UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

Máster en Investigación en Didácticas Específicas

Modelo plausible vs. modelo esperable.

Un estudio exploratorio de aspectos del proceso de modelización.

Memoria de Trabajo de Fin de Máster presentada por:

MARÍA ARÁNZAZU JUAN BLANCO

Tutorizada por:

Dr. Luís Puig Espinosa

Departamento de Didáctica de las Matemáticas

Valencia, 3 de diciembre de 2012

Ficha técnica:

Máster: Máster en Investigación en Didácticas Específicas por la Universitat de València

Especialidad: Didáctica de las Matemáticas

Autor: Apellidos: Juan Blanco

Nombre: María Aránzazu

Título de la memoria: Modelo plausible vs. modelo esperable. Un estudio exploratorio de aspectos del proceso de modelización.

Tutor 1: Apellidos: Puig Espinosa

Nombre: Luís

Departamento: Didáctica de las Matemáticas

Fecha de defensa:

Calificación:

Palabras clave: modelo, problema real, proceso de modelización, parámetro

Keywords: model, real problem, modelling process, parameter

Códigos Unesco: 1299 (Didáctica), 6104.01

Resumen: En este texto presentamos un estudio exploratorio de resolución de una tarea de modelización con funciones para la que la selección de una familia de funciones adecuada al fenómeno que se modela a través del estudio del comportamiento cualitativo de dicho fenómeno, debería ser la clave, y el parámetro y su significado en la forma canónica de la familia de funciones, la respuesta a la selección de un modelo adecuado. Éste es precisamente el punto de partida de nuestra investigación en la que pretendemos así contrastar la hipótesis de que los análisis cualitativos del fenómeno y del comportamiento de las familias de las funciones, se revelan como el mecanismo de guía y control del conjunto del proceso de modelización.

Abstract: In this work we present an exploratory study of the solving process of a modelling task. In this task the selection of a family of functions suitable to the phenomenon that is modelled by studying the qualitative behaviour of this phenomenon should be the key of the solving process. Besides, the parameter and its meaning in the canonical form of the family of functions, should be the response to the selection of an appropriate model. This is precisely the starting point of our investigation where we intend to test the hypothesis that the qualitative analysis of the phenomenon and the behaviour of families of functions, are revealed as the guiding and control mechanism of the entire modeling process.

Índice

1. Introducción

Arranca este trabajo con dos propósitos claros, uno de carácter investigador; el otro con fines de aprendizaje. Y esta memoria pretende dar cuenta de ambos.

La tarea que sirve de base para la investigación exploratoria de nuestro trabajo, viene de un estudio previo realizado por uno de los miembros del proyecto de investigación coordinado rubricado por el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valencia y el Departamento de Matemática Educativa del Centro de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional en México D.F. Este estudio forma parte de una tesis doctoral en curso, cuyo fin último es el estudio del aprendizaje del concepto y uso del parámetro (Marmolejo 2012). La tarea en cuestión (Actividad del Montacargas), tiene como objetivo *que los alumnos evalúen y mejoren la funcionalidad de un modelo dado que describe el movimiento de un montacargas.* Tarea para la que *se necesitan dos cosas, decidir qué modelo usar para que cumpla ciertos requerimientos y encontrar los parámetros adecuados*.

El hecho de que se haga en un contexto de modelización con funciones, aporta además elementos de análisis y estudio cuyo enfoque pueda centrarse en la resolución de tareas de modelización, o de problemas aplicados, para los que la selección de familias de funciones adecuadas a fenómenos que se modelan, a través del estudio del comportamiento cualitativo de dicho fenómeno, sea la clave, y el parámetro y su significado en las formas canónicas de las familias de funciones, la respuesta a la selección de un modelo adecuado.

Éste es precisamente el punto de partida de nuestra investigación, en la que mediante un estudio exploratorio en un contexto diferente al que se realizó la tarea por primera vez, pretendemos contrastar la hipótesis de que, tal y como se afirma en Puig y Monzó (2012), *los análisis cualitativos del fenómeno y del comportamiento de las familias de las funciones, se revelan como el mecanismo de guía y control del conjunto del proceso de modelización*, fijando así nuestro objetivo de investigación.

Por otra parte, dado que este trabajo tiene además un componente de aprendizaje para el autor de la misma, el contenido de la memoria pretende además ser reflejo de este hecho, no sólo dando razones de los resultados de la investigación, sino mostrando en ella el trabajo de reflexión que subyace a la misma. Por esta razón, se incluyen todos y cada uno de los elementos fruto de esa reflexión en forma de análisis de la tarea, de la resolución de la misma desde dos enfoques distintos, esto es, desde la guía de la tarea y desde el fenómeno que se modela sin patrones de guía que lo encorseten, y en la reconstrucción racional exhaustiva de los protocolos escritos.

Partiendo pues de estas premisas, la memoria se articula en capítulos cuyo contenido pasamos a detallar.

En el Capítulo 2 se recoge el marco teórico de la investigación, en el que hacemos referencia al contexto desde el que observamos, en una descripción más o menos concisa. Recorremos los principios de la Educación Matemática Realista, que se distingue de otros currículos por el énfasis en los procesos de matematización horizontal y vertical, y por el uso de modelos como puentes para sortear la distancia entre la matemática contextualizada e informal, y la formal. Continuamos con las directrices de la modelización matemática entendida como proceso, y con una revisión somera de la heurística en resolución de problemas de Polya y Schoenfeld. Finaliza el capítulo con el recordatorio de los significados en términos de transformaciones geométricas de las gráficas de las funciones a partir de una forma canónica para la familia de funciones.

El Capítulo 3 contiene el objetivo de investigación, los aspectos metodológicos y el contexto experimental: se describe el escenario, los autores, los materiales y la tarea. Esta última desde los antecedentes en un experimento previo; desde lo esperable en la actuación de los participantes; y desde una posición sin condicionantes (el fenómeno como único guía). Se explicita también la naturaleza de los datos recogidos para el análisis.

El capítulo 4 comprende el análisis de los protocolos escritos en términos de una reconstrucción racional exhaustiva de su resolución, y otro análisis de carácter más microscópico con el que se da evidencia de conductas y actuaciones de los participantes, que ilustran la importancia del análisis cualitativo de los fenómenos y del conocimiento de las propiedades cualitativas de las familias de funciones para la modelización del mismo (objetivo principal de nuestra investigación), amén de otro tipo de elementos que caracterizan su comportamiento en el contexto del experimento (trabajo cooperativo, software gráfico simbólico, …)

En el Capítulo 5 se recogen las conclusiones y algunas miradas al futuro.

Señalar, por último que en Anexo se adjuntan: Tarea, Acordeón del experimento, Protocolos escritos, Registros de uso del software y los manuscritos escaneados de los participantes.

2. El marco teórico

Diferentes son las maneras de abordar la presentación de los fundamentos teóricos que el autor de esta memoria conoce y que están relacionados, no sólo con las características de la tarea que se plantea a los participantes, sino con algunos de los análisis particulares que de las actuaciones y conductas de éstos en su resolución, se desarrollan. Una manera de hacerlo, ni mejor ni peor que otras, sencillamente una manera, pasa por personalizar en la figura de Freudenthal una concepción de la naturaleza de las matemáticas y de su enseñanza/aprendizaje, luego en consecuencia, de los currículos que bajo esta concepción se generan, de manera que se contextualice lo que se entiende por una *educación matemática realística* (EMR), en la que se enfatiza la *matematización*, tanto en su dirección horizontal como vertical, y en la que tienen cabida las tareas de *modelización,* proceso cuyas competencias podrían incluir la de la *resolución de problemas.*

2.1. La Educación Matemática Realista.

Entendida como una teoría específica de instrucción para la educación matemática centrada en contextos (Treffers, 1987; De Lange, 1987; Gravemeijer, 1994, Van den Heuvel-Panhuizen, 2003), la EMR no pretende ser una teoría general del aprendizaje (Bressan et al., 2004; Alsina, 2009), sino que es más bien una teoría global, una corriente didáctica, una filosofía de la educación, que surgió como respuesta, allá por los años 70, a la necesidad holandesa de reformar la enseñanza de las matemáticas y que tuvo en la figura de Hans Freudenthal su máximo exponente. Nombres como los de Treffers, Goffre, o De Lange, fueron también de gran relevancia en sus inicios. Tal y como argumenta Van den Heuvel-Panhuizen (2002), en sus orígenes, más que en una teoría explícita de educación matemática, la EMR consistía en una propuesta de ideas básicas centradas en el cómo y en el qué de la enseñanza matemática; la acumulación y revisión repetida de estas ideas dan lugar a lo que hoy se conoce como Educación Matemática Realista. Siguiendo a Bressan, Zolkower y Gallego (Bressan et al., 2004. p.3), *la EMR se concretiza en un conjunto de teorías locales de enseñanza de tópicos de la matemática y que se basa en las siguientes ideas centrales:*

- Pensar la matemática como una actividad humana (matematización) y que, siendo así, debe existir una matemática para todos.

- Aceptar que el desarrollo de la comprensión matemática pasa por distintos niveles donde los contextos y los modelos poseen un papel relevante y que ese desarrollo se lleva a cabo por el proceso didáctico denominado reinvención guiada, en un ambiente de heterogeneidad cognitiva.

- Que desde el punto de vista curricular, la reinvención guiada de la matemática en tanto actividad de matematización, requiere de la fenomenología didáctica como metodología de investigación, esto es, la búsqueda de contextos y situaciones que generen la necesidad de ser organizados matemáticamente.

Estas ideas se presentan habitualmente bajo el nombre de Principios de la Educación Matemática Realista, que de forma sucinta se pueden concretar del siguiente modo:

Principio de actividad. Uno de los conceptos matemáticos básicos de la EMR es la idea de Freudenthal (1971) de las matemáticas como una actividad humana de organización y no como un sistema preconstruido de saberes.

La finalidad de las matemáticas es matematizar (organizar) el mundo que nos rodea, incluyendo la propia matemática, de manera que la matematización es una actividad de búsqueda y resolución de problemas, y en términos más generales, la actividad de organizar la disciplina a partir de la realidad o de la matemática misma, a lo que llamó matematización (Alsina, 2009; Van den Heuvel-Panhuizen, 2003). Como decía Freudenthal, '*No hay matemáticas sin matematización'* (Freudenthal, 1973, p. 134).

Se aprende matemáticas haciendo matemáticas, de modo que hacer matemática es más importante que aprenderla como producto terminado (Freudenthal, 1991). De esto modo, los alumnos pasan a ser tratados como participantes activos en el proceso educativo, donde desarrollan toda clase de herramientas y discernimientos matemáticos por si mismos (Van den Heuvel-Panhuizen, 1998). Lo importante es aprender a abordar matemática y críticamente los problemas que se presentan en situaciones cotidianas (Freudenthal, 1982). Se trata de posibilitar el acceso a estos conocimientos, destrezas y disposiciones mediante situaciones problemáticas que generen la necesidad de utilizar herramientas matemáticas para su organización y solución (Bressan et al., 2004).

Principio de realidad. La matemática surge como *matematización* (organización) de la realidad, luego el aprendizaje matemático debe originarse también en esa realidad. Resulta así fundamental el uso de contextos y situaciones realistas, en el sentido de realizables o imaginables, no sólo como dominio de aplicación, sino también y sobre todo, como punto de partida para la matematización (Van den Heuvel-Panhuizen, 1998). En la EMR, los estudiantes deben aprender matemáticas desarrollando y aplicando conceptos y herramientas matemáticas en situaciones de la vida diaria que tengan sentido para ellos (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003). Un contexto real se refiere tanto a situaciones problemáticas de la vida cotidiana como a situaciones problemáticas que son reales en la mente de los alumnos (Alsina, 2009).

En oposición al abordaje de la adquisición de conceptos matemáticos que implica la inclusión de los mismos como el cuerpo del conocimiento en los materiales, el Análisis Fenomenológico de Freudenthal (1983) tiene como objetivo servir de base para la organización de la enseñanza de las matemáticas. Siguiendo a Puig (1997, pp.62, 66), *el análisis fenomenológico de un concepto o de una estructura matemática consiste en describir cuáles son los fenómenos para los que es el medio de organización y qué relación tiene el concepto o la estructura con esos fenómenos, entendiendo como fenómeno lo que es objeto de nuestra experiencia y teniendo presente que los medios de organización de los fenómenos, aquello con lo que pretendemos dar cuenta de nuestra experiencia, es tomado a su vez como objeto de experiencia. Dado que el proceso de creación de objetos matemáticos como medios de organización viene acompañado de un proceso por el que los medios de organización se convierten en objetos que se sitúan en un campo de fenómenos, los objetos matemáticos se incorporan al mundo de nuestra experiencia, en el que entran como fenómenos en una nueva relación fenómenos/medios de organización en la que se crean nuevos conceptos matemáticos, proceso que se reitera una y otra vez.*

Principio de niveles. Tal y como ya hemos comentado anteriormente, la matematización se convierte en pieza clave con la interpretación de las matemáticas basada en la actividad. Treffers (1987) formuló la idea de dos formas de matematización en un contexto educacional, distinguiendo entre matematización horizontal y matematización vertical. En términos generales, en el caso de la matematización horizontal se presentan herramientas matemáticas y se utilizan para resolver un problema de la vida diaria; la matematización vertical, por el contrario, representa todo tipo de reorganizaciones y operaciones hechas por los estudiantes dentro del sistema matemático en sí (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003).

Los alumnos deben comenzar por matematizar (actividad de organizar que se emplea para describir regularidades, relaciones y estructuras desconocidas tomando como base los conocimientos y destrezas adquiridos (Treffers y Goffree, 1985; De Lange, 1987)) un contenido o tema de la realidad para luego cambiar a analizar su propia actividad matemática (Bressan et al., 2004).

Para Treffers (1987), identificar o describir la matemática específica que es relevante dentro de un contexto general, esquematizar, formular y visualizar un problema de diversas maneras, descubrir relaciones y regularidades, reconocer un aspecto isomorfo en diversos problemas son ejemplos de actividades de matematización horizontal (se convierte un problema contextual en un problema matemático); mientras representar una relación como fórmula, probar regularidades, mejorar, ajustar, combinar e integrar modelos, formular un modelo matemático y generalizar son ejemplos de las actividades de matematización vertical (se reorganiza dentro del mismo sistema matemático).

Si bien en sus primeros escritos Freudenthal se refirió, sin lugar a dudas, a dos clases de matematización, no es hasta 1991 en que se hace eco de las formas de matematización definidas por Treffers, para expresar sus significados respectivos en los siguientes términos, si bien como él mismo argumenta, las diferencias entre estos dos mundos están lejos de ser claramente definidas: matematizar horizontalmente significa ir del mundo de la vida al mundo de los símbolos; y matematizar verticalmente significa moverse dentro del mundo de los símbolos.

Jan de Lange (1987) en sus contribuciones, complementa la aportación de Freudenthal y Treffers y apunta dos motivos importantes en la matematización a nivel conceptual: promover las matemáticas y desarrollar el arte de realizar modelos. Añade también el concepto de *matematización conceptual* cono aquélla que se dedica a desarrollar conceptos matemáticos.

Relacionado estrechamente con la matematización, se formula el principio de niveles de la EMR, que en términos generales, afirma que los estudiantes pasan por diferentes niveles de comprensión en que los que puede tener lugar la matematización, ligados al uso de estrategias, modelos y lenguajes de distinta categoría cognitiva, que no constituyen una jerarquía estrictamente ordenada y cuya clasificación se debe a Gravemeijer: capacidad para inventar soluciones informales relacionadas con un contexto (nivel situacional en el que el conocimiento de la situación y las estrategias son utilizadas en el contexto de la situación misma), creación de diversos niveles de atajos y esquematizaciones (nivel referencial en el que aparecen los modelos, descripciones, conceptos y procedimientos que esquematizan el problema, pero siempre referidos a la situación particular), desarrollo mediante la exploración, reflexión y generalización de las esquematizaciones, superando la referencia al contexto (nivel general), adquisición de una comprensión de los principios subyacentes y el discernimiento de relaciones más amplias (nivel formal en el que se trabaja con los procedimientos y notaciones convencionales) (Gravemeijer, 1994; Van de Heuvel-Panhuizen, 1998; Gravemeijer, 2002; Bressan et al., 2004). Es fundamental para esta teoría de niveles de aprendizaje el hecho de que la actividad de matematizar en un nivel inferior puede ser objeto de indagación en un nivel más alto. Esto significa que las actividades organizadoras que se llevaron a cabo inicialmente de modo informal, más tarde, como resultado de la reflexión, se tornan más formales (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003).

Esta teoría de niveles de aprendizaje se refleja también en la *matematización progresiva* que se considera la característica más general de la EMR, donde los *modelos* –interpretados en términos generales– se consideran vehículos para promover y apoyar este progreso (Treffers y Goffree, 1985; Treffers, 1987; Gravemeijer, 1994).

Dentro de la EMR, los modelos se ven como representaciones de situaciones problema que reflejan necesariamente aspectos fundamentales de conceptos y estructuras matemáticas relevantes para la situación problema, pero que pueden tener diversas manifestaciones. Materiales, situaciones paradigmáticas, esquemas, diagramas e incluso símbolos llegan a servir de modelos (Treffers y Goffree, 1985; Treffers 1987; Gravemeijer 1994). Si han de ser idóneos para brindar el apoyo deseado a los procesos de aprendizaje, los modelos tienen que reunir al menos dos características importantes. Por una parte, deben estar arraigados en contextos realistas imaginables y, por la otra, deben ser suficientemente flexibles para aplicarlos también en un nivel más avanzado, o más general. Esto implica que un modelo debe apoyar la progresión en la matematización vertical sin obstruir el camino de regreso a las fuentes que dan origen a una estrategia. Otro requisito para que los modelos sean viables es que los estudiantes puedan reinventarlos por sí solos. Para que esto se cumpla, los modelos deben comportarse de forma natural, evidente por sí misma. Deben ajustarse a las estrategias informales de los estudiantes y ser fácilmente adaptables a situaciones nuevas (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003).

Los modelos contribuyen a elevar los niveles, en tanto en cuanto pueden desempeñar la función de puente entre el nivel informal y el formal, permitiendo por su flexibilidad avanzar en los distintos niveles, cambiar en el tiempo e integrar contenidos. Los modelos que aparecen en el nivel situacional (*modelos de* situaciones particulares) se van generalizando a otras situaciones y con otros lenguajes tornándose entidades en sí mismos como herramientas (*modelos para*) para resolver situaciones variadas, posibilitando un razonamiento matemático más formal (Streefland, 1985). Esto significa que, al comienzo de un proceso de aprendizaje en particular, se constituye un modelo en relación muy estrecha con la situación problema en cuestión, y que más adelante el modelo, específico respecto del contexto, se generaliza a otras situaciones y llega a ser entonces un modelo factible para organizar situaciones problema afines y nuevas, y para razonar matemáticamente. En esa segunda etapa, las estrategias que se aplican para resolver un problema ya no se relacionan con esa situación específica, sino que reflejan un punto de vista más general implica tanto discernimiento de la aplicabilidad más amplia del modelo construido, como la reflexión sobre lo que se hizo antes (Streefland, 1985; Van den Heuvel-Panhuizen, 2003).

Principio de reinvención. Se entiende el proceso de aprendizaje como aquél, por medio del cual el conocimiento matemático formal en sí mismo puede ser reconstruido (Van Den Heuvel-Panhuizen, 2008; Alsina 2009). La educación matemática debe dar a los alumnos la oportunidad guiada por el maestro de reinventar la matemática (no crean, ni descubren, sino reinventan modelos, conceptos, operaciones y estrategias matemáticas con un proceso similar al que usan los matemáticos al inventarlas) (Bressan et al., 2004).

Principio de interacción. En la EMR el aprendizaje de la matemática está considerado como una actividad social, donde los estudiantes dan a conocer sus estrategias, sus interpretaciones de la situación problema, las clases de procedimientos y justificaciones de solución y la adecuación y eficiencia de los mismos. Al escuchar lo que otros averiguan y comentar estos hallazgos, los estudiantes nutren sus ideas y mejoran sus estrategias. La interacción lleva a la reflexión de los alumnos, favoreciendo así una comprensión más profunda (Bressan et al, 2004; Van den Heuvel-Panhuizen, 2008).

Principio de interconexión (estructuración). La resolución de situaciones problemáticas realistas a menudo exige establecer conexión y la aplicación de un amplio rango de comprensiones y herramientas matemáticas. La EMR no hace profundas distinciones entre los ejes curriculares, lo cual da una mayor coherencia a la enseñanza y hace posibles distintos modos de matematizar las situaciones, bajo distintos modelos y lenguajes, logrando alta coherencia a través del currículo (Bressan et al, 2004).

Recogidos pues, los principios de la EMR, cerramos este apartado resumiendo la importancia que la modelización matemática adquiere en este contexto:

La modelización matemática en la Educación Matemática Realista. Centrándonos en el principio de niveles y en el de interacción, podemos concluir que en la EMR se confiere una alta importancia a la modelización ya que, en términos más precisos, no son los modelos en sí los que hacen posible el crecimiento de la comprensión matemática, sino las actividades de modelización de los estudiantes. De esta forma, las actividades iniciales de modelización, ejecutadas sobre problemas en contexto vinculados con la realidad de los estudiantes, permiten que éstos lleguen a realidades nuevas que, a su vez, vuelven a ser objeto de nuevas actividades de modelización. Es decir, la modelización se convierte de alguna forma en una espiral de comprensión de conceptos matemáticos ya que estimula la reflexión y la interacción en el aula al aparecer nuevas manifestaciones del modelo inicial que dan acceso a nuevas perspectivas, a nuevas posibilidades de resolución de problemas y a niveles más altos de comprensión.

2.2. La modelización matemática.

Puede entenderse la modelización matemática como una práctica de enseñanza (para cualquier nivel de aprendizaje) en la que la relación entre mundo real y matemática es el centro de la enseñanza/aprendizaje. Las actividades de modelización pueden motivar así, el proceso de aprendizaje, amén de ayudar al aprendiz a establecer raíces cognitivas sobre las cuáles construir importantes conceptos matemáticos (Blomhøj, 2004).

Durante los últimos 20 años, se ha desarrollado una comprensión teórica coherente del proceso de modelización y del proceso de aprendizaje relacionado con él, a través de una estrecha interrelación entre el desarrollo curricular, las prácticas de enseñanza y reflexiones teóricas, de manera que se dispone ya de una teoría, que puede ser usada para colocar a la modelización como un elemento importante de la enseñanza general de la matemática, como así también para analizar, prever y comprender mejor las dificultades de aprendizaje de los alumnos relativas a la modelización (Blum et al., 2003).

Muchas son las variantes para las definiciones de modelo matemático, proceso de modelización, modelización y competencia(s) en modelización. Una de las maneras de entender la teoría es la que presentamos en este trabajo, si bien con la prudencia de indicar que su elección sencillamente se basa en que la tarea que se plantea en el experimento de investigación, tendría cabida en un modelo de enseñanza que se ciñera a sus patrones, aunque un análisis más profundo de la misma sería necesario para intereses de investigación en que la forma en que se entiende el proceso de modelización, fuera herramienta indispensable de análisis en toda su exactitud. La teoría que exponemos se debe a Blomhøj (2004) y se enuncia en los siguientes términos:

Se entiende por *modelo matemático* una relación que se establece entre ciertos objetos matemáticos y sus conexiones, con una situación o fenómeno de naturaleza no matemática. Definición que implica en términos didácticos que, cuando la matemática es aplicada a una situación extra-matemática, algún tipo de modelo matemático está involucrado explícita o implícitamente en ella, por una parte; y la necesidad de que el alumno perciba la situación o fenómeno que se modela y la matemática que se requiere, como dos objetos interrelacionados para propiciar su experimentación con el modelo matemático y su reflexión sobre las relaciones existentes en él, por otro.

Detrás de todo modelo matemático, existe un *proceso de modelización*, en tanto en cuanto, de una manera explícita o implícita, se ha recorrido el proceso de establecer una relación entre alguna idea matemática y una situación real. Analíticamente es posible describir un proceso de modelización matemática consistente en los siguientes seis sub-procesos (Blomhøj y Højgaard Jensen, 2003):

(a) Formulación del problema: formulación de una tarea (más o menos explícita) que guíe la identificación de las características de la realidad percibida que será modelada.

(b) Sistematización: selección de los objetos relevantes, relaciones, etc. del dominio de investigación resultante e idealización de las mismas para hacer posible una representación matemática.

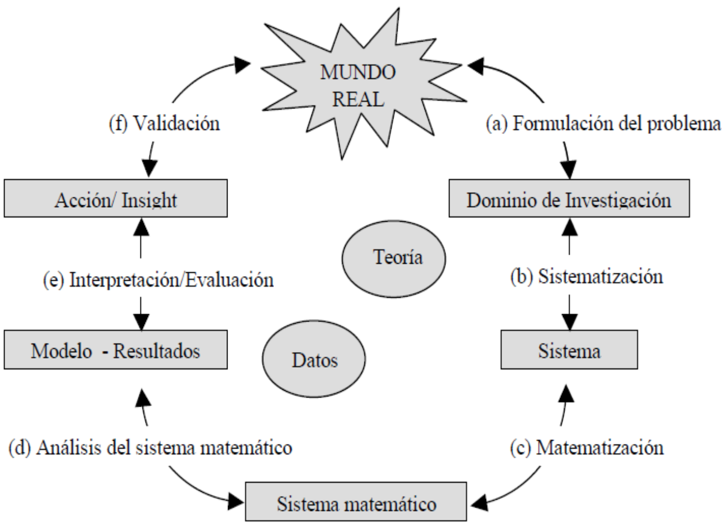
(c) Traducción de esos objetos y relaciones al lenguaje matemático.

(d) Uso de métodos matemáticos para llegar a resultados matemáticos y conclusiones.

(e) Interpretación de los resultados y conclusiones considerando el dominio de investigación inicial.

(f) Evaluación de la validez del modelo por comparación con datos (observados o predichos) y/o con el conocimiento teórico o por experiencia personal o compartida.

El proceso de modelización debe entenderse siempre como un proceso cíclico donde las reflexiones sobre el modelo y su intención de uso conducen a una redefinición del modelo, de manera que cada uno de los seis subprocesos puede de hecho introducir cambios en el proceso previo. El diagrama circular de la siguiente figura, se hace eco de esta consideración dinámica del proceso de modelización:



Amén de los subprocesos señalados antes y en forma de dos elipses sitas en el centro del diagrama, se recogen tanto el conocimiento teórico como los datos empíricos concernientes al dominio de investigación que son base para todos los subprocesos. Por *teoría*, se entiende así el conocimiento del que se dispone sobre el dominio de investigación que se usa en el proceso de modelización, pudiendo ser su origen de status epistemológicos bien diferentes aún dentro del propio proceso de modelización: desde teorías bien fundadas con matices incorporados (tal y como sucede frecuentemente en el campo de la física) hasta experiencias personales y compartidas, o suposiciones apropiadas dispuestas especialmente para el fenómeno o situación a modelar. Es clara la importancia que el carácter de este conocimiento base tiene para determinar cómo pueden ser validados tanto el modelo como sus posibles aplicaciones. En ocasiones, los *datos* existen previos al proceso de modelización y en consecuencia pueden ser usados tanto en los sub-procesos de sistematización y matematización, como eventualmente también en la validación del modelo. Sin embargo, es más frecuente que los datos relevantes tengan que ser recogidos, formando así parte del proceso de modelización, de lo que la producción de datos presupone el modelo. En estas circunstancias, los datos pueden ser usados para estimar los parámetros del modelo pero no como base para validarlo.

Por *modelización matemática* se entiende el proceso completo descrito en el diagrama asociado al proceso de modelización, y por *competencia en modelización matemática* la capacidad de llevar a cabo en forma autónoma y consciente todos los aspectos de un proceso de modelización en un contexto dado (Blomhøj y Højgaard Jensen, 2003).

Siguiendo la definición de competencia en modelización matemática, éstas incluyen las competencias en resolución de problemas. La matematización y el análisis del modelo (correspondientes a los subprocesos (c) y (d)) se constituyen en un problema matemático para el que modela en la mayoría de las ocasiones, razón por la cual, el proceso de modelización incluye resolución de problemas matemáticos, aunque cabe resaltar que debe ser el problema de la vida real el que guíe la actividad de modelización y que en consecuencia la resolución del problema debe estar subordinada a él.

Obviamente, esta última reflexión de Blomhøj, sería especialmente discutible, habida cuenta de la existencia de otros puntos de vista (que no vamos a exponer aquí) radicalmente opuestos. De hecho, la relación entre el proceso de modelización y el proceso de resolución de problemas puede verse de varias maneras, dependiendo, entre otras cosas de a qué se llame 'problema'. Hay definiciones de 'problema' (y de 'proceso de resolución') que hacen que los procesos de modelización no sean procesos de resolución de problemas, y definiciones de 'problema' (y de 'proceso de resolución') que, por el contrario, conducen a que los procesos de modelización sean un caso particular de proceso de resolución de problemas.

2.3. La resolución de problemas.

Dos son los grandes nombres que en la heurística moderna de la resolución de problemas, han sido reconocidos y largamente estudiados, a saber Polya y Schoenfeld. El primero con sus obras publicadas hasta los años sesenta y el segundo, por las editadas allá por los años 80, principio de los 90. Uno de los estudiosos de ambos autores es Puig, que en su tratado sobre elementos de Resolución de Problemas (Puig, 1996), hace una interpretación rigurosa de las teorías y el desarrollo de las mismas, que servirá de guía para esta introducción al mundo de la resolución de problemas, de modo que haremos referencia a éstos, bajo el prisma y con la terminología que este autor acuña en el marco de estas teorías.

La primera de las reflexiones de Puig, gira en torno al hecho de que los modelos y descripciones que ambos proponen son en esencia distintos, habida cuenta de que la procedencia de las metodologías de análisis es distinta.

Así las cosas, *Polya examina mediante la introspección el comportamiento de un resolutor de problemas que podríamos llamar 'ideal' y elabora en consecuencia un modelo del proceso de resolución dividido en fases que ese resolutor ideal recorre linealmente, pasando de una a otra sólo cuando la anterior ha concluido: es su harto conocido modelo en cuatro fases (Polya, 1945) comprensión, elaboración del plan, ejecución del plan y mirada retrospectiva* (Puig, 1996, p.35). Esto es, las fases anteriores caracterizan claramente al resolutor ideal, competente.

Los trabajos de Schoenfeld son por otro lado, la búsqueda inagotable de explicaciones para la conducta de los resolutores reales de problemas, de manera que el análisis reiterado de los comportamientos que éstos desarrollan en el proceso de la resolución de problemas, le permite una categorización de las conductas y una descripción del proceso como conjunto de episodios o tramos de conductas que se englobarían bajo la misma conducta de actuación, elaborando lo que Puig califica como un modelo de actuación, y no de competencia como sería el caso de Polya. Schoenfeld, pues, no centra su estudio en la actuación del resolutor ideal como hace Polya, sino que centra su análisis en el estudio de las razones que abocan a la persistencia en el fracaso de los resolutores.

El análisis reiterado al que aludíamos en el párrafo anterior, se implementa de modo que cada uno de los componentes del conocimiento y de las conductas que introduce Schoenfeld pretende explicar las carencias en la resolución de problemas de los resolutores reales. De este modo, propone un marco con cuatro componentes: heurísticas, gestión, recursos y sistemas de creencias (Schoenfeld, 1985). *Cuando, pese a conocer las herramientas heurísticas, no se ha sabido cuál había que usar, cuándo o cómo había que hacerlo, o no se ha evaluado los efectos de su uso para el desarrollo de la resolución, se habla de que es preciso un buen control de lo que se hace, un gestor del proceso. Cuando, pese a conocer las herramientas heurísticas y gestionar bien lo que se ha estado haciendo, ha faltado un conocimiento de algún hecho, algoritmo o esquema propio del dominio del problema en cuestión, o no se han usado las destrezas que hubieran allanado el camino, se desciende a considerar que ha habido una carencia de recursos. Y cuando, pese a disponer de todo lo anterior, la concepción de la naturaleza de las matemáticas o de la tarea de resolver problemas ha hecho que no les cupiera en la cabeza que eso que sabían podía usarse para resolver el problema, lo único que permite ya explicar el fracaso es el sistema de creencias de los* resolutotes (Puig, 1996, p.38)

Tal y como ya señala Puig, años después de esta clasificación en componentes, el propio Schoenfeld, varía la denominación de los mismos y su referencia a ellos, de manera que lo que antes eran componentes, pasan a ser aspectos cognitivos y la secuencia —heurísticas, gestión, recursos y sistemas de creencias— pasa a ser —conocimiento de base, estrategias de resolución de problemas, gestión y control, creencias y afectos—, completada con una nueva que bajo el nombre de prácticas, pretende servir como fuente de explicación de las creencias.

2.4. Formas canónicas, familias de funciones y parámetros.

Finalizaremos el recorrido de nuestro marco teórico, recogiendo los efectos de los cambios de parámetros de las formas canónicas en las gráficas de las funciones. Su inclusión en este capítulo se explica por dos razones, hacernos eco de la necesidad de conocimiento de los modelos funcionales en el proceso de modelización, y por unificar en consecuencia la terminología con la que vamos a interpretar estos cambios, expresándolos en términos de transformaciones geométricas.

En términos generales, si se pasa de una función $y=f(x)$ a otra $y=Af(Bx+C)+D$:

- A dilata la gráfica en la dirección del eje OY, respecto de la recta $y=D$
- B dilata la gráfica en la dirección del eje OX;
- C traslada la gráfica en la dirección del eje OX hacia la izquierda si $C>0$, o hacia la derecha si $C<0$;
- D traslada la gráfica en la dirección del eje OY hacia arriba si $D>0$, o hacia abajo si $D<0$.

3. El experimento

3.1. Actividad del Montacargas. La tarea.

LA TAREA. LOS ANTECEDENTES Y NUESTRO OBJETIVO.

Tal y como ya se comentó en la Introducción, la tarea que sirve de base para la investigación de nuestro trabajo, tiene su origen en un estudio previo realizado por Marmolejo (2012), que forma parte de una tesis doctoral en curso, cuyo fin último es el estudio del aprendizaje del concepto y uso del parámetro: *Se busca promover la construcción de algunos conceptos, en particular el de parámetro, mediante problemas cuya solución no sea inmediata y de interés para los alumnos; que el aprendizaje surja como un proceso de matematización* (en un contexto de modelado), *de manera que sean los alumnos los que vayan desarrollando herramientas matemáticas y que en el proceso se apropien del conocimiento.* Con este fin, se diseñan o seleccionan actividades a estudio que por una parte, *promuevan la experimentación, en la que, a través de la elaboración de estrategias y técnicas de resolución y el análisis de sus propios resultados se redunde en la retroalimentación necesaria para fortalecer el proceso de enseñanza-aprendizaje mediante actividades interactivas* (como es el caso de las tareas de modelización); y que por otra parte, *permitan mostrar el papel que juegan los parámetros en situaciones reales que pueden describirse con un modelo matemático* funcional, esto es, *con una función, una ecuación o un sistema de ecuaciones.*

La tarea en cuestión, etiquetada como Actividad del Montacargas, tiene como objetivo en el estudio al que nos venimos refiriendo, *que los alumnos evalúen y mejoren la funcionalidad de un modelo dado que tiene dos parámetros* (las soluciones que ofrecen los alumnos se basan en dos parámetros) *y que describe el movimiento de un montacargas. Consiste pues en mejorar un modelo dado para que cumpla ciertos requerimientos y para resolver el problema planteado se necesitan dos cosas, decidir qué modelo usar y encontrar los parámetros adecuados*. En base a actividades como ésta, *enfocada hacia la manipulación que se requiere hacer de los parámetros para mejorar un modelo*, se busca dar respuesta a preguntas de investigación del tipo: *los estudiantes, al modelar situaciones donde aparecen parámetros, ¿los interpretan adecuadamente?* o *entender el papel del parámetro en una situación simple, ¿servirá para motivar la presentación de actividades más complejas?*

Haciéndonos eco de nuevo de la presentación de nuestro trabajo en la Introducción, el hecho de que la tarea se haga en un contexto de modelización con funciones, aporta elementos de análisis y estudio cuyo enfoque pueda tener más que ver con la resolución de una tarea de modelización, o desde otro ángulo, con la resolución de problemas aplicados, en los que la selección de familias de funciones adecuadas a fenómenos que se modelan a través del estudio del comportamiento cualitativo de dicho fenómeno, sea la clave y el parámetro y su significado en las formas canónicas de las familias de funciones, la respuesta a la selección de un modelo adecuado.

Así las cosas, en nuestra investigación implementamos la tarea en un contexto diferente al que se realizó por primera vez, con la hipótesis en mente de que *los análisis cualitativos del fenómeno y del comportamiento de las familias de las funciones, se revelan como el mecanismo de guía y control del conjunto del proceso de modelización* (Puig y Monzó, 2012). Hipótesis cuyo contraste se torna así en objetivo de nuestra investigación. Comentar que Marmolejo en su reporte de investigación predoctoral (2012) y en una comunicación presentada en el seno del PNA (Valencia, 2012) sobre sus resultados para la actividad del montacargas, alude ya al hecho de que es necesario insistir en el análisis cualitativo de la situación que se está modelando para un resultado óptimo en el proceso de modelización.

Volviendo a los antecedentes, la tarea se propuso en un primer momento a seis alumnos de edades comprendidas entre 16 y 19 años que cursaban el nivel superior de matemáticas en el Bachillerato Internacional. Etapa que consta de dos años lectivos durante los cuales los alumnos realizan actividades de investigación similares (en el contexto de la modelización y trabajo con parámetros) que se analizan y discuten en el aula. Esta actividad se les propone como trabajo final individual a evaluación para el que se les limita el tiempo a un máximo de 5 horas. Viene enunciada en los siguientes términos:

Actividad Montacargas.

En esta actividad, primero vas a explorar un posible modelo para un montacargas que se usa para transporte de equipo y ascenso de minerales. Vas a evaluar las fortalezas y debilidades del modelo y finalmente, vas a crear las especificaciones para desarrollar tu propio modelo.

Análisis del modelo dado.

La fórmula $y=2.5\ t^3 - 15\ t^2$ representa la posición y de un elevador medida en metros (y=0 representa el nivel del suelo) donde t representa el tiempo medido en minutos (t=0 es el tiempo de inicio). Sabemos que el viaje de ida y vuelta, sin tomar en cuenta el tiempo que está abajo, es aproximadamente de seis minutos y que la profundidad del pozo es aproximadamente de 100 metros.

Representa gráficamente el desplazamiento, la velocidad y la aceleración y usa estas funciones para:

a) Explicar el significado de los valores negativos, positivos y cero de la gráfica de la velocidad.

b) Explicar las relaciones entre velocidad y aceleración en los intervalos en los que el montacargas aumenta la velocidad, disminuye la velocidad o está en reposo.

c) Evaluar la utilidad e identificar los problemas del modelo dado.

Crea tu propio modelo.

1. Haz una lista de especificaciones para rediseñar el modelo del montacargas.
2. Crea tu propio modelo. Puedes usar una sola función o puedes definir una función a trozos.
3. Explica por qué tu modelo satisface las especificaciones del problema y mejora el modelo dado.

Aplica tu modelo.

Explica qué tipo de modificaciones se le pueden hacer a tu modelo para usarse en otras situaciones.

El análisis que Marmolejo hace del modelo original, tal y como reza en su manuscrito predoctoral, pasa por tratar la función de modelado y= 2.5 t^3-15 t^2 como *miembro de la familia de funciones* polinómicas *$f_a(t)=at^2(t-6)$, para las que se cumple $f_a(0)=0$, $f_a(6)=0$, $f_a'(0)=0$ y $f_a'(4)=0$, independientemente del valor del parámetro a,* y que además da por buenas para el futuro modelo. Recoge asimismo algunos defectos a los que espera los alumnos acaben dando solución con la generación de una nueva propuesta de modelo: *las funciones no son simétricas (de hecho el descenso es más lento que el ascenso); el montacargas no se detiene al regresar ya que la derivada en t=6 no es cero, y con el valor propuesto para a, a=2.5, no se alcanza la profundidad del pozo que es de 100 metros.* Espera pues de los alumnos, que sean capaces de ver, al menos, las bondades y defectos señalados, al tiempo que su propuesta consiga corregirlos. Cabe comentar también que en los trabajos de Marmolejo, no se hace referencia más que al modelo final y a su posible aplicación (o generalización) a situaciones similares y no a las respuestas a todos y cada uno de los apartados de la actividad.

Es claro que este primer análisis marca ya alguna de las especificaciones para la función de modelización que nosotros esperaríamos que tuvieran en cuenta también los participantes en nuestra experimentación en el desarrollo de su resolución. De una forma sucinta la propuesta de modelos que dieron 2 de los alumnos de Marmolejo a la tarea, fueron, subsanados tras el análisis los errores, y adaptados a los requerimientos esperados, de la forma:

1. Carmen: Se rediseña el modelo original $y=2.5t^3-15t^2$ mediante ensayo y error y con un software dinámico para ajustar la función $f(t)=at^3+bt^2$ de parámetros a y b de tal manera que el mínimo se acerque a -100 metros. Se da por válida la función $f_1(t)=2.3t^3-5.2t^2$ cuyo mínimo se alcanza a los 4.4 minutos con un valor de -98.35. Se refleja ahora la gráfica de $f_1(t)$ considerada entre t=0 y t=4, usando como eje de reflexión la recta t=4.4. Para ello, se propone un acercamiento discreto de manera que se tabula $f_1(t)$ para ciertos valores de t de modo que se conserve el mínimo, amén de asegurarse de que en t=0 y t=8.8, las velocidades y las posiciones son nulas. Para ello habrá que tomar no sólo valores entre t=0 y t=4.4, si no alguno anterior *que fuerce un máximo para la función ajustada en t=0 (luego en su simétrico t=8.8). Los datos utilizados para tabular son A(-0.5714,-3.5185), B(0,0), C(0.537,-2.5926), D(1,-12.9), E(2,-42.4), F(3,-74.7), G(-96), H(4.4,-98.35) y sus correspondientes simétricos. Con el programa Excel® se ajusta un polinomio $f_2(t)$ que cumplirá, así construido, las especificaciones señaladas por la autora. Claramente el modelo propuesto difícilmente podría adaptarse a otros pozos.*

2. *Sebastián: Se observa que el modelo original tiene una función de aceleración asociada de tipo afín, lo que se utiliza como punto de partida para la construcción del nuevo modelo, cuya aceleración se le exigirá sea de tipo $a_1(t)=m_1t+c_1$ en el intervalo [0,3]. De este modo, las funciones velocidad y posición en ese intervalo serán respectivamente, $v_1(t)=(m_1/2)t^2+c_1t$ y $s_1(t)= (m_1/6)t^3+c_1t^2$. Se impone la condición de que a mitad de descenso, el montacargas alcance su máxima velocidad, esto es $a_1(3/2)=0$; asimismo se exige que a los tres minutos, el montacargas alcance una profundidad de -80 metros, es decir, $s_1(3)=-80$. Con ambas condiciones, los valores de los parámetros m_1 y c_1 que se obtienen son $m_1=320/9$ y $c_1=-160/3$. De aquí, $s_1(t)=(160/27)t^3-(80/3)t^2$. Basta ahora reflejar verticalmente con respecto a la recta t=3 para obtener la función desplazamiento simétrica $s_2(t)=s_1(6-t)$ en el intervalo [3,6]. La función s(t) definida a trozos por $s_1(t)$ y $s_2(t)$ es ahora el nuevo modelo que a excepción de la condición de alcanzar 100 metros de profundidad responde a las especificaciones que con su análisis señaló la autora. Claramente el modelo puede ajustarse en cuanto a cambio en la profundidad del pozo o tiempo de descenso, sin más que modificar las ecuaciones $a_1(3/2)=0$, $s_1(3)=-80$, en función de las nuevas exigencias.*

LA TAREA. UN MODELO PLAUSIBLE.

A pesar de que los antecedentes, tanto en el análisis de la tarea que hace Marmolejo como en la 'resolución' de la misma por parte de sus alumnos, aportan información relevante para lo que cabría esperar en nuestra experimentación, abordamos el análisis de la misma como si de una tarea nueva se tratara, haciendo énfasis en el estudio del fenómeno y con la idea de dotarnos de elementos de juicio para el análisis de respuestas novedosas (distintas a las de Carmen y Sebastián que no tuvieron en cuenta (algunas) de las propiedades cualitativas del fenómeno que intentaban describir). Ponemos el énfasis así, no tanto en el uso de los parámetros y de las propiedades cualitativas de las familias de funciones (que también), sino en las propiedades del fenómeno que se pretende modelar. Más detalladamente, un estudio cualitativo del mismo, así como el modelo que de este estudio pudiera desprenderse, permitiría iniciar el análisis desde un enfoque más realista sobre lo que se podría esperar o no al resolver la tarea. Las similitudes y los elementos diferenciadores del modelo propuesto en la tarea frente al obtenido sin más guión que la situación real, la verosimilitud del mismo, el recorrido sobre las cuestiones que propone, la forma de enunciarlas, y los caminos más o menos trazados para su resolución, pueden ser la clave para alcanzar una propuesta más parecida al modelo original y no tanto al modelo sin condicionantes o desvelarse como adecuados para conducir al resolutor a una modelización más ajustada del fenómeno. Del mismo modo, un análisis de éste dota también de elementos de juicio para el análisis de los protocolos.

En aras de la completitud, y con esta idea en mente, iniciamos pues este apartado con un recordatorio sobre la cinemática de la partícula y el movimiento rectilíneo.

La cinemática de la partícula y el movimiento rectilíneo.

Para describir el movimiento de un cuerpo, necesitamos conocer su posición en cada instante. El *movimiento rectilíneo* es un caso especial en el que el cuerpo se mueve siguiendo una trayectoria recta para el que se requiere, en consecuencia, una única coordenada para ubicar al cuerpo respecto de un marco de referencia. El movimiento vertical de un ascensor se encuadra claramente en este caso.

Una descripción completa del movimiento en una dimensión consistirá entonces en dar una función y(t) que asigne, a cada valor del tiempo, la correspondiente posición del cuerpo. Toda la información relacionada con el movimiento del cuerpo estará pues contenida en dicha función. Sin embargo, aunque la posición en función del tiempo contiene toda la información relevante, no la contiene en la forma más útil. Ello se debe a que las leyes de la dinámica involucran los conceptos de aceleración y velocidad y no a la posición directamente. Recordemos estos conceptos:

Supongamos que un cuerpo se encuentra en la posición x_1 en un instante t_1 y en x_2 en el instante t_2. La variación de la partícula se denomina *desplazamiento* $\Delta x=x_2-x_1$. Se define la *velocidad media* v_m del cuerpo en el intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$ por

$$V_m=\Delta x/\Delta t =(x_2-x_1)/(t_2-t_1).$$

Obsérvese que la velocidad media se puede leer directamente de la gráfica del movimiento calculando la pendiente de la recta que une los dos puntos (t_1, x_1) y (t_2, x_2).

El tener una descripción del movimiento que incluya las posiciones para instantes intermedios de tiempo, permite el cálculo de velocidades medias correspondientes cada vez a intervalos más pequeños y con ello definir el concepto de *velocidad instantánea* asociada al tiempo t como el límite

$$v(t)=\lim_{\Delta t \to 0} \Delta x/\Delta t = dy/dt.$$

La velocidad instantánea v(t) es por consiguiente, la derivada de la función posición. Gráficamente, vendrá dada por la pendiente de la curva en el instante t.

Notar que el desplazamiento y la velocidad pueden ser positivos o negativos, un valor positivo indica un desplazamiento en el sentido del eje de coordenadas y uno negativo en el sentido opuesto.

Cuando la velocidad instantánea de un cuerpo está variando con el tiempo, se dice que el cuerpo se está acelerando. La *aceleración media* producida en el intervalo $\Delta t=t_2-t_1$ se define como el cociente

$$a_m=\Delta v/\Delta t,$$

donde Δv es la variación de la velocidad instantánea en dicho intervalo. La *aceleración instantánea*, es el límite de la aceleración media cuando el intervalo tiende a cero, esto es

$$a(t)= \lim_{\Delta t \to 0} \Delta v/\Delta t = dv/dt= d^2y/dt^2$$

(como la velocidad es a su vez la derivada de la posición respecto del tiempo, la aceleración resulta ser la derivada segunda de la posición respecto del tiempo).

Como ya habíamos señalado, una vez determinada la posición en función del tiempo, se posee toda la información relevante para la evaluación de cualquier otra magnitud cinemática. Sin embargo, y usualmente, el problema más interesante, es el problema inverso: dada la aceleración instantánea a(t), determinar la posición de la partícula y(t) en función del tiempo. Para calcular dicha posición, debemos invertir el proceso anterior pasando de la aceleración a la velocidad y de ésta a la posición.

Obviamente, dada a(t), la velocidad será una función tal que su derivada es igual a la aceleración; v(t) será por tanto una primitiva de a(t), es decir, v(t)=A(t)+C, donde dA(t)/dt=a(t), por lo que la función velocidad queda determinada salvo una constante. Basta conocer la velocidad v_0 en un instante t_0 para eliminar esta ambigüedad y conocer el valor de $C=-A(t_0)+v_0$, luego de la función

$$v(t)=v_0+A(t)-A(t_0).$$

Recordando ahora el Teorema Fundamental del Cálculo Integral, resulta

$$v=v_0+\int_{t_0}^{t} a(t)dt.$$

Análogamente, se calcularía la función posición partiendo del conocimiento de la función velocidad y del valor de la posición en un instante t_0. Gráficamente, dada la curva de velocidades, el desplazamiento producido en un intervalo $[t_0, t_1]$ es igual al área encerrada bajo dicha curva el intervalo. Análogamente, el área encerrada bajo la curva de aceleraciones a(t) es igual a la variación total de la velocidad a lo largo del intervalo de tiempo considerado.

Volviendo al movimiento rectilíneo, este puede ser a velocidad constante o acelerado:

- En el primer caso, el cuerpo se desplaza distancias Δy iguales en tiempos iguales Δt. la representación gráfica del movimiento es una recta de pendiente $\Delta y/\Delta t$.

- En el segundo caso, las distancias recorridas en distintos intervalos de tiempo dependen de cómo es la aceleración. Cuando la aceleración es constante, el movimiento se denomina uniformemente acelerado y el desplazamiento Δy se calcula con:

$$\Delta y=v_0 \Delta t + \tfrac{1}{2} a (\Delta t)^2,$$

donde v_0 es la velocidad inicial del cuerpo. La representación gráfica del movimiento es de tipo parabólico.

Las fuerzas de inercia. La segunda ley de Newton.

Las fuerzas de inercia son fuerzas que deben incluirse en la descripción de un sistema físico cuando la observación se realiza desde un sistema de referencia no inercial y, a pesar de ello, se insiste en usar las leyes de Newton. La introducción de fuerzas ficticias hace posible pues, la descripción de un sistema físico usando, por ejemplo, un sistema de referencia uniformemente acelerado (caso de un observador dentro de un ascensor) o un sistema de referencia fijo a un cuerpo que rota uniformemente, por ejemplo. Describimos esta situación desde un punto de vista vectorial.

Sea S (x,y) un sistema de referencia inercial y S’ (x’,y’) un sistema de referencia que acelera con aceleración constante $\mathbf{a_0}$ (vector) respecto a S. El vector que une los orígenes O y O’ de ambos sistemas de referencia es $\mathbf{R(t)}=\mathbf{R_0}+\mathbf{v_0}t+1/2\ \mathbf{a_0}t^2$.

Sean ahora $\mathbf{r(t)}$ y $\mathbf{r'(t)}$ los vectores de posición de una masa m en los sistemas de referencia S y S’, respectivamente. La relación entre $\mathbf{r}$ y $\mathbf{r'}$ es $\mathbf{r}=\mathbf{R}+\mathbf{r'}$.

Derivando dos veces con respecto al tiempo se obtiene $d^2\mathbf{r}/dt^2= d^2\mathbf{R}/dt^2+ d^2\mathbf{r'}/dt^2=a_0+ d^2\mathbf{r'}/dt^2$, o sea, $m\cdot d^2\mathbf{r'}/dt^2= m\cdot d^2\mathbf{r}/dt2-m\cdot\mathbf{a_0}$. (*)

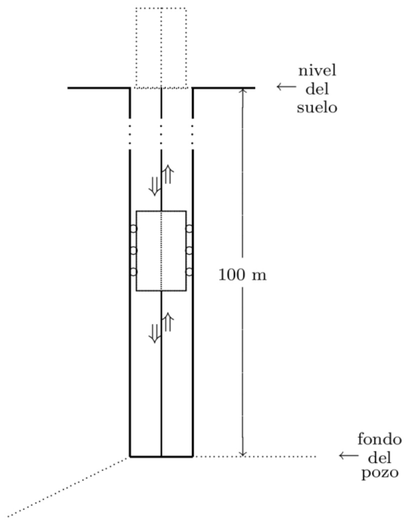
Sea $\mathbf{F}$ la fuerza que genera la aceleración de la masa m observada desde un sistema de referencia inercial $d^2\mathbf{r}/dt^2$. En otras palabras, $\mathbf{F}=m\cdot d^2\mathbf{r}/dt^2$. Si se insiste en usar la segunda ley de Newton, pero con las magnitudes observadas desde un sistema de referencia acelerado, se tiene $\mathbf{F'}=m\cdot d^2\mathbf{r'}/dt^2$, pero la fuerza $\mathbf{F'}$ ahora ya no es $\mathbf{F}$ sino que, de acuerdo con la ecuación (*), $\mathbf{F'}=\mathbf{F}-m\cdot\mathbf{a_0}$.

El término $-m\cdot\mathbf{a_0}=\mathbf{F_i}$ es la fuerza inercial que hay que agregar a la fuerza real $\mathbf{F'}$ para poder seguir usando la ley de Newton desde un sistema acelerado con aceleración $\mathbf{a_0}$.

Finalizado el recorrido por los conocimientos necesarios para la comprensión del comportamiento cualitativo del fenómeno que nos interesa, pasamos ahora a la construcción del modelo.

El modelo.

Un ascensor es un artefacto que como objeto tecnológico, tiene una finalidad principal establecida: transportar personas y cargas verticalmente (ascenso y descenso). Aunque nuestro conocimiento sobre la tecnología del ascensor puede no ser muy extenso, desde el punto de vista de usuario (pasajero) con conocimientos mínimos de cinemática y dinámica, es fácil establecer un modelo plausible que describa su movimiento. Aunque en el enunciado de la tarea nos refiramos a un montacargas proyectado para el uso de transporte de mercancías y minerales, el modelo que proponemos no hace distinción en su uso, y de hecho se construye para que sea válido para el transporte de pasajeros. Del mismo modo, presentamos un modelo general que podría adaptarse a especificaciones previas tales como la distancia recorrida en el ascenso o en el descenso (100 metros de profundidad para la tarea que nos interesa), o a los tiempos que para un trayecto completo se indiquen (6 minutos aproximadamente en nuestra tarea). Comentar sin embargo que en este último punto, tendríamos que dar por buenos valores para la velocidad en el tramo intermedio no estándares, pero no por ello, imposibles, razón por la cual no incluiremos este punto.



Montacargas. (Marmolejo,2012)

Así las cosas, tal y como ya se ha indicado, el movimiento de un ascensor responde a un movimiento rectilíneo que es, en parte, acelerado, y en parte, a velocidad constante. La aceleración ocurre en los momentos inicial de arranque y final de frenado, mientras que el tramo a velocidad constante es el intermedio.

De este modo, el elevador debe proyectarse de manera que, en los tramos, inicial y final, la aceleración no supere valores que puedan afectar al pasajero. El sistema mecánico que mueve el ascensor aplica una fuerza para acelerarlo con aceleración *a*, y las personas, se aceleran con él. En el momento en que esta fuerza deja de aplicarse, la aceleración pasa a ser nula, lo que hace que en los momentos de parada se mantenga este valor. Mientras que el ser humano es capaz de soportar cualquier velocidad por grande que ésta sea, no sucede lo mismo con la aceleración. En el caso en que nos vemos sometidos a un movimiento uniformemente acelerado, y según el principio de Newton, aparece una fuerza de inercia de magnitud igual a la masa del cuerpo por la aceleración transmitida. Basta tan sólo pensar en las sensaciones que la mayoría de nosotros ha experimentado ante aceleraciones verticales moderadas en los ascensores.

La capacidad de una persona para soportar una aceleración depende tanto del módulo de la aceleración, como del tiempo de duración de ésta. Debido a la inercia de la sangre y de los órganos dilatables, las aceleraciones pequeñas tienen poca importancia si duran sólo un segundo, o incluso dos segundos. El límite de tolerancia se encuentra cercano a 10g (g la gravedad de la tierra) para aceleraciones positivas y 3g para aceleraciones negativas. Al margen de estos valores límite, se estima que el umbral de aceleración a la que una persona empieza a sentirse incomoda, es del orden de 1/3 g.

Así, en un ascensor podemos estimar una aceleración *a* comprendida entre 0.1 g (aprox. $1 m/s^2$) y 0.2 g (aprox. $2\ m/s^2$), que dura entre 1 y 2 segundos. El límite de confort corresponde, aproximadamente, a 0.3 g. Para nuestro modelo, consideraremos una aceleración de $1.5 m/s^2$ durante 1 segundo. Se considerará que en la salida, la aceleración no puede ser cero pues necesitamos el mecanismo que haga arrancar el montacargas, del mismo modo que en los momentos de llegada, en que el mecanismo permite frenarlo. Realmente es nula antes de accionar el mecanismo y en la primera fracción de segundo deja de serlo. En términos funcionales, la imagen en la salida es cero, pero hay un salto de discontinuidad en cuanto se inicia el movimiento; sucede lo mismo en la llegada, en la que debe haber un mecanismo que frene por completo el montacargas, pero éste llega (en términos infinitesimales) en desaceleración con una aceleración constante, aunque puntualmente, la aceleración en la llegada pase a ser nula.

Pensando ahora en el movimiento a velocidad constante correspondiente al tramo intermedio del recorrido, las especificaciones deberían depender del tipo de transporte. Siguiendo en la línea de uso para transporte de pasajeros, en un edificio de 6 alturas, con una distancia estándar entre alturas de 4 metros, un ascensor completa su recorrido aproximadamente en 17 segundos. Si reservamos 2 segundos para los movimientos de aceleración y desaceleración respectivamente (con lo que cubrimos además 1.5 metros de recorrido), quedan 15 segundos y 22.5 metros por recorrer aproximadamente, de lo que se deduce una velocidad media de v=22.5/15=1.5m/s. En edificios de mayor altura, y dependiendo del tránsito de personas, la velocidad media suele ser de v=3m/s, llegando hasta $v=16$m/s en el caso de los rascacielos. Tomaremos el dato v=1.5 m/s para el tramo de velocidad constante. Notar que la velocidad instantánea en t=1 coincide con 1.5 m/s. Claramente, para que el modelo tenga sentido, la velocidad instantánea en el momento en que el elevador deja de acelerar, coincidirá con la velocidad constante v_0 para el movimiento rectilíneo uniforme.

Con estas estimaciones (que podrían ser simplemente de valores desconocidos pero razonables para el confort de las personas y el tránsito entre paradas, a_0 y v_0), las funciones (y gráficas) del desplazamiento y, velocidad v y aceleración a, vendrían dadas en los siguientes términos:

Descenso: $y=-3/4t^2$; $v=-3/2t$; $a=a_0=-1.5$ con $t \in [0,1]$

$y=-3/2\,t+3/4$; $v=v_0=-1.5$; $a=0$ con $t \in [1,200/3]$

$y=3/4(t-203/3)^2-100$; $v= 3/2(t-203/3)$; $a=a_0=1.5$ con $t \in [200/3, 203/3]$

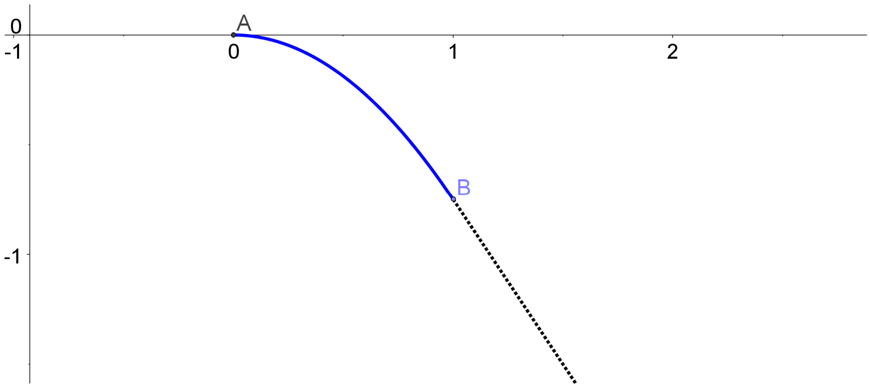
Ascenso: $y=3/4(t-203/3)^2-100$; $v= 3/2(t-203/3)$; $a=a_0=1.5$ con $t \in [203/3, 206/3]$

$y= 3/2\,t-809/4$; $v= v_0=1.5$; $a=0$ con $t \in [206/3,403/3]$

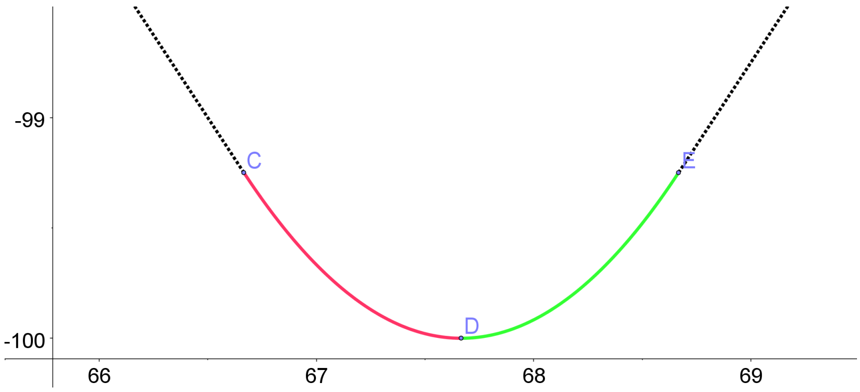
$y=-3/4(t-406/3)^2$; $v=-3/2(t-406/3)$; $a=a_0=-1.5$ con $t \in [403/3,406/3]$

Desplazamiento.

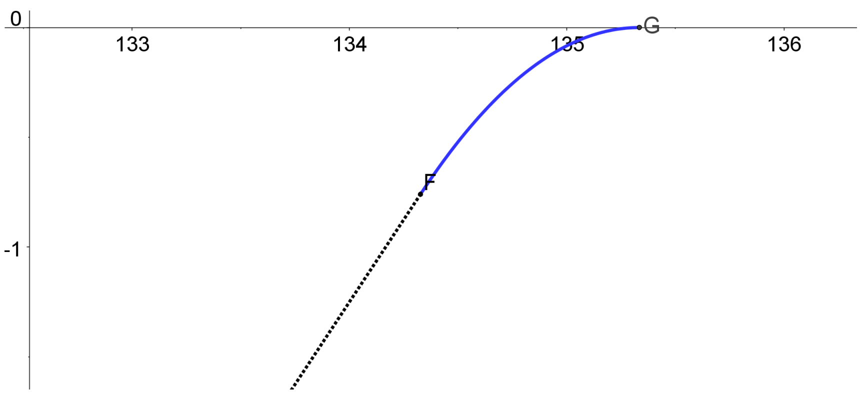
Tramo correspondiente al movimiento uniformemente acelerado en el arranque (intervalo [0,1]) al que le sucede un movimiento rectilíneo a velocidad constante (intervalo [1,200/3]):



Continuación del movimiento a velocidad constante que pasa a ser decelerado hasta el momento de parada en el fondo del pozo (intervalo [200/3, 203/3]), instante en que de nuevo, en situación de arranque pasa a ser acelerado (intervalo [203/3,206/3]), para sucederle el movimiento a velocidad constante (intervalo [206/3,403/3]):

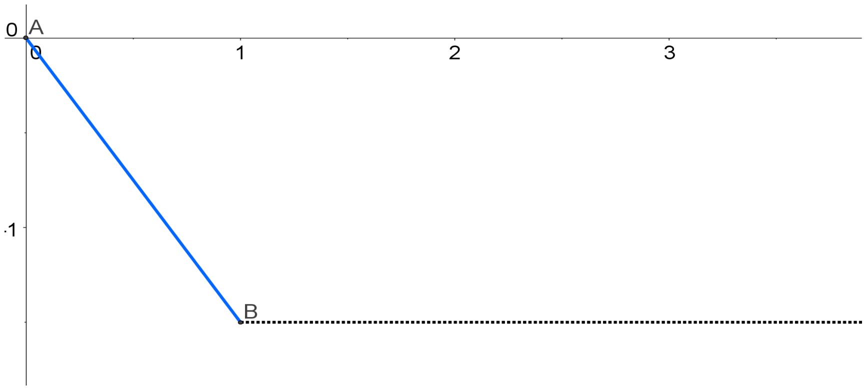


Tramo correspondiente al movimiento uniformemente decelerado en la llegada a nivel del suelo (intervalo [403/3406/3]), tras movimiento a velocidad constante.

