Departament de Didàctica de la Matemàtica

Universitat de València

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

Servei d'Informàtica

Problemas multiplicativos relacionados con la división de fracciones. Un estudio sobre su enseñanza y aprendizaje.

Tesis doctoral

Presentada por

Mauricio Contreras del Rincón

para optar al Grado de Doctor por la Universidad de Valencia

Co-dirigida por el **Dr. Bernardo Gómez Alfonso**

y por la **Dra. Olimpia Figueras Mourut de Montppellier**

Valencia, 2012

Departament de Didàctica de la Matemàtica

Universitat de València

Problemas multiplicativos relacionados con la división de fracciones. Un estudio sobre su enseñanza y aprendizaje.

Memoria de Tesis doctoral presentada por Mauricio Contreras del Rincón para optar al Grado de Doctor por la Universitat de Valencia, co-dirigida por el Dr. Bernardo Gómez Alfonso y la Dra. Olimpia Figueras Mourut de Montppellier

Vº . Bº . Los Directores

Fdo. Bernardo Gómez Alfonso **Fdo. Olimpia Figueras Mourut de Montppellier**

Fdo. Mauricio Contreras del Rincón

Valencia, 2012

Este estudio se realizó con el apoyo del Proyecto EDU2009-10599 (2009-2012). *Modelos de enseñanza y competencia en cortes didácticos del aprendizaje del álgebra y la aritmética*. Plan Nacional de I+D+i. (MCI - Ministerio de Ciencia e Innovación).

A la memoria de mis padres

AGRADECIMIENTOS

Deseo expresar mi más sincero agradecimiento a todas las personas que me han ayudado, animado en los momentos de desánimo y confiado en mí para la realización de este trabajo de investigación.

En especial mi reconocimiento a los Doctores D. Bernardo Gómez Alfonso, del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valencia, y Dª. Olimpia Figueras Mourut de Montppellier, del Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV (México), que han tenido la amabilidad de dirigir este trabajo de tesis. Sin su colaboración (y paciencia para las muchas horas de trabajo) no habría sido posible terminar esta investigación.

Deseo expresar mi agradecimiento a la junta directiva y a los profesores de Educación Secundaria José Amorós Tapia y Encarna Moreno Ruiz, por cederme gentilmente sus aulas en el Instituto de Educación Secundaria Père Boil, de Manises, para la fase experimental del trabajo.

Deseo hacer extensible mi agradecimiento a los estudiantes de Magisterio de la Escuela de Formación del Profesorado de EGB "Ausías March" de la Universidad de Valencia y de segundo ciclo de Secundaria del Instituto de Educación Secundaria Benicalap, de Valencia, que participaron en el cuestionario piloto y a los estudiantes de 4º curso de ESO del Instituto de Educación Secundaria Père Boil, de Manises, que participaron en el cuestionario definitivo de la investigación.

Finalmente, deseo expresar también mi agradecimiento a todos los compañeros del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valencia, por sus apoyos y ánimos, esenciales para acabar el trabajo.

Valencia, 2012

Índice

Página

CAPÍTULO **1**

Objetivos y diseño de la investigación

La resolución de problemas multiplicativos de una o varias etapas, en particular aquellos que se pueden resolver por medio de una división de números racionales, constituye un contenido de los actuales currículos de primaria y secundaria (GV, 1992; 2002). Este contenido es de especial importancia en segundo ciclo de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) y en bachillerato ya que es transversal, su conocimiento se relaciona con áreas diversas y tiene trascendencia en la vida diaria y en la vida académica posterior.

De hecho, es útil en otras ramas de la ciencia y en las propias matemáticas (leyes físicas, concentraciones químicas, magnitudes económicas, cálculo de probabilidades, etc).

Las investigaciones sobre los problemas multiplicativos en los que está involucrada la división de números racionales no son tan numerosas como sobre otros aspectos de la enseñanza y del aprendizaje de esa clase de números.

La necesidad de indagar sobre la enseñanza y el aprendizaje de la división de números racionales se justifica, según se informa en investigaciones precedentes, por las dificultades que presentan los estudiantes ante este tipo de problemas, como, por ejemplo, las limitaciones que se han observado en los estudiantes para asociar el enunciado del problema con la operación de división de fracciones que permite resolverlo.

En este capítulo se describen los diversos pasos de una investigación sobre problemas multiplicativos en los que está involucrada la división de números racionales.

1.1 EL PROBLEMA A INVESTIGAR

A partir de los puntos que se desarrollan en los siguientes apartados se concreta el problema a investigar.

1.1.1 Delimitando el objeto de estudio

En la investigación precedente se citan trabajos sobre números racionales que, en realidad son sobre fracciones. Por un abuso de lenguaje, se suele emplear el término racionales, cuando realmente el objeto de estudio son las fracciones. Freudenthal (1983) afirma que "(...) el objeto matemático que importa es el número racional más que la fracción. No obstante (...) las fracciones son el recurso fenomenológico del número racional (...)”. En la enseñanza de las operaciones con números racionales no se trabaja con clases de equivalencia, sino que se recurre a las fracciones y a los decimales. Por ello, la presente investigación se centra en la división de fracciones, de forma que el objeto de estudio son los problemas multiplicativos relacionados con la división de fracciones. Es decir, solamente se tienen en cuenta aquellos problemas en cuyo enunciado aparecen como datos fracciones, y no se tienen en cuenta los problemas cuyo enunciado incluya números decimales.

Aunque la división de fracciones se introduce en los últimos cursos de primaria y se profundiza en bachillerato, esta investigación se refiere a la ESO, ya que es en esta etapa educativa en la que más se enfatiza la enseñanza de las operaciones con fracciones.

1.1.2 La investigación precedente

En el estudio cuyo informe es esta tesis se toman como referencia dos grandes grupos de informes de investigaciones: uno sobre problemas multiplicativos, y otro sobre aspectos generales de los números racionales.

Las investigaciones sobre problemas multiplicativos se han agrupado según se refieran a aspectos semánticos, estructurales, al tipo de cantidades, a las relaciones entre cantidades, o bien, a las formas textuales que aparecen en el enunciado y que inducen un enfoque de resolución, y a los modelos de situación que aparecen en el enunciado.

a) Sobre los aspectos semánticos: el trabajo de Hart (1981) sobre significados y modelos de las operaciones, en particular la multiplicación y la división, y los trabajos de Fishbein, Deri, Nello y Marino (1985) sobre los modelos implícitos de multiplicación y división.

b) Sobre los aspectos estructurales: los trabajos de Nesher (1988) y Bell y otros (1984) sobre clasificación de problemas multiplicativos; los trabajos de Vergnaud (1983 y 1988) sobre problemas multiplicativos, cuyo análisis estructural aporta a la presente investigación un marco global para clasificar los problemas multiplicativos que va más allá de la relación ternaria, utilizando para ello un esquema de tabla de correspondencia de relaciones funcionales lineales, de donde se extrae una relación cuaternaria.

c) Sobre los tipos de cantidades: los trabajos de Vergnaud (1983 y 1991) en los que analiza los tipos de cantidades que intervienen en los problemas multiplicativos de manera similar a como se hace en Física en el análisis dimensional de las unidades de medida; el trabajo de Bell y otros (1981) sobre la influencia de los tipos de datos numéricos en la elección de la operación para resolver el problema; los de Schwartz (1988) y Kaput (1986) sobre la clasificación de los problemas multiplicativos en función de los tipos de cantidades (extensivas e intensivas), y los de Thibodeau (1989) sobre la influencia de la estructura y el tipo de datos en la elección de la operación que resuelve el problema.

d) Sobre las relaciones entre las cantidades: los trabajos de Vergnaud (1983 y 1988) sobre la estructura de los problemas multiplicativos que revelan la existencia de dos métodos de resolución (escalar y funcional), y los trabajos de Schwartz (1988) que muestran que la multiplicación y la división producen un cambio de referente en las cantidades involucradas en los problemas.

e) Sobre las formas textuales: los trabajos de Nesher (1975) acerca de las palabras o expresiones verbales en las que reside la carga semántica del enunciado del problema y que influyen en la elección de la operación que permite resolverlo.

f) Sobre los modelos de situaciones: Los trabajos de Bell y otros (1989) y los de Greer (1987 y 1992) sobre las categorías de problemas según las situaciones que se presentan en los enunciados.

Para localizar dificultades más generales de los estudiantes, debidas al uso de los números racionales y a los modelos de enseñanza de la división de fracciones, se toman como referencia otras investigaciones:

a) Sobre los números racionales: los trabajos de Kieren (1976); Freudenthal (1983); Behr, y Harel (1990) y Behr, Harel, Post y Lesh (1991) sobre constructos de números racionales.

b) Sobre los modelos de enseñanza de la división de fracciones: los trabajos de Lamon (2001); Behr, Lesh, Post, y Silver (1983); Newstead y Murray (1998); Yamaguchi y Jwasaki (1999); Sinicrope, Mick y Kolb (2002); Sharp (2000); Brendefur y Pitingoro (2000) y Warrington (1997).

1.1.3 Cuestiones preliminares que encauzan la investigación

Cinco son las cuestiones preliminares que se presentan en esta investigación:

La primera tiene que ver con el enunciado de los problemas. En la enseñanza de la división de fracciones, los manuales escolares introducen problemas de enunciado, cuyo contenido semántico no dice nada que permita asociarlo con la operación de división. Un ejemplo de ello es el siguiente problema tomado de un libro español muy influyente publicado en los inicios de la década de los años 30 (Rey Pastor y Puig Adam, 1932, págs. 211 y 212):

Peso de la torta

$3/7$ de torta pesan $2/9$ de kilo. ¿Cuánto pesa la torta?

Una modificación de los datos del enunciado podría hacer el problema reconocible. Así, si los datos fueran números naturales, el enunciado del problema sería: "3 tortas pesan 2 kilos. ¿Cuánto pesa una torta?" En este caso el enunciado es reconocible como un problema de división "partitiva" que tiene la misma forma que los "problemas de repartir".

La segunda versa sobre el tránsito del campo numérico de los naturales a los racionales. En la investigación educativa ya se ha planteado como problema de investigación (ver por ejemplo, Gómez, 2008) el fenómeno de la discontinuidad o corte didáctico que se produce al pasar de operar con naturales a operar con fracciones o decimales en los problemas de estructura multiplicativa. Esta discontinuidad se atribuye a que los modelos de los números naturales no se proyectan de manera continua al cambiar de campo numérico, sino que, como ocurre con el ejemplo anterior, se produce un corte que, en la medida que puede ser fruto de la enseñanza, se le ha llamado "corte didáctico".

La tercera se relaciona con los primeros modelos que los estudiantes utilizan cuando intentan resolver este tipo de problemas. Como han establecido Fischbein y colaboradores (1985, págs. 4 y 14) cada operación aritmética fundamental permanece generalmente vinculada con un modelo intuitivo primitivo, implícito e inconsciente[1]. Estos modelos implícitos derivan de la forma en que los libros de texto suelen introducir los conceptos de multiplicación y división. Es decir que, son las representaciones que primeramente suelen encontrar los estudiantes, y por eso tienden a confiar en ellos más que

[1] El término original en inglés es "unconscious"

en otros; de modo que los modelos primitivos implícitos y el tipo de datos que se muestran en el enunciado median en la decisión acerca de cuál es la operación más conveniente para resolver un problema en cada caso.

La cuarta hace referencia a las soluciones que muestran los estudiantes a los problemas multiplicativos de división de fracciones. En experiencias piloto con el ejemplo anterior de la torta, se ha observado que al intentar resolverlo, la mayoría de los estudiantes representan el problema mediante un esquema cuaternario basado en la reducción a una tabla de correspondencia de cuatro elementos y recurren a la regla de tres como método de resolución (ver pags. 137 y 138, cap. 5).

Esta representación se enlaza con lo señalado por Vergnaud (1983, 1985) en su análisis estructural de los problemas multiplicativos. Para Vergnaud la trama de la mayoría de los problemas multiplicativos corresponde a una operación cuaternaria, normalmente entre dos espacios de medida.

La quinta versa sobre los algoritmos que aplican los estudiantes cuando han de efectuar una división de fracciones. Cuando se pasa de la división con naturales a la división de fracciones, le enseñanza pone el énfasis en los algoritmos de "productos cruzados" y de "invertir y multiplicar"[2]

1.1.4 Preguntas de investigación

Estas cuestiones preliminares son las que sustentan las preguntas que se formulan a continuación:

1. ¿Cuáles son los tipos de problemas multiplicativos que los estudiantes reconocen como problemas que se resuelven usando una división de fracciones?

2. ¿Qué discontinuidades o cortes didácticos en los modelos de división de fracciones se producen al pasar de involucrar números naturales a fracciones?

3. ¿Cómo median los modelos implícitos y el tipo de números implicados en el problema a la hora de reconocer cuál es la operación que se necesita para resolverlo?

[2] Ver una explicación de estos algoritmos en el apartado 3.1.1 del capítulo 3

4. ¿Es cierto qué los estudiantes perciben los problemas de división de fracciones de modo diferente a los problemas de división de números enteros, y que esta percepción les lleva al esquema cuaternario y al método de la regla de tres?

5. ¿Cuáles son los algoritmos que usan preferentemente los estudiantes cuando dividen fracciones?

1.1.5 Hipótesis

A partir de estas preguntas se formulan las siguientes hipótesis de partida:

1.- Los tipos de problemas que los estudiantes reconocen como aquellos que se pueden resolver con una división de fracciones dependen de la estructura de los problemas, de las formas textuales incluidas en el enunciado y del tipo de datos.

2.- Los modelos implícitos de división de fracciones, y el tipo de datos implicados en los problemas median obstruyendo o favoreciendo el reconocimiento de la o las operaciones que es necesario hacer para resolver el problema, si bien algunos de ellos lo hacen de distinta manera a los modelos con naturales.

3.- Al cambiar de campo numérico, de los naturales a los racionales, se producen discontinuidades en unos modelos de división, pero no en otros. Esta discontinuidad se produce porque dejan de tener sentido alguna de las formas textuales asociadas al modelo.

Por ejemplo, la forma textual “repartir” asociada al modelo partitivo no es posible usarla cuando el divisor es una fracción, lo que no ocurre con la forma textual asociada al modelo de medida “cuántas veces cabe”.

4.- Algunos problemas de división de fracciones se perciben de modo diferente a los problemas de división de números naturales; en estos casos los estudiantes recurren a plantear un esquema cuaternario que conduce a un método reglado y a métodos razonados[3] que utilizan estrategias que tienden a reducir el problema a enteros o a decimales.

[3] Estos métodos se describen en el capítulo 3, apartado 3.1.1.2, y son el caso razonado de la reducción a común denominador, el caso razonado de la inversión de la multiplicación y el uso de la unidad fraccionaria.

5.- Los algoritmos que utilizan los estudiantes para efectuar las divisiones de fracciones son, preferentemente, el de productos cruzados y el de invertir y multiplicar.

1.1.6 Objetivos de la investigación

Para contrastar las hipótesis se plantearon los siguientes objetivos:

1. Identificar y recopilar los problemas escolares de división de fracciones.
2. Caracterizar los principales modelos de la división de naturales y de la división de fracciones.
3. Identificar las variables de los problemas tipo de cada modelo.
4. Identificar las variables de resolución de los problemas tipo, y los valores de esas variables que los estudiantes emplean al intentar resolverlos.

Cabe aclarar que la expresión "problemas escolares de división de fracciones" incluida en el objetivo 1, hace referencia a aquellos problemas que se recogen en los libros de texto y manuales escolares.

Los modelos de la división de naturales y de la división de fracciones que se mencionan en el objetivo 2, se refieren a aquellos que han quedado reflejados en los libros de texto y manuales, bajo determinadas definiciones y en ciertos problemas que los tipifican.

En cuanto al objetivo 3, las variables de los problemas aluden a su estructura y a los datos, las formas textuales y los contextos que aparecen en el enunciado.

Las variables de resolución mencionadas en el objetivo 4, se identifican a través de lo plasmado por los autores de los libros de texto. Los valores de las variables hacen referencia a los esquemas, métodos y algoritmos que utilizan los estudiantes al intentar resolver los problemas.

1.1.7 Metodología

Para contestar las preguntas y lograr estos objetivos, la investigación se organiza en tres ejes:

1. Un análisis de textos que permita alcanzar los objetivos: identificar y recopilar los problemas de división de fracciones, identificar los modelos de división de fracciones, e identificar las variables de los problemas.

   En esta investigación se usa el análisis histórico–epistemológico para identificar y estudiar la evolución de las concepciones e ideas sobre división de fracciones, los algoritmos, los modelos y los contextos de aprendizaje en diversas épocas.

   Sobre la manera de presentar e interconectar los conceptos en el proceso de enseñanza y aprendizaje, se analizan las ideas de fracción y de división de fracciones que utilizan los distintos libros de texto en diversas épocas históricas y cómo se relacionan con los conceptos algebraicos asociados a la división de fracciones.

   Respecto a las aplicaciones de los conceptos, se estudia qué uso de las fracciones se hace en los libros de texto y, sobre todo, qué variables son consideradas en el tratamiento de la división de fracciones.

   Como consecuencia de este eje, se obtiene:

   - Una recopilación de los problemas de división de fracciones
   - Un listado y una descripción de los modelos de división de fracciones
   - Un listado y una descripción de las variables de los problemas
   - Un listado y una descripción de los algoritmos de división de fracciones

2. Un estudio sobre las actuaciones de los estudiantes, que involucra distintas fases:

   a) Diseño de tareas, usando la metodología de validación y depuración de un estudio piloto sobre dos muestras, para elaborar un cuestionario de problemas escolares de división de fracciones que sea una muestra significativa de sus distintos tipos y que se base en las variables de los problemas descritas en el primer eje.

   b) Un análisis de respuestas, usando la metodología del análisis de tareas, que permita estudiar las realizaciones de los estudiantes cuando están intentado resolver los problemas de división de fracciones tipo, en términos de variables de problema, y variables de resolución.

   Como consecuencia de este eje, se obtiene:

- Un cuestionario de investigación validado
- Un conjunto de actuaciones de los estudiantes ante los problemas tipo
- Una descripción de las variables de resolución
- Un listado de los algoritmos de división de fracciones

3. Un análisis comparado de los ejes anteriores para indagar cómo se relacionan las variables de problema con las variables de resolución y que permita establecer conclusiones sobre cada una de las hipótesis planteadas en la investigación.

1.2. EL DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

La investigación se divide en distintas fases: estudio de la investigación precedente, análisis de textos, elaboración del cuestionario, análisis de respuestas, elaboración de conclusiones.

Este análisis ha permitido:

a) Identificar las variables de enseñanza de la división de fracciones.

b) Identificar los problemas tipo que se utilizan en la enseñanza de la división de fracciones.

c) Identificar los valores de las variables de los problemas.

d) Identificar los valores de las variables de resolución que utilizan los autores de los libros de texto en sus explicaciones sobre la resolución de los problemas de división de fracciones.

Como consecuencia se obtiene el conjunto de variables de enseñanza, identificando los modelos de división de números naturales y de fracciones, obteniéndose un listado inicial de problemas tipo, así como las variables de dichos problemas.

En la fase de elaboración del cuestionario se hizo una selección a partir del listado inicial de problemas, que fuera representativa de las variables localizadas en el análisis de textos, lo que dio origen a un estudio piloto para poner a prueba un cuestionario. El estudio piloto se realizó con estudiantes de Magisterio (por lo que respecta a las matemáticas de la etapa inmediata a la secundaria) y con alumnos de segundo ciclo de la ESO seleccionados al azar. Como consecuencia del estudio piloto se elaboró el diseño definitivo del cuestionario, que posteriormente fue aplicado a estudiantes de un Instituto de Educación Secundaria de la Comunidad Valenciana.

En las dos últimas fases (análisis de respuestas y conclusiones) se estudiaron las respuestas de los estudiantes al cuestionario definitivo y se elaboraron las conclusiones del estudio.

1.3 EL CONTENIDO DE LOS CAPÍTULOS

En el capítulo 2 se describe la revisión de la investigación precedente con el fin de sustentar el trabajo a partir de lo que ya se ha avanzado en este ámbito de la investigación en educación matemática. Se resumen los resultados de este análisis, y se señalan cuáles de las ideas de los autores son utilizadas en el estudio que condujo a esta tesis.

Los resultados del análisis de textos sobre las variables de enseñanza de la división de fracciones se exponen en los capítulos 3 y 4. En el capítulo 3 se describen tres de las variables de enseñanza localizadas en el análisis de textos y en la investigación precedente. En el capítulo 4 se describen y categorizan los problemas tipo localizados, mediante las variables de los problemas recogidas en el mismo capítulo.

El segundo eje de la investigación relativo a las actuaciones de los estudiantes se describe en los capítulos 5, 6 y 7. El capítulo 5 se centra en la parte experimental, en la que se elabora un cuestionario preliminar, con el cual se hace un pilotaje. Posteriormente, tras analizar dos muestras diferentes de resultados, se refinó el cuestionario de pilotaje hasta obtener el cuestionario definitivo. Este capítulo finaliza con la descripción y caracterización de las tareas del cuestionario tomando como referencia las variables de problema recogidas en el capítulo 2. En el capítulo 6 se describe el análisis de tareas, analizando las respuestas de los estudiantes al cuestionario de investigación. El capítulo 7 contiene los resultados del análisis de tareas, tomando como referencia las variables recogidas en los capítulos 3 y 4.

Finalmente, en el capítulo 8 se aborda el tercer eje, exponiéndose las conclusiones del estudio, considerando las interrelaciones entre las variables de los problemas, de enseñanza y de resolución.

El análisis detallado de las respuestas para cada tarea y para cada uno de los estudiantes de la muestra se encuentra en el anexo 1.

CAPÍTULO 2

Aportaciones de la investigación precedente

La información procedente de investigaciones precedentes se ha agrupado de acuerdo con los focos de interés de esta investigación: en primer lugar, investigaciones sobre problemas multiplicativos, (estructura, significados, tipo de cantidades, relaciones entre cantidades, formas textuales que aparecen en el enunciado y que inducen un enfoque de resolución y modelos de situación que aparecen en el enunciado); en segundo lugar, investigaciones sobre números racionales y, finalmente, investigaciones sobre modelos de enseñanza de la división de fracciones.

2.1. PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS

Las principales investigaciones señalan que las dificultades que muestran los estudiantes al intentar resolver problemas multiplicativos en los que intervienen números racionales dependen de diversos factores. Por ello, en este trabajo, las investigaciones sobre problemas multiplicativos se han agrupado en los siguientes bloques:

2.1.1. Aspectos semánticos

Hay dos trabajos principales sobre estos aspectos: Hart (1981), y Fishbein et al. (1985).

a) En el trabajo de Hart (1981), enmarcado en la investigación del CSMS, se examina la capacidad de los niños para reconocer qué operación aplicar para resolver un problema aritmético verbal y también para inventar un problema para una operación dada. En particular se pretendía investigar, entre otras cosas, las dificultades de los niños para reconocer cada una de las operaciones ante las diferencias entre varios modelos de cada operación; así como comparar la dificultad de inventar un enunciado de un problema con la dificultad de reconocer la operación de un problema ya enunciado. En el caso de la multiplicación los modelos seleccionados fueron:

i) Factor multiplicativo: “tengo 8 manzanas y tú tienes 6 veces tantas como yo. ¿cuántas tienes?”

ii) Adición repetida: “compré 9 naranjas cada día durante 7 días. ¿cuántas tengo en total?”

iii) Razón: "habían 9 niños y cada uno tenía 4 bolígrafos. ¿cuántos tenían entre todos?"

iv) Producto cartesiano: "en esta factoría se fabrican tres marcas de coche y cada marca se fabrica con cuatro tipos diferentes de motor. ¿cuántos tipos de coches diferentes se fabrican en esta factoría?"

En el caso de la división, los modelos utilizados fueron:

i) Partición: "se reparten 35 lápices entre 7 niños. ¿cuántos a cada uno?"

ii) Cuotición: "se tienen 35 lápices y se reparten 7 a cada niño. ¿cuántos niños hay?"

La investigación se realizó con niños ingleses de 11 y 12 años, obteniéndose como resultado que: a) el modelo de multiplicación de adición repetida fue más sencillo que el de producto cartesiano y b) el modelo de división partición era más fácil que el de cuotición.

Por otro lado, en el trabajo de Fischbein, et al. (1985, p.6) el modelo primitivo que desarrollan los niños para la multiplicación es el de *adición repetida,* y el de la división está basado inicialmente en la *partición (repartir)* y después en la *cuotición* (*sustracción repetida o medida).*

En la adición repetida, un número de colecciones del mismo tamaño se ponen juntas, y se pregunta por el número total de objetos que hay al juntar todas las colecciones. Por ejemplo, "tengo cinco estuches y en cada estuche siete bolígrafos, ¿cuántos bolígrafos tengo?"

La multiplicación, como adición repetida, no es semánticamente conmutativa, ya que un factor (el número de colecciones), se toma como operador y el otro (la magnitud de cada colección), como operando. El operando puede ser cualquier cantidad, pero el operador debe ser un número entero natural. Por tanto, multiplicar necesariamente hace mayor.

En la división partitiva, un objeto o colección de objetos se divide en un número igual de fragmentos o subcolecciones, como así ocurre en el siguiente ejemplo: "En 8 cajas hay 96 botellas de agua mineral. ¿Cuántas botellas hay en cada caja?".

En este modelo el dividendo debe ser mayor que el divisor, el divisor (el operador en la correspondiente multiplicación) debe ser un número entero, el cociente debe ser más pequeño que el dividendo (el operando), porque está implícita la idea de que dividir hace más pequeño.

En la división cuotitiva, se busca hallar cuántas veces una cantidad determinada está contenida en una cantidad mayor, por ejemplo: "En una caja hay 12 botellas de agua mineral. ¿cuántas cajas hay si el número total de botellas es 96?". En este caso, la única restricción es que el dividendo debe ser mayor que el divisor. Si el cociente es un número entero, el modelo puede ser visto como sustracción repetida (íbid, p. 6).

En el capítulo 3 se recogen estos y otros aspectos semánticos localizados tanto en la investigación precedente como en los libros y textos de enseñanza analizados. En particular, los modelos semánticos de división se incluyen en un conjunto más amplio que, en esta investigación, se denomina "sentidos de uso", y se caracterizan de acuerdo con un constructo formado por cuatro componentes (apartado 3.1.2.,cap. 3).

2.1.2. Aspectos estructurales

Los trabajos que se consideran aquí son los de Vergnaud (1983), Nesher (1988), y Bell, Fischbein & Greer (1984).

Vergnaud (1983, 1988) analiza la noción de multiplicar considerándola como una relación funcional entre espacios de medida, que en el caso más común es una relación cuaternaria y no una relación ternaria como se podría deducir de la forma escolar $a\times b=c$. Esta relación funcional se representa por medio de una tabla de correspondencia que facilita el reconocimiento de la operación a realizar, mostrando el algoritmo escalar o funcional que permite resolver los problemas. Por ello puede ser usada como instrumento para: a) explicar el análisis estructural de los problemas que permite clasificarlos, y b) realizar el análisis de las respuestas de los estudiantes a las tareas del cuestionario.

Vergnaud agrupa las relaciones multiplicativas en tres categorías: a) dos espacios de medida, b) un solo espacio de medida, y c) tres espacios de medida.

a) Problemas sobre dos espacios de medida

Se clasifican en dos clases, según que la relación entre ellos sea funcional o mediante un arreglo rectangular: isomorfismo de medidas y producto de medidas.

1. *Isomorfismo de medidas*

El isomorfismo de medidas es la estructura de los problemas multiplicativos en los que existe una proporcionalidad simple directa entre dos espacios de medida, M1 y M2; intervienen cuatro cantidades, dos medidas de un espacio de medidas y otras dos del otro espacio de medidas. La representación de esta estructura mediante una tabla de correspondencia es la siguiente:

f

M1	M2
x	y = f (x)
x'	y' = f (x')

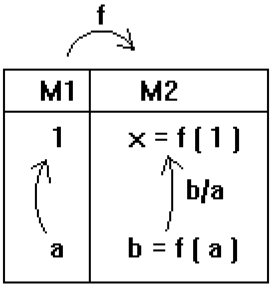
donde la función $f : M_1 \longrightarrow M_2$ es una proporcionalidad simple directa entre dos magnitudes M_1 y M_2. A esta representación en forma de tabla de correspondencia se le denomina, en esta investigación, "esquema cuaternario" y se utilizará tanto para representar las relaciones entre los datos del problema, como para analizar las resoluciones de los estudiantes.

En la estructura del isomorfismo de medidas, Vergnaud (1983) identifica las siguientes clases de problemas: a) multiplicación, b) dos clases de división y c) regla de tres. Estas clases se analizan desde el punto de vista de la función lineal y de las propiedades de linealidad.

En los problemas del isomorfismo de medidas en los que está involucrada la división de fracciones, el esquema cuaternario puede ser de tres tipos, según que tenga tres fracciones conocidas y una desconocida, o dos fracciones conocidas, la unidad y una fracción desconocida, dando origen a tres tipos diferentes de problemas: dos de división y uno de regla de tres.

Primera clase de división

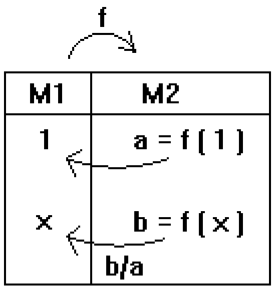
La estructura de estos problemas se muestra en el siguiente esquema:



Se conoce una cantidad a de un espacio de medida y su imagen b=f(a) por la función lineal f y hay que hallar el valor unitario x=f(1). En esta investigación, se denomina este caso como "División de valor unitario desconocido" Esta clase de problemas puede resolverse aplicando a b un operador escalar adimensional $b \xrightarrow{/a} x$. Dicho operador es escalar ya que es la razón de crecimiento o decrecimiento entre dos cantidades del mismo espacio de medida. A esta forma de resolución se le denomina en la presente investigación "método escalar"

Segunda clase de división

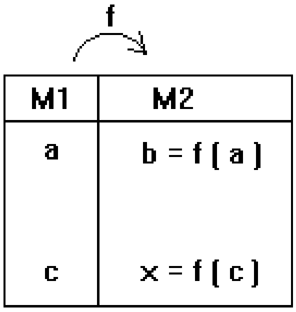
La estructura de estos problemas queda reflejada en el siguiente esquema:



Se conoce el valor unitario a=f(1) y hay que hallar otro valor x del espacio de medida en el que está la unidad, sabiendo su imagen b=f(x) por la función lineal f. En la presente investigación, se denomina este caso como "División con valor unitario conocido". Esta clase de problemas puede resolverse invirtiendo el operador "a" de la función de proporcionalidad directa (valor unitario) y aplicándolo a "b". Dicho operador es funcional, ya que representa el coeficiente de la función lineal f:M1→M2, es una constante que da la tasa o relación entre dos cantidades de diferentes espacios de medida. A esta forma de resolución se le denomina, en esta investigación, "método funcional"

Problemas de regla de tres

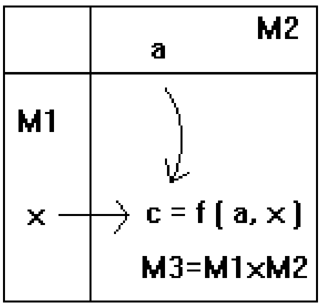
Son problemas cuya estructura está dada por el siguiente esquema:



Se conocen dos cantidades, a y c, de un espacio de medida y una tercera cantidad, b=f(a), imagen de a por la función lineal f, y se quiere hallar la imagen x=f(c) por la función lineal f. Estos problemas se pueden resolver planteando la proporción $\frac{a}{c}=\frac{b}{x}$, que da origen a $x=\frac{b\cdot c}{a}$ (método de ecuación), o bien usando la regla de tres simple (método reglado). En la presente investigación el interés se centra en aquellos problemas donde los datos a, b y c son fracciones; siendo necesario que el valor a, del cual se conoce su imagen b=f(a) por la función lineal f, sea una fracción distinta de cero. En el capítulo 4 se caracterizan algunos de estos problemas localizados en los libros y manuales analizados.

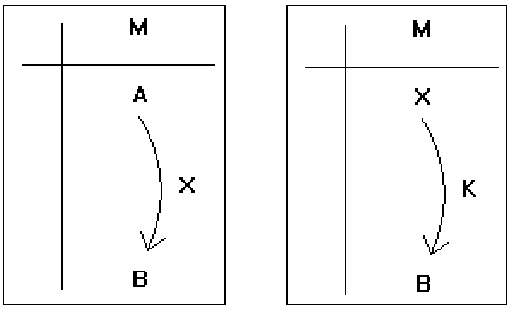
2. *Producto de medidas*

El producto de medidas es una estructura que engloba tres magnitudes (o espacios de medida), M_1, M_2 y M_3, de forma que una de ellas es el producto cartesiano de las otras dos: $M_3=M_1\times M_2$. Dentro de la estructura de producto de medidas, Vergnaud distingue dos tipos de problemas: multiplicación y división. El problema de división lo identifica como encontrar la cantidad desconocida de uno de los dos espacios de medida conociendo otra cantidad del otro espacio de medida y la cantidad correspondiente del espacio producto. El esquema sería:



b) Problemas sobre un espacio de medida

En estos problemas no cambia el referente sobre el cual se opera y no hay un valor unitario como en el caso del isomorfismo de medidas. Así, pues, a diferencia de los problemas de dos espacios de medida, el multiplicador no tiene referente y el multiplicando es una medida que cambia de magnitud en el producto. Además las expresiones lingüísticas “x veces más o x veces menos” son inevitables en el enunciado de este tipo de relación (Vergnaud, 1991, p. 220). En esta investigación se consideran dos tipos de problemas con un solo espacio de medida: cálculo del escalar y cálculo de la medida. En el primer caso (esquema de la izquierda), se conoce la medida y su transformada y se busca el escalar que transforma una en otra. En el segundo caso (esquema de la derecha) se conoce el escalar y la medida transformada y se busca la medida sobre la que opera el escalar.



Junto a ellos, un tercer tipo de problemas es aquél en que el escalar y la medida son indiferenciables, es decir, se pueden interpretar por cualquiera de los dos esquemas anteriores.

Los problemas de producto de medidas y los de un solo espacio de medida se representan por medio de un esquema ternario consistente en considerar el problema como una operación o ley de composición con dos entradas o (inputs) y una salida (output). Así:

$$\boxed{A \times X = B} \quad \boxed{X = \frac{B}{A}}$$

Esquema ternario

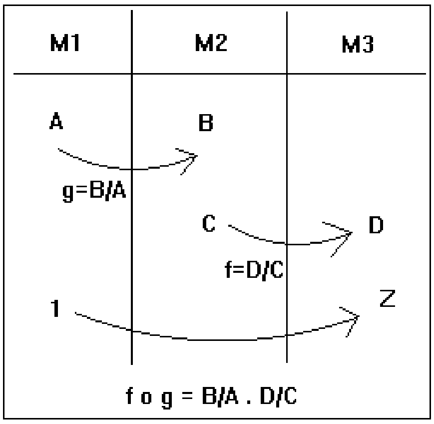
Estos problemas pueden resolverse usando los datos para plantear una ecuación: A•X=B, cuya resolución permitirá obtener la solución, o bien aplicando una división directa, X=B/A, es decir, dividiendo directamente las fracciones B y A que intervienen en el enunciado. En esta investigación se denomina “método de ecuación” a la primera forma de resolución y “método de división directa” a la segunda.

c) Problemas sobre tres espacios de medida

Se trata de aquéllos problemas en los que intervienen tres magnitudes. Pueden ser de dos tipos: función compuesta y proporcionalidad compuesta

Función compuesta

En estos problemas cada espacio de medidas es proporcional a los otros dos. Más concretamente, el espacio de medida M3 es proporcional al espacio de medida M2 mediante la función lineal f, y el espacio de medida M2 es proporcional al espacio de medida M1 mediante la función lineal g. Por lo tanto, el espacio de medida M3 también es proporcional al espacio de medida M1 a través de la composición fog de las dos funciones lineales f y g.

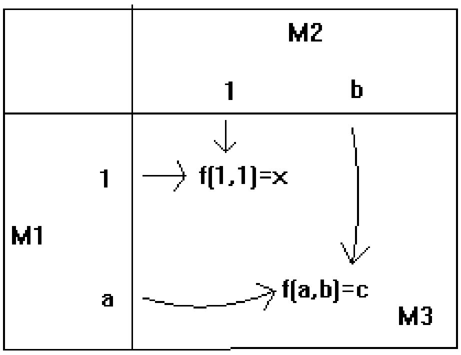


M3 es proporcional a M1 y M2, y M2 es proporcional a M1

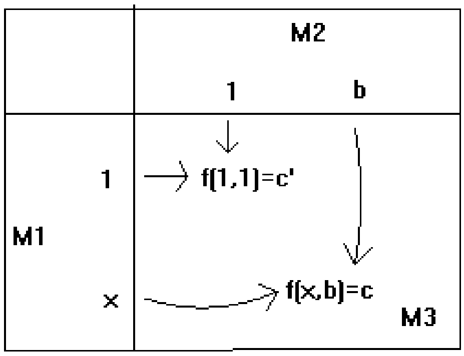
Proporcionalidad compuesta

Son problemas en los que un espacio de medidas M_3 es proporcional a dos espacios de medidas diferentes e independientes M_1 y M_2, de manera que no hay proporcionalidad entre M_1 y M_2. La función $f{:}M_1{\times}M_2{\rightarrow}M_3$ es bilineal. Los dos casos de división que se presentan son:

1er tipo: buscar el valor unitario f(1, 1), conocido f(a, b).



2º tipo: buscar la cantidad de un espacio de medida factor, es decir, hallar x conocido f(x, b)=c y f(1, 1)=c'.



Los problemas de función compuesta se representan por un esquema cuaternario, mientras que los de proporcionalidad compuesta se pueden representar mejor por un esquema ternario. La resolución de los problemas sobre tres espacios de medida requiere de más de una etapa.

Vergnaud distingue subclases de problemas, dentro de cada una de las clases consideradas, según el tipo de magnitud: discreta–discreta, continua–continua; o el tipo de números que intervienen: enteros, decimales, números grandes o números menores que 1.

Aunque Vergnaud utiliza ejemplos en los que los datos son mayoritariamente números naturales o decimales, la presente investigación se centra en el caso en que los datos son fracciones, y toma su clasificación de los problemas según su estructura, utilizando los dos esquemas (cuaternario y ternario) no solamente para representar las relaciones entre los datos que aparecen en el enunciado, sino también para analizar métodos de resolución en las respuestas de los estudiantes a las tareas del cuestionario. Así, se consideran en esta investigación, cuatro métodos de resolución diferentes: funcional, escalar, división directa y ecuación. Estos métodos de resolución están basados en la estructura de los problemas, pero podrían aparecer en las respuestas de los estudiantes, desligados de la estructura.

Por otro lado, Nesher (1988) distingue tres grandes categorías de problemas aritméticos verbales de estructura multiplicativa, que denomina de distinta manera a como lo hace Vergnaud:

a) Problemas de regla de correspondencia (traducción de Puig y Cerdán, 1989) en los que hay dos espacios de medida entre los que hay una relación funcional. Se trata del isomorfismo de medidas de Vergnaud. En esta categoría considera dos subtipos: problemas de multiplicación y problemas de división. Los problemas de multiplicación son de adición repetida. Considera dos tipos de problemas de división: partición y cuotición.

b) Problemas de comparación multiplicativa, también denominados por otros autores de factor multiplicativo o de factor escalar. Se trata de problemas en los que hay un conjunto referente y una función específica que aplica cada elemento del conjunto9 referente en un conjunto comprado de objetos, y se pregunta cuántos objetos hay en el conjunto comparado. Estos problemas son los que Vergnaud considera como de un solo espacio de medida.

c) Problemas de multiplicación cartesiana, ya considerados por Vergnaud en la categoría producto de medidas.

Nesher describe un estudio empírico en el que estudia: a) qué tipos de problemas (regla de correspondencia, comparación y producto cartesiano) son más accesibles para los niños; b) hasta qué punto los niños son conscientes de los modelos implícitos de los textos multiplicativos. El resultado fue que los alumnos tenían más dificultades para reconocer los problemas de adición repetida que para reconocer los de comparación. Nesher explicó esta contradicción con el trabajo de Hart (1981) basándose en la influencia de las formulaciones lingüísticas que aparecen en los enunciados de los problemas.

Los trabajos de Bell, Fischbein, & Greer (1984), señalan la necesidad de enseñar las operaciones en diferentes contextos y modelos de situación, observando la variación en el significado de las operaciones cuando se cambia el tipo de números y los supuestos implícitos e interpretaciones que hacen los estudiantes cuando intentan generalizar a las fracciones los significados de las operaciones con números naturales; como por ejemplo que multiplicar hace mayor, dividir hace menor o que no se puede dividir un número menor entre otro mayor.

2.1.3. Tipos de cantidades

Hay dos grandes grupos de trabajos sobre los tipos de cantidades:

a) Sobre la influencia del tamaño de los números en la resolución de los problemas: Hart(1981), Bell y otros (1981, 1984), Fischbein y otros (1985), Thibodeau (1989).

b) Sobre la naturaleza de las cantidades: Schwartz (1981, 1988).

Sobre los primeros se citan a continuación algunos de los trabajos que han examinado algunas de las dificultades que muestran los estudiantes en relación con el tamaño de los números.

Así, la influencia del tamaño de los números sobre la elección de la operación adecuada para resolver problemas verbales ha sido puesta de manifiesto por Hart (1981).

Bell y otros (1981) examinan las dificultades conceptuales de los alumnos para elegir la operación adecuada para resolver problemas verbales multiplicativos que contienen números racionales. Una concepción equivocada bastante común fue que la multiplicación siempre aumenta, que la división disminuye y que la división debe ser de un número mayor entre otro menor. Estas concepciones, que son válidas con los naturales, los alumnos las extrapolan a los decimales menores que la unidad.

Bell y otros (1984) confirman la dificultad que supone para los niños el uso de números decimales en los problemas multiplicativos.

> El efecto de las concepciones equivocadas debidas a los tipos de números interactúan con varios aspectos de la estructura del problema y el contexto. Una es la amplitud con la cual el contexto induce al alumno a concebir que uno de los números está siendo operado y cambiado su tamaño por el otro número. Otra es si la estructura del problema puede ser asimilada a una de las estructuras accesibles: adición repetida para la multiplicación; partición o cuotición para la división. (Íbid, p. 145)

Fischbein y otros (1985) afirman que el papel de los datos numéricos del enunciado es decisivo para la resolución del problema.

> El papel de los números decimales en la estructura de un problema de multiplicación es claramente decisivo en la elección de la operación. Un problema de multiplicar es claramente más difícil cuando el operador es un número decimal (puesto que viola las restricciones del modelo). (p.11)

Thibodeau (1989) estudia la influencia de la estructura del problema y del tipo de datos del enunciado en las realizaciones de los estudiantes. Distingue cuatro tipos de problemas de multiplicar, según los contextos que aparecen en el enunciado: calcular, comparar, combinar y convertir. Los resultados indican que la presencia de fracciones entre los datos del problema dificulta la elección de la operación necesaria para resolver el problema cuando los números juegan diferentes papeles en el enunciado y que al aumentar el número de fracciones, se incrementa el nivel de dificultad.

Las dificultades de los problemas multiplicativos con fracciones se deben al cambio de campo numérico y al hecho de que se debe reinterpretar su significado en relación con el de las operaciones multiplicativas y de la terminología (multiplicando, multiplicador, producto, dividendo, divisor, cociente)

En lo que se refiere a los trabajos sobre la naturaleza de las cantidades, se destaca el trabajo de Schwarzt (1988), el cual señala que las cantidades usadas para contar o medir tienen unidades de referencia, que denomina referentes. Las operaciones binarias definidas en el conjunto de cantidades y referentes permiten generar nuevas cantidades que pueden tener o no nuevos referentes. La operación binaria es una composición de dos cantidades que genera una nueva cantidad, la cual puede conservar la unidad de referencia o no. Así, la suma y la resta son composiciones de cantidades que conservan el referente, ya que producen una cantidad del mismo tipo. En cambio, la multiplicación y la división son composiciones que transforman el referente, ya que la nueva cantidad no es del mismo tipo que las dos cantidades de partida.

Schwartz (1988) distingue entre dos tipos de cantidades: las cantidades extensivas, que expresan la extensión de una magnitud e indican cuántas unidades hay de un tipo de objetos; y las cantidades intensivas que expresan una cualidad, como la velocidad o la densidad, pero no dicen cuántos hay de una cantidad en términos absolutos. Las cantidades intensivas relacionan una cantidad con una unidad de otra cantidad, por ejemplo, precio por artículo, o metro por segundo, siendo su valor constante.

Schwartz (1981, 1988), en su análisis dimensional, usa una componente física basada en las relaciones entre magnitudes para estudiar los problemas multiplicativos. En el conjunto de las cantidades resultantes de contar o medir, Schwartz afirma que es posible definir un conjunto básico de operaciones binarias, las cuales pueden usarse para generar nuevas cantidades que pueden tener o no nuevas unidades de medida. La composición de dos cantidades matemáticas para producir una tercera cantidad derivada puede ser de dos formas:

a) composición conservando el referente o

b) composición transformando el referente.

El segundo tipo está constituido por las composiciones de dos cantidades, similares o no, que producen una tercera cantidad (en general, no similar a las dos cantidades originales). Schwartz (1988, p. 41) distingue entre cantidades extensivas (por ejemplo, 20 canicas) y cantidades intensivas (velocidad, densidad). Las cantidades intensivas son cociente de cantidades extensivas. Analiza los diversos casos de problemas multiplicativos, según la naturaleza dimensional (E=extensiva, I=intensiva) de las cantidades que intervienen en ellos. Así, se tiene:

E x E, E x I, I x E, I x I, E / E, E / I, I / E, I / I.

Además, las cantidades extensivas se pueden clasificar en discretas (D) y continuas (C). Las cantidades intensivas (cociente de extensivas) se pueden clasificar en cuatro tipos: D / D, C / D, D / C, C / C.

Schwartz establece tres tipos de ternas de cantidades:

1) Problemas asociados a la terna (I, E, E’). Estos problemas corresponden a la categoría que Vergnaud llama isomorfismo de medidas. Son tres problemas: I × E = E’, E’ /E = I, E’ / I = E.

   En ellos siempre hay una cantidad intensiva que es un valor unitario y este valor es el multiplicando, mientras que el multiplicador es la cantidad extensiva, siendo el producto una cantidad extensiva nueva, de distinta especie que el multiplicador.

   En el caso de la división por el multiplicando el divisor es la cantidad intensiva o valor unitario y el dividendo la cantidad extensiva. Mientras que cuando la división es por el multiplicador el divisor y el dividendo son cantidades extensivas y la cantidad que se busca o cociente es la cantidad intensiva o valor unitario.

2) Problemas asociados a la terna (E, E’, E’’). Corresponden a la categoría que Vergnaud denomina producto de medidas. A este tipo corresponden los problemas: $E \times E' = E''$, $E'' / E = E'$, $E'' / E' = E$.

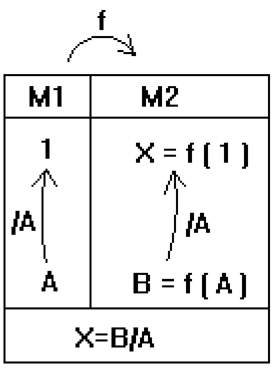
3) Problemas asociados a la terna (I, I’, I’’). Corresponde el problema $I \times I' = I''$ y las divisiones correspondientes: $I'' / I = I'$ y $I'' / I' = I$.

2.1.4. Relaciones entre cantidades

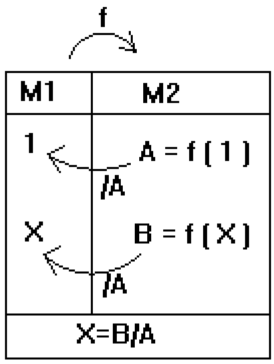
Se destacan aquí los trabajos de Vergnaud (1983 y 1988) y de Schwarzt (1988) los cuales estudian, entre otras cuestiones, la influencia de las relaciones entre cantidades en la resolución de los problemas multiplicativos.

Los trabajos de Vergnaud (1983 y 1988) sobre la estructura de los problemas multiplicativos revelan la existencia de dos métodos de resolución (escalar y funcional) en el caso de la estructura de isomorfismo de medidas.

El método de resolución escalar se usa cuando se establecen relaciones dentro de un mismo espacio de medida y consiste en determinar la cantidad desconocida de un espacio de medida usando como referencia el escalar que relaciona la unidad con la cantidad conocida en el otro espacio de medida. Por ejemplo, para determinar el valor unitario X correspondiente a la unidad de M1, se razona así: si de A se pasa a la unidad de M1 dividiendo entre A, de B se pasa a X, en el espacio de medida M2, dividiendo también entre A. Por tanto, la solución es X=B/A



El método de resolución funcional se usa cuando se establecen relaciones entre cantidades de dos espacios de medida diferentes y consiste en usar como referencia la relación funcional entre los dos espacios de medida. Si de A (en M2) se pasa a la unidad (en M1) dividiendo por A, de B (en M2) se pasa a X (en M1) también dividiendo por A, es decir, X=B/A.



Los trabajos de Schwartz (1988) muestran que la multiplicación y la división producen un cambio de referente en las cantidades involucradas en los problemas. En efecto, un producto de cantidades extensivas dará como resultado una cantidad extensiva de un tercer espacio de medida; un producto de una cantidad intensiva por una extensiva dará una cantidad extensiva de un tercer espacio de medida, mientras que un producto de cantidades intensivas dará como resultado una nueva cantidad intensiva de naturaleza diferente a las dos anteriores.

Así mismo, la división de dos cantidades extensivas es una cantidad que, o bien es extensiva de un tercer espacio de medida, o bien es intensiva y, por tanto, de diferente naturaleza al dividendo y divisor; mientras que un cociente de intensivas es otra cantidad intensiva, de diferente naturaleza.

2.1.5. Formas textuales

Éste es un tema del que no se ha encontrado gran cantidad de informes de investigación, pero forma parte de esta investigación y se le da una especial importancia, ya que se pretende indagar sobre los efectos de ciertas expresiones lingüísticas tanto en el reconocimiento de los problemas, como en los procesos de resolución por parte de los estudiantes.

Nesher (1975) afirma que ciertas palabras clave en los problemas aritméticos verbales tienen una influencia decisiva en la elección de la operación matemática que permite resolver el problema. Sin embargo, si existe un conflicto entre las tareas demandadas (selección de la operación matemática adecuada al problema) y la connotación de las palabras clave, la elección de la operación puede mostrar cuál de ambos es el actor más poderoso: la connotación operacional, la expresión lingüística, su estructura o las relaciones matemáticas entre las cantidades.

2.1.6. Modelos de situación

Los modelos de situación representan las operaciones con problemas verbales o con objetos (manipulables o diagramas), por ejemplo, la unión de dos conjuntos de objetos o la repetición de grupos de objetos iguales.

Cada modelo de situación favorece unos aspectos o características de la operación y deja en segundo plano otros. El modelo de situación dota de significados restringidos a la operación. Esto hace que las operaciones aritméticas estén ligadas a problemas-tipo estandarizados que son determinantes para identificar la operación que permite resolver un problema. Facilitan el proceso de resolución, pero también pueden ser un obstáculo para llegar a la solución del problema. Por ello, Fischbein y otros (1985) señalan la necesidad de mostrar todos los contextos y modelos de situación en los que pueden aparecer las operaciones, observando los cambios en el significado cuando se cambia del campo numérico de los naturales a las fracciones.

Bell y otros (1989) estudian problemas multiplicativos asimétricos y los clasifican en diversas categorías: grupos múltiples, medida repetida, razón o tasa, cambio de unidad y mezcla. A cada tipo de problema de multiplicar asocian dos tipos de problemas de dividir. Un tipo corresponde a la división como partición, en el que se dan la cantidad total y el número de partes y hay que hallar el tamaño de cada parte; y el segundo tipo de problemas de división cuotición, en el que se dan como datos el total y el tamaño de cada parte, debiéndose hallar el número de partes.

Greer (1987) afirma que la multiplicación no es "psicológicamente" conmutativa, ya que los papeles de multiplicando y multiplicador son diferentes, lo que hace que cada multiplicación de origen a dos tipos diferentes de división. Estos tipos de división los relaciona con modelos de situaciones dando origen, en los casos asimétricos, a cinco categorías de problemas de multiplicar, cinco de división-partición y cinco de división-cuoticion, y, en los casos simétricos, a tres problemas de multiplicar y tres de dividir, tal como se señala en la Tabla 2.1 (pág. 27).

Greer (1992) modifica la categorización anterior de los problemas, introduciendo un total de 10 clases, que dan origen a 10 tipos de problemas de multiplicar, 7 tipos de problemas de división-partición, 7 de cuotición y 3 problemas simétricos de división. Las clases son: grupos iguales, medidas iguales, razón, conversión de medidas, comparación multiplicativa, relación parte/todo, cambio multiplicativo, producto cartesiano, área rectangular y producto de medidas.

Casos asimétricos (dos tipos de división)			
Categoría	Multiplicación	División (partición)	División (cuotición)
Grupos múltiples	3 chicos tienen 4 galletas cada uno. ¿Cuántas galletas tienen todos juntos?	12 galletas se dividen en partes iguales entre 3 chicos. ¿Cuántas galletas corresponden a cada uno?	12 galletas se han repartido entre algunos chicos. Cada chico tiene 4 galletas. ¿Cuántos chicos hay?
Iteración de medida	4 piezas de madera tienen cada una 3,2 m de longitud. ¿Cuál es la longitud total de madera entre las 4?	Una pieza de madera de 12,8 m de larga se corta en 4 piezas iguales. ¿Qué longitud tiene cada pieza?	Una pieza de madera de 12,8 m de longitud se corta en trozos de 3,2 m de longitud. ¿Cuántos trozos resultan?
Cambio de escala	En una fotografía, la longitud de un coche es 3,2 cm. Si la fotografía se amplía con un factor de 4,5, ¿qué longitud tendrá el coche en la fotografía?	Una fotografía se amplía en un factor de 4,5. En la foto ampliada un coche mide 14,4 cm de largo. ¿Cuál es la longitud del coche en la foto original?	En una fotografía, un coche tiene 3,2 cm de largo. La fotografía se amplía y el coche alargado tiene 14,4 cm de largo. ¿Cuál es el factor de ampliación?
Razón	Un hombre camina durante 4,5 horas con una velocidad de 3,2 millas por hora. ¿Qué distancia ha recorrido?	Un hombre camina 14,4 millas en 4,5 horas. ¿Cuál es su velocidad en millas por hora?	Un hombre camina 14,4 millas con una velocidad de 3,2 millas por hora. ¿Cuánto tiempo ha estado caminando?
Conversión de medida	Si la razón de cambio es 1,5 dólares por libra, ¿cuántos dólares nos darán por 3,20 libras?	Si te dan 4,80 dólares por 3,20 libras, ¿cuiál es la razón de cambio en dólares por libra?	Si la razón de cambio es 1,5 dólares por libra, ¿cuántas libras pueden darnos por 4,80 dólares?
Casos simétricos (un único tipo de división)			
Categoría	Multiplicación	División	
Arreglo rectangular	Si hay 3 filas y 4 columnas, ¿cuál es el número total?	Si el totales 12 y hay 3 filas (columnas), ¿cuántas columnas (filas) hay?	
Combinaciones	Si se pueden elegir 3 colores y 4 estilos, ¿cuántas combinaciones de color y estilo se pueden hacer?	Si hay 12 combinaciones de color y estilo y hay 3 maneras de elegir color (estilo), ¿cuántos estilos (colores) hay?	
Área	Si la base es 3,2 cm y la altura es 4,5 cm, ¿cuál es el área?	Si el área es 14,4 cm^2 y la base (altura) es 3,2 cm, ¿cuál es la altura (base)?	

Tabla 2.1. Tipos de división en casos asimétricos

En los modelos de situación, la interpretación de los términos es fundamental para identificar las situaciones multiplicativas. Si los factores son asimétricos, como en la *adición repetida*, cada uno cumple un papel diferenciado y por ello se denominan con nombres diferentes (multiplicando y multiplicador). El multiplicador indica cuántas veces ha de repetirse el multiplicando. En la división, considerada como inversión de la multiplicación, el producto pasa a ser el dividendo y el divisor puede tener significados diferentes según que se elija dividir entre el multiplicando o entre el multiplicador. En el primer caso, el divisor indica el número cuya repetición da el producto y el multiplicador indica el número de veces que el divisor está contenido en el dividendo. En el segundo caso, el divisor indica el número de veces en que se descompone el dividendo y el multiplicando indica el número de elementos en cada una de las partes iguales.

2.1.7. Implicaciones para la presente investigación

Sobre aspectos semánticos:

De los trabajos de Fishbein, Deri, Nello y Marino (1985), se considera los modelos implícitos de división (partición y cuotición o medida) y el hecho de que estos modelos implícitos imponen sus propias restricciones a la hora de resolver problemas multiplicativos.

Sobre aspectos estructurales:

De los trabajos de Vergnaud (1983, 1988) se toma su caracterización de los problemas multiplicativos de división en el caso de que los datos sean fracciones. Los esquemas (cuaternario y ternario) servirán en la presente investigación para modelizar estos problemas. Se usará el trabajo de Vergnaud para: a) analizar la estructura y los métodos de resolución de los problemas multiplicativos relacionados con la división fracciones seleccionados en el análisis histórico de textos de enseñanza; y b) analizar los métodos de resolución de los estudiantes cuando se enfrentan a las tareas del cuestionario.

Del trabajo de Bell y otros (1989), se recoge su clasificación de los problemas multiplicativos en categorías, en la medida en que algunas de ellas son útiles en el caso de la división de fracciones, especialmente las relativas a razón o tasa y a cambio de unidad. También se consideran útiles para esta investigación los diversos tipos de problemas de división (partición y cuotición) descritos por Bell, ya considerados por Fishbein (1985) y Hart (1981), si bien se tienen en cuenta otros modelos de división que aparecen en textos históricos de enseñanza, como inversión de la multiplicación (factor perdido) y cuarto proporcional.

Sobre los tipos de cantidades y relaciones entre ellas:

De los trabajos de Vergnaud (1983, 1988) y Schwarz (1981, 1988), se toma la distinción entre cantidades extensivas e intensivas y entre cantidades extensivas discretas y continuas. Se usa el análisis dimensional para caracterizar los problemas seleccionados en el análisis histórico en relación a los contextos.

Sobre las formas textuales:

De los trabajos de Nesher (1975, 1988) se tiene en cuenta la idea de la existencia de expresiones lingüísticas o palabras clave que favorecen la elección de la operación que permite resolver un problema multiplicativo.

Sobre los modelos de situación:

De los trabajos de Greer (1987, 1992) se recoge la idea de que los papeles de multiplicando y multiplicador son diferentes y que un problema de multiplicación da origen a dos problemas de división; se tiene en cuenta también, a efectos de esta investigación, su clasificación en categorías para los problemas asimétricos.

2.2. NÚMEROS RACIONALES Y DIVISIÓN DE FRACCIONES

A los efectos de esta investigación, es necesario indagar sobre los constructos de número racional, porque, según los informes analizados, los constructos influyen en las actuaciones de los estudiantes. Por otra parte, algunas investigaciones precedentes afirman que es posible extender los modelos de división con números naturales a las fracciones. Por ello, interesa analizar las investigaciones precedentes que versan sobre los modelos de división con naturales. En la presente investigación son especialmente relevantes las formas textuales con que aparecen los constructos de número racional y los modelos de división. Por ello, en el capítulo 3 se analizan las formas textuales asociadas a los constructos y a los modelos de división y se describe cómo aparecen en los textos de enseñanza.

2.2.1. Sobre números racionales.

Se consideran aquí los trabajos de Kieren (1976); Freudenthal (1983); Behr, y Harel (1990); Behr, Lesh, Post, y Silver (1983); Lesh, Landau y Hamilton (1983); Behr, Harel, Post y Lesh (1991).

Kieren (1976) interpreta los números racionales de seis formas diferentes (llamadas subconstructos): comparación parte–todo, número decimal, razón, división indicada (cociente), operador y medida de cantidades discretas o continuas. Kieren afirma que para una comprensión completa de los números racionales se necesita una comprensión de cada uno de estos subconstructos y de sus interrelaciones.

De este trabajo de Kieren (1976) tomamos los subconstructos de números racionales, si bien, teniendo en cuenta el análisis de textos históricos de enseñanza, los agrupamos de la siguiente manera: a) como parte o partes de la unidad; b) como división; c) como resultado de una medida; d) como operador; y e) como razón.

Freudenthal (1983) considera las fracciones como precursores del concepto de número racional. Considera un doble uso de las fracciones como fracturadores y como comparadores. En el primer caso distingue varias formas de "causar fracciones", analiza la relación parte–todo, según que el todo sea definido o indefinido, discreto o continuo, estructurado o no estructurado y según que la atención esté puesta en una parte, en varias o en todas las partes y que el modo de fraccionar esté o no estructurado. En cuanto a las fracciones como comparadores, considera la comparación de objetos concretos y la relación entre fracción y magnitud. Freudenthal considera que la fracción aparece en un operador o en una relación; ambos pueden actuar sobre objetos y relacionar entre sí objetos según características, cantidades y valores de magnitud. Si los objetos comparados son todo y parte, la fracción aparece en el operador fracturante o relación de fractura. Si están separados, hablamos de relación de razón. Si es acerca de cantidades y magnitudes, la fracción aparece en el operador razón. De la relación razón entre objetos se puede pasar al operador razón mediante la fracción en el transformador, operación que se realiza sobre el objeto mismo, pero no por ruptura, si no por aplicación y deformación. Alejándonos de la esfera concreta, llegamos a la fracción como medidora, precediendo a la unidad, sobre la recta numérica, el operador fracción inverso del operador multiplicación y la fracción como número racional. Freudenthal estudia la fracción en un operador y los modelos de la relación razón y del operador razón. A continuación describe una teoría matemática del número racional desde el punto de vista del operador razón y expone una rica secuencia didáctica sobre fracciones en la que discute la división de fracciones.

Parece natural añadir la división de fracciones a esta secuencia, a saber, como el inverso de la multiplicación (?x)ax=b. En el caso b=1 este problema se convierte en (?x)ax=1 y se resuelve dando la vuelta a la fracción que representa a, cabeza abajo, y para resolver (?x)ax=b, este resultado ha de ser multiplicado por b. Esto, sin embargo, no responde didácticamente al problema de la división de fracciones. Toda pista de que dividir está de alguna manera relacionado con la realidad falta en esta aproximación.

Interpretar b/a como una división distributiva, esto es, como una partición de b en a partes, carece igualmente de sentido a menos que a sea un entero. Es más apropiado entender b/a como una división razón, que contesta a la pregunta ¿cuántas veces cabe a en b?, por ejemplo, si ambos se visualizan como longitudes. Pero entonces es más apropiado hacer esta pregunta honestamente en el contexto de razones. Presupongamos este contexto por un momento como una precondición didáctica, con la conclusión operativa: las divisiones b/a y bc/ac ($c\neq 0$) son equivalentes, esto es, dan el mismo resultado. Desde luego, este principio puede también ser motivado si la división se entiende como el inverso de la multiplicación: ax=b y acx=bc ($c\neq 0$) tienen la misma solución x. Así como en el contexto de "razón" el principio puede ser también motivado con enfoques simples, tales como:

$\frac{2}{3}$ cabe en $\frac{4}{3}$ tantas veces como 2 en 4,
$\frac{2}{3}$ cabe en 6 tantas veces como 2 en 18,
$\frac{2}{3}$ cabe en $\frac{7}{6}$ tantas veces como 4 en 7,
$\frac{2}{3}$ cabe en $\frac{8}{5}$ tantas veces como 5 en 12.

Lo esencial de este principio es "reducir la división de fracciones a la de enteros vía fracciones con igual denominador". Un procedimiento que es formalmente equivalente a multiplicar con el divisor puesto al revés, aunque está mejor motivado didácticamente. (Freudenthal, 1983, Pp. 55-57)

De este trabajo de Freudenthal (1983), se toma en consideración su concepción de las fracciones como precursores del concepto de número racional y su categorización de los diversos constructos, tanto de números racionales como de la división de fracciones. De acuerdo con Freudenthal, en el caso de la división de fracciones, es más apropiado el contexto de comparación o de razón, frente al de partición. Tal como plantea Freudenthal, lo esencial es reducir la división de fracciones a la división de enteros, transformando las fracciones en otras equivalentes que tengan el mismo denominador. Esta vía es equivalente al algoritmo de "invertir y multiplicar", pero tiene más sentido didáctico.

Behr y Harel (1990) efectúan un análisis semántico de algunos subconstructos de números racionales, con el objetivo de mostrar las numerosas interconexiones existentes entre los conceptos relativos al campo conceptual multiplicativo. Se centran en los subconstructos parte–todo y cociente, e incluyen un mapa conceptual en el que se relacionan los constructos anteriores y el constructo operador con la composición y recomposición de unidades y matemáticas de la cantidad. Así, en el constructo parte–todo se distingue entre partes de una cantidad discreta o partes de una cantidad continua. En el constructo de cociente, se distingue entre: división como partición y como agrupación, cantidades discretas o continuas, y diferentes tipos de unidades en el numerador y el denominador. En el caso de la partición, la fracción se interpreta como dos cantidades intensivas. En el caso de la división como agrupación, la fracción se considera como una cantidad extensiva.

De este trabajo se tienen en cuenta las diversas interrelaciones entre los diferentes subconstructos de números racionales.

Behr, Lesh, Post, y Silver (1983) describen las tareas del Rational Number Project en tres componentes: a) enseñanza, b) evaluación y c) diagnóstico–remedio en cada grupo de estudiantes con dificultades de aprendizaje con las fracciones. Los autores centran su estudio en las denominadas señales perceptuales o distractores, con las que se refieren a las figuras, modelos o diagramas que normalmente acompañan a las tareas escolares sobre números racionales y que crean un conflicto entre la información visual y la tarea propuesta, y concluyen que estos distractores hacen que algunos tipos de problemas sean demasiado difíciles para los estudiantes. Su conocimiento puede servir para diseñar secuencias de enseñanza efectivas. Las estrategias que utilizan los estudiantes para resolver problemas con distractores pueden ser útiles para la comprensión conceptual de los números racionales.

De este trabajo se tienen en consideración los estudios sobre los distractores visuales y la importancia del uso de modelos físicos en la resolución de problemas con fracciones.

Lesh, Landau, y Hamilton (1983) utilizan, dentro del proyecto APS, un cuestionario con numerosos ítems sobre números racionales, en el que se trata de medir la influencia de los modelos conceptuales en la comprensión de los números racionales en el marco de la resolución de problemas. Los modelos que se utilizan son: representaciones de regiones circulares y poligonales, dibujos con una cantidad discreta de objetos, recta numérica y representación de volumen. El tipo de procesos que se deben activar para resolver los ítems son: del símbolo al dibujo y viceversa, del dibujo a la escritura y viceversa, del símbolo a la escritura y viceversa. También se incluyen ítems sin ningún tipo de dibujo o representación simbólica.

De este trabajo se tienen en cuenta los diversos modelos (continuos y discretos) de representación de fracciones.

Behr, Harel, Post y Lesh (1991) estudian el constructo operador de número racional. Consideran el numerador como un multiplicador cuyo efecto al operar sobre una cantidad es hacer un número de copias de dicha cantidad igual al número indicado por el numerador. El denominador es un reductor cuyo efecto sobre el operando es su partición en un número de partes iguales igual al denominador. Los autores nombran este operador como D/PR (Duplicación/Partición–reductor) y describen un sistema de notación que permite describir los procesos reductores y multiplicadores en términos de matemáticas de la cantidad. Esta interpretación es utilizada para interpretar algunos algoritmos de cálculo.

Según los autores, el estudio de los números racionales exige: a) habilidades para hacer particiones de cantidades, b) flexibilidad en la formación y reformación de unidades, c) comprensión de y habilidad para la división partitiva, d) comprensión del concepto de función, y e) comprensión de la multiplicación como adición repetida.

De este trabajo tomamos en consideración el constructo operador, si bien no en el sentido expresado por los autores, ya que su investigación se centra en la división partitiva.

2.2.2. Investigaciones sobre la división de fracciones.

Este grupo está formado por los trabajos de Lamon (2001), Newstead y Murray (1998), Yamaguchi y Jwasaki (1999), Sinicrope, Mick y Kolb (2002), Sharp (2000), Brendefur y Pitingoro (2000) y Warrington (1997).

Lamon (2001, p.147) señala que la enseñanza tradicional, que se sustenta en una breve introducción de la interpretación *parte/todo* de las fracciones, seguida de una más o menos larga práctica con sus algoritmos de cálculo, ha producido como resultado que algunos estudiantes sean incapaces de resolver una gran variedad de problemas o cuestiones donde están involucrados los símbolos de fracción. Por lo que, basar la instrucción en una sola y selectiva interpretación de las fracciones, introduciendo sólo algunas de sus representaciones, puede llevar a los estudiantes a apoyar su comprensión del campo de los números racionales en fundamentos inadecuados.

Newstead y Murray (1998) investigan los conceptos y operaciones con fracciones con estudiantes sudafricanos de 4º y 6º grado, y apuntan como posibles causas de los errores:

a) la forma y secuencia en que el contenido es inicialmente presentado a los estudiantes,

b) clases en las que las intuiciones incorrectas y las concepciones informales de fracciones no son monitorizadas ni resueltas, y

c) la inapropiada aplicación de esquemas de los números enteros, consistente en interpretar los dos términos de una fracción como dos números enteros separados.

Para estos autores los errores conceptuales que se observan proceden de intuiciones incorrectas y experiencias informales que no permiten interpretar adecuadamente los problemas, lo que revela una construcción limitada de los conceptos de fracción y de división por falta de experiencias reales que permitan crear intuiciones.

Según Newstead y Murray (1998), la división de fracciones fuera de contexto es una fuente de conflictos con las ideas de división de los estudiantes, que están muy enraizadas en la división entre números naturales. Por tanto, es necesario exponer una gran variedad de situaciones de división en la escuela para ofrecer oportunidades para resolver estos conflictos.

Afirman que uno de los errores más comunes consiste en ver la fracción como dos números enteros separados, en vez de identificarla como una cantidad o como una relación de cociente entre dos cantidades. Por ejemplo, a la hora de sumar fracciones, muchos estudiantes suman los numeradores y los denominadores por separado. Curiosamente esta estrategia es válida para la multiplicación de fracciones, lo que supone de nuevo una fuente de conflicto.

Los autores afirman que también en el caso de la división entre una fracción, los estudiantes utilizan esquemas de los números enteros. Así ocurre, por ejemplo, cuando cambian 4/8 por 8/4, porque tienen el error conceptual de que la conmutatividad se puede aplicar tanto a la suma como al cociente.

Newstead y Murray afirman que tras los cinco primeros años de escolaridad, los estudiantes tienen una comprensión limitada de las fracciones que persiste en cursos superiores. Esta situación puede ser debida a la forma de introducir los conceptos relativos a fracciones en la escuela. Los estudiantes pueden usar interpretaciones no matemáticas para dar sentido a situaciones no familiares de fracciones en un contexto de resolución de problemas. El contexto favorece el éxito en la resolución de problemas.

Yamaguchi y Jwasaki (1999) consideran que hay una separación entre el concepto de división como razón y el algoritmo de división debido a que el constructo de repartir y medir implicado en las divisiones con números naturales no se puede trasladar miméticamente como proporción a la división con fracciones. La construcción abstracta resulta a veces imposible en el supuesto de la división partitiva (partición) y la división cuotitiva (agrupación), porque sus características son totalmente diferentes. El algoritmo de "invertir y multiplicar" no se deduce de una relación de proporcionalidad entre dos cantidades concretas.

Yamaguchi y Jwasaki, (1999) razonan que la división de decimales y la división de fracciones son de distinta naturaleza, ya que la primera se puede situar en un proceso de "abstracción constructiva" o de generalización de la división de números naturales, cosa que no sucede con la división de fracciones. Por esta razón, el algoritmo de "invertir y multiplicar" está muy asumido entre los estudiantes, pero no puede deducirse exclusivamente por proporcionalidad. Para establecer sus conclusiones, analizan las respuestas a los siguientes problemas:

Problema de división con decimales:
El peso de esta tubería es 4'2 kg y su longitud de 3'5 m. ¿Cuánto pesa un metro de tubería?. Escribe una expresión para dar la respuesta. (Yamaguchi y Jwasaki, 1999, Vol. IV. Pp 4-339)

Problema de división de fracciones:
En cierto depósito, el agua se vacía a razón de 5/6 litro por 2/3 minuto. ¿Cuánta agua sale por minuto?. Escribe una expresión para dar la respuesta. (Yamaguchi y Jwasaki, 1999, Vol. IV. Pp 4-339)

En su análisis afirman que la división con decimales es una especie de extensión de la división con números naturales; pero la división con fracciones no es una división, sino una multiplicación. Yamaguchi y Jwasaki concluyen que la enseñanza de la división de fracciones no puede basarse en el constructo de la proporcionalidad y proponen el esquema de comparación.

El esquema de comparación tiene dos enfoques matemáticos que son DIFERENCIA y RAZÓN entre dos cantidades. Este tipo de situación induce la expresión de división más fácilmente que la relación de proporcionalidad. Yamaguchi y Jwasaki diseñan un pre–test con estudiantes de sexto curso, en el que se propone un problema sobre división de fracciones en base al esquema de proporción y un segundo problema sobre el esquema de comparación.

Problema de razón–proporción:

Podemos pintar 2/5 m^2 de madera por 3/4 dl. ¿Cuánta superficie de madera podemos pintar por 1 dl?. (Yamaguchi y Jwasaki, 1999, Vol. IV. Pp 4-341)

Problema de comparación:
La longitud de la cinta de Kaori es 2/3 metros y la de la cinta de Shiho es 5/7 metros. ¿Cuántas veces es la cinta de Shiho tan larga como la cinta de Kaori?. (Yamaguchi y Jwasaki, 1999, Vol. IV. Pp. 4-341)

Se observan mejores resultados en el caso del esquema de comparación. A partir del pre–test, Yamaguchi y Jwasaki diseñan y evalúan prácticas de enseñanza basadas en el esquema de comparación.

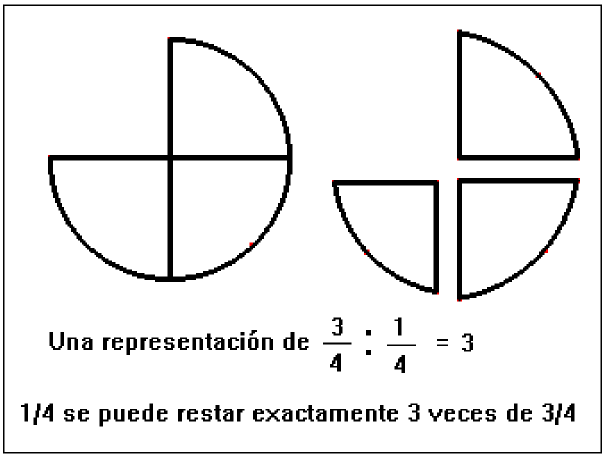
Sin embargo, Yamaguchi y Jwasaki concluyen que el modelo de comparación tampoco puede generar por si mismo el algoritmo de multiplicación por el inverso del divisor. Es necesario que el profesor ayude a los estudiantes recordando propiedades de las fracciones como "El valor de una fracción es constante cuando ambos, denominador y numerador, se multiplican por el mismo número". Se puede deducir el procedimiento "invertir y multiplicar" lógicamente y comprendiendo conceptualmente el significado de este algoritmo suficientemente, haciendo referencia a propiedades de fracciones y reglas sobre la división.

Hana tiene la cinta cuya longitud de 3/4 metros. Yuki tiene otra de 2/5 metro. Compara la longitud de la cinta de Hana con la de la cinta de Yuki. (Yamaguchi y Jwasaki, 1999, Vol. IV, p. 4-342).
La longitud de la cinta de Kaori es 2/3 metros y la de la cinta de Shiho es 5/7 metros. ¿Cuántas veces es la cinta de Shiho tan larga como la cinta de Kaori?. (Yamaguchi y Jwasaki, 1999, Vol. IV, p. 4-341).
Estas son las cintas A y B. La longitud de la cinta A es 3/5 metros y la de B es 2/7 metros. ¿Cuántas veces es la cinta A tan larga como la cinta B?. (Yamaguchi y Jwasaki, 1999, Vol. IV, p. 4-342)

Afirman que los problemas basados en el esquema de comparación conducen más fácilmente a la división que los de razón–proporción, ya que el esquema de comparación implica el constructo de medida mediante el modelo de agrupación (división cuotitiva). Así, en el último ejemplo, averiguar cuántas veces es tan larga la cinta A como la B es medir la cinta A tomando como unidad de medida la cinta B. Pero para ello hay que averiguar cuántos grupos iguales a la longitud de la cinta B se pueden formar con la longitud de la cinta A. Se pasa así de la división como comparación a la división como medida y a la división como agrupación.

Sinicrope, Mick y Kolb (2002) categorizan situaciones de división de fracciones, que denominan "interpretaciones", con objeto de explorar algoritmos y ensayar modelos de enseñanza. Afirman que la división de fracciones se puede explicar por extensiones de las tres interpretaciones de división de números enteros (medida, partición e inversión del producto cartesiano); pero que estas extensiones no son suficientes, considerando como necesarias la división como determinación de una razón unitaria y la división como la inversa de la multiplicación. A continuación, describen algoritmos de división de fracciones usando modelos físicos o representaciones en cada una de las interpretaciones: medida, partición, razón unitaria, inversa de la multiplicación e inversa del producto cartesiano. El modelo que usan es el continuo rectangular y poligonal.

Sharp (2000) parte del significado de división como resta repetida para construir un algoritmo de división de fracciones (el de reducción a común denominador y división de los numeradores). Utiliza para ello como soporte un modelo continuo circular de tarta, con el que representa algunos casos particulares, primero con el mismo denominador: $\frac{3}{4} \div \frac{1}{4}$, $\frac{5}{6} \div \frac{2}{6}$, $\frac{8}{12} \div \frac{5}{12}$; y luego con distinto denominador: $\frac{2}{3} \div \frac{2}{6}$, $\frac{3}{4} \div \frac{1}{6}$. Incluye también en caso en que el resultado es menor que la unidad, como en $\frac{1}{6} \div \frac{3}{6}$. Del análisis de todos estos casos particulares, los estudiantes inducen el algoritmo de reducción a común denominador y división de los numeradores.



Brendefur y Pitingoro (2000) utilizan un modelo de tabla de proporcionalidad como herramienta para representar la división de fracciones. De manera flexible, los estudiantes usan la equivalencia de razones para resolver problemas de división de fracciones en contexto. La situación propuesta es la siguiente: “Suponiendo que repartimos 1 ¼ cajas de cereal entre 4 personas, determina qué cantidad de cereal se lleva cada persona. Halla también qué cantidad de cereal se llevarían 60 personas”. Algunos estudiantes descubren que 1 ¼ cajas dividido entre 4 personas es equivalente a 5 cajas dividido entre 16 personas. Usando razonamiento proporcional llegan a la cantidad de cajas de cereal para una sola persona:

Cajas de cereal	1 1/4	5	5/16
Número de personas	4	16	1

Algunos estudiantes llegan a deducir por multiplicaciones sucesivas que 20 cajas de cereales serán para 64 personas. Entonces, para hallar la cantidad de cereal que corresponde a 60 personas, restan la primera columna:

Cajas de cereal	1 1/4	5	10	20	18 3/4
Número de personas	4	16	32	64	60

Warrington (1997) demuestra que los niños pueden desarrollar sus propias estrategias de cálculo para dividir fracciones, sin que el profesor les muestre previamente ningún algoritmo. En los ejemplos que describe, las explicaciones de sus estudiantes para los problemas (sin contexto) que implican la división de un número entero por una fracción propia tienden a ser dadas en términos de una interpretación cuotitiva, mientras que sus explicaciones para un problema que implica la división de una fracción propia por un número entero son dadas en términos partitivos.

Así, partiendo de la división 4/2, los estudiantes dan como resultado 2, porque 2 cabe exactamente 2 veces en 4. A continuación les propone la división $2 \div \frac{1}{2}$. Los alumnos responden 4, ya que ½ cabe exactamente 4 veces en 2. La siguiente división es $1 \div \frac{1}{3}$. Los estudiantes proponen como resultado 3, porque 1/3 cabe exactamente 3 veces en 1. A continuación, se les propone la división $1 \div \frac{2}{3}$. Los estudiantes proponen el resultado 1 ½ . El razonamiento es el siguiente: puesto que 1/3 cabe exactamente 3 veces en 1, 2/3 cabrá la mitad de veces, es decir 1 ½ veces. Se les propone a continuación la división $\frac{1}{3} \div 3$. Los estudiantes responden 1/9, ya que hay que dividir cada tercio en tres partes iguales y cada una será 1/9. Se les propone el siguiente problema:

He comprado 5 ¾ libras de chocolate. Quiero guardarlas en cajas de ½ libra cada una. ¿Cuántas cajas puedo hacer?

Los estudiantes resuelven el problema contestando 11 ½ cajas. El razonamiento es el siguiente: con 5 libras de chocolate se pueden llenar 10 cajas de ½ libra. Con ¾ de libra se puede llenar otra caja de ½ libra y queda ¼ de libra con el que se puede llenar media caja de ½ libra.

Este tipo de razonamiento se extiende hasta llegar a divisiones del tipo $4\frac{2}{5} \div \frac{1}{3}$, que también son resueltas por algún alumno de forma similar, aunque introduciendo una partición. Así, 1/3 cabe exactamente 12 veces en 4. Para dividir 2/5 entre 1/3, partimos cada quinto en tres partes iguales, con lo que la unidad queda dividida en 15 partes iguales. Entonces 2/5 equivale a 6/15 y 1/3 equivale a 5/15. Por tanto 1/3 cabe exactamente 1 vez en 2/5 y sobra 1/15. Es decir, el resultado final es 13 1/15.

2.2.3. Implicaciones para la presente investigación.

Del trabajo de Newstead y Murray (1998), se toma la idea de que la división de fracciones fuera de contexto supone una fuente de conflictos, teniendo en cuenta el esquema de división de números enteros que utilizan los estudiantes a la hora de resolver problemas y que el contexto influye en el éxito en la resolución de problemas.

Del trabajo de Yamaguchi y Jwasaki (1999) se toma la idea de que el algoritmo de “invertir y multiplicar” no se deduce de la relación de proporcionalidad entre dos cantidades y que, por tanto, el constructo de razón no es suficiente para explicar dicho algoritmo; así como que, en el caso de la división de fracciones, se pueden considerar tanto el esquema de comparación como el de razón–proporción, siendo de más fácil aplicación el primero que el segundo. Se toman también adaptaciones de algunos de los problemas utilizados en dicha investigación.

Del trabajo de Sinicrope, Mick y Kolb (2002), se toma la idea de extender las interpretaciones de la división de números enteros (medida, partición e inversión del producto cartesiano) a la división de fracciones, así como la descripción de los algoritmos de división de fracciones usando modelos físicos o representaciones.

Los trabajos de Sharp (2000); Brendefur y Pitingoro (2000); y Warrington (1997) dan pistas sobre qué estrategias pueden poner en juego los estudiantes para resolver los problemas.

Del trabajo de Sharp (2000), se tiene en cuenta la relación entre el significado de división como resta repetida y el desarrollo de estrategias constructivas para inducir el algoritmo de reducción a común denominador y división de los numeradores, así como el uso del modelo circular, si bien en nuestro trabajo se consideran también otras interpretaciones, algoritmos y modelos físicos de la división de fracciones.

Del trabajo de Brendefur y Pitingoro (2000), se tiene en cuenta la idea de usar la tabla de proporcionalidad para obtener fracciones equivalentes que permitan resolver problemas multiplicativos de división de fracciones.

Del trabajo de Warrington (1997) se comparte la idea de que los estudiantes pueden desarrollar sus propias estrategias constructivas al abordar la resolución de problemas multiplicativos que implican división de fracciones, si bien en la presente investigación se extiende el campo de estrategias, no limitándolas a las cuotitivas o partitivas, sino incluyendo también las que tienen que ver con el razonamiento proporcional y el pensamiento algebraico.

2.3. IMPLICACIONES PARA EL TRABAJO

Para los objetivos de esta investigación son especialmente relevantes los trabajos de Vergnaud (1983, 1988) y Schwartz (1981, 1988) sobre problemas multiplicativos, de los que se toman las ideas sobre análisis estructural y dimensional; los trabajos de Kieren (1976) y Freudenthal (1983), de los que se toman las ideas sobre constructos de números racionales y de división de fracciones; los trabajos de Greer (1987, 1992), de los que se toman los modelos de situaciones en las operaciones; y el trabajo de Nesher (1975) del que se toma su estudio de las formas textuales en los problemas de situación y el trabajo de Yamaguchi y Jwasaki (1999) sobre división de fracciones, del que se toman las ideas sobre los constructos de comparación y de razón–proporción, así como sobre el algoritmo de “invertir y multiplicar”, además de algunos de los problemas utilizados en dicho trabajo, que se han adaptado e integrado en el cuestionario esta investigación.

CAPÍTULO 3

Variables de enseñanza de la división de fracciones: algoritmos, sentidos de uso y representaciones

En este capítulo, y en el siguiente, se describen las variables de los modelos de enseñanza de la división de fracciones que se consideran en la investigación tema central de esta tesis. Dichas variables son: a) algoritmos, b) sentidos de uso de fracción y de división de fracciones, c) representaciones, y d) problemas verbales. Los valores de estas variables han experimentado cambios a lo largo de la historia, por eso en su estudio se ha utilizado el análisis histórico–epistemológico basado en un análisis de libros y textos de enseñanza tanto antiguos, como actuales. En las secciones siguientes se entra en el detalle de las tres primeras y en el capítulo 4 se describe con detalle la cuarta variable. Se iniciará la exposición explicando cuáles son los libros y textos que han servido de base para la revisión y análisis y que contienen la colección de datos de esta parte del estudio.

3.1 SELECCIÓN DE LIBROS Y TEXTOS DE ENSEÑANZA

Para una mayor claridad en la exposición, se han organizado los libros y textos de enseñanza en tres grandes periodos históricos: 1) hasta el siglo XVI, 2) los siglos XVII, XVIII y XIX y 3) el siglo XX, ya que, siguiendo a Gómez (1994), tanto el nacimiento de la imprenta, como la aparición del Sistema Público de Enseñanza se consideran factores decisivos que influyen en el desarrollo de los textos de enseñanza y marcan los dos puntos de inflexión que determinan esos tres períodos: el primero (el nacimiento de la imprenta) permitió una más fácil y rápida divulgación de las ideas de los autores, y el segundo (la aparición del Sistema Público de Enseñanza) permitió extender a la población las ideas matemáticas.

El primer período se ha subdividido en dos épocas: a) anterior al nacimiento de la imprenta y b) el final del siglo XV, para resaltar la importancia del nacimiento de la imprenta.

Siguiendo a Maz (2006), el segundo período se ha subdividido en tres épocas: a) período de influencia jesuita (1768-1814), b) período de la Ilustración (1768-1814), y c) período romántico (1815-1874), debido a que los cambios políticos y sociales que se producen en dicho período (en especial, los siglos XVIII y XIX) ejercen una notable influencia en los textos de enseñanza .

El tercer período se ha subdividido en tres épocas: a) el siglo XX hasta 1970, b) época estructuralista (1970-1990), y c) época actual (desde 1990), debido a que la primera época corresponde a la consolidación del sistema público de enseñanza y a la influencia de la ley Moyano, la segunda al auge de las matemáticas modernas y la tercera a la reforma de la LOGSE (MEC, 1990), que supuso una ruptura con la influencia de las matemáticas modernas.

En cada período se han consultado varios libros representativos; los elegidos proceden de la bibliografía disponible en la Biblioteca de la Universidad de Valencia y del Departamento de Didáctica de las Matemáticas.

3.1.1 Textos del período 1

De la primera parte de esta época (la anterior al nacimiento de la imprenta) no es fácil encontrar libros, por lo que se ha recurrido a un libro de historia de la matemática (Smith, 1958). En la segunda parte, de finales del siglo XV se han seleccionado tres aritméticas prácticas: Sanct Climent (1482), Andrés de Zaragoza (1515) y Pérez de Moya (1562).

La *Aritmética Práctica* de Sanct Climent (1482) es la primera aritmética conocida en catalán. La *Aritmética Práctica* de Andrés de Zaragoza (1515) es la primera aritmética impresa en Valencia y la *Aritmética Práctica y Especulativa*, de Pérez de Moya (1562) es tal vez la aritmética más importante de las publicadas en España en el siglo XVI por su influencia durante casi 200 años.

Período	**Libros**
Época anterior al nacimiento de la imprenta	Smith (1958)
Finales del siglo XV	Sanct Climent (1482) Andrés de Zaragoza (1515) Pérez de Moya (1562)

TABLA 3.1. Textos del período 1

3.1.2 Textos del período 2

La *Arithmètica Demonstrada* de Corachán (1699) se considera como uno de los primeros libros del movimiento ilustrado (Maz, 2006). De la misma forma, la aritmética de Condorcet (1799) se ha elegido por ser el primer libro de texto sometido a control estatal y aprobado por una comisión nacional tras un concurso. Los libros de Bails (1818) y de Vallejo (1813) son representativos del momento histórico de la ilustración (Maz, 2006). Tanto el *Tratado completo de Matemáticas* (Bourdon, 1848), como los *Elementos de* Matemáticas (Fernández y Cardín, 1863) son textos representativos del denominado "período romántico" (Maz, 2006).

Período	**Libros**
Período de influencia jesuita (1700-1767) ([1])	Corachán (1699) Condorcet (1799)
Período de la Ilustración (1768-1814)	Bails (1818) Vallejo (1813)
Período romántico (1815-1874)	Bourdon (1848) Fernández y Cardín (1863)

TABLA 3.2. Textos del período 2

3.1.3 Textos del período 3

De la primera época de este período se han revisado los libros de Dalmau Carles (1988), Rey Pastor y Puig Adam (1932), Edelvives (1934) y Bruño (1940 y 1958), por ser representativos de la primera mitad del siglo XX.

También se han consultado las obras de García Roca (1965), García Roca, Zaragoza Masip, y Colomer de Luca, (1966), Valdivia Ureña y García Roca (1969), por tratarse de libros representativos de la segunda mitad del siglo XX, y casi contemporáneos a la época estructuralista de los años 70. Así mismo, se ha tenido en cuenta, como referencia para la componente formal, la obra *Análisis Matemático* (Rey Pastor, Pi Calleja y A. Trejo, 1957).

De la época estructuralista (1970 -1990), que se caracteriza por la influencia del movimiento de la reforma de las matemáticas modernas, se han utilizado los libros de Valdés y Santos (1975), Marcos de Lanuza (1975), Segura, Ramírez y Segura (1986) y Casals, Goma y Tuduri (1988), por ser representativos del estilo estructuralista; el libro del Grupo Cero (1982), por ser rupturista con el estilo de los libros de su época y anticipo del

[1] Los textos citados corresponden a este período pero no son de influencia jesuita

estilo posterior a la LOGSE (MEC, 1990) y los libros de Roanes (1970) y Aurrecoechea (1976) por ser ejemplos de textos de enseñanza para la formación del profesorado de la época.

De los libros actuales, editados con posterioridad a la Ley de Ordenación General del Sistema Educativo, LOGSE (MEC, 1990), se han consultado las obras que se indican en la Tabla 3.3, por ser ejemplos del estilo de los textos que se editan bajo la influencia de las últimas reformas del sistema educativo.

Período	**Libros**
Siglo XX, hasta 1970	Dalmau Carles (1988) Rey Pastor y Puig Adam (1932) Edelvives (1934) Bruño (1940) Bruño (1958) García Roca (1965) García Roca, Zaragoza Masip y Colomer de Luca (1966) Valdivia Ureña y García Roca (1969) Rey Pastor, Pi Calleja y A. Trejo (1957)
Época estructuralista	Valdés y Santos (1975) Marcos de Lanuza (1975) Grupo Cero (1982) Segura, Ramírez y Segura (1986) Casals, Gomá y Tuduri (1988) Roanes (1970) Aurrecoechea (1976)
Época actual	Botella, Millán y Pérez (2002) González, Martínez y Ocaña (2003) Vizmanos et al. (2002) Pérez et al. (1998) Grupo Cero (1995) García et al. (1996) Sánchez y Vera (2003) Bujanda y Mansilla (2000) Bujanda y Mansilla (2002) Anzola y Vizmanos (1997) Colera et al. (1997) Colera et al. (2000) Gairin y Sancho (2002) Nieto et al. (1994) Esteve et al. (2002) Arias y Maza (1997)

TABLA 3.3. Textos del período 3

3.2 LAS VARIABLES QUE DETERMINAN MODELOS DE ENSEÑANZA

Los textos revisados se han analizado con la finalidad de identificar: i) los algoritmos que se exponen y aplican en ejemplos y problemas, y la forma de explicarlos, ii) las expresiones lingüísticas que aparecen en las definiciones y explicaciones y que permiten identificar los sentidos con los que se están usando las fracciones y los modelos semánticos de la división de fracciones en el texto, iii) las representaciones, diagramas, esquemas, dibujos o ilustraciones que acompañan a las explicaciones del texto y iv) los problemas propuestos y resueltos que usan los autores para explicar la división de fracciones y sus aplicaciones.

Como resultado del análisis de textos se caracterizaron las cuatro variables mencionadas: algoritmos, sentidos de uso, representaciones y problemas. Se localizaron seis algoritmos generales y algunos particulares (ver sección 3.2.1). Los sentidos de uso se han agrupado en dos bloques, uno referido a las fracciones y otro referido a la división de enteros y de fracciones. Se localizaron cinco sentidos de uso de fracción y seis sentidos de uso de la división de fracciones. Las representaciones se han agrupado en dos apartados, parte todo y recta numérica. Finalmente, de todos los problemas localizados, se ha seleccionado una colección de 52 problemas preliminares con características diferentes, los cuales se han organizado atendiendo a tres variables: estructura, contextos y tipología de los datos (ver capítulo 4).

3.2.1 La variable algoritmos

Los algoritmos identificados en los libros revisados se han agrupado en dos clases: 1. algoritmos particulares enunciados como reglas y 2. algoritmos generales; éstos últimos son los que interesan a los efectos de la investigación que conforma la tesis.

3.2.1.1 Reglas particulares

Las reglas particulares son aquéllas reglas que permiten resolver algunos casos particulares de división de fracciones, pero que no son de aplicación universal.

Un procedimiento con el que se obtienen un buen número de expresiones del papiro de Ahmes es el siguiente: Si b+c=ka, entonces: $\frac{a}{bc}=\frac{1}{b\cdot\frac{b+c}{a}}+\frac{1}{c\cdot\frac{b+c}{a}}$, lo que hace pensar que, si no de forma explícita, los egipcios intuían en cierta forma la operación de división de fracciones (Smith, 1958, Vol. 2, p. 211).

El Chóu-pëi incluye también divisiones, como 119000 entre $182\frac{5}{8}$, que resolvían multiplicando por 8 antes de dividir. Esto parece indicar que los chinos ya conocían de alguna forma la división de enteros entre fracciones (Smith, 1958, Vol. 2, p. 215).

Smith (1958) afirma que la división de fracciones es una operación a veces no reconocida explícitamente y que estas reglas particulares actúan, en ocasiones, como intermediarias para dar solución a problemas de multiplicación.

Las reglas de cálculo para efectuar la división de fracciones probablemente aparecen cuando se introduce la notación actual; Smith atribuye su aparición a la aritmética hindú y árabe y señala que en Al–Karkhi, (1020, citado por Smith, 1958) ya se encuentran algunas reglas de cálculo para la división de fracciones:

Una regla especial de cálculo que utilizaban los árabes para efectuar productos de fracciones es la siguiente: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{\frac{ac}{b}}{d}=\frac{\frac{ac}{d}}{b}$. Esta técnica de cálculo es interesante, porque relaciona el producto con la división de una fracción por un número entero, lo que permitiría efectuar el producto de fracciones a través de una división de fracciones, siempre que los resultados parciales fueran números enteros. Leída a la inversa, esta regla permitiría transformar divisiones de fracciones en productos.

Otra regla de cálculo es la llamada “Regla de Frisius”, que consiste en hacer uso de la fórmula $\frac{a}{b}\div\frac{ka}{c}=\frac{c}{kb}$, que solamente es válida en algunos casos particulares. Así: $\frac{3}{5}\div\frac{12}{13}=\frac{3}{5}\div\frac{4\times 3}{13}=\frac{13}{4\times 5}=\frac{13}{20}$ (Smith, 1958, Vol. 2, pp. 225 y 228)

3.2.1.2 Algoritmos generales

Como ya se mencionó anteriormente, en el análisis de los libros y los textos de enseñanza se identificaron seis algoritmos generales, los cuales se describen a continuación, por ser los más relevantes para la investigación que comprende esta tesis.

3.2.1.2.1 Reducción de las fracciones a común denominador y división de los numeradores (adf1) ([2])

En este algoritmo se distinguen dos casos:

- Caso reglado

Este caso consiste en transformar las fracciones en otras equivalentes con el mismo denominador para reducir la división de fracciones a la división de enteros (la de los numeradores).

Por ejemplo, $\frac{2}{3} \div \frac{3}{4} = \frac{8}{12} \div \frac{9}{12} = \frac{8}{9}$ (Chuquet, 1484, citado por Smith, 1958, Vol. 2, p. 226).

- Caso razonado

Este caso consiste en combinar la reducción a común denominador con un cambio a una nueva unidad fraccionaria.

(División de dos cantidades homogéneas). Si cada torta pesa $3/7$ de kilo, ¿qué porción de torta tendré con $2/9$ de kilo?

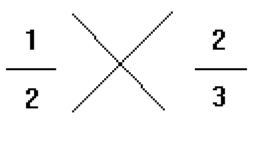
Indicaremos la operación así: $\frac{2}{9} : \frac{3}{7}$ (dividendo y divisor homogéneos). Reduciendo los pesos a la misma parte alícuota de kg. Plantearemos la pregunta de este otro modo: Si cada torta pesa $\frac{3 \cdot 9}{7 \cdot 9}$ kilogramos, ¿cuánto tendré por $\frac{2 \cdot 7}{9 \cdot 7}$? De modo que, tomando por nueva unidad $\frac{1}{7 \cdot 9}$ kg., la torta pesa $3 \cdot 9$ unidades, luego con $2 \cdot 7$ unidades tendré una porción de torta igual a $\frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 9}$. (Rey Pastor y Puig Adam, 1932, pp. 211 y 212).

3.2.1.2.2 Productos cruzados (adf2)

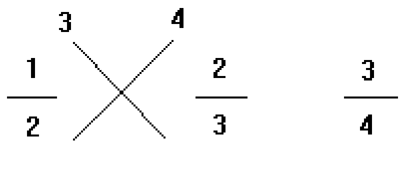
Este algoritmo consiste en multiplicar en cruz, siguiendo el esquema siguiente:

$$\frac{a}{b} \quad \times \quad \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

Por exemplo:



Practica de la figura



La qual se façe poniendo siempre la suma partidera haçia la mano sinistra y el partidor haçia la mano derecha y multiplicando asi como la precediere fallarás 4 encima del braço drecho por partidor y fallaras sobre el

[2] El código adf1 significa algoritmo de división de fracciones 1 y se usará, al igual que los del resto de valores de las variables para codificar las respuestas de los estudiantes en el análisis de tareas.

braço sinistro 3 por suma partidera ques menor que el partidor, y por ello has de poner el partidor ques quatro debaxo de una raya y pondrás la suma partidera ques 3 encima de la raya y nombraras la suma partidera por el nombre del partidor diciendo tres quartos y falta que tenemos la particio entegral y nominal declaradas. (Andrés de Zaragoza, 1515, Cap. 1º, b. Cap. 2º, b 4 – i 2).

3.2.1.2.3 Inversión de la multiplicación (adf3)

Este algoritmo consiste en multiplicar el dividendo por el inverso del divisor. Así, para efectuar la división $(a/b) \div (c/d)$, se procede de la siguiente manera: $(a/b) \div (c/d) = (a/b) \times (d/c) = (ad / bc)$. Se consideran dos casos:

- Caso reglado: invertir y multiplicar

REGLA.– Para dividir dos fracciones se multiplica la primera por la segunda invertida.(...) EJEMPLO: $\frac{5}{3} \div \frac{4}{7} = \frac{5}{3} \times \frac{7}{4} = \frac{35}{12}$ (Valdivia Ureña y García Roca, 1969, p. 38)[3].

- Caso razonado: multiplicación por el inverso del divisor

Sea a/m el dividendo y sea b/n el divisor; **si en éste es b≠0, podemos formar el inverso y multiplicar el dividendo por este inverso**. Resulta así un número que cumple la condición impuesta al cociente. En efecto: $\left(\frac{a}{m} \cdot \frac{n}{b}\right) \cdot \frac{b}{n} = \frac{a}{m} \cdot \frac{n}{b} \cdot \frac{b}{n}$ y asociando los dos últimos factores, en virtud de la propiedad asociativa de la multiplicación, como su producto parcial es 1, resulta como producto total a/m. (Rey Pastor y Puig Adam, 1936, p.37) [4].

3.2.1.2.4 Uso de la unidad fraccionaria (adf4)

Este algoritmo consiste en buscar la fracción unitaria cuando se conoce la fracción correspondiente a una fracción no unitaria. Al igual que el “método de reducción a la unidad”, este algoritmo consiste en reducir a un caso más sencillo que ya se sabe resolver, basado en el análisis aritmético. Consta de dos pasos: el primero consiste en averiguar la fracción correspondiente a la fracción unitaria y el segundo consiste en, conocido el valor correspondiente a la fracción unitaria, resolver el problema original. Como por ejemplo se ve en Dalmau Carles (1898, p. 152):

3 En otros textos de enseñanza se hace referencia a la fracción “recíproca” del divisor: Para dividir dos fracciones se multiplica la fracción dividendo por la recíproca de la fracción divisor. Así: $\frac{3}{5} \div \frac{4}{7} = \frac{3}{5} \times \frac{7}{4} = \frac{21}{20}$. En efecto: $\frac{21}{20}$ es el cociente, porque si lo multiplicamos por el divisor da el dividendo: $\frac{21}{20} \times \frac{4}{7} = \frac{84}{140} = \frac{42}{70} = \frac{21}{35} = \frac{3}{5}$ (García Roca, 1965, p. 131).

4 Smith (1958, Vol. 2, p. 228) señala que este algoritmo ya aparece en la *Aritmética Íntegra* de Stifel publicada en 1544 y que, en realidad, ya era conocido por los matemáticos árabes.

Se han comprado 3/8 de Hg de azafrán por 7/9 de peseta. ¿A cuánto resulta el Hg?

Sol: Si 3/8 valen 7/9 de pta, 1/8 vale $\frac{7}{9\times3}$ y 8/8 valen $\frac{7\times8}{9\times3}=\frac{56}{27}$, o bien $\frac{7}{9}:\frac{3}{8}=\frac{56}{27}=2\frac{2}{27}=2{,}074$ ptas.

3.2.1.2.5 Conversión de las fracciones en decimales (adf5)

Este algoritmo consiste en transformar las fracciones en decimales y operar con ellos, expresando después el resultado en forma de fracción.

1/2÷3/4=0,5÷0,75=50/75=2/3 (Hernán y Carrillo, 1988, p. 164)

Aunque el nacimiento de los números decimales (Stevin, 1585) se remonta al siglo XVI, no tendrá repercusiones en los algoritmos tradicionales de división de fracciones hasta el siglo XX. Tal vez son varios los motivos:

i) tardía generalización del uso de los decimales,
ii) conversión del resultado a fracción, y
iii) aparición de las calculadoras electrónicas.

3.2.1.2.6 Uso del protocolo de la calculadora científica (adf6)

Este algoritmo consiste en utilizar las funciones $a^{b/c}$ y c/d de la calculadora científica, que permiten introducir la notación de fracciones y efectuar cálculos con fracciones. Algunos manuales actuales recurren al uso de la calculadora científica con modo de fracción para el cálculo de divisiones de fracciones.

Para dividir una fracción entre otra, multiplicamos la primera por la inversa de la segunda. Divide las fracciones: $\frac{3}{7}:\frac{4}{5}$

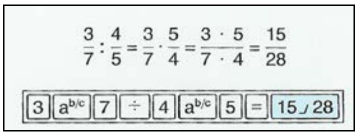


Figura 3.1. Tomado de Arias y Maza, 1997, p. 14

En los libros que se han revisado para el estudio, el algoritmo de productos cruzados descrito en este capítulo se usa en las aritméticas españolas anteriores al siglo XVIII (ver tabla 3.1) y en libros de siglos posteriores (ver tabla 3.2, por ejemplo, Vallejo, 1813 y tabla 3.3). En los libros del siglo XIX revisados (ver tabla 3.2) se usa el algoritmo invertir y multiplicar. En los libros de la primera mitad del siglo XX revisados (Dalmau Carles, 1898; Rey Pastor y Puig Adam, 1932; Edelvives, 1934 y Bruño, 1940 y 1958) se utiliza el método analítico razonado, junto con el algoritmo de invertir y multiplicar. En los libros de la época estructuralista (1970–1990) se usa el algoritmo de invertir y multiplicar y el de multiplicar por la fracción inversa de la fracción divisor. En los libros actuales consultados se utilizan el algoritmo de productos cruzados y el de invertir y multiplicar. En algunos manuales actuales se recurre a la conversión de las fracciones en decimales y también al uso del protocolo de la calculadora. En la tabla 3.4 se resumen los algoritmos de mayor influencia en cada período histórico:

Período	**Subperíodo**	**Algoritmos**
Hasta el siglo XVI		Productos cruzados
Los siglos XVII, XVIII y XIX	Siglos XVII y XVIII	Productos cruzados
	Siglo XIX	Invertir y multiplicar
Siglo XX	Siglo XX hasta 1970	Invertir y multiplicar Reducción a común denominador Método analítico razonado
	1970 – 1990	Invertir y multiplicar Multiplicar por la inversa de la fracción divisor
	Época actual	Productos cruzados Invertir y multiplicar Conversión de fracciones en decimales Uso del protocolo de la calculadora

TABLA 3.4 Algoritmos en períodos históricos

3.2.2 Las variables sentidos de uso de fracción y modelos semánticos de división y división de fracciones

En este apartado se describen los resultados del análisis de los diversos sentidos de uso de fracción, así como de los modelos semánticos de división y su extensión al caso de la división de fracciones. Se ha considerado adecuado agrupar en la misma variable todos aquellos aspectos relacionados con el significado, con objeto de estudiar las interrelaciones entre ellos. Primero se describe cómo se caracterizan en la investigación precedente; después, se muestra cómo aparecen estos sentidos de uso y modelos semánticos en los libros de texto y, finalmente, se incluye una tabla en la cual se resumen las formas textuales asociadas a los sentidos de uso y a los modelos semánticos. Con ello se pretende disponer de plantillas de análisis a los efectos de la investigación que conforma esta tesis.

Aunque existe cierto consenso en la terminología para referirse a las diferentes maneras de ver, usar e interpretar las fracciones (Kieren, 1976, y Behr et al., 1983, les denominan subconstructos de número racional, mientras que Filloy et al., 1999, Puig, 1997, y Rubio y otros, 2007, les llaman “sentidos de uso”), hay discrepancias en el caso de la división de números enteros, ya que los autores utilizan distintas nomenclaturas para referirse a las situaciones o problemas tipo de división de enteros. Por ejemplo, Fishbein et al. (1985) hablan de “modelos primitivos implícitos”, Sinicrope, Mick y Kolb (2002) denominan “interpretaciones de la división” a las distintas categorías de situaciones de división y Greer (1987 y 1992) se refiere a ellas como “modelos de situación”.

SENTIDOS DE USO

Siguiendo a Filloy et al. (1999), Puig (1997) y Rubio y otros (2007), se usará de aquí en adelante el término “sentidos de uso” para referirse a las evidencias y formas textuales que utilizan los autores de libros de texto en las definiciones y en el planteamiento de los problemas y que indican la manera en que se conciben y se usan: a) las fracciones y b) la división de fracciones, en la situación dada por el enunciado del problema. Los sentidos de uso de fracción están ligados a los constructos (o subconstructos de número racional), de manera que, para reconocerlos en los textos, en la investigación descrita en esta tesis se tomaron como referencia constructos identificados por Kieren y por Behr y colaboradores. Los sentidos de uso de la división de fracciones están ligados a los “modelos semánticos”, los cuales hacen referencia a las expresiones lingüísticas que se usan en los libros y textos de enseñanza y que inducen una manera de interpretar la división en un contexto de resolución de problemas.

FORMAS TEXTUALES

Con este marco de referencia, las formas textuales son expresiones lingüísticas asociadas a un sentido de uso de fracción o a un modelo semántico de división (bien de enteros o de fracciones), que actúan como indicadores o referencias de las acciones que se deben realizar para resolver un problema y que inducen una decisión del resolutor sobre la elección de la operación adecuada para resolver el problema.

Un aspecto esencial de la investigación que comprende esta tesis es la localización, en los libros y textos de enseñanza, de las formas textuales que permiten identificar los sentidos de uso de fracción y los modelos semánticos de división de fracciones.

3.2.2.1 Sentidos de uso de fracción

En la revisión de la literatura se observa que el uso de las fracciones presenta sentidos de tipo epistemológico y de tipo escolar; a continuación se describe lo que se ha encontrado en el escrutinio de los informes de los investigadores interesados en el tema.

3.2.2.1.1 Sentidos de tipo epistemológico

Por sentidos de uso de tipo epistemológico se entienden aquellos que se derivan de las concepciones e ideas de los autores en el transcurso de las diversas épocas históricas y que han quedado plasmadas en los textos.

Según Freudenthal (1983, p. 10) el origen de las fracciones hay que buscarlo en la idea de razón. De hecho, Freudenthal considera que genéticamente el concepto de razón es anterior al de fracción, aunque se invierte este orden en la enseñanza.

La comparación multiplicativa que está implícita en la idea de razón está vinculada con la cuantificación de la medida. En el caso de que las cantidades a medir no sean conmensurables, no es posible cuantificar la razón entre ellas. Si las cantidades son conmensurables, se pueden seguir dos procedimientos diferentes para cuantificar la medida (Gómez, 2005), que llevan a dos ideas distintas las cuales se explican en los siguientes párrafos.

- **Fraccionamiento o subdivisión de la unidad**

Para comparar la cantidad B con otra cantidad A que es parte de B, se puede dividir la cantidad B (considerada como un todo –o unidad–) en partes iguales para ver si a A le corresponde un número determinado de esas partes. Si dividimos B en p (entero natural, $\in$N) partes iguales y resulta que A es n (entero natural, $\in$N) de estas partes, entonces **A es n veces 1/p de B**, y por tanto, **A es n(p–avos) de B**. Los *n(p–avos)* indican la medida de una cantidad de magnitud en la que cada p–avo actúa como unidad fraccionaria y *cuantifican la razón A/B, que es **n veces 1/p**.*

- **Conmensuración de la unidad**

Para comparar una cantidad A con otra B que no la contiene un número entero de veces, se puede hacer por conmensuración si existe una unidad **u** que permite medir simultáneamente A y B, es decir, si hay una relación de conmensurabilidad entre las cantidades A y B. Esto implica que existen números naturales, n y p, tales que A mide n**u** y B p**u**, de forma que A=n**u**, B=p**u**, pA=pn**u**=np**u**=nB. Es decir, adjuntado p veces A se puede obtener una medida equivalente a adjuntar n veces B; o lo que es lo mismo: que hay p veces A por cada n veces B, escrito: $\mathbf{A=\frac{1}{p}\times nB}$ y, por tanto, $\mathbf{\frac{1}{p}\times n}$ *cuantifica la razón A/B*

En el primer caso (*subdivisión*), n veces 1/p lleva a definir la fracción como una o varias partes de la unidad. En este caso, la división es en partes de tamaño p y la fracción expresaría el número de partes de tamaño p que se pueden hacer con n; es decir, indicaría que hay *n veces 1/p*. (Nota: La idea es la misma que considerar la fracción n/p como una división cuotición, pero tomando como unidad de medida 1/p, en vez de p. Por ejemplo, la fracción 3/4 se puede ver como 3 veces 1/4, es decir, en 3/4 cabe 1/4 exactamente 3 veces; pero también se puede ver 3/4 como la división de 3 entre 4, es decir, ver cuántas veces cabe 4 en 3).

En el segundo caso (*conmensuración*), $\frac{1}{p} \times n$ lleva a definir la fracción como una o varias partes de un entero. En este caso, la división es en p partes iguales (división partición) y la fracción n/p expresaría el tamaño de cada una de las p partes que se hacen con n; es decir, indicaría que el tamaño de cada parte es 1/p de n.

La Figura 3.2 muestra un resumen:

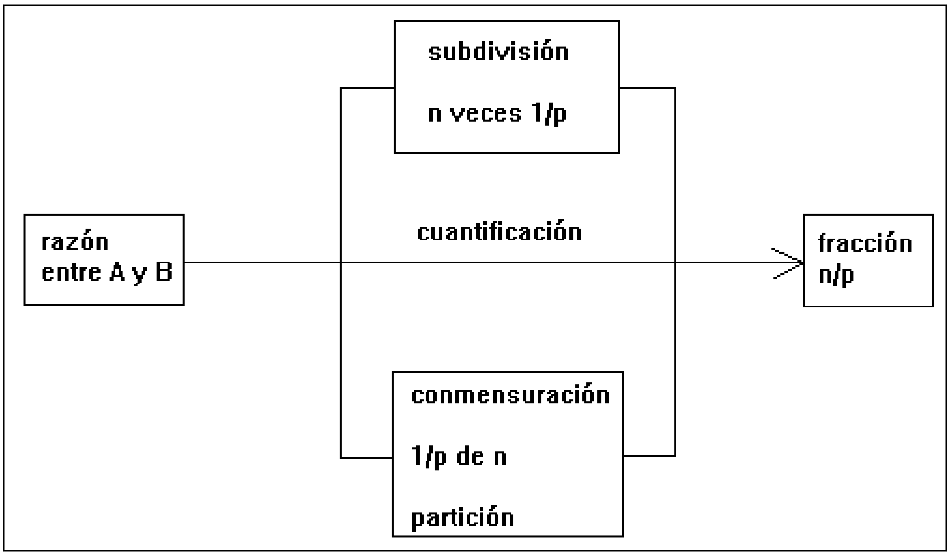


Figura 3.2. Cuantificación de la razón por subdivisión y conmensuración

Por lo tanto, cualquier fracción n/p puede verse de dos formas:

a) Como n × 1/p, es decir como n veces 1/p, que corresponde a un proceso de cuantificación (medida) de la razón mediante subdivisión. Por ejemplo, para Fibonacci n es el número que numera y 1/p es el adjetivo que lo denomina:

> Si un número puede escribirse en forma de fracción, utilizando dos números separados por una raya de fracción, el número superior indica el número de partes determinado por el número inferior, el inferior se llama denominador y el superior se llama numerador" (Sigler, 2002, p. 49).

b) Como $\frac{1}{p} \times n$, es decir como 1/p de n, que corresponde a un proceso de cuantificación (medida) de la razón mediante conmensuración y enlaza con la noción de división partición.

> Quebrado es una cosa que tiene una parte, o dos, o tres, o muchas de algún entero, y no todas; porque si todas las tuviese no sería quebrado, antes sería entero (Pérez de Moya, 1562, p 150).

3.2.2.1.2 Sentidos de tipo escolar

Por sentidos de uso de tipo escolar se entienden, aquéllos que se identifican en los libros de texto destinados directamente a la enseñanza, o bien en aquellos textos en los que los autores tienen en perspectiva un uso didáctico de las ideas expuestas. En la investigación precedente hay consenso en denominar constructos a estos sentidos de uso. A continuación se describen aquéllos que se han considerado en la investigación sobre la que versa este documento.

a.1) Razón (suf1)

La fracción cuantifica una relación entre dos cantidades, que puede representar una tercera cantidad o que se puede considerar como un índice de comparación.

> El número racional como razón expresa una relación entre dos cantidades, por ejemplo, una relación entre el número de chicos y chicas de una clase.
> El número racional como proporción define una nueva cantidad como una relación entre otras dos cantidades. Por ejemplo, la velocidad se define como una relación entre distancia y tiempo (Behr, M.J, Lesh, R., Post, T. y Silver, A, 1983, p 99).
> Razón es una relación que expresa la noción de magnitud relativa; por lo tanto, es más correcto considerar el número racional como un índice de comparación que como un número. (Ibídem, p.95).

Como razón las fracciones surgen en contextos de comparación de tres maneras:

a.1.1) Comparación parte–parte. La fracción cuantifica una relación escalar entre dos cantidades de la misma naturaleza pero separadas; es decir, una no contenida en la otra. Por ejemplo: "*En esta clase hay la mitad de chicos que de chicas*" o "*El número de chicos de esta clase es n veces el de chicas*". La comparación es interna, parte-parte: compara la población de chicos y chicas al considerar que los chicos y las chicas son personas de la clase.

a.1.2) Comparación parte-todo. Se comparan dos cantidades de la misma naturaleza, una contenida en otra que se considera como el todo. Por ejemplo, *dos de cada cuatro personas es chico.*

En la interpretación parte–todo, algún todo es roto en partes iguales y las ideas de fracción son usadas para cuantificar la relación entre el todo y un determinado número de partes. (...) Las relaciones parte–todo y conjunto–subconjunto se generalizan dando lugar a la noción de equivalencia. Algunos de los modelos curriculares actuales son conjunto–subconjunto, regiones sombreadas y relaciones en la recta numérica (Kieren,1976, pp. 136-138).

a.1.3) Comparación entre dos cantidades de distinta naturaleza. La fracción cuantifica una relación de tipo funcional y se asocia a la medida de una tasa o magnitud derivada, que surge de la interrelación entre las dos magnitudes que se comparan. Por ejemplo, "*La velocidad de un móvil es 1/2 m/s.*"

En los tres casos anteriores (a.1.1, a.1.2 y a.1.3), la fracción 1/2 simboliza el conjunto de pares (1, 2), (2, 4), (3, 6) , …, que expresan la razón chicos / chicas, espacio / tiempo. Es decir, la fracción es una representación de una relación de razón entre dos cantidades.

a.2) Parte-todo (suf2)

La fracción cuantifica la relación entre una o varias partes de un todo que ha sido dividido en partes iguales.

(...) Algún todo es roto en partes iguales. La idea de fracción se usa para cuantificar la relación entre el todo y un número determinado de partes. (...) Algunos de los modelos curriculares de este fenómeno han sido conjunto–subconjunto y regiones sombreadas (Kieren, 1976, p. 134).

(...) La relación parte–todo es un caso especial de relación de razón (Ibídem, p. 136-138).

En la interpretación parte–todo (…) las regiones geométricas, los conjuntos discretos de objetos, y la recta numérica son los modelos más comúnmente usados para representar fracciones (Behr, M.J, Lesh, R., Post, T. y Silver, A, 1983, p 93-95).

a.3) Medida (suf3)

Tal como se ha indicado más arriba, las fracciones surgen de la medida, bien mediante subdivisión o bien mediante conmensuración de la unidad, lo que da origen a dos sentidos de uso diferentes de la fracción n/p:

a) como n veces 1/p

b) como 1/p de n

El subconstructo “número racional como medida” está también relacionado con la relación parte–todo. De hecho, las tareas de medida significan la asignación de un número a una región (...) Esto se hace usualmente a través de una iteración de un proceso de conteo del número de partes de la unidad usadas para cubrir la región cuando se divide la unidad en partes iguales para un ajuste apropiado (Kieren, 1976, p.139).

Este subconstructo representa una reconceptualización de la noción de fracción como parte–todo. Responde a la pregunta de cuánto hay de una cantidad relativo a una unidad específica de dicha cantidad. […]. Con el subconstructo se enfatizan propiedades asociadas con la topología métrica de la recta de los números racionales (Behr, M.J, Lesh, R., Post, T. y Silver, A, 1983, pp. 99-100).

a.4) Cociente (suf4)

Las fracciones surgen como respuesta a situaciones en las que hay que dividir una cantidad dada de medida **n** por otra de medida **p**, cuando **n** no es múltiplo de **p**.

Aquí las fracciones desempeñan el papel de cociente exacto, esto es, cumplen el principio fundamental de la división exacta, de que el cociente multiplicado por el divisor-denominador debe dar el dividendo-numerador.

Con este sentido de uso de las fracciones como cociente, la división siempre es posible para todo par de números naturales (n, p) con $p \neq 0$, y por tanto, la ecuación **px=n** siempre tiene solución en el conjunto de las fracciones.

Las fracciones, consideradas como solución de la ecuación **px=n**, se constituyen en elementos de un nueva estructura algebraica, que adquiere estatus de un nuevo campo numérico, en el que se amplían las operaciones y las propiedades de N.

Este sentido unifica las nociones de fracción y división, y ha sido el modelo en vigor en las aritméticas durante siglos. Se ve favorecido por el hecho de que para transformar una fracción en decimal o porcentaje es necesario dividir.

El subconstructo “número racional como cociente” es próximo a la relación parte–todo. Pero para el aprendiz se presenta y se aplica en un contexto diferente. Permite cuantificar el resultado de dividir una cantidad en un número dado de partes y está relacionado con el álgebra de las ecuaciones lineales. Aunque dividir una unidad en cuartos y elegir tres (3/4) parece lo mismo que dividir 3 unidades en 4 partes (3/4), es claro que estos son problemas diferentes para el aprendiz (Kieren, 1976, p,138).

Interpreta un número racional como un cociente indicado. Es decir, a/b se interpreta como a dividido entre b. En un contexto curricular, este subconstructo se ejemplifica por el siguiente problema:
Tenemos 4 galletas y 3 niños. Si las galletas se reparten por igual entre los tres niños, ¿cuántas galletas se dan a cada niño? (Behr, M.J, Lesh, R., Post, T. y Silver, A, 1983, p. 99–100).

De acuerdo con la interpretación parte–todo de los números racionales, el símbolo a/b usualmente se refiere a una parte fraccionaria de una cantidad simple. Pero también puede interpretarse como una operación. Es decir, a/b se usa algunas veces como una forma de escribir a÷b. Es la interpretación de los números racionales como división indicada (o cociente indicado). La consideración de los números racionales como cocientes tiene al menos dos niveles de sofisticación: por una parte, 8/4 o 2/3 se interpretan como resultados de divisiones indicadas, de manera que se puede establecer la equivalencia 8/4=2 o 2/3=0,666. Pero los números racionales se pueden considerar como elementos de un conjunto cociente, y, como tales, pueden ser usados para definir equivalencia, suma, multiplicación y otras propiedades desde una perspectiva puramente deductiva; todos los algoritmos se derivan de ecuaciones a través de las propiedades del conjunto cociente (Idem).

a.5) Operador (suf5)

El sentido de uso de fracción como operador admite dos visiones distintas:

a.5.1) Caso de cantidades de magnitudes discretas. Las fracciones actúan como un mecanismo compuesto de multiplicación y división que opera sobre la medida de una cantidad de magnitud. En contraste con la visión estática de fracción como descripción de un estado de un sistema o de una relación, este sentido de uso es dinámico ya que sugiere la ejecución de una operación que transforma una entrada en una salida.

Esta manera de ver las fracciones equivale a una composición de funciones que se puede interpretar como el pase consecutivo de una cantidad a través de dos máquinas: multiplicar primero por n y dividir después por p una determinada cantidad o a la inversa.

a.5.2) Caso de cantidades de magnitudes continuas. En el caso de figuras geométricas, las fracciones transforman figuras en figuras semejantes (Ampliaciones y reducciones). En general, tiene sentido hablar de la fracción como operador para los fenómenos de reducir y ampliar si se trata de magnitudes no geométricas, tales como la masa, la capacidad, el tiempo, etc. La diferencia con el caso discreto a.5.1) es que “reducir un conjunto” o “ampliar un conjunto” no tiene un referente concreto apropiado; allí el operador fracción es un “artificio-máquina” que permite dar significado a expresiones simbólicas como $\frac{n}{p} \times A$.

El subconstructo operador representa los números racionales como mecanismos que transforman multiplicativamente un conjunto en otro conjunto. (...) Este subconstructo pone la atención en los racionales como elementos del álgebra de funciones (Kieren,1976, p.139).

El subconstructo de número racional como operador es una interpretación del número racional como un concepto de función; un número racional es una transformación (Behr, M.J, Lesh, R., Post, T. y Silver, A, 1983, p. 100).

El subconstructo de número racional como operador implica en un número racional p/q una interpretación algebraica; p/q es pensado como una función que transforma figuras geométricas en figuras geométricas semejantes p/q veces más grandes, o como una función que transforma un conjunto en otro conjunto con p/q veces más elementos. Cuando operamos sobre una cantidad continua, usamos p/q como una combinación ampliación–reducción. Un segmento de longitud L operado con p/q amplia p veces su longitud y después se reduce por un factor q. Una interpretación multiplicación–división es tomada para p/q cuando opera sobre un conjunto discreto. El número racional p/q transforma un conjunto con n elementos en un conjunto con np elementos y entonces este número es reducido a np/q. Este concepto de número racional puede personificarse en una caja negra: así, ¾ se puede considerar como una máquina que al entrar una longitud o un conjunto de cardinal 4, sale una longitud o un conjunto de cardinal 3. Esta interpretación de número racional se usa especialmente en el estudio de la equivalencia de fracciones y la operación de multiplicación. El problema de hallar fracciones equivalentes a una dada consiste en hallar una máquina que cumpla las mismas transformaciones input–output. La multiplicación de fracciones involucra la composición de funciones. (Ibídem, p. 96)

La Tabla 3.5 recoge en síntesis los sentidos de uso derivados de los constructos.

3.2.2.1.3 Los sentidos de uso de fracción en los libros de texto

Con objeto de mostrar cómo aparecen los sentidos de uso de fracción en los textos, a continuación se recoge una selección de fragmentos extraídos de los textos analizados.

- La fracción expresa el resultado de contar parte o partes de un todo considerado como unidad

Número quebrado, como queda advertido en los proemiales, es **parte o, partes de la unidad**, en cuanto supone, o representa **algún todo dividido en partes iguales**; como si un real está dividido en cuatro partes iguales, y de ellas se toman tres, será un quebrado (Corachán, 1699).

Si quisiera comparar tres árboles con cuatro, hallaría que no equivalían a ninguna vez cuatro árboles, sino que sólo eran tres cuartas partes de cuatro árboles. **A estos números, una cuarta parte o un cuarto, tres cuartas partes o tres cuartos, se les da el nombre de quebrados, porque no expresan unidades, sino partes de la unidad a que se refieren**. (...) quebrado el que expresa **partes de la unidad**, como tres cuartos, dos quintos, etc.; mixto es el que se compone de **entero y quebrado** como cuatro y medio; fraccionario es aquel en que contando por partes de la unidad se llega a tener **una unidad o más de una unidad**; como cuatro cuartos, siete cuartos; y por último, quebrado de quebrado es aquel que expresa **partes de partes de la unidad**, como los dos tercios de un medio, los tres cuartos de dos quintos, etc. A los números fraccionarios se les llama también quebrados impropios (Vallejo, 1813, pp. 11 y 12).

