VNIVERSITAT DE VALÈNCIA

MASTER EN PROFESSOR/A D'EDUCACIÓ SECUNDÀRIA

# TRABAJO FIN DE MÁSTER

## PROPUESTA DE UNIDAD DIDÁCTICA DEL CONCEPTO DE INTEGRAL Y DEL CÁLCULO DE PRIMITIVAS

Trabajo de Fin de Máster realizado por

Alberto Ferrer Pérez

dirigido por

Luis Puig Espinosa

# Índice

# 1. Introducción y objeto del estudio

En este Trabajo Fin de Máster, dirigido por Luis Puig, se va a proceder a desarrollar una propuesta de unidad didáctica sobre el concepto de integral y el cálculo de primitivas. Ambos temas, en orden contrario, fueron de los que me encargué, junto con mi compañero Salvador, alumno del máster, de desarrollar en mis prácticas en el Colegio *Escuelas de Artesanos* de Valencia.

Como trataré más adelante, la forma tradicional de introducir estos temas a los alumnos es comenzar con el cálculo de primitivas o antiderivadas para después, una vez que los alumnos tienen suficiente destreza en el cálculo de las mismas, continuar con el teorema fundamental del cálculo y la regla de Barrow, es decir, las integrales definidas, convirtiéndose dichos conceptos en transparentes para los alumnos y sin llegar a ser asimilados correctamente, lo que provoca una gran cantidad de fracaso en los primeros cursos de cálculo infinitesimal en la universidad (Llorens, 1997).

Mi propuesta se basará en un cambio de orden en los dos temas: primero se tratará intuitivamente el cálculo de áreas como introducción al concepto de integral de forma gráfica para ir poco a poco afinando los cálculos mediante el álgebra y terminar así en los teoremas propios del tema y en el cálculo de las primitivas. Sin embargo, esta propuesta no se pudo llevar a cabo en mis prácticas por la premura del tiempo y los agobios propios de 2º de Bachillerato, con las pruebas de Selectividad a la vista. Así, en 4 sesiones de 50 minutos tuve que introducir el cálculo de primitivas, totalmente nuevo para los alumnos, y en otras 4 sesiones hizo lo propio mi compañero Salvador con las integrales definidas, o "Aplicaciones de la integral". Describiré, por tanto, cuál es mi propuesta sobre la didáctica de estos dos temas, centrándome en lo puramente conceptual más que en el cálculo mecánico, cuáles fueron los errores más frecuentes en las pruebas llevadas a cabo por los alumnos de *Escuelas de Artesanos*, cuáles pueden ser las claves de mejora en la didáctica del cálculo algorítmico de primitivas y una interesante revisión de la bibliografía sobre la investigación y la innovación en el tema.

## 2. Revisión de la bibliografía

La búsqueda de bibliografía y documentación para conocer cuál es el estado actual de la didáctica del cálculo integral ha supuesto un punto muy interesante en mi trabajo puesto que he reparado en la gran cantidad de libros, artículos y todo tipo de textos que existen sobre dicho tema y sobre didáctica de las matemáticas en general. Los profesores tenemos una mina de la que podemos aprender y extraer multitud de conocimiento aprovechable para las clases y para la introducción de temas de una forma más efectiva y también más atractiva para los estudiantes.

En una primera aproximación al tema, busqué por cuenta propia simplemente en *Google* y ya encontré artículos interesantes de autores como José Luis Llorens, Pilar Turégano o Mónica Escudero. También busqué en la revista SUMA, ya dada a conocer en el máster, donde encontré tres o cuatro artículos sobre el tema, que pude leer en la biblioteca de Magisterio.

Tras reunirme con Luis Puig, éste me recomendó varias bases de datos y sitios de internet donde podía encontrar artículos de didáctica de las matemáticas.

El primer sitio es el más internacional: la revista *Educational Studies of Mathematics*. Como toda búsqueda de investigación que se precie, hay que acudir a revistas y bases de datos internacionales y no quedarse exclusivamente con las publicaciones en castellano, pues se acota en demasía el rango de búsqueda y, por tanto, de conocimiento. En la revista *Educational Studies of Mathematics* encontré un artículo que se cita en prácticamente toda la bibliografía en la materia: *Students' understandig of integration* de A. Orton en 1983. En dicho artículo se señalan puntos problemáticos de la didáctica de las integrales como el hecho problemático de la dificultad que introduce el álgebra o el obstáculo que supone el concepto de integral como el límite de una suma.

Posteriormente busqué en la revista *Enseñanza de las ciencias* que pone a disposición pública la Generalitat de Catalunya. Ahí encontré el artículo *Del área a la integral* de Pilar Turégano donde se evita introducir la integral como la operación inversa a la derivada y potencia una introducción gráfica basada en la visualización de las áreas de las funciones. También encontré interesantes artículos de Matías Camacho o Sabrina Garbin.

Sin duda, la base de datos más fructífera fue DIALNET, proporcionada por la Universidad de La Rioja. Encontré artículos notables como *Complejidad Ontosemiótica de un texto sobre la introducción a la integral definida* de Ángel Contreras y Lourdes Ordóñez o *Elementos de Enlace entre lo conceptual y lo algorítmico* de Germán Muñoz. También *Una socioepistemología de la integral* de Francisco Cordero me proporcionó ideas interesantes y *Propuesta didáctica para identificar cuándo la integral definida es aplicable para resolver un problema* de Reinaldo Hernández plantea diversos problemas y la dificultad de los alumnos de reconocer un problema en el que la solución venga dada por el cálculo de una integral.

Por supuesto, la lectura de dichos artículos junto con la revisión de su bibliografía me dio lugar a descubrir otros textos interesantes. Y además conté con un extenso manual de *Cálculo* de Larson et al. y *Cálculo infinitesimal de una variable* de Juan de Burgos.

Por último, cabe mencionar que el libro de texto sobre el que trabajé en las prácticas es el correspondiente a Matemáticas II de 2º de Bachillerato Científico-Técnico de la editorial Oxford.

# 3. Modelo de Competencia

En este punto se va a realizar un análisis completo del concepto del cálculo integral y una propuesta didáctica que favorezca la asimilación del mismo por parte de los estudiantes. Se comentará brevemente el desarrollo histórico del concepto, se realizará un breve análisis formal, se comentarán cuáles son los errores principales y las dificultades con las que se encuentran los alumnos cuando abordan este tema, y se desarrollará detalladamente la propuesta sobre el tema.

## 3.1. Desarrollo histórico

La primera figura que indagó en lo que hoy se conoce como cálculo integral fue Arquímedes. El matemático griego (287 a.c.) trató de calcular el área de curvas geométricas como el círculo, la parábola o la elipse. También elaboró un ingenioso método para calcular el volumen del segmento recto de paraboloide de revolución (Escudero, 1997). Realizó cálculos cuantitativos del área de figuras geométricas, basándose en propiedades características de estas curvas. Es importante señalar que en esta época todavía no se usaban ejes cartesianos, ni la descripción analítica de las curvas. Tampoco se concebía el infinito, por lo que hizo diversos cálculos de áreas, volúmenes y centros de gravedad con su método ingenioso basado en la balanza física (Muñoz, 2000).

En los siglos XVII y XVIII se produce el gran auge del cálculo. Galileo y Newton se encargaron de estudiar los sistemas de transformación que permiten pasar de los valores de las variables en el estado inicial a los valores que adquieren éstas en cualquier otro instante. Se pasó de la estática a la dinámica. Esto significó uno de los pilares más sólidos de la evolución de la matemática y su relación con el mundo de los fenómenos físicos.

Por otra parte, Pierre Fermat (1601-1665) estudió las curvas geométricas de la forma *¿cómo se puede obtener la cuadratura de diferentes familias de curvas?* o, lo que es lo mismo, cómo se calcula el área bajo la curva. Así, calculó el área bajo la curva $y=x^n$ en el intervalo $[0,a]$ empleando un procedimiento de troceado del intervalo en forma de progresión geométrica.

Isaac Barrow (1630-1677) puso en conexión los conceptos de derivada e integral, el segundo anterior al primero, al darse cuenta de que la derivada de la función que proporciona el área bajo una curva es la función misma que representa dicha curva.

Leibniz (1646-1716) estudió sucesiones de sumas y diferencias de números de la forma *¿cómo se puede calcular el valor de una suma infinita?*. Al contemplar la sucesión infinita de valores de una variable, por ejemplo la variable $x$, la diferencia entre dos valores sucesivos era precisamente el $dx$, que era infinitesimal o despreciable comparado con los valores de $x$. Y al tomar la suma de tales diferencias, denotada por $\int dx$ (el símbolo $\int$ es una 's' larga y lo extrajo de la palabra latina *summa*), obtiene la variable completa. Con estas ideas desarrolló un procedimiento algorítmico para calcular la longitud de una curva, la superficie de revolución, etc. Aunque tuvo disputas con Newton, ya que le acusaban de usar otra notación para las mismas ideas que el matemático inglés había desarrollado años antes sin publicar.

En el siglo XVIII, Euler (1707-1783) abandonó el estudio de curvas geométricas y fundó la ciencia de los infinitésimos sobre una teoría formal de funciones. De alguna manera esto significó la ruptura entre un cálculo de variables (físicas o geométricas), como inicialmente empezó, y un cálculo de funciones numéricas.

De esa forma Cauchy (1789-1857) construyó una teoría de integración para funciones continuas y acotadas. Y Riemann (1826-1866) estudió la integral como una sucesión de ordenadas y en qué casos una función es integrable o no lo es. De esta forma se llega a un punto en que se estudia el significado del objeto integral y no sobre los resultados que el proceso de integrar proporciona.

En el siglo XIX se produce la separación definitiva entre física y matemática a partir de las controversias que produjo el problema de la cuerda vibrante y los trabajos de Fourier.

Ya en el siglo XX, Lebesgue (1875-1941) definió la integral que lleva su nombre generalizando la noción de la integral de Riemann y extendiendo el concepto de área de una curva para incluir funciones discontinuas. Éste es uno de los logros del análisis moderno que expande el alcance del análisis de Fourier.

Para finalizar el análisis sobre el desarrollo histórico, es interesante advertir que un riguroso primer curso de Análisis se basa, más o menos, en el orden siguiente (Bagni, 2004):

conjuntos y funciones ⇨ límites y funciones contínuas ⇨ derivadas ⇨ integrales

**Figura 1 - Desarrollo de un curso de análisis**

sin embargo, el desarrollo histórico tuvo lugar en orden inverso:

Cantor (1845) Dedekind (1831) ⇦ Cauchy (1789) Weierstrass (1815) ⇦ Newton (1665) Leibniz (1646) ⇦ Arquímedes (285 a.C.) Kepler (1571) Fermat (1601)

**Figura 2 - Desarrollo histórico**

Esto no significa que haya que cambiar radicalmente la didáctica del cálculo. Simplemente conviene tenerlo presente para darse cuenta de que el hombre ha efectuado un determinado avance matemático y científico, fruto de siglos de estudio, en un orden concreto, y en muchos temas empezar por el tejado puede no ser adecuado para los estudiantes.

## 3.2. Breve análisis formal

Como se ha comentado, el análisis formal del cálculo integral en los libros de Análisis y en los libros escolares viene dado por una primera introducción al cálculo de primitivas para dar después paso al problema de las áreas, la integral definida, la regla de Barrow, el cálculo de volúmenes, integrales impropias y métodos para realizar integración numérica.

### 3.2.1. Primitivas

F(x) es una primitiva de la función f(x) en [a,b] si y sólo si F'(x)=f(x) $\forall x \in [a,b]$.

El conjunto de todas las primitivas posibles de una función f(x) se denomina integral indefinida de f(x), y se escribe como:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

El diferencial de x, dx, indica la variable respecto de la cual se integra. La constante C se denomina constante de integración.

### 3.2.2. Propiedades del cálculo de primitivas

- $\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
- $\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$

### 3.2.3. Área definida bajo una curva: integral definida

Para calcular el área de un trapecio mixtilíneo determinado por la curva f(x), el eje OX y las rectas x=a y x=b, donde f(x) es continua y acotada en el intervalo [a,b], se procede:

Dividimos el intervalo [a,b] en n subintervalos no necesariamente iguales mediante los puntos $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$, que constituyen la partición $P_1$.

En cada subintervalo $[x_{i-1},x_i]$ denominamos $m_i$ y $M_i$ al valor de f mínimo y al máximo, respectivamente.

Dada la región R determinada por la función y el eje OX en el intervalo $[x_{i-1},x_i]$, el producto de $m_i \cdot (x_i - x_{i-1})$ es el área del rectángulo contenido en R, y el producto $M_i \cdot (x_i - x_{i-1})$ es el área del rectángulo que la contiene.

Así, se denomina suma inferior de Riemann de f(x) respecto a la partición $P_1$ al número real $s_1 = \sum_i [m_i \cdot (x_i - x_{i-1})]$.

Y la suma superior de Riemann de f(x) respecto a la partición $P_1$ es el número real $S_1 = \sum_i [M_i \cdot (x_i - x_{i-1})]$.

El área A del trapecio mixtilíneo definido por la función y el eje OX en el intervalo [a,b] estará acotada entre las dos sumas anteriores: $s_1 \leq A \leq S_1$.

Si se realiza una partición más fina, $P_2$, se obtendrá que: $s_1 \leq s_2 \leq A \leq S_2 \leq S_1$.

Y considerando particiones cada vez más finas del intervalo, obtenemos una sucesión de sumas inferiores y otra sucesión de sumas superiores acotadas superior e inferiormente por A, respectivamente:

$s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \ldots \leq s_n \leq A \leq S_n \leq \ldots \leq S_3 \leq S_2 \leq S_1$.

El límite de ambas sucesiones es común:

$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n = A$, donde $s_n$ y $S_n$ son las sumas inferior y superior de f para una determinada partición $P_n$, donde, a medida que aumenta n, la partición $P_n$ es más fina que $P_{n-1}$.

Sea f una función continua y positiva en el intervalo [a,b] se llama integral definida al área A de la región R del plano limitada por la gráfica de f, el eje de abcisas y las rectas x=a y x=b. Se designa de esta forma:

$$\int_a^b f(x)dx = A$$

### 3.2.4. Propiedades de la integral definida

- $\int_a^a f = 0$.
- $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$, si f es una función continua en [a,b] y c∈(a,b).
- $\int_a^b f = -\int_b^a f$.
- $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.
- $\int_a^b k \cdot f = k \cdot \int_a^b f$.
- $\int_a^b f \geq \int_a^b g$, si f y g son continuas en [a,b] y si f ≥ g ∀x∈[a,b].

### 3.2.5. Teorema del valor medio

Si f es una función continua en el intervalo [a,b], existe un punto $c \in [a,b]$, de tal modo:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b-a)$$

La interpretación geométrica de este teorema es que el área del trapecio mixtilíneo considerado es igual al área de un rectángulo de la misma anchura, (b-a), cuya altura sea la imagen f(c) de un punto c que pertenece al intervalo [a,b].

