàsica.

d) Si $(\frac{16}{7}, 0, \frac{20}{7}, 0)$, $(0,0,12,16)$ i la de l'apartat *a*) són totes les SFB del problema, analitzeu quina és la millor i si podeu deduir que és el màxim global.

Analitzar quina és la millor és avaluar la funció objectiu en cada una i triar, en aquest cas, la més gran perquè estem maximitzant. Per tant, com que $F\left(\frac{16}{7}, 0, \frac{20}{7}, 0\right) = \frac{32}{7}$, $F(0,0,12,16) = 0$ i $F(0,8,4,0) = 8$; la millor és $(0,8,4,0)$. Sí que es pot deduir que és el màxim global perquè està garantida l'existència de màxim global, ja que les condicions del teorema de Weierstrass es compleixen perquè el conjunt d'oportunitats està fitat: $0 \leq x_1 \leq \frac{16}{7}$, $0 \leq x_2 \leq 4$.

Tema 4. El mètode símplex

Exercici 24 Calculeu la taula del símplex associada a $x_B = (x, y, s_1)$ en el problema:

$$\begin{array}{ll} \boldsymbol{Max.} & \boldsymbol{F = 2x + 4y + z} \\ \boldsymbol{s.a:} & \boldsymbol{x + y \geq 4} \\ & \boldsymbol{2x + 4z \geq 8} \\ & \boldsymbol{x + 3y + 2z \leq 19} \\ & \boldsymbol{x, y, z \geq 0} \end{array}$$

Després de passar el problema a forma estàndard, tenim les matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 19 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \; B^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/6 & 1/3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}, \quad B^{-1}b = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

La taula del símplex associada és:

		2	4	1	0	0	0	
		x	y	z	s_1	s_2	s_3	
2	x	1	0	2	0	-1/2	0	4
4	y	0	1	0	0	1/6	1/3	5
0	s_1	0	0	2	1	-1/3	1/3	5
z_j		2	4	4	0	-1/3	4/3	28
w_j		0	0	-3	0	1/3	-4/3	

Exercici 26 Calculeu una taula qualsevol del símplex dels problemes següents. Si no correspon a la solució òptima, feu iteracions del símplex fins que arribeu a la solució òptima i indiqueu de quin tipus és:

$$\begin{array}{ll} \boldsymbol{Max.} & \boldsymbol{2x + y} \\ \boldsymbol{s.a:} & \boldsymbol{4x + y \leq 15} \\ & \boldsymbol{x + 2y \leq 6} \\ & \boldsymbol{x, y \geq 0} \end{array}$$

El problema en forma estàndard origina una matriu *A* amb una submatriu *B* igual que la identitat si elegim com a variables bàsiques inicials les dues de marge. Com que els termes independents són positius, això garanteix arribar a una SFB inicial. D'aquesta manera s'evita càlcul matricial. La taula inicial és:

		2	1	0	0	
		x	y	s_1	s_2	
0	s_1	4	1	1	0	15
0	s_2	1	2	0	1	6
	z_j	0	0	0	0	0
	w_j	2	1	0	0	

- Criteri d'entrada per a maximitzar: entra la variable amb rendiment marginal positiu més gran → entra x
- Criteri d'eixida: ix la variable amb $mín.\left\{\frac{x_i}{y_{i1}},\ y_{i1} > 0,\ \forall i \in B\right\} = mín.\left\{\frac{15}{4}, \frac{6}{1}\right\} = \frac{15}{4}$ → ix s_1
- Transformació de la taula amb una operació de pivot: l'element pivot és y_{11}=4 així que es divideix la primera fila per 4. La segona fila, com que y_{21}=1, s'ha de transformar restant-li la primera fila dividida per 4 (o, equivalentment, restant-li la primera fila ja transformada).

  Amb aquestes transformacions, la segona taula del símplex és:

		2	1	0	0	
		x	y	s_1	s_2	
2	x	1	1/4	1/4	0	15/4
0	s_2	0	7/4	-1/4	1	9/4
	z_j	2	1/2	1/2	0	15/2
	w_j	0	1/2	-1/2	0	

La taula encara no és òptima perquè almenys un rendiment marginal és positiu.

- Criteri d'entrada per a maximitzar: entra la variable amb rendiment marginal positiu més gran → entra y
- Criteri d'eixida: ix la variable amb $mín.\left\{\frac{x_i}{y_{i2}},\ y_{i2} > 0,\ \forall i \in B\right\} = mín.\left\{\frac{15/4}{1/4}, \frac{9/4}{7/4}\right\} = \frac{9}{7}$ → ix s_2
- Transformació de la taula amb una operació de pivot: l'element pivot és y_{22}=7/4 així que es divideix la segona fila per 7/4. La primera fila, com que y_{12}=1/4, s'ha de transformar restant-li la segona fila dividida per 7 (o, equivalentment, restant-li la segona fila ja transformada dividida per 4).

Amb aquestes transformacions, la tercera taula del símplex és:

		2	1	0	0	
		x	y	s_1	s_2	
2	x	1	0	2/7	-1/7	24/7
1	y	0	1	-1/7	4/7	9/7
z_j		2	1	3/7	2/7	57/7
w_j		0	0	-3/7	-2/7	

Aquesta taula és la final i correspon a una solució òptima (màxim global) única o de vèrtex, perquè els rendiments marginals de les no bàsiques són estrictament negatius, i no degenerada, perquè el valor de les variables bàsiques és estrictament positiu. El màxim global del problema original és $(x, y) = \left(\frac{24}{7}, \frac{9}{7}\right)$, $F = 57/7$.

$$\begin{array}{ll} \boldsymbol{Min.} & \boldsymbol{2x + y + 2z} \\ \boldsymbol{s.a:} & \boldsymbol{2x - y \geq 0} \\ & \boldsymbol{x + 2y = 6} \\ & \boldsymbol{3x + 2y + z \leq 6} \\ & \boldsymbol{x, y, z \geq 0} \end{array}$$

Si s'intenta trobar una SFB per a començar el mètode símplex, no se'n troba cap. Totes les combinacions possibles de *m*=3 variables bàsiques i *n*-*m*=2 no bàsiques donen lloc a valors de variables, algun dels quals és negatiu. Com que no hi ha cap SFB, el problema és infactible i no té solució òptima.

Exercici 27 Resoleu pel mètode de les penalitzacions

$$\begin{array}{ll} \boldsymbol{Max.} & \boldsymbol{x + y} \\ \boldsymbol{s.a:} & \boldsymbol{3x - y \geq 3} \\ & \boldsymbol{-x - 2y \geq -16} \\ & \boldsymbol{x, y \geq 0} \end{array}$$

En primer lloc, s'ha de transformar el problema a fi de passar a forma estàndard amb termes independents positius (canvieu a ≤ la segona restricció) i com que la matriu A no conté la matriu identitat, també s'han d'introduir variables artificials i aplicar el mètode de penalitzacions. El resultat de les transformacions dóna lloc al problema artificial següent: $\begin{array}{ll} Max. & x + y - MA \\ s.a: & 3x - y - s_1 + A = 3 \\ & x + 2y + s_2 = 16 \\ & x, y, s_1, s_2, A \geq 0 \end{array}$, on M és un nombre positiu suficientment gran. La taula inicial del símplex, associada a $x_B = (A, s_2)$, és:

		1	1	0	0	$-M$	
		x	y	s_1	s_2	A	
$-M$	A	3	-1	-1	0	1	3
0	s_2	1	2	0	1	0	16
z_j		$-3M$	M	M	0	$-M$	$-3M$
w_j		$1+3M$	$1-M$	$-M$	0	0	

La taula no és òptima perquè almenys un rendiment marginal és positiu (w_1). Entra x_1 i ix A. L'operació de pivot permet arribar a la taula següent:

		1	1	0	0	$-M$	
		x	y	s_1	s_2	A	
1	x	1	-1/3	-1/3	0	1/3	1
0	s_2	0	7/3	1/3	1	-1/3	15
z_j		1	-1/3	-1/3	0	1/3	1
w_j		0	4/3	1/3	0	-M-1/3	

Ara entra y i ix s_2. Com que la columna de la variable artificial ja es pot eliminar, la taula següent és:

		1	1	0	0	
		x	y	s_1	s_2	
1	x	1	0	-2/7	1/7	22/7
1	y	0	1	1/7	3/7	45/7
z_j		1	1	-1/7	4/7	67/7
w_j		0	4/3	1/7	-4/7	

Ara entra s_1 i ix y:

		1	1	0	0	
		x	y	s_1	s_2	
1	x	1	2	0	1	16
0	s_1	0	7	1	3	45
z_j		1	2	0	1	16
w_j		0	-1	0	-1	

La taula és òptima i correspon a una solució única o de vèrtex perquè els rendiments marginals de les no bàsiques són estrictament negatius. El màxim global del problema original és $(x, y) = (16,0),\ F = 16$.

Exercici 31 En un problema de minimitzar hem obtingut la taula del símplex següent:

		2	**5**	**0**	**0**	**0**	
		$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y}$	$\boldsymbol{s_1}$	$\boldsymbol{s_2}$	$\boldsymbol{s_3}$	
5	$\boldsymbol{y}$	**3/4**	**1**	**0**	**-1/4**	**0**	**6**
0	$\boldsymbol{s_1}$	**-1/2**	**0**	**1**	**1/2**	**0**	**6**
0	$\boldsymbol{s_3}$	**1/4**	**0**	**0**	**-3/4**	**1**	**3**
	$\boldsymbol{z_j}$						
	$\boldsymbol{w_j}$						

a) Completeu la taula.

		2	5	0	0	0	
		x	y	s_1	s_2	s_3	
5	y	3/4	1	0	-1/4	0	6
0	s_1	-1/2	0	1	1/2	0	6
0	s_3	1/4	0	0	-3/4	1	3
	z_j	15/4	5	0	-5/4	0	30
	w_j	-7/4	0	0	5/4	0	

b) Calculeu la taula següent amb una operació del pivot.

Com que és de minimitzar entra la variable amb rendiment marginal més negatiu, x el criteri d'eixida és el mateix que per a maximitzar $mín.\left\{\frac{x_i}{y_{i1}},\ y_{i1} > 0,\ \forall i \in B\right\} = mín.\left\{\frac{6}{3/4}, \frac{3}{1/4}\right\} = 8 \rightarrow$ ix y. La taula és:

		2	5	0	0	0	
		x	y	s_1	s_2	s_3	
2	x	1	4/3	0	-1/3	0	8
0	s_1	0	2/3	1	1/3	0	10
0	s_3	0	-1/3	0	-2/3	1	1
	z_j	2	8/3	0	-2/3	0	16
	w_j	0	7/3	0	2/3	0	

c) Interpreteu la taula nova:

- Valor de totes les variables i de la funció objectiu.

$$(x, y, s_1, s_2, s_3) = (8{,}0{,}10{,}0{,}1), \qquad F = 16$$

- Tipus de taula: òptima i de quin tipus o no òptima i per quin motiu.

La taula és òptima perquè els rendiments marginals de les no bàsiques són majors o iguals que zero i estem minimitzant. És de vèrtex perquè són estrictament majors que zero i no degenerada perquè el valor de les variables bàsiques és estrictament positiu.

Tema 5. Dualitat en programació lineal

Exercici 32 Formuleu el problema dual dels problemes primals següents:

$$\begin{array}{llcll}
\boldsymbol{Min.} & \boldsymbol{2x+y+2z} & & Max. & 6\lambda_2+6\lambda_3 \\
\boldsymbol{s.a:} & \boldsymbol{2x-y\le 0} & & s.a: & 2\lambda_1+\lambda_2+3\lambda_3\le 2 \\
 & \boldsymbol{x+2y=6} & \rightarrow & & -\lambda_1+2\lambda_2+2\lambda_3=1 \\
 & \boldsymbol{3x+2y+z\le 6} & & & \lambda_3\le 2 \\
 & \boldsymbol{x,z\ge 0} & & & \lambda_1\le 0,\lambda_3\le 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{llcll}
\boldsymbol{Min.} & \boldsymbol{3x+y-z} & & Max. & -\lambda \\
\boldsymbol{s.a:} & \boldsymbol{4x+2y-z=-1} & \rightarrow & s.a: & 4\lambda\le 3 \\
 & \boldsymbol{x,y\ge 0,z\le 0} & & & 2\lambda\le 1 \\
 & & & & -\lambda\ge -1
\end{array}$$

$$\begin{array}{llcll}
\boldsymbol{Min.} & \boldsymbol{x+y} & & Max. & 6\lambda_2 \\
\boldsymbol{s.a:} & \boldsymbol{2x-y\le 0} & & s.a: & 2\lambda_1+\lambda_2=1 \\
 & \boldsymbol{x+2y\ge 6} & \rightarrow & & -\lambda_1+2\lambda_2\le 1 \\
 & \boldsymbol{y\ge 0} & & & \lambda_1\le 0,\lambda_2\ge 0
\end{array}$$

Exercici 33 Amb la informació següent sobre el tipus de solució del problema primal, quin és el tipus de solució del problema dual en cada cas?:

- El primer problema de l'exercici 32 té màxim global.

El dual també tindrà òptim global, en aquest cas mínim global.

- El tercer problema de l'exercici 32 és infactible.

El dual pot ser infactible o no fitat. Si observem el plantejament del dual (és el segon dels duals plantejats en l'exercici resolt anterior), es dedueix que no és infactible (λ=0 és factible) i, per tant, és no fitat.

- L'últim problema de l'exercici 32 és no fitat.

Aleshores, el dual és infactible perquè no poden ser simultàniament primal i dual no fitats.

Exercici 35 El segon problema de l'exercici 32 té el mínim global en el punt $(x, y, z) = (0, 3, 0)$. Calculeu el màxim global del problema dual a partir de l'aplicació de les relacions de marge complementari (cas general).

En primer lloc, completem la solució del primal calculant les variables de marge del primal a partir de la forma estàndard o, simplement, per diferència entre els dos membres de cada restricció, substituint els valors òptims de les variables $(x, y, z) = (0, 3, 0)$ i tenim que $(s_1, s_3) = (3,0)$. El valor de la funció objectiu és F=3.

Després, plantegem les relacions de marge complementari en el primal i en el dual. En el primal (en forma estàndard no existeix s_2):

$$\lambda_1 s_1 = 0, \qquad \lambda_3 s_3 = 0$$

I en el dual (vegeu el plantejament en la resolució anterior de l'exercici 32), aplicant el mateix raonament (ara no existeix $\bar{s}_2$):

$$x\bar{s}_1 = 0\,, \quad z\bar{s}_3 = 0$$

Aplicant aquestes relacions:

$$\lambda_1 s_1 = 0 \text{ i} s_1 = 3 \;\rightarrow\; \lambda_1 = 0$$

Les altres relacions de marge complementari no proporcionen cap informació útil perquè les variables del primal són nul·les. No obstant això, es pot utilitzar la segona restricció del dual perquè és una igualtat i el resultat que diu que el valor de la funció objectiu del primal és igual al del dual. Així que disposem d'un sistema de 3 equacions amb 3 incògnites, la solució del qual ens dóna les variables principals del dual:

$$\left.\begin{array}{c} \lambda_1 = 0 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 1 \\ \bar{F} = 6\lambda_2 + 6\lambda_3 = 3 = F \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{c} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 1/2 \end{array}$$

La solució del dual és múltiple. Tots els màxims globals es poden expressar en funció d'un paràmetre λ_2: $\left(0, \lambda_2, \frac{1}{2} - \lambda_2\right)$ amb $\lambda_2 \geq 1/2$ perquè $\lambda_3 \leq 0$ com diu l'enunciat del dual. En tots els màxims globals la funció objectiu dual val $\bar{F} = 3$.

Exercici 38 Per al problema de P. L.:

$$\begin{array}{ll} \boldsymbol{Max.} & \boldsymbol{x_1 + 4x_2 + x_3} \\ \boldsymbol{s.a:} & \boldsymbol{x_2 + 2x_3 \geq 4} \\ & \boldsymbol{x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 12} \\ & \boldsymbol{x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0} \end{array}$$

a) Plantegeu el problema dual.

$$\begin{array}{ll} Min. & 4\lambda_1 + 12\lambda_2 \\ & \lambda_2 \geq 1 \\ s.a: & \lambda_1 + 2\lambda_2 \geq 4 \\ & 2\lambda_1 + 4\lambda_2 \geq 1 \\ & \lambda_1 \leq 0 \end{array}$$

b) Calculeu la solució òptima del dual si sabeu que en la solució òptima del primal $(x_1, x_2, x_3) = (0, 6, 0)$.

Completant la solució del primal s'obté, substituint la solució òptima en la primera restricció, que $s_1 = 2$. I també que la funció objectiu val F=24.

Les relacions de marge complementari i els resultats obtinguts en aplicar-les són:

$$\begin{array}{r} \lambda_1 s_1 = 0 \\ x_1 \bar{s}_1 = 0 \\ x_2 \bar{s}_2 = 0 \\ x_3 \bar{s}_3 = 0 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \\ \bar{s}_2 = 0 \\ \\ \end{array}$$

Si substituïm aquests valors en les restriccions del dual en forma estàndard, el sistema d'equacions reduït i la solució corresponent són:

$$\left.\begin{array}{r} \lambda_2 - \bar{s}_1 = 1 \\ 2\lambda_2 = 4 \\ 4\lambda_2 - \bar{s}_3 = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} \lambda_2 = 2 \\ \bar{s}_1 = 1 \\ \bar{s}_3 = 7 \end{array}$$

La solució òptima del dual (mínim global) és $(\lambda_1, \lambda_2) = (0{,}2)i\bar{F} = 24$, amb la qual cosa es comprova que primal i dual assoleixen el mateix valor de la funció objectiu.

Tema 6. Anàlisi de sensibilitat i postoptimització

Exercici 41 En el problema de producció amb recursos limitats següent, les variables representen les unitats produïdes de quatre productes, la funció objectiu és de beneficis (formada per la suma dels beneficis unitaris, en milers d'€, pel nombre d'unitats produïdes), la primera restricció representa la limitació de treball disponible (en hores/dia) i la segona restricció representa la limitació de cost (en milers d'€). L'enunciat matemàtic del problema i la taula òptima és:

$$\begin{array}{rl} \boldsymbol{Max.} & \boldsymbol{F = 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4} \\ \boldsymbol{s.a:} & \boldsymbol{2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 \leq 20} \\ & \boldsymbol{3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 15} \\ & \boldsymbol{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0} \end{array}$$

		3	1	3	4	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	
3	x_1	**1**	**2,2**	**0**	**-2**	**-0,4**	**0,6**	**1**
3	x_3	**0**	**-0,8**	**1**	**4**	**0,6**	**-0,4**	**6**
	z_j	**3**	**4,2**	**3**	**6**	**0,6**	**0,6**	**21**
	w_j	**0**	**-3,2**	**0**	**-2**	**-0,6**	**-0,6**	

a) Calculeu l'interval de sensibilitat del benefici unitari del segon producte. Raoneu econòmicament l'efecte que tindria un augment d'aquest benefici unitari, però mantenint-se dins de l'interval anterior. Quina interpretació econòmica creieu que és la més probable per a l'extrem superior d'aquest interval?

El benefici unitari del segon producte és c_2=1. Com que és d'una variable no bàsica, solament n'afecta el rendiment marginal. La condició que no canvie la solució és:

$$w_2 = c_2 - z_2 = c_2 - 4{,}2 \leq 0 \quad \rightarrow \quad c_2 \leq 4{,}2 \quad \rightarrow \quad c_2 \in \,]-\infty, 4'2[$$

La interpretació econòmica per a l'extrem superior de l'interval és que si el benefici unitari del segon producte, del qual ara no es produeix cap unitat, fóra de 4.200 € o superior, aquest producte seria rendible i començaria a produir-se. Indiqueu, per tant, el benefici unitari mínim a partir del qual seria convenient incorporar-lo en la producció.

b) Analitzeu quina seria la producció òptima si el benefici unitari del quart producte augmenta fins a 8 (milers d'€).

