



UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

Màster en Investigació en Didàctica de la Matemàtica

**Un estudi exploratori sobre el procés de modelització
amb dades reals en l'entorn informàtic dels iPads®**

Memòria de Treball de Fi de Màster presentada per:

MÍRIAM ORTEGA PONS

Tutoritzada per:

Dr. Luis Puig Espinosa

Departament de Didàctica de la Matemàtica

València, 29 de novembre de 2013

Fitxa tècnica

Màster: Màster en Investigació en Didàctica de la Matemàtica

Especialitat: Matemàtiques

Autora: Cognoms: Ortega Pons

Nom: Miriam

Títol de la memòria: Un estudi exploratori sobre el procés de modelització amb dades reals en l'entorn informàtic dels iPads®

Tutor 1: Cognoms: Puig Espinosa

Nom: Luis

Departament: Didàctica de la matemàtica

Data de defensa: 20 de desembre de 2013

Qualificació:

Paraules clau: Procés de modelització, iPad®, paràmetres, famílies de funcions, dades reals

Keywords: Modelling process, iPad®, parameter, function families, real data

Codis Unesco: 1299 (Didàctica de les matemàtiques), 6104.01, 6104.02.

Resum. El treball d'investigació que presentem és un estudi exploratori sobre l'ensenyament i l'aprenentatge del procés de modelització d'una situació real en un grup d'alumnes de 1r de batxillerat. La peculiaritat d'aquest estudi és l'ús de dades reals obtingudes a partir de la gravació d'un vídeo del fenomen estudiat utilitzant iPads®. En particular, el model d'ensenyament que utilitzem permet treballar els conceptes de paràmetre i família de funcions i fa èmfasi en l'anàlisi qualitatiu del fenomen.

Abstract. The research work that we present is an exploratory study about teaching and learning the modelling process of a real situation in a grade 11 student group. The peculiarity of this study is the usage of real data obtained from recording a video using iPads®. Particularly, the teaching model that we use allows us to work on the concepts of parameters and function families and emphasizes the qualitative analysis of the phenomenon.

Índex

1. Introducció	1
2. Problemàtica i marc teòric	3
2.1. Marc teòric general. Models teòrics locals	3
2.2. La problemàtica	4
2.3. Elements tendències o investigacions	6
2.3.1. De l'educació matemàtica realista	6
2.3.1.1. La importància de la modelització en l'ensenyament realista	7
2.3.1.2. Desenvolupaments curriculars de l'estil de la matemàtica realista	8
2.3.1.3. Les components de la matematització	10
2.3.1.4. El paper fonamental de l'ús de dades reals i de contextos	11
2.3.2. De la investigació en resolució de problemes	12
2.3.2.1. Un model de competència en resolució de problemes	12
2.3.2.2. Un model de competència en modelització	13
2.3.3. De la investigació en didàctica de l'àlgebra	15
2.4. Altres enfoccs	16
3. L'experiment d'ensenyament	19
3.1. Població	19
3.2. Material d'ensenyament	20
3.2.1. Material per arreplegar dades	21
3.2.1.1. Fitxes	21
3.2.1.2. IPads®	24
3.2.2. Material de suport	26
3.2.2.1. Fulls d'instruccions	26

3.2.2.2. Full d'ajuda per al càlcul de punts	26
3.2.2.3. Full de coordenades	27
3.2.2.4. Ús del material de suport	27
3.3. Descripció del procediment seguit	28
3.3.1. Sessió 1. Treball amb la primera fitxa i gravació de l'experiment	29
3.3.2. Sessió 2. Treball amb la segona fitxa i amb l'iPad®	31
3.3.3. Sessió 3. Les entrevistes	32
3.4. Quines són les dades obtingudes	33
3.4.1. Les dades de les fitxes	33
3.4.2. Les dades dels iPads®	33
3.4.3. Les entrevistes transcrites	34
4. Anàlisi de les dades	35
4.1. Anàlisi de les dades de les fitxes i dels iPads®	35
4.1.1. Descripció parella per parella i reconstrucció racional	35
4.1.1.1. Parella 1	36
4.1.1.2. Parella 2	40
4.1.1.3. Parella 3	43
4.1.1.4. Parella 4	46
4.1.1.5. Parella 5	49
4.1.1.6. Parella 6	52
4.1.1.7. Parella 7	54
4.1.1.8. Parella 8	57
4.1.2. Taules resum	59
4.1.3. Resum de resultats per ítems	63
4.2. Anàlisi de les entrevistes transcrites	65
4.2.1. Anàlisi de les parelles 1 i 2	66
4.2.1.1. Parella 1, alumnes A i B	67
4.2.1.2. Parella 2, alumnes C i D	88
4.2.2. Resultats obtinguts	112
4.2.2.1. Factors que influïren en l'elecció de les funcions	112
4.2.2.2. Sobre les concepcions del concepte d'altura	116
4.2.2.3. Situacions d'ensenyament	118
4.2.2.4. El paper de les dades reals al nostre experiment	125
5. Conclusions	127
6. Referències bibliogràfiques	129
Annexes	

1. Introducció

L'aparició de noves tecnologies està canviant tot allò que ens envolta dia a dia però també la manera en què es concep l'ensenyament i l'aprenentatge a les aules. És per això que l'adaptació a aquestes noves formes d'entendre l'ensenyament és un factor important en l'aprenentatge eficaç per part dels alumnes.

El treball d'investigació que presentem a continuació¹ és un estudi exploratori sobre l'ensenyament i l'aprenentatge del procés de modelització d'una situació real en un grup d'alumnes de 1r de batxillerat. Així mateix, la peculiaritat d'aquest estudi és que les dades emprades són dades reals, obtingudes a partir de la gravació d'un vídeo del fenomen representat a l'aula utilitzant iPads®. Així doncs, aquest dispositiu permet, mitjançant una combinació d'aplicacions, no només gravar una situació real en vídeo, sinó també poder treballar sobre aquesta a partir de les dades obtingudes.

Ara bé, la importància d'usar situacions de modelització en l'ensenyament ve donada, entre altres, per la idea de Puig (en premsa) de què aquestes són un lloc idoni per a l'aprenentatge de conceptes i processos matemàtics. A més, l'ús de dades reals és important en el sentit en què tenen un paper destacat en l'elaboració de conceptes per part dels alumnes ja que la situació real que es vol estudiar no es presenta com una mera aplicació dels conceptes apresos, sinó més bé per a introduir i desenvolupar els conceptes matemàtics.

Així mateix, com diu Puig (en premsa), tant l'anàlisi qualitatiu del fenomen a estudiar com el coneixement de les característiques de les famílies de funcions i el

¹ Aquest treball de fi de màster s'ha realitzat en el context del Projecte d'Investigació Modelos de enseñanza y competencia de la modelización y la resolución de problemas aritmético-algebraicos: análisis histórico y uso de entornos interactivos de aprendizaje (EDU2012-35638).

significat dels paràmetres són un element crucial en la gestió i el control del procés de modelització per part dels alumnes ja que permeten prendre decisions sobre el tipus de funció que s'usarà com a model i controlar la posterior adequació de la funció escollida. Per aquest motiu, al nostre estudi fem un model d'ensenyament que, d'una banda, permet treballar conceptes com ara el de família de funcions i el de significat dels paràmetres de les famílies de funcions respecte a la pròpia funció i al fenomen que es modelitza i, d'altra banda, que fa èmfasi en l'anàlisi qualitatiu del fenomen.

Tanmateix, com que l'estudi realitzat té un caràcter exploratori, el nostre objectiu no és el d'extraure conclusions pròpiament dites, sinó més bé el d'explorar tot allò relacionat amb les actuacions dels alumnes i les seues concepcions que es pot observar quan aquests treballen en l'entorn informàtic dels iPads® en un model d'ensenyament que presenta les característiques que acabem de mencionar.

Així doncs, una vegada explicat en què consisteix l'estudi realitzat i què és el que es pretén aconseguir amb aquest, passem a detallar en quins capítols s'organitza i en què consisteixen.

Primerament, al capítol 2 expliquem la problemàtica que abordem en el nostre treball així com els diferents estudis que s'han fet seguint aquesta mateixa línia, les característiques que tenen en comú i les particularitats que presenta el nostre respecte a aquests. A més, presentem els enfocaments dels quals abordem dita problemàtica, així com d'altres dels quals en coneixem l'existència. Concretament, el nostre estudi està englobat dins del marc teòric dels Models Teòrics Locals però conté elements d'altres teories o corrents educatives com ara de l'Educació Matemàtica Realista, de la investigació en resolució de problemes i de la investigació en didàctica de l'àlgebra, les quals es descriuran amb més profunditat en aquest capítol.

Posteriorment, al capítol 3 es recull tot allò referent a l'experiment, és a dir, la població de l'estudi i el context en què es trobaven els alumnes; el disseny del material emprat, l'elaboració d'aquest i la finalitat amb què s'empra; la descripció de l'experiment i la metodologia seguida i, per últim, les dades obtingudes i la naturalesa d'aquestes.

A continuació, al capítol 4 abordem, d'una banda, l'estudi de les parelles cas per cas basant-nos en les dades obtingudes a l'aula i tractant de fer una reconstrucció racional del què va ocórrer i, d'altra banda, l'anàlisi de les transcripcions de les entrevistes amb la finalitat d'extraure conclusions sobre el comportament i les concepcions dels alumnes.

Per últim, al capítol 5 es recullen les conclusions a les quals hem arribat després de la realització de l'estudi així com possibles suggeriments per a futures investigacions.

Així mateix, als annexos es pot trobar tota la informació necessària per a una total comprensió de l'estudi: el material emprat, les dades obtingudes dels alumnes, les entrevistes transcrites... A més, es disposa d'un DVD en el qual, a banda d'açò, es poden observar els vídeos de l'experiment.

2. Problemàtica i marc teòric

2.1. Marc teòric general. Models teòrics locals

Aquest treball forma part de la línia d'investigació "Anàlisi didàctic, històric i epistemològic de les matemàtiques escolars" que vé desenvolupant-se des de ja fa anys al Departament de Didàctica de les Matemàtiques de la Universitat de València Estudi General, amb la participació d'investigadors coordinats per Luis Puig, i en la qual s'han realitzat estudis especialment sobre resolució de problemes, aritmètica, àlgebra i modelització. En un gran nombre d'aquests estudis han participat també investigadors del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (CINVESTAV) de Mèxic, en el marc d'un conveni de col·laboració entre ambdues institucions, que es va firmar en 1988 i que es va renovar en 2004.

Així mateix, els estudis desenvolupats en aquesta línia d'investigació utilitzen com a marc teòric i metodològic general el que s'anomenen Models Teòrics Locals (MTL), l'elaboració dels quals va ser iniciada per Eugenio Filloy en els anys huitanta del segle passat, que va presentar per primera vegada en castellà en Kieran i Filloy (1989) i en anglés en Filloy (1990), i l'exposició més detallada i completa dels quals es pot trobar en Filloy, Rojano i Puig (2008).

Ara bé, com a marc teòric per a la investigació, direm breument, seguint l'exposició de Puig (2008), que les situacions d'ensenyament i aprenentatge en els sistemes escolars poden considerar-se com a situacions de comunicació i de producció de sentit, en les quals estan implicades la matèria objecte d'ensenyament i aprenentatge (les matemàtiques, en el nostre cas), l'ensenyament, que organitza el professor, i els alumnes, en les actuacions dels quals es mostra allò que han après. Amb la qual cosa, es parla de què un MTL té quatre components: un component de competència, que es

correspon amb la matèria concreta que s'ensenya; un component d'ensenyament, que es correspon amb allò que organitza el professor per a ensenyar eixa matèria concreta; un component d'actuació, que es correspon amb allò que els alumnes fan a l'aprendre eixa matèria concreta amb eixe ensenyament, i, englobant-ho tot, un component de comunicació, que es correspon amb allò que és propi dels processos de comunicació amb els sistemes matemàtics de signes que s'utilitzen en eixe cas concret. A més, el model és local perquè allò que es posa en observació i que s'estudia és l'ensenyament d'un contingut concret en una situació concreta amb un grup d'alumnes concret i, per tant, no es pretén descriure i explicar res més enllà dels fenòmens observats en eixes condicions concretes.

Aquestes característiques del marc teòric comporten que la metodologia amb la qual s'organitza la investigació tinga com a component essencial la descripció de les actuacions dels alumnes i la selecció de casos que s'estudien amb detall mitjançant la realització d'entrevistes que, habitualment, són entrevistes amb ensenyament.

En definitiva, aquest és el marc general amb el qual s'ha organitzat el treball, tot i que, donat el tamany i el nivell de profunditat propi d'un treball de fi de màster, només s'utilitzen explícitament alguns d'aquests elements. Així mateix, el component de competència sols l'indiquem fent referència a treballs anteriors d'aquesta línia d'investigació (Puig i Monzó, 2013), al contrari que el component d'ensenyament, que està tractat explícitament i extensament, detallant l'organització i els materials amb els quals s'ha desenvolupat aquest breu experiment i indicant els elements d'ensenyament incorporats a les entrevistes. A més, el caràcter exploratori del treball comporta que el component d'actuació estiga format pels anàlisis de les actuacions dels alumnes que participaren en l'experiment, tant en les sessions de classe com en les entrevistes, sense referència a actuacions d'altres alumnes. I, finalment, no incloem cap reflexió explícita sobre l'ús dels sistemes matemàtics de signes en els processos de comunicació que tenen lloc durant l'experiment d'ensenyament i les entrevistes.

2.2. La problemàtica

L'ensenyament de les matemàtiques a través de la resolució de problemes amb dades reals té una tradició ja d'anys enrere. Des d'aquest punt de vista, les situacions de modelització són un lloc per a l'aprenentatge de conceptes i processos matemàtics ja que el treball amb dades reals té un paper destacat en aquest.

La problemàtica en la qual s'emmarca el nostre estudi és la de l'ensenyament d'aquest tipus de situacions i es troba emmarcat dins d'un grup de treballs en els quals el que es pretén és presentar un model d'ensenyament que permeta estudiar el procés de modelització, els conceptes de família de funcions i forma canònica d'una família de funcions i el significat dels paràmetres de les formes canòniques respecte a la funció i al fenomen que es modelitza, així com analitzar els resultats després de l'aplicació d'aquest.

Els treballs dels quals estem parlant arranquen de la tesi doctoral en execució d'Onofre Monzó, de la qual s'han publicat algunes parts referents a la fonamentació teòrica i a la metodologia d'ús, així com altres resultats parcials, en Monzó i Puig (2007), Monzó i Puig (2008), Puig i Monzó (2008), Monzó i Puig (2010), Monzó i Puig (2011), Monzó i Puig (2012), Puig i Monzó (2013) i Puig (en premsa).

En la mateixa línia es presenten dos treballs acadèmics, dirigits per Luis Puig, ens referim al treball de fi de màster d'Aránzazu Juan Blasco, *Modelo plausible vs. Modelo esperable. Un estudio exploratorio de aspectos del proceso de modelización*, i el projecte de tesi doctoral de Francisco Infante, que es presenta, entre altres, en Infante i Puig (2013).

Ara bé, també forma part d'aquest grup de treballs l'estudi exploratori que realitzen Monzó, Puig i Navarro (en premsa) en l'entorn de les tablettes i que es va presentar en les JAEM de 2013, del qual el nostre treball n'és una continuació.

Així mateix, en aquests treballs el que es pretén és evidenciar la importància de l'anàlisi qualitatiu tant del fenomen que cal modelitzar com de les famílies de funcions que s'hi utilitzen ja que és un element clau en la gestió del procés de modelització del fenomen a estudiar, per la qual cosa el seu ensenyament està inclòs explícitament en el material. A més, l'objectiu d'alguns d'aquests treballs és també el de donar sentit a les transformacions algebraïques (que solen aprendre's deslligades de significat i realitzar-se de manera mecànica) per a l'obtenció de formes canòniques i l'estudi de les transformacions de les gràfiques de les funcions expressades pels canvis en els paràmetres.

Tot i això, cadascun d'aquests treballs presenta unes característiques particulars quant al context en què s'han realitzat, a l'ús dels distints suports i programes i a la utilització (o no) de dades reals. Per això, mentre els treballs de Puig i Monzó (2013) i Monzó, Puig i Navarro (en premsa) es realitzaren en un curs de batxillerat, els treballs de Juan (2012) i de Infante i Puig (2013) es realitzaren en un context universitari, en particular en alumnes de la facultat de matemàtiques de la Universitat de València i en alumnes d'un curs d'economia i administració a Colòmbia, respectivament. Ara bé, els suports emprats són ben distints: s'utilitzen calculadores gràfiques (amb programes de càlcul simbòlic), ordinadors (amb els programes Matlab® i GeoGebra®) i iPads® (amb les aplicacions Video Physics®, Data Analysis® i Free GraCalc®). A més, cal destacar que als experiments realitzats amb calculadora gràfica i iPad® es fa una recollida de les dades amb les quals es treballa posteriorment. Per contra, als experiments de Juan i d'Infante i Puig es treballa amb dades que es proporcionen a partir de l'enunciat d'un problema.

Ara bé, el nostre estudi presenta també algunes peculiaritats que cal destacar. En primer lloc, cal destacar que va tindre lloc en un context d'alumnes de 1r de batxillerat i s'usaren iPads® com a suport informàtic, a l'igual que a l'experiment de Monzó, Puig i

Navarro (en premsa), per obtenir dades reals a partir de la gravació de l'experiment i per poder treballar sobre aquest. En particular s'utilitzen els programes Video Physics[®], Data Analysis[®] i Free GraCalc[®], programes que es va decidir emprar perquè eren gratuïts o de baix cost, cosa que fa més viable la seua futura incorporació a les aules. Cal destacar que, combinant-los, permeten, a banda de gravar l'experiment, analitzar algunes de les seues característiques amb prou detall.

D'altra banda, és important subratllar que el nostre estudi té un caràcter exploratori, ja que consisteix en l'aplicació d'un ensenyament emprant noves tecnologies amb l'objectiu d'indagar quin tipus de conseqüències té la realització d'aquest tipus d'ensenyament en una població determinada.

2.3. Elements d'altres tendències o investigacions

A banda de la problemàtica en la qual hem englobat el nostre estudi a l'apartat anterior, cal destacar que aquest utilitza elements d'altres teories o problemàtiques com ara de l'Educació Matemàtica Realista i de la investigació en didàctica de l'àlgebra. A més, conté també elements de la investigació en resolució de problemes desenvolupada per Luis Puig. Seran aquestes teories les que ens servisquen per emmarcar aquest treball en un context més general.

Ara bé, és important destacar que aquest és l'enfoc des del qual abordarem el nostre estudi, cosa que no implica que siga l'únic, només que serà aquell en què ens basarem. És més, com diuen Kaiser, Blomhøj i Sriraman, "la teoria d'ensenyar i aprendre modelització matemàtica està lluny d'estar completa" (2006, p.82) i encara hi ha molt sobre què investigar. Per això, posteriorment parlarem també d'altres enfocs i línies d'investigació que s'han dut a terme en aquest camp (i s'estan duent) així com d'alguns grups de treball que existeixen i que es dediquen a l'estudi d'aquest tema.

2.3.1. De l'Educació Matemàtica Realista

L'Educació Matemàtica Realista (EMR), més coneguda internacionalment com *Realistic Mathematics Education*, és un corrent didàctic que va sorgir a Holanda cap als anys 70 com una resposta a la necessitat de reformar l'ensenyament de les matemàtiques i com a reacció a la corrent coneguda com Matemàtica Moderna i a l'enfoc mecanicista de l'ensenyament de les matemàtiques, generalitzat en aquell moment a les escoles holandeses.

Cal destacar, però, que aquesta no fou una corrent única en Holanda, ja que per la mateixa dècada, aparegueren també grups de treball amb plantejaments i idees semblants en altres països, com ara els del Shell Centre for Mathematical Education (fundat per la Universitat de Nottingham l'any 1968 amb la missió de millorar la qualitat i l'efectivitat de l'educació matemàtica en tots els nivells) a Anglaterra i el Grupo Cero a València. Ara bé, al nostre treball ens centrarem només en allò que feren els grups holandesos, és a dir, els que donaren nom a l'EMR, ja que foren aquests els

que teoritzaren amb detall l'ús de contextos reals en l'ensenyament, i dels quals emprarem part de les idees.

En realitat, l'EMR és una teoria específica d'instrucció per a l'educació matemàtica centrada en contextos (Treffers, 1987; De Lange, 1987; Gravemeijer, 1994) que es basa en la fenomenologia didàctica de Freudenthal (1983) i en la seua visió de què les matemàtiques són una activitat humana i de què la realitat pot ser utilitzada com a font per a la matematització.

En particular, aquesta corrent didàctica presenta una sèrie de característiques que es basen en les següents idees centrals, recopilades per Bressan, Zolkower i Gallego (2004, p.3):

- Cal pensar la matemàtica com una activitat humana (a la qual Freudenthal denomina matematització) i que, d'aquesta manera, ha d'existir una matemàtica per a tothom.
- Cal acceptar que el desenvolupament de la comprensió matemàtica passa per distints nivells on els contextos i els models posseeixen un paper rellevant i que aquest desenvolupament es du a terme pel procés didàctic denominat reinvençió guiada, en un ambient d'heterogeneïtat cognitiva.
- Que des del punt de vista curricular, la reinvençió guiada de la matemàtica com a activitat de matematització, requereix de la fenomenologia didàctica com a metodologia d'investigació, açò és, la recerca de contextos i situacions que generen la necessitat de ser organitzats matemàticament, sent les dues fonts principals d'aquesta recerca la història de la matemàtica i les invencions i produccions matemàtiques espontànies dels estudiants.

A partir d'aquestes idees, es formulen els sis principis fonamentals de l'EMR que són: el principi d'activitat, el de realitat, el de reinvençió guiada, el de nivells, el d'interacció i el d'interconnexió o estructuració. No entrarem en detalls per explicar en què consisteix cadascun d'aquests, ja que no és aquesta la nostra prioritat, aquesta informació es pot consultar en Gravemeijer (1994).

2.3.1.1. La importància de la modelització en l'ensenyament realista

Com dèiem, l'EMR es basa en la concepció de la naturalesa de les matemàtiques a partir de les idees de Freudenthal (1983). Ara bé, com diu Puig (1996), Freudenthal considera els conceptes matemàtics com a mitjans d'organització de fenòmens de l'experiència (matemàtica), per això, cal tenir en ment la similitud que existeix entre el procés d'elaboració dels conceptes i el procés de modelització ja que si bé, com ja hem dit, els conceptes matemàtics s'elaboren per organitzar fenòmens de l'experiència, la finalitat del procés de modelització és la d'organitzar fenòmens mitjançant conceptes matemàtics. Així doncs, és important tenir present que la principal diferència entre aquests està en què en el procés de modelització no s'elabora cap concepte sinó que se'n selecciona algun dels existents.

Tanmateix, com expliquen Puig i Monzó (2013), la similitud entre aquests permet emprar processos de modelització en l'ensenyament per tal d'afavorir l'elaboració i el refinament de conceptes per part dels alumnes en relació amb els fenòmens que organitzen, és a dir, tenint present en el propi procés d'ensenyament aprenentatge allò que constitueix el centre de la naturalesa de les matemàtiques.

2.3.1.2. Desenvolupaments curriculars de l'estil de la Matemàtica Realista

En aquells anys, sorgiren una sèrie de projectes de currículums per tot arreu del món de l'estil de la Matemàtica Realista. A Blum i Niss (1991) se'n citen uns quants dels quals destaquem els diferents projectes desenvolupats a Gran Bretanya pel Shell Centre i el HEWET Project, desenvolupat a Holanda pel OW&OC Institute (de la Universitat d'Utrecht i antecedent de l'actual Freudenthal Institute), del qual parlarem a continuació. A més, a Espanya també aparegueren alguns treballs seguint aquesta mateixa línia; ens referim als desenvolupats pel Grupo Cero a València.

Com comentàvem, el HEWET Project, va donar lloc a l'aparició de diversos currículums a Holanda, entre els quals es troba el currículum de matemàtiques A, currículum desenvolupat entre el 1981 i el 1985 i que va suposar tota una revolució en l'àmbit de l'ensenyament de les matemàtiques ja que trencava amb la tradició quant a la manera en què havia de tenir lloc aquest. Aquest currículum anava dirigit especialment als alumnes de cursos previs a estudis universitaris de la rama d'economia, ciències socials i psicologia i incloïa temes com ara l'àlgebra lineal aplicada, el càlcul aplicat, la probabilitat i l'estadística i el processament automàtic de dades.

La descripció d'aquest currículum de matemàtiques es pot trobar detallada a De Lange (1987). A continuació explicarem la visió d'aquest sobre l'esquema que presenten les activitats integrades en el currículum de matemàtiques A. Però, abans d'açò, cal comentar la importància que tenen els contextos en les activitats d'aquest currículum i el doble paper que juguen, que és el següent:

1) El primer d'aquests és que l'inici de qualsevol tasca té lloc en alguna situació del món real, el qual no està restringit només al món social i psicològic, sinó que també inclou la realitat interna de les matemàtiques i la imaginació dels estudiants ja que aquestes proporcionen fonts per al desenvolupament de conceptes matemàtics.

2) D'altra banda, el segon paper que juguen els contextos està relacionat amb les aplicacions ja que els contextos deixen al descobert la realitat com a font i camp d'aplicació.

A continuació, es mostra un esquema global de les activitats del currículum de matemàtiques A, que posteriorment explicarem seguint la descripció que fa De

Lange al seu treball. En aquest esquema es pretén mostrar què és la matematització i quan i com té lloc, en particular, en les activitats d'aquest currículum.

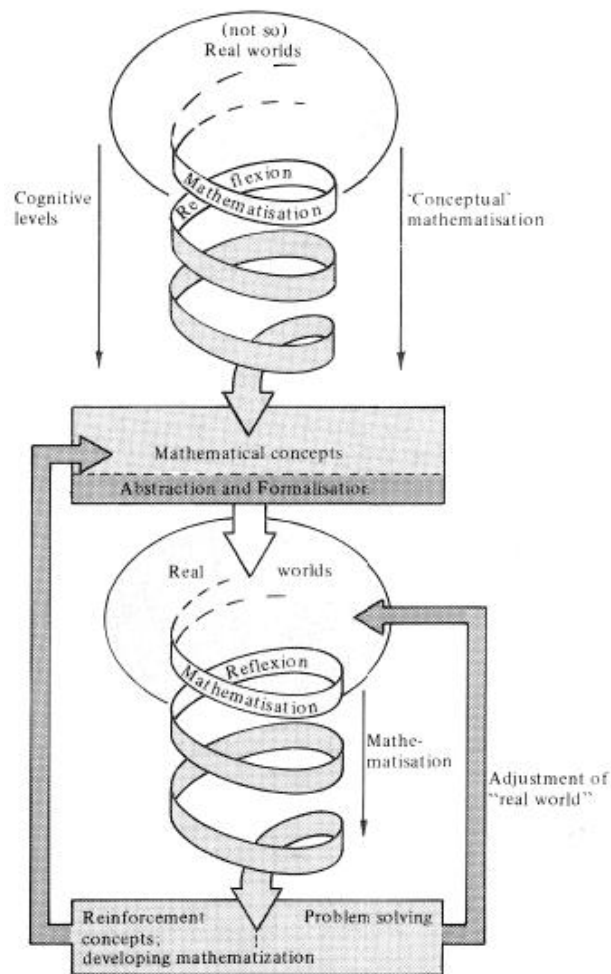


Figura 1. Esquema global de les activitats del currículum A

Notem, primerament, que l'esquema es divideix en dues etapes. Tot seguit, detallem en què consisteix la primera d'aquestes. En primer lloc, s'explora la situació real de partida intuïtivament amb la visió de matematitzar-la, és a dir, d'organitzar-la i d'estructurar-la, d'intentar identificar els aspectes matemàtics, de descobrir regularitats... Aquesta exploració inicial, que posseeix un fort component intuïtiu, hauria de conduir al desenvolupament, al descobriment o a la reinvençió de conceptes matemàtics.

Ara bé, el següent pas és la matematització conceptual, açò és, l'extracció de conceptes matemàtics de la situació real, cosa que faran els alumnes més tard o més prompte depenent tant de l'habilitat que tinguen per formalitzar i abstraure com del seu entorn social o de les interaccions entre aquests o entre aquests i els seus professors. A més, al mateix temps que es realitza aquesta extracció de conceptes, és necessari reflexionar sobre el procés de matematització.

Després d'aquest pas té lloc la descripció dels conceptes matemàtics, seguida d'una definició formal i més estricta d'aquests.

Quant a la segona etapa, cal destacar que consisteix en repetir el procés anterior però aplicant ara els conceptes a nous problemes amb l'objectiu de reforçar-los i de desenvolupar les habilitats per a la matematització. És a dir, s'apliquen les ferramentes desenvolupades a l'etapa anterior en nous contextos.

D'altra banda, la resolució dels problemes influirà en la visió de cada estudiant del món real.

2.3.1.3. Les components de la matematització

Treffers (1987) i Treffers i Goffree (1985) defineixen la matematització com una activitat d'organitzar segons la qual els coneixements i les habilitats adquirides són utilitzades per a descobrir regularitats, relacions i estructures desconegudes. Però, a més, Treffers (1987) afegeix un nou concepte de matematització ja que parla de què aquesta té dos components: l'horitzontal i la vertical (cal destacar que Treffers ja va fer aquesta distinció a la seua tesi doctoral l'any 1978 però no es va donar a conèixer a nivell global fins que l'any 1987 va ser traduïda de l'holandés a l'anglès).

D'una banda, explica que alguns exemples d'activitats de matematització horitzontal són identificar la matemàtica específica en un context general, esquematitzar, formular i visualitzar un problema de diverses maneres, descobrir relacions i regularitats, reconèixer un aspecte isomorf en diversos exemples... És a dir, activitats que transformen un problema real o contextual en un problema matemàtic.

D'altra banda, defineix com a matematització vertical activitats que el que pretenen és reorganitzar el propi sistema matemàtic. Exemples d'aquestes activitats són representar una relació com una fórmula, provar regularitats, perfeccionar i ajustar models, utilitzar-ne de diferents, combinar-los i integrar-los, formular un nou model matemàtic i generalitzar.

Ara bé, cal destacar que la matematització tal qual l'hem descrita, té lloc en les activitats del currículum de matemàtiques A junt al procés de reflexió, tal i com es pot veure a l'esquema de la figura 1. Aquesta reflexió té lloc en totes les fases de la matematització ja que l'estudiant ha de reflexionar sobre el seu propi procés de matematització, ha de discutir les activitats amb altres companys, ha d'avaluar els resultats d'aquesta matematització i ha d'interpretar els resultats. Així mateix, intervenen tant la matematització horitzontal com la vertical però no tenen lloc una després de l'altra sinó que es produeix una alternança entre aquestes. De Lange (1987) explica que gràficament, el procés de matematització podria veure's com una escala d'esglaons irregulars que representen l'alternança entre els processos de matematització horitzontal i vertical que es necessiten per arribar d'un problema del món real (que denota per A) a la seua resolució, a la generació

de conceptes matemàtics... (que denota per B). Aquest, proporciona també alguns exemples gràfics que podrien representar distints processos de matematització:

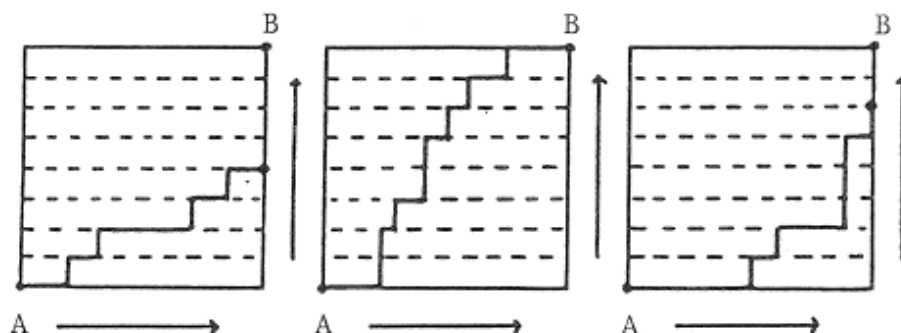


Figura 2. Exemples de processos de matematització

Així doncs, tot i que no va ser fins 1991 quan Freudenthal va utilitzar aquesta nomenclatura (Freudenthal, 1991), cal destacar que en els seus escrits aquest ja distingia entre el que Treffers (1987) va definir com matematització horitzontal i matematització vertical.

D'altra banda, cal subratllar que l'aparició d'aquesta notació va permetre classificar els distints tipus de currículums depenent de si contenien elements de matematització horitzontal i vertical (currículum realista), només de matematització horitzontal (currículum empirista), només de vertical (currículum formalista) o cap d'aquests (currículum mecanicista).

2.3.1.4. El paper fonamental de l'ús de dades reals i de contextos

A l'inici del capítol, hem destacat la importància de l'ús de contextos en les activitats del currículum de matemàtiques A, en particular, hem comentat que aquests servien com a font per a la matematització conceptual i com a camp d'aplicació dels conceptes matemàtics. En realitat, l'ús de situacions reals té un paper molt important en tots els currículums realistes però, en particular, com diu Puig (en premsa), té un paper destacat en les activitats dissenyades per a l'elaboració de conceptes matemàtics per part dels alumnes, per tant, aquest tipus de situacions no es presenten com una aplicació dels conceptes (suposadament) apresos sinó amb un objectiu que va molt més enllà d'aquest.

En realitat, la funció dels contextos en l'ensenyament pot ser ben diversa, depenent de la finalitat que es persegueixi. Basant-nos en la classificació que fa De Lange (1987) distingim entre tres diferents usos:

- L'ús de tercer ordre és aquell en què els contextos s'empren per a introduir i desenvolupar un concepte matemàtic, per la qual cosa és el característic de la matematització conceptual. A més, com és evident, en aquest cas les definicions apareixen lligades al context i són aquests els que ajuden a elaborar els conceptes.

- Es fa un ús dels contextos de segon ordre quan el paper que juguen aquests és important però menys que al cas anterior. En particular, al presentar un problema real y utilitzar els conceptes pertinents per organitzar-lo i resoldre'l.
- L'ús de primer ordre és aquell que es fa dels contextos en els llibres tradicionals, ens referim a què s'usen els contextos només per "disfressar" els conceptes i les operacions matemàtiques.

2.3.2. De la investigació en resolució de problemes

Abordem ara el procés de modelització des de la perspectiva de la resolució de problemes tal com explica Puig (en premsa). Com diu Juan (2012), segons la definició que considerem de problema (i conseqüentment de procés de resolució de problemes), entre altres factors, el procés de modelització pot considerar-se com un procés distint al de resolució de problemes o pot veure's com un cas particular d'aquest. Al present treball, a l'igual que a la resta dels mencionats a l'inici de l'apartat anterior i entre els quals s'emmarca aquest, considerarem que el procés de modelització és, efectivament, un cas particular de procés de resolució de problemes, per la qual cosa seran necessàries tant competències en resolució de problemes com competències específiques pròpies de la resolució de problemes de modelització.

2.3.2.1. Un model de competència en resolució de problemes

Seguidament, abordarem el model de competència en resolució de problemes basant-nos en la descripció que fa Puig al seu treball des del punt de vista de l'heurística considerada com aquest indica, és a dir, com la rama del saber que estudia les distintes "maneres de comportament que apareixen al resoldre problemes i els mitjans que s'utilitzen en el procés de resolució d'aquests, independentment del contingut i que no suposen cap garantia d'obtenció de la solució" (Puig, 1996, p.38).

Així mateix, centrant-nos en l'heurística moderna, no podem deixar de mencionar alguns dels seus màxims exponents com ara Polya i Schoenfeld que, malgrat declarar-se l'un predecessor de l'altre, els models que proposen són de tipus distint ja que provenen de metodologies d'anàlisi distintes.

D'una banda, Polya (1945) elabora el que Puig (1996) anomena un model de competència dividit en quatre fases basant-se en l'observació i l'estudi del comportament d'un resolutor "ideal" de manera que aquestes esdevenen una darrere l'altra i passant per cadascuna d'aquestes. Les fases que descriu són: comprensió, elaboració del pla, execució del pla i mirada retrospectiva.