### 3.2.6. Teorema fundamental del cálculo integral

Sea una función continua y positiva en el intervalo [a,b], el área del trapecio mixtilíneo que determina la curva de f en el intervalo [a,x], si $x \in [a,b]$, es una función que depende de x y sabemos que es la integral definida de la función entre a y x:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Para otro valor del intervalo, x+h, el área del trapecio mixtilíneo en el intervalo [a,x+h] es:

$$F(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)dt$$

Por tanto, el área en el intervalo [x,x+h] será:

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+h} f(t)dt$$

Si aplicamos el teorema del valor medio, existirá un valor $c \in [x,x+h]$ tal que:

$$\int_x^{x+h} f(t)dt = f(c) \cdot (x+h-x)$$

Es decir, $F(x+h) - F(x) = f(c) \cdot h$

Por tanto, $f(c) = \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h}$.

Si hacemos que la amplitud del trapecio tienda a cero, $h \to 0$, entonces $c \to x$, con lo que se obtiene:

$$\lim_{h\to 0} f(c) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} \Rightarrow f(x) = F'(x)$$

Lo que quiere decir que F(x), que proporciona el área que delimita la función f(x) entre a y x, es una función primitiva de f(x).

### 3.2.7. Regla de Barrow

Si f es continua en [a,b] y F es una primitiva de f, es decir, F′ = f, para todo x $\in$ [a,b], entonces:

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

## 3.3. Errores habituales e ideas para la propuesta

En este apartado se realiza un compendio de las ideas principales surgidas de los diferentes textos a los que he tenido acceso en la bibliografía en relación a los errores típicos de los alumnos con respecto al cálculo integral y a algunas ideas clave en las que me baso para llevar a cabo mi propuesta del siguiente apartado.

Llorens (1997) identifica tres errores:

- Generalmente, los estudiantes identifican integral con primitiva. La integral, para ellos, no conlleva ningún proceso de convergencia ni ningún aspecto geométrico.
- Las integrales "definidas" se identifican con la regla de Barrow, incluso cuando ésta no puede aplicarse. $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx \neq -2$
- No se integra el concepto de área con el de integral. Ciertamente, los estudiantes han oído que existe una relación entre las integrales (definidas) y el área, pero no se produce una adecuada unión entre ambas, de modo que persiste una interpretación puramente algebraica de la integral.

Muñoz (2000):

- Los estudiantes aprenden los procedimientos del cálculo en un nivel puramente algorítmico, que es construido sobre imágenes conceptuales escasas.

- Los estudiantes pueden calcular primitivas más bien que integrar; por ejemplo, cuando se les enfrenta con un problema típico de integración muy pocos lo reconocen como tal.

- El estudiante aprende a decir lo que es la integral y su representación geométrica (área) sin ver una metodología que les permita estudiar fenómenos de variación continua; sólo la conciben como una herramienta a la cual hay que buscarle aplicación.

- La estructura general del actual discurso matemático teórico suele ser la base menos propicia para la comunicación de las ideas matemáticas, en particular las del cálculo.

Orton (1983):

- El mayor problema para los estudiantes es el entendimiento de la integración como el límite de una suma.

- La secuencia de Fibonacci, la sección áurea o las soluciones iterativas para las ecuaciones proveen de oportunidades para discutir sobre el concepto de límite.

- Sería más fácil si buscáramos estudiantes que, en lugar de asimilar grandes habilidades de cálculo de primitivas, fueran capaces de obtener respuestas a simples problemas de integración.

- La introducción de la integración puede ser oscurecida por las tediosas manipulaciones algebraicas.

Escudero (1997):

- Buscar ejemplos históricos para introducir cualquier tema ayuda a romper la monotonía de clase y a mantener la atención y el interés de los alumnos. Los temas históricos despiertan la curiosidad del alumnado: la forma de trabajar de los científicos, su forma de ser, los sucesos que los rodearon, sus rencillas, etc, les da una visión diferente de las matemáticas.

Turégano (1998):

- En la ESO y el Bachillerato se tiene la responsabilidad de sembrar el germen del concepto de integral. Hay que huir de la excesiva "algoritmización" del cálculo sin fundamentos conceptuales, ya que este enfoque es una de las causas del gran fracaso de los estudiantes universitarios en las asignaturas de cálculo infinitesimal.

- Referirse a la integral como límite de una suma no responde a la lógica de los infinitésimos.

- La integral es una continuación de la idea de área, por tanto: ¿No entenderían los estudiantes más fácilmente que, al pasar de la geometría al análisis, nada ha cambiado sino el lenguaje, que era más geométrico antes y más analítico después?

- La idea es evitar a los estudiantes el considerar a la integración como operación inversa de la diferenciación.

- Los estudiantes tienen más dificultades en la utilización de la expresión analítica de las funciones que en la visualización de sus gráficos, lo que nos lleva a pensar que tendrán más dificultades en comprender la integración como antiderivada que en el aspecto geométrico de la misma.

## 3.4. Propuesta didáctica

Siguiendo la idea principal ya propuesta por Turégano (1997) de introducir el concepto de integral como primera aproximación al estudio del cálculo infinitesimal, con independencia del concepto de derivación y previamente al estudio de límites y la presentación de dicho concepto como una continuación de la noción de área ya conocida por los estudiantes, la estructura de mi propuesta didáctica tiene cuatro puntos o etapas, las cuales se podrían estructurar cada una en cursos diferentes.

1. Ampliación del cálculo de áreas mediante el método de la altura media.
2. Definición de integrar y su relación con el cálculo del área y el concepto de suma de infinitas contribuciones.
3. Conexión de la integración y la derivación mediante el teorema fundamental del cálculo. Propiedades de la integral.
4. Cálculo de primitivas (inmediatas y métodos).

### 3.4.1. ETAPA 1: Ampliación del cálculo de áreas

Todos los estudiantes en secundaria conocen el cálculo de áreas de figuras planas sencillas como el rectángulo, el triángulo, el trapecio, etc. Partiendo de este conocimiento que ya poseen, se comienza a indagar en cómo se puede hallar el área del recinto delimitado por una curva, de la que conocemos su representación analítica, el eje OX y dos rectas verticales que marcan el intervalo de observación. El cálculo de áreas de figuras curvas históricamente ha supuesto una carrera de relevos hacia lo que hoy conocemos como Cálculo, basado en el reto intelectual que supone la "cuadratura" de cualquier figura geométrica. Los grandes matemáticos griegos competían por encontrar un método general de cuadratura. Si Arquímedes hubiera conocido los símbolos del álgebra que se comenzaron a usar 18 siglos más tarde, probablemente, habría logrado completar el estudio del cálculo integral. Sin embargo, consiguió la fórmula de cuadratura de la parábola mediante un ingenioso proceso geométrico. Pero para lograr un método general, se necesitaba una matemática más poderosa que tardó un largo tiempo en aparecer.

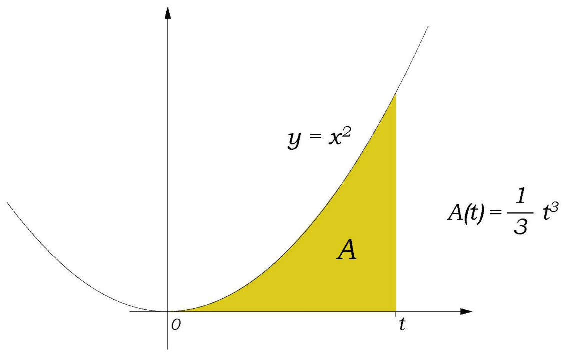


**Figura 3 - Área de la parábola**

Tras esta breve reseña histórica, se plantea a los alumnos el problema de calcular áreas de curvas en un intervalo concreto. Se les proporciona la expresión analítica de las curvas para que puedan conocer el valor de las mismas en cualquier punto del intervalo.

El método que vamos a utilizar es el del cálculo de la altura media de la función (Turégano, 1997). Vamos a convertir la figura de la cual queremos hallar el área en un rectángulo cuya altura será la altura media de la función. El área del rectángulo será equivalente al área de la figura dada (Figura 4). Nos apoyamos en el teorema del valor medio descrito en el apartado 3.2. La idea es que la altura media de la función, que denotaremos como M, que nos proporcionará la altura del rectángulo de área equivalente, se vaya aproximando al valor f(c) que cita dicho teorema.

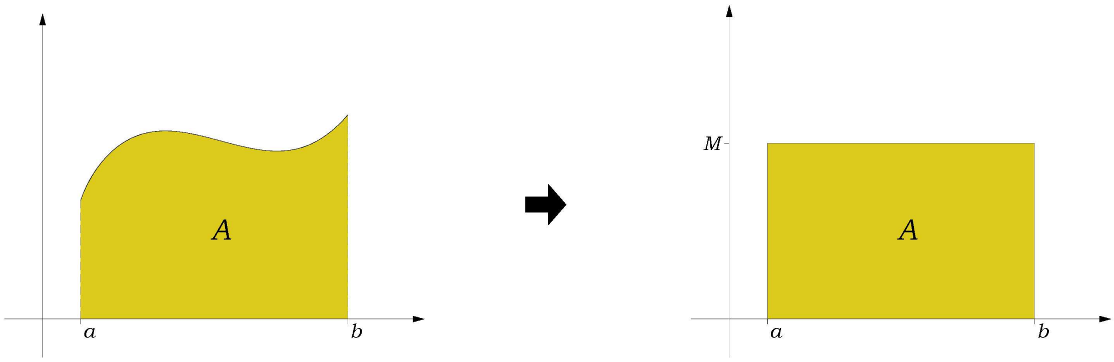


**Figura 4 - Equivalencia de áreas entre la función y el rectángulo**

De la primera presentación del método se concluye que la altura media deberá estar acotada entre el valor mínimo y máximo de la función en ese intervalo. Por lo que se puede comenzar con una actividad sencilla: calcular el área de un trapecio definido por una recta. Es importante señalar que la visualización gráfica será primordial en toda esta etapa; la representación analítica sólo se usará para conocer el valor de la función en puntos concretos, pero no será la base sobre la que se sustenta el aprendizaje del concepto.

**Actividad 1:** Área en el intervalo [2,6] de la recta y=x+1.

Si consideramos el área del rectángulo que se obtiene con la altura mínima ($h_{min}$) de la curva en el intervalo, $A_{min}$, y el área del rectángulo de altura la máxima ($h_{max}$) de la curva en el intervalo, $A_{max}$, es lógico pensar que el área del recinto estará acotada entre estos dos valores: $A_{min} < A < A_{max}$. Se deberán, por tanto, aproximar $A_{min}$ y $A_{max}$ hasta encontrarse en A. Es decir, aumentar $h_{min}$ y disminuir $h_{max}$ hasta llegar a M.

Por ese motivo, para lograr un rectángulo de área equivalente A, sería lógico pensar en hallar la altura media calculando la media entre el valor mínimo y máximo de la recta en el intervalo [2,6]. Es decir: $M = \frac{h_{min} + h_{max}}{2} = \frac{3+7}{2} = 5$ (Figura 5).

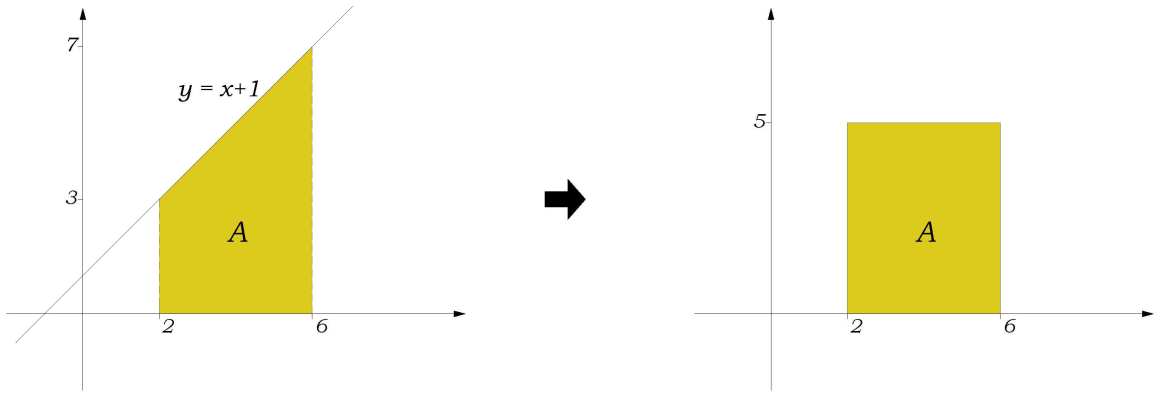


**Figura 5 - Áreas del trapecio y de su rectángulo equivalente**

Y, por tanto, el área será $A = base \cdot altura = 5 \cdot 4 = 20$, o, lo que es lo mismo, $A = (b-a) \cdot \frac{h_{\min} + h_{\max}}{2}$, que coincide con la fórmula del área de un trapecio conocida por los alumnos $A = h \cdot \frac{b+B}{2}$, donde h es la altura del trapecio (anchura de nuestro rectángulo) y b y B son la base menor y mayor del mismo (valores mínimo y máximo de la función en el intervalo).

El cálculo de la altura media nos ha proporcionado el valor exacto del área porque dicha altura media es exacta.

**Actividad 2:**

En el momento en que, en lugar de una recta, la figura viene dada por una curva ya no será exacta el área mediante el cálculo de la media entre el valor menor y el mayor. Esto lo comprobamos con la curva $y = x^2 - x + 1$, en el intervalo [1,5], representada en la Figura 6.

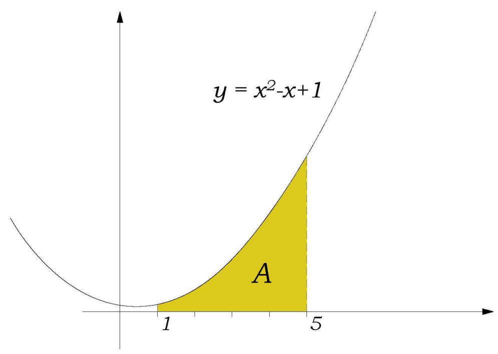


**Figura 6 - Área de la parábola $y = x^2 - x + 1$ entre 1 y 5.**

Primero calculamos el área, como en la actividad 1, mediante la media entre el valor mínimo y el máximo, es decir, mediante una sola partición del intervalo, en la que consideramos los puntos mínimo y máximo del mismo (Figura 7):

$$M = \frac{h_{\min} + h_{\max}}{2} = \frac{1+21}{2} = 11 \rightarrow A = 4 \cdot 11 = 44\,.$$

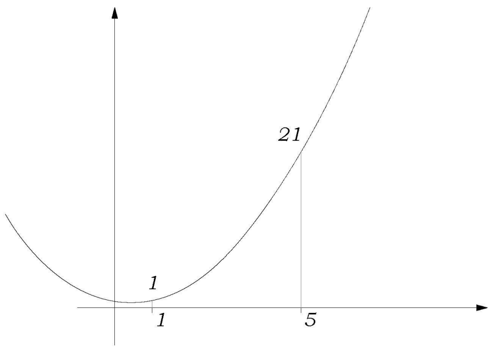


**Figura 7 – Valores de abcisas y ordenadas con una partición**

Sin embargo si consideramos dos particiones para el intervalo cogiendo el valor del punto medio x=3, cuya altura es 7, vamos a realizar una media de las alturas mínimas y de las alturas máximas de cada partición, para luego efectuar la media entre ambos valores (Figura 8):

$$h_{\min} = \frac{1+7}{2} = 4$$
$$h_{\max} = \frac{7+21}{2} = 14$$
$$M = \frac{h_{\min} + h_{\max}}{2} = 9$$

$$A = 4 \cdot 9 = 36$$

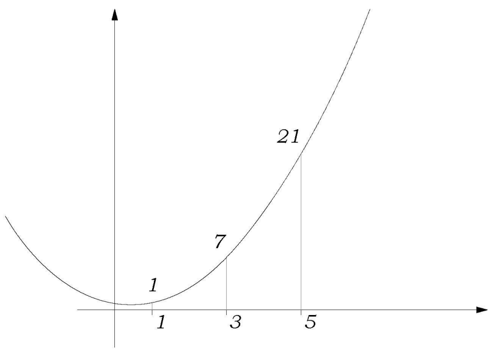


**Figura 8 – Valores de abcisas y ordenadas con dos particiones**

Se puede discutir por qué la altura media con 2 particiones, es decir, 3 puntos, es más pequeña que con una partición: el carácter cóncavo de la curva puede dar lugar a una interesante charla. El área, por tanto, también ha disminuido y se aproxima más al valor exacto puesto que los valores $h_{min}$ y $h_{max}$ también se han aproximado.

