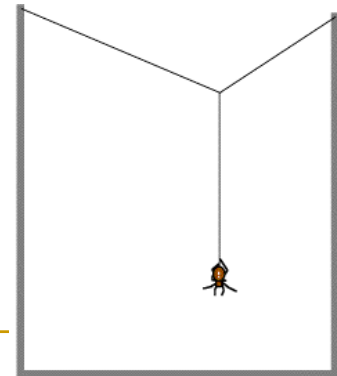


TEMA 1-a: BIOMECÀNICA ELASTICITAT



<http://www.fotonatura.org/galerias/fotos/152818/>

TEMA 1-a: BIOMECÀNICA ELASTICITAT

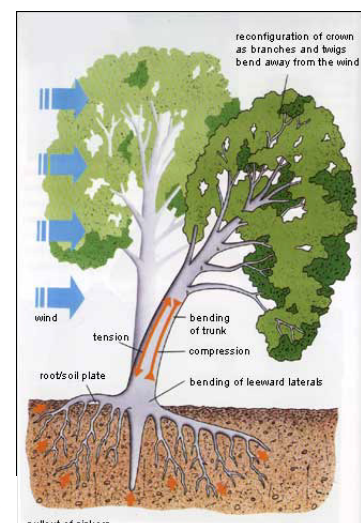
Per què els arbres joves són esvelts i els vells grossos?



Dave Hanson,
University of Minnesota

<http://www.nhm.ac.uk/nature-online/life/plants-fungi/magnificent-trees/session3/index.html>

Com suporten els vendavals?



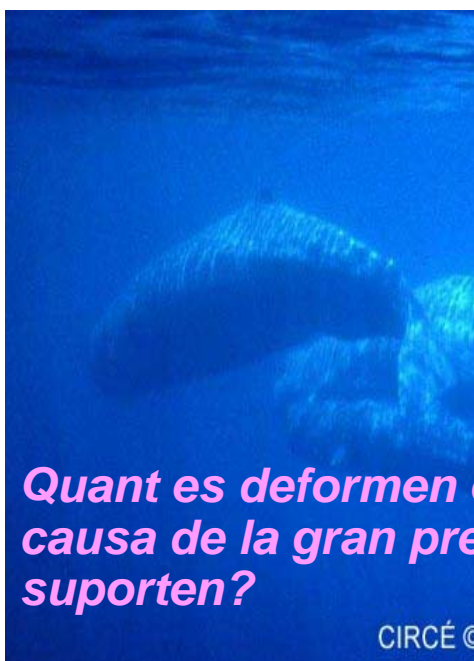
TEMA 1-a: BIOMECÀNICA ELASTICITAT



Quant es deformen els catxalots a causa de la gran pressió que suporten?

CIRCÉ © ARCHIPEL www.circe-asso.org

TEMA 1-a: BIOMECÀNICA ELASTICITAT



Quant es deformen a causa de la gran pressió que suporten?

CIRCÉ © ARCHIPEL www.circe-asso.org

I què passa amb els calamars gegants?

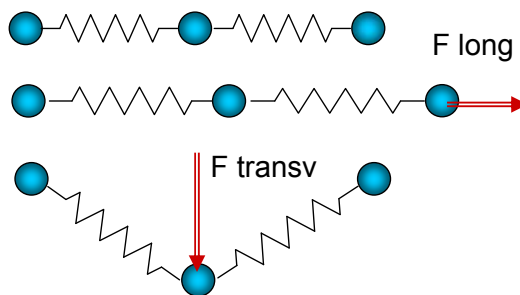


<http://www.oscasullos.com/CIERZO/ESPECIESDEMAR/CALAMAR.HTML>

TEMA 1-a: BIOMECÀNICA ELASTICITAT

1.1. Propietats elàstiques dels materials. Llei de Hooke

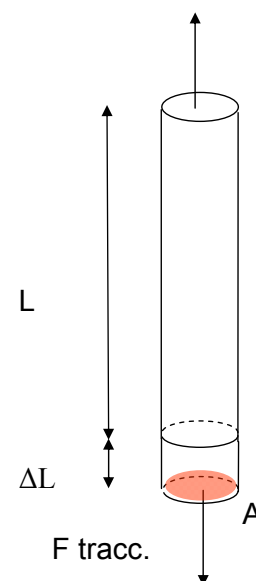
- Els cossos sòlids → si força F → es deformen.
- Forces atòmiques o moleculars \cong molls que uneixen els àtoms o les molècules
- Si F → els molls es deformen;
→ els àtoms se separen o s'ajunten.



TEMA 1-a: BIOMECÀNICA ELASTICITAT

1.1. Propietats elàstiques dels materials. Llei de Hooke (cont.)

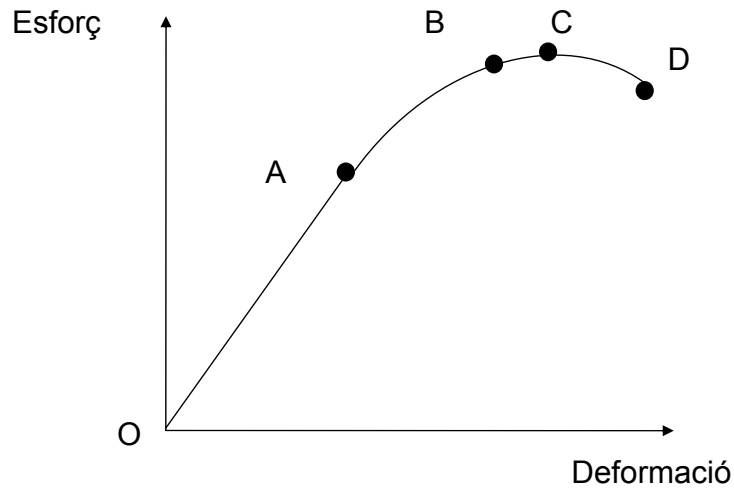
- Magnituds rellevants en els assajos elàstics:
 - Esforç (τ): relacionat amb la força deformadora, (no coincideix exactament amb aqueixa força).
 - Deformació (ε): efecte produït per l'esforç.
- Exemple: assaig de tracció
 - Esforç: força per unitat d'àrea transversal: F/A
 - Deformació: l'allargament relatiu: $\Delta L/L$



TEMA 1-a: BIOMECÀNICA ELASTICITAT

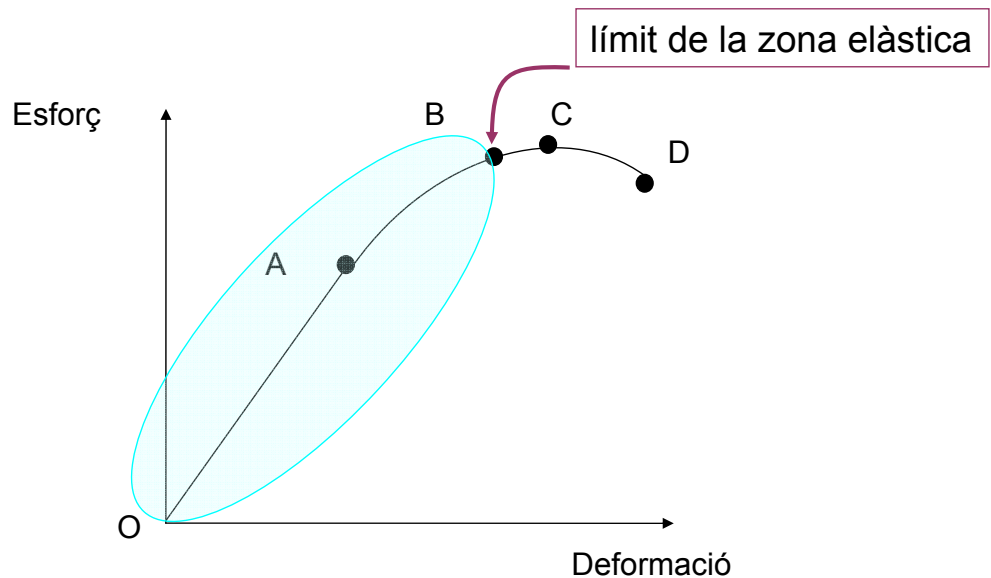
1.1. Propietats elàstiques dels materials (cont.)

- Relació experimental entre esforç i deformació



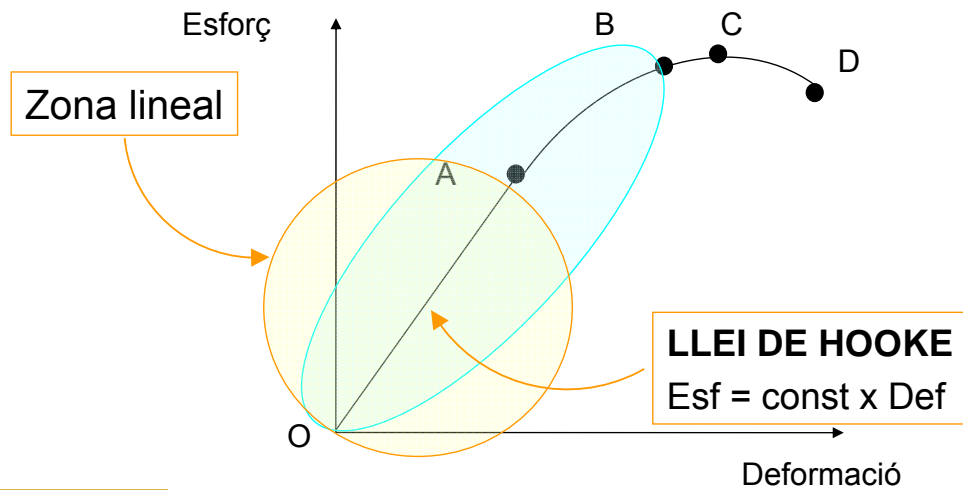
TEMA 1-a: BIOMECÀNICA ELASTICITAT

- **Regió elàstica** (tram O-B): quan cessa l'esforç, la deformació desapareix. El cos recupera la forma inicial.



