



UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

Máster en Investigación en Didácticas Específicas

**DIFICULTADES DE INTERPRETACIÓN Y DE USO
DE LOS ARRASTRES EN CABRI 3D POR
ESTUDIANTES DE ESO**

Memoria de Trabajo de Fin de Máster presentada por:

FRANCISCO JAVIER ALBA ALEJOS

Tutorizada por:

Dr. Ángel Gutiérrez Rodríguez

Departamento de Didáctica de las Matemáticas

Valencia, 19 de diciembre de 2012

FICHA TÉCNICA

Máster: Máster en Investigación en Didácticas Específicas por la Universitat de València.

Especialidad: Didáctica de las Matemáticas.

Autor: Apellidos: Alba Alejos.

Nombre: Francisco Javier.

Título de la memoria: Dificultades de interpretación y de uso de los arrastres en Cabri 3D por estudiantes de ESO.

Tutor: Apellidos: Gutiérrez Rodríguez.

Nombre: Ángel.

Departamento: Didáctica de las Matemáticas.

Fecha de defensa: 19 diciembre 2012.

Calificación: Matrícula de Honor (10).

Palabras clave: Teoría instrumental; Cabri 3D; Génesis instrumental; Geometría dinámica; Arrastres; Dificultades.

Keywords: Instrumental theory; Cabri 3D; Instrumental genesis; Dynamic geometry; Dragging; Difficulties.

Códigos Unesco: 1299 (Didáctica de la Matemática), 1204.99 (Geometría Dinámica), 5801 (Teoría y Métodos en Educación Matemática), 5801.01 (Medios Audiovisuales), 6104.01 (Procesos Cognitivos).

RESUMEN

El presente Trabajo de Fin de Máster presenta los resultados de una investigación sobre aspectos del aprendizaje del programa de geometría dinámica Cabri 3D por estudiantes de 4º de Educación Secundaria Obligatoria en tareas de geometría espacial. Para analizar las actuaciones de los estudiantes, hemos adoptado una aproximación instrumental. En concreto, describimos y analizamos las dificultades que tienen los estudiantes para la interpretación y el uso de los arrastres en Cabri 3D y de las retroalimentaciones ofrecidas por dicho programa durante la realización de actividades de geometría espacial. Así mismo, identificamos posibles esquemas elaborados por algunos estudiantes en dichas actividades instrumentadas. Dicho análisis se realiza a partir de la información oral, escrita y en la pantalla que producen las parejas de estudiantes en actividades instrumentadas.

ABSTRACT

This master research report presents the results of a research project aimed to investigate aspects of the learning of the dynamic geometry software Cabri 3D by students in grade 10 when working in 3d geometry tasks. To analyze those aspects of students' learning and actions, we have adopted an instrumental approach. Namely, we describe and analyze the difficulties students have to interpret and use the dragging in Cabri 3D and the feedback offered by the program while they are solving activities of 3d geometry. We also identify possible schemes developed by students in these instrumented activities. This analysis is performed on the basis of the information that students produce in instrumented activities.

ÍNDICE

RESUMEN.....	4
AGRADECIMIENTOS	7
1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	9
1.1. Objetivos de la investigación	10
2. ANTECEDENTES.....	13
2.1. La teoría instrumental	14
2.2. Problemas de usabilidad.....	18
2.3. Instrumentos y esquemas de utilización.....	22
3. MARCO TEÓRICO	25
3.1. El término “arrastre”	25
3.2. Caracterización de los tipos de puntos.	26
3.3. Caracterización a priori de las causas de las dificultades.	27
3.4. Caracterización de los posibles esquemas de utilización.....	30
4. ASPECTOS DE CABRI 3D RELEVANTES PARA LA INVESTIGACIÓN	31
Zona de trabajo	31
Retroalimentación. Menús y mensajes.	33
La función de la tecla de mayúsculas y la función “bola de cristal”.	35
5. DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN	37
5.1. Descripción del contexto	37
5.2. Organización de la experimentación	38
5.3. Descripción y análisis de las actividades	41
6. RESULTADOS	49
6.1. Análisis de las dificultades encontradas por las alumnas	49
6.2. Tabla resultado del análisis de las dificultades encontradas por las alumnas.....	62
6.3. Identificación de posibles esquemas de utilización en las actuaciones	65
7. CONCLUSIONES.....	75
8. BIBLIOGRAFÍA.....	79

ANEXO I. HOJAS DE PREGUNTAS	83
ANEXO II. RETROALIMENTACIÓN. MENÚS Y MENSAJES.....	147
ANEXO III. LOS ELEMENTOS UTILIZADOS EN LAS ACTIVIDADES.....	153
ANEXO IV. DESCRIPCIÓN DE LAS ACTIVIDADES PROPUESTAS	159
ANEXO V. LOS PROCEDIMIENTOS ASOCIADOS A LAS TAREAS	187
ANEXO VI. DESCRIPCIÓN Y COMENTARIOS DE LAS ACTUACIONES	199
ANEXO VII. RESPUESTAS A LAS HOJAS DE PREGUNTAS	269

AGRADECIMIENTOS

Me gustaría expresar mi agradecimiento al Dr. Ángel Gutiérrez, mi tutor del trabajo fin de máster, por su apoyo, su dedicación, su paciencia y sus estimados consejos.

Igualmente agradecer al Dr. José María Fortuny y al resto de compañeros y compañeras del proyecto de investigación “Momentos clave en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría en un entorno colaborativo y tecnológico”, por sus comentarios y por los gratos e instructivos momentos en el seminario *Divendres de Reserca* en la Universidad Autónoma de Barcelona.

Agradecer también al Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Valencia por la organización y gestión del máster en Investigación en Didácticas Específicas.

Finalmente, me gustaría resaltar la colaboración y ayuda de los alumnos del IES Cueva Santa de Segorbe (Castellón) y del equipo directivo del mismo.

1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

La presente memoria corresponde al Trabajo Fin de Máster demandado dentro del programa del Máster de Investigación de Didácticas Específicas de la Universidad de Valencia. En este proyecto¹ pretendemos contribuir a la mejora de la calidad docente a través de una mejor comprensión del aprendizaje en entornos colaborativos con programas de geometría dinámica.

La aparición de programas de geometría dinámica en 3D (PGD 3D) ofrece la oportunidad de utilizarlos en el ámbito escolar. En este sentido, resulta pertinente hacerse las siguientes preguntas genéricas a partir de las cuales surgirán nuestras preguntas de investigación:

- ¿Cuáles son la naturaleza y el alcance de la integración de PGD 3D en las aulas de educación secundaria?
- ¿Qué influencia (efectos, consecuencias, importancia) tiene el uso de la geometría dinámica 3D en el aprendizaje de geometría espacial por alumnos de educación secundaria?
- ¿Cuáles son los límites y las posibilidades de los PGD 3D en relación con dicho aprendizaje? ¿En qué medida delimitan qué y cómo se aprende?

Creemos que una respuesta adecuada a estas preguntas, y a otras relacionadas, permitirá al profesorado realizar propuestas didácticas que contemplen la incorporación de programas de geometría dinámica en 3D en el aula.

Dentro de este contexto, consideramos que es relevante y oportuno estudiar las actuaciones de los estudiantes con Cabri 3D en tareas de geometría espacial elemental. Pensamos que a través de dichas actuaciones es posible empezar a dar respuesta, en alguna medida, a las preguntas genéricas anteriores.

Surge así una pregunta que consideramos pertinente: ¿qué información aportan las actuaciones de los estudiantes respecto a la influencia que tiene el uso de la geometría

¹ El trabajo presentado en esta memoria forma parte del proyecto de investigación "Momentos clave en el aprendizaje de la geometría en un entorno colaborativo y tecnológico" subvencionado por el Ministerio de Ciencia e Innovación en el subprograma de proyectos de investigación fundamental no orientada (EDU2011-23240).

dinámica 3D en el aprendizaje de geometría espacial por alumnos de educación secundaria?

Con el fin de abordar dicha cuestión, hemos dirigido nuestra atención hacia las maneras de uso del programa por los estudiantes y hacia las dificultades que pueden surgir como consecuencia de su uso. Y hemos recurrido a la teoría instrumental (detallada en los capítulos 2 y 3) para elaborar nuestro marco teórico. Desde esta posición nos hemos planteado las siguientes preguntas genéricas relacionadas con la teoría instrumental:

- ¿Qué herramientas y modos de uso del ratón y de la pantalla utilizan en las diferentes tareas y actividades? ¿Cómo los usan?
- ¿Cuáles son las restricciones y las posibilidades de acción que establece el PGD 3D sobre las acciones de los estudiantes?
- ¿Qué esquemas elaboran los estudiantes al intentar realizar determinadas tareas instrumentadas?

1.1. Objetivos de la investigación

El programa de geometría dinámica que utilizamos es Cabri 3D, por lo que nuestras preguntas de investigación estarán dirigidas al mismo, ya que tiene sus propias particularidades respecto a otros PGD 3D.

La bibliografía dedicada al estudio y análisis del programa Cabri 3D desde una aproximación instrumental en tareas de geometría espacial elemental se reduce a unos pocos trabajos de investigación, de manera que el campo de investigación es extenso y prácticamente inexplorado. Es por esta razón que hemos decidido elegir el presente objeto de investigación de manera que sea la base de posteriores estudios.

Dicho objeto de investigación ha precisado de aproximaciones y concreciones sucesivas de manera que fuera abordable por un trabajo de investigación fin de máster y, al mismo tiempo, punto de partida de una futura tesis doctoral. Básicamente estas aproximaciones sucesivas se podrían resumir en las siguientes:

Aprendizaje de geometría espacial con programas de geometría dinámica en 3D.
→

→ Uso de la geometría dinámica 3D por alumnos de Educación Secundaria. Su relación con el aprendizaje de geometría espacial.

→ Dificultades de uso y de interpretación de las herramientas Cabri 3D en actividades de geometría espacial elemental.

→ Dificultades de uso y de interpretación de los arrastres de objetos en Cabri 3D en actividades de geometría espacial elemental.

En estos sucesivos niveles de concreción del objeto de investigación hemos ido descendiendo desde una preocupación genérica sobre el aprendizaje de geometría espacial con programas de geometría dinámica en 3D hasta llegar a una aproximación instrumental de los arrastres de objetos geométricos en Cabri 3D en actividades de geometría espacial elemental con puntos, recta, planos y sólidos. Esto se concreta en los siguientes objetivos de la investigación presentada en esta memoria de Trabajo Fin de Máster.

Objetivos:

- *Detectar y analizar las dificultades de interpretación y de uso de los arrastres de puntos, rectas, planos y sólidos en diferentes actividades y tareas de geometría espacial en Cabri 3D.*
- *Detectar y analizar las dificultades de interpretación y de uso de las imágenes, representaciones y retroalimentaciones ofrecidas por el interfaz.*
- *Identificar la creación de posibles esquemas por parte de los estudiantes en actividades instrumentadas en Cabri 3D relacionadas con los arrastres de puntos, rectas, planos y sólidos.*

2. ANTECEDENTES

Los trabajos de investigación sobre el papel de los aparatos y los programas informáticos en la enseñanza de las matemáticas son numerosos (se puede encontrar síntesis en Laborde, Kynigos y Hollebrands, 2006). No obstante, los que directamente conciernen a nuestra investigación son los que adopta la teoría instrumental de Rabardel (1995) y Verillon y Rabardel (1995) como parte de sus fundamentos teóricos. Entre ellos cabe destacar los correspondientes a Luc Trouche y a Michèle Artigue.

La teoría instrumental es adoptada por Luc Trouche en investigaciones con calculadoras gráficas y simbólicas. En Trouche (2004) introduce el término “orquestración instrumental” para señalar la necesidad de una guía externa a la génesis instrumental de los alumnos y en (Trouche, 2005) define el término “gesto” como la parte observable de un esquema de uso. También incorpora en su marco teórico la teoría de los campos conceptuales de G. Vergnaud (Trouche 2003, 2005), que le permite caracterizar los esquemas de utilización con cierto detalle.

Por su parte Michèle Artigue utiliza también la teoría instrumental en sus investigaciones sobre los procesos de enseñanza-aprendizaje con programas algebraicos. Su marco teórico incorpora también la teoría antropológica de lo didáctico de Y. Chevallard, y con ella los términos “técnicas”, “tecnología” y “teoría” (Artigue, 2002).

Los trabajos anteriores permiten conocer las potencialidades de la teoría instrumental y los resultados obtenidos con calculadoras gráficas y simbólicas. En un entorno con Cabri 2D, Restrepo (2008) estudia los instrumentos asociados a los arrastres. Por su parte, Salazar (2009) estudia los esquemas de utilización de los alumnos y la génesis instrumental de los mismos en actividades con transformaciones geométricas en el espacio y con Cabri 3D. Por último, mencionar el trabajo de Hugot (2005) que estudia los problemas de usabilidad de Cabri 3D.

En los apartados que siguen describiremos con más detalle la teoría instrumental de Rabardel (1995, 1999), y las partes de los trabajos de Hugot (2005), de Restrepo (2008) y

Salazar (2009) directamente relacionadas con nuestro marco teórico y que utilizamos en la elaboración del mismo.

2.1. La teoría instrumental

Nuestro marco teórico está basado en la aproximación instrumental propuesta por Pierre Rabardel, la cual centra sobre el hombre las relaciones hombre-sistemas técnicos, y considera los hechos técnicos en su dimensión de hechos psicológicos. Así mismo, defiende que los artefactos no deben ser analizados por ellos mismos, de manera aislada y estática, sino de manera dinámica, analizando la evolución de sus usos.

Rabardel desarrolla un cuadro teórico para el análisis y la conceptualización de las actividades con instrumento (Rabardel, 1995). Comienza con una definición psicológica de la noción de instrumento. Continúa con lo que denomina “las génesis instrumentales”, concepto que hace referencia a la elaboración de sus instrumentos por el sujeto. Termina con un análisis de los efectos de la utilización del instrumento sobre la actividad del sujeto, y propone un conjunto de conceptos que permiten estudiarlos y caracterizarlos.

La noción de instrumento.

En general, las actividades realizadas con herramientas, máquinas y/u otros artefactos técnicos presentan tres polos:

- El sujeto (usuario, estudiante, operador, trabajador, agente, ...)
- El artefacto
- El objeto hacia el cual la acción está dirigida con la ayuda del artefacto.

La aportación de P. Rabardel a esta triada consiste en su noción de “instrumento”, y en las relaciones que establece entre dichos tres polos.

Su definición de *instrumento es la de una entidad mixta formada por un artefacto y por esquemas de utilización*; donde artefacto es un objeto técnico, material o simbólico, susceptible de usarse, elaborado para utilizarse con una finalidad, y los esquemas de utilización vienen a ser las representaciones que forman parte de las competencias del usuario y son necesarias en el uso del artefacto (Rabardel, 1999). Vemos que con esta definición pretende enfatizar la diferencia entre dos conceptos: el artefacto (objeto técnico) y el instrumento (objeto parcialmente técnico y parcialmente psicológico). Mientras que el

primero existe por sí mismo, el segundo no existe por sí mismo, ha de ser construido por el sujeto para llevar a cabo la actividad, utilizando el artefacto y creando esquemas de utilización o apropiándose de ya existentes. De esta manera, para Rabardel *los esquemas de utilización pueden ser considerados como invariantes representativos y operativos correspondientes a las actividades con instrumentos* (Rabardel, 1999). *Los aspectos representativos* son particularmente relativos a:

- los tipos de transformaciones realizables,
- las condiciones de estas transformaciones,
- las modalidades técnicas propias a estas transformaciones y al funcionamiento del artefacto
- las propiedades de la zona de interfaz del usuario y a las modalidades de intervención en esta zona.

Los aspectos operativos están especialmente relacionados con:

- los objetivos,
- las acciones elementales o compuestas (pudiendo estar estructuradas en procedimientos orientados a la organización, la planificación y la gestión de la acción en el curso de su desarrollo).

Así mismo, los esquemas de utilización son plurifuncionales, en el sentido de cumplir las siguientes funciones:

- Funciones epistémicas, dirigidas hacia la comprensión de lo que acontece dentro de las actividades.
- Funciones pragmáticas, dirigidas hacia las transformaciones que se consideran necesarias y a la obtención de resultados.
- Funciones heurísticas, las cuales orientan y controlan la actividad.

Rabardel distingue varios tipos de esquemas de utilización; los cuales están relacionados con dos tipos de actividades:

- Las actividades relativas a lo que él denomina “*tareas segundas*”; es decir, a las relativas a la gestión de las características y de las propiedades particulares del artefacto.

- Las actividades que denomina “*tareas primeras*”, orientadas hacia el objeto de la actividad (en nuestro caso la actividad matemática a resolver) y para las cuales el artefacto es un medio de realización.

Así distingue dos niveles de esquemas de utilización:

- Los *esquemas de uso* asociados a las tareas segundas.
- Los *esquemas de acción instrumentada*, caracterizados por estar relacionados con las tareas primeras.

La génesis instrumental

Mientras que los artefactos existen por sí mismo, los instrumentos son creados por el sujeto a través de los que Rabardel denomina génesis instrumental. Las génesis instrumentales consisten en un doble proceso de *instrumentalización* y de *instrumentación*:

- Los procesos de instrumentación están dirigidos hacia el artefacto, donde el sujeto aprende a utilizar el artefacto en sí mismo y conseguir un nivel de manejo, desde el punto de vista operativo y funcional, suficiente para realizar las actividades instrumentadas.
- Los procesos de instrumentación están dirigidos hacia el sujeto, conduciendo al desarrollo de los esquemas de acción instrumentada

Rabardel señala que parte del interés de utilizar el concepto de génesis instrumental es que permite reinterpretar las desviaciones en la utilización del artefacto por parte del sujeto (usuario) respecto a lo concebido en su diseño. Así, estas desviaciones no son vistas como algo negativo sino como una acción propia e incluso necesaria del sujeto por la cual los artefactos ofrecen nuevos espacios de desarrollo.

Principios relacionados con la producción de esquemas de utilización

Rabardel identifica tres principios que entran en juego en la producción por un sujeto de sus esquemas de utilización:

- El principio de economía. El sujeto tiende a elegir el instrumento que conoce mejor o con mayor disponibilidad; y lo utiliza para el mayor número de tareas. Esto le permite economizar la energía que debería ser empleada para adquirir y apropiarse de un nuevo instrumento.

- La búsqueda de eficacia. Si el artefacto no le parece al usuario el más eficaz en referencia a la consecución de los objetivos, entonces o bien elige otro artefacto o bien elabora una nueva forma de usar el artefacto (normalmente no considerada por el diseñador)
- La consecución de un equilibrio en el artefacto. El sujeto reestructura los artefactos y dispone de ellos según su experiencia. Organiza los artefactos, sus usos formales e informales, para la consecución de un buen equilibrio entre el principio de economía y el de la búsqueda de eficacia.

Los efectos de la utilización del instrumento sobre la actividad del sujeto

Rabardel (1995) defiende la idea de que la utilización de instrumentos produce efectos estructurales (organización y composición) en la actividad. Estos se inscriben en dos direcciones opuestas pero complementarias. Por una parte, la actividad sufre diferentes tipos de limitaciones y restricciones que condicionan la acción del sujeto (que denomina *actividad requerida*, en el sentido de estar limitada por las restricciones); por otra parte, el artefacto introduce en la actividad nuevas posibilidades de acción que se ofrecen al sujeto (que denomina *apertura del campo de posibilidades*).

La variación del campo de posibilidades puede incluir la oferta de nuevas transformaciones y de cambios de estado en el objeto, nuevas modalidades de organización de las acciones, y permitir renovar, por ejemplo, las condiciones de relación entre los medios y los objetivos, de encadenamiento de objetivos y subobjetivos, de control de la acción, etc. Sin embargo, el nuevo campo de posibilidades puede que no incluya todas las posibilidades presentes anteriormente, por lo que se eliminen acciones que con anterioridad a la introducción del nuevo instrumento eran realizables.

Respecto a los tipos de limitaciones y restricciones que condicionan la acción del sujeto, Rabardel distingue los siguientes tres:

- Restricciones de existencia. Están ligadas a las propiedades del artefacto en tanto que objeto material o cognitivo.
- Restricciones de finalización. Están ligadas al artefacto en tanto que destinado a producir transformaciones: los objetos sobre los cuales permite actuar y las transformaciones que autoriza.

- Restricciones de estructuración de la acción. Están ligadas a las modalidades de la acción anticipadas por el diseñador y, por tanto, incorporadas a la estructura y funcionamiento del artefacto.

La problemática de la transparencia de los artefactos

Rabardel (1995) utiliza el término “transparencia” en relación al diseño de los artefactos. El significado que elige para el mismo en el contexto de actividades instrumentadas lo explica utilizando la metáfora de la caja de cristal. En la metáfora de la caja de cristal el artefacto, o una parte de él, debe ser visible a fin de que el sujeto lo pueda tener en cuenta en su actividad. En este caso, el artefacto no debe desaparecer, sino al contrario, ser comprensible por el sujeto en función de sus necesidades dentro de la actividad.

Las transparencias de los artefactos concebidas como caja de cristal son necesarias en determinados tipos de actividades, por ejemplo, en las interacciones hombre-ordenador. Cuando el sistema es demasiado obscuro, invisible, el sujeto (usuario) que necesita comprenderlo para actuar, construye sus representaciones por analogía con las representaciones que le son familiares, lo cual puede ser fuente de problemas. La insuficiencia de transparencia del sistema, y su carácter inapropiado, pueden llegar a ser factores perturbadores. El sujeto tiene necesidad de comprender las características importantes del sistema. Estas deben ser visibles para el sujeto. El sistema debe dejar ver lo que es pertinente para el sujeto.

Rabardel señala varios tipos de transparencias dentro de la metáfora caja de cristal:

- Las transparencias cognitivas. El criterio de la transparencia es la proximidad con las representaciones iniciales del sujeto.
- Las transparencias operativas. Designan la manera en la que el instrumento vuelve accesibles y comprensibles sus propiedades características, en función de las necesidades de información del sujeto. Se dirigen al sujeto y a su actividad.

2.2. Problemas de usabilidad

Hugot (2005) describe a Cabri 3D como una aplicación pedagógica de geometría dinámica en el espacio que permite la manipulación directa; entendiendo la manipulación directa bajo tres principios:

1. Representación continua de los objetos. La manipulación directa pone el acento en la posibilidad de encontrar una representación adecuada de los objetos en respuesta a la acción del usuario.
2. Utilización de acciones directas en lugar de sintaxis complicadas. El usuario del interfaz percibe sus acciones no como órdenes, sino como de manipulación de objetos.
3. Operaciones reversibles e incrementables cuyo impacto sobre los objetos es inmediatamente visible. Las acciones son reversibles, a fin de paliar la imprecisión, involuntariedad o errores en la ejecución de las herramientas. Son incrementables porque permiten una construcción progresiva hacia el objetivo.

Así mismo, Hugot estudia los problemas de usabilidad y utilidad de Cabri 3D, asociados a la manipulación directa, dentro de la aproximación instrumental de Rabardel. La *utilidad* la define como la medida de la adecuación entre el objetivo definido por el diseñador y la consecución de este objetivo. Por ejemplo, si una aplicación concebida para el aprendizaje de las matemáticas (objetivo del diseñador), no aporta nuevos conocimientos a los alumnos, significa que hay un problema de utilidad. En cuanto a la *usabilidad*, se dice que un sistema es usable cuando permite al usuario realizar su tarea con eficacia, eficiencia y satisfacción; entendido estos términos como sigue:

- Eficacia: las tareas demandadas deben poder ser realizables en el sistema.
- Eficiencia: evalúa los recursos necesarios para realizar la tarea y la facilidad de aprendizaje con el sistema.
- Satisfacción: evalúa en qué medida el sistema es agradable al usuario.

Hugot (2005) realiza una primera experiencia para descubrir los problemas ligados al interfaz de Cabri 3D en los primeros momentos de uso de la aplicación. Propone el siguiente esquema para analizar a priori los problemas de usabilidad (traducido de Hugot, 2005):

(A) Problema de usabilidad específico a Cabri 3D.

(A1) – Problema ligado a los movimientos del punto de vista y de los objetos en el espacio.

Causas	<ul style="list-style-type: none"> • Las características de las herramientas puestas a disposición del usuario para generar los movimientos. • El usuario no está habituado a dichas herramientas. • La representación de los objetos 3D en el curso del movimiento.
Consecuencias	<ul style="list-style-type: none"> • El usuario no consigue cambiar el punto de vista.

	<ul style="list-style-type: none"> • El usuario pierde de vista al objeto en la pantalla.
--	--

(A2) – Problema ligado a las representaciones.

Cabri 3D debe representar objetos y propiedades de la geometría tridimensional. Es posible que ciertas de estas representaciones sean mal percibidas, porque dependen de las elecciones informáticas tomadas por el diseñador. En concreto, se refiere a lo denomina “representaciones externas”, entendidas como lo que es producido por el interfaz de manera visible con la intención de llevar un significado más abstracto (en nuestro caso, los objetos de la geometría).

Causas:	<ul style="list-style-type: none"> • Elecciones informáticas tomadas por el diseñador • Conocimientos matemáticos del sujeto.
Consecuencias	<ul style="list-style-type: none"> • El usuario no reconoce un objeto geométrico • El usuario no reconoce una propiedad.

(A3) – Problema debido a un error informático de la aplicación.

(A4) – Problema ligado a la creación de un objeto 3D.

Es posible que el usuario se pierda en la construcción de un objeto debido a la falta de familiaridad con la aplicación

Causas	<ul style="list-style-type: none"> • Ergonomía de la aplicación: organización del menú, de los botones, de los nombres de las herramientas.
Consecuencias	<ul style="list-style-type: none"> • El usuario no consigue crear un objeto.

(B) Problema de usabilidad ligado a la informática.

(B1) – Problema ligado al sistema utilizado (Windows/Macintosh)

El usuario utiliza Cabri 3D en un ambiente informático (Windows, Macintosh) que le puede generar problemas.

(B2) – Problema ligado al material utilizado (ratón, teclado, pantalla)

Los periféricos de entrada y de salida son necesarios en la utilización de Cabri 3D. Un problema ligado con los periféricos tiene un efecto sobre la manera de utilizar el programa.

(B3) – Problema ligado al uso de la informática en general.

La utilización de Cabri 3D requiere de conocimientos generales de informática, que pueden ser un obstáculo en el caso de que el sujeto esté poco o nada habituado a la utilización de las aplicaciones informáticas.

Tras la primera experimentación F. Hugot completa el esquema siguiente:

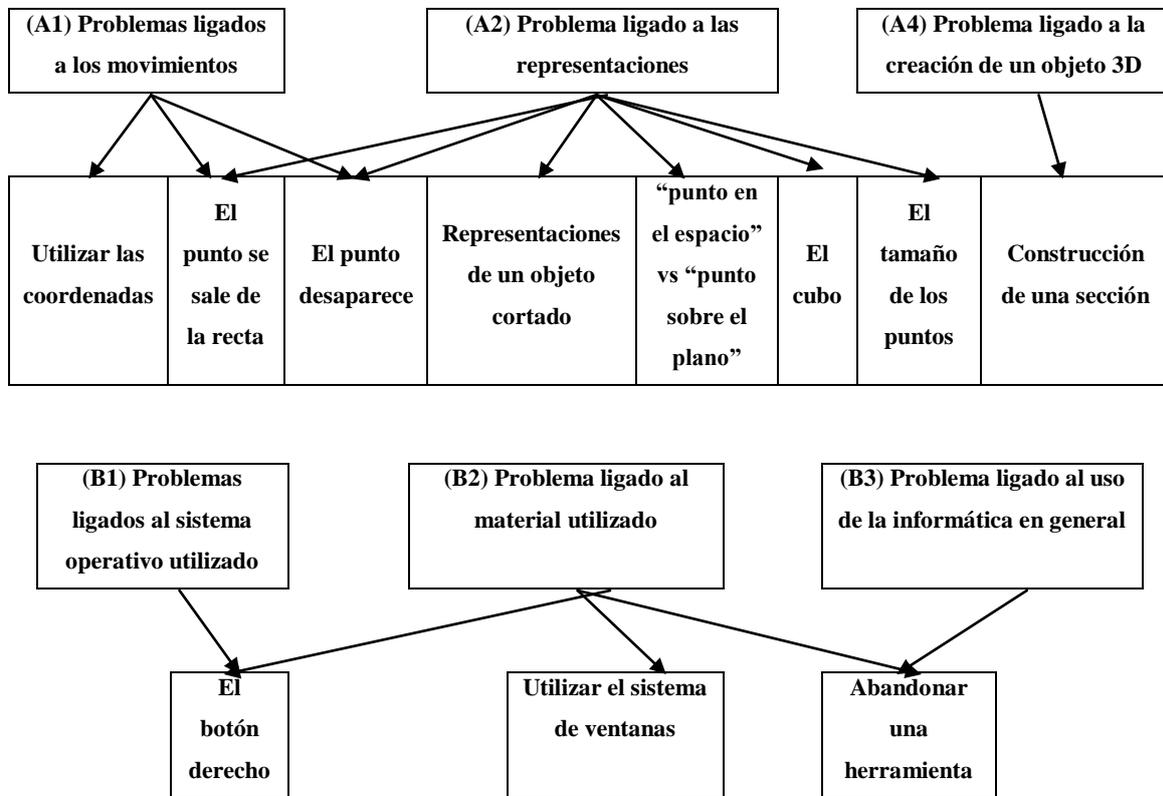


Figura 2.1. Problemas de usabilidad

De los puntos que Hugot muestra en el anterior esquema, por ser los más observados en los sujetos que participaron en su experimentación, destacamos los siguientes:

- “El punto sale de la recta”. En la versión de Cabri 3D, los puntos creados sobre la recta podían salirse de ella cuando eran arrastrados sobre la misma; ya que la recta era representada como finita.
- “El punto desaparece”. Un punto creado en la Zona de Trabajo puede desaparecer cuando es arrastrado. (Ver el capítulo 4).

- “Punto en el espacio” vs “punto en el plano”. Los usuarios muestran desconcierto en relación al significado y a las retroalimentaciones que se dan en Cabri 3D a las expresiones “un punto en el espacio” y “un punto en el plano”.
- “El tamaño de los puntos”. Los comentarios de los participantes los resume en el siguiente: Los puntos se representan por esferas, que a veces se convierten en demasiado grandes. También se quejan de la representación de las rectas por conos que tienen un diámetro demasiado grande. (Ver el capítulo 4).
- “El uso de coordenadas”. Los participantes se quejan que colocar un punto con precisión en una posición determinada con ayuda de sus coordenadas es una tarea difícil de realizar.

Hugot resume diciendo que la mayor parte de las dificultades encontradas por los participantes son debidas a las representaciones y a las retroalimentaciones que ofrece el programa. Estas están diseñadas como soluciones de compromiso entre la geometría que pretende representar y las restricciones informáticas, bajo el principio de manipulación directa.

2.3. Instrumentos y esquemas de utilización

En esta sección describimos las partes de los trabajos de Restrepo (2008) y Salazar (2009) directamente relacionadas con nuestro marco teórico.

Instrumentos y esquemas asociados con los arrastres

Hugot (2005) plantea que un problema de usabilidad intrínseco a Cabri 3D es el ligado a los movimientos del punto de vista y de los objetos en el espacio. También otros autores dan especial importancia a los arrastres en el aprendizaje de geometría espacial con programas de geometría dinámica. En este sentido Restrepo (2008) afirma que los arrastres son una herramienta fundamental de la geometría dinámica y, añade, su utilización y apropiación no es evidente ni para los alumnos ni para los docentes. Defiende que la necesidad del arrastre no tiene que surgir únicamente desde el alumno, sino que también debe ser solicitado y estimulado por la tarea y por el docente.

En su trabajo, Ángela Restrepo utiliza Cabri-géomètre; es decir, no trabaja en 3D sino en 2D. No obstante, realiza un estudio, que puede ser ampliado a 3D, de los diferentes tipos

de arrastres, considerados como instrumentos, desde el punto de vista instrumental. Para ello utiliza los tres tipos de puntos presentes en Cabri: puntos que se pueden arrastrar libremente por toda la pantalla, puntos definidos sobre otro objeto y que sólo se pueden arrastrar sobre él y puntos definidos mediante otros puntos u objetos y que no se pueden agarrar ni arrastrar directamente (únicamente si se arrastran los puntos o los objetos de los que dependen). También incorpora los términos de arrastre discreto y arrastre continuo (definidos como “photo-déplacement” y “cinéma-déplacement” en Olivero, 2002, p.141, citado en Restrepo, 2008) y las modalidades de arrastres encontradas por Arzarello y colaboradores (2002). Restrepo (2008) realiza el análisis de las actuaciones de los alumnos en términos de esquemas. Afirma que esto le permite ver y describir la construcción de las génesis instrumentales, de observar en particular la evolución de los esquemas, la construcción de los mismos y las relaciones existentes. Además, señala que la estructura misma de los esquemas le ha llevado a la descripción de reglas de acción y de invariantes operacionales (de acuerdo a la Teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud, 1990) y, a la observación de cómo son utilizados. Los esquemas que A. Restrepo define son los siguientes:

Esquemas de acción instrumentada

- 1) "Arrastrar un punto para testar una construcción"
- 2) "Arrastrar para validar una construcción"
- 3) "Identificación del objeto-trayectoria"
- 4) "Materialización de una trayectoria por una recta"
- 5) "Verificar que la trayectoria pasa por un punto"
- 6) "Arrastrar para analizar las variaciones de la figura en el curso del movimiento"
- 7) "Arrastrar para identificar los invariantes de la figura"
- 8) "Arrastrar para validar una conjetura/propiedad"
- 9) "Verificar la equidistancia"
- 10) "Verificar que dos rectas son perpendiculares"
- 11) "Encontrar un contraejemplo utilizando los arrastres"
- 12) "Buscar la dependencia entre dos puntos"
- 13) "Ajustar para satisfacer una condición"
- 14) "Ajustar mediante mediciones"
- 15) Esquema "del lápiz".

Esquemas de uso

- 1) Esquema de uso de “arrastre de un objeto”
- 2) Esquema de uso de “búsqueda de puntos que parpadean”
- 3) Esquema de uso de “distinción de los diferentes tipos de puntos del programa”
- 4) Esquema de uso de “tratamiento de una ambigüedad cuando se quiere desplazar un punto”
- 5) Esquema de uso “crear ‘a ojo’”

Esquemas asociados con transformaciones geométricas

Salazar (2009) estudia la apropiación de las nociones de transformaciones geométricas en el espacio por estudiantes de segundo año de educación secundaria con Cabri 3D. En su marco teórico utiliza las teorías de la Ingeniería Didáctica de Artigue, la teoría instrumental de Rabardel y la teoría de los Registros de Representación Semiótica de Duval. En concreto, parte de su trabajo estudia los esquemas de utilización de los alumnos y la génesis instrumental de los mismos en actividades con transformaciones geométricas en el espacio y con Cabri 3D. Concluye que los estudiantes mostraban la utilización de esquemas de utilización preestablecidos y la creación de nuevos, así como procesos de génesis instrumental.

3. MARCO TEÓRICO

El marco teórico sobre el que fundamentamos nuestra investigación se encuentra dentro del paradigma definido por la teoría instrumental de Rabardel (1995, 1999). En este sentido comparte todos sus supuestos y sus términos.

En el apartado 3.1 establecemos el significado y el uso que damos al término “arrastre” debido a la importancia que tiene en el presente trabajo. En el apartado 3.2 caracterizamos los diferentes tipos de puntos que definimos en el interfaz de Cabri 3D según la forma como han sido creados. Este modo de creación define el grado de dependencia del punto respecto de otros objetos construidos y el tipo de arrastres que puede realizarse con él. Estos dos apartados pretenden establecer qué significado y qué uso vamos a dar a dichos términos.

Para poder estudiar las dificultades de interpretación y de uso de programa Cabri 3D hemos elaborado unas tablas en el apartado 3.3 en las cuales caracterizamos sus posibles causas. Los descriptores utilizados son de dos tipos: los que están ligados a las características del programa y los que están ligados a las características del sujeto.

Por último, en el apartado 3.4 damos los criterios que utilizamos para identificar la creación de posibles esquemas por parte de los estudiantes en actividades instrumentadas en Cabri 3D relacionadas con los arrastres de puntos, rectas, planos y sólidos.

3.1. El término “arrastre”

El diccionario de la Real Academia Español establece que mover, en una de sus acepciones, es hacer que un cuerpo deje el lugar o espacio que ocupa y pase a ocupar otro. Y es en este amplio sentido que utilizamos el término “movimiento”: acción y efecto de mover. Junto a este vocablo genérico, utilizamos términos específicos (y sus derivados): arrastre, traslación y giro. Traslación y giro tienen el significado usual dentro de las matemáticas y de la geometría.

El término “arrastre” es equivalente a los términos “dragging” en la bibliografía en inglés y “déplacement” en la bibliografía en francés.

En un sentido amplio, el término “arrastre” permite referirse a la acción directa del usuario sobre un objeto geométrico de la Zona de Trabajo. Prácticamente todas las herramientas permiten arrastrar los diferentes objetos ya creados o en proceso de construcción. Igualmente, las acciones que se producen sobre puntos y elementos geométricos en los procesos de creación de objetos pueden considerarse también como “arrastrés”. No obstante, en el presente trabajo, con el término “arrastre” nos referimos, específicamente, a los movimientos producidos en los objetos con la herramienta “Manipulación” (con o sin la función de la “tecla de mayúsculas”) cuando se aplica directamente sobre los objetos, y a los producidos con la función “bola de cristal” sobre el plano base.

Para denominar los movimientos que se producen sobre objetos de manera indirecta al arrastrar otros objetos utilizo las expresiones “arrastre indirecto” y “arrastrar indirectamente” o simplemente arrastre y arrastrar, cuando no es necesario especificar el tipo particular de arrastre.

3.2. Caracterización de los tipos de puntos.

El arrastre de puntos es una acción básica y presente en prácticamente todas las posibles actividades con Cabri 3D. Ahora bien, el uso e interpretación del arrastre de puntos depende de la correcta caracterización de los distintos tipos de puntos que pueden crearse en Cabri 3D: *libres y ligados*.

En este trabajo, decimos que un *punto* es *ligado* en Cabri si está creado a partir de otros objetos. Dentro de los puntos ligados distinguimos los que se pueden arrastrar directamente (que denominamos *semi-libres*) y los que no se pueden arrastrar directamente (que denominados *dependientes*). Estos últimos son aquellos que al crearse se les define en función de otros objetos; por ejemplo, el punto de intersección entre dos rectas, el punto medio de otros dos puntos dados, el punto medio de una arista, el simétrico o transformado respecto de un movimiento geométrico de un punto dado, etc. Estos objetos decimos que tienen cero grado de libertad, ya que no pueden ser arrastrados directamente; por ejemplo, el punto medio de una arista, únicamente puede moverse si se arrastra la arista o los vértices de la misma.

A su vez, decimos que un *punto* es *semi-libre* cuando la posibilidad de ser arrastrado está limitada a una línea, una superficie o un objeto sobre el cual ha sido construido. En este caso, decimos que sus grados de libertad son uno (si está ligado a una línea) o dos (si está

ligado a una superficie). No obstante, también es posible moverlos indirectamente arrastrando el objeto sobre el cual está construido. También nos referimos a estos puntos diciendo que pertenecen o están “vinculados” al objeto sobre el cual han sido creados.

Por último, decimos que un *punto* es *libre* cuando no es ligado. Estos puntos se crean directamente en el espacio y decimos que tienen tres grados de libertad ya que pueden ser arrastrados en todas las direcciones. También consideramos, de forma excepcional, como libres los puntos creados en la parte no visible del plano base (ver capítulo 4). Esto se debe a que pueden ser arrastrados libremente en todas las direcciones; es decir, que aunque están creados sobre una superficie (el plano base) no están ligados a ella.

3.3. Caracterización a priori de las causas de las dificultades.

De acuerdo con Rabardel (1995) pensamos que la utilización del programa (artefacto) produce efectos estructurales en la actividad, los cuales afectan a la acción del alumno. Por una parte, el programa introduce restricciones que condicionan la acción; y, por otra, ofrece nuevas posibilidades de acción (ver apartados 2.1 y 2.2). En concreto, consideramos que dichas restricciones pueden ser causa de las dificultades de interpretación y de uso del programa Cabri 3D.

Dichas consideraciones nos han llevado a caracterizar las posibles causas de las dificultades de los alumnos y a agruparlas en dos tipos: las que están ligadas a las características del sistema informático y del programa y las que están ligadas a las características del sujeto. Las primeras se corresponde con las restricciones y el concepto de transparencia definidos por Rabardel (1995). En el segundo tipo hemos incluido las que están asociadas a los conocimientos y a los esquemas previos del alumno (tanto matemáticos como informáticos), al estado en el que el alumno se encuentra en su génesis instrumental y a los principios que guían la acción instrumentada del alumno de acuerdo también a Rabardel (1995).

Teniendo en cuenta lo expuesto hasta aquí hemos elaborado la tabla 3.1 en la que clasificamos y describimos a priori las posibles causas de las dificultades de los alumnos para la interpretación y el uso de Cabri 3D.

Tabla 3.1. Caracterización a priori de las posibles causas de las dificultades de los alumnos.

Causas ligadas al sistema informático y al programa	Restricciones	de existencia	Están ligadas a las propiedades del ordenador, de su sistema informático y de Cabri 3D en tanto que objeto material o cognitivo
		de finalización	Están ligadas al artefacto en tanto que destinado a producir transformaciones
		de estructuración de la acción	Están ligadas a las modalidades de la acción anticipadas por el diseñador y, por tanto, incorporadas a la estructura y funcionamiento del programa
	Falta de transparencia	operativa	Designa la manera en la que el instrumento vuelve accesibles y comprensibles sus propiedades características, en función de las necesidades de información del sujeto. Se dirigen al sujeto y a su actividad
		cognitiva	El criterio de la transparencia es la proximidad con las representaciones iniciales del sujeto
Causas ligadas al alumno	Conocimientos y esquemas del alumno	Conocimientos previos	De geometría
			Informáticos
			De programas de geometría dinámica
		Esquemas previos	Matemáticos
			Informáticos y de programas de geometría dinámica
			De tareas con “lápiz y papel”
	Estado en su génesis instrumental	Deficiente instrumentalización	
		Insuficiente instrumentación	
	Principios	de economía	El sujeto tiende a elegir el instrumento que conoce mejor o con mayor disponibilidad; y lo utiliza para el mayor número de tareas
de eficacia		Si el artefacto no le parece al usuario el más eficaz en referencia a la consecución de los objetivos, entonces o bien elige otro artefacto o bien elabora una nueva forma de usar el artefacto	
de consecución de equilibrio		Organiza los artefactos, sus usos formales e informales, para la consecución de un buen equilibrio entre el principio de economía y el de la búsqueda de eficacia.	

En el presente trabajo de investigación desarrollamos especialmente el análisis respecto a las causas ligadas al sistema informático y al programa. Por esta razón hemos elaborado la tabla 3.2, la cual es una ampliación de la tabla 3.1.

Tabla 3.2. Ampliación de la tabla 3.1.				
Restricciones	Tipos	De existencia	Propiedades del ordenador y del sistema informático con el que se trabaja	Procesador, memoria, resolución gráfica, sistema operativo, etc.
			Material utilizado (teclado, ratón, pantalla, etc.)	Confort en la utilización de los periféricos, características del teclado y de la pantalla, etc.
		De finalización	Los objetos sobre los cuales permite actuar	Representaciones de objetos geométricos
			Las transformaciones realizables	Tipos de transformaciones realizables
				Condiciones sobre las transformaciones realizables
		De estructuración de la acción	Propiedades de la zona del interfaz del usuario	Zona de Trabajo
				Barra de Herramientas
				Retroalimentaciones
			Modalidades de intervención en la zona del interfaz	Zona de Trabajo
				Barra de Herramientas
	Propiedades de las herramientas y de las funciones			
Falta de transparencia	Operativa	Retroalimentaciones	Representaciones	
			Mensajes	
			Ventana de ayuda	
			Barra de herramientas	Textos
	Iconos			
Cognitiva	Representaciones			

Consideramos que en las tablas anteriores también están incorporadas las causas a los problemas de usabilidad de Hugot (2005).

La elaboración de dichas tablas nos va a permitir:

- Evitar la confusión entre la caracterización de las dificultades de los alumnos y la caracterización de sus causas.
- Relacionar las posibles dificultades de los alumnos (consideradas en nuestros objetivos de investigación) que encontremos en la investigación con los descriptores de sus posibles causas dados a priori en las tablas.
- Dar cuenta de las dificultades a partir de sus causas de acuerdo con la teoría instrumental.

3.4. Caracterización de los posibles esquemas de utilización.

En el presente trabajo adoptamos el significado y caracterización que da Rabardel (1999) a los esquemas de utilización y que ya hemos expuesto en el capítulo 2: los esquemas de utilización vienen a ser representaciones que forman parte de las competencias del alumno para el uso de artefactos y pueden ser considerados como invariantes representativos y operativos correspondientes a las actividades con artefactos (objetos técnicos). En este sentido consideramos que son representaciones del alumno que sólo pueden ser estudiadas de forma indirecta a través de sus actuaciones. Por eso decimos que las actuaciones nos dan indicios, es decir, nos permiten inferir que los estudiantes tienen un esquema de utilización. Dichos indicios pueden ser de distinta naturaleza:

- Podemos identificar esquemas en las regularidades de las acciones (Restrepo 2008); por ejemplo, a partir de la utilización de un mismo binomio: una misma organización de las acciones para resolver un mismo tipo de tareas.
- La organización, la planificación y la gestión de las secuencias de acciones utilizada para resolver las tareas.
- La relación entre las acciones y los objetivos de las actividades y los procedimientos requeridos (anexo V).

Dado que uno de nuestros objetivos consiste en *identificar la creación de posibles esquemas por parte de los estudiantes en actividades instrumentadas en Cabri 3D relacionadas con los arrastres de puntos, rectas, planos y sólidos*, y nuestra finalidad es exploratoria (es decir, ver qué se puede encontrar en las actuaciones), consideramos que es suficiente con las indicaciones dadas. De esta manera dejamos abierta la caracterización de los posibles esquemas de utilización para que posteriores investigaciones puedan aprovecharse de los resultados del presente trabajo.

No obstante, utilizamos el término procedimiento como un paso previo para la descripción a priori de posibles esquemas. El término procedimiento lo usamos en el sentido de actuar de forma determinada para desarrollar una tarea de manera eficaz (es decir, con capacidad de lograr el efecto que se desea o se espera). En él incluimos las reglas a seguir, así como los conceptos y proposiciones que están directamente en juego (ver anexo V).

4. ASPECTOS DE CABRI 3D RELEVANTES PARA LA INVESTIGACIÓN

El programa de geometría dinámica Cabri 3D propone un ambiente virtual en el cual los objetos geométricos son representados en tres dimensiones y permite al usuario tener la sensación de manipular directamente sobre ellos. En este capítulo describimos las características del mismo que consideramos merecen ser comentadas por estar directamente relacionadas con la investigación. Por otra parte, en los anexos II y III damos una descripción complementaria y, en algunos aspectos, ampliada de Cabri 3D en relación a sus elementos, funciones, herramientas y retroalimentaciones.

Zona de trabajo

La Zona de Trabajo consiste en la región de la pantalla donde se pueden crear, ver y manipular objetos.

La Zona de Trabajo tiene un plano de referencia, llamado **plano base**. El plano base es un plano con características especiales respecto al resto de planos que se pueden crear con el programa:

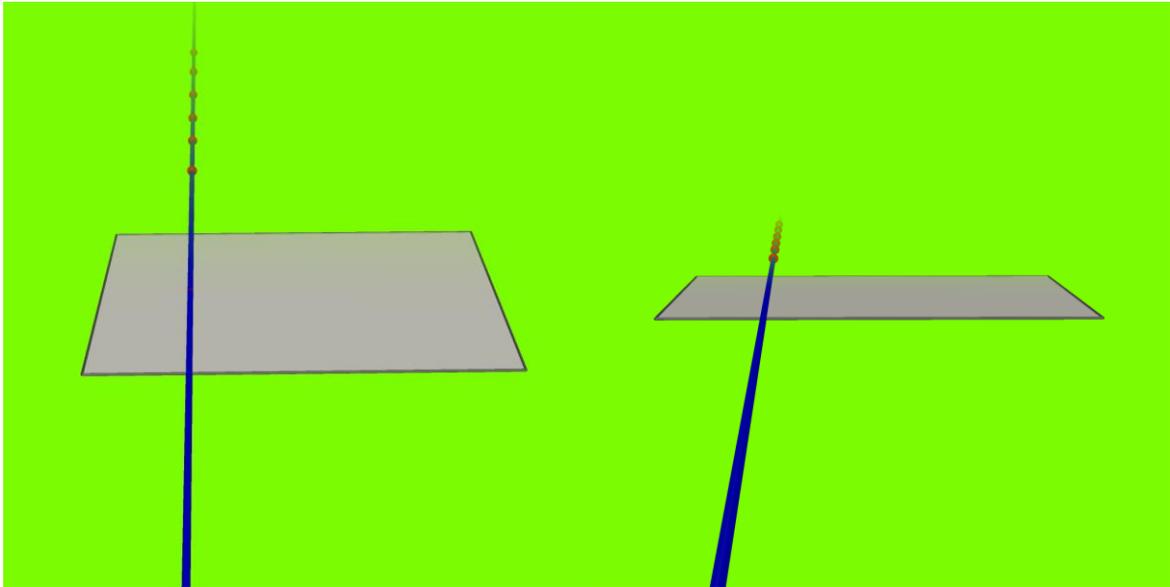
- Es un plano de referencia para todas las actividades que se realizan en el interfaz.
- Por defecto, cada nuevo objeto que se crea se posiciona sobre este plano.

De acuerdo con Hugot (2005), cabe hacer las siguientes observaciones en relación a la Zona de Trabajo:

- En Cabri 3D, la sensación de “cercanía o lejanía respecto del usuario” de un punto se obtiene dándole grosor. Los objetos son creados y, por tanto, son visibles en la Zona de Trabajo. Sin embargo, esta visibilidad puede cambiar, hasta llegar a desaparecer (figura 4.1), dependiendo de:
 - El punto o ángulo de vista adoptado gracias a la función bola de cristal.
 - El ángulo de inclinación del plano base respecto al usuario (es decir, respecto a la perpendicular a la pantalla).

- La representación de las distancias entre puntos en la Zona de Trabajo depende de la orientación del plano base y de la posición relativa de los puntos respecto al observador.

Figura 4.1: A mayor ángulo de inclinación del plano base (izquierda) mayor zona de trabajo utilizable. En la imagen de la derecha, apenas un tercio de la mitad superior de la escena es utilizable.



Otro aspecto a tener en cuenta respecto a la Zona de Trabajo tiene que ver con las nociones asociadas a las posiciones relativas de los objetos. Una de ellas está relacionada con la expresión “estar en el espacio”. En el presente trabajo (tanto en la memoria como en el diálogo con los alumnos) al utilizar el término “espacio” nos referimos a la zona exterior de cualquier objeto existente (incluido al plano base); y consideramos que un punto está en la zona exterior a un objeto cuando no pertenece a él.

Otra noción a considerar está relacionada con los ejes a los cuales referir los arrastres, los giros y, en general, los movimientos del cursor, de los objetos y de los cambios de punto de vista:

- El plano base lo hemos utilizado para señalar tres posiciones relativas de los objetos: en el plano base, en el semiespacio inferior al plano base y en el semiespacio superior al plano base. También lo usamos para indicar las direcciones horizontal (paralela al plano base) y vertical (perpendicular al plano base) que corresponden a los arrastres de los puntos libres.

- Cuando analizamos el uso de la función “bola de cristal” hemos optado por tomar al usuario y a la pantalla del ordenador como referencia. Respecto al usuario utilizamos las expresiones delante (cercano al usuario) y detrás (alejado del usuario), arriba y abajo, derecha e izquierda. Cuando nos referimos, por ejemplo, a las rotaciones del plano base tomamos a la pantalla del ordenador y al usuario como referencias. Podemos imaginar tres ejes según tres vectores: el perpendicular a la pantalla dirigido hacia el usuario (OZ), el paralelo a los lados verticales de la pantalla y dirigido hacia arriba respecto del usuario (OY) y el paralelo a los lados horizontales de la pantalla dirigido hacia la derecha respecto del usuario (OX); y el origen de coordenadas, el centro de la pantalla. También utilizamos las expresiones movimiento horizontal (según OX) y vertical (según OY) del cursor.

Retroalimentación. Menús y mensajes.

En Cabri 3D, el sistema “interacciona” con el usuario por medio de un interfaz gráfico. Todas las informaciones en el interfaz son por consecuencia de naturaleza gráfica y aparecen bajo forma de imágenes y de textos. Cabri 3D es concebido para representar lo que aparece en el universo de la geometría espacial: objetos geométricos (desde puntos de dimensión 0 a poliedros de dimensión 3), propiedades geométricas y transformaciones geométricas. Cada uno de estos elementos geométricos tiene varias representaciones: en las barras de herramientas, en los menús, en los mensajes contextuales y en la pantalla. Una descripción con mayor detalle se encuentra en el anexo II.

Queremos destacar aquí algunos aspectos de la retroalimentación que ofrece el interfaz en relación con los puntos, las rectas y los planos:

Los puntos se representan por esferas (círculos). La sensación de cercanía o lejanía respecto del usuario se proporciona aumentando o disminuyendo el radio de dicha esfera respectivamente, y aumentando o disminuyendo su brillo y su definición (figura 4.2). Así mismo, para indicar que un punto que pertenece a un plano está en su parte visible, la esfera (círculo) aparece recortada, dando la sensación de tener una semiesfera sobre el plano y la otra debajo (figura 4.3).

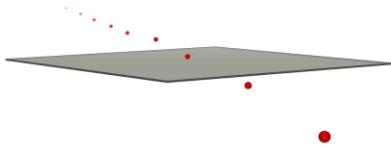


Figura 4.2.

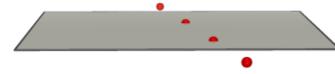


Figura 4.3

Las rectas se representan mediante conos (o troncos de conos), de manera que cuanto más “cerca están del usuario” mayor es su diámetro (figura 4.4).

Los planos se representan con superficies finitas (cuadriláteros). Esto se corresponde a lo que Hugot (2005) denomina “clipping”: es el hecho de limitar las representaciones de los objetos a una zona de la pantalla, de manera que se produce un “recorte” de los mismos. De esta forma los planos en Cabri 3D presentan dos partes:

- La superficie visible, que por defecto es de color gris. Esta superficie se la denomina parte visible (PV) del plano.
- La prolongación de dicha superficie (que no viene representada) es la parte no visible (PNV) del plano.



Figura 4.4.

Por otra parte, el programa permite identificar los puntos directamente manipulables: si se hace un clic prolongado en una sección no construida de la Zona de Trabajo, los puntos que pueden ser arrastrados directamente parpadean mientras los otros conservan su apariencia normal. Esto permite distinguir los puntos libres y semi-libres de los puntos dependientes.

Así mismo, el programa ofrece una retroalimentación cuando se arrastra el cursor para crear un punto en la PNV del plano base: alrededor del cursor aparecen cuatro flechas según dos direcciones paralelas en un círculo cuadrículado. Este círculo cuadrículado desaparece cuando se arrastra el cursor para crear un punto en la parte visible del plano base.

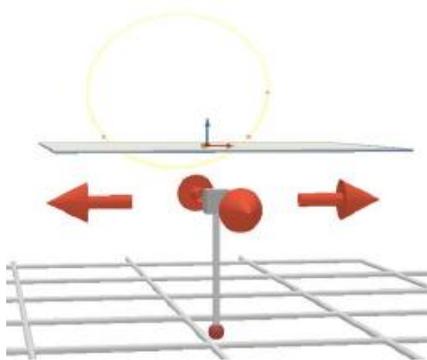


Figura 4.5.

su proyección en el plano base (figura 4.5).

Curiosamente, una vez creado el punto, el círculo cuadrículado aparece siempre que se arrastra el punto, ya sea por la PV o por la PNV del plano base. Sin embargo, si al punto creado sólo se le señala o se le “agarra”, dicho círculo no aparece.

Si el punto se arrastra verticalmente al plano base, aparecen con el círculo cuadrículado mencionado arriba dos flechas en la dirección vertical al plano base y en sentidos contrarios; y una línea vertical que une al punto con

La función de la tecla de mayúsculas y la función “bola de cristal”.

Estas funciones no existen en los programas de geometría dinámica 2D; y tienen especial importancia ya que las dos permiten simular los movimientos en la tercera dimensión.

La función de la tecla mayúscula consiste en que con ella los puntos construidos en el espacio o en la PNV del plano base pueden ser arrastrados verticalmente respecto al plano base.

Por su parte la función “bola de cristal” permite visualizar la Zona de Trabajo desde diferentes puntos de vista (en este trabajo utilizamos la expresión “punto de vista” como equivalente a “ángulo de vista”). Una vez situados bajo un punto de vista, aparece ante el usuario lo que en este trabajo llamamos una “escena”: que es lo que se ve bajo ese punto de vista.

Así mismo, la función “bola de cristal” tiene otras consecuencias sobre la Zona de Trabajo:

- La Zona de Trabajo puede ampliarse o reducirse, según se rote el plano base respecto a un eje paralelo a los bordes horizontales de la pantalla.
- La función “bola de cristal” permite traer a la Zona de Trabajo objetos dispuestos en regiones no visibles.

Por otra parte, es posible considerar a la función “bola de cristal” como un caso particular de arrastre (en este caso de la Zona de Trabajo y del plano base) que provoca el movimiento conjunto de todos los objetos que hay en el interfaz. En este sentido, es un arrastre característico que simula el trabajo con objetos en 3D; no presente en programas de geometría dinámica en 2D.

5. DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

La investigación se enmarca en un estudio cualitativo y su carácter es principalmente exploratorio, de recopilación de información (Gutiérrez, 1991). Por esta razón realizamos una fase piloto que nos permitió familiarizarnos con el problema de investigación y obtener nuevos datos conducentes a formular con mayor precisión las preguntas de investigación. Igualmente la fase de experimentación, aunque formulada con mayor precisión, guarda un importante componente exploratorio con el fin de sentar las bases de posteriores investigaciones. Esto ocurre especialmente con el objetivo de identificación de posibles esquemas de utilización.

No obstante, también tiene un carácter descriptivo ya que caracteriza el problema de investigación a partir de la descripción y análisis de las actuaciones de los alumnos.

Por último, el presente trabajo de investigación tiene una componente explicativa, especialmente en relación con el objetivo de detectar y analizar las dificultades de interpretación y de uso del programa. Se pretende dar cuenta de dichas dificultades a partir de sus causas según la teoría instrumental.

5.1. Descripción del contexto

Las fases piloto y experimental de la investigación fueron realizadas con estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria del IES “Cueva Santa” de Segorbe (Castellón). La fase piloto se llevó a cabo a finales del curso 2010-2011 y la fase experimental durante el curso 2011-2012. Los alumnos elegidos para participar en cada fase fueron diferentes; pero en ambos casos se escogieron sin experiencia previa en programas de geometría dinámica.

Las alumnas y los alumnos que participaron en la fase de experimentación pertenecían a un curso de 4º ESO, y estudiaban Matemáticas A. Se preparaban, en principio, para su incorporación laboral, a ciclos formativos de grado medio o para un bachillerato de humanidades. Su nivel de matemáticas era similar pero no su interés y motivación. En total eran once alumnas/os y se distribuyeron en parejas para trabajar con portátiles, excepto una chica que trabajó sola porque así lo había pedido. Por tanto, la distribución consistió en

cinco parejas y una chica. Para formar las parejas dimos libertad a los alumnos para que las formaran.

La programación del curso se reordenó para poder incorporar las sesiones de experimentación, de manera que se pudiera dedicar un día a la semana a las mismas. Se iniciaron en marzo y se concluyeron en mayo del 2012.

Las sesiones de la experimentación se realizaron en el aula ordinaria del grupo con un portátil por pareja y otro para la chica. Los alumnos se distribuyeron en el aula de manera que las parejas trabajaran aislada y autónomamente.

Desde el principio han aceptado con buen agrado participar en esta investigación. No obstante, por diferentes causas y motivos: enfermedad, ausencias, problemas de grabación, etc.; solo se ha podido tener el registro ininterrumpido de todas sus actuaciones y de todas las actividades de dos parejas; de las cuales elegimos una para realizar la descripción y el análisis de sus actuaciones. Una de las causas principales de este infortunio ha sido el amplio periodo de tiempo (tres meses) en el que se han tenido que realizar las actividades; ya que por razones prácticas de programación del curso, se eligió un día a la semana (preferiblemente los viernes) para la realización de las actividades.

El profesor encargado de dirigir las sesiones de la experimentación fue el mismo experimentador. Antes de comenzar la experimentación habló con los alumnos sobre la finalidad de la misma y sobre cómo se iba a llevar a cabo. En la primera sesión, les dio instrucciones básicas sobre cómo utilizar el programa y les distribuyó las primeras hojas de preguntas. Durante todas las sesiones se limitó a resolver dudas individualmente sobre los enunciados de las preguntas y sobre el propósito de las tareas. A penas proporcionó instrucciones sobre el uso del programa salvo para evitar bloqueos que les impidieran continuar. Cada pareja trabajó de forma autónoma, de manera que conforme iban acabando una actividad el profesor les daba la hoja de preguntas de la siguiente. No hubo puesta en común.

5.2. Organización de la experimentación

El proyecto se realizó en dos fases de investigación: fase piloto y fase experimental. En ambas fases la versión utilizada de Cabri 3D fue la 2.1.2.

Fase piloto

La fase piloto se realizó el curso anterior al de la fase de experimentación. Su propósito fue únicamente exploratorio:

- observación libre de las intervenciones de los estudiantes.
- elección de la muestra: niveles, características individuos, etc.
- elección de tipos de tareas y actividades
- analizar qué tipos de datos se han de recoger y qué variables analizar
- los medios de recogida de datos (dificultades, fallos, adecuación a los objetivos, etc.)

En esta fase, la elección de la muestra fue circunstancial (según la disponibilidad de los alumnos): alumnos de 2º, 3º y 4º de la ESO. Así que la muestra resultó ser muy heterogénea, ideal para los propósitos de esta fase piloto. Los alumnos elegidos fueron diferentes a los que participaron en la fase de experimentación.

Desde un punto de vista instrumental cabe destacar las siguientes conclusiones de la fase piloto:

1. El programa ofrece oportunidades para nuevas formas de realizar una actividad geométrica, diferentes a las utilizadas en las tareas con lápiz y papel.
2. El programa favorece la creación de nuevos esquemas.
3. No es totalmente transparente su uso; lo cual provoca en ocasiones dificultades y desconcierto en el alumno e incluso abandono.
4. Los supuestos y esquemas previos del alumno respecto al programa y a la geometría no siempre coinciden con lo diseñado por los creadores del programa. Esto lleva al alumno a intentar usos no previstos por el diseñador.
5. No utilizan los mensajes en pantalla:
 - Los alumnos no prestan atención a los mensajes que salen en la pantalla. Si el profesor les pregunta si los leen o les aconseja que lo hagan entonces los mensajes ralentizan significativamente la ejecución. En general, no les resultan de ayuda.
 - La manera de entender cómo se trabaja con una herramienta no es a través de los mensajes. Actúan por ensayo y error.

6. En general, emplean la misma herramienta y manera de trabajar que les ha sido útil en una tarea para abordar tareas nuevas afines; salvo si se les pide que piensen en métodos alternativos a los que ya han usado

La experiencia adquirida y los resultados obtenidos en esta fase piloto nos permitieron diseñar con mayor precisión la fase de experimentación.

Fase experimental

La secuencia de acciones dentro de la fase experimental fue la siguiente:

1. Diseño un conjunto de actividades de geometría espacial:
2. Administración de las actividades
3. Recogida de datos
 - a. hojas de preguntas
 - b. archivos de programa
 - c. grabación de las acciones de los alumnos:
 - i. grabación automática con capturador de pantalla.
 - ii. grabación de video y audio
4. Análisis de los datos según las preguntas, los objetivos y las variables de investigación.

La información recogida sobre las actuaciones de los estudiantes se obtuvo a partir de sus producciones escritas y de grabaciones audiovisuales. Por una parte, se distribuyeron hojas de preguntas, las cuales cumplieron el doble papel de ser el guión para realizar cada actividad y soporte físico donde los alumnos escribían sus respuestas (anexo I). Por otra parte, las grabaciones fueron de tres tipos: grabaciones automáticas con capturador de pantalla, grabaciones de video y de audio. Las grabaciones con capturador de pantalla se realizaron en todas las sesiones y para todas las actividades con HyCam2; el cual permite realizar grabaciones audiovisuales de las acciones en la pantalla y de los comentarios de los alumnos. También realizamos grabaciones con una cámara de vídeo y con una grabadora de audio de las actuaciones en el último bloque de actividades.

La descripción y el análisis de las actuaciones están basados fundamentalmente en las grabaciones con el capturador de pantalla y en las respuestas escritas en las hojas de preguntas; y se complementan con las grabaciones con la cámara de vídeo y con la

grabadora de audio. Describimos toda actuación que significativamente está relacionada con los objetivos de la investigación sin utilizar descriptores, debido a la componente descriptiva de nuestra investigación. Posteriormente, en el análisis de los resultados sí que usamos los descriptores definidos en nuestro marco teórico.

5.3. Descripción y análisis de las actividades

En este apartado damos una descripción general de los tipos de actividades propuestas, sus contenidos y objetivos. Previamente, indicamos los criterios que seguimos en la confección de las mismas.

Los requisitos para la elaboración y la elección de las actividades fueron los siguientes:

- Adecuación a las cuestiones a investigar.
- Adecuación con los niveles de conocimientos matemáticos e informáticos de los estudiantes.
- Conexión con los contenidos de geometría espacial del currículo.

Debido a que no se quería que la falta de conocimientos previos de geometría fueran un obstáculo, las actividades debían requerir conocimientos de geometría elemental básicos pertenecientes al primer ciclo de la ESO.

Así mismo las actividades debían contener, al menos, tareas de los tipos siguientes:

- Tareas para aprender el funcionamiento del interfaz y las herramientas del programa.
- Tareas que permitieran observar las dificultades y posibles esquemas de utilización en actividades de geometría espacial.
- Tareas que demandaran el uso de los diferentes tipos de arrastres y de las herramientas necesarias.

Por otra parte, las actividades propuestas debían diseñarse para ser trabajadas por una o dos personas, con la mayor autonomía posible. El profesor sólo debía de intervenir para aclarar algún término de los enunciados o explicar escuetamente el funcionamiento de alguna herramienta nueva.

El resultado ha sido la creación de una lista de actividades, en cuatro bloques. El primero se dedica a la introducción de la función “bola de cristal” y a las partes visibles y no visibles de los planos. El segundo, a la introducción fundamentalmente de las nociones: puntos libres,

semi-libres y dependientes. El tercero se dedica a actividades de arrastrar y superponer rectas, planos y sólidos. El cuarto, está dedicado a la aplicación de todo lo practicado en los apartados anteriores en el estudio de posiciones relativas y de ángulos entre rectas y/o planos. En concreto, la lista es la siguiente:

1. *Función “bola de cristal”*

- A. “Composición”
- B. “Dónde.están.los.puntos.1”
- C. “Dónde.están.los.puntos.2”

2. *Puntos.*

- A. “Puntos.libres.1”
- B. “Puntos libes.2”
- C. “Coordenadas.puntos”
- D. “Distancias.puntos.1”
- E. “Distancias.puntos.2”
- F. “Tipos.de.puntos.1”
- G. “Tipos.de.puntos.2”
- H. “Tipos.de.puntos.3”

3. *Mover objetos geométricos.*

- A. “Superponer.rectas.1”
- B. “Superponer.rectas.2”
- C. “Mover.plano.con.recta”
- D. “Superponer.planos.1”
- E. “Superponer.planos.2”
- F. “Superponer.planos.3”
- G. “Superponer.planos.4”
- H. “Superponer.tetraedros.1”
- I. “Superponer.tetraedros.2”
- J. “Tipos.de.puntos.4”

4. *Ángulos entre rectas y planos.*

- A. “Rectas.paralelas”
- B. “Plano.recta.paralelos”
- C. “Plano.recta.perpendiculares”
- D. “Recta.recta.perpendiculares”
- E. “Ángulo.recta.plano”

Una descripción detallada de cada una de las actividades se encuentra en los anexos I y IV. A continuación damos las características principales de cada bloque de actividades.

1. *Función “bola de cristal”*

Las actividades que se pertenecen a este bloque tienen como principal propósito la introducción de la función “bola de cristal”, de la herramienta “Manipulación” y familiarizarse con las retroalimentaciones que ofrece el programa respecto a la localización y arrastre de puntos.

1. Objetivos:
 - a. Introducción a la función “bola de cristal”. Aspectos a considerar:
 - Cambios de puntos de vista.
 - Relación con las orientaciones posibles del plano base.
 - b. Introducción a la herramienta “Manipulación”.
 - c. Introducción de la Zona de Trabajo.
 - d. Introducción al arrastre de puntos.
 - e. Familiarizarse con las retroalimentaciones que ofrece el programa, en especial con las representaciones que se dan de los puntos.
 - f. Introducción al uso de planos. Aspectos a considerar:
 - Introducción al plano base. Aspectos a considerar:
 - Plano de referencia.
 - Orientaciones posibles.
 - Partes visibles (PV) y no visibles (PNV) de un plano:
 - Interpretar la representación finita de un plano dado en la pantalla como la parte visible de él y su prolongación como la parte no visible.
 - Discutir las posiciones relativas de puntos respecto a uno o más planos:
 - En el plano: en la PV, en la PNV.
 - En el espacio: fuera del plano.
2. Conocimientos matemáticos previos:
 - a. Puntos, planos y cuerpos geométricos.
 - b. Un plano es una superficie infinita.
 - c. Posiciones relativas respecto a uno o más planos.
3. Tareas:
 - a. Cambiar de punto de vista dentro de la Zona de Trabajo con la función “bola de cristal”.
 - b. Usar la herramienta “Manipulación” para mover puntos.
 - c. Encontrar objetos y describir sus posiciones en la pantalla.
 - d. Describir posiciones relativas respecto al plano base.
4. Procedimientos
 - a. Procedimiento de uso de la función “bola de cristal”.
 - b. Procedimiento de uso de la herramienta “Manipulación”.

2. *Puntos.*

Las actividades que se describen en este bloque tienen como principal finalidad la introducción fundamentalmente de las nociones: puntos libres, semi-libres y dependientes.

1. Objetivos:
 - a. Familiarizarse con la Zona de Trabajo.
 - b. Introducción de la herramienta “Punto”.

- c. Introducción de la función “tecla de mayúsculas” más el herramienta “Manipulación”.
 - d. Introducción de la herramienta “Distancia”.
 - e. Introducción de la herramienta “Punto medio”.
 - f. Introducción del herramienta “Recta”.
 - g. Introducción a los distintos tipos de puntos: puntos libres, puntos ligados a una región, puntos dependientes de otros.
 - h. Usar las retroalimentaciones que proporciona el interfaz.
 - i. Considerar que la zona no visible del plano forma parte del plano.
 - j. Introducción a la noción de distancia virtual en la Zona de Trabajo.
 - k. Propiciar la creación de esquemas y de instrumentos asociados a las herramientas introducidas y a las tareas propuestas.
2. Conocimientos matemáticos previos:
 - a. Objetos geométricos: puntos, rectas, planos, poliedros,
 - b. Conocimientos básicos sobre movimientos: trasladar, girar y simetría axial.
 - c. Distancias,
 - d. Posiciones relativas entre objetos geométricos:
 - Superposición, paralelismo, perpendicularidad, intersección, estar alineados.
 - Puntos medios.
3. Tareas
 - a. Crear y arrastrar puntos ligados al plano base.
 - b. Crear y arrastrar puntos en un plano y en el espacio.
 - c. Crear puntos sobre una recta y arrastrarlos.
 - d. Crear y colocar puntos alineados en el plano base utilizando las herramientas “Punto” y “Manipulación”.
 - e. Crear y colocar puntos alineados verticalmente utilizando la herramienta “Manipulación” más la tecla de mayúsculas.
 - f. Crear una recta a partir de dos puntos.
 - g. Crear recta de intersección entre dos planos.
 - h. Crear un plano que pase por tres puntos dados.
 - i. Crear puntos medios y arrastrarlos.
 - j. Crear puntos sobre las aristas o sobre las caras de un poliedro y arrastrarlos.
 - k. Arrastrar un punto de unas coordenadas a otras usando la herramienta “Manipulación”.
 - l. Arrastrar y superponer planos.
 - m. Arrastrar, superponer y girar tetraedros.
 - n. Mover tetraedros y puntos y su imagen especular.
 - o. Modificar el tamaño de un tetraedro.
 - p. Medir distancias entre puntos con la herramienta “Distancia”.
 - q. Distinguir entre un objeto y su imagen especular.

