APUNTS DE TEORIA

MATEMÀTIQUES II

CURS 2013-2014

GRAU D'ECONOMIA

GRAU D'ADMINISTRACIÓ I DIRECCIÓ D'EMPRESES

GRAU DE FINANCES I COMPTABILITAT

CARÀCTER: TRONCAL

CURS: PRIMER

SEMESTRE: 2

Autor: D. Robert Meneu Gaya. Professor titular d'universitat del Departament de Matemàtiques per a l'Economia i l'Empresa.

Aquest material ha rebut un dels incentius de la convocatòria 2011 per a la qualitat en l'elaboració de materials docents del Servei de Política Lingüística de la Universitat de València, servei que també ha revisat lingüísticament el text.

ÍNDEX

TEMA 1. INTRODUCCIÓ A L'OPTIMITZACIÓ

1.1. Introducció

El problema d'optimització matemàtica apareix quan tenim una funció que volem optimitzar en algun sentit (determinar-ne el valor màxim o mínim) mitjançant l'assignació de valors per a les variables d'aquesta funció que, addicionalment, complisquen una sèrie de condicions. Per a abordar d'una manera operativa la resolució d'aquest problema, cal delimitar en algun sentit les característiques matemàtiques que han de tenir tant la funció que es vol optimitzar com les condicions addicionals que han de complir les variables d'aquesta funció. En concret, el problema que és l'objecte de l'assignatura MATEMÀTIQUES II s'anomena problema de *programació matemàtica*, i es caracteritza perquè la funció que es vol optimitzar és diferenciable i perquè les condicions addicionals que han de complir les variables, conegudes com a restriccions, són igualtats o desigualtats formades amb funcions també diferenciables.

En conseqüència, l'enunciat general del problema de programació matemàtica és el següent:

$$\begin{array}{ll} Optimitzar & f(x) \\ s.a: & x \in S \end{array}$$

Amb:

$$f: D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \text{ diferenciable en tot el seu domini } D_f$$

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n / g(x) \leq b, h(x) = d, x \epsilon D\}$$

$$g: D_g \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \text{ diferenciable en tot el seu domini } D_g$$

$$h: D_h \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p, \text{ diferenciable en tot el seu domini } D_h$$

$$x \in \mathbb{R}^n, \;\; b \in \mathbb{R}^m, \;\; d \in \mathbb{R}^p$$

Els problemes de programació matemàtica són especialment útils en la ciència econòmica i de l'empresa, tant des d'un vessant purament teòric com des de l'aplicació pràctica. De fet, la teoria econòmica té com a principi bàsic el comportament racional dels agents econòmics, que no és més que un comportament òptim d'individus i empreses, tenint en compte les limitacions de recursos. Així, la teoria del consumidor arranca del plantejament d'un problema de maximització de la utilitat que proporciona el consum d'un conjunt de béns subjecte a una limitació pressupostària en la compra d'aquests béns. O la teoria de l'empresa comença amb el problema de minimitzar els costos per l'ús dels *inputs* que intervenen en el procés productiu subjecte a l'obtenció d'un nivell de producció mínima.

1.2. Conceptes bàsics

1.2.1. Parts del problema

El problema de programació matemàtica té les parts següents:

1. Variables principals, x: són les que representen una decisió directa del subjecte decisor. L'objectiu és assignar valor a aquestes variables. Es diuen principals per a distingir-les de les altres que apareixeran després. En general, s'anomenaran $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ o x, y, z si ho considerem convenient.
2. Funció objectiu, $f(x)$: és la funció que es vol optimitzar, és a dir, maximitzar o minimitzar. Representa alguna magnitud que és un indicador de les preferències del subjecte decisor: utilitat, beneficis, costos, etc. Aquesta funció s'encarrega de quantificar amb un valor numèric cada decisió sobre les variables principals i així determinar si una decisió és millor que una altra segons el valor que assolisca la funció objectiu.
3. Conjunt d'oportunitats, S: és el conjunt de valors que poden tenir les variables principals. Apareix com a conseqüència de les limitacions de diferent origen a les quals s'enfronta el subjecte decisor: pressupost limitat, capacitat productiva, demanda mínima, requisits legals, etc. La manera de definir el conjunt d'oportunitats és mitjançant dos tipus de condicions:
   - Restriccions: tenen la forma de desigualtats o d'igualtats, amb un primer membre que és una funció de les variables principals i un segon membre que és una constant: $4x_1 + 2x_2 \leq 12$, $x_1^2 + 4x_2 - 5x_3 = 28$, $10x^{1/2}y^{1/2} \geq 92$, etc.
   - Condicions de domini, $x \epsilon D$: són condicions més generals per a les variables principals derivades de la naturalesa mateixa de les

variables. Si no existeixen aquestes condicions es diu que les variables són lliures. Les condicions de domini més importants són:

- Condicions de no-negativitat: $D = \{x\epsilon\mathbb{R}^n / x \geq 0\}$
- Condicions de fitació: $D = \{x\epsilon\mathbb{R}^n / m \leq x \leq M\}$
- Condicions d'integritat: variables enteres, $x \in \mathbb{Z}$, o variables binàries, $x \in \{0,1\}$

Segons el mètode que s'utilitze per a resoldre el problema, les condicions de no-negativitat o de fitació es podrien considerar també com a restriccions.

Exemple 1.1

$$\begin{array}{ll} Max. & 4x_1 + x_2 \\ s.a: & x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{array}$$

En l'exemple 1.1 les variables principals són x_1 i x_2, la funció objectiu és $4x_1 + x_2$ i el conjunt d'oportunitats és $S = \{(x_1, x_2)\epsilon\,\mathbb{R}^2 / x_1 + 2x_2 \geq 8,\ 3x_1 + 2x_2 \leq 18,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\}$, que està format per dues restriccions de desigualtat i condicions de domini de no-negativitat. L'objectiu és trobar el valor de les variables principals que faça màxima la funció objectiu i que es trobe dins del conjunt S.

1.2.2. Classes de solucions i de problemes

Els valors de les variables principals poden ser diversos i entre aquests hem d'elegir els que siguen del conjunt d'oportunitats i optimitzen la funció objectiu. Apareixen les classes de solucions següents:

1. Solució factible, $x \in S$: està formada per valors de les variables principals que compleixen totes les restriccions i condicions de domini. En el cas d'incompliment d'alguna restricció o condició de domini, parlem de solució infactible, $x \notin S$. Segons la situació de la solució factible dins del conjunt d'oportunitats, poden ser:
   - Solució factible interior: si totes les restriccions i condicions de domini es compleixen amb desigualtat estricta. Un exemple de solució factible interior en el *problema 1* és $(x_1, x_2) = (2, 4)$.
   - Solució factible frontera: si alguna restricció o condició de domini es compleix amb igualtat. Uns casos especials de solucions factibles

frontera són els vèrtexs d'un conjunt d'oportunitats quan totes les restriccions són lineals. Un exemple de solució factible frontera en el problema de l'exemple 1.1 és $(x_1, x_2) = (0, 4)$.

2. Solució òptima: és la solució factible que optimitza la funció objectiu en algun sentit. L'optimització es pot produir de vuit maneres diferents segons combinem tres característiques que poden tenir les solucions òptimes:
   - Màxim - mínim: segons la funció objectiu siga màxima o mínima en aquesta solució òptima.
   - Local - global: segons siga òptima respecte a altres solucions factibles infinitament pròximes (local) o respecte a qualsevol altra solució factible (global).
   - Estricte - no estricte: segons siga l'únic òptim o n'hi haja altres.

Així, tenim les definicions de màxim següents (les de mínim serien equivalents canviant el sentit de la desigualtat).

Definicions de màxim

x^* és màxim local estricte del problema general si $\exists \epsilon > 0$ tal que:

$$f(x^*) > f(x), \qquad \forall x \in S \cap B(x^*, \epsilon)$$

x^* és màxim local no estricte del problema general si $\exists \epsilon > 0$ tal que:

$$f(x^*) \geq f(x), \qquad \forall x \in S \cap B(x^*, \epsilon)$$

x^* és màxim global estricte del problema general si:

$$f(x^*) > f(x), \qquad \forall x \in S$$

x^* és màxim global no estricte del problema general si:

$$f(x^*) \geq f(x), \qquad \forall x \in S$$

En les dues definicions de màxim local, el conjunt $B(x^*, \epsilon)$ s'anomena *bola oberta* centrada en x^* i de radi ε, i representa els punts suficientment pròxims a x^*, és a dir, punts tals que $d(x, x^*) < \epsilon$ o punts tals que $\|x - x^*\| < \epsilon$.

L'objectiu de la programació matemàtica és trobar òptims globals, encara que, a vegades, un pas previ és l'obtenció d'òptims locals.

Com a conseqüència dels tipus de solucions, hi ha la classificació següent per als problemes de programació matemàtica segons la seua solució òptima:

1. Problemes infactibles, $S = \emptyset$: són aquells en què cap solució és factible. Les restriccions i condicions de domini són incompatibles entre si. Aquests problemes no tenen una solució òptima de cap tipus.
2. Problemes no fitats: són problemes factibles, $S \neq \emptyset$, sense solució òptima global. La funció objectiu no assoleix cap valor òptim global perquè es pot millorar infinitament mitjançant solucions factibles. Sí que poden haver-hi, tanmateix, solucions òptimes locals.
3. Problemes fitats: són problemes factibles, $S \neq \emptyset$, amb solució òptima global, que pot ser única o no.

Encara que l'objectiu dels mètodes de resolució és obtenir la solució òptima global, si el problema és molt complex, pot ser que això no siga possible o que sols arribem a òptims locals.

1.2.3. Mètodes de resolució

Els mètodes de resolució del problema de programació matemàtica són tres:

1. Mètodes gràfics: són mètodes que es limiten als casos de dues variables principals. Addicionalment, les funcions que intervenen en la definició del conjunt d'oportunitats, i també la funció objectiu, han de ser suficientment fàcils de representar gràficament. No obstant això, és un mètode molt utilitzat en problemes teòrics per a observar les característiques qualitatives de la solució òptima. Es tracta en l'epígraf 1.3.
2. Mètodes analítics: són mètodes que plantegen una sèrie d'equacions o inequacions, la resolució de les quals proporciona una solució que sota condicions addicionals sobre l'estructura del problema és la solució òptima global. S'estudia en el tema 2 per al problema més general possible.
3. Mètodes numèrics: són mètodes iteratius que, començant des d'uns valors per a les variables principals, es van millorant fins que arriben a valors que es consideren suficientment pròxims a la solució òptima local (o global en el cas dels mètodes numèrics més avançats). Aquests

mètodes s'implementen amb programes informàtics cada vegada més eficients. Sols s'estudia amb detall en el tema 4 el més important dels mètodes numèrics, vàlid únicament quan les funcions del problema són lineals.

1.2.4. Classes de problemes de programació matemàtica segons la forma de les funcions

Els problemes de programació matemàtica es poden classificar segons la forma funcional de les funcions que intervenen en l'enunciat, el sentit de les restriccions i l'existència o no de condicions d'integritat de les variables. Així, tenim:

1. Programació no lineal: és l'enunciat més general possible. Les funcions poden tenir qualsevol forma i les restriccions poden ser igualtats o desigualtats. Les altres tipologies en són casos particulars. En el tema 2 s'estudia un mètode analític per a resoldre aquest cas general.
2. Programació lineal: cas particular en què totes les funcions del problema són lineals. Les restriccions poden ser igualtats o desigualtats. S'estudiarà un mètode de resolució específic en el tema 4.
3. Programació clàssica: cas particular en què no hi ha restriccions o són restriccions d'igualtat. La forma de les funcions pot ser qualsevol. És el primer tipus de problemes que es va tractar històricament, encara que nosaltres el resoldrem aplicant el mètode general per a la programació no lineal.
4. Programació entera: qualsevol dels anteriors problemes pot classificar-se també segons les variables principals del problema, tinguen o no condicions d'integritat. Si n'hi ha per a alguna variable, es parla de programació no lineal entera o de programació lineal entera, segons el cas. La programació lineal entera es tractarà en el tema 7.

Exemple 1.2

Seguint aquesta classificació, el problema de l'exemple 1.1 és de programació no lineal, perquè tots ho són, i de programació lineal, perquè tant la funció objectiu com les que formen el primer membre de les restriccions són lineals. Com que són restriccions de desigualtat no és de programació clàssica i com que no hi ha condicions d'integritat no és de programació entera.

1.3. Mètode gràfic

El mètode gràfic només es pot utilitzar quan el problema té dues variables principals i les funcions del problema són suficientment simples de representar. El mètode consta de quatre passos:

1. Representació gràfica del conjunt d'oportunitats, S.
2. Representació gràfica de la funció objectiu mitjançant almenys dues corbes de nivell.
3. Desplaçament de les corbes de nivell de la funció objectiu en la direcció d'optimització i sense eixir-se'n del conjunt d'oportunitats, de manera que es trobe l'òptim global gràficament, si n'hi ha.
4. Obtenció del valor de les variables principals a partir de l'observació de les característiques de la solució gràfica i la traducció a equacions algebraiques.

Exemple 1.3

La solució gràfica del problema de l'exemple 1.1 és la següent:

1. Representar el conjunt d'oportunitats. Cada restricció és un semiespai (perquè és desigualtat lineal) i es representa amb una recta, que és la frontera o la restricció amb igualtat, i un dels dos semiespais que defineix, deduït amb un punt de prova qualsevol, que ha de complir la restricció. Les condicions de no-negativitat impliquen treballar amb el primer quadrant. El resultat és la zona amb ombra del gràfic 1.

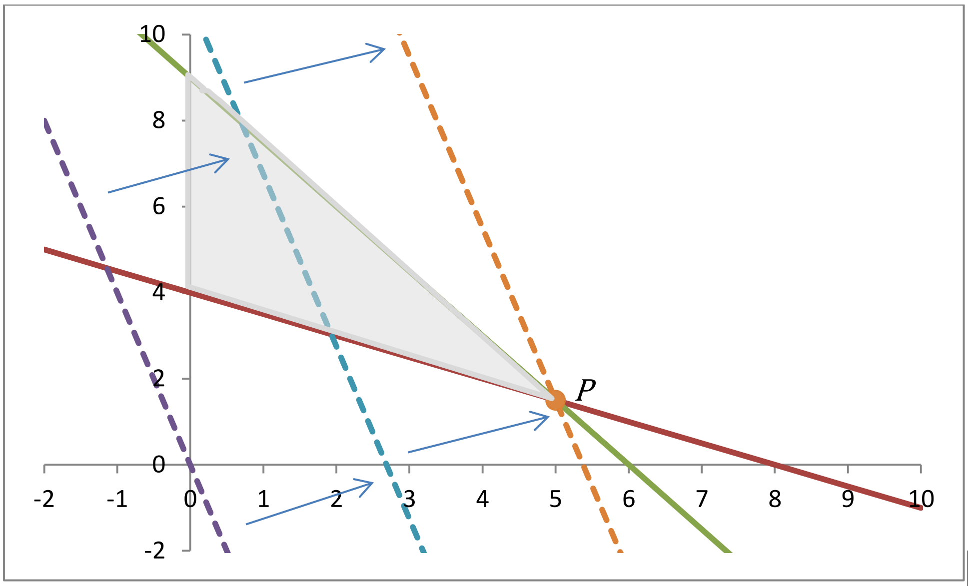
2. Representar la funció objectiu. Si igualem la funció objectiu a valors diferents, almenys 2, es poden representar corbes de nivell. Una qualsevol, la de nivell zero, és la línia discontínua del gràfic 1 que passa pel punt (0,0).

3. Desplaçar les corbes de nivell en la direcció d'optimització sense eixir-se'n del conjunt d'oportunitats. En aquest problema això suposa dibuixar línies discontínues paral·leles cada vegada més allunyades de l'origen. La màxima és la que passa pel punt P en el gràfic 1.

4. Calcular l'òptim global. Les característiques del màxim global que s'observen en el gràfic són que es troba en la frontera de les dues restriccions, per tant, se n'extrauen les dues condicions algebraiques següents: $x_1 + 2x_2 = 8 \text{i} 3x_1 + 2x_2 = 18$. Això forma un sistema d'equacions, la solució del qual és $x_1 = 5, x_2 = 3/2$, que és el

màxim global. En conseqüència, el nivell màxim de la funció objectiu és $4x_1 + x_2 = 43/2$.

Gràfic 1. Solució gràfica de l'exemple 1.1

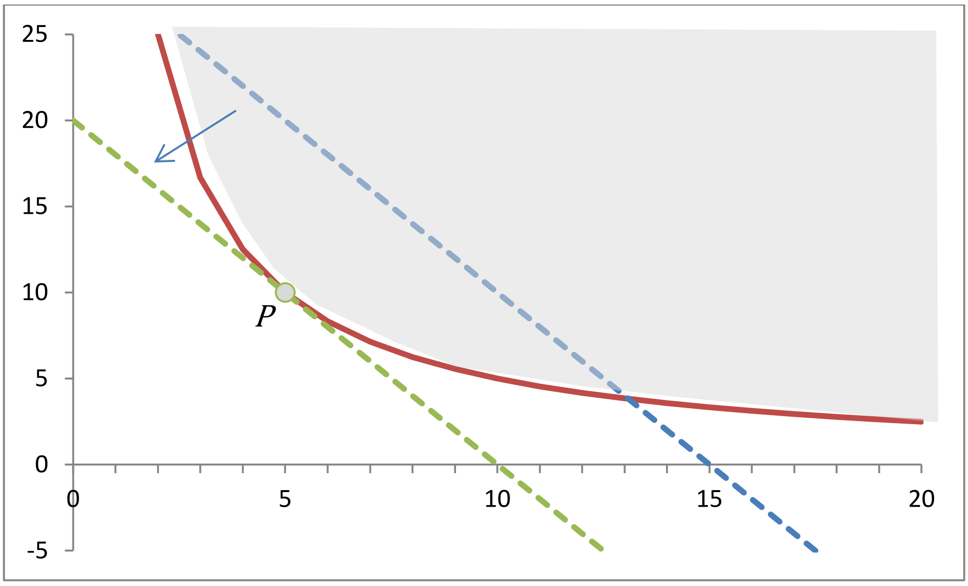


Exemple 1.4

$$\begin{array}{ll} Min. & 2x_1 + x_2 \\ s.a: & x_1 x_2 \geq 50 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{array}$$

La restricció no és un semiespai perquè no és lineal. La frontera (la igualtat) és la funció $x_2 = 50/x_1$, que es representa mitjançant una taula de valors (línia contínua en el gràfic 2). Les característiques algebraiques del punt P són $x_1 x_2 = 50$ (perquè es troba en la frontera de la restricció) i $-x_2/x_1 = -2$ (perquè són tangents la restricció i la funció objectiu). La solució del sistema en el primer quadrant és $(x_1, x_2) = (5,10)$ i el nivell mínim de la funció objectiu és $2x_1 + x_2 = 20$.

Gràfic 2. Solució gràfica de l'exemple 1.4



1.4. Transformació de problemes: enunciats canònic i estàndard

La manera d'enunciar els problemes de programació matemàtica pot ser important pel que fa a l'aplicació de certs mètodes de resolució. És convenient saber transformar un enunciat de partida d'un problema en un altre totalment equivalent però que en facilite la resolució.

Els dos enunciats més convenients són els següents:

- Enunciat canònic: es dóna una relació entre la direcció d'optimització i el sentit de les restriccions. En un enunciat canònic, si la funció objectiu és de maximitzar, les restriccions han de ser menor o igual; i si la funció objectiu és de minimitzar, les restriccions han de ser de major o igual. L'enunciat de les condicions de domini és indiferent.
- Enunciat estàndard: és aquell en què les restriccions són igualtats i totes les variables són no negatives. La direcció d'optimització de la funció objectiu és indiferent.

L'enunciat canònic serà el de partida en programació no lineal i en la dualitat en programació lineal (i s'hi afegeixen, a més a més, condicions de no-negativitat per a les variables), mentre que l'enunciat estàndard és el bàsic per a aplicar el mètode principal de resolució en programació lineal.

Per a passar a algun d'aquests enunciats des de qualsevol altre, cal aplicar-hi alguna de les regles següents:

1. Canvi en la direcció d'optimització: maximitzar una funció objectiu equival a minimitzar-ne l'oposada i a l'inrevés. Aleshores, si canviem el signe de la funció objectiu, canviem la direcció d'optimització. Exemple:
$$Min.\ 2x_1 + x_2 \quad \leftrightarrow \quad Max. -2x_1 - x_2$$
2. Canvi en el sentit d'una desigualtat: això s'aconsegueix canviant el signe dels dos membres de la restricció. Exemple:
$$x_1 x_2 \geq 50 \quad \leftrightarrow \quad -x_1 x_2 \leq -50$$
3. Pas d'una igualtat a desigualtats: una igualtat equival a dues desigualtats amb sentit contrari. Exemple:
$$3x_1 + 2x_2 = 18 \quad \leftrightarrow \quad 3x_1 + 2x_2 \leq 18\ , \qquad 3x_1 + 2x_2 \geq 18$$
4. Pas d'una desigualtat a igualtat: això requereix la introducció d'una variable de marge que, per conveniència, sempre ha de ser no negativa. Exemples:
$$3x_1 + 2x_2 \leq 18 \quad \leftrightarrow \quad 3x_1 + 2x_2 + \mathrm{s} = 18\ , \qquad \mathrm{s} \geq 0$$
$$4x_1 + 3x_2 \geq 8 \quad \leftrightarrow \quad 4x_1 + 3x_2 - \mathrm{t} = 8\ , \qquad \mathrm{t} \geq 0$$
5. Transformació de variables no positives i lliures a variables no negatives: si volem treballar amb variables no negatives (enunciat estàndard), cal eliminar-ne les variables que no ho siguen mitjançant canvis de variable adequats. Si la variable de partida és no positiva, se'n genera una altra igual que la seua oposada, i si és lliure, s'iguala a la diferència de dues noves variables no negatives. Exemples:
$$x_1 \leq 0 \quad \leftrightarrow \quad y_1 = -x_1\ , \qquad y_1 \geq 0$$
$$x_1 \text{ lliure} \quad \leftrightarrow \quad x_1 = y_1 - z_1\ , \qquad y_1 \geq 0\ , \qquad z_1 \geq 0$$
Aquests canvis de variable s'introdueixen en la funció objectiu i en les restriccions de manera que les variables originals desapareixen de l'enunciat, substituïdes per les noves variables.

1.5. Teoremes fonamentals de la programació matemàtica

El primer teorema garanteix l'existència de solució òptima global en el problema general sota determinades hipòtesis.

Teorema de Weierstrass

Si la funció objectiu, *f*(*x*), és contínua i el conjunt d'oportunitats, *S*, és no buit i compacte (tancat i fitat), aleshores el problema general tindrà màxim i mínim global.

Per a verificar les hipòtesis d'aquest teorema hem de tenir en compte les observacions següents:

- En el problema de programació matemàtica les funcions són diferenciables i, per tant, contínues sempre.
- Que el conjunt no siga buit es verifica trobant un punt factible qualsevol.
- Com les restriccions del problema sempre són igualtats o desigualtats no estrictes, els punts frontera formen part del conjunt d'oportunitats i això implica que el conjunt sempre és tancat.
- Que el conjunt siga fitat es verifica trobant fites inferiors i superiors per a totes les variables principals. Si només hi ha dues variables, també es pot verificar gràficament.

Exemple 1.5

El conjunt de l'exemple 1.1, $S = \{(x_1, x_2) \epsilon \mathbb{R}^2 / x_1 + 2x_2 \geq 8,\ 3x_1 + 2x_2 \leq 18,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\}$, és no buit perquè (0,4) és factible, i és fitat perquè amb les condicions de no-negativitat i amb la segona restricció es poden determinar les fites de les dues variables: $0 \leq x_1 \leq 6,\ 0 \leq x_2 \leq 9$. Aquestes característiques també es poden observar en el gràfic 1. Com les altres hipòtesis del teorema de Weierstrass sempre són certes en els problemes que nosaltres tractarem, concloem dient que el problema de l'exemple 1.1 de segur que té màxim global.

Si no es compleix alguna de les condicions del teorema, la conclusió adequada és que no està garantida l'existència de solució global, ja que encara podria haver-ne.

El segon teorema dóna les condicions per a arribar a l'òptim global si prèviament hem pogut arribar a un òptim local.