El benefici unitari del quart producte és c_4=4. Com que és d'una variable no bàsica, solament afecta el seu rendiment marginal. Si augmenta a c_4=8, tenim:

$$w_4 = c_4 - z_4 = 8 - 6 \geq 0 \quad \rightarrow \quad x_4 \text{ és variable d'entrada}$$

El quart producte, del qual no es produïa res, amb aquest augment del benefici unitari passa a ser rendible i és convenient començar a produir-lo (passa a ser variable bàsica). El criteri d'eixida diu que ha d'eixir x3 (s'ha de deixar de produir el tercer producte). Amb una operació de pivot es passa a la taula següent:

		3	1	3	8	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	
3	x_1	1	1,8	0,5	0	-0,1	0,4	4
8	x_4	0	-0,2	0,25	1	0,15	-0,1	1,5
	z_j	3	3,8	3,5	8	0,9	0,4	24
	w_j	0	-2,8	-0,5	0	-0,9	-0,4	

Per tant, aquesta taula mostra la nova producció òptima que assoleix el màxim benefici. Aquest és igual a 24.000 € amb una producció de 4 unitats del primer producte i 1,5 unitats del quart producte.

c) Calculeu l'interval de sensibilitat de les hores necessàries per a produir una unitat del quart producte. Quina interpretació econòmica creieu que és la més probable per a l'extrem inferior d'aquest interval?

Les hores necessàries per a produir una unitat del quart producte són a_{14}=8. Si es parametritza aquest coeficient, s'ha de transformar la quarta columna abans d'introduir-la en la taula:

$$A'_4 = B^{-1}A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_{14} \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}6 & -0{,}4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{14} \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}4a_{14} + 1{,}2 \\ 0{,}6a_{14} - 0{,}8 \end{pmatrix}$$

Com que solament afecta el quart rendiment marginal, no cal escriure tota la taula. La condició perquè no canvie la solució òptima és:

$$w_4 = c_4 - z_4 = c_4 - c_B A'_4 = 4 - (3{,}3)\begin{pmatrix} -0{,}4a_{14} + 1{,}2 \\ 0{,}6a_{14} - 0{,}8 \end{pmatrix} = 4 - (0{,}6a_{14} + 1{,}2) =$$

$$= -0{,}6a_{14} + 2{,}8 \leq 0 \quad \rightarrow \quad a_{14} \geq \frac{14}{3} \quad \rightarrow \quad a_{14} \in \left[\frac{14}{3}, +\infty\right[$$

L'extrem inferior d'aquest interval indica com hauria de millorar la tecnologia que utilitza l'empresa a fi que fóra rendible produir el quart producte. Si la millora tecnològica aconsegueix reduir de 8 a 14/3 o menys les hores necessàries per a produir una unitat del quart producte, l'empresa hauria de començar a produir d'aquest quart producte.

d) Calculeu l'interval de sensibilitat de les hores disponibles de treball i interpreteu-lo econòmicament.

Les hores disponibles de treball sónb_1=20. Afecta el valor de les variables bàsiques i els canvis possibles han de mantenir aquests valors positius, és a dir:

$$x_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}6 & -0{,}4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}4b_1 + 9 \\ 0{,}6b_1 - 6 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \left.\begin{matrix} -0{,}4b_1 + 9 \geq 0 \\ 0{,}6b_1 - 6 \geq 0 \end{matrix}\right\} \quad \rightarrow \quad \left.\begin{matrix} b_1 \leq \dfrac{9}{0{,}4} = 22{,}5 \\ b_1 \geq \dfrac{6}{0{,}6} = 10 \end{matrix}\right\} \quad \rightarrow \quad b_1 \in [10{,}22'5]$$

La interpretació econòmica és que si la disponibilitat d'hores diàries de treball està entre 10 i 22,5, la producció òptima de l'empresa continuarà sent produir el primer i el tercer producte, encara que en distintes quantitats a les òptimes originals. En canvi, si disposàrem de menys de 10 hores o de més de 22,5, la producció òptima canviaria, en el sentit que deixaríem de produir algun d'aquests productes i passaríem possiblement a produir-ne del segon o del quart.

e) Calculeu la producció òptima i el benefici màxim si el pressupost màxim de costos passa a ser de 25.000 €.

Ara canvia de forma concreta el segon terme independent. L'efecte és:

$$x_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 20 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}6 & -0{,}4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

No hi ha un canvi important en la solució. Seguim produint els mateixos productes, però ara amb distintes quantitats: 7 unitats del primer producte i 2 unitats del tercer. Substituint en la funció objectiu, els beneficis màxims passen a ser 27.000 €.

f) Analitzeu si a l'empresa li resulta convenient introduir un nou producte que té un benefici unitari de 5.000 €, que utilitza 3 hores de treball per unitat i té un cost unitari de 2.500 €.

Es tracta d'introduir una nova variable x_5. El càlcul rellevant és el rendiment marginal, per a veure si ha de passar a ser bàsica (s'ha de produir alguna unitat) o no. El càlcul es pot fer directament sense la taula:

$$w_5 = c_5 - z_5 = c_5 - c_B B^{-1} A_5 = 5 - (3{,}3) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} = 5 - (3{,}3) \begin{pmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}8 \end{pmatrix} =$$

$$= 5 - 3{,}3 = 1{,}7 \geq 0$$

Sí que ha de passar a ser bàsica (s'ha de produir alguna unitat). Per a fer l'operació de pivot és millor tenir la taula del símplex:

		3	1	3	4	5	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_1	s_2	
3	x_1	1	2,2	0	-2	0,3	-0,4	0,6	1
3	x_3	0	-0,8	1	4	0,8	0,6	-0,4	6
z_j		3	4,2	3	6	3,3	0,6	0,6	21
w_j		0	-3,2	0	-2	1,7	-0,6	-0,6	

Entra x_5 i la variable d'eixida és x_1. La nova taula és:

		3	1	3	4	5	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_1	s_2	
5	x_5	10/3	22/3	0	-20/3	1	-4/3	2	10/3
3	x_3	-8/3	-20/3	1	28/3	0	5/3	-2	10/3
	z_j	26/3	50/3	3	-16/3	5	-5/3	4	80/3
	w_j	-17/3	-47/3	0	28/3	0	5/3	-4	

Ara entra x_4 i ix x_3. La nova taula és:

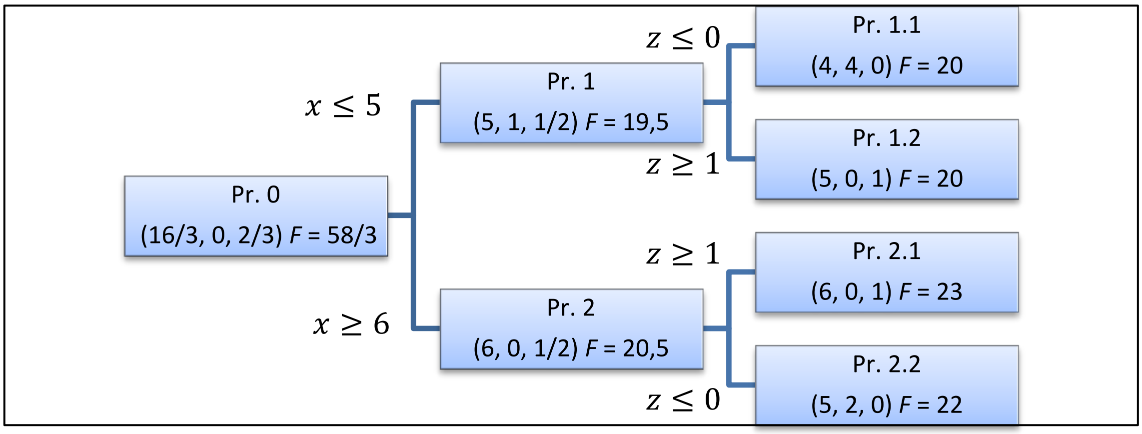
		3	1	3	4	5	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_1	s_2	
5	x_5	10/7	18/7	5/7	0	1	-1/7	4/7	39/7
4	x_4	-2/7	-5/7	3/28	1	0	5/28	-6/28	5/14
	z_j	6	10	4	4	5	0	2	30
	w_j	-3	-9	-1	0	0	0	-2	

Es tracta d'una taula òptima que indica solució d'aresta finita (un rendiment marginal de variable no bàsica és zero). La producció òptima que assoleix el màxim benefici, encara que no és l'única, indica que s'han de produir 5/14 unitats del quart producte i 39/7 unitats del cinquè, amb uns beneficis màxims de 30.000 €. A l'empresa sí que li interessa introduir aquest nou producte ja que li permet passar de 21.000 € a 30.000 € de benefici.

Tema 7. Programació entera

Exercici 42 Siga l'arbre de ramificació següent d'un problema de programació entera pur:

a) Afegiu en cada branca la restricció corresponent.



b) Raoneu quina és la solució òptima, si és única i si és mínim o màxim global.

Tots els problemes estan tancats o saturats perquè tots tenen solució entera i, per tant, es pot deduir la solució òptima. Com que el problema és de minimitzar, perquè augmenta el valor de la funció objectiu en cada ramificació, hi ha dos mínims globals en les solucions del problemes 1.1 i 1.2: (4,4,0) i (5,0,1) amb *F*=20.

c) Detecteu quina de les set solucions que apareixen en l'arbre és incoherent i per què.

La solució incoherent és la del problema 2.2. Aquesta solució ha de complir les restriccions addicionals incorporades, que en aquest problema són $x \geq 6$ i $z \leq 0$, i com es pot veure la solució òptima per a la primera variable, *x*=5, no compleix la primera de les restriccions addicionals.

Exercici 43 Siga el següent problema de programació entera mixta:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Min.} \quad & \boldsymbol{F = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3} \\ \boldsymbol{s.a:} \quad & \boldsymbol{2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 12} \\ & \boldsymbol{x_1 + x_2 + 4x_3 \geq 8} \\ & \boldsymbol{x_1, x_2, x_3 \geq 0} \\ & \boldsymbol{x_3 \in \mathbb{Z}} \end{aligned}$$

El problema associat quan apliquem el mètode de branca i límit té com a solució òptima $(x_1, x_2, x_3) = (16/3, 0,\ 2/3)$ amb *F*=58/3.

a) Formuleu els dos problemes que apareixen després de la primera ramificació.

Com que solament x_3 ha de ser entera, els dos problemes després de la primera ramificació són:

$$\begin{array}{rc} Min. & F = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \\ s.a: & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 12 \\ & x_1 + x_2 + 4x_3 \geq 8 \\ & x_3 \leq 0 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \quad \text{i} \quad \begin{array}{rc} Min. & F = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \\ s.a: & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 12 \\ & x_1 + x_2 + 4x_3 \geq 8 \\ & x_3 \geq 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

b) Marqueu amb una X quina o quines de les opcions següents són coherents per a les solucions òptimes d'aquests dos problemes:

☐ $(x_1, x_2, x_3) = (6, 0, 1/2)$ amb F=20,5 i $(x_1, x_2, x_3) = (5, 1, 1/2)$ amb F=19,5

■ $(x_1, x_2, x_3) = (4, 4, 0)$ amb $F = 20$ i $(x_1, x_2, x_3) = (5, 0, 1)$ amb $F = 20$

☐ $(x_1, x_2, x_3) = (6, 0, 0)$ amb F=18 i $(x_1, x_2, x_3) = (4, 1, 1)$ amb F=19

☐ $(x_1, x_2, x_3) = (3, 4, 1)$ amb F=22 i $(x_1, x_2, x_3) = (6, 1, 0)$ amb F=22

PART 2. EXERCICIS PROPOSATS

Tema 1. Introducció a l'optimització

1. Transformeu a forma estàndard:

$$\begin{array}{ll} Max. & 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 \\ s.a: & 2x_1 + x_2 - x_3 \geq 1 \\ & x_1 + x_3 = 5 \\ & x_1 \ lliure\ , x_2 \leq 0\ , x_3 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} Min. & 3x_1 - 4x_2 \\ s.a: & 3x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x_1 + 4x_2 \leq 5 \\ & 2x_1 - 3x_2 \geq -5 \\ & x_1 \ lliure\ , x_2 \geq 0 \end{array}$$

2. Transformeu a forma canònica:

$$\begin{array}{ll} Min. & \frac{1}{2}x^2 - 4xy + 4y^2 + 75 \\ s.a: & x + 6y \geq 32 \\ & x + y = 17 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} Min. & x^2 + y^2 - 50y \\ s.a: & 4x + y \leq 80 \\ & x + y \geq 35 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

3. Apliqueu el teorema local-global (estudi de les hipòtesis i deducció de la conseqüència corresponent) en els problemes següents:

$$\begin{array}{ll} Min. & 4x + 6y \\ s.a: & x^2 + y^2 - xy \leq 75 \\ & x + y \geq 15 \\ & x \geq 0,\ y \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} Min. & \frac{1}{2}x^2 - 4xy + 4y^2 + 75 \\ s.a: & x + 6y \geq 32 \\ & x + y = 17 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} Max. & x - y \\ s.a: & y + (x-4)^2 \geq 9 \\ & x + 2y \leq 16 \\ & y \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} Max. & y + (x-4)^2 \\ s.a: & x - y \geq 1 \\ & x + 2y \leq 16 \\ & y \geq 0 \end{array}$$

4. Apliqueu el teorema de Weierstrass (estudi de les hipòtesis i deducció de la conseqüència corresponent) en els problemes següents:

$$\begin{array}{ll} Min. & \frac{1}{2}x^2 - 4xy + 4y^2 + 75 \\ s.a: & x + 6y \geq 32 \\ & x + y = 17 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} Min. & x^2 + y^2 - 50y \\ s.a: & 4x + y \leq 80 \\ & x + y \geq 35 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} Min. & 4x+6y \\ s.a: & x^2+y^2 \leq 81 \\ & x+y \geq 15 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} Max. & 4x+6y+z^2 \\ s.a: & 4x+5y+3z \leq 75 \\ & x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0 \end{array}$$

5. Calculeu mentalment dos mínims globals del problema següent i escriviu el valor òptim de la funció objectiu: $Min. (x+y)^2,\ \ s.a\colon\ x \leq 1$.

6. Calculeu mentalment el màxim global del problema següent i escriviu el valor òptim de la funció objectiu: $Max.\ 1-(x^2+y^2),\ s.a\colon\ y \geq 2$.

7. Siga el problema de programació matemàtica:

$$\begin{array}{ll} Opt. & x^2+y^2+z^2 \\ s.a: & x^2+y^2 = 25 \\ & -2 \leq z \leq 3 \end{array}$$

a) Calculeu un punt factible frontera i un punt factible interior, si és possible.
b) Calculeu un punt infactible.
c) Raoneu si el conjunt d'oportunitats és fitat.
d) Calculeu mentalment un mínim global. És únic?
e) Calculeu mentalment un màxim global. És únic?

8. Calculeu gràficament la solució dels problemes següents:

$$\begin{array}{ll} Max. & x-y \\ s.a: & y+(x-4)^2 \geq 9 \\ & x+2y \leq 16 \\ & y \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} Min. & 3x_1-4x_2 \\ s.a: & x_1+3x_2 \geq 1 \\ & x_1+4x_2 \leq 5 \\ & 2x_1-3x_2 \geq -12 \\ & x_2 \geq 0 \end{array}$$

9. Si es compleix el teorema de Weierstrass en el problema $Opt. F(x),\ \ s.a\colon x \in S$, aleshores:

- ☐ S és convex.
- ☐ L'òptim local del problema és òptim global.
- ☐ S és fitat.
- ☐ El problema té òptim global.

10. Siguen P i P' dos problemes de programació matemàtica amb òptim global. El problema P' és igual que el problema P, però amb una restricció més, aleshores:

- ☐ L'òptim global del problema P és millor o igual que l'òptim global del problema P'.
- ☐ L'òptim global del problema P és el mateix que l'òptim global del problema P'.
- ☐ L'òptim global del problema P' és millor o igual que l'òptim global del problema P.
- ☐ Cal tenir més informació per a poder contestar.

Tema 2. Programació no lineal

11. Per al problema de programació no lineal següent:

$$\begin{array}{ll} Min. & x^2+y^2-50y \\ s.a: & 4x+y \leq 80 \\ & x+y \geq 35 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

a) Representeu gràficament el conjunt d'oportunitats i raoneu si és fitat.
b) Escriviu les condicions de Kuhn i Tucker.
c) Comproveu que (5,30) és punt de Kuhn i Tucker.
d) Estudieu si (5,30) és el mínim global.

12. Per al problema de programació no lineal següent:

$$\begin{array}{ll} Min. & 4x+6y \\ s.a: & x^2+y^2-xy \leq 75 \\ & x+y \geq 15 \\ & x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{array}$$

a) Escriviu-ne les condicions de Kuhn i Tucker.
b) Analitzeu si els punts $(\mathrm{x},\mathrm{y}) = (10{,}5)$ i $(\mathrm{x},\mathrm{y}) = (5{,}10)$ compleixen les condicions de Kuhn i Tucker.
c) Analitzeu el teorema de suficiència de Kuhn i Tucker i deduïu si es pot afirmar quin punt és el mínim global del problema

13. Donat el problema general de minimització; $Min. f(x),\ s.a{:}\, x \in S$; enuncieu els requisits matemàtics que en cada cas han de complir la funció f i el conjunt d'oportunitats S per a:

a) Assegurar l'existència de mínim global.
b) Afirmar que si x^* és mínim global, també és punt de Kuhn i Tucker.
c) Afirmar que si x^* és punt de Kuhn i Tucker, també és mínim global.

14. Siga el problema d'optimització matemàtica:

$$\begin{array}{ll} Min. & 4x^2-4xy+\frac{1}{2}y^2+85 \\ s.a: & x+y=17 \\ & 6x+y \geq 32 \end{array}$$

a) Analitzeu amb el teorema de Weierstrass si està garantida l'existència de mínim global.
b) Escriviu les condicions de Kuhn i Tucker.
c) Calculeu l'únic punt de Kuhn i Tucker (valor de les variables principals i dels multiplicadors) sabent que no satura la segona restricció.
d) Analitzeu si el punt obtingut en l'apartat anterior és mínim global.

15. Siga el problema:
$$\begin{aligned} Max.\quad & 2x+y \\ s.a:\quad & x^2+y^2\leq 20 \\ & x-y\geq 0 \\ & y\geq 0 \end{aligned}$$
Es demana:

a) Calculeu el punt factible que satura al mateix temps les dues primeres restriccions i estudieu si és regular.
b) Escriviu les condicions de Kuhn i Tucker.
c) Comproveu que el punt $(x,y)=(4{,}2)$ és punt de Kuhn i Tucker.
d) Analitzeu si el punt de l'apartat anterior és màxim global.

16. Siga un problema de maximitzar beneficis mitjançant la producció de dos productes (x,y) amb dues restriccions de limitació de recursos i dues condicions de demanda mínima:

$$\begin{aligned} Max.\quad & B=120x+18y+2xy-2x^2-y^2 \\ s.a:\quad & x+2y\leq 40 \\ & 4x+y\leq 83 \\ & x\geq 15,\qquad y\geq 10 \end{aligned}$$

a) Escriviu les condicions de Kuhn i Tucker.
b) Estudieu si els nivells de producció $(x,y)=(18{,}11)$ són un punt de Kuhn i Tucker.
c) Estudieu si aquests nivells de producció són el màxim global del problema i calculeu-ne els beneficis màxims.
d) Calculeu l'efecte aproximat que es produiria sobre els beneficis màxims si la disponibilitat del primer recurs augmentara 3,5 unitats.