Si se realizan 4 particiones, obtendríamos (Figura 9):

$$h_{\min} = \frac{1+3+7+13}{4} = 6$$
$$h_{\max} = \frac{3+7+13+21}{4} = 11$$
$$M = \frac{h_{\min} + h_{\max}}{2} = 8,5$$

$$A = 4 \cdot 8,5 = 34$$

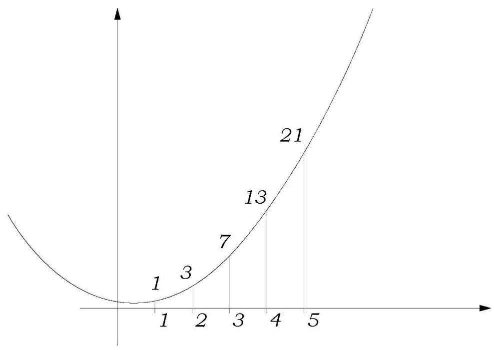


**Figura 9 – Valores de abcisas y ordenadas con tres particiones**

Nuevamente los valores de $h_{min}$ y de $h_{max}$ se aproximan. Esto da lugar a pensar que cuando su diferencia se aproxime a cero, podemos parar el proceso y tendremos la seguridad de que la M hallada nos proporcionará el área de manera casi exacta, ya que en cada paso $h_{min}$ ha aumentado y, por tanto, $A_{min}$, así como $h_{max}$ ha ido disminuyendo como $A_{max}$. De esta forma en cada paso nos aproximamos cada vez más a A.

Si seguimos este proceso, se observa cómo el valor de A va convergiendo a un valor concreto y la diferencia entre $h_{min}$ y $h_{max}$ es cada vez menor.

Con ayuda del ordenador podemos hacer esta tabla donde se observa cómo el valor de la altura media tiende a ser aproximadamente 8,33 y el área, por tanto, del rectángulo equivalente converge a 33,33 y ésta será el área del recinto delimitado por la curva. Gráficamente, el proceso se observa en la Figura 10.

| **Nº de particiones** | **Media de alturas mínimas $h_{min}$** | **Media de alturas máximas $h_{max}$** | **$h_{max}$ - $h_{min}$** | **M** | **$A_{min}$** | **$A_{max}$** | **A** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 21 | 20 | 11 | 4 | 84 | 44 |
| 2 | 4 | 14 | 10 | 9 | 16 | 56 | 36 |
| 4 | 6 | 11 | 5 | 8,5 | 24 | 44 | 34 |
| 8 | 7,125 | 9,625 | 2,5 | 8,375 | 28,5 | 38,5 | 33,5 |
| 16 | 7,7188 | 8,9688 | 1,25 | 8,3438 | 30,8752 | 35,8752 | 33,3752 |
| 32 | 8,0234 | 8,6484 | 0,625 | 8,3359 | 32,0936 | 34,5936 | 33,3436 |
| 64 | 8,1777 | 8,4902 | 0,3125 | 8,33395 | 32,7108 | 33,9608 | 33,3358 |
| 128 | 8,2554 | 8,4116 | 0,1562 | 8,3335 | 33,0216 | 33,6464 | 33,334 |
| 256 | 8,2943 | 8,3724 | 0,0781 | 8,33335 | 33,1772 | 33,4896 | 33,3334 |
| 512 | 8,3138 | 8,3529 | 0,0391 | 8,33335 | 33,2552 | 33,4116 | 33,3334 |

**Tabla 1 - Cálculo del área mediante un número cada vez mayor de particiones**

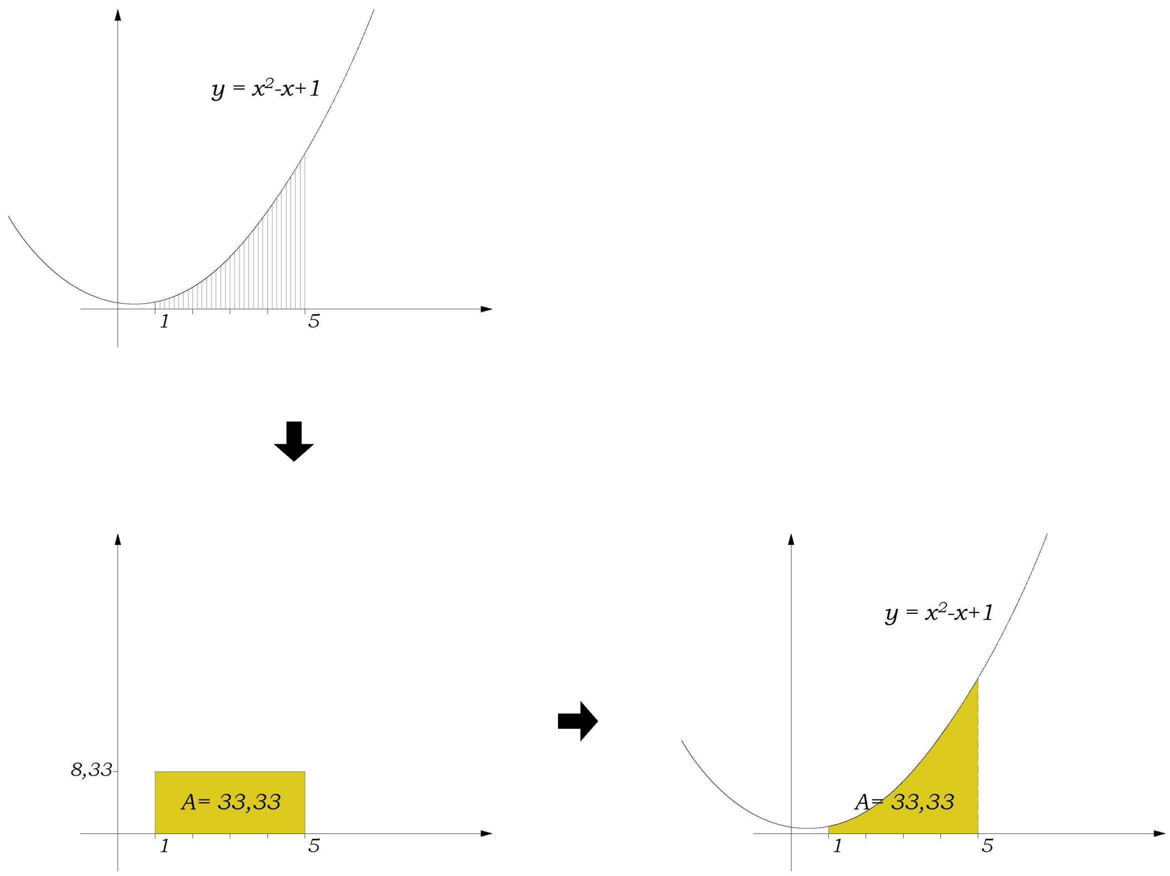


**Figura 10 – Tomando cada vez más particiones → Rectángulo equivalente → Área aproximada de la parábola**

Con la acotación que se produce de la altura media y del área, se debe aprovechar la ocasión para la discusión de límites, ya que las ideas sobre límites empiezan a desarrollarse cuando se pueden explorar situaciones en las que una sucesión se estabiliza o converge, y esto puede ser más real en una situación geométrica.

La primera etapa del aprendizaje del concepto de integral, basada en una ampliación al cálculo que los alumnos ya conocen de áreas, terminaría aquí. Esto introduce a los alumnos en la problemática del cálculo de áreas, dándose cuenta de que no es un problema baladí y de que ha ocupado numerosos estudios en la historia de las matemáticas. Además, el método utilizado realmente es similar al algoritmo de los trapecios usado en integración numérica, siendo, por tanto, atractivo introducir el tema de integración mediante métodos que se usan en cursos avanzados de cálculo infinitesimal, de forma totalmente intuitiva.

### 3.4.2. ETAPA 2: Integrar

Comenzamos esta etapa buscando en el diccionario y definiendo matemáticamente el verbo integrar.

La RAE define integrar como *dicho de las partes: constituir un todo.* Integrar, por tanto, en lengua y en matemáticas significa sumar, agregar, adicionar. Lo contrario de desintegrar.

Integrar una función en un intervalo dado significa sumar, agregar, todos los valores de la función. Pero ¿cómo sumamos todos los valores?, ¿cuántos hay?, ¿y qué “anchura” o “duración” tiene cada uno? Éste cálculo fue el problema al que se enfrentaron Newton y Leibniz y con ello nació el Cálculo, con mayúsculas.

**Actividad 1:**

Los puntos obtenidos por parte de un equipo de fútbol en cada una de las primeras 10 jornadas de liga han sido: 3,1,3,3,3,1,3,0,3,0. Es decir, la representación gráfica de la función será:

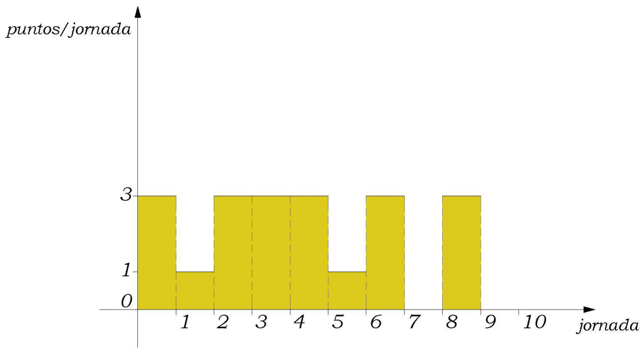


**Figura 11 - Puntos obtenidos en las primeras diez jornadas de liga**

La pregunta más frecuente es cuántos puntos acumula el equipo pasadas las 10 jornadas. Esta cuenta es bien sencilla: 3+1+3+3+3+1+3+0+3+0 = 20 puntos.

Hasta el momento no se observa ninguna conexión entre la primera etapa y la segunda. La pregunta acorde con la etapa anterior sería que hallasen el área de la función en el intervalo [0,10]. Al ser rectángulos, no es necesario usar el método de la altura media.

El área será:

$$A = 3 \cdot (1-0) + 1 \cdot (2-1) + 3 \cdot (3-2) + 3 \cdot (4-3) + 3 \cdot (5-4) +$$
$$+ 1 \cdot (6-5) + 3 \cdot (7-6) + 0 \cdot (8-7) + 3 \cdot (9-8) + 0 \cdot (10-9) = 20$$

Se multiplica la altura de cada rectángulo por su base que tiene anchura 1, puesto que a cada valor de la función (puntos/jornada) le corresponde la anchura unidad (una jornada). Además, hay que advertir que el cálculo de área como base por altura equivale en esta función al producto $jornada \cdot \frac{puntos}{jornada}$, que da como resultado la magnitud $puntos$. El análisis de magnitudes nos da la unidad en que se mide o a la que se refiere el área.

Conviene darse cuenta, por tanto, de que el cálculo del área de esta función es la suma de los puntos acumulados en las 10 jornadas de liga. Por tanto, el área equivale a una suma, es decir, una acumulación de, en este caso, diez contribuciones (jornadas) de anchura uno de la función. La función que representa la acumulación de puntos, es decir, el área, en cada jornada se muestra en la Figura 12.

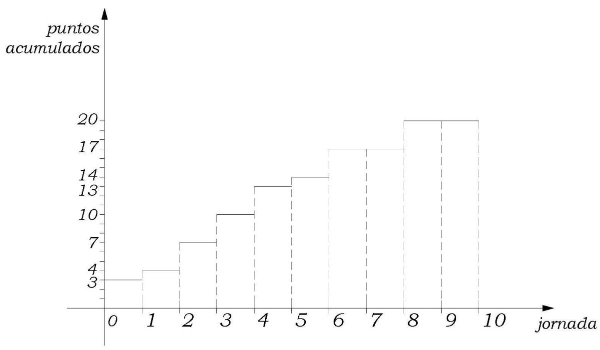


**Figura 12 - Puntos acumulados en las diez jornadas de liga**

A las preguntas iniciales añadiremos:

- ¿cuántos puntos hay? 10 (10 jornadas).
- ¿qué anchura o duración tiene cada uno? 1 (una jornada no puede dar más que una puntuación).
- ¿cómo sumamos los valores de todos los puntos? 3+1+3+3+3+1+3+0+3+0 = 20. O hallando el área. Las dos formas son válidas.

Integrar, por tanto, significa algo tan sencillo como contar acumulando, algo muy presente en la vida cotidiana. Y ese proceso de contar, o sumar, coincide con el cálculo del área de la función.

**Actividad 2:**

La siguiente función representa la velocidad de un coche en función del tiempo.

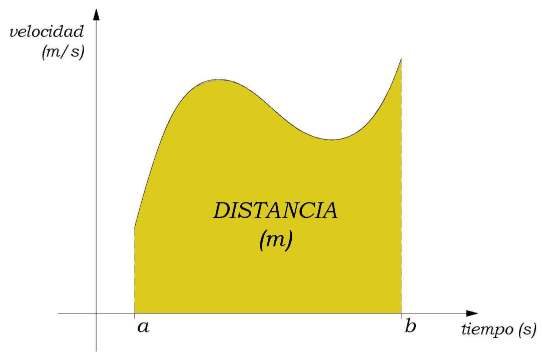


**Figura 13 - Velocidad de un coche en función del tiempo**

Si damos fe a la conclusión de la actividad anterior, el cálculo del área en el intervalo [a,b] de esta función será la suma de todos los puntos que lo forman. La pregunta será qué significado tiene calcular el área de una función que representa la velocidad; o qué nos proporciona la suma de todos sus valores.

Conviene comenzar fijándose en las magnitudes implicadas en la función para ver que el cálculo del área (base·altura) equivale a $s \cdot \frac{m}{s}$, así que lo que se obtendrán serán los metros, es decir, la magnitud distancia recorrida.

La suma de las contribuciones de cada punto será, por tanto, la distancia recorrida acumulada.

