UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

Màster en Professor/a d'Educació Secundària

El teorema de Pitàgores en segon d'ESO

Memòria de Treball de Fi de Màster presentada per:

NATALIA ROS AVARIA

Tutoritzada per:

Dr. Ángel Gutiérrez Rodríguez

Departament de Didàctica de les Matemàtiques

València, 10 de juliol de 2012

Fitxa tècnica:

Màster: Màster en Professor/a d'Educació Secundària per la Universitat de València

Especialitat: Matemàtiques

Autor: Cognoms: Ros Avaria
Nom: Natalia

Títol de la memòria: El teorema de Pitàgores en segon d'ESO

Tutor 1: Cognoms: Gutiérrez Rodríguez
Nom: Àngel
Departament: Matemàtiques

Data de defensa: juliol de 2012

Qualificació (numèrica y Matr. D'Honor si procedix):

Paraules clau: Teorema de Pitàgores, geometria, didàctica de las matemàtiques, ensenyança de la geometria.

Palabras clave: Teorema de Pitágoras, geometría, didáctica de las matemáticas, enseñanza de la geometría.

Keywords: Pythagorean Theorem, geometry, mathematics education, teaching geometry.

Codis Unesco (fins a 4): Formació de professors (5803.02), Matemàtiques (12), Didàctica de la geometria (1204.99)

Resum: El teorema de Pitàgores és un contingut fonamental en l'assignatura de matemàtiques en el currículum d'Educació Secundària. El present treball pretén elaborar una proposta d'ensenyança d'este concepte per als alumnes de segon d'ESO on es demostra el teorema i s'utilitza per a realitzar determinats càlculs. En primer lloc es determina el nivell cognitiu dels alumnes segons el model de Van Hiele i els seus coneixements previs perquè la proposta d'ensenyança dissenyada resulte adequada. La proposta inclou la descripció de les estratègies, les activitats, els materials i els mitjos els quals busquen la motivació dels alumnes i mostrar la seua utilitat perquè els resulte un aprenentatge significatiu. Finalment, la proposta es posa a prova i s'extrauen les conclusions de l'experimentació.

Resumen: El teorema de Pitágoras es un contenido fundamental en la asignatura de matemáticas en el currículum de Educación Secundària. El presente trabajo pretende elaborar una propuesta de enseñanza de este concepto para los alumnos de segundo de ESO donde se demuestra el teorema y se utiliza para realizar determinados cálculos. En primer lugar se determina el nivel cognitivo de los alumnos según el modelo de Van Hiele y sus conocimientos previos para que la propuesta de enseñanza diseñada resulte adecuada. La propuesta incluye la descripción de las estrategias, las actividades, los materiales y los medios los cuales buscan la motivación de los alumnos y mostrar su utilidad para que les resulte un aprendizaje significativo. Finalmente, la propuesta se pone a prueba y se extraen las conclusiones de la experimentación.

Abstract: The Pythagorean Theorem is a fundamental content in the mathematics in the Secondary School curriculum. The present work aims to develop a proposal for the teaching of this concept for second year students which proves the theorem and it is used to perform certain calculations. Firstly, we determine the cognitive level of students according to Van Hiele model and their prior knowledge in order that the proposal of teaching designed turns out to be suitable. The proposal includes a description of the strategies, activities, materials and means which seek the motivation of students and want to show them its usefulness in order to be a significant learning. Finally, the proposal is tested and we draw conclusions of the experiment.

Índex

"In Mathematics the man who is ignorant of what Pythagoras said in Croton in 500 B.C about the square on the on the longest side of a right-angled triangle, or who forgets what someone on Czechoslovakia proved last week about inequalities, is likely to be lost. The whole terrific mass of well-established Mathematics, from the ancient Babylonians to the modern Japanese, is as good today as it ever was"

E.T. Bell, Ph. D., 1931, citat en Loomis, 1972

[En matemàtiques l'home que és ignorant del que Pitàgores deia en Croton el 500 aC sobre el quadrat del costat més llarg d'un triangle rectangle, o que s'oblida del que algú a Txecoslovàquia va demostrar la setmana passada sobre les desigualtats, és probable que estiga perdut. Tota la increïble massa de matemàtiques ben arrelades, dels antics Babilonis a la japonesa moderna, és tan bona hui com sempre ho ha sigut]

0. Introducció

El teorema de Pitàgores és un contingut fonamental en l'assignatura de matemàtiques en el currículum d'Educació Secundària. En el primer curs d'ESO s'estudia la fórmula i s'utilitza per a calcular el valor d'un costat d'un triangle rectangle coneguts els altres dos. En segon es demostra esta fórmula i s'utilitza per a determinar l'àrea de polígons; determinar si un triangle és rectangle, acutangle o obtusangle; calcular la diagonal d'un rectangle; calcular l'altura d'un triangle isòsceles (i per tant també equilàter); i calcular l'apotema d'un polígon regular. En cursos posteriors s'aplica a altres conceptes com les raons trigonomètriques. És un concepte que és molt utilitzat i que si els alumnes l'estudien de memòria sense entendre'l prompte se n'obliden, en canvi, si l'aprenentatge és significatiu, el recordaran i seran capaços d'aplicar-lo. Al llarg de la història s'ha demostrat de moltíssimes maneres diferents però, quina de totes elles és la més adequada per als alumnes de secundària? Quina pot servir al mateix temps perquè no se'ls oblide i l'entenguen?

Pretenem elaborar una proposta d'ensenyança per al famós teorema de Pitàgores en segon de l'ESO i per a aconseguir-ho hem organitzat el treball en diferents etapes. En primer lloc fem un xicotet recorregut per conegudes teories i models que resultaran el marc teòric d'este treball. Posteriorment analitzem la literatura tant de didàctica en general com d'estratègies i propostes d'ensenyança que hi ha per a ensenyar este teorema. A més, tractem de determinar aquella estratègia que ens pareix més raonable tenint en compte el nivell cognitiu dels alumnes i per a això elaborem un pre-test i l'analitzem. En segon lloc, reunim una sèrie de tasques que permetrà que els alumnes afiancen el concepte i l'apliquen. Finalment, esta proposta d'ensenyança es posa en pràctica i es recullen les experiències obtingudes.

Finalment, este treball no pretén ser el manual amb la resposta per a tots els mals, la proposta d'ensenyança no és una ferramentes rígides sinó tot al contrari: són estratègies que han d'anar adaptant-se a les necessitats de cada grup, del centre, del professor, dels coneixements previs comuns a tots els participants, del temps de qué es disposa...

1. Continguts matemàtics

PROPOSICIÓ 47. *En els triangles rectangles el quadrat del costat que subtendix a l'angle recte és igual als quadrats dels costats que comprenen l'angle recte.*

PROPOSICIÓ 48. *Si en un triangle el quadrat d'un dels costats és igual als quadrats dels dos costats restants del triangle, l'angle comprés per eixos costats restants del triangle és recte.*

Llibre I dels *Elements d'Euclides* (300 a. C.)

PROPOSICIÓ 12. *En els triangles obtusangles el quadrat del costat que subtendix a l'angle obtús és major que els quadrats dels costats que comprenen l'angle obtús […]*

PROPOSICIÓ 13. *En els triangles acutangles, el quadrat del costat que subtendix a l'angle agut és menor que els quadrats dels costats que compren l'angle agut […]*

Llibre II dels *Elements d'Euclides* (300 a. C)

En tot triangle rectangle, el quadrat de la hipotenusa és igual a la suma dels quadrats dels catets.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

(Voramar Santillana, *Matemàtiques 2 ESO*. 2007)

Amb aquesta proposta d'ensenyança, pretenen ensenyar el Teorema de Pitàgores als alumnes de segon de l'educació secundària obligatòria i a més, inclourem altres continguts relacionats amb este concepte que pertanyen al mateix curs.

Per tal de conèixer els continguts concrets que pertoquen a este curs, analitzarem el que s'establix per Reial Decret al currículum oficial de l'Estat i al de la Comunitat Valenciana. Tindrem també en compte els continguts dels cursos anteriors i posteriors per tal d'evitar repeticions o insuficiències en la matèria. Per una altra banda, hi ha d'altres continguts que no pertanyen a les ensenyances mínimes de l'educació secundària com és la bibliografia de Pitàgores o diverses demostracions del teorema però que cal que un professor conega. Hi ha infinita documentació sobre el conegut Pitàgores de Samos i sobre la seua obra, tant publicació impresa com a la web, encara que els seus autors no es posen d'acord siquiera amb dates com la del seu naixement. Per a la feina que nosaltres estem fent, després d'estudiar diverses publicacions, hem escollit aquella informació que amb més freqüència es donava en publicacions més fidels com a *The MacTutor History of Mathematics* en la web o en enciclopèdies com *La Nueva Acta 2000*. Per últim, sintetitzarem els continguts mínims i d'altres relacionats en un esquema conceptual que adjuntem a l'annex 1.

Estudiar Geometria promou una comprensió més profunda de molts aspectes de les matemàtiques, millorar el raonament abstracte i realçar les relacions entre les matemàtiques i altres ciències [...] La Geometria proporciona un context molt ric per a al desenvolupament del raonament matemàtic – inclosos l'inductiu i el deductiu- , formular i confirmar conjectures, i classificar i definir objectes geomètrics. (NCTM, 2003)

La Geometria s'inclou al currículum de l'Educació Secundària Obligatòria. A l'article 6 del Reial Decret 1631/2006, que establix les ensenyances mínimes d'ESO, publicaren: "S'entén per currículum de l'Educació Secundària obligatòria el conjunt d'objectius, competències bàsiques, continguts, mètodes pedagògics i criteris d'avaluació d'esta etapa". En este mateix Reial Decret, i també al Decret 112/2007 del Consell, pel qual s'establix el currículum de l'Educació Secundària Obligatòria a la Comunitat Valenciana, expliquen que, en un intent de comprendre el món, ens hem creat ferramentes matemàtiques com el càlcul, la mesura i l'estudi de relacions entre formes i quantitats per a generar models de la realitat. I continuen dient que en la societat actual, necessitem un major domini d'idees i destreses matemàtiques que les que es necessitaven feia sols uns anys i que per això, hem d'estar preparats per a adaptar-nos amb eficàcia als continus canvis que es generen. Tant el Reial Decret com el Decret assenyalen que "no totes les formes d'ensenyar matemàtiques contribuïxen per igual a l'adquisició de la competència matemàtica: l'èmfasi en la funcionalitat dels aprenentatges, la seua utilitat per a comprendre el món que ens rodeja o la mateixa selecció d'estratègies per a la resolució d'un problema, determinen la possibilitat real d'aplicar les matemàtiques a diferents camps de coneixement o a diferents situacions de la vida quotidiana. [...]. Perquè l'aprenentatge siga efectiu, els nous coneixements que es pretén que l'alumne construïsca han de recolzar-se en els que ja posseïxen, tractant sempre de relacionar-los amb la seua pròpia experiència i de presentar-los preferentment en un context de resolució de problemes". A més, en el Decret de la C. Valenciana es considera que el treball en grup facilita als alumnes la presa de certs hàbits que els permeten desenvolupar *estratègies per a defendre els seus arguments* davant dels dels seus companys i haver-hi de seleccionar la resposta més adequada. Els dos textos consideren que, concretament *la geometria, a més de definicions i fórmules per al càlcul de superfícies i volums és, sobre tot, descriure i analitzar propietats i relaciones, i classificar i raonar sobre formes i estructures geomètriques. L'aprenentatge de la geometria deu oferir continues oportunitats per a construir, dibuixar, modelitzar, mesurar o classificar. El seu estudi oferix l'oportunitat d'establir relacions amb altres àmbits, com la natura o el món de l'art.*

Si ens fixem en el currículum elaborat tant per l'Estat com el de la Conselleria d'Educació per a 2on d'ESO i tenint en compte el currículum de cursos anteriors, podem suposar (en un principi, que no vol dir que siga així) que els alumnes disposaran de tots estos continguts els quals són necessaris haver-hi adquirit per a entendre el teorema de Pitàgores i les seues aplicacions:

- Continguts comuns: Els alumnes són capaços d'utilitzar estratègies i tècniques simples en la resolució de problemes com l'anàlisi de l'enunciat, l'assaig i error, la resolució d'un problema més simple, la divisió del problema en parts i la comprovació de la solució obtinguda. La confiança en les pròpies capacitats per a afrontar problemes, comprendre les relacions matemàtiques i prendre decisions a partir d'elles, així com la perseverança i flexibilitat en la cerca de solucions els permetrà ser capaços de resoldre els problemes que es plantegen. Han de conèixer ferramentes tecnològiques per a facilitar els càlculs de tipus numèric com la calculadora.

- Nombres: Significat i usos d'operacions amb nombres enters i decimals. Utilització de la jerarquia i propietats de les operacions. Potències de nombres enters amb exponent natural i operacions amb potències. Quadrats perfectes. Arrels quadrades. Estimació i obtenció d'arrels aproximades. Elaboració i utilització d'estratègies personals per al càlcul mental, escrit o amb calculadora.

Àlgebra: Utilització de lletres per a simbolitzar nombres inicialment desconeguts. Utilitat de la simbolització per a expressar quantitats en diferents contextos. Traducció d'expressions del llenguatge quotidià a l'algebraic i viceversa. El llenguatge algebraic per a generalitzar propietats i simbolitzar relacions. Obtenció de fórmules i termes generals basada en l'observació de pautes i regularitats. Obtenció del valor numèric d'una expressió algebraica. Significat de les equacions i de les solucions d'una equació. Resolució d'equacions de primer grau o de segon grau incompletes. Transformació d'equacions en altres equivalents. Utilització de les equacions per a la resolució de problemes.

Geometria: Elements bàsics per descriure figures geomètriques en el pla. Utilització de la terminologia adequada per descriure amb precisió situacions, formes, propietats i configuracions del món físic. Anàlisi de relacions i propietats de figures en el pla: paral·lelisme i perpendicularitat. Utilització de mètodes inductius i deductius per a analitzar relacions i propietats en el pla. Classificació de triangles i quadrilàters amb diferents criteris. Estudi de propietats i relacions en estos polígons. Construcció de polígons regulars amb els instruments de dibuix habituals. Mesura i càlcul d'angles en figures planes. Estimació i càlcul de perímetres de figures. Estimació i càlcul d'àrees mitjançant fórmules.

Conèixer el teorema de Pitàgores permetrà als alumnes de segon d'ESO obtindre mesures i comprovar relacions entre figures. Calcular àrees mitjançant la triangulació i quadriculació. Utilitzar ferramentes informàtiques per a construir, simular i investigar relacions entre elements geomètrics. Utilitzar propietats, regularitats i relacions per a resoldre problemes del món físic. Resoldre problemes que impliquen l'estimació i el càlcul de longituds, superfícies i volums de cossos geomètrics. I en cursos posteriors a determinar figures a partir de certes propietats, resoldre problemes geomètrics i del món físic, obtenir directament o indirectament mesures (longituds, àrees i volums), calcular raons trigonomètriques i calcular els mòduls de vectors en un sistema de coordenades.

El teorema de Pitàgores ja s'estudia a primer d'ESO. En este curs el que fan és calcular la longitud d'un dels costats del triangle rectangle coneguts els altres dos substituint els valors numèrics a la fórmula. Encara que ja dominen prou bé l'aritmètica, no és així l'àlgebra i per això la tasca de substituir els resulta complicada. Al llibre de text que utilitzaren els alumnes per als quals va dirigit este treball, ja apareix, però una part d'ells no ho veieren perquè el temps de què disposaren no ho permeté i d'altres no se'n recorden.

En segon d'ESO, curs al que va dirigit este treball, la relació ja no és sols aritmètica sinó que s'estudia també la relació geomètrica. Els continguts matemàtics fonamentals que aprendran els alumnes amb este tema seran: **demostrar** el teorema de Pitàgores, **classificar** els triangles segons siguen rectes, acutangles o obtusangles sabent la mesura dels seus costats, determinar **la mesura d'un costat coneixent els altres dos**, trobar la mesura a partir de la qual **calcular l'àrea** d'un polígon i ser capaços de reconèixer triangles on aplicar el teorema en situacions de la vida real o en problemes matemàtics.

Pel que fa a la **demostració**, segons Loomis (1972), existeixen quatre maneres diferents de demostrar el Teorema de Pitàgores: les probes aritmeticoalgebraiques (basades en relacions lineals), les geomètriques (basades en la comparació d'àrees), les quaterniòniques (basades en operacions vectorials) i les dinàmiques (basades en massa i velocitat). Hui en dia podem afegir una nova forma, demostracions dinàmiques a partir de *software* matemàtic com el GeoGebra o el Cabri. Loomis a més afirma que no hi ha cap demostració trigonomètrica pel fet que la formulació fonamental trigonomètrica es basa en el teorema de Pitàgores. Estes demostracions han anat succeint-se al llarg de la història, des de la civilització mesopotàmica, és a dir, abans de Pitàgores, fins a hui en dia. En l'annex 1 es fa un xicotet recorregut cronològic on es recullen unes poques d'estes demostracions.

En *Principios y estándares para la educación matemática* (NCTM, 2003) consideren que les demostracions visuals poden ajudar a analitzar i explicar relacions matemàtiques. Els alumnes de l'octau nivell (equivalent a 2on d'ESO) han de familiaritzar-se amb una de les demostracions visuals del teorema de Pitàgores: el diagrama que mostra els tres quadrats corresponents als costats d'un triangle rectangle. Es podria també reproduir alguna altra demostració de tipus geomètrica mitjançant un programa de geometria dinàmica o retallant paper i discutir després el raonament associat. Les demostracions visuals faciliten el recordar-la. Més endavant escollirem la demostració que se'ls explicarà i els motius de l'elecció així com les estratègies per a explicar els continguts que es pretén ensenyar.