4. Procedimientos
 - a. Procedimiento de uso de la función “bola de cristal”.
 - b. Procedimiento de uso de la herramienta “Manipulación”.
 - c. Procedimiento de uso de la función “tecla de mayúsculas” más el herramienta “Manipulación”.
 - d. Procedimiento de uso de la herramienta “Punto”.
 - e. Procedimiento de uso del herramienta “Recta”.
 - f. Procedimiento de uso de la herramienta “Plano”.
 - g. Procedimiento de uso de la herramienta “Punto medio”.
 - h. Procedimiento de uso de la herramienta “Distancia”.
 - i. Procedimiento de uso del herramienta “Curva de intersección”.
 - j. Procedimientos “crear un punto” y “crear un punto libre”.
 - k. Procedimientos de arrastre de los diferentes tipos de puntos:
 - “arrastrar un punto”,
 - “arrastrar un punto libre”,
 - “arrastrar un punto en el espacio usando sus coordenadas”.
 - l. Procedimientos con planos:
 - “arrastrar un plano”,
 - “arrastrar un plano mediante dos puntos que definen una recta perpendicular”
 - “arrastrar un plano mediante un punto ligado a una recta perpendicular”.
 - “superponer planos”.
 - m. Procedimientos con tetraedros:
 - “arrastrar un tetraedro”.
 - “modificar el tamaño de un tetraedro”
 - “superponer tetraedros”
 - “girar un tetraedro”

3. *Mover objetos geométricos.*

En las dos secciones anteriores se trabaja principalmente la función “bola de cristal”, la herramienta “Manipulación”, el arrastre de puntos y la noción de que existen distintos tipos de puntos en el interfaz de Cabri 3D.

En esta sección continuamos con los anteriores objetivos pero el foco de atención se centra en el análisis de las dificultades mostradas por los alumnos asociadas al arrastre de puntos, rectas y planos en actividades de superposición de rectas, de planos y sólidos.

1. Objetivos

- a. Propiciar la creación de esquemas y de instrumentos asociados a las herramientas introducidas y a las tareas propuestas.

2. Conocimiento matemático previo:
 - a. Objetos geométricos: puntos, rectas, planos, poliedros.
 - b. Conocimientos básicos sobre movimientos: trasladar, girar, simetría axial, superponer, imagen especular.
 - c. Posiciones relativas entre objetos geométricos:
 - Superposición, paralelismo, perpendicularidad, intersección, estar alineados.
 - Rectas y planos que se cruzan.
 - Rectas y planos que se cortan.
3. Tareas
 - a. Arrastrar rectas.
 - b. Superponer rectas que se cruzan.
 - c. Superponer planos paralelos.
 - d. Arrastrar planos.
 - e. Mover un plano arrastrando un punto sobre recta perpendicular al plano.
 - f. Mover un plano arrastrando una recta perpendicular al plano.
 - g. Superponer planos.
4. Procedimientos
 - a. Procedimiento de uso de la herramienta “Manipulación”.
 - b. Procedimientos de arrastre de puntos: “arrastrar un punto”, “superponer puntos”.
 - c. Procedimiento “arrastrar una recta”.
 - d. Procedimiento “arrastrar un plano”.
 - e. Procedimiento “superponer rectas”.
 - f. Procedimiento “superponer planos”.
 - g. Procedimiento de arrastre de planos:
 - Procedimiento “arrastrar un plano arrastrando un punto sobre una recta perpendicular al plano”
 - Procedimiento “arrastrar un plano arrastrando una recta perpendicular al plano”

4. *Ángulos entre rectas y planos.*

Las actividades que pertenecen a este bloquen están dedicadas a la aplicación de todo lo practicado en los apartados anteriores en el estudio de posiciones relativas y de ángulos entre rectas y/o planos.

1. Objetivos
 - a. Introducción de la herramienta “Perpendicular”.
 - b. Introducción de la herramienta “Paralela”.
 - c. Introducción de la herramienta “Ángulo”.
 - d. Trabajar la noción de única recta paralela a una recta dada por un punto exterior.
 - e. Trabajar la noción de haz de planos paralelos a una recta dad por una recta paralela.

- f. Trabajar la noción de plano perpendicular a una recta dada por un punto de la misma.
 - g. Trabajar la noción de haz de rectas perpendiculares a una recta dada por un punto de la misma.
 - h. Trabajar la noción de ángulo entre recta y plano.
 - i. Propiciar la creación de esquemas y de instrumentos asociados a las herramientas introducidas y a las tareas propuestas.
2. Conocimiento matemático previo: rectas, planos, posiciones relativas entre rectas y planos, ángulo entre rectas, ángulo entre recta y plano.
3. Tareas
- a. Arrastrar rectas.
 - b. Encontrar la recta paralela a una recta dada por un punto exterior.
 - c. Encontrar rectas perpendiculares a una recta dada por un punto de la misma.
 - d. Girar una recta arrastrando un punto de la misma.
 - e. Girar un plano alrededor de una recta que contiene arrastrando un punto del mismo.
 - f. Arrastrar un plano arrastrando dos puntos del mismo sobre el plano base.
 - g. Encontrar plano perpendicular a una recta dada por un punto de la misma.
 - h. Encontrar planos paralelos a una recta dada por una recta paralela a la misma.
 - i. Encontrar el ángulo entre una recta y un plano.
4. Procedimientos
- a. Procedimiento “arrastrar una recta”.
 - b. Procedimiento “arrastrar un plano”.
 - c. Procedimiento “encontrar recta paralela a una recta dada por un punto exterior”.
 - d. Procedimiento “encontrar las rectas perpendiculares a una recta dada”.
 - e. Procedimiento “encontrar los planos paralelos a una recta dada”.
 - f. Procedimiento “encontrar plano perpendicular a una recta dada”.
 - g. Procedimiento “girar una recta arrastrando un punto de la misma”.
 - h. Procedimiento “girar un plano alrededor de una recta”.
 - i. Procedimiento “encontrar el ángulo entre una recta y un plano”.
 - j. Procedimiento de uso de la herramienta “Manipulación”.
 - k. Procedimiento de uso de la herramienta “Manipulación” más “tecla mayúsculas”.
 - l. Procedimiento de uso de la función “bola de cristal”.
 - m. Procedimiento de uso de la herramienta “Perpendicular”.
 - n. Procedimiento de uso de la herramienta “Paralela”.
 - o. Procedimiento de uso de la herramienta “Ángulo”.

6. RESULTADOS

Los resultados que presentamos corresponden a la descripción, comentarios y análisis de las actuaciones de una de las parejas, formada por dos alumnas (anexos VI y VII). Utilizamos seudónimos para sus nombres.

Las actuaciones de las alumnas nos han permitido observar y analizar fenómenos de muy diferente naturaleza. No obstante, en el presente capítulo nos limitamos a presentar y a analizar los resultados directamente relacionados con los objetivos de la investigación de acuerdo a nuestro marco teórico. En los apartados 6.1 y 6.2, describimos y analizamos las dificultades más significativas encontradas por las alumnas; y en el 6.3 mostramos y analizamos los indicios significativos que nos llevan a pensar en la existencia de posibles esquemas de utilización.

6.1. Análisis de las dificultades encontradas por las alumnas

A continuación damos los resultados del análisis de las dificultades encontradas por las alumnas en la realización de las actividades. Junto a la descripción de cada uno de dichos problemas indicamos las posibles causas a las que están ligados de acuerdo a nuestro marco teórico.

1. Dificultades ligadas a los arrastres.

En este apartado consideramos los principales problemas observados y asociados con los arrastres realizados con la herramienta “Manipulación”, con la función “bola de cristal” y con la función de la “tecla de mayúsculas”.

1.1. Los puntos desaparecen de la pantalla.

A continuación damos un ejemplo de actuación en la que esto ocurre, observada en la actividad “Puntos.libres.1”:

En la pregunta 3, no tienen ningún problema para usar la herramienta “Punto” y crear un punto sobre el plano base. Tampoco tienen dudas para arrastrar el punto creado por la Zona de Trabajo. No obstante, al arrastrarlo por la PNV “lo pierden”: lo “alejan” tanto que el punto llega a desaparecer de la escena, y ya no saben recuperarlo. Este hecho, sorprende a **Sofía**:

Sofía: “Hala... ha desaparecido.”

Entonces, utilizan la función “bola de cristal” para tratar de encontrarlo, cambiando los puntos de vista y la inclinación del plano base; pero, no lo consiguen.

Principalmente se observa las siguientes dificultades:

- Alejan el punto por la PNV del plano. El interfaz “avisa” de este “alejamiento” reduciendo el diámetro de la esfera que representa al punto y reduciendo su brillo y su definición. Las alumnas actúan como si no se percataran de este hecho.
- Reducen la inclinación del plano base (es decir, su ángulo respecto al eje OZ) y, como consecuencia, la zona de trabajo utilizable (es decir, la porción de la Zona de Trabajo donde se pueden colocar los puntos y permanecer visibles).

En este hecho (que “pierdan” el punto) concurren dos factores de diseño:

- Arrastrar un punto verticalmente por la pantalla no es equivalente a arrastrarlo verticalmente respecto al plano base. Si no se utiliza la función de “la tecla de mayúsculas” dicho arrastre por la pantalla equivale a un arrastre horizontal respecto al plano base. En este caso, la consecuencia es que el punto se aleja o se acerca respecto al usuario.
- Reducir la inclinación del plano base equivale a reducir la Zona de Trabajo útil.

Por tanto, estos problemas tienen su origen en:

- Los dos factores de diseño mencionados que imponen restricciones en la acción. El primero está asociado a las condiciones transformaciones realizables sobre los puntos (restricción de finalización). El segundo corresponde a las modalidades de intervención en la Zona de Trabajo (restricción de estructuración de la acción) que no les resulta transparente desde un punto de vista operativo.
- La falta de conocimiento de las alumnas respecto al modo de intervención en la Zona de Trabajo (Zona de Trabajo Utilizable).
- La falta de una correcta interpretación de la representación de los puntos (sensación de lejanía).

También podrían deberse a que las alumnas no esperan que un punto pueda desaparecer y perderse. En este caso, las causas serían sus esquemas y representaciones previos sobre qué esperar de un programa que representa objetos geométricos.

1.2. Limitaciones a los arrastres de puntos debidas a determinadas orientaciones del plano base.

Gran parte de las dificultades que encuentran para arrastrar y situar los puntos en posiciones determinadas se deben a las orientaciones del plano base que eligen. Entre éstas, la que más limita las posibilidades de arrastre de los puntos es cuando el plano se coloca perpendicular o muy próximo a la perpendicular a la pantalla. Esto se debe a que:

- La zona de trabajo utilizable se reduce al máximo, quedando el mínimo espacio disponible en la mitad superior de la Zona de Trabajo.
- La razón entre las distancias virtuales y las distancias reales sobre la pantalla se hace máxima; dificultando el ajuste de las posiciones de los puntos.
- La movilidad de los puntos que están sobre el plano base se reduce al máximo.
- Apenas se puede utilizar la PV del plano base, útil para aprovechar todas las retroalimentaciones que ofrece la interfaz y evitar que desaparezcan de la escena al usar la función “bola de cristal”.

Un ejemplo de este problema lo encontramos en la actividad “Coordenadas.puntos” donde describimos la siguiente actuación:

Celia trata de arrastrar el punto pero no puede. Lo cierto es que ha colocado al plano base totalmente perpendicular a la pantalla; y en esa posición, el interfaz no permite arrastrar ningún punto que esté sobre el plano base. (Sin embargo, sí es posible arrastrar puntos que no pertenezcan al plano base). Cambia de orientación al plano base y, entonces sí que le es posible arrastrar el punto.

Este problema está ligado a las modalidades de intervención en la zona del interfaz (restricción de estructuración de la acción) y también a una limitada instrumentalización de los arrastres por parte de las alumnas.

1.3. Dificultades ligadas con el uso de la función “bola de cristal”.

Esta función les ha resultado fácil de aprender. No obstante, han tenido algunos problemas que analizamos a continuación.

1.3.1. Olvido del procedimiento de uso

A lo largo de la experimentación se ha observado que al inicio de algunas de las actividades las alumnas no recordaban cómo cambiar de punto de vista. No obstante, bastaba dar el nombre de la función “bola de cristal” para volver a usarla sin ningún tipo de dudas.

Podría ser un problema de usabilidad ligado a

- El material utilizado (botón derecho del ratón), y por tanto a una restricción de existencia.
- El procedimiento requerido (mantener el botón pulsado), y por tanto una restricción de estructuración de la acción.

1.3.2. No ser consciente de que el cambio de orientación del plano se realiza sólo con la función “bola de cristal”.

En la actividad “Superponer.rectas.1” se produce la siguiente actuación:

Comienzan intentando arrastrar el plano base y usan la función “bola de cristal” para ver si hay alguna orientación en la que sea posible arrastrarlo. Se dan cuenta de que el plano base no se puede arrastrar.

Sofía: “Solo se puede mover uno. Solo se mueve el rojo. El gris no se mueve para ningún lado.”

A la pregunta 1b) dan la siguiente respuesta escrita: “Si, porque el plano gris no se puede mover.”

Hasta este momento (realizadas ya las nueve actividades anteriores), parece que no eran conscientes de que el plano base (lo llaman “el plano gris”) no puede arrastrarse sino solo girarse mediante la función “bola de cristal”.

Este problema está asociado al modo de intervención en la Zona de Trabajo diseñado para los cambios de puntos de vista (restricción de estructuración de la acción).

También está asociado al carácter de plano de referencia del plano base para todas las construcciones y manipulaciones dentro de la Zona de Trabajo (restricción de finalización ligada a las transformaciones realizables).

1.4. Dificultades ligadas al uso de la función de “la tecla de mayúsculas”

El uso de la combinación de la tecla de mayúsculas con la herramienta “Manipulación” para arrastrar puntos verticalmente respecto al plano base les ha resultado problemático y poco grato. En un alto porcentaje no ha sido empleado, incluso en situaciones donde era imprescindible hacerlo.

1.4.1. Olvido del procedimiento de uso.

En general se olvidan de mantener pulsada la tecla de mayúsculas.

Podría ser un problema de usabilidad ligado a

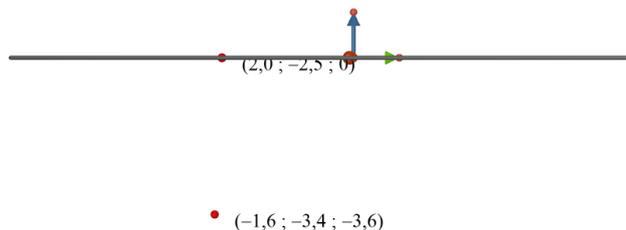
- El material utilizado (botón izquierdo del ratón y la tecla de mayúsculas) y por tanto a una restricción de existencia.
- El procedimiento requerido y por tanto una restricción de estructuración de la acción.

1.4.2. Confusión respecto al movimiento vertical

El arrastre vertical respecto al plano base permite modificar las coordenadas z de los puntos. Este tipo de arrastre sólo es posible utilizando la función de “la tecla de mayúsculas”. Sin embargo, parece que las alumnas tienen la falsa sensación de que arrastrando los puntos con la herramienta “Manipulación” verticalmente respecto a la pantalla consiguen el mismo efecto.

No se dan cuenta de que, actuando así, el arrastre es horizontal respecto al plano base, y por lo tanto no se modifican las terceras componentes. No son conscientes de que arrastrar un punto verticalmente por la pantalla no es equivalente a arrastrarlo verticalmente respecto al plano base. Si no se utiliza la función de “la tecla de mayúsculas” dicho arrastre por la pantalla equivale a un arrastre horizontal respecto al plano base. En este caso, la consecuencia es que el punto se aleja o se acerca respecto al usuario.

Un ejemplo, de este problema lo observamos en la siguiente actuación en la actividad “Coordenadas.puntos”:



Arrastran el punto $(-1.6, -3.4, -3.6)$ sin usar la tecla de mayúsculas. Lo aproximan a la línea gris que representa al plano base en esta vista:

Como el punto $(-1.6, -3.4, -3.6)$ está en el semiespacio inferior al plano base y éste está orientado perpendicularmente a la pantalla, el arrastre mantiene al punto en la mitad inferior de la Zona de Trabajo. Parece que este arrastre les da la sensación de ser un arrastre vertical; pero en realidad, están alejando el punto y haciéndolo menos visible. Intentan arrastrar el punto por encima de dicha línea pero no pueden.

Dicha sensación se debe a que el arrastre hace que el punto se mueva verticalmente hacia arriba respecto a la pantalla y este movimiento físico lo visualizan como movimiento vertical en el espacio, en lugar de movimiento horizontal hacia el fondo en el plano base.

Este problema pensamos que puede estar asociado a las siguientes causas:

- Las coordenadas de los puntos no vienen dadas con referencia a los ejes de la pantalla si no respecto al plano base; más concretamente al sistema de referencia cuyo origen y vectores i y j están en el plano base. Esto pertenece a las propiedades de la Zona de Trabajo (restricción de estructuración de la acción). Parece que la información que se ofrece a las alumnas no es suficiente para evitar esta confusión (falta de transparencia operativa).
- Por parte de las alumnas:

- Parece que utilizan la pantalla como sistema de referencia:
 - Esto significa una incorrecta interpretación de qué significa arrastrar verticalmente un punto en la Zona de Trabajo.
 - También significa que no reconocen al plano base como referencia para las posiciones verticales. Dicho con una expresión figurada, no lo consideran como el “suelo” para sus construcciones.
- Parece que no observan la invariancia de la coordenada z, o si lo hacen no son capaces analizar geoméricamente dicha invariancia.

Esto puede ser debido a sus esquemas previos sobre sistemas de referencia o/y a una falta de conocimientos matemáticos sobre qué es un sistema de referencia.

1.4.3. No usan la función de la “tecla de mayúsculas” en situaciones en la que es necesaria.

En diferentes tareas donde el uso de la función era necesario han optado por no usarla.

Ejemplos de esto lo encontramos en las tareas de superposición de rectas y de planos.

Por ejemplo, en la actividad “Superponer.planos.2”, no utilizan la función de la tecla de mayúsculas para arrastrar verticalmente los puntos de construcción de los planos verde y azul. Esto les hubiera facilitado la tarea ya que permite realizar algunas rotaciones y cambios de pendiente más fácilmente. La acción que realizan es la de arrastrar los puntos de construcción horizontalmente. Este tipo de arrastre solo permite cambios limitados en las orientaciones de los planos. No permite controlar el cambio de orientación de los planos. Además provoca que los puntos de construcción salgan de la PV de los planos con el riesgo de sacarlos fuera de escena.

Parece que el hecho de que el arrastre horizontal de los puntos de construcción provoca cambios de orientación de los planos (restricción de finalización respecto a las condiciones de las transformaciones realizables) induce a las alumnas a no usar el arrastre vertical (principio de economía).

Este problema también lo encontramos en las actividades del bloque 4. “Ángulos entre rectas y planos”.

Por ejemplo, en la pregunta 6 de la actividad “Recta.recta.perpendiculares” se pide que se arrastre el punto Q vertical y horizontalmente de manera que la recta azul se mantenga en

el plano perpendicular creado. **Celia** no arrastra el punto Q verticalmente, solo horizontalmente, por lo que no mantiene al punto Q ni a la recta sobre el plano. No parece que se dé cuenta de esta circunstancia.

En este caso, parece que la falta de una correcta interpretación de la posición real del punto Q hace que consideren que el punto se está arrastrando por el plano perpendicular.

La posible causa del problema puede ser una incorrecta interpretación de las representaciones de las posiciones de los puntos (restricción de estructuración de la acción). Y esta errónea interpretación le haya llevado a aplicar incorrectamente el principio de economía (que en este caso podría traducirse: “si con el arrastre horizontal es suficiente no utilizo arrastre vertical”).

1.4.4. Sentimientos en contra.

Muestran sentimientos en contra al procedimiento de uso de la función de “la tecla de mayúsculas”. Por ejemplo en la actividad “Puntos.libres.2” anotamos la siguiente actuación:

Ante la pregunta: ¿qué dificultades encuentras?; comentan:

Celia: “Que es complicado, el mecanismo.”

Sofía: “El mecanismo es muy... muy antiguo. Es muy... manual.”

Sus comentarios de que el uso de la tecla de mayúsculas es complicado, muestran lo poco a gusto que se sienten con su uso. Por otra parte el comentario: “Es muy... manual.”; quizá se refiera o bien a que la interfaz les ofrece pocas ayudas o bien que le gustaría que hubiera un procedimiento para poder colocar los puntos verticalmente mediante órdenes y no a ojo. De acuerdo a los comentarios de las alumnas la causa de este sentimiento en contra se encuentra en las propiedades de la función (restricción de estructuración de la acción).

1.5. Dificultades ligadas con los arrastres de planos.

Las actuaciones de las alumnas han mostrado dificultades para arrastrar planos y conseguir las posiciones deseadas. Estas dificultades han tenido que ver principalmente con el uso incorrecto o no uso de los puntos de construcción (estos son los que se han utilizado para definir y crear el plano). El uso incorrecto de dichos puntos ha consistido en arrastrarlos horizontalmente y no verticalmente.

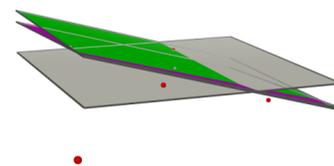
El arrastre eficaz de planos para modificar orientaciones requiere del arrastre de sus puntos de construcción. Este tipo de arrastre no es trivial y requiere de un análisis de los efectos de arrastres indirectos (por tanto, de un proceso de instrumentalización más elaborado que el correspondiente al arrastre directo de un plano). En los “Comentarios en detalle” de la actividad “Superponer.planos.2” (ver Anexo IV), damos las relaciones a tener en cuenta entre los arrastres de los puntos de construcción y las orientaciones que producen en el plano.

1.5.1. Uso incorrecto de los puntos de construcción.

El uso incorrecto de los puntos de construcción principalmente ha consistido en arrastrarlos horizontalmente y no verticalmente. Un ejemplo nos lo proporciona la siguiente descripción de las actuaciones en la actividad “Superponer.planos.3”:

En la pregunta 2, **Sofía** arrastra horizontalmente uno de los puntos de construcción del plano violeta. Como no obtiene ninguna rotación apreciable, arrastra al plano violeta también horizontalmente. No consigue ninguna rotación; aunque sí cambiarlo de altura ligeramente y arrastrar sus puntos de construcción fuera de su PV.

A la pregunta 3 “¿Qué dificultades has tenido?” escriben: “Que se nos han salido los puntos rojos.” Se refieren a que los han alejado tanto de la PV de sus respectivos planos que incluso han perdido a todos de vista y no han podido encontrarlos ni usando la función “bola de cristal”. Esto se debe a que han arrastrado los planos horizontalmente, y al hacerlo los puntos de construcción se han desplazado fuera de la escena. Para evitar este inconveniente y realizar la superposición más fácilmente, deberían haber arrastrado los puntos de construcción verticalmente respecto al plano base; pero no lo han hecho, ya que no utilizan la función de la tecla de mayúsculas.



Este problema está ligado a los tipos de transformaciones, y sus condiciones, realizables con los planos (restricción de finalización).

Por otra parte, las alumnas necesitan, desde un punto de vista de génesis instrumental, elaborar esquemas apropiados. En este sentido les sería útil asimilar, como mínimo, lo siguiente:

- Cuando se mueve un punto de construcción, el plano gira alrededor de la línea que pasa por los otros dos puntos de construcción.

- La posición y orientación finales del plano sólo depende de las posiciones finales de sus puntos de construcción.

2. Dificultades ligadas a la noción de “espacio” en Cabri 3D.

El término “espacio” que utilizamos se refiere a la región de la Zona de Trabajo que no forma parte de ninguna línea ni superficie de ningún objeto geométrico (incluido el plano base); es decir, un punto está en el “espacio” si no pertenece a ningún objeto geométrico presente en la Zona de Trabajo.

A pesar de que la definición del término es clara y sencilla, hemos observado problemas relacionados con la confusión entre la PNV de los planos y la región correspondiente al “espacio”.

Esta confusión se ha observado a lo largo de toda la experimentación. Era previsible encontrarla en el primer bloque de actividades, en el cual se introduce la representación de la PV de un plano y el concepto de PNV de un plano como la prolongación no visible. Por ejemplo en la primera actividad “Composición” describimos la siguiente actuación:

En la pregunta 4 se les pide que digan dónde está el cuerpo amarillo (dodecaedro amarillo). Responden que está fuera del plano y por encima. En realidad está sobre el plano base en su parte no visible. La respuesta corresponde a una descripción de “lo que se ve”:

- Al escribir “fuera del plano”, parece que asocian el plano base sólo a la parte visible (cuadrilátero gris) del mismo.
- Al escribir “por encima”, parece que como el cuerpo amarillo no toca al cuadrilátero gris (la PV del plano base) consideran que no está “sobre” (PNV) sino “por encima” del plano (“espacio”).

En actividades posteriores se manifiesta el mismo problema aún cuando conocen el concepto de PNV. Un ejemplo se encuentra en la siguiente actuación correspondiente a la actividad “Tipos.de.puntos.3”:

Sofía lee la pregunta 2: “Crea un punto en el espacio fuera del plano. Llámalo C.” **Celia** crea el punto C en la PNV del plano. Entonces **Sofía** señala que no está en el espacio:

Sofía: “Pero no está... Si lo haces ahí está en el plano”

Celia lo borra y arrastra el cursor por la Zona de Trabajo para ver dónde crear el punto.

Celia: “¿Qué hago?”

Tras un momento de indecisión vuelve a crear el punto en la PNV del plano. **Celia** no recuerda cómo ponerlo en el espacio y sigue arrastrando el punto horizontalmente y cambiando puntos de vista. **Celia** sigue interpretando que la PNV del plano es el espacio.

Sofía insiste: “En el espacio.”
queriendo indicar que **Celia** debe crear y arrastrar el punto en el espacio y no en la PNV del plano base.

Este problema está asociado por una parte al diseño del programa:

- La representación de los planos: una parte visible cuadrangular y otra no visible sin posibilidad de distinguirla del “espacio”. Esto corresponde a las propiedades de la Zona de Trabajo (restricción de estructuración de la acción).
- El mensaje que proporciona el interfaz al crear un punto tanto en la PNV del plano base como en el espacio: “un nuevo punto (en el espacio)”; induzca a error. Es decir, la retroalimentación proporciona una información que no es la que precisan las alumnas (falta de transparencia operativa)

Por parte de las alumnas hay una falta de una correcta interpretación de la representación que le ofrece el interfaz del “espacio”; posiblemente debido a sus representaciones previas sobre planos.

3. Dificultades ligadas al uso de las herramientas.

Antes de describir las dificultades más significativas que hemos observado respecto al uso de las herramientas debemos tener presente que no ha habido instrucción de uso de las mismas. Solo cuando, ocasionalmente, se ha producido un bloqueo se ha dado las indicaciones justas para que pudieran continuar.

3.1. Uso limitado de las retroalimentaciones.

Hemos observado que no se apoyan, o solo de forma puntual, ni en la ventana de ayuda ni en los mensajes que ofrece el interfaz. En general no prestan atención a los mensajes que salen en pantalla. Esto origina que en determinados momentos no entiendan el resto de retroalimentaciones que ofrece el interfaz (cambios de color y de textura, la creación de objetos inesperados, etc.), lo cual les produce desconcierto e incluso cese de la acción.

Un ejemplo lo encontramos en la siguiente descripción de las actuaciones en la actividad “Rectas paralelas”:

De esta manera, cuando las alumnas pasan el cursor por el plano base teniendo seleccionado la herramienta “Paralela” el programa muestra (y crea si se pulsa el botón

izquierdo del ratón) un plano paralelo al plano base. Esta retroalimentación desconcierta a las alumnas. No obstante, el interfaz proporciona mensajes con el fin de comprender lo que está sucediendo mientras está activa la herramienta “Paralela”:

- Si el cursor pasa por el plano base, aparece el mensaje Plano paralelo a este plano...
- Si el cursor pasa por la recta r , aparece el mensaje Paralela a la recta r ...

Pero actúan como si no prestaran atención a estos mensajes.

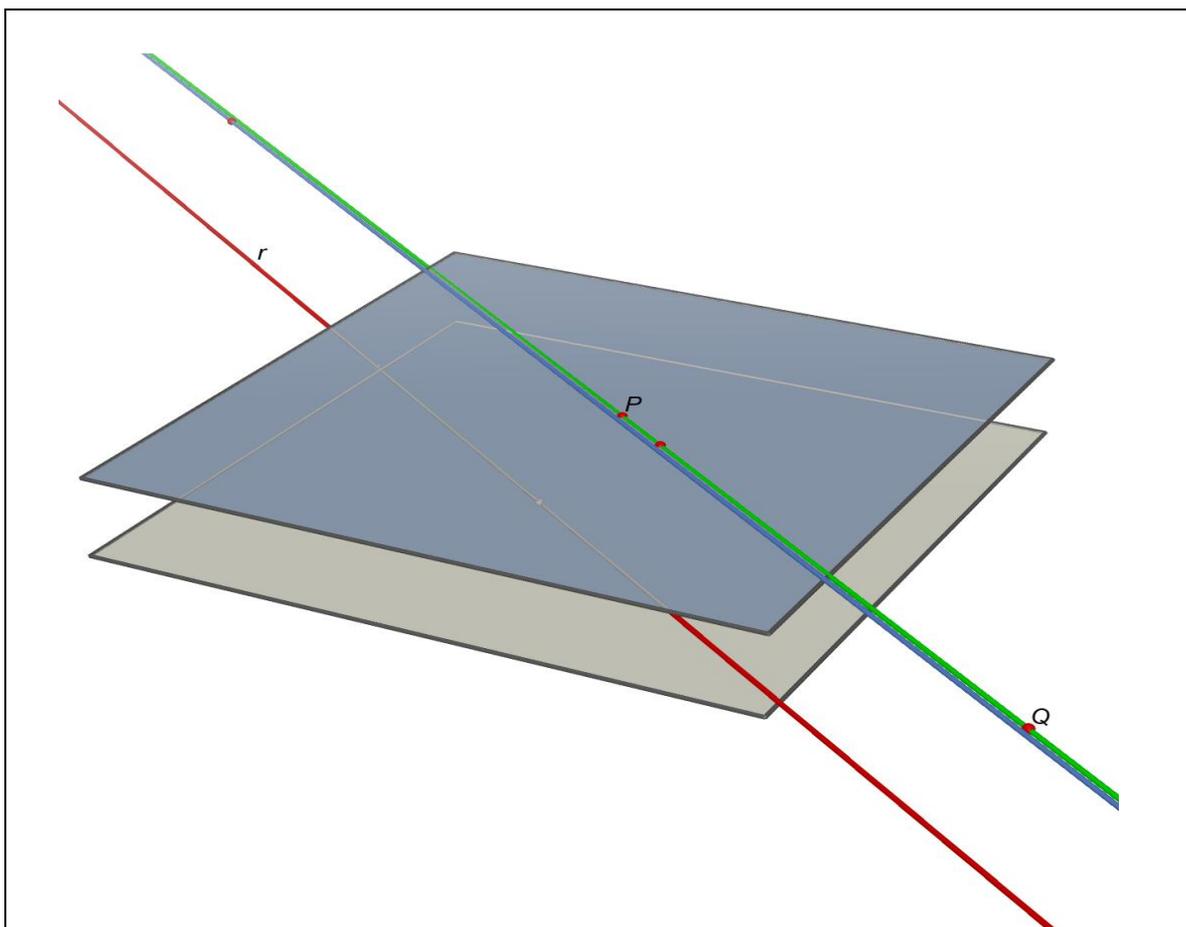
Este problema está relacionado con la manera en la que el interfaz hace accesible y comprensible las propiedades de las herramientas (propiedades de las retroalimentaciones), en función de las necesidades de información del alumno (transparencia operativa). Se puede decir que para los niveles de instrumentalización en los que se encuentran las alumnas la transparencia operativa es insuficiente.

Por otra parte, es posible que el problema también esté relacionado con los esquemas y las representaciones previas de las alumnas en relación a lo que es esperable de un programa en el que se actúa sobre objetos geométricos: quizás asumen que cada herramienta solo tiene una función.

3.2. No reconocer que las herramientas pueden tener más de una función.

En las actuaciones de las alumnas se pone de manifiesto que manipulan en la pantalla con el objetivo de realizar la tarea (recordemos que no tienen formación previa): la tarea es el objetivo, la herramienta sólo es un medio. Esto les lleva a no prestar atención a conocer el funcionamiento de la herramienta, la cual puede tener varias funciones según el objeto sobre el que actúa. Estas diferentes funciones de la herramienta les pasan desapercibidas, ya que únicamente persiguen realizar la tarea. Esto produce que no entiendan las retroalimentaciones que el interfaz les ofrece, lo cual les origina dudas y desconcierto.

Un ejemplo lo encontramos en la actividad “Rectas paralelas”:



En la pregunta 6, seleccionan sin problemas la herramienta “Paralela” pero tienen dificultades para usarla:

- Deben crear la recta paralela a la roja que pase por P; pero crean la paralela a la azul por un punto que crean con la misma herramienta “Paralela”. (En la figura las rectas azul y verde están la una pagada a la otra).
- Sin querer, al tratar de arrastrar y superponer la recta creada a la recta azul, crean el plano paralelo (azul) al plano base (gris) que pasa por P (esto es debido a que no han seleccionado la herramienta “Manipulación”, y continúan con la herramienta “Paralela” activa).

Sofía se pregunta: “¿Por qué sale otro plano?”

No prestan atención para conocer el funcionamiento de la herramienta “Paralela”; la cual tiene varias funciones según el objeto sobre el que actúa. Estas diferentes funciones de la herramienta les pasan desapercibidas, ya que únicamente persiguen resolver el problema.

Resulta que la herramienta “Paralela” tiene dos funciones:

- “Recta paralela a una recta por un punto”
- “Plano paralelo a un plano por un punto”

Y es el programa quien “decide” qué función va a tomar la herramienta según si el cursor señala una recta o un plano.

Otro ejemplo lo encontramos en la actividad “Tipos.de.puntos.2”:

Celia lleva el ratón aproximadamente a la mitad de una de las aristas y crea el punto medio. Al crear el punto medio sobre una arista tratan de marcar sobre la mitad de la misma, si bien el profesor tan sólo ha dicho que se marque sobre la arista. En realidad para crear el punto medio sobre un segmento o sobre una arista es suficiente con marcar sobre cualquier punto interior del segmento o de la arista.

En la pregunta 5, vuelven a tener dificultades con la herramienta “Punto medio”. Ahora deben crear el punto medio entre dos puntos y no el punto medio de una arista. Resulta que el herramienta “Punto medio” tiene dos procedimientos de uso diferentes:

- Para crear el punto medio entre dos puntos se ha de marcar estos puntos; y no ningún punto intermedio.
- Para crear el punto medio de una arista se ha de marcar un punto interior a la arista y no sus puntos extremos.

Las alumnas desconocen que el “Punto medio” tenga estos dos procedimientos de usos; de manera que **Celia** no sabe cómo proceder con la herramienta “Punto medio” para crear el punto medio entre los puntos A y B. Así que decide crear el punto medio sobre la arista donde se encuentra el punto A.

Este problema está asociado con los esquemas previos de las alumnas (en los cuales pueden estar incluidas las siguientes ideas: “la tarea es el objetivo”, “la información necesaria se consigue por ensayo error”, etc.). Así mismo, puede estar ligado a una falta de correspondencia entre esos esquemas previos y las retroalimentaciones que ofrece el interfaz (falta de transparencia cognitiva). Por último, está relacionado con el diseño de las propiedades de las herramientas (restricciones de estructuración de la acción).

6.2. Tabla resultado del análisis de las dificultades encontradas por las alumnas

En este apartado resumimos en la tabla 6.1 la relación de las dificultades encontradas junto con las restricciones a las que consideramos están ligadas de acuerdo con nuestro marco teórico. La tabla ha sido dividida en dos debido a su tamaño.

Tabla 6.1a. Resumen del análisis de las dificultades encontradas por las alumnas.						
Lista de dificultades			Actuaciones	Restricciones		
Tipo	Subtipo	Dificultades		Restricciones	Tipo	
Dificultades ligadas a la noción de “espacio” en Cabri 3D		Confusión entre la PNV de los planos y la región correspondiente al “espacio”	Se crean y se arrastran puntos en la PNV en lugar de en el “espacio”	Propiedades de las retroalimentaciones en la Zona de Trabajo	De estructuración de la acción	
Dificultades ligadas al uso de las herramientas		Uso limitado de las retroalimentaciones	No se presta atención a los mensajes que salen en pantalla	Propiedades de las retroalimentaciones en la Zona de Trabajo	De estructuración de la acción	
		No reconocer que las herramientas pueden tener más de una función	Se produce desconcierto cuando las herramientas cambian de funciones	Propiedades de las herramientas	De estructuración de la acción	
Dificultades ligadas a los arrastres		Los puntos desaparecen	Se aleja el punto por la PNV del plano	Condiciones de las transformaciones realizables sobre los puntos	De finalización	
			Se reduce la inclinación del plano base	Las modalidades de intervención en la Zona de Trabajo	De estructuración de la acción	
		Limitaciones a los arrastres de puntos debidas a determinadas orientaciones del plano base	El plano se coloca perpendicular o muy próximo a la perpendicular a la pantalla	Las modalidades de intervención en la Zona de Trabajo	De estructuración de la acción	
	Dificultades ligadas con el uso de la función “bola de cristal”	Olvido del procedimiento de uso		No se recuerda usar el botón derecho del ratón	Material requerido	De existencia
				No se recuerda cómo cambiar el punto de vista con	Propiedades de las funciones	De estructuración de la acción
		No ser consciente de que el cambio de orientación del plano se realiza sólo con la función “bola de cristal”		Se pretende arrastrar el plano base sin la función “bola de cristal”	Las modalidades de intervención en la Zona de Trabajo	De estructuración de la acción
				No se reconoce al plano base como plano de referencia	Condiciones de las transformaciones realizables con el plano base	De finalización

Tabla 6.1b. Resumen del análisis de las dificultades encontradas por las alumnas.					
Lista de dificultades			Actuaciones	Restricciones	
Tipo	Subtipo	Dificultades		Restricciones	Tipo
Dificultades ligadas a los arrastres	Dificultades ligadas al uso de la función de “la tecla de mayúsculas”	Olvido del procedimiento de uso	No se recuerda usar la tecla de mayúsculas	Material requerido	De existencia
			No se recuerda cómo hacer arrastres verticales	Propiedades de las funciones	De estructuración de la acción
		Confusión respecto al movimiento vertical	Se toma como referencia a la pantalla y no al plano base	Propiedades de la Zona de Trabajo	De estructuración de la acción
		No usan la función en situaciones en la que es necesaria	Se realizan cambios de orientación de los planos mediante el arrastre horizontal de los puntos de construcción, en lugar de utilizar el arrastre vertical	Condiciones de las transformaciones realizables con los planos	De finalización
			Se interpreta incorrectamente la posición de los puntos	Propiedades de las representaciones en la Zona de Trabajo	De estructuración de la acción
		Sentimientos en contra	Se interpreta que el procedimiento para alinear puntos verticalmente es “muy manual”	Propiedades de la función	De estructuración de la acción
	Dificultades ligadas con los arrastres de planos	Uso incorrecto de los puntos de construcción	Se realizan cambios de orientación de los planos mediante el arrastre horizontal de los puntos de construcción	Condiciones de las transformaciones realizables con los planos	De finalización

6.3. Identificación de posibles esquemas de utilización en las actuaciones

De acuerdo con nuestro marco teórico los esquemas de utilización construidos por el alumno pueden ser considerados como invariantes representativas y operativas correspondientes a actividades con instrumentos. La identificación de los mismos se realiza de manera indirecta a través de las actuaciones del alumno.

El propósito no es describir todos los posibles esquemas de utilización y tratar de identificarlos en las actuaciones. Por el contrario, en este apartado mostramos y analizamos los indicios significativos que nos llevan a pensar en la existencia de posibles esquemas de utilización.

Los resultados muestran procesos de instrumentalización respecto a las herramientas utilizadas. No obstante, no los consideramos para el presente trabajo, salvo para señalar las dificultades encontradas (ver apartado 6.2.).

Por otra parte, los resultados muestran indicios de que las alumnas han ido desarrollando esquemas de utilización que les permiten establecer las relaciones de dependencia de objetos geométricos a través de sus arrastres y viceversa. Respecto a esto, cabe recordar que de acuerdo con nuestro marco teórico los objetos se pueden clasificar según cómo son creados: libres, ligados (semi-libres y dependientes); clasificación que establece las relaciones de dependencia posibles en objetos geométricos en Cabri 3D.

1. Establecer los arrastres posibles de un punto

Las actividades del bloque 2. “Puntos” están diseñadas fundamentalmente para que los alumnos trabajen los arrastres asociados con los puntos libres, semi-libres y dependientes. A continuación, describimos y analizamos algunas actuaciones en las que hay indicios de posibles esquemas de uso relacionados con el criterio “establecer los arrastres posibles de un punto”.

En la actividad “Tipos.de.puntos.1” describimos la siguiente actuación:

A la pregunta 3a): “¿Qué diferencia hay entre arrastrar A o B, y arrastrar C o D?”; responden:

Sofía: “Que A o B se puede mover toda la recta. Y con C o D, sólo puedes mover el punto... además con A y B puedes mover el punto y la recta; con C o D sólo el punto a través de la recta.”²

Celia escribe: “Que el A y B se puede mover el punto y la recta; y con C y D solo el punto

por la recta.”

A la pregunta 3b): “¿Por qué crees que hay esa diferencia de comportamiento?”; responden:

Sofía: “Porque los que han formado la recta son A y B.”

Celia escribe: “Porque los puntos que han formado la recta son los A y B.”

A la pregunta 3c): “¿En qué caso la recta se desplaza?”; responden:

Celia: “En el A y B.”

Sofía: “Sí. En el A y B, y cuando coges la recta.”

Celia escribe: “En el A y B, y cuando la coges.”

Por sus respuestas, parece que distinguen la diferente naturaleza entre los puntos A y B, y los puntos C y D:

- Parece que se dan cuenta que la manera de crear los puntos determina los arrastres que les serán permitidos.
- Parece que se dan cuenta que A y B son puntos que definen la recta. Por ello, el arrastre de estos provoca el movimiento de la recta.
- Parece que se dan cuenta que C y D están ligados a la recta por haberse creados sobre ella, y que por esta razón sólo pueden arrastrarse por ella.

En la actividad “Tipos.de.puntos.2” realizamos el siguiente análisis:

Por otra parte, las ideas sobre los arrastres de los puntos medios creados las tienen muy claras. Al afirmar en la pregunta 2, que no es posible arrastrar el punto medio porque “si es punto medio, se tiene que quedar en el medio”, parece que piensan que como ha sido construido para ser el punto medio de otros dos, si éstos no se arrastran no es posible arrastrarle y seguir siendo su punto medio.

Este razonamiento podría ser el paso previo a la elaboración de la proposición más genérica de que si un punto es dependiente de otros puntos entonces no es posible arrastrarlo directamente.

En la actividad “Tipos.de.puntos.3” realizamos el siguiente análisis:

Sofía arrastra al punto A por las PV y PNV del plano base. Y sin más intentos escriben que los puntos se pueden arrastrar libremente. Dicen que los puntos se pueden arrastrar libremente cuando en realidad sólo se puede por el plano. Han llegado a esta conclusión arrastrando solo al A y por el plano base:

Parece que consideran que es suficiente con conocer cómo se arrastra A, ya que lo mismo va a suceder con B. Podríamos pensar que aplican la proposición de que si la construcción de dos puntos es la misma su naturaleza respecto al arrastre es la misma.

En la misma actividad:

Sofía continúa leyendo la pregunta 4: “Sobre esa recta crea un punto D.”
Celia crea el punto sobre la recta de intersección.
Sofía lee: “¿Se puede arrastrar D libremente o sólo por la recta?”
Arrastran el punto y responden que sólo por la recta.
Sofía lee: “¿Por qué crees que no se puede arrastrar D por otros sitios?”
Escriben directamente: “Porque está limitado por los planos”

Afirman que el punto D solo se puede arrastrar por la recta y que no se puede arrastrar por otros sitios porque está limitado por los planos. Parecen que asocian la forma en la que ha sido creada la recta con el grado de libertad en los arrastre del punto D. En realidad, que el punto D solo pueda arrastrarse por la recta se debe a que ha sido creado en ella, y no a cómo ha sido creada la recta.

1.1.1. Ambigüedad del término “arrastrar libremente”

Las hojas de preguntas de las actividades incluyen expresiones en las que se pregunta si un punto se puede arrastrar libremente, con el propósito principal de que reconozcan los diferentes tipos de puntos y sus arrastres permitidos. No obstante, los resultados muestran actuaciones contradictorias. Como muestra tenemos el siguiente análisis de las actuaciones en la actividad “Tipos.de.puntos.2”:

En la pregunta 1, al principio **Celia** dice que no se pueden arrastrar libremente los vértices. Sin embargo, **Sofía** piensa que ninguno tiene limitados sus movimientos:
Sofía: “Limitados sus movimientos creo que no tienen ninguno.”

En realidad, los vértices tienen limitados sus movimientos ya que están ligados al cubo. Nos preguntamos: ¿qué entiende **Sofía** sobre que un punto tenga limitados sus movimientos?

Por otra parte, en la pregunta 1d, responden que el punto O puede arrastrarse “libremente”; cuando en realidad solo puede arrastrarse por el plano base.

En la pregunta 3: “¿Puedes arrastrarlo libremente o solo por las caras?”; responden que el punto B (creado en la cara) se puede mover “solo por las caras”. Sin embargo, en la pregunta 4: “¿Puedes moverlo libremente o solo por la arista?”; responden que el punto A (que han creado por error en la cara) se puede mover “libremente”. Ahora utilizan la expresión “libremente” para referirse al arrastre de un punto ligado a una cara. Quizá se

deba nuevamente al enunciado de la pregunta: “¿Puedes moverlo libremente o sólo por la arista?” La pregunta está diseñada para el caso que el punto pertenezca a la arista. Pero las alumnas lo han creado por error sobre una de las caras. Así que el arrastre del punto no se limita a la arista si no que puede realizarse por toda la cara. Quizá sea a esto a lo que se refieran cuando responden “libremente”; y no a que se pueda arrastrar por toda la Zona de Trabajo.

Finalmente, en la pregunta 5b: “¿Qué pasa si arrastras A o B? ¿A qué crees que es debido?”; escriben que los puntos solo se pueden mover por sus caras ya que las aristas les limitan el espacio para moverse. Observamos que mientras en su respuesta a la pregunta 4, el hecho de poder arrastrar el punto por la cara lo consideran como que se puede arrastrar “libremente”; en esta última respuesta, ese mismo hecho lo califican como limitado por las aristas.

Parece que entienden que no todos los puntos pueden arrastrarse de igual forma dependiendo de cómo hayan sido creados. Sin embargo, en sus repuestas se aprecia ciertas contradicciones que posiblemente se deban al significado que dan a “arrastrar libremente” y a “no tienen limitados sus movimientos”. También es posible que estas expresiones les resulten ambiguas y se les deba concretar más. Igualmente es posible que la forma en la que utilizan este tipo de expresiones dependa de la situación y de la manera en la que es enunciada la pregunta.

2. Establecer las relaciones entre objetos geométricos a través de arrastres

Respecto a los posibles esquemas de acción instrumentada, en este apartado mostramos los resultados clasificados bajo el criterio “establecer las relaciones entre objetos geométricos a través de arrastres”.

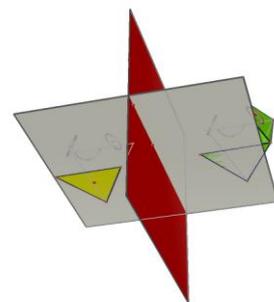
2.1. Determinar si dos poliedros son uno simétrico del otro

Las actuaciones en la actividad “Tipos.de.puntos.4” nos permite realizar el siguiente análisis:

Comienzan arrastrando el plano rojo hacia la izquierda; y el octaedro verde se traslada hacia la izquierda.

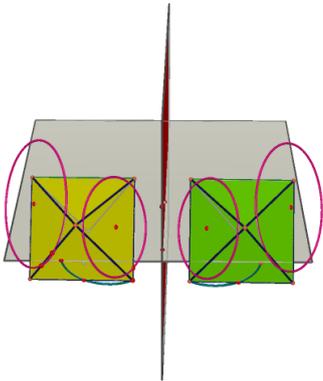
Utilizan la función “bola de cristal” para cambiar los puntos de vista y responder las preguntas.

Cuando en la preguntan 3 responden que el poliedro verde es imagen del otro y lo justifican diciendo: “Porque tiene una cara sin pintar.”, se refieren a la cara que tiene sobre el plano base.



Para responder a la pregunta 4, arrastran al octaedro amarillo y a sus diferentes puntos. Y responden: “Que es simétrico y le pasa exactamente lo mismo que al amarillo.”

Para responder a la pregunta 5, tratan de arrastrar a los puntos del octaedro verde pero no se puede; y responden: “No se puede, porque es simétrico al amarillo.”



Se observa que han asimilado el uso de la función “bola de cristal” y el arrastre de puntos ligados a superficies y a poliedros. En esta actividad dichos arrastres les permiten caracterizar dos poliedros simétricos bajo una simetría plana:

- Comienzan diciendo que distinguen al simétrico porque uno tiene una cara “sin pintar”. Podríamos decir que se han fijado en una característica “estática”.
- Después, en la pregunta 4, tras arrastrar los puntos del octaedro amarillo y ver los efectos en el verde, consideran que dichos efectos son consecuencia de que el verde es simétrico del amarillo. Podríamos decir que han caracterizado al verde como simétrico de una forma dinámica: al verde “le pasa exactamente lo mismo que al amarillo”.
- En la pregunta 5, tras intentar arrastrar al verde y sus puntos responden que “no se puede arrastrar porque es simétrico al amarillo”. Podríamos decir que están caracterizando a un poliedro simétrico también de forma dinámica: aquel que no puede arrastrarse directamente por depender de los arrastres que se hagan en otro.

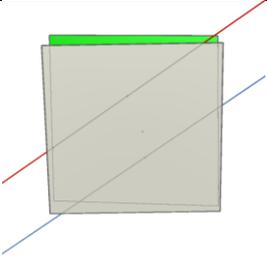
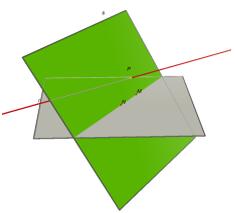
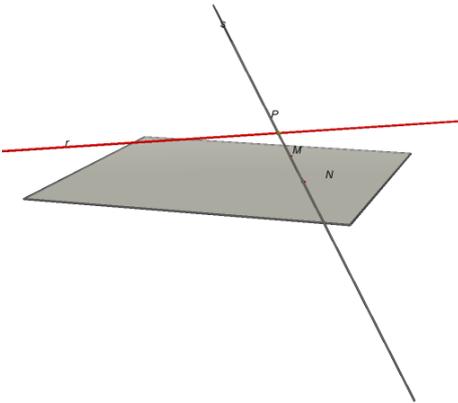
Pensamos que estas acciones, que les permiten reconocer si dos poliedros son uno simétrico del otro, nos dan un indicio de un posible esquema de utilización asociado.

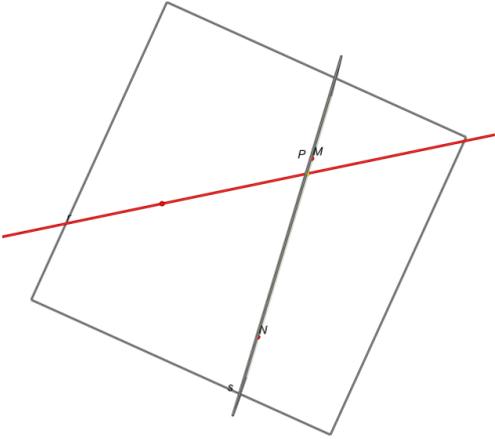
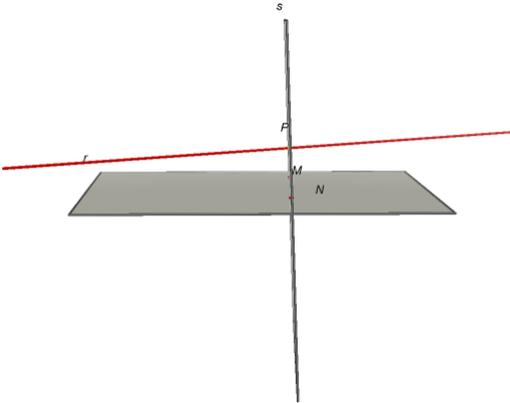
3. Establecer y verificar la perpendicularidad entre un plano y una recta

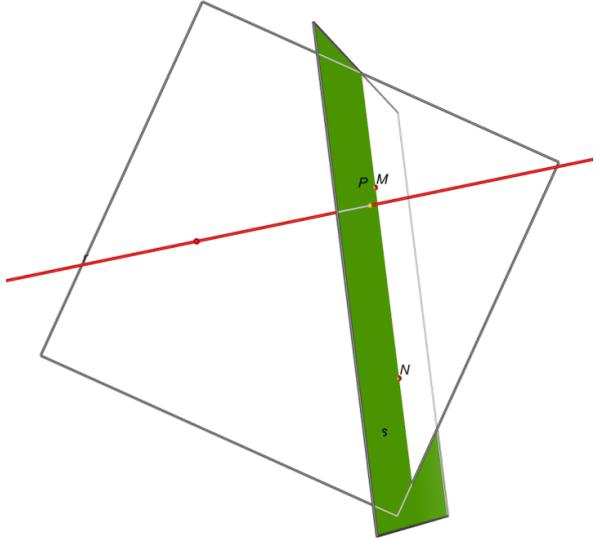
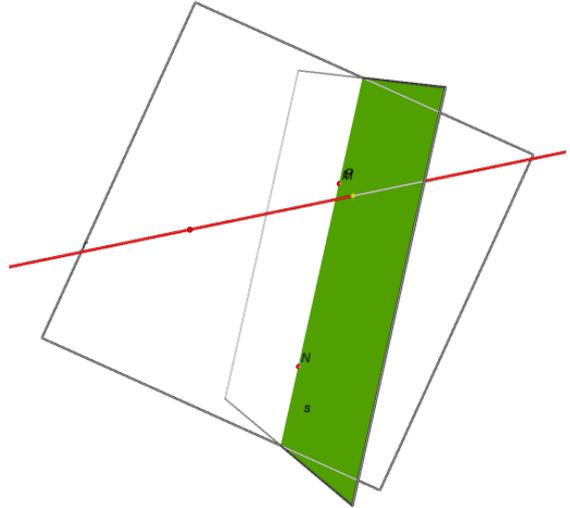
En la actividad “Plano.recta.perpendicular” observamos indicios de un esquema para establecer y verificar la perpendicularidad entre un plano y una recta. Lo analizamos en el siguiente cuadro:

En la pregunta 1 “¿Cuándo una recta y un plano son perpendiculares?”; escriben: “Cuando se cortan y sus ángulos forman ángulos rectos.”

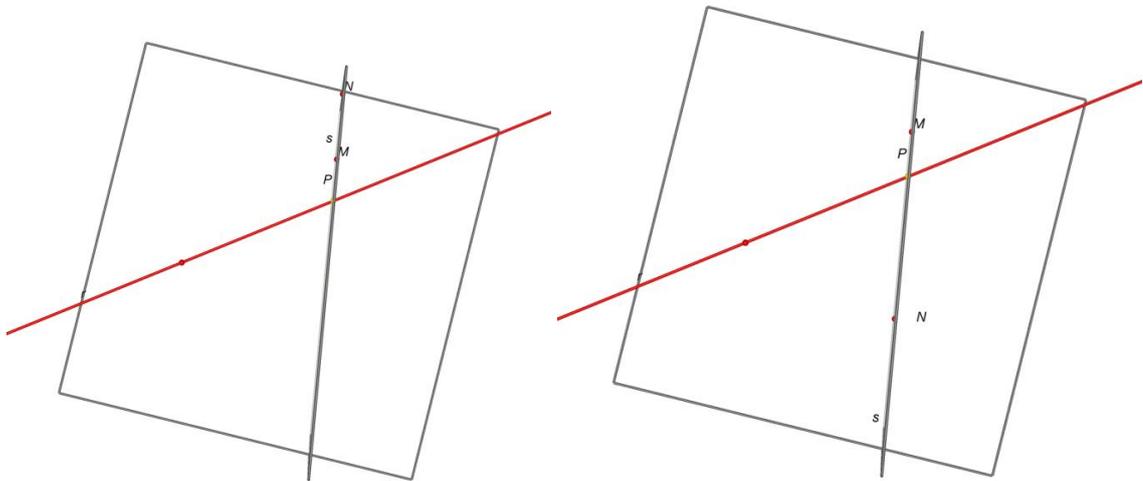
A continuación, para conseguir que el plano se perpendicular a la recta realizan una serie de maniobras; de las cuales describimos las más representativas, en la siguiente tabla.

<p>La vista inicial cuando abren el archivos</p>	
<p>Cambian de puntos de vista</p>	
<p>Arrastran los puntos M y N y cambian de puntos de vista. Llegan a la siguiente vista (llamaremos vista 0). En esta vista el plano verde es perpendicular a la pantalla.</p>	

<p>Continúan hasta conseguir que aparentemente el plano verde sea perpendicular al plano base. La vista a la que llegan (o rotaciones de ella respecto del eje OZ) y que van a emplear predominantemente es la siguiente (que llamaremos vista 1).</p> <p>A esta vista ellas se refieren como “ponerla de canto”. En ella el plano base está orientado paralelo a la pantalla y el plano verde es perpendicular al plano base.</p>	
<p>Comentan que hay vistas en las que parecen que el plano verde y la recta están perpendiculares y en otras no:</p> <p>Sofía: “Si lo pones así, sí” (ver la vista de la derecha)</p> <p>Si: “Pero si lo pones así, pues no.” (Se refiere a la vista 1)</p>	

<p>Desde la vista 1, arrastran el punto N para que el plano forme un ángulo recto con la recta; pero no lo consiguen</p>	
<p>Tornan a la vista 1, y arrastran el punto M; pero tampoco lo consiguen. Como no consiguen que las proyecciones del plano y la recta sobre el plano base (vista 1) sean perpendiculares, se preguntan si la vista 1 será ya suficiente para decir que son perpendiculares. Desisten.</p>	

En la pregunta 3, responden que el plano verde se puede colocar perpendicular a la recta roja de una forma; pero, piensan que quizá se podrían distinguir dos maneras “porque si tiene que ser perpendicular solo puede ser con una posición o girado”. Las dos posiciones a las que se refieren es a la mostrada por la vista 1 bien con el punto N a la parte inferior de la pantalla o a la parte superior:



Después de realizar arrastres como los descritos, no consiguen que las proyecciones sobre el plano base del plano verde y la recta (vista 1) sean perpendiculares.

En las actuaciones mostradas, comienzan en la pregunta 1 mencionando “ángulos rectos”. ¿Por qué no hablan en singular? ¿Tendrán en mente que la recta debe colocarse perpendicular a dos direcciones del plano (dos vectores linealmente independientes del plano)? ¿O que el plano y la recta deben colocarse de manera que sus proyecciones diédricas ortogonales sobre dos planos que se cortan perpendicularmente sean perpendiculares? No creo que lo piensen en estos términos.

No obstante, en el procedimiento que siguen sí que buscan dos orientaciones en las que el plano verde sea ortogonal:

- Primero: lo orientan para que sea perpendicular a la pantalla.
- Segundo: intentan que las proyecciones del plano y la recta sobre el plano base sean perpendiculares (vista 1).

Esta secuencia de acciones creemos que es un indicio de un posible esquema de utilización para establecer y verificar la perpendicularidad entre un plano y una recta.

Según éste método deberían haber conseguido que la recta y el plano fueran perpendiculares. Pero no superan el segundo paso. Entendemos que desde el punto de vista instrumental necesitan aún elaborar esquemas apropiados. En este sentido les sería útil asimilar lo siguiente:

- Cuando se mueve un punto de construcción, el plano gira alrededor de la línea que pasa por los otros dos puntos de construcción. En esta actividad los puntos de construcción del plano verde son M, N y P.
- La posición y orientación finales del plano sólo depende de las posiciones finales de sus puntos de construcción. En esta actividad, si los puntos M, N y la proyección de P sobre el plano base están alineados, el plano verde está perpendicular a la recta roja.

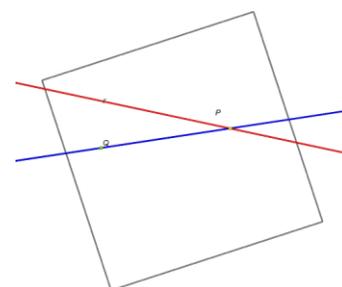
4. Encontrar un contraejemplo para negar la existencia de perpendicularidad

En la actividad “Recta.recta.perpendiculares” observamos indicios de un esquema que utiliza un contraejemplo para negar la existencia de perpendicularidad.

En la pregunta 2, responden que no son perpendiculares después de utilizar la función “bola de cristal”. La figura muestra una de las vistas que utilizan.

Recurren a orientar el plano base paralelo a la pantalla.

Mientras que en la actividad “Plano.recta.perpendiculares”, para afirmar que había perpendicularidad buscaban que lo hubiera en todas las vistas; ahora a penas necesitan un par de vistas para responder que no son perpendiculares.



Se podría pensar que utilizan un esquema que contiene la siguiente proposición: es suficiente un contraejemplo para negar la existencia de una propiedad.

7. CONCLUSIONES

El presente trabajo estudia, desde una aproximación instrumental, las dificultades y los posibles esquemas de utilización mostrados por estudiantes de 4º de Educación Secundaria Obligatoria con el uso del programa Cabri 3D en tareas de geometría espacial.

Los resultados del mismo se obtienen a través de la descripción y el análisis de las actuaciones de los estudiantes en una serie de actividades. Estas están diseñadas para ser realizadas con la mayor autonomía posible y no requieren conocimientos previos de programas de geometría dinámica, tan sólo conocimientos básicos de geometría espacial elemental. Se disponen en una serie que persigue que los alumnos se familiaricen con el interfaz y sus herramientas, se enfrenten con el estudio de los diferentes tipos de puntos y, principalmente, utilicen los diferentes tipos de arrastres con puntos, rectas, planos y sólidos.

En cuanto a las actuaciones de los estudiantes, la información recogida proviene fundamentalmente de grabaciones audiovisuales con un capturador de pantalla y de las respuestas escritas en las hojas de preguntas, que se complementan con grabaciones con cámara de vídeo y con una grabadora de audio. Dicha información nos ha permitido observar y analizar fenómenos de muy diferente naturaleza. No obstante, en el presente trabajo presentamos y analizamos los resultados directamente relacionados con los objetivos de la investigación de acuerdo a nuestro marco teórico.

El primero y el segundo de nuestros objetivos consisten en *detectar y analizar las dificultades de uso y de interpretación de los arrastres de puntos, rectas, planos y sólidos en diferentes actividades y tareas de geometría espacial, así como de las imágenes, representaciones y retroalimentaciones ofrecidas por el interfaz*. Para realizar el análisis hemos relacionado las dificultades detectadas con sus posibles causas. Estas las hemos agrupado en dos grupos: las ligadas al sistema informático (incluido el programa) y las ligadas al alumno; y en cada grupo las hemos clasificado con más detalle. Los descriptores utilizados están asociados por una parte a las restricciones y al concepto de transparencia ligados al programa, definidos por Rabardel (1995) por otra parte, a los conocimientos y

esquemas de utilización previos del alumno, y principios que guían la acción instrumentada del alumno de acuerdo también a Rabardel (1995). Por último, hemos confeccionado una tabla con la descripción de cada una de las dificultades más significativas encontradas, junto con las posibles causas a las que consideramos están ligadas.

El segundo de nuestros objetivos consiste en *identificar la creación de posibles esquemas por parte de los estudiantes en actividades instrumentadas en Cabri 3D relacionadas con los arrastres de puntos, rectas, planos y sólidos*. La identificación la hemos realizado de forma indirecta buscando regularidades de las acciones, e indicios de organización, planificación y gestión en las secuencias de acciones utilizadas para resolver las tareas. Pero no hemos elaborado descriptores ya que nuestra finalidad es exploratoria (es decir, ver qué se puede encontrar en las actuaciones). De esta manera dejamos abierta la caracterización de los posibles esquemas de utilización para que posteriores investigaciones puedan aprovecharse de los resultados del presente trabajo.

Respecto a las limitaciones del trabajo, cabe mencionar que los resultados se han basado en las actuaciones de una pareja de estudiantes y que la observación ha sido limitada en el tiempo, por lo que no hemos podido observar con mayor detalle la génesis instrumental protagonizada por dicha pareja de estudiantes.

A modo de conclusión, pensamos que nuestro trabajo de investigación contribuye a desarrollar la aplicación de la teoría instrumental en actividades con programas de geometría dinámica. En este sentido, apreciamos que faltan en la bibliografía investigaciones sobre el análisis de las dificultades - y de sus causas - que encuentran los alumnos en el uso de dichos programas (en particular, con Cabri 3D). No obstante, respecto a la caracterización de las posibles causas de dichas dificultades, se debería incluir en futuros trabajos las causas ligadas con el sentido espacial y la visualización, y estudiar la relación de éstas con las consideradas en el presente trabajo, en especial con las representaciones ofrecidas por el interfaz.

Igualmente, consideramos que nuestro trabajo proporciona y propone una serie de actividades que permite una adecuada introducción de Cabri 3D y de sus arrastres en el aula; si bien el papel del profesor debería cambiarse, dándole mayor protagonismo en la orquestación instrumental de las mismas.

Por último, pensamos que la continuación natural de nuestro trabajo de investigación es estudiar las dificultades de interpretación y de uso de Cabri 3D en actividades de construcción de objetos geométricos. Hemos observado, en la prueba piloto, que los arrastres y las retroalimentaciones en este tipo de actividades son más complejos y más difíciles de interpretar y de usar. También hemos observado que dicho tipo de actividades permiten identificar con mayor claridad posibles esquemas previos de los estudiantes y, también, la creación de nuevos.

8. BIBLIOGRAFÍA

- Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7(3), 245-274.
- Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D. y Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments, *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik*, 34(3), 66-72.
- Gutiérrez, A. (Ed.). (1991). Área de conocimiento Didáctica de la Matemática (Vol. 1). Madrid: Síntesis.
- Hugot, F. (2005). *Une étude sur l'utilisabilité de Cabri 3D*. Mémoire de Recherche. Grenoble, Francia: Université Joseph Fourier Grenoble I.
- Iranzo, N. (2009). *Influence of dynamic geometry software on plane geometry problem solving strategies*. Tesis doctoral. Barcelona, España: Universidad Autónoma de Barcelona.
- Laborde, C., Kynigos, Ch., y Hollebrands, K. (2006). Teaching and Learning Geometry with Technology. En A. Gutiérrez & P. Boero (Eds), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 275-305). Rotterdam, Holanda: Sense Publishers.
- Rabardel, P. (1995). *Les homes et les technologies-approche cognitive des instruments contemporains*. Paris, Francia: Armand Colin.
- Rabardel, P. (1999). Éléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques. En B. Marc, *Actes de la dixième université d'été de didactique des mathématiques, Évolution des enseignants de mathématiques; rôle des instruments informatiques et de l'écrit. Qu'apportent les recherches en didactique des mathématiques*, (pp 203-213). Caen, Francia: ARDM (Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques).
- Rabardel, P. (2001). Instrument mediated activity in situations. En Ann Blandford, Jean Vanderdonckt and Phil Gray (Eds.), *People and Computers XV -interactions without frontiers*, (pp 17-33). Berlin, Alemania: Springer.
- Restrepo, A. (2008). *Genèse Instrumentale du déplacement en géométrie dynamique chez des élèves de 6^{ème}*. Thèse pour obtenir le grade de docteur. Grenoble, Francia: Université Joseph Fourier.

- Salazar, J. (2009). *Gênese Instrumental na interação com Cabri 3D: um estudo de Transformações Geométricas no Espaço*. Doutorado em Educação Matemática. Sao Paulo, Brasil: Pontifícia Universidade Católica de Sao Paulo.
- Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interaction in computerized learning environment: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9(3), 281-307.
- Trouche, L. (2005). An instrumental approach to mathematics learning in symbolic calculators environments. En D. Guin, K. Ruthven, & L. Trouche (Eds.), *The didactical challenge of symbolic calculators: Turning a computational device into a mathematical instrument* (pp. 137-162). New York, EEUU: Springer.
- Vérillon, P. y Rabardel, P. (1995). Cognition and artefacts: a contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology in Education*, 9(3), 77-101.

ANEXOS

ANEXO I. HOJAS DE PREGUNTAS

Las hojas de preguntas que se proporcionan en este anexo corresponden a las hojas que se distribuyen a los alumnos para que puedan realizar las actividades. Junto a ellas se adjuntan imágenes que contienen las escenas iniciales (y alguna más si se estima necesario) que encuentran los alumnos cuando abren los archivos del programa que tienen el mismo nombre que aparece en la hoja de la actividad.

Actividad: “Composición”

Pareja:..... Fecha:.....1/2

Vas a describir la composición de cuerpos que ves:

1. ¿Cuántos cuerpos hay? Da sus nombres y colores.

2. *Si no lo has hecho, mueve el plano para encontrar todos los cuerpos que hay.*

3. Encuentra los cuerpos que hay en la zona inferior respecto al plano.

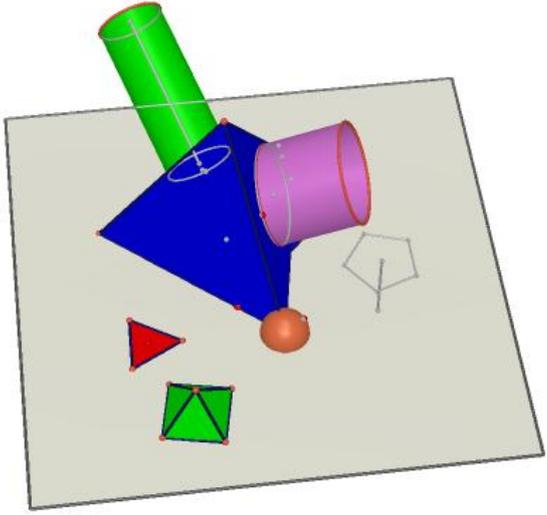
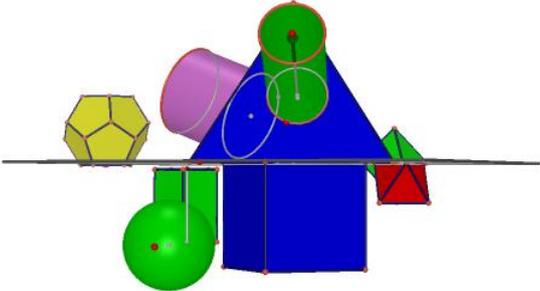
Di sus nombres y sus colores.

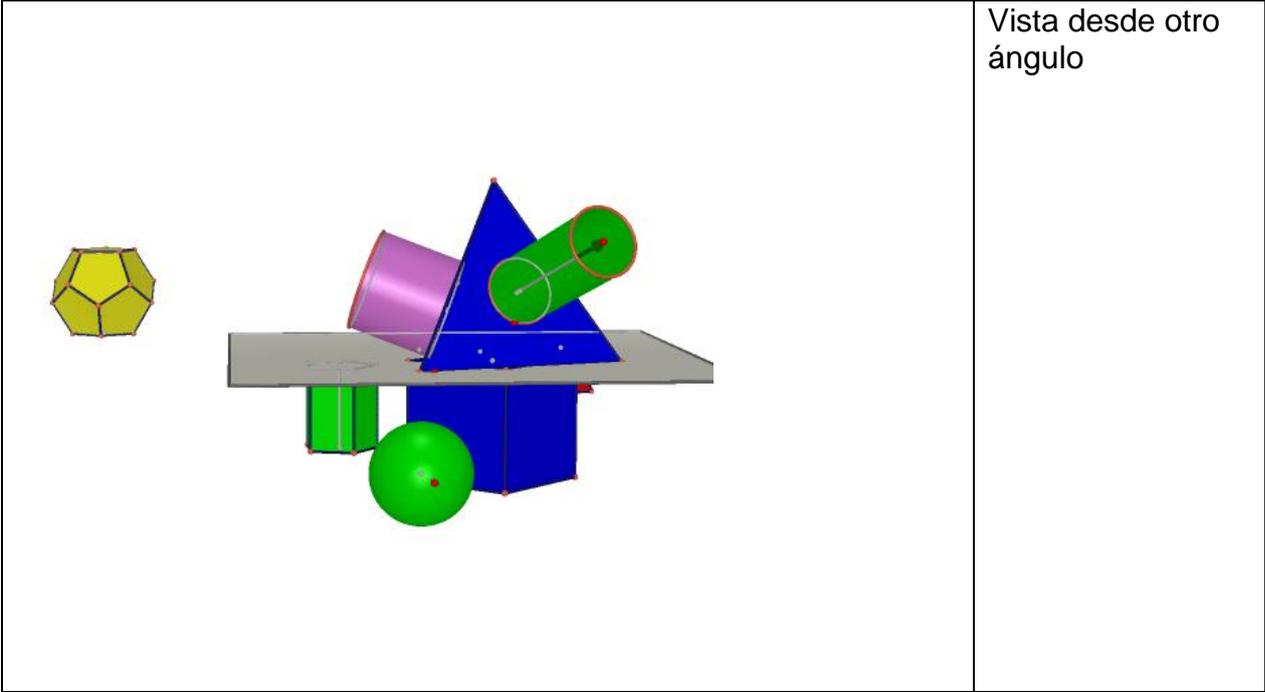
4. Encuentra el cuerpo amarillo.