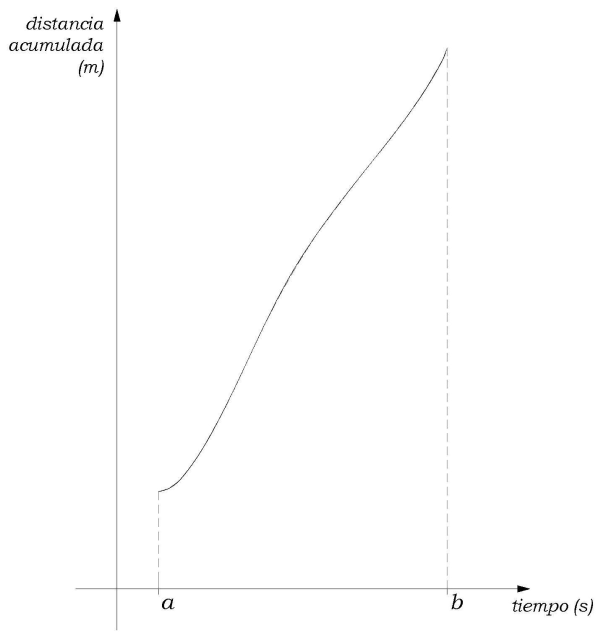


**Figura 14 - Distancia recorrida acumulada del coche en función del tiempo**

Pero el cálculo del área, o suma, no es tan sencillo como en el ejemplo anterior ya que no existen rectángulos y si consideramos puntos aislados de la función, por ejemplo el valor de la función en cada segundo, cabría preguntarse si el coche se mueve, por ejemplo, entre el segundo 1 y 2 ó entre el 2 y el 3, ya que entonces nos estaríamos "comiendo" todos los puntos situados entre 1 y 2, el 2 y 3, etc. Por tanto, para no "comernos" estos valores, consideraríamos cada vez más puntos en cada subintervalo. La anchura o duración de cada punto era de una unidad (una jornada) en la actividad anterior. Sin embargo, la anchura de los puntos que consideramos en esta actividad la desconocemos. Como cada vez necesitamos más puntos para no dejarnos ningún espacio "libre", esto nos llevaría a pensar que necesitaríamos infinitos puntos para calcular el área, o suma de todas las contribuciones, y que la anchura de cada punto es cada vez menor, hasta ser ínfima.

Esta reflexión nos lleva a pensar que el cálculo de un área equivale a una suma de infinitos puntos, es decir, a una acumulación de infinitas contribuciones de, en este caso, metros recorridos, y de anchura o duración muy pequeña, ínfima.

Volvemos a las preguntas iniciales:

- ¿cuántos puntos hay? Infinitos (cada uno será un instante de tiempo).
- ¿qué anchura o duración tiene cada uno? Ínfima (lo que dura un instante de tiempo).

- ¿cómo sumamos los valores de todos los puntos? Como no sabemos cuántos hay ni qué valor le corresponderá a cada uno, sólo lo podemos hacer con el cálculo del área, ya que no podemos realizar una sencilla suma finita.

El cálculo del área será lo que me dé la suma de todos los valores, es decir, la distancia total recorrida por el coche. No lo puedo saber de otra manera; de hecho, en la actividad anterior hemos sumado los puntos de todas las jornadas y lo hemos hallado muy fácilmente. Eso era porque la duración o anchura de cada contribución era de uno (una jornada). Sin embargo, si la duración no es la unidad no puedo sumar "a pelo" todas las contribuciones, sino su valor multiplicado por su anchura, o duración, o peso, es decir, sumo las minúsculas áreas.

Y como necesito el cálculo de un área de una función curva, puedo recurrir al método de la Etapa 1 del apartado anterior. Calculando la altura media (velocidad media) de la función en el intervalo, hallo un rectángulo de área equivalente. Su área será el área de la función velocidad, es decir, la acumulación de la distancia recorrida.

Así pues, lo que geométricamente vemos como un área puede representar multitud de magnitudes: distancias, toneladas, fuerzas, momentos de inercia, euros, energía, consumo de combustible, probabilidades, etc. Por tanto, el cálculo de un área, entendida como cualquier tipo de magnitud, será muy importante para resolver todo tipo de problemas presentes en la vida real y en la ciencia.

**Actividad 3:**

La siguiente función representa el precio de un aparcamiento en función del tiempo que lleva un coche aparcado (Figura 15).

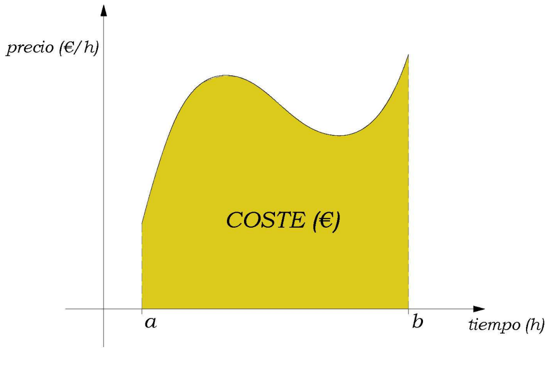


**Figura 15 - Precio de un aparcamiento en función del tiempo**

De nuevo, el cálculo del área nos llevaría a hallar una nueva magnitud: la acumulación, la suma de las infinitas contribuciones de cada parte de hora, nos proporciona el dinero total que debemos pagar, el coste (Figura 16). Es decir, $horas \cdot \frac{€}{horas} = €$.

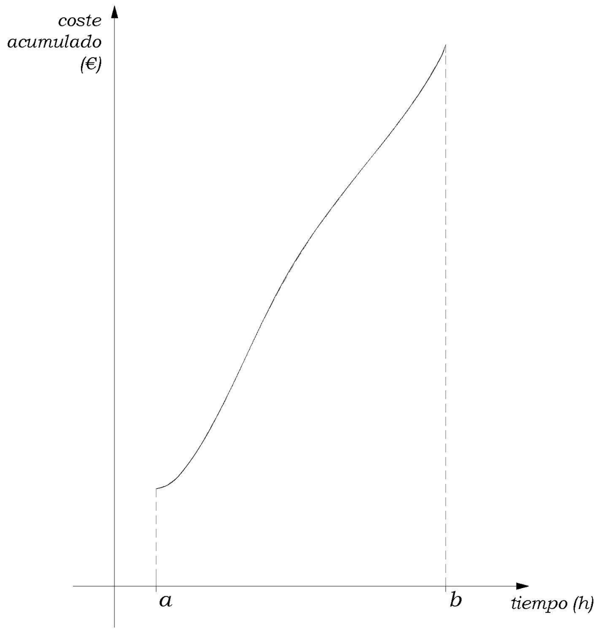


**Figura 16 - Coste acumulado del aparcamiento en función del tiempo**

**Actividad 4:**

Esta función representa el tiempo que tarda un operario en montar cada pieza en su nuevo trabajo (Figura 17). A medida que monta más piezas, emplea menos tiempo en cada una, puesto que va adquiriendo experiencia.

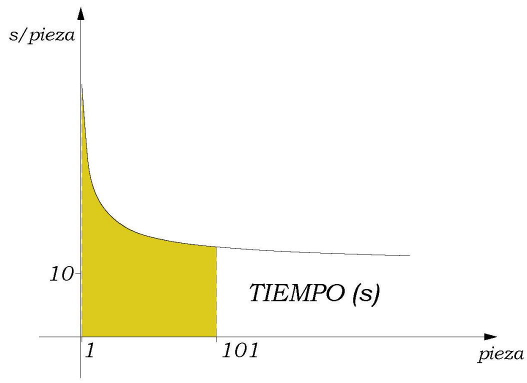


**Figura 17 - Tiempo empleado en montar cada pieza**

Se puede preguntar, por ejemplo, cuánto tiempo tardará en montar sus primeras 100 piezas. Dicha pregunta equivale a la suma del tiempo que tarda en montar cada pieza, es decir, una suma o acumulación de contribuciones, o el área de la función desde el comienzo hasta que termina con la pieza 100 (Figura 18). El producto de las magnitudes, o sea, el cálculo del área de la función, nos proporciona la magnitud tiempo: $piezas \cdot \frac{s}{pieza}$.

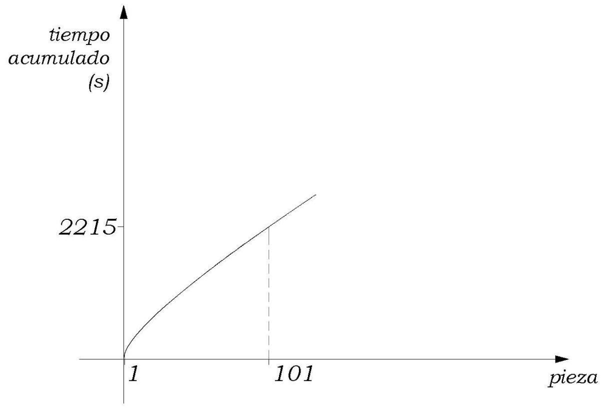


**Figura 18 - Tiempo acumulado en montar las cien primeras piezas**

**Actividad 5:**

En mi pared, formada por el rectángulo ABCD, tengo una diana definida por una curva. Todos los dardos van a caer dentro de la pared, pero sólo puntúan los dardos que caigan en la diana, es decir, la parte situada debajo de la curva.

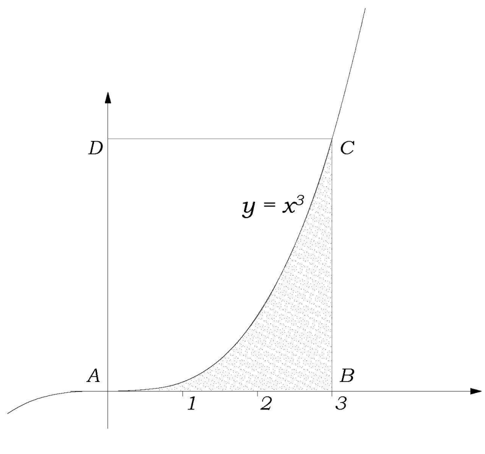


**Figura 19 - Área formada por la diana en la pared (rectángulo ABCD)**

La pregunta será cuál es la probabilidad de acertar en la diana. Como la probabilidad se define de forma laplaciana como el número de casos favorables dividido por el número de casos posibles, la idea será hallar el área de la pared, es decir, el rectángulo ABCD (casos posibles) y el área de la diana, o sea, el recinto definido bajo la curva (casos favorables).

El dardo puede caer en cualquier punto del rectángulo ABCD, el cálculo de dicha área así como el cálculo del área bajo la curva (la diana) será la suma de los infinitos puntos que forman la pared y la diana, respectivamente. Se observa de nuevo la relación entre la integral, el área y la suma infinita.

### 3.4.3. ETAPA 3: El teorema fundamental del cálculo.

La manera de calcular el área de las funciones de la etapa anterior, con objetivos tan diversos como sumar puntos en una competición o el tiempo que tarda un operario en montar piezas, puede basarse en el cálculo de la altura media, pero éste es un proceso tedioso. La búsqueda de una manera sencilla de calcular la integral es lo que llevó a Newton y a Leibniz a establecer las bases de lo que hoy conocemos como Cálculo Infinitesimal, a partir de la idea de sumar infinitas contribuciones de anchura ínfima. La notación que hoy usamos es la del matemático alemán.

Supongamos que queremos calcular el área bajo una curva definida por la función y=f(x) en el intervalo [a,x]. El valor de la integral será F(x) y la notación que usaremos será la siguiente:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

donde el símbolo $\int_a^x$ significa suma, *f(t)* es el valor de la función en el punto $t \in [a,x]$, es decir, el valor de la contribución y *dt* es la ínfima anchura (duración, peso) de dicha contribución.

Como hemos realizado en la etapa 1, el área de la curva la podemos aproximar mediante el producto de la altura media de la función por la anchura del intervalo considerado (la altura media la denotaremos con los extremos del intervalo considerado):

$$F(x) = M_a^x \cdot (x-a)$$

Si ampliamos el intervalo una distancia h, el área de la región considerada será:

$$F(x+h) = M_a^{x+h} \cdot (x+h-a)$$

Y si queremos calcular el área bajo la curva en el intervalo [x,x+h] (Figura 20), restaremos las dos áreas calculadas con anterioridad.

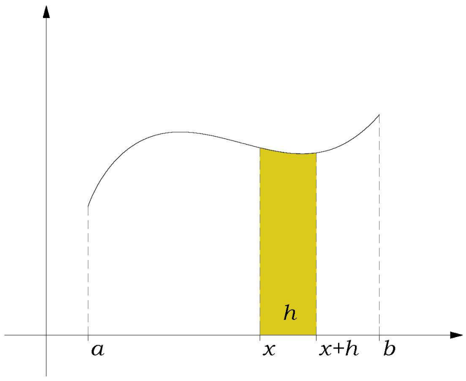


**Figura 20 - Área de la función en el intervalo [x,x+h]**

$$M_x^{x+h} \cdot (x+h-x) = M_a^{x+h} \cdot (x+h-a) - M_a^x \cdot (x-a)$$

La altura media de la función en el intervalo [x,x+h] será:

$$M_x^{x+h} = \frac{M_a^{x+h} \cdot (x+h-a) - M_a^x \cdot (x-a)}{h} = \frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

En la etapa 2 hemos visto como cada vez necesitamos mayor número de contribuciones de anchura cada vez más pequeña, es decir, infinitas contribuciones de anchura ínfima. Si queremos hallar la altura media en un intervalo de anchura ínfima realizaremos el límite cuando h→0, de la expresión anterior:

$$\lim_{h \to 0} M_x^{x+h} = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

$$M_x^x = F'(x)$$

$M_x^x$ representa la altura media de la función en un intervalo de anchura ínfima: el intervalo [x,x+h] cuando h→0, o sea, el intervalo [x,x]. Este valor es, lógicamente, el valor de la función en 'x': f(x). Por tanto:

$$f(x) = F'(x)$$

Esta expresión representa un puente, una conexión, importantísima en las matemáticas: la derivada y la integral son funciones inversas. Este resultado constituye la esencia del teorema fundamental del cálculo integral. Y es lo que buscaban Newton y Leibniz para hacer esos cálculos de infinitas contribuciones que nosotros, hasta el momento, sólo sabíamos aproximar con el método de la altura media.

La función F(x) recibe el nombre de primitiva o antiderivada de f(x) y nos va a permitir dar un salto importantísimo en nuestro cálculo de áreas, puesto que vamos a poder darle un aspecto analítico a la integral, no sólo numérico.

Y al ser una primitiva, el conjunto de todas las posibles primitivas es F(x)+C, lo que constituye una familia de funciones, donde la constante C recibe el nombre de constante de integración y a la integral $\int_a^x f(t)dt = F(x) + C$, integral indefinida de f(x) o, mejor, cálculo de primitiva.

Particularizando la integral indefinida para x=a y x=b, se obtiene la regla de Barrow:

x=a: $\int_a^a f(x)dx = F(a) + C \quad \rightarrow \quad 0 = F(a) + C \quad \rightarrow \quad F(a) = -C$

x=b: $\int_a^b f(x)dx = F(b) + C$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Esta expresión es sencilla si pensamos que F(x) representa el área acumulada por f(x) desde 0 hasta x. Por tanto, el área desde a hasta b se halla restando la acumulación hasta b menos la acumulación hasta a.

Las propiedades de la integral se extraen fácilmente de su observación gráfica:

- $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$ .

Por tanto, el área definida entre dos funciones será la integral de su resta:

$A = A_f - A_g = \int_a^b f - \int_a^b g = \int_a^b (f-g)$ .