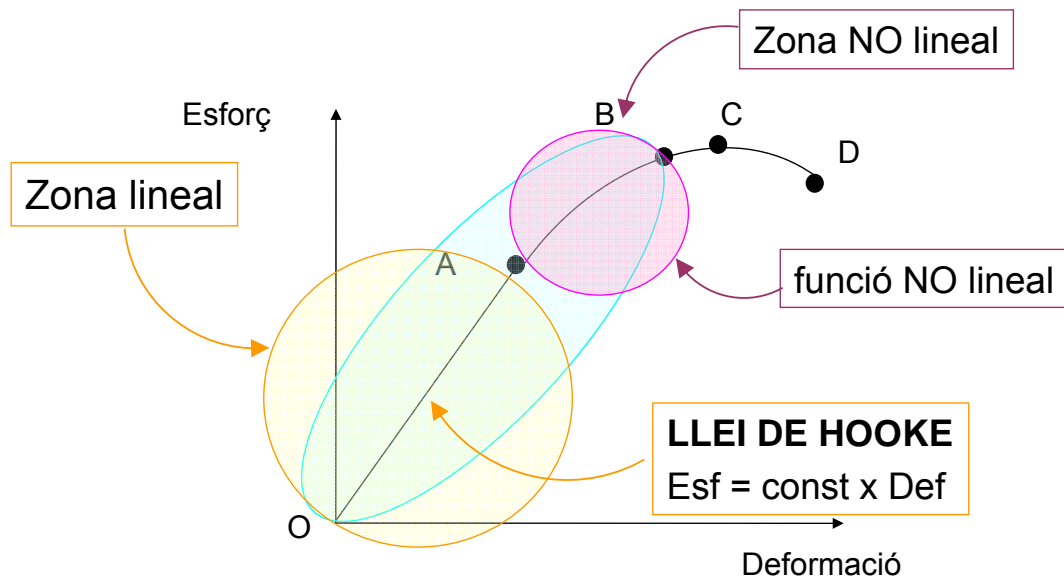
TEMA 1-a: BIOMECÀNICA ELASTICITAT

- **Regió elàstica** (tram O-B): quan cessa l'esforç, la deformació desapareix. El cos recupera la forma inicial.



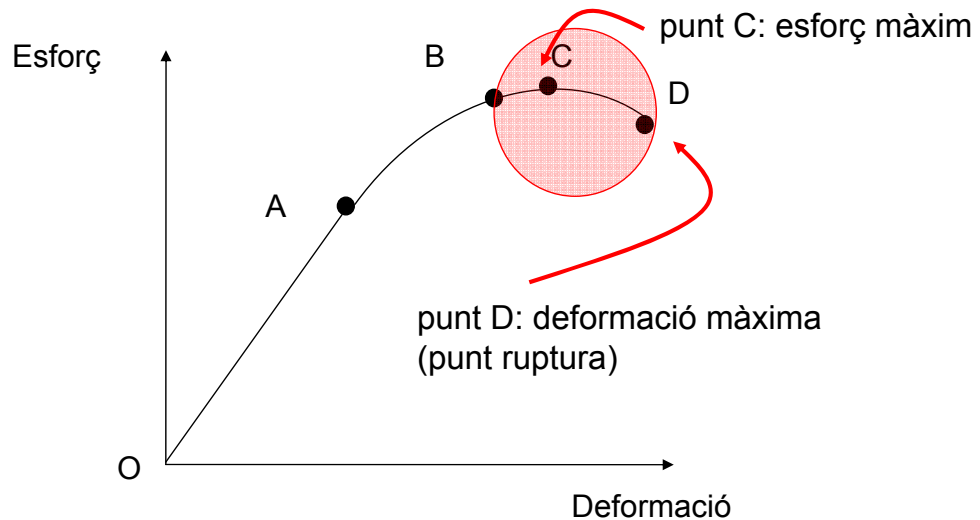
TEMA 1-a: BIOMECÀNICA ELASTICITAT

- **Regió elàstica** (tram O-B): quan cessa l'esforç, la deformació desapareix. El cos recupera la forma inicial.



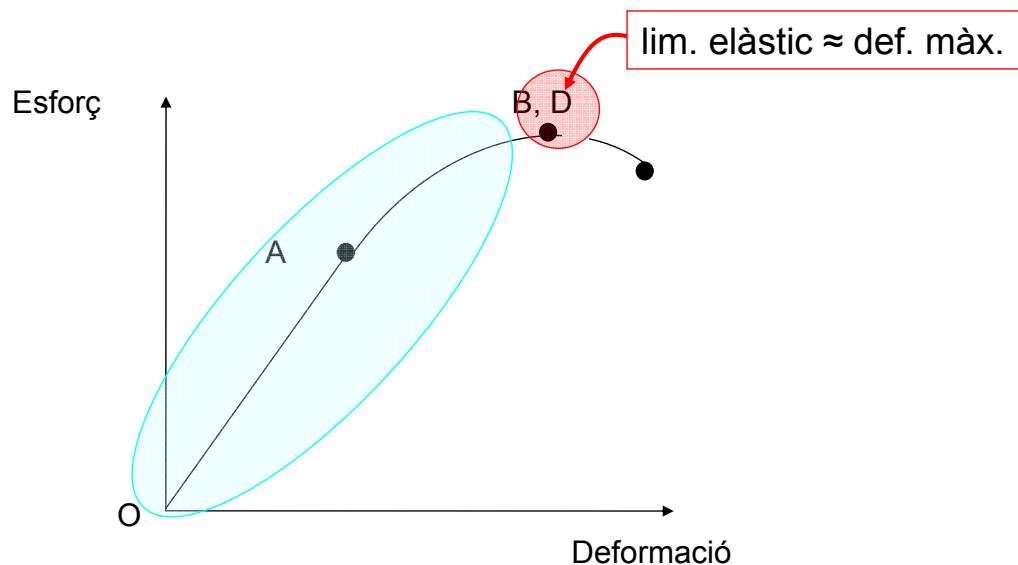
TEMA 1-a: BIOMECÀNICA ELASTICITAT

- **Regió plàstica** (tram de B endavant): quan l'esforç cessa, la deformació **NO** desapareix.



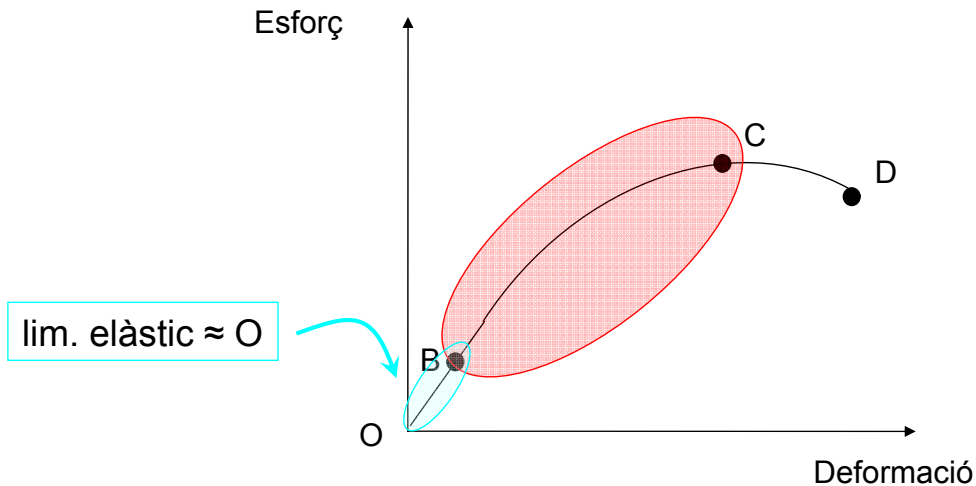
TEMA 1-a: BIOMECÀNICA ELASTICITAT

- **Denominacions** segons la resposta als assajos elàstics
 - **Material elàstic:** zona elàstica es molt gran i zona plàstica molt menuda o inexistent.



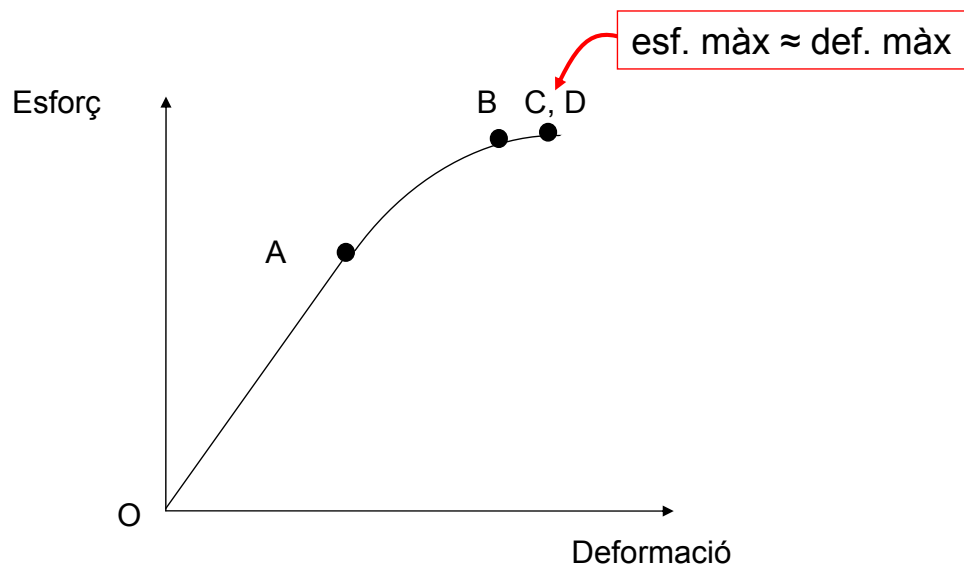
TEMA 1-a: BIOMECÀNICA ELASTICITAT

- **Denominacions** segons la resposta als assajos elàstics
 - Material plàstic: zona elàstica és molt menuda i la zona plàstica molt gran.