17. Siga el problema no lineal següent:

$$\begin{aligned} Max.\quad & x+y \\ s.a:\quad & x^2+y^2-2y\leq k \end{aligned}$$

a) Calculeu el valor del paràmetre k sabent que (1,2) és punt de Kuhn i Tucker.
b) Verifiqueu si (1,2) és punt de Kuhn i Tucker

18. Calculeu l'ús dels factors productius que minimitzen el cost en el següent problema de l'empresa:

$$\begin{aligned} Min.\quad & C=x+9y \\ s.a:\quad & x^{1/2}y^{1/2}\geq 51 \\ & x\geq 0,\ y\geq 0 \end{aligned}$$

19. Calculeu el vector de consums que maximitza la utilitat en el següent problema del consumidor:

$$\begin{array}{ll} Max. & U = x^{1/3}y^{1/2} \\ s.a: & 6x + 8y \leq 480 \\ & x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{array}$$

20. Calculeu la inversió òptima que minimitza el risc en el següent problema de selecció de cartera amb un capital d'1 u. m.:

$$\begin{array}{ll} Min. & R = 0{,}8x^2 + 12y^2 - xy \\ s.a: & \begin{array}{c} 3x + 8y \geq 5 \\ x + y = 1 \end{array} \\ & x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{array}$$

Tema 3. Introducció a la programació lineal

21. Calculeu una solució factible bàsica, si n'hi ha, en els problemes següents i obteniu la solució equivalent del problema original.

$$\begin{array}{ll} Min. & 2x + 12y - 4z \\ s.a: & \begin{array}{c} 3x + 8y - z \geq 5 \\ x + y + z = 1 \end{array} \\ & x \geq 0,\ y \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} Max. & 3x + 5y \\ s.a: & \begin{array}{c} x + 8y = 8 \\ x + y \leq 1 \\ 2x - y \leq 6 \end{array} \\ & x \geq 0,\ y \leq 0 \end{array}$$

22. Calculeu la matriu A, la matriu B i el valor de les variables bàsiques en els problemes següents i per a les bases especificades:

$$\begin{array}{ll} Min. & -2x + 5y + z \\ s.a: & \begin{array}{c} -3x + 6y + z \geq 5 \\ x + y + z \leq 1 \end{array} \quad x_B = (y, z) \\ & y \geq 0, \quad z \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} Max. & x + 5y \\ s.a: & \begin{array}{c} x + 5y = 5 \\ x + y \leq 8 \\ 4x + y \leq 6 \end{array} \quad x_B = (y, s_1, s_2) \\ & x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{array}$$

23. Calculeu totes les solucions factibles bàsiques, avalueu la funció objectiu en cada una i raoneu si es pot deduir quina és l'òptim global en els problemes següents:

$$\begin{array}{ll} Min. & 2x+y+4z \\ s.a: & 3x+2y+z\geq 5 \\ & x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} Max. & 3x+4y \\ & x+4y=8 \\ s.a: & 2x+y\leq 22 \\ & x\geq 0,\ y\geq 0 \end{array}$$

24. Siga el problema lineal següent:

$$\begin{array}{ll} Max. & 2x+y+4z \\ & 3x+2y+z\leq 5 \\ s.a: & x+y+2z\leq 1 \\ & x\geq 0, \quad y\geq 0 \end{array}$$

a) Raoneu per què no és possible que z_1 i z_2 siguen variables bàsiques al mateix temps.
b) Calculeu una solució bàsica però no factible.
c) Calculeu una solució factible bàsica amb z_2 com a variable bàsica.
d) Calculeu la solució del problema original equivalent a la de l'apartat c).

25. Calculeu una solució factible bàsica qualsevol, la matriu A i la matriu B corresponent en cada un dels problemes següents:

$$\begin{array}{ll} Max. & 4x+y+2z \\ & 3x+2y+4z\geq 15 \\ s.a: & 6x+y+2z\leq 21 \\ & x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} Min. & x+2y+8 \\ & 3x+y\geq 9 \\ s.a: & 2x+2y\leq 18 \\ & x+8y\geq 12 \\ & x\geq 0,\ y\geq 0 \end{array}$$

Tema 4. El mètode símplex

26. Calculeu la primera taula del símplex dels problemes de l'exercici 22 del tema anterior per a les bases especificades. Realitzeu una operació de pivot, si és possible, en cada taula.

27. Calculeu la taula del símplex dels problemes de l'exercici 25 de l'anterior tema associada a la solució factible bàsica elegida en cada cas. Realitzeu una operació de pivot, si és possible, en cada taula.

28. Resoleu pel mètode de les penalitzacions:

$$\begin{array}{ll} Max. & 3x+4y \\ & x+4y=8 \\ s.a: & 2x+y\leq 22 \\ & x\geq 0, \quad y\geq 0 \end{array}$$

29. Donada la taula següent del símplex d'un problema lineal de maximitzar:

		2		0	0	0	
		x	y	s_1	s_2	s_3	
2	x		4/3		-1/3		8
0	s_1		2/3		1/3		10
0	s_3		-1/3		-2/3		1
z_j							
w_j			7/3				

a) Calculeu les cel·les ombrejades.

b) Raoneu si la taula és la final. En cas contrari, feu iteracions del mètode símplex fins arribar a la taula final.

c) A partir de la taula final, deduïu la solució òptima del problema original, si n'hi ha, i de quin tipus és.

30. Siga el problema lineal:

$$\begin{array}{ll} Max. & F = 3x + y + 4z \\ s.a: & 2x + 2y + 5z \leq 20 \\ & 4x + 5y + 2z \leq 16 \\ & x, y, z \geq 0 \end{array}$$

a) Calculeu la taula del símplex associada a la base $x_B = (z, s_2)$.

b) És la taula de l'apartat a) la final? En cas negatiu, realitzeu iteracions del símplex fins arribar a la taula final.

c) A partir de la taula final, deduïu la solució òptima del problema original, si n'hi ha, i de quin tipus és.

31. Siga el problema lineal:

$$\begin{array}{ll} Max. & F = 2x - y + 3z \\ s.a: & 2x + 3z \leq 180 \\ & 3x + y + 4z \leq 160 \\ & x, y, z \geq 0 \end{array}$$

a) Calculeu la taula del símplex associada a la base $x_B = (z, s_1)$.

b) És la taula de l'apartat a) la final? En cas negatiu, realitzeu iteracions del símplex fins arribar a la taula final.

c) A partir de la taula final, deduïu la solució òptima del problema original, si n'hi ha, i de quin tipus és.

32. Siga el problema lineal:

$$\begin{array}{ll} Max. & F = 3x + 2y + z \\ s.a: & 2x + 3y + 2z \geq 10 \\ & 4x + 3y + z \leq 26 \\ & x, y, z \geq 0 \end{array}$$

a) Plantegeu el problema artificial.
b) Escriviu la taula del símplex del problema artificial.
c) Resoleu el problema a partir de la taula anterior.
d) Deduïu la solució del problema original, si n'hi ha.

Tema 5. Dualitat en programació lineal

33. Siga el problema lineal:

$$\begin{array}{ll} Min. & 2x + 12y - 4z \\ s.a: & \begin{array}{c} 3x + 8y - z \geq 5 \\ x + y + z = 1 \end{array} \\ & x \geq 0, \qquad y \geq 0 \end{array}$$

a) Enunciеu el problema dual.
b) Sabent que el mínim global del problema primal és $(x, y, z) = (\frac{3}{2}, 0, -\frac{1}{2})$, calculeu el màxim global del problema dual.

34. Siga el problema lineal:

$$\begin{array}{ll} Max. & F = 2x - y + 3z \\ s.a: & 2x + 3z \leq 160 \\ & 3x + y + 4z \leq 120 \\ & x, y, z \geq 0 \end{array}$$

a) Enunciеu el problema dual
b) Sabent que z i s_1 són les variables bàsiques del problema en forma estàndard, calculeu la solució òptima del dual.

35. Siga un problema de maximitzar beneficis (en milers d'euros) mitjançant la producció d'unitats de dos productes (x, y) amb dues restriccions de limitació de mà d'obra (en hores) i de matèria primera (en unitats):

$$\begin{array}{ll} Max. & B = 220x + 280y \\ s.a: & x + 2y \leq 40 \\ & 4x + 3y \leq 85 \\ & x \geq 0, \qquad y \geq 0 \end{array}$$

a) Enunciеu el problema dual.
b) Interpreteu econòmicament les variables duals.
c) Calculeu les variables duals sabent que el màxim global del problema primal s'obté amb un nivell de producció $(x, y) = (10,15)$.
d) Què seria preferible per a l'empresa, augmentar una hora la ma d'obra disponible o 3 unitats la matèria primera disponible?

36. Siga el problema lineal:

$$
\begin{array}{ll}
Max. & 3x + 4y \\
s.a: & x + 4y = 8 \\
 & 2x + y \leq 18 \\
 & x \geq 0, \quad y \geq 0
\end{array}
$$

a) Completeu la taula òptima del símplex amb la informació proporcionada:

		3	4	0	
		x	y	s	
3	x		4		
0	s		-7		
z_j		3		0	24
w_j		0		0	

b) Calculeu la solució òptima del problema dual.

37. Completeu la taula següent posant un SÍ o un NO segons si la combinació de tipus de solució del primal i del dual és possible o no:

		Solució del primal		
		Amb solució òptima	Infactible	No fitat
Solució del dual	Amb solució òptima			
	Infactible			
	No fitat			

38. Siga el problema lineal amb paràmetres:

$$
\begin{array}{ll}
Min. & c_1x + 8y + c_3z \\
s.a: & 3x + 3y + 5z \geq 28 \\
 & 2x + y + a_{23}z \leq b_2 \\
 & x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0
\end{array}
$$

a) Enuncieu el problema dual.
b) Calculeu la solució dual i els valors dels paràmetres sabent que el mínim global del primal és $(x, y, z) = (0,1,5)$, $F = 53$.

Tema 6. Anàlisi de sensibilitat i postoptimització

39. Siga el problema lineal i la taula òptima associada:

$$
\begin{array}{ll}
Max. & 2x + y + 4z \\
s.a: & 3x + 2y + 4z \leq 8 \\
 & x + y + 4z \leq 10 \\
 & x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0
\end{array}
$$

		2	1	4	0	0	
		x	y	z	s_1	s_2	
4	z	3/4	1/2	1	1/4	0	2
0	s_2	-2	-1	0	-1	1	2
z_j		3	2	4	1	0	8
w_j		-1	-1	0	-1	0	

a) Realitzeu l'anàlisi de sensibilitat de c_3.
b) Calculeu la nova solució òptima si c_1=4.
c) Realitzeu l'anàlisi de sensibilitat de b_1.
d) Calculeu la nova solució òptima si $A_2 = \binom{1/2}{2}$
e) Calculeu la nova solució òptima si s'introdueix una nova variable t amb $c_4 = 5$, $A_4 = \binom{3}{2}$.
f) Analitzeu si la introducció de la restricció $3x - y + 2z \geq 3$ provoca canvis importants en la solució òptima.

40. Siga el problema lineal i la taula òptima associada:

$$\begin{array}{ll} Max. & 4x + 2y + 5z \\ s.a: & 3x + 2y + 4z \leq 27 \\ & 3x + 4y + 2z \leq 21 \\ & x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \end{array}$$

		4	2	5	0	0	
		x	y	z	s_1	s_2	
4	x	1	2	0	-1/3	2/3	5
5	z	0	-1	1	1/2	-1/2	3
z_j		4	3	5	7/6	1/6	35
w_j		0	-1	0	-7/6	-1/6	

a) Realitzeu l'anàlisi de sensibilitat de c_2.
b) Calculeu la nova solució òptima si c_3=2.
c) Realitzeu l'anàlisi de sensibilitat de b_2.
d) Realitzeu l'anàlisi de sensibilitat de a_{12}.
e) Calculeu la nova solució òptima si el vector de termes independents passa a ser $b = \binom{24}{18}$.
f) Calculeu la nova solució òptima si s'afegeix una nova variable t amb $c_4 = 3$, $A_4 = \binom{2}{3}$.

41. Siga un problema de maximitzar beneficis (en euros) mitjançant la producció de dos tipus de torró (x, y) en quilos. Les restriccions indiquen la limitació d'ametlla (en quilos), de mel (en litres) i de sucre (en quilos), respectivament. L'enunciat i la taula òptima són:

$$\begin{array}{ll} Max. & B = 2x + 3y \\ s.a: & 0{,}3x + 0{,}5y \leq 700 \\ & 0{,}2x + 0{,}3y \leq 560 \\ & 0{,}4x + 0{,}2y \leq 630 \\ & x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{array}$$

		2	3	0	0	0	
		x	y	s_1	s_2	s_3	
2	x	1	0	-10/7	0	25/7	1250
3	y	0	1	20/7	0	-15/7	650
0	s_2	0	0	-4/7	1	-1/14	115
z_j		2	3	40/7	0	5/7	4450
w_j		0	0	-40/7	0	-5/7	

a) Interpreteu econòmicament la taula òptima.
b) Analitzeu quins valors podria tenir la disponibilitat d'ametlla per tal de mantenir vàlida la solució òptima. Raoneu econòmicament què passaria si aquesta disponibilitat canvia dins de l'interval de sensibilitat i si canvia eixint-se de l'interval.
c) Analitzeu quins valors podria tenir el benefici per quilo del segon tipus de torró per a mantenir vàlida la solució òptima. Raoneu econòmicament què passaria si aquest benefici per quilo canvia dins de l'interval de sensibilitat i si canvia eixint-se de l'interval.
d) Calculeu quin hauria de ser el benefici unitari d'un tercer tipus de torró (z) perquè fóra convenient produir-lo si cada quilo necessita 0,4 quilos d'ametlla, 0,4 litres de mel i 0,2 quilos de sucre.

Tema 7. Programació entera

42. Siga el problema lineal següent:

$$\begin{array}{ll} Max. & 4x+3y+2z \\ s.a: & 2x+y+z \geq 26 \\ & x+4y+3z \geq 22 \\ & x,y,z \in \mathbb{N} \end{array}$$

a) La solució del problema lineal associat és $(x,y,z) = (11'2{,}0{,}3'6)$, $F = 52$.
b) Plantegeu els dos problemes següents segons el mètode de branca i límit ramificant per a la variable x.
c) Les solucions dels nous problemes són $(x,y,z) = (12{,}0{,}10/3)$ i $(x,y,z) = (11{,}0{,}4)$. S'ha arribat a la solució òptima? En cas afirmatiu, digueu quina és i en cas negatiu, plantegeu els dos problemes següents.

43. Siga el problema lineal:

$$\begin{array}{ll} Max. & F = 3x+4y \\ s.a: & 2x+y \leq 12 \\ & x+4y \leq 14 \\ & 3x+2y \leq 18 \\ & x,y \in \mathbb{N} \end{array}$$

L'arbre del mètode de branca i límit és:

$$\begin{gathered} Problema\ 1.1 \\ (x,y) = (5\,,1'5) \\ F = 21 \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} Problema\ 1 \\ (x,y) = (4'4\,,2'4) \\ F = 22'8 \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} Problema\ 1.2.1 \\ (x,y) = (2\,,3) \\ F = 18 \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} Problema\ 1.2 \\ (x,y) = (4\,,2'5) \\ F = 22 \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} Problema\ 1.2.2 \\ (x,y) = (4\,,2) \\ F = 20 \end{gathered}$$

a) Escriviu la restricció que s'ha afegit en cada ramificació.
b) Raoneu si l'arbre està complet. En cas afirmatiu, digueu quina és la solució òptima. En cas negatiu, plantegeu els dos problemes que caldria resoldre a continuació.
c) Digueu quina seria la solució òptima si solament la variable *x* haguera de ser entera.

44. Siga el problema lineal:

$$\begin{aligned} Opt.\quad & F = 3x + 5y + 6z \\ s.a:\quad & 2x + 3y + 2z \leq 22 \\ & x + 7y + 5z \leq 34 \\ & x, y, z \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

L'arbre del mètode de branca i límit és:

$$\begin{gathered} Problema\ 1.1. \\ (x,y,z) = (4{,}0{,}6) \\ F = 48 \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} Problema\ 1. \\ (x,y,z) = (5'25\,,0,5'75) \\ F = 50'25 \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} Problema\ 1.2.1. \\ (x,y,z) = (6{,}0{,}5) \\ F = 48 \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} Problema\ 1.2. \\ (x,y,z) = \left(\frac{57}{11},\frac{6}{11},5\right) \\ F = 48 + \frac{3}{11} \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} Problema\ 1.2.2. \\ (x,y,z) = \left(5,\frac{4}{7},5\right) \\ F = 47 + \frac{6}{7} \end{gathered}$$

a) Raoneu si el problema és de maximització o de minimització.
b) Escriviu la restricció que s'ha afegit en cada ramificació.

c) Raoneu si l'arbre està complet. En cas afirmatiu, digueu quina és la solució òptima. En cas negatiu, plantegeu els dos problemes que caldria resoldre a continuació.
d) Digueu quina seria la solució òptima si solament la variable *z* haguera de ser entera.

45. Siga el problema lineal:

$$\begin{array}{ll} Min. & F = 3x + 7y \\ s.a: & 2x + 3y \geq 43 \\ & 4x + 3y \leq 58 \\ & x, y \in \mathbb{N} \end{array}$$

La solució del problema lineal associat és $(x, y) = (15/2, 28/3),\ F = 87 + \frac{5}{6}$.

Marqueu les opcions possibles:

- ☐ Després de la primera ramificació, les solucions dels problemes són: $(x, y) = (7, 29/3),\ F = 88 + \frac{2}{3}$ i infactible.
- ☐ Després de la primera ramificació, les solucions dels problemes són $(x, y) = (13/2, 10),\ F = 89'5$ i$(x, y) = (7'75, 9),\ F = 86'25$.
- ☐ La solució òptima del problema original és $(x, y) = (8, 9),\ F = 88$.
- ☐ La solució òptima del problema original és $(x, y) = (7, 10),\ F = 91$.

PART 3. ÚS DEL PROGRAMA LINGO

3.1. Introducció

El programa LINGO ha sigut desenvolupat per LINDO Systems Inc. És un programa dissenyat per a resoldre sistemes d'equacions i inequacions i problemes d'optimització, tant lineals com no lineals.

La resolució dels models es fa mitjançant distints *solvers*: per a problemes lineals, no lineals (amb o sense condicions apropiades de concavitat-convexitat), quadràtics, enters, etc. Tot i això, l'usuari no s'ha de preocupar d'elegir-los perquè el programa analitza el problema i tria el més adequat automàticament.

El programa LINGO destaca per la familiaritat del llenguatge que utilitza. Es tracta d'una sintaxi semblant a la que s'utilitza quan s'escriu el problema en el paper. En un nivell més avançat, LINGO admet un llenguatge de modelització l'objectiu del qual és generar models d'una gran dimensió, mitjançant l'ús de conjunts que permeten crear vectors i matrius amb els quals definir sumatoris i escriure restriccions i condicions de domini d'una manera més ràpida.

LINGO també admet la possibilitat de vincular dades amb un full de càlcul com Excel. D'una banda, les dades del problema d'optimització (coeficients de la funció objectiu, de les restriccions o termes independents de les restriccions) es poden importar des del full de càlcul i, de l'altra, la solució obtinguda amb LINGO per a les variables principals del problema es pot exportar al full de càlcul.

Per obtenir la versió lliure del programa LINGO cal entrar en l'adreça <http://www.lindo.com>. Aquesta és la pàgina principal de l'empresa que comercialitza aquest programa informàtic i uns altres de semblants. En aquesta adreça d'Internet s'informa de les versions més actuals, novetats, material complementari, etc. Per continuar amb la instal·lació cal seguir amb l'enllaç Downloads, després amb Download LINGO i triar la versió més recent del programa per al sistema operatiu que cada usuari utilitze. Després d'omplir un formulari i enviar la petició, es rep un correu electrònic amb un enllaç a una pàgina que permet la descàrrega del programa.

Les limitacions d'un problema per a poder ser resolt amb aquesta versió són:

- 150 restriccions
- 300 variables
- 30 variables enteres
- 30 expressions no lineals

3.2. Sintaxi bàsica del programa LINGO

El programa LINGO funciona en l'entorn Windows. Per tant, l'ús de les icones, dels menús i de les finestres són els habituals en tota aplicació Windows. La sintaxi bàsica de LINGO és molt senzilla, ja que la majoria de la notació matemàtica que s'utilitza quan s'escriu en paper es pot incorporar directament sobre un problema en LINGO.

En aquest epígraf es descriu la sintaxi bàsica del programa LINGO. Per tal d'introduir-hi un problema d'optimització matemàtica s'han de respectar les regles següents:

1. Funció objectiu: la direcció d'optimització s'ha d'indicar en forma abreujada seguida d'un signe igual i de l'expressió matemàtica de la funció:

   Max=expressió funció objectiu*;* o *Min*=expressió funció objectiu.

2. Expressions matemàtiques: són combinacions de nombres, variables, funcions @ i operadors matemàtics que s'utilitzen a fi d'indicar la funció objectiu o els primers membres de les restriccions. Cal fer les observacions següents:

   Nombres: el caràcter que separa la part entera i la decimal és un punt (4.5, per exemple). LINGO utilitza freqüentment la notació científica: 1E6 significa 1.000.000 i 2.3E-3 vol dir 0,0023, per exemple.

   Variables: per a referir-se a variables s'han d'utilitzar noms que comencen amb una lletra, encara que els caràcters següents poden ser lletres o nombres. Per exemple: *x*, *y*, *x*1, *x*23, *cost*; són noms vàlids de variables.

   Funcions @: Són funcions definides en LINGO que representen funcions especials de tipus matemàtic, trigonomètric, estadístic, financer, etc. Totes elles s'hi poden incorporar a mesura que s'escriu un problema des de l'opció de menú *Edit – Paste Function*. Alguns exemples són: @sin i @cos per al sinus i cosinus, @exp per a l'exponencial amb base e, @log per al logaritme neperià i@sqrt per a l'arrel quadrada. Un tipus especial de funcions @ a fi d'expressar les condicions de domini de les variables es descriu amb detall més endavant.