Número quebrado es el formado **por una parte de la unidad, o por la reunión de varias partes iguales de la unidad**, v. gr.: una mitad, seis novenos, veintiocho setenta y cinco–avos, etc (Dalmáu Carles, 1898).

a.1) Razón (suf1)	La fracción expresa una relación de razón que surge de la comparación de dos cantidades de la misma magnitud o de distinta magnitud: • Escalar: comparación parte–parte y parte–todo • Funcional: Tasa o magnitud derivada
a.2) Parte-todo (suf2)	La fracción cuantifica la relación entre el todo y un número determinado de partes, cuando el todo es dividido en partes iguales.
a.3) Medida (suf3)	La fracción cuantifica la relación entre una cantidad de magnitud y la unidad de medida • mediante subdivisión de la unidad: n/p se interpreta como n veces 1/p • mediante conmensuración de la unidad: n/p se interpreta como 1/p de n.
a.4) Cociente (suf4)	• La fracción es el cociente entre dos cantidades n y p, cuando n no es múltiplo de p. • La fracción representa una división indicada. • La fracción es la solución de la ecuación px=n, siendo p y n números naturales con p≠0.
a.5) Operador (suf5)	La fracción es la composición de una multiplicación y una división, no necesariamente en ese orden, actuando sobre la medida de una cantidad de magnitud.

TABLA 3.5. Los sentidos de uso de fracción derivados de los constructos

- La fracción expresa parte o partes de la unidad de medida

Los quebrados considerados arisméticamente son números con los quales expresamos las **cantidades menores que la unidad**. El que quiera formar cabal juicio de los quebrados debe figurarse la cantidad que hace oficios de unidad, como compuesta de **un número determinado de unidades menores,** al modo que nos figuramos el peso compuesto de 15 unidades menores, que llamamos reales. Una, o muchas de estas partes componen lo que llamamos quebrado o fracción de la unidad; v. g. un número de reales que no llegue a 15, es un quebrado de la unidad del peso, y el mismo nombre se da a los números que expresen dichas partes. (...) Señala, pues, el numerador quantas partes de la unidad caben en la cantidad que el quebrado expresa; y el denominador señala el valor de dichas partes, expresando quantas entran en la unidad. Se llama denominador, porque él es en realidad el que da nombre al quebrado, y es causa de que en estos dos quebrados v. g. 1/5 y 2/7 las partes del primero se llaman quintos o quintavos, y las partes del otro séptimos (Bails, 1818, pp. 47 y 48).

Siendo el número **lo que resulta de la comparación de una cantidad con su unidad**, podrá suceder: 1º que la unidad está contenida exactamente en la cantidad que se quiere medir, lo que nos da el número entero; 2º que no llegue a contener ni una vez a la unidad, en cuyo caso se apreciará esta cantidad dividiendo la unidad en un número tal de partes iguales, que una de ellas está contenida exactamente en la cantidad que se ha de medir; y la relación que hay entre el número de partes en que se ha dividido la unidad y el que expresa las que de éstas contiene la cantidad, forma lo que se llama el número quebrado o fracción; 3º que además de contener la cantidad un cierto número de veces a la unidad, quede una parte menor que ella, la que apreciada del modo que hemos dicho anteriormente, nos dará un número compuesto de un entero y quebrado, que se llama número mixto (...); 4º que ni la unidad ni ninguna de las partes en que se divida, está contenida exactamente en la cantidad que se ha de medir; en cuyo caso, dicha cantidad no se puede apreciar exactamente con aquella unidad, obteniendo lo que se llama número inconmensurable (Sánchez Vidal, 1866, p. 100).

En general: unidad fraccionaria es cada una de las partes iguales en que hemos dividido la unidad. Fracción es un conjunto de unidades fraccionarias de igual denominación (García Roca, 1965, pp 111–112).

- La fracción expresa el cociente de la división

Todo quebrado se puede considerar **como el cociente de una división del numerador por el denominado**r. (...) Por esta causa se escribe un quebrado del mismo modo que una división indicada, poniendo el numerador, debajo una raya, y luego el denominador; de manera que dos tercios de una unidad cualquiera se escribe 2/3; donde el numerador 2 hace oficios de dividendo, y el denominador 3 de divisor (Vallejo, 1813, p. 105).

- La fracción expresa una división indicada

(...) quando es mayor el partidor que la suma partidera, como si dixéssemos: parte tres panes a 4 personas, **porque los tres panes no pueden ser partidos a 4 de manera que quepa a pan enteros a cada uno**, por tanto pondrás los 4 debaxo de los 3, haziendo una raya por medio desta manera: 3/4, y quedarán partidos. La qual figura quiere dezir tres quartos de un pan. Y assí dirás que partiendo tres panes a quatro pastores cabe a cada uno tres quartos de un pan, como hemos dicho (Pérez de Moya, 1562, p 150).

- La fracción expresa el resto de la división

De este modo, que cuando en las particiones sobra algo, aquello que sobre por no poderse partir enteramente, es parte del partidor, y llámase quebrado, o roto (Pérez de Moya, 1562, p. 150).

Después de hacer una división, podéis indicar simplemente el resto, diciendo, por ejemplo: si divido 1634 por 8, tengo 204 y resto 2; si divido 164 por 9, tengo 18 y resto 2; pero no es lo mismo decir resto $\frac{2}{8}$ que $\frac{2}{9}$, porque, aunque quedan igualmente dos cosas en los dos casos, son, en un ejemplo, dos cosas a partir entre ocho; y en el otro, dos cosas a partir entre nueve: en el primero, la parte es dos octavos de otras partes; en el segundo, una parte es los dos novenos. Las expresiones $\frac{2}{8}, \frac{2}{9}$ se llaman fracciones (Condorcet, 1799, p 68).

- La fracción expresa la relación multiplicativa entre numerador y denominador

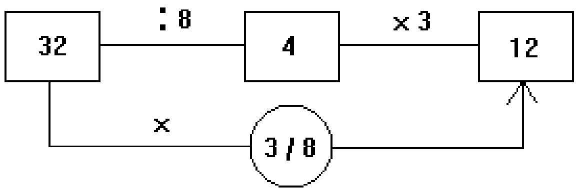
El valor de un quebrado no depende, como algunos creen, del numerador ni del denominador, sino de la relación que hay entre ellos. Así, un quebrado que tenga un denominador **doble** del numerador, siempre expresará la mitad de la unidad o sea 1/2, si fuese **tres veces mayor** expresará **la tercera parte** o 1/3, y así sucesivamente (Sánchez Vidal, 1866, p. 123).

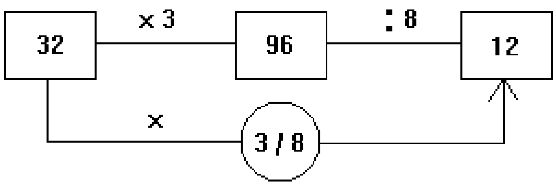
- La fracción expresa una comparación parte–parte

En esta clase hay **8 chicas por cada 10 chicos**. La relación entre chicas y chicos de esta clase es 8/10" (Bruño, 1940, p. 251).

- La fracción expresa un operador: multiplicar por el numerador y dividir por el denominador, o viceversa

También se pueden obtener los 3/8 de 32, multiplicando primero por 3 y dividiendo después por 8. Las dos posibilidades se expresan en los siguientes esquemas:





La fracción 3/8 actúa como un operador que multiplica por 3 y divide por 8 o que divide por 8 y multiplica por 3 (García, Vázquez, Gil y Nortes, 1996, p. 48).

Las distintas formas textuales identificadas en los libros de texto se pueden agrupar asociándolas a los cinco sentidos de uso caracterizados por los investigadores como constructos de número racional. En la tabla 3.6 se resumen las formas textuales identificadas en los libros de texto escolares o los documentos escritos con la intención de usarlos en la enseñanza.

Sentido de uso	Formas textuales de los textos escolares
a.1) Razón (suf1)	• Relación multiplicativa entre numerador y denominador: "…que tenga un denominador doble del numerador, (…) expresará la mitad de la unidad o sea 1/2" (Sánchez Vidal, 1866) • Comparación parte–parte "… La relación entre chicas y chicos de esta clase es 8/10" (Bruño, 1940)
a.2) Parte–todo (suf2)	• Una o varias partes de un todo "…parte o, partes de la unidad, (…) algún todo dividido en partes iguales" (Corachán, 1699) "…no expresan unidades, sino partes de la unidad" (Vallejo, 1813) "…formado por una parte de la unidad, o por la reunión de varias partes iguales de la unidad" (Dalmau Carles, 1898)
a.3) Medida (suf3)	• Una o varias partes de la unidad de medida "…unidad (…) compuesta de un número determinado de unidades menores (…) Una o muchas de estas partes componen (…) quebrado o fracción de la unidad" (Bails, 1818)
a.4) Cociente (suf4)	• Cociente de la división de un número menor por otro mayor "…cociente de una división del numerador por el denominador" (Vallejo, 1813) • Una división indicada "…los tres panes no pueden ser partidos a 4 de manera que quepa a panes enteros a cada uno (…) partiendo tres panes a quatro pastores cabe a cada uno tres quartos de un pan" (Pérez de Moya, 1562) • Resto de la división de un número menor por otro mayor "…aquello que sobre por no poderse partir enteramente, es parte del partidor, y llámase quebrado, o roto" (Pérez de Moya, 1562) "…si divido 1634 por 8, tengo 204 y resto 2; (…) la expresión 2/8 se llama fracción" (Condorcet, 1799)
a.5) Operador (suf5)	• Multiplicar por el numerador y dividir por el denominador, o viceversa. "La fracción 3/8 actúa como un operador que multiplica por 3 y divide por 8 o que divide por 8 y multiplica por 3" (García, Vázquez, Gil y Nortes, 1996)

TABLA 3.6. Los sentidos de uso de fracción y formas textuales asociadas

3.2.2.2 Los sentidos de uso de la división

Como ya se indicó anteriormente, los sentidos de uso de la división de fracciones están ligados a los modelos semánticos de división. Algunas investigaciones (Sinicrope, Mick y Kolb, 2002) afirman que los modelos de división de fracciones se obtienen por extensión de los modelos de división de números naturales. Por ello, en la investigación que comprende esta tesis se realiza un estudio previo de los modelos semánticos de división de naturales.

3.2.2.2.1 Los modelos semánticos de división de números naturales

Los modelos semánticos de la división de números naturales se caracterizan, como se hizo en el apartado anterior para las fracciones, usando la investigación precedente. A continuación se describe cada modelo usando la siguiente estructura: 1º) una definición del modelo, 2º) una descripción de las características del modelo, 3º) una descripción de las acciones evocadas por el modelo y 4º) las preguntas asociadas al modelo.

Los dos más usuales (partición y medida) han sido perfectamente descritos en los dos “modelos primitivos implícitos” por Fischbein, Deri, Nello y Marino (1985).

b.1) Partición (división partitiva) (msdn1)

Un objeto se divide en partes del mismo tamaño o una colección de objetos se divide en subconjuntos de la misma cardinalidad.

- Características:
    - El dividendo debe ser mayor o igual que el divisor.
    - El divisor debe ser un número natural.
    - El cociente debe ser menor o igual que el dividendo, pero puede ser mayor que el divisor.
    - El objeto u objetos deben ser susceptibles de ser partidos (por ejemplo, 1 pluma, 1 pájaro no lo son, pero 2 plumas, 2 pájaros si lo son; 1 tarta, 1 litro de aceite, 1 intervalo de tiempo si lo son).
- Ejemplos de acciones asociadas: partir o repartir, distribuir, dividir.
- Ejemplos de preguntas asociadas: ¿cuál es el tamaño de cada una de las partes iguales en que se ha dividido un objeto? ¿cuántos objetos hay en cada subconjunto o grupo?

b.2) Medida (cuotición o división cuotitiva) (msdn2)

Averiguar cuántas veces cabe una cantidad (el divisor) en otra (el dividendo) o cuántas veces contiene una cantidad (el dividendo) a otra (el divisor). Medir el dividendo usando como unidad de medida el divisor.

- Características:
  - El dividendo debe ser mayor o igual que el divisor
  - Si el cociente es un número natural, entonces se puede obtener mediante una sustracción repetida, restando iteradamente el divisor al dividendo o mediante una adición repetida, sumando iteradamente el divisor hasta obtener el dividendo.
  - Si el cociente no es un número natural, existe un residuo diferente de cero y la división no es exacta.
- Ejemplos de acciones asociadas: medir, iterar, sustraer iteradamente.
- Ejemplos de preguntas asociadas: ¿cuántas veces cabe el divisor en el dividendo? ¿cuántos subconjuntos o grupos de un tamaño dado se pueden formar con una colección dada de objetos?

b.3) Inversión del "producto de medidas" (msdn3)

Encontrar una de las medidas elementales (por ejemplo M1) cuando se conoce la otra (M2), y la medida producto M=M1xM2 (Vergnaud, 1991. p. 222, Sinicrope et al.,2002).

En el caso discreto se ejemplifica con problemas de combinatoria (conocidos como "producto cartesiano" en la investigación precedente), en los que se conoce el cardinal del producto cartesiano de dos conjuntos y el cardinal de uno de ellos y se pide el del otro.

Si hay 12 rutas diferentes de A hasta C, a través de B, y 3 rutas de A a B, ¿cuántas rutas hay de B a C? (adaptado De Greer, 1992).

En el caso continuo se ejemplifica con problemas de área rectangular, en los que, dada el área de un rectángulo y una de sus dimensiones, se pide calcular la otra.

Si el área de un rectángulo es 15 metros cuadrados y la altura es de 3 m, ¿cuál es su base? (Adaptado de Greer, 1992).

- Características:
  - Conmutatividad: se pregunta por la medida de uno de los espacios de medida, pero da igual que sea uno (M1) u otro espacio de medida (M2).

   - El dividendo es siempre mayor o igual que el divisor y que el cociente.
   - El cociente debe ser un número natural.
- Ejemplos de acciones asociadas: calcular un factor o una medida indirectamente.
- Ejemplos de preguntas asociadas: ¿cuál es la base (altura) del rectángulo si se sabe su área y su altura (base)? ¿cuántos objetos de un tipo hay que combinar con una cantidad dada de objetos de otro tipo para tener un número dado de combinaciones?

b.4) Inversión del factor multiplicativo (msdn4)

Consiste en hacer el dividendo tantas veces menor como indica el divisor. Es decir, el dividendo se reduce según un factor multiplicativo escalar dado por el divisor.

Una pieza elástica puede ser alargada hasta 3 veces su longitud original. Si se ha alargado hasta alcanzar una longitud de 15 metros, ¿cuál es su longitud original? (Adaptado de Greer, 1992).

El hierro es 2 veces tan pesado como la madera. Si una pieza de hierro pesa 4 kg, ¿cuánto pesa una pieza de madera del mismo tamaño? (Adaptado de Greer, 1992).

- Características:
   - El dividendo debe ser mayor que el divisor y mayor que el cociente.
   - El dividendo y el cociente han de ser de la misma especie (o pertenecer al mismo espacio de medida).
   - El divisor es un escalar o factor multiplicativo.
- Ejemplos de acciones asociadas: hacer tantas veces menor, reducir.
- Ejemplos de preguntas asociadas: ¿cuál es la medida resultante de aplicar el factor multiplicativo?

b.5) Proporción de valor unitario desconocido (msdn5)

Consiste en determinar el valor unitario (una cantidad de magnitud que corresponde a una unidad de otra magnitud), conociendo el vínculo de correspondencia entre dos cantidades no unitarias de ambas magnitudes (“a unidades de una por cada b unidades de la otra”). Corresponde a una proporción en la que el dividendo es al divisor como el cociente es a la unidad, $\frac{D}{d}=\frac{C}{1}$. Se refiere a la reinterpretación de la comparación multiplicativa de cantidades de magnitudes de naturaleza diferente en términos de la unidad de una de ellas. En español se trata de una “tasa” (“rate”, en inglés). Es esencial el hecho de que la comparación sea multiplicativa (“a es m veces mayor/menor que b”), porque también se puede hacer la comparación aditiva (“a tiene m unidades más/menos que b”).

Un barco recorre 14 metros en 2 segundos. ¿Cuál es su velocidad media en metros por segundo? (Adaptado de Greer, 1992).

- Características:
  - El dividendo es mayor que el divisor.
  - El cociente es menor que el divisor y, por tanto, menor que el dividendo.
  - El cociente debe ser un número natural, para que se mantenga la proporción $\frac{D}{d}=\frac{C}{1}$.
- Ejemplos de acciones asociadas: determinar una tasa a partir de la relación entre dos cantidades de los dos espacios de medida.

- Ejemplos de preguntas asociadas: ¿Qué cantidad de magnitud hay de un espacio de medida por cada unidad del otro espacio de medida? ¿Cuántos hay de una magnitud por cada uno de la otra? ¿Cuál es la velocidad (densidad, precio unitario, etc)?

b.6) Proporción de valor unitario conocido (msdn6)

Consiste en hallar un número que se encuentra con el dividendo en tal proporción como la unidad con el divisor. $\frac{D}{C}=\frac{d}{1}$. Se conoce el valor unitario, es decir, la cantidad de la segunda magnitud que corresponde a la unidad de la primera y se conoce también una cantidad de la segunda magnitud y se pregunta por el valor de la cantidad correspondiente de la primera magnitud.

¿Cuánto tiempo necesita un barco para recorrer 14 metros si su velocidad es de 2 metros por segundo? (Adaptado de Greer, 1992).

- Características:

- El dividendo es mayor que el divisor.
- El cociente es menor que el divisor y, por tanto, menor que el dividendo.
- El cociente debe ser un número natural, para que se mantenga la proporción $\frac{D}{C} = \frac{d}{1}$.

- Ejemplos de acciones asociadas: determinar una cantidad de un espacio de medida, asociada a una cantidad dada del otro espacio de medida, cuando se conoce el valor unitario, es decir, la cantidad del segundo espacio de medida asociada a la unidad del primer espacio de medida.

- Ejemplos de preguntas asociadas: ¿Qué cantidad de magnitud hay en un espacio de medida, que esté asociada a una cantidad dada del otro espacio de medida, si se conoce el valor unitario?

3.2.2.2.2 Los modelos semánticos de la división de naturales en los libros de texto

En los libros de texto consultados, los modelos semánticos de la división de naturales subyacen en las distintas formas textuales que se usan para definir la división. Con frecuencia estas formas textuales no emergen de forma aislada, sino que aparecen juntas y enlazadas con algún tipo de matización y aclaración, como se ilustra en las citas siguientes:

- Partir o repartir en partes iguales

La cuarta regla, o problema general de la aritmética, se dice partir, y no es otra cosa sino dividir, o hacer un número dos, o tres, o más partes iguales (Pérez de Moya, 1562, pp. 115 y 139).

(...) se le ha dado el nombre de división o partición, porque sirve para dividir o repartir un número dado en partes iguales y determinar la magnitud de cada una, sabiéndose de antemano cuántas sean (...) (Lacroix, 1846, p. 112).

División es la operación que tiene por objeto **partir un número en porciones iguales** (Edelvives, 1945, p. 55).

Dividir es **repartir en partes iguales** (Marjal, 1984, p. 68).

- Averiguar cuántas veces cabe o está contenido un número en otro; resta repetida

(...) el partir **es un restar abreviado**; porque es sacar un número de otro tantas veces como se contiene en él; luego es lo mismo que restarle las mismas veces, ... (Corachán, 1699, pp. 51 y 52).

Vamos ahora a tratar de la segunda operación de disminuir que se origina de la resta, cuando intentamos averiguar cuántas veces se puede restar el sustraendo del minuendo; y como tantas veces como se pueda restar, de tantas veces el sustraendo se compondrá el minuendo, de tantas veces estará contenido el sustraendo en el minuendo, queda reducida entonces esta operación de restar a la de dividir; y se dice que dividir es averiguar cuántas veces un número contiene a otro (…) (Vallejo, 1813, p. 47).

División es la operación que tiene por objeto **averiguar cuántas veces un número, llamado dividendo, contiene a otro llamado divisor** (Edelvives 1934, p. 102).

- Factor perdido

Puesto que el producto de la multiplicación de dos números cualesquiera equivale a uno de éstos tomado tantas veces como unidades tiene el otro; siempre que nos ocurra el caso de conocer algún producto y uno de sus factores, y deseamos determinar el otro factor, lo podremos conseguir averiguando por medio de la sustracción cuántas veces está contenido en el producto dado el factor que de él suponemos conocido (…) (Lacroix, 1797).

También pudiéramos haber dado origen a la división de su inversa la multiplicación, diciendo que dividir es buscar un número que multiplicado por el divisor dé el dividendo, o que es una operación por medio de la cual, dado un producto y uno de los factores, venimos en conocimiento del otro factor" (Vallejo, 1813, pp. 43–44).

(...) División es la operación **por la cual se busca un factor cuando se conoce el otro factor y el product**o de ambos (Edelvives, 1934, p. 101).

La división es una operación por la cual, conociendo el producto de dos factores y uno de ellos, se averigua el otro (Bruño, 1939, p. 58).

Cociente de dos números, llamados dividendo y divisor, es otro número que multiplicado por el divisor da el dividendo (García Roca, 1965, p. 38).

- Hacer un número tantas veces menor como indica otro

(…) Multiplicando el cociente por el divisor, o haciendo el cociente tantas veces mayor como unidades tiene el divisor, acabamos de ver que obtenemos el dividendo; luego el cociente es tantas veces menor que el dividendo como unidades tiene el divisor; por lo que, cuando el divisor es un número entero, puede definirse la división diciendo que dividir es hacer un número tantas veces menor como unidades tiene otro (Dalmau Carles, 1898, p. 45).

Dividir 3 por 4 es **hacer a 3 cuatro veces menor, o lo que es lo mismo, hallar la cuarta parte de 3**. Es decir, 3 se reduce a su cuarta parte (Suarez Somonte, 1932, p. 175).

- Hallar el número que está con la unidad en la misma proporción que el dividendo con el divisor: $\frac{D}{d}=\frac{C}{1}$

(...) partir un número por otro, es buscar un otro número tercero que se haya con la unidad en tal proporción como el número que partimos con el partidor (Pérez de Moya, 1562, pp. 115 y 139).

“Partir un número por otro es **distribuirle en tantas partes, cuantas unidades tiene el número por quien se parte**; como partir 12 por 4 es dividir el 12 en cuatro partes, porque tantas unidades tiene el 4. (...) después de hecha la división, **la misma razón tiene el cociente con la unidad, que la cantidad con el partidor**...” (Corachán, 1699, pp. 51 y 52).

- Hallar el número que está con el dividendo en la misma proporción que la unidad con el divisor: $\frac{D}{C}=\frac{d}{1}$

Esta operación es inversa de la multiplicación, y de la definición general de multiplicar (39. Esc.) resulta que, dividir un número por otro, es hallar un tercer número, que sea respecto a la unidad, lo que el primero es respecto al segundo; y también hallar un tercer número, que sea respecto al primero lo que la unidad es respecto al segundo (Moya, 1897, p. 24–25).

La división es una operación que tiene por objeto **descomponer un número llamado dividendo en tantas partes iguales como unidades tenga otro llamado divisor**. Esta tercera definición conviene sólo al caso en que el divisor sea un número exacto (Bruño, 1939, p. 58).

Dalmau Carles (1929, p. 52) considera seis usos de la división:

1) Hacer un número tantas veces menor como unidades tiene otro.
2) Averiguar las veces que un número contiene a otro.
3) Dividir un número de cosas por otro de personas.
4) Reducir unidades de especie inferior a superior.
5) Conociendo el valor de varias cosas y el número de ellas, buscar lo que vale una.
6) Conociendo lo que valen muchas cosas y lo que vale una, determinar el número de ellas.

Recogiendo esta idea de Dalmau, en esta investigación se asocian las formas textuales localizadas en los libros de texto a cada uno de los seis modelos de división tal como se señala en la Tabla 3.7.

La resta repetida aparece como una estrategia de cálculo que permite obtener el cociente de la división.

Modelo semántico	Formas textuales asociadas
b.1) Partición (msdn1)	• Partir o repartir en partes iguales "…hacer un número dos, o tres, o más partes iguales" (Pérez de Moya, 1562) "…dividir o repartir un número dado en partes iguales" (Lacroix, 1846) "…partir un número en porciones iguales" (Edelvives, 1945) "…repartir en partes iguales" (Marjal, 1984)
b.2) Medida (msdn2)	• Averiguar cuántas veces cabe o está contenido un número en otro "…averiguar cuántas veces un número contiene a otro" (Vallejo, 1813). "…averiguar cuántas veces un número, llamado dividendo, contiene a otro llamado divisor" (Edelvives 1934). • Resta repetida "…sacar un número de otro tantas veces como se contiene en él" (Corachán, 1699). "…averiguar cuántas veces se puede restar el sustraendo del minuendo" (Vallejo, 1813).
b.3) Inversión de la multiplicación (msdn3)	b.3.1) Inversa del producto de factores: factor perdido. "…dado un producto y uno de los factores, venimos en conocimiento del otro factor" (Vallejo, 1813). "…se busca un factor cuando se conoce el otro factor y el producto de ambos" (Edelvives, 1934). "…conociendo el producto de dos factores y uno de ellos, se averigua el otro" (Bruño, 1939). b.3.2) Inversa de la adición repetida: resta repetida. "…lo podremos conseguir averiguando por medio de la sustracción cuántas veces está contenido en el producto dado el factor que de él suponemos conocido" (Lacroix, 1797). b.3.3) Inversa del producto cartesiano. "…es otro número que multiplicado por el divisor da el dividendo" (García Roca, 1965).

TABLA 3.7. Los modelos semánticos de división de naturales y sus formas textuales asociadas

Modelo semántico	Formas textuales asociadas
b.4) Inversión del factor multiplicativo (msdn4)	• Hacer tantas veces menor "…dividir es hacer un número tantas veces menor como unidades tiene otro" (Dalmau Carles, 1898). "…reducir unidades de especie inferior a superior" (Dalmau Carles, 1929). "…hacer a 3 cuatro veces menor, o lo que es lo mismo, hallar la cuarta parte de 3. Es decir, 3 se reduce a su cuarta parte" (Suarez Somonte, 1932).
b.5) Razón unitaria (msdn5)	• El número que es a la unidad como el dividendo es al divisor. "…buscar un otro número tercero que se haya con la unidad en tal proporción como el número que partimos con el partidor" (Pérez de Moya, 1562). "…la misma razón tiene el cociente con la unidad, que la cantidad con el partidor..." (Corachán, 1699).
b.6) Proporción de valor unitario conocido (msdn6)	• El número que es al dividendo como la unidad es al divisor "…hallar un tercer número, que sea respecto al primero lo que la unidad es respecto al segundo" (Moya, 1897). "…descomponer un número llamado dividendo en tantas partes iguales como unidades tenga otro llamado divisor" (Bruño, 1939).

TABLA 3.7. Los modelos semánticos de división de naturales y sus formas textuales asociadas

3.2.2.2.3 Los modelos semánticos de la división de fracciones.

En la investigación precedente se localizan muchos trabajos sobre sentidos de uso de fracción y modelos semánticos de la división de números naturales; sin embargo, no los hay sobre los de división de fracciones. Algunos autores, como Sinicrope, Mick y Kolb (2002) apuestan por extender los modelos semánticos de la división de números naturales a la división de fracciones:

Para la división de números enteros, las situaciones de los problemas se pueden categorizar como división medida (determinar el número de grupos), división partición (determinar el tamaño de cada grupo); o la inversa del producto cartesiano (determinar una dimensión de un arreglo rectangular). La división de fracciones puede explicarse por extensiones de estas tres interpretaciones de la división de enteros. Pero estas extensiones no son suficientes: la división como la determinación de una razón unitaria y la división como la inversa de la multiplicación son también importantes interpretaciones de la división de fracciones (Sinicrope, Mick y Kolb, 2002, p. 153).

Tomando en consideración las contribuciones citadas anteriormente, en la investigación que se describe en este documento se adoptó el criterio de caracterizar los modelos semánticos de la división de fracciones a partir de la extensión de los modelos semánticos de la división de naturales, teniendo en cuenta las variaciones o discontinuidades que se producen en ellos como consecuencia del cambio de campo numérico y del campo de problemas donde se aplican. Los modelos semánticos de la división de fracciones se caracterizan en el siguiente apartado. Posteriormente se muestran ejemplos de las formas textuales de los libros de texto que pueden asociarse a dichos modelos y se organiza la información en la Tabla 3.8. Esta información se utiliza en la investigación para hacer los análisis correspondientes cuyos resultados se describen en capítulos posteriores.

3.2.2.2.4 Los modelos semánticos de la división de fracciones como extensión de los modelos semánticos de la división de naturales

Los siguientes modelos semánticos son extensiones de los modelos semánticos de la división de naturales al caso de la división de fracciones.

c.1) Partición (división partitiva) (msdf1)

Partir o repartir un objeto de dimensión fraccionaria en partes iguales o una colección formada por una cantidad fraccionaria de un conjunto de objetos en subconjuntos del mismo tamaño. Se trata, pues, de repartir una parte de un todo en partes iguales. El todo puede ser continuo o discreto.

Por ejemplo, repartir las 3/4 partes de una tarta entre 3 niños (caso continuo) o repartir las 3/4 partes de una bolsa de caramelos entre 3 niños (caso discreto).

- Características:
  - El dividendo puede ser menor que el divisor.
  - Se podrá hacer el reparto en partes iguales solamente cuando el divisor sea un número natural.
  - El cociente debe ser menor o igual que el dividendo. Pero como ha de ser una fracción y el divisor es natural, el cociente también debe ser menor que el divisor, cosa que no tiene porqué ocurrir en la división de naturales (por ejemplo, 12/3=4, el cociente es mayor que el divisor).

  - El objeto u objetos deben ser susceptibles de ser partidos.

- Ejemplos de acciones asociadas: partir, repartir, distribuir, dividir.
- Ejemplos de preguntas asociadas:
  - en el caso continuo, ¿cuánto corresponde a cada uno? ¿qué fracción corresponde a cada uno? (por ejemplo, ¿cuánta tarta corresponde a cada niño? ¿qué fracción de tarta corresponde a cada niño? La respuesta es una fracción).
  - en el caso discreto, ¿qué fracción o qué parte corresponde a cada uno? (por ejemplo, ¿qué fracción de caramelos corresponde a cada niño? La respuesta es una fracción).

Por tanto, comparando con el modelo de división partitiva de números naturales, este modelo con fracciones presenta las siguientes variaciones:

División de una fracción entre un número natural.
El dividendo puede ser menor que el divisor.
El divisor ha de ser un número natural.
El cociente es una fracción.
El cociente siempre es menor que el divisor y que el dividendo.
La pregunta es diferente en el caso continuo y en el caso discreto, ya que en el primero se puede preguntar por la cantidad o por la parte (¿cuánto para cada uno? ¿qué fracción para cada uno?), mientras que en el segundo solamente tiene sentido preguntar por la parte (¿qué fracción para cada uno?)

c.2) Medida (cuotición o división cuotitiva) (msdf2)

Averiguar cuántas veces cabe una cantidad fraccionaria (el divisor) en otra (el dividendo), que puede ser un número natural o una fracción; o averiguar cuántas veces contiene una cantidad (el dividendo, natural o fracción) a otra (el divisor, fracción). Medir el dividendo usando como unidad de medida el divisor (fracción).

- Características:
  - El dividendo puede ser menor que el divisor.
  - El dividendo puede ser natural o fracción (propia o impropia).

- El cociente puede ser natural o fracción (propia o impropia), es decir, el número de veces que cabe el divisor en el dividendo no tiene porqué ser un número natural, lo que obliga a reconceptualizar el significado de la expresión "cuántas veces cabe", admitiendo la posibilidad de que el divisor quepa en el dividendo un número fraccionario de veces.

- El cociente ya no se puede obtener por medio de una resta repetida, pero sí se puede obtener por conmensuración. Por ejemplo: "¿cuántos tercios hay en 1/2 litro?" Por resta reiterada no es posible averiguarlo, ya que $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ y al volver a restar 1/2 se obtiene resultado negativo. En cambio, en la figura 3.3 se observa que por cada 2 medios hay 3 tercios, por tanto hay $\frac{3}{2}$ tercios en $\frac{1}{2}$, es decir, 1/3 cabe "una vez y media" en 1/2.

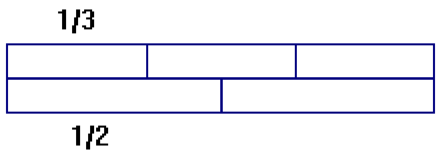


Figura 3.3

- Ejemplos de acciones asociadas: medir.
- Ejemplos de preguntas asociadas. ¿cuántas veces cabe?

Por tanto, comparando con el modelo de división cuotitiva de números naturales, este modelo con fracciones presenta las siguientes variaciones:

El dividendo puede ser menor que el divisor
El dividendo puede ser natural o fracción
El cociente puede ser natural o fracción
El número de veces que cabe el divisor en el dividendo puede ser fraccionario
No se puede interpretar como resta repetida

c.3) Inversión de la multiplicación (msdf3)

En el caso de la división de fracciones deja de tener validez la inversión de la suma repetida o resta repetida y la inversión del producto cartesiano. Por ello, la inversión de la multiplicación se reduce solamente al caso de:

Inversión del "producto de medidas": Encontrar una de las medidas elementales (por ejemplo M1) cuando se conoce la otra (M2), y la medida producto M=M1xM2, teniendo en cuenta que las medidas que intervienen son fracciones propias o impropias, aunque alguna de ellas puede ser un número natural.

En el caso continuo se ejemplifica con problemas de área rectangular, en los que, dada el área de un rectángulo y una de sus dimensiones, se pide calcular la otra, siendo los datos fracciones.

Sin embargo, el caso discreto del producto cartesiano que se ejemplifica con problemas de combinatoria no se puede extender a fracciones.

- Características:
  - Conmutatividad: se pregunta por la medida de uno de los espacios de medida, pero da igual que sea uno (M1) u otro espacio de medida (M2).
  - El dividendo puede ser menor que el divisor y que el cociente.
  - El cociente puede ser un número natural o una fracción propia o impropia, y lo mismo ocurre con el divisor y el dividendo.
- Ejemplos de acciones asociadas: calcular un factor o una medida indirectamente.
- Ejemplos de preguntas asociadas: ¿cuál es la base (altura) de un rectángulo si se sabe su área y su altura (base) y los datos son fracciones?

Comparando con el modelo de inversión de la multiplicación para la división de números naturales, este modelo con fracciones presenta las siguientes variaciones:

Solo tiene sentido el modelo rectangular, pero no el combinatorio.
El dividendo puede ser menor que el divisor y que el cociente.
Tanto el dividendo como el divisor y el cociente pueden ser naturales o fracciones propias o impropias.

c.4) Inversión del factor multiplicativo (msdf4).

Al igual que con números naturales, consiste en hacer el dividendo tantas veces menor como indica el divisor. Es decir, el dividendo se reduce según un factor multiplicativo escalar dado por el divisor, con la diferencia de que ahora se admite que dividendo, divisor y cociente sean fracciones propias o impropias.

- Características:
  - El dividendo puede ser menor o mayor que el divisor y que el cociente.
  - El dividendo y el cociente han de ser de la misma especie (o pertenecer al mismo espacio de medida).
  - El divisor es un escalar o factor multiplicativo.
  - Si el divisor es un número natural, el modelo coincide con el correspondiente para números naturales, excepto por el hecho de que el dividendo es una fracción.
  - Si el divisor es una fracción, hacer el dividendo tantas veces menor como indica el divisor se traduce en hacer el dividendo tantas veces menor como indica el numerador del divisor, y tantas veces mayor como indica el denominador del divisor. La consecuencia es que la fracción dividendo puede aumentar o disminuir, lo que supone una reconceptualización de la expresión "hacer tantas veces menor"
- Ejemplo de acciones asociadas: hacer tantas veces menor (o mayor), reducir (o ampliar).
- Ejemplos de preguntas asociadas: ¿cuál es la medida resultante de aplicar el factor multiplicativo?

Al comparar con el modelo de inversión del factor multiplicativo para la división de números naturales, se observan con fracciones las siguientes variaciones:

Si el divisor es una fracción, hacer el dividendo tantas veces menor como indica el divisor implica una variación en el dividendo que puede dar como resultado aumentarlo o disminuirlo, ya que se debe disminuir con el numerador del divisor, pero se debe aumentar con el denominador del divisor. El dividendo puede ser menor o mayor que el divisor y que el cociente. El dividendo, el divisor y el cociente pueden ser naturales o fracciones propias o impropias.

c.5) Proporción de valor unitario desconocido (msdf5).

Consiste en determinar el valor unitario (una cantidad de magnitud fraccionaria que corresponde a una unidad de otra magnitud), conociendo el vínculo de correspondencia entre dos cantidades fraccionarias no unitarias de ambas magnitudes ("a unidades de una por cada b unidades de la otra"). Corresponde a una proporción en la que la fracción dividendo es a la fracción divisor como la fracción cociente es a la unidad, $\frac{D}{d}=\frac{C}{1}$.

- Características:
    - El dividendo puede ser menor que el divisor y que el cociente.
    - El cociente no tiene porqué ser un número natural, la proporción $\frac{D}{d}=\frac{C}{1}$ se mantiene si D, c y d son fracciones propias o impropias.
- Ejemplos de acciones asociadas: determinar una tasa a partir de la relación entre dos cantidades de los dos espacios de medida.
- Ejemplos de preguntas asociadas: ¿Qué cantidad de magnitud hay de un espacio de medida por cada unidad del otro espacio de medida? ¿Cuántos hay de una magnitud por cada uno de la otra? ¿Cuál es la velocidad (densidad, precio unitario, etc)?

Comparando con el modelo de razón unitaria para la división de números naturales, se observan con fracciones las siguientes variaciones:

El dividendo puede ser menor que el divisor y que el cociente. El cociente no tiene porqué ser un número natural, la proporción $\frac{D}{d}=\frac{C}{1}$ se mantiene si D, c y d son fracciones propias o impropias.

c.6) Proporción de valor unitario conocido (msdf6).

Consiste en hallar un número fraccionario que se encuentra con la fracción dividendo en tal proporción como la unidad con la fracción divisor. $\frac{D}{C}=\frac{d}{1}$. Se conoce el valor unitario, es decir, la cantidad fraccionaria de la segunda magnitud que corresponde a la unidad de la primera y se conoce también una cantidad fraccionaria de la segunda magnitud y se pregunta por el valor de la cantidad fraccionaria correspondiente de la primera magnitud.

- Características:
  - El dividendo puede ser menor o mayor que el divisor.
  - El cociente no tiene porqué ser menor que el divisor ni menor que el dividendo.
  - El cociente no tiene porqué ser un número natural, la proporción $\frac{D}{C}=\frac{d}{1}$ se mantiene si D, c y d son fracciones, propias o impropias.
- Ejemplos de acciones asociadas: determinar una cantidad de un espacio de medida, asociada a una cantidad dada del otro espacio de medida, cuando se conoce el valor unitario, es decir, la cantidad del segundo espacio de medida asociada a la unidad del primer espacio de medida.
- Ejemplos de preguntas asociadas: ¿Qué cantidad de magnitud hay en un espacio de medida, que esté asociada a una cantidad dada del otro espacio de medida, si se conoce el valor unitario?

Comparando con el modelo análogo para la división de números naturales, se observan con fracciones las siguientes variaciones:

El dividendo puede ser menor o mayor que el divisor.

El cociente no tiene porqué ser menor que el divisor ni menor que el dividendo.

El cociente no tiene porqué ser un número natural, la proporción $\frac{D}{C}=\frac{d}{1}$ se mantiene si D, c y d son fracciones, propias o impropias.

3.2.2.2.5 Los modelos semánticos de la división de fracciones en los libros de texto

En los textos de enseñanza antiguos consultados están reflejadas las extensiones de los modelos semánticos de la división de naturales a la división de fracciones, de un modo que pone de manifiesto cómo se restringen o adaptan al nuevo campo numérico de los racionales.

Sin pretender ser exhaustivos, se muestran a continuación algunos ejemplos para dar una idea de cómo aparecen en los textos de enseñanza los modelos de división al cambiar de campo numérico.

- División como partición

La división como partición sólo aparece en el caso de la división de una fracción por un número entero; sin embargo, no funciona bien cuando el divisor es fraccionario, ya que no tiene sentido repartir entre un número fraccionario de sujetos.

Repartir 3/7 de torta entre 5 niños equivale a pedir una fracción que, multiplicada por 5, dé 3/7. Para distribuir 3/7 de torta entre 5 niños, bastará que **divida cada séptimo de torta en 5 partes y dé tres de estas nuevas partes a cada niño**. Como la torta entera tendrá ahora 7×5=35 de estas partes nuevas, la fracción correspondiente a cada niño es: $\frac{3}{7 \cdot 5} = \frac{3}{35}$ (Rey Pastor y Puig Adam, 1932, pág. 207).

- División como medida (cuotición o agrupación)

Este modelo de división aparece tanto si el divisor es entero como si es fraccionario. En los textos se han identificado dos variantes:

a) Determinar cuántas veces cabe el divisor en el dividendo

(...) la razón de esta regla es, que partir 4/5 por 2/3 es buscar quantas veces 2/3 cabe en 4/5; pero se viene a los ojos que pues el divisor expresa tercios, cabrá en el dividendo tres veces más que si expresara enteros, luego se ha de dividir primero por 2, y multiplicar después por 3, lo mismo cabalmente que tomar tres veces la mitad del dividendo, o multiplicar por 2/3 (Bails, 1818, p. 63).

b) Determinar cuántas veces contiene el dividendo al divisor

(...) Dividir 9 por 1/4.- Esto equivale a **hallar las veces que 9 contiene a 1/4**; 1 unidad lo contiene 4 veces; 9 unidades lo contendrán 9×4=36 veces. La aplicación de la regla da este mismo resultado: $9 : \frac{1}{4} = 9 \times \frac{4}{1} = \frac{36}{1} = 36$

(...) Dividir 9 por ¾.- Esta división difiere de la anterior en que el divisor es triple; **el dividendo lo contendrá, pues, 3 veces menos**, o sea $\frac{36}{3} = 12$. Es lo que resulta al aplicar la regla: $9 : \frac{3}{4} = 9 \times \frac{4}{3} = \frac{36}{3} = 12$ (Edelvives, 1934, p. 129-130).

- División como inversión de la multiplicación o cálculo del factor perdido de una multiplicación.

En los textos de enseñanza antiguos analizados, se ha identificado este sentido de uso bajo diversas formas:

a) Forma aritmética: se razona sobre números, mediante comprobación, introduciendo el concepto de divisor invertido.

Sea dividir 2/3 por 5/7, como el cociente multiplicado por el divisor da el dividendo, **dicho cociente es el producto del dividendo por el divisor invertido**, esto es, $\frac{2}{3}\times\frac{7}{5}$; pues este producto multiplicado por 5/7 es igual al dividendo 2/3; en efecto. $\frac{2}{3}\times\frac{7}{5}\cdot\frac{5}{7}=\frac{2}{3}\times 1=\frac{2}{3}$. Luego para dividir un quebrado por otro **se multiplica el dividendo por el divisor invertido,** o lo que es igual, **se multiplica el numerador del dividendo por el denominador del divisor, y el denominador del dividendo por el denominador del divisor**, siendo el primero de estos productos el numerador y el segundo el denominador del cociente buscado (Fernández y Cardín, 1863, p. 63).

b) Forma algebraica: se razona sobre letras, mediante comprobación en un primer nivel de generalidad, introduciendo el concepto de inverso del divisor (con el significado de recíproco)

(...) Hemos llamado cociente al número que multiplicado por el divisor da como producto el dividendo; pero, ¿existe tal número?; y si existe, ¿será único o habrá varios? Mientras no se aclaren estas dudas la definición carecerá de valor, pues sólo será el planteamiento de un problema, sin saber si admite solución. Sea a/m el dividendo y sea b/n el divisor; **si en éste es b≠0, podemos formar el inverso y multiplicar el dividendo por este inverso**. Resulta así un número que cumple la condición impuesta al cociente. En efecto: $\left(\frac{a}{m}\cdot\frac{n}{b}\right)\cdot\frac{b}{n}=\frac{a}{m}\cdot\frac{n}{b}\cdot\frac{b}{n}$ y asociando los dos últimos factores, en virtud de la propiedad asociativa de la multiplicación, como su producto parcial es 1, resulta como producto total a/m (Rey Pastor y Puig Adam, 1936, p.37).

En un mayor nivel de generalización, se considera la división de fracciones como la resolución de una ecuación, introduciendo el concepto de recíproco del divisor:

Supuestos los enteros b≠0, b'≠0, a'≠0, al tener en cuenta la definición de igualdad, la resolución en x, x' de la ecuación $\frac{b}{b'}\cdot\frac{x}{x'}=\frac{a}{a'}$ equivale a la de a' b x = a b' x'.

Esta se verifica para x=a b' y x'=a' b (en que para a'≠0 es x'≠0, cuando, y solo cuando, sea b≠0. Esta solución es única, pues otra solución x_1/x_1', al verificar a' b x_1=a b' x_1' será igual a la dada por $\frac{x}{x'}=\frac{a\,b'}{a'\,b}=\frac{a}{a'}\cdot\frac{b'}{b}$ en que $\frac{b'}{b}\cdot\frac{b}{b'}=1$.

Por lo tanto, en el campo racional, la división de divisor no nulo, **es decir la resolución de la ecuación $\beta\cdot\varepsilon=\alpha$ ($\beta\neq 0$) es siempre posible unívocamente**. Si dos números se llaman recíprocos cuando su producto es la unidad, **todo número $\beta\neq 0$ tendrá un solo recíproco $1/\beta$**, y podrá darse como regla general de división: **el cociente** α **:** β con $\beta\neq 0$ **se obtiene multiplicando el dividendo α por el recíproco del divisor β**, es decir, α **:** $\beta=\alpha\cdot(1/\beta)$ ($\beta\neq 0$) (Rey Pastor, Pi Calleja y A. Trejo, 1957, p. 69).

c) Forma estructural: en un primer nivel de generalización se introduce el concepto de fracción inversa de una dada y se considera la división de fracciones como el producto del dividendo por la fracción inversa del divisor, aunque sin utilizar letras; después se razona mediante comprobación

Fracción inversa de una dada: ¿Cuál es la fracción que multiplicada por $\frac{5}{8}$ es igual a 1? Observa: $\frac{5}{8}\cdot\frac{8}{5}=\frac{40}{40}=1$. Se dice que $\frac{8}{5}$ es la fracción inversa de $\frac{5}{8}$. Fíjate que, de igual modo, $\frac{5}{8}$ es la fracción inversa de $\frac{8}{5}$. Decimos también que $\frac{5}{8}$ y $\frac{8}{5}$ son fracciones inversas entre sí. **Dos fracciones son inversas cuando su producto es igual a la unidad**.

División de fracciones: ¿Cuál es la fracción que multiplicada por $\frac{3}{5}$ es igual a $\frac{1}{4}$? ¿ $\frac{3}{5}\cdot$? = $\frac{1}{4}$? La fracción que buscamos es el resultado de $\frac{1}{4}:\frac{3}{5}$

$\frac{1}{4}:\frac{3}{5}=\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{3}=\frac{5}{12}$ → La fracción buscada es $\frac{5}{12}$.

Comprobación: $\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{12}=\frac{15}{60}=\frac{1}{4}$. El cociente de dos fracciones **es igual al producto del dividendo por la fracción inversa del divisor** (Bujanda y Mansilla, 2002, p. 42).

En el nivel más alto de generalización, la operación de división de fracciones se presenta como consecuencia de la propiedad algebraica de existencia de inversos en $Q^*=Q-\{0\}$ respecto de la multiplicación en una estructura de cuerpo y las fracciones se consideran como representantes de clases de equivalencia.

División en Q: Dados dos números racionales α y β, por ser Q^* un grupo multiplicativo, la ecuación $\alpha x=\beta$ con $\alpha\neq 0$ admite solución en Q, pues multiplicando los dos miembros de la ecuación por α', inverso de α, resulta: $\alpha'\ \alpha\ x = \alpha'\ \beta$. O sea: $x=\alpha'\ \beta=\beta\ \alpha'$. El número $\delta=\beta\ \alpha'$ se llama cociente de β por α y se representa por $\beta:\alpha$. Es decir: $\beta:\alpha=\beta\ \alpha'$. Si es $\alpha=\mathrm{cl}\left(\frac{a}{a'}\right)$ y $\beta=\mathrm{cl}\left(\frac{b}{b'}\right)$, se tiene: $\beta:\alpha=\mathrm{cl}\left(\frac{b}{b'}\right):\mathrm{cl}\left(\frac{a}{a'}\right)=\mathrm{cl}\left(\frac{b}{b'}\right)\cdot\mathrm{cl}\left(\frac{a'}{a}\right)=\mathrm{cl}\left(\frac{b\,a'}{b'\,a}\right)$. En la práctica, se escribe: $\frac{b}{b'}:\frac{a}{a'}=\frac{b\,a'}{b'\,a}$ (Valdés y Santos, 1975, p. 40 – 41).

- División como inversión del factor multiplicativo

La división se considera como la operación que consiste en hacer el dividendo tantas veces menor como indica el divisor. En el caso de que el divisor sea un número fraccionario, la noción anterior de división se traduce en hacer el dividendo tantas veces menor como indica el numerador del divisor y tantas veces mayor como indica el denominador del divisor. Por tanto la fracción actúa como un operador doble:

Para dar la demostración de esta regla nos contraeremos al primer ejemplo (dividir 3/4 por 2/5); y observaremos, que si solo tuviésemos que dividir por 2, numerador del divisor 2/5, estaba reducida la operación á hacer dos veces menor el quebrado, lo que se consigue (Teor. 3º) multiplicando su denominador por 2, de manera que 3/8 sería el cociente; pero nosotros no teníamos que dividir por 2, sinó por 2/5, **que es cinco veces menor que el verdadero; y así, para obtener este, debemos hacer aquel cinco veces mayor**; lo cual se consigue (Teor. 2º) multiplicando su numerador por 5; de manera que ejecutándolo, tendré por cociente verdadero 15 / 8 = $1\frac{7}{8}$ (...) (Vallejo, 1813, p.120) .

- División como proporción de valor unitario desconocido

Aparece como una extensión de la interpretación razón unitaria de la división de enteros. Consiste en determinar una fracción C que contiene a la unidad tantas veces como la fracción dividendo contiene a la fracción divisor. Simbólicamente: $\frac{D}{d} = \frac{C}{1}$.

(...) el qual es el mismo intento que el partir enteros, y **tantas vezes como el dividendo contiene al divisor, otras tantas el quociente contiene a la unidad**; y assi son proporcionales, el dividendo, divisor, quociente y unidad... (Corachán, 1699, p. 109 y 110).

- División como proporción de valor unitario conocido

Consiste en considerar la división como el cálculo de un cuarto proporcional en una proporción en la que el dividendo es al cociente como el divisor es a la unidad. Simbólicamente: $\frac{D}{C} = \frac{d}{1}$.

La división tiene por objeto: dado un producto de dos factores y el uno de estos factores, determinar el otro. Resulta visiblemente de esta definición y de la multiplicación que **el primer número llamado dividendo se compone del tercero que se llama cociente, del mismo modo que el segundo o divisor se compone de la unidad** (Bourdon, 1848, p. 72).

Del análisis anterior se concluye que de los modelos de división de Fischbein (1985), el que tiene validez en el caso de la división de fracciones es: cuotición o agrupación, ya que el modelo de partición solo tiene sentido en el caso de la división de una fracción por un número entero.

Además aparecen en los textos los de proporción de valor unitario conocido y desconocido, inversión del factor multiplicativo e inversión de la multiplicación o factor perdido; de estos últimos, el que tiene mayor nivel de desarrollo es el de inversión de la multiplicación o factor perdido, ya que ha experimentado a lo largo de la historia diferentes niveles de generalización desde la aritmética hasta el estructuralismo.

Teniendo en cuenta los resultados anteriores, a los efectos de la investigación que comprende esta tesis, se asocian las formas textuales con los modelos semánticos de la división de fracciones tal como se indica en la Tabla 3.8.

Modelo semántico	Formas textuales asociadas
c.1) Partición (msdf1)	• Determinar el tamaño de cada una de las partes, cuando se sabe el número de partes (que debe ser entero). "Para distribuir 3/7 de torta entre 5 niños, bastará que divida cada séptimo de torta en 5 partes y dé tres de estas nuevas partes a cada niño" (Rey Pastor y Puig Adam, 1932)
c.2) Medida (msdf2)	• Averiguar cuántas veces cabe el divisor en el dividendo "…partir 4/5 por 2/3 es buscar quantas veces 2/3 cabe en 4/5" (Bails, 1818) • Averiguar cuántas veces contiene el dividendo al divisor "Dividir 9 por 1/4.- Esto equivale a hallar las veces que 9 contiene a 1/4" (Edelvives, 1934)

TABLA 3.8 Los modelos semánticos de la división de fracciones y sus formas textuales asociadas

c.3) Inversión de la multiplicación o factor perdido (msdf3)	• Forma aritmética: se razona sobre números mediante comprobación "dicho cociente es el producto del dividendo por el divisor invertido, esto es, $\frac{2}{3}\times\frac{7}{5}$; pues este producto multiplicado por 5/7 es igual al dividendo 2/3; en efecto. $\frac{2}{3}\times\frac{7}{5}\cdot\frac{5}{7}=\frac{2}{3}\times 1=\frac{2}{3}$" (Fernández y Cardín, 1863) • Forma algebraica: se razona sobre letras mediante comprobación "Sea a/m el dividendo y sea b/n el divisor; si en éste es b≠0, podemos formar el inverso y multiplicar el dividendo por este inverso. Resulta así un número que cumple la condición impuesta al cociente. En efecto: $\left(\frac{a}{m}\cdot\frac{n}{b}\right)\cdot\frac{b}{n}=\frac{a}{m}\cdot\frac{n}{b}\cdot\frac{b}{n}$" (Rey Pastor y Puig Adam, 1936) • Forma estructural: se basa en la existencia de inversos respecto de la multiplicación y en la estructura de cuerpo. "Si es $\alpha=\mathrm{cl}\left(\frac{a}{a'}\right)$ y $\beta=\mathrm{cl}\left(\frac{b}{b'}\right)$, se tiene: $\beta:\alpha=\mathrm{cl}\left(\frac{b}{b'}\right):\mathrm{cl}\left(\frac{a}{a'}\right)=\mathrm{cl}\left(\frac{b}{b'}\right)\cdot\mathrm{cl}\left(\frac{a'}{a}\right)=\mathrm{cl}\left(\frac{b\,a'}{b'\,a}\right)$. En la práctica, se escribe: $\frac{b}{b'}:\frac{a}{a'}=\frac{b\,a'}{b'\,a}$" (Valdés y Santos, 1975)
c.4) Inversión del factor multiplicativo (msdf4)	• Hacer la fracción dividendo tantas veces menor como indica numerador del divisor y tantas veces mayor como indica el denominador del divisor "…si solo tuviésemos que dividir por 2, numerador del divisor 2/5, estaba reducida la operación á hacer dos veces menor el quebrado, lo que se consigue (Teor. 3º) multiplicando su denominador por 2, de manera que 3/8 sería el cociente; pero nosotros no teníamos que dividir por 2, sinó por 2/5, que es cinco veces menor que el verdadero; y así, para obtener este, debemos hacer aquel cinco veces mayor" (Vallejo, 1813)
c.5) Proporción de valor unitario desconocido (msdf5)	• El dividendo es al divisor como el cociente es a la unidad. $\frac{D}{d}=\frac{C}{1}$. Averiguar cuántas unidades del dividendo hay por cada unidad del divisor. "…tantas vezes como el dividendo contiene al divisor, otras tantas el quociente contiene a la unidad; y assi son proporcionales, el dividendo, divisor, quociente y unidad..." (Corachán, 1699)
c.6) Proporción de valor unitario conocido (msdf6)	• El dividendo es al cociente como el divisor es a la unidad. $\frac{D}{C}=\frac{d}{1}$. "…el primer número llamado dividendo se compone del tercero que se llama cociente, del mismo modo que el segundo o divisor se compone de la unidad" (Bourdon, 1848)

TABLA 3.8 Los modelos semánticos de la división de fracciones y sus formas textuales asociadas

3.2.3. La variable representaciones

A los efectos de la investigación que se describe en este documento, entendemos por representación a un diagrama físico o pictórico que permite mostrar las fracciones dividendo y divisor y que se usa para ilustrar el algoritmo de división en situaciones concretas de diversa índole. Estas representaciones están relacionadas con los sentidos de uso de fracción y los modelos semánticos de división. En este apartado se analizan las representaciones de fracción y de división de fracciones más comunes en los textos analizados.

3.2.3.1 Las representaciones de las fracciones

En los textos de enseñanza antiguos que se han analizado, así como en la investigación precedente, se han identificado dos tipos de representaciones de fracciones: a) parte–todo continuo o discreto, y b) recta numérica.

La representación parte–todo es aquélla en que la fracción representa una parte de un todo (que puede ser continuo –una tarta, un rectángulo, una figura geométrica, etc.- o discreto – una urna con bolas, una bolsa de caramelos, etc.-), siempre que el todo se haya dividido en partes iguales.

La representación de recta numérica se basa en la representación de las fracciones en la recta numérica real.

a) Representación parte – todo

Algunos ejemplos de representaciones de fracciones son los siguientes:

- Representaciones continuas

Se han encontrado representaciones de las fracciones que usan figuras geométricas como el círculo, el rectángulo y polígonos, como las que se muestran en las Figuras 3.4, 3.5 y 3.6.

Anzola y Vizmanos (1997, Figura 3.4) presentan las fracciones como partes de un círculo unidad. García y otros (1996, Figura 3.5) usan el modelo rectangular para mostrar la idea de equivalencia de fracciones, para ampliar y reducir fracciones. García y otros (1996, Figura 3.6) usan partes de polígonos para representar fracciones, mostrando que la representación de cada fracción no es única, puesto que se puede variar el polígono que se toma como unidad y, aunque se use el mismo polígono como unidad, se puede tomar un subconjunto de partes diferente, conservando la misma cardinalidad.

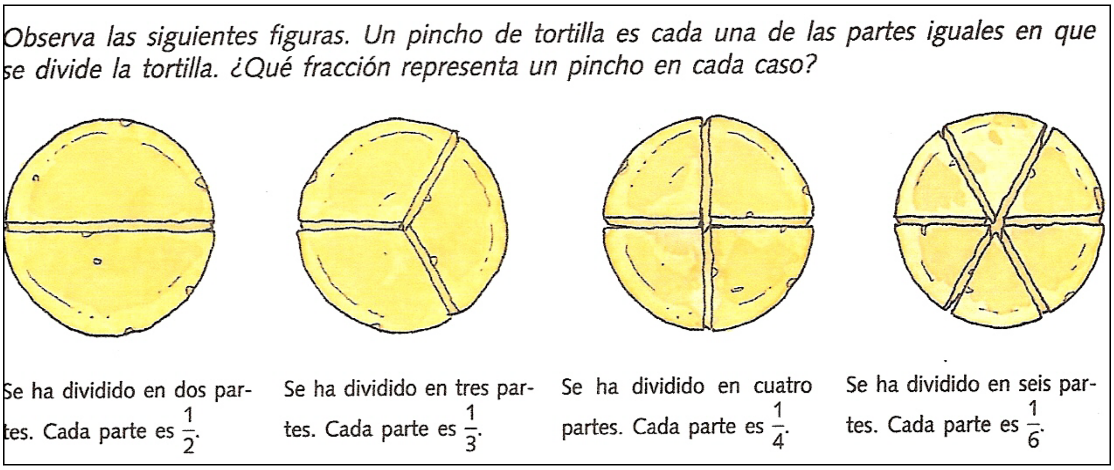


Figura 3.4. Representación continua circular de fracción (Anzola y Vizmanos, 1997, p. 19)

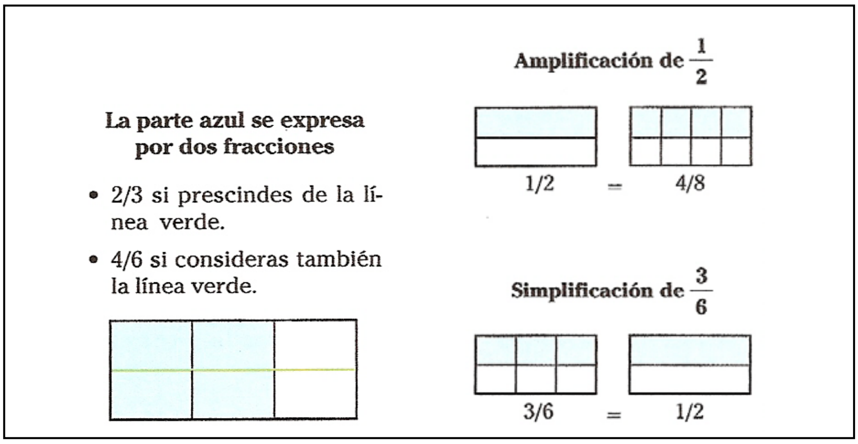


Figura 3.5. Representación continua rectangular de fracción

(García, Vázquez, Gil y Nortes, 1996, pp. 49)

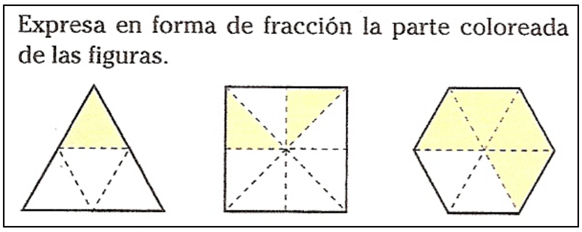


Figura 3.6. Representación continua poligonal de fracción

(García, Vázquez, Gil y Nortes, 1996, p. 54)

- Representaciones discretas

La representación más frecuente es el modelo de urnas con bolas, que presenta la particularidad de que no es posible partir los elementos individuales (bolas) que componen cada colección de objetos (urnas), es decir, cada elemento o es elegido o no lo es. Ésta es una característica de los modelos discretos que los diferencia de los continuos, en los que sí es posible partir el todo. Sin embargo, el Grupo Cero (1995, Figura 3.7) propone una tarea en la que se pone en cuestión si es lícito partir bolas en urnas, al incluir un número de bolas que no es múltiplo del denominador de la fracción.

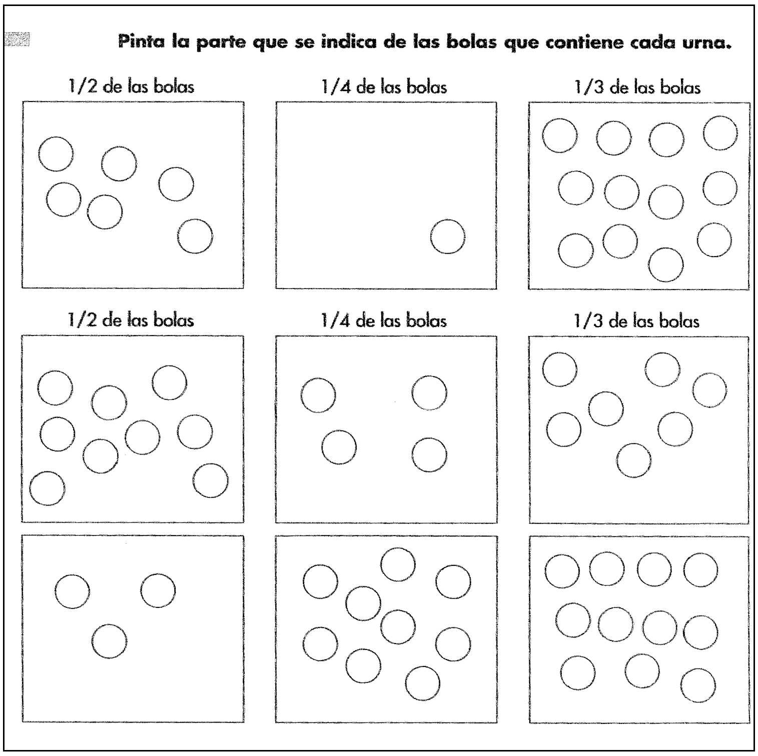


Figura 3.7. Representación de fracciones de conjuntos de objetos
Grupo Cero, 1995, pp. 22-26

b) Representaciones de recta numérica

Las fracciones son puntos de la recta numérica y para representarlas hay que recurrir a cierto bagaje matemático, que requiere el uso de regla y compás, el conocimiento del teorema de Thales y de las características de la escala (positiva y negativa) de la recta numérica. Santos y otros (1995, Figura 3.8) proponen una tarea en la que se busca caracterizar las fracciones equivalentes por el hecho de tener la misma representación sobre la recta numérica.

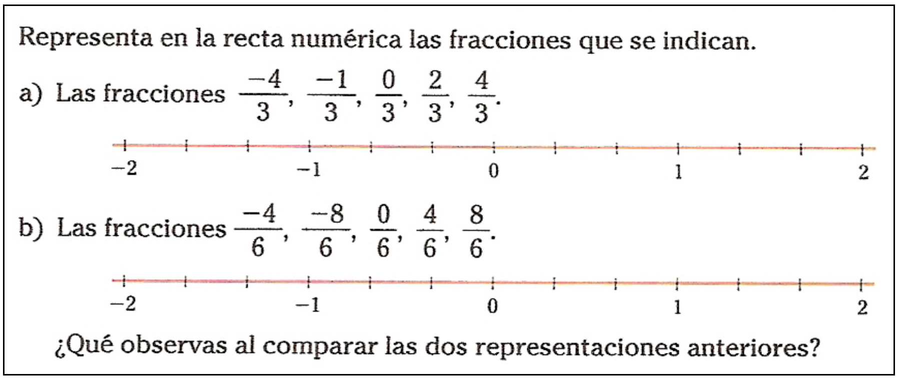


Figura 3.8. Fracciones en la recta numérica

(Santos, García, Vázquez, Nevot, Gil y Nortes, 1995, p. 42)

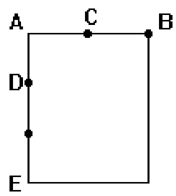
3.2.3.2 Las representaciones de la división de fracciones

En los textos de enseñanza antiguos analizados y en la investigación precedente sólo se han encontrado dos tipos de representaciones para la división de fracciones: a) parte–todo continua (rectangular, circular o poligonal) o discreta, y b) recta numérica.

3.2.3.2.1 Representación parte–todo continua rectangular

En la época anterior al siglo XX, el modelo más frecuente para el producto de fracciones es el rectangular parte-todo. Seguramente procedente de la cultura griega, el modelo aparece en el libro de Pérez de Moya (1562).

Que multiplicando un tercio por un medio venga un sexto puédese provar en línea. Sea un quebrado ABE, AC la mitad, y el un tercio AD:



Ahora multiplica uno por otro, que son los numeradores destos quebrados, y será un quadradillo compuesto de ambos; y porque AC es un medio significa que la línea AB es dos tamaños, y porque AD era un tercio será toda la línea AE de tres tamaños. Ahora multiplicando 3 por 2 serán 6, que son los tamaños que avrá en todo el quebrado o basis ABE, que está dividido en mitades y tercios, del qual la mitad del tercio de todo el quebrado o, al contrario, el un tercio de la mitad de todo el quebrado será un quadradico de 6 que tiene todo, que es un sexto, como está dicho” (Pérez de Moya, 1562, págs. 189–191).

Este modelo tiene su traducción al caso de la división de fracciones, interpretando ésta como la inversión de la multiplicación o la inversión del producto cartesiano. En Sinicrope, Mick y Kolb (2002) se muestra un ejemplo con diagrama rectangular, en el que se busca la anchura de un rectángulo conociendo su área (6/20) y su altura (3/4). El primer paso es representar la partición de la altura en “cuartos”. Como la altura está expresada en “cuartos” y el área está expresada en “veinteavos”, la anchura debe expresar “quintos” (20/4=5), es decir, el segundo paso consiste en dividir los denominadores de las dos fracciones. Una vez obtenida la partición de la base del rectángulo en “quintos”, se trata de ver cuántos quintos de la base hay que tomar para tener 6/20 del rectángulo, teniendo en cuenta que se deben ocupar tres filas horizontales (ya que la altura es 3/4), o sea, hay que distribuir 6 rectángulos de tamaño 1/20 entre 3 filas, lo que se consigue dividiendo 6 entre 3; es decir, el tercer paso es dividir los numeradores de las dos fracciones. Sinicrope, Mick y Kolb muestran junto a cada figura la expresión simbólica de los cálculos de cada paso:

(...) Por ejemplo, para determinar la anchura de un rectángulo que tiene una altura de 3/4 unidades y un área de 6/20 unidades cuadradas, primero formamos una esquina de un rectángulo con dos lados. Sobre un lado, marcamos una altura de 3/4 unidades. Para hallar el área, que se mide en "veinteavos", dividimos el otro lado del rectángulo en cinco partes. Entonces el área se puede representar con pequeños rectángulos que equivalen cada uno a 1/20. A continuación obtenemos la anchura, señalando 6 de dichos rectángulos (6/20). Vemos que la anchura del rectángulo es 2/5 unidades.

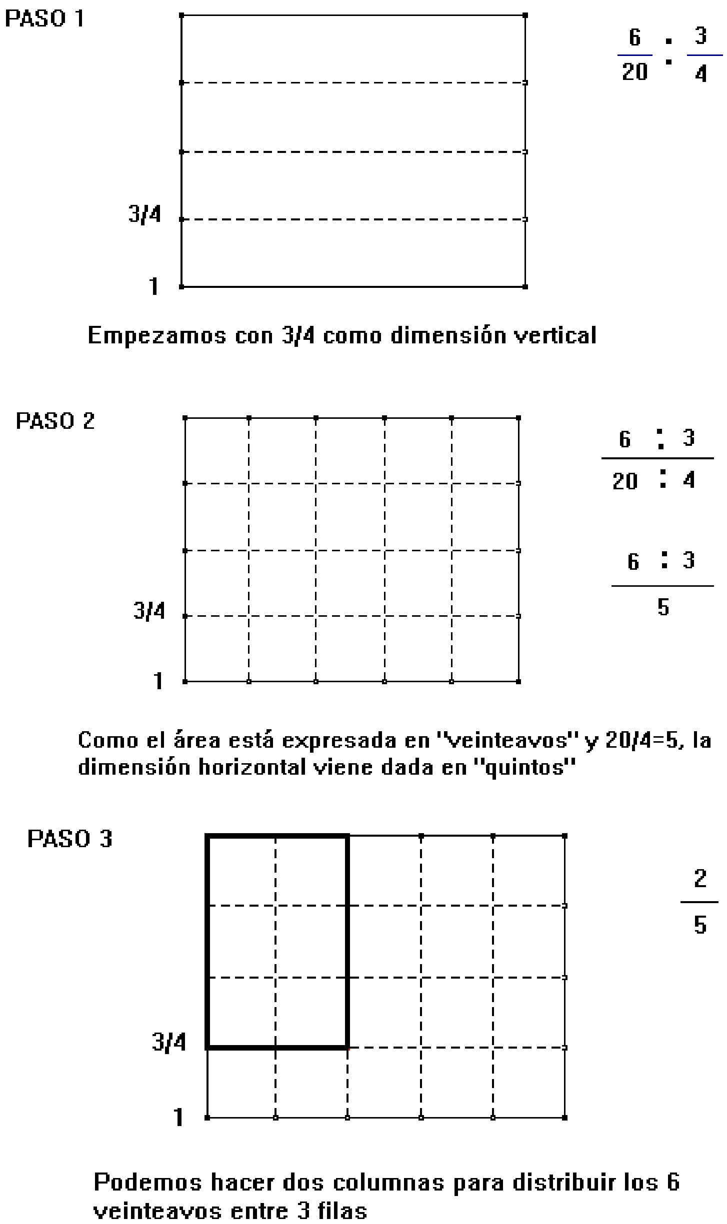


Figura 3.9. Cálculo de la anchura de un rectángulo

(Sinicrope, Mick y Kolb, 2002, p. 160)

Tirosh (2000) aplica el modelo rectangular al caso de la división de una fracción entre un número entero (partición):

Cuatro niños compran 1/4 kilogramo de chocolate y se lo reparten en partes iguales. ¿Cuánto chocolate hubo para cada uno?

La solución requiere dividir 1/4 entre 4. Para ello, basta utilizar un trozo de papel doblado en cuatro partes iguales con una parte sombreada para representar el chocolate (primer rectángulo de la Figura 3.10). Al doblar de nuevo dos veces la parte sombreada del papel (segundo rectángulo de la Figura 3.10), obtenemos la cuarta parte de 1/4. Cuando desplegamos toda la hoja de papel, observamos que la cuarta parte de 1/4 coincide con 1/16 de la hoja inicial (tercer rectángulo de la Figura 3.10). Por tanto, 1/4 : 4 = 1/16 (Ibídem, pp. 5–25).

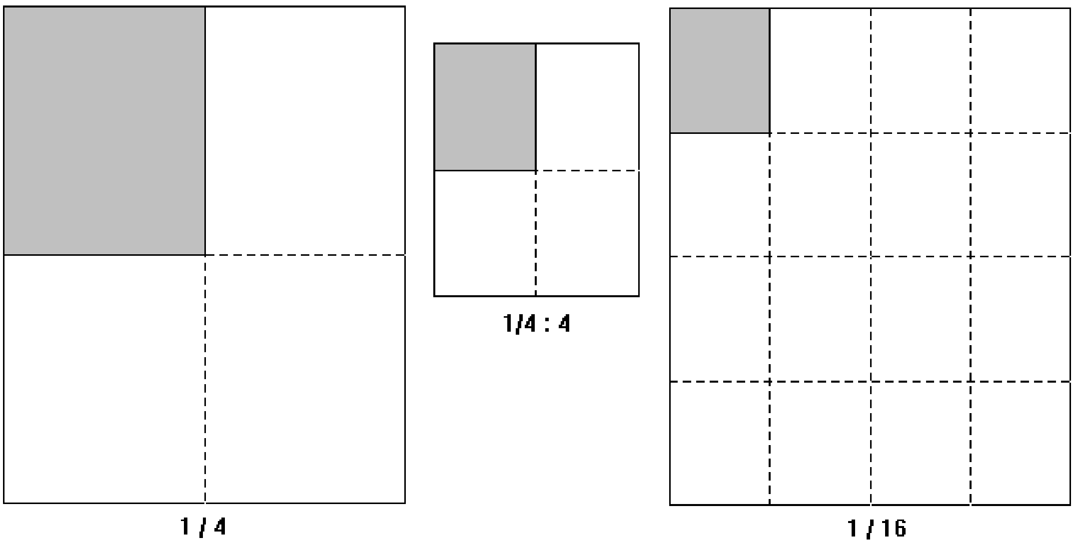


Figura 3.10. Repartir una tableta de chocolate (Tirosh, 2000, pp. 5–25)

El modelo rectangular también se aplica al caso en que hay que determinar una tasa o razón unitaria. Ott, Snook y Gibson (1991) identifican este caso con el de la división partición, ya que la determinación de una tasa es equivalente a determinar el tamaño de un conjunto. Utilizan el siguiente ejemplo: “Si 1/6 de un cartón de huevos es 2/3 de un conjunto, ¿cuál es el tamaño del conjunto?” Para resolverlo, usan un diagrama rectangular como el de la Figura 3.11. El problema se puede plantear con un esquema de regla de tres, pero consiste en la división de 1/6 entre 2/3:

$$\left.\begin{array}{l} 1/6 \longrightarrow 2/3 \\ X \longrightarrow 1 \end{array}\right\} \Rightarrow X = \frac{1}{6} : \frac{2}{3}$$

Ott, Snook y Gibson representan 1/6 como 2/12 con objeto de igualar los numeradores de las dos fracciones (paso 1). Como 2/12 representa 2/3, al reducir a las fracciones unitarias, resulta que 1/12 representa 1/3. Simbólicamente se muestra que el 2 del numerador multiplica a la fracción 1/3, por lo que en la línea siguiente se pasa a multiplicar toda la expresión por 1/2 para hallar la mitad de cada fracción, obteniendo así la expresión de división con las fracciones unitarias $\frac{1}{12}:\frac{1}{3}$ (paso 2). Como 1/12 representa 1/3 del conjunto, basta multiplicar por 3 para obtener el tamaño del conjunto: 3x1/12=3/12 (paso 3).

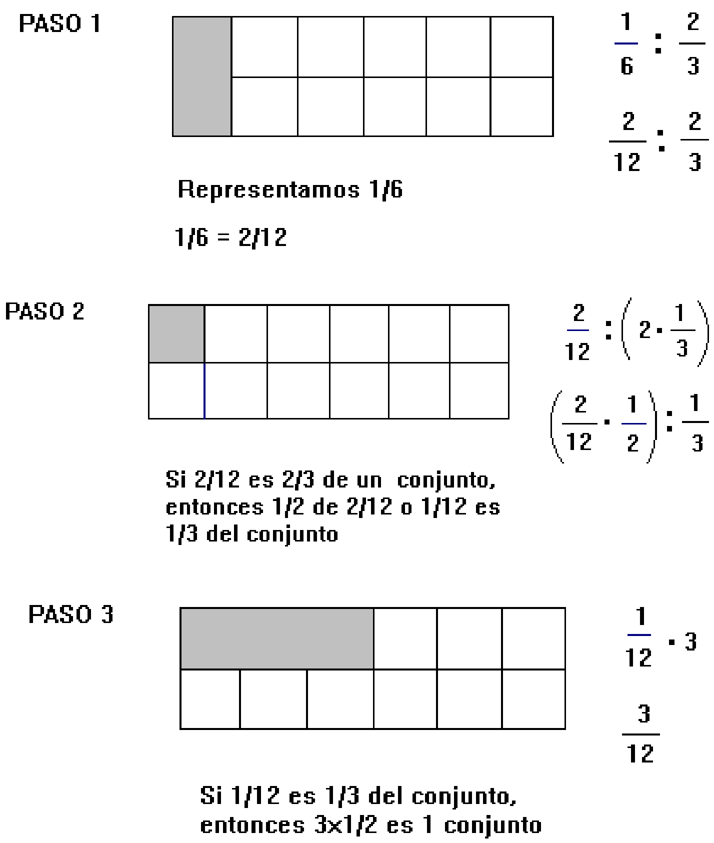


Figura 3.11. Cálculo del tamaño de un conjunto (Ott, Snook y Gibson, 1991, pp. 7-11)

Warrington (1997) afirma que los estudiantes interpretan la división de fracciones como un proceso de medida. Los estudiantes razonan que 2 dividido entre 1/2 es 4 porque “un medio cabe cuatro veces en 2” y “si se tienen dos barras de chocolate y se dividen por la mitad, se obtienen cuatro piezas” (p. 390-394). Aunque se pueden utilizar otros modelos, la interpretación de división de fracciones como medida se suele asociar al modelo circular.

Así, para dividir 3/4 entre 1/6, se ve, en un diagrama circular (ver Figura 3.12), que 1/6 de la tarta cabe 4 veces y media en 3/4 de la tarta. Por tanto, 3/4 : 1/6 = 4 + 1/2

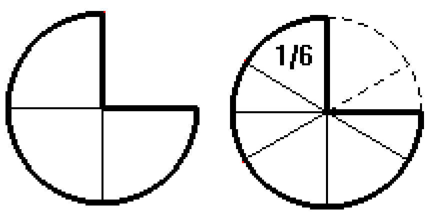


Figura 3.12

Sinicrope, Mick y Kolb (2002) utilizan un modelo poligonal para ilustrar la división de fracciones como medida:

¿Cuántos trapecios rojos, de área 1/4, se necesitan para cubrir 11 triángulos verdes, de área 11/12? (ver Figura 3.13). Para responder, hay que efectuar la división de fracciones 11 / 12 ÷ 1 / 4. Con un trapecio rojo se pueden cubrir 3 triángulos verdes (1 / 4 = 3 / 12), lo que se puede observar viendo cuántas veces "cabe" un trapecio rojo en 11 triángulos verdes (es decir, haciendo una resta repetida). Por tanto, si hacemos la división 11 ÷ 3 obtendremos el número de trapecios rojos necesarios para cubrir 11 triángulos verdes. Pero $\frac{11}{3} = 3\frac{2}{3}$. Por tanto, se necesitan $3\frac{2}{3}$ trapecios rojos para cubrir 11 triángulos verdes (Sinicrope, Mick y Kolb, 2002, pp. 153–155)

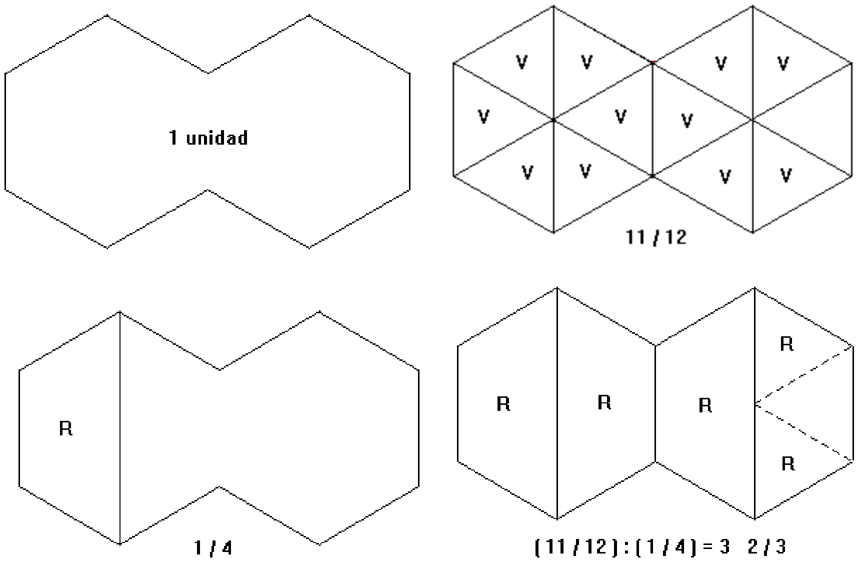


Figura 3.13. Sinicrope, Mick, y Kolb, 2002, pp. 153–155

- Todo discreto

Carrillo y Hernán (2007) utilizan un modelo discreto recurriendo a los modelos discretos de fracción (bolas, monedas, canicas, etc.) para representar el caso de la división de una fracción entre un número entero (partición):

Tenemos que dividir un tercio de las bolas en tres partes iguales:

El resultado es una bola de un total de nueve, es decir, 1/9. Por tanto: $\frac{1}{3} \div 3 = \frac{1}{9}$ (Carrillo, M.; Hernán, E y Hernán, L., 2007)

De forma similar, Contreras (2007) utiliza este modelo para representar los casos de división: fracción / entero, fracción / fracción y entero / fracción (ver Figuras 3.14, 3.15 y 3.16):

Ejemplo 3: ¿Cuál es el resultado de la división $\frac{1}{3} \div 3$?

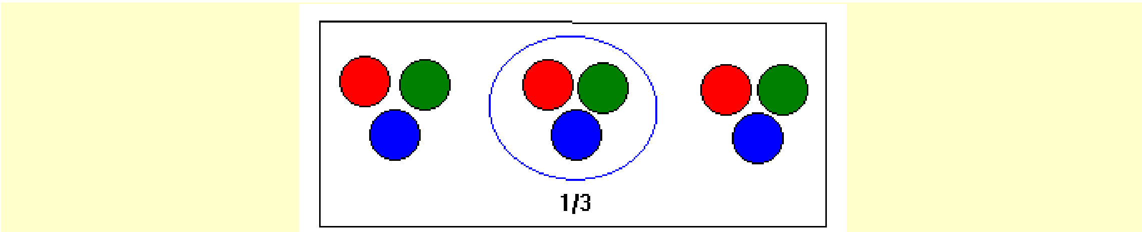


Figura 3.14. Dividir 1/3 entre 3 (Contreras, M. 2007. pp. 149-150)

Ejemplo 4: ¿Cuál es el resultado de la división $\frac{3}{4} \div \frac{3}{5}$?

Tomamos tantas bolas como indica el producto de los denominadores, es decir, 20. Hay que dividir tres cuartos de las 20 bolas (es decir, 15 bolas) entre los 3/5 de 20 bolas (es decir, 12 bolas).

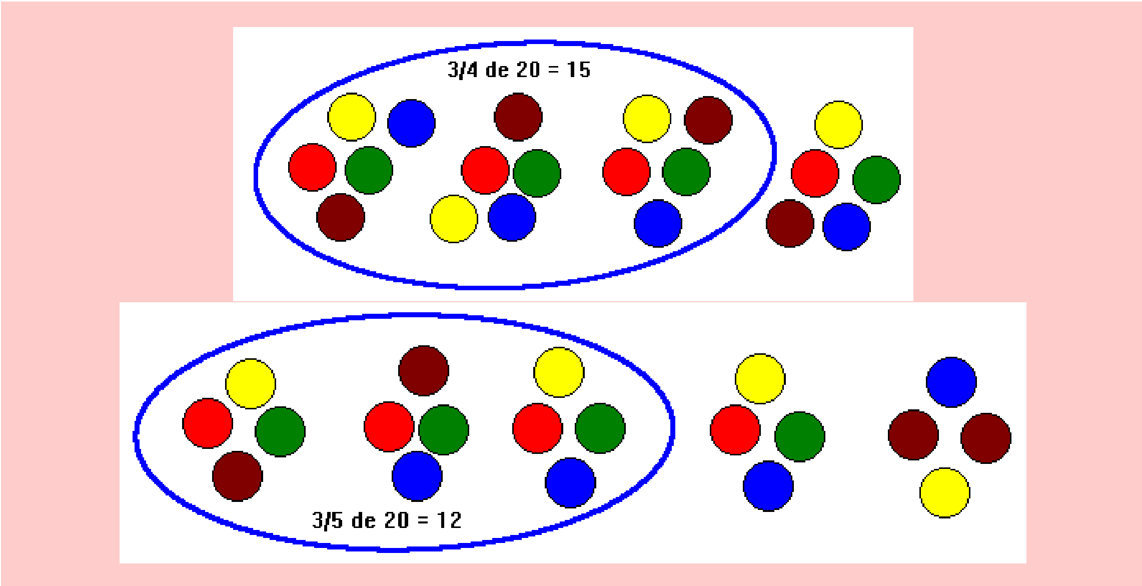


Figura 3.15. Dividir 3/4 entre 3/5 equivale a dividir 15 entre 12 (Contreras, M., 2007, pp. 149-150)

Por tanto, el resultado de la división es 15/12 = 5/4 de las bolas. Así: $\frac{3}{4} \div \frac{3}{5} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$

Ejemplo 5: ¿Cuál es el resultado de la división $2 \div \frac{3}{5}$?

Tenemos que dividir 2 entre los 3/5 de 1. Pero como 1 no es divisible entre 5, necesitamos que la unidad esté formada por un número de bolas múltiplo de 5. Vamos a suponer que dicha unidad está formada por 5 bolas. Entonces 2 unidades serán 10 bolas. Además, los 3/5 de 1 serán los 3/5 de 5 bolas, es decir, 3 bolas. Por tanto, hay que dividir 2 unidades (=10 bolas) entre los 3/5 de 1 unidad (=3 bolas). El resultado de la división es $2 \div \frac{3}{5} = \frac{10}{3}$ (Contreras, M. 2007, pp. 149-150)

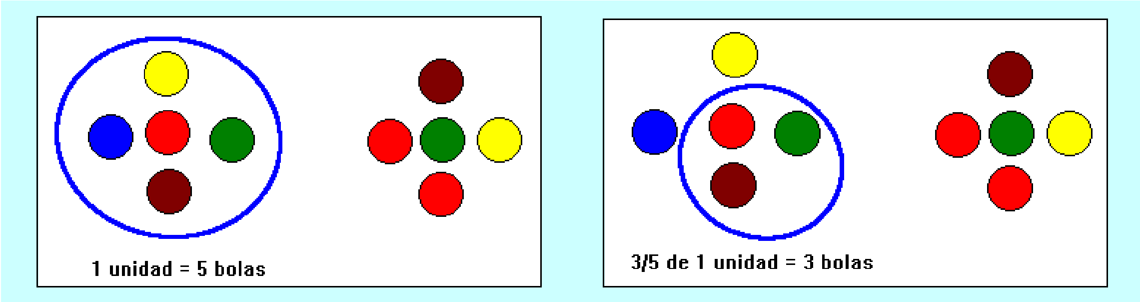


Figura 3.16. Contreras, M., 2007, pp. 149-150

b) Representaciones en la recta numérica

En NCTM (1972) se utiliza una representación de las fracciones en la recta numérica para efectuar la división $\frac{3}{4} \div \frac{2}{5}$:

Para efectuar la división $\frac{3}{4} \div \frac{2}{5}$, usaremos la recta numérica para hallar un número racional $\frac{a}{b}$, tal que $\frac{a}{b} \times \frac{2}{5} = \frac{3}{4}$. Para ello razonamos de la siguiente forma: Si se localizan los puntos correspondientes a $\frac{3}{4}$ y $\frac{2}{5}$ en el eje numérico (ver la figura 3.a), es evidente que necesitamos un conjunto de subintervalos tales que los puntos de separación incluyan los puntos correspondientes a $\frac{3}{4}$ y $\frac{2}{5}$.

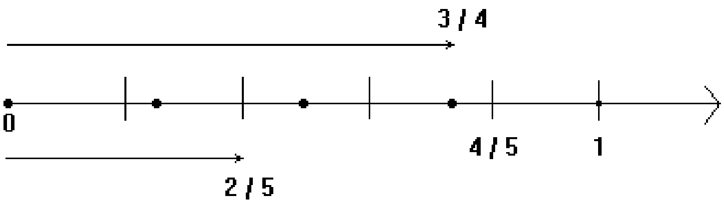


Figura 3.a

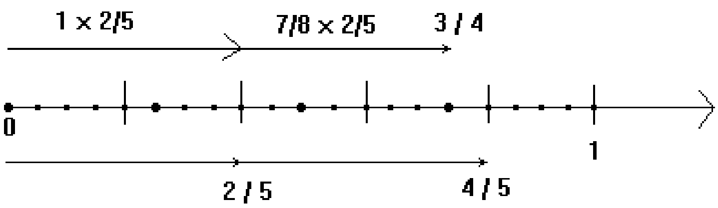
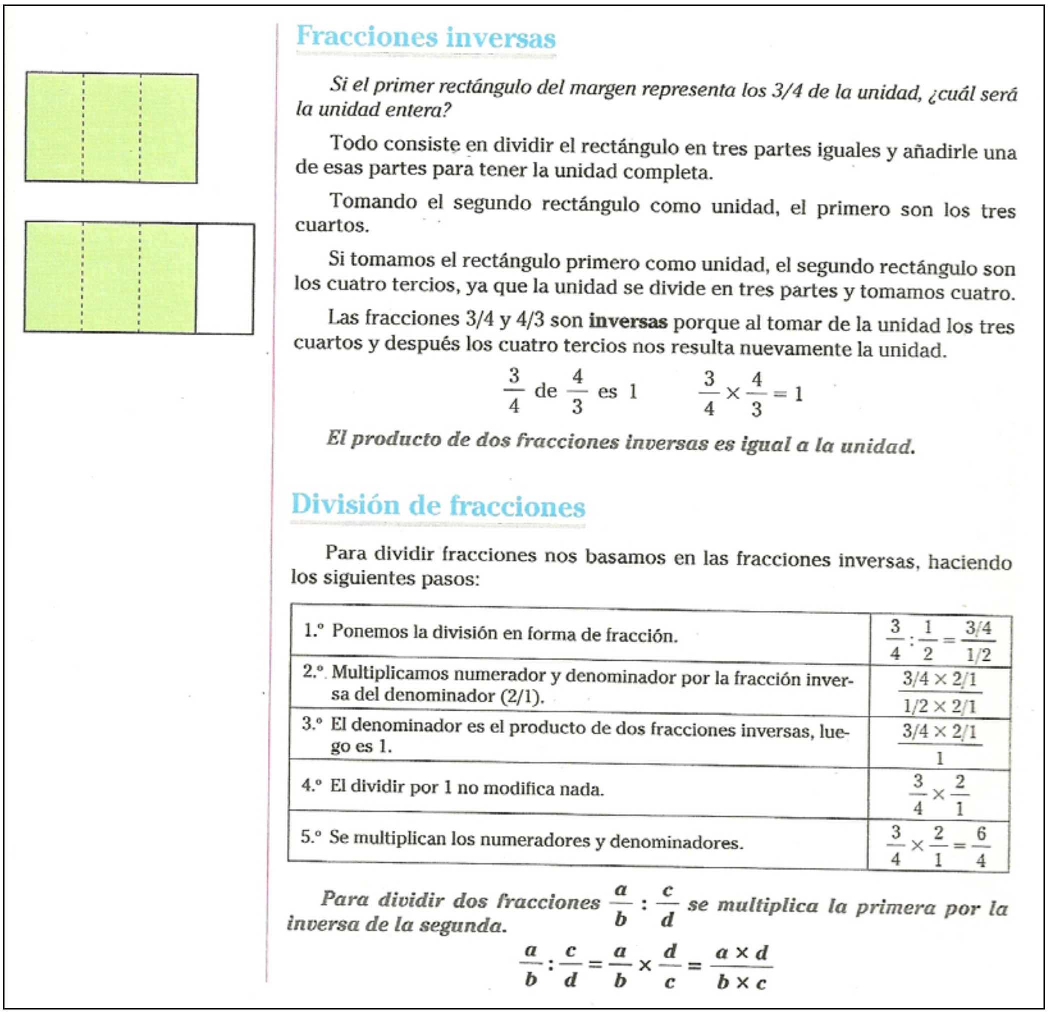


Figura 3.b

Esto puede lograrse dividiendo el eje en segmentos unitarios –partiendo de 0 y continuando con la serie tanto como se necesite– en 20 partes congruentes, véase la figura 3.b. La figura sugiere que $\frac{3}{4} = \frac{15}{8} \times \frac{2}{5}$ ya que, en la misma figura vemos que: $\frac{3}{4} = 1 \times \frac{2}{5} + \frac{7}{8} \times \frac{2}{5} = \left(1 + \frac{7}{8}\right) \times \frac{2}{5} = \frac{15}{8} \times \frac{2}{5}$. Así, $\frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = \frac{15}{8}$ (NCTM, 1972, pp. 69–72).

En los libros de texto consultados no se encuentran representaciones para la división de fracciones. En general, hay representaciones para sumas, restas y productos de fracciones, pero no para la división. En García, Vázquez, Gil y Nortes (1996, ver Figura 3.17) se utiliza la representación rectangular parte–todo para introducir el concepto de fracciones inversas como paso previo para tratar el algoritmo de “invertir y multiplicar”. En Anzola y Vizmanos (1997, ver Figura 3.18) se intenta aplicar la representación rectangular al caso de la división de fracciones, pero mediante comprobación en un caso particular, recurriéndose de nuevo al significado de fracción como operador para justificar el algoritmo de “invertir y multiplicar”. Colera, García y otros (2000, ver Figura 3.19) usan la representación rectangular parte–todo para tratar el caso de la división de una fracción por un número entero, pero no siguen usando la misma representación en el caso de la división de fracciones.



Fracciones inversas

Si el primer rectángulo del margen representa los 3/4 de la unidad, ¿cuál será la unidad entera?

Todo consiste en dividir el rectángulo en tres partes iguales y añadirle una de esas partes para tener la unidad completa.

Tomando el segundo rectángulo como unidad, el primero son los tres cuartos.

Si tomamos el rectángulo primero como unidad, el segundo rectángulo son los cuatro tercios, ya que la unidad se divide en tres partes y tomamos cuatro.

Las fracciones 3/4 y 4/3 son **inversas** porque al tomar de la unidad los tres cuartos y después los cuatro tercios nos resulta nuevamente la unidad.

$$\frac{3}{4} \text{ de } \frac{4}{3} \text{ es } 1 \qquad \frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = 1$$

El producto de dos fracciones inversas es igual a la unidad.

División de fracciones

Para dividir fracciones nos basamos en las fracciones inversas, haciendo los siguientes pasos:

1.º Ponemos la división en forma de fracción.	$\frac{3}{4} : \frac{1}{2} = \frac{3/4}{1/2}$
2.º Multiplicamos numerador y denominador por la fracción inversa del denominador (2/1).	$\frac{3/4 \times 2/1}{1/2 \times 2/1}$
3.º El denominador es el producto de dos fracciones inversas, luego es 1.	$\frac{3/4 \times 2/1}{1}$
4.º El dividir por 1 no modifica nada.	$\frac{3}{4} \times \frac{2}{1}$
5.º Se multiplican los numeradores y denominadores.	$\frac{3}{4} \times \frac{2}{1} = \frac{6}{4}$

Para dividir dos fracciones $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ se multiplica la primera por la inversa de la segunda.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

Figura 3.17. Tomado de García, Vázquez, Gil y Nortes (1996, p. 53)

6. COCIENTE DE FRACCIONES

Del área al cociente de fracciones

La división es la operación cuyo proceso es contrario al de la multiplicación.

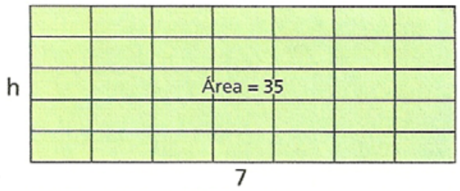
Si nos dan ahora el área de un rectángulo y una de sus dimensiones, por ejemplo, la base, se puede hallar la altura del rectángulo. Para ello basta dividir el área por la medida de la base.

En este *primer rectángulo* se tiene:

El área del rectángulo mide 35.

La base mide 7.

La altura del rectángulo medirá $35 : 7 = 5$.

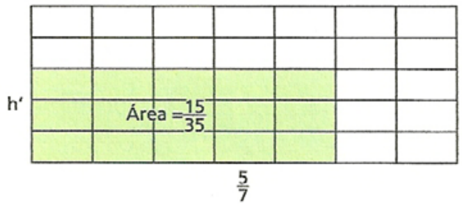


En este *segundo rectángulo* se tiene:

El área del rectángulo coloreado mide $\frac{15}{35}$.

La base mide $\frac{5}{7}$.

La altura del rectángulo medirá $\frac{15}{35} : \frac{5}{7}$.



Por otra parte, esta altura mide $\frac{3}{5}$.

Si estos dos procesos tienen que dar el mismo resultado, debe ser:

$$\frac{15}{35} : \frac{5}{7} = \frac{15 : 5}{35 : 7} = \frac{3}{5}$$

Obteniendo una fórmula general

Si el numerador y el denominador del dividendo **no son múltiplos de los del divisor**, se procede así para obtener la regla que se utiliza normalmente:

$$\frac{3}{5} : \frac{4}{7} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 7}{5 \cdot 4 \cdot 7} : \frac{4}{7} = \frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 4} = \frac{21}{20}$$

Observa el proceso seguido:

— Para que el numerador del dividendo sea divisible por 4 se multiplica el numerador y el denominador de la fracción por 4.

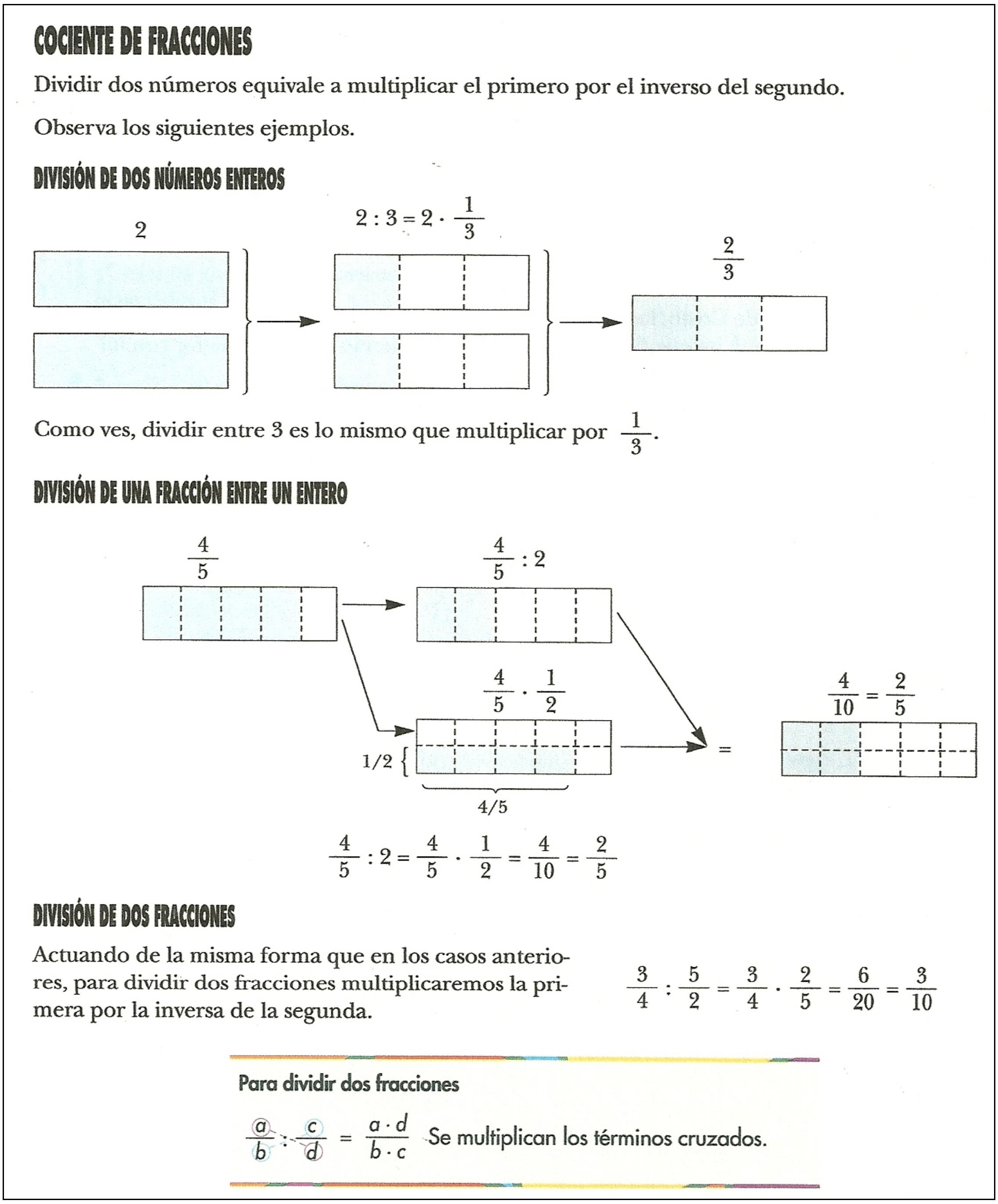
— Para que el denominador del dividendo sea divisible por 7 se multiplica el numerador y el denominador por 7.

El cociente de dos fracciones es otra fracción que tiene:

- Por numerador, el producto de los extremos.
- Por denominador, el producto de los medios.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Figura 3.18. Tomado de Anzola y Vizmanos (1997, p. 25)



COCIENTE DE FRACCIONES

Dividir dos números equivale a multiplicar el primero por el inverso del segundo.

Observa los siguientes ejemplos.

DIVISIÓN DE DOS NÚMEROS ENTEROS

Como ves, dividir entre 3 es lo mismo que multiplicar por $\frac{1}{3}$.

DIVISIÓN DE UNA FRACCIÓN ENTRE UN ENTERO

$$\frac{4}{5} : 2 = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

DIVISIÓN DE DOS FRACCIONES

Actuando de la misma forma que en los casos anteriores, para dividir dos fracciones multiplicaremos la primera por la inversa de la segunda.

$$\frac{3}{4} : \frac{5}{2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

Para dividir dos fracciones

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$ Se multiplican los términos cruzados.

Figura 3.19. Tomado de Colera, García y otros (2000, p. 87)

3.3. SÍNTESIS DE LAS TRES VARIABLES DE ENSEÑANZA

Por medio de las tablas siguientes se hace una síntesis de los resultados encontrados en el análisis de los textos de enseñanza con respecto a las tres variables de enseñanza, algoritmos, sentidos de uso y modelos semánticos, y representaciones, descritas en este capítulo.

ALGORITMOS	
adf1. Reducción a común denominador y división de numeradores	• Caso reglado • Caso razonado
adf2. Productos cruzados	
adf3. Inversión de la multiplicación	• Caso reglado: invertir y multiplicar • Caso razonado: multiplicación por el inverso del divisor
adf4. Uso de la unidad fraccionaria	
adf5. Conversión de las fracciones en decimales	
adf6. Uso del protocolo de la calculadora científica	

TABLA 3.9. La variable algoritmos

REPRESENTACIONES		
1. Parte–todo	1.1. Continua	• Rectangular • Circular • Poligonal
	1.2 Discreta	
2. Recta numérica		

TABLA 3.10. La variable representaciones

SENTIDOS DE USO DE FRACCIÓN	
Sentido de uso	Formas textuales asociadas
suf1. Razón	• Relación multiplicativa entre numerador y denominador • Comparación parte – parte
suf2. Parte–todo	• Una o varias partes de un todo
suf3. Medida	• Una o varias partes de la unidad de medida
suf4. Cociente	• Cociente de la división entre dos cantidades n y p, cuando n no es múltiplo de p • División indicada • Resto de la división de un número menor por otro mayor
suf5. Operador	Multiplicar por el numerador y dividir por el denominador, o viceversa

TABLA 3.11. La variable sentidos de uso de fracción

SENTIDOS DE USO DE DIVISIÓN DE NATURALES	
Modelo semántico	Formas textuales asociadas
msdn1. Partición	• Partir o repartir en partes iguales
msdn2. Medida	• Averiguar cuantas veces cabe o está contenido un número en otro • Resta repetida
msdn3. Inversión de la multiplicación	• Inversa del producto de factores: factor perdido • Inversa de la adición repetida: resta repetida • Inversa del producto cartesiano
msdn4. Inversión del factor multiplicativo	• Hacer tantas veces menor.
msdn5. Proporción de valor unitario desconocido	• El número que es a la unidad como el dividendo es al divisor.
msdn6. Proporción de valor unitario conocido	• El número que es al dividendo como la unidad es al divisor.

TABLA 3.12. La variable sentidos de uso de división de naturales

SENTIDOS DE USO DE LA DIVISIÓN DE FRACCIONES	
Modelo semántico	Formas textuales asociadas
msdf1. Partición	• Determinar el tamaño de cada una de las partes, cuando se sabe el número de partes (que debe ser entero).
msdf2. Medida	• Averiguar cuántas veces cabe el divisor en el dividendo • Averiguar cuántas veces contiene el dividendo al divisor
msdf3. Inversión de la multiplicación. Factor perdido	• Forma aritmética • Forma algebraica. • Forma estructural
msdf4. Inversión del factor multiplicativo	• Hacer el dividendo tantas veces menor como indica el numerador del divisor y tantas veces mayor como indica el denominador del divisor.
msdf5. Proporción de valor unitario desconocido	• El dividendo es al divisor como el cociente es a la unidad. $\frac{D}{d}=\frac{C}{1}$. Averiguar cuántas unidades del dividendo hay por cada unidad del divisor.
msdf6. Proporción de valor unitario conocido	• El dividendo es al cociente como el divisor es a la unidad. $\frac{D}{C}=\frac{d}{1}$.

TABLA 3.13. La variable sentidos de uso de la división de fracciones

CAPÍTULO **4**

Variables de enseñanza de la división de fracciones: los problemas

El tema central de este capítulo es la descripción detallada de los valores de la variable problemas multiplicativos relacionados con la división de fracciones que es resultado del análisis de libros y textos de enseñanza llevado a cabo, parte del cual ya se ha expuesto en el capítulo anterior acerca de las variables algoritmos, sentidos de uso y representaciones en la enseñanza de la división de fracciones.

El análisis de los problemas localizados en los libros antiguos y en los textos de enseñanza se desarrolló en tres fases, las cuales se describen a grandes rasgos en los siguientes párrafos.

Primera fase.- Se identificaron en los libros consultados todos los problemas en los que está involucrada la división de fracciones, intentando seleccionar, en una primera lectura, los que parecían diferentes. Como resultado de ese proceso se obtuvo una base de datos conformada por 80 problemas.

Segunda fase.- Con el propósito de estudiar más a fondo los problemas identificados en la primera fase, se identificaron criterios que sirvieran para agruparlos y como resultado de esa búsqueda se determinaron las tres componentes siguientes: estructura dimensional, contextos y tipología de los datos.

1. Estructura dimensional de los problemas, en los sentidos de Vergnaud (1991) y de Schwarz (1981 y 1988). En relación a esta componente los problemas se clasificaron atendiendo al número de espacios de medida, a la correspondencia sagital (escalar o funcional) o cartesiana entre ellos, a la naturaleza extensiva o intensiva de las cantidades que intervienen en el problema y a sus interrelaciones.
2. Contextos. Los problemas se distinguieron tomando en cuenta las siguientes características del enunciado: operación (enunciado en el que sólo intervienen números, sin situación), reparto y partes (enunciado en el que se hace alusión a la acción de repartir o en el que lo importante es hacer una partición) y métrico

(enunciado en el que se presenta una situación en la que se pregunta por una medida extensiva –longitud, área, …- o por una medida intensiva – velocidad, densidad, …-

3. Tipología de los datos. A cada problema se le asignó uno de los siguientes códigos Q/Z, Z/Q, Q/Q, Z/M, Q/M, M/Q, M/Z y M/M, donde Q, Z y M indican que el dato es fracción, entero o mixto, respectivamente, con la intención de poner énfasis en el tipo de números involucrados en la división de fracciones.

Tercera fase.- Se seleccionaron problemas de manera que hubiera un representante de cada valor de cada componente de la variable. En las tablas 4.1 a 4.6 aparecen los resultados del análisis; cabe mencionar que se organizaron los problemas por orden cronológico tomando en cuenta las fechas de los documentos en donde se encuentran.

Con la intención de caracterizar e identificar y ejemplificar cada valor de las componentes de la variable problemas, se incluye en este capítulo el resultado de las tres fases del análisis, mostrando los problemas seleccionados para cada uno de ellos.

CÓD	ENUNCIADO
P1	**Monedas** Si 5 ff (florines) $\frac{1}{2}$ valen 3 fr (francos) $\frac{2}{3}$, ¿cuántos francos valdrán 20 ff $\frac{3}{4}$? (Jehan Certain, 1455?)
P2	**Escalas** a) Si 3 fuesen la mitad de 10, ¿qué será la mitad de 8? b) Si los 2 tercios de 9 son 2 y medio, ¿qué serán los ¾ de doce? (Pérez de Moya, 1562, libro II, Cap. XXIII)
P3	**Compra de tela 2** Un sugeto ha comprado un retal de paño de 6 varas y $\frac{2}{3}$ en 538 reales y $\frac{1}{2}$; averiguar á cómo le sale la vara. (Vallejo, 1813, p. 122)
P4	**Azúcar** 3/4 de arroba de azúcar costaron 32 reales, ¿a cuánto salió la arroba? (Fernández y Cardín, 1863, p. 65)
P5	**Tejedor** Un tejedor se comprometió a hacer una pieza de lanilla cuyo tiro debía ser 60 metros; mas al haber tejido los 7/9, negóse al cumplimiento de lo convenido, recibiendo 80 pesetas. ¿Cuánto hubiera cobrado concluyendo dicho trabajo? (Dalmau Carles, 1898, p. 152)

TABLA 4.1 Problemas de textos, parte 1

COD	ENUNCIADO
P6	**Azafrán** Se han comprado 3/8 de Hg. de azafrán por 7/9 de peseta. ¿A cuánto resulta el Hg? (Dalmau Carles, 1898, p. 152)
P7	**Reparto 1** Cinco niños han de repartirse 11/12 de peseta. ¿Cuánto corresponderá a cada uno? (Dalmau Carles, 1898, p. 152)
P8	**Compra 2** Por la venta de 3/9 de litro de cierto elixir, se han cobrado 5/7 de peseta. ¿A cuánto resulta el litro? (Dalmau Carles, 1898, p. 153)
P9	**Compra 3** Habiendo satisfecho 26 $^{3}/_{4}$ pesetas por 12 kgs de turrón, ¿a cuánto resulta el kilo? (Dalmau Carles, 1898, p. 153)
P10	**Compra 4** Si 1 dm de paño vale 1/4 de peseta, ¿cuántos dms. Se comprarán con 25/26 de peseta? (Dalmau Carles, 1898, p. 153)
P11	**Compra 5** Siendo 2/26 de peseta el precio de 1 gramo de anilina, ¿qué cantidad de anilina se podrá adquirir con 7/8 de peseta? (Dalmau Carles, 1898, p. 153)
P12	**Compra 8** Un vendedor de huevos cobró 728 pesetas por cierta partida que había vendido a 3/5 de peseta la docena. ¿Cuántos huevos había vendido? (Dalmau Carles, 1898, p. 153)
P13	**Locomotoras** Una locomotora recorre 26 km por hora, y otra, en 2 $^{7}/_{12}$ horas, recorre una distancia de 65 $^{1}/_{2}$ km. Dígase cuál de las dos marcha con mayor velocidad. (Dalmau Carles, 1898, p. 211)
P14	**Papel pintado** Para empapelar un salón, se han necesitado 300 m de un papel cuyo ancho es 3/4 de metro. ¿Cuántos metros se necesitarían de otro papel cuyo ancho es 2/3 de metro? (Dalmau Carles, 1898, p. 213)
P15	**Peso de la torta** 3/7 de torta pesan 2/9 de kilo. ¿Cuánto pesa la torta? (Rey Pastor y Puig Adam, 1932, pp. 211 y 212)
P16	**Porción de torta** Si cada torta pesa 3/7 de kilo, ¿qué porción de torta tendré con 2/9 de kilo? (Rey Pastor y Puig Adam, 1932, pp. 211 y 212).

TABLA 4.2 Problemas de textos, parte 2

COD	ENUNCIADO
P17	**El otro** El producto de dos números es 76 1/8. Si uno es 4/9, ¿cuál es el otro? (Edelvives, 1934, p. 131)
P18	**Octavos** ¿Cuántos octavos hay en 14 3/8? (Edelvives, 1934, p. 137)
P19	**Propiedad** ¿Cuál es el valor de las 7/8 partes de una propiedad cuya mitad cuesta 7568 pesetas? (Edelvives, 1934, p. 244)
P20	**Ecuación** Hallar el valor de x en la expresión: $5/6 \times x = 3/4$ (Edelvives, 1934, p. 244).
P21	**Carretera** Las 3/4 partes de una carretera miden 3 5/8 km. ¿Cuál es la longitud total? (Edelvives, 1934, p. 244)
P22	**Vasija** Se echaron en una vasija primero 3 2/5 litros, y luego 5 3/4 litros, con lo cual alcanzó el líquido las 3/5 partes de la altura. ¿Cuál es la cabida de la vasija? (Edelvives, 1934, p. 246)
P23	**Camino** Un peatón ha empleado 3 1/5 horas para recorrer las 3/7 partes del trayecto emprendido. ¿Qué fracción del camino le queda por recorrer después de andar 6 horas? (Edelvives, 1934, p. 247)
P24	**Cafetera** Una cocinera vierte 1/3 de litro de agua en una cafetera. ¿Cuánto ha de añadir para acabar de llenarla, si lo vertido ocupa las 2/5 partes de la misma? (Edelvives, 1934, p. 250)
P25	**Obra 1** Un obrero teje 3/4 de metro en una hora. ¿Cuántas horas empleará para tejer 16 1/2 metros? (Bruño, 1940, p. 133)
P26	**Rebaño** Los 3/25 de un rebaño suman 42 carneros; ¿cuántos carneros representan los 5/7? (Bruño, 1940, p. 134)
P27	**Obra 4** Se ha necesitado 12 horas para hacer los 3/7 de una obra; ¿qué tiempo se necesitará para concluir lo restante? (Bruño, 1940, p. 134)

TABLA 4.3 Problemas de textos, parte 3

COD	ENUNCIADO
P28	**Edades** Los 15 1/2 años que tiene Julio son los 3/5 de la edad de Luis; ¿cuántos años tiene Luis? (Bruño, 1940, p. 134)
P29	**Obra 5** Un obrero teje 3 5/6 metros de tela en 4 horas. ¿Qué tiempo empleará en hacer 4/5 de metro? (Bruño, 1940, p. 136)
P30	**Dos trenes** Un tren que lleva la velocidad de 14 3/7 leguas por hora, emplea 13 1/6 horas para recorrer cierta distancia; ¿cuántas horas empleará otro tren para recorrer el mismo trayecto si en una hora recorre 9 1/3 leguas? (Bruño, 1940, p.136)
P31	**Un galgo** Un galgo da 154 saltos en los dos tercios de un minuto; ¿cuántos saltos da en 6 minutos y medio? (Bruño, 1940, p. 251)
P32	**Gastos consecutivos 2** Un obrero ha gastado en manutención 1/3 de lo que ha ganado durante el año, 1/8 para vestuario y alquiler y 1/16 en otros gastos; sus ahorros ascienden a 318 ptas.; ¿cuánto había ganado durante este año? (Bruño, 1949, p. 332)
P33	**Un campo** Un campo tiene una longitud de 1 pu, ½ pu, 1/3 pu, ¼ pu y 1/5 pu. Si su área es de 240 pu cuadrados, ¿cuál es su anchura? (Smith, 1958, Vol. II, p. 215).
P34	**Multiplicar añadiendo** ¿Por qué número se multiplica 3/5 añadiendo 5 a cada uno de sus términos? ¿Por qué número se divide? (Bruño, 1958, p. 111)
P35	**Dos grifos** Un tonel tiene una cabida de 300 litros; un grifo que da 5 litros en 3 minutos y otro que da 7 en 5 minutos se abren al mismo tiempo para llenarlo. Dígase: 1º Cuántos minutos tardarán en llenarlo, 2º cuántos litros habrá dado cada grifo (Bruño, 1958, p. 116).
P36	**Ventas consecutivas 1** Un tendero ha vendido los $\frac{2}{5}$ de un cesto de naranjas, luego $\frac{1}{2}$ del resto y finalmente los $\frac{2}{3}$ del nuevo resto. Si entonces tiene 15 naranjas, ¿cuántas había al principio? (Bruño, 1958, p. 127)

TABLA 4.4 Problemas de textos, parte 4

COD	ENUNCIADO
P37	**Herencia** Se ha repartido una herencia del siguiente modo: el primer heredero recibe la $\frac{1}{3}$ parte; el segundo, la $\frac{1}{4}$ parte del resto; el tercero recibe la $\frac{1}{5}$ parte del nuevo resto, finalmente, el cuarto recibe 30000 ptas. ¿Cuánto ha recibido cada uno de los tres primeros herederos? (Bruño, 1958, p. 148)
P38	**Un grifo y un desagüe** Una fuente puede llenar un depósito en 7 horas, y un grifo vaciarlo en 11. Estando 1/3 del depósito lleno, se deja correr el agua de la fuente y se abre el grifo de desagüe. ¿Al cabo de cuántas horas se llenarán los $\frac{3}{4}$ del depósito? (Bruño, 1958, p. 154)
P39	**Paquetes** Se tiene una cuerda de 42 ½ metros con objeto de atar paquetes. ¿Cuántos paquetes se podrán atar, sabiendo que uno gasta 3 ½ metros? (García Roca y otros, 1966, 4ª edición, p. 17)
P40	**Velocidad** ¿Cuál es la velocidad de un coche que en 1 1/4 horas recorre 90 3/4 kilómetros? (Adaptado de García Roca y otros, 1966, 4ª edición, p. 21)
P41	**Densidad** Hemos observado que 1 3/5 litros de una sustancia tóxica obtenida en el laboratorio pesan 2 3/4 kilos. ¿Cuál es la densidad de esta sustancia? (Adaptado de García Roca y otros, 1966, 4ª edición, p. 21)
P42	**Multiplicación y división** a) ¿Por qué número se ha de multiplicar la fracción 3/4 para obtener el producto 5/7? b) El dividendo de una división es 4/7 y el cociente 20/21. ¿Cuál es el divisor? (Valdivia Ureña y García Roca, 1969, p. 43)
P43	**Chalecos y vino** a) Un sastre tiene una pieza de paño de 42 metros para hacer chalecos. Sabiendo que en cada uno emplea 4/7 metros de paño, ¿cuántos chalecos podrá hacer? b) Si los 3/8 de hl de vino valen 79 pesetas, ¿a qué precio será pagado cada hl? (Valdivia Ureña y García Roca, 1969, p. 43)
P44	**Fuentes** Una fuente da en 14 horas y media 8/9 de kl. de agua, y otra fuente da en 9 1/4 horas 5/6 kl. ¿Cuál de las dos fuentes da más agua? (Valdivia Ureña y García Roca, 1969, p. 43)
P45	**Sardinas** A peseta y media la sardina y media, ¿cuántas pesetas y media constarían siete sardinas y media? (Grupo Cero, 1988, p. 117).

TABLA 4.5 Problemas de textos, parte 5

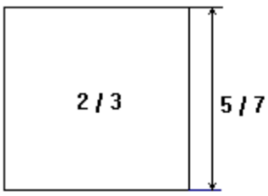
COD	ENUNCIADO
P46	**Carrera de obstáculos** En una carrera de 8/3 km se quieren colocar los obstáculos cada 2/5 km. ¿Cuántos obstáculos serán necesarios? (Nieto, P, Guevara, F, y otros, 1994, p. 70).
P47	**Perfume** Un frasco de perfume tiene una capacidad de $\frac{1}{20}$ de litro. ¿Cuántos frascos de perfume se pueden llenar con el contenido de una botella de $\frac{3}{4}$ de litro? (Colera, J, Gaztelu, I y otros, 1997, p. 46)
P48	**Pintando una madera** Podemos pintar 2/5 m^2 de madera con 3/4 dl de pintura. ¿Cuánta superficie de madera podemos pintar con 1 dl de pintura? (Yamaguchi y Jwasaki, 1999, Vol. IV. p. 4-341).
P49	**Las dos cintas (2)** La longitud de la cinta A es 3/5 m y la de la cinta B es 2/7 m. ¿Cuántas veces la cinta A es tan larga como la cinta B? (Yamaguchi y Jwasaki, 1999, Vol. IV. p. 4-341).
P50	**Desagüe** El agua de un depósito se pierde por un desagüe a razón de 1/2 litro por cada 3/4 de hora. ¿Cuánta agua se pierde por hora? (Adaptado de Yamaguchi y Jwasaki, 1999).
P51	**Trigo** Sabiendo que la cantidad de harina que se obtiene del trigo es los 17/20 de su peso, y la cantidad de pan obtenido de la harina es 6/5 del peso de ésta, ¿cuánto trigo se necesita para obtener 1530 kg de pan? (Esteve, R, Deusa, M y otros, 2002, p. 28).
P52	**La mesa de Ana** La superficie de la mesa de Ana es un rectángulo que mide 2/3 de u^2. Sabiendo que uno de sus lados mide 5/7 de u, averigua gráficamente cuánto mide el otro lado.  (Gairín, J.M. y Sancho, J, 2002, pp. 244–247)

TABLA 4.6 Problemas de textos, parte 6

4.1 COMPONENTES DE LA VARIABLE PROBLEMAS

En este apartado se describen los valores de las componentes de la variable problemas. Tal como se indicó al principio del capítulo, dichas componentes son tres: estructura, contextos y tipología de los datos.

4.1.1 Estructura de los problemas (E)

Utilizando el análisis estructural de Vergnaud (1983, 1988) podemos afirmar que la estructura general de estos problemas responde a tres categorías y a diversos tipos, los cuales se describen en las siguientes secciones:

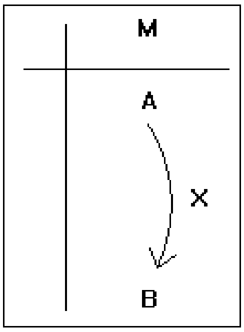
4.1.1.1 Problemas multiplicativos sobre un único espacio de medida (E1)

Son problemas en los que, tanto los datos como el valor desconocido pertenecen a un mismo espacio de medida. Puede ocurrir que el espacio de medida represente una magnitud continua o discreta. Un caso particular es aquél en que el espacio de medida es el conjunto de los números racionales, es decir, la recta numérica racional.

Los problemas de esta categoría pueden ser de dos tipos, los que se describen en los siguientes apartados de este capítulo:

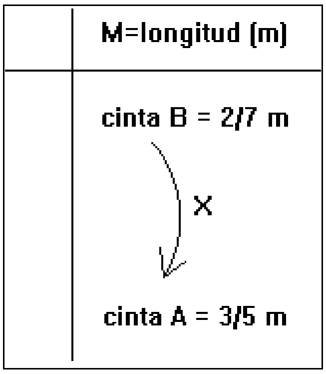
4.1.1.1.1 Cálculo del escalar (E1.1)

Se conocen dos cantidades A y B de una misma magnitud (o dos números racionales) y se pide hallar el factor multiplicativo escalar X que los liga, ver el esquema siguiente:



P49	**Las dos cintas (2)** La longitud de la cinta A es 3/5 m y la de la cinta B es 2/7 m. ¿Cuántas veces la cinta A es tan larga como la cinta B? (Yamaguchi y Jwasaki, 1999, Vol. IV. p. 4-341).

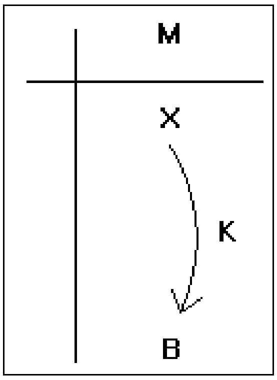
En este ejemplo, hay un único espacio de medida, que es la longitud en metros, y conocemos dos cantidades: longitud de la cinta A=3/5 y longitud de la cinta B=2/7 y el valor desconocido es el factor multiplicativo escalar X. Así, en la multiplicación $\frac{2}{7} \times X = \frac{3}{5}$, los papeles de 2/7 y X no son intercambiables, ya que X es el número de veces que hay que iterar 2/7 para llegar a 3/5. Es decir, 2/7 es una cantidad del espacio de medida y X es un factor multiplicativo escalar.



Los otros problemas de esta clase localizados en los textos son: P18 y P42.

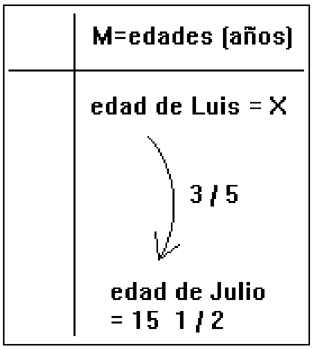
4.1.1.1.2.- Cálculo de la medida (E1.2)

En este caso se conoce la imagen transformada de una cantidad de la magnitud y el factor multiplicativo escalar (ambos números racionales) y se pide la medida sobre la que opera el factor multiplicativo escalar:



P28	**Edades** Los 15 1/2 años que tiene Julio son los 3/5 de la edad de Luis; ¿cuántos años tiene Luis? (Bruño, 1940, p. 134)

En este ejemplo, el único espacio de medida que interviene es el de las edades y se conocen una cantidad (la edad de Julio=15 ½ años) y el factor multiplicativo escalar K=3/5, siendo el valor desconocido la cantidad del mismo espacio de medida (la edad de Luis) sobre la que opera el factor escalar. Los papeles de X y 3/5 no son intercambiables, ya que X es una medida y 3/5 es un factor escalar.