Teorema local-global (cas de maximitzar)

Si la funció objectiu, *f*(*x*), és (estrictament) còncava i el conjunt d'oportunitats, *S*, és convex, aleshores si *x** és un màxim local del problema general, també és un màxim global (estricte).

Teorema local-global (cas de minimitzar)

Si la funció objectiu, *f*(*x*), és (estrictament) convexa i el conjunt d'oportunitats, *S*, és convex, aleshores si x^* és un mínim local del problema general, també és un mínim global (estricte).

Les hipòtesis de concavitat o convexitat de la funció objectiu i la de convexitat del conjunt d'oportunitats que s'inclouen en el teorema local-global es verifiquen aplicant les propietats que es veuen en l'epígraf següent.

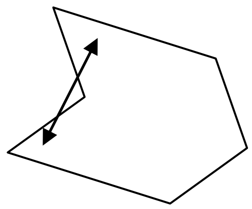
1.6. Convexitat

Definició

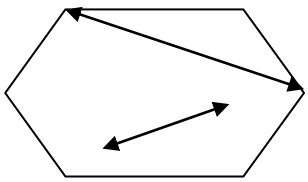
Un conjunt, $S \subseteq \mathbb{R}^n$, és **convex** si:

$$\forall x^1, x^2 \in S\,, \qquad \forall \lambda \in [0,1] \quad \rightarrow \quad (1-\lambda)x^1 + \lambda x^2 \in S$$

De manera més intuïtiva es pot dir que un conjunt és convex si el segment lineal format quan unim dos punts qualssevol del conjunt *S* es troba també en el conjunt *S*.



Conjunt no convex



Conjunt convex

Definició

Una funció, *f*(*x*), és **convexa** sobre un conjunt convex *S* del seu domini si:

$$\forall x^1, x^2 \in S\,, \qquad \forall \lambda \in [0,1] \quad \rightarrow \quad f[(1-\lambda)x^1 + \lambda x^2] \leq (1-\lambda)f(x^1) + \lambda f(x^2)$$

Una funció, *f*(*x*), és **còncava** sobre un conjunt convex *S* del seu domini si:

$$\forall x^1, x^2 \in S\,, \qquad \forall \lambda \in [0,1] \quad \rightarrow \quad f[(1-\lambda)x^1 + \lambda x^2] \geq (1-\lambda)f(x^1) + \lambda f(x^2)$$

Una funció, *f*(*x*), és **estrictament convexa** sobre un conjunt convex *S* del seu domini si:

$$\forall x^1, x^2 \in S\,, x^1 \neq x^2, \forall \lambda \in]0,1[\quad \rightarrow \quad f[(1-\lambda)x^1 + \lambda x^2] < (1-\lambda)f(x^1) + \lambda f(x^2)$$

Una funció, $f(x)$, és **estrictament còncava** sobre un conjunt convex S del seu domini si:

$$\forall x^1, x^2 \in S, x^1 \neq x^2, \forall \lambda \in]0,1[\quad \rightarrow \quad f[(1-\lambda)x^1 + \lambda x^2] > (1-\lambda)f(x^1) + \lambda f(x^2)$$

Per a verificar si un conjunt d'oportunitats és convex o no, o si una funció objectiu és còncava o convexa, per tal d'avaluar el compliment dels teoremes fonamentals de l'epígraf 1.5, les definicions anteriors no solen ser operatives. En canvi, és habitualment més pràctic fer ús d'una sèrie de propietats i caracteritzacions.

En primer lloc, l'estudi de la concavitat i/o convexitat de funcions objectiu d'un problema de programació matemàtica depèn de la seua forma funcional. En les funcions lineals és immediat mentre que en les funcions no lineals s'utilitza una caracterització mitjançant la hessiana (per al cas de funcions de classe C^2, que seran les que ací utilitzem). Els enunciats que hem d'aplicar són els següents:

Propietat per a funcions lineals

Tota funció lineal és còncava i convexa al mateix temps, però no ho és estrictament.

Caracterització per a funcions no lineals de classe C^2

Si la hessiana de la funció és semidefinida positiva (SDP), la funció és convexa.

Si la hessiana de la funció és semidefinida negativa (SDN), la funció és còncava.

Si la hessiana de la funció és definida positiva (DP), la funció és estrictament convexa.

Si la hessiana de la funció és definida negativa (DN), la funció és estrictament còncava.

Evidentment, cal saber com es fa l'estudi del signe de la matriu hessiana. Amb aquesta finalitat, distingirem tres casos per ordre creixent de dificultat d'anàlisi:

1. Si la hessiana és una matriu diagonal (tot zeros excepte en la diagonal principal):

- Si els elements de la diagonal principal són majors o iguals que zero, $d_i \geq 0, \forall i$, la hessiana és SDP.

- Si els elements de la diagonal principal són menors o iguals que zero, $d_i \leq 0, \forall i$, la hessiana és SDN.
- Si els elements de la diagonal principal són majors estrictament que zero, $d_i > 0, \forall i$, la hessiana és DP.
- Si els elements de la diagonal principal són menors estrictament que zero, $d_i < 0, \forall i$, la hessiana és DN.
- En qualsevol altre cas, la hessiana és indefinida i la funció no és ni còncava ni convexa.

Exemple 1.6

La funció $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2$ té com a hessiana $H = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, que és una matriu diagonal i com els elements de la diagonal principal són $d_1 = 2 > 0, d_2 = 2 > 0, d_3 = 4 > 0$, la matriu és DP i la funció és estrictament convexa.

2. Si la hessiana té un determinant diferent de zero, $|H| \neq 0$:

- Si tots els menors principals conduents són majors estrictament que zero, $H_1, H_{12}, H_{123}, \ldots > 0$, la hessiana és definida positiva.
- Si tots els menors principals conduents tenen un signe estricte que s'alterna començant per negatiu, $H_1 < 0, H_{12} > 0, H_{123} < 0, \ldots$, la hessiana és definida negativa.
- En altres casos la hessiana és indefinida i la funció no és ni còncava ni convexa.

Exemple1.7

La funció $f(x,y,z) = -x^2 - 2y^2 - 4z^2 + 2xy$ té com a hessiana $H = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$, que té un determinant $|H| = -32 \neq 0$ i els seus menors conduents són: $H_1 = -2 < 0, H_{12} = 4 > 0 \; i \; H_{123} = -32 < 0$, motiu pel qual és definida negativa i la funció és estrictament còncava.

3. Si la hessiana té un determinant igual a zero, $|H| = 0$:

- Si tots els menors principals de tots els ordres són majors o iguals que zero, $H^1, H^2, H^3, \ldots \geq 0$, la hessiana és semidefinida positiva.

- Si tots els menors principals dins de cada ordre tenen un signe no estricte que s'alterna començant per negatiu, $H^1 \leq 0, H^2 \geq 0, H^3 \leq 0, \ldots$, la hessiana és semidefinida negativa.
- En altres casos, la hessiana és indefinida i la funció no és ni còncava ni convexa.

Exemple 1.8

La funció $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2xy + 2z^2$ té la hessiana $H = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, amb $|H| = 0$. Els menors principals són:

Ordre 1: $H_1 = 2 \geq 0, H_2 = 2 \geq 0,\ H_3 = 4 \geq 0 \rightarrow\ H^1 \geq 0,$

Ordre 2: $H_{12} = 0\ \geq 0, H_{13} = 8\ \geq 0, H_{23} = 8\ \geq 0 \rightarrow\ H^2 \geq 0$

Ordre 3: $H_{123} = 0 \rightarrow\ H^3 \geq 0$

En conseqüència, és SDP i la funció és convexa.

En segon lloc, l'estudi de la convexitat d'un conjunt d'oportunitats d'un problema de programació matemàtica requereix l'anàlisi de cada restricció i condició de domini que defineix aquest conjunt. Això es fa aplicant les propietats de conjunts convexos que apareixen a continuació, en què la forma funcional del primer membre de la restricció i l'operador de comparació ($\leq, \geq$ o $=$) hi tenen un paper clau:

Propietat en el cas d'hiperplans

Una restricció d'igualtat amb una funció lineal en el primer membre és un hiperplà, $S = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n / c_1x_1 + \cdots + c_nx_n = \alpha\}$, i és sempre un conjunt convex.

Propietat en el cas de semiespais

Una restricció de desigualtat amb una funció lineal en el primer membre és un semiespai, $S = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n / c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \begin{Bmatrix} \leq \\ \geq \end{Bmatrix} \alpha\right\}$, i és sempre un conjunt convex.

Propietat en el cas de conjunts de nivell inferiors

Una restricció de desigualtat menor o igual és un conjunt de nivell inferior, $S = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n / g(x_1 \ldots x_n) \leq \alpha\}$, i si la funció del primer membre és convexa, és un conjunt convex.

Propietat en el cas de conjunts de nivell superiors

Una restricció de desigualtat major o igual és un conjunt de nivell superior, $S = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / g(x_1 \dots x_n) \geq \alpha\}$, i si la funció del primer membre és còncava és un conjunt convex.

Propietat de la intersecció

La intersecció de conjunts convexos és un altre conjunt convex.

Resumint aquestes propietats, es pot dir que les restriccions lineals sempre determinen un conjunt convex, independentment del sentit de la restricció. En el cas no lineal s'ha de complir una relació entre la forma de la funció del primer membre i el sentit de la desigualtat, convexa amb ≤ o còncava amb ≥, per a poder afirmar que la restricció determina un conjunt convex. Finalment, només si totes les restriccions determinen un conjunt convex es podrà garantir que el conjunt d'oportunitats, que és la intersecció de totes les restriccions, és un conjunt convex.

En els casos en què no es puguen aplicar aquestes propietats (igualtats no lineals o desigualtats no lineals sense la condició apropiada de concavitat o convexitat del primer membre), la restricció determinarà un conjunt no necessàriament convex i, per tant, el conjunt d'oportunitats, com a intersecció de conjunts algun dels quals pot no ser convex, no es podrà garantir que siga, encara que tampoc que no siga, un conjunt convex.

Exemple 1.9

El conjunt $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 2x - 3y = 4\}$ està definit per una igualtat lineal, per tant és un hiperplà i és un conjunt convex.

El conjunt $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 2x - 3y \leq 4\}$ està definit per una desigualtat lineal, per tant és un semiespai i és un conjunt convex.

El conjunt $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 4\}$ està definit per una desigualtat no lineal amb funció convexa en el primer membre (hessiana DP) i sentit ≤, per tant és un conjunt de nivell inferior que és convex.

El conjunt $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -x^2 - y^2 \geq -9\}$ està definit per una desigualtat no lineal amb funció còncava en el primer membre (hessiana DN) i sentit ≥, per tant és un conjunt de nivell superior que és convex.

El conjunt $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 4\}$ està definit per una igualtat no lineal, per tant és un conjunt no convex.

El conjunt $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 2x - 3y = 4, x^2 + y^2 \leq 4\}$ és la intersecció de dos conjunts, cadascun dels quals definit per una restricció. Com cada restricció, defineix un conjunt convex, com hem vist abans, i la intersecció de convexos és convex, el conjunt S és convex.

Qüestions, exercicis i problemes

1. Obtín gràficament la solució dels problemes de programació matemàtica següents:

$$\begin{array}{ll} Max. & 2x + y \\ s.a: & 4x + y \leq 135 \\ & x + 2y \leq 60 \\ & x, y \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} Max. & y \\ s.a: & -x^2 + y \leq 0 \\ & x + 2y \leq 6 \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} Max. & x + y \\ s.a: & 2x - y \leq 0 \\ & x + 2y \leq 6 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

2. Estudia si els conjunts següents són fitats i si són convexos:

a) $S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 2x + 4y \leq 8\}$

b) $S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 2x + 4y \leq 8, x \geq 0, y \geq 0\}$

c) $S_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + 4y^2 \leq 16\}$

d) $S_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + 4y - 3z \leq 12, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$

e) $S_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + 4y + 3z \leq 12, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$

f) $S_6 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + 4y^2 + 3z \leq 16, x \geq 0, z \geq 0\}$

g) $S_7 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + 4y^2 + 3z = 16, z \geq 0\}$

h) $S_8 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 4x^2 + y^2 \geq 16, y \geq 0\}$

3. Donats els enunciats següents de problemes de programació matemàtica, analitza primer si són lineals o no lineals. Després, si són lineals, enuncia'ls en forma estàndard i si són no lineals, enuncia'ls en forma canònica.

$$\begin{array}{ll} Min. & 2x + y \\ s.a: & 4x + y \leq 12 \\ & x + 2y \geq 6 \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} Max. & y \\ s.a: & -x^2 + y \leq 0 \\ & x + 2y \geq 6 \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} Max. & x + y \\ s.a: & 2x - y \leq 0 \\ & x + 2y = 6 \\ & y \geq 0 \end{array}$$

4. Estudia si els problemes de programació matemàtica següents compleixen les hipòtesis del teorema de Weierstrass i les hipòtesis del teorema local-global:

$$\begin{array}{ll} Max. & 2x+3y \\ s.a: & 4x+y \geq 15 \\ & x+3y \leq 60 \\ & x,y \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} Max. & y \\ s.a: & x^2+y^2 \geq 9 \\ & x+4y \leq 12 \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} Max. & x+y \\ s.a: & 2x-y \geq 0 \\ & x+2y \leq 6 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

5. Siga el problema següent:

$$\begin{array}{ll} Max. & f(x,y,z) \\ s.a: & g_1(x,y,z) \geq b_1 \\ & g_2(x,y,z) = b_2 \\ & x \geq 0, y \geq 0 \end{array}$$

a) Marca quines condiciones de concavitat i/o convexitat han de tenir necessàriament *f*, g_1 i g_2 perquè el problema complisca les hipòtesis del teorema local-global?

☐ f ha de ser còncava ☐ f ha de ser convexa ☐ f ha de ser lineal

☐ g_1 ha de ser còncava ☐ g_1 ha de ser convexa ☐ g_1 ha de ser lineal

☐ g_2 ha de ser còncava ☐ g_2 ha de ser convexa ☐ g_2 ha de ser lineal

b) Enuncia el mateix problema en forma canònica

6. Siga un problema de programació matemàtica amb el conjunt d'oportunitats següent:

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / xy \leq 4, -x+2y \leq 0, y \geq 0\}$$

a) Representa'l gràficament. Obtín una solució factible interior, una factible frontera i una infactible.

b) Avalua les hipòtesis del teorema de Weierstrass i trau-ne la conseqüència adequada.

7. Donat el problema general de programació matemàtica amb 2 variables:

$$\begin{array}{ll} Min. & F(x,y) \\ s.a: & (x,y) \in S \end{array}$$

a) Enuncia el teorema de Weierstrass per a aquest problema.

b) Escriu la definició de mínim global estricte per a aquest problema.

c) Si $F(x,y) = 2x + y$ i $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / xy \geq 32, x+y \leq 20, x \geq 0, y \geq 0\}$, obtín gràficament el mínim global.

8. Donat el problema general de programació matemàtica amb 3 variables:

$$\begin{array}{ll} Max. & F(x,y,z) \\ s.a: & (x,y,z) \in S \end{array}$$

a) Si $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + y^2 \leq 10, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$, estudia si verifica les condicions adequades del teorema de Weierstrass. Com a conseqüència d'aquest estudi i suposant que $F(x, y, z)$ és contínua, quina conclusió se n'extrau al voltant de l'existència de màxim global?

b) Enuncia el teorema local-global per a aquest problema. Verifica si el conjunt S de l'apartat anterior compleix la condició adequada del teorema local-global.

c) Escriu la definició matemàtica de màxim global no estricte per a aquest problema. Si $F(x,y,z) = 2x + 3y + 4z$ i S és el conjunt de l'apartat a)¸ demostra que el punt $(x,y,z) = (5,0,10)$ no és el màxim global no estricte del problema.

9. Siguen les restriccions i condicions de domini següents:

$$x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + y^2 \geq 1, x + y \leq 2, x + y \geq 2, x \geq 0, y \geq 0$$

a) Crea 4 conjunts d'oportunitats, utilitzant correctament la notació de conjunt ($S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / ...\}$) en definir-los, i elegeix convenientment d'entre les restriccions anteriors, de manera que tingues un conjunt no buit amb cadascuna de les característiques següents:

   i. Fitat i convex
   ii. Fitat i no convex
   iii. No fitat i convex
   iv. No fitat i no convex

b) Amb el conjunt d'oportunitats de l'apartat *ii*), calcula gràficament el mínim global de la funció $f(x,y) = x - y$.

c) Amb el conjunt d'oportunitats de l'apartat *iii*), posa un exemple de funció objectiu amb màxim global i un exemple de funció objectiu sense màxim global.

TEMA 2. PROGRAMACIÓ NO LINEAL

2.1. Introducció

En aquest tema estudiem el mètode més general possible per a resoldre els problemes de programació matemàtica. És el mètode que cal aplicar quan el problema no és lineal i no disposem d'altres mètodes més específics que siguen més eficients. En general, la resolució de problemes amb funcions no lineals és complex. De fet, el mètode que veurem ací no sempre ens permetrà arribar a l'òptim global, encara que n'hi haja.

Les tècniques analítiques de la programació no lineal es basen en les condicions de Kuhn i Tucker, que veurem en l'epígraf 2.2. No obstant això, perquè l'òptim global del problema complisca aquestes condicions cal satisfer la qualificació de restriccions, una condició per a les restriccions del problema que s'enuncia en l'epígraf 2.3. Si no es dóna la qualificació de restriccions, l'òptim global del problema, si n'hi ha, podria no complir les condicions de Kuhn i Tucker. Al contrari, si el problema satisfà la qualificació de restriccions i hi ha una solució òptima (cosa que es verifica amb el teorema de Weierstrass vist en l'epígraf 1.5), la trobarem entre els punts de Kuhn i Tucker.

El problema també es pot resoldre a partir de les condicions de Kuhn i Tucker si les funcions que apareixen en l'enunciat del problema (funció objectiu i funcions dels primers membres de les restriccions) compleixen condicions adequades de concavitat i/o convexitat. Aquestes dues maneres de resoldre el problema no lineal s'enuncien en l'epígraf 2.4 mitjançant dos teoremes de suficiència.

Encara que, en teoria, poden quedar molts tipus de problemes no lineals sense poder-los resoldre amb les condicions de Kuhn i Tucker, les aplicacions econòmiques principals de la programació no lineal són problemes que tenen un bon comportament, en el sentit que compleixen les hipòtesis adequades per a ser resolts amb aquestes tècniques.

2.2. Condicions de Kuhn i Tucker

Les condicions de Kuhn i Tucker són el punt de partida per a arribar a l'òptim global d'un problema de programació no lineal. Els punts que satisfan aquestes condicions, o punts de Kuhn i Tucker, són els candidats a òptims globals però per a ser-ho efectivament es requerirà una anàlisi posterior amb algun teorema de suficiència dels que apareixen en l'epígraf 2.4.

Donat el problema d'optimització matemàtica en forma canònica següent:

$$\begin{array}{rc} Max. & F(x_1, \dots, x_n) \\ s.a: & g_1(x_1, \dots, x_n) \leq b_1 \\ & \vdots \\ & g_m(x_1, \dots, x_n) \leq b_m \end{array}$$

Es planteja la funció lagrangiana del problema, que és la funció següent de les variables principals i dels multiplicadors $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ associats a les restriccions:

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = F(x_1, \dots, x_n) + \lambda_1(b_1 - g_1) + \cdots + \lambda_m(b_m - g_m)$$

I, a partir d'aquesta funció, es plantegen les condicions de Kuhn i Tucker que, dividides en quatre blocs, són les que apareixen a continuació.

***Condicions de Kuhn i Tucker*:**

I. Condicions de factibilitat:

$$g_1(x_1, \dots, x_n) \leq b_1, \dots \dots \dots, g_m(x_1, \dots, x_n) \leq b_m$$

II. Condicions de punt crític:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \dots \dots \dots, \frac{\partial L}{\partial x_n} = 0$$

III. Condicions de signe dels multiplicadors de Kuhn i Tucker:

$$\lambda_1 \geq 0, \dots \dots \dots, \lambda_m \geq 0$$

IV. Condicions de marge complementari:

$$\lambda_1(b_1 - g_1) = 0, \dots \dots \dots, \lambda_m(b_m - g_m) = 0$$

Les anteriors condicions de Kuhn i Tucker s'han d'adaptar si l'enunciat del problema no està en forma canònica tenint en compte les observacions següents:

- Les condicions de no-negativitat de les variables principals, si n'hi ha, s'han de considerar com a restriccions amb els multiplicadors corresponents.
- El primer bloc o les condicions de factibilitat està format per les restriccions, independentment de com estiguen expressades (forma canònica o no).
- El tercer bloc o condicions de signe dels multiplicadors és $\lambda \geq 0$ si la restricció està en forma canònica ($\leq$ en problemes de maximitzar o $\geq$ en problemes de minimitzar), però canvia a $\lambda \leq 0$ si la restricció està en forma contrària a la canònica, mentre que no té condició de signe (λ és lliure) si la restricció és d'igualtat.
- El quart bloc o les condicions de marge complementari sols es posen en el cas de desigualtats, però no calen en el cas d'igualtats.

Com podem veure, les condicions de Kuhn i Tucker són un sistema d'equacions i d'inequacions. La manera d'extraure els punts que les satisfan totes, anomenats *punts de Kuhn i Tucker*, és mitjançant la resolució del sistema d'equacions i la comprovació posterior de les inequacions. En aquest procés, el tractament de les condicions de marge complementari és clau: cada condició significa que o bé s'anul·la el multiplicador o bé s'anul·len els parèntesis (se satura la restricció). Això dóna lloc a un parell de possibilitats per a cada condició de marge complementari que cal investigar, però amb l'avantatge que, dins de cada possibilitat, el sistema que cal resoldre és més fàcil.

Exemple 2.1

En el problema d'optimització següent:

$$\begin{array}{ll} Max. & 4x_1 + x_2 \\ s.a: & x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ & 3x_1 + 2x_2 = 18 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{array}$$

La funció lagrangiana és:

$$L(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = 4x_1 + x_2 +$$

$$+\lambda_1(8 - x_1 - 2x_2) + \lambda_2(18 - 3x_1 - 2x_2) + \lambda_3(-x_1) + \lambda_4(-x_2)$$

I les condicions de Kuhn i Tucker són:

I. Factibilitat: $x_1 + 2x_2 \geq 8, 3x_1 + 2x_2 = 18,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

II. Punt crític:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 4 - \lambda_1 - 3\lambda_2 - \lambda_3 = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial x_2} = 1 - 2\lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_4 = 0$$

III. Signe dels multiplicadors: $\lambda_1 \leq 0,\ \lambda_2\ lliure,\ \lambda_3 \leq 0, \lambda_4 \leq 0$

IV. Marge complementari:

$$\lambda_1(8 - x_1 - 2x_2) = 0, \qquad \lambda_3(-x_1) = 0, \qquad \lambda_4(-x_2) = 0$$

L'obtenció dels punts de Kuhn i Tucker comença distingint els diversos casos possibles a partir de les condicions del bloc IV:

Cas 1: $\lambda_1 = 0,\ \lambda_3 = 0,\ \lambda_4 = 0$

Cas 2: $\lambda_1 = 0,\ \lambda_3 = 0,\ (-x_2) = 0$

Cas 3: $\lambda_1 = 0,\ (-x_1) = 0,\ \lambda_4 = 0$

Cas 4: $\lambda_1 = 0,\ (-x_1) = 0,\ (-x_2) = 0$

Cas 5: $(8 - x_1 - 2x_2) = 0,\ \lambda_3 = 0,\ \lambda_4 = 0$

Cas 6: $(8 - x_1 - 2x_2) = 0,\ \lambda_3 = 0,\ (-x_2) = 0$

Cas 7: $(8 - x_1 - 2x_2) = 0,\ (-x_1) = 0,\ \lambda_4 = 0$

Cas 8: $(8 - x_1 - 2x_2) = 0,\ (-x_1) = 0,\ (-x_2) = 0$

Cada cas té 3 igualtats diferents que, juntament amb les 3 igualtats comunes restants (la segona restricció i les dues condicions de punt crític), forma un sistema de 6 equacions que permetrà calcular les 6 incògnites del problema: les 2 variables principals i els 4 multiplicadors.