   Operadors matemàtics: els símbols associats i l'ordre d'execució són els següents:

Primer: signe (+ o -). Si apareix a l'inici d'una expressió matemàtica, és la primera operació que s'executa. Tot i això, aquest símbol en una posició no inicial s'interpreta com una suma o resta i és l'últim que s'executa.

Segon: exponent (^).

Tercer: producte(*) i divisió (/).

Quart: suma (+) i resta (–).

Per alterar l'ordre d'execució d'aquestes operacions s'han d'utilitzar parèntesis.

3. Restriccions: s'escriu el primer membre, que sol ser una expressió matemàtica, seguit d'un operador de comparació (=, >, <) i el segon membre, que sol ser un nombre. La desigualtat estricta no s'utilitza quan s'escriu el problema d'optimització, però en LINGO equival a la desigualtat no estricta.
4. Condicions de domini: LINGO entén que les variables poden prendre valors reals no negatius per defecte. Si aquest no és el cas, cal especificar-ho mitjançant funcions @:
   - $X \geq 0$: no cal escriure res.
   - *X* lliure: @FREE(X)
   - *X* fitada: @BND (fita_inferior, X, fita_superior). Si una fita és infinita s'utilitza un nombre suficientment gran. Per exemple X ≥ 10 s'escriuria @BND(10,X,1E20).
   - *X* entera: @GIN(X)
   - *X* binària: @BIN(X)

   En el menú *LINGO – Options – General Solver*, si es desactiva la casella *Variables assumed non-negative*, el valor per defecte seria el de variable lliure i caldria especificar si la variable és no negativa amb @BND(0,X,1E20).
5. Nom de les expressions: les expressions del model (funció objectiu i restriccions) es poden anomenar al començament de la línia entre claudàtors, és a dir, [nom]. A mesura que augmenta el nombre de restriccions, s'eviten confusions si s'anomenen i també es facilita la posterior interpretació econòmica de la solució. Aquests noms no poden contenir espais en blanc, ni accents, ni certs caràcters que signifiquen una altra cosa en el llenguatge de LINGO (*, -, +, /, @, !).
6. Comentaris: el símbol ! indica que a continuació s'escriurà un comentari. Apareixerà en verd i no s'executarà, per tant, no hi ha limitació per als caràcters que poden formar part d'un comentari.
7. Fi d'expressió: en acabar una expressió (funció objectiu, restricció o condició de domini) o un comentari, és obligat escriure un punt i coma (;).

Exemple 1. El problema d'optimització següent:

$$\begin{array}{ll} Min. & x^2+2y^2-0{,}5xy \\ s.a: & 2x+5y \geq 4 \\ & x+y=1 \\ & x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{array}$$

En sintaxi de LINGO és:

```
Min=x^2+2*y^2-0.5*x*y;
2*x+5*y>4;
x+y=1;
```

I opcionalment, amb comentaris i noms de línies per tal de facilitar la lectura del problema i la posterior interpretació econòmica, el problema podria ser:

```
!Problema de minimitzar el risc d'una inversió;
[Risc] Min=x^2+2*y^2-0.5*x*y;
!Restriccions;
[Rendibilitat_minima] 2*x+5*y>4;
[Capital_invertit] x+y=1;
!No calen condicions de domini perquè són de no-
negativitat;
```

En cas d'errades en la sintaxi, LINGO mostra una finestra d'advertència (*LINGO Error Message*) amb una indicació de la línia i la posició exacta on s'ha detectat l'errada. Cal mirar abans d'aquesta posició, fins i tot en les línies precedents, a fi de localitzar-la i corregir-la.

3.3. Principals opcions de menú

Opció File ('fitxer')

S'encarrega de facilitar la gestió de fitxers. Les opcions del submenú són les habituals en aplicacions Windows: obri un model nou (*New*), obri un model ja existent (*Open*), guarda el model amb el mateix nom (*Save*), guarda el model amb un altre nom o a una ubicació distinta (*Save as*) i imprimeix (*Print*).

Cal distingir dos tipus d'arxius: LINGO *Models* (*.lg4) per a l'enunciat del model i LINGO *Report* (*.lgr) per a la solució i l'anàlisi de sensibilitat que veurem més endavant. Així doncs, un model i la solució són dos arxius distints. Quan es guarda un arxiu, el nom assignat apareix a la línia de títol de la finestra (en color blau).

Opció Edit ('edició')

Les opcions de submenú inclouen les habituals de desfer i refer, i les de copiar, tallar i enganxar. Una opció interessant és *Select Font*, per a canviar el tipus o la grandària del text. També convé esmentar, com s'ha dit abans, l'opció *Paste Function* per a enganxar funcions @, les quals apareixen agrupades per categories. Per a expressions matemàtiques llargues amb molts parèntesis, podem fer ús de l'opció *Match Parenthesis* per a localitzar on s'ha obert o s'ha tancat un determinat parèntesi.

Opció LINGO

Inclou diverses opcions de submenú:

- *Solve*: executa el model actiu.
- *Solution*: s'utilitza per a determinar com volem mostrar la solució d'un model ja executat amb *Solve*.
- *Range*: mostra l'anàlisi de sensibilitat dels coeficients de la funció objectiu i dels termes independents de les restriccions. És una opció disponible solament en problemes lineals i s'explica més endavant.
- *Options*: Controla distints paràmetres que afecten la forma en què es resol el model. Per exemple, dins de la pestanya *General Solver* es pot desactivar l'opció per defecte que totes les variables siguen no negatives (*Variables assumed non-negative*) o es pot activar l'anàlisi de sensibilitat en programació lineal (seleccionant *Dual Computations* en *Prices&Ranges*). En la pestanya *Global Solver* es pot activar l'opció *Use Globasl Solver* per a programació no lineal. Tot i això, cal ser un usuari avançat per a modificar la majoria dels paràmetres que controlen la resolució dels problemes.

Opció Window ('finestra')

S'ocupa de la gestió de les finestres. Es poden tenir distints models oberts així com distintes finestres d'un mateix model. Amb el menú Window triarem la finestra activa en cada moment i com volem visualitzar al mateix temps diverses finestres.

Opció Help ('ajuda')

El submenú inclou *Help Topics* per a veure el contingut de l'ajuda, bé per capítols o bé per continguts alfabèticament, introduint en la casella corresponent l'opció que cal buscar.

3.4. Resolució d'un problema: parts de l'informe de solució

El problema es resol fent clic en l'eina , amb la combinació de tecles *Control+G* o amb l'opció de menú *LINGO – Solve*. Quan es resol un model apareix, si no hi ha errors de sintaxi, la finestra *LINGO Solver Status*, que mostra informació sobre el progrés en la cerca de la solució. En acabar, apareix en la mateixa finestra certa informació bàsica de la solució (si n'hi ha o no, tipus de solució, valor de la funció objectiu) així com informació tècnica de l'algoritme utilitzat (temps de la cerca, nombre d'iteracions, etc.). En cas que no hi haja solució, el missatge que es mostra serà *Infeasible* ('problema infactible') o *Unbounded* ('problema no fitat').

Si hi ha solució, quan es tanca la finestra *LINGO Solver Status* apareix una finestra nova (*Solution Report*) amb la solució del problema. En el cas de l'exemple 1, la finestra amb l'informe de la solució és:

```
Global optimal solution found.
  Objective value:                              0.8888889
  Objective bound:                              0.8888889
  Infeasibilities:                              0.000000
  Extended solver steps:                               1
  Total solver iterations:                            51

  Model Class:                                       NLP

  Total variables:                      2
  Nonlinear variables:                  2
  Integer variables:                    0

  Total constraints:                    3
  Nonlinear constraints:                1

  Total nonzeros:                       6
  Nonlinear nonzeros:                   2

                         Variable           Value        Reduced Cost
                                X       0.3333333            0.000000
                                Y       0.6666667            0.000000

                              Row    Slack or Surplus      Dual Price
RISC       0.8888889          -1.000000
             RENDIBILITAT_MINIMA        0.000000          -0.7222222
                CAPITAL_INVERTIT        0.000000            1.111111
```

La primera part de l'informe inclou el valor òptim de la funció objectiu (*Objective value* = 0,8889 en aquest cas) i algunes dades tècniques del *solver* que ha utilitzat LINGO. La segona part és la que cal interpretar tant matemàticament com econòmicament. La solució òptima del problema, en els aspectes més bàsics, està formada per les columnes *Value* i *Slack or Surplus*. En aquest cas, recordant que és un problema de selecció de cartera, la interpretació és la següent:

- Columna *Value*: indica el valor òptim de les variables principals del problema. La inversió en el primer actiu és $x = 1/3$ u. m. i en el segon actiu és $y = 2/3$ u. m.
- Columna *Slack or Surplus*: aquesta columna té tants valors com expressions hi ha en el model. Com que la primera és la funció objectiu, tenim que el risc mínim de la cartera d'inversió és 0,8889 unitats. La resta de valors en aquesta columna està associada a les restriccions. En concret, cada valor representa la diferència entre els dos membres de cada restricció, sempre en positiu. Si una restricció és d'igualtat, el valor que apareixerà serà un zero obligatòriament, com passa en aquest cas amb la segona restricció que obliga a invertir tot el capital d'1 u. m. Si la restricció és de desigualtat, els valors de la columna *Slack or Surplus* són els de les variables de marge de cada restricció, de manera que un valor igual a zero indicaria que la restricció se satura o es compleix amb igualtat, mentre que un valor distint de zero significaria que no se satura, i que n'hi ha un excés (*surplus*) en cas que la restricció siga de la forma $\geq$ o una mancança (*slack*) en cas que la restricció siga de la forma $\leq$.

  En aquest exemple, la restricció de rendibilitat mínima té una variable de marge igual a zero i això s'interpreta com que la rendibilitat de la cartera òptima és exactament la rendibilitat mínima requerida.

3.5. Anàlisi avançada de la solució

3.5.1. Multiplicadors de Kuhn i Tucker i/o variables duals

En problemes no lineals, la informació matemàtica i econòmica del problema es pot completar amb els multiplicadors de Kunh i Tucker. Si el problema és lineal, aquests multiplicadors equivalen a les variables principals duals (excepte, possiblement, pel signe) i si està en forma canònica també equivalen als rendiments marginals (última fila de la taula del símplex però amb el signe adequat). El valor dels multiplicadors de les restriccions està en la columna *Dual Price*:

- Columna *Dual Price*: en aquesta columna es proporcionen els multiplicadors de Kuhn i Tucker de cada restricció (no s'ha de considerar el *dual price* corresponent a la fila de la funció objectiu, normalment el primer). Perquè el valor del multiplicador de Kuhn i Tucker tinga la mateixa interpretació econòmica que la que hem vist en els apunts de teoria, el signe que apareix en la columna *Dual Price* caldrà canviar-lo si el problema és de minimitzar i deixar-lo igual si el problema és de maximitzar. A més, d'aquesta manera el signe dels multiplicadors serà coherent amb les condicions de Kuhn i Tucker estudiades o amb el signe de les variables duals: major o igual que zero si la restricció està en forma canònica i menor o igual que zero si no està en forma canònica.

  Recordem que la interpretació econòmica dels multiplicadors prové de l'expressió:

$$\frac{\partial F^*}{\partial b_i} = \lambda_i^* \quad \rightarrow \quad \Delta F^* \approx \lambda_i^* \cdot \Delta b_i$$

És a dir, representen l'efecte que té un augment marginal del terme independent sobre el valor òptim de la funció objectiu. En l'exemple 1, els multiplicadors valen $\lambda_1 = 0{,}72$ i $\lambda_2 = -1{,}11$ (amb signe contrari al de l'informe de la solució perquè el problema és de minimitzar). Per tant, augments marginals en la rendibilitat mínima exigida per a la cartera (terme independent de la 1a restricció) implicaran nivells de risc més elevats (relació directa perquè el multiplicador és positiu), mentre que augments marginals en la quantitat invertida (si es poguera invertir més d'1 u. m.) implicaran nivells de risc menors (relació inversa perquè el multiplicador és negatiu).

El valor del multiplicador podria servir per fer aproximacions del nou valor de la funció objectiu davant de variacions concretes en el terme independent, i aquestes aproximacions són millors com menors siguen les variacions. Així, si la rendibilitat mínima exigida augmentara a 4,1 des del nivell previ de 4 (augment de 0,1), la funció objectiu variaria en una quantia aproximadament igual que el producte del multiplicador per aquesta variació del terme independent, cosa que permetria calcular el nou valor aproximat del risc mínim, $\overline{F}$:

$$\Delta F^* \approx \lambda_i^* \cdot \Delta b_i \quad \rightarrow \quad (F - 0{,}8889) \approx 0{,}7222 \cdot (4{,}1 - 4) \quad \rightarrow \quad F \approx 0{,}9611$$

Si tornem a optimitzar el problema canviant el terme independent a 4,1, tindríem el valor exacte de la funció de risc, encara que en ocasions pot ser suficient amb l'aproximació calculada de la forma anterior.

Cal observar, no obstant això, que aquesta interpretació econòmica dels multiplicadors solament és vàlida si els canvis marginals no afecten decisivament la solució, i això és el que passa habitualment. Però si al mateix temps la restricció se satura i el multiplicador és zero, és a dir, si al mateix temps el *Slack or Surplus* i el *Dual Price* són zero per a alguna restricció, l'anterior interpretació econòmica no és vàlida per a cap multiplicador.

En problemes lineals, la informació de les variables duals es completa amb la columna *Reduced Cost*. Els valors d'aquesta columna equivalen a les variables de marge del dual (excepte, possiblement, pel signe) i, si el problema està en forma canònica, també equivalen als rendiments marginals de la taula del símplex amb el signe adequat. En qualsevol cas, tenen una interpretació econòmica que també resulta interessant:

- Columna *Reduced Cost*: aquesta columna solament s'interpreta en problemes lineals. En general, indica l'empitjorament de la funció objectiu per a cada unitat addicional que valguera la variable no bàsica corresponent. Alternativament, també indica quant hauria de millorar el coeficient de la variable no bàsica en la funció objectiu perquè el valor d'aquesta variable no fóra zero (o la fita en cas de variables fitades). Si el problema està en forma canònica, es pot equiparar al rendiment marginal (última fila de la taula del símplex) de les variables principals excepte el signe, que ha de ser negatiu en problemes de maximitzar i positiu, en problemes de minimitzar. Els valors de la columna *Reduced Cost* també equivalen a les variables de marge del dual però passant, si cal, el valor a positiu. Lògicament, les variables bàsiques tindran un *Reduced Cost* nul.

3.5.2. Òptim local - òptim global (cas no lineal)

Quan es resol amb LINGO un problema no lineal, en cas que hi haja una solució òptima, aquesta serà un òptim local, en general. Una manera d'augmentar les possibilitats que l'òptim siga global és fent ús de l'opció de menú *LINGO*, sub-opció *Options*, pestanya *General Solver* i activant la casella *Use Global Solver*. Açò farà que LINGO utilitze un *solver* que inclou un algoritme de cerca global de la solució.

En tot cas, l'única manera de garantir que l'òptim és global és comprovant les hipòtesis del teorema local global:

- funció objectiu còncava si es maximitza o convexa si es minimitza, i
- conjunt d'oportunitats convex.

En l'exemple 1 es verifiquen les hipòtesis del teorema local-global ja que:

- La funció objectiu és convexa (cas de minimitzar) perquè la matriu hessiana és $H = \begin{pmatrix} 2 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & 4 \end{pmatrix}$, que és definida positiva perquè els menors conduents són estrictament positius:$H_1 = 2 > 0$, $H_{12} = 7{,}75 > 0$.
- El conjunt d'oportunitats és convex, ja que és la intersecció de tres semiespais (la primera restricció, que és una desigualtat lineal, i les dues condicions de no-negativitat) i un hiperplà (la segona restricció, que és una igualtat lineal), tots ells conjunts convexos.

En conseqüència, el mínim local que proporciona LINGO és també mínim global en l'exemple 1. Si alguna hipòtesi no es verificara, la conclusió seria que no es pot garantir que l'òptim siga global però tampoc que no ho siga.

Cal recordar que en el cas de problemes lineals, l'òptim que calcule LINGO, en cas d'existir, serà sempre òptim global ja que, com hem raonat en els apunts de teoria, els problemes lineals verifiquen sempre les hipòtesis del teorema local global.

3.5.3. Solució degenerada – no degenerada (cas lineal)

En els apunts de teoria s'ha definit solució no degenerada com aquella en què totes les variables bàsiques són estrictament positives. Es tracta d'una definició referida al problema en forma estàndard, però quan es resol un problema amb ordinador no és habitual passar-lo a forma estàndard.

Per tant, deduir quines variables són bàsiques i no bàsiques en l'informe de solució de LINGO pot tenir una certa dificultat perquè no passem l'enunciat a forma estàndard. En concret, si l'enunciat del problema en LINGO té variables lliures o fitades, el raonament que s'utilitza teòricament en el mètode símplex per tal de distingir variables bàsiques i no bàsiques cal matisar-lo. A fi d'identificar correctament les variables no bàsiques s'ha de raonar en dos passos:

- Comptar quantes variables bàsiques hi ha (tantes com restriccions) i quantes no bàsiques (la resta, comptant les principals i les de marge associades a desigualtats).
- Quines són les bàsiques i quines, les no bàsiques: comencem identificant les bàsiques de la manera següent:
  - Si la condició de domini de la variable és de no-negativitat (forma estàndard), és bàsica si assoleix un valor òptim estrictament major que zero.
  - Si la condició de domini és la de variable fitada, és bàsica si té un valor no igual que cap de les fites.
  - Si la condició de domini és la de variable lliure, sempre és bàsica.

  Si amb aquest raonament hem trobat totes les bàsiques, estem davant d'una solució no degenerada i la resta de variables són no bàsiques. Si en falta alguna, estem davant d'una solució degenerada (alguna variable bàsica val zero o és igual a una fita). A fi de trobar-la hem de veure quina de les variables aparentment no bàsiques (valor zero o igual a una fita) té valor zero en la segona columna (*Reduced Cost* o *Dual Price*, segons el cas) i aquesta serà la bàsica que falta. Així, les no bàsiques seran la resta.

3.5.4. Solució única – solució múltiple (cas lineal)

En problemes lineals, pot ocórrer que la solució òptima del problema siga única (un vèrtex del conjunt d'oportunitats) o múltiple (una aresta, una cara, etc.). Per tal d'analitzar si la solució és única o no, com ja hem vist des d'una taula òptima del símplex en els apunts de teoria, cal fixar-se en els rendiments marginals (columnes *Reduced Cost* i *Dual Price*) de les variables no bàsiques: si algun valor és zero, la solució és múltiple i si tots són distints de zero, la solució és única.

La identificació de les no bàsiques segueix el raonament que s'ha explicat en l'epígraf 5.2.

Exemple 2. En el problema lineal següent

$$\begin{array}{ll} Max. & x_1 + 2x_2 \\ s.a: & x_1 + x_2 \le 4 \\ & 2x_1 + x_2 \le 6 \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{array}$$

la solució òptima del qual amb LINGO és:

```
Variable      Value         Reduced Cost
X1          0.000000           1.000000
X2          4.000000           0.000000

Row     Slack or Surplus       Dual Price
1         8.000000             1.000000
2         0.000000             2.000000
3         2.000000             0.000000
```

Les variables bàsiques són dues, perquè hi ha dues restriccions, i són x_2 i s_2 ja que tenen un valor òptim distint de zero (variables amb condicions de domini de no-negativitat), raó per la qual la solució és no degenerada. Ara, observant les columnes *Reduced Cost* i *Dual Price* de les no bàsiques, x_1 i s_1, com que els valors són no nuls, la solució és única.

Exemple 3. En canvi, en el problema amb variables fitades següent:

$$\begin{array}{ll} Màx. & x_1 + 2x_2 \\ s.a: & -x_1 + x_2 \le 2 \\ & 0 \le x_1 \le 5 \\ & 1 \le x_2 \le 4 \end{array}$$

la solució òptima del qual amb LINGO és:

```
Variable       Value          Reduced Cost
X1          5.000000           -1.000000
X2          4.000000           -2.000000

Row     Slack or Surplus       Dual Price
1         13.00000             1.00000
2         3.000000             0.000000
```

L'única variable bàsica és s_1 (solament hi ha una restricció), mentre que x_1 i x_2 són no bàsiques perquè, encara que el valor d'aquestes variables no és zero, sí que és igual a una fita, en concret, les dues són iguals a la fita superior. Com que la variable bàsica s_1 no és zero, la solució és no degenerada i com que les columnes *Reduced Cost* i *Dual Price* de les no bàsiques x_1i$x_2$no tenen cap valor nul, la solució és única.