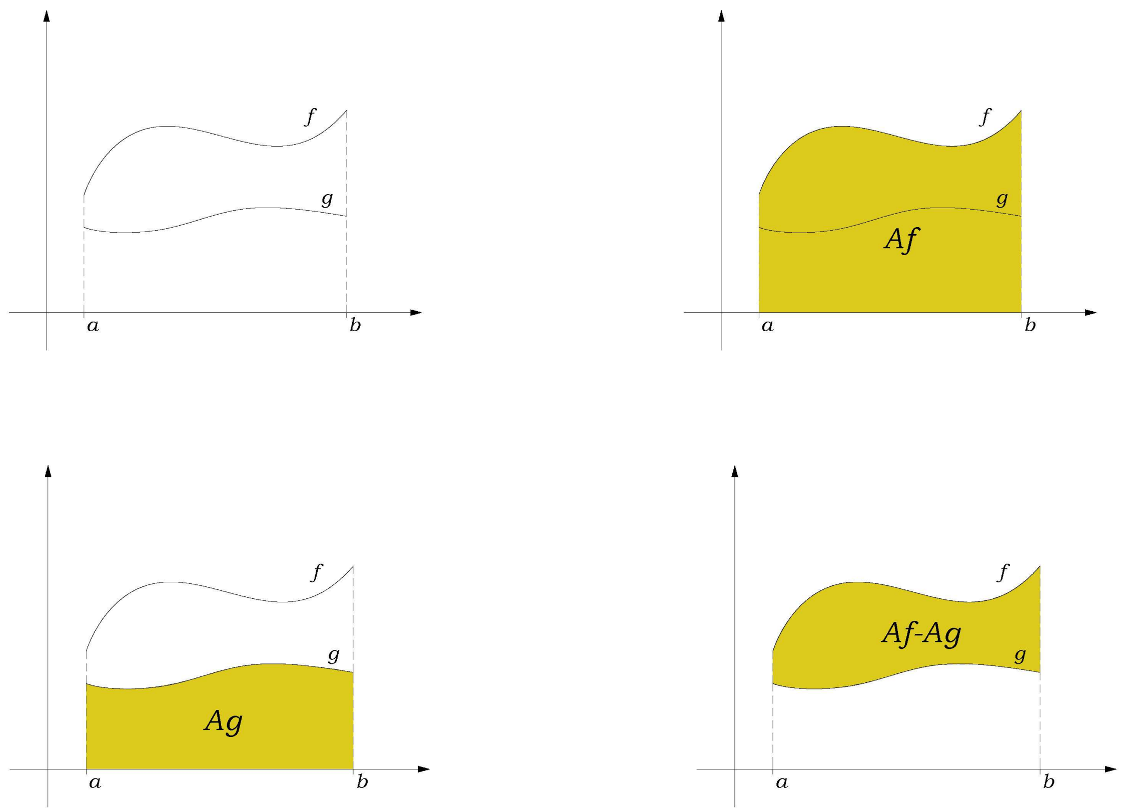


**Figura 21 - Área entre dos funciones en un intervalo [a,b]**

- $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$, si f es una función continua en [a,b] y $c \in (a,b)$.

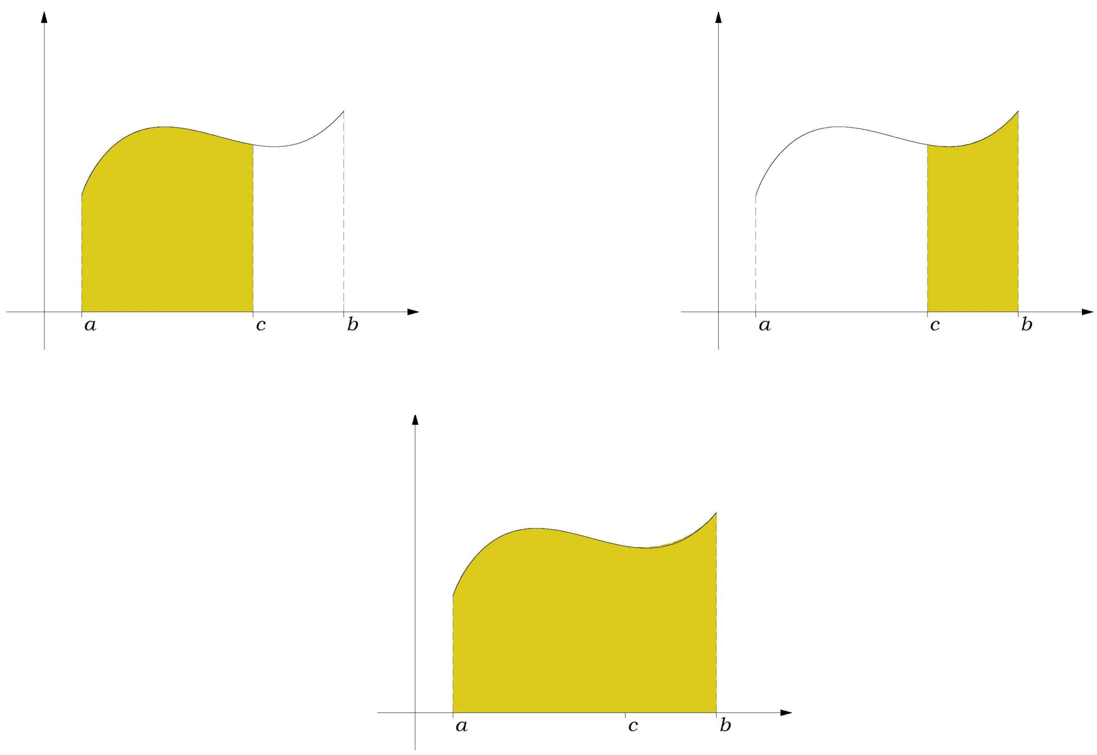


**Figura 22 - Área de la función en los intervalos [a,c], [c,b] y [a,b]**

- $\int_a^a f = 0$.
- $\int_a^b f = -\int_b^a f$.
- $\int_a^b k \cdot f = k \cdot \int_a^b f$.
- Si f es negativa en puntos del intervalo de integración ocurre lo siguiente:

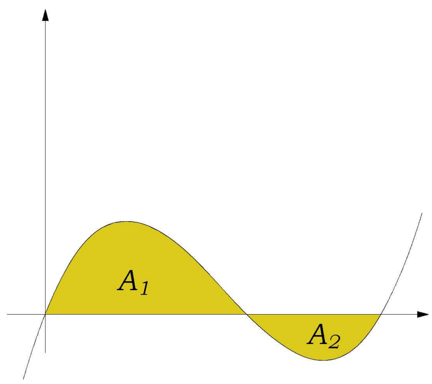


**Figura 23 - Área de la función por encima y por debajo del eje de abcisas**

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f = A_1 + (-A_2).$$

El subintervalo en que f es negativa proporciona naturalmente un área negativa ya que las alturas (el valor de las ordenadas) lo son.

Si se hallan áreas como tal, nos interesará que el área $A_2$ sea positiva tomando su valor absoluto o restándola a $A_1$:

$$\int_a^b f = \int_a^c f - \int_c^b f = A_1 - (-A_2) = A_1 + A_2$$

En cambio, si se halla otro tipo de magnitud, por ejemplo ingresos económicos, la parte negativa nos indicará serán ingresos negativos (pérdidas) y convendrá que mantengamos su signo para realizar la integración (suma) de forma correcta, que nos proporcionará el dinero acumulado.

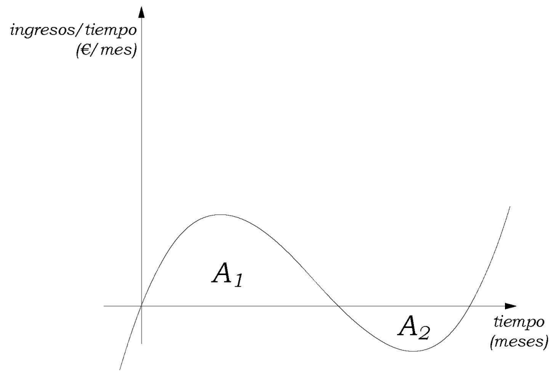


**Figura 24 - Área de la función por encima y por debajo del eje de abcisas**

$$\int_a^b f = A_1 + (-A_2) = A_1 - A_2$$

En esta tercera etapa los alumnos han trazado el camino entre integración (concepto ya conocido) y derivación. Tras una etapa muy gráfica, el inicio de ésta ha debido ser necesariamente analítico, para llegar al teorema final. Lo interesante es que se ha hecho con unos mimbres conceptuales muy sólidos establecidos en las dos primeras etapas. Y tras lo puramente analítico de esta etapa, hemos usado de nuevo la visualización gráfica para extraer algunas propiedades importantes de las integrales.

### 3.4.4. ETAPA 4: Cálculo de primitivas

En esta etapa tratamos el cálculo de primitivas de forma algorítmica, ahora que los alumnos ya están preparados conceptualmente para saber para qué lo hacen. No nos detendremos mucho el cálculo de primitivas puesto que son operaciones algorítmicas que los alumnos deben aprender a ejecutar con solidez. Lo que más me interesa son las manipulaciones algebraicas que deben realizar los alumnos sobre la expresión analítica de las funciones para poder llevar a cabo el cálculo. Dichas manipulaciones son el gran obstáculo con el que se encuentran, incluso en 2º de Bachillerato o en la universidad. Voy a describir algunas de estas manipulaciones y la propuesta sería que se entrenara a los alumnos en algunas de estas manipulaciones desde que se comienza a estudiar el álgebra.

El hallazgo del teorema fundamental del cálculo es toda una revolución para el cálculo de integrales y, por tanto, para el cálculo de áreas y de sumas infinitas. Poder hallar no sólo el área como un número, sino la función analítica F que nos da el área de una función f en cualquier intervalo facilita mucho las cosas, sobre todo si somos capaces de hallar dicha función F sabiendo que su derivada es f. O una pregunta sin tanto sentido práctico, quizá por pura curiosidad (por qué no): si conozco la función derivada, es decir, la función de pendientes de otra, cómo hallo la función de la que deriva.

Como ya sabemos derivar, podemos saber que una primitiva de la función $f(x)=2x$ puede ser $F_1(x)=x^2$. Pero también lo es la función $F_2(x)=x^2+1$, o la función $F_3(x)=x^2-4$, o la función $F_4(x)=x^2+\pi$, …

El conjunto de todas estas funciones primitivas de $f(x)=2x$ será, por tanto, $F(x)=x^2+C$, donde C es una constante que puede ser cualquier número real, y es la constante de integración que ya se ha comentado en la etapa anterior.

En la Figura 25 se representa la integración y la derivación como procesos inversos:

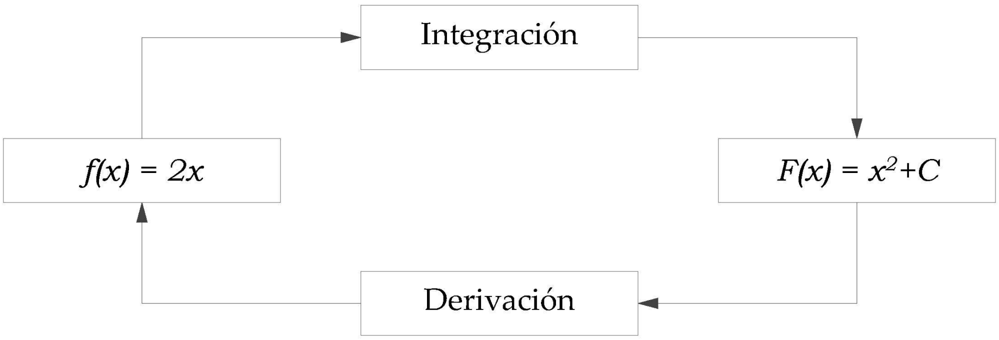


**Figura 25 - La integración y la derivación como procesos inversos**

### 3.4.4.1.Primitivas inmediatas

Las primitivas inmediatas surgen cuando se observa que el integrando se obtiene como resultado de la derivación de otra función de forma sencilla. Se trata, pues, de leer la tabla de derivadas de derecha a izquierda.

Se distinguen las primitivas inmediatas simples y las compuestas o cuasi-inmediatas. **Ejemplo:**

Simple: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, si n≠1 → Compuesta: $\int f' \cdot f^n dx = \frac{f^{n+1}}{n+1}$, si n≠1.

La forma simple es un caso particular de la compuesta cuando f=x y, por tanto, f′=1. Hay que darse cuenta de que las formas compuestas siempre necesitan de la derivada f′ de una función f presente en el integrando debido a la regla de la cadena:

$$\int f'(x)\cdot g(f(x))dx = G(f(x))+C$$

Así que las manipulaciones algebraicas irán en este sentido: obtener dicha función f′ para que el integrando tenga el aspecto de las formas inmediatas y así calcular la primitiva de forma sencilla.

Para lograr este tipo de expresiones, $f'\cdot f^n$ o cualquier otra, de las que se puede calcular la primitiva mediante una fórmula inmediata, puede ser simplemente necesario sumar/restar o multiplicar/dividir la expresión por un mismo número, sin alterar, por tanto, su valor.

- $x\cdot\left(3x^2-5\right)^5$, para que sea como $f'\cdot f^n$ hay que multiplicar y dividir por seis: $\frac{1}{6}\cdot 6x\cdot\left(3x^2-5\right)^5$.
- $\cot x$, para que sea como $\cot^2 x+1$, se suma y se resta uno: $\cot x+1-1$
- $\frac{x^2}{1+x^2}$, si se suma y se resta uno en el numerador y descomponemos obtenemos: $\frac{x^2}{1+x^2}=\frac{x^2+1-1}{1+x^2}=\frac{1+x^2}{1+x^2}+\frac{-1}{1+x^2}=1-\frac{1}{1+x^2}$.

Este tipo de técnica ya es conocido por los estudiantes cuando racionalizan una fracción con radicales en el denominador.

#### 3.4.4.2.Determinación de C

La determinación de la constante de integración es importante para no dar un resultado genérico del conjunto de primitivas de una función sino la función primitiva concreta de la función proporcionada en el enunciado. Para ello el enunciado da el valor concreto de la primitiva en un punto. A partir de ese valor se plantea una ecuación para hallar C.

**Ejemplo:**

Hallar la primitiva F(x) de f(x)=3x$^2$ que cumple que F(1)=2.

El conjunto de todas las primitivas es: $F(x)=\int 3x^2dx = x^3+C$ .

Pero como F(1)=2 $\rightarrow$ $F(1)=1+C=2 \rightarrow C=1$.

Por tanto, la primitiva concreta es $F(x)=x^3+1$.

### 3.4.4.3.Métodos

Para hallar la primitiva de una función, se debe reconocer primero si es uno de los tipos inmediatos o si se puede reducir a ellos realizando algún tipo de manipulación algebraica. En caso contrario, hay que aplicar algún método de integración. Existen numerosos métodos, pero sólo vamos a ver Descomposición, Por partes, Sustitución y Funciones Racionales. Nos centraremos, como ya se ha comentado antes, en las características algebraicas de cada uno de ellos.