D'altra banda, Schoenfeld (1985) estudia els diferents comportaments de resolutors reals mentre resolen problemes i elabora, com diu Puig (1996), un model d'actuació (i no de competència) de quatre components (com les anomena el propi Schoenfeld, que són: heurístiques, gestió, recursos i sistemes de creences), cadascuna de les quals pot

veure's com a resultat d'un intent d'explicar perquè els resolutors no tenen èxit al resoldre problemes. De fet, Puig (1996, p.43) explica que

Quan, a pesar de conèixer les ferramentes heurístiques, no s'ha sabut quina s'havia d'emprar, quan o com s'havia de fer, o no s'han avaluat els efectes de l'ús d'aquestes per al desenvolupament de la resolució, es parla de què és necessari un bon control del que es fa, un gestor del procés. Quan, a pesar de conèixer les ferramentes heurístiques i gestionar bé allò que s'ha estat fent, ha faltat un coneixement d'algun fet, algorisme o esquema propi del domini del problema en qüestió, o no s'han emprat les destreses que hagueren preparat el camí, es descendeix a considerar que hi ha hagut una carència de recursos. I quan, a pesar de disposar de tot açò, la concepció de la naturalesa de les matemàtiques o de la tasca de resoldre problemes ha fet que no els cabera al cap que això que sabien podia emprar-se per resoldre el problema, l'únic que permet ja explicar el fracàs és el sistema de creences dels resolutors.

Així doncs, tal com apunta Puig, en treballs més recents de Schoenfeld, es pot observar un canvi en la denominació dels components citats ja que ara els anomena aspectes cognitius i passen a ser: coneixement de base, estratègies de resolució de problemes, gestió i control, creències i afectes i, un de nou, pràctiques (que preten servir com a font d'explicació de les creences).

Després d'aquesta breu introducció al món de la resolució de problemes, cal destacar que Puig (1996) també fa la seua pròpia interpretació i elabora un model de competència tenint en compte les idees de Polya i Schoenfeld però des del punt de vista de la semiòtica de les matemàtiques, per la qual cosa, proposa una llista oberta d'elements subjecta a possibles ampliacions i modificacions. Aquests elements són els següents: destreses amb potencial heurístic, suggeriments heurístics, mètodes de resolució amb contingut heurístic, patrons plausibles, el gestor instruït i una concepció de la naturalesa de la tasca de resoldre problemes segons la qual aquesta es realitza amb finalitats epistemològiques; així com altres elements de naturalesa heurística com ara coneixements conceptuals i dels processos matemàtics, esquemes, algorismes, rutines, models...

2.3.2.2. Un model de competència en modelització

Puig i Monzó (2013) diuen que hi ha diferents maneres d'entendre el terme competència en el procés de modelització. Com aquests expliquen, Maaß (2006) realitza un estudi empíric i conclou que la competència en el procés de modelització inclou més components que el simple fet de ser capaç de recórrer els passos d'un procés de modelització i indica alguns factors importants que descriu com "competències metacognitives de modelat, fets estructurants, competències en argüir matemàticament i una actitud positiva (cap a la modelització)".

Nosaltres, al contrari que Maaß, no entendrem (en aquest cas) que la competència en el procés de modelització es limita a seguir els passos d'un mètode sinó que

considerarem la interpretació que fan Puig i Monzó (Monzó i Puig, 2008; Puig i Monzó, 2013) d'aquesta. És a dir, a partir de l'elaboració d'un llistat d'elements que intervenen en qualsevol procés de modelització, aquestos dedueixen quines són les competències necessàries. Els elements als quals ens referíem són els següents:

1. Un fenomen que es descriu mitjançant algunes mesures d'algunes magnituds
2. Una regressió entre les mesures
3. Un tipus de funció que s'ajusta mitjançant aquesta regressió
4. Una decisió sobre el tipus de funció que s'ajustarà entre un catàleg de funcions disponibles, basada en:
 - 4.1. Un coneixement de propietats qualitatives del fenomen
 - 4.2. Un coneixement de propietats qualitatives dels tipus de funcions disponibles
5. La determinació de la funció concreta d'eixe tipus, que descriu les dades obtingudes d'eixe fenomen concret observat
6. L'expressió de la funció en una forma canònica, elegida de manera que els paràmetres expressen propietats del fenomen que interessa estudiar

Puig i Monzó (2013, p.14)

A partir d'aquests elements, els autors plantegen una relació de les competències necessàries en el procés de modelització. Ens referim a les següents:

1. Propietats qualitatives dels tipus de funcions disponibles
2. Anàlisi qualitatiu del fenomen que s'observarà, respecte al mateix tipus de propietats
3. Formes canòniques dels tipus de funcions
4. Significat dels paràmetres en les formes canòniques
5. Efecte dels canvis en els paràmetres en les propietats qualitatives
6. Transformacions algebraiques per a portar una expressió algebraica a una forma canònica
7. Anàlisi qualitatiu de les limitacions del model

Puig i Monzó (2013, p.14)

Ara bé, d'una banda, de les competències que cal tenir en modelització destaca la importància del coneixement qualitatiu, no sols del fenomen que s'estudia sinó també de les famílies de funcions amb les quals es modelitzarà aquest. D'altra banda, des del punt de vista de la resolució de problemes, està demostrat que el conjunt de mecanismes de gestió i control del procés de resolució, el que Puig (1996) anomena gestor instruït, és un element fonamental perquè aquest procés siga efectiu.

Per tant, en particular per al cas dels problemes de modelització

[...] eixos coneixements qualitatius són un element crucial per a la gestió i el control del procés de resolució, ja que són els que fan possible la presa de decisions sobre quin tipus de funció serà la que s'utilitzarà com a model i el

control de la posterior adequació de la funció ja obtinguda com a model per a predir altres valors del fenomen que no s'han obtingut experimentalment.

Puig (en premsa)

Tot i això, cal destacar que, no sols és crucial l'anàlisi qualitatiu del fenomen en la gestió del procés, sinó també el coneixement de les característiques de les famílies de funcions i del significat dels paràmetres.

En definitiva, com que nosaltres considerem el procés de modelització com un cas de procés de resolució de problemes; com diuen Monzó, Puig i Navarro (en premsa), és necessari incorporar al model d'ensenyament la necessitat d'una bona gestió del procés i incloure en l'ensenyament els procediments específics que permeten realitzar-la.

Ara bé, per altra banda cal destacar que, com al nostre cas hem utilitzat un suport informàtic (iPad®) amb un software determinat, algunes de les competències citades abans es deriven directament de l'alumne al propi software de manera que si els alumnes li donen les instruccions pertinents, aquest les realitzarà de manera competent (Fillooy, 2006).

2.3.3. De la investigació en didàctica de l'àlgebra

Per últim, abordem la nostra problemàtica des de la perspectiva de la investigació en didàctica del àlgebra. Com diuen Puig i Monzó (2008), l'àlgebra al currículum de secundària ha de presentar-se, almenys, des de tres punts de vista:

1. L'àlgebra com un sistema de signes en què realitzar els processos de generalització, abstracció i demostració
2. L'àlgebra com un instrument per a la resolució de problemes a través de la traducció d'aquests a sistemes d'equacions o gràfiques de funcions
3. L'àlgebra com un sistema de signes que permet que els fenòmens modelats mitjançant funcions s'organitzen en famílies, les característiques de les quals s'estableixen i s'estudien en el pla de l'expressió

Puig i Monzó (2008, p.142)

El primer d'aquests punts de vista es pot trobar a les activitats, o materials d'ensenyament en general, en què s'estudien pautes en configuracions geomètriques o en conjunts ordenats de nombres, s'elaboren conjeitures expressades en llenguatge algebraic i es demostren utilitzant procediments en què el domini de les transformacions de les expressions algebraiques és important.

Pel que fa al segon punt de vista, és des del qual s'aborda la resolució de problemes d'enunciat verbal i engloba el procés de traducció del problema a quantitats i relacions entre quantitats a partir d'una lectura analítica d'aquest.

Per últim, el tercer punt de vista és el que ens ocupa en aquest treball ja que, en aquest cas, les expressions algebraiques es veuen com a relacions funcionals i el seu

significat està lligat als processos de traducció entre aquestes, les taules de dades numèriques i les representacions gràfiques.

Ara bé, com diuen Puig i Monzó:

En els tres casos, les transformacions algebraiques tenen sentit, no per elles mateixes, sinó per la possibilitat que ofereixen de mostrar que expressions distintes poden representar una mateixa situació, i perquè permeten obtenir aquelles expressions que són més convenientes per al tractament de la situació.

Puig i Monzó (2013, p. 11)

En particular, en el tercer cas, “les transformacions algebraiques tenen sentit [...] en la mesura en què garanteixen que qualsevol expressió algebraica podrà portar-se a una forma canònica”, igual que ocorre en el segon cas, però en aquest, a més “les formes canòniques estan elegides de manera que els coeficients (o paràmetres) indiquen propietats dels fenòmens modelats amb aquestes expressions” (Puig i Monzó, 2013, p. 11).

2.4. Altres enfoccs

A l’apartat anterior hem exposat els punts de vista des dels quals abordem la problemàtica de la modelització en l’ensenyament en el nostre treball. Així doncs, en aquest apartat presentarem altres enfoccs que són rellevants i que és important conèixer per tindre una visió més completa sobre el tema.

Des de fa unes dècades, l’ús d’aplicacions i models en l’educació matemàtica va començar a tenir una gran rellevància. Aquest fet es pot veure plasmat a les diferents conferències de l’ICTMA (*International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications*) així com a l’ICMI Study 14, *Modelling and Applications in Mathematical Education* (Blum, Galbraith, Henn i Niss, 2007). A més, actualment han sorgit nombrosos treballs relacionats amb el tema per tot arreu, dels que destaquen els desenvolupats pels diferents grups de treball provinents majoritàriament d’Alemanya i del continent americà.

Citarem, en particular, el treball de Blum i Niss (1991) que és interessant en el sentit en què tracta de recopilar tot allò que s’havia fet fins al moment sobre el tema per establir una espècie de marc teòric per als treballs relacionats amb la modelització. En particular, s’encarregaren de fer una revisió sobre l’estat en què es trobaven en aquell moment d’una banda, la investigació empírica o teòrica i, d’altra banda, els costums en la instrucció de les matemàtiques i de l’educació matemàtica; sobre les tendències recents i sobre les possibles línies de desenvolupament.

Per a nosaltres, resulta interessant la descripció que fan del procés de resolució de problemes aplicats i que detallarem a continuació. Però, abans d’explicar en què consisteix aquest procés, expliquem la noció que tenen d’alguns conceptes bàsics i en quin sentit els entren per tal d’evitar possibles malentesos. En particular,

començarem comentant què és per a Blum i Niss un problema i de quins tipus hi ha, per acabar parlant, així, de què és la matematització i en què consisteix.

En primer lloc, cal destacar que els autors defineixen un problema com una situació que porta associades certes qüestions obertes que repton intel·lectualment algú que no posseeix immediatament mètodes, procediments algoritmes... directes, suficients per respondre les qüestions. Ara bé, com es pot observar, aquesta noció de problema és relativa ja que depèn del resolutor, és a dir, potser el que per a algú és un problema, per a altre pot arribar a ser un simple exercici.

Des del punt de vista de les matemàtiques, els autors destaquen dos tipus de problemes: els aplicats i els purs. Pels primers es refereixen a aquells en què les qüestions que es plantegen pertanyen al món real (considerat com tot allò que està fora de les matemàtiques) encara que permeten involucrar alguns conceptes matemàtics, mètodes i resultats. Pels segons, es refereixen a aquells en què la situació plantejada es troba completament integrada en el món de les matemàtiques.

Així mateix, anomenen procés de resolució del problema a aquell en què es tracta el problema amb la intenció de resoldre'l (encara que finalment no s'aconsegueixca). Com hem distingit entre dos tipus de problemes de matemàtiques (aplicats i purs), els procediments pel qual es resolen també seran diferents. En aquest cas ens centrarem a explicar el procés de resolució de problemes aplicats, un esquema del qual es pot observar a la figura 3 de la pàgina següent. Abans de res, però, cal dir que decidírem triar aquest esquema per explicar aquest procés de resolució perquè fou el primer que apareix als escrits de Blum. Tanmateix, cal destacar que posteriorment se'n fan nombroses interpretacions que donen lloc a altres representacions semblants a aquesta però amb xicotetes modificacions (veure, per exemple, Blum i Borrromeo (2009)).

El procediment comença amb el plantejament d'una situació real que cal manipular (simplificar, idealitzar, estructurar, sotmetre a unes certes condicions o hipòtesis i fer-la més precisa segons la finalitat que persegueixca el resolutor) fins obtindre un model real, és a dir, un model que continga característiques de la situació original però que a l'estar esquematitzat permeta un acostament als significats matemàtics.

Així mateix, després d'açò, cal transformar el model real obtingut en un model matemàtic, cosa que consisteix a traslladar les dades, els conceptes, les relacions, les condicions i les hipòtesis al món de les matemàtiques. Cal destacar que aquest procediment és el que Treffers (1987) anomena matematització horitzontal. Arribats a aquest punt, cal destacar que anomenem matematització al pas 2 que apareix a l'esquema de la figura 3, mentre que el que cal entendre per modelització o construcció del model és la unió dels passos 1 i 2. A més, el procés de modelització no solament serveix per obtindre una simplificació de la situació, sinó també per crear

una imatge vertadera d'alguna part de la realitat depenent dels coneixements, les intencions i els interessos del resolutor.

Tornant al procés de resolució de problemes, el següent pas consisteix en treballar dins de les matemàtiques amb la finalitat d'obtenir conclusions, calcular i verificar en exemples concrets, aplicar models i resultats matemàtics coneguts, desenvolupar-ne de nous... Tot per obtenir resultats matemàtics que, com ja hem dit, no necessàriament coincidirán amb la solució del problema inicial, que no té perquè ser obtinguda. Cal destacar que aquest pas és el que Treffers (1987) anomena matematzació vertical.

Així doncs, els resultats obtinguts han de ser traslladats al món real ja que cal que siguin interpretats en relació amb la situació original. Aquest pas s'anomena la validació del model ja que el que es pretén és comprovar si aquest és adequat comparant-lo amb la situació de la qual partíem., és a dir, comprovar si està justificat utilitzar-lo per al propòsit pel qual va ser construït.

Ara bé, després d'haver validat el model potser apareguen discrepàncies de qualsevol tipus que ens porten a modificar o canviar de model. En altres paraules, aquest procés de resolució de problemes pot repetir-se diverses vegades, per la qual cosa, podem afirmar que el procés anterior és un bucle que es repeteix tantes vegades com és necessari depenent d'una sèrie de factors que influeixen.

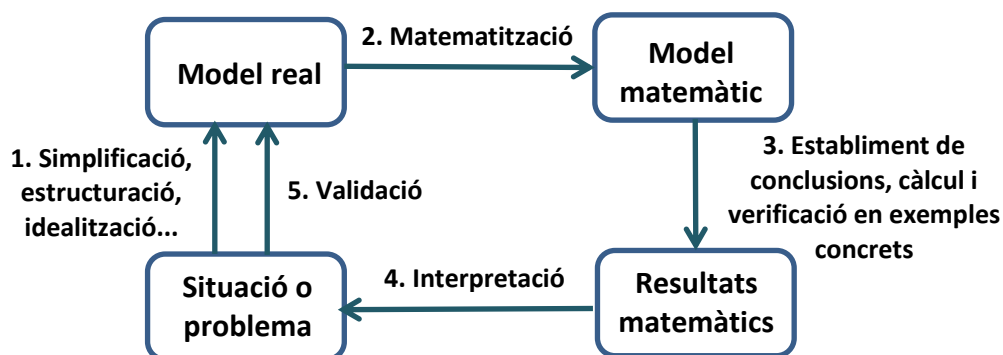


Figura 3. Esquema procés de resolució de problemes aplicats

Per acabar, cal destacar que a partir d'aquest enfoc han sorgit molts treballs internacionals, dels quals una bona recopilació és la que apareix al llibre de Kaiser, Blum, Borromeo i Stillman (2011), que recull les diferents idees sorgides com a conseqüència de les distintes conferències realitzades per l'ICTMA 14. Així doncs, també es poden trobar diferents estudis relacionats amb l'ensenyament de la modelització en els nombrosos articles publicats a la revista alemanya *ZDM*.

3. L'experiment d'ensenyament

L'estudi que realitzem consisteix a analitzar una situació d'ensenyament en la qual parelles d'alumnes estudien matemàticament un fenomen de la vida quotidiana (amb la intenció de matematitzar-lo). En particular, el fenomen del qual parlem és el bot vertical d'una pilota deixada caure des d'una determinada altura des del moment en què toca terra per primera vegada fins que el torna a tocar. Ara bé, aquesta situació d'ensenyament té lloc en tres parts clarament diferenciades. En la primera d'aquestes els alumnes fan un estudi qualitatiu del fenomen i de les famílies de funcions, previ a la realització d'aquest experimentalment, posteriorment s'efectua la representació del fenomen a estudiar i es grava utilitzant iPads® i, per últim, s'analitzen els resultats utilitzant com a ajuda alguns programes dels propis iPads®.

Així doncs, el nostre estudi continua amb la realització d'una entrevista a dues de les parelles per tractar d'entendre les seues respostes, d'averiguar més sobre les seues concepcions i, en cas de què siga necessari, tractar de modificar-les.

Per a això, aquest capítol constarà de quatre apartats en els quals explicarem les característiques de la població estudiada, el material emprat tant per arrebregar dades com per servir d'ajuda o de suport en algun moment de l'experiment, el procés detallat de l'estudi dividit per sessions i les dades obtingudes.

3.1. La població

La població que va participar al nostre experiment d'ensenyament fou la formada per un grup d'alumnes de 1r de batxillerat, entre 16 i 17 anys, de l'especialitat de ciències de la salut d'un centre de la Comunitat Valenciana. El grup estava format per un total de 16 alumnes, dels quals sis eren xics i deu xiques.

L'actitud del grup era, en general, participativa i la motivació i l'interès dels alumnes pel tema, els adequats per a l'aprenentatge. Quan als coneixements sobre aquest i la destresa per interpretar i resoldre les preguntes amb major o menor facilitat, es podia observar una certa diversitat, res més enllà de la que caracteritza qualsevol aula.

Ara bé, l'experiment es va efectuar per parelles, les mateixes per a totes les sessions, ja que, com diu Shoenfeld (1985), el treball per parelles afavoreix la verbalització per part dels alumnes d'allò que estan fent, pensen o volen fer. A més, com diuen Balacheff i Laborde (1985), el treball en parelles no sols és una font d'explicacions, sinó també una font d'enfrontament amb els altres, cosa que aporta dinamisme a la tasca a realitzar i que és positiu ja que fomenta l'aparició de contradiccions que, probablement, no es percebrien si els alumnes treballaren en solitari.

Així mateix, cal destacar que a l'hora de formar els grups, els vàrem donar plena llibertat als alumnes per tal que foren ells mateixos els que elegiren el company amb qui treballar. En total, sorgiren un total de huit parelles a les quals els assignàrem un nombre de l'u al huit, nombre que utilitzarien per identificar-se a les fitxes i que serviria per assignar-los un determinat iPad® (ja que aquests estaven numerats amb etiquetes). Per tal d'aprofitar els beneficis de treballar en grup, en cas de què el nombre d'alumnes haguera sigut imparell, hauríem format un grup de tres, de manera que cap alumne haguera hagut de treballar individualment.

Pel que fa al context en què es trobaven els alumnes en el moment en què va tindre lloc l'experiment, cal destacar que encara no tenien coneixements sobre modelització, tot i que sí que havien estudiat diverses famílies de funcions i havien treballat amb aquestes en la forma canònica $y=a \cdot f((x-c)/b)+d$ utilitzant calculadores gràfiques (a cursos anteriors). En particular, segons el currículum en vigor en la Comunitat Valenciana (Generalitat Valenciana, 2007), ja havien rebut ensenyament sobre funcions lineals, quadràtiques, de proporcionalitat inversa i exponencials a cursos anteriors. A més, cal destacar que la formació d'aquests alumnes al llarg de la seua etapa educativa anterior va estar basada en una metodologia innovadora, que no és l'habitual en les classes de matemàtiques, i que es basa en la resolució de problemes.

3.2. Material d'ensenyament

Durant l'experiment es varen emprar tot tipus de materials però, si ens fixem en la finalitat per a la qual s'usaren per classificar-los en distingim de dos tipus distints: aquells que s'empren per arreplegar dades i aquells que aporten informació o serveixen d'ajuda als alumnes. Per això, dividim l'apartat en dos parts en els quals descrivim en què consisteix exactament el material i amb quina finalitat específica s'utilitza o s'elabora.

3.2.1. Material per arreplegar dades

Primerament, cal comentar que el material que es va emprar per fer la recollida de dades va ser el següent:

- Dues fitxes que s'administraren en dos moments distints de l'experiment (veure a l'annex 2)
- Un iPad® per a cada parella d'alumnes, dotat cadascun d'aquests amb els programes Video Physics®, Data Analysis® i Free GraCalc® per gravar la representació del fenomen, treballar sobre ell i estudiar-lo amb detall

3.2.1.1. Fitxes

Les fitxes que s'empraren per extraure la informació són una xicoteta modificació de les que apareixen a Monzó, Puig i Navarro (en premsa) i que es poden trobar a l'annex 1. Tot seguit, especificarem en què consisteix cada ítem, amb quina finalitat es va plantejar cadascun d'aquests i quines modificacions presenten respecte a la fitxa original.

Abans de res, però, cal comentar que la redacció dels ítems es va fer de manera que els alumnes tingueren total llibertat tant per triar la resposta com per triar el camí pel qual arribar a aquesta. A més, en tot moment intentàrem evitar que l'espai suposara una limitació per a aquests, per la qual cosa, en aquells ítems en què preteníem que donaren un raonament el més complet possible, els indicàrem per escrit que podien continuar escrivint a la part de darrere del full si així ho necessitaven.

Ara bé, com ja hem comentat, aquestes fitxes s'administraren als alumnes en dos parts o moments distints. La primera d'aquestes contenia l'enunciat on s'explicava en què consistiria el fenomen a estudiar i les preguntes que calia que responeren abans de la representació d'aquest (ítems 1, 2 i 3), amb les quals es pretenia indagar sobre les idees prèvies dels alumnes i servir de guia en la gestió del procés de modelització; mentre que la segona contenia les preguntes posteriors (ítems 4, 5, 6 i 7) amb les quals es pretenia estudiar el fenomen i obtindre informació sobre les concepcions dels alumnes i sobre el que pensaven aquests després d'haver-lo realitzat experimentalment. A més, cal destacar que; com expliquen Monzó, Puig i Navarro (en premsa); l'elecció de les preguntes es va fer tenint en compte allò que diuen Puig i Monzó (2008) sobre l'existència d'elements que són comuns en qualsevol procés de modelització i, a partir dels quals, es defineixen les competències que cal tenir per efectuar-lo.

Passem, ara sí, a la descripció detallada dels ítems que conformen les fitxes. En primer lloc, cal dir que el problema estava enunciat en un context real amb l'objectiu de què, com ja hem explicat a l'apartat 2.3.1., els alumnes elaboraren i refinaren els conceptes que treballarien posteriorment a partir de la pròpia situació

del problema. Ara bé, cal destacar que es va canviar lleugerament la redacció de l'enunciat de l'experiment encara que, això sí, tractant de no modificar el significat global d'aquest. Concretament, una de les modificacions que realitzarem fou la forma de dir què era el que es volia estudiar exactament, de manera que escrivirem que el que es pretenia analitzar era el "moviment de tir vertical d'un cos en l'atmosfera" (com a conseqüència d'un xoc elàstic), en compte del "moviment de caiguda lliure i xoc elàstic" com figurava a la fitxa original. Açò ho férem amb l'objectiu de què els alumnes no confongueren el que realment es volia estudiar, és a dir, la relació entre el temps i l'altura d'una pilota des que aquesta tocara el terra per primera vegada fins que el tornara a tocar, amb la relació entre el temps i l'altura de la pilota en tot l'experiment.

Ítem 1. Pel que fa a aquest ítem, cal destacar que és va plantejar perquè els alumnes representaren el núvol de punts que pensaven que obtindrien després d'analitzar (a les imatges de l'experiment) la relació entre el temps i l'altura de la pilota des del moment en què aquesta tocara el terra fins que el tornara a tocar, és a dir, es pretenia que els alumnes realitzaren un anàlisi qualitatiu del fenomen, cosa que, com expliquen Monzó, Puig i Navarro (en premsa), és un element fonamental en la gestió del procés de resolució d'un problema de modelització i, per això, el seu ensenyament es va incloure de manera explícita.

Ítem 2. Quant al segon ítem, es va posar perquè els alumnes triaren, entre una llista de famílies de funcions, aquella a què pensaven que pertanyeria la gràfica de la funció que ajustaria al núvol de punts representats a l'ítem 1 que, com sabem per les lleis de la física, és la família de funcions quadràtiques.

Ara bé, les funcions que decidírem incloure a aquesta llista són distintes a les que apareixen a la fitxa original ja que, en aquell cas, s'escolliren les funcions que tenia incorporades la calculadora Classpad® 300 o 330, dispositiu per al qual es varen dissenyar les fitxes inicialment. Per contra, nosaltres optarem per copiar algunes de les funcions de la llista que apareix al programa Data Analysis® ja que aquest és el programa que s'utilitzaria després d'haver realitzat l'experiment i d'haver obtingut un núvol de punts per trobar la funció de regressió. Tanmateix, cal destacar que no les copiarem totes ja que pensarem que, probablement, algunes no serien conegudes pels estudiants i, per tant, les ignorarien. A canvi, decidírem incorporar com a opció la funció $y=a \cdot \sin((x-c)/b)+d$ ja que, a més d'estar a la fitxa original, ens va semblar interessant que apareguera pel fet de què potser alguns alumnes pensarien en aquesta per ser una funció que ajusta als punts. També incorporarem una opció que permetera als alumnes definir una funció distinta a les donades. D'altra banda, notem que a la llista apareixien dues famílies que eren disjunctes, estem parlant de les famílies $y=ax^2+bx+c$ i $y=ax^2+bx$, la incorporació de les quals va permetre, posteriorment, identificar les concepcions que tenien els alumnes i les interpretacions que feien dels paràmetres ja que, en molts casos, els alumnes no

les veien com que una era una subfamília de l'altra, sinó com a famílies disjunctes. Tanmateix, cal remarcar que la incorporació d'aquestes no es va fer amb cap motiu intencionat, sinó només perquè les dues apareixien al programa que acabem de mencionar.

D'altra banda, cal comentar que, com diu Puig (en premsa), una família de funcions es pot representar amb formes canòniques distintes que posen de relleu distints aspectes bé de la funció, bé de la gràfica o bé de la seua expressió algebraica. Cal destacar que la forma canònica que es va triar per a les diferents famílies de funcions d'aquest ítem és la que apareix al programa que acabem de mencionar. Tanmateix, com que sovint els alumnes estan més familiaritzats amb l'expressió de la funció quadràtica escrita de la forma $y=A(x-B)^2+C$ ja que d'aquesta manera es pot atribuir significat als paràmetres (a l'establir una relació entre els valors d'aquests i els diferents moviments de la gràfica de la funció respecte a la funció $y=x^2$), decidírem, només en aquest cas, escriure també aquesta forma canònica per a la funció de l'apartat b).

Ítem 3. Ara bé, a l'ítem 3, es demanava als alumnes que explicaren perquè elegiren la família de funcions anterior amb l'objectiu de poder esbrinar què era el que els va fer decantar-se per una família o per altra i de veure quina interpretació feien de les distintes famílies i dels paràmetres que apareixien en algunes d'aquestes. A més, com ja hem dit, els donàrem l'opció de què pogueren continuar escrivint a la part posterior del full perquè l'espai no fora una limitació a l'hora d'explicar-se.

Seguidament, passem a la segona part de les fitxes, és a dir, als ítems que havien de respondre després d'haver representat el fenomen. Notem ara que obviàrem dos dels ítems de les fitxes originals (el 4 i el 5) ja que aquests eren, més bé, instruccions que preguntes a les quals hi havia que contestar, per la qual cosa decidírem llevar-los i indicar el que havien de fer verbalment a l'inici de la sessió.

Ítem 4. Aleshores, el primer ítem d'aquesta segona part és el 4, amb el qual es pretenia que els alumnes, a partir dels punts obtinguts a l'experiment, trobaren la funció de regressió que millor ajustara a aquests, cosa que, com s'especifica a l'enunciat, podien fer o bé tenint en compte les característiques de la corba, o bé utilitzant l'aplicació Data Analysis® i provant quina de les funcions que apareixia a la llista ajustava millor. A més, aquesta aplicació permetia obtindre també, de forma automàtica, els valors dels paràmetres de la funció elegida, cosa que feia possible estalviar prou de temps. Ara bé, cal destacar que aquest ítem es va posar amb un segon objectiu, el de fer que els alumnes reflexionaren sobre l'anàlisi qualitatiu del fenomen per decidir si continuaven considerant que la funció elegida a l'ítem 2 era la que millor descrivia el fenomen estudiat o, per contra, no ho era i decidien canviar-la (és a dir, per ajudar-los en la gestió del procés de modelització).

Ítems 5 i 6. Ara bé, pel que fa als ítems 5 i 6, el que es pretenia era que els alumnes d'una banda, calcularen una sèrie d'imatges, algunes de les quals estaven fora del domini de definició de la funció, i d'altra, veure si eren capaços d'adonar-se'n de què no tenia sentit calcular aquests valors ja que la funció de regressió sols representava el fenomen en l'interval en que l'estaven estudiant, i no fora d'aquest. Així doncs, a diferència del que es fa a la fitxa original, a l'ítem 5 afegírem que podien utilitzar el programa Free GraCalc® per ajudar-se a calcular les imatges dels punts. Altrament, a l'ítem 6, que consta de dos apartats, es pretenia que els alumnes explicaren, si així ho pensaven, perquè hi havia valors que no tenien sentit calcular. En particular, al primer apartat s'esperava que donaren una explicació general, sense especificar a quins valors es referien exactament, cosa que s'esperava que feren a l'apartat següent.

Ítem 7. Per últim, l'ítem 7 consta també de dos apartats, en el primer d'aquests els demanàvem que trobaren els valors del temps en què la pilota colpejaria el terra, mentre que en el segon els demanàvem que trobaren els valors del temps però ara per als quals aquesta arribaria a la màxima altura. Cal destacar que tant un apartat com l'altre es plantejaren per veure si els alumnes eren capaços d'interpretar les dades obtingudes a l'experiment per donar resposta a ambdues qüestions i, per això, els preguntàrem com obtenien el resultat, amb l'objectiu de què explicaren el procediment que utilitzaren ja que si només escrivien el valor numèric, probablement no podríem determinar com ho havien fet.

Ara bé, basant-se en les dades de l'experiment, és important destacar que hi havia diverses maneres de respondre cadascun dels apartats. Per exemple, l'apartat a) es podia respondre ràpidament mirant les coordenades temporals del primer punt i de l'últim obtingudes de l'experiment però també es podia fer calculant l'altura del terra i, a partir d'aquest valor, trobar el temps (o bé gràficament, o bé plantejant una equació i resolent-la...). D'altra banda, l'apartat b) també es podia resoldre de moltes maneres: mirant la coordenada temporal del punt de màxima altura a les dades, calculant el punt mitjà entre els dos valors obtinguts a l'apartat anterior...

3.2.1.2. iPads

Com hem dit, els iPads® no només s'utilitzaren per gravar la representació del fenomen (és a dir, del bot d'una pilota deixada caure des d'una determinada altura) sinó també per estudiar-lo amb detall. Per això, a continuació, expliquem per a què s'utilitzaren cadascun dels programes citats abans (Video Physics®, Data Analysis® i Free GraCalc®).

– El programa Video Physics® va permetre enregistrar un vídeo i obtindre un núvol de punts després d'haver-lo manipulat.

Una vegada gravat el vídeo, el programa tenia una sèrie d'opcions que permetien prendre una mesura de referència (indicant sobre un fotograma del vídeo el que mesurava un segment entre dos punts qualsevols, cosa que feia que aquest poguera mostrar la mesura de qualsevol distància de la imatge basant-se en aquesta), fixar els eixos coordinats on es desitjara i marcar una sèrie de punts de manera que determinaren un moviment. Així doncs, cal destacar que l'ordre en què es podien realitzar aquestes operacions no era important.

Conseqüentment, del vídeo anterior s'obtenien tres variables: x (desplaçament en l'eix d'abscisses), y (altura o desplaçament en l'eix d'ordenades) i t (temps), amb les quals el programa generava diverses gràfiques relacionant-les. Ara bé, aquestes s'organitzaven en tres pantalles de la manera següent, tal i com expliquen Monzó, Puig i Navarro (en premsa):

A la primera pantalla apareixia

- La relació entre les coordenades x i y

A la segona pantalla

- La relació entre el temps t i l'abscissa x
- La relació entre el temps i la velocitat del desplaçament en l'eix d'abscisses

A la tercera pantalla

- La relació entre el temps t i l'ordenada y
- La relació entre el temps t i la velocitat de desplaçament en l'eix d'ordenades

Així doncs, abans de passar a explicar quins són els altres programes que s'utilitzaren, cal destacar que el programa Video Physics® presentava un inconvenient: aquest no permetia accedir directament als valors quantitius obtinguts a les gràfiques de les funcions. Tot i això, sí que permetia enviar per correu electrònic un arxiu que els contenia, ara bé, aquest arxiu no era fàcilment llegible ja que presentava en una mateixa columna les coordenades x i y dels punts, barrejades amb altres signes. Això sí, amb una mica de paciència i temps era possible construir una taula ordenant-los.

– El programa Data Analysis® va servir per obtindre la funció de regressió que millor ajustava a un determinat núvol de punts (introduïts prèviament) d'entre totes les que tenia a una llista. El programa donava tant la representació gràfica de la funció (indicant si l'ajust era bo o no a partir del coeficient de correlació) com els valors dels paràmetres de la fórmula, per tant, les competències corresponents es derivaven directament dels alumnes al programa i aquests només havien de prendre la decisió de quina funció pensaven que ajustaria millor.

– El programa Free GraCalc® va permetre representar gràficament una funció introduïda a partir de la seua fórmula i construir taules per calcular els valors de les imatges d'aquesta.

Ara bé, el funcionament d'aquests programes s'explica als fulls d'instruccions que es troben a l'annex 3 i dels quals parlarem a l'apartat següent.

3.2.2. Material de suport

Ara bé, com ja hem mencionat, no sòls empràrem material per recollir dades, sinó també per donar instruccions concises del que hi havia que fer i per proporcionar informació als alumnes. Amb aquesta finalitat, s'elaboraren els següents documents:

- Uns fulls d'instruccions on es descrivia el funcionament dels programes que hem mencionat abans i s'explicava quin ús s'havia de fer d'aquests (veure a l'annex 3).
- Un full per a ajudar els alumnes a calcular manualment les coordenades dels punts que apareixien a la gràfica que relacionava el temps amb l'altura en el programa Video Physics® (veure a l'annex 4).
- Un full per proporcionar les coordenades dels punts ja calculades als alumnes en cas de què hi haguera algun grup que no disposara de temps suficient per calcular-les o no sabera com fer-ho (veure a l'annex 5).

Passem a continuació a explicar amb més detall per a què serveix cadascun dels fulls i amb quin objectiu es varen elaborar.

3.2.2.1. Fulls d'instruccions

Degut que es disposava d'un nombre reduït de sessions, concretament de dues, i de què, probablement, els alumnes era la primera vegada que treballaven amb els programes ja mencionats; es va decidir elaborar uns fulls on es proporcionaren algunes instruccions d'ús d'aquests programes. A més, com que pensàrem que el més probable seria que cada parella d'alumnes treballara al seu ritme, aquestes instruccions suposarien una ajuda perquè aquells que acabaren abans no hagueren d'esperar a què acabaren els seus companys per conèixer què era el que havien de fer a continuació o per evitar haver d'anar explicant-los-ho parella per parella.