Si investiguem els 8 sistemes d'equacions, els casos 1, 4, 6, 7 i 8 formen sistemes incompatibles. Les solucions dels altres sistemes són:

Cas 2: $(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (6, 0, 0, {}^4/_3, 0, {}^{-5}/_3)$

Cas 3: $(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (0, 9, 0, {}^1/_2, {}^5/_2, 0)$

Cas 5: $(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (5, {}^3/_2, {}^{-5}/_4, {}^7/_4, 0, 0)$

Aquestes solucions per a les equacions se substitueixen en les inequacions i s'observa que la solució associada al cas 2 no compleix la condició de factibilitat (viola la primera restricció) i la del cas 3 no compleix la condició de signe del tercer multiplicador. La solució del cas 5 sí que compleix totes les inequacions. Per tant, l'únic punt de Kuhn i Tucker és $(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (5, {}^{3}/_{2}, {}^{-5}/_{4}, {}^{7}/_{4}, 0, 0)$.

Com podem apreciar en l'exemple 2.1, la resolució de les condicions de Kuhn i Tucker és una tasca molt laboriosa. En problemes teòrics sol ser habitual tenir alguna informació addicional al voltant del punt de Kuhn i Tucker que en simplifique els càlculs. Si coneixem el valor de les variables principals, per a comprovar si és o no punt de Kuhn i Tucker, és convenient seguir l'ordre de blocs següent: I – IV – II – III. En aplicacions econòmiques, la forma de les funcions i el comportament racional dels consumidors i les empreses es poden utilitzar per a arribar a la solució més ràpidament com veurem en l'epígraf 2.6.

2.3. Qualificació de restriccions

Els punts de Kuhn i Tucker d'un problema no són sempre equivalents a òptims globals del problema. Cal estudiar condicions addicionals per a resoldre definitivament el problema.

Per qualificació de restriccions s'entén les condicions que han de complir les restriccions del problema perquè les condicions de Kuhn i Tucker vistes en l'epígraf anterior siguen necessàries per a ser òptim global. És a dir, ens asseguraran que l'òptim global, si n'hi ha, és un punt que satisfà les condicions de Kuhn i Tucker.

Hi ha diverses qualificacions de restriccions, però només estudiarem les tres més operatives de verificar.

Primera qualificació de restriccions

El problema no té restriccions.

Segona qualificació de restriccions

Totes les restriccions del problema són lineals.

Tercera qualificació de restriccions

Tot punt del conjunt d'oportunitats és regular.

La regularitat d'un punt que s'exigeix en la tercera qualificació de restriccions l'hem de comprovar amb la definició següent:

Definició de punt regular

Un punt factible és regular si verifica alguna de les condicions següents:

1. És interior del conjunt d'oportunitats.

2. És frontera i els gradients de les restriccions saturades en aquest punt són un sistema de vectors linealment independent.

La comprovació de la independència lineal dels gradients de la definició anterior requereix:

- En el cas d'una única restricció saturada, que aquest gradient no siga el vector nul.
- En el cas de més d'una restricció saturada, que el rang de la matriu formada en situar cada gradient en una fila (o columna) siga igual al nombre de restriccions saturades.

Exemple 2.2

1. El conjunt d'oportunitats de l'exemple 2.1 verifica la segona qualificació de restriccions, ja que totes elles són lineals.
2. El conjunt $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x_1x_2 \geq 50, x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\}$ satisfà la tercera qualificació de restriccions, perquè els punts interiors sempre són regulars i els punts frontera (vegeu el gràfic 2) són aquells del primer quadrant en què se satura la primera restricció, $x_1x_2 = 50$, i el gradient d'aquesta restricció és no nul, $(x_2, x_1) \neq (0,0)$.
3. El conjunt $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x_1x_2 \geq 50, x_1 \geq 10,\ x_2 \geq 0\}$ satisfà la tercera qualificació de restriccions, perquè els punts interiors sempre són regulars. Els punts frontera en què sols se satura la primera restricció tenen un gradient no nul, $(x_2, x_1) \neq (0,0)$. Els punts frontera en què sols se satura la segona restricció també tenen un gradient no nul, $(1, 0) \neq (0,0)$. Finalment, en l'únic punt en què se saturen al mateix temps la primera i la segona restricció, el (10, 5), el sistema de vectors gradients és $\{(5, 10), (1, 0)\}$ que forma una matriu de rang 2 = nombre de restriccions saturades i, per tant, és linealment independent.

La qualificació de restriccions permet enunciar la condició necessària d'òptim global.

Condició necessària d'òptim global

Si un problema satisfà alguna qualificació de restriccions, aleshores el seu òptim global ha de ser necessàriament un punt de Kuhn i Tucker.

Les implicacions d'aquesta condició necessària són diverses:

- El compliment de la qualificació de restriccions vol dir que l'òptim global, si n'hi ha, és un punt de Kuhn i Tucker, però no vol dir que tot punt de K-T siga òptim global (no és una condició suficient).
- El compliment de la qualificació de restriccions també vol dir que un punt que no siga un punt de K-T es pot rebutjar com a possible òptim global.
- El no compliment de cap de les tres qualificacions de restriccions no ens pot dur a cap conclusió. El motiu és que es podria complir alguna de les qualificacions de restriccions que no hem vist o, al contrari, podria no complir-se cap qualificació de restriccions. En conseqüència, no es poden rebutjar els punts que no són de K-T com a possibles òptims globals.

El resultat més interessant de l'estudi de la qualificació de restriccions s'obté quan, al mateix temps, es verifica el teorema de Weierstrass i sols hi ha uns pocs punts (un nombre finit de punts) que compleixen les condicions de K-T. Aquest resultat s'enuncia en l'epígraf 2.4.

2.4. Teoremes de suficiència

Les condicions que permeten fer el pas definitiu des d'un punt de Kuhn i Tucker fins a un òptim global s'enuncien en forma de teoremes de suficiència. Encara que n'hi ha més, nosaltres en veurem només dos. El primer i habitualment més fàcil de verificar es coneix com a teorema de suficiència de Kuhn i Tucker i es basa en condicions apropiades de concavitat i/o convexitat.

Primer teorema de suficiència (de Kuhn i Tucker): cas de maximitzar

Si la funció objectiu és còncava i el conjunt d'oportunitats és convex, aleshores si x^* és un punt de Kuhn i Tucker, és també un màxim global.

Primer teorema de suficiència (de Kuhn i Tucker): cas de minimitzar

Si la funció objectiu és convexa i el conjunt d'oportunitats és convex, aleshores si x^* és un punt de Kuhn i Tucker, és també un mínim global.

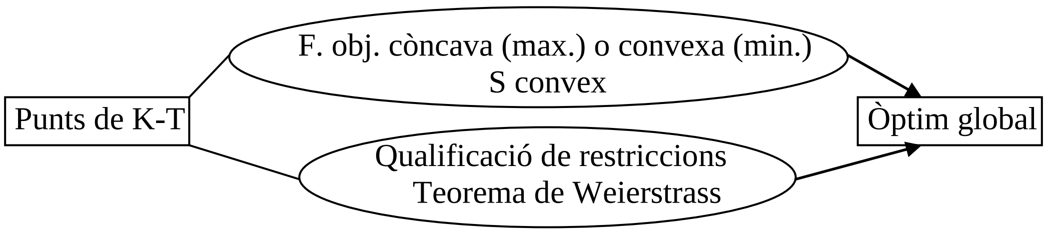
Les hipòtesis d'aquest teorema són les mateixes que les del teorema local-global del tema 1, però aquell s'aplicava a òptims locals i aquest a punts de Kuhn i Tucker. Igual que aquell teorema, si el problema és de programació lineal, es podrà aplicar aquest teorema de suficiència sempre que disposem d'un punt de Kuhn i Tucker. En casos no lineals, pot ocórrer que no es complisca alguna de les hipòtesis del teorema. Si és així, no es podrà concloure res, ni que siga ni que no siga òptim global, i haurem d'intentar-ho amb el segon teorema de suficiència.

Segon teorema de suficiència

Si el problema verifica alguna qualificació de restriccions, verifica les hipòtesis del teorema de Weierstrass i sols un nombre finit de punts satisfà les condicions de K-T, aleshores el millor dels punts de K-T és l'òptim global.

Aquest segon teorema té hipòtesis que solen ser més difícils de verificar i també es requereix calcular tots els punts de Kuhn i Tucker, raons per les quals és preferible començar pel primer dels teoremes de suficiència. Si no es compleixen cap d'aquests dos teoremes de suficiència, el problema quedarà sense resoldre: tindrem únicament punts de Kuhn i Tucker però no podrem afirmar quin d'ells és òptim global.

En l'esquema següent es resumeixen els dos teoremes de suficiència.



Així doncs, els problemes d'optimització matemàtica, pel que fa a l'aplicació del mètode analític de resolució basat en les condicions de Kuhn i Tucker, es poden classificar en tres grans blocs:

1. Problemes de programació còncava (maximitzar) o convexa (minimitzar): són aquells en què es verifica el primer teorema de suficiència. Inclou els lineals i la majoria de les aplicacions

econòmiques no lineals. En aquests problemes, tot punt de Kuhn i Tucker és òptim global.

2. Altres problemes no lineals resolubles amb les condicions de Kuhn i Tucker: són aquells en què no es verifica el primer teorema de suficiència però sí el segon. En aquests problemes cal calcular tots els punts de Kuhn i Tucker, avaluar la funció objectiu en cadascun d'aquests i elegir-ne el millor.
3. Problemes no resolubles amb les condicions de Kuhn i Tucker: són aquells en què no es verifiquen les condicions de cap dels dos teoremes de suficiència. En aquests no es pot assegurar que un punt de Kuhn i Tucker siga òptim global i, per tant, el problema no queda resolt amb aquestes tècniques analítiques.

Exemple 2.3

$$\begin{array}{rc} Min. & x-4y \\ s.a: & 2x^2+y^2+z^2 \leq 9 \\ & -4x+6z=0 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Suposem que $(x, y, z) = (0, 3, 0)$ és un punt de Kuhn i Tucker del problema. Passem a comprovar el primer teorema de suficiència:

1. Funció objectiu convexa (estem minimitzant): ho és perquè és lineal.
2. Conjunt d'oportunitats convex:
   a. La primera restricció és un conjunt de nivell inferior. Cal comprovar que el primer membre és una funció convexa. La seua hessiana és $H = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, que és DP i, per tant, convexa. Aleshores, és un conjunt convex.
   b. La segona i tercera restricció són lineals (hiperplà i semiespai, respectivament): són un conjunt convex.
   c. La intersecció de tres conjunts convexos és un altre conjunt convex.

Aleshores, com que es compleix el primer teorema de suficiència, el punt $(x, y, z) = (0, 3, 0)$ és mínim global.

Exemple 2.4

$$\begin{array}{rc} Max. & x - y \\ s.a: & x + 2y \leq 10 \\ & x^2 - 8x + y \geq -12 \\ & y \geq 0 \end{array}$$

Suposem que $(x, y) = (10, 0)$ és un punt de Kuhn i Tucker del problema. Passem a comprovar el primer teorema de suficiència:

1. Funció objectiu còncava (estem maximitzant): ho és perquè és lineal.
2. Conjunt d'oportunitats convex:
   a. La primera i tercera restricció són desigualtats lineals o semiespais: són un conjunt convex.
   b. La segona restricció és un conjunt de nivell superior. Cal comprovar que el primer membre és una funció còncava. La seua hessiana és $H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, que és SDP i, per tant, convexa. No es pot demostrar la convexitat del conjunt S i, en conseqüència, no és un problema de programació còncava.

Passem a comprovar el segon teorema de suficiència: el teorema de Weierstrass no és aplicable perquè el conjunt d'oportunitats no està fitat.

Aleshores, amb les tècniques analítiques estudiades en aquest tema no es pot assegurar que el punt $(x, y) = (10, 0)$ siga el màxim global.

2.5. Interpretació dels multiplicadors de Kuhn i Tucker

Els multiplicadors de Kuhn i Tucker tenen una interpretació que ens dóna informació addicional al voltant de la solució òptima del problema. En concret, el valor del multiplicador associat a cada restricció ens diu com la variació infinitesimal del terme independent d'aquesta restricció afecta el valor òptim de la funció objectiu, és a dir:

$$\frac{\partial F^*}{\partial b_i} = \lambda_i^*$$

Per a variacions concretes no infinitesimals del terme independent, l'expressió anterior es transforma en una aproximació que ens serveix per al càlcul de la variació que experimentarà la funció objectiu davant de canvis en el terme independent de cada restricció:

$$\frac{\Delta F^*}{\Delta b_i} \approx \lambda_i^* \quad \Longrightarrow \quad \Delta F^* \approx \lambda_i^* \cdot \Delta b_i$$

Aquesta aproximació serà millor com més petits siguen els canvis en el terme independent.

2.6. Aplicacions econòmiques

2.6.1. Problema del consumidor

Aquest problema és el que origina tota la teoria de la demanda. Es tracta de determinar la combinació de consums de cada bé que fa màxima la utilitat del consumidor (funció *U*) tenint en compte la limitació pressupostària imposada per la renda disponible del consumidor (*M*). En el cas més bàsic de dos únics béns, el problema és el següent:

$$\begin{aligned} Max. \quad & U(x,y) \\ s.a: \quad & p_x x + p_y y \leq M \\ & x \geq 0, \qquad y \geq 0 \end{aligned}$$

La funció d'utilitat pot ser diversa, però per a ser compatible amb el supòsit habitual de comportament racional del consumidor ha de tenir derivades parcials estrictament positives (es prefereix més consum a menys) i ser còncava (es prefereix una mescla de béns que especialitzar-se en el consum d'un d'ells). Amb aquests supòsits, el problema compleix el primer teorema de suficiència (funció objectiu còncava i conjunt d'oportunitats convex, ja que és una intersecció de semiespais) i el punt de Kuhn i Tucker és segur el màxim global.

Funció lagrangiana: $L(x,y,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = U(x,y) + \lambda_1\big(M - p_x x - p_y y\big) - \lambda_2 x - \lambda_3 y$

Condicions de Kuhn i Tucker:

I. $p_x x + p_y y \leq M,\ x \geq 0,\ y \geq 0$

II. $\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} - \lambda_1 p_x - \lambda_2 = 0,\quad \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} - \lambda_1 p_y - \lambda_3 = 0$

III. $\lambda_1 \geq 0,\ \lambda_2 \leq 0,\ \lambda_3 \leq 0$

IV. $\lambda_1\big(M - p_x x - p_y y\big) = 0,\ -\lambda_2 x = 0,\ -\lambda_3 y = 0$

Encara que teòricament es podrien plantejar fins a vuit casos a partir del bloc IV, el comportament racional del consumidor implicarà consumir una mescla dels dos béns, $x > 0$ i $y > 0$. Això suposa que $\lambda_2 = 0$ i $\lambda_3 = 0$. Si substituïm en el bloc II, podem observar que no pot ser que $\lambda_1 = 0$, perquè aniria en contra del supòsit de comportament racional del consumidor (utilitats marginals estrictament positives). En definitiva, l'única combinació coherent des del punt de vista econòmic és: $p_x x + p_y y = M, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$. Per substitució en les dues equacions del bloc II obtenim:

$$\lambda_1 = \frac{\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}}{p_x} = \frac{\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}}{p_y}$$

Aquesta és la condició d'igualtat d'utilitats marginals ponderades pels preus. Ens diu que el consumidor adquirirà de cadascun dels béns fins que la utilitat addicional que li proporcione consumir una unitat de cada bé en relació amb el preu d'aquest bé siga igual per als dos béns. Aquesta condició, juntament amb la restricció pressupostària amb igualtat, permetrà calcular els consums dels dos béns.

Exemple 2.5

Si la funció d'utilitat és $U(x, y) = 5\ln(x) + \ln(y)$ i els preus dels productes i la renda disponible són $p_x = 4, p_y = 2$ i $M = 120$, la condició d'igualtat d'utilitats marginals ponderades pels preus i la restricció pressupostària amb igualtat formen el sistema d'equacions següent:

$$\lambda_1 = \frac{5/x}{4} = \frac{1/y}{2} \quad \longrightarrow \quad \lambda_1 = \frac{5}{4x} \ , \ \ 10y = 4x$$

$$4x + 2y = 120$$

I la solució és la combinació òptima de consums $x = 25$, $y = 10$, amb multiplicador $\lambda_1 = 0{,}05$. Aquest multiplicador s'interpreta econòmicament com la millora d'utilitat que es tindria si es disposa d'una unitat més de renda.

2.6.2. Problema de l'empresa

Aquest problema és el que origina tota la teoria de l'oferta. Es tracta de determinar en quines quantitats s'han d'utilitzar els factors productius per a minimitzar els costos de l'empresa tenint en compte l'obtenció d'un nivell mínim de producció (Q).

En el cas més bàsic de dos únics factors productius, capital (K) i treball (L), i si anomenem F la funció de producció, el problema és:

$$\begin{array}{ll} Min. & p_K K + p_L L \\ s.a: & F(K,L) \geq Q \\ & K \geq 0, \quad L \geq 0 \end{array}$$

La funció de producció F ha de complir certes condicions de coherència econòmica, com ara tenir derivades de primer ordre positives (més factor productiu implica més producció) i de segon ordre negatives (quantitats addicionals de factor productiu fan augmentar cada vegada menys la producció). Les funcions còncaves compleixen aquesta segona condició, motiu pel qual les funcions de producció habituals són còncaves. Això provoca que el problema de l'empresa verifique el primer teorema de suficiència (funció objectiu convexa, perquè és lineal, i conjunt d'oportunitats convex, perquè és una intersecció d'un conjunt de nivell superior amb funció còncava i dos semiespais) i, en conseqüència, que el punt de Kuhn i Tucker siga, sens dubte, el mínim global.

Funció lagrangiana: $L(K, L, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = p_K K + p_L L + \lambda_1(Q - F(K, L)) - \lambda_2 K - \lambda_3 L$

Condicions de Kuhn i Tucker:

I. $F(K,L) \geq Q,\ K \geq 0,\ L \geq 0$

II. $p_K - \lambda_1 \frac{\partial F(K,L)}{\partial K} - \lambda_2 = 0,\ p_L - \lambda_1 \frac{\partial F(K,L)}{\partial L} - \lambda_3 = 0$

III. $\lambda_1 \geq 0,\ \lambda_2 \geq 0,\ \lambda_3 \geq 0$

IV. $\lambda_1(Q - F(K,L)) = 0,\ -\lambda_2 K = 0,\ -\lambda_3 L = 0$

Una altra de les condicions habituals de les funcions de producció és que la producció siga nul·la si no s'utilitza cap unitat d'algun dels factors productius. En aquest cas, hem d'utilitzar quantitats no nul·les dels dos factors si volem arribar a la producció mínima, i això suposa que $\lambda_2 = 0$ i $\lambda_3 = 0$ (bloc IV). Com que els preus dels factors no poden ser zero, implica que $\lambda_1 \neq 0$ obligatòriament (bloc II) i, per tant, que s'haja de produir exactament la quantitat mínima per a complir amb la primera condició del bloc IV. En definitiva, l'única combinació coherent econòmicament amb les condicions habituals és: $F(K,L) = Q, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$. Per substitució en les dues equacions del bloc II s'obté:

$$\frac{1}{\lambda_1}=\frac{\frac{\partial F(K,L)}{\partial K}}{p_K}=\frac{\frac{\partial F(K,L)}{\partial L}}{p_L}$$

Aquesta és la coneguda condició d'igualtat de les productivitats marginals ponderades pels preus. Ens diu que l'empresa utilitzarà cadascun dels factors productius fins que la producció addicional que li proporcione utilitzar una unitat de cada factor en relació amb el preu d'aquest factor siga igual per als dos factors. Aquesta condició, juntament amb la restricció de producció mínima amb igualtat, permetrà calcular les quantitats òptimes de factors productius utilitzats.

Exemple 2.6

Si la funció de producció és $F(K,L)=10K^{1/2}L^{1/2}$ i els preus dels factors i la producció mínima són $p_K=8, p_L=20$ i $Q=160$, la condició d'igualtat de productivitats marginals ponderades pels preus i la restricció de producció mínima amb igualtat formen el sistema d'equacions següent:

$$\frac{1}{\lambda_1}=\frac{5K^{-1/2}L^{1/2}}{8}=\frac{5K^{1/2}L^{-1/2}}{20} \quad\longrightarrow\quad \lambda_1=\frac{8K^{1/2}}{5L^{1/2}}\ ,\ \ 20L=8K$$

$$10K^{1/2}L^{1/2}=160$$

I la solució és la combinació òptima d'utilització de recursos productius $K=8\sqrt{10}\,,\ L=\frac{16\sqrt{10}}{5}$, amb multiplicador $\lambda_1=\frac{4\sqrt{10}}{5}$. Aquest multiplicador s'interpreta econòmicament com el cost addicional d'incrementar en una unitat la producció mínima.

Qüestions, exercicis i problemes

10. Escriu les condicions de Kuhn i Tucker dels problemes següents:

$$\begin{array}{ll} Max. & x-y \\ s.a: & x+2y\le 10 \\ & x^2-8x+y\ge -12 \\ & y\ge 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} Min. & 6x+4y+z \\ s.a: & x+y+z^{1/2}\ge 92 \\ & x+2y\le 100 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} Max. & x^{1/2}+y^{1/2} \\ s.a: & 2x+y\le 12 \\ & x\ge 1 \\ & y\ge 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} Min. & 2(x-2)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 \\ s.a: & 2x-5y\le 0 \\ & x\ge 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} Max. & -x+8y \\ s.a: & 3x+y\le 12 \\ & x+y^2-6y\ge -5 \\ & x\ge 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} Min. & -x+y \\ s.a: & x+2y\le 16 \\ & y+(x-4)^2\ge 9 \\ & y\ge 0 \end{array}$$

11. Estudia la qualificació de restriccions en els problemes de l'exercici 1.

12. Estudia el teorema de suficiència de Kuhn i Tucker en els enunciats de l'exercici 10. Si disposàrem d'un punt de Kuhn i Tucker de cada problema, raona si seria òptim global.

13. En els problemes de l'exercici 10 en què no es compleix el teorema de suficiència de Kuhn i Tucker, estudia el segon teorema de suficiència. Si disposàrem del millor punt de Kuhn i Tucker de cadascun d'aquests problemes, raona si seria òptim global.

14. Donat el problema d'optimització matemàtica següent:

$$\begin{array}{ll} Min. & x - 4y \\ s.a: & -4x + 6z = 0 \\ & 2x^2 + y^2 + z^2 \leq 9 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

a) Analitza si està garantida l'existència de mínim global.
b) Escriu les condicions de Kuhn i Tucker.
c) Estudia si el punt $(x, y, z) = (0,3,0)$ compleix les condicions de Kuhn i Tucker.
d) Estudia, amb algun teorema de suficiència, si aquest punt és el mínim global.

15. Donat el problema de programació no lineal següent:

$$\begin{array}{ll} Min. & 2x^2 - 2xy + y^2 \\ s.a: & 2x + y \geq 4 \\ & x - 5y \leq 5 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

a) Analitza el teorema de Weierstrass en el problema i trau la conseqüència que es deriva d'aquest estudi.
b) Escriu les condicions de Kuhn i Tucker.
c) Estudia si el punt $(x, y) = (\frac{6}{5}, \frac{8}{5})$ compleix les condicions de Kuhn i Tucker.
d) Estudia si aquest punt és el mínim global.
e) Si es pot incrementar el terme independent d'alguna restricció, de quina manera seria preferible fer-ho?

TEMA 3. INTRODUCCIÓ A LA PROGRAMACIÓ LINEAL

3.1. Plantejament d'un problema de programació lineal

Els problemes de programació lineal es caracteritzen perquè tant la funció objectiu com les restriccions són lineals. La linealitat de les funcions permet una expressió matricial per al problema, molt utilitzada en aquest tema i en els temes següents. D'altra banda, es pot parlar dels dos tipus d'enunciats que hem considerat importants: l'enunciat canònic i l'enunciat estàndard. En programació lineal, el més utilitzat és l'estàndard com veurem més endavant. Les formes estàndard extensa i matricial són, respectivament:

$$\begin{array}{cc} Max.\text{ o } Min. & c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \\ s.a: & a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ & x_1, \cdots, x_n \geq 0 \end{array} \quad \text{i} \quad \begin{array}{cc} Max.\text{ o } Min. & c^tx \\ s.a: & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

En la notació matricial, el vector *c* és el de *n* coeficients de la funció objectiu i apareix transposat perquè és un vector fila. El vector *x* és el de *n* variables. La matriu *A* és la matriu *m* x *n* de coeficients de les variables en les restriccions (a_{ij}), també anomenada matriu tècnica o de coeficients tècnics. Finalment, el vector *b* és el de *m* termes independents de les restriccions.