2. Marc teòric

Les idees bàsiques que ens han permet desenvolupar este treball es citen a continuació al mateix temps que es fa una breu descripció de cadascuna d'elles. Es tracta de teories i conceptes com el Model de Raonament Geomètric de Van Hiele, la teoria de formació de conceptes matemàtics de Vinner, la importància de la demostració, la visualització, el treball en equip o la fenomenologia de Freudenthal. Totes aquestes idees són la base del present treball i per tant, més endavant, establirem la relació entre este marc teòric i la proposta elaborada.

2.1. El Model de Raonament Geomètric de Van Hiele

Com s'assenyala a *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en enseñanza secundaria basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele*, el model de raonament que va formular el matrimoni Van Hiele, planteja l'existència de diversos **nivells de raonament** geomètric que va *des del purament visual, propi dels xiquets dels primers cursos de primària, fins al logicoformal d'un matemàtic* i intenta explicar com progressen els estudiants en la seua habilitat de raonament. El model proposa fases d'aprenentatge per a organitzar l'ensenyança que permetrà els estudiants *construir les estructures mentals per a aconseguir un nivell superior de raonament*. Este estudi ve a dir que un estudiant només podrà entendre realment aquelles parts de les matemàtiques que el professor li presente de manera adequada al seu nivell de raonament. No es pot ensenyar a una persona a raonar d'una determinada manera, sols s'aprén a raonar mitjançant la pròpia experiència. Però, sí es pot ajudar a eixa persona que adquirisca el més prompte possible l'experiència necessària perquè arribe a raonar d'eixa manera.

Per tant, resulta imprescindible conèixer la capacitat de raonament dels alumnes els quals se'ls pretén ensenyar i per a això es proposa un test que adjuntem en l'annex 2 per determinar-ho. Segons les seues respostes podrem classificar-los de la següent manera tal i com ho descriuen Corberan i la resta d'autors a la publicació abans mencionada o en els apunts del bloc de geometria dins de l'assignatura d'Aprenentatge i ensenyança de les matemàtiques impartida per A. Gutiérrez en el màster de Professor en Educació Secundària de la Universitat de València:

Nivell 1. Reconeixement. Tenen una percepció global de les figures, com objectes físics. **Descriuen** les característiques físiques o visuals dels objectes. No raonen amb propietats ni elements matemàtics.

Nivell 2. Anàlisi. **Descriuen** les propietats i els elements matemàtics però no establixen relacions lògiques. Es comprenen i s'utilitzen les **definicions** amb estructura simple. Les **demostracions** empíriques consistixen a mostrar exemples. **Classificacions** simples.

Nivell 3. Classificació. S'establixen relacions lògiques (implicacions). Les **demostracions** són deductives informals basades en exemples. Es compren i s'usa qualsevol **definició**. Els **classificacions** són complexes i depenen de les definicions usades.

Nivell 4. Deducció formal. **Demostracions** deductives formals, sense basar-se en exemples. S'entén l'estructura axiomàtica de les matemàtiques (axiomes, definicions, teoremes...)

Nivell 5. Rigor. Poden treballar amb diverses geometries (sistemes axiomàtics). Poden comparar diverses geometries i identificar les seues característiques comuns i les seues diferències.

Estos nivells no són incompatibles o independents, és a dir, tenen una organització jeràrquica, representen graus de sofisticació en el raonament matemàtic que pot utilitzar una persona. A més, cada nivell es basa en l'anterior: pensar en un segon nivell no és possible si no es té la capacitat de raonament del primer, en el segon nivell se seguix utilitzant l'observació d'atributs físics però ara estos s'interpreten en termes de propietats geomètriques (Jaime i Gutiérrez, 1990).

Les **fases d'aprenentatge** que abans anomenàvem i que també es descriuen a la publicació *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en enseñanza secundaria basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele* es caracteritzen pel següent:

Fase 1. Informació. El professor ha d'informar els estudiants sobre el que es treballarà. En esta etapa, el professor també pot descobrir els coneixements previs dels que disposen els alumnes i el seu nivell de raonament.

Fase 2. Orientació dirigida. Es pretén que els alumnes raonen amb un nivell superior de Van Hiele i com que no estan preparats per a un aprenentatge per si soles, és necessari que el professor els dirigisca cap a la solució, donant-los indicacions perquè participen activament en la resolució.

Fase 3. Explicitació. Els alumnes comenten allò que han observat intercanviant experiències. És interessant que hi hagen diferents punts de vista, pensament divergent. L'esforç que fan a l'hora d'explicar-se als seus companys suposa que ha d'ordenar les seues idees i expressar-se amb claredat. És on es fa el canvi del vocabulari informal al vocabulari nou.

Fase 4. Orientació lliure. Ara els estudiants apliquen els coneixements que han adquirit en les fases anteriors en noves activitats.

Fase 5. Integració. En esta fase el professor ha de proporcionar una visió general del contingut y dels mètodes als alumnes, relacionant-ho en els seus coneixements previs.

Estes pautes es tindran com a referència en la proposta d'ensenyança que estem elaborant. Pretenem que els alumnes adquirisquen els coneixements geomètrics però també habilitats de raonament.

2.2. La teoria de formació de conceptes matemàtics de Vinner

Gutiérrez i Jaime, al capítol 6, *Uso de definiciones e imágenes de conceptos geométricos por los estudiantes de Magisterio,* expliquen com Vinner proposa la diferenciació entre un concepte (objecte matemàtic determinat per una definició formal) i una imatge conceptual (la representació mental de l'objecte que tenim cada u, formada per un conjunt d'imatges i propietats). En un exemple d'un concepte, trobem propietats necessàries i propietats no necessàries. Normalment, la definició verbal del concepte estarà formada per estes propietats necessàries i per tant són un *criteri* per a determinar *si un exemple pertany o no al concepte.* Per una altra banda, *cada persona tenim un o més exemples d'eixe concepte. Els alumnes amb imatges conceptuals pobres en tindran pocs d'estos exemples*. Si el professor (o el llibre de text) quan explica ho fa amb pocs exemples i sempre amb les mateixes posicions, per exemple, quan representa triangles ho fa amb un dels costat disposat de manera horitzontal i amb el vèrtex oposat situat en la part superior, l'alumne tendirà a pensar que són característiques pròpies del triangle i eixe serà la seua imatge conceptual. Per tant, *per a no propiciar definicions errònies o incompletes*, el professor ho ha de tindre en compte i proporcionar *exemples rics i variats* (Jaime, Chapa i Gutiérrez, 1992).

2.3. Visualització

Memòria visual: És l'habilitat per a recordar característiques visuals i de posició que tenien en un moment donat un conjunt d'objectes que estaven a la vista però que ja no es veuen o que han sigut canviats de posició (Gutiérrez, 1991).

Autors com Gutiérrez (1991) i Presmerg (1986), consideren que una demostració geomètrica inclou un recurs mnemotècnic i es tracta de la memòria visual. Amb este tipus de demostracions, l'alumne és capaç de recordar el teorema al recordar-se'n del diagrama que mostra els tres quadrats corresponents als costats d'un triangle rectangle. La capacitat de percebre imatges mentals clares és una *avantatge en l'ensenyament de les matemàtiques*, ja que estes requerixen d'un pensament per a generalitzar i abstracte. Els mètodes visuals de resoldre problemes (els que impliquen imatges visuals amb o sense diagrames com a part principal del mètode de resolució encara que el raonament o l'àlgebra també s'utilitze), tenen com a desavantatge que normalment necessiten més temps que els mètodes no visuals. A més, els alumnes que utilitzen mètodes visuals, els resulta més difícil comunicar-se amb els conceptes matemàtics. Segons Presmerg (1986), no es tracta que el professor tinga un estil únicament visual, ja que *les representacions visuals no són una panacea universal*, ni tampoc un estil no visual ja que els alumnes visualitzadors poden pensar que les matemàtiques es tracten de memoritzar de manera mecànica regles i fórmules. El professor òptim serà aquell que es trobe en un punt intermedi, un estil harmònic, que trobe un equilibri entre els components lògics-verbals i les representacions pictoricovisual i pose èmfasi en la generalització i l'abstracció s'un cas.

Per una altra banda, els estudiants necessiten vore molts exemples de figures que corresponen al mateix concepte geomètric, així com també altres que no corresponguen. Els professors s'han d'assegurar que els seus alumnes veuen col·leccions de triangles en diferents posicions i amb diferents mesures d'angles. Amb les discussions a classe al respecte, es desenvolupen i perfeccionen els conceptes geomètrics (MCTM, 2003)

Per tant, realitzarem una demostració visual amb la seua explicació verbalitzada amb els termes específics que necessitem, remarcant la generalització i l'abstracció. Per a no contribuir a les definicions errònies degudes als exemples gràfics incorrectes, els exemples seran variats i amb posicions diverses.

2.4. Demostració

Com assenyala Villiers (1993), els alumnes de secundària no reconeixen la necessitat d'una demostració, no sols perquè *el seu desenvolupament cognitiu és lent sinó també perquè no són capaços de vore-li la funció, la seua utilitat*. Una demostració és sols significativa quan respon els dubtes dels alumnes (Kline, 1973:151, citat en Villiers, 1993) o per a convèncer a la gent (inclòs a ells mateixa). *La demostració és un mitjà per a verificar, explicar, sistematitzar, descobrir i comunicar coneixements matemàtics.*

Una demostració "rigorosa" del teorema de Pitàgores, segons Renz (1981:85, citat en Villiers, 1993), ens ocuparia almenys 80 pàgines. Per a nosaltres, una demostració completa serà *demostrar amb suficient detall* per a convèncer als nostres alumnes (Davis & Hersch, 1986:73, citat en Villiers, 1993). La demostració no sols convenç que és cert sinó que també proporciona enteniment. Si els alumnes són capaços d'entendre el teorema, seran capaços d'interioritzar-lo, els resultarà més significatiu i per tant, els resultarà més fàcil incloure'l en la seua memòria a llarg termini (Pascual, F. 2011). Al mateix temps, s'ha de posar atenció a la funció de descobriment i a la de comunicació.

En segon d'ESO, tenint en compte els nivells de raonament de Van Hiele, deuria de produir-se la transició d'una demostració empírica, on la comprovació es realitza a través d'exemple – nivell 2-, a una demostració deductiva informal, on s'arriba a un argument deductiu abstracte informal després d'analitzar exemples –nivell 3-. El professor ha de guiar la tasca perquè ho pugen aconseguir de manera que a partir de l'anàlisi d'exemples que complisquen el teorema (i de contraexemples que no el complisquen), guiar a l'alumne a traure la conjectura buscada. La demostració deductiva la realitzarem amb l'ajuda d'exemples (experimentomental) i basant-nos en operacions de transformació d'objectes i anticipant-nos als resultats ja que el professor els guiarà cap a l'obtenció del teorema (transformativa). Estes classificacions del tipus de proves per a les demostracions foren fetes per Balacheff (2000).

2.5. Treball en equip

Segons publiquen Kaye I Rogers (1972), *e*l treball en equip és una forma de treball amb fins pedagògics. Es centra en una conducta espontània de l'alumne. Treballant amb els companys, *l'alumne deixa d'enfrontar-se directament amb el professor, deixa de ser un oient passiu i és impulsat a expressar-se, a prendre la iniciativa i convertir-se en actiu*. Es tracta de cooperació entre companys. A més, els permet seguir el ritme del grup orientada pels *interessos dels participants* i no un imposat des de fora. Hi ha autors com Petersen que ho entén com un sistema on s'alterna l'ensenyança magistral i el treball lliure de grup. Per a altres com Cousinet, tot el treball es realitza en grups i els alumnes decidixen les tasques, l'organització i els procediments. El professor és qui prepara la guia i està a la disposició dels alumnes per a proporcionar-los informació i ajuda.

Aleshores, sabem que el treball en grup resulta beneficiós per als seus components però, quants membres ha de tindre? Un grup menut funciona quan hi ha cooperació entre els membres (divisió del treball, iniciatives individuals, acceptació de normes comuns). Ha de ser suficientment gran com per a assegurar que hi hagen prou membres per a realitzar la tasca i suficientment menut com per a permetre que cadascun d'ells contribuïsca de manera eficaç. Com la tasca a realitzar, com vorem més endavant, no suposa molta feina considerarem que els grups seran de 2, 3 o 4, depenent del nombre d'alumnes i de la tasca a desenvolupar. Però com els agrupem? Segons Ferry (1971*), la unió afectiva del grup propicia la motivació i és un factor de creativitat però la formació de grups mitjançant la lliure opció no sol dur a un repartiment efectiu del treball*. Açò és degut al fet que els alumnes més capaços no decidixen agrupar-se en els que tenen una capacitat semblant (amb els quals l'aprenentatge seria major) perquè ells es veuen eficaços a l'hora de resoldre les tasques que se'ls ha manat. En canvi, aquells els quals els costa més, sí que busquen els alumnes més avantatjats. Una forma de realitzar els grups per a aconseguir que tots ells estiguen amb les persones que desitgen estar és fent que cada alumne realitze una llista de manera que enumere els seus companys, des de amb el què més desitja treballar fins amb el què menys. Han de ser llistes privades. A partir d'estes llistes, el professor pot fer sociogrames o sociomatrius on es demostra la pauta de preferències dels seus alumnes. Entre d'altres, un dels problemes que comporta esta tècnica és el temps que requerix. Pot ser seria una labor del tutor del grup i a principi de curs perquè servira per a tot l'any acadèmic.

En este cas en concret en el que sols disposem d'uns dies per a impartir la matèria el que farem serà agrupar-los segons estan asseguts a classe per a evitar perdre molt de temps, a més, el tutor ja s'ha encarregat de distribuir-los en l'aula d'una manera heterogènia pel que fa a la motivació dels alumnes i pel que fa al *feeling* entre ells.

2.6. Fenomenologia. Freudenthal

En l'anàlisi fenomenològic que fa Puig (1997) en *La educación matemática en la enseñanza secundaria*, de la idea freudenthaliana de fenomenologia didàctica, afirma que *l'anàlisi fenomenològic d'un concepte o d'una estructura matemàtica consistix a descriure quins són els fenòmens per als què és el mitjà d'organització i quina relació té el concepte o l'estructura amb eixos fenòmens*. En el cas de la fenomenologia pura, els conceptes o les estructures matemàtiques es tracten com *productes* cognitius, mentre que en el cas de la fenomenologia didàctica es tracten com *processos* cognitius, és a dir, com una assignatura que els alumnes ha d'aprendre. L'anàlisi fenomenològic de Freudenthal té com a objectiu servir de base per a l'organització de l'ensenyança de les matemàtiques i no pretén elaborar una explicació de la naturalesa de les matemàtiques. Les idees que els alumnes es formen i els professors tinguen de la naturalesa de les matemàtiques influïxen en la concepció de l'activitat matemàtica a realitzar i en els coneixements que adquirixen i es pretenen ensenyar als alumnes.

A més, Puig en la seua anàlisi considera que *els fenòmens que van a ser organitzats pels conceptes matemàtics són fenòmens del món real, físic, quotidià. Són els objectes del món, les seues propietats, les accions que fem ells o les propietats d'eixes accions*. És evident que la idea dels conceptes matemàtics no estan en un món ideal, ni tenen són anteriors a l'activitat matemàtica, ni consistix en el descobriment de la geografia del món d'eixos objectes. *El procés de creació d'objectes matemàtics com mitjans d'organització ho acompanya Freudenthal d'un procés pel que els mitjans d'organització es convertixen en objectes que se situen en un camp de fenòmens. En conseqüència, els objectes matemàtics s'incorporen al món de la nostra experiència, en el que entren com fenòmens en una nova* *relació fenòmens/mitjos d'organització en la que es creen nous conceptes matemàtics, i este procés es reitera una i una altra vegada*.

Pel que fa a les activitats matemàtiques, considera que un dels factors fonamentals de l'evolució de les matemàtiques és la resolució de problemes però esta engloba la prova de teoremes en dos sentits però també altres activitats. En el primer sentit, considera la prova de teoremes globalment, ja que, seguint la terminologia de Pólya, podem no distingir entre problemes i teoremes si els cridem a tots problemes i distingim entre problemes de trobar i problemes de provar. En el segon sentit, més important, *la resolució de problemes engloba la prova de teoremes en la resolució de cada problema en particular*, és a dir, la qual caracteritza la resolució de problemes en matemàtiques, és *que la obtenció del resultat s'ha d'acompanyar d'un argument que justifique que el resultat obtingut verifica les condiciones del problema*, aleshores, qualsevol problema és un problema de provar, la verificació o comprovació del resultat. Però com hem dit, hi ha altres activitats matemàtiques a més de la resolució de problemes que generen conceptes que tenen a vore amb l'organització de conjunts en un sistema deductiu, component essencial des que els matemàtics passaren d'acumular resultats i tècniques per a escriure "elements". En matemàtiques, una definició no servix sols per a explicar el que significa un terme, sinó que, les definicions —utilitzant una expressió de Freudenthal— són *eslavons en cadenes deductives.*

La idea *d'objecte mental*, contraposada a *concepte,* Puig (1997) la considera molt important sobre tot perquè a partir d'ella Freudenthal troba que l'objectiu de l'acció educativa en el sistema escolar ha de ser bàsicament la constitució d'objectes mentals i no tant l'adquisició de conceptes. Podem partir d'una imatge inicial: la contraposició *objecte mental/concepte* és una contraposició entre allò que hi ha al cap de les persones (objectes mentals) i allò que hi ha a les matemàtiques com a disciplina (conceptes). De vegades, una fenomenologia didàctica mostra que els conceptes són tan variats que es formen objectes mentals diferents. *Per a l'adquisició del concepte és necessari integrar aleshores eixos diferents objectes mentals en un únic objecte mental*. De vegades, fins i tot és difícil distingir l'objecte mental del concepte. Finalment, hi ha objectes mentals que els seu camp de fenòmens sols es presenta en un context matemàtic o matematitzat. Un exemple d'això en l'Educació Secundària ho proporcionen els conceptes de la geometria analítica.