3.5.5. Anàlisi de sensibilitat (cas lineal)

L'anàlisi de sensibilitat té com a objectiu calcular en quin rang o interval de valors pot situar-se un coeficient de la funció objectiu o un terme independent d'una restricció perquè la solució òptima canvie "de manera poc important". L'expressió "de manera poc important" vol dir, en el context del mètode símplex, que les variables bàsiques i no bàsiques siguen les mateixes (mateixa composició de la base), encara que canvie el valor d'aquestes variables bàsiques i/o de la funció objectiu.

Així doncs, si el valor original d'un paràmetre del problema canvia i se n'ix de l'interval de sensibilitat, la solució òptima sabem que canviarà de manera important ja que les variables bàsiques i no bàsiques seran unes altres. Però, si el canvi és tal que el valor del paràmetre roman dins de l'interval de sensibilitat, la solució òptima patirà solament canvis de poca importància que, pels coneixements teòrics que tenim, sabem que seran els següents segons el paràmetre concret de què es tracte:

- Canvis en un coeficient de la funció objectiu de variable no bàsica (dins de l'interval de sensibilitat): no canvia ni el valor de les variables bàsiques ni el valor de la funció objectiu.
- Canvis en un coeficient de la funció objectiu de variable bàsica (dins de l'interval de sensibilitat): no canvia el valor de les variables bàsiques però sí el valor de la funció objectiu.
- Canvis en un terme independent de les restriccions (dins de l'interval de sensibilitat): canvia el valor de les variables bàsiques i el valor de la funció objectiu.

En LINGO aquesta anàlisi es du a terme amb el menú *LINGO*, opció *Range*. Però cal observar que el problema s'ha d'haver resolt amb l'opció de càlcul dels rangs de sensibilitat activada. Com que aquesta opció no està activada per defecte i l'anàlisi de sensibilitat és una eina interessant en la interpretació econòmica dels problemes d'optimització, és convenient activar-la per defecte i tenir-la sempre al nostre abast. La manera d'activar-la per defecte és amb la seqüència: menú *LINGO*, opció *Options*, pestanya *General Solver*, desplegar el menú *Dual Computations*, seleccionar *Prices & Ranges* i botó *Save*.

Si no es premel botó *Save*, l'anàlisi de sensibilitat estarà activa únicament en la sessió actual de LINGO. Amb el botó *Save*, en canvi, tot problema que es resolga en sessions posteriors també tindrà activada aquesta anàlisi, ja que passarà a ser l'opció per defecte. No obstant això, aquesta opció activada pot generar algun inconvenient en problemes no lineals, de manera que si apareix algun missatge en aquest sentit, caldrà desactivar l'anàlisi de sensibilitat.

Una vegada resolt el problema d'optimització amb aquesta opció activada, l'anàlisi de sensibilitat es mostra amb el menú *LINGO*, opció *Range*; des de la finestra del model, no des de la de l'informe de solució.

L'anàlisi de sensibilitat apareix en una finestra nova anomenada *Range Report*, que es pot guardar en un arxiu per separat amb l'extensió .lgr. La manera de construir l'interval de sensibilitat dels coeficients de la funció objectiu i dels termes independents de les restriccions és aplicant els augments (Allowable Increase) i disminucions (Allowable Decrease) permeses sobre el valor original del coeficient (Current Coefficient) o del terme independent (Current RHS).

En el problema de l'exemple 2, l'anàlisi de sensibilitat amb LINGO origina la pantalla següent:

```
Objective Coefficient Ranges:

            Current         Allowable        Allowable
Variable   Coefficient        Increase         Decrease
X1           1.000000         1.000000         INFINITY
X2           2.000000         INFINITY         1.000000

Righthand Side Ranges:

            Current         Allowable        Allowable
Row             RHS          Increase         Decrease
2          4.000000          2.000000         4.000000
3          6.000000          INFINITY         2.000000
```

Sumant els augments (columna *Allowable Increase*) i restant les disminucions (columna *Allowable Decrease*) al valor original (columna *Current Coefficient* o *Current RHS*) es dedueix que l'interval de sensibilitat del primer coeficient de la funció objectiu és $]1-\infty, 1+1]=]-\infty, 2]$, el del segon coeficient de la funció objectiu és $[2-1, 2+\infty[=[1, +\infty[$, el del terme independent de la primera restricció és $[4-4, 4+2] = [0, 6]$ i el del terme independent de la segona restricció és $[6-2, 6+\infty] = [4, +\infty[$.

La interpretació matemàtica és:

- Si el coeficient de la primera variable en la funció objectiu (coeficient de variable no bàsica) canvia entre $-\infty$ i 2, la solució òptima seguirà tenint les mateixes variables bàsiques i no bàsiques amb els mateixos valors òptims de les variables bàsiques i el mateix valor òptim de la funció objectiu.

- Si el coeficient de la segona variable en la funció objectiu (coeficient de variable bàsica) canvia entre 1 i $+\infty$, la solució òptima seguirà tenint les mateixes variables bàsiques i no bàsiques amb els mateixos valors òptims de les variables bàsiques encara que amb un valor òptim distint de la funció objectiu.
- Si el primer terme independent canvia entre 0 i 6 o el segon terme independent entre 4 i $+\infty$, la solució òptima seguirà tenint les mateixes variables bàsiques i no bàsiques però amb valors òptims distints de les variables bàsiques i amb un valor òptim de la funció objectiu també distint.

La interpretació econòmica d'aquests intervals depèn de l'enunciat econòmic del problema. En cada aplicació econòmica la frase "la solució òptima continuarà tenint les mateixes variables bàsiques i no bàsiques" té un significat econòmic propi. Per exemple, en un problema de producció de quantitats de distints productes amb restriccions de recursos limitats vol dir que "l'estratègia òptima de producció continuarà consistint en produir els mateixos productes que abans es produïen i en no produir els que abans no es produïen, mentre que seguirem esgotant els mateixos recursos que abans també s'esgotaven". No vol dir necessàriament que la quantitat produïda o la quantitat de recurs que queda sense utilitzar siga la mateixa que abans o que els beneficis òptims siguen els mateixos, això depèn del paràmetre concret que s'estiga analitzant.

3.5.6. Programació lineal entera

El tractament de problemes enters, tant si són lineals com no lineals, s'especifica mitjançant les funcions @GIN per a variables enteres i @BIN per a variables binàries. Automàticament, LINGO ja detecta que el problema és enter i aplica els mètodes de resolució corresponents.

La solució obtinguda, en cas que n'hi haja, serà global encara que no es podrà analitzar si es única o no, ja que no té sentit interpretar la columna *Reduced Cost* o *Dual Price* com abans. Tampoc no és possible fer una anàlisi de sensibilitat. Per tant, les úniques parts de l'informe de la solució que es poden interpretar són el valor de les variables principals (columna *Value*) i les de marge i funció objectiu (columna *Slack or Surplus*).

PART 4. MODELITZACIÓ DE PROBLEMES I APLICACIONS ECONÒMIQUES PRINCIPALS

4.1. Modelització de problemes d'optimització matemàtica

La modelització d'un problema d'optimització significa passar d'un enunciat econòmic a un enunciat matemàtic. Aquest procés és habitualment molt complex ja que en Economia intervenen una gran quantitat de variables i de restriccions, i cal seleccionar-ne les més rellevants. En general, la modelització definitiva d'un problema solament s'aconsegueix després de repetits intents en els quals la solució del problema no ha resultat satisfactòria i analitzant-ne els motius s'arriba a la conclusió que falten o sobren variables o restriccions. En aquest curs, els enunciats econòmics ja incorporaran simplificacions, motiu pel qual el procés de modelització serà més simple.

La modelització és un procés molt intuïtiu. No es tracta d'aprendre cap regla automàtica com passa amb uns altres aspectes de l'assignatura. No obstant això, sí que es poden distingir quatre parts en el procés de modelització d'un problema d'optimització: identificar las variables, plantejar la funció objectiu, identificar i plantejar les restriccions, i escriure les condicions de domini. En cada part, caldrà tenir en compte algunes observacions generals i evitar errors comuns.

4.1.1. Identificar les variables principals o de decisió

Les variables principals del problema són aquelles sobre les quals el subjecte decisor pot influir de manera directa: quantes unitats produir de cada producte, quantes unitats s'han de consumir de cada bé, quants diners s'han d'invertir en cada actiu, prendre o no prendre una decisió determinada (construir una autovia, comprar una casa, etc.), etc.

Cal distingir les variables principals d'unes altres variables de tipus endogen, que són les que s'obtenen com a conseqüència de les primeres: nivell d'utilitat d'un consumidor, renda que es gasta en consumir, nivell de risc d'una inversió, quantitat de cada recurs utilitzat en la producció, etc. El subjecte no pot prendre una decisió directa sobre aquestes variables.

Les variables de decisió s’han d’identificar al començament de la modelització assignant un nom de variable amb lletres i, si és el cas, subíndexs numèrics. Per exemple x, y, z, x_1, x_2, x_{13}, ...; encara que també es poden utilitzar noms associats al significat econòmic de la variable. A continuació, cal afegir què representa cada variable en el context econòmic del problema i en quines unitats de mesura estarà expressada. Per exemple, en un problema d’inversió una identificació correcta i una incorrecta d’una variable és:

x_1: quantitat invertida en l’actiu de renda fixa (en milers d’euros) → correcta

x_1: renda fixa → incorrecta

4.1.2. Identificar i plantejar la funció objectiu

La magnitud que el problema indique que s’ha de maximitzar o minimitzar és la funció objectiu. És una expressió matemàtica que combina nombres, variables de decisió i operadors matemàtics. Aquesta magnitud cal identificar-la, dir si es maximitza o minimitza, indicar-ne les unitats de mesura i, sobretot, plantejar l’expressió matemàtica o forma funcional. De vegades es construirà a partir d’unes altres funcions intermèdies. Per exemple, els beneficis són ingressos menys costos; els ingressos són preus de venda per unitats venudes; els costos totals són els fixes més els variables; els costos variables són els costos unitaris pel nombre d’unitats, etc.

4.1.3. Plantejar les restriccions

Tot allò que implique una limitació per al valor de les variables principals s’ha d’expressar en forma de restricció o de condició de domini. Si la limitació afecta més d’una variable de decisió, tindrà forma de restricció i si afecta una única variable, serà normalment una condició de domini.

Les restriccions poden estar originades per multitud de situacions: limitacions de recursos, limitacions pressupostàries, motius tecnològics, condicions de demanda, etc.

Les restriccions estan formades per dos membres i per un operador de comparació ($\geq$, $\leq$ ó $=$) que els relaciona. Habitualment, el primer membre d’una restricció és una funció matemàtica que depèn de les variables de decisió, mentre que el segon membre és un nombre. Per exemple, la restricció pressupostària del problema del consumidor indica que el pressupost gastat en el consum dels béns (primer membre: depèn de les variables principals ja que és igual als preus de cada bé per les quantitats consumides) ha de ser menor o igual (operador de comparació) que el pressupost disponible (segon membre: és un valor numèric conegut).

Els dos membres d'una restricció han d'estar expressats en la mateixa unitat de mesura. Per tant, cal fer les transformacions adequades si les dades del problema no estan referides a unitats homogènies.

Si un problema es vol resoldre amb ordinador, pot aparèixer un possible problema d'escala en les xifres quan es planteja la funció objectiu com les restriccions i les fites. Això passa quan hi ha molta diferència de magnitud entre unes xifres i unes altres en l'enunciat. Açò és una dificultat per a la resolució del problema amb ordinador ja que la velocitat i exactitud de la solució numèrica que proporcione l'ordinador serà major si no hi ha molta diferència de magnitud en les xifres. Aquest inconvenient es resol redefinint les variables o les xifres amb un canvi d'escala. Per exemple, si en una restricció es combinen tipus d'interès del 2% i del 5% (ordre d'escala de 10^{-2}) i un ingrés mínim per interessos d'un milió d'euros (ordre d'escala de 10^{6}), si les variables (quantitats invertides en dos actius) estan expressades en euros quedaria, $0{,}02x_1 + 0{,}05x_2 \geq 1000000$; però si les expressem en milions d'euros, reduirem la diferència d'escala entre les xifres que representen els tipus d'interès i la xifra que representa el capital: $0{,}02x_1 + 0{,}05x_2 \geq 1$.

4.1.4. Condicions de domini

Ací s'especificaran, si n'hi ha, les condicions de no-negativitat, les variables fitades i les variables que, per la interpretació econòmica que tenen, siguen enteres o binàries. Exemples de les condicions de domini principals són:

$$\begin{array}{ccc} x \geq 0 & \rightarrow & \text{variable no negativa} \\ 5 \leq x \leq 20 & \rightarrow & \text{variable fitada} \\ x \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{N} & \rightarrow & \text{variable entera} \\ x \in \{0,1\} & \rightarrow & \text{variable binària} \end{array}$$

En cas de variables lliures no caldrà escriure res. Les variables no negatives són les habituals en aplicacions econòmiques: quantitats consumides, quantitats produïdes, quantitats invertides, etc. Les variables fitades s'utilitzaran quan en el problema apareguen condicions de demanda o de capacitat productiva que afecten una única variable.

Encara que moltes vegades les variables del problema hagen de ser enteres pel significat econòmic que tenen, com que la resolució d'un problema amb variables enteres mitjançant l'ordinador és més lenta i no permet fer anàlisi de sensibilitat, de vegades resultarà convenient considerar que les variables no són enteres i obtenir la solució entera arredonint la solució del problema no enter. Açò, no obstant això, ha de ser correctament valorat pel subjecte decisor en funció de les característiques concretes del problema.

D'altra banda, les variables binàries són un tipus especial de variables que solament poden prendre valor 0 o 1 i que van lligades a decisions: executar o no executar un projecte, assignar un treballador a un lloc de treball o no assignar-l'hi, etc.

Encara que es poden plantejar infinits tipus de problemes d'optimització, en Economia és habitual que un problema tinga una estructura semblant a la d'algun dels problemes considerats com a bàsics. Per tant, convé estudiar les aplicacions econòmiques més habituals ja que molts problemes responen al mateix esquema o són variants d'algun d'aquests models més típics.

4.2. Aplicacions econòmiques principals

4.2.1. Programació no lineal

Problema (de maximitzar la utilitat) del consumidor

Aquest problema és el que origina tota la teoria de la demanda. Es tracta de determinar la combinació de consums de cada bé que fa màxima la utilitat del consumidor (funció *U*) tenint en compte la limitació pressupostària imposada per la renda disponible del consumidor (*M*). En el cas més bàsic de dos únics béns, el problema és el següent:

$$\begin{array}{rc} Max. & U(x,y) \\ s.a: & p_x x + p_y y \leq M \\ & x \geq 0, \qquad y \geq 0 \end{array}$$

La funció d'utilitat pot ser diversa, però per a ser compatible amb el supòsit habitual de comportament racional del consumidor ha de tenir derivades parcials estrictament positives (es prefereix més consum a menys) i ser còncava (es prefereix una mescla de béns que especialitzar-se en el consum d'un d'aquests). Amb aquests supòsits, el problema compleix el teorema local-global i el màxim local que proporcione l'ordinador és també el màxim global.

El problema pot tenir variants en cas d'exigències de consums mínims de subsistència, consums màxims de saturació, proporcions fixes en el consum dels béns, etc.

> **Exemple 4.** Un individu té una funció d'utilitat que depèn del consum de dos béns (en quantitats x i y): $U(x, y) = 10x^{0'3}y^{0'7}$. Els preus unitaris dels béns són 1'4 i 1 unitats monetàries, respectivament, i la renda pressupostària és de 140 u. m. S'han de calcular les quantitats consumides a fi de maximitzar la utilitat.

<u>Modelització</u>:

- Identificació de variables:
  x: quantitat consumida del primer bé (en unitats)
  y: quantitat consumida del segon bé (en unitats)
- Funció objectiu:
  U: funció d'utilitat (en unitats d'utilitat).
  Direcció d'optimització: maximitzar
  Forma funcional: $U(x, y) = 10x^{0,3}y^{0,7}$
- Restriccions:
  Pressupost limitat: $1{,}4x + y \leq 140$
- Condicions de domini:
  No-negativitat: $x \geq 0,\ y \geq 0$
- Plantejament matemàtic del problema:

$$\begin{array}{rl} Max. & 10x^{0,3}y^{0,7} \\ s.a: & 1{,}4x + y \leq 140 \\ & x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{array}$$

<u>Model i solució amb LINGO</u>:

```
!Problema PNL1: Problema del consumidor;
[Utilitat] Max=10*x^0.3*y^0.7;
[Pressupost] 1.4*x+y<140;
```

```
Variable      Value          Reduced Cost
  X        30.00000           0.0000000
Y        98.00000           0.1450048E-06

Row     Slack or Surplus       Dual Price
 [OBJ]       687.0599            1.000000
 [PPTO]      0.0000000           4.907570
```

Interpretació i anàlisi: El vector òptim de consum és (30, 98). Consumirà 30 unitats del primer bé i 98 del segon. La utilitat màxima és de 687,06 unitats d'utilitat. La variable de marge és zero i això vol dir que es gasta tot el pressupost comprant ambdós béns. El multiplicador de Kuhn i Tucker és 4,90757 i la interpretació és que per cada unitat monetària marginal addicional de renda la utilitat màxima augmentarà 4,90757 unitats d'utilitat aproximadament. El màxim és global: funció objectiu còncava, perquè és del tipus Cobb-Douglass amb suma d'exponents menor o igual a 1, i el conjunt d'oportunitats és convex perquè és la intersecció de tres semiespais.

Problema (de minimitzar els costos) de l'empresa

Aquest problema és el que origina tota la teoria de l'oferta. Es tracta de determinar en quines quantitats s'han d'utilitzar els factors productius per minimitzar els costos de l'empresa tenint en compte l'obtenció d'un nivell mínim de producció (Q). En el cas més bàsic de dos únics factors productius, capital (K) i treball (L), i si anomenem F la funció de producció, el problema és:

$$\begin{array}{ll} Min. & p_K K + p_L L \\ s.a: & F(K,L) \geq Q \\ & K \geq 0, \quad L \geq 0 \end{array}$$

La funció de producció F ha de complir certes condicions de coherència econòmica, com ara tenir derivades de primer ordre positives (més factor productiu implica més producció) i de segon ordre negatives (quantitats addicionals de factor productiu fan augmentar cada vegada menys la producció). Les funcions còncaves compleixen aquesta segona condició, motiu pel qual les funcions de producció habituals són còncaves. Això provoca que el problema de l'empresa verifique el teorema local-global i, en conseqüència, el mínim local obtingut amb l'ordinador serà també mínim global.

Les principals variants d'aquest problema apareixen en cas que hi haja limitacions en els factors productius.

Exemple 5. Una empresa té una funció de producció que depèn de la quantitat utilitzada de dos factors productius, capital i treball: $F(K,L) = 25K^{0,4}L^{0,6}$. Els costos unitaris dels factors són d'1 i 3 unitats monetàries, respectivament, i la producció mínima que ha d'assolir l'empresa és de 198 unitats. S'ha de calcular la quantitat de factors productius que ha d'emprar l'empresa per a minimitzar els costos.

<u>Modelització</u>:

- Identificació de variables:
  K: quantitat utilitzada de capital (en unitats)
  L: quantitat utilitzada de treball (en unitats)
- Funció objectiu:
  C: funció de cost (en unitats monetàries).
  Direcció d'optimització: minimitzar
  Forma funcional: $C(K,L) = K + 3L$
- Restriccions:
  Producció mínima: $25K^{0,4}L^{0,6} \geq 198$
- Condicions de domini:
  No-negativitat: $K \geq 0,\ L \geq 0$
- Plantejament matemàtic del problema:

$$\begin{array}{ll} Min. & K + 3L \\ s.a: & 25K^{0,4}L^{0,6} \geq 198 \\ & K \geq 0, \quad L \geq 0 \end{array}$$

<u>Model i solució amb LINGO</u>:

```
!Problema PNL2: Problema de l'empresa;
!Funció objectiu;
[OBJ] Min=K+3*L;
!Restricció de producció mínima;
[PRMIN] 25*K^0.4*L^0.6>198;

Solució:

Variable          Value          Reduced Cost
     K         12.00447            0.0000000
     L         6.002238            0.0000000

Row         Slack or Surplus       Dual Price
  [OBJ]         30.01119             1.000000
  [PRMIN]       0.0000000           -0.1515717
```

Interpretació i anàlisi: La solució és aproximadament (12, 6). S'empraran 12 unitats de capital i 6 de treball. Els costos mínims són de 30 unitats monetàries. La variable de marge és zero, cosa que econòmicament significa que la producció que assoleix l'empresa és exactament igual a la mínima que s'exigia. El multiplicador de Kuhn i Tucker és 0,15157 (amb signe canviat perquè és l'objectiu de minimitzar) i la interpretació és que si s'augmenta una unitat marginal la producció mínima exigida, els costos augmentaran 0,15157 unitats monetàries marginals aproximadament. Aquest mínim local és també global perquè es compleix el teorema local-global: la funció objectiu és convexa, perquè és lineal; i el conjunt d'oportunitats és convex perquè és intersecció de convexos, dos semiespais (condicions de no-negativitat) i un conjunt de nivell superior (la restricció de producció mínima) amb funció còncava en el primer membre perquè són de tipus Cobb-Douglas.