La matriu A del problema en forma estàndard jugarà un paper clau en la resolució dels problemes lineals, raó per la qual és molt important saber construir-la. És important observar que cada columna de la matriu A està formada pels coeficients d'una variable.

Exemple 3.1

En el problema en forma no estàndard següent:

$$\begin{array}{cc} Max. & 8x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ s.a: & x_2 + 2x_3 \geq 6 \\ & 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 8 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Per a escriure la matriu *A* en forma estàndard, primer cal passar el problema extens a aquesta forma, és a dir, amb igualtats i totes les variables no negatives. En aquest cas, només cal afegir-hi una variable de marge, *s*:

$$\begin{array}{ll} Max. & 8x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ s.a: & x_2 + 2x_3 - s = 6 \\ & 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 8 \\ & x_1, x_2, x_3, s \geq 0 \end{array}$$

I la matriu A en forma estàndard és:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

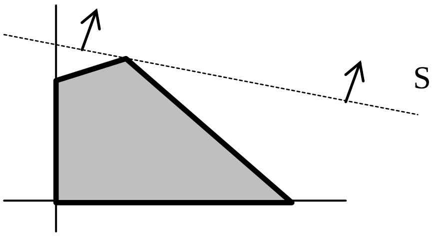
3.2. Implicacions de la linealitat. Tipus de solucions

El fet que les funcions del problema d'optimització siguen totes lineals té una sèrie d'implicacions sobre alguns dels teoremes que hem estudiat en els temes anteriors:

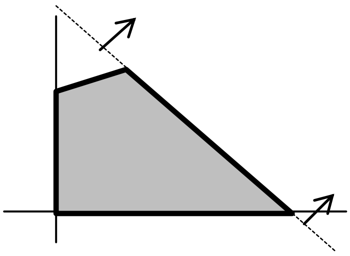
1. El teorema local-global i el teorema de suficiència de Kuhn i Tucker sempre hi són aplicables. Efectivament, el primer requisit d'aquests teoremes, la concavitat (per a maximitzar) o convexitat (per a minimitzar) de la funció objectiu es compleix perquè tota funció lineal és còncava i convexa al mateix temps. Igualment, el segon requisit, que el conjunt d'oportunitats siga convex, també és sempre cert perquè és la intersecció de semiespais i/o hiperplans, ja que les restriccions són lineals. Queda garantit, en conseqüència, que tot òptim local o tot punt de Kuhn i Tucker és òptim global.
2. La qualificació de restriccions sempre es compleix, en concret la segona qualificació de restriccions, perquè són lineals.
3. El teorema de Weierstrass, en canvi, no es veu afectat per la linealitat de les funcions, per tant, l'existència de solució òptima continua requerint la comprovació del fet que el conjunt d'oportunitats siga fitat. La linealitat no assegura que el problema tinga òptim global, ja que el problema podria ser infactible o no fitat (vegeu-ne exemples gràfics a continuació).
4. Si hi ha una solució òptima global, aquesta es troba sempre en punts frontera del conjunt d'oportunitats, mai no en punts interiors. Podrà ser:
   a. Solució única o de vèrtex: l'òptim global es troba en un vèrtex del conjunt d'oportunitats.
   b. Solució múltiple: l'òptim global es troba en més d'un punt frontera, un dels quals segur que és un vèrtex del conjunt d'oportunitats. En aquest cas, automàticament tots els punts del segment lineal que uneix dos òptims globals també seran òptims globals i s'obtindran infinites

solucions globals. En el cas de dues variables principals, la solució múltiple també s'anomena solució d'aresta i hi poden aparèixer dos casos:

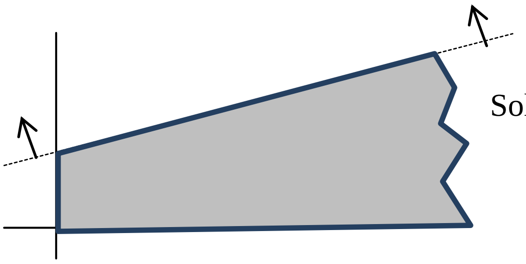
i. Solució d'aresta finita: l'aresta és un segment lineal, amb un vèrtex en cada extrem.
ii. Solució d'aresta infinita: l'aresta és una semirecta, amb un vèrtex en un extrem però sense fi en l'altre.



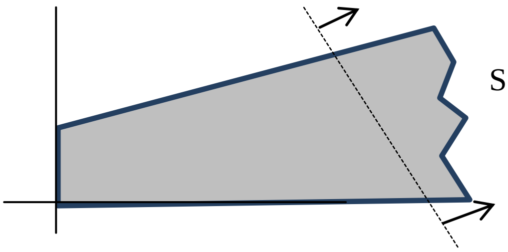
Solució de vèrtex



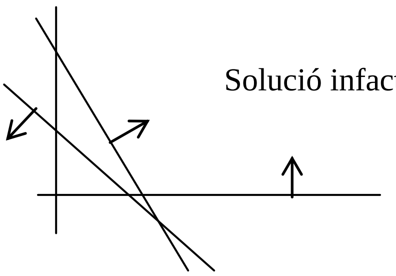
Solució d'aresta finita



Solució d'aresta infinita (conjunt no fitat)



Solució no fitada (conjunt no fitat)



Solució infactible (conjunt buit)

3.3. Solució factible bàsica

En l'obtenció de l'òptim global d'un problema lineal els vèrtexs del conjunt d'oportunitats juguen un paper clau, com hem observat en els exemples gràfics anteriors: si la solució és única, segur que és un vèrtex i si és múltiple, almenys una també és un vèrtex. Per tant, si assegurem que el problema té òptim global (conjunt fitat) i calculem tots els vèrtexs del conjunt d'oportunitats, el millor d'aquests (si avaluem la funció objectiu) serà òptim global. Si hi ha més d'un amb el millor valor de la funció objectiu, la solució és múltiple, ja que els punts dels segments que uneixen dos òptims globals també ho són. En canvi, si el conjunt no està fitat, conèixer el millor dels vèrtexs sols ens servirà per a tenir un candidat a òptim global, però tal vegada el problema siga no fitat.

El *vèrtex* és un concepte geomètric i es calcula, en el cas de dues variables principals, després d'observar en el gràfic quines dues restriccions o condicions de signe de les variables passen per aquest vèrtex i amb la resolució del sistema d'equacions corresponent. Quan passem a més de dues variables, aquest procediment no és aplicable. Necessitem un concepte equivalent al de vèrtex però basat en condicions algebraiques. Aquest concepte és el de solució factible bàsica i s'aplica sobre l'enunciat del problema en forma estàndard.

Definició de solució factible bàsica (SFB)

Donat el problema lineal en forma estàndard:

$$\begin{array}{ll} Max.\ \text{o}\ Min. & c^t x \\ s.a: & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Un punt x és SFB si:

1. Almenys *n-m* variables són iguals a zero. Aquestes variables s'anomenen *no bàsiques,* mentre que la resta (*m* variables) són les variables *bàsiques* i poden tenir qualsevol valor. En forma estàndard, *n* representa el nombre de variables i *m* el nombre de restriccions.
2. La matriu quadrada formada per les columnes de la matriu A corresponents a les variables bàsiques té un determinant diferent de zero: $|B| \neq 0$. Aquesta matriu B

s'anomena *matriu bàsica*, mentre que les columnes de la matriu A corresponents a les variables no bàsiques formen la matriu N.

3. Els valors de les variables satisfan les restriccions: $Ax = b$

4. Els valors de les variables són no negatius: $x \geq 0$

De l'anterior definició s'extrau la de solució bàsica (SB) quan es compleixen els requisits 1, 2 i 3. Així mateix, els requisits 3 i 4 són els de solució factible (SF), un concepte que ja hem vist en el tema 1.

L'aplicació pràctica d'aquesta definició, quan tenim un problema en què volem calcular totes les solucions factibles bàsiques, es fa pas per pas:

- Seguint el primer requisit, cal partir el vector de variables en dos blocs: un de variables bàsiques, x_B, amb tantes variables com restriccions, i un de variables no bàsiques, $x_N = 0$, amb la resta de variables. Aquest primer requisit de la definició origina tantes possibles SFB com combinacions es puguen fer de n variables en blocs de m variables, és a dir, un nombre combinatori igual a $\frac{n!}{m!(n-m)!}$.
- A continuació, s'avalua el requisit 2, calculant el determinant de la matriu bàsica per a cadascuna de les anteriors combinacions. Si és igual a zero es descarta com a SFB.
- En el punt 3, es calcula el valor de les variables bàsiques que satisfà les restriccions. Aquest càlcul es pot fer de dues maneres: una, resolent el sistema d'equacions que queda quan substituïm en les restriccions les variables no bàsiques per zero; i, dos, amb el càlcul matricial, $x_B = B^{-1}b$, expressió que es dedueix fent un producte matricial per blocs a partir de les restriccions: $Ax = b \longrightarrow Bx_B + Nx_N = b \longrightarrow Bx_B = b$ perquè $x_N = 0 \longrightarrow x_B = B^{-1}b$.
- Finalment, si totes les variables bàsiques són majors o iguals que zero es confirma com a SFB i si alguna és negativa, es queda només en SB. Si és SFB, pot ser de dos tipus: degenerada, si alguna variable bàsica és zero, o no degenerada, si totes són estrictament positives.

Exemple 3.2

Seguint amb el problema de l'exemple 3.1, que en forma estàndard és:

$$\begin{aligned} Max. \quad & 8x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ s.a: \quad & x_2 + 2x_3 - s = 6 \\ & 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 8 \\ & x_1, x_2, x_3, s \geq 0 \end{aligned}$$

el càlcul de totes les seues SFB comença partint el vector de n = 4 variables en dos blocs amb m = 2 variables bàsiques i n – m = 2 variables no bàsiques iguals a zero. Això origina sis combinacions, com es pot apreciar en les dues primeres columnes de la taula 3.1. A continuació, es calcula el determinant de la matriu B associada a cada possible SFB, extraient-la de la matriu $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, i en aquest cas tots són diferents de zero, tal com s'aprecia en la columna 3 de la taula 3.1. Després, es calculen els valors de les variables bàsiques amb algun dels mètodes abans comentats. Els valors es troben en la quarta columna de la taula 3.1. Finalment, en la columna cinquena de la taula 3.1, s'avalua la no-negativitat de totes les variables. Les SFB són les que compleixen totes les condicions.

Taula 3.1. Càlcul de totes les SFB

x_B	x_N	$\lvert B \rvert \neq 0$	$Ax = b$	$x \geq 0$	És SFB?
(x_1, x_2)	(x_3, s)	$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2$	$(x_1, x_2) = (1,6)$	✓	Sí
(x_1, x_3)	(x_2, s)	$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -4$	$(x_1, x_3) = (-2,3)$	X	No
(x_1, s)	(x_2, x_3)	$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2$	$(x_1, s) = (4, -6)$	X	No
(x_2, x_3)	(x_1, s)	$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2$	$(x_2, x_3) = (4,1)$	✓	Sí
(x_2, s)	(x_1, x_3)	$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$	$(x_2, s) = (8,2)$	✓	Sí
(x_3, s)	(x_1, x_2)	$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 4$	$(x_3, s) = (2, -2)$	X	No

El resultat és que el conjunt d'oportunitats del problema té tres SFB o vèrtexs en els punts: (1, 6, 0, 0), (0, 4, 1, 0) i (0, 8, 0, 2). Totes són no degenerades. Si hi ha una solució òptima en el problema, s'obtindria avaluant la funció objectiu en cadascun d'aquests punts i elegint-ne el millor, en aquest cas el de valor major.

3.4. Teoremes de la programació lineal

En aquest epígraf es dóna forma de teorema a algunes de les implicacions ja comentades de la programació lineal.

Teorema de la solució òptima múltiple en programació lineal

Si dues SFB són òptims globals, qualsevol punt intermedi entre aquests dos també és òptim global.

Demostració

Siguen x^1ix^2 dos òptims globals. Evidentment, la funció objectiu ha de ser la mateixa en els dos, $z = c^t x^1 = c^t x^2$. Un punt intermedi entre aquests dos es pot representar com qualsevol combinació lineal amb coeficients positius que sumen 1, és a dir, $x = (1-\lambda)x^1 + \lambda x^2,\ 0 \le \lambda \le 1$. D'una banda, aquest punt és del conjunt d'oportunitats perquè *S* és convex. D'altra banda, la funció objectiu en qualsevol punt intermedi és:

$$c^t x = c^t[(1-\lambda)x^1 + \lambda x^2] = (1-\lambda)c^t x^1 + \lambda c^t x^2 = (1-\lambda)z + \lambda z = z$$

En conseqüència, el punt *x* també és òptim global perquè té el mateix valor de la funció objectiu que els òptims globals x^1 i x^2.

Teorema fonamental de la programació lineal

1. Si el problema té solucions factibles, aleshores té almenys una SFB.
2. Si el problema té solució òptima, aleshores té almenys una SFB òptima.

Aquest teorema assegura que si analitzem només les SFB podrem trobar la solució òptima, si n'hi ha. Això és important perquè un problema lineal té un nombre finit de SFB i sempre és millor buscar l'òptim entre uns pocs punts que entre infinits punts del conjunt d'oportunitats. Encara així, el nombre de SFB pot ser massa elevat i aquest mètode poc operatiu en la pràctica, raó per la qual en el pròxim tema s'explica un mètode més eficient.

Qüestions, exercicis i problemes

16. Passa els problemes següents a forma estàndard i escriu la matriu *A* en cada cas.

$$\begin{array}{ll} Max. & 2x+y \\ s.a: & 4x+y \le 15 \\ & x+2y \le 6 \\ & x,y \ge 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} Max. & y \\ s.a: & -3x+y \le 0 \\ & x+2y \le 16 \\ & x \ge 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} Min. & x+y \\ s.a: & 2x-y \ge 0 \\ & x+2y = 6 \\ & x \le 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} Max. & 2x+y+3z \\ s.a: & 4x+y+2z \leq 25 \\ & x+2y+4z \geq 16 \\ & x,y,z \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} Max. & x+2y+4z \\ s.a: & -3x+y \leq 0 \\ & x+2y \leq 16 \\ & x+2y+z \leq 24 \\ & x,y,z \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} Min. & 2x+y \\ s.a: & 2x-y \geq 0 \\ & x+2y = 6 \\ & 3x+2y \leq 6 \\ & x,y \geq 0 \end{array}$$

17. Calcula gràficament, si n'hi ha, l'òptim global del problemes següents. Digues el tipus de solució: de vèrtex, d'aresta finita o d'aresta infinita. Si no n'hi ha, digues si el problema és infactible o no fitat.

$$\begin{array}{ll} Max. & 2x+y \\ s.a: & 4x+y \leq 15 \\ & x+2y \leq 6 \\ & x,y \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} Max. & x+2y \\ s.a: & -3x+y \leq 0 \\ & x+2y \leq 16 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} Min. & x+y \\ s.a: & 2x-y \leq 0 \\ & x+2y \leq 6 \\ & x \leq 0 \end{array}$$

18. Calcula totes les SFB dels problemes següents.

$$\begin{array}{ll} Max. & 2x+y \\ s.a: & 4x+y \leq 15 \\ & x+2y \leq 6 \\ & x,y \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} Min. & 2x+y+2z \\ s.a: & 2x-y \geq 0 \\ & x+2y = 6 \\ & 3x+2y+z \leq 6 \\ & x,y,z \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} Max. & x+4y+2z+3t \\ s.a: & 2x+y+3z+2t \leq 30 \\ & x,y,z,t \geq 0 \end{array}$$

19. Una vegada obtingudes totes les SFB dels problemes de l'exercici 18, avalua la funció objectiu en cadascuna d'elles i raona si pots deduir quin és l'òptim global en cada problema.

20. Siga $F(x,y,z) = x+y+2z$ la funció objectiu d'un problema lineal que volem fer màxima. Les 3 variables són no negatives:

a) Afegeix una única restricció de manera que el problema tinga solució única o de vèrtex, calcula totes les SFB i el valor de la funció objectiu en cadascuna.
b) Afegeix una única restricció de manera que el problema tinga solució múltiple o d'aresta, calcula totes les SFB i el valor de la funció objectiu en cadascuna.
c) Afegeix una única restricció de manera que el problema tinga solució no fitada.
d) Afegeix una única restricció de manera que el problema siga infactible.

Nota: les restriccions no s'acumulen en cada apartat, són úniques.

21. Donat el problema següent:

$$\begin{array}{ll} Max. & 2x_1+x_2 \\ s.a: & 4x_1+x_2 \leq 12 \\ & 7x_1+2x_2 \leq 16 \\ & x_1,x_2 \geq 0 \end{array}$$

a) Calcula la SFB amb variables bàsiques $x_B = (x_2, s_1)$.

b) Calcula la SB amb $x_B = (x_1, x_2)$. És SFB?

c) Raona si $(x_1, x_2, s_1, s_2) = (2,1,3,0)$ és SF, SB o SFB.

d) Si $(\frac{16}{7}, 0, \frac{20}{7}, 0)$, $(0,0,12,16)$ i la de l'apartat *a*) són totes les SFB del problema, analitza quina és la millor i si pots deduir que és el màxim global.

22. Considerem el problema:

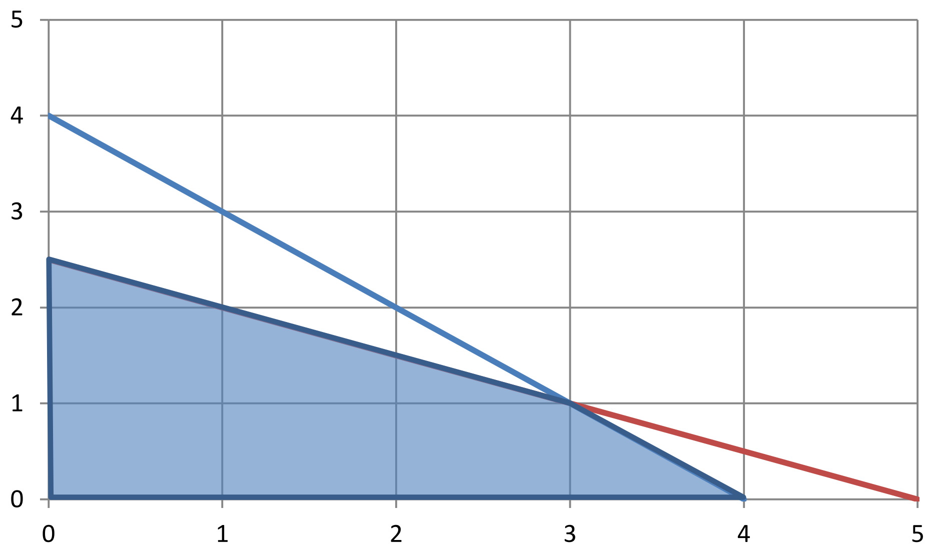
$$\begin{array}{ll} Max. & x \\ s.a: & -3x + y \leq 2 \\ & x + 2y \leq 18 \\ & x, y \geq 0 \end{array}$$

a) Calcula la SB associada a $x_B = (x, y)$. És SFB?

b) Calcula una SB però no factible.

c) Calcula una SF però no bàsica.

23. Per al conjunt d'oportunitats d'un problema lineal següent:



a) Calcula totes les seues SFB

b) Planteja les restriccions del problema

c) Si la funció objectiu és $max.\ 4x + y$, calcula el màxim global.

d) Si la funció objectiu és $min.\ 4x - y$, calcula el mínim global.

e) Planteja una funció objectiu que, després de maximitzar-la, tinga solució d'aresta.

TEMA 4. EL MÈTODE SÍMPLEX

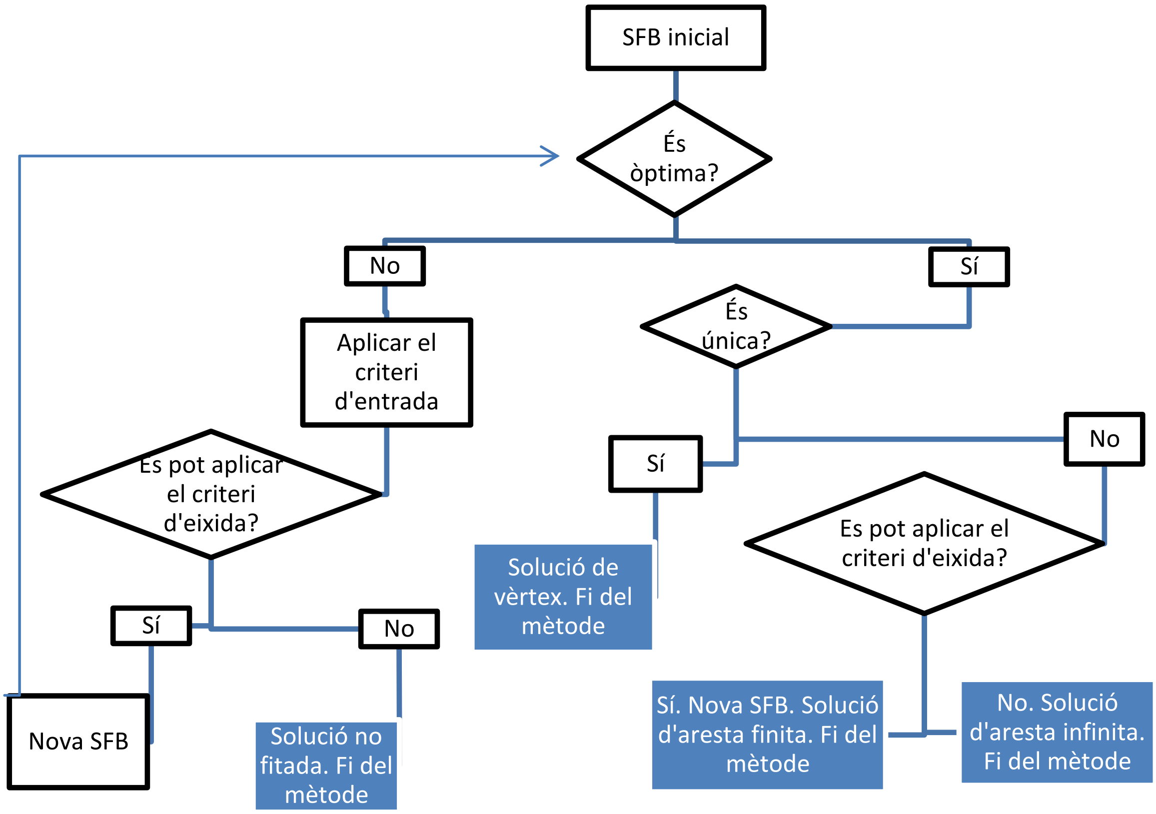
4.1. Descripció general

El mètode símplex forma part de la categoria de mètodes numèrics de resolució. És, per tant, un mètode iteratiu que comença des d'una SFB i, en cada etapa, avalua si és l'òptim global i, en cas contrari, passa a una SFB millor, si és possible, i es repeteix el procés. És un mètode que investiga diverses SFB però no totes necessàriament, com es feia en el tema 3, sinó només les que milloren l'anterior. D'altra banda, és un mètode que no requereix comprovar el teorema de Weierstrass, ja que la mateixa dinàmica del mètode ens dirà si el problema és no fitat.

El començament del mètode símplex exigeix que el problema estiga enunciat en forma estàndard. Igualment, cal partir d'una SFB qualsevol que s'ha de calcular seguint les indicacions vistes en el tema 3 o, alternativament i en certs casos, aplicant el mètode de les penalitzacions que veurem en l'epígraf 4.5. Si no hi ha cap SFB és perquè el problema és infactible. El pas principal del mètode consisteix a passar a una SFB millor que l'anterior. Tenint en compte que el nombre de variables bàsiques i no bàsiques és sempre el mateix en cada problema, el pas d'una SFB a una altra es fa canviant únicament una variable bàsica per una no bàsica. En termes gràfics, es tracta de passar d'un vèrtex del conjunt d'oportunitats a un altre adjacent, és a dir, passar d'un extrem d'una aresta a un altre. Per a fer aquest pas hem d'aplicar dos criteris: el primer o criteri d'entrada determina quina variable no bàsica en la SFB prèvia ha de passar a ser bàsica en la nova SFB (variable d'entrada), mentre que el segon o criteri d'eixida determina quina variable bàsica en la SFB prèvia ha de passar a ser no bàsica en la nova SFB (variable d'eixida). Les operacions matemàtiques que hi ha darrere d'aquests dos criteris es fonamenten en la millora, tant com siga possible, de la funció objectiu.