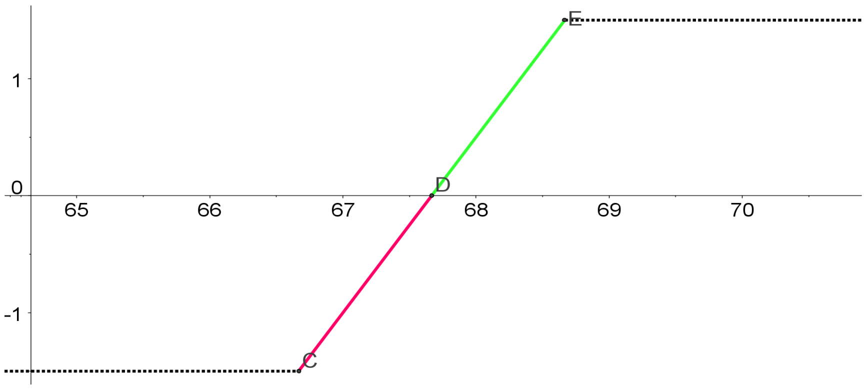


Velocidad.

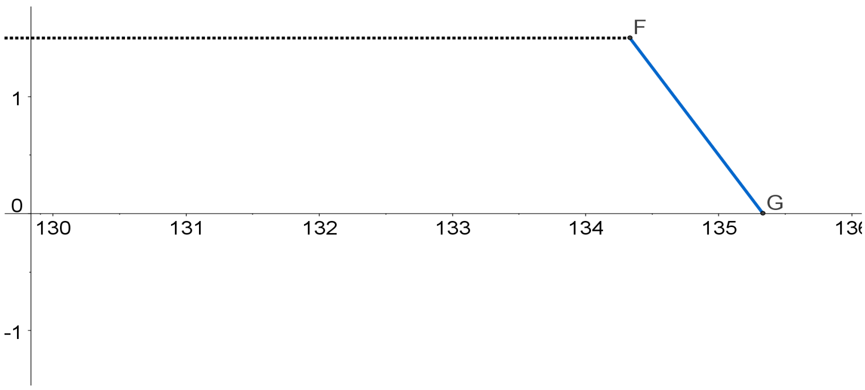
Velocidad lineal en el tramo del movimiento uniformemente acelerado del arranque, constante después y hasta el momento de deceleración.



Llegada al movimiento uniformemente decelerado en velocidad constante, velocidades lineales para llegada a la parada, y salida de nuevo en ascenso; velocidad constante de nuevo tras movimiento uniformemente acelerado.

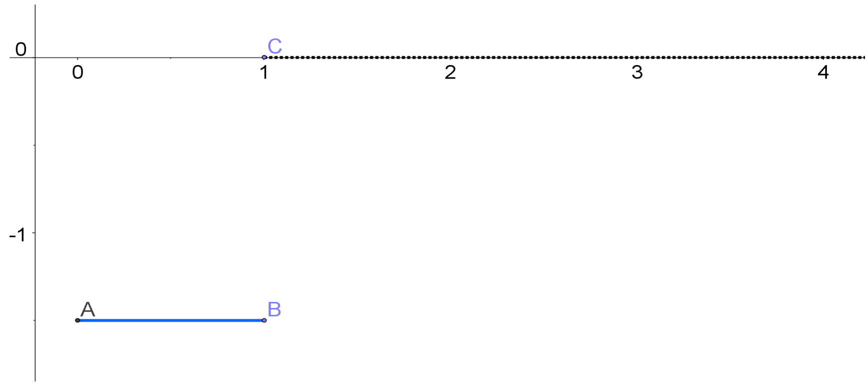


Velocidad constante hasta el movimiento uniformemente decelerado de llegada a nivel del suelo en que la velocidad pasa a ser lineal.

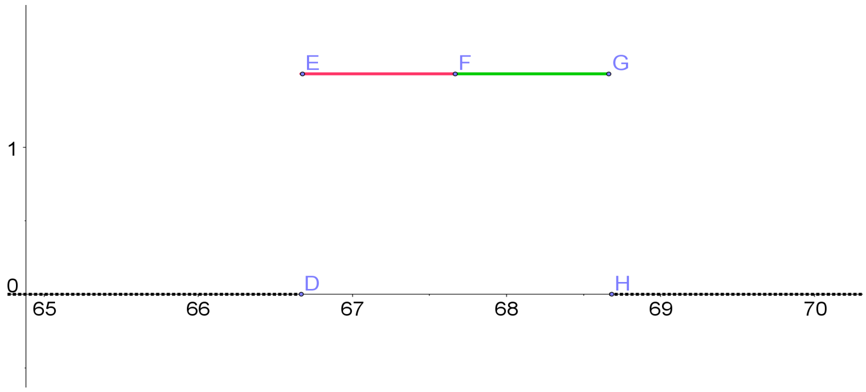


Aceleración.

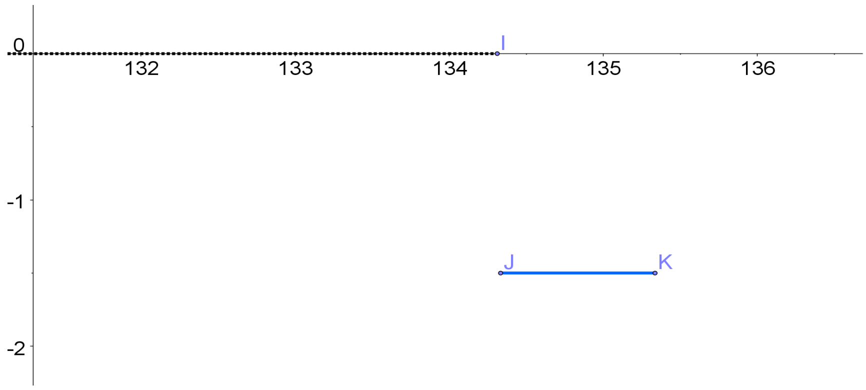
Movimiento uniformemente acelerado con aceleración constante y no nula en el arranque, aceleración nula después correspondiente al movimiento rectilíneo uniforme.



Aceleración constante y no nula en el movimiento uniformemente decelerado previo a la parada, y de nuevo aceleración constante y no nula en el arranque del ascenso y movimiento uniformemente acelerado. Movimiento rectilíneo uniforme después, luego de aceleración nula en el tramo intermedio.



Movimiento uniformemente decelerado en la llegada al nivel del suelo, aceleración constante y no nula.



LA TAREA. UN MODELO ¿ESPERABLE? ANÁLISIS DEL ENUNCIADO.

En términos globales, la actividad invita a estudiar las bondades y deficiencias de un modelo primario propuesto, para el que se supone una función determinada y que pretende la descripción del movimiento de un montacargas en un viaje de descenso/ascenso a/de un pozo de 100 metros de profundidad aproximada, en un tiempo también aproximado de 6 minutos y sin tener en cuenta el tiempo que está abajo, para instar después a la propuesta de un nuevo modelo que recoja las bondades anteriores y corrija sin embargo, las deficiencias encontradas. Se pregunta en última instancia además si al nuevo modelo se le podrían añadir nuevas modificaciones que permitieran su uso para situaciones similares con nuevas especificaciones.

La resolución de la tarea viene guiada por resoluciones parciales a problemas acotados que deben llevar a la reflexión crítica en un primer momento sobre el modelo primario (que vendría ser la validación en un esquema clásico de proceso de modelización) frente al fenómeno que se quiere describir, y con ello a una reflexión ¿parcial? sobre el propio fenómeno, para de ahí, iniciar un nuevo bucle en el proceso de modelización hacia una nueva propuesta óptima (o al menos mejor que la original) para dicho fenómeno. Óptima, además, en tanto en cuanto no sólo es capaz de describir o modelar la situación particular de partida sino situaciones más generales con cambios mínimos.

De forma más detallada, la tarea comienza proponiendo la representación gráfica de las funciones desplazamiento, velocidad y aceleración para el modelo primario $y=2.5t^3-15t^2$. Tal y como se indica en el enunciado, y=0 indica el nivel del suelo y t=0 el instante de partida. Apoyándose en éstas, se solicita al alumno que explique el significado nulo y del signo en la función velocidad (apartado a)) y la relación entre velocidad y aceleración cuando el montacargas aumenta o disminuye la velocidad, así como en los momentos de reposo (apartado b)).

Con la representación gráfica del desplazamiento, se espera que los participantes identifiquen ya algunos de los problemas del modelo tales como la falta de simetría (ya que el descenso dura 4 minutos cuando el ascenso sólo dura 2 minutos) o el hecho de que la profundidad que se alcanza es de 80 metros y no de 100 metros tal y como reza en el enunciado. Del mismo modo, pueden notar que el modelo sí refleja de un modo adecuado la posición del montacargas a nivel del suelo tanto en el instante de partida t=0 como en el de llegada t=6. Más aún, el movimiento de la curva permitiría conjeturar además que en t=0 hay un máximo para la función y que no es el caso en t=6. Para este estudio de puntos notables, de intervalos de crecimiento y decrecimiento, de concavidad o convexidad, podrían (y deberían servir), las representaciones gráficas de la velocidad y de la aceleración. En la línea de visualizar estos comportamientos, van los apartados a) y b).

El significado del signo negativo para la velocidad supone, en términos de desplazamiento que la función es decreciente, esto es, que el montacargas desciende; el signo positivo indica que la función desplazamiento crece, luego que el montacargas asciende y el valor nulo que hay un mínimo en la función desplazamiento que coincide (como explica el fenómeno), con un punto de reposo, a saber, el de llegada al fondo del pozo. Debería llamar la atención que si bien en el punto de partida t=0, la velocidad es nula (de nuevo significado valor nulo equivale a momento de reposo), no es este el caso para el punto de regreso a nivel de suelo en t=6, ya que no hay cambio en el comportamiento de la concavidad/convexidad de la función. En este instante ya se tendría información suficiente para asegurar que en t=0 hay un máximo para la función desplazamiento, pero no en t=6. La asunción de una simetría de comportamiento en descenso y ascenso para el fenómeno, debería permitirles conjeturar que el modelo también se invalida en tanto en cuanto el comportamiento en t=0 y t=6 debería ser análogo. Del mismo modo, se visualiza un comportamiento para la velocidad en que se parte de una situación de reposo (v(0)=0) para (por efecto de la aceleración) incrementarse en términos absolutos hasta llegar a su valor máximo (de nuevo en términos absolutos) para reducirse después llegando al punto de parada en t=4. Recordemos que el significado negativo para la velocidad alude a incrementos de desplazamiento negativos, del mismo modo que la aceleración negativa alude a incrementos negativos de la velocidad. Un comportamiento análogo para el ascenso, cabría esperarse (pero al otro lado del eje OX), cuando no es este el caso.

En cuanto a la relación entre velocidad y aceleración cuando el montacargas aumenta o disminuye la velocidad, así como en los momentos de reposo, la intencionalidad vuelve a ser la de establecer los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la velocidad en relación al signo de la aceleración. La velocidad aumenta cuando la aceleración es positiva y disminuye cuando la aceleración es negativa. En los puntos de reposo, esto es de velocidad nula, la aceleración puede ser negativa, positiva o nula, dependiendo de si el punto en cuestión es o no un extremo relativo. En el caso del punto (2, v(2)), mínimo de la función velocidad, se tiene que a(2)=0. Pensando de nuevo en la simetría del fenómeno a describir, el comportamiento de la aceleración también debería ser análogo en los tramos de ascenso y descenso, lo que invalida la función del modelo primario y sugiere que si en el primer tramo hay un extremo relativo para la velocidad luego un cero de la función aceleración, así debería ser también en el segundo tramo. Más aún, en t=2 hay un punto de inflexión para el desplazamiento, lo que exigiría dos puntos de inflexión para esta función, reforzando el hecho de que necesitamos un cambio en la concavidad/convexidad que haga que en t=6 haya un máximo.

El apartado c) plantea ahora la evaluación de la utilidad y la identificación de los problemas del modelo dado. Se espera que en este momento, el análisis del modelo propiciado con la representación gráfica de desplazamiento, velocidad y aceleración y con la resolución de los problemas a) y b), permita descartar el modelo primario y señalar los errores. De este modo, se sugiere plasmar aquello que invalida el modelo original como descriptor del fenómeno (hasta donde han pensado en el fenómeno) así como sus bondades. Deben recoger los problemas detectados en t=6, la falta de simetría de las funciones, el hecho de que no se alcancen los 100 metros de profundidad; y reflejar como correctos los valores y(0)=0, y(6)=0, v(4)=0 (t=4 como abscisa del punto mínimo del desplazamiento).

Cabe comentar a estas alturas, aunque con ello nos anticipemos a las conclusiones del trabajo, que la tarea tal y como se ha planteado hasta el momento, parece dirigir o guiar más hacia la reflexión sobre los puntos notables y el comportamiento global de las funciones, que hacia la cinemática del fenómeno que se pretende describir, razón por la cual se habla en el título del epígrafe de un modelo esperable que no va a coincidir necesariamente con el modelo plausible que se ha desarrollado anteriormente.

Llegados a este punto, se da por finalizada la parte de tarea que se corresponde con el análisis del modelo dado y se plantea la creación de un nuevo modelo. En el apartado 1. se propone realizar una lista de especificaciones para rediseñar el modelo original. Se pretende con ello que se hile aún más fino de lo que ya se hizo en el apartado anterior. Se espera (aquí ya nos ponemos en la piel de un resolutor que no ha avanzado más en el análisis de lo que lo hemos hecho nosotros a la luz de la parte de tarea resuelta) que se tengan en cuenta los puntos notables (ceros de las funciones, extremos relativos, puntos de inflexión) bajo una situación de simetría y alcanzándose los 100 metros de profundidad. Nótese que si se controlan todos los puntos notables, los comportamientos de crecimiento y decrecimiento y los de concavidad y convexidad vienen dados sólo con tener en cuenta que el movimiento es de descenso/ascenso. Incluso, que se tenga en mente, o que se llegue a representar (aunque no se les pida explícitamente) cómo deberían ser las funciones de desplazamiento, velocidad y aceleración para que reflejen estas especificaciones. Estas representaciones también podrían aparecer en el segundo apartado previo a la elección del nuevo modelo. En cualquier caso y ciñéndonos al intervalo [0,6], la función desplazamiento debería tener tres extremos relativos, a saber, dos máximos en t=0 y t=6 y un mínimo en t=3. La función velocidad debería anularse en t=0, t=3 y t=6, teniendo un mínimo en el intervalo [0,3] y un máximo en el [3,6]. Máximo y mínimo cuyos valores de abscisa coincidirán con los de los puntos de inflexión de la función desplazamiento y los dos ceros de la función aceleración. Ésta a su vez, presentará un máximo.

Una vez detallada la lista de especificaciones, se pide al participante en el apartado 2. la creación de un nuevo modelo para el que se abre la posibilidad de usar una única función o una función a trozos. En este caso, se abre la puerta por ejemplo a un resolutor que proponga un modelo para el intervalo [0,3] y que por reflexión, complete en el intervalo [3,6]. Podría también interpretarse que sugiere un cambio de rumbo en tanto en cuanto, explicita que el nuevo modelo no necesariamente debe construirse como el original, esto es, que no es excusa para el resolutor que el primer modelo venga dado por una única función. Aquí, el modelo plausible tendría cabida, si éste fuera capaz de desprenderse de la inercia del camino que ha emprendido. En este momento, se esperaría de los participantes que buscaran en su 'saco' de familias de funciones, aquéllas que pudieran responder a las especificaciones señaladas para el modelo. Funciones trigonométricas para desplazamiento, velocidad o aceleración, serían respuestas posibles y esperables. Una parábola en la aceleración (luego una cúbica en la velocidad y un polinomio de grado 4 en el desplazamiento) también. Opciones múltiples de funciones polinómicas reflejadas para la aceleración, velocidad o desplazamiento (como las de las respuestas 'arregladas' de Carmen y Sebastián, también, y desde luego, la del modelo plausible, si como ya se ha comentado, el resolutor fuera capaz de volver al fenómeno que se describe sin los condicionantes del modelo original.

Finaliza la parte de creación del modelo propio con un el apartado 3. que insta a la validación (luego a la crítica si esta tiene cabida) del modelo. Se pretende con ello recuperar la esencia de la modelización para la que el modelo no es óptimo si no refleja el fenómeno que se describe, aunque en este caso, si las especificaciones no son lo suficientemente buenas, no se valida más que el modelo que ajusta a dichas especificaciones.

Por último, la generalización del modelo, sólo tendría sentido si se modifican las especificaciones para el mismo en términos de tiempos, o distancias.

3.2. El experimento.

Como ya hemos comentado, nuestro trabajo tiene carácter exploratorio, esto es, se pone bajo observación el conjunto de las conductas de los participantes resolviendo un tipo determinado de problema (aplicado o de modelización) con el único fin de examinar si como ya se ha indicado en el apartado anterior, *el conocimiento cualitativo del fenómeno a describir* (*y de los modelos funcionales* que permiten su descripción matemática) así como *el uso de ese conocimiento cualitativo para tomar decisiones, controlar y organizar el conjunto del proceso*, se revela como *elemento clave de la buena gestión del proceso de modelización* (Puig y Monzó, 2012). Lo que pretendemos es examinar la manera en la que aparecen los elementos asociados a las propiedades cualitativas del fenómeno (y en su momento también de las familias de funciones y los parámetros que describen su comportamiento relacionadas a través de sus formas canónicas con el fenómeno) y las implicaciones que para la gestión del proceso de resolución de la tarea se infieren, con el nivel de detalle que proporciona además la observación de la actuación de unos pocos sujetos, y en este caso, para la tarea del montacargas.

Se plantea así la misma tarea de modelización del movimiento del montacargas de Marmolejo, 2012, a 4 estudiantes de primero del grado de matemáticas de la Universidad de Valencia, con los que no media proceso alguno de enseñanza-aprendizaje, dado que son voluntarios que acceden a participar con nosotros en el experimento sin tener siquiera contacto previo con los investigadores y desconociendo el tipo de tarea que se les va a proponer. La actividad se realiza en un aula de Informática de la facultad de matemáticas sin límite de tiempo, de modo que no se produjera un abandono de la tarea con las consiguientes consecuencias para el desarrollo de la investigación y con la única presencia en el aula, amén de los participantes, de los investigadores (Gina, Luís y yo misma) y del decano de la facultad de forma intermitente. La presencia de este último se justifica como intermediario entre investigadores y participantes y la elección del aula de informática por la permisividad del uso de software como herramienta de ¿ayuda? en la resolución de la tarea. Se entrega a los alumnos el enunciado de la tarea, y folios (uno de ellos con espacio para escribir el nombre de pila) para la redacción del manuscrito final con la (re)solución de ésta.

Para la obtención de los datos para el análisis, se recurrió a distribuir a los participantes en dos parejas para su resolución conjunta. La sesión se graba en vídeo de inicio a fin (un aparato por pareja) y se les solicita que durante la sesión verbalicen cuanto les sea posible y en voz lo suficientemente alta para poder registrar el resultado de su interactuación en un protocolo escrito que se hace posteriormente. Tenemos así los protocolos audiovisuales. Se les solicita que preparen además un manuscrito en el que se recoja la resolución de la tarea, permitiendo que se entregue uno por pareja o de forma individual. Se recopilan también, en documentos elaborados por los investigadores tras la finalización de la tarea, el registro de comandos y las gráficas que quedaron accesibles, que los participantes generaron durante su utilización del programa Matlab®, software elegido por ambas parejas como apoyo para la tarea.

La naturaleza de los datos recogidos será así de elementos de comunicación que responden a procesos cognitivos que se producen cuando se resuelven problemas en una situación de *trabajo cooperativo* (Puig, 1996, Cap.5, p.60) para los protocolos audiovisuales. En el caso de los manuscritos escritos, *no puede pretenderse que el resolutor de cuenta de lo que está pensando mientras resuelve el problema, ya que se sabe que esto perturba el proceso de resolución al incorporar la tarea de esa escritura, de modo que hay que contar con que lo que se va a tener como datos, no puede ser una transcripción del proceso de resolución, sino su resultado más o menos elaborado* (Puig, 1996, Cap.6, p.229), situación que además justifica el hecho de que hayamos optado por implementar datos de naturaleza oral con datos escritos en nuestra investigación. Por último,

El investigador en este contexto, no debe intervenir, salvo para aclaraciones puntuales que nunca deben apuntar a la (re)solución del problema.

A partir de las grabaciones en vídeo (protocolos audiovisuales) se elaboran después los protocolos escritos. En este caso, la transcripción en texto escrito de los protocolos audiovisuales se articula considerando como un ítem cada intervención individual que se haya producido sin interrupciones o con interrupciones de apenas unos segundos, intercalando en ellos la intervención simultánea del compañero cuando ésta se produce y con la intención de marcar así dicha simultaneidad temporal de los discursos de los dos participantes. La colocación de los signos de puntuación se adecúa, en la medida de lo posible, a las reglas gramaticales. Tras una primera transcripción, se contrasta con nuevos visionados de los protocolos audiovisuales hasta determinar con el mayor nivel de exactitud posible los ítems definitivos. Se completan además con las sentencias y gráficas de Matlab ® siguiendo el ritmo de avance en la resolución correspondiente de modo que se intercalan, en la medida de lo posible, con la parte de la tarea en la que se encuentran y para la que se implementa su uso. Se han añadido las gráficas que no quedaron accesibles y la descripción de los gestos que acompañaban algunas de sus intervenciones, especialmente, las que aludían a puntos notables o comportamientos de las funciones sobre la pantalla de visionado de las gráficas o sencillamente hechos al aire. Habría que decir aquí, que en la elaboración de los protocolos escritos, ya hay un comienzo de análisis aunque nos refiramos a ellos como datos para el análisis.

La leyenda para el protocolo escrito, y su análisis desde una reconstrucción racional y plausible previa de lo acontecido, así como la justificación para el mismo, se presentan en el capítulo 4. En Anexo se recogen el enunciado de la actividad, el acordeón del experimento, los protocolos escritos, los documentos que recogen las sentencias de Matlab® y los manuscritos de los participantes.

Finalizamos este apartado haciéndonos eco del protocolo de investigación y de las directrices que los investigadores dieron a los participantes en el comienzo de la actividad. Se les comentó que la sesión sería grabada con la intención de registrar sus conductas y actuaciones, pero preservando en todo momento su identidad, para lo que se aludió al hecho de que sus nombres no aparecerían en los documentos que el experimento generara. Se les explicó además las razones que nos inducían a distribuirlos por parejas [1] Luís:--- *si os hemos puesto por parejas es porque, eh al trabajar por parejas os vais a obligar a tener que contarle cada uno al otro por qué está haciendo lo que está haciendo y queremos que lo hagáis, queremos que habléis un poco más de lo que normalmente se habla cuando uno está haciendo* *un problema porque precisamente lo que digáis es lo que nos va a servir para hacer hipótesis sobre lo que habéis pensado para hacer el problema*. Se les pidió en consecuencia que verbalizaran de modo que su discurso fuera además en voz alta para la mejor recogida de datos en el paso de los protocolos audiovisuales a los protocolos escritos. Se aludió a las instrucciones de la tarea para su seguimiento y se hizo explícita la posibilidad de uso de software, solicitando además que aunque fuera en forma de borrador se registrara en un manuscrito final tanto la (re)solución de la tarea, como aquello que, proveniente del uso del software, fuera necesario para ésta. Se les solicitó además que no apagaran los ordenadores ni cerraran las ventanas del programa que utilizaran (si este era el caso) para poder generar documentos de captación de esta información. Se buscaba de este modo que el resolutor *no hiciera desaparecer todo lo que el consideraría 'sucio', para dejar sólo el 'limpio'* (Puig, 1996, Cap.6, p.230).

4. Análisis de los protocolos.

4.1. La Reconstrucción Racional.

Presentamos ahora lo que Puig (Puig, 1996, Cap.5) llama la reconstrucción racional de las actuaciones y conductas de los participantes, esto es, una narración de las mismas con las que se pretende dotar de sentido al conjunto y que en consecuencia recoge un análisis detallado y minucioso de éstas. En esta narración se incluyen comentarios interpretativos a ítems ilustrativos en una descripción secuencial en la que se insertan las respuestas de los participantes reflejadas en sus manuscritos finales, así como elementos de Matlab® (comandos o gráficos) si con ellos se sustentan o corroboran las interpretaciones que de las actuaciones y conductas se hacen. Se añade también la interpretación de los valores de los parámetros para las funciones que los participantes utilizan en el recorrido de la resolución de la tarea, cuando su sentido es pertinente en el proceso de toma de decisiones (nos referimos aquí a las funciones de tipo Asen(Bx+C) o Acos(Bx+C)) para la creación del nuevo modelo).

Tal y como se explicita en los protocolos escritos, los significados asociados al uso de algunos símbolos vienen reflejados en la siguiente leyenda:

- uso de puntos suspensivos '…': indican pausa en las frases o duda;

-uso de una coma ',' en el discurso: hace referencia a las pausas, a veces naturales, a veces forzadas, del discurso;

-uso de una coma ',' al finalizar la intervención: hace referencia a que si bien hay una pausa con intervención posterior del compañero, continúa la frase en su intervención siguiente, razón por la que además ésta se introduce en minúscula;

-uso de '---- *intervención* ----': recoge una parte de la intervención;

- uso de corchetes con texto entre ellos [texto]: recogen gestos, indicaciones en gráficos o describen momentos de lectura o reflexión; en el caso de las sentencias de Matlab® indican la instrucción que subyace a la sintaxis;

- uso de paréntesis (Participante. *Intervención*): en intervenciones solapadas generalmente de asentimiento;

- uso de '¿?¿? ': refleja la imposibilidad de transcribir la intervención, o parte de ella.

4.1.1. La pareja A./B.:

Comienza la pareja A y B con la lectura del enunciado de la actividad. B lee en voz alta una parte (hasta ‘t representa el tiempo en minutos’), pero continúan la lectura en silencio. Por el tiempo que pasa, podría pensarse que han leído algo más que el enunciado y la indicación de representar gráficamente, lugar al que en cualquier caso seguro que llegan, dado que B. sugiere inmediatamente cumplir con la correspondiente instrucción:

[19] B. *Representemos gráficamente el desplazamiento, la velocidad y la aceleración.*

A. sugiere utilizar Matlab® para ello:

[20] A. *Eso lo sabe hacer Matlab®.*

Sobre el enunciado general de la tarea, **B. no refleja en su manuscrito información alguna sobre las condiciones generales del fenómeno en estudio o de la función asociada al modelo primario**, ya que comienza directamente con las respuestas a los apartados a), b), … A. sin embargo escribe

Manuscrito A. ***Sabemos que empieza al nivel del suelo y que tarda, en ciclo de 6 minutos, en bajar y subir.***

Luís, como modulador ahora del experimento, solicita a los participantes que hablen más alto, y comenta la posibilidad de preguntar a los investigadores si surge alguna duda de comprensión del enunciado en

[21] Luís. *Podéis hacer, podéis hacer preguntas si queréis de comprensión, o lo que sea, ¿eh? … y contestar, contestaremos. Y si podéis hablar más alto, mejor.*

Arrancan Matlab® que requiere de tiempo y parecen impacientarse, de hecho, B., que parece algo más inquieto que A. así lo explicita:

[26] B. ---- *eh… vamos a trabajar un poco con Matlab®, cuando quiera* ----

[28] B. ---- *cuando quiera Matlab®, cuando le dé la gana* ----

Tal y como ya habíamos comentado, los participantes han debido leer alguno de los primeros apartados de la tarea, posteriores a la indicación sobre la representación gráfica de desplazamiento, velocidad y aceleración, habida cuenta del comentario de A. y respuesta de B. en:

[26] --- *y representamos la función* ---

[27] A. *Sí, porque yo creo que simplemente poniendo la función, mirándole a la gráfica, de ahí podemos sacar,*

[28] B. ---- *bastante información* ----

Secuencia en la que dejan constancia de que la representación gráfica de una función, aporta muchos elementos de información sobre la misma.

De [28] a [35] uno dicta y otro escribe para representar la función. En un momento determinado, B. se equivoca en la sintaxis, y rectifica. El error viene dado por la diferencia de sintaxis del Matlab® y del álgebra y proviene de poner un producto sin *, razón por la que el programa no la lee. Nombra con *f* a la función desplazamiento y escribe el comando ezplot en Matlab® para la representación:

[28] B. ---- *Entonces, definimos la función f... 2.5* [en este momento empieza a escribir en el teclado].

[29] A. *por t elevado al cubo.*

[30] B. *Por y elevado al cubo.*

[31] A. *Menos 15 y al cuadrado.*

[32] B. *Menos 15 y al cuadrado.*

>> syms y [cálculo simbólico; y pasa a ser variable en lugar de carácter de texto]

>> f=2.5*y^3-15y^2 [la simbología ^ se utiliza para escribir potencias y * para los productos]

[33] B. ---- *Vale, empezamos ya a tener errores* [rectifica en el ordenador la fórmula] ----

??? f=2.5*y^3-15y^2 [los signos de interrogación hacen referencia a un error de sintaxis]

Error: Unexpected MATLAB expression.

[33] ---- *Vamos a representarla* ----

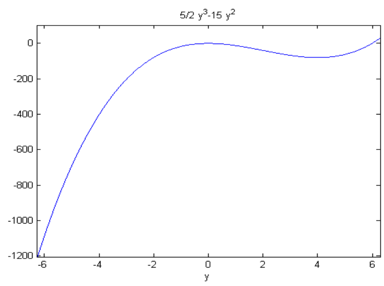
[34] A. *ezplot* [A. escribe la sentencia correspondiente en Matlab®].

[35] B. Sí

De [36] a [54] A. y B. hacen un primer análisis de la gráfica del desplazamiento.

A A. le extraña la representación gráfica que les ha salido, posiblemente porque tal cual la han representado, sin marcar dominio de representación, parece alejarse mucho de lo que cabría esperar a la vista del fenómeno que trata de modelar. Hace notar en dos ocasiones que el tiempo inicial es t=0, razón por la que decide mover la gráfica para visualizar desde el punto de abscisa t=0 e incluyendo al menos hasta la abscisa t=6. Cuando alude al punto mínimo, se refiere al valor de ordenada en 100 metros de profundidad condicionado por el enunciado de la tarea, de hecho, utiliza el condicional para referirse a él (serían). Realmente, se alcanza un mínimo en la ordenada -80. Mostramos la primera representación, previa al centrado de A.:

>> ezplot(f)
[Representación gráfica de la función f]



[36] A. *¿Esto qué es?* ... [B. sigue el movimiento de la curva con el cursor desde la ordenada -1200 hasta la ordenada 0] *tengamos en cuenta que empezamos en cero...* [A. señala el punto en la gráfica de abscisa cero]

[38] A. *Porque si el tiempo inicial está aquí,*

[40] A. *vamos a centrar porque si está en el cero, seis… esto es cero…. va bajando, éstos serían los cien metros que sería el punto mínimo*.

B. no parece notar nada extraño en la gráfica (la ventana por defecto no es adecuada para la representación del fenómeno) y toma notas en sus hojas en sucio, en el último momento, cuando ya la debe tener copiada, es cuando se plantea abordar su análisis:

[39] B. *Vale, entonces, la gráfica nos dice que eh... la posición respecto del tiempo es la siguiente… eh, más o menos, pues tenemos el cero aquí y esto es menos mil doscientos…. A ver,*

A la vista de los comentarios de A., B. sugiere entonces representar la función entre 0 y 6 para que la escala sea más adecuada, aunque A. duda un momento (será una constante en A. que siempre ve el fenómeno como periódico, tal y como se refleja más adelante de forma explícita, la elección además del vocablo ciclo así parece indicarlo). B. lo intenta argumentar en tanto en cuanto su visión es estanca (sólo hay un viaje de ida y vuelta) y A. se deja convencer porque está pensando en un ciclo y puede, mentalmente, reproducir la función por periodicidad.

[41] B. *Sí, pues entonces yo representaría la función entre cero y seis.*

[42] A. *¿Pero por qué entre cero y seis?*

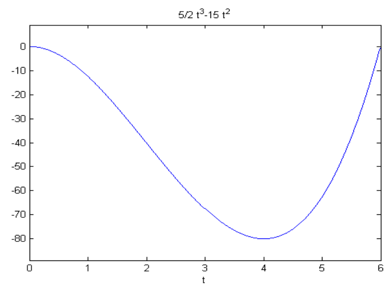
[43] B. *Yo la representaría entre cero y seis porque son los, los, los ..*

[44] A. *El ciclo*

[45] B. ---- *Sí, claro, pone 6 minutos lo que tarda en bajar y subir, la representamos entre 0 y 6 y nos aparecerá una escala un poco mejor, ¿vale?* ----

B. representa así la función en el intervalo [0,6] y de ahí arrancan de nuevo el análisis.

>> ezplot(f,0,6)



Claramente, el hecho de que el mínimo esté situado en t=4 es la razón por la que concluyen que se tarda más tiempo en bajar que en subir. B. incluso argumenta que la razón para esto es la seguridad, buscando así ajustar el comportamiento del fenómeno al comportamiento de la función.

[47] B. ---- *Entonces podemos ver que primero baja bastante más rápido… o sea, primero baja más lento y luego sube ... llega abajo a los cuatro minutos*. ----

[48] A. *O sea que le cuesta más bajar que subir.*

[49] B. ---- *Sí, es un montacargas* --- … --- *requiere más seguridad para bajar que para subir.* ----

A. refleja **en su manuscrito** esta situación, al tiempo que **representa la gráfica del desplazamiento** (remitimos al anexo 6 para verla). Los valores -80 y -100 en el eje de ordenadas, los añadió, probablemente después (A. admite que 'a ojo' se ve en [74] y que el mínimo es efectivamente (4,-80) después de representar la función con cuadrícula en [107]):

Manuscrito A. ***Vemos que tarda más tiempo en bajar que subir.***

B. al menos, toma ahora notas y comenta en voz alta elementos de representación de la gráfica. En un primer momento cree que el mínimo tiene de ordenada -100, pero rectifica a -80 poco después. Marca tiempo y altura en los ejes, escala de uno en uno para el tiempo, señala el (0,0) y el mínimo en t=4 (con ordenada -80) y reproduce la expresión algebraica de la función. Por último, se equivoca en la unidad con la que se mide el tiempo. Este error carece de importancia por el momento, y probablemente sea producto de la costumbre, ya que el tiempo se mide en horas y segundos en el contexto del movimiento.

[49] B. *Entonces, de momento, tenemos la representación gráfica que es la siguiente….*

[51] B. *Entonces … esto es el tiempo y esta la altura … entonces esto es … eh […], bueno tenemos cero y luego pues aquí arriba tenemos el cero, esto es menos cien … uno, dos, tres, cuatro, cinco y seis segundos,*

[53] B. ---- *y esto en metros… y más o menos, pues cuando llega a cuatro…. por aquí y aquí van menos ochenta… estás eh… más o menos… vuelve a subir al cero --- Esta es la representación… posición-tiempo o desplazamiento. Perfecto… perfecto. Eh… Entonces, esto es y igual a dos coma cinco t tres menos quince t dos* ----

A. refleja explícitamente que la función le resulta rara. Sigue pareciendo que tiene en mente el fenómeno que modela. B. sin embargo, que centra su pensamiento en la función matemática con la que han de trabajar, indica que no le parece complicada.

[50] A. *Un poco rara…*

[53] B. --- *no es una función complicada, ¿no?, por lo menos en el dibujo* ----

A. pensando ahora en la gráfica del desplazamiento sugiere a B. derivar para calcular con exactitud el mínimo de la función (herramienta matemática: es necesario para tener un extremo relativo, que anule la primera derivada de la función) en:

[54] A. *¿sabemos cuál es el, el punto mínimo? ¿Derivamos?*

Inician pues ahora la representación gráfica de la velocidad, de la que hacen un primer análisis muy superficial. Aunque en principio la necesidad de hacer la derivada para A. es la de evaluar el mínimo de la función desplazamiento, B. aprovechará para analizarla mínimamente. Aunque B. calcula (y renombra con f2) la función velocidad, hace también el cálculo de la derivada de cabeza tras un comentario de A. (de hecho Matlab® da la derivada con fracciones y en [59] cuando se refiere a la fórmula no los utiliza; comentar también que se equivoca ya que la derivada es $7.5t^2$-30t y él lee $7.5t^2$ -15t). Se justifica diciendo que no le gusta trabajar con decimales, si bien no es un problema para A. tal y como él mismo indica:

[55] B. *¿Derivamos? Hombre, si quieres calcular la velocidad y tal, habrá que derivar.*

[56] A. *Sí, bueno ¿?¿?*

[57] B. *Vale, entonces a ver, diff de f* [escribe en Matlab® con el teclado], *vamos a derivar*

>> diff(f)

ans =(15*y^2)/2 - 30*y

>> f2=(15*y^2)/2 - 30*y

f2 =(15*y^2)/2 - 30*y

[58] A. *Esto lo podemos hacer de cabeza.*

[59] B. *Ya, pero, vamos a…* [hace un chasquido con la boca como indicando que no encuentra las palabras] [A. ríe] *Sí, vale … la costumbre de tener el Matlab® delante … y prima es igual a, ahora ya no sabes hacerlo de cabeza* [en tono de broma] ¿eh?, *siete coma cinco t cuadrado menos quince t …*

[59] B. ---- *siete coma cinco t cuadrado menos quince t … ¿Tú también has odiado los decimales como yo?* ----

[60] A. *Pues no, ¿por qué?*

[61] B. *Yo siempre los he odiado, por lo menos cuando iba al instituto...*

En el transcurso de la representación de la velocidad con Matlab®, B. se equivoca al escribir la sentencia correspondiente y pide representar la función desplazamiento f en lugar de la velocidad f2 y así se lo advierte A.:

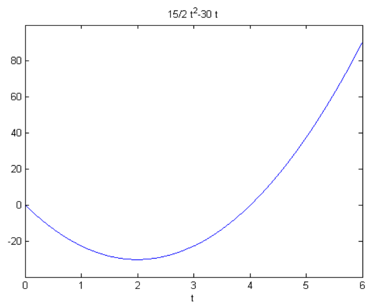
[61] B. ---- *f de dos la definimos como ésta y au* ….[Intro] *la representamos en los mismos entornos de antes ¿no?, de cero a seis* ---

[62] A. ---- *ésa no es cierta* ----

[63] B. *Esta no es cierta, es f dos.*

>> ezplot(f,0,6)

>> ezplot(f2,0,6)



Comienza ahora B. con el análisis de la gráfica de la velocidad. Aunque aparentemente, la sensación es de que se fija sólo en los puntos notables y movimiento de la curva que permiten su representación, sin reflexión que la acompañe, hay vacilaciones en su discurso que pueden dar señales de que no es realmente así. Se detiene al nombrar y señalar el punto de abscisa t=2 (como si esperara que la abscisa del mínimo coincidiera con el del desplazamiento); y luego se reafirma con vocablos como claro o vale, como si hubiera entendido lo que subyace detrás. Nos atreveríamos a aventurar que sólo matemáticamente habida cuenta de su actuación en el desarrollo posterior de la tarea. Únicamente reproduce el movimiento de bajada desde t=0 hasta t=2 y comenta que sube a partir de ese momento. Revisa también la unidad en la que se da la velocidad.

[65] B. --- *hay un momento en que la velocidad baja hasta casi 2, o sea es decir, y luego empieza a subir*, *claro… vale, vale, vale…*

[69] B. *Desde el mil a ¿?? …. y ésta es la velocidad…. en metros… metros minuto, ¿no? … sí, metros-minuto.*

[71] B. *¿Y qué hace? Esta aquí el cero, baja hasta el, en el dos alcanza el mínimo…*

A. por su parte, insiste de nuevo en calcular el mínimo de la función desplazamiento, razón por la que le pregunta a B. por la expresión de la velocidad y le sugiere que la igualen a cero para calcularlo, mientras B. desoye su sugerencia porque como ya hemos mostrado, está en el análisis de la gráfica de la velocidad. Más aún propone hacer primero las tres gráficas como si prefiriera dejar las cuestiones de cálculo matemático para más adelante. Parece que A. no termina de fiarse de lo que ve en la gráfica del desplazamiento, para la que en t=4 se tiene el mínimo y bastaría entonces con sustituir en la función velocidad para saber la ordenada; o bien que aún aceptando que efectivamente la abscisa del mínimo es t=4, y llevado por la mecánica de trabajo de cálculo de extremos relativos, que 'necesite' el proceso completo. Pero acaba por ceder, se conforma con saber que se aproxima a cien metros de profundidad. En la gráfica de su manuscrito aparece el valor -80, bien guiado porque así lo dijo B. en una intervención anterior, bien porque es lo que ve en la gráfica.

[66] A. *¿Ésta es la función de la velocidad?*

[68] A. *La velocidad, ¿cuál era la función?*

[69] B. ---- *Y prima… y prima es igual a siete coma cinco t dos menos quince t* ----- [B. vuelve a equivocarse en la fórmula de la velocidad.]

[72] A. Lo primero, igualamos, igualamos a cero y así vemos cuál es el punto mínimo del anterior porque como…

[73] B. ---- *Hombre, yo primero representaría las tres y luego empezamos a estudiar, porque haciéndolo así, sí que puedes ver lo que pasa.*----

[74] A. *Como ya, ya has representado la, la anterior sí que tienes el punto mínimo a ojo.*

[75] B. *Está, de momento un poco a ojo, sí ¿vale?*

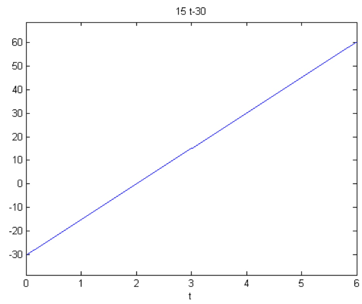
[76] A. *Sí porque decía que se aproximaba a 100 más o menos.*

Fiel a la idea de representar las tres gráficas, B. abandona el análisis de la velocidad y representa ahora en Matlab® la gráfica de la aceleración, para ello deriva la velocidad (f2); la renombra con la etiqueta f3 y pone la sentencia correspondiente de representación en el intervalo [0,6]. Parece que se da cuenta en este instante de que la derivada es 15t-30 y no 15t-15 que es lo que sale con la expresión para la velocidad que tiene en sus notas. Reflejo de ello es el tiempo que tarda en decirlo en voz alta en [79] y el que se detenga a revisar sus notas.

[77] B. ----*Y ahora calculamos la aceleración. Si quieres calcularla o no, pero vas a tener el puente,*----

[79] B. *en el Matlab®… quince t menos quince, diff f dos de la función… Eh* [….] [B. parece estar buscando algo en sus notas] *quince t menos treinta, ¿no?*

```
>> diff(f2)

ans =15*y – 30

>> f3=15*y - 30

f3 = 15*y - 30

>> ezplot(f3,0,6)
```



A. registra en su manuscrito las gráficas de la velocidad y la aceleración (ver Anexo 5).

A. comienza ahora el análisis de la gráfica de la aceleración, y de nuevo, con un espíritu por el momento más crítico que el de B. encuentra algo extraño, como así lo hace notar, en dicha representación. Da de nuevo la sensación de que A. esté pensando en el fenómeno en términos físicos amén de la parte matemática. En cuanto a B. centra su análisis en relación a la velocidad, desde un punto de vista sólo matemático en tanto en cuanto la aceleración es la derivada de la función velocidad. La terminología que utiliza A. es además clarificadora, utilizando términos como frenar o acelerar. Y así comienza:

[84] A. *Sí, vemos que empieza frenando y acaba acelerando.*

Terminología que entiende perfectamente B. y que señala el punto en que pasa de un estado al otro, esto es cuando la aceleración pasa de ser negativa a positiva:

[85] B. *Sí, en el punto 2 o sea,*

Pero en este momento, A. comenta que es raro, porque pensando en cuando sube el montacargas…. (Nota del transcriptor: imposible reconocer lo que dice después).

Un posible análisis de lo que podría haber detrás de este comentario, tendría que ver con el hecho de que el fenómeno que se trata, tanto si se piensa en un elevador que sube, como en un elevador que baja, debería tener en cada tramo de ascenso o descenso, una primera parte en que la aceleración aumentara (en valor absoluto) y otro en el que descendiera hasta el momento de quedarse frenado. El signo únicamente recogería si la velocidad desciende (caso de la aceleración negativa, luego de variación de velocidades de signo negativo) o si la velocidad aumenta (signo positivo). No es este el caso. De hecho, luego A. revisa los diferentes valores mínimo, cero y máximo que toma la aceleración de forma lineal: empieza en 30, corta en 2 y llega a 60.

[86] A. *sí, pero sigue siendo raro, porque si un montacargas, cuando sube normalmente ¿?¿? … empieza en menos treinta,*

[88] A. De m*enos treinta corta con el eje en dos,*

[90] A. *y llega hasta sesenta.*

Por su parte B. mucho más analítico en términos matemáticos, acompaña en algún momento los comentarios de A. refiriéndose al tramo [0,2] en que la velocidad decrece cuando la aceleración es negativa, se hace eco quizás de la relación entre el decrecimiento de una función con el signo de su función derivada. Comenta también que la velocidad en ese tramo es negativa. También podría ser que sencillamente estuviera leyendo desde la gráfica de la velocidad lo que sucede en el intervalo de definición [0,2]; no obstante, más adelante, sí dejará constancia de la relación de derivación señalada. Asiente cuando A. señala el punto de corte con el eje OX y apunta (y dibuja) en sus notas la gráfica de la aceleración. Marca el -30, -20, -10, 0 en el eje OY y escala de 0 a 6 en tramos de 1 unidad en el eje OX. Señala puntos de corte para trazar la recta.

[87] B. *ahí la velocidad la tienes negativa hacia abajo*

[89] B. *Sí en dos.*

[91] B. ---- *Minutos al cuadrado…. Metros partido por minutos al cuadrado. Tenemos menos treinta, menos veinte, menos diez, tenemos un cero, más o menos uno, dos, tres cuatro, cinco, seis… uno, dos, tres, cuatro, cinco y seis, más o menos pues pasa por el punto cero, dos* [lee las coordenadas al revés, se refiere al (2,0)] *y el origen* ----

Llegados a este punto, B. propone dibujar las tres gráficas al mismo tiempo en la misma figura y justifica la propuesta porque le permitiría estudiar las características de las funciones con toda la información recogida en el mismo lugar. Sugiere además añadir a la representación una cuadrícula (mismas sentencias para la representación en Matlab® añadiendo el comando grid: >> ezplot(--,0,6) >> grid):

[91] B. ---- *¿Tú sabes lo que haría yo ahora, tío? Representaría las tres en la misma figura.*----

[92] A. *¿Para qué?*

[93] B. *Para ver cómo… en qué puntos pasa lo que sea y le metemos el grid.*

A. le hace notar a B. que están trabajando en lenguaje simbólico en Matlab® y que con el comando ezplot no se puede hacer, que necesitarían estar en lenguaje numérico y utilizar el comando plot. Miran en la ayuda (F1) que se adjunta en el protocolo escrito (mirar allí), pero no da la solución.

[94] A. *Si quieres, pero has de estar en simbólico otra vez, o sea…*

[95] B. *Meter el grid sí, y representar ahora las tres, en teoría…*

[96] A. *¿Con ezplot puedes?*

[97] B. *¿Cómo se representaban dos funciones a la vez?*

[98] A. *Yo creo que eso sólo se puede con plot y eso ya es numérico. Tenemos que darle un valor y,*

[99] B. *Ah claro y en numérico, ¿cómo representas una función si le asignas un número a una función?*

[100] A. *No sé, si tú sabes hacerlo.*

[101] B. ---- *Pero yo no me acuerdo. Espera, o sea F1 ----.*

[102] A. ---- *Ahora falta que nos salga cómo lo podemos hacer.*----

A. que no está convencido de la propuesta de B. vuelve al análisis de la aceleración. En t=2 la velocidad debe alcanzar su valor mínimo (análisis matemático desde la gráfica de la aceleración con derivada igual a cero):

[102] A. ---- *bueno, aunque en la fórmula ya sabemos a ojo que en dos debe llegar al final o,* ----

B. improvisa introducir las tres funciones separadas por comas en el comando ezplot, se equivoca porque f1 no está definida; de hecho etiquetó con f a la función desplazamiento, con f2 a la función velocidad y con f3 a la función aceleración. Vuelve a intentarlo con f y también falla con lo que desecha la idea:

[103] B. *A lo mejor sabes cómo es, no sé por arriesgarme, f uno, f dos, f tres. No, f, voy a darle a la f. No, sym.ezplot, no se puede. Pues nada, eh …*

```
>> ezplot(f1,f2,f3,0,6)

??? Undefined function or variable 'f1'.

>> ezplot(f,f2,f3,0,6)

??? Maximum recursion limit of 500 reached. Use set(0,'RecursionLimit',N) to change the limit.
Be aware that exceeding your available stack space can crash MATLAB and/or your computer.

Error in ==> sym.ezplot
```

B. decide representar ahora las tres gráficas de nuevo con cuadrícula y guardarlas para visualizarlas luego juntas en la misma pantalla. Al mismo tiempo que representa y guarda, tanto B. como A. aprovechan para repetir o añadir información a los análisis que del desplazamiento, velocidad, y aceleración, han hecho ya antes. En un momento determinado A. lee el enunciado del apartado a) lo que condiciona también el análisis.

En un primer momento cuando sólo han representado la función desplazamiento, verifican que el mínimo está en (4,-80) y B. señala que en t=6 se vuelve al nivel del suelo (y=0):

Al representar la función desplazamiento y mallar, B. ya indica (tácitamente) que el punto mínimo se ve claramente en la gráfica (se refiere claro está al (4,-80). A. lo hace explícito.

[104] B. ---- *Mira, la representación nos dice que éste es el punto…* ---

[107] A. *En cuatro llega a su mínimo.*

[109] A. *También se ve que en ese la, la, la profundidad del pozo es de ochenta.*

[108] B. *Y en seis, alcanza, vuelve otra vez al mismo punto.*

B. continúa ahora con la representación de velocidad y aceleración (con cuadrícula) y las va guardando en el escritorio, la disposición definitiva en pantalla se decide en [120]-[123] y no se registra aquí porque no tiene mayor interés. A. lee en voz alta el enunciado del apartado a) y comienza a hacer algunas reflexiones al respecto:

[116] A. ---- *O sea, el significado de los valores negativos significa que están frenando.* ----

La afirmación es incorrecta en tanto en cuanto no se está analizando la aceleración como la variación de la velocidad, en cuyo caso un valor negativo de la aceleración sólo haría referencia a que la velocidad mengua. Puede haber valores de la velocidad negativos cuando se acelera si se aumenta de velocidad desde instantes de velocidad negativas. Matemáticamente, la situación es la misma. La velocidad decrece si y solamente si su derivada (la aceleración) es negativa. Sobre el signo de la velocidad y la aceleración, no hay relación fija, la relación es con la función desplazamiento. Está relacionando valores negativos de la velocidad con comportamiento (erróneo) de la aceleración en lugar de leerla en términos de la variación del desplazamiento. Valores negativos de la velocidad van asociados a desplazamientos decrecientes, en este caso, de descenso del pozo. Parece que aquí el análisis es del fenómeno, pero la interpretación errónea, como si se confundiera el hecho de que frenar (o desacelerar) produce valores negativos en lugar de pensar en reducción de velocidad. Velocidades negativas no se consiguen únicamente con desaceleraciones, ni éstas producen necesariamente velocidades negativas, sólo implican variaciones decrecientes de la velocidad. En [125] advierte el hecho de de que el signo de la velocidad depende del desplazamiento y no de la aceleración.

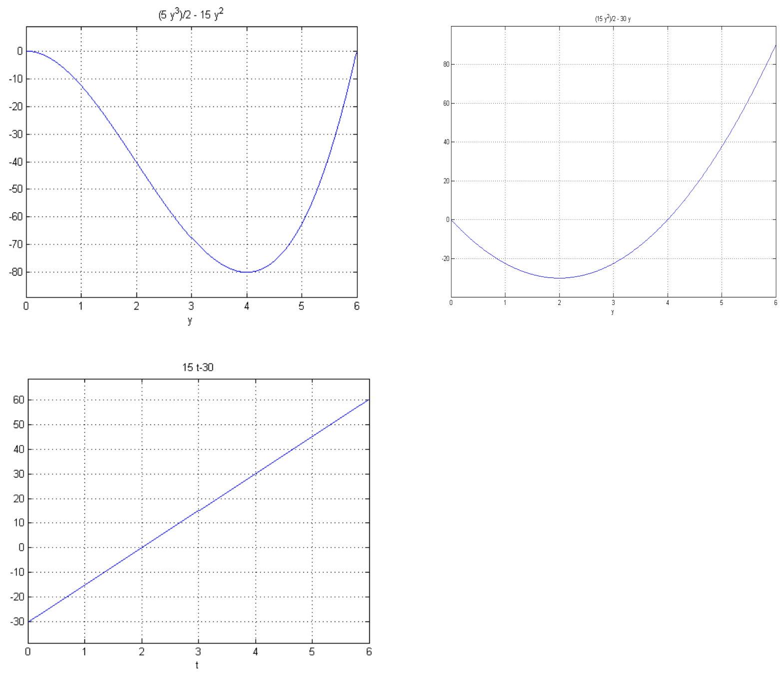
En [117] afirma que

[117] A. *Ah claro, ¿cómo puede estar frenando si tiene una velocidad 0?*

Quizás aquí se da cuenta de que su afirmación anterior es incorrecta. Entiende el frenado como el hecho de que una velocidad positiva acabe siendo cero, lo que no tiene sentido si se comienza con velocidad cero. Aquí parece estar la clave de sus razonamientos e incluso lo que acaba registrando en el manuscrito final: en términos físicos parece entender sólo valores positivos de la velocidad (mirar análisis de [125] y [127], así como la afirmación [131] más adelante).

En este instante, ya tienen las tres gráficas de desplazamiento, velocidad y aceleración en pantalla, dispuestas como si de una matriz 2x2 se tratara, en las posiciones (1,1), (1,2) y (2,1) respectivamente. B., ahora sí, participa en el análisis para responder el apartado a).

[124] B. *Se ve bien, ¿no? Bueno tenemos estas tres figuras, la del desplazamiento, la de la velocidad y la de la aceleración, ¿vale?* [Las señala con el bolígrafo según las nombra]. *Nos pide que expliquemos el significado de los valores negativos, positivos y cero, de la gráfica de la velocidad, ¿vale?*



Tal y como ya hemos indicado, A. sigue dándole vueltas a las afirmaciones que ha hecho sobre la velocidad negativa y el frenado. Advierte enseguida que está haciendo una lectura errónea del signo de la velocidad, y que éste sólo indica que el desplazamiento es en dirección hacia abajo:

[125] A. *Bueno, pero espérate la velocidad, claro, la velocidad no es que estemos frenando, la velocidad es que nos estamos moviendo pero hacia abajo.*

En tono de explicación comenta en [127] que

[127] A. *No, no podemos frenar si empezamos con velocidad cero* [con tono de explicación].

Comentario que corrobora el análisis anterior. El término frenar sólo tiene cabida para A. cuando se parten de velocidades positivas. Y las velocidades negativas sólo tienen sentido cuando se leen en positivo y su signo indicando nomás el sentido del desplazamiento en ese instante. De hecho, afirma que la velocidad debe considerarse en estos términos. Esto es, como si la velocidad fuera tan sólo en un instante, el valor absoluto de la imagen de la función velocidad. Tanto es así que cuando B. le indica que en ese caso tendría una gráfica de la velocidad alternativa (tomando de 0 a 4 en lugar de v(t), -v(t)), A. consiente.

[131] A. *En verdad podríamos coger la velocidad como su módulo.*

[132] B. *Entonces te haría esto.*

[133] A. *Claro porque en realidad eso es la velocidad, aquí no se está hablando de que sea …*

[135] A. *El problema de que sea negativo o positivo es …*

[136] B. ---- *Claro, exacto, ése es el punto, más la dirección que otra cosa. Sí, sí, sí, sí* ----

Paralelamente a A, B. inicia el análisis de la velocidad centrado en su gráfica sin más connotaciones que la matemática. La velocidad en cero es cero, negativa hasta el punto de abscisa t=4 que es justamente la abscisa del punto mínimo del desplazamiento y positiva a partir de ésta.

[128] B. ---- *empieza siendo cero la velocidad, empieza siendo cero la velocidad y como la velocidad es un vector, si te fijas, mira, mira, dónde vuelve la velocidad positiva* [señala punto de abscisa t=4 y mínimo en desplazamiento].

[130] B. En 4, cuando empieza a subir, cuando empieza a subir la velocidad es positiva, entonces, lo que nos dice,

Señalar aquí que B. se refiere a la velocidad como un vector, quizás influenciado por estudios de cinemática para partículas en el espacio, aunque en este caso, el análisis es para partículas en el plano, luego no es necesario referirse a desplazamiento, velocidad o aceleración como vectores. Quizás este comentario es el que da pie a A. para pensar en el módulo (que realmente para este caso es el valor absoluto) de la velocidad en la secuencia que hemos comentado anteriormente. Y éste comentario a su vez, el que da pie a B. para describir la velocidad en función de su módulo (valor absoluto) y su signo en [136], aunque no sabe bien cómo hacerlo, acuñando el término de velocidad instantánea al valor absoluto y atascándose con la explicación del sentido de su signo.

[136] B. ---- *la velocidad negativa, indica, por su módulo, la velocidad instantánea del montacargas y por su signo, eh, … por su signo,*

Vuelve en cualquier caso, inmediatamente a un análisis meramente funcional y sin significado físico que haga explícito. A. le acompaña, en el discurso (siempre con un cariz menos matemático y más cercano al fenómeno). De hecho, es interesante trasladar por separado sus reflexiones porque el contexto es claramente distinto. Mientras B. centra el análisis en la relación del signo de la velocidad con el comportamiento del crecimiento de la función desplazamiento vía teoremas de derivación, A. se refiere a la velocidad negativa como aquélla en que el desplazamiento es negativo, esto es, cuando el montacargas baja; el punto de corte con los ejes, coincide (velocidad cero) con el de llegada al fondo del pozo (dice también cuando llega hasta arriba quizás le traiciona el subconsciente porque en origen cuando se piensa en el movimiento de un ascensor, la primera reacción es la de visualizarlo en un movimiento de subida); duda en la valoración en t=6 lo que propicia un debate posterior y que relatamos después. Notar que B. no alude al significado del valor nulo de la velocidad.

[137] A. *Los puntos negativos lo que nos indican es el sentido del desplazamiento que es como que se profundiza en ¿?¿?…. , el punto cuando corta el eje de las x es,*

[138] B. *Claro si, si f’ es mayor que cero es que la función es creciente. Por lo tanto y por su signo, si la posición, el desplazamiento, es que es decreciente o creciente. Decreciente si la velocidad es negativa y creciente si la velocidad es positiva.*

-----

[139] A. *Cuando el valor es igual a cero, lo que tenemos es el punto de cambio, no, cuando toca fondo, cuando llega hasta arriba.*

[140] B. *Claro, a ver, apliquemos teoremas de derivadas, si la función derivada es menor que cero, en todo ese intervalo la función es creciente, es decreciente, de, decreciente, y si es mayor que cero, es creciente.*

Tras el análisis, los manuscritos de A y B reflejan lo siguiente:

Manuscrito A. ***La velocidad es cero en v(0), y no puede ser negativa si empieza en cero. Los puntos negativos nos indican el sentido del desplazamiento que se adentra en la mina. La velocidad es negativa y positiva pues, dependiendo de la dirección del eje y.***

Manuscrito B. ***La velocidad negativa indica por su módulo, la velocidad instantánea del montacargas y por su signo si el desplazamiento es decreciente o creciente. Decreciente si la velocidad es negativa y creciente si la velocidad es positiva.***

Para terminar el apartado a), A. se centra ahora en el comportamiento de la velocidad para valores temporales superiores (o iguales) a seis, lo que tal como hemos indicado, propicia un debate acerca del dominio de definición del modelo. De nuevo, parece que A. está pensando en el fenómeno que la función desplazamiento modela. A saber, si en t=0 y t=6 la función desplazamiento vuelve a nivel del suelo y en consecuencia el comportamiento es el mismo (en el instante), así debería ser también con la gráfica de la velocidad y la aceleración.

[141] A. *Y sin embargo, esta, esta gráfica la tendríamos que, que….*

[143] A. *El problema es que aquí, desde aquí vuelve aquí, entonces, aquí sí que empieza y acaba en el mismo sitio, pero en el gráfico de la velocidad no y en el de la aceleración tampoco.*

A lo que B. argumenta vía las pendientes de la curva del desplazamiento, que quizás haya un frenazo en seco (pensando realmente en que la velocidad se anula). Usa el término frenado (y como A. en su momento) para un instante en que la velocidad que viene siendo positiva se anula, sólo que está relacionando velocidad con desplazamiento en lugar de aceleración y velocidad, lo que invalida el uso del término. Lo que pretende es buscar una explicación que justifique que hay parada en t=6 (aunque la velocidad en ese punto no se anula, cosa que sí detecta A., B. parece admitir que se pueda pasar de un valor positivo a cero de 'un plumazo'). Obviamente yerra. Si tal y como indica, las pendientes son cada vez mayores en el tramo de abscisas [4,6], difícilmente van a converger a pendiente cero.

[144] B. *Bueno porque aquí frenará, fíjate que ésta* [sigue de arriba abajo el tramo de curva de desplazamiento entre la abscisa t=4 y t=6], *esta pendiente es mayor, aquí* [punto de abscisa t=6], *frenará en seco, supongo claro.*

[145] A. *Pero aquí* [punto de abscisa t=6 en la gráfica de la velocidad], *¿también?*

[146] B. Sí, claro, lo que frena es la velocidad, no el desplazamiento, pero bueno.

A. no parece aclararse con lo que B. argumenta y se pregunta qué sucedería en el punto de abscisa 7, en cómo sería el ciclo en ese caso. A. parece referirse a un ciclo como el dominio de definición de la función que debería después extenderse por periodicidad. Quizás quiera ver qué sucede más allá del seis porque no se da, tal y como debería ser, comportamientos análogos en desplazamiento, velocidad y aceleración para descenso y ascenso al mismo tiempo. De nuevo, piensa en el fenómeno que se modela. B. sin embargo, que sólo piensa localmente, defiende la postura de que no es necesario mirar más allá. B. entiende por el momento que el modelo es adecuado, habla de frenar y volver a poner en funcionamiento sin advertir, ni siquiera cuando comenta en [148] que se llega a t=6 con mucha velocidad, el hecho de que debería llegar con velocidad cero para llegar a un punto de parada.

[147] A. *A ver y si son valores hasta siete y vemos cuál es, cómo hace el cambio en un ciclo así,*

[148] B. *No, no, no, no, no, no hace ciclos, tú lo frenas, el montacargas, y luego lo vuelves a poner en funcionamiento, ¿vale? Entonces estamos analizando este intervalo, de cero a seis, no puedes analizar de cero a siete. Va y vuelve al mismo sitio, sólo que baja con menos velocidad y sube con mucha. Acaba, acaba subiendo a mucha velocidad. Tarda más en bajar que en subir.*

[150] B. ---- *pero, está diciendo que y es igual a 0 y que el tiempo es igual a 0, estamos estudiándolo en este intervalo, te da igual lo que pase fuera de él.*----

[151] A. *No, no, te da igual lo que pase antes que él.*

[152] B. *Da igual y lo que le pasé después. El montacargas baja y sube.*

A. insiste en el problema comentando con B. si después de t=6, el desplazamiento se comporta igual que antes de t=0. B. sabe que no (de hecho comenta que se va al infinito y lo argumenta aludiendo al orden de un cubo que es superior al de un cuadrado para valores mayores que 1), pero sigue sin darle importancia. Impera su visión local y su creencia de que 'algo' 'salva' la parada en la llegada. De hecho, se puede justificar su empeño porque en el enunciado del problema sólo se habla de un viaje de ida y vuelta.

[153] A. *¿Y después se comporta igual?*

[154] B. *No, sube hacia el infinito.*

[155] A. *¿Cómo lo sabes?*

[156] B. *Pues una función cúbica que es mayor que, que, que cero, es mayor que cero, o sea, es mayor que cero, para todo, mayor que… Es mayor que cero para todo real mayor que 6, porque el cubo es mayor que el cuadrado, o sea, crece más rápido.*

[157] A. *Entonces se dispara hacia el infinito.*

[158] B. ---- *Claro, eso te da igual, lo que pase después.* ----

B. momentáneamente, acaba por convencer a A. recurriendo a que en un viaje en ascensor, la velocidad no se dispara hacia arriba en la llegada, sino que se frena en el piso al que uno va. En la intervención [160] habla de un ficticio piso -1 y piso 0 (se equivoca al nombrar el piso 1). Analizando globalmente este interés de B. por justificar el comportamiento en t=6, da la sensación de que de nuevo, está intentando ajustar el fenómeno al modelo y no al contrario, como si estuviera convencido de que el modelo es apropiado salvo pequeñas variantes irrelevantes.

[158] B. ---- *Claro, eso te da igual, lo que pase después. ---- ---- A ver, lo que tú has dicho, por ejemplo, un ejemplo, el ascensor: tiene una velocidad cuando baja y una velocidad cuando sube. Y esa, y esa velocidad sigue una función, pero cuando tú frenas en tu piso, ¿a qué no se dispara arriba? ----*

[159] A. *Eso está claro*

[160] B. *Pues aquí lo mismo. Baja hasta el -1 y luego sube hasta el 1, hasta el 0 y no sigue, no sigue.*

[161] A. *No, eso sí que lo sé.*

[162] B. *Ale, pues ya está.*

[163] A. *¿Pero eso quiere decir que sólo tenemos que estudiar la función en este punto y ya está?*

[164] B. *Sí, es este intervalo.*

En el transcurso del debate anterior, B. aprovecha para terminar su respuesta al apartado a). Se limita a decir en voz alta lo que luego aparece en su manuscrito, esto es, a marcar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función desplazamiento según el signo de la velocidad y a marcar los dos puntos de reposo (ahora sí da significado a velocidad nula) en t=0 y t=4.