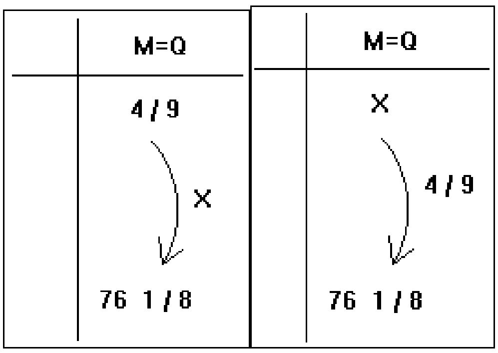
Los otros problemas de esta clase localizados en los textos son: P32, P36 y P37.

4.1.1.1.3.- Problemas con escalar y medida indiferenciables (E1.3)

En este caso el único espacio de medida es el conjunto Q de los números racionales. Los problemas tienen la misma estructura que en E1.1 y E1.2, pero los datos son numéricos, no ubicados en ningún contexto geométrico, algebraico o situacional y, por tanto, pueden encuadrarse tanto en la clase “cálculo del escalar” como en la clase “cálculo de la medida”, puesto que cada factor puede actuar como escalar o como medida.

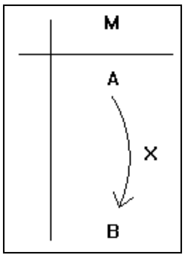
P17	**El otro** El producto de dos números es 76 1/8. Si uno es 4/9, ¿cuál es el otro? (Edelvives, 1934, p. 131)

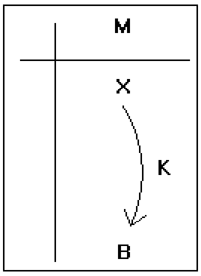
En este ejemplo el espacio de medida es el conjunto Q de los números racionales. Se conocen dos datos (el producto 76 1/8 y un factor, 4/9) y el valor desconocido es el otro factor X. Pero ahora tanto X como 4/9 se pueden interpretar como factor multiplicativo escalar o como medida, de forma que el valor desconocido puede ser el factor escalar (caso E1.1) o la medida (caso E1.2), ver esquema de cada caso a continuación:

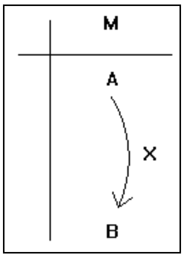


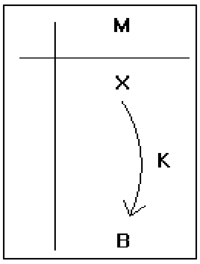
Los otros problemas de esta clase localizados en los textos son: P20 y P34.

La siguiente tabla resume las características de los problemas multiplicativos de división de fracciones sobre un único espacio de medida localizados en los textos:

<table>
<tr>
<td>

E1.1. Cálculo del escalar</td>
<td>

E1.2. Cálculo de la medida</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

o bien


E1.3. Problemas con escalar y medida indiferenciables</td>
</tr>
</table>

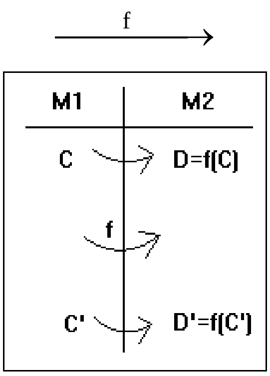
TABLA 4.7 Problemas multiplicativos sobre un espacio de medida

4.1.1.2 Problemas multiplicativos sobre dos espacios de medida (E2)

Como ya se mencionó en el capítulo 2, en los problemas que pertenecen a esta categoría intervienen datos de dos espacios de medida M1 y M2. Así mismo se dijo que pueden presentarse dos casos: Isomorfismo de medidas y Producto de medidas.

4.1.1.2.1 Isomorfismo de medidas (E2.1)

En esta clase los espacios de medida M1 y M2 se representan por un esquema como el siguiente, de forma que existe una aplicación lineal f que aplica M1 en M2.



Entre los datos y la incógnita, intervienen cuatro cantidades (C, C’, D=f(C) y D’=f(C’)), dos de ellas (C, C’) pertenecen a un mismo espacio de medida y las otras dos (D=f(C), D’=f(C’)) pertenecen al otro espacio de medida. La relación entre las cuatro cantidades se puede expresar en forma de proporción $\frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$ ó $\frac{C}{D} = \frac{C'}{D'}$. Puede ocurrir que los espacios de medida representen magnitudes continuas o discretas.

Hay tres tipos de problemas sobre Isomorfismo de medida: problemas de regla de tres, problemas de división con valor unitario desconocido y problemas de división con valor unitario conocido.

- **Problemas de regla de tres (E2.1.1)**

Los problemas de regla de tres son aquellos en los que intervienen tres datos (dos pertenecientes a un mismo espacio de medida, y otro en el otro espacio de medida) y un valor desconocido. Se pueden representar por medio del siguiente esquema:

$$\xrightarrow{f}$$

M1	M2
C	D=f(C)
C'	X=f(C')

Se conocen dos datos, uno en cada espacio de medida, C en M1 y D=f(C) en M2 y se pide hallar el valor desconocido X=f(C') en M2 que corresponde al valor conocido C' de M1. Los siguientes ejemplos tienen la misma estructura, aunque el orden en que aparecen los datos y la pregunta en el enunciado son diferentes.

P1	**Monedas** Si 5 ff (florines) $\frac{1}{2}$ valen 3 fr (francos) $\frac{2}{3}$, ¿cuántos francos valdrán 20 ff $\frac{3}{4}$? (Jehan Certain, 1455)

En este problema hay dos espacios de medida, M1=florines, M2=francos, y se indica la relación de correspondencia existente entre la cantidad $5\frac{1}{2}$ florines y $3\frac{2}{3}$ francos. Se pregunta por la cantidad de francos que corresponde a $20\frac{3}{4}$ florines. El esquema asociado es el siguiente:

M1=florines	M2=francos
5 1/2	3 2/3
20 3/4	X

P31	**Un galgo** Un galgo da 154 saltos en los dos tercios de un minuto; ¿cuántos saltos da en 6 minutos y medio? (Bruño, 1940, p. 251)

En este ejemplo los dos espacios de medida son M1=saltos y M2=tiempo (minutos), de forma que se conoce la relación de correspondencia entre 154 saltos (M1) y 2/3 de minuto (M2) y se pide la cantidad de saltos (M1) que corresponde a un tiempo de 6 minutos y medio (M2). El esquema del problema es el siguiente:

M1=saltos	M2=tiempo (min)
154	2/3
X	6 1/2

Como caso particular, puede ocurrir que los dos espacios de medida M1 y M2 coincidan y sean idénticos al conjunto Q de los números racionales, tal como ocurre en el siguiente ejemplo:

P2	**Escalas** a) Si 3 fuesen la mitad de 10, ¿qué será la mitad de 8? b) Si los 2 tercios de 9 son 2 y medio, ¿qué serán los ¾ de doce? (Pérez de Moya, 1562, libro II, Cap. XXIII)

El apartado a) es equivalente al siguiente enunciado: “si 3 fuese 5, entonces 4 ¿a qué sería igual?, cuyo esquema es de la izquierda. El apartado b) es equivalente al siguiente enunciado: “si 6 fuese $2\,{}^1\!/_2$, entonces 9 ¿a qué sería igual?, cuyo esquema es de la derecha.

M1=Q	M2=Q
3	10 / 2 = 5
X	8 / 2 = 4

M1=Q	M2=Q
2/3 de 9 = 6	2 1/2
3/4 de 12 = 9	X

Se observa que solamente interviene un espacio de medida, el conjunto Q de los números racionales, pero el enunciado invita a plantear el problema con una estructura de isomorfismo de medidas, y por tanto, con dos espacios de medida M1 y M2 coincidentes.
Los otros problemas de esta clase localizados en los textos son los siguientes: P12, P19, P23, P24, P26, P27 y P29.

- **Problemas de división (E2.1.2)**

Los problemas de división en el isomorfismo de medidas se obtienen como un caso particular de los problemas de regla de tres vistos en el apartado anterior, en el caso en que uno de los datos sea la unidad. En efecto, según cuál sea la posición de la unidad y del valor desconocido, obtenemos tres tipos de problemas dados por los siguientes esquemas:

M1	M2
1	D
C'	X

Esquema 1

M1	M2
1	X
C	D

Esquema 2

M1	M2
1	D
X	D'

Esquema 3

El problema que corresponde al primer esquema es de multiplicar; los que corresponden a los otros dos esquemas son de dividir. Por tanto, un esquema de regla de tres da origen a dos problemas de división y uno de multiplicación. Además, los dos problemas de división son diferentes: en un caso se conoce el valor unitario D=f(1) (es decir la cantidad del espacio de medida M2 que se corresponde con la unidad del otro espacio de medida M1), mientras que, en el otro caso se desconoce el valor unitario X=f(1). Los casos de división en los que se conoce el valor unitario los denominamos, tal como hace Vergnaud (1983), **división con valor unitario conocido** y los casos en que se desconoce el valor unitario los denominamos **división con valor unitario desconocido**. Así,

- El esquema 1 corresponde a un problema de multiplicación.
- Los esquemas 2 y 3 corresponden a problemas de división.
- El esquema 2 corresponde a un problema de división con valor unitario desconocido.
- El esquema 3 corresponde a un problema de división con valor unitario conocido.

En los enunciados de los problemas puede estar alterado el orden de aparición de los cuatro elementos, (C, D, 1 y X; o 1, D, X y D'), de forma que los esquemas anteriores no reflejan el orden literal de aparición en el enunciado.

- **Problemas de división con valor unitario desconocido (E2.1.2.1)**

Los problemas de división con valor unitario desconocido son aquellos en los que intervienen cuatro cantidades: dos datos (los dos pertenecientes a distintos espacios de medida), la unidad y una cantidad desconocida, que es el valor unitario, es decir la cantidad

X que se corresponde con la unidad. En la representación en forma de tabla de estos problemas siempre encontraremos la línea horizontal 1 → X. Según el orden literal en que aparezcan los datos y la pregunta en el enunciado del problema, pueden presentarse dos casos, que son equivalentes, que corresponden a los esquemas que aparecen a continuación.

M1	M2
1	X
C'	D'

M1	M2
C	D
1	X

En el primero, el enunciado sería del tipo: “¿qué cantidad de M2 corresponde a la unidad de M1 si se sabe que a la cantidad C’ de M1 le corresponde la cantidad D’ de M2?”. Mientras que, el enunciado correspondiente al segundo esquema sería del tipo: “Si a la cantidad C de M1 le corresponde la cantidad D de M2, ¿qué cantidad de M2 le corresponde a la unidad de M1?”

P15	**Peso de la torta** 3/7 de torta pesan 2/9 de kilo. ¿Cuánto pesa la torta? (Rey Pastor y Puig Adam, 1932, pp. 211 y 212)

Se designa por M1 el espacio de medida que indica la cantidad de torta y M2 el espacio de medida que indica el peso en kilos, entonces el esquema del problema es el siguiente:

M1=torta	M2=kilos
3 / 7	2 / 9
1	X

Por la posición del valor desconocido y de la unidad, el problema corresponde al caso de división con valor unitario desconocido.

P40	**Velocidad** ¿Cuál es la velocidad de un coche que en 1 1/4 horas recorre 90 3/4 kilómetros? (Adaptado de García Roca y otros, 1966, 4ª edición, p. 21)

El enunciado de este problema se puede reformular de la siguiente manera: "¿cuántos kilómetros recorre un coche en una hora, si en 1 1/4 horas recorre 90 ¾ kilómetros?", que corresponde al siguiente esquema:

M1=horas	M2=km
1	X
1 1/4	90 3/4

Los otros problemas de este tipo localizados en los textos son los siguientes: P3, P4, P5, P6, P7, P8, P9, P13, P21, P22, P41, P43b, P44, P48 y P50.

- **Problemas de división con valor unitario conocido (E2.1.2.2)**

Los problemas de división con valor unitario conocido son aquellos en los que intervienen cuatro cantidades: dos datos (los dos pertenecientes a un mismo espacio de medida), la unidad y una cantidad desconocida de un espacio de medida. El valor unitario (es decir la cantidad X que se corresponde con la unidad) es conocido. En la representación en forma de tabla de estos problemas nunca aparece la línea horizontal 1 → X. Según la posición de la unidad y de la cantidad desconocida, pueden presentarse dos casos, que son equivalentes, ver la siguiente representación:

M1	M2
X	D
1	D'

M1	M2
1	D
X	D'

En el de la izquierda, el enunciado es del tipo: "¿qué cantidad de M1 le corresponde a la cantidad D de M2 si a la unidad de M1 le corresponde la cantidad D' de M2?" Mientras que, en el segundo caso sería: "Si a la unidad de M1 le corresponde la cantidad D de M2, ¿qué cantidad de M1 corresponde a la cantidad D' de M2?"

P39	**Paquetes** Se tiene una cuerda de 42 ½ metros con objeto de atar paquetes. ¿Cuántos paquetes se podrán atar, sabiendo que uno gasta 3 ½ metros? (García Roca y otros, 1966, 4ª edición, p. 17)

En este segundo ejemplo, sea M1=número de paquetes, M2=longitud de la cuerda (metros). Se sabe el valor unitario, es decir que un paquete necesita 3 1/2 metros de cuerda. Se pregunta cuántos paquetes se pueden atar con 42 1/2 metros de cuerda. El esquema del problema corresponde al primer tipo de los señalados anteriormente, con el valor desconocido en la primera fila:

M1=paquetes	M2=metros
x	42 1/2
1	3 1/2

P16	**Porción de torta** Si cada torta pesa 3/7 de kilo, ¿qué porción de torta tendré con 2/9 de kilo? (Rey Pastor y Puig Adam, 1932, pp. 211 y 212).

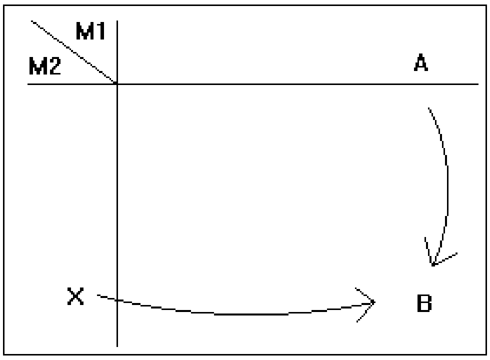
En este ejemplo, se toma M1=cantidad de torta, M2=peso en kilos. Entonces se conoce el valor unitario, es decir el peso de una torta y se pregunta qué parte de la torta tendrá un peso de 2/9 de kilo. El esquema del problema es del segundo tipo de los indicados anteriormente, es decir, con el valor desconocido en la segunda fila:

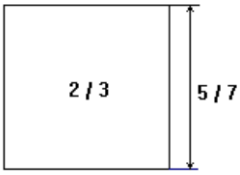
M1=torta	M2=kilos
1	3 / 7
x	2 / 9

Los otros problemas de este tipo localizados en los textos son los siguientes: P10, P11, P25, P30, P35, P38, P43a, P45, P46 y P47.

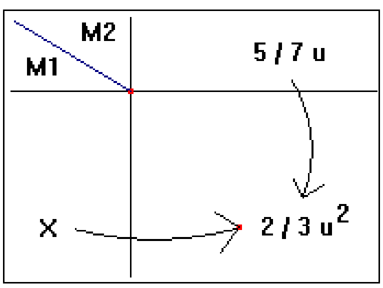
4.1.1.2.2.- Producto de medidas (E2.2)

En esta clase de problemas se conoce la cantidad de magnitud del producto cartesiano de dos espacios de medida y la cantidad de magnitud de uno de los espacios de medida y se pide la cantidad de magnitud del otro espacio de medida. Los espacios de medida M1 y M2 pueden ser continuos o discretos. El esquema general de esta clase de problemas es el siguiente:

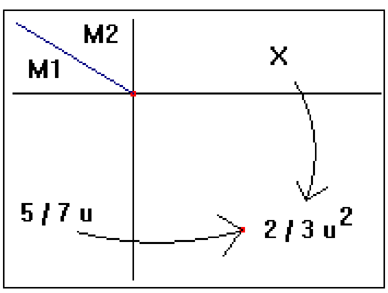


P52	**La mesa de Ana** La superficie de la mesa de Ana es un rectángulo que mide 2/3 de u^2. Sabiendo que uno de sus lados mide 5/7 de u, averigua gráficamente cuánto mide el otro lado.  (Gairín, J.M. y Sancho, J, 2002, pp. 244–247)

En este ejemplo consideramos los espacios de medida M1=altura del rectángulo, M2=base del rectángulo. El producto de los dos, M1xM2, representa el área del rectángulo. Los dos espacios de medida, M1, M2 corresponden a magnitudes continuas, al igual que el espacio producto M1xM2. Conocemos una cantidad de magnitud en M1xM2 (el área del rectángulo es 2/3) y una cantidad de magnitud en M1 (la altura del rectángulo es 5/7) o en M2 (la base del rectángulo es 5/7). Se trata, por tanto, de un problema simétrico que admite las dos interpretaciones. En la primera, el valor desconocido es la cantidad de magnitud correspondiente en M2 (la base del rectángulo); en la segunda, el valor desconocido es la cantidad de magnitud en M1 (la altura del rectángulo). A la primera interpretación le corresponde el esquema 1 y a la segunda el esquema 2:



esquema 1:
M1=altura
M2=base



esquema 2:
M1=altura
M2=base

Los otros problemas de esta clase localizados en los textos son los siguientes: P14 y P33.

La tabla 4.3 resume las características de los problemas multiplicativos de división de fracciones sobre dos espacios de medida localizados en los textos:

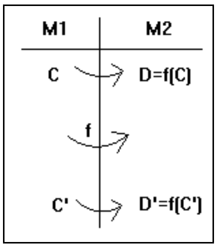
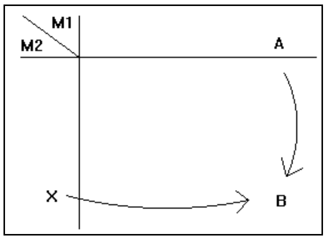
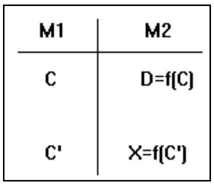
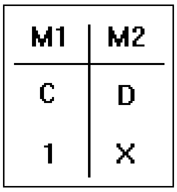
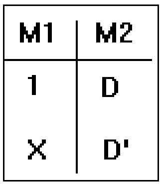
<table>
<tr><td colspan="3">E2.1 Isomorfismo de medidas
</td><td rowspan="3">E2.2 Producto de medidas
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">E2.1.1 Regla de tres
</td><td colspan="2">E2.1.2 División</td></tr>
<tr><td>E2.1.2.1 Valor unitario desconocido
</td><td>E2.1.2.2 Valor unitario conocido
</td></tr>
</table>

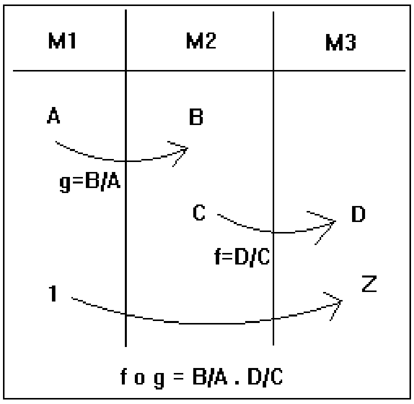
TABLA 4.3: Problemas multiplicativos sobre dos espacios de medida

4.1.1.3 Problemas multiplicativos sobre tres espacios de medida (E3)

En esta categoría de problemas se incluyen aquellos en los que intervienen tres espacios de medida M1, M2 y M3. Pueden ser de dos clases: Función compuesta o Proporcionalidad compuesta.

4.1.1.3.1 Función compuesta (E3.1)

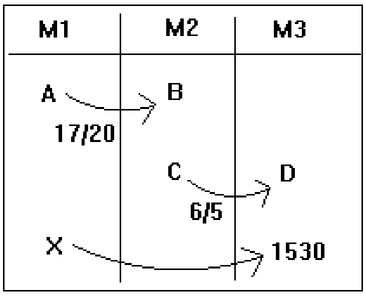
En los problemas de función compuesta cada espacio de medida es proporcional a los otros dos; así, M_3 es proporcional a M_1 y M_2, y M_2 es proporcional a M_1. La estructura viene dada por el siguiente esquema:



M3 es proporcional a M1 y M2, y M2 es proporcional a M1

P51	**Trigo** Sabiendo que la cantidad de harina que se obtiene del trigo es los 17/20 de su peso, y la cantidad de pan obtenido de la harina es 6/5 del peso de ésta, ¿cuánto trigo se necesita para obtener 1530 kg de pan? (Esteve, R, Deusa, M y otros, 2002, p. 28).

En este ejemplo (único problema de este tipo localizado en los libros) se considera M1=cantidad de trigo (kg), M2=cantidad de harina (kg), M3=cantidad de pan (kg). La cantidad de harina (M2) es proporcional a la cantidad de trigo (M1) (función lineal f dada por la fracción 17/20) y la cantidad de pan (M3) es proporcional a la cantidad de harina (M2) (función lineal g dada por la fracción 6/5). Por tanto, también la cantidad de pan (M3) es proporcional a la cantidad de trigo (M1), por medio de la composición de f y g. En este caso se conoce la cantidad de kilos de pan (1530 kg) y las dos funciones f = 17/20 y g=6/5 y se trata de hallar la cantidad de trigo X. El esquema correspondiente al problema es el siguiente:



4.1.1.3.2. Proporcionalidad compuesta (E3.2)

Son problemas cuya estructura corresponde a la combinación de proporciones por encadenamiento de las funciones que ligan las variables dos a dos. Si se dan, por ejemplo, tres espacios de medida: M_1, M_2 y M_3, en los problemas de proporcionalidad compuesta M_1 es proporcional a M_2 y M_3, pero M_2 no tiene por qué ser proporcional a M_3.

De este tipo no se ha localizado ningún problema de división de fracciones en los textos analizados.

En la tabla 4.4 se resumen los valores de la variable “estructura de los problemas”:

<table>
<tr><td rowspan="3">E1 Un espacio de medida</td><td colspan="3">E1.1 Cálculo del escalar</td></tr>
<tr><td colspan="3">E1.2 Cálculo de la medida</td></tr>
<tr><td colspan="3">E1.3 Problemas con escalar y medida indiferenciables</td></tr>
<tr><td rowspan="4">E2 Dos espacios de medida</td><td rowspan="3">E2.1 Isomorfismo de medidas</td><td colspan="2">E2.1.1 Regla de tres</td></tr>
<tr><td rowspan="2">E2.1.2 División</td><td>E2.1.2.1 Valor unitario desconocido</td></tr>
<tr><td>E2.1.2.2 Valor unitario conocido</td></tr>
<tr><td colspan="3">E2.2 Producto de medidas</td></tr>
<tr><td>E3 Tres espacios de medida</td><td colspan="3">E3.1. Función compuesta</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="3">E3.2. Proporción compuesta</td></tr>
</table>

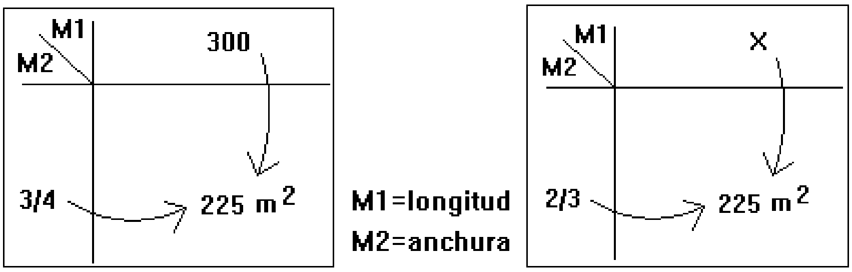
TABLA 4.4- Estructura de los problemas

- **Problemas de más de una etapa**

En los textos se han localizado también problemas de más de una etapa, en los que generalmente la primera etapa consiste en una multiplicación y la segunda etapa una división, aunque también se encuentran otros problemas en cuyas primeras etapas hay que hacer otras operaciones diferentes de la división de fracciones, pero que en la etapa final hay que efectuar una división de fracciones.

P14	**Papel pintado** Para empapelar un salón, se han necesitado 300 m de un papel cuyo ancho es 3/4 de metro. ¿Cuántos metros se necesitarían de otro papel cuyo ancho es 2/3 de metro? (Dalmau Carles, 1898, p. 213)

En una primera etapa se halla la superficie de papel pintado, multiplicando la longitud del papel (300 m) por su anchura (3/4 de metro). En la segunda etapa, conocida la superficie y conocida la nueva anchura, el problema consiste en hallar la longitud de papel necesaria para cubrir la misma superficie. Este problema es un producto de medidas (E2.2), tal como se señala en el esquema siguiente.



Sin embargo, el problema podría representarse como un isomorfismo de medida, pero sería un caso de proporcionalidad inversa, puesto que para una superficie dada, al aumentar la longitud disminuye la anchura y al disminuir la longitud aumenta la anchura del papel. Visto como proporcionalidad inversa el problema sería de una sola etapa si se aplica el método reglado, ver esquema correspondiente que se muestra a continuación.

M1=longitud	M2=anchura
300	3/4
X	2/3

P22	**Vasija** Se echaron en una vasija primero 3 2/5 litros, y luego 5 3/4 litros, con lo cual alcanzó el líquido las 3/5 partes de la altura. ¿Cuál es la cabida de la vasija? (Edelvives, 1934, p. 246)

Aquí hay una primera etapa en la que se debe sumar $3\frac{2}{5}+5\frac{3}{4}=\frac{183}{20}$ para averiguar la cantidad total de litros vertida. En la segunda etapa, hay que plantear el problema como un isomorfismo de medida del tipo **(**E2.1.2.1), es decir, un problema de división con valor unitario desconocido. El esquema correspondiente es el siguiente:

M1=vasija	M2=litros
3 / 5	183 / 20
1	X

P30	**Dos trenes** Un tren que lleva la velocidad de 14 3/7 leguas por hora, emplea 13 1/6 horas para recorrer cierta distancia; ¿cuántas horas empleará otro tren para recorrer el mismo trayecto si en una hora recorre 9 1/3 leguas? (Bruño, 1940, p.136)

Una primera etapa consiste en determinar el espacio recorrido por el primer tren, para lo que hay que efectuar la multiplicación $14\frac{3}{7}\times 13\frac{1}{6}=\frac{7979}{42}$. En la segunda etapa, se trata de un problema de división con valor unitario conocido (E2.1.2.2). El esquema correspondiente se muestra a continuación.

M1=tiempo (h)	M2=distancia (leguas)
1	9 1/3
X	7979 / 42

P32	**Gastos consecutivos 2** Un obrero ha gastado en manutención 1/3 de lo que ha ganado durante el año, 1/8 para vestuario y alquiler y 1/16 en otros gastos; sus ahorros ascienden a 318 ptas.; ¿cuánto había ganado durante este año? (Bruño, 1949, p. 332)

En la primera etapa se trata de averiguar qué fracción de su salario se ha gastado: $\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{25}{48}$, con objeto de hallar la fracción del salario que ahorró: $1-\frac{25}{48}=\frac{23}{48}$. En la segunda etapa, el problema se plantea como un problema de división con valor unitario desconocido (E2.1.2.1). A continuación se muestra el esquema correspondiente.

M1=salario	M2=pesetas
23 / 48	318
1	X

P33	**Un campo** Un campo tiene una longitud de 1 pu, ½ pu, 1/3 pu, ¼ pu y 1/5 pu. Si su área es de 240 pu cuadrados, ¿cuál es su anchura? (Smith, 1958, Vol. I, p. 32).

En la primera etapa hay que hallar la suma $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{137}{60}$ para averiguar la longitud del campo. En la segunda etapa, el problema se plantea como la inversión de un producto de medidas (E2.2) , según el siguiente esquema:

M1 \ M2	137 / 60
X	240 u ^{2}

M1=longitud
M2=anchura

Los otros problemas de más de una etapa extraídos de los textos estudiados son los siguientes: P35, P36, P37, P38 y P44.

4.1.2 Contextos (C)

En esta investigación se entiende por contexto una situación descrita en el enunciado del problema o tarea para cuya resolución es necesario efectuar una división de fracciones. En los libros revisados se han localizado tres tipos de contextos diferentes, en los apartados siguientes se describen e ilustran con problemas de esas características.

4.1.2.1 Contextos de operación (CO)

Los datos del problema son números que no hacen referencia a situaciones geométricas o algebraicas, tampoco a situaciones del entorno o de la vida real; el problema 42 es un ejemplo de este tipo de contexto.

P42	**Multiplicación y división** a) ¿Por qué número se ha de multiplicar la fracción 3/4 para obtener el producto 5/7? b) El dividendo de una división es 4/7 y el cociente 20/21. ¿Cuál es el divisor? (Valdivia Ureña y García Roca, 1969, p. 43)

Los otros problemas de esta categoría son: P2, P17, P18, P20 y P34.

4.1.2.2 Contextos de repartos y partes (RP)

Los problemas de esta categoría se refieren a particiones o repartos, o a situaciones en las que hay que considerar partes y operar con partes.

P7	**Reparto 1** Cinco niños han de repartirse 11/12 de peseta. ¿Cuánto corresponderá a cada uno? (Dalmau Carles, 1898, p. 152)

P26	**Rebaño** Los 3/25 de un rebaño suman 42 carneros; ¿cuántos carneros representan los 5/7? (Bruño, 1940, p. 134)

Los otros problemas de esta categoría son: P28, P32, P36 y P37.

4.1.2.3 Contextos métricos (CM)

Son problemas en los que el enunciado se refiere a medidas de diversas magnitudes, siendo los datos y los valores desconocidos medidas de magnitudes o tasas. Distinguimos dos grupos: en el primero los enunciados hacen referencia a medidas de magnitudes extensivas, en el segundo se hace referencia a tasas o medidas de magnitudes intensivas.

4.1.2.3.1 Medidas extensivas (CMME)

Se consideran aquí los problemas en los que la incógnita es una magnitud extensiva, como las usuales en el sistema métrico decimal: capacidad, peso, longitud, área, dinero o tiempo.

- **Capacidad (CMME1)**

Los problemas se refieren a litros de agua, de vino o de perfume; en general son problemas sobre medición de líquidos. Por ejemplo, ver el problema 47.

P47	**Perfume** Un frasco de perfume tiene una capacidad de $\frac{1}{20}$ de litro. ¿Cuántos frascos de perfume se pueden llenar con el contenido de una botella de $\frac{3}{4}$ de litro? (Colera, J, Gaztelu, I y otros, 1997, p. 46)

Los otros problemas de esta clase son: P22, P24, P35, P38, P43.b), P44 y P50.

- **Peso (CMME2)**

P15	**Peso de la torta** 3/7 de torta pesan 2/9 de kilo. ¿Cuánto pesa la torta? (Rey Pastor y Puig Adam, 1932, pp. 211 y 212)

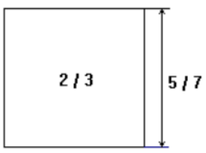
Los otros problemas de esta clase son: P16 y P18.

- **Longitud (CMME3)**

P39	**Paquetes** Se tiene una cuerda de 42 ½ metros con objeto de atar paquetes. ¿Cuántos paquetes se podrán atar, sabiendo que uno gasta 3 ½ metros? (García Roca y otros, 1966, 4ª edición, p. 17)

Los otros problemas de esta clase son: P5, P21, P43a, P46 y P49

- **Área (CMME4)**

P52	**La mesa de Ana** La superficie de la mesa de Ana es un rectángulo que mide 2/3 de u^2. Sabiendo que uno de sus lados mide 5/7 de u, averigua gráficamente cuánto mide el otro lado.  (Gairín, J.M. y Sancho, J, 2002, pp. 244–247)

Los otros problemas de esta clase son: P7, P14 y P48

- **Dinero (CMME5)**

P1	**Monedas** Si 5 ff (florines) $\frac{1}{2}$ valen 3 fr (francos) $\frac{2}{3}$, ¿cuántos francos valdrán 20 ff $\frac{3}{4}$? (Jehan Certain, 1455)

Este es el único problema de esta clase que se ha localizado en los textos consultados.

- **Trabajo (CMME6)**

P25	**Obra 1** Un obrero teje 3/4 de metro en una hora. ¿Cuántas horas empleará para tejer 16 1/2 metros? (Bruño, 1940, p. 133)

Los otros problemas de esta clase son: P27 y P29

- **Costes (CMME7)**

P45	**Sardinas** A peseta y media la sardina y media, ¿cuántas pesetas y media constarían siete sardinas y media? (Grupo Cero, 1988, p. 117).

Los otros problemas de esta clase son: P3, P4, P6, P8, P9, P10, P11, P12 y P19.

4.1.2.3.2 Medidas intensivas (CMMI)

Se consideran aquí los problemas en los que la incógnita es una tasa entre magnitudes en el sistema métrico decimal, tales como la velocidad o la densidad. Pero también se incluyen aquéllos que hacen referencia a tasas como la rapidez para realizar un trabajo, o el coste unitario de un determinado producto.

- **Velocidad (CMMI1)**

P40	**Velocidad** ¿Cuál es la velocidad de un coche que en 1 1/4 horas recorre 90 3/4 kilómetros? (Adaptado de García Roca y otros, 1966, 4ª edición, p. 21)

Los otros problemas de esta clase son: P13, P23, P30 y P31

- **Densidad (CMMI2)**

P41	**Densidad** Hemos observado que 1 3/5 litros de una sustancia tóxica obtenida en el laboratorio pesan 2 3/4 kilos. ¿Cuál es la densidad de esta sustancia? (Adaptado de García Roca y otros, 1966, 4ª edición, p. 21)

De esta clase solamente se ha encontrado este problema en los textos consultados.

La tabla 4.5 contiene un resumen de los contextos localizados en los libros consultados.

4.1.3 Tipología de los datos

Según el conjunto numérico al que pertenece cada uno de los datos (numerador y denominador), los casos que se presentan son los que aparecen en la Tabla 4.6:

CO. Operación		
CRP. Reparto y partes		
CM. Métrico	CMME. Medidas extensivas	CMME1.Capacidad
		CMME2. Peso
		CMME3. Longitud
		CMME4. Área
		CMME5. Dinero
		CMME6. Trabajo
		CMME7. Costes
	CMT. Medidas intensivas	CMMI1. Velocidad
		CMMI2. Densidad

TABLA 4.5 Los contextos de los problemas

Denominador / Numerador	Z	Q	M
Z	-------	$\frac{Z}{Q}$	$\frac{Z}{M}$
Q	$\frac{Q}{Z}$	$\frac{Q}{Q}$	$\frac{Q}{M}$
M	$\frac{M}{Z}$	$\frac{M}{Q}$	$\frac{M}{M}$

TABLA 4.6 Tipología de los datos

(Z=entero, Q=fracción, M=mixto)

En la Tabla 4.7 se muestran los problemas de los libros analizados que corresponden a cada una de las 8 tipologías que aparecen en la Tabla 4.6.

Tipología	Problemas
$\frac{Z}{Q}$	P4, P5, P12, P14, P19, P26, P27, P31, P32, P35, P36, P37, P43b , P43a, P51
$\frac{Z}{M}$	P23, P29, P33
$\frac{Q}{Z}$	P7
$\frac{Q}{Q}$	P2, P6, P8, P10, P11, P15, P16, P20, P24, P34, P38, P42, P46, P47, P48, P49, P50, P52
$\frac{Q}{M}$	P44
$\frac{M}{Z}$	P9
$\frac{M}{Q}$	P17, P18, P21, P22, P25, P28
$\frac{M}{M}$	P1, P3, P13, P30, P39, P40, P41, P45

TABLA 4.7: Los problemas según la tipología de los datos
(Z=entero, Q=fracción, M=mixto)

4.2 CATEGORÍAS DE PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS RELACIONADOS CON LA DIVISIÓN DE FRACCIONES

En la sección 4.1 se han descrito las tres componentes de la variable “problemas” y se han mostrado sus valores y ejemplos de problemas localizados en los textos consultados. Este estudio permitió organizar los problemas multiplicativos en los que está involucrada la división de fracciones en categorías, con la intención de hacer un análisis de mayor profundidad.

Cada una de las categorías se describe en esta sección, con objeto de relacionar los valores de las tres componentes (estructura, contextos y tipología de datos) en cada una de ellas. Las categorías que se utilizan están diseñadas de acuerdo con el análisis estructural (Vergnaud, 1983) y se basa en la cantidad de espacios de medida involucrados y las relaciones entre las cantidades y sus referentes.

4.2.1. Problemas multiplicativos con un único espacio de medida (E1)

Pertenecen a esta categoría los problemas P17, P18, P20, P28, P32, P34, P36, P37, P42 y P49. La estructura de estos problemas es la siguiente:

Estructura	Problemas
E1.1 Cálculo del escalar	P18, P42, P49
E1.2 Cálculo de la medida	P28, P32, P36, P37
E1.3 Problemas con escalar y medida indiferenciables	P17, P20, P34

Entre estos problemas se encuentran algunos de una etapa y otros de más de una etapa. Éstos últimos son: P32, P36 y P37; todos ellos corresponden al cálculo de la medida. Los contextos localizados en los problemas de esta categoría son los siguientes:

Contexto	Problemas
CO. Operación	P17, P18, P20, P34, P42
RP. Repartos y partes	P28, P32, P36, P37
CMME3. Longitud	P49

Por la tipología de los datos, los problemas de esta categoría son de los siguientes tipos:

Tipología de datos	Problemas
Q/Q	P20, P34, P42, P49
Z/Q	P32, P36, P37
M/Q	P17, P18, P28

La Tabla 4.8 contiene el resumen de las características de las categorías de los problemas multiplicativos de división de fracciones sobre un único espacio de medida localizados en los libros y textos de enseñanza.

4.2.2. Problemas multiplicativos sobre dos espacios de medida, isomorfismo de medidas: regla de tres (E2.1.1)

Los problemas de regla de tres localizados en este estudio son: P1, P2, P12, P19, P23, P24, P26, P27, P29 y P31.

En la Tabla 4.9 se muestran los contextos que corresponden a los problemas de esta categoría.

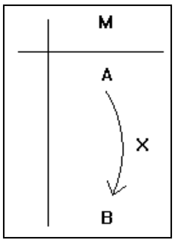
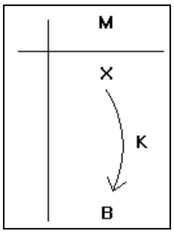
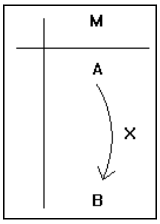
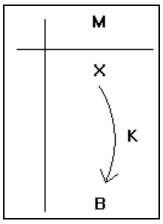
<table>
<tr><td colspan="3">• Estructura</td></tr>
<tr><td>E1.1 Cálculo del escalar</td><td>E1.2 Cálculo de la medida</td><td>o bien E1.3. Escalar y medida indiferenciables</td></tr>
<tr><td colspan="3">• Tipo de contexto
CO. Operación
RP. Repartos y partes
CMME3. Longitud</td></tr>
<tr><td colspan="3">• Tipología de los datos .... Q/Q, Z/Q, M/Q</td></tr>
</table>

TABLA 4.8. Problemas multiplicativos sobre un espacio de medida

Contextos	Problemas
CO. Operación	P2
RP. Repartos y partes	P26
CMME1. Capacidad	P24
CMME5. Dinero	P1
CMMI1. Velocidad	P23, P31
CMME6. Trabajo	P27, P29
CMME7. Costes	P12, P19

TABLA 4.9. Contextos en los problemas multiplicativos de regla de tres

Tipología de los datos: en la siguiente tabla se muestra el tipo de datos que aparecen en la división que se debe realizar para resolver los problemas. En ocasiones se combinan en el enunciado datos de distintos campos numéricos (por ejemplo, un dato es entero y otro es fraccionario). Algunos problemas tienen dos apartados, razón por la cual aparecen en dos filas de la tabla.

Tipos de datos	Problemas
M/M	P1
Z/Z	P2a
Q/Q	P2b, P24
Z/Q	P12, P19, P26, P27, P31
Z/M	P23, P29

En la Tabla 4.9 se muestra un resumen de las características del tipo de problemas multiplicativos de regla de tres que involucran división de fracciones.

- Estructura

M1	M2
C	D=f(C)
C'	X=f(C')

- Tipo de contexto

  CO. Operación
  RP. Repartos y partes
  CMME1. Capacidad
  CMME5. Dinero
  CMMI1. Velocidad
  CMME6. Trabajo
  CMME7. Costes

- Tipología de los datos

  M/M Z/Z Q/Q Z/Q Z/M

TABLA 4.9. Los problemas de regla de tres

4.2.3. Problemas multiplicativos sobre dos espacios de medida, isomorfismo de medidas: división con valor unitario desconocido (E2.1.2.1)

Los problemas de este tipo localizados en los textos son los siguientes: P3, P4, P5, P6, P7, P8, P9, P13, P15, P21, P22, P40, P41, P43b, P44, P48 y P50.

El problema P22 consta de más de una etapa, a diferencia del resto, que son de una sola etapa.

Los contextos que aparecen en los problemas de este tipo son los siguientes:

Contexto	Problemas
RP. Repartos y partes	P7
CMME1. Capacidad	P22, P43b, P44, P50
CMME2. Peso	P15
CMME3. Longitud	P5, P21
CMME4. Área	P48
CMMI1. Velocidad	P13, P40
CMMI2. Densidad	P41,
CMME4. Costes	P3, P4, P6, P8, P9

Respecto de la tipología de los datos, los problemas de esta categoría localizados en la revisión de libros y textos de enseñanza son de los siguientes tipos:

Tipología de los datos	Problemas
Q/Q	P6, P8, P15, P48, P50
Z/Q	P4, P5, P43b
Q/Z	P7
M/Z	P9
M/Q	P21, P22
Q/M	P44
M/M	P3, P13, P40, P41

En la tabla 4.10 de muestra un resumen de las características del tipo de problemas multiplicativos con valor unitario desconocido que involucran división de fracciones.

- Estructura

M1	M2
1	X
C'	D'

M1	M2
C	D
1	X

- Tipo de contexto

RP. Repartos y partes
CMME1. Capacidad
CMME2. Peso
CMME3. Longitud
CMME4. Área
CMMI1. Velocidad
CMMI2. Densidad
CMME4. Costes

- Tipología de los datos

Q/Q Z/Q Q/Z M/Z M/Q Q/M M/M

TABLA 4.10. Los problemas con valor unitario desconocido

4.2.4. Problemas multiplicativos sobre dos espacios de medida, isomorfismo de medidas: división con valor unitario conocido (E2.1.2.2)

Los problemas de este tipo localizados en los textos son: P10, P11, P16, P25, P30, P35, P38, P39, P43a, P45, P46 y P47.

Los contextos que corresponden a los citados problemas se muestran en la siguiente tabla:

Tipo de contexto:	Problemas
CMME1.Capacidad	P47, P35, P38
CMME2. Peso	P16
CMME3. Longitud	P39, P43a, P46
CMMI1. Velocidad	P30
CMME3. Trabajo	P25
CMME4. Costes	P45, P10, P11

Teniendo en cuenta la tipología de los datos, los problemas estudiados corresponden a los siguientes tipos:

Tipología:	Problemas:
Q/Q	P10, P11, P16, P38, P46, P47
M/M	P30, P39, P45
Z/Q	P35, P43a
M/Q	P25

En la tabla 4.11 se muestra un resumen de las características de los problemas de este tipo.

- Estructura

M1	M2
X	D
1	D'

M1	M2
1	D
X	D'

- Tipo de contexto

  CMME1.Capacidad
  CMME2. Peso
  CMME3. Longitud
  CMMI1. Velocidad
  CMME3. Trabajo
  CMME4. Costes

- Tipología de los datos

  Q/Q M/M Z/Q M/Q

TABLA 4.11: Los problemas con valor unitario conocido

4.2.5. Producto de medidas (E2.2)

Los problemas de esta clase localizados en los textos son: P14, P33 y P52. Los problemas P14 y P33 son de más de una etapa.

Los contextos de los problemas son:

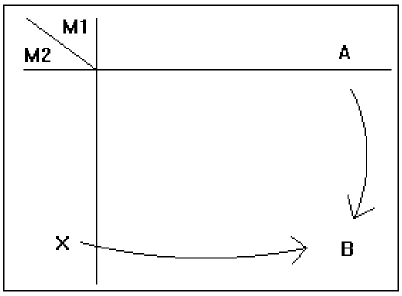
Tipo de contexto:	Problemas:
CMME4. Área	P14, P33, P52

Respecto de la tipología de los datos, los problemas son de los siguientes tipos:

Tipología de datos:	Problemas:
Z/Q	P14, P33
Q/Q	P52

La Tabla 4.12 muestra un resumen de las características de los problemas se este tipo.

- Estructura



- Tipo de contexto

CMME4. Área

- Tipología de los datos

Q/Q Z/Q

TABLA 4.12: Los problemas de producto de medidas

4.2.6. Problemas sobre tres espacios de medida: Función compuesta (E3.1)

El único problema de este tipo localizado en los textos consultados es el P51, cuyo contextos es el siguiente:

Tipo de contexto:	Problemas:
CMME2. Peso	P51

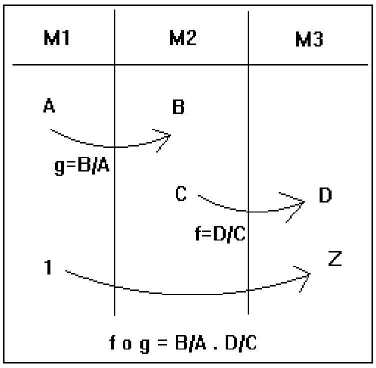
Considerando la tipología de los datos, este problema es un ejemplo del caso Z/Q

Tipología de datos:	Problemas:
Z/Q	P51

La Tabla 4.13 muestra un resumen de las características de este tipo de problemas.

<table>
<tr><td>

• Estructura



</td></tr>
<tr><td>

• Tipo de contexto

CMME2. Peso

</td></tr>
<tr><td>

• Tipología de los datos

Z/Q

</td></tr>
</table>

TABLA 4.13: Los problemas de función compuesta

CAPÍTULO **5**

Los problemas del cuestionario: Un estudio piloto

En este capítulo se describe el estudio piloto que sustenta el proceso de selección de los problemas para estructurar el cuestionario de lápiz y papel que se usará para la recolección de datos de la investigación cuyo informe es esta tesis.

Como punto de partida se eligió una muestra de al menos un problema representativo de cada una de las categorías de problemas descritas en el capítulo 4. La muestra de problemas multiplicativos relacionados con la división de fracciones forma el cuestionario del estudio piloto, que constituye el proceso de validación externa del instrumento empleado en la indagación principal.

El estudio piloto se llevó a cabo con 19 estudiantes de un grupo de segundo curso de Magisterio de la Escuela Universitaria “Ausias March” y con 10 alumnos de un grupo de segundo ciclo de Educación Secundaria Obligatoria del Instituto de Educación Secundaria Benicalap.

A partir de los resultados del estudio piloto se revisaron los problemas de la muestra y se construyó el cuestionario definitivo.

5.1 LOS PROBLEMAS DEL ESTUDIO PILOTO: ANÁLISIS

A continuación se presentan y se exponen los resultados del análisis realizado a los problemas seleccionados para el estudio piloto, que como ya se mencionó, se han extraído de cada una de las categorías, con el criterio de que hubiera, al menos un problema de cada categoría, clase y tipo, siempre tratando de evitar redundancias y actualizando el lenguaje en algunos de ellos.

Los problemas elegidos son: P42b, P17, P20, P49, P28, P32, P12, P23, P24, P14, P15, P50, P39, P25, P30, P16, P52 y P51.

Para su análisis se han tenido en cuenta las variables de los problemas descritas en el capítulo 4 :

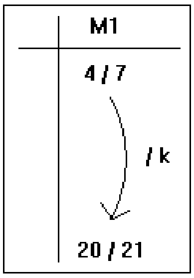
1. Estructura dimensional del problema,
2. Contexto, y
3. Tipología de los datos.

Y además se han tenido en cuenta las variables de enseñanza que se caracterizaron en el capítulo 3:

4. Sentidos de uso de fracción,
5. Sentidos de uso de división de fracciones, y
6. Representaciones.

P42b El dividendo de una división es 4/7 y el cociente 20/21. ¿Cuál es el divisor?

Este problema corresponde a la categoría de un solo espacio de medida, cálculo del escalar, de acuerdo con el diagrama que aparece a continuación, en el cual el espacio de medida M1 es el conjunto de los números racionales.

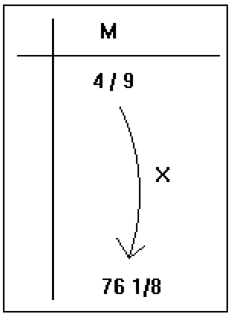


El contexto es de operación (CO). Los datos son Q/Q. Las fracciones tienen el sentido de uso de número. La forma textual de la división de fracciones corresponde al sentido de uso de inversión de la multiplicación, en su forma aritmética. No tiene representación asociada.

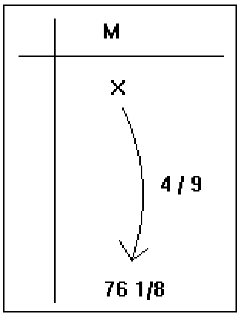
P17. El producto de dos números es 76 1/8. Si uno es 4/9, ¿cuál es el otro?

Este problema pertenece a la categoría de un solo espacio de medida (en este caso, el conjunto M es el de los números racionales), y a la clase en la que el escalar y la medida son indiferenciables. Su estructura corresponde al esquema 1 o al esquema 2, los cuales son igualmente válidos para representar el problema:

esquema 1



esquema 2

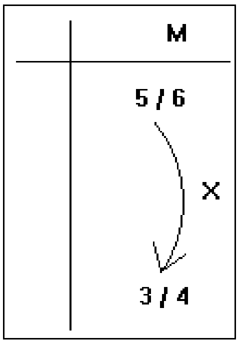


El contexto es de operación (CO). Los datos del problema corresponden al caso M/Q. Las fracciones tienen el sentido de número y la forma textual que aparece en el enunciado corresponde al sentido de uso de la división como inversión de la multiplicación o factor perdido. No hay representación asociada.

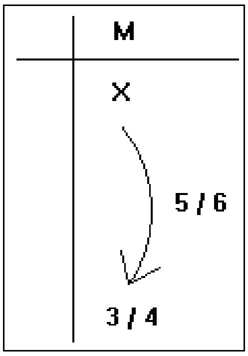
P20. Hallar el valor de x en la expresión: 5/6×x=3/4.

Este problema se ubica en la categoría de un solo espacio de medida (el conjunto M es el de los números racionales), y en la clase en la que el escalar y la medida son indiferenciables, siendo además de contexto algebraico de operación (CO). Su estructura equivale al cálculo del escalar (esquema 1) o al cálculo de la medida (esquema 2).

1



2

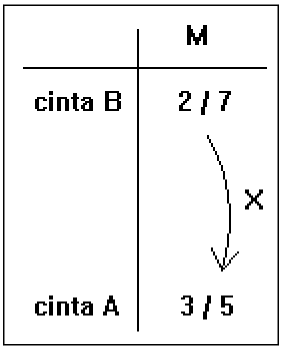


Por el tipo de datos, el problema responde al caso Q/Q.

Las fracciones que aparecen en el enunciado tienen el sentido de número y la forma textual de la división corresponde al sentido de uso de inversión de la multiplicación o factor perdido. No hay representación asociada.

P49. La longitud de la cinta A es 3/5 m y la de la cinta B es 2/7 m. ¿Cuántas veces la cinta A es tan larga como la cinta B?

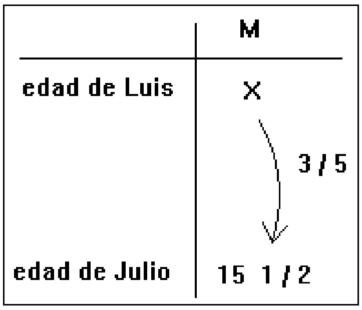
La estructura de este problema corresponde a la categoría de un solo espacio de medida, y a la clase cálculo del escalar. El espacio de medida M representa la longitud en metros. El dato desconocido es el factor multiplicativo escalar X que liga 3/5 con 2/7, según el siguiente esquema:



El contexto es métrico/medidas extensivas/longitud (CMME3). Por el tipo de datos, el problema corresponde al caso Q/Q. Las fracciones que representan los datos tienen el sentido de uso de medida. La forma textual del enunciado ¿cuántas veces? corresponde al sentido de uso de la división de fracciones de medida. No tiene representación asociada.

P28. Los 15 1/2 años que tiene Julio son los 3/5 de la edad de Luis; ¿cuántos años tiene Luis?

El problema pertenece a la categoría de un solo espacio de medida y a la clase cálculo de la medida. En este caso, el espacio de medida M representa la edad en años, el valor desconocido es la cantidad X sobre la que opera el factor escalar 3/5.



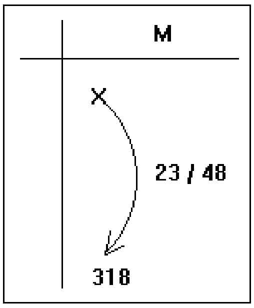
El contexto es de repartos y partes (CRP). Por el tipo de datos, el problema se encuadra en el caso M/Q. El número mixto 15 1/2 tiene el sentido de uso de medida, la fracción 3/5 tiene el sentido de operador que permite comparar la edad de Luis con la edad de Julio y, por la forma textual que aparece en el enunciado, la división de fracciones tiene el sentido de uso de inversión de la multiplicación - factor perdido. No hay representación asociada.

P32. Un obrero ha gastado en manutención 1/3 de lo que ha ganado durante el año, 1/8 para vestuario y alquiler y 1/16 en otros gastos; sus ahorros ascienden a 318 ptas.; ¿cuánto había ganado durante este año?

Este problema perteneciente a la categoría de un solo espacio de medida, y a la clase cálculo de la medida, se selecciona por ser de más de una etapa. En este caso se puede considerar como un problema de dos o de tres etapas. Sería de dos etapas si se considera que lo primero es determinar la parte del salario anual que se ahorra: 1-(1/3 + 1/8 + 1/16)=23/48, y lo segundo, resolver el problema de división. Pero también se puede considerar de tres etapas, siempre que:

1. La primera etapa consiste en determinar una suma de fracciones $(\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{25}{48})$,
2. la segunda etapa es calcular el ahorro: 1 – 25/48, y
3. la tercera etapa es, propiamente, el problema de división.

El espacio de medida M es el conjunto de los números reales donde dichos números representan cantidades de dinero. Se pide la medida X (salario anual) en el siguiente esquema:



El contexto es métrico / medidas extensivas / dinero (CMME5). El tipo de datos es el Z/Q. Las fracciones del enunciado se usan como cocientes (1/3 del salario anual es igual a (salario anual)/3) y el sentido de uso de la división de fracciones es la inversión de la multiplicación, tal como se deduce de la forma textual del enunciado. No hay representación asociada.

P12 Un vendedor de huevos cobró 728 pesetas por cierta partida que había vendido a 3/5 de peseta la docena. ¿Cuántos huevos había vendido?

El problema pertenece a la categoría de dos espacios de medida, clase isomorfismo de medidas y tipo regla de tres. Los dos espacios de medida son M1=número de pesetas y M2=número de huevos. La estructura del problema es la del siguiente esquema:

M1	M2
728	X
3 / 5	12

El contexto es métrico de costes (CMME7). El tipo de datos corresponde al caso Z/Q. La fracción del enunciado (3/5) tiene el sentido de medida. Pueden plantearse dos divisiones de fracciones, según el enfoque de resolución; en cada caso, el sentido de uso de la división de fracciones es diferente, tal como muestran las formas textuales que se indican a continuación:

$\frac{728}{3/5}\times 12$	Medida (ver cuántas veces cabe 3/5 peseta en 728 pesetas)
$\frac{12}{3/5}\times 728$	Proporción de valor unitario desconocido (ver cuántos huevos por peseta)

No hay representación asociada.

P23 Un peatón ha empleado 3 1/5 horas para recorrer las 3/7 partes del trayecto emprendido. ¿Qué fracción del camino le queda por recorrer después de andar 6 horas?

El problema pertenece a la categoría de dos espacios de medida, a la clase del isomorfismo de medidas, y al tipo de regla de tres.

Los dos espacios de medida que aparecen en el problema son M1=número de horas y M2=partes del trayecto. El esquema del problema es el siguiente:

M1	M2
3 1/5	3/7
6	X

El contexto es métrico de velocidad (CMMI1). El tipo de datos corresponde al caso Q/M o al caso Z/M. La fracción 3/5 del enunciado tiene el sentido de parte de la unidad; el número mixto 3 1/5 tiene el sentido de medida. Pueden plantearse dos divisiones de fracciones, según el enfoque de resolución; en cada caso, el sentido de uso de la división de fracciones es diferente, tal como muestran las formas textuales siguientes:

$\frac{6}{3\,{}^{1}\!/_{5}} \times {}^{3}\!/_{7}$	Z/M	Medida (ver cuántas veces cabe 3 1/5 horas en 6 horas)
$\frac{{}^{3}\!/_{7}}{3\,{}^{1}\!/_{5}} \times 6$	Q/M	Proporción de valor unitario desconocido (ver cuántas partes del camino por hora)

No hay representación asociada.

P24 Una cocinera vierte 1/3 de litro de agua en una cafetera. ¿Cuánto ha de añadir para acabar de llenarla, si lo vertido ocupa las 2/5 partes de la misma?

El problema pertenece a la categoría de dos espacios de medida, a la clase del isomorfismo de medidas y al tipo de regla de tres.

En el problema hay dos espacios de medida, M1=número de litros de agua y M2=partes de la cafetera. El esquema del problema es el siguiente:

M1	M2
X	3/5
1/3	2/5

El contexto es de medidas extensivas/capacidad (CMME1). El tipo de datos corresponde al caso Q/Q. La fracción 1/3 del enunciado tiene el sentido de medida; mientras que la fracción 2/5 tiene el sentido de partes de la unidad. Pueden plantearse tres divisiones de fracciones, según el enfoque de resolución; en cada caso, las formas textuales indican que el sentido de uso de la división de fracciones es diferente, tal como se muestra a continuación:

$\frac{3/5}{2/5} \times 1/3$	Medida (ver cuántas veces cabe 2/5 en 3/5)
$\frac{1/3}{2/5} \times 3/5$	Proporción de valor unitario desconocido (ver cuántos litros de agua por cafetera)
$\frac{2/5}{1/3} \div 3/5$	Proporción de valor unitario desconocido (ver cuántas cafeteras por litro de agua)

No hay representación asociada.

P14 Para empapelar un salón, se han necesitado 300 m de un papel cuyo ancho es 3/4 de metro. ¿Cuántos metros se necesitarían de otro papel cuyo ancho es 2/3 de metro?

El problema pertenece a la categoría de tres espacios de medida, a la clase del isomorfismo de medidas y al tipo de regla de tres.

Los dos espacios de medida que aparecen en el problema son M1=longitud (metros) y M2=anchura (metros). El esquema del problema es el siguiente:

M1	M2
300	3 / 4
X	2 / 3

El contexto es métrico de áreas (CMME4). El tipo de datos corresponde al caso Q/Q o al caso Z/Q. Las fracciones del enunciado tienen el sentido de medida. Según el enfoque de resolución pueden plantearse dos divisiones de fracciones; en cada caso cambia el sentido de uso de la división de fracciones, tal como muestran las formas textuales que se indican a continuación:

$\frac{2/3}{3/4} \times 300$	Q/Q	Medida (ver cuántas veces cabe 3/4 en 2/3)
$\frac{300}{3/4} \times 2/3$	Z/Q	Proporción de valor unitario desconocido (ver cuántos metros de longitud por cada metro de anchura)

No hay representación asociada.

P15. 3/7 **de torta pesan** 2/9 **de kilo. ¿Cuánto pesa la torta?**

Este problema pertenece a la categoría de dos espacios de medida, a la clase del isomorfismo de medidas y al tipo de división con valor unitario desconocido. Los dos espacios de medida son: M1=cantidad de tortas y M2=número de kilos. El esquema del problema es el siguiente:

M1	M2
3 / 7	2 / 9
1	X

El contexto es métrico / medidas extensivas / Peso (CMME2). El tipo de datos corresponde al caso Q/Q. Las fracciones 3/7 y 2/9 del enunciado tienen el sentido de medida / partes de la unidad de medida. La forma textual del enunciado muestra que la división de fracciones corresponde al sentido de uso de proporción de valor unitario desconocido (ya que se pide el peso de 1 tarta, es decir el valor unitario). No hay representación asociada.

P50. El agua de un depósito se pierde por un desagüe a razón de 1/2 litro por cada 3/4 de hora. ¿Cuánta agua se pierde por hora?

El problema pertenece a la categoría de dos espacios de medida, a la clase del isomorfismo de medidas y al tipo de problemas de división con valor unitario desconocido.

Los dos espacios de medida del problema son M1=número de litros y M2=número de horas, siendo su estructura la siguiente:

M1	M2
1 / 2	3 / 4
X	1

El contexto es métrico / medidas extensivas / Capacidad (CMME1). El tipo de datos corresponde al caso Q/Q. La fracciones del enunciado tienen el sentido de medida / partes de la unidad de medida, mientras que la división de fracciones corresponde al sentido de uso de proporción con valor unitario desconocido (ya que la forma textual del enunciado indica que se pide la cantidad de litros que se pierden en 1 hora, que es el valor unitario). No hay representación asociada.

P39. Se tiene una cuerda de 42 ½ metros con objeto de atar paquetes. ¿Cuántos paquetes se podrán atar, sabiendo que uno gasta 3 ½ metros?

Este problema pertenece a la categoría de problemas con dos espacios de medida, a la clase del isomorfismo de medidas y al tipo de problemas de división con valor unitario conocido. En este problema hay dos espacios de medida, M1=número de metros y M2=número de paquetes, siendo la estructura del problema la del esquema siguiente:

M1	M2
42 1 / 2	X
3 1 / 2	1

El contexto es métrico / medidas extensivas / longitud (CMME3). El tipo de datos corresponde al caso M/M. Las fracciones del enunciado tienen el sentido de medida. La forma textual del enunciado indica que el sentido de uso de la división de fracciones es de proporción con valor unitario conocido, y, según el enunciado, se sabe que X es a la unidad como 42 ½ metros es a 3 ½ metros. No hay representación asociada.

P25 Un obrero teje 3/4 de metro en una hora. ¿Cuántas horas empleará para tejer 16 1/2 metros?

Al igual que el problema anterior, éste pertenece a la categoría de problemas con dos espacios de medida, a la clase del isomorfismo de medidas y al tipo de problemas de división con valor unitario conocido. Los dos espacios de medida del problema son M1=número de metros y M2=número de horas. La estructura del problema es la del siguiente esquema:

M1	M2
3 / 4	1
16 1 / 2	X

El contexto es métrico / medidas extensivas / longitud (CMME3). El tipo de datos corresponde al caso M/Q. Las fracciones del enunciado tienen el sentido de medida. Según la forma textual que aparece en el enunciado, el sentido de uso de la división de fracciones es de proporción de valor unitario conocido, y se cumple que X es a 1 como 16 ½ metros es a 3/4 metros. No hay representación asociada.

P30 Un tren que lleva la velocidad de 14 3/7 leguas por hora, emplea 13 1/6 horas para recorrer cierta distancia; ¿cuántas horas empleará otro tren para recorrer el mismo trayecto si en una hora recorre 9 1/3 leguas?

Este problema pertenece a la categoría de dos espacios de medida, a la clase del isomorfismo de medidas y al tipo de problemas de división con valor unitario conocido. El problema es de dos etapas. En la primera hay que calcular el espacio recorrido por el primer tren, ($14\,{}^{3}\!/_{7} \cdot 13\,{}^{1}\!/_{6} = 189\,{}^{41}\!/_{42}$ leguas); en la segunda etapa hay que resolver propiamente el problema de división. Hay dos espacios de medida: M1= horas y M2= leguas, siendo su estructura la del esquema siguiente:

M1	M2
X	189 41 / 42
1	9 1 / 3

El contexto es métrico / medidas intensivas / velocidad (CMMI1). El tipo de datos corresponde al caso M/M. Las fracciones del enunciado tienen el sentido de medida. La forma textual del enunciado indica que la división de fracciones tiene el sentido de uso de proporción de valor unitario conocido, y se cumple que X es a 1 como $189\,{}^{41}\!/_{42}$ leguas es a $9\,{}^{1}\!/_{3}$ leguas. No hay representación asociada.

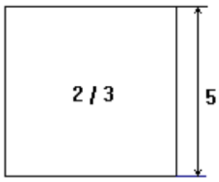
P16. Si cada torta pesa $3/7$ de kilo, ¿qué porción de torta tendré con $2/9$ de kilo?

Este problema se ubica en la categoría de problemas con dos espacios de medida, en la clase del isomorfismo de medidas y en el tipo de división con valor unitario conocido. Los espacios de medida son M1=número de tortas y M2=número de kilos. La estructura del problema es la del esquema siguiente:

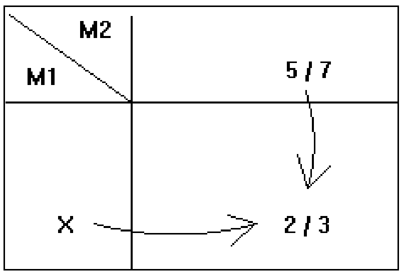
M1	M2
1	3 / 7
X	2 / 9

El contexto es métrico / medidas extensivas / peso (CMME2). El tipo de datos corresponde al caso Q/Q. Las fracciones del enunciado tienen el sentido de medida. La división de fracciones tiene el sentido de uso de proporción de valor unitario conocido, puesto que la forma textual del enunciado indica que hay que buscar una fracción X que es a la unidad como 2/9 kilos es a 3/7 kilos. No hay representación asociada.

P52. La superficie de la mesa de Ana es un rectángulo que mide 2/3 de u^2. Sabiendo que uno de sus lados mide 5/7 de u, averigua cuánto mide el otro lado.



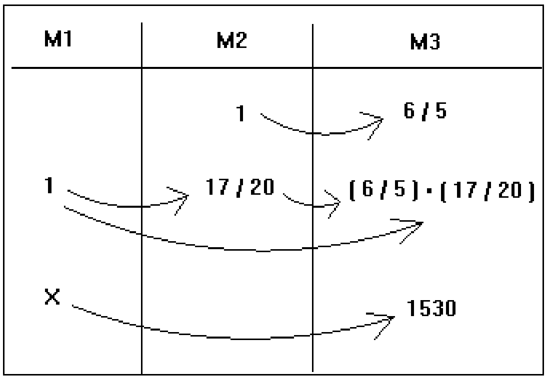
Este problema se incluye en la categoría de dos espacios de medida, en la clase del producto de medidas. En él hay dos espacios de medida: M1=base del rectángulo (en metros) y M2=altura del rectángulo (metros). El producto cartesiano de los dos espacios de medida, M1×M2, es la superficie del rectángulo. Se conoce la cantidad de la magnitud producto (el área, 2/3) y uno de los factores (la altura, 5/7) y se trata de hallar el otro factor (la base). Por tanto, la estructura del problema es la del siguiente esquema:



El contexto es métrico / medidas extensivas / área (CMME4). El tipo de datos corresponde al caso Q/Q. Las fracciones del enunciado tienen el sentido de medida. La forma textual del enunciado muestra que el sentido de uso de la división de fracciones es de inversión de la multiplicación o factor perdido. La representación es parte-todo / continuo / rectangular.

P51. Sabiendo que la cantidad de harina que se obtiene del trigo es los 17/20 de su peso, y la cantidad de pan obtenido de la harina es 6/5 del peso de ésta, ¿cuánto trigo se necesita para obtener 1530 kg de pan?

Este problema se incluye en la categoría de problemas sobre tres espacios de medida y en la clase de problemas de función compuesta, siendo el único con estas características que se ha encontrado en los textos seleccionados. En él están involucrados tres espacios de medida: M1=kg de trigo, M2=kg de harina y M3=kg de pan, relacionados entre sí tal como se indica en el siguiente esquema:



Se trata de un problema de dos etapas. En la primera, sabiendo los valores unitarios correspondientes a las funciones f:M1→M2 y g:M2→M3, consiste en determinar el valor unitario de la función compuesta g o f: M1→M3. La segunda etapa consiste en, conocido el valor unitario de g o f, resolver el problema de división. Para ello, basta tomar de la tabla anterior solamente la primera y tercera y columna:

M1	M3
1	(6 / 5) · (17 / 20)
X	1530

Por tanto, la estructura del problema es de división con valor unitario conocido. El contexto es métrico / medidas extensivas / peso (CMME2). El tipo de datos es el Z/Q. Atendiendo a las formas textuales, las fracciones del enunciado tienen el sentido de operador y el sentido de uso de la división de fracciones es de proporción con valor unitario conocido. El problema se puede plantear del siguiente modo: suponiendo que X es el peso del trigo necesario, la cantidad de pan obtenida al final del proceso es: $\frac{6}{5}\times\frac{17}{20}\times X = 1530$. Por tanto, por la forma textual que aparece en el enunciado, la división de fracciones también se puede considerar como un caso de inversión de la multiplicación o factor perdido. No hay representación para este problema.

Tablas resumen

En las Tablas 5.1, 5.2 y 5.3 se hace un resumen de las características de estructura, contexto y tipología de datos para cada uno de los problemas incluidos en el cuestionario que se usó en el estudio piloto.

Estructura			
Categoría	Clase	Tipo	Problemas
E.1	Cálculo del escalar		P42b , P49
	Cálculo de la medida		P28, P32
	Problemas con escalar y medida indiferenciables		P17, P20
E.2	Isomorfismo de medidas	Regla de tres	P12, P23, P24, P14
		División con valor unitario desconocido	P15, P50
		División con valor unitario conocido	P39, P25, P30, P16
	Producto de medidas		P52
E.3	Función compuesta		P51

TABLA 5.1. Estructura de los problemas

(E1= 1 solo espacio de medida; E2=2 espacios de medida; E3=3 espacios de medida).

Contexto	**Problemas**
CO. Operación	P42b, P17, P20
CRP. Repartos y partes	P28
CMME1. Métrico / Capacidad	P24, P50
CMME2. Métrico / Peso	P15, P16, P51
CMME3. Métrico / Longitud	P49, P39, P25
CMME4. Métrico / Áreas	P14, P52
CMME5. Métrico / Dinero	P32
CMME7. Métrico / Costes	P12
CMMI1. Métrico / Velocidad	P23, P30

TABLA 5.2. Contexto de los problemas

Tipología de datos	**Problemas**
Q/Q	P42.b, P20, P49, P24, P14, P15, P50, P16, P52
Z/Q	P32, P12, P51
M/Q	P17, P28, P25
Q/M	P23
M/M	P39, P30

TABLA 5.3. Tipología de los datos de los problemas

- **Tabla de resumen de la relación entre la estructura y los sentidos de uso**

En la tabla 5.4 siguiente se resume la relación entre la estructura de los problemas y los sentidos de uso; en cada casilla se indica la numeración que le corresponde a cada uno de los problemas.

	1 EM	**2 EM/ IM/RT**	**2 EM/ IM/C**	**2 EM/ IM/D**	**2 EM/ PM**	**3 EM/ FC**
Partición						
Medida	P49,	P12, P14, P23, P24				
Proporción de valor unitario desconocido		P12, P14, P23, P24		P15, P50,		
Inversión del factor multiplicativo						
Proporción de valor unitario conocido			P16, P39, P25, P30,			P51
Inversión de la multiplicación (Factor perdido)	P28, P32 P42.b, P17, P20,				P52	P51

TABLA 5.4. La estructura de los problemas del cuestionario preliminar y los sentidos de uso

(EM=espacio de medida; IM=isomorfismo de medida; RT=regla de tres; C=división valor unitario conocido; D=división valor unitario desconocido; PM=producto de medidas; FC=función compuesta)

5.2. EL ESTUDIO PILOTO

El estudio piloto constituye un proceso de validación del cuestionario que se va a usar con el objeto de recolectar datos para la indagación principal. En la investigación cuyo informe es esta tesis, el cuestionario definitivo es una parte del cuestionario diseñado para el estudio piloto.

Con el propósito de validar los ítems a través del estudio piloto se aplicó el cuestionario a dos poblaciones de estudiantes diferentes:

- Grupo 1: Formado por 19 estudiantes de Magisterio del segundo curso de la especialidad de Educación Primaria de la Escuela Universitaria “Ausías March” de Valencia; con una edad media aproximada de 20 años;
- Grupo 2: Formado por 10 estudiantes de cuarto curso de ESO del IES Benicalap de Valencia, con edades comprendidas entre 15 y 16 años.

Para realizar la prueba, los estudiantes dispusieron de calculadoras, lápiz, papel y hoja de enunciados. El cuestionario se pasó en 3 sesiones diferentes de 50 minutos de duración. En cada sesión los problemas se mezclaron para evitar dar pistas sobre su resolución.

Dado el carácter de validación del estudio piloto, se consideran en este apartado los siguientes aspectos: 1) validación de las formas textuales que se vinculen mejor con las ideas de los estudiantes sobre la división de fracciones; 2) validación de los ítems para el cuestionario final con una muestra similar a la que se hará en la investigación principal, 3) análisis de las respuestas y delimitación de las hipótesis para sustentar el análisis de las actuaciones de los alumnos y finalmente, 4) construcción de los instrumentos de recogida de datos para la investigación principal.

5.2.1 Validación de las formas textuales

La validación de las formas textuales se realizó mediante la aplicación de un cuestionario previo a la prueba, a partir de un listado de formas textuales, que tenían que puntuar por orden de preferencia. El análisis de las respuestas permitió hacer hipótesis sobre las formas textuales dominantes en la muestra.

Dicho listado se extrajo de las expresiones localizadas en el análisis de textos de enseñanza (ver capítulo 3), y que como ya se mencionó anteriormente son las que utilizan los autores al referirse en sus explicaciones y definiciones a las fracciones, a la división y a la división de fracciones. El cuestionario de formas textuales diseñado para ese propósito, está dividido en tres partes: la primera se refiere a la fracción, la segunda a la división y la tercera a la división de fracciones. A continuación se incluyen los ítems tal como se les proporcionaron a los estudiantes:

Primera parte: ítem sobre fracciones

1. Ordena, por orden de preferencia, las afirmaciones con las que estés de acuerdo entre las siguientes (1=completamente de acuerdo, 2=bastante de acuerdo, 3=de acuerdo pero menos, … 8=en total desacuerdo):

	LA FRACCIÓN P/Q EXPRESA…	PUNTUACIÓN
A	…el resto de la división de un número menor por un número mayor	
B	…el cociente de la división de dos números (uno menor por otro mayor)	
C	…parte o partes de la unidad de medida	
D	…parte o partes de un todo	
E	…que hay P elementos de un conjunto por cada Q elementos de otro conjunto	
F	…hace al numerador tantas veces menor como indica el denominador	
G	…un operador que multiplica por el numerador y divide por el denominador	
H	…un elemento de ZxZ*, es decir, un par (P,Q) de números enteros, con Q≠0	

Segunda parte: ítem sobre división

2. Ordena, por orden de preferencia, las afirmaciones con las que estés de acuerdo entre las siguientes (1=completamente de acuerdo, 2=bastante de acuerdo, 3=de acuerdo pero menos, … 7=en total desacuerdo):

	DIVIDIR ES…	PUNTUACIÓN
A	…partir o repartir en partes iguales	
B	…averiguar cuántas veces cabe o está contenido un número en otro	
C	…averiguar cuántas veces se puede restar un número de otro	
D	…consiste en, dado un producto y uno de los factores, hallar el otro factor	
E	…hallar un número que se haya con la unidad en tal proporción como el dividendo con el divisor	
F	…hallar un número que está contenido en el dividendo tantas veces como unidades están contenidas en el divisor	
G	…hacer el dividendo tantas veces menor como unidades tiene el divisor	

Tercera parte: ítem sobre división de fracciones

3. Ordena, por orden de preferencia, las afirmaciones con las que estés de acuerdo entre las siguientes (1=completamente de acuerdo, 2=bastante de acuerdo, 3=de acuerdo pero menos, … 8=en total desacuerdo):

	DIVIDIR FRACCIONES ES…	PUNTUACIÓN
A	…partir o repartir la fracción dividendo en partes iguales	
B	…averiguar cuántas veces cabe la fracción divisor en la fracción dividendo	
C	…hallar una fracción C que contiene a la unidad tantas veces como la fracción dividendo contiene a la fracción divisor	
D	…hacer la fracción dividendo tantas veces menor como indica el numerador del divisor y tantas veces mayor como indica el denominador del divisor	
E	…hallar una fracción C, tal que la fracción dividendo se compone de C del mismo modo que la fracción divisor se compone de la unidad	
F	…hallar una fracción C que multiplicada por la fracción divisor da la fracción dividendo	
G	…multiplicar la fracción dividendo por la fracción recíproca del divisor	
H	…multiplicar la fracción dividendo por la inversa de la fracción divisor	

Esta parte del cuestionario se pasó durante los primeros 15 minutos de la primera sesión de la prueba. En las siguientes tablas se han organizado las respuestas de los estudiantes a los diferentes incisos de cada uno de los ítems que forman el cuestionario sobre formas textuales. El signo de interrogación ¿? Corresponde a una respuesta ilegible.

ÍTEM 1	**Forma textual**							
Alumno	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**
Mónica	5	4	2	1	3	7	6	8
Patricia	8	3	2	1	4	5	7	6
Rosa	8	1	3	2	5	6	4	7
Paloma	7	8	2	1	3	5	6	4
Myriam	7	8	3	1	2	5	6	4
Lola	5	4	1	2	6	7	3	8
Miriam J	4	5	2	1	3	8	7	6
Raquel	8	1	3	4	5	6	2	7
Mari Tere	8	1	3	4	5	6	2	7
Virginia	8	7	3	1	2	5	7	6
Arantxa	8	1	5	4	3	6	2	7
Gema	8	1	3	4	5	6	2	7
Sara	5	4	1	2	6	7	3	8
Sara A	5	4	1	2	6	7	3	8
Laura	5	4	3	1	2	6	7	8
Jessica	4	5	2	1	3	8	7	6
Laura M	5	4	1	2	3	8	7	6
César	4	2	3	1	5	6	7	8
Toñi	4	5	1	2	6	7	3	8
Totales Grupo 1	**116**	**72**	**44**	**37**	**77**	**121**	**91**	**129**

Sara A	5	4	3	1	2	6	7	8
Jessica H	7	8	2	1	3	5	6	4
Blanca	7	8	2	1	3	5	6	4
Vicky	5	6	3	1	2	7	4	8
Marta	7	3	2	1	4	6	5	8
Marta S	5	2	3	1	4	6	7	8
Neus	6	2	3	1	4	7	8	5
Inma		2	3	1	4			
Alba	7	8	6	1	2	3	5	4
Estefanía	7	8	2	1	3	5	6	4
Totales Grupo 2	**56**	**51**	**29**	**10**	**31**	**50**	**54**	**53**
Total muestra	**172**	**123**	**73**	**47**	**108**	**171**	**145**	**182**

En la muestra se observa que la forma textual dominante en el ítem 1, que es la que tiene menos puntuación es la D, fracción como parte o partes de un todo, seguida de la C, fracción como parte o partes de la unidad de medida, no apreciándose diferencias significativas entre el grupo 1 y el grupo 2. También se observa que las formas textuales menos dominantes en el ítem 1 son H, elemento de ZxZ*, y A, resto de la división. Se muestran grandes diferencias entre las puntuaciones otorgadas, desde 47 puntos a la forma dominante D hasta 182 puntos a la menos preferida H, lo que podría indicar un predominio fuerte, en esta muestra, de unas formas textuales sobre otras.

ÍTEM 2							
Alumno	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**
Mónica	7	2	8	6			1
Patricia	1	2	6	7	5	4	3
Rosa	2	1	3	6	7	5	4
Paloma	1	2	4	5	7	6	3
Myriam	1	2	4	5	7	6	3
Lola	1	4	6	5	7	3	2
Miriam J	1	4	2	3	6	7	5
Raquel	3	1	7	6	5	4	2
Mari Tere	3	1	7	4	6	5	2
Virginia	7	4	6	3	2	1	5
Arantxa	6	1	7	5	3	4	2
Gema	4	1	7	5	6	3	2
Sara	1	4	7	5	6	2	3
Sara A	1	4	6	5	7	3	2
Laura	1	3	6	4	5	7	2
Jessica	1	3	2	4	6	7	5
Laura M	1	3	5	4	7	6	2
César	2	1	3	6	5	7	¿?
Toñi	1	4	7	6	5	3	2
Totales Grupo 1	**45**	**47**	**103**	**94**	**102**	**83**	**50**

Sara A	1	2	3	4	5	6	7
Jessica H	1	2	4	5	7	6	3
Blanca	1	2	4	5	7	6	3
Vicky	2	1	7	6	5	4	3
Marta	3	4	6	5		2	1
Marta S	1	3	4	2	6	5	7
Neus	1	4	6	5	2	7	3
Inma	1	3		2			
Alba	2	7	1	5	6	3	4
Estefanía	2	1	7	4	5	6	3
Totales Grupo 2	**15**	**29**	**42**	**43**	**43**	**45**	**34**
Total muestra	**60**	**76**	**145**	**137**	**145**	**128**	**84**

En la muestra se observa que la forma textual dominante en el ítem 2 es la A, dividir es partir o repartir en partes iguales, seguida de la B, dividir es averiguar cuántas veces cabe o está contenido un número en otro, no apreciándose diferencias significativas entre el grupo 1 y el grupo 2. Así mismo, se observa que las formas textuales menos dominantes en el ítem 2 son C, averiguar cuántas veces se puede restar un número de otro, y E, hallar un número que es a la unidad en tal proporción como el dividendo con el divisor.

ÍTEM 3	**Forma textual**							
Alumno	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**
Mónica	8						2	1
Patricia	1	2	7	8	6	4	5	3
Rosa	2	3	6	5	7	8	4	1
Paloma	8	1				2	3	4
Myriam	8	1				2	3	4
Lola	1	4	6	7	5	8	3	2
Miriam J	6	2	5	8	4	7	3	1
Raquel	2	1	6	7	5	8	4	3
Mari Tere	2	1	7	3	8	4	5	6
Virginia	8	1	5			2	3	4
Arantxa	2	3	5	6	7	8	4	1
Gema	2	3	6	5	7	8	4	1
Sara	1	4	7	6	8	5	3	2
Sara A	1	4	6	7	5	8	3	2
Laura	3	5	8	4	6	1	7	2
Jessica	5	2	4	8	7	6	3	1
Laura M	3	1	2	5	6	8	7	4
César	2	1	4	3	6	5	7	8
Toñi	1	4	7	6	5	8	3	2
Totales Grupo 1	**66**	**43**	**91**	**88**	**92**	**102**	**76**	**52**

Sara A	1	2	3	4	6	5	8	7
Jessica H								
Blanca								
Vicky	5	3	1	4	2	6		
Marta	3	4	6	5	7	8	2	1
Marta S	5	1	3	6	2	4	8	7
Neus	1	4	7	2	8	5	3	6
Inma	7	2	1	3	5	4	6	8
Alba	8	6	1	5	2	4	3	7
Estefanía	4	5	1	7	6	2	3	4
Totales Grupo 2	**34**	**27**	**23**	**36**	**38**	**38**	**33**	**40**
Total muestra	**100**	**70**	**114**	**124**	**130**	**140**	**109**	**92**

En la muestra global la forma textual dominante en el ítem 3 es la B, averiguar cuántas veces cabe la fracción divisor en la fracción dividendo, seguida de la H, multiplicar la fracción dividendo por la inversa de la fracción divisor. Sin embargo, se observan diferencias entre el Grupo 1 y el Grupo 2. Mientras en el Grupo 1, la opción mayoritaria es la B, en el grupo 2 es la C, hallar una fracción que contiene a la unidad tantas veces como la fracción dividendo contiene a la fracción divisor; la segunda opción es la H en el Grupo 1, pero es la B en el Grupo 2. Las formas textuales menos dominantes en la muestra global son F, hallar una fracción que multiplicada por la fracción divisor da la fracción dividendo, y E, hallar una fracción C tal que la fracción dividendo se compone de C del mismo modo que la fracción divisor se compone de la unidad.

Conclusión: Hay diferencias significativas entre el Grupo 1 y el Grupo 2 en cuanto a la forma textual dominante, lo que refleja diferencias significativas entre los modelos de enseñanza de la división de fracciones en los dos grupos. En el Grupo 2 predomina la proporción, casi empatada con la medida, mientras que en el Grupo 1 la proporción ocupa los últimos lugares y predomina claramente la medida, sin apreciarse una evolución al cambiar el campo numérico en la transición de los naturales a las fracciones.

Se observa que hay cuatro estudiantes del Grupo 1 que dejan contestaciones en blanco, mientras que en el Grupo 2 hay un estudiante que deja casillas en blanco y dos estudiantes que no contestan. Se analizó este hecho llegándose a la conclusión de que el cuestionario de formas textuales era demasiado largo, y debería reducirse. Por otra parte, dadas las diferencias observadas en el ítem 3, se consideró que el foco de atención del cuestionario debería ser ése ítem, razón por la que se eliminaron los otros dos, concretando el cuestionario con un caso práctico del ítem 3, para hacerlo más comprensible a los estudiantes.

5.2.2 Validación de los ítems para el cuestionario final por grado de dificultad

Los ítems del cuestionario final se seleccionaron de entre los ítems del cuestionario del estudio piloto, como consecuencia del análisis de las respuestas de las dos poblaciones de estudiantes a los 18 ítems del cuestionario. En el estudio piloto se observó que los problemas propuestos tenían diferente grado de dificultad.

Los resultados globales del cuestionario se concentran en la tabla 5.5.

Problema nº	Nº orden en cuestionario	Acabado correcto	No acabado o con errores
P42b	1	12	7
P17	2	8	16
P20	3	18	1
P49	4	6	13
P28	5	8	11
P32	6	4	15
P12	7	17	2
P23	8	10	9
P24	9	16	3
P14	10	3	16
P15	11	16	3
P50	12	16	3
P39	13	17	2
P25	14	16	3
P30	15	5	14
P16	16	18	1
P52	17	17	2
P51	18	5	14

TABLA 5.5. Respuestas correctas y no correctas en el estudio piloto

Los problemas en los que se obtuvo mayor número de éxitos que de fracasos fueron los siguientes: P42b, P20, P12, P23, P24, P15, P50, P39, P25, P16 y P52.

A la vista de los resultados, se siguió el criterio de mantener para el cuestionario definitivo aquellos ítems que obtuvieron mayor número de éxitos que de fracasos, considerando como adecuados aquéllos que tuvieran, como mínimo, un 50% de éxito (es decir, al menos 15 respuestas correctas, lo que ocurre en los problemas P20, P12, P23, P24, P15, P50, P39, P25, P16 y P52). La razón de hacerlo así radica en que uno de los objetivos de la investigación es identificar las variables de resolución y si el problema no tiene respuestas es imposible identificar dichas variables. Así mismo, los problemas que resultan más difíciles para los estudiantes no darán información sobre las variables de resolución. A pesar del criterio anterior, se tendrían también en cuenta otros factores, relativos a las variables de los problemas, de manera que, aunque el problema hubiera tenido en el estudio piloto más fracasos que éxitos, podría incluirse en el cuestionario definitivo si se consideraba necesario para testear alguna de las variables de los problemas. Así ocurrió con el problema P28, que, a pesar de tener más fracasos que éxitos, se decidió mantenerlo en el cuestionario definitivo, para testear dónde se encontraba la dificultad del problema. Además, se vio la necesidad de que el cuestionario fuera más corto, reduciéndolo a un máximo de 8 problemas.

5.2.3 Análisis de las respuestas y validación de los ítems por métodos de resolución.

Se analizaron cualitativamente las respuestas, haciendo un escrutinio de la resolución escrita de los ítems con el objeto de identificar: actuaciones comunes de los estudiantes tanto en relación con: i) esquemas de resolución, como con ii) métodos de resolución. De esta manera se localizaron esquemas diferentes de resolución.

Se muestran a continuación algunos ejemplos de respuestas de los estudiantes al cuestionario empleado en el estudio piloto.

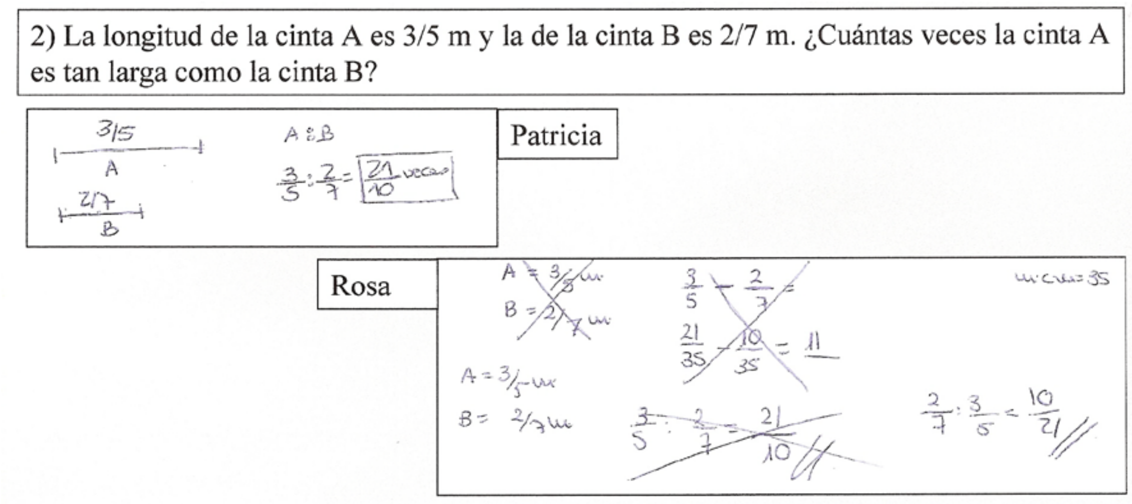
Problema P20

1) Hallar el valor de x en la expresión: 5/6×x=3/4.

Mónica	Patricia
$\frac{5}{6}\cdot x = \frac{3}{4}$ $\frac{5x}{6} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{20x}{24} = \frac{18}{24}$ $\boxed{x = \frac{18}{20}}$	$\frac{5}{6}x = \frac{3}{4}$ $x = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}} \longrightarrow x = \frac{18}{20} = \boxed{\frac{9}{10}}$

Estas dos respuestas son correctas. Tanto Mónica como Patricia usan un esquema ternario y enfocan la resolución del problema como la resolución de una ecuación, pero mientras Mónica resuelve la ecuación sin recurrir a una división de fracciones, Patricia reconoce una división de fracciones.

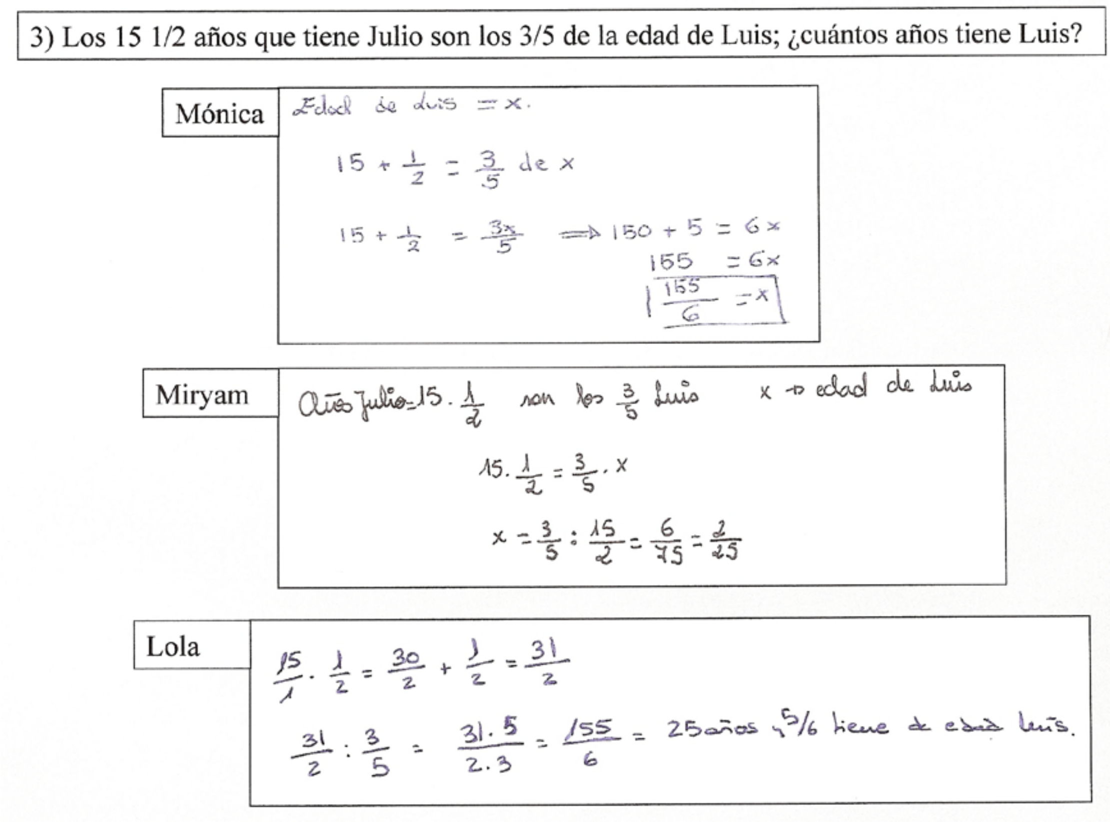
Problema P49



En este problema ningún estudiante plantea una ecuación para su resolución. La forma textual de la pregunta del enunciado está asociada fuertemente al sentido de uso de división, lo que hace que la división directa sea la respuesta mayoritaria. En este caso, el enfoque de resolución no es la ecuación, sino la división directa.

En los ejemplos de la figura, se observa que Patricia se apoya en su respuesta con un esquema y plantea el problema de forma correcta mediante división directa. En cambio, Rosa tiene dificultades ya que intenta primero hacer una comparación aditiva entre las longitudes de las cintas, aunque posteriormente recurre a la comparación multiplicativa mediante división.

Problema P28



La mayoría de estudiantes de la muestra usa un enfoque de ecuación para resolver este problema. Nuevamente se observa que mientras Mónica resuelve la ecuación mediante manipulaciones algebraicas, Miryam reconoce una división de fracciones. Lola tiene dificultades al principio para expresar el número mixto como fracción ordinaria, ya que escribe el mixto como un producto de entero por fracción y, finalmente, plantea una división directa para resolver el problema.

Las tres respuestas presentan diferencias en el enfoque de resolución, pero tienen en común que usan un esquema ternario, bien planteando una ecuación o bien usando directamente una operación de división de fracciones.

Se muestran a continuación algunos ejemplos de respuestas de los estudiantes, en las que la relación entre los datos y la desconocida se plantean, como una relación cuaternaria.

Problema P15

Patricia

$\frac{3}{7}$ tarta — $2/9$ kg

1 — x kg

$$x = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{3}{7}} = \boxed{\frac{14}{27}\text{ kg}}$$

Inma

$3/7$ — $2/9$ kilo

$7/7$ — x kilo

$$x = \frac{7}{7} \cdot \frac{2}{9} = \frac{14}{63} : \frac{3}{7} = \frac{98}{189}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{14/27}\text{ kg}$$

Lucía

$\frac{3}{7}$ tarta — $\frac{2}{9}$ kg.

$\frac{7}{7}$ — x k.

$$\frac{3}{7}x = \frac{2}{9} \cdot \frac{7}{7}$$

$$\frac{3}{7}x = \frac{14}{63}.$$

$$x = \frac{14}{63} : \frac{3}{7}$$

$$x = \frac{98}{189} = \boxed{\frac{14}{27}}\text{ kg. pesa la tarta}$$

Estefanía

$\frac{3}{7}$ de la tarta $\rightarrow$ $\frac{2}{9}$ k.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{3}{7} \rightarrow \frac{2}{9} \\ \frac{4}{7} \longrightarrow x \end{array}\right\} \rightarrow \frac{4}{7} \cdot \frac{2}{9} = \frac{8}{63} \div \frac{3}{7} = \frac{8}{27} = 0'2962 \text{ kg}$$

pesá las 4 parts del total.

$$\frac{8}{27} + \frac{2}{9} = \frac{14}{27} =$$ 0'518 kg en total pesa

Explica cómo lo haces: Por medio de 1 regla de 3 encontramos lo que pesan los $\frac{4}{7}$ y después sumamos los $\frac{3}{7}$ que falten para así saber el total que pesa toda la tarde.

En este problema los estudiantes usan mayoritariamente un esquema en cuadro para organizar los datos y la desconocida y enfocan el problema como uno de proporcionalidad, utilizando un método reglado (de regla de tres). A esta manera de disponer los datos y la desconocida se le denomina en esta investigación "esquema cuaternario".

Aunque Patricia, Inma, Lucía y Estefanía utilizan un esquema cuaternario, enfocan la resolución del problema de maneras diferentes:

Patricia aplica una regla de tres y obtiene la solución mediante una división de fracciones.

Inma renombra la unidad como la fracción 7/7 y aplica la regla de tres en dos pasos, encadenando una multiplicación con una división de fracciones.

Lucía también renombra la unidad en la forma fraccionaria 7/7; sin embargo, su enfoque no es el reglado, si no que utiliza el esquema cuaternario para plantear una ecuación de primer grado, en la que, para despejar la incógnita realiza una división de fracciones.

Finalmente, Estefanía resuelve el problema por etapas. Como sabe que $\frac{3}{7}+\frac{4}{7}=1$, en primer lugar determina el peso de 4/7 de tarta mediante una regla de tres; en la segunda etapa, calcula el peso de la tarta entera, sumando los pesos de 3/7 y 4/7 de tarta.

Por lo tanto, aunque el esquema es cuaternario, los enfoques de resolución pueden ser diferentes: reglado (aplicación mecánica de la regla de tres), reglado por pasos combinando multiplicación y división de fracciones, planteamiento de una ecuación en la que la incógnita se despeja mediante una división de fracciones; resolución por etapas.

5.2.4. Construcción de los instrumentos de recogida de datos

Como consecuencia del estudio piloto se han tomado las siguientes decisiones:

a) Sobre el cuestionario de formas textuales:

Se replantea el cuestionario, con objeto de: a) reducirlo de tamaño, eliminando los ítems 1 y 2 referentes a las formas textuales sobre las fracciones y sobre la operación de división; b) simplificar el ítem 3, concretándolo para una división concreta de fracciones, con objeto de hacerlo más asequible a los estudiantes.

b) Sobre el cuestionario de problemas:

- Se eliminan así los problemas P42b, P17, P49, P28, P32, P14, P30 y P51, por tener menor índice de respuestas; se trata de problemas de más de una etapa y de acciones simultáneas. Con ello quedan los problemas P20, P12, P23, P24, P15, P50, P39, P25, P16 y P52
- La presencia de números mixtos es un distractor que afecta a la resolución del problema. En consecuencia, se descartan los problemas con datos números mixtos, considerando sólo los casos fracción/fracción, entero/fracción y fracción/entero, que son los que aparecen habitualmente en el currículo y libros de texto actuales. Con ello se eliminan los problemas P23, P25 y P39, resultando así los problemas P20, P12, P24, P15, P50, P16 y P52
- En el isomorfismo de medidas, los problemas de regla de tres actúan como distractores al orientar la resolución del problema con un enfoque reglado. Se descarta la inclusión de estos problemas en el cuestionario definitivo, que solamente incluirá problemas de los dos tipos de división. Se eliminan así los problemas P12 y P24, quedando los problemas P20, P15, P50, P16 y P52.
- El problema P50 tiene la misma estructura que el problema P15 y por ello fue eliminado, obteniéndose P20, P15, P16 y P52.
- A estos problemas se añadió el P28, el P49 para testear porqué obtuvieron pocos éxitos en el estudio piloto, siendo problemas cuya estructura es frecuente en los textos de enseñanza.
- Por último, se añadió el problema P51, aún a pesar de su bajo índice de aciertos en el estudio piloto, con objeto de incluir, al menos un problema sobre tres espacios de medida.
- Con todas estas decisiones, el cuestionario definitivo incluyó siete problemas: P20, P15, P16, P52, P28, P49, P51. A ellos se añadió un último problema de multiplicar fracciones, con objeto de que los problemas incluidos en el cuestionario no dieran pistas sobre las operaciones de fracciones que se estaban testeando.

5.3. EL CUESTIONARIO DEFINITIVO

El cuestionario definitivo es el siguiente:

1) Tarea previa

Asigna a cada una de las siguientes frases uno y sólo uno de los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, de forma que:

1 punto = es la frase con la que estás más de acuerdo

8 puntos = es la frase con la que estás más en desacuerdo.

LA DIVISIÓN $\frac{3}{4} \div \frac{5}{7}$ ES...	PUNTUACIÓN
a) ... repartir la fracción 3/4 en partes iguales.	
b) ... averiguar cuántas veces cabe 5/7 en 3/4	
c) ... hallar otra fracción que contiene a la unidad tantas veces como 3/4 contiene a 5/7	
d) ... hacer la fracción 3/4 cinco veces menor y siete veces mayor	
e) ... hallar otra fracción, tal que 3/5 se compone de ella del mismo modo que 5/7 se compone de la unidad	
f) ... hallar una fracción que multiplicada por 5/7 da 3/4	
g) ... multiplicar la fracción 3/4 por la fracción recíproca de 5/7	
h) ... multiplicar la fracción 3/4 por la inversa de la fracción 5/7	

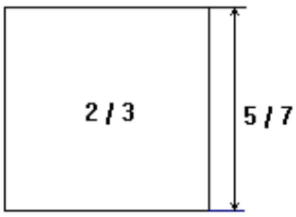
2) Cuestionario de problemas

En cada uno de los problemas, explica qué operación u operaciones hay que hacer y porqué crees que son esas operaciones:

1 (Las dos cintas) La longitud de la cinta A es 3/5 m y la de la cinta B es 2/7 m. ¿Cuántas veces la cinta A es tan larga como la cinta B?

2. (Peso de la torta) 3/7 de torta pesan 2/9 de kilo. ¿Cuánto pesa la torta?

3. (La mesa de Ana) La superficie de la mesa de Ana es un rectángulo que mide 2/3 de m^2. Sabiendo que uno de sus lados mide 5/7 de metro, averigua cuánto mide el otro lado.



4. (Ecuación) Hallar el valor de x en la expresión: $5/6 \times X = 3/4$.

5. (Tarro de miel) En un tarro de miel caben 3/5 de kg. ¿Qué cantidad de miel hay en el tarro si está lleno en sus 3/8 partes?

6. (Edades) Los 15 $\frac{1}{2}$ años que tiene Julio son los 3/5 de la edad de Luis; ¿cuántos años tiene Luis?

7 (Porción de torta) Si cada torta pesa 3/7 de kilo, ¿qué porción de torta tendré con 2/9 de kilo?

8 (Trigo) Sabiendo que la cantidad de harina que se obtiene del trigo es los 17/20 de su peso, y la cantidad de pan obtenido de la harina es 6/5 del peso de ésta, ¿cuánto trigo se necesita para obtener 1530 kg de pan?

Estos problemas ya formaban parte del cuestionario del estudio piloto y, por tanto, ya se incluyó el análisis de las características de su estructura en el apartado 5.1 de este capítulo.

En las Tablas 5.6 y 5.7 que se muestran a continuación se indica el código de identificación de cada problema, así como los valores de las variables usadas en el análisis.

Problema	Código	Variables
1 Las dos cintas	**P49**	Estructura: 1 sólo espacio de medida. Cálculo del escalar. Contexto: métrico / medidas extensivas / longitud (CMME3) Tipo de datos: Q/Q Sentido de uso de fracción: medida Modelo semántico de división de fracciones: medida Representación: recta numérica
2 Peso de la torta	**P15**	Estructura: 2 espacios de medida. Isomorfismo de medida. División con valor unitario desconocido. Contexto. métrico / medidas extensivas / Peso (CMME2) Tipo de datos: Q/Q Sentido de uso de fracción: partes de la unidad y medida Modelo semántico de división de fracciones: Proporción de valor unitario desconocido Representación: No hay
3 La mesa de Ana	**P52**	Estructura: 2 espacios de medida. Producto de medidas. Contexto: métrico / medidas extensivas / área (CMME4) Tipo de datos: Q/Q Sentido de uso de fracción: medida Modelo semántico de división de fracciones: Inversión de la multiplicación o factor perdido. Representación: parte-todo / continuo / rectangular.
4 Ecuación	**P20**	Estructura: Un sólo espacio de medida. Escalar y medida indiferenciables. Contexto: algebraico de operación (CO). Tipo de datos: Q/Q Sentido de uso de fracción: números Modelo semántico de división de fracciones: Inversión de la multiplicación o factor perdido. Representación: No hay

TABLA 5.6. Las variables de los problemas del cuestionario definitivo

Problema	Código	Variables
5 Tarro de miel	**------- (*)**	Estructura: 2 espacios de medida. Isomorfismo de medidas. Multiplicación con valor unitario conocido. Contexto: métrico / medidas extensivas / peso (CMME2) Tipo de datos: Q×Q Sentido de uso de fracción: partes de la unidad y medida Modelo semántico de multiplicación: medida Representación: No hay
6 Edades	**P28**	Estructura: 1 sólo espacio de medida. Cálculo de la medida. Contexto. Repartos y partes (CRP) Tipo de datos: M/Q Sentido de uso de fracción: medida y operador Modelo semántico de división de fracciones: Inversión de la multiplicación o factor perdido. Representación: No hay
7 Porción de torta	**P16**	Estructura: 2 espacios de medida. Isomorfismo de medidas. División con valor unitario conocido. Contexto: métrico / medidas extensivas / peso (CMME2) Tipo de datos: Q/Q Sentido de uso de fracción: medida Modelo semántico de división de fracciones: proporción de valor unitario conocido Representación: No hay
8 Trigo	**P51**	Estructura: 3 espacios de medida. Función compuesta. Contexto: métrico / medidas extensivas / peso (CMME2) Tipo de datos: Z/Q Sentido de uso de fracción: operador Modelo semántico de división de fracciones: proporción con valor unitario conocido (alternativamente, inversión de la multiplicación o factor perdido) Representación: No hay

TABLA 5.7. Las variables de los problemas del cuestionario definitivo

(*) Aunque se resuelve con una multiplicación y ni siquiera forma parte del cuestionario preliminar, se ha creído conveniente incluir el problema 5 en el cuestionario definitivo para no condicionar el enfoque de resolución de las tareas, con la intención de que los estudiantes no apliquen siempre el mismo enfoque de forma mecánica.

La "tarea previa" se ha incluido con la intención de disponer de un banco de datos sobre las formas textuales de los modelos semánticos con las que se encuentran más familiarizados los estudiantes. Y con la pretensión de relacionar esas formas textuales preferidas con las utilizadas en el proceso de resolución de los problemas del cuestionario.

En la Tabla 5.8 se presenta una síntesis de las relaciones entre los modelos semánticos y la estructura de los problemas en el cuestionario definitivo:

	1 EM	**2 EM/ IM/RT**	**2 EM/ IM/C**	**2 EM/ IM/D**	**2 EM/ PM**	**3 EM/ FC**
Partición						
Medida	1 (P49)					8 (P51)
Proporción de valor unitario desconocido				2 (P15)		
Escala						
Proporción de valor unitario conocido			7 (P16)			
Inversión de la multiplicación Factor perdido	6(P28) 4 (P20)				3 (P52)	8 (P51)

TABLA 5.8. La estructura de los problemas del cuestionario definitivo y los modelos semánticos

5.4 PRIMEROS RESULTADOS

En relación con la forma en la cual los estudiantes de ambas poblaciones que participaron en el estudio piloto, organizan la información del enunciado del problema, se han localizado dos esquemas de resolución: cuaternario y ternario.

El esquema cuaternario aparece en las respuestas de los estudiantes a las tareas cuya estructura corresponde al isomorfismo de medidas, en los casos particulares de regla de tres, de valor unitario conocido y de valor unitario desconocido, cuando el sentido de uso asociado es de proporción. Los estudiantes usan un esquema de regla de tres, colocando en forma de cuadro los datos siguiendo el orden literal en que aparecen en el enunciado del problema, tal como se muestra en la parte derecha de los siguientes diagramas:

M1	M2
A	B
C	X

$$\left.\begin{array}{l} A \longrightarrow B \\ C \longrightarrow X \end{array}\right\}$$

Esquema cuaternario de isomorfismo de medidas para regla de tres

M1	M2
1	A
X	B

$$\left.\begin{array}{l} 1 \longrightarrow A \\ X \longrightarrow B \end{array}\right\}$$

Esquema cuaternario de isomorfismo de medidas para valor unitario conocido

M1	M2
1	X
A	B

$$\left.\begin{array}{l} 1 \longrightarrow X \\ A \longrightarrow B \end{array}\right\}$$

Esquema cuaternario de isomorfismo de medidas para valor unitario desconocido

El esquema ternario aparece en las respuestas de los estudiantes a las tareas de 0 ó 1 espacio de medida, a las del producto de medidas y, con muy poca frecuencia en las del isomorfismo de medidas y la función compuesta. Suele aparecer cuando el sentido de uso de la división es de inversión de la multiplicación o factor perdido y, con menor frecuencia, cuando el sentido de uso es de medida.

Se han localizado cuatro métodos de resolución: funcional o de regla de tres, escalar, división directa y ecuación, que están relacionados tanto con la estructura como con el modelo semántico del problema. Así:

El método funcional aparece en tareas de isomorfismo de medidas, cuando el modelo semántico es de medida o de proporción con valor unitario conocido.

El método escalar aparece en tareas de isomorfismo de medidas, cuando el modelo semántico es de tasa, razón unitaria o de proporción con valor unitario desconocido.

En las respuestas al cuestionario usado en el estudio piloto se ha observado que los estudiantes usan preferentemente el método reglado. Cuando el problema se enfoca mediante una regla de tres, la división de fracciones queda en un segundo plano; de manera que el problema no se percibe como de división, sino como una relación de proporcionalidad.

El método de división directa aparece en cualquier estructura, cuando el modelo semántico asociado es de medida.

El método de ecuación aparece en tareas que involucran un solo espacio de medida, en el producto de medidas y en la función compuesta, cuando el sentido de uso asociado es el de factor perdido y el contexto es métrico de área. La resolución de la ecuación conduce a una división de fracciones, pero el problema no se percibe como de división, sino como la resolución de una ecuación. De hecho, se ha localizado algún caso en que el estudiante resuelve la ecuación sin pasar por la división de fracciones.

Junto con los esquemas y métodos de resolución citados, en la población de estudiantes que participaron en el estudio piloto se ha observado una variedad de algoritmos de división de fracciones, como por ejemplo, el de productos cruzados, el protocolo de la calculadora y la conversión de las fracciones en decimales.

Una consecuencia del pilotaje es que se pueden caracterizar las respuestas de los estudiantes mediante la terna (esquema, método, algoritmo), a la que se denomina enfoque de resolución. Teniendo en cuenta que hay 2 esquemas, 4 métodos y 7 algoritmos, es posible teóricamente encontrar 2x4x7=56 enfoques de resolución diferentes. Sin embargo, por las características de esta investigación, se ha renunciado a hacer un estudio de los algoritmos (ya que éste conllevaría un diseño diferente de la investigación al ser necesario incluir entrevistas personales, puesto que en las respuestas escritas no se distingue con claridad el algoritmo de división de fracciones utilizado por los estudiantes en cada problema). De esta manera, los enfoques de resolución se reducen teóricamente a un total de ocho, pero lo observado en el estudio piloto reduce los enfoques de resolución a solamente cuatro. En la Tabla 5.9 se muestran los esquemas y métodos que aparecen en los enfoques de resolución más frecuentes observados en el estudio piloto.

Enfoques	**Esquema**	**Método**
E1	Cuaternario	Funcional
E2	Cuaternario	Escalar
E3	Ternario	División directa
E4	Ternario	Ecuación

TABLA 5.9. Esquemas y métodos en los enfoques de resolución más frecuentes observados en la muestra de pilotaje

En el estudio piloto se observó que:

1) Ningún alumno usa el esquema cuaternario en la estructura de un solo espacio de medida, ni en el producto de medidas. Lo que confirma que el enfoque de resolución está relacionado con la estructura del problema.

2) Algunos alumnos usan el método de ecuación en la estructura del isomorfismo de medidas, pero la mayoría recurre al método reglado (funcional o escalar). Lo que confirma que la enseñanza media entre la estructura del problema y el enfoque de resolución.

CAPÍTULO **6**

Análisis de las respuestas a las tareas del cuestionario.

En este capítulo se describen y analizan las respuestas de los estudiantes a cada una de las tareas del cuestionario de investigación. En primer lugar se señala el proceso experimental desarrollado, para pasar a continuación a una descripción y análisis detallado de las respuestas de los estudiantes.

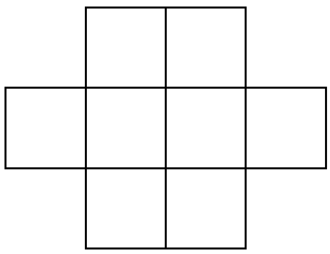
6.1. DESCRIPCIÓN DEL EXPERIMENTO. METODOLOGÍA.

Tras la fase de pilotaje, que permitió definir con precisión el cuestionario definitivo, se procedió a realizar el experimento propiamente dicho, que consiste en su aplicación a una muestra de un total de 21 estudiantes de 4º curso de ESO del IES Pere Boil, de Manises. La muestra estaba constituida por un grupo-clase subdividido en dos subgrupos distribuidos en dos aulas contiguas. Éste es el agrupamiento natural de estos estudiantes durante el curso, debido a razones que obedecen a la necesidad de atender mejor a la diversidad formativa. De hecho, como se verá en las respuestas de los estudiantes, el grupo 1 presenta mejor rendimiento académico que el grupo 2. Se ha decidido mantener esta distribución con objeto de disponer de suficiente espacio entre los estudiantes y de las condiciones necesarias para facilitar un ambiente adecuado de trabajo. A la aplicación del cuestionario asistió el investigador y estuvieron presentes los dos profesores de matemáticas habituales de los estudiantes. Se respetó el orden habitual de agrupamiento durante el curso. Así, los grupos se dispusieron de la siguiente manera:

Grupo 1	Rubén, Cristina, Ana, Miriam, Ángela, Juan, Casandra, Christian y Ana María
Grupo 2	Vicent, Fco. Javier, Aída, Carmen, Mireia, Héctor, Laula A, Patri, Laura B, Estefanía, Jennifer, Jesús.

El cuestionario se pasó el miércoles 7 de mayo de 2008 y la prueba se dividió en dos partes. La primera parte dio comienzo a las 11:15 horas simultáneamente en las dos aulas y estaba constituida por el apartado TAREA PREVIA y por los problemas 1, 2, 3 y 4. Conforme los estudiantes acababan esta prueba, se anotaba en la hoja de respuestas la hora de entrega y se facilitaba a cada uno la segunda parte de la prueba, con los problemas 5, 6, 7 y 8. Cuando entregaron también esta segunda parte, se anotó en la hoja de respuestas la hora de entrega. En el transcurso de la prueba, los estudiantes trabajaron de forma individual, disponiendo de calculadoras científicas y material de dibujo por si fuera necesario su uso. Los profesores tenían prohibido hacer ningún comentario a los estudiantes. En caso de dudas acerca del enunciado de un problema o de cualquier otro tipo, se les indicó a los estudiantes que escribieran en la hoja de respuestas las dificultades encontradas. Se insistió también (aunque está escrito en el mismo cuestionario) que indicasen por escrito qué operación u operaciones habían elegido para resolver los problemas, explicando porqué habían elegido esas operaciones y no otras. Aunque el tiempo previsto para el conjunto de la prueba (incluidas las dos partes) era de 1 hora, lo cierto es que la gran mayoría de los estudiantes acabó antes de tiempo, razón por la cual fue necesario incluir una actividad complementaria para cubrir la hora habitual de clase. Dicha actividad fue la siguiente:

“Escribe los números del 1 al 8 en la siguiente cuadrícula, de forma que ninguno tenga a su lado un consecutivo con él”



Por término medio, la primera parte tuvo una duración de 26 minutos, mientras que la segunda parte solamente de 17 minutos. Esta diferencia es poco probable que se deba al grado de dificultad de las actividades propuestas, es posible que los motivos radiquen en el cansancio de los propios estudiantes.

6.2. DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS

A continuación se describen y analizan las respuestas de los estudiantes al cuestionario de investigación.

6.2.1. El cuestionario de formas textuales

En el siguiente cuadro se registran las puntuaciones otorgadas por cada uno de los estudiantes de la muestra a cada una de las formas textuales que se proponen en el cuestionario.

	Forma textual							
Alumno	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**
Rubén	8	1	5	2	4	3	7	8
Cristina	1	3	5	7	6	2	8	4
Ana	3	4	7	2	6	1	8	5
Miriam	4	3	1	5	2	6	8	7
Ángela	2	1	7	4	3	8	4	2
Juan	8	6	2	1	3	7	4	5
Casandra	8	7	6	5	3	4	1	2
Christian	3	5	4	1	2	6	7	8
Ana María	3	7	8	2	4	1	5	6
Totales Grupo 1	**40**	**37**	**45**	**29**	**33**	**38**	**49**	**45**
Vicent	1	3	4	6	5	7	8	3
Fco. Javier	2	6	3	5	7	4	1	8
Aída	4	2	6	1	5	3	7	8
Carmen	1	4	2	3	6	5	7	8
Mireia	5	2	6	1	7	3	4	8
Héctor	2	7	6	1	4	5	3	8
Laura A	2	8	7	3	6	5	1	4
Patri	1	5	6	2	7	8	3	4
Laura B	5	2	4	3	6	1	7	8
Estefanía	3	2	4	5	7	1	6	8
Jennifer	1	1	3	2	1	1	6	1
Jesús	1	6	4	1	5	1	2	6
Totales Grupo 2	**28**	**47**	**55**	**33**	**66**	**44**	**55**	**74**
Total muestra	**68**	**84**	**100**	**62**	**99**	**82**	**104**	**119**

TABLA 6.1. Puntuaciones otorgadas a las 8 formas textuales

Se observa que Jennifer y Jesús no han entendido la tarea, ya que otorgan la misma puntuación a varias de las formas textuales. A pesar de ello, sus puntuaciones se consideran válidas y se suman a las del resto de la muestra, ya que indican un grado de preferencia por alguna de las formas textuales que merece ser tenida en cuenta.

Como resultado de estas puntuaciones, podemos decir que, a priori, el orden de preferencia para las formas textuales y los modelos semánticos que se observa en la muestra es el siguiente:

orden	código	forma textual	modelo semántico
1	d)	hacer la fracción 3/4 cinco veces menor y siete veces mayor	Inversión del factor multiplicativo
2	a)	repartir la fracción 3/4 en partes iguales.	Partición
3	f)	hallar una fracción que multiplicada por 5/7 da 3/4	Inversión de multiplicación Factor perdido
4	b)	averiguar cuántas veces cabe 5/7 en 3/4	Medida
5	e)	hallar otra fracción, tal que 3/4 se compone de ella del mismo modo que 5/7 se compone de la unidad	Proporción de valor unitario conocido
6	c)	hallar otra fracción que contiene a la unidad tantas veces como 3/4 contiene a 5/7	Proporción de valor unitario desconocido
7	g)	multiplicar la fracción 3/4 por la fracción recíproca de 5/7	Inversión de multiplicación
8	h)	multiplicar la fracción 3/4 por la inversa de la fracción 5/7	Inversión de multiplicación

TABLA 6.2. Orden de preferencia de las formas textuales en la muestra

Según esto, las formas textuales predominantes en la muestra son la d), a), f) y b), que se corresponden, respectivamente, con los modelos semánticos de inversión del factor multiplicativo, partición, inversión de la multiplicación (en su forma aritmética) y medida. Hay que destacar que los modelos de inversión de la multiplicación (en sus formas algebraica y estructural) quedan relegados a los últimos lugares, a pesar del predominio que tienen en la actualidad en los libros de texto. Una posible explicación radica en la propia naturaleza de la tarea, ya que al ser las últimas en la tabla que aparece en el enunciado de la tarea, parten con desventaja respecto del resto. A pesar de ello, la inversión aritmética de la multiplicación aparece en cuarto lugar. Otra posible explicación es que puede que algún estudiante haya aplicado la escala de puntuaciones al revés, es decir, 8 = mayor preferencia, 1 = menor preferencia. En cualquier caso, este estudio preliminar se contrastará con las formas textuales que los estudiantes pongan en juego en el proceso de resolución de los problemas.

6.2.2. El cuestionario de problemas

En el anexo I mostramos el análisis de las respuestas individuales a cada una de las tareas del cuestionario. En este apartado vamos a señalar los resultados globales de dicho análisis, mostrando algunos ejemplos de respuestas más representativas.

6.2.2.1. Tarea 1: "Las dos cintas"

Los resultados obtenidos para esta tarea son los siguientes:

- Los 10/21 estudiantes que contestan correctamente utilizan un esquema ternario y ninguno (0/21) usa un esquema cuaternario.
- En las respuestas correctas, el método de resolución más frecuente es la división directa (9/21) y solamente un estudiante (1/21) usa el método de ecuación, tal como se señala en la Tabla 6.3.

	DD	E
Rubén	X	
Ana	X	
Miriam		X
Ángela	X	
Juan	X	
Casandra	X	
Christian	X	
Ana María	X	
Aída	X	
Mireia	X	

TABLA 6.3. Métodos de resolución para la tarea 1

- En cuanto a las contestaciones no correctas, 8/21 estudiantes dan respuestas aditivas, basadas en la resta de las fracciones (3/21), la conversión de las fracciones en decimales y resta de decimales (3/21), y en la reducción a común denominador y comparación de los numeradores (2/21). Por otra parte, 1/21 estudiante multiplica las fracciones, en vez de dividirlas y 2/21 no contestan.
- Las formas textuales localizadas entre las respuestas correctas corresponden a los modelos de: medida (4/21), inversión del factor multiplicativo (1/21) y proporción con valor unitario desconocido (1/21). Hay 4/21 estudiantes que no incluyen ninguna explicación en su respuesta, por lo que no muestran ninguna forma textual.
- Solamente 3/21 estudiantes usan una representación gráfica del problema basada en la recta numérica.

- Se han observado los siguientes tipos de errores: a) error al multiplicar cuando se usa el algoritmo de los productos cruzados (1/21, Juan), b) intercambiar el orden de dividendo y divisor en el momento de dividir (1/21, Casandra),

Algunos ejemplos de respuestas correctas:

- Alumna 3 (Ana)

1 La longitud de la cinta A es 3/5 m y la de la cinta B es 2/7 m. ¿Cuántas veces la cinta A es tan larga como la cinta B?

$$\frac{3}{5} : \frac{2}{7} = \boxed{\frac{21}{10}}$$

Explica qué operación u operaciones hay que hacer y porqué crees que son esas operaciones:

He utilizado la división de fracciones, porque así se puede averiguar el número de veces.

Trascripción: "$\frac{3}{5}:\frac{2}{7}=\frac{21}{10}$ He utilizado la división de fracciones porque así se puede averiguar el número de veces".

Explicación: La estudiante divide la fracción 3/5 entre la fracción 2/7, obteniendo el resultado correcto.

Análisis: La estudiante utiliza un esquema ternario, un método de resolución de división directa. La forma textual que usa corresponde al sentido de uso de medida. No incluye ninguna representación gráfica en su respuesta.

- Alumna 4 (Miriam)

1 La longitud de la cinta A es 3/5 m y la de la cinta B es 2/7 m. ¿Cuántas veces la cinta A es tan larga como la cinta B?

$A = \frac{3}{5}$ m

$x \cdot \frac{2}{7} = \frac{3}{5}$

$x = \frac{3}{5} : \frac{2}{7}$

$B = \frac{2}{7}$ m

$x = \frac{21}{10}$ veces es más larga.

Explica qué operación u operaciones hay que hacer y porqué crees que son esas operaciones:

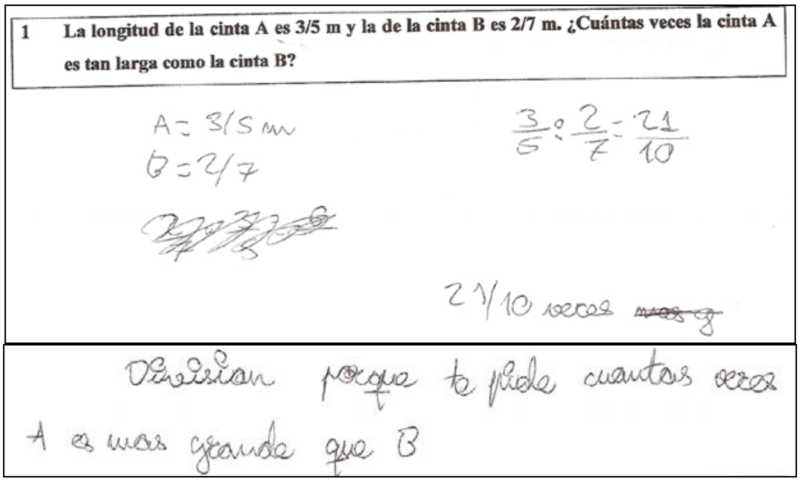
He multiplicado un nº x por la cuerda B y lo he igualado a la cuerda A para que midan lo mismo. Hay que averiguar x para saber cuánto es más larga y para eso se divide la longitud de A entre la de B.

Trascripción: Dibuja dos segmentos, en uno escribe A=$\frac{3}{5}$ m y en el otro B=$\frac{2}{7}$ m "$X \cdot \frac{2}{7} = \frac{3}{5} \quad X = \frac{3}{5} : \frac{2}{7} \quad X = \frac{21}{10}$ veces es más larga. He multiplicado un nº X por la cuerda B y lo he igualado a la cuerda A para que midan lo mismo. Hay que averiguar X para saber cuánto es más larga y para eso se divide la longitud de A entre la de B".

Explicación: La estudiante plantea la ecuación x·2/7=3/5 y despeja X dividiendo la fracción 3/5 entre la fracción 2/7, obteniendo el resultado correcto.

Análisis: La estudiante usa un esquema ternario. Su método de resolución es el planteamiento y resolución de una ecuación. Para despejar la X efectúa una división de fracciones. La forma textual que utiliza corresponde al sentido de uso de medida. La representación gráfica que ilustra su respuesta corresponde al modelo de recta numérica.