Aquest pas principal no sempre es podrà completar, i això és el que determinarà l'acabament del procés. Quan s'arribe a una SFB en la qual no es puga millorar més la funció objectiu, aquesta serà una solució òptima global, que podrà ser única (i en aquest cas no hi haurà variable d'entrada) o múltiple (i en aquest cas sí que hi haurà variable d'entrada per a arribar a l'altre extrem de l'aresta, si és finita). També pot acabar el procés quan la SFB es puga millorar de manera infinita (hi ha variable d'entrada però no d'eixida), i aquest cas s'identifica com el de solució no fitada. L'esquema 4.1 resumeix el funcionament del mètode símplex.

Esquema 4.1. Funcionament general del mètode símplex



Com es pot veure en l'esquema 4.1, el mètode símplex pot acabar en qualsevol dels quatre requadres ombrejats, bé perquè el problema té solució òptima (de vèrtex, d'aresta finita o d'aresta infinita) o bé perquè és un problema no fitat. En cas contrari, s'arribaria a una nova SFB i caldria repetir el procés.

En els epígrafs següents es desenvolupa el mètode símplex. Tots els càlculs necessaris per a aplicar tant els criteris d'entrada i d'eixida com per a passar a la SFB següent es poden organitzar en una taula anomenada *taula del símplex*. Aquesta taula, a més a més, facilitarà els raonaments necessaris per a determinar si la SFB és òptima i de quina classe o si és una solució no fitada.

4.2. La taula del símplex

Considerem el problema lineal en forma estàndard:

$$\begin{aligned} Max.\quad & F = c^t x \\ s.a:\quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

I recordem, segons hem estudiat en el tema 3, que tota SFB d'aquest problema es caracteritza per tenir un bloc de variables bàsiques $x_B = B^{-1}b \geq 0$ i un bloc de variables no bàsiques $x_N = 0$.

La taula del símplex associada a cada SFB del problema anterior es construeix de la manera següent:

		$c_1 c_2 \cdots\cdots\cdots c_n$ $x_1 x_2 \cdots\cdots\cdots x_n$	
c_{B_1} $\vdots$ c_{B_m}	x_{B_1} $\vdots$ x_{B_m}	$Y = B^{-1}A$	$x_B = B^{-1}b$
z_j		$z = c_B B^{-1} A$	$F = c_B B^{-1} b$
w_j		$w = c - z$	

Exemple 4.1

Donat el problema de l'exemple 3.1. en forma estàndard:

$$\begin{aligned} Max.\quad & 8x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ s.a:\quad & x_2 + 2x_3 - s = 6 \\ & 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 8 \\ & x_1, x_2, x_3, s \geq 0 \end{aligned}$$

una de les seues SFB és $(x_2, x_3) = (4,1)$, tal com es pot veure en la taula 3.1. La taula del símplex associada a aquesta SFB és:

		8	3	2	0	
		x_1	x_2	x_3	s	
3	x_2	-2	1	0	-2	4
2	x_3	1	0	1	1/2	1
z_j		-4	3	2	-5	14
w_j		12	0	0	5	

La part central de la taula s'ha obtingut com a resultat de l'operació matricial següent:

$$Y = B^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

D'altra banda, els valors de les dues últimes files es poden calcular directament sobre la taula fent la suma de productes i una resta, respectivament. Per exemple:

$$z_1 = c_B B^{-1} A_1 = 3 \times (-2) + 2 \times 1 = -4, \qquad w_1 = c_1 - z_1 = 8 - (-4) = 12$$

I, finalment, els valors de les variables bàsiques en l'última columna es calculen resolent un sistema d'equacions o amb l'operació matricial $x_B = B^{-1}b$, tal com es va veure en el tema 3.

Convé interpretar cada part de la taula del símplex per a entendre posteriorment els criteris d'entrada i d'eixida, així com el raonament per a deduir si la SFB associada és òptima o no. Les dues parts de la taula que ens donen la informació més rellevant són l'última columna i l'última fila:

- Última columna: $x_B = B^{-1}b$ és el valor de les variables bàsiques, que sempre ha de ser major o igual que zero, i $F = c_B B^{-1} b$ és el valor que assoleix la funció objectiu en aquesta SFB.
- Última fila: $w_j = c_j - z_j$, en el cas de variables no bàsiques és la variació que experimentaria la funció objectiu si aquesta variable passara a ser bàsica amb valor unitari, per això cada w_j s'anomena rendiment marginal de la variable j. En el cas de variables bàsiques val zero obligatòriament i no s'interpreta. Aquest w_j o rendiment marginal és el resultat de dos efectes: un directe, que ve donat per c_j, i un indirecte, que és igual a $-z_j$:
  - L'efecte directe és clar, ja que si una variable no bàsica passa de valer 0 a valer 1, la variació directa en la funció objectiu suposant que la resta de variables no canvia és igual al coeficient d'aquesta variable, perquè $\frac{\partial F}{\partial x_j} = c_j$.
  - L'efecte indirecte ve donat perquè quan es canvia el valor d'una variable no bàsica, les variables bàsiques han d'adaptar el seu valor perquè es continuen complint les restriccions i, en conseqüència, també canviarà el valor de la funció objectiu. En concret, la variació de cada variable bàsica x_i quan es canvia cada variable no bàsica x_j es troba en la part central de la taula amb el signe canviat, $\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = -y_{ij}$, i la variació indirecta en la funció objectiu com a conseqüència d'aquest canvi és $-z_j$.

Exemple4.2

En la taula del símplex de l'exemple 4.1 associada a la SFB amb $x_B = (x_2, x_3)$:

		8	3	2	0	
		x_1	x_2	x_3	s	
3	x_2	-2	1	0	-2	4
2	x_3	1	0	1	1/2	1
z_j		-4	3	2	-5	14
w_j		12	0	0	5	

Els valors ombrejats tenen la interpretació següent:

- $c_1 = 8$: efecte directe sobre la funció objectiu si la variable no bàsica x_1 passara a valer una unitat, és a dir, la funció objectiu augmentaria en 8 unitats si es mantingueren constants els valors de les altres variables.
- $y_{11} = -2$: efecte sobre la primera variable bàsica amb el signe canviat si la variable no bàsica x_1 passara a valer una unitat, és a dir, x_2 augmentaria en 2 unitats.
- $y_{21} = 1$: efecte sobre la segona variable bàsica amb el signe canviat si la variable no bàsica x_1 passara a valer una unitat, és a dir, x_3 disminuiria en 1 unitat.
- $z_1 = -4$: efecte indirecte sobre la funció objectiu amb el signe canviat si la variable no bàsica x_1 passara a valer una unitat, és a dir, la funció objectiu augmentaria en 4 unitats com a conseqüència de la variació en el valor de les variables bàsiques.
- $w_1 = 12$: efecte total sobre la funció objectiu si la variable no bàsica x_1 passara a valer una unitat, és a dir, la funció objectiu augmentaria en 12 unitats.

Igualment es podrien interpretar els valors de la quarta columna de la part central de la taula del símplex. Els valors que apareixen en les columnes de les variables bàsiques no s'interpreten, però han de ser valors lògics: les columnes de la matriu identitat en el mateix ordre que estiguen les variables bàsiques i zeros per als rendiments marginals.

4.3. Criteris d'entrada i d'eixida, i identificació dels tipus de solució

Amb la interpretació de cada part de la taula del símplex vista en l'epígraf anterior es pot entendre la lògica dels criteris d'entrada i d'eixida, així com la identificació de si una solució és òptima (de vèrtex, d'aresta finita o d'aresta infinita) o és no fitada:

Identificació de solució òptima (cas de maximitzar)

Si tots els rendiments marginals de variables no bàsiques són menors o iguals que zero, $w_j \leq 0,\ \forall j \in N$, la SFB és òptim global. Si la desigualtat és estricta, és solució de vèrtex i, en cas contrari, és solució d'aresta.

Efectivament, si tots els rendiments marginals són no positius, la funció objectiu ja no pot augmentar i la SFB és òptim global. Si algun d'aquests val zero, vol dir que la SFB és òptim global però no únic, perquè aquesta variable no bàsica no milloraria la funció objectiu però tampoc l'empitjoraria, i s'arribaria a solucions alternatives o d'aresta. En el cas de minimitzar, es pot transformar el problema que cal maximitzar i aplicar-hi la identificació anterior o canviar la desigualtat de sentit, $w_j \geq 0,\ \forall j \in N$.

Criteri d'entrada (cas de maximitzar)

Si la solució no és òptima, la variable no bàsica que ha de passar a ser bàsica (variable d'entrada) és la que té màxim rendiment marginal, és a dir, aquella x_j tal que $max.\{w_j,\ w_j \geq 0,\ j \in N\}$.

Aquest criteri és lògic perquè la variable d'entrada que més fa augmentar la funció objectiu per unitat és la que té rendiment marginal màxim. Si el màxim rendiment marginal és zero, la SFB ja és òptima, però el criteri d'entrada té sentit per a arribar a altres solucions òptimes (solució d'aresta). Si dues variables no bàsiques tenen el mateix rendiment marginal se n'elegeix una qualsevol d'aquestes. Si es pot minimitzar, es pot transformar el problema que cal maximitzar i aplicar-hi el criteri anterior o canviar el criteri d'entrada i elegir x_j tal que $min.\{w_j,\ w_j \leq 0,\ j \in N\}$.

Criteri d'eixida (cas de maximitzar o minimitzar)

Si entra la variable no bàsica x_k, la variable bàsica que ha de passar a ser no bàsica (variable d'eixida) és la que fa mínim el resultat de dividir el valor de cada variable bàsica entre l'element corresponent de la columna de la variable que entra, sempre que aquest element siga estrictament positiu. És a dir, aquella variable x_i tal que $min.\left\{\frac{x_i}{y_{ik}},\ y_{ik} > 0,\ \forall i \in B\right\}$.

Aquest criteri és igualment lògic, encara que més difícil d'entendre. Com que interessa que la variable que entra x_k assolisca un valor tan alt com siga possible, convé que isca la variable bàsica x_i que més limita el valor de la variable que entra. Però això només passa si $y_{ik} > 0$, és a dir, si x_i disminueix quan augmenta x_k. En aquest cas, cada variable bàsica amb $y_{ik} > 0$ implicarà un límit al valor de la variable d'entrada igual al quocient $\frac{x_i}{y_{ik}}$, perquè per a aqueix valor la variable bàsica corresponent arribarà a valer 0 i no pot disminuir més. El mínim d'aquests quocients és el de la variable bàsica que més aviat val zero i aquesta és la variable d'eixida. Si el criteri d'eixida no s'hi pot aplicar, $y_{ik} \leq 0, \forall i \in B$, vol dir que la variable d'entrada pot prendre valors infinitament grans. Això permet identificar la solució no fitada, la d'aresta infinita i, per exclusió, la d'aresta finita.

Identificació de solució no fitada (cas de maximitzar)

Si hi ha un criteri d'entrada amb millora estricta de la solució, algun $w_j > 0,\ j \in N$, i no es pot aplicar el criteri d'eixida, $y_{ik} \leq 0, \forall i \in B$, la solució és no fitada.

La raó és que la funció objectiu podria millorar infinitament. En el cas de minimitzar, es pot transformar el problema que cal maximitzar i aplicar-hi la identificació anterior o adaptar el criteri d'entrada al cas de minimitzar.

Identificació de solució d'aresta infinita (cas de maximitzar)

Si hi ha un criteri d'entrada sense millora estricta de la solució, màxim $w_j = 0$, $j \in N$, i no es pot aplicar el criteri d'eixida, $y_{ik} \leq 0, \forall i \in B$, la solució és d'aresta infinita.

Aquesta situació implica que es pot aplicar el criteri d'entrada sense millorar ni empitjorar la funció objectiu, però no es pot trobar la SFB adjacent perquè no hi ha criteri d'eixida, per això es tractaria d'una aresta infinita. En el cas de minimitzar, es pot transformar el problema que cal maximitzar i aplicar-hi la identificació anterior o adaptar el criteri d'entrada al cas de minimitzar.

Identificació de solució d'aresta finita (cas de maximitzar)

Si hi ha criteri d'entrada sense millora estricta de la solució, màxim $w_j = 0,\ j \in N$, i es pot aplicar el criteri d'eixida, algun $y_{ik} > 0, i \in B$, la solució és d'aresta finita.

Ara podem aplicar el criteri d'entrada sense millorar ni empitjorar la funció objectiu i també podem trobar la SFB adjacent, que és l'altre extrem de l'aresta finita. En el cas de més d'una variable no bàsica amb màxim rendiment marginal igual a zero, en lloc d'una aresta (part d'una recta) tindrem una solució en una part d'un hiperplà. En el cas de minimitzar, es pot transformar el problema que cal maximitzar i aplicar-hi la identificació anterior o adaptar el criteri d'entrada al cas de minimitzar.

Exemple 4.3

Solució no fitada

		-2	2	4	0	0	
		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
4	x_3	0	0	1	0,5	0,1	2
2	x_2	-2	1	0	-0,5	0,3	2
z_j		-4	2	4	1	1	12
w_j		2	0	0	-1	-1	

La variable x_1 fa augmentar la funció objectiu, $w_1 = 2$, però cap de les variables bàsiques arriba mai a valer zero, $y_{11} = 0$ i$y_{21} = -2$: cap és d'eixida.

Solució òptima d'aresta infinita

		-4	2	4	0	0	
		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
4	x_3	0	0	1	0,5	0,1	2
2	x_2	-2	1	0	-0,5	0,3	2
z_j		-4	2	4	1	1	12
w_j		0	0	0	-1	-1	

La variable x_1 pot entrar sense millorar ni empitjorar la funció objectiu, $w_1 = 0$, però cap de les variables bàsiques arriba mai a valer zero, $y_{11} = 0$ i $y_{21} = -2$: cap és d'eixida. No es pot calcular l'altre extrem de l'aresta.

Solució òptima d'aresta finita

		-1	2	4	0	0	
		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
4	x_3	1/2	0	1	-1/5	1/10	2
2	x_2	-1/2	1	0	2/5	3/10	2
z_j		1	2	4	0	1	12
w_j		-2	0	0	0	-1	

La variable s_1 pot entrar sense millorar ni empitjorar la funció objectiu, $w_4 = 0$, i la variable bàsica x_2 arriba a valer zero, $y_{24} = \frac{2}{5} > 0$ quan la d'entrada valga $\frac{x_2}{y_{24}} = \frac{2}{2/5} = 5$. Sí que es pot calcular l'altre extrem de l'aresta.

Solució òptima de vèrtex

		-1	2	3	0	0	
		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
3	x_3	1/2	0	1	-1/5	1/10	2
2	x_2	-1/2	1	0	2/5	3/10	2
z_j		1/2	2	3	1/5	9/10	10
w_j		-3/2	0	0	-1/5	-9/10	

Cap variable no bàsica fa augmentar la funció objectiu, $w_1 = -\frac{3}{2}, w_4 = -\frac{1}{5}$ i $w_5 = -\frac{9}{10}$.

Solució factible bàsica intermèdia

La taula del símplex de l'exemple 4.1 associada a la SFB amb $x_B = (x_2, x_3)$ és una taula intermèdia, perquè s'hi pot aplicar tant el criteri d'entrada com el d'eixida.

		8	3	2	0	
		x_1	x_2	x_3	s	
3	x_2	-2	1	0	-2	4
2	x_3	1	0	1	1/2	1
z_j		-4	3	2	-5	14
w_j		12	0	0	5	

El criteri d'entrada diu que hem d'elegir el màxim dels rendiments marginals positius de les no bàsiques i aquest és el de x_1, $w_1 = 12 > 5 = w_4$, per tant, entra x_1. El criteri d'eixida s'ha d'elegir entre les que tenen $y_{ik} > 0$ i això sols passa amb x_3,$y_{21} = 1$, per tant ix x_3.

4.4. Obtenció de la taula del símplex d'una SFB des d'una adjacent: operació del pivot

Després de determinar la variable d'entrada i d'eixida es passa a una nova SFB, la taula de la qual es pot construir mitjançant càlcul matricial (com en el pas inicial) o amb una operació del pivot. Fer una operació del pivot és transformar en la taula canviant la variable d'eixida per la d'entrada i seguint els passos següents:

- Determinar l'element pivot en la taula anterior: intersecció de la columna de la variable d'entrada i la fila de la variable d'eixida.
- Transformar la fila de l'element pivot perquè el seu valor en la nova taula siga igual a 1: això es fa sempre dividint tota la fila pel valor de l'element pivot.
- Transformar la resta de files perquè el valor de la resta de la columna de l'element pivot siga igual a 0: això es fa mitjançant una combinació lineal adequada, és a dir, a la fila original sumarem o restarem la de l'element pivot multiplicada o dividida per algun nombre, de manera que el resultat siga 0.
- Fer la resta de càlculs de la taula: files z, w i valor de la funció objectiu.

La nova taula del símplex és la que correspon a la nova SFB i ha de tenir un valor de la funció objectiu millor que l'anterior. La nova taula es torna a analitzar per a veure si és la taula final (òptima o no) o si és una taula intermèdia.

Exemple 4.4

La taula del símplex de l'exemple 4.1 associada a la SFB amb $x_B = (x_2, x_3)$ té com a variable d'entrada x_1 i com a variable d'eixida x_3, per tant, l'element pivot és $y_{21} = 1$ (ombrejat).

		8	3	2	0	
		x_1	x_2	x_3	s	
3	x_2	-2	1	0	-2	4
2	x_3	1	0	1	1/2	1
z_j		-4	3	2	-5	14
w_j		12	0	0	5	

La transformació de la taula comença per la fila de l'element pivot. Es canvia la variable bàsica i es divideix pel valor de l'element pivot, en aquest cas per 1.

		8	3	2	0	
		x_1	x_2	x_3	s	
3	x_2	0				
2	x_1	1	0	1	1/2	1
z_j						
w_j						

A continuació, s'han de generar zeros en la resta de la columna, en aquest cas en la posició y_{11}, fent una combinació lineal adequada. Com que el valor en la taula prèvia és –2 i l'element pivot és 1, la combinació lineal és sumar a la primera fila la de l'element pivot multiplicada per 2. Si fem aquesta operació s'arriba a:

		8	3	2	0	
		x_1	x_2	x_3	s	
3	x_2	0	1	2	-1	6
8	x_1	1	0	1	1/2	1
z_j						
w_j						

Finalment, la taula es completa amb la suma de productes en la fila z_j i la resta en la fila w_j que ja hem vist en l'epígraf 4.2.

		8	3	2	0	
		x_1	x_2	x_3	s	
3	x_2	0	1	2	-1	6
8	x_1	1	0	1	1/2	1
z_j		8	3	14	1	26
w_j		0	0	-12	-1	

La nova taula correspon, en aquest exemple, a una SFB òptima de vèrtex perquè tots els rendiments marginals de les no bàsiques són menors estrictament que zero. L'òptim global que s'extrau de la taula es troba situat en el punt $(x_1, x_2, x_3, s) = (1,6,0,0)$ amb $F = 26$.

Quan es fa una operació del pivot és convenient comprovar que la taula que s'obté és coherent i això inclou quatre zones de la taula:

- Hi han d'aparèixer les columnes de la matriu identitat en el mateix ordre en què es troben les variables bàsiques per files.
- Els rendiments marginals de les bàsiques han de ser zero.
- El valor de les variables bàsiques (última columna) ha de ser major o igual que zero.
- El valor de la funció objectiu (últim requadre) ha de ser millor que en la taula prèvia.

En resum, el funcionament general del mètode símplex que es recull en l'esquema 4.1 es pot detallar amb els passos següents:

Pas previ Enunciar el problema en forma estàndard (vegeu el tema 1: transformació de problemes).

Pas inicial Obtenir la taula del símplex d'una solució factible bàsica (SFB) qualsevol. Si no n'hi ha cap, el problema és infactible i s'acaba. Si el problema és factible, de segur que hi ha una SFB, tal com diu el teorema fonamental de la programació lineal. La SFB es calcula com hem vist en el tema 3 i la taula del símplex associada a aquesta SFB es construeix amb càlcul matricial. Alternativament, s'hi pot aplicar el mètode de les penalitzacions de l'epígraf següent per a obtenir aquesta taula.

Pas principal Analitzar com és la taula. Pot ser la taula final, perquè és una solució òptima o perquè és una solució no fitada i el mètode s'acaba, o pot ser una taula intermèdia. Aquesta anàlisi inclou verificar les condicions de cada tipus de solució vistes en l'epígraf 4.3. Si és una taula intermèdia, cal aplicar-hi els criteris d'entrada i d'eixida (vistos en l'epígraf 4.3) i fer una operació del pivot (tal com hem explicat anteriorment) per a passar a la taula del símplex de la SFB següent i tornar al pas principal.

Exemple 4.5

$$\begin{array}{rl} Max. & F = -x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ s.a: & 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 4 \\ & x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 12 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Pas previ Passar a forma estàndard.

Com que les variables ja són no negatives, només falta passar a igualtats, amb la introducció de variables de marge. El problema queda així:

$$\begin{array}{rl} Max. & F = -x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ s.a: & 2x_1 - x_2 + 3x_3 - s_1 = 4 \\ & x_1 + 2x_2 + 4x_3 + s_2 = 12 \\ & x_1, x_2, x_3, s_1, s_2 \geq 0 \end{array}$$

Pas inicial Calcular una SFB qualsevol i la taula del símplex associada.

Si triem, per exemple, la partició del vector de variables en $x_N = (x_2, x_3, s_1)$ i $x_B = (x_1, s_2)$, observem que s'arriba a una SFB correcta (totes les variables no negatives quan exigim el compliment de les restriccions). En concret, s'obté com a SFB, $(x_1, x_2, x_3, s_1, s_2) = (2{,}0{,}0{,}0{,}10)$.

Les matrius *A* i *B* per als càlculs matricials en aquesta SFB són:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

I la taula del símplex associada és:

		-1	2	3	0	0	
		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
-1	x_1	1	-1/2	3/2	-1/2	0	2
0	s_2	0	5/2	5/2	1/2	1	10
z_j		-1	1/2	-3/2	1/2	0	-2
w_j		0	3/2	9/2	-1/2	0	

Pas principal (iteració 1) Analitzar la taula.

En la fila de rendiments marginals s'observa que no es compleix la condició de solució òptima, ja que algun element de variable no bàsica és major o igual que zero. Si hi apliquem el criteri d'entrada, elegirem com a variable d'entrada x_3, perquè és la que té el valor màxim, $w_3 = 9/2$.

Si observem ara la columna de la variable que hi entra (la tercera), trobem algun element estrictament major que zero, és a dir, hi ha criteri d'eixida, per tant és una taula intermèdia. Passem a aplicar el criteri d'eixida i calculem els quocients que tenen com a numeradors el valor de les variables bàsiques (2 i 10) i com a denominadors els elements estrictament positius de la columna de la variable que hi entra (3/2 i 5/2). Els quocients són $\frac{2}{3/2} = \frac{4}{3}$ i $\frac{10}{5/2} = 4$, per tant, el mínim és el de la primera variable bàsica i la variable d'eixida és x_1. L'element pivot és $y_{13} = 3/2$ (cel·la ombrejada).

Mitjançant una operació del pivot es passa a la taula del símplex de la nova SFB. La primera fila es divideix pel valor de l'element pivot (3/2) i restem a la segona fila la primera multiplicada per 5/3. La taula resultant és:

		-1	2	3	0	0	
		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
3	x_3	2/3	-1/3	1	-1/3	0	4/3
0	s_2	-5/3	10/3	0	4/3	1	20/3
z_j		2	-1	3	-1	0	4
w_j		-3	3	0	1	0	

Pas principal (iteració 2)Analitzar la taula.

La taula no és la final. Si apliquen els criteris, x_2 és la variable d'entrada i s_2 és la d'eixida. L'element pivot és $y_{22} = 10/3$ (cel·la ombrejada). L'operació del pivot consisteix a dividir la segona fila per 10/3 i a transformar la primera fila sumant-li la segona dividida per 10. La taula associada a la SFB següent és:

		-1	2	3	0	0	
		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
3	x_3	1/2	0	1	-1/5	1/10	2
2	x_2	-1/2	1	0	2/5	3/10	2
z_j		1/2	2	3	1/5	9/10	10
w_j		-3/2	0	0	-1/5	-9/10	

Pas principal (iteració 3) Analitzar la taula.