Cal destacar que en aquests fulls s'explica el funcionament dels tres programes a utilitzar, però també la utilitat amb la qual preteníem usar-los per al nostre cas.

3.2.2.2. Full d'ajuda per al càlcul de punts

Aquest full es va construir per ajudar als alumnes a trobar les coordenades dels punts que donaven la relació entre el temps i l'altura en el programa Video Physics® de manera manual, és a dir, sense haver d'enviar les dades per correu i reinterpretar-les. La metodologia que s'emprava per al càlcul consistia bàsicament a mesurar distàncies i trobar la mesura que volíem establint les proporcions

corresponents. En concret, el que apareixia al full era la manera de calcular les coordenades x i y d'un punt basant-se en un exemple d'un cas particular. Cal destacar que aquest full es va dissenyar per repartir-se com a ajuda només en cas de què als alumnes no se'ls ocorreguera com realitzar el càlcul per ells mateixos.

3.2.2.3. Full de coordenades

Per últim, elaboràrem un full amb unes coordenades per facilitar-les en cas de què hi haguera algun grup d'alumnes als que no els donara temps de calcular els punts o que, fins i tot amb l'ajuda del full de l'annex 4, no saberen com fer-ho. Cal destacar que aquestes coordenades eren d'un experiment del que no teníem més dades a banda de les pròpies coordenades, és a dir, no sabíem com s'havien obtingut al programa Video Physics®, per la qual cosa, no coneixíem on es col·locaren els eixos coordinats ni tampoc en quina part de la pilota es marcaren els punts.

3.2.2.4. Ús del material de suport

Ara bé, cal comentar que, per les raons que explicarem a continuació, part del material que acabem de descriure, no es va utilitzar amb l'objectiu amb què es pretenia inicialment o, directament, no es va utilitzar. Tanmateix, hem decidit descriure'l en aquest apartat ja que pensem que podria ser d'utilitat per a futurs estudis en què les condicions de treball foren distintes a les nostres. El material del qual estem parlant és el full d'ajuda per al càlcul de punts (que finalment no es va utilitzar) i el full de coordenades (que es va utilitzar amb una finalitat diferent de la que preteníem en el moment en què el vàrem elaborar).

La realització d'aquest canvi en l'ús de material es degué, principalment, al fet de què, com ja hem dit, el programa Video Physics® no permetia obtenir les dades de les coordenades dels punts de manera directa i immediata. Llavors, després d'estudiar les distintes possibilitats per fer que els alumnes treballaren amb les seues pròpies dades (les obtingudes dels vídeos que gravaren cadascun d'ells) arribàrem a la conclusió de què podíem aconseguir-ho de dues maneres: o bé donant-los indicacions als alumnes perquè calcularen manualment les coordenades dels punts i, en cas de què no saberen com fer-ho, facilitar-los el full d'ajuda per al càlcul de punts (que era la finalitat per a la qual s'havia elaborat aquest), o bé enviant-nos al correu electrònic les dades de cada alumne en acabar la primera sessió i elaborar taules personalitzades amb els valors de cadascun d'ells per entregar-los-les a l'inici de la segona sessió.

Ara bé, tot i que les dues opcions semblaven, a priori, viables, ambdues foren descartades. D'una banda, la primera fou descartada per la falta de temps de què es disposava ja que, tot i que el càlcul de coordenades estava previst fer-se a l'inici de la segona sessió i cadascuna d'aquestes tenia una durada de 55 minuts, els alumnes no haurien disposat de temps suficient per realitzar el càlcul de les

coordenades (que pràcticament els haguera ocupat tota la sessió) i de respondre la segona fitxa completa. D'altra banda, teníem la possibilitat d'enviar les dades per correu i elaborar taules amb els valors de les coordenades corresponents, opció que es va esfumar al conèixer la restricció de la xarxa del centre ja que disposava d'un tallafocs que només permetia tres connexions per usuari.

Per tant, el que decidírem fer finalment fou utilitzar les dades del full de coordenades com si foren les que havien obtingut ells al programa Video Physics® i deixar l'opció de calcular els punts mesurant sobre la pantalla dels iPads® per al cas de què hi hagueren alumnes que acabaren abans d'hora el que hi havia previst fer per a la primera sessió. Malgrat tot, cal destacar que açò ho férem ja que el que realment ens interessava era el treball dels alumnes amb les dades en sí, no necessàriament que utilitzaren les que ells havien obtingut al seu propi experiment. Tanmateix, tot i que haguera estat bé poder fer-ho amb les seues pròpies dades, degut a aquesta decisió, s'obtenen altre tipus de resultats que esdevenen prou interessants per al nostre estudi i que comentarem més endavant.

3.3. Descripció del procediment seguit

A continuació, abordem la descripció del procediment seguit per a portar a terme l'estudi que vàrem realitzar.

Primerament, cal destacar que l'experiment es va efectuar en tres sessions dividides en dues parts: l'ensenyament i les entrevistes. D'una banda, l'ensenyament va tenir una durada de dues de les sessions i va consistir fonamentalment en: 1. la realització per part dels alumnes d'una fitxa prèvia a la representació del fenomen a estudiar, 2. la gravació i l'anàlisi d'aquest i 3. la realització d'una fitxa posterior. D'altra banda, les entrevistes duraren una sessió i es realitzaren a dues parelles amb l'objectiu d'averiguar l'origen de les respostes així com les concepcions prèvies dels alumnes sobre el tema estudiat. En particular, les dues sessions d'ensenyament van tindre lloc els dies 23 i 24 de maig, mentre que les entrevistes foren el dia 7 de juny, dues setmanes després.

Abans de passar a la descripció de les seccions, cal destacar que hi ha dos factors importants que influïren en el desenvolupament de l'experiment i en els resultats obtinguts: d'una banda el temps, ja que per a les sessions d'ensenyament només disposàvem de dues classes de 55 minuts cadascuna, per la qual cosa vam haver d'adaptar-nos a aquest, i, d'altra banda, la possible interferència entre les parelles, ja que aquestes no estaven completament aïllades, per la qual cosa podia haver-se produït alguna comunicació entre elles i, conseqüentment, una influència en els resultats obtinguts.

Així mateix, passem a descriure amb detall cadascuna de les tres sessions. Cal destacar que parlarem no sòls del procediment seguit i de les actuacions dels alumnes, sinó també del material emprat i dels problemes sorgits.

3.3.1. Sessió 1. Treball amb la primera fitxa i gravació de l'experiment

Lloc i material emprat. Primerament, cal destacar que les dues sessions d'ensenyament teniren lloc a l'aula de matemàtiques i el material necessari per realitzar la primera d'aquestes foren quatre pilotes de voleibol de goma (una per cada dues parelles, ja que, per qüestions de limitacions de l'espai no convenia agafar-ne més i tampoc per no ocasionar massa rebombori a l'aula), huit fitxes (perquè les emplenaren els alumnes abans de representar el fenomen), huit iPads® (per gravar-lo i estudiar-lo), huit fulls d'instruccions, huit fulls d'ajuda per al càlcul de punts (per si algun alumne realitzava la tasca prevista que poguera continuar fent feina i intentara calcular-los), un regle (per mesurar les coordenades dels punts sobre l'iPad®) i un metre (per prendre una mesura de referència real i introduir-la, posteriorment, al programa VideoPhysics®).

Procediment. El primer que férem fou explicar-los als alumnes en què consistiria el que ens disposàvem a fer en les properes dues sessions. Els comentàrem que anàvem a realitzar un estudi sobre la trajectòria d'una pilota quan aquesta es deixa caure des d'una determinada altura i que, en particular, estudiàriem la relació entre l'altura i el temps des del moment en què toca el terra fins que el torna a tocar. Els diguérem que l'estudi es faria en tres parts: primer es faria una fitxa prèvia, després representarien el fenomen i el gravarien i, finalment, l'estudiarien responnent les preguntes d'una segona fitxa. A més, els comentàrem que tot l'estudi es faria per parelles i que, per tant, calia comunicar-se entre ells i pensar les respostes entre els dos membres del grup. Així mateix, que si tenien algun dubte durant la realització de l'estudi, no dubtaren en fer-nos-ho saber i que ens avisaren a l'acabar qualsevol cosa (després d'emplenar la fitxa, després de gravar el vídeo a l'iPad...) per indicar-los què era el que havien de fer a continuació i assegurar-nos de què ho feien tot com calia.

Seguidament, com hem dit, s'organitzaren els alumnes per parelles, els assignàrem un nombre de l'u al huit i els repartírem la primera fitxa. A més, els indicàrem que era molt important el nombre assignat ja que els permetria identificar-se a les fitxes, així com recuperar la informació que guardaren als iPads® perquè estiguera disponible per a la sessió següent.

Conforme anaren acabant la primera fitxa, els repartírem un iPad®, amb el nombre corresponent del grup, i els fulls d'instruccions. A més, els comentàrem, en general, que havien de gravar un vídeo representant el fenomen que estaven estudiant i que havien de llegir el full d'instruccions per saber com havien de fer-ho. Els vàrem dir que només havien de llegir les primeres dues pàgines i que ens avisaren després de gravar el vídeo per veure si ho havien fet correctament. Abans d'això, els advertírem de què a l'hora de gravar-lo s'havia de poder observar tota la trajectòria de la pilota, no havien de moure l'iPad®, s'havia de fer des d'una distància prudent (ni des de molt prop ni des

de molt lluny) i s'havien de fixar en què la pilota botava en el mateix lloc en què ho havia fet la primera vegada. Així mateix, els diguérem que marcaren els punts que defineixen la trajectòria de la pilota on ells creguessen i posàrem èmfasi en què després de gravar el vídeo, era important que col·locaren els eixos coordenats on pensaven que quedaria millor la funció resultant, a diferència del que es va fer en l'experiment que es detalla en Monzó, Puig i Navarro (en premsa), en el que s'els va dir als alumnes que col·locaren l'origen de coordenades en el primer punt marcat.

Després de gravar el vídeo, els alumnes seguiren el procediment indicat als fulls d'instruccions (mirar l'annex 3) per marcar sobre el vídeo una mesura de referència i un conjunt de punts (que descriuen la trajectòria de la pilota) i per fixar els eixos coordenats. Ara bé, com que tots els alumnes utilitzaren les cadires de classe per realitzar l'experiment, els demanàrem a una de les parelles que agafara el metre i mesurara la distància entre una pota i altra d'aquesta per obtindre, així, una mesura de referència, que és la que usarien per introduir al programa. Aleshores, la mesuraren i l'apuntaren a la pissarra perquè tot el món sabera quina era i no haver-ho de fer més vegades.

A falta de cinc minuts perquè finalitzara la classe i mentre alguns alumnes continuaven l'anàlisi del vídeo, d'altres ja havien acabat la feina, per la qual cosa els comentàrem que miraren els gràfics resultants i que es fixaren en aquell que representava la relació entre el temps que transcorre i l'altura a què es troba la pilota en cada instant (notem, per tant, que la posició en què col·loquen l'eix de les y en Video Physics® no influeix per a res ja que després només s'estudia la relació entre l'altura i el temps.). Els comentàrem que el que es faria a continuació seria estudiar més profundament els punts obtinguts a la gràfica però, que hi havia un inconvenient, ja que el programa Video Physics® no permetia conèixer les coordenades d'eixos punts exactament, per la qual cosa els diguérem que havien de fer-ho a mà. Els diguérem que pensaren com fer-ho i que, si sabien, que ho intentaren. A més, que disposàvem de regles per si en necessitaven. Ara bé, cal comentar que cap d'aquestes parelles va saber com realitzar el càlcul de les coordenades dels punts, probablement perquè tenien poc de temps per pensar però també perquè aquest càlcul no és tan evident com sembla ja que, depenent de com es faça la gravació del vídeo, pot passar que l'escala de l'eix x no siga la mateixa que la de l'eix y a més de què l'origen de coordenades no té perquè aparèixer al gràfic, cosa que complica encara més, si cap, el càlcul.

Problemes sorgits. Cal comentar que durant el transcurs d'aquesta sessió va sorgir algun que altre contratemps, en particular durant gravació del vídeo.

Com sabem, les gravacions es podien fer de dues maneres: o bé des del programa Video Physics® (tal com s'explica als fulls d'instruccions) o bé des de l'aplicació Càmera d'iPad® i després exportant el vídeo al programa. Ara bé, cal destacar que tots els alumnes ho feren utilitzant l'aplicació Càmera i, a l'hora d'exportar els vídeos al

programa, a molt d'ells els apareixia un missatge d'error en pantalla que els impedia fer-ho. Tot semblava apuntar a què calia canviar la configuració dels dispositius per solucionar-ho, però com que açò suposaria una pèrdua de temps prou gran, decidírem que la millor opció seria que tornaren a fer les gravacions però ara des de la pròpia aplicació, cosa que va funcionar amb èxit.

3.3.2. Sessió 2. Treball amb la segona fitxa i amb l'iPad

Lloc i material emprat. La segona sessió va tindre lloc també a l'aula de matemàtiques i el material que preparàrem per a cada parella foren els fulls d'instruccions, la segona part de les fitxes, el full de coordenades i els iPads®.

Procediment. Només entrar a l'aula, els comentàrem als alumnes el que es faria en eixa sessió. Els repartírem a cada parella l'iPad® que havia utilitzat el dia anterior, el full de coordenades i la segona fitxa. Els explicàrem que el que havien de fer tot seguit era continuar analitzant el fenomen que havien representat i que els punts que els facilitàvem al full de coordenades es corresponien amb els punts de la gràfica que havien obtingut el dia anterior, la que representava la relació entre el temps i l'altura de la pilota. Ara bé, els comentàrem també que aquestes dades no eren exactament les del seu propi experiment, sinó les d'un altre semblant, tot i que s'havien obtingut de la mateixa manera que ells havien obtingut les seues (utilitzant el programa Video Physics®, fixant l'eix d'abscisses...). A més, els diguérem que tots tenien les mateixes coordenades dels punts, que n'havien de triar 6 o 7 i les havien d'utilitzar per calcular la funció de regressió que millor ajustara a aquests.

Els comentàrem també que podien emprar els programes Data Analysis® i Free GraCalc® per a ajudar-se a realitzar els distints càlculs que els demanàvem a la fitxa: Data Analysis® per calcular la funció de regressió que millor ajustava als punts i Free GraCalc® per veure la representació gràfica de la funció i per calcular els valors de les imatges dels punts que no coneguem. A més, els diguérem que l'explicació del funcionament d'aquests es trobava, de nou, al full d'instruccions però que si tenien algun dubte, que ens ho comunicaren.

La sessió va transcórrer amb normalitat, tot i que alguns alumnes no varen tindre temps d'acabar d'emplenar la fitxa i varen escriure com hagueren realitzat els càlculs en cas d'haver-ne tingut.

Problemes sorgits. Cal comentar que durant aquesta sessió també es va produir alguna incidència ja que el programa Data Analysis® no funcionava correctament a l'iPad® que estava utilitzant la parella número 7 ja que elegien la funció que havia d'ajustar als punts i aquesta no ajustava (mirar la figura 7 de l'annex 11), cosa que es va solucionar canviant-los el dispositiu per un altre.

3.3.3. Sessió 3. Les entrevistes

Lloc i material emprat. Primerament, cal comentar que el lloc escollit per realitzar les entrevistes fou el departament de matemàtiques del centre ja que es tractava d'un lloc on els alumnes entrevistats estarien aïllats de la resta de la classe i on no pogueren escoltar cap mena de soroll que els destorbara.

D'altra banda, el material que vàrem utilitzar durant aquesta sessió varen ser les fitxes emplenades pels alumnes, els fulls de coordenades, un iPad® (que contenia tant els programes utilitzats com els vídeos ja manipulats pels alumnes), algun full en blanc (per si en necessitaven per escriure qualsevol cosa) i dos dispositius de gravació (una gravadora de veu Roland Edirol® R-09HR, per gravar so, i un telèfon mòbil per gravar so i imatge).

Procediment. En aquesta última sessió, van tenir lloc les entrevistes a dues de les parelles que participaren en l'experiment (elegides utilitzant els criteris que es detallen a l'apartat 4.2), amb l'objectiu d'obtenir més informació sobre aquestes. Quant al caràcter de l'entrevista, decidírem que fora, bàsicament, una entrevista de diagnòstic per detectar l'origen dels resultats obtinguts però, també intentàrem incorporar ensenyament ja que tractàrem de guiar als alumnes, a partir de preguntes i suggeriments, perquè adquiriren certs coneixements.

Passem, ara sí, a descriure com va tindre lloc la tercera sessió. El primer que férem a l'arribar a la l'aula, va ser comprovar que els alumnes que pertanyien a alguna de les parelles a entrevistar estigueren presents, cosa que realment va ser així. Aleshores, els explicàrem que el que es faria a continuació seria agafar a algunes de les parelles d'una en una i fer-los una entrevista en què els faríem preguntes relacionades amb les respostes què havien donat a les fitxes, entre altres coses. Els comentàrem també que aquestes es realitzarien al departament de matemàtiques (perquè la resta d'alumnes pogueren seguir el ritme de la classe) i que els alumnes que participarien serien els de les parelles 1 i 2.

Primerament va tindre lloc la entrevista de la parella 1 i després la de la 2 i cadascuna va tindre una duració d'uns 22-23 minuts. Així mateix, cal destacar que a l'inici de cada entrevista, els comentàrem que serien gravats però que en tot moment es mantindria el seu anonimat. Per aquesta raó, identifiquem als alumnes de la parella 1 com A i B, i als de la parella 2, com C i D. Cal destacar que les entrevistes varen transcórrer amb total normalitat i en tot moment tractàrem de formular preguntes concretes, a partir de les quals els alumnes pogueren reflexionar i explicar les seues respostes per poder averiguar quines eren les seues idees i concepcions.

Problemes sorgits. Aquesta última sessió, al contrari que les dues anteriors, va transcórrer sense cap mena de problema.

3.4. Quines són les dades obtingudes

Seguidament, passem a comentar quines són les dades que obtenírem, d'on les varem extraure en cada cas i què podem saber a partir d'aquestes. En concret, cal destacar que les dades a què ens referim són les respostes a les fitxes que emplenaren els alumnes, la informació disponible als iPads® (els vídeos, les representació de les distintes funcions de regressió...) i les entrevistes transcrites. Passem, tot seguit, a proporcionar més detalls sobre aquesta informació.

3.4.1. Les dades de les fitxes

Quant a les respostes que donaren els alumnes a les fitxes, cal destacar que el que es pot extraure són les idees que tenien aquests sobre els valors dels paràmetres, les propietats qualitatives de les diferents famílies de funcions, el concepte d'altura, la influència de l'anàlisi qualitatiu del fenomen en la presa de decisions... Aquestes concepcions s'estudiaran amb més detall al capítol següent, concretament a l'apartat 4.1 on es realitzarà la reconstrucció racional parella per parella a partir de les dades de les fitxes i dels iPads®. A més, les dades obtingudes serviran de base per a l'anàlisi de les entrevistes que es realitzarà a l'apartat posterior 4.2. Tanmateix, per veure aquestes respostes es pot consultar l'annex 10.

3.4.2. Les dades dels iPads®

Pel que fa als iPads®, cal comentar que es pot obtenir informació interessant per al nostre estudi tant del programa Video Physics® com de Data Analysis®, però no de Free GraCalc® ja que l'objectiu amb què els alumnes l'utilitzaren fou com a calculadora per facilitar la realització d'alguns càlculs. Per aquesta raó, les dades que poguérem recollir d'aquests dispositius foren les següents:

- Del programa Video Physcs® poguérem obtenir la posició en què es fixaren els eixos coordenats després d'haver gravat el vídeo, cosa que és fonamental per saber quina és la referència que prenen els alumnes (és a dir, què és el que consideren com a altura zero), per comparar si aquesta referència es correspon amb la concepció que tenen dels valors que pot prendre l'altura i per poder averiguar la raó per la qual pensen que aquesta posició és la millor de totes. Així mateix, també poguérem conèixer el lloc on els alumnes marcaren els punts que mostren la trajectòria de la pilota i la mesura de referència que prenen tot i que, com ja hem dit, va ser per a tots la mateixa.

Ara bé, cal comentar que, com que aquest programa no permetia extraure del dispositiu el vídeo original gravat per cada parella d'estudiants (en el qual es mostrava la posició dels eixos coordenats, els punts marcats i la mesura de referència) per poder, així, mostrar la informació i analitzar-la amb més detall, generarem vídeos de cada parella a partir de la pròpia aplicació (que es poden trobar al DVD) i realitzarem algunes captures de pantalla per completar la informació que no apareixia a aquests

(que es poden observar tant a l'annex 11 com al DVD). Açò és perquè aquests vídeos, que es generaren de manera automàtica, no eren exactament com els que gravaren els alumnes, sinó una composició d'aquests modificats (ja que només apareixen els punts que mostraven la trajectòria de la pilota, és a dir, no es podien observar els eixos coordenats ni tampoc la mesura que prenien com a referència) i d'un conjunt de fotografies que mostraven les diferents gràfiques de la funció, per a cada cas.

– D'altra banda, del programa Data Analysis® poguérem obtindre quins foren els punts que va triar cada parella al full de coordenades, conèixer la funció de regressió que elegiren i comprovar que els valors dels paràmetres coincidien amb els que els alumnes escriviren a la segona part de la fitxa. A més, també poguérem comprovar si, efectivament, la funció de regressió ajustava (o no) gràficament als punts i veure com de bo era aquest ajust, informació que es pot observar a l'annex 11 i al DVD.

Així doncs, a l'igual que les dades de les fitxes, la informació continguda als iPads també s'analitzarà amb més detall a l'apartat 5.1

3.4.3. Les entrevistes transcrites

Respecte a les entrevistes realitzades, cal destacar que, s'efectuaren per poder analitzar l'origen de les respostes dels alumnes així com les concepcions i idees que sembla que guiaven aquestes. A més, cal destacar que no només tractarem d'averiguar les concepcions dels alumnes, sinó també de guiar-los perquè reflexionaren i modificaren algunes concepcions errònies que presentaven.

Ara bé, per poder estudiar amb més detall el que tracten de plasmar els alumnes en les seues intervencions, realitzem transcripcions de les entrevistes i les analitzem, cosa que fem a l'apartat 4.2 del següent capítol. Tanmateix, les entrevistes completes es poden trobar a l'annex 12. Així doncs, és important subratllar que a aquestes no només reproduïm les intervencions dels alumnes i les nostres, sinó que, a més, incloem comentaris sobre gestos, comportaments i reaccions, fonamentals per a la total comprensió del text. Així mateix, aquestes també contenen aclaracions de les pròpies intervencions que permeten entendre a què es fa referència en cada moment. Malgrat això, evitem plasmar totes aquelles accions, conductes... considerades irrelevantes per al nostre estudi i que, lluny de contribuir a la comprensió de la situació, dificulten la visualització dels aspectes que volem analitzar.

4. Anàlisi de les dades

En aquest capítol del treball, el que farem serà analitzar totes les dades de què disposem amb l'objectiu de proporcionar una idea al lector de com treballaren els alumnes i d'extraure conclusions sobre els resultats obtinguts i les concepcions que aquests tenen.

Llavors, dividirem el capítol en dos parts: d'una banda, estudiarem les dades obtingudes a partir de les fitxes i dels iPads® fent una descripció parella per parella junt amb la reconstrucció racional dels fets i, d'altra banda, analitzarem amb detall les entrevistes transcrites.

4.1. Anàlisi de les dades de les fitxes i dels iPads®

A aquest primer apartat ens centrarem a analitzar, primerament, parella per parella, les dades de què disposem i que obtindrem en la primera sessió i en la segona de l'experiment d'ensenyament. Posteriorment, mostrarem tres taules resum on el lector podrà observar i comparar la informació més rellevant de manera clara i organitzada amb l'objectiu de què pugui fer-se'n una idea global dels resultats més importants. I, per últim, comentarem aquests resultats ítem per ítem tractant de posar èmfasi en aquells que més es repeteixen.

4.1.1. Descripció parella per parella i reconstrucció racional

Pel que fa a la descripció parella per parella cal dir que no ens centrarem a estudiar les dades obtingudes de forma aïllada al context en què va tenir lloc l'experiment, sinó que tractarem de proporcionar una interpretació d'aquestes recolzant-les en la reconstrucció racional dels fets, nom que dona Puig (1996) a la narració de les conductes i els comportaments dels participants amb l'objectiu de dotar de sentit el

conjunt del text. Per la qual cosa, a banda d'analitzar minuciosament les dades que s'han obtingut de les fitxes i dels iPads®, afegirem comentaris sobre el comportament dels estudiants en cada moment i sobre els fets que influïren en el propi desenvolupament de l'experiment, tractant de reconstruir tot el què va passar.

Abans de res, però, cal recordar que les respostes donades a les fitxes es poden observar a l'annex 10, els punts triats pels alumnes a les taules de l'annex 8 i a les gràfiques de l'annex 9 i, per últim, les imatges dels programes Video Physics® i Data Analysis® (on es poden observar la posició dels eixos coordinats, el lloc en què es marquen els punts en la pilota i l'ajust de la funció de regressió) es poden trobar a l'annex 11. A més, a l'annex 7 es pot observar la fórmula de la funció de regressió que ajustaria a tots els punts del full de coordenades, la seua representació gràfica i les imatges que es demanen calcular a l'ítem 5, cosa que serveix per comparar les respostes dels alumnes i veure si són correctes o no.

Dit açò, comencem amb l'anàlisi de la primera de les parelles.

4.1.1.1. Parella 1

Ítem 1. Al aquest ítem, el que fa la parella 1 és, en primer lloc, escriure una x en l'eix d'abscisses i una y en el d'ordenades. A més, entre parèntesi escriuen una t i una h respectivament indicant que la x representa el temps i la y l'altura, probablement amb l'objectiu de què no se'ls oblide a l'hora de dibuixar el núvol de punts. Pel que fa a la gràfica, notem que el que fan és dibuixar una paràbola utilitzant una línia discontinua, probablement degut que a l'enunciat el que els demanàvem era que representaren un núvol de punts, no la gràfica en sí. A més, cal destacar que la línia de punts passa per l'origen de coordenades, cosa que potser facen perquè conceben el fenomen a estudiar (la trajectòria de la pilota des que toca el sòl per primera vegada fins que el torna a tocar) sense englobar-lo en cap context en general, és a dir, consideren que el fenomen a estudiar està aïllat i, aleshores, el temps zero és el temps quan comença el fenomen. Per tant, sembla que tenen una concepció absoluta d'aquest. D'altra banda, cal destacar que la paràbola està dibuixada al primer quadrant, potser perquè els alumnes conceben que l'altura mai no pot ser negativa i, per tant, aquesta no pot traspasar l'eix d'abscisses.

Ítem 2. Quant al següent ítem, notem que la família de funcions que elegeixen és la de l'apartat c) $y=ax^2+bx$, probablement com a conseqüència de què la seua representació gràfica és una paràbola i de què a l'ítem anterior dibuixaven el núvol de punts de manera que passara pel punt (0,0). A més, cal destacar que la resta de funcions estan ratllades amb llapis, cosa que ens fa pensar que les han descartades abans de triar la funció elegida.

Ítem 3. Seguidament, a l'ítem 3 els alumnes aporten arguments per justificar l'elecció de la família de funcions anterior. En particular, aquestos expliquen que

han triat “una equació de segon grau” (és a dir, una funció quadràtica) “perquè la pilota forma paràboles” (no sabem si referint-se a què forma paràboles quan bota o a què el que forma paràboles és la relació entre el temps que passa i l’altura a la qual es troba la pilota). Per altre costat, especifiquen que elegeixen aquesta, probablement d’entre les opcions b) i c) (ja que la representació gràfica d’ambdues és una paràbola), perquè “és la que més coincideix”. Potser pensen que a l’aparèixer el paràmetre c a la funció $y=ax^2+bx+c$, aquest ha de ser necessàriament distint de zero i, per tant, la funció no passarà per l’origen de coordenades (és a dir, sembla que veuen les famílies b) i c) com a famílies disjunctes), fet pel qual sembla que l’han descartat. És important destacar que cal entendre la família de funcions c) com una subfamília de b) ja que en cap moment especifiquem que c haja de ser distint de zero i, per tant, no s’han de considerar famílies excloents entre elles.

Dades de Video Physics®. Tot seguit, mirem el que varen fer a l’aplicació Video Physics® de l’iPad®. Notem que després de gravar el vídeo, els alumnes col·loquen els eixos coordinats de manera que l’eix de les x coincideix amb el primer punt que es marca per determinar la trajectòria de la pilota (probablement amb l’objectiu de què l’altura dels punts siga positiva ja que recordem que els vàrem dir que havien de col·locar els eixos de manera que la funció eixirà el més senzilla possible) i l’eix de les y , no sabem si per casualitat o no, de manera que aquest coincideix amb el cantó de la paret que té l’alumne al darrere, cosa que no té més importància per al nostre estudi. A més, cal destacar que aquests alumnes marquen els punts que descriuen la trajectòria de la pilota a la part central d’aquesta, cosa que fa que la pilota en el primer i en l’últim punt quede mitja per damunt de l’eix de les x i mitja per davall. Cal comentar que aquest fet els hauria resultat una mica contradictori si hagueren utilitzat les dades d’aquest experiment en el full posterior ja que aquests (com veurem a l’ítem 7a)) consideren que el sòl es troba a altura zero i, per tant, seguint aquest raonament, caldria interpretar aquesta situació com si en alguns moments mitja pilota es trobara soterrada baix terra, cosa que, com sabem, no és certa.

Elecció de coordenades. Després d’açò, recordem que, al no tenir la possibilitat de continuar usant les dades pròpies de l’experiment de cada parella d’alumnes, els vàrem facilitar les coordenades d’uns punts en un full (el que anomenem full de coordenades) obtinguts d’un altre experiment de manera que pogueren continuar emplenant la següent fitxa. Ara bé, cal recordar que aquestes coordenades s’haurien obtingut pel mateix procediment que les anteriors, és a dir, com a resultat de gravar un vídeo a l’iPad®, fixar els eixos coordinats i la mesura de referència i marcar els punts seguint la trajectòria de la pilota des del primer bot fins al segon (tot i que no tenim més informació a banda de les coordenades dels punts).

Notem que els alumnes trien els punts 1, 3, 5, 7, 9, 12 i 31 (mirar annexos 6, 8 i 9), és a dir, comencen triant-ne un sí i un no i posteriorment agafen els punts 12 i 31. Açò es deu a què el dia que realitzaren aquesta tasca, en un principi, començaren a copiar punts i, després de copiar el punt 9 ens preguntaren si era suficient amb eixos. Aleshores els recordàrem que havien d'agafar-ne sis o set, pel que decidiren triar el 12 i el 31. En principi, sembla que aquestos alumnes no es fixen en triar els punts suficientment espaiats perquè la funció de regressió es parega el màxim possible a la funció original, sinó seguint el criteri que acabem de mencionar i que sembla que és aleatori. Tanmateix, caldria saber si açò és realment així o no ja que, en cas afirmatiu, aquest fet podria haver-los portat a cometre algun error a l'hora d'elegir la funció. Per exemple, si aquestos hagueren triat sis o set punt molts junts en compte dels que han elegit i a l'hora de triar la funció només s'hagueren basat en veure si aquesta ajusta als punts (sense tenir en compte les característiques del fenomen estudiat) potser n'haurien escollit una que, encara que ajustara bé a aquests, no seria la que millor descriuria la trajectòria de la pilota a l'interval de temps en què l'estem estudiant (és a dir, des que bota per primera vegada fins que ho torna a fer).

Ítem 4. Quant a l'ítem 4, vegem que els alumnes han decidit triar la mateixa funció que ja havien considerat a l'ítem 2, cosa que ens crida l'atenció ja que, com podem veure a la figura 1 de l'annex 11, aquesta no ajusta als punts representats. D'altra banda, cal destacar que els alumnes escriuen, en primer lloc, la fórmula amb paràmetres i, posteriorment, ja amb els valors dels paràmetres obtinguts al programa Data Analysis®. Açò és degut a què, en un primer moment, al llegir l'enunciat, enteneren malament el que havien de fer i pensaren que amb escriure $f(x)=Ax^2+bx$ era suficient però, poc després, ens mostraren la resposta i ens preguntaren si era correcta, al que vàrem respondre que no, que havien d'afegir els valors dels paràmetres i que podien fer-ho utilitzant el programa Data Analysis®. Ara bé, en un principi pensàvem que no utilitzaren el programa per trobar la funció de regressió (sinó que es basaren en la interpretació del fenomen per determinar-la) i que per això no es fixaren en si ajustava o no però, a l'observar que escriuen el paràmetre que acompanya a x^2 com a A (majúscula) i el que acompanya a x com a b , tal i com apareix al programa (en compte d' a i b , que potser haguera sigut el més lògic), tot ens fa pensar que el que va passar fou que utilitzaren el programa tant per a elegir la funció com per trobar els valors dels paràmetres, pel que resulta estrany que no es fixaren en si aquesta ajustava o no al núvol de punts ja que la gràfica apareix a la mateixa pantalla en què es mostren els valors dels paràmetres (com podem veure a la figura 1 de l'annex 11).

Ítem 5. D'altra banda, a l'ítem 5 els alumnes substitueixen els valors del temps en la funció anterior per a calcular les altures corresponents a cada instant. Cal destacar que, com la funció anterior no ajusta als punts que havien triat, les

imatges no es corresponen amb les imatges que s'obtindrien al substituir els valors en una funció que sí que ajustara a aquests. Per tant, totes les dades estaran calculades en relació a la funció escollida.

Ítem 6. Tanmateix, a l'ítem següent, quan els preguntem als alumnes si pensen que els resultats mostren el que vertaderament ocorre, responen que la majoria d'aquests sí però expliquen que la imatge de 100, que dóna un nombre gran i negatiu (-14.166,75), és un error seu. Probablement diuen açò perquè pensen que el valor que els ha donat és un nombre massa gran per a correspondre a l'altura a la qual bota la pilota i, a més, perquè és negatiu i, potser, pensen que l'altura en aquest cas no pot prendre valors inferiors a zero ja que la pilota bota per damunt del nivell del sòl.

Ara bé, si passem al segon apartat de l'ítem, trobem el motiu pel qual els alumnes pensen que el valor que obtenen al calcular $f(100)$ és un error seu. Aquests expliquen que aquesta dada "està molt allunyada de les esperades" i per això la descarten, és a dir, per a ells l'esperable hauria sigut obtenir un valor entre zero i dos aproximadament (com les imatges de la resta de valors que demanen calcular a l'ítem) i, qualsevol valor que no es trobara més o menys en aquest interval hauria sigut rebutjat. Malgrat tot, no podem determinar si aquesta afirmació és una conseqüència de les concepcions que tenen els alumnes sobre els valors que pot prendre l'altura o d'una comparació entre els valors obtinguts a l'ítem 5 i els valors reals que es coneixen (que són els que apareixen al full de coordenades).

Ítem 7. Per últim, al primer apartat d'aquest ítem responen que la pilota colpeja el terra al segon zero i al segon 2.2 i expliquen que han obtingut aquesta resposta buscant al gràfic de la funció (probablement al que apareix al programa Free GraCalc®) els valors de x que fan que y valga zero. És a dir, encara que els alumnes disposen de la informació necessària per trobar els valors del temps (mirant les coordenades temporals del punt 1 i del punt 31 al full de coordenades) el que fan és considerar directament que el terra es troba a altura zero i trobar el temps a partir d'aquest valor. Ara bé, tot i que aquest procediment pot considerar-se correcte, no ho és assignar el valor zero a terra sense realitzar cap mena de comprovació ja que, encara que és cert que en aquest cas l'altura del sòl és aproximadament zero¹, açò no té perquè passar sempre ja que depèn d'on s'haja fixat l'eix d'abscisses al programa Video Physics®.²

¹ Com que la imatge sobre la qual cal definir què es el terra està en tres dimensions, cal especificar què al llarg de tot l'experiment considerem el terra l'eix horitzontal tangent a la pilota per la part baixa d'aquesta en el moment en què rebota.