- Alumno 8 (Christian)


1 **La longitud de la cinta A es 3/5 m y la de la cinta B es 2/7 m. ¿Cuántas veces la cinta A es tan larga como la cinta B?**

A= 3/5 m
B=2/7

$\frac{3}{5} : \frac{2}{7} = \frac{21}{10}$

21/10 veces ~~más~~

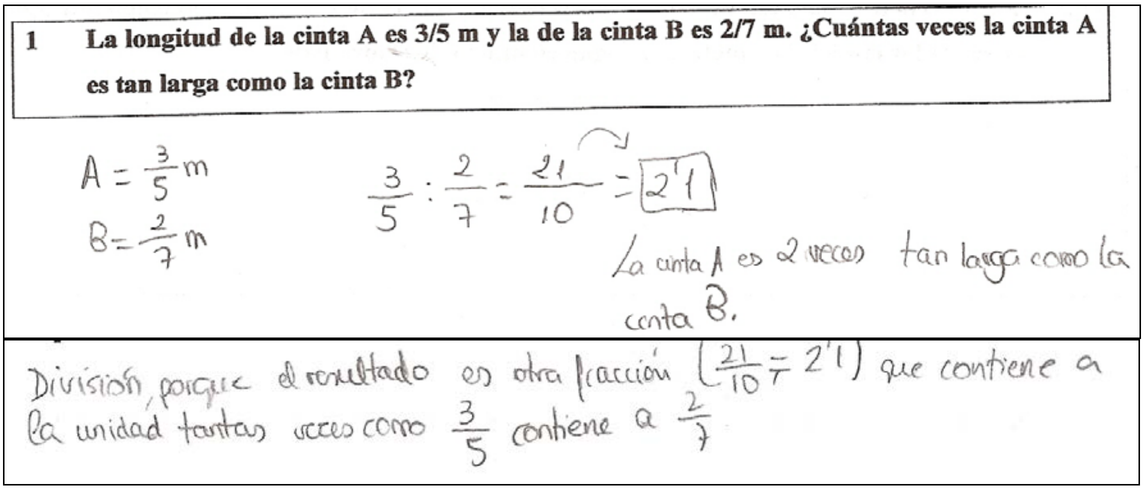
División porque te pide cuantas veces A es más grande que B

Trascripción: "A=3/5 m, B=2/7, $\frac{3}{5} : \frac{2}{7} = \frac{21}{10}$; 21/10 veces. División porque te pide cuantas veces A es más grande que B".

Explicación: El estudiante divide directamente la fracción 3/5 entre la fracción 2/7, obteniendo la solución correcta.

Análisis: El estudiante usa un esquema ternario y un método de división directa. La forma textual (cuántas veces A es más grande que B) corresponde al sentido de uso de inversión del factor multiplicativo. No incluye ninguna representación gráfica del problema.

- Alumna 9 (Ana María)



1 La longitud de la cinta A es 3/5 m y la de la cinta B es 2/7 m. ¿Cuántas veces la cinta A es tan larga como la cinta B?

$A = \frac{3}{5}$ m

$B = \frac{2}{7}$ m

$\frac{3}{5} : \frac{2}{7} = \frac{21}{10} = \boxed{2'1}$

La cinta A es 2 veces tan larga como la cinta B.

División porque el resultado es otra fracción $\left(\frac{21}{10} = 2'1\right)$ que contiene a la unidad tantas veces como $\frac{3}{5}$ contiene a $\frac{2}{7}$

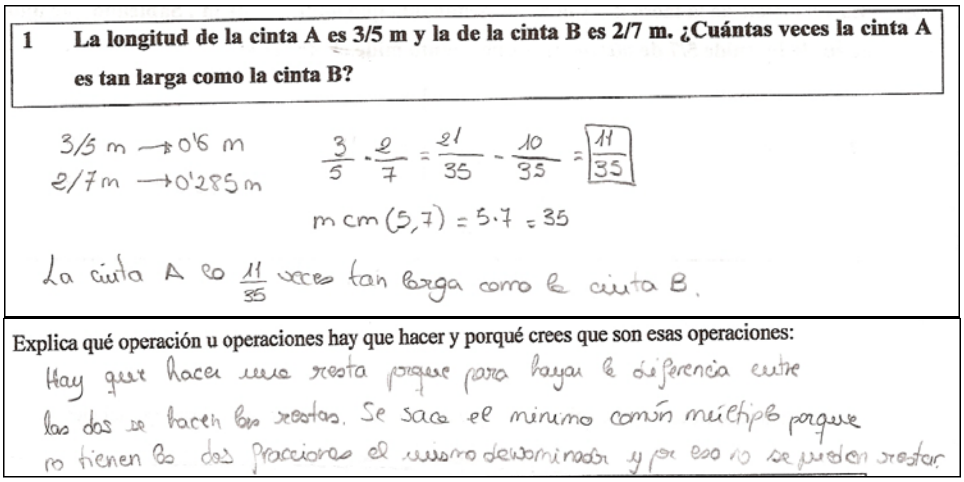
Trascripción: “A=3/5 m, B=2/7 m, $\frac{3}{5}:\frac{2}{7}=\frac{21}{10}=2'1$; La cinta A es 2 veces tan larga como la cinta B. División porque el resultado es otra fracción (21/10=2’1) que contiene a la unidad tantas veces como 3/5 contiene a 2/7”.

Explicación: La estudiante divide directamente la fracción 3/5 entre la fracción 2/7, obteniendo la solución correcta, que expresa en forma decimal, aproximando el resultado; por ello dice que la cinta A es 2 veces tan larga como la B.

Análisis: La forma textual corresponde al sentido de uso de proporción con valor unitario desconocido, pero la estudiante no utiliza un esquema de resolución cuaternario, sino ternario. El método de resolución es la división directa. No incluye ninguna representación gráfica.

Algunos ejemplos de respuestas incorrectas:

- Alumna 2 (Cristina)



1 La longitud de la cinta A es 3/5 m y la de la cinta B es 2/7 m. ¿Cuántas veces la cinta A es tan larga como la cinta B?

3/5 m → 0'6 m

2/7 m → 0'285 m

$\frac{3}{5} - \frac{2}{7} = \frac{21}{35} - \frac{10}{35} = \boxed{\frac{11}{35}}$

m cm (5,7) = 5·7 = 35

La cinta A es $\frac{11}{35}$ veces tan larga como la cinta B.

Explica qué operación u operaciones hay que hacer y porqué crees que son esas operaciones:

Hay que hacer una resta porque para hayar la diferencia entre las dos se hacen las restas. Se saca el mínimo común múltiplo porque no tienen las dos fracciones el mismo denominador y por eso no se pueden restar

Trascripción: $2/3\,\text{m} \rightarrow 0'6\,\text{m}$ $\quad \frac{3}{5}-\frac{2}{7}=\frac{21}{35}-\frac{10}{35}=\frac{11}{35} \quad \text{mcm}(5,7)=5\cdot 7=35$

$2/7 \rightarrow 0'285\,\text{m}$

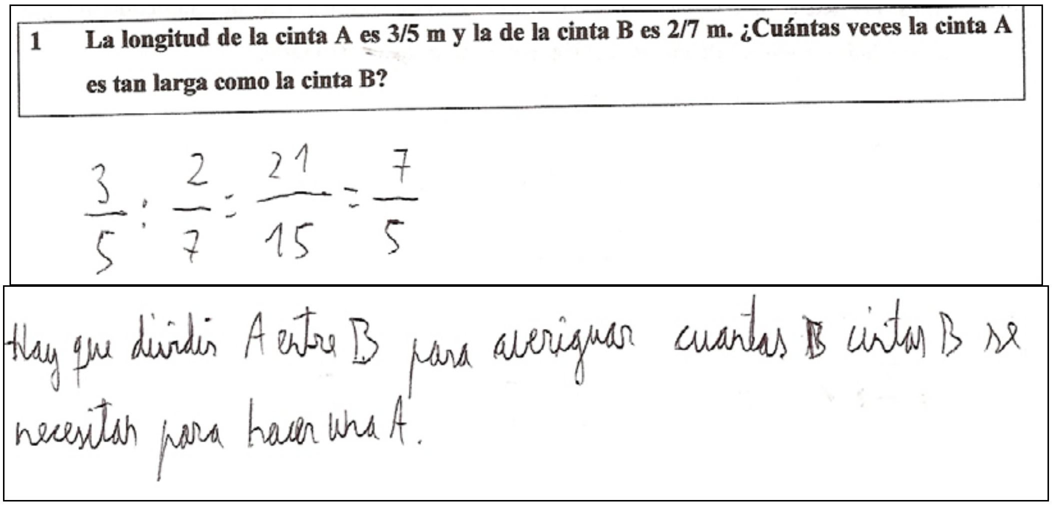
"La cinta A es $\frac{11}{35}$ veces tan larga como la cinta B.

Hay que hacer una resta porque para hayar la diferencia entre las dos se hacen las restas. Se saca el mínimo común múltiplo porque no tienen las dos fracciones el mismo denominador y por eso no se pueden restar".

Explicación: La estudiante resta la fracción 3/5 menos la fracción 2/7, obteniendo previamente el mínimo común múltiplo de los denominadores. Explica su elección de la operación basándose en que hay que ver la diferencia entre las dos cintas. Obtiene una solución incorrecta.

Interpretación: la estudiante enfoca la resolución desde el punto de vista aditivo, mediante resta de las fracciones. No incluye ninguna representación gráfica.

- Alumno 6 (Juan)


1 **La longitud de la cinta A es 3/5 m y la de la cinta B es 2/7 m. ¿Cuántas veces la cinta A es tan larga como la cinta B?**

$\frac{3}{5} : \frac{2}{7} = \frac{21}{15} = \frac{7}{5}$

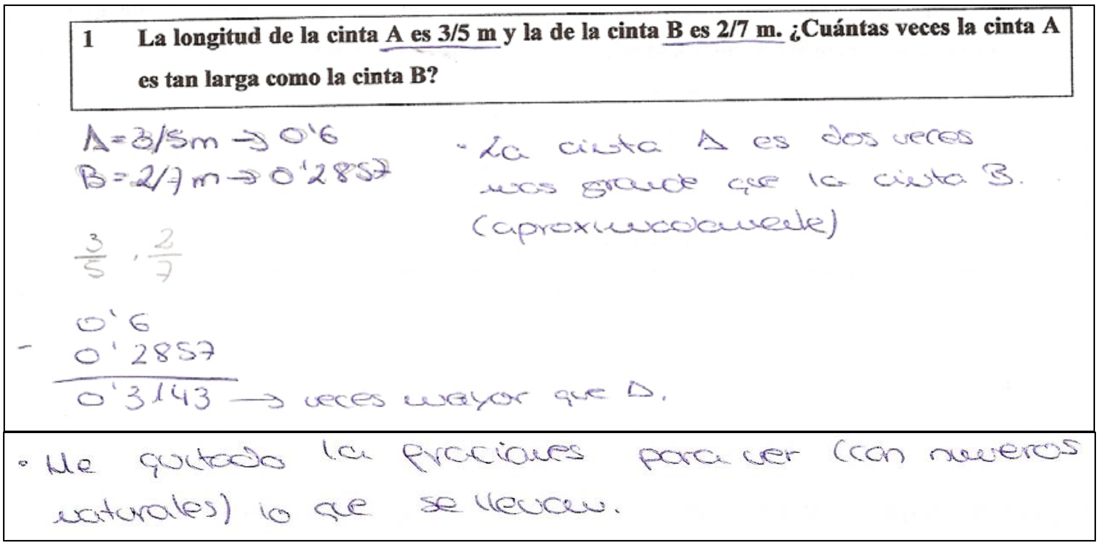
Hay que dividir A entre B para averiguar cuantas ~~B~~ cintas B se necesitan para hacer una A.

Trascripción: "$\frac{3}{5}:\frac{2}{7}=\frac{21}{15}=\frac{7}{5}$. Hay que dividir A entre B para averiguar cuántas cintas B se necesitan para tener una A".

Explicación: El estudiante divide directamente la fracción 3/5 entre la fracción 2/7, pero comete un error y obtiene un resultado incorrecto.

Análisis: La forma textual (averiguar cuántas cintas B hacen una cinta A) corresponde al sentido de uso de medida. Usa un esquema ternario, un método de división directa y el algoritmo de productos cruzados, pero comete un error al multiplicar: 2x5=15. No incluye ninguna representación gráfica.

- Alumna 16 (Jennifer)


1 **La longitud de la cinta A es 3/5 m y la de la cinta B es 2/7 m. ¿Cuántas veces la cinta A es tan larga como la cinta B?**

A=3/5m → 0'6
B=2/7m → 0'2857

$\frac{3}{5}$, $\frac{2}{7}$

0'6
− 0'2857
0'3143 → veces mayor que A.

• La cinta A es dos veces mas grande que la cinta B. (aproximadamente)

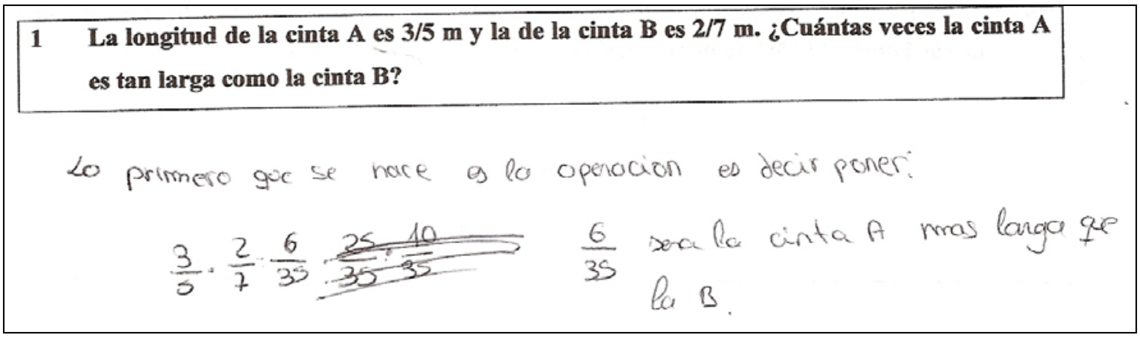
• He quitado la fracciones para ver (con numeros naturales) lo que se llevan.

Trascripción: “A=3/5 m → 0’6; B=2/7 m → 0’2857; 0’6–0’2857=0’3143→veces mayor que A. La cinta A es dos veces más grande que la cinta B (aproximadamente). He quitado las fracciones para ver (con números naturales) lo que se llevan”.

Explicación: La estudiante transforma las fracciones en decimales y resta los decimales, dando un resultado incorrecto. Concluye que la cinta A es, aproximadamente, dos veces más grande que la cinta B.

Análisis: La estudiante tiene problemas con las fracciones; y las evita convirtiéndolas en decimales, pero en su explicación habla de números naturales. El enfoque de resolución es aditivo, basado en la resta de decimales, pero no está claro si su conclusión se basa en el resultado de la resta (0’3143 es aproximadamente la mitad de la cinta A) o en la observación empírica de que la longitud de la cinta B (0’2857≈0’3) es la mitad de la cinta A. No incluye ninguna representación gráfica.

- Alumna 18 (Patri)


1 **La longitud de la cinta A es 3/5 m y la de la cinta B es 2/7 m. ¿Cuántas veces la cinta A es tan larga como la cinta B?**

Lo primero que se hace es la operacion es decir poner:

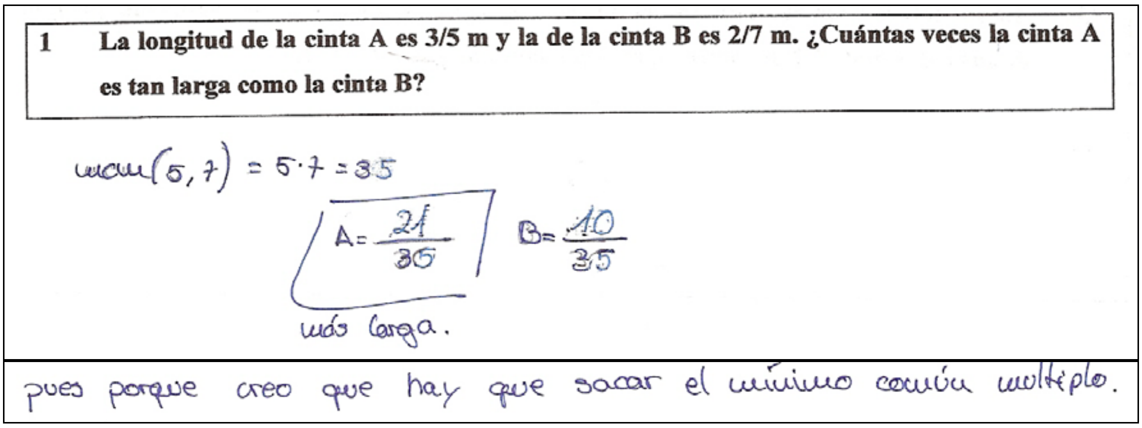
$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{6}{35}$ $\cancel{\frac{25}{35}}$ $\cancel{\frac{10}{35}}$ $\frac{6}{35}$ sera la cinta A mas larga que la B.

Trascripción: "Lo primero que se hace es la operación es decir poner: $\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{7}=\frac{6}{35}$. $\frac{6}{35}$ será la cinta A mas larga que la B".

Explicación: La estudiante multiplica las fracciones que aparecen en el enunciado, en el mismo orden. Concluye que el resultado del producto será el número de veces que la cinta A es más larga que la B. No incluye ninguna explicación.

Análisis: La estudiante enfoca el problema desde un punto de vista multiplicativo, pero no identifica la división como la operación que permite comparar multiplicativamente y, en su lugar, usa el producto. No incluye ninguna representación gráfica.

- Alumna 19 (Laura B)



1 La longitud de la cinta A es 3/5 m y la de la cinta B es 2/7 m. ¿Cuántas veces la cinta A es tan larga como la cinta B?

mcm(5, 7) = 5·7 = 35

$\boxed{A=\frac{21}{35}}$ $B=\frac{10}{35}$

más larga.

pues porque creo que hay que sacar el mínimo común múltiplo.

Trascripción: "mcm(5, 7)=5·7=35: A=$\frac{21}{35}$más larga, B=$\frac{10}{35}$. pues porque creo que hay que sacar el mínimo común múltiplo".

Explicación: La estudiante reduce las fracciones a común denominador, usando el mínimo común múltiplo de los denominadores y se limita a decir cuál de las dos cintas es más larga.

Interpretación: La estudiante solamente compara las dos fracciones, señalando la mayor, pero no aborda el problema.

6.2.2.2 Tarea 2: "Peso de la torta"

Los resultados obtenidos para esta tarea son los siguientes:

- De los 7/21 estudiantes que contestan correctamente, 6/21 usan un esquema cuaternario y 1/21 usa un esquema ternario.
- Entre los 6/21 que usan un esquema cuaternario, el método de resolución más frecuente es el funcional de regla de tres (5/21) y solamente un estudiante (1/21) usa el método escalar, tal como se indica en la Tabla 6.4.

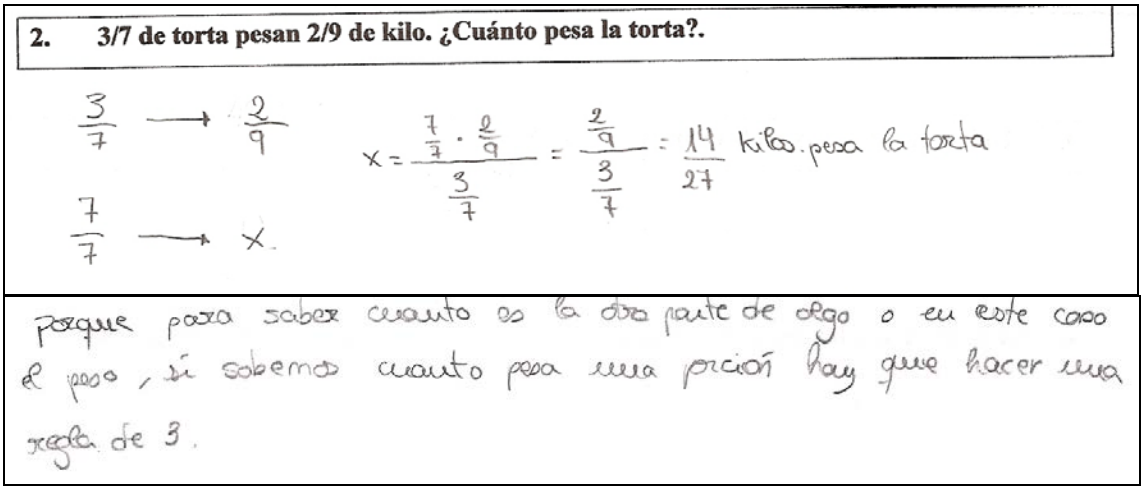
	Funcional	Escalar
Cristina	X	
Miriam	X	
Ángela	X	
Casandra	X	
Christian	X	
Estefanía		X

TABLA 6.4. Métodos de resolución para la tarea 2

- El método de regla de tres aparece bajo tres formas: a) combinación de multiplicación y división, b) método reglado usual y c) planteamiento y resolución de la ecuación que se obtiene al igualar los productos cruzados.
- La única respuesta correcta (1/21, Juan) que usa el esquema ternario aplica el método de división directa.
- En cuanto a las respuestas no correctas, 4/21 estudiantes contestan de forma aditiva, 1/21 multiplica las fracciones del enunciado y 9/21 no contestan.
- Las formas textuales utilizadas por los estudiantes que contestan correctamente corresponden a los sentidos de uso de proporción con valor unitario desconocido (4/21), proporción con valor unitario conocido (2/5) e inversión del factor multiplicativo (1/21). Solamente se detectó 1/5 caso en el que la forma textual se identifica con la división de fracciones. En el resto de casos, la división de fracciones aparece en segundo plano, como consecuencia de la aplicación del método reglado. En las respuestas incorrectas se ha localizado el modelo semántico de proporción de valor unitario desconocido en un caso y en el resto de casos predomina el modelo aditivo.
- Solo 1/21 estudiante representa el problema mediante un modelo físico circular de tarta.
- Se han observado los siguientes tipos de errores: a) error al calcular el mcm de los denominadores (1/21, Ana), b) error al simplificar las fracciones (1/21, Miriam), c) error al multiplicar las fracciones (1/21, Héctor) d) error al multiplicar en cruz para sumar las fracciones (1/21, Laura A), e) dibujar sectores de distinta amplitud en el diagrama circular (1/21, Jesús).

Algunos ejemplos de respuestas correctas:

- Alumna 2 (Cristina)



2. 3/7 de torta pesan 2/9 de kilo. ¿Cuánto pesa la torta?.

$$\frac{3}{7} \longrightarrow \frac{2}{9} \qquad x = \frac{\frac{7}{7}\cdot\frac{2}{9}}{\frac{3}{7}} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{3}{7}} = \frac{14}{27} \text{ kilos. pesa la torta}$$

$$\frac{7}{7} \longrightarrow x.$$

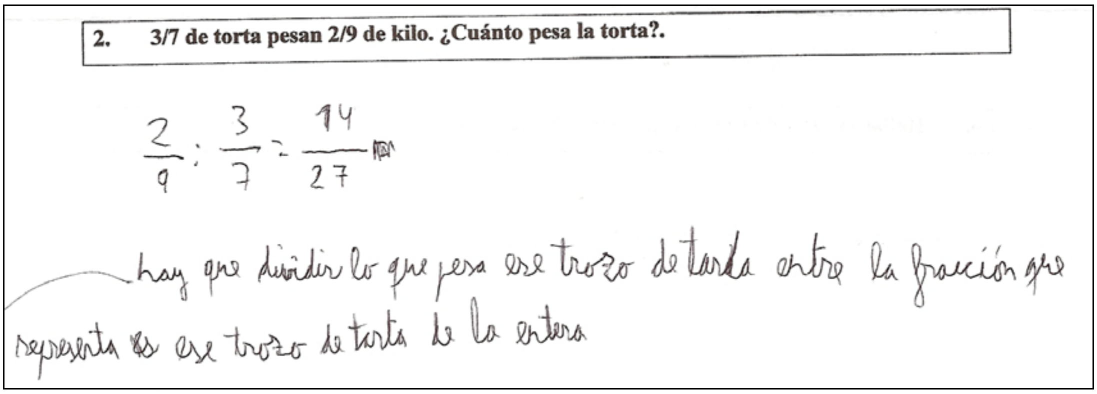
porque para saber cuanto es la otra parte de algo o en este caso el peso, si sabemos cuanto pesa una porción hay que hacer una regla de 3.

Trascripción: “$\left.\begin{array}{l} \frac{3}{7} \rightarrow \frac{2}{9} \\ \frac{7}{7} \rightarrow \mathbf{X} \end{array}\right\} \; X = \frac{\frac{7}{7}\cdot\frac{2}{9}}{\frac{3}{7}} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{3}{7}} = \frac{14}{27}$ kilos pesa la tarta. Porque para saber cuanto es la otra parte de algo o en este caso el peso, si sabemos cuanto pesa una porción hay que hacer una regla de 3”.

Explicación: La estudiante plantea una regla de tres, escribiendo los datos en el mismo orden en que aparecen en el enunciado, con la particularidad de que expresa la unidad como la fracción 7/7. A continuación, aplica el método reglado, con lo que resulta una división de fracciones, obteniendo la solución correcta.

Análisis: La estudiante usa un esquema cuaternario, un método vectorial reglado. La forma textual que utiliza corresponde al sentido de uso de proporción con valor unitario conocido (“si sabemos cuánto pesa una porción”), cuando en realidad, la tarea y el diagrama que utiliza es del modelo proporción con valor unitario desconocido. Sin embargo, en su explicación no aparece la condición de linealidad (“para saber cuanto es la otra parte de algo...”). La estudiante no conecta su explicación con la división; es decir, para ella, el problema es de regla de tres, pero no de división. No incluye ninguna representación gráfica en su respuesta.

- Alumno 6 (Juan)


2. 3/7 de torta pesan 2/9 de kilo. ¿Cuánto pesa la torta?.

$\frac{2}{9} : \frac{3}{7} = \frac{14}{27}$

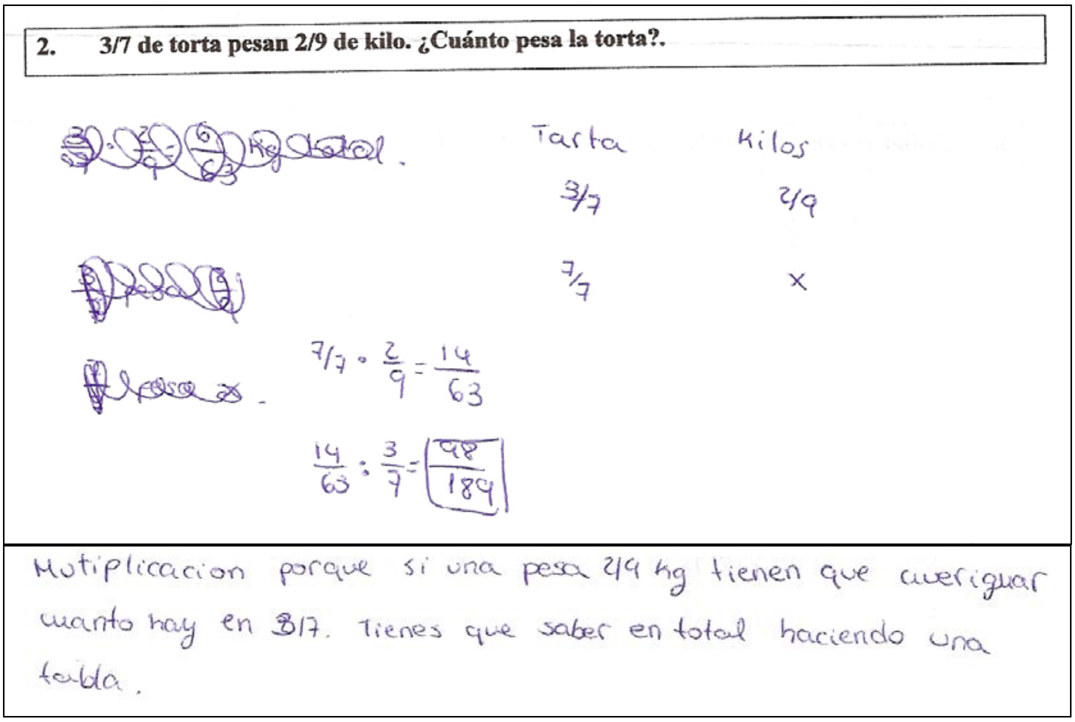
hay que dividir lo que pesa ese trozo de tarda entre la fracción que representa ~~es~~ ese trozo de torta de la entera

Trascripción: “ $\frac{2}{9} : \frac{3}{7} = \frac{14}{27}$. Hay que dividir lo que pesa ese trozo de torta entre la fracción que representa ese trozo de torta de la entera”.

Explicación: El estudiante divide directamente la fracción 2/9 entre la fracción 3/7, obteniendo el resultado correcto. En su explicación no indica porqué hay que dividir.

Análisis: El esquema de resolución es ternario y el método es de división directa. La forma textual que utiliza corresponde al sentido de uso de proporción con valor unitario desconocido, pensado como el cálculo de una tasa y dicho sentido de uso se identifica con la división de fracciones. No incluye ninguna representación gráfica en su respuesta.

- Alumna 7 (Casandra)


2. 3/7 de torta pesan 2/9 de kilo. ¿Cuánto pesa la torta?.

Tarta	Kilos
3/7	2/9
7/7	x

$7/7 \cdot \frac{2}{9} = \frac{14}{63}$

$\frac{14}{63} : \frac{3}{7} = \boxed{\frac{98}{189}}$

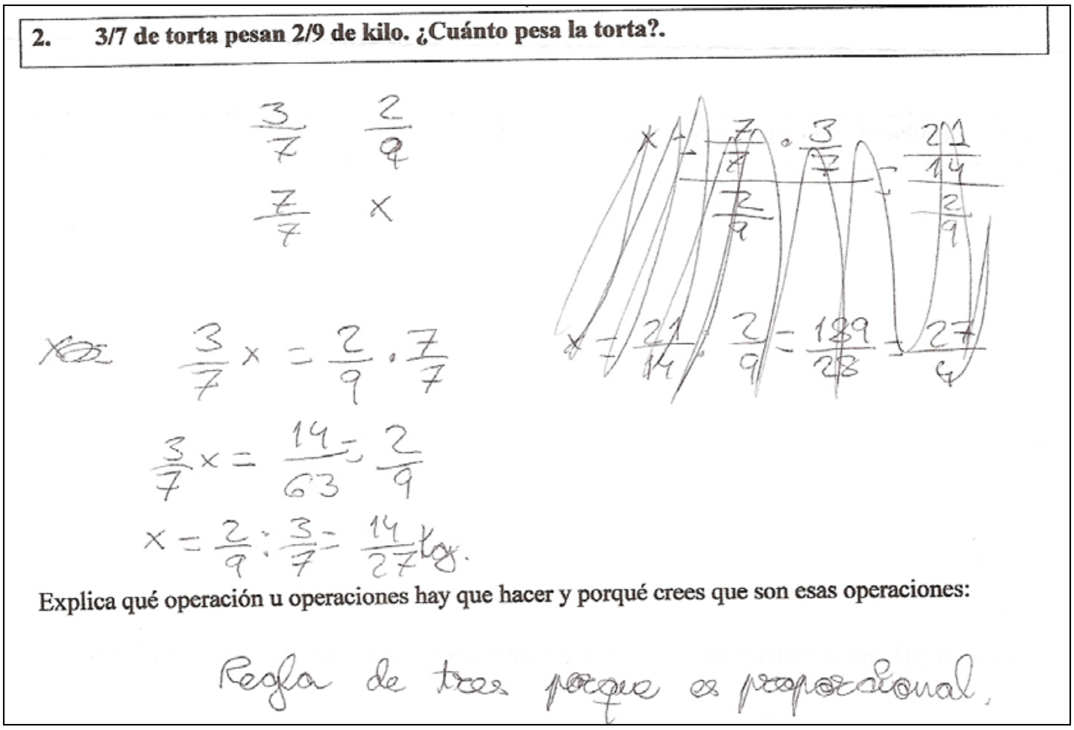
Mutiplicacion porque si una pesa 2/9 kg tienen que averiguar cuanto hay en 3/7. Tienes que saber en total haciendo una tabla.

Trascripción: " $\begin{array}{cc} \text{tarta} & \text{kilos} \\ 3/7 & 2/9 \\ 7/7 & \text{X} \end{array}$; $\frac{7}{7}\cdot\frac{2}{9}=\frac{14}{63}$; $\frac{14}{63}:\frac{3}{7}=\frac{98}{189}$. Multiplicación porque si una pesa 2/9 kg tienen que averiguar cuanto hay en 3/7, tienes que saber en total haciendo una tabla".

Explicación: La estudiante plantea una regla de tres, construyendo una tabla en la que los datos aparecen en el mismo orden que en el enunciado. A continuación, resuelve la regla de tres haciendo primero una multiplicación y luego una división, obteniendo el resultado correcto, pero no simplifica. En su explicación confunde el enunciado, dando por hecho que una torta pesa 2/9.

Análisis: El esquema de resolución de la estudiante es cuaternario, el método es vectorial (regla de tres), aunque no lo dice explícitamente y prefiere usar la palabra "tabla". Lo hace en dos pasos, mediante una multiplicación seguida de una división. No identifica la fracción 7/7 con la unidad y la multiplica por la fracción 2/9. La explicación que acompaña a la resolución revela una mala lectura del enunciado. La forma textual corresponde al sentido de uso de proporción con valor unitario conocido, pero el esquema que aparece en la respuesta corresponde al modelo de proporción con valor unitario desconocido. No incluye ninguna representación gráfica.

- Alumno 8 (Christian)



2. 3/7 de torta pesan 2/9 de kilo. ¿Cuánto pesa la torta?.

$\begin{array}{cc} \frac{3}{7} & \frac{2}{9} \\ \frac{7}{7} & X \end{array}$

$\frac{3}{7}x = \frac{2}{9}\cdot\frac{7}{7}$

$\frac{3}{7}x = \frac{14}{63} = \frac{2}{9}$

$x = \frac{2}{9} : \frac{3}{7} = \frac{14}{27}$ kg.

Explica qué operación u operaciones hay que hacer y porqué crees que son esas operaciones:

Regla de tres porque es proporcional.

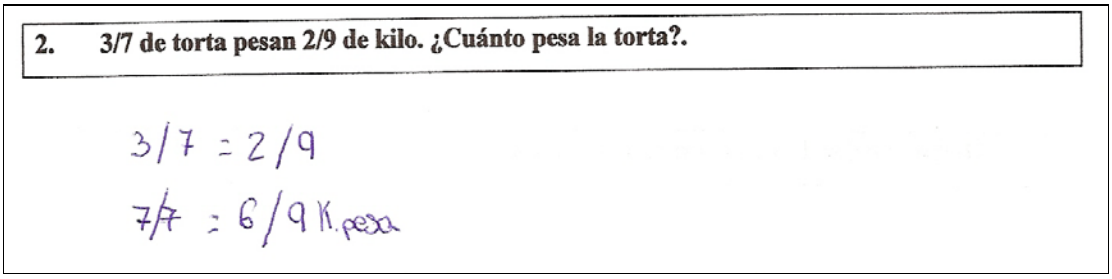
Trascripción: "$\begin{matrix} 3/7 & 2/9 \\ 7/7 & \mathrm{X} \end{matrix}$; $\frac{3}{7}\mathrm{X}=\frac{2}{9}\cdot\frac{7}{7}$; $\frac{3}{7}\mathrm{X}=\frac{14}{63}=\frac{2}{9}$; $\mathrm{X}=\frac{2}{9}:\frac{3}{7}=\frac{14}{27}$ kg. Regla de tres porque es proporcional".

Explicación: El estudiante plantea una regla de tres en forma de tabla. Para resolver la regla de tres, plantea una ecuación igualando los productos cruzados. A continuación, efectúa el producto y simplifica y seguidamente despeja X mediante una división de fracciones, obteniendo el resultado correcto.

Análisis: El esquema de resolución del estudiante es cuaternario, el método es vectorial (regla de tres). Al aplicar inicialmente el método reglado comete un error, y usa de nuevo el esquema cuaternario para plantear y resolver una ecuación. Identifica la unidad con la fracción 7/7. La forma textual que utiliza hace alusión a la regla de tres y a la proporcionalidad, pero no a la división de fracciones. El esquema corresponde a proporcionalidad de valor unitario desconocido.

Algunos ejemplos de respuestas incorrectas:

- Alumna 13 (Carmen)


2. **3/7 de torta pesan 2/9 de kilo. ¿Cuánto pesa la torta?.**

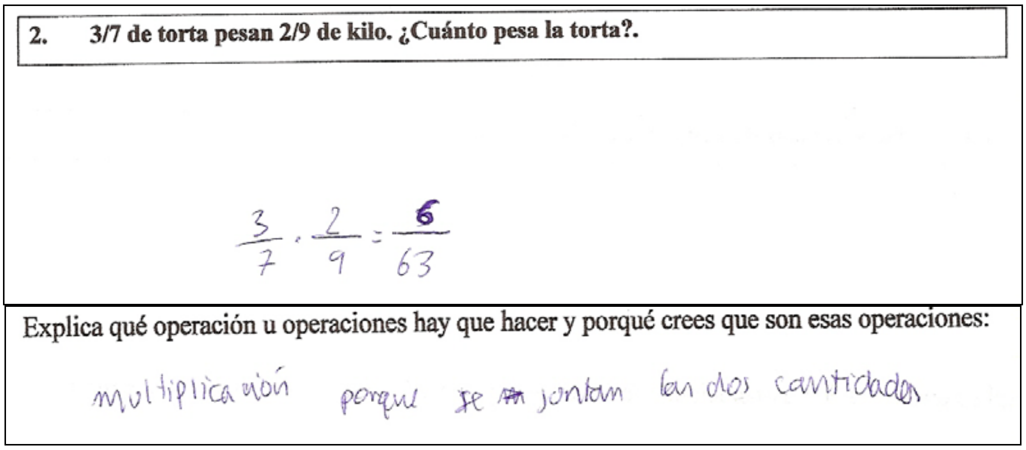
3/7 = 2/9
7/7 = 6/9 K.pesa

Trascripción: "$\begin{matrix} 3/7 = 2/9 \\ 7/7 = 6/9 \text{ k pesa} \end{matrix}$".

Explicación: La estudiante escribe dos igualdades de fracciones que representan un razonamiento de tipo cuaternario. Concluye que la torta pesa 6/9 kg. Obtiene una solución incorrecta.

Análisis: El esquema de resolución es cuaternario, el método es escalar. La estudiante hace un razonamiento aditivo, ya que compara la fracción 3/7 con la 7/7 y ve que la diferencia entre los numeradores es 4. Por tanto, traslada esta diferencia a las fracciones de la derecha. Es decir, la fracción 2/9 se convertirá en 6/9, sin más que sumar 4 al numerador de 2/9. Solución incorrecta. No incluye ninguna representación gráfica.

- Alumno 15 (Héctor)


2. 3/7 de torta pesan 2/9 de kilo. ¿Cuánto pesa la torta?.

$\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{9} = \frac{6}{63}$

Explica qué operación u operaciones hay que hacer y porqué crees que son esas operaciones:

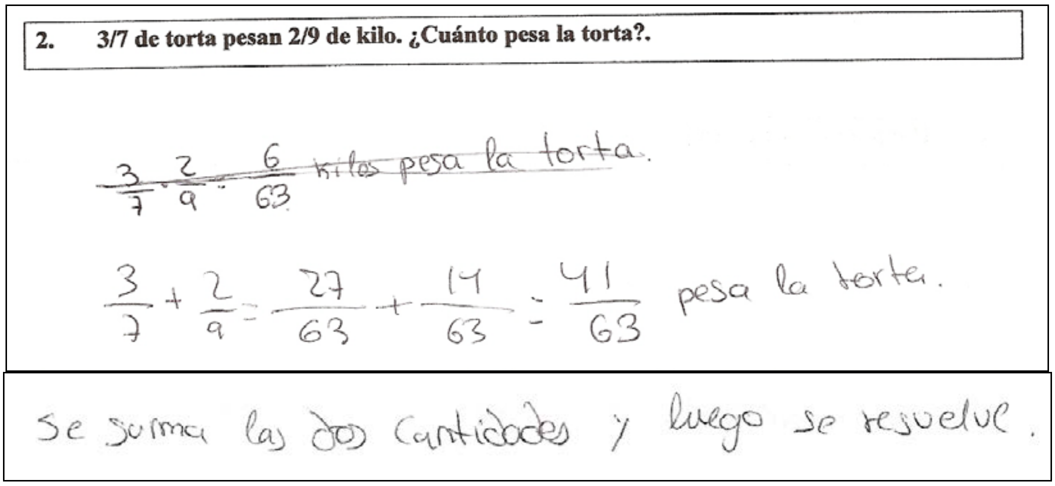
multiplicación porque se juntan las dos cantidades

Trascripción: “ $\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{9} = \frac{6}{23}$. Multiplicación porque se juntan las dos cantidades”.

Explicación: El estudiante multiplica las fracciones, dando un resultado no correcto.

Análisis: El estudiante recurre al producto de las fracciones, en lugar de dividirlas, tal vez por una lectura inadecuada del enunciado. La forma textual que utiliza está asociada a un sentido de uso aditivo, al identificar la operación de multiplicar con “juntar”. No incluye ninguna representación gráfica.

- Alumna 18 (Patri)


2. 3/7 de torta pesan 2/9 de kilo. ¿Cuánto pesa la torta?.

~~$\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{9} = \frac{6}{63}$ kilos pesa la torta.~~

$\frac{3}{7} + \frac{2}{9} = \frac{27}{63} + \frac{14}{63} = \frac{41}{63}$ pesa la torta.

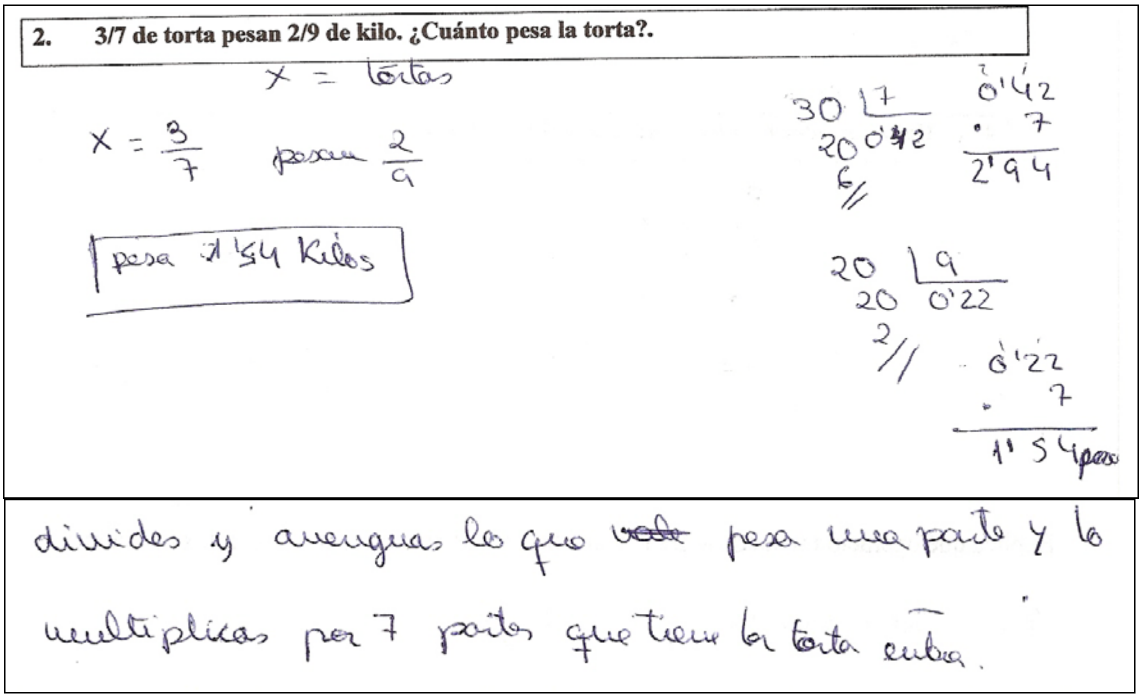
Se suma las dos cantidades y luego se resuelve.

Trascripción: “$\frac{3}{7} + \frac{2}{9} = \frac{27}{63} + \frac{14}{63} = \frac{41}{63}$. Se suma las dos cantidades y luego se resuelve ”.

Explicación: La estudiante suma las fracciones 3/7 y 2/9, obteniendo un resultado incorrecto. No da razones que lo justifiquen.

Análisis: La estudiante enfoca el problema desde un punto de vista aditivo y no justifica la elección de la operación elegida.

- Alumna 21 (Estefanía)



Trascripción: "x=tortas, x=$\frac{3}{7}$ pesan $\frac{2}{9}$"; Efectúa manualmente las divisiones 3÷7 y 2÷9 y multiplica los resultados por 7. Concluye que "pesa 1'54 kilos". "Divides y averiguas lo que pesa una parte y lo multiplicas por 7 partes que tiene la torta entera".

Explicación: La estudiante transforma las fracciones en decimales haciendo las divisiones por el algoritmo manual de caja. A continuación multiplica los resultados por 7 y da por bueno el resultado 1'54 kilos, que procede de la fracción 2/9 (kilos).

Análisis: Aunque no está explícito, el esquema de resolución que usa la estudiante es cuaternario. Parece que la estudiante usa un método analítico, intentando reducir a la fracción unitaria, pero comete errores, obteniendo una respuesta incorrecta. Ella sabe que la fracción está dividida en 7 partes y, por eso, multiplica los kilos por 7. Le ha faltado dividir por 3, ya que el peso 2/9 no corresponde a 1/7 de torta, sino a 3/7 de torta. El algoritmo que usa es el de conversión de las fracciones en decimales. La forma textual que utiliza corresponde al sentido de uso de inversión del factor multiplicativo, aunque Estefanía razona sobre partes ("averiguas lo que pesa una parte y lo multiplicas por 7 partes que tiene la torta entera").

6.2.2.3. Tarea 3: "La mesa de Ana"

Los resultados obtenidos para esta tarea son los siguientes:

- Los 9/21 estudiantes que contestan correctamente usan un esquema ternario y ninguno (0/21) el esquema cuaternario.
- En las respuestas correctas, el método de resolución más frecuente es el planteamiento y resolución de una ecuación (7/21), seguido de la división directa (2/21), tal como se señala en la Tabla 6.5.

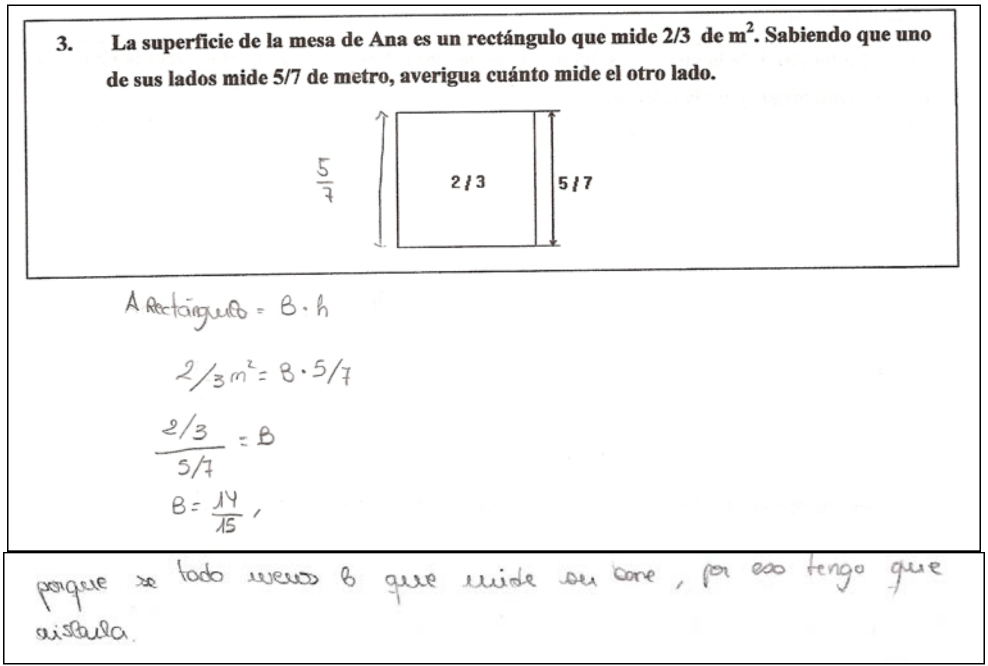
	DD	E
Cristina		X
Ana		X
Miriam		X
Ángela	X	
Juan		X
Casandra	X	
Christian		X
Jesús		X
Estefanía		X

TABLA 6.5. Métodos de resolución para la tarea 3

- En cuanto al resto de respuestas, 1/21 estudiante da una respuesta aditiva, 4/21 dan respuestas basadas en el diagrama del enunciado y 7/21 no contestan.
- Las formas textuales que usan los estudiantes que contestan correctamente corresponden al sentido de uso de inversión de la multiplicación o factor perdido (9/21).
- Todos los estudiantes que contestan (14/21) usan el diagrama del enunciado como representación del problema (modelo continuo rectangular), pero 4/14 no tienen en cuenta todos los datos y muestran dificultades con el diagrama del enunciado, al focalizar la solución en el lado opuesto al indicado en la figura (2/4) o considerar que la figura representa un cuadrado (2/4).
- Se han localizado errores de tipo aritmético (al aplicar el algoritmo de la división de fracciones, 1/21) y algebraico (al despejar en la ecuación y al mezclar el uso de la igualdad algebraica desde el punto de vista multiplicativo y desde el punto de vista aditivo, 1/21).

Algunos ejemplos de respuestas correctas:

- Alumna 2 (Cristina)



3. La superficie de la mesa de Ana es un rectángulo que mide 2/3 de m². Sabiendo que uno de sus lados mide 5/7 de metro, averigua cuánto mide el otro lado.

5/7 | 2/3 | 5/7

A Rectángulo = B · h

2/3 m² = B · 5/7

$\frac{2/3}{5/7} = B$

$B = \frac{14}{15}$,

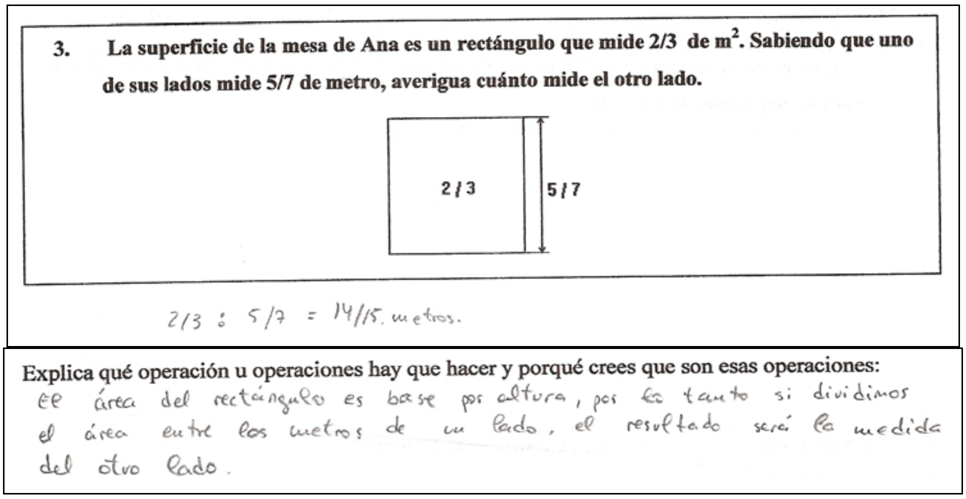
porque se todo menos lo que mide su base, por eso tengo que aislarla.

Trascripción: “A rectángulo=B·h; $\frac{2}{3}\mathrm{m}^2 = \mathrm{B}\cdot\frac{5}{7}$; $\frac{2/3}{5/7} = \mathrm{B}$; $\mathrm{B} = \frac{14}{15}$. Porque se todo menos lo que mide la su base, por eso tengo que aislarla”.

Explicación: La estudiante parte de la fórmula del área de un rectángulo, sustituye los datos y obtiene una ecuación. Después resuelve la ecuación, despejando la base y obtiene la solución correcta.

Análisis: La estudiante usa un esquema de resolución ternario y su método de resolución es el planteamiento y resolución de una ecuación. El sentido de uso es de inversión de la multiplicación (factor perdido). Utiliza como representación gráfica la ya dada en el enunciado.

- Alumna 5 (Ángela)



3. La superficie de la mesa de Ana es un rectángulo que mide 2/3 de m². Sabiendo que uno de sus lados mide 5/7 de metro, averigua cuánto mide el otro lado.

2/3 | 5/7

2/3 : 5/7 = 14/15 metros.

Explica qué operación u operaciones hay que hacer y porqué crees que son esas operaciones:

El área del rectángulo es base por altura, por lo tanto si dividimos el área entre los metros de un lado, el resultado será la medida del otro lado.

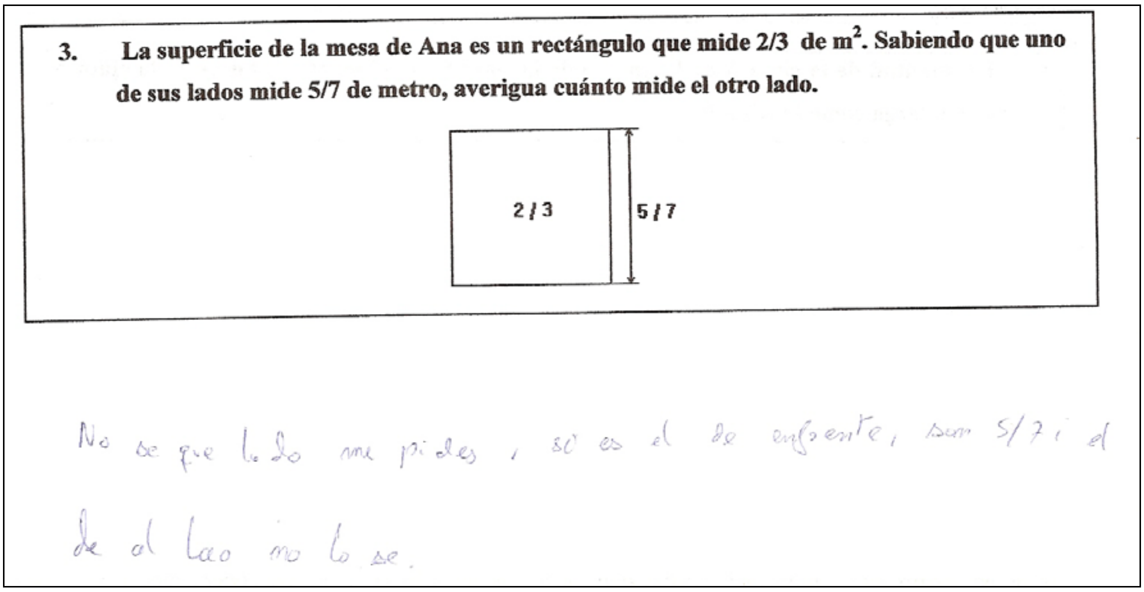
Trascripción: “ $\frac{2}{3}:\frac{5}{7}=\frac{14}{15}$. El área del rectángulo es base por altura, por lo tanto si dividimos el área entre los metros de un lado, el resultado será la medida del otro lado”.

Explicación: La estudiante divide directamente la fracción 2/3 entre la fracción 5/7. En su explicación justifica esta acción por el hecho de que dividir es la operación inversa de multiplicar.

Análisis: La estudiante usa un esquema de resolución ternario, su método de resolución es la división directa. La forma textual corresponde al sentido de uso de inversión de la multiplicación o factor perdido. No incluye ninguna representación gráfica, además de la ya dada en el enunciado.

Algunos ejemplos de respuestas incorrectas:

- Alumno 10 (Vicent)

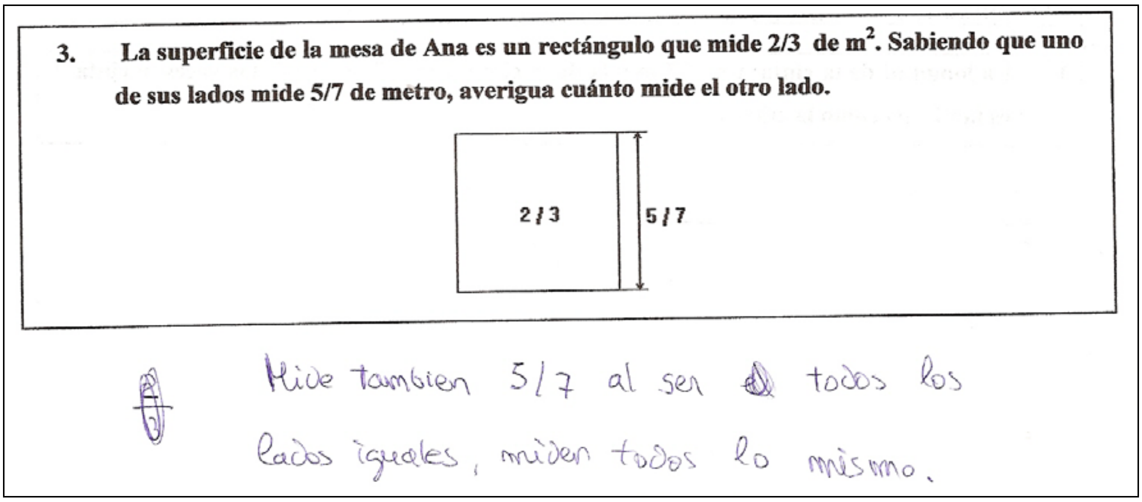

3. La superficie de la mesa de Ana es un rectángulo que mide 2/3 de m^2. Sabiendo que uno de sus lados mide 5/7 de metro, averigua cuánto mide el otro lado.

No se que lado me pides, si es el de enfrente, son 5/7 i el de al lao no lo se.

Trascripción: “No sé que lado me pides; si es el de enfrente, son 5/7; el del al lao no lo sé”.

Explicación y análisis: La respuesta del estudiante se basa en el diagrama que acompaña al enunciado del problema. La expresión del enunciado “averigua cuánto mide el otro lado” resulta ambigua y genera confusión en este estudiante, ya que, ciertamente, un rectángulo no tiene solamente dos lados, sino cuatro.

- Alumno 11 (Fco. Javier)



3. La superficie de la mesa de Ana es un rectángulo que mide 2/3 de m². Sabiendo que uno de sus lados mide 5/7 de metro, averigua cuánto mide el otro lado.

2/3 5/7

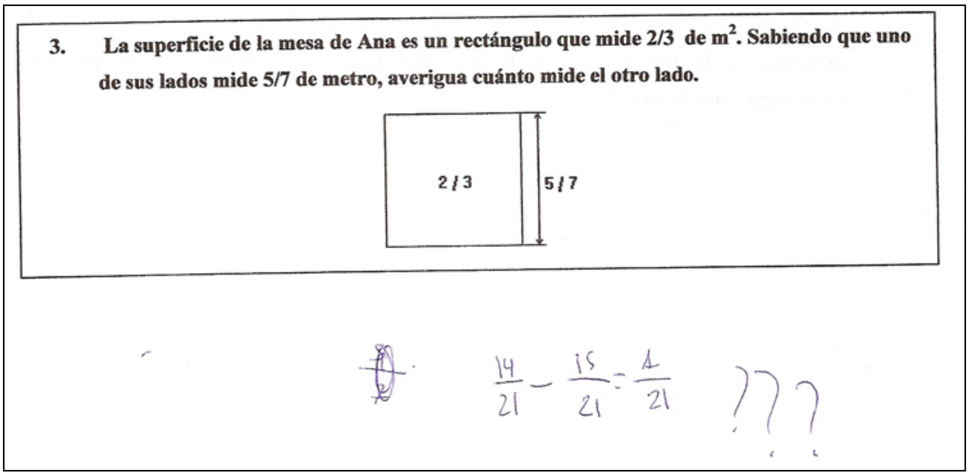
Mide tambien 5/7 al ser todos los lados iguales, miden todos lo mismo.

Trascripción: "Mide también 5/7 al ser todos los lados iguales, miden todos lo mismo".

Explicación: El estudiante observa que la figura que acompaña al enunciado del problema se parece a un cuadrado y supone que los cuatro lados son iguales.

Análisis: El estudiante centra su atención en la figura y no tiene en cuenta todos los datos que aparecen en el enunciado del problema. El diagrama que acompaña al enunciado actúa como distractor. Tal vez debería mejorarse (de forma que sus dos dimensiones sean más desiguales) o eliminarse para evitar confusiones.

- Alumno 15 (Héctor)



3. La superficie de la mesa de Ana es un rectángulo que mide 2/3 de m². Sabiendo que uno de sus lados mide 5/7 de metro, averigua cuánto mide el otro lado.

2/3 5/7

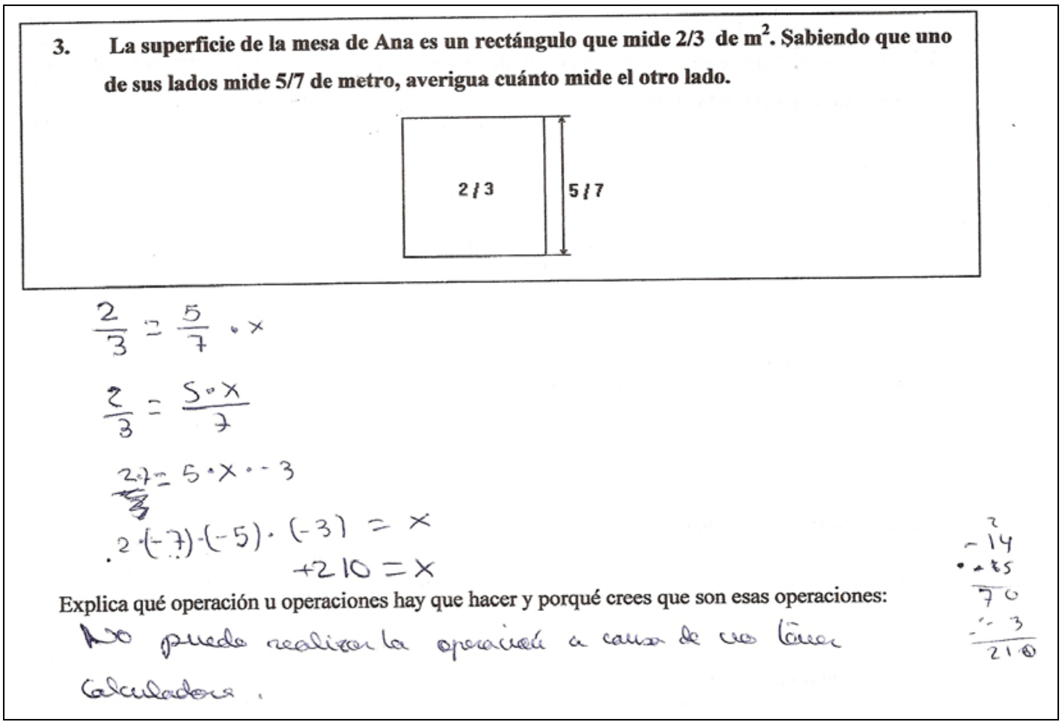
$\frac{14}{21} - \frac{15}{21} = \frac{1}{21}$???

Trascripción: " $\frac{14}{21} - \frac{15}{21} = \frac{1}{21}$???".

Explicación: El estudiante resta la fracción 5/7 a la fracción 2/3, que previamente ha reducido a común denominador. Al hacerlo debe hacer la resta $\frac{14}{21} - \frac{15}{21}$, en la que el minuendo es menor que el sustraendo y, aunque da como resultado la fracción 1/21, escribe tres signos de interrogación.

Interpretación: El estudiante enfoca la resolución desde el punto de vista aditivo, comparando las fracciones mediante sustracción, y no mediante división. Solución incorrecta. Se observa también que el estudiante tiene problemas en admitir resultados negativos para las restas.

- Alumna 21 (Estefanía)



3. La superficie de la mesa de Ana es un rectángulo que mide 2/3 de m^2. Sabiendo que uno de sus lados mide 5/7 de metro, averigua cuánto mide el otro lado.

2/3 5/7

$\frac{2}{3} = \frac{5}{7} \cdot x$

$\frac{2}{3} = \frac{5 \cdot x}{7}$

$2 \cdot 7 = 5 \cdot x \cdot -3$

$2 \cdot (-7) \cdot (-5) \cdot (-3) = x$

$+210 = x$

Explica qué operación u operaciones hay que hacer y porqué crees que son esas operaciones:

No puedo realizar la operación a causa de no tener calculadora.

Trascripción: "$\frac{2}{3} = \frac{5}{7} \cdot X$; $\frac{2}{3} = \frac{5 \cdot X}{7}$; 2·7=5·X·–3; 2·(–7)·(–3)=X; +210=X. No puedo realizar la operación a causa de no tener calculadora".

Explicación: La estudiante plantea una ecuación e intenta resolverla, primero igualando los productos cruzados y después despejando la X.

Análisis: La estudiante usa un esquema ternario, su método de resolución es el planteamiento y resolución de una ecuación, pero tiene dificultades con el álgebra, al mezclar la igualdad de los productos cruzados (que es un pensamiento multiplicativo) con el cambio de miembro aditivo ("lo que es positivo pasa al otro lado negativo"). Despeja mal, obteniendo un resultado incorrecto. No hace explícita ninguna forma textual. No incluye ninguna representación gráfica, además de la ya dada en el enunciado.

6.2.2.4. Tarea 4: “Ecuación”

Los resultados obtenidos para esta tarea son los siguientes:

- Los 14/21 estudiantes que contestan correctamente usan un esquema ternario y ninguno (0/21) el esquema cuaternario.
- Entre los que contestan correctamente, el método de resolución más frecuente es el planteamiento y resolución de una ecuación (11/21), seguido del de división directa (3/21), tal como se señala en la Tabla 6.6.

	E	DD
Cristina	X	
Miriam	X	
Ángela	X	
Casandra		X
Juan	X	
Christian	X	
Ana Maria	X	
Fco. Javier	X	
Carmen	X	
Jennifer	X	
Héctor		X
Laura B		X
Jesús	X	
Estefanía	X	

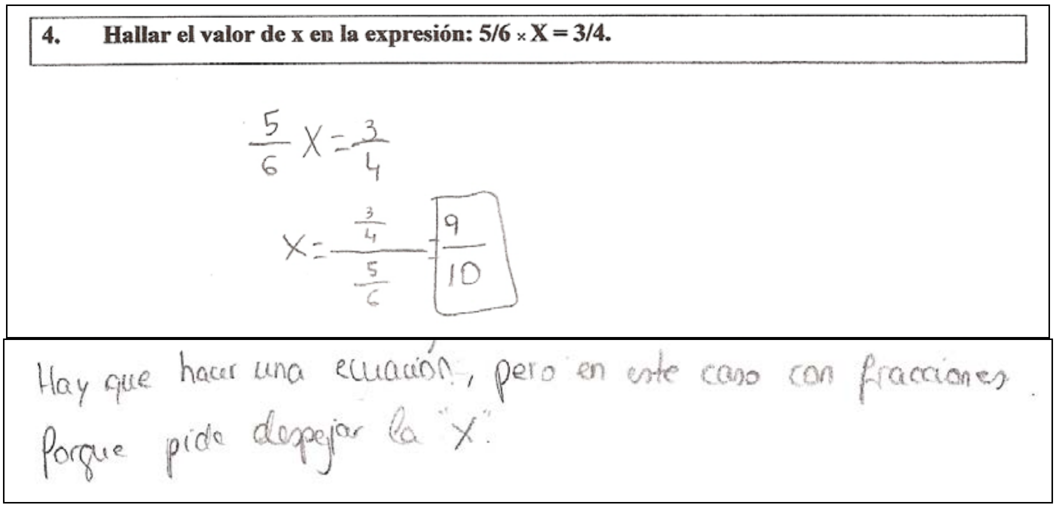
TABLA 6.6. Métodos de resolución para la tarea 4

- Una estudiante (1/21, Jennifer) comete errores al dividir, 3/21 despejan mal y 1/21 (Estefanía) tiene dificultades para despejar en la ecuación.
- De las respuestas no correctas, 2/21 estudiantes multiplican las fracciones, en vez de dividirlas, 3/21 dan respuestas aditivas y 2/21 no contestan.
- Las formas textuales que usan los estudiantes que contestan correctamente corresponden al modelo semántico de inversión de la multiplicación o factor perdido (14/21).

- Ningún estudiante (0/21) usa una representación gráfica para ilustrar el problema.
- Se han localizado errores de tipo aritmético (al calcular el mcm de los denominadores, 1/21; y al aplicar el algoritmo de la división de fracciones, 2/21) y algebraico (al despejar de la ecuación, 2/21; y al usar simultáneamente las reglas multiplicativa y aditiva para despejar la incógnita de la ecuación, 3/21). Algunos estudiantes (8/21) no simplifican la fracción resultado.

Algunos ejemplos de respuestas correctas:

- Alumna 9 (Ana María)



4. Hallar el valor de x en la expresión: 5/6 × X = 3/4.

$$\frac{5}{6}X=\frac{3}{4}$$

$$X=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}}=\boxed{\frac{9}{10}}$$

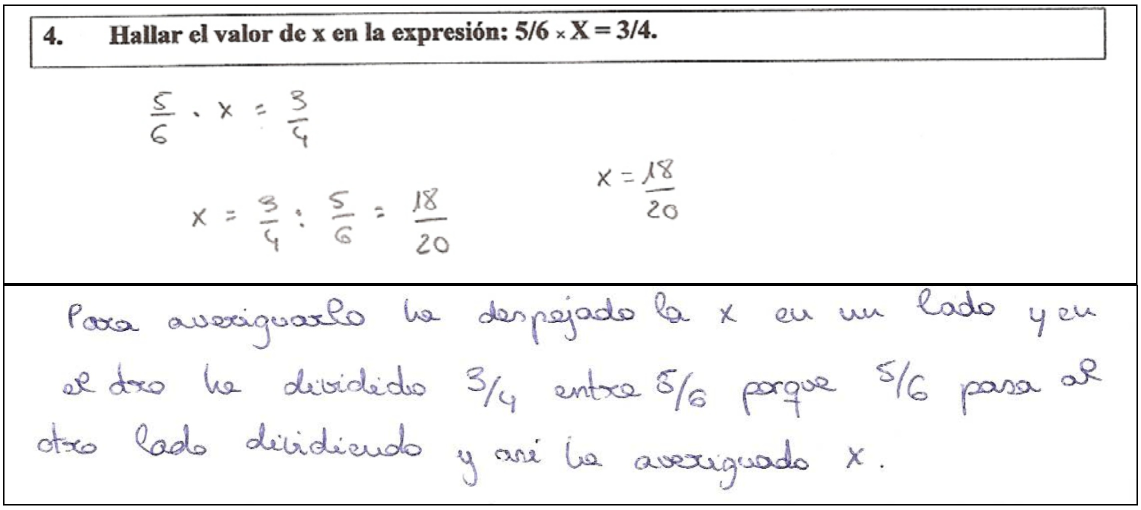
Hay que hacer una ecuación, pero en este caso con fracciones. Porque pide despejar la "X".

Trascripción: " $\frac{5}{6}\times X=\frac{3}{4}$; $X=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}}=\frac{9}{10}$. Hay que hacer una ecuación, pero en este caso con fracciones porque pide despejar la "X"".

Explicación: La estudiante vuelve a escribir la ecuación del enunciado y a continuación despeja la X dividiendo las fracciones 3/4 y 5/6, obteniendo el resultado correcto 9/10.

Análisis: El esquema de resolución es ternario y el método de resolución es planteamiento de una ecuación. El sentido de uso es de inversión de la multiplicación (factor perdido) en su forma algebraica. No incluye ninguna representación gráfica del problema.

- Alumna 4 (Miriam)



4. Hallar el valor de x en la expresión: 5/6 × X = 3/4.

$\frac{5}{6} \cdot x = \frac{3}{4}$

$x = \frac{3}{4} : \frac{5}{6} = \frac{18}{20}$

$x = \frac{18}{20}$

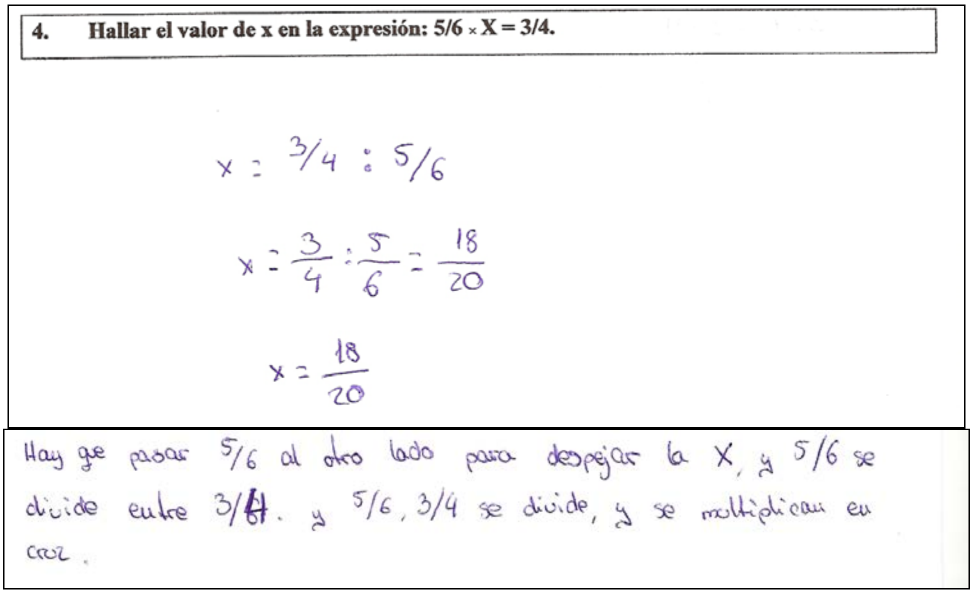
Para averiguarlo he despejado la x en un lado y en el otro he dividido 3/4 entre 5/6 porque 5/6 pasa al otro lado dividiendo y así he averiguado x.

Trascripción: "$\frac{5}{6} \cdot X = \frac{3}{4}$; $X = \frac{3}{4} : \frac{5}{6} = \frac{18}{20}$; X=$\frac{18}{20}$. Para averiguarlo he despejado la X en un lado y en el otro he dividido 3/4 entre 5/6 porque 5/6 pasa al otro lado dividiendo y así he averiguado X".

Explicación: La estudiante escribe de nuevo la ecuación y despeja la X dividiendo la fracción 3/4 entre 5/6, obteniendo un resultado correcto, sin simplificar.

Análisis: El esquema de resolución es ternario y el método es el planteamiento y resolución de la ecuación. El sentido de uso es inversión de la multiplicación (factor perdido) en su forma algebraica. Interpreta como diferentes las acciones "despejar X en un lado" y "dividir las fracciones en el otro lado". No incluye ninguna representación gráfica del problema.

- Alumna 13 (Carmen)



4. Hallar el valor de x en la expresión: 5/6 × X = 3/4.

$x = 3/4 : 5/6$

$x = \frac{3}{4} : \frac{5}{6} = \frac{18}{20}$

$x = \frac{18}{20}$

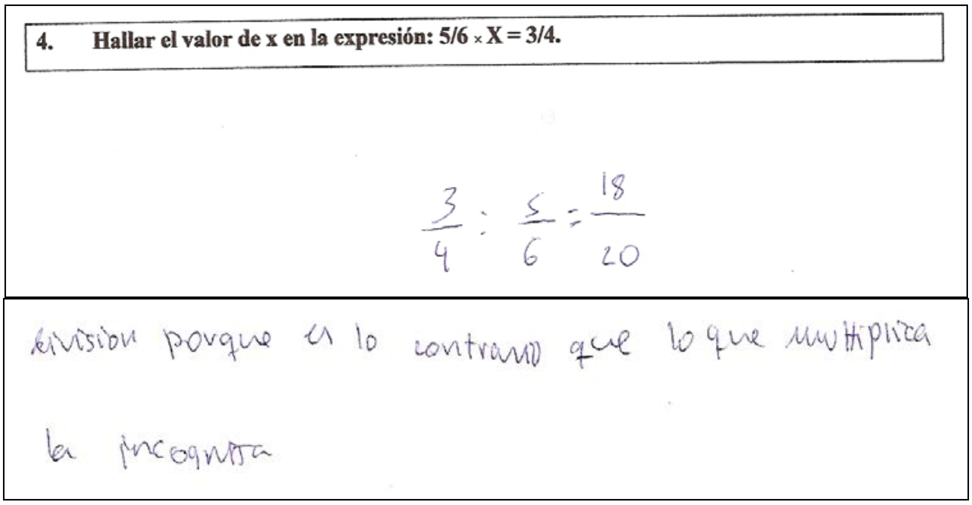
Hay ge pasar 5/6 al otro lado para despejar la X, y 5/6 se divide entre 3/4. y 5/6, 3/4 se divide, y se multiplican en cruz.

Trascripción: "$X = \frac{3}{4} : \frac{5}{6}$; $X = \frac{3}{4} : \frac{5}{6} = \frac{18}{20}$; $X = \frac{18}{20}$. Hay que pasar 5/6 al otro lado para despejar la X, y 5/6 se divide entre 3/4. y 5/6, 3/4 se divide, y se multiplican en cruz".

Explicación: La estudiante despeja la X dividiendo la fracción 3/4 entre la fracción 5/6, obteniendo la solución correcta. En su explicación confunde el orden de dividendo y divisor cuando dice que hay que 5/6 se divide entre 3/4 (cuando es al revés).

Análisis: El esquema de resolución es ternario y el método es de ecuación. El sentido de uso es inversión de la multiplicación (factor perdido) en su forma algebraica. Manifiesta dificultades para explicar cómo despeja la incógnita. No incluye representación gráfica del problema.

- Alumno 15 (Héctor)


4. Hallar el valor de x en la expresión: 5/6 × X = 3/4.

$\frac{3}{4} : \frac{5}{6} = \frac{18}{20}$

division porque es lo contrario que lo que multiplica la incognita

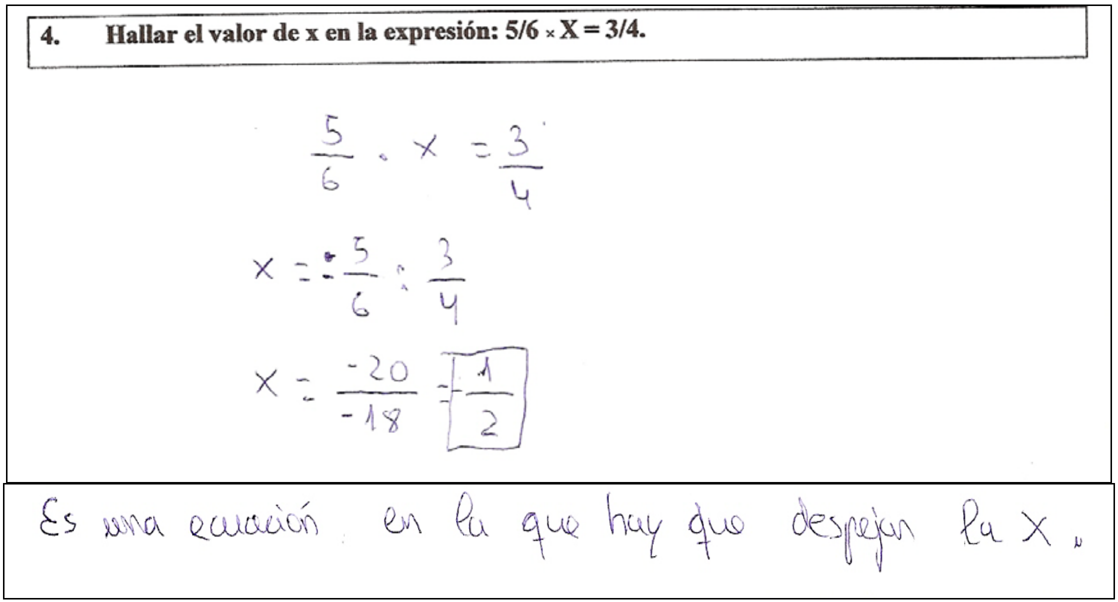
Trascripción: "$\frac{3}{4} : \frac{5}{6} = \frac{18}{20}$. División porque es lo contrario que lo que multiplica la incógnita".

Explicación: El estudiante divide directamente la fracción 3/4 entre la fracción 5/6, obteniendo el resultado correcto. No simplifica el resultado.

Análisis: El esquema de resolución de este estudiante es ternario; el método de resolución es la división directa. Por la forma textual que utiliza en su explicación, se deduce que el sentido de uso es la inversión de la multiplicación o factor perdido en su forma aritmética. No incluye ninguna representación gráfica del problema. No simplifica el resultado de la división.

Algunos ejemplos de respuestas incorrectas:

- Alumno 11 (Fco. Javier)


4. Hallar el valor de x en la expresión: 5/6 × X = 3/4.

$$\frac{5}{6} \cdot x = \frac{3}{4}$$

$$x = \frac{-5}{-6} : \frac{3}{4}$$

$$x = \frac{-20}{-18} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

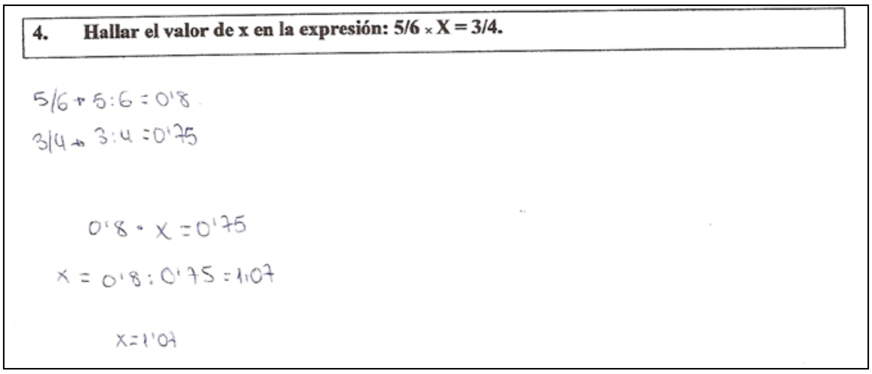
Es una ecuación en la que hay que despejar la X.

Trascripción: “ $\frac{5}{6} \cdot \mathrm{X} = \frac{3}{4}$; $\mathrm{X} = \frac{-5}{-6} : \frac{3}{4}$; $\mathrm{X} = \frac{-20}{-18} = \frac{1}{2}$. Es una ecuación en la que hay que despejar la X”.

Explicación: El estudiante vuelve a escribir la ecuación del enunciado y a continuación despeja la X dividiendo la fracción $\frac{-5}{-6}$ entre la fracción $\frac{3}{4}$, obteniendo un resultado incorrecto 1/2.

Análisis: El esquema de resolución es ternario, el método es resolución de la ecuación, y el sentido de uso es inversión de la multiplicación (factor perdido) en su forma algebraica. Manifiesta dificultades para despejar, ya que, en primer lugar, no pasa la fracción 5/6 al otro miembro dividiendo a 3/4, sino que, contrariamente, es la fracción 3/4 (que no cambia de miembro) la que divide a 5/6. En segundo lugar, la presencia de los signos negativos indica que para pasar la fracción 5/6 al segundo miembro, debe pasar el 5 y el 6, que, como son positivos, pasan negativos al segundo miembro, De la misma forma, comete un error al simplificar el resultado. En esta respuesta hay una mezcla de las reglas aditiva y multiplicativa para cambiar de miembro. No incluye ninguna representación gráfica

- Alumno 20 (Jesús)


4. Hallar el valor de x en la expresión: 5/6 × X = 3/4.

5/6 → 5:6 = 0'8
3/4 → 3:4 = 0'75

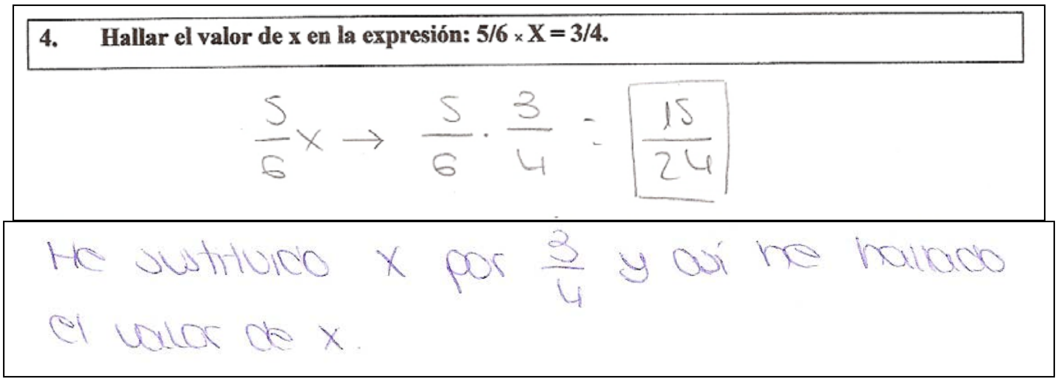
0'8 · X = 0'75
X = 0'8 : 0'75 = 1'07
X = 1'07

Trascripción: “5/6→5:6=0’8; 3/4→3:4=0’75. 0’8·X=0’75; X=0’8**:**0’75=1,07; X=1’07”. No incluye ninguna explicación.

Explicación: En primer lugar, el estudiante transforma las fracciones en decimales; después plantea la ecuación con decimales y despeja la incógnita de manera incorrecta, operando siempre con la expresión decimal. Obtiene un resultado incorrecto. No explica el procedimiento.

Análisis: El esquema es ternario, el método es resolución de la ecuación, pero invierte el orden de dividendo y divisor, el algoritmo es conversión de las fracciones en decimales y división de decimales posiblemente usando la calculadora. El sentido de uso es de inversión de la multiplicación o factor perdido, en su forma algebraica. No incluye ninguna representación gráfica.

- Alumna 3 (Ana)


4. Hallar el valor de x en la expresión: 5/6 × X = 3/4.

$\frac{5}{6}X \to \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4} = \boxed{\frac{15}{24}}$

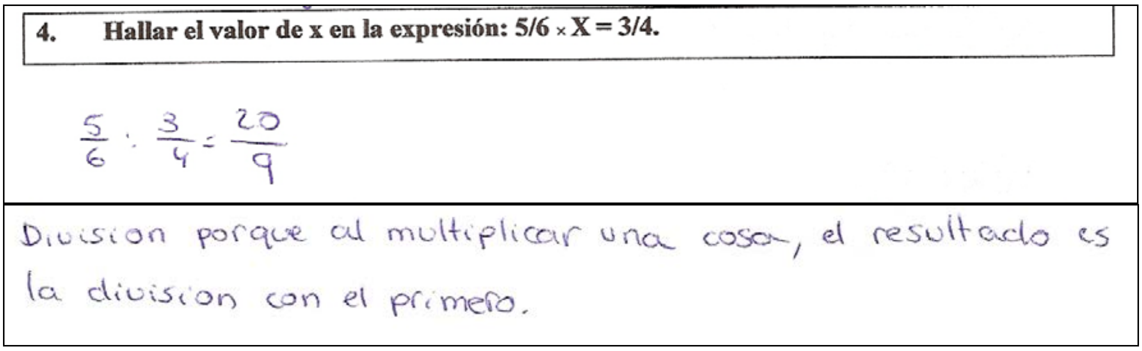
He sustituido X por $\frac{3}{4}$ y así he hallado el valor de X.

Trascripción: “$\frac{5}{6}X \to \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4} = \frac{15}{24}$. He sustituido X por 3/4 y así he hallado el valor de X”.

Explicación: La estudiante escribe la parte izquierda del signo igual y una flecha. A continuación multiplica la fracción 5/6 por la fracción 3/4, obteniendo un resultado incorrecto.

Análisis: La estudiante enfoca la resolución de la ecuación mediante una multiplicación, con un modelo semántico de factor perdido. Sustituye la incógnita X por 3/4, debido a que piensa que la tarea consiste en sustituir la X y no en despejarla.

- Alumna 7 (Casandra)


4. Hallar el valor de x en la expresión: 5/6 × X = 3/4.

$\frac{5}{6} : \frac{3}{4} = \frac{20}{9}$

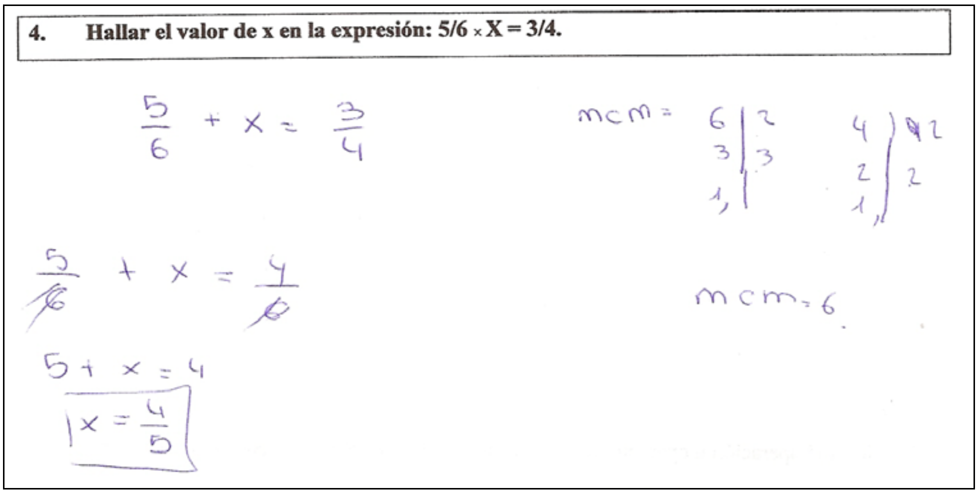
Division porque al multiplicar una cosa, el resultado es la division con el primero.

Trascripción: " $\frac{5}{6} : \frac{3}{4} = \frac{20}{9}$. División porque al multiplicar una cosa, el resultado es la división con el primero".

Explicación: La estudiante divide directamente las fracciones del enunciado, pero en el mismo orden en que aparecen en el enunciado, 5/6 : 3/4, obteniendo un resultado incorrecto 20/9.

Análisis: El esquema es ternario, el método es la división directa, con un sentido de uso de inversión de la multiplicación en su forma aritmética. Aplica el algoritmo de los productos cruzados, pero comete un error de cálculo al multiplicar los términos medios. De hecho, parece que su error consiste en que suma el denominador del dividendo (6) con el numerador del divisor (3), en vez de multiplicarlos.

- Alumna 14 (Mireia)


4. Hallar el valor de x en la expresión: 5/6 × X = 3/4.

$\frac{5}{6} + x = \frac{3}{4}$

mcm = 6 | 2, 3 | 3, 1 | 4 | 2, 2 | 2, 1 |

$\frac{5}{\cancel{6}} + x = \frac{4}{\cancel{6}}$

mcm = 6.

$5 + x = 4$

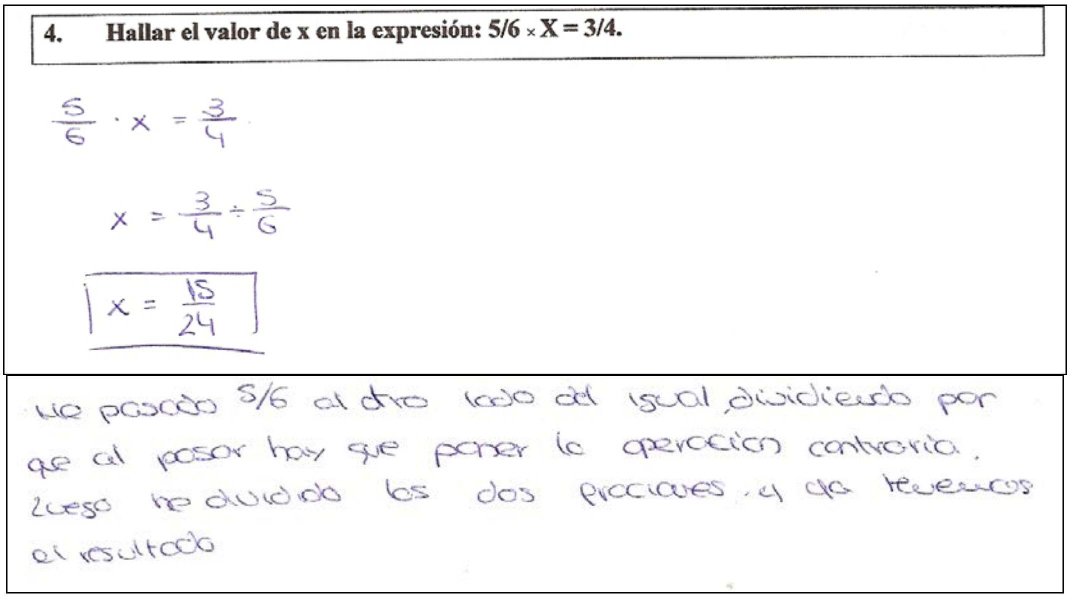
$\boxed{x = \frac{4}{5}}$

Trascripción: "$\frac{5}{6} + X = \frac{3}{4}$; calcula el mcm(6,4) descomponiendo en factores primos 6 y 4. Escribe que mcm=6. $\frac{5}{\cancel{6}} + X = \frac{4}{\cancel{6}}$; $5 + X = 4$; X=$\frac{4}{5}$".

Explicación: La estudiante convierte la ecuación multiplicativa en una ecuación aditiva, sustituyendo el signo de multiplicar (x) por el signo de sumar (+). La estudiante no reconoce la división de fracciones como enfoque de resolución del problema. En lugar de ello, transforma las fracciones a común denominador (de manera no correcta), transforma la ecuación (también de forma no correcta) y obtiene una ecuación lineal, 5+x=4, que resuelve, sin embargo, de forma multiplicativa, ya que pasa el 5 al segundo miembro dividiendo a 4, lo que da la solución (incorrecta) X=$\frac{4}{5}$.

Análisis: La respuesta de la estudiante es aditiva. Se observan errores en el cálculo del mínimo común múltiplo y dificultades para transformar una ecuación en otra equivalente sin denominadores. También se observan errores al despejar la incógnita por predominio del enfoque aditivo frente al multiplicativo.

- Alumna 16 (Jennifer)



4. Hallar el valor de x en la expresión: 5/6 × X = 3/4.

$\frac{5}{6} \cdot x = \frac{3}{4}$

$x = \frac{3}{4} \div \frac{5}{6}$

$\boxed{x = \frac{15}{24}}$

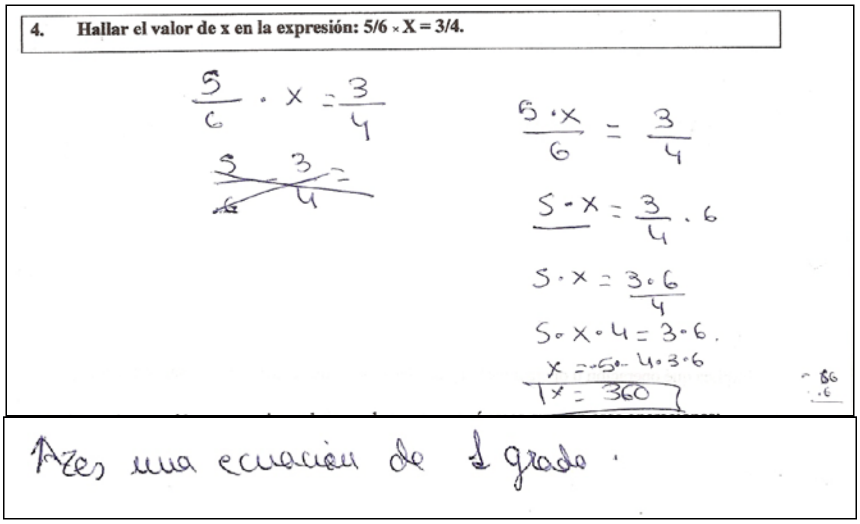
he pasado 5/6 al otro lado del igual dividiendo por que al pasar hay que poner la operación contraria. Luego he dividido las dos fracciones, y ya tenemos el resultado

Trascripción: "$\frac{5}{6} \cdot X = \frac{3}{4}$; $X = \frac{3}{4} \div \frac{5}{6}$; $X = \frac{15}{24}$. He pasado 5/6 al otro lado del igual, dividiendo por que al pasar hay que poner la operación contraria. Luego he dividido las dos fracciones, y ya tenemos el resultado".

Explicación: La estudiante escribe de nuevo la ecuación del enunciado y despeja la X, dividiendo la fracción 3/4 entre 5/6. Comete un error en el cálculo de la división y obtiene un resultado incorrecto.

Análisis: El esquema es ternario, el método es la resolución de la ecuación, con un sentido de uso de inversión de la multiplicación o factor perdido, en su forma algebraica. Sin embargo, aplica de forma errónea el algoritmo de la división de fracciones, ya que multiplica los numeradores y los denominadores, obteniendo un resultado incorrecto.

- Alumna 21 (Estefanía)



Trascripción: "$\frac{5}{6}\cdot X=\frac{3}{4}$; $\frac{5\cdot X}{6}=\frac{3}{4}$; $5\cdot X=\frac{3}{4}\cdot 6$; $5\cdot X=\frac{3\cdot 6}{4}$; 5·X·4=3·6. X=–5·–4·3·6; X=360. Azes una ecuación de 1 grado".

Explicación: La estudiante escribe la ecuación e intenta resolverla paso a paso, primero pasando cada denominador al otro miembro (multiplicando); después, trata de despejar la X pasando al segundo miembro el 5 y el 4. Pero los pasa con signo negativo y multiplicando, con lo que obtiene un resultado incorrecto.

Análisis: El esquema es ternario, el método es el planteamiento y resolución de una ecuación, pero no ve una división de fracciones para resolver el problema. El sentido de uso es de inversión de la multiplicación (factor perdido) en su forma algebraica. Tiene dificultades con el álgebra, al mezclar el cambio de miembro multiplicativo ("lo que está dividiendo pasa al otro lado multiplicando") con el cambio de miembro aditivo ("lo que es positivo pasa al otro lado negativo").

6.2.2.5 Tarea 5: “Tarro de miel”

Esta tarea no es de división de fracciones, y se ha incluido en el cuestionario como pregunta de control. Los resultados obtenidos son los siguientes:

- De los 10/21 estudiantes que contestan correctamente, 7/21 usan un esquema cuaternario y 3/21 el esquema ternario.
- Entre las respuestas correctas, el método de resolución más frecuente es el funcional de regla de tres (6/21), seguido del de división directa (2/21), el de multiplicación directa (1/21) y el método escalar (1/21), tal como se indica en la Tabla 6.7.

	Funcional	Escalar	MD	DD
Cristina	X			
Miriam	X			
Ángela	X			
Juan			X	
Casandra(*)	X			
Christian	X			
Ana Maria	X			
Estefanía		X		
Mireia				X
Jesús				X

TABLA 6.7. Métodos de resolución para la tarea 5

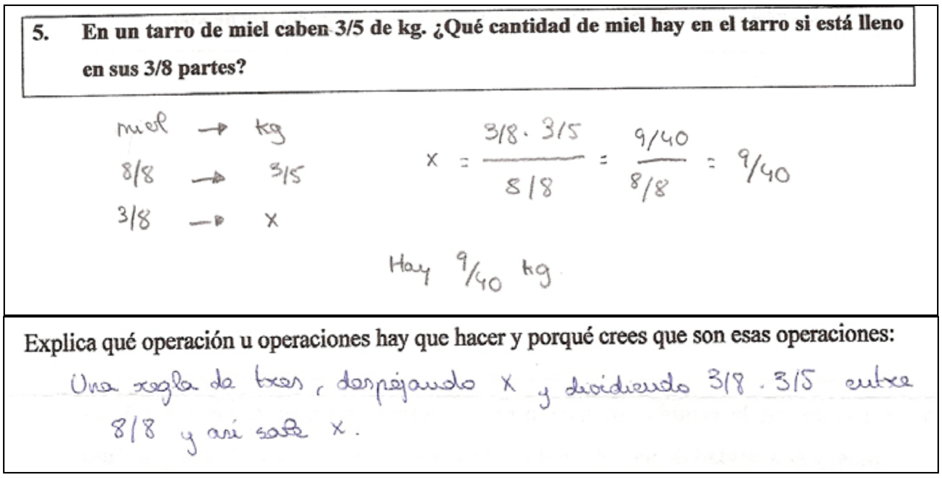
(*) Aunque Casandra escribe que la solución del problema es una multiplicación, usa en su respuesta un diagrama cuaternario de regla de tres.

- En cuanto a las contestaciones no correctas, 8/21 estudiantes dan respuestas aditivas, 1/21 estudiante utiliza un diagrama y 2/21 no contestan.
- Las formas textuales que usan los estudiantes que contestan correctamente corresponden al sentido de uso de proporción (7/21), de multiplicación (1/21) y de factor perdido (2/21).
- Solamente 1/21 estudiante hace un dibujo para representar el problema, pero no lo usa en la resolución.
- Se han localizado errores de interpretación del enunciado (al considerar que la incógnita es la cantidad de miel que se puede añadir al tarro cuando están cubiertas las 3/8 partes) y errores que tienen que ver con la interpretación del tamaño relativo

de las fracciones (considerar que 3/8 es más grande que 3/5). Otros errores son de manipulación: por ejemplo, al factorizar y hallar el mcm de los denominadores.

Algunos ejemplos de respuestas correctas:

- Alumna 4 (Miriam)



5. En un tarro de miel caben 3/5 de kg. ¿Qué cantidad de miel hay en el tarro si está lleno en sus 3/8 partes?

miel → kg
8/8 → 3/5
3/8 → x

x = (3/8 · 3/5) / (8/8) = (9/40) / (8/8) = 9/40

Hay 9/40 kg

Explica qué operación u operaciones hay que hacer y porqué crees que son esas operaciones:

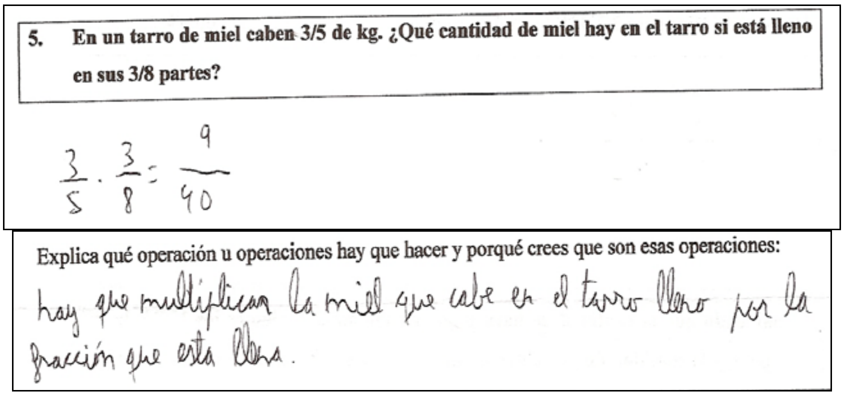
Una regla de tres, despejando x y dividiendo 3/8 . 3/5 entre 8/8 y así sale x.

Trascripción: “ $\left.\begin{array}{r} \text{miel} \rightarrow \text{kg} \\ 8/8 \rightarrow 3/5 \\ 3/8 \rightarrow \text{X} \end{array}\right\}$ $\text{X} = \dfrac{3/8 \cdot 3/5}{8/8} = \dfrac{9/40}{8/8} = 9/40$. Hay 9 / 40 kg. Una regla de tres, despejando X y dividiendo 3/8·3/5 entre 8/8 y así sale X”.

Explicación: La estudiante plantea una regla de tres que resuelve usando el método reglado usual y obtiene la solución correcta 9/40.

Análisis: El esquema de resolución es cuaternario, el método es vectorial o de regla de tres. Usa el método reglado, lo que le impide ver la multiplicación de fracciones como la operación que resuelve el problema. El sentido de uso es de proporción. No incluye ninguna representación gráfica.

- Alumno 6 (Juan)



5. En un tarro de miel caben 3/5 de kg. ¿Qué cantidad de miel hay en el tarro si está lleno en sus 3/8 partes?

$\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{8} = \frac{9}{40}$

Explica qué operación u operaciones hay que hacer y porqué crees que son esas operaciones:

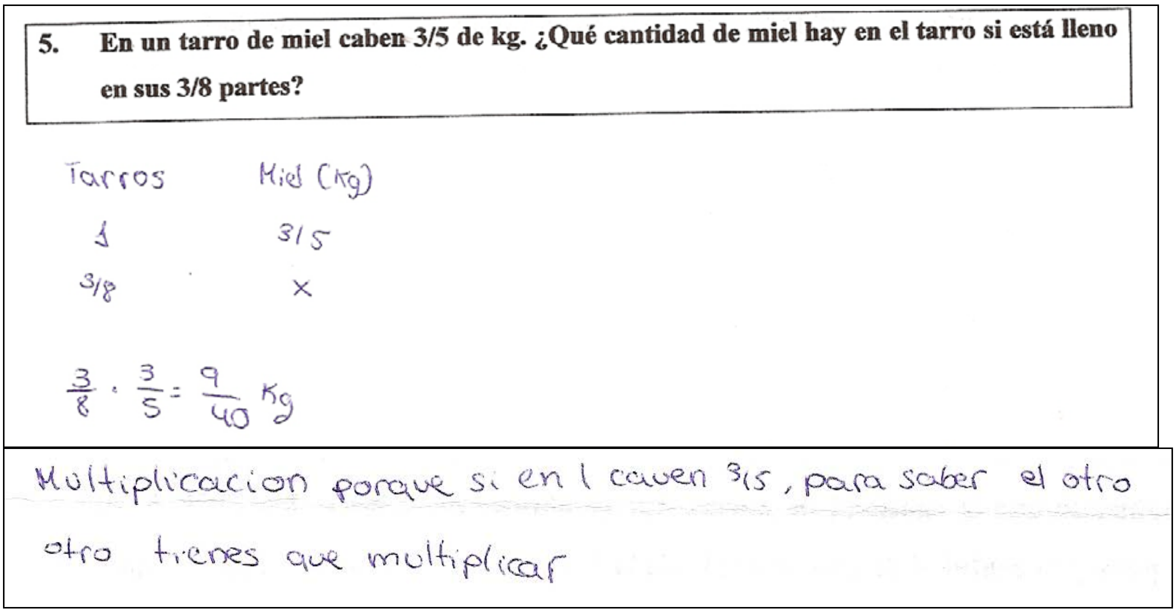
hay que multiplicar la miel que cabe en el tarro lleno por la fracción que está llena.

Trascripción: “ $\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{8}=\frac{9}{40}$. Hay que multiplicar la miel que cabe en el tarro lleno por la fracción que está llena”.

Explicación: El estudiante multiplica directamente la fracción 3/5 por la fracción 3/8, obteniendo el resultado correcto, 9/40.

Análisis: El esquema de resolución del estudiante es ternario y el método es la multiplicación directa. La forma textual que utiliza el estudiante está asociada al sentido de uso de medida.

- Alumna 7 (Casandra)


5. En un tarro de miel caben 3/5 de kg. ¿Qué cantidad de miel hay en el tarro si está lleno en sus 3/8 partes?

Tarros Miel (Kg)

1 3/5

3/8 x

$\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{5}=\frac{9}{40}$ Kg

Multiplicacion porque si en 1 caven 3/5, para saber el otro otro tienes que multiplicar

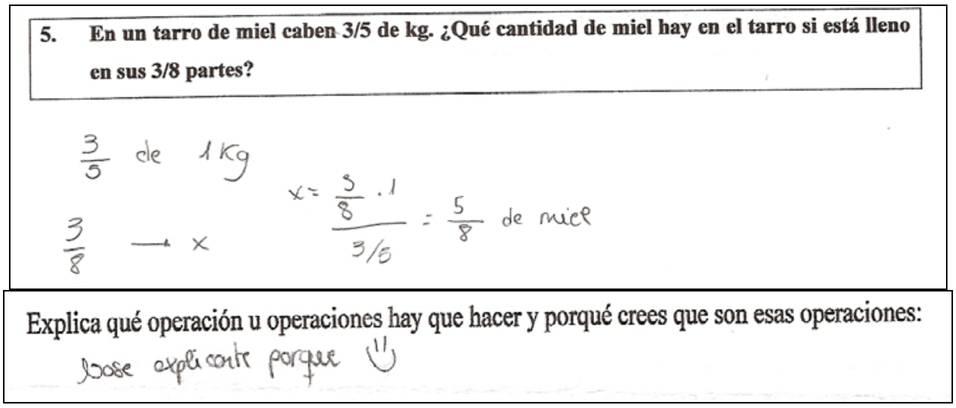
Trascripción: “ $\left.\begin{array}{cc} \text{Tarros} & \text{Miel (kg)} \\ 1 & 3/5 \\ 3/8 & \text{X} \end{array}\right\}\ \frac{3}{8}\cdot\frac{3}{5}=\frac{9}{40}\,\text{kg}$. Multiplicación porque si en 1 caven 3/5, para saber el otro otro tienes que multiplicar”.

Explicación: La estudiante plantea primero una regla de tres. Después multiplica las fracciones del enunciado, 3/8 y 3/5, obteniendo el resultado correcto.

Análisis: El esquema de resolución de la estudiante es cuaternario y el método es una regla de tres, la multiplicación aparece en segundo plano, como consecuencia de la aplicación de la regla de tres. El modelo semántico es de proporción.

Algunos ejemplos de respuestas incorrectas:

- Alumna 2 (Cristina)


5. En un tarro de miel caben 3/5 de kg. ¿Qué cantidad de miel hay en el tarro si está lleno en sus 3/8 partes?

$\frac{3}{5}$ de 1 kg

$\frac{3}{8} \longrightarrow x$

$x = \dfrac{\frac{3}{8} \cdot 1}{3/5} = \frac{5}{8}$ de miel

Explica qué operación u operaciones hay que hacer y porqué crees que son esas operaciones:

Nose explicarte porque

Trascripción:

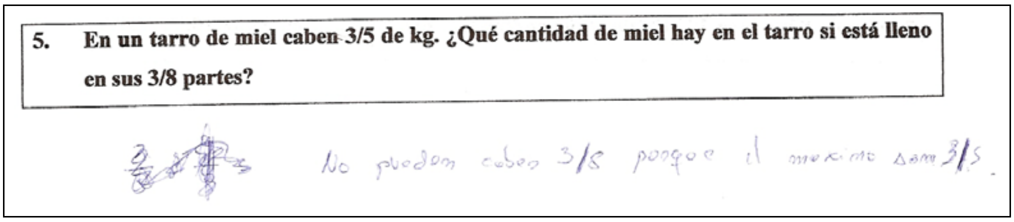
$$\left.\begin{array}{r} 3/5 \text{ de } 1\,\text{kg} \\ 3/8 \rightarrow \text{X} \end{array}\right\} \text{X} = \frac{\frac{3}{8} \cdot 1}{3/5} = \frac{5}{8} \text{ de miel}$$

"Nose explicarte porque".

Explicación: La estudiante plantea una regla de tres, que resuelve correctamente, pero obtiene un resultado incorrecto (5/8 de miel).

Análisis: El esquema de resolución es cuaternario, el método es una regla de tres, pero identifica como unidad 1 kg y no la cantidad total de miel que hay en el tarro. Después aplica el método reglado, de forma que obtiene una división de fracciones, en vez de una multiplicación. El modelo semántico es proporción.

- Alumno 10 (Vicent)


5. En un tarro de miel caben 3/5 de kg. ¿Qué cantidad de miel hay en el tarro si está lleno en sus 3/8 partes?

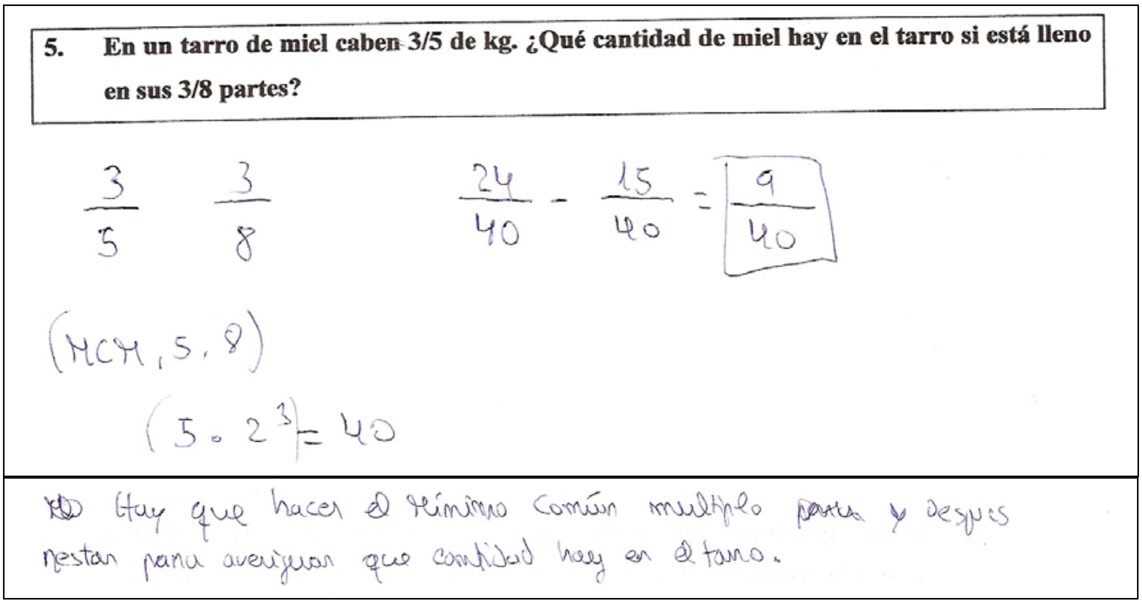
No pueden caben 3/8 porque el maximo son 3/5.

Trascripción: "No pueden caber 3/8 porque el máximo es 3/5 "

Explicación: La respuesta del estudiante es inesperada, ya que respuestas de este tipo no aparecieron en el pilotaje. Respuesta incorrecta.

Análisis: El estudiante hace una comparación de la magnitud de las dos fracciones que aparecen en el enunciado. Ordena mal las fracciones, ya que, suponiendo el mismo numerador, parece considerar como mayores las fracciones que tienen mayor denominador, en vez de las que lo tienen menor.

- Alumno 11 (Fco. Javier)



5. En un tarro de miel caben 3/5 de kg. ¿Qué cantidad de miel hay en el tarro si está lleno en sus 3/8 partes?

$\frac{3}{5}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{24}{40} - \frac{15}{40} = \boxed{\frac{9}{40}}$

(MCM, 5, 8)

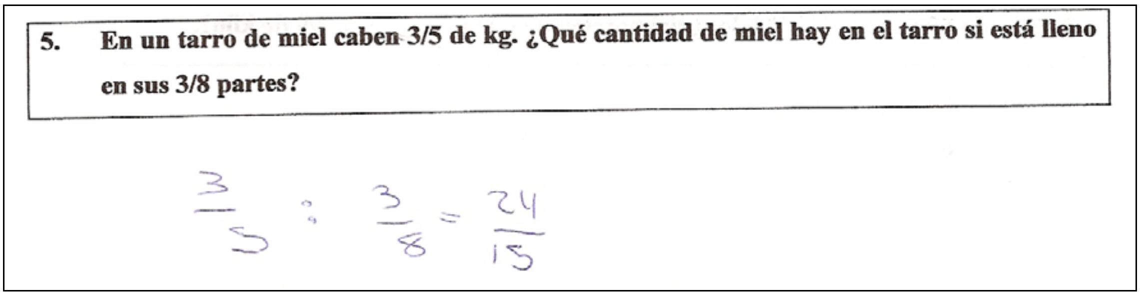
$(5 \cdot 2^3) = 40$

Hay que hacer el Mínimo Común multiplo para y despues restar para averiguar que cantidad hay en el tarro.

Trascripción: "3/5, 3/8, $\frac{24}{40} - \frac{15}{40} = \frac{9}{40}$; (mcm, 5, 8), $5 \cdot 2^3$ =40. Hay que hacer el Mínimo Común múltiplo y después restar para averiguar qué cantidad hay en el tarro".

Explicación: El estudiante reduce las fracciones a común denominador, y resta las fracciones, dando un resultado no correcto ("9/40"). El estudiante enfoca la resolución desde el punto de vista de la comparación aditiva de las fracciones, basada en la resta, ignorando la comparación multiplicativa. Interpreta erróneamente el enunciado, ya que parece calcular la cantidad de miel que se puede añadir al tarro cuando éste está lleno en sus 3/8 partes.

- Alumna 14 (Mireia)



5. En un tarro de miel caben 3/5 de kg. ¿Qué cantidad de miel hay en el tarro si está lleno en sus 3/8 partes?

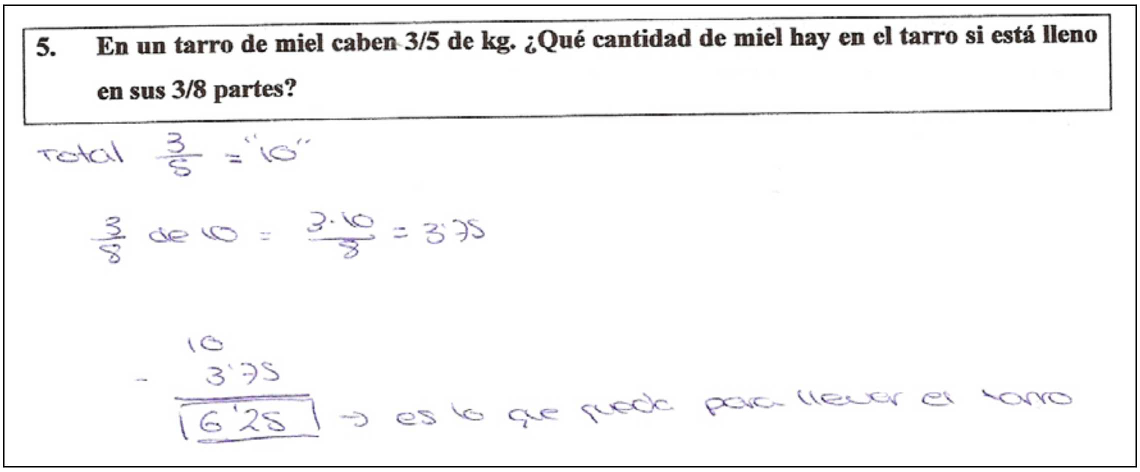
$\frac{3}{5} : \frac{3}{8} = \frac{24}{15}$

Trascripción: "$\frac{3}{5} : \frac{3}{8} = \frac{24}{15}$".

Explicación: La estudiante divide las fracciones 3/5 entre 3/8, en el mismo orden en que aparecen en el enunciado. No justifica su respuesta.

Análisis: El esquema es ternario y el método de resolución es la división directa. Posiblemente, la estudiante se ha dejado influenciar por las soluciones de las otras tareas de la prueba y ha usado la división en vez de la multiplicación.

- Alumna 16 (Jennifer)

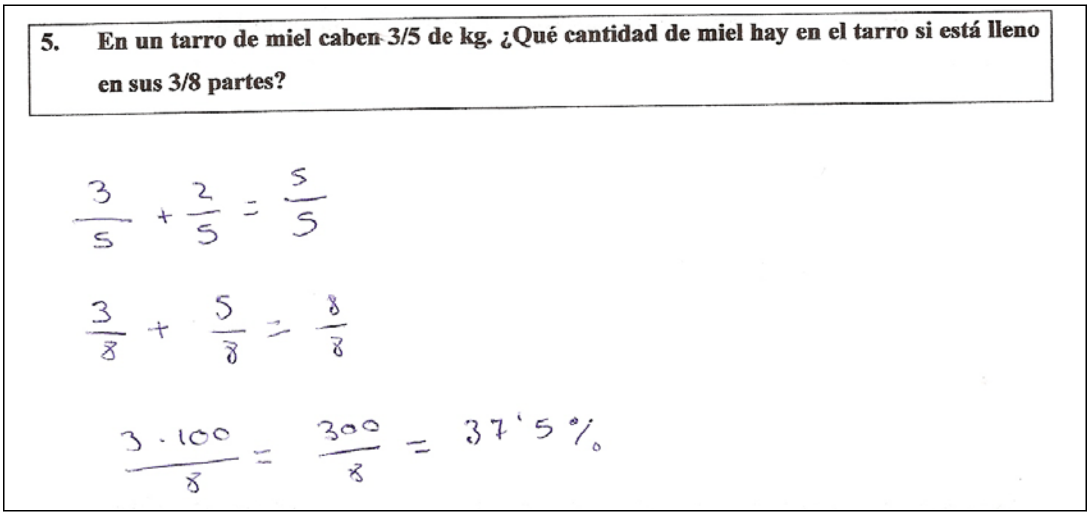


Trascripción: "Total=3/5="10"; $\frac{3}{8}$ de 10=$\frac{3\cdot 8}{10}=3'75$; 10–3'75=6'25 → es lo que queda para llenar el tarro".

Explicación: La estudiante elige el total como 10 y calcula los 3/5 de 10, obteniendo 3'75. A continuación, resta 10–3'75, obteniendo el resultado 6'25 que considera como solución del problema.

Análisis: La estudiante identifica la fracción 3/5 con el número entero 10, como capacidad total del tarro. Enfoca el problema desde el punto de vista aditivo, ya que resta los 3/8 de 10 a la capacidad total del tarro. Interpreta de modo incorrecto el enunciado del problema, ya que calcula la parte del tarro que queda por llenar.

- Alumna 17 (Laura A)

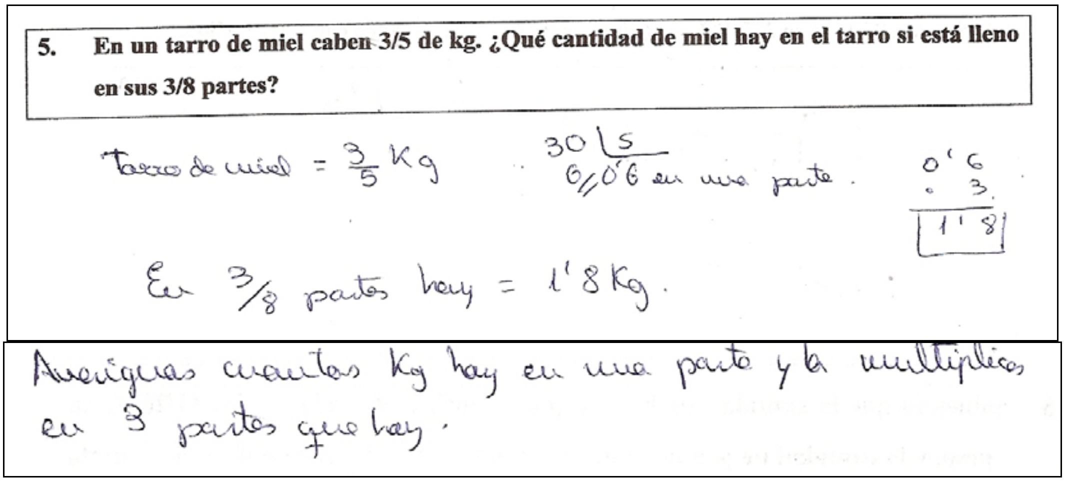


Trascripción: “ $\frac{3}{5}+\frac{2}{5}=\frac{5}{5};\ \frac{3}{8}+\frac{5}{8}=\frac{8}{8}\rightarrow\frac{3\cdot 100}{8}=\frac{300}{8}=37'5\%$ ”.

Explicación: La estudiante suma las fracciones 3/5 y 2/5, por un lado, y las fracciones 3/8 y 5/8, por otro. A continuación calcula los 3/8 de 100 y expresa el resultado en forma de porcentaje, 37’5%. Solución incorrecta.

Análisis: La estudiante enfoca el problema desde el punto de vista aditivo, sumando, a cada una de las fracciones del enunciado, la fracción necesaria para llegar al total. Finalmente, expresa la fracción 3/8 en forma de porcentaje, es decir, da como solución el porcentaje del tarro que está ocupado.

- Alumna 21 (Estefanía)



5. En un tarro de miel caben 3/5 de kg. ¿Qué cantidad de miel hay en el tarro si está lleno en sus 3/8 partes?

Tarro de miel = $\frac{3}{5}$ Kg

30 | 5
0/ 0'6 en una parte.

0'6
· 3
1'8

En 3/8 partes hay = 1'8 Kg.

Averiguas cuantos Kg hay en una parte y la multiplicas en 3 partes que hay.

Trascripción: “Tarro de miel= $\frac{3}{5}$ kg; $\frac{3}{5}=0'6$ en una parte; 0’6×3=1’8. En $\frac{3}{8}$ partes hay = 1’8 kg. Averiguas cuántos kg hay en una parte y la multiplicas en 3 partes que hay”.

Explicación: La estudiante expresa en forma decimal la fracción 3/5. Multiplica por 3 el resultado y concluye que el número obtenido es la solución del problema. Resultado incorrecto.

Análisis: La estudiante identifica la cantidad de miel que cabe en el tarro como si fuera 1/8 parte. Multiplica por 3 para averiguar la miel que hay en 3/8 partes del tarro, intentando aplicar un método reductivo. Para ella el número de partes es el numerador de la fracción y el denominador solamente indica el nombre que denomina a las partes.

6.2.2.6 Tarea 6: “Edades”

Los resultados obtenidos en esta tarea son los siguientes:

- De los 6/21 estudiantes que contestan correctamente, 5/21 usan un esquema ternario y 1/21 el esquema cuaternario.
- Entre las respuestas correctas, 3/21 estudiantes usan el método de ecuación, 2/21 el método de división directa y 1/21 el método funcional de regla de tres, tal como se muestra en la Tabla 6.8.

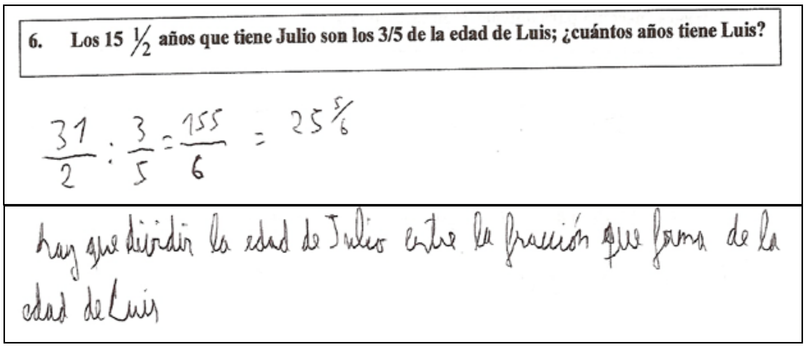
	DD	E	Vectorial
Miriam			X
Juan	X		
Casandra		X	
Christian		X	
Ana María		X	
Jennifer	X		

TABLA 6.8. Métodos de resolución para la tarea 6

- En cuanto a las contestaciones no correctas, 3/21 estudiantes dan respuestas aditivas, 1/21 estudiante multiplica las fracciones y 11/21 no contestan.
- Las formas textuales que usan los estudiantes que contestan correctamente corresponden al sentido de uso de proporción de valor unitario desconocido (1/21) y de inversión de la multiplicación (factor perdido) (5/21).
- Solo 1/21 estudiante afirma haber usado un dibujo para representar el problema, si bien no lo muestra en la hoja de respuestas.
- Se han observado los siguientes errores: a) interpretar el número mixto 15 ½ como el producto del número entero 15 por la fracción ½ (3/21); b) interpretar el número mixto 15 ½ como la división del entero15 entre la fracción 1/2 (1/21); c) multiplicar por el denominador y dividir por el numerador cuando se interpreta la fracción como operador (1/21); c) Hacer una lectura incorrecta del enunciado, intercambiando los datos en la respuesta (1/21).