¿Cuántas caras tiene?

¿Está en el plano o fuera de él?

¿Está sobre el plano, por encima o por debajo?

 A 3D scene view showing a collection of geometric objects on a light gray plane. The objects include a tall green cylinder, a blue pyramid with a white circle on its top face, a pink cylinder, a red triangle, a green square with a diagonal line, a green sphere, and a yellow pentagon. A thin black line is drawn on the plane, passing through the base of the blue pyramid and the green sphere.	<p>Vista de la escena inicial</p>
 A 3D scene view from a different perspective. The objects are arranged on a horizontal line. From left to right, there is a yellow pentagon, a green sphere, a blue pyramid, a pink cylinder, a green cylinder, a red triangle, and a green square. The blue pyramid is the central focus, with a white circle on its top face. The green sphere is positioned in front of the blue pyramid.	<p>Vista desde otro ángulo</p>



Actividad: "Dónde están los puntos.1"

Pareja:..... Fecha:.....

En la pantalla hay dos planos: el plano **p** (azul) y el plano **s** (verde). Además tenemos los puntos con nombres en mayúscula; situados en distintas partes.

1. Sin mover nada di dónde crees que están los puntos:

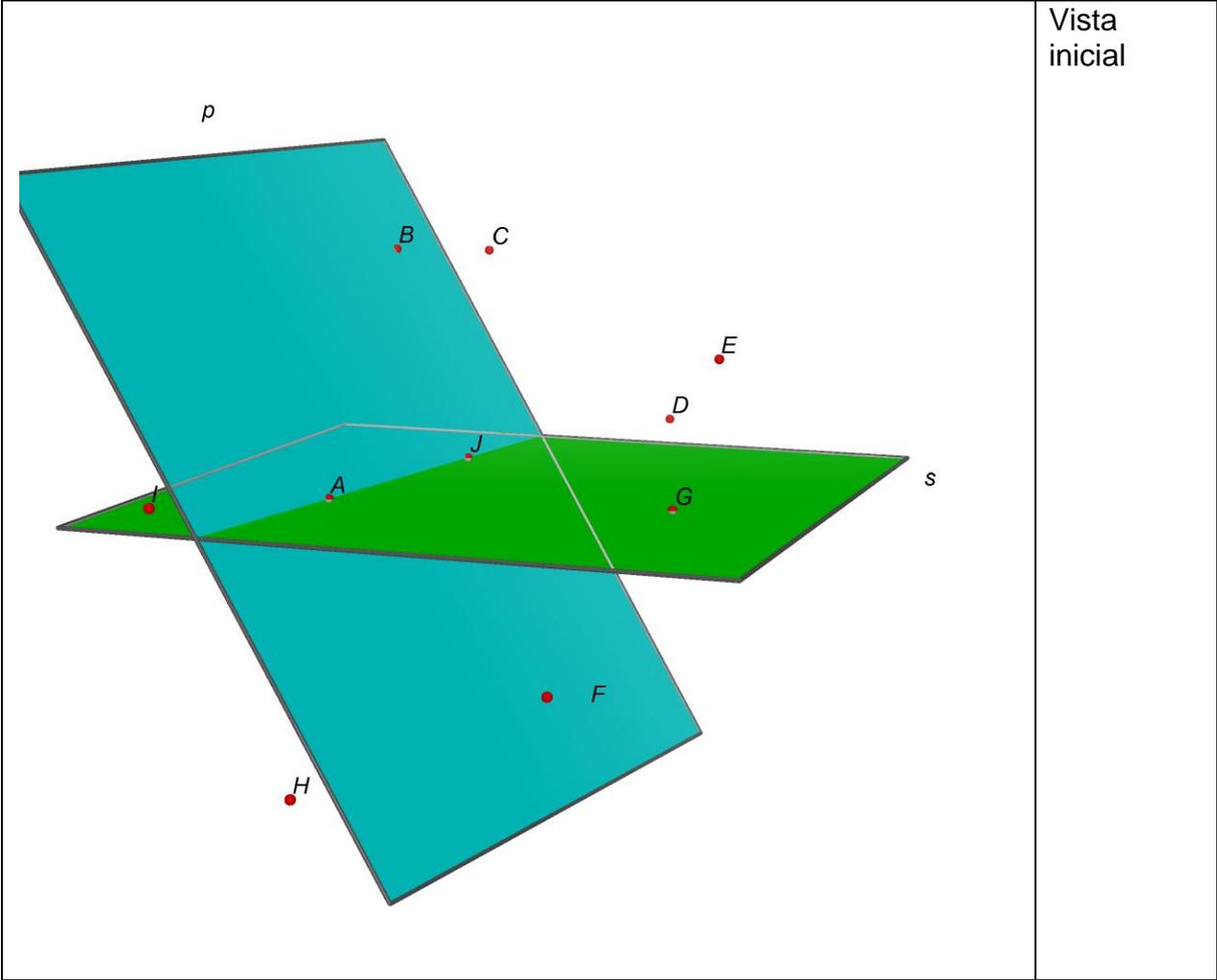
- a) En el plano **s** (zona verde o su prolongación):.....
- b) En el plano **p** (zona azul o su prolongación):.....
- c) Pertenece a la vez a los dos planos:.....
- d) Está por encima del verde y a la derecha del azul:.....
- e) Está por debajo del verde y a la derecha del azul:.....
- f) Está por encima del verde y a la izquierda del azul:.....
- g) Está por debajo del verde y a la izquierda del azul:.....

2. Ahora mueve libremente con la función "bola de cristal".

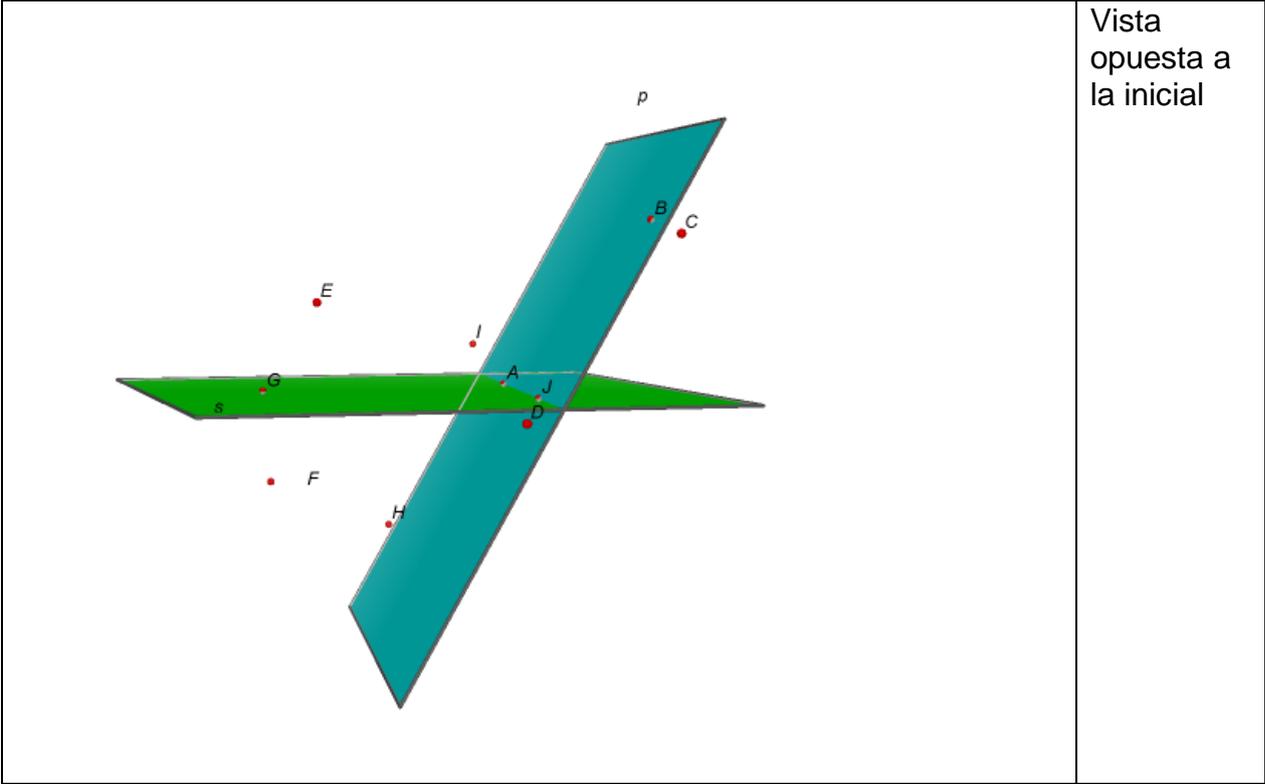
Si lo crees necesario rectifica o confirma tus respuestas (**pensando siempre en la posición inicial de la pantalla**):

- a) En el plano **s** (zona verde o su prolongación):.....
- b) En el plano **p** (zona azul o su prolongación):.....
- c) Pertenece a la vez a los dos planos:.....
- d) Está por encima del verde y a la derecha del azul:.....
- e) Está por debajo del verde y a la derecha del azul:.....
- f) Está por encima del verde y a la izquierda del azul:.....
- g) Está por debajo del verde y a la izquierda del azul:.....

3. Ahora arrastra los puntos C, D, H e I (sin mover los planos) con el mando "manipulación" hacia los planos. ¿Qué piensas ahora, pertenecen o no a los planos?



Vista inicial



Vista
opuesta a
la inicial

Actividad: “Dónde están los puntos.2”

Pareja:..... Fecha:.....

En la pantalla hay tres planos: el plano **p** (verde), el plano base **r** (gris) y el plano **s** (amarillo). Además hay puntos situados en distintas partes, cuyos nombres están en mayúscula.

1. ¿Cuáles son las posiciones relativas entre los planos? ¿Se cortan, son paralelos, son perpendiculares entre sí?

2. Di dónde crees que están los puntos. Escribe a continuación los nombres de los puntos en los apartados donde crees que están situados:

a) En el plano **s** (zona amarilla o su prolongación):.....

b) En el plano **p** (zona verde o su prolongación):.....

c) En el plano base **r** (zona gris o su prolongación)

d) Pertenece a la vez a dos planos:.....

e) Está en la zona entre **s** y **r**:.....

f) Está en la zona entre **r** y **p**:.....

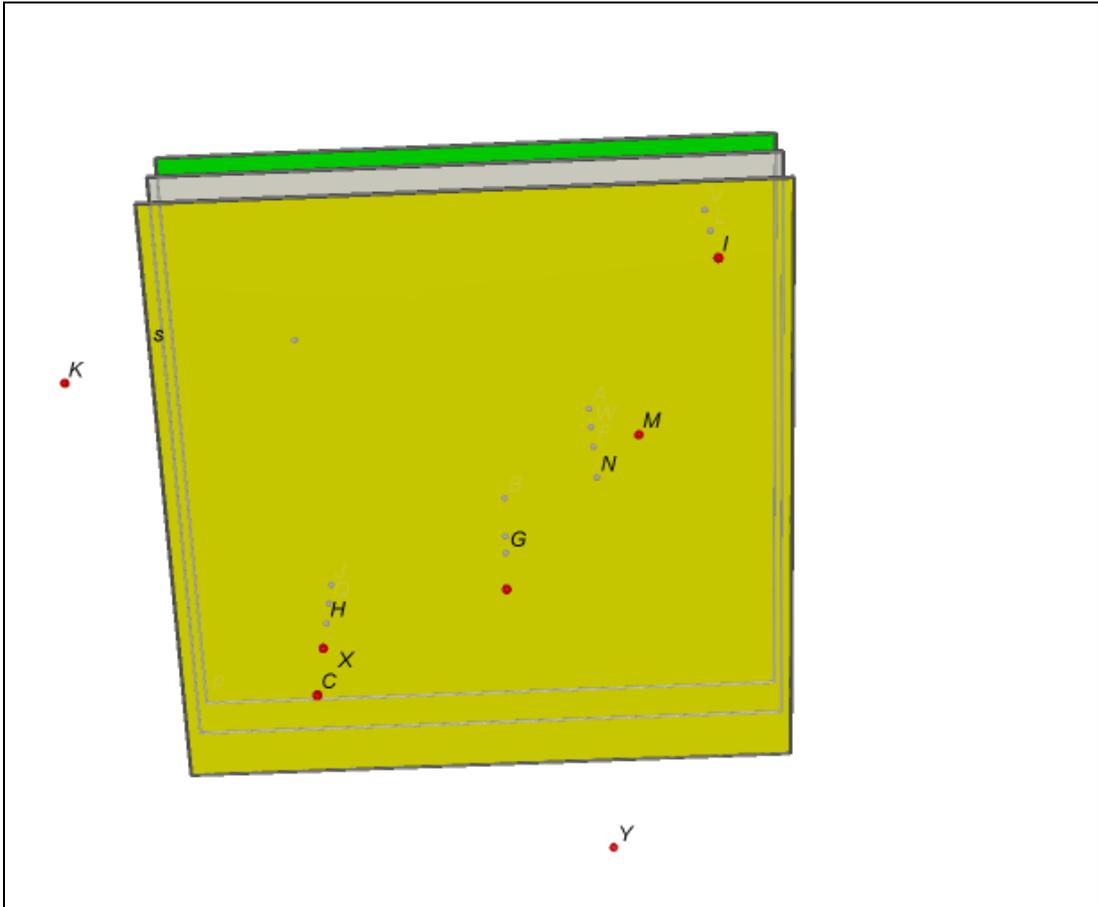
g) Está por encima del plano **p**:.....

h) Está por debajo del plano **s**:.....

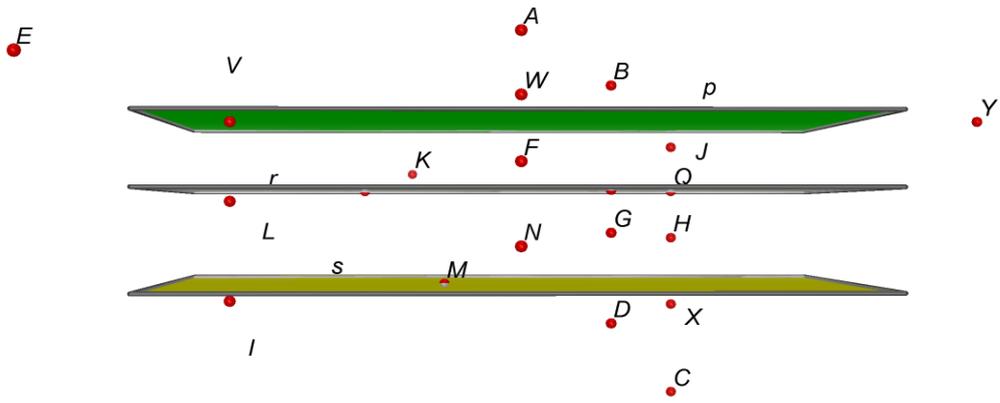
3. ¿En qué apartado de los anteriores sitúas al punto E?

4. ¿Qué puntos crees que están alineados?

Vista inicial



Otra vista



(Utiliza el panel de ayuda)

1. ¿Los puntos azules están alineados? Para responder, ayúdate con la función "bola de cristal".

2. Para responder, ayúdate de la función "bola de cristal" y del mando "Manipulación":

¿Están todos los puntos azules sobre el mismo plano?

¿Qué dirías de los puntos A, B, C, I, J?:

- a) Están en el plano
- b) Están en su prolongación
- c) Están fuera de él
- d) Están en el espacio, por debajo del plano
- e) Están en el espacio, por encima del plano

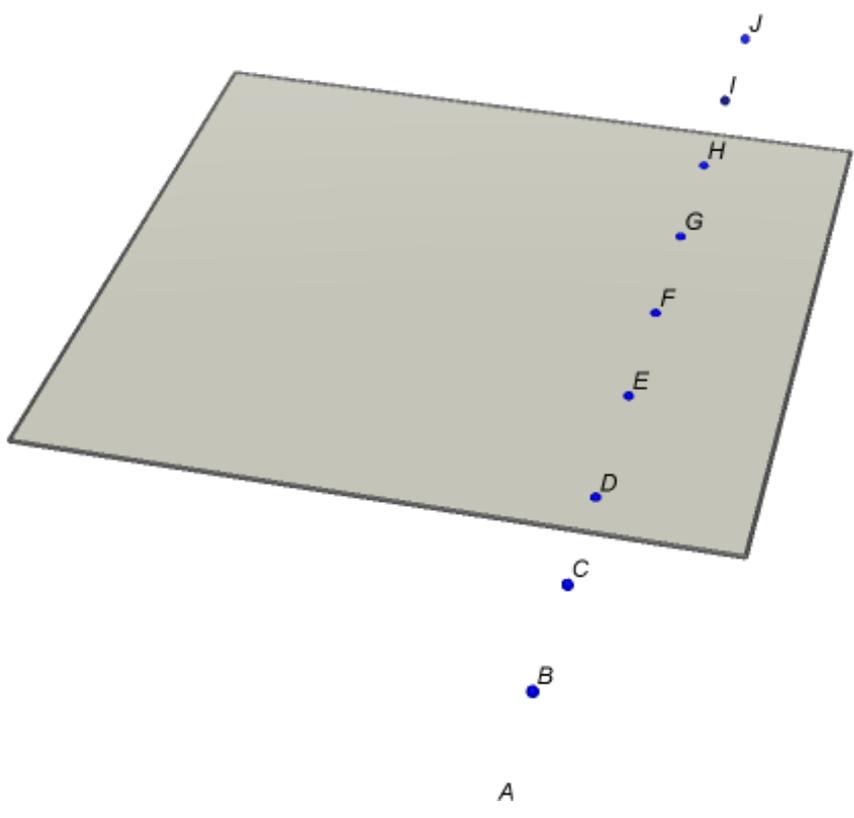
3.

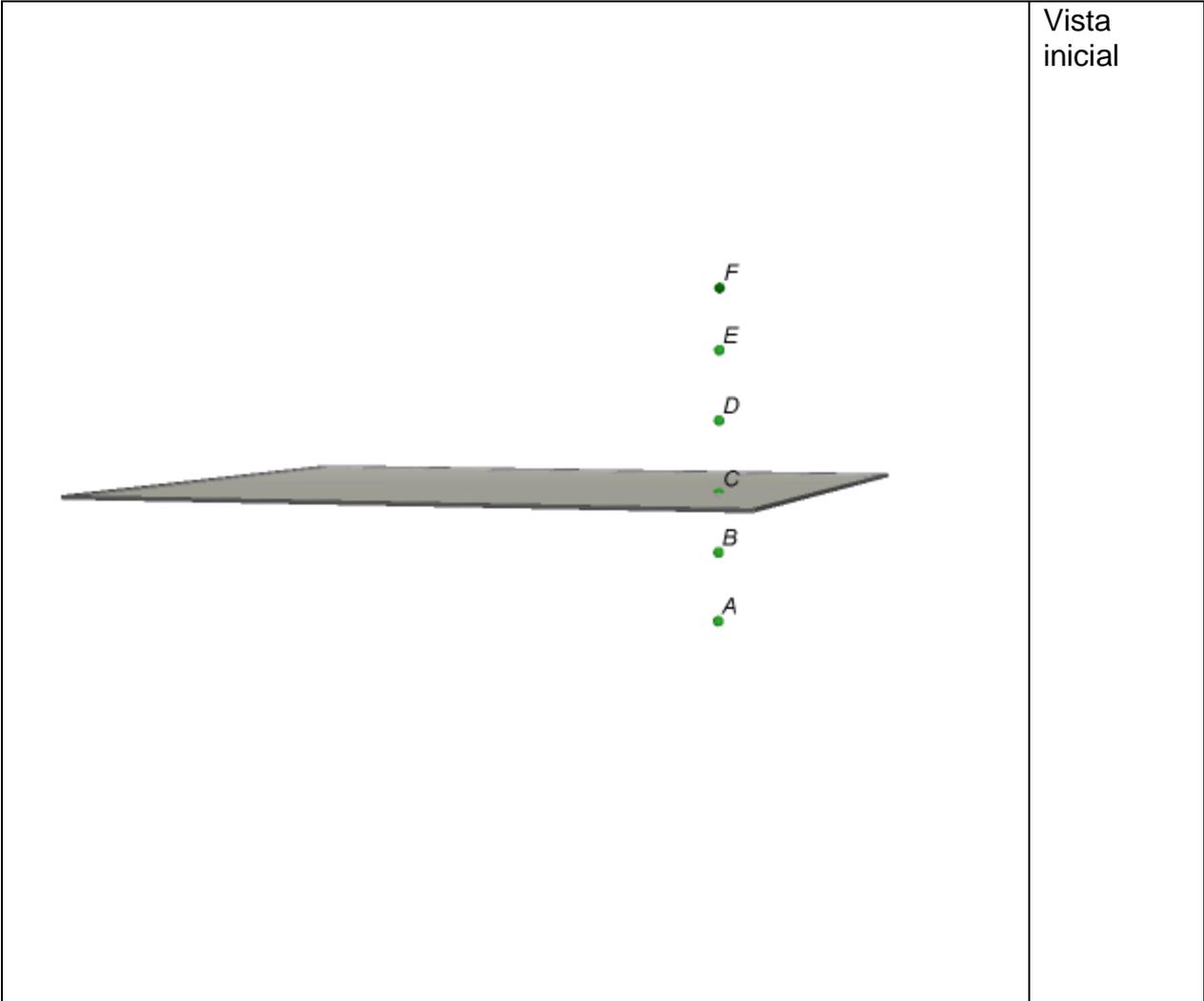
- a) Crea un punto sobre el plano base con el mando "Punto".
- b) Arrástralo por todos los sitios que puedas.
- c) Cuando lo arrastras fuera del cuadrilátero gris (parte visible del plano base), ¿sigue estando en el plano base o se halla fuera de él? Explica por qué lo crees así.

4. Crea y coloca aparte, otros seis puntos alineados (en paralelo a los azules) utilizando sólo el mando "Manipulación". ¿Qué dificultades encuentras?

5. Crea y coloca aparte, otros seis puntos alineados (en perpendicular a los azules) utilizando sólo el mando "Manipulación". ¿Qué dificultades encuentras?

Vista inicial





Actividad: “Coordenadas.puntos”

Pareja:.....

Fecha:.....

I. En la pantalla hay un punto con sus coordenadas (2, -2,5, 0).

1. Vas a arrastrarlo hasta conseguir que sus coordenadas sean (-3.1, 3, 0); pero antes responde a las siguientes preguntas:

Si quieres arrastrar el punto de la posición (2, -2.5, 0) a la posición (-3.1, 3, 0) ¿qué deberás hacer?

- a. ¿Arrastrarlo hacia la derecha de la pantalla o hacia la izquierda?
- b. ¿Arrastrarlo hacia el fondo de la pantalla o hacia adelante?
- c. ¿Arrastrarlo verticalmente hacia arriba o hacia abajo?

2. Ahora arrástralo hasta situarlo en (-3.1, 3, 0).

- a. Se cumple lo que pensabas en la pregunta anterior. ¿Qué has tenido que modificar?

II. En la pantalla hay otro punto con sus coordenadas (-1.6, -3.4, -3.6).

3. Vas a arrastrarlo hasta conseguir que sus coordenadas sean (2, 3, 4); pero antes responde a las siguientes preguntas:

Si quieres arrastrar el punto de la posición (-1.6, -3.4, -3.6) a la posición (2, 3, 4) ¿qué deberás hacer?

- d. ¿Arrastrarlo hacia la derecha de la pantalla o hacia la izquierda?
- e. ¿Arrastrarlo hacia el fondo de la pantalla o hacia adelante?
- f. ¿Arrastrarlo verticalmente hacia arriba o hacia abajo?

4. Ahora arrástralo hasta situarlo en (2, 3, 4).

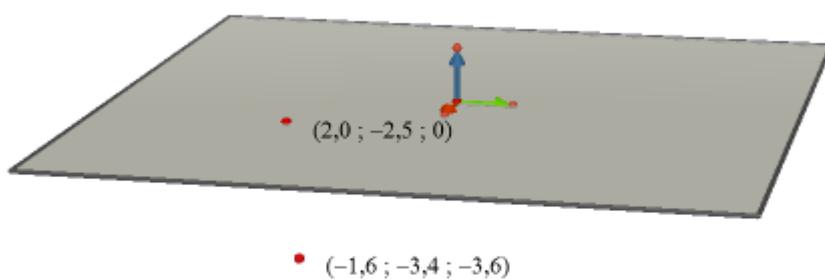
- a. Se cumple lo que pensabas en la pregunta anterior. ¿Qué has tenido que modificar?

III. ¿Te ha ayudado el tener las tres flechas de colores rojo, verde y azul?

¿Qué direcciones piensas que señalan?

El punto donde se cortan, ¿qué coordenadas piensas que tiene?

Vista inicial



Actividad: “Distancias.puntos.1”

Pareja:.....

Fecha:.....

En la pantalla hay tres puntos O, A y B sobre una misma recta en el plano base.

a) ¿Qué punto crees que está más cerca de O? ¿Por qué?

b) Gira con la función “bola de cristal” hasta colocar el punto A delante.

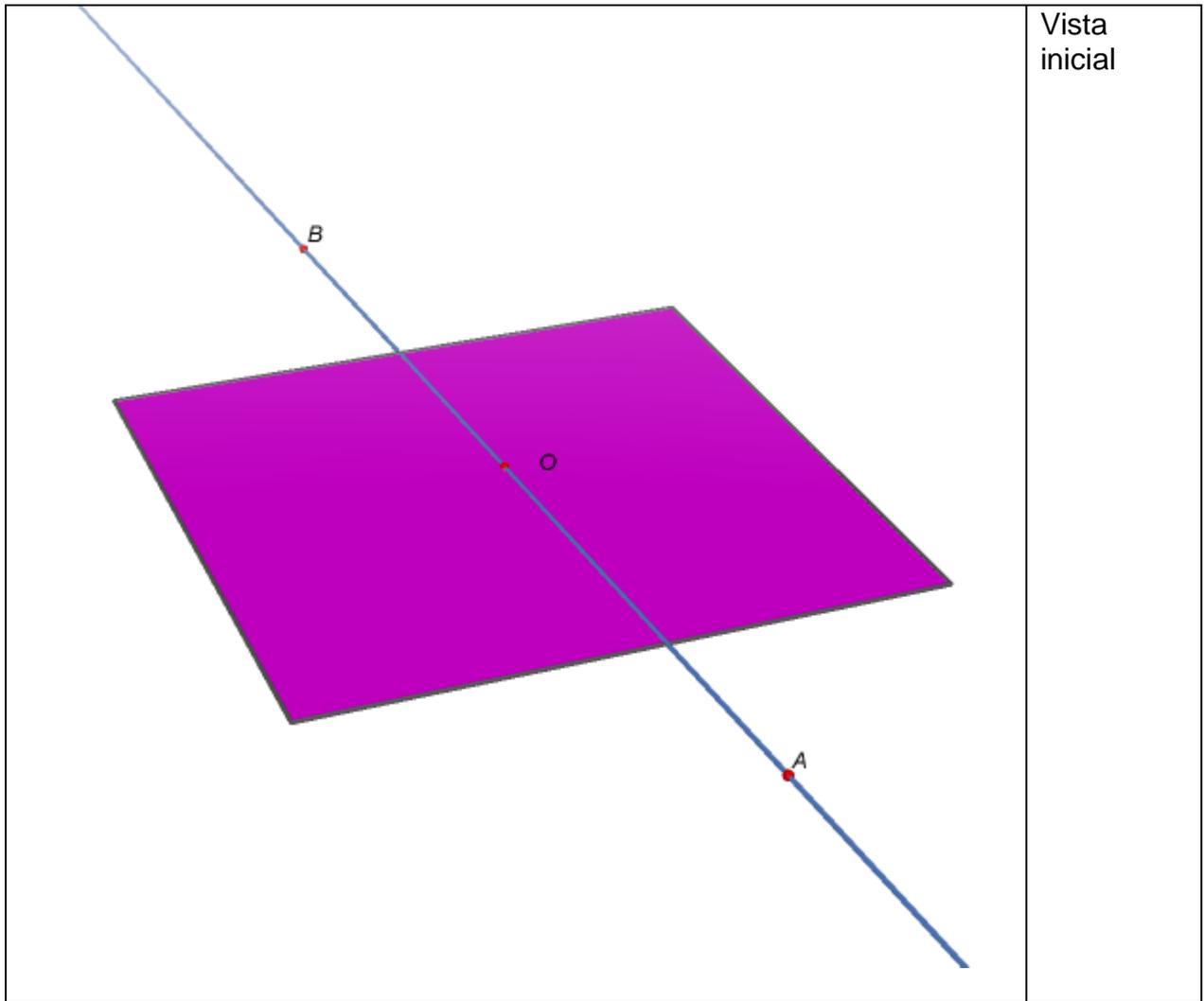
Ahora, ¿qué punto crees que está más cerca de O?

¿Qué conclusiones sacas?

c) Con el mando “distancia” mide las longitudes de OA y OB.

¿Son iguales o distintas estas longitudes?

¿Qué conclusiones sacas?



Vista
inicial

Actividad: “Distancias.puntos.2”

Pareja:.....

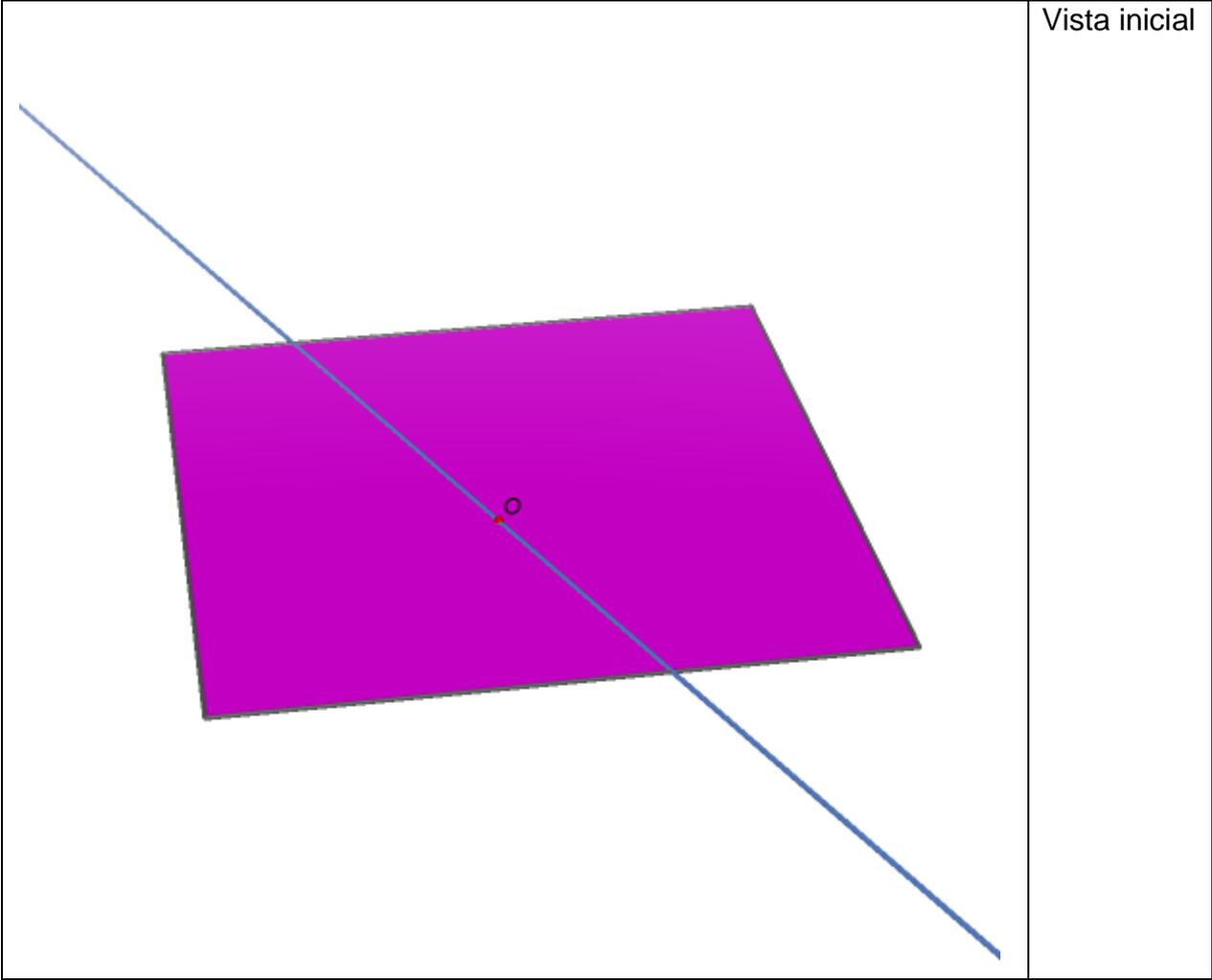
Fecha:.....

En la pantalla hay un punto O sobre una recta en el plano base.

Coloca dos puntos sobre la recta, a ambos lados del punto O. Explica qué estrategia vas a seguir para que queden a la misma distancia de O, sin usar el mando “Distancia”.

Ahora sitúalos sobre la recta de manera que queden a la misma distancia de O manteniéndolos a ambos lados de O, sin usar el mando “Distancia”.

Cuando pienses que lo has conseguido utiliza el mando “distancia” para comprobarlo. ¿Qué conclusiones sacas?



Actividad: "Tipos.de.puntos.1"

Pareja:..... Fecha:.....1/2

1. Con el mando "recta" crea una recta. A los dos puntos rojos marcados llámalos A y B

a) ¿Se pueden arrastrar esos puntos?

b) ¿Se pueden arrastrar libremente por el plano o sólo por la recta?

c) ¿Qué pasa cuando los arrastras?

2. Coloca otros dos puntos sobre la recta. Llámalos C y D.

a) ¿Se pueden arrastrar?

b) ¿Se pueden arrastrar C y D libremente por el plano o sólo por la recta?

3. a) ¿Qué diferencia hay entre arrastrar A o B, y arrastrar C o D?

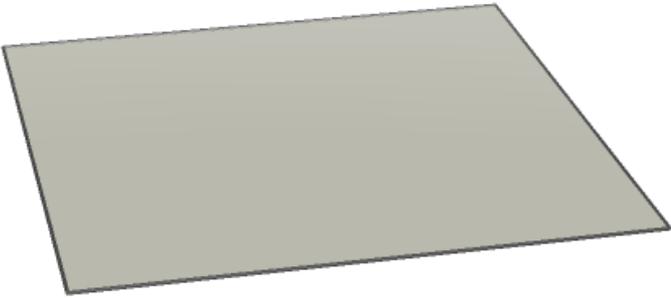
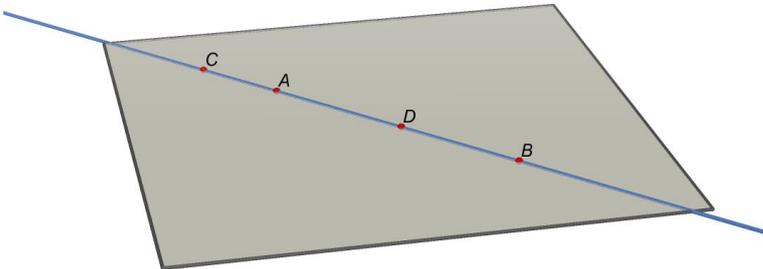
b) ¿Por qué crees que hay esa diferencia de comportamiento?

c) ¿En qué caso la recta se desplaza?

4. Con el mando "punto medio" crea el punto medio entre C y D. Llámalo M.

a) Trata de arrastrar el punto M ¿qué pasa?

b) Arrastra el punto C o el D. ¿Se mueve M? ¿Por qué crees que ahora se mueve M y antes no?

	Vista inicial
	Vista final

1. En la pantalla hay un cubo.

a) ¿Puedes arrastrar libremente sus vértices?

b) ¿Qué vértices puedes arrastra libremente por toda la zona de trabajo y cuáles tienen limitado su movimiento?

c) ¿Qué ocurre con el cubo cuando arrastras los vértices?

d) Encuentra el punto O (está en la cara del cubo que está en el plano base).
¿Puedes arrastrarlo libremente o está limitado su movimiento?

e) ¿Qué ocurre con el cubo cuando se arrastra el punto O?

2. Con el mando "punto medio" crea el punto medio de una de las aristas. Llámalo M_1 .

¿Puedes arrastrarlo? ¿A qué crees que es debido?

3. Coloca un punto sobre una de las caras. Llámalo B.

¿Puedes arrastrarlo libremente o sólo por las caras?

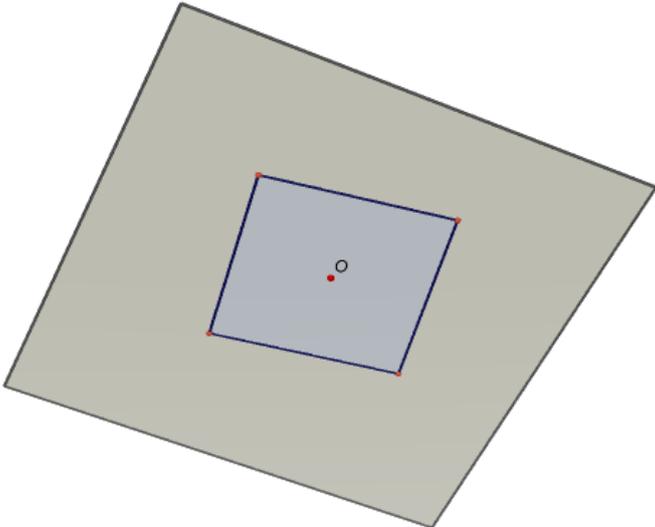
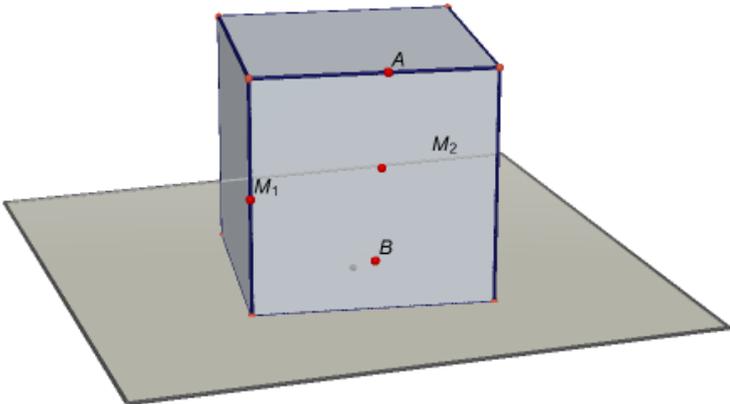
4. Sitúa un punto sobre una de las aristas de la cara anterior. Llámalo A.

¿Puedes moverlo libremente o sólo por la arista?

5. Con el mando "punto medio" crea el punto medio entre A y B. Llámalo M_2 .

a) ¿Puedes arrastrarlo directamente? ¿A qué crees que es debido?

b) ¿Qué pasa si arrastras A o B? ¿A qué crees que es debido?

	<p>Vista inicial</p>
	<p>Vista final</p>

Actividad: “Tipos.de.puntos.3”

Pareja:.....

Fecha:.....

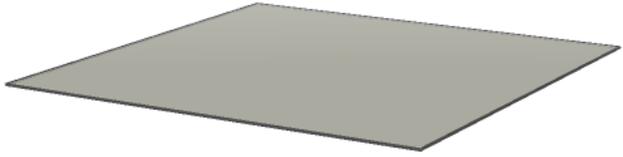
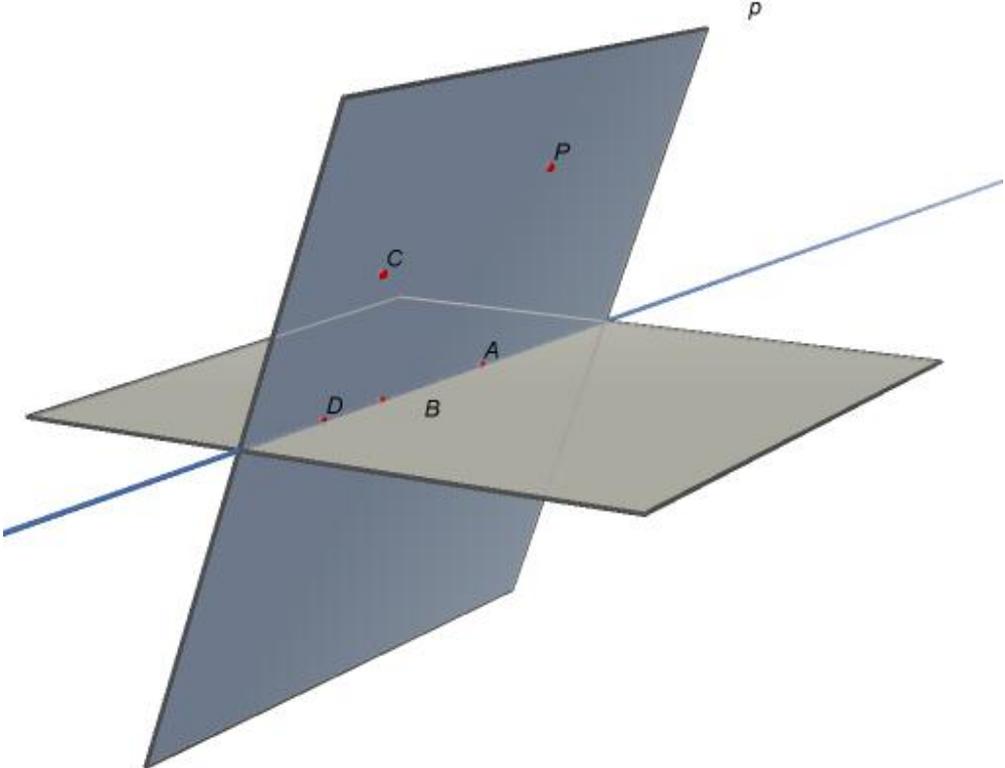
1. Crea dos puntos sobre el plano base. Llámalos A y B.
 - a) ¿Se pueden arrastrar libremente o sólo por el plano?

2. Crea un punto en el espacio fuera del plano. Llámalo C.
 - a) Arrástralo horizontalmente y verticalmente.
 - b) ¿Se puede arrastrar libremente por cualquier parte de la pantalla?

3. Con el mando “Plano” crea un plano que pase por A, B y C.
Crea un punto sobre el plano oblicuo. Llámalo P.
 - a) ¿Se puede arrastrar libremente o sólo por el plano?

4. Con el mando "Curva de intersección" crea la recta intersección entre los dos planos. Sobre esa recta crea un punto D.
 - a) ¿Se puede arrastrar D libremente o sólo por la recta?

 - b) ¿Por qué crees que no se puede arrastrar D por otros sitios?

	<p>Vista inicial</p>
	<p>Vista final</p>

En la pantalla hay dos rectas paralelas.

1. La actividad consiste en arrastrar y mover las rectas hasta conseguir que coincidan.

a) Antes de moverlas di qué plan vas a seguir.

Ahora muévelas.

b) ¿Has tenido que cambiar de plan? ¿Por qué?

2. Prueba a superponer las rectas de las siguientes maneras.

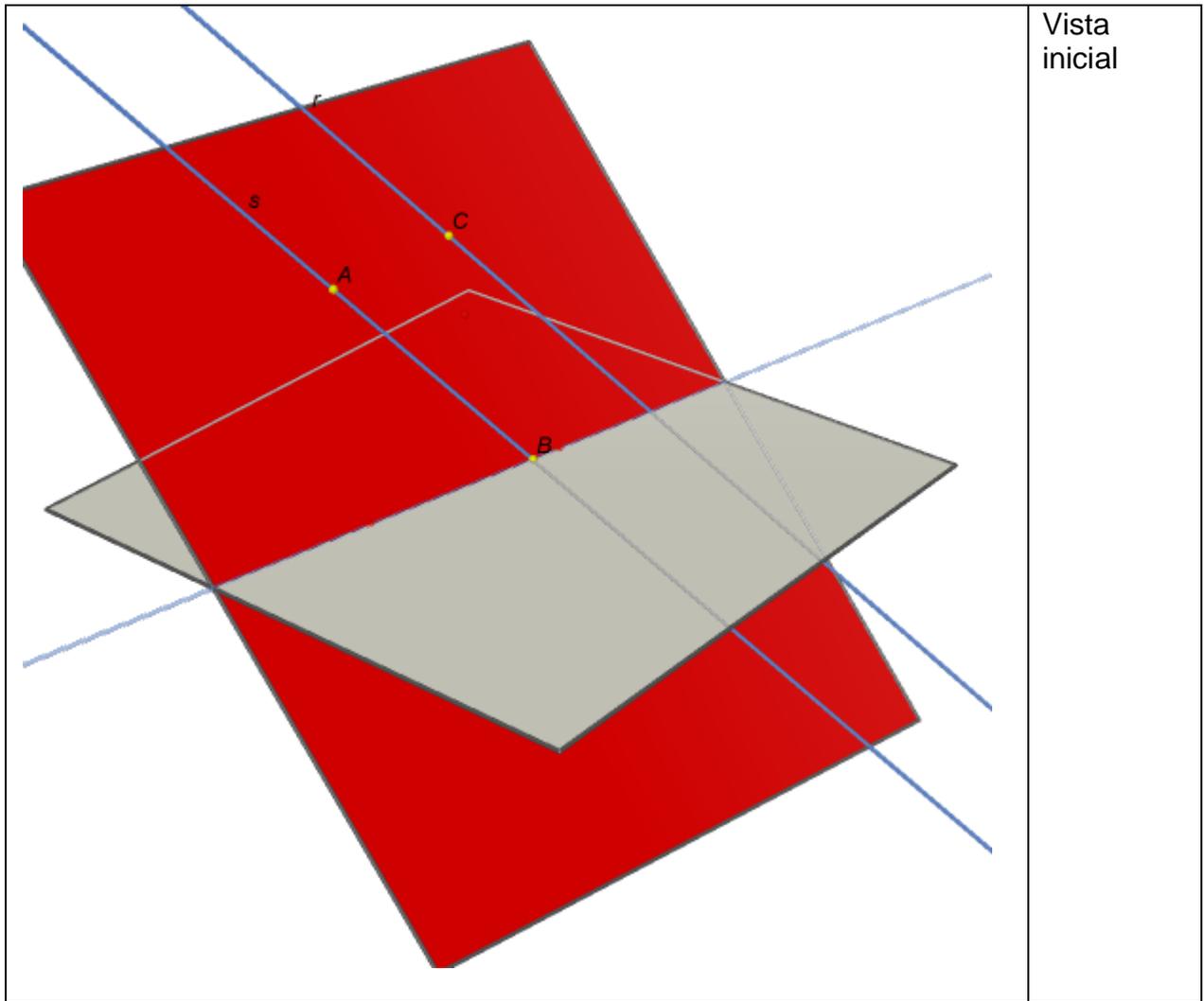
- Arrastrando sólo A.
- Arrastrando sólo B.
- Arrastrando sólo C.
- Arrastrando sólo la recta r.
- Arrastrando sólo la recta s.

- a) ¿Qué diferencia hay entre arrastrar A, B o C?

- b) ¿Arrastrando qué punto o puntos, no es posible que coincidan las rectas?

- c) ¿Con qué punto o puntos las rectas giran?

- d) ¿Con qué punto o puntos las rectas se desplazan pero no giran?



Vista inicial

Actividad: “Superponer.rectas.2”

Pareja:.....

Fecha:.....

En la pantalla hay dos rectas paralelas.

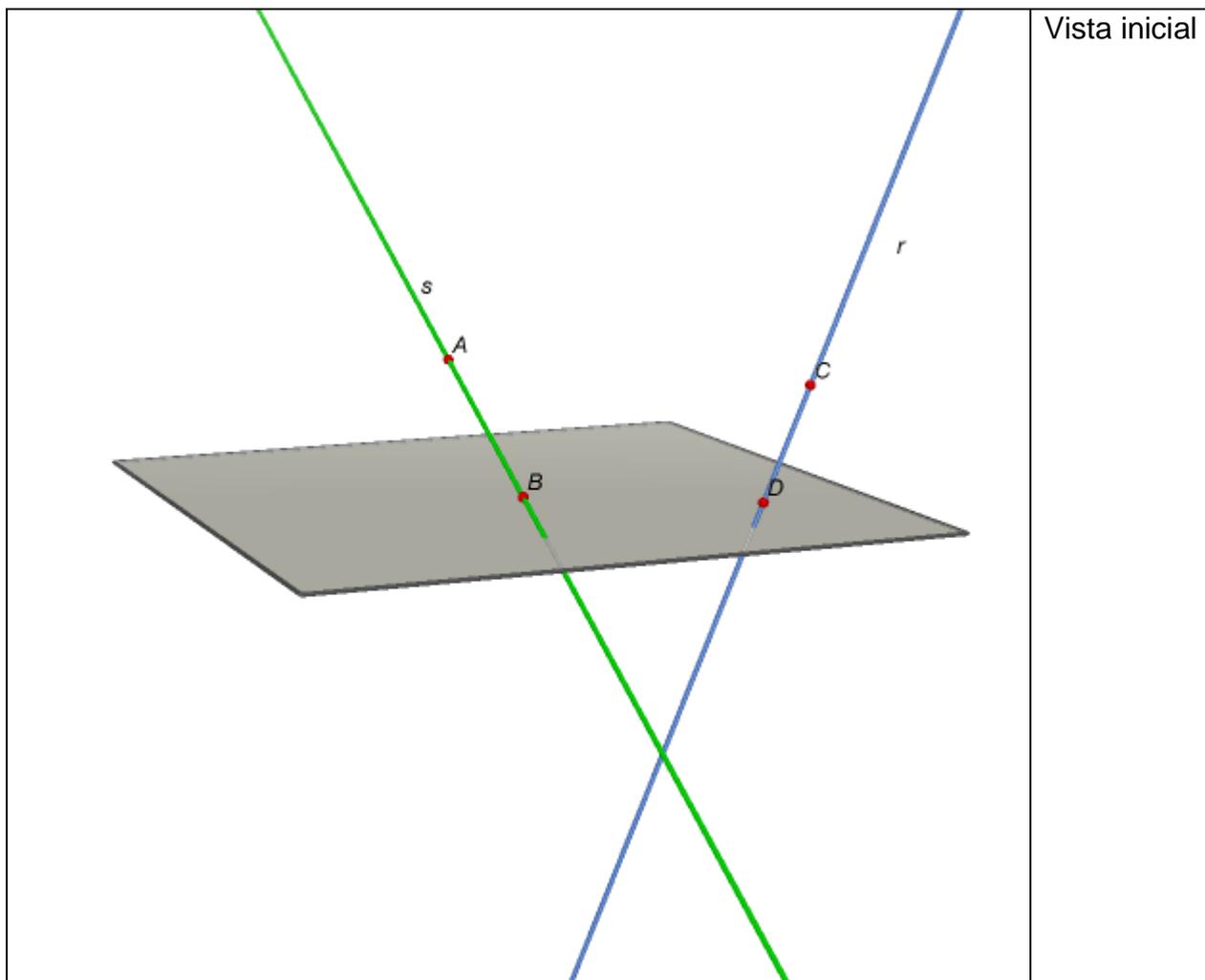
1. La actividad consiste en arrastrar y mover las rectas hasta conseguir que coincidan.

a) Antes de moverlas di qué plan vas a seguir.

Ahora muévelas.

b) ¿Has tenido que cambiar de plan? ¿Por qué?

c) ¿Qué dificultades has encontrado?



Vista inicial

En la pantalla hay un plano que corta una recta por el punto P.

1. Vas a mover el plano verde arrastrando sólo el punto P; pero antes de moverlo di por dónde crees que se va a mover el plano.

Ahora puedes arrastrarlo.

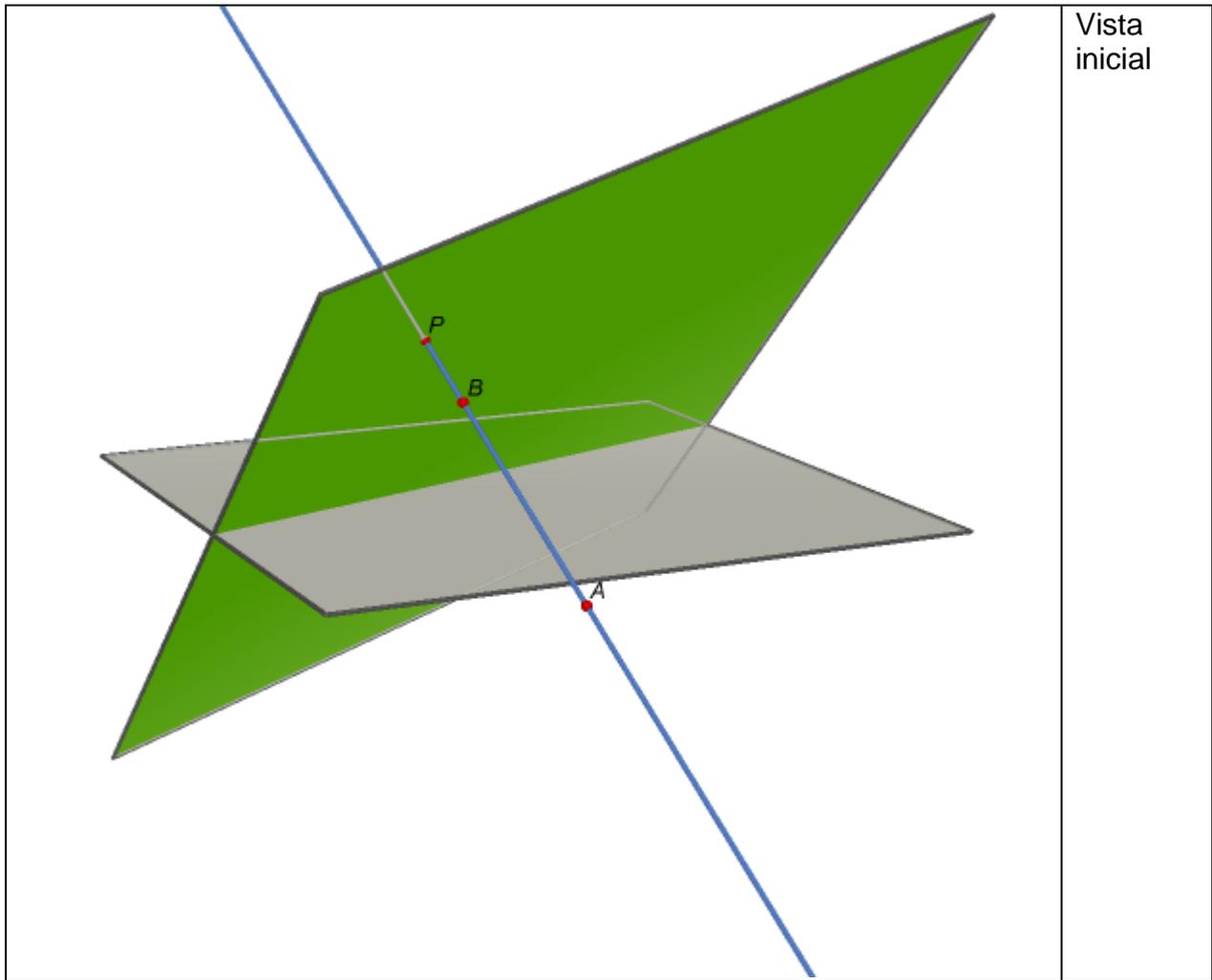
2. ¿Cómo crees que se va a mover el plano si arrastras los puntos A y B? ¿Girará? ¿Se trasladará?

Compruébalo. Recuerda arrastrar el punto B verticalmente.

¿Qué ocurre? ¿Coincide con lo que pensabas?

4. ¿Cómo crees que se va a mover el plano si arrastras la recta? ¿Girará? ¿Se trasladará?

Compruébalo. ¿Qué ocurre?



Vista inicial

Actividad: “Superponer.planos.1”

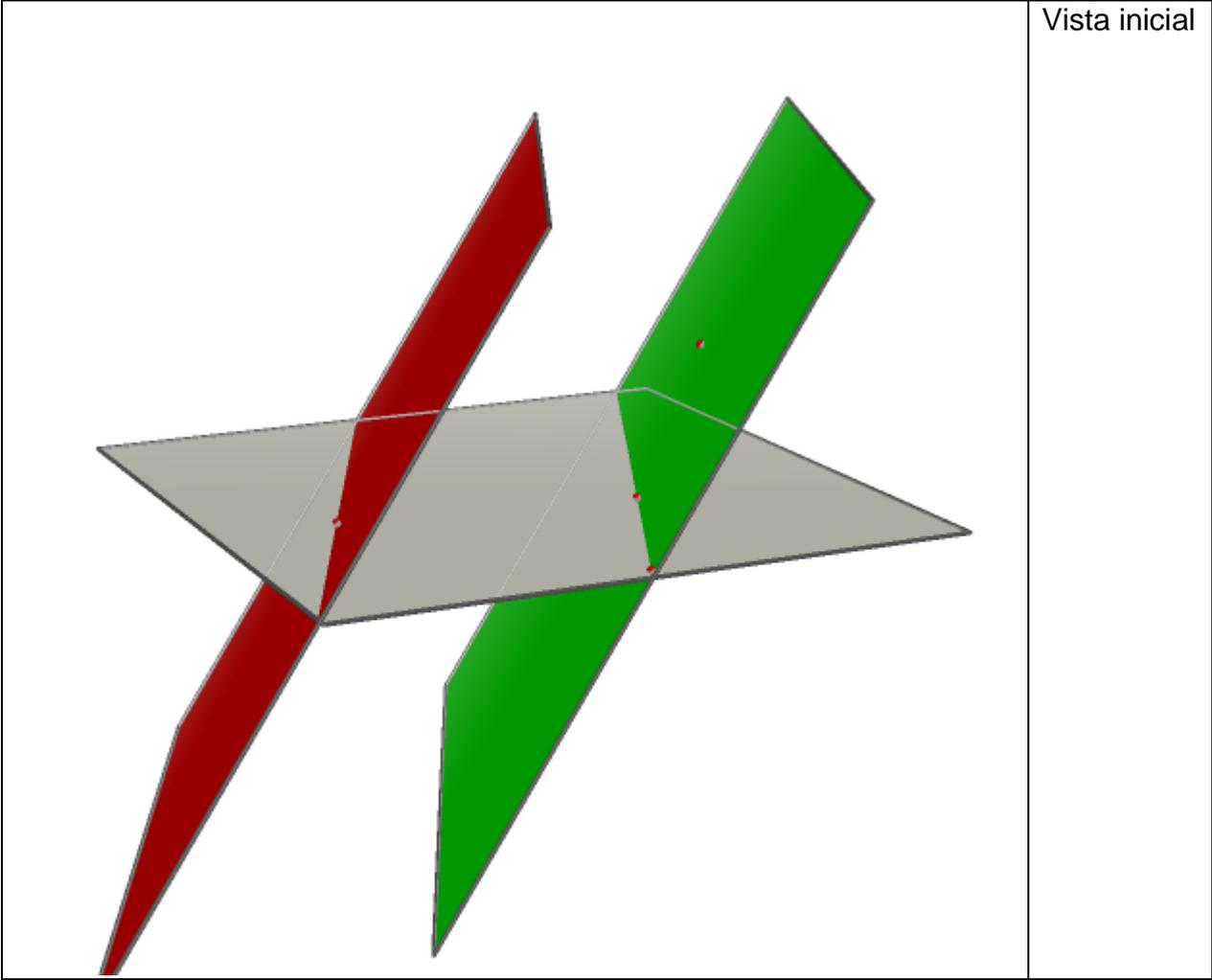
Pareja:.....

Fecha:.....

El plano rojo es paralelo al plano verde.

Debes arrastrar el plano verde con el mando “manipulación” para que coincida con el rojo.

¿Qué dificultades has encontrado?



Vista inicial

Actividad: “Superponer.planos.2”

Pareja:.....

Fecha:.....

En la pantalla hay dos planos que se cortan

1. Vas a moverlos hasta conseguir que se superponga; pero antes de moverlos explica el plan que vas a seguir.

Ahora puedes moverlos.

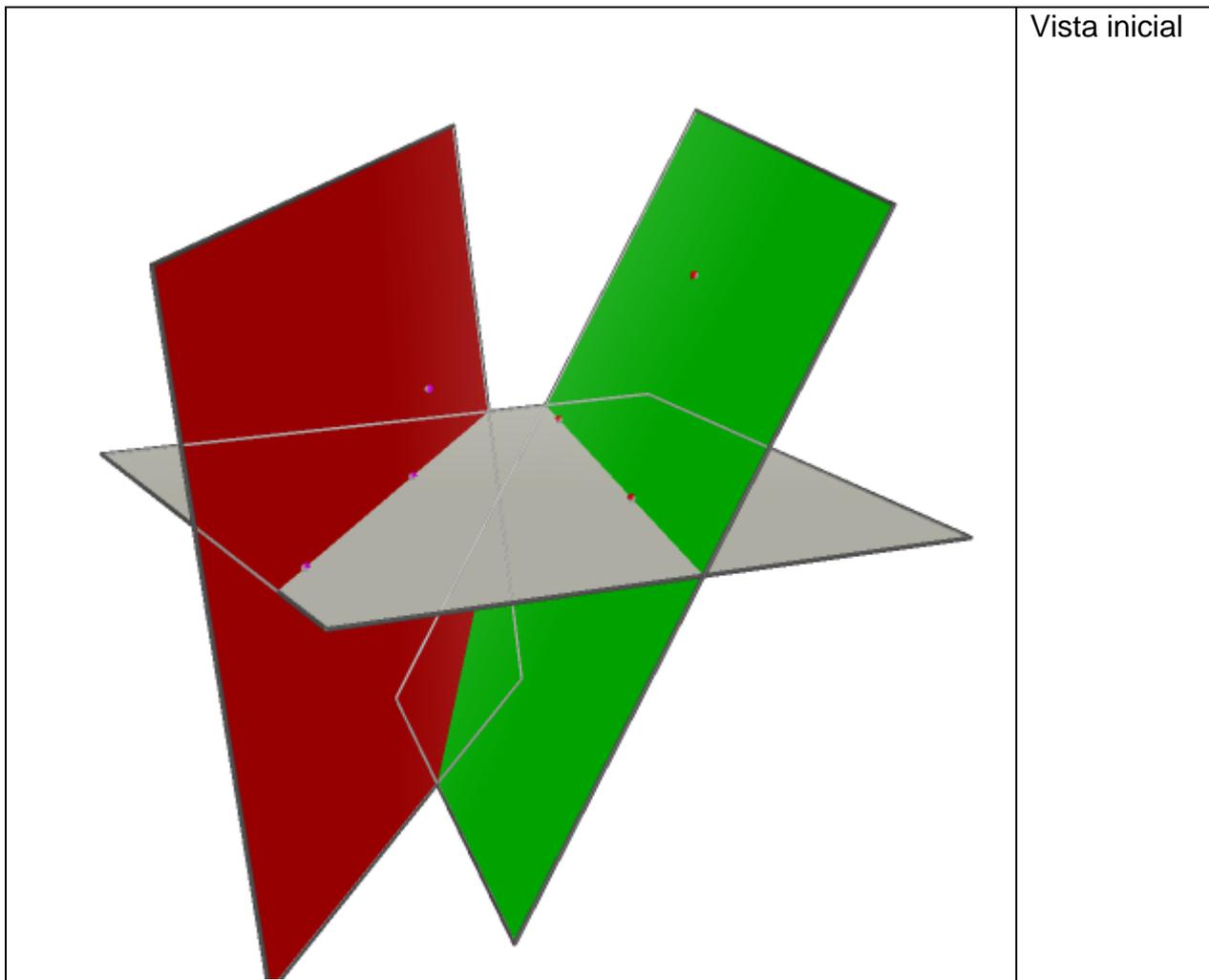
2. ¿Has tenido que cambiar de estrategia? ¿Por qué?

3. ¿Qué dificultades has tenido?

4. ¿Has usado los puntos marcados en rojo?

a) Si es que sí, ¿para qué?

c) Si es que no, arrástralos hasta que consigas superponer los planos.



Vista inicial

Actividad: “Superponer.planos.3”

Pareja:..... Fecha:.....

En la pantalla hay dos planos que se cortan.

1. Muéveles hasta conseguir que se superponga; pero antes de moverlos explica el plan que vas a seguir.

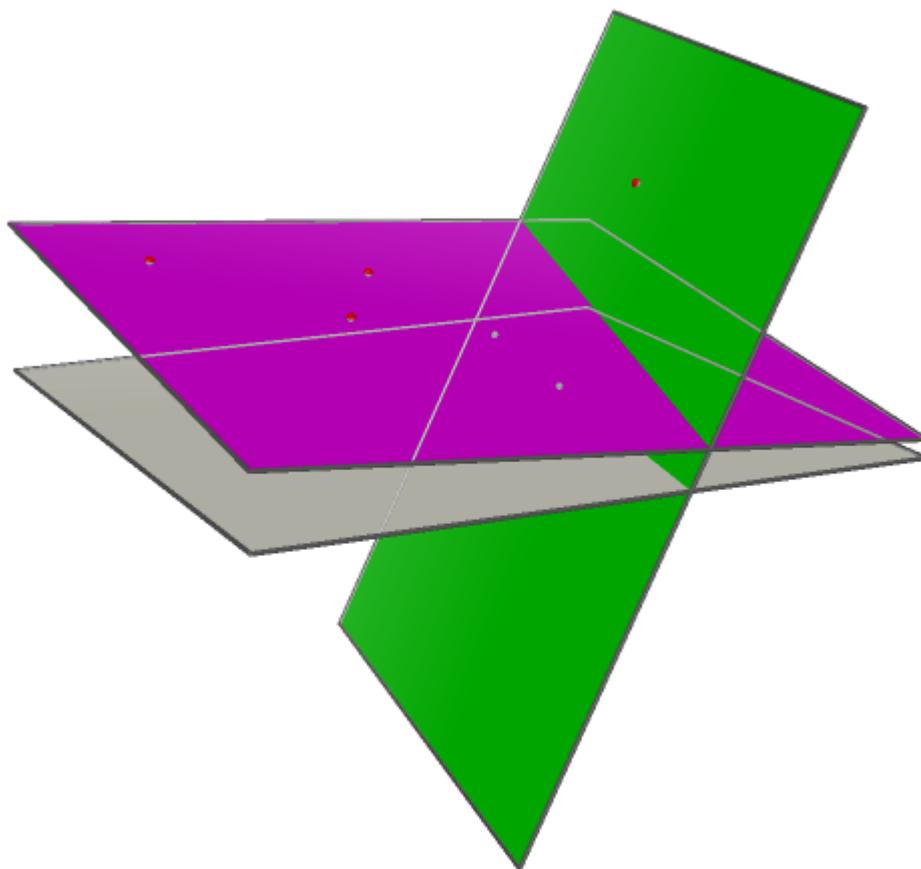
Ahora puedes moverlos.

2. ¿Has tenido que cambiar de estrategia? ¿Por qué?

3. ¿Qué dificultades has tenido?

4. ¿Has usado los puntos marcados en rojo? ¿Para qué? Si no los has utilizado, arrástralos ahora hasta conseguir que los planos se superpongan.

Vista inicial



Actividad: “Superponer.planos.4”

Pareja:..... Fecha:.....

En la pantalla hay dos planos.

1. Vas a mover el plano oscuro arrastrando sólo los puntos A, B y P hasta conseguir que se superponga con el plano verde; pero antes de moverlo explica el plan que vas a seguir.

Ahora puedes moverlo.

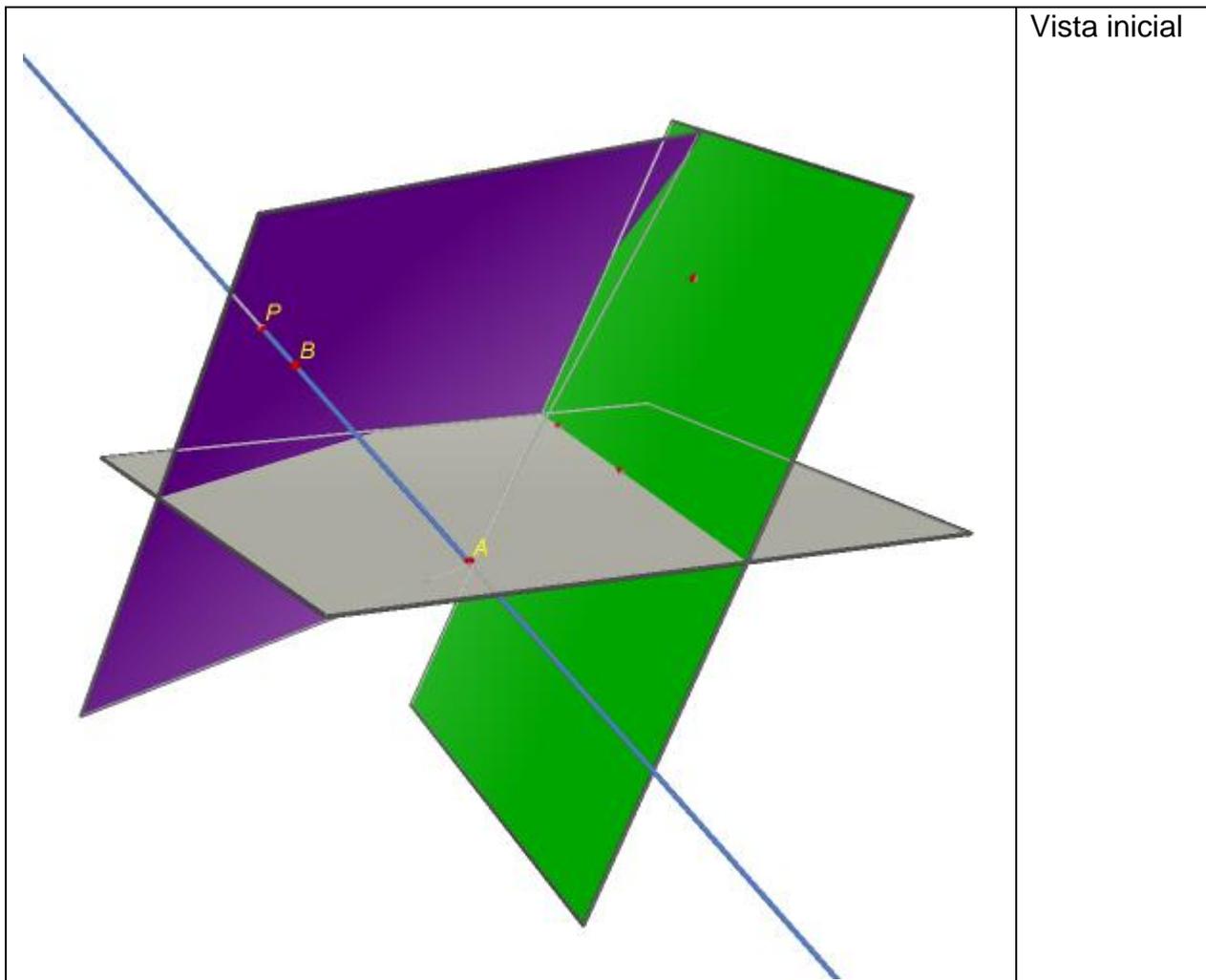
2. ¿Has tenido que cambiar de estrategia? ¿Por qué?

3. ¿Qué diferencias hay entre arrastrar el punto A, el punto B o el punto P?

a) ¿Qué movimientos puedes hacer con el punto B?

b) ¿Qué movimientos puedes hacer con el punto A?

c) ¿Qué movimientos puedes hacer con el punto P?



Vista inicial

Actividad: “Superponer.tetraedros.1”

Pareja:..... Fecha:.....

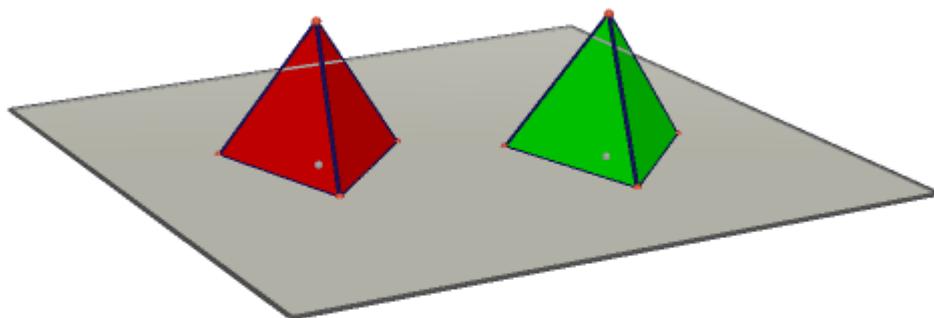
1. Vas a mover los tetraedros hasta conseguir superponerlos; pero antes de moverlos explica qué estrategia vas a seguir.