Per una altra banda, la relació entre figura, dibuix i objecte geomètric, segons anomena Puig al mateix document, influïx en la constitució dels objectes mentals i dels conceptes. *Un bon objecte mental haurà de dur incorporat l'anàlisi de la figura en els seus elements i les relacions entre ells*. A més, les relacions entre el dibuix i l'objecte geomètric són més complexes perquè el pas del dibuix a l'objecte geomètric és el resultat d'una interpretació per un subjecte humà que depenen del lector, dels seus coneixements i del context. A més, té a vore amb el mateix dibuix, que per si sols no descriu un objecte geomètric.

Per una altra banda, Hans Freudenthal va publicar a *Revisiting Mathematics Education* que quan parlem de processos a llarg termini d'aprenentatge ens referim a l'ensenyament a llarg termini/ processos d'aprenentatge. *Però per quant de temps? Tota la vida? S'estén més enllà dels límits de la vida escolar?* Freudenthal respon que els límits han de ser establerts pels objectius d'ensenyament. Com tot mestre sap, continua Freudenthal, les interrupcions dels processos d'aprenentatge poden causar *pèrdues totals de productes d'aprenentatge*. Cada nou curs escolar, comença amb una pissarra neta. De fet, després de l'examen, la majoria de les coses apreses s'obliden. Sens dubte, més enllà de la quantitat de temes i activitats, *un ha d'aprendre quins val la pena oblidar i quins recordar*. En gran part *depèn de l'alumne, de les inclinacions individuals i les aversions, que presagien la vida futura de l'alumne*. Però també del professor a l'hora de dirigir i dissenyar el procés d'oblidar/recordar. En contrast amb l'ensenyament tradicional, hem passat dels productes d'ensenyament als processos d'ensenyament. Este canvi fa que, al ser els processos d'aprenentatge tan importants, siga molt improbable que s'obliden els seus productes. Freudenthal posa l'exemple del teorema de Pitàgores, que és aprés per la gran majoria dels joves, i que pareix que siga recordat per un gran nombre d'adults. Molts professors i autors de llibres de text se senten obligats a proporcionar els estudiants alguna demostració encara que tots saben que el teorema s'aplica amb èxit. De fet, fins i tot importants matemàtics apliquen els resultats obtinguts per altres sense comprovar la demostració. Aleshores, quin valor didàctic té una demostració? De vegades s'utilitza per a *explicar adequadament què significa* i que siga suficient per a convèncer a l'alumne. Altres vegades, una demostració pot ser una oportunitat per *ensenyar una sèrie de fets aïllats o activitats d'una manera integrada*. També mitjançant l'anàlisi de la demostració, el professor pot *descobrir la manera de guiar l'alumne a reinventar el teorema* que resulta una font de coneixement.

3. Revisió de la literatura

En este apartat, realitzarem una breu anàlisi de literatura tant de didàctica en general com de l'ensenyament en particular del teorema de Pitàgores. Extraurem informació que considerem necessària per a desenvolupar esta proposta d'ensenyança i que ens proporcionarà el context el punt de partida per a la preparació de la mateixa.

3.1. Revisió de la literatura de didàctica

Pel que fa els documents més actuals relacionats amb la didàctica, majoritàriament tracten de les noves tecnologies. Açò té un motiu clar i és que, com afirma Murillo (2004), Ens trobem en un vertiginós desenvolupament tecnològic tant en l'àmbit social, com l'educatiu, el cultural o el laboral. Estos canvis *generen noves formes de treball, nous mitjans de comunicació, recursos educatius i processos d'ensenyança/aprenentatge innovadors*. Per este motiu, s'ha de considerar des de la investigació educativa *la immersió del procés educatiu en l'àmbit de les TICs, per a analitzar i aconseguir una integració adequada de nous recursos didàctics i estratègies d'ensenyança/aprenentatge que permeten una millora de les competències dels alumnes, amb l'adquisició d'aprenentatges significatius i potencien un major èxit escolar*. *La integració i utilització de les TIC en el procés educatiu de les matemàtiques és un assumpte que fa temps ocupa el treball dels investigadors en Educació, determinant els possibles beneficis de la seua utilització i dissenyant metodologies i entorns interactius multimèdia d'aprenentatge per a millorar els processos d'ensenyança/aprenentatge.* La finalitat de l'ús de les TIC és potenciar l'interés dels alumnes i desenvolupar determinades competències (comunicativa, ús de les TIC, ús del *software* de geometria dinàmica) i adquirir determinats coneixements Matemàtics.

3.1.1. Ensenyança amb *software* de geometria dinàmica

Com assenyala Gonzàlez, del departament de Matemàtiques, Estadística i Computació de la Facultat de Ciències de la Universitat de Cantàbria, una de les maneres en la que ens relacionem amb la teoria geomètrica i el món físic és mitjançant les *imatges* que són *representacions dels conceptes geomètrics i dels objectes físics*, essencials per a l'adquisició dels *coneixements geomètrics*. Clàssicament, el llapis i el paper s'han utilitzat per a formar estes representacions i òbviament, no es poden moure. El desenvolupament de la geometria dinàmica supera les limitacions d'este tipus, permetent que es moguen en la pantalla d’una manera que manté algunes relacions geomètriques invariants. Esta característica afegix nous atributs a les imatges, que poden ser utilitzades per a *promoure l’adquisició dels coneixements geomètrics a partir de les activitats d’exploració i conjectures* (Laborde, 1998; Laborde y Straesser, 1990, citat en Gonzàlez, 2001).

Ponte (1986), citat en Silva (2002), estableix que *els programes de simulació, permetent superar molts dels obstacles que sorgeixen en una aula tradicional a l'exploració de les situacions de la vida real, pot ser un factor important de motivació i de desenvolupament conceptual dels estudiants.*

Fey (1980), citat també en Silva (2002), establix *que els diagrames en els ordinadors constituïren una de les aportacions més estimulants a l'educació matemàtica en els anys 80. Ells ens ofereixen grans esperances per ampliar la comprensió dels estudiants de les importants idees matemàtiques.*

El Consell Nacional de Professors de Matemàtiques - NCTM (1987) crida l'atenció sobre la importància de la introducció de tecnologia de la informació en el currículum de les matemàtiques, amb l'argument que tots els estudiants han de tenir *l'accés a les calculadores en tot moment, un equip per persona o en grup i la possibilitat d'utilitzar l'ordinador com una eina per processar informació, per investigar i resoldre problemes*. D'altra banda totes les aules han d'estar equipades amb un ordinador. A dia de hui, les aules seguixen sense estar totes les aules equipades amb un ordinador però pràcticament tots els centres disposen d’una aula d’informàtica amb ordinadors, almenys, amb un per a cada dos alumnes.

Schoenfeld (1988), citat en Silva (2002), explora la noció de les computadores com *processadors de funcionament cognitiu* - que significa que és alguna cosa més que els amplificadors. Per a aquest autor, les noves tecnologies d'informació i, en particular l'ordinador, el que fan és simplement *augmentar el seu potencial*, el que li permet fer les coses de manera més eficient del qual podia fer.

Veloso (2000, citat també en Sivla, 2002), argumenta en un article que sembla ser, finalment, *el moment per als ordinadors*. *Els col·legues que van ser pioners i va lluitar durant diversos anys, l'ús de calculadores en l'ensenyament de les matemàtiques, [...]. No obstant això, les calculadores no substitueixen els ordinadors de cap manera, i és el moment d'ocupar el centre d'aquestes preocupacions. [...]*

Reprenent el que anomena el RD 1631/2006, “la utilització de recursos manipulatius que servisquen de catalitzador del pensament de l’alumne és sempre aconsellable, però cobra especial importància en geometria on l’abstracció pot ser construïda a partir de la reflexió sobre les idees que sorgixen de l’experiència adquirida per la interacció amb un objecte físic. Especial interés presenten els programes de geometria dinàmica al permetre als estudiants interactuar sobre les figures i els seus elements característics, facilitant la possibilitat d'analitzar propietats, explorar relacions, formular conjectures i validar-les. [...]. En la construcció del coneixement, els mitjans tecnològics són ferramentes essencials per a ensenyar, aprendre i en definitiva per a fer matemàtiques. Estos instruments permeten centrar-se en la presa de decisions, la reflexió, el raonament i la resolució de problemes. En este sentit, la calculadora i les ferramentes informàtiques són hui dispositius comunament utilitzats en la vida quotidiana, per tant el treball d'esta matèria en l'aula deuria reflectir tal realitat. Elaborar models exigix identificar i seleccionar les característiques rellevants d'una situació real, representar-la simbòlicament i determinar pautes de comportament, regularitats i invariants a partir de les que poder fer prediccions sobre l'evolució, la precisió i les limitacions del model. Les activitats proposades aniran enfocades per este camí. A més, la incorporació de ferramentes tecnològiques com recurs didàctic per a l'aprenentatge i per a la resolució de problemes contribuïx a millorar la competència en tractament de la informació i competència digital dels estudiants. No menys important resulta la interacció entre els diferents tipus de llenguatge: natural, numèric, gràfic, geomètric i algebraic com forma de lligar el tractament de la informació amb l'experiència dels alumnes".

Amb el paper en expansió que exercixen els ordinadors gràfics en el món del treball, els estudiants tindran cada dia més necessitats i oportunitats *d'utilitzar la visualització con una ferramenta* per a *resoldre problemes*. Els professors deuen promoure contextos matemàticament rics en els que poden aguditzar les seues habilitats de visualització.

El *Software* de Geometria Dinàmica és un recurs molt útil tant per a fer entendre als alumnes conceptes matemàtics com per a resoldre problemes. Molts professors seguixen sense utilitzar estes noves estratègies i per tant, els alumnes no coneixen els programes existents, com és el cas dels alumnes per als qui va dirigit este estudi. En esta unitat, farem servir el GeoGebra de manera que, a l'hora que aprenen el tema en qüestió, s'introduirà als alumnes en l'ús del programa.

3.2. Revisió de la literatura de l'ensenyança

Com hem assenyalat anteriorment, el concepte a ensenyar s'impartix en segon d'ESO de l'actual pla d'estudis o a l'octau curs de la EGB, de l'anterior pla. En esta secció explicarem diferents formes d'ensenyar el mateix teorema mitjançant l'anàlisi de tres llibres de text que a l'hora reflectix l'evolució al llarg dels últims 40 anys. Hem establert un ordre cronològic, començant per un llibre de text de fa vora 40 anys, un altre de fa 15 anys i un altre actual. Com vorem, l'estil o l'estratègia seguida varia en gran mesura però no tant com cabria esperar. Per últim, i completant este estudi cronològic, analitzarem el que proposen diferents pàgines web.

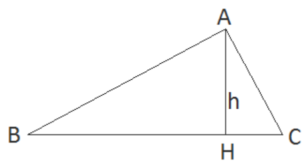
Tal i com anomena Fortuny (2010), en èpoques anteriors, amb pocs recursos, sols utilitzaven el llibre de text, les explicacions verbals en la classe, l'escriptura del professor en la pissarra i el quadern de l'alumne, on intentava registrar el que deia el professor i algun dibuix que feia a la pissarra. L'alumne aprenia de memòria el teorema de Pitàgores. El *recurs tecnològic* que utilitzaven era usar dos llibretes, una menuda per a les fórmules i propietats matemàtiques que havien de memoritzar i una altra gran per als problemes.

En llibres com el d'octau de EGB de 1973 de l'editorial Santillana s'explica el teorema de la següent manera:

"Considérense las dos proporciones del punto anterior (El teorema del catet)

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BH}} \Rightarrow \overline{AB}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{BH}$$

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CH}} \Rightarrow \overline{AC}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{CH}$$



Si se suman miembro a miembro resulta:

$$\begin{array}{l} \overline{AB}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{BH} \\ \overline{AC}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{CH} \\ \hline \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{BH} + \overline{BC} \cdot \overline{CH} = \overline{BC} \cdot (\overline{BH} + \overline{CH}) \end{array}$$

Pero $\overline{BH} + \overline{CH} = \overline{BC}$

Por tanto,

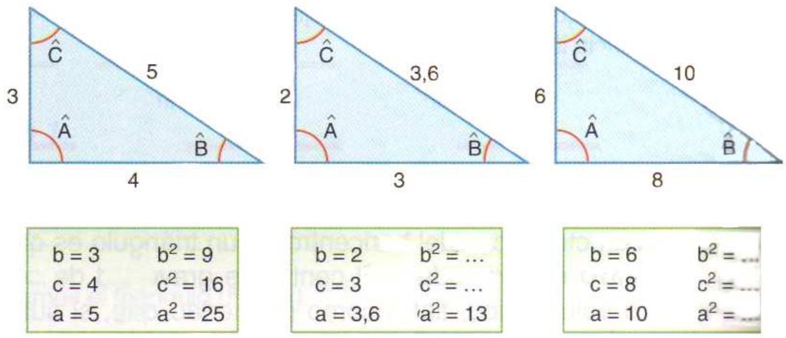
$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{BC} = \overline{BC}^2$$

La suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa"

El llibre no inclou cap exercici, si bé era el professor el que n'aportava algun els alumnes tindrien sort, sinó, s'estudiaria de memòria amb el risc, de ser oblidat ja que els alumnes no el considerarien útil. Este mètode algebraic de demostrar el teorema implica necessàriament haver estudiat abans la semblança en els triangles i el teorema de Tales. A més, esta demostració, encara que inclou la representació d'un triangle (en posició tradicional, dit de pas) està lluny de ser una demostració visual pel que tampoc resultaria la memòria visual un recurs mnemotècnic.

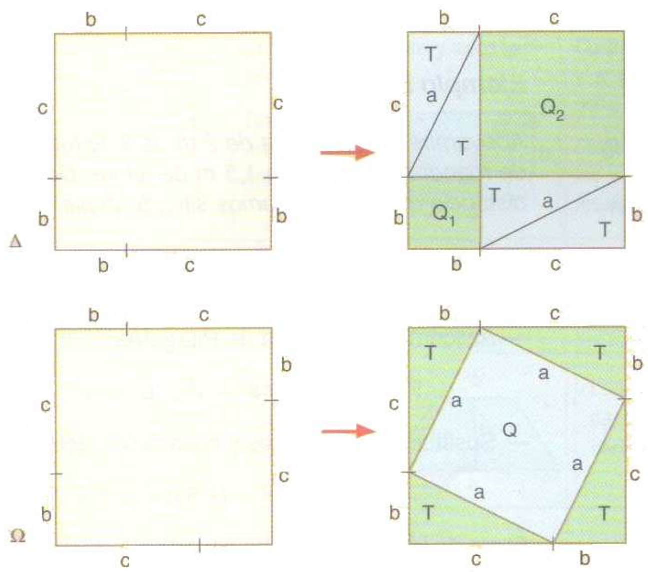
Després va vindre l'època en la que no s'utilitzava cap dibuix ni esquema donant valor sols a la formalització. De vegades els professors es basaven en *els recursos gestuals* (Ferdinando Arzarello, 2002, citat a Fortuny 2010). Són casos extrems a l'ús de la tecnologia.

Més recentment, en llibres com el de 2on d'ESO de matemàtiques d'Edebé (1997), les editorials proposen que siga l'alumne qui descobrisca el teorema guiant-lo amb preguntes com:



- Suma els catets de cada triangle, hi ha alguna relació amb el valor de la hipotenusa?
- Ara suma els quadrats dels catets, hi ha alguna relació amb el valor de la hipotenusa?

Una vegada trobada la relació numèrica, s'enuncia el teorema de Pitàgores i després es realitza una demostració que en principi considerarem geomètrica, ja que el que fa és igualar les àrees però que els alumnes considerarien més algebraica ja que el que fa és utilitzar lletres per a estes àrees, sense calcular-les ni comparar-les visualment.



"La suma de les àrees de Ω ha de ser igual a la suma de les àrees de Δ:

$$Q_1 + Q_2 + T + T + T + T = T + T + T + T + Q$$

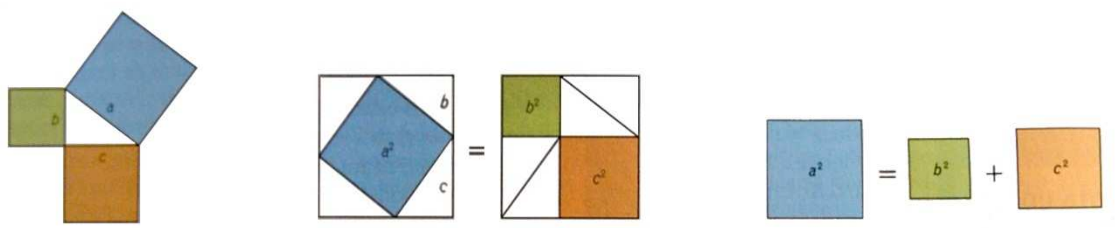
$$Q_1 + Q_2 = Q$$

Calculem les àrees en funció dels costats:

$$\left.\begin{array}{l} Q_1 = b^2 \\ Q_2 = c^2 \\ Q = a^2 \end{array}\right\} \quad \text{Per tant,} \quad \boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

Finalment, inclou un apartat d'aplicacions en el que manifesta que es pot utilitzar per a traure l'altura del triangle o la diagonal d'un rectangle. Estos llibres ja contenen exercicis però la majoria no establixen relació en la vida real i per descomptat, tots els triangles estan en la posició de costum. En este cas, s'estudia primer el teorema de Pitàgores i després el teorema de Tales.

El llibre que utilitzen actualment els alumnes en qüestió (Voramar Santillana, 2007), en primer lloc anuncia el teorema i després ho comprova amb una demostració geomètrica utilitzant colors diferents per a cada quadrat de cada costat del triangle rectangle. Les aplicacions a les que fa referència són per una banda determinar si un triangle és rectangle, acutangle o obtusangle, per una altra banda calcular la diagonal d'un rectangle, i finalment obtenir l'altura d'un triangle isòsceles o l'apotema d'un polígon regular. Inclou exercicis relacionats amb la vida quotidiana però molts més que són simplement matemàtics. Este llibre també considera primer el teorema de Tales i després el de Pitàgores.