[158] B. ---- *en el intervalo cero, cuatro, eh … en el intervalo … cero, cuatro, la velocidad … es negativa y el desplazamiento es decreciente y el montacargas va al fondo del pozo.----*

[164] B. ---- *Desplazamiento cero, cuatro, la velocidad es negativa y el desplazamiento es decreciente. Montacargas va al fondo del pozo… En el intervalo, en el intervalo, esto es abierto, y esto también [está escribiendo en sus notas] cuatro, seis, cerrado, la velocidad es positiva y el desplazamiento es creciente, vuelve al nivel del suelo, de suelo. Usando que tienes, o sea propiedades de derivadas en los puntos y=0 y x=4 la velocidad,*

Manuscrito B. ***En el intervalo]0,4[la velocidad es negativa y el desplazamiento es decreciente, el montacargas va al fondo del pozo. En el intervalo]4,6] la velocidad es positiva y el desplazamiento es creciente, vuelve al nivel del suelo. Usando propiedades de derivadas, en los puntos t=0 y t=4 la velocidad vale 0, el móvil está en reposo.***

En el caso de A. también registra:

Manuscrito A. ***Los valores positivos indican que el montacargas sube. Cuando el valor es =0,*** *(no escribe nada)*

Entiendo que A. no escribe nada cuando se refiere al valor cero para la velocidad porque salvo para relacionarlo con un mínimo en el desplazamiento, tiene problemas para encontrarle un significado físico que le satisfaga. De hecho, toda la explicación de A. queda falta de información. Quizás porque el modelo no se ajusta demasiado bien a la realidad y en consecuencia no permite una explicación plausible.

Al contrario de lo que sucedía en la discusión del apartado anterior, A. opta en el apartado b) por estudiar la relación entre aceleración y velocidad a partir de las relaciones entre funciones una derivada de la otra, siguiendo el tipo de argumentos que B. usó en a) y que vuelve a utilizar en b). Afirma así que la velocidad decrece si y sólo si la aceleración es negativa. No comenta nada sobre lo que sucede con aceleraciones positivas. No obstante, A. parece que sigue pensando en el fenómeno, dado que comete un error en la intervención [169] cuando afirma que el punto de abscisa t=2 (se infiere de su manuscrito y de ítems posteriores que es este punto y no otro), tanto la velocidad como la aceleración son nulas. Quizás lo razonable hace mella en su pensamiento al esperar que en un punto de reposo se cumplen estas condiciones. En el análisis cualitativo del fenómeno se advierte que en la salida, la aceleración no puede ser cero pues necesitamos el mecanismo que haga arrancar el montacargas. Realmente es nula antes de accionar el mecanismo y en la primera fracción de segundo deja de serlo. En términos funcionales, la imagen en la salida es cero, pero hay un salto de discontinuidad en cuanto se inicia el movimiento; sucede lo mismo en la llegada, en la que debe haber un mecanismo que frene por completo el montacargas, pero este llega (en términos infinitesimales) en desaceleración con una aceleración constante, aunque puntualmente, la aceleración en la llegada pase a ser nula. Así las cosas, no puede considerarse el caso de aceleraciones nulas para la salida y la llegada (tanto en ascenso como en descenso), si el modelo no tiene en cuenta esas discontinuidades.

Por otra parte, es cierto que en t=2 hay un mínimo en la función velocidad, que coincide con aceleración nula en ese punto, pero no un mínimo de la función desplazamiento tal y como también indica. Está pensando de este modo porque para poder hablar de puntos de reposo, necesita además que sean extremos relativos de la función de desplazamiento. Señalar que este último error ya aparece corregido en el manuscrito final, no así que en el punto de reposo velocidad y aceleración son nulas.

[165] A. *Además la velocidad es decreciente cuando la aceleración es negativa.*

[169] A. *Pues ponemos que la aceleración es negativa cuando la velocidad es decreciente y viceversa, viceversa y es eso, el punto de reposo coincide en las dos porque es, es un máximo entre la, es un mínimo de la función… un mínimo relativo de la función de desplazamiento*.

En el caso de B. y como ya había hecho antes A., evalúa la relación entre velocidad y aceleración en términos de relaciones entre función y derivada, pero introduce términos como frenar y acelerar que en este caso tienen sentido para velocidades negativas. Entiendo que B. habla de frenar como de decelerar y no necesariamente llegar a velocidad cero y que habla de acelerar cuando el móvil produce variaciones de velocidad cada vez mayores. Así, se tiene aceleración negativa para velocidad decreciente, luego se frena y aceleración positiva, velocidad creciente, luego se acelera. Duda sin embargo, cuando se refiere al punto de reposo, influenciado quizás por lo que acaba de decir A. o también por lógica y razón. Incurre, como éste, en un error al señalar que aceleración y velocidad en el punto de abscisa t=2, son nulas. En su manuscrito, sin embargo, está correcto. La razón, que en las siguientes intervenciones se da cuenta de que en t=2 no hay realmente un punto de reposo (de hecho tampoco es extremo de la función de desplazamiento) sino que es un punto de inflexión.

[172] B. *más o menos lo mismo sí. A ver, si ésta es la derivada de éste, ésta es la derivada de éste. Entonces, eh, cuando la aceleración es negativa, la velocidad es decreciente, el móvil frena, y cuando la aceleración es positiva, la velocidad aumenta, la velocidad aumenta en el último momento y el móvil acelera. Eh, … si el móvil está en reposo, si el móvil está en reposo, si el móvil está en re-po-so, la velocidad vale cero, y la aceleración también. Ya está.*

Precisamente B. vuelve al estudio del punto de aceleración cero, como si no estuviera del todo seguro de su respuesta. Da en la clave al señalar el comportamiento de paso de la función desplazamiento de cóncava a convexa en ese punto. Señala esta circunstancia haciendo ver que en un entorno del (2,f(2)), parece que apenas hay curvatura, el paso de cóncava a convexa es tan suave que casi parece una recta de derivada constante. A. corrobora esta idea en [175] cuando afirma que se trata de un punto de inflexión.

[174] B. ---- *vamos a ver qué pasa cuando la velocidad es cero, o sea, si la aceleración es cero* [señala el punto de la gráfica de la aceleración de abscisa t=2]*, el movimiento es constante, en ese punto* [señala el punto de abscisa t=2 en la gráfica del desplazamiento], *si te fijas, el movimiento es constante* [sigue la gráfica en un entorno no muy grande del (2, f(2))], *la derivada es una.*

[175] A. *Sí, cuando la aceleración es cero es el punto de inflexión.*

De [176] a [184] se 'recrean' recordando la definición de punto de inflexión. A. habla primero de paso de creciente a decreciente, y ante la extrañeza de B, que no acierta a explicarlo, parece recordar que es de convexa a cóncava, o de cóncava a convexa como le matiza B. Claro está, porque depende del punto de mira.

[175] A. *Sí, cuando la aceleración es cero es el punto de inflexión.*

[177] A. *De la… cuando pasa de creciente a decreciente,*

[178] B. *No, cuando pasa de…*

[181] A. *De convexa a cóncava*.

[182] B. *No, perdona, de cóncava a convexa*.

[183] A. *Depende del eje y.*

[184] B. *Depende de quien lo diga.*

B. termina el apartado b) señalando que en t=2, la velocidad alcanza un mínimo, la aceleración vale 0, y hay un punto de inflexión en el desplazamiento. A. por su parte, debe estar escribiendo la parte de manuscrito en la que afirma que la aceleración es nula en t=2:

[187] A. ---- *La aceleración es cero en t igual a dos, t igual a dos,----*

[188] B. ---- *en el punto de inflexión en t dos, la velocidad alcanza un mínimo, y la aceleración vale cero.—*

Dejan registrado:

Manuscrito A. ***Podemos ver que la aceleración es negativa cuando la velocidad es decreciente y viceversa. En el punto de reposo coinciden la velocidad=0=aceleración, en el punto de inflexión del desplazamiento, en t=2.***

Manuscrito B. ***Cuando la aceleración es negativa, la velocidad es decreciente, el móvil frena, y cuando la aceleración es positiva, la velocidad aumenta y el móvil acelera. En el punto de inflexión en t=2 la velocidad alcanza un mínimo y la aceleración vale 0.***

Comienza ahora A. con el análisis de las fortalezas y debilidades del modelo. Como si no se hubiera convencido antes de que el modelo tenía que mirarse sólo de forma local en [0,6], comenta que es el problema quizás más 'gordo' el hecho de que dicho modelo no puede utilizarse más allá de ese intervalo. Debería ser una función de periodo 6 o extenderse por periodicidad con ese periodo (el habla de módulo 6, pero se refiere realmente a periodo 6). No le cuadra ni por la parte del desplazamiento, ni por el de la velocidad, y aunque aquí no vuelva a hacerlo explícito, ni por el de la aceleración. Habla de inestabilidad, refiriéndose a la no periodicidad. Marca que no tiene sentido que el desplazamiento se vaya a infinito.

[189] A*. O sea, yo creo que el, el problema así más gordo, es que yo creo que esto, sólo nos sirve para un intervalo de cero a seis. O sea, si nos piden por ejemplo calcula en qué posición estará si al cabo del día, los 360 minutos y con esto no lo tendríamos, no. Lo tendríamos que coger y hallar, eh, el tiempo que nos dan módulo 6 y después extrapolarlo aquí. Pero o sea, esto es muy irreal porque…. O sea, fuera de esto, fuera de lo que es esto, el intervalo*, *como me estabas explicando antes, el espacio se va al infinito, la velocidad,*

[191] A. *En ese sentido es muy inestable.*

A sugerencia de B. que no termina de entender bien lo que se le pide en el apartado c), se establece un diálogo entre Luís, Gina, A. y B. de [192] a [216] con episodios de intervención de Luís o Gina en función de la necesidad que advierten de reconducir o matizar las respuestas o el sentido de las mismas que proponen A. y B. B. comienza planteando a qué se refiere exactamente la pregunta del apartado c):

[192] B. *Por favor... vamos a preguntar qué es a lo que se refieren exactamente con esta pregunta.* [..] *En la pregunta c) la de evaluar la utilidad e identificar los problemas del modelo dado, ¿qué tenemos que hacer?*

A lo que Luís y Gina responden planteando en forma de pregunta explícita o implícita, si el modelo funciona bien ([193]), si se puede mejorar ([193][194]), si es perfecto ([196]), si ellos lo usarían ([198]) o cómo irían (se sentirían) en un elevador con las características del modelo dado ([201]). En ningún caso dan pistas sobre las fortalezas y las debilidades del modelo, sólo instan a recuperar su análisis, lo que cambiarían y lo que no.

[193] Luís. *Pues tienes que, tienes que pensar precisamente o sea si, si este modelo que te han dado a ti, para describir el movimiento del montacargas tiene alguna cosa que no funcione muy bien, algo que se pueda mejorar,*

[194] Gina. *¿Se puede mejorar?*

[196] Gina. ---- *¿es perfecto?*----

[198] Gina. *¿Tú lo usarías?*

[201] Gina. ---- *¿te iba a gustar un elevador que funcione así?, ¿cómo te ibas a sentir? ¿con miedo, con* ¿?¿?? ----

Durante la conversación, B. señala ya algunos contras como la imposibilidad del modelo para explicar lo que sucede después del intervalo [0,6] y el hecho de que baje más lento que sube (B. se equivoca en primera instancia pero rectifica). No sólo en este momento, si no en posteriores, repetirá estas ideas, en tanto en cuanto, Gina le va instando a buscar la forma de arreglarlo o le hace reflexionar sobre que algo puede no estar bien en el modelo.

[199] B. ---- *baja bastante más rápido que sube o sea baja bastante más lento que sube, eh... después de eso, del minuto seis ya no puedes explicar nada.*----

[201] Gina. *Todo eso sí, sí, sí… mientras tú ya lo estás viendo, ya lo estás analizando, lo que estás diciendo, entonces todo eso, … o sea tú imagínate* ----

[202] B. *No sé, si bajo muy lento y subo muy rápido…*

[204] Gina. *Ah bueno pues entonces arreglemos.*

[205] B. ---- *hablemos de que baja más rápido que sube y que, después que del minuto seis no se explica, es más que luego cuando te pone que crees …* ----

Gina aprovecha la indecisión en [205] de B. para preguntar lo que sucede en el punto de abscisa t=6. Busca con ello de nuevo la reflexión de B. (y de A.). B. yerra al asumir que en el punto de abscisa t=6, el elevador se frena en seco. De hecho, es ya un error pasado, el mismo que utilizó para justificar su visión local del movimiento. De algún modo, daba por sentado que a pesar de llegar con velocidad elevada, la aceleración era nula porque el elevador debía pararse. Esta situación da pie a Gina a incidir de nuevo en lo que sucede en t=6. En [210] y [212] Gina insiste de nuevo, instando a analizar el modelo.

[206] Gina. *¿Qué es lo que te pasa en el minuto seis?*

[207] B. *En el minuto seis, que frena en seco.*

[208] Gina. *¿Frena en seco?*

[210] Gina. *¿Qué hace?*

[211] ---- B. *Sale por el aire* ----

[212] Gina. *¿Y cómo te bajas del elevador?*

Paralelamente, A. insiste en la idea de que hay algo extraño, incorrecto, en los mismos aspectos que señala B., esto es, en el comportamiento de las funciones en [0,6], en el hecho de que se baje más lento que se suba y en que el modelo no frena en seco en t=6 (aceleración no nula en el punto de abscisa t=6). Gina apuesta en este caso por instar a arreglar el problema, quizás pensando también en los apartados posteriores amén de instar al análisis. En [203] A. se refiere a subir lento y bajar rápido y en [209] a frenar en seco, con lo que implícitamente también a la validez del intervalo [0,6]. De hecho, está invalidando el modelo. En [213] A. se refiere a que no podrías bajarte del montacargas en el punto de abscisa t=6.

[203] A. *Es que no tiene sentido porque…*

[204] Gina. *Ah bueno pues entonces arreglemos.*

[209] A. *No, en esta función no. Por eso está mal.*

[213] A. *No puedes*.

[214] Gina. *Bueno, entonces hay que arreglarlo, ¿vale?*

De [216] a [226] vuelven al trabajo de análisis con una nueva intervención de Gina que insiste en el hecho de que hay algo no razonable en el modelo. Sus apreciaciones son siempre en base a comentarios en la misma línea de los participantes, no da pistas, sólo refuerza la veracidad del análisis de A. y B. En este episodio centran el estudio en lo que sucede en el punto de abscisa t=6 de las tres funciones: desplazamiento, velocidad y aceleración. Este análisis da pie, además, a hacer explícita una primera solución al modelo correcto (más bien la idea de comportamiento del modelo idóneo) en una función trigonométrica:

A. refleja en primer lugar, que en el desplazamiento se sube indefinidamente a partir de t=6, a lo que B. argumenta que si bien la velocidad no es excesiva en ese punto, sí lo es la aceleración lo que explica que el desplazamiento crezca tan rápido. Aquí B. hace un análisis adecuado de la situación. Si la aceleración (positiva) es muy grande, la variación de la velocidad es de aumento y también elevada, lo que produce a su vez una variación del desplazamiento también elevada.

[216] A. *Es que claro, nosotros nos tomamos como que sólo se podría definir en un intervalo de 0 a 6 que es como nos dice lo que tarda en un viaje de ida* [Gina. *Exacto*], *pero, pero es que fuera de ese intervalo es como se, …. se dispara demasiado, no tiene sentido lógico.*

[217] B. *O sea que lleva una aceleración muy, muy, fuerte* [señala en la gráfica de la velocidad, el punto de abscisa t=6 sobre la curva*], y la velocidad es, o sea ochenta, ochenta metros segundo, ochenta metros minutos, a ver, no es una velocidad pero, puede salir volando rápido.*

A. sugiere representar de nuevo la función desplazamiento en el intervalo [0,10] para visualizar cómo es ese crecimiento a partir de la abscisa t=6, situación que B. asegura va a dar cuenta de que la función se va hacia infinito. Gina interviene para comentar que algo no es razonable. En [225] B. se reafirma en lo que decía en [217]: a mayor tiempo, se recorre mucho más espacio, sólo posible si la velocidad crece muchísimo (porque así lo hace la aceleración). Notar que en términos físicos, comoquiera que trabajan con aceleraciones positivas y velocidades positivas, no hay dudas ni errores de apreciación.

[218] A. *Para eso lo que podemos hacer es definirlo en un intervalo mayor de seis y ver cómo es en verdad* [reescribe algunas de las sentencias anteriores de Matlab® hasta quedarse, rectificando, con la que representa el desplazamiento en el intervalo 0, 10].

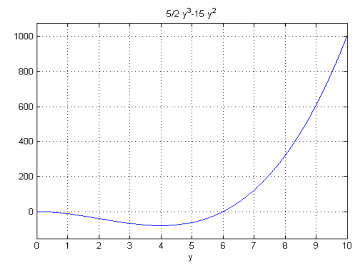
[219] B. *Uf, vas a flipar. Se te va a ir a infinito, ahí lo tienes.*

[220] Gina: *Algo no es razonable, ahí*

[225] B. *Si te fijas tío, ¿mil metros en 10 minutos?*

[224] Gina. *Entonces hay que….*

```
>> ezplot(f,0,10)
>> grid
```



A. acaba concluyendo (recordar que antes había invalidado el modelo en [209]) que tiene clara la razón por la que hay que mejorar el modelo y B. por su parte, proponiendo una función seno, aunque A. no se aventura con facilidad, y parece necesitar un análisis más exhaustivo ([232]) para tenerla en consideración.

[228] A. *Está claro por qué ahora tenemos que mejorar el modelo.*

[229] B. *Una función seno.*

[232] A. *Si, lo único que…*

[233] B. ---- *En verdad sí, claro.*----

Después del análisis anterior, ponen negro sobre blanco los pros y los contras al modelo. Comienza B. con los pros del modelo: bien explicado [237], bien tomado el sistema de referencia [237], puntos notables de valores enteros [239] [241], que en consecuencia son fáciles de identificar al escalar [241], lo que permite visualizar puntos de corte con los ejes, mínimos, etc… ([242] [243] [244] [245] [246] [249] [251] [253]). En [243] B. se equivoca al señalar que en t=2 la velocidad es constante, cuando lo que tiene es un mínimo para la velocidad, luego aceleración nula (como indica A. en [244] y el propio B. que reconoce su error en [245]):

[237] B. *Yo, ponemos pros, ponemos pros. A ver, está bien explicado, bien tomado el/la referencia, está bien tomado el sistema de referencia.*

[239] B. *Se busca, está claro que se busca momentos que sea fácil de identificar para que, para el que lo estudie, que tiempo cuatro no es tiempo cuatro, cuatro Pi, ni cuatro e, es cuatro.*

[241] B. *Eso está bien explicado, en el dos pasa algo, en el cuatro pasa algo, en el seis y en el cero pasa algo.*

[242] A. *Y de identificar cuándo se llega al fondo que es justo que, cuando coincide, la velocidad es cero.*

[243] B. ---- *Ponemos los pros: está bien puesto el sistema de referencia y los puntos donde pasa algo*. *Estos puntos son el tiempo igual a 0 que parte, t igual a dos que, ¿qué pasa en t igual a dos? , que la velocidad es constante,----*

[244] A. *En t igual a dos es cuando deja de decelerar, el…*

[245] B. *no la velocidad es, la velocidad es mínima* [señala el mínimo en la gráfica de la velocidad],

[246] A. ---- *que es cuando deja de decelerar, la aceleración es cero*. ----

[249] B. *Ah vale, vale; t igual a dos, que la ve…, que la alcanzamos [*se refiere a la velocidad].

[251] B. *Claro, bueno, pues eso es que está bien puesto el sistema de referencia, entonces hay que hacer una eh, en t igual a cuatro, alcanzamos el pozo sin fon .. eh, el fondo del pozo, el fondo del pozo. ----*

[253] B. ---- *el fondo del pozo…* ----

A pesar de que de [237] a [253] parecen estar de acuerdo A. no refleja ningún pro en su manuscrito final. No será ese el caso para los contras.

En [250], A. refleja que no hay parada en el fondo, pudiéndose referir a que no se llega al fondo con velocidad y aceleración nulas, cuando ambas deberían tomar ese valor allí. De nuevo olvida el elemento de puesta en marcha y frenado del montacargas. Notar que está pensando en el punto de abscisa t=4 donde se debería pasar de decelerar a acelerar, que como él bien indica no es lo que sucede, aunque es lo lógico, lo razonable, lo esperable del fenómeno. Marca la gráfica de la aceleración (donde a no es cero y por ello puede argumentar como lo hace) aunque nombra la velocidad. Ambas deberían ser cero en t=4. Al final de la intervención insiste en que no tiene sentido que no te puedas bajar del ascensor, por lo que su foco de atención parece estar más en el hecho de que no haya un tramo de constante de ordenada -80, que en que no llegue con velocidad=aceleración=0 (no obstante sí registra en su manuscrito que la aceleración no es cero en ese punto). En [262] vuelve sobre el hecho de que no para (ya obviando el tramo constante en -80) y yerra al hablar de que en t=4 llega con velocidad enorme (está malinterpretando el valor de aceleración no nula), pero sí acierta en que en el punto está acelerando cuando si es de reposo, debería ser cero. A. relaciona también el hecho de que no pare en t=4 con que no se podría dejar el material [260].

[250] A. *Y luego falta decir que en el momento en el que llega al fondo y se produce el cambio de decelerar a acelerar, no para, o sea, está claro que no se ha tenido el tiempo que está abajo pero porque no hay tiempo de abajo, justo en el tiempo 4* [señala con el bolígrafo sobre la gráfica del desplazamiento en la pantalla], *que es cuando llega abajo, tenemos una velocidad*

bastante grande [señala ahora en la gráfica de la aceleración el punto de abscisa t=4] , *o sea, no tiene sentido utilizar un montacargas en el cual no te da tiempo a bajarte o a subirte, ¿no? No tiene sentido.*

[260] A. *el único punto en el que se podría […] dejar el material…*

[262] A. *El tema es que en el punto, en el punto t igual a cuatro* [señala en punto de abscisa cuatro en la gráfica de la aceleración], *cuando se alcanza el fondo* [señala el mínimo en la gráfica del desplazamiento], *o sea, no podremos tener una velocidad tan grande porque, o sea es que en verdad estás acelerando en el punto, en el punto en el que debería estar, en el punto de reposo, el montacargas está acelerando, no tiene sentido.*

Paralelamente B. que empieza a evaluar los contras en [253], nombra el hecho de que el modelo sólo puede aplicarse en el intervalo [0,6], y que fuera de él no tiene sentido, que llega a 80 metros de profundidad y no a los cien como indica el enunciado. Recapitula en [255]. Alude también a la velocidad que es muy grande en t=6 y que en consecuencia en dicho punto no se podría bajar [255][257][259]. Notar que ya acepta el hecho de que no es razonable que en t=6 velocidad y aceleración no sean nulas. Ya no hay frenada en seco como por arte de magia. De hecho, en [263] añade que en dicho punto la aceleración es muy brusca. Recapitula todo en [265] aunque añade comentarios sobre la velocidad que analizaremos después. Cuando A. nombra el material, lejos de pensar como él (aceleración no nula en t=4), vuelve al tema de que no se llega a profundidad 100, lo que dificultaría la entrega. B. recogerá todos estos puntos en su manuscrito. En algún momento, A. sigue el razonamiento de B. ([264]) y también recogerá el contenido de esta intervención en su manuscrito.

[253] B. ---- *Contras. A ver, que empiece la fiesta. Es un modelo sólo aplicable en el intervalo cero-seis, fuera* [escribe y lee en voz alta] *no tiene sentido, y así como gracioso, porque si en el enunciado nos dice que la profundidad del pozo es cien metros y llega hasta menos ochenta ¿qué te comes veinte metros y saltas hacia abajo?*----

[255] B. [relee] *Sólo aplicable en el intervalo cero, seis, fuera no tiene sentido, la velocidad cuando volvemos,*

[257] B. *es muy grande,*

[259] B. *y no podríamos bajar*.

[261] B. *El material es que no se puede dejar, o sea, si llegas a -ochenta, hay cien metros de, de eso no llegas a, abajo del todo.*

[263] B. *Ya, no podríamos bajar el montacargas… así como la aceleración sería muy brusca. Además, el valor mínimo de la función es de ochenta metros y queremos a los cien.*

[264] A. *Lo que pasa en el punto t igual a seis, que es cuando llega otra vez al punto de inicio, en teoría debería pararse.*

[265] B. *Sí, no podríamos bajar del montacargas*. *Sería muy brusco, además, el valor mínimo de la función es de ochenta metros y queremos llegar a los cien. Hemos dicho tema de la aceleración y tal, que aquí no nos podríamos bajar, que aquí cuesta subir, que no llega hasta abajo y que…*

A., que sigue con la idea de pensar en lo que ocurre en t=4 (la aceleración no es nula) intenta buscar una explicación que le satisfaga. Para ello propone que se debería poner una especie de freno para que no fuera tan rápido, lo que es algo inconsistente porque en t=4, la velocidad es cero. Pero al hablar de la velocidad y de si el montacargas va o no rápido, B. redirige el debate hacia el comportamiento de ésta. A. parece ceder momentáneamente en la búsqueda de la explicación.

[266] A. *O sea, la única explicación que podría tener es que cuando estás dejando el material y no quieres que se te descontrole, lo que es el ¿¿??,*

[268] A. *Le pones una especie de freno o algo para que no vaya tampoco…. rápido*.

La discusión se dirige así, hacia el comportamiento de la velocidad en t=6. B. argumenta primero que en el tramo de bajada, esto es, el intervalo [0,4], la velocidad no es excesiva (100 m en 4 minutos, a menos del paso de una persona), por lo que dirigen el punto de mira hacia lo que sucede después. B. incluye esta última apreciación en los pros.

[271] B. R*ápido, o sea, en tres minutos, o sea, en cuatro minutos recorrer cien metros es menos de lo que tú vas andando por la calle.*

[272] A. *Quizá el problema no es que baje a esa velocidad, sino que luego, que suba…*

Ya valorando la velocidad (y supuesto un mecanismo que controle la llegada a t=4) en el intervalo [4,6], comentan si es o no razonable el hecho de que suba tan rápido (o que tarde menos en subir que en bajar). Intentan buscar una razón física, pero asumen que no parece razonable que yendo cargado se dé esta circunstancia. ([273][274][275][276][277]). A. y B. señalan en varias ocasiones su extrañeza ([274][277][278]). De nuevo se intenta adaptar el modelo al fenómeno, y no al contrario. Obviamente, fracasan en el intento.

[273] B. *Sube muy rápido, eso sí, sube rápido.*

[274] A. *Eso sí que es extraño.*

[275] B. *A ver, a lo mejor que también es importante, a lo mejor también es importante que suba rápido porque... pero no creo que los materiales sufran de, de... sufran de…*

[276] A. *Sobre todo yo creo, yo creo que es complicado porque en principio sube más cargado, ¿cómo va a subir con más aceleración y con más velocidad si cuando sube tiene más peso y en teoría le debe costar más?*

[277] B. No tiene sentido. *Si sube cargado, no puede subir a tal velocidad. No puede subir a tal velocidad, se descontrolarían los materiales*, *aunque te digo, no es una velocidad excesiva, pero bueno sí, en el momento que subes, a los diez minutos, está volando. O sea, la velocidad a los diez minutos es muy grande.*

[278] A. *No tiene sentido.*

[279] B. ---- *Se descontrolarían los materiales* ----

Cierran aquí la discusión, B. recapitula en [279] aunque A. apostilla que no es necesario que se llegue a 100 metros de profundidad, que en el enunciado sólo indica que aproximadamente la profundidad es 100. Razón por la que además no incluye este punto en su manuscrito. B lo añade y así lo indica en [281]. Incluye también que la velocidad de bajada es buena (80 metros en 4 minutos).

[279] B. *Se descontrolarían los materiales* [relee]. *Pues eso he dicho, insisto, si está referencia y tal está bien puesta, pero es un modelo solo aplicable, fuera de él no tiene sentido, la velocidad cuando volvemos es muy grande y no podríamos bajar del montacargas, así como la aceleración sería muy brusca, además queremos llegar hasta los cien, si sube cargado no puede subir a tal velocidad.*

[280] A. *Pero es que luego, él no lo dice, te dice que la profundidad del pozo es aproximadamente cien metros, pero no te dice que sea cien metros, eso sí que casa con lo que nos están diciendo* [B. Ochenta], *en el problema.*

[281] B. *Trabajemos con cien y una cosa más que modificar.*

[285] B. *Yo añadiría a los pros que la velocidad no es excesiva porque si en cuatro, o sea, cuando baja, la velocidad es muy lenta, en cuatro minutos, ochenta metros, un abuelo con tacatá… La velocidad cuando baja es buena.*

Manuscrito A. ***Contras: el modelo es bastante inestable. Sólo tiene cierta lógica en un intervalo [0,6] y aún así presenta incoherencias.***

1- En el punto más bajo del modelo, el supuesto punto x de llegada o de reposo, la aceleración es positiva y creciendo, luego no tiene mucho sentido.

2- También existe un problema en el punto t=6, pues se supone que debería pararse, sin embargo la velocidad y la aceleración es creciente.

3- *Es incoherente que tarde más en la bajada que en la subida siendo que la subida está cargado con más pero* [lo deja ahí].

Manuscrito B. ***Pros: Está bien puesto el sistema de referencia y los puntos donde pasa algo. Estos son t=o que parte, t=2 que alcanzamos la mayor velocidad negativa, t=4 que alcanzamos el fondo del pozo, por lo explicado. La velocidad cuando baja es buena, en 4 mins recorrer 80 m es un paso normal de una persona caminando.***

Contras: Es un modelo sólo aplicable al intervalo [0,6], fuera de él no tiene sentido. La velocidad cuando volvemos es muy grande y no podríamos bajar del montacargas, así como la aceleración sería muy brusca. Además el valor mínimo de la función es de 80m y queremos llegar a los 100. Si sube cargado no puede subir a tal velocidad, se descontrolarían los materiales. No se para cuando llega abajo.

Arranca A. ahora el estudio de las especificaciones del modelo para rediseñar el montacargas pensando precisamente en la propuesta de B. del seno como posible modelo. La ve extraña:

[284] A. *Ahora, lo que no sé es si tenemos que cumplir una serie misma de puntos, o sea lo más raro sería que una función seno, …*

Y fija su atención en el enunciado del problema cuando comenta que los únicos puntos a tener en cuenta (al menos al principio) son la profundidad del pozo y el tiempo del montacargas en subir y bajar. Aunque B. recuerda que debería tardarse el mismo tiempo en el ascenso y en el descenso (recordemos que aparece como contra en los dos manuscritos). A partir de aquí entran en una mecánica de análisis a dúo, que sólo registrará B. en el manuscrito final. Ya no piensan en el modelo anterior sino en el fenómeno que buscan modelar. Describimos la discusión a trozos, en función de las características que se tratan en cada momento. En primer lugar, las ya señaladas:

[286] A*. Si en principio lo único que tenemos que cumplir es la profundidad del pozo y el tiempo que tarda en subir y bajar, eso es lo único que nos damos.*

[287] B. *y la velocidad, o sea, y la aceleración a lo que lo hace… no puedes tardar más en subir que en bajar, más o menos lo mismo.---- ---- Bueno, a ver, especificaciones que deberíamos meter: misma velocidad bajando que subiendo* [A. *Sí que está una,*], *mismo tiempo,*

A. se refiere también a una regularidad en el comportamiento del desplazamiento, pero no sólo en éste sino también en velocidad y aceleración (en principio se refiere a comportamientos análogos cuando baja y cuando sube, no sé si piensa en simetría en términos matemáticos, aunque con la lectura del resto del episodio, así lo parece (mirar [292]), obviamente la simetría es para las funciones desplazamiento y aceleración; en el caso de B. más por los movimientos gestuales de sinusoides que porque lo haga explícito, parece que también se refiere a igual comportamiento en subida que en bajada).

[288] A. *una simetría, una regularidad en cuanto, en cuanto a las velocidades y a las aceleraciones*

B. añade ahora condiciones de suavidad en velocidad y aceleración. Periodos de frenado y acelerado en los que no se pare bruscamente, en los que se descienda de velocidad poco a poco:

[289] B. ---- *un periodo de frenado y acelerado, o sea un periodo en el que no se pare bruscamente, que descienda de velocidad poco a poco.----*

A. comenta entonces que sería una buena opción quedarse con el comportamiento de la función en el intervalo [0,4] y reproducir (ajustando por simetría o trabajando por reflexión) el mismo comportamiento al otro lado. Sería una manera de evitar el problema de t=6, aunque estaría olvidando que volvería a incurrir en alguna de las incoherencias que señaló anteriormente en el apartado c). B. apuesta por una función seno. Ambos dejan de señalar especificaciones para hacer explícito un posible modelo. En este instante ya no piensan sólo en las deficiencias del modelo original, sino en aquél que de alguna manera, lo mejora. Cuando B. nombra el seno, A. asiente (deja de lado su propuesta de reflexión de la función original) y nombra un coseno. Como se deduce de intervenciones posteriores, generan una propuesta intermedia: reflejar una función trigonométrica tomando como dominio el intervalo [0,4].

[294] A. *el intervalo que tenemos de espacio de cero a cuatro, yo creo que sería un buen, el bueno…*

[295] B. *¿De dos minutos de bajada y dos minutos de subida?*

[296] A. *No en cuanto a dos minutos, si no a cuanto, qué dibujo hace la gráfica, sería una cosa así.*

[297] B. *Yo había pensado la del seno.*

[298] A. *Sí, un se, un seno y un coseno.*

Encuentran el primer escollo con estas ideas en el hecho de que cambiarían el intervalo de definición, ya que las funciones trigonométricas se definen en el intervalo [0,2π] para un periodo completo. Vuelven a hablar de definir a trozos aunque B. en un momento determinado, regresa a la opción del seno en su ciclo completo y afirma que no habría problema porque en [0,6] el comportamiento es casi el mismo que en [0,2π] (de 6 a 2π no hay apenas diferencia, aunque olvida que la función no valdría lo mismo en t=6 que en t=0). También alude a que habría que modificar la función para cubrir un rango de [-100,0].

[299] B. *Yo había pensado un seno. Pero bueno, ahora lo extrapolaremos porque la función se nos hace más complicado porque no está definida de -π a π, o sea, ni de cero a 2π, está definida de cero a cuatro y de,…*

[300] A. *Sí, tendríamos que hacer la …*

[301] B. ---- *de cero a cuatro y de menos cien a cero.*----

[302] A. S*í que no.... incluso definirla a trozos de manera que, que se pueda…*

[303] B. ---- *No, pero si defines el seno entre el cero y seis, va a hacer lo mismo* ----

Así las cosas, B. vuelve a reconducir el debate sin más que recordar que buscan una función que se comporte como una sinusoidal, lo que da pie a recuperar el análisis anterior (el que debería dar respuesta a 1) con las especificaciones) y añadir nuevas condiciones. Amén de la regularidad (mismo comportamiento subiendo que bajando), periodicidad en un ciclo de seis, y adaptable. En principio sólo se entiende la palabra adaptable como general, que permitiría cambio en dominio y en profundidad.

[303] B. ---- *tú lo que quieres es que te haga esto, baja, sube, baja, sube.*----

[304] A. *Sí, que sea regular.*

[305] B. *¿Vale? No ya ni frenazos, que el ciclo sea regular.*

[306] A. *Que sea periódica.*

[309] B. *Y adaptable.*

[310] A. *Periódica en un ciclo de, de seis.*

B. termina comentando la necesidad de parar en t=6 y de definir un trozo de función que sea nula durante el tiempo de parada (de nuevo está pensando en el fenómeno que modela), aunque admite que el modelo, como ocurría con el original en t=4, podría obviar esa circunstancia. Está focalizando en t=6, aunque ese mismo discurso vale para t=4 (habla de parar abajo y arriba). Para arreglar esta situación, habla de definir una función a trozos de manera que asigne constante cero en llegada (abajo o arriba). Para su explicación, se apoya en el comportamiento de la función seno que con variantes o no, describe el fenómeno (no va a ser un seno, sino un coseno pero no parece detenerse aún a comprobar si es una función u otra, está pensando más en una sinusoide que en el seno en sí; la función debería llegar arriba con velocidad (y ¿aceleración?) nula, aunque no parece que B. sea aún consciente del todo de este hecho (llega a comentar que el seno arriba no para)). Termina recapitulando la respuesta al apartado 1) añadiendo 'que se pueda parar'. A. por su parte, ya está pensando en el nuevo modelo, y así se registra más adelante. Recordemos que como ya hemos indicado, no recoge respuesta alguna en su manuscrito.

[311] B. *Pero bueno, también, también tienes que tener la opción de estar en parada un rato* [traza en el aire una línea constante en la ordenada cero, desde el punto de abscisa 6 en la curva del desplazamiento], *aunque aquí pone que, que sin tomar el tiempo que está abajo. Supongo que el de arriba también, ¿no?*

[313] B. *O sea, cuando definamos la función… A ver, nosotros hemos pensado en un seno, cuando llega arriba en teoría el seno no para, pero sí que puede frenar eso y luego volver a tomar el ciclo del seno. Pues entonces, pues puedes definir el intervalo y dices vale, pues cada vez que lo pones en marcha tomas cero como el punto o, puedes tomar en estos trozos que tú quieres que esté el montacargas parado, como cero, o sea, de una función constante de cero, te da igual.*

[315] B. *Bueno pero espera, espera, vamos a hacer las, las funciones, mismo tiempo bajando y subiendo, que no haya frenazos ni aceleraciones, que el ciclo sea regular, periódica y adaptable y ya está y que se pueda parar.*

Manuscrito B. *1):* ***-mismo tiempo bajando y subiendo; - no hayan ni frenazos ni acelerones; - el ciclo sea regular; - periódica y adaptable; - se pueda parar con comodidad.***

Pasan ahora a la búsqueda de un modelo que se adapte mejor al fenómeno habida cuenta de las especificaciones que acaban de proponer. Obviamente, todas aquellas cosas relativas al fenómeno sobre las que no se ha reflexionado ya, no aparecen. Que el movimiento no pueda ser uniformemente acelerado todo el tiempo, es un ejemplo. Inician así su estudio con la función seno que desde hace ya bastante tiempo y a su entender es un buen candidato (más de B. que de A.). Mientras B. escribe en sus notas y parte de lo que dice es literalmente lo que en su manuscrito aparece, A. irá probando en Matlab® diferentes opciones. Da la sensación de que juega un poco al ensayo/error para comprender la significación de los parámetros en las funciones trigonométricas y=Asen(Bx+C)+D (ídem con coseno), y así elegir la idónea. Interesa pues observar, cómo varía los parámetros. Empieza A. con la representación gráfica de la función sen(4x)-40 en el intervalo [0,10] y B. con un análisis de los puntos notables de la función y sus valores. Busca 'un seno' (sinuoide) que en el intervalo de definición [0,6] cubra un rango de [-100,0]; que valga cero en t=0 y t=6; así como -100 en t=3.

[315] B. ---- *lo que queremos será una función seno, queremos un seno, algo parecido a un seno*, a *un seno de x, definida en cero, seis, en el intervalo menos cien, cero. Por lo tanto ---- ---- entonces f de cero queremos que sea cero, f de tres queremos que sea menos cien ----*

[317] B. ---- *f de seis queremos que sea cero. Eso es lo que queremos. ----*

Manuscrito B.

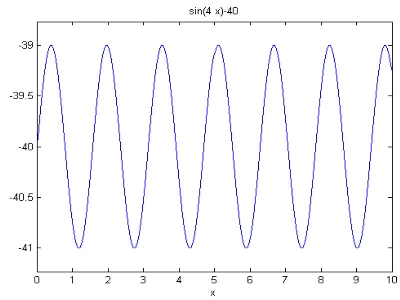
Queremos algo parecido a un sen(x) definida en [0,6] $\longrightarrow$ [-100,0].

Queremos: f(0)=0; f(3)=-100; f(6)=0.

En cuanto a A., aparece un conflicto entre lenguajes dado que en Matlab® la función seno se escribe con el comando sin, mientras que en lenguaje algebraico se utiliza la contracción sen. Olvida además definir la variable x:

[316] A. *¿La función seno no es este símbolo?*

```
>> fdex=sen(4*x)-40

??? Undefined function or variable 'x'.

>> syms x

>> fdex=sen(4*x)-40

??? Undefined function or method 'sen' for
input arguments of type 'sym'.

>> fdex=sin(4*x)-40

  fdex = sin(4*x) – 40

>> ezplot(fdex,0,10)
```



- Análisis de y=sen(4x)-40 : Amplitud: |A|=1 (dilata la gráfica y=sen(x) en la dirección del eje OY una unidad, respecto de la recta y=-40); Periodo: 2π/|B|=2π/|4|=2π/4=π/2 (la gráfica tiene un periodo completo de π/2); Desplazamiento vertical: D=-40 (la gráfica está trasladada en la dirección del eje OY hacia abajo 40 unidades. El rango o recorrido de la función queda pues en [1-40,-1-40]=[-39,-41]).

Análisis de por qué lo escoge A.: respecto al parámetro 4, es difícil hacer conjeturas, por ser un valor que en principio, no parece estar relacionado con ninguno de los valores que de un modo u otro se han señalado como importantes en las especificaciones del modelo que persiguen; respecto al parámetro D=-40 pensaba en llegar a -80 m de profundidad. Recordemos que en el enunciado, se dice que se llega aproximadamente a 100 metros de profundidad y que A. así la hizo constar en su momento. Representa de 0 a 10 quizás pensando también que le saldría un periodo de 0 a 8 por simetría y esto suponiendo que entienda que multiplicar por 4 el ángulo producirá que t=4 pase a ser eje de simetría. Y toma un intervalo más grande para asegurarse de que el comportamiento en t=8 es el adecuado (pensar en lo que sucedía en t=6). Claramente el parámetro B=4, si bien sí altera el periodo no es adecuado. No parece que aquí reconozca del todo el valor de D=-40 habida cuenta de que sigue jugando con dicho valor en posiciones distintas. Es razonable que así sea porque el rango no le ha dado [-80,0]. Claramente, tampoco parece que haya sacado nada en claro de B=4.

B. le pide a A. ahora que dibuje sen(x) para comprobar si las especificaciones que han propuesto en 1). funcionan. Alguna de ellas las tiene ya reflejadas en su manuscrito tal y como se ha indicado antes. A pesar de la petición de B. A. representa primero sen(4x) quizás porque busca entender el efecto del parámetro 4 en la función senx, a saber la variación del periodo que se contrae de 0 a π/2. A. parece comprender que no funciona y de hecho, no volverá a probar más con valores de B que no sean 1, lo que no alterará el periodo original de 2π.

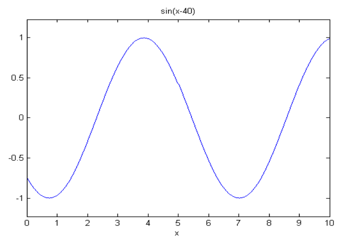
- Análisis de y=sen(4x): Periodo: π/2.

B. no hace comentario a la representación de sen(x), y A. prosigue con la búsqueda / análisis / comprensión de parámetros. Representa ahora sin(x-40) (ya no representa en [0,10] y Matlab® por defecto, da la representación en el dominio [-2π, 2π]), a lo que B. le cuestiona por qué resta -40 e insiste en que deben parar a analizar sen(x).

[319] A. *ezplot sin de x menos cuarenta*

[320] B. *No, pero cuando la analicemos ahora un poco analíticamente. ¿Tú para qué quieres menos 40?*

```
>> sin(x-40)
ans = sin(x - 40)
>> ezplot(ans)
```



- Análisis de y=sen(x-40) Desplazamiento horizontal: C=-40, lo que traslada la gráfica de la función y=sen(x) en la dirección del eje OX hacia la derecha 40 unidades.

A. prueba a restar 40 a la incógnita, esto es, C=-40 lo que producirá un desplazamiento horizontal que traslada la gráfica del seno de x, 40 unidades a la derecha. Claramente busca el dato -80 en el eje OY. Recordemos que ya había conseguido un recorrido de -80 antes con D=-40 aunque como habíamos indicado, no parecía haber integrado esta información. No volverá a dar valores a C (no nulos).

En las siguientes intervenciones, dejará claro que lo que está haciendo es precisamente valorar las variaciones en los parámetros para encontrar la función trigonométrica adecuada:

[321] A. *Si nos quedamos con lo que queremos,*

[322] A. *En verdad, lo que queremos…*

De [322] a [328] B. pregunta a Luís por el tiempo del que disponen para terminar (a lo que Luís responde que el que deseen) argumentando que necesitan mucho tiempo para pensar sobre la función.

[324] B. ---- *Es que verás, o sea tenemos que pensar mucho esta función.*----

B. retoma entonces el estudio y se centra en los valores que toma en cero (comprueba que es cero); en π/2 y en 3π/2. Para el cálculo del seno de 3π/2 pide ayuda a A. que lo calcula (no sin dificultades en Matlab®; mirar anexo 3.)

[330] B. *Seno de cero, seno de cero, cero; seno de uno, seno de π medios, uno. O sea, seno de tres, prueba seno de 3π medios, por fa* [*A. Se ha rallado*]. [A va poniendo sentencias en Matlab® para calcular lo que le pide el compañero de la derecha, pero se aturulla un poco al copiar y pegar]. No, no, quiero saber cuánto vale eso. Seno de 3π medios, sí, 3π medios.

[331] A. *4,7* (valor que le da 3π/2 aproximado).

[332] B. Seno de 3π medios, uno.

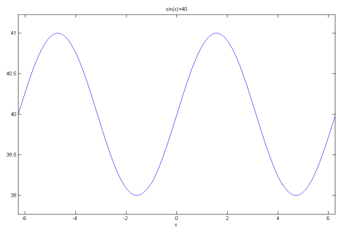
[333] A. Seno *de 4 con 7, menos uno.*

Manuscrito B. ***sen(0)=0; sen(3π/2)=1*** (erróneo); ***sen(π/2)=1*** **(**tachado)

A. por su parte, prueba ahora diferentes opciones que involucran al valor 40 en posiciones distintas, luego como valores paramétricos distintos en la función Asen(x+C)+D. Comienza con y=sen(x)+40.

- Análisis de y=sen(x)+40: Desplazamiento vertical D=40 (la gráfica está desplazada 40 unidades hacia arriba desde el eje de abscisas. El rango de la función es [-1+40,1+40] =[39,41]).

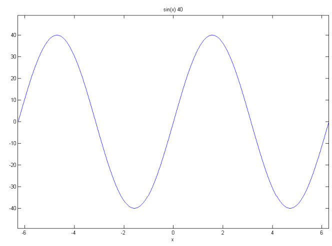
  >> ezplot(sin(x)+40)



Aquí A. ya tiene la pista (como la tenía en el análisis del sen(4x)-40) sobre cómo desplazar 40 unidades el rango natural del seno, a saber [-1,1], que debería servirle para buscar el rango [-80,0]. A. prueba seguidamente la función y=40sen(x), y descubrirá que es el parámetro A=40 el que consigue una amplitud de 40, esto es, un rango de longitud 80m. Sí parece tener claro desde el principio que siempre hay que trabajar con la mitad de 80. Quizás porque el rango se mueve de -1 a 1.

- Análisis de y=40sen(x): Amplitud: 40 (se dilata la gráfica del seno en la dirección del eje OY en 40 unidades), luego longitud rango=80.

  >> ezplot(sin(x)*40)



En este instante, B. le pregunta a A. sobre lo que prueba. Acaba de representar la gráfica anterior y ya es consciente de que necesita multiplicar por 40 la función trigonométrica para conseguir un rango de longitud 80. Le falta que ese rango sea [80,0], para lo que tendrá que bajar la función. Así lo expresa y en el siguiente intento da con la clave (que viene a todas luces del análisis de y=senx+40).

[334] B. *¿Qué estás probando?*

[335] A. ---- *Es algo así, hay que tener en cuenta el salto de ochenta, que es lo que nos interesa* [señala la amplitud del recorrido con la mano como haciendo una horquilla], *ahora sólo tenemos que desplazar la gráfica hacia abajo* ----

[339] A. *con la amplitud podemos jugar. O sea, teniendo en cuenta… Ya tenemos cuál es el, más o menos el intervalo que queremos. Tiene que dar de una forma parecida a seno de x por*

40. Ahora sólo tenemos que ver el tema de cuál es la frecuencia [sube y baja el bolígrafo de arriba abajo] *que tiene y desplazarla hacia abajo, o sea que …* (por frecuencia se refiere al desplazamiento vertical y por amplitud ahora, que no antes, al periodo)

En un inciso, B. le comenta que también interesa fijarse en el periodo (ya que éste es 2π y no 6), a lo que A. responde que luego.

[336] B. *Pero bueno, esto* [señala distancia entre mínimos en el ciclo] *de cuánto lo haces, también te interesa esta amplitud, interesa que sea de ahí a ahí* [marca la distancia entre dos máximos locales]

[337] A. *Pero luego,*

A. prueba así, con 40sen(x)-40 aunque debe advertir que necesita la función coseno para cubrir los puntos notables (puntos de corte con los ejes por ejemplo o primero la parte negativa), esto es 40cos(x)-40. Aúna la información recogida sobre el parámetro A, C y D: A=40, C=0 y D=40. Es interesante señalar que podría haber continuado con la función seno sin más que añadir un desplazamiento horizontal de π/2, la falta de conocimiento sobre la dinámica que los parámetros recogen o sencillamente el hecho de que la imagen de las funciones trigonométricas, a pesar de su periodicidad, se centra en la enseñanza en el intervalo [0,2π], parecen ser la clave para esta elección. Podríamos aventurarnos a asegurar que si bien ha comprendido la función de los parámetros A y D, no es tan claro que haya ocurrido lo propio con el parámetro C.

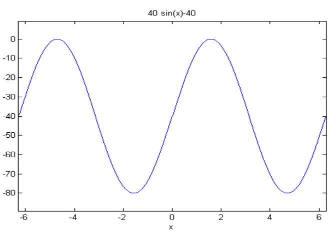
[341] A. *Ésta podría ser una* [se refiere a 40sen(x)-40], *tenemos que ésta es la, la fórmula que tenemos que buscar, ¿no? Hostia, ya está tío* [prueba ahora con 40cos(x)-40].

[342] B. *¿Qué?*

[343] A. *Coseno.*

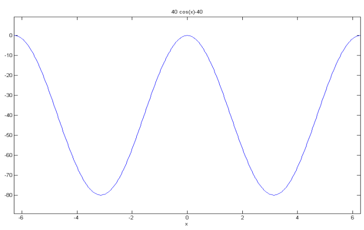
- Análisis de y=40sen(x)-40: Amplitud: 40; Periodo: 2π; Desplazamiento vertical -40; Rango [-40-40,40-40]=[-80,0], luego longitud de rango 80.

>> ezplot(sin(x)*40-40)



- Análisis de y=40cos(x)-40: Amplitud: 40; Periodo: 2π; Desplazamiento vertical -40; Rango [-40- 40,40-40]=[-80,0], luego longitud de rango 80; más especificaciones: 40cos0-40=0 OK, mientras 40sen0-40=-40 Falla.

>> ezplot(cos(x)*40-40)



A. comprueba ahora las especificaciones para el modelo. Cero al cero, mínimo en 2.5 (hay un error es en π) y regular (se refiere a simetría, está más cerca de la unidad 3 de lo que lo estaba 4). B. lo da por bueno (salvo el periodo, situación que salvan después).

[344] B. *Éste sí que está ¿?¿?*

[345] A. *En el punto cero, cero, alcanzas un mínimo, además en dos y medio que es el ¿¿?¿ es más regular,*

B. cree que ha encontrado la solución por casualidad y A. justifica que no es así, que la elección ajusta al efecto de los parámetros en la función trigonométrica. No ha sido realmente por ensayo y error, el conocimiento del comportamiento de los parámetros que ha inferido con las pruebas es la clave (se refiere a A. y D. lo que da más valor a la conjetura de que quizás no ha terminado de entender la función de C.)

[346] B. *Has probado, o sea, has probado*

[347] A. *Más que nada que te dé un intervalo de cuarenta y desplazarla hacia abajo para que el punto más alto sea un cero.*

B. retoma el tema del intervalo [0,6] para el dominio. Ya lo había comentado en [336], pero A. lo da por bueno. Está satisfecho con el modelo que tienen porque el enunciado habla de que el tiempo es aproximadamente de 6 minutos y el periodo que les ha salido es 2π, esto es más o menos, 6.28, luego adecuado. A. intenta justificarlo porque el tipo de función que buscan ha de ser trigonométrica de forma seno, coseno, luego periódica, en principio, de periodo 2π. B. sin embargo, piensa ya en la transformación que lleve el periodo [2,π] al periodo [0,6], no se conforma.

[348] B. *Pues ya está… Ah, no, en seis minutos.*

[349] A. *¿No llega en seis minutos?*

[351] A. *Espera, espérate… es aproximadamente seis minutos. Lo dice el enunciado.*

[352] A. *Teniendo en cuenta que la función que queremos buscar, es una forma seno coseno por su, su periodicidad.*

[353] B. *Tenemos que aplicar el cero – dos π, entonces esto tiene que ¿?¿?*

Manuscrito B. (aparece) ***[0,2π]*** $\longrightarrow$ ***[0,6]*** tachado.

A. retoma la explicación de cómo ha llegado a concluir que la función adecuada es 40cos(x)-40, y hace explícito además que en el caso de 40sen(x)-40 no se empezaba dónde quería, ni el periodo donde el comportamiento era cóncavo cubría de 0 a 6, si no de 3 a 6 (realmente de π a 2π). En el caso de 40cos(x)-40 cuadra porque verifica las condiciones que buscaban dado que el valor de D es el adecuado. Como el enunciado permite que el intervalo sea aproximadamente de 6 minutos, la solución es la correcta. Tan seguro está de esto que en su manuscrito y como respuesta al apartado 2) sólo hace referencia a esta función.

[354] A. *Tenemos que, lo que, hemos querido… Primero hemos cogido algo que se parece a lo que queríamos y lo hemos ido adaptando a lo que buscábamos.*

[356] A. *Teníamos antes la del seno, pero cuál era el problema, más o menos esa era la idea que queríamos pero no cuadraba, dónde empezaba y donde cabía*.

[358] A. *Hemos tenido la suerte que con el coseno cuadra. De todas formas, si no hubiera sido así, hubiera sido coger dentro del coseno la x y haberle restado valores hasta que cuadrara*.

[360] A. *Con una cosa así y además tenemos la suerte de que aunque no acabe el intervalo, el intervalo no hace falta de cero a seis. Resulta que el enunciado sí que nos permite, tenemos esa ambigüedad de que es aproximadamente seis minutos, no es exactamente… seis.*

Manuscrito A. ***Teniendo en cuenta que la función que queremos buscar es de la forma cos o sen, tenemos que ajustar primero la función para que cuadre con los datos que tenemos. El modelo es f(x)=40cos(x)-40. Cuadra que el punto inicial es f(x)=0, que el valor mínimo es -80 en la distancia y que hay una deceleración y aceleración al llegar a los puntos de reposo. Solamente nos falta ajustar el intervalo a [0,6] aunque el enunciado nos otorga cierta ambigüedad.***

Nada indica cómo sabe que existe deceleración y aceleración al llegar a los puntos de reposo. Quizás porque piensa en la función f''=-40cos(x), y en sus tramos positivos y negativos. Quizás sencillamente por suavidad de f'=-40sen(x).

En el caso de B. sigue insistiendo en modificar el dominio de la función para lo que busca una transformación que así lo permita. Prueba primero con la función lineal 3π/x que lleva el intervalo [0,2π] al intervalo [0,6] pues es creciente y lleva el cero al cero y 2π a 2π3/π = 6. En su manuscrito así aparece y de nuevo tachado.

Manuscrito *B.* $\mathbf{[0,2\pi]} \xrightarrow[\mathbf{2\pi/\pi\cdot 3}]{} \mathbf{[0,6]}$ **3/π** **π·6/3=2π**

B. aún no se ha dado cuenta de que debe pensar desde la posición contraria, los valores del dominio son los que debe estar en [0,6], esto es, las x, y aplicada la transformación que pertoque, debe dar lugar al intervalo [0,2π] sobre cuyos elementos se calculará 40coseno-40. La transformación que necesita es de hecho, como así se da cuenta más tarde, la transformación lineal inversa a la anterior, 3/π·x.
Mientras llega a esa conclusión A. intenta representar cos(3x/π). Pero se equivoca al no añadir * para indicar el producto en 3x. Intenta la opción de cambiar π por 3.1416 pero mantiene el error (mirar sentencias de Matlab® en Anexo 3)

[361] B. *Yo cogería coseno de 3 partido pi por x.*

[362] A. *¿Cuál es el coseno? 3x partido pi.*

[363] B. ---- *Sí 3x partido pi* ---- .

[368] A. *Pues si quieres espérate, ponemos tres pi como,*

[370] A. *No deja.*

Tienen un momento de reflexión (se quedan en silencio atendiendo a sus notas) y B. vuelve sobre la transformación. Pide ayuda a Gina, que únicamente le da la clave invitándole a reflexionar sobre el significado de los parámetros en Asen(Bx)+C. B. le presenta el problema en [373] de pasar del intervalo [0,2π] al [0,6] (en el manuscrito tiene escrito [-π, π] $\longrightarrow$ [0,6] pero tacha –π y pone 0, y también tacha π y pone 2π) y le pregunta cómo hacerlo. Es notable que esta situación les cause problemas porque no hay ninguna dificultad de cálculo para obtener el valor exacto.

[373] B. *Es una duda de análisis. A ver, queremos aplicar este intervalo a éste*, *o sea extender la definición. Es como si dijéramos … aunque no sea del coseno, pero casi. O sea, del coseno es menos π, π, pero como no estamos utilizando inversas y tal, también cuesta más ¿?¿? . Eh y éste lo queremos pasar a cero, seis. ¿Cómo lo podríamos hacer?*

[377] Gina. *Se puede ajustar exactamente los parámetros que tú tienes, eh A seno de B x más C* y ver cómo se podría ajustar. ¿?¿? más tiempo o menos tiempo.

[379] Gina. *Y con los parámetros también se puede trabajar y eso da otra posibilidad.*

A. intenta justificar de nuevo que no es necesario, porque el enunciado habla de periodo aproximado de tiempo de 6 minutos, aunque 'recoge el guante' de Gina afirmando que se trata de multiplicar el ángulo por un parámetro. Aquí, posiblemente por descarte, habida cuenta de que sabe los efectos de A y de D (C para Gina) en la función trigonométrica con lo que no queda más opción que el parámetro responsable sea B. Quizás también recuerde su intento con sen(4x) aunque parece menos probable. B. también iba por esa línea cuando propuso trabajar con coseno de 3x/π. Su problema era que no le convencía por alguna razón que no se infiere ni de sus notas ni de sus palabras, aunque en [381] decide probar con la inversa y ya piensa en términos de dominio de definición [0,6] (para poder calcular coseno con valores en [0,2π]; quizás era esto lo que no le servía en la transformación anterior y era consciente de ello). Pide a A. que represente el coseno (quizás refiriéndose al coseno de π/3 partido por x). Mientras B. habla, A. calcula en Matlab® el valor de ***2π/6***, expresión que añade en su manuscrito sin más explicaciones. Casualmente, el valor que se necesita para el parámetro B; después representa el coseno que le había pedido B. Señalar que B. se equivoca, se refiere a π/3 por x.

[376] A ---- *lo que pone es que aquí nos dicen*, *es que es aproximadamente seis minutos, pero como en la anterior función de muestra que sí que tenemos, y que es exactamente seis minutos, no sabemos si, o sea, si nos podemos tomar esto como una ambigüedad y poder tomar un coseno, o tenemos que ajustarla exactamente a lo que es un intervalo de tiempo.*

[380] A. *Habría que multiplicar la x de dentro del coseno por, por un parámetro*.

[381] B. *Sí, la cuestión es* ¿?¿? [trabajan por separado en las hojas]. *Mira ya está. Coseno de π tercios partido por x. Entonces, cuando da cero, seis... coseno de dos π… ¿puedes representar el coseno?*

En este punto, A. ha representado cos (x) lo que hace que B. añada a su estudio del cambio en el dominio, los parámetros para amplitud y desplazamiento vertical. Recordemos que había sido A. quien había analizado los comportamientos dinámicos de los parámetros y no así B. que apenas se había encontrado con la solución que proponía A. B. pregunta entonces sobre cómo había bajado la función hasta el [-80,0] y A. se lo muestra representando cos(x)-40 (significado de D) y de viva voz haciendo referencia al rango original del coseno de -1 a 1 que hay que multiplicar por 40 para lograr un recorrido de 80 unidades (significado de A). Con esto, B. parece recordar (o entender) el significado del desplazamiento vertical y de la amplitud. Con la transformación del periodo, tiene todos los elementos para dar su solución definitiva. Recordemos además que B. sí apuesta por llegar a los 100m de profundidad. Vuelve pues a la transformación y al coseno de π/3x para dar como solución 50cos(π/3x)-50.

[383] B. *¿y esto cómo lo has pasado ahí abajo?*

[384] A. *Esto, bajarlo, bajarlo es, restarle, restarle cuarenta*.

[386] A. *Ahora ya tienes el intervalo que quieres, o sea, porque ¿? 80 y como la función va desde menos 1 hasta 1 no hay que coger ochenta sino cuarenta.*

[387] B. *Ya está, coseno de π tercios por x, por cincuenta, menos cincuenta, esa es la función.*

Representan la función y añaden la cuadrícula. A. se queja de que insista en el 100, sigue convencido de que no es necesario.

[387] B. ---- *Represéntala y verás.----*

[388] A. *A ver , coseno de ¿cuánto has puesto?*

[389] B. *π tercios.*

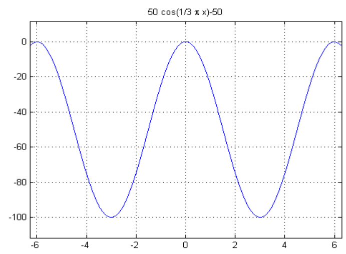
[390] A. *π tercios … tercios por x.*

[391] B. *Por cincuenta menos cincuenta para que nos baje hasta el cien.*

[392] A. *Dale con el cien, pero si no hace falta.*

[393] B. *Hazle la grid y fliparás. En 6 minutos sube y baja clavado.*

```
>> ezplot(cos((pi/3)*x)*50-50)
>> grid
```



Manuscrito A. (añade) ***f(x)=50cos(π/3·x)·50-50 "si queremos que la profundidad sea 100".***

- Análisis de y=50cos(π/3·x)-50: Amplitud: 50, como Desplazamiento Vertical es D=-50, rango de longitud 100 y de extremos 50-50=0 y -50-50=-100. Periodo: 2π/|π/3|= 2π/π/3=6;

En [395], [397], [401], [403], [405], [404], [409] y [411], B. lee lo que escribe en su manuscrito. B. pretende definir una función a trozos de manera que en los momentos de parada y durante el tiempo que se corresponda, la función sea constantemente cero si está a nivel del suelo o constantemente -100 si está en el fondo del pozo. Define con la función trigonométrica $\cos(\pi/3\cdot x)\cdot 50-50-t_0$ el comportamiento cuando está en movimiento. Añade una constante t_0 quizás pensando en los ciclos como 'estancos' donde el comienzo viene dado por un instante t_0, pero elige de forma incorrecta en tanto en cuanto el momento de puesta en marcha depende del eje de abscisas luego se corresponde con el parámetro C de desplazamiento horizontal en la fórmula general y no con el parámetro D que es donde lo ha añadido.

En la primera parte de su manuscrito recoge [395][397][404] y [405]:

[395] B. *La función que buscamos es f de x que la vamos a definir a trozos: coseno ¿¿¿? uy (ríe) menos t cero; y cero, si está en reposo.*

[397] B. ---- *siendo x igual a cero la altura, tomando x igual a cero, se pone en marcha…* ----

[404] B. *Menos t cero.*

[405] B. *Acuérdate de menos t cero, si está en movimiento, t cero sería el momento de puesta en marcha.*

Manuscrito B. ***La función que buscamos es y= $\cos(\pi/3\cdot x)\cdot 50-50-t_0$ si está en movimiento; y=0 si está en reposo arriba; y=-100 si está en reposo abajo, tomando t_0 el momento de puesta en marcha.***

En [401][403][405][409][411] repasa las especificaciones y comprueba así que su modelo funciona (de manera más general con la inclusión de t_0). Se llega al fondo del pozo, no hay cambios bruscos, frena antes de parar con suavidad, mantiene velocidades parecidas, sirve para todos los dominios de definición y suple los problemas del anterior modelo. B. no comprueba ninguna de las afirmaciones que hace, se ciñe a enumerar los elementos del fenómeno que cree a pies juntillas, cumple la función que ha definido. Como en el caso de A. desconozco si piensa o tiene en cuenta el comportamiento de y' e y''. Se equivoca además cuando dice que sirve para todos los dominios de definición. De nuevo una mala interpretación de t_0.