La taula compleix la condició de solució òptima de vèrtex i, per tant, el màxim global únic del problema és:

$(x_1, x_2, x_3, s_1, s_2) = (0,2,2,0,0)$ amb $F = 10$

4.5. El mètode de les penalitzacions

Aquest mètode s'aplica en el pas inicial del símplex. En lloc de començar des d'una SFB qualsevol, cosa que pot exigir un cert càlcul matricial, podem transformar el problema amb l'objectiu de generar la matriu identitat dins de la matriu A i elegir les variables bàsiques que es troben associades a les columnes de la matriu identitat i així simplificar-ne els càlculs matricials, ja que d'aquesta manera $B = I$.

La transformació del problema dóna lloc al "problema artificial" mitjançant dos mecanismes:

1. Introduir variables artificials: s'hi han d'introduir tantes variables artificials com columnes falten en la matriu A per a formar la identitat. Aquestes variables han de tenir coeficients apropiats en cada restricció (tot zeros excepte un 1) per a completar la matriu identitat. Per exemple, si hi falta la primera columna de la matriu identitat, cal introduir una variable artificial amb coeficient 1 en la primera restricció i amb coeficients zeros en la resta de restriccions.
2. Penalitzar aqueixes variables en la funció objectiu: les variables artificials només serveixen per a generar la matriu identitat i suposen una alteració en les restriccions, motiu pel qual han de valer zero al final. Per a assegurar això s'han de penalitzar en la funció objectiu afegint-les amb un coeficient -M si el problema és de maximitzar o +M si és de minimitzar, en què M és un nombre positiu arbitràriament gran.

El problema així transformat o problema artificial es resol amb el mètode símplex elegint com a SFB inicial aquella amb $B = I$. Cal observar també que d'aquesta manera el valor de les variables bàsiques són els termes independents de les restriccions, $x_B = B^{-1}b = b$, i aquests han de ser positius, motiu pel qual si algun terme independent no fóra major o igual que zero caldria transformar aqueixa restricció canviant el signe dels dos membres i el sentit de la desigualtat. A mesura que es fan iteracions les variables artificials seran variables d'eixida i es poden ja eliminar de les taules del símplex. Si al final quedara alguna variable artificial com a bàsica, voldria dir que el problema és infactible.

Exemple 4.6

El problema de l'exemple 4.5 que ja passat a forma estàndard és:

$$\begin{array}{rc} Max. & F = -x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ s.a: & 2x_1 - x_2 + 3x_3 - s_1 = 4 \\ & x_1 + 2x_2 + 4x_3 + s_2 = 12 \\ & x_1, x_2, x_3, s_1, s_2 \geq 0 \end{array}$$

Pas inicial En lloc de calcular una SFB qualsevol i la seua taula del símplex associada, com hem fet en l'exemple 4.5, com que la matriu A no conté la matriu identitat, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, l'alternativa consisteix a passar al problema artificial, tot afegint-hi una variable artificial amb coeficients tècnics $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i així completar la identitat i penalitzant-la en la funció objectiu. El problema artificial queda:

$$\begin{array}{rc} Max. & F = -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - MA \\ s.a: & 2x_1 - x_2 + 3x_3 - s_1 + A = 4 \\ & x_1 + 2x_2 + 4x_3 + s_2 = 12 \\ & x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, A \geq 0 \end{array}$$

La matriu tècnica és ara $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, en la qual si triem com a variables bàsiques $x_B = (A, s_2)$, aconseguim que B=I i que la primera taula del símplex siga immediata, sense necessitat de càlcul matricial:

		-1	2	3	0	0	-M	
		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	A	
-M	A	2	-1	3	-1	0	1	4
0	s_2	1	2	4	0	1	0	12
z_j		-2M	M	-3M	M	0	-M	-4M
w_j		-1+2M	2-M	3+3M	-M	0	0	

Pas principal (iteració 1)

Com que M és un nombre prou gran, la variable x_3 és variable d'entrada (màxim rendiment marginal positiu, 3 + 3M > –1 + 2M) i la variable A és la d'eixida (mínim dels quocients 4/3 i 12/4). L'element pivot és $y_{13} = 3$. En la taula del símplex següent ja no cal incloure la variable artificial, perquè ja ha complit la seua funció i no té cap interpretació econòmica. Després de fer l'operació del pivot queda:

		-1	2	3	0	0	
		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
3	x_3	2/3	-1/3	1	-1/3	0	4/3
0	s_2	-5/3	10/3	0	4/3	1	20/3
z_j		2	-1	3	-1	0	4
w_j		-3	3	0	1	0	

Com que la taula no conté la variable artificial vol dir que el problema és factible. A més a més, aquesta taula és la mateixa que s'obtenia després de la primera iteració en l'exemple 4.5, per tant es continua igual que adés i la solució òptima és la mateixa.

Qüestions, exercicis i problemes

24. Calcula la taula del símplex associada a $x_B = (x, y, s_1)$ en el problema:

$$\begin{array}{ll} Max. & F = 2x + 4y + z \\ s.a: & x + y \geq 4 \\ & 2x + 4z \geq 8 \\ & x + 3y + 2z \leq 19 \\ & x, y, z \geq 0 \end{array}$$

25. En el problema següent, calcula la taula del símplex associada a les variables bàsiques $x_B = (x_1, x_3)$. Si és òptima, extrau el valor de totes les variables i de la funció objectiu i si no ho és, fes una iteració del símplex:

$$\begin{array}{ll} Max. & F = 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 \\ s.a: & 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 \leq 20 \\ & 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 15 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

26. Calcula una taula del símplex qualsevol dels problemes següents. Si no correspon a la solució òptima, fes iteracions del símplex fins que arribes a la solució òptima i indica de quin tipus és:

$$\begin{array}{ll} Max. & 2x+y \\ s.a: & 4x+y\leq 15 \\ & x+2y\leq 6 \\ & x,y\geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} Min. & 2x+y+2z \\ s.a: & 2x-y\geq 0 \\ & x+2y=6 \\ & 3x+2y+z\leq 6 \\ & x,y,z\geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} Max. & x+4y+2z+3t \\ s.a: & 2x+y+3z+2t\leq 30 \\ & x,y,z,t\geq 0 \end{array}$$

27. Resol pel mètode de les penalitzacions

$$\begin{array}{ll} Max. & x+y \\ s.a: & 3x-y\geq 3 \\ & -x-2y\geq -16 \\ & x,y\geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} Min. & x+y \\ s.a: & 2x-y\leq 0 \\ & x+2y\geq 6 \\ & x\geq 0 \end{array}$$

28. Donat un problema lineal en forma estàndard de quatre variables i dues restriccions (s_1 i s_2 són les variables de marge), i la taula següent del símplex associada a una solució factible bàsica qualsevol:

		c_1	c_2	0	0	
		x	y	s_1	s_2	
3	x	2	1/2	0	1	2
0	s_1	0	1/3	1	5	1
z_j						
w_j		0	1	-2	-6	

a) Detecta les errades en els valors de la taula anterior i canvia'ls pels valors correctes.
b) Calcula els coeficients de la funció objectiu c_1 i c_2.
c) Calcula la fila z_j i el valor de la funció objectiu en la taula anterior.
d) Interpreta el significat dels valors dels requadres ombrejats.

29. Un problema de programació lineal de maximitzar té la taula del símplex següent, corresponent a una de les seues solucions factibles bàsiques:

		2	3	6	0	0	
		x	y	z	s_1	s_2	
2	x				-7/22	1/2	11
3	y				1/22	1/2	4
6	z				5/22	-1/2	0
z_j							
w_j							

a) Completa la taula.
b) Aplica-hi, si és possible, el criteri d'entrada i d'eixida i passa, mitjançant una operació del pivot, a la taula següent.

30. Donat el problema de programació lineal:

$$\begin{aligned} Max. \quad & F = 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 \\ s.a: \quad & x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 27 \\ & 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 18 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

a) Calcula la taula del símplex associada a la solució factible bàsica que té com a variables bàsiques $x_B = (x_1, s_1)$.
b) Digues si la taula obtinguda és òptima i de quin tipus (vèrtex, aresta finita o aresta infinita), o si no és òptima i el motiu (solució no fitada o taula intermèdia amb criteri d'entrada i d'eixida).
c) Planteja el problema artificial.
d) Calcula la taula del símplex inicial del problema artificial.

31. En un problema de minimitzar hem obtingut la taula del símplex següent:

		2	5	0	0	0	
		x	y	s_1	s_2	s_3	
5	y	3/4	1	0	-1/4	0	6
0	s_1	-1/2	0	1	1/2	0	6
0	s_3	1/4	0	0	-3/4	1	3
z_j							
w_j							

a) Completa la taula.
b) Calcula la taula següent amb una operació del pivot.
c) Interpreta la nova taula:
   - Valor de totes les variables i de la funció objectiu
   - Tipus de taula: òptima i de quin tipus o no òptima i per quin motiu.

TEMA 5. DUALITAT EN PROGRAMACIÓ LINEAL

5.1. Formulació del problema dual

Un punt de Kuhn i Tucker en un problema lineal d'optimització és un òptim global i encara que aquest mètode no és el més eficient quan les funcions són totes lineals, té l'avantatge de proporcionar-nos més informació sobre la solució òptima, mitjançant els multiplicadors de Kuhn i Tucker, que s'interpretaven com la variació que experimentava el valor òptim de la funció objectiu davant de canvis en els termes independents de les restriccions. Aquesta informació ens falta, aparentment, si resolem el problema amb el mètode símplex. En aquest tema s'explica com obtenir aquesta informació.

Tot problema lineal té associat un altre problema lineal en el sentit que els dos problemes tenen les mateixes condicions de Kuhn i Tucker i, per tant, els mateixos punts de Kuhn i Tucker que són directament els òptims globals, sempre que el problema tinga solució. En aquest context, el problema original s'anomena *problema primal* i el problema associat és el *problema dual*.

Per a formular el problema dual una vegada conegut el primal, hem de respectar set regles:

1. El problema dual té tantes variables principals com restriccions té el problema primal, perquè les variables principals duals s'interpreten també com els multiplicadors de Kuhn i Tucker de les restriccions primals, per això utilitzarem la notació $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ per a les variables principals duals.
2. El problema dual té tantes restriccions com variables principals té el problema primal, perquè les variables principals primals s'interpreten també com els multiplicadors de Kuhn i Tucker de les restriccions duals.
3. El problema dual canvia la direcció d'optimització respecte al problema primal, si un és de maximitzar, l'altre és de minimitzar, i al revés.
4. Els coeficients de la funció objectiu del dual són els termes independents de les restriccions del primal.

5. Els termes independents de les restriccions del dual són els coeficients de la funció objectiu del primal.
6. La matriu tècnica del dual és la transposada del primal A^T.
7. El sentit de cada restricció i el signe de cada variable en el problema dual ha de ser coherent amb les condicions de signe dels multiplicadors del tercer bloc de condicions de Kuhn i Tucker: el signe de cada variable dual depèn de si la corresponent restricció primal està en forma canònica o no, perquè és el seu multiplicador (regla 1) i cada restricció dual estarà en forma canònica o no depenent del signe de la corresponent variable primal perquè és el seu multiplicador (regla 2).

Si apliquem aquestes set regles el problema dual té les mateixes condicions de Kuhn i Tucker que el problema primal i, per tant, la mateixa solució òptima, si n'hi ha.

Exemple 5.1

Problema primal:

$$\begin{array}{rc} Max. & 4x_1 + x_2 \\ s.a: & x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ & x_1 \geq 0 \end{array}$$

La funció lagrangiana és:

$$L(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = 4x_1 + x_2 +$$

$$+\lambda_1(8 - x_1 - 2x_2) + \lambda_2(18 - 3x_1 - 2x_2) + \lambda_3(-x_1)$$

I les condicions de Kuhn i Tucker són:

I. Factibilitat: $x_1 + 2x_2 \geq 8, 3x_1 + 2x_2 \leq 18,\ x_1 \geq 0$

II. Punt crític:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 4 - \lambda_1 - 3\lambda_2 - \lambda_3 = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial x_2} = 1 - 2\lambda_1 - 2\lambda_2 = 0$$

III. Signe dels multiplicadors: $\lambda_1 \leq 0,\ \lambda_2 \geq 0,\ \lambda_3 \leq 0.$

IV. Marge complementari: $\lambda_1(8 - x_1 - 2x_2) = 0, \lambda_2(18 - 3x_1 - 2x_2) = 0,$ $\lambda_3(-x_1) = 0.$

Aquestes condicions de Kuhn i Tucker es poden simplificar si eliminem el multiplicador de la condició de signe, λ_3, si l'aïllem en la primera condició de punt crític, $\lambda_3 = 4 - \lambda_1 - 3\lambda_2$, i el substituïm en III i IV. I queden un total de deu condicions:

$$\text{K} - \text{T primal}\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 8 & 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ x_1 \geq 0 & 1 - 2\lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 \leq 0 & \lambda_2 \geq 0 \\ 4 - \lambda_1 - 3\lambda_2 \leq 0 & \lambda_1(8 - x_1 - 2x_2) = 0 \\ \lambda_2(18 - 3x_1 - 2x_2) = 0 & (4 - \lambda_1 - 3\lambda_2)x_1 = 0 \end{cases}$$

La formulació del problema dual és, si apliquem les set regles anteriors:

$$\begin{array}{ll} Min. & 8\lambda_1 + 18\lambda_2 \\ s.a: & \lambda_1 + 3\lambda_2 \geq 4 \\ & 2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 1 \\ & \lambda_1 \leq 0, \quad \lambda_2 \geq 0 \end{array}$$

La funció lagrangiana és:

$$\bar{L}(\lambda_1, \lambda_2, x_1, x_2, x_3, x_4) = 8\lambda_1 + 18\lambda_2 +$$

$$+x_1(4 - \lambda_1 - 3\lambda_2) + x_2(1 - 2\lambda_1 - 2\lambda_2) + x_3(-\lambda_1) + x_4(-\lambda_2)$$

I les condicions de Kuhn i Tucker són:

I. Factibilitat: $\lambda_1 + 3\lambda_2 \geq 4, 2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 1,\ \lambda_1 \leq 0,\ \lambda_2 \geq 0$

II. Punt crític:

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial \lambda_1} = 8 - x_1 - 2x_2 - x_3 = 0, \qquad \frac{\partial \bar{L}}{\partial \lambda_2} = 18 - 3x_1 - 2x_2 - x_4 = 0$$

III. Signe dels multiplicadors: $x_1 \geq 0,\ x_3 \leq 0,\ x_4 \geq 0.$

IV. Marge complementari:

$x_1(4 - \lambda_1 - 3\lambda_2) = 0,\ x_3(-\lambda_1) = 0,\ x_4(-\lambda_2) = 0.$

Si eliminem els multiplicadors associats a les condicions de signe, x_3ix_4, els aïllem en el bloc II i els substituïm en III i IV, s'obté la forma simplificada d'aquestes condicions de K-T:

$$\text{K} - \text{T dual}\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 \geq 4 & 2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 1 \\ \lambda_1 \leq 0 & \lambda_2 \geq 0 \\ x_1 \geq 0 & 8 - x_1 - 2x_2 \leq 0 \\ 18 - 3x_1 - 2x_2 \geq 0 & x_1(4 - \lambda_1 - 3\lambda_2) = 0 \\ (8 - x_1 - 2x_2)\lambda_1 = 0 & (18 - 3x_1 - 2x_2)\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Condicions que són les mateixes que les del problema primal.

Per tant, els problemes lineals primals i duals són en realitat el mateix. El primal calcula el valor de les variables principals i el dual calcula el valor dels multiplicadors de Kuhn i Tucker. Però els dos tenen la mateixa funció lagrangiana, les mateixes condicions de K-T i el mateix valor de la funció objectiu en l'òptim, si n'hi ha.

La dificultat en la formulació del dual és molt menor en el cas que el primal estiga en forma canònica perquè, si apliquem les set regles anteriors, el dual també estarà en forma canònica. Aquest cas es coneix com a *dual simètric*. En cas contrari, es parla de *dual asimètric*.

5.2. Teoremes de la dualitat

Alguns dels resultats com a conseqüència de la formulació del problema dual es presenten a continuació.

Teorema del dual en forma canònica

Si el primal es troba en forma canònica, el dual també es troba en forma canònica.

Teorema del dual del dual

El problema dual del problema dual torna a ser el problema primal.

Pel que fa a l'existència de solució òptima o no en el primal i en el dual, hi ha dos teoremes més.

Teorema de la dualitat

Si hi ha una solució òptima en el primal, el dual també en té i és la mateixa, però intercanviant variables principals i multiplicadors. En aquest cas, el valor de la funció objectiu dels dos problemes és la mateixa.

Teorema de la fitació del dual

El valor de la funció objectiu en una solució factible del primal és una fita per a la funció objectiu del dual (fita superior si es maximitza o inferior si es minimitza).

El teorema de la dualitat diu que si un problema té solució òptima, l'altre també, però el tipus concret de solució òptima (única o múltiple) no té per què ser el mateix. El teorema de la fitació diu que, si no hi ha una solució òptima perquè el primal és no fitat però factible, el dual no pot ser no fitat i haurà de ser infactible. El mateix passa raonant des del dual. Això vol dir que els dos problemes no poden ser no fitats al mateix temps. Sí que resulta possible, perquè no va en contra de cap teorema, que els dos problemes siguen infactibles.

L'últim dels teoremes de la dualitat serà molt útil en l'epígraf següent.

Teorema del marge complementari

Per cada restricció de desigualtat del problema primal podem plantejar una condició de marge complementari entre una variable de marge del primal i una principal del dual. Per exemple, si la primera restricció primal és de desigualtat:

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \;\rightarrow\; \lambda_1(b_1 - a_{11}x_1 - \cdots - a_{1n}x_n) = 0 \;\rightarrow\; \lambda_1 s_1 = 0$$

Igualment, per cada restricció de desigualtat del problema dual podem plantejar una condició de marge complementari entre una variable principal del primal i una de marge del dual. Per exemple, si la primera restricció dual és de desigualtat:

$$a_{11}\lambda_1 + \cdots + a_{m1}\lambda_m \geq c_1 \;\rightarrow\; x_1(c_1 - a_{11}\lambda_1 - \cdots - a_{m1}\lambda_m) = 0 \;\rightarrow\; x_1\bar{s}_1 = 0$$

Això implica un aparellament entre variables principals d'un problema i de marge de l'altre, en el sentit que una de les dues variables dins de cada parella és zero. Aquest aparellament no es pot fer en el cas de restriccions d'igualtat, perquè no es genera cap variable de marge.

5.3. Càlcul de la solució òptima dual a partir de la del primal

L'objectiu ara és conèixer la solució òptima del dual a partir de la del primal. D'aquesta manera, les variables duals, com a multiplicadors de Kuhn i Tucker de les restriccions del primal, ens donaran informació complementària de la solució òptima del primal. Es plantegen dos casos per a obtenir la solució del dual.

Cas general

És aplicable en qualsevol problema. S'utilitzen les condicions del teorema de marge complementari per cada desigualtat del primal i del dual. Per a les restriccions d'igualtat no hi ha una condició de marge complementari, però una igualtat és en si mateixa una equació més que es pot fer servir. Saber utilitzar les condicions de marge complementari és molt important en aquest context. Cada condició relaciona una variable principal d'un problema i una de marge de l'altre, de manera que una de les dues val zero, per tant:

- Cada variable del primal que no val zero implica que la seua parella en el dual val zero.
- Cada variable del primal que val zero no permet calcular la seua parella del dual directament. En aquest cas, haurem de plantejar les restriccions del dual en forma estàndard (igualtats), substituir les variables que valen zero i calcular les variables que ens falten.

Exemple 5.2

Els problemes primal i dual de l'exemple 5.1 són:

$$\begin{array}{rc}
Max. & 4x_1 + x_2 \\
s.a: & x_1 + 2x_2 \geq 8 \\
 & 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\
 & x_1 \geq 0
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rc}
Min. & 8\lambda_1 + 18\lambda_2 \\
s.a: & \lambda_1 + 3\lambda_2 \geq 4 \\
 & 2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 1 \\
 & \lambda_1 \leq 0, \qquad \lambda_2 \geq 0
\end{array}$$

Si sabem que $(x_1, x_2) = (5,\ 3/2)$ és el màxim global del primal, per a conèixer el mínim global del dual es plantegen les condicions de marge complementari (una per cada desigualtat):

$$\begin{array}{rcl}
x_1 + 2x_2 \geq 8 & \rightarrow & \lambda_1 s_1 = 0 \\
3x_1 + 2x_2 \leq 18 & \rightarrow & \lambda_2 s_2 = 0 \\
\lambda_1 + 3\lambda_2 \geq 4 & \rightarrow & x_1 \bar{s}_1 = 0
\end{array}$$

A partir del valor de les variables principals del primal es comprova que les restriccions se saturen i, per tant, $(s_1, s_2) = (0{,}0)$. Això vol dir que λ_1i λ_2 poden tenir qualsevol valor, però com que $x_1 = 5 \neq 0 \rightarrow \bar{s}_1 = 0 \rightarrow \lambda_1 + 3\lambda_2 = 4$. Aquesta condició, juntament amb la restricció d'igualtat del dual, $2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 1$, forma un sistema d'equacions amb solució $(\lambda_1, \lambda_2) = (-\frac{5}{4}, \frac{7}{4})$ i aquest és el mínim global.

Finalment, com a comprovació del resultat, es confirma que tant el primal com el dual tenen el mateix valor de la funció objectiu en l'òptim:

$$F(x_1, x_2) = F\left(5, \frac{3}{2}\right) = 21{,}5 \quad \text{i} \quad \bar{F}(\lambda_1, \lambda_2) = \bar{F}\left(-\frac{5}{4}, \frac{7}{4}\right) = 21{,}5$$

El valor de les variables principals duals també es pot calcular en el cas general i de manera alternativa a l'anterior amb l'operació matricial:

$$\lambda^t = c_B^t B^{-1}$$

Exemple 5.3

En el problema de l'exemple 5.1, la manera alternativa de calcular les variables duals és la següent:

$$(\lambda_1, \lambda_2) = c_B^t B^{-1} = (4,1)\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}^{-1} = \left(-\frac{5}{4}, \frac{7}{4}\right)$$

Cas particular: per a problemes en forma canònica (dual simètric)

En el cas que el primal estiga en forma canònica i disposem de la taula òptima del símplex, el càlcul de la solució dual és immediat si observem l'última fila de la taula òptima del símplex o els rendiments marginals.

En concret, el valor òptim de cada variable dual és el valor del rendiment marginal de la seua variable associada en el primal i sempre amb signe positiu (perquè el dual també es troba en forma canònica). D'altra banda, també es compleix que els rendiments marginals de les variables no bàsiques del dual són els valors de les seues variables bàsiques associades del primal, amb el signe adequat (negatiu si el dual es maximitza o positiu si el dual es minimitza).

Exemple 5.4

Siga el problema següent en forma canònica i la seua taula òptima del símplex:

$$\begin{array}{ll} Max. & F = 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 \\ s.a: & 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 \leq 20 \\ & 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 15 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

		3	1	3	4	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	
3	x_1	1	2,2	0	-2	-0,4	0,6	1
3	x_3	0	-0,8	1	4	0,6	-0,4	6
z_j		3	4,2	3	6	0,6	0,6	21
w_j		0	-3,2	0	-2	-0,6	-0,6	

La solució òptima del dual, si observem la fila de rendiments marginals en la taula anterior i si associem correctament cada variable del primal i del dual és:

$$\lambda_1 = 0{,}6\,, \quad \lambda_2 = 0{,}6\,, \quad \bar{s}_1 = 0\,, \quad \bar{s}_2 = 3{,}2\,, \quad \bar{s}_3 = 0\,,$$
$$\bar{s}_4 = 2 \text{ amb } \bar{F} = 21$$

Si estem interessats en els rendiments marginals de les variables no bàsiques del dual $\bar{s}_1 i\ \bar{s}_3$, els seus valors són 1 i 6 respectivament (són positius perquè el dual és de minimitzar i així no hi ha criteri d'entrada).