Algunos ejemplos de respuestas correctas:

- Alumno 6 (Juan)


6. Los 15 ½ años que tiene Julio son los 3/5 de la edad de Luis; ¿cuántos años tiene Luis?

$\frac{31}{2} : \frac{3}{5} = \frac{155}{6} = 25\,{}^{5}\!/_{6}$

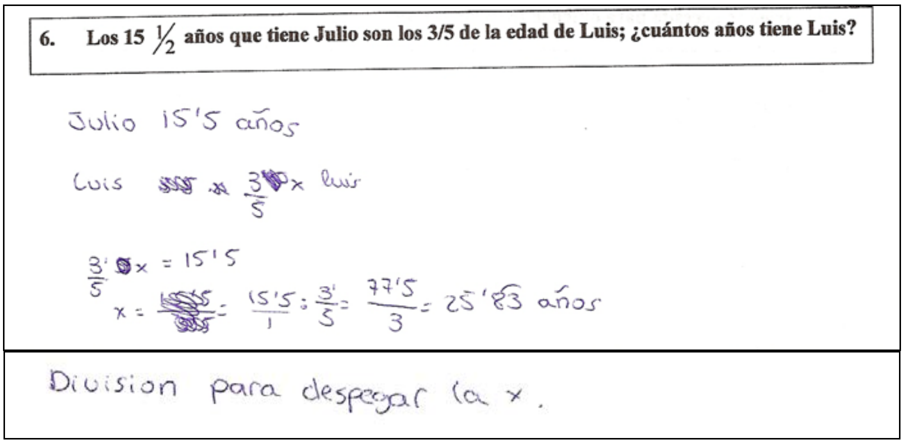
hay que dividir la edad de Julio entre la fracción que forma de la edad de Luis

Trascripción: “ $\frac{31}{2} : \frac{3}{5} = \frac{155}{6} = 25\,{}^{5}\!/_{6}$. Hay que dividir la edad de Julio entre la fracción que forma de la edad de Luis”.

Explicación: El estudiante divide directamente la fracción 31/2 (equivalente al número mixto 15 ½) entre la fracción 3/5, obteniendo el resultado correcto.

Análisis: El esquema de resolución es ternario y el método de resolución la división directa. El estudiante utiliza una forma textual que corresponde al sentido de uso de inversión de la multiplicación (factor perdido) en su forma aritmética, interpretando la fracción 3/5 como una parte de la edad de Luis, en vez de un operador. No incluye ninguna representación gráfica.

- Alumna 7 (Casandra)


6. Los 15 ½ años que tiene Julio son los 3/5 de la edad de Luis; ¿cuántos años tiene Luis?

Julio 15'5 años

Luis $\frac{3}{5}$x luis

$\frac{3}{5}$x = 15'5

x = $\frac{15'5}{1} : \frac{3}{5} = \frac{77'5}{3} = 25'83$ años

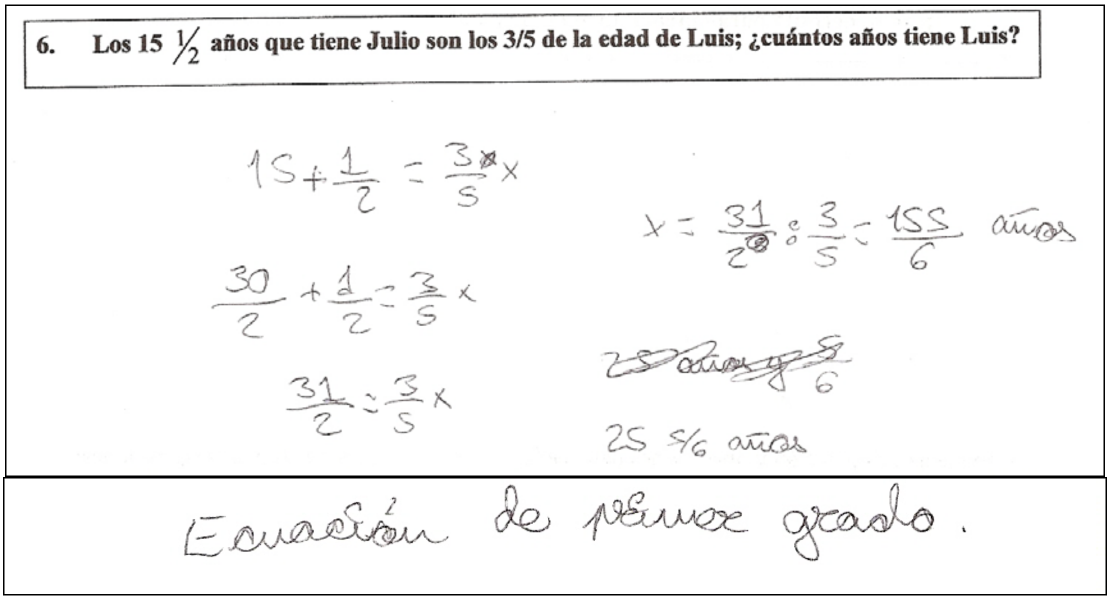
Division para despejar la x.

Trascripción: “Julio 15’5 años; Luis $\frac{3}{5}X \to \frac{3}{5}X = 15'5 \to X = \frac{15'5}{1} \div \frac{3}{5} = \frac{77'5}{3} = 25'8\overline{3}$ años. División para despejar la X”.

Explicación: La estudiante plantea una ecuación en la que la incógnita es la edad de Luis. A continuación despeja la incógnita haciendo una división de fracciones. Previamente ha interpretado 15 ½ como número decimal 15’5. Obtiene la solución correcta.

Análisis: El esquema de resolución es ternario y el método es el planteamiento y resolución de una ecuación. La división de fracciones aparece en segundo plano, como consecuencia de la resolución de la ecuación. La forma textual que utiliza el estudiante corresponde al sentido de uso de inversión de la multiplicación (factor perdido) en su forma algebraica. No incluye ninguna representación gráfica.

- Alumno 8 (Christian)


6. Los 15 ½ años que tiene Julio son los 3/5 de la edad de Luis; ¿cuántos años tiene Luis?

$15 + \frac{1}{2} = \frac{3}{5}x$

$\frac{30}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{5}x$

$\frac{31}{2} = \frac{3}{5}x$

$x = \frac{31}{2} : \frac{3}{5} = \frac{155}{6}$ años

25 5/6 años

Ecuación de primer grado.

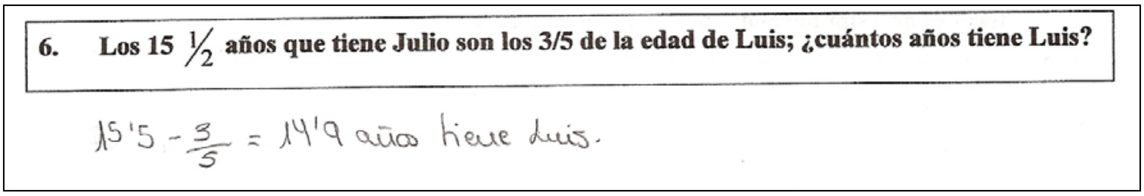
Trascripción: “ $15 + \frac{1}{2} = \frac{3}{5} \cdot X \rightarrow \frac{30}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{5} \cdot X \rightarrow \frac{31}{2} = \frac{3}{5} \cdot X \rightarrow X = \frac{31}{2} \div \frac{3}{5} = \frac{155}{6}$ años; $\rightarrow$ 25 5/6 años. Ecuación de primer grado”.

Explicación: El estudiante plantea una ecuación para resolver el problema. Despeja la incógnita y obtiene la solución correcta.

Análisis: El esquema es ternario, el método es el planteamiento y resolución de una ecuación. El estudiante utiliza un sentido de uso de inversión de la multiplicación (factor perdido) en su forma algebraica. No incluye ninguna representación gráfica.

Algunos ejemplos de respuestas incorrectas:

- Alumna 2 (Cristina)


6. Los 15 ½ años que tiene Julio son los 3/5 de la edad de Luis; ¿cuántos años tiene Luis?

$15'5 - \frac{3}{5} = 14'9$ años tiene Luis.

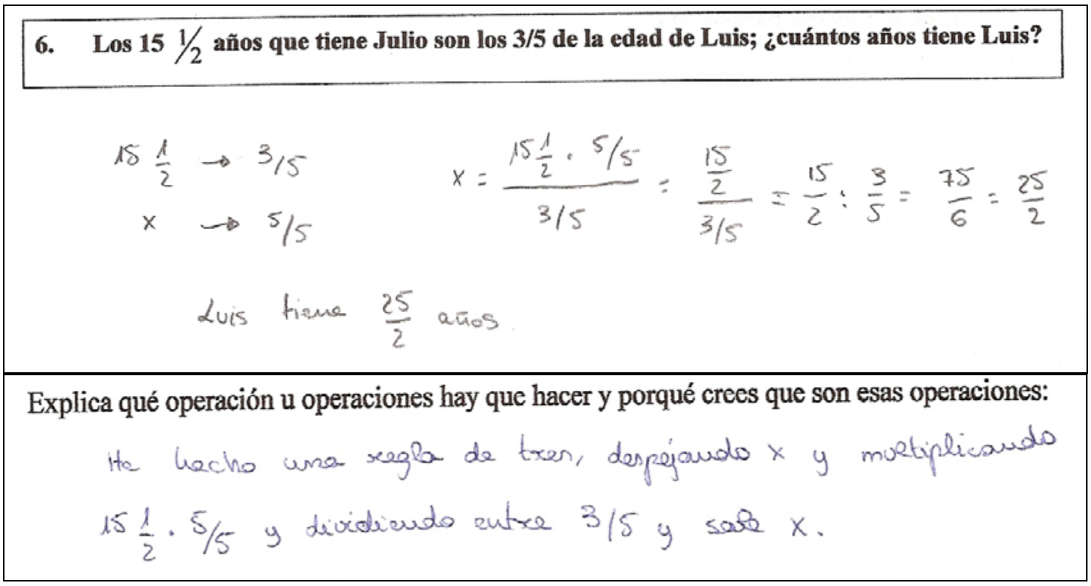
Trascripción:

$$15'5 - \frac{3}{5} = 14'5 \text{ años tiene Luis}$$

Explicación: La estudiante resta la fracción 3/5 al número mixto 15 ½ una vez transformado éste en decimal, obteniendo un resultado incorrecto. No explica su elección de la operación.

Análisis: la estudiante enfoca la resolución desde el punto de vista aditivo, limitándose a restar los datos del enunciado.

- Alumna 4 (Miriam)



6. Los 15 ½ años que tiene Julio son los 3/5 de la edad de Luis; ¿cuántos años tiene Luis?

$15\frac{1}{2} \rightarrow 3/5$

$x \rightarrow 5/5$

$x = \frac{15\frac{1}{2} \cdot 5/5}{3/5} = \frac{\frac{15}{2}}{3/5} = \frac{15}{2} : \frac{3}{5} = \frac{75}{6} = \frac{25}{2}$

Luis tiene $\frac{25}{2}$ años.

Explica qué operación u operaciones hay que hacer y porqué crees que son esas operaciones:

He hecho una regla de tres, despejando x y multiplicando $15\frac{1}{2} \cdot 5/5$ y dividiendo entre 3/5 y sale x.

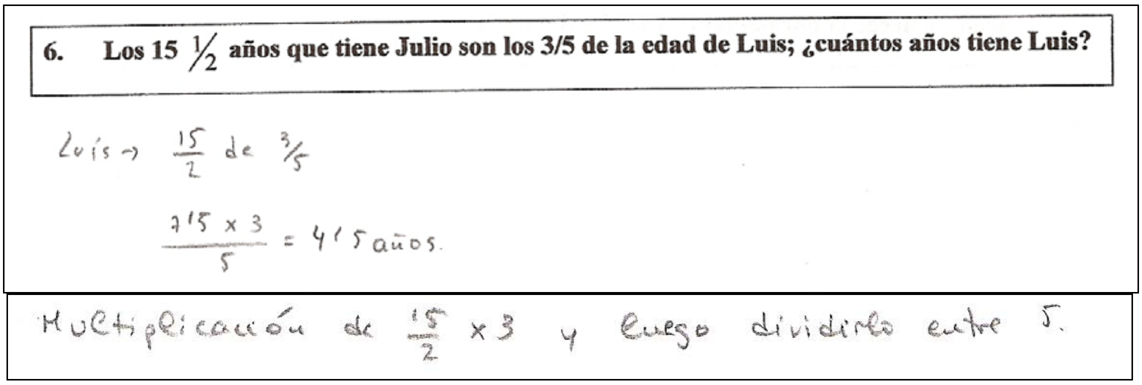
Trascripción: "$\left.\begin{array}{r} 15\ 1/2 \rightarrow 3/5 \\ X \rightarrow 5/5 \end{array}\right\}$ $X = \dfrac{15\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{5}}{3/5} = \dfrac{\frac{15}{2}}{3/5} = \dfrac{15}{2} \div \dfrac{3}{5} = \dfrac{75}{6} = \dfrac{25}{2}$. Luis tiene $\dfrac{25}{2}$ años.

He hecho una regla de tres, despejando X y multiplicando $15\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{5}$ y dividiendo entre 3/5 y sale X ".

Explicación: La estudiante plantea una regla de tres tomando los datos en el mismo orden en que aparecen en el enunciado. Aplica el método reglado, obteniendo una solución incorrecta.

Análisis: La estudiante usa un esquema de resolución cuaternario y un método vectorial de regla de tres. La división aparece como consecuencia de la aplicación de la regla de tres. La forma textual que usa corresponde al sentido de uso de proporción de valor unitario desconocido. No incluye ninguna representación gráfica. No interpreta correctamente el significado del número mixto (confunde 15 ½ con 15/2).

- Alumna 5 (Ángela)



6. **Los 15 ½ años que tiene Julio son los 3/5 de la edad de Luis; ¿cuántos años tiene Luis?**

Luis → $\frac{15}{2}$ de $\frac{3}{5}$

$\frac{7'5 \times 3}{5} = 4'5$ años.

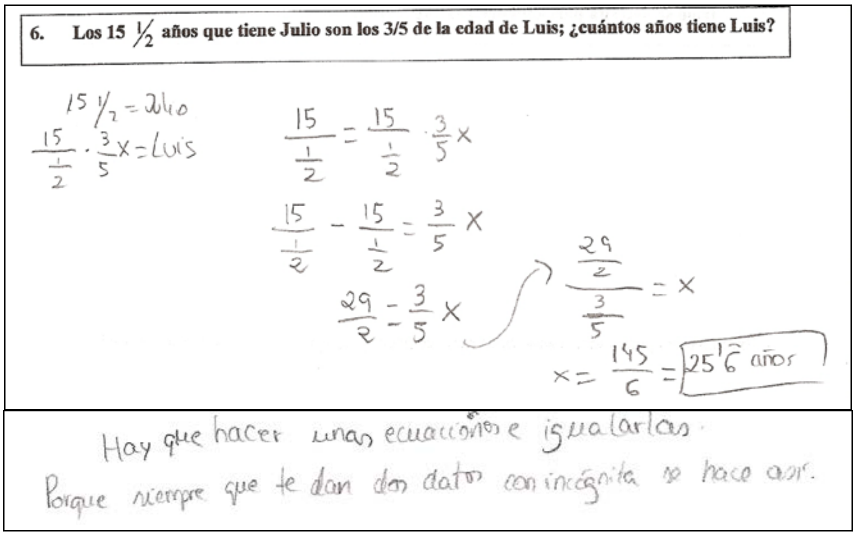
Multiplicación de $\frac{15}{2}$ x 3 y luego dividirlo entre 5.

Trascripción: “Luis $\rightarrow \frac{15}{2}$ de $\frac{3}{5} \rightarrow \frac{7'5\times 3}{5} = 4'5\,\text{años}$. Multiplicación de 15/2 x 3 y luego dividirlo entre 5”.

Explicación: La estudiante escribe que la edad de Luis es 15/2 de 3/5 y multiplica las dos fracciones, obteniendo un resultado incorrecto (4,5 años).

Análisis: La estudiante ha enfocado mal la resolución debido a una lectura incorrecta del enunciado, que le lleva a interpretar que la edad de Luis es los 3/5 de la edad de Julio, y que, por tanto, la solución se obtiene multiplicando las dos fracciones.

- Alumna 9 (Ana María)



6. **Los 15 ½ años que tiene Julio son los 3/5 de la edad de Luis; ¿cuántos años tiene Luis?**

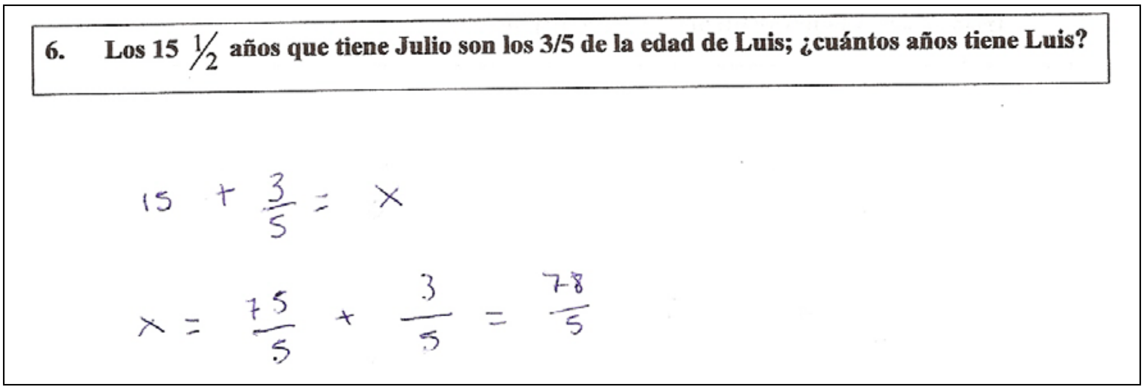
Trascripción: “15 ½ = Julio, $\frac{15}{\frac{1}{2}}\cdot\frac{3}{5}\text{X} = \text{Luis}$; $\frac{15}{\frac{1}{2}} = \frac{15}{\frac{1}{2}}\cdot\frac{3}{5}\text{X} \rightarrow \frac{15}{\frac{1}{2}} - \frac{15}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{5}\text{X} \rightarrow$

$\rightarrow \frac{29}{2} = \frac{3}{5}\cdot \text{X} \rightarrow \frac{\frac{29}{2}}{\frac{3}{5}} = \text{X} \rightarrow \text{X} = \frac{145}{6} = 25{,}6$ años. Hay que hacer unas ecuaciones e igualarlas. Porque siempre que te dan dos datos con incógnita se hace así”.

Explicación: La estudiante plantea una ecuación para resolver el problema, pero tiene dificultades con la manipulación de las expresiones y con la interpretación del número mixto 15 1/2, lo que hace que obtenga una solución incorrecta ($25,\overline{6}$ años).

Análisis: La estudiante utiliza un esquema ternario y un método de planteamiento y resolución de una ecuación. Usa una forma textual asociada al sentido de uso de inversión de la multiplicación (factor perdido) en su forma algebraica. No incluye ninguna representación gráfica. Interpreta el número mixto 15 ½ como la división del entero 15 entre la fracción ½.

- Alumna 17 (Laura A)



6. Los 15 ½ años que tiene Julio son los 3/5 de la edad de Luis; ¿cuántos años tiene Luis?

$15 + \frac{3}{5} = X$

$X = \frac{75}{5} + \frac{3}{5} = \frac{78}{5}$

Trascripción: "$15 + \frac{3}{5} = X \rightarrow X = \frac{75}{5} + \frac{3}{5} = \frac{78}{5}$".

Explicación: La estudiante suma 15 con la fracción 3/5, obteniendo una solución no correcta.

Interpretación: La estudiante plantea el problema con un enfoque aditivo, sin dar ninguna explicación. No incluye ninguna representación gráfica..

6.2.2.7 Tarea 7: "Porción de torta"

Los resultados obtenidos en esta tarea son los siguientes:

- De los 9/21 estudiantes que contestan correctamente, 7/21 usan un esquema cuaternario y 2/21 un esquema ternario.
- En las respuestas correctas, 7/21 estudiantes usan un método de resolución funcional de regla de tres y 2/21 la división directa, tal como se indica en la Tabla 6.9:

	RT	DD
Cristina	X	
Ana	X	
Miriam	X	
Ángela	X	
Juan		X
Casandra	X	
Christian (*)	X	
Ana María	X	
Estefanía		X

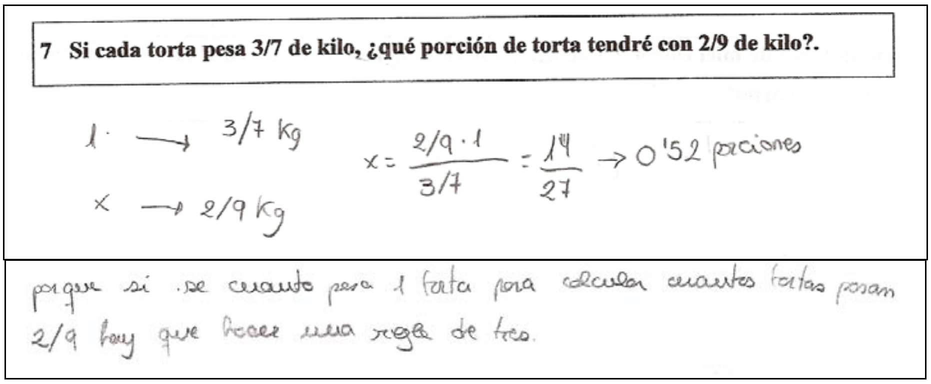
TABLA 6.9. Métodos de resolución para la tarea 7

(*) Christian plantea una regla de tres, pero la resuelve mediante una ecuación (la que resulta al igualar en cruz).

- En cuanto a las respuestas no correctas, 2/21 estudiantes dan respuestas aditivas, 1/21 multiplica las fracciones, 1/21 da una respuesta usando una representación gráfica o diagrama y 8/21 no contestan.
- Las formas textuales utilizadas por los estudiantes que contestan correctamente corresponden a los sentidos de uso de proporción con valor unitario conocido (7/7), y medida (2/7).
- Solo 1/21 estudiante representa gráficamente el problema mediante un modelo físico continuo rectangular parte-todo.
- Se han observado los siguientes errores: a) intercambiar el orden de las cantidades en el esquema cuaternario, dando origen a una multiplicación en vez de una división (1/21); b) interpretar de forma errónea el enunciado, asociándolo a una multiplicación (1/21); c) comparar de forma aditiva los valores absolutos de las fracciones (1/21); d) intercambiar el dividendo con el divisor en la división de fracciones (1/21); e) error al restar las fracciones (1/21).

Algunos ejemplos de respuestas correctas:

- Alumna 2 (Cristina)


7 Si cada torta pesa 3/7 de kilo, ¿qué porción de torta tendré con 2/9 de kilo?.

1· → 3/7 kg

x → 2/9 kg

x = 2/9 · 1 / 3/7 = 14/27 → 0'52 porciones

porque si se cuanto pesa 1 torta para calcular cuantas tortas pesan 2/9 hay que hacer una regla de tres.

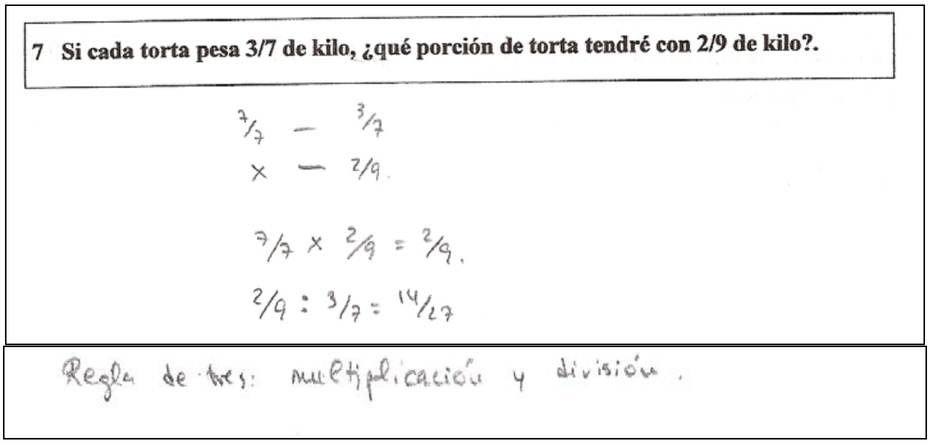
Trascripción: $\begin{matrix} 1 \rightarrow 3/7\text{ kg} \\ X \rightarrow 2/9\text{ kg.} \end{matrix}$ $\quad X = \dfrac{2/9 \cdot 1}{3/7} = \dfrac{14}{27} \rightarrow$ 0,52 porciones

"Porque si se cuanto pesa 1 torta, para calcular cuantas tortas pesan 2/9. hay que hace una regla de tres".

Explicación: La estudiante plantea una regla de tres que resuelve despejando X mediante una división de fracciones. Expresa el resultado en forma decimal. Obtiene la solución correcta.

Análisis: El esquema es cuaternario y el método de resolución es vectorial (regla de tres). La forma textual que usa la estudiante corresponde al sentido de uso de proporción con valor unitario conocido. No incluye ninguna representación gráfica del problema.

- Alumna 5 (Ángela)


7 Si cada torta pesa 3/7 de kilo, ¿qué porción de torta tendré con 2/9 de kilo?.

7/7 — 3/7

x — 2/9.

7/7 × 2/9 = 2/9.

2/9 : 3/7 = 14/27

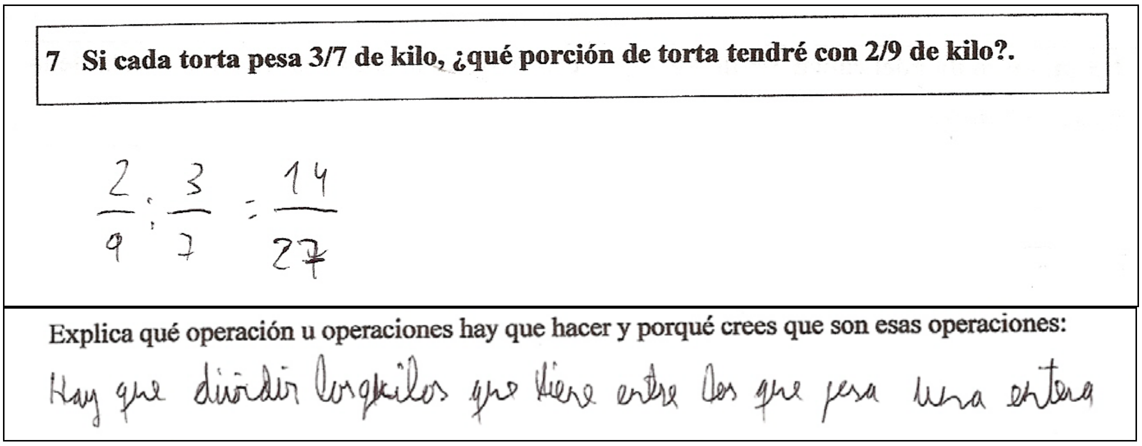
Regla de tres: multiplicación y división.

Trascripción: " $\left.\begin{matrix} \dfrac{7}{7} \rightarrow \dfrac{3}{7} \\ \\ X \rightarrow \dfrac{2}{9} \end{matrix}\right\}$ $\quad \dfrac{7}{7} \times \dfrac{2}{9} = \dfrac{2}{9} \;\rightarrow\; \dfrac{2}{9} \div \dfrac{3}{7} = \dfrac{14}{27}$. Regla de tres: multiplicación y división"

Explicación: La estudiante plantea una regla de tres, tomando la unidad como 7/7. Resuelve la regla de tres en dos pasos: una multiplicación y una división. Obtiene el resultado correcto.

Análisis: La estudiante usa un esquema cuaternario y un método vectorial de regla de tres. El sentido de uso es de proporción con valor unitario conocido. Descompone la regla de tres en una multiplicación y una división. No incluye ninguna representación gráfica del problema.

- Alumno 6 (Juan)



7 Si cada torta pesa 3/7 de kilo, ¿qué porción de torta tendré con 2/9 de kilo?.

$\frac{2}{9} : \frac{3}{7} = \frac{14}{27}$

Explica qué operación u operaciones hay que hacer y porqué crees que son esas operaciones:

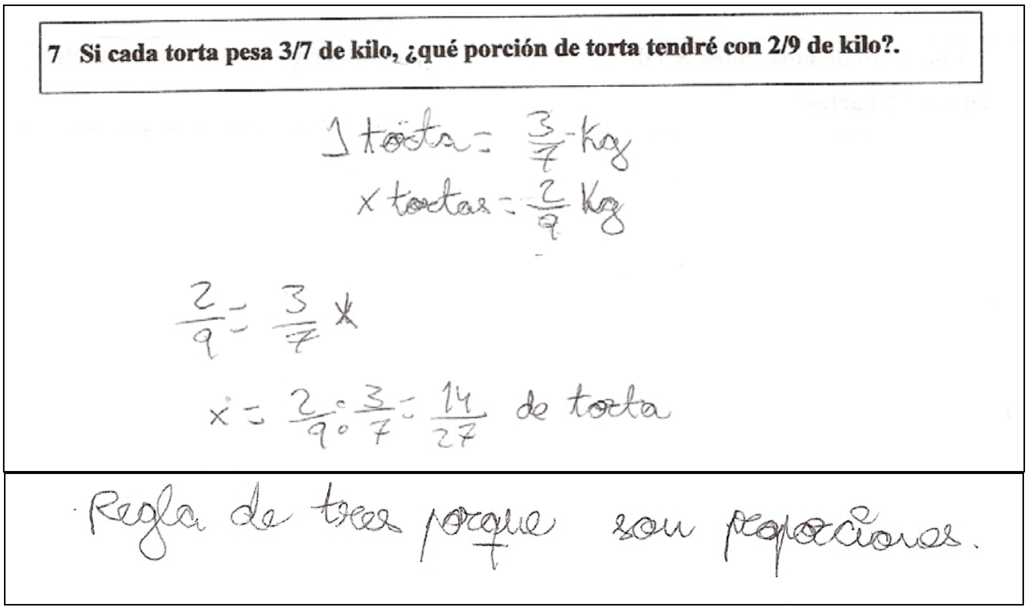
Hay que dividir losquilos que tiene entre los que pesa una entera

Trascripción: “ $\frac{2}{9} : \frac{3}{7} = \frac{14}{27}$. Hay que dividir los quilos que tiene entre los que pesa una entera”.

Explicación: El estudiante divide directamente la fracción 2/9 entre la fracción 3/7, obteniendo el resultado correcto.

Análisis: El estudiante utiliza un esquema ternario y un método de división directa. El sentido de uso es de medida. No incluye ninguna representación gráfica del problema.

- Alumno 8 (Christian)



7 Si cada torta pesa 3/7 de kilo, ¿qué porción de torta tendré con 2/9 de kilo?.

1 torta = $\frac{3}{7}$ kg
x tortas = $\frac{2}{9}$ kg

$\frac{2}{9} = \frac{3}{7}x$

$x = \frac{2}{9} : \frac{3}{7} = \frac{14}{27}$ de torta

Regla de tres porque son proporciones.

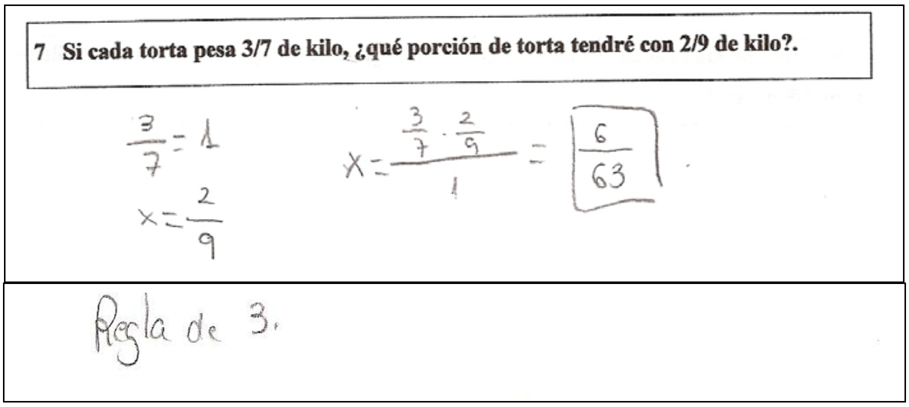
Trascripción: "$\left.\begin{array}{r}1\text{ torta}=\frac{3}{7}\text{ kg}\\ \text{X tortas}=\frac{2}{9}\text{ kg}\end{array}\right\}$ $\frac{2}{9}=\frac{3}{7}\text{X} \to \text{X}=\frac{2}{9}\div\frac{3}{7}=\frac{14}{27}\text{ de torta}$. Regla de tres porque son proporciones".

Explicación: El estudiante plantea una regla de tres, que resuelve planteando una ecuación. Para despejar la incógnita X efectúa una división de fracciones, obteniendo la solución correcta.

Análisis: El estudiante utiliza un esquema cuaternario y un método vectorial de regla de tres, aunque a través del planteamiento de una ecuación. El sentido de uso es de proporción con valor unitario conocido. No incluye ninguna representación gráfica del problema.

Algunos ejemplos de respuestas incorrectas:

- Alumna 9 (Ana María)



7 Si cada torta pesa 3/7 de kilo, ¿qué porción de torta tendré con 2/9 de kilo?.

$\frac{3}{7} = 1$

$x = \frac{2}{9}$

$x = \frac{\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{9}}{1} = \boxed{\frac{6}{63}}$

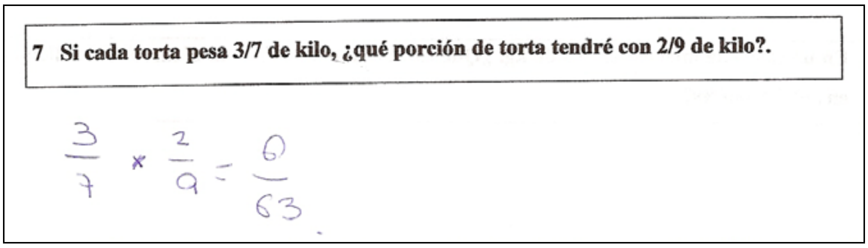
Regla de 3.

Trascripción: “ $\left.\begin{array}{l} \frac{3}{7} = 1 \\ X = \frac{2}{9} \end{array}\right\}$ $X = \dfrac{\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{9}}{1} = \dfrac{6}{63}$ Regla de 3”.

Explicación: La estudiante plantea una regla de tres, pero lo hace de manera incorrecta, al cambiar de orden las cantidades en los espacios de medida. Aplica el método reglado y obtiene una solución incorrecta.

Análisis: La estudiante usa un esquema cuaternario, un método vectorial de regla de tres, pero al cambiar el orden de las cantidades en la proporción, reduce el problema a una multiplicación, en vez de a una división. El sentido de uso es de proporción con valor unitario conocido. No incluye ninguna representación gráfica.

- Alumna 14 (Mireia)



7 Si cada torta pesa 3/7 de kilo, ¿qué porción de torta tendré con 2/9 de kilo?.

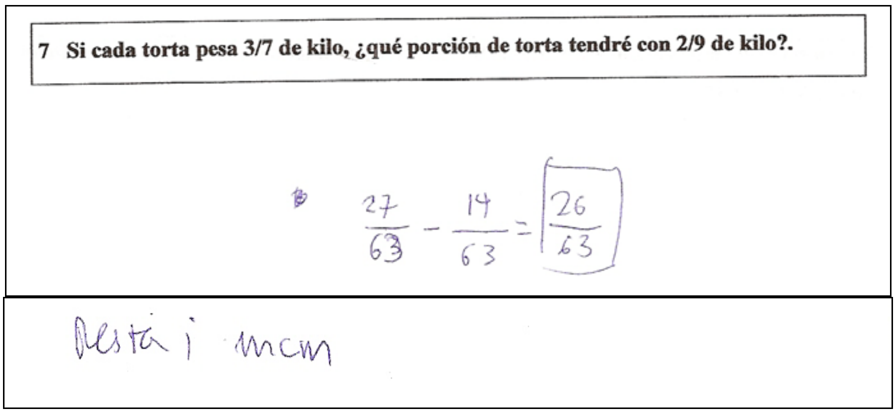
$\frac{3}{7} \times \frac{2}{9} = \frac{6}{63}$

Trascripción: “ $\frac{3}{7} \times \frac{2}{9} = \frac{6}{63}$ ”.

Explicación: La estudiante multiplica las fracciones 3/7 y 2/9, sin dar ninguna explicación. Respuesta incorrecta.

Análisis: La estudiante usa un esquema ternario y hace una interpretación incorrecta del enunciado, ya que parece entender que la pregunta es cuánto pesa 2/9 de la torta, sabiendo que cada torta pesa 3/7. Por eso identifica el enunciado con un problema de multiplicar. Posiblemente, utiliza un sentido de uso de medida. No incluye ninguna representación gráfica.

- Alumno 15 (Héctor)



7 Si cada torta pesa 3/7 de kilo, ¿qué porción de torta tendré con 2/9 de kilo?.

$\frac{27}{63} - \frac{14}{63} = \boxed{\frac{26}{63}}$

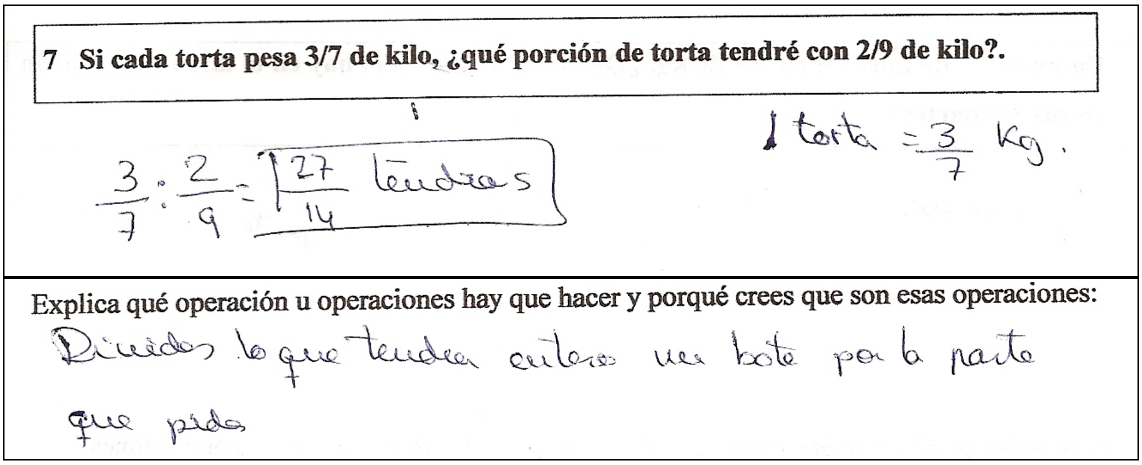
Resta i mcm

Trascripción: “ $\frac{27}{63} - \frac{14}{63} = \frac{26}{63}$. resta y mcm”.

Explicación: El estudiante resta las fracciones (con un error de cálculo incluido), dando un resultado no correcto.

Análisis: El estudiante enfoca la resolución desde el punto de vista de la comparación aditiva de las fracciones, basada en la resta y no en la división.

- Alumna 21 (Estefanía)



7 Si cada torta pesa 3/7 de kilo, ¿qué porción de torta tendré con 2/9 de kilo?.

1 torta $= \frac{3}{7}$ Kg.

$\frac{3}{7} : \frac{2}{9} = \boxed{\frac{27}{14} \text{ tendras}}$

Explica qué operación u operaciones hay que hacer y porqué crees que son esas operaciones:

Divides lo que tendra entero un bote por la parte que pida

Trascripción: “1 torta $= \frac{3}{7}$ kg $\frac{3}{7} \div \frac{2}{9} = \frac{27}{14}$ tendras. Divides lo que tendra entero un bote por la parte que pida”.

Explicación: La estudiante divide directamente la fracción 3/7 entre la fracción 2/9 y justifica su respuesta diciendo que hay que dividir el peso de una torta entera entre la parte pedida. Expresa el resultado (incorrecto) en forma de fracción.

Análisis: La estudiante usa un esquema ternario y un método de división directa, pero divide al revés, tomando las fracciones en el mismo orden en que aparecen en el enunciado. Posiblemente, el sentido de uso que considera es de medida. No incluye ninguna representación gráfica.

6.2.2.8 Tarea 8: “Trigo”

Los resultados obtenidos en esta tarea son los siguientes:

- Solamente 3/21 estudiantes contestan correctamente, de ellos 2/21 usan un esquema ternario y 1/21 un esquema cuaternario.
- En las respuestas correctas, 2/21 estudiantes usan un método de división directa y 1/21 un método funcional de regla de tres, tal como se señala en la Tabla 6.10.

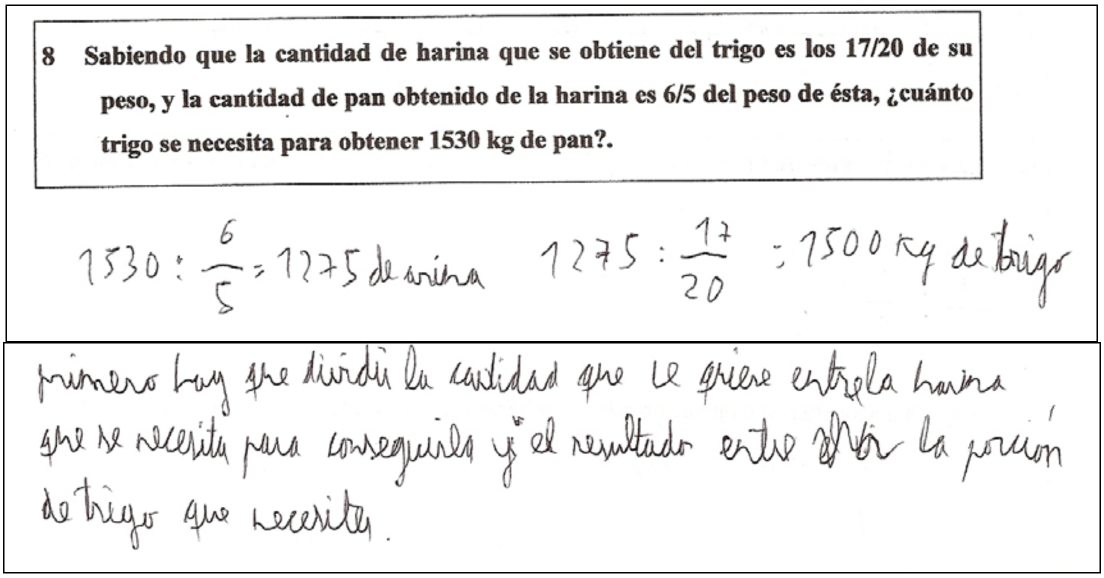
	DD	Funcional
Juan	X	
Christian		X
Estefanía	X	

TABLA 6.10. Métodos de resolución para la tarea 8

- Respecto de las contestaciones no correctas, 4/21 estudiantes dan respuestas aditivas y 14/21 no contestan.
- Las formas textuales utilizadas por los estudiantes que contestan correctamente corresponden a los sentidos de uso de inversión de la multiplicación (factor perdido) (1/21) y medida (2/21).
- Ningún estudiante representa el problema mediante un modelo físico.
- Se han observado los siguientes errores: a) sumar las fracciones 17/20 y 6/5, en vez de multiplicarlas (1/21); b) invertir el orden de las cantidades en el esquema cuaternario de la regla de tres (1/21); c) errores de cálculo en la división (1/21).

Ejemplo de respuesta correcta:

- Alumno 6 (Juan)



8 Sabiendo que la cantidad de harina que se obtiene del trigo es los 17/20 de su peso, y la cantidad de pan obtenido de la harina es 6/5 del peso de ésta, ¿cuánto trigo se necesita para obtener 1530 kg de pan?.

$1530 : \frac{6}{5} = 1275$ de arina $\quad 1275 : \frac{17}{20} = 1500$ kg de trigo

primero hay que dividir la cantidad que se quiere entre la harina que se necesita para conseguirlo y el resultado entre la porción de trigo que necesites.

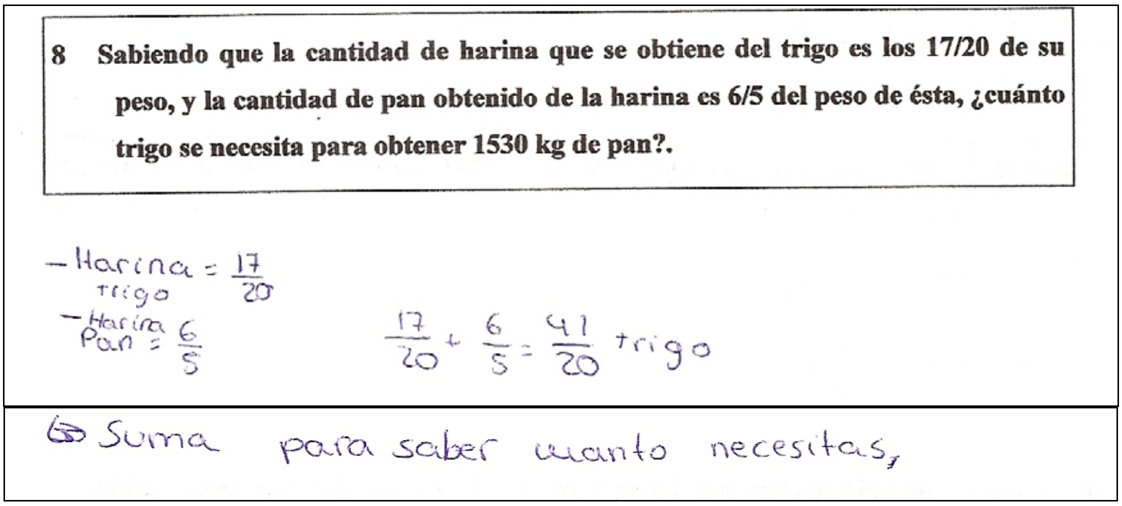
Trascripción: " $1530 : \frac{6}{5} = 1275$ de arina. $1275 : \frac{17}{20} = 1500$ kg de trigo. Primero hay que dividir la cantidad que se quiere entre la harina que se necesita para conseguirlo y el resultado entre la porción de trigo que necesites".

Explicación: El estudiante divide directamente la cantidad de pan que se pretende conseguir (1530) entre 6/5 para obtener los kilos de harina (1275). Después divide los kilos de harina (1275) entre la fracción 17/20 para hallar los kilos de trigo necesarios (1500), obteniendo el resultado correcto. En su explicación indica que el problema se resuelve en dos pasos mediante división.

Análisis: El esquema de resolución del estudiante es ternario y el método es de división directa. Por la forma de resolver el problema, que utiliza dos etapas, y por la explicación que hace, el sentido de uso que tiene en cuenta el estudiante es de inversión de la multiplicación o factor perdido, en su forma aritmética. No incluye ninguna representación gráfica para ilustrar el problema.

Algunos ejemplos de respuestas incorrectas:

- Alumna 7 (Casandra)



8 Sabiendo que la cantidad de harina que se obtiene del trigo es los 17/20 de su peso, y la cantidad de pan obtenido de la harina es 6/5 del peso de ésta, ¿cuánto trigo se necesita para obtener 1530 kg de pan?.

–Harina trigo = $\frac{17}{20}$

–Harina Pan = $\frac{6}{5}$

$\frac{17}{20} + \frac{6}{5} = \frac{41}{20}$ trigo

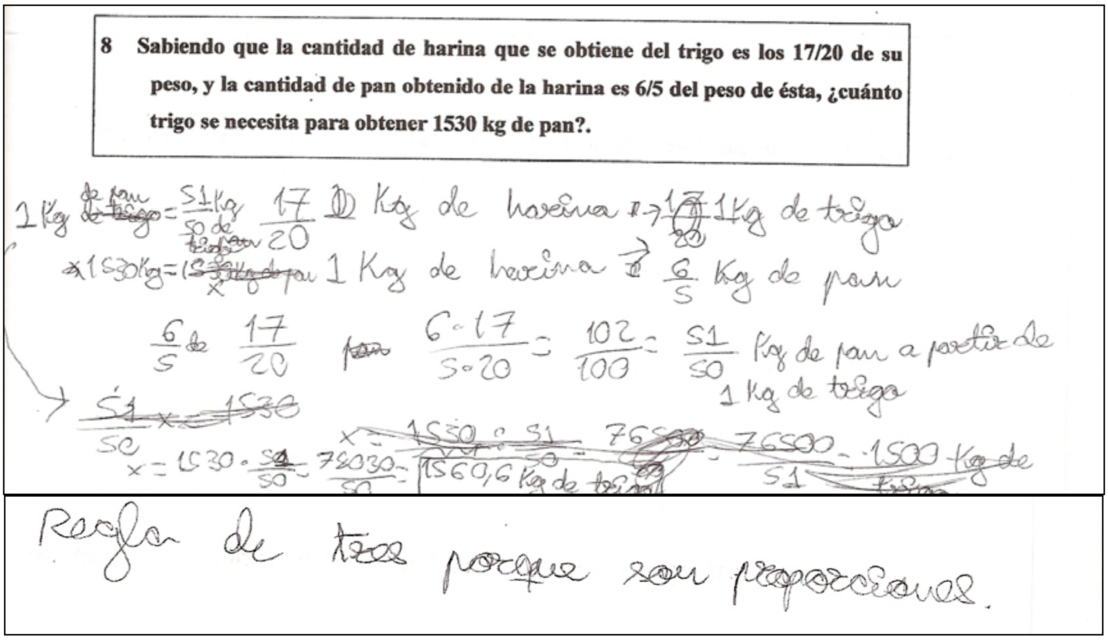
Suma para saber cuanto necesitas,

Trascripción: "Harina–trigo=$\frac{17}{20}$; Harina–pan=$\frac{6}{5} \rightarrow \frac{17}{20} + \frac{6}{5} = \frac{41}{20}$ trigo. Suma para saber cuánto necesitas".

Explicación: La estudiante suma las fracciones del enunciado, 17/20 + 6/5, obteniendo una solución incorrecta.

Análisis: El enfoque de resolución de la estudiante es aditivo, ya que usa la calculadora para efectuar la suma de las dos fracciones. La explicación que acompaña a la resolución revela una mala interpretación del enunciado.

- Alumno 8 (Christian)

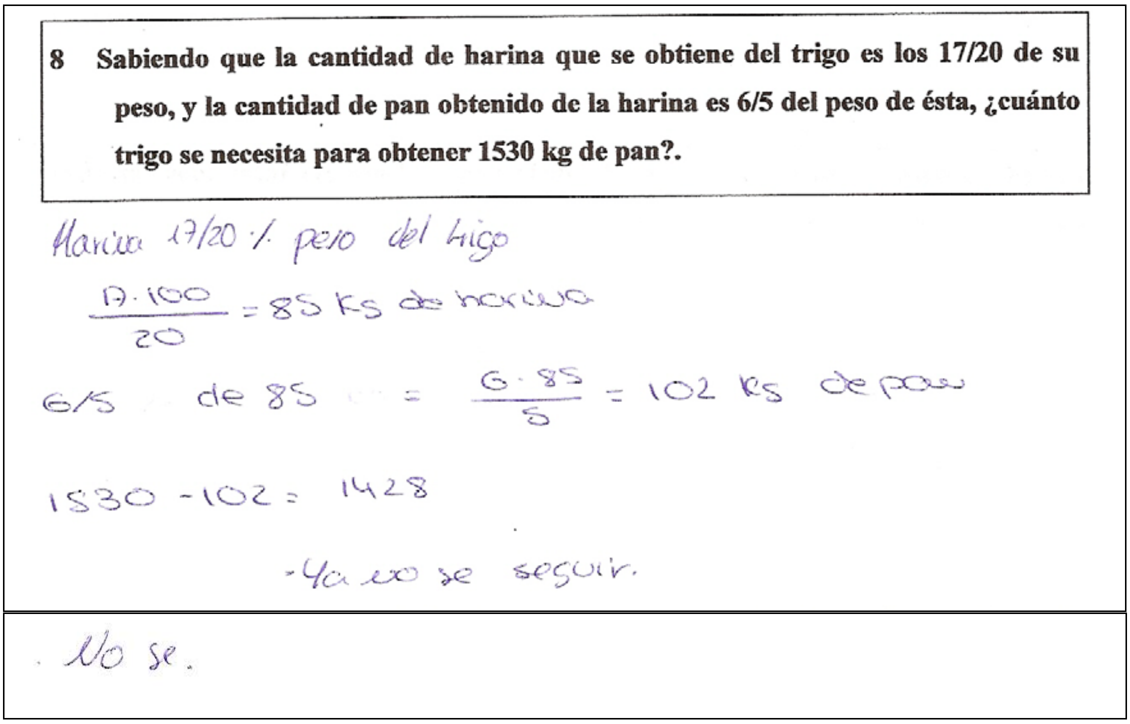


Trascripción: “$\left.\begin{array}{l} \frac{17}{20}\text{ kg de harina} \rightarrow 1\text{ kg de trigo} \\ 1\text{ kg de harina} \rightarrow \frac{6}{5}\text{ kg de pan} \end{array}\right\} \frac{6}{5}\text{ de } \frac{17}{20} = \frac{6 \cdot 17}{5 \cdot 20} = \frac{102}{100} = \frac{51}{50}\text{ kg}$ de pan a partir de 1 kg de trigo. $\left.\begin{array}{l} 1\text{ kg de pan} = \frac{51}{50}\text{ kg de trigo} \\ 1530\text{ kg} \quad = \text{X} \end{array}\right\} \text{X} = 1530 \cdot \frac{51}{50} = \frac{78030}{50} = 1560{,}6$ kg de trigo. Regla de tres porque son proporciones”.

Explicación: El estudiante plantea una regla de tres para ver qué cantidad de pan se puede hacer con 1 kg de trigo. A continuación plantea otra regla de tres para ver cuánto trigo se necesita para tener 1530 kg de pan. Utiliza siempre un esquema cuaternario. La solución que obtiene es incorrecta, porque la segunda regla de tres está mal planteada.

Análisis: El esquema de resolución del estudiante es cuaternario, el método de resolución es vectorial (la regla de tres), pero al aplicar por segunda vez el método reglado comete un error y multiplica 1530 por la fracción 51/50, en vez de dividir 1530 entre 51/50, por lo que obtiene una solución incorrecta. Las fracciones del enunciado las usa con el sentido de operadores. Por el planteamiento que hace, el sentido de uso es de proporción con valor unitario conocido. No incluye ninguna representación gráfica del problema.

- Alumna 16 (Jennifer)



8 Sabiendo que la cantidad de harina que se obtiene del trigo es los 17/20 de su peso, y la cantidad de pan obtenido de la harina es 6/5 del peso de ésta, ¿cuánto trigo se necesita para obtener 1530 kg de pan?.

Harina 17/20 % peso del trigo

$\frac{17 \cdot 100}{20} = 85$ Kg de harina

6/5 de 85 = $\frac{6 \cdot 85}{5} = 102$ Kg de pan

1530 - 102 = 1428

-Ya no se seguir.

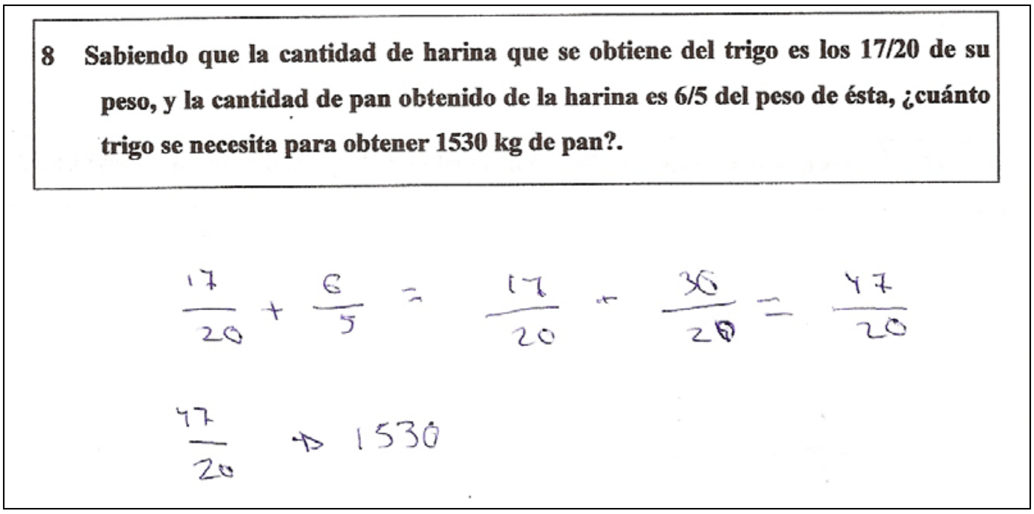
No se.

Trascripción: "Harina 17/20 peso del trigo $\rightarrow \frac{17 \cdot 100}{20} = 85\,\text{kg de harina}$; 6/5 de 85= $\frac{6 \cdot 85}{5} = 102$ kg de pan $\rightarrow$ 1530–102=1428. Ya no se seguir. No se".

Explicación: La estudiante supone una cantidad de 100 kg de trigo y calcula la cantidad de harina, hallando los 17/20 de 100. A continuación halla los 6/5 del resultado (85) para obtener la cantidad de pan. Después resta 1530 menos 102, en un intento por hallar la cantidad de pan. Pero no termina el problema.

Análisis: El enfoque de resolución de la estudiante es aditivo, mediante la resta. En vez de empezar el problema por atrás, parte de una cantidad fijada por ella misma (en este caso 100 kg de trigo) y utiliza las fracciones como operadores hasta obtener la cantidad de pan. No incluye ninguna representación gráfica del problema.

- Alumna 17 (Laura A)


8 **Sabiendo que la cantidad de harina que se obtiene del trigo es los 17/20 de su peso, y la cantidad de pan obtenido de la harina es 6/5 del peso de ésta, ¿cuánto trigo se necesita para obtener 1530 kg de pan?.**

$\frac{17}{20} + \frac{6}{5} = \frac{17}{20} + \frac{30}{20} = \frac{47}{20}$

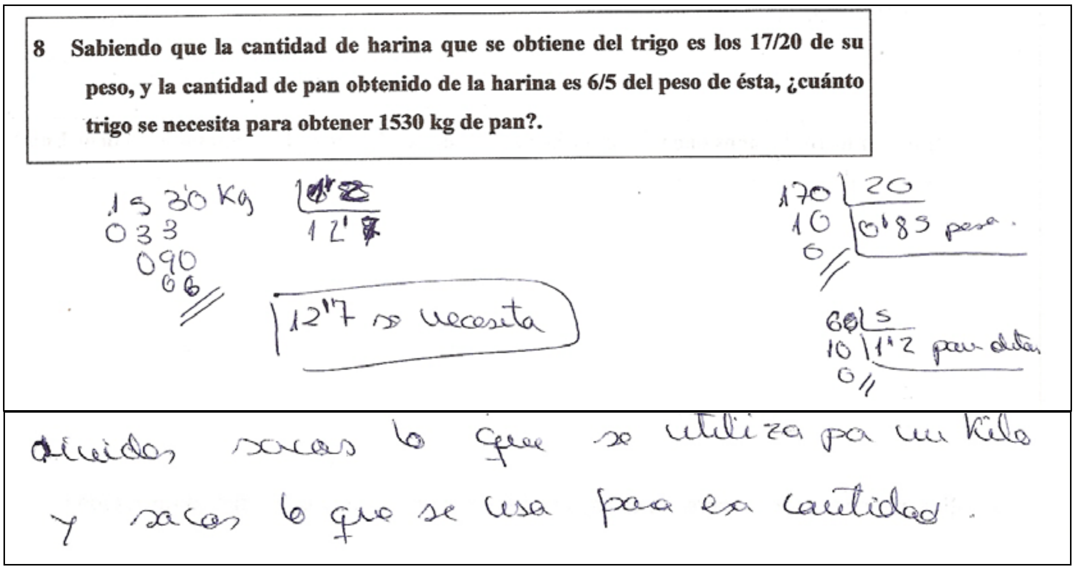
$\frac{47}{20} \to 1530$

Trascripción: "$\frac{17}{20} + \frac{6}{5} = \frac{14}{20} + \frac{30}{20} = \frac{47}{20} \to \frac{47}{20} \to 1530$".

Explicación: La estudiante suma las fracciones que aparecen en el enunciado, en el mismo orden. Comete un error de cálculo y obtiene un resultado incorrecto. No concluye el problema.

Análisis: La estudiante enfoca el problema desde un punto de vista aditivo, de forma incorrecta, ya que comete un error de cálculo. No incluye ninguna representación gráfica del problema.

- Alumna 21 (Estefanía)


8 **Sabiendo que la cantidad de harina que se obtiene del trigo es los 17/20 de su peso, y la cantidad de pan obtenido de la harina es 6/5 del peso de ésta, ¿cuánto trigo se necesita para obtener 1530 kg de pan?.**

12'7 se necesita

0'85 peso

1'2 pan dato

divides sacas lo que se utiliza pa un kilo y sacas lo que se usa para esa cantidad.

Trascripción: Efectúa las divisiones 17/20=0,85 y 6/5=1,2 para obtener la expresión decimal de las fracciones del enunciado. A continuación, divide 1530 entre 1,2 (=6/5) y escribe como solución "12,7 se necesita". "Divides, sacas lo que se utiliza pa un kilo y sacas lo que se usa para esa cantidad".

Explicación: La estudiante transforma las fracciones en decimales. Empieza el problema por el final, calculando la cantidad de harina necesaria para hacer 1530 kilos de pan. Para ello divide directamente 1530 entre 1,2 (=6/5) obteniendo un resultado incorrecto (12,7 kg de harina), pero no continua el problema, es decir, no halla la cantidad de trigo necesaria para obtener esa cantidad de harina. Utiliza el algoritmo de caja para hacer las divisiones de forma manual. Respuesta incorrecta.

Análisis: La estudiante usa un esquema ternario y un método de división directa, aunque solamente resuelve una parte del problema, para la que obtiene además una solución incorrecta, debido a un error de cálculo en la división. Considera las fracciones que aparecen en el enunciado como divisiones que dan resultado decimal y usa los decimales en el razonamiento. El sentido de uso es de medida, pero en su explicación se observa que aplica un algoritmo de reducción a la unidad ("sacas lo que se utiliza pa un kilo"). No incluye ninguna representación gráfica del problema.

6.2.3 Las formas textuales y los modelos semánticos de los estudiantes

En este apartado se describen las formas textuales que utilizan los estudiantes en las respuestas a las tareas del cuestionario y se asocian dichas formas textuales con los modelos semánticos correspondientes, los cuales se señalan entre paréntesis a continuación de cada forma textual. Para hacer explícitas estas formas textuales se pidió a los estudiantes que indicaran qué operación u operaciones había que hacer para resolver el problema y por qué. Los resultados para cada una de las tareas se muestran a continuación separando las que corresponden a las respuestas correctas y a las no correctas, y se analizan en el capítulo 7 del presente informe.

6.2.3.1 Tarea 1: "Las dos cintas"

Formas textuales en las respuestas correctas:

Alumna 3 (Ana).- "He utilizado la división de fracciones porque así se puede averiguar el número de veces" (Medida).

Alumna 4 (Miriam).- "He multiplicado un nº X por la cuerda B y lo he igualado a la cuerda A par que midan lo mismo. Hay que averiguar X para saber cuánto es más larga y para eso se divide la longitud de A entre la de B" (Medida).

Alumno 6 (Juan).- "Hay que dividir A entre B para averiguar cuántas cintas B se necesitan para tener una A" (Medida).

Alumno 8 (Christian).- “Division porque te pide cuantas veces A es más grande que B” (Inversión del factor multiplicativo).

Ana María.- “Division porque el resultado es otra fracción (21/10=2’1) que contiene a la unidad tantas veces como 3/5 contiene a 2/7” (proporción de valor unitario desconocido).

Formas textuales en las respuestas no correctas:

Alumna 2 (Cristina).- “Hay que hacer una resta porque para hayar la diferencia entre las dos se hacen las restas. Se saca el mínimo común múltiplo porque no tienen las dos fracciones el mismo denominador y por eso no se pueden restar” (Resta).

Alumna 7 (Casandra).- “Hay que dividir porque así sale cuantas cintas hay” (Medida).

Alumno 10 (Vicent).- “Y si no se mide con la regla” (Resta).

Alumno 11 (Fco. Javier).- “Hay que hacer el mínimo común múltiplo, para tener el mismo denominador y poder compararlas” (Resta).

Alumno 15 (Héctor).- “Resta y mcm porque restamos la longitud de una para saber lo que se llevan” (Resta).

Alumna 16 (Jennifer).- “He quitado las fracciones para ver (con numeros naturales) lo que se llevan “(Resta).

Alumna 18 (Patri).- “Lo primero que se hace es la operación es decir poner: $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{7} = \frac{6}{35}$.

$\frac{6}{35}$ será la cinta A mas larga que la B” (Multiplicación).

Alumna 18 (Laura B).- “Pues porque creo que hay que sacar el mínimo común múltiplo” (compara fracciones).

Alumna 21 (Estefanía).- “Hay que averiguar la diferencia que hay entre las dos. Se dividen los metros de una y los metros de la otra, lo restas y obtienes el resultado” (Resta).

6.2.3.2 Tarea 2: “Peso de la torta”

Formas textuales en las respuestas correctas:

Alumna 2 (Cristina).- “Porque para saber cuanto es la otra parte de algo o en este caso el peso, si sabemos cuanto pesa una porción hay que hacer una regla de 3” (proporción de valor unitario conocido).

Alumna 5 (Ángela).- Hacer regla de tres, si 3/7 pesan 2/9 kilos, la torta entera pesará X. Multiplicacion y división" (proporción de valor unitario desconocido).

Alumno 6 (Juan).- Hay que dividir lo que pesa ese trozo de torta entre la fracción que representa ese trozo de torta de la entera" (proporción de valor unitario desconocido).

Alumna 7 (Casandra).- Multiplicación porque si una pesa 2/9 kg tienen que averiguar cuanto hay en 3/7, tienes que saber en total haciendo una tabla" (proporción de valor unitario conocido).

Alumno 8 (Christian).- "Regla de tres porque es proporcional" (proporción de valor unitario desconocido).

Formas textuales en las respuestas no correctas:

Alumna 3 (Ana).- He hecho la suma de fracciones, después para realizarla, he empleado el mínimo común múltiplo para poder hacer la suma"(Aditiva).

Alumna 4 (Miriam).- He hecho una regla de tres para averiguar cuánto pesa la torta, porque si 3/7 son 2/9 kg, haciendo una regla de tres averiguas cuanto son 7/7 y se hace multiplicando 7/7·2/9 y dividiendo entre 3/7" (proporción de valor unitario desconocido).

Alumno 15 (Héctor).- Multiplicación porque se juntan las dos cantidades" (Aditivo).

Alumna 17 (Laura A).- Sumas las dos cantidades y como tienen distinto denominador se haya el comun y se suman" (Aditiva).

Alumna 18 (Patri).- "Se suma las dos cantidades y luego se resuelve" (Aditiva).

Alumna 21 (Estefanía).- "Divides y averiguas lo que pesa una parte y lo multiplicas por 7 partes que tiene la torta entera" (Inversión del factor multiplicativo).

6.2.3.3 Tarea 3: "La mesa de Ana"

Formas textuales en las respuestas correctas:

Alumna 2 (Cristina).- Porque se todo menos lo que mide su base, por eso tengo que aislarla" (Inversión de la multiplicación o factor perdido).

Alumna 4 (Miriam).- He usado la fórmula de base por altura igual al area y he substituido los valores, el área y la altura y he averiguado la base dividiendo 2/3 entre 5/7" (Inversión de la multiplicación o factor perdido).

Alumna 5 (Ángela).- El área del rectángulo es base por altura, por lo tanto si dividimos el área entre los metros de un lado, el resultado será la medida del otro lado" (Inversión de la multiplicación o factor perdido).

Alumno 6 (Juan).- Hay que dividir el area entre el lado. Porque para averiguar el area hay que multiplicar la base por la altura" (Inversión de la multiplicación o factor perdido).

Alumna 7 (Casandra).- Dividir porque la superficie es multiplicar la base por la altura. Pues para averiguar un lado, sabiendo la superficie y el otro lado tienes que multiplicar" (Inversión de la multiplicación o factor perdido).

Alumno 8 (Christian).- "A=b·h; 5/7 es la altura; 2/3 es el área" (Inversión de la multiplicación o factor perdido).

Formas textuales en las respuestas no correctas:

Alumna 3 (Ana).- He hecho el área del rectángulo como tenia la altura y el area he despejado la base y he averiguado cuánto mide el otro lado" (Inversión de la multiplicación o factor perdido).

Alumno 10 (Vicent).- "No sé que lado me pides; si es el de enfrente, son 5/7; el del al lao no lo sé" (¿?).

Alumno 11 (Fco. Javier).- "Mide también 5/7 al ser todos los lados iguales, miden todos lo mismo" (¿?).

Alumno 15 (Héctor).- (resta las fracciones, sin incluir explicación alguna. Respuesta aditiva).

Alumna 16 (Jennifer).- "El otro lado es igual por que al ser un rectángulo es igual que su opuesto" (¿?).

Alumna 17 (Laura A)- "Superficie $=\frac{2}{3}$, $L_1=\frac{5}{7}$; $L_2=\frac{5}{7}$" (¿?).

Alumno 20 (Jesús).- 2ª parte A=b·al; $0'\overline{6}=0'71\cdot X$; $\frac{3}{5}=3:5=0'6$; X=0'71:0'$\overline{6}=1'18$; 1'18 mide el lado" (Inversión de la multiplicación o factor perdido).

Alumna 21 (Estefanía).- "$\frac{2}{3}=\frac{5}{7}\cdot X$; $\frac{2}{3}=\frac{5\cdot X}{7}$ (Inversión de la multiplicación o factor perdido).

6.2.3.4 Tarea 4: "Ecuación"

Formas textuales en las respuestas correctas:

Alumna 2 (Cristina).- Por lo mismo que antes, porque para hayar el valor de la X tengo que aislarla" (Inversión de la multiplicación o factor perdido).

Alumna 4 (Miriam).- Para averiguarlo he despejado la X en un lado y en el otro he dividido 3/4 entre 5/6 porque 5/6 pasa al otro lado dividiendo y así he averiguado X" (Inversión de la multiplicación o factor perdido).

Alumna 5 (Ángela).- Si la fracción 5/6 está multiplicando a la X, y despejamos la X, la fracción pasa a dividir a la otra" (Inversión de la multiplicación o factor perdido).

Alumno 6 (Juan).- Hay que dividir $\frac{3}{4}$ entre $\frac{5}{6}$ porque al dejar la X sola se queda esa operación, ya que el 5/6 estaba multiplicando" (Inversión de la multiplicación o factor perdido).

Alumno 8 (Christian).- Ecuación de primer grado. Despejar la incógnita" (Inversión de la multiplicación o factor perdido).

Alumna 9 (Ana María).- Hay que hacer una ecuación, pero en este caso con fracciones porque pide despejar la "X"" (Inversión de la multiplicación o factor perdido).

Alumna 13 (Carmen).- Hay que pasar 5/6 al otro lado para despejar la X, y 5/6 se divide entre 3/4. y 5/6, 3/4 se divide, y se multiplican en cruz" (Inversión de la multiplicación o factor perdido).

Alumno 15 (Héctor).- División porque es lo contrario que lo que multiplica la incógnita" (Inversión de la multiplicación o factor perdido).

Formas textuales en las respuestas no correctas:

Alumno 1 (Rubén).- He hecho la operación de multiplicar porque a la hora de despejar la X, el 3/4 pasa multiplicando" (Inversión de la multiplicación o factor perdido).

Alumna 3 (Ana).- He sustituido X por 3/4 y así he hallado el valor de X" (Inversión de la multiplicación o factor perdido).

Alumna 7 (Casandra).- División porque al multiplicar una cosa, el resultado es la división con el primero". (Inversión de la multiplicación o factor perdido).

Alumno 10 (Vicent).- $X = \frac{5}{6} + \frac{3}{4}$; $X = \frac{1}{2}$. " (Aditivo).

Alumno 11 (Fco. Javier).- Es una ecuación en la que hay que despejar la X". (Inversión de la multiplicación o factor perdido).

Alumna 16 (Jennifer).- He pasado 5/6 al otro lado del igual, dividiendo por que al pasar hay que poner la operación contraria. Luego he dividido las dos fracciones, y ya tenemos el resultado" (Inversión de la multiplicación o factor perdido).

Alumna 21 (Estefanía).- Azes una ecuación de 1 grado" (Inversión de la multiplicación o factor perdido).

6.2.3.5 Tarea 5: “Tarro de miel”

Formas textuales en las respuestas correctas:

Alumna 4 (Miriam).- Una regla de tres, despejando X y dividiendo 3/8·3/5 entre 8/8 y así sale X” (proporción de valor unitario conocido).

Alumna 5 (Ángela).- Regla de tres, multiplicación y luego división ” (proporción de valor unitario conocido).

Alumno 6 (Juan).- Hay que multiplicar la miel que cabe en el tarro lleno por la fracción que está llena” (Medida).

Alumna 7 (Casandra).- Multiplicación porque si en 1 caven 3/5, para saber el otro otro tienes que multiplicar” (sin embargo, escribe una regla de tres→proporción de valor unitario conocido).

Alumno 8 (Christian).- Regla de tres porque son proporciones” (proporción de valor unitario conocido).

Alumna 9 (Ana María).- No se explicarlo” (hace una regla de tres → proporción de valor unitario conocido).

Formas textuales en las respuestas no correctas:

Alumno 1 (Rubén).- “Restar” (Resta).

Alumna 2 (Cristina).- “Nose explicarte porque” (hace una regla de tres→proporción de valor unitario conocido).

Alumna 3 (Ana).- “Nose porque lo he hecho no tiene sentido pero lo he intentado” (Resta).

Alumno 10 (Vicent).- “No pueden caber 3/8 porque el máximo es 3/5 ” (Comparación).

Alumno 11 (Fco. Javier).- “Hay que hacer el Mínimo Común múltiplo y después restar para averiguar qué cantidad hay en el tarro” (Resta).

Alumno 15 (Héctor).- “No se hacerlo” (Dibuja un diagrama e intenta una comparación aditiva).

Alumna 16 (Jennifer).- “Es lo que queda para llenar el tarro” (Resta).

Alumna 18 (Patri).- “No pueden caber 3/5 ya que el máximo es 3/8 partes. Entonces no se puede hacer la operacion” (Comparación).

Alumna 19 (Laura B).- “...9/40 faltan para llenarlo. Supongo que se haría así” (Resta).

Alumna 21 (Estefanía).- “Averiguas cuántos kg hay en una parte y la multiplicas en 3 partes que hay” (¿?).

6.2.3.6 Tarea 6: “Edades”

Formas textuales en las respuestas correctas:

Alumno 6 (Juan).- Hay que dividir la edad de Julio entre la fracción que forma de la edad de Luis” (Inversión de la multiplicación o factor perdido).

Alumna 7 (Casandra).- División para despejar la X” (Inversión de la multiplicación o factor perdido).

Alumno 8 (Christian).- Ecuación de primer grado” (Inversión de la multiplicación o factor perdido).

Formas textuales en las respuestas no correctas:

Alumna 2 (Cristina).- $15'5-\frac{3}{5}=14'5$ años tiene Luis (Aditiva).

Alumna 4 (Miriam).- He hecho una regla de tres, despejando X y multiplicando $15\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{5}$ y dividiendo entre 3/5 y sale X ” (proporción de valor unitario desconocido).

Alumna 5 (Ángela).- Multiplicación de 15/2 x 3 y luego dividirlo entre 5” (Multiplicación).

Alumna 9 (Ana María).- Hay que hacer unas ecuaciones e igualarlas. Porque siempre que te dan dos datos con incógnita se hace así” (Inversión de la multiplicación o factor perdido).

Alumna 17 (Laura A).- “$15+\frac{3}{5}=X\rightarrow X=\frac{75}{5}+\frac{3}{5}=\frac{78}{5}$ ” (Aditiva).

6.2.3.7 Tarea 7: “Porción de torta”

Formas textuales en las respuestas correctas:

Alumna 2 (Cristina).- “Porque si se cuanto pesa 1 torta, para calcular cuantas tortas pesan 2/9. hay que hace una regla de tres” (Proporción de valor unitario conocido).

Alumna 3 (Ana).- “He hecho una regla de tres” (Proporción de valor unitario conocido).

Alumna 4 (Miriam).- “He hecho una regla de tres, despejando X y multiplicando 2/9 por 1 y dividiendo el resultado entre 3/7” (Proporción de valor unitario conocido).

Alumna 5 (Ángela).- “Regla de tres: multiplicación y división” (Proporción de valor unitario conocido).

Alumno 6 (Juan).- “Hay que dividir los quilos que tiene entre los que pesa una entera” (Medida).

Alumna 7 (Casandra).- "División porque tienes que averiguar qué porción por lo tanto divides la tarta" (Medida, aunque plantea una regla de tres, lo que implicaría que usa un modelo de proporción de valor unitario conocido).
Alumno 8 (Christian).- "Regla de tres porque son proporciones" (Proporción de valor unitario conocido).

Formas textuales en las respuestas no correctas:
Alumna 9 (Ana María).- "Regla de 3" (Proporción de valor unitario conocido).
Alumno 15 (Héctor).- "resta y mcm" (Resta).
Alumna 21 (Estefanía).- "Divides lo que tendra entero un bote por la parte que pida" (Medida).

6.2.3.8 Tarea 8: "Trigo"

Formas textuales en las respuestas correctas:
Alumno 6 (Juan).- "Primero hay que dividir la cantidad que se quiere entre la harina que se necesita para conseguirlo y el resultado entre la porción de trigo que necesites" (Inversión de la multiplicación-factor perdido).

Formas textuales en las respuestas no correctas:
Alumna 7 (Casandra).- "Suma para saber cuánto necesitas" (Suma).
Alumno 8 (Christian).- "Regla de tres porque son proporciones" (Proporción de valor unitario conocido).
Alumno 15 (Héctor).- "Lógica y resta" (Resta).
Alumna 21 (Estefanía).- "Divides, sacas lo que se utiliza pa un kilo y sacas lo que se usa para esa cantidad" (Reducción a la unidad).

CAPÍTULO 7

Resultados y conclusiones del análisis de respuestas

En este capítulo se describen los resultados y conclusiones que se derivan del análisis de respuestas a las tareas del cuestionario. En la primera parte se describen los resultados, en la segunda parte, las conclusiones y, finalmente, se incluye un apartado de implicaciones para la enseñanza.

7.1. RESULTADOS

A continuación se describen los resultados obtenidos en el análisis de respuestas, comparándolos con los obtenidos en el análisis de las tareas realizado en el capítulo 5.

7.1.1. Las formas textuales de los modelos semánticos de la división de fracciones

Teniendo en cuenta los resultados mostrados en la Tabla 6.1 del capítulo 6, las dos formas textuales de los modelos semánticos de la división de fracciones más frecuentes para los estudiantes que participan en el estudio son:

Forma (d) "hacer tantas veces menor como indica el numerador del divisor y tantas veces mayor como indica el denominador del divisor", lo que corresponde al modelo semántico "inversión del factor multiplicativo".

Forma (a) "repartir la fracción dividendo en un número fraccionario de partes iguales", que corresponde al modelo semántico "partición".

A continuación de las formas predominantes (d) y (a), aparecen las dos siguientes:

Forma (f) "hallar una fracción que multiplicada por el divisor da el dividendo", que corresponde al modelo semántico "inversión de la multiplicación (factor perdido), forma aritmética".

Forma (b) "averiguar cuántas veces cabe la fracción divisor en el fracción dividendo", que corresponde al modelo semántico "medida".

En la Tabla 7.1 se muestran las puntuaciones otorgadas por el conjunto de los estudiantes que participaron en el estudio a cada una de las formas textuales, en una escala normalizada entre 0 y 1, que servirá para compararlas. Esta tabla se ha obtenido a partir de la Tabla 6.1 del capítulo 6, dividiendo la puntuación correspondiente a cada forma textual entre la suma de todas las puntuaciones (68 + 84 + 100 + 62 + 99 + 82 + 104 + 119 = 718). Por ejemplo, para la forma (a), el resultado que muestra la tabla es 68 / 718 = 0,095.

Orden	código	forma textual	modelo semántico	Escala 0 – 1
1	d)	hacer tantas veces menor como indica el numerador del divisor y tantas veces mayor como indica el denominador del divisor	Inversión del factor multiplicativo	0,086
2	a)	repartir la fracción dividendo en un número fraccionario de partes iguales.	Partición	0,095
3	f)	hallar una fracción que multiplicada por el divisor da el dividendo	Inversión de multiplicación F. aritmética (factor perdido)	0,114
4	b)	averiguar cuántas veces cabe una fracción en otra	medida	0,117
5	e)	hallar otra fracción, tal que el dividendo se compone de ella del mismo modo que el divisor se compone de la unidad $\frac{D}{c} = \frac{d}{1}$	Proporción de valor unitario conocido	0,138
6	c)	hallar otra fracción que contiene a la unidad tantas veces como el dividendo contiene al divisor $\frac{D}{d} = \frac{c}{1}$	Proporción de valor unitario desconocido	0,139
7	g)	multiplicar la fracción dividendo por la fracción recíproca del divisor	Inversión de multiplicación	0,145
8	h)	multiplicar la fracción dividendo por la inversa de la fracción divisor	Inversión de multiplicación	0,166

TABLA 7.1. Ordenación de las formas textuales por puntuaciones en una escala 0 – 1

Al ser la puntuación decreciente por orden de preferencia, la forma textual con menor puntuación es la de mayor preferencia; en este caso, la (d) “hacer tantas veces menor y tantas veces mayor...”, que corresponde al modelo semántico de inversión del factor multiplicativo.

Se observa que las formas textuales (e), (c), (g) y (h) son poco significativas, ya que sus puntuaciones toman los valores más altos en la escala. Por ello, se considera que las formas textuales más significativas son las cuatro primeras, (d), (a), (f) y (b); de ellas, la (d) y la (a) son las predominantes, con una puntuación similar en torno a 0,09, mientras que las (f) y (b) quedan en un segundo plano, con 0,11 puntos.

Hay que destacar como significativo el hecho de que la forma textual (a) sea de las predominantes, puesto que la partición o reparto en un número fraccionario de partes iguales no es posible.

Si se observa solamente la forma textual que los estudiantes ponen en primer lugar, es decir, la que valoran con 1 punto, que se supone es la que prefieren, y por tanto, la predominante, las frecuencias absolutas obtenidas en la muestra son las que se señalan en la Tabla 7.2.

Forma textual	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**
Total muestra	**6**	**3**	**1**	**6**	**1**	**6**	**3**	**1**

TABLA 7.2. Número de veces que aparecen cada una de las formas textuales en el primer lugar de preferencia

De forma que los modelos semánticos que ahora aparecen como predominantes son: (a) partición, (d) inversión del factor multiplicativo y (f) inversión de la multiplicación (factor perdido) en su forma aritmética.

Si se observan las formas textuales que los estudiantes sitúan en los dos primeros lugares, es decir, las que puntúan con 1 ó 2 puntos, que se supone que son las dos que prefieren, y por tanto, las dos predominantes, las frecuencias absolutas en la muestra son las señaladas en la Tabla 7.3.

Forma textual	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**
Total muestra	**10**	**7**	**3**	**11**	**3**	**7**	**4**	**3**

TABLA 7.3. Número de veces que aparecen cada una de las formas textuales en el primer o segundo lugar de preferencia

Ahora los modelos predominantes son: (d) inversión del factor multiplicativo, (a) partición, (b) medida y (f) inversión de la multiplicación (factor perdido) forma aritmética, por ese orden.

Si se observan las formas textuales que los estudiantes sitúan en los tres primeros lugares, es decir, con puntuaciones 1, 2 o 3, se obtienen los resultados indicados en la Tabla 7.4.

Forma textual	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**
Total muestra	**14**	**10**	**5**	**14**	**6**	**10**	**6**	**4**

TABLA 7.4. Número de veces que aparecen cada una de las formas textuales en el primer, segundo o tercer lugar de preferencia

De nuevo los modelos predominantes son: (a) partición, (d) inversión del factor multiplicativo, (b) medida y (f) forma aritmética de la inversión de la multiplicación (factor perdido), lo que confirma que son esos cuatro los dominantes en la muestra, con un predominio claro de la partición (a) y la inversión del factor multiplicativo (d).

En la Tabla 7.5 se muestra el gran paralelismo existente entre las formas textuales que corresponden a la división de naturales y las que corresponde a la división de fracciones, lo que posiblemente es causa de que estas cuatro formas textuales (d), (a), (f) y (b) sean mayoritariamente reconocidas por los estudiantes que participaron en el estudio, a diferencia de las restantes.

código	**modelo semántico**	**División de naturales**	**División de fracciones**
d	Inversión del factor multiplicativo	hacer el dividendo tantas veces menor como indica el divisor	hacer el dividendo tantas veces menor como indica el numerador del divisor y tantas veces mayor como indica el denominador del divisor
a	partición	repartir en partes iguales	repartir la fracción dividendo en un número fraccionario de partes iguales
f	Inversión de la multiplicación (factor perdido) forma aritmética	hallar un número entero que multiplicado por el divisor da el dividendo	hallar una fracción que multiplicada por el divisor da el dividendo
b	medida	averiguar cuántas veces cabe el divisor en el dividendo	averiguar cuántas veces cabe una fracción en otra

TABLA 7.5. Formas textuales más usuales de la división de naturales y de la división de fracciones

Obsérvese cómo los estudiantes están extendiendo sus ideas de división de números naturales al caso de la división de fracciones sin pensar, ya que no tiene sentido la división partición con fracciones, puesto que no se puede repartir entre un número fraccionario de receptores.

7.1.2. Relación entre los enfoques de resolución y la estructura de los problemas

A continuación vamos a analizar los enfoques de resolución que aplican los estudiantes del estudio teniendo en cuenta la estructura de los problemas. Los enfoques de resolución están definidos por las posibles rutas dadas por las ternas (esquema de resolución, método de resolución, algoritmo), tal como se señaló en el apartado 5.4 del capítulo 5, pero, por ser más compleja la detección de los algoritmos de división de fracciones usados por los estudiantes, solamente se consideran en el estudio las dos primeras componentes (esquema y método de resolución).

7.1.2.1 Esquema de resolución y estructura de los problemas.

En la Tabla 7.6 se indica la relación entre la estructura de los problemas y el esquema de resolución, cuaternario o ternario, que usan los estudiantes que participaron en el estudio cuando abordan las tareas del cuestionario. Para mostrar dicha relación se indica, para cada estructura, la tarea del cuestionario correspondiente, con el esquema de resolución más frecuente, con indicación de cuál es la frecuencia.

Estructura / Esquema	1 EM			2 EM				3 EM
	EMI	FME	CM	IM			PM	
				VUD	VUC	M		
Cuaternario				T2 6/21	T7 7/21	T5 7/21		
Ternario	T4 14/21	T1 10/21	T6 5/21				T3 9/21	T8 2/21

TABLA 7.6. Esquemas de resolución para cada estructura

SIGNIFICADO DE LAS SIGLAS
T1 a T8: Tareas 1 a 8
EM = Espacios de Medida
FME = Factor multiplicativo escalar
CM = Cálculo de una medida
EMI = Escalar y medida indiferenciables
IM = Isomorfismo de medidas
PM = Producto de medidas
VUD = Valor unitario desconocido
VUC = Valor unitario conocido
M = Multiplicación

Se observa en la tabla que en el caso de un solo espacio de medida, tareas T4, T1 y T6, el esquema más frecuente es ternario, con frecuencias 14/21, 10/21 y 5/21, respectivamente.

En el caso del isomorfismo de medidas, tareas T2, T7 y T5, el esquema más frecuente es cuaternario, con frecuencias 6/21, 7/21 y 7/21, respectivamente.

En el caso del producto de medidas, tarea T3, el esquema más frecuente es ternario, con frecuencia 9/21. Y en el caso de 3 espacios de medida, tarea 8, la incidencia de respuestas es muy escasa y poco significativa, pero el esquema de resolución de los estudiantes que contestan es ternario.

A la vista de la tabla se concluye que el esquema cuaternario es mayoritario en aquellos problemas que corresponden al isomorfismo de medidas, mientras que en el resto de estructuras, el esquema mayoritario es ternario.

7.1.2.2 Método de resolución y estructura de los problemas.

En la Tabla 7.7 se muestra la relación entre la estructura de los problemas y los métodos de resolución más frecuentes en las respuestas correctas de los estudiantes a las tareas del cuestionario.

Estructura / Método	1 EM			2 EM				3 EM
	EMI	FME	CM	IM			PM	
				VUD	VUC	M		
DD		T1 9/21	T6 2/21					T8 2/21
RT				T2 5/21	T7 7/21	T5 6/21		
E	T4 11/21		T6 3/21				T3 7/21	

TABLA 7.7. Métodos de resolución y estructura de los problemas en las respuestas correctas (DD=división directa; RT=regla de tres; E=planteamiento y resolución de una ecuación)

Se observa en la tabla que en el caso de un solo espacio de medida, tareas T4, T1 y T6, los métodos más frecuentes son: planteamiento y resolución de una ecuación (11/21 + 3/21) y división directa (9/21+2/21).

En el caso del isomorfismo de medidas, tareas T2, T7 y T5, el método más frecuente es funcional de regla de tres, con frecuencias 5/21, 7/21 y 6/21, respectivamente.

En el caso del producto de medidas, tarea T3, el método más frecuente es planteamiento y resolución de una ecuación, con frecuencia 7/21. Y en el caso de 3 espacios de medida, tarea 8, la incidencia de respuestas es muy escasa y poco significativa, pero el método de resolución de los estudiantes que contestan es división directa.

A la vista de la tabla se concluye que el método funcional de regla de tres es mayoritario en aquellos problemas que corresponden al isomorfismo de medidas, mientras que en el resto de estructuras, los métodos de resolución mayoritarios son división directa y planteamiento y resolución de una ecuación.

Se observa, en el caso de respuestas correctas, un cierto equilibrio entre la estructura y el método de resolución de los problemas, ya que solamente aparecen tres métodos, división directa, regla de tres y ecuación, que se distribuyen de la siguiente manera:

Método de resolución	Estructura
División directa	• Un espacio de medida, FME y CM • Tres espacios de medida.
Regla de tres	• Dos espacios de medida, IM
Ecuación	• Un espacio de medida, EMI y CM • Dos espacios de medida, PM

En la Tabla 7.8 se muestra la relación entre la estructura de los problemas y los métodos de resolución más frecuentes en las respuestas no correctas de los estudiantes a las tareas del cuestionario.

Estructura	1 EM			2 EM				3 EM
	EMI	FME	CM	IM			PM	
Método				VUD	VUC	M		
DD					T7			T8
RT			T6		T7			T8
E	T4		T6				T3	
M			T6		T7			
A		T1	T6	T2	T7	T5		T8
D					T7			

TABLA 7.8. Métodos de resolución y estructura de los problemas en las respuestas no correctas

SIGNIFICADO DE LAS SIGLAS

DD = División directa

RT = Regla de tres

E = Ecuación

M = Multiplicación

A = Enfoque aditivo

D = Dibujo de un diagrama

En el caso de respuestas incorrectas se observa un desplazamiento hacia los tres últimos métodos, multiplicación, aditivo y dibujo de un diagrama, además de que la distribución de respuestas presenta mayor dispersión. Hay una incidencia alta de métodos aditivos y una menor presencia del método de división directa.

7.1.3 Relación entre los métodos de resolución y los modelos semánticos

En este apartado se analiza qué métodos de resolución usan los estudiantes en relación con cada uno de los modelos semánticos citados. Según el análisis de las tareas del cuestionario (capitulo 5), a priori, los modelos semánticos presentes en los problemas propuestos son: medida (tareas 1 y 5), proporción de valor unitario desconocido (tarea 2), proporción de valor unitario conocido (tareas 7 y 8) e inversión de la multiplicación o factor perdido (tareas 3, 4 y 6).

En la Tabla 7.9 se indica el método de resolución más frecuente para respuestas correctas y no correctas en cada una de las tareas del cuestionario:

	Respuestas correctas	Respuestas no correctas
Tarea 1	División directa (9/21)	Aditiva (8/21)
Tarea 2	Regla de tres (5/21)	Aditivo (4/21)
Tarea 3	Ecuación (4/6)	Ecuación (3/8)
Tarea 4	Ecuación (7/8)	Ecuación (5)
Tarea 5	Regla de tres (6/21)	Aditiva (8/21)
Tarea 6	Ecuación (2/4) División directa (2/4)	Aditiva (3/9)
Tarea 7	Regla de tres (7/21)	Aditiva (2/21)
Tarea 8	División directa (2/21)	Aditiva (4/21)

TABLA 7.9. Métodos de resolución más frecuentes en las tareas del cuestionario

7.1.3.1 Métodos de resolución en las tareas de medida

En la Tabla 7.9 se ve que en las respuestas correctas a las tareas de medida, tareas 1 y 5, aparecen los métodos de división directa y de regla de tres, mientras que en las respuestas no correctas aparece con mayor frecuencia el método aditivo.

Se observan diferencias entre las tareas 1 y 5. La primera es vista mayoritariamente por los estudiantes como de división directa, mientras que la 5 es vista como de regla de tres. Este hecho se explica por la diferente estructura de los problemas: la tarea 1 es de un solo espacio de medida, la tarea 5 corresponde a un isomorfismo de medidas.

7.1.3.2 Métodos de resolución en las tareas de proporción con valor unitario desconocido

En la Tabla 7.9 se observa que el método de resolución más frecuente en las respuestas correctas a la tarea 2 del cuestionario, que corresponde al modelo de proporción con valor unitario desconocido, es el funcional o regla de tres y en las no correctas es el aditivo.

7.1.3.3 Métodos de resolución en las tareas de proporción con valor unitario conocido

En la Tabla 7.9 se observa que el método de resolución más frecuente en las respuestas correctas a las tareas 7 y 8 del cuestionario, que corresponden al modelo semántico de proporción con valor unitario conocido, es la regla de tres y en las no correctas hay una variedad de métodos, siendo el más frecuente el aditivo.

A pesar de corresponder al mismo modelo semántico, hay diferencias importantes entre las dos tareas, debido a que son de distinta estructura. Así, mientras la mayoría de respuestas correctas en la tarea 7, que es de isomorfismo de medidas, utilizan el método de regla de tres, no ocurre lo mismo en la tarea 8, que resultó de gran dificultad para los estudiantes, ya que consta de más de una etapa, y tiene una estructura diferente al isomorfismo de medidas.

7.1.3.4 Métodos de resolución en las tareas de inversión de la multiplicación (factor perdido)

En la Tabla 7.9 se indican los métodos de resolución más frecuentes para respuestas correctas y no correctas en cada una de las tareas del cuestionario que responden a este modelo (tareas 3, 4 y 6):

Se observa que en las respuestas correctas aparecen los métodos de Ecuación y División directa, con un predominio claro del método de Ecuación, que también es mayoritario en las repuestas no correctas. Podemos concluir, pues, que para este modelo de inversión de la multiplicación o factor perdido, predomina el método de Ecuación.

Tabla resumen

La Tabla 7.10 resume la relación entre métodos de resolución y los modelos semánticos. Esta relación está confirmada por los datos del estudio.

Modelo semántico	Métodos de resolución predominantes
Medida	División directa Regla de tres ([1])
Proporción con valor unitario desconocido	Regla de tres
Proporción con valor unitario conocido	Regla de tres
Inversión de la multiplicación o factor perdido	Ecuación

TABLA 7.10. Métodos de resolución predominantes en los modelos semánticos

7.1.4 Los modelos semánticos de los estudiantes y los modelos semánticos de los problemas

En este apartado analizaremos en qué medida hay coherencia entre las formas textuales que emplean los estudiantes en sus respuestas y el modelo semántico del problema.

Las formas textuales usadas por los estudiantes en las respuestas a estas tareas y los modelos semánticos correspondientes se describieron en el capítulo 6.

En la Tabla 7.11 se muestran los modelos semánticos que corresponden a las formas textuales que usan los estudiantes en las explicaciones que acompañan a las respuestas, correctas y no correctas, a cada una de las tareas del cuestionario.

7.1.4.1 Modelos semánticos de los estudiantes en las tareas de medida

En la tabla 7.11 se ve que, en las respuestas correctas, solo 3/21 estudiantes identifican el modelo de medida en la tarea 1 y 5/21 el modelo de proporción de valor unitario conocido en la tarea 5. Sin embargo, las formas textuales que usan los estudiantes responden también a otros modelos semánticos diferentes: inversión del factor multiplicativo y proporción de valor unitario desconocido. En las respuestas no correctas, sólo un estudiante localiza el modelo de medida en la tarea 1 y ninguno en la tarea 5, siendo el modelo aditivo de resta el que tiene más incidencia.

[1] Hay que tener en cuenta que el método de regla de tres en el modelo semántico de medida corresponde a la tarea 5, que es de control y es de multiplicación (en realidad, no es objeto de esta investigación, aunque si es interesante observar que una tarea de multiplicación se aborda con un método funcional de regla de tres.

	Respuestas correctas	Respuestas no correctas
Tarea 1	Medida (3/21) Inversión del factor multiplicativo (1/21) Proporción de valor unitario desconocido (1/21)	Resta (6/21) Medida (1/21) Multiplicación (1/21) Comparación (1/21)
Tarea 2	Proporción de valor unitario desconocido (3/21) Proporción de valor unitario conocido (2/21)	proporción de valor unitario desconocido (1/21) Aditiva (4/21) Inversión del factor multiplicativo (1/21)
Tarea 3	Inversión de la multiplicación o factor perdido (6/21)	Inversión de la multiplicación o factor perdido (3/21) Aditiva (1/21)
Tarea 4	Inversión de la multiplicación o factor perdido (8/21)	Inversión de la multiplicación o factor perdido (6/21) Aditivo (1/21)
Tarea 5	Proporción de valor unitario conocido (5/21)	Resta (6/21)
Tarea 6	Inversión de la multiplicación o factor perdido (3/21)	Inversión de la multiplicación o factor perdido (1/21) proporción de valor unitario desconocido (1/21) Multiplicación (1/21) Aditiva (2/21)
Tarea 7	Proporción de valor unitario conocido (6/21) Medida (1/21)	Proporción de valor unitario conocido (1/21) Medida (1/21) Resta (1/21)
Tarea 8	Inversión de la multiplicación o factor perdido (1/21)	Proporción de valor unitario conocido (1/21) Medida con reducción a la unidad (1/21) Suma (1/21) Resta (1/21)

TABLA 7.11. Modelos semánticos de los estudiantes en las tareas del cuestionario

7.1.4.2 Modelos semánticos de los estudiantes en las tareas de proporción de valor unitario desconocido

En las respuestas correctas a la tarea 2, que corresponde a este modelo, solo 3/21 estudiantes identifican la tarea con el modelo de proporción de valor unitario desconocido, pero hay dos casos donde el esquema utilizado corresponde a dicho modelo y, sin embargo, la forma textual corresponde al modelo de proporción de valor unitario conocido. En las respuestas no correctas, hay predominio de las formas textuales asociadas a modelos aditivos y solamente hay un caso en el que se usa un modelo de proporción de valor unitario desconocido y un solo caso corresponde al modelo de inversión del factor multiplicativo.

7.1.4.3 Modelos semánticos de los estudiantes en las tareas de proporción de valor unitario conocido

Las tareas del cuestionario que corresponden a este modelo son la 7 y la 8.

Se observa que en las respuestas correctas a la tarea 7, el modelo semántico más frecuente es Proporción de valor unitario conocido (6/21). La única respuesta correcta a la tarea 8 usa un modelo de inversión de la multiplicación o factor perdido. En las respuestas no correctas de ambas tareas (7 y 8) aparecen una variedad de modelos: proporción de valor unitario conocido, medida, modelos aditivos, todos ellos con escasa incidencia.

7.1.4.4 Modelos semánticos de los estudiantes en las tareas de proporción de inversión de la multiplicación o factor perdido

Las tareas 3, 4 y 6 del cuestionario corresponden a este modelo. Aunque se presentan otros modelos, se observa que, tanto en las respuestas correctas como no correctas, es más frecuente el modelo de inversión de la multiplicación o factor perdido.

Resumen

En la Tabla 7.11 se observa que, solamente en los casos de proporción con valor unitario conocido e inversión de la multiplicación (factor perdido), el modelo preferido por los estudiantes coincide con el modelo semántico del problema. En el caso de proporción con valor unitario desconocido hay coincidencia también, pero con presencia notable de respuestas aditivas y algunas respuestas que asocian la tarea con el modelo de proporción con valor unitario conocido. También se han localizado casos en los que la forma textual corresponde al modelo Proporción de valor unitario conocido y el esquema de resolución al de proporción con valor unitario desconocido.

Por último, en el caso de las tareas de medida, hay un mayor nivel de confusión, puesto que, la respuesta con mayor incidencia es de tipo aditivo (resta) y, además de medida, los estudiantes usan formas textuales que corresponden a los modelos de: proporción de valor unitario conocido, inversión del factor multiplicativo, proporción de valor unitario desconocido, e inversión de la multiplicación o factor perdido.

Respecto de las respuestas aditivas, su distribución en las tareas del cuestionario es la que se muestra en la Tabla 7.12 siguiente.

Modelo semántico	**Tarea**	**Núm. de respuestas aditivas**
Medida	1	8
	5	8
Proporción de valor unitario desconocido	2	4
Proporción de valor unitario conocido	7	2
	8	4
Inversión de la multiplicación (factor perdido)	3	1
	4	3
	6	3

TABLA 7.12. Respuestas aditivas en las tareas correspondientes a cada modelo semántico

Se observa que el modelo semántico que presenta un mayor índice de aditividad es el de medida, mientras que en el resto de modelos hay una incidencia menor, siendo más pequeña en los casos de proporción con valor unitario conocido e inversión de la multiplicación o factor perdido.

Por otra parte, en las respuestas no correctas, hay una gran incidencia de modelos aditivos, que predominan frente a otros tales como: medida, reducción a la unidad, multiplicación y proporción con valor unitario desconocido.

7.1.5 Comparación de formas textuales

A continuación se comparan las formas textuales que usan los estudiantes cuando resuelven las tareas, con las puntuaciones que dieron en el cuestionario previo de formas textuales, en el que las predominantes corresponden a los modelos semánticos: inversión del factor multiplicativo, partición, factor perdido y medida. Las formas textuales que usan los estudiantes en el momento de resolver los problemas, ordenadas en orden decreciente de frecuencias, son las que corresponden a los modelos semánticos de la Tabla 7.13:

Modelo semántico del problema	Tarea	Modelo semántico de los estudiantes
Medida	1	Resta (6) Medida (4) Inversión factor multiplicativo (1) Proporción valor unitario desconocido (1) Multiplicación (1) Comparación (1)
	5	Resta (6) Proporción de valor unitario conocido (5)
Proporción valor unitario desconocido	2	Aditiva (4) Proporción valor unitario desconocido (4) Proporción valor unitario conocido (2) Inversión factor multiplicativo (1)
Proporción valor unitario conocido	7	Proporción valor unitario conocido (7) Medida (2) Resta (1)
	8	Factor perdido (1) Proporción valor unitario conocido (1) Medida (1) Suma (1) Resta (1)
Inversión de la multiplicación (factor perdido)	3	Factor perdido (9) Aditiva (1)
	4	Factor perdido (14) Aditivo (1)
	6	Factor perdido (4) Aditiva (2) Proporción valor unitario desconocido (1) Multiplicación (1)

TABLA 7.13. Modelos semánticos de los estudiantes y modelos semánticos de los problemas

- **Análisis "vertical"**

Al sumar las frecuencias de aparición de cada modelo semántico en las respuestas de los estudiantes, se ve que el modelo de partición está ausente, lo que es lógico ya que dicho modelo no se extiende a las fracciones, el modelo de inversión del factor multiplicativo apenas tiene incidencia (2 respuestas), al igual que el modelo de medida (7 respuestas); sin embargo, la inversión del factor multiplicativo y la partición eran los modelos preferidos por los estudiantes en el cuestionario previo de formas textuales.

De todos los modelos semánticos, el que tiene mayor incidencia en las respuestas de los estudiantes al cuestionario de problemas es el de inversión de la multiplicación o factor perdido (28), seguido de modelos aditivos (24) y proporción (de valor unitario conocido o desconocido) (21), en contradicción con lo observado en el cuestionario previo de formas textuales.

Esta falta de coherencia es un síntoma de falta de experiencia de los estudiantes con los problemas multiplicativos de división de fracciones, ya que los modelos que asignan a priori a los problemas con fracciones son los mismos que para la división de naturales y, de hecho, no los usan en el momento de la resolución de los problemas.

- **Análisis "horizontal"**

Si se observa, para cada modelo semántico de división de fracciones presente en los problemas, cuáles son los que aparecen con mayor frecuencia en las respuestas de los estudiantes, se observa que:

- en el caso de la inversión de la multiplicación o factor perdido, es ese mismo modelo el más frecuente en las respuestas de los estudiantes (27),
- en el caso de la proporción con valor unitario conocido, es ese mismo modelo el más frecuente en las respuestas de los estudiantes (8), aunque con incidencia de otras respuestas (7),
- en el caso de la proporción con valor unitario desconocido, dicho modelo tiene la misma frecuencia que las respuestas aditivas (4),
- en el caso de la medida, la respuesta con mayor frecuencia es aditiva (12)

Además se observa en las respuestas de los estudiantes la presencia de otros modelos que no tienen nada que ver con el modelo semántico del problema. Por ello:

- en este grupo parece que los estudiantes identifican mejor la división de fracciones con la inversión de la multiplicación o factor perdido.

- parece que los estudiantes de este grupo tienen dificultades para identificar la división de fracciones con una proporción, pero parece que identifican más fácilmente la proporción de valor unitario conocido que la de valor unitario desconocido.

- en este grupo parece que los estudiantes no identifican la división de fracciones como una operación que sirva para medir, ya que en los problemas de medida tienden a dar respuestas aditivas, es decir, parecen preferir la comparación aditiva a la multiplicativa.

Todas las conclusiones anteriores se pueden formular gracias a las formas textuales que utilizan los estudiantes en sus respuestas, las cuales indican el modelo semántico que usan cuando resuelven o intentan resolver los problemas. De hecho, cuando en esta investigación se afirma que un cierto modelo semántico está presente en las respuestas de un estudiante, se quiere decir que en esas respuestas se han localizado formas textuales asociadas a dicho modelo semántico.

7.1.6 Los métodos de resolución asociados a otras variables de los problemas

A continuación vamos a describir las relaciones entre los métodos de resolución de los estudiantes y otras variables, tales como: contextos (o situaciones que aparecen en los enunciados), representaciones y sentidos de uso de las fracciones.

7.1.6.1 Métodos de resolución y contextos

Los contextos que aparecen en las tareas del cuestionario son cuatro: contexto de operación (CO), repartos y partes (CRP), y métrico / medidas extensivas / longitud (CMME3), peso (CMME2) , área (CMME4). De ellos, el más frecuente es el métrico de medidas extensivas, que aparece en 6 de las tareas (tareas 1, 2, 3, 5, 7 y 8). El contexto de repartos y partes aparece en la tarea 6, y el contexto de operación aparece en la tarea número 4.

Los métodos de resolución observados en el grupo de estudiantes objeto de estudio en relación con los contextos son los señalados en la Tabla 7.14.

Contextos	Tareas	Métodos de resolución	
		Respuestas correctas	**Respuestas no correctas**
Operación	4	Ecuación (7/8) División directa (1/8)	Ecuación (6/11) Multiplicación (2/11) División directa (1/8)
Métrico / área	3	Ecuación (4/6) División directa (2/6)	Ecuación (3/8) Aditiva (1/8)
Métrico / longitud	1	División directa (7/8) Ecuación (1/8)	Aditiva (6/11) División directa (2/11)
Métrico / peso	2	Regla de tres (4/5) División directa (1/5)	Aditiva (3/9) Regla de tres (2/9)
	5	Regla de tres (5/6) Multiplicación directa (1/6)	Aditiva (6/12)
	7	Regla de tres (6/7) División directa (1/7)	Regla de tres (1/7) División directa (1/7) Multiplicación (1/7) Aditivo (1/7)
	8	División directa (1/1)	Aditivo (3/8)
Repartos y partes	6	Ecuación (2/4) División directa (2/4)	Aditivo (3/9)

TABLA 7.14. Contextos y métodos de resolución

En dicha tabla se observa que en los contextos de operación y métrico de área es más frecuente el método de ecuación. Sin embargo, en los contextos métricos la situación es más compleja, ya que en cada tarea es predominante un método diferente; así, en la tarea 1 es más frecuente la división directa, mientras que en las tareas 2, 5 y 7 es más frecuente la regla de tres. En la tarea 6 (contexto de repartos y partes) tienen la misma incidencia la ecuación y la división directa. Esta dispersión de métodos en los contextos hace pensar que la influencia del contexto no es determinante en el método de resolución.

7.1.6.2 Métodos de resolución y representaciones

Las representaciones asociadas, a priori, a las tareas del cuestionario son solamente dos: recta numérica (tarea 1) y continuo rectangular (tarea 3). Para el resto de tareas no hay una representación asociada.

En las respuestas obtenidas en la muestra se han localizado las siguientes representaciones para cada una de las tareas (ver Tabla 7.15).

Tareas	Método de resolución más frecuente	Representaciones
1	División directa	Recta numérica (3/21)
2	Regla de tres	Circular de tarta (1/21)
3	Ecuación	Continuo rectangular (14/21)
4	Ecuación	-----------
5	Aditivo / Regla de tres	Dibujo (1/21)
6	Aditivo / Ecuación	¿Un dibujo? (1/21)
7	Regla de tres	Continuo rectangular (1/21)
8	Aditivo / División directa	-----------

TABLA 7.15. Métodos de resolución más frecuentes y representaciones

Aunque en la tarea 3 todos los estudiantes que contestan (14/21) usan el diagrama del enunciado como modelo continuo rectangular, 4/14 no tienen en cuenta todos los datos y muestran dificultades con el diagrama del enunciado, al focalizar la solución en el lado opuesto al indicado en la figura (2/4) o considerar que la figura representa un cuadrado (2/4). En la tarea 6, un estudiante afirma haber usado un dibujo para su respuesta, pero no lo incluye en la hoja de soluciones.

Los resultados de la Tabla 7.15 indican que el modelo continuo rectangular se asocia más fácilmente al método de ecuación y que algunos estudiantes asocian el modelo de recta numérica al enfoque de división directa, pero, en general, los estudiantes de la muestra no establecen conexiones entre las tareas del cuestionario y las representaciones, de manera que la incidencia de las representaciones en los métodos de resolución es muy baja.

7.1.6.3 Métodos de resolución y sentidos de uso de las fracciones.

En la Tabla 7.16 se muestran los métodos de resolución de los estudiantes en relación con los sentidos de uso de las fracciones que intervienen en los enunciados de las tareas:

Tareas	Método de resolución más frecuente	Sentidos de uso de las fracciones
1	División directa	Medida
2	Regla de tres	Partes de la unidad / Medida
3	Ecuación	Medida
4	Ecuación	Números
5	Aditivo / Regla de tres	Partes de la unidad / Medida
6	Aditivo / Ecuación	Medida / Operador
7	Regla de tres	Medida
8	Aditivo / División directa	Operador

TABLA 7.16. Métodos de resolución más frecuentes y sentidos de uso de fracción

Se observa que la división directa aparece cuando el sentido de uso es de medida y de operador; la regla de tres aparece cuando el sentido de uso es de partes de la unidad y de medida y el método de ecuación aparece cuando el sentido de uso es de medida, de números y de operador. Como el sentido de uso de medida aparece en todos, no se sigue que el sentido de uso de la fracción tenga influencia en la elección de método de resolución. Tal vez se requiera mayor investigación al respecto.

7.2. CONCLUSIONES

1. El cambio de campo numérico de naturales a racionales implica un cambio en los modelos de división; por ejemplo, la división como la operación de repartir ya no tiene sentido en el caso de división de fracciones. Sin embargo, los estudiantes del grupo de estudio afirman que los modelos de división con naturales son válidos para la división de fracciones. Pero estos modelos los cambian cuando abordan problemas con fracciones.

Las respuestas de los estudiantes al cuestionario previo de formas textuales indican que sus modelos son: inversión del factor multiplicativo, partición, factor perdido y medida, que son más frecuentes en la división de naturales. Sin embargo, las formas textuales que aparecen en las explicaciones que acompañan a la resolución de los problemas del cuestionario están asociadas a los modelos de inversión de la multiplicación o factor perdido, modelos aditivos y proporción de valor unitario conocido y desconocido. Hay por tanto una discontinuidad en los modelos usados por los estudiantes cuando cambian del campo numérico de los naturales al de los racionales. Esta discontinuidad se manifiesta por el hecho de que, cuando se les pregunta qué es dividir fracciones (cuestionario de formas textuales), las formas textuales de sus respuestas corresponden a modelos de división de naturales; en cambio, cuando describen cómo resuelven problemas concretos donde interviene la división de fracciones usan formas textuales diferentes, a menudo inapropiadas.

2. La estructura de los problemas condiciona el reconocimiento de la división de fracciones y el enfoque de resolución de los problemas.

En efecto, para cada estructura, los enfoques de resolución observados en la muestra son diferentes, tal como se indica en la Tabla 7.17 a continuación.

Estructura	Esquema	Método
1 espacio de medida	Ternario	División directa Planteamiento y resolución de una ecuación
2 espacios de medida: isomorfismo de medida	Cuaternario	Funcional (regla de tres)
2 espacios de medida: producto de medidas	Ternario	Planteamiento y resolución de una ecuación
3 espacios de medida	Ternario	División directa

TABLA 7.17. Enfoques de resolución según la estructura de los problemas

Se observa que el esquema cuaternario es predominante en el isomorfismo de medidas, mientras que el esquema ternario predomina en el resto de estructuras. El método de división directa predomina en los problemas de 1 espacio de medida y en los de 3 espacios de medida, mientras que el planteamiento y resolución de una ecuación predomina en los problemas de 1 espacio de medida y en el producto de medidas; el método funcional de regla de tres predomina en el isomorfismo de medidas.

3. Los modelos semánticos de división influyen en el reconocimiento de la división de fracciones como método para resolver el problema.

Para cada modelo semántico de división se han observado en la muestra distintos métodos de resolución, tal como se indica en la Tabla 7.10 (pág. 250). Así, el método de división directa predomina en el modelo de medida; el método de la regla de tres predomina en el modelo de proporción de valor unitario desconocido y en el modelo de proporción de valor unitario conocido, y el método de ecuación predomina en el modelo de inversión de la multiplicación o factor perdido. Cuando los estudiantes plantean una regla de tres o una ecuación, dicho planteamiento no les lleva necesariamente a la división de fracciones, sino a la resolución de la ecuación por técnicas algebraicas o a la división camuflada dentro de la regla de tres; es decir los métodos de ecuación y de regla de tres pueden ocultar o dejar en un segundo plano a la división de fracciones.

4. Una consecuencia de lo anterior es que los estudiantes, cuando no reconocen que el problema es de dividir, o bien buscan la solución sin recurrir a la división de fracciones, o bien recurren a estrategias construidas, tales como:

- Considerar el problema con una estructura cuaternaria, de acuerdo con el esquema de la tabla de proporcionalidad o regla de tres, en vez de considerar el problema como una relación ternaria que corresponde a la división de fracciones como una ley de composición en la que intervienen tres elementos (dos entradas y una salida).

- Utilizar estrategias de reducción del problema a un caso más sencillo, bien planteando un problema análogo en que los datos son números naturales, o bien buscando un paso intermedio que consiste en reducir a la fracción unitaria.

- Usar una estrategia aditiva de construcción ascendente

En efecto, en la muestra se han observado enfoques de resolución con un esquema cuaternario y un método de regla de tres en tareas que, teóricamente, corresponderían a un esquema ternario. Es el caso de la tarea 5 (“tarro de miel”), que puede resolverse con un esquema ternario mediante multiplicación de fracciones y que, sin embargo, en la muestra, se enfoca frecuentemente con un esquema cuaternario y con una regla de tres o con enfoques aditivos.

Se han observado en la muestra estrategias reductivas, tales como la reducción a la fracción unitaria (caso de Estefanía en la tarea 2, “peso de la torta”).

Se han observado enfoques aditivos en todas las tareas, pero especialmente en las de medida. Por ejemplo, en la tarea 5 (“tarro de miel”), Laura A suma las fracciones para ver el porcentaje de tarro que está ocupado. En otros casos, los enfoques aditivos consisten en comparar el valor absoluto de las fracciones, mediante resta.

CAPÍTULO **8**

Resultados y conclusiones

En este capítulo se describen los resultados, aportaciones y conclusiones de la investigación, los cuales se fundamentan en las cinco preguntas de investigación formuladas en el capítulo 1. Para responder a esas preguntas se realizaron una serie de indagaciones que se describen en este capítulo, usando como referencia los tres ejes del estudio citados en el capítulo 1, los cuales, a su vez, buscan lograr los objetivos de la investigación.

8.1. PRIMERA PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

1. ¿Cuáles son los tipos de problemas multiplicativos que los estudiantes reconocen como problemas que se resuelven usando una división de fracciones?

Para responder esta pregunta se han seguido los siguientes pasos:

1. Se han identificado problemas multiplicativos de división de fracciones en libros antiguos, textos de enseñanza e investigaciones precedentes. Los resultados se describen en el capítulo 4, en el que se muestra un listado de problemas extraídos del análisis. Con ello se ha logrado el objetivo 1 de la investigación.

Objetivo 1. Identificar y recopilar los problemas escolares de división de fracciones.

2. Se han identificado variables de los problemas multiplicativos de división de fracciones en el análisis de libros antiguos, textos de enseñanza e investigaciones precedentes. Dichas variables son: estructura, contextos y tipología de los datos, y se describen en el capítulo 4. Con ello se ha logrado el objetivo 3 de la investigación.

Objetivo 3. Identificar las variables de los problemas tipo de cada modelo.

3. Se han identificado variables de enseñanza de los problemas multiplicativos de división de fracciones en el análisis de libros antiguos, textos de enseñanza e investigaciones precedentes. Dichas variables son: algoritmos, sentidos de uso de fracción, modelos semánticos de división de naturales y de fracciones, y representaciones, y se describen en el capítulo 3.

4. Se ha realizado una caracterización inédita de los modelos semánticos de los problemas de división de números naturales, siguiendo una estructura con cuatro componentes: descripción, características, acciones y preguntas asociadas. Esta caracterización se ha extendido a los modelos de división de fracciones, analizando los cambios que se producen al cambiar de campo numérico. En el capítulo 3 se localizan estas caracterizaciones de los modelos semánticos.

5. Se ha recopilado un conjunto inédito de formas textuales asociadas a cada uno de los modelos semánticos de división de números naturales y de fracciones, localizadas en los libros antiguos y textos de enseñanza. Estas formas textuales son esenciales en la investigación, ya que permiten identificar el modelo semántico de división que aparece en el enunciado de los problemas y también se usa para identificar el modelo de división subyacente en las respuestas de los estudiantes al cuestionario de investigación. En el capítulo 3 se encuentra el listado de formas textuales para cada modelo semántico de división de naturales y de fracciones.

   Con los apartados 3, 4 y 5 anteriores se ha logrado el objetivo 2.

   Objetivo 2. Caracterizar los principales modelos de la división de naturales y de la división de fracciones.

6. Se han clasificado los problemas multiplicativos de división de fracciones localizados en los libros antiguos, textos de enseñanza e investigación precedente, usando como marco de referencia el análisis estructural de Vergnaud (1991). Aunque Vergnaud hace una clasificación general de los problemas del campo multiplicativo, los ejemplos que aporta se centran en el conjunto de los números naturales y en los decimales, pero no en las fracciones. En esta investigación se hace una clasificación inédita de los problemas multiplicativos en los que está involucrada la división de fracciones, es decir, los datos son fracciones. Dicha clasificación se encuentra en el capítulo 4.

7. Se han relacionado las variables de los problemas multiplicativos de división de fracciones con los sentidos de uso de las fracciones y con los modelos semánticos de división de fracciones. Esto se ha hecho en el capítulo 5, en el que, al analizar los problemas seleccionados para el estudio piloto, se relaciona la estructura con las otras dos variables de problema (contexto y tipología de datos) y con los sentidos de uso de las fracciones, con los modelos semánticos de división de fracciones, y con las representaciones. Este tipo inédito de metodología de análisis permite completar el logro del objetivo 3 de la investigación:

Objetivo 3. Identificar las variables de los problemas tipo de cada modelo.

8. Se ha hecho una selección de problemas multiplicativos de división de fracciones, de entre los extraídos de los libros antiguos, textos de enseñanza e investigaciones precedentes, con objeto de diseñar el estudio piloto de la investigación, aplicando el criterio de que fueran representativos de los valores de las variables localizados en los análisis anteriores descritos en los capítulos 3, 4 y 5. En el capítulo 5 se describe detalladamente el proceso de selección de los problemas que componen el cuestionario del estudio piloto.

9. Se ha realizado un estudio piloto con un cuestionario compuesto por los 18 problemas seleccionados, los cuales se analizaron respecto de las tres componentes: estructura dimensional, contexto y tipología de los datos, y teniendo en cuenta también las variables de enseñanza: sentidos de uso de fracción, sentidos de uso de división de fracciones y representaciones. Como consecuencia del análisis se obtiene un cuadro de relación entre la estructura de los problemas y los sentidos de uso de la división de fracciones, lo que completa el objetivo 3.

Objetivo 3. Identificar las variables de los problemas tipo de cada modelo.

El estudio piloto se completa con un cuestionario de formas textuales (apartado 5.3.1, cap. 5), dada la importancia de las mismas para localizar los sentidos de uso de la división de fracciones que subyacen en las respuestas de los estudiantes. El estudio piloto fue validado por el análisis de respuestas posterior; los ítems se validaron por los métodos de resolución aplicados por los estudiantes.

Como consecuencia del proceso de validación y del análisis de respuestas, se depuró el cuestionario inicial, dando origen al cuestionario definitivo (apartado 5.4, cap. 5).

10. Se han identificado las variables de resolución de los problemas multiplicativos de división de fracciones, como consecuencia del análisis de las respuestas de los estudiantes al cuestionario del estudio piloto. Al estudiar las respuestas de los estudiantes se ha visto que:
    a) Usan dos esquemas de resolución: cuaternario y ternario, dependiendo de la estructura del problema y del modelo semántico subyacente.
    b) Usan cuatro métodos de resolución: funcional o regla de tres, escalar, división directa, y planteamiento y resolución de una ecuación.
    c) Usan diferentes algoritmos de división de fracciones.

    Una aportación de esta investigación es el hecho de establecer la terna (esquema, método, algoritmo), denominada enfoque de resolución, como característica de la resolución de cada estudiante.

11. Se ha realizado la investigación definitiva con estudiantes y se han analizado sus respuestas al cuestionario de investigación, utilizando, por un lado, los enfoques de resolución para categorizar sus respuestas al cuestionario de problemas, y por otro lado, las formas textuales usadas en sus respuestas antes de resolver los problemas y en las explicaciones que acompañan a las respuestas de los problemas.

Como consecuencia de lo descrito en los puntos 10 y 11, se ha logrado el objetivo 4.

Objetivo 4. Identificar las variables de resolución de los problemas tipo, y los valores de esas variables que los estudiantes emplean al intentar resolverlos.

- **Resultados**

Se han localizado varios tipos de estructuras en los problemas multiplicativos en los que está involucrada la división de fracciones: problemas sobre un único espacio de medida, isomorfismo de medidas, producto de medidas y función compuesta. Los estudiantes utilizan en sus respuestas a los problemas distintos esquemas y métodos de resolución:

El esquema de resolución más frecuente es el cuaternario en aquellos problemas que corresponden al isomorfismo de medidas, mientras que es ternario en el resto de estructuras.

El método de resolución más frecuente es el método funcional de regla de tres en aquellos problemas que corresponden al isomorfismo de medidas, mientras que en el resto de estructuras, los métodos de resolución más frecuentes son división directa y planteamiento y resolución de una ecuación.

El método de resolución predominante en aquellos problemas que corresponden al modelo semántico de medida es el de división directa, siendo la regla de tres el más frecuente en el modelo semántico de proporción, y el método de ecuación el más frecuente en el modelo semántico de inversión de la multiplicación o factor perdido.

- **Conclusión:**

Los problemas que los estudiantes identifican mejor con una división de fracciones son los que tienen la estructura de un solo espacio de medida y corresponden al modelo semántico de medida.

8.2. SEGUNDA PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

2. ¿Qué discontinuidades o cortes didácticos en los modelos de división de fracciones se producen al pasar de involucrar números naturales a fracciones?

Para responder esta pregunta se han seguido los siguientes pasos:

1. En el análisis de libros antiguos, textos de enseñanza e investigación precedente, se identificaron formas textuales de los sentidos de uso de fracción, de los modelos semánticos de división de naturales y de los modelos semánticos de división de fracciones, localizándolas en las definiciones y explicaciones que utilizan los autores al referirse a las fracciones, a la división de números naturales y a la división de fracciones. Como consecuencia, se concluyó que cada modelo semántico tiene asociada al menos una forma textual que lo caracteriza, tal como se señala en las TABLAS 3.12 y 3.13 (Cap. 3).

La caracterización de los sentidos de uso de fracción, de los modelos semánticos de división de números naturales y de los modelos semánticos de división de fracciones en función de las formas textuales es inédita y se muestra en el capítulo 3 de este informe.

2. En el estudio piloto se realizó un cuestionario de formas textuales con tres ítems, relativos a los sentidos de uso de fracción, a los modelos semánticos de división de naturales y a los modelos semánticos de división de fracciones, con objeto de detectar sentidos de uso y modelos semánticos subyacentes en los estudiantes. Tras el proceso de validación, se decidió depurar y simplificar el cuestionario de formas textuales, centrándolo solamente en la división de fracciones. Con ello se pretende disponer de una plantilla para el análisis de las respuestas de los estudiantes al cuestionario de la investigación principal que arroje información sobre discontinuidades en los modelos semánticos de división, al pasar de los naturales a las fracciones (ver capítulo 5).