² Cal adonar-se'n de què amb les dades de què disposem no podem averiguar exactament l'altura a la que es trobaria el terra ja que no sabem en quin lloc de la pilota es marquen els punts que mostren la trajectòria d'aquesta al programa Video Physics® ni tampoc en quina posició respecte l'eix de les x es troba el terra. L'únic que coneguem és la distància dels punts a l'eix.

D'altra banda, al segon apartat els alumnes expliquen que la pilota alcança la màxima altura en el punt màxim de la gràfica de la funció i que açò té lloc als 1.1 segons, és a dir, comparen les propietats qualitatives del fenomen amb les propietats qualitatives de la gràfica per poder determinar en quin instant l'altura serà màxima. En particular, especifiquen que ho han calculat fixant-se en la representació gràfica de la funció, pel que suposem que ho han fet mirant, de nou, al programa Free GraCalc® i fixant-se en el valor de x per al qual la funció alcança el seu màxim. Tanmateix, en aquest cas també hagueren pogut donar el valor exacte mirant la coordenada temporal del punt 16 al full de coordenades, que és el punt de màxima altura.

4.1.1.2. Parella 2

Ítem 1. Quant a la segona parella, notem que el que fa a l'ítem 1 és dibuixar, amb una traçada discontinua, un conjunt de paràboles convexes partint del punt (0,0) de manera que quan la primera d'aquestes intersecta al decreixer amb l'eix de les x , comencen a dibuixar l'altra i així successivament, sense passar en cap moment a la part negativa de l'eix d'ordenades (mirar annex 10). Sembla que els alumnes tracten de representar, mitjançant un núvol de punts, la relació entre el temps que passa i l'altura a la qual es troba la pilota, no des del primer bot fins al segon que és el que es demana a l'enunciat, sinó durant tot l'experiment però començant des del moment en què aquesta toca el terra per primera vegada. A més, cal destacar que conforme avancem cap a la dreta en l'eix d'abscisses, l'altura de les paràboles que dibuixen disminueix progressivament, pel que pareix que tracten de simular com l'altura en cada bot disminueix amb el pas del temps respecte a l'altura del bot anterior. Per altre costat, és important ressaltar també que sembla que aquests alumnes consideren que l'altura a què es troba el sòl és exactament zero ja que, com podem veure a la representació gràfica, és a eixa altura quan acaben de dibuixar una paràbola i comencen amb la següent, tractant de simular com rebota la pilota quan toca el sòl. Així mateix, cal adonar-se'n de què, tot i que els alumnes utilitzen una traçada discontinua per representar la trajectòria de la pilota, subratllen amb major intensitat la primera d'aquestes, probablement per destacar que és eixe el tram de la trajectòria (com diu a l'enunciat) que cal estudiar.

Ítem 2. Pel que fa al segon ítem, notem que els alumnes assenyalen l'opció c) $y=ax^2+bx$ com a l'opció correcta, probablement perquè pensen que és la que millor descriu la trajectòria de la pilota des del moment en què aquesta toca terra per primera vegada, fins que el torna a tocar, és a dir, la que millor ajusta al núvol de punts que els alumnes dibuixen amb una traçada més obscura. Malgrat això, l'opció b) $y=ax^2+bx+c$ també apareix assenyalada i posteriorment ratllada, fet que reflexa el comportament dels alumnes el dia que realitzaren la fitxa. Cal recordar que, al tractar de respondre aquest ítem, aquests presentaven opinions distintes, cosa que no els permetia posar-se d'acord per a redactar la resposta. Un d'ells

justificava que l'opció b) era la correcta i argumentava que, com que la gràfica era una paràbola, havia de pertànyer a la família de funcions $y=ax^2+bx+c$, independentment de si el paràmetre c valia zero o no. Per contra, el seu company explicava que com la gràfica de la funció passava pel punt (0,0) el paràmetre c de la família anterior havia de valdre zero i, per tant, l'opció correcta era la c). Després d'exposar-nos els seus arguments, els instàrem a què tornaren a discutir el tema i tractaren d'arribar a un acord. No obstant això, els comentàrem que si finalment no ho aconseguïen, que assenyalaren les dues opcions i, a la pregunta 3, explicaren què era el que havia passat. Així doncs, després d'observar la resposta donada, sembla que sí que aconseguïen arribar a un acord ja que optaren per marcar una de les opcions, la c).

Ítem 3. Al següent ítem, els alumnes comenten, molt breument, perquè finalment decidiren triar aquesta opció. Aquests expliquen que elegiren la família de funcions de l'apartat c) perquè la gràfica de la funció comença en el punt (0,0), pel que sembla que al final optaren per considerar que en aquest cas c era zero sempre i, per tant, no era necessari escriure'l. Tanmateix, sembla que es produeix una confusió quant a la interpretació dels paràmetres a i b ja que, encara que no sabem per quin motiu, expliquen que la a indica l'eix de les y i la b el de les x .

Dades de Video Physics®. Quant al que fan a l'iPad, notem que aquests alumnes col·loquen els eixos coordenats de manera que l'eix de les x queda als peus de l'alumne, és a dir, a l'altura del seient de la cadira, i l'eix de les y a l'esquerra de l'alumne. Notem que la posició de l'eix de les y és irrellevant per al nostre estudi però al col·locar l'eix de les x en aquesta posició, alguns dels punts que descriuen la trajectòria de la pilota queden per davall d'aquest, cosa que fa que l'altura a què es troben siga negativa. D'altra banda, cal comentar també que el lloc on marquen els punts que descriuen la trajectòria de la pilota és al centre d'aquesta.

Elecció de coordenades. Passem ara a veure quins són els punts que elegeixen els alumnes per a representar, posteriorment, al programa Data Analysis® i trobar així la funció de regressió que millor ajusta a aquests. Notem que aquesta parella en tria sis, amb la característica de què són consecutius dos a dos de manera que n'agafen dos de l'inici (1 i 2), dos del centre (14 i 15) i dos del final (26 i 27). Potser ho facen així perquè saben que la representació gràfica de la funció és una paràbola i, com que és suficient triar tres punts per representar-la (el vèrtex i un de cada costat), decideixen triar la resta molt prop d'aquests. Tanmateix, sense més informació no podem afirmar que aquest siga el motiu de l'elecció.

Ítem 4. Seguidament, si observem la resposta donada a l'ítem 4 de la següent fitxa podem veure com els alumnes canvien d'opinió a l'hora de triar la funció de regressió i ara elegeixen la funció quadràtica amb paràmetre c ($y=ax^2+bx+c$) en compte de la que havien triat a l'ítem 2. Probablement aquest canvi de funció siga

degut a què la funció $y=ax^2+bx$ no ajusta als punts donats i, per tant, quan hagen intentat ajustar-la mitjançant el programa Data Analysis® s'hauran adonat de què no passava pels punts de cap de les maneres o també potser que en realitat pensaven en eixa funció com la funció general, malgrat que a l'ítem 2 escolliren l'altra.

Ítem 5. Ara bé, a l'ítem 5 els alumnes escriuen els resultats de calcular les imatges dels punts i, pel que sembla, han tingut algun que altre problema ja que hi ha diversos resultats ratllats i modificats posteriorment. Notem també que, a l'igual que al cas anterior, apareixen resultats negatius, com ara els dels apartats a), c) i d), cosa que repercuteix, com veurem, a les respostes dels següents ítems.

Ítem 6. Tot seguit, vegem quines són les respostes donades a la pregunta 6. En el primer apartat, expliquen que les respostes obtingudes a l'ítem anterior no mostren el que vertaderament ocorre ja que "les coordenades donades [les del full de coordenades] comencen a temps u". Potser els alumnes es refereixen a què no té sentit calcular les imatges per a temps abans de u ja que, com sabem, en aquest experiment (aquell, amb les dades del qual estan treballant) la pilota toca a terra al segon u i és des d'aquest instant fins que el torna a tocar quan estudiem la trajectòria d'aquesta. Per altre costat, és important ressaltar que amb aquesta resposta no expliquen si les dades posteriors al segon dos (que és quan té lloc el segon bot i, per tant, quan s'acaba d'estudiar la trajectòria de la pilota) mostren o no el que vertaderament ocorre.

D'altra banda, la justificació donada a l'apartat b) sembla que es contradiu una mica amb la resposta donada a l'apartat anterior ja que utilitzen dos raonament distints per justificar el mateix. En aquest cas expliquen que les dades que no s'ajusten al que esperaven són les que tenen lloc "quan passa molt de temps i al principi perquè estan molt per davall" fent referència a què les altures abans d'un segon i quan passa molt de temps no tenen sentit perquè són negatives, mentre que abans justificaven que era perquè "les coordenades començaven a temps u". És a dir, en l'apartat a) es fixaven en el domini de la funció i en el b) en la imatge.

Ítem 7. Per acabar, vegem que el que fan els alumnes a l'apartat a) de l'ítem 7 és resoldre una equació de segon grau, pel que deduïm que han igualat y a zero per obtindre-la, és a dir, han considerat que l'altura a què es troba el sòl és zero i han calculat els valors de x que ho aconsegueixen (a l'igual que els alumnes de la parella anterior). Tanmateix, ho fan sense donar cap mena d'explicació o justificació, cosa que ens fa pensar que probablement ho hagen escrit perquè tenen aquesta idea preconcebuda. Com ja hem dit, és cert que en aquest cas sí que podrien considerar que l'altura és aproximadament zero ja que l'altura del primer i de l'últim punt (que corresponen al primer i al segon bot de la pilota) quasi ho són però, açò depèn del lloc de la pilota on s'hagen marcat els punts al programa Video Physics® i també de la posició en què es trobe l'eix respecte del terra, informació de la qual

no disposem. Tanmateix, cal comentar que si els alumnes hagueren utilitzat les dades extrems del seu experiment no hagueren pogut considerar que y val zero en el sòl ja que recordem que aquests col·locaven l'eix d'abscisses al seient de la cadira, als peus de l'alumne i, per tant, caldria veure quin valor assignarien a y en aquest cas. D'altra banda, quant a la realització dels càlculs, no estem segur de com ho fan ja que, tot i que al full escriuen que el que han fet ha sigut resoldre l'equació de segon grau, a priori, sembla que o bé han fet els càlculs en un full a banda o bé es copiaren el resultat d'algun company, ja que escriuen la fórmula sense substituir pels valors corresponents i seguidament escriuen ja el resultat final.

Quant al segon apartat de l'ítem, el que els demanen és que calculen els valors del temps en què la pilota arriba a la seua màxima altura i aquests expliquen que ho han fet resolent l'equació del càlcul del vèrtex d'una paràbola ja que saben que, per la posició en què es troba la paràbola (per tractar-se d'una paràbola convexa), aquest serà el punt de màxima altura. A l'igual que a l'apartat anterior, han copiat la fórmula amb paràmetres i directament han escrit el resultat.

4.1.1.3. Parella 3

Ítem 1. A l'igual que la parella anterior, aquests alumnes representen a l'ítem 1 unes quantes paràboles, l'altura màxima de les quals va disminuint conforme avança el temps de manera que la primera comença des del punt (0,0) i en cap moment la gràfica pren valors negatius per a la y . Tanmateix, en aquest cas els alumnes opten per dibuixar la gràfica en sí i no el núvol de punts que obtindrien després d'analitzar les imatges del vídeo.

Ara bé, cal recordar també quin va ser el comportament d'aquests alumnes durant l'inici de la segona sessió ja que, tot i que no s'aprecia massa bé, la part final de la gràfica apareix esborrada amb corrector i tornada a dibuixar per sobre. El que va ocórrer fou que durant la primera de les dues sessions en què va tindre lloc aquest estudi, en la qual emplenaren la primera fitxa, els alumnes s'oblidaren d'escriure el seu nom, per la qual cosa, a la següent sessió els vam haver de deixar el full de nou perquè l'escriviren. Aleshores aquests, aprofitant el moment, agafaren el corrector per tractar de modificar la seua resposta però, per sort, ens adonàrem a temps i impedírem que les dades foren alterades demanant-los que deixaren la resposta tal qual estava a l'inici i preguntant-los perquè volien canviar-la. En particular, el que tractaren de fer fou esborrar part de la gràfica i deixar només la primera de les paràboles dibuixades utilitzant la justificació de què ells sabien la resposta quan varen fer la fitxa però que es varen equivocar perquè no es varen fixar bé en l'enunciat. Tanmateix, sembla que aquest no va ser el motiu real que els va fer canviar d'opinió, sinó que probablement fou la influència dels comentaris d'alguns companys a l'acabar la classe.

Ítem 2. Al segon ítem, trien la funció $y=ax^2+bx$, sembla ser que comparant les propietats qualitatives del fenomen amb les de les funcions, cosa que fa que descarten algunes d'aquestes ja que la majoria dels apartats apareixen ratllats amb llapis, probablement al ser descartats per pensar que no ajusten a la gràfica de la funció. A més, pareix que, tot i que el dibuix que fan es correspon a un conjunt de paràboles, trien aquesta opció pensant en què aquesta família de funcions ajustarà a cada paràbola, tot i que açò només serà cert per a la primera d'aquestes, la que passa pel punt (0,0).

Ítem 3. Així mateix, a l'ítem 3 els alumnes confirmen el que estàvem comentant: trien la funció com a conseqüència de descartar la resta d'aquestes. En primer lloc, expliquen que descarten les opcions a), e), f), g), h) i i) perquè no es corresponen amb l'equació d'una paràbola, pel que deduïm que potser pensen que les funcions b) $y=ax^2+bx+c$, c) $y=ax^2+bx$ i d) $y=ax^3+bx^2+cx+d$ són paràboles. Després, expliquen que descarten les opcions b) i d) perquè, segons ells, "tenen un punt d'origen", és a dir, tenen una constant (distinta de zero) que fa que les gràfiques corresponents no passen pel (0,0), pel que deduïm que veuen les famílies b) i c) com a disjunctes. A més, com diuen que "no es corresponen amb l'equació d'una paràbola" sembla que el que tracten és de trobar una funció que ajusti només a una de les paràboles, no a totes les que han dibuixat.

Dades de Video Physics®. Seguidament, mirem el que fa aquesta parella al programa Video Physics®. Notem que aquestos col·loquen l'eix de les x per davall de la pilota, no sabem si amb l'objectiu de deixar-la a la part superior de l'eix perquè els valors que prenga l'altura siguin positius o amb el de posar aquest tan avall com es pot de la pantalla perquè tota la imatge estiga dintre del primer quadrant (veure la figura 3 de l'annex 11). D'altra banda, tot i que no té massa importància per al que posteriorment es farà, destaquem que en aquest cas els alumnes col·loquen l'eix de les y a la part dreta de l'alumne coincidint amb una de les potes de la cadira sobre la qual està l'alumne. Per últim, cal destacar que aquestos alumnes, a l'igual que els de les dues parelles anteriors, també marquen la trajectòria de la pilota assenyalant els punt al centre d'aquesta.

Elecció de coordenades. Quant al que feren després, subratllem que els punts que trien del full de coordenades són 1, 8, 12, 16, 20, 23 i 31. Notem que un d'aquests és el punt de central, que coincideix amb el punt de màxima altura (punt 16) i els altres són equidistants respecte d'aquest per dalt i per baix. Açò ens fa pensar que potser els alumnes coneixen les característiques gràfiques de la funció que ajustarà als punts, és a dir, de la paràbola (en general), abans inclús d'haver-los representat al programa ja que sembla que els trien pensant en què l'ajust siga el millor possible i de manera que siguin simètrics respecte a l'eix vertical que passaria pel vèrtex (que correspondria al punt 16).

Ítem 4. Quan passem a l'ítem 4, ens adonem de què els alumnes canvien de funció respecte la que havien triat a l'ítem 2, tanmateix no sabem a què es deu aquest canvi. Potser, tot i que saben que la funció a representar és una paràbola (ja que és la que trien abans), a l'observar els punts representats gràficament al programa Data Analysis® se n'adonen de què la funció $y=ax^2+bx$ no ajusta a aquests (ja que es troben suficientment lluny perquè la funció no puga passar pel punt (0,0)) i, per tant, trien directament $y=ax^2+bx+c$. Altre motiu pel qual potser triaren aquesta funció podria ser que, al provar cadascuna de les funcions de la llista que proporciona el programa per veure quina ajustava millor, se n'adonaren de què aquesta era l'única que passava pels punts. Recordem que la funció que ells trien a l'ítem 2 no ajusta perquè el temps no és absolut ja que l'estudi de la trajectòria de la pilota des del moment en què toca el terra fins que torna a tocar-lo està englobat en un context més general que, en aquest cas, cal considerar.

Ítem 5. Vegem ara les respostes donades a l'ítem 5. Notem, doncs, que els alumnes han sigut capaços de trobar les imatges dels punts sense cometre cap error i que, a l'igual que al cas anterior, els valors d'aquestes per a 0.76, 0.11 i 100 (que són els nombres que estan fora del domini) són negatius, fet que influeix en les respostes de la pregunta següent.

Ítem 6. D'altra banda, a l'apartat a) d'aquest ítem, els alumnes expliquen que les respostes obtingudes a la pregunta anterior no mostren el que vertaderament ocorre "perquè hi ha valors negatius i la pilota mai travessarà el terra", per la qual cosa deduïm que, per a ells, que apareguen valors negatius de l'altura, significa que ens trobem per davall del nivell del sòl. Potser per aquest motiu els alumnes col·locaven l'eix d'abscisses tan avall com podien a la pantalla del programa Video Physics®, per tal de prendre el sòl com a referència i, així, què la pilota botara per damunt de l'eix de les x i, per tant, les dades foren positives sempre.

Quant a l'apartat b) d'aquesta pregunta, el que fan és limitar-se a especificar quines són les dades de les quals estaven parlant abans, és a dir, les dades les imatges de les quals els donaven nombres negatius, és a dir, $f(0.76)$, $f(0.11)$ i $f(100)$.

Ítem 7. Quant a l'apartat a) de l'última pregunta, observem que, a l'igual que els seus companys, aquests alumnes igualen la y a zero per trobar quins valors pren el temps (x) quan la pilota toca terra (encara que, com sabem, no és necessari averiguar ni tan sols el valor de l'altura del terra per respondre l'apartat correctament). És a dir, els alumnes consideren no sols que l'altura és negativa quan estem per baix del nivell del sòl sinó també que l'altura a la qual es troba aquest és exactament zero. Tot i això, com ja hem explicat abans, és cert que en aquest cas l'altura és aproximadament zero però, no podem saber-ho amb seguretat, pel que sembla estrany que els alumnes ho afirmen de manera tan contundent, com si d'un fet obvi es tractara. Per això, encara que no podem saber si els alumnes han considerat les dades de l'experiment o s'han basat en les seues

pròpies concepcions per afirmar tal cosa, sospitem que és aquest últim el motiu pel qual han respost així.

Ara, observem la resposta de l'apartat b). Els alumnes comenten que la pilota arribarà a la seua màxima altura en el segon 1.5 i expliquen que aquest nombre l'han obtingut calculant el punt intermedi entre els dos temps que havien eixit a l'apartat anterior, és a dir, calculant el punt intermedi entre 0.984 i 2.015. Açò ho fan basant-se en les propietats de la gràfica de la funció ja que saben que el punt més alt d'una paràbola és el vèrtex i, per tractar-se d'una funció simètrica respecte l'eix vertical que passa pel vèrtex, els punts 0.984 i 2.015 seran simètrics entre sí, per tant, al calcular el punt intermedi entre aquests han aconseguit obtindre el temps en què la pilota alcança la seua màxima altura.

4.1.1.4. Parella 4

Abans de començar a analitzar el que feren els següents alumnes, cal recordar que aquests no varen tindre temps suficient d'acabar de realitzar el que hi havia previst fer per al primer dia (que recordem que es tractava d'emplenar la primera fitxa, gravar l'experiment i obtindre un núvol de punts utilitzant el programa Video Physics®). La causa d'aquesta falta de temps fou l'aparició d'un que altre problema a l'hora de realitzar la gravació del vídeo i que mencionarem a continuació. D'una banda, com foren un dels grups que més va tardar en acabar d'emplenar la fitxa, a l'hora de gravar el vídeo ja no disposaven de cap pilota, cosa que va fer que hagueren d'esperar una estona fins que algun dels seus companys acabara i els en deixara una. D'altra banda, i a pesar de què els vàrem advertir, quan revisàrem el vídeo per veure si l'havien gravat correctament ens adonàrem de què no es veia la trajectòria completa de la pilota, la qual cosa no permetia saber on aquesta tocava el terra i, per tant, no era possible marcar els punts ni molt menys col·locar l'eix de les x per davall d'aquests (si és que açò era el que es desitjava), pel que van haver de gravar-ne un de nou. Per tant, no varen tindre temps d'obtindre el núvol de punts al programa, cosa que van haver de fer durant la segona sessió, mentre els seus companys continuaven amb la següent tasca que havien de realitzar. En conseqüència, açò va provocar que es reduïra, de nou, el temps per respondre la resta de preguntes d'aquesta sessió.

Ítem 1. Passem, llavors, a analitzar la resposta donada al primer ítem. Així doncs, podem observar que el que fan els alumnes és representar un núvol de punts de manera que dibuixen una paràbola convexa i que, pel que sembla, cal interpretar com el resultat d'analitzar les imatges de la trajectòria que faria la pilota des del primer bot fins al segon. Cal destacar, per altra banda, que tots els punts es troben situats al primer quadrant, per la qual cosa, entenem que per als alumnes l'altura sempre ha de prendre valors positius, en cap moment negatius. És més, sembla que per a ells l'altura a què es troba el sòl ha de ser exactament zero ja que el primer punt i l'últim estan situats sobre l'eix d'abscisses. Ara bé, a diferència dels

casos analitzats anteriorment, aquests alumnes no dibuixen el núvol de punts de manera que passen per l'origen de coordenades, sinó desplaçats uns centímetres cap a la dreta d'aquest. Probablement açò es deu a què conceben l'estudi que estan realitzant com una part d'un estudi més global que, tot i que no l'analitzen, per a ells cal que siga considerat.

Ítem 2. Seguidament, vegem que a l'ítem 2 assenyalen l'opció i) $y=a\cdot\sin((x-c)/b)+d$, és a dir, consideren que la família de funcions a la qual pertany la gràfica que ajustaria al núvol de punts anterior és la funció sinus. Ara bé, sembla que abans d'assenyalar aquesta opció, descartaren les funcions $y=ax+b$ i $y=ax^2+bx+c$ ja que estan ratllades amb bolígraf, tot i que no sabem per quin motiu ho feren.

Ítem 3. D'altra banda, tot i que podríem pensar que els alumnes trien la funció sinus perquè es tracta d'una funció en què apareixen oscil·lacions, un tros de les quals podria ajustar-se al núvol de punts, sembla que l'explicació que donen a l'ítem 3 és una mica distinta i no va per aquest camí. Aquests comenten que escullen la funció sinus ja que "el moviment que descriuria la pilota formaria un angle amb l'horitzontal" i, a més, "té sinus". No sabem a què podrien referir-se amb aquesta explicació, tal vegada a què trien la funció sinus perquè veuen la distància entre la pilota botant i el terra com un angle que va canviant i, com que la funció sinus és l'única que, segons ells, té un angle, trien eixa. Tanmateix, caldria entrevistar els alumnes per entendre què és exactament el que volen dir.

Dades de Video Physics®. Seguidament passem a mirar l'iPad. Notem que, a l'igual que la parella 3, aquests alumnes col·loquen l'eix d'abscisses per davall de la pilota i, pel que sembla, intenten col·locar-lo el més avall que poden en la pantalla, potser perquè pensen que els diferents valors que pren l'altura han de ser positius. A més, com podem veure a la imatge, i a diferència de la resta de parelles que acabem d'analitzar, aquests alumnes marquen els punts que mostren la trajectòria de la pilota a la base d'aquesta, probablement perquè així és pot fer de manera més precisa que si es marquen al centre.

Elecció de coordenades. Quant a l'elecció dels punts, aquesta parella tria els següents: 3, 5, 9, 15, 18, 23, 28 i, pel que sembla, ho fan així tractant d'agafar-los de manera que mantinguen una certa distància entre ells amb l'objectiu d'abastar totes les zones del gràfic i aconseguir un millor ajust de la funció de regressió.

Ítem 4. Si mirem ara la resposta donada a l'ítem 4, vegem que escriuen $y=Ax^2+Bx+C$ i posteriorment indiquen els valors que prenen els paràmetres amb fletxes (mirar la resposta a l'annex 10). Abans de res, cal destacar que aquests alumnes també canvien de funció respecte la que trien a l'ítem 2, cosa que era esperable ja que la funció sinus no es troba al llistat que apareix al programa Data Analysis®. Ara bé, probablement hagen triat aquesta funció d'entre totes les altres perquè és la que millor ajusta als punts (com podem veure a la figura 4 de l'annex

11); malgrat tot, haguera estat interessant veure què hagueren fet si aquesta haguera estat disponible al programa per seleccionar-la. D'altra banda, notem que els alumnes, a l'igual que els de la primera parella, escriuen en primer lloc la funció amb paràmetres i després el valor d'aquests. L'explicació d'açò rau en què quan estaven emplenant la fitxa, només escriviren l'equació amb paràmetres però quan passaren al següent ítem se n'adonaren de què havien fet alguna cosa malament ja que no podien continuar i ens preguntaren què era el que havien de fer. Llavors, els explicàrem que necessitaven conèixer els valors dels paràmetres per poder resoldre l'ítem 5 i que podien fer-ho mirant al programa Data Analysis®. Fou aleshores quan apuntaren els valors al full, per això apareix en primer lloc l'equació amb paràmetres i, al costat d'aquesta, els valors d'aquests indicats amb fletxes. Cal recordar que l'explicació detallada de què és el que hi havia que fer per trobar els valors dels paràmetres està als fulls d'instruccions (consultar annex 3) però, no estaria de més demanar-ho explícitament a l'enunciat de la pregunta 4 ja que aquests alumnes no són els únics que interpreten malament el que es demana exactament.

Ítem 5. Quant al següent ítem notem que aquests han trobat els valors de les imatges correctament (podem comprovar-ho en l'annex 7 comparant les imatges amb les de la funció de regressió obtinguda amb tots els punts), tot i que no sabem ni com ho han fet ni si han tingut cap tipus de problema al fer-ho.

Ítem 6. Passem ara a la pregunta 6. Al primer apartat, els alumnes expliquen que les respostes obtingudes a la pregunta 5 no mostren el que vertaderament ocorre perquè, segons ells, "mostren valors negatius". Llavors, sembla que ens trobem, de nou, davant un altre cas d'alumnes que no conceben que l'altura pugui prendre valors negatius ja que sembla que per a ells això sols seria així en el cas en què la pilota travessara el terra, com diuen a l'apartat b) (on també especifiquen que les dades que no tenen sentit són les que tenen imatges negatives). Tanmateix, a diferència dels alumnes de les parelles anteriors, aquests justifiquen la seua resposta explicant que no poden haver dades negatives ja que "nosaltres tenim el sòl com a sistema de referència". Ara bé, és important destacar que, tot i que aquesta podria ser una justificació correcta en aquest cas (ja que, com ja hem dit quan analitzàvem aquesta pregunta en les parelles anteriors, sembla que l'eix d'abscisses estaria col·locat molt prop del terra), no sabem si quan parlen de "nosaltres" es refereixen al seu experiment (al que gravaren ells en vídeo), a aquest (l'obtingut amb les dades del full de coordenades) o en general (fruit de les seues pròpies concepcions) ja que no ho especifiquen.

Ítem 7. Per finalitzar amb aquesta parella, analitzem les respostes donades a l'ítem 7. Primer de res, cal comentar la influència en les respostes de la falta de temps de què parlàvem anteriorment. Recordem que aquests alumnes responeren aquesta última pregunta després de sonar l'alarma que indicava el

canvi de classe durant la segona sessió, per la qual cosa, no disposaren de massa temps per pensar les respostes. No obstant això, els comentarem que escriviren, almenys, com haveren contestat si hagueren disposat de més temps i aquest n'és el resultat. Al primer apartat, en el que els preguntem quins són els valors del temps per als quals la pilota colpeja el terra, comenten que seran aquells que es donen “quan la x siga 0”. Pensem que açò podria ser conseqüència d'un error a l'hora d'escriure la variable i el que probablement volien dir és que seran els que es donen “quan la y siga 0” ja que recordem que per a ells el sistema de referència és el sòl i, per tant, consideren que aquest es troba a altura zero.

Altrament, a l'apartat b) expliquen que els valors del temps per als quals la pilota arriba a la seua màxima altura són aquells en què “la y aconsegueix la màxima altura”, però tampoc no els calculen per falta de temps.

4.1.1.5. Parella 5

Ítem 1. Pel que fa als alumnes de la parella 5, vegem, en primer lloc, que el que fan és escriure el nom de cada eix al seu costat, és a dir, escriuen t a l'eix de les x (indicant que aquest és l'eix que representa el temps) i h al de les y (indicant que aquest és el que representa l'altura). A més, a la part dreta de la gràfica escriuen el significat de cadascuna de les lletres, tal i com acabem d'explicar, probablement amb l'objectiu de què no se'ls oblide a l'hora de representar el núvol de punts.

Ara bé, quant a la representació d'aquest, notem que en realitat el que fan és dibuixar directament la gràfica de la funció que pensen que ajustaria als punts que, en el seu cas, és un conjunt de segments (mirar annex 10). Així mateix, sembla que tracten de dibuixar la trajectòria de la pilota des què la solten fins que toca a terra per segona vegada ja que, en primer lloc, comencen dibuixant un segment amb pendent negativa que parteix d'una determinada altura i que descendeix fins arribar a altura zero, que es correspondria amb la trajectòria de la pilota des que es solta fins que aquesta arriba al sòl. Posteriorment, dibuixen un segment amb pendent positiva de manera que arriba fins a una altura menor que l'altura a la qual es trobava la gràfica inicialment i torna a descendir fins que, de nou, torna a estar a altura zero, tros que es correspon amb la trajectòria de la pilota des que toca el terra per primera vegada fins que el torna a tocar (que és el que realment demanàvem a l'enunciat que estudiaren). Així mateix, notem també que els alumnes segmenten l'eix de les x , segurament per tal de poder mesurar millor el temps i, així, poder dibuixar la gràfica el més pareguda a com seria en realitat. A més, probablement, cada interval de temps entre segment i segment represente una durada d'un segon.

Per altre costat, cal subratllar també que potser aquesta parella dibuixa el gràfic fent ús de línies rectilínies perquè no té en compte els moments en què la pilota s'accelera i, per tant, considera que la velocitat és constant en tot moment. A més,

cal fixar-se en què, a l'igual que els seus companys d'altres parelles, sembla que els alumnes consideren en general que l'altura a la qual es troba el sòl és zero ja que en cap moment la gràfica de la funció traspasa l'eix de les x .

Ítem 2. Mirem ara el següent ítem. Els alumnes trien la família de funcions $y=ax+b$, potser perquè pensen que la funció que modelitza cada segment de recta es correspon amb aquesta fórmula. Així mateix, tot i que a l'ítem apareix l'opció de definir una funció que no es trobe entre les de la llista (per a definir, per exemple, una funció a trossos), sembla que els alumnes no l'han assenyalat per no tindre els coneixements suficients per saber com fer-ho.

Ítem 3. Ara bé, després de llegir la resposta donada a la pregunta 3 (que es pot consultar a l'annex 10), sembla que podem confirmar el que ja sospitàvem a la pregunta anterior de què, efectivament, els alumnes trien la fórmula $y=ax+b$ perquè és la que defineix cadascun dels segments ja que diuen "la fórmula de la qual" en singular referint-se a una recta. A més, notem també que els alumnes apunten que "la gràfica que relaciona l'altura i el temps que necessita per arribar al terra [la pilota] són diverses rectes", pel que deduïm que el que han intentat estudiar al gràfic és la trajectòria de la pilota des del moment en què es llança fins que aquesta toca el terra per segona vegada.

Dades de Video Physics®. Seguidament, passem a mirar el vídeo que gravaren amb el programa Video Physics® i com determinaren el núvol de punts. Primer de tot, notem que aquests alumnes també col·loquen l'eix d'abscisses per davall d'on bota la pilota de manera que el valor de l'altura de qualsevol dels punts de la trajectòria serà positiu. D'altra banda, i a l'igual que els seus companys del grup 4, marquen els punts en la base de la pilota, probablement perquè en aquest cas els resulte més fàcil fer-ho així o perquè d'aquesta manera poden fer-ho de forma més exacta que si ho feren al centre.

Elecció de coordenades. Ara bé, si observem el full de coordenades, vegem que els punts que escolliren són 5, 7, 14, 16, 19 i 26. No sabem si per casualitat o no, però un dels punts que trien aquests alumnes és el punt central i la resta són punts que es troben a un costat i a l'altre d'aquest, a priori sembla que triats sense utilitzar cap tipus de criteri d'elecció. Tanmateix, podria ser que al triar aquests punts els alumnes teniren en ment que la funció que havia d'ajustar a aquests hauria de ser una funció simètrica (ja que un dels que trien és el del centre).

Ítem 4. D'altra banda, pel que es pot observar a la figura 5 de l'annex 11, la funció que trien a l'ítem 4 (que és una quadràtica amb terme independent c) ajusta a la perfecció als punts escollits. Ara bé, cal destacar que aquesta funció no és la mateixa que elegiren a l'ítem 2 (que fou $y=ax+b$), cosa que es deu a què s'adonaren de què l'anterior no ajustava als punts representats al programa Data Analysis® i, per tant, van haver de triar-ne una altra. En particular, recordem que quan els

alumnes es trobaren davant d'aquesta situació, ens cridaren per dir-nos que no sabien què fer ja que la funció que ells pensaven que descrivia el fenomen estudiat no ajustava als punts i en aquell moment no tenien cap idea sobre quina altra podria ser. Aleshores, els vam aconsellar que pensaren de nou en el fenomen i en la relació que hi ha entre el temps i l'altura en què es trobava la pilota en cada instant, cosa que semblà no servir-los de massa ajuda ja que ens explicaren que continuaven veient la gràfica com un conjunt de segments units pels extrems. Després d'açò, els indicàrem que miraren la llista de funcions que apareix al programa per tractar d'obtenir alguna pista, bé pensant en la representació de la funció i comparant-la amb el fenomen estudiat o bé provant a ajustar-ne algunes als punts, cosa que, pel que sembla, va ser el que definitivament els va ajudar a prendre la decisió.

Ítem 5. Quant a l'ítem 5, probablement el que feren va ser, utilitzant el programa Free GraCalc®, trobar els valors de les imatges introduint la funció de l'ítem anterior i arreglant la taula de valors per mostrar els valors que els interessaven. Ara bé, cal destacar que aquests alumnes cometen un error a l'hora de copiar els punts, ja que $f(100) = -124\,396.886$ i ells l'escriuen sense el signe, fet que es veu reflectit en les respostes donades posteriorment.

Ítem 6. Pel que fa a la pregunta 6, recordem que el que es tracta és d'averiguar si els alumnes pensen que les respostes de la pregunta anterior mostren, en general, el que vertaderament ocorre. En aquest cas, i a l'igual que en els anteriors, aquests expliquen que no, que hi ha alguns valors per a x que fan que y doneg negativa, cosa que per a ells no té cap sentit ja que "l'eix y representa l'altura, i aquesta no pot ser mai negativa". Notem que realment es verifica el que ja predíem a l'ítem 1, és a dir, que els alumnes consideren que l'altura mai no pot ser negativa quan treballem per damunt del sòl ja que sembla que, per a ells, el sòl està a altura zero.

Altrament, a l'apartat b), els alumnes especifiquen quines són les respostes que, per a ells, no tenen sentit. Aquests, com era d'esperar, expliquen que aquestes dades són les imatges per als valors 0.11 i 0.76 ja que donen imatges negatives. Adonem-nos també que no fan cap referència al valor que dona la imatge de 100 que, tot i que està malament i no dona un nombre negatiu, crida prou l'atenció ja que a l'interpretar el resultat seria com si als 100 segons la pilota es trobava a una altura de 124396.886m, cosa que no és el més habitual). Per la qual cosa, tot ens fa pensar que els alumnes no interpreten completament els resultats, tan sols es fixen en si ixen valors negatius o no per a l'altura i en què açò no pot passar.