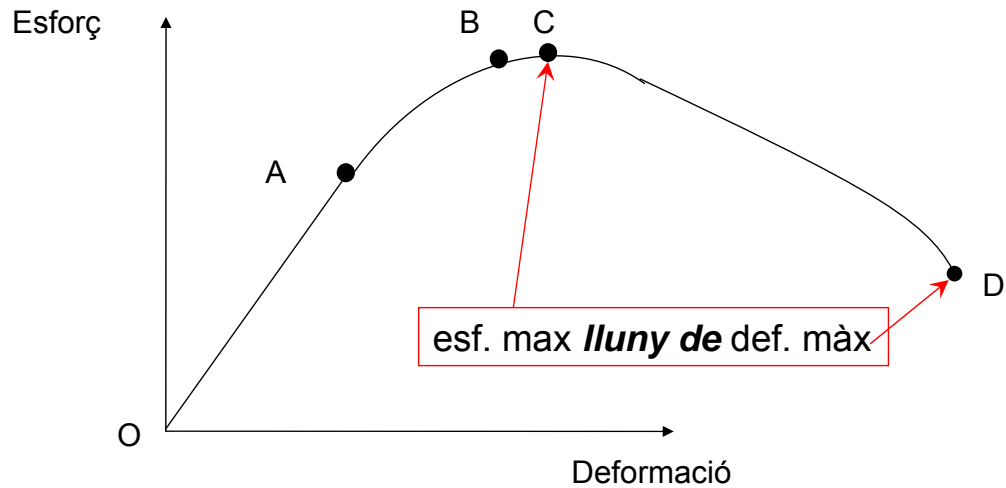
TEMA 1-a: BIOMECÀNICA ELASTICITAT

- **Denominacions** segons la resposta als assajos elàstics
 - Material fràgil: ruptura en l'esforç màxim



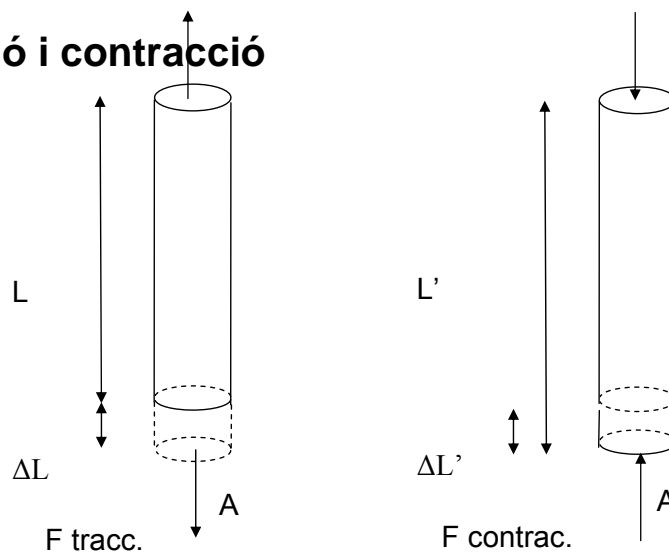
TEMA 1-a: BIOMECÀNICA ELÀSTICITAT

- **Denominacions** segons la resposta als assajos elàstics
 - Material dúctil: el material es deforma molt amb poc esforç i sense ruptura



TEMA 1-a: BIOMECÀNICA ELÀSTICITAT

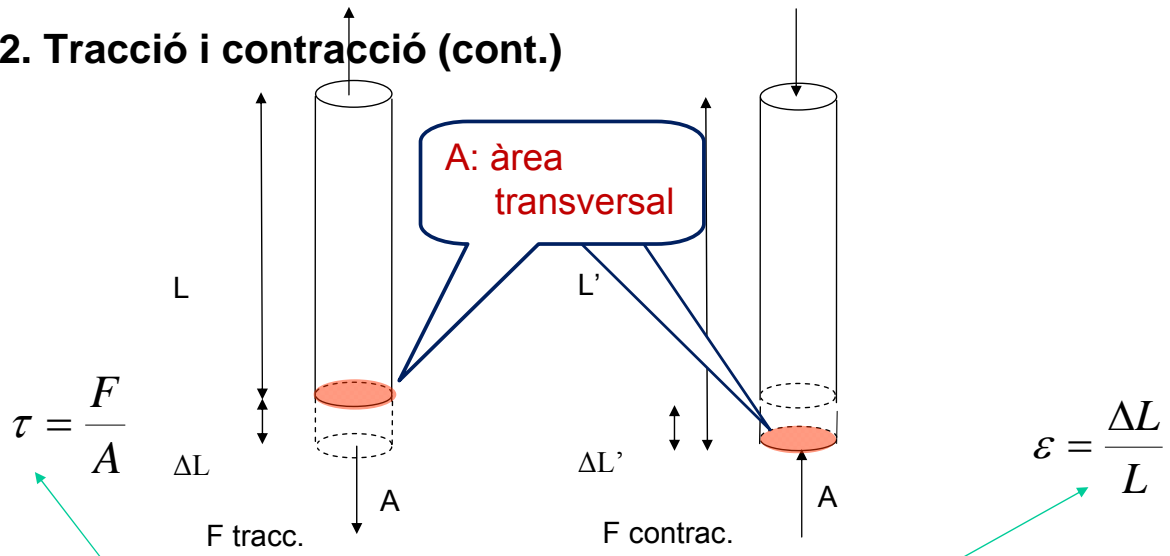
1.2. Tracció i contracció



- Assaig de tracció: **estirament** aplicant forces iguals i oposades
- Assaig de contracció: **acurtament** aplicant forces iguals i oposades

TEMA 1-a: BIOMECÀNICA ELASTICITAT

1.2. Tracció i contracció (cont.)

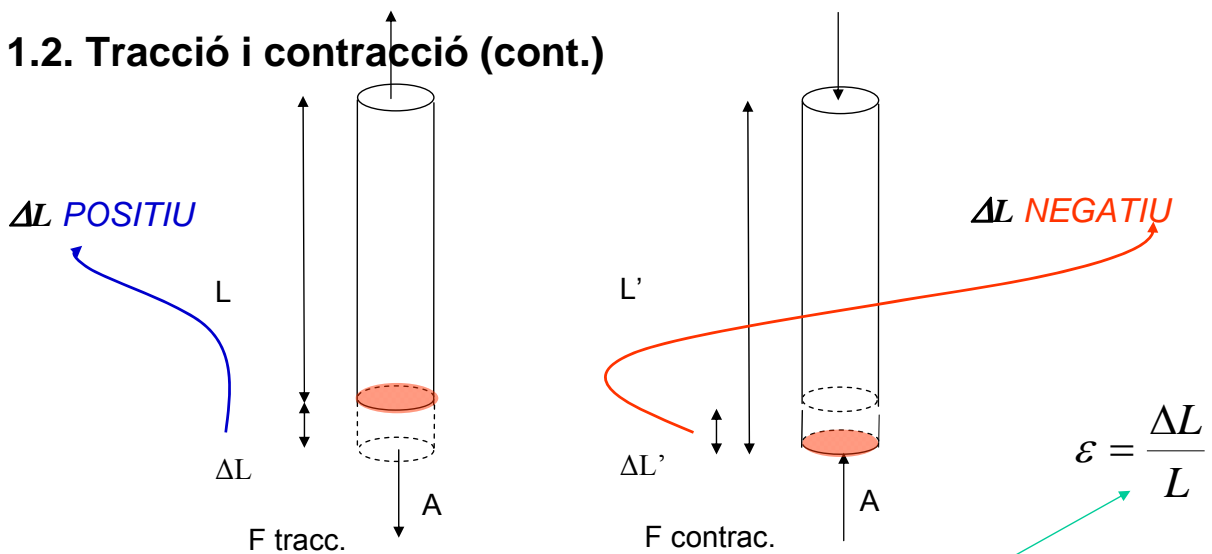


- L'esforç és la força per unitat d'àrea transversal a aqueixa força.