3. La investigación principal no se limitó a analizar las respuestas de los estudiantes al cuestionario previo de formas textuales, si no que, además, se hizo un análisis de contraste entre las respuestas de los estudiantes a dicho cuestionario y las formas textuales que usaron en sus respuestas a los problemas, en el momento de resolverlos. En dicho análisis (ver capítulo 7) se detectaron discontinuidades entre el modelo elegido en el cuestionario de formas textuales y el modelo bajo el cual se resuelven los problemas.

Como consecuencia de los tres puntos anteriores se completó el logro de los objetivos 2 y 4 de la investigación.

Objetivo 2. Caracterizar los principales modelos de la división de naturales y de la división de fracciones.

Objetivo 4. Identificar las variables de resolución de los problemas tipo, y los valores de esas variables que los estudiantes emplean al intentar resolverlos.

- **Resultados**

Las formas textuales preferidas por los estudiantes que participaron en el estudio en el cuestionario previo a la resolución de los problemas son:

“hacer tantas veces menor como indica el numerador del divisor y tantas veces mayor como indica el denominador del divisor”, que corresponde al modelo semántico “inversión del factor multiplicativo”.

“repartir la fracción dividendo en un número fraccionario de partes iguales”, que corresponde al modelo semántico “partición”.

La división partitiva de fracciones no tiene sentido, puesto que no se puede repartir entre un número fraccionario de receptores; a pesar de ello, los estudiantes prefieren a priori el modelo semántico de partición.

En el momento de resolver los problemas del cuestionario, los estudiantes parecen preferir el modelo semántico de inversión de la multiplicación o factor perdido, seguido de otros modelos, entre ellos el de proporción (de valor unitario conocido o desconocido), lo que contradice lo observado en el cuestionario previo de formas textuales. Los modelos que asignan a priori a los problemas con fracciones son los mismos que para la división de naturales, pero, en el momento de resolver los problemas, no los usan.

- **Conclusión:**

El modelo semántico de división como partición no se extiende al cambiar el campo numérico de los naturales a las fracciones. Este hecho hace que el modelo semántico predominante para la división de fracciones cambie y pase a ser la inversión de la multiplicación o factor perdido. Por tanto, hay una discontinuidad cuando se cambia de campo numérico, que se detecta por el hecho de que los estudiantes usan formas textuales diferentes antes y después de resolver las tareas que involucran división de fracciones. Las formas textuales predominantes antes son las de la división con naturales, pero ya no lo son en el momento de resolver problemas multiplicativos de división de fracciones.

8.3. TERCERA PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

3. ¿Cómo median los modelos implícitos y el tipo de números implicados en el problema a la hora de reconocer cuál es la operación que se necesita para resolverlo?

Esta pregunta está relacionada con la pregunta 1, de manera que los pasos a seguir para responderla son prácticamente los mismos. No obstante, es destacable alguno de los siguientes pasos:

1. Se ha realizado un análisis de libros antiguos, textos de enseñanza e investigaciones precedentes, con objeto de localizar las formas textuales asociadas a los modelos semánticos de división de fracciones y los problemas multiplicativos de división de fracciones. Como resultado se ha obtenido un conjunto de formas textuales asociadas a cada modelo semántico de división, de naturales y de fracciones, ver capítulo 3, y una colección de problemas multiplicativos de división de fracciones, ver capítulo 4.

2. Se han relacionado las variables de los problemas, (estructura, contextos y tipología de datos) con los modelos semánticos de división de fracciones en el momento de analizar los problemas seleccionados para diseñar el cuestionario del estudio piloto, ver capítulo 5. Para estudiar dicha relación se han usado las formas textuales asociadas a los modelos semánticos de división de fracciones que aparecen en los enunciados de los problemas.

3. Se ha realizado el análisis de respuestas de los estudiantes a las tareas del cuestionario piloto, dando lugar a una serie de decisiones que tienen que ver con la tipología de los datos que aparecen en los enunciados de las tareas (ver capítulo 5).

4. Se ha realizado el análisis de respuestas de los estudiantes a las tareas del cuestionario definitivo, estudiando la relación entre los métodos de resolución aplicados por los estudiantes y los modelos semánticos de división de fracciones subyacentes en los enunciados de los problemas y en las formas textuales que utilizan los estudiantes en sus respuestas a las tareas del cuestionario de la investigación principal.

5. Se ha analizado la relación entre los sentidos de uso de las fracciones que aparecen en los enunciados de las tareas y los métodos de resolución que aplican los estudiantes. También se ha estudiado la posible relación entre éstos y el tipo de datos que aparecen en el enunciado.

Todas estas acciones han completado el logro de los cuatro objetivos de la investigación principal.

- **Resultados**

Para cada modelo semántico de división de fracciones se han observado en las respuestas de los estudiantes distintos métodos de resolución. En el modelo de medida predomina el método de división directa; en el modelo de proporción predomina la regla de tres y en el modelo de inversión de la multiplicación o factor perdido predomina el método de ecuación. Sin embargo, los métodos de regla de tres y de ecuación no conducen necesariamente al reconocimiento de la división de fracciones, porque en esos casos el problema puede resolverse por otras vías que ocultan o dejan en un segundo plano la división de fracciones.

Al analizar las respuestas de los estudiantes al cuestionario del estudio piloto, se ha observado que si los datos que aparecen en los enunciados de las tareas son números mixtos, los estudiantes confunden su escritura con la expresión del producto de un entero por una fracción, lo que supone un obstáculo para la resolución del problema.

Al estudiar la relación entre los sentidos de uso de las fracciones que aparecen en los enunciados de las tareas del cuestionario de la investigación principal y los métodos de resolución que aplican los estudiantes, se observa que cuando el sentido de uso es de medida, aparecen todos los métodos: división directa, regla de tres y ecuación.

- **Conclusiones**

El único modelo semántico de división de fracciones que media favoreciendo el reconocimiento de la división directa de fracciones como método para resolver el problema, es el de medida; en cambio, los métodos de regla de tres y de ecuación, que predominan cuando el modelo semántico es de proporción y de inversión de la multiplicación o factor perdido, respectivamente, pueden ocultar o dejar en un segundo plano a la división de fracciones.

Los sentidos de uso de las fracciones que intervienen en los enunciados de los problemas no tienen influencia en la elección de método de resolución. Tal vez se requiera mayor investigación al respecto.

Cuando los datos son números mixtos, éstos actúan como distractores, dificultando el reconocimiento de la división directa como método de resolución.

8.4. CUARTA PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

4. ¿Es cierto que los estudiantes perciben los problemas de división de fracciones de modo diferente a los problemas de división de números enteros, y que esta percepción les lleva al esquema cuaternario y al método de la regla de tres?

Para responder esta pregunta se han seguido los siguientes pasos:

1. Un estudio de las formas textuales asociadas a los modelos semánticos de división de números enteros y de división de fracciones y de la estructura de los problemas multiplicativos de división de fracciones localizados en los libros antiguos, textos de enseñanza e investigación precedente, con objeto de caracterizar los modelos semánticos de división y de categorizar los problemas multiplicativos de división de fracciones. Ver capítulos 3 y 4.

2. Un estudio de las relaciones entre la estructura de los problemas localizados en el apartado anterior, los sentidos de uso de las fracciones y los modelos semánticos de división de fracciones, que permitió caracterizar cada uno de los problemas propuestos en el cuestionario del estudio piloto y en el cuestionario de la investigación principal. Ver capítulo 5.

3. Un estudio de las formas textuales que utilizan los estudiantes en sus explicaciones cuando resuelven los problemas del cuestionario de la investigación principal. Ver el capítulo 6.

4. Un estudio de las relaciones entre las variables de los problemas, los modelos semánticos y las variables de resolución, consistente en (ver capítulo 7):
   - Recopilar las formas textuales de los modelos semánticos más frecuentes en las respuestas de los estudiantes a las tareas del cuestionario de investigación.
   - Relacionar los enfoques de resolución de los estudiantes con la estructura de cada problema.
   - Relacionar los métodos de resolución de los problemas con los modelos semánticos de los problemas.
   - Relacionar los enfoques de resolución de los estudiantes con los contextos, las representaciones y los sentidos de uso de las fracciones en cada problema.
   - Relacionar los modelos semánticos subyacentes en los estudiantes antes y después de la realización de las tareas, usando para ello las formas textuales que usan en el cuestionario previo y las formas textuales que usan en el momento de resolver los problemas o cuando explican cómo han resuelto los problemas.

La metodología descrita en el punto 4 anterior es un modelo de análisis de investigación inédito; con él y con los tres puntos anteriores se cubren los cuatro objetivos de la investigación principal.

- **Resultados**

Las formas textuales más frecuentes en las respuestas de los estudiantes al cuestionario previo a la resolución de las tareas son las que corresponden a los modelos semánticos de inversión del factor multiplicativo y de partición.

En cambio, las formas textuales más frecuentes en el momento de resolver los problemas propuestos en el cuestionario de investigación corresponden al modelo semántico de inversión de la multiplicación o factor perdido, seguido de otros modelos, entre ellos el de proporción (de valor unitario conocido o desconocido).

Esta falta de coherencia entre las preferencias de los estudiantes en el cuestionario de formas textuales y las que realmente usan en la resolución de los problemas, parece indicar que los estudiantes que participaron en el estudio perciben los problemas de división de fracciones de manera diferente a los de división de números naturales.

Se observa que los enfoques de resolución utilizados por los estudiantes dependen de la estructura de los problemas.

Se observa que la influencia de los contextos de los problemas, de los sentidos de uso de las fracciones y de las representaciones en los enfoques de resolución de los estudiantes es irrelevante.

Se observa que los métodos de resolución utilizados por los estudiantes dependen de los modelos semánticos

- **Conclusiones**

Los estudiantes perciben los problemas multiplicativos de división de fracciones de manera diferente a los problemas de división de números naturales.

No es cierto que los estudiantes usen un esquema cuaternario y un método de regla de tres para abordar cualquier problema de división de fracciones, si no que los enfoques de resolución (esquemas y métodos) de los estudiantes dependen, por una parte, de la estructura de los problemas, y por otra parte de los modelos semánticos de división presentes en los problemas y de los modelos semánticos de división identificados por los estudiantes en el desarrollo de la tarea. De manera que:

El esquema de resolución es cuaternario solamente en el caso de que la estructura corresponda al isomorfismo de medidas, y es ternario en el resto de estructuras.

El método de resolución es de división directa en la estructura de un solo espacio de medida, es la regla de tres en la estructura de isomorfismo de medidas y es el planteamiento y resolución de una ecuación en algunos problemas de un solo espacio de medida y en el producto de medidas.

El método de resolución de división directa solamente aparece cuando el modelo semántico es de medida; la regla de tres aparece cuando el modelo semántico es de proporción de valor unitario conocido o desconocido y en algún caso cuando el modelo es de medida; y el método de ecuación aparece cuando el modelo semántico es de inversión de la multiplicación o factor perdido.

8.5. QUINTA PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

5. ¿Cuáles son los algoritmos que usan preferentemente los estudiantes cuando dividen fracciones?

Para responder esta pregunta se han seguido los siguientes pasos:

1. Un análisis de libros antiguos, textos de enseñanza e investigaciones precedentes con la finalidad de identificar en las definiciones, explicaciones, ejemplos y ejercicios diferentes algoritmos para dividir fracciones. Ver el capítulo 3.

2. Un análisis de las respuestas de los estudiantes a las tareas del cuestionario de investigación que permita localizar los algoritmos que utilizan los estudiantes en el momento de resolver problemas multiplicativos de división de fracciones.

Respecto del punto 2, los instrumentos diseñados para analizar los algoritmos que usan los estudiantes al resolver los problemas resultaron limitados, ya que la respuesta escrita a un cuestionario de investigación es insuficiente para discriminar qué algoritmo ha utilizado el estudiante en el momento de hacer la división de fracciones.

- **Resultados**

Se ha obtenido un listado de algoritmos de división de fracciones localizados en los libros antiguos, textos de enseñanza e investigación precedente, el cual puede servir como plantilla de análisis para identificar los algoritmos de división de fracciones usados por los estudiantes en el momento de resolver los problemas del cuestionario.

- **Conclusiones**

Se deberá hacer una investigación posterior sobre los algoritmos que usan los estudiantes para dividir fracciones

8.6. SOBRE LAS HIPÓTESIS

A continuación se resumen los resultados de esta investigación, en referencia a la validez de las hipótesis inicialmente planteadas en el capítulo 1.

Hipótesis 1. Los tipos de problemas que los estudiantes reconocen como aquellos que se pueden resolver con una división de fracciones dependen de la estructura de los problemas, de las formas textuales incluidas en el enunciado y del tipo de datos.

Si los problemas se limitan al caso en que los datos son fracciones, el tipo de datos no influye en el reconocimiento de la operación que resuelve el problema.

La estructura de los problemas influye en el reconocimiento de la operación que permite resolverlos. En la respuesta a la cuarta pregunta de investigación ya se ha visto que el enfoque de resolución (esquema y método) depende de la estructura de los problemas, de manera que en el caso de un solo espacio de medida es más fácil el reconocimiento del esquema ternario y de la división directa como método de resolución.

Las formas textuales están asociadas a modelos semánticos de división de fracciones e influyen en el reconocimiento de la operación que permite resolver el problema. En la respuesta a la cuarta pregunta de investigación ya se ha visto que el método de resolución de división directa se ve favorecido cuando el modelo semántico es de medida. Por tanto:

Los tipos de problemas que los estudiantes reconocen como aquellos que se pueden resolver con una división de fracciones dependen de la estructura de los problemas y de las formas textuales incluidas en el enunciado

Hipótesis 2. Los modelos implícitos de división y el tipo de datos implicados en los problemas median obstruyendo o favoreciendo el reconocimiento de la o las operaciones que es necesario hacer para resolver el problema, si bien algunos de ellos lo hacen de distinta manera a los modelos con naturales.

El tipo de datos es poco influyente en las respuestas de los estudiantes, excepto si los datos son números mixtos, en cuyo caso los estudiantes confunden su escritura con la multiplicación de un número natural por una fracción.

La influencia de los sentidos de uso de las fracciones que aparecen en los enunciados de los problemas es irrelevante en las respuestas de los estudiantes.

Para cada modelo semántico de división de fracciones se han observado en el estudio distintos métodos de resolución. El método de división directa predomina en el modelo de medida; el método de la regla de tres predomina en el modelo de proporción de valor unitario conocido o desconocido, y el método de ecuación predomina en el modelo de inversión de la multiplicación o factor perdido. Por tanto:

Los modelos implícitos de división median obstruyendo o favoreciendo el reconocimiento de la o las operaciones que es necesario hacer para resolver el problema

---

Hipótesis 3. Al cambiar de campo numérico, de los naturales a los racionales, se producen discontinuidades en unos modelos de división, pero no en otros. Esta discontinuidad se produce porque falla alguna de las características del modelo.

Por ejemplo, la forma textual “repartir” asociada al modelo partitivo no es posible usarla cuando el divisor es una fracción, lo que no ocurre con la forma textual asociada al modelo de medida “cuántas veces cabe”.

En efecto, en el capítulo 3 se muestran las diferencias entre los modelos semánticos de división de números naturales y los modelos de división de fracciones, identificándose todos ellos en función de sus características, las acciones asociadas y las preguntas implicadas en cada modelo. Al pasar del campo numérico de los naturales a las fracciones hay unas características que se pierden y otras que se ganan.

Esto también se refleja en los resultados observados en el estudio, tal como se señala en el capítulo 7: los modelos semánticos de los estudiantes que participaron en el estudio son: inversión del factor multiplicativo, partición, factor perdido y medida, que son los modelos semánticos más frecuentes en la división de naturales; en cambio, las formas textuales que aparecen en las explicaciones que acompañan a la resolución de los problemas del cuestionario están asociadas a los modelos de inversión de la multiplicación o factor perdido, modelos aditivos y proporción de valor unitario conocido y desconocido. Por tanto:

Hay una discontinuidad en los modelos usados por los estudiantes cuando cambian del campo numérico de los naturales al de los racionales. Esta discontinuidad se manifiesta por el hecho de que, cuando se les pregunta qué es dividir fracciones (cuestionario de formas textuales), las formas textuales de sus respuestas corresponden a modelos de división de naturales; en cambio, cuando resuelven problemas concretos donde interviene la división de fracciones usan formas textuales diferentes.

Hipótesis 4. Cuando los estudiantes perciben los problemas de división de fracciones de modo diferente a los problemas de división de números naturales, no sólo recurren mayoritariamente a plantear un esquema cuaternario y a métodos de resolución reglados, sino también a estrategias construidas que tienden a reducir el problema a naturales o a decimales.

No es cierto que los estudiantes recurran mayoritariamente al esquema cuaternario y a la regla de tres, ya que esto depende de la estructura de los problemas y de los modelos semánticos presentes en los enunciados e identificados por los estudiantes. Véase la respuesta a la cuarta pregunta de investigación.

Sin embargo, es cierto que en las respuestas de los estudiantes se han observado enfoques de resolución con un esquema cuaternario y un método de regla de tres en tareas que, teóricamente, corresponderían a un esquema ternario. Se han localizado también estrategias reductivas, tales como la reducción a la fracción unitaria. Los enfoques aditivos aparecen en todas las tareas, pero especialmente en las de medida. Por tanto:

Cuando los estudiantes perciben los problemas de división de fracciones de modo diferente a los problemas de división de números naturales, su esquema y método de resolución dependen de la estructura del problema y del modelo semántico de división, aunque también recurren a métodos reglados, y a estrategias construidas que tienden a reducir el problema a naturales o a decimales.

Hipótesis 5. Los algoritmos que utilizan los estudiantes para efectuar las divisiones de fracciones son, preferentemente, el de productos cruzados y el de invertir y multiplicar.

Sobre esta hipótesis no se puede asegurar nada en la presente investigación, ya que la parte experimental se centró en el análisis de las respuestas de los estudiantes a un cuestionario de tareas y no es posible localizar en las respuestas escritas el algoritmo usado por los estudiantes en cada problema. Para contrastar esta hipótesis se hubiese requerido un tipo de investigación diferente, tal vez con entrevistas personales a los estudiantes, con objeto de tener más información. Por tanto, el contraste de esta hipótesis requiere más investigación posterior.

8.7. IMPLICACIONES PARA LA ENSEÑANZA

En esencia, se constata que la enseñanza no tiene en cuenta todas las variables de los problemas (estructura, contextos y tipología de los datos), las variables de enseñanza (sentidos de uso de las fracciones, modelos semánticos de la división y representaciones) y las variables de resolución (esquemas, métodos y algoritmos) con un tratamiento diferenciado para cada tipo de problema, lo que redunda en errores conceptuales al cambiar del campo numérico de los naturales a las fracciones. Y que esos errores podrían disminuir si la enseñanza de los problemas multiplicativos de división de fracciones tuviera en cuenta todas las variables anteriores.

La confirmación de las hipótesis 3 y 4 implica que existe una discontinuidad en la enseñanza referida a los modelos de la operación de división cuando se pasa del campo numérico de los naturales a los racionales. La discontinuidad se manifiesta por el hecho de que se introduce la operación de división de fracciones sin que suponga un cambio real en los modelos de división de los estudiantes. Ello puede ser debido, en parte, a que la enseñanza no cuida suficientemente las formas textuales ligadas a los modelos de las operaciones. Desde este punto de vista, es importante señalar la necesidad de prestar especial atención a las formas textuales que tienen lugar en el proceso de enseñanza-aprendizaje, y especialmente en el cambio de campo numérico, ya que ese cambio debe involucrar no solamente una nueva concepción de los números, sino también, y fundamentalmente, de las operaciones que se pueden hacer con los números, de los significados de las operaciones y del campo de nuevos problemas que se pueden abordar con el nuevo campo numérico.

La confirmación de las hipótesis 1 y 2 implica que la enseñanza de los problemas multiplicativos debe partir, en primer lugar, de las variables de los problemas; es decir, del hecho de que los problemas tienen diferente estructura y, por tanto, su enseñanza no puede ser igual, sino diferenciada. Es usual en los libros de texto que la división de fracciones se trate siempre de la misma manera, mediante un algoritmo (productos cruzados o invertir y multiplicar) y en situaciones descontextualizadas. De hecho, los problemas multiplicativos suelen aparecer al margen de las unidades didácticas destinadas a las fracciones y son considerados como “una cosa aparte”, lo que hace que pocos estudiantes asocien los problemas multiplicativos con la operación de división directa de fracciones y prefieran transitar por caminos intermedios, tales como usar un esquema cuaternario o un método reductivo a un problema de naturales o un método constructivo apoyado en una estrategia aditiva de tipo ascendente.

La enseñanza debería tener en cuenta las variables de los problemas (estructura, contextos y tipología de los datos), las variables de enseñanza (sentidos de uso de las fracciones, modelos semánticos de la división, representaciones) y las variables de resolución (esquemas, métodos y algoritmos) con un tratamiento diferenciado para cada tipo de problema.

Por ejemplo, se debería tener presente que existe una interrelación entre las variables de los problemas, las variables de enseñanza y las variables de resolución. Así, hay que destacar en la enseñanza que problemas con diferente estructura tienen modelos de división asociados diferentes y, por tanto, enfoques de resolución también diferentes. Por tanto, no puede organizarse la enseñanza asociando el mismo modelo de división ni el mismo enfoque de resolución a problemas con estructuras diferentes.

Referencias bibliográficas

Andrés de Zaragoza, Juan (1515). *Sumario breve de la práctica de la arithmética y todo el curso de larte mercantinol bien declarado: el qual se llama maestro de cuento*. Impresor Juan Joffre. Valencia, 1999. Coeditado por Vicent García con la Biblioteca de la U. V.

Anzola, M, y Vizmanos, J. R. (1997). *Matemáticas 3º ESO*. Madrid: SM.

Arias, J. M., Maza, I (1997). *Matemáticas 3º ESO*. Barcelona: Casals.

Aurrecoechea, B. (1976). *MATEMÁTICAS. Respuestas a los cuestionarios oficiales para el ingreso en el cuerpo de profesorado de EGB*. Madrid: Cincel.

Bails, B. (1818). *Principios de Matemática de la Real Academia de San Fernando.* Imprenta de Joaquín Ibarra. Quinta edición. Tomo I. pp. 47, 48 y 63.

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. y Silver, A. (1983). Rational Numbers Concepts. En R. Lesh, R. y Landau, M. (Eds.), *Acquisitions of Mathematics Concepts and Processes*. Orlando: Academic Press, pp. 9-126.

Behr, M. J., y Harel, G. (1990). The construct theory of rational numbers: toward a semantic analysis. *Proceedings of the 14 Conference of PME* Vol. III. México, D.F. Pp. 3–10. pp. 120–127.

Behr, M. J, Harel, G, Post, T. y Lesh, R. (1991). The operator construct of rational number: a refinement of the concept. *Proceedings of the 15 Conference of PME* Vol. I. Assisi. Italia. pp.: 120–127.

Bell, A., Swan, M., & Taylor, G. (1981). Choice of operation in verbal problems with decimal numbers. *Educational studies in Mathematics*, *12*, pp.: 399-420.

Bell, A., Fischbein, E., & Greer, B. (1984). Choice of operation in verbal arithmetic problems: The effects of number size, problem structure and context. *Educational Studies in Mathematics*, *15*, pp.: 129–147.

Bell, A., Greer, B., Mangan, C., y Grimison, L. (1989). Children's performance on multiplicative word problems: Elements of a descriptive theory. *Journal for research in mathematics education*, 20(5), pp.: 434-449.

Bourdon, M. (1848). *Tratado completo de Matemáticas.* Trad. Gómez Santa María, A. Madrid: Imprenta Jose María Alonso. Tomo I. pp.: 72, 73 y 76.

Botella, L, Millán, L, y Pérez, P. (2002). *Matemáticas 1º de E.S.O*. Alcoi: Marfil. pp.: 30-35.

Brendefur, J. L. y Pitingoro R. C. (2000). Dividing fractions by using the ratio table. En 1998 Yearbook. *The teaching and learning of algorithms in school mathematics*. pp.: 204-207.

Bruño, G. M. (1939). *Nuevo tratado de Aritmética decimal. Libro del alumno.* Madrid. Ed. Escuelas Cristianas. pp.: 58.

Bruño, G. M. (1940). *Aritmética Grado Medio*. Madrid. Ed. Bruño. pp.: 133-136, 251 y 332.

Bruño, G. M. (1949). *Tratado de Aritmética Segundo Grado*. Madrid. Ed. Bruño. pp.: 332.

Bruño, G. M. (1958). *Aritmética razonada*. Madrid. Ed. Bruño. Décima edición. pp.: 111, 112, 116, 127, 128, 137, 148, 153 y 154.

Bujanda M. P, y Mansilla, S (2000). *Matemáticas 1º ESO*. Madrid: SM. pp.: 83–85.

Bujanda, M. P, y Mansilla, S. (2002). *Números. Matemáticas 2º ESO*. Madrid: SM. pp.: 42.

Carrillo, M.; Hernán, E y Hernán, L., (2007). Las fracciones. En CNICE. MECD. *Recursos educativos para Primaria*. ITE. http://ntic.educacion.es/v5/web/ninos/los_numeros2/.

Casals, R, Goma, A, y Tuduri, J. (1988). *Matemática. 1º curso de BUP*. Barcelona: Teide.

Colera, J, Gaztelu, I, De Guzmán, M, y García, J. E. (1997). *Matemáticas 2º ESO*. Madrid: Anaya.

Colera, J, Gaztelu, I, García, R, Oliveira, M. J. y Martínez, M. M. (2000). *Matemáticas 1º ESO*. Madrid: Anaya.

Condorcet, (1799). *Moyens d'aprendre a compter sûrement et avec facilité*, París: Art, Culture, Lecture-Éditions. 1988.

Contreras, M. (2007). *Matemáticas 3º ESO*. Valencia. Edición del autor.

Corachán, J. Bautista (1699). *Arithmetica demonstrada theorico-practica para lo matemático y mercantil. Explicanse las monedas, pesos y medidas de los hebreos, griegos, romanos y de estos Reynos de España, conferidas entre sí*. Valencia. Jayme de Bordazar.

Dalmau Carles, J (1898). *Soluciones analíticas de los ejercicios y problemas contenidos en los libros "Aritmética razonada y nociones de Álgebra" y "Lecciones de Aritmética"*. Madrid: Librerías Hernando e Hijos de Pérez.

Dalmau Carles, J (1929). *Lecciones de aritmética aplicadas a las diferentes cuestiones mercantiles para las escuelas y colegios de primera enseñanza. Libro del alumno. Grado superior*. Gerona. 115 edición.

Edelvives (1934). *Aritmética de Segundo grado*. Zaragoza. Séptima edición.

Edelvives (1945). *Aritmética de Primer grado*. San Sebastián. Duodécima edición.

Esteve, R., Deusa, M., Montesinos, P, Veres, E, y Ramírez, A. J. (2002). *Matemáticas 3º ESO*. Paterna (Valencia): ECIR.

Fernández y Cardín, J. M. (1863). *Elementos de Matemáticas*. Madrid: Impreso por Gómez Fuentenebro, A. Cuarta edición. pp.: 45, 63 y 65.

Filloy, E. y otros (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. Grupo Editorial Iberoamérica. México, DF.

Fischbein, E.; Deri, M.; Nello, M. y Marino, M. (1985). The role of implicit models in solving problems in multiplication and division. *Journal for research in mathematics education*. 16, 1, pp. 3-21.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel.

Gairín, J.M. y Sancho, J. (2002). *Números y Algoritmos*, Madrid: SINTESIS.

García Roca (1965). *Matemáticas 1º curso*. Valencia: Bello.

García, Vázquez, Gil y Nortes (1996). *Matemáticas curso 1º ESO*. Madrid: Santillana.

Garcia Roca, R, Zaragoza Masip, A y Colomer de Luca, V (1966). *Problemas de Matemáticas Grado Elemental*, Valencia: Bello, 4ª edición.

Gómez, B. (1994). Los métodos de cálculo mental vertidos por la tradición reflejada en los libros de aritmética. *UNO. Revista de didáctica de las matemáticas*. Julio, nº 5, pp. 91–101.

Gómez, B. (2003). *Metodología de investigación. Borrador de trabajo*. Documento interno Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Valencia.

Gómez, B. (2005). *Apuntes de doctorado*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Valencia.

Gómez, B. (2008). Models, Main problem in TSG10. En Bock, Dirk de; Dahl, Bettina; Gomez, Bernardo; Litwin, Cheng Chun Chor (eds.). *Research and development in the teaching and learning of number systems and arithmetic. Proceedings of the Topic Study Group-10, ICME-11*, pp. 137-144. Monterrey, México. Printed in Belgium.

González, C, González, L, Martínez, R. A, y Ocaña, A. J. (2003). *Matemáticas 2º ESO*. Madrid: McGraw Hill.

Greer, B. (1987). Understanding of arithmetical operations as models of situations. En J. Sloboda y D. Rogers (eds.), *Cognitive processes in mathematics* (60-80), Oxford: Clarendon Press.

Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (276-295), New York: Macmillan.

Grupo Cero (1982). *Matemáticas de Bachillerato, Curso 1º*. Barcelona: Teide.

Grupo Cero (1995). *Matemáticas para la Secundaria Obligatoria*. Madrid: MEC y Edelvives, Tomo I.

Grupo Cero (1988). *Signo 4. Matemáticas 4º EGB*. Valencia: Mestral.

G. V. (1992). *Decreto 47/1992, de 30 de marzo, del Gobierno Valenciano, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Valenciana*. DOGV nº 1759, de 6/4/1992.

G. V. (2002). *Decreto 39/2002, de 5 de marzo, del Gobierno Valenciano, por el que se modifica el Decreto 47/1992, de 30 de marzo, del Gobierno Valenciano, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Valenciana*. DOGV nº X2358/2002.

Hart, K. M. et. al. (1981). *Children's Understanding of Mathematics: 11–16*. London: John Murray Ltd.

Hernán, F y Carrillo, M. (1988). *Recursos en el aula de matemáticas.* Matemáticas: cultura y aprendizaje. Madrid: Síntesis.

Kaput, J. J. (1986). Quantity Structure of Algebra Word Problems: A Preliminary Analysis. Southeastern Massachusetts University, manuscrito.

Kieren, T. (1976) On the mathematical, cognitive and instructional foundations of rational numbers. En R. Lesh (Ed.). *Number and Measurement: Papers from a research worksho*p. Columbus, OH: ERIC/SMEAC. pp. 101-144.

Kieren, T., Nelson, D y Smith, C. (1985). Graphical algorithms in partitioning tasks. *The Journal of Mathematical Behaviour,* Nº 4, pp. 24–36.

Lacroix, S. F. (1797). *Tratado elemental de Aritmética.* Traducción española de Rebollo Morales. Edición de 1846. Madrid. Imprenta Nacional. 1797.

Lacroix, S. F. (1846) *Curso completo elemental de Matemáticas Puras*, compuesto en francés por S. F. Lacroix: traducido al castellano por D. Josef Rebollo y Morales, catedrático de los Caballeros Pages de S. M. Tomo II. Algebra. Sexta edición. (Primera edición del original 1819. Título: Cours Complet de Mathematiques à l'usage de l'Ecole centrale des Quatre -Nations; Ouvrage adopté par le Gouvernement pour les Lycées, ecoles secondaires, Colléges, etc.). Madrid: En la Imprenta Nacional.

Lamon, S. (2001). Presenting and Representing. From Fractions to Rational Numbers. En *The Roles of Representation in Schol Mathematics*, 2001 Yearbok of the NCTM., edited by Albert A. Cuoco and Frances R. Curcio, p. 147. Reston, Va.: NCTM.

Lesh, R., Landau, M. y Hamilton, E. (1983). Conceptual Models and Problem–Solving Research. En R. Lesh y M. Landau (Edts.) *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*. Orlando: Academic Press, Inc. Pp. 309–336.

Marcos de Lanuza, F. (1975). *Matemáticas BUP. Primer curso*. Madrid: Guillermo del Toro.

Marjal. (1984). *Matemáticas 6º Primaria.* Barcelona: Edebé.

Maz, A. (2006). *Los números negativos en España en los siglos XVIII y XIX.* Tesis doctoral. Dpto. Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

MEC, (1970). *Ley 14/1970, de 4 de agosto, General de Educación y financiamiento de la reforma educativa*. B.O.E. de 6 de agosto de 1970.

MEC, (1990). *Ley Orgánica 1/1990, de 3 de octubre, de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE).* BOE de 4 de octubre de 1990.

MECD, (1992). *Resolución 5/3/1992, BOE de 24 de marzo, por la que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria*.

MECD, (2003). *Real Decreto 831/2003, de 27 de junio, por el que se establece la ordenación general y las enseñanzas comunes de la Educación Secundaria Obligatoria.* BOE de 3 de julio de 2003.

MECD, (2007). *Orden ECI/2220/2007, de 12 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación secundaria obligatoria.* BOE de 21 de julio de 2007.

Moya, A. (1897). *Elementos de Matemáticas. Tomo 1: Aritmética y álgebra.* Madrid: Hernando.

Nesher, P. (1975). Verbal cues as an interfering factor in verbal problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 6, 41 – 51.

Nesher, P. (1988). Multiplicative school word problems: Theoretical approaches and empirical findings. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum; Reston, VA: NCTM. pp. 41-52

Newstead, K y Murray, H. (1998). Young Students' Constructions of Fractions. *Proceedings of the 22 Conference of PME*. Sudáfrica. Vol. III. Pp. 3–295/3–302.

NCTM (1972). *Números racionales*. México, DF : Trillas.

Nieto, P., Guevara, F., Carretero, R., Carrillo, J. y Herrera, J. A. (1994), Números, *Manual de Matemáticas, Primer ciclo de ESO*. Barcelona: OCTAEDRO.

Ott, J. M., Snook, D. L. y Gibson, D. L. (1991). Understanding partitive division of fractions. *Arithmetic Teacher*, 39(2), 7-11.

Pérez, A, Amigo, C, Peña, P, Rodríguez, A. y Sivit, F (1998). *Matemáticas 3º ESO*. Madrid: McGraw Hill.

Pérez de Moya, J. (1562). *Arithmetica práctica y speculativa.* Salamanca. Biblioteca Castro. Madrid: Ediciones de la Fundación José Antonio de Castro. 1998.

Puig, L. (1997). Notes on Semiotics and Mathematics Education. Presentado en el grupo de semiótica de las matemáticas en 21st Conference of PME, Finland.

Puig, L. (2001). *Hans Freudenthal: Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas (textos seleccionados).* Departamento de Matemática Educativa CINVESTAV. México, DF.

Puig, L. y Cerdán, F. (1989). *Problemas aritméticos escolares.* Matemáticas: cultura y aprendizaje. Madrid: Síntesis.

Rey Pastor, J. y Puig Adam, P. (1932). *Elementos de Aritmética.* Col. Elemental intuitiva. Tomo I. Sexta Edición. Madrid: Imp. A. Marzo.

Rey Pastor, J. y Puig Adam, P. (1936). *Matemáticas 4º curso. Parte 1ª: Aritmética.* 2ª Edición corregida. Madrid: Unión Poligráfica, SL.

Rey Pastor, J., Pi Calleja, P. y A. Trejo, C. (1957). *Análisis Matemático*. Vol. I. Buenos Aires. Argentina: Kapesluz.

Roanes, E. (1970). *Didáctica de las Matemáticas*. Madrid: Anaya.

Rubio, G., Del Valle, R. y Del Castillo, A. (2007). Producción de sentidos para los objetos algebraicos de número, variable y función al resolver problemas de variación continua. Evidencias empíricas sobre nuevos sentidos de uso del número negativo. En Camacho, M., Flores, P. y Bolea, P. (eds). *Investigación en Educación Matemática XI.* SEIEM. La Laguna. Tenerife. pp. 239-247.

Sánchez, J. L. y Vera, J. (2003). *Matemáticas 2º ESO*. Proyecto EXEDRA. Madrid: Oxford Educación.

Sánchez Vidal, B. (1866). *Lecciones de Aritmética*, 2ª Ed. Madrid: Ed. Imprenta de F. Martínez García.

Sanct Climent, Francesch (1482). *Aritmética Práctica*. Tractat 2n. XIII. Cap. III.

Santos, D., García, P., Vázquez, C., Nevot, A., Gil, J., Nortes, A. (1995). *Matemáticas curso 3º ESO.* Madrid: Santillana.

Schwartz, J. L. (1981). *The role of semantic understanding in solving multiplication & division word problems*. Final report to NIE (Grant NIE–G–80–0144). MIT, Cambrigde, MA.

Schwartz, J. L. (1988). Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades*, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum; Reston, VA: NCTM. pp. 41−52.

Segura, S, Ramírez, A. J, y Segura, S. (1986). *Matemáticas 1º BUP*. Valencia: ECIR.

Sigler, L. E. (2002). *Fibonacci's Liber Abaci: a translation into modern English of Leonardo Pisano's book of calculation*. New York: Springer-Verlag. Pp.: 49.

Sinicrope, R, W. Mick, H, R. Kolb, J, (2002). Interpretations of Fraction Division. (in *Making Sense of Fractions, Ratios, and Proportions*). 2002 Yearbook. Pp. 153-155.

Sharp, J. (2000). A constructed algorithm for the division of fractions. En 1998 Yearbook. *The teaching and learning of algorithms in school mathematics*. Pp.:198-203.

Smith, (1958). *History of Mathematics*. New York: Dover Publications, Inc. (1925).

Suarez Somonte I. (1932). *Aritmética*. Madrid: Imprenta Sáez Hermanos.

Stevin, S. (1585). La Disme. En Girard (ed.) *Les oeubres mathematiques*. Leyden. 1625 o 1634.

Thibodeau, P. & Mestre, J. P. (1989). Understanding Multiplicative Contexts Involving Fractions. Journal of educational Psychology. 81, 4, 547-557.

Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective' Teachers' knowledge of children's conceptions: the case of división of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education 31*, pp.: 5-25.

Valdes, J. y Santos, J. J. (1975). *Matemáticas especiales COU. Plan 1975*. Madrid: Bruño.

Valdivia Ureña y García Roca (1969). *Matemáticas 3º curso*. Valencia: Bello.

Vallejo, J. M. (1813). *Tratado Elemental de Matemáticas.* Escrito de orden de S. M. para uso de los caballeros seminaristas del seminario de nobles de Madrid y demás casas de educación del Reino. Cuarta edición corregida y considerablemente aumentada. Tomo I. Parte primera, que contiene la Aritmética y Álgebra. Madrid. Imp Garrayasaza. 1841.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisitions of mathematics concepts and processes*. London: Academy Press. pp. 127–174.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Numbers concepts and operations in the middle grades*. Hillsdale, NJ: Erlbaum; Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. pp. 141–161.

Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. México: Trillas (reimp. 1997).

Vizmanos, J. R, Anzola, M, Peralta, J, y Bargueño, J. (2002). *Gauss. Matemáticas 2º ESO*. Madrid: SM.

Warrington, M. A. (1997). How children think about division with fractions. En Reston, Va. Math. Teaching (Eds.), *Mathematics Teaching in the Middle School*, Vol. 2. n6, pp. 391–394.

Yamaguchi, T. y Jwasaki, H. (1999). Division with fractions is not division but multiplication: On the development from fractions to rational numbers in terms of the Generalization Model designed by Dörfler. En O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 337-344). Haifa: Technion-Israel Institute of Technology.

10.1. DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS

A continuación pasamos a describir y analizar las respuestas de los estudiantes al cuestionario de investigación.

10.1.1. El cuestionario de formas textuales

En la siguiente tabla se registran las puntuaciones otorgadas por cada uno de los estudiantes de la muestra a cada una de las formas textuales que se proponen en el cuestionario.

	Forma textual							
Alumno	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**
Rubén	8	1	5	2	4	3	7	8
Cristina	1	3	5	7	6	2	8	4
Ana	3	4	7	2	6	1	8	5
Miriam	4	3	1	5	2	6	8	7
Ángela	2	1	7	4	3	8	4	2
Juan	8	6	2	1	3	7	4	5
Casandra	8	7	6	5	3	4	1	2
Christian	3	5	4	1	2	6	7	8
Ana María	3	7	8	2	4	1	5	6
Totales Grupo 1	**40**	**37**	**45**	**29**	**33**	**38**	**49**	**45**
Vicent	1	3	4	6	5	7	8	3
Fco. Javier	2	6	3	5	7	4	1	8
Aída	4	2	6	1	5	3	7	8
Carmen	1	4	2	3	6	5	7	8
Mireia	5	2	6	1	7	3	4	8
Héctor	2	7	6	1	4	5	3	8
Laura A	2	8	7	3	6	5	1	4
Patri	1	5	6	2	7	8	3	4
Laura B	5	2	4	3	6	1	7	8
Estefanía	3	2	4	5	7	1	6	8
Jennifer	1	1	3	2	1	1	6	1
Jesús	1	6	4	1	5	1	2	6
Totales Grupo 2	**28**	**47**	**55**	**33**	**66**	**44**	**55**	**74**
Total muestra	**68**	**84**	**100**	**62**	**99**	**82**	**104**	**119**

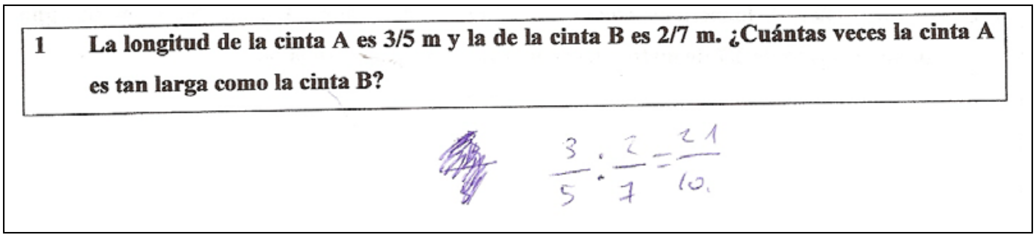
Como resultado de estas puntuaciones, el orden de preferencia para las formas textuales y los modelos semánticos que se observa en la muestra es el siguiente:

orden	**código**	**forma textual**	**modelo semántico**
1	d)	hacer la fracción 3/4 cinco veces menor y siete veces mayor	escala
2	a)	repartir la fracción 3/4 en partes iguales.	reparto
3	f)	hallar una fracción que multiplicada por 5/7 da 3/4	Inversión de multiplicación F. aritmética
4	b)	averiguar cuántas veces cabe 5/7 en 3/4	medida
5	e)	hallar otra fracción, tal que 3/5 se compone de ella del mismo modo que 5/7 se compone de la unidad	Proporción II
6	c)	hallar otra fracción que contiene a la unidad tantas veces como 3/4 contiene a 5/7	Proporción I
7	g)	multiplicar la fracción 3/4 por la fracción recíproca de 5/7	Inversión de multiplicación F. algebraica
8	h)	multiplicar la fracción 3/4 por la inversa de la fracción 5/7	Inversión de multiplicación F. estructural

Según esto, las formas textuales predominantes en la muestra son la d), a), f) y b), que se corresponden, respectivamente, con los modelos semánticos de escala, reparto, inversión de la multiplicación (en su forma aritmética) y medida. Hay que destacar que los modelos de inversión de la multiplicación (en sus formas algebraica y estructural) quedan relegados a los últimos lugares, a pesar del predominio que tienen en la actualidad en los libros de texto. Una posible explicación radica en la propia naturaleza de la tarea, ya que al ser las últimas en la tabla que aparece en el enunciado de la tarea, parten con desventaja respecto del resto. A pesar de ello, la inversión aritmética de multiplicación aparece en cuarto lugar. Otra posible explicación es que puede que algún estudiante haya aplicado la escala de puntuaciones al revés, es decir, 8 = mayor preferencia, 1 = menor preferencia. En cualquier caso, este estudio preliminar se contrastará con las formas textuales que los estudiantes pongan en juego en el proceso de resolución de los problemas.

10.1.2. Tarea 1: "Las dos cintas"

- Alumno 1(Rubén)



1 La longitud de la cinta A es 3/5 m y la de la cinta B es 2/7 m. ¿Cuántas veces la cinta A es tan larga como la cinta B?

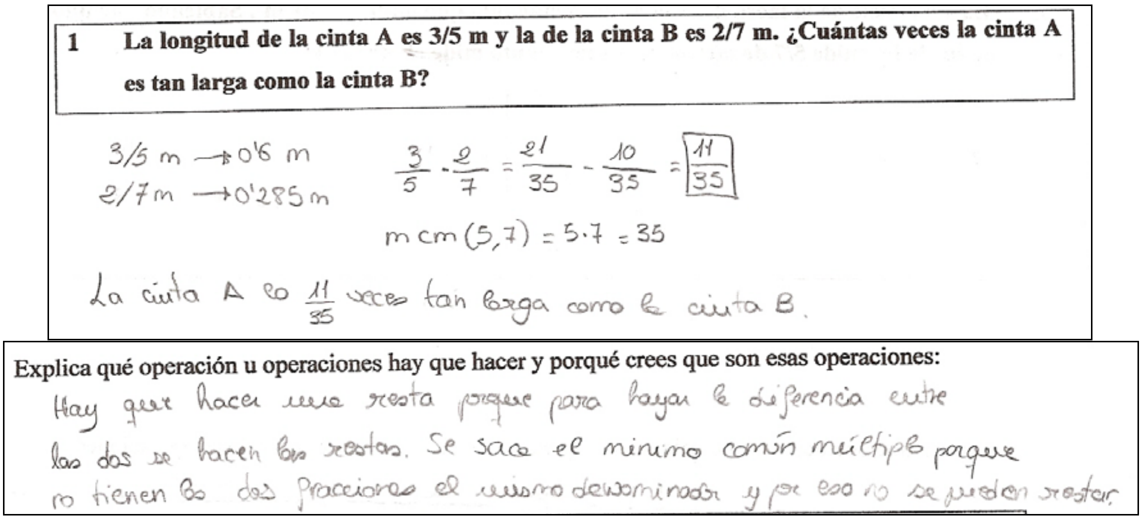
$\frac{3}{5} : \frac{2}{7} = \frac{21}{10}$

Trascripción: "$\frac{3}{5} : \frac{2}{7} = \frac{21}{10}$"

Explicación: El estudiante divide directamente la fracción 3/5 entre la fracción 2/7. No explica porqué ha elegido esta operación

Análisis: Aunque no da razones para ello, el estudiante ha enfocado la resolución usando un método de división directa (esquema ternario), y un algoritmo de productos cruzados, dando una solución correcta.

- Alumna 2 (Cristina)



1 La longitud de la cinta A es 3/5 m y la de la cinta B es 2/7 m. ¿Cuántas veces la cinta A es tan larga como la cinta B?

Explica qué operación u operaciones hay que hacer y porqué crees que son esas operaciones:

Trascripción:

$$2/3\,\text{m} \rightarrow 0'6\,\text{m} \qquad \frac{3}{5} - \frac{2}{7} = \frac{21}{35} - \frac{10}{35} = \frac{11}{35} \qquad \text{mcm}(5,7) = 5 \cdot 7 = 35$$
$$2/7 \rightarrow 0'285\,\text{m}$$

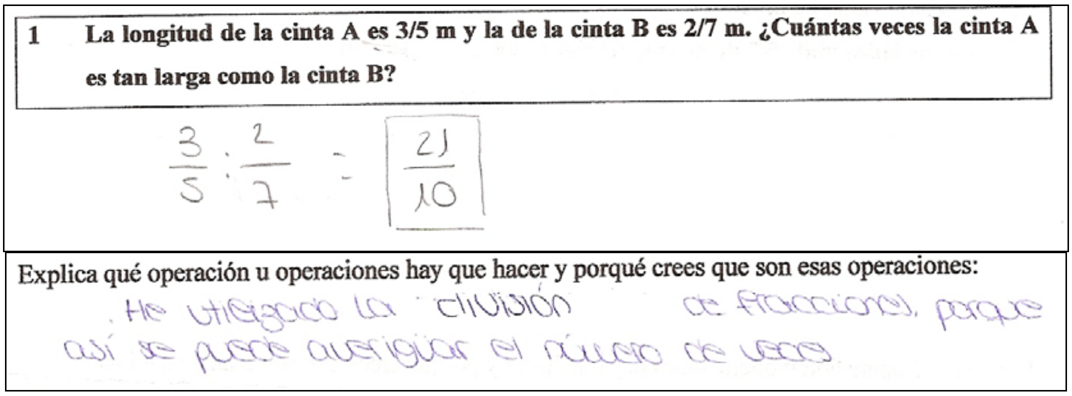
"La cinta A es $\frac{11}{35}$ veces tan larga como la cinta B.

Hay que hacer una resta porque para hayar la diferencia entre las dos se hacen las restas. Se saca el mínimo común múltiplo porque no tienen las dos fracciones el mismo denominador y por eso no se pueden restar".

Explicación: La estudiante resta la fracción 3/5 menos la fracción 2/7, obteniendo previamente el mínimo común múltiplo de los denominadores. Explica su elección de la operación basándose en que hay que ver la diferencia entre las dos cintas. Obtiene una solución incorrecta.

Análisis: la estudiante enfoca la resolución desde el punto de vista aditivo, mediante resta de las fracciones. No incluye ninguna representación gráfica.

- Alumna 3 (Ana)



1 La longitud de la cinta A es 3/5 m y la de la cinta B es 2/7 m. ¿Cuántas veces la cinta A es tan larga como la cinta B?

$\frac{3}{5} : \frac{2}{7} = \boxed{\frac{21}{10}}$

Explica qué operación u operaciones hay que hacer y porqué crees que son esas operaciones:

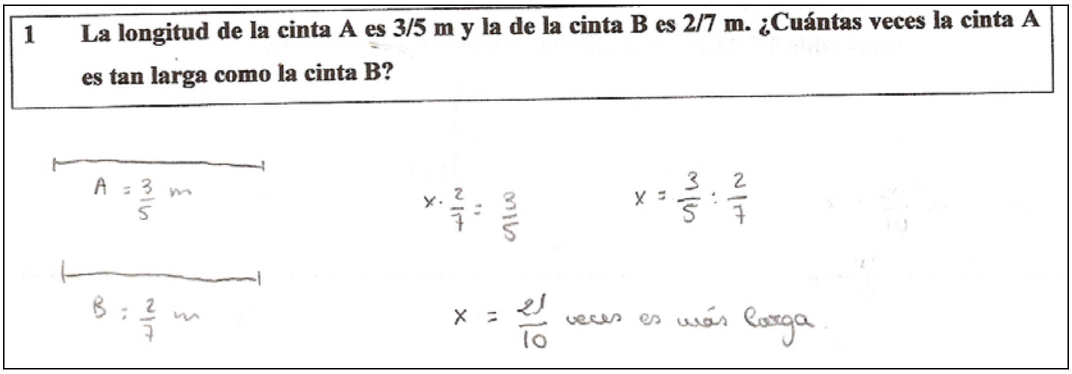
He utilizado la división de fracciones, porque así se puede averiguar el número de veces.

Trascripción: "$\frac{3}{5}:\frac{2}{7}=\frac{21}{10}$ He utilizado la división de fracciones porque así se puede averiguar el número de veces".

Explicación: La estudiante divide la fracción 3/5 entre la fracción 2/7, obteniendo el resultado correcto. Explica su elección de la operación basándose en que mediante la división se puede averiguar el número de veces.

Análisis: La estudiante enfoca el problema como la búsqueda del factor multiplicativo (el número de veces) entre dos cantidades del mismo espacio de medida. Utiliza un esquema ternario, un método de resolución de división directa (lo que es coherente con el esquema ternario), y el algoritmo de los productos cruzados. La forma textual que usa corresponde al modelo semántico de medida. No incluye ninguna representación gráfica en su respuesta.

- Alumna 4 (Miriam)



1 La longitud de la cinta A es 3/5 m y la de la cinta B es 2/7 m. ¿Cuántas veces la cinta A es tan larga como la cinta B?

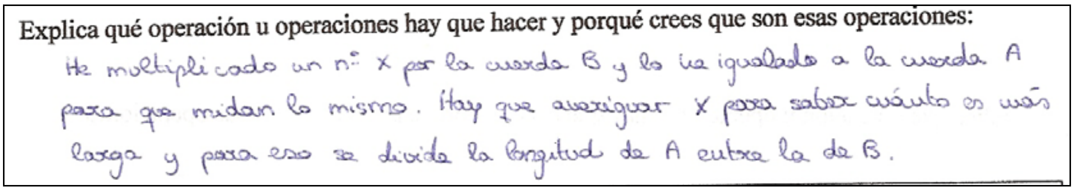
$A = \frac{3}{5}$ m

$B = \frac{2}{7}$ m

$x \cdot \frac{2}{7} = \frac{3}{5}$

$x = \frac{3}{5} : \frac{2}{7}$

$x = \frac{21}{10}$ veces es más larga.


Explica qué operación u operaciones hay que hacer y porqué crees que son esas operaciones:

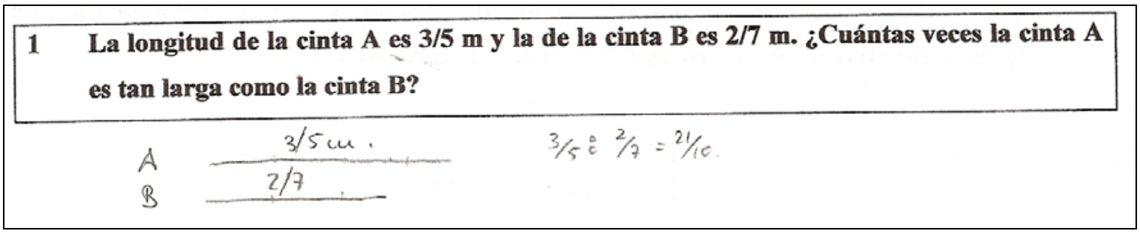
He multiplicado un nº X por la cuerda B y lo he igualado a la cuerda A para que midan lo mismo. Hay que averiguar X para saber cuánto es más larga y para eso se divide la longitud de A entre la de B.

Trascripción: Dibuja dos segmentos, en uno escribe A=$\frac{3}{5}$ m y en el otro B=$\frac{2}{7}$ m "$X\cdot\frac{2}{7}=\frac{3}{5}$ $\quad X=\frac{3}{5}:\frac{2}{7}$ $\quad X=\frac{21}{10}$ veces es más larga. He multiplicado un nº X por la cuerda B y lo he igualado a la cuerda A par que midan lo mismo. Hay que averiguar X para saber cuánto es más larga y para eso se divide la longitud de A entre la de B".

Explicación: La estudiante plantea la ecuación x·2/7=3/5 y despeja X dividiendo la fracción 3/5 entre la fracción 2/7, obteniendo el resultado correcto. Explica su elección de la operación basándose en que "para saber cuánto es más larga hay que dividir".

Análisis: La estudiante identifica un modelo de factor perdido y usa un esquema ternario. Su método de resolución es el planteamiento y resolución de una ecuación. Para despejar la X efectúa una división de fracciones, mediante el algoritmo de los productos cruzados.. La forma textual que utiliza corresponde al modelo semántico de medida. La representación gráfica que ilustra su respuesta corresponde al modelo de recta numérica.

- Alumna 5 (Ángela)

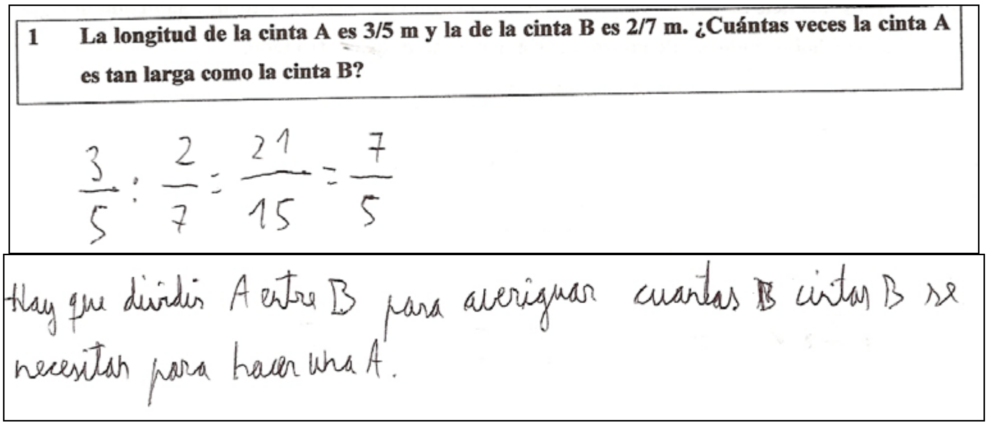

1 La longitud de la cinta A es 3/5 m y la de la cinta B es 2/7 m. ¿Cuántas veces la cinta A es tan larga como la cinta B?

Trascripción: Dibuja dos segmentos A y B, en uno escribe $\frac{3}{5}$ m y en el otro $\frac{2}{7}$ "$\frac{3}{5}:\frac{2}{7}=\frac{21}{10}$".

Explicación: La estudiante divide directamente la fracción 3/5 entre la fracción 2/7. No explica porqué ha elegido esta operación.

Análisis: Aunque no da razones para ello, la estudiante ha enfocado la resolución usando un método de división directa. (esquema ternario) y un algoritmo de productos cruzados, dando una solución correcta.

- Alumno 6 (Juan)

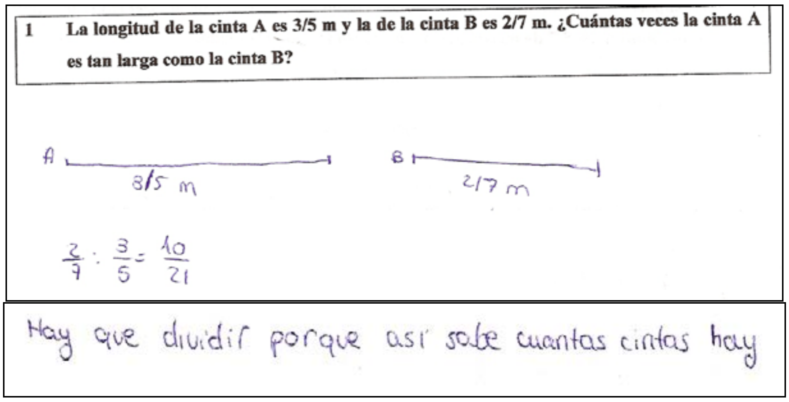


Trascripción: " $\frac{3}{5}:\frac{2}{7}=\frac{21}{15}=\frac{7}{5}$. Hay que dividir A entre B para averiguar cuántas cintas B se necesitan para tener una A".

Explicación: El estudiante divide directamente la fracción 3/5 entre la fracción 2/7, pero comete un error y obtiene un resultado incorrecto Explica su elección diciendo que hay que dividir para averiguar cuántas cintas B se necesitan para tener una A.

Análisis: La forma textual (averiguar cuántas cintas B hacen una cinta A) corresponde al modelo semántico de medida. Usa un esquema ternario, un método de división directa y el algoritmo de productos cruzados, pero comete un error al multiplicar: 2x5=15. No incluye ninguna representación gráfica.

- Alumna 7 (Casandra)

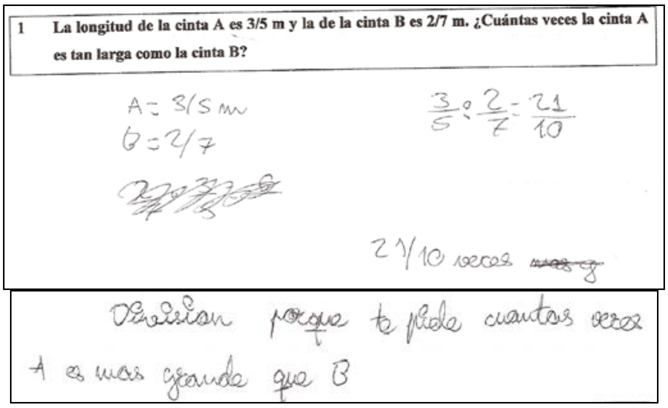


Trascripción: Dibuja dos segmentos A y B y en uno escribe 8/5 m y en el otro 2/7 m. " $\frac{2}{7}:\frac{3}{5}=\frac{10}{21}$. Hay que dividir porque así sale cuantas cintas hay".

Explicación: La estudiante divide directamente la fracción 2/7 entre la fracción 3/5, obteniendo una solución incorrecta. Explica su elección diciendo que hay que dividir porque así sale cuántas cintas hay.

Análisis: La estudiante utiliza una forma textual ("cuántas cintas hay") que corresponde al modelo semántico de medida. Su esquema de resolución es ternario, su método de resolución es de división directa y usa el algoritmo de productos cruzados, aunque la solución que da no es correcta.

- Alumno 8 (Christian)


1 La longitud de la cinta A es 3/5 m y la de la cinta B es 2/7 m. ¿Cuántas veces la cinta A es tan larga como la cinta B?

A= 3/5 m
B=2/7

$\frac{3}{5} : \frac{2}{7} = \frac{21}{10}$

21/10 veces ~~más g~~

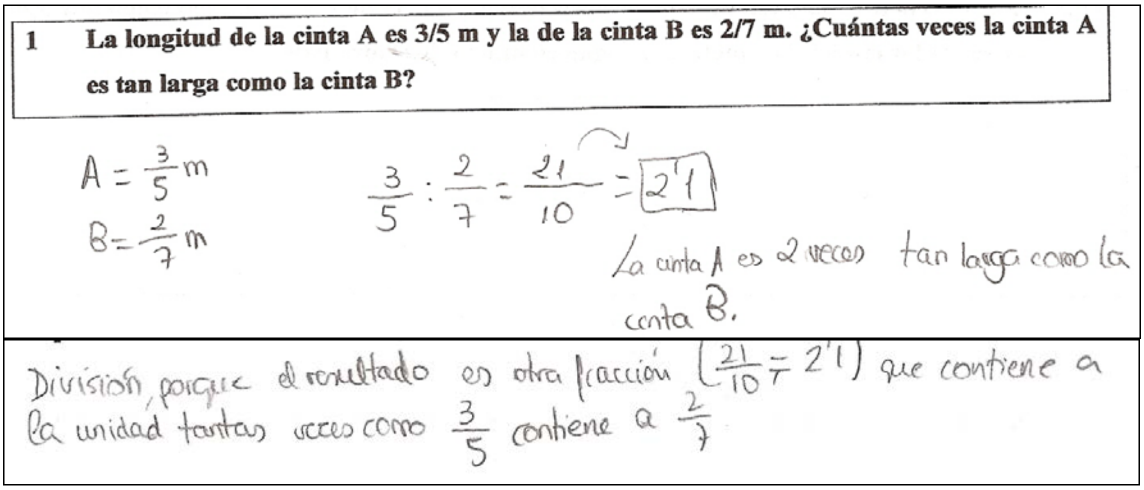
División porque te pide cuantas veces A es más grande que B

Trascripción: "A=3/5 m, B=2/7, $\frac{3}{5}:\frac{2}{7}=\frac{21}{10}$; 21/10 veces. División porque te pide cuantas veces A es más grande que B".

Explicación: El estudiante divide directamente la fracción 3/5 entre la fracción 2/7, obteniendo la solución correcta. Explica que hay que hacer la operación de división porque pide cuántas veces A es más grande que B.

Análisis: El estudiante utiliza una forma textual (cuántas veces A es más grande que B) que corresponde al modelo semántico de escala. Su esquema de resolución es ternario, su método de resolución es de división directa y usa el algoritmo de productos cruzados, dando la solución correcta. No incluye ninguna representación gráfica.

- Alumna 9 (Ana María)


1 La longitud de la cinta A es 3/5 m y la de la cinta B es 2/7 m. ¿Cuántas veces la cinta A es tan larga como la cinta B?

$A = \frac{3}{5} m$

$B = \frac{2}{7} m$

$\frac{3}{5} : \frac{2}{7} = \frac{21}{10} = \boxed{2'1}$

La cinta A es 2 veces tan larga como la cinta B.

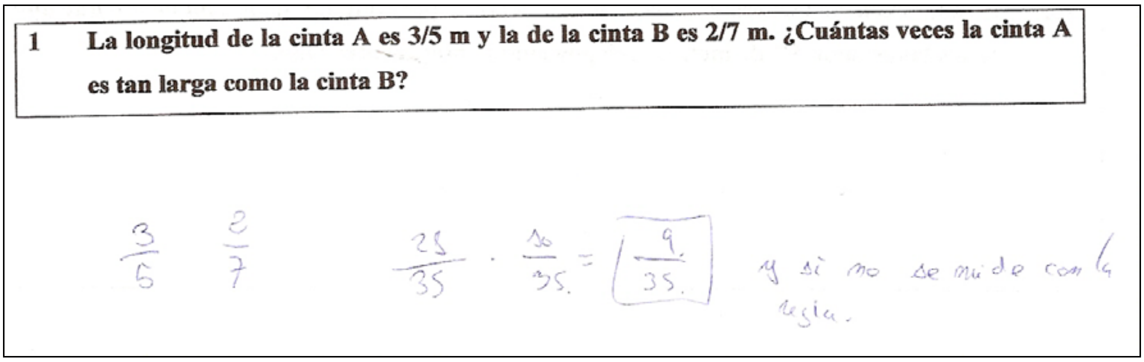
División, porque el resultado es otra fracción $(\frac{21}{10} = 2'1)$ que contiene a la unidad tantas veces como $\frac{3}{5}$ contiene a $\frac{2}{7}$

Trascripción: "A=3/5 m, B=2/7 m, $\frac{3}{5}:\frac{2}{7}=\frac{21}{10}=2'1$; La cinta A es 2 veces tan larga como la cinta B. División porque el resultado es otra fracción (21/10=2'1) que contiene a la unidad tantas veces como 3/5 contiene a 2/7".

Explicación: El estudiante divide directamente la fracción 3/5 entre la fracción 2/7, obteniendo la solución correcta, que expresa en forma decimal, o dice que la cinta A es 2 veces tan larga como la B. Explica que hay que hacer la operación de división porque el resultado es otra fracción que contiene a la unidad tantas veces como 3/5 contiene a 2/7.

Análisis: La forma textual que utiliza Ana Maria corresponde al modelo semántico de razón unitaria (proporción I), pero no parece que su esquema de resolución sea cuaternario. De hecho, su esquema de resolución es ternario, su método de resolución es de división directa y usa el algoritmo de productos cruzados, dando la solución correcta, en forma decimal.

- Alumno 10 (Vicent)


1 **La longitud de la cinta A es 3/5 m y la de la cinta B es 2/7 m. ¿Cuántas veces la cinta A es tan larga como la cinta B?**

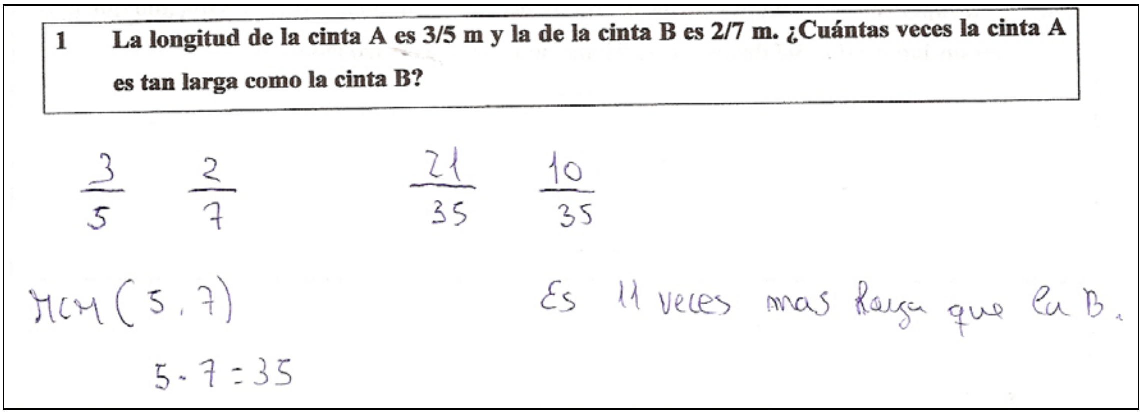
$\frac{3}{5}$ $\frac{2}{7}$ $\frac{21}{35} \cdot \frac{10}{35} = \boxed{\frac{9}{35}}$ y si no se mide con la regla.

Trascripción: "3/5, 2/7, $\frac{21}{35}\frac{10}{35}=\frac{9}{35}$; Y si no se mide con la regla".

Explicación: El estudiante reduce las fracciones a común denominador, pero no está claro si multiplica o resta las fracciones, dando un resultado no correcto. Escribe un comentario no esperado ("Y si no se mide con la regla").

Análisis: Aunque no sabemos qué operación utiliza en su respuesta, el comentario de Vicent indica que está pensando en hacer una comparación de tipo aditivo (resta). Solución incorrecta. No incluye ninguna representación gráfica.

- Alumno 11 (Fco. Javier)

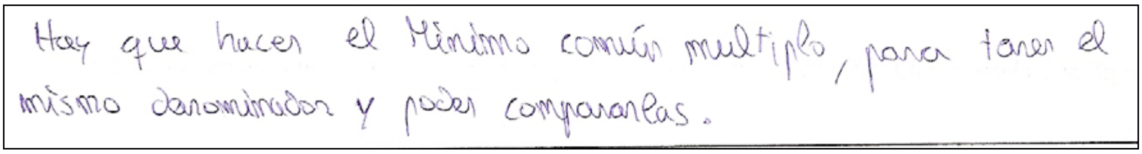

1 **La longitud de la cinta A es 3/5 m y la de la cinta B es 2/7 m. ¿Cuántas veces la cinta A es tan larga como la cinta B?**

$\frac{3}{5}$ $\frac{2}{7}$ $\frac{21}{35}$ $\frac{10}{35}$

MCM (5, 7)

$5 \cdot 7 = 35$

Es 11 veces mas larga que la B.

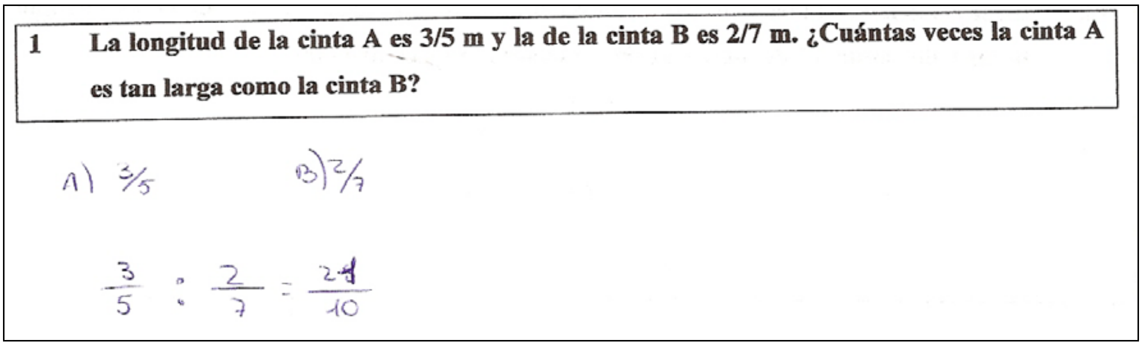

Hay que hacer el Mínimo común multiplo, para tener el mismo denominador y poder compararlas.

Trascripción: “3/5, 2/7, $\frac{21}{35},\frac{10}{35}$; mcm(5, 7), 5·7=35. Es 11 veces más larga que la B. Hay que hacer el mínimo común múltiplo, para tener el mismo denominador y poder compararlas”.

Explicación: El estudiante reduce las fracciones a común denominador, y resta las fracciones, dando un resultado no correcto (“Es 11 veces más larga que la B”). En su explicación indica que hay que reducir las fracciones a común denominador para poder comparar las fracciones.

Análisis: El estudiante enfoca la resolución desde el punto de vista de la comparación aditiva de las fracciones, basada en la resta y no en la división., ignorando la comparación multiplicativa. Solución incorrecta. No incluye ninguna representación gráfica.

- Alumna 12 (Aída)


1 La longitud de la cinta A es 3/5 m y la de la cinta B es 2/7 m. ¿Cuántas veces la cinta A es tan larga como la cinta B?

A) 3/5 B) 2/7

$\frac{3}{5} : \frac{2}{7} = \frac{21}{10}$

Trascripción: “A) 3/5, B) 2/7, $\frac{3}{5}:\frac{2}{7}=\frac{21}{10}$”.

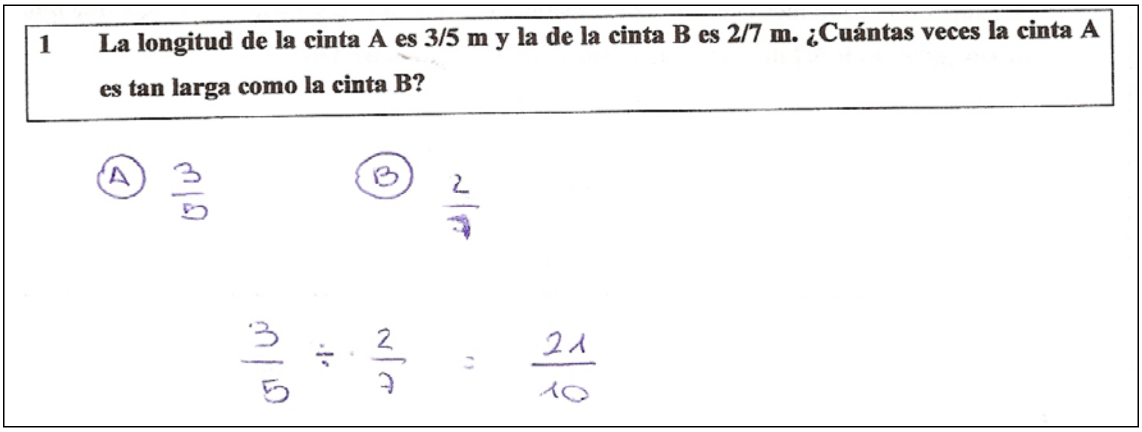
Explicación: La estudiante divide directamente las fracciones, dando un resultado correcto, pero no acompaña ninguna explicación.

Análisis: La estudiante usa un esquema de resolución ternario, un método de resolución de división directa y un algoritmo de productos cruzados. Aunque la solución es correcta, al no incluir ninguna explicación, no hemos detectado qué modelo semántico usa. No incluye ninguna representación gráfica.

- Alumna 13 (Carmen)

En blanco

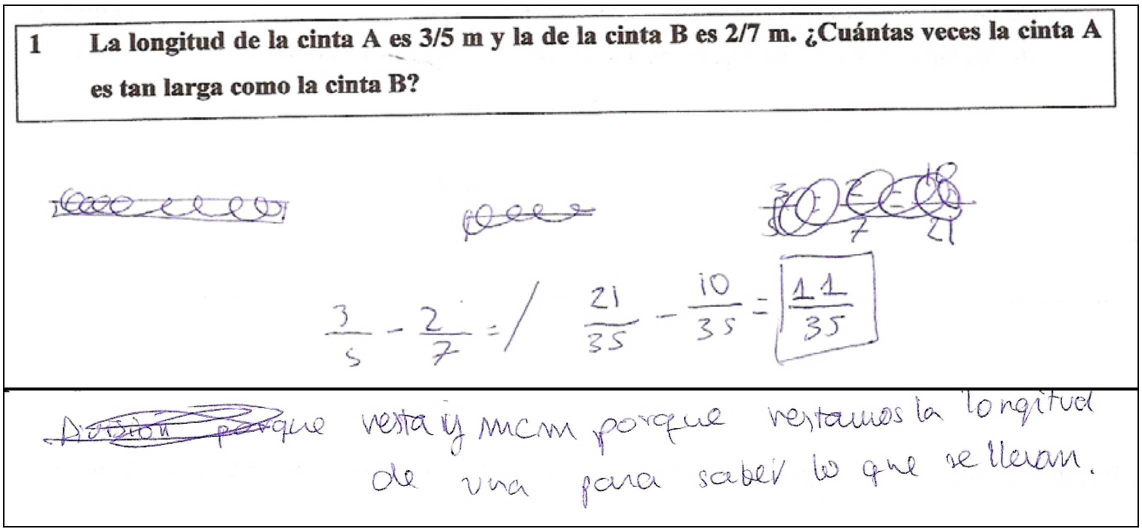
- Alumna 14 (Mireia)



Trascripción: "A) 3/5, B) 2/7, $\frac{3}{5}:\frac{2}{7}=\frac{21}{10}$".

Explicación y Análisis: Es el mismo caso que Aída (Alumna 12), con la diferencia de que usa el símbolo de división que aparece en las calculadoras (÷)

- Alumno 15 (Héctor)

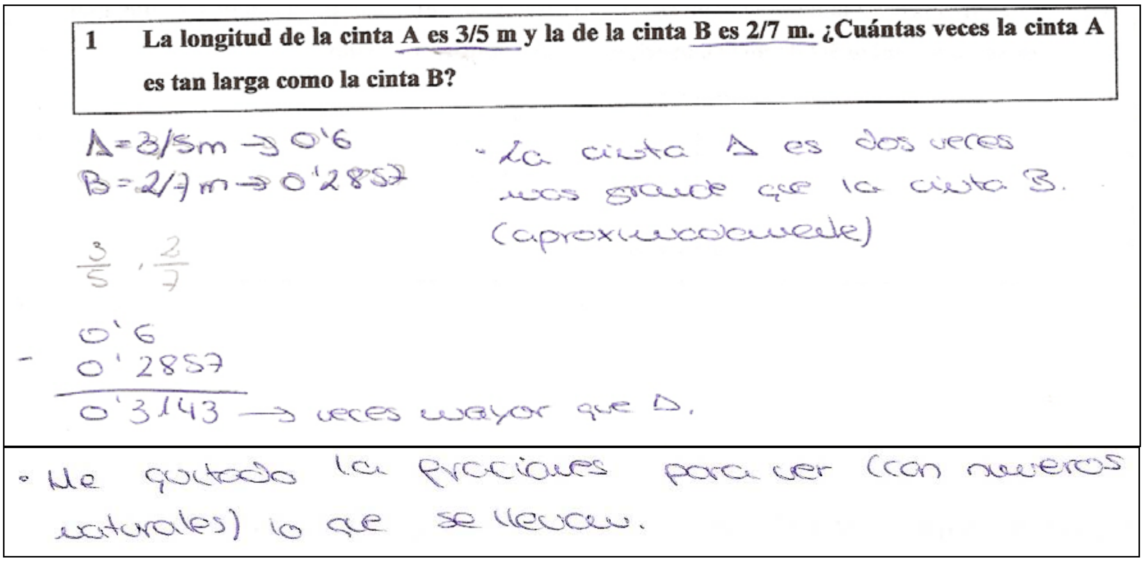


Trascripción: " $\frac{3}{5}:\frac{2}{7}=/\frac{21}{35}-\frac{10}{35}=\frac{11}{35}$. resta y mcm porque restamos la longitud de una para saber lo que se llevan".

Explicación: El estudiante resta las fracciones, dando un resultado no correcto. En su explicación dice que hay que restar las longitudes para saber lo que se llevan.

Análisis: El estudiante enfoca la resolución desde el punto de vista de la comparación aditiva de las fracciones, basada en la resta y no en la división., ignorando la comparación multiplicativa. Solución incorrecta.

- Alumna 16 (Jennifer)



1 **La longitud de la cinta A es 3/5 m y la de la cinta B es 2/7 m. ¿Cuántas veces la cinta A es tan larga como la cinta B?**

A=3/5m → 0'6
B=2/7m → 0'2857

$\frac{3}{5}$, $\frac{2}{7}$

0'6
− 0'2857
0'3143 → veces mayor que A.

· La cinta A es dos veces mas grande que la cinta B. (aproximadamente)

· He quitado la fracciones para ver (con numeros naturales) lo que se llevan.

Trascripción: "A=3/5 m → 0'6; B=2/7 m → 0'2857; 0'6–0'2857=0'3143→veces mayor que A. La cinta A es dos veces más grande que la cinta B (aproximadamente). He quitado las fracciones para ver (con números naturales) lo que se llevan".

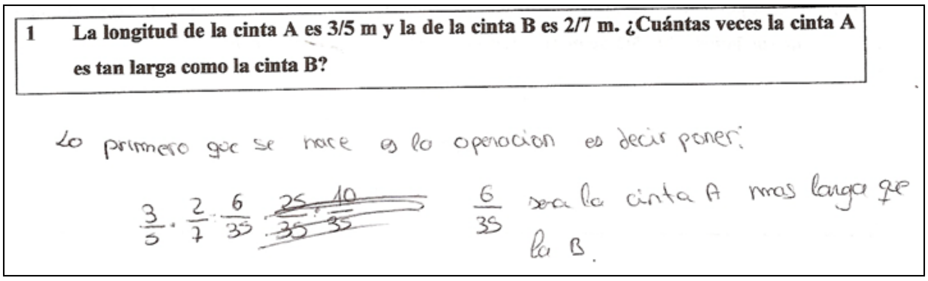
Explicación: La estudiante transforma las fracciones en decimales y resta los decimales, dando un resultado incorrecto. Concluye que la cinta A es, aproximadamente, dos veces más grande que la cinta B. En su explicación dice que ha quitado las fracciones para ver con los naturales lo que se llevan.

Análisis: La estudiante tiene problemas con las fracciones; y las evita convirtiéndolas en decimales, pero en su explicación habla de números naturales. El enfoque de resolución es aditivo, basado en la resta de decimales, pero no está claro si su conclusión se basa en el resultado de la resta (0'3143 es aproximadamente la mitad de la cinta A) o en la observación empírica de que la longitud de la cinta B (0'2857≈0'3) es la mitad de la cinta A. No incluye ninguna representación gráfica.

- Alumna 17 (Laura A)

En blanco. Se limita a escribir las fracciones del enunciado, $\frac{3}{5}$ y $\frac{2}{7}$

- Alumna 18 (Patri)



1 **La longitud de la cinta A es 3/5 m y la de la cinta B es 2/7 m. ¿Cuántas veces la cinta A es tan larga como la cinta B?**

Lo primero que se hace es la operacion es decir poner:

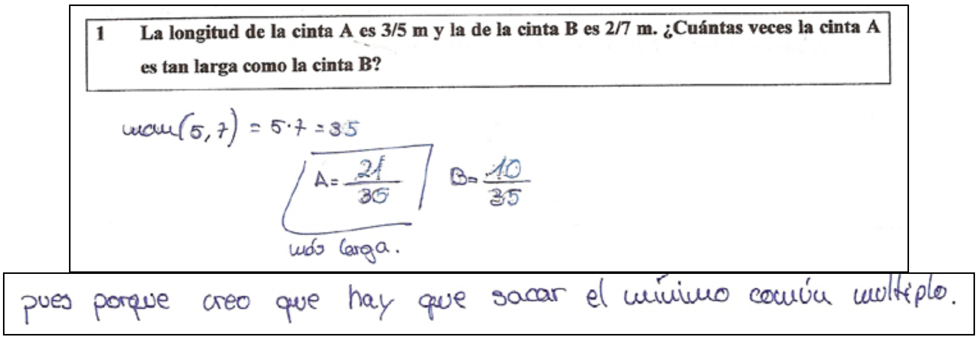
$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{6}{35}$ $\cancel{\frac{25}{35} \cdot \frac{10}{35}}$ $\frac{6}{35}$ sera la cinta A mas larga que la B.

Trascripción: "Lo primero que se hace es la operación es decir poner: $\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{7}=\frac{6}{35}$. $\frac{6}{35}$ será la cinta A mas larga que la B".

Explicación: La estudiante multiplica las fracciones que aparecen en el enunciado, en el mismo orden. Concluye que el resultado del producto será el número de veces que la cinta A es más larga que la B. No incluye ninguna explicación.

Análisis: La estudiante enfoca el problema desde un punto de vista multiplicativo, pero no identifica la división como la operación que permite comparar multiplicativamente y, en su lugar, usa el producto. No incluye ninguna representación gráfica.

- Alumna 19 (Laura B)


1 La longitud de la cinta A es 3/5 m y la de la cinta B es 2/7 m. ¿Cuántas veces la cinta A es tan larga como la cinta B?

mcm(5, 7) = 5·7 = 35

A = 21/35 B = 10/35

más larga.

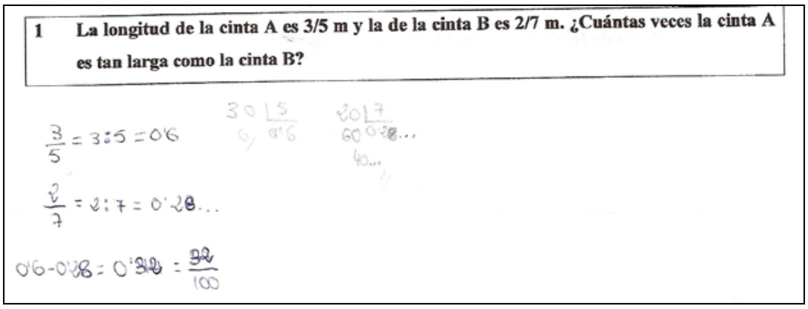
pues porque creo que hay que sacar el mínimo común múltiplo.

Trascripción: "mcm(5, 7)=5·7=35: A=$\frac{21}{35}$ más larga, B=$\frac{10}{35}$. pues porque creo que hay que sacar el mínimo común múltiplo".

Explicación: La estudiante reduce las fracciones a común denominador, usando el mínimo común múltiplo de los denominadores y se limita a decir cuál de las dos cintas es más larga. La explicación que da sólo hace referencia al mínimo común múltiplo.

Análisis: La estudiante solamente compara las dos fracciones, señalando la mayor, pero no aborda el problema.

- Alumno 20 (Jesús)


1 La longitud de la cinta A es 3/5 m y la de la cinta B es 2/7 m. ¿Cuántas veces la cinta A es tan larga como la cinta B?

3/5 = 3:5 = 0'6

2/7 = 2:7 = 0'28...

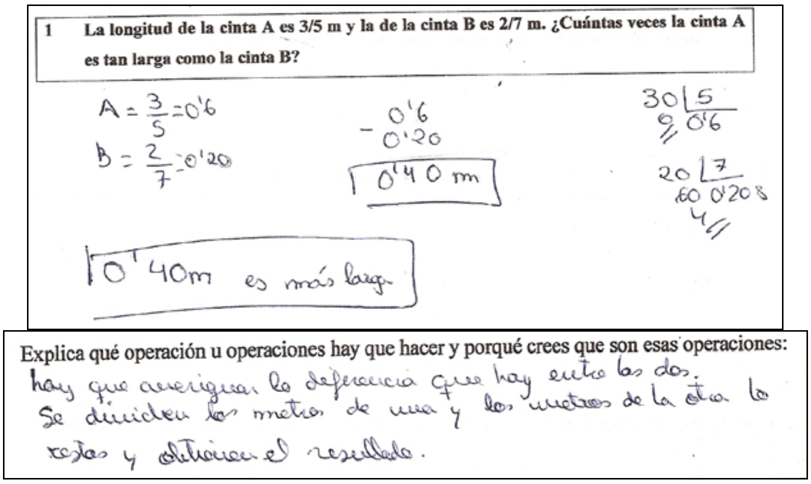
0'6-0'28 = 0'32 = 32/100

Trascripción: "$\frac{3}{5}=3:5=0'6$; $\frac{2}{7}=2:7=0'28$; 0'6–0'28=0'32=$\frac{32}{100}$".

Explicación: El estudiante transforma las fracciones en decimales y los resta, expresando el resultado en forma de fracción. Utiliza el algoritmo de caja para hacer las divisiones de forma manual. No explica el procedimiento.

Análisis: El estudiante enfoca la resolución desde el punto de vista aditivo, haciendo una comparación de las fracciones mediante resta de decimales. Solución incorrecta.

- Alumna 21 (Estefanía)



1 La longitud de la cinta A es 3/5 m y la de la cinta B es 2/7 m. ¿Cuántas veces la cinta A es tan larga como la cinta B?

$A = \frac{3}{5} = 0'6$

$B = \frac{2}{7} = 0'20$

$0'6 - 0'20$

$\boxed{0'40\ m}$

$\boxed{0'40m \text{ es más larga}}$

Explica qué operación u operaciones hay que hacer y porqué crees que son esas operaciones:

hay que averiguar la diferencia que hay entre las dos. Se dividen los metros de una y los metros de la otra lo restas y obtienes el resultado.

Trascripción: “A=$\frac{3}{5} = 0'6$; B=$\frac{2}{7} = 0'20$; 0’6–0’20=0’40 m; 0’40 m es más larga. hay que averiguar la diferencia que hay entre las dos. Se dividen los metros de una y los metros de la otra, lo restas y obtienes el resultado”.

Explicación: La estudiante transforma las fracciones en decimales y los resta, expresando el resultado en forma decimal. Utiliza el algoritmo de caja para hacer las divisiones de forma manual. Trunca por la primera cifra decimal. En su explicación señala que hay que averiguar la diferencia que hay entre las dos cintas.

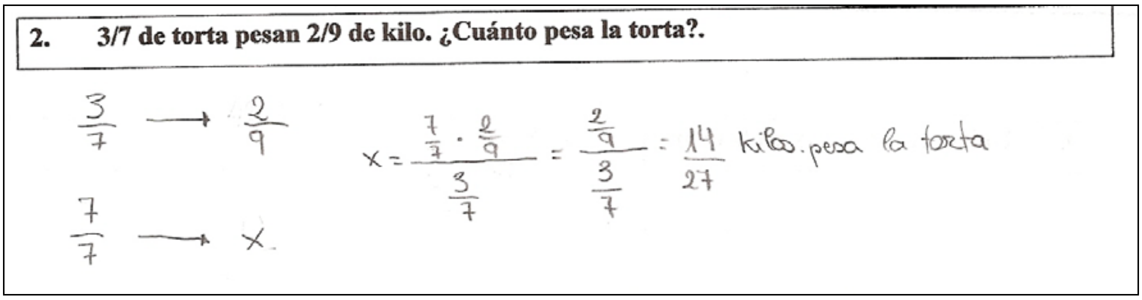
Análisis: La estudiante enfoca la resolución desde el punto de vista aditivo, haciendo una comparación de las fracciones mediante resta de decimales. Solución incorrecta.

10.1.3. Tarea 2: “Peso de la torta”

- Alumno 1(Rubén)

En blanco.

- Alumna 2 (Cristina)

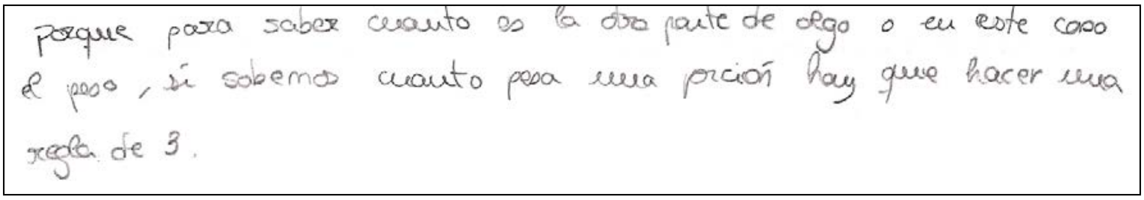


2. 3/7 de torta pesan 2/9 de kilo. ¿Cuánto pesa la torta?.

$\frac{3}{7} \longrightarrow \frac{2}{9}$

$\frac{7}{7} \longrightarrow x$

$x = \frac{\frac{7}{7} \cdot \frac{2}{9}}{\frac{3}{7}} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{3}{7}} = \frac{14}{27}$ kilos. pesa la torta

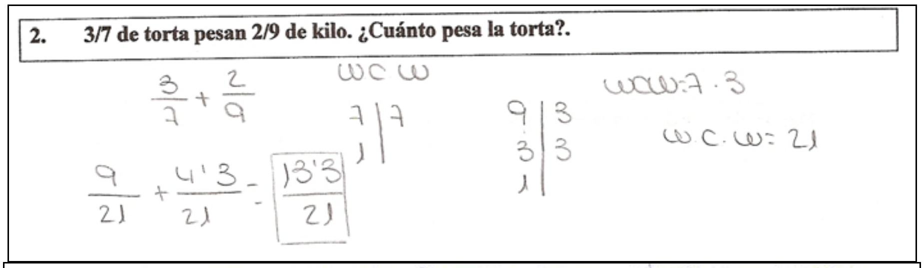

Porque para saber cuanto es la otra parte de algo o en este caso el peso, si sabemos cuanto pesa una porción hay que hacer una regla de 3.

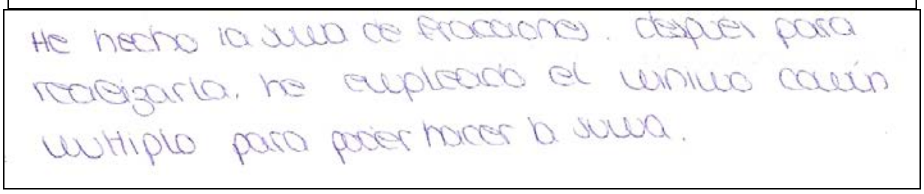
Trascripción: “$\left.\begin{array}{l} \frac{3}{7} \rightarrow \frac{2}{9} \\ \frac{7}{7} \rightarrow \mathbf{X} \end{array}\right\} \quad X = \dfrac{\frac{7}{7} \cdot \frac{2}{9}}{\frac{3}{7}} = \dfrac{\frac{2}{9}}{\frac{3}{7}} = \frac{14}{27}$ kilos pesa la tarta. Porque para saber cuanto es la otra parte de algo o en este caso el peso, si sabemos cuanto pesa una porción hay que hacer una regla de 3”.

Explicación: La estudiante plantea una regla de tres, escribiendo los datos en el mismo orden en que aparecen en el enunciado, con la particularidad de que expresa la unidad como la fracción 7/7. A continuación, aplica el método reglado, con lo que resulta una división de fracciones, obteniendo la solución correcta. En su explicación, señala que para resolver el problema hay que hacer una regla de tres.

Interpretación: la estudiante enfoca la resolución con un esquema cuaternario mediante una regla de tres, aunque en su explicación no aparece la condición de linealidad (“para saber cuanto es la otra parte de algo...”). La forma textual que utiliza corresponde al modelo de razón o Proporción II, cuando en realidad, la tarea y el diagrama que utiliza es del modelo razón unitaria o Proporción I. La estudiante no conecta su explicación con la división; es decir, para ella, el problema es de regla de tres, pero no de división.

- Alumna 3 (Ana)


2. 3/7 de torta pesan 2/9 de kilo. ¿Cuánto pesa la torta?.

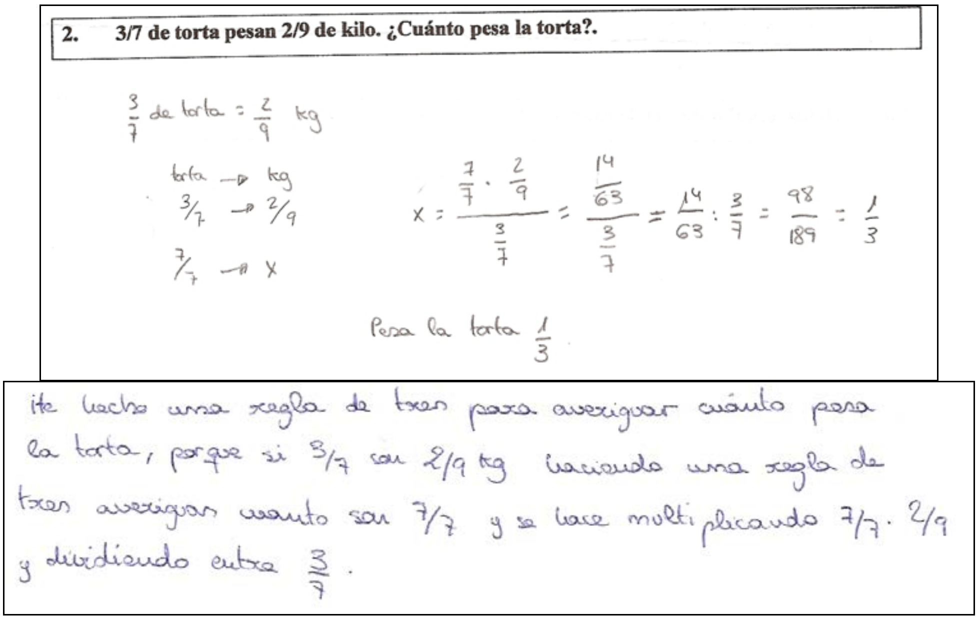

He hecho la suma de fracciones. despues para realizarla, he empleado el minimo común multiplo para poder hacer la suma.

Trascripción: “$\frac{3}{7} + \frac{2}{9}$, mcm=7·3, mcm=21, $\frac{9}{21} + \frac{4'3}{21} = \frac{13'3}{21}$ He hecho la suma de fracciones, después para realizarla, he empleado el mínimo común multiplo para poder hacer la suma”.

Explicación: La estudiante suma las fracciones en el mismo orden en que aparecen en el enunciado. Calcula mal el mínimo común múltiplo y obtiene una solución incorrecta. En su explicación no da razones de porqué utiliza la suma de fracciones.

Interpretación: la estudiante enfoca el problema de manera aditiva, sumando las fracciones, pero sin razonar porqué hay que sumar. No ha comprendido el enunciado del problema y su solución es incorrecta.

- Alumna 4 (Miriam)



2. 3/7 de torta pesan 2/9 de kilo. ¿Cuánto pesa la torta?.

$\frac{3}{7}$ de torta = $\frac{2}{9}$ kg

torta → kg
3/7 → 2/9
7/7 → X

$X = \frac{\frac{7}{7}\cdot\frac{2}{9}}{\frac{3}{7}} = \frac{\frac{14}{63}}{\frac{3}{7}} = \frac{14}{63} : \frac{3}{7} = \frac{98}{189} = \frac{1}{3}$

Pesa la torta $\frac{1}{3}$

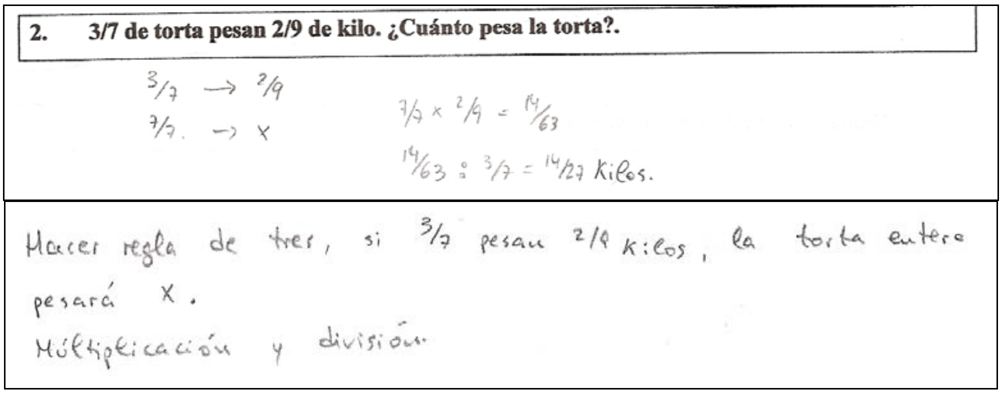
He hecho una regla de tres para averiguar cuánto pesa la torta, porque si 3/7 son 2/9 kg haciendo una regla de tres averiguas cuanto son 7/7 y se hace multiplicando 7/7 · 2/9 y dividiendo entre $\frac{3}{7}$.

Trascripción: “$\frac{3}{7}$ de torta=$\frac{2}{9}$kg; $\left.\begin{array}{l}\text{torta}\rightarrow\text{kg}\\ 3/7\rightarrow 2/9\\ 7/7\rightarrow \text{X}\end{array}\right\}$ $\text{X}=\frac{\frac{7}{7}\cdot\frac{2}{9}}{\frac{3}{7}}=\frac{\frac{14}{63}}{\frac{3}{7}}=\frac{14}{63}:\frac{3}{7}=\frac{98}{189}=\frac{1}{3}$. Pesa la torta $\frac{1}{3}$. He hecho una regla de tres para averiguar cuánto pesa la torta, porque si 3/7 son 2/9 kg, haciendo una regla de tres averiguas cuanto son 7/7 y se hace multiplicando 7/7·2/9 y dividiendo entre 3/7”.

Explicación: La estudiante plantea una regla de tres, escribiendo los datos en el mismo orden en que aparecen en el enunciado. A continuación aplica el método reglado y hace la división de fracciones resultante por el algoritmo de los productos cruzados. Comete un error al simplificar y obtiene un resultado incorrecto.

Interpretación: El enfoque de resolución de la estudiante es de regla de tres, con un esquema cuaternario. Usa el algoritmo de los productos cruzados para hacer la división de fracciones. En su explicación parece que no identifica la fracción 7/7 como la unidad; de hecho, vemos en la resolución que no simplifica la fracción 7/7 y la multiplica por 2/9. La forma textual que utiliza corresponde al modelo semántico de proporción I / razón unitaria, pero la estudiante no relaciona el modelo con la división, sino con el método reglado.

- Alumna 5 (Ángela)


2. 3/7 de torta pesan 2/9 de kilo. ¿Cuánto pesa la torta?.

$3/7 \to 2/9$
$7/7 \to x$

$7/7 \times 2/9 = 14/63$
$14/63 : 3/7 = 14/27$ Kilos.

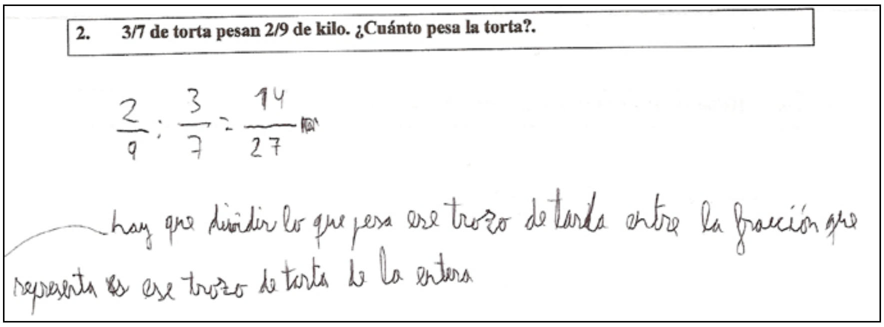
Hacer regla de tres, si 3/7 pesan 2/9 kilos, la torta entera pesará X.
Multiplicación y división

Trascripción: "$\left.\begin{array}{l} 3/7 \to 2/9 \\ 7/7 \to X \end{array}\right\}$; $\frac{7}{7} \times \frac{2}{9} = \frac{14}{63}$; $\frac{14}{63} : \frac{3}{7} = \frac{14}{27}$ kilos. Hacer regla de tres, si 3/7 pesan 2/9 kilos, la torta entera pesará X. Multiplicación y división".

Explicación: La estudiante plantea una regla de tres con los datos en el mismo orden que en el enunciado. A continuación resuelve la regla de tres, haciendo primero una multiplicación, y luego una división. Obtiene el resultado correcto. No explica porqué ha elegido la regla de tres.

Interpretación: El enfoque de resolución de la estudiante es la regla de tres, aunque en dos pasos (multiplicación y división); su esquema de resolución es cuaternario. En su resolución parece que no identifique la fracción 7/7 con la unidad. Posiblemente usa la calculadora para hacer la división de fracciones. La forma textual corresponde al modelo semántico de razón unitaria o proporción I, pero la estudiante no identifica este modelo con la división de fracciones, sino con el método reglado.

- Alumno 6 (Juan)


2. 3/7 de torta pesan 2/9 de kilo. ¿Cuánto pesa la torta?.

$\frac{2}{9} : \frac{3}{7} = \frac{14}{27}$

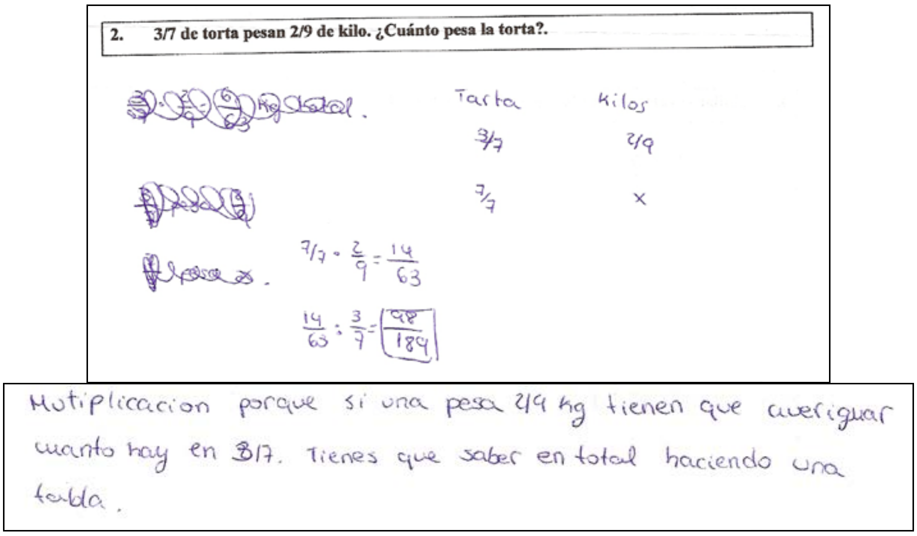
hay que dividir lo que pesa ese trozo de torta entre la fracción que representa es ese trozo de torta de la entera

Trascripción: "$\frac{2}{9} : \frac{3}{7} = \frac{14}{27}$. Hay que dividir lo que pesa ese trozo de torta entre la fracción que representa ese trozo de torta de la entera".

Explicación: El estudiante divide directamente la fracción 2/9 entre la fracción 3/7, obteniendo el resultado correcto. En su explicación no indica porqué hay que dividir.

Interpretación: El enfoque de resolución del estudiante es de división directa, con un esquema ternario. La forma textual que utiliza corresponde al modelo de razón unitaria, pensado como el cálculo de una tasa y dicho modelo se identifica con la división de fracciones.

- Alumna 7 (Casandra)


2. 3/7 de torta pesan 2/9 de kilo. ¿Cuánto pesa la torta?.

Tarta	Kilos
3/7	2/9
7/7	x

$7/7 \cdot \frac{2}{9} = \frac{14}{63}$

$\frac{14}{63} : \frac{3}{7} = \boxed{\frac{98}{189}}$

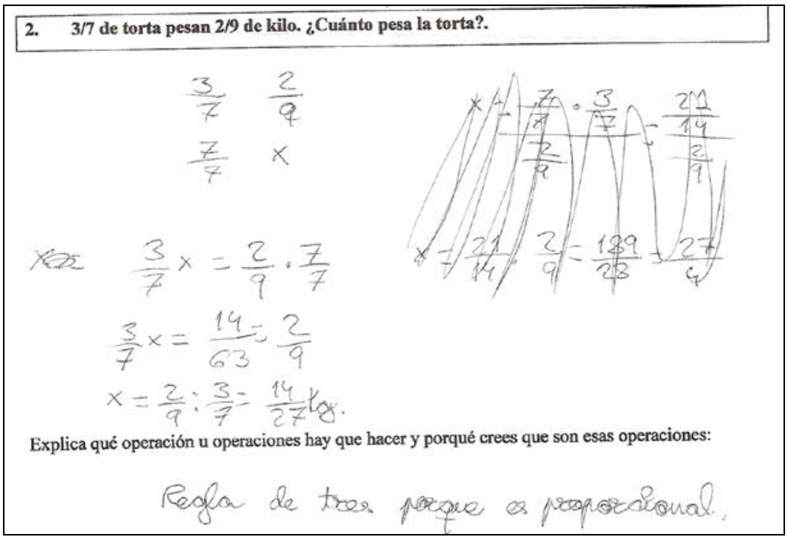
Mutiplicacion porque si una pesa 2/9 kg tienen que averiguar cuanto hay en 3/7. Tienes que saber en total haciendo una tabla.

Trascripción: " $\begin{array}{cc} \text{tarta} & \text{kilos} \\ 3/7 & 2/9 \\ 7/7 & X \end{array}$; $\frac{7}{7}\cdot\frac{2}{9}=\frac{14}{63}$; $\frac{14}{63}:\frac{3}{7}=\frac{98}{189}$. Multiplicación porque si una pesa 2/9 kg tienen que averiguar cuanto hay en 3/7, tienes que saber en total haciendo una tabla".

Explicación: La estudiante plantea una regla de tres, construyendo una tabla en la que los datos aparecen en el mismo orden que en el enunciado. A continuación, resuelve la regla de tres haciendo primero una multiplicación y luego una división, obteniendo el resultado correcto, pero no simplifica. En su explicación confunde el enunciado, dando por hecho que una torta pesa 2/9.

Interpretación: El enfoque de resolución de la estudiante es la regla de tres, aunque no lo dice explícitamente y prefiere usar la palabra "tabla". Lo hace en dos pasos, mediante una multiplicación y una división. Su esquema de resolución es cuaternario. No identifica la fracción 7/7 con la unidad y la multiplica por la fracción 2/9. El algoritmo que aplica para la división de fracciones es el de productos cruzados. La explicación que acompaña a la resolución revela una mala lectura del enunciado. La forma textual corresponde al modelo semántico de razón o proporción II, pero el esquema que aparece en la respuesta corresponde al modelo de razón unitaria o proporción I.

- Alumno 8 (Christian)



2. 3/7 de torta pesan 2/9 de kilo. ¿Cuánto pesa la torta?.

$\frac{3}{7} \quad \frac{2}{9}$

$\frac{7}{7} \quad x$

$\frac{3}{7}x = \frac{2}{9} \cdot \frac{7}{7}$

$\frac{3}{7}x = \frac{14}{63} = \frac{2}{9}$

$x = \frac{2}{9} : \frac{3}{7} = \frac{14}{27}$ kg.

Explica qué operación u operaciones hay que hacer y porqué crees que son esas operaciones:

Regla de tres porque es proporcional.

Trascripción: "$\begin{matrix} 3/7 & 2/9 \\ 7/7 & \mathrm{X} \end{matrix}$; $\frac{3}{7}\mathrm{X} = \frac{2}{9} \cdot \frac{7}{7}$; $\frac{3}{7}\mathrm{X} = \frac{14}{63} = \frac{2}{9}$; $\mathrm{X} = \frac{2}{9} : \frac{3}{7} = \frac{14}{27}$ kg. Regla de tres porque es proporcional".

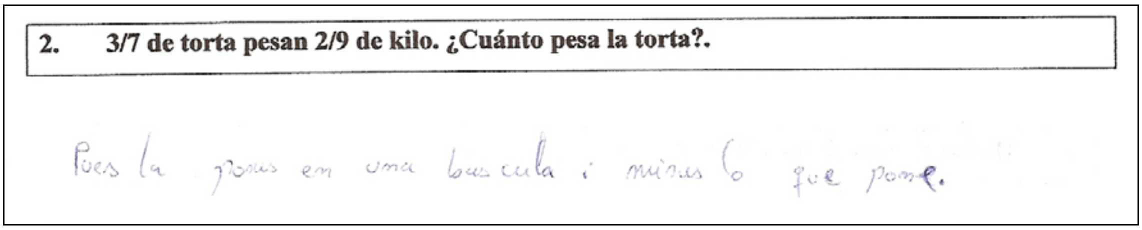
Explicación: El estudiante plantea una regla de tres con un esquema cuaternario en forma de tabla. Para resolver la regla de tres, plantea una ecuación igualando los productos cruzados. A continuación, efectúa el producto y simplifica y seguidamente despeja X mediante una división de fracciones, obteniendo el resultado correcto. Justifica que aplica una regla de tres porque la situación es de proporcionalidad.

Interpretación: El enfoque de resolución del estudiante es la regla de tres, pero al aplicar inicialmente el método reglado comete un error, por lo que no aplica de nuevo el método reglado, sino que plantea y resuelve una ecuación. No identifica la fracción 7/7 con la unidad. En la respuesta no está explicito el algoritmo que usa para hacer la división de fracciones, pero puede que utilice el de productos cruzados o directamente la calculadora. La forma textual que utiliza hace alusión a la regla de tres y a la proporcionalidad, pero no a la división de fracciones. El esquema corresponde a razón unitaria o proporcionalidad I.

- Alumna 9 (Ana María)

En blanco.

- Alumno 10 (Vicent)



2. 3/7 de torta pesan 2/9 de kilo. ¿Cuánto pesa la torta?.

Pues la pones en una bascula i miras lo que pone.

Trascripción: “Pues la pones en una báscula y miras lo que pone”.

Explicación: La respuesta del estudiante es inesperada y queda fuera de los objetivos de esta investigación.

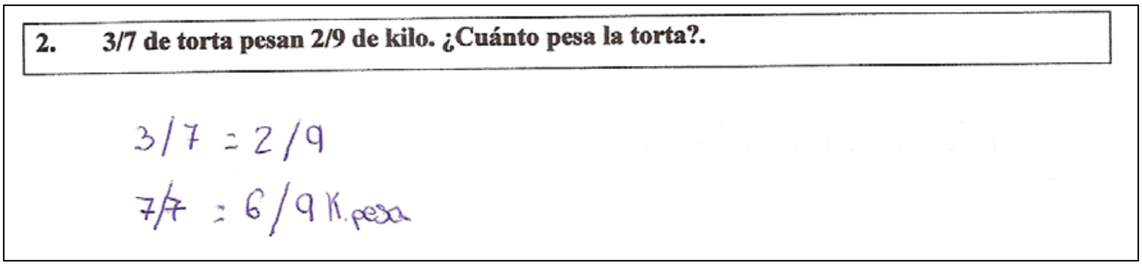
- Alumno 11 (Fco. Javier)

En blanco

- Alumna 12 (Aída)

En blanco.

- Alumna 13 (Carmen)



2. 3/7 de torta pesan 2/9 de kilo. ¿Cuánto pesa la torta?.

3/7 = 2/9

7/7 = 6/9 K. pesa

Trascripción: “ $\begin{array}{c} 3/7 = 2/9 \\ 7/7 = 6/9 \text{ k pesa} \end{array}$ ”.

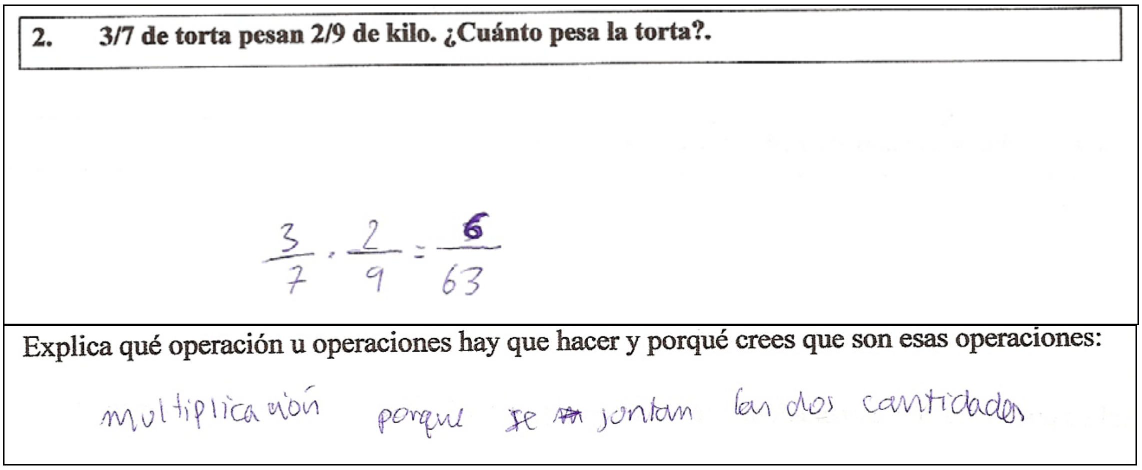
Explicación: La estudiante escribe dos igualdades de fracciones que representan un razonamiento de tipo cuaternario. Concluye que la torta pesa 6/9 kg. Obtiene una solución incorrecta.

Interpretación: La estudiante hace un razonamiento aditivo, ya que compara la fracción 3/7 con la 7/7 y ve que la diferencia entre los numeradores es 4. Por tanto, traslada esta diferencia a las fracciones de la derecha. Es decir, la fracción 2/9 se convertirá en 6/9, sin más que sumar 4 al numerador de 2/9. Solución incorrecta.

- Alumna 14 (Mireia)

En blanco.

- Alumno 15 (Héctor)


2. 3/7 de torta pesan 2/9 de kilo. ¿Cuánto pesa la torta?.

$\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{9}=\frac{6}{63}$

Explica qué operación u operaciones hay que hacer y porqué crees que son esas operaciones:

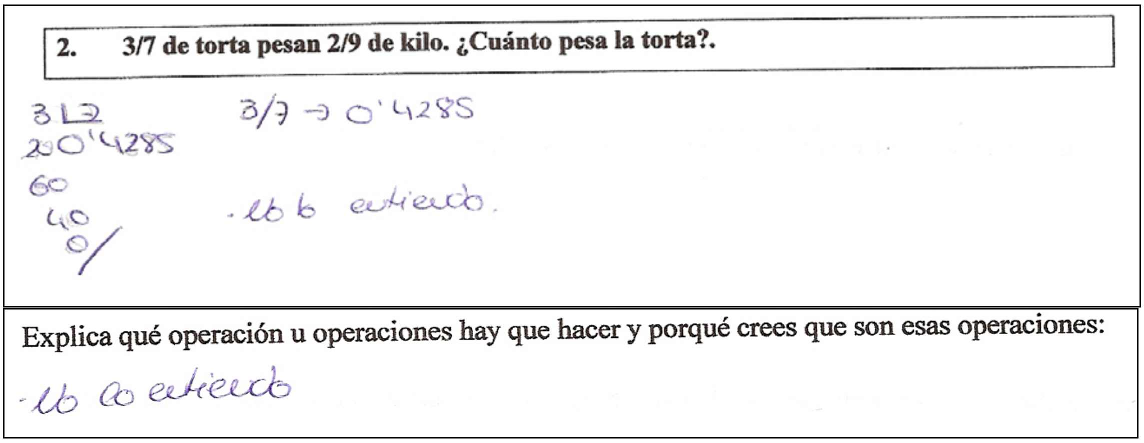
multiplicación porque se juntan las dos cantidades

Trascripción: “ $\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{9}=\frac{6}{23}$. Multiplicación porque se juntan las dos cantidades”.

Explicación: El estudiante multiplica las fracciones, dando un resultado no correcto. En su explicación dice que hay que multiplicar porque las dos cantidades se juntan.

Interpretación: El estudiante no ha comprendido el problema, tal vez por una lectura inadecuada del enunciado. La forma textual que utiliza hace pensar en un modelo semántico aditivo, al identificar la operación de multiplicar con “juntar”.

- Alumna 16 (Jennifer)


2. 3/7 de torta pesan 2/9 de kilo. ¿Cuánto pesa la torta?.

3 | 7
30 0'4285
60
40
0

3/7 → 0'4285

No lo entiendo.

Explica qué operación u operaciones hay que hacer y porqué crees que son esas operaciones:

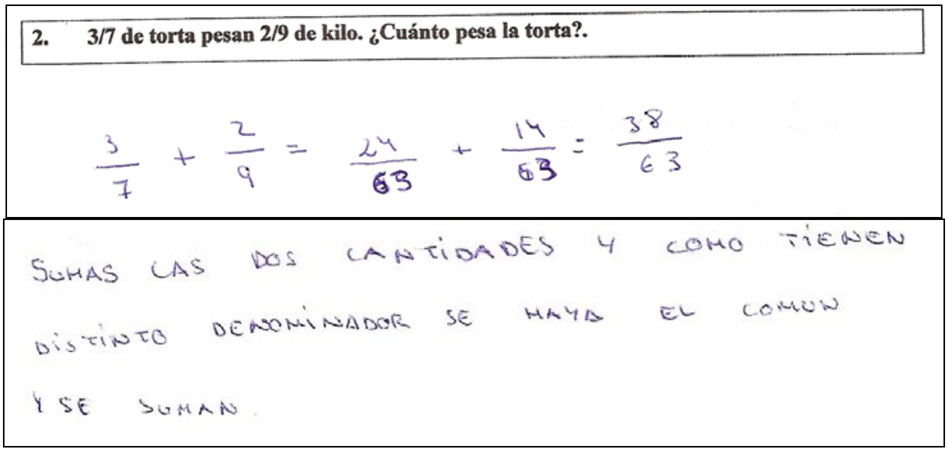
No lo entiendo

Trascripción: “3/7→0’4285; No lo entiendo”.

Explicación: la estudiante únicamente hace la división 3:7 de forma manual y escribe el texto “No lo entiendo”. Deja la respuesta en blanco.

Interpretación: La estudiante tiene problemas de comprensión del enunciado y se ha limitado a hacer una operación que le resulta conocida, la división 3÷7, dejando la respuesta en blanco.

- Alumna 17 (Laura A)



2. 3/7 de torta pesan 2/9 de kilo. ¿Cuánto pesa la torta?.

$\frac{3}{7}+\frac{2}{9}=\frac{24}{63}+\frac{14}{63}=\frac{38}{63}$

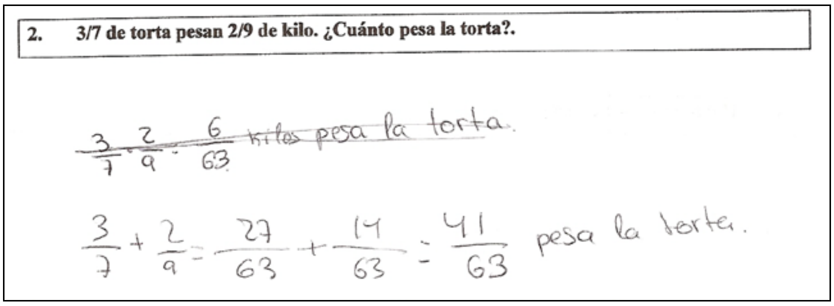
SUMAS LAS DOS CANTIDADES Y COMO TIENEN DISTINTO DENOMINADOR SE HAYA EL COMUN Y SE SUMAN.

Trascripción: "$\frac{3}{7}+\frac{2}{9}=\frac{24}{63}+\frac{14}{63}=\frac{38}{63}$. Sumas las dos cantidades y como tienen distinto denominador se haya el comun y se suman".

Explicación: La estudiante suma las fracciones 3/7 y 2/9, reduciéndolas a común denominador. Comete un error de cálculo y obtiene una solución incorrecta. En su explicación no da ninguna razón de porqué usa la suma de fracciones en vez de la división.

Interpretación: El enfoque de resolución de la estudiante es aditivo, ya que suma las fracciones en vez de dividirlas. En su explicación no da información sobre las razones de su elección.

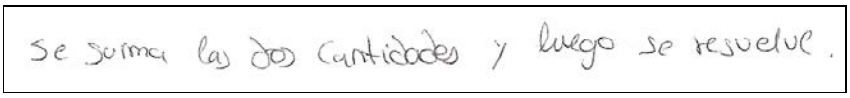
- Alumna 18 (Patri)



2. 3/7 de torta pesan 2/9 de kilo. ¿Cuánto pesa la torta?.

~~$\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{9}=\frac{6}{63}$ kilos pesa la torta.~~

$\frac{3}{7}+\frac{2}{9}=\frac{27}{63}+\frac{14}{63}=\frac{41}{63}$ pesa la torta.



Se suma las dos cantidades y luego se resuelve.

Trascripción: "$\frac{3}{7}+\frac{2}{9}=\frac{27}{63}+\frac{14}{63}=\frac{41}{63}$. Se suma las dos cantidades y luego se resuelve".

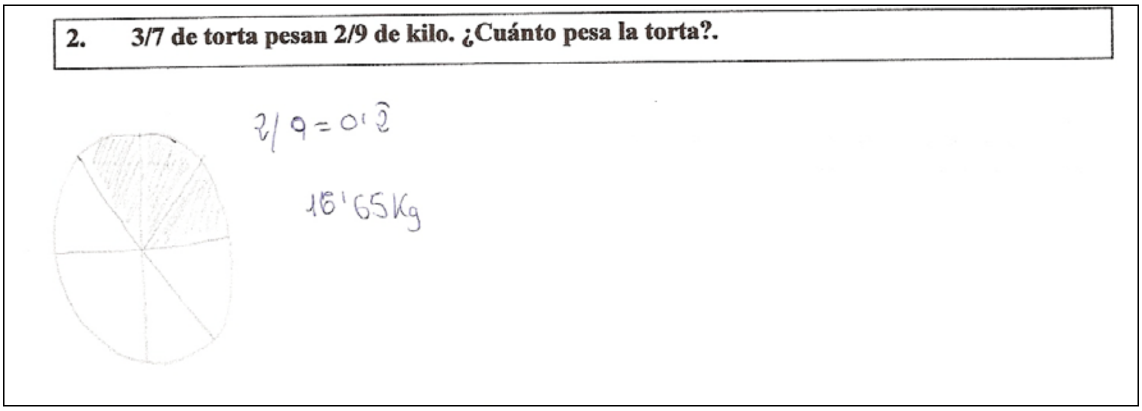
Explicación: La estudiante suma las fracciones 3/7 y 2/9, obteniendo un resultado incorrecto. A continuación basa su explicación en la suma, sin dar razones que lo justifiquen.

Interpretación: La estudiante enfoca el problema desde un punto de vista aditivo y no justifica la elección de la operación elegida.

- Alumna 19 (Laura B)

En blanco.

- Alumno 20 (Jesús)

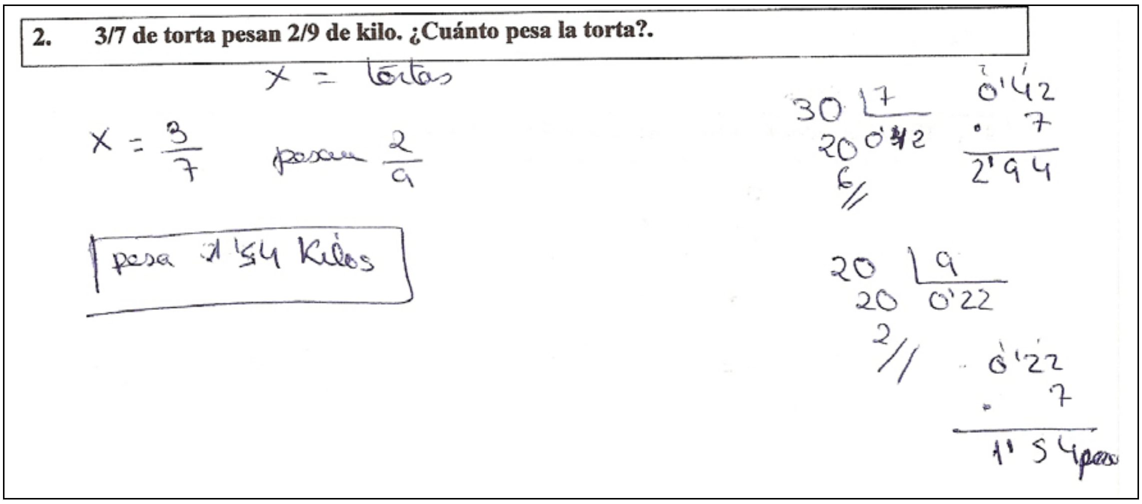


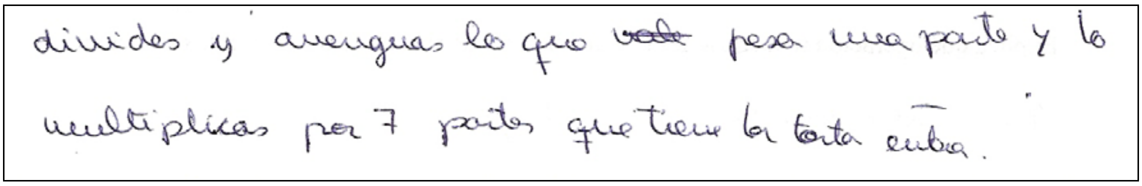
Trascripción: "Dibuja un diagrama circular, en el que sombrea tres de entre siete sectores, pero los sectores no son iguales. $\frac{2}{9} = 0'\overline{2}$; 16'65 kg".