Ítem 7. Finalment, a l'apartat a) d'aquest ítem el que fa aquesta parella és igualar a zero l'altura amb l'objectiu de trobar els valors de x (temps) per als quals la pilota toca terra. Per tant, pel que sembla, aquests alumnes també presenten la concepció de què l'altura a la qual es troba el sòl és zero ja que no donen cap mena de justificació de perquè han fet aquesta consideració. Ara bé, pel que fa a la

resolució, el que fan és obtindre una equació de segon grau com a resultat d'igualar y a zero i resoldre-la emprant la fórmula general, com podem observar als càlculs realitzats a la part de darrere del full.

D'altra banda, observem ara la resposta donada a l'apartat b). A l'igual que a la parella anterior, recordem que a aquestos alumnes tampoc no els va donar temps d'acabar d'emplenar la fitxa, per la qual cosa els vàrem dir que escriviren què hagueren fet en cas de disposar de més temps. No obstant això, els alumnes són capaços de donar una resposta correcta (ja que donen el mateix valor aproximadament que la coordenada x del punt 16 de l'experiment, com es pot veure al full de coordenades de l'annex 6) basant-se en la gràfica de la funció, tot i que sembla que no ho consideren així ja que per a ells aquest no sembla ser un mètode molt fiable.

4.1.1.6. Parella 6

Ítem 1. Com podem observar a la gràfica de l'ítem 1, els alumnes el primer que fan és donar-li nom a cadascun dels eixos, especificant el tipus de magnitud que representen i amb què es mesura cadascun d'aquests, segurament per tractar de tindre-ho en compte a l'hora de dibuixar el núvol de punts. Escriuen, d'una banda, $t(s)$ en l'eix de les x ja que aquest representa la variable temporal mesurada en segons i, d'altra banda, $h(m)$ en l'eix de les y , indicant que aquest representa l'altura mesurada en metres. A més, en aquest cas els alumnes tampoc no dibuixen un núvol de punts, sinó la gràfica de la funció que pensen que descriuria el fenomen estudiat. Com en altres casos, es torna a repetir el mateix patró ja que representen una paràbola a partir del punt $(0,0)$ de manera que no sobrepassa la part negativa de l'eix de les y , tractant, probablement, de representar la trajectòria de la pilota des que toca el terra per primera vegada fins que el torna a tocar. Ara bé, com ja hem dit, açò pot ser degut a què consideren que el sòl es troba a altura zero, concepció que pareix que es done en la majoria dels alumnes analitzats en aquest estudi. D'altra banda, cal destacar que el fet de què dibuixen la funció des del punt $(0,0)$ podria ser degut o bé a la manera en què està redactat l'enunciat o bé, com ja hem comentat abans, a la manera en què conceben el fenomen a estudiar, si ho fan com a part d'un estudi més general o independentment d'aquest.

Ítem 2. Quant al segon ítem, els alumnes trien la família de funcions $y=ax^2+bx$, com aquella a la que pertany la funció que descriu la trajectòria de la pilota durant l'interval de temps que es vol estudiar. Ara bé, sembla que el que fan és tractar de comparar aquesta fórmula amb la del moviment rectilini uniformement accelerat ($x=x_0+v_0\cdot t+a/2\cdot t^2$) o MRUA ja que saben que l'eix de les x representa el temps i el de les y l'altura i, com es pot veure a l'apartat c) d'aquest ítem, reescriuen la fórmula per damunt canviant la notació (o assignant valors en cas del paràmetre a) per la que s'utilitza habitualment en la fórmula del MRUA.

Ítem 3. Ara bé, és en l'ítem 3 on expliquen el que realment feren que és, efectivament, comparar ambdues fórmules, probablement com a conseqüència de què recentment haurien estudiat aquest moviment en l'assignatura de física ja que la qualifiquen com una "fórmula de física". Tanmateix, com que no podem afirmar res de manera contundent, pensem que potser la resposta podria haver estat influïda pel fet de què a l'enunciat s'especifica que el que s'ha d'estudiar és el moviment de tir vertical d'un cos en l'atmosfera, moviment que es descriu per una fórmula semblant ($x=x_0+v_0\cdot t-g/2\cdot t^2$, on g és l'acceleració de la gravetat).

Dades de Video Physics®. Quant a la gravació que feren al programa Video Physics®, notem que aquestos col·loquen els eixos coordinats de manera que el punt (0,0) coincidisca amb el primer punt dels que marquen per assenyalar la trajectòria de la pilota. Ara bé, tot i que els vàrem advertir, els alumnes graven massa prop l'experiment de manera que quasi no es pot apreciar el lloc en què la pilota toca el sòl, cosa que no els permet afinar molt a l'hora de marcar el primer punt i l'últim de la trajectòria ja que ho fan a la part baixa d'aquesta, que amb prou feines es veu. Per tant, conseqüentment, si hagueren realitzat la segona fitxa utilitzant aquestes dades, la funció de regressió, no es correspondria massa amb la funció que resultaria a l'haver marcat aquests punts en el lloc correcte i, per tant, els valors de l'ítem 5 no serien tan exactes com en la resta de casos.

Elecció de coordenades. Passem ara a veure els punts que trien al full de coordenades i que posteriorment copien al programa Data Anlalysis®. Notem que aquestos elegeixen els punts 1, 5, 10, 15, 20, 25 i 30, és a dir, agafen els punts, més o menys, de cinc en cinc, probablement perquè, com ja hem comentat en algun dels casos anteriors, tracten de cobrir tota la taula, és a dir, seran punts que al representar-los estaran ben repartits per la gràfica de manera que, així, la funció de regressió triada ajustarà millor globalment. Ara bé, tot i que si observem la imatge corresponent a l'annex 9 sembla que els punts s'hagen agafat tractant de mantindre una certa simetria, pensem que és una casualitat i que no va ser aquesta la raó per elegir-los.

Ítem 4. Quant al següent ítem, notem que aquestos alumnes també canvien de funció respecte la que havien triat a l'ítem 2 i ara elegeixen la funció quadràtica $y=ax^2+bx+c$, segurament perquè han vist que la que triaren al principi (que fou $y=ax^2+bx$) no ajustaria al núvol de punts. Recordem, d'altra banda, que després de l'elecció de la funció, els alumnes la copiaren a l'ítem 4 però de manera que s'equivocaren i li canviaren el signe al terme independent (assignant-li un + en compte d'un -). Aquest fet va ocasionar que, a l'hora de resoldre l'ítem següent (en el que es demana calcular les imatges d'alguns dels punts) i després de veure la gràfica representada al programa Free GraCalc®, se n'adonaren de què aquesta no era com esperaven. Tanmateix, ens cridaren per fer-nos-ho saber i, a l'adonar-nos de què l'errada havia estat copiar malament la funció, la corregiren (posaren un

signe - davant del terme independent) i observaren de nou la representació gràfica, amb la que ara sí que n'estaven d'acord. Així mateix, encara que el fet no té major transcendència que aquesta, és important destacar la influència de la utilització, per parts dels alumnes, dels seus coneixements sobre les propietats qualitatives del fenomen en la gestió del procés de modelització.

Ítem 5. Seguidament, al passar a l'ítem 5, vegem com les dades obtingudes al substituir en la funció són correctes però, a l'igual que en casos anteriors, apareixen valors negatius, cosa que els fa pensar que aquestes no tenen sentit, tal i com expliquen a l'ítem següent.

Ítem 6. A continuació, vegem, com ja avançàvem, que a l'apartat a) de l'ítem 6 els alumnes expliquen que hi ha dades que no s'ajusten al que esperaven i ho justifiquen explicant que l'altura no hauria de ser negativa ja que, com diuen, "la pilota no travessa el terra, sinó que rebota". Ens trobem davant d'un altre cas d'alumnes que no conceben que l'altura pugui prendre valors inferiors a zero ja que això significaria que aquesta traspasa el sòl.

Pel que fa a l'apartat b), notem que empren el mateix raonament i especifiquen que les dades que no s'ajusten són aquelles en les quals la y és negativa, és a dir, les imatges dels punts que donen valors negatius.

Ítem 7. Finalment, a l'ítem 7 a) podem observar que el que fan per calcular els valors del temps per als quals la pilota colpeja el sòl és igualar la y a zero i, després, resoldre l'equació de segon grau $0 = -12.564x^2 + 37.557x - 24.828$ utilitzant la fórmula. El que cal ressaltar en aquesta resposta és que, de nou, els alumnes interpreten que l'altura a què es troba el terra ha de ser zero, probablement sense comprovar si açò és cert o no ja que, a l'igual que la resta dels seus companys, no donen cap tipus de justificació.

D'altra banda, per calcular els valors del temps en què la pilota es troba a la màxima altura, el que fan és calcular el punt mitjà entre els dos valors obtinguts anteriorment, sumant-los i dividint el resultat per dos. Ara bé, sembla que confonen el que demana l'enunciat interpretant malament les variables ja que, després d'açò, calculen també l'altura màxima a què arriba la pilota, cosa que fan substituint el valor obtingut per a x en l'equació $y = -12.564x^2 + 37.557x - 24.828$.

4.1.1.7. Parella 7

Ítem 1. En primer lloc, cal destacar que aquesta parella tampoc no dibuixa un núvol de punts a l'ítem 1, sinó una paràbola que comença en el punt (0,0) i que, a l'igual que en altres casos, no pren valors negatius per a les variables x i y . A més, és raonable comentar que la justificació d'aquest fet sembla ser la mateixa que la que hem mencionat abans per als casos anteriors ja que la resposta donada és molt semblant. Ara bé, a diferència d'aquells, cal assenyalar que els alumnes dibuixen com una espècie de pilota en el moment i a l'altura en què pensen que acabarien

d'estudiar el moviment, potser per indicar que la gràfica representa un estudi sobre la trajectòria d'aquesta, cosa que no és cert ja que el que es pretén és estudiar la relació entre l'altura i el temps.

Ítem 2. Observem ara el següent ítem. En aquest, els alumnes trien la família de funcions $y=ax^2+bx$, és a dir, consideren que aquesta és la família a la qual pertany la funció que millor descriu la trajectòria de la pilota, probablement perquè saben que, al no tindre terme independent c , aquesta passarà per l'origen de coordenades. A més, notem que aquesta parella descarta també algunes funcions ratllant-les, probablement al pensar que les propietats qualitatives d'aquestes no es corresponen amb les del fenomen. D'altra banda, també és interessant ressaltar que sembla que, en el moment en què havien de decantar-se per una funció o altra, dubtaren entre les opcions $y=ax^2+bx+c$ i $y=ax^2+bx$ ja que aquestes dues són les úniques que estan encerclades amb llapis i, a més, posseeixen propietats similars (degut que una és un cas particular de l'altra).

Ítem 3. D'altra banda, els alumnes justifiquen la seua elecció a l'ítem 3, on expliquen que trien l'opció c) perquè ha de ser "una opció que descriga una paràbola" i, a més, afigen que és el quadrat de la x el que els indica "que descriurà un moviment parabòlic". Tanmateix, notem que el que expliquen no és correcte ja que el que cal estudiar no és el moviment o la trajectòria de la pilota, sinó la relació entre l'altura i el temps, què és el que sí que es descriu mitjançant una paràbola. A més, semblen no estar massa convençuts de l'opció elegida ja que la resposta donada comença amb un "suposem que serà" que denota un cert grau d'inseguretats per part dels alumnes. Així doncs, potser escriguen açò perquè, efectivament, no estan completament segurs de què l'opció triada siga la correcta ja que, a més, podem observar a la resposta que els motius que utilitzen per justificar-se no ens porten a descartar totes les funcions de la llista perquè l'opció b) també quadraria amb aquesta descripció. No obstant això, d'aquesta resposta cal destacar com els alumnes identifiquen i comparen les propietats qualitatives de la gràfica de la funció amb les de la fórmula per tractar de justificar el seu raonament.

Dades de Video Physics®. Tot seguit, si mirem el vídeo que gravaren aquests alumnes amb el programa Video Physics® notem que, al contrari que la parella anterior, el feren a una distància que podríem considerar massa gran ja que si hagueren utilitzat aquestes dades per trobar la funció de regressió, no hauria eixit un resultat massa exacte. Ara bé, deixant a banda aquests comentaris, fixem-nos com en aquest cas els alumnes col·loquen també l'eix d'abscisses per davall d'on bota la pilota, de manera que aquesta sempre quede per damunt, potser amb l'objectiu de què totes les dades obtingudes siguen positives (i consegüentment, l'altura també). Notem també que, d'altra banda, aquests marquen els punts que

indiquen la trajectòria que segueix la pilota a la part baixa d'aquesta, a l'igual que feien els seus companys de la parella anterior.

Elecció de coordenades. Pel que fa als punts que trien del full de coordenades, notem que en aquest cas són: 1, 7, 12, 16, 23 i 31. Ara bé, com podem observar, un dels punts elegits és el punt de màxima altura (que correspondria al vèrtex de la paràbola en cas de què aquesta fora la funció elegida), tot i que no podem assegurar que el trien per aquest motiu ja que més bé sembla haver sigut resultat d'una coincidència. En realitat, pareix que tots els punts estiguen agafats, com ja hem comentat en casos anteriors, amb l'objectiu de què al representar-los estiguen ben repartits per la gràfica i la funció de regressió que trien ajusti el millor possible globalment.

Ítem 4. Quant a l'elecció d'aquesta, ens trobem de nou davant un altre exemple en què els alumnes canvien de funció respecte la que elegiren a l'ítem 2. Ara bé, en aquest cas, trien la funció $y=ax^2+bx+c$ i, tot i que podríem pensar que l'elegiren perquè ajustava als punts, si recordem el que va passar mentre tractaven de buscar-ne una, ens adonem de què no fou així. Cal recordar que quan els alumnes seleccionaren la funció al programa Data Analysis®, no sabem ben bé per quin motiu, aquesta no ajustava als punts (mirar la figura 7 de l'annex 11), cosa que els va sorprendre ja que estaven totalment convençuts de què aquesta era la funció correcta. Aleshores, com que tot semblava apuntar que havia sigut un error del propi programa, ja que tornaren a escriure les coordenades i continuava passant-los el mateix, els instàrem a què agafaren un altre dispositiu per veure si la cosa canviava. Llavors, quan els alumnes introduïren les dades en un iPad® diferent i provaren a ajustar la funció, ara sí, tot va funcionar com esperaven.

Ítem 5. Si observem ara l'ítem 5 i tractem de comprovar si els resultats són correctes o no, descobrim que el valor que escriuen els alumnes per a la imatge de 100 és -0.122, mentre que el valor que realment té és -122 916.078. Al fixar-nos en les xifres, ens adonem de què són molt semblants, cosa que ens fa intuir que potser quan calcularen el valor de $f(100)$ i els aparegué aquest nombre tan gran, els semblà tan estrany que el varen reinterpretar com un decimal, cosa que potser els pareixeria més coherent.

Ítem 6. Passem ara a l'ítem 6. A l'apartat a) els alumnes expliquen que les respostes anteriors no mostren el que vertaderament ocorre perquè, segons diuen, "els punts al ser negatius no tenen massa coherència en una situació real". Sembla que estan pensant en què en la realitat açò no podria passar ja que els punts a què es refereixen són els valors de l'altura i pareix ser que, per a ells, aquesta no pot ser negativa. No obstant això, seria interessant averiguar què volen dir quan parlen "d'una situació real" ja que, afirmant açò, sembla que estiguen considerant que en una situació que no fora real l'altura sí que podria prendre valors negatius.

Després, quant a l'apartat b), l'únic que fan és especificar quines dades són les que no s'ajusten al que esperaven que, segons diuen, són els resultats dels apartats a), c) i d) de l'ítem 5, per ser valors negatius. Tanmateix, sembla que el fet de que siguin nombres negatius no és l'únic que fa que pensen que no tenen sentit ja que, si realment han reinterpretat el valor obtingut per a la imatge de 100, per a ells tampoc tindria sentit que aquest fora un nombre tan gran, tot i que açò no ho expliquen a la resposta.

Ítem 7. Per finalitzar, vegem les respostes de la pregunta 7. A l'apartat a), els alumnes expliquen que han trobat els valors de x per als quals la pilota colpeja el terra mitjançant l'iPad®. És a dir, el més probable és que hagen mirat la representació gràfica de la funció al programa Free GraCalc® i, ampliant la imatge, hagen vist quins són els valors de x per als quals y val zero que, com diuen a la resposta, són 0.99 i dos aproximadament. Ara bé, sembla, de nou, que el fet de considerar que l'altura a què es troba el sòl és zero és resultat de les concepcions dels alumnes.

Altrament, a l'apartat b), els alumnes expliquen que es tornen a basar en la gràfica de la funció per respondre ja que expliquen que troben el valor del punt més alt de la funció, que és 1.5, "mitjançant l'observació de la pantalla de l'iPad®".

4.1.1.8. Parella 8

Ítem 1. Passem, per últim, a analitzar les respostes de la parella 8. Quant a l'ítem 1, observem com els alumnes, en compte de dibuixar el núvol de punts que pensen que obtindrien després d'analitzar les imatges de l'experiment, dibuixen directament la gràfica de la funció. Aquesta, a l'igual que les gràfiques d'alguns dels seus companys, presenta les característiques de què comença des del punt (0,0) i no traspasa l'eix de les x . Probablement, tal com ja hem dit abans, açò siga degut que els alumnes consideren el temps com absolut, ja que consideren que aquest és zero i, per tant, no conceben l'estudi de la trajectòria de la pilota des del primer bot fins al segon dins d'un determinat context, sinó en un context aïllat. D'altra banda, tot sembla apuntar que també consideren que l'altura del terra és zero ja que dibuixen la paràbola sencera dintre del primer quadrant.

Ítem 2. Ara bé, al segon ítem, els alumnes trien la família de funcions $y=ax^2+bx$, probablement perquè saben que la funció que ens mostra la relació entre l'altura a què bota la pilota i el temps en l'interval en què l'estem estudiant és una funció quadràtica (ja que gràficament es tracta d'una paràbola) i que, a més, no té paràmetre c ja que passa pel punt (0,0).

Ítem 3. Quant al tercer ítem, notem com en la resposta donada, els alumnes relacionen el fenomen estudiat, la representació gràfica i la fórmula que el descriu ja que expliquen que "aquest moviment pertany a una paràbola convexa i per tant la seua funció és una equació de segon grau". Destaquem, a més, que sembla que

quan diuen que “el moviment pertany a una paràbola” es refereixen a què el fenomen estudiat serà descrit mitjançant una paràbola i, per tant, com diuen posteriorment, utilitzant una funció quadràtica.

Dades de Video Physics®. Mirem ara la figura 8 de l'annex 11 on podem veure una imatge en què un dels alumnes està sobre una cadira i acaba de soltar una pilota. A més, notem que aquests han col·locat l'eix d'abscisses per davall d'on toca el sòl aquesta, de manera que tots els punts queden a la part superior i, per tant, els valors que tinga l'altura de cada punt siguen sempre positius. D'altra banda, cal destacar que marquen els punts a la part baixa de la pilota i, en aquest cas, no de manera massa acurada potser perquè l'experiment que està tenint lloc (tal i com podem observar a la imatge de l'annex) està molt allunyat del dispositiu i, per tant, no els permet ajustar tant. De nou, cal comentar que els alumnes haurien d'haver gravat el vídeo des d'una distància menor ja que així hagueren pogut ser més precisos a l'hora de marcar aquests punts.

Elecció de coordenades. Quant al full de coordenades, cal observar que els alumnes elegeixen set punts, la posició dels quals en la taula és múltiple de 3, és a dir, elegeixen els punts 3, 6, 9, 12, 15, 18 i 21. Per tant, quan trien la funció de regressió (que, com veurem a l'ítem 4, és una paràbola) en tindran mitja molt ben aproximada però no l'altra mitja, cosa que pot provocar dues coses: que no reconeguen quina funció descriu millor el fenomen que estem estudiant (durant l'interval en què l'estem estudiant) i que, encara que la reconeguen, aquesta no siga la millor ja que, potser la funció que trien ajusta molt bé als punts representats però no té perquè fer-ho a la resta.

Ítem 4. Passem ara al següent ítem. Com ja havíem avançat, els alumnes trien la paràbola com a la funció de regressió que millor ajusta als punts, tanmateix cal destacar que ara ja no elegeixen la que passa pel punt (0,0), sinó la que té terme independent c , probablement com a resultat d'observar que aquesta dona un millor ajust, almenys als punts que els alumnes han representat.

Ítem 5. Seguidament, vegem com a l'ítem 5 el que fan és calcular les imatges dels punts, cosa que probablement fan substituint a la funció anterior amb l'ajuda del programa Free GraCalc® però que no podem assegurar. Cal destacar que, també en aquest cas, les imatges dels punts 100, 0.11 i 0.76 per la funció triada són negatives.

Ítem 6. Ara bé, a l'ítem 6a) ens expliquen que les dades obtingudes a la resposta anterior no mostren el que vertaderament ocorre ja que les imatges per a $x = 100$ i $x = 0.11$ són negatives i, segons ells, açò “no és possible”. Ara bé, tot sembla apuntar a què donen aquesta resposta perquè pensen que l'altura no pot ser negativa mai quan estem per damunt del nivell del sòl, cosa que pareix ser resultat d'una concepció pròpia que tenen prou arrelada, ja que ja a la gràfica de l'ítem 1

vèiem com els alumnes ja pressuposaven que l'altura no podia ser negativa en cap moment ja que dibuixaven totes les dades al primer quadrant.

D'altra banda, el que fan els alumnes a l'apartat b) és donar la mateixa resposta que a l'apartat anterior ja que recordem que durant la realització de la fitxa ens preguntaren a què ens referíem amb el segon apartat ja que ells ja havien explicat el que els preguntàvem ací a l'apartat anterior. Aleshores, els explicarem que en aquest apartat s'havia d'escriure quines eren les dades que no s'ajustaven al que esperaven i, llavors, el que feren aquests fou copiar pràcticament la resposta d'abans. Ara bé, aquesta resposta mostra una xicoteta diferència respecte a l'anterior ja que, al justificar-se, expliquen que els ixen nombres negatius que "no s'ajusten a la vida real", cosa que ens permet deduir que al que es referien abans quan deien que no era possible que aparegueren nombres negatius, era, efectivament, conseqüència de la concepció que tenen de què l'altura, "a la vida real", mai no pot ser negativa per damunt del nivell del sòl.

Ítem 7. Per finalitzar, passem a comentar els resultats de l'ítem 7. Recordem que aquesta parella tampoc no va tindre temps suficient per acabar la fitxa, per tant les seues respostes es veuen afectades per aquest fet ja que no estan massa raonades o es mostren incompletes. Al primer apartat, expliquen simplement què és el que haurien fet per respondre la pregunta ja que diuen que, com que la y és l'altura, el que haurien fet seria considerar $y=0$, és a dir, suposar que l'altura al nivell del sòl val zero i, aleshores, trobar els valors de x per als quals passa açò. Notem que, degut a la falta de temps, l'afirmació de què y és zero al nivell del terra probablement siga conseqüència de les seues concepcions o idees prèvies, no de comprovar si aquest fet és cert o no al full de coordenades.

Per últim, els alumnes expliquen que "l'altura màxima seria de 3.5 aproximadament", resultat que no sabem com han obtingut ja que no donen cap tipus de justificació i que, a més, no és el que els demanàvem ja que el calia buscar era el valor del temps, no el de l'altura.

4.1.2. Taules resum

A continuació, presentem tres taules resum en les quals es poden observar els resultats més importants obtinguts en cada ítem per cadascuna de les parelles de manera que es poden comparar entre aquestes més fàcilment i fer-se'n una visió global.

A més, en les taules no només apareixen els resultats obtinguts en cada ítem, sinó també aquells que es poden obtindre de l'observació del programa Video Physics®, com ara la posició en què els alumnes fixen l'eix d'abscisses i el lloc on marquen els punts en la pilota, i els relatius a l'elecció de les coordenades dels punts donades a partir del full de coordenades.

Mostrem les taules a les pàgines següents.

Ítems / parelles		Parella 1	Parella 2	Parella 3	Parella 4	Parella 5	Parella 6	Parella 7	Parella 8
Ítem 1	Forma del dibuix	Paràbola	Conjunt de paràboles decreixents	Conjunt de paràboles decreixents	Paràbola	Conjunt de rectes decreixents	Paràbola	Paràbola	Paràbola
	Traçada	Discontínua	Discontínua	Contínua	Contínua	Contínua	Contínua	Contínua	Contínua
	Assignació de nom als eixos	$x(t), y(h)$	-	-	-	t, h	$t(s), h(m)$	-	-
	Passa pel (0,0) = Temps absolut	Sí	Sí	Sí	No	No	Sí	Sí	Sí
	1r quadrant = Altura no negativa	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
Ítem 2	Família de funcions triada	$y=ax^2+bx$	$y=ax^2+bx$	$y=ax^2+bx$	$y=a \cdot \sin((x-c/b))+d$	$y=ax+b$	$y=ax^2+bx$	$y=ax^2+bx$	$y=ax^2+bx$
Ítem 3	En què es basen per triar la funció?	Perquè "la pilota forma paràboles" i és la que més coincideix entre b) i c)	Després d'haver mirat b) i rebutjar-la i interpretant a i b	Propietats qualitatives funció i interpretació de paràmetres	En què "el moviment que descriu la pilota forma un angle amb la horitzontal" i "té sinus"	Propietats qualitatives fenomen i funció	En la fórmula de física $x=vt+(a/2) \cdot t^2$	Propietats qualitatives funció	Propietats qualitatives fenomen i funció
	Interpretació que fan dels paràmetres	-	a indica y , b indica x	c indica que una funció "té punt d'origen"	-	-	Interpreten els paràmetres de la funció	-	-
Dades de Video Physics®	Lloc on fixen l'eix d'abscisses	En el 1r punt que es marca	Als peus de l'alumne	Per davall del terra	Per davall del terra	Per davall del terra	En el 1r punt que es marca	Per davall del terra	Per davall del terra
	Lloc on marquen els punts en la pilota	Al centre	Al centre	Al centre	A la part baixa	A la part baixa	A la part baixa	A la part baixa	A la part baixa

Ítems / parelles		Parella 1	Parella 2	Parella 3	Parella 4	Parella 5	Parella 6	Parella 7	Parella 8
Elecció coord.	Criteri utilitzat per triar els punts	Igualment espaiats	Igualment espaiats (agrupats per parelles)	Simetria de la funció	Que cobrisquen tot l'eix de les x	Simetria de la funció	Igualment espaiats i que cobrisquen tot l'eix de les x	Que cobrisquen tot l'eix de les x	Igualment espaiats
Ítem 4	Canvien de funció	No	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
	Funció que trien	$y=ax^2+bx$	$y=ax^2+bx+c$	$y=ax^2+bx+c$	$y=ax^2+bx+c$	$y=ax^2+bx+c$	$y=ax^2+bx+c$	$y=ax^2+bx+c$	$y=ax^2+bx+c$
	Què utilitzen per trobar la funció?	Programa Data Analysis®	Programa Data Analysis®	Programa Data Analysis®	Programa Data Analysis®	Programa Data Analysis®	Programa Data Analysis®	Programa Data Analysis®	Programa Data Analysis®
Ítems 5 i 6	Dades que no s'ajusten	$f(100)$	$f(0.76)$, $f(0.11)$ i $f(100)$?	$f(0.76)$, $f(0.11)$ i $f(100)$	$f(0.76)$, $f(0.11)$ i $f(100)$	$f(0.76)$ i $f(0.11)$	$f(0.76)$, $f(0.11)$ i $f(100)$	$f(0.76)$, $f(0.11)$ i $f(100)$	$f(0.11)$ i $f(100)$
	En què es fixen per dir que no tenen sentit les dades?	Imatge	Domini i imatge	Imatge	Imatge	Imatge	Imatge	Imatge	Imatge
	Quina justificació donen?	$f(100)$ molt allunyada de les altres dades	Les coord. donades comencen a temps u. Estan molt per davall	Hi ha valors negatius i la pilota mai travessarà el terra	Hi ha valors negatius i la pilota mai travessarà el terra.	L'altura no pot ser negativa	L'altura no pot ser negativa perquè la pilota rebota contra el terra	No és coherent que apareguen valors negatius per a l'altura en una situació real	No és possible que apareguen valors negatius per a l'altura, no s'ajusten a la vida real

Ítems / parelles		Parella 1	Parella 2	Parella 3	Parella 4	Parella 5	Parella 6	Parella 7	Parella 8	
Ítem 7	a)	Com calculem els valors del temps per als quals la pilota toca el terra?	Igualant y a zero i mirant el gràfic	Igualant y a zero i resolent equació 2n grau	Igualant y a zero	-	Igualant y a zero i resolent equació de 2n grau	Igualant y a zero i resolent equació de 2n grau	Mirant el gràfic	Igualant y a zero
		Valor que consideren del terra	Zero	Zero	Zero	-	Zero	Zero	-	Zero
		Utilitzen el full de coordenades per respondre?	No	No	No	-	No	No	No	No
	b)	Com troben el punt d'altura màxima?	Mirant el gràfic	Resolent equació càlcul vèrtex	Calculant el punt intermedi	-	Mirant el gràfic	Calculant el punt intermedi	Mirant el gràfic	-
		Utilitzen el full de coordenades per respondre?	No	No	No	-	No	No	No	-

4.1.3. Resum de resultats per ítems

Seguidament, passem a comentar algunes de les respostes més rellevants i que més han aparegut a l'anàlisi anterior, així com a explicar les concepcions que presenten els alumnes i que es repeteixen en cada parella. Així mateix, abordarem la descripció dels resultats de les respostes donades per aquests ítem a ítem.

Ítem 1. Primerament, cal destacar que la majoria d'alumnes pensen que la funció que representa el fenomen estudiat és una paràbola o un conjunt d'aquestes ja que així ho mostren les respostes donades a l'ítem 1 segons si han considerat que el fenomen estudiat és només des que la pilota toca el sòl per primera vegada fins que el torna a tocar o és tot el que es descriu a l'enunciat. Tanmateix, el que realment crida l'atenció de les gràfiques és el fet de que la majoria d'aquestes (tant si són rectes, paràboles o conjunts d'aquestes) comencen en el punt (0,0). Ara bé, com ja hem dit, probablement aquest fet siga conseqüència de que els alumnes consideren el temps com absolut, és a dir, per a ells el temps és zero quan comencen a estudiar el fenomen, obviant que aquest està englobat en un context més general que cal considerar.

A més, fixant-nos també en les gràfiques, podem adonar-nos de que totes tenen en comú que estan dibuixades al primer quadrant, és més, el mínim valor que pren y en qualsevol dels casos és zero, probablement perquè els alumnes conceben que l'eix d'abscisses representa el terra i, per tant, com que el fenomen estudiat té lloc per damunt del nivell del sòl, per a ells no té sentit dibuixar res per davall.

Ítem 2. Quant a l'ítem 2, notem que la majoria d'alumnes trien l'opció c) $y=ax^2+bx$ com la família de funcions a la qual pertany la funció, o part de la funció (com en el cas de les parelles 2, 3 i 5), que representa el fenomen estudiat. A més, sembla que el principal criteri utilitzat per els alumnes a l'hora de fer l'elecció consisteix a realitzar una comparació entre l'anàlisi qualitatiu de l'ítem 1 (que representa les propietats qualitatives del fenomen estudiat) i els seus coneixements sobre les propietats qualitatives de les famílies de funcions.

Ítem 3. Ara bé, és a l'ítem 3 on es pot observar realment quins han sigut els criteris que s'han utilitzat per triar la família de funcions. Notem que, d'una banda, és cert que es basen en les propietats qualitatives del fenomen i de les distintes famílies de funcions, cosa que es pot observar, per exemple, a la resposta de la parella 8 que diu que "aquest moviment pertany a una paràbola convexa i per tant la seua funció és una equació de segon grau". Però, també tracten de justificar la seua elecció tractant d'interpretar els diferents paràmetres, tot i que no sempre ho fan com cal. N'és un exemple la resposta de la parella 2 que diu que "la a indica l'eix de les x i la b el de les y i com comença en el (0,0) no tenim c ".

Dades de Video Physics®. D'altra banda, pel que fa al programa Video Physics®, cal destacar que tots els alumnes llevat de la parella 2 fixen els eixos coordenats de

manera que l'eix d'abscisses quede per davall d'on bota la pilota, és a dir, de manera que els valors que pren l'altura siguin sempre positius. Ara bé, els alumnes de les parelles 1 i 6 ho fan d'una forma més peculiar, és a dir, amb la intenció de què el primer i l'últim punt de la trajectòria de la pilota coincidisquen amb l'eix de les x , per tant, y valdrà zero en el moment en què la pilota toque terra. Així mateix, cal destacar que probablement els alumnes situen l'eix d'abscisses en aquesta posició per fer que l'altura del terra siga zero però, en el cas de la primera parella, açò no és així ja que, com podem observar a la figura 1 de l'annex 11, aquestos alumnes marquen els punts al centre de la pilota per la qual cosa el terra es trobaria a una altura negativa.

Elecció de coordenades. Quant a l'elecció dels punts al full de coordenades per part dels alumnes, podem distingir tres criteris en els quals es basen: en agafar els punts de manera simètrica (probablement com a conseqüència de què coneixen les característiques de la funció de regressió, que també és simètrica), en agafar-los de manera que cobrisquen tot l'eix d'abscisses on està definida la funció (pensant en què aquesta ajust bé en tot el domini de definició) o en agafar-los igualment espaiats (sense tenir en compte les propietats qualitatives de la funció que ajustarà a aquests i sense importar-los si cobreixen l'eix de les x o no). Ara bé, cal destacar que en algun cas, les parelles utilitzen més d'un criteri per fer l'elecció dels punts. En les taules resum de l'apartat anterior, es poden observar clarament els criteris utilitzats per cada parella.

A més, en general, podem dir que en aquest cas l'elecció dels punts no ha suposat un inconvenient a l'hora de triar la funció de regressió que millor ajustara i que el fet de conèixer les característiques que té la funció que descriu el fenomen estudiat permet triar aquells punts que facen que la funció de regressió siga el més pareguda a aquesta.

Ítem 4. Pel que fa a l'ítem 4, totes les parelles elegeixen la funció quadràtica $y=ax^2+bx+c$, menys la parella 1 que tria la funció $y=ax^2+bx$, cosa que, com ja hem comentat, es d'estranyar ja que aquesta no ajusta al núvol de punts. Per tant, notem que en la majoria de casos es produeix un canvi respecte la funció que triaven els alumnes a l'ítem 2, possiblement com a conseqüència d'haver estudiat més a fons el fenomen o de provar l'ajust de totes les funcions que es troben a la llista del programa Data Analysis® i veure que aquesta és la que millor ajustava. Tanmateix, cal destacar, de nou en aquest moment de l'estudi, la importància de l'anàlisi qualitatiu del fenomen en la presa de decisions sobre l'elecció de la funció per part dels alumnes.

Ítems 5 i 6. En relació amb l'ítem 5, destaquem que totes les parelles calculen les imatges correctament substituint els valors en la funció que elegeixen a l'ítem 4 (malgrat que en algun cas aquesta no és correcta). Ara bé, alguns dels valors que obtenen són negatius, cosa que a molts d'ells els resulta contradictori i que fa que quan els preguntem a l'ítem 6 si pensen que els resultats mostren el que vertaderament ocorre responguen que no perquè l'altura no pot prendre valors

negatiu. Per tant, a l'hora de respondre aquesta pregunta sembla que la majoria d'alumnes no es fixen en els valors del domini de definició de la funció (que és el que haurien d'haver fet ja que recordem que la funció de regressió sols representa el fenomen en l'interval en què l'estan estudiant, i no té sentit calcular les imatges quan estan fora d'aquest), sinó que es basen en què alguns dels valors que pren l'altura (les imatges) són negatius, cosa que per a ells no pot ser. Així doncs, notem que aquesta concepció haguera pogut conduir a un error ja que, com sabem, els valors de l'altura depenen del lloc on es fixe l'eix d'abscisses en el programa Video Physics® i, per tant, sí que podrien ser negatius.

Ítem 7. Per últim, cal destacar que, tot i que els alumnes disposen de la informació necessària per respondre els dos apartats d'aquest ítem (ja que aquesta es troba al full de coordenades de l'annex 5) es guien més per les seues concepcions i pels coneixements que tenen sobre les propietats qualitatives de la funció i del fenomen modelitzat que per aquesta.