- La deformació és l'allargament relatiu:

TEMA 1-a: BIOMECÀNICA ELASTICITAT

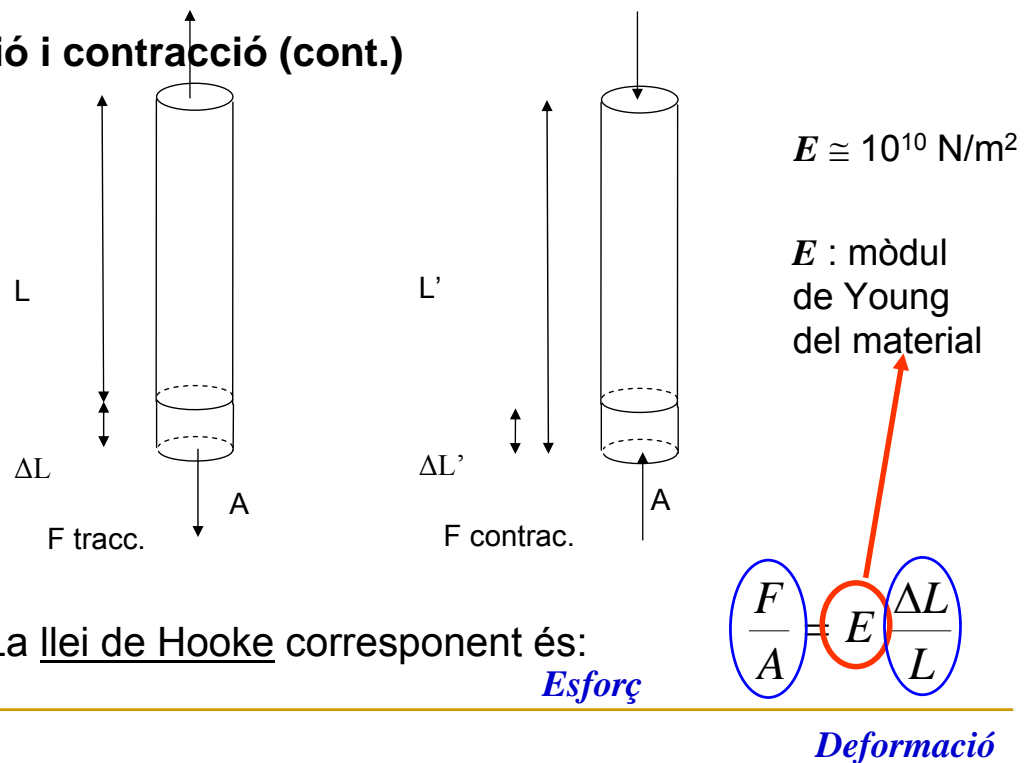
1.2. Tracció i contracció (cont.)



- La deformació és l'allargament relatiu:

TEMA 1-a: BIOMECÀNICA ELASTICITAT

1.2. Tracció i contracció (cont.)

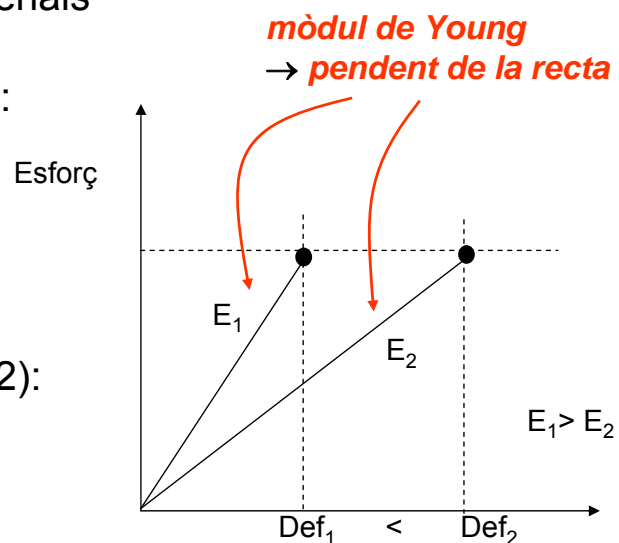


TEMA 1-a: BIOMECÀNICA ELASTICITAT

1.2. Tracció i contracció

Per a un esforç fix sobre materials amb E diferent:

- mòdul de Young gran (E_1):
recta molt inclinada
 - deformació és menuda
 - cos s'oposa **molt** a la deformació.
- mòdul de Young menut (E_2):
recta poc inclinada.
 - deformació és gran
 - cos s'oposa **poc** a la deformació



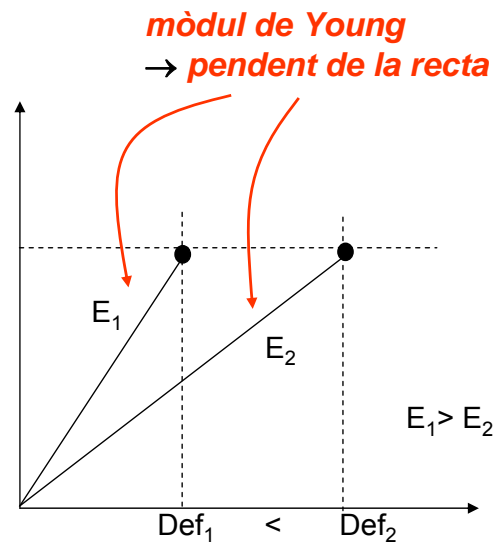
TEMA 1-a: BIOMECÀNICA ELASTICITAT

1.2. Tracció i contracció

CONCLUSIÓ:

- Un material amb mòdul de Young menor que un altre es deforma més.
- Exemple:

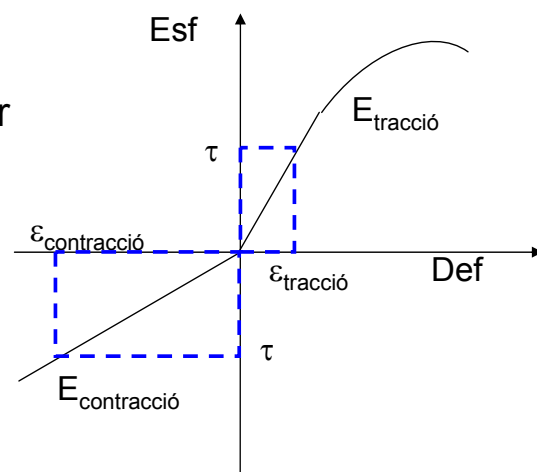
| Material | E (N/m ²) |
|-------------|-----------------------|
| Cartílag | 5×10^6 |
| Cabell humà | 5×10^8 |
| Seda | 5×10^9 |



TEMA 1-a: BIOMECÀNICA ELASTICITAT

1.2. Tracció i contracció

- Un material especial és l'os:
 - mòdul de Young diferent per a tracció i contracció
 - $E_{\text{contracció}} < E_{\text{tracció}}$
 - Per a un mateix esforç:
 - $\epsilon_{\text{contracció}} > \epsilon_{\text{tracció}}$
 - s'oposa més a la tracció;
 - més probable trencament per accident de contracció (salt).



TEMA 1-a: BIOMECÀNICA ELASTICITAT

1.2. Tracció i contracció

- Efecte sobre la secció (circular):
 - Si deformació longitudinal → deformació transversal
 - Si ΔL positiu → àrea transversal disminueix (Δr negatiu)
 - Si ΔL negatiu → àrea transversal augmenta (Δr positiu)

$$\frac{\Delta r}{r} = -\sigma \frac{\Delta L}{L}$$

- signe negatiu:
variacions oposades

- **mòdul de Poisson**

- no té unitats
- $0.10 < 0.50$
- valor típic: 0.30

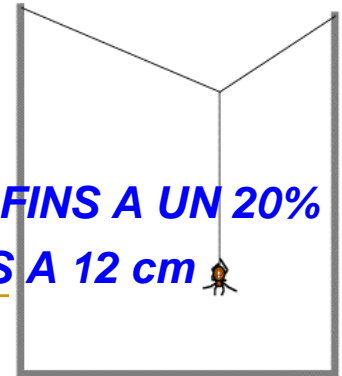
TEMA 1-a: BIOMECÀNICA ELASTICITAT



<http://www.fotonatura.org/galerias/fotos/152818/>

UN CABELL HUMÀ ES POT ESTIRAR UN 40%
→ SI MESURA 10 cm S'ALLARGA FINS A 14 cm
 $E = 5 \times 10^8 \text{ N/m}^2$

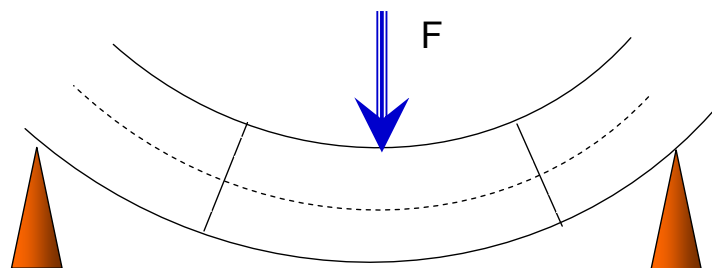
LA SEDA D'UNA ARANYA ES POT ESTIRAR FINS A UN 20%
→ SI MESURA 10 cm S'ALLARGA FINS A 12 cm
 $E = 5 \times 10^9 \text{ N/m}^2$



TEMA 1-a: BIOMECÀNICA ELASTICITAT

1.3a. Flexió

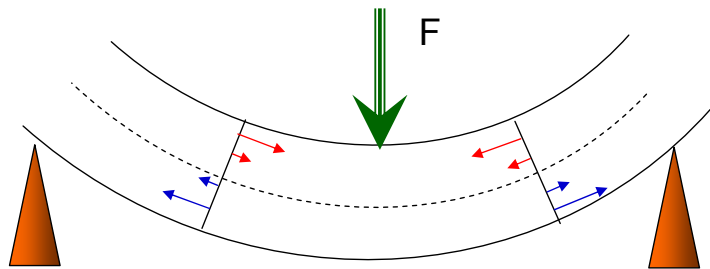
- Assaig de flexió:



TEMA 1-a: BIOMECÀNICA ELASTICITAT

1.3a. Flexió

- Assaig de flexió:
 - Part superior: CONTRACCIÓ
 - Part inferior: TRACCIÓ
 - Centre: NO ES DEFORMA



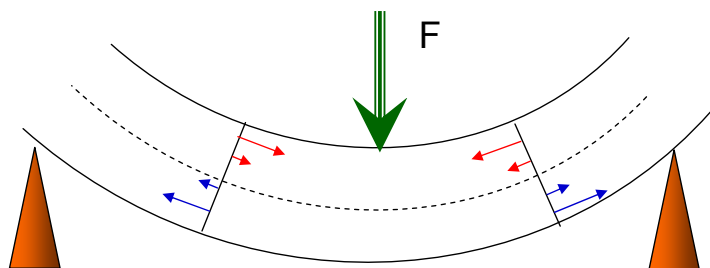
TEMA 1-a: BIOMECÀNICA ELASTICITAT

1.3a. Flexió

- Assaig de flexió:
 - Part superior: CONTRACCIÓ
 - Part inferior: TRACCIÓ
 - Centre: **FIBRA** o **SUPERFÍCIE NEUTRA**