Ahora muévelos.

2. ¿Has tenido que cambiar de estrategia? ¿Por qué?

3. ¿Qué dificultades has tenido?

Vista inicial



Actividad: “Superponer.tetraedros.2”

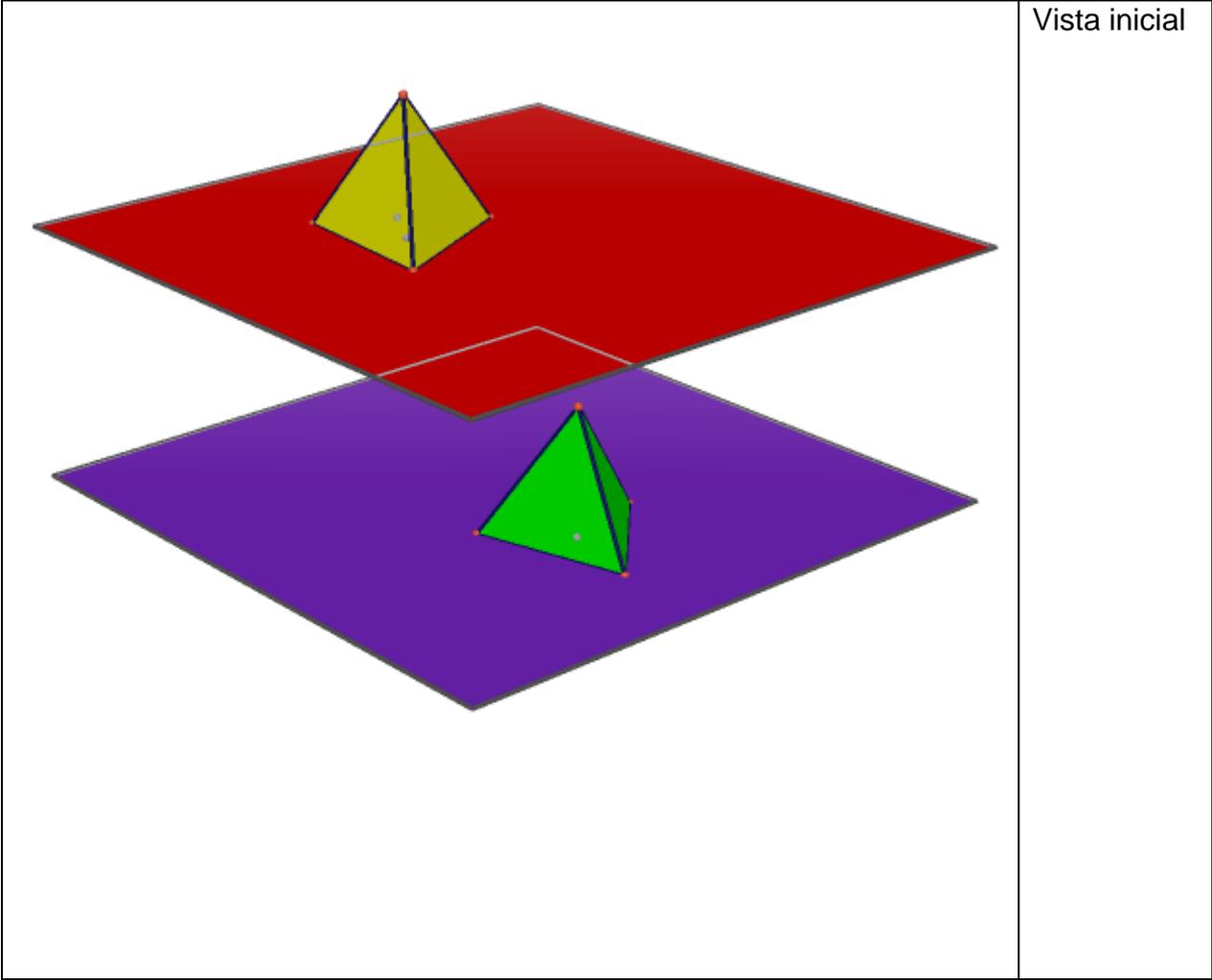
Pareja:..... Fecha:.....

1. Vas a mover los tetraedros hasta conseguir superponerlos; pero antes de moverlos explica qué estrategia vas a seguir.

Ahora muévelos.

2. ¿Has tenido que cambiar de estrategia? ¿Por qué?

3. ¿Qué dificultades has tenido?



Vista inicial

Actividad: “Tipos.de.puntos.4”

Pareja:.....

Fecha:.....

En la pantalla hay dos poliedros. Uno es imagen del otro respecto al plano rojo.

1. ¿Cómo se llaman este tipo de poliedros?

2. ¿Cuántas caras tienen?

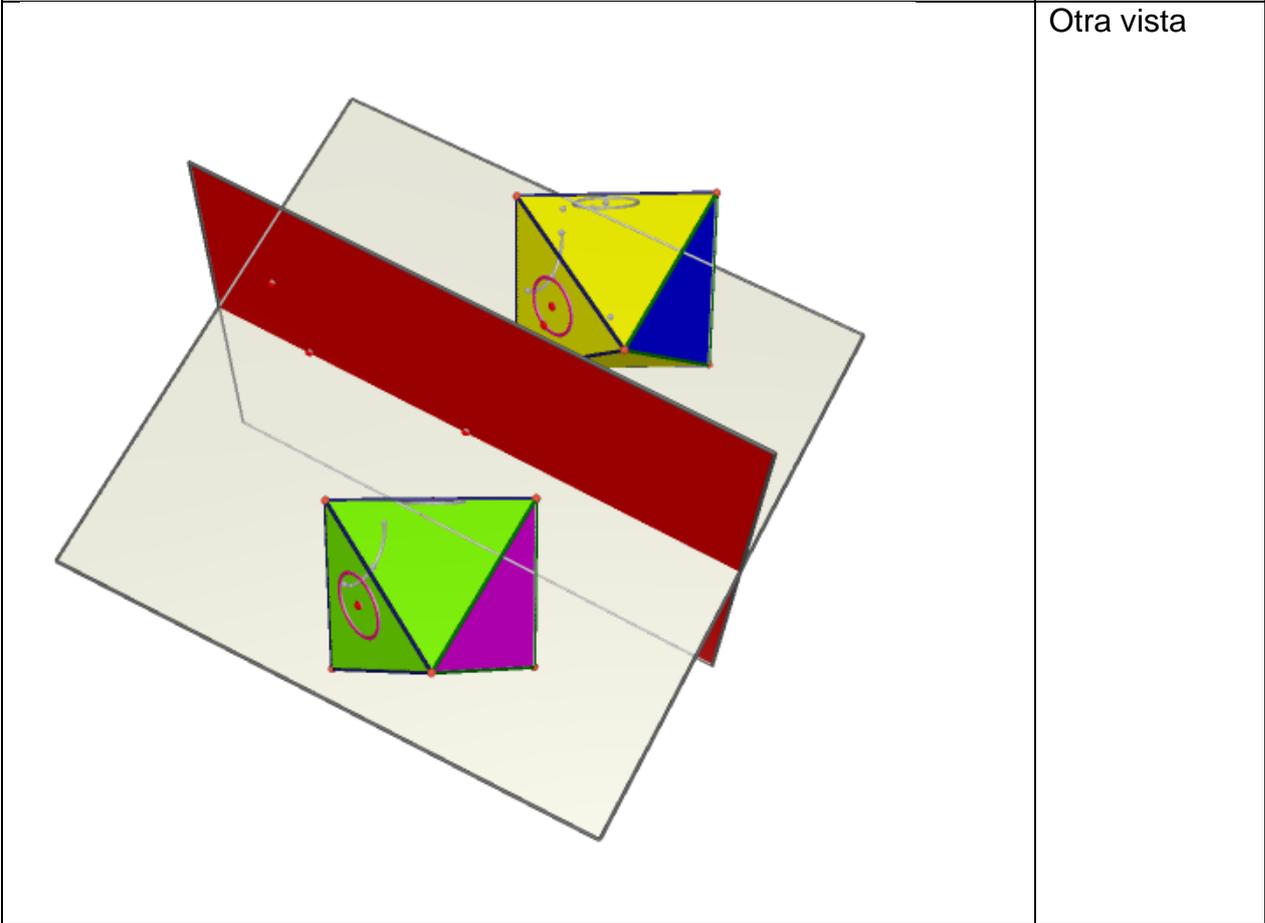
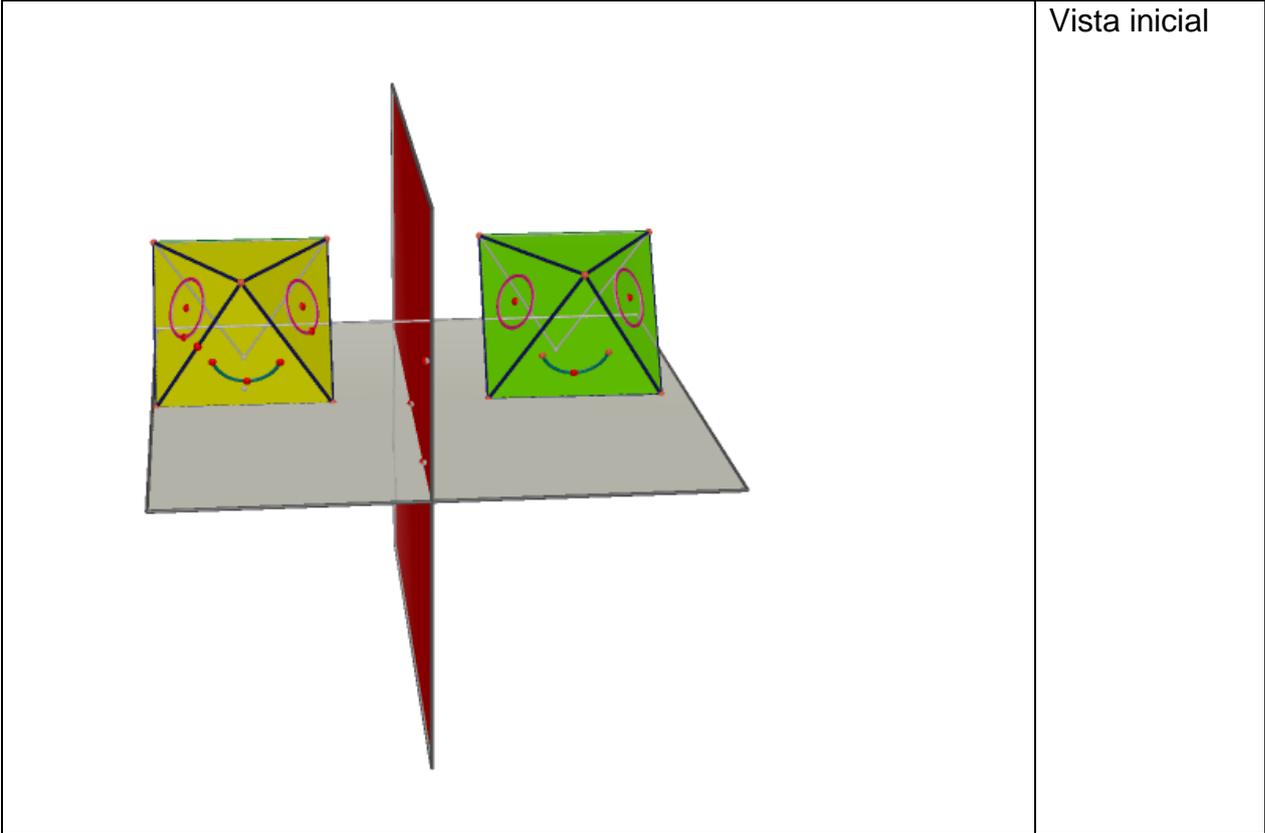
3. ¿El poliedro amarillo, tiene alguna cara de otro color? ¿Qué color es?

4. ¿Cuál de los dos poliedros es imagen del otro?

¿Cómo lo puedes saber?

5. Mueve el poliedro amarillo y mueve sus puntos. ¿Qué ocurre con el poliedro verde?

6. Ahora mueve el poliedro verde y sus puntos. ¿Qué ocurre? ¿Por qué crees que no se mueven?



Actividad: “Rectas paralelas”

Pareja:..... Fecha:.....1/2

1. ¿Cuándo dos rectas son paralelas?

En la pantalla hay dos rectas: la recta r (roja) y la recta s (verde).

2. Di si son paralelas, se cortan o se cruzan.

3. Piensa, ¿qué has de hacer para conocer si las rectas se cortan?

4. Ahora arrastra el punto Q hasta conseguir que la recta s sea paralela a la recta r

a) ¿Lo has conseguido?

b) ¿Qué dificultades has encontrado? ¿Has tenido que cambiar la estrategia que tenías pensado al principio? ¿A qué se ha debido?

c) ¿Qué has hecho para asegurarte que son paralelas?

Actividad: “Rectas paralelas”

Pareja:..... Fecha:.....2/2

d) Completa la tabla. Explica brevemente para qué te puede servir realizar las siguientes acciones cuando tratas de poner la recta verde paralela a la roja.

ACCIÓN	Sirve para:
Usar la “bola de cristal”	
Arrastrar el punto Q paralelo al plano base	
Arrastrar el punto Q verticalmente respecto al plano base	
Mover el plano base	
Colocar el plano base paralelo a la pantalla	
Colocar el plano base perpendicular a la pantalla	

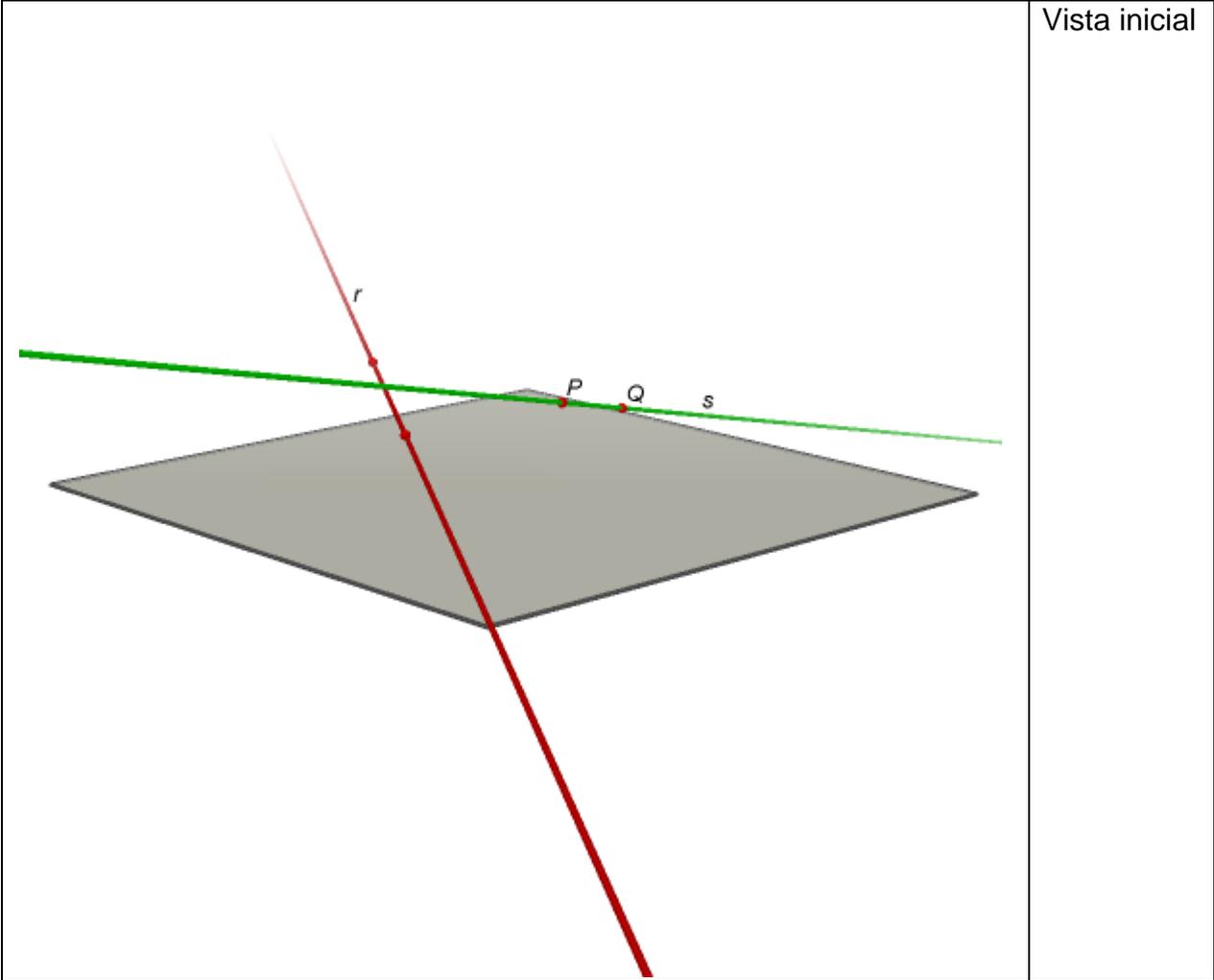
5. ¿Cuántas rectas paralelas a la recta r se podrían trazar que pasen por el punto P ? Justifica tu respuesta.

6. Con el mando “Paralela” traza la recta paralela a r que pase por P . Llámala t .

a) ¿Coincide con la posición que has dado a la recta s ?

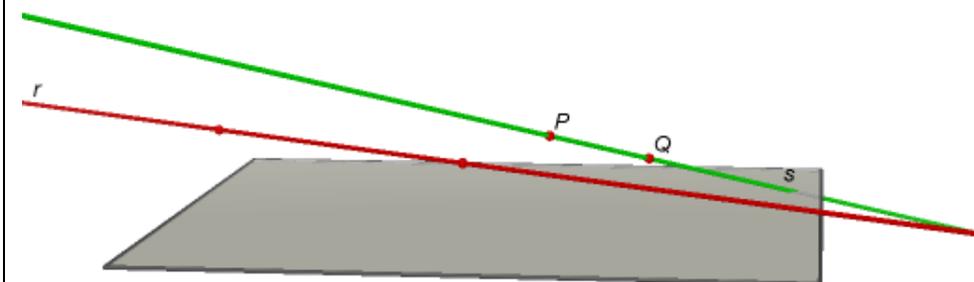
b) Ahora arrastra el punto Q hasta que coincida con la recta creada por el mando “Paralela”.

c) ¿Por qué crees que la posición s no coincidía con la de t ? Explícate.



Vista inicial

Otra vista



Actividad: “Plano.recta.paralelos”

Pareja:..... Fecha:.....

En la pantalla hay dos rectas: la recta r (roja) y la recta s (azul).

1. ¿Son paralelas?
2. Comprueba que si son paralelas cambiando el punto de vista con la función “bola de cristal”. ¿A qué conclusión llegas?

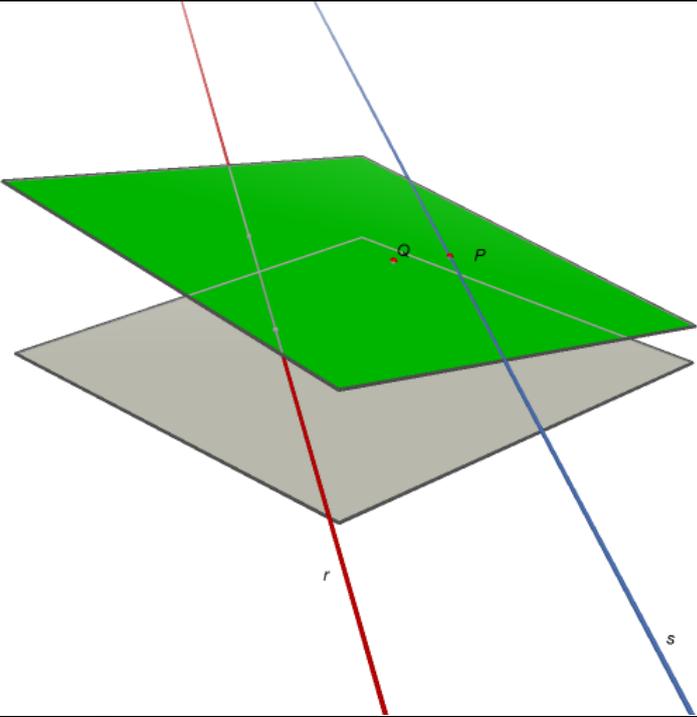
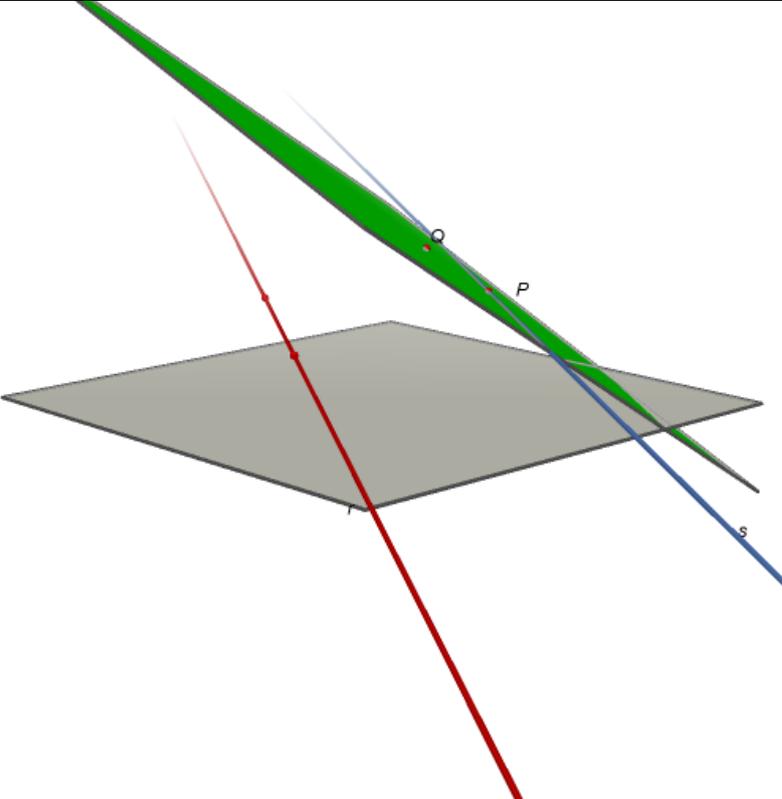
3. También hay un plano verde que contiene a la recta s (azul).

¿Qué posición tiene respecto a la recta r: paralelo, perpendicular, se cortan?
Compruébalo usando la función “bola de cristal”.

4. Arrastra el punto Q en diferentes direcciones: horizontales y verticales.
 - a. ¿Cómo cambian las posiciones del plano verde respecto a la recta r?
 - b. Di cuál de estas afirmaciones son ciertas y justifica tu respuesta:
 - A veces son paralelos, a veces no; según la posición de Q.
 - Nunca son paralelos.
 - El plano nunca corta a la recta roja.
 - Hay una posición en la que el plano es perpendicular a la recta roja.
 - La posición del plano verde respecto a la recta r siempre es paralela, independientemente de la posición de Q.
 - Hay una posición de Q en la que el plano verde contiene a la recta roja.

5. ¿De cuántas maneras se puede colocar el plano verde para que sea paralelo a la recta r?

6. ¿Cuántos planos paralelos a la recta r y que pasen por el punto P se podrían trazar? Justifica tu respuesta.

 <p>A 3D perspective view showing a green rectangular plane positioned above a gray rectangular plane. A red line labeled 'r' and a blue line labeled 's' intersect the gray plane. On the green plane, two points are marked: 'Q' (a red dot) and 'P' (a black dot).</p>	<p>Vista inicial</p>
 <p>A 3D perspective view showing the green plane tilted downwards, intersecting the gray plane. The red line 'r' and blue line 's' are visible. The points 'Q' and 'P' are now on the green plane, with 'Q' being a red dot and 'P' a black dot.</p>	<p>Otra vista</p>

Actividad: “Plano.recta.perpendiculares”

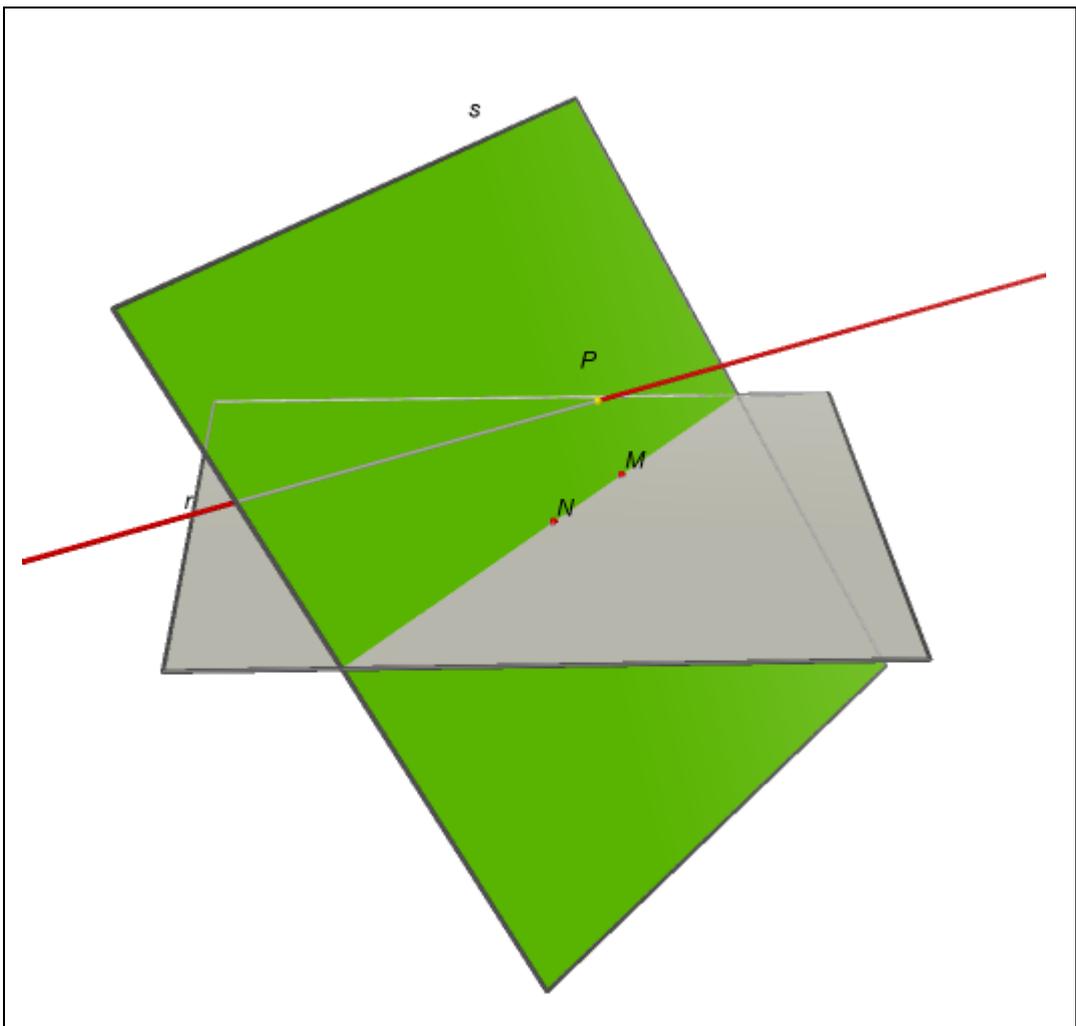
Pareja:..... Fecha:.....

1. ¿Cuándo una recta y un plano son perpendiculares?

En la pantalla hay una recta r (roja) y un plano s (verde) que la corta en el punto P (amarillo).

2. Vas a arrastra los puntos M y N hasta conseguir que el plano s (verde) sea perpendicular a la recta r .
 - a. ¿Lo has conseguido?
 - b. ¿Qué dificultades has encontrado?

 - c. ¿Qué has hecho para asegurarte que es perpendicular?
3. ¿De cuántas maneras se puede colocar el plano verde para que sea perpendicular a la recta r (sin mover el punto P)? Justifica tu respuesta
4. ¿Cuántos planos perpendiculares a la recta r y que pasen por el punto P se podrían trazar? Justifica tu respuesta
5. Con el mando “Perpendicular” traza el plano perpendicular a r que pase por P . Llámalo t .
 - a) ¿Coincide con la posición que has dado al plano s ?
 - b) Ahora arrastra los puntos M y N hasta que coincida con el plano creado por el mando “Perpendicular”.
 - c) ¿Por qué crees que la posición de s no coincidía con la de t ? Explícate.



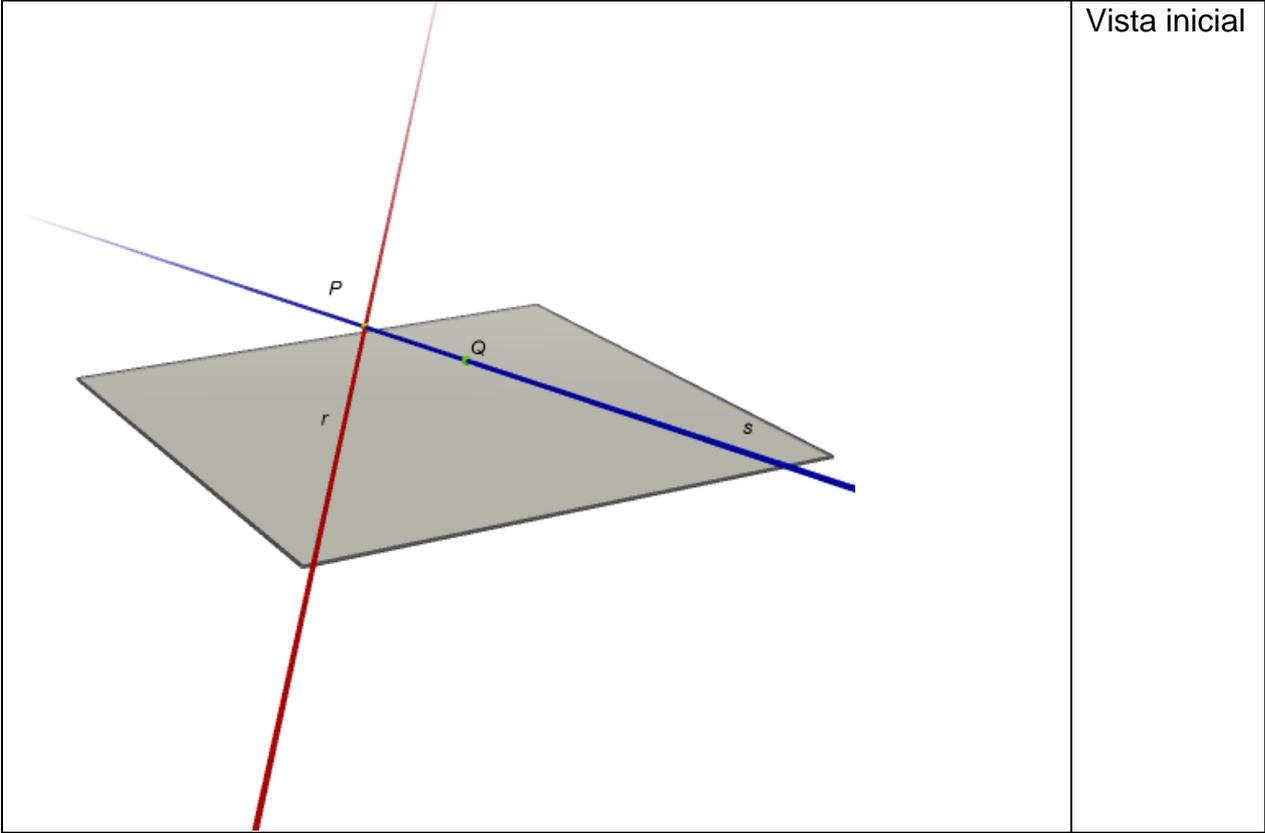
Actividad: “Recta.recta.perpendiculares”

Pareja:..... Fecha:.....

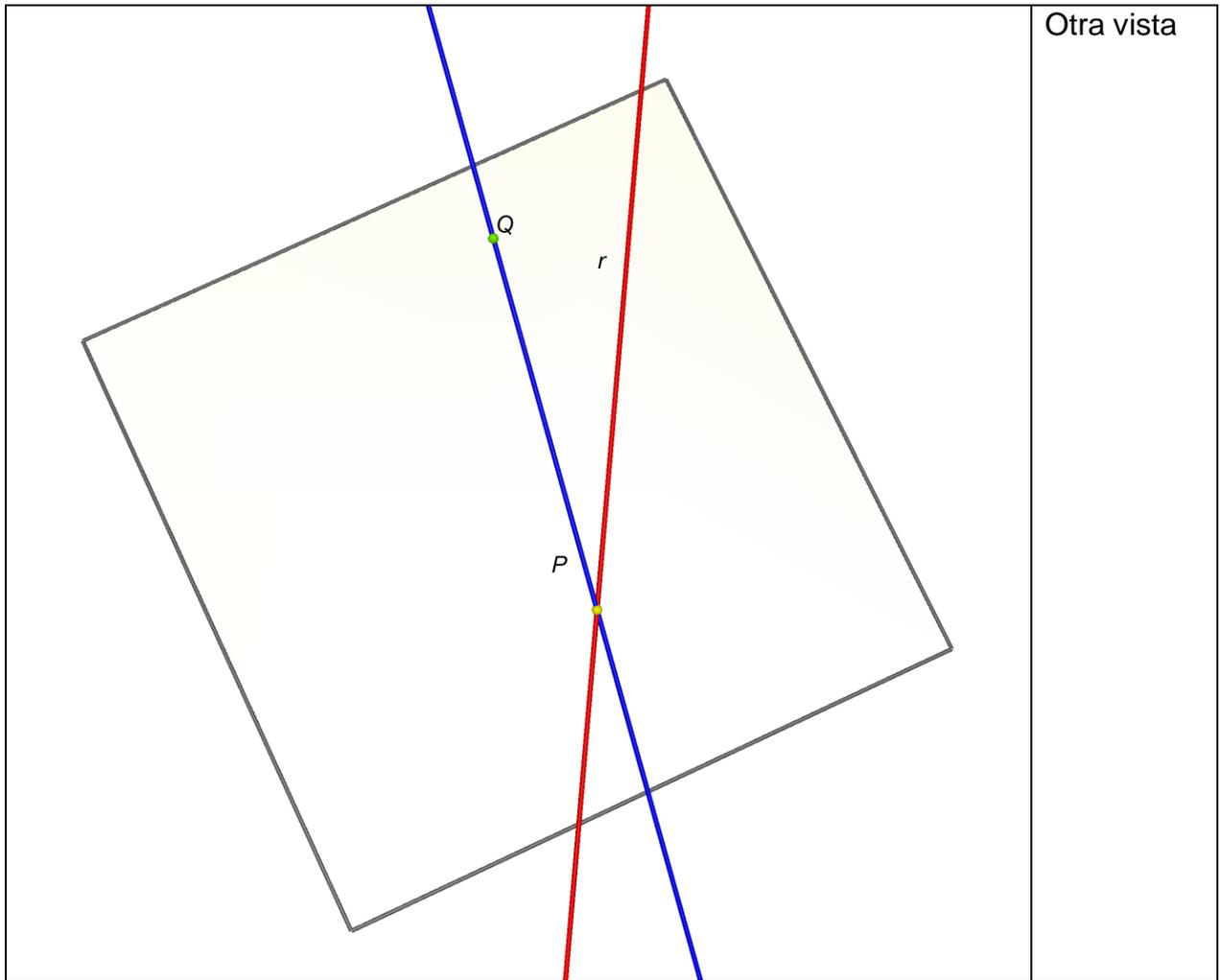
1. ¿Cuándo dos rectas son perpendiculares?

En la pantalla hay dos rectas: la recta r (roja) y la recta s (azul) que se cortan en el punto P.

2. ¿Son perpendiculares?
3. Arrastra el punto Q hasta conseguir que la recta s sea perpendicular a la recta r.
 - a) ¿Puedes encontrar otras posiciones de Q en las que s sea perpendicular a r?
 - b) Prueba moviendo verticalmente Q.
4. ¿Cuántas rectas perpendiculares a la recta r se podrían trazar que pasen por el punto P? Justifica tu respuesta.
5. Ahora utiliza el mando “Ángulo” para marcar el ángulo entre los puntos Q, P y N. Ayúdate del ángulo para conseguir que la recta s sea perpendicular a la recta arrastrando el punto Q.
6. Con el mando “Perpendicular” crea el plano perpendicular a la recta r (roja) que pasa por el punto P, y llámalo t. Arrastra el punto Q dentro de este plano (vertical y horizontalmente) y observa los valores del ángulo. ¿Qué conclusión sacas?
7. ¿Dónde se encuentran todas las rectas perpendiculares a la recta r (roja) y que pasan por el punto P? Justifica tu respuesta.



Vista inicial



Otra vista

Actividad: “Ángulo.recta.plano”

Pareja:.....

Fecha:.....

En la pantalla hay dos rectas: la recta r (roja) y la recta s (azul). También está marcado el ángulo que forman.

1. Utiliza la función “bola de cristal” para asegurarte en tus respuestas

a) ¿Qué ángulo forman las rectas?

b) Arrastra el punto B de la recta s.

¿Qué ocurre con el ángulo?

¿Cuánto mide el mayor ángulo que puedes conseguir?

¿Y el menor?

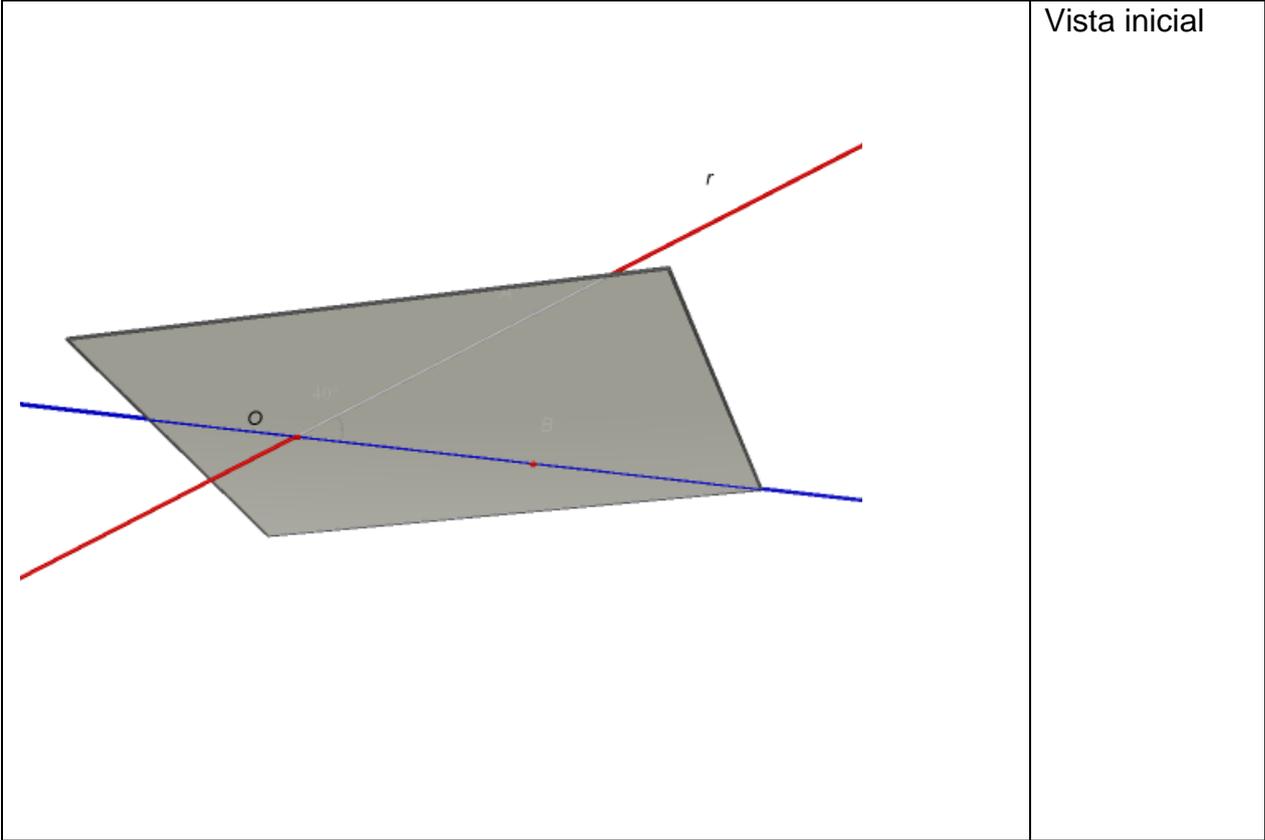
c) De todos esos posibles ángulos, ¿cuál dirías es el ángulo entre la recta r y el plano?

Explica por qué piensas eso.

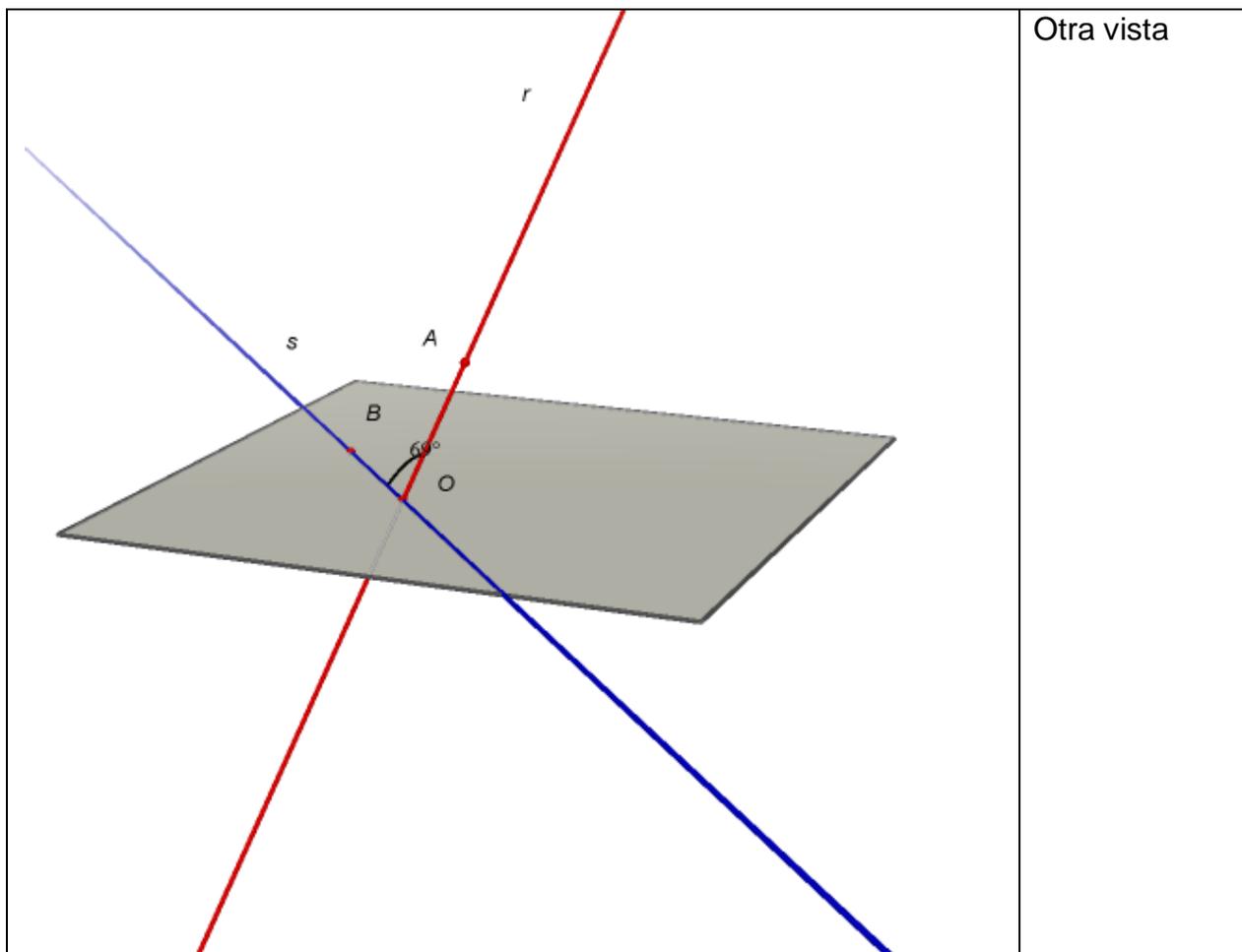
2. Con el mando “Ángulo” marca el ángulo entre la recta r y el plano base.

¿Coincide con el ángulo que tú pensabas?

3. ¿Cómo definirías el ángulo entre una recta y un plano que se cortan?



Vista inicial



Otra vista

ANEXO II. RETROALIMENTACIÓN. MENÚS Y MENSAJES

El programa Cabri 3D se caracteriza por tener una aplicación que “interacciona” con el usuario por medio de un interfaz gráfico. Todas las informaciones en el interface son por consecuencia de naturaleza gráfica y aparecen bajo forma de imágenes y de textos. Cabri 3D es concebido para representar lo que aparece en el universo de la geometría espacial: objetos geométricos (desde puntos de dimensión 0 a poliedros de dimensión 3), propiedades geométricas y transformaciones geométricas. Cada uno de estos elementos geométricos tiene varias representaciones en el interface: en las barras de herramientas, en los menús, en los mensajes contextuales y en la pantalla.

Las barras de herramientas.

Utilizando la terminología del Manual de Usuario, el programa ofrece herramientas: unas más dedicadas a la gestión y a la edición de los archivos, y otras a la creación y manipulación de objetos que representan objetos geométricos. A estas segundas herramientas, el Manual de Usuario las denomina herramientas de construcción y de manipulación. Todas las herramientas están agrupadas en dos barras. La dedicada más a la gestión el archivo y a su edición, la llamaremos barra de herramientas del programa; y la otra, dedicada específicamente a las herramientas de construcción y de manipulación, la llamaremos barra de menús de herramientas (figura II.1).



Figura II.1.

La barra de menús de herramientas presenta las herramientas agrupadas en menús (figura II.2). Esta agrupación puede ser modificada por el usuario. Por defecto, hay diez menús; y cada uno de ellos tiene entre dos y nueve herramientas. Cada herramienta está representada por un icono y un texto que le da nombre. Estas herramientas son herramientas que crean o manipulan figuras geométricas (desde puntos de dimensión 0 a poliedros de dimensión 3), o transformaciones geométricas.

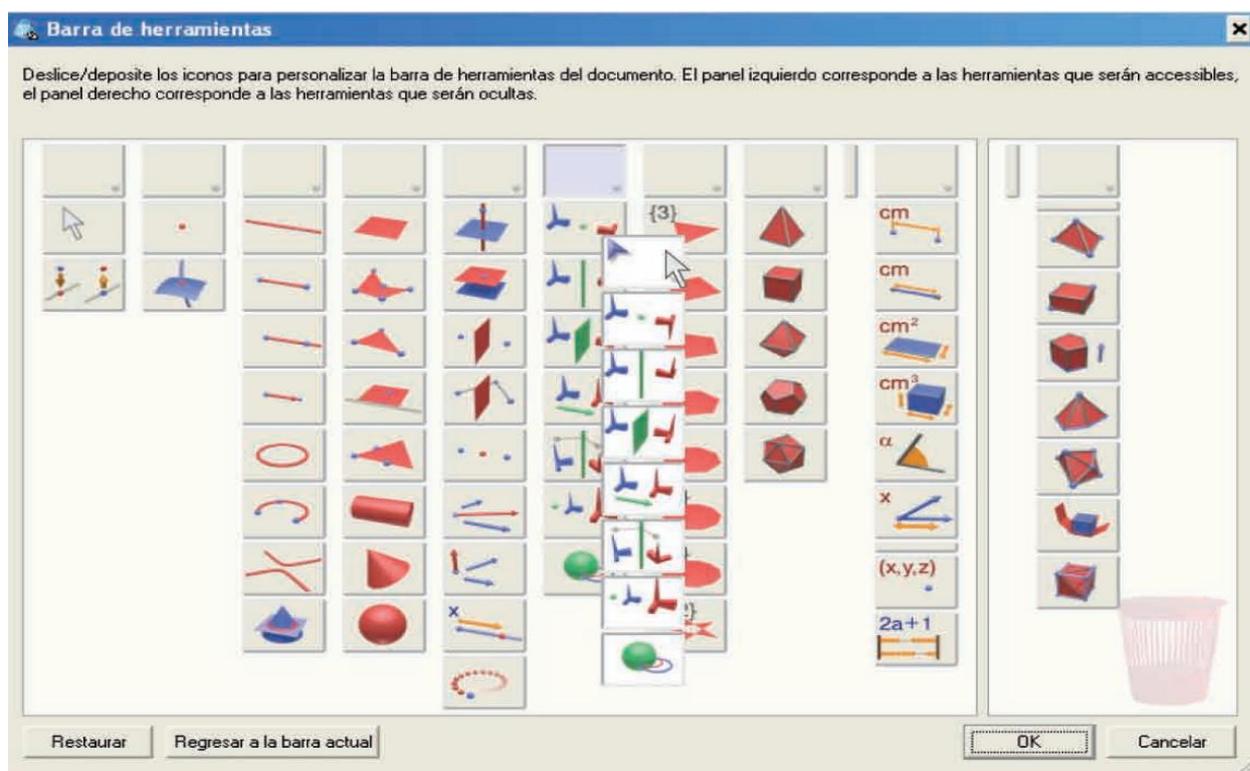


Figura II.2.

A continuación detallamos las herramientas y los elementos de geometría asociados a ellos, presentes por defecto en la barra de herramientas de menús de herramientas (tabla II.1 y tabla II.2). Los menús están numerados según su colocación por defecto en la barra de menús de herramientas o, simplemente, barra de herramientas.

Tabla II.1. Barra de Menús de Herramientas
Objetos Geométricos y Acciones sobre ellos en Cabri 3D

TIPOS DE OBJETOS	DIMENSIÓN	TIPOS DE ELEMENTOS	OBJETOS GEOMÉTRICOS	NOMBRE DE LA HERRAMIENTA	Nº Menú
Elementos Geométricos	1 dimensión	puntos	punto	Punto	2
	2 dimensiones	líneas	recta	Recta	3
			segmento	Segmento	3
			semirrecta	Semirrecta	3
			circunferencia	Circunferencia	3
			arco	Arco	3
			cónica	Cónica	3
		vectores	vector	Vector	3
		planos	plano	Plano	4
			semitplano	Semiplano	4
			sector	Sector	4
		polígonos	polígono	Polígono	4
			triángulo	Triángulo	4
			triángulo equilátero	Triángulo equilátero	7
			cuadrado	Cuadrado	7
			pentágono regular	Pentágono regular	7
			hexágono regular	Hexágono regular	7
			octógono regular	Octógono regular	7
			decágono regular	Decágono regular	7
			dodecágono regular	Dodecágono regular	7
	pentagrama	Pentagrama	7		
	3 dimensiones	cuerpos redondos	esfera	Esfera	4
			cilindro	Cilindro	4
			cono	Cono	4
		poliedros	tetraedro	Tetraedro	8
			caja XYZ	Caja XYZ	8
			prisma	Prisma	8
pirámide			Pirámide	8	

			poliedro convexo	Poliedro convexo	8
			cubo	Cubo	9
			octaedro regular	Octaedro regular	9
			dodecaedro regular	Dodecaedro regular	9
			icosaedro regular	Icosaedro regular	9

Tabla II.2. Barra de Menús de Herramientas Objetos Geométricos y Acciones sobre ellos en Cabri 3D					
TIPOS DE OBJETOS	DIMENSIÓN	TIPOS DE ELEMENTOS	OBJETOS GEOMÉTRICOS	NOMBRE DE LA HERRAMIENTA	Nº Menú
Operaciones Geométricas	genéricas	intersección	puntos de intersección	Puntos de intersección	2
			curva de intersección	Curva de intersección	3
		perpendicularidad	rectas y planos perpendiculares	Perpendicular	5
			paralelismo	rectas y planos paralelos	Paralela
		medio	punto medio	Punto medio	5
		mediador	plano mediador	Plano mediador	5
		bisección	plano bisector	Plano bisector	5
		trayectoria	trayectoria	Trayectoria	5
		medidas	distancia	Distancia	10
			longitud	Longitud	10
			área	Área	10
			volumen	Volumen	10
			ángulo	Ángulo	10
			calculadora	Calculadora	10
		coordenadas o ecuación	transferencia de medida	Transferencia de medida	4
			coordenadas	Coord. o ecuación	10
	ecuación				
	específicas	poliedros	abrir poliedro	Abrir poliedro	8
			recorte poliedro	Recorte poliedro	8
		vectores	suma de vectores	Suma de vectores	5
producto escalar			Producto escalar	10	
producto vectorial			Producto vectorial	5	

		transformaciones	simetría central	Simetría central	6
			simetría axial	Simetría axial	6
			simetría plana	Simetría plana	6
			traslación	Traslación	6
			rotación	Rotación	6
			homotecia	Homotecia	6
			inversión	Inversión	6

Los objetos y las transformaciones geométricas disponibles son básicamente los que se estudian en la geometría del currículo de educación secundaria. No obstante, no están presentes otros elementos geométricos que también se estudian o se pueden estudiar en educación secundaria, como por ejemplo: líneas curvas (espirales, hélices, etc.), tangentes y el resto de las cuádricas.

En la disposición por defecto de las herramientas en los menús, llama la atención lo siguiente:

- En el menú 4, conviven planos, polígonos y cuerpos redondos
- Las operaciones con vectores están separadas en dos menús dedicados a operaciones genéricas: 5 y 10.
- La herramienta “Transferencia de medida” está en el 5 en lugar de en el 10 (donde están las herramientas de medidas).
- La herramienta “Trayectoria” está en el menú 5 con herramientas con los que no tienen ninguna relación

Los menús contextuales.

Cabri 3D ofrece diferentes menús contextuales que permiten realizar ciertas acciones sin necesidad de ir a las barras de herramientas. Para acceder a ellos, basta con colocar el cursor del ratón sobre lo que Manual de Usuario denomina ambiente: objeto, trayectoria, zona de texto, etc.; y hacer clic brevemente en el botón derecho del ratón. Para el caso en el que el ambiente sea un objeto, el menú contextual ofrece ciertas funciones de edición y otras que permiten modificar sus atributos gráficos: color, tamaño, estilo, etc.

La ventana de Ayuda

La ventana de Ayuda se despliega a la derecha de la pantalla si se pulsa la tecla F1. La ayuda describe las funciones asociadas a la herramienta seleccionada. Las posibles acciones que se

pueden hacer con la herramienta aparece en dos columnas: en la primera columna, una descripción breve; en la segunda, dibujos en perspectiva ejemplarizantes.

Mensajes asociados al cursor y a la ejecución de las herramientas.

El interfaz “interactúa” con el usuario cuando éste mueve el cursor por la Zona de Trabajo. Una forma de esta interacción es a través de mensajes que aparecen en forma de cuadros de textos junto al cursor. Si, por ejemplo, el usuario tiene seleccionada la herramienta “Manipulación” y

el cursor pasa por un punto aparece el mensaje este punto y análogamente con cualquier otro objeto. Si tiene seleccionada alguna herramienta (distinto al de “Manipulación”) aparecen textos que guían en la ejecución del mismo. Por ejemplo, si tiene seleccionada la herramienta “Recta” y se quiere crear una recta que pase por dos puntos creados en el plano base, al posicionar el cursor sobre el primer punto aparece el mensaje

Recta que pasa por este punto...

. Al marcar sobre el punto aparece el mensaje

...y un nuevo punto (sobre el plano)

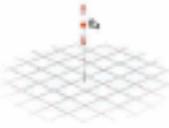
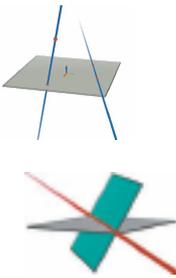
si el cursor está sobre el plano. Cuando se posiciona el cursor sobre el segundo punto aparece el mensaje

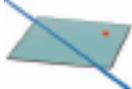
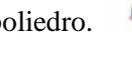
...y este punto.

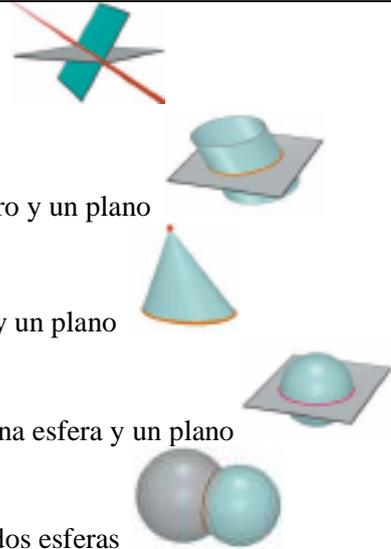
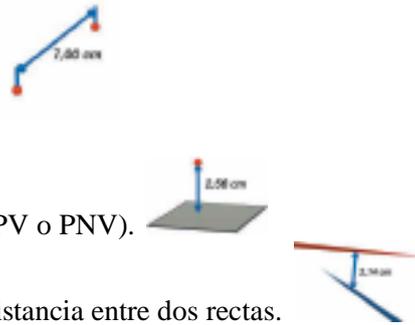
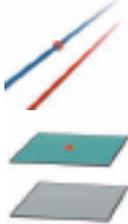
ANEXO III. LOS ELEMENTOS, LAS FUNCIONES Y LAS HERRAMIENTAS DEL PROGRAMA UTILIZADOS EN LAS ACTIVIDADES.

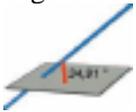
ELEMENTO	COMENTARIO	TIPO DE COMENTARIO
Zona de Trabajo	La Zona de Trabajo consiste en la región de la pantalla donde se puede crear, ver y manipular objetos.	Prestaciones
Plano base	<p>Según el Manual del Usuario (páginas 11 y 12) el propósito y la naturaleza del plano base son los siguientes: “Para manejar bien el funcionamiento de Cabri 3D, es importante comprender el concepto de los planos. En un primer momento, cada nuevo objeto que construya con Cabri 3D estará sobre un plano, que llamaremos el plano de base.”</p> <p>La superficie gris al centro es lo que llamaremos la parte visible (PV) del plano de base. Todas las construcciones que haga ahora, sobre la PV o en el exterior, estarán necesariamente puestas sobre ese plano de base*.”</p> <p>“[...] el prolongamiento de esta PV, [...] llamaremos la parte no visible (PNV).”</p>	Descripción por el Manual de usuario
	<p>El plano base es un plano con características especiales respecto al resto de planos que se pueden crear con el programa:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Es un plano de referencia para todas las actividades que se realizan en el interfaz. • Por defecto, cada nuevo objeto que se crea se posiciona sobre este plano. • Los movimientos del plano base están limitados a rotaciones con la función “bola de cristal”. <p>El resto de características son comunes al resto de planos que se pueden construir con Cabri 3D. Entre éstas caben destacar:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Se representa mediante una superficie cuadrada, que por defecto es de color gris. Esta superficie se la denomina parte visible (PV) del plano. • La prolongación de dicha superficie (que no viene representada) es la parte no visible (PNV) del plano. 	Características y descripción
	El plano base no se puede mover salvo con la función “bola de cristal”. Mientras que el resto de planos y superficies es posible, en principio, arrastrarlos directa o indirectamente con la herramienta Manipulación, el plano base sólo es posible moverlo con la función “bola de cristal”.	Limitaciones

ELEMENTO	COMENTARIO	TIPO DE COMENTARIO
Función “bola de cristal”	<p>Según el Manual del Usuario (pág.12): “Esta función le permite visualizar su Zona de Trabajo desde diferentes ángulos de vista, como si esta estuviera en una bola de cristal transparente. Para utilizarla, coloque el cursor del ratón en cualquier parte de la zona de trabajo, haga un clic derecho y desplace el ratón”</p>	Descripción por el Manual de Usuario
	<p>Consideramos que la función “bola de cristal” es un caso particular de arrastre (en este caso de la pantalla) que provoca el movimiento conjunto de todos los objetos que hay en el interfaz.</p>	Clasificada como arrastre
	<ul style="list-style-type: none"> • Permite visualizar la Zona de Trabajo desde diferentes ángulos de vista. • Con la función “bola de cristal” la Zona de Trabajo se ve modificada: <ul style="list-style-type: none"> ○ Puede verse ampliada o reducida, según se rote el plano base respecto a un eje paralelo a los bordes horizontales de la pantalla (es decir, si el cursor se desplaza paralelo a los bordes verticales de la pantalla). ○ Pueden aparecer objetos dispuestos en regiones no visibles • El plano base no se puede mover salvo con la función “bola de cristal”. Mientras que el resto de planos y superficies es posible, en principio, arrastrarlos directa o indirectamente con la herramienta Manipulación, el plano base sólo es posible moverlo con la función “bola de cristal”. • Rotación automática: es posible dejar que la Zona de Trabajo rote de forma continua sin tener que mantener el ratón pulsado. Para ello se activa la función “bola de cristal”, se desplaza el ratón con un movimiento rápido y se suelta. Para detener la rotación, se presiona de nuevo el botón derecho. 	Prestaciones
	<p>Los movimientos posibles al utilizar la función “bola de cristal”:</p> <ol style="list-style-type: none"> a. Rotación de 360° respecto al eje OY; es decir, cuando el curso se mueve paralelo a los bordes horizontales (superior o inferior) de la pantalla. b. Rotación de 90° respecto al eje OX; es decir, cuando el cursor se mueve paralelo a los bordes laterales de la pantalla (izquierdo o derecho) c. No es posible rotar respecto a un eje perpendicular a la pantalla. 	Limitaciones

ELEMENTO	COMENTARIO	TIPO DE COMENTARIO
Herramienta “Manipulación” 	<ul style="list-style-type: none"> - Permite seleccionar objetos. - Permite arrastrar y desplazar objetos (y, en consecuencia, todos los objetos que de ellos dependen). 	Prestaciones
	<ul style="list-style-type: none"> • Todos los objetos pueden ser seleccionados por esta herramienta pero no todos pueden ser arrastrados o desplazados. • La posibilidad de arrastrar o desplazar objetos con esta herramienta depende de cómo hayan sido creados éstos: <ul style="list-style-type: none"> ○ Hay objetos creados en el “espacio” (es decir, no ligados a otro objeto) se pueden arrastrar o desplazar libremente por la zona de trabajo. ○ Hay objetos creados ligados a otros. Estos tienen limitados los grados de libertad de sus posibles movimientos a los objetos a los que están ligados. ○ Hay objetos que dependen de otros. Estos no pueden ser arrastrados, aunque pueden desplazarse si los objetos de los que dependen son arrastrados o desplazados. 	Limitaciones
	Según el Manual de Usuario (pág. 36): “Para facilitar el desplazamiento de los objetos ya construidos. No es necesario seleccionar la herramienta Manipulación para desplazar puntos u objetos ya construidos. Por ejemplo, aun habiendo seleccionado la herramienta Tetraedro , puede desplazar una esfera, cambiar la posición de una recta, etc. Para hacer esto, seleccione simplemente un punto o un objeto, mantenga el botón del ratón oprimido y desplace el objeto.”	Ampliación de las prestaciones
La función de la tecla de mayúsculas	Los puntos construidos en la PNV (parte no visible) del plano base o en el espacio (fuera del plano base) pueden ser desplazados verticalmente. El procedimiento básicamente consiste en servirse de la herramienta “Manipulación”, agarrar el punto con el botón izquierdo del ratón, sin soltar presionar sobre la tecla de mayúsculas y desplazar el punto hacia arriba o hacia abajo.	Descripción 
Herramienta “Punto”	Permite crear puntos <ul style="list-style-type: none"> • Punto (sobre un plano o sobre un objeto) • Punto en el espacio (fuera del plano base) 	Prestaciones Opciones para la creación de un punto
Herramienta “Recta” 	<ul style="list-style-type: none"> • Permite construir una recta • Recta que pasa por dos puntos • Recta que contiene un segmento • Recta que contiene una semirrecta • Recta que contiene un vector • Recta intersección de dos planos secantes • Recta soporte de un lado de polígono • Recta que contiene una arista de poliedro 	Prestaciones Opciones para la creación de una recta

ELEMENTO	COMENTARIO	TIPO DE COMENTARIO
Herramienta "Plano" 	Permite construir nuevos planos de diferentes maneras. Para utilizar esta herramienta, es necesario utilizar al menos un punto arriba o abajo del plano de base.	Prestaciones
	<ul style="list-style-type: none"> • Plano que pasa por 3 puntos.  • Plano que pasa por una recta y un punto.  • Plano por dos rectas coplanares.  • Plano que contiene un polígono.  • Plano que contiene un sector.  • Plano que contiene un semiplano.  • Plano que contiene una cara de poliedro.  	Opciones para la creación de un plano
	Cuando el arrastre del plano es en una dirección paralela al plano base sucede que: <ol style="list-style-type: none"> a) Si el arrastre es el perpendicular a la línea de intersección con el plano base los puntos del plano arrastrado cambian sus coordenadas x,y pero no su tercera componente. El efecto visual es que mantienen sus posiciones dentro del plano arrastrado. b) En caso contrario, nuevamente los puntos del plano arrastrado cambian sus coordenadas x,y manteniendo constante su tercera componente; pero, ahora, el efecto visual es diferente: la posición de los puntos respecto al plano cambia, llegando incluso a situarse en la parte no visible del plano base. Cuando el arrastre del plano es en una dirección perpendicular al plano base las coordenadas de los puntos cambian (las tres) pero el efecto visual es que mantienen sus posiciones dentro del plano arrastrado. En cualquiera de los casos, las distancias relativas entre los puntos se mantienen constantes.	Arrastre de plano y efecto sobre la posición de los puntos definidos en él.
	Cuando un plano es creado paralelo a otro su arrastre produce su traslación en la dirección de su perpendicular. Sus puntos no sufren ningún cambio en sus posiciones.	Arrastre de un plano paralelo a otro
Herramienta "Punto medio"	<ul style="list-style-type: none"> • Permite construir el punto medio entre dos puntos.  • Permite construir el punto medio de una parte de recta (segmento, vector, lado de polígono, arista de poliedro)  	Prestaciones

ELEMENTO	COMENTARIO	TIPO DE COMENTARIO
Herramienta “Curva de intersección” 	Permite construir la curva de intersección entre dos superficies  <ul style="list-style-type: none"> • Recta intersección entre dos planos • Cónica intersección entre un cilindro y un plano • Cónica intersección entre un cono y un plano • Circunferencia intersección entre una esfera y un plano • Circunferencia intersección entre dos esferas 	Prestaciones Opciones
Herramienta “Distancia” 	<ul style="list-style-type: none"> • Permite medir la distancia entre un punto y: <ul style="list-style-type: none"> ○ otro punto ○ una recta ○ un plano (PV o PNV). • Permite medir la distancia entre dos rectas. 	Prestaciones y Opciones
Herramienta “Paralela” 	<ul style="list-style-type: none"> • Permite construir una recta paralela a una recta (o parte de recta: semirecta, segmento, vector, lado de polígono, arista de poliedro). • Permite construir un plano paralelo a una superficie plana (plano, semiplano, sector, polígono, cara de poliedro) y que pase por un punto. Para construir un plano paralelo que no sea confundido con el plano de referencia seleccionado, es necesario utilizar un punto que no esté sobre ese plano de referencia.  <ul style="list-style-type: none"> • Recta paralela a otra por un punto • Plano paralelo a otro por un punto 	Prestaciones Opciones

ELEMENTO	COMENTARIO	TIPO DE COMENTARIO
<p>Herramienta “Perpendicular”</p> 	<ul style="list-style-type: none"> • Permite construir una recta perpendicular a una superficie plana (plano, semiplano, sector, polígono, cara de poliedro) • Permite construir un plano perpendicular a una recta (o parte de recta: semirrecta, segmento, vector, lado de polígono, arista de poliedro). • Permite construir una recta perpendicular a otra recta (o parte de recta). Para utilizar esta función, es necesario mantener pulsada la tecla Ctrl. • Permite construir la recta perpendicular en el mismo plano que la recta de referencia. Para utilizar esta opción, es necesario hacer clic para seleccionar el plano en cuestión, antes de construir el punto, por el que pasará la recta perpendicular. 	<p>Prestaciones</p>
<p>Herramienta “Ángulo”</p> 	<ul style="list-style-type: none"> • Permite medir el ángulo entre un plano y: <ul style="list-style-type: none"> ○ una recta ○ una semirrecta ○ un segmento ○ un vector.  <ul style="list-style-type: none"> • Permite medir un ángulo formado por tres puntos: <ul style="list-style-type: none"> ○ seleccionar (o construir) un primer punto ○ seleccionar (o construir) el vértice ○ seleccionar (o construir) un tercer punto. <p>Nota: no se puede construir directamente el 1er punto sobre la PV de un plano (seleccionar por consiguiente un punto antes construido).</p> <ul style="list-style-type: none"> • Permite medir el ángulo al centro formado por un arco de circunferencia. 	<p>Opciones</p> <p>Prestaciones y Opciones</p>

ANEXO IV. DESCRIPCIÓN EN DETALLE DE LAS ACTIVIDADES PROPUESTAS

Las actividades propuestas están diseñadas para ser trabajadas por una o dos personas, con la mayor autonomía posible. El profesor o la profesora sólo han de intervenir para aclarar algún término de los enunciados o explicar escuetamente el funcionamiento de alguna herramienta nueva.

En este anexo se da la lista de las actividades, en cuatro bloques. El primero se dedica a la introducción de la función “bola de cristal” y a las partes visibles y no visibles de los planos. El segundo, a la introducción fundamentalmente de las nociones: puntos libres, semi-libres y dependientes. El tercero se dedica a actividades de arrastrar y superponer rectas, planos y sólidos. El cuarto, está dedicado a la aplicación de todo lo practicado en los apartados anteriores en el estudio de posiciones relativas y de ángulos entre rectas y/o planos.

Igualmente se ofrece una descripción de cada bloque de actividades: los objetivos, los conocimientos matemáticos previos, las tareas principales exigidas, los procedimientos asociados (*) y los aspectos instrumentales relacionados. Así mismo, se proporciona comentarios para cada actividad en tablas de dos columnas.

Los anexos I.“Preguntas” y V.“Procedimientos” complementan a este anexo. El primero proporciona la hoja de enunciados de cada una de las preguntas y una imagen de la escena inicial. El anexo V.”Procedimientos” relaciona los procedimientos asociados a las tareas requeridas en las actividades y describe los procedimientos básicos.

(*)El término procedimiento lo usamos en el sentido de actuar de forma determinada para desarrollar una tarea de manera eficaz.

4. Función “bola de cristal”

Las actividades que se pertenecen a este bloque tienen como principal propósito la introducción de la función “bola de cristal”, de la herramienta “Manipulación” y familiarizarse con las retroalimentaciones que ofrece el programa respecto a la localización y arrastre de puntos.

A. Actividad “Composición”

- i. Objetivos:
 - a. Introducción a la función “bola de cristal”.
 - b. Introducción de la Zona de Trabajo.
 - c. Introducción al plano base.
 - d. Partes visibles (PV) y no visibles (PNV) del plano base.
- ii. Conocimientos matemáticos previos: planos, posiciones relativas respecto a un plano, cuerpos geométricos.
- iii. Tareas:
 - a. Cambiar de punto de vista dentro de la Zona de Trabajo con la función “bola de cristal”.
 - b. Encontrar objetos y describir sus posiciones en la pantalla.
 - c. Describir posiciones relativas respecto al plano base.
- iv. Procedimientos
 - a. Procedimiento de uso de la función “bola de cristal”
- v. Comentarios en detalle

Comentarios	
1º. Se pide a los estudiantes que arrastren la pantalla con la función bola de cristal con el fin de encontrar los cuerpos geométricos que se hallan en ella. 2º. El profesor se limitará a mostrar cómo se usa esta función. 3º. El estudiante no debe realizar ningún otro tipo de arrastre sobre ningún objeto. 4º. Se disponen los cuerpos de tal forma que obligue a los estudiantes a utilizar la función “bola de cristal” en diversas direcciones y con distinto grado de cuidado (distintas velocidades y amplitudes en los arrastres de la pantalla).	Introducción a la Zona de Trabajo y a la función “bola de cristal”
Se propone el uso de la función “bola de cristal” con la finalidad de encontrar y describir cuerpos geométricos.	“Encontrar y examinar objetos con la bola de cristal”
<ul style="list-style-type: none"> • En la pantalla aparece el plano base. Los cuerpos geométricos se han construido y se disponen en relación a él. • Aunque en esta actividad el estudiante manipula el plano base a través la función “bola de cristal”; no se espera que sea consciente de ello. • El profesor siempre se referirá a él como el plano base. En esta actividad no es preciso dar más comentarios a los estudiantes. 	Introducción al plano base.