En particular, en l'apartat a) de l'ítem 7, el que fan és considerar que l'altura a què es troba el terra és zero i, a partir d'ahí, trobar els valors del temps¹. Ara bé, tot sembla apuntar que aquesta consideració és resultat de les pròpies concepcions dels alumnes i no de comprovar si açò és cert utilitzant les dades de què disposen, ja que no donen cap mena de justificació. Tot i això, com hem dit, en aquest cas no sabem si l'altura del sòl és exactament zero o un valor pròxim a aquest, ja que no coneguem ni on es va fixar l'eix d'abscisses en el programa Video Physics® respecte al terra ni tampoc en quin lloc de la pilota es varen marcar els punts, per tant, no podem afirmar que les seues respostes siguin incorrectes. Ara bé, cal destacar que, una vegada considerat que l'altura del terra és zero, utilitzen diverses estratègies per trobar els valors del temps en què açò passa com ara resoldre equacions o buscar a les gràfiques que genera el programa Free GraCalc®.

Així doncs, a l'apartat b) de 7 els alumnes tampoc no es fixen en les dades del full de coordenades per trobar el valor del temps en què la pilota alcança la màxima altura, sinó que es basen, sobretot, en els seus coneixements sobre les propietats qualitatives de la gràfica i del fenomen estudiat per donar les seues respostes.

4.2. Anàlisi de les entrevistes transcrites

Com ja hem dit, per poder esbrinar millor les concepcions dels alumnes i l'origen de les seues respostes es va decidir realitzar un anàlisi més exhaustiu a dues de les parelles estudiades a l'apartat anterior mitjançant una entrevista. Així doncs, l'entrevista no només es va realitzar amb aquesta intenció sinó també amb la

¹ Recordem que, en realitat, ni tan sols és necessari conèixer a quina altura es troba el terra respecte l'eix de les x per respondre ja que els valors del temps per als quals la pilota toca el terra seran els valors de les coordenades temporals del primer i de l'últim punt del full de coordenades. Ara bé, cal destacar que cap alumne ha contestat seguint aquest raonament.

d'ensenyar, mitjançant les reflexions dels propis alumnes sobre les seues respostes així com sobre les qüestions que els formulem. Ara bé, les parelles escollides foren les que anomenem per 1 i 2 i, tot seguit, explicarem quins són els criteris que utilitzarem per escollir-les.

Parella 1. Va ser l'única parella que no va canviar de funció després d'haver representat el fenomen i d'haver-lo gravat ja que triaren la mateixa a l'ítem 2 que al 4. A més, ens pareixia que seria interessant estudiar aquests alumnes ja que donen algunes respostes sobre les quals ens agradaria indagar més. Per exemple, a l'ítem 3 expliquen que trien la família de funcions quadràtiques amb paràmetre $c=0$ perquè la pilota "forma paràboles", pel que no sabem si es refereixen a la trajectòria de la pilota (per la qual cosa podríem afirmar que interpretaren malament l'enunciat) o a la relació entre l'altura i el temps d'aquesta. O, altre exemple, seria la resposta donada a l'ítem 6, on afirmen que el valor que obtenen per a $f(100)$ és un error seu, pel que conèixer els motius que els portaren a donar-la podria ajudar-nos a conèixer millor quines són les seues concepcions sobre els valors que pot prendre la funció.

Parella 2. Al contrari d'abans, triarem aquesta parella perquè era una de les que sí que canviaren de funció a l'ítem 4 i, a més, eren els únics alumnes que semblava que es basaven en els valors que estan al domini de la funció estudiada per respondre la pregunta 6. Així mateix, presentaven també altres característiques que ens semblava interessant estudiar més a fons com ara que foren els únics que col·locaren l'eix d'abscisses als peus de l'alumne al programa Video Physics® i, a més, tot i que assenyalaren una única família de funcions a la pregunta 2, abans de respondre, cadascun dels membres de la parella pensava que era una funció distinta (tal i com ens ho feren saber durant eixa sessió), cosa que volíem averiguar perquè i què va fer que arribaren a un acord.

Així doncs, com que no sabíem si el dia de realitzar les entrevistes ens trobaríem amb unes circumstàncies distintes a les que esperàvem, prepararem una entrevista més, la de la parella 5 entre altres motius, per l'interès d'indagar més sobre la visió que tenen del fenomen com un conjunt de línies rectes. Tanmateix, mai no vam arribar a realitzar-la.

Ara bé, a continuació, ens centrarem en l'anàlisi de la informació obtinguda a aquestes entrevistes que, com ja hem dit, són de caràcter majoritàriament de diagnòstic però que contenen també un component d'ensenyament i, posteriorment, aportarem algun comentari sobre els resultats més importants als quals hem arribat.

4.2.1. Anàlisi de les parelles 1 i 2

Primerament, cal destacar que, com ja s'ha mencionat a l'apartat 3.4, les entrevistes completes es troben a l'annex 12 junt amb una llegenda per poder interpretar la notació emprada per transcriure-les. Així doncs, cal destacar que com que l'objectiu d'aquesta part de l'estudi és analitzar tot allò que ens aporte informació

relacionada amb el que volem indagar, ens centrarem només en les intervencions que realment ens interessin per a aquesta finalitat. A més, per aquest motiu i per tractar de fer més comprensible el text, reagruparem també alguns dels comentaris dels alumnes que es troben en intervencions no consecutives.

Ara bé, abans de començar amb l'anàlisi, cal comentar que s'han intentat organitzar les transcripcions agrupant les intervencions de manera que mostren els temes o les preguntes que els alumnes aborden en cada moment de l'entrevista. A la taula següent se'n mostra un resum.

	GRUP 1	GRUP 2
Pregunta	Intervencions	Intervencions
1	[1]-[12]	[1]-[17]
2	[12]-[73]	[17]-[42]
3	[74]-[84]	[42]-[62]
Dades Video Physics®	[84]-[94]	[63]-[70]
Elecció coordenades	[95]-[118]	[71]-[142]
4	[119]-[142]	[142]-[165]
5	[143]-[162]	[166]-[181]
6	[163]-[254]	[181]-[301]
7	[254]-[304]	[257]-[309]

Taula 1. Esquema de les intervencions

Així mateix, notem que agrupem amb el nom de "Dades Video Physics®" les intervencions que estan relacionades amb qüestions que impliquen l'ús d'aquests dispositius, en particular amb qüestions relatives a la posició dels eixos coordinats en el programa Video Physics® i al lloc de la pilota on els alumnes marquen els punts que en descriuen la trajectòria.

Altrament, denotem per "Elecció coordenades" les intervencions que fan referència a preguntes i respostes relacionades amb l'elecció de les coordenades dels punts del full de coordenades facilitat als alumnes.

Seguidament, passem a mostrar l'anàlisi detallat de les entrevistes transcrites per a cada parella.

4.2.1.1. Parella 1, alumnes A i B

Ítem 1. Comencem amb la primera parella, formada pels alumnes del grup 1. En primer lloc, es prepara el material a emprar, que en aquest cas és la primera fitxa, i a continuació, els preguntem perquè varen dibuixar la gràfica de l'ítem 1. A respon de manera ambigua, potser perquè no sap a què ens referim exactament amb la pregunta, ja que diu que és la gràfica que els pareixia més coherent. Seguidament

intervé B i fa una descripció un poc més específica ja que diu que la dibuixen així perquè la pilota bota mentre el temps va passant. Aquest alumne ja respon relacionant les propietats qualitatives del fenomen amb les de la gràfica.

- [1] E. En primer lloc, en la primera pregunta, expliqueu-me perquè vàreu dibuixar aquesta gràfica.
- [2] A. Doncs, vàrem ficar aquesta... Pense que era la que vàrem trobar més coherent, no sé, es que no...
- [3] B. Perquè si el temps passa i la pilota bota, va cap amunt [es refereix al moment en què la pilota rebotja sobre el terra després del primer bot], doncs ha d'eixir aquesta gràfica.

B es queda callat i dóna per acabada la descripció, pel que els preguntem perquè varen dibuixar la gràfica començant pel (0,0) i no des d'un altre lloc. Ara bé, com que pareix que no entenen bé la pregunta (ja que es queden mirant-se l'un a l'altre sense respondre), els la reformulem fent ara referència al dibuix. És aleshores quan A decideix respondre explicant que l'han dibuixat de manera que començara en el punt (0,0) perquè consideren el temps inicial i l'altura zero. Pareix que considere que l'experiment comença en el moment en què té lloc el primer bot, i no abans, ja que així ho especifica en [6].

- [4] E. Val, i perquè la vàreu dibuixar de manera que començara des del (0,0) i no en un altre lloc?
- [5] E. Si es fixeu, comença ací [assenyalant l'origen de coordenades] i no ací o ací... [assenyalant altres llocs de la gràfica i tractant d'explicar allò a què ens referíem en [4]]
- [6] A. Ah, no, perquè considerarem el temps inicial zero i que l'altura inicial en el primer bot aleshores era zero també.

Els preguntem perquè consideraren açò i B justifica que fou perquè ho diu a l'enunciat. Notem que fan una interpretació d'aquest distinta a la que esperàvem ja que interpreten que han d'estudiar només el moviment de la pilota a partir del moment en què toca a terra per primera vegada, que per a ells és l'instant zero, independentment del context en què es trobe, és a dir, sense considerar tota la trajectòria d'aquesta, tal com esperàvem. Per tant, sembla que per a ells el temps és absolut, i no relatiu, ja que estudien el moviment independentment del context en què s'englobe.

Per aquesta raó, els expliquem el significat de l'enunciat i què és el que es pressuposava que havien d'haver fet. Tanmateix, afegim que la interpretació és correcta ja que hi ha coherència entre la resposta donada i la justificació.

- [7] E. Però per què? Per alguna raó en especial?
- [9] B. Perquè ací fica que és des que toca terra per primera vegada [assenyala amb el dit l'enunciat del problema].

[10] E. Val, ahí fica que el que estudiarem és des que toca terra per primera vegada però tu comences... O siga, tu primer soltes la pilota, val? Se suposa que el temps comença a comptar des que la soltes, encara que només estudiem el moviment en el primer bot. Però bé si... si ho havíeu pensat així també està bé >>

[12] E. >> Està bé, sou coherents [...]

Ítem 2. Seguidament, des de [12] fins a [73], tractarem d'esbrinar quin criteri utilitzen els alumnes per decantar-se per la funció $y=ax^2+bx$ a l'ítem 2, en el qual els demanem que elegisquen la funció que millor s'ajusta al núvol de punts de la pregunta anterior.

En un primer moment, A explica que ho varen fer descartant la resta de funcions i ambdós afirmen que és la funció que trobaren més coherent, donant per contestada la pregunta. No obstant això, continuem insistint i els preguntem en què es basen per a afirmar-ho, al que B respon que ja han estudiat aquest tipus de funcions i que recorda que a la seua fórmula apareix un quadrat.

[12] E. [...] Ara bé, en la pregunta 2, perquè vàreu triar la c)?

[13] A. [...] Eh... perquè... perquè les altres les vam anar descartant i crec que al final vàrem trobar eixa la més...

[14] B. Coherent.

[15] A. Sí, la més... la que vàrem vore la més... Es que tampoc ho sabíem segur.

[16] E. Val, però en algun moment es baseu en el dibuix per decidir que és aquesta funció?...

[17] B. Sí.

[18] E. ... En què es baseu?

[19] B. [...] perquè com ja l'hem donada doncs... el dibuix era... sabíem que y portava un...

[21] B. ...quadrat. >>

Interrompent el seu company, A dóna altres motius per justificar perquè han triat aquesta família de funcions, cosa que fa que B no puga explicar-se.

Al principi tracta d'interpretar els paràmetres de la funció $y=ax^2+bx$, en particular identifica b com l'altura tot i que no ho diu gens segur, pel que inclús arriba a preguntar-nos si el que diu és cert o no.

[20] A. I x...

[22] A. >> I... x i... se suposa que b és l'altura... no? No ho sé. Bé >>

[23] E. >> b és l'altura?

[24] A. No ho sé no ho sé. En... què és b i x ?

[25] E. Jo no ho sé, dis-m'ho tu.

[26] A. Ah, jo tampoc ho sé.

A torna a intentar explicar perquè han elegit aquesta família de funcions, esta vegada justificant que el que els va fer decantar-se per aquesta va ser que van trobar una certa relació entre el punt (0,0) i els paràmetres a i b de la funció².

A més, durant una de les intervencions, A es desespera ja que sembla que no sap com explicar-se i desisteix. Tractem de fer-li veure que no passa res si s'equivoca diguent-li que estiga tranquil i que continue explicant el que estava dient, que anava per bon camí, cosa que l'anima a reprendre l'explicació i a continuar.

[30] A. [...] Vàrem suposar que... que... com començava en el (0,0) no... no alterava... Donaria valor zero açò [assenyala la fórmula $y=ax^2+bx$]. Bé i ja eh... Jo que sé!

[31] E. No no, explica't explica't... tu tranquil.

[32] A. No, doncs...

[33] E. Que com començava des del (0,0) que? Anaves bé anaves bé... Digues.

[34] A. Doncs això, que a l'iniciar el moviment en el (0,0) vaig relacionar el (0,0) amb cadascun d'aquests nombres... [assenyala els monomis ax^2 i bx a la fórmula]

Com que no s'observa bé on assenyala exactament A, en eixe moment pensem que quan diu que van "relacionar (0,0) amb cadascun d'aquests nombres" es refereix a que van substituir x^2 i x per zero per veure si y valia zero. Per això li preguntem en [35] si són les x els nombres als quals fa referència, al que, en un primer moment, respon que sí però després afegeix que no ho sap.

[35] E. En la x ?

[36] A. Sí, en la x ... la x ... el temps... No sé (.)

Com que arribat aquest punt sembla que no estem obtenint res que ens conduisca a averiguar quin criteri van utilitzar per decantar-se per eixa funció, i el temps del qual es disposa és limitat, optem per preguntar directament el que nosaltres pensem que varen fer, és a dir, els preguntem si el que varen fer fou substituir x per zero per veure si y donava zero i, així, acabar conclouent que el punt (0,0) era un punt de la funció. I, tot i que al principi l'alumne ni ho nega ni ho admet, acaba explicant que no fou això el que feren, sinó descartar la resta de funcions i triar la que els va parèixer més coherent (cosa que ja ens havia dit a [13]).

[37] E. A veure, és açò el que vàreu fer? Vàreu substituir ací [en la x] el valor zero i la y et donava zero i aleshores això volia dir que passava pel (0,0)? És això o no?

[38] A. Per exemple [riuen].

[39] E. O siga, no era això, no?

² Cal destacar que en [34] no es pot deduir si relaciona (0,0) amb a i b o amb x^2 i x ja que no se sap a què es refereix l'alumne exactament quan assenyala la fórmula. Però, posteriorment donarem una explicació de perquè pensem que fou així i formularem una hipòtesi del que pensem que va passar.

[40] A. Jo que sé, vàrem descartar i al final la que més s'assemblava... La que més pareixia ser la més... coherent... jo que sé...

Com que així i tot no aconseguim que expliquen la seua elecció, només que diguen que varen triar eixa funció perquè els semblava la més coherent, els preguntem si van copiar d'algun company la seua resposta. Responen rotundament que no i pràcticament ho fan a l'uníson. A més, A afegeix que escolliren la funció aleatòriament, contradient el que deia abans de què l'havien triat perquè pensaven que era la més coherent.

[41] E. Vàreu copiar d'algué la resposta [ja que sembla que no tenen cap explicació per justificar com obtenen la resposta]? >>

[42] A. >> No, no...

[43] B. No.

[44] A. ...no.

[45] E. No? Segur?

[46] A. A voleo, en serio, es que va ser més...

Després, de l'afirmació d'A de què van elegir la funció aleatòriament, B diu que no va ser així, que en realitat la van escollir per ser una paràbola ja que diu que ell recordava que una paràbola era una funció quadràtica (raonament que havia intentat fer en [19] i [21] però que, degut a la interrupció del seu company i al volum de veu amb el que ho diu, no acabem d'escoltar).

[48] B. No, és perquè és una paràbola, no?

[49] E. Molt bé, sí... [invitant-lo a continuar]

[50] B. Doncs a mi em sonava que la paràbola era una equació pareguda a aquesta... [es refereix a una equació quadràtica pareguda a la que van triar]

[51] E. Val.

[52] B. ...per això la vam ficar...

Com que hi ha dues opcions de famílies de funcions que donen lloc a gràfiques de paràboles, la b) $y=ax^2+bx+c$ i la c) $y=ax^2+bx$, els preguntem perquè es decanten per la c) i no per la b). B respon que l'opció b) té més de dos paràmetres i per això la varen descartar ja que per a ell els paràmetres a i b són l'altura i el temps, respectivament. Sembla que, pel que diuen, per a ells aquests paràmetres facen funció de variable, tot i que no tenim la suficient informació per a afirmar-ho de manera contundent.

[53] E. I perquè...

[55] E. ...la b) no podria ser aleshores?

[56] B. Perquè com portava la c , vam descartar les que tenien...

[58] B. ...més de a i b , no sé.

[60] E. I la c què vol dir? Quin significat té per a tu?

[64] B. Mmm... No sé...

[66] B. ...perquè com sols tens l'equació d'altura i temps doncs... no sé, la c no... no trobava què ficar-li. >>

[68] E. Ahh val...

[70] E. ... Per a tu la a és l'altura i la b és el temps?

[71] B. Sí

Mentrestant, sembla que A ha confós el paràmetre a (al qual es refereix B durant la seua intervenció en [56] i [58]) amb l'apartat a) de l'ítem 2 i, aleshores, perd el fil del tema. A causa d'açò, pensa que s'està parlant de la família de funcions de l'apartat a) i intervé intermitentment al llarg de la conversa anterior per tractar de verificar si els seus pensaments són correctes o no (veure la conversa completa a l'annex 12).

[59] A. No, però a)... [es queda pensant]

[61] A. No, però esta és una equació normal, no? Esta hauria de ser una línia recta...

[62] E. Em referisc a la b).

[63] A. Ah, a la b)! [...]

Quan decidim passar a la següent pregunta, A interromp afegint que trien la família de funcions $y=ax^2+bx$ perquè no hi ha cap valor per a c (recordem que per a ells el paràmetre a és l'altura i b el temps).

[72] E. Bé... Passem >>

[73] A. >> I perquè no hi ha cap valor per a c , o siga, començant per (0,0)...

Hipòtesi: després d'analitzar les intervencions anteriors en les quals tractem de trobar quin criteri utilitzen els alumnes per decantar-se per una funció que descriga el fenomen, arribem a la conclusió de què potser el que podria haver passat és que B va ser el que va triar la funció, mentre A es va mantindre pràcticament al marge en la presa de decisions. Probablement B explicara a A els motius de l'elecció, cosa que explicaria la vaga idea que té A i la incapacitat per a explicar-se (mirar per exemple de [28] a [36], on sembla que A tracta de relacionar el (0,0) amb els paràmetres a i b perquè li sona que juguen un paper important en l'elecció de la funció, tot i que pareix no saber quin). Açò també explicaria els continus comentaris que fa A del tipus: "no ho sé", "es que no sé", "tampoc ho sabíem segur", "jo que sé"... i el sentiment d'incomoditat que manifesta quan li demanem que s'explique més.

Ítem 3. Llegim ara l'enunciat de l'ítem 3 i la resposta donada pels alumnes i els demanem que ens l'expliquen. Mentre llegim la resposta, B es dirigeix a A per recordar-li que aquesta pregunta la va contestar ell, amb la intenció de què siga

aquest el que l'explique. A justifica que el que varen fer va ser relacionar la fórmula de l'ítem 2 amb el gràfic de l'1 que, com diu, s'assembla a una paràbola. A pesar de la resposta, posem èmfasi en averiguar perquè diuen que la pilota forma paràboles i els dos coincideixen en dir que la pilota no forma paràboles, al que B afegeix que el que forma paràboles és la relació del temps amb l'altura. Probablement aquest raonament siga fruit del tipus d'ensenyament que ha rebut l'alumne, tot i que no podem saber-ho amb certesa.

[74] E. Val... Després la pregunta 3 diu: explica perquè has fet aquesta elecció... I digueu: perquè la pilota forma paràboles, que és una equació de segon grau. És la que més coincideix...

[75] B. Esta la vas dir tu [dirigint-se a A].

[76] E. ... Expliqueu-me.

[77] A. Això, que vàrem relacionar la funció aquesta... [assenyala la que han triat a l'ítem anterior]...

[78] E. Sí, la fórmula.

[79] A. ...la fórmula amb la paràbola, pareguda a aquesta [assenyala el dibuix de l'ítem 1].

[80] E. Val, però bé, perquè digueu que la pilota forma paràboles? Perquè en realitat la pilota, tu quan la soltes...

[81] A. No forma par...

[82] E. ...bota sobre...

[83] B. El que forma paràboles és la relació entre el temps i l'altura.

Dades Video Physics®. Ara, els preguntem si recorden el que feren a l'iPad® el primer dia, al mateix temps que agafem el dispositiu per mostrar-los una imatge del vídeo que gravaren amb l'aplicació Video Physics® (que és la que apareix a la figura 1 de l'annex 11) on estan assenyalats els eixos coordenats, la mesura que prenen de referència i el primer dels punts que indiquen la trajectòria de la pilota. Els recordem que havien de col·locar els eixos coordenats on pensaren que eixiria més senzilla la fórmula i els preguntem quin criteri utilitzaren per fer-ho. A respon que el van col·locar de manera que l'eix de les x coincidira amb el primer bot de la pilota, sense importar on fixaven l'eix de les y . B afig que en aquesta posició, quan la pilota toca terra, l'altura és zero, ni positiva ni negativa.

[84] E. [...] Quant al que vàreu fer a l'iPad®... s'enrecordeu, no?

[85] A. Sí.

[86] E. Que vos vaig dir que posareu els... els eixos coordenats on pensàveu que eixiria més senzilla la fórmula posterior, val? Eh... vàreu posar els eixos coordenats ahí [assenyalant la imatge del vídeo que mostra on estan col·locats] per alguna raó?

[87] A. Vàrem ficar eh... la x coincidint amb el primer bot, bé, on colpeja la pilota, i la y ...

[88] E. La y?

[89] A. ...arreu.

[90] E. Val. I per què vàreu decidir posar l'eix de les x justament on bota la pilota?

[91] B. Perquè on... quan cau, l'altura és zero [es refereix al moment en què la pilota toca terra]. >>

[92] A. >> Per a què el bot no començara en negatiu...

[93] E. Molt bé...

[94] A. ...o en pos... doncs ho posem a eixa altura.

Elecció de coordenades. Tot seguit, mostrem el full que conté les coordenades dels punts dels quals els alumnes havien de triar-ne sis o set i introduir-los al programa Data Analysis® per calcular la funció de regressió. Aquestos alumnes triaren els punts 1, 3, 5, 7, 9, 12 i 31 (mirar full de coordenades) i des de [95] fins [118] tractem d'averiguar perquè.

Comencem preguntant-los quin criteri utilitzaren i A respon que ho feren aleatòriament, tot i que sembla que no va ser exactament així ja que quan els preguntem si haguera sigut el mateix a l'hora d'ajustar la funció triar els sis o set primers punts, dubta i fa referència a la distància entre les coordenades temporals, la mitjana... Com que no troba la manera d'explicar-se bé o té por de dir alguna cosa malament, arriba a desesperar-se en algun moment, per la qual cosa hem d'intervindre per dir-li que no es preocupe si s'equivoca.

[95] E. Molt bé (.) Després, quant al full que us vaig passar amb les coordenades dels punts... [els mostrem el full de les coordenades] vàreu decidir triar aquestes [assenyalant les què trien els alumnes], ho vàreu fer per alguna raó en especial? >>

[96] A. >> Arreu.

[97] E. Penseu que haguera sigut exactament igual triar les les... els sis primers punts o els set primers punts? Haguera donat el mateix? Haguera sigut igual de fàcil ajustar la funció?

[98] A. A lo millor al... dóna un temps més [menys] ampli... la mitjana... no sé si...

[99] E. Digues digues, tu tranquil...

[100] A. No no que... que a lo millor trac els p... jo que sé... [bufa amb desesperació]

[101] E. Tu tranquil, si no passa...

[102] A. No, si ja sé que no passa res...

[103] E. ...res si t'equivoques. Tu tranquil.

Quan A torna a intentar explicar-se, sembla que vullga dir que els punts estaran més proporcionats o la mitjana serà més correcta quan es donen unes determinades condicions però B interromp l'oració abans que acabe afegint que açò passarà quan més separats estiguen.

[104] A. Si l'únic que veig és que a lo millor està més proporcionat o... o la mitjana és més correcta elegint-los més més...

[105] B. Separats.

Com que sembla que no pot traure's massa en clar tornem a insistir preguntant què passaria si hagueren triat els sis o set primers punts del full de coordenades però ara fent èmfasi en com seria el dibuix dels punts. B fa un dibuix aproximat d'uns quants punts de manera que si els unírem tindríem un tros quasi rectilini de paràbola, com afirma aquest a l'acabar de dibuixar.

[106] E. Mmm... A veure, i si haguérem elegit els sis o set primers punts, que us haguera donat? Més o menys...

[107] B. Doncs, la mitat. Bé, no però...

[108] E. ... Vull dir, què haguera passat? Com seria el dibuix dels punts? (.) Si voleu dibuixar-ho ací... [es prepara foli i bolígraf perquè ho dibuixen si és necessari] Més o menys, com seria?

[109] B. [Dibuixa uns quants punts de manera que a l'unir-los formarien un tros de paràbola quasi recte] Un tros d'una paràbola, no?

[110] E. Clar.

[111] B. Més o menys, no? >>

Els preguntem si pensen que així seria fàcil ajustar la paràbola (en el sentit de si pensen que seria fàcil d'identificar que ho és) i B explica que potser a l'estar uns punts tan a prop d'altres no seria tan fàcil d'identificar.

[112] E. >> I així haguera sigut fàcil ajustar-la?

[113] B. No, perquè... a lo millor estan tan apegats [els punts] que no pareix.

També els preguntem quina funció hagueren pogut pensar que era si hagueren considerat eixos punts i A diu que una corba. Anant més enllà, els suggerim si podria ser una recta en cas de què els punts estigueren més a prop encara i B respon que sí, mentre que A no diu res pel que no podem saber si està d'acord o no amb el seu company.

[114] E. Que podríem dir si vegérem açò [fent referència al dibuix]? Què... què penseu... què diríeu que és?

[115] A. Una corba. >>

[116] B. >> Sí.

[117] E. Molt bé, o inclús si estan molt apegats [els punts] podríeu arribar a pensar que és una recta, no?

[118] B. També.

Ítem 4. Ara preparem l'iPad® de manera que en la pantalla apareix una imatge del programa Data Analysis® (la que apareix a la figura 1 de l'annex 11) on hi ha un gràfic amb els punts que triaren els alumnes representats junt amb la funció que

escolliren ($y=ax^2+bx$). També els mostrem el segon full de preguntes amb les respostes que donaren i els pregunta perquè varen triar la funció de l'ítem 4. A respon que perquè era la funció que havien triat abans i B sembla estar d'acord amb ell.

[119] E. [...] Passem ara ací [referint-se al segon full de preguntes]. En l'exercici 4, perquè haveu triat aquesta funció?

[120] A. És la funció d'abans...

[121] B. La funció d'abans, clar.

A afegeix que el que van fer per triar la funció va ser substituir dos punts per a i per b . Per tant, açò ens fa pensar que el que han fet és agafar dos punts (dels que havien triat abans al full de coordenades) i averiguar els paràmetres a i b substituint les coordenades x i y en l'equació i resolent el sistema resultant, per això se'ls pregunta si no varen utilitzar el programa Data Analysis® (ja que aquest ens dóna els paràmetres sense haver de calcular res). Com que responen que sí que el van utilitzar, pensem que potser el que estava pensant A és en què van copiar els valors dels paràmetres a i b que els ixen al programa, i no els punts.

[122] A. ... i hem substituït dos punts... per a i per b , no? [preguntant-li a B]

[123] E. No vàreu utilitzar el programa Data Analysis® [per fer-ho]?

[124] B. Sí.

[125] A. Sí, sí...

Ara, insistim en preguntar quins foren els motius que els varen dur a triar la funció de l'ítem 2. Com que no responen, els preguntem si aquesta funció ajustava als punts, cosa que fa que es queden mirant-se l'un a l'altre amb cara de no entendre que se'ls està preguntant. Tornem a insistir i els preguntem si comprovaren o no si la funció ajustava i A creu que no, que com era la que havien triat a l'ítem 2, no ho van provar.

Com sabem, la pantalla del programa Data Analysis® està dividida en dos: la superior que ens mostra la representació gràfica dels punts i la inferior que ens mostra la família de funcions amb els valors dels paràmetres. Tanmateix, és necessari polsar el botó Fit (que ens permet veure al gràfic de la part superior de la pantalla si l'ajust als punts és correcte o no) per trobar els valors dels paràmetres de la funció. Per tant, tot ens fa pensar que polsarien el botó i sols s'hi fixarien en la part inferior de la pantalla, no en si la funció ajustava als punts o no.

[128] E. A veure... I... per què vàreu triar la funció d'abans? (.) Ajustava als punts que teníeu? (.)

[129] B. Mmm... [es miren l'un a l'altre]

[130] E. O no ho vàreu provar, directament?

[131] A. Crec que directament no ho vàrem provar... Com era la d'abans...

[132] E. No vos vàreu parar a apretar el boto este després de triar les gràfiques i veure que eixia... [assenyalem el botó Fit que hi ha a la pantalla de l'iPad®]?

[133] B. No.

[134] A. No em sona...

Els expliquem, utilitzant l'iPad®, què és el que haurien d'haver fet per veure si ajustava o no la funció i se'ls mostra quina era la funció que sí que ajustava als punts ($y=ax^2+bx+c$). També els ensenyem què passa quan proven a ajustar la funció $y=ax^2+bx$, que és la que ells van triar i riuen al veure el resultat. Cal destacar que les instruccions per realitzar aquest procés correctament es troben al full d'instruccions i, pel que sembla, no les varen llegir o no ho feren amb suficient deteniment.

[135] E. Val, es que si... És el que hauríeu d'haver fet, que és apretar aquest botó [es mostra com fer-ho] i mirar... i eixia una llista de funcions, que coincidia amb la llista de... del principi [amb la llista de funcions que apareixen a l'ítem 2]. Aleshores, tu havies d'anar provant i mirant...

[136] A. Ah...

[137] E. ...si ajustava més o menys als punts [es mostra què havien d'haver fet]. Clar, la vostra [gràfica] va així [els mostrem a la pantalla de nou què haguera passat si hagueren provat a ajustar als punts la funció que ells havien triat]. O siga, evidentment no és la... [riuen] no és la correcta perquè no ajusta als punts.

[138] A. Ja...

D'altra banda, els diguem també que si hagueren començat a gravar el vídeo en el moment en què la pilota toca terra, la funció $y=ax^2+bx$ sí que haguera sigut correcta i els preguntem si saben perquè. B sembla que ho entén de seguida ja que respon que sí raonant que així la funció que representaria el fenomen començaria a partir del segon zero (i, per tant, passaria pel (0,0)).

[139] E. Però, en el cas de què el vídeo que vam fer haguérem començat a gravar-lo des del moment en què toca a terra la pilota sí que haguera sigut correcte, val? Enteneu perquè?

[140] B. Ja, perquè haguera començat des de zero.

Ítem 5. Seguidament, els preguntem com realitzaren els càlculs de l'ítem 5 i A diu que substituint les x a la fórmula de l'ítem anterior. Com ho diu en veu molt baixa li preguntem de nou i ho explica utilitzant com a exemple l'apartat a) de l'ítem.

[143] E. Després eh... en l'exercici 5. Com haveu calculat aquestos valors? [assenyalant els resultats de calcular $f(0.76)$, $f(0.11)$...]

[144] A. Substituint x en aquesta...

[145] E. Com?

[146] A. Substituint... en... per exemple en la a) que dona que x és igual a 0.76, doncs substituint en aquesta... fórmula [la de l'ítem 4] per x .

A més, els preguntem si feren els càlculs utilitzant una calculadora o l'aplicació Free GraCalc® de l'iPad® i B es queda pensant dubitatiu com si no sabera quina és l'aplicació a la qual ens referim. A l'ensenyar-li quina és a l'iPad®, diu que utilitzaren aquesta ja més convençut i A assenteix amb el cap mostrant conformitat.

[147] E. Però... Ho vàreu fer amb la calculadora? O ho vàreu fer en el programa aquest... el FreeGraCalc®. >>

[148] B. >> En... [assenyalem el programa a l'iPad®] Sí, en eixe.

[149] A. Mmm.

Després, els preguntem com utilitzaren l'aplicació per realitzar els càlculs i ho expliquen mitjançant l'iPad® utilitzant l'apartat a) com a exemple. Al principi sembla que no recorden com ho varen fer ja que, al pulsar Edit, A es queda pensant. Aleshores, els diguem per a què servia cada botó per si és això el que els impedeix explicar-se però pareix que A continua sense enrecordar-se'n. En això que B diu que recorda que escrivien el 0.76 en algun lloc però no sap on i A suggereix (amb timidesa en la veu) si podria ser en Initial. De repent, sembla que B ja s'enrecorda i diu que l'escrivien en Initial i després el buscaven a la taula.

[150] E. [...] I què fèieu per trobar les imatges d'eixos punts [se'ls deixa l'iPad®]?

[151] A. Ací...

[152] E. En Edit?...

[153] A. Sí...

[154] E. ... I què més? Per exemple, per a calcular el primer $f(0.76)$, què fèieu?

[155] A. Eh (.) ostres... [sembla que no ho recorda]

[156] E. Recordeu que Initial ens donava el valor pel qual començava la taula...

[157] A. Sí, de zero a u per exemple...

[158] E. ...i l'altre, com anaven botant els punts. Què va posar en cada lloc?

[159] A. No m'enrecorde.

[160] B. 0.76 en un lloc però no sé en quin...

[161] A. En Initial... [amb una mica d'inseguretad]

[162] B. Ah sí, en Initial i després el buscaves.

Ítem 6. Ara, des de [163] fins a [254], s'aborda tot allò referent a l'ítem 6. En particular, el que tractem d'esbrinar ací és quines són les dades que per als alumnes no tenen sentit i perquè, basant-nos en les seues respostes a la fitxa. Ara bé, a més, els guiem mitjançant preguntes fins que se n'adonen de què no s'han de fixar en les imatges per trobar els valors que no té sentit calcular, sinó en el domini

de la funció per a aquest cas ja que aquesta només descriu el fenomen en un interval determinat.³

En primer lloc, llegim l'enunciat de la pregunta i deixem alguns segons perquè ens expliquen la resposta. Com que no ho fan, optem per llegir-la nosaltres mateixos i els preguntem perquè escriuen que el valor $-14\ 166.75$ és un error seu. A diu que el resultat és desproporcionat (probablement per ser $14\ 166.75$ un nombre gran en comparació amb els valors que han donat la resta d'imatges) i B afegeix que és com si la pilota continuaria baixant, com si hi haguera una fossa (el que sembla que no té sentit per a ell)

[163] E. Bé, després digueu en aquesta pregunta [la 6]: en general, creus que les respostes obtingudes en la pregunta anterior mostren el que vertaderament ocorre? Per què? (.) I digueu: algunes sí, la majoria, però la de $-14\ 166$ coma no se què és un error nostre, no té sentit. Per què penseu que és un error vostre?

[164] B. Perquè continua... baixant, no?

[165] E. Què vols dir?

[166] B. És...

[167] A. Està desproporcionat [es refereix a què el valor és molt baix a diferència de la resta].

[168] B. Perquè ahí en aquest cas és com si... hi haguera un... una fossa o alguna cosa així, no? Se n'aniria cap avall, la pilota.

Els preguntem perquè diuen que se n'aniria cap avall la pilota i si pensen que té sentit. A explica que no ja que la pilota no pot travessar el terra i B afig que això és perquè ells li han assignat al terra el valor zero.