[401] B. *Así,*

[403] B. ---- *Así, se … llega hasta el fondo del pozo, no hay cambios bruscos, frena antes de parar suavemente y mantiene, eh, velocidades parecidas*.

[405] B. *Acuérdate de menos t cero, si está en movimiento, t cero sería el momento de puesta en marcha* [escribiendo y leyendo en voz alta].

[409] B. ---- *sirve para todos los dominios de definición ---- .*

[411] B. ---- *esta función suple todos los problemas de la anterior.* ----

La última apreciación viene de un comentario que hace A. en [404] recordando alguna de las especificaciones y afirmando que el modelo nuevo compensa las deficiencias del anterior. A. parece indicar también que aun habiendo alternativas de solución (funciones a trozos), el modelo que tienen mejora el problema de suavidad en subida y bajada, así como responde a valores de comportamiento iniciales ya dados.

[404] A. *Sólo falta decir que este modelo con todos los fallos que tenía el anterior, los, los compensa, porque absolutamente todos los problemas que teníamos antes, este, este modelo sí que los, los soluciona y quizá tiene ¿??, para darse cuenta que es más estable en la bajada o en la subida. O sea faltaría decir que a lo mejor en la subida sí, pero refiriendo a cosas en cuanto a que la subida podría ser, podríamos tomar como más, más pronunciada o menos. Que eso ya sería definirla a trozos para que pueda ir de cero a dos de una manera y de dos a seis de otra. Tampoco costaría mucho, y que este modelo ya nos, ya nos, ya responde a unos valores.*

A. no registra nada más en su manuscrito y B las últimas intervenciones señaladas:

Manuscrito B. ***Así se llega hasta el fondo del pozo, no hay cambios bruscos, frena antes de parar suavemente, mantiene velocidades parecidas, sirve para todos los dominios de definición. Esta función suple todos los problemas de la anterior.***

Por último, en [396] A. enseña algo a B. relacionado al parecer con t_0, pero recibe un mensaje y la conversación gira durante unos instantes sobre el hecho de que debe irse. Es imposible entender lo que A. quería decirle a B. Claramente el hecho de que A. tenga que irse, condiciona el final de la resolución de la tarea.

[396] A. *Estás haciendo lo mismo. Lo has sacado por esto, ¿no?*

[397] B. *Sí* [ríe], *siendo x igual a cero la altura, tomando x igual a cero, se pone en marcha… ¿Un mensaje?*

[398] A. *Llego tarde.*

[399] B. *¿Llegas tarde a casa?, ¿pero no sabían esto?*

[400] A. *Creía que acababa a las siete.*

[402] A. *Mejor que me vaya al autobús, si no tarda otra hora en pasar.*

Terminan (A. con celeridad) con las modificaciones al modelo para hacerlo más general. A. ya se refiere a este punto en [406] y [408] y de hecho señala la amplitud (sin nombrarla) como parámetro que puede cambiarse en función de la profundidad que se busque.

[406] A. *¿Qué otras modificaciones le podemos hacer al modelo?*

[408] A. *Dependiendo de la profundidad habrá que multiplicar.*

A. le enseña a B. lo que ha escrito en sus notas finales. Le cuenta de qué se trata, pero hay un parámetro que quiere añadir a su propuesta final sobre el que aún necesita reflexionar. Por falta de tiempo deja en manos de B. añadirlo. El resto de intervenciones son sencillamente para despedirse y entregarle sus notas a Gina. Trascribimos las intervenciones relacionadas con la tarea y con ayuda del manuscrito, las analizamos seguidamente.

[414] A. *Mira a ver qué te parece ésta.*

[416] A. *Sería del tipo y igual a coseno de 2pi partido A por x con A la diferencia b menos a, a, b, el intervalo de tiempo, B sería la mitad de la profundidad que queremos y C sería la mitad de ¿?? que necesitamos .*

[417] A. *C sería … el punto de inicio de …???*

[422] A. *Sigues haciendo la fórmula general para un montacargas, o sea con C.*

Manuscrito A. ***Aplicar el modelo. y=cos (2π/A·x)·B-B (determina y_0) con A=b-a con [a,b] el intervalo en el que sube, la periodicidad, con B, la mitad de la distancia que vamos a cubrir con el montacargas.***

En un primer momento A. iba a proponer un modelo de la forma y=cos (2π/A·x)·B-C, pero al no darle tiempo a pensar quién sería C desiste; por otra parte, propone un modelo del tipo anterior sobre el intervalo [a,2b-a] cuyo punto medio es (a+2b-a)/2=b, de manera que en]a,b[será donde la función baje y por simetría respecto al eje t=b, en el intervalo]b, 2b-a[donde la función suba (que recoge su idea de trabajar con funciones a trozos); se equivoca en la periodicidad que realmente debería ser de longitud 2b-a-a=2b-2a ya que pone la mitad de este valor A=b-a (2π/2π/A=A), habla además de subir cuando en principio debería bajar; en su propuesta el parámetro B es la amplitud y con signo negativo el desplazamiento vertical, luego el rango es [-2B,0] , y efectivamente B es la mitad de la distancia que se pretende cubrir con el montacargas. También se puede hacer un análisis dando por bueno [a, b] como intervalo de subida y leyendo la función con dominio [-a+2b,a], pero resulta extraño que pensara de este modo.

En relación a la respuesta de B. sólo susurra, posiblemente diciendo en voz bajita lo que escribe. Tiene en mente la propuesta de A. de [414] y el encargo de añadir un parámetro C en [422].

Manuscrito B. ***y=cos(2π/A·x)·B - B - t_0 siendo B la mitad de la profundidad del pozo y A el tiempo que queremos que tarde en hacer un ciclo completo en movimiento, t_0 el tiempo inicial.***

En este caso la propuesta de B. sí especifica correctamente el valor del periodo, pero no la profundidad del pozo porque aunque el rango sí tendría una longitud de 2B que es lo que busca, como el desplazamiento vertical es incorrecto (por t_0) la expresión es errónea. Sigue en el error de poner el desplazamiento horizontal en el parámetro D y no en el C de la expresión general y=Acos(Bx+C)+D.

4.1.2. La pareja C./D.

[Importante. En un momento determinado los participantes limpian la pantalla del Matlab® con lo que, de la primera parte, sólo tenemos el registro resumido de lo que han hecho. Cosas como errores de sintaxis, por ejemplo, dejan de recogerse en esta reconstrucción.]

C. y D. comienzan la tarea leyendo en silencio por separado el enunciado de la tarea, expresando abiertamente que no parece difícil (al menos la primera pregunta):

[1] C. *No parece difícil, ¿no?*

[2] D. *No, por lo menos la primera pregunta*.

Y visto el tiempo que han estado sin hablar, Luís les pide que lo hagan y además lo más alto posible:

[3] Luís. *Ya sé que no tenéis costumbre de hablar, pero aquí es al revés.*

[4] D. *No, no, pero aquí estamos muy bien….*

[5] Luís. *Ya, ya pero lo que quiero es que habléis, y si subís el tono, mejor, ¿vale?*

Haciéndose eco de la petición de Luís, C. lee en voz alta el apartado a) y D. recapitula la información principal que se extrae de la lectura del enunciado: el montacargas sube y baja sin tener en cuenta el tiempo que está abajo, el trayecto dura seis minutos y la profundidad es de 100 metros. A lo que C. aventura que quizás tarde en bajar tres minutos y en subir lo propio, aunque duda. Quizás habla de tardar más en bajar que en subir porque está pensando en que se cargan materiales y esta circunstancia puede influir. Propone representar la función y, sin comentario alguno al respecto, se apoya en el programa Matlab® que ya tienen abierto, para ello. Como en el caso de la pareja A., se valen de un software como herramienta para la representación gráfica y, como veremos más adelante, también para el cálculo de soluciones de sistemas de ecuaciones lineales. Ninguno de los dos refleja nada acerca del enunciado en sus manuscritos, ambos se limitan a dibujar las gráficas y escribir las expresiones correspondientes para el desplazamiento, la velocidad y la aceleración. No incluiremos aquí las gráficas, pero sí los elementos que destacan en ellas. Remitimos al anexo 3 en caso de necesitar su visualización.

[6] C. *Explica el significado de los valores negativos, positivos y cero de la gráfica de la velocidad* [lee el enunciado del apartado a)].

[7] D. *A ver, tienes aquí que sube y baja, sin tomar en cuenta el tiempo que está abajo, es de seis minutos, tarda en subir y en bajar seis minutos, y la profundidad es de cien metros.*

[8] C. *Entonces en subir y en bajar tarda tres minutos, o a lo mejor no. A lo mejor tarda más en bajar que en subir. ¿Representamos la gráfica a ver si nos sale?*

[9] D. *Bueno aquí te pone la, la for, la fórmula de la posición en general, supongo que si la ponemos,*

[10] C. *Vamos a representarla.*

Al ir a representarlas con Matlab®, y en un primer momento, C. olvida poner el cubo y el cuadrado para la fórmula del desplazamiento, de hecho escribe en Matlab® la sentencia y=2.5*t-15*t. razón por la que D. le rectifica en [11]. Parece que además D. intenta modificar algo (no se ve) y C. le comenta que no trabajan con vectores luego que no hace falta. El comentario de D. se refiere a la escritura de un comando con el uso de Alt Control del teclado. Posiblemente sea para escribir un corchete, símbolo asociado a la escritura de vectores. Podría pensarse que D. entiende el desplazamiento en términos del vector posición, aunque el hecho de que no vuelve a hacer comentario alguno que haga pensar que está interpretando desde ese punto de vista la cinemática en dos variables, insta a desechar esta idea.

[11] D. *Espera, espera, que ahí está el cubo, ahí está el cubo y ahí está el cuadrado* [señala la pantalla en la que C. está escribiendo]

[12] D. *¿Le pongo un Alt control aquí?*

[13] C. ---- *No, no, no es un vector…* ----

C. corrige y escribe correctamente la función. Pone la sentencia de representación ezplot y duda sobre el intervalo de representación, aunque D. le indica que es de cero a seis y de hecho lo comprueba en el enunciado. Le pide, sin embargo, que la represente de 0 a 7, quizás ya pensando en que le interesa conocer qué sucede a partir de 6 (tal vez piensa ya en ciclos, esto es, en funciones periódicas; por el momento, nada indica que sea así, es una posibilidad). C. representa añadiendo la cuadrícula.

[13] C. *No, no, no es un vector… t cuadrado, y t cubo. Y ahora un ezplot.*

[14] D. *Sí, sí.*

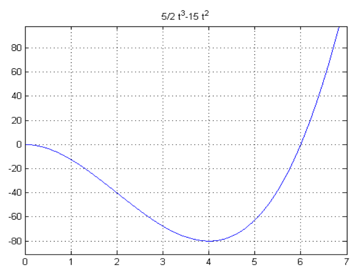
[15] C. *Sí, a ver, un momento.*

[16] D. *Empieza en, ah no, empieza en cero y se tarda seis minutos.*

[17] C. *De cero a seis.*

[18] D. *Aquí lo tengo que está, estoy seguro. Ponle siete, de cero a siete.*

```
syms t
y=2.5*t-15*t
y=2.5*t^3-15*t^2;
ezplot(y,[0,7])
grid
```



A la vista de la gráfica, C. se centra en el comportamiento de 0 a 6 y señala el punto de partida (0,0), que baja a -80m y que vuelve a subir a nivel de la ordenada 0, esto es, al (6,0). D. parece extrañarse de que descienda sólo hasta 80 metros de profundidad y C. intenta buscarle una explicación, admitiendo una holgura (¡de 20 metros!) necesaria y en consecuencia ya reflejada por el modelo. Como ya pasara con B., C. intenta explicar el fenómeno a través del modelo y no al contrario, tal y como debería ser.

[19] C. ---- *Mira, esto es interesante… si sólo vemos de cero a seis, entonces pasa a ser de cero a cero… hasta los ochenta metros baja y luego vuelve a subir… qué curioso…*

[20] D. *Lo que pasa es que desciende hasta los 80 metros, ¿no? Vale.*

[21] C. *También habrá que decir cosas, que los ascensores llevan abajo* [D*. Sí, sí*] *como con una holgura por si cayeran o algo por el estilo, pongamos que eso ya está contemplado.*

Deciden copiar la representación y hacerlo además cada uno por separado (de [22] a [26]). Tal y como hemos señalado, sólo reflejaremos las características que los participantes destacan.

Manuscrito C. ***Gráfica*** $\boldsymbol{y=2.5t^3-15t^2}$ ---- Señala los puntos notables (0,0) de salida, (4,-80) mínimo y (6,0) de llegada, y dibuja en el dominio [0,6]. Señala m/s como si de la magnitud del desplazamiento se tratara, aunque habida cuenta de que aparece en todas las gráficas, parece estar queriendo indicar que se mide en metros el espacio, y en segundos (lo que es erróneo) el tiempo. De hecho será una constante durante toda la tarea que C piense en el tiempo medido en segundos. De nuevo, tal y como le pasara ya a B., se deja llevar por el uso de una de las unidades comunes en la descripción del movimiento (segundos u horas). No dibuja los ejes de referencia al uso, sino que se limita a dibujar tal cual aparece en la ventana, en la que éstos no están señalados.

Manuscrito D. $\boldsymbol{y=2.5t^3-15t^2}$ ---- D. señala el mínimo (4,-80) y dibuja en el intervalo de abscisas [0,6]. Comoquiera que representa con los ejes de abscisas y ordenadas cartesianos, no necesita marcar los puntos de corte con los ejes porque son visibles: donde comienza el descenso y donde finaliza el ascenso.

Calculan y representan ahora la velocidad en el intervalo [0,6]. Ambos están de acuerdo en que basta con trabajar en este intervalo. Antes, cuando D. pensó en representarla en [0,7] buscaba comprobar que el movimiento era completo hasta t=6, que llegaba de nuevo al nivel del suelo. En este instante, entienden que para responder al apartado a) es suficiente. Se darán cuenta después de que la aceleración también la necesitan porque trabajarán usando relaciones entre derivadas.

[27] C. *¿Qué hago la derivada para…? ¿Voy haciéndola?*

[28] D. *Sólo hay que explicarlo, esto* (se refiere al apartado a)). [C. *Sólo cuándo es negativo o positivo, lo que habíamos leído al principio.*]

[29] D. *¿Miramos la velocidad?, ¿no?*

[32] D. *Ponlo ahora entre cero y seis.*

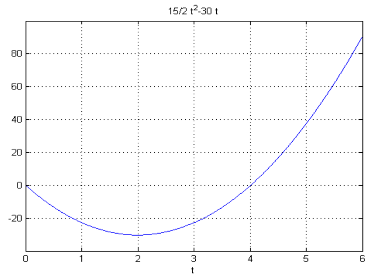
[33] C. *Entre cero y seis es donde nos interesa.*

[34] D. *Sí, en siete ya no.*

diff(y)

ezplot(ans,[0,6])

grid



Representada la función velocidad, comienzan con el análisis de su signo. C. es el primero en comentar el significado de la velocidad negativa afirmando que se asocia a la subida, significado erróneo que D. no entiende. Una explicación posible para la afirmación de C. se sustentaría en el hecho de que el movimiento del montacargas de subida primero y bajada después, es más natural, y que habla como si aún no hubiese integrado el fenómeno que están estudiando. Las dudas de D. propician que C. proponga dibujar la aceleración. Paran así a copiar la representación en sus notas y al terminar vuelven al análisis, dejando la representación de la aceleración para más adelante.

[38] C. Que la velocidad sea negativa ponemos que, que es que la están subiendo.

[39] D. Sí, pero es que no lo tengo claro, eh, a ver,

[40] C. *Miramos la aceleración, a ver.*

Manuscrito C. ***Velocidad*** ***$y=7.5t^2$-30t*** ---- C. no señala el mínimo, ni los ejes cartesianos (de nuevo se centra en la ventana), sí refleja cuando la velocidad vuelve a ser cero (4,0) y el valor 100 en la ordenada para t=6 (esto es, el momento final). Se equivoca en este valor, ya que no se aprecia exactamente en la gráfica, sólo se ve que es superior a 80 pero menor que 100. Como antes, indica m/s.

Manuscrito D. **$y'=7.5t^2$-30t=v** ---- D. dibuja sobre los ejes cartesianos; marca el mínimo (aunque no sabe el valor de la ordenada, pone de referencia el más próximo -20 por encima) y dibuja hasta el (6,100) erróneo de nuevo. Etiqueta con v la función velocidad.

Dibujadas las gráficas en sus manuscritos, arrancan de nuevo el análisis y señalan t=4 como valor donde el desplazamiento pasa de subir a bajar (aquí D. se equivoca, quizás como antes le había pasado a C. aún no han integrado que el fenómeno que están estudiando es de movimiento contrario) y donde la velocidad vale cero de nuevo. D. intenta también explicar la velocidad negativa pero parece pasarse a explicar la positiva, dado que señala en la gráfica de la velocidad los puntos que van desde la abscisa t=4 a la abscisa t=6. En este caso habla de velocidad positiva para desplazamiento decreciente. Vuelve a errar, está visualizando el desplazamiento al contrario. El hecho de que repita 'bajando, bajando' hace pensar que algo le está haciendo dudar (quizás relación con derivada, no parece que sea el fenómeno físico porque es una constante en D. en el resto de la tarea el hecho de que no gusta de analizarlo en ese sentido).

C. le rectifica y D. asiente (aunque parece que por compromiso ya que se reafirma en la intervención siguiente asumiendo que no entiende bien qué sucede; aún no piensa en términos de funciones crecientes y decrecientes, y tampoco está haciendo un análisis cualitativo del fenómeno; se refiere a su no comprensión en términos matemáticos). Sin embargo, al pensar en la pendiente en la gráfica del desplazamiento (aquí ya debe estar fijándose en ella) que es negativa antes del punto de abscisa t=4 y positiva después, ya ve la coherencia del signo de la velocidad. C. comenta que la aceleración es la clave en [48] y D. le insta a mirarla en [49]. En esta misma intervención, señala que no en

[44] C. *Claro, cuando dice que la velocidad vuelve a ser cero* [señala con el bolígrafo en la pantalla la abscisa t=4 y eleva hasta la curva de la velocidad que vale cero en ese valor*], ahí es donde …*

[45] D. *Sí, claro, ahí es cuando sube, en ese punto pasa de subir a bajar. El hecho de que sea negativa quiere decir… es que ahí cada vez* [señala gráfica de la velocidad de abscisas de 4 a 6] *aumenta más porque está bajando, bajando ¿?¿?*

[46] C. Si es negativa es porque está bajando, si es positiva es que está subiendo, ¿no?

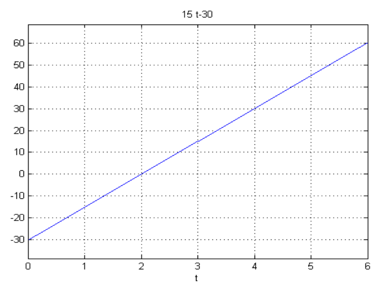
[47] D. Sí, claro

[48] C. Ahora la aceleración será lo que,

[49] D. Lo que no sé yo, matemáticamente no sé qué quiere decir que la velocidad es negativa. Bueno claro es porque la pendiente aquí es negativa y aquí es positiva [escribe o dibuja en sus notas un rato largo]. Mira a ver cómo es la aceleración y después escribimos más.

C. representa ahora la gráfica de la aceleración en el intervalo [0,6] y con cuadrícula. Etiqueta con la letra a.

```
a=diff(diff(y))
ezplot(a,[0,6])
grid
```



Manuscrito C. ***Aceleración y’’=15t-30.*** ---- C. señala punto de inicio (0,-30), corte con el eje OX (2,0) y punto final (6,60). Representa sin ejes cartesianos convencionales, utiliza (casi) los bordes de la ventana que han definido. Vuelve a incluir m/s.

Manuscrito D. ***y’’=15t-30=a***.---- Aunque no pone los valores numéricos, D. escala de manera que para el tiempo usa la unidad 1 y para la aceleración la unidad 10. Señala así los mismos puntos que C. Dibuja sobre los ejes cartesianos y etiqueta la función aceleración con la letra a.

A la vista de la representación de la aceleración, D. constata que tiene el punto de corte con el eje OX en t=2 y C. que es lineal. Éste añade además un análisis de la aceleración de tipo cualitativo que es erróneo. Interpreta la aceleración negativa como deceleración, freno, lo que supone para él una parada en el desplazamiento; y la positiva como aceleración, fuerza para subirlo de nuevo. Según su criterio, en t=2 el montacargas debería pues parar: no se da cuenta de que el punto de parada en la gráfica del desplazamiento es t=4. Además, la deceleración no conlleva parada, sólo disminución en las variaciones de la velocidad, del mismo modo que la aceleración supone incrementos positivos (se entiende por incremento la diferencia entre valores en tiempos distintos, valorándose primero la función en el tiempo mayor).

[51] D. [manejando el cursor] *Corta ahí* [deja el cursor en el punto (2,0)].

[52] C. *Lineal.*

[56] C. *La parte negativa será que están parando el ascensor y la parte positiva será que están ejerciendo fuerza para subirlo.*

D. antes de continuar con el análisis, comenta que no tiene muy claro el tipo de respuesta que se les requiere. Si de tipo matemático o más informal (entendemos que por más informal se refiere a basándose en el conocimiento físico cualitativo del fenómeno). Puede que esté huyendo de interpretar el modelo en términos del fenómeno. Ya en [49] se refería a una explicación en términos matemáticos que en principio, no sabía dar, pero no da pista alguna sobre que sí sepa (o quiera) hacerlo en otros términos. Arrastra a C. en la duda.

[57] D. *Sí. Es que yo no sé si lo tenemos que explicar más, quiero decir que es negativa porque tú utilizas la tangente y eso, o es positiva por…. Más así en matemáticas o intentar dar una explicación más informal.*

[61] C. *No sé, a lo mejor en lugar de utilizar matemáticas hay que utilizar la visión más informal.*

Las dudas sobre el tipo de análisis matemático o cualitativo de D. hacen que pregunten a Gina sobre el tipo de respuesta que deben dar, si desde un punto de vista formal matemático o de otro modo que ni siquiera saben aún como calificar.

[64] D. *Cuando dice por ejemplo explicar el significado de los valores negativos y tal, ¿decimos?, quiero decir en matemáticas, en matemático, quiero decir, cuando la tangente aquí da valores negativos y tal, ¿o más informal?, es decir, está subiendo, no sé…*

[66] C. *Para presentárselo a alguien que no sea matemático*

[67] D. *Quiero decir con fórmulas o con…*

Gina responde, tácitamente primero, que deben dar una respuesta de tipo cualitativo. Para ello les pregunta qué quiere decir que el montacargas baje, con respecto a éste. Responde algo más explícito después al referirse a que pueden, y deben si lo usan, poner el análisis matemático también (luego ambos análisis):

[68] Gina. *Bueno, ¿qué quiere decir con que el montacargas se va para abajo?. A ver,*

[70] Gina. *con respecto al montacargas…*

[72] Gina. *Las dos cosas… ¿qué quiere decir eso de que el montacargas se va para allá abajo? Y bueno si te sirve la tangente o algo para alguna cosa de la discusión, pues lo puedes usar.*

Tras la breve conversación con Gina, vuelven al análisis del signo de la velocidad. Aunque D. asiente a las indicaciones de Gina, leyendo su manuscrito, se advierte que opta por responder sólo desde un punto de vista matemático; C. en cambio da una visión desde la definición de velocidad como espacio recorrido por unidad de tiempo, luego se fundamenta en un análisis más físico de la situación. Las intervenciones posteriores son también reflejo de esta situación.

Así, en [75] D. piensa en la opción, llamemos cualitativa, pero parece sentirse incapaz de entender que haya primero una aceleración negativa y luego positiva (quizás más lo primero que lo segundo); acaba ciñéndose pues sólo al análisis matemático. En [80] señala (sin nombrarlo) el mínimo. No hace más comentarios, salvo de asentimiento o de introducción a afirmaciones de C. que por su parte lee el signo negativo de la velocidad en términos de que el espacio recorrido es de bajada, el valor nulo como el del cambio de dirección, (luego el positivo el de subida). Ajusta el fenómeno al modelo buscando además una explicación inverosímil para la diferencia en el tiempo de descenso y de ascenso.

[75] D. ¿?¿? … *Nada más que ponga qué quiere decir que la velocidad es positiva, pero… a primero es negativa, pero luego es positiva.*

[76] C. ---- *la velocidad es, se mide, en metros por segundo, si es negativa…*---

[77] D. *El hecho de que sea negativo querrá decir que esa escala que tú has cogido en el fondo…*

[78] C. *Está recorriéndola en dirección negativa, como lo estamos midiendo en altura significa que está bajando.*

[80] D. Aquí es cero… e*n el instante t igual a cuatro, pasa de bajar a subir, ¿no?*

[81] C. *Es el punto en el que hay un cambio de dirección.* ---- *Y por eso tarda más tiempo en descender, por aquello de que por aquello de que los motores, no, porque a veces es más difícil que vayan lento sin cargarse a la gente, a que vayan rápido….*

Terminan el apartado a) sin mediar más intervenciones. D. basa su estudio en la relación desplazamiento/velocidad como la de función/derivada.

Manuscrito C. **V*alores positivos de la velocidad: la velocidad se mide en m/s. Hemos tomado los metros como la altura, luego una velocidad positiva indica un ascenso. Valores negativos: -m/s indica los metros que desciende. Valor neutro: un valor 0 para los m/s indica que el ascensor se detiene (o en su defecto que cambia de dirección).***

En esta última afirmación parece estar pensando que no hay paradas en la gráfica del desplazamiento.

Manuscrito D**. a) La velocidad es negativa mientras el montacargas baja. Esto es así porque en el intervalo [0,4] la función es estrictamente decreciente y en consecuencia, su derivada, que es la velocidad, es negativa. En el instante t=4, el montacargas pasa de bajar a subir. Hay un instante en que frena y la velocidad se anula.**

Gráficamente vemos un mínimo en t=4 en la función posición lo que indica que v=0.

En [4,6] la función es estrictamente creciente y por tanto v>0. Es el intervalo en que el montacargas sube.

El análisis se basa en la relación de la derivada de una función con sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como con sus extremos relativos. Se equivoca en el cierre de los intervalos (en 4) y en el momento en que añade un componente no analítico yerra. La velocidad es nula en t=4, no así la aceleración. Si el modelo fuera adecuado al fenómeno, esto no sucedería (mirar modelo plausible).

Plantean ahora el estudio de la relación de la aceleración con la velocidad para dar respuesta al apartado b). Comienza D. con el estudio analítico de la función velocidad en términos de crecimiento. Así, la velocidad es decreciente cuando la aceleración es negativa y creciente cuando es positiva. Tal y como añade C. cuando la aceleración se anula (abscisa t=2), la velocidad es máxima (se refiere al valor mínimo de la función en la parte negativa del eje de ordenadas, que por ser el mínimo de la función velocidad coincide con el punto de aceleración cero, esto es, cuando frena). C. y D. 'completan' algunas de las frases del compañero siguiendo su razonamiento. Con esto finalizan el análisis para la respuesta de b).

[84] D. *La aceleración es positiva, cero en dos, ¿?¿?* [recorre la gráfica de derecha a izquierda y escribe]. *La aceleración es negativa porque aquí es decreciente y a partir de dos comienza a ser, creciente,*

[85] C. *Positiva*

[87] C. *Sí, está claro porque ahí la velocidad es máxima y a partir de ahí…* [indica algo en las notas del compañero]

[88] D. *Sí, aquí está claro en la gráfica.*

[89] C. *Sí, coincidiría con cuando el ascensor…*

[90] D. ---- *Cuando frena.*----

Señalar por último, que D. vuelve a insistir en que se siente más cómodo haciendo el análisis matemático de las funciones y no de otra índole. C. comenta que efectivamente así no es complicado.

[90] D. ---- *Pues lo explicamos así por la gráfica y ya está, porque es que yo, explicarlo por… decir por qué mientras sube, pasa algo, así no sé por qué es.*----

[91] C. *Yo creo que así no es excesivamente complicado*.

Manuscrito C. ***Si la aceleración es positiva]2,6[indica que la velocidad aumenta. Si la aceleración es negativa]0,2[indica que la velocidad se reduce. Si la aceleración es neutra la velocidad se mantiene. De hecho en torno a 2 se estabiliza porque las aceleraciones son reducidas.***

El análisis es correcto en términos matemáticos. Está interpretando las derivadas en términos de las gráficas correspondientes, y no en términos del fenómeno. Habla del mínimo sin calificarlo como tal (velocidad 'constante') como punto donde las aceleraciones se reducen (tienden a cero) en torno al punto. No se da cuenta de que está lejos de la realidad del fenómeno.

Manuscrito D. ***b) En [0,2], la función v(t) es decreciente y por tanto a<0. En t=2, observamos un mínimo de v(t) y por eso la aceleración se anula. A partir de t=2, la función es estrictamente creciente, lo que implica a>0.***

Análisis meramente matemático del asunto. Resulta curioso que (al contrario que C.) lea el comportamiento de la aceleración en función de la velocidad y no a la inversa. Por lo general, se estudia la función f en función de su derivada y no al contrario. Quizás la razón sólo provenga de que ya ha interpretado la velocidad en el apartado a) y que ahora toca interpretar la aceleración en b).

C. y D. abordan ahora el estudio de las ventajas y las desventajas, tal y como ellos las denominan, del modelo primario. C. comienza aludiendo al hecho de que no se llegue a los 100 metros de profundidad en [97], pero no será hasta [145]-[152] cuando realmente lo comenten y como consecuencia lo añadan a sus manuscritos como desventaja. En [100], D. recoge (a medias) el hecho de que se tarde menos en subir que en bajar. Convienen en poner como ventaja el hecho de que tarda muy poco tiempo en subir (aunque C. bromea diciendo que podría ser desventaja e incluso D. se refiere a algo que deberían cambiar de cara a la propuesta de un nuevo modelo).

[97] C. *Ya las, ya las he comentado antes. No llega a los cien metros de profundidad.*

[98] D. *Ésa es una.*

[100] D. *La velocidad bajando es, es bastante mayor, bueno tarda menos que….*

[102] D. *Vale, entonces los puntos que habría que cambiar es, primero que no va, que no va* [parece estar buscando el adjetivo adecuado]

[103] C. *Que sube muy rápido.*

[108] D. *Vale entonces ventajas… tarda poco en subir*

[109] C. *Claro esto es ventaja y desventaja al mismo tiempo.*

Precisamente, la desventaja aparece cuando paralelamente a este 'debate', la discusión da pie a que tanto D. como C. se fijen en el comportamiento de la función velocidad en el punto de abscisa t=6. C. cree recordar que era superior a 60 metros por segundo (erróneo ya que ese valor se corresponde con el de la aceleración) y comenta de forma natural un cambio que debería hacerse para mejorar el modelo, a saber, que la velocidad se estabilizara al final del trayecto (debería ir más allá, debería ser cero). D. por su parte afirma que estaba incluso por encima de 80 y alude a la aceleración en este punto para reforzar la idea de que no sólo la velocidad es muy elevada sino que va acompañada también de una aceleración muy grande. Representan la gráfica de la velocidad de nuevo para evaluarlo, con lo que C. rectifica, dando por bueno un valor de entre 90 y 100 para la velocidad en t=6. Constatan así que la velocidad es muy grande en la llegada (próxima a 100). D. habla incluso de que se sale disparado con una velocidad de esa magnitud y C. comenta que deberían añadirlo (a las desventajas se sobreentiende). D. alude también el tiempo que tarda en bajar (ya lo nombra explícitamente como desventaja) o que no llega hasta el final (los 100 metros de profundidad).

[101] C. ---- *en la subida, la velocidad bate un valor de 60 metros por segundo* [el valor de 60 es el de la aceleración, se equivoca, al igual que en la unidad de medida del tiempo]*, y el valor físico de eso, es que mandas a volar a la gente, luego habría que conseguir que se estabilizara la velocidad al final del trayecto.*----

[105] C. *Así representado* [debe estar mirando sus gráficas], *al menos lo que es la subida, parece lo típico de un niño pequeño intentando subir algo…. ¿?¿?*

[106] D. *Sí, sí con la aceleración ésta parece que ¿?¿? la subida* [ídem]

[111] C. *¿Cuánto has dicho que era la velocidad en 6?*

[112] D. *Más de 80 era… si quieres te lo busco, porque eso da más información que esto…*

[113] C. *Marcaba aquí que llegaba a 60 metros por segundo* [antes de que aparezca la gráfica][se refiere a la aceleración, yerra] ¿¿?? *¿De noventa a cien?* [después]

[114] D. *Sí, cien, sí, llega a cien.*

[115] C. *Cien metros por segundo. Eso son ganas de quemar el motor.*

[116] D. *Sí, pero es que cuando lleguen arriba del todo saldrán disparados.*

[117] C. *Creo que eso es lo que hay que decir, ¿no?*

[118] D. *Hombre, 'yo no lo he soltado', y el tiempo que tarda en bajar, que no llega hasta el final, no sé, todo eso….*

De [119] a [122] vuelven a las ventajas. Recapitulan la de que sube muy rápido (versión de C. de que tarda menos en bajar que en subir de D.) y se plantean si hay alguna más. Ante la falta de ideas, C. inicia en [123] una discusión para evaluar si el máximo valor de la velocidad bajando (30 m/min (para C. la magnitud con la que se mide la velocidad es todavía de m/s) en valor absoluto en el tramo [0,4]) es excesiva o no. Si no lo es ahí, no lo será llegando al punto de máxima profundidad del pozo. En términos instantáneos la velocidad de llegada a ese punto es cero, luego la reflexión debe ir por una cuestión de análisis de la suavidad de la velocidad bajando.

[123] C. *¿Qué velocidad coge mientras, cuando baja?*

[124] D. *Trein, bueno, treinta.*

[125] C. *¿Treinta metros por segundo?*

[126] D. *Sí, ¿no es mucho?*

C. propone compararlo con la velocidad de caída de un ser humano (nota: la velocidad de caída es de 0 metros al comienzo, 9.8 metros en el primer segundo, 2·9.8 a los 2 segundos …. esto es, la velocidad aumenta constantemente con el tiempo donde la variación se corresponde con la aceleración de la gravedad (y esto si no se tiene en cuanta la resistencia del aire)). D. parece seguirle la corriente con poca convicción. De hecho entran en un bucle de afirmaciones, muchas de ellas erróneas y algunas además sin sentido de [127] a [151]. De hecho, acaban comparando m/s con m/s^2, esto es velocidad con aceleración (la de la gravedad). Describimos esta parte de la conversación en tramos de intervenciones con la idea de que se pueda seguir con mayor facilidad.

Comenzamos pues con C. planteando la pregunta de a qué velocidad cae el ser humano, y dando pie a compararla con la velocidad máxima de descenso del montacargas y con D. aludiendo a la aceleración de la gravedad quizás recordando que es el valor de aceleración necesario para describir el movimiento de caída libre. Intervención en la que aprovecha para preguntar por las magnitudes de medida de aceleración o velocidad, ya que no parece recordar (al menos en ese momento, la unidad que se le asigna a 9.8). De hecho, pregunta por la unidad para 30 (velocidad), a lo que C. responde que metros por segundo cuadrado. Magnitud no sólo incorrecta porque el tiempo se mide en minutos sino porque además es una magnitud de aceleración que no de velocidad. Quizás aquí es ahora C. quien se deja llevar por el dato conocido de que la gravedad es de 9.8 m/s^2. D. contesta ahora, haciendo caso omiso de la indicación incorrecta de C., que el ser humano cae con una aceleración de 9.8, pero de magnitud m/s; de nuevo un error quizás porque sigue pensando en 30, luego velocidad y en segundos que es lo que siempre nombra C.

[127] C. ---- *¿A qué velocidad cae el ser humano por si sólo? Porque esa ve, si esa velocidad excede* ----

[128] D. *Sí, claro, sí, el ser humano, la aceleración era nueve coma ocho. ¿?¿?¿ Hombre, aquí llega a 30, pero 30 ¿qué?, metros…*

[129] C. *Metros por segundo cuadrado.*

[131] C. *Treinta metros por segundo cuadrado …y el ser humano cae a…. Ya sé que no estamos en una clase de física.*

[132] D. *A nueve coma ocho.*

[133] C. *Nueve coma ocho por,*

[134] D. *metros por segundo*

Para enredar la situación un poco más, ahora C. añade los Newtons y los Kilos como si estuviera pensando en Fuerza=masa · aceleración (Newton es medida de fuerza y kilos de masa) y quisiera compararla con la Fuerza que imprimiría una aceleración de 9.8, pero dice por Newton, luego yerra; después dice Kilos, que no es erróneo si damos por sentado que está pensando en multiplicar por metros por segundo cuadrado (notar que se solapa con D. luego su última magnitud de referencia es ésta). También podría interpretarse que cuando nombra a Newton, se refiere a la segunda ley de Newton, esto es F=masa · aceleración, lo que nos llevaría también a entender que C. está pensando en esta ley.

[134] [C. Por Newton, ¿no]

[136] C. *¿No lo tenemos que computar en Kilos?*

[138] C. *Venga vamos a probar con 8 kilos.*

D. que en este proceso asiente, pero sin convicción, acaba recurriendo a lo que recuerda: en caída libre, independientemente de la masa, la aceleración es siempre de 9.8 metros por segundo cuadrado (no es igualdad de fuerzas sino de fuerza/masa; aunque no creo que lo diga porque esté entendiendo a C. ni busque comentar que como la masa es igual, la fuerza también).

[139] D. *Pero es que la aceleración es verdad.*

[140]C*. La aceleración de la gravedad es,*

D. comenta que se están equivocando en algo. No podemos analizarlo por falta de información, no se oye bien en la transcripción.

[141] D. *Si es que en algo nos estamos equivocando, porque si no, como se podría explicar que haya tanta ¿?¿?, se quedaría ¿?¿?*

[142] C. ¿?¿? *dice eso.*

Al margen de esto, D. revisa (con C.) la información sobre las magnitudes. En [143] D. asigna de forma adecuada las unidades y magnitudes asociadas a velocidad y aceleración, esto es, metros/minuto y metros/minutos al cuadrado, respectivamente. Da la sensación de que en la vorágine de la discusión, se queda con la idea de que el valor de 30 es de metros por minuto al cuadrado, razón por la que acaba comparándola después con la de la aceleración para 'cumplir' con el propósito original de C. que quería comparar velocidad de caída (no aceleración), con velocidad máxima de montacargas (no aceleración). Inician así la comparación de 30 m/min^2 con 9.8 m/s^2. Para ello, D. divide 30 por 60 (que sería el paso de m/min a m/s y no de m/min^2 a m/s^2, lo que nos haría pensar que quizás comparan 30m/min con 9.8 m/s, pero no tiene sentido porque en [148] D. habla de m/min^2). Así las cosas, comparan 0.5 m/s (que no m/s^2), con 9.8 m/s^2, lo que les permite concluir que no hay problema, que 'la velocidad' de 30m/min es adecuada y no excesiva. También dan como buena la velocidad en t=6 de 90m/s (ahora comparan 90/60=1.5 m/s con 9,8 m/s^2).

[143] D. *Si está en menos treinta, a ver, en verdad la velocidad está en metros por minuto, la aceleración estará en metros por minuto al cuadrado, ¿no?*

[144] C. *A ver, la posición lo que es son los metros de altura.*

[145] D. *Sí.*

[146] C. *Y la velocidad son los* [D. *por cada, y la t representa minutos*]

[147] C. *Pone minutos, tienes razón.*

[148] D. ---- *Sí, y aquí supongo que será la aceleración que estará medido en metros partido minuto cuadrado. Entonces sería para pasarlo a segundos y podemos comparar con cómo cae una persona. Sería, sería dividirlo por sesenta, por tanto sería 0.5, tú querías 9.8 y en este caso el montacargas éste baje a 0.5.*

[149] C. *Entonces eso no es un problema.*

[150] D. *Tampoco es tanto, ¿no? Sería, a lo mejor en*, [C. Es una ventaja.] *subiendo llega a noventa. Entonces sería* [C. *Un movimiento vertical*] *1.5, tampoco.*

[151] C. *Sube rápido y te escupe a una velocidad tolerable.*

C. registrará en su manuscrito en la parte de ventajas que la velocidad de descenso no es excesiva. D. no hará alusión al tema. Hace sin embargo algún comentario más, como si pensara en modificaciones de la velocidad para 'acercarse' a 9.8 pero también lo desecha. [152], [153], [154]. Es obvio que D. no ha entendido demasiado bien la comparación. Remitimos al Anexo 3. para la lectura de estas intervenciones.

Con esto finalizan el estudio de las ventajas y registran:

Manuscrito C. ***Ventajas: Sube rápido, sólo unos dos minutos; la velocidad de descenso no es excesiva.***

Manuscrito D. **Ventajas: tarda muy poco tiempo en subir.**

D. empieza seguidamente a pensar de nuevo en las desventajas y retoma el tema de la profundidad del pozo. Ambos lo acaban añadiendo a sus manuscritos y achacan al modelo que no se llegue, esto es ajustan el fenómeno al modelo (y no al contrario, salvo en la propuesta de mejora). Como ya hizo la pareja A./B., ambas intentan al principio salvar al modelo. D. alude a razones de seguridad y C. a la instalación de la base del ascensor.

[155] D. *Podríamos construir ¿¿?? para que llegue a cien. Bueno es que tampoco te dice si ¿??? Igual no es ni ¿??? No sabemos si es, también por seguridad no merece la pena bajar hasta 100.*

[156] C. *Es verdad que podemos dar por supuesto que los últimos 20 metros son para, para instalar el ascen, la base del ascensor, pero podemos suponer que es, que es por el modelo.*

[157] D. *Sí, sí.*

[158] C. *Entonces ponemos que podría llegar hasta los cien metros, ¿no?*

[159] D. *Ajustando, sí.*

[160] C. *Que utilice aproximadamente cien metros, pueden ser tanto positivos como negativos.* [no sé aquí a qué se refiere]

[161] D. *Claro, como a los treinta cinco* [debe referirse a la velocidad, que podría subir (en valor absoluto) a 35]

[162] C. *Y entonces ya no tenemos la holgura ésa.*

Manuscrito C. ***Desventajas: hemos dado por supuesto que los -80m se deben a la instalación del ascensor, es decir la base, en otro modelo se puede ajustar más.***

Manuscrito D. ***Desventajas: podemos suponer que el hecho de que el montacargas no descienda hasta los 100m es consecuencia de la maquinaria del montacargas. Con otro modelo de maquinaria podríamos llegar algo más profundo.***

Gina les recuerda el enunciado del apartado c) como también lo hizo con la pareja A./B. aludiendo a que deben señalar fortalezas y debilidades del modelo primario. Ellos continuarán así con el estudio de las desventajas.

[163] Gina. Aquí en este punto señálenme nomás las debilidades y las fortalezas, ¿?¿? ¿sí?

D. retoma ahora al tema de que llegando a t=6, tanto la velocidad como la aceleración son muy elevadas. Por su parte, C. comenta que lo que debe estar sucediendo es que o el montacargas frena en seco (piensa en el fenómeno desde un punto de vista cualitativo) o sube indefinidamente, ambas claras desventajas. A lo que D. comenta que la gráfica de la velocidad debería ser más suave llegando a t=6, que debería estabilizarse (hacia cero) (análisis ¡por fin! cualitativo del fenómeno por parte de D.) y C. que la aceleración debería ser nula. Esta última intervención de C. podría interpretarse bien desde el punto de vista de un análisis cualitativo del fenómeno, bien matemáticamente, dado que para que la velocidad alcance un máximo, la aceleración debería ser nula. Recordemos que la conclusión de velocidad no excesiva la dieron para el tramo de descenso, mientras que aquí, están en el final del ascenso. Como suben, no hay posibilidad de comparación con caída, luego buscan otras formas de análisis lo que les hace recurrir al fenómeno.

[164] D. Y eso que sube a demasiada velocidad o que llega con demasiada aceleración al punto, al, al suelo

[165] C. *Ahí una de dos y,*

[167] C. *casi una es peor que la otra, y es que ---- o que frena en seco o que sube para arriba.----*

[168] D. *Mira ahí* [señala con el bolígrafo el último tramo de recorrido de la gráfica de la velocidad] *debería descender un poco.*

[169] C. *Debería estabilizarse.*

[170] D. *Que hubiera casi un* [vuelve a deslizar el bolígrafo sobre la pantalla haciendo un gesto de suavidad hacia la horizontal del final de la curva representación de la velocidad].

[171] C. *La aceleración debería estabilizarse en cero.*

Cuando ya parecen estar de acuerdo en que en t=6, hay problemas en el modelo original, C. vuelve a plantearse si efectivamente es una desventaja lo que sucede con la velocidad. Alude a que el transporte de mercancías podría permitir velocidades que no serían razonables si se piensa en transporte de personas. Sus comentarios hacen que D. dude si en el modelo que tienen, la velocidad desciende de nuevo desde t=6 o un poquito después (recuerda que se habla en el enunciado de tiempo de viaje aproximado de 6 minutos). Su análisis del fenómeno indica que la velocidad no puede ser máxima en el momento de llegada, que es cuando debería parar. Pero C. y D. así lo confirma, le recuerda que es una función de grado 2 luego no puede descender.

[176] D. *Ya, pero, hombre, que la velocidad sea máxima justo cuando llega, justo cuando debería parar* [análisis cualitativo]*, claro, el problema es que te dice,*

[178] D. *es que te dice aproximadamente la bajada en seis minutos, a ver si es que empieza a descender o algo, no creo… porque no te dicen que sean seis exactos*

[179] C. *Una función de grado 2* [D. *Sí, claro*. *Lo sé, lo sé*] *eso no va a descender ni de broma*.

D. propone por último añadir como desventaja la diferencia entre el tiempo de bajada y el de subida, como si debiera bajar en el mismo tiempo que sube. Recuerda también la desventaja que acaban de estudiar sobre que la velocidad de subida es muy elevada. C. intenta convencerle de que sólo hay que fijarse en lo que sube (esto es en que la velocidad es elevada y no para en t=6), por lo que D. no añadirá como desventaja la diferencia en los tiempos de descenso y ascenso. Termina su intervención insistiendo no obstante en este punto y en que la velocidad debería descender al subir (hasta anularse en t=6). Dan aquí por terminada la resolución del apartado c).

[181] D. *Podemos decir como una desventaja también, la diferencia que tarda en bajar porque son minerales, igual que sube a tanta velocidad, a tanta velocidad, podría bajar…*

[182] C. *No sé, yo creo que la velocidad está bien, lo que hay que tocar es,*

[184] C. *lo que sube.*

[185] D. *lo que sube ….y bueno tocar un poco más para que se estabilizara un poco el tiempo que tarda en bajar. Lo suyo es que descienda la velocidad cuando sube, no que, luego cuando…*

Manuscrito C. ***Desventaja. El frenazo en seco del final (o su ausencia) puede resultar peligroso para los viajeros o el equipo.***

Nótese que no dice que el modelo no es adecuado al fenómeno, sino que el movimiento del montacargas está mal diseñado.

Manuscrito D. ***Otro problema que se puede observar en la gráfica, es que la velocidad es máxima justo cuando se llega al nivel del suelo. Un modelo mejor debería controlar mejor la velocidad.***

Para cumplir con el apartado 1), se plantean ahora hacer una lista de especificaciones para rediseñar el modelo del montacargas. C. habla de usar el apartado c) y D. así lo corrobora.

[190] C. Tenemos por ahí una serie de ventajas y desventajas

[195] D. en el 1 ponemos simplemente lo que hemos dicho aquí, ¿no? [apartado c)]

Entre un comentario y otro, D. que ya debe haber leído el enunciado del apartado 2) comenta que se trata de definir funciones para crear un nuevo modelo, y como primera propuesta, C. habla de coger la primera parte del descenso como válida y añadir otra 'más tranquila' para la subida. C. debe estar pensando así en una función tal que la velocidad se anule en t=6 siendo éste punto, un máximo de la función.

[191] D. Ah, has de poner funciones.

[192] C. Tenemos que definir una función a trozos. Fácil, cortemos la parte de descenso de antes y definimos…

[193] D. ---- para la de subida, otra que, que la supla ----

[194] C. Más tranquila.

Dejando de lado el inciso sobre la propuesta de un nuevo modelo, señalan seguidamente como especificaciones: llegar a -100 ([198]); velocidad en t=6, posiblemente cero ([199]); de nuevo estabilidad, esto es, que llegue a t=6 con velocidades cada vez menores, luego un cambio de convexidad en la gráfica de la función velocidad ([199] D.). A pesar de que ambos parecen estar de acuerdo, no plasman en sus manuscritos lo mismo. D. no habla de velocidad nula en t=6. C. vuelve a comentar que se basan en el apartado anterior.

[198] C. *Podemos coger lo de antes esperamos que llegue hasta el menos cien ¿no?* […] *Y hemos quedado que la velocidad en seis tiene que ser menor…*

[199] D. *Claro, claro.* [C. *posiblemente cero*] [señala el mínimo de la gráfica de la velocidad], *claro, sí, es que a lo mejor lo que podría hacer es aquí la velocidad aumentar* [sigue con el bolígrafo y sobre la gráfica de la velocidad en pantalla, el tramo que va desde el mínimo hasta el punto de abscisa 5 y pico, más o menos], *pero que llegara un punto, hasta aquí por ejemplo y que desde aquí descendiera hasta cero, por ejemplo cuando está subiendo entre 0 y 100*

cuando esta en 50 ahí la velocidad puede ser bastante alta pero ya cuando llega que está llegando …

Manuscrito C. ***Crea un nuevo modelo. 1.*** **Debe descender hasta -100 metros. La velocidad en el t=6 debe ser 0 m/s.** (sigue con las unidades incorrectas)

Manuscrito D. ***1) - El montacargas llegará algo más profundo; - Se controlará mejor la velocidad. La velocidad descenderá cuando se esté llegando al aire libre.***

Después de la descripción de D. en [199] (hablan de estabilidad en t=6 y para la que C. propone velocidad =0), C. da una nueva propuesta de modelo: una función seno. D. comenta que lo pensarán.

[200] C. *No, si al final nos va a salir una función seno.*

[201] D. *Sería ideal, vamos, que hiciera así* [sinusoidal]. *Pues nada lo pensaremos.*

Toca plantearse ahora un nuevo modelo, para el que se les propone a los participantes utilizar una sola función o una función definida a trozos. Recordar que acaban de comentar la posibilidad de una función seno (o una sinusoidal), aunque no abordarán la validez de su propuesta hasta un ratito después. Posiblemente el hecho de que se explicite la opción de dar una función a trozos como modelo, les separa de la opción del seno y les invita a propuestas distintas por las que empiezan. Así, de [205] a [207], C. y D. valoran una función para la velocidad definida a trozos, dos o tres, de manera que sea del tipo, si no igual en alguno de los tramos, que la que da el modelo anterior, salvo donde necesitan hacer cambios. D. propone primero, copiar el modelo hasta el punto de abscisa t=4.5 o 5 y a partir de ahí proponer otra función que descienda; mientras C. sugiere una para la bajada y otra para la subida. En ambos casos continua. Ante la propuesta de C., D. sugiere tal vez, una función para bajar, otra para subir hasta el momento en que fuercen una tercera para que descienda. Se sobreentiende que en la bajada coincidiría con la del modelo y en la subida, habría que modificarla. Nótese que piensan desde la modificación de la función velocidad y no de la función desplazamiento.

[205] D. *Yo más que nada lo que haría es subir, hombre, aquí debería bajar y ya está, sí, bajar* [señala como antes desde la abscisa 5 más o menos y sobre la gráfica de la velocidad, una curva descendiente]. *Entonces no sé si definir aquí la misma función* [sigue la curva hasta la abscisa 5] *y a partir de t igual a 4,5 ó 5 una función que baje y ya está. Que se desgrave, entonces habría que buscarla.*

[206] C. *Yo había pensado dos funciones, una de bajada y otra de subida. Si es una función a trozos no podemos partirlo por ninguna parte intermedia, evidentemente.*

[207] D. *Yo a lo mejor dividiría un parte en la que baja, una parte en la que sube, para finalizar la parte en la que ya está cerca de …*

Para abordar esta posible solución, representan gráficamente la función desplazamiento primero y la función velocidad después (ambas del modelo original). Repasan los puntos notables que el nuevo modelo debería tener para el desplazamiento a propuesta de C. en [209]: en cero imagen cero, así como en seis, y un punto intermedio de imagen -100.

[209] C. *Si pensamos en los puntos que necesitamos, más que nada tenemos los puntos notables, eh… los puntos notables…*

[211] C. ---- *Aquí el cero va al cero, el seis va al cero y en algún punto intermedio tiene que llegar a menos cien*, *eso en la posición* ----

En cuanto a la velocidad, D. propone, siguiendo la línea de sus primeras intervenciones, que sea a partir de la cual arranquen el modelo (luego integrarían convenientemente para hallar la función desplazamiento). C. sugiere así (siguiendo las ideas de D. anteriores) una función como la original pero que cambie la convexidad casi desde el mínimo para que llegando a la altura de la abscisa 5 aproximadamente vuelva a bajar. A lo que D. asiente marcando que efectivamente podría mantenerse el mínimo en t=2 con el valor que le da el modelo original, pero haciendo que la función descienda antes de llegar al final. C. sugiere una función cúbica de manera que la función desplazamiento (integrando será una función polinómica de grado 4) tenga sólo un mínimo (debe referirse al intervalo [0,6]). Y D. comenta que también sería posible definir una función a trozos de modo que en [0,5] se comporte como una parábola cóncava y luego una por continuidad con otra función que no indica (duda) cuál podría ser (sólo sabe que quiere que descienda). La pendiente en el último tramo debería cambiar (él se refiere a que no fuera tan elevada, nosotros añadimos cambiar de signo, que es lo que gráficamente señalan cada vez). Notar que lo importante por el momento para ellos es no salirse de la forma de la velocidad del modelo original salvo para rectificar el último tramo, lo que es acorde con las ventajas y desventajas que en su momento señalaron, así como las especificaciones para el nuevo modelo que sugieren en 1).

[212] D. *Si quieres podríamos basarnos un poco en la velocidad y después ahí, ya está, ¿?¿? pasar a ¿?¿?*

[213] C. *La gráfica de la velocidad nos tiene que salir más o menos así* [traza la gráfica siguiendo la original, pero girando hacia abajo llegando a la abscisa cinco más o menos; cambia la convexidad de la curva por concavidad casi desde el mínimo].

[214] D. *Ahí más o menos* [abscisa t=5 aproximadamente]. *Que la velocidad máxima sea más o menos como la que, como la que está bajando* [marca el tramo de abscisa cero a dos sobre la pantalla de la gráfica de la velocidad], *y de aquí empiece a descender y no que se* [marca el punto de abscisa t igual a 5 aproximadamente]…

[215] C. *Aquí tendríamos que tener una función cúbica para que la anterior pudiera ser una cuart, una con t elevado a cuatro, con solamente un mínimo.*

[216] D. *O podemos hacer en trozos, una vez elevado …* [cambia la forma de explicarlo] *que aquí este elevado al cuadrado* [de cero a 5 aproximadamente una parábola cóncava y luego una convexa:] *y aquí elevado al…lo difícil será que a.. hacerlo coincidir, que no haya ninguna…*

[218] D. ---- *que aquí la pendiente no sea tan, tan elevada* --- [marca en la gráfica de la velocidad la parte de la derecha que 'casi' es como una recta; puntos de t=4 a t=5 más o menos].

C. propone dibujar con Matlab® una función genérica con las características que han comentado, para ajustarla después a datos más concretos, pero no sabe cómo hacerlo. D. que en un primer momento parece estar pensando en ajustar una función al uso, comenta que dibujando, él tampoco sabe, así que desechan la idea. Mirar Anexo 3. , de [219] a [229].

En este momento, C. vuelve a representar la gráfica del desplazamiento (tenían en pantalla la gráfica de la velocidad) y por un momento se desvían del análisis de la gráfica de la velocidad y se centran en él. D. es al principio un poco reticente y señala que no da más información que la de los puntos notables (realmente sólo nombra la profundidad), pero enseguida entra con C. en un análisis más exhaustivo. Sugiere que el nuevo modelo debería tener una pendiente (en la parte final del recorrido) menos pronunciada, esto es más suavidad. C. recuerda puntos de corte con los ejes y que debe haber un punto intermedio cuya imagen debe ser -100. D. dibuja entonces con los dedos sobre la superficie de la pantalla desplazando el mínimo hasta el punto de abscisa 3 y ordenada -100 e indicando que en la subida desde t=3 la pendiente debería ser menor de manera que descienda la gráfica más o menos desde t=6 y que en consecuencia la pendiente tienda a cero. Ya empiezan a acercarse a una función (gráfica) mucho más suave al menos en el tramo final y tal que la velocidad (pendiente) sea cero en la llegada, amén de ajustarse a los puntos notables con 100 metros de profundidad. Lo que por el momento no parecen cambiar (salvo porque en el dibujo trazado en la pantalla, D. ha desplazado el mínimo), es el descenso.

[230] D. *Sí. Sí, vamos a dibujar primero la de la posición, ¿o la de la velocidad?. Es que la de la posición lo único que sabemos es que llegue a 100. Hombre ahí que no sean tan, la pendiente que no sea tan inclinada si no…*

[231] C. *Sabemos que tiene que estar en cero y seis. Bueno.*

[232] D. *Sí. Debería hacer así.*

[233] C. *Y en un punto intermedio tiene que llegar a menos 100.*

[234] D. *Claro, debería hacer más o menos así* [traza ahora con los dedos sobre la superficie de la pantalla una gráfica con suavidad como antes pero haciendo llegar el mínimo a -100]. *Y ahí que no sea tan inclinado esto* [ha desplazado el mínimo a la abscisa t=3 y traza como una recta con pendiente positiva y que pasa por el (6,0) para indicar que debe ser mucho más suave la subida] *y que ahí descienda* [desde el (6,0) más o menos], *aquí que la pendiente tienda a cero.*

En este instante, C. habla de simetría, en tanto en cuanto propone quedarse con el tramo de función de abscisas de 0 a 4 y reflejarla. Perderían entonces la profundidad de 100m (volverían a 80m) y aunque no lo indica, el intervalo de definición pasaría a ser [0,8]. A D. en principio le parece bien, pero comenta que no debería empezar tan fuerte. Quizás aquí, D. esté pensando en la suavidad de la curva que buscan.

[235] C. *Si la hacemos a trozos y no nos importa que no llegue a menos 100 podríamos simplemente coger esto* [trozo de gráfica de abscisas de 0 a 4] *y hacerlo al revés, o sea, lo mismo.*

[236] D. *Sí, sí, vale. O la podríamos ajustar ahí un poco que no, que no empiece tan fuerte.*

C. comenta ahora que interesaría que la aceleración fuera un polinomio de grado 2. Se pueden hacer dos interpretaciones a este hecho. Por una parte, si C. está pensando en la propuesta de la velocidad como una función cúbica, entonces su derivada sale de grado 2 y la gráfica de la aceleración es una parábola. Si por el contrario, está pensando en el fenómeno (tal y como vienen haciéndolo hasta ahora), lo esperable es también que la aceleración se comporte justo de ese modo. La velocidad debe aumentar en el descenso desde el inicio (en términos absolutos), para cambiar a disminuir (en el mínimo de la velocidad) en el tramo que quede antes de la parada en el fondo del pozo, llegar a este instante con aceleración (pendiente) cero, y volver, ya en el ascenso a aumentar, para pasar a descender y volver a aceleración (pendiente) cero en la llegada a nivel del suelo. Esto fuerza dos raíces en la función aceleración correspondientes a los dos momentos de cambio en la velocidad, luego en un polinomio de grado 2. C. también recoge que la velocidad tendrá tres ceros (salida, parada y llegada desde el análisis del fenómeno), luego la cúbica que lo represente, debe ser una cúbica con mínimo de expresión algebraica Ax^3+Bx^2+Cx (D=0 porque pasa por el (0,0)). Los parámetros en esta expresión no sirven para nada, pues no aportan información alguna sobre la dinámica de la función.

[237] C. *También interesaría que la aceleración sea cuadrática, cuadrada, te cuento, entonces otra parábola, entonces así tenemos información más o menos de la tres, de las tres gráficas.*

[239] C. *La velocidad tendrá tres, tendrá tres valores en cero.*

[241] C. *La velocidad será A x al cubo más B x cuadrado más (C) x.*

D. no participa apenas en la discusión, salvo para añadir coletillas que no aportan información. Parece que apuesta más por definir una función a trozos porque teme que si lo hacen directamente no les salga. C. le convence de que lo intenten. También comenta que el rango debería estar entonces en valores de x superiores a 100 y D. le rectifica, superiores a -100. Posiblemente está ya dibujando en sus notas. D. consiente pues en buscar la cúbica para la velocidad primero, y con ésta, la función desplazamiento y la función aceleración. También debe estar dibujando la forma de la velocidad a grandes rasgos.

[242] D. *¿Si no hacemos al final ninguna, ninguna función?*

[243] C. *Pero eso es lo que pretendemos, tenemos que encontrar cuál es la, más o menos…*

[244] D. *Es que a trozos…*

[245] C. *Sí, podemos hacerla a trozos, pero, pero si lo hacemos todo de una… Esto no es hacer un trabajo de más, pero…*

[246] D. *Vamos, vamos a intentarlo a ver si nos sale.*

[247] C. *Más o menos ya sabemos que esto tiene que ser mayor que cien para todo x, ¿no?*

[le enseña sus hojas al compañero]

[248] D. *Sí, ¿menos cien?*

[249] C. *Mayor que menos cien. Vale.*

[250] D. *Claro, es encontrar, sí, yo encontraría ésta y después intentamos ésta y ésta. Entonces que tenga más o menos esta forma la función.*

Para buscar la función cúbica, C. centra la discusión en la búsqueda de puntos notables que le permitan plantear un sistema de ecuaciones para hallar los valores de los parámetros A, B y C.

C. comenta ahora que en la aceleración espera dos raíces (las que ya señalamos en el análisis anterior: dos por provenir de una cúbica con mínimo, o dos correspondientes a los cambios de velocidad en la mitad del descenso y del ascenso). D. sin embargo, piensa en una al arrancar y otra más sobre la que no da detalles. En el análisis cualitativo del fenómeno se advierte que en la salida, la aceleración no puede ser cero pues necesitamos el mecanismo que haga arrancar el montacargas. Realmente es nula antes de accionar el mecanismo y en la primera fracción de segundo deja de serlo. En términos funcionales, la imagen en la salida es cero, pero hay un salto de discontinuidad en cuanto se inicia el movimiento; sucede lo mismo en la llegada, en la que debe haber un mecanismo que frene por completo el montacargas, pero este llega (en términos infinitesimales) en desaceleración con una aceleración constante, aunque puntualmente, la aceleración en la llegada pase a ser nula.

[251] C. *¿Y si ponemos en la aceleración…?, tiene solamente eh, la aceleración tiene dos, dos puntos en los que es cero.*

[252] D. *Sí, será el punto desde el que arranca que se tenga y después otro, otro punto para las x.*

El análisis anterior no les aporta información válida para el cálculo de los parámetros, así que vuelven de nuevo al desplazamiento (y a la velocidad) y a los puntos notables de éstas. Deciden, en primer lugar, escoger como punto intermedio sobre el que exigir el mínimo del desplazamiento al punto de abscisa t=3 y ordenada -100, cuya velocidad será 0. La elección del punto intermedio también genera debate por apreciaciones de índole física poco acertadas que buscan salvar el modelo primario, esto es, encontrar explicación a por qué el modelo original descendía en más tiempo que ascendía (mirar Anexo 3. de [262] a [272]). Convienen también en que mantienen el tiempo en 6 minutos por viaje.

[255] C. *Deberíamos dar por sentado algún valor de tiempo.*

[256] D. *Vamos probando.*

[257] C. *O podemos coger, podemos dar un valor de…queremos que baje, no sé, en tres minutos, y por lo tanto para t igual a tres, la posición tiene que ser menos cien* [D. *y a partir de ahí ya podemos sacar*] *y la velocidad tiene que ser cero, y a partir de ahí ya sacamos un sistema de ecuaciones, con las, con las tres…*

[259] C. *que tenemos.*

[261] C. *Y así solucionamos también lo de que el, el movimiento es un poco corto.*

[273] C. *También cabe decir que mantenemos la, que lo de que dure seis minutos.*

[274] D. *Sí.*

Con esta información, C. repasa los puntos notables para plantear el sistema de ecuaciones. En [276], y(3)=-100 y v(3)=0. En [278], f(0)=0, v(0)=0, f(6)=0 y v(6)=0 (aunque no lo dice, se refiere también a la velocidad, mirar manuscrito). Total seis ecuaciones. C. cuenta cinco en [280] pero advierte su error en [282]. Dice necesitar 4 ecuaciones (quizás porque son las incógnitas de la cúbica si se añade una constante D, aunque da la sensación de que sólo se acuerda de la constante cuando integra; de hecho en su manuscrito aparece tachado el término Dx en la función desplazamiento y no hay señal alguna de constante D en la cúbica de la velocidad).