<p>Se utilizan poliedros regulares y cuerpos redondos familiares a los alumnos. Se utilizan diferentes colores para que sean fácilmente identificables los objetos y para que la actividad sea más atractiva.</p> <p>Disposición:</p> <ol style="list-style-type: none"> i. Sobre el plano base, parte superior: <ol style="list-style-type: none"> a. tetraedro azul, b. dodecaedro amarillo, en la parte no visible del plano base y dispuesto fuera de la pantalla. ii. Sobre el plano, parte inferior: <ol style="list-style-type: none"> a. octaedro rojo, b. cubo azul, con una cara sobre otra del tetraedro azul. iii. Atravesando el plano: <ol style="list-style-type: none"> a. octaedro verde, b. esfera marrón, con su centro en uno de los vértices de la cara del tetraedro que reposa sobre el plano. iv. Semiespacio superior: <ol style="list-style-type: none"> a. cilindro verde, flotando próximo a una cara del tetraedro azul b. cilindro violeta, sobre otra de las caras del tetraedro azul v. Semiespacio inferior: <ol style="list-style-type: none"> a. prisma pentagonal verde, flotando próximo al plano, b. esfera verde. 	<p>Descripción de la escena: Cuerpos geométricos</p>
<p>Se pretende que los cuerpos estén en colocados en posiciones diversas para que el estudiante se vea forzado a usar la “bola de cristal”:</p> <ol style="list-style-type: none"> a. Fuera de vista: dodecaedro verde, en la parte no visible del plano base y dispuesto fuera de la pantalla. b. Se presenta sólo los cuerpos que se pueden ver desde el semiespacio superior. Los cuerpos que están en el semiespacio inferior no se ven. c. Hay dos cuerpos flotando próximos a superficies, de manera que el estudiante necesite realizar movimientos con más cuidado para poder discernirlos (distintas velocidades y amplitudes en los arrastres de la pantalla). d. El vector que define el cilindro verde se ha dejado visible para que el alumno lo encuentre en el interior de dicho cilindro. 	<p>Criterios para la disposición de los objetos.</p>

B. Actividad “Dónde.están.los.puntos.1”

- i. Objetivos
 - a. Familiarizarse con la Zona de Trabajo.
 - b. Interpretar la representación finita de un plano dada en la pantalla como la parte visible de él (PV) y su prolongación como la parte no visible (PNV).
 - c. Discutir la noción de objeto en el plano o fuera de él:
 - i. En el plano: en PV (parte visible), en PNV (parte no visible).
 - ii. En el espacio: fuera del plano.
 - d. Usar la función “bola de cristal”
 - e. Introducir la herramienta “Manipulación”.
- ii. Conocimiento matemático previo:
 - a. Un plano es una superficie infinita.

- b. Posiciones relativas de puntos y planos.
- iii. Tareas
 - a. Determinar las posiciones relativas de puntos dados respecto a dos planos que se cortan.
 - b. Usar la función “bola de cristal” para cambiar el punto de vista
 - c. Usar la herramienta “Manipulación” para mover puntos.
- iv. Procedimientos
 - a. Procedimiento de uso de la función “bola de cristal”
 - b. Procedimiento de uso de la herramienta “Manipulación”
- vi. Comentarios en detalle

Comentarios	
<ul style="list-style-type: none"> • Se continúa con el uso de la función “bola de cristal” de manera que se pueda ir observando su génesis instrumental. • Ver actividad “Composición”. 	Función “bola de cristal”
<ul style="list-style-type: none"> • Se continúa trabajando las posiciones relativas respecto al plano base de manera que se pueda ir observando su génesis instrumental. • Ver actividad “Composición”. • El profesor hará las siguientes aclaraciones: <ul style="list-style-type: none"> ○ Un plano es una superficie infinita, ○ El interfaz lo representa mediante un cuadrilátero, que llamaremos su parte visible (PV); pero su prolongación, que llamaremos parte no visible (PNV) también forma parte de él. ○ Un punto creado en la PV o en la PNV, se considera que está “sobre el plano” 	Plano base
El profesor mostrará cómo se utiliza la herramienta “Manipulación” para seleccionar y arrastrar horizontalmente puntos.	Introducción de la herramienta “Manipulación”
A. Arrastre exploratorio para encontrar la pertenencia o no de un punto a un plano. B. Arrastre para validar una conjetura o una propiedad sobre la pertenencia de un punto a un plano.	Posibles instrumentos a desarrollar por el alumno
Los puntos en esta actividad son de dos tipos: libres y ligados. Los libres están en el espacio y no pertenecen a ninguno de los planos: E y F. Los ligados pertenecen a alguno de los planos: <ul style="list-style-type: none"> • Pertenecen a uno de los dos planos (su arrastre se limita al plano): B, C, D, G, H, I. • Pertenecen a la recta de intersección de los dos planos (su arrastre se limita a dicha recta): A, J. 	Introducción a los tipos de puntos.
Los puntos se representan por esferas (círculos). La sensación de cercanía o lejanía respecto del usuario se proporciona aumentando o disminuyendo el radio de dicha esfera respectivamente. Para indicar que un punto está sobre la parte visible de un plano, la esfera (círculo) aparece recortada, dando la sensación de tener una semiesfera sobre el plano y la otra debajo.	Retroalimentación: representaciones dadas a los puntos
Las posiciones iniciales son las siguientes: <ul style="list-style-type: none"> a) En el plano s (verde): A, D, G, J. b) En el plano p (azul): A, B, C, H, J. c) Pertenece a los dos: A, J. 	Posiciones iniciales y problemática

<p>d) Por encima del verde y a la derecha del azul: E, I. e) Por debajo del verde y a la derecha del azul: F. f) Por encima del verde y a la izquierda del azul: ninguno. g) Por debajo del verde y a la izquierda del azul: ninguno.</p> <p>Observaciones:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Preguntar sobre si un punto pertenece o no a un plano es admisible. • Pero preguntar si un punto está a la derecha o a la izquierda de un plano es problemático: <ul style="list-style-type: none"> ○ En primer lugar, es posible rotar “horizontalmente” (respecto a un eje paralelo a los lados verticales de la pantalla) más de 360°; lo cual significa que la noción de derecha o izquierda respecto a un plano queda indefinida. ○ En segundo lugar, los puntos de la escena son arrastrables; de manera que puede ocurrir que tras arrastrarlos queden en posiciones relativas respecto al plano diferentes a las iniciales. • También es problemático preguntar si un punto está arriba o abajo respecto a un plano. No obstante, es más admisible, ya que la rotación “vertical” (respecto a un eje paralelo a los lados horizontales de la pantalla) se limita a $\pm 90^\circ$. • No obstante, hemos mantenido estas preguntas porque cumplían con los objetivos dados a esta actividad. • Además, la referencia a la posición inicial introduce la necesidad de usar la función “bola de cristal”. 	
<p>A partir de la escena inicial caben las siguientes interpretaciones:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Los puntos A y J: aparentan estar sobre la línea de intersección y se representan por cuartos de esfera. • El punto B: aparenta estar sobre el plano azul y se representa por una semiesfera • El punto C: se representa por una esfera y no está sobre ninguna PV de ningún plano; cabe pensar que esté en la PNV del azul o en el espacio. En este caso, aparenta estar a la dcha. del azul y por encima del verde. El interfaz no ayuda a ver que está en la PNV del azul. • Los puntos D y E: se representa por una esfera y no está sobre ninguna PV de ningún plano; cabe pensar que esté en la PNV del verde o en el espacio. En este caso, aparenta estar a la dcha. del azul y por encima del verde. El interfaz no ayuda a ver que el D está en la PNV del azul. • El punto F, aparenta estar sobre el plano azul, pero se representa mediante una esfera entera; por lo que cabe pensar que esté en el espacio: a la dcha. del azul y por debajo del verde. • El punto G: aparenta estar sobre el plano verde y se representa por una semiesfera • El punto H: se representa por una esfera y no está sobre ninguna PV de ningún plano; cabe pensar que esté en la PNV del azul o en el espacio. En este caso, aparenta estar a la izqda. del azul y por debajo del verde. 	<p>Posiciones aparentes iniciales de los puntos y retroalimentaciones.</p>

<ul style="list-style-type: none"> • El punto I, aparenta estar sobre el plano verde, pero se representa mediante una esfera entera; por lo que cabe pensar que esté en el espacio: a la izqda. del azul y por encima del verde. El interfaz no ayuda a ver que está a la dcha. del azul. 	
<p>En esta actividad se fuerza al estudiante a dirigir su atención hacia la posición, las representaciones y el arrastre de los puntos debido a que:</p> <ul style="list-style-type: none"> • El arrastre de puntos es un instrumento básico y presente en prácticamente todas las posibles actividades con Cabri 3D. • El uso e interpretación de las representaciones y del arrastre de puntos depende de los distintos tipos de puntos que hay en Cabri 3D: libres, semi-libres, dependientes. 	Dirigir la atención del estudiante hacia los puntos.

C. Actividad “Dónde.están.los.puntos.2”

i. Objetivos

- a. Familiarizarse con la Zona de Trabajo.
- b. Interpretar la representación finita de un plano dada en la pantalla como la parte visible de él (PV) y su prolongación como la parte no visible (PNV).
- c. Discutir la noción de objeto en el plano o fuera de él:
 - i. En el plano: en la PV (parte visible), en la PNV (parte no visible).
 - ii. En el espacio: fuera del plano, no pertenece al plano.

ii. Conocimiento matemático previo:

- a. Un plano es una superficie infinita.
- b. Posiciones relativas de puntos y planos.

iii. Tareas

- a. Determinar las posiciones relativas de puntos dados respecto de planos paralelos.
- b. Usar la función “bola de cristal” para cambiar el punto de vista

iv. Procedimientos

- a. Procedimiento de uso de la función “bola de cristal”
- b. Procedimiento de uso de la herramienta “Manipulación”

vii. Comentarios en detalle

Comentarios	
Esta actividad se propone como continuación de las anteriores; redundando en lo practicado en ellas. El propósito es poder observar la génesis instrumental de los posibles instrumentos que van construyendo los estudiantes.	Finalidad genérica
En la escena hay tres planos: el plano base y dos paralelos a él. El plano amarillo se encuentra en el semiespacio inferior al plano base y, el verde en el semiespacio superior. Los puntos están dispuestos para que cubran todas las posiciones relativas respecto a los	Descripción de la escena

<p>planos. En la escena inicial, se colocan los planos casi paralelos a la pantalla, de manera que prácticamente solo se ve al plano amarillo. El propósito es obligar a que el/la alumno/a uso la función “bola de cristal”.</p> <p>Las posiciones iniciales son:</p> <ul style="list-style-type: none"> a) En el plano amarillo: M. b) En el plano verde: Y. c) En el plano gris: Q. d) Pertenece a dos planos: ninguno. e) Entre el amarillo y el gris: G, H, L, N. f) Entre el gris y el verde: F, J, K, V. g) Por encima del verde: A, B, E, W. h) Por debajo del amarillo: C, I, X. i) Puntos alineados: <ul style="list-style-type: none"> o C, H, J, Q, X. o B, G. o A, F, N, W. o I, L, V. 	
--	--

5. Puntos.

Las actividades que se describen en este bloque tienen como principal finalidad la introducción fundamentalmente de las nociones: puntos libres, semi-libres y dependientes.

A. Actividad “Puntos.libres.1”

- i. Objetivos
 - l. Familiarizarse con la Zona de Trabajo.
 - m. Crear y desplazar puntos ligados al plano base.
 - n. Considerar que la zona no visible del plano forma parte del plano.
- ii. Conocimiento matemático previo: puntos, planos, puntos alineados, paralelismo, y perpendicularidad.
- iii. Tareas
 - r. Crear y desplazar puntos ligados al plano base.
 - s. Colocar puntos alineados en el plano base utilizando las herramientas “Punto” y “Manipulación”.
- iv. Estudio instrumental
 - m. Procedimiento de uso de la función “bola de cristal”
 - n. Procedimiento de uso de la herramienta “Manipulación”
 - o. Procedimiento de uso de la herramienta “Punto”
 - p. Procedimiento “crear un punto”
 - q. Procedimiento “arrastrar un punto”
- vi. Comentarios en detalle

Comentarios	
<p>1. Esta actividad se propone como continuación de las anteriores; redundando en lo practicado en ellas, especialmente en la noción de las partes visible y no visibles de un plano (en este caso, el plano base). El propósito es poder observar la génesis instrumental de los posibles instrumentos que van construyendo los estudiantes.</p> <p>2. Además se introduce la creación de objetos; en concreto, de puntos ligados al plano base.</p>	Finalidad genérica
<p>Se han dispuesto diez puntos (del A al J) alineados sobre el plano base; unos en su parte visible (del D al H) y el resto en su parte no visible. Estos puntos en realidad se han creado sobre una recta (que posteriormente se ha ocultado) del plano base. Esto no se dice a los/as alumnos/as.</p>	Descripción de la escena
<p>Se le pide que utilice la función “bola de cristal”, para observar su génesis instrumental:</p> <ol style="list-style-type: none"> a. Esta petición pretende evitar que se conforme con una vista estática. b. “A priori” cabe esperar que el estudiante utilice la función “bola de cristal” en forma de alguno de los siguientes instrumentos: <ol style="list-style-type: none"> i. Arrastre exploratorio para encontrar la alienación de los puntos. ii. Arrastre para validar una conjetura o una propiedad sobre la alienación de los puntos. 	Pregunta 1. Función “bola de cristal”
<p>Ver comentarios en la actividad “Dónde. están. los. puntos. 1”</p>	Pregunta 2. Función “bola de cristal”. Herramienta “Manipulación”
<p>Se introduce el uso de la herramienta “Punto”. Se deja a los estudiantes que intenten utilizarlo sin ninguna ayuda, para poder observar posibles dificultades y si utilizan la retroalimentación proporcionada por el interfaz (íconos, mensajes, etc.) Según el éxito de los estudiantes, el profesor mostrará el uso del herramienta “Punto”, procurando ser lo más escueto posible.</p>	Pregunta 3: Introducción de la herramienta “Punto”
<p>Ver comentarios en la actividad “Dónde. están. los. puntos. 1”</p>	Preguntas 3b y 3c: Arrastre de un punto, Partes visibles y no visibles de un plano.
<ul style="list-style-type: none"> • Proponemos estas preguntas con el fin de poder observar las dificultades de uso con las herramientas “Punto” y “Manipulación” y de interpretación de las representaciones y retroalimentaciones que proporciona el interfaz al crear y colocar puntos alineados en un plano. • Así, queremos observar la evolución de la génesis instrumental de los instrumentos asociados. • Hemos elegido dos direcciones relativas determinadas (paralela y perpendicular a una dirección dada); lo cual puede aportar una dificultad añadida a la tarea de alinear puntos en un plano. 	Preguntas 4 y 5: Dificultades con el herramienta “Manipulación” Tareas de alinear puntos en un plano.

B. Actividad “Puntos.libres.2”

- i. Objetivos
 - a. Familiarizarse con la Zona de Trabajo.
 - b. Crear y desplazar puntos en el plano y en el espacio
 - c. Desplazar (verticalmente y horizontalmente) puntos libres en los dos semiespacios definidos por el plano base.
 - d. Usar las retroalimentaciones que proporciona el interfaz.
- ii. Conocimiento matemático previo: puntos, planos, puntos alineados.
- iii. Tareas
 - a. Crear y desplazar puntos en el plano y en el espacio
 - b. Colocar puntos alineados verticalmente utilizando la herramienta “Manipulación” más la tecla de mayúsculas.
- iv. Procedimientos.
 - a. Procedimiento de uso de la función “bola de cristal”
 - b. Procedimiento de uso del herramienta “Manipulación” más la tecla de mayúsculas.
 - c. Procedimientos de uso de la herramienta “Punto”
 - d. Procedimiento “crear un punto”
 - e. Procedimiento “crear un punto libre”
 - f. Procedimiento “arrastrar un punto libre”
- vii. Comentarios en detalle

Comentarios	
Se han dispuesto 6 puntos alineados verticalmente (del A al F): dos en el semiespacio inferior al plano base (A y B), uno en el plano base (C) y 3 en el semiespacio superior (D, E y F). Estos puntos en realidad se han creado sobre una recta (que posteriormente se ha ocultado) perpendicular al plano base. Esto no se dice a los/as alumnos/as.	Descripción de la escena
Ver comentarios en la actividad “Dónde. están. los. puntos. 1” Ver comentarios en la actividad “Puntos.libres.1”, pregunta 1. Se introduce el trabajo con puntos en el espacio fuera del plano base.	Pregunta 1. Función “bola de cristal”
<ul style="list-style-type: none"> • Se proponen estas preguntas para dar la oportunidad de que creen sus propios esquemas: <ul style="list-style-type: none"> - “Crear un punto” - “Crear un punto libre” • También, proponemos estas preguntas con el fin de poder observar las dificultades de uso con la herramienta “Punto” y “Manipulación” y de interpretación de las representaciones y retroalimentaciones que proporciona el interfaz al crear y colocar puntos alineados en un plano. • Así, queremos observar la evolución de la génesis instrumental de los instrumentos asociados. 	Preguntas 2 y 3. Crear puntos en el espacio (fuera del plano base). Pregunta 4. Dificultades con el herramienta “Manipulación” Tareas de alinear puntos del espacio, a diferentes alturas.

C. Actividad “Coordenadas.puntos”

- i. Objetivos:
 - a. Mover un punto usando sus coordenadas.
- ii. Conocimiento matemático previo: coordenadas de puntos.
- iii. Tareas:
 - a. Arrastrar un punto de unas coordenadas a otras usando la herramienta “Manipulación”.
- iv. Procedimientos
 - a. Procedimiento de uso de la herramienta “Coordenadas o ecuación”.
 - b. Procedimiento de uso de la herramienta “Manipulación”
 - c. Procedimiento “arrastrar un punto en el espacio utilizando sus coordenadas”.
- v. Comentarios en detalle

Comentarios	
<p>Proponemos estas preguntas con el fin de poder observar las dificultades de uso con la función “bola de cristal”, la herramienta “Manipulación” y de interpretación de las representaciones y retroalimentaciones que proporciona el interfaz al arrastrar puntos a posiciones determinadas por sus coordenadas.</p> <p>Así, queremos observar la evolución de la génesis instrumental de los instrumentos asociados a la función “bola de cristal”, y la herramienta “Manipulación” en un nuevo tipo de tarea que exige el arrastre de puntos, tanto del tipo “libre” como del “ligado al plano base”.</p> <p>Por tanto, no se pretende desarrollar una génesis instrumental con la herramienta “Coord o ecuación” (coordenadas o ecuación). Es por esto, que el profesor no mostrará el uso de dicho herramienta ni tan siquiera lo mencionará. De esta manera, también queremos evitar la introducción directa de coordenadas, lo cual impediría el uso de las herramientas arriba indicadas.</p>	Finalidad genérica

D. Actividad “Distancias.puntos.1”

- i. Objetivos.
 - a. Familiarizarse con la Zona de Trabajo.
 - b. Noción de distancia virtual en la Zona de Trabajo.
- ii. Conocimiento matemático implicado: puntos, rectas, planos, distancias, proporción, perspectiva.
- iii. Tareas.
 - a. Sacar conclusiones sobre el hecho de que “a iguales distancias marcadas por el interfaz, distintas longitudes de los segmentos que las representan en el interfaz según la orientación del plano base y de la posición relativa respecto al observador”.
 - b. Arrastrar con la función “bola de cristal” para cambiar punto de vista.
 - c. Usar la herramienta “Distancia” para medir distancias entre puntos.
- iv. Procedimientos

- a. Procedimiento de uso de la función “bola de cristal”
 - b. Procedimiento de uso de la “Zona de Trabajo”.
 - c. Procedimiento de uso de la herramienta “Distancia”
- vi. Comentarios en detalle

Comentarios	
Proponemos estas preguntas con el fin de poder observar las dificultades de interpretación de las representaciones y retroalimentaciones que proporciona el interfaz en relación con las distancias entre puntos (en general, entre y en objetos geométricos)	Finalidad genérica
<ul style="list-style-type: none"> • La representación de las distancias entre puntos en la Zona de Trabajo depende de la orientación del plano base y de la posición relativa de los puntos respecto al observador. Ocurre que distancias marcadas por el herramienta “Distancia” como iguales, pueden corresponder con distintas longitudes de los segmentos que las representan en el interfaz según la orientación del plano base y de la posición relativa respecto al observador”. • Esto puede suponer una dificultad al estudiante a la hora de interpretar y usar herramienta e instrumentos relacionados con arrastres de puntos y objetos geométricos en general en tareas de geometría espacial. • Se propone esta actividad con el propósito de que el/la estudiante se enfrente a este “fenómeno” de manera intuitiva; de manera que el profesor no hará una explicación sobre el mismo: en qué consiste, por qué, etc. 	Introducción intuitiva a la noción de <u>distancia virtual</u> en la Zona de Trabajo.
El profesor mostrará el uso de la herramienta “Distancia” tan sólo para que se pueda responder la pregunta c). El objetivo no es desarrollar sus esquemas de uso de dicho herramienta.	La herramienta “Distancia”

E. Actividad “Distancias.puntos.2”

- i. Objetivos.
 - a. Familiarizarse con la Zona de Trabajo.
 - b. Noción de distancia virtual en la Zona de Trabajo.
- ii. Conocimiento matemático implicado: puntos, rectas, planos, distancias, proporción, perspectiva.
- iii. Tareas.
 - a. Crear puntos sobre una recta dada.
 - b. Sacar conclusiones sobre el hecho de que “a iguales distancias marcadas por el interfaz, distintas longitudes de los segmentos que las representan en el interfaz según la orientación del plano base y de la posición relativa respecto al observador”.
 - c. Desplazar con la función “bola de cristal” para cambiar punto de vista.
 - d. Usar la herramienta “Distancia” para medir distancias entre puntos.
- iv. Procedimientos
 - a. Procedimiento de uso de la función “bola de cristal”
 - b. Procedimiento de uso de la “Zona de Trabajo”.
 - c. Procedimiento de uso de la herramienta “Distancia”
- vi. Comentarios en detalle

Comentarios

Continuación de la actividad “Distancias.puntos.1”, ahora no se dan los puntos sino que se han de crear y situar sobre la recta dada, alrededor del punto O dado.
Ver comentarios de la actividad “Distancias.puntos.1”

F. Actividad “Tipos.de.puntos.1”

- i. Objetivos
 - a. Introducir la noción de que hay distintos tipos de puntos: puntos libres, puntos ligados a una región, puntos dependientes de otros.
- ii. Conocimiento matemático previo: puntos, rectas, punto medio entre dos puntos.
- iii. Tareas
 - a. Crear una recta a partir de dos puntos.
 - b. Situar puntos sobre una recta y arrastrarlos.
 - c. Crear puntos medios y arrastrarlos.
- iv. Procedimientos
 - a. Procedimiento de uso de la herramienta “Manipulación”.
 - b. Procedimiento “crear un punto”.
 - c. Procedimientos de arrastre de los distintos tipos de puntos.
 - d. Procedimiento de uso de la herramienta “Recta”
 - e. Procedimiento de uso de la herramienta “Punto medio”.
- vi. Comentarios en detalle

Comentarios	
1. Se pretende que reflexionen sobre los distintos grados de libertad entre puntos ligados al plano, a la recta o puntos dependientes de otros. 2. Está directamente relacionada con la actividad “Puntos.libres.1”. 3. Se introduce la herramienta “Recta”. 4. Se introduce el herramienta “Punto medio”	Finalidad genérica
Se introduce el uso del herramienta “Recta”: Se deja a los estudiantes que intenten utilizarlo sin ninguna ayuda. Para observar posibles dificultades y si utilizan la retroalimentación proporcionada por el interfaz (iconos, mensajes, etc.) Según el éxito de los estudiantes, el profesor mostrará el uso del herramienta “Recta”, procurando ser lo más escueto posible.	Introducción de la herramienta “Recta”
En principio, para crear un punto se puede utilizar la herramienta “Punto”. En esta actividad, vemos que en el proceso de creación de una recta se crean dos puntos, con el herramienta “Recta”. A su vez con la herramienta “Punto medio” también se crea un punto. De hecho, en la mayor parte de las herramientas de Cabri 3D se crean puntos si previamente no existen.	Observación sobre la creación de puntos.
<u>Se pretende observar sus actuaciones en relación con la distinta naturaleza de los puntos que se van creando.</u> En concreto, en esta actividad tenemos que: <ul style="list-style-type: none"> - los puntos A y B están ligados al plano, por lo cual tienen dos grados de libertad, y son elementos a los cuales está ligada la recta por construcción, - los puntos C y D están ligados a la recta, por lo que sólo tienen un grado de libertad, - el punto M, depende de los puntos C y D por construcción, y no tiene ningún grado de libertad. 	Distinguir la distinta naturaleza de los puntos creados.

<p>Se introduce el uso de la herramienta “Punto medio”.</p> <p>Se deja a los estudiantes que intenten utilizarlo sin ninguna ayuda. Para observar posibles dificultades y si utilizan la retroalimentación proporcionada por el interfaz (iconos, mensajes, etc.)</p> <p>Según el éxito de los estudiantes, el profesor mostrará el uso del herramienta “Punto medio”, procurando ser lo más escueto posible.</p>	<p>Introducción de la herramienta “Punto medio”</p>
---	---

G. Actividad “Tipos.de.puntos.2”

- i. Objetivos
 - a. Trabajar la noción de que hay distintos tipos de puntos: puntos libres, puntos ligados a una región, puntos dependientes de otros.
- ii. Conocimiento matemático previo: puntos, cubos, vértices, aristas, caras, puntos medios entre dos puntos y de segmento.
- iii. Tareas
 - a. Crear puntos sobre las aristas de un poliedro y arrastrarlos.
 - b. Crear puntos sobre las caras de un poliedro y arrastrarlos.
 - c. Crear puntos medios y arrastrarlos: punto medio entre dos puntos y punto medio de una arista.
- iv. Procedimientos
 - a. Procedimiento de uso del herramienta “Manipulación”
 - b. Procedimiento “crear un punto”.
 - c. Procedimientos de arrastre de los distintos tipos de puntos.
 - d. Procedimiento de uso de la herramienta “Punto medio”.
- vi. Comentarios en detalle

Comentarios	
<p>La finalidad de esta actividad es la misma que en la “Tipos.de.puntos.1”.</p> <p>Ver comentarios de la actividad “Tipos.de.puntos.1”</p> <p>La variante que se incorpora es que los puntos pertenecen a un cubo y no a un plano. La variante obedece a que queremos observar la génesis instrumental de los esquemas e instrumentos en fase de creación o ya creados, en situaciones diferentes; ya que según el marco teórico, la génesis instrumental es un proceso a largo plazo.</p>	<p>Finalidad genérica</p>
<ul style="list-style-type: none"> - El punto O y los vértices definen al cubo (en este sentido el cubo depende de ellos) - Al arrastrar el punto O el cubo se desplaza como un todo. - Al arrastrar los vértices, el cubo no se desplaza pero gira y cambia sus dimensiones. - Los vértices del cubo que están fuera del plano base tienen tres grados de libertad. - El punto O y los vértices del cubo que están en el plano base, están ligados a él, por lo que tienen dos grados de libertad. - Los puntos creados sobre cada una de las caras (aristas) están ligados a ellas y tienen dos (un) grados de libertad. Sus arrastres no producen ningún tipo de movimiento sobre el cubo. - Los puntos medios son dependientes por construcción y no tienen ningún grado de libertad. 	<p>Distinguir la distinta naturaleza de los puntos creados.</p>

H. Actividad “Tipos.de.puntos.3”

- i. Objetivos
 - a. Trabajar la noción de que hay distintos tipos de puntos: puntos libres, puntos ligados a una región, puntos dependientes de otros.
- ii. Conocimiento matemático previo: puntos, rectas, planos oblicuos, recta de intersección entre planos.
- iii. Tareas
 - a. Crear puntos libres
 - b. Crear un plano que pase por tres puntos dados.
 - c. Situar puntos sobre planos y rectas.
 - d. Crear recta de intersección entre dos planos.
- iv. Procedimientos
 - a. Procedimiento de uso del herramienta “Manipulación”
 - b. Procedimiento de uso del herramienta “Punto”
 - c. Procedimiento “crear un punto”.
 - d. Procedimientos de arrastre de los distintos tipos de puntos.
 - e. Procedimiento de uso del herramienta “Plano”
 - f. Procedimiento de uso del herramienta “Curva de intersección”.
- vi. Comentarios en detalle

Comentarios	
Ver comentarios actividad “Tipos.de.puntos.2”. Se trabajan dos aspectos: - la de puntos sobre plano diferente al plano base, y - la de puntos sobre recta de intersección de dos planos. De esta manera queremos observar la génesis instrumental de sus esquemas e instrumentos, en fase de creación o ya creados, en situaciones diferentes; ya que según el marco teórico la génesis instrumental es un proceso a largo plazo.	Finalidad genérica
Se introduce el uso de la herramienta “Plano”. Se deja a los estudiantes que intenten utilizarlo sin ninguna ayuda. Para observar posibles dificultades y si utilizan la retroalimentación proporcionada por el interfaz (iconos, mensajes, etc.) Según el éxito de los estudiantes, el profesor mostrará el uso del herramienta “Plano”, procurando ser lo más escueto posible.	Introducción de la herramienta “Plano”
Se introduce el uso de la herramienta “Curva de intersección”. Se deja a los estudiantes que intenten utilizarlo sin ninguna ayuda. Para observar posibles dificultades y si utilizan la retroalimentación proporcionada por el interfaz (iconos, mensajes, etc.) Según el éxito de los estudiantes, el profesor mostrará el uso del herramienta “Curva de intersección”, procurando ser lo más escueto posible	Introducción de la herramienta “Curva de intersección”

6. Mover objetos geométricos.

En las dos secciones anteriores se trabaja el arrastre y colocación de puntos como finalidad principal. Asociado a ésta se trabaja también la noción de los distintos tipos de puntos y su naturaleza presentes en el interfaz de Cabri 3D.

En esta sección continuamos con los anteriores objetivos pero el foco de atención se centra en el desarrollo de la génesis instrumental de los esquemas e instrumentos asociados al arrastre y colocación de puntos en actividades de superposición de rectas y de planos.

A. Actividad “Superponer.rectas.1”

- i. Objetivos
 - a. Propiciar la creación de esquemas y de instrumentos asociados a las herramientas introducidas y a las tareas propuestas.
- ii. Conocimiento matemático previo: rectas, superponer rectas, rectas paralelas.
- iii. Tareas
 - h. Desplazar rectas.
 - i. Superponer planos paralelos.
- iv. Procedimientos
 - h. Procedimiento “arrastrar una recta”.
 - i. Procedimiento “superponer rectas”
- vi. Comentarios en detalle

Comentarios	
<ul style="list-style-type: none"> • Se propone que estudien los efectos del arrastre sobre puntos y rectas. • Estos puntos y rectas tienen diferentes grados de libertad y distintos comportamientos frente a la acción de arrastre debido a que han sido construidos de diferente manera: <ol style="list-style-type: none"> 1. Los puntos A y C están creados sobre el plano rojo (por tanto, tienen dos grados de libertad). 2. El punto B está creado en la recta de intersección del plano rojo y el plano base (un grado de libertad). 3. La recta s está construida sobre los puntos A y B. Por tanto: <ol style="list-style-type: none"> A. Al arrastrar A, gira alrededor de B sobre el plano rojo. B. Al arrastrar B, se traslada según la recta de intersección sobre el plano rojo. C. Al arrastrar la recta s, se traslada según la recta de intersección sobre el plano rojo. 4. La recta r está construida como la paralela a la recta s que pasa por el punto C. Por tanto, se mantiene paralela a la recta s tanto al arrastrar el punto C como a ella misma. • Los/as alumnos/as no lo saben y tampoco se les informa de estos hechos. Esto se debe a que se quiere observar: <ol style="list-style-type: none"> 1. Si son capaces de distinguir esos diferentes comportamientos de los objetos al ser arrastrados. 2. Si son capaces de preguntarse por qué puntos (A y C) y rectas (r y s) aparentemente de igual condición se comportan de manera diferente al ser arrastrados. 3. Si presentan o desarrollan cierto espíritu crítico al realizar arrastres de objetos, en relación con los efectos que éstos producen. 	<p>Diferentes efectos del arrastre sobre puntos y rectas.</p>

B. Actividad “Superponer.rectas.2”

- i. Objetivos
 - a. Propiciar la creación de esquemas y de instrumentos asociados a las herramientas introducidas y a las tareas propuestas.
- ii. Tareas
 - a. Arrastrar y mover rectas.
 - b. Superponer rectas que se cruzan.
- iii. Conocimiento matemático previo: rectas, superponer rectas, rectas que se cruzan.
- iv. Procedimientos
 - a. Procedimiento de uso de la herramienta “Manipulación”.
 - b. Procedimiento “arrastrar una recta”
 - c. Procedimiento “superponer rectas”
 - d. Procedimiento “mover puntos”
 - e. Procedimiento “superponer puntos”
- vi. Comentarios en detalle.

Comentarios	
Acerca de las construcción: - Los puntos A, B, C y D son puntos libres. - La recta s se ha construido pasando por A y B; y la recta r, por C y D.	Construcción de la escena
Esta actividad demanda la utilización de lo introducido y practicado en las actividades anteriores en relación: la función “bola de cristal”, arrastre horizontal y vertical de puntos libres y arrastre de rectas.	Génesis instrumental
Esta actividad exige utilizar la combinación herramienta “Manipulación”+ tecla mayúsculas, para poder cambiar la altura de las rectas arrastrando verticalmente los puntos señalados. En general, la combinación de un herramienta (en este caso el de “Manipulación” y la tecla mayúsculas permite arrastrar verticalmente el objeto que se esté señalando o construyendo. Esto tiene especial importancia ya que esta combinación junto con la función “bola de cristal” son funciones que no existen en los programas de geometría dinámica 2D; las dos simulan la tercera dimensión.	Combinación de la herramienta “Manipulación”+ tecla mayúsculas

C. Actividad “Mover.plano.con.recta”

- i. Objetivos
 - a. Propiciar la creación de esquemas y de instrumentos asociados a las herramientas introducidas y a las tareas propuestas.
- ii. Conocimiento matemático previo: puntos, rectas, planos.
- iii. Tareas
 - a. Mover plano arrastrando un punto sobre recta perpendicular al plano.
 - b. Mover plano arrastrando una recta perpendicular al plano.
- iv. Procedimientos
 - a. Procedimiento de uso de la herramienta “Manipulación”
 - b. Procedimiento “arrastrar un punto”.
 - c. Procedimiento “arrastrar una recta”

- d. Procedimiento “mover un plano arrastrando un punto sobre una recta perpendicular al plano”
- e. Procedimiento “mover un plano arrastrando una recta perpendicular al plano”
- vi. Comentarios en detalle.

Comentarios	
Secuencia de construcción: <ul style="list-style-type: none"> - Punto A sobre plano base (ligado, dos grados de libertad). - Punto B en el semiespacio superior al plano base (libre, tres grados de libertad). - Recta que pasa por los puntos A y B (ligada, dos grados de libertad). - Punto P sobre recta (ligado, un grado de libertad). - Plano perpendicular a la recta que pasa por el punto P (ligado, un grado de libertad). 	Construcción de la escena
Se propone esta actividad para que continúen trabajando y experimentando sobre los diferentes efectos del arrastre. En este caso, el tipo de movimiento de un plano depende del tipo de punto o de recta (ligado o libre, grados de libertad) que es arrastrado: <ul style="list-style-type: none"> - Si se arrastra el punto P, el plano se traslada en la dirección de la recta. - Si se arrastra la recta, el plano se traslada en la dirección de la recta. - Si se arrastra el punto A, el plano se traslada, gira y se mueve ligado a la posición de P. Éste cambia de coordenadas x e y, pero mantiene constante su coordenada z. - Si se arrastra el punto B horizontalmente, el resultado sobre el plano es similar al producido al arrastra A. Pero si se arrastra el punto B verticalmente entonces el punto P se desplaza también verticalmente. 	Diferentes efectos del arrastre sobre puntos y rectas.

D. Actividad “Superponer.planos.1”

- i. Objetivos
 - a. Propiciar la creación de esquemas y de instrumentos asociados a las herramientas introducidas y a las tareas propuestas.
- ii. Tareas
 - a. Arrastrar planos.
 - b. Superponer planos paralelos (ambos oblicuos al plano base y con puntos definidos sobre él).
- iii. Procedimientos
 - a. Procedimiento de uso de la herramienta “Manipulación”
 - b. Procedimiento de uso de la función “bola de cristal”
 - c. Procedimiento “arrastrar un plano”.
 - d. Procedimiento “superponer planos”
- vi. Comentarios en detalle.

Comentarios	
El plano rojo está construido paralelo al plano verde ; el cual está creado a partir de dos puntos del plano base y uno en el espacio (fuera del plano base)	Construcción de la escena
Los/as alumnos/as no están informados/as de qué relación hay entre los planos.	
Se propone esta actividad para que continúen trabajando y experimentando sobre	Finalidad

el arrastre de planos.	
Por construcción, el plano verde puede arrastrarse; pero el rojo, no (depende del rojo). Así que únicamente pueden superponerse arrastrando el plano verde. Si bien en esta actividad puede proponerse como un sencillo ejercicio de arrastre de un plano; ya que en las actividades anteriores se ha practicado el arrastre de rectas y puntos.	Arrastre de plano.

E. Actividad “Superponer.planos.2”

- i. Objetivos
 - a. Propiciar la creación de esquemas y de instrumentos asociados a las herramientas introducidas y a las tareas propuestas.
- ii. Tareas
 - a. Arrastrar planos.
 - b. Superponer planos que se cortan (ambos definidos con dos puntos en el plano base y oblicuos a éste)
- iii. Procedimientos
 - a. Procedimiento “arrastrar un punto”.
 - b. Procedimiento “superponer planos”
 - c. Procedimiento de uso de la herramienta “Manipulación”
 - d. Procedimiento de uso de la función “bola de cristal”
- vi. Comentarios en detalle.

Comentarios		
Estos planos están contruidos a partir de tres puntos de construcción (que llamaremos pC): dos sobre el plano base y uno en el espacio (fuera del plano base).		Puntos de construcción
Se propone esta actividad para que continúen trabajando y experimentando sobre los diferentes efectos del arrastre de puntos y planos.		Finalidad
Es importante señalar que en esta actividad se pueden observar fenómenos que pueden desorientar e interferir en el desarrollo instrumental si no se reflexionan sobre ellos:		Fenómenos “avanzados” en el interfaz
Cuando se mueve un punto de construcción, el plano gira alrededor de la línea que pasa por los otros dos pC.	Ejes de giro por cada par de puntos de construcción	
La superposición supone hacer giros axiales, traslaciones y sus composiciones. Se han de colocar pares de pC de manera que formen el eje de giro deseado.	Estudio colateral	
Cuando el arrastre del plano es en una dirección paralela al plano base sucede que: <ol style="list-style-type: none"> a) Si el arrastre es el perpendicular a la línea de intersección con el PB los puntos del plano arrastrado cambian sus coordenadas x,y pero no su tercera componente. El efecto visual es que mantienen sus posiciones dentro del plano arrastrado. b) En caso contrario, nuevamente los puntos del plano arrastrado cambian sus coordenadas x,y manteniendo constante su tercera componente; pero, ahora, el efecto visual es 	Arrastre de plano y efecto sobre la posición de los puntos definidos en él.	

<p>diferente: la posición de los puntos respecto al plano cambia, llegando incluso a situarse en la parte no visible del plano base. Cuando el arrastre del plano es en una dirección perpendicular al plano base las coordenadas de los puntos cambian (las tres) pero el efecto visual es que mantienen sus posiciones dentro del plano arrastrado.</p> <p>En cualquiera de los casos, las distancias relativas entre los puntos se mantienen constantes</p>		
<p>A los/as alumnos/as no se les dirá nada sobre estos fenómenos asociados al funcionamiento del interfaz; de manera que se pueda observar en qué medida les afecta y cómo se enfrentan a ellos.</p>		

F. Actividad “Superponer.planos.3”

- i. Objetivos
 - a. Propiciar la creación de esquemas y de instrumentos asociados a las herramientas introducidas y a las tareas propuestas.
- ii. Tareas
 - a. Arrastrar y superponer planos.
 - b. Superponer planos que se cortan (uno definido con dos puntos en el plano base y el otro no).
- iii. Conocimientos matemáticos previos: planos que se cortan, planos que se superponen.
- iv. Procedimientos
 - a. Procedimiento “arrastrar un punto”
 - b. Procedimiento “superponer planos”
 - c. Procedimiento de uso de la herramienta “Manipulación”
 - d. Procedimiento de uso de la función “bola de cristal”
- vi. Comentarios en detalle.

Comentarios	
<p>Estos planos están contruidos a partir de tres puntos de construcción o pC:</p> <ul style="list-style-type: none"> - En el violeta, los tres puntos están en el espacio (fuera del plano base) - En el verde, dos de los puntos están sobre el plano base. 	Puntos de construcción
<p>A esta actividad se aplica todo lo dicho en la actividad “Superponer.planos.2”; teniendo en cuenta que al incorporar un plano con sus tres pC en el espacio hay un mayor grado de dificultad.</p>	
<p>Resulta más sencillo colocar al plano verde en la posición paralela que al plano violeta; debido a que el verde tiene dos puntos sobre el plano base.</p>	
<p>Si se quiere que la superposición sea la más ajustada es preciso mover verticalmente a alguno de los puntos.</p>	Movimiento vertical

G. Actividad “Superponer.planos.4”

- i. Objetivos
 - a. Propiciar la creación de esquemas y de instrumentos asociados a las herramientas introducidas y a las tareas propuestas.
- ii. Tareas
 - a. Arrastrar un plano mediante puntos de una recta perpendicular.
 - b. Superponer planos que se cortan (uno definido con dos puntos en el plano base y el otro perpendicular a una recta).
- iii. Conocimientos matemáticos previos: rectas, planos que se cortan, planos que se superponen.
- iv. Procedimientos
 - a. Procedimiento “arrastrar un plano”.
 - b. Procedimiento “superponer planos”
 - c. Procedimiento “arrastrar un punto”
 - d. Procedimiento “arrastrar un plano mediante dos puntos que definen una recta perpendicular”
 - e. Procedimiento “arrastrar un plano mediante un punto ligado a una recta perpendicular”.
 - f. Procedimiento de uso de la herramienta “Manipulación”
 - g. Procedimiento de uso de la función “bola de cristal”
- vi. Comentarios en detalle.

Comentarios	
Esta actividad es continuación de la actividad “Mover.plano.con.recta”, a la escena de la cual se le ha añadido un plano verde con dos puntos sobre el plano base y otro en el espacio (fuera del plano base). Estos puntos se han bloqueado para que la posición del plano verde no pueda ser modificada.	Escena
A la experiencia obtenida con la actividad “Mover.plano.con.recta” se añade la de tener que superponer los planos (practicado en las actividades anteriores). El propósito es observar y estudiar la génesis instrumental de los esquemas e instrumentos desarrollados por los/as alumnos/as.	Génesis instrumental.

H. Actividad “Superponer.tetraedros.1”

- i. Objetivos
 - a. Propiciar la creación de esquemas y de instrumentos asociados a las herramientas introducidas y a las tareas propuestas.
- ii. Conocimientos matemáticos previos: tetraedros, superponer tetraedros.
- iii. Tareas
 - a. Arrastrar tetraedros.
 - b. Modificar el tamaño de un tetraedro.
 - c. Superponer tetraedros de distinto tamaño que están sobre el plano base.
- iv. Procedimientos
 - a. Procedimiento “arrastrar un tetraedro”.

- b. Procedimiento “modificar el tamaño de un tetraedro”
- c. Procedimiento “superponer tetraedros”
- d. Procedimiento “arrastrar un punto”
- e. Procedimiento de uso de la herramienta “Manipulación”
- f. Procedimiento de uso de la función “bola de cristal”

vi. Comentarios en detalle.

Comentarios	
Se han dispuesto dos tetraedros sobre el plano base. Están creados con el herramienta “Tetraedro regular” y con una cara en el plano base definida por un centro (que llamaremos O) y un punto.	Escena
Las actividades “Composición”, “Tipos.de.puntos.2”, “Superponer.tetraedros.1”, “Superponer.tetraedros.2” y “Tipos.de.puntos.4” son las únicas en las que aparecen poliedros. En ninguna de ellas se busca realizar un estudio de los mismos. Más bien se utilizan como un nuevo contexto elemental distinto a puntos, rectas y planos (elementos sobre los que centramos nuestra atención en el presente trabajo).	Poliedros
Al trabajar con poliedros aparecen resultados diferentes según qué punto se arrastre. En particular, en esta actividad: <ul style="list-style-type: none"> - El punto O y los vértices definen al tetraedro (en este sentido el tetraedro depende de ellos) - El punto O y los vértices del tetraedro que están en el plano base, están ligados a él, por lo que tienen dos grados de libertad. - Al arrastrar el punto O el tetraedro se desplaza como un todo: el movimiento es una traslación. - Al arrastrar los vértices que están en el plano base, el tetraedro no se traslada; pero sí gira y cambia sus dimensiones. - El vértice del tetraedro que está fuera del plano base tiene un grado de libertad (sólo se puede arrastrar verticalmente”). Al arrastrarlo produce que el tetraedro cambie de tamaño, pero no se traslada ni gira. 	Efectos de los arrastres

I. Actividad “Superponer.tetraedros.2”

i. Objetivos

- a. Trabajar el procedimiento “desplazar un objeto”
- b. Trabajar el procedimiento “arrastrar un objeto”.

ii. Tareas

- a. Arrastrar tetraedros.
- b. Superponer tetraedros situados en planos paralelos.

iii. Procedimientos

- a. Procedimiento “arrastrar un tetraedro”.
- b. Procedimiento “superponer tetraedros”
- c. Procedimiento “superponer planos”
- d. Procedimiento “arrastrar un punto”
- e. Procedimiento “arrastrar planos paralelos”
- f. Procedimiento “modificar el tamaño de un tetraedro”
- g. Procedimiento “girar un tetraedro”
- h. Procedimiento de uso del herramienta “Manipulación”

- i. Procedimiento de uso de la función “bola de cristal”
- vi. Comentarios en detalle.

Comentarios	
Se han dispuesto dos tetraedros: uno sobre el plano base, otro sobre un plano paralelo al plano base.. Están creados con el herramienta “Tetraedro regular” y con una cara en el plano definida por un centro (que llamaremos O) y un punto.	Escena
Ver comentario actividad “Superponer.tetraedros.1”	Poliedros
Al trabajar con poliedros aparecen resultados diferentes según qué punto se arrastre. En particular, en esta actividad: - Se aplica todo lo dicho en la actividad “Superponer.tetraedros.1”. - Además, se incorpora el arrastre vertical del plano paralelo al plano base.	Efectos de los arrastres

J. Actividad “Tipos.de.puntos.4”

- i. Objetivos
 - a. Trabajar la noción de que hay distintos tipos de puntos: puntos libres, puntos ligados a una región, puntos dependientes de otros.
 - b. Trabajar la noción de punto (objeto) imagen especular a otro punto (objeto), como punto (objeto) dependiente de otro.
 - c. Trabajar la función “bola de cristal”
- ii. Tareas
 - a. Mover tetraedros y puntos y líneas sobre ellos.
 - b. Distinguir entre un objeto y su imagen especular.
- iii. Conocimiento matemático previo: puntos, líneas, planos, poliedros, imagen especular.
- iv. Procedimientos
 - a. Procedimientos de arrastre de los distintos tipos de puntos.
 - b. Procedimiento de uso del herramienta “Manipulación”
 - c. Procedimiento de uso de la función “bola de cristal”
- vi. Comentarios en detalle.

Comentarios	
Se han creado dos icosaedros, uno imagen del otro respecto del plano rojo: el verde es imagen del amarillo. Sobre tres caras visibles del amarillo, se han colocado dos circunferencias y un arco de circunferencia; y sobre una de las aristas se ha situado un punto. En el icosaedro verde se han creado sus imágenes respecto al plano rojo.	Escena
Ver comentario actividad “Superponer.tetraedros.1”	Poliedros
La escena está pensada para que aparezcan distintos grados de libertad y dependencia entre objetos; de manera, que con ellos el/la alumno/a experimente los diferentes efectos al arrastrar dichos objetos: <ul style="list-style-type: none"> • Icosaedro amarillo: los comentarios son similares a los realizados con el cubo en la actividad “Tipos.de.puntos.2”. • Circunferencias: están creados con su centro en una cara y un punto sobre una arista. El centro sólo se puede desplazar dentro de la cara (dos grados de libertad). El punto sólo por la arista (un grado de libertad). 	Arrastres

<ul style="list-style-type: none"> • Arco de circunferencia: sus puntos están definidos en una cara, por lo que sólo se pueden arrastrar en dicha cara (dos grados de libertad). • El punto sobre la arista sólo puede arrastrarse en ella (un grado de libertad). • Imágenes: todos los objetos creados como imagen de otro, no pueden arrastrarse. Su movilidad depende de los objetos originales. 	
---	--

5. Ángulos entre rectas y planos.

A. Actividad: “Rectas paralelas”

i. Objetivos

1. Noción de única recta paralela a una recta dada por un punto exterior.
2. Trabajar el procedimiento “arrastrar un objeto”.
3. Trabajar con la función “bola de cristal”.
4. Trabajar con el herramienta “Paralela”.

ii. Conocimiento matemático previo: rectas, rectas paralelas.

iii. Tareas

- j. Desplazar rectas.
- k. Encontrar la recta paralelas a una recta dada por un punto exterior.

iv. Procedimientos

- p. Procedimiento “arrastrar una recta”.
- q. Procedimiento “encontrar recta paralela a una recta dada por un punto exterior”.
- r. Procedimiento de uso de la herramienta “Manipulación”.
- s. Procedimiento de uso de la herramienta “Manipulación” más “tecla mayúsculas”.
- t. Procedimiento de uso de la función “bola de cristal”.

vi. Comentarios en detalle.

Comentarios	
<p>Hay dos rectas:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Cada una pasa por dos puntos libres en el espacio (fuera del plano base). • La roja ha sido inmovilizada al ser bloqueados sus dos puntos de construcción. • En la verde, el punto P ha sido bloqueado; quedando sólo móvil el punto Q. Éste es el punto que se pide sea arrastrado en la actividad. 	Escena
<p>Esta actividad es exigente desde el punto de vista instrumental y de sentido espacial:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Es preciso utilizar con cierta soltura diferentes tipos de arrastres ya vistos, en especial la función “bola de cristal” y la combinación [herramienta “Manipulación” + “tecla de mayúsculas”]. • Un aspecto a observar es el uso de la función “bola de cristal” y la búsqueda o no de vistas que permitan establecer el paralelismo entre las rectas. 	Génesis instrumental.

<p>Se introduce el uso del herramienta “Paralela”.</p> <p>Se deja a los estudiantes que intenten utilizarlo sin ninguna ayuda. Para observar posibles dificultades y si utilizan la retroalimentación proporcionada por el interfaz (iconos, mensajes, etc.)</p> <p>Según el éxito de los estudiantes, el profesor mostrará el uso del herramienta “Paralela”, procurando ser lo más escueto posible.</p>	<p>Introducción del herramienta “Paralela”.</p>
---	---

B. Actividad: “Plano.recta.paralelos”

- i. Objetivos
 - a. Noción de haz de planos paralelos a una recta dada por una recta paralela.
 - b. Propiciar la creación de esquemas y de instrumentos asociados a las herramientas introducidas y a las tareas propuestas.
- ii. Conocimiento matemático previo: rectas, rectas paralelas, planos paralelos a una recta.
- iii. Tareas
 - a. Girar un plano alrededor de una recta que contiene arrastrando un punto del mismo.
 - b. Encontrar planos paralelos a una recta dada por una recta paralela a la misma.
- iv. Procedimientos
 - a. Procedimiento “arrastrar objeto”.
 - b. Procedimiento “encontrar los planos paralelos a una recta dada”.
 - c. Procedimiento de uso del herramienta “Manipulación”
 - d. Procedimiento de uso de la función “bola de cristal”
- vi. Comentarios en detalle.

Comentarios	
<p>Hay dos rectas:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Cada una pasa por dos puntos libres en el espacio (fuera del plano base). • La roja ha sido inmovilizada al ser bloqueados sus dos puntos de construcción. • La azul ha sido creada como la paralela a la roja que pasa por el punto P. Éste ha sido bloqueado; de manera que la recta ha quedado inmovilizada. <p>Hay un plano verde creado como el plano que contiene la recta azul y pasa por el punto Q (único objeto que es posible arrastrar en la escena).</p>	Escena
<p>La única forma de mover el plano es arrastrado el punto Q. El efecto de arrastrar Q es hacer girar el plano.</p>	Arrastre
<p>En principio, los herramienta con los que se puede actuar en esta actividad son “Manipulación”, la función “bola de cristal” y la combinación [“Manipulación” + “tecla de mayúsculas”].</p> <p>Se ha dejado de referirse a ellos de forma explícita; de manera que su uso está dirigido hacia una tarea de geometría elemental.</p>	Génesis instrumental

C. Actividad: “Plano.recta.perpendiculares”

- i. Objetivos
 - a. Noción de plano perpendicular a una recta dada por un punto de la misma.
 - b. Propiciar la creación de esquemas y de instrumentos asociados a las herramientas introducidas y a las tareas propuestas.
- ii. Conocimiento matemático previo: rectas, planos, plano perpendicular a una recta.
- iii. Tareas
 - a. Arrastrar un plano arrastrando dos puntos del mismo sobre el plano base.
 - b. Encontrar plano perpendicular a una recta dada por un punto de la misma.
- iv. Procedimientos
 - a. Procedimiento “arrastrar un objeto”.
 - b. Procedimiento “encontrar plano perpendicular a una recta dada”.
 - c. Procedimiento de uso del herramienta “Manipulación”
 - d. Procedimiento de uso de la función “bola de cristal”.
 - e. Procedimiento de uso de la herramienta “Perpendicular”.
- vi. Comentarios en detalle.

Comentarios	
Hay una recta roja que pasa por dos puntos en el espacio (fuera del plano base), los cuales están bloqueados (y ocultados); por lo tanto, la recta está inmovilizada. Hay tres puntos. Los puntos M y N están sobre el plano base; y, el P en la recta. Este punto está bloqueado. El plano verde está creado como el plano que pasa por los puntos M, N y P.	Escena
Lo único que es posible arrastrar son los puntos M y N. Al arrastrar éstos puntos el plano gira alrededor de P; pero manteniendo los puntos M y N sobre el plano base.	Arrastre
En principio, las herramientas con los que se puede actuar en esta actividad son la herramienta “Manipulación”, la función “bola de cristal” y la herramienta “Perpendicular”.	Génesis instrumental
Se introduce el uso de la herramienta “Perpendicular”. Se deja a los estudiantes que intenten utilizarlo sin ninguna ayuda. Para observar posibles dificultades y si utilizan la retroalimentación proporcionada por el interfaz (iconos, mensajes, etc.) Según el éxito de los estudiantes, el profesor mostrará el uso del herramienta “Perpendicular”, procurando ser lo más escueto posible.	Introducción al herramienta “Perpendicular”

D. Actividad: “Recta.recta.perpendiculares”

i. Objetivos

- a. Noción de haz de rectas perpendiculares a una recta dada por un punto de la misma.
- b. Trabajar con la función “bola de cristal”.
- c. Trabajar con la herramienta “Ángulo”.
- d. Trabajar con la herramienta “Perpendicular”.
- e. Propiciar la creación de esquemas y de instrumentos asociados a las herramientas introducidas y a las tareas propuestas.

ii. Conocimiento matemático previo: rectas, rectas perpendiculares.

iii. Tareas

- a. Arrastrar rectas.
- b. Encontrar rectas perpendiculares a una recta dada por un punto de la misma.

iv. Procedimientos

- a. Procedimiento “arrastrar una recta”.
- b. Procedimiento “encontrar las rectas perpendiculares a una recta dada”.
- c. Procedimiento de uso del herramienta “Manipulación”
- d. Procedimiento de uso de la función “bola de cristal”.
- e. Procedimiento de uso de la herramienta “Ángulo”.
- f. Procedimiento de uso de la herramienta “Perpendicular”.

vi. Comentarios en detalle.

Comentarios	
<ul style="list-style-type: none"> Hay dos rectas (una roja y otra azul) definidas sobre puntos en el espacio (fuera del plano base). La recta roja se ha inmovilizado tras bloquear sus puntos de construcción. Sobre la roja se ha creado un punto P; que también se ha bloqueado. En el espacio se ha creado un punto Q. La recta azul se ha creado como la recta que pasa por los puntos P y Q; por lo tanto, corta a la recta roja por el punto P. 	Escena
<ul style="list-style-type: none"> El único punto que es posible arrastrar es el Q. Al arrastrar Q, gira la recta azul alrededor del punto P. 	Arrastre
<p>Se introduce el uso de la herramienta “Ángulo”.</p> <p>Se deja a los estudiantes que intenten utilizarlo sin ninguna ayuda. Para observar posibles dificultades y si utilizan la retroalimentación proporcionada por el interfaz (iconos, mensajes, etc.)</p> <p>Según el éxito de los estudiantes, el profesor mostrará el uso del herramienta “Ángulo”, procurando ser lo más escueto posible.</p>	Introducción del herramienta “Ángulo”
<p>Esta actividad tiene cierta exigencia desde el punto de vista instrumental</p> <ul style="list-style-type: none"> Es preciso utilizar con cierta soltura diferentes tipos de arrastres ya vistos, en especial la función “bola de cristal” y la combinación [herramienta 	Génesis instrumental

<p>“Manipulación” + “tecla de mayúsculas”].</p> <ul style="list-style-type: none"> • Un aspecto a observar es el uso de la función “bola de cristal” y la búsqueda o no de vistas que permitan establecer la perpendicularidad entre las rectas. 	
---	--

E. Actividad: “Ángulo.recta.plano”

- i. Objetivos
 - a. Noción de ángulo entre recta y plano.
 - b. Trabajar con la función “bola de cristal”.
 - c. Trabajar con la herramienta “Ángulo”.
- ii. Conocimiento matemático previo: rectas, planos, ángulos.
- iii. Tareas
 - a. Girar una recta arrastrando un punto de la misma.
 - b. Encontrar el ángulo entre una recta y un plano.
- iv. Procedimientos
 - a. Procedimiento “arrastrar un objeto”.
 - b. Procedimiento “girar una recta arrastrando un punto de la misma”
 - c. Procedimiento “encontrar el ángulo entre una recta y un plano”.
 - d. Procedimiento de uso del herramienta “Manipulación”
 - e. Procedimiento de uso de la función “bola de cristal”.
 - f. Procedimiento de uso de la herramienta “Ángulo”.
- vi. Comentarios en detalle.

Comentarios	
Hay una recta roja que pasa por el punto O (que está sobre el plano base) y por un punto en el espacio (fuera del plano base y que llamaremos A). Hay una recta azul que pasa por O y por el punto B (que está sobre el plano base). Se ha definido un ángulo por los puntos A, O y B.	Escena
Todos los elementos de la escena pueden ser arrastrados. No obstante, sólo se pide que se arrastre el punto B. Al arrastre el punto B, los valores del ángulo cambian.	Arrastre
En principio, las herramientas con los que se puede actuar en esta actividad son la herramienta “Manipulación”, la función “bola de cristal” y la herramienta “Ángulo”.	Génesis instrumental

ANEXO V. DESCRIPCIÓN DE LOS PROCEDIMIENTOS ASOCIADOS A LAS TAREAS

El término procedimiento lo usamos en el sentido de actuar de forma determinada para desarrollar una tarea de manera eficaz. En él incluimos las reglas a seguir, así como los conceptos y proposiciones que están directamente en juego.

Los descritos en la tabla V.1 son los más básicos asociados a las actividades. A partir de ellos es posible construir el resto de los procedimientos que pueden asociarse a las actividades propuestas. Es previsible que sean utilizados por los alumnos. Pueden devenir en esquemas de acción instrumentada si efectivamente los utilizan.

Tabla V.1. Descripción procedimientos asociados a priori a las tareas básicas demandas en las actividades.		
PROCEDIMIENTO	DESCRIPCIÓN	HERRAMIENTA O FUNCIÓN
Crear un punto	<ul style="list-style-type: none"> • Proposición: Para crear un punto se puede utilizar la herramienta “Punto”. • Regla: Se han de seguir los siguientes pasos: <ol style="list-style-type: none"> 1. Se busca con el cursor la herramienta “Punto” en uno de los menús de la barra de herramientas y se selecciona pulsando sobre “Punto” con el pulsador izquierdo del ratón. 2. Se lleva el cursor sobre la zona de trabajo y se pulsa con el pulsador izquierdo del ratón en la posición que se desee. 3. Quedará creado un punto. 4. Se puede seguir creando más puntos sin más que arrastrar el ratón por la zona de trabajo. Cada vez que se pulse con el izquierdo se creará un punto. 5. Para deseleccionar la herramienta “Punto” basta con seleccionar la herramienta “Manipulación” o cualquier otra. 	“Punto”

Crear un punto libre	<ul style="list-style-type: none"> • Concepto 1: un punto “libre” en Cabri 3D, es el que puede ser arrastrado por toda la Zona de Trabajo. • Concepto 2: un punto “libre” en Cabri 3D, es el que no está ligado ni depende de otro objeto de la Zona de Trabajo. • Proposición 1: un punto “libre” en Cabri 3D se crea sin ligarse a otro objeto y sin dependencia a otro objeto. • Proposición 2: un punto “libre” se crea en el espacio (fuera del espacio base) • Proposición 3: La tecla de mayúsculas permite arrastrar verticalmente los puntos “libres”; es decir, no ligados ni dependientes de otros objetos. • Regla: si se usa la herramienta “Punto” entonces el procedimiento “crear un punto” se ha de modificar e incorporar el uso de la tecla de mayúsculas; es decir, utilizar el procedimiento “arrastrar punto verticalmente”. 	“Punto”
Crear puntos	<ul style="list-style-type: none"> • Proposición 1: Para crear un punto se puede utilizar la herramienta “Punto” y el procedimiento “crear punto” • Proposición 2: No obstante, en la mayor parte de las herramientas de Cabri 3D se crean puntos si previamente no existen. 	
Crear el punto medio de dos puntos dados	<ul style="list-style-type: none"> • Regla: <ol style="list-style-type: none"> 1. Se busca con el cursor la herramienta “Punto medio” en uno de los menús de la barra de herramientas y se selecciona pulsando sobre “Punto medio” con el pulsador izquierdo del ratón. 2. Se lleva el cursor sobre uno de los puntos y se pulsa una vez con el botón izquierdo del ratón sobre dicho punto. 3. A continuación, se desplaza el ratón sobre el otro punto y se pulsa una vez con el botón izquierdo del ratón. 4. Se crea el punto medio. 5. Se puede seguir creado más puntos sin más que reiterar el proceso sobre pares de punto de la zona de trabajo. 6. Para deseleccionar la herramienta “Punto medio” basta con seleccionar la herramienta “Manipulación” o cualquier otra. 	“Punto medio”
Crear el punto medio de una arista de un poliedro	<ul style="list-style-type: none"> • Proposición 1: hay dos opciones para crear el punto medio de una arista: la regla 1 y la regla 2. • Regla 1: se crea el punto medio de los vértices extremos de la arista siguiendo el procedimiento “crear el punto medio de dos puntos dados” • Regla 2: se señala la arista (procedimiento “señalar una recta”) y se pulsa el botón izquierdo del ratón. • Proposición 2: Cuando se señala la arista (regla 2) el interfaz ofrece las siguientes retroalimentaciones: <ul style="list-style-type: none"> ○ Aparece el mensaje “Punto medio de esta arista” ○ La arista cambia de color ○ Los vértices parpadean ○ Aparece el punto medio, independientemente de en qué parte de la arista se señale. 	“Punto medio”
Crear la	Regla 1: Si los puntos están creados se sigue los siguientes pasos:	“Recta”

<p>recta que pasa por dos puntos.</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. Se busca con el cursor la herramienta “Recta” en uno de los menús de la barra de herramientas y se selecciona pulsando sobre “Recta” con el pulsador izquierdo del ratón. 2. Se lleva el cursor sobre cada uno de los puntos y se marca sobre ellos con el botón izquierdo del ratón. 3. Al marcar sobre el segundo punto, se fija la recta y se crea. <p>Regla 2: Si los puntos no están creados sigue los siguientes pasos:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Se busca con el cursor la herramienta “Recta” en uno de los menús de la barra de herramientas y se selecciona pulsando sobre “Recta” con el pulsador izquierdo del ratón. 2. Se lleva el cursor sobre la posición deseada y se pulsa una vez con el botón izquierdo del ratón en la posición que se desee. Si la posición deseada está en el espacio (fuera de cualquier objeto de la Zona de Trabajo) entonces se utiliza la tecla de mayúsculas para arrastrar verticalmente el punto. 3. Se crea un punto. 4. A continuación, se desplaza el ratón a una nueva posición por donde se desea que pase la recta y se pulsa una vez con el botón izquierdo del ratón 5. Se crea un nuevo punto y se fija la recta deseada. 6. Se puede seguir marcando más puntos sin más que arrastrar el ratón por la zona de trabajo y creado rectas. Cada vez que se pulse con el izquierdo se creará un punto, y cada dos puntos una recta. 7. Para deseleccionar la herramienta “Recta” basta con seleccionar la herramienta “Manipulación” o cualquier otra. 	
<p>Crear la recta intersección de dos planos que se cortan</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Regla: <ol style="list-style-type: none"> 1. Se busca con el cursor la herramienta “Curva de intersección” en uno de los menús de la barra de herramientas y se selecciona pulsando sobre “Curva de intersección” con el pulsador izquierdo del ratón. 2. Se lleva el cursor sobre uno de los planos y se pulsa una vez con el botón izquierdo del ratón sobre dicho plano. 3. A continuación, se desplaza el ratón sobre el otro plano y se pulsa una vez con el botón izquierdo del ratón. 4. Se crea la recta intersección. 5. Se puede seguir creado más rectas de intersección sin más que reiterar el proceso sobre pares de planos que se corten de la zona de trabajo. 6. Para deseleccionar la herramienta basta con seleccionar la herramienta “Manipulación” o cualquier otra. 	<p>“Curva de intersección”</p>
<p>Crear un plano que pasa por tres puntos dados</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Regla: <ol style="list-style-type: none"> 1. Se busca con el cursor la herramienta “Plano” en uno de los menús de la barra de herramientas y se selecciona pulsando sobre “Plano” con el pulsador izquierdo del ratón. 2. Se lleva el cursor sobre uno de los puntos y se pulsa una vez con el botón izquierdo del ratón sobre dicho punto. 3. A continuación, se desplaza el ratón sobre el otro punto y se pulsa 	<p>Plano</p>

	<p>una vez con el botón izquierdo del ratón.</p> <ol style="list-style-type: none"> Repite el paso 3 con el tercer punto. Se crea el plano. Se puede seguir creado más planos sin más que reiterar el proceso sobre tríos de punto de la zona de trabajo. Para deseleccionar la herramienta “Plano” basta con seleccionar la herramienta “Manipulación” o cualquier otra. 	
<p>Crear la recta paralela a otra que pasa por un punto dado</p>	<ul style="list-style-type: none"> Regla: realiza los siguientes dos pasos: <ol style="list-style-type: none"> Señala la recta de referencia y pulsa el botón izquierdo del ratón. Señala el punto por donde ha de pasar la paralela. El orden de los puntos 1 y 2 es intercambiable. Retroalimentaciones: <p>Mensajes:</p> <ul style="list-style-type: none"> Cuando se señala primero la recta de referencia aparece el mensaje “paralela a esta recta...”; y al marcar después el punto, aparece “... que pasa por este punto” Cuando se señala primero el punto, el mensaje es “Paralela que pasa por este punto...” ; y al señalar la recta de referencia, aparece “... a esta recta” <p>Figuras:</p> <ul style="list-style-type: none"> Cuando se señala primero la recta de referencia y después de haberla marcado, aparece una recta de color azul ligada a un punto rojo, que sigue al curso. Éste ha cambiado su apariencia: de mano con el índice extendido a lápiz. Cuando se señala el punto, el cursor vuelve a la forma de mano con índice extendido; y el punto rojo, se superponer sobre el punto dado. Cuando se marca éste, la recta azul se fija sobre él; y el cursor cambia a flecha. Si se marca primero el punto, las retroalimentaciones dependen de los diferentes objetos por donde vaya pasando el cursor hasta llegar a la recta de referencia. Por ejemplo, si se pasa por el plano base, aparece un plano azul que es su paralelo que pasa por el punto dado. 	<p>“Paralela”</p>
<p>Crear el plano perpendicular a una recta que pasa por un punto dado</p>	<ul style="list-style-type: none"> Regla: realiza los siguientes dos pasos: <ol style="list-style-type: none"> Señala la recta de referencia y pulsa el botón izquierdo del ratón. Señala el punto por donde ha de pasar la paralela. El orden de los puntos 1 y 2 es intercambiable. Retroalimentaciones: <p>Mensajes:</p> <ul style="list-style-type: none"> Cuando se señala primero la recta de referencia aparece el mensaje “plano perpendicular a esta recta...”; y al marcar después el punto, aparece “... pasando por este punto” Cuando se señala primero el punto, el mensaje es “Perpendicular 	<p>“Perpendicular”</p>

	<p>que pasa por este punto...” ; y al señalar la recta de referencia, aparece “... a esta recta”</p> <p>Figuras:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Cuando se señala primero la recta de referencia y después de haberla marcado, aparece un plano perpendicular de color azul ligado a un punto rojo, que sigue al curso. Éste ha cambiado su apariencia: de mano con el índice extendido a lápiz. Cuando se señala el punto, el cursor vuelve a la forma de mano con índice extendido; y el punto rojo, se superpone sobre el punto dado. Cuando se marca éste, el plano azul se fija sobre él; y el cursor cambia a flecha. - Cuando se marca primero el punto, aparece un plano perpendicular a la recta de referencia que pasa por el punto dado. No obstante, si después de marcar el punto, se señala diferentes objetos o el espacio sin objetos, el interfaz ofrece diferentes retroalimentaciones. Por ejemplo, si se señala el espacio sin objetos el plano azul desaparece y el cursor toma forma de flecha. Otro ejemplo: si se señala un plano, se crea la recta perpendicular a ese plano que pasa por el punto dado. 	
Cambiar punto de vista dentro de la zona de trabajo	<ul style="list-style-type: none"> • Regla: colocar el cursor del ratón en la zona de trabajo, hacer un clic derecho, mantener pulsado el botón derecho, arrastrar el ratón. • Transformaciones esperables: <ul style="list-style-type: none"> - Los objetos de la pantalla se mueven manteniendo todas las distancias relativas entre los puntos. Todas las posiciones relativas se mantienen aunque las posiciones respecto a los límites de la pantalla cambian. 	La función “bola de cristal”
Encontrar y examinar objetos.	<ul style="list-style-type: none"> • Regla: colocar el cursor del ratón en la zona de trabajo, hacer un clic derecho, mantener pulsado el botón derecho, arrastrar el ratón. • Transformaciones esperables: <ul style="list-style-type: none"> - Los objetos de la pantalla se mueven manteniendo todas las distancias relativas entre los puntos. Todas las posiciones relativas se mantienen aunque las posiciones respecto a los límites de la pantalla cambian. - Arrastrando con distintas velocidades y amplitudes de los desplazamientos es posible encontrar y examinar los distintos objetos en la Zona de Trabajo. 	La función “bola de cristal”
	<p>Los procedimientos para el herramienta “Manipulación” tienen en común las siguientes ideas:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Por defecto, la herramienta “Manipulación” está activo. Si no lo está, se ha de seleccionar en la barra de herramientas en uno de sus menús desplegables el herramienta “Manipulación” 	“Manipulación”