En estos dos últims casos, la demostració apareix després d'anunciar el teorema i per tant als alumnes els resulta poc necessària. És més, moltes vegades, són els propis professors els que no li donen importància i no ho expliquen o 'no va per a examen' i per tant, els alumnes continuen aprenent-se el teorema 'de memòria'.

En l'actualitat, la situació de l'entorn a canviat, pel que fa a la disponibilitat de materials físics manipulatius, sinó a la presencia massiva (en l'entorn social, el domèstic o l'escolar) de materials digitals que anomenem les TIC (Tecnologies per a la Informació i la Comunicació) o les TAC (Tecnologies per a l'Aprenentatge i la Comunicació). Els instituts disposen d'ordinadors i la xarxa està plena de materials digitals però el professorat no està totalment convençut que l'ús de la tecnologia millora l'aprenentatge de l'alumnat i facilita la labor docent. Alguns applets com el que trobem a http://www.mathsisfun.com/pythagoras.html, expliquen pas a pas: enuncien el teorema i realitzen una demostració geomètrica (utilitzant colors i demostracions dinàmiques), proposa exercicis que l'alumne ha de realitzar i instantàniament sap si s'ha equivocat i perquè, moment en el que la retroalimentació és millor. A més, té altres links que et duen a altres pàgines on poder ampliar conceptes i estratègies com cóm dibuixar un triangle coneixent els seus costats. Els triangles que utilitzen en els exemples tenen posicions que no són les de costum, utilitzen un llenguatge adaptat a l'edat dels alumnes (encara que utilitza terminologia específica i la que és nova, s'explica), les activitats estan organitzades per nivells de dificultats. A més, resulta una guia per a l'alumne en el seu aprenentatge, els obliga a llegir i entendre el que llegixen, autoaprenentatge. El professor, en este cas, és el guia que els aporta recolzament en cas de dubte. Moltes d'estes pàgines estan en anglés, que permet una connexió amb altres assignatures i encara que no es domine l'idioma, és fàcil de seguir la tasca que es proposa ja que per una banda s'utilitza un llenguatge senzill en les explicacions i per una altra, es diu que les matemàtiques són l'idioma universal. A pesar de tindre l'avantatge de poder disposar de demostracions dinàmiques, totes elles no són clares ni precises. En esta mateixa web, les dues demostracions dinàmiques de les que disposa, són de tipus puzle en les que mitjançant un vídeo ens mostren els moviments de les peces sense donar opció a modificar la velocitat o aturar-lo. És més, entenent que és complicat entendre'l d'esta manera, els mateixos editors proposen que es vega varies vegades fins que es comprenga.

Altres pàgines com www.geoka.net/triangulos/teoerma_pitagoras.html, són menys afortunades i el que fan és simplement anunciar el teorema sense cap explicació i proposar exercicis amb context únicament matemàtic com: *El perímetre d'un trapezi isòsceles és de 110 m, las bases amiden 40 i 30m respectivament. Calcular els costats no paral·lels i l'àrea*. A més inclouen el dibuix, la resolució i solució del problema no donant l'oportunitat a l'alumne de resoldre'l per si mateixa. Un altre tipus de pàgines que podem trobar a Internet són pàgines com ww.sinewton.org/numeros/numer os/69/id eas_03.pdf o www.youtube.com/watch?feature=fvwrel&v=mf-0PxEDx-M&NR=1 que, encara que estan lluny de ser compreses per als alumnes per la seua organització poc atractiva, o la falta d'una guia que els oriente en el seu autoaprenentatge, resulta útil per a professors per a la cerca d'idees encara que han de ser ells mateixa els qui seleccionen aquelles que més l'interessen per als seus alumnes amb un criteri professional.

Podem trobar també a Internet una gran diversitat de vídeos amb l'explicació del teorema en pàgines com YouTube:

- Els que expliquen el teorema de manera tradicional, és a dir, enunciant-lo i pot ser, resolent exercicis, com el següent vídeo: www.youtube.com/watch?v=Pm_ncQVCWlA&feature=related.

- Hi ha d'altres com el vídeo del doctor en ciències matemàtiques Paneza de Buenos Aires, www.youtube.com/watch?v=yDR5FDcMO5o, on explica la demostració del teorema però ho fa per a una audiència que ja coneix el teorema, és a dir, dóna per sabuts conceptes que pot ser un alumne de segon d'ESO no els coneix de manera suficient com per exemple que donats dos costats del triangle i un angle, l'altre no més té una mida possible. S'ha de tindre en compte els possibles errors i dificultats que poden tindre els alumnes i este es un d'ells.

- Un altre tipus de vídeos són aquells que, més que explicar, el que es fa és un repàs així que, encara que no servixen per a entendre'l, vídeos com www.youtube.com/watch?v=qjvy2jcbv8w o www.youtube.com/watch?NR=1&v=nIQRlJkuFWk&feature=endscreen, poden ser útils, o almenys curiosos per al final d'una classe que amb cançó apegalosa, dibuixos i fotografies li poden permetre al professor repassar el tema i extendres en la mesura que ho considere oportú.

Resulta sinó sorprenent, almenys curiós que, a pesar d'estar fent ús de la tecnologia com és la realització d'un vídeo i l'ús d'Internet, els vídeos més vistos i els que més abunden, siguen aquells que no utilitzen *software* dinàmic, més aviat tot al contrari: utilitzen pissarres tradicionals o paper i llapis.

Per últim, publicacions com *Materiales para Construir la Geometría* (Alsina, Burgués, i Fortuny, 1988), el que proposen és una demostració dinàmica però sense les noves tecnologies. Es tracta d'utilitzar peces de cartró o fusta que col·locades d'una manera diferent demostren el teorema de Pitàgores. Són les demostracions de tipus puzle, demostracions geomètriques que consistixen a comparar les àrees o superfícies que ocupen els quadrats amb el mateix costat que els catets i el quadrat amb costat la hipotenusa del triangle rectangle.

Esta última, resulta una estratègia motivadora per als alumnes perquè s'utilitza materials que no solen ser habituals a la classe de matemàtiques. És entretinguda perquè és una activitat que realitzen en les seues pròpies mans. Per als alumnes que no coneixen els *Software* dinàmic, resulta interessant. El SGD permeten restringir propietats com que dos dels costats del triangle siguen perpendiculars mentre es modifiquen la resta de característiques mantenint-se així la igualtat entre el quadrat de la hipotenusa i la suma dels quadrats dels catets. El problema està que per a alguns alumnes incrèduls (i amb un nivell baix) els resulta cosa del programa, cosa de màgia.

En una primera presa de contacte amb el teorema, per estos motius, resultaria més convenient realitzar esta demostració de tipus puzle, així captarem l'atenció dels alumnes i el seu interès convertint les matemàtiques en un joc. Una vegada demostrat el teorema (una vegada convençuts que és cert), podem continuar amb les aplicacions i exemples utilitzant SGD.

To evolve an original demonstration and put it in a form free from criticism is not the work of a tyro. Loomis, 1972

[Desenvolupar una demostració original i posar-ho en una forma lliure de la crítica no és l'obra d'un principiant]

4. Preparació de l'ensenyança

Com hem vist, en primer lloc hem de determinar el nivell de raonament i els coneixements previs dels que disposen els alumnes. Per eixe motiu, per una banda s'ha observat la motivació, implicació i expedient acadèmic en l'assignatura dels alumnes. Per una altra banda, es va passar un test per a determinar el nivell de Van Hiele (annex 2) als alumnes que ara ens disposem a analitzar descrivint cada pregunta i cada possible resposta. Posteriorment analitzarem les respostes reals dels alumnes i extraurem les conclusions que determinaran el seu nivell.

4.1. Test d'avaluació del nivell cognitiu segons el model de Van Hiele

Es va preparar el test amb la intenció de determinar en quin nivell es trobava cada alumne per a determinar per un lloc el nivell general a partir del qual adaptar la proposta d'ensenyança i per un altre lloc el nivell d'aquells alumnes que, lluny del nivell general o majoritari, necessita d'atenció especialitzada bé per tindre un nivell inferior a la resta, bé per tindre'l superior. El model al que fem referència és el que hem explicat a l'apartat 2.1. El Model de Raonament Geomètric de Van Hiele.

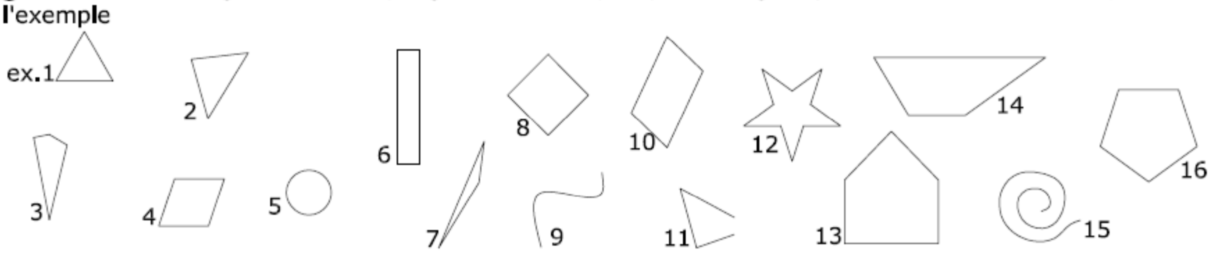
El test que passarem consta de 3 preguntes. En la primera, es pretenia analitzar si els alumnes eren coherents entre la seua imatge conceptual i la definició que tenien del mateix concepte. A més, este tipus d'exercici ens permet conèixer el seu nivell pel que fa a definir figures geomètriques de manera que si es tracta de propietats físiques o visuals el classificaríem en el nivell 1, amb propietats matemàtiques, encara que foren insuficients o redundants, en el nivell 2 o si en canvi es tractava de definicions correctes en el nivell 3.

① Dibuixa 5 paral·lelograms diferents

Aleshores, que és un paral·lelogram?...
....
Que és un quadrat? deflnlx-lo amb les teues paraules...
....
I un rectangle?..
....

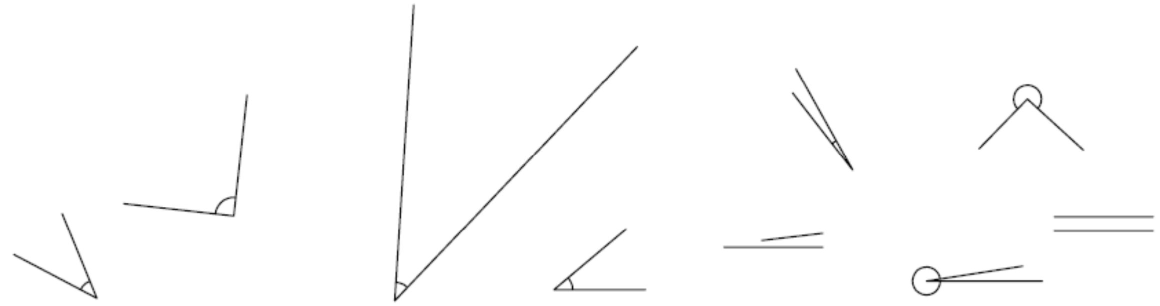
El segon tipus de pregunta ens permetia establir el seu nivell pel que fa a la seua capacitat de classificar: Si la classificació depenia de propietats físiques això com de reconeixement de les figures el situaríem en el nivell 1; si el que fa es classificar amb el criteri de propietats contraries, en el nivell 2 i per últim, si realitza classificacions més complexes, siguen estes inclusives o exclusives, depenent de la definició utilitzada, situaríem a l'alumne en el nivell 3.

② Classlflca cada flgura on corresponga. Tln en compte que una flgura pot estar en més d'un lloc, flxa't en l'exemple



Polígon: 1,..
Polígon regular: 1,..
No és un polígon:...
Trlangle: 1,..
Quadrat: ....
Rectangle: ....
Rombe: ....
Romboide: ....
Trapezi: ....
Paral·lelogram: ....
Quadrllàter: ....
Pentàgon: ....
Hexàgon: ....
Clrcumferèncla: ....

En el tercer tipus de pregunta, ens permet descobrir si l'alumne es fixa en les seues propietats o només en el seu aspecte de manera que si considera que l'angle major és aquell que té els costats de major longitud el considerarem de nivell 1 i si ho resol correctament bé amb l'observació o bé amb alguna estratègia com comparar els angles fent marques en un paper com si utilitzaren regla i compàs el consideraríem en el nivell 2 o el 3.

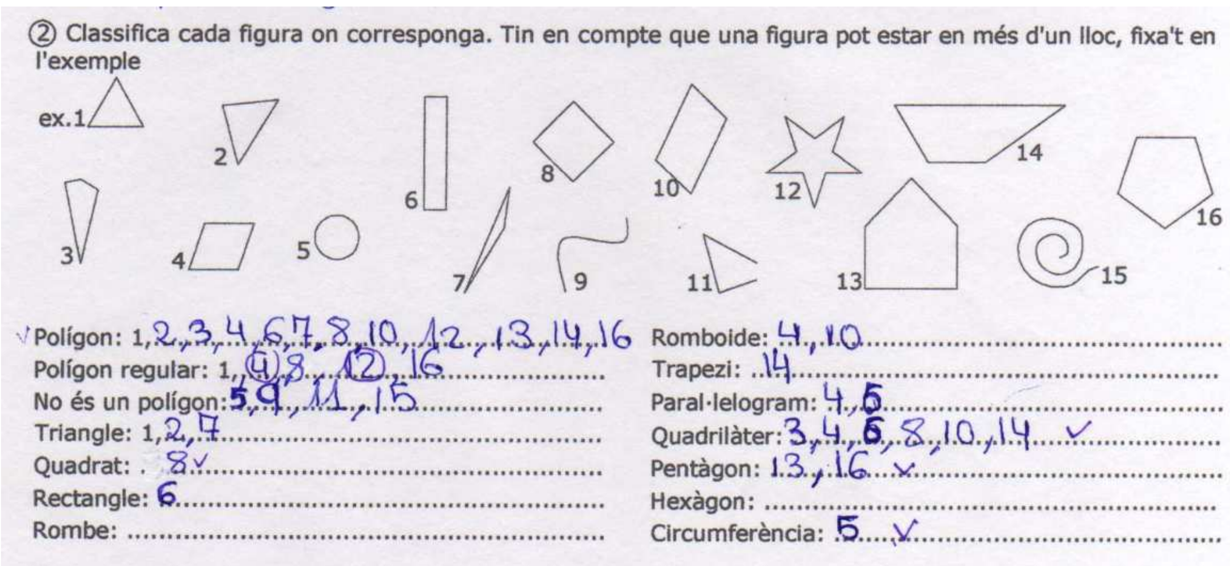

③ Quin angle és major? oredena'ls de major a menor assignant-los un nombre (1, 2, 3...), en cas de que siguen iguals anomena'ls en el mateix nombre. Ajudat d'un trosset de paper si ho necessites.

4.2. Respostes i avaluació dels alumnes

Els alumnes per als quals estem preparant esta unitat, els situem en els nivell 1 i 2 dins del marc teòric del model d'ensenyança de Van Hiele. Mitjançant el test esposat en el punt anterior i l'observació, els alumnes per als quals fem l'estudi, els podem classificar de la següent manera:

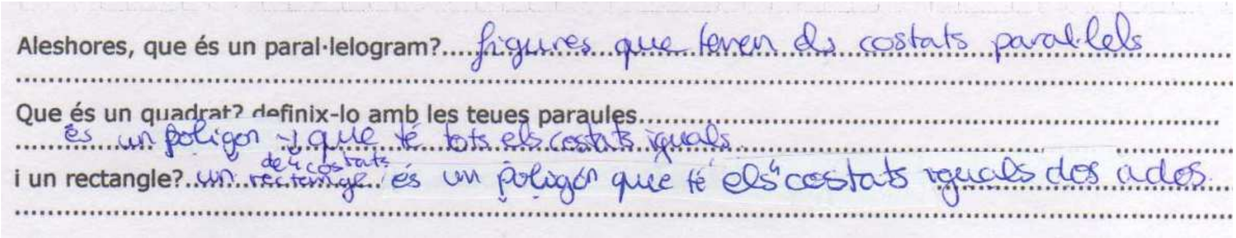
- Un 20% dels alumnes no volen participar, generalment, en les activitats que se'ls proposa. Es tracta de 4 alumnes que duen dos o tres anys suspenent les matemàtiques i tampoc mostren interès d'aprovar-les. No volen anar al grup de reforç que el centre oferta. Es troben fortament desmotivats. En els exàmens que han realitzat durant este curs sols escriuen el seu nom i l'entreguen. Encara que vullguen aprendre, no disposen dels coneixements previs necessaris i se senten incapaços. Com que no poden seguir la classe desconnecten i normalment distrauen a la resta.