Explicación: El estudiante usa un diagrama circular para representar la fracción 3/7, pero no dibuja los sectores con la misma amplitud. A continuación transforma la fracción 2/9 en decimal y escribe 16'65 kg. Respuesta incorrecta No explica el procedimiento.

Interpretación: El estudiante manifiesta problemas con la representación y comprensión de las fracciones y no resuelve el problema. La solución que da –16.65 kg– no se entiende en el contexto del problema. Respuesta no identificada.

- Alumna 21 (Estefanía)




divides y averiguas lo que ~~vale~~ pesa una parte y lo multiplicas por 7 partes que tiene la torta entera.

Trascripción: "x=tortas, x=$\frac{3}{7}$ pesan $\frac{2}{9}$"; Efectúa manualmente las divisiones 3÷7 y 2÷9 y multiplica los resultados por 7. Concluye que "pesa 1'54 kilos". "Divides y averiguas lo que pesa una parte y lo multiplicas por 7 partes que tiene la torta entera".

Explicación: La estudiante transforma las fracciones en decimales haciendo las divisiones por el algoritmo manual de caja. A continuación multiplica los resultados por 7 y da por bueno el resultado 1'54 kilos, que procede de la fracción 2/9 (kilos). En su explicación señala que multiplica por 7 porque son 7 las partes en que está dividida la tarta.

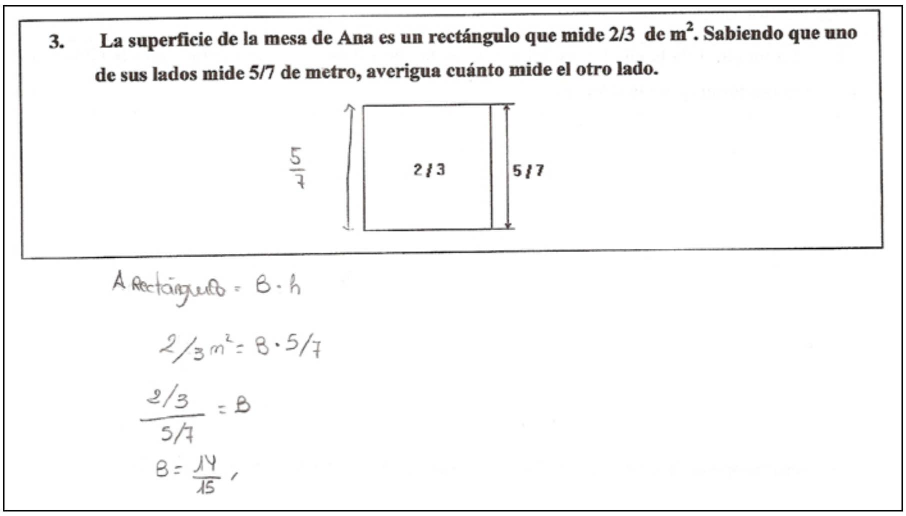
Interpretación: Parece que la estudiante enfoca la resolución desde el punto de vista analítico, intentando reducir a la fracción unitaria, pero comete errores, obteniendo una respuesta incorrecta. Ella sabe que la fracción está dividida en 7 partes y, por eso, multiplica los kilos por 7. Le ha faltado dividir por 3, ya que el peso 2/9 no corresponde a 1/7 de torta, sino a 3/7 de torta. Este enfoque de resolución es de escala, pero Estefanía razona sobre partes ("hay que hacer 2/9 siete veces mayor porque la torta está dividida en 7 partes iguales...").

10.1.4. Tarea 3: "La mesa de Ana"

- Alumno 1(Rubén)

En blanco.

- Alumna 2 (Cristina)

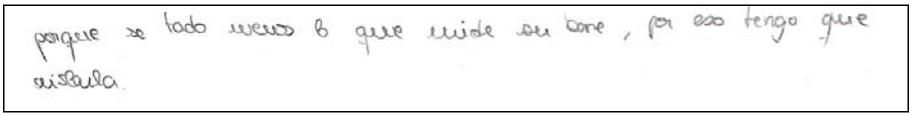

3. La superficie de la mesa de Ana es un rectángulo que mide 2/3 de m². Sabiendo que uno de sus lados mide 5/7 de metro, averigua cuánto mide el otro lado.

A Rectángulo = B · h

$2/3\,m^2 = B \cdot 5/7$

$\frac{2/3}{5/7} = B$

$B = \frac{14}{15}$

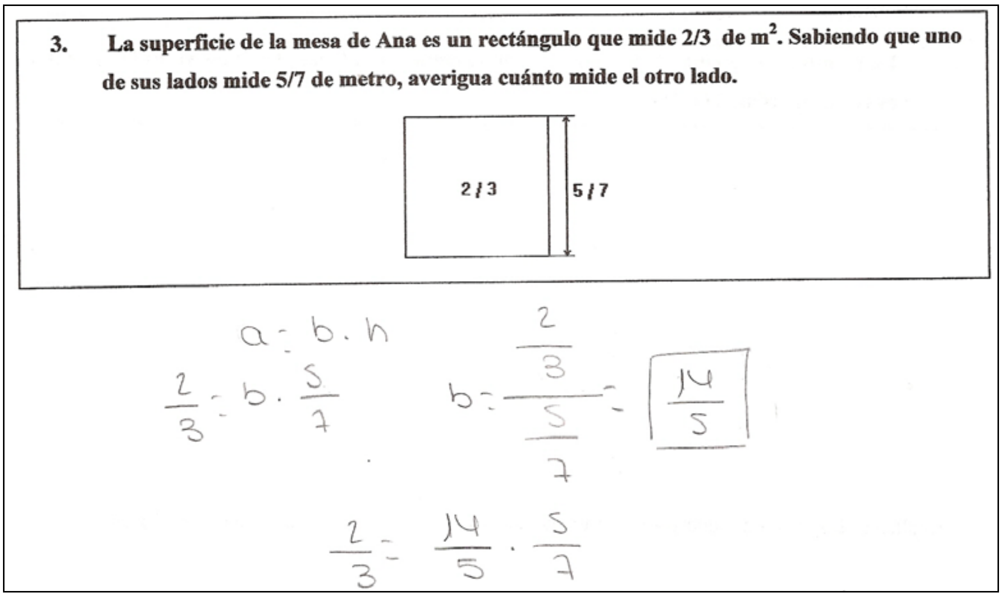


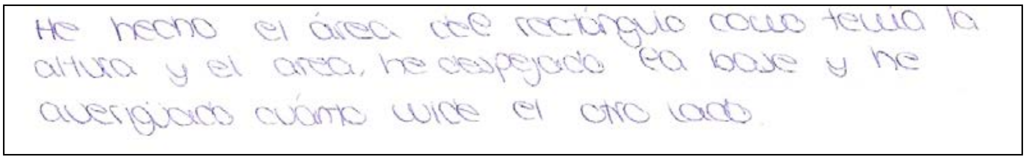
Trascripción: "A rectángulo=B·h; $\frac{2}{3}m^2 = B\cdot\frac{5}{7}$; $\frac{2/3}{5/7} = B$; $B = \frac{14}{15}$. Porque se todo menos lo que mide su base, por eso tengo que aislarla".

Explicación: La estudiante parte de la fórmula del área de un rectángulo, sustituye los datos y obtiene una ecuación. Después resuelve la ecuación, despejando la base y obtiene la solución correcta. En su explicación, señala que sabe todo menos la B y por eso debe aislarla.

Interpretación: El enfoque de resolución de la estudiante es el planteamiento y resolución de una ecuación. El modelo semántico es de factor perdido. No señala qué algoritmo utiliza para dividir las fracciones.

- Alumna 3 (Ana)



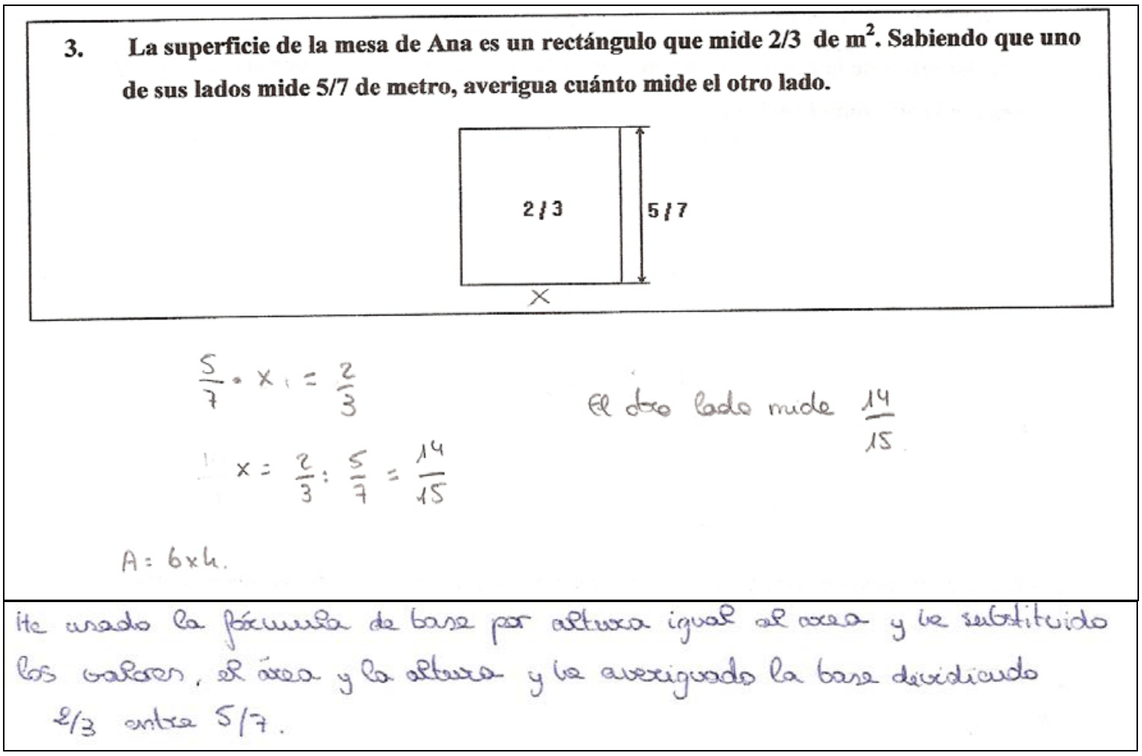


Trascripción: "a=b·h; $\frac{2}{3} = b\cdot\frac{5}{7}$; $b = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{7}} = \frac{14}{5}$; $\frac{2}{3} = \frac{14}{5}\cdot\frac{5}{7}$. He hecho el área del rectángulo como tenia la altura y el area he despejado la base y he averiguado cuánto mide el otro lado".

Explicación: La estudiante parte de la fórmula del área del rectángulo, en la que sustituye los datos conocidos, obteniendo una ecuación. A continuación resuelve la ecuación, despejando b mediante una división de fracciones. Comete un error al hacer la división y obtiene una solución incorrecta. Comprueba el resultado, multiplicando la base por la altura para obtener el área. En su explicación señala que ha hecho el área del rectángulo y ha despejado para averiguar la medida del otro lado.

Interpretación: La estudiante enfoca el problema como el planteamiento y resolución de una ecuación, con un modelo semántico de factor perdido. En su respuesta no está claro qué algoritmo utiliza para la división de fracciones.

- Alumna 4 (Miriam)



3. La superficie de la mesa de Ana es un rectángulo que mide 2/3 de m^2. Sabiendo que uno de sus lados mide 5/7 de metro, averigua cuánto mide el otro lado.

$\frac{5}{7} \cdot x = \frac{2}{3}$

$x = \frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \frac{14}{15}$

El otro lado mide $\frac{14}{15}$

A = b x h.

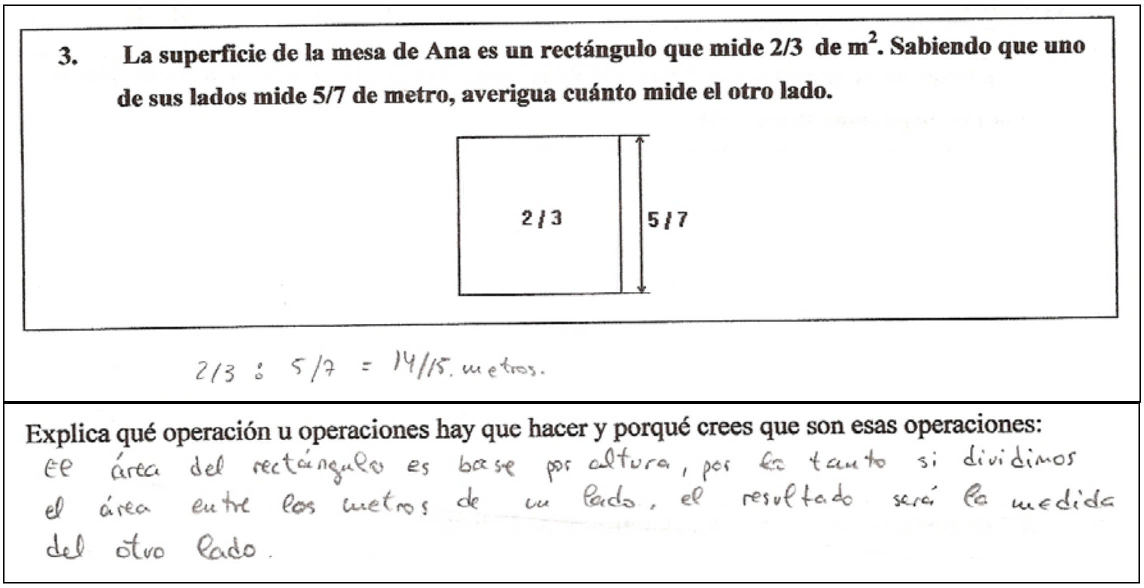
He usado la fórmula de base por altura igual al área y he substituido los valores, el área y la altura y he averiguado la base dividiendo 2/3 entre 5/7.

Trascripción: “A=bxh; $\frac{5}{7} \cdot X = \frac{2}{3}$; $X = \frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \frac{14}{15}$. El otro lado mide $\frac{14}{15}$. He usado la fórmula de base por altura igual al área y he substituido los valores, el área y la altura y he averiguado la base dividiendo 2/3 entre 5/7”.

Explicación: La estudiante plantea una ecuación a partir de la fórmula del área de un rectángulo, en la que sustituye los datos conocidos (altura y área). A continuación, resuelve la ecuación dividiendo las fracciones 2/3 ÷ 5/7, obteniendo la solución correcta. En su explicación no explica qué algoritmo ha usado para hacer la división de fracciones.

Interpretación: La estudiante enfoca el problema como el planteamiento y resolución de una ecuación, con un modelo semántico de factor perdido. En su respuesta no está claro qué algoritmo utiliza para la división de fracciones.

- Alumna 5 (Ángela)


3. La superficie de la mesa de Ana es un rectángulo que mide 2/3 de m^2. Sabiendo que uno de sus lados mide 5/7 de metro, averigua cuánto mide el otro lado.

2/3 : 5/7 = 14/15. metros.

Explica qué operación u operaciones hay que hacer y porqué crees que son esas operaciones:

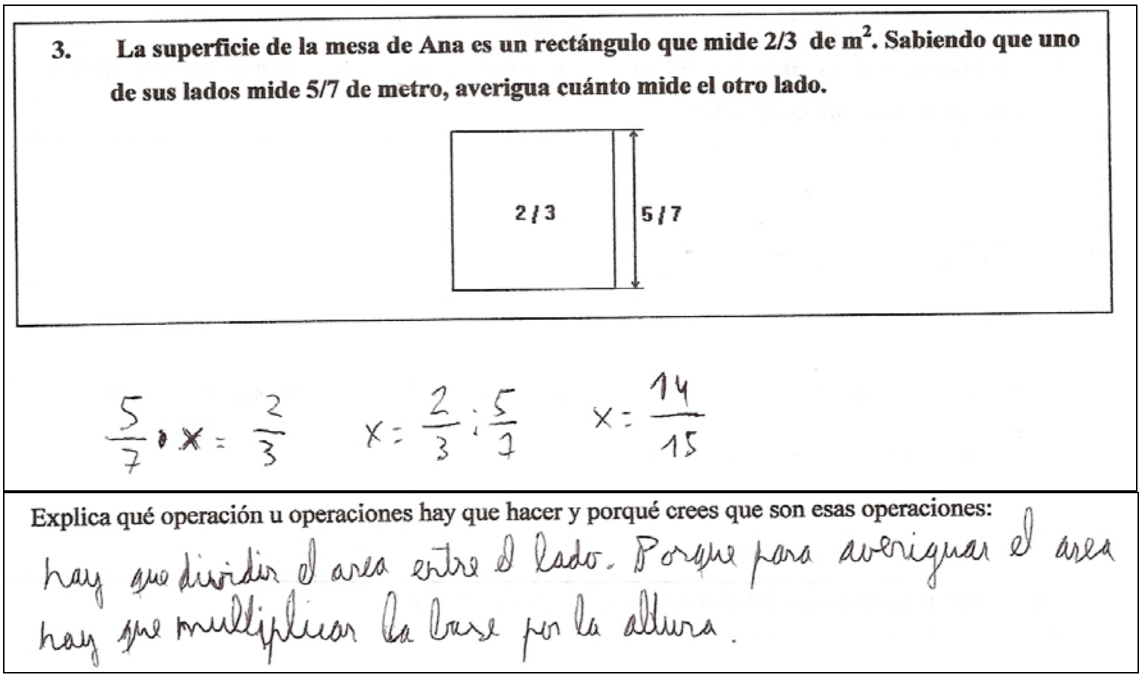
el área del rectángulo es base por altura, por lo tanto si dividimos el área entre los metros de un lado, el resultado será la medida del otro lado.

Trascripción: “ $\frac{2}{3}:\frac{5}{7}=\frac{14}{15}$. El área del rectángulo es base por altura, por lo tanto si dividimos el área entre los metros de un lado, el resultado será la medida del otro lado”.

Explicación: La estudiante divide directamente la fracción 2/3 entre la fracción 5/7. En su explicación justifica esta acción por el hecho de dividir es la operación inversa de multiplicar.

Interpretación: La estudiante ha enfocado la resolución mediante una división directa. (esquema ternario), dando una solución correcta. Interpreta la división como la operación inversa de la multiplicación.

- Alumno 6 (Juan)



3. **La superficie de la mesa de Ana es un rectángulo que mide 2/3 de m². Sabiendo que uno de sus lados mide 5/7 de metro, averigua cuánto mide el otro lado.**

$\frac{5}{7} \cdot X = \frac{2}{3}$ $\quad X = \frac{2}{3} : \frac{5}{7}$ $\quad X = \frac{14}{15}$

Explica qué operación u operaciones hay que hacer y porqué crees que son esas operaciones:

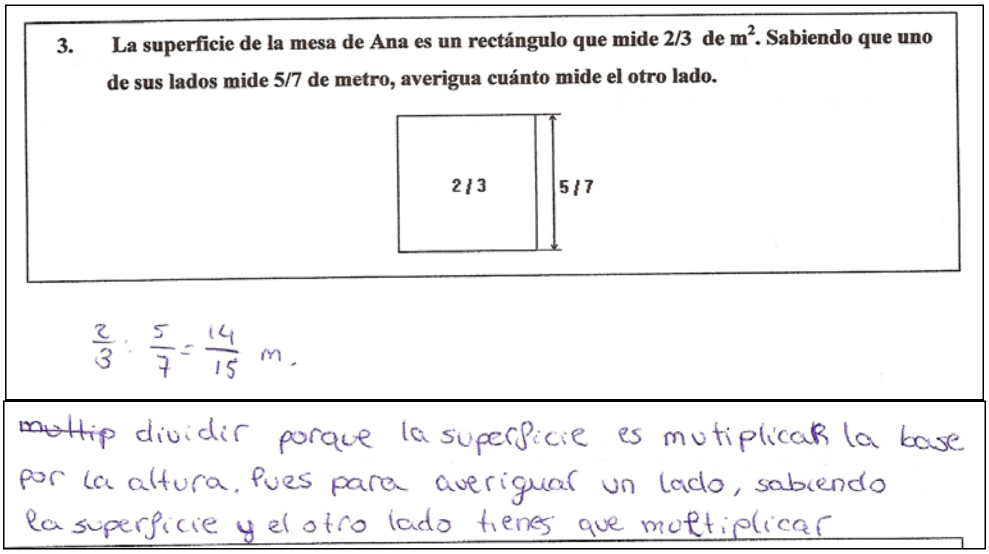
hay que dividir el area entre el lado. Porque para averiguar el area hay que multiplicar la base por la altura.

Trascripción: " $\frac{5}{7} \cdot X = \frac{2}{3}$; $X = \frac{2}{3} : \frac{5}{7}$; $X = \frac{14}{15}$. Hay que dividir el area entre el lado. Porque para averiguar el area hay que multiplicar la base por la altura".

Explicación: El estudiante plantea y resuelve una ecuación para lo cual hace una división de fracciones, obteniendo la solución correcta Explica su elección diciendo que dividir es lo contrario de multiplicar y para calcular el área hay que multiplicar.

Interpretación: El estudiante enfoca la resolución mediante el planteamiento y resolución de una ecuación. La forma textual que aparece en su explicación muestra que ve la división como operación inversa de la multiplicación, es decir, el modelo semántico correspondiente sería inversión de la multiplicación o factor perdido. No explica qué algoritmo usa para hallar la división de fracciones..

- Alumna 7 (Casandra)



3. **La superficie de la mesa de Ana es un rectángulo que mide 2/3 de m². Sabiendo que uno de sus lados mide 5/7 de metro, averigua cuánto mide el otro lado.**

$\frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \frac{14}{15}$ m.

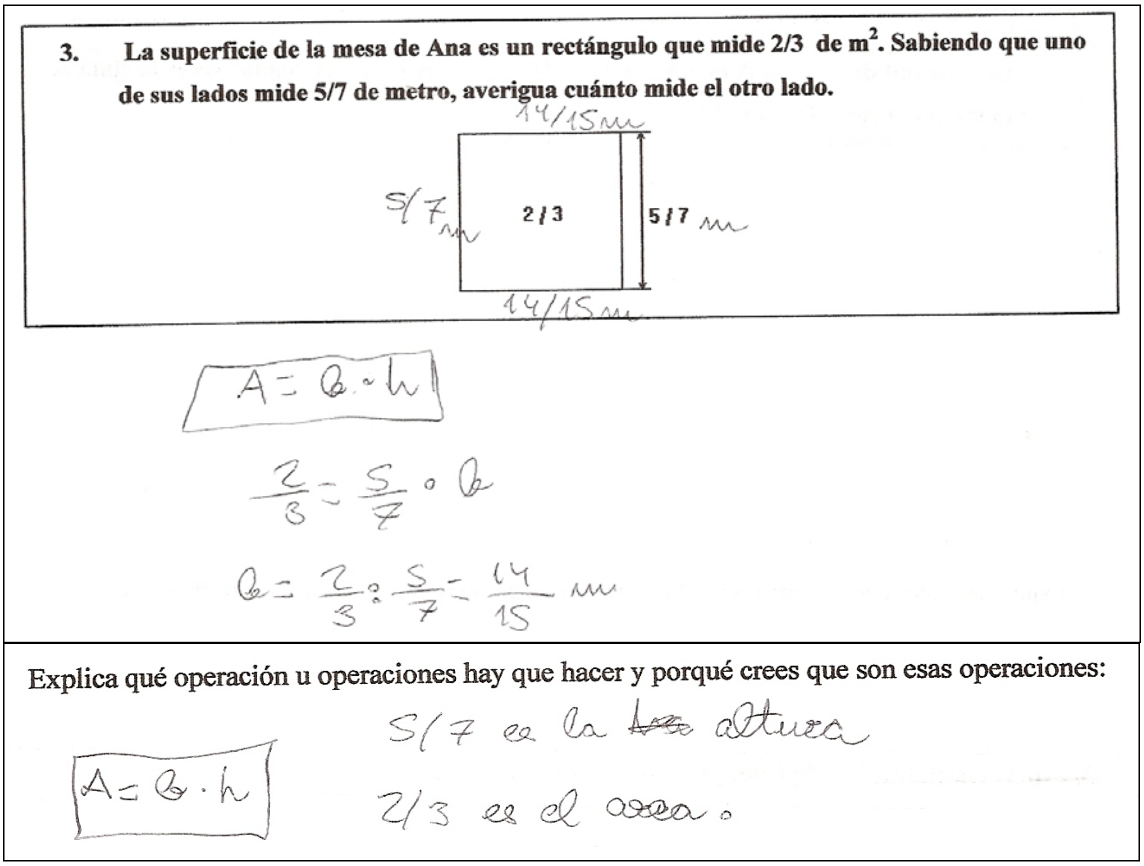
~~multip~~ dividir porque la superficie es mutiplicaR la base por la altura. Pues para averiguar un lado, sabiendo la superficie y el otro lado tienes que moltiplicar

Trascripción: “$\frac{3}{5}:\frac{5}{7}=\frac{14}{15}$ m. Dividir porque la superficie es multiplicar la base por la altura. Pues para averiguar un lado, sabiendo la superficie y el otro lado tienes que multiplicar”.

Explicación: La estudiante divide directamente la fracción 2/3 entre la fracción 5/7, obteniendo la solución correcta. Su explicación se basa en considerar la división como la operación inversa de la multiplicación, aunque escribe la palabra “multiplicar” en vez de dividir.

Interpretación: El enfoque de resolución de la estudiante es la división directa (esquema ternario). La forma textual que aparece en su explicación corresponde al modelo semántico de inversión de la multiplicación o factor perdido, si bien confunde los términos dividir y multiplicar al final de la frase. No queda explícito el algoritmo que usa para dividir las fracciones.

- Alumno 8 (Christian)



Trascripción: En el dibujo del enunciado escribe el dato (la altura) y la solución (la base). “A=b·h, $\frac{2}{3}=\frac{5}{7}\cdot b$, $b=\frac{2}{3}:\frac{5}{7}=\frac{14}{15}$ m”. “A=b·h; 5/7 es la altura; 2/3 es el área”.

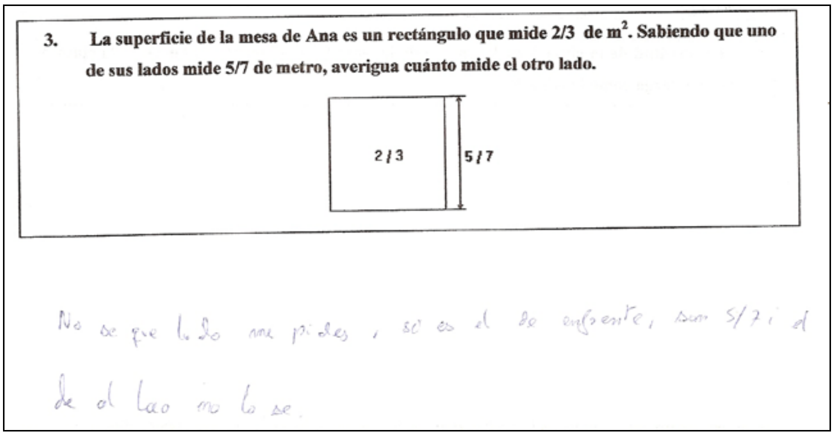
Explicación: El estudiante escribe la fórmula del área de un rectángulo y sustituye en ella los datos (las fracciones 2/3 y 5/7, con lo que obtiene una ecuación. A continuación resuelve la ecuación, despejando la incógnita (la base) mediante una división de fracciones. De esta forma, obtiene la solución correcta. En su explicación se limita a escribir de nuevo la fórmula del área del rectángulo y a decir que 5/7 es la altura y 2/3 es el área...

Interpretación: El enfoque de resolución del estudiante es el planteamiento y resolución de una ecuación. Aunque no lo escribe explícitamente en su explicación, detectamos que el modelo semántico que identifica el estudiante es el de factor perdido, ya que escribe la fórmula del área del rectángulo e indica los valores de la altura y del área. En su respuesta no queda explícito el algoritmo que utiliza para la división de fracciones.

- Alumna 9 (Ana María)

En blanco

- Alumno 10 (Vicent)


3. **La superficie de la mesa de Ana es un rectángulo que mide 2/3 de m^2. Sabiendo que uno de sus lados mide 5/7 de metro, averigua cuánto mide el otro lado.**

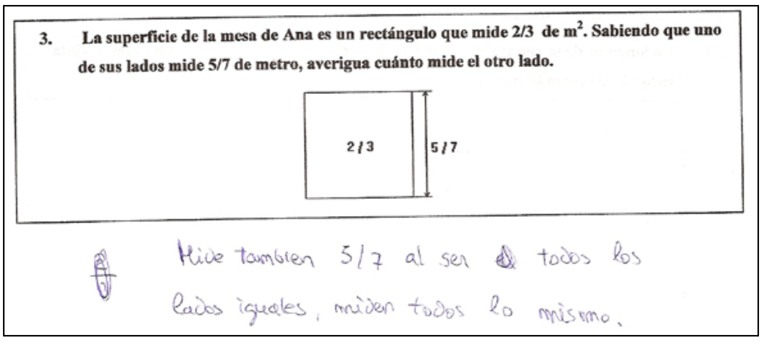
No se que lado me pides, si es el de enfrente, son 5/7, el de al lao no lo se.

Trascripción: "No sé que lado me pides; si es el de enfrente, son 5/7; el del al lao no lo sé".

Explicación: La respuesta del estudiante es inesperada y queda fuera de los objetivos de esta investigación .

Interpretación: En cualquier caso, la expresión del enunciado "averigua cuánto mide el otro lado" puede resultar ambigua y generar confusión en algunos estudiantes, ya que, ciertamente, un rectángulo no tiene solamente dos lados.

- Alumno 11 (Fco. Javier)


3. **La superficie de la mesa de Ana es un rectángulo que mide 2/3 de m^2. Sabiendo que uno de sus lados mide 5/7 de metro, averigua cuánto mide el otro lado.**

Mide tambien 5/7 al ser todos los lados iguales, miden todos lo mismo.

Trascripción: “Mide también 5/7 al ser todos los lados iguales, miden todos lo mismo”.

Explicación: El estudiante observa que la figura que acompaña al enunciado del problema se parece a un cuadrado y supone que los cuatro lados son iguales. La respuesta del estudiante es inesperada, ya que este tipo de respuestas no apareció en el pilotaje.

Interpretación: El estudiante centra su atención en la figura y no tiene en cuenta todos los datos que aparecen en el enunciado del problema. El diagrama que acompaña al enunciado actúa como distractor. Tal vez debería mejorarse (de forma que sus dos dimensiones sean más desiguales) o eliminarse para evitar confusiones.

- Alumna 12 (Aída)

En blanco.

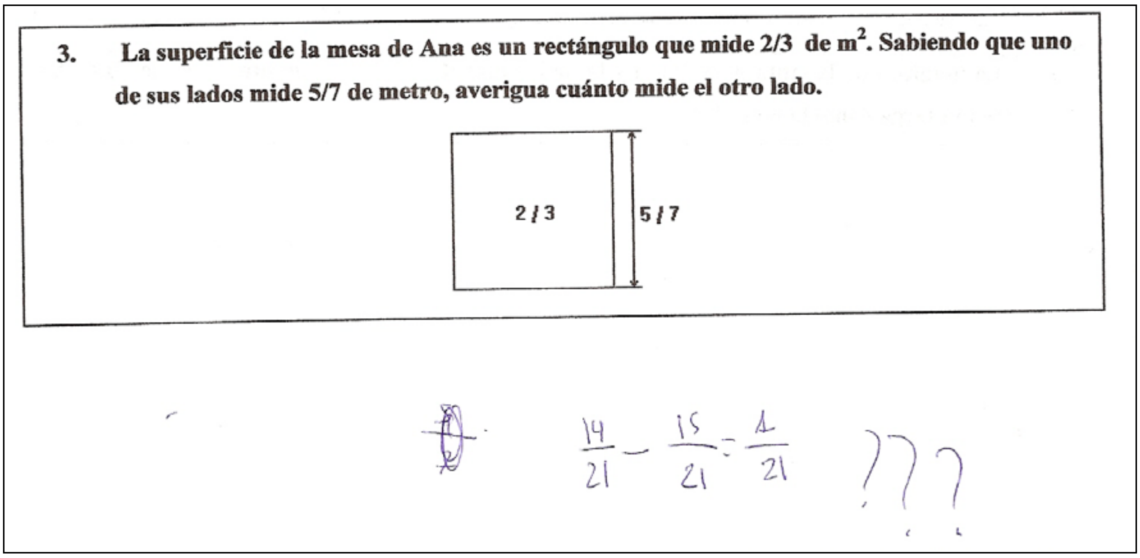
- Alumna 13 (Carmen)

En blanco

- Alumna 14 (Mireia)

En blanco

- Alumno 15 (Héctor)



3. La superficie de la mesa de Ana es un rectángulo que mide 2/3 de m^2. Sabiendo que uno de sus lados mide 5/7 de metro, averigua cuánto mide el otro lado.

2/3

5/7

0

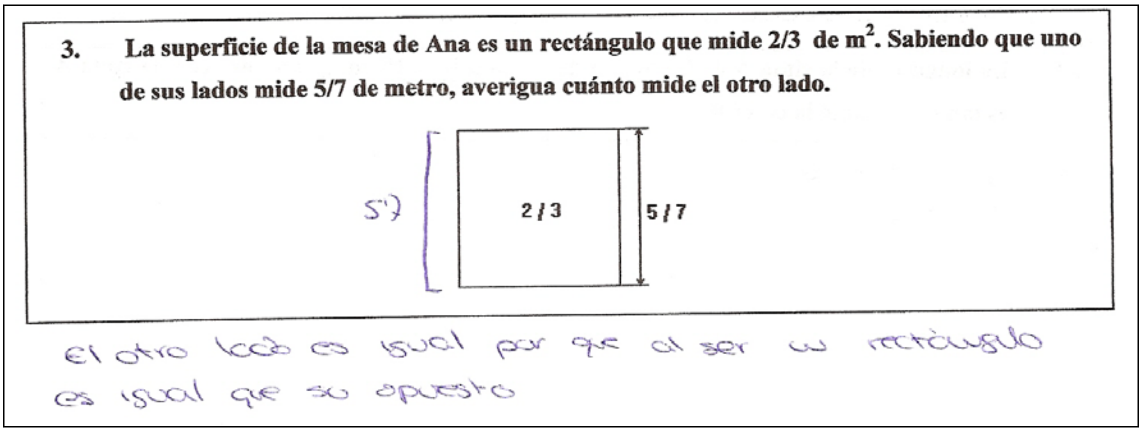
$\frac{14}{21} - \frac{15}{21} = \frac{1}{21}$???

Trascripción: “ $\frac{14}{21} - \frac{15}{21} = \frac{1}{21}$???”.

Explicación: El estudiante resta la fracción 5/7 a la fracción 2/3, que previamente ha reducido a común denominador. Al hacerlo debe hacer la resta $\frac{14}{21} - \frac{15}{21}$, en la que el minuendo es menor que el sustraendo y, aunque da como resultado la fracción 1/21, escribe tres signos de interrogación.

Interpretación: El estudiante enfoca la resolución desde el punto de vista aditivo, comparando las fracciones mediante sustracción, y no mediante división. Solución incorrecta.. Se observa también que el estudiante tiene problemas en admitir resultados negativos para las restas.

- Alumna 16 (Jennifer)



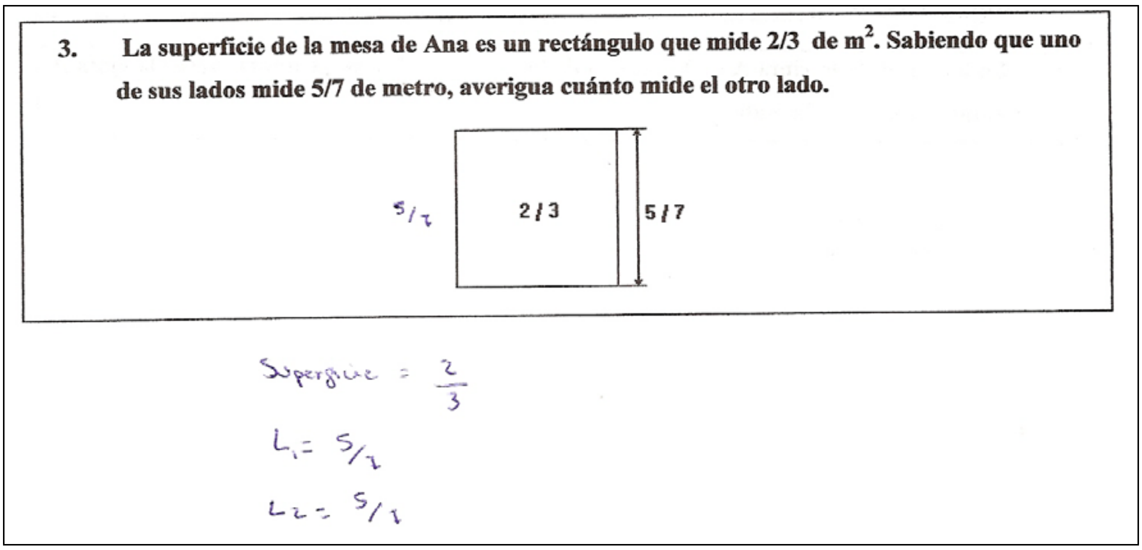
3. La superficie de la mesa de Ana es un rectángulo que mide 2/3 de m^2. Sabiendo que uno de sus lados mide 5/7 de metro, averigua cuánto mide el otro lado.

Trascripción: En la figura del enunciado señala la longitud del lado opuesto al que ya está escrito como altura y escribe 5/7. "El otro lado es igual por que al ser un rectángulo es igual que su opuesto".

Explicación: La respuesta de la estudiante es inesperada, ya que no apareció esta tipología en el pilotaje. La estudiante interpreta el término "el otro lado" como "el lado opuesto al que está señalado en la figura". Respuesta incorrecta.

Interpretación: La estudiante centra su atención en la figura y no tiene en cuenta todos los datos del enunciado del problema. El diagrama que acompaña al enunciado es un distractor que debería mejorarse (de forma que sus dos dimensiones sean más desiguales) o tal vez eliminarse para evitar confusiones.

- Alumna 17 (Laura A)



3. La superficie de la mesa de Ana es un rectángulo que mide 2/3 de m^2. Sabiendo que uno de sus lados mide 5/7 de metro, averigua cuánto mide el otro lado.

Trascripción: En la figura del enunciado escribe 5/7 junto al lado opuesto al ya señalado como altura. “Superficie $=\frac{2}{3}$, $L_1=\frac{5}{7}$; $L_2=\frac{5}{7}$”.

Explicación: La respuesta de la estudiante es similar a la del alumno11 (Fco. Javier), ya que escribe el mismo valor para L_1 y para L_2. La respuesta es inesperada, ya que no se encontró en el pilotaje. Respuesta incorrecta.

Interpretación: Aunque no lo dice de manera explícita, posiblemente identifica la figura del enunciado con un cuadrado y por eso escribe el mismo valor para las dos dimensiones L_1 y L_2. La estudiante centra su atención en la figura y no tiene en cuenta todos los datos del enunciado del problema. El diagrama que acompaña al enunciado actúa como distractor. Tal vez debería mejorarse (de forma que sus dos dimensiones sean más desiguales) o eliminarse para evitar confusiones.

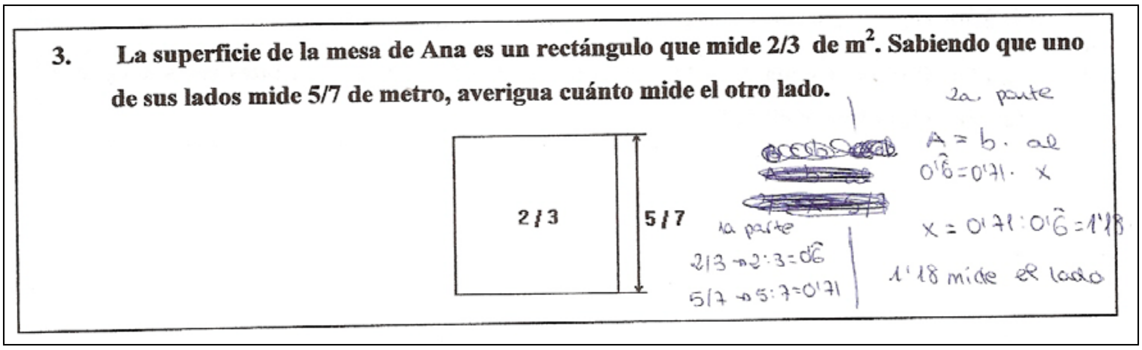
- Alumna 18 (Patri)

En blanco

- Alumna 19 (Laura B)

En blanco.

- Alumno 20 (Jesús)

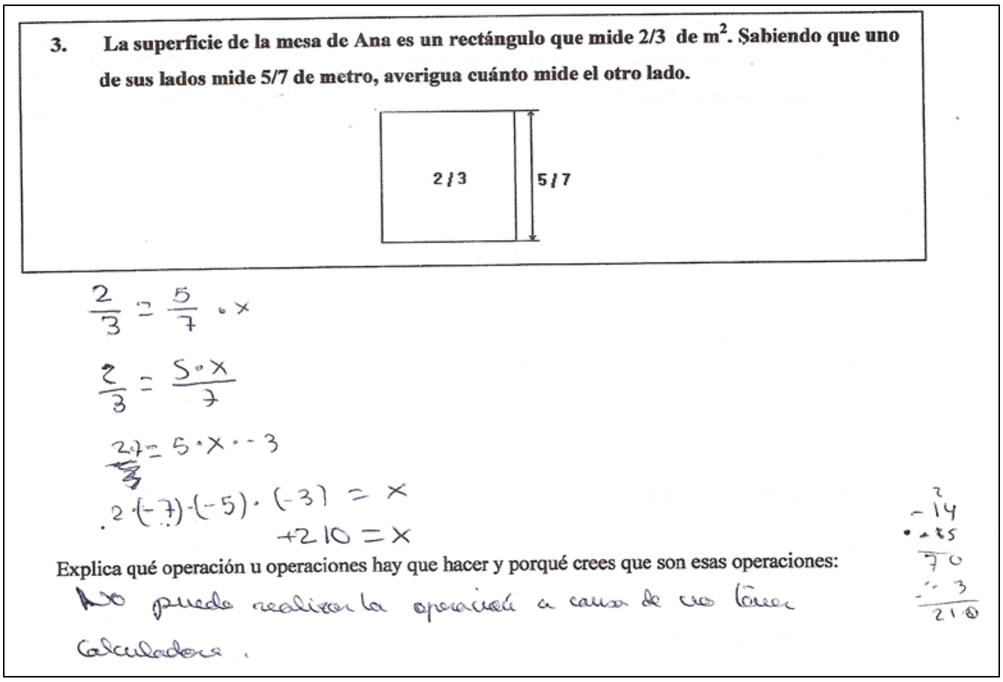


Trascripción: “1ª parte: 2/3→2:3=0’$\overline{6}$; 5/7→5:7=0’71. 2ª parte A=b·al; $0'\overline{6}=0'71\cdot X$; $\frac{3}{5}=3:5=0'6$; X=0’71:0’$\overline{6}=1'18$; 1’18 mide el lado”.

Explicación: En la primera parte, el estudiante transforma las fracciones en decimales; en la segunda parte, escribe la fórmula del área de un rectángulo y sustituye en ella los datos conocidos. A continuación resuelve la ecuación obtenida, pero despeja mal, obteniendo un resultado incorrecto. No explica el procedimiento.

Interpretación: El estudiante enfoca la resolución por medio del planteamiento y resolución de una ecuación. Aunque no lo dice, posiblemente identifica el problema con el modelo semántico de inversión de la multiplicación o factor perdido. La división de fracciones la hace a través de las expresiones decimales, posiblemente usando la calculadora.

- Alumna 21 (Estefanía)


3. La superficie de la mesa de Ana es un rectángulo que mide 2/3 de m². Sabiendo que uno de sus lados mide 5/7 de metro, averigua cuánto mide el otro lado.

$\frac{2}{3} = \frac{5}{7} \cdot x$

$\frac{2}{3} = \frac{5 \cdot x}{7}$

$2 \cdot 7 = 5 \cdot x \cdot -3$

$2 \cdot (-7) \cdot (-5) \cdot (-3) = x$

$+210 = x$

Explica qué operación u operaciones hay que hacer y porqué crees que son esas operaciones:

No puedo realizar la operación a causa de no tener calculadora.

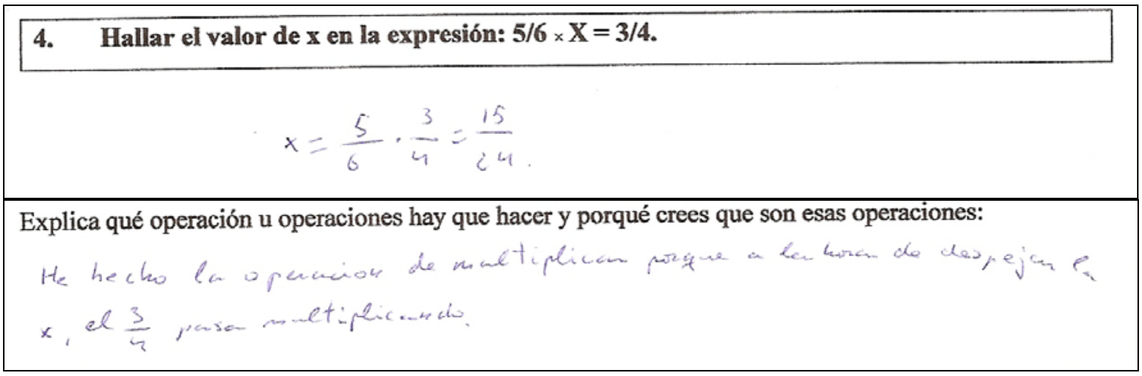
Trascripción: “$\frac{2}{3} = \frac{5}{7} \cdot \mathrm{X}$; $\frac{2}{3} = \frac{5 \cdot \mathrm{X}}{7}$; 2·7=5·X·–3; 2·(–7)·(–3)=X; +210=X. No puedo realizar la operación a causa de no tener calculadora”.

Explicación: La estudiante plantea una ecuación e intenta resolverla, primero igualando los productos cruzados y después despejando la X. Respuesta incorrecta. En su explicación hace alusión al no uso de la calculadora como causa de errores.

Interpretación: La estudiante enfoca la resolución como el planteamiento y resolución de una ecuación, pero tiene dificultades con el álgebra, al mezclar la igualdad de los productos cruzados (que es un pensamiento multiplicativo) con el cambio de miembro aditivo (“lo que es positivo pasa al otro lado negativo”).

10.1.5. Tarea 4: “Ecuación”

- Alumno 1(Rubén)


4. Hallar el valor de x en la expresión: 5/6 × X = 3/4.

$x = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{24}$.

Explica qué operación u operaciones hay que hacer y porqué crees que son esas operaciones:

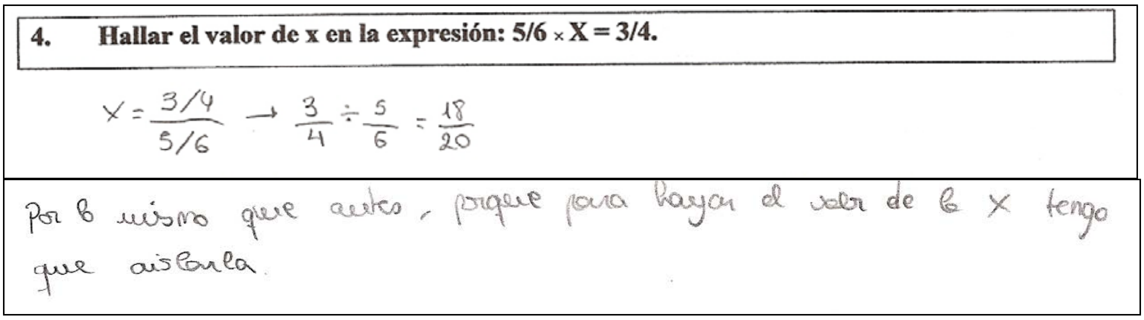
He hecho la operacion de multiplicar porque a la hora de despejar la x, el $\frac{3}{4}$ pasa multiplicando.

Trascripción: "$X = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{24}$. He hecho la operación de multiplicar porque a la hora de despejar la X, el 3/4 pasa multiplicando"

Explicación: El estudiante multiplica la fracción 5/6 por la fracción 3/4 y lo justifica diciendo que para despejar la X hay que pasar 3/4 a la otra parte del signo = y pasa multiplicando.

Interpretación: El estudiante enfoca la resolución de la ecuación mediante una multiplicación, dando una solución incorrecta, ya que, cambia de miembro la fracción 3/4, cuando debería haber cambiado de miembro la fracción 5/6. Manifiesta dificultades para despejar por defecto de foco.

- Alumna 2 (Cristina)


4. Hallar el valor de x en la expresión: 5/6 × X = 3/4.

$X = \frac{3/4}{5/6} \rightarrow \frac{3}{4} \div \frac{5}{6} = \frac{18}{20}$

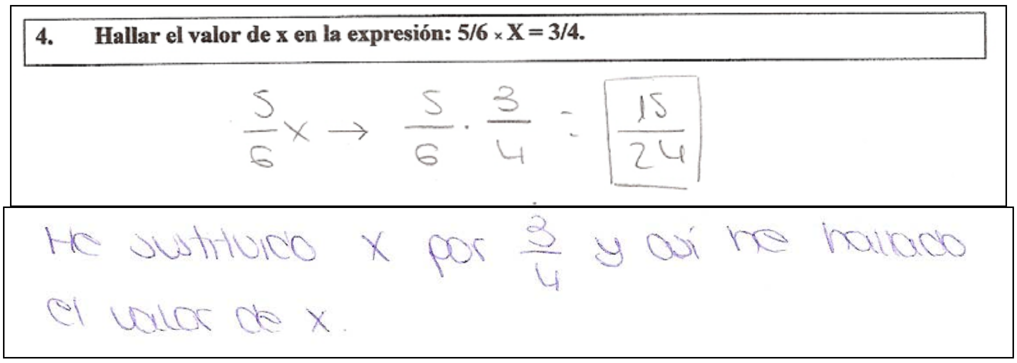
Por lo mismo que antes, porque para hayar el valor de la X tengo que aislarla.

Trascripción: "$X = \frac{3/4}{5/6} \rightarrow \frac{3}{4} \div \frac{5}{6} = \frac{18}{20}$. Por lo mismo que antes, porque para hayar el valor de la X tengo que aislarla".

Explicación: La estudiante despeja la X de la ecuación dividiendo la fracción 3/4 entre la fracción 5/6, obteniendo la solución correcta. En su explicación, señala que para hallar la X tiene que aislarla (despejarla) en la ecuación.

Interpretación: La estudiante enfoca la resolución de la ecuación mediante una división. El modelo semántico es de factor perdido. No señala qué algoritmo utiliza para dividir las fracciones, aunque por el hecho de no estar simplificado resultado, posiblemente ha usado el de "productos cruzados"

- Alumna 3 (Ana)


4. Hallar el valor de x en la expresión: 5/6 × X = 3/4.

$\frac{5}{6}X \rightarrow \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} = \boxed{\frac{15}{24}}$

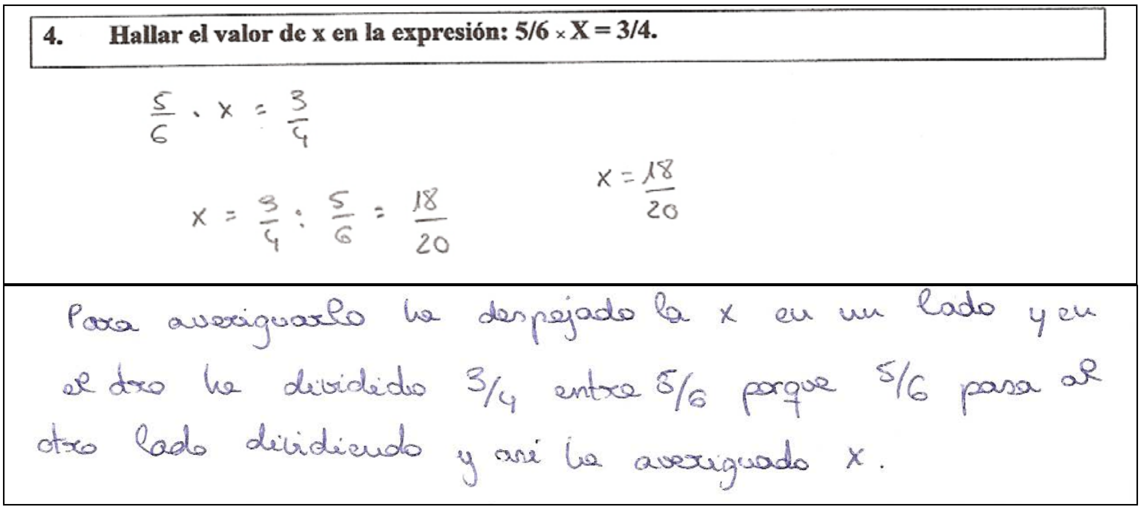
He sustituido X por $\frac{3}{4}$ y así he hallado el valor de X.

Trascripción: "$\frac{5}{6}X \rightarrow \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4} = \frac{15}{24}$. He sustituido X por 3/4 y así he hallado el valor de X".

Explicación: La estudiante escribe la parte izquierda del signo igual y una flecha. A continuación multiplica la fracción 5/6 por la fracción 3/4, obteniendo un resultado incorrecto. En su explicación señala que ha sustituido la X por 3/4 en la ecuación.

Interpretación: La estudiante enfoca la resolución de la ecuación mediante una multiplicación, con un modelo semántico de factor perdido. Sustituye la incógnita X por 3/4, debido a que piensa que la tarea consiste en sustituir la X y no en despejarla.

- Alumna 4 (Miriam)



4. Hallar el valor de x en la expresión: 5/6 × X = 3/4.

$\frac{5}{6} \cdot x = \frac{3}{4}$

$x = \frac{3}{4} : \frac{5}{6} = \frac{18}{20}$

$x = \frac{18}{20}$

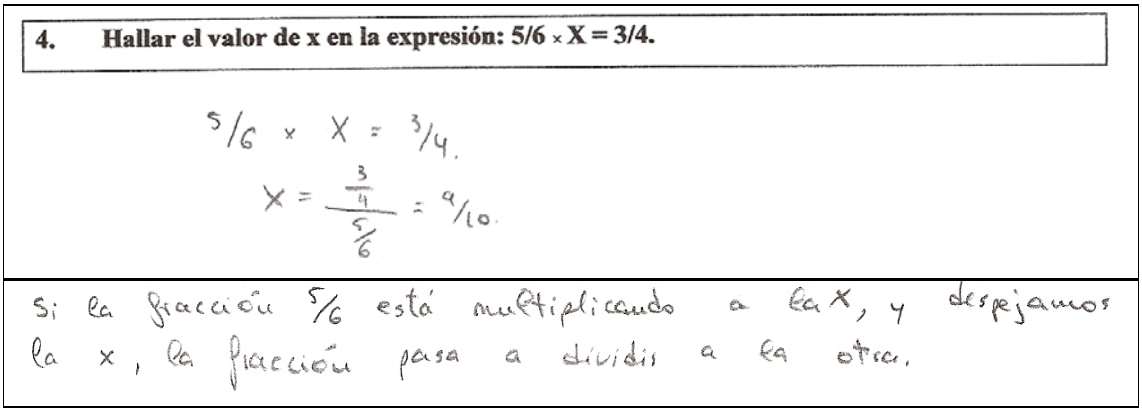
Para averiguarlo he despejado la x en un lado y en el otro he dividido 3/4 entre 5/6 porque 5/6 pasa al otro lado dividiendo y así he averiguado x.

Trascripción: "$\frac{5}{6}\cdot X = \frac{3}{4}$; $X = \frac{3}{4} : \frac{5}{6} = \frac{18}{20}$; X=$\frac{18}{20}$. Para averiguarlo he despejado la X en un lado y en el otro he dividido 3/4 entre 5/6 porque 5/6 pasa al otro lado dividiendo y así he averiguado X".

Explicación: La estudiante escribe de nuevo la ecuación y despeja la X dividiendo la fracción 3/4 entre 5/6, obteniendo un resultado correcto, sin simplificar. En su explicación dice que en un lado del signo = ha despejado la X y en el otro lado ha dividido las fracciones.

Interpretación: La estudiante enfoca la resolución de la ecuación mediante una división, con un modelo semántico de factor perdido. Interpreta como diferentes las acciones "despejar X en un lado" y "dividir las fracciones en el otro lado". En su respuesta no está claro qué algoritmo utiliza para la división de fracciones, pero al no estar simplificado el resultado, hay motivos para pensar que no ha usado el protocolo de la calculadora y si el de productos cruzados.

- Alumna 5 (Ángela)



4. Hallar el valor de x en la expresión: 5/6 × X = 3/4.

$5/6 \times X = 3/4$.

$X = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}} = 9/10$.

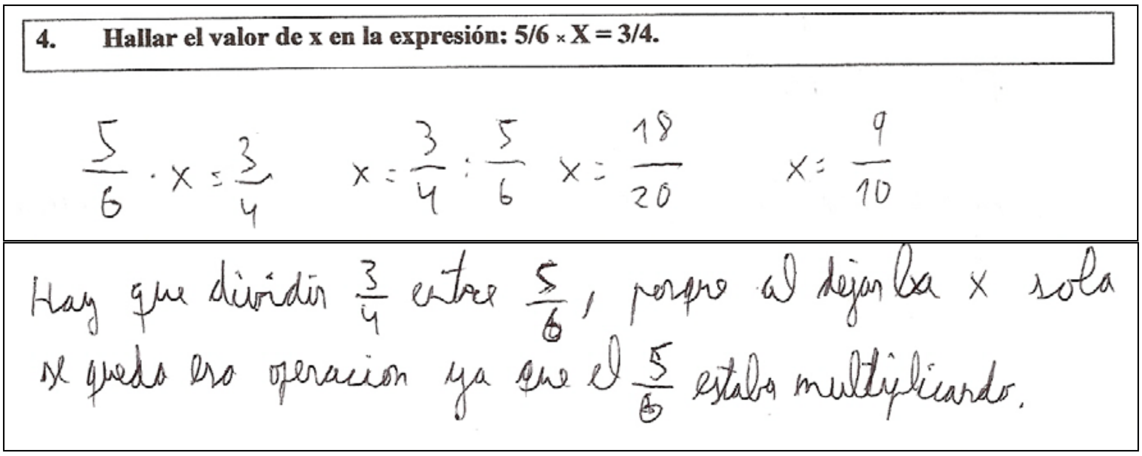
Si la fracción 5/6 está multiplicando a la X, y despejamos la x, la fracción pasa a dividir a la otra.

Trascripción: “ $\frac{5}{6} \times X = \frac{3}{4}$; $X = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}} = \frac{9}{10}$. Si la fracción 5/6 está multiplicando a la X, y despejamos la X, la fracción pasa a dividir a la otra”.

Explicación: La estudiante vuelve a escribir la ecuación del enunciado y a continuación despeja la X dividiendo las fracciones 3/4 y 5/6, obteniendo el resultado correcto 9/10. En su explicación señala que para despejar la X hay que dividir fracciones al otro lado del signo igual.

Interpretación: La estudiante enfoca la resolución de la ecuación mediante una división, con un modelo semántico de factor perdido. Interpreta como diferentes las acciones “despejar X en un lado” y “dividir las fracciones en el otro lado”. En su respuesta no está claro qué algoritmo utiliza para la división de fracciones, pero al estar simplificado el resultado, es posible que haya usado el protocolo de la calculadora.

- Alumno 6 (Juan)



4. Hallar el valor de x en la expresión: 5/6 × X = 3/4.

$\frac{5}{6} \cdot X = \frac{3}{4}$ $X = \frac{3}{4} : \frac{5}{6}$ $X = \frac{18}{20}$ $X = \frac{9}{10}$

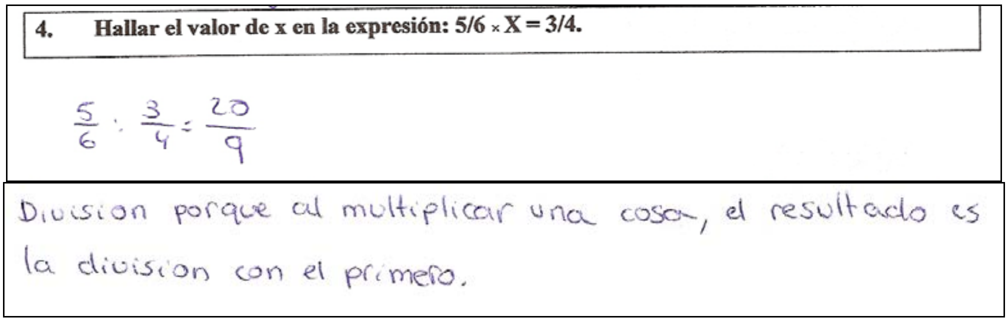
Hay que dividir $\frac{3}{4}$ entre $\frac{5}{6}$, porque al dejar la x sola se queda esa operacion ya que el $\frac{5}{6}$ estaba multiplicando.

Trascripción: “ $\frac{5}{6} \times X = \frac{3}{4}$; $X = \frac{3}{4} : \frac{5}{6}$; $X = \frac{18}{20}$; $X = \frac{9}{10}$. Hay que dividir $\frac{3}{4}$ entre $\frac{5}{6}$ porque al dejar la X sola se queda esa operación, ya que el 5/6 estaba multiplicando”.

Explicación: El estudiante vuelve a escribir la ecuación del enunciado y a continuación despeja la X dividiendo las fracciones 3/4 y 5/6, obteniendo el resultado correcto 9/10. En su explicación señala que para despejar la X hay que dividir fracciones porque el 5/6 estaba multiplicando.

Interpretación: El estudiante enfoca la resolución de la ecuación mediante una división, con un modelo semántico de factor perdido. En su respuesta no está claro qué algoritmo utiliza para la división de fracciones.

- Alumna 7 (Casandra)



4. **Hallar el valor de x en la expresión: 5/6 × X = 3/4.**

$\frac{5}{6} : \frac{3}{4} = \frac{20}{9}$

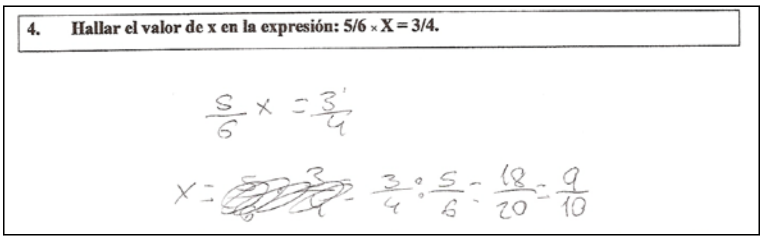
Division porque al multiplicar una cosa, el resultado es la division con el primero.

Trascripción: “ $\frac{5}{6}:\frac{3}{4}=\frac{20}{9}$. División porque al multiplicar una cosa, el resultado es la división con el primero”.

Explicación: La estudiante divide directamente las fracciones del enunciado, pero en el mismo orden en que aparecen en el enunciado, 5/6 : 3/4, obteniendo un resultado incorrecto 20/9. En su explicación señala que la operación para resolver el problema es la división, porque al multiplicar una cosa, el resultado es la división con el primero.

Interpretación: La estudiante enfoca la resolución de la ecuación mediante una división, con un modelo semántico de inversión de la multiplicación, ya que, aunque la forma textual que utiliza está mal expresada, se basa en la dicotomía multiplicación–división como operaciones inversas. Comete un error de cálculo al efectuar la división de fracciones. En su respuesta no está claro qué algoritmo utiliza para la división de fracciones, pero teniendo en cuenta el error, puede que sea el de productos cruzados. De hecho, parece que su error consiste en que suma el denominador del dividendo (6) con el numerador del divisor (3), en vez de multiplicarlos.

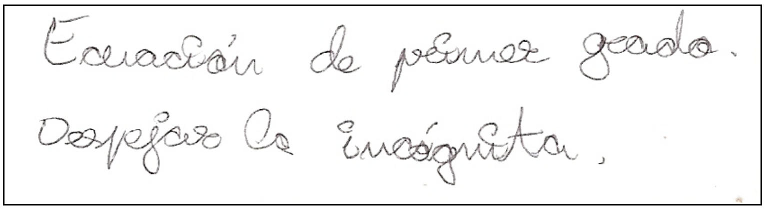
- Alumno 8 (Christian)



4. **Hallar el valor de x en la expresión: 5/6 × X = 3/4.**

$\frac{5}{6} x = \frac{3}{4}$

$x = \frac{3}{4} : \frac{5}{6} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$

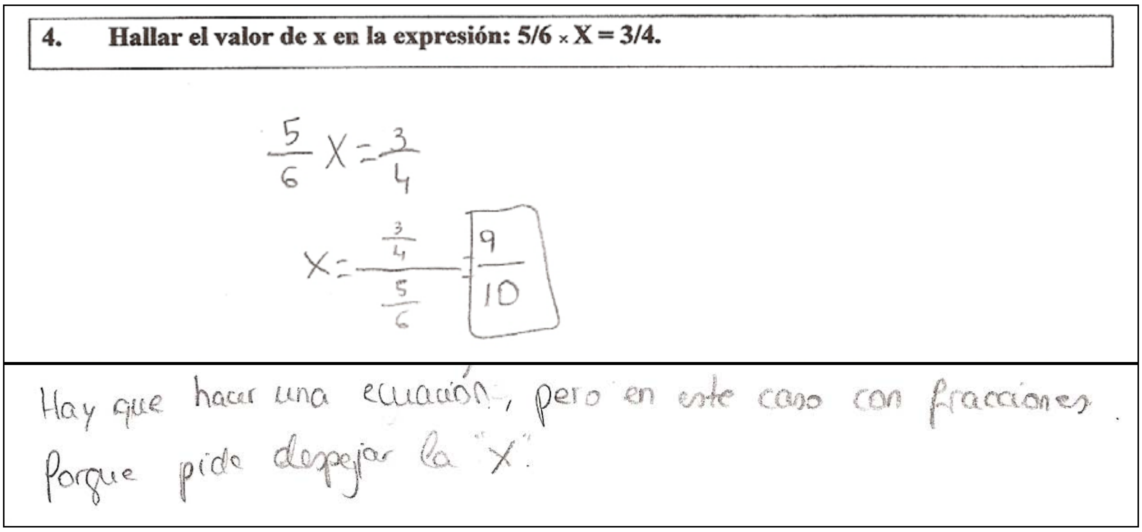

Ecuación de primer grado.
Despejar la incógnita.

Trascripción: " $\frac{5}{6} \times X = \frac{3}{4}$; $X = \frac{3}{4} : \frac{5}{6} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$. Ecuación de primer grado. Despejar la incógnita".

Explicación: El estudiante vuelve a escribir la ecuación del enunciado y a continuación despeja la X dividiendo las fracciones 3/4 y 5/6, obteniendo el resultado correcto 9/10. En su explicación señala que se trata de una ecuación de primer grado y hay que despejar la incógnita para resolverla.

Interpretación: El estudiante enfoca la resolución de la ecuación mediante una división, con un modelo semántico de factor perdido. En su respuesta no está claro qué algoritmo utiliza para la división de fracciones, pero posiblemente ha usado el de productos cruzados.

- Alumna 9 (Ana María)


4. Hallar el valor de x en la expresión: 5/6 × X = 3/4.

$\frac{5}{6} X = \frac{3}{4}$

$X = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}} = \boxed{\frac{9}{10}}$

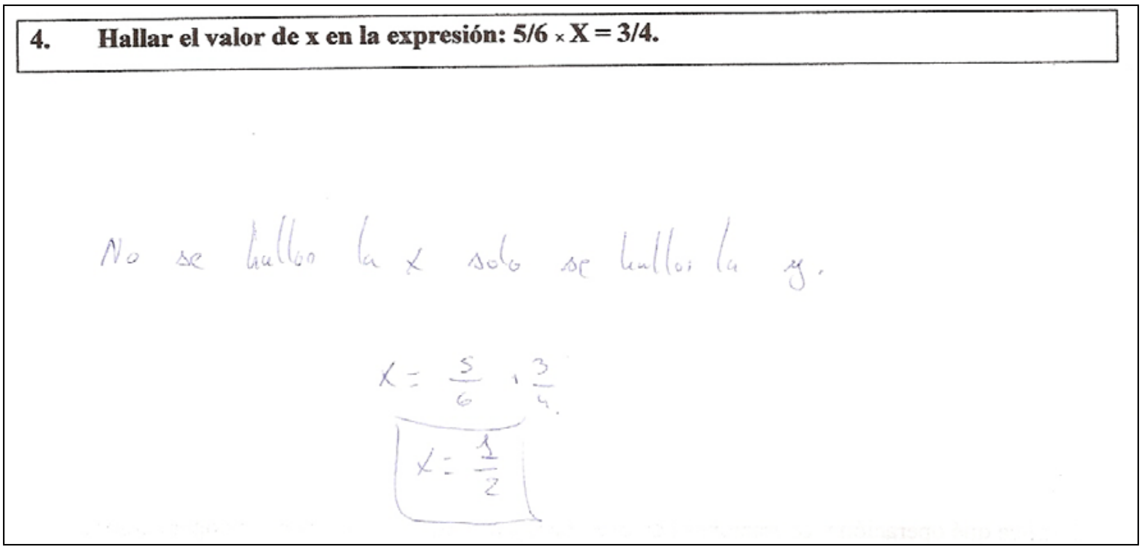
Hay que hacer una ecuación, pero en este caso con fracciones.
Porque pide despejar la "X".

Trascripción: " $\frac{5}{6} \times X = \frac{3}{4}$; $X = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}} = \frac{9}{10}$. Hay que hacer una ecuación, pero en este caso con fracciones porque pide despejar la "X"".

Explicación: La estudiante vuelve a escribir la ecuación del enunciado y a continuación despeja la X dividiendo las fracciones 3/4 y 5/6, obteniendo el resultado correcto 9/10. En su explicación señala que hay que resolver una ecuación con fracciones y para ello hay que despejar la X.

Interpretación: La estudiante enfoca la resolución de la ecuación mediante una división, con un modelo semántico de factor perdido. En su respuesta no está claro qué algoritmo utiliza para la división de fracciones, posiblemente ha utilizado la calculadora.

- Alumno 10 (Vicent)



4. Hallar el valor de x en la expresión: 5/6 × X = 3/4.

No se hallar la x solo se hallar la y.

$x = \frac{5}{6} + \frac{3}{4}$

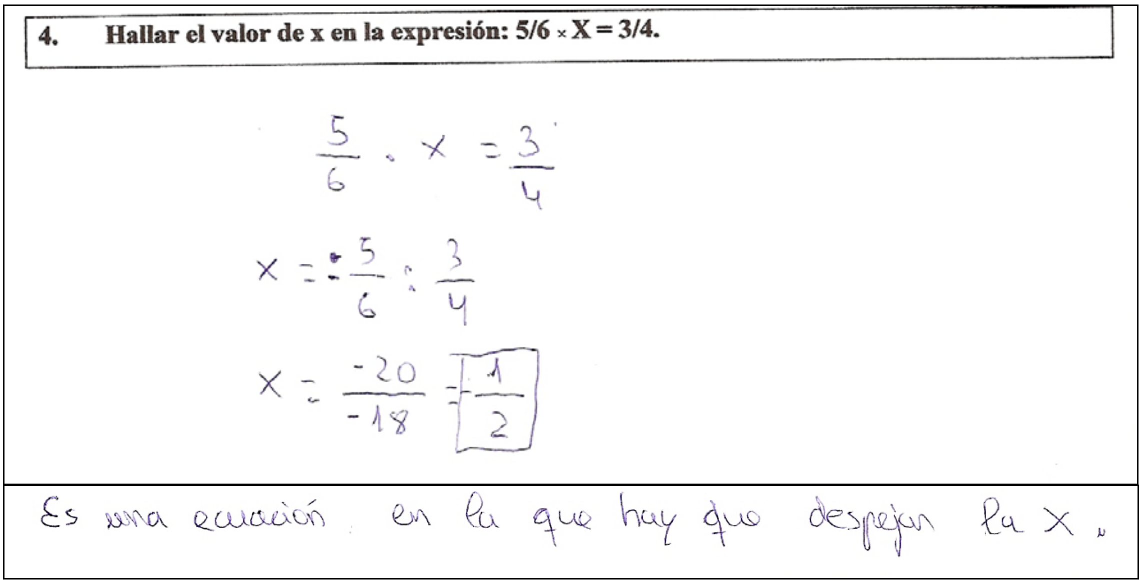
$\boxed{x = \frac{1}{2}}$

Trascripción: "No se hallar la X, solo se hallar la Y. $X = \frac{5}{6} + \frac{3}{4}$; $X = \frac{1}{2}$."

Explicación: La respuesta del estudiante es inesperada, ya que respuestas de este tipo no aparecieron en el pilotaje. El estudiante suma las fracciones del enunciado y da como resultado la fracción 1/2. Resultado incorrecto.

Interpretación: Aunque la respuesta se cataloga como "no esperada", lo cierto es que el estudiante manifiesta una tendencia a razonar de manera aditiva, por el hecho de escribir una suma de fracciones.

- Alumno 11 (Fco. Javier)



4. Hallar el valor de x en la expresión: 5/6 × X = 3/4.

$\frac{5}{6} \cdot x = \frac{3}{4}$

$x = \frac{5}{6} : \frac{3}{4}$

$x = \frac{-20}{-18} = \boxed{\frac{1}{2}}$

Es una ecuación en la que hay que despejar la x.

Trascripción: “ $\frac{5}{6}\cdot X=\frac{3}{4}$; $X=\frac{-5}{-6}:\frac{3}{4}$; $X=\frac{-20}{-18}=\frac{1}{2}$. Es una ecuación en la que hay que despejar la X”.

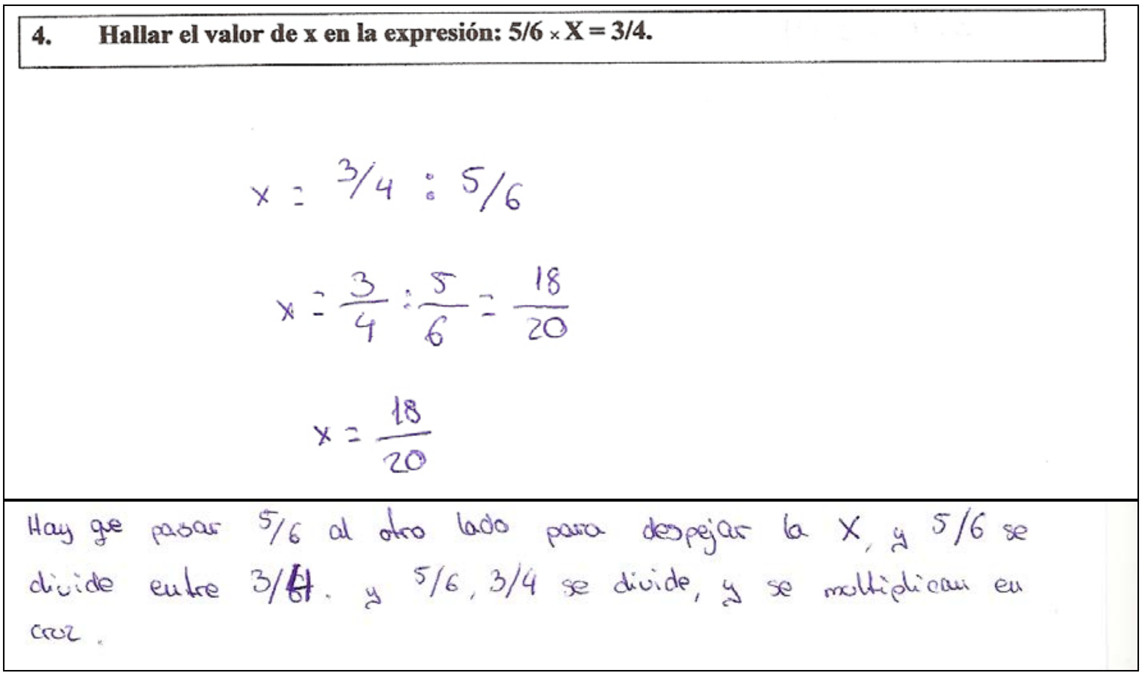
Explicación: El estudiante vuelve a escribir la ecuación del enunciado y a continuación despeja la X dividiendo la fracción $\frac{-5}{-6}$ entre la fracción $\frac{3}{4}$, obteniendo un resultado incorrecto 1/2. En su explicación señala que se trata de una ecuación en la que hay que despejar la X.

Interpretación: El estudiante enfoca la resolución de la ecuación mediante una división, con un modelo semántico de factor perdido. Manifiesta dificultades para despejar, ya que, en primer lugar, no pasa la fracción 5/6 al otro miembro dividiendo a 3/4, sino que, contrariamente, es la fracción 3/4 (que no cambia de miembro) la que divide a 5/6. En segundo lugar, la presencia de los signos negativos indica que para pasar la fracción 5/6 al segundo miembro, debe pasar el 5 y el 6, que, como son positivos, pasan negativos al segundo miembro, De la misma forma, comete un error al simplificar el resultado. En esta respuesta hay una mezcla de las reglas aditiva y multiplicativa para cambiar de miembro. Aunque no está claro qué algoritmo utiliza para la división de fracciones, es seguro que no ha usado la calculadora, ya que el cálculo intermedio no está simplificado; posiblemente ha usado el algoritmo de los productos cruzados.

- Alumna 12 (Aída)

En blanco.

- Alumna 13 (Carmen)


4. Hallar el valor de x en la expresión: 5/6 × X = 3/4.

$x = 3/4 : 5/6$

$x = \frac{3}{4} : \frac{5}{6} = \frac{18}{20}$

$x = \frac{18}{20}$

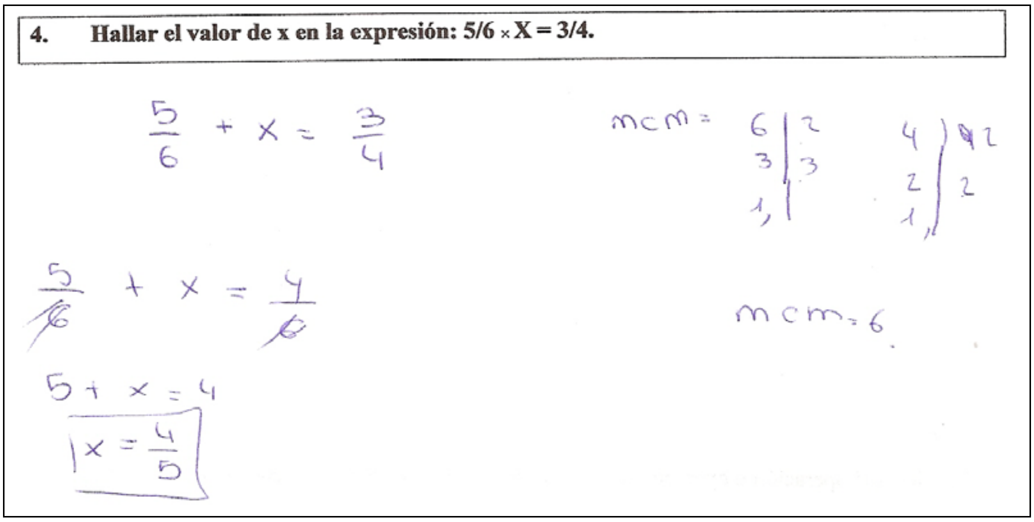
Hay qe pasar 5/6 al otro lado para despejar la X, y 5/6 se divide entre 3/4. y 5/6, 3/4 se divide, y se multiplican en cruz.

Trascripción: "$X = \frac{3}{4} : \frac{5}{6}; X = \frac{3}{4} : \frac{5}{6} = \frac{18}{20}; X = \frac{18}{20}$. Hay que pasar 5/6 al otro lado para despejar la X, y 5/6 se divide entre 3/4. y 5/6, 3/4 se divide, y se multiplican en cruz".

Explicación: La estudiante despeja la X dividiendo la fracción 3/4 entre la fracción 5/6, obteniendo la solución correcta. En su explicación dice que hay que pasar 5/6 al otro lado del signo = para despejar la X y que 5/6 se divide entre 3/4 (cuando es al revés). Señala también que los elementos de las fracciones se multiplican en cruz, con objeto de explicar el algoritmo.

Interpretación: La estudiante enfoca la resolución de la ecuación mediante una división, con un modelo semántico de factor perdido. Manifiesta dificultades para explicar cómo despeja la incógnita. Tanto en la respuesta como en la explicación de la misma, se observa que utiliza el algoritmo de los productos cruzados.

- Alumna 14 (Mireia)

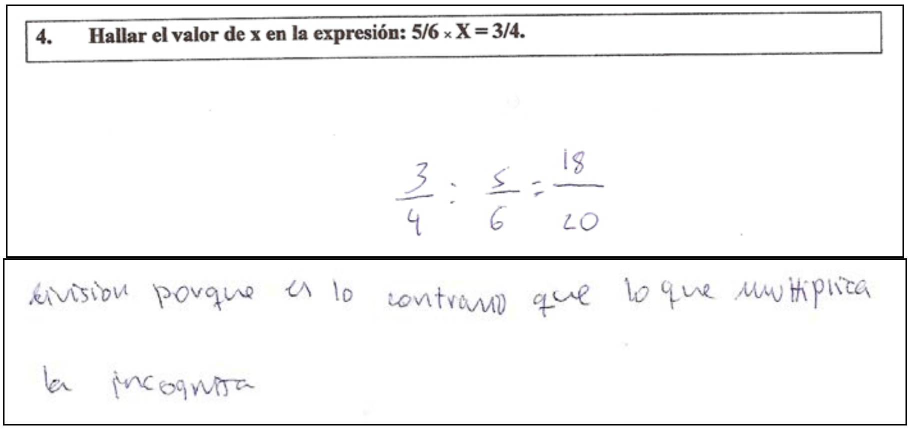


Trascripción: "$\frac{5}{6} + X = \frac{3}{4}$; calcula el mcm(6,4) descomponiendo en factores primos 6 y 4. Escribe que mcm=6. $\frac{5}{\cancel{6}} + X = \frac{4}{\cancel{6}}; 5 + X = 4$; X=$\frac{4}{5}$".

Explicación: La estudiante convierte la ecuación multiplicativa en una ecuación aditiva, sustituyendo el signo de multiplicar (x) por el signo de sumar (+). La estudiante no reconoce la división de fracciones como enfoque de resolución del problema. En lugar de ello, transforma las fracciones a común denominador (de manera no correcta), transforma la ecuación (también de forma no correcta) y obtiene una ecuación lineal, 5+x=4, que resuelve, sin embargo, de forma multiplicativa, ya que pasa el 5 al segundo miembro dividiendo a 4, lo que da la solución (incorrecta) X=$\frac{4}{5}$.

Interpretación: La estudiante enfoca la resolución de la ecuación de manera aditiva, de manera que no reconoce la división de fracciones como estrategia para resolver el problema. Se observan errores en el cálculo del mínimo común múltiplo y dificultades para transformar una ecuación en otra equivalente sin denominadores. También se observan errores al despejar la incógnita por predominio del enfoque aditivo frente al multiplicativo.

- Alumno 15 (Héctor)



4. Hallar el valor de x en la expresión: 5/6 × X = 3/4.

$\frac{3}{4} : \frac{5}{6} = \frac{18}{20}$

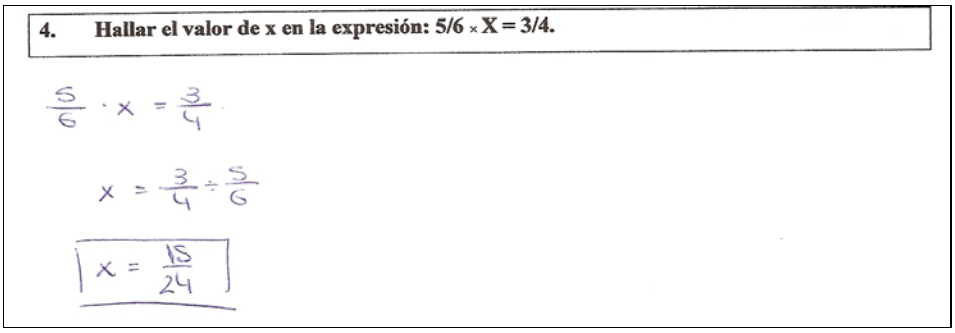
División porque es lo contrario que lo que multiplica la incognita

Trascripción: "$\frac{3}{4} : \frac{5}{6} = \frac{18}{20}$. División porque es lo contrario que lo que multiplica la incógnita".

Explicación: El estudiante divide directamente la fracción 3/4 entre la fracción 5/6, obteniendo el resultado correcto. No simplifica el resultado. En su explicación indica que la operación que resuelve el problema es la división, porque es lo contrario que multiplicar a la incógnita.

Interpretación: El enfoque de resolución de este estudiante es de división directa. Por la forma textual que utiliza en su explicación, se deduce que su modelo semántico es la inversión de la multiplicación o factor perdido. Teniendo en cuenta que el resultado de la división no está simplificado, se deduce que el algoritmo que utiliza es, probablemente, el de productos cruzados.

- Alumna 16 (Jennifer)

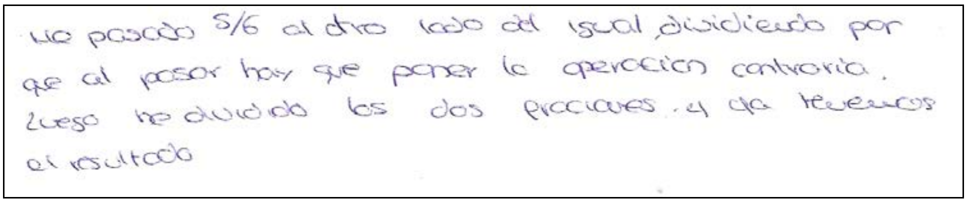


4. Hallar el valor de x en la expresión: 5/6 × X = 3/4.

$\frac{5}{6} \cdot x = \frac{3}{4}$

$x = \frac{3}{4} \div \frac{5}{6}$

$\boxed{x = \frac{15}{24}}$

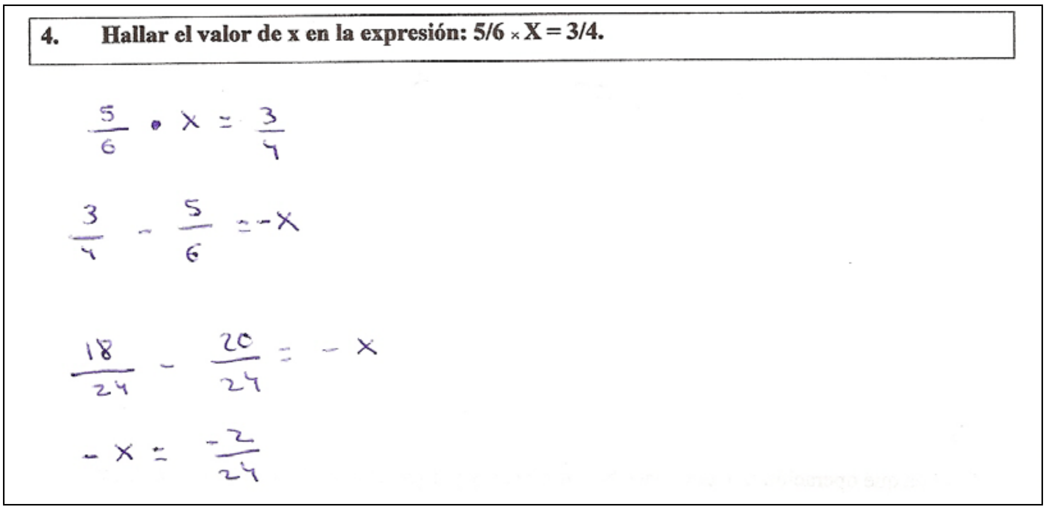


Trascripción: “$\frac{5}{6} \cdot X = \frac{3}{4}$; $X = \frac{3}{4} \div \frac{5}{6}$; $X = \frac{15}{24}$. He pasado 5/6 al otro lado del igual, dividiendo por que al pasar hay que poner la operación contraria. Luego he dividido las dos fracciones, y ya tenemos el resultado”.

Explicación: La estudiante escribe de nuevo la ecuación del enunciado y despeja la X, dividiendo la fracción 3/4 entre 5/6. Comete un error en el cálculo de la división y obtiene un resultado incorrecto. En su explicación indica que ha elegido esta operación porque al cambiar de miembro hay que usar la operación contraria.

Interpretación: La estudiante enfoca la resolución de la ecuación mediante una división de fracciones, con un modelo semántico de inversión de la multiplicación o factor perdido. Sin embargo, aplica de forma errónea el algoritmo de la división de fracciones, ya que multiplica los numeradores y los denominadores, obteniendo un resultado incorrecto.

- Alumna 17 (Laura A)



Trascripción: “$\frac{5}{6} \cdot X = \frac{3}{4}$; $\frac{3}{4} - \frac{5}{6} = -X$; $\frac{18}{24} - \frac{20}{24} = -X$; $-X = \frac{-2}{24}$”. No explica su respuesta.

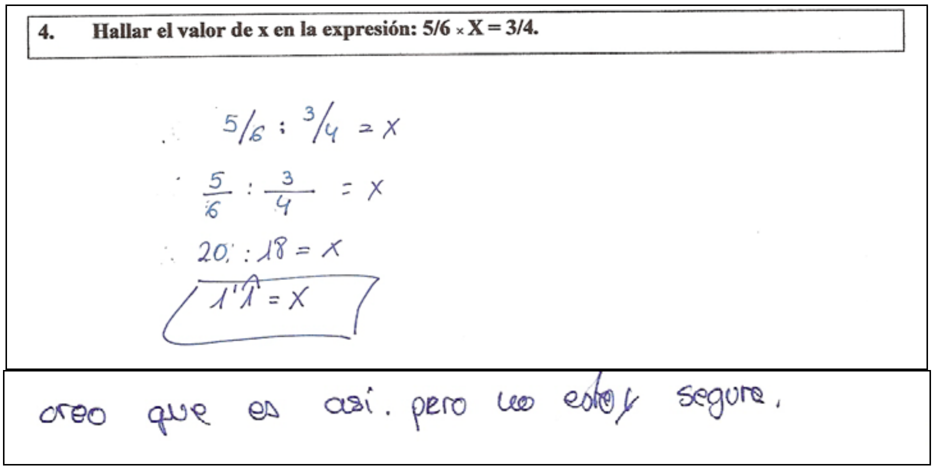
Explicación: La estudiante escribe de nuevo la ecuación del enunciado y despeja la X, pasándola al segundo miembro con signo negativo. Mantiene 5/6 en el primer miembro, pero con signo negativo y pasa 3/4 al primer miembro con el mismo signo que tenía en el segundo miembro. Obtiene un resultado incorrecto.

Interpretación: La estudiante enfoca la resolución de la ecuación de manera aditiva, reduciéndola a una resta de fracciones, en vez de una división. En su respuesta se observa una mezcla de las reglas aditiva y multiplicativa para despejar la incógnita, lo que es visible por la disposición de los signos que aparece en la segunda línea

- Alumna 18 (Patri)

En blanco

- Alumna 19 (Laura B)


4. Hallar el valor de x en la expresión: 5/6 × X = 3/4.

5/6 : 3/4 = X

$\frac{5}{6} : \frac{3}{4} = X$

20 : 18 = X

$\boxed{1'\hat{1} = X}$

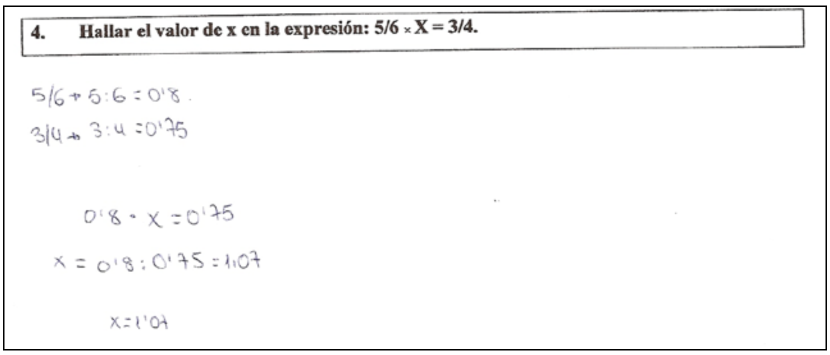
creo que es así. pero no estoy segura.

Trascripción: “$\frac{5}{6}:\frac{3}{4} = \mathrm{X}$; $\frac{5}{6}:\frac{3}{4} = \mathrm{X}$; 20**:**18=X; $1'\overline{1} = \mathrm{X}$, Creo que es así, pero no estoy segura”.

Explicación: La estudiante escribe de nuevo la ecuación del enunciado sustituyendo la operación de multiplicar por la de dividir y escribe la X de nuevo como división pero invirtiendo el orden entre dividendo y divisor. De esta forma obtiene una solución incorrecta expresada en forma decimal.

Interpretación: La estudiante enfoca la resolución de la ecuación mediante una división, pero invierte el orden de dividendo y divisor. Utiliza el algoritmo de los productos cruzados para hacer la división de fracciones y expresa el resultado (incorrecto) en forma decimal.

- Alumno 20 (Jesús)


4. Hallar el valor de x en la expresión: 5/6 × X = 3/4.

5/6 → 5:6 = 0'8

3/4 → 3:4 = 0'75

0'8 · X = 0'75

X = 0'8 : 0'75 = 1'07

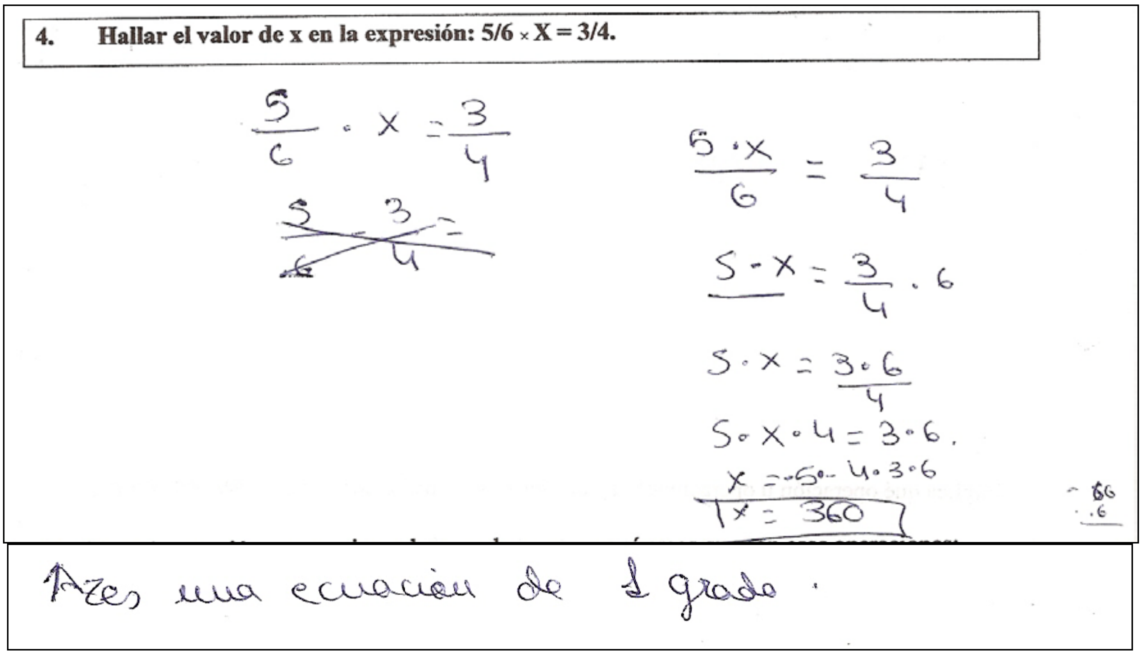
X = 1'07

Trascripción: “5/6→5:6=0’8; 3/4→3:4=0’75. 0’8·X=0’75; X=0’8:0’75=1,07; X=1’07”. No incluye ninguna explicación.

Explicación: En primer lugar, el estudiante transforma las fracciones en decimales; después plantea la ecuación con decimales y despeja la incógnita de manera incorrecta, operando siempre con la expresión decimal. Obtiene un resultado incorrecto. No explica el procedimiento.

Interpretación: El estudiante enfoca la resolución de la ecuación por medio de una división de decimales, pero invierte el orden de dividendo y divisor. Aunque no lo dice, posiblemente identifica el problema con el modelo semántico de inversión de la multiplicación o factor perdido. La división de fracciones la hace a través de las expresiones decimales, posiblemente usando la calculadora.

- Alumna 21 (Estefanía)


4. Hallar el valor de x en la expresión: 5/6 × X = 3/4.

$\frac{5}{6} \cdot X = \frac{3}{4}$

$\frac{5 \cdot X}{6} = \frac{3}{4}$

$5 \cdot X = \frac{3}{4} \cdot 6$

$5 \cdot X = \frac{3 \cdot 6}{4}$

$5 \cdot X \cdot 4 = 3 \cdot 6$

$X = -5 \cdot -4 \cdot 3 \cdot 6$

$\boxed{X = 360}$

Azes una ecuación de 1 grado.

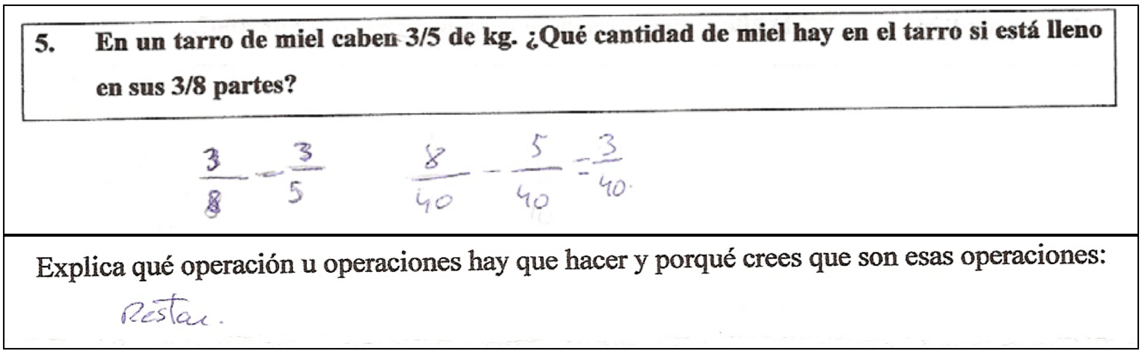
Trascripción: “$\frac{5}{6} \cdot X = \frac{3}{4}$; $\frac{5 \cdot X}{6} = \frac{3}{4}$; $5 \cdot X = \frac{3}{4} \cdot 6$; $5 \cdot X = \frac{3 \cdot 6}{4}$; 5·X·4=3·6. X=–5·–4·3·6; X=360. Azes una ecuación de 1 grado”.

Explicación: La estudiante escribe la ecuación e intenta resolverla paso a paso, primero pasando cada denominador al otro miembro (multiplicando); después, trata de despejar la X pasando al segundo miembro el 5 y el 4. Pero los pasa con signo negativo y multiplicando, con lo que obtiene un resultado incorrecto. En su explicación dice que se trata de una ecuación de primer grado.

Interpretación: La estudiante enfoca la resolución como el planteamiento y resolución de una ecuación, pero no ve una división de fracciones para resolver el problema. Podemos decir que trabaja en el campo numérico de los números naturales, pero no el de las fracciones. Tiene dificultades con el álgebra, al mezclar el cambio de miembro multiplicativo ("lo que está dividiendo pasa al otro lado multiplicando") con el cambio de miembro aditivo ("lo que es positivo pasa al otro lado negativo").

10.1.6. Tarea 5: "Tarro de miel"

- Alumno 1(Rubén)

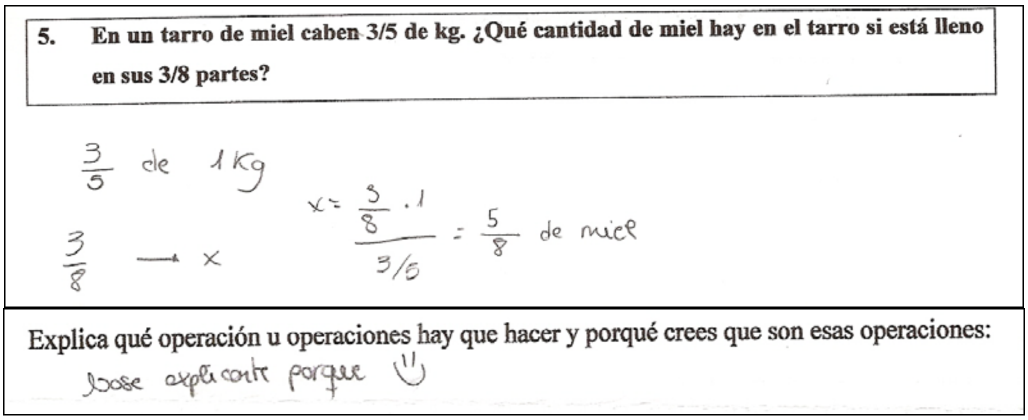


Trascripción: "$\frac{3}{8}-\frac{3}{5};\frac{8}{40}-\frac{5}{40}=\frac{3}{40}$. Restar"

Explicación: El estudiante resta la fracción 3/8 menos la fracción 3/5 y obtiene como resultado la fracción 3/40. No justifica su actuación.

Interpretación: El estudiante enfoca la resolución de la ecuación de forma aditiva, mediante una resta de fracciones, dando una solución incorrecta, ya que, comete un error en la aplicación del algoritmo de la resta.

- Alumna 2 (Cristina)



Trascripción:

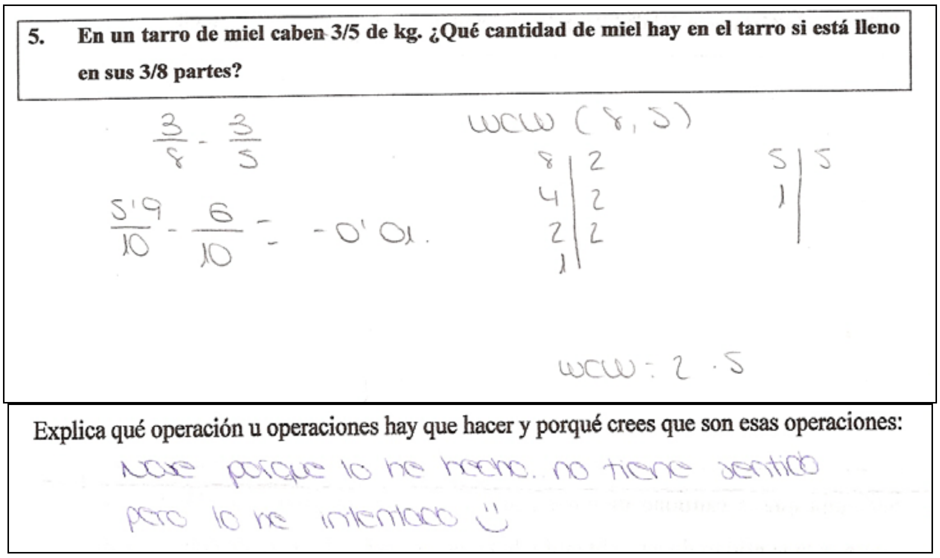
$$\left.\begin{array}{c} 3/5 \text{ de } 1\text{ kg} \\ 3/8 \rightarrow X \end{array}\right\} X=\frac{\frac{3}{8}\cdot 1}{3/5}=\frac{5}{8} \text{ de miel}$$

"Nose explicarte porque".

Explicación: La estudiante plantea una regla de tres, que resuelve correctamente, pero obtiene un resultado incorrecto (5/8 de miel). Afirma que no sabe explicar el problema.

Interpretación: la estudiante enfoca la resolución mediante una regla de tres, pero identifica como unidad 1 kg y no la cantidad total de miel que hay en el tarro. Después aplica el método reglado, de forma que obtiene una división de fracciones, en vez de una multiplicación. Obtiene un resultado incorrecto.

- Alumna 3 (Ana)



5. En un tarro de miel caben 3/5 de kg. ¿Qué cantidad de miel hay en el tarro si está lleno en sus 3/8 partes?

$\frac{3}{8} - \frac{3}{5}$ mcm (8, 5)

$\frac{5'9}{10} - \frac{6}{10} = -0'01.$

mcm: 2 · 5

Explica qué operación u operaciones hay que hacer y porqué crees que son esas operaciones:

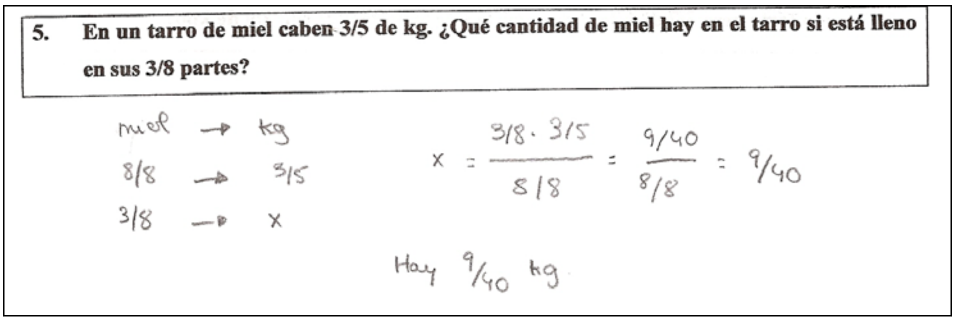
Nose porque lo he hecho. no tiene sentido pero lo he intentado :)

Trascripción: "$\frac{3}{8} - \frac{3}{5} = \frac{21}{10}$; mcm=2·5; $\frac{5'9}{10} - \frac{6}{10} = -0'01$. Nose porque lo he hecho no tiene sentido pero lo he intentado".

Explicación: La estudiante resta la fracción 3/8 menos la fracción 3/5, recurriendo al algoritmo de reducción a común denominador mediante la obtención del mínimo común múltiplo. Obtiene un resultado incorrecto. En su explicación señala que no sabe porqué lo ha hecho así y que su solución no tiene sentido.

Interpretación: la estudiante enfoca el problema de forma aditiva, mediante una resta de fracciones. Aplica el algoritmo del mínimo común múltiplo cometiendo un error en la descomposición factorial de los denominadores y obtiene un resultado incorrecto.

- Alumna 4 (Miriam)



5. En un tarro de miel caben 3/5 de kg. ¿Qué cantidad de miel hay en el tarro si está lleno en sus 3/8 partes?

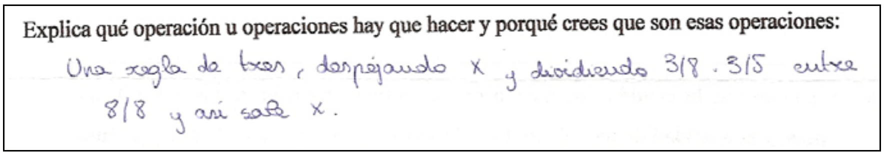
miel → kg

8/8 → 3/5

3/8 → x

$x = \frac{3/8 \cdot 3/5}{8/8} = \frac{9/40}{8/8} = 9/40$

Hay 9/40 kg

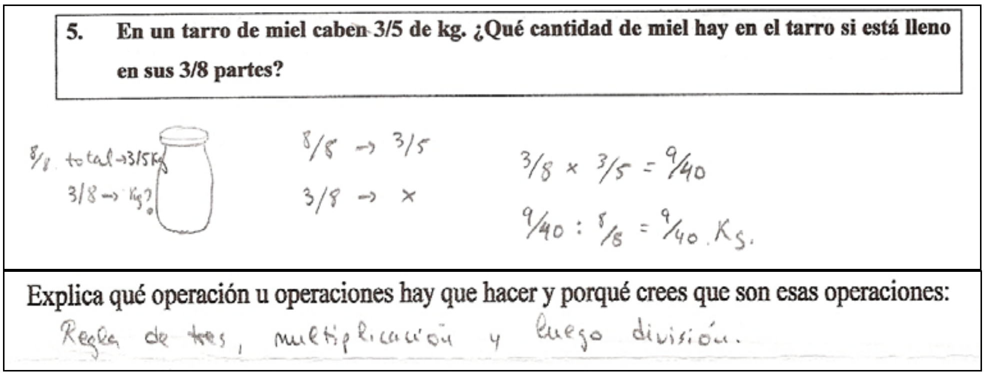

Explica qué operación u operaciones hay que hacer y porqué crees que son esas operaciones:
Una regla de tres, despejando X y dividiendo 3/8 . 3/5 entre 8/8 y así sale X.

Trascripción: " $\left.\begin{array}{l}\text{miel} \rightarrow \text{kg} \\ 8/8 \rightarrow 3/5 \\ 3/8 \rightarrow \text{X}\end{array}\right\}$ $\text{X} = \dfrac{3/8 \cdot 3/5}{5/8} = \dfrac{9/40}{8/8} = 9/40$. Hay 9 / 40 kg. Una regla de tres, despejando X y dividiendo 3/8·3/5 entre 8/8 y así sale X".

Explicación: La estudiante plantea una regla de tres que resuelve usando el método reglado usual y obtiene la solución correcta 9/40. Explica su respuesta en términos de la regla de tres.

Interpretación: La estudiante enfoca la resolución mediante una regla de tres correctamente planteada (toma 8/8=un tarro entero). Usa el método reglado, lo que le impide ver la multiplicación de fracciones como la operación que resuelve el problema.

- Alumna 5 (Ángela)


5. En un tarro de miel caben 3/5 de kg. ¿Qué cantidad de miel hay en el tarro si está lleno en sus 3/8 partes?

8/8 total → 3/5 Kg
3/8 → Kg?

8/8 → 3/5
3/8 → X

3/8 × 3/5 = 9/40
9/40 : 8/8 = 9/40 Kg.

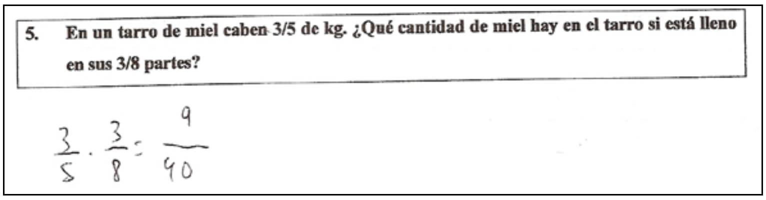
Explica qué operación u operaciones hay que hacer y porqué crees que son esas operaciones:
Regla de tres, multiplicación y luego división.

Trascripción: Dibuja un tarro de miel. " $\left.\begin{array}{l}8/8 \rightarrow 3/5 \\ 3/8 \rightarrow \text{X}\end{array}\right\}$ $3/8 \times 3/5 = 9/40$; $9/40 : 8/8 = 9/40$ kg. Regla de tres, multiplicación y luego división".

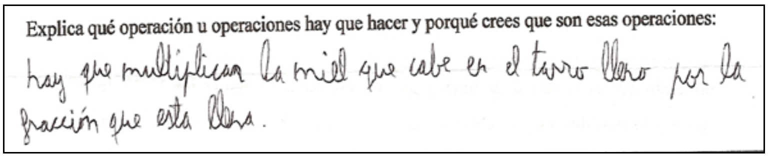
Explicación: La estudiante plantea una regla de tres, que resuelve mediante una multiplicación y una división, obteniendo el resultado correcto. No explica porqué ha elegido esta operación.

Interpretación: La estudiante ha enfocado la resolución mediante una regla de tres, dando una solución correcta. Ha usado el método reglado, lo que le impide ver el problema como una multiplicación.

- Alumno 6 (Juan)


5. En un tarro de miel caben 3/5 de kg. ¿Qué cantidad de miel hay en el tarro si está lleno en sus 3/8 partes?

$\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{8} = \frac{9}{40}$


Explica qué operación u operaciones hay que hacer y porqué crees que son esas operaciones:

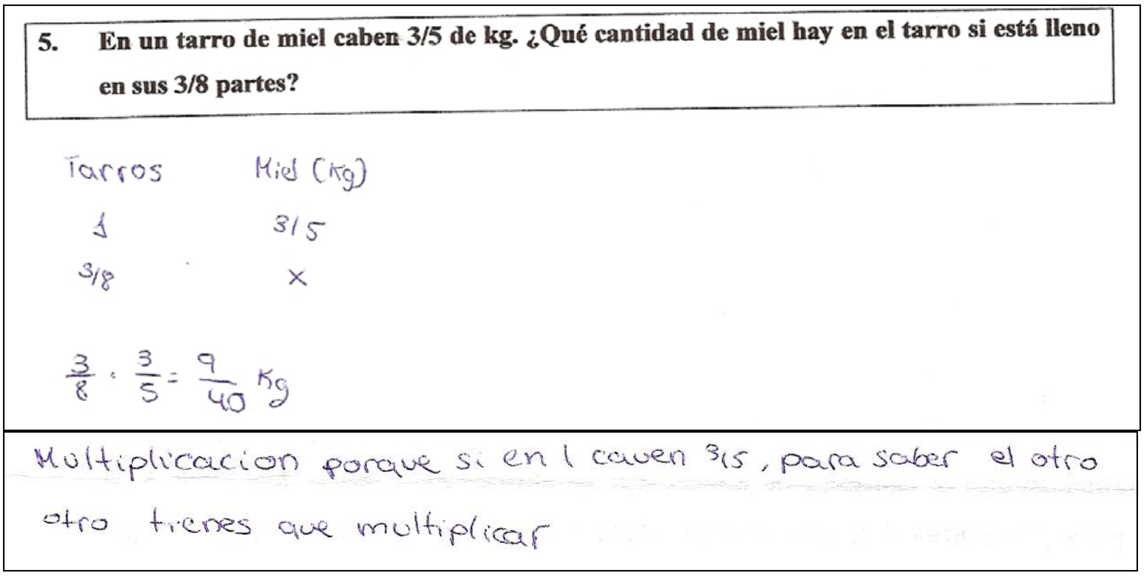
hay que multiplicar la miel que cabe en el tarro lleno por la fracción que esta llena.

Trascripción: " $\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{8}=\frac{9}{40}$. Hay que multiplicar la miel que cabe en el tarro lleno por la fracción que está llena".

Explicación: El estudiante multiplica directamente la fracción 3/5 por la fracción 3/8, obteniendo el resultado correcto, 9/40. En su explicación dice que hay que multiplicar para resolver el problema.

Interpretación: El enfoque de resolución del estudiante es ternario, mediante multiplicación, obteniendo el resultado correcto.

- Alumna 7 (Casandra)


5. En un tarro de miel caben 3/5 de kg. ¿Qué cantidad de miel hay en el tarro si está lleno en sus 3/8 partes?

Tarros Miel (kg)
1 3/5
3/8 X

$\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{5}=\frac{9}{40}$ Kg

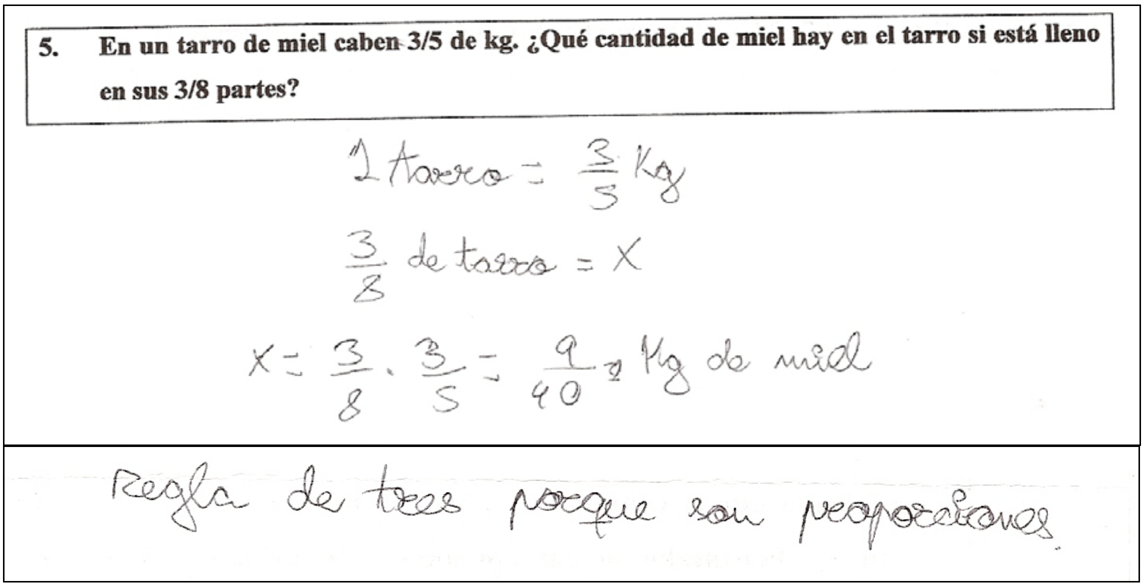
Multiplicacion porque si en 1 caven 3/5, para saber el otro otro tienes que multiplicar

Trascripción: " $\left.\begin{array}{cc} \text{Tarros} & \text{Miel (kg)} \\ 1 & 3/5 \\ 3/8 & X \end{array}\right\}\ \frac{3}{8}\cdot\frac{3}{5}=\frac{9}{40}\,\text{kg}$. Multiplicación porque si en 1 caven 3/5, para saber el otro otro tienes que multiplicar".

Explicación: La estudiante plantea primero una regla de tres. Después multiplica las fracciones del enunciado, 3/8 y 3/5, obteniendo el resultado correcto. En su explicación señala que la operación para resolver el problema es la multiplicación, aunque su razonamiento se basa en la regla de tres.

Interpretación: El enfoque de resolución de la estudiante es cuaternario, mediante una regla de tres, la multiplicación surge en segundo plano, como consecuencia de la aplicación de la regla de tres.

- Alumno 8 (Christian)



5. En un tarro de miel caben 3/5 de kg. ¿Qué cantidad de miel hay en el tarro si está lleno en sus 3/8 partes?

1 tarro = $\frac{3}{5}$ Kg

$\frac{3}{8}$ de tarro = X

X = $\frac{3}{8} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{40}$ Kg de miel

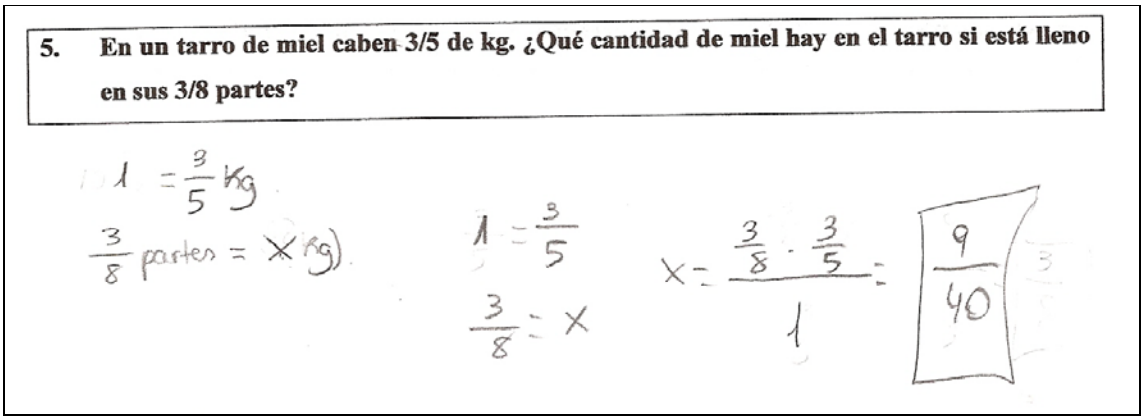
Regla de tres porque son proporciones.

Trascripción: “ $\left.\begin{array}{r} 1\,\text{tarro} = \frac{3}{5}\,\text{kg} \\ \frac{3}{8}\,\text{de tarro} = \text{X} \end{array}\right\}\ \text{X} = \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{40}\,\text{kg de miel}$. Regla de tres porque son proporciones”.

Explicación: El estudiante plantea una regla de tres. Después multiplica las fracciones 3/8 y 3/5, obteniendo el resultado correcto 9/40. En su explicación señala que se trata de una regla de tres ya que son proporciones.

Interpretación: El enfoque de resolución de la estudiante es cuaternario, mediante una regla de tres, la multiplicación surge en segundo plano, como consecuencia de la aplicación de la regla de tres.

- Alumna 9 (Ana María)



5. En un tarro de miel caben 3/5 de kg. ¿Qué cantidad de miel hay en el tarro si está lleno en sus 3/8 partes?

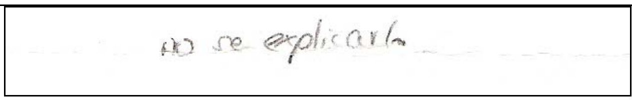
1 = $\frac{3}{5}$ Kg

$\frac{3}{8}$ partes = X Kg)

1 = $\frac{3}{5}$

$\frac{3}{8}$ = X

X = $\frac{\frac{3}{8} \cdot \frac{3}{5}}{1} = \boxed{\frac{9}{40}}$



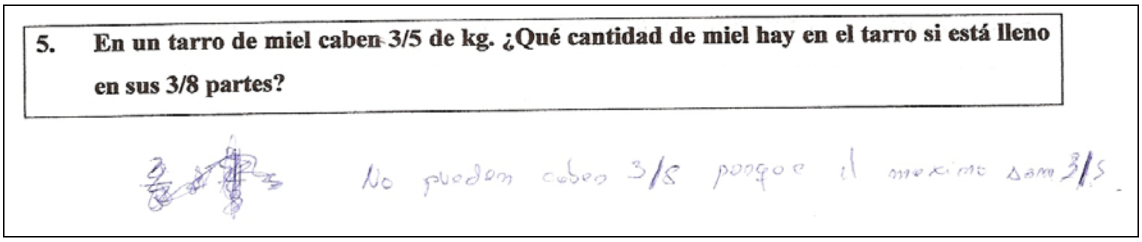
no se explicarlo

Trascripción: “ $\left.\begin{array}{r} 1 = \frac{3}{5}\,\text{kg} \\ \frac{3}{8}\,\text{partes} = \text{X kg} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 1 = \frac{3}{5} \\ \frac{3}{8} = \text{X} \end{array}\right\} \text{X} = \frac{\frac{3}{8} \cdot \frac{3}{5}}{1} = \frac{9}{40}$. No se explicarlo”.

Explicación: La estudiante plantea una regla de tres, primero usando términos del lenguaje habitual y luego de manera simbólica, usando las fracciones del enunciado. A continuación despeja X mediante el procedimiento reglado, obteniendo el resultado correcto, 9/40. Señala que no sabe explicar el problema.

Interpretación: La estudiante enfoca el problema con un esquema cuaternario y lo resuelve mediante una regla de tres, quedando la multiplicación de fracciones en un segundo plano.

- Alumno 10 (Vicent)



5. En un tarro de miel caben 3/5 de kg. ¿Qué cantidad de miel hay en el tarro si está lleno en sus 3/8 partes?

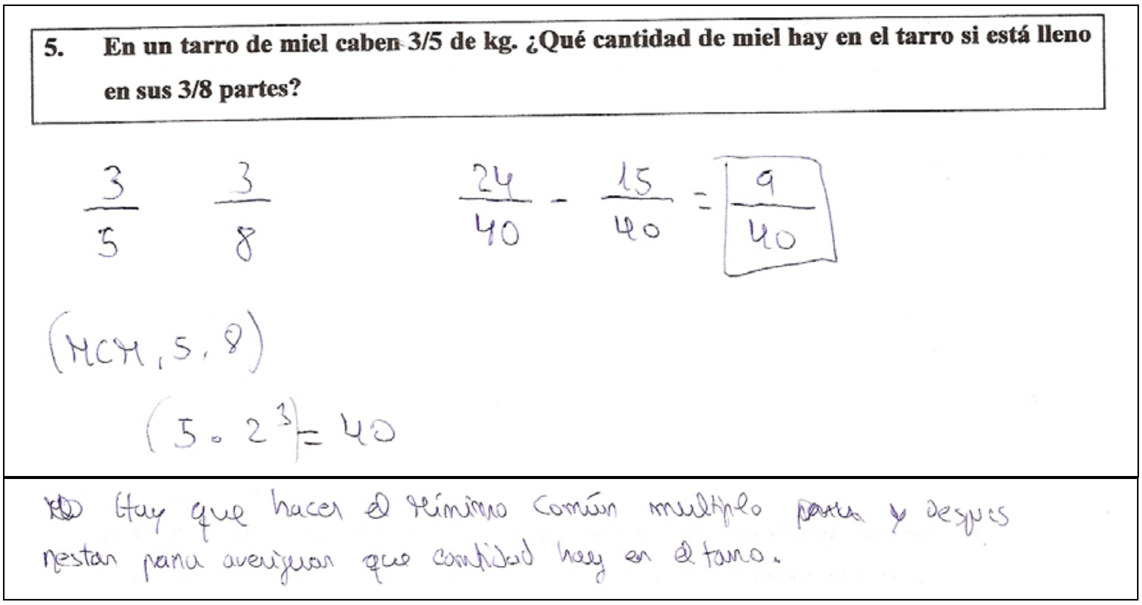
No pueden caber 3/8 porque el maximo son 3/5.

Trascripción: “No pueden caber 3/8 porque el máximo es 3/5”

Explicación: La respuesta del estudiante es inesperada, ya que respuestas de este tipo no aparecieron en el pilotaje. El estudiante señala que la fracción 3/8 “no puede caber en la fracción 3/5”. Respuesta incorrecta.

Interpretación: El estudiante hace una comparación de la magnitud de las dos fracciones que aparecen en el enunciado. Manifiesta problemas con el significado de las fracciones, ya que, suponiendo el mismo numerador, parece considerar como mayores las fracciones que tienen mayor denominador, en vez de las que lo tienen menor.

- Alumno 11 (Fco. Javier)



5. En un tarro de miel caben 3/5 de kg. ¿Qué cantidad de miel hay en el tarro si está lleno en sus 3/8 partes?

$\frac{3}{5}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{24}{40} - \frac{15}{40} = \boxed{\frac{9}{40}}$

(MCM, 5, 8)

$(5 \cdot 2^3 = 40$

Hay que hacer el mínimo común multiplo para y despues restar para averiguar que cantidad hay en el tarro.