**Descomposición:**

Proviene de la derivada de una suma:

$(f+g)'=f'+g'$

Por tanto, $\int (f+g)dx = \int fdx + \int gdx = F(x)+G(x)+C$

Cuando el denominador sólo tiene un factor, la expresión fraccionaria se puede separar en la suma de tantas fracciones como términos tenga el numerador:

$$\int \frac{x+1}{x}dx \rightarrow \frac{x+1}{x}=\frac{x}{x}+\frac{1}{x}=1+\frac{1}{x} \rightarrow \int\left(1+\frac{1}{x}\right)dx=\int dx+\int\frac{1}{x}dx = x+\ln x+C$$

Se puede sumar y restar un número sin alterar el resultado:

$$\int \tan^2 xdx \rightarrow \tan^2 x=\tan^2 x+1-1 \rightarrow \int\left(\tan^2 x+1-1\right)dx=\int\left(\tan^2 x+1\right)dx-\int dx=\tan x - x + C$$

**Por partes:**

El método de cálculo de primitivas por partes se basa en la derivada de un producto.

Sean u y v dos funciones derivables, la derivada de su producto es:

$d(uv) = udv + vdu \;\; \rightarrow \;\; uv = \int udv + \int vdu \;\; \rightarrow \;\; \int udv = uv - \int vdu$

Lo destacado de este método en cuanto a manipulaciones algebraicas lo encontramos en las primitivas de las funciones del tipo *"exponencial·trigonométrica"*, como por ejemplo $e^x \sin x$:

$\int e^x \sin x dx = \cdots = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx$

Tras aplicar dos veces el proceso del método, obtenemos de nuevo la misma integral del enunciado. Al contrario de estar mal, es una buena noticia, ya que, operando como si fuera una ecuación podemos hallar la solución. Para facilitar los cálculos llamamos a $\int e^x \sin x dx = I$, por tanto:

$$
\begin{aligned}
I &= e^x \sin x - e^x \cos x - I \\
2I &= e^x \sin x - e^x \cos x \\
I &= \frac{e^x \sin x - e^x \cos x}{2}
\end{aligned}
$$

$$\int e^x \sin x dx = \frac{e^x \sin x - e^x \cos x}{2} + C$$

**Sustitución:**

El método de sustitución o cambio de variable es una consecuencia de la derivación de funciones compuestas:

$(f \circ g)' = f' \cdot g'$

$\int f(x)dx = \int f\left[g(t)\right] \cdot g'(t)dt$ si x=g(t), dx=g'(t)dt

Este método algebraicamente tiene su interés en el cambio de variable que los estudiantes ya conocen de otros procedimientos algorítmicos en diversos temas del álgebra como las ecuaciones bicuadradas y exponenciales. Conviene que los alumnos se familiaricen desde pronto con estas técnicas matemáticas ya que en la universidad son muy usuales.

**Funciones Racionales:**

Las funciones racionales son de la forma $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$, donde p(x) y q(x) son polinomios y están definidos en todos los puntos de $\mathbb{R}$. La función estará definida en todos los puntos excepto los que anulen al denominador.

Aunque hay muchos tipos de funciones racionales y la primitiva de algunas ya se puede calcular mediante los métodos inmediatos, nos centramos en las más sencillas: aquellas en la que el denominador q(x) no tiene raíces complejas.

La transformación algebraica que se lleva a cabo es muy interesante y conviene que los alumnos la conozcan antes de llegar a este tema.

**Ejemplo:**

Se trata de escribir la expresión $\dfrac{3x+1}{x^2-5x+6}$ como suma de otras fracciones más sencillas de las que desconocemos el numerador y cuyos denominadores son los factores que dan lugar al denominador de la expresión racional inicial: $\dfrac{3x+1}{(x-2)\cdot(x-3)}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x-3}$.

Determinar los valores de A y de B que cumplen la igualdad anterior es el objetivo del problema. Para ello, se realiza la suma de las fracciones:

$$\frac{3x+1}{(x-2)\cdot(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}=\frac{A\cdot(x-3)+B\cdot(x-2)}{(x-2)\cdot(x-3)}$$

De esta forma, los numeradores $3x+1$ y $A\cdot(x-3)+B\cdot(x-2)$ son iguales. Forman, por tanto, una identidad. ¿Cómo calcular A y B? La característica de una identidad es que se cumple para cualquier valor que le demos a 'x'. Así que dando un par de valores podremos hallar A y B. Si los valores que le asignamos a 'x' son "con vistas" hallaremos las incógnitas más fácilmente. Y estos valores son las raíces del denominador:

$$3x+1=A\cdot(x-3)+B\cdot(x-2)$$

$$x=2 \;\rightarrow\; 7=A(-1) \;\rightarrow\; A=-7$$

$$x=3 \;\rightarrow\; 10=B$$

Por tanto, $\frac{3x+1}{x^2-5x+6}=\frac{-7}{x-2}+\frac{10}{x-3}$. Se puede comprobar que la suma de las dos fracciones da la expresión racional.

Y basándonos en este tipo de manipulación algebraica, se puede calcular la primitiva de la función racional inicial de forma sencilla:

$$\int \frac{3x+1}{x^2-5x+6}dx=\int \frac{-7}{x-2}dx+\int \frac{10}{x-3}dx=-7\ln(x-2)+10\ln(x-3)+C$$

### 3.4.5. Actividad final

Como última actividad, se puede replantear la actividad 2 de la etapa 1, donde se ha intentado calcular el área de la parábola $f(x)=x^2-x+1$ en [1,5], para realizarla en el resto de etapas.

**Etapa 1:**

Como se ha desarrollado durante la actividad, mediante el método de la altura media con cada vez más particiones del intervalo y, por tanto, una anchura cada vez menor de las mismas, se va ajustando el valor de la altura media y, a partir de ella, el valor del área. Tomando primero una partición y luego dos particiones, los alumnos observan cómo converge el valor del área. Con ayuda del ordenador, se efectúan cada vez más particiones y se observa como el valor de la altura converge a 8,333 y el área, por tanto, a 33,333.

**Etapa 2:**

En esta etapa se va a tratar de dar un sentido conceptual al cálculo del área de la parábola $f(x)=x^2-x+1$ en [1,5].

Hay que ponerle un nombre, una magnitud, a las variables x e y ( $f(x)$ ). Podemos suponer, por ejemplo, que la variable x significa el tiempo transcurrido desde la fundación de una empresa medido en años. Y la función $f(x)$ son los ingresos medidos en miles de euros de la empresa en cada instante. Así pues, por ejemplo, en el

instante en que se cumple el primer año desde la fundación ingresan 1.000 €, mientras que en el instante en que se cumple el quinto año ingresan 21.000 €. La pregunta sería cuál es el ingreso total acumulado en cuatro años: desde que se cumple primer año hasta que se cumple el quinto. Al igual que se ha razonado en la Actividad 2 de esta etapa, donde se calcula la distancia recorrida dada la función velocidad en cada instante, se concluye que este problema de acumulación de infinitas contribuciones (ingresos) de duración ínfima (instantes) corresponde al cálculo de un área. Así pues, aprovechando el cálculo realizado ya en la etapa 1, sabemos que la media de los ingresos (altura media) será de unos 8.333 € y la suma de todos los ingresos será de, aproximadamente, 33.333 €.

**Etapa 3:**

Entendido el problema, a partir de un análisis conceptual del mismo y con el cálculo aproximado de los ingresos acumulados con el método de cálculo de áreas de la altura media, usamos el teorema fundamental del cálculo para hallar la función área (ingreso acumulado) y la regla de Barrow para su valor de 1 a 5 de manera exacta.

¿Cuál es la función cuya derivada es $f(x) = x^2 - x + 1$? Si sabemos derivar será fácil concluir que la función área (ingreso acumulado) será: $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + C$, donde C es una constante ya que su derivada es 0. Si sustituimos cualquier valor de x en la función F(x), hallaremos los ingresos acumulados por la empresa desde el instante 0 (de fundación) hasta el instante x.

¿Cuál es el ingreso acumulado desde el primer año hasta el quinto? Si hacemos F(5) sabremos cuál es la acumulación hasta el instante 5 años y con F(1) la acumulación hasta el instante 1 año. Así pues, por la regla de Barrow, F(5)-F(1) nos proporciona el ingreso entre el primer año y el quinto:

$$F(5) - F(1) = \frac{5^3}{3} - \frac{5^2}{2} + 5 + C - \left( \frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} + 1 + C \right) = \frac{100}{3}$$

Ahora hemos logrado un valor totalmente exacto, así que el valor exacto del área , es decir, del ingreso acumulado es: $100/3$ miles de euros, que son, redondeando a la unidad 33.333 €, valor que ya habíamos obtenido tras un laborioso proceso de cálculo de alturas medias. El cálculo tedioso desparece con la llegada del teorema fundamental del cálculo y la relación que introduce entre la integral y la derivada.

**Etapa 4:**

En la etapa 4 se introduce el cálculo de primitivas de forma inmediata y mediante métodos, lo que nos provee de técnicas sólidas para hallar la primitiva de cualquier función, algo que no siempre es sencillo.

La primitiva de la función de la actividad la hemos hallado en la etapa 3 porque sabemos derivar y la hemos extraído "a ojo"; pero por los métodos de cálculo de primitivas de la etapa 4, la podemos hallar sin pensar demasiado:

Sabemos que: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, por tanto:

$$\int \left(x^2 - x + 1\right) dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} - \frac{x^{1+1}}{1+1} + x = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + C$$

Y con la primitiva calculada de forma algorítmica, usamos la regla de Barrow para saber el área (ingreso acumulado) entre 1 y 5: $F(5) - F(1) = \frac{100}{3}$ miles de euros.

# 4. Modelo de Enseñanza

Por la premura existente en todo momento en el curso de 2º de bachillerato, las clases que debíamos impartir tanto mi compañero como yo en nuestras prácticas en "Escuelas de Artesanos" debían tratar de los temas de "Integral indefinida. Primitivas" y "Aplicaciones de las integrales". Concretamente me encargué yo de preparar las clases para el primer tema. Para ello contaba con 4 sesiones de 50 minutos cada una, tiempo insuficiente para explicar el concepto de primitiva y todos los métodos de cálculo de primitivas existentes teniendo en cuenta que no lo habían visto en 1º de bachillerato.

Comenzar el tema haciendo una introducción a la problemática histórica del cálculo de áreas y definiendo la integral como tal no era posible ya que, además de que el tiempo se echaba encima, el profesor tampoco quería modificar su programación; algo a lo que, obviamente, no tenía nada que objetar.

**1º sesión, 50 minutos:**

Comencé la primera sesión planteando la función $f(x)=2x$ y preguntando por cuál es la función cuya derivada es $f(x)$. Obtuve la respuesta inmediata de varios de los alumnos: $F(x)=x^2$. Tan sólo uno, del que ya en sesiones anteriores a mi puesta en escena me había dado cuenta de que le gustaban las matemáticas, me dijo que podía ser, por ejemplo, $x^2+1$. A partir de ahí planteé el conjunto de funciones que pueden ser primitivas de $f(x)=2x \rightarrow F(x)=x^2+C$.

Después de exponer las propiedades básicas del cálculo de primitivas, pasamos a ver las inmediatas simples y compuestas (cuasi-inmediatas). Hice hincapié, como lo he hecho en el apartado 3.4.4., en que la clave para calcular primitivas es un buen manejo de las expresiones algebraicas. El que sabe álgebra, no suele tener problemas en cálculos de primitivas. Y, también, el que sabe derivar, encuentra muchas similitudes, pues en este momento, y aunque no se les haya justificado, ya saben que la derivación y la integración son procesos contrarios.

La última parte de la clase la dedicamos a hacer ejercicios, unos de forma conjunta, en la pizarra, y otros de forma individual, para que los alumnos se dieran cuenta de primera mano de las dificultades propias del cálculo de primitivas. Por último, les recomendé la realización de varios ejercicios relacionados con lo que habíamos explicado.

**2º sesión, 50 minutos:**

La segunda sesión comenzó comentando dudas que habían asaltado a los alumnos al hacer los ejercicios propuestos en casa. De nuevo hice hincapié en que conocieran las manipulaciones algebraicas que hay que llevar a cabo y, sobre todo, en que sepan cuándo es necesario realizarlas.

Posteriormente vimos el método Por Partes, el cual justifiqué de la forma explicada en el apartado 3.4.4. Además, les intenté ayudar con la famosa regla nemotécnica "un dia vi una vaca…". Vimos que hay primitivas por partes en las que hay que usar el procedimiento más de una vez para llegar al resultado final e, incluso, como hemos visto en el apartado 3.4.4., se obtiene la misma integral que en el enunciado tras varias realizaciones del método. Con una sencilla resolución de tipo ecuación se llega al cálculo de estas primitivas.

Aprovechando el fin de semana, les pedí que hicieran ejercicios del libro, de tipo inmediatas y por partes, que me han servido como experimento para el apartado 5 y con los que pude comprobar las dificultades principales con las que se encuentra un alumno la primera vez que se enfrenta al cálculo de una primitiva, y las posibles dificultades surgidas a raíz de mi explicación.

**3º sesión, 50 minutos:**

La tercera sesión comenzó tal y como lo hizo la segunda. Se vieron las dificultades con las que se habían encontrado los alumnos al realizar los ejercicios propuestos para el fin de semana. Dichas dificultades están detalladas en el apartado 5.

Tras hacer ejercicios, expliqué los métodos de Sustitución y de Funciones Racionales planteando a la vez ejercicios de dificultad gradual. Lo más importante, de nuevo, es mostrar a los alumnos que la clave es el buen manejo del álgebra y saber convertir expresiones en otras equivalentes para obtener integrandos que nos permitan calcular la primitiva correspondiente con los métodos que sabemos.

Al final se hicieron diferentes ejercicios de forma conjunta e individual para reforzar los nuevos métodos aprendidos.

**4º sesión, 50 minutos:**

La última sesión de que dispuse la dedicamos íntegramente a hacer ejercicios para reforzar todos los tipos de cálculo de primitivas vistos hasta el momento.

Los alumnos expusieron algunas de sus dudas, donde constaté que la mayoría eran de tipo algebraico. Los métodos y las primitivas inmediatas los entienden con mayor facilidad que las manipulaciones de tipo algebraico que es necesario llevar a cabo para realizarlos.

Y así acabé la puesta en práctica de la unidad didáctica de "Cálculo de primitivas". No fue la mejor manera posible de iniciar a los alumnos en el estudio de la integral pero, al menos, intenté lograr que estuvieran preparados para encarar el cálculo de la primitiva de cualquier función pensando, sobre todo, en el tema siguiente en el que verían aplicaciones más concretas, como el cálculo de áreas o volúmenes, donde el cálculo de la primitiva debe ser algo automático.

Las últimas clases del curso fueron las impartidas por mi compañero Salvador, que les explicó las aplicaciones de las integrales, que se centran en 2º de bachillerato en el cálculo de áreas y de volúmenes, sin mencionar más aplicaciones o significados del concepto integral. Lo hizo de manera muy estructural y esquemática, proporcionando a los alumnos métodos procedimentales para resolver cualquier ejercicio de cálculo de áreas, sea entre una curva y dos rectas verticales dadas, el eje de abcisas, o entre dos curvas, sin que sea necesario representarlas gráficamente.

Por ejemplo, para realizar una integral definida cualquiera, $\int_a^b f(x)dx$, en lugar de representar la función en el intervalo en que se quiere integrar [a,b], simplemente realizaba la ecuación f(x)=0 para ver si había algún punto dentro del intervalo en que la función se anulaba, lo que indicaría que la función cambia de signo y, por tanto, habría que considerar el valor absoluto del área donde la función sea negativa.