	<ul style="list-style-type: none"> • Elegir la herramienta “Manipulación” permite deseleccionar cualquier otra herramienta en ejecución. • Las acciones con del herramienta “Manipulación” en la zona de trabajo están representadas con iconos: <ul style="list-style-type: none"> ○ Cuando el curso pasa sobre un punto, el curso pasa de tener la apariencia de punta de flecha a tener la forma de una mano en la cual el dedo índice está extendido. ○ Cuando se arrastra un punto con la herramienta “Manipulación” el cursor toma la apariencia de una mano agarrando un objeto. 	
Señalar un punto	<ul style="list-style-type: none"> • Regla: para señalar un punto, selecciona el herramienta “Manipulación” y posa el cursor sobre el punto. • Retroalimentaciones: <ul style="list-style-type: none"> ○ Cuando el curso pasa sobre un punto, el curso pasa de tener la apariencia de punta de flecha a tener la forma de una mano en la cual el dedo índice está extendido. ○ Si el punto es arrastrable, comienza a parpadear. ○ Aparece un mensaje: “este punto” 	“Manipulación”
Agarrar y soltar un punto	<ul style="list-style-type: none"> • Regla: <ul style="list-style-type: none"> ○ Para agarrar un punto, primero señálalo y después mantén pulsado el botón izquierdo del ratón. ○ Para soltar un punto deja de pulsar sobre el botón izquierdo del ratón. • Retroalimentaciones: <ul style="list-style-type: none"> ○ Cuando se agarra un punto arrastrable con la herramienta “Manipulación” el cursor toma la apariencia de una mano agarrando un objeto; si no, toma la apariencia de una punta de flecha. ○ Si el punto es arrastrable, parpadea; si no, no. 	“Manipulación”
Arrastrar un punto	<ul style="list-style-type: none"> • Regla: para arrastrar un punto sigue los siguientes pasos: <ol style="list-style-type: none"> 1. Señálalo (procedimiento “señalar un punto”) 2. Sin soltar el punto (procedimiento “agarrar y soltar un punto”) mueve el cursor por la zona de trabajo hasta la posición deseada. 3. En la posición deseada, suelta el punto. • Transformaciones esperadas: <ul style="list-style-type: none"> ○ El punto cambia de posición en la pantalla siguiendo el movimiento del cursor. • Retroalimentaciones: <ul style="list-style-type: none"> ○ Cuando se arrastra un punto con la herramienta “Manipulación” el cursor toma la apariencia de una mano agarrando un objeto. 	“Manipulación”
Arrastrar un punto verticalmente	<ul style="list-style-type: none"> • Regla: <ol style="list-style-type: none"> 1. Se selecciona el herramienta “Manipulación” y agarra el punto según el procedimiento “agarrar y soltar un punto” 2. Ahora, se pulsa la tecla de mayúsculas y se mantiene pulsada. Esto permite arrastrar verticalmente al punto. 3. Se arrastra el punto con el ratón, sin utilizar sus pulsadores, hasta la altura deseada. 4. Se sueltan los pulsadores del ratón. 	“Manipulación” más tecla de mayúsculas

<p>Arrastre de los distintos tipos de puntos</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Proposición 1: en Cabri 3D hay tres tipos de puntos: libres, semi-libres y dependientes. • Concepto 1: un punto semi-libre en Cabri 3D, es el que pertenece a una línea o superficie, y tienen uno o dos grados de libertad respectivamente. • Concepto 2: un punto dependiente en Cabri 3D, es el que se define dependiendo de otro u otros objetos. • Concepto 3: un punto “libre” en Cabri 3D, es el que puede ser arrastrado por toda la Zona de Trabajo. • Proposición 2: un punto semi-libre sólo se puede arrastrar sobre la línea o la superficie a la que pertenece. • Proposición 3: un punto dependiente no se puede arrastrar; tan sólo se puede mover de manera indirecta a través del objeto del que depende. • Proposición 4: un punto “libre” en Cabri 3D, es el que no está ligado ni depende de otro objeto de la Zona de Trabajo; 	<p>“Manipulación”</p> <p>Tecla de mayúsculas más “Manipulación”</p>
<p>Arrastrar un punto libre</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Regla: para arrastrar un punto libre se aplican los procedimientos “arrastrar un punto”, “arrastrar un punto verticalmente” y “arrastre de los distintos tipos de puntos” 	<p>“Manipulación”</p> <p>Tecla de mayúsculas más “Manipulación”</p>
<p>Arrastrar un punto en el espacio utilizando sus coordenadas”</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Proposición 1: las coordenadas indican la posición del punto respecto a unos ejes coordenados. • Proposición 2: arrastrar un punto supone cambiar sus coordenadas. • Proposición 3: cambiar sus coordenadas supone cambiar su posición. 	<p>“Manipulación”</p> <p>Tecla de mayúsculas más “Manipulación”</p> <p>“Coord. o ecuación”</p>
<p>Señalar una recta</p> <p>(o parte de recta: semirrecta, segmento, vector, lado de polígono, arista de poliedro).</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Regla: para señalar una recta, selecciona el herramienta “Manipulación” y posa el cursor sobre la recta. • Retroalimentaciones: <ul style="list-style-type: none"> ○ Cuando el curso pasa sobre una recta, el curso pasa de tener la apariencia de punta de flecha a tener la forma de una mano en la cual el dedo índice está extendido. ○ Cuando el curso pasa sobre la recta, ésta comienza a parpadear. ○ Aparece un mensaje: “esta recta” 	<p>“Manipulación”</p>

<p>Agarrar y soltar una recta</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Regla: <ul style="list-style-type: none"> ○ Para agarrar una recta, primero la señalas y después mantén pulsado el botón izquierdo del ratón. ○ Para soltar una recta deja de pulsar sobre el botón izquierdo del ratón. • Retroalimentaciones: <ul style="list-style-type: none"> ○ Cuando se agarra una recta arrastrable con la herramienta “Manipulación” el cursor toma la apariencia de una mano agarrando un objeto; si no es arrastrable, el cursor toma la apariencia de una punta de flecha. ○ Si la recta es arrastrable, parpadea; si no, no. 	<p>“Manipulación”</p>
<p>Arrastrar una recta</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Regla: para arrastrar una recta sigue los siguientes pasos: <ol style="list-style-type: none"> 1. Señálalo (procedimiento “señalar una recta”) 2. Sin soltar la recta (procedimiento “agarrar y soltar una recta”) mueve el cursor por la zona de trabajo hasta la posición deseada. 3. En la posición deseada, suelta la recta. • Transformaciones esperadas: <ul style="list-style-type: none"> ○ La recta cambia de posición en la pantalla siguiendo el movimiento del cursor. • Retroalimentaciones: <ul style="list-style-type: none"> ○ Cuando se arrastra una recta con la herramienta “Manipulación” el cursor toma la apariencia de una mano agarrando un objeto. ○ Mientras es arrastrada, la recta parpadea. 	<p>“Manipulación” Tecla de mayúsculas más “Manipulación”</p>
<p>Señalar un plano</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Regla: para señalar un plano, selecciona el herramienta “Manipulación” y posa el cursor sobre el plano. • Retroalimentaciones: <ul style="list-style-type: none"> ○ Cuando el curso pasa sobre un plano, el curso pasa de tener la apariencia de punta de flecha a tener la forma de una mano en la cual el dedo índice está extendido. ○ Cuando el curso pasa sobre el plano, éste comienza a parpadear y aparecen puntitos blancos. ○ Aparece un mensaje: “este plano” 	<p>“Manipulación”</p>
<p>Agarrar y soltar un plano</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Regla: <ul style="list-style-type: none"> ○ Para agarrar un plano, primero lo señalas y después mantén pulsado el botón izquierdo del ratón. ○ Para soltar un plano deja de pulsar sobre el botón izquierdo del ratón. • Retroalimentaciones: <ul style="list-style-type: none"> ○ Cuando se agarra un plano arrastrable con la herramienta “Manipulación” el cursor toma la apariencia de una mano agarrando un objeto; si no, toma la apariencia de una punta de flecha. ○ Si el plano es arrastrable, parpadea; si no, no. 	<p>“Manipulación”</p>
<p>Arrastrar plano</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Regla: para arrastrar un plano sigue los siguientes pasos: <ol style="list-style-type: none"> 1. Señálalo (procedimiento “señalar un plano”) 2. Sin soltar el plano (procedimiento “agarrar y soltar un plano”) mueve el cursor por la Zona de Trabajo hasta la posición deseada. 	<p>“Manipulación” Tecla de</p>

	<p>3. En la posición deseada, suelta el plano.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Transformaciones esperadas: <ul style="list-style-type: none"> ○ Si el plano es arrastrable, cambia de posición en la pantalla siguiendo el movimiento del cursor. • Retroalimentaciones: <ul style="list-style-type: none"> ○ Cuando se arrastra un plano con la herramienta “Manipulación” el cursor toma la apariencia de una mano agarrando un objeto. 	mayúsculas más “Manipulación”
Arrastrar tetraedro regular	<ul style="list-style-type: none"> • Regla: para arrastrar un tetraedro regular arrastrable se sigue los siguientes pasos: <ul style="list-style-type: none"> ○ Se posiciona el cursor sobre el tetraedro (en una de sus caras o de sus aristas) ○ Se mantiene pulsado el botón izquierdo del ratón y ○ Se mueve el cursor por la Zona de Trabajo hasta la posición deseada ○ En la posición requerida, se suelta el botón izquierdo del ratón. • Proposición 1: Un tetraedro regular se puede definir de tres formas en Cabri 3D: <ul style="list-style-type: none"> ○ Con una cara en un plano definida por centro y punto. ○ Sobre un triángulo equilátero. ○ Sobre un triángulo equilátero, el cual es una cara de un poliedro. • Proposición 2: Un tetraedro regular es arrastrable sólo si está creado con una cara en un plano definida por centro y punto. 	“Manipulación”
Medir la distancia entre dos puntos	<ul style="list-style-type: none"> • Regla 1: para medir la distancia entre dos puntos dados sigue los siguientes pasos: <ol style="list-style-type: none"> 1. Selecciona la herramienta “Distancia” en la barra de herramientas. 2. Señala uno de los dos puntos y pulsa el botón izquierdo del ratón. 3. Repite lo anterior con el segundo punto. • Retroalimentaciones: <ol style="list-style-type: none"> 1. Cuando se señala el primer punto aparece el mensaje “Distancia entre dos puntos...” 2. Cuando se señala el segundo punto, el mensaje es “... y este punto” 3. Aparece el número que da la distancia • Regla 2: En ciertos casos, puede suceder que el texto de la medida se encuentre fuera de la zona de trabajo visible. Para tener acceso a ese texto, utilizar la bola de cristal o arrastrar uno de los objetos que determina la distancia. 	“Distancia”
medir el ángulo entre una recta y un plano que se cortan	<ul style="list-style-type: none"> • Definición: una recta y un plano se cortan si y sólo tienen un punto en común • Regla: para medir el ángulo entre un plano y una recta que se cortan sigue los siguientes pasos: <ol style="list-style-type: none"> 1. Selecciona la herramienta “Ángulo” en la barra de herramientas. 2. Señala la recta y pulsa el botón izquierdo del ratón. 3. Señala la recta y pulsa el botón izquierdo del ratón. 	“Ángulo”

	<p>4. El orden de los pasos 2 y 3 es intercambiable</p> <ul style="list-style-type: none"> • Retroalimentaciones: <ol style="list-style-type: none"> 1. Cuando se señala el plano o la recta: <ul style="list-style-type: none"> ▪ La apariencia del cursor es la de una mano con el índice extendido. ▪ El plano parpadea y aparece con puntitos de varios colores. ▪ La recta parpadea y va cambiando su brillo. 2. Según el orden al señalar el plano y la recta, los mensajes que aparecen son: <ul style="list-style-type: none"> ▪ “Ángulo entre plano...” y “...esta recta” ▪ “Ángulo entre esta recta...” y “...este plano” 3. No obstante, si después de seleccionar la herramienta “Ángulo” se señala diferentes objetos o el espacio sin objetos, el interfaz ofrece diferentes retroalimentaciones a las indicadas en los puntos anteriores. 	
<p>Medir el ángulo formado por tres puntos</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Regla: <ol style="list-style-type: none"> 1. Selecciona la herramienta “Ángulo” en la barra de herramientas. 2. Se lleva el cursor sobre cada uno de los puntos y se marca sobre ellos con el botón izquierdo del ratón • Proposición: El orden con el que se marcan los puntos define el ángulo que se mide; de manera que el segundo punto es el vértice del ángulo. • Retroalimentaciones: <ol style="list-style-type: none"> 1. A medida que se marcan los puntos aparecen los siguientes mensajes por este orden: “Ángulo por este punto...”, “...definido por este punto...”, “... y por este punto” 2. No obstante, si después de seleccionar la herramienta “Ángulo” se señala diferentes objetos o el espacio sin objetos, el interfaz ofrece diferentes retroalimentaciones a las indicadas en el punto anterior. 	<p>“Ángulo”</p>

En la tabla V.2, indicamos procedimientos asociados a priori a las tareas principales presentes en las actividades. Las escritas en marrón, corresponden a los relacionados con el aprendizaje y utilización de las herramientas. El resto, corresponden con tareas en las que se requiere procedimientos que incluyen como reglas el uso de uno o de varios de los procedimientos arriba indicados. Estos procedimientos pueden devenir en esquemas si son utilizados por los alumnos. No damos la descripción de los mismos.

Tabla V.2. Relación de procedimientos requeridos en las tareas presentes en las actividades.

TIPO	NOMBRE
Uso de las herramientas	La función “bola de cristal” La función “tecla mayúsculas” “Manipulación” “Punto” “Punto medio” “Recta” “Curva de intersección” “Plano” “Coordenadas o ecuación” “Distancia” “Ángulo” “Paralela” “Perpendicular”
Crear objetos:	“crear un punto” “crear un punto libre” “crear el punto medio de dos puntos dados” “crear el punto medio de una arista de un poliedro” “crear la recta que pasa por dos puntos” “crear la recta intersección de dos planos que se cortan” “crear un plano que pase por tres puntos dados” “crear la recta la recta paralela a otra que pasa por un punto dado” “crear el plano perpendicular a una recta que pasa por un punto dado”
Arrastrar objetos:	“cambiar el punto de vista dentro de la Zona de Trabajo” “arrastrar un punto” “arrastrar un punto verticalmente” “arrastre de los distintos tipos de puntos” “arrastrar un punto en el espacio utilizando sus coordenadas” “arrastrar puntos sobre poliedros” “arrastrar una recta” “arrastrar líneas sobre poliedros” “arrastrar un plano” “arrastrar un plano arrastrando un punto ligado una recta perpendicular al plano” “arrastrar plano arrastrando dos puntos del mismo sobre el plano base” “arrastrar un plano arrastrando una recta perpendicular al plano” “arrastrar un plano mediante un punto ligado a una recta perpendicular”. “arrastrar un poliedro” “crear puntos sobre una recta y arrastrarlos” “crear puntos sobre las aristas de un poliedro y arrastrarlos” “crear puntos sobre las caras de un poliedro y arrastrarlos” “girar un tetraedro” “girar una recta arrastrando un punto de la misma” “girar plano alrededor de una recta que contiene arrastrando un punto del mismo”

	“superponer rectas” “superponer planos” “superponer poliedros”
	“modificar el tamaño de un tetraedro”
Encontrar y señalar objetos	“señalar un objeto para conocer su nombre” “encontrar y examinar objetos” “señalar un objeto” “señalar un punto” “señalar una recta” “señalar un plano”
	“agarrar y soltar un punto” “agarrar y soltar una recta” “agarrar y soltar un plano”
	“encontrar recta paralela a una recta dada por un punto exterior”. “encontrar las rectas perpendiculares a una recta dada “encontrar los planos paralelos a una recta dada”. “encontrar plano perpendicular a una recta dada”. “encontrar el ángulo entre una recta y un plano”.
Medir	“medir la distancia entre dos puntos” “medir el ángulo entre una recta y un plano” “medir el ángulo formado por tres puntos”

ANEXO VI. DESCRIPCIÓN Y COMENTARIOS DE LAS ACTUACIONES

Los resultados que presentamos corresponden a la descripción, comentarios y análisis de las actuaciones de una de las parejas, formada por dos alumnas. Utilizamos seudónimos.

1. Función “bola de cristal”

A. Actividad “Composición”

Esta es la primera ocasión que las alumnas trabajan con Cabri 3D. Para responder la primera pregunta se ayudan de los nombres que da el interfaz al posar el cursor sobre los diferentes objetos. Esperan a que el profesor les indique cómo continuar. Tras la breve explicación del profesor de la función “bola de cristal” se desenvuelven sin problemas:

- Utilizan correctamente la función “bola de cristal” para cambiar los puntos de vista.
- Se lanzan a explorar y encontrar los puntos de vista con toda naturalidad.
- Al pulsar el botón derecho y soltar, les aparecen los menús contextuales.
- Utilizan el cursor para señalar los objetos y conocer sus nombres: gracias a ello escriben todos los nombres.

En la pregunta 4 se les pide que digan dónde está el cuerpo amarillo (dodecaedro amarillo). Responden que está fuera del plano y por encima. En realidad está sobre el plano base en su parte no visible. La respuesta corresponde a una descripción de “lo que se ve”:

- Al escribir “fuera del plano”, parece que asocian “plano” sólo a la parte visible (cuadrilátero gris) del plano base.
- Al escribir “por encima”, parece que como no toca al cuadrilátero gris (la PV del plano base) consideran que no está “sobre” sino “por encima” del plano.

Respecto al uso de la función “bola de cristal” predominan los arrastres horizontales, cortos y dentro de la Zona de Trabajo. Traen a primer plano a los objetos para señalarlos.

Respecto a las orientaciones que dan al plano base predomina la posición perpendicular (o casi) a la pantalla (figura VI.1); si bien al principio, lo colocan paralelo a la pantalla por su parte superior (figura VI.2).

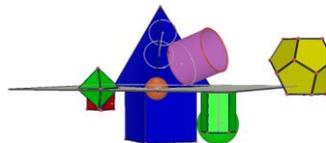


Figura VI.1

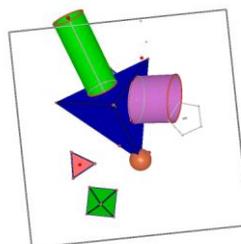


Figura VI.2

B. Actividad “Dónde.están.los.puntos.1”

En esta actividad el profesor explica los conceptos relacionados con la PV y PNV del plano base. Les recuerda que el plano es una superficie infinita y les indica que el interfaz lo representa mediante un cuadrilátero; el cual tan solo es la parte visible y que hay que considerar como plano también su prolongación no visible.

En la primera pregunta sin realizar ningún tipo de arrastre comenten algunos errores a la hora de asignar las posiciones a los puntos (ver la ficha más abajo). No obstante, cabe hacer los siguientes comentarios al respecto:

- La decisión tomada sobre las posiciones de C, D y H, aunque no es correcta, es admisible; ya que, el interfaz no ayuda a ver que están en las PNV de los planos.
- Interpretan correctamente la posición de F: es posible que su representación como esfera completa les haya ayudado.
- La decisión tomada sobre la posición de I, aunque no es correcta, es admisible; ya que, el interfaz no ayuda a ver que está a la derecha del plano azul. Sí que parece que su representación como esfera completa les ayuda a decir que no está sobre el plano verde.

A partir de la pregunta 2, utilizan la función “bola de cristal” cambiando a diferentes puntos de vista. Al iniciar la pregunta, dudan por un instante sobre cómo mover los objetos. Entonces al intentar **Sofía** arrastrar los planos con el botón izquierdo, recuerdan:

Celia: “No era así. Era la “bola de cristal”.”

Sofía: “Ah”

Continúan con la función “bola de cristal” sin mayor problema. Utilizan el punto de vista de la derecha que llaman de “perfil” (figura VI.2).

En este punto de vista, **Celia** llama al profesor para preguntar sobre los puntos dudosos:

Celia: “Y los que están aquí en medio como la B, la C y la H... es que no están en ningún lado...”

Profesor: “Ah... pero están en el plano, ¿no?...”

Celia: “¿En el plano te refieres al azul?”

Profesor: “Al azul, ¿no?”

Celia: “Pero... si están fuera”

Profesor: “Hemos quedado que si están en la prolongación, están en el plano.”

Celia: “Ah...”

El diálogo entre **Celia** y el profesor muestra que los puntos pertenecientes a la parte no visible del plano les resulta difícil de situar como pertenecientes al plano; quizá porque les resulta poco intuitivo en su interacción con el interfaz.

Tras usar la función “bola de cristal” y los arrastres de los puntos, responden correctamente. El uso de la función “bola de cristal” y de los arrastres de los puntos les permite salvar las ambigüedades de la escena inicial. El orden de actuación es el siguiente:

- Primero utilizan la función “bola de cristal” durante un rato. Tratan de despejar sus dudas respecto a las posiciones de los puntos; cambiando los puntos de vista y las orientaciones de los planos.
- Cuando han agotado la vía anterior, comienzan con el arrastre de puntos.

A partir de la pregunta 3 pueden arrastrar los puntos. Antes de arrastrar los puntos preguntan al profesor:

Celia: “¿Los movemos a donde queremos?”

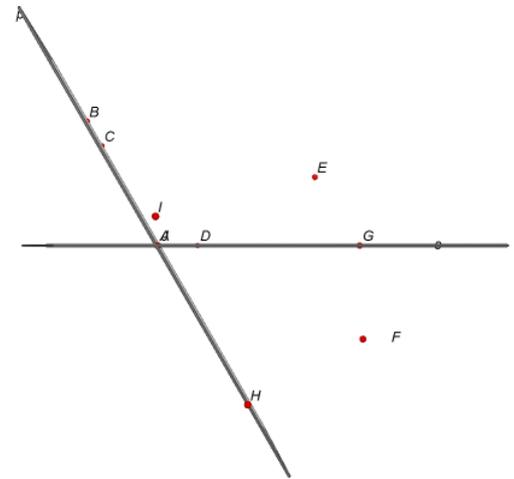


Figura VI.2

Profesor: “Sí; para confirmar si tenéis razón o no.”

Entonces arrastran los puntos C, D, H e I. El arrastre de los puntos no les supone ninguna dificultad. No obstante, les cuesta desarrollar la estrategia con la que utilizar los arrastre para saber si los puntos pertenecen o no a los planos:

- Comienzan arrastrando de forma errática los puntos C, D.
- Con la función “bola de cristal” habían llegado a la conclusión correcta de que el punto C pertenecía al plano azul. Pero al arrastrarlo, lo alejan tanto del plano base que al final lo consideran como no perteneciente a ningún plano.
- No tienen claro cómo servirse de los arrastres para saber si los puntos están o no sobre los planos.
- Sin embargo, sí que encuentran la estrategia de acercar el punto H y llevarlo sobre la parte visible del plano azul.

Respecto al uso de la función “bola de cristal” cabe destacar lo siguiente:

- Comienzan centrandó el cursor en la Zona de Trabajo y arrastrándolo horizontalmente de izquierda a derecha, con desplazamientos cortos.
- Realizan movimientos con el cursor en todas las direcciones, pero predominan los siguientes:
 - Horizontal,
 - Vertical,
 - Rotaciones respecto al eje perpendicular a la pantalla (OZ).
- En general son movimientos cortos que se inician en la parte central de la Zona de Trabajo.
- El uso de esta función está dirigido a la tarea y no les presenta dificultades.

En cuanto a las orientaciones que dan al plano base cabe destacar lo siguiente:

- Predominan las posiciones mostradas en las escenas siguientes:

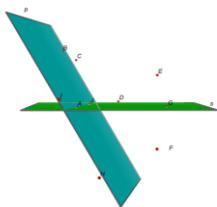


Figura VI.3

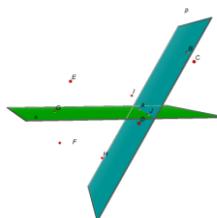


Figura VI.4

- Las posiciones de “perfil” (figuras VI.4 y VI.5) las utilizan para determinar si los puntos fuera de los planos se encuentran o no en sus PNV; y para definir mejor sus posiciones cuando usan la función “bola de cristal”.

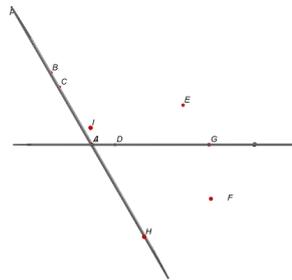


Figura VI.4

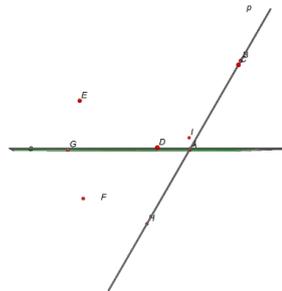


Figura VI.5

- La vista “por abajo” (figura VI.6) se consigue con giro de 90° a la izquierda respecto OY, y otro de 90° hacia arriba respecto OX. Esta vista y su equivalente “por arriba” son utilizadas por las alumnas pero les resulta poco útil.

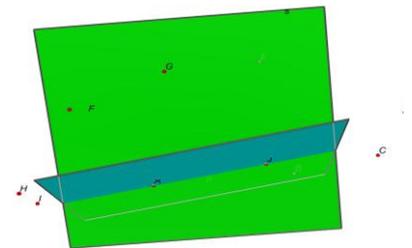


Figura VI.6

C. Actividad “Dónde.están.los.puntos.2”

Para responder a la primera pregunta colocan los planos en posiciones perpendiculares al eje OY (figura VI.7). Tienen dudas sobre si se cortan o si son paralelos, debido a la perspectiva.

En la segunda no han tenido dificultades para situar los puntos; para ello, han usado fundamentalmente la función “bola de cristal”; pero no han usado arrastres.

La pregunta 2d: “Pertenece a la vez a dos planos”; les resulta ambigua al principio; ya que la confunden con “estar entre dos planos”:

Celia: (Lee la pregunta) “Pertenece a la vez a dos planos”

Sofía: “¿Cómo?”

Preguntan al profesor:

Sofía: “¿Pueden pertenecer a la vez a dos planos?”

Profesor: “Pensarlo un poco.”

Sofía: “¿Pero eso quiere decir que está entre los dos planos?”

Profesor: “¿Tú qué opinas?”

Celia: “Míralo ahí” –señala puntos entre dos planos-.

Profesor: “Pero eso sería ‘entre’, no que ‘pertenece’; que está ‘entre los dos’.”

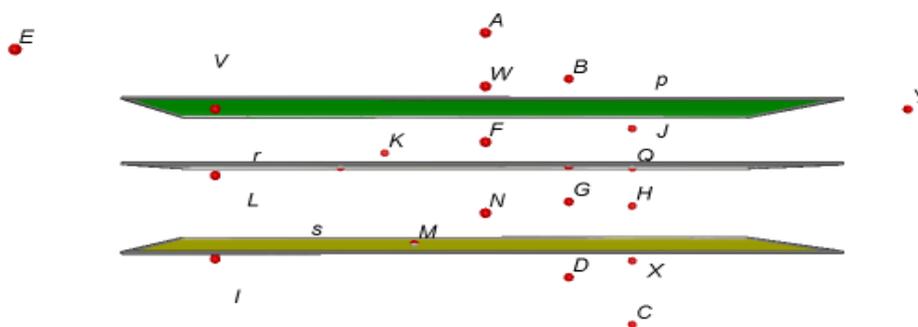


Figura VI.7

Entonces se dan cuenta que la expresión “pertenecer a la vez a dos planos” se refiere a estar a la vez sobre los dos planos, y no entre ellos. De manera que responden que “no hay” (puntos) y concluyen que si los planos son paralelos “es imposible” que un punto pueda pertenecer a los dos a la vez.

La pregunta 4 sobre qué puntos están alineados provoca una discusión entre ellas.

Celia: (Lee la pregunta) “¿Qué puntos crees que están alineados?”

Sofía duda.

Celia: “Los que están en la misma superficie, ¿no?”

Sofía: “Claro” (lo dice no muy convencida)

Sofía: “Y creo que en vertical también se puede.”

Sofía: “A ver. ¿A, W, F, N?” (Lo dice siguiendo el orden de arriba abajo correctamente)

Celia: (Rectifica) “A, W, F”

Sofía: “Vale” (no muy convencida)

Después **Celia** elige Q y J. Entonces, **Sofía** propone el resto de la columna; pero **Celia** argumenta que los puntos tienen que estar entre los mismos planos. **Sofía** tiene una idea correcta sobre el asunto pero se deja convencer por los argumentos de **Celia**, que básicamente son dos:

- Los puntos para ser alineados deben estar en el mismo plano
- Si los puntos están “en vertical”, deben estar entre dos planos para considerarlos alineados.

Han usado la función “bola de cristal” para todo; en ningún caso los arrastre de puntos. El uso de la función “bola de cristal” lo tienen asimilado. Predominan los movimientos cortos del cursor por la parte central de la Zona de Trabajo; especialmente, para poder localizar los puntos que están muy próximos a las superficies de los planos.

En cuanto a las orientaciones dadas al plano base cabe mencionar lo siguiente:

- Prácticamente sólo emplean la posición de los planos perpendicular al eje OY, es decir, perpendicular a la pantalla (figura VI.8).
- También, pasan brevemente por la posición de los planos perpendicular al eje OZ (figura VI.9).

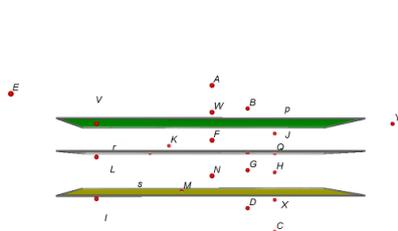


Figura VI.8

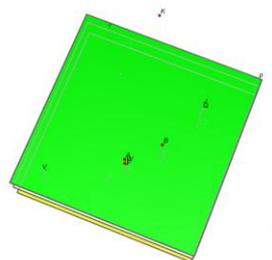


Figura VI.9

2. Puntos.

A. Actividad “Puntos.libres.1”

En la pregunta 1: “Los puntos azules, ¿están alineados?”, no tienen dudas para responder correctamente.

A continuación **Celia** lee la pregunta 2, y se producen dudas:

Sofía: “Los A, B, C, I y J están fuera.”

Utiliza el punto de vista mostrado en la figura

VI.10.

Dicho esto comienza a rectificar,

Sofía: “Pero creo que...”

Celia continúa leyendo la pregunta

Sofía: “Yo creo que están en su prolongación”

Al principio **Sofía** dice que están fuera; pero, enseguida recuerda lo trabajado en las actividades anteriores y responde que dichos puntos están en el plano, en su prolongación.

Celia se limita a leer y a escribir.

Entonces el profesor aprovecha para recordar que: “En el plano hay dos partes: una que se ve; y otra, lo que se prolonga, que no se ve.”

En la pregunta 3, no tienen ningún problema para usar la herramienta “Punto” y crear un punto sobre el plano base. Tampoco tienen dudas para arrastrar el punto creado por la Zona de Trabajo. No obstante, al arrastrarlo por la PNV “lo pierden”: lo “alejan” tanto que el punto llega a desaparecer de la escena, y ya no pueden recuperarlo. Este hecho, sorprende a

Sofía:

Sofía: “Alá... ha desaparecido.”

Entonces, utilizan la función “bola de cristal” para tratar de encontrarlo, cambiando los puntos de vista y la inclinación del plano base; pero, no lo consiguen.

En este hecho (que “pierdan” el punto) concurren dos factores:

- Alejan el punto por la PNV. El interfaz “avisa” de este “alejamiento” reduciendo el diámetro de la esfera que representa al punto y reduciendo su brillo y su definición. Las alumnas no se percatan de este hecho.

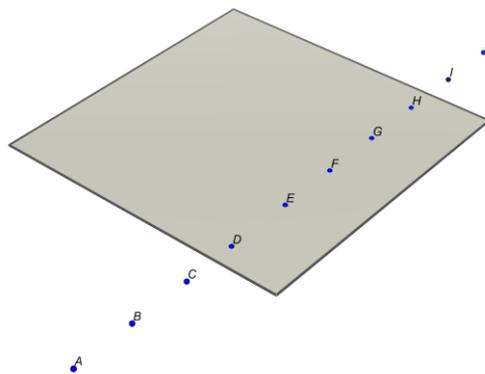


Figura VI.10

- Reducen la inclinación del plano base (es decir, su ángulo respecto al eje OZ) y, como consecuencia, la zona de trabajo utilizable (es decir, la porción de la Zona de Trabajo donde se pueden colocar los puntos y permanecer visibles).

En la pregunta 4, crean los puntos uno después del otro. Cada vez que van a crear un punto repiten el mismo procedimiento: van a la barra de herramientas, marcan la herramienta “Punto”, dirigen el cursor a la posición deseada y pulsando el botón izquierdo del ratón. Utilizan la herramienta “Punto” sin problemas. No obstante, el procedimiento que utiliza se puede abreviar: una vez que se utiliza la herramienta “Punto” se puede seguir creando puntos sin más que seguir pulsando el botón izquierdo del ratón; no es necesario volver a la barra de herramientas y elegir la herramienta de nuevo.

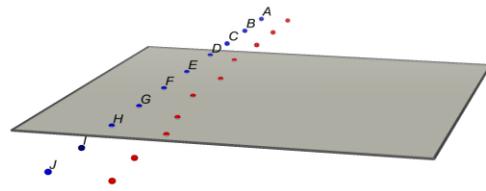


Figura VI.11

Colocan los puntos como se muestra en la figura VI.11. Los puntos que crean (los rojos) los colocan a la altura de los de referencia (los azules) pero no mantienen la misma distancia respecto de ellos (la línea es sinuosa).

Celia: “Si no lo colocas de otra manera no sabes si están bien.”

Entonces cambian el punto de vista, a una posición prácticamente perpendicular a la pantalla (figura VI.12).



Figura VI.12

Celia se da cuenta que la línea que forman es sinuosa y se echa a reír.

Una vez colocados los puntos, y reconocer que no están alineados paralelamente, no los arrastran para conseguir una alineación más aceptable. No usan el arrastre de puntos.

Ante la pregunta “¿Qué dificultades encuentras?”, **Celia** responde: “Porque dentro del plano no sale la cuadrícula”.

Y escriben: “Que cuesta mucho ponerlos paralelos, ya que, en el plano gris no podemos ver la cuadrícula.”

Al referirse a la dificultad encontrada señalan que “en el plano gris no podemos ver la cuadrícula”. Una posible interpretación de esta frase podría ser la siguiente: se refieren a que las hojas de sus cuadernos son cuadrículadas, y que si la escena también estuviera cuadrículada les ayudaría a colocar los puntos alineados y a mantener la misma distancia a los puntos de referencia.

No obstante podrían haber utilizado la siguiente retroalimentación: cuando se coloca el cursor sobre el plano base o, como en este caso, se va a colocar un punto sobre el plano base, aparece una red cuadrículada de puntitos parpadeantes de varios colores sobre dicho plano.

Posiblemente, al utilizar un ángulo de inclinación del plano base pequeño no han podido apercibirse de dicha retroalimentación.

En la pregunta 5, para colocar los puntos alineados perpendiculares, cambian la orientación del plano base, dejándolo casi paralelo a la pantalla; como se muestra en la escena de la figura VI.13.

En esta pregunta, intercambian los roles: **Sofía** lee, **Celia** usa el ratón. **Celia** consigue poner, con una aproximación aceptable, los puntos alineados perpendicularmente.

Para comprobar que están alineados perpendicularmente, cambian el punto de vista y orientan el plano tal y como se muestra en la escena de la figura VI.14.

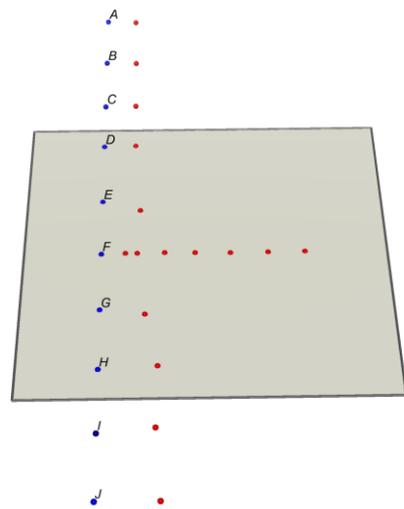


Figura VI.13



Figura VI.14

Observando cómo han colocado los puntos, podría uno pensar que esta vez se han ayudado de la red cuadrículada de puntitos proporcionada por el interfaz cuando se coloca el cursor sobre el plano base.

No obstante, al responder sobre las dificultades encontradas escriben: “las mismas que con el ejercicio 4”. Por lo que queda la duda de si han utilizado dicha retroalimentación conscientemente.

Cabe dar otra interpretación a su frase “...en el plano gris no podemos ver la cuadrícula.” Resulta que el interfaz ofrece una retroalimentación cuando se arrastra el cursor para crear un punto en la PNV del plano base: alrededor del cursor aparecen cuatro flechas según dos direcciones perpendiculares en un círculo cuadrículado (figura VI.15). Este círculo cuadrículado desaparece cuando se arrastra el cursor para crear un punto por la PV. Es posible que se refieran a esta red cuadrícula cuando dicen que en el plano gris no pueden “ver la cuadrícula”

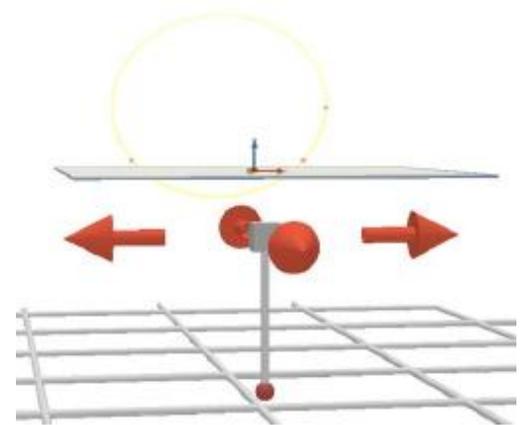


Figura VI.15

Curiosamente, una vez creado el punto, el círculo cuadrículado aparece siempre que se arrastre el punto, ya sea por la PV o por la PNV del plano base. Sin embargo, si al punto creado sólo se le señala o se le “agarra”, dicho círculo no aparece. Es evidente, que las alumnas no se han apercibido de estas retroalimentaciones.

Respecto al uso de la función “bola de cristal” durante esta actividad cabe señalar lo siguiente:

- Tras una semana desde la última sesión, al principio **Sofía** no recuerda cómo funcionaba la “bola de cristal”. Sin embargo, **Celia** no muestra ninguna duda.
- Durante el resto de la sesión, demuestran que el uso de esta función lo tienen asimilado.
- Predominan los movimientos cortos del cursor por la parte central de la Zona de Trabajo.
- Los movimientos del cursor son horizontales, verticales y según líneas curvas para conseguir una combinación de las dos componentes: horizontal y vertical.

En cuanto a las orientaciones del plano base que emplean predominantemente la posición de los planos casi perpendicular a la pantalla (es decir, al eje OY); como se puede ver en las escenas dadas arriba. También, pasan por la posición de los planos casi paralela a la pantalla (es decir, perpendicular al eje OZ). Esta posición la utilizan para colocar los puntos alineados perpendicularmente.

B. Actividad “Puntos.libres.2”

Viendo la escena inicial dicen que los puntos están alineados. Para asegurarse, cambian de puntos de vista con la función “bola de cristal”. Una de las maniobras que realizan es la siguiente: colocan el plano paralelo a la pantalla (perpendicular al eje OZ); y lo van rotando alrededor del eje OZ; de esta manera consiguen que la columna de puntos casi se confunda con uno sólo. **Celia** a esta vista la llama vista aérea (figura VI.16).

Esta vista la van alternando con la vista inicial.

Después de estas maniobras comentan:

Sofía: “Pero no se puede ver sólo un punto.”

Celia: “Yo creo que sí. ¿O qué?”

Sofía: “No sé”

En la ficha escriben primero que sí están alineados; para después tacharlo y escribir:

“No estamos seguras”:

Llama la atención que habiendo utilizado una estrategia adecuada, concluyan que no están seguras de que estén alineados.

Posiblemente cuando **Sofía** dice: “Pero no se puede ver sólo un punto”; se refiera a que no es posible conseguir que la columna de puntos se confunda exactamente con el punto superior de los puntos: siempre se ven los puntos inferiores. Y este hecho le haga dudar.

En las preguntas 3 y 4, crean los puntos uno después del otro. Cada vez que van a crear un punto repiten el mismo procedimiento: van a la barra de herramientas, marcan la herramienta “Punto”, dirigen el cursor a la posición deseada y pulsan el botón izquierdo

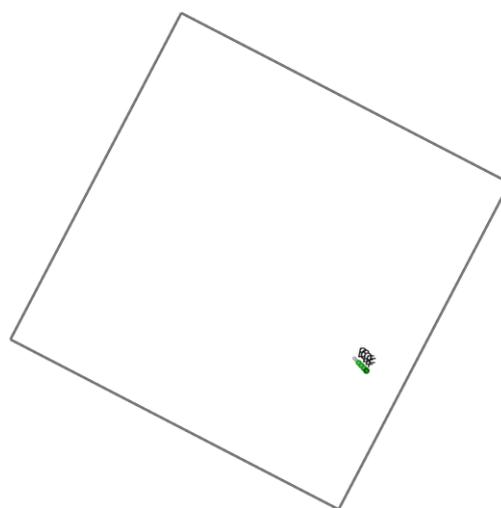


Figura VI.16

del ratón. Utilizan la herramienta “Punto” sin problemas. No obstante, continúan sin usar el procedimiento abreviado de crear puntos (no es necesario volver a la barra de herramientas y elegir la herramienta de nuevo). En este sentido no han evolucionado desde la actividad anterior.

Por otra parte, esta es la primera ocasión en la que han de utilizar la combinación de la herramienta “Manipulación” y la tecla de mayúsculas, para arrastrar los puntos verticalmente respecto al plano base. Antes de la explicación del profesor, **Sofía** trata de colocar puntos de acuerdo a la pregunta: da a la tecla “Bloq Mayús” y después comienza a crear puntos; pero en realidad, **Sofía** los crea en la PNV del plano base, ya que no mantiene pulsada la tecla de mayúsculas. Además al usar la función “bola de cristal” y rotar rápidamente el plano base 180° respecto a un eje perpendicular a él, “pierden los puntos” (aunque en realidad sería posible encontrarlos si se realizan rotaciones más lentamente y con más cuidado)

Tras dejarles con los primeros intentos, el profesor les muestra brevemente cómo crear un punto libre y cómo arrastrarlo verticalmente utilizando la tecla de mayúsculas.

Tras la explicación del profesor del uso de la tecla de mayúsculas, **Sofía** dice: “Lo deberíamos haber hecho nosotras así” y trata de crear puntos los puntos; pero sigue colocándolos en la PNV del plano base, ya que no utiliza la tecla de mayúsculas.

Entonces **Celia** lee la pregunta 3, y señala: “Hay que hacer abajo lo mismo que arriba”

Acto seguido **Sofía** rota el plano base para colocar puntos “abajo” (figura VI.17)

Entonces **Celia** se da cuenta de lo que está pasando:

Celia: “Así lo estás haciendo en el plano”

Sofía: “¿En el plano?”

Celia: “Sí.”

Sofía: “He hecho esos. Están fuera.”

Celia: “Sabes... ahí están en el plano.”

Sofía: “Y ¿cómo se hacen? ¿Lo quieres hacer tú?”

Celia: “Eso es el plano.”

Celia toma el ratón y usa la tecla de

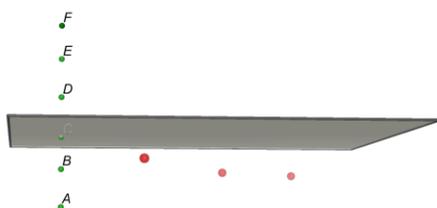


Figura VI.17

mayúsculas para crear algunos puntos en el espacio.

Después continúa **Sofía**.

El punto de vista utilizado para crear puntos en el espacio ha sido el del plano base casi perpendicular al eje OY (figura VI.18).

Observamos en la actuación anterior que tras la explicación del profesor, **Sofía** coloca los puntos en la PNV del plano base y no usa la tecla de mayúsculas.

Podría pensarse que aún no tiene asimilado la distinción entre la PNV del plano base y el espacio (semiespacios superior e inferior al

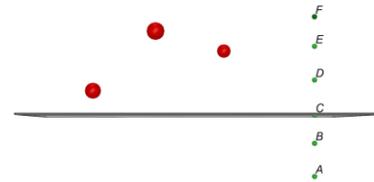


Figura VI.18

plano base). Si tenemos en cuenta las actuaciones en las actividades precedentes, uno diría que esta falta de distinción no es conceptual: han trabajado la idea de que el plano se extiende indefinidamente y que hay una PNV del plano en la Zona de Trabajo). Dicha falta de distinción podría deberse a:

- que el mismo enunciado induzca a error: “...crea varios puntos fuera del plano en la zona superior (inferior) al plano, ...”
- que la posición de los puntos en la PNV del plano induzca a engaño: parece que están por encima o por debajo del plano.

También observamos que, curiosamente, todas las proyecciones de los puntos que crean en el espacio están sobre la PNV del plano base más próxima al usuario. No han creado ningún punto cuya proyección esté sobre la PV del plano base.

En la pregunta 4, **Sofía** crea puntos con cierta alineación vertical. Sus proyecciones siguen estando en la PNV del plano base más próxima al usuario. Esto provoca que al rotar el plano base pierdan de vista a los puntos creados.

Ante la pregunta: ¿consigues que estén alineados?; responden: “No”.

Se observa que mientras que los usos de la herramienta “Manipulación”, la función “bola de cristal” y de la herramienta “Punto” los han asimilado rápidamente; no ocurre lo mismo con el uso de la tecla de mayúsculas. Respecto a ella se comportan con muchas limitaciones:

- Los puntos los crean en la PNV del plano base, casi todos en la próxima al usuario. Da la impresión de que no son capaces de crear puntos con la tecla mayúscula cuya proyección esté sobre la PV del plano base.
- Utilizan la orientación del plano menos adecuada: perpendicular al eje OY.
- Al cambiar de punto de vista pierden de vista a los puntos creados. Esto les obliga a mantener el punto de vista; lo cual no les permite ajustar las posiciones.

Ante la pregunta: ¿qué dificultades encuentras?; comentan:

Celia: “Que es complicado, el mecanismo.”

Sofía: “El mecanismo es muy... muy antiguo. Es muy... manual.”

Sus comentarios de que la función de la tecla de mayúsculas es complicada, confirman lo poco a gusto que se sienten con su uso.

Sofía añade el comentario: “Es muy... manual.” Quizá se refiera o bien a que la interfaz les ofrece pocas ayudas o bien que le gustaría que hubiera un procedimiento para poder colocar los puntos mediante órdenes y no a ojo.

Ante la pregunta: “¿Has encontrado algún método que te ayude a colocarlos alineados verticalmente?”, escriben lo que dice **Celia**:

Celia: “No, porque en el plano gris sí que sale cuadrícula pero en el espacio de fuera no.”

Aquí vuelve a hacer referencia a la retroalimentación que ofrece el interfaz y considera que el interfaz no le ofrece ninguna ayuda en el espacio.

En realidad el interfaz sí que ofrece retroalimentaciones pero hay que saber cómo:

- Si el punto se arrastra verticalmente al plano base, aparecen con el círculo cuadrulado mencionado arriba dos flechas en la dirección vertical al plano base y en sentidos contrarios; y una línea vertical que une al punto con su proyección en el plano base. Una vez conseguida la altura, al arrastrarlo paralelo al plano base, continúa apareciendo la línea vertical. Precisamente esta línea puede ser usada para colocar puntos alineados verticalmente.
- Es preciso cambiar de puntos de vista para conseguir ajustar las tres coordenadas. Por eso, si se crean los puntos en el espacio con proyecciones distanciadas de la PV del plano base, se corre el riesgo de perderlos de vista al usar la “bola de cristal” y que la tarea sea bastante penosa.

- Es útil colocar un punto en la PV del plano base y sobre él ir colocando los puntos que se van creando en el espacio. De esta manera se aprovecha la línea vertical que proporciona el interfaz al arrastrar los puntos.

Después de responder a las preguntas, **Sofía** encuentra por casualidad una aplicación a la ventana para editar coordenadas que ha aparecido en la escena casi desde que comenzó con la pregunta 2 (esta ventana aparece si se tiene seleccionado la herramienta “Manipulación” y se hace doble clic con el botón izquierdo del ratón sobre un punto ya creado):

- Primero da valores a las tres coordenadas: (1,1,1); y se crea un punto en esa posición.
- Después modifica las coordenadas: (2,1,1); y el punto cambia a la nueva posición.

Entonces exclama:

Sofía: “¡Mira...!”

Celia: “¿Qué...?”

Sofía: “Que se pueden poner”

Celia: “Se pueden poner las coordenadas”

Sofía: “Pues, en verdad, así sí que podemos poner los puntos”

Esta última actuación, muestra un hecho fortuito y no esperado al diseñarse la actividad. Después de afirmar que el mecanismo para situar los puntos alineados verticalmente es “muy manual”, **Sofía** encuentra casualmente utilidad a la ventana de edición de coordenadas. Observa que introduciendo coordenadas se crean puntos y se modifican sus posiciones. Entonces, señala “...así sí que podemos poner los puntos”; pero no trata de desarrollar esta idea. Posiblemente piensa que de esta forma puede conseguir un procedimiento no tan “manual” para colocar los puntos en el espacio.

C. Actividad “Coordenadas.puntos”

En la pregunta 1, las alumnas tienen delante de sí dos formas en las que se dan las coordenadas:

- El interfaz proporciona este formato: (2,0; -2,5; 0); es decir, las puntos y comas separan las coordenadas y los decimales se escriben con comas.
- La ficha que les da el profesor usa este otro formato: (2, -2,5, 0).

Celia lee las coordenadas del punto (2; -2,5; 0):

Celia: “dos, menos dos, cinco y cero”

Sofía lee las coordenadas de $(-3; 1,3; 0)$:

Sofía: “menos tres, uno, tres, cero”

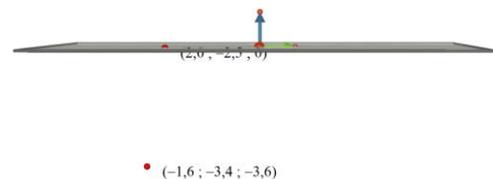
Las dos interpretan que son cuatro coordenadas: 2, -2, 5 y 0. Es posible que las dos formas de expresar las coordenadas les induzcan a error. Quizá hubiera sido más conveniente utilizar puntos, en lugar de comas, para los decimales.

En cualquier caso, sus repuestas son:

- Escriben “hacia la izquierda”, para cambiar la segunda coordenada de -2,5 a 3.
- Escriben “hacia adelante”, para cambiar la primera coordenada de 2 a -3.
- Escriben “hacia arriba”, cuando la tercera coordenada no cambia.

En la pregunta 2, **Celia** coloca el plano base prácticamente perpendicular a la pantalla (figura VI.19).

Desde esta vista **Celia** busca el punto $(2; -2,5; 0)$. Primero señala el punto; pero luego va señalando los extremos y el origen de los vectores de referencia diciendo: “¿Éste?”. Parece que los vectores que marcan los ejes de referencia les es un motivo de distracción, en lugar de ayuda.



Sofía le corrige:

Sofía: “No. Mira, ese el punto...como si fuera... donde se cortan” (Indica el origen de coordenadas)

Sofía: “Ese es el punto; ese no.”

Figura VI.19

Celia trata de arrastrar el punto pero no puede. Lo cierto es que ha colocado al plano base totalmente perpendicular a la pantalla; y en esa posición, el interfaz no permite arrastrar ningún punto que esté sobre el plano base. (Sin embargo, sí es posible arrastrar puntos que no pertenezcan al plano base). Cambia de orientación al plano base y, entonces sí que le es posible arrastrar el punto. No obstante, decide cambiar de estrategia. Tras la experiencia de la actividad anterior, **Celia** decide utilizar la ventana para editar coordenadas en lugar de arrastrar el punto.

Entonces **Sofía** le dicta las coordenadas del punto $(-3; 1,3; 0)$:

Sofía: “Menos tres, uno y tres” (le falta por dictar la tercera coordenada que es cero)

Sofía: “Pero aquí hay cuatro y ahí tres”. Se refiere a que lee cuatro dígitos en la ficha, pero en la ventana para editar coordenadas sólo aparecen tres espacios.

La lectura de las coordenadas les resulta un obstáculo. No saben interpretar las distintas expresiones utilizadas para dar las coordenadas; lo cual les paraliza.

Celia duda entre poner tres o cero en el tercer espacio de dicha ventana.

Sofía: “¿Qué hacemos?”

No saben cómo continuar; ni tan siquiera tratan de arrastrar el punto.

Celia: “¿Y el otro dónde hay que moverlo?”

Sofía: “Pregunta qué has tenido que modificar.” (Se refiere al enunciado de la pregunta)

Sofía: “Espera. ¡Profesor!”

Sofía: “¿Por qué aquí hay cuatro puntos y ahí hay tres?”

Profesor: “Menos tres, uno punto 3, cero” (Escribe directamente sobre la ventana e introduce un cambio: utiliza puntos en lugar de comas para los decimales)

En la pantalla, aparece una nueva expresión en la etiqueta que da las coordenadas del punto: $(-3; 13/10; 0)$.

Resulta que a estas alturas de la actividad las distintas expresiones que aparecen para las coordenadas se han convertido en un obstáculo. En resumen, estas expresiones son de cuatro tipos:

- $(2,0; -2,5; 0)$; dada por el interfaz.
- $(2, -2,5, 0)$; dada por la ficha.
- $(-3, 1.3, 0)$; introducido por el profesor en la ventana de edición de coordenadas.
- $(-3; 13/10; 0)$; dada por el interfaz después de introducir las coordenadas en la ventana de edición de coordenadas.

El obstáculo está relacionado con la duda que tienen para interpretar si eran cuatro coordenadas o tres. Ante esta duda cabe preguntarse:

- ¿Qué significado tienen para ellas las coordenadas?
- ¿Qué relación establecen entre trabajar en tres dimensiones y el número de coordenadas?

Opino, que consideran a las coordenadas como una herramienta para posicionar los puntos; y por lo tanto el número de coordenadas podría ser cualquiera. No se plantean el significado geométrico de las mismas.

El profesor después de indicar a las alumnas cómo introducir las coordenadas, aprovecha para dirigir la acción de las alumnas hacia el propósito de la pregunta:

Profesor:

“¿Cómo lo hacéis entonces? Lo escribís aquí y luego se coloca él solo, ¿es eso?” (Se refiere al uso que hacen de las coordenadas)

“Eso es un buen truco... vale. Perfecto.”

“A ver, realmente esto es lo que habría que hacer.” (Se refiere a usar las coordenadas)

“Ahora, lo que quiero es que lo intentéis hacer directamente.” (Se refiere que deben arrastrar el punto)

“Ahora quiero que lo hagas directamente... y lo mueves” (Se refiere que deben arrastrar el punto)

Celia: “Es que eso es más difícil.”

Profesor: “A ver. El método que tú has encontrado es como... ideal. Pero lo que estoy aquí preguntando es ver qué dificultades encuentras para colocarlo donde tú quieres.”

Como parece que ha quedado claro, el profesor se va. Las alumnas deciden dejar el punto donde está y pasar a la pregunta 3. Esta vez aciertan todas las respuestas sin mostrar dudas.

Parece que lo realizado en las preguntas anteriores les ha permitido comprender mejor el significado (posiblemente sólo como herramienta) de las coordenadas dentro de la Zona de Trabajo.

En la pregunta 4, nuevamente han de situar un punto en una posición dada con coordenadas. Debido a que al segundo punto lo han arrastrado al comienzo de la actividad, en la escena está situado en $(2,1; -2,8; -3,6)$. Optan por usar nuevamente la ventana para editar coordenadas e introducen las coordenadas del punto de acuerdo al enunciado en la ficha: $(-1,6; -3,4; -3,6)$. Les aparece la siguiente terna $(-8/5; -17/5; -18/5)$ en la etiqueta que da las coordenadas del punto. **Celia** lo desaprueba:

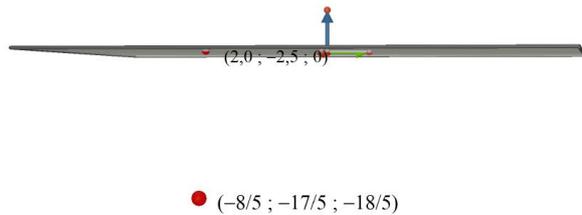
Celia: “Es que yo no sé por qué pone esos números tan raros.”

Vuelve aparecer problemas con las expresiones de las coordenadas: esta vez se debe a que aparecen fracciones. No está claro que relacionen estas dos expresiones: $(-1,6; -3,4; -3,6)$ y $(-8/5; -17/5; -18/5)$; como la misma terma.

Se muestran indecisas.

Finalmente, abandonan la ventana y optan por arrastrar el punto.

Arrastran el punto sin usar la tecla de mayúsculas. Lo aproximan a la línea gris que representa al plano base en esta vista (figura VI.20).



Como el punto $(-1,6; -3,4; -3,6)$ está en el semiespacio inferior al plano base y éste está orientado perpendicularmente a la pantalla, el arrastre mantiene al punto en la mitad inferior de la Zona de Trabajo. Parece que este arrastre les da la sensación de ser un

Figura VI.20

arrastre vertical; pero en realidad, están alejando el punto y haciéndolo menos visible. Intentan arrastrar el punto por encima de dicha línea pero no pueden. Entonces interviene el profesor y se establece el siguiente diálogo:

Profesor: “Sabéis que para subir y bajar usáis esto.” (Se refiere a la tecla de mayúsculas)

Sofía: “Pero es que... a ver. Mira”

Ahora **Sofía** comienza a usar la tecla de mayúsculas y a arrastrar verticalmente al punto.

Profesor: “¿Y eso qué quiere decir?” (Se refiere a que el punto cada vez es menos visible)

Sofía: “Espera. Cuatro, el cuatro ya está” (Ha conseguido que la tercera coordenada sea 4)

Profesor: “¿Qué significa que apenas lo veas?” (Se refiere al punto, que en estos momentos tiene coordenadas $(-38,4; -1,5; 4,0)$)

Sofía: “Que está muy lejos.”

Profesor: “¿Cómo lo traes para acá?” (Hacia posiciones más próximas al usuario)

Sofía lo arrastra hacia la PNV próxima al usuario.

Profesor: “Ahora está muy cerca. Llévalo al plano. A la parte visible del plano. A la gris.”

Sofía continúa con los arrastres pasando rápidamente de posiciones muy “cercanas” (respecto del usuario) a posiciones muy “alejadas” con pequeños desplazamientos del cursor. Le resulta difícil colocar el punto de manera que su proyección quede en la PV del plano base.

Entonces el profesor les pide que comenten y reflexionen sobre las dificultades que están teniendo.

Sofía: “No sabemos cómo se tiene que mover.”

Celia: “Es muy difícil llegar al punto exacto.”

El profesor les deja que acaben la actividad a solas.

La táctica que a continuación siguen es conseguir las coordenadas correctas una a una: comienzan por la segunda, después por la tercera y después intentan la primera. Cuando han conseguido las segunda y la tercera coordenadas buscan la posición para conseguir que la primera sea también correcta realizando sólo movimientos horizontales (paralelos al plano base); pero, al hacerlo pierden la segunda coordenada correcta. Acaban por desistir.

Algunas posiciones por las que pasan:

Posición inicial: (-1,6; -3,4; -3,6)

Algunas posiciones intermedias:

(-38,4; -1,5; -0,4)

(-38,4; -1,5; 8,6)

(-38,4; -1,5; 4,0)

(28,5; 9,1; 3,8)

(-14,6; -0,3; 3,4)

(27,8; 4,4; 3,4)

(39,6; 0,9; 3,5)

(14,1; -0,3; 1,7)

(3,6; 3,0; 1,7)

(3,6; 3,0; 4,0)

Posición final: (-26,8; -15,8; 4,0)

Posición pedida: (2, 3, 4)

Durante esta tarea surge el uso de una nueva función no pedida en la actividad. Utilizan la función “tecla mayúsculas + botón derecho del ratón” para arrastrar toda la escena verticalmente. Esto sucede después de haber colocado el punto en la posición (-38,4; -1,5; 4,0). Esta función no ha sido introducida por el profesor ni es pedida en ninguna de las actividades. Parece que se han servido para conocer sobre ella de la ayuda que tienen en la parte derecha de la pantalla. Esta ayuda a parece con la tecla F1. En el diseño de todas las actividades se ha dispuesto que salga esta ayuda, para observar si hacen uso de ella. En este caso, se ve que se han servido de ella para encontrar una nueva función que consideran útil para la actividad.

El arrastre de los puntos para colocarlos en una posición concreta les resulta difícil. Una explicación a esto está relacionada con la orientación que dan al plano base (figura VI.21).

Gran parte de las dificultades que se encuentran para arrastrar y colocar los puntos en posiciones determinadas se deben a la orientación que eligen: el plano perpendicular o muy próximo a la perpendicular a la pantalla:

- La zona de trabajo utilizable se reduce al máximo, quedando el mínimo espacio disponible en la mitad superior de la Zona de Trabajo.
- La razón entre las distancias virtuales y las distancias reales sobre la pantalla se hace máximo; dificultando el ajuste de las posiciones de los puntos.
- La movilidad de los puntos que están sobre el plano base se reduce al máximo.
- Apenas se puede utilizar la PV del plano base; útil para aprovechar todas las retroacciones que ofrece la interfaz y evitar que desaparezcan de la escena al usar la función “bola de cristal”.



Figura VI.21

- Bajo esta orientación, la relación entre el desplazamiento vertical (respecto al usuario) del curso y el desplazamiento “hacia adelante o hacia el fondo” (respecto al usuario) cambia. De manera general, cuando el cursor se desplaza “hacia arriba” (respecto al usuario), el arrastre produce que el punto vaya hacia el fondo (respecto respecto al usuario); pero bajo esta orientación, la relación es la contraria (y por lo tanto resulta menos acorde con la intuición).

En cuanto a la función “bola de cristal”, en esta actividad la utilizan poco. La utilizan básicamente para acceder a puntos con poca visibilidad (por haberlos “alejado” demasiado). Sin embargo, no la utilizan para ajustar las posiciones de los puntos.

Por último, en las tres últimas preguntas reconocen a los ejes de coordenadas y al origen de coordenadas. Los vectores de referencia es una retroalimentación que ofrece el interfaz pero no lo usan ni la consideran útil. Al responder: “Las de los ejes y y x ” a la pregunta “¿qué direcciones piensas que señalan?”, no consideran el eje OZ . La explicación se puede encontrar en el hecho de que durante la ESO los ejes cartesianos que se usan son OX , OY , y rara vez se menciona el OZ .

C. Actividad “Distancias.puntos.1”

Sofía tras leer la pregunta a) responde que el punto A está más cerca del O.

Celia continúa con la pregunta b).

Usa la función “bola de cristal” para cambiar a diferentes puntos de vista, colocando los puntos en diferentes posiciones. Preferentemente estas vistas han sido las siguientes:

- En línea con el usuario. En este caso rotan al plano base de manera que se intercambien las posiciones de A y B respecto al usuario (figura VI.22).
- El plano paralelo a la pantalla y la recta paralela o perpendicular al borde horizontal de la pantalla. En estos casos los puntos A y B estaban fuera de escena (figuras VI.23 y VI.24).

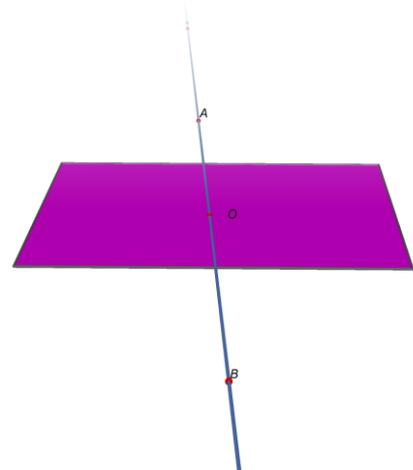


Figura VI.22

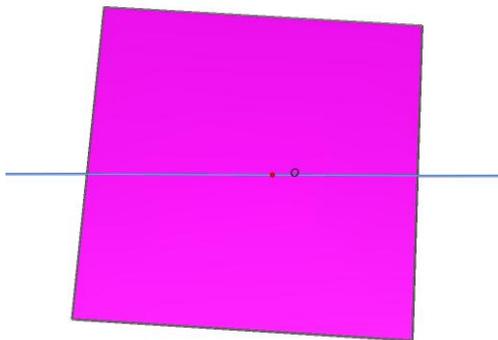


Figura VI.23

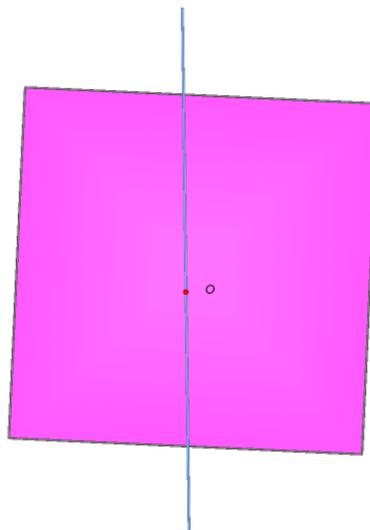


Figura VI.24

- Aunque, variando ligeramente el ángulo, consiguen que los puntos A y B aparezcan en la escena (figura VI.25).

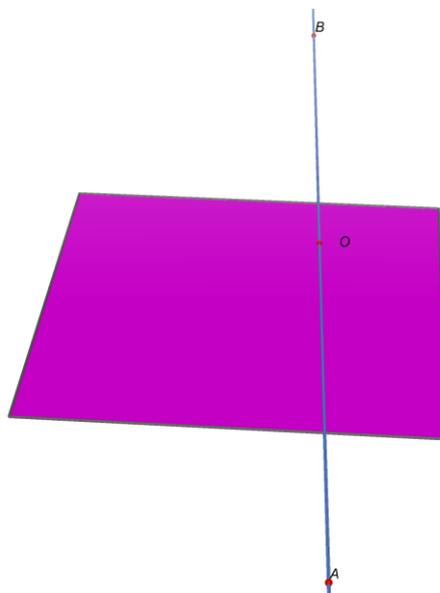


Figura VI.25

Después de estos cambios de puntos de vista, responden que los puntos A y B están a la misma distancia.

Sofía rectifica: “En verdad, pueden estar igual.”

Escriben en la ficha a la pregunta a): “Los dos están iguales pero la línea está inclinada y no parece”; y en a la pregunta b): “Las dos están a la misma distancia”.

Sofía continúa con la pregunta c) donde se pide que usen la herramienta “Distancia”. **Celia** busca la herramienta “Distancia” en la barra de menús posando el cursor en cada icono y leyendo el nombre de la herramienta correspondiente. Seleccionan la herramienta “Distancia” y marcan al lado de los puntos A y B; pero no sobre ellos. Esta operación la realizan sin pedir ayuda al profesor. Deberían haber marcado sobre los puntos A y B, y no a su lado. Por otra parte, resulta que al cambiar de puntos de vista se ve que estos puntos no están a la altura de A y B, sino más cercanos a O. Recurren a las siguientes vistas (figuras VI.26 y VI.27):

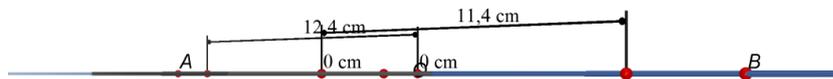


Figura VI.26

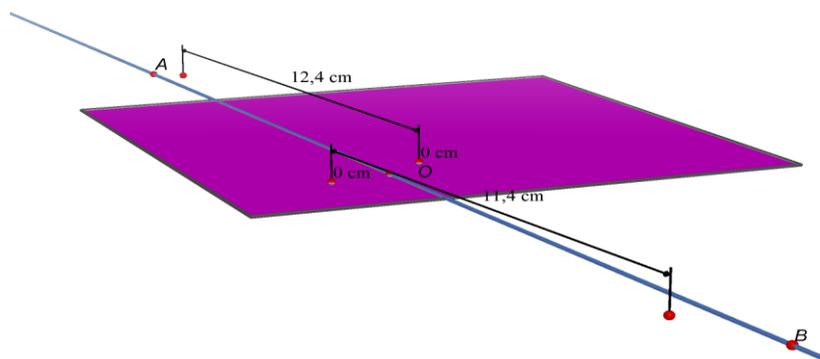


Figura VI.27

A la pregunta c) responden que las longitudes de OA y OB son iguales pero “que parece que no por la posición”. Llama la atención que a pesar de que las medidas obtenidas con la herramienta “Distancia” no son iguales, afirman que dichas longitudes son iguales. Atribuyen la aparente falta de igualdad en las distancias OA y OB a la inclinación de la recta y a su posición.

D. Actividad “Distancias.puntos.2”

Sofía comienza arrastrando la recta para volver a dejarla en su posición inicial.

Sofía: “¿A ojo?” (Se pregunta si ha de crear los puntos y colocarlos “a ojo”)

Sofía: “Pues... contar las rayitas.”

Celia: “¿Vamos a contar las rayitas?”

Sofía: “No. Cuenta los puntos del plano.”

Cuando **Sofía** dice que va colocar los puntos contando “las rayitas” seguramente se refiere a la retroalimentación que ofrece el interfaz ya comentada en las actividades “Puntos.libres.1 y “Puntos.libres.2”. Cuando se arrastra el cursor para crear un punto en la PNV del plano base, alrededor del cursor aparecen cuatro flechas según dos direcciones perpendiculares en un círculo cuadrículado. Este círculo cuadrículado desaparece cuando se arrastra el cursor para crear un punto por la PV.

Cuando **Sofía** rectifica y propone contar “los puntos del plano”, quizá se refiera a otra retroalimentación también comentada en la actividad “Puntos.libres.1”: la red cuadriculada de puntitos proporcionada por el interfaz cuando se coloca el cursor sobre el plano base. Después **Sofía** crea dos puntos sobre la recta a ambos lados del punto O. Para ello utiliza la función “bola de cristal” para dar al plano las orientaciones mostradas en las figuras VI.28 y VI.29.



Figura VI.28

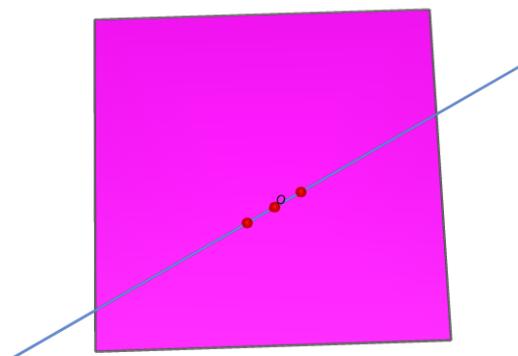


Figura VI.29

Una vez colocados los puntos pasan a usar la herramienta “Distancia”. Seleccionan la herramienta sin problemas y lo usan correctamente, marcando sobre los dos puntos creados (figura VI.30). El avance es significativo respecto a la actividad anterior

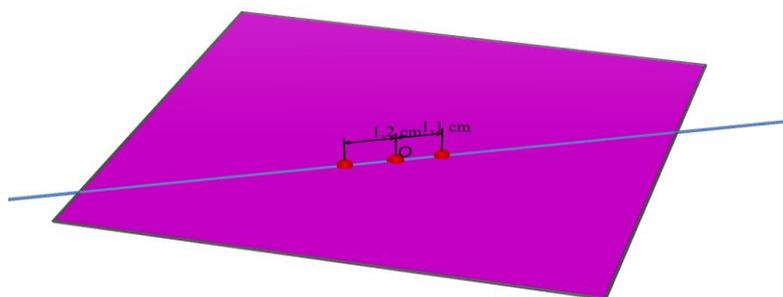


Figura VI.30

“Distancias.puntos.1”. Las distancias son 1,2cm y 1,1cm. Escriben: “Que no se puede poner a la misma distancia sin usar la herramienta ‘Distancia’ “

F. Actividad “Tipos.de.puntos.1”

En la pregunta 1, utilizan la herramienta “Recta” adecuadamente, sin mostrar dudas, y crean la recta sin mayor dificultad; pero no etiquetan a los puntos creados. Responden que los puntos se pueden arrastrar por el plano y por la recta.

En la pregunta 1c): “¿Qué pasa cuando los arrastras?” ensayan a arrastrar la recta directamente y lo hacen sin ninguna dificultad; pero no prueban a arrastrar los puntos verticalmente.

Sofía responde: “Que se mueven, que se cambian de sitio”

Y **Celia** escribe: “Se cambian sus coordenadas.”

En la pregunta 1c) se esperaba que mencionaran que la recta gira en el plano respecto del punto que no se arrastra. Posiblemente se debería haber añadido la pregunta: ¿qué tipos de movimientos realiza la recta al arrastrar los puntos?”

En la pregunta 2, crean los dos nuevos puntos C y D sin etiquetas, y los arrastran. Ven que solo se pueden arrastrar por la recta; pero no intentan arrastrarlos verticalmente respecto al plano base.

A la pregunta 3a) responden:

Sofía: “Que A o B se puede mover toda la recta. Y con C o D, sólo puedes mover el punto... además con A y B puedes mover el punto y la recta; con C o D sólo el punto a través de la recta.2”

Celia escribe: “Que el A y B se puede mover el punto y la recta; y con C y D solo el punto por la recta.”

A la pregunta 3b) responden:

Sofía: “Porque los que han formado la recta son A y B.”

Celia escribe: “Porque los puntos que han formado la recta son los A y B.”

A la pregunta 3c) responden:

Celia: “En el A y B.”

Sofía: “Sí. En el A y B, y cuando coges la recta.”

Celia escribe: “En el A y B, y cuando la coges.”

Por sus respuestas, parece que distinguen la diferente naturaleza entre los puntos A y B, y los puntos C y D:

- Parece que se dan cuenta que la manera de crear los puntos determina los arrastres que les serán permitidos.