- Un 65% dels alumnes es troben al nivell 1 d'habilitat de raonament. Identifiquen els polígons pel seu aspecte físic i els consideren com classes disjuntes. La resposta general en l'activitat 2 del test és la de no classificar el quadrat com a rectangle:


② Classifica cada figura on corresponga. Tin en compte que una figura pot estar en més d'un lloc, fixa't en l'exemple

Polígon: 1,2,3,4,6,7,8,10,12,13,14,16
Polígon regular: 1,4,8,12,16
No és un polígon: 5,9,11,15
Triangle: 1,2,7
Quadrat: 8
Rectangle: 6
Rombe:
Romboide: 4,10
Trapezi: 14
Paral·lelogram: 4,6
Quadrilàter: 3,4,6,8,10,14
Pentàgon: 13,16
Hexàgon:
Circumferència: 5

Les seues definicions són visuals (“té quatre costats iguals...”) però són incompletes o incorrectes (no tenen en compte que els angles han de ser rectes...):


Aleshores, que és un paral·lelogram?...figures que tenen dos costats parallels

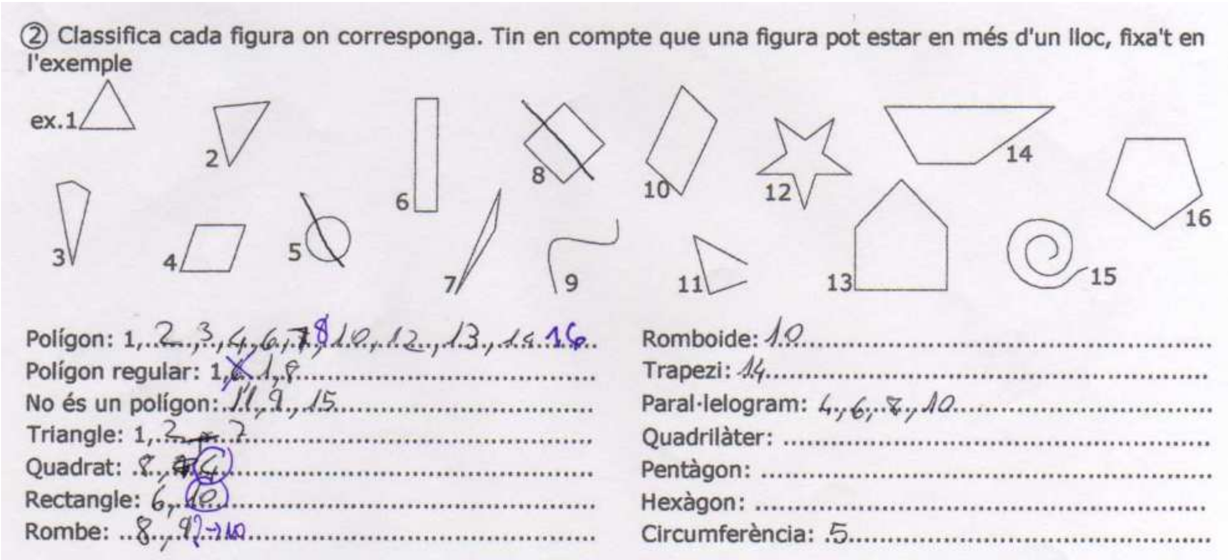
Que és un quadrat? definix-lo amb les teues paraules.......

és un polígon que té tots els costats iguals

i un rectangle?..un rectangle és un polígon que té de 4 costats els costats iguals dos a dos...

[quadrat: polígon de 4 costats que té tots els costats iguals].

Per iguals es referixen a la mateixa longitud però no diuen res de paral·lelisme o perpendicularitat ni angles de 90º.


② Classifica cada figura on corresponga. Tin en compte que una figura pot estar en més d'un lloc, fixa't en l'exemple

Polígon: 1,..2..,3,,4,,6,,7,8,10,,12,,13,,14,,16..

Polígon regular: 1,~~8~~,4,8.........

No és un polígon:..11,,9,,15.........

Triangle: 1,..2,,~~4~~,,7.........

Quadrat: .8,,~~4~~,4.........

Rectangle: 6,,10.........

Rombe: ..8,,4,,10.........

Romboide: 10.........

Trapezi: 14.........

Paral·lelogram: 4,,6,,8,,10.........

Quadrilàter: ....

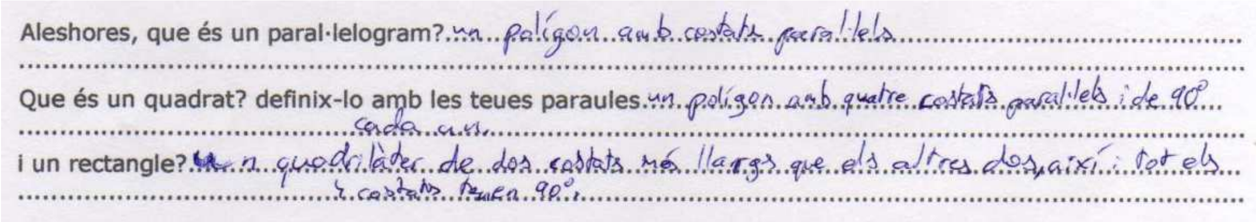
Pentàgon: ....

Hexàgon: ....

Circumferència: .5.........

Conseqüentment, amb definicions incompletes com l’anterior, classifiquen com a quadrat les figures 8 i 4. No només és incorrecta la definició que tenen del concepte sinó també, la imatge del concepte. Són capaços de dibuixar-los i reconèixer-los pel seu nom. Algun d’ells anomena la propietat de paral·lelisme entre costats però no és coherent en les seues definicions: no relaciona el fet que siguen paral·lels i els costats iguals amb que els costats contigus siguen perpendiculars, aleshores consideren el rombe com un quadrat.

- Un 15% els situem en el nivell 2 per les seues respostes. Les definicions són enumeracions de propietats conegudes amb utilització de termes matemàtics com costats paral·lels, angles de 90º... però seguixen sent de vegades insuficients, altres redundants. Encara que entenen els conceptes no els han interioritzat completament, no són capaços de relacionar que si els costats oposats d’un quadrilàter tenen la mateixa longitud i tots els angles són de 90º, els costats oposats són irremeiablement paral·lels:



Aleshores, que és un paral·lelogram? un polígon amb costats paral·lels

Que és un quadrat? definix-lo amb les teues paraules un polígon amb quatre costats paral·lels i de 90º cada un

i un rectangle? un quadrilàter de dos costats més llargs que els altres dos, així i tot els 4 costats tenen 90º

[Quadrat: un polígon amb quatre costats paral·lels i de 90º
rectangle: un quadrilàter de dos costats més llargs que els altres dos, així i tot els 4 costats tenen 90º]

Continuen amb una classificació disjunta. Algun d'ells comencen a fer classificacions lògiques segons les seues propietats com que un quadrat és un rectangle però a l'hora, no consideren al quadrat con un rombe. Per tant, considerarem que estan entre un nivell 1 i 2, els assentarem en el nivell 2. Un alumne en concret d'este grup, no demostra interès però té una desenvolupada habilitat de raonament. És hàbil en els problemes que suposen lògica encara que no mostra gens d'interés pels coneixements teòrics. És molt més ràpid que la resta resolent problemes i quan els finalitza, mentre espera a la resta de la classe s'avorrix i acaba molestant-los.

Com veiem, el nivell general de la classe és baix. Segons el currículum oficial per a segon d'ESO, es planteja la possibilitat que tots els alumnes siguen capaços d'adquirir el Nivell 2 i que comencen a endinsar-se en el nivell 3. Els objectius que perseguim perquè adquirisquen el nivell 2 són: analitzar els elements components d'un polígon, construir polígons a partir d'una propietat donada, agrupar polígons segons les seues característiques, associar propietats als tipus de polígons. I els objectius relacionats amb l'adquisició del nivell 3: establir relacions entre propietats i entre conceptes, realitzar classificacions (inclusiva-exclusiva), demostrar informalment diferents proposicions, formalitzar definicions, comprendre l'estructura d' una demostració de diversos passos, entendre la generalització com una ferramenta de raonament matemàtic, iniciar als alumnes en el raonament deductiu. Aprenentatge de coneixements geomètrics. En este curs, els alumnes haurien de poder en primer lloc conjecturar i després podrien examinar les seues conjectures amb altres exemples mitjançant un programa de geometria dinàmica. Poden formular arguments deductius sobre les seues conjectures. *Comunicar eixos raonaments amb precisió i claredat els prepara per a elaborar i entendre demostracions més formals en nivells posteriors*. (NCTM, 2003). El professor en este grup té un paper importantíssim guiant-los per a aconseguir-ho per la seua desmotivació i el seu baix nivell. A més, són alumnes amb interessos molt diferents així que per a atraure'ls, els professors deuen escollir *tasques geomètriques assequibles a tots, i suficientment obertes*. (NCTM, 2003).

Pel que fa **als coneixements previs**, distingim dos grups: un format pels 4 alumnes que en principi, fa alguns anys que han abandonat l'assignatura, i l'altre format per la resta de la classe. El primer grup cal prestar-li una especial atenció ja que els costarà molt seguir l'explicació si s'establix al nivell de la resta de la classe. Necessitarà un suport especial. L'altre grup complix amb els continguts que hem especificat al primer apartat. Uns els tenen més consolidats que altres i també es tindrà en compte. Hi ha conceptes com el de l'àrea que la majoria dels alumnes no el tenen clar del tot i per això es tindrà molt en compte a l'hora de la demostració geomètrica del teorema de Pitàgores.

4.3. Disseny inicial de la unitat d'ensenyança

Com hem dit, esta unitat didàctica està emmarcada dins del bloc de geometria en la programació de 2on d'ESO i es preveuen necessàries 4 sessions de 55 minuts cadascuna. Ens aproximarem a la proposta d'ensenyança a través de la què considerem l'organització temporal lògica per a impartir-se, i ens referirem en tot moment al marc teòric i les revisions bibliogràfiques estudiades fins este punt.

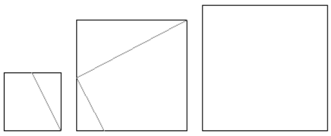
Com hem vist en el punt 2.4. una demostració amb suficient detall del teorema serà útil per a no sols convèncer als alumnes sinó proporcionar enteniment. I si els alumnes són capaços d'entendre el teorema, seran capaços d'interioritzar-lo, els resultarà més significatiu i per tant, els resultarà més fàcil recordar-lo. Així, resulta coherent que els alumnes aprenguen el teorema a través de la seua demostració. A més, com deia Freudenthal i hem recollit en el punt 2.5. considerarem prioritari que els alumnes aconseguisquen la constitució d'objectes mentals més que l'adquisició de conceptes

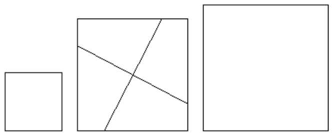
Tenint en compte que el nivell de raonament de Van Hiele de la gran majoria dels alumnes per als qui va dedicada esta proposta està entre l'1 i 2, entenem que no són capaços de realitzar una demostració formal però que sí són capaços de verificar exemples així que el professor ha de guiar la tasca perquè pugen aconseguir la demostració basant-se amb exemples concrets pròpia del nivell 3.

Aleshores, en la 1ra sessió s'explicarà el Teorema de Pitàgores a partir d'una de les demostracions de tipus puzle: formaran grups menuts, tal i com hem indicat en el punt 2.6., i el professor els ajudarà. Com ja hem dit, l'estratègia que considerem més adequada és la que se suggerix a *Materiales para Construir la Geometría* (punt 3.2. Revisió de la literatura de l'ensenyança). Es repartiran 3 quadrats en cartró que compleixen la condició que l'àrea d'un d'ells igual a la suma de les àrees dels altres dos. Cada grup tindrà quadrats diferents i amb valors com els següents perquè al calcular l'arrel o el quadrat els valors tinguen decimals finits. Són els exemples concrets als quals ens referíem abans:

Grup 1. Quadrats de costats 3, 4 i 5 cm
Grup 2. Quadrats de costats 6, 8 i 10 cm
Grup 3. Quadrats de costats 9, 12 i 15 cm
Grup 4. Quadrats de costats 4'5, 6 i 7'5 cm
Grup 5. Quadrats de costats 7'5, 10 i 12'5 cm
Grup 6. Quadrats de costats 5, 12 i 13 cm

Estos són dos possibles conjunts de quadrats que el professor repartirà. Concretament es tracta en el primer cas de la demostració d'Anaricio-Göpel (1824, citat el Loomis, 1972) i en el segon cas de la demostració de Perigal (1830, citat també en Loomis, 1972). Estes dos demostracions resulten senzilles ja que no es necessari dividir el quadrat en moltes parts per a resoldre el puzle.





Primer que res mesuraran els costats dels quadrats i ho anotaran en una taula com esta:

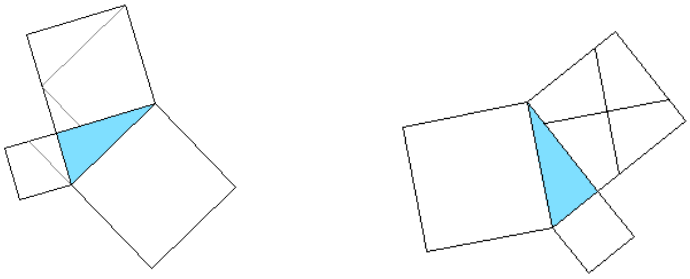
Triangle	Costat quadrat corresponent	Àrea quadrat corresponent	Fórmula general de l'àrea
h=			
a=			
b=			

On h és el costat del quadrat major, és a dir, la hipotenusa del triangle rectangle i a i b els menors, és a dir, els catets. Estos dos termes, hipotenusa i catet, són nous per als alumnes i els costa recordar-los. Podem establir una relació amb la llengua natural que fem usar. Segons la RAE, catet té dos accepcions:

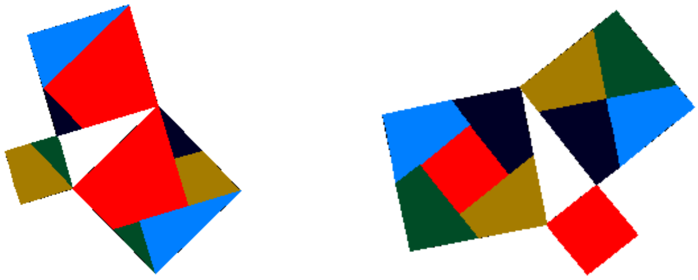
- (geometria) Cadascun dels costats que formen l'angle recte en un triangle rectangle.
- (adjectiu despectiu) Taujà, persona inculta.

La segona accepció és la que coneixen, com un insult per a referir-se a una persona que no és molt llesta, que és curta, igual que els costats del triangle, els curts. Per descart, hipotenusa (que amés és la paraula més llarga) correspon al costat de major longitud del triangle. És un truc mnemotècnic que amés d'aconseguir que els alumnes ho recorden, es veuen capaços i els motiva.

Pot ser algun alumne ja veja la relació entre els valor numèrics, es tractarà d'una relació aritmètica. A continuació es demanarà que ajunten 3 vèrtex dels quadrats formant un triangle rectangle. Com són peces que mouen ells mateixa fins a aconseguir la posició demanada, veuen les diferents posicions de les figures de manera que ja no parlem de la posició de costum amb un dels costats disposat de manera horitzontal respecte a nosaltres o respecte el full tal i com passa quan es demana que ho facen amb el paper i llapis. Hem de recordar que per un costat es genera una imatge conceptual del teorema que resulta un recurs mnemotècnic ja que influeix en el concepte guardat a llarg termini gràcies a la memòria visual que anomenàvem en el punt 2.3.



Després retallaran els quadrats menors per on estan les marques que el professor ha fet abans de repartir-los i provaran de muntar-ho a mode de puzle sobre el quadrat gran. El que realment estan fent és comparar les àrees i ells mateixa veuen que són iguals, no sols en el cas que els ha tocat al seu grup sinó que a la resta de grups, amb mesures diferent, també els ocorre per això és important que s'establisca una conversa entre els alumnes i el professor o entre els alumnes mateixa on es faja constància d'este fet.



Ací establirem el teorema de Pitàgores. Cal remarcar que sols és vàlid pels triangles rectangles. Se'ls guiarà a l'hora d'escriure la fórmula. Una vegada demostrat el teorema, se'ls parlarà de Pitàgores i del triangle d'Egipte amb costats 3, 4 i 5 i l'utilitzat que té en la construcció i en diferents àmbits. Es faran exercicis per a aplicar-ho i d'enfortiment. Cada vegada que es facen exercicis, es prepararan altres exercicis per als alumnes avantatjats i s'ajudarà a aquells amb dificultats,atenent la diversitat del grup.

En la segona sessió el professor durà a classe l'ordinador portàtil i el canó per a projectar el programa Geogebra o similar. En este cas, els alumnes no coneixen el programa així que serà el professor qui dibuixarà un triangle rectangle col·locant-lo en qualsevol posició i no en la de costum per a fomentar la seua visió espacial tal i com hem vist en l'apartat 2.2. sobre la formació de conceptes de Vinner. A més els servirà per a recordar com dibuixar un triangle donat els seus costats. Tot seguit, mou un dels vèrtex oposats l'angle rectangle de manera que es mantinguen les longituds dels catets que anomenem a i b. Una altra opció és dibuixar un altre triangle amb els catets de la mateixa longitud que el primer però no rectangle. D’esta manera, s’observa que mantenint-se els costats a i b el costat de la hipotenusa h varia. Ara podem dir que:

$h^2 = a^2 + b^2$ -> Triangle rectangle

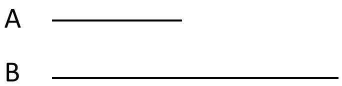
$h^2 < a^2 + b^2$ -> Triangle acutangle

$h^2 > a^2 + b2$ -> Triangle obtusangle

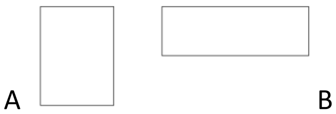
Es farà alguna activitat per a consolidar-ho.

S’introduirà la mesura d’àrees recordant la seua utilitat:

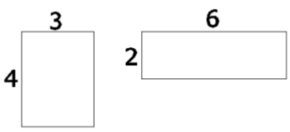
Quin segment és major? A o B? De segur que tots a l’hora contesten que B.



Quin rectangle és major, A o B?



Esta vegada les respostes ja no seran unànimes. S’afegiran les mesures.



Ací el professor pot vore, per les respostes dels seus alumnes i les seues justificacions, el nivell i els coneixements que tenen cadascun al respecte així com les concepcions errònies o incompletes. Se’ls demanarà que els dibuixen contant quadres de la llibreta. Possiblement, les respostes seguiran sense ser unànimes. Recordarem l’àrea del rectangle i se’ls demanarà que conten els quadres de la llibreta que tanquen. Desprès es recordarà la del triangle. Es repassarà la demostració del Teorema de Pitàgores.