[276] C. *En esa posición la ecuación* [se refiere a la velocidad] *tiene que ser cero y la posición tiene que ser menos cien …* [en t=3] *¿?¿?*

[278] C. *Creo que necesitaremos unas cuatro, ¿eh? Es raro, que, el que la posición sea cero aquí, aquí, y aquí y aquí.*

[280] C. *Tenemos, tenemos este punto, este punto, este punto, este punto y este punto. Tenemos cinco ecuaciones y necesitamos cuatro.*

[282] C. *Seis ecuaciones, ¿cómo no?*

D. por su parte, habla de que lo que necesitan son tres ecuaciones (sabe que la constante D es nula, lo que no le genera ningún conflicto, como además se ve después en [294]) y recoge y(3)=-100, y(0)=0, y(6)=0 en [283]; v(6)=0 en [300] y nombra en [313] v(3)=0 (mínimo). No registrará en su manuscrito la condición y(0)=0 porque es obvia.

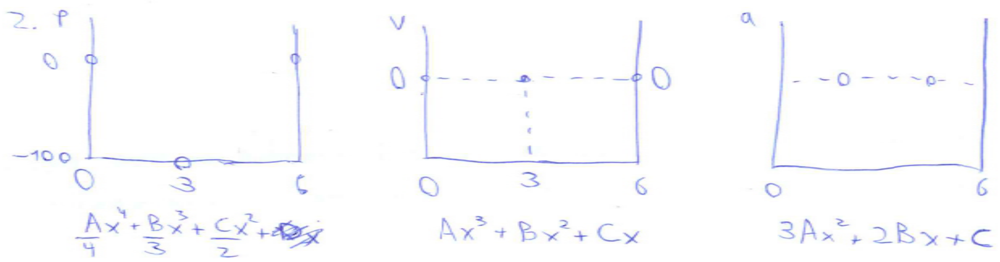
[277] D. ---- *Si se cumplen tres ecuaciones para uno.* ----

[283] D. --- *para la posición en t igual a tres, menos cien; t igual a cero, y t igual a seis, cero…*---

[300] D. *Y después es que la velocidad en seis valga cero y…*

[313] D. ---- *para x igual a tres, si la velocidad vale cero* ----

Manuscrito C. Señala y(0)=0, y(3)=-100, y(6)=0; v(0)=0, v(3)=0, v(6)=0; y dos raíces intermedias en a. De hecho, utiliza • para indicar la abscisa del mínimo en la función velocidad y o para las raíces. Sigue dibujando con referencia los bordes de las ventanas de las gráficas.

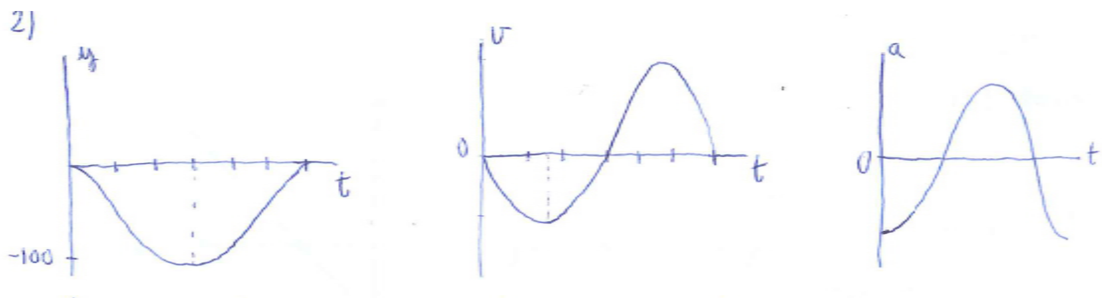


Proponemos que la parada sea en 3m, manteniendo el periodo en 6m. Luego tenemos que

Ax^3+Bx^2+Cx, para x=3, =0; **$A/4 \cdot x^4+B/3 \cdot x^3+C/2 \cdot x^2$, para x=3, =-100;**

$A/4 \cdot x^4+B/3 \cdot x^3+C/2 \cdot x^2$, para x=0 y x=6, =0; **$Ax^3+Bx^2+Cx$, para x=0 y x=6, =0;**

Manuscrito D.



Vamos a mantener que el trayecto durará 6 minutos. Buscamos una función en la velocidad de la forma $At^3+Bt^2+Ct=v(t)$, $y(t)=1/4 \cdot At^4+1/3 \cdot Bt^3+1/2 \cdot Ct^2$.

Queremos en t=3 $At^3+Bt^2+Ct=0$ --- 27A+9B+3C=0 --- 9A+3B+C=0

Queremos en t=6 y(6)=0 ---- 324A+72B+18C=0

Queremos en t=3 y(3)=-100 ---- 81/4·A+9B+9/2·C=-100

Queremos en t=6 v(6)=0 ---- 216A+36B+6C=0

Planteado ya el sistema de ecuaciones lineales, abordan su resolución. C introduce en Matlab® la expresión (genérica) de la velocidad e integrando obtiene la del desplazamiento (se equivoca al no definir las variables A, B y C; mirar Anexo 3.) Al hacerlo, se da cuenta de que debe incluir una constante en la cúbica (de ahí que añada en la función desplazamiento de su manuscrito +Dx, aunque sigue olvidando que sería también +E). Como D. tiene claro que no hay constantes ni en la fórmula de la velocidad ni en la del desplazamiento pues en ambos casos la imagen del cero es cero, le dice que no puede aparecer +Dx y que tampoco E. Tacha entonces Dx en su manuscrito.

[291] C. *No, falta la D.*

[292] D. *No, ahí sería más que nada una constante* [se refiere en la posición]. *Podrías considerar una constante, pero no en función de x.*

[293] C. *Sí, tienes razón. Sería una constante.*

[294] D. *Lo que pasa es que si queremos que en cero, valga cero…*

[295] C. *No hace falta constante ninguna.*

[296] D. *No, no hay que poner constante.*

[297] C. *Vale. Entonces lo dejamos así.*

La razón por la que C. introduce la función velocidad y calcula la función desplazamiento es la de sustituir la variable t por los valores correspondientes para asignarles después su imagen. Notar que C. no tiene, como es en el caso de D., las ecuaciones finales. C. no sabe cómo plantear ahora el sistema de ecuaciones lineales en Matlab® y D. le acabará relevando. Más aún, C. comenta que no sabe siquiera sustituir en la ecuación. D. aprovecha para revisar sus condiciones, indicándole que le sobran dos de ellas (las que asignan el cero al cero tanto en desplazamiento como en velocidad). Parece dudar con el hecho de que se queden cuatro ecuaciones cuando sólo necesitan 3 (para 3 incógnitas) [305].

[302] C. *Y ahora, y ahora montamos el sistema de ecuaciones. ¿Te acuerdas cómo se hacía?*

[303] D. *Si pones solve y entre comillas las cuatro ecuaciones, se supone que te dará la solución* [escribe en Matlab® el comienzo de la sentencia] [sigue escribiendo y dice para sí] *en t igual a seis…*

[304] C. *Así no me dejará, habrá que poner los valores uno a uno.*

[305] D. *No por ejemplo, esa no hace falta*. *No porque en cero irá … ya sabes que va a dar cero. Realmente son, claro, como es A, B y C con tres ecuaciones…*

[306] C. *Con una, dos, tres y cuatro, las que necesitamos.*

[307] D. *A ver, en x igual a seis.*

[308] C. *x igual a tres, cero.*

[309] D. *x igual a tres, cero.*

[310] C. *x igual a tres menos cien, x igual a seis, cero y x igual a seis cero, y como no hay constante, sabemos que para todo x cero, es cero.*

De hecho, durante un momento D. valora qué ecuación debería sobrar (combinación lineal de las demás), mientras C. propone hacerlo a mano y D. interpreta que lo dice porque son incapaces por el momento de dar con esa ecuación. C. insiste en hacerlo a mano y D. prueba con Matlab®. Reseñar que ambos acaban haciéndolo de manera incorrecta. En el caso de C. por errores de cálculo y en el de D. se mezclan sintaxis incorrectas en el uso del Matlab®; soluciones incompletas antes sentencias determinadas para la solución de sistemas homogéneos compatibles indeterminados y claro está, el hecho de que D. no se da cuenta de que efectivamente es erróneo a pesar de que tiene elementos para ello.

[311] D. *Lo que pasa es que, a ver si hay tres incógnitas, con tres ecuaciones, bueno si fuera,*

[312] C. *Cierto, pero cuál omitimos.*

[313] D. *Claro, debería ser una que saliéndote implicará que saliera la otra. A ver, para x igual a tres, que estábamos en cero. A ver, para x igual a tres, si la velocidad vale cero, para x igual a tres* [se queda pensando cuál podrían obviar]…

[314] C. *¿Y si lo hacemos a mano?*

[315] D. [ríe]. *Si el problema es ver, cuál, a ver cuál, información sobra.*

[316] C. *Yo voy a hacerlo a mano a ver qué tal me sale.*

[322] D. *Voy a intentar resolverlo aquí…* [se refiere a Matlab®].

De [318] a [321], C. muestra su inquietud si no sale bien.

Resolución a mano. Manuscrito C. En la tercera equivalencia matricial hay un error: F_3-3/4 F_1, da F_3'=[0, 9/4, 9/4, -100].

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3^3 & 3^2 & 3 & 0 \\ \frac{3^4}{4} & \frac{3^3}{3} & \frac{3^2}{2} & -100 \\ \frac{6^4}{4} & \frac{6^3}{3} & \frac{6^2}{2} & 0 \\ 6^3 & 6^2 & 6 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 27 & 9 & 3 & 0 \\ \frac{81}{4} & 9 & \frac{9}{2} & -100 \\ 324 & 72 & 18 & 0 \\ 216 & 36 & 6 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 27 & 9 & 3 & 0 \\ 216 & 36 & 6 & 0 \\ 324 & 72 & 18 & 0 \\ \frac{81}{4} & 9 & \frac{9}{2} & -100 \end{array}\right) \approx$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 27 & 9 & 3 & 0 \\ 0 & -36 & -18 & 0 \\ 0 & -36 & -18 & 0 \\ 0 & \frac{243}{4} & \frac{243}{4} & -2700 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 27 & 9 & 3 & 0 \\ 0 & -36 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{48681}{16} & 164025 \end{array}\right)$$

$$C = -53'91$$
$$B = \frac{18C}{-36} = 26'95$$
$$A = \frac{-9B - 3C}{27} = -2'99$$

f=-0.74x^4+8.98x^3-26.95x^2

Resolución con Matlab®. D. prueba a resolver primero el sistema formado por las tres primeras ecuaciones, pero escribe mal los comandos de Matlab® al mezclar variables x, y, z (A, B, C de la función cúbica) con nuevas variables que define a, b, c. Posiblemente empezó pensando en poner como variables a, b, y c, y de hecho así es como comienza en Matlab®, pero luego, al escribir las ecuaciones utiliza mezcladas, x, y ,z con b y c. Matlab® resuelve y almacena la solución en una estructura de datos, solución que se recupera si se etiqueta con sol, por ejemplo a solve(…..), esto es sol=solve(….) y luego se le pide explícitamente los valores: sol.x sol.y sol.z. D. que debe desconocer esto, manda resolver el sistema teniendo como variables a x ,y ,z, con lo que b y c quedan como valores paramétricos. Así las cosas, realmente resuelve un sistema de tres ecuaciones y cinco incógnitas, que sale compatible indeterminado con 2 grados de libertad (b y c) y para el que en este caso, sí da la solución, habida cuenta del tipo de sentencia que utiliza ([x,y,z]=solve(….)) para la que la solución sí se explicita.

>> syms a b c [define como variables a,b,c, pero no x, y,z]

>> solve('9*x+3*y+z', '324*x+72*y+18*z', '20.25*x+9*b+4.5*c=-100') (comando que sirve para resolver un sistema de ecuaciones lineales; cuando la ecuación está igualada a cero, no hace falta ponerlo, éste es el caso de la primera y la segunda ecuación)

ans =

x: [1x1 sym]

y: [1x1 sym]

z: [1x1 sym] [soluciones guardadas en estructura de datos, de tamaño 1; hace falta pedirlas explícitamente al programa para verlas]

>> x

??? Undefined function or variable 'x'.

>> [x, y, z]=solve('9*x+3*y+z', '324*x+72*y+18*z', '20.25*x+9*b+4.5*c=-100') [al añadir [x,y,z] el programa no sólo entiende que son ya variables, si no que además son las variables en función de las cuales se pide resolver el sistema de ecuaciones]

x = - 0.44444444444444444444444444444444*b - 0.22222222222222222222222222222222*c - 4.9382716049382716049382716049383

y = 4.0*b + 2.0*c + 44.444444444444444444444444444444

z = - 8.0*b - 4.0*c - 88.888888888888888888888888888889

C. que al hacerlo a mano, trabaja con las 4 ecuaciones, le propone a D. que lo haga también él así en lugar de con las tres primeras ecuaciones, dado que no le ha dado una solución ‘satisfactoria’. D. lo intenta de nuevo, pero el sistema le da error. Lo que está sucediendo es que sólo ha asignado tres variables de salida para un sistema ahora de cuatro ecuaciones y cinco incógnitas, que requiere pues de 4 incógnitas de salida (sólo tiene asignadas x, y, z).

[329] C. *Yo he metido.. yo lo estoy haciendo con las cuatro, no sé si me saldrá.*

[330] D. *Vale ponemos las cuatro.*

[331] C. *¿Qué te ha salido?*

[332] D. ---- *No, no me resuelve.*----

>> [x, y, z]=solve('9*x+3*y+z', '324*x+72*y+18*z', '20.25*x+9*b+4.5*c=-100', '216*x+36*y+6*z')

??? Error using ==> solve at 209

4 variables does not match 3 outputs.

Prueba ahora a quitarle la condición y(3)=-100, posiblemente porque en el enunciado se habla de que se llega aproximadamente a una profundidad de 100. Es obvio que esta decisión es fatal, ya que está en la esencia del modelo fijar el mínimo para la velocidad. Se queda así con un sistema homogéneo, luego compatible, para el que Matlab® da únicamente la solución trivial cuando el sistema es realmente compatible indeterminado. De hecho, la sintaxis que D. había asociado al sistema es la responsable de esta situación ya que determina que proporcione una única solución. Esto termina por despistarlos y D. acabará abandonando.

[332] ---- *¿Quieres que quitemos otra ecuación y ya está?*----

[333] C. *¿Y otra posibilidad?,*

[334] D. *Es que yo creo que no, que así no, no va a dar eso, ¿eh? Tenemos que, eh…, hacerlo más sencillo y ya está. Entonces…*

[335] C. *Podemos quitar la ecuación de menos cien, que eso es realmente lo que menos importa, la velocidad tiene que ser cero en x igual a seis, ¿no?*

[336] D. *Vale va, le quito la condición de cien que tampoco influye demasiado. Da todo cero.*

>> [x, y, z]=solve('9*x+3*y+z', '324*x+72*y+18*z', '216*x+36*y+6*z')

x =0 y =0 z =0

Comentan elegir otras tres ecuaciones, pero D. desiste y deja el trabajo a C., que sigue con su resolución a mano. En un primer momento, C. piensa que la solución del sistema de ecuaciones va a salirle en función de landa, esto es, compatible indeterminado. Debe ser en el momento en que segunda y tercera ecuación pasan a ser iguales en el proceso de escalonamiento de Gauss. En este punto, debería(n) haberse dado cuenta de que o bien había un error en la resolución última de D. con Matlab® o bien en la suya.

[342] C. *Porque sí tienes posibilidad de poner éste en lugar de poner el último.*

[343] D. *Bueno, vamos a ver eso* [se refiere a la resolución de C.]*, y si no pues vamos probando y ya está.*

[344] C. *Esto no me gusta*.

[348] C. *En función de landa me va a dar.*

Aunque C. continuará en paralelo y de forma intermitente con la resolución a mano del sistema de ecuaciones. D. por su parte, propone trabajar con un seno y C. conversa al respecto con él. Más concretamente, D. comenta que pueden suponer que en vez de utilizar la cúbica (se refiere realmente a A, B y C), podrían coger una función menos seno, que se anula tanto en cero como en π, y que cubre un dominio de 2π (que si bien no es 6, parece que le vale). Basta recordar que ya en su manuscrito, tenía recogida la forma que buscaban para la velocidad y al menos en comportamiento, se asemeja mucho a la función que ahora propone. Más aún, en [200], [201] ya habían comentado esta posibilidad. A C. no le parece mala idea y sugiere multiplicarlo por 100, seguramente pensando en el valor máximo del desplazamiento; D. que recuerda que se refieren a la función velocidad y que parece entender el significado del parámetro amplitud, le corrige y le propone multiplicar por 30. También podría ser que lo que hubiera pensado realmente es que cuando el seno es 1, –seno es -1, luego basta con multiplicar por 30 para llegar a -30.

[349] D. *Y si suponemos que en vez de subir y bajar con estos parámetros, cogemos la función seno de t, que se anula en cero, en π, y así tenemos 2π que es seis coma dos ocho.*

[350] C. *No estaría mal.*

[351] D. *Que la velocidad fuera así.*

[352] C. *Y lo multiplicamos por cien, ¿no?*

[353] D. *Ah, claro, tendría que llegar a cien. Claro, multiplicamos para que llegue a … Bueno, pero esto es la velocidad. Realmente, claro. Nosotros ya en el menos uno lo multiplicamos por treinta.*

C. le pregunta entonces por cómo quedarían velocidad y aceleración en ese caso (se equivoca de nuevo, ya tiene la velocidad y le faltarían desplazamiento y aceleración) a lo que D. responde calculando la integral a propuesta de C. También ee equivoca en el cálculo. Si v(t)=-30sent, entonces y(t)=30cost.

[354] C. ---- *¿cómo acabaría la velocidad y la aceleración?*----

[355] D. *A ver, la velocidad sería más o menos así. Entonces sería,*

[356] C. *Integral.*

[357] D*. Integral, tendríamos que sería más o menos, treinta por el seno, así que sería menos treinta coseno.*

[358] C. *Eso igual sería otra idea pero,*

[359] D. *Aun así. Tenemos que el desplazamiento sería más o menos así, más o menos así…* [como procesando]

[360] C. *Tiene sentido. Mira que si lo que habíamos dicho antes va a ser la solución* [se refiere a la intervención [200]).

Al pensar en la aceleración, D. se da cuenta de que coincide con el desplazamiento (deriva bien a(t)=-30cost; pero antes había integrado mal), lo que le hace dudar porque no concuerda en absoluto con las ideas que tiene preconcebidas (recordar los dibujos de su manuscrito). Llega incluso a preguntarse si es correcta la integral (da en el clavo, pero se da cuenta más adelante). En esas condiciones, habría que desechar la idea. C. por su parte propone coger x/2 como ángulo para que tarde el doble en llegar (se refiere al periodo lo que indicaría que conoce el significado del parámetro B en sen(Bx); intervenciones posteriores indican que no es así). Al fijarse en que la función seno ya cubre todo lo que necesita (recordar gráfica) lo desestima.

[361] D. *Lo que no cuadra es que, que, que claro si tú, es que claro, te saldrá la misma función para la aceleración y para, bueno, te sale esto, bueno, ahora he visto que no, cuando tú integras te sale esto ¿no?*

[362] C. *¿y si hacemos media x? No sé decirte, que tarde el doble en llegar. Realmente el seno es esto, entonces no nos sirve.*

Hay un tiempo de reflexión y trabajo en que C. vuelve al sistema y D. al seno. En un intermedio, D. le pregunta a C. si ha hecho el sistema quitándole la condición de -100 (la que él quito y le dio un sistema de solución trivial) a lo que C. responde que no, que de hecho la ecuación es linealmente independiente de las otras, cuando no es ese el caso con las tres primeras. Esto da pie a que D. sepa con certeza que tienen un error: o en Matlab® o C. en su resolución. C. parece conformarse y D. también. Al menos tienen hasta ahí.

[364] D. *¿Lo has hecho quitando la condición de cien?*

[365] C. *La condición de cien nos sirve para conseguir algo, sobra una de estas.*

[366] D. *Vale. Vale pues entonces lo tenemos mal.*

[367] C. *Da igual, recupe, mientras tengamos hasta aquí, no está mal.*

[368] D. *Sí, sí.*

Otro tiempo para el trabajo individual y D. rectifica y se da cuenta de que la solución del seno es correcta (debe haber vuelto a integrar o derivar y comprobar el inverso, que es lo que se suele hacer en estos casos). Ya 'respiran tranquilos', lo podrán así.

[369] D. *Ah, no, espérate. Está bien, está bien. Podemos usar ésta.*

[370] C. *¡Qué bien, nano!*

[371] D. *Sí, sí, está bien. Si pones en la velocidad menos treinta seno de x... Ahora que me ha vuelto a salir, lo ponemos así y ya está.*

D. le explica a C. en [378] por qué es válida. Se apoya para ello en dos de las tres gráficas que tiene en su manuscrito, matizando incluso que lo que vale es la forma que tienen, porque en el caso del desplazamiento (es la que matiza), habría que bajarla al cero (misma gráfica salvo desplazamiento vertical). C. propone empezar el análisis desde el coseno (desde el desplazamiento) y sugiere coseno menos, cien coseno menos, cincuenta coseno menos cien (casi seguido). Da la sensación de que esté pensando rápidamente en lo que necesita. La amplitud para llegar a cien (a la tercera acierta pero sin ayuda, lo que hace pensar que sabe lo que busca pero tarda en procesarlo) y el parámetro desplazamiento vertical para empezar en cero. No parece que esté dialogando con D. sino que es una reflexión personal en voz alta. D., que intenta ayudarle, piensa en el desplazamiento vertical también, pero se equivoca al señalar la velocidad en lugar del desplazamiento, indicando que empieza en cero.

[378] D. *Yo pondría esto en ésta. Mira, ves, si pones*, *si pones esa de menos treinta seno, hace así la de la velocidad. Su integral te hace así, que sólo… te hace así* [está dibujando mientras habla, C. mira] *que es: aquí llega y empieza a subir, que es como más, más o menos parecida a esto* [señala alguna otra gráfica que tiene en otra hoja, quizás sea la del enunciado], *bueno, sería en cero.*

[379] C. *Ponemos ahí, porque realmente en lugar de un seno coges un coseno y así ya te vas arriba del todo. Coseno menos,*

[380] D. *Vale, vale, bien.*

[381] C. *Cien coseno menos,*

[382] D. *Bueno, que debería empezar en cero, en velocidad cero, ¿no?*

[383] C. *menos cien. 50 coseno menos cien.*

Ya están convencidos. C. propone tachar la solución de la cúbica, D. asiente, aunque C. comenta que cuando la acabe podrían poner las dos. Recordemos que C. aún no ha terminado la resolución a mano. En sus manuscritos finales, C. optará por poner esta solución y dejará la función trigonométrica para la generalización del modelo, mientras que D. sólo recogerá esta solución tanto en la creación de un nuevo modelo como un intento de generalización para el apartado de Aplica tu modelo.

[385] C. *¿Qué hacemos tachamos esto?* [se refiere a lo del sistema de ecuaciones]

[386] D. *Tachamos y ya está.*

[387] C. *Sí.*

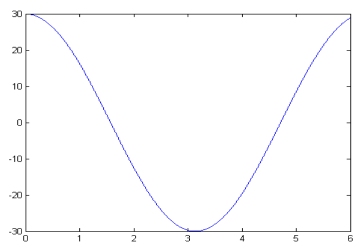
[388] D. *¿Tú lo habías escrito o algo?*

[389] C. *Sí, bueno, cuando ya termine…. podemos terminarlo y poner las dos posibilidades.*

Durante un rato D. representará variantes de la solución propuesta en Matlab® para dar con la definitiva mientras C. termina el sistema, aunque no obstante (no se puede saber si después de acabarlo o entre medias), también conversará con D. en el desarrollo de esta búsqueda. D. no empieza con la última propuesta de C. a saber 50cos(x)-100, sino que juega primero con los parámetros 30 y 60 a pesar de que está describiendo el desplazamiento (usa coseno). Parecía que D. conocía el significado de la amplitud (mirar [353]), sin embargo prueba con A=30 y A=60; quizás al desconocer el comportamiento del parámetro desplazamiento vertical se pierda, o realmente no lo conoce tal y como señalamos en su momento al decir que D. podría haber pensado en –30senx porque si sen(x)=1, -sen(x)= -1,que por 30 da -30.

- Análisis de y=30cos(x): Amplitud: |A|=30 (la gráfica de cos(x) se dilata 30 unidades e la dirección del eje OY): Periodo:2π; Misma gráfica que la del coseno pero de rango [-30,30]. Los máximos pues en y=30.

  >> x=0:0.001:6; y=30*cos(x); plot(x,y) [representación en [0,6] con una partición de 0.001]



- Análisis de y=30cos(x)-30: Amplitud: |A|=30 (igual que la anterior); Periodo: 2π (igual que la anterior); Desplazamiento vertical D=-30 (la gráfica 30cos(x) se traslada 30 unidades en la dirección del eje OY hacia abajo, luego rango [-60,0]. Misma gráfica que 30cos(x) pero con los máximos en y=0.

D. debe andar confundido, ahora mezcla 30 y 60.

- Análisis de y=60cos(x)-30: Amplitud: |A|=60 ; Periodo: 2π; Desplazamiento vertical D=-30 --- la gráfica está desplazada 30 unidades del eje OX y en la dirección del eje OY respecto a la función y=60cos(x), luego rango [-60-30,60-30]=[--90,30].

En este momento se incorpora C., cuando probablemente ha acabado con la resolución del sistema de ecuaciones. Pregunta a ver cómo sale, tal vez pensando que D. representará 50cos(x)-100 que era la propuesta que había hecho hace un rato. En el momento en que se lo dice, D. cierra y=60cos(x)-30, la modifica y pone y=60cos(x)-60. C. se ríe, el mínimo está en 120 y 'te estrellas'. D. señala que comienza en cero (algo ya ha avanzado porque tanto desplazamiento como velocidad deben empezar en cero).

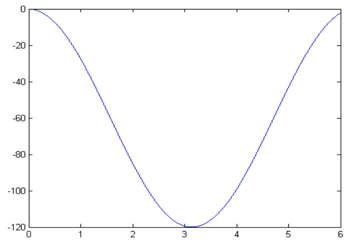
[393] C. *Ahí está. Vamos a ver qué tal sale.*

[394] D. *Vale, si pones ésta, a ver cómo sale. Mira, empieza en cero* [señala con el dedo en la pantalla]

[395] C. *Y acaba en ciento veinte, te estrellas* [ríe].

- Análisis de y=60*cos(x)-60 [amplitud 60; periodo 2π; desp. vert -60; rango [- 120,0]]

```
>> x=0:0.001:6; y=60*cos(x)-60;
plot(x,y)
```



Parece que D. no se aclara con la amplitud y el desplazamiento vertical, que juntos, hacen variar el rango. Busca un rango de -100 a 0 pero no se hace aún con él. La clave la da C. en [397] y en [402]. D. probará primero con 60cos(x)-50 y dado el desfase de 10 que queda por acortar, intuye que también debe variar el otro, por lo que opta por 50cos(x)-50. Cuando C. lo expresa abiertamente, poner 50 y quitar 60; D. lo hace en términos de modificar pendiente. D. da por buena y=50cos(x)-50 en [403].

[396] D. *Ah, no, sería…*

[397] C. *Por lo menos 50.*

[398] D. *Vale, sería…*

- y=60*cos(x)-50; [amplitud 60; periodo 2π; desp. vert -50; rango [- 110,10]]

[399] D. *Ay, no, espera. Vale pero sería ahí…* [señala que está por arriba de cero, en 10 en el eje de ordenadas]

[400] C. [señala en la pantalla sobre la última sentencia de Matlab® el valor sesenta] *Es que ahí hay que quitar el sesenta,*

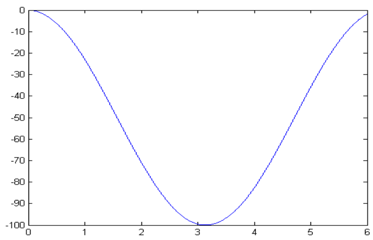
[401] D. *No, quitar, quitar pendiente*.

[402] C. [vuelve a señalar el mismo sitio] *y poner cincuenta.*

[403] D. *Mira, es ésa. Yo pondría ésta: 50 coseno menos 50.*

- Análisis de y=50*cos(x)-50: amplitud 50; periodo 2π; desp. vert -50; rango [- 100,0].

  >> x=0:0.001:6; y=50*cos(x)-50;
  plot(x,y)



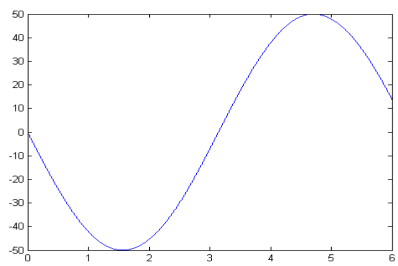
C. le pide que la comprueben, esto es, que revisen las especificaciones (escritas o pensadas o comentadas) aunque no menciona el apartado 3). Quizás sea por propia iniciativa, cosa totalmente razonable. A partir de [405] y en varios momentos no continuos en el tiempo, comprueban que para la función desplazamiento, función velocidad y función aceleración asociadas se cumplen dichas especificaciones. D. no lee el enunciado de 3) hasta [465], momento en que sí centran su atención realmente en la comprobación. Este primer acercamiento es rápido y sólo compete a la función velocidad. Parecen observar únicamente el aspecto de la gráfica que concuerda con lo que esperan de ella.

[404] C. *Mira a ver si funciona.*

[405] D. *Ahora si quieres la revisamos y eso. A ver si cambiamos esto y esto, sería menos, menos…* [escribe en Matlab la sentencia para representar -50sen(x) y una vez representada, sigue la gráfica en el aire con el dedo]. *Aquí la velocidad desciende, sí. Yo creo que sí.*

- Análisis de y=-50sen(x): Amplitud: 50; Periodo: 2π; Además v(0)=0; v(6) 'casi' 0, realmente v(2π)=0; v(3) 'casi' 0, realmente v(π)=0. Nota: ellos aún no han hecho este análisis detallado, aunque con la vista de la gráfica es casi obvio.

>> x=0:0.001:6; y=-50*sin(x); plot(x,y)



Dejan ahora de lado la solución trigonométrica y vuelven al sistema de ecuaciones. C. ya tiene su solución (errónea), a saber, $y=0.74x^4+8.98x^3-26.95x^2$. La representan aproximada $y=0.75x^4+9x^3-27x^2$ y les convence bastante, salvo por el hecho de que llegue tan sólo a 60m de profundidad, lo que confirma que está mal resuelta. D. intenta representar la velocidad asociada a esa función desplazamiento pero le da un error en Matlab® y habida cuenta de que es errónea lo dejan estar. El error consiste en pedir la representación de una función definida por la derivada de otra. Debería haber hecho primero el cálculo y luego pedir la gráfica. Así las cosas, optan definitivamente por la solución trigonométrica. D. tacha la parte correspondiente al sistema de ecuaciones en su manuscrito y C. la mantiene y añade en él:

Manuscrito C. ***Con esto sólo alcanza h=-60.***

[406] D. *Representamos esa función, a ver si sale. Si nos ponemos... A ver. Dime ¿?¿?, dime.*

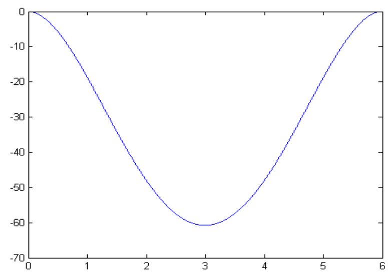
[407] C. *A lo mejor me sale lo mismo que a ti, pero..*

[408] D. *No, a ver si se ajusta, lo ponemos. … Espera*

[409] C. *Tienes que poner, menos cero setenta y cinco,*

[411] C. *más 9, más 9 t al cubo, menos 27 x cuadrado.*

```
x=0:0.001:6;y=-0.75*x.^4+9*x.^3- 27*x.^2;
plot(x,y)
```



[412] D. *No está mal, la verdad es que llega…*

[413] C. *Fíjate, es que fíjate, que no llega a cien, ¿por qué no llega a cien?, ¿dónde me he equivocado?*

[416] D. *A ver*

```
>> x=0:0.001:6; z=diff(-0.75*x.^4+9*x.^3-27*x.^2); plot(x,z)
??? Error using ==> plot
```

[417] C. *¿A cuánto llegaba, a sesenta?*

[418] D. ---- *La tuya sí.* ----

[419] D. *Esto lo quitamos y ya está.*

[420] C. *Yo voy a dejarlo ahí.*

[421] D. *Sí, dejamos algo y ya está.* [no lo hace] *Entonces, yo la que he puesto es esta: cincuenta coseno…*

A partir de ahora, D. representa y=50cos(x)-50, v=-50sen(x) y a=-50cos(x) y comprueba que el comportamiento cuadra con lo esperado (gráficas de su manuscrito ya comentadas). Parece sorprenderle la gráfica de la aceleración, pero enseguida la lee en términos de crecimiento y decrecimiento de la velocidad, lo que le permite constatar que es correcta.

[423] D. *Que sale esto* [D. vuelve a representar el desplazamiento], *eso. Si se representa más o menos,…*

[427] D. ---- *menos cincuenta seno de x… a ver…*----

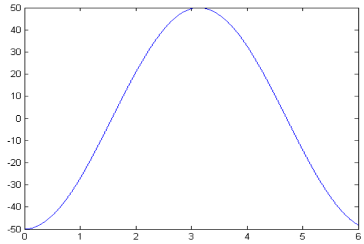
[429] D. *Y ahora la aceleración, hacemos la representación ¿o qué? Lo representamos a ver como sale y ya está. Esto sería menos cincuenta coseno de x.*

[430] D. *Uf, mola* [ríe].

[431] C. *¿Qué es?*

[432] D. *La aceleración. Ah, bueno la velocidad y la posición son ¿?¿?. Ah claro es porque aquí la función es decreciente y la aceleración es negativa, aquí la velocidad empieza a crecer y ahí que es cuando ya está llegando la velocidad decrece y por tanto la aceleración es negativa.*

```
>> x=0:0.001:6; y=-50*cos(x); plot(x,y)
```



Manuscrito D. ***Podemos considerar la función y=50cost-50. La velocidad v(t)=-50sin(t) i a=-50cost. Las gráficas son las que aparecen arriba. t ϵ [o,2π].***

C. por su parte, se embarca en averiguar cómo podrían modificar el ángulo para adaptarlo no sólo a un tiempo de iteración (como él lo llama) de 6 sino a cualquiera. Sigue en la línea de [362]. Dejamos por el momento de lado este episodio que se intercala con el de revisión de especificaciones para volver más adelante a su análisis. Llega el momento en que D. lee el apartado 3). y toman conciencia de que se les pide poner por escrito que su modelo efectivamente cumple lo que buscaban. D. no había añadido nada al respecto en su manuscrito (a excepción de que las funciones elegidas tenían por gráficas las mismas que sugerían sus especificaciones). C. tampoco, y de hecho, y como ya habíamos indicado, nunca recoge la solución al apartado 2) con la función trigonométrica ni al apartado 3). Digamos que opta por dar un modelo más general (que tiene que ver con el cambio en el ángulo que comentábamos antes) que serviría para 2). y para la parte final de la tarea en que se les pide generalizar el modelo.

[442] D. *Y en la última, ¿por qué tu modelo satisface…ponemos …. En lo de por qué tu modelo satisface las especificaciones del problema, no hemos puesto ninguna, ¿no*?

[443] C. *Hemos acertado en el c).* [Ríe]

También C. revisa las gráficas. En principio, parece que porque está haciendo cábalas para el cambio de periodo, aunque esta situación le lleva junto a D. a revisar mejor el comportamiento de la función velocidad, que es cuando D. ya debe estar escribiendo la respuesta a 3). Los comentarios sirven para reafirmarse y permiten añadir algo nuevo a la respuesta. Se tarda el mismo tiempo en bajar que en subir, el cambio se hace en consecuencia en un punto intermedio (abscisa t=π), y al finalizar el montacargas frena (v=0, que no aceleración). El intervalo de definición es [0,2π].

[449] C. *Esta es la gráfica de la velocidad, decreciente, sube* […] *¿no tenía que tardar más en alcanzar menos cincuenta en velocidad?*

[450] D. *No, por eso ahora tarda un poco menos en bajar, bueno tarda un poquito más en bajar, tres coma poco, que es π, claro es π.*

[451] C. ---- *Bueno pero, al menos eso se alcanza en el punto intermedio, no sé, del trayecto, después se frena…* ----

[459] D. *Sí, el trayecto en este caso duraría seis minutos, seis, veintiocho.*

Manuscrito D. ***La velocidad desciende llegando al final, siendo 0 cuando se llega al suelo. Se tarda prácticamente el mismo tiempo en subir que en bajar, y se llega a una profundidad de 100 metros como queríamos.***

Tal y como hemos señalado antes, C. estaba inmerso en un análisis del parámetro por el que debe multiplicar al ángulo (nuestro B en y=Acos(Bx+C)+D) que le permita una generalización del modelo para cualquier tiempo de iteración (periodo). Arranca bien su análisis, pero en un momento determinado, se pierde hasta el punto de acabar sin dar con la clave. En los instantes en que D. atiende a sus reflexiones, parece llevarle la corriente, pero acaba admitiendo que no está entendiendo nada. En [414] C. propone intentar trabajar con coseno de landa. Yerra en su primer análisis, pues landa no va a ser el tiempo de iteración, pero se puede sobrentender que busca modificar el ángulo para recoger cualquier variación en el intervalo base de definición, eso sí, siempre que no sea de hecho, demasiado corto, lo que haga que se baje o suba demasiado deprisa. Aunque en [427] D. le dice explícitamente que después, que más tarde, C. no puede evitarlo y cada poquito, vuelve sobre el tema. De ahí que las intervenciones parezcan intercaladas en función del tema que se trate. D. con las especificaciones, C. ayudando de tanto en tanto, y C. también con el problema del cambio de periodo.

[424] C. *Espérate, lo que podríamos hacer, es aquí, intentar, coseno de landa menos cincuenta, de manera que landa sea el tiempo que, el que quiere,*

[425] D. *El que quiere la,*

[426] C. *pero ponemos como recomendación que, que debe mantenerse en cierto intervalo para evitar que, que o caiga muy rápido o que suba muy rápido.*

[427] D. *Vale, entonces ponemos…. Sí. Dibujamos con un modelo general esta función pero después…* ----

[428] C. *Y después ese landa ya lo definimos teniendo en cuenta cuál es el tiempo indicado.*

Desde este punto [433] y en adelante y hasta que C. (y D.) abandonan este tema [492], nos resultan incomprensibles sus razonamientos relativos al cambio en el periodo, razón por la que remitimos al Anexo 3. para su lectura en caso de interés y al manuscrito correspondiente en el Anexo 5. La parte de este tramo relativa a las especificaciones es de clara comprensión y ya ha sido recogida anteriormente.

C. y D. tienen que ir terminando, en [485] y [486] ya habían comentado que casi no les quedaba tiempo. Coincide casi con el momento en que Luís les pregunta cómo van.

[485] D. *Ya está, es que no tenemos tiempo.*

[486] C. *Yo también tengo que coger un autobús.*

[487] D. *Yo como mucho diez minutos más.*

[493] D. *Vamos a ver lo último y ya está.*

[494] C. *Sí*

[495] D. *Vale.*

[496] Luis. *Bueno, ¿estáis ya?*

[497] C. *¿Qué?*

[498] Luis. *¿Qué estáis ya o todavía seguís?*

[499] D. *Si no, ya está.*

[500] C. *Casi, casi ¿a ver dice algo más?*

[501] D. *No ya está, eso sólo claro.*

[502] D. *Casi está terminado. Está terminado, por lo menos el segundo*.

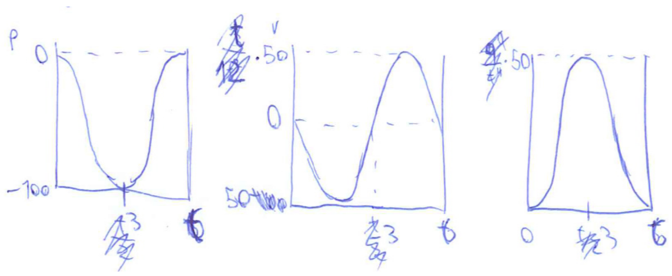
[503] C. *Todavía no, pero vamos a descifrar cómo se hace.*

[escriben]

Rematan aquí, D. recoge muy por encima la idea de generalización de C. y C. por su parte entrega el manuscrito con las notas que debe haber estado tomando en el transcurso de sus pesquisas con el landa:

Manuscrito D. ***Aplica tu modelo. Podemos tomar y=cos(λ)-50 (λ variaría), según lo que queramos que dure el trayecto. Se llega a los 100m de profundidad. Para saber el mejor valor de λ, necesitaríamos más datos.***

Manuscrito C. ***Tenemos la función 50cos(1/2)-50*** [debía querer poner cos(x/2)], ***cuya gráfica es similar a la deseada (llegando a los 100 metros de profundidad). Las gráficas resultantes son***



Para variar la velocidad de iteración, hay que cambiar el término x/2 de manera que

x $\longrightarrow$ t: [0,π]; x/2 $\longrightarrow$ t: [0,2π]; x/n $\longrightarrow$ t: [0,nπ].

4.2. Un análisis macroscópico o un 'regreso' a lo microscópico.

Tal y como señala Puig (1996) en el contexto de resolución de problemas, *los procedimientos de análisis de protocolos que estaban en boga en los años setenta consistían en la elaboración de listas en ocasiones minuciosas y con pretensión de ser exhaustivas de conductas propias de la resolución de problemas y de esquemas de códigos para representarlas, con las que se calificaban luego las conductas recogidas en los protocolos produciendo ristras de símbolos como descripciones de ellos. Estas ristras de símbolos se* *examinaban después con procedimientos estadísticos en busca de regularidades. El esquema de análisis elaborado a mediados de los 80 por Schoenfeld pretendía describir el proceso de forma macroscópica y no microscópica como lo hacían los trabajos de la corriente anterior. Para ello, introdujo la idea de dividir el protocolo en episodios, definiendo éstos como secuencias de conductas que son todas de la misma naturaleza. Esa definición de "episodio" tiene que estar acompañada para que tenga sentido de una definición correspondiente de cuáles son los tipos de conducta distintos que se van usar para calificarlas y segmentar así el protocolo en trozos, y esos tipos de conducta son los que componen el modelo del proceso* (Puig, 1996).

Siguiendo con esa visión macroscópica, los análisis que se harían desde el marco teórico de la modelización, seguirían las conductas de actuación de los alumnos segmentadas en cada uno de los subprocesos del proceso general de modelización.

En nuestro, caso, las características propias de la tarea (y el análisis efectuado ya en la reconstrucción racional), determinan una elección que se aleja del punto de vista macroscópico y que, sin embargo, aporta mucha riqueza desde los detalles, desde lo pequeño. Basta pensar, por ejemplo, en que la tarea no parte de un fenómeno a modelar, sino que ubica al participante en el subproceso de validación, en el que, vista la resolución de los participantes, sólo se consideran una parte de las propiedades cualitativas del fenómeno, para conducirlo después, de manera guiada, de nuevo al proceso. Punto en el que se reinicia así el bucle, de manera que el paso por alguno de los subprocesos viene de algún modo predeterminado y no es enteramente libre, en tanto en cuanto, se mantiene fiel a las propiedades cualitativas del fenómeno que del análisis del modelo primario se desprenden reconvertidas además a propiedades matemáticas que no vuelven a interpretarse en términos del fenómeno. Podría pensarse también, que desde el punto de vista de la heurística en resolución de problemas, la tarea, entendida como un problema global — o dos (si subdividimos en la parte de análisis del modelo dado y de creación del modelo propio) —, se compone de apartados que pueden incluso ser resueltos no tanto como problemas, sino como ejercicios, dada la clara accesibilidad a la herramienta de (re)solución. Esta situación, merma la posibilidad de estudio en este marco. Cabe decir, no obstante, que si bien no optamos por un análisis macroscópico de los protocolos, es obvio, que elementos aislados de este análisis, aparecerán en nuestro análisis micro.

Iniciamos, pues, nuestra andadura, presentando ejemplos de conductas y actuaciones de los participantes que ilustran, no sólo alguna de las consideraciones que hemos hecho acerca de la importancia del análisis cualitativo de los fenómenos para la modelización del mismo (objetivo principal de nuestra investigación), sino elementos de índoles muy diferentes, pero que caracterizan (y seguro que además están descritas en contextos varios) su comportamiento. Obviamente, éste sólo es un análisis más que añadir al que de forma menos ortodoxa acompaña la reconstrucción racional. Señalar que cuando nos referimos a episodio, no lo hacemos desde la terminología de Schoenfeld, del mismo modo que tampoco hablamos de conductas, actuaciones, comportamientos, con acepciones distintas a las de la lengua común.

El análisis cualitativo ¿guía y control del proceso? Dos perfiles, una única vía de 'éxito'.

Comenzaremos relatando dos situaciones. Por un lado la de la pareja A./B. con perfiles claramente opuestos de partida, a saber, A. abogando por una interpretación en términos de velocidad y aceleración el modelo para invalidarlo y proponer un modelo alternativo y B. que se refugia en los teoremas de derivación para relacionar los comportamientos de desplazamiento, velocidad y aceleración, y que se resiste al cambio justificando lo injustificable. Y por otro lado la de la pareja C./D. en que la línea divisoria entre perfiles no es tan clara, a pesar de que se adivina de las intervenciones de C. mayor predisposición a la lectura física del fenómeno.

Centrándonos en el comportamiento de la pareja A./B. el punto de inflexión llega con la valoración del comportamiento de la velocidad en el punto de abscisa t=6. Mientras A. requiere del modelo periodicidad, lo que obligaría a que la velocidad fuera cero como en t=0 (además de que en un punto de parada la velocidad debe ser nula), para B. la periodicidad no es necesaria, y el hecho que la velocidad sea elevada en este punto se explica por la existencia de 'algo' que frena el montacargas. Valorando esta afirmación, entran a evaluar el comportamiento de la velocidad, no sólo en el punto de abscisa t=6, sino en el intervalo [4,6], momento en que las diferencias entre el comportamiento en [0,4] frente al de [4,6] entran en juego. Mientras en el primer tramo la velocidad media no es excesiva (B. como A. ya piensa en términos de incremento de desplazamiento / incremento de tiempo); en el segundo, la velocidad media es mucho mayor, lo que no parece tener sentido (también se piensa ya en términos de analogía de comportamiento en el tramo de descenso y de ascenso); esto implicaría buscar un comportamiento análogo para el segundo tramo, esto es, parar en t=6 y llegar en condiciones de suavidad en la velocidad (y por ende en la aceleración). B. ya no puede refugiarse en las matemáticas, no vale con determinar puntos notables (se presupone que B. aunque reticente en un principio, valoraría como especificación que la velocidad fuera cero en t=6), sino que introducir términos asociados con comportamientos de suavidad en las funciones velocidad y aceleración, van más allá de esta opción. El punto clave está, tal y como B. recoge en una de sus intervenciones, y también en su manuscrito final:

[276] B. ---- un periodo de frenado y acelerado, o sea un periodo en el que no se pare bruscamente, que descienda de velocidad poco a poco ….

De este modo, las propiedades cualitativas de la velocidad (luego del fenómeno), se traducirían en propiedades cualitativas de la función que lo modela: se espera que tenga un comportamiento análogo en los tramos [0,3] y [0,6], (ya incluimos el cambio en el tiempo para que se tarde lo mismo en bajar que en subir, y el hecho de que la suavidad que se exige para [0,6] ya ha sido admitida como válida en [0,3]) con valores nulos para los puntos de parada en t=0, t=3 y t=6, de concavidad en el primer intervalo y por debajo del eje OX (recordemos que dan por buena la velocidad aquí) y de convexidad en el segundo tramo y por encima del eje OX (parar forzar la llegada a t=6 con velocidad nula). Además, los cambios de pendientes no deben ser bruscos. Así las cosas, A. y B. optan por una función trigonométrica sinusoidal (que responde a las propiedades cualitativas que acabamos de describir) para la velocidad, luego para el desplazamiento y la aceleración. Comentar para acabar, que el gran obstáculo para A.

incluso para admitir la función sinusoidal como modelo, estuvo todo el tiempo en el comportamiento de la aceleración en los puntos de salida, parada y llegada, para los que se espera una aceleración nula que el modelo no recoge. Acaba admitiendo esta opción porque desvincula el comportamiento de la aceleración de estos puntos admitiendo para ellos momentos de frenado (y nosotros añadimos de arranque), esto es discontinuidades en la aceleración.

En el caso de la pareja C./D. tardan mucho más tiempo en introducir elementos del fenómeno relativos a la velocidad (no como derivada, sino como magnitud física) que A./B. De hecho, establecen una conversación con uno de los investigadores respecto al tipo de respuesta que se les exige en a) o en b), planteando si debe ser de carácter matemático o, tal y como ellos lo califican, más informal. A pesar que el investigador les insta a no centrarse sólo en la parte matemática, sino a buscar también explicaciones relacionadas con el comportamiento del montacargas (fenómeno), D. lo evita en la medida en que el desarrollo de la resolución se lo permite, mientras C. 'recoge' la indicación, y casi inmediatamente, habla de la velocidad media en términos de espacio recorrido por incremento de tiempos. Como en el caso de A./B. e inmersos en el estudio de las desventajas del modelo, el análisis de la velocidad (focalizado en el punto de abscisa t=6) es la clave (también la aceleración tan elevada en ese punto). La velocidad debe ser cero, pues es un punto de reposo, y mientras la velocidad de descenso no es excesiva (lo comprueban de un modo totalmente descabellado), la de ascenso sí (realmente llegan a concluir que no, pero como es tan descabellada la argumentación sobre este hecho, acaban asumiendo que lo es). Así, D. entra en la valoración física comentando que no tiene sentido llegar al nivel del suelo con velocidad máxima, lo que le 'obliga' a pensar en términos de que 'debería estabilizarse' al llegar a ese punto. De nuevo validan el modelo para el primer tramo y C. propone una función más tranquila (más suave) para el segundo. Desde el punto de vista del desplazamiento, la llegada al punto de abscisa t=6 debe ser más suave y con pendientes tendiendo a cero. De nuevo, simetría para esta función y comportamiento análogo para la velocidad en los tramos de descenso y ascenso. De este modo, las propiedades cualitativas que acaban destacando en la función velocidad vienen a ser las mismas que las de la pareja A./B. También optan por una función trigonométrica para su modelado, aunque estudian primero otra variante que en esencia, cumple las mismas propiedades cualitativas, la de una función cúbica con mínimo. Como A. en un principio, C. y D. asumen en el discurso que en los puntos de salida, parada y llegada la aceleración es nula, aunque luego reflejan las raíces de esta función alejadas de estos puntos notables, como si realmente fueran comentarios hechos por 'inercia' sobre los que no se reflexiona y que no suponen ningún obstáculo.

Terminado el relato, no parece arriesgado afirmar que el comportamiento físico de la velocidad ha sido la clave para que ambas parejas lleguen al modelo 'esperable' para la tarea, en la que las propiedades cualitativas del fenómeno hacen de guía (notar además que no es el desplazamiento sino la velocidad en quien se apoyan) y para las que como luego indicamos se elige una función adecuada que comparte con la función velocidad estas propiedades cualitativas.

El fenómeno de origen o el 'fenómeno' que infiere el modelo primario. Modelo plausible vs. Modelo esperable.

El hecho de que se empiece la actividad desde un modelo primario desde el que se analiza el fenómeno que se modela, puede, como a nuestro entender ocurre en este caso, desviar el foco de atención de las propiedades cualitativas del fenómeno que distan mucho de ser recogidas en el modelo primario, para centrarse en aquéllas que sí recoge o que recoge parcialmente. Basta pensar por ejemplo que éste no tiene en cuenta la cinemática que subyace al fenómeno. De este modo, no es de extrañar, salvo que el participante sea capaz de desprenderse de 'estas' ligaduras, que el modelo que nosotros hemos venido a llamar 'esperable' sea una propuesta de resolución más factible que la del modelo plausible.

Si bien se espera que los participantes, como es el caso, sean capaces de alejarse de la función concreta, sería una grata sorpresa que lo hicieran también de las familias de funciones conocidas, admitiendo una función a trozos para las que el comportamiento funcional fuera diferente. Llegar a esta situación, sería posible si se ha dado el salto al modelo plausible. Es una hipótesis el hecho de que no sólo existen ligaduras en las propiedades cualitativas del fenómeno que se tienen en cuenta, sino de que también existen en el tipo de funciones que pueden escogerse de un catálogo (mirar más adelante '*El conocimiento de familias de funciones. Un catálogo de dónde elegir'.)*

¿El fenómeno o el modelo?. Primero, salvar el modelo.

Llama la atención que en ambas parejas, haya momentos en los que se intente dar una explicación a por qué el modelo primario está diseñado tal cual, forzando, buscando, exigiéndole al fenómeno una razón que lo justifique. Esto es, se intenta ajustar el comportamiento del fenómeno, al comportamiento de la función, del modelo. Son ejemplos de esta afirmación, las intervenciones:

[49] B. --- *requiere más seguridad para bajar que para subir* ---- para referirse al hecho de que se requieren 4 minutos para el descenso y 2 para el ascenso.

[148] B. ---- *no, no, tú lo frenas ----, el montacargas, y luego lo vuelves a poner en funcionamiento --- acaba subiendo a mucha velocidad* ---- para referirse al hecho de que no se llegue a t=6 con velocidad 0, un 'freno' es la causa de la parada (esto es a=0), lo que implica que aunque acabe subiendo a mucha velocidad, ésta pasa a ser cero de la 'nada'.

[156] C. *Es verdad que podemos dar por supuesto que los últimos 20 metros son para, para instalar el ascen, la base del ascensor*, ---- para intentar explicar por qué el montacargas en el modelo no llega a 100 m de profundidad.

El conocimiento de familias de funciones. Un catálogo de dónde elegir.

En Puig y Monzó (2008), se señalan de forma esquemática, los elementos que, a su juicio, siempre deberían estar presentes en un proceso de modelización. Uno de ellos, se enuncia en los siguientes términos: *Una decisión sobre el tipo de función que se va a ajustar de entre un catálogo de funciones disponibles, basado en : - Un conocimiento de propiedades cualitativas* *del fenómeno; -Un conocimiento de propiedades cualitativas de los tipos de funciones disponibles.* Asociados a estos elementos, señalan las competencias que serían necesarias para realizar dicho proceso de modelización, de las que señalamos: *Propiedades cualitativas de los tipos de funciones disponibles; Análisis cualitativo del fenómeno que se va a observar, con respecto al mismo tiempo de propiedades.* Competencias que toman sentido en tanto en cuanto *el conocimiento cualitativo tanto del fenómeno como de diversos tipos de funciones, desempeña un papel muy importante en la toma de decisiones sobre qué tipo (o tipos) de función va a ser el que se va a usar como modelo (o cuáles se van a comparar), y en la posterior adecuación de la función ya obtenida como modelo para predecir otros valores del fenómeno que no se han obtenido experimentalmente.*

En nuestro caso, el conocimiento de un gran número de funciones y de sus propiedades cualitativas, que se les presupone además a los participantes dado su nivel formativo, permiten abordar la creación de un nuevo modelo desde un catálogo de funciones suficientemente amplio como para encontrar aquélla que mejor refleja las propiedades cualitativas que del fenómeno se han señalado. Tal y como se comentaba en el análisis del modelo esperable, dar como respuesta una función trigonométrica o una cúbica en la velocidad, eran posibilidades más que justificadas, casi una apuesta ganadora.

La madurez y posiblemente el hecho de que el experimento se desarrolle fuera de un contexto de enseñanza/ aprendizaje, podrían ser las razones que permitan un avance en el desarrollo del nuevo modelo que va más allá de la búsqueda necesaria en la familia de las funciones polinómicas (como era el caso de Marmolejo). Recordemos que de hecho, ambas parejas proponen soluciones fuera de esta familia de funciones. Más aún, sin recurrir al ajuste (como era el caso de Carmen) o la reflexión (como era el caso tanto de Carmen como de Sebastián), se propone un cambio en el tipo de función polinómica para la velocidad, precisamente donde está la clave para el comportamiento del fenómeno. El desplazamiento, va a ser simétrico, del mismo modo que la aceleración, y no así, la velocidad. En las soluciones originales, Carmen no comprueba que las velocidades no le salen nulas para los momentos de inicio y llegada; y en el caso de Sebastián, se equivoca al reflejar tanto la función desplazamiento, como la velocidad y la aceleración, que obtiene para el primer tramo, con lo que no tiene en cuenta las propiedades de la velocidad al forzar su simetría. En nuestro caso, y para la solución mediante un polinomio de grado 4 en el desplazamiento, precisamente quien manda es la función velocidad, esto es el ‘fenómeno’.

Respecto a la forma canónica de la familia de funciones elegida, es obvio que se consigue descontextualizarla de una posición fija (lo que forzaría puntos notables fijos), tanto en su variante gráfica como en su comportamiento genérico, para su representación mental como si de un objeto libre se tratara, del mismo modo que se hace con el comportamiento esperado para el desplazamiento o la velocidad (y en última instancia y como consecuencia, para la aceleración). De nuevo la clave está en la velocidad, a la que se le ‘asigna’ el comportamiento de una cúbica con mínimo o de una función trigonométrica porque en ambos casos refleja (y comparte) las propiedades cualitativas que para el fenómeno se contemplan.

La comprensión del significado de los parámetros y el ajuste al 'fenómeno'.

Siguiendo con la reflexión anterior, la necesidad de fijar la función libre, obliga al conocimiento del comportamiento de parámetros de significado dinámico. También es posible la opción de recurrir a un sistema de ecuaciones, producto de imponer condiciones para los puntos notables (con lo que también se fija la función libre). Este último es el caso del ajuste de la cúbica para la función velocidad que proponen C. y D. El primero se torna necesario para ambas parejas cuando trabajan en el contexto de las funciones trigonométricas. Nos centramos para su análisis, pues en él.

Una lectura atenta de la última parte de la reconstrucción racional, da cuenta de la necesidad de los participantes, así como del recurso de ensayo y error como método de inferencia de significados de los parámetros, de cuyo análisis se da debida cuenta.

Lo interesante en este caso, es señalar que con el método de ensayo y error, ambas parejas son capaces de interpretar los significados de los parámetros A, y D, y no sólo, sino también de detectar que el valor de uno, influye en el otro y viceversa, dado que cambia el rango de la función.

Mientras la pareja A./B. prueba a trabajar con valores de C no nulos, para descartar inmediatamente otra posibilidad, la pareja C./D. ni siquiera lo contempla. En el caso de A./B., el hecho de que cambie la opción de trabajar con el seno a trabajar con el coseno, puede interpretarse como que, efectivamente, desconoce el significado del parámetro C, pues en caso contrario, con tomar $C=\pi/2$, el cambio de una función a otra no hubiera sido necesario. Más aún, en los manuscritos finales se añade un posible punto de abscisa de partida diferente a 0, que se añade a la función coseno correspondiente en la parte correspondiente al desplazamiento vertical, que no al horizontal.

En cuanto al parámetro B, la pareja A./B. sólo utiliza Matlab® para corroborar la elección, y de hecho plantean el cambio de periodo desde una perspectiva diferente, que en esencia es la misma, a saber, la de encontrar la transformación lineal que aplique el intervalo de definición $[0,2\pi]$ en el intervalo de definición $[0,6]$. Por lo que atañe a la pareja C./D., sólo C. se empeñará, también, en el cambio del dominio de definición, siendo consciente desde el principio de que la clave está en el parámetro B. Le será imposible concluir.

El ajuste a puntos fijos, pasa a ser así un proceso de matematización vertical cuando los parámetros no tienen significado intrínseco, y de matematización horizontal en la búsqueda del significado de éstos, cuando se desconoce su significado dinámico.

El software: jugando al despiste, aunque aliado también.

Cuando está presente un software gráfico simbólico, alguna de las competencias en el proceso de modelización (o de resolución del problemas) se derivan del alumno al software, ya que se puede considerar el software como un ejecutante de reglas matemáticas de forma competente; si la instrucción que se le da es pertinente, la realizará de manera competente (Filloy, 2006). En algún sentido, quedan como responsabilidad de las máquina las competencias tácticas y del humano las competencias estratégicas del proceso de modelización (o resolución de problemas) (Puig & Monzó, 2012) El software, en nuestro caso, asume la competencia en los cálculos, en la representación gráfica de funciones y en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales (para uno de los participantes). Es en este sentido un aliado (bajo instrucciones pertinentes). A cambio, el resolutor tendrá que ser competente en el uso de la herramienta gráfico simbólica, o al menos, en los ámbitos para los ésta que va a ser utilizada. Debe conocer el sistema de signos propio de la ventana de comandos algebraica, así como la sintaxis de los comandos asociados a las instrucciones matemáticas de representación de gráficas en intervalos y de resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Un desconocimiento inadecuado, o el desconocimiento de otro tipo de comandos limitarían su provecho para el resolutor.

Así las cosas, durante la resolución de la tarea y el uso del software, aparecen errores ligados a la diferencia en el sistema de signos del programa con el del álgebra, esto es, un conflicto entre lenguajes, como es el caso de no utilizar el símbolo * para el producto en f=2.5*y^3-15y^2 o en cos(3x), por ejemplo, o que la función trigonométrica seno se escriba 'sin' en lugar de 'sen'.

Más aún, en el programa, es necesario definir para el trabajo en lenguaje simbólico las variables a considerar de manera que el programa las diferencie de los caracteres de texto, cuando en el álgebra, la referencia a éstas es tácita la mayoría de las veces. Ni siquiera, como en otros programas, reserva la letra x para esta función. Por ejemplo, al introducir la ecuación eq1=A*t^3+B*t^2+C*t, es necesario primero, tener definidas t, A, B y C, en lenguaje simbólico, esto es, syms t A B C.

El hecho de que la ventana que por defecto utiliza el programa para la representación gráfica de funciones, no se adecúe a la representación del modelo original en los términos del fenómeno (intervalo [0,6]) o la no aparición de la cuadrícula (salvo mención expresa) retarda la visualización del modelo (o fenómeno) en su dominio de definición, así como de los puntos notables.

Y el desconocimiento de comandos impiden a los resolutores la representación gráfica de varias funciones al mismo tiempo, o el cálculo de una función de ajuste para su posterior representación, lo que induce decisiones ejecutivas de gestión, que de otro modo no hubieran sido necesarias.

Iniciábamos el apartado refiriéndonos al software que juega al despiste. La razón de este título viene referida a que la utilización del comando solve en Matlab® en contextos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales homogéneos compatibles indeterminados, puede no dar todas las soluciones si no se le indican qué variable(s) han de usarse como parámetro, lo que obliga a conocer de antemano el tipo de sistema de ecuaciones. Ocurre lo mismo que en el caso de la ecuación sen(x)=0, para la que únicamente devuelve la solución 0. En el caso que nos ocupa, de nuevo esta situación, obligó a decisiones ejecutivas de gestión que condicionaron el desarrollo posterior de la tarea. En la resolución de la pareja C./D., la primera propuesta para la generación de un nuevo modelo fue la búsqueda de una función cúbica (Ax^3+Bx^2+Cx) que debía cumplir unas condiciones que implementadas, dieron lugar a un sistema de ecuaciones lineales con 4 ecuaciones y 3 incógnitas. El participante C. se encargó de su resolución a mano, Y D. de su resolución con Matlab®. En el caso de D., varios errores encadenados, acabaron propiciando su abandono. Uno de ellos, es precisamente al que me acabo de referir.

Pero no sólo en este caso el programa juega al despiste. En el uso del comando solve, es necesario especificar una etiqueta de salida para sus soluciones. Una posibilidad es definiendo las variables de salida con [x,y,z], por ejemplo, y otra asignarle una etiqueta, por ejemplo, sol, en la que almacenará la solución en una estructura de datos, de modo que para poder ver la solución, se tendrá que pedir al programa que la explicite con sol.x, sol.y, sol.z. También la imposibilidad de acceder a la solución por desconocimiento, influyó en sus decisiones y en su posterior abandono. Se remite a este episodio y a su análisis completo a la reconstrucción racional (pp. 78-80). Se plantea la hipótesis de que si, bien la resolución a mano (que tampoco fue satisfactoria, por ser errónea), bien la resolución con Matlab® hubiera sido correcta, quizás los participantes no hubieran optado por la alternativa en las funciones trigonométricas.

Trabajo ¿cooperativo? Formas de relación. Todo se cumple ... y más ….

Como consecuencia del trabajo cooperativo se puede esperar de los participantes que se expliquen, convenzan, pregunten, hagan burla, interrumpan, muestren la superioridad (Puig, 1996, Cap. 5) y un largo etcétera. Tan sólo un apunte para destacar que en nuestro experimento, amén de las acciones descritas anteriormente, y para el caso de la pareja C./D. la forma de relación puede haber influido en el desarrollo de la resolución, en tanto en cuanto, en el momento en que deja de ser cooperativa, pierde el beneficio por el que las carencias de uno suelen ser suplidas por otro, o la no necesidad de explicarse, de argumentar, alejan de la búsqueda de razones.

Es el caso del episodio de la resolución del sistema de ecuaciones al que aludíamos en el apartado dedicado al software. Tal y como relatábamos allí, en un momento determinado de la resolución de la tarea, proponen como opción para el nuevo modelo una función cúbica en la velocidad de expresión algebraica Ax^3+Bx^2+Cx, para la cual se especifican unas condiciones, lo que da lugar a un sistema de 4 ecuaciones para las 3 incógnitas (A, B, y C). C. resuelve el sistema a mano; D. con el uso de Matlab®. Decisión que podría parecer a priori adecuada si en al menos uno de los dos casos, la resolución hubiera sido correcta. Puesto en la tesitura en la que no fuera así, un trabajo cooperativo hubiera hecho del defecto virtud. Si C. hubiera seguido los pasos de D. hubiera advertido el problema con las variables ya en el comienzo; si D. hubiera atendido a las razones de C. se habría dado cuenta de que el sistema último que él resuelve no podía tener la solución nula ya que en un momento dado, éste le indica que las ecuaciones en cuestión son linealmente dependientes (remitimos de nuevo a la reconstrucción racional, pp. 78-80).