Problema de selecció de cartera

És el problema que va originar la teoria moderna de la inversió. Es coneix també com el model de mitjana-variància perquè combina aquestes dues mesures en l'enunciat del problema d'optimització. La forma més habitual del problema és la de minimitzar el risc de la inversió amb una restricció de rendibilitat mínima i una altra de capital que cal invertir. Les variables de decisió són les quantitats que cal invertir en cada actiu. La funció de risc es representa mitjançant la variància de la inversió, una funció quadràtica del tipus forma quadràtica on la matriu representativa és la de variàncies i covariàncies de les rendibilitats històriques dels actius que formen part de la cartera d'inversió. Com que la matriu de variàncies i covariàncies és sempre almenys semidefinida positiva, la funció de risc sempre és convexa i això, juntament amb la linealitat de la resta de funcions, garantirà el compliment del teorema local-global.

Les principals variants del problema inclouen restriccions addicionals o fites i així forçar la diversificació de la cartera en algun sentit.

Exemple 6. Un inversor disposa d'un pressupost màxim d'una unitat monetària (d'aquesta manera, els resultats s'interpretaran en tant per 1) per tal d'invertir en dos tipus d'actius, renda fixa (x) i renda variable (y). Les rendibilitats esperades són del 2'2% i del 6%, respectivament, i l'inversor exigeix una rendibilitat mínima esperada del 3'5% per a la inversió. La funció de risc és: $0{,}005x^2 + 0{,}08y^2 - 0{,}01xy$. Es vol obtenir la quantitat del pressupost que s'ha d'invertir en cada actiu per tal de minimitzar el risc.

Modelització:

- Identificació de variables:
  x: quantitat que cal invertir en renda fixa (en unitats monetàries)
  y: quantitat que cal invertir en renda variable (en unitats monetàries)
- Funció objectiu:
  R: funció de risc (en unitats de risc).
  Direcció d'optimització: minimitzar
  Forma funcional: $R(x,y) = 0{,}005x^2 + 0{,}08y^2 - 0{,}01xy$
- Restriccions:
  Rendibilitat mínima: $0{,}022x + 0{,}06y \geq 0{,}035$
  Pressupost disponible màxim: $x + y \leq 1$
- Condicions de domini:
  No-negativitat: $x \geq 0,\ y \geq 0$
- Plantejament matemàtic del problema:

$$\begin{array}{ll} Min. & 0{,}005x^2 + 0{,}08y^2 - 0{,}01xy \\ s.a: & 0{,}022x + 0{,}06y \geq 0{,}035 \\ & x + y \leq 1 \\ & x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{array}$$

Model i solució amb LINGO:

```
!Problema PNL3: Problema de selecció de cartera;
!Funció objectiu;
[OBJ] Min=0.005*x^2+0.08*y^2-0.01*x*y;
!Restricció de rendibilitat mínima;
[RMIN] 0.022*x+0.06*y>0.035;
!Restricció pressupostària;
[PPTO] x+y<1;

Solució:

Variable        Value           Reduced Cost
X           0.6578947           0.0000000
Y             0.3421053           0.0000000

Row       Slack or Surplus      Dual Price
[OBJ]         0.9276316E-02        1.000000
[RMIN]        0.0000000           -1.184211
[PPTO]      0.0000000            0.2289474E-01
```

Interpretació i anàlisi: S'invertiran 0,6579 unitats monetàries (un 65,79% del pressupost màxim) en el primer actiu i 0,3421 unitats monetàries (un 34,21%) en el segon actiu. El risc de la cartera és de 0,009276 unitats de risc. Ambdues restriccions estan saturades, és a dir, la rendibilitat de la cartera és exactament igual a la mínima exigida i el pressupost s'inverteix totalment. El primer multiplicador és 1,1842, motiu pel qual si exigim obtenir una unitat marginal més de rendibilitat mínima per a la cartera, el risc augmentarà 1,1842 unitats marginals. El segon multiplicador val –0,02289, cosa que significa que si augmenta el pressupost en una unitat monetària marginal, el risc disminuirà 0,02289 unitats marginals de risc. El mínim local obtingut és global perquè es compleix el teorema local-global: en primer lloc, la funció objectiu és convexa, donat que la hessiana (matriu de variàncies i covariàncies) és definida positiva: $H = \begin{pmatrix} 0{,}01 & -0{,}01 \\ -0{,}01 & 0{,}16 \end{pmatrix}$ amb menors principals majors o iguals que zero; i, en segon lloc, el conjunt d'oportunitats és convex, perquè és la intersecció de 4 semiespais.

Problema de combinació òptima de recursos

Encara que aquest problema és el més típic de la programació lineal (vegeu l'epígraf 4.2.2 a continuació), en ocasions la funció de beneficis que s'ha de maximitzar és no lineal. La no-linealitat pot ocórrer per dos motius principalment: en primer lloc, si en la funció d'ingressos els preus dels productes són funció decreixent de les quantitats venudes (per exemple, una empresa de vins haurà de baixar el preu per botella si la producció és molt elevada) i, en segon lloc, si en la funció de cost els costos unitaris són creixents amb les unitats produïdes (per exemple, augmentar la quantitat de marbre extret d'una pedrera implicarà treballs cada vegada més dificultosos i de cost més elevat). En els dos casos la funció de beneficis que s'obté és no lineal i còncava, i així es compleix el teorema local-global perquè les restriccions que indiquen les limitacions de recursos són lineals.

4.2.2. Programació lineal

Combinació òptima de recursos

És el problema més típic de la programació lineal. En aquest problema les variables de decisió són les quantitats produïdes de cada producte i normalment s'assimilen a les quantitats venudes. Es tracta de maximitzar el benefici o l'ingrés de l'empresa però tenint en compte que en el procés productiu s'utilitzen uns recursos que estan limitats. Les restriccions indiquen que el factor utilitzat en la producció no pot excedir la disponibilitat que n'hi ha. Quan es planteja el primer membre de la restricció s'empren uns coeficients tècnics que depenen de l'eficiència tecnològica de l'empresa. La forma d'una restricció típica d'aquest problema és la següent:

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i$$

Els coeficients tècnics a_{ij} indiquen la quantitat de recurs i utilitzada en la producció d'una unitat del producte j. Així, el primer membre és la quantitat total de recurs utilitzat i el segon membre, b_i, la quantitat de recurs disponible.

El problema de combinació òptima de recursos pot tenir, addicionalment, restriccions o fites de demanda o de capacitat productiva.

Exemple 7. L'empresa PANIC SL utilitza farina refinada, farina integral, farina de sègol i oli (a més de rent, sal i aigua) per produir cinc tipus de barres de pa: normal, rústic, de sègol, integral i d'oli. En la taula següent apareix la quantitat (en grams o mil·lilitres) de cada ingredient que són necessaris en l'elaboració de cada barra de pa i les existències de cada ingredient:

Pa	Farina refinada (gr.)	Farina integral (gr.)	Farina de sègol (gr.)	Oli (ml.)
Normal	130	0	25	10
Rústic	90	15	50	10
De sègol	40	15	50	10
Integral	20	80	25	10
D'oli	80	0	20	40
Existències	3 sacs de 30 kg	5 sacs de 10 kg	3 sacs de 10 kg	10 litres

Els preus de venda al públic són: 65 cèntims d'euro per cada barra de pa normal, 75 cèntims el rústic, 90 cèntims el de sègol, 80 cèntims l'integral i 85 cèntims el d'oli.

La demanda màxima diària és de 750 barres de pa conjuntament entre pa normal, rústic i de sègol; i de 200 barres entre pa integral i d'oli. Amés, es venen més del triple de pans normals que d'oli. La demanda mínima diària de cada tipus de pa és de 180 barres per al normal, 140 per al rústic, 150 per al de sègol, 70 per a l'integral i 50 per al d'oli.

L'objectiu és determinar quantes barres s'han d'elaborar de cada tipus de pa per a maximitzar els ingressos suposant que ven tots els que produeix.

Modelització:

- Identificació de variables:

x_1, ..., x_5: nombre de barres de cada tipus de pa (en el mateix ordre que apareix en la taula de dades anterior) que s'han d'elaborar al dia.

- Funció objectiu:

I: ingressos diaris (en euros)

Direcció d'optimització: maximitzar

Forma funcional: $I = 0{,}65x_1 + 0{,}75x_2 + 0{,}9x_3 + 0{,}8x_4 + 0{,}85x_5$

- Restriccions:

Bloc de restriccions de limitació de recursos en el mateix ordre que apareixen en la taula de dades anterior). Les unitats de mesura s'han homogeneïtzat als dos membres: les tres primeres en quilograms i la darrera, en litres:

$$\begin{gathered}
0{,}13x_1 + 0{,}09x_2 + 0{,}04x_3 + 0{,}02x_4 + 0{,}08x_5 \leq 90 \\
0{,}015x_2 + 0{,}015x_3 + 0{,}08x_4 \leq 50 \\
0{,}025x_1 + 0{,}05x_2 + 0{,}05x_3 + 0{,}025x_4 + 0{,}02x_5 \leq 30 \\
0{,}01x_1 + 0{,}01x_2 + 0{,}01x_3 + 0{,}01x_4 + 0{,}04x_5 \leq 10
\end{gathered}$$

Unes altres restriccions (de demanda):

$$\begin{gathered}
x_1 + x_2 + x_3 \leq 750 \\
x_4 + x_5 \leq 200 \\
x_1 - 3x_5 \geq 0
\end{gathered}$$

- Condicions de domini (fites de demanda mínima):

$$x_1 \geq 180, \qquad x_2 \geq 140, \qquad x_3 \geq 150, \qquad x_4 \geq 70, \qquad x_5 \geq 50$$

- Plantejament matemàtic complet:

$$\begin{array}{ll}
M\text{àx}. & I = 0{,}65x_1 + 0{,}75x_2 + 0{,}9x_3 + 0{,}8x_4 + 0{,}85x_5 \\
 & 0{,}13x_1 + 0{,}09x_2 + 0{,}05x_3 + 0{,}02x_4 + 0{,}08x_5 \leq 90 \\
 & 0{,}015x_2 + 0{,}015x_3 + 0{,}08x_4 \leq 50 \\
s.a: & 0{,}025x_1 + 0{,}05x_2 + 0{,}05x_3 + 0{,}025x_4 + 0{,}02x_5 \leq 30 \\
 & 0{,}01x_1 + 0{,}01x_2 + 0{,}01x_3 + 0{,}01x_4 + 0{,}04x_5 \leq 10 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 \leq 750 \\
 & x_4 + x_5 \leq 200 \\
 & x_1 - 3x_5 \geq 0 \\
 & x_1 \geq 180, x_2 \geq 140, x_3 \geq 150, x_4 \geq 70, x_5 \geq 50
\end{array}$$

Solució amb LINGO i anàlisi de sensibilitat:

```
Variable       Value              Reduced Cost
   X1        290.0000            0.000000
   X2        140.0000           0.1500000
   X3        220.0000            0.000000
   X4        150.0000            0.000000
   X5        50.00000            1.100000
```

Row	Slack or Surplus	Dual Price
INGRESSOS	654.0000	1.000000
REFINADA	23.90000	0.000000
INTEGRAL	32.60000	0.000000
SÈGOL	0.000000	10.00000
OLI	0.000000	40.00000
DEMANDA1	100.0000	0.000000
DEMANDA2	0.000000	0.150000
DEMANDA3	140.0000	0.000000

Objective Coefficient Ranges:

Variable	Current Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
X1	0.6500000	0.1500000	0.1774194
X2	0.7500000	0.1500000	INFINITY
X3	0.9000000	0.3437500	0.1500000
X4	0.8000000	INFINITY	0.1500000
X5	0.8500000	1.100000	INFINITY

Righthand Side Ranges:

Row	Current RHS	Allowable Increase	Allowable Decrease
REFINADA	90.00000	INFINITY	23.90000
INTEGRAL	50.00000	INFINITY	32.60000
SÈGOL	30.00000	2.750000	1.750000
OLI	10.00000	0.7000000	0.5500000
DEMANDA1	750.0000	INFINITY	100.0000
DEMANDA2	200.0000	110.0000	80.00000
DEMANDA3	0.000000	140.0000	INFINITY

Interpretació i anàlisi:

- Columna *Value*: Es produiran i vendran al dia 290 barres de pa normal, 140 de rústic, 220 de sègol, 150 integrals i 50 d'oli.
- Columna *Slack or Surplus*: Els ingressos seran de 654 € al dia. Sobraran 23,9 kg de farina refinada i 32,6 kg de farina integral, mentre que s'esgotarà la farina de sègol i l'oli. La demanda màxima dels tres primers tipus de pans no es cobreix (falten 100 barres) i sí la dels dos últims, mentre que es produeixen 140 barres normals per damunt del triple que d'oli.
- Columna *Reduced Cost*: Les variables que tenen un valor òptim igual a la fita superior són no bàsiques i això permet interpretar aquesta columna. Si produïrem una barra més de pa rústic per damunt del mínim exigit, suposaria 0,15 € menys d'ingressos i la producció d'una barra més de pa d'oli implicaria renunciar a 1,1 € d'ingressos. També es podria dir que el preu de la barra rústica hauria d'augmentar 15 cèntims, i la d'oli 1,1 €, perquè fora preferible produir més que el mínim exigit.

- Columna *Dual Price*: Si disposàrem d'un quilo més de farina de sègol, els ingressos millorarien 10 €, mentre que un litre més de disponibilitat d'oli n'implicaria 40 € més. Per últim, si la demanda conjunta màxima de pa integral i d'oli fóra de 201 barres en comptes de 200, els ingressos augmentarien 15 cèntims d'euro.
- Sensibilitat dels coeficients de la funció objectiu: l'interval de sensibilitat del preu de la barra de pa normal és [0'473, 0'8] i la interpretació econòmica no es pot concretar perquè és una variable bàsica (la producció de barres normals no és la mínima). Tampoc no es podria fer una interpretació econòmica massa concreta en el cas dels preus de la barra de pa de sègol i integral. L'interval del preu de la barra de pa rústic és]-∞, 0'9] i com que és variable no bàsica vol dir que si el preu fóra superior a 0,9 € començaríem a produir per dalt del mínim. En el cas del pa d'oli, el preu per barra hauria de ser 1,95 € per a produir més que el mínim.
- Sensibilitat dels termes independents de les restriccions: l'interval de sensibilitat de la disponibilitat de farina refinada és [66'1, +∞[i en aquest interval seguirà sobrant farina refinada. De manera semblant s'interpreta l'interval de sensibilitat de la disponibilitat màxima de farina integral, que és [17'3, +∞[. Més inconcret resulta l'interval de sensibilitat de la disponibilitat de farina de sègol, [28'25, 32'75], o d'oli, [9'45, 10'7], ja que es tracta de restriccions saturades i l'únic que podem dir és que, en cas d'estar fora de l'interval corresponent, canviarà la solució òptima de manera més important.

Problema de transport

És un problema amb una estructura lineal molt concreta. El problema de transport bàsic tracta de minimitzar el cost de transportar un producte des d'uns centres d'origen (ciutats, magatzems, plantes productives, etc.) a uns centres de destí on es troba la demanda d'aquests productes. Per a la identificació de les variables en aquest problema sol ser convenient utilitzar un doble subíndex, x_{ij}, a fi de representar la quantitat de producte que ix del centre d'origen i al centre de destinació j. La funció objectiu es construeix sumant els costos d'enviar cada quantitat de cada centre d'origen a cada centre de destinació, on cada cost unitari estarà normalment relacionat amb la distància entre els centres. La part més peculiar del problema és el plantejament de les restriccions, que són de dos tipus:

- de cada centre d'origen i no pot eixir més producte del que hi ha (b_i):

$$x_{i1} + \cdots + x_{in} \leq b_i$$

- a cada centre de destí j ha d'arribar producte suficient per tal de satisfer-ne la demanda (c_j):

$$x_{1j} + \cdots + x_{mj} \geq c_j$$

Les principals variants del problema inclouen la possibilitat que es transporte més d'un producte, el requeriment de passar per algun centre intermedi (problema de transbord) o l'existència de fites.

Exemple 8. Una cooperativa agrícola disposa de dos magatzems de taronja a Pego i Vinaròs que transporta a tres capitals de província: Madrid, Barcelona i Saragossa. Els costos unitaris de transport, euros per tona, la demanda setmanal de cada ciutat i la producció màxima setmanal en cada magatzem estan en la taula següent:

	Madrid	Barcelona	Saragossa	Producció (Tm.)
Pego	40	60	70	550
Vinaròs	90	40	50	350
Demanda (Tm.)	400	300	100	

S'ha de determinar quant de producte cal transportar de cada magatzem a cada ciutat per minimitzar costos de transport setmanals.

<u>Modelització</u>:

- Identificació de variables

x_{ij} és la quantitat de taronges (en tones) que es transporten del magatzem i a la ciutat j (l'ordre dels subíndex és el mateix que el de la taula).

- Funció objectiu

C: cost total del transport (en euros)

Direcció: minimització

Forma funcional: $C = 40x_{11} + 60x_{12} + 70x_{13} + 90x_{21} + 40x_{22} + 50x_{23}$

- Restriccions

Bloc de restriccions de capacitat màxima en cada magatzem:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 550$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 350$$

Bloc de restriccions de demanda mínima en cada ciutat:

$$x_{11} + x_{21} \geq 400$$
$$x_{12} + x_{22} \geq 300$$
$$x_{13} + x_{23} \geq 100$$

- Condicions de domini (no-negativitat perquè són quantitats transportades).

$$x_{ij} \geq 0, \qquad \forall i = 1{,}2; \;\; \forall j = 1{,}2{,}3$$

- Plantejament matemàtic complet:

$$\begin{aligned} Min. \quad & 40x_{11} + 60x_{12} + 70x_{13} + 90x_{21} + 40x_{22} + 50x_{23} \\ s.a: \quad & x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 550 \\ & x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 350 \\ & x_{11} + x_{21} \geq 400 \\ & x_{12} + x_{22} \geq 300 \\ & x_{13} + x_{23} \geq 100 \\ & x_{ij} \geq 0, \qquad \forall i = 1{,}2; \;\; \forall j = 1{,}2{,}3 \end{aligned}$$

Solució amb LINGO:

```
Variable    Value          Reduced Cost
X11        400.0000          0.0000000
X12       0.0000000          0.0000000
X13        50.00000          0.0000000
X21       0.0000000           70.00000
X22        300.0000          0.0000000
X23        50.00000          0.0000000

Row   Slack or Surplus     Dual Price
[OBJ]      34000.00        1.000000
[PRPEGO]   100.0000        0.0000000
[PRVIN]    0.0000000      20.00000
[DEMMAD]     0.0000000     -40.00000
[DEMBAR]     0.0000000     -60.00000
[DEMZAR]     0.0000000     -70.00000
```

Interpretació i anàlisi:

Les 400 tones que van a Madrid s'envien des de Pego, les 300 tones de Barcelona són totes de Vinaròs i a Saragossa arriben 50 tones de Pego i 50 tones de Vinaròs. Al magatzem de Pego s'han d'enviar 100 tones menys que la capacitat màxima. El cost total del transport és de 34.000 € setmanals. Matemàticament, s'observa que la variable x_{12} és no bàsica i amb un rendiment marginal (*Reduced Cost*) igual a zero, la qual cosa suggereix que la solució no és única, és a dir, hi ha unes altres alternatives de transport amb el mateix cost mínim.

Pel que fa als multiplicadors o variables duals λ_1=0 i λ_2=-20: augments en la capacitat del magatzem de Pego no impliquen variacions de cost, però 1 tona addicional de capacitat en el magatzem de Vinaròs permetria reduir els costos 20 €. Els altres tres multiplicadors són positius, λ_3=40, λ_4=50 i λ_5=70 i indiquen, respectivament, l'augment en els costos mínims del transport que es produiria si cada ciutat incrementa una tona la demanda mínima.