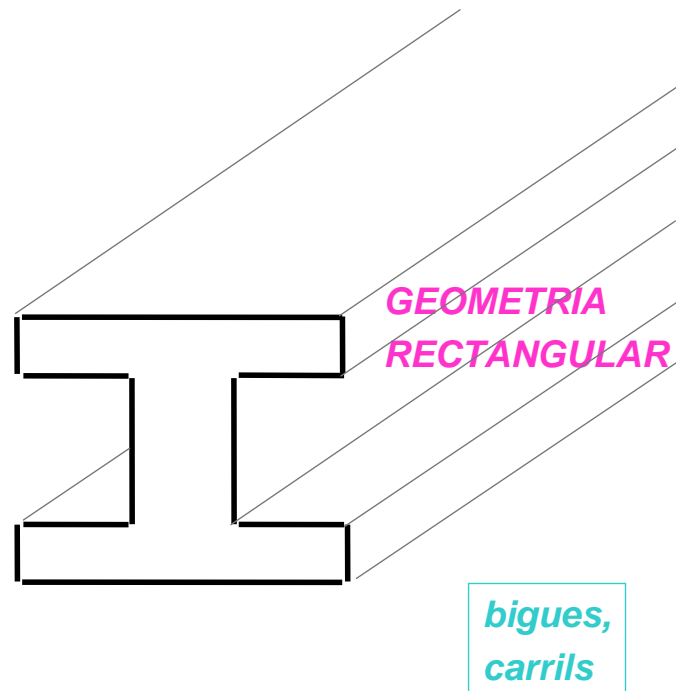
NO es deforma =
= NO s'oposa a la FLEXIÓ



TEMA 1-a: BIOMECÀNICA ELASTICITAT

1.3a. Flexió

- Assaig de flexió:

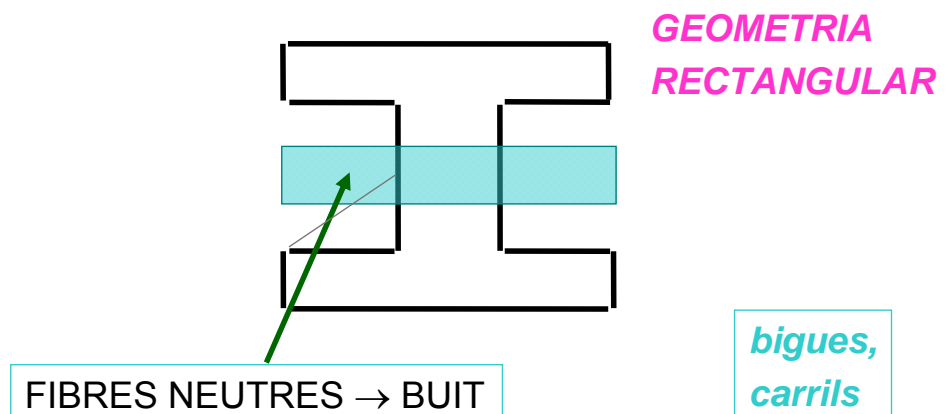


TEMA 1-a: BIOMECÀNICA ELASTICITAT

1.3a. Flexió

- Assaig de flexió:

- Perquè una barra s'opose a la flexió, és suficient que hi haja material LLUNY de les fibres NEUTRES.

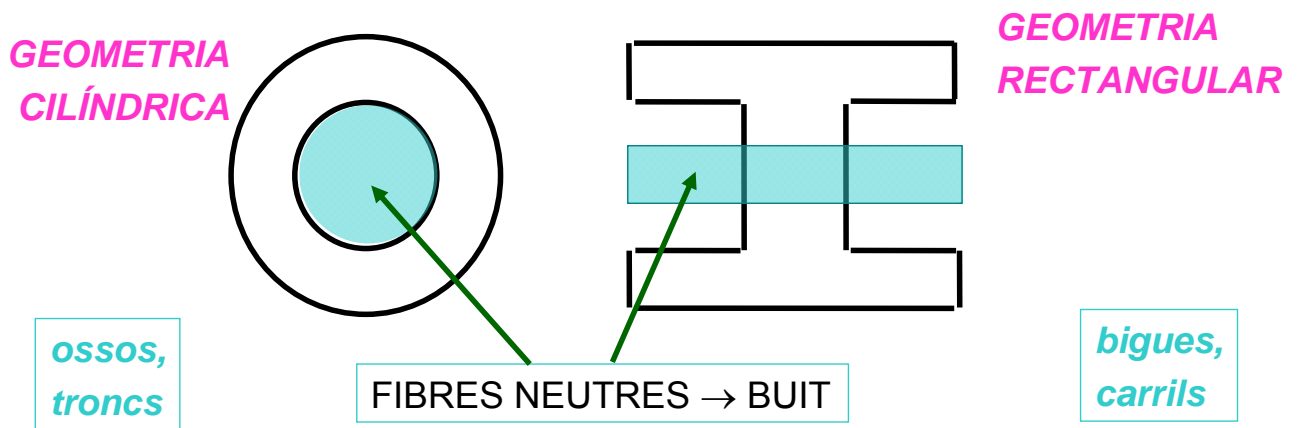


TEMA 1-a: BIOMECÀNICA ELASTICITAT

1.3a. Flexió

■ Assaig de flexió:

- Perquè una barra s'opose a la flexió, és suficient que hi haja material LLUNY de les fibres NEUTRES.



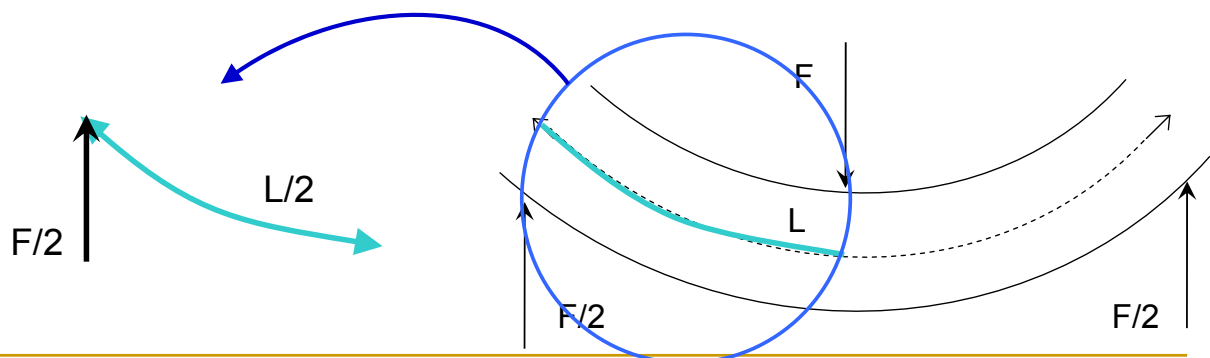
TEMA 1-a: BIOMECÀNICA ELASTICITAT

1.3a. Flexió

■ Esforç:

- Moment flexor en cada extrem:

$$\tau = \frac{F}{2} \times \frac{L}{2} = \frac{FL}{4}$$



TEMA 1-a: BIOMECÀNICA ELASTICITAT

1.3a. Flexió

■ Esforç:

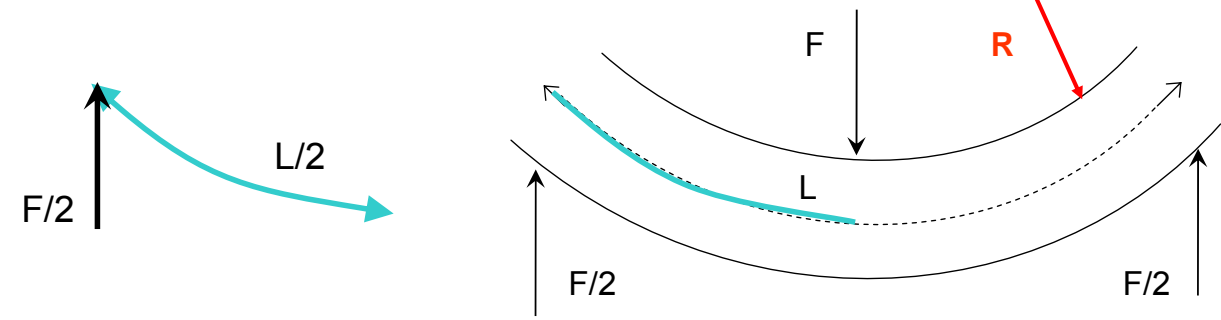
- Moment flexor en cada extrem:

$$\tau = \frac{F}{2} \times \frac{L}{2} = \frac{FL}{4}$$

■ Deformació:

- Inversa radi de curvatura:

$$\varepsilon = \frac{1}{R}$$



TEMA 1-a: BIOMECÀNICA ELASTICITAT

1.3a. Flexió

■ LEY DE HOOKE:

Esforç

M. Young

Deformació

$$\left(\frac{FL}{4}\right) = E \cdot I_A \left(\frac{1}{R}\right)$$

TEMA 1-a: BIOMECÀNICA ELASTICITAT

1.3a. Flexió

■ LLEI DE HOOKE:

$$\frac{FL}{4} = E \cdot I_A \frac{1}{R}$$

I_A depèn de geometria

- I_A = **moment d'inèrcia de la secció**: com reacciona una secció a la flexió

TEMA 1-a: BIOMECÀNICA ELASTICITAT

1.3a. Flexió

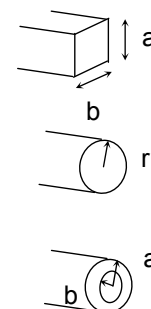
■ LLEI DE HOOKE:

$$\frac{FL}{4} = E \cdot I_A \frac{1}{R}$$

I_A depèn de la geometria

- I_A = **moment d'inèrcia de la secció**: com reacciona una secció a la flexió

| Secció transversal | Moment de l'àrea |
|-----------------------------|----------------------------------|
| Barra de secció rectangular | $I_A = \frac{a^3 b}{12}$ |
| Cilindre | $I_A = \frac{\pi r^4}{4}$ |
| Tub | $I_A = \frac{\pi(a^4 - b^4)}{4}$ |



TEMA 1-a: BIOMECÀNICA ELASTICITAT

1.3a. Flexió

■ LLEI DE HOOKE:

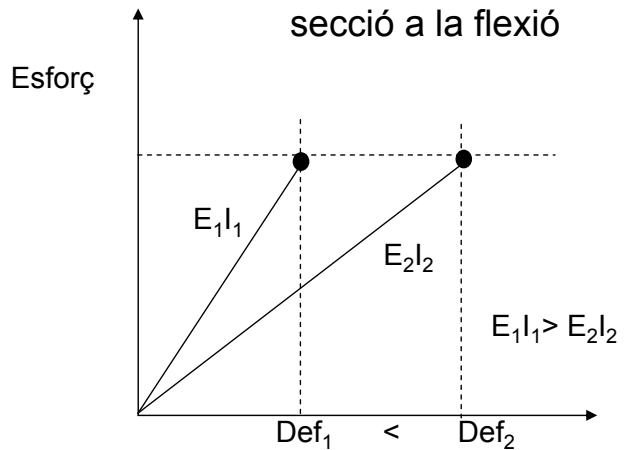
$$\frac{FL}{4} = E \cdot I_A \frac{1}{R}$$

□ I_A = moment d'inèrcia de la secció: com reacciona una

□ Com **MÉS GRAN $E \cdot I_A$**

→ MÉS GRAN
de la llei de Hooke ($E \cdot I_A$)

→ **MENOR DEFORMACIÓ**



TEMA 1-a: BIOMECÀNICA ELASTICITAT

1.3a. Flexió

■ LLEI DE HOOKE:

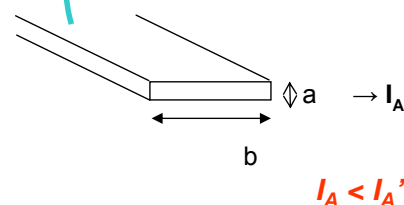
$$\frac{FL}{4} = E \cdot I_A \frac{1}{R}$$

$$I_A = \frac{a^3 b}{12}$$

■ Exemple: tauló (mateix E)

□ F paral·lela al costat CURT:

- a e I_A menuts
- pendent menut
- deformació ($1/R$) gran



TEMA 1-a: BIOMECÀNICA ELASTICITAT

1.3a. Flexió

■ LLEI DE HOOKE:

$$\frac{FL}{4} = E \cdot I_A \frac{1}{R}$$

$$I_A = \frac{a^3 b}{12}$$

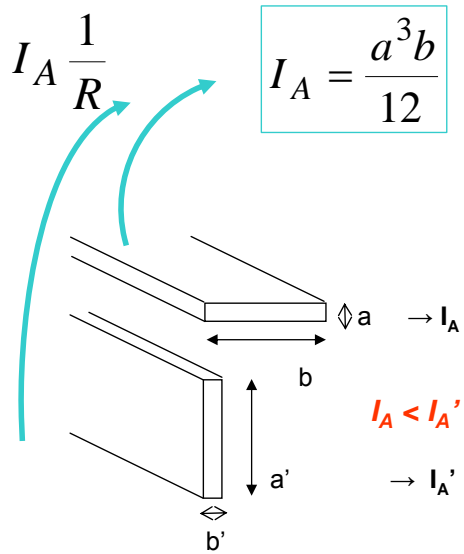
■ Exemple: tauló (mateix E)

□ F paral·lela al costat CURT:

- a e I_A menuts
- pendent menut
- deformació ($1/R$) gran

□ F paral·lela al costat LLARG:

- a' e I'_A grans
- pendent gran
- deformació ($1/R$) menuda

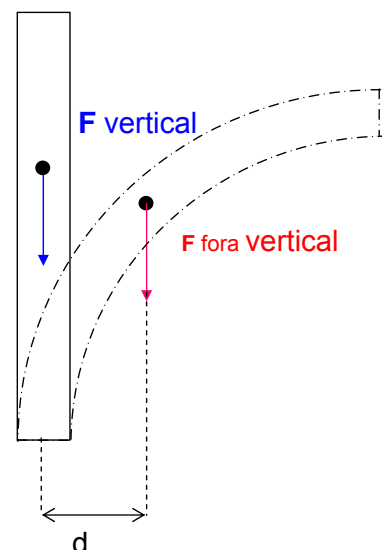


TEMA 1-a: BIOMECÀNICA ELASTICITAT

1.3a. Flexió

■ Flexió lateral: columna vertical amb pes → força longitudinal vertical en la direcció de la gravetat

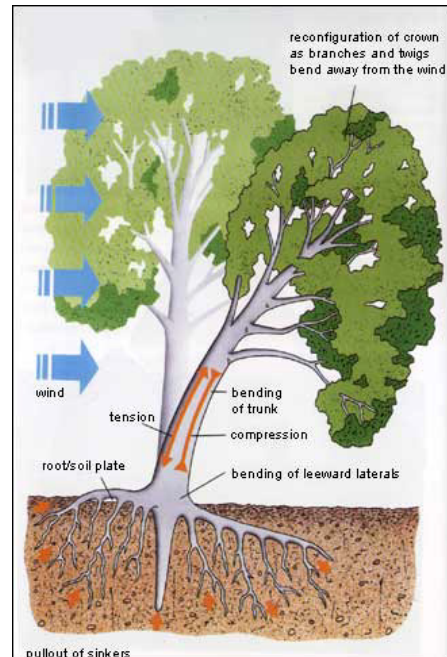
- si vertical: estable (F apunta a la base)
- si es desvia de la verticalitat
 - → un moment flexor
 - → flexió lateral o **pandeo**
 - si flexió lateral massa gran → **fractura**



TEMA 1-a: BIOMECÀNICA ELASTICITAT

1.3a. Flexió

- Flexió lateral: columna vertical amb pes → força longitudinal vertical en la direcció de la gravetat
 - si vertical: estable (F apunta a la base)
 - si es desvia de la verticalitat
 - → un moment flexor
 - → flexió lateral o vinclament
 - si flexió lateral massa gran → **fractura**



<http://www.nhm.ac.uk/nature-online/life/plants-fungi/magnificent-trees/session3/index.html>

TEMA 1-a: BIOMECÀNICA ELASTICITAT

1.3a. Flexió

- Flexió lateral:
 - Columna de densitat ρ i mòdul de Young E
 - PER RESISTIR el VINCLAMENT, relació entre l'altura i el radi de la columna quan la deformació es màxima (antes fractura)

depèn del material i g

$$L_{crit} = \left(\frac{2E}{\rho g} \right)^{1/3} r^{2/3}$$

TEMA 1-a: BIOMECÀNICA ELASTICITAT

1.3a. Flexió

■ Flexió lateral:

- Columna de densitat ρ i mòdul de Young E
- PER RESISTIR el VINCLAMENT, relació entre l'altura i el radi de la columna quan la deformació és màxima (abans fractura)

depèn del material i g

$$L_{crit} = \left(\frac{2E}{\rho g} \right)^{1/3} r^{2/3}$$

- Si $L < L_{crit}$ → la columna no es fractura
- Si $L > L_{crit}$ → la columna sí que es fractura

~~□ HI HA UNA ALTURA MÀXIMA, EN RELACIÓ AMB EL RADI~~

TEMA 1-a: BIOMECÀNICA ELASTICITAT

1.3a. Flexió

- ARBRES: com més alts, més grossos

$$L_{crit} = \underbrace{\left(\frac{2E}{\rho g} \right)^{1/3}}_c r^{2/3}$$

TEMA 1-a: BIOMECÀNICA ELASTICITAT

1.3a. Flexió

$$L_{crit} = c \cdot r^{2/3}$$

- ARBRES: com més alts, més grossos
-

TEMA 1-a: BIOMECÀNICA ELASTICITAT

1.3a. Flexió

$$L_{crit} = c \cdot r^{2/3}$$

- ARBRES: com més alts, més grossos
- Exemple: L_1, r_1 ; L_2, r_2
 - E, ρ i g els mateixos:

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{c \cdot r_1^{2/3}}{c \cdot r_2^{2/3}} = \frac{r_1^{2/3}}{r_2^{2/3}}$$