No sólo en este episodio, sino también en la parte final de la resolución (de la que ha sido imposible establecer la reconstrucción racional) vuelve a darse esta situación. Cuando C. insiste en buscar un cambio para el ángulo que permita la generalización del modelo para dominios de definición (tramos temporales) diferentes, D. opta por seguir con el ajuste a las especificaciones primeras, de modo que en cada intervención (intermitente) de C. sobre el asunto, sólo asiente, afirma, consiente, y de forma muy tímida, en algún momento, hace notar que no sigue los razonamientos de C. Una postura más enérgica o un trabajo conjunto, habría permitido abortar antes el intento, o aunar fuerzas. Remitimos a la reconstrucción racional para la lectura del pasaje.

Elementos de gestión. Toma de decisiones ejecutivas.

La tarea a la que se enfrentan los alumnos, vista como un todo, tiene inmersos elementos propios de la resolución de problemas en tanto en cuanto dirige hacia fases de comprensión o de ejecución de un plan (que casi viene determinado por la propia tarea) y hacia elementos de gestión del proceso, como puedan ser los de transición. No obstante, hay elementos, precisamente en este ámbito, que aparecen en la resolución de los participantes y que van en la línea de los comentarios para el epígrafe anterior. Ante la disyuntiva que se genera sobre mantener la opción de la cúbica como modelo para la velocidad, habida cuenta de que D. no ha podido resolver el sistema con Matlab® y C. aunque sí lo ha resuelto, lo ha hecho de forma incorrecta, ambos optan por decisiones distintas a la hora de reflejarlo en sus manuscritos. Mientras D. tacha (literalmente) el planteamiento del sistema de ecuaciones; C. por su parte, lo mantiene. Más aún, D. propone como modelo la función trigonométrica $y=50\cos(t)-50$ y como generalización $50\cos(\lambda)-50$ (resultado de la idea de cambio del ángulo que proponía C.), cuando C. deja como modelo la función cúbica para la velocidad que ha obtenido (luego integrando el polinomio de grado 4 correspondiente para el desplazamiento) y propone la trigonométrica sólo como generalización $50\cos(x/2)-50$. La necesidad de mantener la opción que se considera propia, se mantiene incluso aunque el resultado no haya sido óptimo.

Recursos cognitivos. El significado de la derivada. Pendiente o teoremas para la representación gráfica.

Hay un detalle, que aunque anecdótico, no hemos podido evitar recoger en nuestro análisis micro o nuestro análisis de detalles, precisamente porque a veces la belleza de las interpretaciones, se encuentra en ellos. En este caso, es más una cuestión de romanticismo por la disciplina de las matemáticas del autor de esta memoria, que porque tenga mucho o poco que ver con nuestros fines de investigación.

Cuando se trabaja con funciones derivadas en un contexto matemático, varias son las concepciones o representaciones que sobre el concepto se pueden tener, y varias las consecuencias que de su comportamiento (explicitadas en teoremas, proposiciones y corolarios) se puedan extraer. De este modo, una visión de la matemática como producto, permite establecer los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función, sin más que comprobar que su función derivada es positiva o negativa, y que los extremos relativos de la función se corresponden, no sólo con puntos de derivada nula, sino de puntos en los que la función pasa de una orientación de crecimiento a la otra. Sin embargo, una visión más geométrica de la matemática, en que ya hay que mirar, y no tan sólo calcular, viene del hecho de entender los intervalos de crecimiento como aquéllos en los que las pendientes cubren ángulos menores de 90^{o} (esto es, rectas inclinadas hacia la derecha de la vertical), mientras los intervalos de decrecimiento, se corresponden con tramos de pendientes de ángulos mayores de 90^{o} (esto es, rectas inclinadas hacia la izquierda de la vertical). Asimismo, los puntos máximos o mínimos, son aquéllos de pendiente nula, esto es, puntos en los que según te aproximas, el valor de la pendiente se va haciendo cada vez más pequeña.

Del mismo modo, los puntos de inflexión, por ejemplo, pueden ser vistos como puntos para los que se anula la segunda derivada de la función, coincidentes además con un cambio en los patrones de convexidad y concavidad (luego de signos negativos a positivos, o viceversa en la segunda derivada), o pueden verse como puntos alrededor de los cuales, en un entorno pequeñito, luego localmente, la pendiente parece ser la misma.

Estos detalles pueden encontrarse en la reconstrucción racional, señalamos aquí los referentes a la visión desde las pendientes:

[49] D. ---- *Lo que no sé yo, matemáticamente no sé qué quiere decir que la velocidad es negativa. Bueno claro es porque la pendiente aquí es negativa y aquí es positiva* ----

en respuesta a [46] C. ---- *Si es negativa es porque está bajando, si es positiva es que está subiendo* ----

[174] B. ---- *si la aceleración es cero* [señala el punto de la gráfica de la aceleración de abscisa t=2]*, el movimiento es constante, en ese punto* [señala el punto de abscisa t=2 en la gráfica del desplazamiento], *si te fijas, el movimiento es constante* [sigue la gráfica en un entorno no muy grande del (2, f(2))], *la derivada es una.*----

[175] A. *Sí, cuando la aceleración es cero es el punto de inflexión.*

5. Conclusiones

Iniciábamos el trabajo con una sospecha, y finalizado el mismo, pasa a ser algo menos sospecha y un poco más certeza. Siguiendo a Puig y Monzó (2012), desde una concepción de la naturaleza de las matemáticas en las que sus conceptos se consideran como medios de organización de fenómenos de la experiencia, el proceso de matematización se articula en dos direcciones, la horizontal que va desde los fenómenos a los conceptos, y la vertical en la que se matematizan los propios conceptos matemáticos. Del mismo modo, todo proceso de modelización, contiene esos dos movimientos, incluso si el proceso, como es nuestro caso, se inicia desde un modelo primario pero para el que se requiere una vuelta al fenómeno para su remodelado. Para la tarea que nos ocupa, se corresponde con la matematización horizontal, la organización como relaciones funcionales de las propiedades cualitativas del fenómeno en términos de gráficas (y puntos notables); se corresponde, por otra parte, con la matematización vertical, el estudio de dichas gráficas (con sus puntos notables) con el fin de asociarle familias de funciones cuya forma y cuyos parámetros describen características de las relaciones funcionales, y en consecuencia, en una vuelta a la matematización horizontal, con las propiedades cualitativas de los fenómenos señalados. No sería posible este proceso de modelización sin recurrir no solamente a propiedades primarias para el fenómeno (como posiciones nulas en salida, parada y llegada; o velocidades nulas en esos mismos instantes), sino también a las propiedades cualitativas referentes al comportamiento del sistema en torno a estos puntos. En el modelo plausible en el que se tienen en cuenta la existencia de fuerzas para el arranque y el momento previo a la parada, no existen condiciones de suavidad para la velocidad en la llegada a esos puntos porque no lo requiere el sistema, pero sí el conocimiento de la cinemática del fenómeno. Para el modelo esperable, sin embargo, la suavidad en torno a estos puntos es fundamental. Luego el conocimiento de las propiedades cualitativas determina no sólo el modelo, sino la consecución última de un modelo óptimo, dado que en el proceso de regreso a la validación y generación del nuevo modelo se convierte también en guía. Basta pensar en que el modelo original se invalida con la detención de elementos contrarios a estas propiedades cualitativas y que su variación vuelve a depender de estas propiedades.

El conocimiento, por otra parte, de diversos tipos de funciones en su forma canónica, de sus propiedades cualitativas (pensadas como objetos libres), del significado de sus parámetros y del efecto de los cambios en éstos, se tornan también en elemento fundamental en el proceso. No es posible tomar una decisión sobre la función que se adecúa al modelo sin el ajuste correspondiente. Ante el desconocimiento del significado de los parámetros, un software gráfico simbólico puede convertirse en aliado, pasando a ser instrumento para la observación y la búsqueda de patrones.

Tal y como está enunciada la tarea, no invita a la reflexión sobre los valores que alcanza la velocidad (aunque se llega en el caso de nuestros participantes a este análisis) y sobre la racionalidad de su incremento o reducción sin momentos de velocidad constante, dado que no se pone el acento en el fenómeno a describir o si se hace sólo es de un modo parcial (se dirige el foco hacia elementos para los que el modelo primario no es adecuado, y no para el fenómeno completo, modelos que generen nuevos modelos no pueden nunca alejarse del fenómeno), más aún, no se valida el modelo respecto al fenómeno si no respecto a las especificaciones. En un modelo de enseñanza/aprendizaje en el que se esté poniendo énfasis en la elección de funciones con ajuste a parámetros, la tarea sería adecuada, ya que no necesitaríamos llegar al modelo plausible; en un contexto en que primara la necesidad de una modelización óptima, sería también adecuada, pero introduciendo a mayores un nuevo apartado de reflexión que indujera al estudio de la cinemática del sistema, de modo que se pase por el modelo esperable primero, para llegar al modelo plausible después.

Por último, tres son los elementos que nos gustaría señalar sobre el comportamiento de los participantes: la necesidad primaria de salvar el modelo original buscando justificación para aquello que no es justificable; la imposición en un trabajo cooperativo de aquella visión que más y mejor se acerca al fenómeno, esto es, aquello que puede argumentarse con más coherencia acaba por dirigir el proceso de resolución; y por último, la constatación de que la desunión en el trabajo, puede dar al traste con resoluciones que en un principio son adecuadas para la tarea.

Cerramos el apartado de conclusiones, y con él, la memoria, añadiendo algunos elementos de mira hacia el futuro. Por un lado, y en un contexto en que el tiempo no limite las posibilidades de la investigación, sería conveniente un estudio de casos con participantes cuyas características conociéramos, en tanto en cuanto supiéramos qué se les ha enseñado y qué saben. Lo primero para tener una descripción detallada de la enseñanza recibida y lo segundo porque hubiéramos sometido a un grupo de posibles participantes (que hubieran recibido esa enseñanza) a una prueba que nos permitiera una selección de éstos con características distintas y que nos interesara estudiar en profundidad. Recordemos que los casos que hemos estudiado en este trabajo no están seleccionados con ningún criterio y nuestro conocimiento sobre las características particulares de los participantes es muy escaso. En cuanto a la tarea, se genera la duda de que no se llega al modelo plausible, entre otras razones, por la forma en que ésta se enuncia. Una organización de la tarea diferente que favoreciera de algún modo su aparición sería una opción a valorar en futuras pruebas. Finalmente, en lo que concierne al uso de herramientas gráfico simbólicas, un estudio más exhaustivo y quizás en otro contexto, sobre su papel de guía en la comprensión de la significación paramétrica, podría ser también objeto y objetivo de investigaciones futuras.

6. Referencias

Alsina, A. (2009). El aprendizaje realista: una contribución de la investigación en Educación Matemática a la formación del profesorado. En González, M.J., González, M.T. y Murillo, J. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp.19-127). Santander: SEIEM.

Blomhøj, M. (2004). Mathematical modelling - A theory for practice. En Clarke, B.; Clarke, D. Emanuelsson, G.; Johnansson, B.; Lambdin, D.; Lester, F. Walby, A. &Walby, K. (Eds.), *International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics* (pp.145-149). Göteborg: National Center for Mathematics Education.

[Traducción castellana de Mina, M., recuperado el 10 de noviembre de 2012, de http://www.famaf.unc.edu.ar/rev_edu/documents/vol_23/23_2_Modelizacion1.pdf]

Blomhøj, M. & Højgaard Jensen, T. (2003). Developing mathematical modeling competence: Conceptual clarification and educational planning. *Teaching mathematics and its applications 22* (3), 123-139.

Blum, W et al. (2002). ICMI Study 14: Applications and Modelling in Mathematics Education - Discussion Document. *ZDM 34*(5), 229-239.

Bressan, A., Zolkower,B. & Gallego, F. (2004). *La educación matemática realista. Principios en que se sustenta. Escuela de invierno en Didáctica de la Matemática. Agosto 2004.* Recuperado el 3 de noviembre de 2012 de http://www.gpdmatematica.org.ar/publicaciones/articulo_escuela_invierno2.pdf

De Lange, J. (1987). *Mathematics, insight and meaning*. Utrech: OW & OC.

Filloy, E. (2006). CAS en EFIT-EMAT. En Rojano, T. (Ed.), *Enseñanza de la Física y las Matemáticas con Tecnología: Modelos de transformación de las prácticas y la interacción social en el aula* (pp. 130-137). México, DF: Secretaría de Educación Pública.

Freudenthal, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea. *Educational Studies in Mathematics 3-4*, 413–435.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task.* Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Freudenthal H. (1982). Objetivos y empleo de la enseñanza matemática. *Conceptos de Matemática 64*, 5-25.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education: China Lectures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gravemeijer, K. P. E. (1994). *Developing realistic mathematics education*. Utrech: Freudenthal Institute.

Gravemeijer, K. P. E. (2002). Emergent modeling as the basis for an instructional sequence on data analysis. En Phillips, B. (Ed.), *Developing a Statistically Literate Society. Proceedings of the Sixth International Conference of Teaching Statistics [CD-ROM]*. Voorburg: International Statistics Institute.

Marmolejo, E. (2012). *Análisis del aprendizaje del concepto y uso de parámetro*. Trabajo predoctoral. Programa de Doctorado en Ciencias, especialidad en Matemática Educativa. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. Departamento de Matemática Educativa.

Marmolejo, M.C.E, Pluvinaje, F. & Zubieta, G. (2012). *Modelización con funciones.* Comunicación en el Seminario de Investigación sobre Pensamiento Numérico y Algebraico, Historia de la Matemática y Educación Matemática. Valencia, 2-3 de marzo de 2012.

Polya, G. (1945). *How to Solve It.* Princeton, NJ: Princeton University Press. [Traducción castellana de Zugazagoitia, J. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas.* México: Trillas.]

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Granada: Comares, col. Mathema.

Puig, L. (1997). Análisis Fenomenológico. En Rico, L. (Ed.), *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 61-94). Barcelona: Horsori/ICE.

Puig, L. & Monzó, O. (2008). Competencias algebraicas en el proceso de modelización. En Gracia, F., Monedero, A., Palomo, J. & Peris, MªJ. (Eds.), *El discret encant de les matemàtiques. Actes de les VIII Jornades d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana* (pp. 142-158). Castellón:SEMCV.

Puig, L. & Monzó, O. (2012). Fenómenos y ajustes. Un modelo de enseñanza del proceso de modelización y los conceptos de parámetro y familia de funciones. En Rojano, T. (Ed.), *Las tecnologías digitales en la enseñanza de las matemáticas* (pp. *-*). México: Trillas.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving.* Orlando, FL: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics. En Grows, D. (Ed.), Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 334-370). New York: MacMillan.

Streefland, L. (1985). Wiskunde als activiteit en de realiteit als bron. *Nieuwe Wiskrant 5*(1), 60–67. Utrech: Freudenthal Institute.

Treffers, A. & Goffree, F. (1985). Rational analysis of realistic mathematics education – The Wiskobas Program. En Streefland, L. (Ed.), *Proceedings of the Ninth International Conference For the Psychology of Mathematics Education 2*, 97-121. Utrech: OW & OC.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions: a model of goal and theory description in mathematics education* - The Wiskobas Project. Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (1998). Realistic Mathematics Education: Work in progress. En Breiteig, T. & Brekke, G. (Eds.), *Theory into practice in Mathematics Education*. Kristiansand: Faculty of Mathematics and Sciences.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2002). Realistic mathematics education as work in progress. En Lin, F.L. (Ed.), *Common sense in mathematics education. Proceedings of 2001 The Netherlands and Taiwan Conference on Mathematics Education* (pp. 1-42). Taiwan: National Taiwan Normal University.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: an example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics 54*, 9-35.

[Traducción castellana de Escalona, H. (2009). El uso didáctico de modelos en la educación matemática realista: ejemplo de una trayectoria longitudinal sobre porcentaje (1ª Parte). *Correo del Maestro, 160*, 36-44. Recuperado el 5 de noviembre de 2012, de http://www.fisme.science.uu.nl/staff/marjah/download/Spanish_vdHeuvel_2009_CDM_didactical-use-of-model_part1.pdf

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2000). Mathematics education in the Netherlands: A guided tour. *Freudenthal Institute Cd-rom for ICME9*. Utrecht: Utrecht University.

[Traducción castellana de Escalona, H. (2008). Educación matemática en los Países Bajos: un recorrido guiado. *Correo del maestro, 149,* *-*. Recuperado el 5 de noviembre de 2012, de http://www.correodelmaestro.com/anteriores/2008/octubre/incert149%20.htm]

Anexo 1.

La tarea.

Actividad Montacargas[1]

En esta actividad, primero vas a explorar un posible modelo para un montacargas que se usa para transporte de equipo y ascenso de minerales. Vas a evaluar las fortalezas y debilidades del modelo y finalmente, vas a crear las especificaciones para desarrollar tu propio modelo.

Análisis del modelo dado.

La fórmula $y=2.5\ t^3 - 15\ t^2$ representa la posición y de un elevador medida en metros (y=0 representa el nivel del suelo) donde t representa el tiempo medido en minutos (t=0 es el tiempo de inicio). Sabemos que el viaje de ida y vuelta, sin tomar en cuenta el tiempo que está abajo, es aproximadamente de seis minutos y que la profundidad del pozo es aproximadamente de 100 metros.

Representa gráficamente el desplazamiento, la velocidad y la aceleración y usa estas funciones para:

a) Explicar el significado de los valores negativos, positivos y cero de la gráfica de la velocidad.

b) Explicar las relaciones entre velocidad y aceleración en los intervalos en los que el montacargas aumenta la velocidad, disminuye la velocidad o está en reposo.

c) Evaluar la utilidad e identificar los problemas del modelo dado.

Crea tu propio modelo.

1. Haz una lista de especificaciones para rediseñar el modelo del montacargas.

2. Crea tu propio modelo. Puedes usar una sola función o puedes definir una función a trozos.

3. Explica por qué tu modelo satisface las especificaciones del problema y mejora el modelo dado.

Aplica tu modelo.

Explica qué tipo de modificaciones se le pueden hacer a tu modelo para usarse en otras situaciones.

[1] *International Baccalaureate. 2008*

Anexo 2.

Acordeón del experimento.

Facultat de Ciències Matemàtiques de la Universitat de València

5-7:30 PM

21 de mayo 2012

Actividad Montacargas

Condiciones del experimento

1) Estudiantes de Primero del grado de Matemáticas.
2) Trabajarán en parejas (para que podamos oír lo que están 'pensando') (Pondremos a las parejas separadas)
3) Video grabaremos con 2 cámaras que grabarán sonido y la pantalla de la computadora.

Instrucciones para los estudiantes

Van a resolver esta actividad que se llama Montacargas, las instrucciones están en esta hoja. Lo que queremos de ustedes es que

a) describan estas tres preguntas en esta hoja de papel.

   Está permitido usar Maple, Derive, Matemática, Excel, GeoGebra… Si usan alguno de estos softwares, entonces les vamos a pedir

b) que en la hoja de papel hagan un boceto de lo que se ve en la pantalla,
c) que no borren nada de lo que hagan con el ordenador. Al terminar, por favor, no lo apaguen el ordenador ¿si?

Intervenciones mínimas de parte de los investigadores (nosotros) de los siguientes dos tipos:

a) Que se refieran al fenómeno, (mira que aquí pasa esto…).
b) Corregir errorcitos que dependan de la técnica, para que los estudiantes puedan seguir adelante.

Aclaraciones

Luis le comentará a los estudiantes que los grabaremos, pero que quedarán en el anonimato, para que sepan y por si alguno tiene alguna objeción.

Anexo 3.

Los protocolos escritos.

Leyenda.

- uso de puntos suspensivos '…': indican pausa en las frases o duda;

-uso de una coma ',' en el discurso: hace referencia a las pausas, a veces naturales, a veces forzadas, del discurso;

-uso de una coma ',' al finalizar la intervención: hace referencia a que si bien hay una pausa con intervención posterior del compañero, continúa la frase en su intervención siguiente, razón por la que además ésta se introduce en minúscula;

-uso de '---- *intervención* ----': recoge una parte de la intervención;

-uso de puntos suspensivos entre corchetes […]: indican pausas largas de trabajo individual sin comentarios ni gestos de interés;

- uso de corchetes con texto entre ellos [texto]: recogen gestos, indicaciones en gráficos o describen momentos de lectura o reflexión; en el caso de las sentencias de Matlab® indican la instrucción que subyace a la sintaxis;

- uso de paréntesis (Participante. *Intervención*): en intervenciones solapadas generalmente de asentimiento;

- uso de '¿?¿? ': refleja la imposibilidad de transcribir la intervención, o parte de ella.

Los Protocolos escritos

[1] Luís. *Oye, pues vamos, si os parece, vamos a empezar… Vale, bueno, mirad lo primero que... aparte ya hemos hablado un poco informalmente y sabéis cuál es el contexto del asunto, lo primero que quería que, que supie... que tuvierais claro es que os vamos a, os vamos a grabar eh… porque…. lo que nos interesa es analizar qué es lo que vais a hacer, pero que, en cualquier referencia que se haga a lo que hayáis hecho aquí, después en cualquier cosa que escribamos sobre ello, vuestros nombres no van a aparecer, que se mantendrá el anonimato, y aparte tenéis la cámara detrás de manera que tampoco vais a, a estar identificados, salvo que os apetezca, queráis daros la vuelta y hacer así … eh. Pero que, que, el, lo que nos interesa, lo que nos interesa es ver lo que hacéis con el problema que tenéis ahora. Eh, Gina os explicará alguna cosa con respecto al problema. Lo que, lo que yo os quería decir ya, nada más para terminar, es que si os hemos puesto por parejas es porque, eh al trabajar por parejas os vais a obligar a tener que contarle cada uno al otro por qué está haciendo lo que está haciendo y queremos*

que lo hagáis, queremos que habléis un poco más de lo que normalmente se habla cuando uno está haciendo un problema porque precisamente lo que digáis es lo que nos va a servir para hacer hipótesis sobre lo que habéis pensado para hacer el problema ... está claro el asunto …. Esta es una técnica experimental, tener a dos personas trabajando juntos, porque les obligas a hablar… ¿vale? O sea que, os, os pediría que, que realmente hablarais, diciéndole al compañero lo que hay que hacer y cómo hacerlo …y luego ya, podéis utilizar eh el teclado cualquiera de los dos, el que quiera, el que quiera, o los dos, o cambiároslo o lo que queráis .. Eh también os, eh, tendréis unas hojas, tendréis unas hojas de papel donde escribir y ahora Gina ya os dice alguna cosa más.

[2] Gina. *Bueno, en realidad las instrucciones están aquí en la hoja, todo está explicado ahí, lo que hay que hacer. Nada más para hacer énfasis queremos que desarrollen las preguntas que están aquí, la uno, dos y tres o, o, las cosas que vienen ahí y a, b y c, ¿sí? que lo desarrollen... Si usan la computadora para graficar o cualquier cosa que usen, pueden usar lo que te, esté a su alcance, cualquier software de Mapple®, Excel®, ya mismo tienen Matlab®, Geogebra® o lo que sepan usar, nada más que lo hagan ahí, luego lo anotan en su papel haciendo un bocetito con lo que sea importante, que nosotros lo podamos leer en su hoja ¿sí? Entonces queremos de ustedes tres cosas: una que desarrollen las preguntas que están aquí marcadas con un número o una letra, que lo que pongan en la, en el ordenador lo pasen a la hoja, de alguna manera y que no apaguen la computadora, todo lo que esté ahí, ahí lo dejan para que nosotros lo veamos, a ver si de ahí vamos a usar algo, ¿sí? Y esto es todo. No sé si tengan alguna pregunta, de todas maneras aquí vamos a estar por si tienen dudas, pero si tienen alguna pregunta o si quieren leerlo y ya nos van… nos dicen ¿no?*

[3] B. *¿Tenemos la misma actividad los dos?*

[4] Luís. *Dos cosas más…. ¿necesitáis traducción (Gina: sí de hecho pueden… perdón) necesitáis traducción del mejicano al castellano?*

[5] Gina. *Ja, ja.*

[6] A. *Esperemos que no.*

[7] Gina. *No necesitan escribirlo los dos, es en equipo, pueden nada más en una hoja, pero bueno o sí, a veces uno quiere también escribirlo ¿no?, pueden entregarnos una hoja o las dos, lo que quieran.*

[8] B. *El nombre no lo ponemos.*

[9] Gina: *El nombre sí, claro.*

[10] B. *Pero si…*

[11] Gina. *Nada más tu nombre de pila acá* [señala en la página de la tarea que se les ha entregado a los participantes el lugar donde se pide el nombre]

[12] Luís. *Luego aparecerá con otro, no te preocupes.*

[13] Gina. *Solamente quien quiera salir con su nombre.*

[14] Luís. *Bueno.*

[15] B. *¿Ya está grabando?*

[16] Gina. *Sí, está grabando.*

<u>Pareja 1</u> [A: alumno sentado a la izquierda de la pantalla en el visionado del vídeo;
B: alumno sentado a la derecha en el visionado del vídeo]

[17] A. *Pásame las preguntas….* [coge el enunciado que está a la derecha de su compañero, que empieza a leer]

[18] B. *A ver… nos dice que tenemos una función que representa la posición, la posición y de un elevador medido en metros…. donde y igual a 0 representa el nivel del suelo… y t representa el tiempo medido en minutos….*

[durante un tiempo no hablan, leen]

[19] B. *Representemos gráficamente el desplazamiento, la velocidad y la aceleración.*

[20] A. *Eso lo sabe hacer Matlab®.*

[21] Luís. *Podéis hacer, podéis hacer preguntas si queréis de comprensión, o lo que sea, ¿eh?… y contestar, contestaremos. Y si podéis hablar más alto, mejor.*

[22] A. [ríe] *Vale*.

[23] B. *Vale, pues,*

[24] Luís. ¿Vale?

[25] A. *Vale.*

[26] B. *eh… vamos a trabajar un poco con Matlab®, cuando quiera, y representamos la función.*

[27] A. *Sí, porque yo creo que simplemente poniendo la función, mirándole a la gráfica, de ahí podemos sacar,*

[28] B. [continúa con la frase de su compañero] *bastante información, cuando quiera Matlab®, cuando le dé la gana… Bueno, de momento vamos a pasar sin boli. Entonces, definimos la función f… 2.5* [en este momento empieza a escribir en el teclado].

[29] A. *por t elevado al cubo.*

[30] B. *Por y elevado al cubo.*

[31] A. *Menos 15 y al cuadrado.*

[32] B. *Menos 15 y al cuadrado.*

Matlab ®

>> syms y [cálculo simbólico; y pasa a ser variable en lugar de carácter de texto]

>> f=2.5*y^3-15y^2 [la simbología ^ se utiliza para escribir potencias y * para los productos]

??? f=2.5*y^3-15y^2 [con >> aparece lo que se escribe y al dar al Intro, lo que Matlab® lee y que ya no viene acompañado de >>; los signos de interrogación hacen referencia a un error de sintaxis]

Error: Unexpected MATLAB expression.

---

[33] B. *Vale empezamos ya a tener errores* [rectifica en el ordenador la fórmula]. *Vamos a representarla*

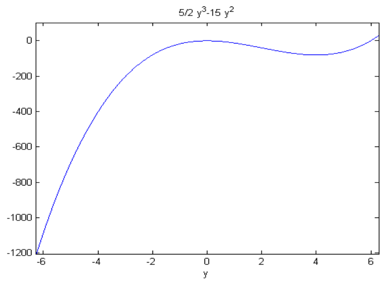
[34] A. *ezplot* [A. escribe la sentencia correspondiente].

[35] B. Sí

>> f=2.5*y^3-15*y^2

>> f = (5*y^3)/2 - 15*y^2

>> ezplot(f) [representación gráfica de la función f]



____

[36] A. *¿Esto qué es?* [se ríe/sonríe] ... [B. sigue el movimiento de la curva con el cursor desde la ordenada -1200 hasta la ordenada 0] *tengamos en cuenta que empezamos en cero…* [A señala el punto en la gráfica de abscisa cero]

[37] B. Sí*, y tenemos una raíz ahí* [sigue de nuevo la gráfica con el bolígrafo desde (0,0) hasta (6,0)].

[38] A. *Porque si el tiempo inicial está aquí,* [B. rodea la imagen de la función alrededor del cero con el cursor]

[39] B. *Vale, entonces, la gráfica nos dice que eh... la posición respecto del tiempo es la siguiente* [está escribiendo]*… eh, más o menos, pues tenemos el cero aquí y esto es* [levanta la cara y mira al ordenador] *menos mil doscientos…. A ver,*

[40] A. *vamos a centrar* [coge el ratón mueve el cursor y desplaza la gráfica] *porque si está en el cero, seis…* [busca centrar la gráfica de modo que en el ejes de abscisas se vea desde el cero hasta el seis, al menos] *esto es cero* [lo señala en el eje de ordenadas y con el cursor sigue la línea y=0 en la pantalla] *…. va bajando, éstos serían los cien metros que sería el punto mínimo* [recorre la gráfica y señala el punto t=4 y su correspondiente ordenada, así como el punto sobre la gráfica de abscisa 6].

[41] B. *Sí, pues entonces yo representaría la función entre cero y seis.*

[42] A. *¿Pero por qué entre cero y seis?*

[43] B. *Yo la representaría entre cero y seis porque son los, los, los...*

[44] A. *¿El ciclo?*

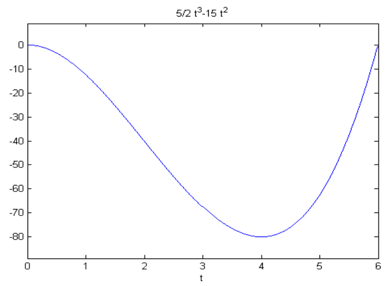
[45] B. *Sí, claro, pone 6 minutos lo que tarda en bajar y subir, la representamos entre 0 y 6 y nos aparecerá una escala un poco mejor, ¿vale?, ... Bueno, pues tenemos una función que pasa a ser más o menos, ezplot de, era del, ¿se ponía así?*

[46] A. *Creo que sí.*

[47] B. [Da al Intro] *Perfecto … Entonces podemos ver que primero baja bastante más rápido…* [recorre con el dedo sobre la pantalla la parte de la gráfica del (0,0) al mínimo de la función] *o sea, primero baja más lento y luego sube .. llega abajo a los cuatro minutos* [señala con el bolígrafo el mínimo de la función]. *Son las primeras conclusiones que podemos sacar.*

Matlab® ________________________________

>> ezplot(f,0,6)



____

[48] A. O sea que le *cuesta más bajar que subir* [con un tono cercano a la exclamación, como indicando extrañeza]

[49] B. *Sí, es un montacargas no un jugador de… requiere más seguridad para bajar que para subir. Entonces, de momento, tenemos la representación gráfica que es la siguiente….* [escribe en sus hojas]

[50] A. *Un poco rara…*

[51] B. *Entonces… esto es el tiempo y esta la altura… entonces esto es… eh* […], *bueno tenemos cero y luego pues aquí arriba tenemos el cero, esto es menos cien… uno, dos, tres, cuatro, cinco y seis segundos,*

[52] A. *Sabemos que el,*

[53] B. *y esto en metros… y más o menos, pues cuando llega a cuatro…. por aquí y aquí van menos ochenta... estás eh… más o menos… vuelve a subir al cero… No es una función complicada, ¿no?, por lo menos en el dibujo. Ésta es la representación… posición-tiempo o desplazamiento. Perfecto… perfecto. Eh… Entonces, esto es y igual a dos coma cinco t tres menos quince t dos, ¿no?*

[54] A. *¿sabemos cuál es el, el punto mínimo? ¿Derivamos?*

[55] B. *¿Derivamos? Hombre, si quieres calcular la velocidad y tal, habrá que derivar.*

[56] A. *Sí, bueno ¿?¿?*

[57] B. *Vale, entonces a ver, diff de f* [escribe en Matlab® con el teclado], *vamos a derivar*

[58] A. *Esto lo podemos hacer de cabeza.*

[59] B. *Ya, pero, vamos a…* [hace un chasquido con la boca como indicando que no encuentra las palabras] [A. ríe] *Sí vale … la costumbre de tener el Matlab® delante … y prima es igual a ,ahora ya no sabes hacerlo de cabeza* [en tono de broma] ¿eh?, *siete coma cinco t cuadrado menos quince t …¿ Tú también has odiado los decimales como yo?*

Matlba® ________________________________

>> diff(f) [sentencia que deriva la función f]

ans =(15*y^2)/2 - 30*y [ans hace referencia a la salida de la orden anterior]

____

[60] A. *Pues no, ¿por qué?*

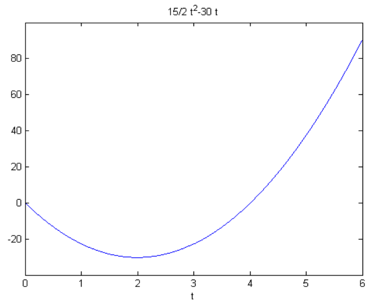
[61] B. *Yo siempre los he odiado, por lo menos cuando iba al instituto...* [escribe de nuevo en Matlab®] *f de dos la definimos como ésta y au…* [Intro] *la representamos en los mismos entornos de antes ¿no?, de cero a seis.*

[62] A. *Sí, teniendo en cuenta que es el ciclo en el que nos movemos…. Y ahí se ha puesto… ésa no es cierta*.

[63] B. *Esta no es cierta, es f dos.*

Matlab® ______________________________

```
>> f2=(15*y^2)/2 - 30*y

f2 =(15*y^2)/2 - 30*y

>> ezplot(f,0,6)

>> ezplot(f2,0,6)
```




```
>> diff(f2)

ans =15*y – 30
```

____

[B sigue con el dedo el movimiento parabólico que describe la curva sobre la pantalla]

[64] A. *Ésa es la velocidad.*

[65] B. *Sí,... hombre, hay un momento en que la velocidad baja hasta casi 2* [señala en el eje de abscisas y sobre la pantalla de nuevo, el punto t=2] *o sea es decir, y luego empieza a subir* [hace el gesto en el aire del tramo de curva que sube desde t=2], *claro… vale, vale, vale…*

[66] A. *¿Ésta es la función de la velocidad?* [señala a la pantalla en la que está ya la representación de la gráfica de la velocidad]

[67] B. *¿Eh?*

[68] A. *La velocidad, ¿cuál era la función?*

[69] B. *Y prima… y prima es igual a siete coma cinco t dos menos quince t que es la que acabamos de representar ahora. Desde ¿?¿? …. y ésta es la velocidad…. en metros* […], *metros minuto, ¿no? … sí, metros-minuto.*

[70] A. *Sí, sí …*

[71] B. *¿Y qué hace? Esta aquí el cero, baja hasta el, en el dos alcanza el mínimo…*

[72] A. *Lo primero, igualamos, igualamos a cero y así vemos cuál es el punto mínimo del anterior porque como …*

[73] B. *Hombre, yo primero representaría las tres y luego empezamos a estudiar, porque haciéndolo así, sí que puedes ver lo que pasa.*

[74] A. Ya, *como ya, ya has representado la, la anterior sí que tienes el punto mínimo… a ojo.*

[75] B. *Está,* [hace un chasquido con la boca como de aceptación] *de momento un poco a ojo, sí ... ¿vale?*

[76] A. *Sí porque decía que se aproximaba a 100 más o menos.*

[77] B. *Sí. Y ahora calculamos la aceleración. Si quieres calcularla o no, pero vas a tener el puente,*

[78] A. *No, no* [con tono de aceptación].

[79] B. *en el Matlab®… quince t menos quince, diff f dos de la función* [introduce en Matlab® la sentencia correspondiente para derivar] *Eh* [….] [B. parece estar buscando algo en sus notas] *quince t menos treinta, ¿no?*

[80] A. *Quince t menos treinta, sí.*

[81] B. *La aceleración es una recta.*

[82] A. A *ver, dale a representar y así, y así vemos cuál es la, el recorrido que tiene*.

[83] B. *Vamos a llamarla f3 en lugar de f2 [renombra y representa desde Matlab®] ¿vale? Entonces ezplot de f tres de cero a seis* [Intro] *nos sale una recta.*

Matlab® ________________________________

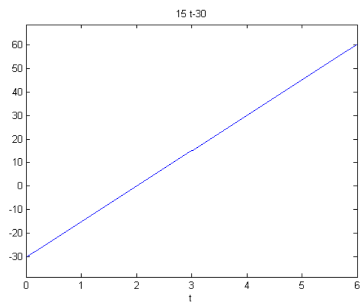
>> diff(f2)

ans =15*y - 30

>> f3=15*y - 30

f3 = 15*y - 30

>> ezplot(f3,0,6)



____

[84] A. *Sí, vemos que empieza frenando y acaba acelerando.*

[85] B. *Sí, en el punto 2 o sea,*

[86] A. *sí, pero sigue siendo raro, porque si un montacargas, cuando sube normalmente ¿?¿? … empieza en menos treinta,*

[87] B. *ahí la velocidad la tienes negativa hacia abajo*[señala con el dedo hacia abajo en el aire]

[88] A. De m*enos treinta corta con el eje en dos,*

[89] B. *Sí en dos.*

[90] A*. y llega hasta sesenta.*

[91] B. *Minutos al cuadrado…. Metros partido por minutos al cuadrado. Tenemos menos treinta, menos veinte, menos diez, tenemos un cero, más o menos uno, dos, tres cuatro, cinco, seis* [está dibujando en sus notas, por eso cuenta comprobando de nuevo]*, uno, dos, tres, cuatro, cinco y seis, más o menos*

pues pasa por el punto cero, dos [nota del transcriptor: lee las coordenadas al revés, se refiere al (2,0)] *y el origen ¿?¿? ¿Tú sabes lo que haría yo ahora, tío? Representaría las tres en la misma figura.*

[92] A. *¿Para qué?*

[93] B. *Para ver cómo… en qué puntos pasa lo que sea y le metemos el grid.*

[94] A. *Si quieres, pero has de estar en simbólico otra vez, o sea…*

[95] B. *Meter el grid sí, y representar ahora las tres, en teoría…*

[96] A. *¿Con ezplot puedes?*

[97] B. *¿Cómo se representaban dos funciones a la vez?*

[98] A. *Yo creo que eso sólo se puede con plot y eso ya es numérico. Tenemos que darle un valor y*,

[99] B. *Ah claro y en numérico, ¿cómo representas una función si le asignas un número a una función?*

[100] A. *No sé, si tú sabes hacerlo.*

[101] B. *Pero yo no me acuerdo. Espera, o sea F1* [teclea F1 que dirige a la ayuda del programa Matlab®]. *Buena idea.*

Matlab® ______________________________

[En aras de la completitud se añade la pantalla de ayuda del Matlab®]

>> help ezplot

EZPLOT   Easy to use function plotter

EZPLOT(FUN) plots the function FUN(X) over the default domain -2*PI < X < 2*PI.

EZPLOT(FUN2) plots the implicitly defined function FUN2(X,Y) = 0 over the default domain -2*PI < X < 2*PI and -2*PI < Y < 2*PI.

EZPLOT(FUN,[A,B]) plots FUN(X) over A < X < B.

EZPLOT(FUN2,[A,B]) plots FUN2(X,Y) = 0 over A < X < B and A < Y < B.

EZPLOT(FUN2,[XMIN,XMAX,YMIN,YMAX]) plots FUN2(X,Y) = 0 over

XMIN < X < XMAX and YMIN < Y < YMAX.

EZPLOT(FUNX,FUNY) plots the parametrically defined planar curve FUNX(T) and FUNY(T) over the default domain 0 < T < 2*PI.

EZPLOT(FUNX,FUNY,[TMIN,TMAX]) plots FUNX(T) and FUNY(T) over TMIN < T < TMAX.

EZPLOT(FUN,[A,B],FIG), EZPLOT(FUN2,[XMIN,XMAX,YMIN,YMAX],FIG), or

EZPLOT(FUNX,FUNY,[TMIN,TMAX],FIG) plots the function over the specified domain in the figure window FIG.

EZPLOT(AX,...) plots into AX instead of GCA or FIG H = EZPLOT(...) returns handles to the plotted objects in H.

Examples:

The easiest way to express a function is via a string:

ezplot('x^2 - 2*x + 1')

One programming technique is to vectorize the string expression using the array operators .* (TIMES), ./ (RDIVIDE), .\ (LDIVIDE), .^ (POWER).

This makes the algorithm more efficient since it can perform multiple function evaluations at once.

ezplot('x.*y + x.^2 - y.^2 - 1')

You may also use a function handle to an existing function. Function handles are more powerful and efficient than string expressions.

ezplot(@humps)

ezplot(@cos,@sin)

EZPLOT plots the variables in string expressions alphabetically. subplot(1,2,1), ezplot('1./z - log(z) + log(-1+z) + t - 1')

To avoid this ambiguity, specify the order with an anonymous function: subplot(1,2,2), ezplot(@(z,t)1./z - log(z) + log(-1+z) + t - 1)

If your function has additional parameters, for example k in myfun:

%-----------------------%

function z = myfun(x,y,k)

z = x.^k - y.^k - 1;

%-----------------------%

then you may use an anonymous function to specify that parameter:

ezplot(@(x,y)myfun(x,y,2))

See also ezcontour, ezcontourf, ezmesh, ezmeshc, ezplot3, ezpolar, ezsurf, ezsurfc, plot, vectorize, function_handle.

Overloaded methods: sym/ezplot

Reference page in Help browser: doc ezplot

____

[102] A. *Ahora falta que nos salga cómo lo podemos hacer. Sí, bueno, aunque en la fórmula ya sabemos a ojo que en dos debe llegar al final o,*

[103] B. *A lo mejor sabes cómo es, no sé por arriesgarme,* [escribe en el teclado] *f uno, f dos, f tres*, [Intro]. *No, f. No, voy a darle a la f* [Intro]. *No,* sym.ezplot*, no se puede. Pues nada, eh…*

Matlab® ___________________________________

>> ezplot(f1,f2,f3,0,6)

??? Undefined function or variable 'f1'.

>> ezplot(f,f2,f3,0,6)

??? Maximum recursion limit of 500 reached. Use set(0,'RecursionLimit',N) to change the limit. Be aware that exceeding your available stack space can crash MATLAB and/or your computer.

Error in ==> sym.ezplot

____

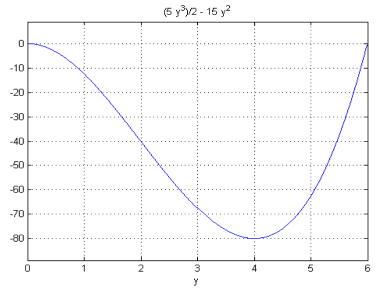
[A. Coge el ratón y revisa la información que ha salido en la ayuda del Matlab®, pero no dice nada]

[104] B. *Bueno, pues nada, representamos f y vamos a meter el grid a ver qué pasa, ezplot de f de cero a seis [detalla lo que está poniendo en el teclado, Intro] grid, ¿no? [Intro]. Mira, la representación nos dice que éste es el punto… [no señala nada]*

Matlab®________________________________

\>> ezplot(f,0,6)

\>> grid



____

[105] A. *Ésta es la del movimiento, ¿no? , la del desplazamiento.*

[106] B. *Sí.*

[107] A. *En cuatro llega a su mínimo.*

[108] B. *Y en seis, alcanza, vuelve otra vez al mismo punto.*

[109] A. *También se ve que en ese la, la, la profundidad del pozo es de ochenta.*

[110] B. *La voy a guardar en el escritorio* [guarda en el escritorio la gráfica del desplazamiento]

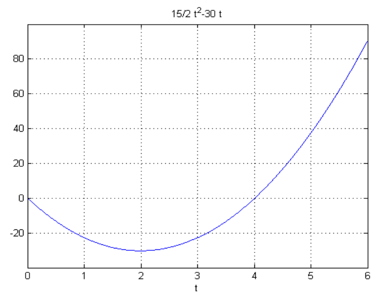
[111] A. *Si no…* [B. Representamos ahora la segunda, ¿no?] *nos toca otra vez calcularla, sí.*

[112] B. [Vuelve a usar Matlab®*] f dos en cero seis, le meto otra vez el grid, nos sale esta preciosidad. La meto en el escritorio, f dos* [guarda en el escritorio la gráfica de la velocidad]

Matlab® ________________________________

\>> ezplot(f2,0,6)

\>> grid



____

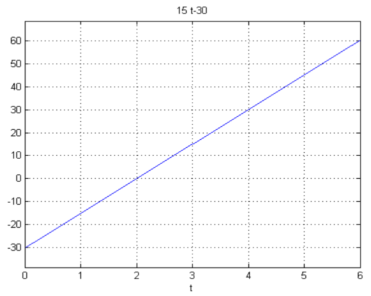
[113] A. *A ver que también, espera no la quites ¿?¿?*

[B. introduce también la sentencia para representar con mallado la aceleración]

Matlab® ______________________________

>> ezplot(f3,0,6)

>> grid



____

[114] A. *Sí, esa es la de la aceleración.*

[115] B. *Vale, bueno vamos a representar ahora ésta y luego cambio…* [toma notas en sus hojas, se refiere a copiar allí la gráfica de la aceleración] *vale pues, tenemos representada ésta, espera, ponemos la velocidad ……… Perdona, no la he guardado*

[116] A. [lee el enunciado del apartado a del ejercicio 1]. *Tenemos que explicar el significado de los valores negativos, positivos y cero de la gráfica de la velocidad. O sea, el significado de los valores negativos significa que están frenando.*

[B. guarda en el escritorio la gráfica de la aceleración]

[117] A. [escribiendo en sus notas y para si mismo] *Ah claro, ¿cómo puede estar frenando si tiene una velocidad cero?*

[118] B. *No, ¿la velocidad no es cero en el principio?, ah bueno, sí*

[119] A. *Se aplica en cero*

[120] B. *Bueno ya las tengo las tres aquí, eh...* [Dedica un tiempo a colocar las tres gráficas en el escritorio de modo que puede verlas a la vez: desplazamiento en posición superior izquierda, velocidad en posición superior derecha, aceleración en extremo inferior izquierda]. *Bueno, ahora vamos a intentar hacer el primer ejercicio, ¿no?*

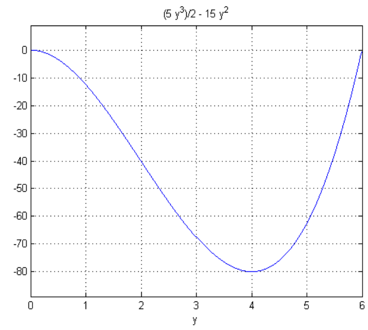
[121] A. *Ponlas si eso una encima de la otra* [indica con el gesto que las ponga formando una columna con las gráficas del mismo ancho, una lindando con la siguiente y sucesivamente]

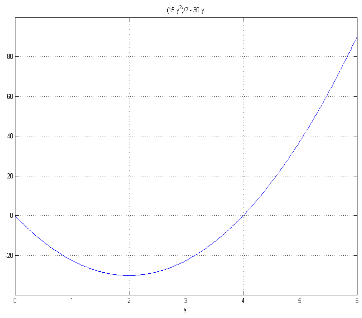
[122] B. *Eso no, no, no …*

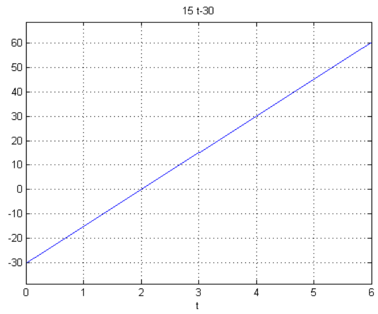
[123] A. U*na a una, no encima de encima, si no…*

[124] B. *Se ve bien, ¿no? Bueno tenemos estas tres figuras, la del desplazamiento, la de la velocidad y la de la aceleración, ¿vale?* [Las señala con el bolígrafo según las nombra]. *Nos pide que expliquemos el significado de los valores negativos, positivos y cero, de la gráfica de la velocidad, ¿vale?*

Matlab® ________________________________







[125] A. *Bueno, pero espérate la velocidad, claro, la velocidad no es que estemos frenando, la velocidad es que nos estamos moviendo pero hacia abajo.*

[126] B. *hacia abajo* [lo dice al mismo tiempo que el compañero].

[127] A. *No, no podemos frenar si empezamos con velocidad cero* [con tono de explicación].

[128] B. *Bueno, pues entonces vamos a empezar a escribir un poco de qué habla la velocidad... a ver… empieza siendo cero la velocidad,* [sitúa el bolígrafo sobre la gráfica de la velocidad] *empieza siendo cero la velocidad y como la velocidad es un vector, si te fijas, mira, mira, dónde vuelve la velocidad positiva* [señala en la gráfica del desplazamiento y con el pulgar de la mano izquierda el punto de abscisa t=4 y lo propio con el bolígrafo en la gráfica de la velocidad dónde la velocidad se anula para t=4].

[129] A. *Y llegamos a velocidad positiva*

[130] B. *En 4, cuando empieza a subir, cuando empieza a subir la velocidad es positiva* [hasta este instante mantiene pulgar y bolígrafo como antes], *entonces, lo que nos dice,*

[131] A. *En verdad podríamos coger la velocidad como su módulo.*

[132] B. *Entonces te haría esto* [describe sobre la gráfica de la velocidad (en pantalla) el tramo de parábola simétrica respecto al eje y=0 desde t=0 hasta t=4].

[133] A. *Claro porque en realidad eso es la velocidad, aquí no se está hablando de que sea …*

[134] B. *Claro.*

[135] A. *El problema de que sea negativo o positivo es …*

[136] B. *Claro, exacto, ése es el punto, más la dirección que otra cosa. Sí, sí, sí, sí …. Bueno, pues entonces empezamos hablando de eso, los valores negativos y positivos,* [escribe en sus notas] *la velocidad negativa, indica, por su módulo, la velocidad instantánea del montacargas y por su signo, eh, … por su signo,*

[137] A. *Los puntos negativos lo que nos indican es el sentido del desplazamiento que es como que se profundiza en la señal, el punto cuando corta el eje de las x es,*

[138] B. *Claro si, si f' es mayor que cero es que la función es creciente. Por lo tanto y por su signo, si la posición, el desplazamiento, es que es decreciente o creciente. Decreciente si la velocidad es negativa y creciente si la velocidad es positiva.*

[139] A. *Cuando el valor es igual a cero, lo que tenemos es el punto de cambio, no, cuando toca fondo, cuando llega hasta arriba.*

[140] B. *Claro, a ver, apliquemos teoremas de derivadas, si la función derivada es menor que cero, en todo ese intervalo la función es creciente, es decreciente, de, decreciente, y si es mayor que cero, es creciente.*

[141] A. *Y sin embargo, esta, esta gráfica [señala la gráfica de la velocidad con el bolígrafo] la tendríamos que, que ….*

[142] B. *¿No la entiendes?, ¿no la ves del todo?*

[143] A. *El problema es que aquí, desde aquí,* [señala en la pantalla y sobre la gráfica de la velocidad el punto de abscisa t=6] *vuelve a aquí* [señala ahora en la misma gráfica el punto de abscisa t=0]*, entonces, aquí sí que empieza y acaba en el mismo sitio* [señala puntos de abscisas t=0 y t=6 en la gráfica del desplazamiento], *pero en el gráfico de la velocidad no* [vuelve a señalar en la gráfica de la velocidad], *y en el de la aceleración tampoco.*

[144] B. *Bueno porque aquí frenará, fíjate que ésta* [sigue de arriba abajo el tramo de curva de desplazamiento entre la abscisa t=4 y t=6], *ésta pendiente es mayor, aquí [punto de abscisa t=6], frenará en seco, supongo claro.*

[145] A. *Pero aquí [punto de abscisa t=6 en la gráfica de la velocidad], ¿también?*

[146] B. *Sí, claro, lo que frena es la velocidad, no el desplazamiento, pero bueno.*

[147] A. *A ver y si son valores hasta siete y vemos cuál es, cómo hace el cambio en un ciclo así,*

[148] B. *No, no, no, no, no, no hace ciclos, tú lo frenas, el montacargas, y luego lo vuelves a poner en funcionamiento, ¿vale? Entonces estamos analizando este intervalo, de cero a seis [marca en la gráfica del desplazamiento el eje de abscisas], no puedes analizar de cero a siete. Va y vuelve al mismo sitio, sólo que baja con menos velocidad* [señala tramos de curva desplazamiento y velocidad que van de t=0 a t=4] *y sube con mucha* [ídem de t=4 a t=6]. *Acaba, acaba subiendo a mucha velocidad. Tarda más en bajar que en subir* [marca intervalo 0-4, 4-6 con los dedos índice y meñique, respectivamente, uno tras otro].

[149] A. *Sí, pero cuando el tiempo es muchísimo mayor, no, el movimiento se hace más, o sea, estamos diciendo que es al cubo, no es lo mismo si tienes seis que si tienes treinta y seis.*

[150] B. *Ya no, pero, está diciendo que y es igual a 0 y que el tiempo es igual a 0, estamos estudiándolo en este intervalo, te da igual lo que pase fuera de él.*

[151] A. *No, no, te da igual lo que pase antes* [con énfasis] *que él.*

[152] B. *Da igual y lo que le pasé después. El montacargas baja y sube.*

[153] A. *¿Y después se comporta igual?*

[154] B. *No, sube hacia el infinito.*

[155] A. *¿Cómo lo sabes?*

[156] B. *Pues una función cúbica que es mayor que, que, que cero, es mayor que cero, o sea, es mayor que cero, para todo, mayor que 6* [toca la gráfica del desplazamiento en la pantalla, pero no parece que señale nada en especial en ella]. *Es mayor que cero para todo real mayor que 6, porque el cubo es mayor que el cuadrado, o sea, crece más rápido.*

[157] A. *Entonces se dispara hacia el infinito.*

[158] B. *Claro, eso te da igual, lo que pase después. Tú estás estudiando aquí, entonces, en el intervalo cero, cuatro, eh… en el intervalo… cero, cuatro, la velocidad… es negativa y el desplazamiento es decreciente y el montacargas va al fondo del pozo. A ver, lo que tú has dicho, por ejemplo, un ejemplo, el ascensor: tiene una velocidad cuando baja y una velocidad cuando sube. Y esa, y esa velocidad sigue una función, pero cuando tú frenas en tu piso, ¿a qué no se dispara arriba?*

[159] A. *Eso está claro*

[160] B. *Pues aquí lo mismo. Baja hasta el -1* [señala t=4 en el eje de abscisas y la gráfica de desplazamiento] *y luego sube hasta el 1, hasta el 0 y no sigue, no sigue.*

[161] A. *No, eso sí que lo sé.*

[162] B. *Ale, pues ya está.*

[163] A. *¿Pero eso quiere decir que sólo tenemos que estudiar la función en este punto y ya está?*

[164] B. *Sí, es este intervalo. Desplazamiento cero, cuatro, la velocidad es negativa y el desplazamiento es decreciente. Montacargas va al fondo del pozo… En el intervalo, en el intervalo, esto es abierto, y esto también [está escribiendo en sus notas] cuatro, seis, cerrado, la velocidad es positiva y el desplazamiento es creciente, vuelve al nivel del suelo, de suelo. Usando que tienes, o sea propiedades de derivadas en los puntos y=0 y x=4 la velocidad,*

[165] A. *Además la velocidad es decreciente cuando la aceleración es negativa.*

[166] B. *Claro.*

[167] A. *O sea que sería lo que hemos estado diciendo sobre la velocidad y el desplazamiento que es el apartado b.*

[168] B. *Sí claro.*

[169] A. *Pues ponemos que la aceleración es negativa cuando la velocidad es decreciente y viceversa, viceversa y es eso, el punto de reposo coincide en las dos porque es, es un máximo entre la, es un mínimo de la función… un mínimo relativo de la función de desplazamiento.*

[170] B. *Sí, es que yo aún no he acabado, ya voy….*

[171] A. *Sí que a fin de cuentas es eso,*

[172] B. *más o menos lo mismo sí. A ver, si ésta es la derivada de éste, ésta es la derivada de éste [marca señalando las gráficas implicadas que la velocidad es la derivada del desplazamiento y la aceleración. la derivada de la velocidad]. Entonces, eh, cuando la aceleración es negativa, [escribe] la velocidad es decreciente, el móvil frena, y cuando la aceleración es positiva, la velocidad aumenta, la velocidad aumenta en el último momento y el móvil acelera. Eh, … si el móvil está en reposo, si el móvil está en reposo, si el móvil está en re-po-so, la velocidad vale cero, y la aceleración también. Ya está.*

[…]

[173] A. *Yo creo que con eso ya el b) estaría bien. O sea, explicando, más o menos…*

[174] B. *Sí, a ver, ¿¿??, vamos a ver qué pasa cuando la velocidad es cero, o sea, si la aceleración es cero* [señala el punto de la gráfica de la aceleración de abscisa t=2 que tiene aceleración cero]*, el movimiento es constante, en ese punto* [señala el punto de abscisa t=2 sobre la gráfica del desplazamiento], *si te fijas, el movimiento es constante* [sigue la gráfica en un entorno no muy grande del (2, f(2))], *la derivada es una.*

[175] A. *Sí, cuando la aceleración es cero es el punto de inflexión.*

[176] B. *Claro,*

[177] A. *De la… cuando pasa de creciente a decreciente,*

[178] B. *No, cuando pasa de…*

[179] A. *De la curva de…*

[180] B. *No, no cuando pasa de, de…*

[181] A. *De convexa a cóncava* [sube el bolígrafo hacia arriba indicando convexidad y luego hacia abajo indicando concavidad].

[182] B. *No, perdona, de cóncava a convexa* [hace el mismo gesto pero con la denominación contraria]

[183] A*. Depende del eje y.*

[184] B. *Depende de quien lo diga.*

[185] A. *Sí es verdad. En el punto de reposo es cero la velocidad y la aceleración que es… en el punto de inflexión.*

[186] B*. Perfecto.*

[187] A. *La aceleración es cero en t igual a dos, t igual a dos, y luego a partir de ahí, problemas del modelo dado.*

[188] B. *Espera, en el punto de inflexión en t dos, la velocidad alcanza un mínimo, y la aceleración vale cero. A ver, seguimos con el c). A ver, evaluar la utilidad e identificar los problemas del modelo dado.*

[189] A*. O sea, yo creo que el, el problema así más gordo, es que yo creo que esto, sólo nos sirve para un intervalo de cero a seis. O sea, si nos piden por ejemplo calcula en qué posición estará si al cabo del día, los 360 minutos y con esto no lo tendríamos, no. Lo tendríamos que coger y hallar, eh, el tiempo que nos dan módulo 6 y después extrapolarlo aquí. Pero o sea, esto es muy irreal porque…. O sea, fuera de esto, fuera de lo que es esto, el intervalo* [sigue con el bolígrafo sobre la pantalla la curva de la velocidad y se detiene en el punto de la curva de abscisa t=6], *como me estabas explicando antes, el espacio se va al infinito, la velocidad,*

[190] B. *Sí, también.*

[191] A. *En ese sentido es muy inestable.*

[Largo espacio de tiempo de reflexión individual, B. decide llamar a Luís para preguntar]

[192] B. *Por favor... vamos a preguntar qué es a lo que se refieren exactamente con esta pregunta.* [..] *En la pregunta c) la de evaluar la utilidad e identificar los problemas del modelo dado, ¿qué tenemos que hacer?*

[193] Luís. *Pues tienes que, tienes que pensar precisamente o sea si, si este modelo que te han dado a ti* [señala con el bolígrafo (aparentemente en la hoja del enunciado el modelo original], *para describir el movimiento del montacargas tiene alguna cosa que no funcione muy bien, algo que se pueda mejorar,*

[194] Gina. *¿Se puede mejorar?*

[195] Luís. *algo que se pueda mejorar.*

[196] Gina. *O sea, ¿es perfecto?*

[197] Luís. *Eso es algo…*

[198] Gina. *¿Tú lo usarías?*

[199] B. *No sé, baja bastante más rápido que sube o sea baja bastante más lento que sube, eh... después de eso, del minuto seis ya no puedes explicar nada.*

[200] A. *Todo eso, ¿que lo ponemos por escrito?*

[201] Gina. *Todo eso sí, sí, sí… mientras tú ya lo estás viendo, ya lo estás analizando, lo que estás diciendo, entonces todo eso, … o sea tú imagínate , ¿te iba a gustar un elevador que funcione así?, ¿cómo te ibas a sentir? ¿con miedo, con* ¿?¿??

[202] B. *No sé, si bajo muy lento y subo muy rápido…*

[203] A. *Es que no tiene sentido porque…*

[204] Gina. *Ah bueno pues entonces arreglemos.*

[205] B. *Vale pues entonces* [Gina: *cualquier otras cosas...*] *hablemos de que baja más rápido que sube y que, después que del minuto seis no se explica, es más que luego cuando te pone que crees …*

[206] Gina. *¿Qué es lo que te pasa en el minuto seis?*

[207] B. *En el minuto seis, que frena en seco.*

[208] Gina. *¿Frena en seco?*

[209] A. *No, en esta función no. Por eso está mal.*

[210] Gina. *¿Qué hace?*

[211] B. *Sale por el aire* [A. *sale hacia la entrada* ¿?¿?]

[212] Gina. *¿Y cómo te bajas del elevador?*

[213] A. *No puedes*.

[Se ríen]

[214] Gina. *Bueno, entonces hay que arreglarlo, ¿vale?*

[215] B. *Vale.*

[216] A. *Es que claro, nosotros nos tomamos como que sólo se podría definir en un intervalo de 0 a 6 que es como nos dice lo que tarda en un viaje de ida* [Gina. *Exacto*], *pero, pero es que fuera de ese intervalo es como se, …. se dispara demasiado, no tiene sentido lógico.*

[217] B. *O sea que lleva una aceleración muy, muy, fuerte* [señala en la gráfica de la velocidad, el punto de abscisa t=6 sobre la curva*], y la velocidad es, o sea ochenta, ochenta metros segundo, ochenta metros minutos, a ver, no es una velocidad pero, puede salir volando rápido.*

[218] A. *Para eso lo que podemos hacer es definirlo en un intervalo mayor de seis y ver cómo es en verdad* [reescribe algunas de las sentencias anteriores de Matlab® hasta quedarse, rectificando, con la que representa el desplazamiento en el intervalo 0, 10].

[219] B. *Uf, vas a flipar. Se te va a ir a infinito, ahí lo tienes.*

Matab® ________________________________

>> ezplot(f3,0,6)

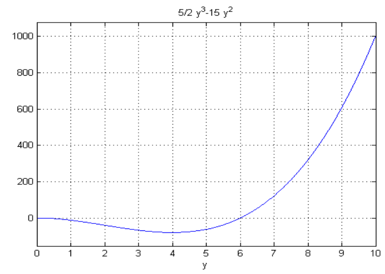
>> grid

>> ezplot(f3,0,6)

>> grid

>> ezplot(f,0,10) [sentencia para representar la gráfica de la función en el intervalo [0,10]]

>> grid



____

[220] Gina: *Algo no es razonable, ahí*

[221] A. *Mmm…*

[222] Gina. *Algo no, no es razonable*.

[223] A. *No, no.*

[224] Gina. *Entonces hay que….*

[225] B. *Si te fijas tío, ¿mil metros en 10 minutos?*

[226] A. *Le pones eso…*

[Gina ríe]

[227] B. *Pues nada, tú eh… ponle una utilidad.*

¿?¿?

[228] A. *Está claro por qué ahora tenemos que mejorar el modelo.*

[229] B. *Una función seno* [traza el movimiento sinusoidal en el aire].