Problema de mescles

En aquest problema lineal es pretén obtenir un producte final al mínim cost possible mesclant uns ingredients. Les característiques del producte final han de complir unes especificacions determinades i un supòsit crucial és que aquestes característiques són una combinació lineal de les dels ingredients. El problema es planteja definint les variables en termes de proporcions de cada ingredient en el producte final. Encara que hi ha distintes formulacions, la que ací es detalla planteja en quines proporcions cal mesclar els ingredients a fi d'obtenir una unitat de producte final al mínim cost amb les característiques desitjades. Una restricció addicional serà, per tant, que la suma de les proporcions siga igual a 1.

Una variant interessant del problema apareix quan es planteja la possibilitat que una part dels ingredients no s'aprofiten del tot en fer la mescla (evaporació, productes residuals, etc.). En aquest cas, les variables cal multiplicar-les per la proporció aprofitable.

Exemple 9. Una bodega vol mesclar tres mostos de tres varietats de raïm per tal d'obtenir un vi comercial al mínim cost. La graduació alcohòlica ha d'estar entre 12 i 14 graus i la glucosa no pot passar del 0,2%:

	% Alcohol	% Glucosa	Preu (€/hl)
Tempranillo	11	0,15	120
Mazuelo	13	0,25	150
Graciano	15	0,3	160

Determina en quines proporcions s'han de mesclar els mostos per hl de vi si es produeix un 10% de pèrdues per evaporació en cada most.

Modelització:

- Identificació de variables

  x_i és la proporció de most de cada varietat de raïm per hl de vi.
- Funció objectiu

  C: cost de la mescla o cost d'obtenir un hl de vi.

Direcció: minimització

Forma funcional: $C = 120x_1 + 150x_2 + 160x_3$

- Restriccions

Bloc de restriccions d'especificacions d'alcohol i de glucosa tenint en compte les pèrdues:

$$11 \cdot 0{,}9x_1 + 13 \cdot 0{,}9x_2 + 15 \cdot 0{,}9x_3 \leq 14$$
$$11 \cdot 0{,}9x_1 + 13 \cdot 0{,}9x_2 + 15 \cdot 0{,}9x_3 \geq 12$$
$$0{,}15 \cdot 0{,}9x_1 + 0{,}25 \cdot 0{,}9x_2 + 0{,}3 \cdot 0{,}9x_3 \leq 0{,}2$$

Restricció de suma de proporcions aprofitables:

$$0{,}9x_1 + 0{,}9x_2 + 0{,}9x_3 = 1$$

- Condicions de domini (no-negativitat perquè són proporcions)

$$x_i \geq 0, \qquad \forall i = 1{,}2{,}3$$

- Plantejament matemàtic complet

$$\begin{array}{ll} Min. & C = 120x_1 + 150x_2 + 160x_3 \\ & 11 \cdot 0{,}9x_1 + 13 \cdot 0{,}9x_2 + 15 \cdot 0{,}9x_3 \leq 14 \\ s.a: & 11 \cdot 0{,}9x_1 + 13 \cdot 0{,}9x_2 + 15 \cdot 0{,}9x_3 \geq 12 \\ & 0{,}15 \cdot 0{,}9x_1 + 0{,}25 \cdot 0{,}9x_2 + 0{,}3 \cdot 0{,}9x_3 \leq 0{,}2 \\ & 0{,}9x_1 + 0{,}9x_2 + 0{,}9x_3 = 1 \\ & x_i \geq 0, \qquad \forall i = 1{,}2{,}3 \end{array}$$

<u>Solució amb LINGO</u>:

```
Variable    Value        Reduced Cost
X1       0.8333333           0.000000
X2       0.000000           10.00000
X3       0.2777778           0.000000

Row    Slack or Surplus      Dual Price
COST        144.4444          -1.000000
ALCOHOL_MAX   2.000000          0.000000
ALCOHOL_MIN   0.000000        -11.11111
GLUCOSA       0.1250000E-01     0.000000
SUMA_PROPORCIONS 0.000000     -11.11111
```

<u>Interpretació i anàlisi</u>:

Per cada hl de vi que es vulga obtenir s'han de mesclar 83,3 litres de most de *tempranillo* i 27,8 litres de most de *graciano* (un 10% s'evaporarà). No s'empra la varietat *mazuelo* en la mescla, solament si el preu baixara 10 €/hl (*Reduced Cost*) seria convenient utilitzar-la. El cost del hl de la mescla és de 144,44 €. El grau d'alcohol de la mescla és el mínim requerit de 12. El percentatge de glucosa està per baix del màxim requerit.

Pel que fa als multiplicadors o les variables duals$\lambda_1=0$, $\lambda_2=10$, $\lambda_3=0$, $\lambda_4=10$: augments en el requisit mínim d'alcohol o en el percentatge de pèrdua suposarien increments del cost de la mescla.

4.2.3. Programació lineal entera

Problemes diversos amb variables enteres

Qualsevol dels problemes d'optimització matemàtica poden incorporar com a condicions de domini les d'integritat de les variables. És la pròpia naturalesa de les variables la que aconsellarà incloure aquestes condicions o no. No obstant això, encara que les variables representen magnituds no divisibles (quantitat de cotxes produïts, per exemple) no resulta incorrecte resoldre el problema amb variables contínues i simplement una solució no entera es pot interpretar com que la producció d'aquest producte s'ha quedat en una fase intermèdia del procés productiu i s'acabarà en el període següent. En unes altres ocasions, les variables poden ser contínues (euros invertits en un actiu financer, per exemple) però quan s'intenta executar la solució òptima es troba algun requeriment d'haver d'invertir en paquets de 1.000 € o de 1.000 accions, per exemple, que aconsella replantejar el problema amb variables enteres. El subjecte decisor ha de valorar correctament els avantatges i inconvenients de tractar amb variables enteres.

Exemple 10. Una empresa minera opera amb tres mines. El mineral de cadascuna se separa, abans d'embarcar-se, en dos graus. La capacitat diària de producció de les mines i els costos diaris (en milions d'euros) són els següents:

	Mineral grau alt (Tm/dia)	Mineral grau baix (Tm/dia)	Costos diaris
Mina 1	4	4	2
Mina 2	6	4	2'2
Mina 3	1	6	1'8

L'empresa ha d'entregar 54 tones de mineral de grau alt i 65 tones de mineral de grau baix per al final de la setmana següent. A més, té contractes de treball que asseguren el pagament als treballadors del dia complet per cada dia o fracció de dia que la mina estiga oberta. Determina el nombre de dies que cada mina ha d'operar durant la setmana següent, si l'empresa ha de complir els compromisos adquirits amb un cost total mínim.

Modelització:

- Identificació de variables

x_i és el nombre de dies que ha d'operar la mina i durant la setmana següent. Com que els costos són per dia complet, les variables són enteres.

- Funció objectiu

C: cost total de l'empresa (en milions d'euros)

Direcció: minimització

Forma funcional: $C = 2x_1 + 2{,}2x_2 + 1{,}8x_3$

- Restriccions (de producció mínima):

$$4x_1 + 6x_2 + x_3 \geq 54$$
$$4x_1 + 4x_2 + 6x_3 \geq 65$$

- Condicions de domini (fites setmanals i condicions d'integritat):

$$x_1 \leq 7, \quad x_2 \leq 7, \quad x_3 \leq 7$$
$$x_i \in \mathbb{N}, \quad \forall i = 1{,}2{,}3$$

- Plantejament matemàtic complet:

$$\begin{array}{ll} Min. & 2x_1 + 2{,}2x_2 + 1{,}8x_3 \\ s.a: & 4x_1 + 6x_2 + x_3 \geq 54 \\ & 4x_1 + 4x_2 + 6x_3 \geq 65 \\ & x_1 \leq 7, \quad x_2 \leq 7, \quad x_3 \leq 7 \\ & x_i \in \mathbb{N}, \quad \forall i = 1{,}2{,}3 \end{array}$$

Solució amb LINGO:

```
Variable      Value        Reduced Cost
X1         2.000000            2.000000
X2         7.000000            2.200000
X3         5.000000            1.800000

Row     Slack or Surplus      Dual Price
COST         28.40000           -1.000000
GRAU_ALT      1.000000           0.00000
GRAU_BAIX     1.000000           0.000000
```

Interpretació i anàlisi:

La mina 1 ha d'estar oberta 2 dies, la mina 2, els 7 dies de la setmana i la mina 3, 5 dies. El cost total mínim és de 28,4 milions d'euros i extraurem 1 tona més que la mínima exigida de cada tipus de mineral. La resta de valors de la solució òptima no s'han d'interpretar quan les variables són enteres.

Problema d'assignació

Originalment aquest problema té l'objectiu d'assignar treballadors a llocs de treball de manera que es maximitze algun indicador de rendiment, eficiència o productivitat total. En el problema bàsic, amb n treballadors i llocs de treball, les restriccions s'ocupen d'assegurar que cada treballador ocupe un lloc de treball i que cada lloc de treball estiga ocupat per un treballador. Les variables del problema representen decisions d'assignar o no cada treballador a cada lloc de treball, és a dir, són binàries. A fi d'identificar-les és convenient utilitzar un doble subíndex, x_{ij}, per tal de representar si el treballador i s'assigna o no al lloc de treball j. La funció objectiu es genera multiplicant el rendiment de cada treballador en cada lloc de treball per la corresponent variable binària. Les restriccions tenen una estructura particular en dos blocs:

- Cada treballador *i* s'ha d'assignar a un lloc de treball:

$$x_{i1} + \cdots + x_{in} = 1$$

- Cada lloc de treball *j* ha d'estar ocupat per un treballador:

$$x_{1j} + \cdots + x_{nj} = 1$$

Les principals variants del problema inclouen la possibilitat que hi haja un distint nombre de treballadors i llocs de treball o que algun lloc de treball haja d'estar ocupat per més d'un treballador.

Exemple 11. L'encarregat de recursos humans d'una gran empresa ha seleccionat 3 candidats després d'una entrevista i els ha d'assignar a 3 llocs de treball dins de la part administrativa de l'empresa: tresoreria, finançament i comptabilitat. A fi d'elegir la millor opció, es fixa en els resultats d'un test que mesura els coneixements de cada candidat en cada part, la qualificació del qual indica l'eficiència esperada de cada treballador en cada lloc de treball i apareix en la taula següent:

	Tresoreria	Finançament	Comptabilitat
Treballador 1	7'5	8'6	8'4
Treballador 2	5'3	7'2	6'1
Treballador 3	6'7	7'9	7'5

Modelització:

- Identificació de variables:

x_{ij} representa la decisió d'assignar el treballador *i* al lloc de treball *j* (en el mateix ordre en què apareixen en la taula de dades). Són variables binàries de manera que un valor 1 significa que sí que s'assigna i un valor 0, que no.

- Funció objectiu:

R: indicador d'eficiència o rendiment total.

Direcció d'optimització: maximitzar.

Forma funcional: $R = 7{,}5x_{11} + 8{,}6x_{12} + 8{,}4x_{13} + 5{,}3x_{21} + 7{,}2x_{22} + 6{,}1x_{23} + $
$+6{,}7x_{31} + 7{,}9x_{32} + 7{,}5x_{33}$

- Restriccions:

Cada treballador a un lloc de treball:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1$$

Cada lloc de treball ocupat per un treballador:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1$$

- Condicions de domini:

Variables binàries $x_{ij} \in \{0,1\}, \ \forall i = 1,2,3; \ \forall j = 1,2,3$

- Enunciat complet del problema:

$$Max. \quad 7{,}5x_{11} + 8{,}6x_{12} + 8{,}4x_{13} + 5{,}3x_{21} + 7{,}2x_{22} + 6{,}1x_{23} + 6{,}7x_{31} + 7{,}9x_{32} + 7{,}5x_{33}$$
$$s.a: \quad \begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} &= 1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} &= 1 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} &= 1 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} &= 1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} &= 1 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} &= 1 \end{aligned}$$
$$x_{ij} \in \{0,1\}, \qquad \forall i = 1,2,3; \ \forall j = 1,2,3$$

Solució amb LINGO:

```
Variable      Value          Reduced Cost
X11        0.0000000             -7.500000
X12        0.0000000             -8.600000
X13         1.000000             -8.400000
X21        0.0000000             -5.300000
X22         1.000000             -7.200000
X23        0.0000000             -6.100000
X31         1.000000             -6.700000
X32        0.0000000             -7.900000
X33        0.0000000             -7.500000
```

```
Row     Slack or Surplus      Dual Price
[OBJ]    22.30000            0.0000000
2        0.0000000           0.0000000
3        0.0000000           0.0000000
4        0.0000000           0.0000000
5        0.0000000           0.0000000
6        0.0000000           0.0000000
7        0.0000000           0.0000000
```

Interpretació i anàlisi: el treballador 1 s'assignarà a comptabilitat, el treballador 2, a finançament i el treballador 3, a tresoreria. La suma dels resultats del test com a aproximació l'índex d'eficiència és 22'3. Les característiques del problema, restriccions d'igualtat i variables binàries, no permeten fer més interpretacions econòmiques.

Problema de motxilla

El problema de motxilla té aquest nom perquè és el que s'aplicava a un excursionista que havia de decidir quins objectes havia de col·locar en la motxilla i quins no, tenint en compte la utilitat que li proporcionava cada objecte i l'espai que ocupava en la motxilla. Les variables són binàries perquè l'elecció és col·locar o no l'objecte i no té sentit endur-se dos objectes iguals o una fracció d'un objecte. Aquest mateix plantejament del problema de motxilla es pot aplicar en distints àmbits econòmics, sempre que s'haja de triar entre opcions alternatives que no es puguen fraccionar ni repetir: infraestructures, grans adquisicions, etc.

Les principals variants del problema apareixen si algunes de les alternatives són incompatibles entre elles (construir una autovia per l'interior o per la costa, per exemple) o si estem obligats a triar necessàriament una opció dins d'algun subconjunt d'opcions (triar obligatòriament un traçat de línia d'AVE entre 3 possibles amb distints pressupostos i rendibilitat esperada). També poden haver-hi restriccions addicionals si hi ha algunes magnituds que es volen limitar o de les quals exigir un nivell mínim.

Exemple 12. Davant la crisi de recaptació tributària d'un país imaginari, el Ministeri de Foment vol avaluar quines autovies han de deixar de ser gratuïtes i quines no d'un conjunt de 8 en una primera fase. Vol augmentar els ingressos el màxim possible, però limitant les persones afectades i evitant una pèrdua excessiva de vots en les pròximes eleccions. Les dades rellevants estan recollides en la taula següent:

Autovia	Ingressos (milions d'euros)	Persones afectades (milers)
E-18	1.500	1.400
M-40	1.800	2.100
M-50	80	200
R-3	300	300
AT-9	2.400	1.600
V-30	150	80
V-20	450	380
V-10	860	530

S'ha de decidir quines autovies passen a ser de pagament maximitzant els ingressos esperats i limitant a 5 milions les persones afectades. No poden ser de pagament simultàniament les autovies M-40 i M-50. Per últim, una i solament una de les autovies V-10, V-20 i V-30 ha de deixar de ser gratuïta.

Modelització:

- Identificació de variables:

  x_i: variables que representen decisions que cada autovia passe a ser de pagament (valor 1) o no (valor 0), en el mateix ordre que apareixen a la taula de dades.

- Funció objectiu:

  I: ingressos esperats (en milions d'euros).

  Direcció d'optimització: maximitzar.

  Forma funcional:

$$I = 1500x_1 + 1800x_2 + 80x_3 + 300x_4 + 2400x_5 + +150x_6 + 450x_7 + 860x_8$$

- Restriccions:

  De limitació de persones afectades (en milers de persones):

$$1400x_1 + 2100x_2 + 200x_3 + 300x_4 + 1600x_5 + 80x_6 + 380x_7 + 530x_8 \leq 5000$$

  Unes altres condicions:

$$x_2 + x_3 \leq 1$$
$$x_6 + x_7 + x_8 = 1$$

- Condicions de domini:

$$x_i \in \{0,1\}, \quad i = 1, \dots, 8$$

- Plantejament matemàtic complet:

$$\begin{array}{ll} Max. & 1500x_1 + 1800x_2 + 80x_3 + 300x_4 + 2400x_5 + 150x_6 + 450x_7 + 860x_8 \\ s.a: & 1400x_1 + 2100x_2 + 200x_3 + 300x_4 + 1600x_5 + 80x_6 + 380x_7 + 530x_8 \leq 5000 \\ & x_2 + x_3 \leq 1 \\ & x_6 + x_7 + x_8 = 1 \\ & x_i \in \{0,1\}, \quad i = 1, \dots, 8 \end{array}$$

Solució amb LINGO:

```
Variable      Value        Reduced Cost
X1         0.000000           -1500.000
X2         1.000000           -1800.000
X3         0.000000           -80.00000
X4         1.000000           -300.0000
X5         1.000000           -2400.000
X6         0.000000           -150.0000
X7         0.000000           -450.0000
X8         1.000000           -860.0000

Row    Slack or Surplus      Dual Price
INGRESSOS  5360.000            1.000000
AFECTATS   470.0000            0.000000
M        0.000000           0.000000
V        0.000000           0.000000
```

Interpretació i anàlisi:

Han de deixar de ser gratuïtes les autovies M-40, R3, AT-9 i V-10. Els ingressos esperats amb aquesta decisió seran de 5.360 milions d'euros i els usuaris afectats seran 470.000 per davall del màxim permès, és a dir, 4,53 milions de persones.

PART 5. ENUNCIATS DE PROBLEMES DE MODELITZACIÓ I RESOLUCIÓAMB LINGO

En tots els enunciats dels problemes que apareixen a continuació cal fer la modelització completa (inclosa la identificació de variables), la resolució amb LINGO i la interpretació econòmica de la solució en tots aquells aspectes rellevants.

5.1. Programació no lineal

1. ***Problema del consumidor*** Un consumidor vol maximitzar la utilitat del consum al llarg del cicle de vida, dividida en dues etapes, l'activa i la de jubilat. La funció d'utilitat és separable additiva i logarítmica: $U(c_1, c_2) = \ln c_1 + 0{,}5 \ln c_2$. La restricció pressupostària indica que el consum en la segona etapa, c_2, no pot excedir l'estalvi (renda de l'etapa activa, *Y*=30, menys consum de la primera etapa, c_1) més el rendiment d'aquest estalvi a un tipus d'interès *r*=0,4.

a) Determineu els consums òptims de cada etapa que maximitzen la utilitat.
b) Si el tipus d'interès augmenta, *r*=0,5, calculeu la nova solució òptima i raoneu l'efecte econòmicament: com canvia la preferència pel consum en les dues etapes? L'augment del tipus d'interès fa augmentar l'estalvi?
c) Si el consumidor tinguera una renda superior, *Y*=33, raoneu sense tornar a resoldre el problema l'efecte sobre la utilitat. Resoleu el problema, calculeu l'efecte exacte sobre la utilitat i raoneu si els consums en les dues etapes són béns normals o inferiors.

2. ***Preus decreixents*** Els preus de venda dels dos productes(p_i, en euros) d'una empresa són decreixents amb la quantitat produïda (q_i, en tones) segons les funcions $p_1 = -q_1 + 48 - {}^{300}/_{q_1}$ i $p_2 = -q_2 + 64 - {}^{400}/_{q_2}$, respectivament. Calculeu les quantitats produïdes que maximitzen els ingressos totals si la producció conjunta dels dos productes no pot excedir les 50 tones.

3. ***Costos creixents*** El cost variable (c_i en euros) d'extraure dos tipus de carbó és creixent amb la quantitat extreta (q_i en tones) segons les funcions següents $c_1 = 0{,}5q_1 + 14$ i $c_2 = 0{,}8q_2 + 18$. Els costos fixos són de 2.400 €. Els preus de venda de cada tona de carbó són de $p_1 = 68$ € i $p_2 = 84$ €. Si cada tona del primer tipus necessita un treballador i cada tona del segon, dos treballadors i tenim un màxim de 120 treballadors, determineu quantes tones s'han d'extraure de cada tipus de carbó per a maximitzar beneficis.

4. ***Preus decreixents i costos creixents*** Una empresa produeix tres tipus d'oli d'oliva: normal, verge i extraverge. Els costos totals en euros són $C(x_1, x_2, x_3) = 120 + 0{,}002x_1^2 + 0{,}003x_1^2 + 0{,}004x_1^2$, on x_i són els litres de cada tipus d'oli, respectivament, mentre que els preus unitaris de venda són una funció decreixent de la quantitat produïda: $p_1 = 2{,}4 - 0{,}002x_1$, $p_2 = 2{,}8 - 0{,}0025x_2$, $p_3 = 3{,}2 - 0{,}003x_3$. Suposant que tota la producció es ven i que la collita d'olives permet produir com a màxim 500 litres d'oli, calculeu quants litres s'han de produir de cada tipus d'oli per a maximitzar-ne el benefici.