La tercera sessió es durà a terme en l’aula d’informàtica. Cada 2 alumnes tindran un ordinador per a realitzar l’activitat en parelles i ajudar-se entre ells. Serà una activitat d’autoaprenentatge guiat, és a dir, seran els mateixos alumnes els que, resolent les activitats preparades i mitjançant la utilització de les TIC per a comprovar-ho, aniran construint el seu propi aprenentatge. A l’hora, el professor anirà per les taules resolent dubtes i dedicant-li més temps a l’alumne que més ho necessite, atenent la diversitat del grup.

L'última sessió es dedicarà a l'avaluació dels coneixements adquirits pels alumnes de la unitat impartida. En esta sessió, l'últim quart d'hora es recolliran les exàmens i es farà una correcció en la pissarra dels exercicis proposats. És el moment on la retroalimentació és major (Pascual, F. 2011).

En la primera sessió, el professor farà una breu introducció de la unitat que s'impartirà. A més, totes les sessions començaran en un recorregut del que s'ha de fer i finalitzaran en un repàs dels conceptes bàsics que s'han vist per a fomentar la memòria en la zona de primacia i de recència segons la corba de posició serial (Pascual, F. 2011). A més, en cada sessió es repassarà allò més important de les sessions anteriors atenent la corba de l'oblit d'Ebbinghaus (Pascual, F. 2011). Esta explicació inicial amés correspon a la primera fase de les fases d'aprenentatge que planteja Hiele i que repassem en l'apartat 2.1. En la proposta que acabem de descriure s'aposta per un autoaprenentatge dirigit de manera que el professor és el guia en la tasca que s'ha d'elaborar (fase 2), sobre tot en la sessió de la demostració i en la que es resol del diagrama de flux. La proposta de resoldre les tasques en equips o grups menuts i després la posada en comú, permet que els alumnes comenten i intercanvien experiències que correspon a la fase 3. Després de la part de descobriment o ensenyança els alumnes apliquen els coneixements adquirits en els exercicis que es proposen (fase 4). Per últim, en el repàs de tot el que hem vist durant la sessió que anomenàvem al principi del paràgraf, correspon a la fase 5 de les fases d'aprenentatges de Van Hiele.

4.4. Disseny de les activitats de classe

En este apartat recollim un conjunt d'activitats d'aplicació, de consolidació i per últim activitats d'ampliació destinades a aquells alumnes més avantatjats. En primer lloc, es realitzaran activitats d'aplicació després de cada concepte nou per a posar-lo en pràctica. S'utilitzarà com a exemple dins de la fase d'*explicitació* del model de Van Hiele. En segon lloc, les activitats de consolidació permetran als alumnes aplicar els coneixements adquirits en una *orientació lliure*. Als alumnes més avantatjats els quals exigixen les activitats com a repte intel·lectual, en finalitzar les activitats anteriors, se'ls proposarà d'altres d'ampliació. Segons el test i les observacions anteriors al començament de la unitat, es preveu que només un dels alumnes siga capaç de realitzar totes les activitats.

No es pretén que els exercicis siguen models matemàtics ideals sinó propis del món real com anomenava Freudenthal. Per això, les activitats que proposem tenen un context real i no només matemàtic. Al tindre un context real, permet que en tots els exercicis es faça una representació pictòrica de la situació del problema per a afavorir la comprensió mitjançant recursos visuals però, com deia Presmeg i reflectíem al capítol 2.3., exigirem també la seua explicació verbalitzada per tal de desenvolupar la seua habilitat logicoverbal, amb la utilització del vocabulari matemàtic i generalitzant els resultats.

Estos exercicis han estat extrets de publicacions com *Geometrías y experiències* o de llibres de text com el dels alumnes.

4.4.1. Exercicis d'aplicació

1. Amb una regla, amida els costats del teu llibre de matemàtiques i calcula la diagonal amb el teorema de Pitàgores. Comprova la solució amidant-la.

Es necessitarà també una calculadora i d'esta manera aprenen a usar-la (traure el quadrat, l'arrel...). Es necessita una regla de 30cm.

Possibles dubtes: La diagonal del rectangle el dividix en dos triangles rectangles (es pot posar com a exemple la mateixa pissarra traçant la seua diagonal). Com tots els alumnes no dominen al 100% les expressions algebraiques es farà pas a pas perquè vegen clar com va resolent-se, relacionant-ho amb els seus coneixements previs.

Al traçar la diagonal mentalment, han d'imaginar-se també mentalment els 2 triangles resultants. Pot ser, si tenen el llibre situat de manera que un dels seus costats està en posició horitzontal respecte d'ells mateixa, un dels triangles estiga en la posició de costum amb l'angle de 90º en la part inferior com mostren les dues primeres figures però, l'altre triangle, es trobarà 'a l'inrevés' com mostren les dues figures següents:

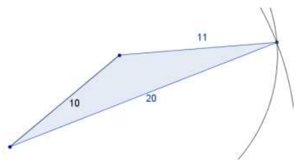
A més, el llibre és un objecte que permet el seu moviment, la seua rotació, que facilita a l'alumne amidar-lo (no com un dibuix estàtic a la pissarra) així que les posicions dels triangles aniran variant. D'esta manera, exercicis com este permet als alumnes millorar la imatge conceptual que tenen del triangle l'aportar una major bateria d'exemples tal i com assenyala Vinner.

Per últim cal assenyalar que este exercici es pretén que es faça per equips amb la intenció que els components cooperen i discutisquen com s'ha de fer aportant cadascun d'ells les estratègies que consideren més apropiades.

2. Indica si els triangles amb aquestes mides són rectangles, acutangles o obtusangles.

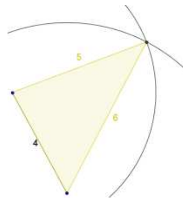
a) 10cm, 11cm i 20cm

triangle obtusangle



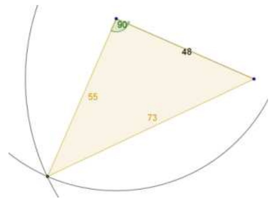
b) 4cm, 5cm i 6cm

triangle acutangle



c) 48cm, 55cm i 73 cm

triangle rectangle



L'alumne haurà de tenir en compte quina mida és la major i quines corresponen als catets per a substituir correctament en el teorema. El professor ho demostrarà gràficament amb el GeoGebra. Col·lateralment, l'alumne aprendrà a dibuixar un triangle donats els seus costats i prendrà contacte amb el programa.

S'evitarà posar els exemples en la posició de costum per a fomentar la millora de la seua imatge conceptual com hem vist al punt 2.2.

4.4.2. Exercici de consolidació

3. Una escala mesura 2,5m de longitud i, al recolzar-la a la paret, la seua base dista d'aquesta 0,7m. A quina altura de la paret arriba l'escala?

Com hem anomenat a la introducció d'este apartat 4.4., es farà un dibuix simple a la pissarra.

4. Un electricista, ha d'arreglar una farola del carrer que està situada a 5m d'altura. Per a arribar-hi, utilitza una escala que s'ha de recolzar a 1,5m de distancia de la paret per a no caure. Que ha de mesurar l'escala?

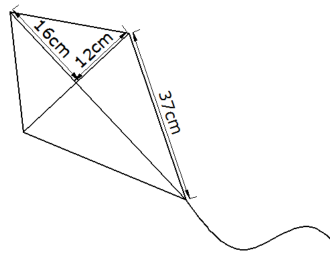
Els dibuixos, de línies senzilles, fàcils de fer, criden l'atenció dels alumnes. Intenten esbrinar la resposta sense fer càlculs. Això és important perquè es posen en situació, l'entenen i saben que és el que busquen. Pensen. Al resoldre'l, se n'adonen com d'encertats estaven o no i comproven matemàticament que la hipotenusa és de major longitud que els catets.

Els contextos que proposem, són atribuïbles a feines tècniques, que els mateixos alumnes consideren al seu abast ja que es tracta de professions a les que es pot accedir fent un cicle mitjà de formació professional i d'altres vegades no necessiten més estudis que el graduat escolar. Amb això pretenem que els alumnes vegen que els pot resultar útil i així motivar-los.

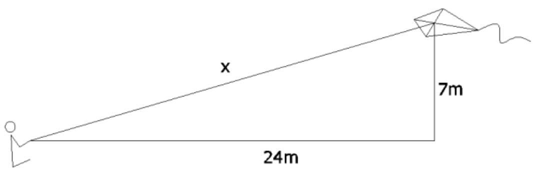
5. Sobre una paret vertical de 16m d'alt es col·loca inclinada una escala de 20m de longitud. A quina distància de la paret es troba la base de l'escala?

6. Una escala mesura 2,5m de longitud, i, al recolzar-la a la paret, la seua base dista d'aquesta 0,7m. A quina altura de la paret arriba l'escala?

7. Per a fabricar-te una milotxa de les dimensions indicades en la figura, què mesures donaries al suport exterior? Tindràs suficient en una vara de 2m per a construir tota l'estructura?

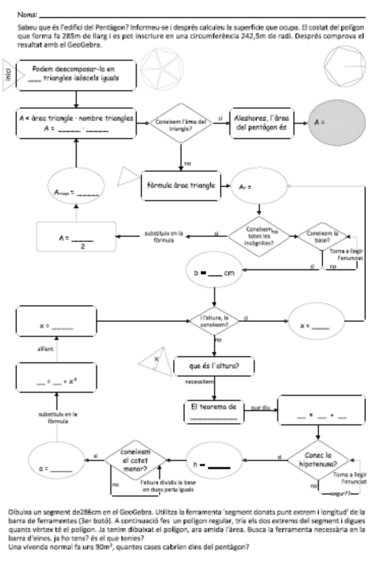


8. Calcula la longitud del fil de la milotxa.



9. Sabeu que és l'edifici del Pentàgon? Informeu-se i després calculeu la superfície que ocupa. El costat del polígon que forma fa 285m de llarg i es pot inscriure en una circumferència de 242,5m de radi. Desprès comprova-ho amb el GeoGebra.

Este exercici consistix en un diagrama de flux (inclòs a l'annex 4) que els explica pas a pas el procés per resoldre-ho. S'ha de completar les caselles marcades i amb el seu mètode de seguir les fletxes als alumnes els resulta com un joc. Esta activitat requerix aplicar el teorema de Pitàgores, descompondre una figura en altres més senzilles i traure l'àrea utilitzant la fórmula de l'àrea del triangle (o la del rectangle). Per tant, arreplega els principals objectius de la unitat. Hi ha alumnes que ho resoldran de seguida així que es demanarà que es corregisquen els deures que tenien per a casa en el GeoGebra perquè seguisquen utilitzant-lo i aprenent. Esta tasca es realitzarà per parelles fomentant la cooperació en l'aprenentatge com veiem al punt 2.5.



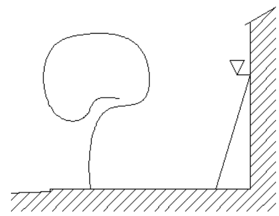
10. Prova d'avaluació. Annex 5

La principal finalitat del professor és que l'alumne aprenga. Per això, la prova d'avaluació es realitza perquè l'alumne siga conscient d'allò que ha aprés i del que no i ha de seguir treballant. També permet al professor saber què els ha quedat clar als alumnes i què no per a retornar a l'explicació i millorar-la. Es proposen qüestions com les següents:

- Escriu el teorema de Pitàgores.

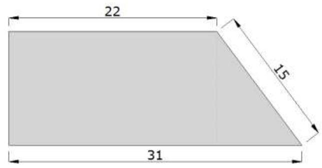
És una pregunta que s'espera que tots coneguin ja que sense això no podrien resoldre la resta de l'examen així que per una banda, podria considerar-se innecessària ja que en les preguntes següent demostraran que el coneixen. Però, per una altra banda, per a aquells alumnes que classificàvem en el grup que no contestaven mai les preguntes dels exàmens, que ni siquiera s'esforçaven en llegir-les, ara en un cop d'ull (ja que està situada just baix d'on han d'escriure el nom), els resulta un punt de partida: en llegir-la, de seguida se n'adonen que sí ho saben, ho recorden de les classes gràcies a la visualització de la fórmula en la pissarra, gràcies a la visualització del patró que representa i gràcies a la demostració que es realitza. Aleshores, ja estan immersos en la resolució de la prova. Comencen a vores capaços i per tant motivats. S'esforçaran en recordar el que s'ha vist a classe i en resoldre les activitats. Este serà per a ells el moment en el que més aprendran.

- Calcula la longitud de l'escala que necessita l'electricista per a arreglar la farola situada a 5m d'altura tenint en compte que l'escala s'ha de recolzar a 1m de la paret.



És una activitat com les que es proposen per a classe. Es proporciona la representació pictòrica del context del problema ja que com hem vist, es tracta d'alumnes en un nivell cognitiu entre l'1 i el 2 del barem de Van Hiele i per tant encara que poden entendre la descripció, els costa raonar lògicament. Però, al mateix temps, els valors numèrics de la mesura de cada element del triangle que es forma, els han de col·locar ells mateixa per a demostrar l'enteniment de la situació i no simplement l'aplicació de la fórmula substituint els valors en la incògnita corresponent.

- El meu veí té un bancal amb forma irregular. Necessita saber la seua superfície (l'àrea) i ens ha demanat que la calculem. Ajuda'l!



Este exercici correspon al tipus d'exercici que es va resoldre amb el diagrama de flux i que adjuntem a l'annex 4. Han de descompondre la figura en altres polígons d'àrees conegudes. S'espera que el descomponguen en un rectangle i un triangle rectangle i que utilitzen Pitàgores per a traure la mesura que els falta. Pot ser algun d'ells intente descompondre'l en dos triangles els quals, un d'ells no seria rectangle i per tant no podrien aplicar Pitàgores. En este cas, es detectaria l'error en el concepte (el teorema de Pitàgores sols és vàlid per a triangles rectangles). A més, suposa un mètode de resolució de problemes dividint-lo en parts i han de saber el que fan per a després posar en comú cadascuna d'estes parts.

- EXTRA. Hi ha un bambú de 100cm d'altura que s'ha trencat de manera que el seu extrem superior es recolza en el sòl a una distancia de 30cm des de la base. Es demana que es calcule a quina altura s'ha trencat.

Es tracta d'un problema hindú del segle IX adaptat. En este cas, no es proporciona la representació pictòrica i per això es considera un problema extra. Per als alumnes que sàpien resoldre les activitats anteriors sense dificultats, este exercici els suposarà un repte intel·lectual. Este exercici precisa de més coneixements previs que l'anterior ja que s'espera que el resolguen utilitzant l'àlgebra i les propietats notables (i en cas de no recordar-se'n, la propietat distributiva). Encara que sembla una equació de segon grau, si es resol correctament, els termes de segon grau s'anul·len i ens queda una equació de primer grau que s'espera que els alumnes sàpien resoldre. Este exercici connecta amb els seus coneixements previs i els recorda. Cada unitat que s'impartix deuria incloure, en la mesura del que siga possible, continguts anteriors per a recordar-los com assenyala la corba de l'oblit d'Ebbinghaus (Pascual, F., 2011).

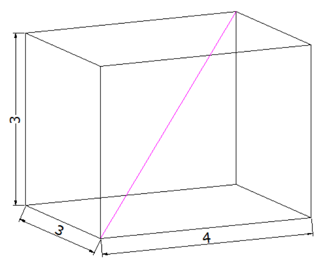
4.4.3. Exercicis d'ampliació per a atendre la diversitat d'alumnes avantatjats:

Tant els alumnes amb dificultats com els més avantatjats responen a la diversitat dins del grup de la classe i per tant, necessiten una atenció especialitzada. Ara es proposen exercicis per als més avantatjats. Ens referim als alumnes que entenen l'explicació i resolen els problemes plantejats més prompte que la resta. Alguns d'ells, s'avorrixen a classe, els exercicis que es plantegen a la resta no els suposen cap repte això que solen estar fortament desmotivats. Moltes vegades, deixen d'atendre inclòs de fer els exercicis i es posen a molestar a la resta. Per a evitar tot això, es proposen exercicis d'ampliació com els que seguixen. No es pretén avançar matèria ja que aleshores el problema es traslllada al pròxim curs sinó proposar exercicis que els supose un repte intel·lectual que afavorisca el seu desenvolupament cognitiu.

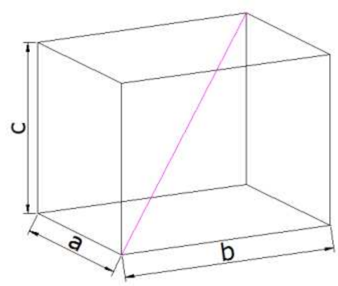
12. Calcula la longitud de l'escala per a arribar a una altura del doble, és a dir a 4,8m d'altura sent la distancia que la separa de la paret en la seua base la mateixa, 0,7m. Que creus que ens eixirà? El doble que l'altra escala, 5m?

L'exercici és del tipus dels que plantejàvem a l'apartat d'activitats de consolidació però en este cas es demana que raonen, que intenten avançar els resultats i després ho comproven en la resolució. Este tipus d'activitat l'aproxima al tipus de raonament del nivell 3 de Van Hiele.

13. Trau la diagonal de l'espai del següent ortoedre.

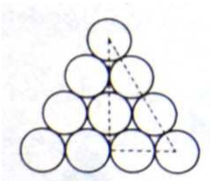


Després trau-ho en funció dels seus costats a, b i c



En primer lloc, s'aposta per fomentar la visió espacial. No sols ha de vore el triangle rectangle que es forma al traçar la diagonal en un rectangle en un pla sinó que també en un pla perpendicular, passant de la visualització en dos dimensions a les tres dimensions. Posteriorment, trobem el mateix exercici però esta vegada es pretén que es generalitze i es pugen extraure conclusions. De nou, encara que de manera guiada, es pretén que raone en un nivell superior.