[230] A. *Pues sí.*

[231] B. *En verdad sí.*

[232] A. *Si, lo único que…*

[233] B. *En verdad sí, claro. Bueno va, vamos, pues hablemos primero de la utilidad* [añade la cuarta gráfica, la del desplazamiento en el intervalo 0-10 a la pantalla en el extremo inferior izquierdo, con lo que ven las cuatro al mismo tiempo]. *Bueno, aquí tenemos el desplazamiento del montacargas* [señala la gráfica*], la velocidad del montacargas con respecto al tiempo* [ídem*], la aceleración del montacargas y aquí un intervalo un poco más, ah, un poco más largo del, del,*

[234] A. *De lo que sería el desplazamiento.*

[235] B. *de lo que sería el desplazamiento, sí. Pues nada, eh…, evaluar la utilidad,… A ver.*

[236] A. *Incoherencias lógicas que tiene el montacargas.*

[237] B. *Yo, ponemos pros, ponemos pros. A ver, está bien explicado, bien tomado el/la referencia, está bien tomado el sistema de referencia.*

[238] A. *En cuanto que llega a un punto, justo cuando es la, la aceleración…*

[239] B. *Se busca, está claro que se busca momentos que sea fácil de identificar para que, para el que lo estudie, que tiempo cuatro no es tiempo cuatro, cuatro Pi, ni cuatro e, es cuatro.*

[240] A. *En ese sentido, sí que es fácil.*

[241] B. *Eso está bien explicado, en el dos pasa algo, en el cuatro pasa algo, en el seis y en el cero pasa algo.*

[242] A. *Y de identificar cuándo se llega al fondo que es justo que, cuando coincide, la velocidad es cero.*

[243] B. *Bueno pero eso es reacciones entre derivada y ese, pero bueno,* [A. Sí, pero], *está bien pensado eso. Ponemos los pros: está bien puesto el sistema de referencia y los puntos donde pasa algo* [está escribiendo]. *Estos puntos son el tiempo igual a 0 que parte, t igual a dos que, ¿qué pasa en t igual a dos? , que la velocidad es constante,*

[244] A. *En t igual a dos es cuando deja de decelerar, el…*

[245] B. *no la velocidad es, la velocidad es mínima* [señala el mínimo en la gráfica de la velocidad],

[246] A. *que es cuando deja de decelerar, la aceleración es cero* [señala el punto de abscisa t=2 sobre la gráfica de la aceleración]. Y bueno otro problema es,

[247] B. *Claro la aceleración es,*

[248] Gina. *No son preguntas, más que un problema, decir las fortalezas y las debilidades… digamos, qué funciona y qué no.*

[249] B. *Ah vale, vale; t igual a dos, que la ve…, que la alcanzamos.*

[250] A. *Y luego falta decir que* [B. *y la mayor*], *en el momento en el que llega al fondo y se produce el cambio de decelerar a acelerar, no para, o sea, está claro que* [B. no] *no se ha tenido el tiempo que está abajo pero porque no hay tiempo de abajo, justo en el tiempo 4* [señala con el bolígrafo sobre la gráfica del desplazamiento en la pantalla], *que es cuando llega abajo, tenemos una velocidad bastante grande* [señala ahora en la gráfica de la aceleración el punto de abscisa t=4] [B. *Sí*], *o sea, no tiene sentido utilizar un montacargas en el cual no te da tiempo a bajarte o a subirte, ¿no? No tiene sentido.*

[251] B. *Claro, bueno, pues eso es que está bien puesto el sistema de referencia, entonces hay que hacer una eh, en t igual a cuatro, alcanzamos el pozo sin fon…. eh, el fondo del pozo, el fondo del pozo. ¿Tú ya, tú ya las tienes?* (nota del transcriptor: le pregunta si ya ha apuntado las utilidades en sus hojas)

[252] A. *No, o sea, estoy pensando que ….*

[253] B. *el fondo del pozo…* [lee lo que está escribiendo]. *Contras. A ver, que empiece la fiesta. Es un modelo sólo aplicable en el intervalo cero-seis, fuera* [escribe y lee en voz alta] *no tiene sentido, y así como gracioso, porque si en el enunciado nos dice que la profundidad del pozo es cien metros y llega hasta menos ochenta ¿qué te comes veinte metros y saltas hacia abajo?*

[254] A. *Aproximadamente, tampoco lo especifica.*

[255] B. [relee] *Sólo aplicable en el intervalo cero, seis, fuera no tiene sentido,* [sigue escribiendo] *la velocidad cuando volvemos,*

[256] A. *O sea que tenemos,*

[257] B. *es muy grande,*

[258] A. *que en el único punto en el que se podría*

[259] B. *y no podríamos bajar* [escribe].

[260] A. *el único punto en el que se podría […] dejar el material…*

[261] B. *El material es que no se puede dejar, o sea, si llegas a -ochenta, hay cien metros de, de eso no llegas a, abajo del todo.*

[262] A. *El tema es que en el punto, en el punto t igual a cuatro* [señala en punto de abscisa cuatro en la gráfica de la aceleración], *cuando se alcanza el fondo* [señala el mínimo en la gráfica del desplazamiento], *o sea, no podremos tener una velocidad tan grande porque, o sea es que en verdad estás acelerando en el punto, en el punto en el que debería estar, en el punto de reposo, el montacargas está acelerando, no tiene sentido.*

[263] B. *Ya, no podríamos bajar el montacargas…* [escribe] *así como la aceleración sería muy brusca. Además, el valor mínimo de la función es de ochenta metros y queremos a los cien.*

[264] A. *Lo que pasa en el punto t igual a seis, que es cuando llega otra vez al punto de inicio, en teoría debería pararse.*

[265] B. *Sí, no podríamos bajar del montacargas* [A. *y debería pararse*]. *Sería muy brusco, además, el valor mínimo de la función es de ochenta metros y queremos llegar a los cien. Hemos dicho tema de la aceleración y tal* [señala la gráfica de la aceleración], *que aquí no nos podríamos bajar* [señala el punto de abscisa seis en la gráfica del desplazamiento], *que aquí cuesta subir* [parece que señala el punto de abscisa cero en la gráfica del desplazamiento], *que no llega hasta abajo* [señala ordenada de valor -100] *y que…*

[266] A. *O sea, la única explicación que podría tener es que cuando estás dejando el material y no quieres que se te descontrole, lo que es el ¿¿??,*

[267] B. Claro.

[268] A. *Le pones una especie de freno o algo para que no vaya tampoco…. rápido*.

[269] B. Pero bueno

[270] A. ¿¿??

[271] B. R*ápido, o sea, en tres minutos, o sea, en cuatro minutos recorrer cien metros es menos de lo que tú vas andando por la calle.*

[272] A. *Quizá el problema no es que baje a esa velocidad, sino que luego, que suba…*

[273] B. *Sube muy rápido, eso sí, sube rápido.*

[274] A. *Eso sí que es extraño.*

[275] B. *A ver, a lo mejor que también es importante, a lo mejor también es importante que suba rápido porque... pero no creo que los materiales sufran de, de... sufran de…*

[276] A. *Sobre todo yo creo, yo creo que es complicado porque en principio sube más cargado, ¿cómo va a subir con más aceleración y con más velocidad si cuando sube tiene más peso y en teoría le debe costar más?*

[277] B. No tiene sentido. *Si sube cargado, no puede subir a tal velocidad. No puede subir a tal velocidad, se descontrolarían los materiales* [lo escribe], *aunque te digo, no es una velocidad excesiva, pero bueno*

sí, en el momento que subes, a los diez minutos, está volando. O sea, la velocidad a los diez minutos es muy grande.

[278] A. *No tiene sentido.*

[279] B. *Se descontrolarían los materiales* [relee]. *Pues eso he dicho, insisto, si está referencia y tal está bien puesta, pero es un modelo solo aplicable, fuera de él no tiene sentido, la velocidad cuando volvemos es muy grande y no podríamos bajar del montacargas, así como la aceleración sería muy brusca, además queremos llegar hasta los cien, si sube cargado no puede subir a tal velocidad.*

[280] A. *Pero es que luego, él no lo dice, te dice que la profundidad del pozo es aproximadamente cien metros, pero no te dice que sea cien metros, eso sí que casa con lo que nos están diciendo* [B. Ochenta], *en el problema.*

[281] B. *Trabajemos con cien y una cosa más que modificar.*

[282] A. [lee enunciado 1]. *Haz una lista de especificaciones del montacargas para rediseñar el modelo del montacargas.*

[283] B. *A ver.*

[284] A. *Ahora, lo que no sé es si tenemos que cumplir una serie misma de puntos, o sea lo más raro sería que una función seno, …*

[285] B. *Yo añadiría a los pros que la velocidad no es excesiva porque si en cuatro, o sea, cuando baja, la velocidad es muy lenta, en cuatro minutos, ochenta metros, un abuelo con tacatá… La velocidad cuando baja es buena.*

[286] A. *Si en principio lo único que tenemos que cumplir es la profundidad del pozo y el tiempo que tarda en subir y bajar, eso es lo único que nos damos*

[287] B. *y la velocidad, o sea, y la aceleración a lo que lo hace… no puedes tardar más en subir que en bajar, más o menos lo mismo. La velocidad cuando baja es buena. Eh, si* [escribe], *es un paso normal, de una persona caminando… ¿vale?, pues ya está. Bueno, a ver, especificaciones que deberíamos meter: misma velocidad bajando que subiendo* [A. *Sí que está una,*], *mismo tiempo,*

[288] A. *una simetría, una regularidad en cuanto, en cuanto a las velocidades [B. Sí] y a las aceleraciones*

[289] B. *sí, mismo tiempo bajando que subiendo, un periodo de frenado y acelerado, o sea un periodo en el que no se pare bruscamente, que descienda de velocidad poco a poco.*

[290] A. *Sí*

[291] B. *¿Vale?*

[292] A. *Ah sí, lo que tendríamos que buscar sería el intervalo,*

[293] B. *No, ya.*

[294] A. *el intervalo que tenemos de espacio de cero a cuatro, yo creo que sería un buen, el bueno* [marca con el bolígrafo el intervalo cero-cuatro en el eje de abscisas de la gráfica del desplazamiento].

[295] B. *¿De dos minutos de bajada y dos minutos de subida?*

[296] A. *No en cuanto a dos minutos, si no a cuanto, qué dibujo hace la gráfica, sería una cosa así.*

[297] B. *Yo había pensado la del seno.*

[298] A. *Sí, un se, un seno y un coseno.*

[299] B. *Yo había pensado un seno. Pero bueno, ahora lo extrapolaremos porque la función se nos hace más complicado porque no está definida de pi a pi, o sea, ni de cero a 2pi, está definida de cero a cuatro y de,*

[300] A. *Sí, tendríamos que hacer la …*

[301] B. *de cero a cuatro y de menos cien a cero. Pero eso bueno, ahora lo pensamos. Vamos a pensar un poco en lo que queremos de la función. Queremos mismo tiempo bajando y subiendo, no ya, ni frenazos, ni acelerones, que el ciclo sea regular.*

[302] A. S*í que no.... incluso definirla a trozos de manera que, que se pueda…*

[303] B. *No, pero si defines el seno entre el cero y seis, va a hacer lo mismo* [marca en la gráfica del desplazamiento el dominio 0-6]. *O sea, tú lo que quieres es que te haga esto,* [escribe (o dibuja) en sus notas:] *baja, sube, baja, sube.*

[304] A. *Sí, que sea regular.*

[305] B. *¿Vale? No ya ni frenazos, que el ciclo sea regular.*

[306] A. *Que sea periódica.*

[307] B. *Periódica.*

[308] A. *Periódica, periódica.*

[309] B. *Y adaptable.*

[310] A. *Periódica en un ciclo de, de seis.*

[311] B. *Pero bueno, también, también tienes que tener la opción de estar en parada un rato* [traza en el aire una línea constante en la ordenada cero, desde el punto de abscisa 6 en la curva del desplazamiento], *aunque aquí pone que, que sin tomar el tiempo que está abajo. Supongo que el de arriba también, ¿no?*

[312] A. *O sea,*

[313] B. *O sea, cuando definamos la función* [cambia el tono como para volver a empezar]. *A ver, nosotros hemos pensado en un seno, cuando llega arriba en teoría el seno no para, pero sí que puede frenar eso y luego volver a tomar el ciclo del seno. Pues entonces, pues puedes definir el intervalo y dices vale, pues cada vez que lo pones en marcha tomas cero como el punto o, puedes tomar en estos trozos que tú quieres que esté el montacargas parado, como cero, o sea, de una función constante de cero, te da igual.*

[314] A. *El seno va desde, desde menos uno a uno, ¿no? La opción sería tomar un,*

[315] B. *Bueno pero espera, espera, vamos a hacer las, las funciones, mismo tiempo bajando y subiendo, que no haya frenazos ni aceleraciones, que el ciclo sea regular, periódica y adaptable y ya está y que se pueda parar* [relee y añade en sus notas]. *Bueno pues entonces, lo que queremos será una función seno, queremos un seno, algo parecido a un seno* [escribe en sus notas, mientras A. comienza a poner sentencias en el teclado para representar funciones seno], a *un seno de x, definida en cero, seis, en el intervalo menos cien, cero. Por lo tanto, sin x* [se lo dice a A. que está con Matlab®], *entonces f de cero queremos que sea cero, f de tres queremos que sea menos cien,*

[316] A. *¿La función seno no es este símbolo?*

[317] B. S*í, ¿a que has puesto sen?, f de seis queremos que sea cero. Eso es lo que queremos.*

[A. está escribiendo y representando después la función sen(4x)-40 en Matlab®, pero B. le pide luego que sólo escriba la parte del seno y le pregunta por el -40. En Matlab® queda registrado lo siguiente:]

Matlab®

>> fdex=sen(4*x)-40 [le da error porque no 'lee' la x como variable]

??? Undefined function or variable 'x'.

>> syms x

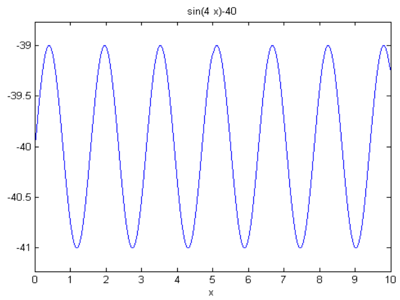
>> fdex=sen(4*x)-40 [ya ha definido la x como variable, pero escribe mal la función seno que en Matlab® se introduce con el comando 'sin']

??? Undefined function or method 'sen' for input arguments of type 'sym'.

>> fdex=sin(4*x)-40

fdex = sin(4*x) - 40

>> ezplot(fdex,0,10)



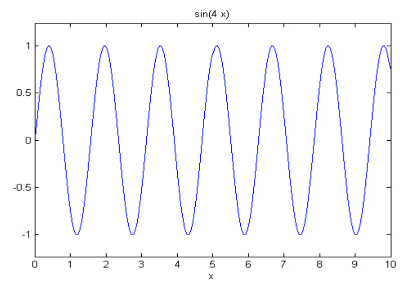
[318] B. *No, coge una función seno, normal, seno normal.* [A. reescribe en Matlab® para representar la función seno sin constante añadida]. *Seno de … represéntala … ezplot de ans …. ahí la tienes.* [Sale en pantalla la representación del seno de 4x primero y del seno de x después]

Matlab®

>> fdex=sin(4*x)

fdex = sin(4*x)

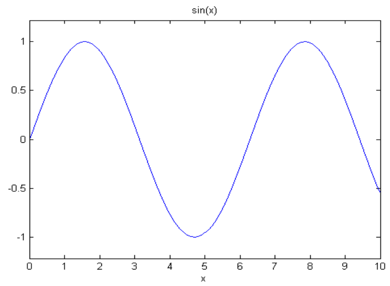
>> ezplot(fdex,0,10)



>> sin(x)

ans = sin(x)

>> ezplot(ans)



____

[A. añade - 40 a la función seno en Matlab®]

[319] A. *ezplot sin de x menos cuarenta*

[320] B. *No, pero cuando la analicemos ahora un poco analíticamente. ¿Tú para qué quieres menos 40? [lo ve en la pantalla]*

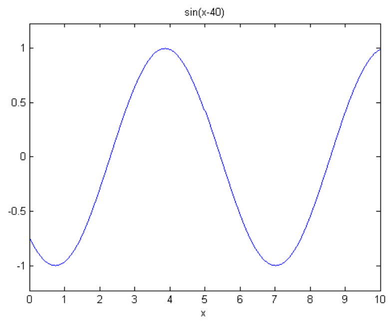
Matlab® ________________________________

>> sin(x-40)

ans =

sin(x - 40)

>> ezplot(ans)



____

[321] A. *Si nos quedamos con lo que queremos,*

[322] B. *¿Hasta qué hora tenemos para hacerlo,*[A. *En verdad, lo que queremos…*] *¿cuánto queramos?*

[323] Luís. *¿Media hora?, ¿más?*

[324] B. *No, más. Es que verás, o sea tenemos que pensar mucho esta función.*

[325] Luís. *Pues, adelante, adelante hasta que nos tiren del campus* [risas].

[326] B. *Vale, pues nos quedamos a acampar la noche.*

¿¿??

[327] A. *Mañana tenemos fiesta.*

Rafa. *Si os quedáis a cenar, lo pago yo.*

[328] B. *Ostras, es una buena oferta, ¿eh?*

[329] A. ¿??

[330] B. *Seno de cero, seno de cero, cero; seno de uno, seno de π medios, uno. O sea, seno de tres, prueba seno de 3π medios, por fa* [*A. Se ha rallado*]. [A va poniendo sentencias en Matlab® para calcular lo que le pide el compañero de la derecha, pero se aturulla un poco al copiar y pegar]. No, no quiero saber cuánto vale eso. Seno de 3π medios, sí, 3π medios.

[331] A. *4,7*

[332] B. Seno de tres pi medios, uno.

[333] A. [calcula en Matlab® el seno de la cantidad anterior] *Seno de 4 con 7, menos uno.*

Matlab® ______________________________

>> ezplot(ain(x-40))

??? Undefined function or method 'ain' for input arguments of type 'sym'. (Ponen 'ain' en lugar de 'sin' razón por la que el programa no entiende la sentencia)

>> ezplot(sin(3pi/2) (falta un paréntesis, razón por la cual el programa no puede representar la función constante -1)

??? ezplot(sin(3pi/2)

Error: Unexpected MATLAB expression.

>> pi

ans = 3.1416

>> 3

ans = 3

>> pi*3/2

ans = 4.7124

>> sen(ans)

??? Undefined function or method 'sen' for input arguments of type 'double'.

>> sin(ans)

ans = -1

____

[A. comienza a probar variantes distintas de senos involucrando a la variable x y a la constante 40; escribe los comandos correspondientes, representa y desecha]

Matlab® ______________________________

>> ezplot(ans(x-40))

??? Error using ==> subsindex

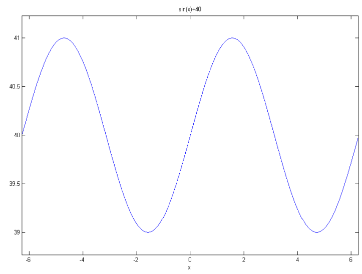
Function 'subsindex' is not defined for values of class 'sym'.

>> ezplot(sin(x-40))

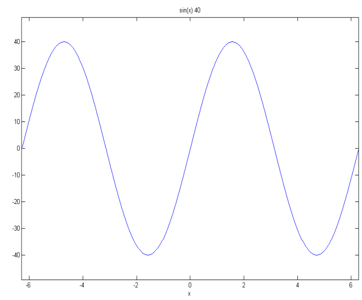
>> ezplot(sin(x-40))

>> ezplot(sin(x-40))

>> ezplot(sin(x)+40)



>> ezplot(sin(x)*40)



____

[334] B. *¿Qué estás probando?*

[335] A. [le enseña a su compañero la gráfica correspondiente a 40*sen(x) y dice señalándola:] *Es algo así, hay que tener en cuenta el salto de ochenta, que es lo que nos interesa* [señala la amplitud del recorrido con la mano como haciendo una horquilla], *ahora sólo tenemos que desplazar la gráfica hacia abajo, ¿sabes?*

[336] B. *Pero bueno, esto* [señala distancia entre mínimos en el ciclo] *de cuánto lo haces, también te interesa esta amplitud, interesa que sea de ahí a ahí* [marca la distancia entre dos máximos locales]

[337] A. *Pero luego,*

[338] B. *y que esto sea,*

[339] A. *con la amplitud podemos jugar. O sea, teniendo en cuenta… Ya tenemos cuál es el, más o menos el intervalo que queremos. Tiene que dar de una forma parecida a seno de x por 40. Ahora sólo tenemos que ver el tema de cuál es la frecuencia* [sube y baja el bolígrafo de arriba abajo] *que tiene y desplazarla hacia abajo, o sea que …*

[340] B. *Yo ya estaba inventando algo. A ver….* [escribe]

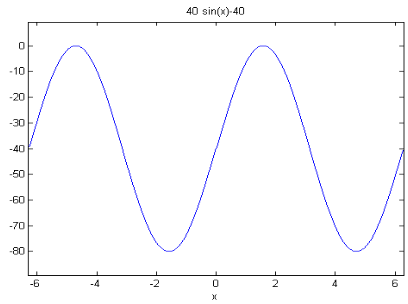
[341] A. [escribe en sus notas primero y ahora en Matlab®] *Ésta podría ser una* [se refiere a 40sen(x)-40]. *Tenemos que ésta es la, la fórmula que tenemos que buscar, ¿no? Hostia, ya está tío* [prueba ahora con 40cos(x)-40].

[342] B. *¿Qué?*

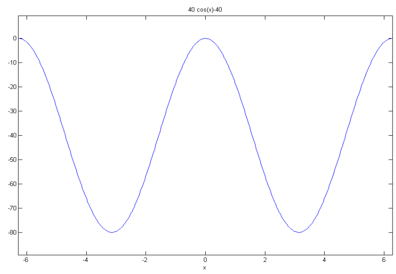
[343] A. *Coseno.*

Matlab® ______________________________

\>> ezplot(sin(x)*40-40)



\>> ezplot(cos(x)*40-40)



____

[344] B. *Éste sí que está ¿?¿?*

[345] A. *En el punto cero, cero* [señala el máximo de la función (local) en el (0,0)], *alcanzas un mínimo, además en dos y medio, que es el ¿¿?¿ es más regular.*

[346] B. *Has probado, o sea, has probado* [como diciendo, no es tan evidente, te ha dado de 'casualidad'].

[347] A. *Más que nada que te dé un intervalo de cuarenta y desplazarla hacia abajo para que el punto más alto sea un cero.*

[348] B. *Pues ya está… Ah, no, en seis minutos* [cantando y marcando el tramo de abscisa aproximado de t=-6 a t=0].

[349] A. *¿No llega en seis minutos?* [marca más o menos la abscisa t=6 en el gráfico, la representación está hecha de -2π a 2π]

[350] B. *Oh, no, no puedo más.*

[351] A. *Espera, espérate… es aproximadamente seis minutos. Lo dice el enunciado.*

[…]

[352] A. *Teniendo en cuenta que la función que queremos buscar, es una forma seno coseno por su, su periodicidad.*

[353] B. *Tenemos que aplicar el cero ,– dos π, entonces esto tiene que ¿?¿?*

[ambos trabajan en sus notas, pensando sobre cómo arreglarlo][…]

[354] A. *Tenemos que, lo que, hemos querido…* [vuelve a arrancar el discurso] *Primero hemos cogido algo que se parece a lo que queríamos y lo hemos ido adaptando a lo que buscábamos.*

[355] B. *Sí.*

[356] A. *Teníamos antes la del seno* [vuelve a poner la sentencia de representación de 40sen(x)-40; Intro], *pero cuál era el problema, más o menos esa era la idea* [B. sí] *que queríamos pero no cuadraba, dónde empezaba y donde cabía* [mueve el bolígrafo como siguiendo la gráfica]

[357] B. *Claro.*

[358] A. *Hemos tenido la suerte que con el coseno cuadra. De todas formas, si no hubiera sido así, hubiera sido coger dentro del coseno la x y haberle restado valores hasta que cuadrara* [sube el bolígrafo de arriba abajo en la abscisa t=0].

[359] B. *Claro.*

[360] A*. Con una cosa así y además tenemos la suerte de que aunque no acabe el intervalo* [señala desde t=0 hasta t=6 aproximadamente sobre el eje de abscisas], *el intervalo no hace falta de cero a seis. Resulta que el enunciado sí que nos permite, tenemos esa ambigüedad de que es aproximadamente seis minutos, no es exactamente… seis.*

[Aquí B. no le escucha, está escribiendo en sus notas]

Matlab®______________________________

```
>> ezplot(sin(x)*40-40)
>> ezplot(cos(x)*40-40)
```

____

[361] B*. Yo cogería coseno de 3 partido pi por x.*

[362] A. *¿Cuál es el coseno? 3x partido pi.* [Se lo dice para si mientras escribe en Matlab®]

[363] B. *Sí 3x partido pi y lo tienes que poner con doble barra.*

[364] A*. ¿Con doble barra?*

[365] B. *Sí, claro.*

[366] A. *¿Cómo se hace eso?*

[367] B. *Ah, no.*

[368] A. *Pues si quieres espérate, ponemos tres pi como,*

[369] B. *Entonces cuando esto vale,*

[370] A. *No deja.*

[371] B*. seis* [está trabajando sobre sus notas al margen del compañero].

[372] A. ¿¿?¿ *3 coma catorce* [reescribe la orden cambiando ans (pi) por 3,1416], Intro].

Matlab®______________________________

```
>> ezplot(cos(3x/pi)) (las sentencias no funcionan porque no escriben * para el producto)
??? ezplot(cos(3x/pi))
Error: Unexpected MATLAB expression.
>> pi
ans = 3.1416
```

>> ezplot(cos(3x/ans))

??? ezplot(cos(3x/ans))

Error: Unexpected MATLAB expression.

>> ezplot(cos(3x/3.1416))

??? ezplot(cos(3x/3.1416))

Error: Unexpected MATLAB expression.

____

[…]

[373] B. [Se dirige a Gina]. *Es una duda de análisis. A ver, queremos aplicar este intervalo a éste* [muestra sus notas a Gina], *o sea extender la definición. Es como si dijéramos … aunque no sea del coseno, pero casi. O sea, del coseno es menos π, π* (nota del transcriptor: parece estar señalando el dominio de definición del coseno extendido después por periodicidad], *pero como no estamos utilizando inversas y tal, también cuesta más ¿?¿? . Eh y éste lo queremos pasar a cero, seis. ¿Cómo lo podríamos hacer?*

[374] Gina. ¿?¿? *no queda una cosa así, tan precisa.*

[375] B. *Claro, es 2π, seis coma algo*

[376] A. *Otra cosa, lo que pone es que aquí nos dicen* [le muestra a Gina la hija del enunciado y señala la parte de la que habla] *es que es aproximadamente seis minutos, pero como en la anterior función de muestra que sí que tenemos, y que es exactamente seis minutos, no sabemos si, o sea, si nos podemos tomar esto como una ambigüedad y poder tomar un coseno, o tenemos que ajustarla exactamente a lo que es un intervalo de tiempo.*

[377] Gina. *Se puede ajustar exactamente los parámetros que tú tienes, eh A seno de B x más C* [B. Ah, vale] y ver cómo se podría ajustar. ¿?¿? más tiempo o menos tiempo.

[378] A. *Sí.*

[379] Gina. *Y con los parámetros también se puede trabajar y eso da otra posibilidad.*

[380] A. *Habría que multiplicar la x de dentro del coseno por, por un parámetro*.

[381] B. *Sí, la cuestión es* ¿?¿? [trabajan por separado en las hojas]. *Mira ya está. Coseno de π tercios partido por x. Entonces, cuando da cero, seis... coseno de dos π… ¿puedes representar el coseno?*

[mientras B. hablaba, A. iba escribiendo en Matlab® algunas cosas] [Se refleja hasta la representación del coseno que le pide B.]

Matlab® ______________________________

>> 2*pi

ans =

6.2832

>> /6

??? /6

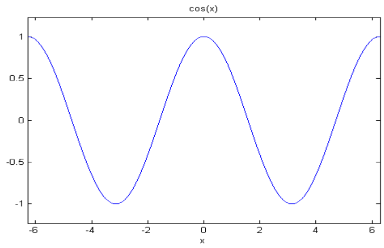
Error: Unexpected MATLAB operator.

>> ans/6

ans =

1.0472

>> ezplot(cos(x))



____

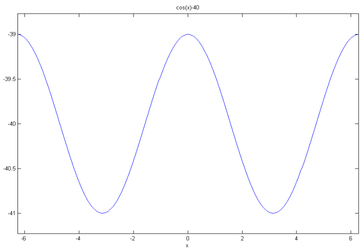
[382] A. *Ahí lo tienes*

[383] B. *¿y esto cómo lo has pasado ahí abajo?* [señala la ordenada de abscisa aproximada menos seis, y baja con el dedo hasta la ordenada cero y misma abscisa]

[384] A. *Esto, bajarlo, bajarlo es, restarle, restarle cuarenta* [escribe en Matlab® y representa:]

Matlab® ________________________________

>> ezplot(cos(x)-40)



____

[385] B. *Vale.*

[386] A. *Ahora ya tienes el intervalo que quieres, o sea, porque ¿? 80 y como la función va desde menos 1 hasta 1 no hay que coger ochenta sino cuarenta.*

[387] B. *Ya está, coseno de π tercios por x, por cincuenta, menos cincuenta, esa es la función. Represéntala y verás.*

[388] A. *A ver* [teclea en Matlab®], *coseno de ¿cuánto has puesto?*

[389] B. *π tercios.*

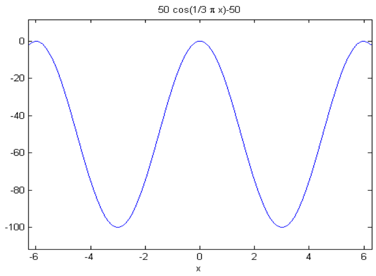
[390] A. *π tercios … tercios por x.*

[391] B. *Por cincuenta menos cincuenta para que nos baje hasta el cien.*

[392] A. *Dale con el cien, pero si no hace falta.* [Representa]

Matlab® ________________________________

>> ezplot(cos((pi/3)*x)*50-50)



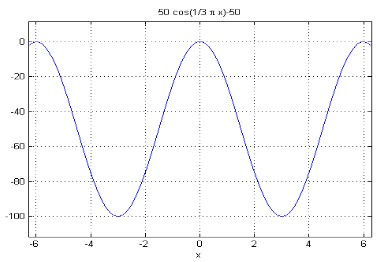
____

[393] B. *Hazle la grid y fliparás. En 6 minutos sube y baja clavado.*

[A. cuadricula la gráfica y sobre la pantalla B. marca un dominio de tamaño seis]

Matlab® ________________________________

>> grid



____

[394] A. *Qué bien y con eso hay que explicar más el punto mínimo y el máximo, y tal.*

[395] B. [Escribe en sus notas y lee en voz alta]. *La función que buscamos es f de x que la vamos a definir a trozos: coseno ¿¿¿? uy (ríe) menos t cero; y cero, si está en reposo.*

[396] A. *Estás haciendo lo mismo. Lo has sacado por esto, ¿no?* [le enseña algo a B.]

[397] B. *Sí* [ríe], *siendo x igual a cero la altura, tomando x igual a cero, se pone en marcha…* [suena el móvil de A] *¿Un mensaje?*

[398] A. *Llego tarde.*

[399] B. *¿Llegas tarde a casa?, ¿pero no sabían esto?*

[400] A. *Creía que acababa a las siete.*

[401] B. *Así,* [sigue escribiendo]

[402] A. *Mejor que me vaya al autobús, si no tarda otra hora en pasar.*

[403] B. *Ahora escribimos todo. Así, se … llega hasta el fondo del pozo* [escribe y lee], *no hay cambios bruscos, frena antes de parar suavemente y mantiene, eh, velocidades parecidas.*

[404] A. *Sólo falta decir que este modelo con todos los fallos que tenía el anterior, los, los compensa, porque absolutamente todos los problemas que teníamos antes, este, este modelo sí que los, los soluciona y quizá tiene ¿??, para darse cuenta que es más estable en la bajada o en la subida. O sea faltaría decir que a lo mejor en la subida sí, pero refiriendo a cosas en cuanto a que la subida podría ser,*

podríamos tomar como más, más pronunciada o menos. Que eso ya sería definirla a trozos para que pueda ir de cero a dos de una manera y de dos a seis de otra. Tampoco costaría mucho, y que este modelo ya nos, ya nos, ya responde [B. *Menos t cero.*] *a unos valores.*

[405] B. *Acuérdate de menos t cero, si está en movimiento, t cero sería el momento de puesta en marcha* [escribiendo y leyendo en voz alta].

[406] A. *¿Qué otras modificaciones le podemos hacer al modelo?*

[407] B. *Eh,*

[408] A. *Dependiendo de la profundidad habrá que multiplicar.*

[409] B. *Espera, espera eso ahora lo atacamos* [continúa la respuesta anterior, escribe y lee*]. Eh, sirve para todos los dominios de definición, ¿y cuáles han sido la última que has dicho? Has dicho una muy buena, general.*

[410] A. *Da igual, está grabado* [ríe]. *Espera, ¿en cuanto a qué?, ¿a los problemas que sufre nuestra función?*

[411] B. *Sí eso, que esta función suple todos los problemas de la anterior. Por último, aplica tu modelo.*

[412] A. *Empieza.*

[413] B. *Las funciones de la forma f de x o y coseno de algo por algo menos algo [escribe] es del tipo coseno … siendo*

[414] A. *Mira a ver qué te parece ésta* [le muestra a B. sus notas]

[415] B. *¿Qué?*

[416] A. *Sería del tipo y igual a coseno de 2pi partido A por x con A la diferencia b menos a, a, b, el intervalo de tiempo, B sería la mitad de la profundidad que queremos y C sería la mitad de ¿?? que necesitamos .*

[B. susurra lo que escribe en el escrito final]

[417] A. *C sería … el punto de inicio de …???*

[B. Sigue susurrando lo que escribe en las notas finales]

[…][escriben y susurran]

[418] A. *Me voy, tío*.

[419] B. *Vale, lo acabo yo.*

[420] A. *¿Te queda algo más por poner?*

[421] B. *No, me falta representar.*

[422] A. *Sigues haciendo la fórmula general para un montacargas, o sea con C.*

[423] B. *Vale.*

[424] A. [a Gina] *Ya.*

[425] Gina. *¿Te vas?*

[426] A. *Sí, yo es que llego tarde, me tengo que ir.*

[427] Gina. *Ah ok.*

[428] A. ¿?¿?

[429] Gina. *Ah, muy bien.*

[430] A. [Dándole sus notas a Gina:] *Aquí y aquí le he puesto el final del…*

[431] Gina. *Vale, excelente, muy bien, gracias.*

[432] B. *Yo casi acabo.*

[minutos]

<u>Pareja 2.</u> [C: alumno sentado a la izquierda de la pantalla en el visionado del vídeo;
D: alumno sentado a la derecha en el visionado del vídeo]

[Leen en silencio y por separado el enunciado del problema, al menos el principio]

[Importante. Nota del transcriptor: en un momento determinado los participantes limpian la pantalla del Matlab® con lo que de la primera parte sólo tenemos el registro resumido de lo que han hecho. Cosas como errores de sintaxis, por ejemplo, dejan de recogerse en este resumen.]

----

[1] C. *No parece difícil, ¿no?*

[2] D. *No, por lo menos la primera pregunta*.

[3] Luís. *Ya sé que no tenéis costumbre de hablar, pero aquí es al revés.*

[4] D. *No, no, pero aquí estamos muy bien….*

[5] Luís. *Ya, ya pero lo que quiero es que habléis, y si subís el tono, mejor, ¿vale?*

[6] C. *Explica el significado de los valores negativos, positivos y cero de la gráfica de la velocidad* [lee el enunciado del apartado a)].

[7] D. *A ver, tienes aquí que sube y baja, sin tomar en cuenta el tiempo que está abajo, es de seis minutos, tarda en subir y en bajar seis minutos, y la profundidad es de cien metros.*

[8] C. *Entonces en subir y en bajar tarda tres minutos, o a lo mejor no. A lo mejor tarda más en bajar que en subir. ¿Representamos la gráfica a ver si nos sale?*

[9] D. *Bueno aquí te pone la, la for, la fórmula de la posición en general, supongo que si la ponemos,*

[10] C. *Vamos a representarla.* [coge el teclado y comienza a escribir]

[11] D. *Espera, espera, que ahí está el cubo, ahí está el cubo y ahí está el cuadrado* [señala la pantalla en la que C. está escribiendo]

[12] D. *¿Le pongo un Alt control aquí*? [hace ademán de coger el teclado]

[13] C. *No, no, no es un vector… t cuadrado, y t cubo* [rectifica en Matlab®]. *Y ahora un ezplot* [escribe la sentencia correspondiente a representar gráficamente a excepción del intervalo, espera].

[14] D. *Sí, sí.*

[15] C. *Sí, a ver, un momento.*

[16] D. *Empieza en, ah no, empieza en cero y se tarda seis minutos.*

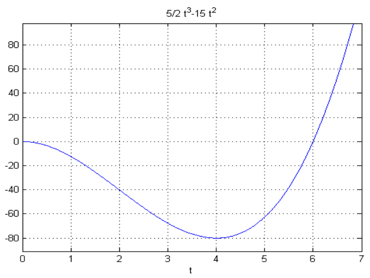
[17] C. *De cero a seis.*

[18] D. *Aquí lo tengo que está, estoy seguro* [busca en el enunciado]. *Ponle siete, de cero a siete.*

[C. ejecuta en Matlab®]. [C. añade la cuadrícula]

Matlab ® ______________________________

```
syms t
y=2.5*t-15*t
y=2.5*t^3-15*t^2;
ezplot(y,[0,7])
grid
```



____

[19] C. ¿?¿? *Tachán… Mira, esto es interesante…* [D. señala con el bolígrafo sobre la pantalla los puntos de la curva de desplazamiento de abscisas 0 y 6] *si sólo vemos de cero a seis, entonces pasa a ser de cero a cero… hasta los ochenta metros baja y luego vuelve a subir… qué curioso…*

[20] D. *Lo que pasa es que desciende hasta los 80 metros, ¿no?* [con tono de extrañeza] *Vale.*

[21] C. *También habrá que decir cosas, que los ascensores llevan abajo* [D. *Sí, sí*] *como con una holgura por si cayeran o algo por el estilo, pongamos que eso ya está contemplado.*

[22] D. *Entonces, la gráfica hay que ponerla aquí* [se refiere a anotar en las hojas].

[23] C. *Habrá que dibujarla.*

[24] D. *Si quieres lo escribimos los dos y después ya…*

[25] C. *Vale… nos lo vamos apuntando un poco los dos y luego ya está.*

[26] D. *La dibujamos* [señala la gráfica hasta la abscisa seis].

[Pasa tiempo, están anotando función y representación gráfica]

[27] C. *¿Qué hago la derivada para…? ¿Voy haciéndola?*

[28] D. *Sólo hay que explicarlo, esto* [se refiere al apartado a)]. [C. *Sólo cuándo es negativo o positivo, lo que habíamos leído al principio.*]

[D. al menos sigue escribiendo] ¿?¿?

[29] D. *¿Miramos la velocidad?, ¿no?*

[30] C. *Vale.*

[C. escribe en el Matlab® las sentencias correspondientes para derivar la función, representarla (esta vez entre 0 y 6) y añade el mallado]

[31] C. *Voy a ponerlo ahora entre cero y*

[32] D. *Ponlo ahora entre cero y seis.*

[33] C. *Entre cero y seis es donde nos interesa.*

[34] D. *Sí, en siete ya no.*

[35] C. *Un segundo.*

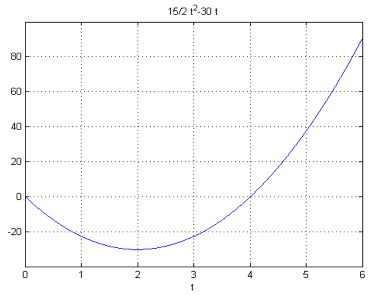
[36] D. *Sí.*

Matlab® ________________________________

diff(y); [derivar y]

ezplot(ans,[0,6]) [representar entre 0 y 6]

grid [mallar]



____

¿?¿? [Se oye ruido de fondo además de por encima claramente de las voces de la pareja 2, las de la pareja 1. El cursor lo ponen señalando la abscisa t=2.]

[37] D. *A ver, que la velocidad sea negativa,*

[38] C. *Que la velocidad sea negativa ponemos que, que es que la están subiendo.*

[39] D. *Sí, pero es que no lo tengo claro, eh, a ver,*

[40] C. *Miramos la aceleración, a ver.*

[41] D. Vale.

[42] C. *Bueno, pues vamos a copiar esto, ¿no?*

[43] D. *Sí, necesito una regla* [busca en su mochila y la saca]

[Copian la representación gráfica de la velocidad]

[44] C. *Claro, cuando dice que la velocidad vuelve a ser cero* [señala con el bolígrafo en la pantalla la abscisa t=4 y eleva hasta la curva de la velocidad que vale cero en ese valor]*, ahí es donde …*

[45] D. *Sí, claro, ahí es cuando sube, en ese punto pasa de subir a bajar. El hecho de que sea negativa quiere decir… es que ahí cada vez* [señala gráfica de la velocidad de abscisas de 4 a 6] *aumenta más porque está bajando, bajando ¿?¿?*

[46] C. Si es negativa es porque está bajando, si es positiva es que está subiendo, ¿no?

[47] D. Sí, claro

[48] C. Ahora la aceleración será lo que,

[49] D. Lo que no sé yo, matemáticamente no sé por qué, o sea qué quiere decir que la velocidad es negativa. Bueno claro es porque la pendiente aquí es negativa y aquí es positiva [escribe o dibuja en sus notas un rato largo]. Mira a ver cómo es la aceleración y después escribimos más.

[C. escribe en el Matlab® las sentencias correspondientes para derivar la función, representarla entre 0 y 6 y añade el mallado]

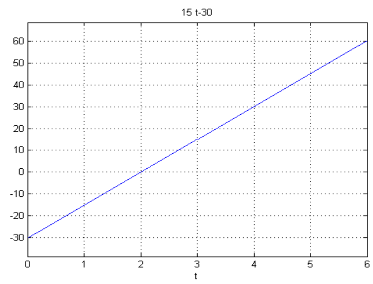
[50] C. *diff de diff de y; la voy a llamar a; y aquí ezplot.*

Matlab® ________________________________

a=diff(diff(y)) (derivar la derivada de y; nombrarlo con la letra a)

ezplot(a,[0,6]) (representar a en el intervalo [0,6])

grid



____

[51] D. [manejando el cursor] *Corta ahí* [deja el cursor en el punto (2,0)].

[52] C. *Lineal.*

[53] D. *Bueno sí, claro.*

[54] C. *Esto podríamos haberlo hecho sin usar el Matlab®, ¿no?*

[55] D. *Eh …*

[copian la representación en sus notas y no hablan]

[56] C. *La parte negativa será que están parando el ascensor y la parte positiva será que están ejerciendo fuerza para subirlo.*

[57] D. *Sí. Es que yo no sé si lo tenemos que explicar más, quiero decir que es negativa porque tú utilizas la tangente y eso, o es positiva por…. Más así en matemáticas o intentar dar una explicación más informal.*

[58] C. *No sé, supongo que si tú le hablas de matemáticas al jefe de la construcción petrolífera algo se enterará.* [Risas]

[59] D. *¿Lo preguntamos, no?*

[60] C. *Sí, ¿no?*

[61] C. *No sé, a lo mejor en lugar de utilizar matemáticas hay que utilizar la visión más informal.*

[62] D. *Una pregunta…* (espera a Gina) *una pregunta…*

[63] Gina. *¿Sí?*

[64] D. *Cuando dice por ejemplo explicar el significado de los valores negativos y tal, ¿decimos?, quiero decir en matemáticas, en matemático, quiero decir, cuando la tangente aquí da valores negativos y tal, ¿o más informal?, es decir, está subiendo, no sé…*

[65] Gina. *Uhmmmm*

[66] C. *Para presentárselo a alguien que no sea matemático*

[67] D. *Quiero decir con fórmulas o con…*

[68] Gina. *Bueno, ¿qué quiere decir con que el montacargas se va para abajo?. A ver,*

[69] D. *Sí*

[70] Gina. *con respecto al montacargas…*

[71] D. *Sí quiero decir cómo, cómo lo explicamos, si más con fórmulas matemáticas o …*

[72] Gina. *Las dos cosas…* [D. *Las dos cosas…*] *¿qué quiere decir eso de que el montacargas se va para allá abajo? Y bueno si te sirve la tangente o algo para alguna cosa de la discusión, pues lo puedes usar.*

[73] D. *Vale*

[74] Gina. *¿Ok?*

[75] D. ¿?¿? … *Nada más que ponga qué quiere decir que la velocidad es positiva, pero… a primero es negativa, pero luego es positiva.*

[76] C. ¿?¿? *la velocidad es, se mide, en metros por segundo, si es negativa…*

[77] D. *El hecho de que sea negativo querrá decir que esa escala que tú has cogido en el fondo…*

[78] C. *Está recorriéndola en dirección negativa,* [D. *Claro.*] *como lo estamos midiendo en altura significa que está bajando.*

[79] D. *Sí, eso es.*

[pasan un tiempo largo escribiendo en sus notas respectivas] [ambos escriben la respuesta al apartado a)]

[80] D. Aquí es cero… e*n el instante t igual a cuatro, pasa de bajar a subir, ¿no?*

[81] C. *Es el punto en el que hay un cambio de dirección. Y por eso tarda más tiempo en descender, por aquello de que por aquello de que los motores, no, porque a veces es más difícil que vayan lento sin cargarse a la gente, a que vayan rápido….*

[82] D. *Sí, puede ser, claro un poco más…*

[vuelven a escribir, terminan el apartado a)]

[Leen el enunciado del apartado b)]

[83] C. *Hay que hacer lo mismo que en a), en b), pero…*

[84] D. *La aceleración es positiva, cero en dos, ¿?¿?* [recorre la gráfica de derecha a izquierda y escribe]. *La aceleración es negativa porque aquí es decreciente y a partir de dos comienza a ser, creciente,*

[85] C. *Positiva*

[86] D. *pero…*

[87] C. *Sí, está claro porque ahí la velocidad es máxima y a partir de ahí…* [indica algo en las notas del compañero]

[88] D. *Sí, aquí está claro en la gráfica.*

[89] C. *Sí, coincidiría con cuando el ascensor…*

[90] D. *Cuando frena. Pues lo explicamos así por la gráfica y ya está, porque es que yo, explicarlo por… decir por qué mientras sube, pasa algo, así no sé por qué es.*

[91] C. *Yo creo que así no es excesivamente complicado*.

[92] C. *La aceleración es constante, luego la velocidad se comporta como una… exponencial o algo así.*

[93] D. Vale, pues ponemos eso.

[94] C. Sí.

[95] D. ¿???

[escriben la respuesta al apartado b)]

[96] D. [Lee el enunciado del apartado c)] *Evaluar la utilidad e identificar los problemas.*

[97] C. *Ya las, ya las he comentado antes. No llega a los cien metros de profundidad.*

[98] D. *Ésa es una.*

[99] C. *La velo ..*

[100] D. *La velocidad bajando es, es bastante mayor, bueno tarda menos que….*

[101] C. *Y ahora que en la subida, la velocidad bate un valor de 60 metros por segundo, y el valor físico de eso, es que mandas a volar a la gente, luego habría que conseguir que se estabilizara la velocidad al final del trayecto.*

[102] D. *Vale, entonces los puntos que habría que cambiar es, primero que no va, que no va* [parece estar buscando el adjetivo adecuado]

[103] C. *Que sube muy rápido.*

[104] D. *Eso* [risas]. *Vale.*

[105] C. *Así representado, al menos lo que es la subida, parece lo típico de un niño pequeño intentando subir algo…. ¿?¿?*

[106] D. *Sí, sí con la aceleración ésta parece que ¿?¿? la subida*

[107] C. ¿?¿?

[108] D. *Vale entonces ventajas… tarda poco en subir*

[109] C. *Claro esto es ventaja y desventaja al mismo tiempo.*

[110] D. ¿???

[111] C. *¿Cuánto has dicho que era la velocidad en 6?*

[112] D. *Más de 80 era… si quieres te lo busco, porque eso da más información que esto…*

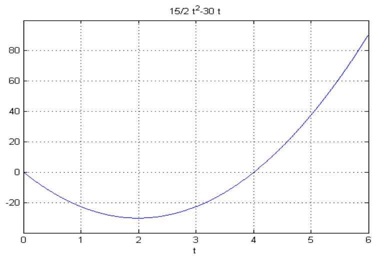
[C. decide volver a representarla en Matlab®]

Matlab® _______________________________

v=diff(y);

ezplot(v,[0,6])

grid



____

[113] C. *Marcaba aquí que llegaba a 60 metros por segundo* [antes de que aparezca la gráfica] ¿¿?? *¿De noventa a cien?* [después]

[114] D. *Sí, cien, sí, llega a cien.*

[115] C. *Cien metros por segundo. Eso son ganas de quemar el motor.*

[116] D. *Sí, pero es que cuando lleguen arriba del todo saldrán disparados.*

[117] C. *Creo que eso es lo que hay que decir, ¿no?*

[118] D. *Hombre, 'yo no lo he soltado', y el tiempo que tarda en bajar, que no llega hasta el final, no sé, todo eso….*

[119] C. *Pues que, bueno, ya hemos dicho las ventajas, que sube muy rápido,*

[120] D. *¿Hay alguna más?*

[121] C. *¿Tú ves alguna?*

[122] D. *No, no sé.*

[123] C. *¿Qué velocidad coge mientras, cuando baja?*

[124] D. *Trein, bueno, treinta.*

[125] C. *¿Treinta metros por segundo?*

[126] D. *Sí, ¿no es mucho?*

[127] C. *¿A qué velocidad cae el ser humano por si sólo? Porque esa ve, si esa velocidad excede el peso, ¿?¿? con gravedad cero?*

[128] D. *Sí, claro, sí, el ser humano, la aceleración era nueve coma ocho. ¿?¿?¿ Hombre, aquí llega a 30, pero 30 ¿qué?, metros…*

[129] C. *Metros por segundo cuadrado.*

[130] D. *Sí, ah, esto sí. A ver.* [con tono como de que no le convence del todo]

[131] C. *Treinta metros por segundo cuadrado …y el ser humano cae a…. Ya sé que no estamos en una clase de física.*

[132] D. *A nueve coma ocho.*

[133] C. *Nueve coma ocho por,*

[134] D. *metros por segundo* [C. Por Newton, ¿no]

[135] D. Sí

[136] C. *¿No lo tenemos que computar en Kilos?*

[137] D. *Buah.*

[138] C. *Venga vamos a probar con 8 kilos.*

[139] D. *Pero es que la aceleración es verdad.*

[140]C*. La aceleración de la gravedad es,*

[141] D. *Si es que en algo nos estamos equivocando, porque si no, como se podría explicar que haya tanta ¿?¿?, se quedaría ¿?¿?*

[142] C. ¿?¿? *dice eso.*

[143] D. *Si está en menos treinta, a ver, en verdad la velocidad está en metros por minuto, la aceleración estará en metros por minuto al cuadrado, ¿no?*

[144] C. *A ver, la posición lo que es son los metros de altura.*

[145] D. *Sí.*

[146] C. *Y la velocidad son los* [D. *por cada, y la t representa minutos*]

[147] C. *Pone minutos, tienes razón. Esto se puede poner como utilidad, que… minimizar el tiempo en el ascensor y cargarse a todos los trabajadores, típico siglo XIX* [ríe].

[148] D. *Sí, y aquí supongo que será la aceleración que estará medido en metros partido minuto cuadrado. Entonces sería para pasarlo a segundos y podemos comparar con cómo cae una persona. Sería, sería dividirlo por sesenta, por tanto sería 0.5, tú querías 9.8 y en este caso el montacargas éste baja a 0.5.*

[149] C. *Entonces eso no es un problema.*

[150] D. *Tampoco es tanto, ¿no? Sería, a lo mejor en*, [C. Es una ventaja.] *subiendo llega a noventa. Entonces sería* [C. *Un movimiento vertical*] *1.5, tampoco.*

[151] C. *Sube rápido y te escupe a una velocidad tolerable.*

[152] D. *Podría hacerlo, podría hacerlo para que para que no haya tanta diferencia … ¿me apartas la mano?*

[153] [C. *Para qué velocidad…*]

¿?¿? [Parece que habla D.]

[154] C. *La velocidad...*

[155] D. *Podríamos construir ¿¿?? para que llegue a cien. Bueno es que tampoco te dice si ¿??? Igual no es ni ¿??? No sabemos si es, también por seguridad no merece la pena bajar hasta 100.*

[156] C. *Es verdad que podemos dar por supuesto que los últimos 20 metros son para, para instalar el ascen, la base del ascensor, pero podemos suponer que es, que es por el modelo.*

[157] D. *Sí, sí.*

[escriben cada uno en sus notas]

[158] C. *Entonces ponemos que podría llegar hasta los cien metros, ¿no?*

[159] D. *Ajustando, sí.*

[160] C. *Que utilice aproximadamente cien metros, pueden ser tanto positivos como negativos.*

[161] D. *Claro, como a los treinta cinco*

[162] C. *Y entonces ya no tenemos la holgura ésa.*

[163] Gina. Aquí en este punto señálenme nomás las debilidades y las fortalezas, ¿?¿? ¿sí?

[164] D. Y eso que sube a demasiada velocidad o que llega con demasiada aceleración al punto, al, al suelo

[165] C. *Ahí una de dos y,*

[166] D. *Sí*

[167] C. *casi una es peor que la otra, y es que frena en seco o que,* [D. E*xacto, exacto*] *o que frena en seco o que sube para arriba.*

[168] D. *Mira ahí* [señala con el bolígrafo el último tramo de recorrido de la gráfica de la velocidad] *debería descender un poco.*

[169] C. *Debería estabilizarse.*

[170] D. *Que hubiera casi un* [vuelve a deslizar el bolígrafo sobre la pantalla haciendo un gesto de suavidad hacia la horizontal del final de la curva representación de la velocidad].

[171] C. *La aceleración debería estabilizarse en cero.*

[172] D. *Sí.*

[Escriben en sus notas]

[173] C. *Este ascensor es de tripulantes, ¿no?*

[174] D. *No lo sé.*

[175] C. *Es que, claro, si se trata de mercancía, ya no hace falta, esto, que nos pongamos que es para personas… Ah no, aquí dice uso para transporte de equipo y ascenso de minerales.*

[176] D. *Ya, pero, hombre, que la velocidad sea máxima justo cuando llega, justo cuando debería parar, claro, el problema es que te dice,*

[177] C. *Hombres o maquinaria, levanta a los viajeros o la maquinaria…*

[178] D. *es que te dice aproximadamente la bajada en seis minutos, a ver si es que empieza a descender o algo, no creo… porque no te dicen que sean seis exactos*.

[179] C. *Una función de grado 2* [D. *Sí, claro* [hace un gesto con el bolígrafo en el aire trazando un tramo creciente de una parábola cóncava (coeficiente de x^2 positivo)]. *Lo sé, lo sé*] *eso no va a descender ni de broma*.

[180] D. *Sí es una mina de diamante, ya la velocidad…* [Ríe]

[Escriben]

[181] D. *Podemos decir como una desventaja también, la diferencia que tarda en bajar porque son minerales, igual que sube a tanta velocidad, a tanta velocidad, podría bajar…*

[182] C. *No sé, yo creo que la velocidad está bien, lo que hay que tocar es,*

[183] D. *Lo que,*

[184] C. *lo que sube.*

[185] D. *lo que sube ….y bueno tocar un poco más para que se estabilizara un poco el tiempo que tarda en bajar. Lo suyo es que descienda la velocidad cuando sube, no que, luego cuando…*

[186] C. *Sería optimizar el tiempo, pero no tenemos los suficientes datos para eso, ¿no?*

[187] D. *Sí, no.*

[188] C. *Crea nuestro propio modelo.*

[189] D. *Sería…*

[190] C. *Tenemos por ahí una serie de ventajas y desventajas.*

[191] D. *Ah, has de poner funciones.*

[192] C. *Tenemos que definir una función a trozos. Fácil, cortemos la parte de descenso* [D. *Sí*] *de antes y definimos…*

[193] D. *para la de subida, otra que, que la supla. Entonces,*

[194] C. *Más tranquila.*

[195] D. *en el 1 ponemos simplemente lo que hemos dicho aquí, ¿no?* [se refiere al apartado c)]

[196] C. *Sí*

[197] D. *Vale.*

[198] C. *Podemos coger lo de antes esperamos que llegue hasta el menos cien ¿no?* […] *Y hemos quedado que la velocidad en seis tiene que ser menor…*

[199] D. *Claro, claro.* [C. *posiblemente cero*] *Porque aquí,* [señala el mínimo de la gráfica de la velocidad], *claro, sí, es que a lo mejor lo que podría hacer es aquí la velocidad aumentar* [sigue con el bolígrafo y sobre la gráfica de la velocidad en pantalla, el tramo que va desde el mínimo hasta el punto de abscisa 5 y pico, más o menos], *pero que llegara un punto, hasta aquí por ejemplo y que desde aquí descendiera hasta cero, por ejemplo cuando está subiendo entre 0 y 100 cuando esta en 50 ahí la velocidad puede ser bastante alta pero ya cuando llega que está llegando …*

[200] C. *No, si al final nos va a salir una función seno.*

[201] D. *Sería ideal, vamos, que hiciera así* [traza sobre la pantalla la forma sinusoidal]. *Pues nada lo pensaremos.*

[202] C. *A mí sólo me salen esas dos, ¿sabes? Así a simple vista, sólo tenía esas dos desventajas ¿no?*

[203] D. *Sí, la de la velocidad y, más que nada la velocidad, más que,*

[204] C. *Algunos aspectos pueden ser ciertos. La velocidad de bajada sabemos que no es excesiva, pero a lo mejor es… muy poco tiempo. Eso sí en el consumo de combustible si la velocidad es menor tampoco está mal. Lo que se ahorra en tiempo se lo ahorra en combustible.*

[205] D. *Yo más que nada lo que haría es subir, hombre, aquí debería bajar y ya está, sí, bajar* [señala como antes desde la abscisa 5 más o menos y sobre la gráfica de la velocidad, una curva descendiente]. *Entonces no sé si definir aquí la misma función* [sigue la curva hasta la abscisa 5] *y a partir de t igual a 4,5 ó 5 una función que baje y ya está. Que se desgrave, entonces habría que buscarla.*

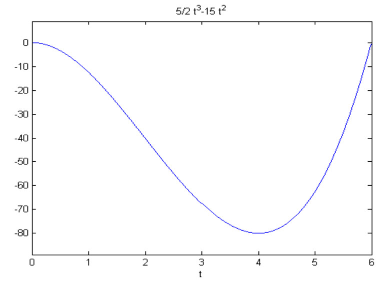
[206] C. *Yo había pensado dos funciones, una de bajada y otra de subida. Si es una función a trozos no podemos partirlo por ninguna parte intermedia, evidentemente.*

[207] D. *Yo a lo mejor dividiría un parte en la que baja, una parte en la que sube, para finalizar la parte en la que ya está cerca de …*

[208] C. *Voy a poner* [D. *Sí*] *la primera* [D. *Sí*] [C. vuelve a representar el desplazamiento con la cúbica original en Matlab®].

Matlab® ______________________________

ezplot(y,[0,6])



____

[209] C. *Si pensamos en los puntos que necesitamos, más que nada tenemos los puntos notables, eh… los puntos notables…*

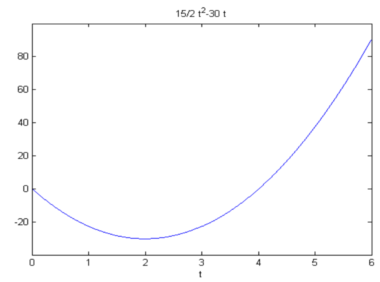
[210] D. *Entonces,*

[211] C. *Aquí el cero va al cero, el seis va al cero y en algún punto intermedio tiene que llegar a menos cien* [marca con el bolígrafo los puntos notables sobre el gráfico del desplazamiento en la pantalla], *eso en la posición, y después la velocidad,*

[C. escribe en Matlab® de nuevo los comandos para representar la velocidad]

Matlab® ______________________________

ezplot(v,[0,6])



____

[212] D. *Si quieres podríamos basarnos un poco en la velocidad y después ahí, ya está, ¿?¿? pasar a ¿?¿?*

[213] C. *La gráfica de la velocidad nos tiene que salir más o menos así* [traza la gráfica siguiendo la original, pero girando hacia abajo llegando a la abscisa cinco más o menos; cambia la convexidad de la curva por concavidad casi desde el mínimo].

[214] D. *Ahí más o menos* [abscisa t=5 aproximadamente]. *Que la velocidad máxima sea más o menos como la que, como la que está bajando* [marca el tramo de abscisa cero a dos sobre la pantalla de la gráfica de la velocidad], *y de aquí empiece a descender y no que se* [marca el punto de abscisa t igual a 5 aproximadamente]…

[215] C. *Aquí tendríamos que tener una función cúbica para que la anterior pudiera ser una cuart, una con t elevado a cuatro, con solamente un mínimo.*

[216] D. *O podemos hacer en trozos, una vez elevado …* [cambia la forma de explicarlo] *que aquí este elevado al cuadrado* [de cero a 5 aproximadamente una parábola cóncava y luego una convexa:] *y aquí elevado al…lo difícil será que a.. hacerlo coincidir, que no haya ninguna…*

[217] C. *Porque después también tenemos la aceleración, que esa es otra. Bueno la aceleración no hace falta que la ponga.*

[218] D. *No, mejor no, es un recta. Sí que aquí la pendiente no sea tan, tan elevada* [marca en la gráfica de la velocidad la parte de la derecha que 'casi' es como una recta; puntos de t=4 a t=5 más o menos]. *Entonces ¿cómo lo hacemos?, con una, una a trozos, o,*

[219] C. *Dibujamos aquí una gráfica y,*

[220] D. *Claro. Más o menos.*

[221] C*. intentamos encontrar una que se aproxime.*

[222] D. *Vale, entonces…*

[223] C. *Creo que…*

[224] D*. Dibujamos primero…*

[225] C. *Eso, ¿eso lo sabes hacer en Matlab®?, dibujar una gráfica y que te diga a ver cuál es la que mejor se ajusta.*

[226] D. *No*

[227] C. *Creo que eso se tenía que hacer para otros problemas.*

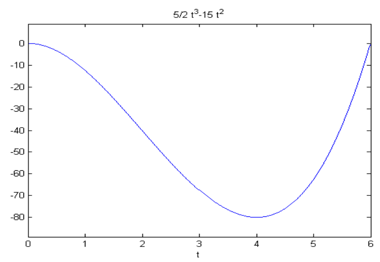
[228] D. *Ah, dibujar, ni idea.*

[229] C. *Pues la próxima.*

[C. vuelve a dibujar la gráfica original de la posición]

Matlab® ______________________________

ezplot(y,[0,6])



____

[230] D. *Sí. Sí, vamos a dibujar primero la de la posición, ¿o la de la velocidad?. Es que la de la posición lo único que sabemos es que llegue a 100. Hombre ahí que no sean tan, la pendiente que no sea tan inclinada si no…* [se refiere a la pendiente que se ha señalado antes].

[231] C. *Sabemos que tiene que estar en cero y seis. Bueno.*

[232] D. *Sí. Debería hacer así* [mismo dibujo de lo que desean de antes en suavidad, como en [234]].