TEMA 1-a: BIOMECÀNICA ELASTICITAT

1.3a. Flexió

$$L_{crit} = c \cdot r^{2/3}$$

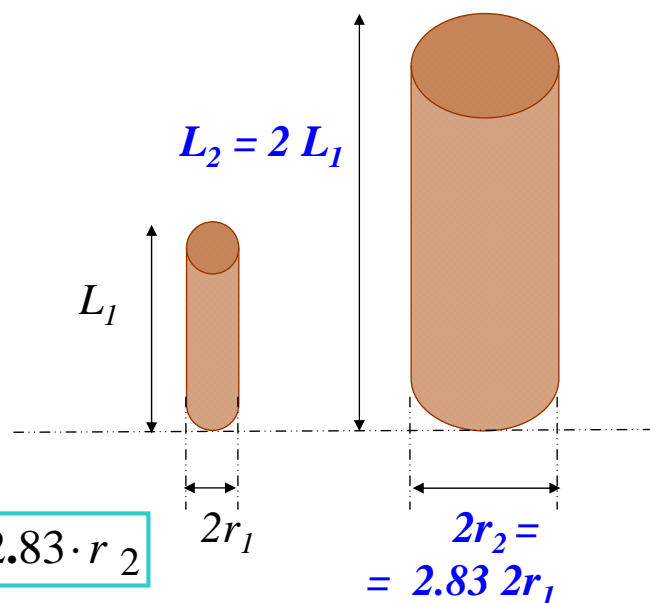
- **ARBRES:** com més alts, més grossos
- **Exemple:** L_1, r_1 ; L_2, r_2
 - E, ρ i g els mateixos:
 - $\frac{L_1}{L_2} = \frac{c \cdot r_1^{2/3}}{c \cdot r_2^{2/3}} = \frac{r_1^{2/3}}{r_2^{2/3}}$
 $L_1 = 2L_2$
 - Si: $\frac{r_1^{2/3}}{r_2^{2/3}} = 2$ $r_1 = 2.83 \cdot r_2$
 -

TEMA 1-a: BIOMECÀNICA ELASTICITAT

1.3a. Flexió

$$L_{crit} = c \cdot r^{2/3}$$

- **ARBRES:** com més alts, més grossos
- **Exemple:** L_1, r_1 ; L_2, r_2
 - E, ρ i g els mateixos:
 - $\frac{L_1}{L_2} = \frac{c \cdot r_1^{2/3}}{c \cdot r_2^{2/3}} = \frac{r_1^{2/3}}{r_2^{2/3}}$
 $L_1 = 2L_2$
 - Si: $\frac{r_1^{2/3}}{r_2^{2/3}} = 2$ $r_1 = 2.83 \cdot r_2$
 -



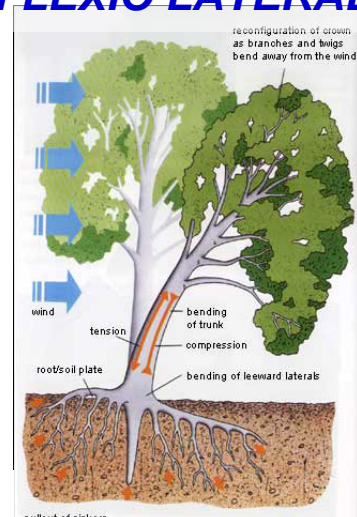
TEMA 1-a: BIOMECÀNICA ELASTICITAT

ELS ARBRES VELS SÓN GROSSOS PERQUÈ EL SEU RADI AUGMENTA MÉS DE PRESSA QUE LA SEUA ALÇÀRIA PER TAL DE PREVENIR LA FLEXIÓ LATERAL



TEMA 1-a: BIOMECÀNICA ELASTICITAT

ELS ARBRES SUPTEN ELS VENDAVALS PERQUÈ ESTAN PREPARATS PER A FER FRONT A LA FLEXIÓ LATERAL

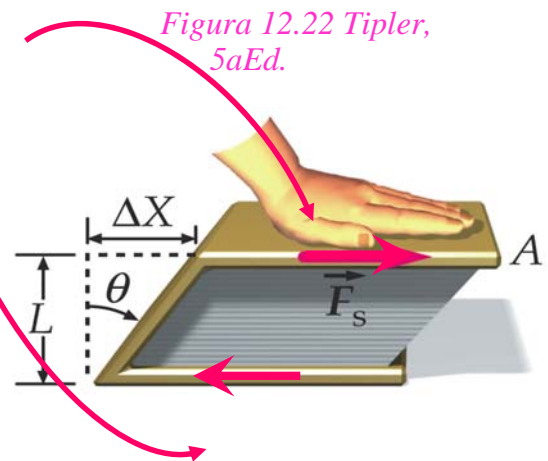


<http://www.nhm.ac.uk/nature-online/life/plants-fungi/magnificent-trees/session3/index.html>

TEMA 1-a: BIOMECÀNICA ELASTICITAT

1.3b.- Cisalla

- Assaig de cisalla: F tangencial

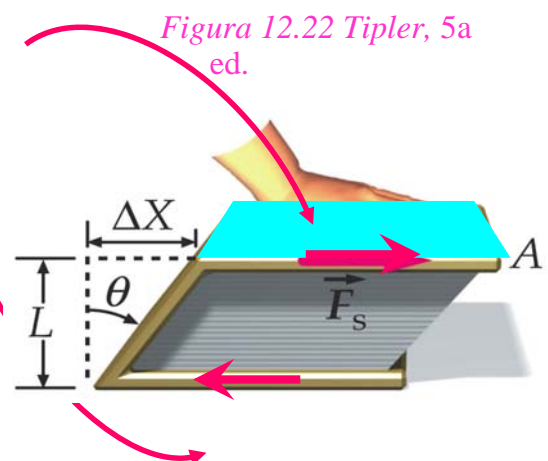


TEMA 1-a: BIOMECÀNICA ELASTICITAT

1.3b.- Cisalla

- Assaig de cisalla: F tangencial
 - L'**esforç** és la força per unitat d'àrea tangencial:

$$\tau = \frac{F}{A}$$



TEMA 1-a: BIOMECÀNICA ELASTICITAT

1.3b.- Cisalla

■ Assaig de cisalla: F tangencial

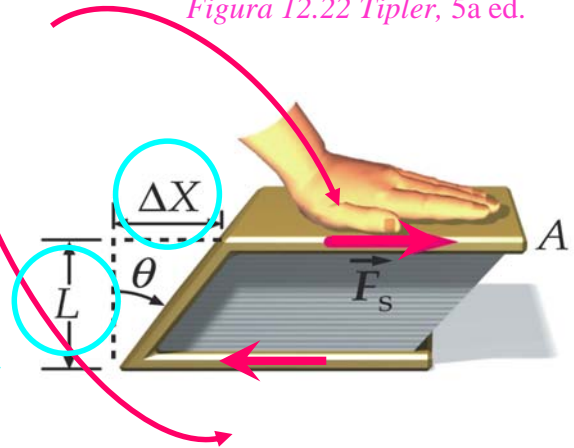
- L'eforç és la força per unitat d'àrea tangencial:

$$\tau = \frac{F}{A}$$

- La **deformació** és la tangent de θ :

$$\varepsilon = \tan \theta = \frac{\Delta X}{L}$$

Figura 12.22 Tipler, 5a ed.



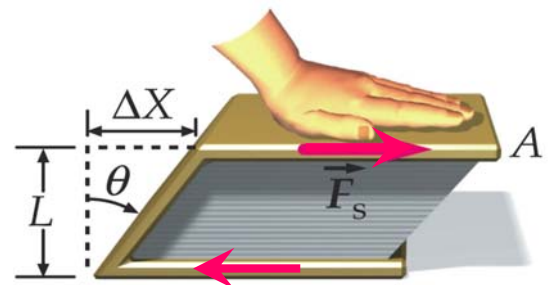
TEMA 1-a: BIOMECÀNICA ELASTICITAT

1.3b.- Cisalla

Esforç □ **M. Cisalla** Deformació

□ $\frac{F}{A} = G \tan \theta$

Figura 12.22 Tipler, 5a ed.



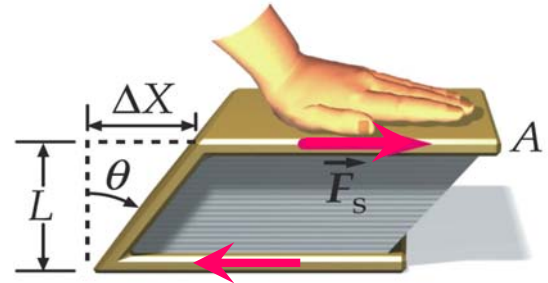
TEMA 1-a: BIOMECÀNICA ELASTICITAT

1.3b.- Cisalla

■ LLEI DE HOOKE:

- $\frac{F}{A} = G \tan \theta$
- G és el mòdul de cisalla

*Figura 12.22 Tipler,
5aEd.*



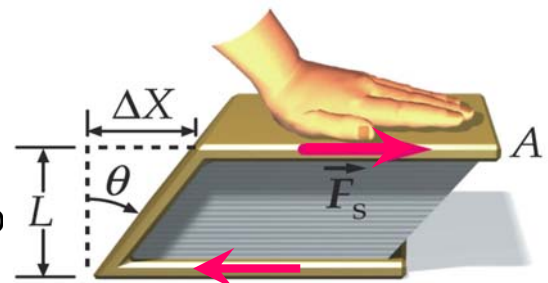
TEMA 1-a: BIOMECÀNICA ELASTICITAT

1.3b.- Cisalla

■ LLEI DE HOOKE:

- $\frac{F}{A} = G \tan \theta$
- G és el mòdul de cisalla
 - si material homogeni i isòtrop

*Figura 12.22 Tipler,
5aEd.*



$$G = \frac{E}{2(1 + \sigma)}$$

TEMA 1-a: BIOMECÀNICA ELASTICITAT

1.3b.- Cisalla

■ LLEI DE HOOKE:

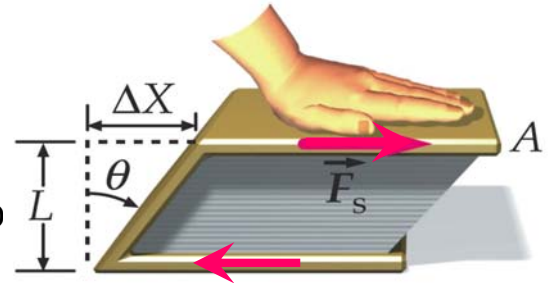
$$\square \quad \frac{F}{A} = G \tan \theta$$