14. Quina altura ha de tindre un magatzem per a poder col·locar tonells de vi tal i com s'indica a la figura, si el diàmetre de cada tonell és de 2 metres?



En este cas, mitjançant l'observació de la representació gràfica, s'ha de connectar els coneixements que estem adquirint en altres coneixements geomètrics que ja tenen com són el radi i el diàmetre. Esta vegada, han de buscar una estratègia per a resoldre el problema però, llevat del dibuix representat, ja no és d'una manera guiada.

Altres activitats que poden fer a casa (si tots disposen d'ordinador i connexió a Internet) o a l'aula d'informàtica del centre són les que plantegen webs com les següents de les quals cal destacar la primera i ja hem descrit en el punt 3.2:

http://www.mathsisfun.com/pythagoras.html

http://www.geoka.net/triangulos/teoerma_pitagoras.html

http://www.youtube.com/watch?v=qjvy2jcbv8w

http://www.sinewton.org/numeros/numeros/69/ideas_03.pdf

http://www.xtec.cat/ceip-pompeufabra-lloret/ciencia/castella/desc.htm

http://sofia.nmsu.edu/~breakingaway/Lessons/PTUST/PTUST.html

5. Posada en pràctica

S'ha posat a prova la proposta d'ensenyança per als alumnes de 2on d'ESO. S'ha recollit informació tant de les respostes orals dels alumnes durant la classe com de proves escrites i exercicis que s'han fet. També s'ha tingut en compte l'actitud que ham mostrat.

En primer lloc, tots els alumnes s'han mostrat participatius en l'activitat de demostrar el teorema ja que no es necessitava d'uns amplis coneixements previs, incloent els alumnes que havien abandonat l'assignatura. En la sessió següent, al preguntar que havíem vist en la sessió anterior, un d'estos alumnes va intervindre per a dir:

- *Això dels quadradets!*

- *I que vam demostrar en allò dels quadrats?*

- *El teorema de Pitàgores!*

- *I que diu el teorema de Pitàgores?*

- *El quadrat de la hipotenusa és igual al quadrat d'un catet més el quadrat de l'altre catet.*

Altres alumnes deien: *la hipotenusa al quadrat és igual al catet al quadrat més l'altre catet al quadrat.*

D'esta manera es demostra que uns, la qual cosa recorden, és la fórmula, la imatge visual del concepte que tenen és: $h^2 = a^2 + b^2$, és a dir, la relació aritmètica. Altres en canvi, recorden la igualtat de les àrees, és a dir, la relació geomètrica. En general podem dir que aquells que tenen més coneixements previs la imatge mental que primer els ve a la ment és la relació aritmètica i els que en tenen menys, la relació geomètrica. Però tant uns com els altres entenen l'altra relació. En l'avaluació final, se'ls va preguntar directament pel teorema de Pitàgores i tots escrigueren la fórmula.

Pel que fa als exercicis proposats, distingim tres grups:

- Hi ha un percentatge alt que entén els enunciats escrits i és capaç de fer un dibuix senzill per a representar-ho i resoldre'l. Processament visual. Tenen un bon nivell de comprensió lectora. Aquells que fan un dibuix correcte, amb els valors on correspon, resolen bé l'exercici. Són per exemple els exercicis de les escales recolzades en la paret.

- Un altre grup intermedi no és capaç de representar-se visualment la situació del problema però si al problema li s'afegix el dibuix, és capaç de situar els valor de manera correcta.

- Per últim, hi ha un grup menut que no és capaç d'entendre el problema si no se'ls explica al mateix moment que se'ls fa una representació pictòrica del problema. Estos alumnes solen anar mal en la resta de les assignatures també. En canvi, solen fer bé les activitats matemàtiques que no s'engloben dins d'una situació reial sinó que tenen un context matemàtic. Tenen un nivell de comprensió lectora i d'habilitat cognitiva baix. Des de les matemàtiques, és una competència que es pot millorar proposant exercicis vinculats amb la vida quotidiana.

S'ha demostrat que atenent la diversitat del grup, tots ells han millorat quant a motivació i per tant pel que fa a coneixements adquirits:

- L'alumne més avantatjat, amb els exercicis d'ampliació, a més de no molestar a la resta, desenvolupa la seua habilitat cognitiva sense avançar conceptes. Quan acabava un dels exercicis i la resta continuava amb l'anterior, en demanava més, cosa que fins ara pareixia que no fera res. Li suposaven un repte ja que el feien 'pensar'.

- Els alumnes que solen entregar els exàmens en blanc, ara ho intenten perquè realment saben alguna cosa. El problema és que els continguts de l'assignatura de matemàtiques són continus i es depèn molt dels coneixements previs. Un d'estos alumnes, a la prova final, sabia aplicar el Teorema en un dels exercicis, en primer lloc recordant la formula i en segon lloc substituint els valor de manera correcta però no sabia resoldre-ho ja que no sabia calcular 5^2, és a dir, no coneixia les potències. Són alumnes molt desmotivats, si tingueren algú al costat que els ajudara serien capaços d'aprendre molt. Estaven contents de traure un tres.

- La resta d'alumnes se sentien igualment atesos ja que eren capaços d'arribar als objectius proposats i si els sorgia algun dubte era resolt a nivell general ja que els errors són una part fonamental per a l'aprenentatge i així ho ha de transmetre el professor. Els errors d'un alumne es fa vore que són comuns a més alumnes, això els dóna confiança i seguretat per a intervindré en classe i preguntar allò que no entenen i així que l'aprenentatge siga més significatiu.

6. Conclusions

En primer lloc, com hem vist, és fonamental conèixer quin és el nivell que tenen els alumnes als quals s'impartirà la unitat, quins són els seus coneixements previs i quins d'estos són incorrectes o incomplets. Açò permetrà establir el punt de partida de l'explicació. Si se'ls explica allò que ja saben s'avorriran, desconnectaran i no aprendran res. Si se'ls explica alguna cosa que no són capaços d'entendre perquè no tenen les ferramentes cognitives necessàries, també s'avorriran, desconnectaran i tampoc aprendran res. És importantíssim adaptar la proposta als alumnes als qui va dirigit, tasca que resulta més complicada donada la diversitat dins del grup.

En segon lloc, els alumnes han de percebre útils les activitats que es plantegen. Poden aprendre conceptes o enfortir-los a través de problemes de la vida quotidiana, contextos que els preocupen o que ells mateixa pugen aplicar o necessitar. Si li veuen utilitat els resultarà l'aprenentatge més significatiu i amés estaran més motivats al respecte. També millorarà la seua comprensió lectora i es desenvoluparà la seua habilitat cognitiva. A més, fomentarà la seua creativitat i s esentiran capaços d'enfrontar-se a problemes de la vida real.

En tercer lloc, els *softwares* de matemàtiques que disposem en l'actualitat, són de gran utilitat en l'ensenyança, particularment en geometria dinàmica, a causa de la seua facilitat per a mostrar exemples i la possibilitat de la seua mobilitat, característiques que no ens proporciona ni el paper ni la pissarra tradicional. Permet estalviar temps i mostrar molts més exemples i variats perquè els alumnes tinguen una imatge mental rica dels conceptes matemàtics. Encara falten molts recursos tecnològics en les aules però dels pocs que disposen els centres hauríem de fer ús pels seus avantatges.

Finalment, cal assenyalar que les propostes d'ensenyança no són ferramentes rígides sinó tot al contrari: són estratègies que van adaptant-se a les necessitats de cada grup, del centre, del professor, dels coneixements previs comuns a tots els participants, del temps de què es disposa... I que ha d'anar millorant-se amb la pràctica i la informació que va recollint-se amb la diversitat de l'alumnat. De fet, al vore les respostes que els alumnes feren al pre-test (annex 2), hem decidit millorar les preguntes i hem adjuntat el document: annex 3. A més, el professor ha de tindre en compte possibles imprevistos pel que fa a la planificació del temps, tant externs com activitats extraescolars, vagues... com interns com que als alumnes els coste d'entendre més o menys del previst.

Resulta una labor molt gratificant per a un professor quan a l'avaluació final percep que els alumnes han entès i interioritzat allò que es pretenia. Amb un estratègia d'ensenyança ben preparada i adequada als receptors, la probabilitat de resultar amb èxit és major.

Bibliografia

Alsina, C.; Burgués, C.; Fortuny, J.M. (1988). *Materiales para Construir la Geometría*. Colección: Matemáticas: Cultura y Aprendizaje, Madrid: Síntesis.

Álvarez, M. D.; Hernández, J.; Miranda, A. Y.; Moreno, M. R; Parra, S.; Redondo, M.; Redondo, R.; Sánchez, M. T.; Santos, T.; Serrano, E. (2007). Figures planes. Àrees. En Pérez, C. (eds). *Matemàtiques 2ESO*, Picanya: Voramar Santillana, pg. 187-193, 198-206.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*, Bogotá: Una Empresa Docente.

Blembengut, M. S.; Hein, N. (1986) *Modelo, modelación y modelaje: métodos de enseñanza-aprendizaje de matemáticas.* Brasil: Universidade Regional de Blumenau.

Campillo, C.; *et al*. (1982). Enciclopedia Sistemática Nueva Acta 2000, tomo 11: *Biografías*, Madrid: Rialp.

Conselleria d'Educació. (2007). *DECRET 112/2007, de 20 de juliol, del Consell, pel qual s'establix el currículum de l'Educació Secundària Obligatòria a la Comunitat Valenciana*. Diari Oficial de la Comunitat Valenciana, num. 5562/24.07.2007, pg. 30402-30412, 30550-30566.

Corberán, R.; Gutiérrez, A.; Huerta, M. P.; Jaime, A.; Margarit, J. B.; Peñas, A.; Ruiz , E. (1994). *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en enseñanza secundaria basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele*. Madrid: Centro de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia.

Ferry, G. (1971). *El trabajo en grupo: hacia la autogestión educativa*, [trad. Vidal, N.]. Barcelona: Fontanella.

Fey, J. (1988). *Technoly and mathematics education: a survey of recent developments and important problems*, Conference present at ICME VI. Budapest, Hungary.

Fortuny, J.M.; Iranzo, N.; Morera, L. (2010). Geometría y tecnología. En Moreno, M.M.; Estrada, A.; Carrillo, J.; Sierra, T. A. (eds). *Investigación en educación matemática XIV.* Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, Lleida: Edicions de la Universitat de Lleida, pg. 65-84.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Cambridge: Board.

Fuster, M.; Martín, F. y equipo Edebé. (1997). Figures planes. En Gómez, M. (eds). *Matemáticas 2ESO. 1er Ciclo*, Barcelona: Edebé, pg. 152- 163.

García Arenas, J. (1988). *Geometría y experiencias*, Madrid: Alhambra.

Gil, J.; Gutiérrez, M.; Sánchez, M.; Vázquez, M. C. (1973). Relaciones métricas en el triángulo rectángulo. En Roldán, G. (dir). *Libro de consulta nivel 8*, Madrid: Santillana, pg. 205.

Gonzalez, M. J. (2001). *Using dynamic geometry software to simulate physical motion*. International Journal of Computers for Mathematical Learning 6. Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación, Facultad de Ciencias, Universidad de Cantabria.

Gutiérrez, A.; Jaime, A. (1996). Uso de definiciones e imágenes de conceptos geométricos por los estudiantes de Magisterio. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Valencia. En Giménez, J. et al. (eds), *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática* (colección Mathema nº8), Granada: Comares, pg. 143-170.

Gutiérrez, A. (2011). Apunts del bloc de geometria dins de l'assignatura d'Aprenentatge i ensenyança de les matemàtiques impartida per A. Gutiérrez en el màster de Professor en Educació Secundària de la Universitat de València.

Gutiérrez, A. (1991). *Procesos y habilidades en visualización espacial.* Departamento de Didàctica de la Matemática. Universitat de Valencia. Memorias del tercer Congreso Internacional sobre Investigación en Educación de las Matemáticas.

Jaime, A.; Chapa, F.; Gutiérrez, A. (1992). Definiciones de triángulos y cuadriláteros: errores e inconsistencias en libros de texto de E.G.B. *Épsilon* nº23; Recursos, experiencias y propuestas para el aula; pg. 49-62.

Jaime, A.; Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele. En Llinares, S.; Sanchez, M.V. (eds), *Teoría y práctica en educación matemática*. Sevilla: Alfar.

Kaye, B.; Rogers, I. (1972). *Trabajo en grupo en las Escuelas Secundarias y Capacitación de los Profesores en sus Métodos*, [trad. Nilda, D.]. Buenos Aires: El Ateneo.

Loomis, E. S. (1972). *The Pythagorean Proposition*. Washington: The National Council of Teachers of Mathematics.

Lucio Lombardo, R. (1989). *La matemática de Pitágoras a Newton* [traducción de Vivanco, J.], Barcelona: Laia.

Martínez, A.; Juan, F.; [et al.]. (1989). *Una metodología activa y lúdica para la enseñanza de la geometría*, Madrid: Síntesis.

Ministerio de Educación y Ciencia. (2006). *Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria*. BOE de 5 de enero de 2007, pg. 680-690, 750-760.

Moreno, M. M.; Estrada, A.; Carrillo, J.; Sierra, T. A. (2010). *Investigación en Educación Matemática XIV*. Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), Lleida: Edicions de la Universitat de Lleida.

Murillo, J. (2004). *Implementación del software de geometría dinámica en la enseñanza de la asignatura de matemáticas y su didáctica*, Universidad de La Rioja: Departamento de Matemáticas y Computación.

NCTM (1987). *The use of computers in the learning and teaching mathematics*. NTCM – News Bulletin.

NTCM. (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. (Soc. Andaluza de Educación Matemática Thales: Sevilla).

Pascual, F. 2011. Apunts assignatura Aprenentatge i Desenvolupament de la Personalitat del Màster de professor en Educació Secundària de la Universitat de València.

Ponte, J. P. (1986). *O computador: Um Instrumento da Educação*, Lisboa: Texto Editora.

Presmeg, N. C. (1986). Visualisation in High School Mathematics. *For the Learning of Mathematics* 6, 3. FLM Publishing Association, Montreal, Quebec, Canada.

Puig, L. 1997. Análisis fenomenológico. En Rico, L. (Coord.) *La educación matemática en la enseñanza secundaria*, Barcelona: Horsori / ICE. ISBN, pg. 61-94.

Schoenfeld, A. (1988). Mathematics, Technology, and Higher order Thinking. En Grouws, D. A.; Cooney T. J.; Jones, D. (eds), *Effective Mathematics Teaching*. Reston, Va: NTCM i LEA.

Silva, A. (2002). *Características de los alumnos cuando se envuelven con software dinámico de matemática*, Universidad de Extremadura, Instituto de Ciencias de la Educación.

The MacTutor History of Mathematics archive. www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/ Pythagoras.html.

Veloso, E. (2000). Artº "O que fazer com 45 milhões de contos?" *Revista Educação Matemática* nº 57 (Mar/Abr). Lisboa: APM.

Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. [Trad. Álvarez, J.M.]. *Épsilon* nº 26, pg.15-29.

Annexos

Annex 1. Esquema conceptes

Annex 2. Test Nivells Van Hiele inicial

Annex 3. Test Nivells Van Hiele

Annex 4. Activitat diagrama de flux

Annex 5. Avaluació

Teorema de Pitàgores

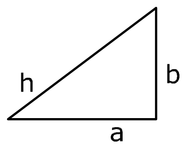
s'estudia dins de l'apartat matemàtic de la **Geometria** del grec **agri-mensura** és a dir **amidar la terra, el sòl**

def. Relació

en qualsevol **triangle rectangle**

entre **catets** **hipotenusa**

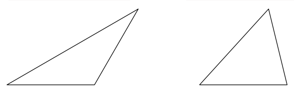
$h^2 = a^2 + b^2$

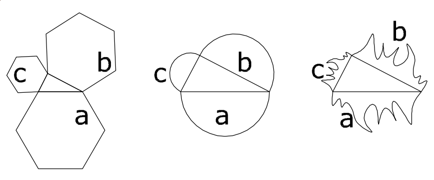


triangle no rectangle

Triangle obtusangle entre **costats** $c^2 > a^2 + b^2$

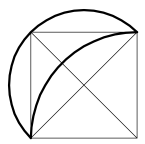
Triangle acutangle entre **costats** $c^2 < a^2 + b^2$





Generalitzacions

Quadratura del cercle



Teorema del cosinus

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha)$

deriva en altres teoremes

com

Teorema del catet $p^2 = mc$

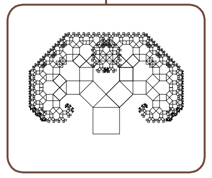
Teorema de l'altura $h^2 = nm$

Identitats trigonomètriques com $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

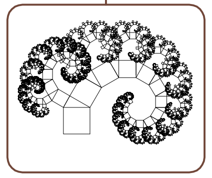
Curiositats

Fractals

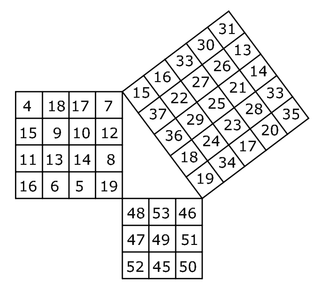
Simètrics



Asimètrics



$(147 \cdot 3) + (46 \cdot 4) = (125 \cdot 5)$



qui era? Pitàgores

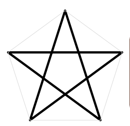
era **Filòsof i matemàtic**

considerat **el 1er matemàtic pur**

va viure **Samos. 569-500aC**

Període hel·lenístic

va fundar l' **Ordre Pitagòrica**



era una grupació **secreta**

amb finalitat **Religiosa filosòfica matemàtica**

va ser

amic de **Polycrates** qui el relacionà amb Egipte on va estudiar

alumne de **Thales i Anaximander (Miletus)** que l'introduïren en la **geometria i astronomia**

aportacions

Música

Relació entre la vibració harmònica d'un tó i la llargaria de la corda que l'ha produït