[169] E. [...] per què...

[171] E. ...se n'aniria cap avall? Té sentit això?

[172] A. No, no pot travessar el terra.

[173] E. Però que siga negatiu, vol dir que atraveses el terra sempre?

[174] B. Com hem donat el valor zero al terra... no?

Els recordem que és cert que ells assignaren valor zero al terra (encara que açò no és del tot veritat ja que assignen valor zero al primer punt que marquen per determinar la trajectòria de la pilota, però aquest no es troba al terra sinó en el centre, tal i com es pot veure a la figura 1 de l'annex 11) però que les dades amb les quals estan treballant ara són les que els vàrem proporcionar al full de coordenades i que no coincidien amb el que ells feren al seu experiment.

[175] E. En el vostre cas...

³ Obviament, quan parlem de "domini de la funció en aquest cas" no ens referim al domini de definició de la funció en general (que serien tots els reals), sinó a l'interval de temps en què s'estudia el fenomen i per al qual hem buscat una funció que el modelitze.

[176] B. En el nostre cas...

[177] E. ... Però, recordeu que aquestes dades vos les vaig donar jo i no coincidien amb les les... vostres, recordeu?

[178] A. Sí, sí.

Tot seguit, els preguntem on pensen que s'haurà col·locat l'eix d'abscisses en el programa Video Physics® en eixe cas per determinar quina referència es pren, és a dir, per determinar què és el que es considera altura zero (i, així, veure si hi haurà valors de l'altura de la pilota que estaran per baix). Com que es queden pensant sense respondre, optem per canviar de pregunta i començar per una més concreta que ens servisca per guiar les seues respostes fins que siguem capaços d'entendre la pregunta inicial. Els preguntem quin creuen que serà el punt que més avall estarà al fer la representació gràfica, és a dir, el de menor altura. B assenyala l'últim punt dels que hi ha al full de coordenades, probablement perquè es fixa que és el que té la coordenada y més menuda (0.0036...) ja que si a l'hora de respondre haguera pensat en les propietats qualitatives del fenomen, hauria assenyalat el primer punt i l'últim (que són aquells en els quals la pilota toca el terra).

[179] E. En aquest cas [assenyalant el full de coordenades], on penseu que estaria...?...

[180] A. Home, el 14 000 està molt lluny...

[181] E. ... La persona que haja tret aquestes dades, on haurà col·locat l'eix d'abscisses en el programa Video Physics®? (.). A veure, quin és el punt que més avall estarà?

[182] B. És... este.

[183] E. Molt bé, ja que l'altura d'aquest punt és 0.0036, la més xicoteta. [...]

Aleshores, preguntem de nou on creuen que es trobarà l'eix d'abscisses. A respon que en el zero (cosa que evidentment és certa ja que l'altura zero vé determinada pel propi eix), mentre que B diu que estarà un poc més avall de 0.0036, amb el que estem d'acord ja que 0.0036 és quasi zero.

[183] E. [...] Aleshores, on estarà col·locat l'eix de les x ? (.)

[184] A. Mm... En el zero... o siga, en el zero també.

[185] B. Sí... Un poc més avall. >>

[186] E. >> Si es fixeu en... Molt bé, ja que el punt és quasi zero, no?

[187] A. Sí...

[188] B. Sí.

[189] A. ...clar.

[190] E. Aleshores, s'haurà fixat un poc més avall d'on bota la pilota.

Després d'açò, preguntem si té sentit que ixca un nombre negatiu i B ens diu que no i menys encara que ixca un nombre tan gran. Al preguntar-los perquè, es

queden de nou callats i els preguntem si creuen que el que han fet malament ha sigut la substitució dels punts a la funció, fet pel qual A, desconfiant d'ell mateix, respon que segurament sí.

[192] E. En aquest cas, és a dir, tenint aquestos punts, té sentit que ixca un valor negatiu?

[193] B. No i menys tan gran [en mòdul].

[194] E. Val, per què penseu que és aleshores? Per què penseu que passa açò? (.) Ho hem fet malament a la funció?

[195] A. Segurament... [B riu]. No sé (.).

Tractem de reconduir de nou el seu raonament preguntant-los què significa $f(x)$, amb exemples particulars, per tal que vegem que el problema ha estat en el càlcul de les imatges d'alguns punts ja que no té sentit perquè no es troben al domini. Comencem preguntant què significa $f(10)$ però al no saber respondre'ns els preguntem què és x i A diu que és el temps. Aleshores, B ens diu que $f(x)$ és l'altura i , per tant, $f(10)$ l'altura als deu segons.

[196] E. Què significa f de... f de deu [$f(10)$], per exemple?

[197] B. La x , no?

[198] E. La x ?...

[199] A. La x ...

[200] E. ... I la x que era?

[201] A. El temps.

[202] E. Val, i aleshores... i f de x que era? La y que era?

[203] B. L'altura.

[204] E. L'altura, que és el mateix que f de x , no? Aleshores, què significa f de deu, per exemple?

[205] A. L'altura als deu segons?

[206] E. L'altura als deu segons, molt bé. [...]

Preguntem, aleshores, si té sentit calcular les imatges de tots els valors de l'ítem 5. Llavors, A ens contesta que tindria més sentit calcular les imatges d'un segon, dos, tres... Probablement estiga pensant en què als deu segons la pilota ja haurà fet més d'un bot (i el que ens interessa és només el moment entre el primer bot i el segon) o que ja s'haurà acabat l'experiment. Tanmateix no podem afirmar res amb seguretat, només que sembla que estiga pensant en les propietats qualitatives del fenomen.

[206] E. [...] Té sentit, aleshores, calcular f de tots aquestos valors? f de...

[207] A. Si té sentit? Doncs...

[208] E. ... $f(0.76)$, $f(100)$... [assenyalant els nombres a l'ítem 5]

[209] A. Tindria més sentit calcular d'un segon, dos segons, tres segons...

Ara, preguntem que és el que estarà fent la pilota en un moment determinat per tractar d'averiguar dues coses: si són capaços de respondre quin serà el comportament de la pilota en eixe instant i adonar-se'n de què no té sentit calcular l'altura de la pilota als 100 segons i, d'altra banda, per tractar de veure en què es basen per respondre (en la interpretació de les propietats qualitatives del fenomen, en la taula de valors, en les concepcions pròpies que tenen...).

En particular preguntem què passa als 100 segons i A diu que als 100 segons la pilota ja estarà parada a terra. Aleshores, diguem que això és al que ens referíem abans (en [169] i [171], en [192]...) quan preguntàvem si hi havia dades que no tenien sentit.

[210] E. Val, i què passarà en $f(100)$?

[211] A. Doncs que... Estaran... estarà parada en terra ja [la pilota]. Ja...

[212] E. Ja no estarà ni botant, no?

[213] A. Clar, això. Estarà parada.

[214] E. Això és el que no té sentit, ho vegeu ara? Nosaltres volíem estudiar des del moment en què toca terra la primera vegada fins que el torna a tocar. Això, als 100 segons ja fa molta estona que ha passat. [...]

Els preguntem si hi ha altres dades, a banda de la de $f(100)$, que no tenen sentit. A respon basant-se en els resultats que apareixen com a resposta (que, evidentment, estan malament perquè els van obtindre a partir de calcular les imatges en la funció f de l'ítem 4) ja que diu que als 0.76 segons la pilota es troba a un metre i mig. A més, sembla que pensa si aquests tenen sentit o no basant-se, de nou, en les propietats qualitatives del fenomen.

[214] E. [...] Quines dades més penseu que no tindran sentit? Si és que penseu que hi ha alguna més.

[215] A. (.) No, doncs... més o menys, si aquesta és 0.76 segons [apartat a) de l'ítem] un metre i mig pot ser.. [mirant la seua resposta]

Després, els preguntem si tindria sentit calcular $f(1.1)$ i A explica que en aquest moment la pilota ja estaria baixant, tot i que no sabem en què es basa per a respondre.

[216] E. (.) I f d'1.1 tindria sentit?

[217] A. Sí, que... ja està baixant.

Per últim, els preguntem què pensen què passaria en 0.11 i A explica que, a l'igual que als 1.1 segons, la pilota també estarà baixant. En concret, especifica que estarà a ras de terra ja que mira la resposta que van donar (als 0.11 segons, la pilota està a una altura de 0.33 metres). Mentrestant, B mou el cap confirmant que és cert tot el que explica el seu company.

[218] E. I f de 0.11?

[219] A. També. >>

[220] B. >> Sí.

[221] A. Està a ras de terra, a 0.30 centímetres... [mirant de nou la seua resposta] >>

Quan ens adonem de què els alumnes estan mirant les respostes de l'ítem 5, que són errònies, els mostrem el full de coordenades, que és on estan les dades correctes. Els diem que es fixen des de quin temps comencem a comptar (és a dir, quina és la coordenada temps del primer punt) perquè vegem quines dades tenen sentit i quines no. A se n'adona de què les dades de la taula comencen a partir del segon u , per tant, no té sentit calcular $f(0.11)$ ni $f(0.76)$ (com afirma B). Nosaltres afegim que tampoc no en té calcular $f(100)$, amb l'objectiu d'anar recapitulant el que ja s'ha dit.

[222] E. >> Fixeu-se en les dades [els mostrem el full amb les coordenades dels punts]...

[223] A. En...

[224] E. ... Comencem a comptar des de...

[225] A. Des d'un segon!...

[226] E. Molt bé.

[227] A. ... Ah, doncs...

[228] E. Aleshores quines no tenen sentit?

[229] A. Doncs la de... esta no té sentit [assenyala $f(0.11)$].

[232] E. Alguna més?

[233] A. Mmm (.)

[234] B. La de 0.76. >>

[236] E. >> Clar, la de 0.76 i evidentment...

[238] E. ...l'última...

Tanmateix, sembla que tot i que A afirma que les dades que tenen sentit són aquelles que es donen a partir del segon u , es queda dubtant si té sentit el valor que ix per a b) $f(1.1)$.

[235] A. >> La b) tam... >>

[237] A. I la b)...

En això, pregunta si b) $f(1.1)$ tampoc no té sentit calcular-la ja que, tot i que 1.1 està al domini de definició de la funció, en aquest cas sembla que l'alumne es fixa, de nou, en la resposta donada a l'ítem 5 i compara l'altura als 1.1 segons que és 1.726307 (mirant la resposta) amb l'altura al segon u que és 0.18477 (mirant el full de coordenades) i diu que aquesta augmenta molt en poc de temps.

A l'igual que en [222], els tornem a recordar que les seues dades no són correctes i que cal fixar-se en el full de coordenades.

[239] A. I la b) tampoc, no? Per què si a un segon està a 0.1 metre [mirant al full de coordenades]... puja molt en una dècima [mirant la resposta donada a la segona fitxa, que és $f(1.1) = 1.726307$].

[240] E. No et fixes en la solució, perquè la solució vostra no està molt...

[242] E. >> Fixa't soles en les dades del full...

Una vegada es fixen en les dades del full de coordenades, B diu que les dades que tenen sentit són les que apareixen a partir d'un segon (que és quan la pilota fa el primer bot) fins que la pilota torna a botar, és a dir, al segon dos.

Per tant, amb la finalitat de resumir el que s'ha comentat fins ara, els preguntem quines són les dades que no tenen sentit i responen que totes menys la de $f(1.1)$, probablement perquè han vist que 1.1 sí que està al domini de definició de la funció.

[243] B. Doncs... sols té sentit a partir d'u fins que torna a botar.

[244] E. Exacte, i això quan és?

[245] B. En el segon dos [mirant el full de coordenades]

[246] E. Al segon dos, molt bé. [...]

[248] E. Aleshores, quines dades no tindrien sentit?

[249] A. Doncs totes.

[250] B. Menys >>

[251] A. >> Menys la b).

Mirem ara l'apartat b) de la pregunta 6 del que, com ja s'ha comentat anteriorment, no els preguntem res.

Ítem 7. A continuació, els manem que llisquen en veu alta la pregunta 7 i de seguida comença A. Es para a preguntar si ha de llegir l'enunciat de la pregunta o la resposta i li diguem que primer l'enunciat i que ho faça ràpid ja que no disposem de massa temps. Aquest llegeix l'enunciat complet i, en acabar, li preguntem quina és la resposta donada. Aquest contesta que el que han fet ha sigut considerar que la pilota colpeja el terra als segons zero i 2.2 i que ho han fet substituint la y per zero utilitzant la calculadora del programa Free GraCalc® de l'iPad®.

[254] E. Aleshores... val, la b) ja està contestada... Llegiu la pregunta 7. En veu alta.

[255] A. Respon les següents qüestions... que lligc? La resposta?

[256] E. La pregunta primer. Va, rapidet.

[257] A. Ah, per a quins valors de x , temps, la pilota colpeja el terra. Explica què has de... què has fet per obtindre el resultat.

[258] E. Val, i ahí què haveu dit? [assenyalem la resposta]

[259] A. Doncs que colpeja el terra en el segon zero i en el segon 2.2.

[260] E. I això per què? (.) Com ho haveu fet? >>

[261] A. >> Doncs, hem substituït la y per zero.

[262] E. Val, i on haveu fet els càlculs?

[265] A. Doncs supose que en l'iPad.

[266] B. Sí, sí!

Seguidament, els preguntem si realment creuen que y és zero, al que A respon que al seu experiment sí i també en aquest però sembla que no n'està segur ja que afegeix que no ho sap.

[271] E. Realment y és zero?

[272] A. En el nostre... en el nostre sí, no? [es refereix al seu experiment] >>

[273] E. >> En el vostre sí, i en aquestes dades? (.) Quina y és la que considereu... En quina y...

[274] A. Terra?

[275] E. ...toca a terra?

[276] A. (.) En zero també. No ho sé.

Aleshores, com que sembla que han considerat que l'altura a la qual la pilota toca terra és zero (en [261]) com a resultat de les seues concepcions, intentem, mitjançant preguntes, fer-los veure que açò no té perquè ser sempre així i tractem de què interpreten les dades del full de coordenades per donar una resposta, aproximada, de quina podria ser aquesta altura (per a què, a partir d'ací, utilitzant el raonament que han descrit en la resposta, calculen el temps en què la pilota toca terra, que és el que es demana a l'ítem).

Tanmateix, quan els preguntem de nou on creuen que tocarà terra la pilota i els mostrem el full de coordenades, B respon a "quan toca terra la pilota?" ja que diu que en els segons u i dos, tractant de respondre al que els preguntàvem a l'apartat.

Notem que, tot i que l'alumne respon mirant el full de coordenades, probablement es basa en les propietats qualitatives del fenomen al pensar que els moments en què la pilota estarà a una altura inferior correspondran al primer punt i a l'últim del full; al contrari que passava en [179] - [183] ja que quan li preguntem en quins punts estarà més avall la pilota només es basa en les dades del full de coordenades, ja que assenyala només l'últim punt.

[278] E. On serà on toca el terra la pilota?

[279] B. En el segon u.

[280] E. En el segon u, val... En algun lloc més?

[281] B. [Mira el full de coordenades] En eixe [assenyala la coordenada x de l'últim punt que apareix al full], en el dos.

Ara bé, tot i que B respon l'apartat a) de l'ítem sense necessitat d'averiguar el que val l'altura del terra i, per tant, podríem pensar que ja no té sentit preguntar-los-ho més, continuem insistint en la pregunta ja que el nostre objectiu no sòls era fer que els alumnes respongueren correctament aquest apartat, sinó tractar de fer-los veure que no poden suposar que l'altura del terra sempre serà zero, sinó que s'han de basar en les dades de què disposen.

Per això, a continuació els preguntem a quina altura creuen que tocarà terra la pilota afegint, ara, que sabem que ho fa als segons u i dos. Així doncs, quan sembla que B està a punt de donar una resposta basant-se en el full de coordenades (ja que assenyala la coordenada y, altura, del primer punt i probablement després haguera assenyalat la de l'últim), A intervé preguntant si el segon u era el temps inicial.

[282] E. Molt bé. Tornant al que estavem mirant, eh... sabem que... la pilota toca terra en els segons u i dos, l'altura quina serà en el segon u?

[283] B. Esta [assenyala la coordenada y del primer punt de la taula] zero coma >>

[284] A. >> Però en el... en el segon u, el segon u és el temps inicial, el segon u?

Sembla que A no ha entès el raonament anterior i va una mica perdut. A més, tot pareix indicar que açò és degut que pensa que el primer punt del full de coordenades correspon a quan es solta la pilota, i no a quan toca terra (ja que en [284] pregunta si el segon u és el temps inicial i en [286], després de l'explicació que li donem, se n'adona de què ja ha passat un segon des que comença l'experiment i aleshores ho comprèn tot).

[285] E. Recordes que començàvem... El primer punt que dibuixàvem era quan la pilota tocava el terra, val? És des d'on tu comences a comptar... >>

[286] A. >> Ah, ja porte un segon, val val.

Una vegada resolt el malentès, reconduïm la conversa i expliquem a A que el que volem saber és l'altura a què la pilota colpeja el terra, no el temps, i li recordem que hem dit que la pilota tocarà el terra en el primer punt del full de coordenades i en l'últim. D'aquesta manera, situem A de nou en la conversa al mateix nivell en què es troba B.

[287] E. Però el que estic preguntant-vos ara és a quina altura toca terra, no en quin segon. Açò passarà en el primer punt que assenyalem i en l'últim, sí o no?

[288] B. Sí.

Després, els preguntem als dos a quina altura pensen que estarà el sòl, és a dir, on rebota la pilota. B respon fent referència a l'altura del punt 1 del full de coordenades i, després d'uns segons de pensar, afirma que també pot ser a l'altura

del punt 31 (i, pel que pareix, s'estranya un poc de què l'altura dels punts no coincidisca). Probablement aquest alumne haja pensat la seua resposta, de nou, imaginant-se el fenomen, però com que si mirem a la taula els respectiu valors de l'altura per als punts 1 i 31 són lleugerament distints, es troba amb una contradicció i per això li sembla estrany. Tanmateix, és important adonar-nos de què B està imaginant-se que el primer i l'últim punt dels que descriuen la trajectòria de la pilota es marquen a la part baixa d'aquesta ja que està considerant que l'altura d'aquests coincideix amb l'altura del sòl. Ara bé, seguint aquesta interpretació, li expliquem que açò es degut a què les dades no són exactes (ja que provenen de marcar els punts que indiquen la trajectòria de la pilota en el programa Video Physics®) i que si es poguera fer exactament (i la pilota haguera botat en el mateix lloc exactament les dues vegades) els valors coincidirien.

[289] E. Aleshores, quin...eh...el sòl a quina altura estarà?

[290] B. A la 0.1846 (.) [coordenada y del primer punt] o en esta... [coordenada y de l'últim punt]

[291] E. Sí, molt bé. El que passa és que com que [les dades o valors de l'altura en el primer i en l'últim punt] estan aproximades no coincideixen, però si es poguera fer exactament...

A continuació, A afirma, amb una mica d'inseguretat, que el valor de l'altura hauria de ser quasi zero, tot i que no podem saber si açò és resultat d'una concepció prèvia o de mirar els valors de l'altura en eixos instants al full de coordenades. Li responem que, efectivament, serà quasi zero, aproximadament 0.08 o 0.09 (calculant la mitjana de l'altura per al punt 1 i per al 31 i considerant, a l'igual que han fet aquests, que l'altura d'aquests punts coincideix amb la del sòl). Malgrat tot, cal destacar que açò sols serà així seguint la interpretació de B; en cas de què els punts que mostren la trajectòria de la pilota no s'hagueren marcat en la part més baixa d'aquesta l'afirmació no seria correcta.

[292] A. Però serà pràcticament zero, no?.

[293] E. Sí, més o menys, l'altura [a què es trobarà el sol] serà 0.08, 0.09... no?
[tractant de trobar la mitjana entre l'altura del primer punt i de l'últim]...

[294] A. Sí.

Per últim, es llig l'enunciat de la pregunta 7 b) i la resposta que donen els alumnes i els demanem que ens l'expliquen i ens diguen com l'han trobada. A diu que ho varen fer mirant la gràfica de la funció en el programa Free GraCalc® i els preguntem si sabrien trobar la resposta analíticament, per si la resposta que donaren va estar condicionada a la falta de temps per acabar la fitxa.

[295] E. ... Val, passem a l'última pregunta... Per a quins valors de x la pilota arriba a la seua màxima altura [llegint l'enunciat]? Ara heu posat: doncs en la màxima altura de la gràfica x és igual a 1.15. Per què eixa és la màxima altura? Com ho heu fet?

[296] A. Supose que mirant a la gràfica [la del programa Free GraCalc®] el punt més alt.

[297] E. Val, se vos ocorre alguna manera de fer-ho analíticament? [...]

B, basant-se en la propietat de la simetria de la funció (respecte l'eix vertical que passa pel vèrtex de tota paràbola), explica que podria resoldre's analíticament calculant el punt mitjà entre el segon zero i el 2.2, que són els segons en què la pilota colpeja el terra en les seues dades. Tot i això, els recordem que açò seria en les seues dades que, com sabem, són errònies ja que provenen de la funció que triaren a l'ítem 4. Tanmateix, el procediment que descriuen seria correcte ja que els punts zero i 2.2 es troben a la mateixa distància del vèrtex.

[299] B. Fent el punt mitjà entre què... la primera vegada que bota i la que cau [es refereix a quan torna a tocar el sòl].

[300] E. Val, calcularíeu el punt mitjà entre... què exactament?

[301] A. Doncs si... tenim que el primer bot es dona en el zero... i el 2.2, no? Doncs... a 1.1.

[302] E. Molt bé. Això sí, considerant les vostres dades.

[303] A, B. Sí sí.

[304] E. Val, doncs res, ja està tot. Moltes gràcies als dos.

4.2.1.2. Parella 2, alumnes C i D

Ítem 1. Comencem amb la segona parella, formada pels alumnes C i D del grup 2. En primer lloc, mostrant-los el full on aquestos varen donar les seues respostes, els diguem que miren l'ítem 1 i els preguntem perquè varen dibuixar eixe gràfic.

C és el primer en respondre i explica que fou perquè varen pensar que el gràfic es corresponia amb la trajectòria de la pilota, que en aquell moment (i a diferència d'ara) pensaven que botava en direcció horitzontal (i, per tant, a mesura que augmentava el temps la pilota es desplaçava horitzontalment).⁴

[1] E. Primer de tot, mirem l'exercici 1. Per què vàreu dibuixar aquesta funció?

[2] C. Perquè... No sé, pensàrem que la trajectòria de la pilota seria eixa [referint-se al gràfic], simplement. O siga, a mesura que hi ha més temps... hi hauria un desplaçament de la pilota perquè en realitat no sabíem que era vertical totalment, aleshores... ho vam dibuixar així.

Seguidament, i admetent que és certa la justificació que dona C, és a dir, admetent que quan realitzaren el dibuix pensaven que la pilota botava en direcció horitzontal, els preguntem com creuen que seria el gràfic si aquesta botara verticalment. Aleshores C, després d'uns segons d'estar pensant la resposta, diu que el gràfic en aquest cas seria el mateix que el que ells van fer. Per aquest motiu,

⁴ Aquest raonament serà rectificat posteriorment pel propi C en la seua intervenció en [6], admetent que quan varen fer el dibuix sabien que la pilota havia de botar verticalment.

insistim de nou i preguntem si realment és cert que varen dibuixar la funció pensant que la pilota botava desplaçant-se en direcció horitzontal, al que C (dubtant una mica) respon ara que no, rectificant el que havia afirmat anteriorment.

[3] E. I si fora verticalment, com seria...? Segons tu.

[4] C. (.) Seria igual.

[5] E. Però en principi vàreu pensar que la pilota anava desplaçant-se... horitzontalment?

[6] C. No sé, es que va ser... No [...].

Després de tot, sembla lògic pensar que el que realment ha passat és que al vore el gràfic, C ha intentat interpretar-lo trobant un paral·lelisme entre aquest i el fenomen amb el qual estan treballant per tal de descriure'l, i el primer que se li ha ocorregut ha sigut pensar que la trajectòria de la pilota hauria de correspondre's amb el gràfic de la funció. Però, com bé sabem, açò no té perquè ser així i, tal i com explica Janvier (1978), per evitar aquest tipus de concepcions cal treballar amb activitats en què la trajectòria del fenomen estudiat no coincidisca amb la seua representació gràfica, i precisament aquesta n'és un exemple.

Tot seguit, C comença a descriure el gràfic de la funció basant-se en la interpretació de les propietats qualitatives del fenomen. En particular, diu que l'altura de la pilota va variant conforme augmenta el temps i que hi ha instants en què aquesta torna a ser zero, com a l'instant inicial. A més, explica que cada vegada l'altura és menor, referint-se a que l'altura màxima en cada bot (representada pels màxims relatius de la funció) és menor conforme avança el temps.

[6] C. [...] o siga, si el temps... hi ha una variable de temps, simplement doncs... la pilota té diverses altures i, a mesura que va passant el temps, hi ha un moment en què torna a la mateixa altura que seria la inicial que seria la zero...

[8] C. ...i passa el temps i tornaria a la... a la inicial que seria zero... i cada vegada pujaria menys... O siga...

[10] C. ...tindria una altura menor.

[11] E. Val, encara que botara sobre... ella mateixa? >>

[12] C. >> Encara que botara sobre el mateix lloc.

Seguidament, els expliquem que la descripció que han donat és l'encertada però que el que calia haver representat és només la trajectòria de la pilota des que toca el terra per primera vegada fins que el torna a tocar. Els comentem que, com bé han descrit fa un instant, la representació que han fet no és la del primer bot i, abans que acabem de parlar, C assenjala que el primer bot correspondria a la primera paràbola que varen dibuixar que, com ja comentàvem a l'apartat 4.1, sembla estar mes ressaltada al dibuix.

[13] E. Val. Eh... abans de res... el que vos demanaven era que, val, el moviment és eixe [el que acaba de descriure l'alumne], tu soltes la pilota cau a terra i tal, però el que anàvem a estudiar era solament el primer bot... de la pilota.

[14] C. Val.

[15] E. Val? Aleshores... açò no és el primer bot, no? Evidentment... >>

[16] C. >> No, el primer seria aquest [assenyala el tros de la funció corresponent a la primera paràbola que dibuixen].

[17] E. Seria sols eixe, val. [...]

Ítem 2. Seguidament, des de [17] fins a [62] abordem el segon ítem on tractarem d'esbrinar què signifiquen realment per als alumnes els valors dels paràmetres que apareixen a les funcions i què els va fer decantar-se per una o altra.

En primer lloc, els preguntem si al final es posaren d'acord a l'hora d'elegir entre la funció b) $y=ax^2+bx+c$ i la c) $y=ax^2+bx$ ja que recordem que el dia que emplenaren aquesta fitxa els alumnes varen tindre problemes a l'hora de triar la funció ja que C pensava que era la c) i D que era la b).

Comença C explicant que hi ha dues variables, el temps i l'altura. A més, diu que sabien que la funció havia de ser quadràtica per ser una paràbola però que ell pensava que no havia de tindre c perquè la funció passa pel punt (0,0) i el seu company pensava que sí. Aleshores, D interromp el seu company tímidament per tractar d'explicar perquè pensava que la funció havia de tindre c però C continua el seu discurs sense preocupar-se massa, pel que D decideix esperar a què aquest acabe. Quan finalment C para de parlar, D torna a intervindre i és aleshores quan explica que la funció ha de portar c ja que aquest pot ser zero o no però que cal escriure'l perquè és una paràbola. Potser la raó per la qual l'alumne fa aquest comentari és perquè li sona haver estudiat la paràbola sempre considerant el paràmetre c i per això veu la necessitat d'escriure'l, tot i que sap que en aquest cas, segons el gràfic que dibuixaren, ha de ser zero.

[17] E. [...] En el segon exercici, com recorde, vàreu tindre uns pocs problemes perquè un deia que era l'opció b) i l'altre la c). Què va passar al final? Vàreu arribar a un acord...?

[18] C. Sí perquè eh... sabíem que hi havien dos variants [variables], la de posició [altura] i la de temps, però en l'equació de... estàvem guiant-nos perquè formava una paràbola i aleshores dèiem que havia de ser una equació de segon grau [una funció quadràtica] i hi havien dos opcions, la b) i la c). Estavem entre aquestes dos opcions però eh... ell deia que hi havia c però com partia del punt (0,0) no hi havia ningun...

[19] D. No però jo...

[20] C. ...no hi havia c que variara en quina posició començava ja el moviment del cos.
>>

[21] D. >> Jo deia que era eixa [l'opció b)] perquè és una paràbola i té c i la c pot ser zero.

Ara els preguntem el significat que té per a ells el paràmetre c de l'equació $y=ax^2+bx+c$. Sembla que per a l'alumne C és l'altura en el temps inicial (és a dir, l'altura quan el temps val zero) ja que respon que, en aquest cas, c és l'altura quan la pilota toca a terra per primera vegada però que si llançarem la pilota des d'un metre, c seria u . Cal recordar que en realitat en aquest experiment la pilota també es llança des d'una altura concreta però aquests alumnes comencen a dibuixar el gràfic des del moment en què toca a terra la primera vegada i per això C ho interpreta així. Tanmateix, C interpreta correctament el significat d'aquest paràmetre i , a més, sembla estar comparant les equacions b) i c) per donar-li significat.

[22] E. Val, què significa la c en eixe cas per a vosaltres?

[23] C. Eh... l'altura, o siga, al al lloc... o siga, l'altura en què començaria... on on comptaríem el primer bot, si el llançarem des de dalt doncs a lo millor la c seria l'altura d'on llançaríem i el primer bot ja no seria, o siga, no comptaríem des del (0,0) sinó que seria del zero a lo millor... un metre [es refereix a què l'origen de coordenades seria (0,1) si soltarem la pilota des d'un metre] per l'altura des d'on soltaríem la pilota.

Com que l'explicació que dóna l'alumne és llarga i una mica enrevessada, insistim de nou amb la pregunta buscant una resposta breu i concloent. Llavors, C afirma que el que indica el paràmetre c és l'altura a la qual es troba la pilota però, degut a l'ambigüitat de la nova resposta (ja que l'altura pot prendre diversos valors depenent del temps), li demanem que siga més concret preguntant-li què significa que c siga zero, al que ens respon que significa que la pilota està al sòl (i no que està a altura zero en l'instant inicial). Notem que, també en aquest grup, apareix l'arrelada concepció de què quan l'altura és zero, estem a nivell del terra.

[24] E. Val, aleshores què seria en eixe cas la c per a tu [assenyalant el dibuix]?

[25] C. Doncs... la posició de l'altura.

[26] E. Quina altura?

[27] C. La de la pilota.

[28] E. Ja, però la pilota va botant i canviant d'altura, com tu m'has explicat abans (.)
Què vol dir que c siga zero?

[29] C. Doncs... que l'altura...que està al sòl.

Com que de nou no especifica suficientment la resposta, ja que l'altura val zero en distints instants, li preguntem si es refereix a algun moment en particular, tractant de guiar-lo cap a la resposta correcta. En això, respon assenyalant tots els punts en què l'altura val zero confonent, probablement, la intenció amb la qual li formulàvem la pregunta ja que a [23] ja responia correctament. Potser el que ell

entén que estem preguntant-li és quan està la pilota al sòl, per això dóna aquesta resposta.

[30] E. Molt bé, però quan? En algun moment en particular?

[31] C. Ací, ací, ací... [Assenyala tots els punts en què toca a terra la pilota].

Com que sembla que D només intervé quan el seu company no diu res, li preguntem què pensa i si està d'acord amb ell. Al contrari que C, aquest assenyala només el punt (0,0), pel que sembla que per a ell que el paràmetre c valga zero significa que la gràfica de la funció ha de passar pel punt (0,0). Després de conèixer l'opinió de D, sembla que C se n'adona de què era realment el que li preguntàvem ja que ho indica amb una exclamació.

[32] E. Segur? Tu estàs d'acord?

[33] D. Jo crec que soles ahí [assenyala el punt (0,0)].

[35] C. Ah sí!

Una vegada averiguat quin significat té per als alumnes el paràmetre c (única diferència entre les funcions dels apartats b) i c)), tractem d'esbrinar, de nou, quin va ser el comportament dels alumnes a l'hora de prendre la decisió d'escollir una de les funcions i quins factors varen influir.

Al preguntar-los si varen arribar a algun acord, C, fent broma, respon que es va haver d'imposar sobre l'opinió del seu company. Els recordem que durant la realització de la fitxa els diguérem que si no aconseguien posar-se d'acord, havien d'escriure les dues respostes, cosa que fa que D, rectificat el que acaba de dir el seu company, expliqui que en realitat el que va passar va ser que es varen adonar de què en aquest cas era el mateix una funció que altra perquè c valia zero. Tanmateix, tot i que al final sembla que, efectivament, es posaren d'acord, pareix que per a aquest alumne el paràmetre c tinga un significat distint al que té per al seu company D, més global, ja que per a ell c pot prendre molts valors però com que en aquest cas han dibuixat la paràbola de manera que passa pel (0,0) concep que c val zero i igual dóna escriure'l que no.

[36] E. [...] I al final vàreu arribar a un acord o què va passar?

[37] C. Em tingué que imposar [riuen].

[38] E. Vos vaig dir que si no arribàveu a cap acord escrivíreu les dues respostes i explicareu perquè...

[39] D. Ja però al final vàrem pensar que era igual.

[40] E. Què era igual?

[41] D. Posar una equació o l'altra perquè com c era zero...

Ítem 3. Seguidament, passem a preguntar-los perquè varen donar la resposta de l'ítem 3, ja que sembla que a l'igual que els seus companys del grup 1, confonen

el significat dels paràmetres a i b de la funció ja que expliquen que a indica l'eix de les y i b indica l'eix de les x . Després de llegir l'enunciat de la pregunta i la resposta proporcionada, els alumnes riuen perquè sembla que ni tan sols ells recorden perquè la donaren. De fet, abans de res, C admet que no sap perquè varen escriure això i acusa el seu company de ser ell el que ho va dir. D intenta pensar l'explicació però sembla que tampoc no s'enrecorda.

[42] E. [...] I ací expliqueu que... bé, la pregunta és: explica... eh... perquè has fet aquesta elecció i poseu perquè la a indica l'eix de les y i la b l'eix de les x i com comença en $(0,0)$ no tenim c [risses].

[45] E. Per què vàreu dir que la a indica l'eix de les y i la b l'eix de les x ?

[46] C. Això ja sí que no ho sé... [risses] Ho va dir ell [assenyala al seu company].

[47] D. Doncs perquè (.)

Com, casualment, els seus companys del grup 1 (que el dia de la realització d'aquest full s'assegueren davant) van respondre de forma similar, els preguntem si s'ho varen copiar d'ells. Tot i que la primera reacció que tenen és riure, els dos responen de manera contundent que no, que no copiaren res.

[48] E. Pot ser que s'ho copiàreu del grup de davant?

[49] D. [Risses] No...

[50] C. No.

[51] D. ... no

[52] E. Segur?

[53] C. Això sí que no ho copiàrem. No copiàrem res.

Aleshores, davant la incertesa de no saber perquè varen donar eixa resposta i de la falta de raonaments per part d'aquests per explicar-se, els formulem de nou la pregunta, i els preguntem si va ser perquè es varen equivocar o per algun altre motiu semblant. C respon que no, que no es varen equivocar, però D l'interromp per a admetre que en eixe moment era el que pensaven, que la a era la x , el temps, i la b l'altura (notem que a la resposta diuen que a és la y i b la x , és a dir, a l'inrevés). Tanmateix, no podem averiguar què és el que els fa canviar d'opinió.

[54] E. Val, aleshores perquè vàreu respondre açò? Es vàreu equivocar o què va passar?

[55] C. No, perquè... >>

[56] D. >> Pensàvem que era així...

[57] E. Així com?

[58] D. Que la a és la x ... que era el temps i la b l'altura.

Dades Video Physics®. Seguidament, els mostrem una imatge en què apareix un d'ells en el moment en què acaba de soltar la pilota des de dalt d'una cadira,

l'eix d'abscisses (col·locat de manera que l'eix de les x coincidisca amb el seient de la cadira i l'eix de les y a la part esquerra de l'alumne) i un punt que indica el lloc en què la pilota toca el sol per primera vegada i rebot (veure imatge a l'annex 11).