Trascripción: “3/5, 3/8, $\frac{24}{40}-\frac{15}{40}=\frac{9}{40}$; (mcm, 5, 8), $5{\cdot}2^3=40$. Hay que hacer el Mínimo Común múltiplo y después restar para averiguar qué cantidad hay en el tarro”.

Explicación: El estudiante reduce las fracciones a común denominador, y resta las fracciones, dando un resultado no correcto (“9/40”). En su explicación indica que hay que reducir las fracciones a común denominador y restarlas para averiguar qué cantidad queda en tarro.

Interpretación: El estudiante enfoca la resolución desde el punto de vista de la comparación aditiva de las fracciones, basada en la resta, ignorando la comparación multiplicativa. Tiene problemas para interpretar el enunciado, ya que parece calcular la cantidad de miel que se puede añadir al tarro cuando éste está lleno en sus 3/8 partes. Solución incorrecta.

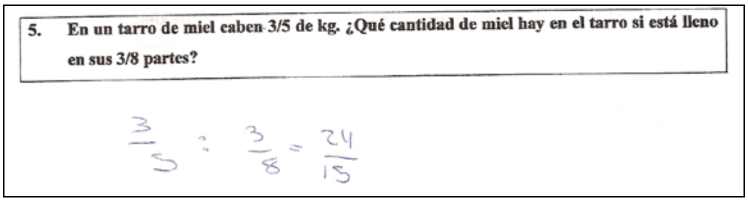
- Alumna 12 (Aída)

En blanco

- Alumna 13 (Carmen)

En blanco

- Alumna 14 (Mireia)


5. En un tarro de miel caben 3/5 de kg. ¿Qué cantidad de miel hay en el tarro si está lleno en sus 3/8 partes?

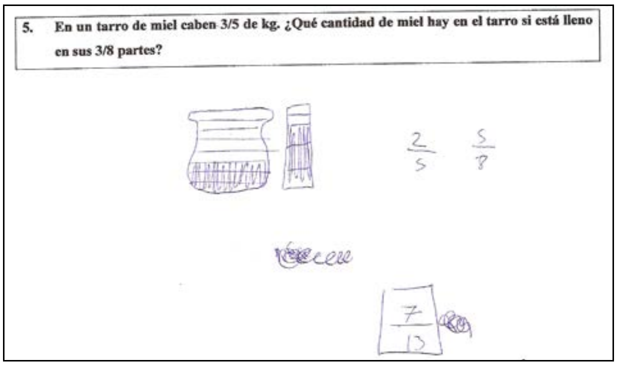
$\frac{3}{5} : \frac{3}{8} = \frac{24}{15}$

Trascripción: “ $\frac{3}{5}:\frac{3}{8}=\frac{24}{15}$ ”.

Explicación: La estudiante divide las fracciones 3/5 entre 3/8, en el mismo orden en que aparecen en el enunciado. No justifica su respuesta.

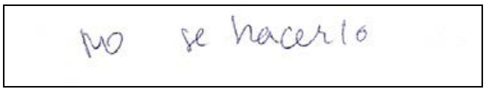
Interpretación: Posiblemente, la estudiante se ha dejado influenciar por las soluciones de las otras tareas de la prueba y ha usado la división en vez de la multiplicación. Respuesta incorrecta.

- Alumno 15 (Héctor)


5. En un tarro de miel caben 3/5 de kg. ¿Qué cantidad de miel hay en el tarro si está lleno en sus 3/8 partes?

$\frac{2}{5}$ $\frac{5}{8}$

$\boxed{\frac{7}{13}}$

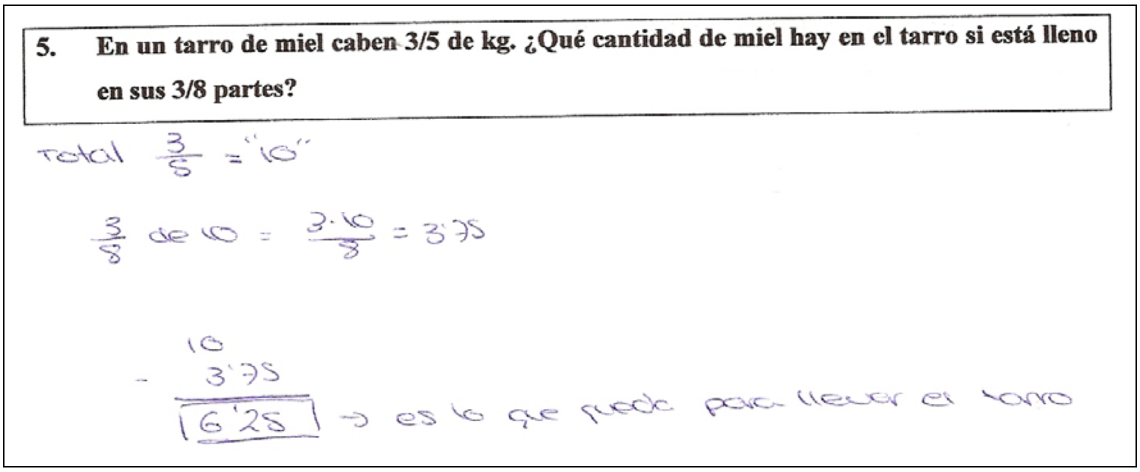

no se hacerlo

Trascripción: Dibuja un diagrama con un tarro dividido en 8 partes iguales de las que hay señaladas tres y un frasco dividido en 5 partes, de las que 3 están señaladas. Escribe las fracciones: " $\frac{2}{5}$; $\frac{5}{8}$; $\frac{7}{13}$". Señala la última, 7/13 como solución. Escribe "No se hacerlo".

Explicación: El estudiante representa gráficamente las fracciones, escribe dos fracciones (2/5 y 5/8) que no aparecen en el enunciado. A continuación escribe la fracción 7/13, señalándola como solución. En su explicación dice que no sabe hacerlo.

Interpretación: Parece que tras intentar resolver el problema de manera gráfica, el estudiante enfoca la resolución desde el punto de vista aditivo, ya que suma los numeradores y los denominadores de las dos fracciones que escribe, ignorando la comparación multiplicativa. Solución incorrecta.

- Alumna 16 (Jennifer)


5. En un tarro de miel caben 3/5 de kg. ¿Qué cantidad de miel hay en el tarro si está lleno en sus 3/8 partes?

total $\frac{3}{5}$ = "10"

$\frac{3}{8}$ de 10 = $\frac{3 \cdot 10}{8}$ = 3'75

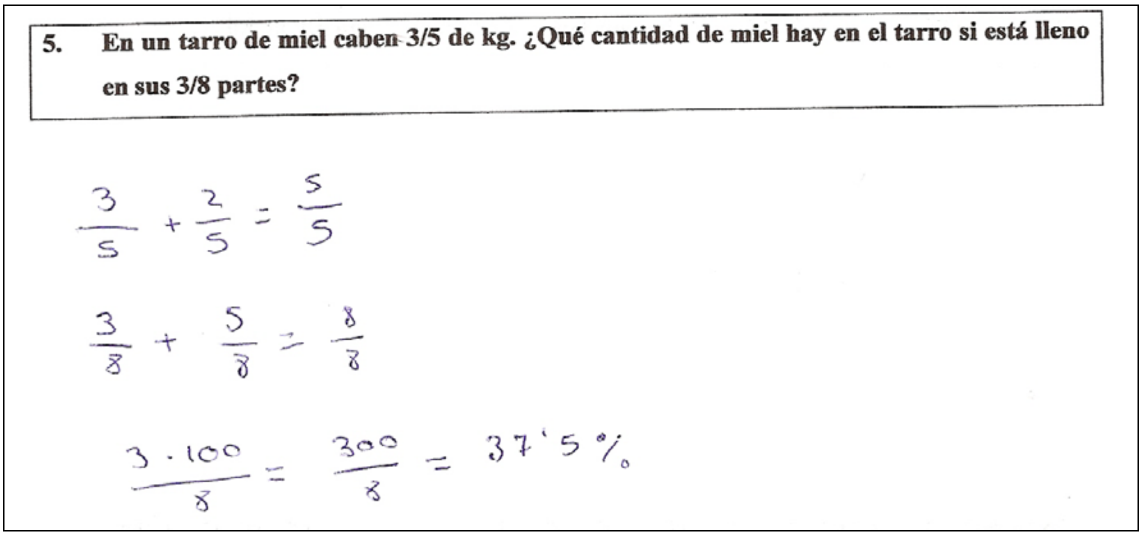
$$\begin{array}{r} 10 \\ - \; 3'75 \\ \hline \boxed{6'25} \end{array}$$ → es lo que queda para llenar el tarro

Trascripción: "Total=3/5="10"; $\frac{3}{8}$ de 10= $\frac{3 \cdot 8}{10} = 3'75$; 10–3'75=6'25 → es lo que queda para llenar el tarro".

Explicación: La estudiante elige el total como 10 y calcula los 3/5 de 10, obteniendo 3'75. A continuación, resta 10–3'75, obteniendo el resultado 6'25 que considera como solución del problema. Escribe "es lo que queda para llenar el tarro".

Interpretación: La estudiante tiene problemas con las fracciones, ya que identifica la fracción 3/5 con el número entero 10, como capacidad total del tarro. Enfoca el problema desde el punto de vista aditivo, ya que resta los 3/8 de 10 a la capacidad total del tarro. Interpreta de modo incorrecto el enunciado del problema, ya que calcula la parte del tarro que queda por llenar.

- Alumna 17 (Laura A)



5. En un tarro de miel caben 3/5 de kg. ¿Qué cantidad de miel hay en el tarro si está lleno en sus 3/8 partes?

$$\frac{3}{5} + \frac{2}{5} = \frac{5}{5}$$

$$\frac{3}{8} + \frac{5}{8} = \frac{8}{8}$$

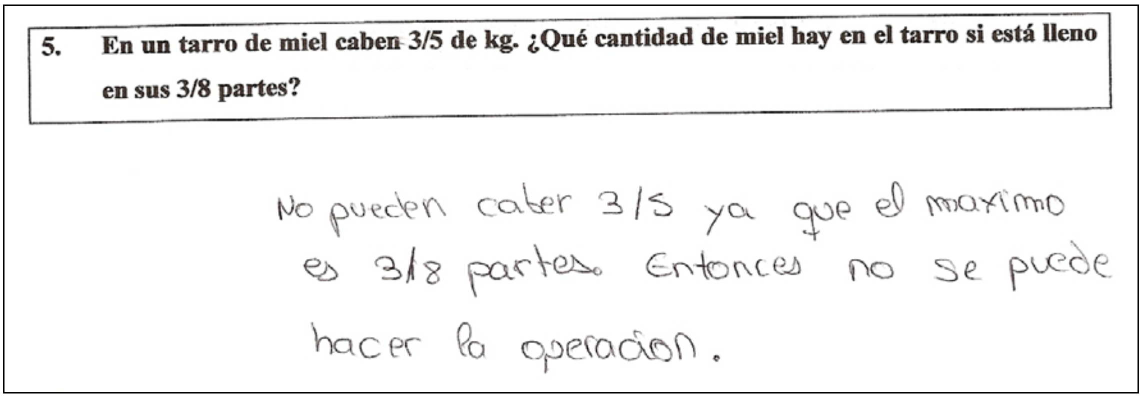
$$\frac{3 \cdot 100}{8} = \frac{300}{8} = 37'5\,\%$$

Trascripción: “$\frac{3}{5}+\frac{2}{5}=\frac{5}{5}$; $\frac{3}{8}+\frac{5}{8}=\frac{8}{8} \rightarrow \frac{3\cdot 100}{8}=\frac{300}{8}=37'5\%$ ”.

Explicación: La estudiante suma las fracciones 3/5 y 2/5, por un lado, y las fracciones 3/8 y 5/8, por otro. A continuación calcula los 3/8 de 100 y expresa el resultado en forma de porcentaje, 37’5%. Solución incorrecta.

Interpretación: La estudiante parece enfocar el problema desde el punto de vista aditivo, sumando, a cada una de las fracciones del enunciado, la fracción necesaria para llegar al total. Finalmente, expresa la fracción 3/8 en forma de porcentaje. Parece que quiera expresar como solución el porcentaje del tarro que está ocupado. Solución incorrecta.

- Alumna 18 (Patri)



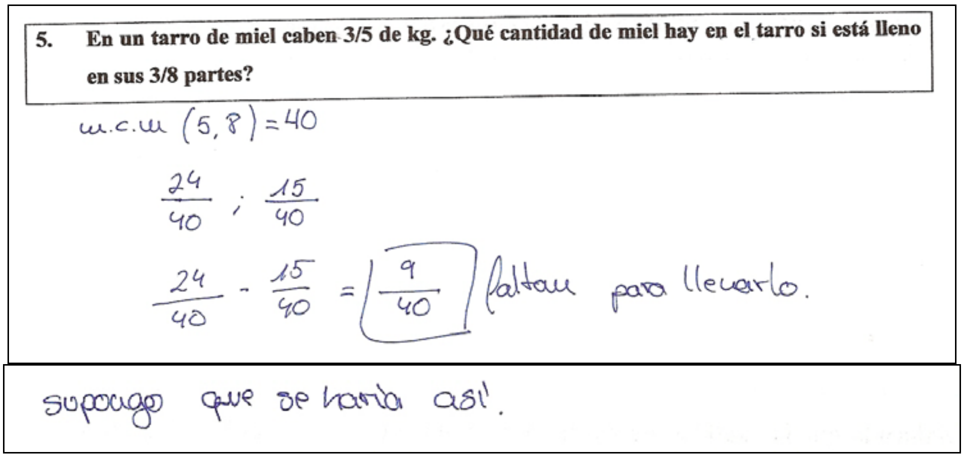
5. En un tarro de miel caben 3/5 de kg. ¿Qué cantidad de miel hay en el tarro si está lleno en sus 3/8 partes?

No pueden caber 3/5 ya que el maximo es 3/8 partes. Entonces no se puede hacer la operacion.

Trascripción: “No pueden caber 3/5 ya que el máximo es 3/8 partes. Entonces no se puede hacer la operacion”.

Explicación e Interpretación: La estudiante compara las fracciones que aparecen en el enunciado, afirmando que la fracción 3/5 no cabe en la fracción 3/8. La estudiante tiene problemas para interpretar el enunciado, dado que afirma que la capacidad máxima del tarro es 3/8. Solución incorrecta.

- Alumna 19 (Laura B)



5. En un tarro de miel caben 3/5 de kg. ¿Qué cantidad de miel hay en el tarro si está lleno en sus 3/8 partes?

m.c.m (5, 8) = 40

$\frac{24}{40}$; $\frac{15}{40}$

$\frac{24}{40} - \frac{15}{40} = \boxed{\frac{9}{40}}$ faltan para llenarlo.

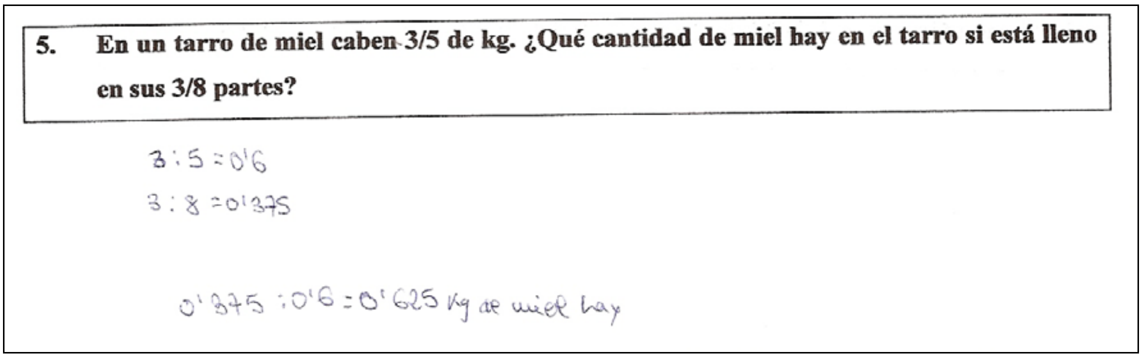
supongo que se haría así.

Trascripción: "mcm(5, 8)=40: $\frac{24}{40};\frac{15}{40};\rightarrow\frac{24}{40}-\frac{15}{40}=\frac{9}{40}$ faltan para llenarlo. Supongo que se haría así".

Explicación: La estudiante reduce las fracciones a común denominador, usando el mínimo común múltiplo de los denominadores y resta las dos fracciones, obteniendo un resultado incorrecto.

Interpretación: La estudiante enfoca el problema desde el punto de vista aditivo, restando las fracciones del enunciado. Manifiesta dificultades para entender el enunciado, ya que calcula "lo que falta para llenar" el tarro, en vez de calcular la cantidad de miel que ya hay en el tarro.

- Alumno 20 (Jesús)



5. En un tarro de miel caben 3/5 de kg. ¿Qué cantidad de miel hay en el tarro si está lleno en sus 3/8 partes?

3 : 5 = 0'6

3 : 8 = 0'375

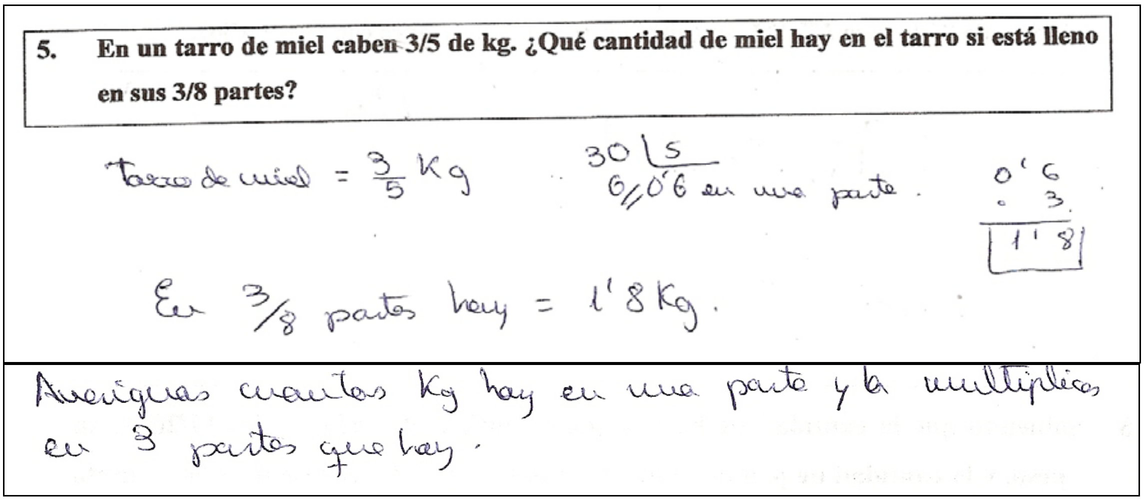
0'375 : 0'6 = 0'625 kg de miel hay

Trascripción: "$3:5=0'6; 3:8=0'375$; 0'375: 0'6=0'625 kg de miel hay".

Explicación: El estudiante transforma las fracciones en decimales y divide el decimal correspondiente a 3/8 entre el decimal correspondiente a 3/5, expresando el resultado en forma decimal. Solución incorrecta.

Interpretación: El estudiante enfoca la resolución desde el punto de vista multiplicativo, pero divide las fracciones, en vez de multiplicarlas. Expresa las fracciones como decimales y opera con ellos.

- Alumna 21 (Estefanía)



5. En un tarro de miel caben 3/5 de kg. ¿Qué cantidad de miel hay en el tarro si está lleno en sus 3/8 partes?

Tarro de miel = $\frac{3}{5}$ Kg

30 | 5
0 / 0'6 en una parte.

0'6 · 3 = 1'8

En 3/8 partes hay = 1'8 Kg.

Averiguas cuantos Kg hay en una parte y la multiplicas en 3 partes que hay.

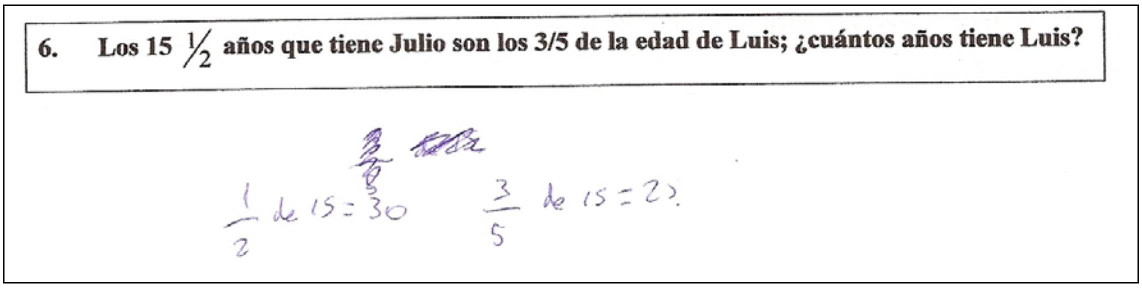
Trascripción: "Tarro de miel=$\frac{3}{5}$ kg; $\frac{3}{5}=0'6$ en una parte; 0'6×3=1'8. En $\frac{3}{8}$ partes hay = 1'8 kg. Averiguas cuántos kg hay en una parte y la multiplicas en 3 partes que hay".

Explicación: La estudiante expresa en forma decimal la fracción 3/5. Multiplica por 3 el resultado y concluye que el número obtenido es la solución del problema. Resultado incorrecto.

Interpretación: La estudiante identifica la cantidad de miel que cabe en el tarro como si fuera 1/8 parte. Multiplica por 3 para averiguar la miel que hay en 3/8 partes del tarro. Parece que para ella el número de partes es el numerador de la fracción y el denominador solamente indica el nombre que denomina a las partes.

10.1.7. Tarea 6: "Edades"

- Alumno 1(Rubén)



6. Los 15 ½ años que tiene Julio son los 3/5 de la edad de Luis; ¿cuántos años tiene Luis?

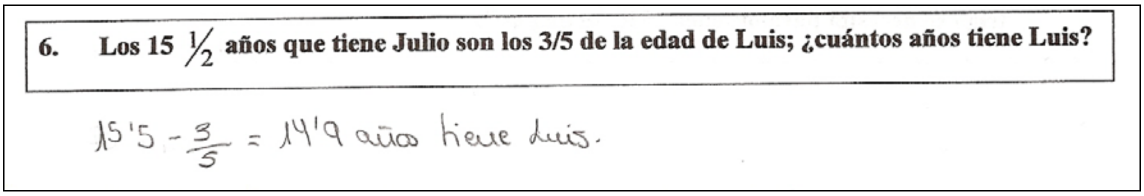
$\frac{1}{2}$ de 15 = 30 $\frac{3}{5}$ de 15 = 25

Trascripción: "$\frac{1}{2}\,\text{de}\,15=30$; $\frac{3}{5}\,\text{de}\,15=25$."

Explicación: El estudiante escribe que la mitad de 15 es igual a 30 y que 3/5 de 15 es igual a 25. No justifica su actuación.

Interpretación: El estudiante tiene dificultades para interpretar el significado de los números mixtos, ya que interpreta 15 ½ como la mitad de 15. También manifiesta dificultades para interpretar las fracciones como operadores. Solución incorrecta.

- Alumna 2 (Cristina)



6. **Los 15 ½ años que tiene Julio son los 3/5 de la edad de Luis; ¿cuántos años tiene Luis?**

$15'5 - \frac{3}{5} = 14'9$ años tiene Luis.

Trascripción: $15'5 - \frac{3}{5} = 14'5$ años tiene Luis

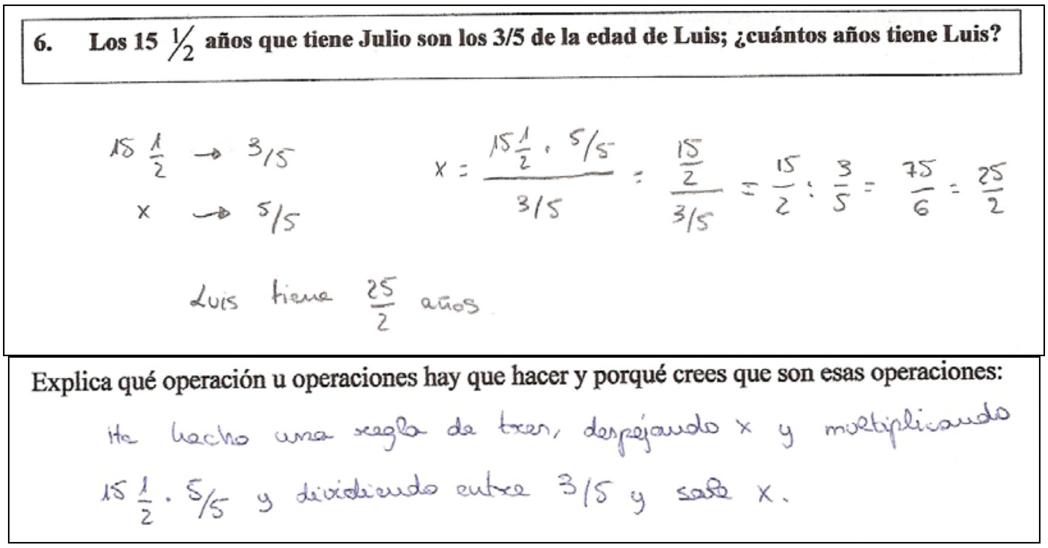
Explicación: La estudiante resta la fracción 3/5 al número mixto 15 ½ una vez transformado éste en decimal, obteniendo un resultado incorrecto. No explica su elección de la operación.

Interpretación: la estudiante enfoca la resolución desde el punto de vista aditivo, ignorando que, además de las comparaciones aditivas, existen las comparaciones multiplicativas.

- Alumna 3 (Ana)

En blanco.

- Alumna 4 (Miriam)



6. **Los 15 ½ años que tiene Julio son los 3/5 de la edad de Luis; ¿cuántos años tiene Luis?**

$15\frac{1}{2} \rightarrow 3/5$

$x \rightarrow 5/5$

$x = \frac{15\frac{1}{2} \cdot 5/5}{3/5} = \frac{\frac{15}{2}}{3/5} = \frac{15}{2} : \frac{3}{5} = \frac{75}{6} = \frac{25}{2}$

Luis tiene $\frac{25}{2}$ años

Explica qué operación u operaciones hay que hacer y porqué crees que son esas operaciones:

He hecho una regla de tres, despejando x y multiplicando $15\frac{1}{2} \cdot 5/5$ y dividiendo entre 3/5 y sale x.

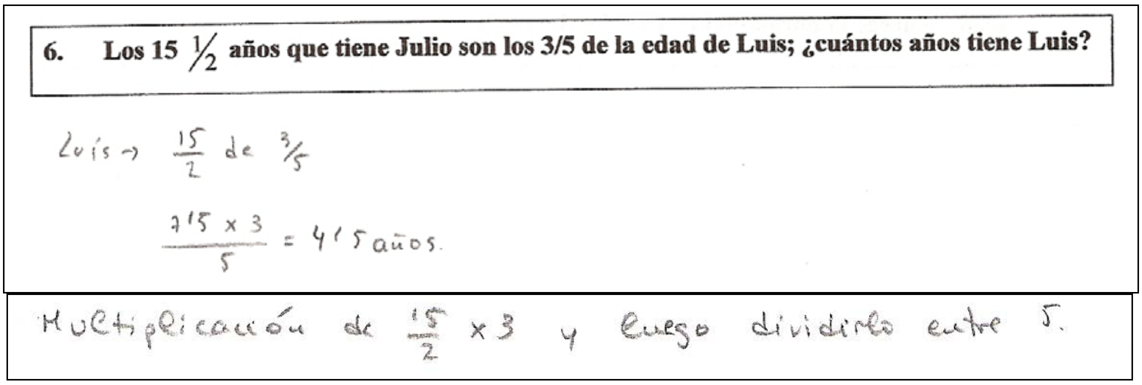
Trascripción: "$\left.\begin{array}{r} 15\ 1/2 \rightarrow 3/5 \\ X \rightarrow 5/5 \end{array}\right\}$ $X = \frac{15\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{5}}{3/5} = \frac{\frac{15}{2}}{3/5} = \frac{15}{2} \div \frac{3}{5} = \frac{75}{6} = \frac{25}{2}$. Luis tiene $\frac{25}{2}$ años.

He hecho una regla de tres, despejando X y multiplicando $15\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{5}$ y dividiendo entre 3/5 y sale X ".

Explicación: La estudiante plantea una regla de tres tomando los datos en el mismo orden en que aparecen en el enunciado. Aplica el método reglado, obteniendo una solución incorrecta.

Interpretación: La estudiante identifica la situación con un modelo cuaternario y no reconoce un modelo de factor perdido, al no considerar el significado de operador para la fracción 3/5. Enfoca la resolución por el método reglado y no ve la división directa, sino como consecuencia de la aplicación de la regla de tres. No interpreta correctamente el significado del número mixto (confunde 15 ½ con 15/2), obteniendo un resultado incorrecto. No explicita el algoritmo que utiliza para dividir las fracciones, aunque seguramente ha usado el de los productos cruzados o el de invertir y multiplicar. La forma textual que usa parece indicar que ve el problema con un modelo semántico de razón unitaria o proporción I.

- Alumna 5 (Ángela)


6. Los 15 ½ años que tiene Julio son los 3/5 de la edad de Luis; ¿cuántos años tiene Luis?

Luís → $\frac{15}{2}$ de $\frac{3}{5}$

$\frac{7'5 \times 3}{5} = 4'5$ años.

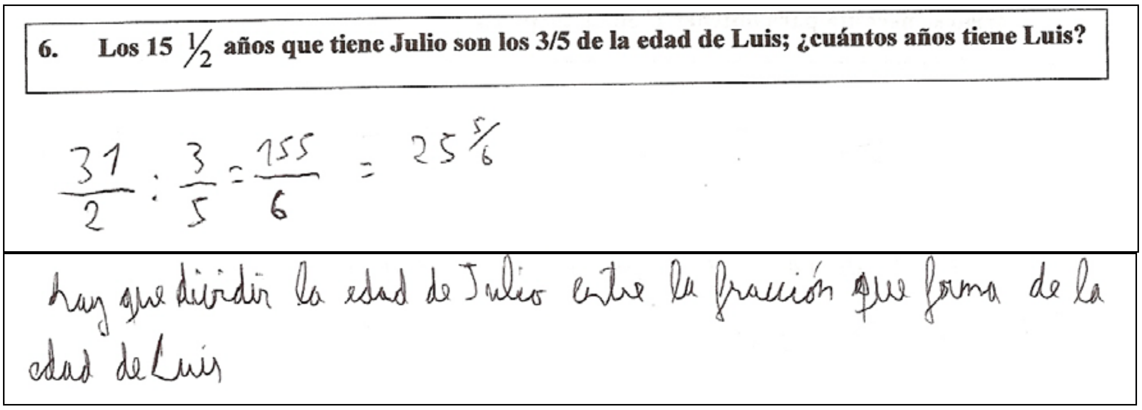
Multiplicación de $\frac{15}{2} \times 3$ y luego dividirlo entre 5.

Trascripción: "Luis $\rightarrow \frac{15}{2}$ de $\frac{3}{5} \rightarrow \frac{7'5\times 3}{5} = 4'5$ años;. Multiplicación de 15/2 x 3 y luego dividirlo entre 5".

Explicación: La estudiante escribe que la edad de Luís es 15/2 de 3/5 y multiplica las dos fracciones, obteniendo un resultado incorrecto (4,5 años).

Interpretación: La estudiante ha enfocado mal la resolución debido a una lectura incorrecta del enunciado, que le lleva a interpretar que la edad de Luís es los 3/5 de la edad de Julio, y que, por tanto, la solución se obtiene multiplicando las dos fracciones.

- Alumno 6 (Juan)


6. Los 15 ½ años que tiene Julio son los 3/5 de la edad de Luis; ¿cuántos años tiene Luis?

$\frac{31}{2} : \frac{3}{5} = \frac{155}{6} = 25\frac{5}{6}$

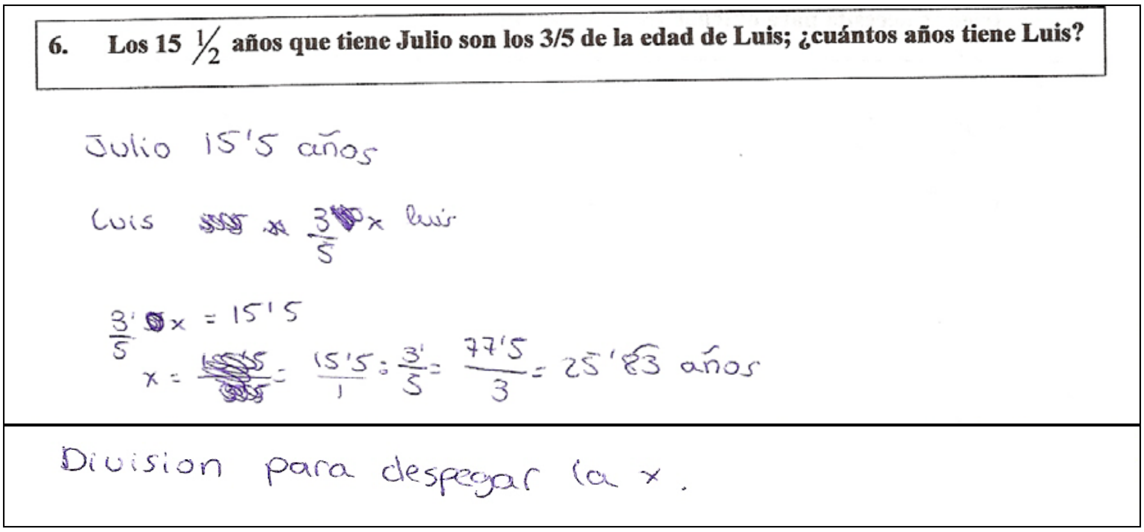
hay que dividir la edad de Julio entre la fracción que forma de la edad de Luis

Trascripción: “ $\frac{31}{2}:\frac{3}{5}=\frac{155}{6}=25\frac{5}{6}$. Hay que dividir la edad de Julio entre la fracción que forma de la edad de Luis”.

Explicación: El estudiante divide directamente la fracción 31/2 (equivalente al número mixto 15 ½) entre la fracción 3/5, obteniendo el resultado correcto Explica su elección diciendo que hay que dividir la edad de Julio entre la fracción que forma de la edad de Luís.

Interpretación: El estudiante utiliza una forma textual (dividir entre la fracción que forma de la edad de Luís) que corresponde al modelo semántico de factor perdido, interpretando la fracción 3/5 como una parte de la edad de Luís, en vez de un operador. Su enfoque de resolución es de división directa (esquema ternario).

- Alumna 7 (Casandra)


6. Los 15 ½ años que tiene Julio son los 3/5 de la edad de Luis; ¿cuántos años tiene Luis?

Julio 15'5 años

Luis $\frac{3}{5}$x luis

$\frac{3}{5}$x = 15'5

x = $\frac{15'5}{1} : \frac{3}{5} = \frac{77'5}{3}$ = 25'83 años

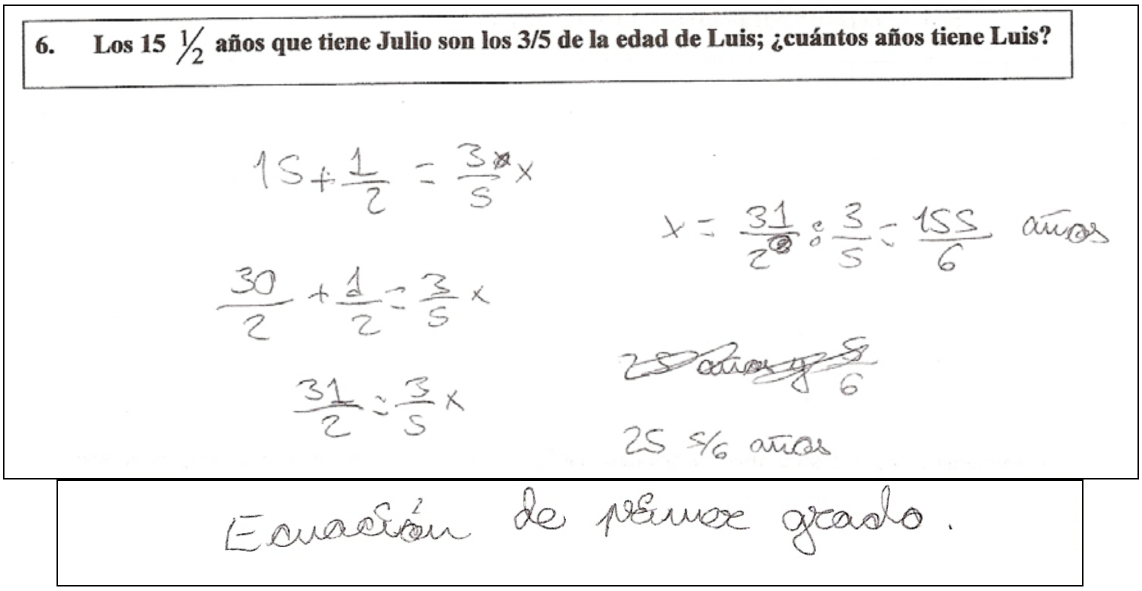
Division para despegar la x.

Trascripción: “Julio 15’5 años; Luis $\frac{3}{5}X \rightarrow \frac{3}{5}X = 15'5 \rightarrow X = \frac{15'5}{1} \div \frac{3}{5} = \frac{77'5}{3} = 25'8\overline{3}$ años. División para despejar la X”.

Explicación: La estudiante plantea una ecuación en la que la incógnita es la edad de Luís. A continuación despeja la incógnita haciendo una división de fracciones. Previamente ha interpretado 15 ½ como número decimal 15’5. Obtiene la solución correcta. Explica su resolución diciendo que hay que hacer una división para despejar la incógnita.

Interpretación: La estudiante utiliza un modelo semántico de factor perdido. Su enfoque de resolución es mediante el planteamiento y resolución de una ecuación, en la que la división de fracciones aparece en segundo plano.

- Alumno 8 (Christian)


6. Los 15 ½ años que tiene Julio son los 3/5 de la edad de Luis; ¿cuántos años tiene Luis?

$15 + \frac{1}{2} = \frac{3}{5}x$

$\frac{30}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{5}x$

$\frac{31}{2} = \frac{3}{5}x$

$x = \frac{31}{2} : \frac{3}{5} = \frac{155}{6}$ años

~~25 años y 5/6~~

25 5/6 años

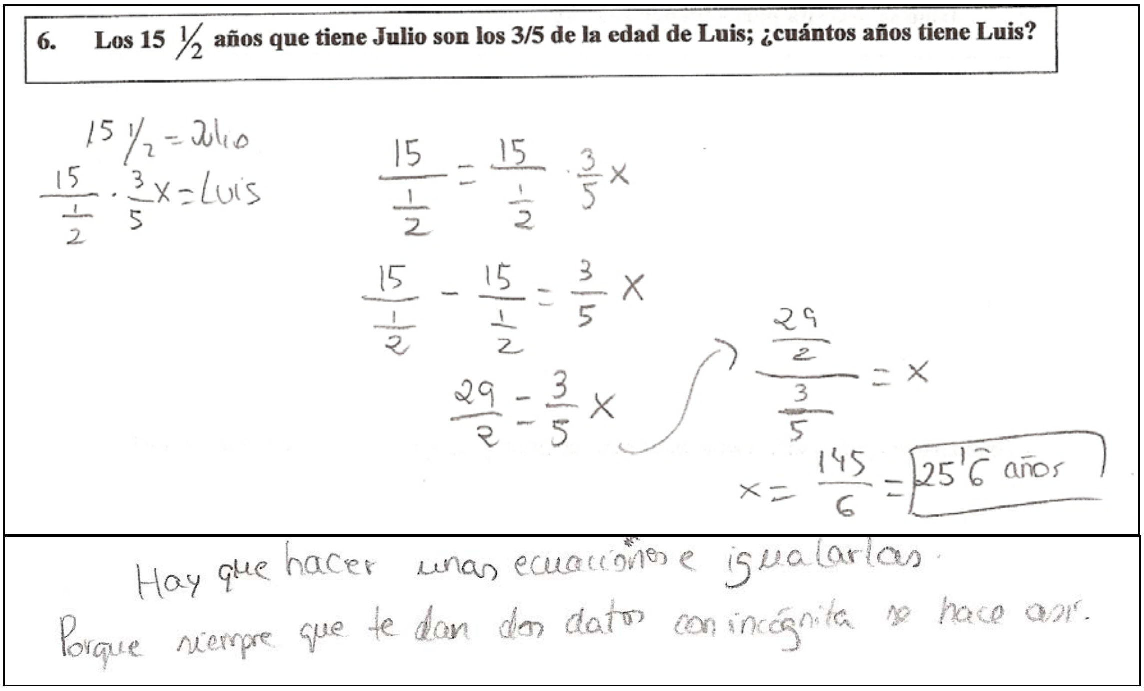
Ecuación de primer grado.

Trascripción: “ $15+\frac{1}{2}=\frac{3}{5}\cdot X \rightarrow \frac{30}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{5}\cdot X \rightarrow \frac{31}{2}=\frac{3}{5}\cdot X \rightarrow X=\frac{31}{2}\div\frac{3}{5}=\frac{155}{6}$ años; $\rightarrow$ 25 5/6 años. Ecuación de primer grado”.

Explicación: El estudiante plantea una ecuación para resolver el problema. Despeja la incógnita y obtiene la solución correcta. Explica que hay que resolver una ecuación de primer grado.

Interpretación: El estudiante utiliza un modelo semántico de factor perdido. Su enfoque de resolución es el planteamiento y resolución de una ecuación, dando la solución correcta.

- Alumna 9 (Ana María)


6. Los 15 ½ años que tiene Julio son los 3/5 de la edad de Luis; ¿cuántos años tiene Luis?

$15\frac{1}{2}$ = Julio

$\frac{15}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{3}{5}x$ = Luis

$\frac{15}{\frac{1}{2}} = \frac{15}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{3}{5}x$

$\frac{15}{\frac{1}{2}} - \frac{15}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{5}x$

$\frac{29}{2} = \frac{3}{5}x$

$\frac{\frac{29}{2}}{\frac{3}{5}} = x$

$x = \frac{145}{6} = \boxed{25'6 \text{ años}}$

Hay que hacer unas ecuaciones e igualarlas.
Porque siempre que te dan dos datos con incógnita se hace así.

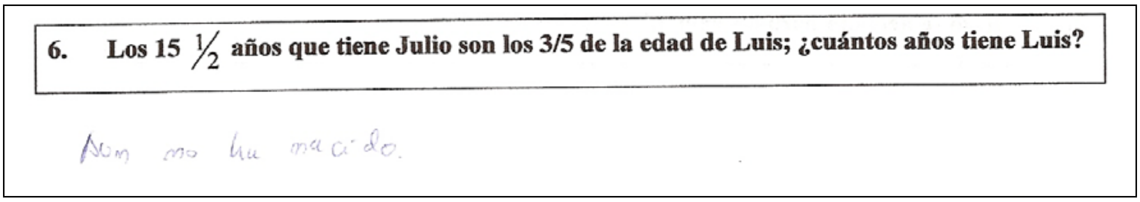
Trascripción: “15 ½ = Julio, $\frac{15}{\frac{1}{2}}\cdot\frac{3}{5}\mathrm{X} = \mathrm{Luis}$; $\frac{15}{\frac{1}{2}} = \frac{15}{\frac{1}{2}}\cdot\frac{3}{5}\mathrm{X} \to \frac{15}{\frac{1}{2}} - \frac{15}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{5}\mathrm{X} \to$

$\to \frac{29}{2} = \frac{3}{5}\cdot\mathrm{X} \to \frac{\frac{29}{2}}{\frac{3}{5}} = \mathrm{X} \to \mathrm{X} = \frac{145}{6} = 25{,}6\ \text{años}$. Hay que hacer unas ecuaciones e igualarlas. Porque siempre que te dan dos datos con incógnita se hace así”.

Explicación: El estudiante plantea una ecuación para resolver el problema, pero tiene dificultades con la manipulación de las expresiones, lo que hace que obtenga una solución incorrecta ($25{,}\overline{6}$ años). Explica que siempre que se dan dos datos con incógnita se hace así..

Interpretación: La estudiante utiliza un modelo semántico de factor perdido, siendo su enfoque de resolución el planteamiento y resolución de una ecuación. Manifiesta dificultades con las operaciones, obteniendo una solución incorrecta.

- Alumno 10 (Vicent)


6. Los 15 ½ años que tiene Julio son los 3/5 de la edad de Luis; ¿cuántos años tiene Luis?

Non no ha nacido.

Trascripción: “Aún no ha nacido”.

Explicación e Interpretación: La respuesta es no esperada, ya que no apareció en el pilotaje .

- Alumno 11 (Fco. Javier)

En blanco

- Alumna 12 (Aída)

En blanco

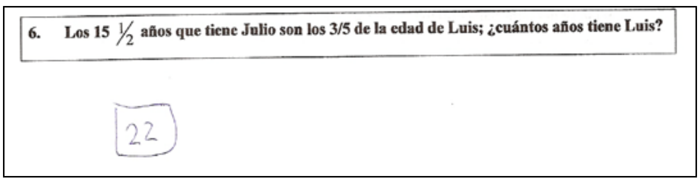
- Alumna 13 (Carmen)

En blanco

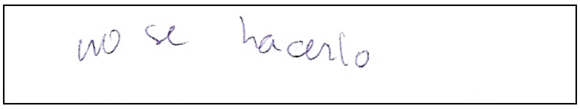
- Alumna 14 (Mireia)

En blanco

- Alumno 15 (Héctor)


6. Los 15 ½ años que tiene Julio son los 3/5 de la edad de Luis; ¿cuántos años tiene Luis?

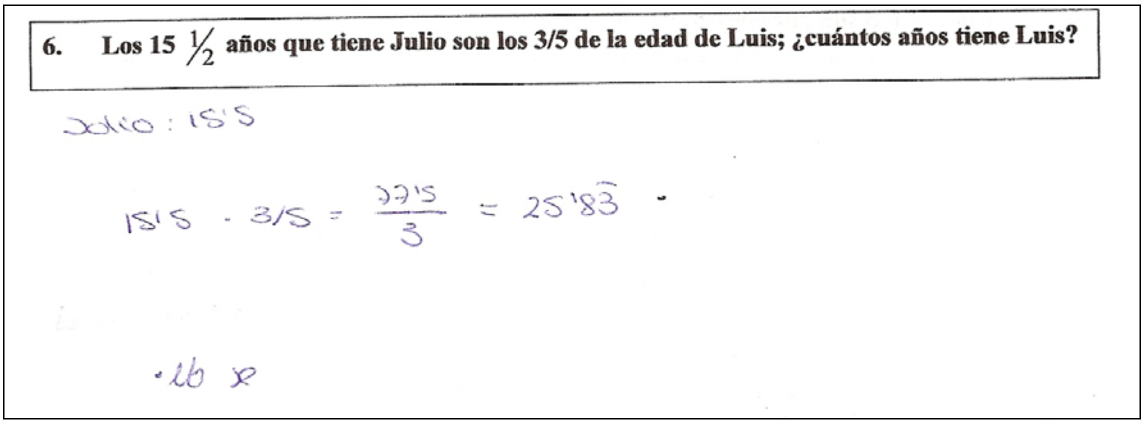
22


no se hacerlo

Trascripción: “22. No se hacerlo”.

Explicación e Interpretación: Respuesta no esperada, ya que no apareció en el pilotaje.

- Alumna 16 (Jennifer)


6. Los 15 ½ años que tiene Julio son los 3/5 de la edad de Luis; ¿cuántos años tiene Luis?

Julio : 15'5

$15'5 \cdot 3/5 = \frac{77'5}{3} = 25'8\overline{3}$

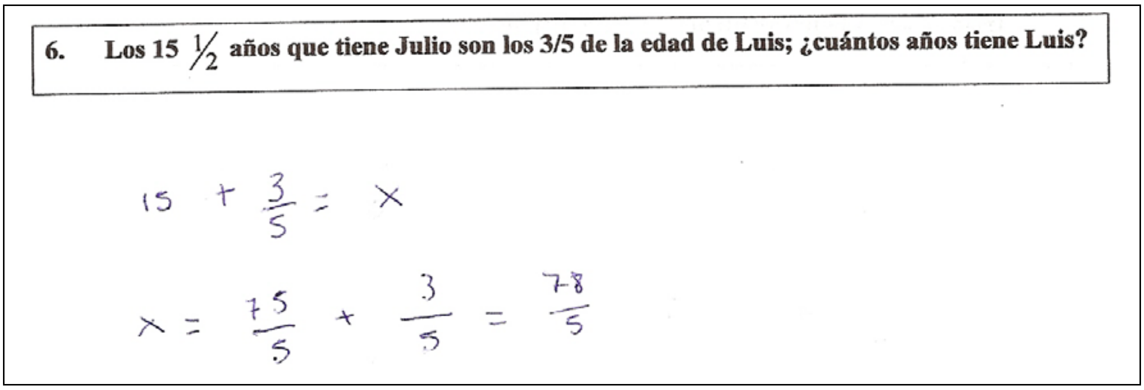
No se

Trascripción: “Julio: 15’5; 15’5·3/5 = $\frac{77'5}{3} = 25'8\overline{3}$ No se”.

Explicación: La estudiante divide directamente las fracciones del enunciado, aunque escribe el signo de multiplicación. Previamente, convierte la primera fracción en su expresión decimal y finalmente expresa el resultado en forma decimal. Obtiene la solución correcta. Sin embargo, en su explicación afirma que no sabe hacer el problema.

Interpretación: La estudiante plantea el problema como una división, mediante un enfoque ternario, pero no da explicación ninguna. Su comentario (“No se”) parece indicar que tiene dificultades para explicar el método de resolución o bien, quizás, que su solución no ha sido suficientemente meditada.

- Alumna 17 (Laura A)


6. Los 15 ½ años que tiene Julio son los 3/5 de la edad de Luis; ¿cuántos años tiene Luis?

$15 + \frac{3}{5} = X$

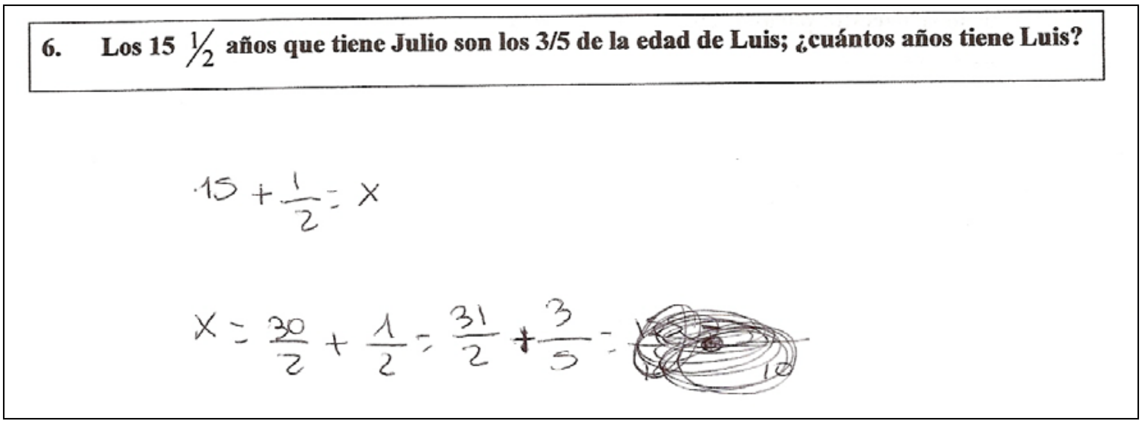
$X = \frac{75}{5} + \frac{3}{5} = \frac{78}{5}$

Trascripción: “$15 + \frac{3}{5} = X \rightarrow X = \frac{75}{5} + \frac{3}{5} = \frac{78}{5}$”.

Explicación: La estudiante suma 15 con la fracción 3/5, obteniendo una solución no correcta.

Interpretación: La estudiante plantea el problema con un enfoque aditivo, sin dar ninguna explicación. Resultado incorrecto.

- Alumna 18 (Patri)



6. Los 15 ½ años que tiene Julio son los 3/5 de la edad de Luis; ¿cuántos años tiene Luis?

$15 + \frac{1}{2} = X$

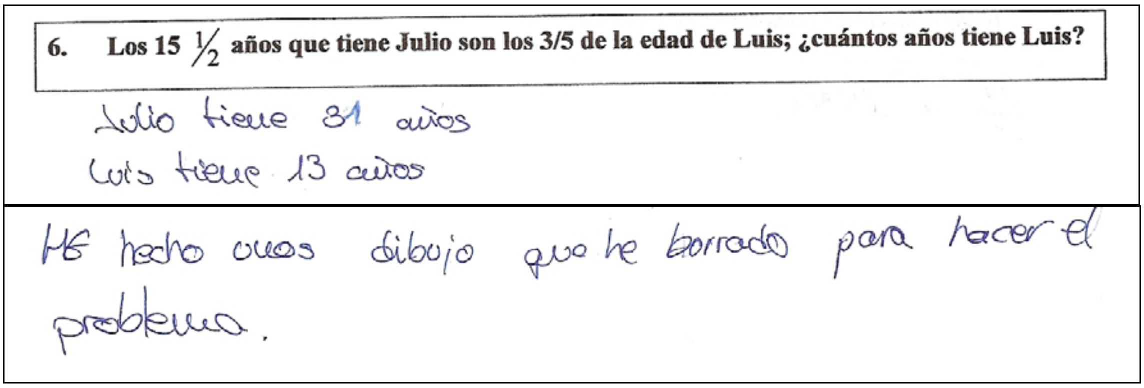
$X = \frac{30}{2} + \frac{1}{2} = \frac{31}{2} + \frac{3}{5} =$

Trascripción: “ $15+\frac{}{2}=X\rightarrow X=\frac{30}{2}+\frac{1}{2}=\frac{31}{2}+\frac{3}{5}=$ ”.

Explicación: La estudiante suma las fracciones que aparecen en el enunciado, obteniendo una solución incorrecta. No incluye ninguna explicación.

Interpretación: La estudiante enfoca el problema desde un punto de vista aditivo, obteniendo una solución incorrecta.

- Alumna 19 (Laura B)



6. Los 15 ½ años que tiene Julio son los 3/5 de la edad de Luis; ¿cuántos años tiene Luis?

Julio tiene 31 años

Luis tiene 13 años

He hecho unos dibujo que he borrado para hacer el problema.

Trascripción: “Julio tiene 31 años. Luis tiene 13 años. He hecho unos dibujo que he borrado para hacer el problema.

Explicación e Interpretación: La respuesta es no esperada, porque no apareció en el pilotaje.

- Alumno 20 (Jesús)

En blanco

- Alumna 21 (Estefanía)

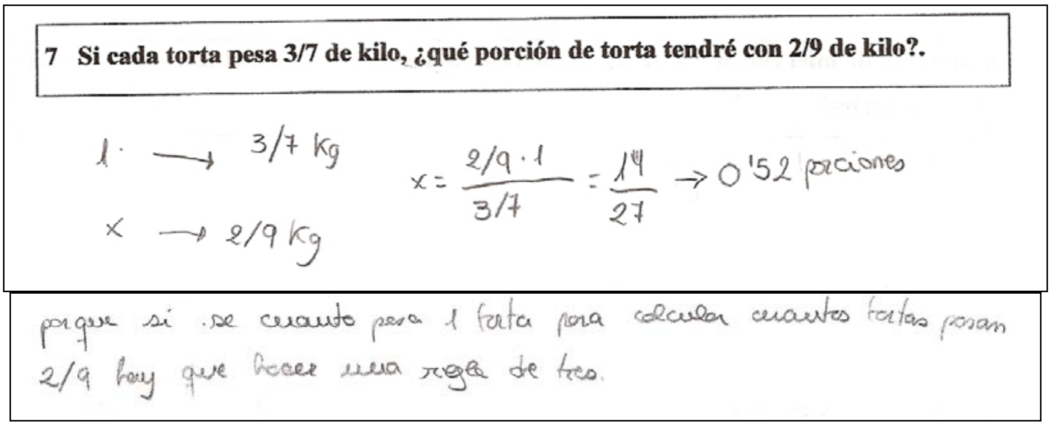
En blanco

10.1.8. Tarea 7: "Porción de torta"

- Alumno 1(Rubén)

En blanco.

- Alumna 2 (Cristina)


7 Si cada torta pesa 3/7 de kilo, ¿qué porción de torta tendré con 2/9 de kilo?.

$1 \cdot \longrightarrow 3/7$ kg

$x \longrightarrow 2/9$ kg

$x = \frac{2/9 \cdot 1}{3/7} = \frac{14}{27} \rightarrow 0'52$ porciones

porque si se cuanto pesa 1 torta para calcular cuantas tortas pesan 2/9 hay que hacer una regla de tres.

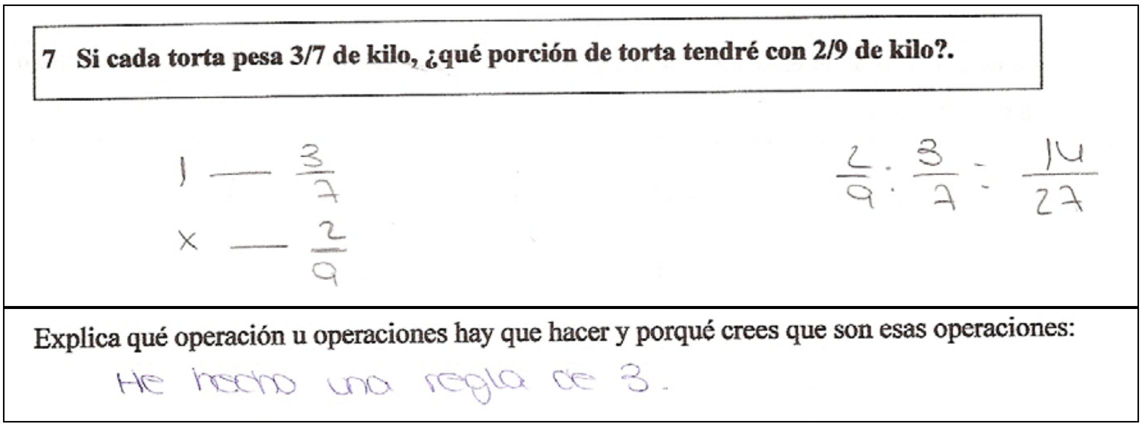
Trascripción: $\begin{array}{l} 1 \rightarrow 3/7 \text{ kg} \\ X \rightarrow 2/9 \text{ kg.} \end{array}$ $\quad X = \frac{2/9 \cdot 1}{3/7} = \frac{14}{27} \rightarrow$ 0,52 porciones

"Porque si se cuanto pesa 1 torta, para calcular cuantas tortas pesan 2/9. hay que hace una regla de tres".

Explicación: La estudiante plantea una regla de tres que resuelve despejando X mediante una división de fracciones. Expresa el resultado en forma decimal. Obtiene la solución correcta.

Interpretación: la estudiante enfoca la resolución con un esquema cuaternario de regla de tres y con un modelo semántico de proporción II.

- Alumna 3 (Ana)


7 Si cada torta pesa 3/7 de kilo, ¿qué porción de torta tendré con 2/9 de kilo?.

$1 — \frac{3}{7}$

$x — \frac{2}{9}$

$\frac{2}{9} : \frac{3}{7} = \frac{14}{27}$

Explica qué operación u operaciones hay que hacer y porqué crees que son esas operaciones:

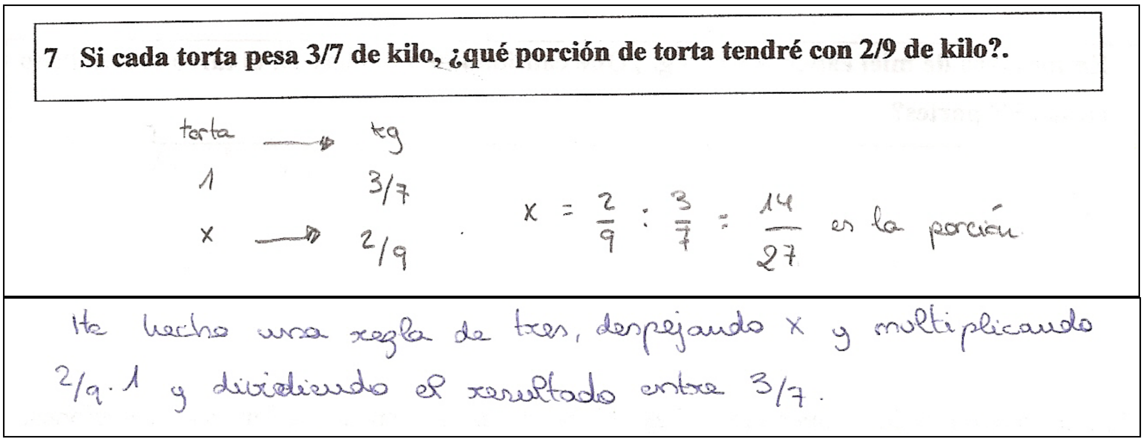
He hecho una regla de 3.

Trascripción: " $\begin{array}{l} 1 \rightarrow 3/7 \\ X \rightarrow 2/9 \end{array}$ $\quad \frac{2}{9} \div \frac{3}{7} = \frac{14}{27}$ He hecho una regla de tres".

Explicación: La estudiante plantea una regla de tres y la resuelve haciendo una división de fracciones. Obtiene un resultado correcto.

Interpretación: la estudiante enfoca el problema con un esquema cuaternario de regla de tres y con un modelo semántico de proporción II.

- Alumna 4 (Miriam)



7 Si cada torta pesa 3/7 de kilo, ¿qué porción de torta tendré con 2/9 de kilo?.

$$\begin{array}{lcl} \text{torta} & \rightarrow & \text{kg} \\ 1 & & 3/7 \\ x & \rightarrow & 2/9 \end{array} \qquad x = \frac{2}{9} : \frac{3}{7} = \frac{14}{27} \text{ es la porción}$$

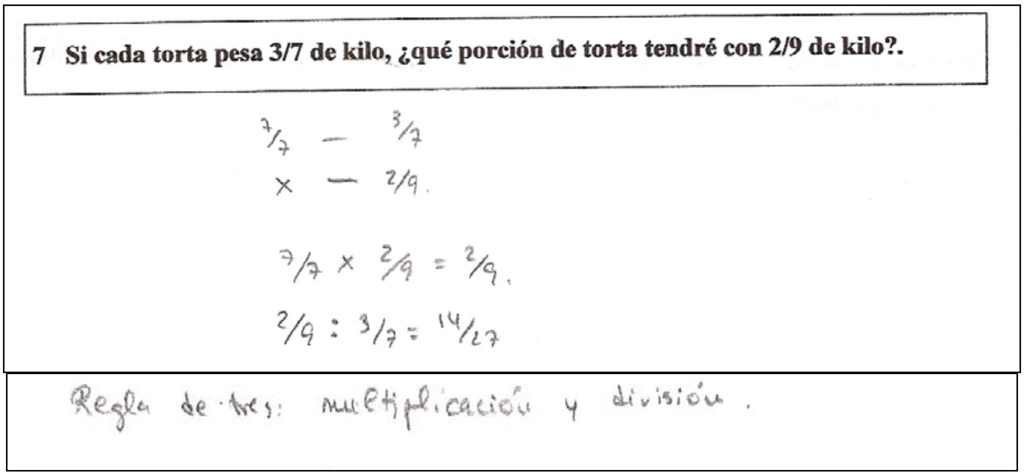
He hecho una regla de tres, despejando X y multiplicando 2/9 · 1 y dividiendo el resultado entre 3/7.

Trascripción: " $\begin{array}{lcl} \text{Torta} & \rightarrow & \text{kg} \\ 1 & \rightarrow & 3/7 \\ X & \rightarrow & 2/9 \end{array}$ $\quad X = \frac{2}{9} \div \frac{3}{7} = \frac{14}{27}$ es la porción . He hecho una regla de tres, despejando X y multiplicando 2/9 por 1 y dividiendo el resultado entre 3/7".

Explicación: La estudiante plantea una regla de tres, que resuelve mediante una división de fracciones $\left(\frac{2}{9} \div \frac{3}{7}\right)$, obteniendo la solución correcta.

Interpretación: La estudiante enfoca la resolución con un esquema cuaternario de regla de tres y un modelo semántico de proporción II.

- Alumna 5 (Ángela)



7 Si cada torta pesa 3/7 de kilo, ¿qué porción de torta tendré con 2/9 de kilo?.

$$\begin{array}{lcl} 7/7 & - & 3/7 \\ x & - & 2/9. \end{array}$$

$$7/7 \times 2/9 = 2/9.$$

$$2/9 : 3/7 = 14/27$$

Regla de tres: multiplicación y división.

Trascripción: " $\left.\begin{array}{l} \frac{7}{7} \rightarrow \frac{3}{7} \\ \\ X \rightarrow \frac{2}{9} \end{array}\right\}$ $\quad \frac{7}{7} \times \frac{2}{9} = \frac{2}{9} \rightarrow \frac{2}{9} \div \frac{3}{7} = \frac{14}{27}$. Regla de tres: multiplicación y división"

Explicación: La estudiante plantea una regla de tres, tomando la unidad como 7/7. Resuelve la regla de tres en dos pasos: una multiplicación y una división. Obtiene el resultado correcto.

Interpretación: La estudiante ha enfocado la resolución mediante un esquema cuaternario de regla de tres, con un modelo semántico de proporción II. Descompone la regla de tres en una multiplicación y una división.

- Alumno 6 (Juan)

7 Si cada torta pesa 3/7 de kilo, ¿qué porción de torta tendré con 2/9 de kilo?.

$$\frac{2}{9} : \frac{3}{7} = \frac{14}{27}$$

Explica qué operación u operaciones hay que hacer y porqué crees que son esas operaciones:

Hay que dividir losquilos que tiene entre los que pesa una entera

Trascripción: " $\frac{2}{9} : \frac{3}{7} = \frac{14}{27}$. Hay que dividir los quilos que tiene entre los que pesa una entera".

Explicación: El estudiante divide directamente la fracción 2/9 entre la fracción 3/7, obteniendo el resultado correcto Explica su elección diciendo que hay que dividir para resolver el problema.

Interpretación: El estudiante utiliza un modelo semántico de medida. Su enfoque de resolución es de división directa (esquema ternario)

- . Alumna 7 (Casandra)

7 Si cada torta pesa 3/7 de kilo, ¿qué porción de torta tendré con 2/9 de kilo?.

Torta	kilos
1	3/7
x	2/9

$\frac{2}{9} : \frac{3}{7} = \frac{14}{27}$ porcion.

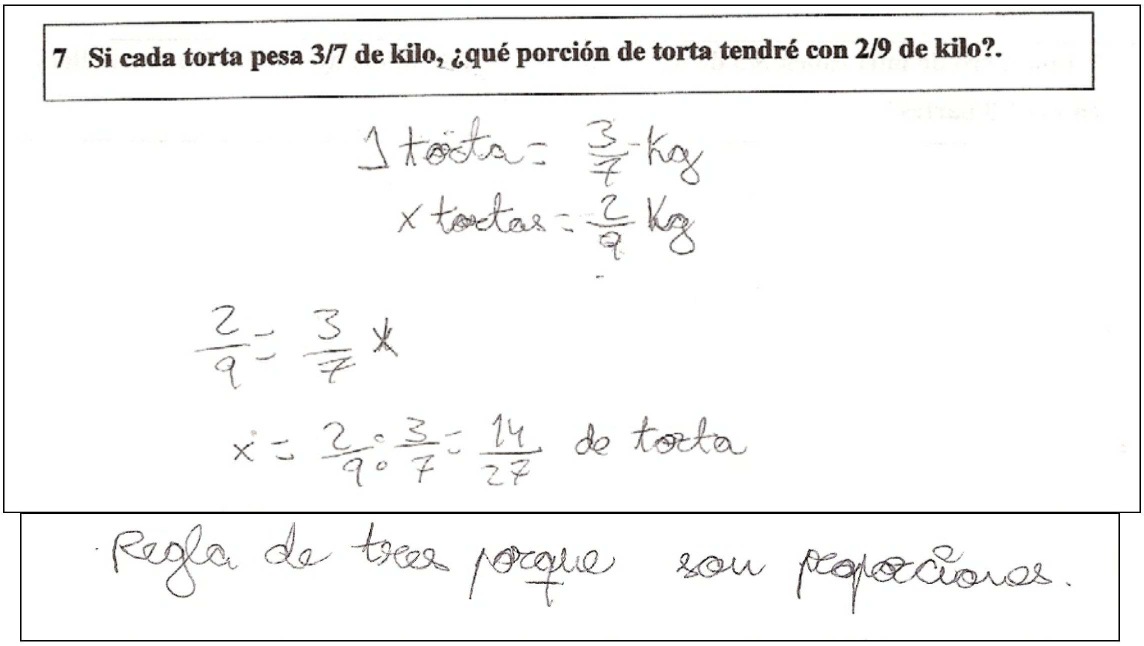
División porque tienes que averiguar que porcion por lo tanto divides la tarta.

Trascripción: “$\begin{array}{ccc} & \text{Torta} \rightarrow \text{kg} & \\ 1 & \rightarrow & 3/7 \\ \text{X} & \rightarrow & 2/9 \end{array}$ $\quad \frac{2}{9} \div \frac{3}{7} = \frac{14}{27}$ porción . División porque tienes que averiguar qué porción por lo tanto divides la tarta”.

Explicación: La estudiante plantea una regla de tres para resolver el problema. A continuación usa la división de fracciones $\frac{2}{9} \div \frac{3}{7} = \frac{14}{27}$ para resolver la regla de tres, obteniendo la solución correcta. Explica que hay que hacer una división porque se pregunta por la porción, es decir, por una parte de la tarta.

Interpretación: La estudiante utiliza un modelo semántico de proporción II. Su enfoque de resolución se basa en un esquema cuaternario de regla de tres, aunque luego use la división.

- Alumno 8 (Christian)



7 Si cada torta pesa 3/7 de kilo, ¿qué porción de torta tendré con 2/9 de kilo?.

$1 \text{ torta} = \frac{3}{7} \text{ kg}$
$x \text{ tortas} = \frac{2}{9} \text{ kg}$

$\frac{2}{9} = \frac{3}{7} x$

$x = \frac{2}{9} : \frac{3}{7} = \frac{14}{27}$ de torta

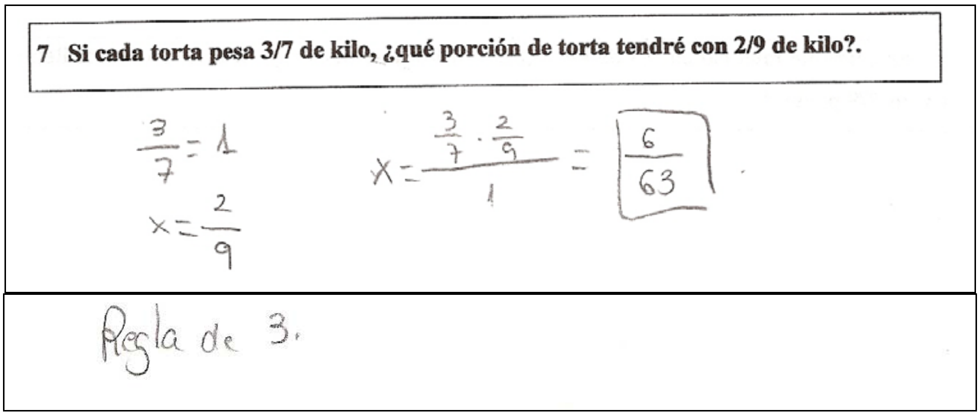
Regla de tres porque son proporciones.

Trascripción: “$\left.\begin{array}{r} 1 \text{ torta} = \frac{3}{7} \text{ kg} \\ \text{X tortas} = \frac{2}{9} \text{ kg} \end{array}\right\}$ $\frac{2}{9} = \frac{3}{7}\text{X} \rightarrow \ \text{X} = \frac{2}{9} \div \frac{3}{7} = \frac{14}{27} \text{de torta}$. Regla de tres porque son proporciones”.

Explicación: El estudiante plantea una regla de tres, que resuelve planteando una ecuación. Para despejar la incógnita X efectúa una división de fracciones, obteniendo la solución correcta. Explica que hay que hacer una regla de tres porque son proporciones.

Interpretación: El estudiante utiliza un modelo semántico de proporción II, aunque a través del planteamiento de una ecuación. Su enfoque de resolución es de regla de tres (esquema cuaternario).

- Alumna 9 (Ana María)


7 Si cada torta pesa 3/7 de kilo, ¿qué porción de torta tendré con 2/9 de kilo?.

$\frac{3}{7} = 1$ $\quad X = \frac{\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{9}}{1} = \boxed{\frac{6}{63}}$

$x = \frac{2}{9}$

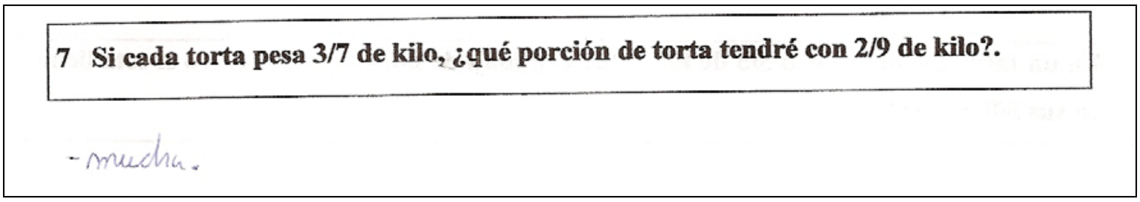
Regla de 3.

Trascripción: “ $\left.\begin{array}{l} \frac{3}{7} = 1 \\ X = \frac{2}{9} \end{array}\right\} \quad X = \frac{\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{9}}{1} = \frac{6}{63}$ Regla de 3”.

Explicación: El estudiante plantea una regla de tres, pero lo hace de manera incorrecta, al cambiar de orden las cantidades en los espacios de medida. Aplica el método reglado y obtiene una solución incorrecta.

Interpretación: La estudiante usa un modelo semántico de proporción II, con un esquema de resolución cuaternario. Al cambiar el orden de las cantidades en la proporción, reduce el problema a una multiplicación, en vez de a una división.

- Alumno 10 (Vicent)

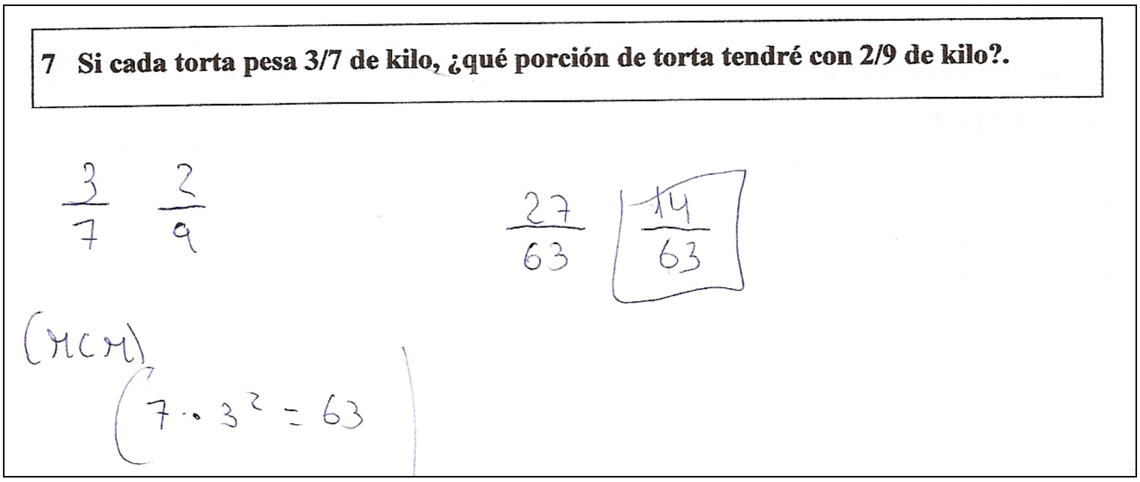

7 Si cada torta pesa 3/7 de kilo, ¿qué porción de torta tendré con 2/9 de kilo?.

- mucha.

Trascripción: “mucha”.

Explicación e Interpretación: La respuesta del estudiante es no esperada, dado que no apareció en el pilotaje.

- Alumno 11 (Fco. Javier)



7 **Si cada torta pesa 3/7 de kilo, ¿qué porción de torta tendré con 2/9 de kilo?.**

$\frac{3}{7}$ $\frac{2}{9}$ $\frac{27}{63}$ $\boxed{\frac{14}{63}}$

(mcm)

$(7 \cdot 3^2 = 63)$

Trascripción: “ $\frac{3}{7}, \frac{2}{9}$, (mcm) $\left(7 \cdot 3^2 = 63\right)$, $\frac{27}{63}, \frac{14}{63}$ ”.

Explicación: El estudiante se limita a reducir las fracciones a común denominador, sin aportar ninguna explicación

Interpretación: Parece que el estudiante enfoca la resolución desde el punto de vista de la comparación del valor absoluto de las fracciones, ignorando la comparación multiplicativa. En todo caso, clasificamos esta solución como respuesta no identificada.

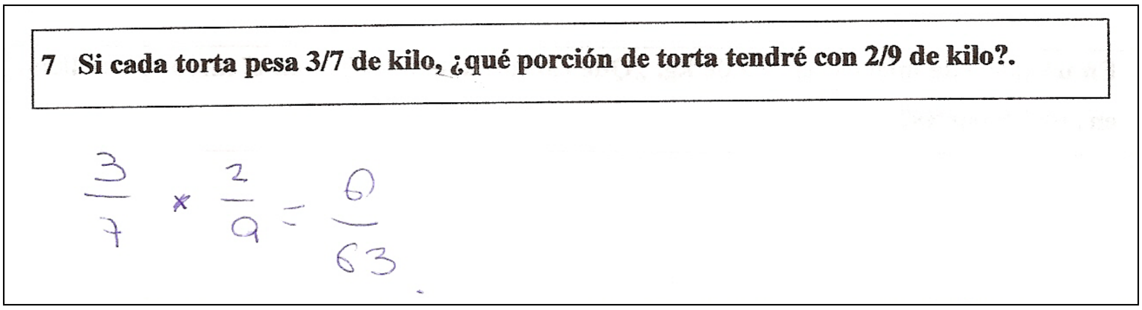
- Alumna 12 (Aída)

En blanco.

- Alumna 13 (Carmen)

En blanco

- Alumna 14 (Mireia)



7 **Si cada torta pesa 3/7 de kilo, ¿qué porción de torta tendré con 2/9 de kilo?.**

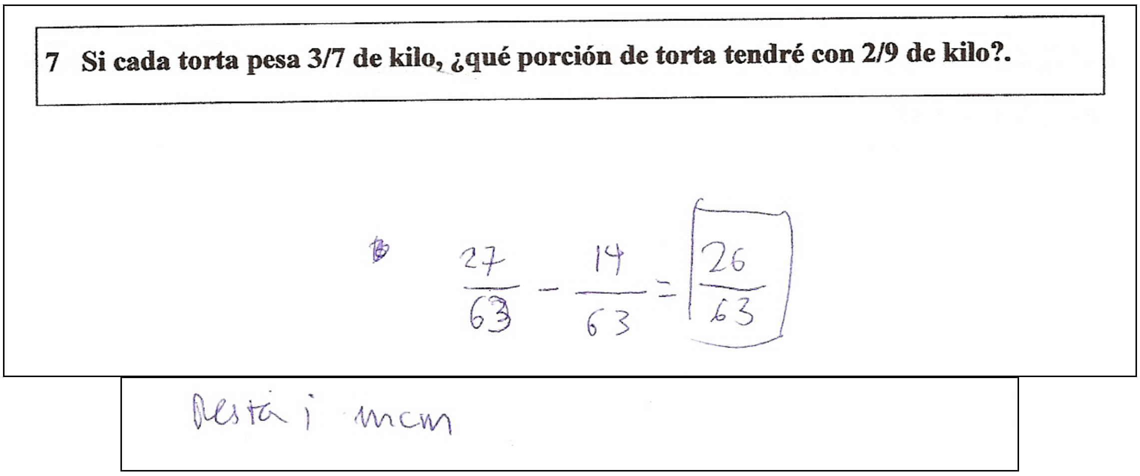
$\frac{3}{7} \times \frac{2}{9} = \frac{6}{63}$

Trascripción: “ $\frac{3}{7} \times \frac{2}{9} = \frac{6}{63}$ ”.

Explicación: La estudiante multiplica las fracciones 3/7 y 2/9, sin dar ninguna explicación. Respuesta incorrecta.

Interpretación: La estudiante hace una interpretación incorrecta del enunciado, ya que parece entender que la pregunta es cuánto pesa 2/9 de la torta, sabiendo que cada torta pesa 3/7. Por eso identifica el enunciado con un problema de multiplicar. Posiblemente, usa un modelo semántico de medida.

- Alumno 15 (Héctor)

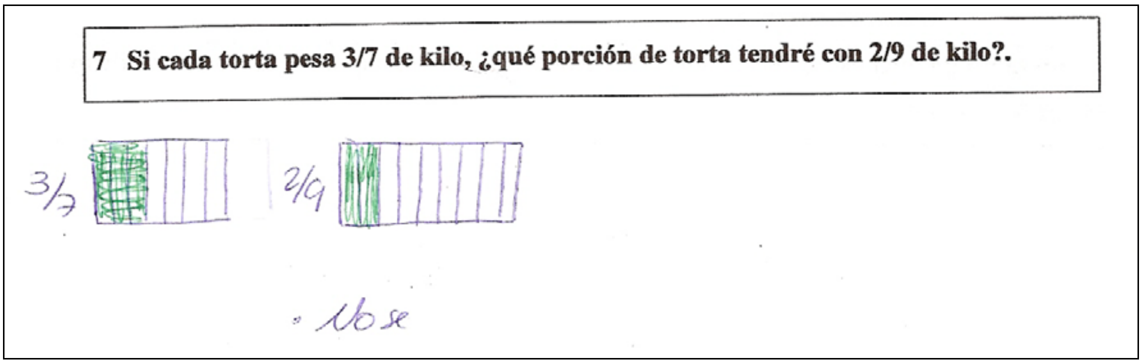


Trascripción: “ $\frac{27}{63}-\frac{14}{63}=\frac{26}{63}$. resta y mcm”.

Explicación: El estudiante resta las fracciones (con un error de cálculo incluido), dando un resultado no correcto. En su explicación dice que hay que restar y hallar el mcm.

Interpretación: El estudiante enfoca la resolución desde el punto de vista de la comparación aditiva de las fracciones, basada en la resta y no en la división., ignorando la comparación multiplicativa. Solución incorrecta.

- Alumna 16 (Jennifer)



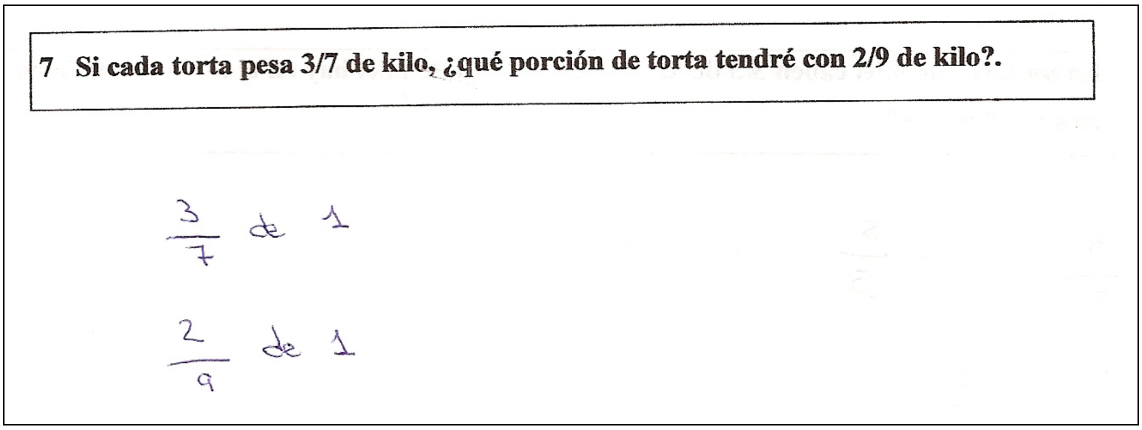
Trascripción: Dibuja dos rectángulos; el primero dividido en siete partes, de las cuales colorea tres; el segundo dividido en nueve partes, de las que colorea dos. Escribe al lado de cada rectángulo las fracciones respectivas (3/7 y 2/9). Después escribe “No sé”.

Explicación: La estudiante se limita a representar gráficamente las fracciones del enunciado, usando un modelo rectangular continuo, sin abordar el problema.

Interpretación: La estudiante reconoce no saber cómo resolver el problema, limitándose a hacer una representación gráfica de las fracciones, mediante el modelo rectangular parte-todo. Solución incorrecta.

- Alumna 17 (Laura A)

En blanco. Se limita a escribir $\frac{3}{7}\,\text{de}\,1$ y $\frac{2}{9}\,\text{de}\,1$



7 Si cada torta pesa 3/7 de kilo, ¿qué porción de torta tendré con 2/9 de kilo?.

$\frac{3}{7}$ de 1

$\frac{2}{9}$ de 1

- Alumna 18 (Patri)

En blanco.

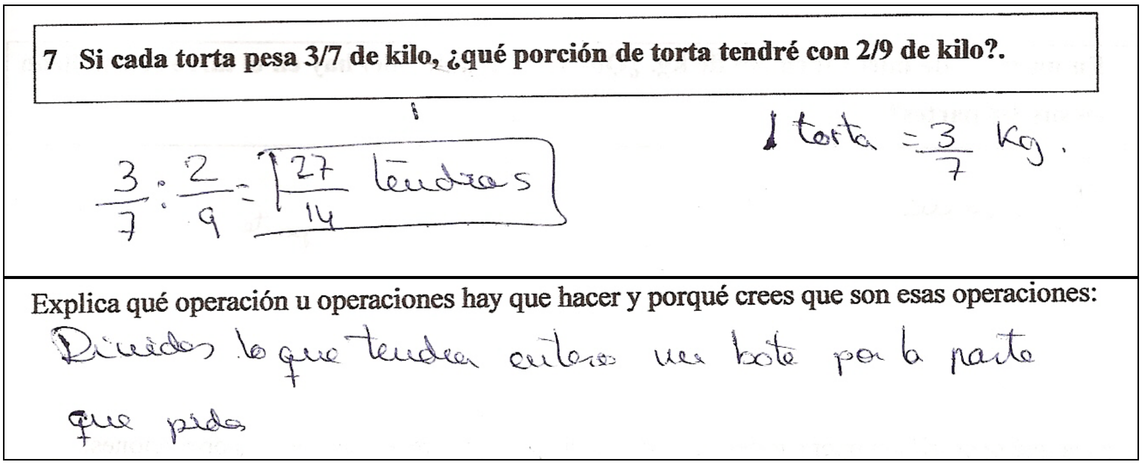
- Alumna 19 (Laura B)

En blanco.

- Alumno 20 (Jesús)

En blanco.

- Alumna 21 (Estefanía)



7 Si cada torta pesa 3/7 de kilo, ¿qué porción de torta tendré con 2/9 de kilo?.

1 torta $= \frac{3}{7}$ Kg.

$\frac{3}{7} : \frac{2}{9} = \boxed{\frac{27}{14} \text{ tendras}}$

Explica qué operación u operaciones hay que hacer y porqué crees que son esas operaciones:

Divides lo que tendra entero un bote por la parte que pida

Trascripción: “1 torta $= \frac{3}{7}$ kg $\frac{3}{7} \div \frac{2}{9} = \frac{27}{14}$ tendras. Divides lo que tendra entero un bote por la parte que pida”.

Explicación: La estudiante divide directamente la fracción 3/7 entre la fracción 2/9 y justifica su respuesta diciendo que hay que dividir el peso de una torta entera entre la parte pedida. Expresa el resultado (incorrecto) en forma de fracción.

Interpretación: La estudiante enfoca la resolución como una división directa de fracciones, pero divide al revés, tomando las fracciones en el mismo orden en que aparecen en el enunciado. Posiblemente, el modelo semántico que usa es de medida.

10.1.9. Tarea 8: "Trigo"

- Alumno 1(Rubén)

En blanco.

- Alumna 2 (Cristina)

En blanco.

- Alumna 3 (Ana)

En blanco.

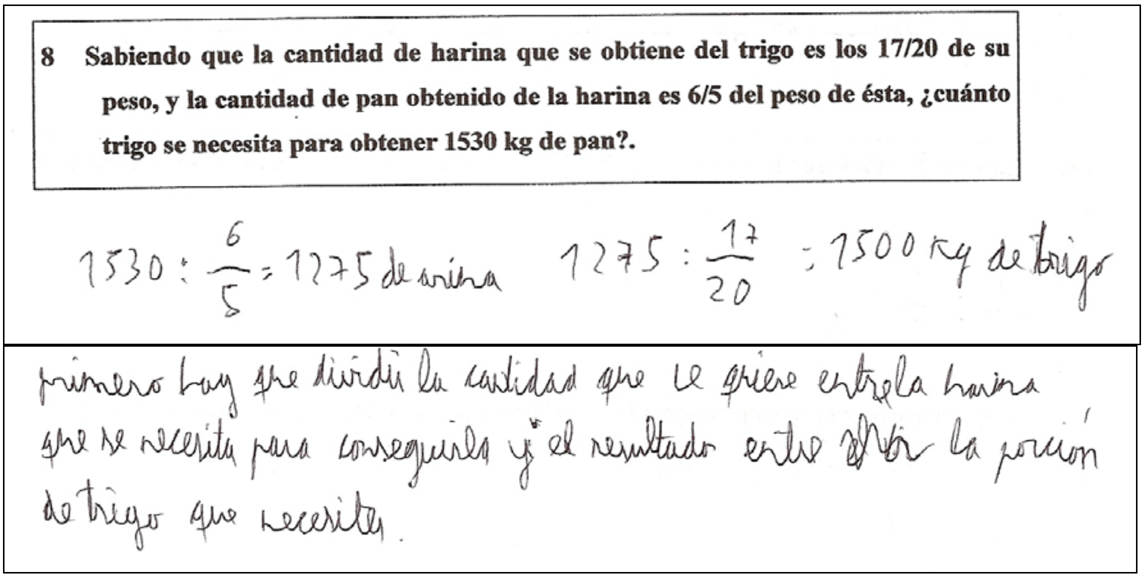
- Alumna 4 (Miriam)

En blanco.

- Alumna 5 (Ángela)

En blanco.

- Alumno 6 (Juan)



8 Sabiendo que la cantidad de harina que se obtiene del trigo es los 17/20 de su peso, y la cantidad de pan obtenido de la harina es 6/5 del peso de ésta, ¿cuánto trigo se necesita para obtener 1530 kg de pan?.

$1530 : \frac{6}{5} = 1275$ de arina $1275 : \frac{17}{20} = 1500$ kg de trigo

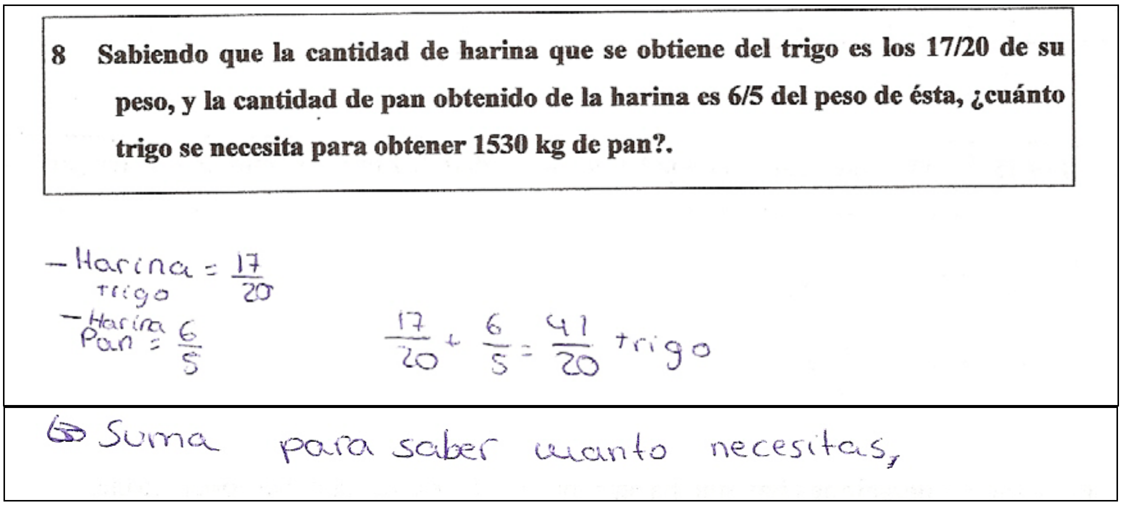
primero hay que dividir la cantidad que se quiere entre la harina que se necesita para conseguirlo y el resultado entre la porción de trigo que necesites.

Trascripción: " $1530 : \frac{6}{5} = 1275$ de arina. $1275 : \frac{17}{20} = 1500$ kg de trigo. Primero hay que dividir la cantidad que se quiere entre la harina que se necesita para conseguirlo y el resultado entre la porción de trigo que necesites".

Explicación: El estudiante divide directamente la cantidad de pan que se pretende conseguir (1530) entre 6/5 para obtener los kilos de harina (1275). Después divide los kilos de harina (1275) entre la fracción 17/20 para hallar los kilos de trigo necesarios (1500), obteniendo el resultado correcto. En su explicación indica que el problema se resuelve en dos pasos mediante división.

Interpretación: El enfoque de resolución del estudiante es de división directa, con un esquema ternario. Por la forma de resolver el problema, que utiliza dos etapas, y por la explicación que hace, parece que el modelo semántico que tiene en cuenta el estudiante sea de inversión de la multiplicación o factor perdido. El algoritmo que utiliza para hacer las divisiones no se muestra, pero posiblemente ha usado el protocolo de la calculadora.

- Alumna 7 (Casandra)



8 Sabiendo que la cantidad de harina que se obtiene del trigo es los 17/20 de su peso, y la cantidad de pan obtenido de la harina es 6/5 del peso de ésta, ¿cuánto trigo se necesita para obtener 1530 kg de pan?.

–Harina / trigo = 17/20
–Harina / Pan = 6/5
17/20 + 6/5 = 41/20 trigo

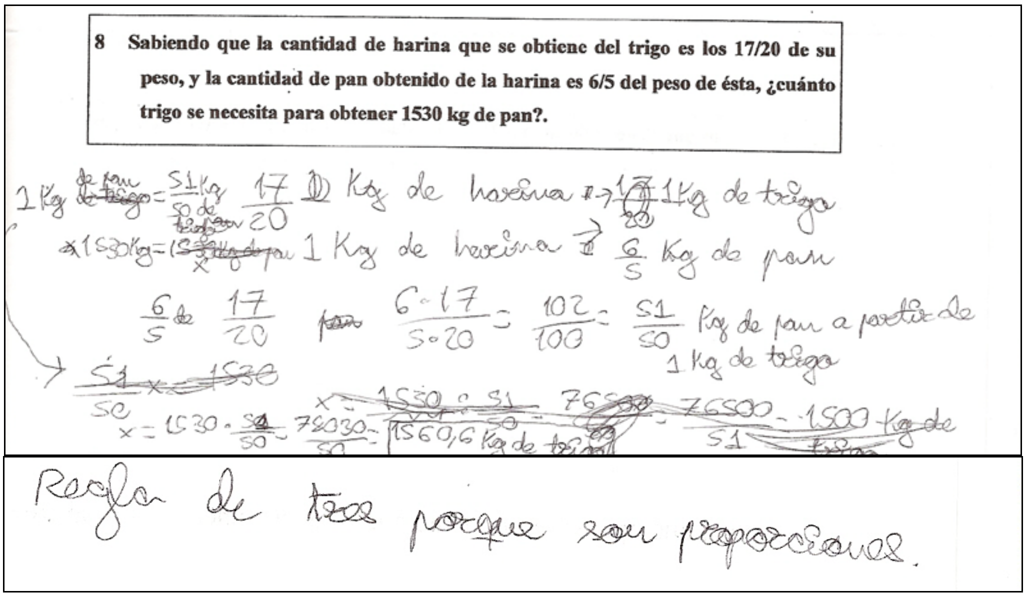
Suma para saber cuanto necesitas,

Trascripción: “Harina–trigo=$\frac{17}{20}$; Harina–pan=$\frac{6}{5}\rightarrow\frac{17}{20}+\frac{6}{5}=\frac{41}{20}$ trigo. Suma para saber cuánto necesitas”.

Explicación: La estudiante suma las fracciones del enunciado, 17/20 + 6/5, obteniendo una solución incorrecta. En su explicación dice que hay que sumar para saber cuánto trigo se necesita.

Interpretación: El enfoque de resolución de la estudiante es aditivo, y seguramente ha usado la calculadora para efectuar la suma de las dos fracciones. La explicación que acompaña a la resolución revela una mala interpretación del enunciado.

- Alumno 8 (Christian)



8 Sabiendo que la cantidad de harina que se obtiene del trigo es los 17/20 de su peso, y la cantidad de pan obtenido de la harina es 6/5 del peso de ésta, ¿cuánto trigo se necesita para obtener 1530 kg de pan?.

1 Kg de trigo = 51/50 Kg de pan
17/20 Kg de harina → 1 Kg de trigo
1 Kg de harina → 6/5 Kg de pan
6/5 de 17/20 = 6·17 / 5·20 = 102/100 = 51/50 Kg de pan a partir de 1 Kg de trigo
x = 1530 · 50/51 = 76500/51 = 1500 Kg de trigo

Regla de tres porque son proporciones.

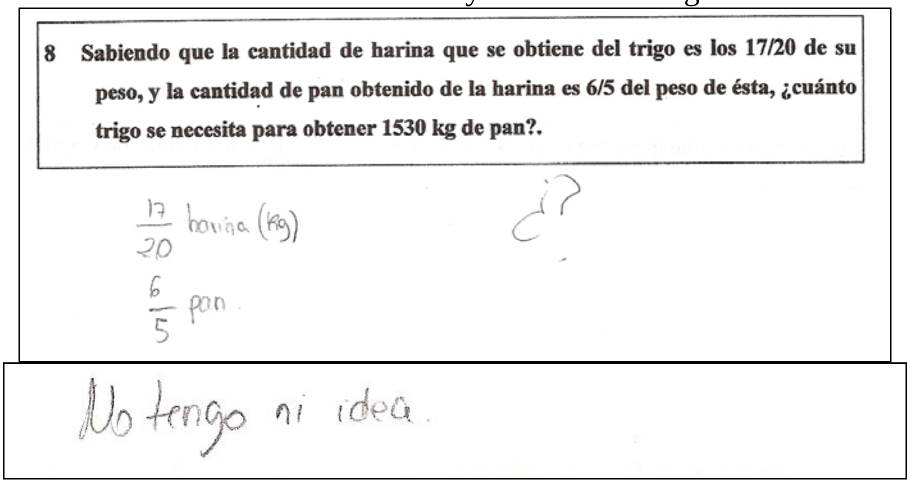
Trascripción: “$\left.\begin{array}{l}\frac{17}{20}\text{ kg de harina}\rightarrow 1\text{ kg de trigo}\\ 1\text{ kg de harina}\rightarrow \frac{6}{5}\text{ kg de pan}\end{array}\right\}\frac{6}{5}\text{ de }\frac{17}{20}=\frac{6\cdot 17}{5\cdot 20}=\frac{102}{100}=\frac{51}{50}$ kg de pan a partir de 1 kg de trigo. $\left.\begin{array}{l}1\text{ kg de pan}=\frac{51}{50}\text{ kg de trigo}\\ 1530\text{ kg}\quad=X\end{array}\right\}X=1530\cdot\frac{51}{50}=\frac{78030}{50}=1560{,}6$ kg de trigo. Regla de tres porque son proporciones”.

Explicación: El estudiante plantea una regla de tres para ver qué cantidad de pan se puede hacer con 1 kg de trigo. A continuación plantea otra regla de tres para ver cuánto trigo se necesita para tener 1530 Kg. de pan. Utiliza siempre un esquema cuaternario. La solución que obtiene es incorrecta, porque la segunda regla de tres está mal planteada. Justifica que aplica reglas de tres porque la situación es de proporcionalidad.

Interpretación: El enfoque de resolución del estudiante es la regla de tres, pero al aplicar por segunda vez el método reglado comete un error y multiplica 1530 por la fracción 51/50, en vez de dividir 1530 entre 51/50, por lo que obtiene una solución incorrecta. Las fracciones del enunciado las usa con el sentido de operadores. Por el planteamiento que hace, parece que su modelo semántico es de medida.

- Alumna 9 (Ana María)

En blanco. Se limita a escribir las fracciones y la frase “no tengo ni idea”.


8 Sabiendo que la cantidad de harina que se obtiene del trigo es los 17/20 de su peso, y la cantidad de pan obtenido de la harina es 6/5 del peso de ésta, ¿cuánto trigo se necesita para obtener 1530 kg de pan?.

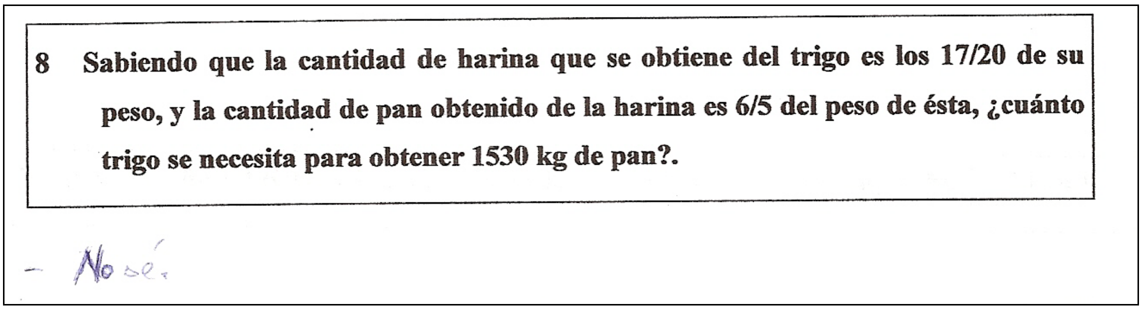
$\frac{17}{20}$ harina (Kg)

¿?

$\frac{6}{5}$ pan

No tengo ni idea.

- Alumno 10 (Vicent)


8 Sabiendo que la cantidad de harina que se obtiene del trigo es los 17/20 de su peso, y la cantidad de pan obtenido de la harina es 6/5 del peso de ésta, ¿cuánto trigo se necesita para obtener 1530 kg de pan?.

– No sé.

Trascripción: “No sé”.

Explicación e Interpretación: Respuesta no esperada, ya que no apareció en el pilotaje

- Alumno 11 (Fco. Javier)

En blanco.

- Alumna 12 (Aída)

En blanco.

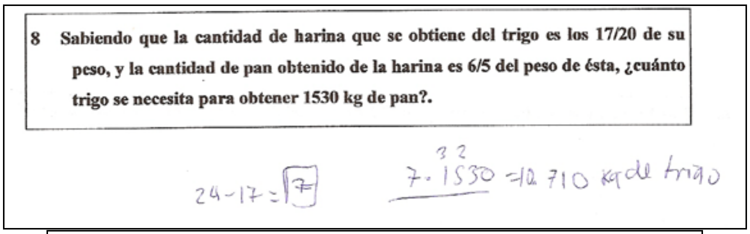
- Alumna 13 (Carmen)

En blanco

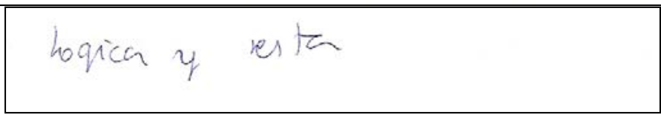
- Alumna 14 (Mireia)

En blanco

- Alumno 15 (Héctor)


8 Sabiendo que la cantidad de harina que se obtiene del trigo es los 17/20 de su peso, y la cantidad de pan obtenido de la harina es 6/5 del peso de ésta, ¿cuánto trigo se necesita para obtener 1530 kg de pan?.

24-17=$\boxed{7}$ 7·1530 = 10 710 kg de trigo

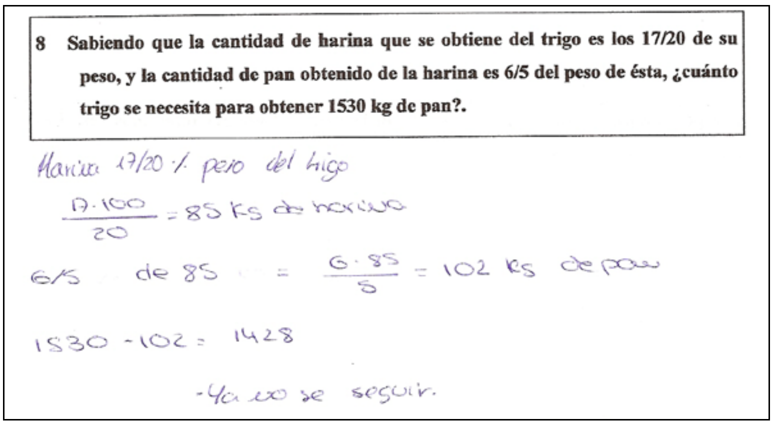

lógica y resta

Trascripción: “24–17=7 → 7·1530=10710 Kg. de trigo. Lógica y resta”.

Explicación: El estudiante resta 24 menos 17, y después multiplica 7 por 1530, obteniendo un resultado no correcto. En su explicación dice que hay que usar la lógica y la resta, es decir, muestra un planteamiento aditivo.

Interpretación: El estudiante parece enfocar la resolución desde el punto de vista de la comparación aditiva, basada en la resta. En cualquier caso, su respuesta no tiene en cuenta las fracciones, razón por la cual consideramos esta solución en la categoría de “Respuesta no identificada”.

- Alumna 16 (Jennifer)


8 Sabiendo que la cantidad de harina que se obtiene del trigo es los 17/20 de su peso, y la cantidad de pan obtenido de la harina es 6/5 del peso de ésta, ¿cuánto trigo se necesita para obtener 1530 kg de pan?.

Harina 17/20 % peso del trigo

17·100/20 = 85 Kg de harina

6/5 de 85 = 6·85/5 = 102 Kg de pan

1530 - 102 = 1428

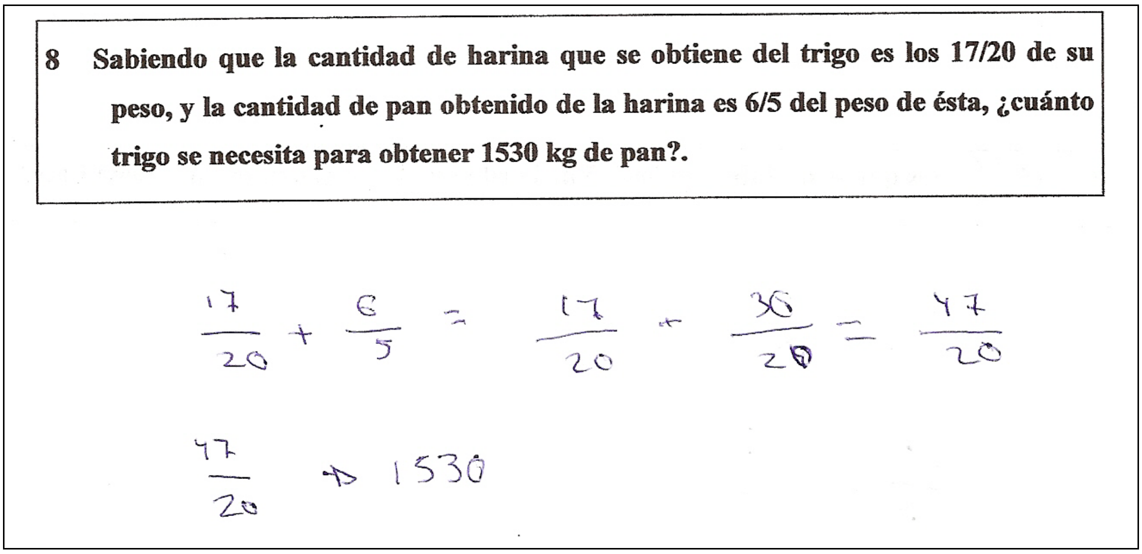
-Ya no se seguir.

Trascripción: "Harina 17/20 peso del trigo $\rightarrow \frac{17 \cdot 100}{20} = 85\,\text{kg de harina}$; 6/5 de 85= $\frac{6 \cdot 85}{5} = 102\ \text{kg de pan} \rightarrow$ 1530–102=1428. Ya no se seguir. No se".

Explicación: La estudiante supone una cantidad de 100 kg de trigo y calcula la cantidad de harina, hallando los 17/20 de 100. A continuación halla los 6/5 del resultado (85) para obtener la cantidad de pan. Después resta 1530 menos 102, en un intento por hallar la cantidad de pan. Pero no termina el problema.

Interpretación: El enfoque de resolución de la estudiante es aditivo, mediante la resta. En vez de empezar el problema por atrás, parte de una cantidad fijada por ella misma (en este caso 100 Kg. de trigo) y utiliza las fracciones como operadores hasta obtener la cantidad de pan. La estudiante ignora la comparación multiplicativa. Solución incorrecta.

- Alumna 17 (Laura A)



8 Sabiendo que la cantidad de harina que se obtiene del trigo es los 17/20 de su peso, y la cantidad de pan obtenido de la harina es 6/5 del peso de ésta, ¿cuánto trigo se necesita para obtener 1530 kg de pan?.

$\frac{17}{20} + \frac{6}{5} = \frac{17}{20} + \frac{30}{20} = \frac{47}{20}$

$\frac{47}{20} \rightarrow 1530$

Trascripción: "$\frac{17}{20} + \frac{6}{5} = \frac{14}{20} + \frac{30}{20} = \frac{47}{20} \rightarrow \frac{47}{20} \rightarrow 1530$".

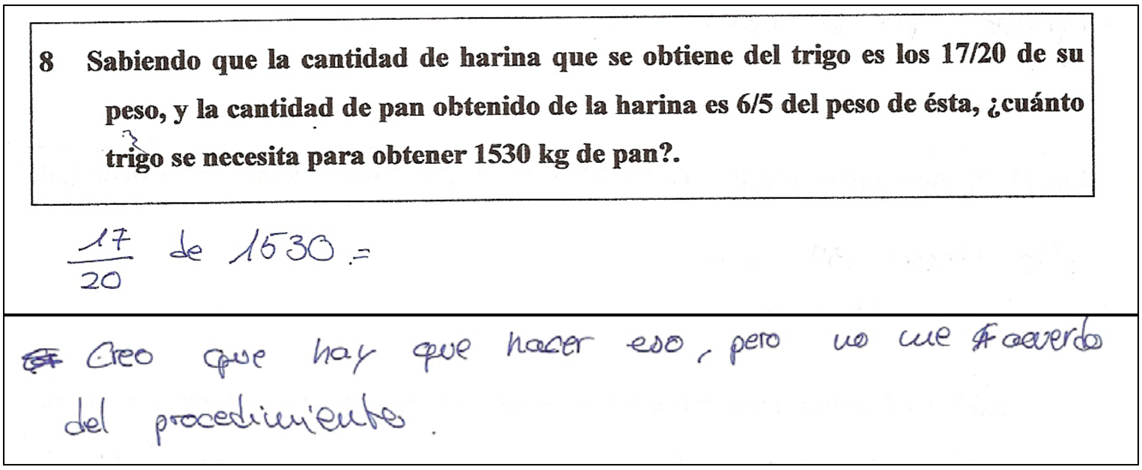
Explicación: La estudiante suma las fracciones que aparecen en el enunciado, en el mismo orden. Comete un error de cálculo y obtiene un resultado incorrecto. No concluye el problema.

Interpretación: La estudiante enfoca el problema desde un punto de vista aditivo, de forma incorrecta, ya que comete un error de cálculo. Ignora la comparación multiplicativa. Solución incorrecta.

- Alumna 18 (Patri)

En blanco. Escribe “no tengo ni idea”

- Alumna 19 (Laura B)


8 Sabiendo que la cantidad de harina que se obtiene del trigo es los 17/20 de su peso, y la cantidad de pan obtenido de la harina es 6/5 del peso de ésta, ¿cuánto trigo se necesita para obtener 1530 kg de pan?.

$\frac{17}{20}$ de 1530 =

Creo que hay que hacer eso, pero no me acuerdo del procedimiento.

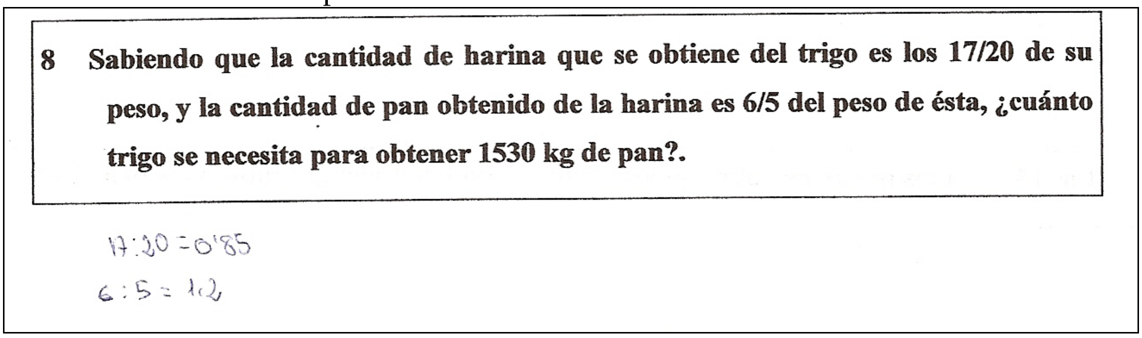
Trascripción: “$\frac{17}{20}$ de 1530. Creo que hay que hace eso, pero no me acuerdo del procedimiento”.

Explicación: La estudiante se limita a escribir 17/20 de 1530 y a afirmar que no recuerda el procedimiento.

Interpretación: La estudiante reconoce el sentido de operador de la fracción 17/20, pero no resuelve el problema. Respuesta no identificada.

- Alumno 20 (Jesús)

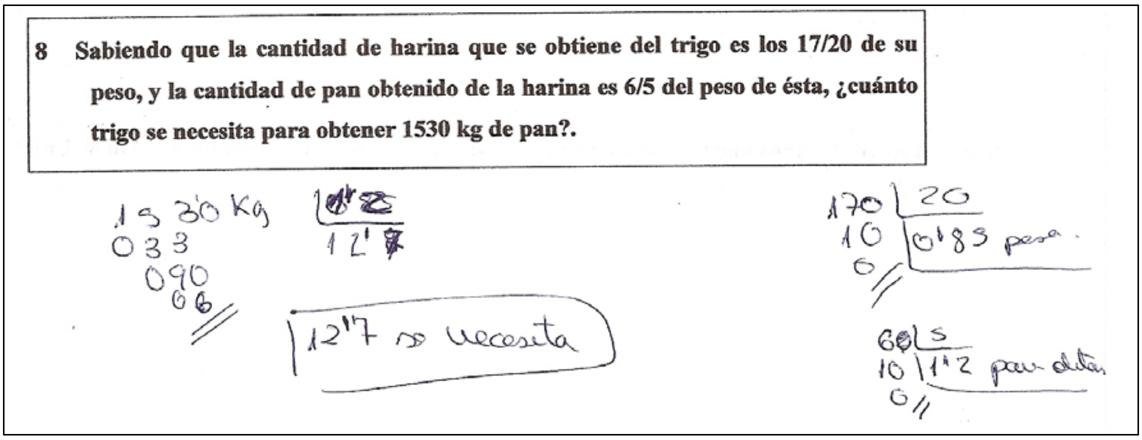
En blanco. Se limita a expresar en forma decimal las fracciones del enunciado.


8 Sabiendo que la cantidad de harina que se obtiene del trigo es los 17/20 de su peso, y la cantidad de pan obtenido de la harina es 6/5 del peso de ésta, ¿cuánto trigo se necesita para obtener 1530 kg de pan?.

17:20 = 0'85

6:5 = 1'2

- Alumna 21 (Estefanía)


8 Sabiendo que la cantidad de harina que se obtiene del trigo es los 17/20 de su peso, y la cantidad de pan obtenido de la harina es 6/5 del peso de ésta, ¿cuánto trigo se necesita para obtener 1530 kg de pan?.

1530 Kg | 1'2

033 | 12'7

090

06 //

12'7 se necesita

170 | 20

10 | 0'85 peso.

0 //

60 | 5

10 | 1'2 pan obten

0 //

> divides sacas lo que se utiliza pa un kilo y sacas lo que se usa para esa cantidad.

Trascripción: Efectúa las divisiones 17/20=0,85 y 6/5=1,2 para obtener la expresión decimal de las fracciones del enunciado. A continuación, divide 1530 entre 1,2 (=6/5) y escribe como solución "12,7 se necesita". "Divides, sacas lo que se utiliza pa un kilo y sacas lo que se usa para esa cantidad".

Explicación: La estudiante transforma las fracciones en decimales. Empieza el problema por el final, calculando la cantidad de harina necesaria para hacer 1530 kilos de pan. Para ello divide directamente 1530 entre 1,2 (=6/5) obteniendo un resultado incorrecto (12,7 Kg. de harina), pero no continua el problema, es decir, no halla la cantidad de trigo necesaria para obtener esa cantidad de harina. Utiliza el algoritmo de caja para hacer las divisiones de forma manual. En su explicación señala que hay que dividir para obtener la cantidad necesaria para un kilo. Respuesta incorrecta.

Interpretación: La estudiante enfoca la resolución mediante la división directa, aunque solamente resuelve una parte del problema, para la que obtiene además una solución incorrecta, debido a un error de cálculo en la división. Considera las fracciones que aparecen en el enunciado como divisiones que dan resultado decimal y usa los decimales en el razonamiento. Utiliza un modelo semántico de medida, pero en su explicación se observa que aplica un algoritmo de reducción a la unidad ("sacas lo que se utiliza pa un kilo").

10.2. EL CUESTIONARIO PRELIMINAR

A) FORMAS TEXTUALES

1. Numera, por orden de preferencia, las afirmaciones con las que estés de acuerdo de entre las siguientes (1 = completamente de acuerdo, 2=bastante de acuerdo, 3=de acuerdo, pero menos, etc.):

UNA FRACCIÓN EXPRESA...	Nº ORDEN
... el resto de la división de un número menor por un número mayor.	
... el cociente de la división de dos números (uno menor por otro mayor)	
... un número de partes de la unidad de medida	
... una parte o varias partes de un todo	
... que hay tantos elementos de un conjunto por cada tantos elementos de otro conjunto	
... que hay que hacer al numerador tantas veces menor como indica el denominador	
... una operación que multiplica por el numerador y divide por el denominador	
... un par de números enteros, con el segundo distinto de cero	

2. Numera, por orden de preferencia, las afirmaciones con las que estés de acuerdo de entre las siguientes (1 = completamente de acuerdo, 2=bastante de acuerdo, 3=de acuerdo, pero menos, etc.):

DIVIDIR ES...	Nº ORDEN
... repartir en partes iguales.	
... averiguar cuántas veces cabe un número en otro	
... averiguar cuántas veces se puede restar un número de otro	
... dado un producto y uno de los factores, hallar el otro factor	
... hallar un número que se haya con la unidad en tal proporción como el dividendo con el divisor	
... hallar un número que está contenido en el dividendo como unidades están contenidas en el divisor	
... hacer el dividendo tantas veces menor como unidades tiene el divisor	

3. Numera, por orden de preferencia, las afirmaciones con las que estés de acuerdo de entre las siguientes (1 = completamente de acuerdo, 2=bastante de acuerdo, 3=de acuerdo, pero menos, etc.):

LA DIVISIÓN $\frac{3}{4} \div \frac{5}{7}$ ES...	Nº ORDEN
... repartir la fracción 3/4 en partes iguales.	
... averiguar cuántas veces cabe 5/7 en 3/4	
... hallar otra fracción que contiene a la unidad tantas veces como 3/4 contiene a 5/7	
... hacer la fracción 3/4 cinco veces menor y siete veces mayor	
... hallar otra fracción, tal que 3/5 se compone de ella del mismo modo que 5/7 se compone de la unidad	
... hallar una fracción que multiplicada por 5/7 da 3/4	
... multiplicar la fracción 3/4 por la fracción recíproca de 5/7	
... multiplicar la fracción 3/4 por la inversa de la fracción 5/7	

B) PROBLEMAS

1 **El dividendo de una división es 4/7 y el cociente 20/21. ¿Cuál es el divisor?**

Explica cómo lo haces:

2. **El producto de dos números es 76 $^1/_8$. Si uno es 4/9, ¿cuál es el otro?”**

Explica cómo lo haces:

3. **Hallar el valor de x en la expresión: 5/6 $\times$ X = 3/4.**

Explica cómo lo haces:

4. **La longitud de la cinta A es 3/5 m y la de la cinta B es 2/7 m. ¿Cuántas veces la cinta A es tan larga como la cinta B?**

Explica cómo lo haces:

5. **Los 15 $^1/_2$ años que tiene Julio son los 3/5 de la edad de Luís; ¿cuántos años tiene Luís?**

Explica cómo lo haces:

6. **Un obrero ha gastado en manutención 1/3 de lo que ha ganado durante el año, 1/8 para vestuario y alquiler y 1/16 en otros gastos; sus ahorros ascienden a 318 ptas.; ¿cuánto había ganado durante este año?**

   Explica cómo lo haces:

7 **Un vendedor de huevos cobró 728 pesetas por cierta partida que había vendido a 3/5 de peseta la docena. ¿Cuántos huevos había vendido?**

   Explica cómo lo haces:

8 **Un peatón ha empleado 3 1/5 horas para recorrer las 3/7 partes del trayecto emprendido. ¿Qué fracción del camino le queda por recorrer después de andar 6 horas?**

   Explica cómo lo haces:

9 **Una cocinera vierte 1/3 de litro de agua en una cafetera. ¿Cuánto ha de añadir para acabar de llenarla, si lo vertido ocupa las 2/5 partes de la misma?**

   Explica cómo lo haces:

10 **Para empapelar un salón, se han necesitado 300 m de un papel cuyo ancho es ¾ de metro. ¿Cuántos metros se necesitarían de otro papel cuyo ancho es 2/3 de metro?**

   Explica cómo lo haces:

11 3/7 **de torta pesan** 2/9 **de kilo. ¿Cuánto pesa la torta?**

   Explica cómo lo haces:

12 **El agua de un depósito se pierde por un desagüe a razón de 1/2 litro por cada 3/4 de hora. ¿Cuánta agua se pierde por hora?**

   Explica cómo lo haces:

13. **Se tiene una cuerda de 42 ½ metros con objeto de atar paquetes. ¿Cuántos paquetes se podrán atar, sabiendo que uno gasta 3 ½ metros?**

   Explica cómo lo haces:

14 **Un obrero teje ¾ de metro en una hora. ¿Cuántas horas empleará para tejer 16 ½ metros?**

   Explica cómo lo haces:

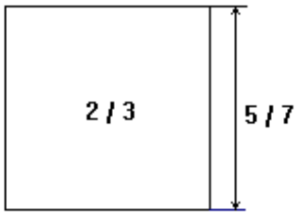
15 **Un tren que lleva la velocidad de 14 3/7 leguas por hora, emplea 13 1/6 horas para recorrer cierta distancia; ¿cuántas horas empleará otro tren para recorrer el mismo trayecto si en una hora recorre 9 1/3 leguas?**

Explica cómo lo haces:

16. **Si cada torta pesa** $3/7$ **de kilo, ¿qué porción de torta tendré con** $2/9$ **de kilo?**

Explica cómo lo haces:

17. **La superficie de la mesa de Ana es un rectángulo que mide 2/3 de u2. Sabiendo que uno de sus lados mide 5/7 de u, averigua cuánto mide el otro lado.**



Explica cómo lo haces:

18. **Sabiendo que la cantidad de harina que se obtiene del trigo es los 17/20 de su peso, y la cantidad de pan obtenido de la harina es 6/5 del peso de ésta, ¿cuánto trigo se necesita para obtener 1530 Kg. de pan?**

Explica cómo lo haces:

10.3. EL CUESTIONARIO DE LA INVESTIGACIÓN

TAREA PREVIA. Asigna a cada una de las siguientes frases uno y solo uno de los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, de forma que:

1 punto = es la frase con la que estás más de acuerdo

8 puntos = es la frase con la que estás más en desacuerdo.

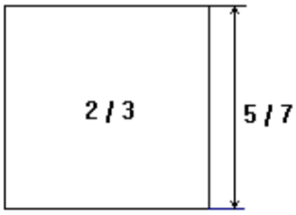
LA DIVISIÓN $\frac{3}{4} \div \frac{5}{7}$ ES...	PUNTUACIÓN
a) ... repartir la fracción 3/4 en partes iguales.	
b) ... averiguar cuántas veces cabe 5/7 en 3/4	
c) ... hallar otra fracción que contiene a la unidad tantas veces como 3/4 contiene a 5/7	
d) ... hacer la fracción 3/4 cinco veces menor y siete veces mayor	
e) ... hallar otra fracción, tal que 3/5 se compone de ella del mismo modo que 5/7 se compone de la unidad	
f) ... hallar una fracción que multiplicada por 5/7 da 3/4	
g) ... multiplicar la fracción 3/4 por la fracción recíproca de 5/7	
h) ... multiplicar la fracción 3/4 por la inversa de la fracción 5/7	

En cada uno de los problemas, explica qué operación u operaciones hay que hacer y porqué crees que son esas operaciones:

1 **(Las dos cintas) La longitud de la cinta A es 3/5 m y la de la cinta B es 2/7 m. ¿Cuántas veces la cinta A es tan larga como la cinta B?**

2. **(Peso de la torta) 3/7 de torta pesan 2/9 de kilo. ¿Cuánto pesa la torta?**

3. **(La mesa de Ana) La superficie de la mesa de Ana es un rectángulo que mide 2/3 de m^2. Sabiendo que uno de sus lados mide 5/7 de metro, averigua cuánto mide el otro lado.**



4. **(Ecuación) Hallar el valor de x en la expresión: $5/6 \times X = 3/4$.**

5. **(Tarro de miel) En un tarro de miel caben 3/5 de kg. ¿Qué cantidad de miel hay en el tarro si está lleno en sus 3/8 partes?**

6. **(Edades) Los 15 $\frac{1}{2}$ años que tiene Julio son los 3/5 de la edad de Luís; ¿cuántos años tiene Luís?**

7 **(Porción de torta) Si cada torta pesa 3/7 de kilo, ¿qué porción de torta tendré con 2/9 de kilo?**

8 **(Trigo) Sabiendo que la cantidad de harina que se obtiene del trigo es los 17/20 de su peso, y la cantidad de pan obtenido de la harina es 6/5 del peso de ésta, ¿cuánto trigo se necesita para obtener 1530 Kg. de pan?**