Qüestions, exercicis i problemes

32. Formula el problema dual dels problemes primals següents:

$$\begin{array}{ll} Max. & 2x+y \\ s.a: & 4x+y \le 5 \\ & x+2y \le 6 \\ & x,y \ge 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} Min. & 2x+y+2z \\ s.a: & 2x-y \le 0 \\ & x+2y = 6 \\ & 3x+2y+z \le 6 \\ & x,z \ge 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} Min. & 3x+y-z \\ s.a: & 4x+2y-z=-1 \\ & x,y \ge 0, z \le 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} Max. & x+y \\ s.a: & 3x-y \ge 3 \\ & -x-2y \ge -16 \\ & x,y \ge 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} Min. & x+y \\ s.a: & 2x-y \le 0 \\ & x+2y \ge 6 \\ & y \ge 0 \end{array}$$

33. Amb la informació següent sobre el tipus de solució del problema primal:

- El primer problema de l'exercici 32 té màxim global.
- El tercer problema de l'exercici 32 és infactible.
- L'últim problema de l'exercici 32 és no fitat.

Quin és el tipus de solució del problema dual en cada cas?

34. El primer problema de l'exercici 32 té el màxim global en el punt $(x,y) = \left(\frac{4}{7}, \frac{19}{7}\right)$. Calcula el mínim global del problema dual a partir de la taula òptima del primal (cas canònic).

35. El segon problema de l'exercici 32 té el mínim global en el punt $(x,y,z) = (0,3,0)$. Calcula el màxim global del problema dual a partir de l'aplicació de les relacions de marge complementari (cas general).

36. El quart problema de l'exercici 32 té el màxim global en el punt $(x,y) = (16,0)$. Calcula el mínim global del problema dual aplicant la fórmula matricial (cas general).

37. Donat el problema següent:

$$\begin{array}{ll} Min. & 3x_1+x_2-x_3 \\ s.a: & 4x_1+2x_2-x_3 = 12 \\ & x_1-2x_3 \ge 8 \\ & x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \le 0 \end{array}$$

a) Enuncia el problema dual.

b) Si la solució del problema original és $(x_1, x_2, x_3) = (0,4,-4)$, calcula la solució del dual (variables principals, de marge i de la funció objectiu), a partir de l'aplicació de les relacions primal-dual.

38. Per al problema de P. L.:

$$\begin{array}{ll} Max. & x_1 + 4x_2 + x_3 \\ s.a: & x_2 + 2x_3 \geq 4 \\ & x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 12 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0 \end{array}$$

a) Planteja el problema dual.

b) Calcula la solució òptima del dual si saps que en la solució òptima del primal $(x_1, x_2, x_3) = (0, 6, 0)$.

39. Siga el problema lineal següent:

$$\begin{array}{ll} Max. & x + 4y + c_3 z \\ s.a: & 2x + 3y + a_{13} z \geq 12 \\ & 4x + 5y + z \leq b_2 \\ & x, y, z \geq 0 \end{array}$$

Si sabem que la solució òptima té com a variables bàsiques $x_B = (z, s_1) = (24,36)$ amb F = 72, calcula el valor dels paràmetres c_3, a_{13}, b_2 i el valor de la solució òptima dual (totes les variables i la funció objectiu).

TEMA 6. ANÀLISI DE SENSIBILITAT I POSTOPTIMITZACIÓ

6.1. Plantejament

L'anàlisi de sensibilitat i postoptimització tracta d'avaluar la validesa de la solució òptima d'un problema lineal d'optimització davant de canvis en alguna de les dades del problema. Aquesta anàlisi permet anticipar la resposta del subjecte decisor en un ambient de realitat canviant. Per exemple, una empresa pot observar que els preus dels seus factors productius estan subjectes a canvis freqüents i està interessada a preparar-se per a modificar la seua decisió òptima de producció, si cal. També pot analitzar si li convé introduir un nou producte en el procés productiu o analitzar com li pot afectar l'aprovació d'alguna nova norma legal que li imposa alguna restricció més que abans no existia.

Els dos tipus d'anàlisi, sensibilitat i postoptimització, estan relacionats però tenen algunes diferències:

- Sensibilitat: l'objectiu és calcular un interval en què pot variar un determinat paràmetre del problema perquè la solució òptima prèviament calculada ho continue sent o, almenys, tinga canvis poc importants. Lògicament, l'interval ha d'incloure el valor original del coeficient. Amb aqueix interval el decisor estarà preparat per a afrontar els canvis futurs. Si la variació final és manté dins de l'interval de sensibilitat, la solució òptima no canviarà o canviarà mínimament i es podrà calcular fàcilment. Si la variació del paràmetre és tal que se n'ix de l'interval de sensibilitat, haurem de tornar a resoldre el problema, bé des de l'anterior solució òptima o bé des del principi.
- Postoptimització: l'objectiu és calcular la nova solució òptima davant de canvis concrets en el valor d'un o més d'un paràmetre. En aquest cas, el canvi en el paràmetre és ja efectiu, no es tracta d'anticipar-se al canvi. Una altra diferència és que podem canviar al mateix temps dos o més paràmetres. Les dues anàlisis estan relacionades, ja que si prèviament hem fet l'anàlisi de sensibilitat del paràmetre que canvia, ja sabrem si es

produirà un canvi important en la solució o no per al nou valor del paràmetre.

La manera concreta d'analitzar cada canvi és peculiar, però totes es fonamenten en el fet d'investigar si la solució òptima prèvia ho continua sent o no. I els motius pels quals la solució òptima prèvia pot deixar de ser-ho si canvia alguna dada del problema són dos:

- Perquè deixa de ser òptima: cal avaluar com els canvis plantejats afecten la condició de solució òptima. En la taula del símplex es tracta d'assegurar que continua sense haver-hi criteri d'entrada: $w_j = c_j - z_j = c_j - c_B^t B^{-1} A_j \leq 0$, $\forall j \in N$ (en el cas de maximitzar).
- Perquè deixa de ser factible: els canvis poden afectar també la condició de solució factible, que s'avalua en l'última columna de la taula del símplex: $x_B = B^{-1} b \geq 0$. Si afecta el valor de les variables bàsiques també afectarà el valor òptim de la funció objectiu, $F = c_B^t x_B$, però aquest no està sotmès a cap condició.

Si les dues condicions (òptima i factible) es compleixen, la solució òptima no canvia de manera important en el sentit que les variables bàsiques i no bàsiques són les mateixes, encara que poden haver-hi canvis mínims en algun rendiment marginal o en algun valor d'alguna variable bàsica. Si alguna de les dues condicions deixa de complir-se, els canvis ja són més importants i haurem de calcular de manera més laboriosa la nova solució òptima.

En aquest tema no cobrirem totes les possibilitats de canvis en les dades del problema. Els casos que s'analitzaran i quina de les dues condicions es veu afectada es resumeixen en el quadre següent:

Paràmetre canviant	**Anàlisi de sensibilitat**	**Postoptimització**	**Condició afectada**
Coeficient de la funció objectiu de variable no bàsica	Sí	Sí	Ser òptima
Coeficient de la funció objectiu de variable bàsica	Sí	Sí	Ser òptima
Coeficient tècnic de variable bàsica	No	No	Ser òptima i ser factible
Coeficient tècnic de variable no bàsica	Sí	Sí	Ser òptima
Terme independent d'alguna restricció	Sí	Sí, si queda dins de l'interval	Ser factible
Nova variable	No	Sí	Ser òptima
Nova restricció	No	Sí, si es compleix en la solució òptima	Ser factible

En els epígrafs següents es fan anàlisis de sensibilitat i de postoptimització sobre el problema de l'exemple 4.5:

$$\begin{array}{ll} Max. & F = -x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ s.a: & 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 4 \\ & x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 12 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

La taula òptima del qual és:

		-1	2	3	0	0	
		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
3	x_3	1/2	0	1	-1/5	1/10	2
2	x_2	-1/2	1	0	2/5	3/10	2
z_j		1/2	2	3	1/5	9/10	10
w_j		-3/2	0	0	-1/5	-9/10	

6.2. Canvis en coeficients de la funció objectiu

6.2.1. Coeficient de variable no bàsica

Observem com afecta només el rendiment marginal d'aquesta variable no bàsica. L'interval de sensibilitat s'obté parametritzant aqueix coeficient (substituint el valor original per un paràmetre) i exigint que la solució siga òptima, és a dir, que la variable en qüestió no entre com a bàsica. En l'exemple, per a obtenir l'interval de sensibilitat del primer coeficient de la funció objectiu, es fa així:

		c_1	2	3	0	0	
		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
3	x_3	1/2	0	1	-1/5	1/10	2
2	x_2	-1/2	1	0	2/5	3/10	2
z_j		1/2	2	3	1/5	9/10	10
w_j		**c_1-1/2**	0	0	-1/5	-9/10	

I la condició de solució òptima és: $w_1 = c_1 - z_1 = c_1 - \frac{1}{2} \leq 0 \;\; \rightarrow \;\; c_1 \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$.

La interpretació d'aquest interval de sensibilitat és que si es produeixen canvis en el coeficient de la primera variable en la funció objectiu, la solució òptima continuarà sent la mateixa (variables bàsiques i no bàsiques, valors de les variables i valor de la funció objectiu), sempre que el nou valor que assolisca aqueix coeficient siga menor o igual que ½. En cas contrari, la solució canviaria de manera més important.

D'altra banda, la postoptimització s'analitza introduint el nou valor del coeficient en la taula òptima i observant els efectes concrets. Lògicament, si el coeficient es manté dins de l'interval de sensibilitat, no canvia la solució òptima i, en cas contrari, s'hi aplica el criteri d'entrada i d'eixida, si és possible, i s'obté la nova solució òptima.

Exemple 6.1

Postoptimització: c_1=1. La taula anterior deixa de ser òptima perquè aqueix valor se n'ix de l'interval de sensibilitat:

		1	2	3	0	0	
		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
3	x_3	1/2	0	1	-1/5	1/10	2
2	x_2	-1/2	1	0	2/5	3/10	2
z_j		1/2	2	3	1/5	9/10	10
w_j		**1/2**	0	0	-1/5	-9/10	

A continuació, es fa una operació del pivot sobre l'element y_{11} (cel·la ombrejada):

		1	2	3	0	0	
		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
1	x_1	1	0	2	-2/5	1/5	4
2	x_2	0	1	1	1/5	2/5	4
z_j		1	2	4	0	1	12
w_j		0	0	-1	0	-1	

La solució és òptima i d'aresta finita. Una de les solucions òptimes és l'associada a la taula anterior, en què $(x_1, x_2, x_3) = (4,4,0)$ i F = 12.

6.2.2. Coeficient de variable bàsica

Ara afecta els rendiments marginals de totes les variables no bàsiques, però la metodologia no canvia pel que fa al cas anterior: l'interval de sensibilitat s'obté parametritzant aqueix coeficient i exigint que la solució siga òptima. En l'exemple, per a obtenir l'interval de sensibilitat del segon coeficient de la funció objectiu, es fa així:

		-1	$\boldsymbol{c_2}$	3	0	0	
		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
3	x_3	1/2	0	1	-1/5	1/10	2
$\boldsymbol{c_2}$	x_2	-1/2	1	0	2/5	3/10	2
z_j		(3- $\boldsymbol{c_2}$)/2	$\boldsymbol{c_2}$	3	(-3+2$\boldsymbol{c_2}$)/5	(3+3$\boldsymbol{c_2}$)/10	6+2$\boldsymbol{c_2}$
w_j		(-5+$\boldsymbol{c_2}$)/2	0	0	(3-2$\boldsymbol{c_2}$)/5	(-3-3$\boldsymbol{c_2}$)/10	

I si exigim la condició de solució òptima, l'interval de sensibilitat és:

$$\left.\begin{array}{lcl} w_1 = \dfrac{-5+c_2}{2} \leq 0 & \rightarrow & c_2 \leq 5 \\ w_4 = \dfrac{3-2c_2}{5} \leq 0 & \rightarrow & c_2 \geq 3/2 \\ w_5 = \dfrac{-3-3c_2}{10} \leq 0 & \rightarrow & c_2 \geq -1 \end{array}\right\} \rightarrow \quad c_2 \in \left[\frac{3}{2}, 5\right]$$

La interpretació d'aqueix interval de sensibilitat és que si es produeixen canvis en el coeficient de la segona variable en la funció objectiu, la solució òptima continuarà sent la mateixa (variables bàsiques i no bàsiques, valors de les variables, encara que no el mateix valor de la funció objectiu) sempre que el nou valor que assolisca aqueix coeficient es trobe entre 3/2 i 5. En cas contrari, la solució canviaria de manera més important.

La postoptimització pot produir canvis importants, si el nou valor del coeficient es troba fora de l'interval anterior, o pot produir canvis poc importants, si es troba dins, ja que el canvi en el valor òptim de la funció objectiu és inevitable.

Exemple 6.2

Postoptimització: $c_2 = 3$. La taula anterior es manté com a taula òptima perquè el nou valor queda dins de l'interval, però amb un nou valor de la funció objectiu. El valor de les variables en la solució òptima és el mateix que l'original:

		-1	3	3	0	0	
		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
3	x_3	1/2	0	1	-1/5	1/10	2
3	x_2	-1/2	1	0	2/5	3/10	2
z_j		0	3	3	3/5	6/5	12
w_j		-1	0	0	-3/5	-6/5	

La solució és òptima i de vèrtex en el punt $(x_1, x_2, x_3) = (0, 2, 2)$ i $F = 12$.

6.3. Canvis en els coeficients tècnics

Només es tracta el cas en què el coeficient tècnic afecte una variable no bàsica. En cas contrari, l'efecte seria excessivament complex d'analitzar i seria millor tornar a resoldre des del principi.

Els canvis en coeficients tècnics de variables no bàsiques afecten només el rendiment marginal d'aqueixa variable no bàsica. L'interval de sensibilitat s'obté, com sempre, parametritzant aqueix coeficient i exigint que la solució siga òptima. No obstant això, ara es requereix una operació matricial prèvia abans d'introduir el resultat en la taula òptima, ja que en les taules del símplex no apareixen els coeficients tècnics originals, matriu A, sinó els transformats, matriu $Y = B^{-1}A$. Afortunadament, no cal canviar tota la matriu, tant sols la columna de la variable no bàsica que ha patit canvis tècnics. En l'exemple 4.5, per a obtenir l'interval de sensibilitat del primer coeficient tècnic, a_{11}, cal calcular la columna $Y_1 = B^{-1}A_1$ i introduir el resultat en la taula òptima:

$$Y_1 = B^{-1}A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_{11} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2a_{11}+1}{10} \\ \dfrac{-4a_{11}+3}{10} \end{pmatrix}$$

		-1	2	3	0	0	
		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
3	x_3	$\frac{2a_{11}+1}{10}$	0	1	-1/5	1/10	2
2	x_2	$\frac{-4a_{11}+3}{10}$	1	0	2/5	3/10	2
	z_j	$\frac{-2a_{11}+9}{10}$	2	3	1/5	9/10	10
	w_j	$\frac{2a_{11}-19}{10}$	0	0	-1/5	-9/10	

L'interval de sensibilitat s'obté quan exigim la condició de solució òptima:

$$w_1 = c_1 - z_1 = \frac{2a_{11}-19}{10} \le 0 \;\; \rightarrow \;\; a_{11} \in \left]-\infty, \frac{19}{2}\right]$$

La interpretació d'aqueix interval de sensibilitat és que si es produeixen canvis en el coeficient de la primera variable en la primera restricció, la solució òptima continuarà sent la mateixa (variables bàsiques i no bàsiques, valors de les variables i valor de la funció objectiu) sempre que el nou valor que assolisca aquest coeficient siga menor o igual que 19/2. En cas contrari, la solució canviaria de manera més important.

En el cas d'una postoptimització, el valor del nou coeficient tècnic s'introdueix directament en el càlcul matricial i es trasllada a la taula òptima la columna transformada. Pot passar que si canviem el coeficient tècnic, el rendiment marginal d'aquesta variable passe a ser positiu, i en aqueix cas caldrà fer una operació del pivot, o que es mantinga menor o igual que zero, i en aqueix cas la solució òptima prèvia ho continua sent.

Exemple 6.3

Postoptimització dels dos coeficients tècnics simultàniament: $a_{11} = 3, a_{21} = 2$.

Es transforma la columna abans d'introduir-la en la taula òptima:

$$Y_1 = B^{-1}A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 \\ -3/5 \end{pmatrix}$$

		-1	2	3	0	0	
		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
3	x_3	4/5	0	1	-1/5	1/10	2
2	x_2	-3/5	1	0	2/5	3/10	2
z_j		6/5	2	3	1/5	9/10	10
w_j		-11/5	0	0	-1/5	-9/10	

Com podem veure, la taula correspon a la mateixa solució òptima i de vèrtex en el punt $(x_1, x_2, x_3) = (0,2,2)$ i F = 10.

6.4. Canvis en termes independents de les restriccions

Quan canvia el terme independent d'una restricció, els efectes no es veuen en els rendiments marginals, sinó en el valor de les variables bàsiques. No afecten, per tant, la condició de solució òptima sinó la condició de solució factible. Aquesta condició s'avalua mitjançant el càlcul matricial, $x_B = B^{-1}b \geq 0$, del qual s'extrau l'interval de sensibilitat. La postoptimització resulta massa complexa si el nou valor del terme independent se n'ix de l'interval de sensibilitat (passar al dual, canviar un coeficient de la funció objectiu, resoldre i tornar al primal), per tant, només es farà si es manté dins.

Exemple 6.4

Anàlisi de sensibilitat de b_1

$$x_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{b_1 + 6}{5} \\ \dfrac{-2b_1 + 18}{5} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} b_1 \geq -6 \\ b_1 \leq 9 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad b_1 \in [-6,9]$$

La interpretació d'aquest interval de sensibilitat és que si es produeixen canvis en el terme independent de la primera restricció, la solució òptima continuarà sent la mateixa (variables bàsiques i no bàsiques, encara que amb diferent valor i també diferent valor de la funció objectiu) sempre que el nou valor que assolisca aquest coeficient es trobe entre –6 i 9. En cas contrari, la solució canviaria de manera més important.

Anàlisi de sensibilitat de b_2

$$x_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{8+b_2}{10} \\ \dfrac{-16+3b_2}{10} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \begin{matrix} b_2 \geq -8 \\ b_2 \geq 16/3 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad b_2 \in \left[\frac{16}{3}, +\infty\right[$$

La interpretació d'aquest interval de sensibilitat és que si es produeixen canvis en el terme independent de la segona restricció, la solució òptima continuarà sent la mateixa (variables bàsiques i no bàsiques, encara que amb diferent valor i també diferent valor de la funció objectiu) sempre que el nou valor que assolisca aquest coeficient siga major o igual que 16/3. En cas contrari, la solució canviaria de manera més important.

Postoptimització si $b_2 = 8$

$$x_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}$$

La solució òptima té les mateixes variables bàsiques i no bàsiques, però amb diferent valor. El màxim global és únic en $(x_1, x_2, x_3) = (0, 4/5, 8/5)$ i F = 32/5.

6.5. Introducció d'una nova variable

La manera d'analitzar la introducció d'una nova variable és afegint-la en la taula òptima com una columna més, amb el coeficient en la funció objectiu i amb la columna transformada (no l'original) associada. A continuació, es calcula el rendiment marginal d'aquesta variable: si és positiu (en maximitzar), entra com a bàsica i es calcula la nova solució; si és menor o igual que zero, la variable roman com a no bàsica i la solució òptima anterior ho continua sent. L'anàlisi de sensibilitat no és possible en aquest tipus de modificació del problema, encara que es poden plantejar qüestions com ara quin coeficient en la funció objectiu o quin coeficient tècnic en alguna de les restriccions hauria de tenir la nova variable per a ser bàsica.

Exemple 6.5

Analitza els efectes d'introduir en l'exemple 4.5 una nova variable x_4 amb coeficient en la funció objectiu $c_4 = 5$ i coeficients tècnics $a_{14} = 1, a_{24} = 4$.

Es transforma la columna de coeficients tècnics i es trasllada tota la informació a la taula òptima:

$$Y_4 = B^{-1}A_4 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}$$

		-1	2	3	5	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	
3	x_3	1/2	0	1	3/5	-1/5	1/10	2
2	x_2	-1/2	1	0	4/5	2/5	3/10	2
z_j		1/2	2	3	17/5	1/5	9/10	10
w_j		-3/2	0	0	8/5	-1/5	-9/10	

Com podem veure en la taula anterior, ha deixat de ser òptima. La nova variable té criteri d'entrada i s'ha de fer una operació del pivot perquè també hi ha criteri d'eixida. Si hi apliquem aquests criteris, l'element pivot és $y_{24} = 4/5$ i la nova taula és:

		-1	2	3	5	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	
3	x_3	7/8	-3/4	1	0	-1/2	-1/8	1/2
5	x_4	-5/8	5/4	0	1	1/2	3/8	5/2
z_j		-1/2	4	3	5	1	3/2	14
w_j		-1/2	-2	0	0	-1	-3/2	

Aquesta taula és la taula òptima perquè no hi ha criteri d'entrada. El màxim global ha canviat amb la introducció de la nova variable i ha passat a ser el vèrtex situat en el punt $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 1/2, 5/2)$ amb $F = 14$, cosa que millora l'òptim anterior.

6.6. Introducció d'una nova restricció

La incorporació d'una restricció més en el problema pot estar motivada per la limitació d'algun factor productiu que se sabia prou bé que existia, per alguna condició de demanda nova, per l'aprovació d'alguna norma legal, etc.

Si la solució òptima prèvia no compleix aquesta nova restricció deixarà de ser òptima, però l'obtenció de la solució òptima a partir de l'anterior és excessivament complexa (passar al dual, afegir-hi una nova variable, resoldre i tornar al primal) i quasi resulta més pràctic tornar a resoldre el problema des del principi.

Si la solució òptima prèvia compleix la nova restricció, continua sent òptima, amb els mateixos valors per a les variables i per a la funció objectiu. Tanmateix, una restricció més implica una variable bàsica més. Si la restricció addicional és una desigualtat, la seua variable de marge serà la variable bàsica que es busca amb el valor que calga per a igualar els dos membres de la restricció en forma estàndard. L'obtenció de la taula òptima, si ens fa falta, la podem fer a partir de la taula òptima prèvia, a la qual afegirem una nova fila, amb els coeficients i el terme independent de la nova restricció, i una nova columna amb la variable de marge addicional. La taula resultarà incoherent però amb una transformació posterior es podrà passar a la taula òptima vàlida. Si la restricció addicional és una igualtat, no hi ha variable de marge i s'haurà de provar amb la resta de variables no bàsiques quina és coherent com a bàsica, que tindrà, sens dubte, valor zero (SFB degenerada).

Exemple 6.6

Si introduïm en l'exemple 4.5 la restricció: $x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 10$, podem observar com la solució òptima original $(x_1, x_2, x_3) = (0, 2, 2)$ compleix la restricció addicional, amb un marge $s_3 = 2$. Per tant, continua sent el màxim global amb $F = 10$. Si volguérem la taula òptima, generaríem la taula prèvia incoherent següent:

		-1	2	3	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
3	x_3	1/2	0	1	-1/5	1/10	0	2
2	x_2	-1/2	1	0	2/5	3/10	0	2
0	s_3	1	3	1	0	0	1	10
z_j		1/2	2	3	1/5	9/10	0	10
w_j		-3/2	0	0	-1/5	-9/10	0	

I ara, per a generar la primera columna de la matriu identitat en la columna de x_3 i la segona columna de la matriu identitat en la columna de x_2, s'ha de restar a la tercera fila la primera i la segona multiplicada per 3:

		-1	2	3	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
3	x_3	1/2	0	1	-1/5	1/10	0	2
2	x_2	-1/2	1	0	2/5	3/10	0	2
0	s_3	2	0	0	-1	-1	1	2
z_j		1/2	2	3	1/5	9/10	0	10
w_j		-3/2	0	0	-1/5	-9/10	0	

Aquesta ja és una taula coherent del símplex i és la que correspon al màxim global: un vèrtex en el punt $(x_1, x_2, x_3) = (0,2,2)$ amb $F = 10$.