Aritmètica

Abstracció dels nombres

Taules de mutiplicar

Nombres pitagòrics

Quadrats

Nombres figurats

Descobriren els nombres irracionals al traure la diagonal d'un quadrat de costat la unitat

Geometria

Demostració del teorema que duu el seu nom. Els babilonis ja el coneixien

La suma dels angles d'un triangle és igual a 2 angles rectes

Generalització. La suma dels angles interiors d'un polígon de n costats és 2n-4 angles rectes. La suma dels angles exteriors és 4 angles rectes

Demostraren que sols existixen 5 poliedres regulars: Tetraedre, Octaedre, Cub, Dodecaedre, Icosaedre

Construir figures d'una area donada resolent equacions com $a(a-x)=x^2$ de manera geomètrica

Astronomia

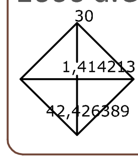
Ensenyaren que la Terra era un planeta redó en el centre de l'univers

La lluna tenia una òrbita inclinada cap a l'equador de la Terra

Venus era el mateix de vesprada que de matí

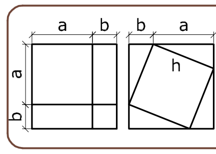
Demostracions al llarg de la història

1600 a.C. Civilització Babilònica



Tauleta Yale i Tauleta Plimpton entre altres són tauletes d'argila amb textos cuneiformes que ens demostren que ja sabien com calcular ternes pitagòriques

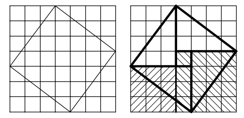
sV a.C. Grècia



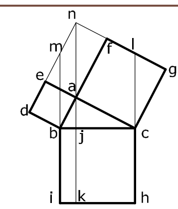
$a^2 + b^2 + 2ab = 4(ab/2) + h^2$

$h^2 = a^2 + b^2$

300 a.C. Xina



300 d.C. Pappus

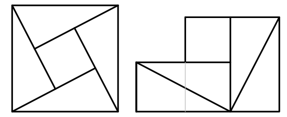


jkib = nabm = abde

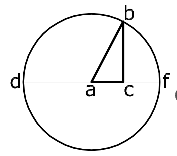
chkj = lcan = gcaf

jkib + chkj = abde + gcaf

1150 d.C. Bhaskara



1600 d.C. Vieta



$dc = da{+}ac = ab{+}ac,$

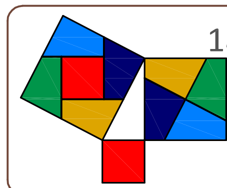
$cf = af{-}ac = ab{-}ac$

$dc \cdot cf = (ab{+}ac)\cdot(ab{-}ac) = ab^2{-}ac^2$

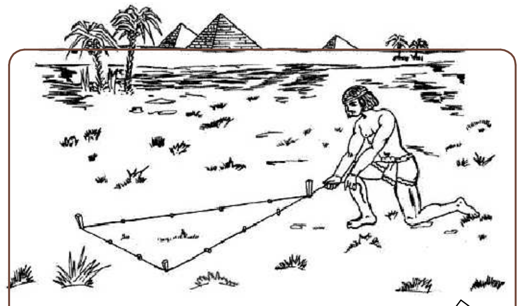
$dc \cdot cf = cb^2$

$ab^2 = ac^2 + cb^2$

1830 d.C. Perigal

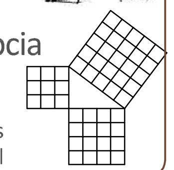


1972 d.C. Loomis recull unes 370 proves en *The Pythagorean Proposition*



1000 a.C. Civilització Egipcia

Utilitzaven el Triangle Egipci (de costats 3, 4 i 5) o altres proporcionals per a recuperar els límits de les terres després de les riuades del Nil



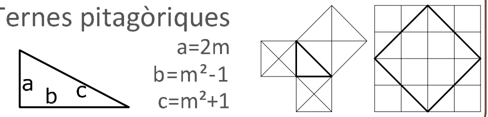
400 a.C. Plató

Ternes pitagòriques

$a = 2m$

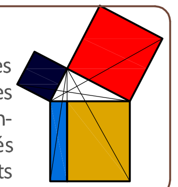
$b = m^2 - 1$

$c = m^2 + 1$

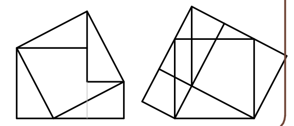


300 a.C. Euclides

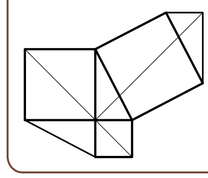
Relació entre paralelograms i triangles de mateixa base entre línies paral·leles. Proposició inversa. Un triangle és rectangle si el quadrat de la hipotenusa és igual a la suma dels quadrats dels catets



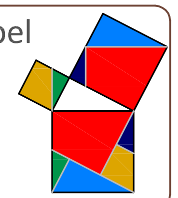
850 d.C. Thâbit Ibn Qurra



1500 d.C. Leonardo da Vinci



1824 d.C. Anaricio-Göpel

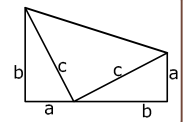


1876 d.C. Garfield

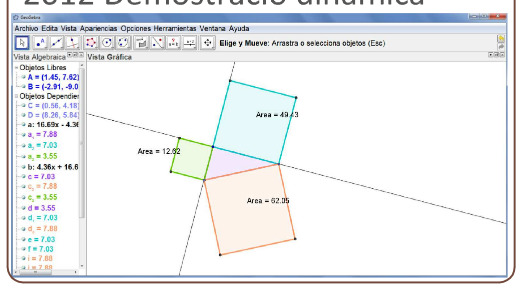
$(a{+}b)(a{+}b)/2 = (ab/2) + (ba/2) + c^2/2$

$a^2 + 2ab + b^2$

$a^2 + b^2 = c^2$



2012 Demostració dinàmica



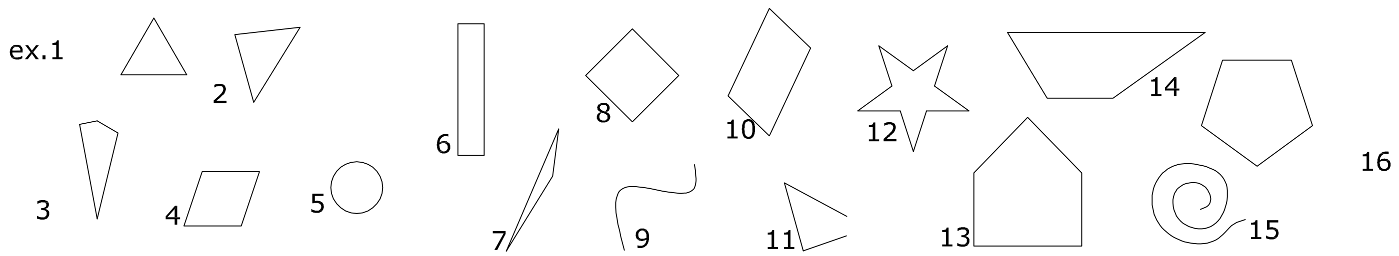
Annex 1

Nom: Nivell Van Hieler

① Dibuixa 5 paral·lelograms diferents

Aleshores, que és un paral·lelogram?..
....
Que és un quadrat? definix-lo amb les teues paraules...
....
i un rectangle?..
....

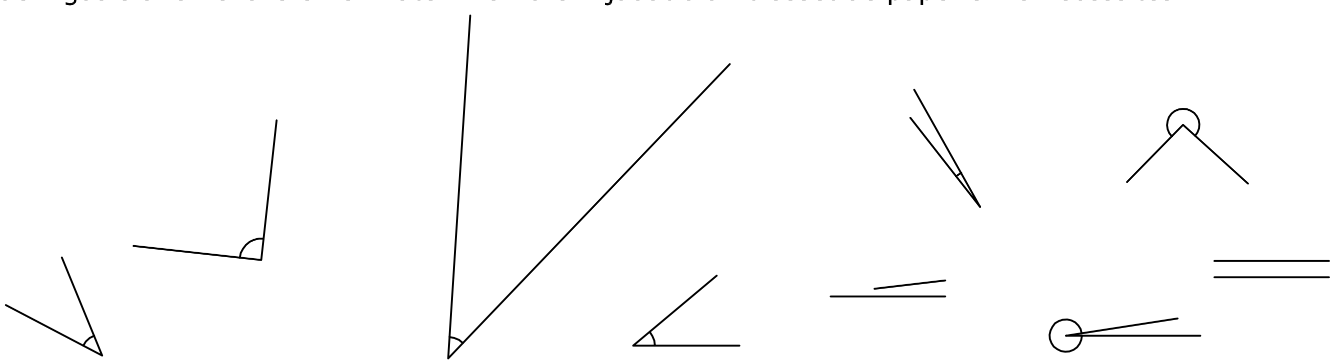
② Classifica cada figura on corresponga. Tin en compte que una figura pot estar en més d'un lloc, fixa't en l'exemple



Polígon: 1,...
Polígon regular: 1,...
No és un polígon:...
Triangle: 1,...
Quadrat: ....
Rectangle: ....
Rombe: ....

Romboide: ....
Trapezi: ....
Paral·lelogram: ....
Quadrilàter: ....
Pentàgon: ....
Hexàgon: ....
Circumferència: ....

③ Quin angle és major? oredena'ls de major a menor assignant-los un nombre (1, 2, 3...), en cas de que siguen iguals anomena'ls en el mateix nombre. Ajudat d'un trosset de paper si ho necessites.



Nom:

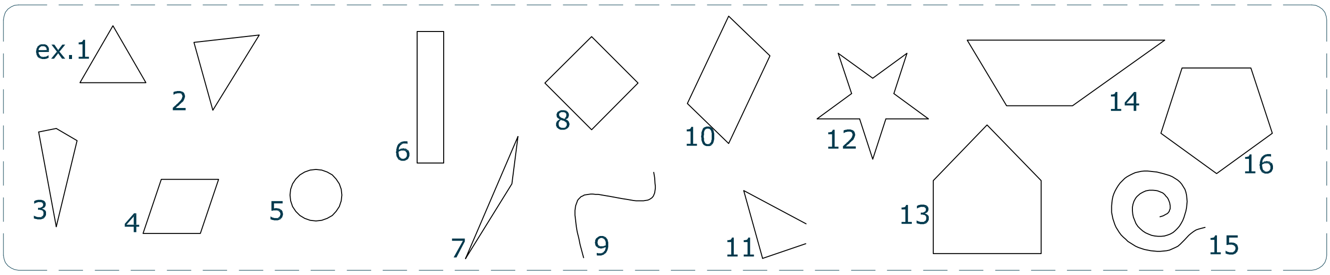
Nivell Van Hiele (1 - 3)

1 Dibuixa 5 paral·lelograms diferents

Quina diferència hi ha entre els paral·lelograms que has dibuixat?

En que t'has fixat per a dibuixar-los?

2 Classifica cada figura on corresponga. Tin en compte que una figura pot estar en més d'un lloc, fixa't en l'exemple



Polígon: 1,.. Romboide: ....
Polígon regular: 1,.. Trapezi: ....
Triangle: 1,.. Paral·lelogram: ....
Quadrat: .... quadrilàter: ....
Rectangle: .... Pentàgon: ....
Rombe: .... Hexàgon: ....

Que tenen en cumú tots els que dius que són rectangles?

I els que consideres rombes?

Fixat en els que consideres quadrats, quines propietats tenen?

3 Rodeja l'opció correcta. Explica la resposta i si ho creus convenient fes-ne un dibuix:

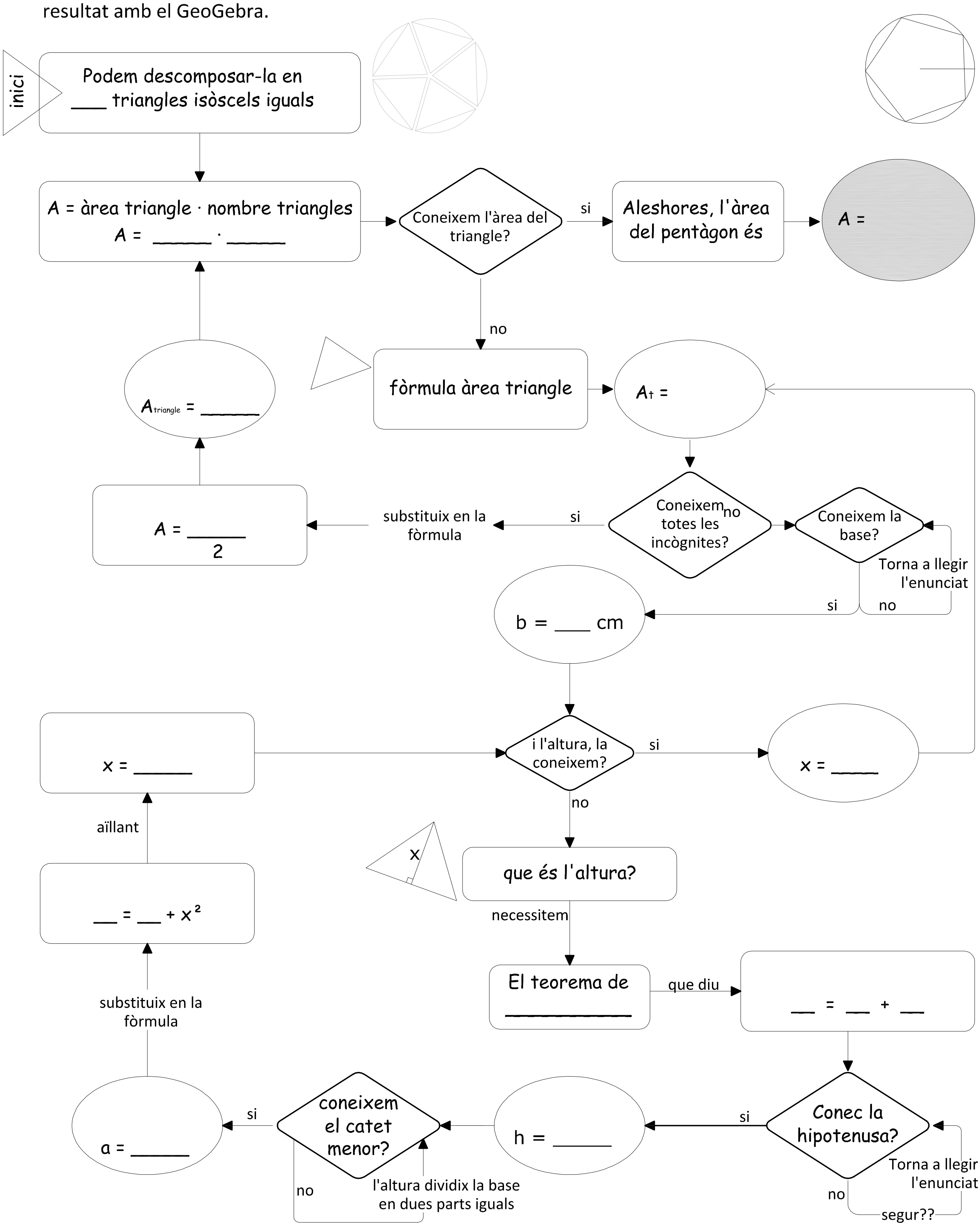
Els quadrats són *sempre/ de vegades / mai* rectangles.

Els rectangles són *sempre / de vegades / mai* quadrats.

Els rombes són *sempre / de vegades / mai* quadrats.

Noms: ____

Sabeu que és l'edifici del Pentàgon? Informeu-se i després calculeu la superficie que ocupa. El costat del polígon que forma fa 285m de llarg i es pot inscriure en una circumferència 242,5m de radi. Després comprova el resultat amb el GeoGebra.



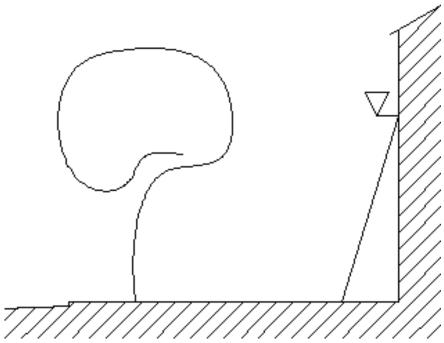
Dibuixa un segment de285cm en el GeoGebra. Utilitza la ferramenta 'segment donats punt extrem i longitud' de la barra de ferramentes (3er botó). A continuació fes un polígon regular, tria els dos extrems del segment i digues quants vèrtex té el polígon. Ja tenim dibuixat el polígon, ara amida l'àrea. Busca la ferramenta necessària en la barra d'eines. ja ho tens? és el que tenies?
Una vivenda normal fa uns 90m², quantes cases cabríen dins del pentàgon?

Annex 4

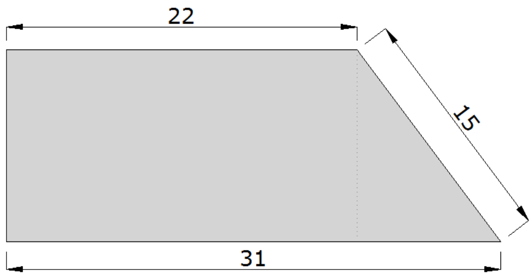
Nom:

1. (1punt) Escriu el teorema de Pitàgores

2. (2,5punts) Calcula la longitud de l'escala que necessita l'electricista per a arreglar la farola situada a 5m d'altura tenint en compte que l'escala s'ha de recolzar a 1m de la paret.



3. (3,5punts) El meu veí té un bancal amb forma irregular. Necessita saber la seua superfície (l'àrea) i ens ha demanat que la calculem. Ajuda'l!



EXTRA (+2punts). Hi ha un bambú de 100cm d'altura que s'ha trencat de manera que el seu extrem superior es recolza en el sòl a una distancia de 30cm des de la base. Es demana que es calcule a quina altura s'ha trencat.