- Parece que se dan cuenta que A y B son puntos que definen la recta. Por ello, el arrastre de estos provoca el movimiento de la recta.
- Parece que se dan cuenta que C y D están ligados a la recta por haberse creados sobre ella, y que por esta razón sólo pueden arrastrarse por ella.

En ningún momento ha pensado en la posibilidad de arrastrar verticalmente a los puntos.

En este caso verían que no es posible

G. Actividad “Tipos.de.puntos.2”

Uno de los aspectos que se trabaja en esta actividad es la distinción entre puntos libres, semi-libres y dependientes; así como la posibilidad de arrastrarlos con diferentes grados de libertad. Estudiando las actuaciones de las alumnas parece que entienden no todos los puntos pueden arrastrarse de igual forma dependiendo de cómo hayan sido creados. Sin embargo, en sus repuestas se aprecia ciertas contradicciones que posiblemente se deban al significado que dan a “arrastrar libremente” y a “no tienen limitados sus movimientos”. También es posible que estas expresiones les resulten ambiguas y se les deba concretar más. También es posible que la forma en la que utilizan este tipo de expresiones dependa de la situación y de la manera en la que es enunciada la pregunta. A continuación describo las actuaciones a las que aludo.

En la pregunta 1, al principio **Celia** dice que no se pueden arrastrar libremente los vértices. Sin embargo, **Sofía** piensa que ninguno tiene limitados sus movimientos:

Sofía: “Limitados sus movimientos creo que no tienen ninguno.”

En realidad, los vértices tienen limitados sus movimientos ya que están ligados al cubo. Nos preguntamos: ¿qué entiende **Sofía** sobre que un punto tenga limitados sus movimientos?

Por otra parte, en la pregunta 1d, responden que el punto O puede arrastrarse “libremente”; cuando en realidad solo puede arrastrarse por el plano base.

En la pregunta 3: “¿Puedes arrastrarlo libremente o solo por las caras?”; responden que el punto B (creado en la cara) se puede mover “solo por las caras”. Sin embargo, en la pregunta 4: “¿Puedes moverlo libremente o solo por la arista?”; responden que el punto A (que han creado por error en la cara) se puede mover “libremente”. Ahora utilizan la expresión “libremente” para referirse al arrastre de un punto ligado a una cara. Quizá se deba nuevamente al enunciado de la pregunta: “¿Puedes moverlo libremente o sólo por la

arista?” La pregunta está diseñada para el caso que el punto pertenezca a la arista. Pero las alumnas lo han creado por error sobre una de las caras. Así que el arrastre del punto no se limita a la arista si no que puede realizarse por toda la cara. Quizá sea a esto a lo que se refieran cuando responden “libremente”; y no a que se pueda arrastrar por toda la Zona de Trabajo.

Finalmente, en la pregunta 5b: “¿Qué pasa si arrastras A o B? ¿A qué crees que es debido?”; escriben que los puntos solo se pueden mover por sus caras ya que las aristas les limitan el espacio para moverse. Observamos que mientras en su respuesta a la pregunta 4, el hecho de poder arrastrar el punto por la cara lo consideran como que se puede arrastrar “libremente”; en esta última respuesta, ese mismo hecho lo califican como limitado por las aristas.

Por otra parte, las ideas sobre los arrastres de los puntos medios creados las tienen muy claras. Al afirmar en la pregunta 2, que no es posible arrastrar el punto medio porque “si es punto medio, se tiene que quedar en el medio”, parece que piensan que como ha sido construido para ser el punto medio de otros dos, si éstos no se arrastran no es posible arrastrarle y seguir siendo su punto medio. Este razonamiento podría ser el paso previo a la elaboración de la proposición más genérica de que si un punto es dependiente de otros puntos entonces no es posible arrastrarlo.

Otro aspecto a considerar es la interacción con el interfaz y el uso de las herramientas. A este respecto quiero destacar tres puntos:

- A. No tienen ningún problema con la creación de puntos pero sí con la herramienta “Punto medio”. En la pregunta 2, a **Celia** le cuesta encontrar la herramienta “Punto medio”:

Sofía: “Tienes que hacer con el “Punto medio” eh... crear el punto medio en una de las aristas.”

Celia recorre la barra de herramientas de herramientas; pero sin desplegar los menús.

Celia se pregunta si ha de crear un punto ya que ve la herramienta “Punto” pero no “Punto medio”.

Sofía: “No. Porque es uno... el punto medio.”

Entonces **Sofía** pregunta al profesor:

Sofía: “¿El “Punto medio” dónde está?”

Profesor: “El “Punto medio” está en este menú.”

El profesor despliega el menú donde se encuentra la herramienta “Punto medio”.
Explica cómo usar el menú:

Profesor: “Ahora estabais usando “Punto” y aquí es “Punto medio”.

Tienen dificultades para usar la barra de herramientas de menús de herramientas. Hasta esta actividad el procedimiento seguido ha sido: elige la herramienta marcando el centro del icono correspondiente en la barra de herramientas. Este procedimiento ha sido válido hasta ahora debido a que la barra de herramientas tenía por defecto a la vista los iconos de las herramientas que necesitaban. Pero para seleccionar las herramientas con iconos no visibles es necesario desplegar los menús de herramientas pulsando sobre una pestañita en los iconos visibles.

Una vez elegido la herramienta “Punto medio” por el profesor, **Celia** se dispone a usarlo:

Celia: “¿Dónde yo quiera?” (En este momento tiene al cursor cerca del centro de una de las caras)

Sofía: “En la mitad de una de las aristas.”

Llama la atención que **Celia** pregunte si ha de crear el punto medio donde ella quiera; cuando el enunciado es claro y explícito. Puede deberse o bien a que no recuerda el enunciado y duda si el punto medio es sobre una cara, o bien a que en realidad está preguntando sobre cómo usar la herramienta “Punto medio”.

Celia lleva el ratón aproximadamente a la mitad de una de las aristas y crea el punto medio. Al crear el punto medio sobre una arista tratan de marcar sobre la mitad de la misma; si bien el profesor tan sólo ha dicho que se marque sobre la arista. En realidad para crear el punto medio sobre un segmento o sobre una arista es suficiente con marcar sobre cualquier punto interior del segmento o de la arista.

En la pregunta 5, vuelven a tener dificultades con la herramienta “Punto medio”.

Ahora deben crear el punto medio entre dos puntos y no el punto medio de una arista. Resulta que la herramienta “Punto medio” tiene dos procedimientos de uso diferentes:

- Para crear el punto medio entre dos puntos se ha de marcar estos puntos; y no ningún punto intermedio.

- Para crear el punto medio de una arista se ha de marcar un punto interior a la arista y no sus puntos extremos.

Las alumnas desconocen que el “Punto medio” tenga estos dos procedimientos de usos; de manera que **Celia** no sabe cómo proceder con la herramienta “Punto medio” para crear el punto medio entre los puntos A y B. Así que decide crear el punto medio sobre la arista donde se encuentra el punto A.

- B. **Celia**, tras arrastrar algunos vértices, dedica un tiempo a darle colores al cubo y a sus elementos (vértices y aristas), mediante el menú contextual, que utiliza sin previa instrucción y sin haber sido requerido.
- C. No etiquetan los puntos. Parece que no le dan importancia a etiquetar o no los puntos. El problema es que en la pregunta 5, cuando tienen que crear el punto medio entre A y B, no recuerdan cuál es cuál.

H. Actividad “Tipos.de.puntos.3”

No tienen problemas para crear los puntos A y B sobre el plano base. Quieren etiquetarlos; pero no saben. Llamam al profesor para que les diga cómo se hace:

Sofía: “Vamos a ver si se pueden poner los nombres.”

Sofía: “Profesor”

Mientras acude el profesor, **Celia** prueba con el menú contextual a ver si con se puede poner la etiqueta.

Sofía: “¿Se puede poner nombre al punto?”

Profesor: “Claro.” Y les muestra cómo se hace:

Profesor: “Marcas ahí [en el punto] y le pones la letra.”

En la actividad anterior (tipos.de.puntos.2) tuvieron dudas para identificar puntos por no haberlos etiquetado. En esta pregunta, parece que no quieren que les pase lo mismo. A partir de este momento no dejan de etiquetar los puntos.

Sofía arrastra al punto A por las PV y PNV del plano base. Y sin más intentos escriben que los puntos se pueden arrastrar libremente. Dicen que los puntos se pueden arrastrar libremente cuando en realidad sólo se puede por el plano. Han llegado a esta conclusión arrastrando solo al A y por el plano base:

- Parece que consideran que conocer cómo se arrastra A, lo mismo va a suceder con B. Podríamos pensar que aplican la proposición de que si la construcción de dos puntos es la misma su naturaleza respecto al arrastre es la misma.
- Parece que utilizan la expresión “libremente” para indicar que el punto puede arrastrarse “por dentro y por fuera del cuadrilátero gris”, sin apreciar la diferencia entre poder arrastrar por la PNV del plano base y poderlo hacer por el espacio (fuera del plano base).

Sofía lee la pregunta 2: “Crea un punto en el espacio fuera del plano. Llámalo C.” **Celia** crea el punto C en la PNV del plano (figura VI.31).

Entonces **Sofía** señala que no está en el espacio:

Sofía: “Pero no está... Si lo haces ahí está en el plano”

Celia lo borra y arrastra el cursor por la Zona de Trabajo para ver dónde crear el punto.

Celia: “¿Qué hago?”

Al final vuelve a crear el punto en la PNV del plano. **Celia** no recuerda cómo ponerlo en el espacio y sigue arrastrando el punto y cambiando puntos de vista.

Sofía: “En el espacio.”

Celia sigue interpretando que la PNV del plano es el espacio. Sin embargo, **Sofía** aprecia que **Celia** ha creado en la PNV del plano base y que esa parte no es el espacio fuera del plano. Ninguna de las dos recuerda cómo situar el punto en el espacio fuera del plano.

Sofía continúa leyendo:

Sofía: “Arrástralo horizontalmente y verticalmente.”

Celia: “¡Ah, claro! Se hacía fuera del plano arrastrándolo verticalmente.”

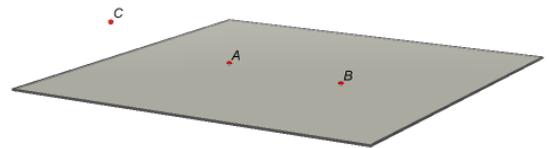


Figura VI.31

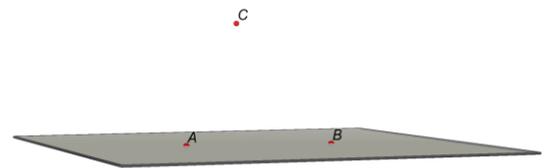


Figura VI.32

Celia arrastra el punto verticalmente respecto al plano base (figura VI.32). **Celia** se da cuenta que lo que necesita es arrastrar el punto verticalmente para conseguir que esté en el espacio fuera del plano. Parece un momento clave en su aprendizaje instrumental relacionado con el esquema “crear un punto en el espacio”.

Sofía continúa leyendo:

Sofía: “¿Se puede arrastrar libremente por cualquier parte de la pantalla?”

Celia lo arrastra por la Zona de Trabajo, manteniéndolo en el semiespacio superior, Cambia a una orientación del plano más próxima a la perpendicular a la pantalla. Parece que busca esta orientación del plano de manera que pueda apreciar que el punto C está a cierta altura sobre el mismo. Escriben que “sí” se puede arrastrar libremente

Sofía lee la pregunta 3: “Con la herramienta “Plano”...” Se para y dice:

Sofía: “¿Dónde está? ¿Cuál es la herramienta “Plano”?”

Celia encuentra el icono de un plano en la barra de menús de herramientas y lo selecciona sin mayor dificultad.

Sofía continúa leyendo: “...crea un plano...”

crea un plano que pase por A, B y C.”

Celia duda dónde marcar primero.

Sofía: “Coge primero C.”

Celia marca los puntos siguiendo este orden: C, A, B; y se crea el plano (figura VI.33). No parece que lean los mensajes que acompañan a la utilización de la herramienta “Plano”.

Sofía lee: “Crea un punto sobre el plano oblicuo.”

Celia: “¿Que se llame...?”

Sofía: “P”.

Sofía lee: “¿Se puede arrastrar libremente o sólo por el plano.”

Celia arrastra el punto P por la PV y PNV del plano oblicuo. Responden que se puede arrastrar “libremente”.

Nuevamente surge la utilización de la expresión “libremente” para calificar al arrastre de un punto que pertenece a un plano.

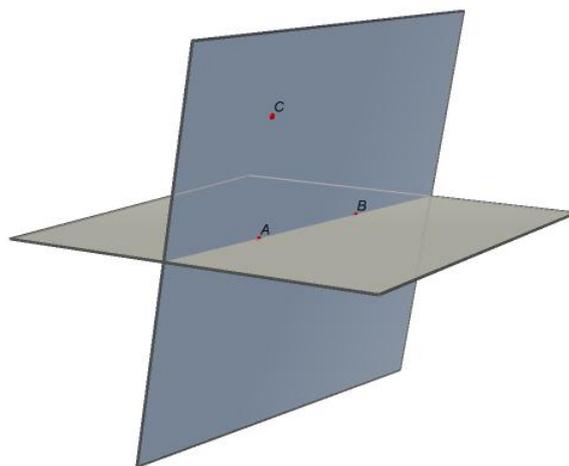


Figura VI.33

Sofía comienza a leer la pregunta 4: “Con la herramienta “Curva de intersección”...” Se para mientras **Celia** busca dicha herramienta por la barra de menús de herramientas. Al primer icono al que lleva **Celia** el cursor es al asociado a la herramienta “Cilindro” pero no lo marca. Seguidamente lleva el cursor sobre el icono de la herramienta “Circunferencia” y lee la ayuda que tiene desplegada a la derecha de la pantalla. Vuelve sobre el icono de cilindro, lo marca y lee la ayuda. Va al icono de la herramienta “Recta”, lo marca y lee la ayuda. Con la intención de ayudar, **Sofía** indica: “Curva.” Entonces **Celia** se para de nuevo sobre el icono de la herramienta “Circunferencia” y marca sobre su pestañita. Se despliega el menú y elige la herramienta “Curva de intersección”.

La anterior secuencia de actuaciones muestra cómo están asimilando el esquema “encontrar y seleccionar una herramienta en la barra de herramientas de menús”. Parece que el icono con apariencia de curva cerrada (asociado a la herramienta “Circunferencia”) lo han asociado con la palabra curva

de la herramienta “Curva de intersección” y les ha ayudado a encontrarlo. Por otra parte, no parecen que lean los mensajes que acompañan a la utilización de la herramienta “Curva de intersección”.

Después de seleccionar la herramienta “Curva de intersección”, tienen dudas sobre cómo utilizarlo:

Sofía: “¿Y dónde lo situas?”

Sofía lee: “...crea la recta intersección entre los planos.”

Celia duda donde situar el cursor.

Entonces marca sobre el plano oblicuo y después sobre el plano base, y se crea la recta de intersección (figura VI.34).

Sofía continúa leyendo la pregunta 4: “Sobre esa recta crea un punto D.”

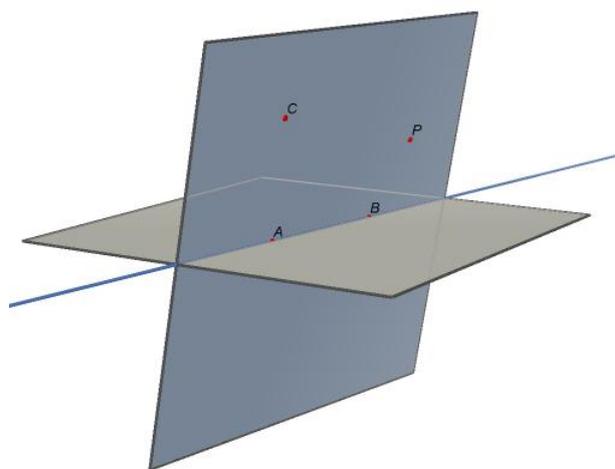


Figura VI.34

Celia crea el punto sobre la recta de intersección (figura VI.35).

Sofía lee: “¿Se puede arrastrar D libremente o sólo por la recta.”

Arrastran el punto y responden que sólo por la recta.

Sofía lee: “¿Por qué crees que no se puede arrastrar D por otros sitios?”

Escriben directamente: “Porque está limitado por los planos”

Afirman que el punto D solo se puede arrastrar por la recta y que no se puede arrastrar por otros sitios porque está limitado por los planos. Parecen que asocian la forma en la que ha sido creada la recta con el grado de libertad en los arrastre del punto D. En realidad, que el punto D solo pueda arrastrarse por la recta se debe a que ha sido creado en ella, y no a cómo ha sido creada la recta.

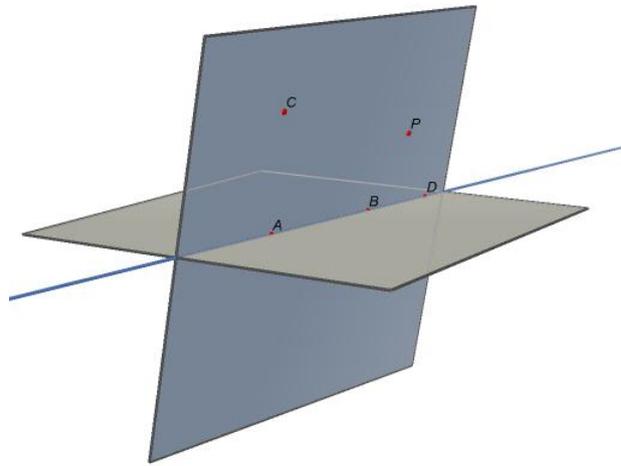


Figura VI.35

3. Mover objetos geométricos.

A. Actividad “Superponer.rectas.1”

Sofía lee el enunciado de la 1a): “Antes de mover di qué plan vas a seguir”. Escriben: “Seleccionar los planos y arrastrarlos.” No justifican el porqué si el enunciado dice “arrastrar y mover las rectas” responde que van a arrastrar los planos. Es posible que no hayan entendido correctamente lo que se les pide.

Acto seguido intentan arrastrar los planos. Comienzan intentando arrastrar el plano base y usan la función “bola de cristal” para ver si hay alguna orientación en la que sea posible. Se dan cuenta que el plano base no se puede arrastrar.

Sofía: “Solo se puede mover uno. Solo se mueve el rojo. El gris no se mueve para ningún lado.”

A la pregunta 1b) dan la siguiente respuesta escrita: “Si, porque el plano gris no se puede mover.” Hasta ahora (realizadas ya las nueve actividades anteriores), parece que no eran

conscientes que el plano base no puede arrastrarse sino solo girarse mediante la bola de cristal.

Así que pasan al plano oblicuo. Al arrastrarlo consiguen trasladarlo pero no girarlo; por lo que no les es posible superponer los planos.

En la pregunta 2, realizan todo tipo de arrastres con todos los objetos que están en la escena. **Celia** lee la pregunta 2a: “Qué diferencia hay entre arrastrar A, B o C.” Prueban de nuevo arrastrando los tres puntos y responden por escrito: “Que A y B se mueven las dos rectas y la C mueve solo una recta.” Continúan con la 2b pero sin hacer comentarios escriben: “Se puede con todos.” En la pregunta 2c: “¿Con qué punto o puntos las rectas giran?”; responden: “con el A.” En la pregunta 2d : “¿Con qué punto o puntos las rectas se desplazan pero no giran?”: responden: “Con el B, r, s, C.” [Aquí r y s son rectas y no puntos]

Se observa que no tienen ninguna dificultad para usar los diferentes tipos de arrastres practicados hasta esta actividad con la función “bola de cristal”, la herramienta “Manipulación” y la función de la “tecla mayúsculas”. Han mejorado su habilidad para acceder a puntos que han salido de la escena y arrastrarlos hacia el plano base para poder trabajar mejor con ellos. No obstante, al responder a la pregunta 2a aunque se aperciben del movimiento de una o de las dos rectas, no distinguen el tipo de movimiento involucrado: diferentes giros y traslaciones. Además, no aprecian que con el punto B no es posible superponer las rectas.

B. Actividad “Superponer.rectas.2”

Celia lee la pregunta: “Antes de moverlas di qué plan vas a seguir.”

Sofía: “¿Para moverlas? ¿Mover las rectas?” (Tiene dudas sobre el enunciado de la pregunta)

Celia: “Que coincidan.”

Sofía: “Mover el punto.”

Escriben: “Cogiéndolas donde el punto A”

Sofía arrastra el punto A acercándolo a la recta r. Arrastra C acercándolo a la recta s y lo vuelve a dejar donde estaba. Arrastra D lo acerca a s, y lo deja aparentemente tocando la recta s. Vuelve a C, para dejarte también aparentemente tocando a la recta s. Dan concluidos los arrastres. Arrastran los puntos A, C y D. No tocan al B, ni arrastran las

rectas. No utilizan la función de la tecla mayúscula. La escena queda como se muestra en la figura VI.36.

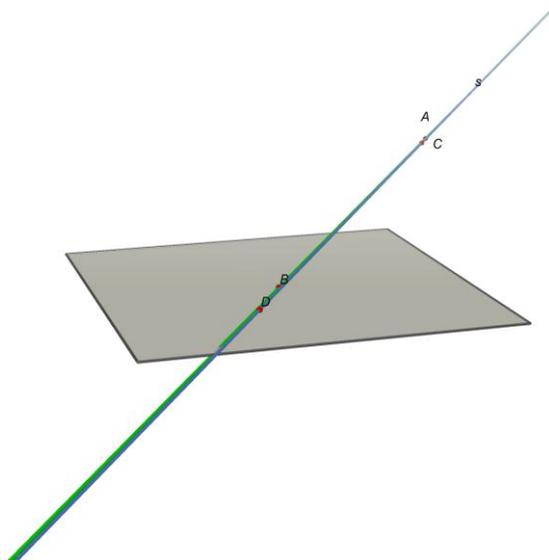


Figura VI.36

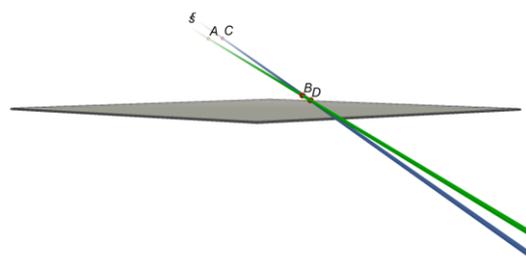


Figura VI.37

En ningún momento usan la función “bola de cristal” para cambiar el punto de vista. Se conforman con la vista inicial. No sienten la necesidad cambiar de punto de vista para ajustar la coincidencia de las rectas. En realidad, si reproducimos su actuación y cambiamos el punto de vista observamos que las rectas ni coinciden ni son paralelas, como muestra la escena de la figura VI.37.

En la pregunta 1b) escriben: “Sí, porque con un punto solo gira pero no se mueve.” Utilizan la expresión “gira” frente a la expresión “no se mueve”. Con la expresión “no se mueve” se refieren a que la recta no se traslada. Es la primera vez que distinguen dos tipos de movimientos a la hora de responder.

En la pregunta 1c) escriben: “Que con un punto no se movía la recta entera”. Utilizan también la expresión “no se movía la recta entera” para referirse a que arrastrando un solo punto la recta no se traslada.

C. Actividad “Mover.plano.con.recta”

Celia lee la pregunta 1: “Vas a mover el plano verde arrastrando sólo el punto P; pero antes de moverlo di por dónde crees que se va a mover el plano”.

Sofía: “Pues cogiendo el plano verde y moviéndolo.”

Celia: “Pero antes de moverlo di por dónde crees se va mover el plano.”

Sofía: “Hacia... alrededor de la recta.”

Sofía trata de arrastrar el punto P por el plano verde, pero no es posible. Entonces lo arrastra por la recta. Escriben que el plano se mueve “en los sentidos de la recta.

Sofía no prevé que el arrastre de P está limitado a la recta; ya que no conoce cómo se ha creado. Parece que interpreta que el punto P se puede arrastrar por el plano verde. Llama la atención que **Sofía** piense que el plano se moverá “alrededor de la recta”. Quizá está pensando en un giro con eje de simetría la recta.

Celia lee la pregunta 2: ¿Cómo crees que se va a mover el plano si arrastras lo puntos A y B? ¿Girará? ¿Se trasladará?

Sofía: “Se moverá de un lado para otro.”

Antes de arrastrar los puntos, contestan que el plano verde se traslada. Contestan que el plano se traslada, parece que les resulta más fácil imaginar que el plano se traslada en lugar de que gira. Lo cual llama la atención, teniendo en cuenta que en la actividad anterior se dieron cuenta que al arrastrar solo el punto A la recta “solo gira”.

Después de arrastrar los puntos responden que el plano gira. Cabe destacar que no han arrastrado verticalmente el punto B respecto al plano base, a pesar de que la pregunta los pide expresamente.

En la pregunta 4: “¿Cómo crees que se va a mover el plano si arrastras la recta?”; arrastran la recta y observan la relación entre el arrastre de la recta y el movimiento “aparente” del plano.

Sofía: “Se mueve al contrario.”

Sofía afirma que el plano se mueve al contrario que la recta. Parece ser que lo que quiere decir es que el plano se traslada en sentido contrario al de la recta. Para poder interpretar sus palabras presentamos, en las dos figuras VI.38 y VI.39, dos escenas similares a las que ve **Sofía**

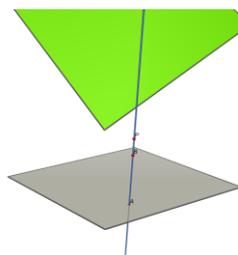


Figura VI.38

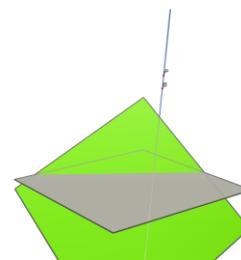


Figura VI.39

Aparentemente, cuando la recta se arrastra hacia el usuario, el plano se aleja y se mantiene detrás de la recta; y cuando la recta se aleja del usuario, el plano se acerca y se mantiene por delante de la recta. Este fenómeno va en contra de lo que **Sofía** espera que deba ocurrir. En realidad el plano se traslada según la recta manteniéndose perpendicular a ella.

D. Actividad “Superponer.planos.1”

No han tenido ninguna dificultad y no hay nada que comentar teniendo en cuenta que esta actividad hay que pensarla como la primera de una serie de cuatro actividades dedicadas a la superposición de planos.

E. Actividad “Superponer.planos.2”

Sofía lee la pregunta 1 y responden: “Utilizar la bola de cristal y manipulación.”

Celia arrastra el plano verde hasta que corta al rojo en la PV del plano base. Cambia el punto de vista con la función “bola de cristal” para volver al punto de vista que tenía:

Continúa arrastrando el plano verde acercando y alejándolo al plano rojo. Escriben en la pregunta 2 que han tenido que cambiar de estrategia y mover los puntos.

Sin darse cuenta desplazan los puntos de construcción del plano verde fuera de la PNV del plano base (figura VI.40).

A partir de este momento comienza a utilizar los puntos de construcción de los planos; con lo que consigue girar el plano verde según diferentes ejes de giro. Al mismo tiempo va alejando los puntos de construcción del plano verde de la PV del plano base:

Hace lo mismo con el plano rojo.

Continúan estas maniobras alejando cada vez más los puntos de construcción de ambos planos de la PV del plano base.

Les resulta difícil cambiar las orientaciones de los planos de acuerdo a sus deseos. En un momento dado, exclama:

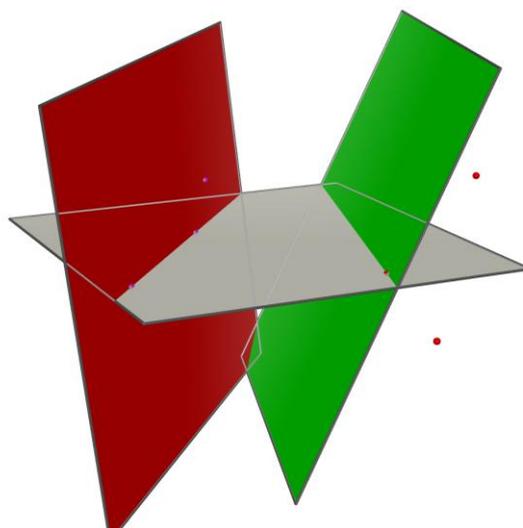


Figura VI.40

Sofía: “¡El plano se mueve para donde le da la gana!”

A continuación (figuras VI.41 y VI.42) se muestran algunas escenas más:

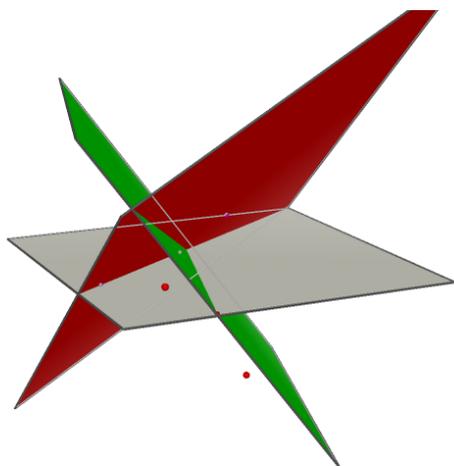


Figura VI.41

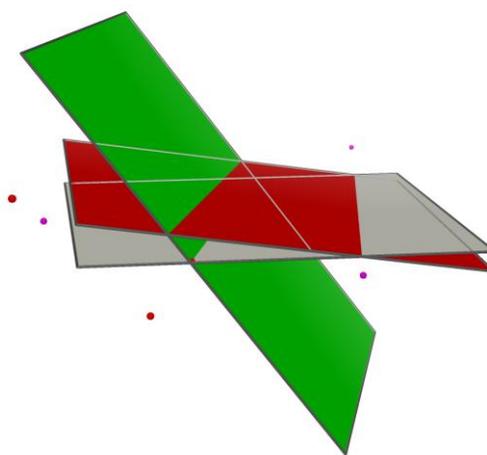


Figura VI.42

En la pregunta 3 escriben: “Que es difícil moverlo como quieres”. No obstante, observamos en la escena final, dada a continuación, que no han conseguido ni se superponerlos ni colocarlos paralelos; aunque se han acercado bastante (figura VI.43).

Se observa durante el desarrollo de esta actividad que los esquemas e instrumentos construidos anteriormente no son suficientes para gestionar las dificultades instrumentales que se presentan.

En los “Comentarios en detalle” para esta actividad analizamos los fenómenos que pueden dificultar desorientar e interferir las actuaciones de los/as alumnos/as. De hecho, son las dificultades que han sufrido **Sofía** y **Celia**. Brevemente estas dificultades son:

- Conocer las características de los giros que se producen al arrastrar un punto de construcción.

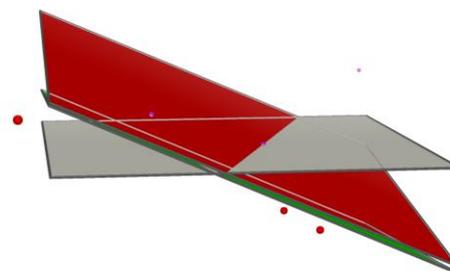


Figura VI.43

- Conocer el efecto que produce el arrastre de un plano sobre la posición de los puntos definidos en él.

Por otra parte no han utilizado la función de la tecla de mayúsculas para arrastrar vertical los puntos de construcción que están fuera del plano base. Esto les hubiera facilitado la tarea ya que permite realizar algunas rotaciones y cambios de pendiente más fácilmente, sin necesidad de alejar los puntos con el peligro de sacarlos fuera de escena.

No obstante, se observa un avance en su instrumentación:

- Al principio solo pensaban en el arrastre de los planos, y ido dando mayor importancia al arrastre de los puntos de construcción.
- Utilizan el arrastre de los puntos de construcción para realizar rotaciones de los planos y con ellas cambiar sus orientaciones y pendientes. Y el arrastre de los planos para trasladarlos.

F. Actividad “Superponer.planos.3”

Celia lee la pregunta 1: “Muévelos hasta conseguir que se superponga; pero antes de moverlos explica el plan que vas a seguir”.

Sofía: “Pues moviendo los puntos.”

En las actividades anteriores han podido aprender que para superponer planos es suficiente con dos tipos de movimientos: trasladar y girar. Y que para girar los planos han de arrastrar los puntos de construcción.

En la pregunta 2, **Sofía** arrastra horizontalmente uno de los puntos de construcción del plano violeta. Como no obtiene ninguna rotación apreciable, arrastra al plano violeta también horizontalmente. No consigue ninguna rotación; aunque sí cambiarlo de altura ligeramente y arrastrar sus puntos de construcción fuera de su PV (figura VI.44).

Entonces pregunta:

Sofía: “¿Cómo era eso de la bola de cristal?”

Celia: “Con la bola de cristal solo podías cambiar de perspectiva.”

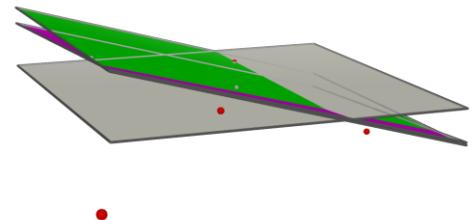


Figura VI.44

Sofía: “Sí, sí. Pues eso.”

Sofía continúa teniendo dificultades para recordar la función “bola de cristal”; si bien basta una ligera indicación para que la recuerde y la utilice sin problemas.

A la pregunta 3 “¿Qué dificultades has tenido?” escriben: “Que se nos han salido los puntos rojos.” Se refieren que los han alejado tanto de la PV de sus respectivos planos que incluso han perdido a todos de vista y no han podido encontrarlos ni usando la función “bola de cristal”. Esto se debe a que han arrastrado los planos horizontalmente, y al hacerlo los puntos de construcción se han desplazado fuera de la escena. Para evitar este inconveniente y realizar la superposición más fácilmente, deberían haber arrastrado los puntos de construcción verticalmente respecto al plano base; pero no lo han hecho, ya que no utilizan la función de la tecla de mayúsculas.

Llaman al profesor para decirle que han perdido los puntos. El profesor opta por cerrar el archivo para poder empezar de nuevo.

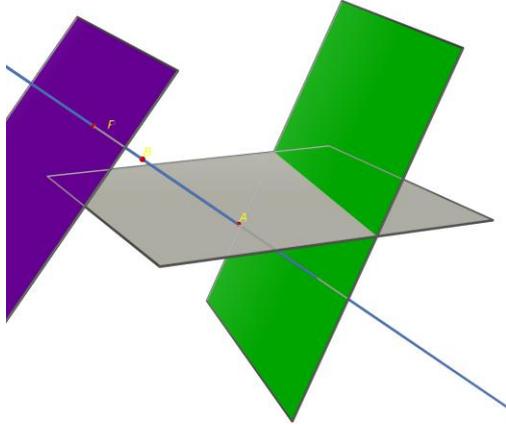
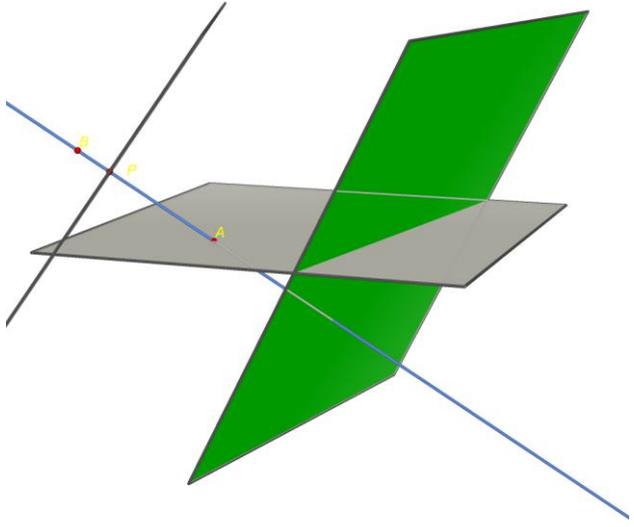
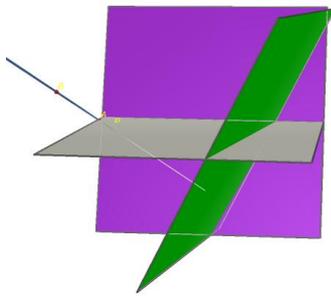
En el segundo intento Si comienza arrastrando horizontalmente el punto de construcción del plano verde que está en el espacio. Obtiene mejores resultados ya que es más fácil cambiar la pendiente del plano verde que la del violeta.

Cuando creen que el plano verde es paralelo al plano violeta, entonces lo arrastra para superponerlos. No lo consiguen pero se conforman.

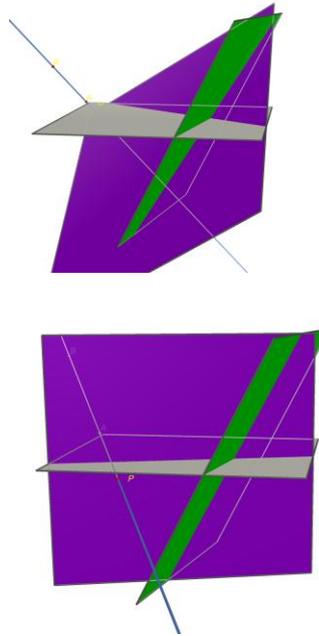
G. Actividad “Superponer.planos.4”

Celia lee la pregunta 1 y antes de arrastrar ningún punto escribe: “Mover los puntos y utilizar el modo mover y trasladar la recta.” Cabe suponer que cuando dice el “modo mover” se refiere a la función “bola de cristal”. Si es así, la estrategia que proponen, aunque descrita de manera muy escueta, es bastante completa respecto a los arrastres que deben realizar: arrastrar puntos, trasladar la recta y utilizar la función “bola de cristal”. No obstante, el traslado de la recta no es necesario y más bien puede complicar la acción de superponer los planos.

Seguidamente comienza una serie de maniobras para conseguir superponer los planos. En la siguiente tabla mostramos los pasos que siguen junto con las escenas asociadas:

<p>1°. Sofía comienza arrastrando el plano violeta.</p> <p>2°. Continúa arrastrando el punto P.</p> <p>3°. Entonces arrastra horizontalmente el punto B</p>	
<p>4°. Entonces arrastra el punto P y acercan el plano violeta al verde.</p> <p>5°. Arrastra el punto B horizontalmente.</p> <p>6°. Cambian de punto de vista</p>	
<p>7°. Arrastra el punto P acercando más los dos planos.</p> <p>8°. Arrastra el punto A dejando al plano violeta casi perpendicular al verde</p>	

9°. Arrastra el B.



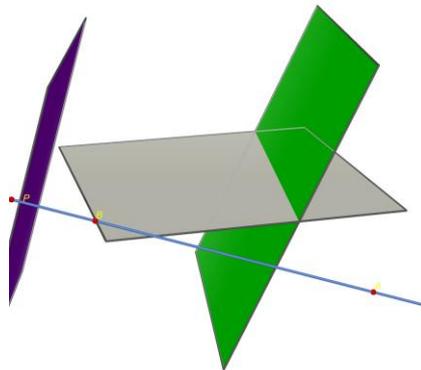
10°. Continúa con este tipo de maniobras pero el plano violeta continúa con ángulos cercanos a 90° respecto al verde.

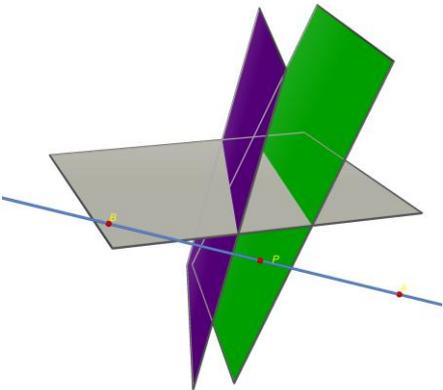
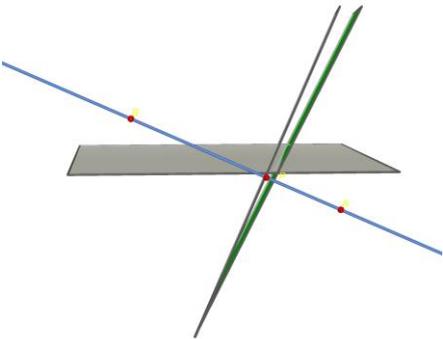
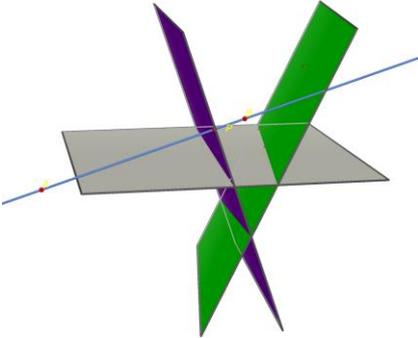
11°. Decide volver a empezar, cerrando el archivo sin grabar y volviéndolo a abrir.

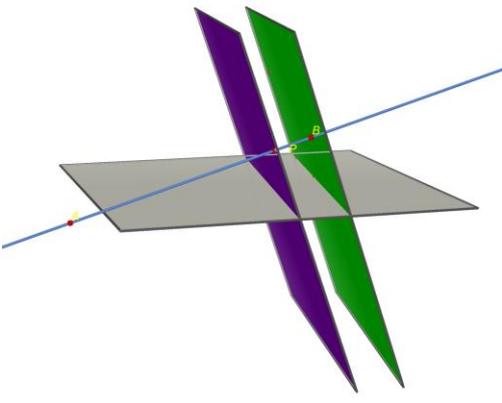
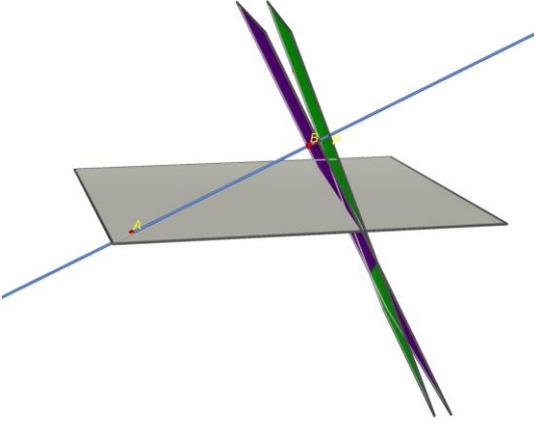
12°. Prueba a arrastrar con más atención los puntos. Dice:

Sofía: “Este gira... este gira...”

Se refiere al arrastre de los puntos A y B. Los arrastra estudiando cómo es la rotación que se produce. Arrastra el punto A a la derecha y a la izquierda alejándolo de la PV del plano base.



<p>13°.Arrastra el plano violeta acercándolo al verde.</p>	
<p>14°.Arrastra el punto B con la intención de dejar al plano violeta paralelo al verde</p> <p>15°.Usa la función “bola de cristal” para conseguir el perfil de los planos y comprobar si están paralelos.</p> <p>16°.Arrastra al violeta acercándolo al verde</p> <p>17°.Cambian el punto de vista para ver mejor el ángulo que forman.</p> <p>18°.Arrastra al violeta acercándolo al verde.</p>	
<p>19°.Arrastra el punto B para intentar que sean paralelos pero descoloca al plano violeta a posiciones similares a las del paso 9°.</p> <p>20°. A partir de aquí las maniobras son similares a las ya vistas.</p>	

<p>21°.Entonces decide arrastrar el punto de construcción del plano verde que no está en el plano base para que esté paralelo al violeta.</p>	
<p>22°.Arrastra el plano violeta acercándolo al verde</p>	

En esta secuencia de acciones queremos destacar los siguientes puntos:

1. Prefiere arrastrar el plano violeta a arrastrar el punto P. En este sentido, se observa una preferencia por el arrastre de los planos; lo cual, también se puede interpretar como una resistencia al arrastre de puntos frente al arrastre de los planos.
2. Actúa por ensayo y error. No se da cuenta que cuando arrastra el punto A, la recta y el plano rotan con centro de giro el punto B. Y que cuando arrastra B, el centro de giro es A. Se observa una falta de análisis del comportamiento de los objetos geométricos bajo los diferentes tipos de arrastres.
3. No utiliza en ningún momento la función de la tecla de mayúsculas; es decir, no realiza ningún arrastre vertical de los puntos respecto al plano base.
4. En los casos en los que coloca el plano violeta en una posición próxima a la paralela con el verde, al continuar arrastrando horizontalmente A y/o B para

ajustarla y no utilizar los arrastres verticales, lo desajusta totalmente. Entonces no recupera la posición que ya había conseguido. Quizá porque quiere probar otras posibilidades o quizá porque no es consciente de cómo ha realizado las acciones.

5. Utiliza la función “bola de cristal” para ajustar las posiciones cuando los planos casi están paralelos.

Por último, en la ficha responden que:

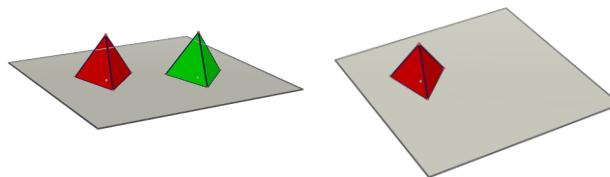
- El arrastre del punto A mueve el plano en el espacio.
- El arrastre del B se produce por los puntos de la recta y que desliza el plano a través de la recta.
- El arrastre de P mueve la recta.

No especifican qué movimiento se producen ni sus diferentes características. Por ejemplo, no mencionan que al arrastrar A o B, el plano violeta rota.

Confunden los efectos del arrastre de B con los de P.

H. Actividad “Superponer.tetraedros.1”

Arrastran el tetraedro verde arrastrando una de sus caras hasta que aparentemente se superpone con el azul. Las posiciones inicial y final son las siguientes:



Posición inicial

Posición final

No han tenido dificultades. No obstante, no se han preocupado de cambiar el punto de vista con la función “bola de cristal” para comprobar que sus vértices y aristas coincidían.

I. Actividad “Superponer.tetraedros.2”

La actuación ha sido la siguiente secuencia:

- Arrastran el plano rojo hasta aparentemente superponerlo con el plano azul. No realizan ningún cambio de punto de vista para comprobar o ajustar la superposición de los planos.
- Arrastran el tetraedro amarillo (que estaba sobre el plano rojo) hasta hacer coincidir los vértices que tienen en el espacio.
- Arrastran un vértice que está en el plano del tetraedro amarillo hasta que aparentemente todos los vértices de los dos tetraedros coinciden.

La actividad no les ha presentado ninguna dificultad. No obstante cabe mencionar lo siguiente:

- No utilizan la función de la tecla de mayúsculas. No obstante, como el único arrastre posible con el plano rojo es vertical, ya que está creado paralelo al plano base (en este caso de color azul), no es preciso el uso de la función de la tecla de mayúsculas (cosa que las alumnas, en principio, desconocen).
- No realizan ningún cambio de punto de vista con la función “bola de cristal”; ni tan siquiera para ajustar posiciones o comprobar que están correctamente superpuestos.

J. Actividad “Tipos.de.puntos.4”

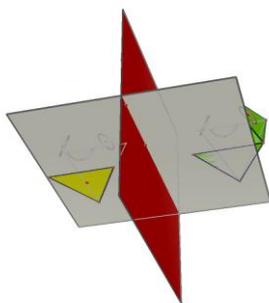


Figura VI.45

se refieren a la cara que tiene sobre el plano base (figura VI.45).

Para responder a la pregunta 4, arrastran al octaedro amarillo y a sus diferentes puntos. Y responden:

“Que es simétrico y le pasa exactamente lo mismo que al amarillo.” (Figura VI.46).

Para responder a la pregunta 5, tratan de arrastrar a

Comienzan arrastrando el plano rojo hacia la izquierda; y el octaedro verde se traslada hacia la izquierda.

Utilizan la función “bola de cristal” para cambiar los puntos de vista y responder las preguntas.

Cuando en la preguntan 3 responden que el poliedro verde es imagen del otro y lo justifican diciendo: “Porque tiene una cara sin pintar.”,

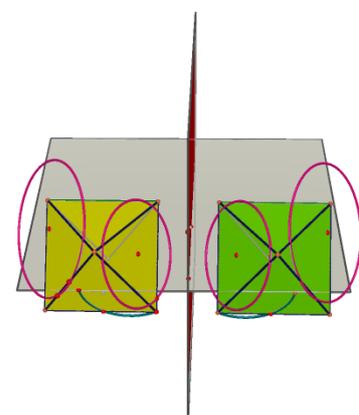


Figura VI.46

los puntos del octaedro verde pero no se puede; y responden: “No se puede, porque es simétrico al amarillo.”

Se observa que han asimilado el uso de la función “bola de cristal” y el arrastre de puntos ligados a superficies y a poliedros. En esta actividad dichos arrastres les permiten caracterizar dos poliedros simétricos bajo una simetría plana:

- Comienzan diciendo que distinguen al simétrico porque un tiene una cara “sin pintar”. Podríamos decir que se han fijado en una característica “estática”.
- Después, en la pregunta 4, tras arrastrar los puntos del octaedro amarillo y ver los efectos en el verde, consideran que dichos efectos es consecuencia de que el verde es simétrico del amarillo. Podríamos decir que han caracterizado al verde como simétrico de una forma dinámica: al verde “le pasa exactamente lo mismo que al amarillo”.
- En la pregunta 5, tras intentar arrastrar al verde y sus puntos responden que “no se puede arrastrar porque es simétrico al amarillo”. Podríamos que están caracterizando a un poliedro simétrico también de forma dinámica: aquel que no puede arrastrarse directamente por depender de los arrastres que se hagan en otro.

4. *Ángulos entre rectas y planos.*

A. Actividad: “Rectas paralelas”

Sofía lee la pregunta 1: “¿Cuándo dos rectas son paralelas?” Escriben en la ficha: “Cuando por mucho que las alargas no se cortan y que tengan la misma dirección.”

Sofía lee la pregunta 2: “Di si son paralelas, se cortan o se cruzan.” **Celia** usa la función “bola de cristal” para las rectas desde diferentes puntos de vista.

Celia responde: “Paralelas no son. Se cruzan pero no se cortan.”

Sofía lee la pregunta 3: “Piensa, ¿qué has de hacer para conocer si las rectas se cortan?” **Celia** responde: “Utilizar la bola de cristal.” Al usar la función “bola de cristal” pasan rápidamente por distintos puntos de vista y no se detiene en ninguno. Hay varias vista por las que pasan donde se ve claramente que las

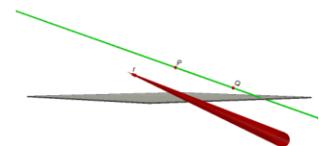


Figura VI.47

rectas no se cortan ni son paralelas. Una de ellas es la mostrada en la figura VI.47.

Sofía lee la pregunta 4 y **Celia** comienza los arrastres con el punto Q. Lo intenta bajo distintos puntos de vista: en cada punto de vista, arrastra a Q hasta que aparentemente están paralelos (figura VI.48), pero al cambiar de punto de vista se da cuenta que no lo están (figura VI.49)

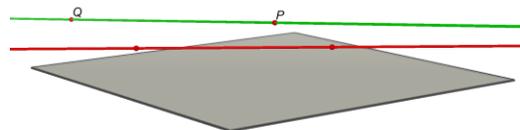


Figura VI.48

Sofía concluye: “Habrá que mover otro punto que no sea Q.”

Sofía escribe: “Que moviendo el punto Q no se puede.”

Celia intenta mover el punto P y los puntos de construcción de la recta r. Como están bloqueados no se pueden arrastrar; pero ellas no lo saben. Intenta arrastrar a las rectas; pero tampoco es posible. **Sofía** se extraña que no se puedan arrastrar:

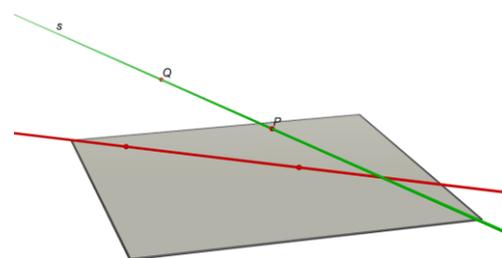


Figura VI.49

Sofía: “¡Huy! ¿Por qué no se pueden mover? ¿Sólo se puede mover el punto Q?”

Celia vuelve a arrastrar el punto Q, lo deja y comienza a cambiar a diferentes puntos de vista. Después de un rato vuelve a arrastrar Q, siguiendo la misma estrategia inicial: lo intenta bajo distintos puntos de vista: en cada punto de vista, arrastra a Q hasta que aparentemente están paralelos; pero al cambiar de punto de vista se da cuenta que no lo están. Comentan al profesor que es difícil.

Profesor: “Pero hay que intentarlo. Quiero ver como os apañáis.”

Celia: “Pero estos puntos no se mueven.” (Se refiere a los puntos que no son P)

Celia: “Sólo se puede mover el Q.”

Profesor: “¿Y qué tendrías que hacer con el Q? ¿Qué puedes hacer con el Q? Subir y bajar. ¿Cómo subes y bajas?”

Profesor: “Sube y baja.” (Le indica que arrastre verticalmente al punto Q)

Celia arrastra verticalmente al punto Q.

Profesor: “Claro. Ayúdate de eso también.”

Celia utilizando el arrastre vertical del punto Q y las acciones que ya estaba usando consigue que estén paralelas.

Se observa que trabajan bien con la función “bola de cristal” y con los arrastres horizontales de puntos; pero no utilizan el arrastre vertical (combinación de la herramienta “Manipulación” y la tecla de mayúsculas). Ha de ser el profesor quien les indique que utilicen este tipo de arrastre. No obstante, cuando utilizan el arrastre vertical lo hacen correctamente.

Sofía lee: “¿Has tenido que cambiar la estrategia?”

Escriben: “Hemos pensado en cambiar la estrategia subiendo y bajando el punto Q. Se debe a que estaba en una posición en la que solo moviendo no se podía.” Parecen que se dan cuenta que el arrastre vertical es útil y necesario. Cuando escriben “solo moviendo” deben referirse a los arrastres horizontales respecto al plano base.

Sofía continúa leyendo: “Qué has hecho para asegurarte que son paralelas”. Escriben: “Utilizar la bola de cristal.”

En la pregunta 4d) escriben:

Acción	Sirve para
Usar la “bola de cristal”	Para verlo desde todos los puntos de vista.
Arrastrar el punto Q paralelo al plano base	Para mover la recta.
Arrastrar el punto Q verticalmente respecto al plano base	Para mover la recta de arriba abajo.
Mover el plano base	Para verlo desde otro punto de vista también.
Colocar el plano base paralelo a la pantalla	Para comprobar que no se cortan las rectas.
Colocar el plano base perpendicular a la pantalla	Lo mismo que lo anterior.

Las respuestas son escuetas y genéricas. Afirman que mover el plano base sirve para “verlo desde otro punto de vista también.” Este “también” debe referirse la función “bola de cristal”. Me pregunto si ya se han tomado conciencia que la única manera de arrastrar el plano base es con la función “bola de cristal”. Por otra parte, uno de los objetivos de esta pregunta es estudiar cómo realizan las acciones pedidas. En este sentido, nos interesa observar la utilización de la función “bola de cristal” y los puntos de vista que utilizan. El

tipo de vista y orientación del plano base que predominantemente emplean es de unos 45° de inclinación. Así mismo, utilizan diferentes orientaciones de las rectas respecto de los borde de la pantalla, incluso para ajustar la altura del punto Q; tal y como se muestra en las escenas de las figuras VI.50 y VI.51.

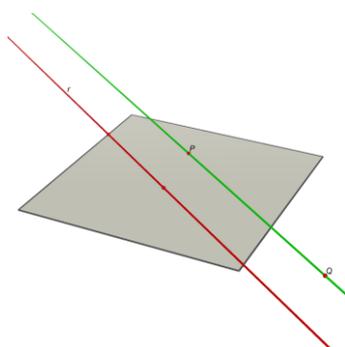


Figura VI.50

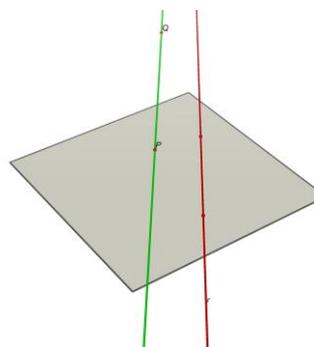
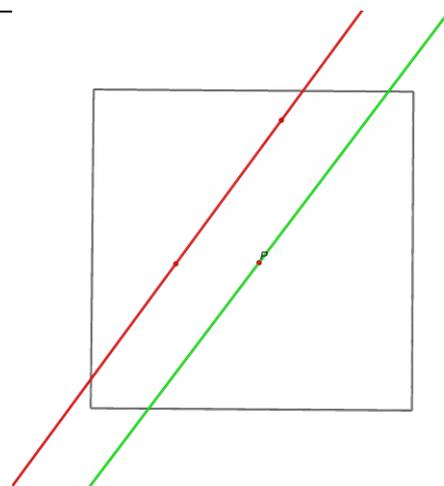
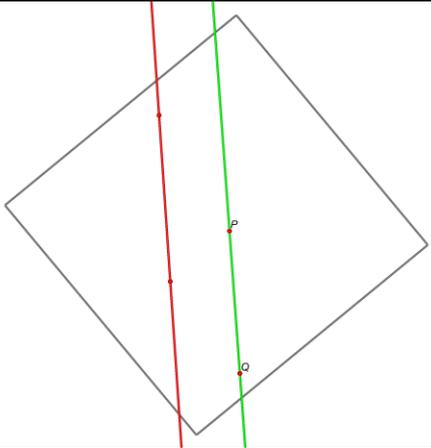
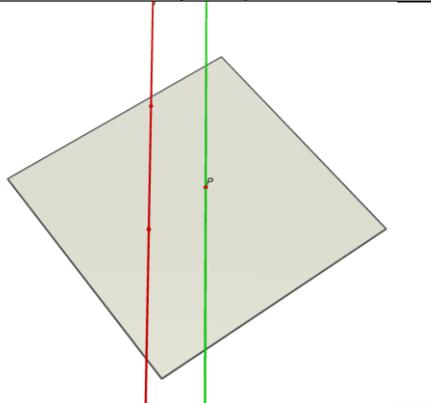
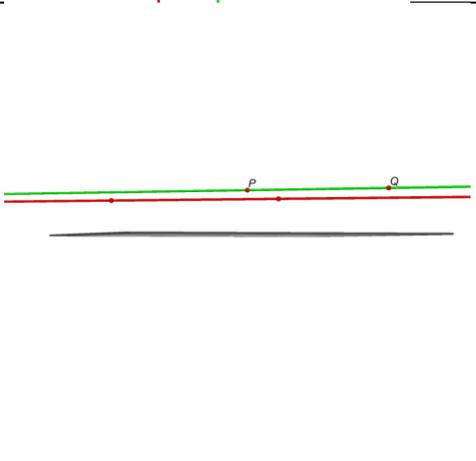


Figura VI.51

Hay dos orientaciones del plano base que son útiles en esta actividad. Las mostramos en la siguiente tabla, junto a la descripción de su empleo por parte de las alumnas.

1. Plano paralelo a la pantalla. Con esta orientación se evita la perspectiva y se tiene una vista con las proyecciones de las rectas sobre el plano base. Pasan por este tipo de vista rápidamente, por lo que no las utilizan ni para comprobar el paralelismo ni para ajustar sus posiciones. Por otra parte, no las pueden utilizar para ajustar posiciones porque el punto Q se les sale de escena, por lo que deben disminuir el ángulo. Por esta misma razón pierden el tiempo y tienen que rectificar posiciones.

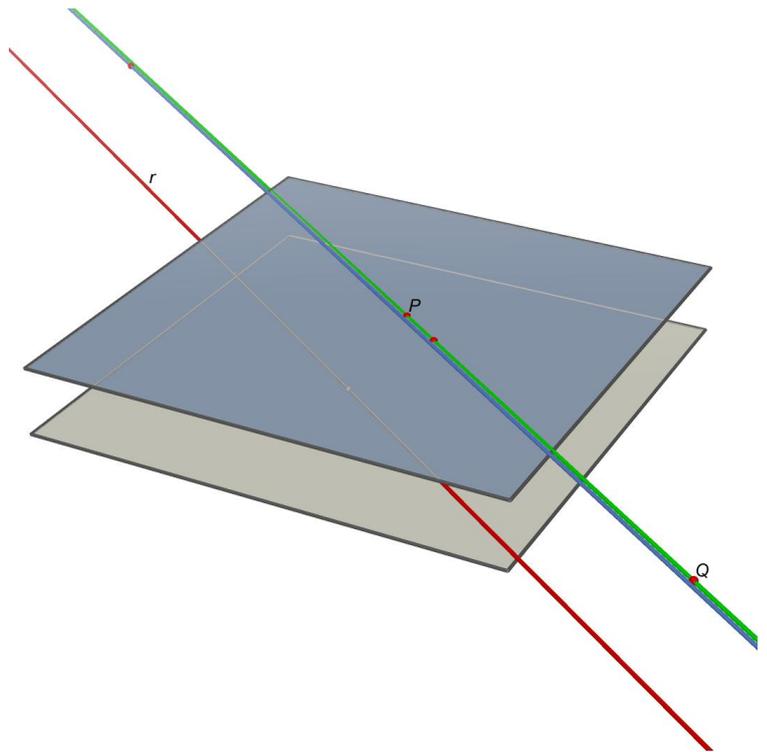


	
<p>2. No optan por arrastrar al punto Q hacia la PV del plano base, y así evitar perderlo al cambiar de puntos de vista. Así han de pasar por vistas con un ángulo inferior.</p>	
<p>3. Plano perpendicular a la pantalla y recta roja paralela al borde inferior de la pantalla. Esta vista sí la han usado para ajustar la altura del punto Q.</p>	

En la pregunta 6, seleccionan sin problemas la herramienta “Paralela” pero tienen dificultades para usarlo (figura VI.52):

- Deben crear la paralela a la roja que pase por P; pero construyen la paralela a la azul por un punto que crean con la misma herramienta “Paralela”.
- Sin querer, al tratar de arrastrar y superponer la recta creada a la recta azul, crean el plano paralelo al plano base que pasa por P (esto es debido a que no han seleccionado la herramienta “Manipulación”, y continúan con la herramienta “Paralela” activo). **Sofía** se pregunta: “¿Por qué sale otro plano?”

Se les pide que creen la paralela a la roja que pase por P. Pero al usar la herramienta “Paralela” ni buscan la recta roja ni el punto P; parece que les preocupa crear una recta paralela a la azul y coincida con esta, ya que tratan de superponerla a la azul. Quizá este comportamiento se deba a que no han comprendido la pregunta y se centran en que “coincidan” (expresión utilizada tres veces: en 6a), 6b) y 6c)).



El profesor se acerca y ve el plano creado.

Profesor: “¿Qué estáis haciendo?”

Sofía: “Una recta que pase por P”

Profesor: “¿La paralela?”

Sofía: “Sí.”

Sofía: “Pero es que no se puede mover.”

Sofía: “¿Así está bien? ¿Qué pase por P?”

Profesor: “¿Cómo lo has hecho? ¿Has creado un plano paralelo?”

Sofía: “Se ha creado solo.”

Profesor: “Repitamos.”

El profesor elimina el plano y ve que hay una línea que supone que es la paralela a la roja.

La arrastra y ve que pasa por otro punto distinto a P:

Profesor: “Ya la habías creado. Esta es la recta paralela que has creado, ¿no?”

Profesor: “Bueno, lo has hecho bien; solo que pasa por otro punto.”

De todas formas, el profesor explica todo el proceso haciéndolo él mismo. Selecciona la herramienta “Manipulación”, marca la recta roja y después el punto P:

Profesor: “Paralela a esta y que pase por P.”

Figura VI.52

Una vez creada, cambia de punto de vista para ver si la recta verde está colocada paralela a la roja comparándola con la paralela recién creada.

Profesor: “Se ve que no.” (En la figura VI.53, la recta azul es la recta paralela que ha creado el profesor; se ve que la verde no coincide).

Profesor: “Lo estoy haciendo todo yo. Así que repetimos. Lo hacéis ahora vosotras. Hacedlo de nuevo.”

El profesor elimina las rectas creadas y les deja que creen de nuevo la paralela pedida. **Celia** trata de hacerlo pero tiene dudas. **Sofía** le indica que marque primero en la recta rojo y después en el punto P. **Celia** crea correctamente la recta paralela requerida. **Celia** cambia de puntos de vista para comparar la recta paralela creada y la recta verde; pero lo hace sin deseleccionar la herramienta “Paralela”. Continúa arrastrando el punto Q hasta que las rectas se superponen.

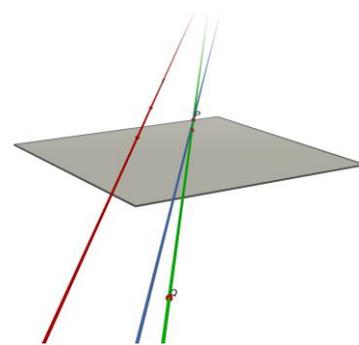


Figura VI.53

A la pregunta 6c) responden: “Porque a ojo no se puede saber exacta.”

En esta actuación apreciamos los siguientes fenómenos:

- No prestan atención a los mensajes que salen en la pantalla.
- No utilizan el cuadro de ayuda que tienen a la derecha de la pantalla.
- Actúan por ensayo y error.
- No prestan atención para conocer el funcionamiento de la herramienta “Paralela”; el cual tiene varias funciones según el objeto sobre el que actúa. Estas diferentes funciones de la herramienta les pasan desapercibidas, ya que únicamente persiguen resolver el problema. Resulta que la herramienta “Paralela” tiene dos funciones:
 - “Recta paralela a una recta por un punto”
 - “Plano paralelo a un plano por un punto”

Y es el programa quien “decide” qué función va tomar la herramienta según si el cursor señala una recta o un plano. De esta manera, cuando las alumnas pasan el cursor por el plano base teniendo seleccionado la herramienta “Paralela” el programa muestra (y crea si se pulsa el botón izquierdo del ratón) un plano paralelo al plano base. Esta retroalimentación desconcierta a las alumnas. No obstante, el interfaz proporciona mensajes con el fin de comprender lo que está sucediendo mientras está activa la herramienta “Paralela”:

- Si el cursor pasa por el plano base, aparece el mensaje
- Si el cursor pasa por la recta r , aparece el mensaje

Plano paralelo a este plano...

Paralela a la recta r ...

B. Actividad “Plano.recta.paralelos”

Celia lee las preguntas 1 y 2. **Sofía** pregunta al profesor si pueden usar la herramienta “Paralela” para comprobar si las rectas son paralelas. El profesor les indica que usen la función “bola de cristal”. Entonces después de usar la función “bola de cristal” responden “que sí son paralelas”; pero manifiestan ciertas dudas según el punto de vista elegido.

Celia lee la pregunta 3: “¿Piensa qué has de hacer para conocer si las rectas se cortan?”. **Sofía** afirma que el plano verde corta a la recta roja y que al prolongar el cuadrilátero del plano (PV), éste llegará a cortar la recta.

Celia lee las preguntas 4a): “¿Cómo cambian las posiciones del plano verde respecto a la recta r ?”. **Sofía** después de arrastrar al punto Q horizontal y verticalmente responde: “Nada. Sigue igual.”

Celia lee las preguntas 4b). Sus respuestas escritas están en esta tabla:

Preguntas	Respuestas escritas
A veces son paralelos, a veces no; según la posición de Q .	F
Nunca son paralelos.	V. Si no los movemos no son paralelos.
El plano nunca corta a la recta roja.	V. No la corta.
Hay una posición en la que el plano es perpendicular a la recta roja.	F
La posición del plano verde respecto a la recta r siempre es paralela, independientemente de la posición de Q .	F
Hay una posición de Q en la que el plano verde contiene a la recta roja.	V

Observamos que los usos de la función “bola de cristal” y de los arrastres no les ofrece ninguna dificultad. La dificultad surge al interpretar las vistas y la perspectiva presente en ellas.

- Hay vistas que les induce a pensar que tanto las rectas como el plano verde con la recta roja son paralelos (figuras VI.54 y VI.55).

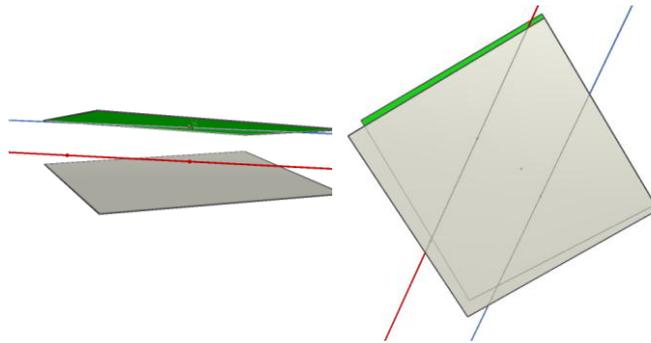


Figura VI.54

Figura VI.55

- Otras vistas les hacen dudar que las rectas sean paralelas (figura VI.56).

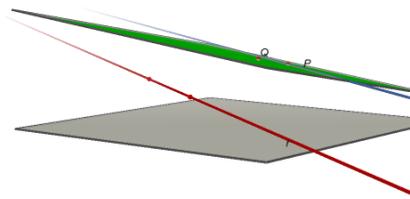


Figura VI.56

- Y en otras están convencidas de que el plano verde corta a la roja (figuras VI.57 y VI.58).

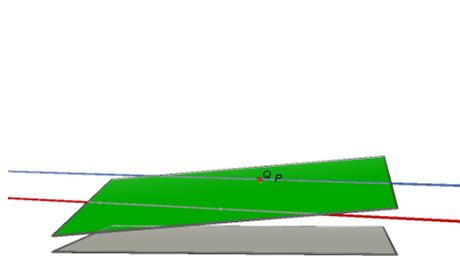


Figura VI.57

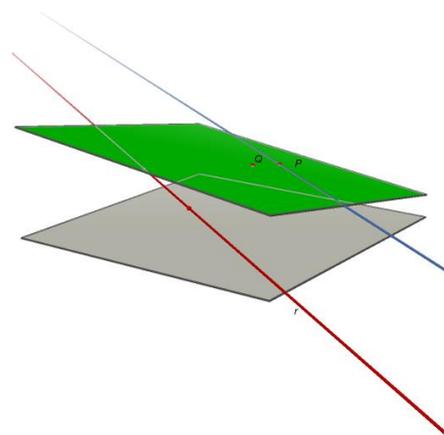


Figura VI.58

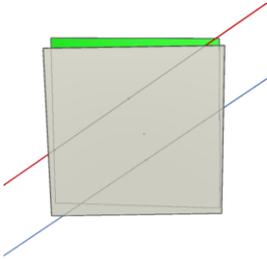
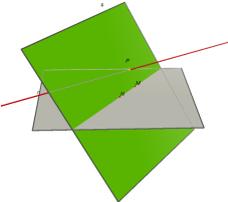
Dichas dudas les hacen responder de forma contradictoria:

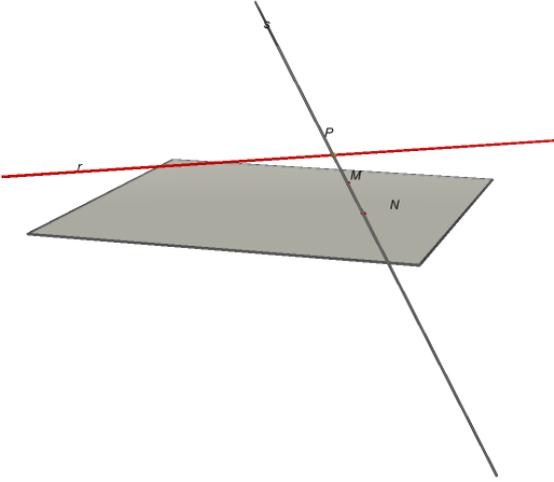
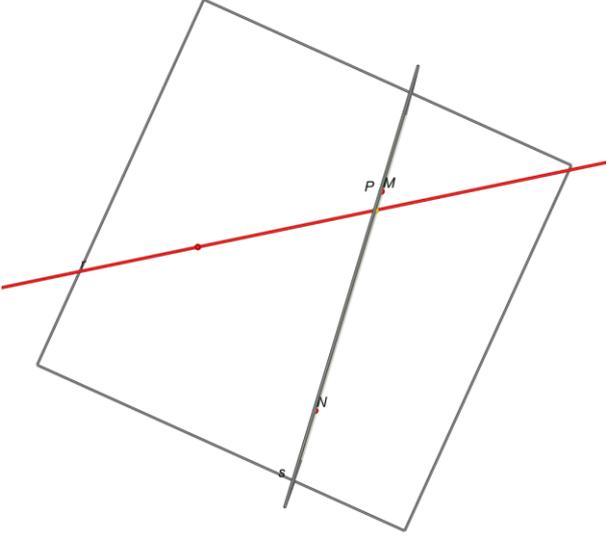
- En la pregunta 3 responden que el plano verde y la recta roja se cortan.
- En la pregunta 4 responden que es verdad que el plano verde no corta a la recta roja y que si no los mueven no son paralelos.
- En la pregunta 5 responden que hay una posición en la que el plano es paralelo pero que si se inclina un poco corta a la recta. Y sin embargo, en la pregunta 4b, responden que es falso que a veces sean paralelos y a veces no.