5. ***Problema de l'empresa*** Una Economia disposa de tres factors productius (capital, *K*; treball, *L*; i despesa pública, *G*) per a obtenir l'únic producte final (*Y*), el valor del qual en milions d'euros és $Y = 50K^{0,5}L^{0,3}G^{0,2}$. Els preus unitaris (en euros) dels factors productius són $p_K = 60000$; $p_L = 15$; $p_G = 120000$; on les unitats de capital i despesa pública estan en milions d'euros i les unitats de treball, en hores. Si la producció mínima desitjada de l'Economia és de 150.000 milions d'euros:

a) Calculeu les quantitats que s'utilitzaran de cada factor productiu per a minimitzar el cost.

b) Resoleu el problema si l'Economia és més eficient, *A*=55 en la funció de producció, i compareu la solució òptima amb l'original.

c) Resoleu el problema si apuja el preu de la despesa pública, $p_G = 150000$, i compareu la solució òptima (sobretot la intensitat en l'ús de cada factor productiu) amb l'original.

d) Sense resoldre el problema, raoneu com canviaria el cost òptim si puja la producció mínima desitjada un 2%.

6. ***Selecció de cartera***

a) Planteja i resol un problema de selecció de cartera per tal de distribuir una inversió entre mercats desenvolupats i emergents si es vol minimitzar el risc i la matriu de variàncies i covariàncies és $V = \begin{pmatrix} 0{,}1 & -0{,}05 \\ -0{,}05 & 0{,}8 \end{pmatrix}$.

b) Igual si, a més a més, volem obtenir una rendibilitat mínima del 8%, i la rendibilitat esperada en mercats desenvolupats és del 5% i en emergents del 15%.

c) Raoneu, sense tornar a resoldre el problema, l'efecte d'una disminució de la rendibilitat mínima al 7,5%.

7. ***Fiscalitat òptima*** Amb 14 milions de persones que cotitzen en el règim general de la seguretat social i un 23,6% de tipus de cotització sobre el salari mitjà anual de 19.500 € es recapten 64.428 milions d'euros. S'estima que per cada punt percentual que baixa el tipus de cotització les persones que cotitzen augmentarien un 5%.

a) Calculeu el tipus de cotització i les persones que cotitzaran si volem que la recaptació siga màxima, assumint que el salari no canvia.

b) Calculeu el tipus de cotització i les persones que cotitzaran si volem que la recaptació siga màxima si el salari apuja un 1% per cada punt percentual que baixa el tipus de cotització.

8. ***Desviacions quadràtiques*** En una Economia simplificada, el sector públic recapta impostos sobre la renda (*Y*) i aplica un tipus impositiu igual a t i impostos sobre el consum (*C*) aplicant un tipus impositiu igual a r. Amb la recaptació total ha de pagar la despesa pública (*G*). Per motius econòmics i demogràfics, s'ha trencat l'equilibri pressupostari i s'han d'ajustar els tipus impositius i/o ajustar la despesa pública en una taxa igual a g, mantenint l'equilibri pressupostari: $tY + rC = G(1 - g)$. La situació de partida era d'equilibri amb uns valors $t_0 = 0{,}28$, $r_0 = 0{,}21$, $g_0 = 0$. L'Estat vol desviar-se el mínim possible d'aquests valors però mantenint l'equilibri.

Si els valors esperats de les variables macroeconòmiques són *Y*=950, *C*=760 i la despesa desitjada abans de l'ajust és la mateixa que l'any anterior G=448, calculeu:

a) Els tipus impositius i la taxa d'ajust de la despesa pública per a minimitzar les desviacions quadràtiques respecte als valors de partida si les desviacions tenen la mateixa ponderació: $Min.\ (t - 0{,}28)^2 + (r - 0{,}21)^2 + g^2$

b) El mateix si ponderem el doble les desviacions en la despesa pública: $Min.\ (t - 0{,}28)^2 + (r - 0{,}21)^2 + 2g^2$

5.2. Programació lineal

9. ***Combinació de recursos*** En una pastisseria es fan pastissos de poma, de nous i d'ametlla amb recursos limitats de pasta fullada, crema pastissera, temps de màquina i temps de mà d'obra. Els preus de venda de cada tipus de pastís, les existències de cada recurs i els requeriments per pastís són els de la taula següent:

	Pastís de poma	Pastís de nous	Pastís d'ametlla	Limitacions
Pasta fullada	50 gr	80 gr	40 gr	28,2 kg
Crema pastissera	30 gr	20 gr	20 gr	17 kg
Temps màquina	1'40"	1'30"	3'20"	25 hores
Temps mà d'obra	5'	6'	4'	43 hores
Preu venda (€/unitat)	1,3	1,5	1,4	

Calculeu la quantitat de cada tipus de pastís que maximitza els ingressos.

10. ***Combinació de recursos*** Una empresa de regals d'empresa prepara tres classes de caixes de vins. La caixa Excel està formada per 4 botelles de vi negre de reserva i 2 de vi blanc. La caixa Plus està formada per 2 botelles de vi negre reserva, 2 botelles de vi negre criança i 2 botelles de vi blanc. La caixa Estàndard està formada per 3 botelles de vi negre criança i 3 botelles de vi blanc. Els preus de cada caixa són de 80 € l'Excel, 65 € la Plus i 40 € l'Estàndard. Si disposa de 500 botelles de vi negre reserva, 590 botelles de vi negre criança i 610 botelles de vi blanc, i tenint en compte que de caixes Excel ha de preparar-ne almenys 50 però no més que de les altres dues conjuntament, calculeu quantes caixes de cada tipus ha de preparar per a maximitzar els ingressos. Cal plantejar el problema amb variables enteres?

11. ***Producció i transport*** Una empresa té dues plantes de piscines prefabricades. La primera té un cost de fabricació més baix perquè és més eficient, però està més lluny de dues grans ciutats on s'ha de transportar el producte. Els costos unitaris i de transport són els següents:

	Cost unitari de fabricació (€)	Cost unitari de transport a València (€)	Cost unitari de transport a Castelló (€)
Planta d'Alcora	2200	440	120
Planta de Sagunt	2600	100	180
Demanda (unitats)		85	35

Calculeu quantes unitats ha de produir en cada planta i quantes n'ha de transportar de cada planta a cada ciutat per a minimitzar el cost conjunt de fabricació i transport, tenint en compte que la capacitat màxima de cada planta és de 70 unitats.

12. ***Transport amb transbord*** Tres centres de producció han de dur un producte a dos centres intermedis on s'han d'etiquetar i després s'han de distribuir a tres grans centres comercials. En els centres de producció A, B i C n'hi ha 5.000, 3.000 i 7.500 unitats, respectivament. En cada centre intermedi, N i M, s'admeten com a molt 9.000 i 6.000

unitats, respectivament. En cada centre comercial, X, Y i Z es requereixen 3.000, 4.000 i 8.000 unitats. Els costos de transport unitari (en cèntims d'euro) són els següents entre cada centre:

	M	N		M	N	
A	12	17		19	32	X
B	8	22		15	25	Y
C	18	15		28	21	Z

Calculeu les quantitats transportades dels centres de producció als centres intermedis i dels centres intermedis als centres comercials per a minimitzar els costos de transport totals.

13. ***Problema d'inversió*** Un gestor de patrimonis disposa de 200 milers d'euros d'un client i de 300 milers d'euros d'un altre client. El primer client és més arriscat i vol invertir entre el 35% i el 60% dels diners en renda variable, almenys el 30% en dòlars i un màxim del 25% en renda variable no euros. El segon és més prudent i vol invertir almenys un 60% en renda fixa en euros i no més del 20% en renda variable. El gestor estima una rendibilitat probable per a cada actiu d'inversió, però també assigna una rendibilitat en un escenari menys probable. Les dades de cada actiu són les següents:

Actiu	Tipus rendiment	Divisa	Rendibilitat més probable	Rendibilitat menys probable
Bons U.S. Treasury	Fix	Dòlar	3%	1%
Accions Microsoft	Variable	Dòlar	12%	-5%
Bons Alemanya	Fix	Euro	2%	2%
Accions France Telecom	Variable	Euro	15%	-10%
Bons tresor espanyol	Fix	Euro	5%	1%
Accions Telefónica	Variable	Euro	20%	-12%
Accions Sony	Variable	Yen	10%	-2%

a) El gestor vol decidir quina quantitat de diners de cada client inverteix en cada actiu per a maximitzar el rendiment conjunt sota l'escenari més probable, però assegurant que en el cas menys probable la rendibilitat conjunta dels dos clients no serà negativa.
b) Calculeu la rendibilitat de cada client en el cas més probable i en el menys probable si se segueix la inversió òptima de l'apartat anterior.

14. ***Problema de la dieta*** Una granja de conills vol establir la dieta de mínim cost. Disposa de 5 aliments bàsics amb una composició distinta de 4 fonts d'energia. Les dades del problema són:

Composició per ració diària	Fibra (gr)	Proteïna (gr)	Greix (gr)	Calci (gr)	Preu per ració diària (cèntims d'€)
Pinso (ració de 20 gr)	9	7	0,5	0,25	3
Fenc (ració de 30 gr)	18	2	0,1	0	1,5
Vegetals (un feix)	7	0	0	0,2	0,8
Fruita (1/4 de peça)	4	0	0	0,4	8
Aigua (ració de 20 ml)	0	0	0	0	0,001
Necessitats diàries	44	14	1,5	0,51	

Cada ració de pinso ha d'anar acompanyada d'una d'aigua com a mínim. Les racions conjuntes de vegetals i fruita han de ser com a mínim un terç de les racions de pinso. Com a màxim ha d'ingerir 80 grams en forma de pinso i fenc. Determineu les racions diàries de cada aliment bàsic que minimitzen el cost de la dieta.

15. ***Problema d'inventari*** Una empresa es dedica a comprar, emmagatzemar i vendre dosis de vacuna antigripal per a països desenvolupats. Fa les compres a l'inici de l'agost, setembre i octubre i les ven al final d'aquests mesos, motiu pel qual incorre en un cost d'emmagatzematge mensual. Al final d'octubre, les vacunes no venudes no tenen cap valor. Les demandes màximes de vacunes de cada mes, el cost unitari de les compres, el preu unitari de les vendes i el cost unitari d'emmagatzematge són els següents:

	Agost	Setembre	Octubre
Cost compra (€ per dosi)	1,44	1,52	1,66
Preu venda (€ per dosi)	1,78	1,95	2,16
Cost emmagatzematge (€ per dosi)	0,08	0,08	0,08
Demandes màximes (milions de dosis)	12,5	18	16

La capacitat màxima del magatzem és de 20 milions de dosis. Determineu les compres i vendes de dosis en cada mes per a maximitzar el benefici.

16. ***Problema Maximin*** Un inversor planteja dos escenaris per a l'any següent: que desaparega l'euro com a moneda única o que es mantinga. Té tres opcions d'inversió en distints països i vol ponderar adequadament cada inversió a fi de guanyar el màxim possible. Els guanys de cada inversió completa en cada país segons cada escenari són els següents:

Guanys (milers €)	Inversió a Alemanya	Inversió a Espanya	Inversió a la Xina
Desapareix l'euro	230	120	140
Es manté l'euro	140	200	170

Determineu la ponderació de cada inversió (suma de les ponderacions igual a 1) per a maximitzar els guanys en el pitjor dels casos (estratègia *maximin*), suposant que la inversió és divisible.

17. ***Combinació de tècniques*** Una indústria pot realitzar el procés productiu mitjançant tres tècniques o alguna combinació entre aquestes. Cada tècnica suposa l'emissió de gasos contaminants. La taula següent mostra l'emissió de cada gas (un valor major que 1 significa excedir la normativa legal):

Tècnica	CO_2	SO_2	NO_2
A	1,3	0,5	0,2
B	0,6	0,6	1,2
C	0,3	1,4	0,6

Suposant que les emissions es combinen linealment, determineu la combinació òptima de les tres tècniques (la suma ha de ser igual a 1) sota cadascun dels següents criteris:

a) Minimitzar la suma de les tres emissions sense excedir la normativa legal de cadascun.
b) Minimitzar el màxim nivell d'emissió de cada gas (criteri *minimax*).

18. ***Problema de mescles*** Una empresa de productes cosmètics vol produir una nova crema de protecció solar amb factor de protecció entre 15 i 20 i amb una densitat major que 1,5 gr/mm^3. Els ingredients són dues cremes solars que no han tingut acceptació en el mercat perquè els factors de protecció són massa extremats i una solució aquosa perfumada amb contingut de rosa mosqueta. Les característiques i els preus de cada ingredient són:

	Crema solar intensa	Crema solar lleugera	Solució aquosa
Factor protecció	60	10	0
Densitat	2 gr/mm^3	1,6 gr/mm^3	1,05 gr/mm^3
Preu (€ per 100 ml)	1,55	1,30	0,55

Calculeu la forma òptima de combinar els tres ingredients per a minimitzar el cost del producte nou respectant les especificacions requerides, sabent que no hi ha pèrdues en la mescla.

19. ***Seqüència de tasques*** Una empresa ha de decidir com encadena un conjunt de tasques per tal d'acabar una obra. La primera tasca (A) comença avui i acaba 25 dies després. La tasca B tarda 20 dies i solament pot començar quan la tasca A haja completat 10 dies. La tasca C dura 40 dies i necessita que s'haja completat totalment la tasca A. La tasca D acaba en 22 dies i requereix que tant la tasca B com la C s'hagen completat en un 40%. La tasca E tarda 12 dies a completar-se i no es pot començar fins que no haja acabat la tasca B. Per últim, la tasca F ha de començar com a molt prompte quan haja acabat la tasca E i quan finalitze, 45 dies després, han d'estar acabades la resta de tasques. Calculeu quin dia ha de començar cada tasca després del començament de la A per tal d'acabar l'obra en el menor temps possible.

5.3. Programació lineal entera

20. ***Combinació de recursos*** Una empresa de l'Horta nord es dedica al conreu ecològic de verdures. Cada setmana prepara 3 tipus de basquets, tots amb verdura variada segons la producció setmanal però amb distintes quantitats de tomaques, creïlles i cebes. En el basquet tipus 1 inclou 2 quilos de tomaques, 2 de creïlles i 1 de cebes. En el basquet tipus 2 inclou 1,5 quilos de tomaques, 3 quilos de creïlles i 2 de cebes. En el basquet 3 inclou 3 quilos de tomaques, 3 de creïlles i 1,5 de cebes. La producció setmanal ha sigut de 80 quilos de tomaques, 90 de creïlles i 50 de cebes. Si els preus de venda de cada tipus de basquet són de 18 €, 20 € i 22 €, respectivament, calculeu quants basquets ha de preparar de cada tipus per a maximitzar els ingressos si ven com a màxim 40 basquets.

21. ***Assignació*** Un equip de triatló vol presentar-se a una competició de triatló per relleus i ha de triar un nadador, un ciclista i un corredor per a fer la distància en el menor temps possible. Els 5 millors membres del club tenen les marques següents en cada segment:

	1.500 metres natació	40 quilòmetres ciclisme	10 quilòmetres de cursa
Albert	22:35	1:01:34	34:25
Ximo	21:45	1:00:45	32:52
Emili	20:32	1:00:25	31:57
Josep	21:12	1:01:21	32:15
Marc	22:19	1:00:38	33:25

Decideix quins serien els components de l'equip i quin segment faria cada un.

22. ***Motxilla*** Un ajuntament vol rehabilitar un espai rústic pròxim al municipi de 25.000 m^2 a fi de destinar-lo a zona d'oci. Disposa de diverses opcions amb distints costos de construcció, de manteniment, d'espai requerit i d'usuaris previstos. Aquesta informació apareix en la taula següent:

Instal·lació	Cost inicial (milers d'€)	Cost manteniment anual (milers d'€)	Espai requerit (m^2)	Usuaris previstos
Camp futbol 7	120	8	2.500	800
Pista tennis terra batuda	80	6	1.200	500
Pista tennis normal	50	4	1.200	400
Pista pàdel	30	3	400	300
Pavelló poliesportiu cobert	200	25	3.000	1.300
Zona pícnic gran	25	2	20.000	1.200
Zona pícnic menuda	15	1	10.000	1.000

L'ajuntament disposa d'una subvenció d'un quart de milió d'euros per a la rehabilitació i de 30.000 € del pressupost de cada any per al manteniment. Decidiu quines instal·lacions s'elegiran si volem maximitzar el nombre d'usuaris, tenint en compte que són incompatibles entre elles les dues pistes de tennis i les dues zones de pícnic.

23. ***Inventari*** Una cooperativa de taronja de la Safor ha d'enviar camions de taronja al mercat de Madrid. Els camions han d'anar complets, amb 15.000 quilos de taronja, però no pot enviar més de 4 camions al dia. Les vendes (en quilos) de cada dia de la setmana són:

Dilluns	Dimarts	Dimecres	Dijous	Divendres
43.000	32.000	47.000	56.000	77.000

Calculeu quants camions han d'anar cada dia per a minimitzar els costos de conservació de la taronja no venuda (2 cèntims per quilo i dia). Nota: les dades estan ajustades perquè no queden existències el divendres.

24. ***Problema d'inversió*** Un inversor disposa de 870.000 € provinents d'un premi a fi d'invertir en quatre actius.

- Actiu 1: Dipòsit a termini fix amb una rendibilitat del 4,25% bruta anual amb un pagament impositiu del 21% dels interessos. L'import del dipòsit no pot superar els 300.000 €.
- Actiu 2: Accions d'Inditex a 100 € cadascuna. Té dos tipus de rendiment: els dividends generats durant l'any s'estimen en un 3% (amb un pagament impositiu del 21% dels dividends) i la plusvàlua quan es venguen les accions s'estima en un 8% (amb un pagament impositiu del 52% de les plusvàlues obtingudes). Les accions no són divisibles.
- Actiu 3: Fons d'inversió al 3% de rendibilitat. El pagament impositiu és del 2% dels guanys.
- Actiu 4: Compra d'un unifamiliar per 480.000 €. Els ingressos que obtindria pel lloguer serien de 24.000 € i el cost impositiu és del 26%

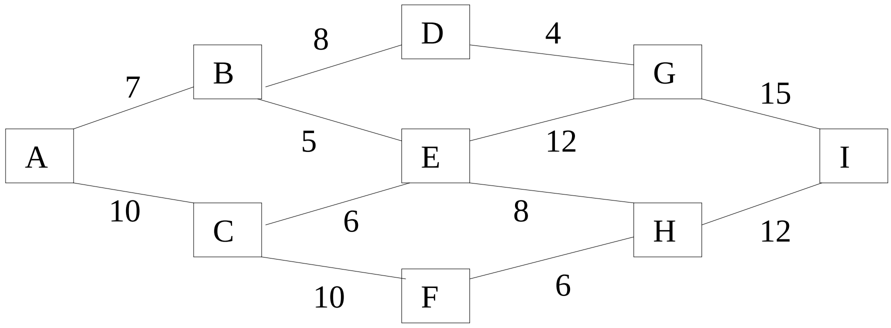
d'aquests ingressos. S'estima que el valor de la casa seria el mateix al final de l'any.

Per a limitar el risc dels actius 2 i 4, la inversió conjunta en els dos no pot superar els 2/3 del capital disponible i la inversió en l'actiu 2 no pot superar 1/3 del capital. Calculeu la quantitat de diners que cal invertir en els actius 1 i 3, el nombre d'accions que cal comprar de l'actiu 2 i si es compra o no l'unifamiliar, per a maximitzar els ingressos anuals després d'impostos.

25. ***Problema de lot mínim*** Torneu a resoldre el problema 24 si, en cas d'invertir en el fons d'inversió (actiu 3), no s'accepten inversions inferiors a 300.000 €.

26. ***Funcions a trossos*** Torneu a resoldre el problema 24 si la rendibilitat del fons d'inversió és del 2% en cas d'invertir menys de 300.000 € i es manté el 3% si la inversió supera aquesta quantitat (les rendibilitats s'apliquen a tota la quantitat invertida).

27. ***Problema del camí més curt*** Una persona ha de desplaçar-se des d'una ciutat A fins una ciutat I. El mapa de carreteres i distàncies és el següent:



Es demana que:

a) Calculeu el camí més curt.

b) Calculeu el camí alternatiu més curt si es talla per pluja la carretera de la ciutat E a la H.