- G és el mòdul de cisalla
 - si material homogeni i isòtrop

$$G = \frac{E}{2(1+\sigma)}$$

- si NO homogeni o isòtrop:
 G es determina
EXPERIMENTALMENT

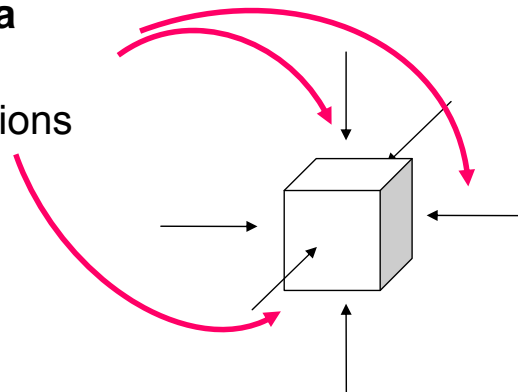
*Figura 12.22 Tipler,
5aEd.*



TEMA 1-a: BIOMECÀNICA ELASTICITAT

1.3c.- Compressió volumètrica

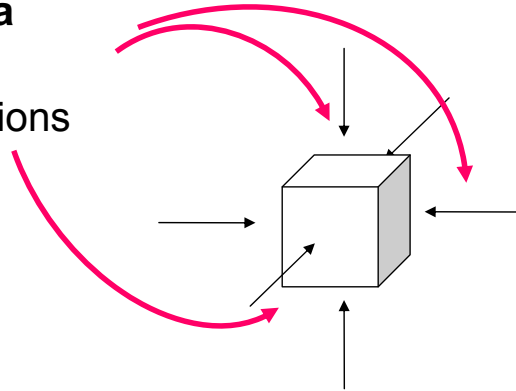
- Assaig de compressió: F
perpendicular en totes direccions



TEMA 1-a: BIOMECÀNICA ELASTICITAT

1.3c.- Compressió volumètrica

- Assaig de compressió: F perpendicular en totes direccions
 - \approx forces al si d'un fluid

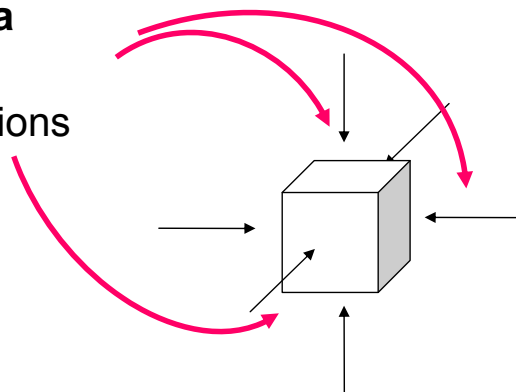


TEMA 1-a: BIOMECÀNICA ELASTICITAT

1.3c.- Compressió volumètrica

- Assaig de compressió: F perpendicular en totes direccions
 - \approx forces al si d'un fluid
 - Esforç: pressió

$$P = \frac{F}{A_{transversal}}$$



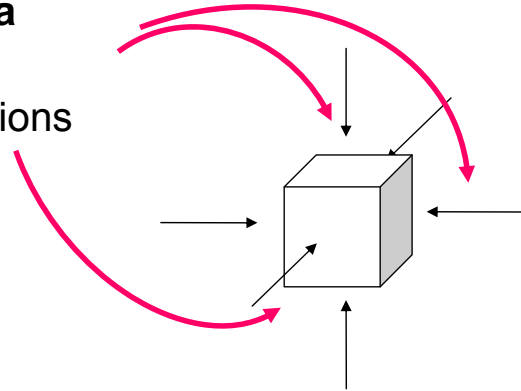
TEMA 1-a: BIOMECÀNICA ELASTICITAT

1.3c.- Compressió volumètrica

- Assaig de compressió: F perpendicular en totes direccions
 - \approx forces al si d'un fluid
 - Esforç: pressió

$$P = \frac{F}{A_{transversal}}$$

- Si prèviament P_0 : $\Delta P = \frac{F}{A_{transversal}}$ ($\Delta P = P - P_0$)



TEMA 1-a: BIOMECÀNICA ELASTICITAT

1.3c.- Compressió volumètrica

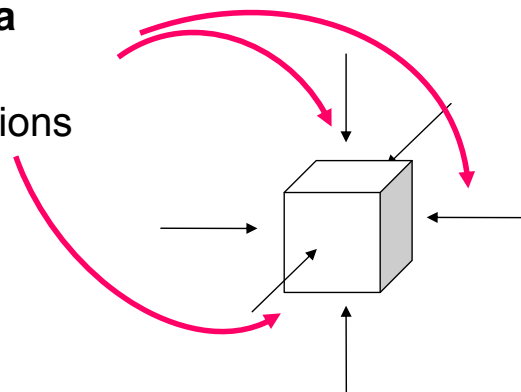
- Assaig de compressió: F perpendicular en totes direccions
 - \approx forces al si d'un fluid
 - Esforç: pressió

$$P = \frac{F}{A_{transversal}}$$

- Si prèviament P_0 : $\Delta P = \frac{F}{A_{transversal}}$ ($\Delta P = P - P_0$)

- Deformació:

$$\varepsilon = \frac{\Delta V}{V}$$

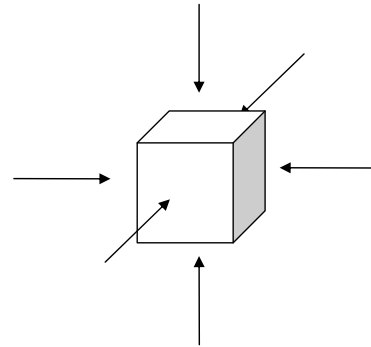


TEMA 1-a: BIOMECÀNICA ELASTICITAT

1.3c.- Compressió volumètrica

- LLEI DE *m. compressibilitat*

Esforz $\Delta P = -K \frac{\Delta V}{V}$ *Deformació*



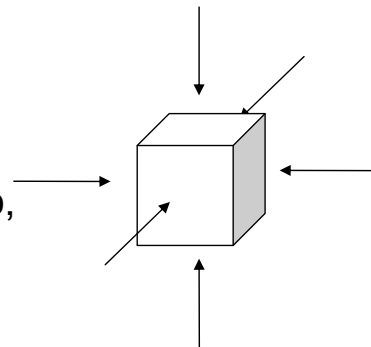
TEMA 1-a: BIOMECÀNICA ELASTICITAT

1.3c.- Compressió volumètrica

- LLEI DE HOOKE:

$$\Delta P = -K \frac{\Delta V}{V}$$

- signe negatiu: si augmenta pressió, disminueix el volum



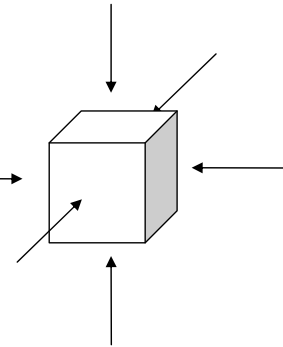
TEMA 1-a: BIOMECÀNICA ELASTICITAT

1.3c.- Compressió volumètrica

■ LLEI DE HOOKE:

$$\Delta P = - K \frac{\Delta V}{V}$$

- signe negatiu: si augmenta pressió, disminueix el volum
- **K** coeficient de compressibilitat



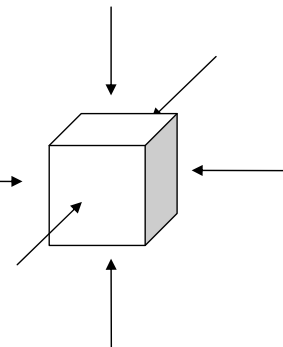
TEMA 1-a: BIOMECÀNICA ELASTICITAT

1.3c.- Compressió volumètrica

■ LLEI DE HOOKE:

$$\Delta P = - K \frac{\Delta V}{V}$$

- signe negatiu: si augmenta pressió, disminueix el volum
- **K** coeficient de compressibilitat
 - si material homogeni i isòtrop



$$K = \frac{E}{3(1 - 2\sigma)}$$

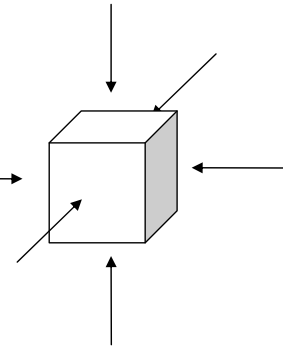
TEMA 1-a: BIOMECÀNICA ELASTICITAT

1.3c.- Compressió volumètrica

■ LLEI DE HOOKE:

$$\Delta P = -K \frac{\Delta V}{V}$$

- signe negatiu: si augmenta pressió, disminueix el volum
- **K** coeficient de compressibilitat
 - si material homogeni i isòtrop



$$K = \frac{E}{3(1-2\sigma)}$$

- si NO homogeni o no isòtrop: **K** es determina EXPERIMENTALMENT

TEMA 1-a: BIOMECÀNICA ELASTICITAT

■ SI EL MATERIAL ÉS HOMOGENI I ISÒTROP:

- Només amb el mòdul de **Young** i el coeficient de **Poisson** es descriuen tots els assajos elàstics.

$$\frac{F}{A} = E \frac{\Delta L}{L}$$

Tracció

$$\frac{FL}{4} = E \cdot I_A \frac{1}{R}$$

Flexió

$$\frac{F}{A} = G \tan \theta$$

Cisalla

$$\Delta P = -K \frac{\Delta V}{V}$$

Compressió

$$G = \frac{E}{2(1+\sigma)}$$

$$K = \frac{E}{3(1-2\sigma)}$$