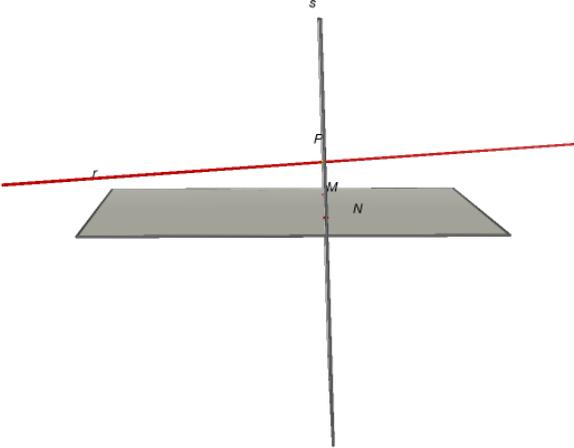
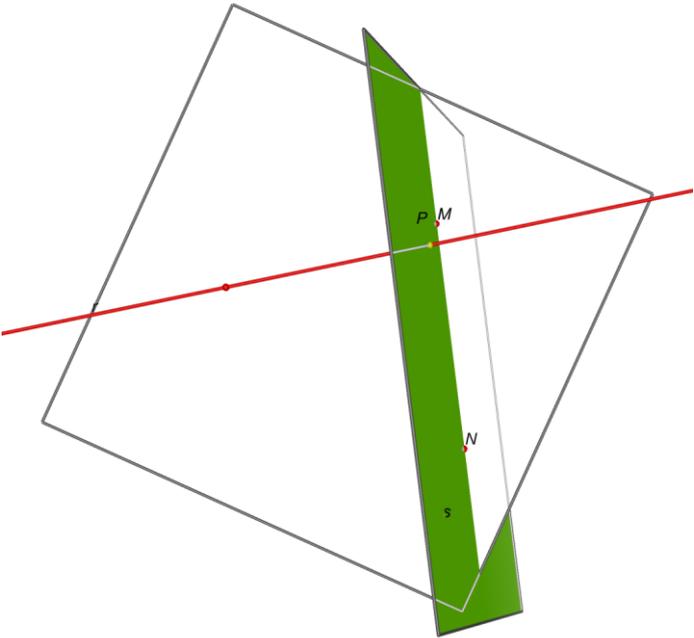
C. Actividad “Plano.recta.perpendiculares”

En la pregunta 1 “¿Cuándo una recta y un plano son perpendiculares?”; escriben: “Cuando se cortan y sus ángulos forman ángulos rectos.”

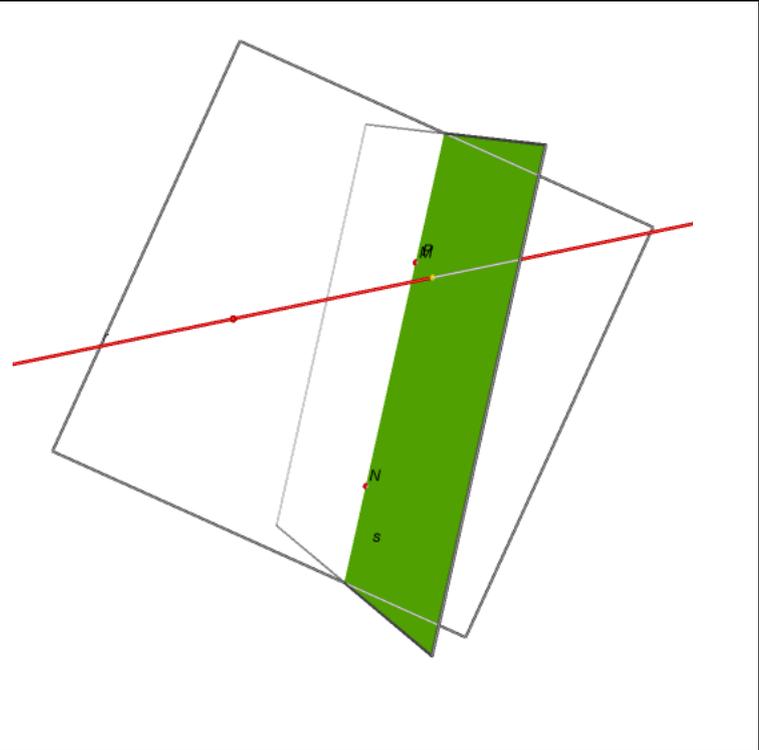
A continuación, para conseguir que el plano se perpendicular a la recta realizan una serie de maniobras; de las cuales describimos las más representativas, en la siguiente tabla.

La vista inicial cuando abren el archivos	
Cambian de puntos de vista	

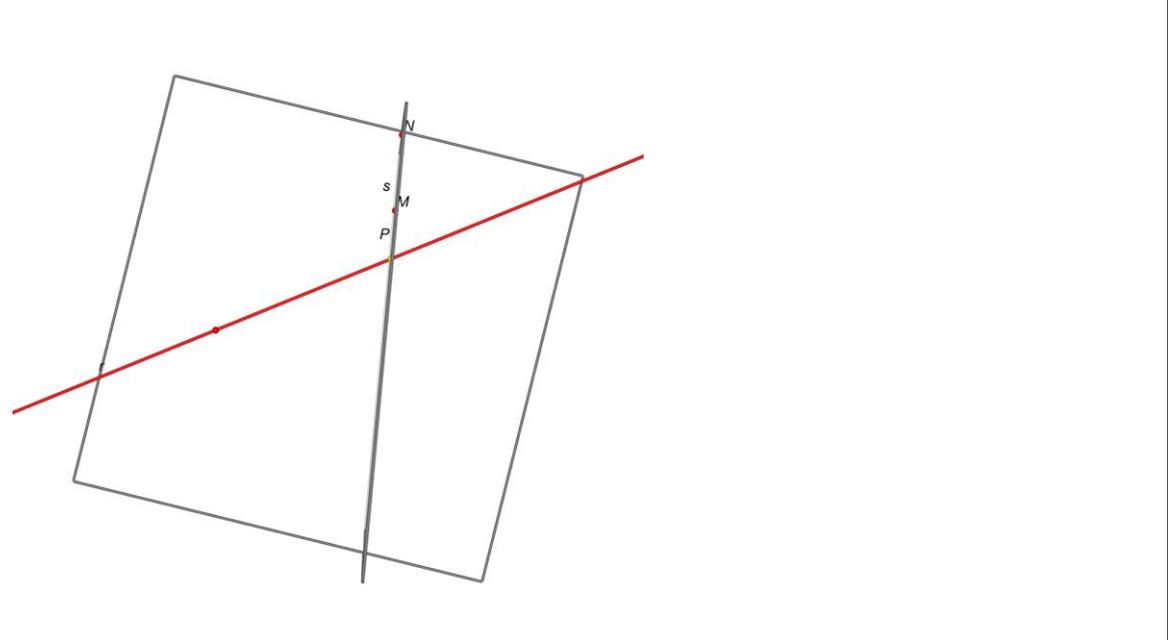
<p>Arrastran los puntos M y N y cambian de puntos de vista. Llegan a la siguiente vista (llamaremos vista 0). En esta vista el plano verde es perpendicular a la pantalla.</p>	
<p>Continúan hasta conseguir que aparentemente el plano verde sea perpendicular al plano base. La vista a la que llegan (o rotaciones de ella respecto del eje OZ) y que van a emplear predominantemente es la siguiente (que llamaremos vista 1). A esta vista ellas se refieren como “ponerla de canto”. En ella el plano base está orientado paralelo a la pantalla y el plano verde es perpendicular al plano base.</p>	

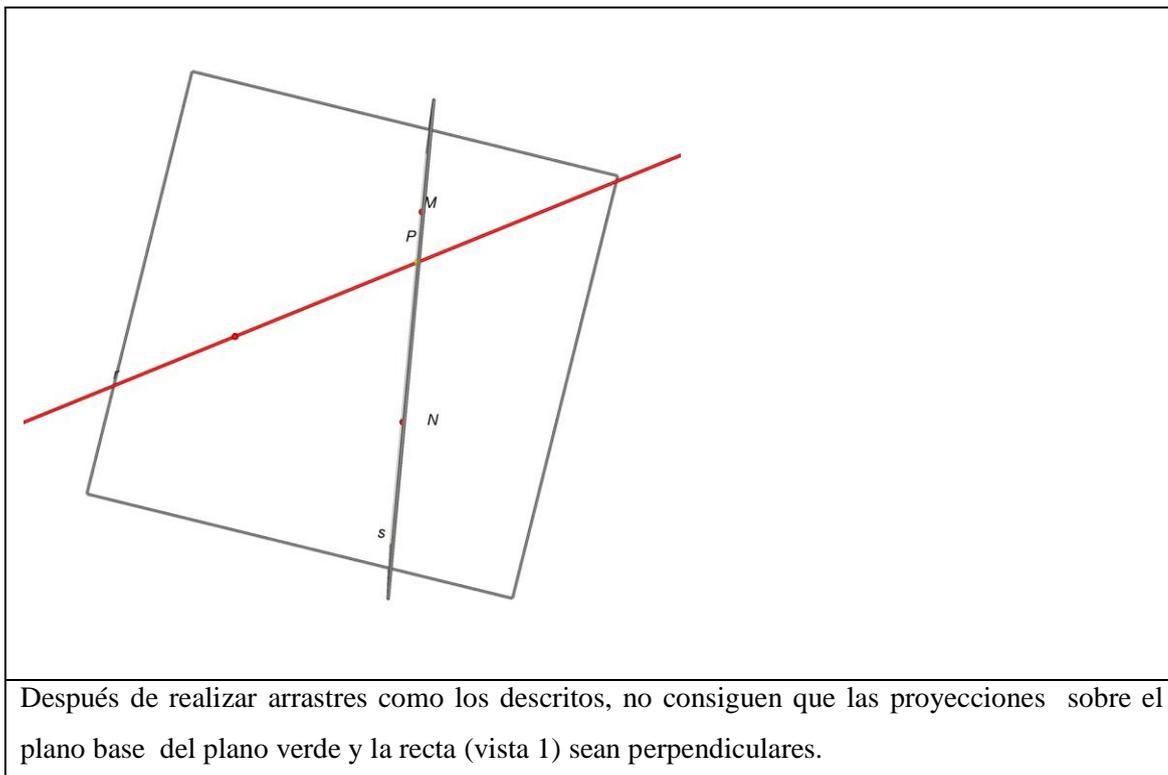
<p>Comentan que hay vistas en las que parecen que el plano verde y la recta están perpendiculares y en otras no:</p> <p>Sofía: “Si lo pones así, sí” (ver la vista de la derecha)</p> <p>Si: “Pero si lo pones así, pues no.” (Se refiere a la vista 1)</p>	
<p>Desde la vista 1, arrastran el punto N para que el plano forme un ángulo recto con la recta; pero no lo consiguen</p>	

Tornan a la vista 1, y arrastran el punto M; pero tampoco lo consiguen.
 Como no consiguen que las proyecciones del plano y la recta sobre el plano base (vista 1) sean perpendiculares, se preguntan si la vista 1 será ya suficiente para decir que son perpendiculares. Desisten.



En la pregunta 3, responden que el plano verde se puede colocar perpendicular a la recta roja de una forma; pero, piensan que quizá se podrían distinguir dos maneras “porque si tiene que ser perpendicular solo puede ser con una posición o girado”. Las dos posiciones a las que se refieren es a la mostrada por la vista 1 bien con el punto N a la parte inferior de la pantalla o a la parte superior:





En las actuaciones mostradas, comienzan en la pregunta 1 mencionando “ángulos rectos”. ¿Por qué no hablan en singular? ¿Tendrán en mente que la recta debe colocarse perpendicular a dos direcciones del plano (dos vectores linealmente independientes del plano)? ¿O que el plano y la recta deben colocarse de manera que sus proyecciones diédricas ortogonales sobre dos planos que se cortan perpendicularmente sean perpendiculares? No creo que lo piensen en estos términos.

No obstante, en el procedimiento que siguen sí que buscan dos orientaciones en las que el plano verde sea ortogonal:

- Primero: lo orientan para que sea perpendicular al plano base. Cabe notar que la recta es paralela al plano base.
- Segundo: intentan que las proyecciones del plano y la recta sobre el plano base sean perpendiculares (vista 1).

Según éste método deberían haber conseguido que la recta y el plano fueran perpendiculares. Pero no superan el segundo paso. Entendemos que desde el punto de vista instrumental necesitan aún elaborar esquemas apropiados. En este sentido les sería útil asimilar lo siguiente:

- Cuando se mueve un punto de construcción, el plano gira alrededor de la línea que pasa por los otros dos puntos de construcción. En esta actividad los puntos de construcción del plano verde son M, N y P.
- La posición y orientación finales del plano sólo depende de las posiciones finales de sus puntos de construcción. En esta actividad, si los puntos M, N y la proyección de P sobre el plano base están alineados, el plano verde está perpendicular a la recta roja.

También se observa que les cuesta anticipar qué arrastres han de hacer para conseguir la orientación del plano deseada.

Cuando no se contentan con una vista en la que parece que son ortogonales, podría pensarse que se guían por la siguiente proposición: para considerar al plano perpendicular a la recta, debe apreciarse que lo es bajo todas las vistas.

En la pregunta 5, crean el plano perpendicular a la recta que pasa por el punto P con la herramienta “Perpendicular” (en la figura es el plano azul). Observan que no coincide con el plano verde (figura VI.59).

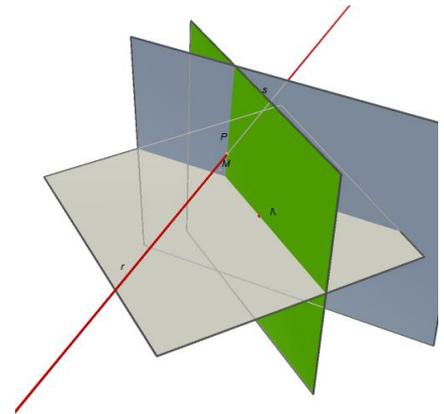


Figura VI.59

Para hacer que coincidan **Sofía** orienta al plano base paralelamente a la pantalla y arrastra el punto M y exclama: “Pero es que no se puede”. Continúa: arrastra los puntos M y N hasta colocarlos en el plano creado; y consigue que el plano verde prácticamente coincida con el paralelo (figura VI.60)

Sofía exclama: “¡Ah, sí que se puede!”

A la pregunta 5f: “¿Por qué crees que la posición de s no coincidía con la de t?”, (es decir, por qué no coincidían el plano verde con el perpendicular); responden: “Porque no le hemos pillado la técnica.”

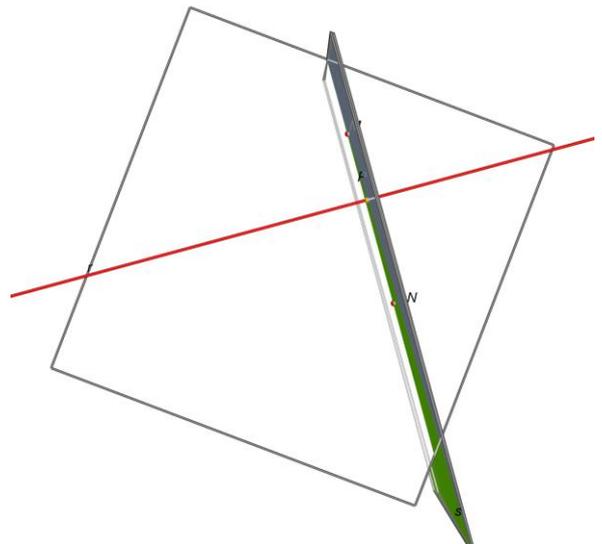


Figura VI.60

Se observa que el plano perpendicular creado les ha permitido colocar al verde en la posición deseada. Cabe pensar en las siguientes consideraciones:

- Ante la duda de si era posible, el ver al plano perpendicular les da confianza para intentarlo.
- El plano perpendicular creado les sirve de guía para arrastrar los puntos M y N a la línea de intersección con el plano base. Con esto, sin perseguirlo, alinean M, N y la proyección de P.
- El colocar el plano base paralelo a la pantalla les permite trabajar con proyecciones en el plano, de manera que la tarea sea más sencilla.

D. Actividad “Recta.recta.perpendiculares”

Sofía lee la pregunta 1: “¿Cuándo dos rectas son perpendiculares?”. Y responden: “Cuando en su corte los ángulos son de 90° ”.

Parece que no consideran la posibilidad de que se crucen y sean perpendiculares a la vez.

En la pregunta 2, responden que no son perpendiculares después de utilizar la función “bola de cristal”. He aquí alguna de las vistas que utiliza:

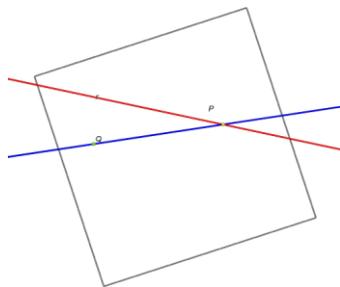


Figura VI.61

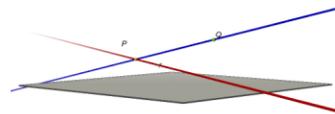


Figura VI.62

Recurren a orientar el plano base paralelo a la pantalla.

Mientras que en la actividad anterior para afirmar que había perpendicularidad buscaban que lo hubiera en todas las vistas; ahora a penas necesitan un par de vistas para responder que no son perpendiculares. Se podría pensar que utilizan la idea de que es suficiente un contraejemplo para negar la existencia de una propiedad.

En la pregunta 3, para conseguir que las rectas sean perpendiculares, **Celia** primero orienta al plano base paralelo a la pantalla y después arrastra el punto Q (figuras VI.63 y VI.64).

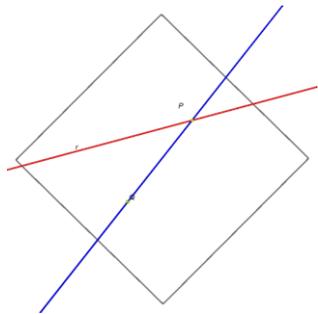


Figura VI.63

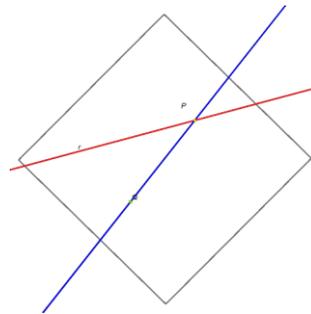


Figura VI.64

A la pregunta 3a: “¿Puedes encontrar otras posiciones de Q en las que s sea perpendicular a r?”; **Celia** responde que no, tras utilizar la función “bola de cristal” sin realizar ningún tipo de arrastre.

En la pregunta 3b, se le pide que pruebe arrastrando verticalmente Q. Arrastra Q pero horizontalmente. Y aparentemente encuentra una posición más en la que las rectas son perpendiculares.

Celia responde: “Cuatro”; teniendo en la pantalla la escena de la figura VI.65.

Sofía escribe: “Vale. Pues hemos encontrado cuatro 2.”

A la pregunta 4: “¿Cuántas rectas perpendiculares a la r se podrían trazar que pasen por el punto P?”; **Celia** dice que hay dos y con la mano hace el movimiento en el aire de arriba abajo y de atrás hacia adelante”. **Sofía** escribe: “Dos, porque hay dos ángulos que nos sobran, ya que los otros dos están ocupados por la recta r.”

En estas las preguntas 3 y 4, **Celia** arrastra al punto Q horizontalmente pero en ningún momento verticalmente. Esta es la razón por la que sólo encuentra una posición en la que las rectas sean perpendiculares. En la pregunta 3b mencionan cuatro y después dos posiciones en las que pueden ser paralelas; pero en realidad se refieren siempre a la única que han encontrado:

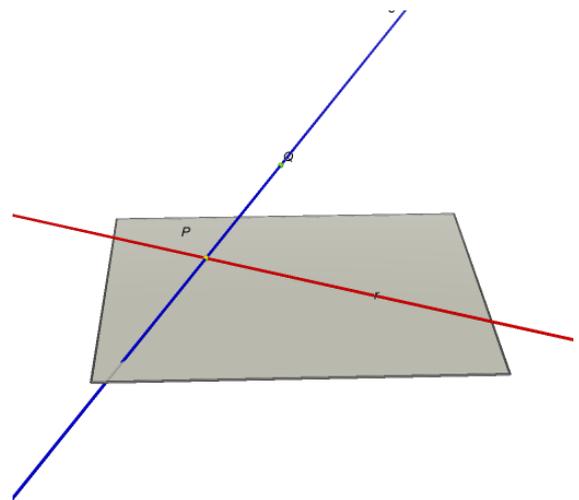


Figura VI.65

Para la pregunta 5, **Celia** busca por la barra de menús de herramientas la herramienta “Ángulo” desplegando dichos menús y lo selecciona sin problemas. Sin embargo, al crear el ángulo marcan el punto Q, el P y otro punto de la recta s (azul); es decir, tres puntos alineados. El ángulo que les da es de 180° (figura VI.66). **Celia** se siente satisfecha y considera que esto confirma que las rectas son perpendiculares. Escriben que no tienen que ajustar la posición porque la recta “ya estaba” perpendicular.

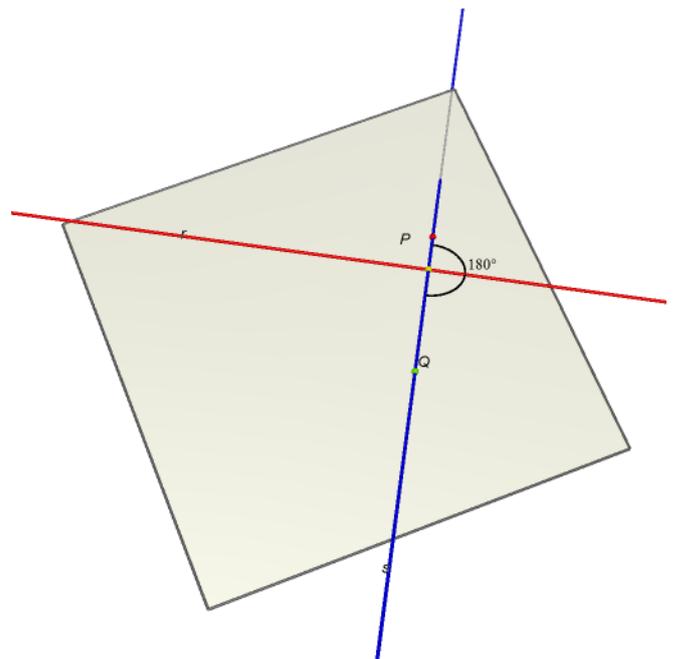


Figura VI.66

Celia no parece que no comprenda que debe medir el ángulo entre las dos rectas y que lo que ha marcado es el ángulo asociado a tres puntos alineados sobre la misma recta. **Celia** considera que el ángulo que ha medido de 180° le permite afirmar que las dos rectas son perpendiculares.

En la pregunta 6, **Celia** no tiene dificultades para encontrar y seleccionar la herramienta “Perpendicular”. En un primer momento crea correctamente el plano perpendicular pero al no estar orientado según la recta azul lo descarta. Continúa probando y, sin querer, crea la recta perpendicular al plano base que pasa por el punto P. Entonces el profesor se acerca y le indica que ha de marcar el punto P y después la recta roja; tal y como lo había hecho al principio. **Celia** sigue las indicaciones y crea el plano correctamente (figura VI.67).

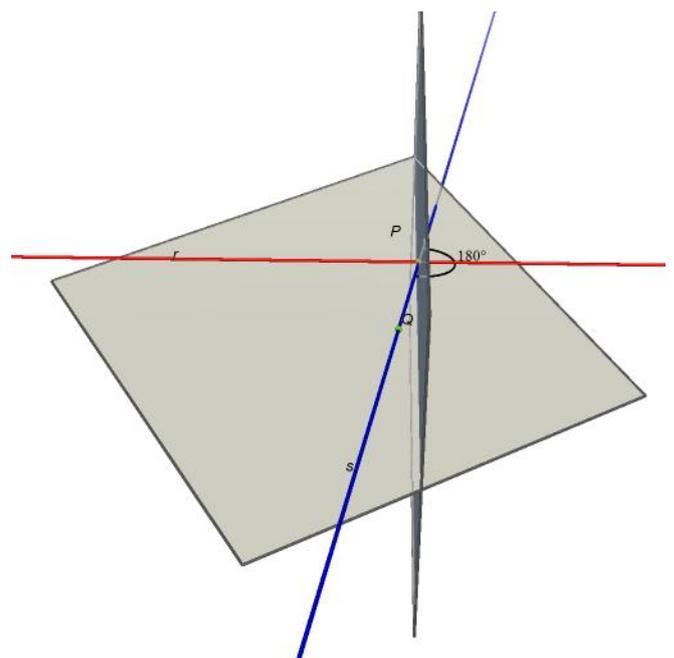


Figura VI.67

Llama la atención que al comprobar que la recta azul no está sobre el plano perpendicular creado no rectifique su respuesta a la pregunta 5, y no se cuestione sobre si era correcto afirmar que la recta azul ya era perpendicular a la roja y si el ángulo medido de 180° es correcta asociarlo a la perpendicularidad entre rectas.

En la pregunta 6 se pide que se arrastre el punto Q vertical y horizontalmente de manera que la recta azul se mantenga en el plano perpendicular creado. **Celia** solo arrastra horizontalmente al punto Q, si bien aparentemente mantiene el cursor sobre la PV del plano. **Celia** no arrastra el punto Q verticalmente, por lo que no mantiene al punto Q ni a la recta sobre el plano. No parece que se dé cuenta de esta circunstancia. Sí que procura mantener el curso dentro de la PV del plano; como si pensara que así está arrastrando al punto Q sobre el plano perpendicular.

Mostramos dos vistas de las que utiliza. En la figura VI.68, el punto Q está sobre el plano. En la figura VI.69, no.

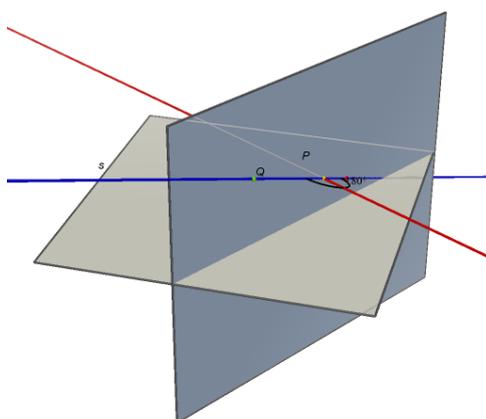


Figura VI.68

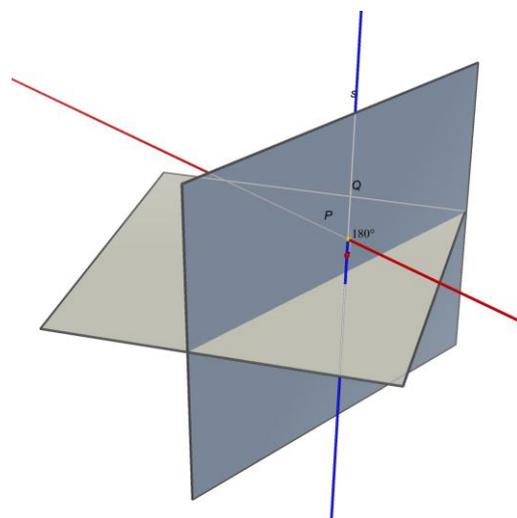


Figura VI.69

A la pregunta “¿Qué conclusión sacas?” escriben: “Que como el plano es perpendicular, si lo arrastras por el plano seguirá siéndolo.”

A la pregunta 7: “¿Dónde se encuentran todas las recta perpendiculares...?” **Celia** responde: “Se encuentran a 180° todas.” **Sofía** no está convencida de la respuesta; por lo que **Celia** repite totalmente segura: “Se encuentran a 180° todas”. **Celia** insiste sobre su idea de que el ángulo de 180° está asociado a la perpendicularidad entre rectas. **Sofía**

parece que no lo entiende pero escribe: “A 180° de P, porque si no no serían perpendiculares.”

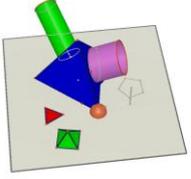
E. Actividad “Ángulo.recta.plano”

Desde un punto de vista instrumental los arrastres requeridos en esta actividad no les ofrecen ninguna dificultad. Se observa que están totalmente asimilados. Así mismo, el concepto matemático que se trabaja (ángulo entre recta y plano que se cortan) es sencillo. La dificultad que se observa es la de elaborar y justificar una definición del ángulo entre recta y plano que se cortan. Mientras que **Sofía** llega a definirlo como el menor ángulo que se obtiene al arrastrar el punto Q, **Celia** insiste en que el ángulo entre la recta y el plano “podría ser cualquier medida” y que “no hay explicación” ya que “me da igual” elegir un ángulo u otro. **Celia** mantiene esta posición incluso cuando crean con la herramienta “Ángulo” el ángulo entre la recta y el plano. Entonces dice que si bien para el ordenador el ángulo es el menor, para ella podría ser cualquiera. No obstante, el hecho de que el ángulo dado por la herramienta “Ángulo” coincida con el menor le sirve a **Sofía** para confirmar su posición; aunque no la defiende frente a **Celia**.

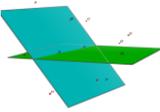
ANEXO VII. RESPUESTAS A LAS HOJAS DE PREGUNTAS

1. Función “bola de cristal”

A. Actividad “Composición”

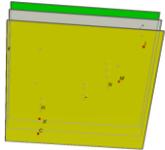
FICHA			
Escena	Preguntas	Repuestas correctas	Respuestas de las alumnas
	<p><i>Vas a describir la composición de cuerpos que ves:</i></p> <p>1. ¿Cuántos cuerpos hay? Da sus nombres y colores.</p> <p>2. Si no lo has hecho, mueve el plano para encontrar todos los cuerpos que hay:</p>	<p>i. tetraedro azul</p> <p>ii. dodecaedro amarillo</p> <p>iii. octaedro rojo</p> <p>iv. cubo azul</p> <p>v. octaedro verde</p> <p>vi. esfera marrón</p> <p>vii. cilindro verde</p> <p>viii. cilindro violeta</p> <p>ix. prisma pentagonal verde</p> <p>x. esfera verde.</p>	<p>i. tetraedro azul</p> <p>ii. dodecaedro amarillo</p> <p>iii. octaedro rojo</p> <p>iv. cubo azul</p> <p>v. octaedro verde</p> <p>vi. esfera marrón</p> <p>vii. cilindro verde</p> <p>viii. cilindro violeta</p> <p>ix. poliedro verde</p> <p>x. esfera verde.</p>
	<p>3. Encuentra los cuerpos que hay en la zona inferior respecto al plano.</p> <p>Di sus nombres y sus colores.</p>	<p>i. cubo azul</p> <p>ii. prisma pentagonal verde</p> <p>iii. esfera verde</p> <p>iv. octaedro verde</p>	Lo mismo que en la uno
	<p>4. Encuentra el cuerpo amarillo.</p> <p>¿Cuántas caras tiene?</p> <p>¿Está en el plano o fuera de él?</p> <p>¿Está sobre el plano, por encima o por debajo?</p>	<p>El dodecaedro está en la PNV del plano base: sobre el plano base en su parte no visible</p>	Fuera y por encima

B. Actividad “Dónde. están. los. puntos. 1”

FICHA			
Escena	Preguntas	Repuestas correctas	Respuestas de las alumnas
	<p>1. Sin mover nada di dónde crees que están los puntos:</p> <p>a) En el plano s (zona verde o su prolongación):.....</p> <p>b) En el plano p (zona azul o su prolongación):.....</p> <p>c) Pertenece a la vez a los dos planos:.....</p> <p>d) Está por encima del verde y a la derecha del azul:.....</p> <p>e) Está por debajo del verde y a la derecha del azul:.....</p> <p>f) Está por encima del verde y a la izquierda del azul:.....</p> <p>g) Está por debajo del verde y a la izquierda del azul:.....</p>	<p>a) Pertenece a s: A, D, G, J.</p> <p>b) Pertenece a p: A, B, C, H, J.</p> <p>c) Pertenece a los dos: A, J.</p> <p>d) Encima de s y dcha. p: E, I.</p> <p>e) Debajo de s y dcha. p: F.</p> <p>f) Encima de s e izqda. p: ninguno.</p> <p>g) Debajo de s e izqda. p: ninguno.</p>	<p>a) G, (A,J)</p> <p>b) B, (A,J)</p> <p>c) A,J</p> <p>d) C,E,D</p> <p>e) F</p> <p>f) I</p> <p>g) H</p>
	<p>2. Ahora mueve libremente con la función "bola de cristal".</p> <p>Si lo crees necesario rectifica o confirma tus respuestas (<u>pensando siempre en la posición inicial de la pantalla</u>):</p> <p>a) En el plano s (zona verde o su prolongación):.....</p> <p>b) En el plano p (zona azul o su prolongación):.....</p> <p>c) Pertenece a la vez a los dos planos:.....</p> <p>d) Está por encima del verde y a la derecha del azul:.....</p> <p>e) Está por debajo del verde y a la derecha del azul:.....</p> <p>f) Está por encima del verde y a la izquierda del azul:.....</p>		<p>a) G</p> <p>b) B,C,H</p> <p>c) A,J</p> <p>d) E,I</p> <p>e) F</p> <p>f) ---</p> <p>g) ---</p>

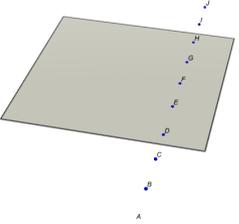
	g) Está por debajo del verde y a la izquierda del azul:.....		
	3. Ahora arrastra los puntos C, D, H e I (sin mover los planos) con el mando "Manipulación" hacia los planos. ¿Qué piensas ahora, pertenecen o no a los planos?	i. C pertenece a p ii. D pertenece a s iii. H pertenece a p I no pertenece a ninguno	i. C a ninguno ii. D a s iii. H a p I a ninguno

C. Actividad "Dónde están los puntos.2"

FICHA			
Escena	Preguntas	Repuestas correctas	Respuestas de las alumnas
	1. ¿Cuáles son las posiciones relativas entre los planos? ¿Se cortan, son paralelos, son perpendiculares entre sí?	Son paralelos	Son paralelos
	2. Di dónde crees que están los puntos. Escribe a continuación los nombres de los puntos en los apartados donde crees que están situados: a) En el plano s (zona amarilla o su prolongación):..... b) En el plano p (zona verde o su prolongación):..... c) En el plano base r (zona gris o su prolongación) d) Pertenece a la vez a dos planos:..... e) Está en la zona entre s y r :..... f) Está en la zona entre r y p :..... g) Está por encima del plano p :..... h) Está por debajo del plano s :.....	a) Pertenece a s: M b) Pertenece a p: Y c) Pertenece a r: Q d) Pertenece a dos: No e) Entre s y r: G, H, L, N f) Entre r y p: F, K, J, V g) Encima p: A, B, E, W h) Debajo s: C, I, X	a) M b) Y c) Q d) No, imposible e) N, H, G, L f) F, J, V, K g) A, B, W, E h) X, C, I
	3. ¿En qué apartado de los anteriores situas al punto E?	Por encima de p (apartado g)	Encima del plano p
	4. ¿Qué puntos crees que están alineados?	Puntos alineados: <ul style="list-style-type: none"> ○ C, H, J, Q, X. ○ B, G. ○ A, F, N, W. ○ I, L, V. 	Los que están en un plano y la: A, W y F; y la Q y J.

2. Puntos.

A. Actividad “Puntos.libres.1”

FICHA			
Escena	Preguntas	Repuestas correctas	Respuestas de las alumnas
	1. ¿Los puntos azules están alineados? Para responder, ayúdate de la función “bola de cristal”.	Sí	Sí, están alineados
	2. ¿Están todos sobre el mismo plano? ¿Qué dirías de los puntos A, B, C, I, J?: a) Están en el plano b) Están en su prolongación c) Están fuera de él d) Están en el espacio, por debajo del plano e) Están en el espacio, por encima del plano	- Todos los puntos están en el mismo plano - A,B,C,I,J están en la prolongación del plano	- Sí - en la prolongación
	3. a) Crea un punto sobre el plano base con el mando “Punto”. b) Arrástralo por todos los sitios que puedas. c) Cuando lo arrastras fuera del cuadrilátero gris (parte visible del plano base), ¿sigue estando en el plano base o se halla fuera de él? Explica por qué lo crees así.	Sigue estando en el plano base, pero en su prolongación.	Sigue estando en el plano base, pero en su prolongación.
	4. Crea y coloca aparte, otros seis puntos alineados (en paralelo a los azules) utilizando sólo el mando “Manipulación”. ¿Qué dificultades encuentras?		Que cuesta mucho ponerlos paralelos, ya que, en el plano gris no podemos ver la cuadrícula.
	5. Crea y coloca aparte, otros seis puntos alineados (en perpendicular a los azules) utilizando sólo el mando “Manipulación”. ¿Qué dificultades encuentras?		Las mismas que en el ejercicio 4.

B. Actividad “Puntos.libres.2”

FICHA				
Escena	Preguntas	Repuestas correctas	Respuestas de las alumnas	
	1. Utiliza la función “bola de cristal” para ver todos los puntos verdes situados en la zona de trabajo ¿Los puntos verdes están alineados verticalmente?	Sí	Si. No estamos seguras.	
	2. Con el mando "Manipulación" y manteniendo la tecla de mayúsculas, crea varios puntos fuera del plano en la zona superior al plano, a diferentes alturas.			
	3. Con el mando "Manipulación" y manteniendo la tecla de mayúsculas, crea varios puntos fuera del plano en la zona inferior al plano, a diferentes alturas.			
	4. Coloca aparte, otros seis puntos alineados verticalmente utilizando sólo el mando "Manipulación". a) ¿Consigues que estén alineados? ¿Qué dificultades encuentras? b) ¿Qué haces para saber si están alineados c) ¿Has encontrado algún método que te ayude a colocarlos alineados verticalmente? Explícalo.			a) No. Que el mecanismo es complicado. b) Poner la vista bajo un punto de vista aéreo utilizando la función “bola de cristal”. c) No, porque en el plano gris sí que sale cuadrícula pero en el espacio de fuera no.

C. Actividad “Coordenadas.puntos”

FICHA			
Escena	Preguntas	Repuestas correctas	Respuestas de las alumnas
	<p>I 1. Si quieres arrastrar el punto de la posición (2, -2,5, 0) a la posición (-3, 1,3,0) ¿qué deberás hacer?</p> <p>d) ¿Arrastrarlo hacia la derecha de la pantalla o hacia la izquierda?</p> <p>e) ¿Arrastrarlo hacia el fondo de la pantalla o hacia adelante?</p> <p>f) ¿Arrastrarlo verticalmente hacia arriba o hacia abajo?</p>	<p>a) Para cambiar la segunda coordenada de -2,5 a 1,3 hay que ir hacia la derecha.</p> <p>b) Para cambiar la primera coordenada de 2 a -3 hay que ir hacia el fondo</p> <p>c) Como no se cambia la tercera componente no hay que arrastrarlo verticalmente.</p>	<p>a) Hacia la izquierda.</p> <p>b) Hacia adelante.</p> <p>c) Hacia arriba.</p>
	<p>I 2. Ahora arrástralo. Se cumple lo que pensabas en la pregunta anterior. ¿Qué has tenido que modificar?</p>		<p>No, es hacia la derecha, el fondo y ni sube ni baja.</p>
	<p>II 3. Si quieres arrastrar el punto de la posición (-1.6, -3.4, -3.6) a la posición (2,3,4) ¿qué deberás hacer?</p> <p>a) ¿Arrastrarlo hacia la derecha de la pantalla o hacia la izquierda?</p> <p>b) ¿Arrastrarlo hacia el fondo de la pantalla o hacia adelante?</p> <p>c) ¿Arrastrarlo verticalmente hacia arriba o hacia abajo?</p>	<p>a) A la derecha.</p> <p>b) Hacia adelante.</p> <p>c) Hacia arriba.</p>	<p>a) Derecha.</p> <p>b) Fondo.</p> <p>c) Arriba.</p>
	<p>II 4. Se cumple lo que pensabas en la pregunta anterior. ¿Qué has tenido que modificar?</p>		<p>a) Sí</p>
	<p>III. a) ¿Te ha ayudado el tener las tres flechas de colores rojo, verde y azul?</p> <p>b) ¿Qué direcciones piensas que señalan?</p> <p>c) El punto donde se cortan, ¿qué coordenadas piensas que tiene?</p>	<p>a) ---</p> <p>b) La de los ejes de coordenadas</p> <p>c) (0,0)</p>	<p>a) No</p> <p>b) La de los ejes y y x.</p> <p>c) 0.0</p>

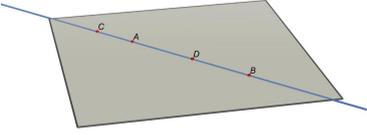
D. Actividad “Distancias.puntos.1”

FICHA		
Escena	Preguntas	Respuestas de las alumnas
	<p>En la pantalla hay tres puntos O, A y B sobre una misma recta en el plano base.</p> <p>a) ¿Qué punto crees que está más cerca de O? ¿Por qué?</p> <p>b) Gira con la función “bola de cristal” hasta colocar el punto A delante.</p> <p>Ahora, ¿qué punto crees que está más cerca de O?</p> <p>¿Qué conclusiones sacas?</p> <p>c) Con el mando “Distancia” mide las longitudes de OA y OB.</p> <p>¿Son iguales o distintas estas longitudes?</p> <p>¿Qué conclusiones sacas?</p>	<p>a) Los dos están iguales pero la línea está inclinada y no parece.</p> <p>b) Los dos están a la misma distancia. Ninguna.</p> <p>c) Sí. Que parece que no por la posición.</p>

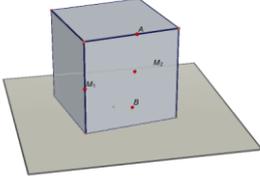
E. Actividad “Distancias.puntos.2”

FICHA		
Escena	Preguntas	Respuestas de las alumnas
	<p>En la pantalla hay un punto O sobre una recta en el plano base.</p> <p>Coloca dos puntos sobre la recta, a ambos lados del punto O. Explica qué estrategia vas a seguir para que queden a la misma distancia de O, sin usar el mando “Distancia”.</p> <p>Ahora sitúalos sobre la recta de manera que queden a la misma distancia de O manteniéndolos a ambos lados de O, sin usar el mando “Distancia”.</p> <p>Cuando pienses que lo has conseguido utiliza el mando “Distancia” para comprobarlo.</p> <p>¿Qué conclusiones sacas?</p>	<p>Vamos a colocar los puntos contando los puntos del plano.</p> <p>Que no se puede poner a la misma distancia sin usar el mando “Distancia”.</p>

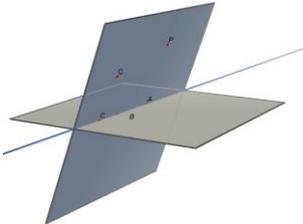
F. Actividad “Tipos.de.puntos.1”

FICHA			
Escena	Preguntas	Repuestas correctas	Respuestas de las alumnas
	<p>1. Con el mando "Recta" crea una recta. A los dos puntos rojos marcos llámalos A y B</p> <p>a) ¿Se pueden arrastrar esos puntos?</p> <p>b) ¿Se pueden arrastrar libremente por el plano o sólo por la recta?</p> <p>c) ¿Qué pasa cuando los arrastras?</p>	<p>a) Sí</p> <p>b) Por el plano y por la recta</p>	<p>a) Sí</p> <p>b) Por los dos sitios</p> <p>c) Se cambian sus coordenadas.</p>
	<p>2. Coloca otros dos puntos sobre la recta. Llámalos C y D.</p> <p>a) ¿Se pueden arrastrar?</p> <p>b) ¿Se pueden arrastrar C y D libremente por el plano o sólo por la recta?</p>	<p>a) Sí</p> <p>b) Sólo por la recta</p>	<p>a) Sí</p> <p>b) Sólo por la recta</p>
	<p>3. a) ¿Qué diferencia hay entre arrastrar A o B, y arrastrar C o D?</p> <p>b) ¿Por qué crees que hay esa diferencia de comportamiento?</p> <p>c) ¿En qué caso la recta se desplaza?</p>		<p>a) Que el A y B se puede mover el punto y las rectas; y con C y D solo el punto por la recta</p> <p>b) Porque los puntos que han formado la recta son los A y B</p> <p>c) En el A y B, y cuando la coges.</p>

G. Actividad “Tipos.de.puntos.2”

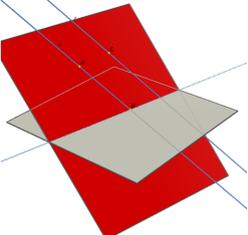
FICHA			
Escena	Preguntas	Repuestas correctas	Respuestas de las alumnas
	<p>1. En la pantalla hay un cubo.</p> <p>a) ¿Puedes arrastrar libremente sus vértices?</p> <p>b) ¿Qué vértices puedes arrastrar libremente por toda la zona de trabajo y cuáles tienen limitado su movimiento?</p> <p>c) ¿Qué ocurre con el cubo cuando arrastras los vértices?</p> <p>d) Encuentra el punto O (está en la cara del cubo que está en el plano base). ¿Puedes arrastrarlo libremente o está limitado su movimiento?</p> <p>e) ¿Qué ocurre con el cubo cuando se arrastra el punto O?</p>	<p>1ª y 1b):</p> <ul style="list-style-type: none"> - Los vértices del cubo que están fuera del plano base están ligados al cubo. - Los vértices del cubo que están en el plano base, están ligados a él, por lo que tienen dos grados de libertad. <p>1c) Al arrastrar los vértices, el cubo no se desplaza pero gira y cambia sus dimensiones.</p> <p>1d) - El punto O está en el plano base, está ligado a él, por lo que tienen dos grados de libertad.</p> <p>1e) Al arrastrar el punto O el cubo se traslada como un todo.</p>	<p>1a) No</p> <p>1b) Se pueden arrastrar todos por igual.</p> <p>1c) Que cambia su tamaño.</p> <p>1d) Libremente.</p> <p>1e) Que se mueve con él.</p>
	<p>2. Con el mando "Punto medio" crea el punto medio de una de las aristas. Llámalo M_1.</p> <p>¿Puedes arrastrarlo? ¿A qué crees que es debido?</p>	<p>Los puntos medios son dependientes por construcción y no tienen ningún grado de libertad.</p>	<p>No, a que si es punto medio se tiene que quedar en el medio</p>
	<p>3. Coloca un punto sobre una de las caras. Llámalo B.</p> <p>¿Puedes arrastrarlo libremente o sólo por las caras?</p>	<p>- Los puntos creados sobre cada una de las caras están ligados a ellas y tienen dos grados de libertad.</p>	<p>Sólo por las caras.</p>
	<p>4. Sitúa un punto sobre una de las aristas de la cara anterior. Llámalo A.</p> <p>¿Puedes moverlo libremente o sólo por la arista?</p>	<p>- Los puntos creados sobre cada una de las aristas están ligados a ellas y tienen un grado de libertad.</p>	<p>Libremente.</p>
	<p>5. Con el mando "Punto medio" crea el punto medio entre A y B. Llámalo M_2.</p> <p>a) ¿Puedes arrastrarlo directamente? ¿A qué crees que es debido?</p> <p>b) ¿Qué pasa si arrastras A o B? ¿A qué crees que es debido?</p>	<p>1a) El punto medio es dependiente por construcción y no tienen ningún grado de libertad.</p> <p>1b) El punto medio M_2 depende de A y B; por lo tanto, al arrastrar estos se desplaza aquél.</p>	<p>5a) No, es debido a que es un punto medio.</p> <p>5b) Que solo se pueden mover por sus caras. A que las aristas les limitan el espacio para moverse.</p>

H. Actividad “Tipos.de.puntos.3”

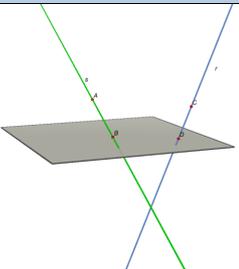
FICHA			
Escena	Preguntas	Repuestas correctas	Respuestas de las alumnas
	1. Crea dos puntos sobre el plano base. Llámalos A y B. ¿Se pueden arrastrar libremente o sólo por el plano?	Sólo por el plano	Libremente
	2. Crea un punto en el espacio fuera del plano. Llámalo C. a) Arrástralo horizontalmente y verticalmente. b) ¿Se puede arrastrar libremente por cualquier parte de la pantalla?	Sí	Sí
	3. Con el mando “Plano” crea un plano que pase por A, B y C. Crea un punto sobre el plano oblicuo. Llámalo P. a) ¿Se puede arrastrar libremente o sólo por el plano?	Sólo por el plano	Libremente
	4. Con el mando “Curva de intersección” crea la recta intersección entre los dos planos. Sobre esa recta crea un punto D. a) ¿Se puede arrastrar D libremente o sólo por la recta? b) ¿Por qué crees que no se puede arrastrar D por otros sitios?	a) Sólo por la recta b) Porque está ligado a la recta	a) Solo por la recta b) Porque está limitado por los planos

3. Mover objetos geométricos.

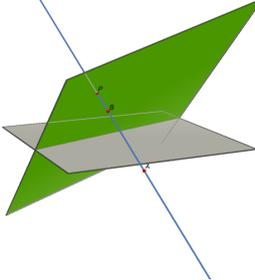
A. Actividad “Superponer.rectas.1”

FICHA			
Escena	Preguntas	Repuestas correctas	Respuestas de las alumnas
	<p>En la pantalla hay dos rectas paralelas.</p> <p>1. La actividad consiste en arrastrar y mover las rectas hasta conseguir que coincidan.</p> <p>a) Antes de moverlas di qué plan vas a seguir.</p> <p>b) ¿Has tenido que cambiar de plan? ¿Por qué? Ahora muévelas.</p>		<p>a) Seleccionar los planos y arrastrarlos.</p> <p>b) Sí, porque el plano gris no se puede mover.</p>
	<p>2. Prueba a superponer las rectas de las siguientes maneras.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Arrastrando sólo A. • Arrastrando sólo B. • Arrastrando sólo C. • Arrastrando sólo la recta r. • Arrastrando sólo la recta s. <p>a) ¿Qué diferencia hay entre arrastrar A, B o C?</p> <p>b) ¿Arrastrando qué punto o puntos las rectas no es posible que coincidan?</p> <p>c) ¿Con qué punto o puntos las rectas giran?</p> <p>d) ¿Con qué punto o puntos las rectas se desplazan pero no giran?</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Al arrastrar A, gira alrededor de B sobre el plano rojo; la recta s se aleja o se acerca a la recta r, según que el punto A se arrastra alejándolo o acercándolo del punto C. Al arrastrar B, gira alrededor de A sobre el plano rojo; la recta s se aleja o se acerca a la recta r, según que el punto B se arrastra alejándolo o acercándolo del punto C. Al arrastrar C, se traslada según la recta de intersección sobre el plano rojo. • Con el punto B no es posible conseguir que las rectas se superpongan. • Giran al arrastrar los puntos A y B. • Con el punto C; también al arrastrar cada una de las rectas. 	<p>a) Que A y B se mueven las dos rectas y la C mueve solo una recta.</p> <p>b) Se puede con todos.</p> <p>c) Con el A.</p> <p>d) Con el B, r, s, C-</p>

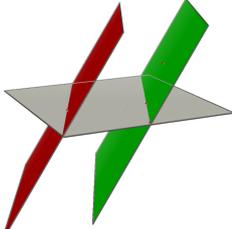
B. Actividad “Superponer.rectas.2”

FICHA		
Escena	Preguntas	Respuestas de las alumnas
	<p>En la pantalla hay dos rectas paralelas. La actividad consiste en arrastrar y mover las rectas hasta conseguir que coincidan.</p> <p>a) Antes de moverlas di qué plan vas a seguir.</p> <p>Ahora muévelas.</p> <p>c) ¿Has tenido que cambiar de plan? ¿Por qué?</p> <p>d) ¿Qué dificultades has encontrado?</p>	<p>a) Cogiéndolas desde el punto A.</p> <p>b) Sí porque con un punto solo gira pero no se mueve.</p> <p>c) Que con un punto no se movía la recta entera.</p>

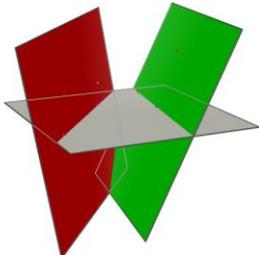
C. Actividad “Mover.plano.con.recta”

FICHA			
Escena	Preguntas	Repuestas correctas	Respuestas de las alumnas
	<p>En la pantalla hay un plano que corta una recta por el punto P.</p> <p>1. Vas a mover el plano arrastrando sólo el punto P; pero antes de moverlo di por dónde crees que se va a mover el plano.</p> <p>Ahora puedes arrastrarlo.</p>	<p>Si se arrastra el punto P, el plano verde se traslada en la dirección de la recta.</p>	<p>En los sentidos de la recta.</p>
	<p>2. ¿Cómo crees que se va a mover el plano si arrastras los puntos A y B? ¿Girará? ¿Se trasladará?</p>	<p>- Si se arrastra el punto A, el plano gira con centro de giro el punto B.</p> <p>- Si se arrastra el punto B horizontalmente, el resultado sobre el plano es similar al producido al arrastra A.</p>	<p>Se trasladará.</p>
	<p>Compruébalo. Recuerda arrastrar el punto B verticalmente.</p> <p>¿Qué ocurre? ¿Coincide con lo que pensabas?</p>	<p>Si se arrastra el punto B verticalmente entonces el punto P y el plano se desplaza también verticalmente.</p>	<p>No, gira.</p>
	<p>4. ¿Cómo crees que se va a mover el plano si arrastras la recta? ¿Girará? ¿Se trasladará?</p>	<p>- Si se arrastra la recta, el punto P mantiene su tercera coordenada constante y el plano verde se traslada en la dirección de la recta.</p>	<p>Se trasladará.</p>
	<p>Compruébalo. ¿Qué ocurre?</p>		<p>Se traslada.</p>

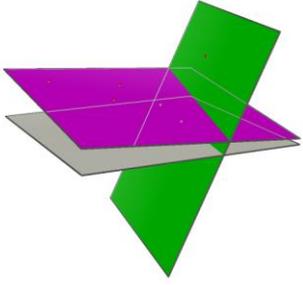
D. Actividad “Superponer.planos.1”

FICHA		
Escena	Preguntas	Respuestas de las alumnas
	<p>El plano rojo es paralelo al plano verde.</p> <p>Debes arrastrar el plano verde con el mando “manipulación” para que coincida con el rojo.</p> <p>¿Qué dificultades has encontrado?</p>	Ninguna

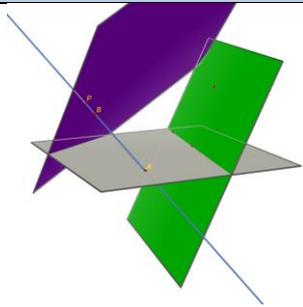
E. Actividad “Superponer.planos.2

FICHA		
Escena	Preguntas	Respuestas de las alumnas
	<p>En la pantalla hay dos planos que se cortan</p> <p>1. Vas a moverlos hasta conseguir que se superponga; pero antes de moverlos explica el plan que vas a seguir.</p> <p>Ahora puedes moverlos</p>	<p>Utiliza la bola de cristal y manipulación.</p>
	<p>2. ¿Has tenido que cambiar de estrategia? ¿Por qué?</p>	<p>Sí. Hemos tenido que mover los puntos.</p>
	<p>3. ¿Qué dificultades has tenido?</p>	<p>Que es difícil moverlo como quieres.</p>
	<p>4. ¿Has usado los puntos marcados en rojo? ¿Para qué?</p> <p>a) Si es que sí, ¿para qué?</p> <p>b) Si es que no, arrástralos hasta que consigas superponer los planos.</p>	<p>Sí. Para mover los planos..</p>

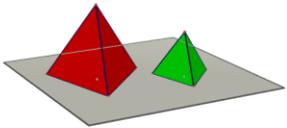
F. Actividad “Superponer.planos.3”

FICHA		
Escena	Preguntas	Respuestas de las alumnas
	<p>En la pantalla hay dos planos que se cortan.</p> <p>1. Muévelos hasta conseguir que se superponga; pero antes de moverlos explica el plan que vas a seguir.</p> <p>Ahora puedes moverlos.</p>	<p>Mover los puntos.</p>
	<p>2. ¿Has tenido que cambiar de estrategia? ¿Por qué?</p>	<p>No, porque sí que se puede.</p>
	<p>3. ¿Qué dificultades has tenido?</p>	<p>Que se nos han perdido los puntos rojos.</p>
	<p>4. ¿Has usado los puntos marcados en rojo? ¿Para qué? Si no los has utilizado, arrástralos ahora hasta conseguir que los planos se superpongan.</p>	<p>Sí, para rotar los planos.</p>

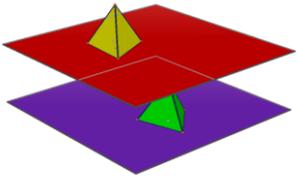
G. Actividad “Superponer.planos.4”

FICHA			
Escena	Preguntas	Repuestas correctas	Respuestas de las alumnas
	<p>En la pantalla hay dos planos.</p> <p>1. Vas a mover el plano oscuro arrastrando sólo los puntos A, B y P hasta conseguir que se superponga con el plano verde; pero antes de moverlo explica el plan que vas a seguir.</p> <p>Ahora puedes moverlo.</p>		<p>Mover los puntos u utilizar el modo mover y trasladar la recta.</p>
	<p>2. ¿Has tenido que cambiar de estrategia? ¿Por qué?</p>		No
	<p>3. ¿Qué diferencia hay entre arrastrar el punto A, el punto B o el punto P?</p> <p>a) ¿Qué movimientos puedes hacer con el punto B?</p> <p>b) ¿Qué movimientos puedes hacer con el punto A?</p> <p>c) ¿Qué movimientos puedes hacer con el punto P?</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Si se arrastra el punto P, el plano verde se traslada en la dirección de la recta. - Si se arrastra la recta, el punto P mantiene su tercera coordenada constante y el plano verde se traslada en la dirección de la recta. - Si se arrastra el punto A, el plano gira con centro de giro el punto B. - Si se arrastra el punto B horizontalmente, el resultado sobre el plano es similar al producido al arrastra A. Pero si se arrastra el punto B verticalmente entonces el punto P se traslada verticalmente y el plano gira con centro en A. 	<p>A mueve el plano. B desliza el plano a través de la recta. P mueve la recta.</p> <p>a) Por los puntos de la recta. b) Mover el plano en el espacio. c) Mover la recta.</p>

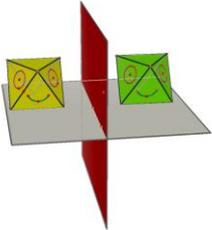
H. Actividad “Superponer.tetraedros.1”

FICHA		
Escena	Preguntas	Respuestas de las alumnas
	<p>Vas a mover los tetraedros hasta conseguir superponerlos; pero antes de moverlos explica qué estrategia vas a seguir.</p> <p>Ahora muévelos.</p>	Mover con manipulación
	2. ¿Has tenido que cambiar de estrategia? ¿Por qué?	No. Porque era la buena.
	3. ¿Qué dificultades has tenido?	Ninguna

I. Actividad “Superponer.tetraedros.2”

FICHA		
Escena	Preguntas	Respuestas de las alumnas
	<p>1. Vas a mover los tetraedros hasta conseguir superponerlos; pero antes de moverlos explica qué estrategia vas a seguir.</p> <p>Ahora muévelos.</p>	Mover con manipulación. Arrastrar el plano rojo superponiendo éste al plano azul.
	2. ¿Has tenido que cambiar de estrategia? ¿Por qué?	Sí. Además hemos tenido que mover los vértices de los tetraedros para girarlos.
	3. ¿Qué dificultades has tenido?	Ninguna.

J. Actividad “Tipos.de.puntos.4”

FICHA			
Escena	Preguntas	Repuestas correctas	Respuestas de las alumnas
	<p>En la pantalla hay dos poliedros. Uno es imagen del otro respecto al plano rojo.</p> <p>1. ¿Cómo se llaman este tipo de poliedros?</p>	Octaedro	Octaedro
	2. ¿Cuántas caras tienen?	Ocho	Ocho
	3. ¿El poliedro amarillo, tiene alguna cara de otro color? ¿Qué color es?	Sí Azul	Sí Azul
	4. ¿Cuál de los dos poliedros es imagen del otro? ¿Cómo lo puedes saber?	El verde. Arrastrándolos.	El verde. Porque tiene una cara sin pintar.
	5. Mueve el poliedro amarillo y mueve sus puntos. ¿Qué ocurre con el poliedro verde?	Que reproduce con simetría plana (el plano rojo es el plano de simetría) los movimientos del amarillo.	Que es simétrico y le pasa exactamente lo mismo que al amarillo.
	6. Ahora mueve el poliedro verde y sus puntos. ¿Qué ocurre? ¿Por qué crees que no se mueven?	No se puede arrastrar. El verde está creado como simétrico del amarillo; por lo que sus puntos son dependientes y no arrastrables.	No se puede, porque es simétrico al amarillo.

4. Ángulos entre rectas y planos.

A. Actividad: “Rectas paralelas”

Preguntas															
1.	¿Cuándo dos rectas son paralelas?														
2.	En la pantalla hay dos rectas: la recta r (roja) y la recta s (verde). Di si son paralelas, se cortan o se cruzan.														
3.	Piensa, ¿qué has de hacer para conocer si las rectas se cortan?														
4.	<p>Ahora arrastra el punto Q hasta conseguir que la recta s sea paralela a la recta r</p> <p>a) ¿Lo has conseguido?</p> <p>b) ¿Qué dificultades has encontrado? ¿Has tenido que cambiar la estrategia que tenías pensado al principio? ¿A qué se ha debido?</p> <p>c) ¿Qué has hecho para asegurarte que son paralelas?</p> <p>d) Completa la tabla. Explica brevemente para qué te puede servir realizar las siguientes acciones cuando tratas de poner la recta verde paralela a la roja.</p> <table border="1" data-bbox="427 801 1225 1281"> <thead> <tr> <th>ACCIÓN</th> <th>Sirve para:</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Usar la “bola de cristal”</td> <td></td> </tr> <tr> <td>Arrastrar el punto Q paralelo al plano base</td> <td></td> </tr> <tr> <td>Arrastrar el punto Q verticalmente respecto al plano base</td> <td></td> </tr> <tr> <td>Mover el plano base</td> <td></td> </tr> <tr> <td>Colocar el plano base paralelo a la pantalla</td> <td></td> </tr> <tr> <td>Colocar el plano base perpendicular a la pantalla</td> <td></td> </tr> </tbody> </table>	ACCIÓN	Sirve para:	Usar la “bola de cristal”		Arrastrar el punto Q paralelo al plano base		Arrastrar el punto Q verticalmente respecto al plano base		Mover el plano base		Colocar el plano base paralelo a la pantalla		Colocar el plano base perpendicular a la pantalla	
ACCIÓN	Sirve para:														
Usar la “bola de cristal”															
Arrastrar el punto Q paralelo al plano base															
Arrastrar el punto Q verticalmente respecto al plano base															
Mover el plano base															
Colocar el plano base paralelo a la pantalla															
Colocar el plano base perpendicular a la pantalla															
5.	¿Cuántas rectas paralelas a la recta r se podrían trazar que pasen por el punto P? Justifica tu respuesta.														
6.	<p>Con el mando “Paralela” traza la recta paralela a r que pase por P. Llámala t.</p> <p>a) ¿Coincide con la posición que has dado a la recta s?</p> <p>b) Ahora arrastra el punto Q hasta que coincida con la recta creada por el mando “Paralela”.</p> <p>c) ¿Por qué crees que la posición s no coincidía con la de t? Explicáte.</p>														

Respuestas de las alumnas

Cuando por mucho que las alargues no se cortan y que tengan la misma dirección.

No son paralelas, se cruzan pero no se cortan.

Utilizan la bola de cristal.

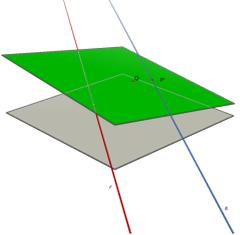
- a) No.
- b) Que moviendo el punto Q no se puede.
Hemos pensado en cambiar la estrategia subiendo y bajando el punto Q.
Se debe a que estaba en una posición en la que solo moviendo no se podía.
- c) Utilizar la bola de cristal.

ACCIÓN	Sirve para:
Usar la "bola de cristal"	Para verlo desde todos los puntos de vista.
Arrastrar el punto Q paralelo al plano base	Para mover la recta.
Arrastrar el punto Q verticalmente respecto al plano base	Para mover la recta de arriba abajo.
Mover el plano base	Para verlo desde otro punto de vista también.
Colocar el plano base paralelo a la pantalla	Para comprobar que no se cortan las rectas.
Colocar el plano base perpendicular a la pantalla	Lo mismo que lo anterior.

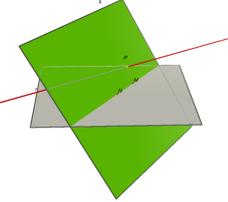
Una porque solo puede pasar una por el punto P.

- a) No.
- b) .
- c) Porque a ojo no se puede saber exacto.

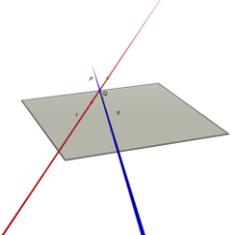
B. Actividad “Plano.recta.paralelos”

FICHA			
Escena	Preguntas	Repuestas correctas	Respuestas de las alumnas
	<p>En la pantalla hay dos rectas: la recta r (roja) y la recta s (azul).</p> <p>1. ¿Son paralelas?</p>	Sí	Sí.
	<p>2. Comprueba que si son paralelas cambiando el punto de vista con la función “bola de cristal”. ¿A qué conclusión llegas?</p>		Que sí que son paralelas.
	<p>3. También hay un plano verde que contiene a la recta s (azul). ¿Qué posición tiene respecto a la recta r: paralelo, perpendicular, se cortan? Compruébalo usando la función “bola de cristal”.</p>	Paralelo	Se cortan. Sí, se cortan.
	<p>4. Arrastra el punto Q en diferentes direcciones: horizontales y verticales.</p> <p>a. ¿Cómo cambian las posiciones del plano verde respecto a la recta r?</p> <p>b. Di cuál de estas afirmaciones son ciertas y justifica tu respuesta:</p> <ul style="list-style-type: none"> • A veces son paralelos, a veces no; según la posición de Q. • Nunca son paralelos. • El plano nunca corta a la recta roja. • Hay una posición en la que el plano es perpendicular a la recta roja. • La posición del plano verde respecto a la recta r siempre es paralela, independientemente de la posición de Q. • Hay una posición de Q en la que el plano verde contiene a la recta roja. 	<p>a) Al arrastrar el punto Q el plano verde rota respecto a la recta azul; y siempre se mantiene paralelo a r.</p> <p>b) El plano verde es paralelo siempre a la recta roja; y hay una posición en la que la contiene. Por lo que son verdaderas la 3, 5 y 6.</p>	<p>i. No cambian.</p> <p>ii. F. V. Si no los movemos no son paralelos. V. No lo corta. F. F. V.</p>
	<p>5. ¿De cuántas maneras se puede colocar el plano verde para que sea paralelo a la recta r?</p>	Infinitas.	De una, por encima, porque cuando el plano se inclina un poco si lo alargáramos se cortaría con la línea.
	<p>6. ¿Cuántos planos paralelos a la recta r y que pasen por el punto P se podrían trazar? Justifica tu respuesta.</p>	Infinitos.	Uno, por lo mismo que antes.

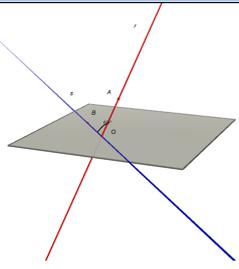
C. Actividad “Plano.recta.perpendiculares”

FICHA			
Escena	Preguntas	Repuestas correctas	Respuestas de las alumnas
	<p>1. ¿Cuándo una recta y un plano son perpendiculares?</p> <p>En la pantalla hay una recta r (roja) y un plano s (verde) que la corta en el punto P (amarillo).</p>		<p>Cuando se cortan y sus ángulos forman ángulos rectos.</p>
	<p>2. Vas a arrastra los puntos M y N hasta conseguir que el plano s (verde) sea perpendicular a la recta r.</p> <p>a. ¿Lo has conseguido?</p> <p>b. ¿Qué dificultades has encontrado?</p> <p>c. ¿Qué has hecho para asegurarte que es perpendicular?</p>		<p>a) No.</p> <p>b) Que nos puede girar hacia un lado.</p> <p>c) Ponerla de canto.</p>
	<p>3. ¿De cuántas maneras se puede colocar el plano verde para que sea perpendicular a la recta r (sin mover el punto P)? Justifica tu respuesta</p>	Una	<p>De dos maneras, porque si tiene que ser perpendicular solo puede ser con una posición o girado.</p>
	<p>4. ¿Cuántos planos perpendiculares a la recta r y que pasen por el punto P se podrían trazar? Justifica tu respuesta</p>	Uno	<p>Uno, el que pasa por P.</p>
	<p>5. Con el mando “Perpendicular” traza el plano perpendicular a r que pase por P. Llámalo t.</p> <p>a) ¿Coincide con la posición que has dado al plano s?</p> <p>b) Ahora arrastra los puntos M y N hasta que coincida con el plano creado por el mando “Perpendicular”.</p> <p>c) ¿Por qué crees que la posición de s no coincidía con la de t? Explícate.</p>		<p>a) No.</p> <p>b).</p> <p>c) Porque no le hemos pillado la técnica.</p>

D. Actividad “Recta.recta.perpendiculares”

FICHA			
Escena	Preguntas	Repuestas correctas	Respuestas de las alumnas
	<p>1. ¿Cuándo dos rectas son perpendiculares?</p> <p>En la pantalla hay dos rectas: la recta r (roja) y la recta s (azul) que se cortan en el punto P.</p>		<p>Cuando en su corte los ángulos son de 90°.</p>
	<p>2. ¿Son perpendiculares?</p>	No	No.
	<p>3. Arrastra el punto Q hasta conseguir que la recta s sea perpendicular a la recta r</p> <p>a) ¿Puedes encontrar otras posiciones de Q en las que s sea perpendicular a r?</p> <p>b) Prueba moviendo verticalmente Q.</p>		<p>a) No. b) Vale. Pues hemos encontrado cuatro 2.</p>
	<p>1. ¿Cuántas rectas perpendiculares a la recta r se podrían trazar que pasen por el punto P? Justifica tu respuesta.</p>	Infinitas	<p>Dos, porque hay dos ángulos que nos sobran, ya que los otros dos están ocupados por la recta r.</p>
	<p>2. Ahora utiliza el mando “Ángulo” para marcar el ángulo entre los puntos Q, P y N. Ayúdate del ángulo para conseguir que la recta s sea perpendicular a la recta r arrastrando el punto Q.</p>		Ya estaba.
	<p>6. Con el mando “Perpendicular” crea el plano perpendicular a la recta r (roja) que pasa por el punto P, y llámalo t. Arrastra el punto Q dentro de este plano (vertical y horizontalmente) y observa los valores del ángulo. ¿Qué conclusión sacas?</p>		<p>Que como el plano es perpendicular, si lo arrastras por el plano seguirá siéndolo.</p>
	<p>7. ¿Dónde se encuentran todas las rectas perpendiculares a la recta r (roja) y que pasan por el punto P. Justifica tu respuesta.</p>	<p>En el plano perpendicular a la recta r y que pasa por P.</p>	<p>A 180° de P, porque si no, no serían perpendiculares.</p>

E. Actividad “Ángulo.recta.plano”

FICHA		
Escena	Preguntas	Respuestas de las alumnas
	<p>En la pantalla hay dos rectas: la recta r (roja) y la recta s (azul). También está marcado el ángulo que forman.</p> <p>2. Utiliza la función “bola de cristal” para asegurarte en tus respuestas</p> <p>a) ¿Qué ángulo forman las rectas?</p> <p>b) Arrastra el punto B de la recta s. ¿Qué ocurre con el ángulo? ¿Cuánto mide el mayor ángulo que puedes conseguir? ¿Y el menor?</p> <p>c) De todos esos posibles ángulos, ¿cuál dirías es el ángulo entre la recta r y el plano? Explica por qué piensas eso.</p>	<p>a) Dos agudos y dos obtusos.</p> <p>b) • Que cambia. • 128°. • 52°.</p> <p>c) • 53°– 54°. • Porque me da igual, no hay explicación.</p>
	<p>2. Con el mando “Ángulo” marca el ángulo entre la recta r y el plano base. ¿Coincide con el ángulo que tú pensabas?</p>	<p>Casi.</p>
	<p>3. ¿Cómo definirías el ángulo entre una recta y un plano que se cortan?</p>	<p>De ninguna manera, podría ser cualquier medida.</p>