Esto, además de conllevar algo de riesgo, es casi más costoso que representar la función y ver su comportamiento en el intervalo de integración. Sobre todo hoy en día, que se pueden usar ordenadores o calculadoras para realizar representaciones gráficas.

# 5. Modelo de Actuación

En este punto se van a mostrar los experimentos llevados a cabo con los estudiantes tras impartirles las clases descritas en el apartado anterior.

Como ya he comentado, tras las dos primeras sesiones de clase, los alumnos realizaron un cuestionario con primitivas de tipo inmediatas (simples y compuestas) y con el método por partes, lo que se había dado hasta la fecha. Con eso constaté una buena cantidad de errores, sobre todo de tipo algebraico. Esta prueba era voluntaria y la realizaron 10 alumnos.

La segunda prueba que realizamos fue el examen final de evaluación donde los alumnos ya habían dado las sesiones correspondientes a mis clases y a las de mi compañero. Estaban preparados, por tanto, para el cálculo de primitivas y el cálculo de áreas con las integrales definidas. El examen lo realizaron 17 alumnos.

## 5.1. Errores de tipo algebraico

### 5.1.1. Descomposición

Los errores de descomposición son en su mayoría por omisión, es decir, para que la función tenga el aspecto de alguna de tipo inmediato y aplicar así alguna de las fórmulas de la tabla es necesario realizar descomposiciones a expresiones fraccionarias, fracciones o radicales, que los alumnos en muchas ocasiones no alcanzan a visualizar, dejando el ejercicio sin acabar.

Cuando el denominador se expresa como un único factor, la expresión se puede descomponer en suma de fracciones donde los numeradores son los términos del numerador de la fracción original.

- $\dfrac{x+2}{(x+1)^2-2x}=\dfrac{x+2}{x^2+1}$ debió continuar: $\dfrac{x}{x^2+1}+\dfrac{2}{x^2+1}$
- $\dfrac{3x+1}{x^2+4}$ debió continuar: $\dfrac{3x}{x^2+4}+\dfrac{1}{x^2+4}$

Los dos ejemplos anteriores son descomposiciones que dos alumnos dejaron en blanco pensando que no había fórmula para calcular dichas primitivas. Justamente, se insistió en que cuando parece que no existe dicha fórmula, hay que realizar cálculos algebraicos para lograr expresiones que sí la permitan.

El siguiente ejemplo muestra lo contrario. El alumno intenta hacer una descomposición, pero de forma errónea:

- $\frac{\cos x}{1+\sin x} \neq \frac{\cos x}{1} + \frac{\cos x}{\sin x}$
- $\frac{x^2}{1+x^2} \neq \frac{x^2}{1} + \frac{x^2}{x^2} = x^2 + 1$

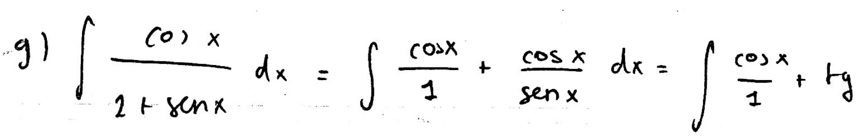


**Figura 26 - Error en la descomposición de una expresión algebraica**

Los siguientes ejemplos son también cálculos dejados en blanco por no saber seguir:

- $\sqrt{2x^3} = \left(2x^3\right)^{1/2}$ debió continuar: $\sqrt{2} \cdot x^{3/2}$
- $\frac{1}{\sqrt{5x^3}} = \left(5x^3\right)^{-1/2}$ debió continuar: $\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot x^{-3/2}$

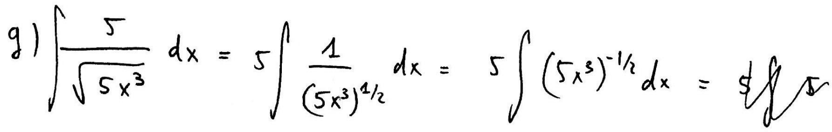


**Figura 27 - No sabe seguir descomponiendo la potencia de un producto**

No usan la regla algebraica que la potencia de un producto es el producto de las potencias: $\left(a \cdot b\right)^x = a^x \cdot b^x$

### 5.1.2. Suma/resta o producto/división por un mismo número

En ocasiones, para obtener expresiones más sencillas o que nos ayuden a realizar ciertos cálculos, es necesario multiplicar y dividir (o sumar y restar) una expresión por un mismo número, manteniendo la equivalencia entre las expresiones. Es un procedimiento conocido por los alumnos para racionalizar fracciones, por ejemplo.

Esta técnica ha sido en general bien usada por los alumnos. Lo que conlleva más dificultad de visualización es sumar/restar un mismo número.

Y en ocasiones aplican mal esta técnica algebraica ya que multiplican y dividen por la variable 'x', cosa que no tiene por qué ser incorrecta, pero extraen la variable fuera de la integral a conveniencia:

- $\int \frac{1}{4+x^2}\,dx \neq 2x \cdot \int \frac{2x}{4+x^2}\,dx = 2x \cdot \ln\left|4+x^2\right| + C$

### 5.1.3. Simplificación

El problema en muchas ocasiones es no saber simplificar las expresiones y dejarlo en blanco o simplificarlas de forma errónea:

- $\frac{2\sqrt[3]{x}}{5x}$ debió continuar: $\frac{2x^{1/3}}{5x} = \frac{2x^{-2/3}}{5} = \frac{2}{5} \cdot x^{-2/3}$
- $\frac{4^x + 6^x}{2^{x-1}}$ debió continuar: $\frac{2^{2x} + 2^x \cdot 3^x}{2^x \cdot 2^{-1}} = 2 \cdot \frac{2^{2x} + 2^x \cdot 3^x}{2^x} = 2 \cdot \left(2^x + 3^x\right)$

En otras ocasiones intentar llegar a una expresión simplificada pero sin acierto:

- $\sqrt{x\sqrt{x^2\sqrt{x^3}}} \neq x^{1/2} + x^{2/4} + x^{3/8} = ?$ debió haber escrito: $x^{1/2} \cdot x^{2/4} \cdot x^{3/8} = x^{11/8}$.

### 5.1.4. Manipulación

En este punto incluyo las expresiones cuya primitiva es la función *arctan* o *arcsin* donde hay que realizar manipulaciones algebraicas algo más complejas que en los puntos anteriores.

$$\int \frac{f'}{1+f^2}dx = \arctan f \qquad \int \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}dx = \arcsin f$$

**Ejemplo:**

$$\frac{1}{4+x^2} = \frac{1/4}{1+x^2/4} = \frac{1/4}{1+(x/2)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1/2}{1+(x/2)^2}$$, por tanto

$$\frac{1}{2}\int \frac{1/2}{1+(x/2)^2}dx = \frac{1}{2}\cdot\arctan(x/2)+C$$

- Realiza bien la manipulación pero termina mal:

$\int \frac{1/4}{1+(x/2)^2}dx \neq \frac{1}{4}\cdot\arctan(x/2)+C$, considera que $f'=1$ y $1/4$ es una constante.

- No realiza bien la manipulación:

$\int \frac{1}{4+x^2}dx \neq \int \frac{1/4}{1+(x/4)^2}dx = \arctan(x/4)+C$, considera que $x^2/4 = (x/4)^2$.

$\int \frac{1}{4+x^2}dx \neq \frac{1}{4}\int \frac{1/4}{1+(x/2)^2}dx = \frac{1}{4}\cdot\arctan(x/2)+C$, considera que $1/4$ es al mismo tiempo constante que saca fuera de la integral y $f' = 1/4$.

## 5.2. Errores de cálculo de primitivas

Estos tipos de errores están más relacionados con el propio cálculo de primitivas y sus propiedades. Puede ser que, aunque sea obvio, no vean un tipo de integral inmediato, puede ser que incumplan alguna propiedad del cálculo de primitivas, que no apliquen correctamente un método (en este caso el método por partes), o puede ser que no determinen correctamente el valor de la constante de integración.

### 5.2.1. No visualización de un tipo inmediato

Suele ocurrir que en expresiones con funciones trigonométricas o logarítmicas, esté presente una función y su derivada, con lo que el cálculo de la primitiva es inmediato o casi inmediato haciendo algún arreglo algebraico. También ocurre con funciones racionales donde el numerador es la derivada del denominador y, por tanto, es una primitiva de tipo logaritmo neperiano.

- $\int \sin 3x \cdot \cos 3x \cdot dx$, no lo relaciona con $f' \cdot f^n$.

Debió continuar: $\frac{1}{3}\int \sin 3x \cdot 3 \cdot \cos 3x \cdot dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{(\sin 3x)^2}{2} + C$.

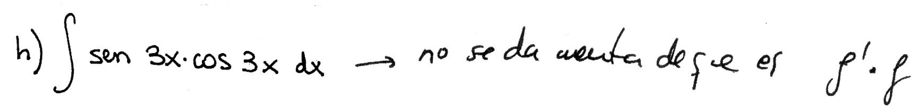


**Figura 28 - No se da cuenta de que es un tipo inmediato**

- $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}+3}} dx$, no lo relaciona con $f' \cdot f^n$. Debió expresar la función como:

$e^{2x} \cdot \left(e^{2x}+3\right)^{-1/2} = \frac{1}{2} \cdot 2e^{2x} \cdot \left(e^{2x}+3\right)^{-1/2}$, y por tanto:

$$\frac{1}{2}\int 2e^{2x} \cdot \left(e^{2x}+3\right)^{-1/2} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(e^{2x}+3\right)^{1/2}}{1/2} = \sqrt{e^{2x}+3} + C$$

- $\int \frac{\cos x}{1+\sin x} dx$, no lo relaciona con $\frac{f'}{f}$. Por tanto: $\int \frac{\cos x}{1+\sin x} dx = \ln\left|1+\sin x\right| + C$

### 5.2.2. Incumplimiento de las propiedades

En este punto he observado que convierten la integral de un producto en el producto de dos integrales:

$$\int f \cdot g \neq \int f \cdot \int g$$

Este tipo de fallo es un caso particular de un mecanismo de producción de errores que ha sido observado en múltiples ocasiones y hemos visto también en el tema sobre álgebra en el máster. Como estudió de forma sistemática Matz (1982), dicho mecanismo consiste en extender el dominio de aplicación de una regla que es correcta a un dominio en el que no es correcta. Es un mecanismo mental que produce este tipo de errores. Lo llamó "overgeneralization" o sobregeneralización de modelos lineales.

Lo que ahí se está haciendo es extender la distributividad de la integral sobre la suma, lo que es correcto, a la distributividad de la integral sobre el producto, que no es correcto. Esto se puede deber al establecimiento erróneo de la analogía entre las dos situaciones o, incluso, a la similitud visual.

- $\int \frac{1}{x^2} dx \neq \int \frac{1}{x} dx \cdot \int \frac{1}{x} dx = \ln x \cdot \ln x = (\ln x)^2 + C$

- $\int x \cdot \ln x dx = \int x dx \cdot \int \ln x dx = ?$, es una integral por partes que al descomponerla en producto de dos, algo incorrecto, no sabe continuarla aunque la primitiva del *ln(x)* se realiza también por partes, método que no parece tener bien asimilado.

## 5.3. Método por partes

En este punto incluyo los errores de los estudiantes relativos a los ejercicios de aplicación del método por partes.

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

- Escriben una función como *u* y otra como *v* en lugar de como *dv*. $\int \arctan x \cdot dx \rightarrow$ $u = \arctan x$, $v = dx \rightarrow du = \frac{1}{1+x^2} dx$, $dv = 0$.

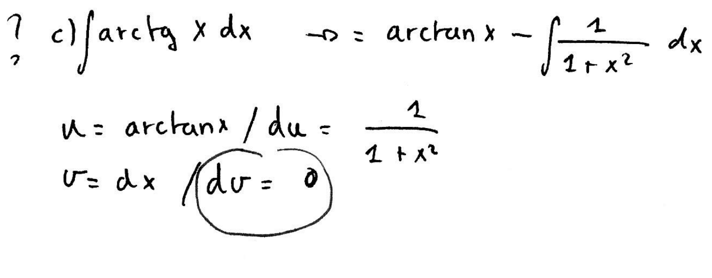


**Figura 29 - Error en el método por partes: toma *v* en lugar de *dv***

- Cuando el método hay que aplicarlo más de una vez en un mismo cálculo, algunos alumnos lo dejan pensando que está mal.

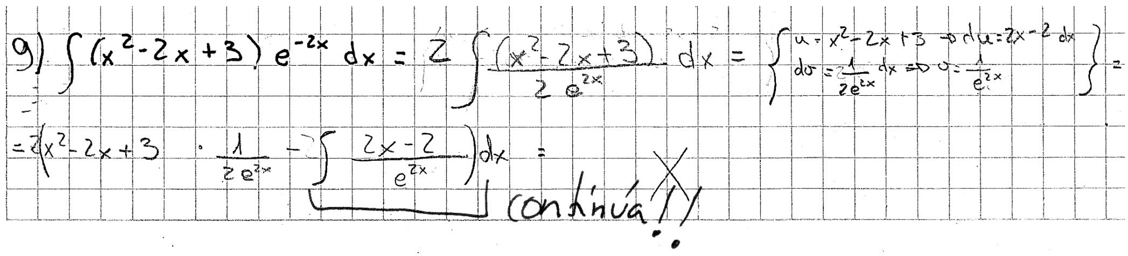


**Figura 30 - No continúa aplicando de nuevo el método por partes**

- Como se ha comentado en el apartado 3.4.4. (etapa 4), en las de tipo *"exponencial·trigonométrica"* hay que efectuar el método dos veces para obtener la misma integral que al principio. Entonces se resuelve como si fuera una ecuación. Algunos alumnos se quedan en blanco cuando llegan a este punto.

- $\int x \cdot \ln x dx \rightarrow u = x$ luego $du = dx \rightarrow dv = \ln x dx$ luego $v = {}^{1}\!/_{x}$. Para pasar de *dv* a *v* deriva en lugar de integrar. Ha realizado, además, una mala elección; debería haber tomado $u = \ln x$ y $dv = xdx$.

- $\int x^3 e^{x^2} dx \rightarrow u = x^3,\ dv = e^{x^2}$. Se queda bloqueado porque no sabe hallar *v*, ya que no es inmediato calcular la primitiva de $e^{x^2}$. Si hubiera descompuesto: $\int x^2 \cdot x \cdot e^{x^2} dx \rightarrow u = x^2,\ dv = x \cdot e^{x^2}$, podría haber calculado *v* fácilmente.

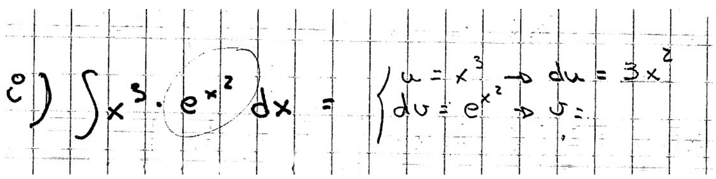

**Figura 31 - Elige un *dv* difícilmente integrable**

## 5.4. Determinación de la constante de integración

Este error se produce cuando han calculado correctamente el conjunto de primitivas F(x)+C pero se puede determinar con exactitud C ya que el enunciado proporciona el valor de la primitiva en un punto concreto.