Qüestions, exercicis i problemes

40. Per al problema de P. L.:

$$\begin{array}{ll} Max. & x_1 + 4x_2 + x_3 \\ s.a: & x_2 + 2x_3 \geq 4 \\ & x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 10 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{array}$$

La taula òptima del qual és:

		1	4	1	0	
		x_1	x_2	x_3	s_1	
0	s_1	0,5	0	0	1	1
4	x_2	0,5	1	2	0	5
z_j		2	4	8	0	20
w_j		-1	0	-7	0	

a) Realitza l'anàlisi de sensibilitat de c_1. Raona què canviaria i què no de la solució òptima si c_1 canvia de valor sense eixir-se'n de l'interval de sensibilitat.

b) Calcula la solució òptima si $c_1 = 3$.

c) Realitza l'anàlisi de sensibilitat de c_2. Raona què canviaria i què no de la solució òptima si c_2 canvia de valor sense eixir-se'n de l'interval de sensibilitat

d) Calcula la solució òptima si $c_2 = 3$.

e) Realitza l'anàlisi de sensibilitat de a_{21}. Raona què canviaria i què no de la solució òptima si a_{21} canvia de valor sense eixir-se'n de l'interval de sensibilitat.

f) Calcula la solució òptima si $a_{21} = 2$.

g) Realitza l'anàlisi de sensibilitat de b_1. Raona què canviaria i què no de la solució òptima si b_1 canvia de valor sense eixir-se'n de l'interval de sensibilitat.

h) Calcula la solució òptima si $b_1 = 5$.

i) Realitza l'anàlisi de sensibilitat de b_2.

j) Calcula la solució òptima si $b_2 = 14$.

k) Calcula la solució òptima si al mateix temps $b_1 = 5$ i $b_2 = 14$.

l) Calcula la solució òptima si s'introdueix una nova variable x_4 amb coeficient $c_4 = 3$ en la funció objectiu i els coeficients tècnics $a_{14} = 2$ i $a_{24} = 1$.

m) Calcula la taula òptima si s'introdueix la restricció $2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 16$.

41. En el problema de producció amb recursos limitats següent, les variables representen les unitats produïdes de quatre productes, la funció objectiu és de beneficis (formada per la suma dels beneficis unitaris, en milers de €, pel nombre d'unitats produïdes), la primera restricció representa la limitació de treball disponible (en hores/dia) i la segona restricció representa la limitació de cost (en milers de €). L'enunciat matemàtic del problema i la taula òptima és:

$$\begin{array}{rl} Max. & F = 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 \\ s.a: & 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 \leq 20 \\ & 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 15 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0 \end{array}$$

		3	1	3	4	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	
3	x_1	1	2,2	0	-2	-0,4	0,6	1
3	x_3	0	-0,8	1	4	0,6	-0,4	6
	z_j	3	4,2	3	6	0,6	0,6	21
	w_j	0	-3,2	0	-2	-0,6	-0,6	

a) Calcula l'interval de sensibilitat del benefici unitari del segon producte. Raona econòmicament l'efecte que tindria un augment d'aquest benefici unitari però mantenint-se dins de l'interval anterior. Quina interpretació econòmica creus que és la més probable per a l'extrem superior d'aquest interval?

b) Analitza quina seria la producció òptima si el benefici unitari del quart producte augmenta fins a 8 (milers de €).

c) Calcula l'interval de sensibilitat de les hores necessàries per a produir una unitat del quart producte. Quina interpretació econòmica creus que és la més probable per a l'extrem inferior d'aquest interval?
d) Si la producció de cada unitat del segon producte passa a tenir un cost de 2.500 €, canviaria la producció òptima? I els beneficis òptims?
e) Calcula l'interval de sensibilitat de les hores disponibles de treball i interpreta'l econòmicament.
f) Calcula la producció òptima i el benefici màxim si el pressupost màxim de costos passa a ser de 25.000 €.
g) Analitza si a l'empresa li resulta convenient introduir un nou producte que té un benefici unitari de 5.000 €, que utilitza 3 hores de treball per unitat i té un cost unitari de 2.500 €.

TEMA 7. PROGRAMACIÓ ENTERA

7.1. Introducció

En aquest tema veurem de manera introductòria el mètode principal per a resoldre qualsevol dels problemes d'optimització que hem vist quan les variables del problema o alguna d'aquestes variables es troba restringida a prendre valors enters. El motiu per a introduir aquesta condició pot ser divers. A vegades, les variables representen magnituds que no són divisibles, persones que s'han de transportar, per exemple; en altres casos, les variables representen decisions, de construir una carretera o no construir-la, per exemple. Quan el problema té aquest tipus de variables, es diu de programació entera.

Els tipus de variables enteres són dos: variable entera general o condició d'integritat, $x \in \mathbb{Z}$, i variable binària $x \in \{0,1\}$. Aquestes segones són les adequades per a representar decisions, de manera que un valor 0 està associat a no prendre aquesta decisió i el valor 1 està associat a sí prendre-la.

Els problemes amb variables enteres poden ser purs si totes les variables són enteres, o mixtes si algunes variables són enteres i d'altres són reals.

El treball amb variables enteres té una conseqüència matemàtica molt important, ja que si les variables són discretes en lloc de contínues, no es compleixen les hipòtesis molt significatives com les de funció objectiu contínua o conjunt d'oportunitats convex i, en general, no és possible el càlcul diferencial (derivades). Això invalida l'aplicació dels mètodes que hem estudiat en els temes anteriors. Encara que hi ha mètodes específics per a resoldre aquests problemes que aprofiten el fet que les variables són discretes, el mètode principal i el que nosaltres estudiarem en aquest tema es fonamenta en els mètodes generals que hem estudiat, condicions de Kuhn i Tucker o mètode símplex, sobre els quals s'incorporen restriccions addicionals per a forçar que les variables enteres ho siguen. Aquest mètode es coneix com el de *branca i límit*.

7.2. Mètode de branca i límit

El mètode de branca i límit resol el problema enter mitjançant la resolució de problemes successius no enters plantejats adequadament. La formulació de cada problema segueix una lògica que consisteix a afegir restriccions al problema previ (branca o ramificació), de manera que el conjunt d'oportunitats vaja reduint-se i s'eliminen valors no enters però sense eliminar valors enters i, d'aquesta manera, si es resol el nou problema es va forçant que la solució siga entera. D'altra banda, si reduïm el conjunt d'oportunitats, el valor òptim de la funció objectiu va empitjorant sempre, raó per la qual quan arribem a una solució entera sols caldrà ramificar els problemes no enters que siguen millors que aqueixa solució entera (fitació).

Si tenim un problema enter mixt o pur, els passos que cal seguir per a resoldre'l segons el mètode de branca i límit són els següents:

- Pas 1: formular i resoldre el problema associat no enter. És el mateix problema però sense exigir que les variables siguen enteres. Si la solució òptima és entera, aquesta és també la solució òptima del problema enter original, ja que si la millor solució del problema associat té variables enteres, també serà la millor solució del problema enter. Si la solució òptima no és entera, es ramifica el problema associat.
- Pas 2: ramificar el problema previ. Això vol dir plantejar dos nous problemes iguals que l'anterior però amb una restricció més cadascun. S'elegeix una de les variables enteres que no ha assolit un valor enter en la solució òptima del problema previ i es generen dues restriccions que eliminen el valor no enter d'aqueixa variable però sense eliminar cap valor enter. Per a aconseguir-ho, la variable ha de ser menor o igual que el valor enter per defecte, o major o igual que el valor enter per excés. Per exemple, si x ha de ser entera i el seu valor òptim ha sigut 4,3, les dues restriccions són $x \leq 4$ i $x \geq 5$ (així x = 4,3 ja no és factible, però sí x = 4 i x = 5). Cadascuna d'aquestes restriccions s'afegeix al problema previ i genera els dos nous problemes.
- Pas 3: resoldre els problemes nous. Si la solució òptima de qualsevol dels problemes que es va generant és entera o si el problema és infactible, s'atura la ramificació d'aqueixa branca. Quan un problema tinga solució entera, el valor de la funció objectiu és una fita que ens indica que no caldrà ramificar problemes no enters amb solucions pitjors que aquesta. Per tant, si un problema té solució òptima no entera però el valor de la funció objectiu és pitjor que el d'una solució entera, també s'atura la

ramificació d'aqueixa branca. Aquest raonament és la fitació que dóna nom a aquest mètode. En el cas que el problema tinga solució òptima no entera i el valor de la funció objectiu siga millor que el de qualsevol solució entera o si no es disposa encara d'alguna solució entera, cal continuar ramificant i tornar al pas 2.

Els passos 2 i 3 es van repetint fins que no quede cap problema per ramificar. En aquest sentit, un problema no s'ha de ramificar si es dóna alguna d'aquestes condicions:

- És infactible.
- Té solució òptima entera.
- Té solució òptima no entera amb pitjor valor de la funció objectiu que un problema amb solució òptima entera.

El resultat d'aquest mètode és el plantejament i la resolució de problemes successius, tots sense condicions de variables enteres en la seua formulació, que es poden resoldre pels mètodes estudiats en els temes anteriors. Tot aquest conjunt de problemes i les seues solucions es representen en forma d'arbre, anomenat *arbre de ramificació*, i cada problema en aquest arbre és un node.

Quan no quede cap problema per ramificar (cap node pendent), ja podem deduir la solució òptima del problema enter original, si n'hi ha: la solució òptima buscada és la millor de les solucions òptimes enteres de l'arbre de ramificació.

Exemple 7.1

Resoldre el problema enter pur següent:

$$\begin{array}{rc} Max. & F = 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ s.a: & x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 17 \\ & 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 21 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\ & x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z} \end{array}$$

Pas 1 Formular i resoldre el problema associat.

El problema associat és el mateix però sense condicions d'integritat:

$$\begin{array}{rc} & \boldsymbol{Problema\ 0} \\ Max. & F = 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ s.a: & x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 17 \\ & 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 21 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Amb el mètode símplex, la solució òptima és:

- Problema 0: $(x_1, x_2, x_3) = (9'2, 2'6, 0)$ amb F = 44,6.

Pas 2 (primera ramificació) Ramificar el problema 0. Si elegim una qualsevol de les variables enteres sense valor enter, per exemple x_2, es generen les restriccions $x_2 \leq 2$ i $x_2 \geq 3$, que originen dos problemes nous, cadascun igual que l'anterior amb una d'aquestes restriccions addicionals:

$$\begin{array}{ll} & \textbf{\textit{Problema 1}} \\ Max. & F = 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ s.a: & x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 17 \\ & 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 21 \\ & x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \quad \text{i} \quad \begin{array}{ll} & \textbf{\textit{Problema 2}} \\ Max. & F = 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ s.a: & x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 17 \\ & 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 21 \\ & x_2 \geq 3 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Pas 3 (primera ramificació) Resoldre els problemes 1 i 2.

Amb el mètode símplex, les solucions òptimes són:

- Problema 1: $(x_1, x_2, x_3) = (9'5, 2, 0)$ amb F = 44.
- Problema 2: $(x_1, x_2, x_3) = (8, 3, 0)$ amb F = 41.

El problema 2 ha arribat al final de la ramificació, perquè la solució òptima ja és entera. El problema 1, en canvi, es pot continuar ramificant, perquè la solució no és entera i el valor òptim de la funció objectiu (F = 44) és millor que el de l'única solució entera coneguda fins ara (F = 41). Si tant el problema 1 com el problema 2 s'hagueren de ramificar, elegiríem primer el que tinguera millor valor de la funció objectiu. Tornem al pas 2 per a ramificar el problema 1.

Pas 2 (segona ramificació) Ramificar el problema 1. Només es pot ramificar per la variable x_1, que és l'única no entera. Les restriccions són $x_1 \leq 9$ i $x_1 \geq 10$, que originen dos problemes nous, cadascun igual al problema 1 amb una d'aquestes restriccions addicionals:

$$\begin{array}{ll} & \textbf{\textit{Problema 1.1}} \\ Max. & F = 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ s.a: & x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 17 \\ & 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 21 \\ & x_2 \leq 2 \\ & x_1 \leq 9 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \quad \text{i} \quad \begin{array}{ll} & \textbf{\textit{Problema 1.2}} \\ Max. & F = 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ s.a: & x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 17 \\ & 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 21 \\ & x_2 \leq 2 \\ & x_1 \geq 10 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Pas 3 (segona ramificació) Resoldre els problemes 1.1 i 1.2.

Amb el mètode símplex, les solucions òptimes són:

- Problema 1.1: $(x_1, x_2, x_3) = (9, 2, 1/3)$ amb F = 131/3.
- Problema 1.2: $(x_1, x_2, x_3) = (10, 1, 0)$ amb F = 43.

El problema 1.2 ha arribat al final de la ramificació, perquè la solució òptima ja és entera. Com que el valor de la funció objectiu (F = 43) és millor que el de l'altra solució entera (problema 2 amb F = 41), la fita rellevant per a deduir si cal seguir ramificant o no un problema no enter és la millor d'aquestes, F = 43. El problema 1.1, per tant, es pot continuar ramificant perquè la solució no és entera i el valor òptim de la funció objectiu (F = 43,666...) és millor que el de la millor solució entera (F = 43). Tornem al pas 2 per a ramificar el problema 1.1.

Pas 2 (tercera ramificació) Ramificar el problema 1.1. Només es pot ramificar per la variable x_3, que és l'única no entera. Les restriccions són $x_3 \leq 0$ i$x_3 \geq 1$, que originen dos problemes nous, cadascun igual al problema 1.1 amb una d'aquestes restriccions addicionals:

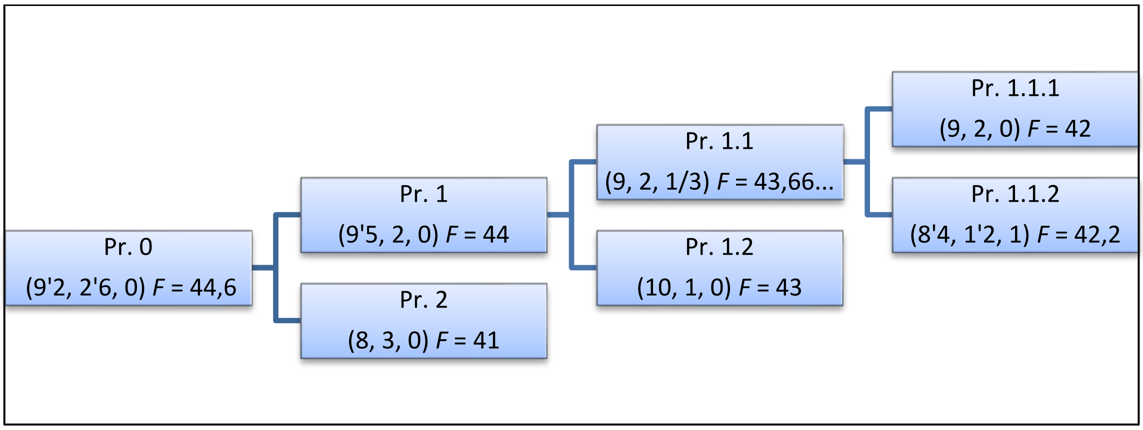
$$\begin{array}{ll} & \boldsymbol{Problema\ 1.1.1} \\ Max. & F = 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ s.a: & x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 17 \\ & 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 21 \\ & x_2 \leq 2 \\ & x_1 \leq 9 \\ & x_3 \leq 0 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \quad \text{i} \quad \begin{array}{ll} & \boldsymbol{Problema\ 1.1.2} \\ Max. & F = 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ s.a: & x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 17 \\ & 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 21 \\ & x_2 \leq 2 \\ & x_1 \leq 9 \\ & x_3 \geq 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Pas 3 (tercera ramificació) Resoldre els problemes 1.1.1 i 1.1.2.

Amb el mètode símplex, les solucions òptimes són:

- Problema 1.1.1: $(x_1, x_2, x_3) = (9, 2, 0)$ amb F = 42.
- Problema 1.1.2: $(x_1, x_2, x_3) = (8'4, 1'2, 1)$ amb F = 42,2.

El problema 1.1.1 ha arribat al final de la ramificació, perquè la solució òptima ja és entera. Però com que el valor de la funció objectiu (F = 42) no és millor que el del problema 1.2 (F = 43), la fita rellevant per a deduir si cal continuar ramificant o no encara és la del problema 1.2, F = 43. El problema 1.1.2, per tant, no l'hem de continuar ramificant, perquè encara que la solució no siga entera, el valor òptim de la funció objectiu (F = 42,2) és pitjor que el de la millor solució entera (F = 43). Com que no hi queda cap problema per ramificar, disposem de l'arbre complet de ramificació:



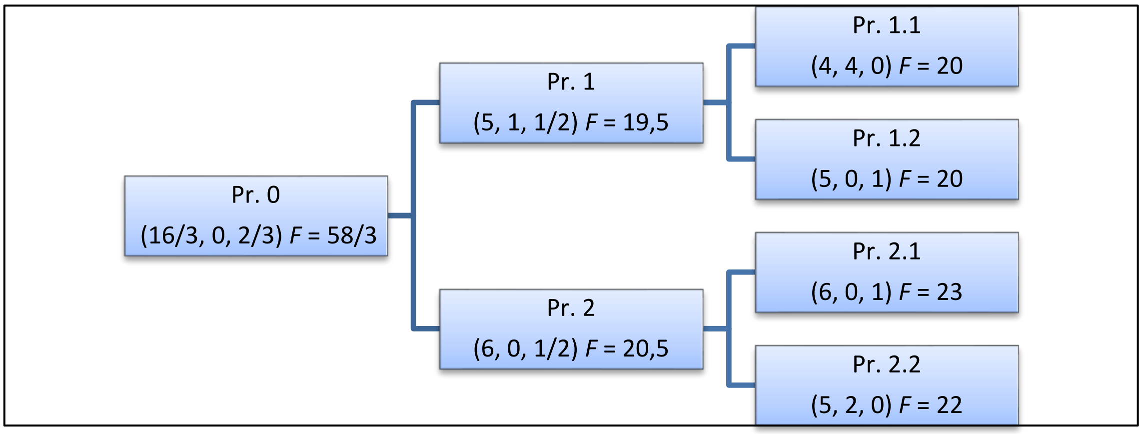
Quan l'arbre es troba complet, la solució òptima del problema enter original és la millor de les solucions enteres de l'arbre. Com que el problema és de maximització, la millor de les solucions enteres és la del problema 1.2, per tant, la solució òptima és $(x_1, x_2, x_3) = (10, 1, 0)$ amb $F = 43$.

Observacions:

- Cap dels problemes d'un arbre de ramificació té condicions d'integritat per a les variables. Aquestes condicions només les té el problema original.
- La funció objectiu sempre empitjora a mesura que es progressa per l'arbre de ramificació, per tant, si el problema és de maximitzar, la funció objectiu va disminuint, i si és de minimitzar, va augmentant.
- Quan hi ha més d'un problema per a ramificar, elegirem el que tinga millor valor de la funció objectiu.
- Si es pot ramificar per més d'una variable, elegirem qualsevol d'aquestes. Però només es pot ramificar per una variable cada vegada.
- Si el problema és enter mixt, només cal ramificar per les variables enteres. Les variables contínues no originen cap ramificació ni intervenen en els raonaments.
- Resoldre el problema associat (problema 0) i arrodonir la solució al nombre enter més pròxim no és un mètode vàlid com podem veure en l'exemple 7.1: arrodonir (9'2, 2'6, 0) a (9,3,0) origina un punt infactible i arrodonir-lo a (9, 2, 0) origina un punt factible però no òptim. No obstant això, en problemes de gran dimensió i depenent de la interpretació econòmica de les variables, pot ser un mètode aproximat raonable.

Qüestions, exercicis i problemes

42. Siga l'arbre de ramificació següent d'un problema de programació entera pur:



a) Afegeix en cada branca la restricció corresponent.

b) Raona quina és la solució òptima, si és única i si és mínim o màxim global.

c) Detecta quina de les set solucions que apareixen en l'arbre és incoherent i per què.

43. Siga el problema de programació entera mixta següent:

$$\begin{aligned} Min. \quad & F = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \\ s.a: \quad & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 12 \\ & x_1 + x_2 + 4x_3 \geq 8 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\ & x_3 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

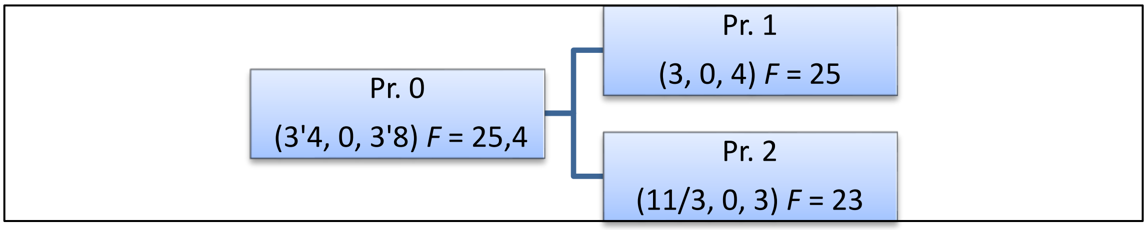
El problema associat quan apliquem el mètode de branca i límit té com a solució òptima $(x_1, x_2, x_3) = (16/3, 0,\ 2/3)$ amb F = 58/3.

a) Formula els dos problemes que apareixen després de la primera ramificació.

b) Marca amb una X quina o quines de les opcions següents són coherents per a les solucions òptimes d'aquests dos problemes:

- ☐ $(x_1, x_2, x_3) = (6, 0, 1/2)$ amb F = 20,5 i $(x_1, x_2, x_3) = (5, 1, 1/2)$ amb F = 19,5
- ☐ $(x_1, x_2, x_3) = (4, 4, 0)$ amb F = 20 i $(x_1, x_2, x_3) = (5, 0, 1)$ amb F = 20
- ☐ $(x_1, x_2, x_3) = (6, 0, 0)$ amb F = 18 i $(x_1, x_2, x_3) = (4, 1, 1)$ amb F = 19
- ☐ $(x_1, x_2, x_3) = (3, 4, 1)$ amb F = 22 i $(x_1, x_2, x_3) = (6, 1, 0)$ amb F = 22

44. Un problema lineal amb tres variables enteres té l'arbre de solucions següent seguint el mètode de branca i límit:



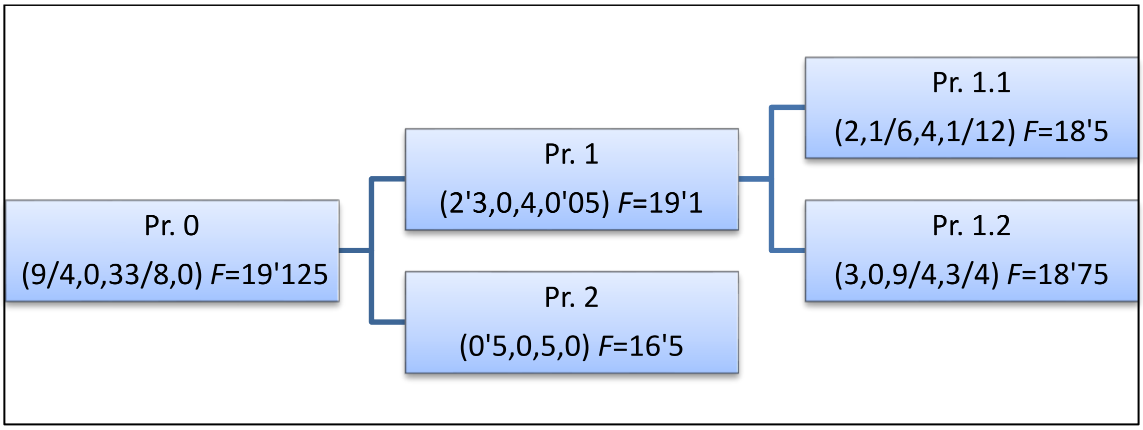
a) Afegeix en l'arbre anterior la restricció incorporada en cada branca.

b) Selecciona l'opció correcta amb una X:

- ☐ L'arbre no està complet: cal ramificar el problema 2.
- ☐ La solució òptima és (3, 0, 4) amb F = 25.
- ☐ La solució òptima és (11/3, 0, 3) amb F = 23.
- ☐ La solució òptima és (4, 0, 4) amb F = 28.

45. Siga el problema enter mixt següent i el seu arbre de ramificació:

$$\begin{array}{rl} Max. & F = 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 \\ s.a: & 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 \leq 21 \\ & 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 15 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \\ & x_1, x_3 \in \mathbb{Z} \end{array}$$



a) Formula el problema associat (problema 0).

b) Afegeix en cada branca la nova restricció.

c) Raona si l'arbre està complet. En cas afirmatiu, digues quina és la solució òptima. En cas negatiu, digues quin node caldria continuar ramificant i formula els dos nous problemes.