[233] C. *Y en un punto intermedio tiene que llegar a menos 100.*

[234] D. *Claro, debería hacer más o menos así* [traza ahora sobre la pantalla una gráfica con suavidad como antes pero haciendo llegar el mínimo a -100]. *Y ahí que no sea tan inclinado esto* [ha desplazado el mínimo a la abscisa t=3 y traza como una recta con pendiente positiva y que pasa por el (6,0) para indicar que debe ser mucho más suave la subida] *y que ahí descienda* [desde el (6,0) más o menos], *aquí que la pendiente tienda a cero.*

[235] C. *Si la hacemos a trozos y no nos importa que no llegue a menos 100 podríamos simplemente coger esto* [trozo de gráfica de abscisas de 0 a 4] *y hacerlo al revés, o sea, lo mismo.*

[236] D. *Sí, sí, vale. O la podríamos ajustar ahí un poco que no, que no empiece tan fuerte.*

[237] C. *También interesaría que la aceleración sea cuadrática, cuadrada, te cuento, entonces otra parábola, entonces así tenemos información más o menos de la tres, de las tres gráficas.*

[Trabajan en sus hojas]

[238] D. *La de la posición más o menos…*

[239] C. *La velocidad tendrá tres, tendrá tres valores en cero.*

[240] D. *Entonces la aceleración sería … aquí …*

[241] C. *La velocidad será A x al cubo más B x cuadrado más (C) x.*

[242] D. *¿Si no hacemos al final ninguna, ninguna función?*

[243] C. *Pero eso es lo que pretendemos, tenemos que encontrar cuál es la, más o menos…*

[244] D. *Es que a trozos…* [por los gestos da la sensación de que D. apuesta más por que sea a trozos]

[245] C. *Sí, podemos hacerla a trozos, pero, pero si lo hacemos todo de una… Esto no es hacer un trabajo de más, pero…*

[246] D. *Vamos, vamos a intentarlo a ver si nos sale.*

[Vuelven a trabajar en sus hojas por separado]

[247] C. *Más o menos ya sabemos que esto tiene que ser mayor que cien para todo x, ¿no?*

[le enseña sus hojas al compañero]

[248] D. *Sí, ¿menos cien?*

[249] C. *Mayor que menos cien. Vale.*

[250] D. *Claro, es encontrar, sí, yo encontraría ésta y después intentamos ésta y ésta. Entonces que tenga más o menos esta forma la función.* [se queda pensando]

[251] C. *¿Y si ponemos en la aceleración…?, tiene solamente eh, la aceleración tiene dos, dos puntos en los que es cero.*

[252] D. *Sí, será el punto desde el que arranca que se tenga y después otro, otro punto para las x. Entonces, ahora tenemos que intentar esa función, la de la velocidad que se ajuste más o menos así.* [C. Sí] *Algo así. Bueno, esto más o menos.* [no se ven los dibujos sobre los que trabajan]

[253] C. *Sí … para allí, para allá.*

[254] D. *Entonces, a ver.*

[255] C. *Deberíamos dar por sentado algún valor de tiempo.*

[256] D. *Vamos probando.*

[257] C. *O podemos coger, podemos dar un valor de…queremos que baje, no sé, en tres minutos, y por lo tanto para t igual a tres, la posición tiene que ser menos cien* [D. *y a partir de ahí ya podemos sacar*] *y la velocidad tiene que ser cero, y a partir de ahí ya sacamos un sistema de ecuaciones, con las, con las tres...*

[258] D. *Sí.*

[259] C. *que tenemos.*

[260] D. *Vale, entonces…*

[261] C. *Y así solucionamos también lo de que el, el movimiento es un poco corto.*

[262] D. *¿Le ponemos tres o?*

[263] C. *¿O cuatro?, le ponemos tres, metemos tres ya que estamos.*

[264] D. *Que baje o suba tan bien es poco*… Es que tampoco tiene... cuando suba igual lleva la carga, es que,

[265] C. *Entonces, sólo …*

[266] D. *igual debería subir en… más tiempo.*

[267] C. *Entonces seguramente ejercerá más fuerza.*

[268] D. *Vale.*

[269] C. *Tienes razón. A más velocidad ejerce menos fuerza. Sí, le metemos tres, ¿no?*

[270] D. *Si consideramos que la fuerza que hace bajando y subiendo es la misma, por el hecho de llevar más peso, su velocidad…*

[271] C. *Hasta pensando yo creo que le dará igual mientras tarde lo mismo o menos. Tenemos que reducir la velocidad de ascenso.*

[272] D. *Entonces lo ponemos en tres. Entonces, entonces la gráfica será…* [escribe en sus notas]

[273] C. *También cabe decir que mantenemos la, que lo de que dure seis minutos.*

[274] D. *Sí.*

[275] C. *Esto* (interjección), *para que no, para que no puedan decirle que si tarda menos, eh, la utilidad es, es menor.*

[D. asiente]

[…]

[276] C. *En esa posición la ecuación tiene que ser cero y la posición tiene que ser menos cien … ¿?¿?*

[277] D. *Sí, puede ser. Si se cumplen tres ecuaciones para uno.*

[278] C. *Creo que necesitaremos unas cuatro, ¿eh? Es raro, que, el que la posición sea cero aquí, aquí, y aquí y aquí.*

[279] D. *A ver.*

[280] C. *Tenemos, tenemos este punto, este punto, este punto, este punto y este punto. Tenemos cinco ecuaciones y necesitamos cuatro.*

[escriben en sus hojas]

[281] D. *Vamos a ver, respecto a la posición ponemos …*

[282] C. *Seis ecuaciones, ¿cómo no? ¿Metemos esto en Matlab® a ver qué nos dice?*

[283] D. *Sí, a ver, para la posición en t igual a tres, menos cien; t igual a cero, y t igual a seis, cero… Tú ves poniéndole…*

[284] C. *Limpio la pantalla, ¿vale?*

[285] D. *Sí.*

[286] C. [C comienza a introducir en Matlab® la expresión para la velocidad general, para luego implementar las ecuaciones del sistema que han planteado para encontrar la cúbica que represente la velocidad, luego también la posición y la aceleración] *Los de atrás están con trigonometría. Por lo pronto, me sale ilegal. ¿?¿? Tengo que ponerlo respecto de t, ¿verdad?*

[287] D. *Sí*

[288] C. *A ver si me sale la función.*

[289] D. *Uhmm al cuadrado … Bueno está todo,* [C. ha introducido las expresiones para la velocidad con parámetros A, B y C; y ha integrado para obtener la de la posición] *a ver si…*

[290] D. *Bueno, sí, es así.*

[291] C. *No, falta la D.*

[292] D. *No, ahí sería más que nada una constante* [se refiere en la posición]. *Podrías considerar una constante, pero no en función de x.*

[293] C. *Sí, tienes razón. Sería una constante.*

[294] D. *Lo que pasa es que si queremos que en cero, valga cero…*

[295] C. *No hace falta constante ninguna.*

[296] D. *No, no hay que poner constante.*

[297] C. *Vale. Entonces lo dejamos así.*

[298] D. *Vale.*

[299] C. *Bueno, D por si hace falta, yo ya la he definido.*

[300] D. *Y después es que la velocidad en seis valga cero y…*

[301] C. *Y ahora* [D. *yo creo que con eso*…]

Matlab® _______________________________

>> eq1=A*t^3+B*t^2+C*t [asignación de nombre eq1]

??? Undefined function or variable 'A'. [da error porque en lenguaje simbólico hay que distinguir entre caracteres de texto y variables]

>> syms A B C D [define las variables A, B, C y D]

>> eq1=A*t^3+B*t^2+C*t

eq1 =A*t^3 + B*t^2 + C*t

>> eq2=int(eq1,t) [integra la ecuación 1 con respecto a la variable t; la nombra con la etiqueta eq2]

eq2 =(t^2*(3*A*t^2 + 4*B*t + 6*C))/12

>> eq2=simple(eq2) [simplificación de la forma de la expresión simbólica de la segunda ecuación con el menor número de caracteres posible]

eq2 =t^2*((A*t^2)/4 + (B*t)/3 + C/2)

____

[302] C. *Y ahora, y ahora montamos el sistema de ecuaciones. ¿Te acuerdas cómo se hacía?*

[303] D. *Si pones solve y entre comillas las cuatro ecuaciones, se supone que te dará la solución* [escribe en Matlab® el comienzo de la sentencia] [sigue escribiendo y dice para sí] *en t igual a seis…*

[304] C. *Así no me dejará, habrá que poner los valores uno a uno.*

[305] D. *No por ejemplo, esa no hace falta* [D. le indica que no ponga una de las ecuaciones que tiene escritas C. en sus hojas]. *No porque en cero irá … ya sabes que va a dar cero. Realmente son, claro, como es A, B y C con tres ecuaciones…*

[306] C. *Con una, dos, tres y cuatro, las que necesitamos.*

[307] D. *A ver, en x igual a seis.*

[308] C. *x igual a tres, cero.*

[309] D. *x igual a tres, cero.*

[310] C. *x igual a tres menos cien, x igual a seis, cero y x igual a seis cero, y como no hay constante, sabemos que para todo x cero, es cero.*

[311] D. *Lo que pasa es que, a ver si hay tres incógnitas, con tres ecuaciones, bueno si fuera,*

[312] C. *Cierto, pero cuál omitimos.*

[313] D. *Claro, debería ser una que saliéndote implicará que saliera la otra. A ver, para x igual a tres, que estábamos en cero. A ver, para x igual a tres, si la velocidad vale cero, para x igual a tres* [se queda pensando cuál podrían obviar]…

[314] C. *¿Y si lo hacemos a mano?*

[315] D. [ríe]. *Si el problema es ver, cuál, a ver cuál, información sobra.*

[316] C. *Yo voy a hacerlo a mano a ver qué tal me sale.*

[317] D. *A ver.*

[318] C. *Y si el modelo está equivocado, pues,*

[319] D. *No lo sé.*

[320] C. *Cancelamos... Cancelación catastrófica y demás* [se ríe]. *No, es una broma, tranquilo.*

[321] D. *No voy a hablar más contigo* [se ríe]. *A la salida ya veremos.*

[Ambos trabajan en sus cosas; C. está resolviendo el sistema a mano, y D. con Matlab®]

[322] D. *Voy a intentar resolverlo aquí…* [se refiere a Matlab®]

[Alguien mueve la cámara][…]

[323] C. *Esto va a salir muy divertido, ¿vale?*

[324] D. *Sí. ¿?¿? lo que me va a tocar es ¿?¿?¿*

[D. ha escrito lo siguiente, que le da un error:]

Matlab® ______________________________

>> 6^4

ans = 1296

>> ans/4

ans = 324

>> 6^3

ans = 216

>> ans/3

ans =72

>> syms a b c [define como variables a,b,c, pero no x, y,z]

>> solve('9*x+3*y+z', '324*x+72*y+18*z', '20.25*x+9*b+4.5*c=-100') (comando que sirve para resolver un sistema de ecuaciones lineales; cuando la ecuación está igualada a cero, no hace falta ponerlo, éste es el caso de la primera y la segunda ecuación)

ans =

x: [1x1 sym]

y: [1x1 sym]

z: [1x1 sym] [soluciones guardadas en estructura de datos, de tamaño 1; hace falta pedirlas explícitamente al programa para verlas]

____

[D. continúa]

[325] C. *Hay que hacerlo en función de t, ¿verdad?*

[326] D. *Sí, bueno, x, y, y z aquí es A, B y C.*

[327] C. *No pasa nada.*

[328] D. *A ver, x, y, z igual* [está escribiendo en el ordenador]. *Mira qué me saca. Pensé que iba a ser más fácil. Ah, es que si x… ¿¿?? ¿ponemos las cuatro?*

Matlab® ______________________________

>> x

??? Undefined function or variable 'x'.

>> [x, y, z]=solve('9*x+3*y+z', '324*x+72*y+18*z', '20.25*x+9*b+4.5*c=-100') [al añadir [x,y,z] el programa no sólo entiende que son ya variables, si no que además son las variables en función de las cuales se pide resolver el sistema de ecuaciones]

x = - 0.44444444444444444444444444444444*b - 0.22222222222222222222222222222222*c - 4.9382716049382716049382716049383

y = 4.0*b + 2.0*c + 44.444444444444444444444444444444

z = - 8.0*b - 4.0*c - 88.888888888888888888888888888889

____

[329] C. *Yo he metido.. yo lo estoy haciendo con las cuatro, no sé si me saldrá.*

[330] D. *Vale ponemos las cuatro.*

[331] C. *¿Qué te ha salido?*

[332] D. *No, no me resuelve. ¿Quieres que quitemos otra ecuación y ya está?*

[333] C. *¿Y otra posibilidad?,*

[334] D. *Es que yo creo que no, que así no, no va a dar eso, ¿eh? Tenemos que, eh…, hacerlo más sencillo y ya está. Entonces…*

[335] C. *Podemos quitar la ecuación de menos cien, que eso es realmente lo que menos importa, la velocidad tiene que ser cero en x igual a seis, ¿no?*

[336] D. *Vale va, le quito la condición de cien que tampoco influye demasiado. Da todo cero.*

Matlab®______________________________

>> [x, y, z]=solve('9*x+3*y+z', '324*x+72*y+18*z', '20.25*x+9*b+4.5*c=-100', '216*x+36*y+6*z')

??? Error using ==> solve at 209

4 variables does not match 3 outputs.

>> [x, y, z]=solve('9*x+3*y+z', '324*x+72*y+18*z', '216*x+36*y+6*z') (sistema homogéneo, no se señala que las ecuaciones están igualadas a cero)

x =0

y =0

z =0

____

[337] C. *Hasta luego, nos vemos mañana* [se despide de uno de los miembros de la otra pareja que ya ha terminado y se va corriendo].

[…]

[338] C. *Nuestras respuesta no es fácil, ¿eh?*

[339] D. *Sí,*

[340] C. *Porque esto son ¿?¿?*

[341] D. *Sí, puede ser.*

[342] C. *Porque sí tienes posibilidad de poner éste en lugar de poner el último.*

[343] D. *Bueno, vamos a ver eso, y si no pues vamos probando y ya está.*

[344] C. *Esto no me gusta* [sigue intentando resolver el sistema a mano].

[345] D. *Y si,*

[346] C. Anda ya.

[347] D. *¿qué te parece hacer…?*

[348] C. *En función de landa me va a dar.*

[349] D. *Y si suponemos que en vez de subir y bajar con estos parámetros, cogemos la función menos seno de t, que se anula en cero, en π, y así tenemos 2π que es seis coma dos ocho.*

[350] C. *No estaría mal.*

[351] D. *Que la velocidad fuera así.*

[352] C. *Y lo multiplicamos por cien, ¿no?*

[353] D. *Ah, claro, tendría que llegar a cien. Claro, multiplicamos para que llegue a… Bueno, pero esto es la velocidad. Realmente, claro. Nosotros ya en el menos uno lo multiplicamos por treinta.*

[354] C. *Espera, ¿y cómo acabaría el coseno al final? Bueno, ¿cómo acabaría la velocidad y la aceleración?*

[355] D. *A ver, la velocidad sería más o menos así. Entonces sería,*

[356] C. *Integral.*

[357] D. *Integral, tendríamos que sería más o menos, treinta por el seno, así que sería menos treinta coseno.*

[358] C. *Eso igual sería otra idea pero…*

[359] D. *Aun así. Tenemos que el desplazamiento sería más o menos así, más o menos así…* [habla como si estuviera procesando la información]

[360] C. *Tiene sentido. Mira que si lo que habíamos dicho antes va a ser la solución.*

[361] D. *Lo que no cuadra es que, que, que claro si tú, es que claro, te saldrá la misma función para la aceleración y para, bueno, te sale esto, bueno, ahora he visto que no, cuando tú integras te sale esto ¿no?*

[362] C. *¿y si hacemos media x? No sé decirte, que tarde el doble en llegar. Realmente el seno es esto, entonces no nos sirve.*

[363] D. *Es que no lo sabemos, claro.*

[…]

[364] D. *¿Lo has hecho quitando la condición de cien?*

[365] C. *La condición de cien nos sirve para conseguir algo, sobra una de estas.*

[366] D. *Vale. Vale pues entonces lo tenemos mal.*

[367] C. *Da igual, recupe, mientras tengamos hasta aquí, no está mal.*

[368] D. *Sí, sí.*

[…]

[369] D. *Ah, no, espérate. Está bien, está bien. Podemos usar ésta.*

[370] C. *¡Qué bien, nano!*

[371] D. *Sí, sí, está bien. Si pones en la velocidad menos treinta seno de x... Ahora que me ha vuelto a salir, lo ponemos así y ya está.*

[Trabajan por separado]

[372] D. *Hasta luego.* [B. se va y se despide de él]

[373] C. *Dame ese folio de ahí.* [C. le pide a D. las hojas con los dibujos que acaba de hacer; se ve la hoja momentáneamente a través de la cámara]

[374] D. *Esto es una mierda*.

[375] C. *¿Es sucia?*

[376] D. *Sí.*

[…]

[377] C. *¿Esto qué es?*

[378] D. *Yo pondría esto en ésta. Mira, ves, si pones* [C. esto tenía que explotar por algún lado [se ríe]], *si pones esa de menos treinta seno, hace así la de la velocidad. Su integral te hace así, que sólo … te hace así* [está dibujando mientras habla, C. mira] *que es: aquí llega y empieza a subir, que es como más, más o menos parecida a esto* [señala alguna otra gráfica que tiene en otra hoja][nota del transcriptor: quizás sea la del enunciado], *bueno, sería en cero.*

[379] C. *Ponemos ahí, porque realmente en lugar de un seno coges un coseno y así ya te vas arriba del todo. Coseno menos,*

[380] D. *Vale, vale, bien.*

[381] C. *Cien coseno menos,*

[382] D. *Bueno, que debería empezar en cero, en velocidad cero, ¿no?*

[383] C. *menos cien. 50 coseno menos cien.*

[384] D. *Pues,*

[385] C. *¿Qué hacemos tachamos esto?*

[386] D. *Tachamos y ya está.*

[387] C. *Sí.*

[388] D. *¿Tú lo habías escrito o algo?*

[389] C. *Sí, bueno, cuando ya termine…. podemos terminarlo y poner las dos posibilidades.*

[390] D. *Sí es que ,*

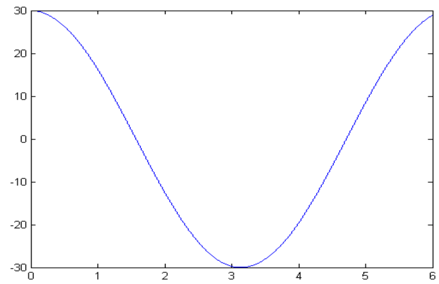
[391] C. *Es que uno no podía saber cómo iba a salir esto. ¿Quién iba a ganar?*

[392] D. *Bueno, yo pienso una cosa, ¿?¿?*

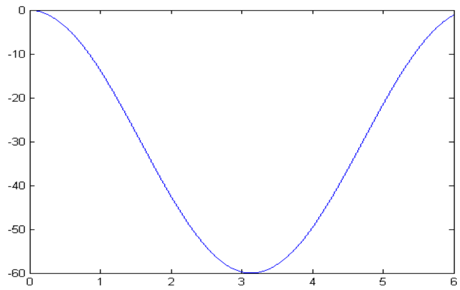
[dibujan o escriben en sus hojas; piensan]

[D. coge el teclado y empieza a escribir en Matlab®; va probando una a una sin hacer comentarios, hasta que habla C.]

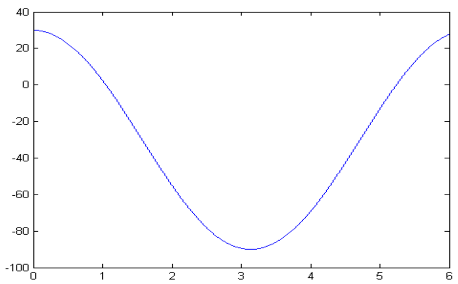
>> x=0:0.001:6; y=30*cos(x); plot(x,y) [otra forma de representar funciones en 2D, en este caso, se pide representar en el intervalo 0-6 con una partición de 0.001]



>> x=0:0.001:6; y=30*cos(x)-30; plot(x,y)



>> x=0:0.001:6; y=60*cos(x)-30; plot(x,y)



____

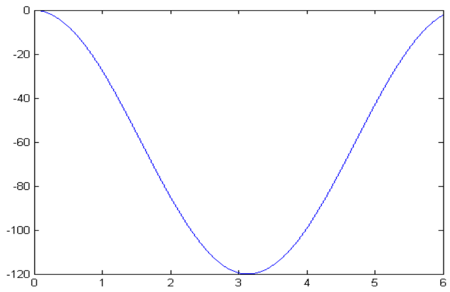
[393] C. *Ahí está. Vamos a ver qué tal sale.*

[394] D. [A pesar del comentario de C. cierra la gráfica y vuelve a modificar un poco la función] *Vale, si pones ésta, a ver cómo sale. Mira, empieza en cero* [señala con el dedo en la pantalla]

[395] C. *Y acaba en ciento veinte, te estrellas* [ríe].

Matlab® ________________________________

```
>> x=0:0.001:6; y=60*cos(x)-60; plot(x,y)
```



____

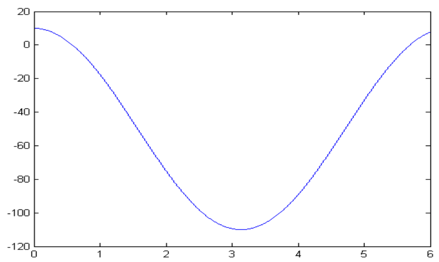
[396] D. *Ah, no, sería…*

[397] C. *Por lo menos 50.*

[398] D. *Vale, sería…*

Matlab® ________________________________

```
>> x=0:0.001:6; y=60*cos(x)-50; plot(x,y)
```



____

[399] D. *Ay, no, espera. Vale pero sería ahí…* [señala está por arriba de cero, en 10 en el eje de ordenadas]

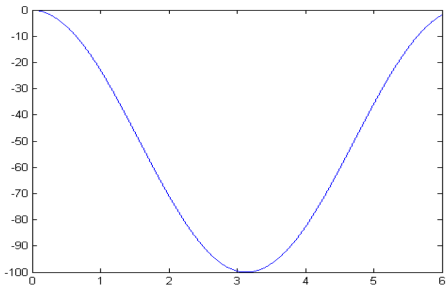
[400] C. [señala en la pantalla sobre la última sentencia de Matlab® el valor sesenta] *Es que ahí hay que quitar el sesenta,*

[401] D. *No, quitar, quitar pendiente*.

[402] C. [vuelve a señalar el mismo sitio] *y poner cincuenta.*

Matlab® _______________________________

```
>> x=0:0.001:6; y=50*cos(x)-50; plot(x,y)
```



____

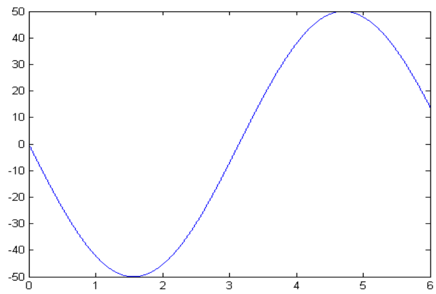
[403] D. *Mira, es ésa. Yo pondría ésta: 50 coseno menos 50.*

[404] C. *Mira a ver si funciona.*

[405] D. *Ahora si quieres la revisamos y eso. A ver si cambiamos esto y esto* [se refiere a cambiar en la sentencia de Matlab® la función a representar] *sería menos, menos…* [escribe en Matlab la sentencia para representar -50sen(x) y una vez representada, sigue la gráfica en el aire con el dedo]. *Aquí la velocidad desciende, sí. Yo creo que sí.*

Matlab® _______________________________

```
>> x=0:0.001:6; y=-50*sin(x); plot(x,y)
```



____

[406] D. [Representa ahora la gráfica de $y=-0.75x^4+9x^3-27x^2$, que es la función que le ha salido a C. después de hacer a mano el sistema de ecuaciones] *Representamos esa función, a ver si sale. Si nos ponemos... A ver. Dime ¿?¿?, dime.*

[407] C. *A lo mejor me sale lo mismo que a ti, pero..*

[408] D. *No, a ver si se ajusta, lo ponemos. … Espera* [copia y pega en Matlab® y borra la parte de sentencia que no le hace falta]

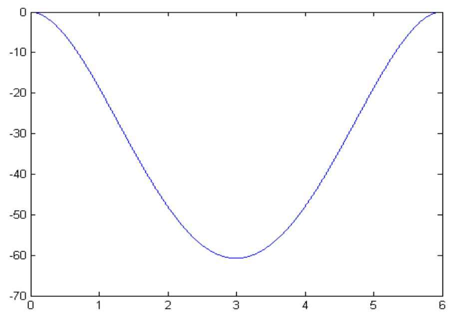
[409] C. *Tienes que poner, menos cero setenta y cinco,*

[410] D. *Menos cero setenta y cinco*

[411] C. *más 9, más 9 t al cubo, menos 27 x cuadrado.*

Matlab® ________________________________

>> x=0:0.001:6; y=-0.75*x.^4+9*x.^3-27*x.^2; plot(x,y)



____

[412] D. *No está mal, la verdad es que llega…*

[413] C. *Fíjate, es que fíjate, que no llega a cien, ¿por qué no llega a cien?, ¿dónde me he equivocado?*

[414] D. *Y a ver, si aquí…*

[415] C. *Me gusta más la tuya.*

[416] D. *Pues entonces ponemos esa y ya está. A ver* [va a representar la velocidad asociada al desplazamiento, aunque le da un error y habida cuenta de que es errónea, lo deja estar].

[417] C. *¿A cuánto llegaba, a sesenta?*

Matlab® ________________________________

>> x=0:0.001:6; z=diff(-0.75*x.^4+9*x.^3-27*x.^2); plot(x,z)

??? Error using ==> plot

Vectors must be the same lengths.

____

[418] D. *La tuya sí. Bueno, ¿ponemos ésta y ya está?*

[Escriben en sus hojas]

[419] D. *Esto lo quitamos y ya está.*

[420] C. *Yo voy a dejarlo ahí.*

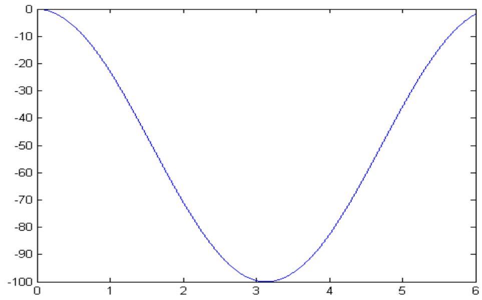
[421] D. *Sí, dejamos algo y ya está. Entonces, yo la que he puesto es esta: cincuenta coseno…*

[422] C. *Cincuenta.*

[423] D. *Que sale esto* [D. vuelve a representarla], *eso. Si se representa más o menos,…*

Matlab® ______________________________

```
>> x=0:0.001:6; y=50*cos(x)-50; plot(x,y)
```



____

[424] C. *Espérate, lo que podríamos hacer, es aquí, intentar, coseno de landa menos cincuenta, de manera que landa sea el tiempo que, el que quiere,*

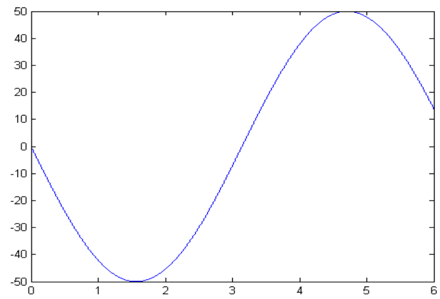
[425] D. *El que quiere la,*

[426] C. *pero ponemos como recomendación que, que debe mantenerse en cierto intervalo para evitar que, que o caiga muy rápido o que suba muy rápido.*

[427] D. *Vale, entonces ponemos…. Sí. Dibujamos con un modelo general esta función pero después… menos cincuenta seno de x… a ver…*

Matlab® ______________________________

```
>> x=0:0.001:6; y=-50*sin(x); plot(x,y)
```



____

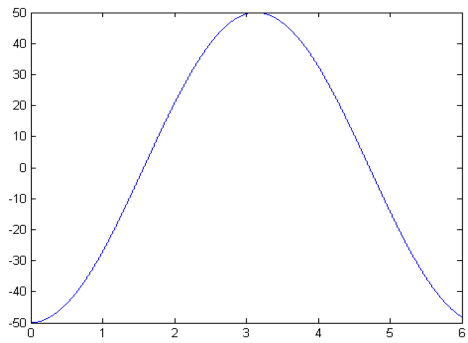
[D. (al menos) está copiando la representación gráfica de la velocidad (cuando el desplazamiento es 50cos x - 50)]

[428] C. *Y después ese landa ya lo definimos teniendo en cuenta cuál es el tiempo indicado.*

[429] D. *Es raro. Y ahora la aceleración, hacemos la representación ¿o qué? Lo representamos a ver como sale y ya está. Esto sería menos cincuenta coseno de x.*

Matlab® ________________________________

>> x=0:0.001:6; y=-50*cos(x); plot(x,y)



____

[430] D. *Uf, mola* [ríe].

[431] C. *¿Qué es?*

[432] D. *La aceleración. Ah, bueno la velocidad y la posición son ¿?¿?. Ah claro es porque aquí la función es decreciente y la aceleración es negativa* [señala el tramo de aceleración creciente desde el punto de abscisa t=0, hasta el punto de ordenada cero], *aquí la velocidad empieza a crecer* [marca en la gráfica el recorrido de y hasta los dos puntos de ordenada 0] [desde el último punto de ordenada cero:] *y ahí que es cuando ya está llegando la velocidad decrece y por tanto la aceleración es negativa.*

[Escriben]

[433] C. *Ah por cierto y si lo vemos en función de landa, siendo landa por ejemplo x medios,*

[434] D. *Claro, sí.*

[435] C. *o x tercios. Eso también afecta a la velocidad y la aceleración.*

[436] D. *Sería landa…*

[…]

[437] C. *Landa sería uno partido tres veces el tiempo de la iteración.*

[438] D. *Claro.*

[439] C. *De otra manera, si landa es igual a,*

[440] D. *¿Sí?*

[441] C. *Si es igual a un medio entonces tenemos seis minutos de iteración. ¿Te parece que está bien?*

[442] D. *Y en la última, ¿por qué tu modelo satisface…ponemos …. En lo de por qué tu modelo satisface las especificaciones del problema, no hemos puesto ninguna, ¿no*?

[443] C. *Hemos acertado en el c.* [Ríe]

[Escriben]

[444] C. *Nuestro coseno era en landa, pi ¿no?, landa, pi, ¿verdad?*

[445] D. *Landa …*

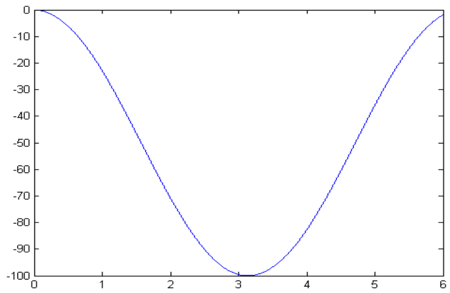
[446] C. [vuelve a representar en Matlab® 50cos(x)-50] *Esto es la posición.*

[447] D. *Eso es la.. la posición.*

[448] C. *Luego si queremos que sea seis* [señala la abscisa t=6 en la gráfica], *landa tiene que ser igual a un medio, ¿verdad?* [señala la abscisa t=3][D. no contesta] *Si entonces, éste es uno partido por la iteración, aproximadamente por el valor de pi.*

Matlab® ______________________________

>> x=0:0.001:6; y=50*cos(x)-50; plot(x,y)

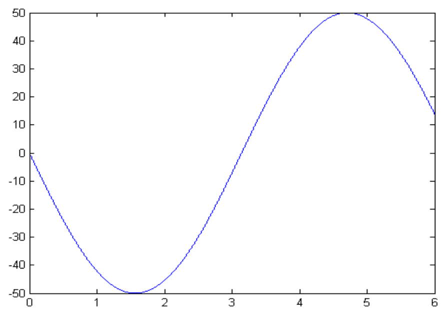


[…]

[449] C. [representa ahora de nuevo -50sen(x)] *esta es la gráfica de la velocidad, decreciente, sube* […] *¿no tenía que tardar más en alcanzar menos cincuenta en velocidad?*

Matlab® ______________________________

>> x=0:0.001:6; y=-50*sin(x); plot(x,y)

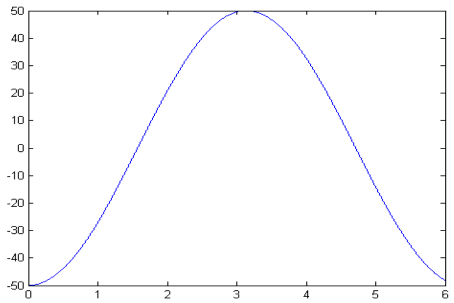


[450] D. *No, por eso ahora tarda un poco menos en bajar, bueno tarda un poquito más en bajar, tres coma poco, que es π, claro es π.*

[451] C. *Bueno pero, al menos eso se alcanza en el punto intermedio, no sé, del trayecto, después se frena… Si no me equivoco, la aceleración es cincuenta coseno de x* [la representa de nuevo:]

Matlab® ______________________________

```
>> x=0:0.001:6; y=-50*cos(x); plot(x,y)
```



____

[…][Escriben, piensan]

[452] C. *Aquí, podríamos poner ¿?¿?*

[453] D. *Vale, eso, eso lo pondríamos incluir también aquí, ¿no?, en explica las modificaciones que se podrían hacer, ¿vale?*

[454] C. *Así en función del tiempo que estén dispuestos a prepararlo pueden ser unas velocidades u otras. De esta manera, si el tiempo es uno, tarda doscientos cincuenta kilómetros por hora, si el tiempo es dos entonces ya rebajamos más de cincuenta …*

[455] D. *Entonces, y ahí pondríamos una constante arbitraria ¿no? o anotamos no sé, lo que variaría sería el…*

[456] C. *No, nosotros decimos …*

[457] D. *Vale.*

[458] C. *Consideramos que lo mejor es que t sea igual a dos, por lo tanto el trayecto, por lo tanto el trayecto dura seis.*

[459] D. *Sí, el trayecto en este caso duraría seis minutos, seis, veintiocho.*

[460] C. *Aquí recomendamos que el valor de t sea mayor que dos.*

[461] D. *Sí claro, si no…*

[462] C. *Y el resto,*

[463] D. *Entonces...*

[464] C. *ponemos en la explicación que necesitamos más datos para resolver.*

[465] D. *Claro.*

[Siguen a lo suyo]

[466] C. *La aceleración, no.*

[467] D. *Si es que la velocidad no sea muy, que eso no sea muy empinado* [señala algo que C. tiene en sus notas]

[468] C. *Ésto básicamente,*

[469] D. *Claro.*

[470] C. *la velocidad. 3 Pi partido t cuadrado por cincuenta. Si queremos probar en ¿?¿? pues alcanzas ciento cincuenta kilómetros por hora, unos ciento treinta siete kilómetros por hora lo cual empieza a ser tolerable, si queremos probar en tres minutos ya son quince kilómetros por hora, y eso, de velocidad máxima, no de media, cuando de media sí que sería ¿no?*

[471] D. *¿De media?*

[472] C. *No, no sería. Hagamos unos cálculos aquí. Eso es para x medios ¿no?*

[473] D. *Esto, esa, esa función es menos cincuenta coseno de x.*

[474] C. *Es decir si fuera hasta x tendría que ¿?¿?*

[475] D. *Sí.*

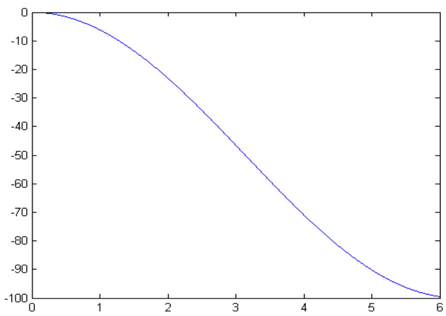
[476] C. *En la fórmula que he dado, debe estar mal en algún lado, si le doy el valor pi dice que la velocidad máxima es quince pi.*

[477] D. *Si le das el valor pi, a ver la gráfica, sí puede que…*

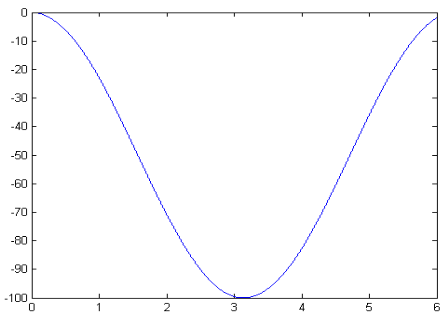
[…][D. representa en Matlab®, mira y cierra.]

Matlab® _______________________________

```
>> x=0:0.001:6; y=50*cos(x/2)-50; plot(x,y)
```




```
>> x=0:0.001:6; y=50*cos(x)-50; plot(x,y)
```



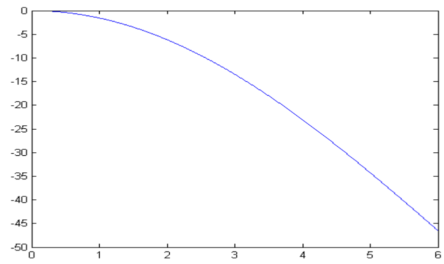
____

[478] C. *Vale, si landa es igual a un doceavo, esto será igual a uno, si landa es un doceavo, esto es igual a uno, entonces landa es igual a un doceavo del tiempo de iteración. Vale.*

[D. representa:]

Matlab® ________________________________

```
>> x=0:0.001:6; y=50*cos(x/4)-50; plot(x,y)
```



____

[479] D. *Yo es que no lo veo. Si quieres lo ponemos más hacia el final y ya está.*

[480] C. *Vale, nos olvidamos del landa,*

[481] D. *Dejémoslo puesto y ya está.*

[482] C. *olvidamos el landa y decimos…*

[483] D. *Sí pero que debería de ser eso, eso está claro y ya está.*

[484] C. *para realizar ajustes hay que cambiar el landa.*

[485] D. *Ya está, es que no tenemos tiempo.*

[486] C. *Yo también tengo que coger un autobús.*

[487] D. *Yo como mucho diez minutos más.*

[488] C. *Nos olvidamos de landa y entonces el valor de t y cuanto tiempo le metemos ¿seis?*

[489] D. *Sí, ahí cubre dos pi.*

[490] C. *Un seis, un seis.*

[491] D. *Sí, ya está.*

[492] C. *Aquí va un medio.*

[493] D. *Vamos a ver lo último y ya está.*

[494] C. *Sí*

[495] D. *Vale.*

[496] Luis. *Bueno, ¿estáis ya?*

[497] C. *¿Qué?*

[498] Luis. *¿Qué estáis ya o todavía seguís?*

[499] D. *Si no, ya está.*

[500] C. *Casi, casi ¿a ver dice algo más?*

[501] D. *No ya está, eso sólo claro.*

[502] D. *Casi está terminado. Está terminado, por lo menos el segundo.*

[503] C. *Todavía no, pero vamos a descifrar cómo se hace.* [escriben sus últimas notas]

Anexo 4.

4.1. Ventana de comandos. Pareja A./B.

```
>> syms y

>> f=2.5*y^3-15y^2

??? f=2.5*y^3-15y^2

Error: Unexpected MATLAB expression.

 >> f=2.5*y^3-15*y^2

 f =

 (5*y^3)/2 - 15*y^2

 >> ezplot(f)

>> ezplot(f,0,6)

>> diff(f)

 ans =

(15*y^2)/2 - 30*y

>> f2=(15*y^2)/2 - 30*y

 f2 =

 (15*y^2)/2 - 30*y

 >> ezplot(f,0,6)

>> ezplot(f2,0,6)

>> diff(f2)

 ans =

15*y - 30
```

```
>> f3=15*y - 30

f3 =

15*y - 30

>> ezplot(f3,0,6)

>> help ezplot
```

EZPLOT   Easy to use function plotter

EZPLOT(FUN) plots the function FUN(X) over the default domain -2*PI < X < 2*PI.

EZPLOT(FUN2) plots the implicitly defined function FUN2(X,Y) = 0 over the default domain -2*PI < X < 2*PI and -2*PI < Y < 2*PI.

EZPLOT(FUN,[A,B]) plots FUN(X) over A < X < B.

EZPLOT(FUN2,[A,B]) plots FUN2(X,Y) = 0 over A < X < B and A < Y < B.

EZPLOT(FUN2,[XMIN,XMAX,YMIN,YMAX]) plots FUN2(X,Y) = 0 over XMIN < X < XMAX and YMIN < Y < YMAX.

EZPLOT(FUNX,FUNY) plots the parametrically defined planar curve FUNX(T) and FUNY(T) over the default domain 0 < T < 2*PI.

EZPLOT(FUNX,FUNY,[TMIN,TMAX]) plots FUNX(T) and FUNY(T) over TMIN < T < TMAX.

EZPLOT(FUN,[A,B],FIG), EZPLOT(FUN2,[XMIN,XMAX,YMIN,YMAX],FIG), or

EZPLOT(FUNX,FUNY,[TMIN,TMAX],FIG) plots the function over the specified domain in the figure window FIG.

EZPLOT(AX,...) plots into AX instead of GCA or FIG.

H = EZPLOT(...) returns handles to the plotted objects in H.

Examples:

The easiest way to express a function is via a string: ezplot('x^2 - 2*x + 1')

One programming technique is to vectorize the string expression using the array operators .* (TIMES), ./ (RDIVIDE), .\ (LDIVIDE), .^ (POWER).

This makes the algorithm more efficient since it can perform multiple function evaluations at once. ezplot('x.*y + x.^2 - y.^2 - 1')

You may also use a function handle to an existing function. Function handles are more powerful and efficient than string expressions.

ezplot(@humps)

ezplot(@cos,@sin)

EZPLOT plots the variables in string expressions alphabetically.

subplot(1,2,1), ezplot('1./z - log(z) + log(-1+z) + t - 1')

To avoid this ambiguity, specify the order with an anonymous function:

subplot(1,2,2), ezplot(@(z,t)1./z - log(z) + log(-1+z) + t - 1)

If your function has additional parameters, for example k in myfun:

%-----------------------%

function z = myfun(x,y,k)

z = x.^k - y.^k - 1;

%-----------------------%

then you may use an anonymous function to specify that parameter:

ezplot(@(x,y)myfun(x,y,2))

See also ezcontour, ezcontourf, ezmesh, ezmeshc, ezplot3, ezpolar,nezsurf, ezsurfc, plot, vectorize, function_handle.

Overloaded methods:

sym/ezplot

Reference page in Help browser doc ezplot

>> ezplot(f1,f2,f3,0,6)

??? Undefined function or variable 'f1'.

>> ezplot(f,f2,f3,0,6)

??? Maximum recursion limit of 500 reached. Use set(0,'RecursionLimit',N) to change the limit. Be aware that exceeding your available stack space can crash MATLAB and/or your computer.

Error in ==> sym.ezplot

>> ezplot(f,0,6)

>> grid

>> ezplot(f2,0,6)

>> grid

>> ezplot(f3,0,6)

>> grid

>> ezplot(f3,0,6)

```
>> grid
>> ezplot(f3,0,6)
>> grid
>> ezplot(f,0,10)
>> grid
>> fdex=sen(4*x)-40
??? Undefined function or variable 'x'.
>> syms x
>> fdex=sen(4*x)-40
??? Undefined function or method 'sen' for input arguments of
type 'sym'.
>> fdex=sin(4*x)-40
fdex =
sin(4*x) - 40
>> ezplot(fdex,0,10)
>> fdex=sin(4*x)
fdex =
sin(4*x)
>> ezplot(fdex,0,10)
>> sin(x)
ans =
sin(x)
>> ezplot(ans)
>> sin(x-40)
ans =
sin(x - 40)
>> ezplot(ans)
>> ezplot(ain(x-40))
```

```
??? Undefined function or method 'ain' for input arguments of type 'sym'.

>> ezplot(sin(3pi/2)

??? ezplot(sin(3pi/2)

Error: Unexpected MATLAB expression.

>> pi

ans =

3.1416

>> 3

ans =

 3

>> pi*3/2

ans =

4.7124

>> sen(ans)

??? Undefined function or method 'sen' for input arguments of

type 'double'.

>> sin(ans)

ans =

 -1

>> ezplot(ans(x-40))

??? Error using ==> subsindex

Function 'subsindex' is not defined for values of class 'sym'.

>> ezplot(sin(x-40))

>> ezplot(sin(x-40))

>> ezplot(sin(x-40))

>> ezplot(sin(x)+40)

>> ezplot(sin(x)*40)

>> ezplot(sin(x)*40-40)
```

```
>> ezplot(cos(x)*40-40)

>> ezplot(sin(x)*40-40)

>> ezplot(cos(x)*40-40)

>> ezplot(cos(3x/pi))

??? ezplot(cos(3x/pi))

Error: Unexpected MATLAB expression.

>> pi

ans =

3.1416

>> ezplot(cos(3x/ans))

??? ezplot(cos(3x/ans))

Error: Unexpected MATLAB expression.

>> ezplot(cos(3x/3.1416))

??? ezplot(cos(3x/3.1416))

Error: Unexpected MATLAB expression.

>> 2*pi

ans =

 6.2832

>> /6

??? /6

Error: Unexpected MATLAB operator.

 >> ans/6

ans =

 1.0472

>> ezplot(cos(x))

>> ezplot(cos(x)-40)

>> ezplot(cos((pi/3)*x)*50-50)

>> grid
```

4.2. Ventana de comandos. Pareja C./D.

```
syms t

y=2.5*t-15*t

y=2.5*t^3-15*t^2;

ezplot(y,[0,7])

grid

diff(y);

ezplot(ans,[0,6])

grid

a=diff(diff(y))

ezplot(a,[0,6])

grid

v=diff(y);

ezplot(v,[0,6])

grid

ezplot(y,[0,6])

ezplot(v,[0,6])

ezplot(y,[0,6])

>> eq1=A*t^3+B*t^2+C*t

??? Undefined function or variable 'A'.

 >> syms A B C D

>> eq1=A*t^3+B*t^2+C*t

 eq1 =

 A*t^3 + B*t^2 + C*t

 >> eq2=int(eq1,t)

 eq2 =

 (t^2*(3*A*t^2 + 4*B*t + 6*C))/12

 >> eq2=simple(eq2)
```

```
eq2 =

t^2*((A*t^2)/4 + (B*t)/3 + C/2)

>> 6^4

ans=

1296

>> ans/4

ans =

324

>> 6^3

ans =

216

>> ans/3

ans =

72

>> syms a b c

>> solve('9*x+3*y+z', '324*x+72*y+18*z', '20.25*x+9*b+4.5*c=-100')

ans =

x: [1x1 sym]

y: [1x1 sym]

z: [1x1 sym]

>> x

??? Undefined function or variable 'x'.

>> [x, y, z]=solve('9*x+3*y+z', '324*x+72*y+18*z', '20.25*x+9*b+4.5*c=-100')

x =

- 0.44444444444444444444444444444444*b - 0.22222222222222222222222222222222*c -
4.9382716049382716049382716049383

y =

4.0*b + 2.0*c + 44.444444444444444444444444444444

z =
```

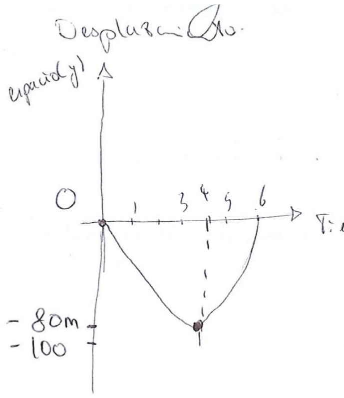
```
- 8.0*b - 4.0*c - 88.888888888888888888888888888889

>> [x, y, z]=solve('9*x+3*y+z', '324*x+72*y+18*z', '20.25*x+9*b+4.5*c=-100', 216*x+36*y+6*z')

??? Error using ==> solve at 209

4 variables does not match 3 outputs.

>> [x, y, z]=solve('9*x+3*y+z', '324*x+72*y+18*z', '216*x+36*y+6*z')

 x =

 0

y =

0

z =

0

>> x=0:0.001:6; y=30*cos(x); plot(x,y)

>> x=0:0.001:6; y=30*cos(x)-30; plot(x,y)

>> x=0:0.001:6; y=60*cos(x)-30; plot(x,y)

>> x=0:0.001:6; y=60*cos(x)-60; plot(x,y)

>> x=0:0.001:6; y=60*cos(x)-50; plot(x,y)

>> x=0:0.001:6; y=50*cos(x)-50; plot(x,y)

>> x=0:0.001:6; y=-50*sin(x); plot(x,y)

>> x=0:0.001:6; y=-0.75*x.^4+9*x.^3-27*x.^2; plot(x,y)

>> x=0:0.001:6; z=diff(-0.75*x.^4+9*x.^3-27*x.^2); plot(x,z)

??? Error using ==> plot

Vectors must be the same lengths.

>> x=0:0.001:6; y=50*cos(x)-50; plot(x,y)

>> x=0:0.001:6; y=-50*sin(x); plot(x,y)

>> x=0:0.001:6; y=-50*cos(x); plot(x,y)

>> x=0:0.001:6; y=50*cos(x)-50; plot(x,y)

>> x=0:0.001:6; y=-50*sin(x); plot(x,y)

>> x=0:0.001:6; y=-50*cos(x); plot(x,y)
```

```
>> x=0:0.001:6; y=50*cos(x/2)-50; plot(x,y)

>> x=0:0.001:6; y=50*cos(x)-50; plot(x,y)

>> x=0:0.001:6; y=50*cos(x/4)-50; plot(x,y)

>> x=0:0.001:6; y=50*cos(x)-50; plot(x,y)

>> x=0:0.001:6; y=50*cos(x)-50; plot(x,y)

>> grid
```

Anexo 5.

Los Manuscritos.

Manuscrito de A.

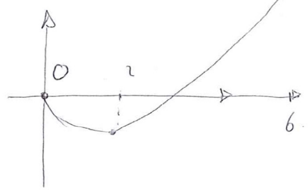


Sabemos que empieza al nivel del suelo y que tarda, su ciclo de 6 minutos, en bajar y en subir.

Vemos que tarda más tiempo en bajar que en subir.

Empezamos a derivar con el MATLAB.

Velocidad $= 7'5t^2 - 30t$

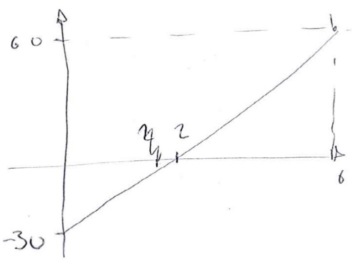


a) La velocidad es 0 en v(0), y no puede ser negativa si empieza en 0.

Los puntos negativos nos indican el sentido del desplazamiento, que se adentra en la mina

Los valores positivos nos indican que el montacargas sube.

Aceleración $15 \cdot y - 30$



Cuando el valor es = 0,
La velocidad es negativa y positiva, pues, dependiendo de la dirección del eje y.

b) Podemos ver que la ~~velocidad es negativa~~ aceleración es negativa cuando la velocidad es decreciente y viceversa.
En el punto de reposo coincide la velocidad = 0 = aceleración, en el punto de inflexión ~~máximo~~ del desplazamiento en T=2.

c) Contras: el modelo es bastante inestable.

Solo tiene cierta lógica en un intervalo [0, 6].

y aun así presenta ciertas incoherencias.

1→ en el punto más bajo del modelo, el supuesto punto de llegada o de reposo, la aceleración es positiva y creciente, luego no tiene ningún sentido.

2→ También existe un problema en el punto t = 6, pues se supone que debería pararse, sin embargo la velocidad y la aceleración es creciente.

3→ Es incoherente que tarde más en la bajada que en la subida siendo que la subida está cargado con más peso.

Teniendo en cuenta que la función que queremos buscar es de la forma cos o sen, tenemos que ajustar primero la función para que cuadre con los datos que tenemos.

El modelo es $\boxed{f(x) = \cos(x) \cdot 40 - 40}$

Cuadra que el punto inicial es $f(0) = 0$, que el valor mínimo es -80 en la distancia y que hay una cierta deceleración y aceleración al llegar a los puntos de reposo.

Solamente nos falta ajustar el intervalo a [0, 6], aunque el enunciado nos otorga cierta ambigüedad.

$\frac{2\pi}{6}$ → intervalo cos
→ intervalo nuestro.

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3} x\right) \cdot 40 - 40.$$

o

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3} x\right) \cdot 50 - 50$$ "Si queremos que la profundidad sea -100".

(B.1) Aplicar el modelo.

Determina x_0.

$$y = \cos\left(\frac{2\pi}{A} \cdot x\right) \cdot B - B.$$

Con $A = b - a$ con $[a, b]$ el intervalo de tiempo en el que sube, la periodicidad.

Con B, la mitad de la distancia que vamos a cubrir con el montacargas.

~~Con A la mitad de la ...~~

Manuscrito de B.

a) La velocidad negativa indica, por su módulo, la velocidad instantanea del montacargas y por su signo si ~~la posición~~ el desplazamiento es decreciente o creciente. Decreciente si la velocidad es negativa y creciente si la velocidad es positiva.

En el intervalo]0,4[la velocidad es negativa y el desplazamiento es decreciente, el montacargas va al fondo del pozo.

En el intervalo]4,6[la velocidad es positiva y el desplazamiento es creciente, vuelve al nivel del suelo.

Usando propiedades de derivadas.

En los puntos $t=0$ y $t=4$ la velocidad vale 0, el móvil está en reposo.

b) Cuando la aceleración es negativa, la velocidad es decreciente, el móvil frena, y cuando la aceleración es positiva, la velocidad aumenta y el móvil acelera.

Si el móvil está en reposo la velocidad vale 0 y la aceleración también.

En el punto de inflexion en $t=2$ la velocidad alcanza un mínimo y la aceleración vale 0.

c) Pros. Está bien puesto el sistema de referencia y los puntos donde pasa algo. Estos puntos son

$t=0$ que parte, $t=2$ que ~~la velocidad~~ es alcanzamos la mayor velocidad negativa. $t=4$ alcanzamos el fondo del pozo, por lo explicado. La velocidad cuando baja es buena, en 4 mins recorrer 80 m es un paso normal de una persona caminando

Cons. Es un modelo solo aplicable al intervalo [0,6], fuera de él no tiene sentido. La velocidad cuando volvemos es muy grande y no podríamos bajar del montacargas, así como la aceleración sería muy brusca. Además el valor mínimo de la función es de 80 m y queremos llegar a los 100.

Si sube cargado, no puede subir a tal velocidad, se descontrolarian los materiales. No se para cuando llega abajo

a 1) - Mismo tiempo bajando y subiendo.
- No hayan ni frenazos ni acelerones.
- El ciclo sea regular.
- Periódica y adaptable.
- Se pueda parar con comodidad.

Queremos algo parecido a un sen(x) definida en $[0,6] \to [-100,0]$

Queremos

$f(0) = 0$ $\quad$ $\text{sen}(0) = 0$

$f(3) = -100$ $\quad$ $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ $\quad$ $\text{sen}\ \frac{3\pi}{2}$

$f(6) = 0$ $\quad$ $\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$

$\left(\text{sen}\ \frac{\pi}{2}\right)$

$0 \longrightarrow 0$ $\quad$ $\left(\text{sen}\ \frac{\pi}{2} + x\right) - 1$

~~sen~~

$\cos(0) = 1$ $\quad$ $[0, 2\pi] \Longrightarrow [0, 6]$

$\frac{2\pi}{\pi} \cdot 3$ $\quad$ $\frac{3}{\pi}$

$[0, 2\pi] \Longrightarrow [0, 6]$

$\frac{3}{\pi}$

$\left(\cos \frac{\pi}{3} x\right)$ $\quad$ $[\pi, \pi]$

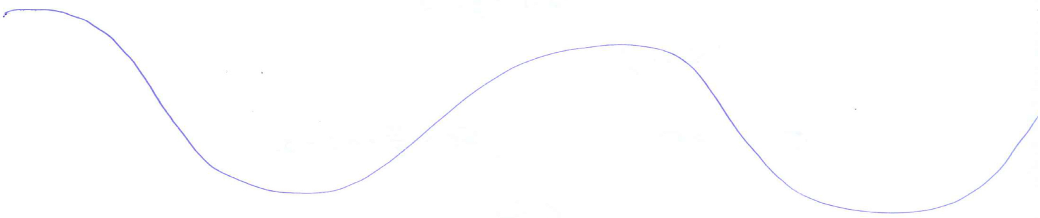
$\left(\cos \frac{\pi}{3} x\right) \cdot 50 - 50$ $\quad$ $\pi \frac{6}{3} = 2\pi$

La función que buscamos es

$$f(x) = \begin{cases} \left(\cos \frac{\pi}{3} x\right) 50 - 50 - t_0 & \text{si está en movimiento} \\ 0 & \text{si está en reposo arriba} \\ -100 & \text{si está en reposo abajo} \end{cases}$$

tomando ~~cuando se pone en marcha~~ t_0 el momento de puesta en marcha.

Así se llega hasta el ~~po~~ fondo del pozo, no hay cambios bruscos, frena antes de parar suavemente, mantiene velocidades parecidas, sirve para todos los ~~intervalos~~ dominios de definición. Esta función suple todos los problemas de la anterior.



Aplicar modelo

$f(x)$ ~~$y = \cos\left(\frac{2\pi}{A} \cdot Ax\right) \cdot B - B$~~

$y = \cos\left(\frac{2\pi}{A} x\right) B - B - t_0$

Siendo B la mitad de la profundidad del pozo y A el tiempo que queremos que tarde en hacer un ciclo completo en movimiento. t_0 el tiempo inicial.

Siendo B la mitad de la profundidad

Tomando [0, A] el tiempo en el que queremos que se desarrolle la subida y bajada del montacargas

[0, 8]

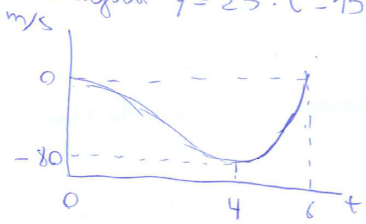
$\frac{2\pi}{4}$ 2π

[0, A]

$\frac{A}{4}$ $\frac{A\pi}{A/2}$ 2

Manuscrito de C.

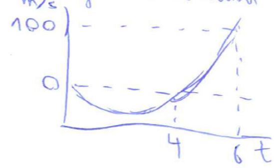
Gráfica $y = 2'5 \cdot t^3 - 15t^2$



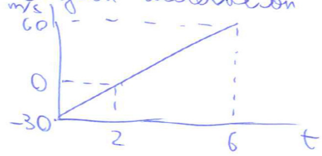
Velocidad: $y' = 7'5 \cdot t^2 - 30t$

aceleración: $y'' = 15t - 30$

Gráfica velocidad



Gráfica aceleración



a)

Valores positivos de la velocidad: ~~la~~ velocidad se mide ~~mide~~ en m/s. Hemos tomado los metros como la altura, luego una velocidad positiva indica un ascenso

Valores negativos : -m/s indica los metros que desciende,

Valor neutro: Un valor 0 para los m/s indica que el ascensor se detiene (o en su defecto que cambia de dirección)

b) Si la aceleración es positiva,]2,6[indica que la velocidad aumenta.

Si la aceleración es negativa]0,2[indica que la velocidad se reduce.

Si la aceleración es neutra la velocidad se mantiene. De hecho en torno a 2 se estabiliza porque las aceleraciones son reducidas.

c) Ventajas: Sube rápido, solo unos dos minutos
La velocidad de descenso no es excesiva.

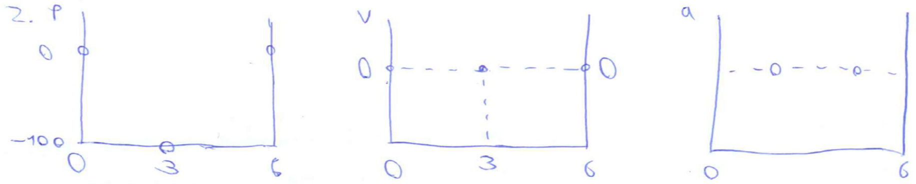
Desventajas: Hemos dado por supuesto que los -80 metros se deben a la instalación del ascensor (~~pero con otro modelo se~~), es decir la base, en otro modelo se puede ajustar más.

- El frenazo en seco del final (o su ausencia) puede resultar peligroso para los viajeros, o el equipo.

Crear un nuevo modelo

1. Debe descender hasta -100 metros
La velocidad en el $t=6$ debe ser 0 m/s

2.



$\frac{A}{4}x^4+\frac{B}{3}x^3+\frac{C}{2}x^2+\cancel{Dx}$ $\quad Ax^3+Bx^2+Cx \quad 3Ax^2+2Bx+C$

Proponemos que la parada sea en 3m, manteniendo el periodo en 6m luego tenemos que

Ax^3+Bx^2+Cx, para $x=3$, $=0$

$\frac{A}{4}x^4+\frac{B}{3}x^3+\frac{C}{2}x^2\cancel{+Dx}$, para $x=3$, $=-100$

$\frac{A}{4}x^4+\frac{B}{3}x^3+\frac{C}{2}x^2\cancel{+Dx}$, para $x=0$ y $x=6$, $=0$

Ax^3+Bx^2+Cx, para $x=0$ y $x=6$, $=0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3^3 & 3^2 & 3 & 0 \\ \frac{3^4}{4} & \frac{3^3}{3} & \frac{3^2}{2} & -100 \\ \frac{6^4}{4} & \frac{6^3}{3} & \frac{6^2}{2} & 0 \\ 6^3 & 6^2 & 6 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 27 & 9 & 3 & 0 \\ 81/4 & 9 & 9/2 & -100 \\ 324 & 72 & 18 & 0 \\ 216 & 36 & 6 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 27 & 9 & 3 & 0 \\ 216 & 36 & 6 & 0 \\ 324 & 72 & 18 & 0 \\ 81/4 & 9 & 9/2 & -100 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 27 & 9 & 3 & 0 \\ 0 & -36 & -18 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{-36} & \cancel{-18} & \cancel{0} \\ 0 & \frac{243}{4} & \frac{243}{4} & -2700 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 27 & 9 & 3 & 0 \\ 0 & -36 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-18681}{16} & 164025 \end{array}\right)$$

$C = -53'91$

$B = \dfrac{18C}{-36} = 26'95$

$A = \dfrac{-9B - 3C}{27} = -2'99$

$f = -0'74x^4 + 8'98x^3 - 26'955x^2$

Con esto solo alcanza $k = -60$.

Tomamos la función

$50\cos\left(\frac{x}{2}\right) - 50$, cuya gráfica es similar a la deseada (llegando a los 100 metros de profundidad)

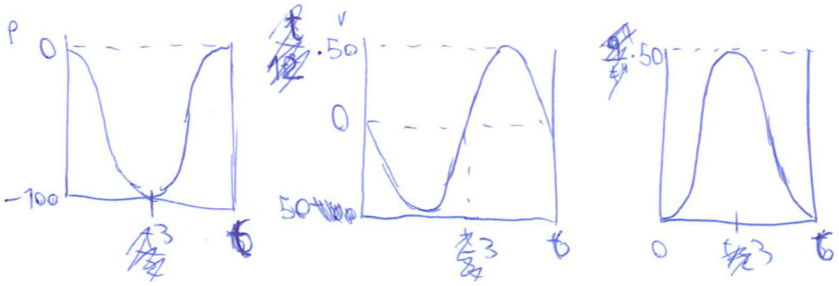
~~Sea $\lambda = \frac{3}{(\text{tiempo de iteración})}$~~ ~~$\frac{1}{12} \to t=1$, $\lambda = \frac{1}{12}$ tiempo de it~~

~~$\lambda = \frac{1}{12} \to t=1$~~

~~$\lambda = \frac{1}{2} \to t=6$~~

~~$\lambda = 1 \to t=12$~~

Los gráficas resultantes son



~~De aquí concluimos que el tiempo recomendado debe ser mayor que 2~~

Para variar la velocidad de iteración hay que cambiar el termino $\frac{x}{2}$ de manera que $x \to t: [0, \pi]$

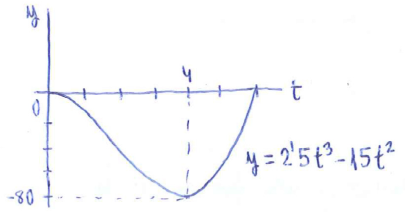
$\frac{x}{2} \to t: [0, 2\pi]$

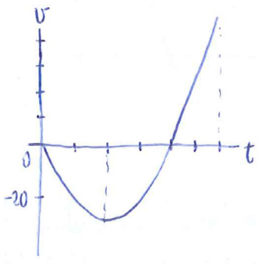
$\vdots$

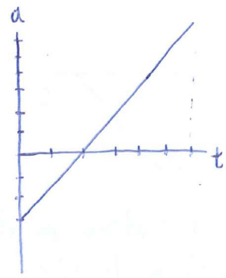
$\frac{x}{k} \to t: [0, k\pi]$

Manuscrito de D.

Análisis del modelo dado.







$y' = 7'5t^2 - 30t = v$

$y'' = 15t - 30 = a$

a) La velocidad es negativa mientras el montecargas baja. Esto es así porque en el intervalo $[0,4]$ la función posición es estrictamente decreciente, y en consecuencia, su derivada, que es la velocidad, es negativa. En el instante $t=4$, el montacargas pasa de bajar a subir. Hay un instante en que frena y la velocidad se anula. Gráficamente, vemos un mínimo en $t=4$ en la función posición, lo que indica que $v=0$.
En $[4,6]$, la función y es estrictamente creciente, y por tanto $v>0$. Es el intervalo en que el montacargas sube.

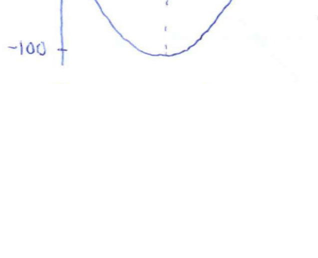
b) En $[0,2]$, la función $v(t)$ es decreciente, y por tanto $a<0$. En $t=2$, observamos un mínimo en $v(t)$, y por eso la aceleración se anula. A partir de $t=2$, la función $v(t)$ es estrictamente creciente, lo que implica $a>0$.

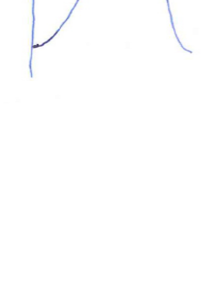
c) Ventajas: tarda muy poco tiempo en subir
Desventajas: podemos suponer que el hecho que el montacargas no descienda hasta los 100 metros es consecuencia de la maquinaria del montacargas. Con otro modelo de maquinaria podríamos llegar algo más profundo.
Otro problema, que se puede observar en la gráfica, es que la velocidad es máxima justo cuando se llega al nivel del suelo. Un modelo mejor debería controlar mejor la velocidad.

Crea tu propio modelo

1) - El montacargas llegará algo más profundo.
- Se controlará mejor la velocidad. La velocidad descenderá cuando se esté llegando al aire libre.

2)





Vamos a mantener que el trayecto durará 6 minutos. Buscamos una función en la velocidad de la forma $At^3+Bt^2+Ct=v(t)$ $\quad y(t)=\frac{1}{4}At^4+\frac{1}{3}Bt^3+\frac{1}{2}Ct^2$

Queremos en $t=3$ $\quad At^3+Bt^2+Ct=0 \rightarrow 27A+9B+3C=0 \rightarrow 9A+3B+C=0$.

Queremos en $t=6$ $\quad y(6)=0 \rightarrow 324A+72B+18C=0$

" $\quad$ " $\quad t=3$ $\quad y(3)=-100 \rightarrow \frac{81}{4}A+9B+\frac{9}{2}C=-100$

" $\quad$ " $\quad t=6$ $\quad v(6)=0 \rightarrow 216A+36B+6C=0$

Podemos considerar la función $y=50\cos t-50$. La velocidad $v(t)=-50\sin t$ i $a(t)=-50\cos t$. Las gráficas són las que aparecen arriba. $t\in[0,2\pi]$.

3) La velocidad desciende llegando al final, siendo 0 cuando se llega al suelo. Se tarda prácticamente el mismo tiempo en subir que en bajar, y se llega a una profundidad de 100 metros, como queríamos.

Aplica tu modelo

Podemos tomar $y=50\cos(\lambda)-50$, λ variaría según lo que queramos que dure el trayecto. Se llega a los 100m de profundidad. Para saber el mejor valor de λ, necesitaríamos más datos.