**Ejemplo:**

El enunciado dice que $F(1) = \frac{3}{4}$.

$$F(x) = \int x \cdot \ln x dx = \cdots = \frac{x^2}{2} \cdot \left( \ln x - \frac{1}{2} \right) + C$$

$F(1) = -\frac{1}{4} + C = \frac{3}{4} \rightarrow C = 1$. Por tanto $F(x) = \frac{x^2}{2} \cdot \left( \ln x - \frac{1}{2} \right) + 1$

- $F(1) = -\frac{1}{4} + C$. Esto lo hace bien pero hace $C = \frac{1}{4}$. Es decir, ha interpretado que debe igualar a cero F(1) en lugar de igualar a $\frac{3}{4}$.

- $F(1) = -\frac{1}{4} + C$. Dos alumnos se quedan ahí. No igualan a $\frac{3}{4}$.

## 5.5. Error en integrales definidas

El error más común cometido en las integrales definidas es derivado de la integral propuesta en el examen: el cálculo del área de la curva $\frac{1}{4+x^2}$ entre los ejes y la recta x=2.

$$A = \int_0^2 \frac{1}{4+x^2} dx = \cdots = \left[ \frac{1}{2} \cdot \arctan\left( \frac{x}{2} \right) \right]_0^2 = \frac{1}{2} \cdot (\arctan 1 - \arctan 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8} u^2$$

La mayoría de los alumnos escriben que $\arctan 1 = 45$, algo que seguramente extraen de la calculadora, obviando que este resultado es en grados y se necesita poner en radianes puesto que estamos hablando del cálculo de un área. El resultado final es, por tanto, en la mayoría de los alumnos $A = 22{,}5u^2$ en lugar de $A = \frac{\pi}{8} u^2$. La diferencia, tratándose de un área, es enorme y da lugar a un error bastante grave (22,5 es aproximadamente 57 veces más grande que $\frac{\pi}{8}$).

# 6. Conclusiones

En las cuatro etapas de la propuesta didáctica se sumerge a los alumnos en la problemática que históricamente supuso el germen que originó el Cálculo.

Primero se aborda el cálculo de áreas de curvas desde un enfoque totalmente **aritmético**. De alguna forma es una especie de "buscarse la vida" con lo que se sabe hasta el momento para el cálculo de un área. Este cálculo se sabe que es aproximado pero convergente. Tras un par de iteraciones efectuadas por los alumnos para darse cuenta de dicha convergencia, el profesor puede tener preparado un programa en el ordenador que calcule el resto de iteraciones para evitar tediosos cálculos a los alumnos, y confirmar así la convergencia tanto de la altura media M como, por tanto, del área A de la figura que forma la curva.

Posteriormente, en la etapa 2, se le da sentido **conceptual** al cálculo de áreas. No es sólo el cálculo de un área geométrica lo que se halla sino que ésta puede significar cualquier magnitud medible ya que tiene una íntima relación con la suma de infinitas contribuciones de anchura cada vez menor (ínfima). De esta forma el sentido conceptual que se le da a la integral es completo: qué, cómo, cuándo, por qué.

La tercera etapa se ocupa de introducir una **notación** adecuada. Como la suma de infinitas contribuciones de anchura ínfima equivale a un área, se usa también el método de la altura media para hallar un área muy pequeña y llegar finalmente al descubrimiento matemático más importante del siglo XVII: el **teorema fundamental del cálculo**. Éste relaciona la derivación con la integración, de manera que a partir de este momento se pueden calcular áreas, o sea, sumas de infinitas contribuciones de anchura ínfima, conociendo la primitiva de la función que representa dicha área o dichas contribuciones.

Conocida la relación entre derivación e integración, la etapa 4 se encarga de proporcionar métodos para calcular primitivas de forma totalmente mecánica o **algorítmica**. Se trata, así, de calcular la primitiva de una función y, a partir de ella, el área que ocupa en un determinado intervalo conociendo estrategias puramente mecánicas en las que es necesaria mucha destreza en el manejo de expresiones algebraicas.

En la Figura 32 se observa este desarrollo.

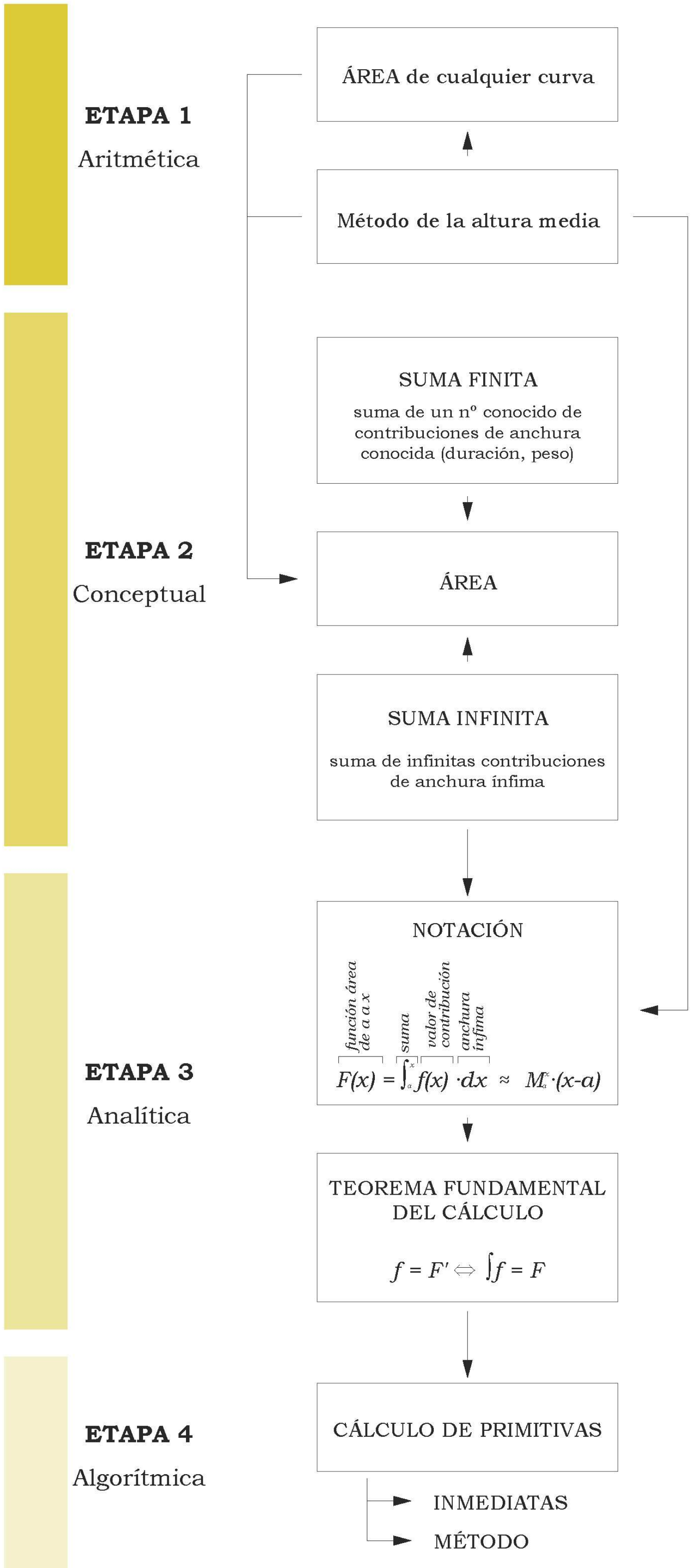


**Figura 32 – Desarrollo de ideas y aprendizaje en las cuatro etapas**

La pregunta obvia y fundamental sería ¿en qué cursos estructurar estas etapas? Se pueden estructurar en cuatro cursos diferentes, tantos como etapas. La elección del orden de las etapas no ha sido aleatoria:

**ETAPA 1:**

La primera etapa, totalmente aritmética, cabe en el curso de 3º de ESO. Aunque en este curso ya conocen el álgebra, conviene que la aproximación al cálculo de áreas se produzca de manera aritmética para darse cuenta del importante paso que supuso el teorema fundamental del cálculo y, además, el hecho de usar el álgebra, con la dificultad que conlleva, puede enmascarar el sentido conceptual que es necesario que conozcan los alumnos al comienzo del tema. Asimismo sirve como introducción al concepto de límite, desde una tarea geométrica.

**ETAPA 2:**

Esta segunda etapa es totalmente conceptual y no cabe ningún cálculo ni aritmético ni algebraico. Conviene llevarla a cabo en 4º de ESO, ya que la relación entre la suma o acumulación y el cálculo del área es un concepto complicado y no es necesario introducir ningún aspecto de cálculo y en esta edad ya poseen un desarrollo cognitivo suficiente para asimilar dicha relación. Cuando se concluye que para realizar una suma infinita se necesita calcular un área el alumno ya sabe cómo hacerlo, puesto que lo ha visto en la primera etapa, aunque de manera aproximada.

**ETAPA 3:**

En esta etapa se tiende el puente entre derivación e integración y conviene que los alumnos ya conozcan los conceptos de límite y de, por supuesto, derivación. Es una etapa recomendable, por tanto, para 1º de Bachillerato.

**ETAPA 4:**

Esta etapa puramente algorítmica y mecánica conviene verla tras todas las anteriores, y no antes. Puede darse en 2º de Bachillerato aunque que convendría comenzar a verla en 1º para evitar las prisas propias del último año. Es necesario un buen conocimiento del álgebra, por eso es recomendable que en los temas de cálculo algebraico de los cursos anteriores se haga hincapié en las transformaciones que se deben realizar en el cálculo de primitivas.

Si no se quiere extender en cuatro cursos el aprendizaje de la integral, se podrían unir las dos primeras etapas en un solo curso, 4º de ESO, y las dos últimas etapas en 1º de Bachillerato. Y si se quiere dar todo en un solo curso, convendría no hacerlo en 2º dada la experiencia ya conocida. Sería mejor hacerlo en 1º ya que en 2º se terminarían por dar rápidamente los mecanismos de cálculo dejando de lado el enfoque conceptual.

De la experiencia en las prácticas, constaté que comenzar enseñando las integrales por el cálculo de primitivas no es una buena aproximación. Los errores recogidos en el apartado 5 así lo confirman. No obstante, estos errores se deben a la falta de destreza en el manejo de expresiones algebraicas más que en el dominio del concepto de las mismas, ya que la introducción de este último brilló por su ausencia. También es cierto que los errores de cálculo de primitivas, en su mayoría algebraicos, se pueden ser causados por la falta de práctica ya que en poco menos de tres semanas vieron los dos temas y se examinaron de toda la asignatura. El tiempo es siempre un enemigo del aprendizaje.

Por último, independientemente del tema del trabajo, en este TFM he me he dado cuenta de que existe una gran cantidad de bibliografía sobre didáctica de las matemáticas. Cualquier tema sobre el que uno quiera indagar, investigar o innovar está sumamente desarrollado en libros, revistas o simposios. Así que basta con acceder a ellos a través de bibliotecas o de Internet para empaparte de ideas y propuestas, todas ellas útiles para el trabajo como profesor.

# 7. Bibliografía


ANZOLA GONZÁLEZ, M. y VIZMANOS BUELTA, J.R.. (1990). *Matemáticas. Algoritmo 3º BUP.* Madrid: SM.

BAGNI, GIORGIO T. (2004). Una experiencia didáctica sobre funciones, en la escuela secundaria. *Revista latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 7, 1, pp. 5-24.

BASCÓS, E. y PENA, Z. (2002). *Matemáticas 2º Bachillerato. Proyecto Exedra.* Madrid: Oxford.

CONTRERAS DE LA FUENTE, ÁNGEL y ORDÓÑEZ CAÑADA, LOURDES. (2003). El análisis de manuales en la enseñanza de la integral definida. *Investigación en educación matemática: Séptimo Simposio de la SEIEM,* pp. 277-288.

CONTRERAS DE LA FUENTE, ÁNGEL y ORDÓÑEZ CAÑADA, LOURDES. (2006). Complejidad ontosemiótica de un texto sobre la introducción a la integral definida. *Relime,* Vol.9, Núm. 1, pp. 65-84.

CORDERO OSORIO, FRANCISCO. (2005). El rol de algunas categorías del conocimiento matemático en educación superior. Una socioepistemología de la integral. *Relime,* Vol. 8, Num. 3, pp. 265-286.

DE BURGOS ROMÁN, JUAN. (1994). *Cálculo infinitesimal de una variable.* Aravaca, Madrid: McGraw-Hill.

ESCUDERO BAYLÍN, M. (1997). Fermat y Arquímedes en la clase de integrales. *Suma*, 24, pp. 77-79.

GARCÍA GARCÍA, J. y LÓPEZ PELLICER, M. (1978). *Matemáticas COU. Curso teórico-práctico.* Alcoy, Alicante: Marfil.

GONZÁLEZ-MARTÍN, ALEJANDRO S. y CAMACHO MACHÍN, MATÍAS. (2005). Sobre la comprensión en estudiantes de matemáticas del concepto de integral impropia. Algunas dificultades, obstáculos y errores. *Enseñanza de las Ciencias*, 23(1), pp. 81-95.

HERNÁNDEZ CAMACHO, REINALDO. (2007). Propuesta didáctica para identificar cuándo la integral definida es aplicable para resolver un problema. *Actualidades investigativas en Educación*, Vol. 7, No. 2, pp. 1-20.

LARSON, ROLAND E., HOSTETLER, ROBERT P. y EDWARDS, BRUCE H. (1995). *Cálculo y geometría analítica, Volumen 1.* Aravaca, Madrid: McGraw-Hill.

LLORENS FUSTER, JOSÉ L. y SANTOJA GÓMEZ, FRANCISCO J. (1997). Una interpretación de las dificultades en el aprendizaje del concepto de integral. *Divulgaciones matemáticas*, v. 5, No. 1/2, pp. 61-76.

LOIS, ALEJANDRO E. y MILEVICICH, LILIANA M. (2008). La enseñanza y aprendizaje del Cálculo Integral desde la perspectiva del nuevo paradigma de la sociedad del conocimiento. *Revista iberoamericana de Educación*, Num. 47/5, pp. 1-15.

MATZ, MARILYN. (1982). Towards a process model for school algebra errors. In D. Sleeman, & J. S. Brown (Eds.), *Intelligent tutoring systems* (pp. 25-50). New York: Academic Press.

MORALES, FRANKLIN y VERA, MIGUEL. (2007). Eficiencia de un software educativo para dinamizar la enseñanza del cálculo integral. *Acción pedagógica*, Num. 16, pp. 204-211.

MUÑOZ ORTEGA, GERMÁN. (2000). Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el Cálculo integral. *Relime*, Vol. 3, Núm. 2, pp. 131-170.

ORTON, A. (1983). Students' understanding of Integration. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 14, No. 1, pp. 1-18.

TURÉGANO MORATALLA, P. (1997). El aprendizaje del concepto de integral. *Suma,* 26, pp. 39-52.

TURÉGANO MORATALLA, P. (1998). Del área a la integral. U - 58 -n estudio en el contexto educativo. *Enseñanza de las ciencias*, 16(2), pp. 233-249.