Al mateix temps, els preguntem perquè varen col·locar els eixos coordinats en eixe lloc exactament i, després de mirar-se amb cara estranya, C respon que va ser a l'atzar, amb el que D sembla no estar d'acord. Aquest explica que ho varen fer així ja que al col·locar l'eix d'abscisses en eixa posició, el primer punt que assenyalen per marcar la trajectòria de la pilota coincideix amb el vèrtex d'un dels quadres de la quadrícula i pensaven que així eixiria una gràfica amb una forma més "regular", com diu ell. Tanmateix, sembla que posteriorment mouen una mica l'eix sense adonar-se'n, potser a l'assenyalar la mesura de referència o al marcar altres punts, ja que, com es pot observar a la imatge, aquest punt no coincideix exactament amb la quadrícula.

[63] E. Bé, passem (.). Quant a... al que vàreu fer el primer dia [els mostrem una imatge a l'iPad® que es veu on varen col·locar els eixos coordinats], eh... per què vàreu elegir exactament l'eix d'abscisses posar-lo ahí? [Es miren amb cara com si no ho recordaren] [...]

[65] E. El poseu exactament als peus [de l'alumne].

[66] C. Sí.

[67] E. Per què?

[68] C. No sé, va ser una elecció a l'atzar.

[69] E. A l'atzar? >>

[70] D. >> I com vàiem que la pilota quan tocava al sòl coincidia amb un quadre del... del per dir-ho així, les coordenades que fa l'iPad® doncs diguérem que donaria una forma regular.

Elecció coordenades. A continuació, des de [71] fins a [142] tractarem d'averiguar perquè els alumnes escolliren els punts 1, 2, 14, 15, 26 i 27 del full de coordenades i si pensen que els resultats hagueren sigut equivalents a l'agafar altres sis punts del full. A més, també abordarem alguna que altra qüestió relativa a l'error comés durant el procés de càlcul de la funció de regressió i al mínim nombre de punts necessari per representar una paràbola.

En primer lloc, els preguntem perquè varen triar aquests sis punts i D respon que eren els més fàcils d'introduir a la calculadora perquè la primera coordenada d'aquests o bé és un decimal exacte ("acaba en zero") o bé és periòdic mixte ("acaba en període"). Com que no ens sembla una raó massa convincent i, a més, hi ha altres punts que presenten les mateixes característiques, els preguntem perquè no elegiren, per exemple, el punt 29 (que és (1.9350000, 0.78984087)) i D respon que fou perquè no es van adonar de què acomplia les característiques.

[71] E. D'acord... A veure, que més... Quant a les coordenades dels punts, vos vaig passar aquest full. Per què vàreu triar... eixes coordenades exactament?

[72] D. Per què eren més fàcils d'escriure a la calculadora [riuen]...

[74] D. ... Acaben tots en zero o en període.

[75] E. Val, però ahí [assenyalant la coordenada 29 del full] també hi ha altres que acaben en zero, per què eixes no?

[76] D. Per què no ens vàrem donar compte.

Seguidament, els preguntem què haguera passat si els únics punts que “acaben en zero” o “en període” hagueren sigut els sis primers i, després d'uns segons de pensar la resposta, C diu que no els hagueren agafat.

A més, explica que eixos punts els va triar ell i que va tractar d'agafar-los perquè manteniren una certa distància. En concret, explica que es va fixar en la primera xifra decimal de les coordenades x dels punts i va seguir el següent criteri: com que les coordenades x dels dos primers punts triats tenen com a primer decimal zero i les dels dos següents quatre, doncs les dels dos següents tindran com a primer decimal huit, ja que de zero a quatre i de quatre a huit hi ha la mateixa distància.

[77] E. D'acord. I si els nombres que acabaren... en zero o període hagueren sigut els sis primers, també haguéreu agafat eixos (.)?

[78] C. No, però també vam... O siga, també... els nombres aquests els vaig agafar jo però vaig seguir el de... el... el primer decimal va ser zero, després quatre i perquè com vaig veure una... com una distància, doncs vaig agafar la mateixa, la distància del quatre... doncs el següent el huit.

Quan els preguntem si pensen que aquesta és la millor manera d'agafar els punts, el seu company D diu que no, que haguera sigut millor agafar-los més separats, és a dir, que no foren consecutius. A més, indica que la millor manera de fer-ho seria agafant punts equidistants i assenyala alguns com a exemple en el full de coordenades.

[81] E. D'acord. Penseu que és la millor manera d'agafar els punts...

[83] E. ... per representar-los?

[84] D. No.

[85] E. Quina haguera sigut la millor?

[86] D. Doncs, agafar-los més separats. Que no estiguen junts entre sí.

[87] E. Val, com per exemple.

[88] D. Doncs, el u... [Assenyala el primer punt]...

[90] D. ... Un altre per ací... Altre per ací, per ací, per ací [assenyala punts que equidisten entre ells]. >>

Mentre D assenyala alguns punts com a exemple de com haurien d'haver-ho fet, C, que continua pensant que la seua elecció és millor perquè els punts són més consecutius, li diu al seu company que els punts que ell havia triat eren més diferents (no sabem per quin motiu). A més, afegeix que si els punts són consecutius hi haurà un marge menor d'error a l'hora de calcular la funció de regressió, amb el que D no està d'acord ja que diu que el marge d'error dels punts que ell ha triat és més menut.

[91] C. >> Però no els agafes tan di... jo els he agafat més diferents. Tu el que has fet ha sigut agafar més punts però jo els he agafat més consecutius [en realitat agafa el mateix nombre de punts però equidistants].

[92] E. Però, per què vols agafar-los més consecutius?

[93] C. Per a tindre un marge d'error menor. Però >>

[94] D. >> El meu és menor.

Ara bé, C, encara no convençut, diu que potser el marge d'error dels punts que ha elegit el seu company és menor perquè n'ha agafat més que ell. Tanmateix, al dir-li que tenen els dos el mateix nombre de punts els compta i se n'adona que també n'ha triat sis, llavors torna a utilitzar l'argument anterior de què els punts que ell va triar són millor perquè són més consecutius i, per tant, la distància entre ells menor i l'error més menut. A més, ho justifica dient que si consideraren dos punts que no estigueren molt a prop l'un de l'altre i traçaren una línia que passara per ells, a l'agafar un punt entre aquests dos potser no es trobaria sobre la línia. Per tant, quan més a prop estiguen els punts, menor serà l'error d'aproximació.

[95] C. El teu marge d'error és menor perquè tens més punts.

[96] E. No, té sis punts, igual que tu.

[97] C. [Compta els punts] Ah, si. Ah val val (.). Però al ser més consecutius... no hi ha tanta distància d'un punt a altre, per tant...

[98] E. I això és millor per a representar una funció?

[99] C. Jo crec que sí.

[100] E. Per què?

[101] C. Perquè... a lo millor si de un punt que hi ha eh... A veure, si hi ha una distància major, doncs tu a l'hora de representar-ho doncs fas una línia que... a lo millor si passa un punt entremig, eixa línia no passa pel punt eixe.

Ara bé, tot i que en part és cert el que diu C de què és millor triar els punts més junts perquè l'error d'aproximació siga menor, cal que se n'adonen de què no seria adequat triar els sis punts de manera que foren consecutius ja que açò ocasionaria, per una banda, que la funció només estiguera ben aproximada en l'interval on es prenen els punts i, per una altra banda, que fora difícil reconèixer quina funció ajusta millor a aquests. Per aquesta raó, els preguntem què passaria si agafarem els sis primers punts i, com que sembla que no saben ben bé que respondre, els

comentem que açò faria que la funció estiguera molt ben aproximada en un cert interval, però no en la resta. Així doncs, perquè compreguen de què estem parlant i vegem què passaria gràficament, els diguem que representen aproximadament els sis primers punts que apareixen al full de coordenades. El que agafa llapis i paper és D i dibuixa un grapat de punts molt junts que a l'unir-los formarien una línia quasi recta.

[102] E. Ja, però si tu per exemple els agafes molt amuntonats... Si tries per exemple estos sis primers punts... [assenyalant els punts al full] què passaria aleshores?...

[103] C. Que...

[104] E. ... Seguint el teu criteri, triem més punts junts per a què així... Què passaria aleshores?

[105] C. Doncs... >>

[106] D. >> Ja... >>

[107] E. >> Tindríem molt ben aproximat un trosset aixina de la funció, no [es fan gestos amb les mans indicant que seria un tros xicotet]? Representeu-los [se'ls facilita llapis i paper].

[108] D. Com?

[109] E. Més o menys, no cal que ho mesures ni res (.) [D dibuixa un grapat de punts molt junts].

Tot seguit, preguntem si el grapat de punts que ha dibuixat D i la paràbola $y=ax^2+bx+c$, que és la funció que trien posteriorment a l'ítem 4, es pareixen. Aleshores, C se n'adona de què així resultaria difícil saber que la gràfica es tracta d'una paràbola i respon que no. A més, D afegeix que podria tractar-se més bé d'una recta o d'una funció semblant. Per tant, concloem que com més separats estiguen els punts que han d'agafar per ajustar la gràfica, millor, cosa amb la que ara estan els dos d'acord.

[111] E. [...] Això i la funció que heu dibuixat després es pareixen?

[112] C. No.

[113] E. Haguéreu pogut pensar que és una altra funció. Açò que podria ser [assenyalant els punts que han dibuixat]?

[114] D. Podria ser una recta o el que siga.

[115] E. Clar. Aleshores, com més separat millor, no?

[116] D. Sí. >>

[117] C. >> Ja...

Seguidament, els preguntem quin pensen que és el nombre mínim de punts que necessitarien per representar la funció que triaren posteriorment, és a dir, la paràbola. En realitat, sabem que el nombre mínim de punts és tres però si considerem que un dels punts és el vèrtex només en són necessaris dos.

Tanmateix, C, tantejant, comença a dir que quatre, però quan recalquem de nou que busquem el mínim nombre diu que tres, a l'igual que el seu company D. Els preguntem perquè i D diu que es necessiten el vèrtex i dos punts més, un a la dreta d'aquest i altre a l'esquerra.

[118] E. Molt bé. I quin penseu que seria el nombre mínim de punts per a... que podríeu triar per dibuixar la funció que heu triat després?

[119] C. Quatre. Quatre o... dos.

[120] E. El...

[121] C. No...

[122] E. ...mínim, el mínim.

[123] C. Ah, el mínim... Doncs tres. >>

[124] D. >> Tres.

[125] E. Per què?

[126] D. El vèrtex...

[127] C. El vèrtex...

[128] D. ...i dos punts que estiguen... [fa uns gestos amb les mans indicant que necessiten estar un a cada costat]

Posteriorment els preguntem si pensen que podrien dibuixar la gràfica amb tan sols dos punts i, tot i que a l'inici dubten un poc, D acaba dient que sí. Aquest alumne tracta de justificar la seua resposta però el desconeixement del lèxic adequat dificulta una mica la comprensió del seu discurs. Per això, durant l'entrevista pensem que el que està tractant d'explicar l'alumne és que si un dels punts que tenen és el vèrtex i l'altre un qualsevol (anomenem-lo P) com es sap que la paràbola és una funció simètrica respecte l'eix vertical que passa pel vèrtex, calculant el punt P' simètric de P respecte a l'eix de simetria, s'obtenen tres punts i, per tant, s'està en disposició de dibuixar la paràbola. Però, després de llegir les transcripcions amb més calma, ens adonem que el que estava intentant explicar l'alumne és que, donats dos punts simètrics respecte una recta vertical, es pot trobar un punt en el centre, el vèrtex, cosa que, com sabem, no és certa ja que aquesta construcció permet obtindre infinites possibilitats per al vèrtex.

[129] E. I dos no? Pregunte.

[130] D. Com que dos? >>

[134] C. >> I com...

[135] E. soles dos [com a resposta a D]

[136] C. ... saps... I com saps què fa la paràbola? >>

[137] D. >> Sí, també.

[138] E. També? Explica't.

[139] D. Si estan a la mateixa distància del vèrtex... fas com si fora una media... mediatriu...

[140] E. Simetria, sí molt bé.

[141] D. I ja fas el mateix.

Ítem 4. A continuació, els mostrem la segona fitxa que varen emplenar i els preguntem perquè triaren la funció $y=ax^2+bx+c$ a l'ítem 4. D recorda que fou la que obteniren utilitzant l'iPad® però insistim preguntant ja que el que ens interessa és conèixer perquè varen decidir triar eixa funció (i, per tant, canviar de funció respecte la que havien triat abans), aleshores D explica que fou perquè sabien que la seua representació gràfica era una paràbola (és a dir, utilitza els seus coneixements sobre les propietats qualitatives de la funció per respondre). Com que hi ha dos funcions que tenen per representació paràboles, els preguntem perquè escolliren eixa i no l'altra ($y=ax^2+bx$) ja que era la que havien triat a la primera fitxa. Com que no responen immediatament, els preguntem què és el que els va fer canviar d'opinió i C, tot i que admet que sí que es basen en algun moment en el que feren a l'ítem 2 de la primera fitxa, explica que a l'hora de triar la funció en el programa Data Analysis® no es fixaren en cap moment en què a aquest ítem havien escollit la funció $y=ax^2+bx$.⁵

[142] E. [...] Passem al segon full. Per què heveu triat ací aquesta funció? [A l'activitat 4].

[143] D. Com que eixa? Perquè ja la posava ahí en la... en la esta [assenyala l'iPad®].

[144] E. Sí, però per què vàreu decidir que era una funció quadràtica?

[145] D. Doncs per què vàiem que el dibuix... Perquè era... perquè la forma que feia era de paràbola.

[146] E. Val. I vàreu descartar la que hi havia... que havíeu triat inicialment [$y=ax^2+bx$], això per què? Perquè la que triareu inicialment no és la que tenia c (.). Què va fer que canviareu d'opinió?

[147] C. [Bufa] No sé, simplement que els següents exercicis... Crec que... O siga, no els vam fer... sí que els vam fer referents al... a l'anterior [al primer full] però a l'hora de ficar-lo en el iPad®...

[149] C. ...no sé, no vam tindre en compte l'equació que... que elegírem a l'exercici 2, el que férem.

Seguidament els preguntem si varen provar si la funció $y=ax^2+bx$ ajustava als punts i C respon rotundament que no. Aleshores, els preguntem perquè elegiren la funció $y=-12.649x^2+37.778x-24.96$ amb l'objectiu de què expliquen perquè trien la

⁵ Tanmateix, posteriorment veurem que sí que influeix el fet d'haver triat aquesta funció a l'ítem 2 ja que és la primera que consideren, tot i que de seguida la descartaren, tal i com diu D en [161], perquè sabien que no ajustaria als punts ja que passa pel (0,0).

quadràtica $y=ax^2+bx+c$ i no $y=ax^2+bx$ però C entén malament la pregunta i el que explica és perquè triaren eixos valors per als paràmetres. Per aquesta raó, respon que després d'ajustar la funció als punts (utilitzant el programa Data Analysis®) eixien eixos valors directament.

[150] E. [...] vàreu provar a veure si eixa [$y=ax^2+bx$] ajustava?

[151] C. No.

[152] E. I per què vàreu triar aquesta [assenyalant la funció de l'exercici 4]? Per alguna raó seria.

[153] C. Perquè ho posava ahí simplement [assenyala l'iPad®], o siga, férem l'equació i donava eixos resultats [referint-se a què a l'ajustar la funció, els valors dels paràmetres que van sortir van ser eixos]

[154] E. Quina equació? A veure... per què vàreu triar >>

[155] C. >> Esta d'ací [assenyala la funció de l'exercici 4].

Quan ens adonem de què el que està explicant-nos és perquè triaren eixos valors per als paràmetres, li recordem que abans de triar els paràmetres, i com bé ell ha explicat, calia triar una funció de la llista que apareixia al programa Data Analysis® i polsar Fit per veure si ajustava o no als punts. Però, quan per fi pretenem tornar a preguntar-los perquè triaren $y=ax^2+bx+c$ a la llista i no $y=ax^2+bx$, intervé D explicant que no varen elegir la funció $y=ax^2+bx$ ja que sabien que havia de passar pel punt (0,0) i a l'observar els punts que havien representat era evident que eixa no ajustaria. A més, afegeix que si volérem ajustar-la als punts faria una forma estranya, probablement perquè pensa que a l'unir tots els punts no donaria una funció coneguda o almenys no una paràbola. En definitiva, D afirma que triaren la funció perquè és la que ajustava als punts que tenien representats.

[156] E. Sí però per a fer això primer haveu de triar quina... Triàveu ací [en la llista de funcions]. Apretàveu ací i vos eixia una llista de fórmules [se'ls indica a l'iPad®].

[157] C. Sí.

[158] E. I vàreu triar eixa i després...

[160] E. ...apretaríeu Fit... >>

[161] D. >>Es què si haguérem agafat eixa [la que no té c] tindria que passar per eixe punt [pel (0,0)] i també per eixe [pel primer dels punts]...

[163] D. ...aleshores faria una forma estranya [es refereix a què quan uniren tots els punts amb el (0,0), no donaria una forma coneguda].

[164] E. Sí, aleshores vàreu triar eixa per què?

[165] D. Per què ajustava als punts.

Ítem 5. A continuació, passem a l'ítem 5 i els preguntem com varen realitzar els càlculs. Com que potser la pregunta els resulta massa ambigua ja que no saben què

respondre, els preguntem si utilitzaren el programa Free GraCalc® o si ho feren d'altra manera i D diu que utilitzaren el programa. Aquest continua explicant el procés que següen per trobar el valor de les imatges ja que diu que varen arreglar la taula de manera que mostrara la imatge de la funció en $x=0.76$, que és el primer que es demana a l'ítem. Mentrestant, va mostrant com ho feren utilitzant l'iPad® i nosaltres anem descrivint en veu alta el procés perquè quede enregistrat a la gravadora.

[166] E. Val. Després... Em podeu explicar el 5 com el vàreu fer?

[167] C. Doncs... >>

[168] D. >> Mmm...

[169] E. El féreu amb el programa Free GraCalc®? O ho féreu...

[170] D. Sí, no, amb el programa...

[171] E. Val.

[172] D. ... Vam posar... la taula però que passara pel 0.76.

[173] E. Val, i com féreu el del 0,76? [D agafa l'iPad® i comença a fer-ho] Així, en Edit, no [tractant de descriure verbalment el que fa D]?

[174] D. Sí [...].

Mentre explica el procés s'equivoca i escriu un "-1", cosa que ens sorprèn una mica (ja que tracta de calcular $f(0.76)$) i fa que li preguntem perquè ho ha fet. Llavors, s'enrecorda de què estava arreglant la taula perquè li mostrara $f(0.76)$ i canvia el menys u per un zero en Initial. Però, quan es disposa a escriure 0.01 en Delta perquè la taula mostre els valors de les imatges de x per a valors des de zero augmentant de 0.01 en 0.01, s'equivoca i escriu la coma decimal amb el signe "," i no amb el de "." que seria el correcte, pel que el programa l'avisava de què ha fet un error. Com que el temps del qual disposem està esgotant-se i com que sabem que si n'haguérem disposat de més l'alumne haguera sigut capaç de fer-ho sense problemes, decidim escriure nosaltres a l'iPad® mentre l'alumne ens dicta per anar més ràpid i evitar problemes d'aquest estil. Després d'açò, l'alumne indica que ja es pot trobar el valor 0.76 i també el 0.11.

[174] D. [...] í ahí [en Initial] ficàvem... menys u? I el Delta de... [es queda pensant]

[175] E. El menys u per què?

[176] D. Ah que és 0.76! Doncs (.) [Borra el menys u i escriu un zero i, seguidament escriu "0,01" i el programa li indica que ha comés un error].

[177] E. Dis-m'ho si vols i jo ho escric.

[178] D. Des de zero i de 0.01 [assenyala per referir-se a què en Initial hem d'escriure zero i en Delta 0.01].

[179] E. Val, i després què fèieu?

[180] D. I anàvem buscant i també teníem ahí el 0.11 [un altre dels valors que volien calcular].

Ítem 6. Seguidament, llegim l'enunciat de l'ítem 6 i també la resposta donada pels alumnes. Llavors, els preguntem quin significat té per a ells ja que expliquen que les dades no mostren el que vertaderament ocorre perquè "les coordenades donades comencen a temps u". A més, els indiquem que disposen de l'iPad® i del full de coordenades per si els necessiten per explicar-se o per consultar alguna cosa.

Abans de res, recordem que la interpretació correcta en aquest cas és que al segon zero és quan es comença a gravar el vídeo, després l'alumne solta la pilota i va baixant fins que aquesta toca a terra al segon u.

C és el primer en parlar i explica què les coordenades haurien de començar a temps zero, ja que per a ell és quan la pilota toca a terra per primera vegada, i comencen un segon després. Sembla que l'alumne continua pensant en l'anàlisi qualitatiu de l'ítem 1 ja que considera que quan la pilota toca terra és al segon zero i no al segon u com indiquen les coordenades. Quan li demanem que explique d'on ha deduït la resposta, es queda pensant sense saber què contestar, probablement perquè no ho recorda.

[181] E. [...] Ara, en la següent pregunta, en la 6, diu: en general, creus que les respostes obtingudes en la pregunta anterior mostren el que vertaderament ocorre? I responeu: no, perquè les coordenades donades comencen a temps u. Què vol dir això? Teniu l'iPad® i el full de coordenades ací, per si els necessiteu (.). Què vol dir això?

[182] C. Que ja... o siga, a l'hora de les coordenades que ens donen no estan a temps zero, o siga, de... en el moment en què la pilota toca el sòl a... al moment en que ens donen les coordenades ja ha passat un segon.

[183] E. I això d'on ho has deduït?

[184] C. Mm... (.)

Aleshores, intervé D i fa una altra interpretació distinta a la del seu company. Aquest diu que les dades que no mostren el què vertaderament ocorre són les d'abans del segon u (és a dir, les que tenen lloc per a $x=0.76$ i $x=0.11$) i ho justifica diguent que això significaria que apareixen dades abans de llançar la pilota. Per tant, per a D la pilota es llança després del segon 0.76, tot i que en principi no sabem quin motiu el fa pensar açò.⁶

⁶ Durant la entrevista pensem que el que fa l'alumne és interpretar que si al segon u la pilota està al terra, als 0.76 segons encara no l'haurà llançat, per això mostrem una actitud d'aprovació en tot moment ja que podria ser un raonament correcte. Tanmateix, posteriorment (en les intervenció [279]-[285]) veurem que el que realment ha passat és que l'alumne es confon i interpreta que el que passa al segon u és que l'alumne solta la pilota, cosa que no és cert ja que sabem que al segon u és quan la pilota toca terra per primera vegada.

Seguidament li preguntem d'on ha deduït la seua resposta, pel que fa que responga assenyalant la coordenada x del primer punt del full de coordenades, és a dir, D , a l'igual que el seu company, tracta d'interpretar els valors de la taula comparant-los amb l'experiment en general i tractant de donar-los un significat.

[185] D . Es que estes són abans de u [Assenyala el 0.76].

[187] D . [...] És com si fora abans de què la llançarem.

[188] E . Però això per què...? En què s'haveu basat per dir-ho? (.) On haveu mirat per deduir-ho? (.)

[189] D . Mmm... Ací [assenyala la coordenada x (temps) del primer punt, al full de coordenades]

Ara li preguntem a D quines dades no tenen sentit segons el seu raonament i assenyala que totes menys la d'1.1. Evidentment, les de 0.76 i 0.11 no tenen sentit per a ell pel raonament anterior però ens sorprèn que també assenyale la de 100 ja que no podem descartar-la emprant el mateix raonament (tot i que sí amb un d'anàleg) i els preguntem perquè ho han fet.

D , en un principi, ens explica que no té sentit que ixca que $f(100)=-122\ 737.16$ ja que és com si no hi haguera sòl i la pilota continuara descendint, és a dir, en aquest cas l'alumne es fixa en la imatge de la funció i no en el domini ja que sembla que és el que més li crida l'atenció a primera vista, probablement per tractar-se d'un nombre negatiu i gran.⁷

[190] E . D'acord, aleshores quines dades no tindrien sentit?

[191] D . Esta també és abans de u [assenyala $f(0.11)$].

[192] E . El 0.11?

[193] D . Sí.

[194] E . Val, molt bé. I aquesta, la d'1.1 tindria sentit?

[195] C . Seria la única.

[196] E . I esta no [la $f(100)$]? Per què? Per què tampoc tindria sentit?

[197] D . Perquè és com... ahí en este cas es com si no... hi haguera sòl i la pilota se n'anara cap avall.

[198] E . Ah, en aquest cas mires que siga un nombre negatiu, mires la segona part... [la coordenada y]

[199] D . Clar.

Ara bé, tractant d'averiguar si va ser el signe del nombre el que els va fer descartar aquest valor com a vàlid, els preguntem què haurien fet si $f(100)$ els haguera donat un valor positiu, si l'haurien descartat també. D explica que sí i, tot i

⁷ Tanmateix, tot seguit, en la intervenció [205] expliquen que el motiu pel qual el descartaren fou per trobar-se fora del domini.

que al principi admet que no sap perquè, quan li donem temps per pensar, explica que la raó per la qual l'haurien rebutjat és perquè el temps que tarda en botar la pilota no arribarà mai als 100 segons, és a dir, que als 100 segons la pilota ja estarà parada. Per tant, en realitat sembla que descarten el valor perquè no té sentit calcular la imatge de la funció als 100 segons.

[200] E. Però penses que si t'haguera donat un nombre positiu seria... hauries considerat que estava bé?

[201] D. Mm... No.

[202] E. Per què?

[203] D. Doncs... No sé.

[204] E. Pensa-ho. Tranquil que tenim temps.

[205] D. Perquè... el temps que tarda en botar no arriba a 100 segons.

[206] E. Molt bé, als 100 segons la pilota ja... >>

[207] D. >> Està parada.

Posteriorment, els preguntem en quin moment pensen que s'acaba d'estudiar la trajectòria de la pilota exactament, és a dir, en quin segon la pilota toca a terra la segona vegada i D, després d'assegurar-se què és el que li estem preguntant, assenyala la coordenada x de l'últim punt que apareix al full de coordenades i afegeix que seria al segon 2.001666.

A continuació, amb la finalitat d'averiguar si han comprés la idea, els preguntem si tindria sentit calcular la imatge de 2.2 ja que és un valor que es troba fora del domini i D respon que no perquè ja ens en passem.

[208] E. [...] I exactament, podries dir-me en quin moment acabaries d'estudiar la... el bot de la pilota? És a dir, estudiàvem des del primer bot fins al segon. En quin moment... en quin segon parem d'estudiar el moviment?

[209] D. Fins que fa el primer bot? O siga, el segon >>

[210] E. >> Des del primer bot fins al segon.

[211] D. Doncs dos coma... [i assenyala la coordenada x de l'últim punt que és 2.001666]

[212] E. Dos coma zero zero... val. És a dir, si jo et diguera que eh... f de 2.2, tindria sentit?

[215] D. No, perquè ja ens en passem [es refereix a què ja estem fora del domini].

[216] E. Val, molt bé [...].

Tot seguit, amb l'objectiu d'esbrinar quina concepció tenen els alumnes sobre els valors que pot prendre l'altura, els preguntem perquè pensen que és contradictori que la imatge de 100 done un nombre negatiu. Açò ho fem també ja que en la gravació que feren aquests alumnes amb el programa Video Physics®

posen l'eix als peus de l'alumne i si hagueren treballat amb les seues dades, els haurien eixit molts valors negatius.

Com que al fer la pregunta anterior no respon ni un ni l'altre, probablement perquè no saben a què ens referim, passem a formular-los preguntes més concretes. Els preguntem què significa f d'un cert valor perquè se n'adonen de què -122 737,16 (que és la imatge de 100) és l'altura als 100 segons i tracten d'explicar si ho troben raonable o no i si seria possible que l'altura prenguera eixe valor o no en aquest cas. Llavors, encara que al principi sembla que no entenen bé la pregunta ja que responen que eixe valor és "on està la x ", quan els preguntem què és y sí que responen que és l'altura. Sembla que no reconeixen que $f(x)$ siga l'altura igual de fàcilment que ho fan quan els diguem y en compte de $f(x)$, tot i que saben que y i $f(x)$ són el mateix.

[216] E. [...] Per què penses que es contradiu que hi haja un nombre negatiu ací [referint-nos al valor que resulta de calcular $f(100)$, ja que abans diu que la pilota se n'aniria cap avall en aquest cas]? Per què ho penseu? Tu ho penses també o penses que no [dirigint-nos a C]? Es contradiu que hi haja un nombre negatiu? (.). Què significa f de alguna cosa? f de alguna cosa que era?

[217] D. On x val...

[218] C. On està la x .

[219] E. Però què era... la y ?

[220] C. L'altura.

[221] E. L'altura. I y és el mateix que $f(x)$, no?

[222] C, D. Sí, sí.

Seguidament, els preguntem si l'altura, en general, pot ser negativa i immediatament D respon que no, probablement perquè entén que ens estem referint a aquest cas ja que al preguntar-li si mai podria ser-ho explica que depèn de si hi haguera terra o no. Sembla que per a D no és habitual que l'altura prenga valors negatius però admet que pot ser que passe si la pilota continuara caient i considerarem una referència determinada. En particular, depenent de quin fora l'origen de coordenades triat.

[223] E. I si la y era l'altura, la y pot ser un nombre negatiu?

[224] D. No.

[225] E. No, perquè? Mai?

[226] D. Depén. Si...

[228] D. ...doncs... segons si hi ha terra o no.

[230] D. [...] Si... si llances una pilota i continua caent caent caent pot ser que siga [negativa], segons el teu origen de coordenades.

A continuació, els preguntem si tindria sentit, en aquest cas, que els valors de l'altura foren negatius ja que la pilota rebotava contra el sòl i no continua caient. I, com podem observar a la resposta de D, sembla que aquesta pregunta li suposa una contradicció ja que al principi respon que no (probablement per la concepció que té de què l'altura no pot ser negativa si botem la pilota per damunt del terra) i després que sí. Però, finalment com que no n'està segur acaba admetent que no coneix la resposta.

[231] E. El nostre cas és així? Vull dir, al nostre cas la pilota no va caent, para en un determinat lloc i rebotava, no?

[232] C. Sí.

[233] E. Aleshores, té sentit que siguin negatives les dades?

[234] D. No...sí, no ho sé (.)

Com que sembla que per aquest camí no arribem enlloc, canviem d'estratègia i els preguntem ara pel cas particular del fenomen que ells varen gravar. En particular els preguntem si creuen que a l'usar les seues dades els haurien eixit valors negatius i, responen, a l'uníson, que sí. Tanmateix, quan els preguntem si tindria sentit que açò passara discrepen i mentre C respon afirmant que sí, D diu que no. Observem de nou en D la idea persistent de què a l'haver sòl, l'altura de la pilota hauria de ser positiva ja que no continua caient.

[235] E. A veure, pensem en el vostre experiment. Si haguéreu utilitzat les dades que vos eixien, haurien pogut eixir nombres negatius?

[236] C., D. Sí.

[237] E. Per què?

[238] C. Per què l'eix d'abscisses està per dalt de la pilota.

[239] E. Val, i tindria sentit que haguera eixit un nombre negatiu?

[240] C. Sí >>

[241] D. >> No.

[242] E. [Risses] Sí o no?

[243] D. Sí que eixiria però no tindria sentit.

C explica que sí que tindria sentit que eixiren nombres negatius ja que ells col·locaren l'eix d'abscisses als peus de l'alumne i la pilota botava per baix d'aquest en alguns moments. Però, d'altra banda, D explica que és cert el que diu el seu company però que el més lògic haguera sigut col·locar-lo a l'altura del terra, és a dir, concep que hi ha una posició on és més raonable col·locar l'eix de les x i aquesta és al nivell del sòl. A més, sembla que C n'està d'acord.

[244] C. Sí que té sentit perquè nosaltres hem posat l'eix d'abscisses... aleshores sabem que al... bota per baix de l'eix de les... de les x .

[245] D. Clar, però el més lògic haguera sigut l'eix d'abscisses posar-lo on...

[246] C. A l'altura de la pilota [es refereix a l'altura en què la pilota toca el sòl ja que en la imatge de l'iPad® la pilota està sobre el terra].

[247] D. ...a l'altura de terra i aixina segur que sempre serà l'altura positiva.

Ara bé, com que al col·locar els eixos coordenats ho fem sobre una imatge que està en dues dimensions i no en tres, els preguntem on pensen que hauria tingut sentit col·locar els eixos (perquè els valors eixiren positius). D respon que en el sòl i abans que acabe la frase, intervé C explicant que en el primer punt on bota la pilota ja que així l'altura seria positiva sempre i zero en el terra. Cal destacar que sembla que C es refereix al punt en què la pilota toca el terra per primera vegada ja que sinó no tindria sentit perquè l'altura del terra no seria zero.

[248] E. Clar, i exactament... si estem estudiant el bot de la pilota on haguera tingut sentit posar l'eix d'abscisses exactament?

[249] D. En el sòl >>

[250] C. >> En el primer punt on bota la pilota [referint-se no al punt que marquen, ja que ells el marquen al centre de la pilota, sinó al punt en què la pilota tocaria el terra].

[251] E. En el primer punt, per què?

[252] C. Perquè així l'altura seria positiva sempre.

[253] E. I seria? Però l'altura en què tocaria la pilota a terra sempre quina seria?

[254] C, D. Zero.

[255] E. Zero, val molt bé [...].

Seguidament, recordem la informació a la qual han arribat els alumnes per tal de respondre l'apartat 6 b) i d'establir una mena de conclusió. D'aquesta manera, els recordem que les dades que havien dit que no s'ajustaven al que esperaven eren totes menys la de l'apartat b).

A continuació, llegim l'explicació que donen i els preguntem a què es refereixen quan diuen que les dades que no s'ajusten al que esperaven són les que es donen quan passa molt de temps i al principi perquè estan molt per davall. C explica que varen respondre així ja que els valors de l'altura per a 0.76, 0.11 i 100 eren negatius i pensaven que això no era correcte, però que ara ja saben que pot passar i, per tant, la resposta està malament.

Sembla que aquest últim raonament entra en contradicció amb el que ens han explicat abans ja que deien que descartaven els nombres per trobar-se fora del domini i no nombraven res de si ho feren perquè les imatges eren negatives o no. Tanmateix, sembla que per a ells, en eixe moment, el fet de què els nombres 0.11, 0.76 i 100 no es trobaren al domini de la funció estava relacionat amb el fet de què les imatges d'aquests foren negatives ja que casualment són els únics nombres

(dels quals els demanem que calculen les imatges) que compleixen ambdues condicions i, per això, donaren eixa justificació.

[255] E. [...] Tornant on estàvem... Ací vos preguntava: quines són les dades que no s'ajusten al que esperàveu? Ja m'haveu dit que són la de l'apartat a), la de l'apartat c) perquè no arriben i la de l'apartat d), val. No obstant... ací [a l'apartat b) de l'ítem 6] escriviu: quan passa molt de temps i al principi perquè estan molt per davall. A què es referiu?

[256] C. Es que era perquè estes eren negatives... [assenyalant els valors de l'altura per a 0.76, 0.11 i 100] però està mal.

[257] E. Ah, d'acord [...].

Ítem 7. Passem, per últim, a abordar l'ítem 7. En primer lloc, els demanem que lliguen l'enunciat i D, oferint-se voluntari, comença amb la lectura. A l'acabar, els preguntem què és el que varen fer i C explica que varen resoldre una equació de segon grau per trobar el resultat. Com que sembla que per a D és insuficient la resposta donada pel seu company, intervé per a explicar que el que feren fou plantejar una equació igualant y a zero i després varen calcular els valors de x .

[257] E. [...] I, per últim, la pregunta 7. Llegiu l'enunciat.

[258] D. Per a quins valors de x (temps) la pilota colpeja el terra. Explica què has fet per a obtindre el resultat.

[259] E. Val. Què haveu fet ahí?

[260] C. Una equació de segon grau, la resolució.

[261] D. Quan... y val zero, quan val la x .

Seguidament, els preguntem on varen fer els càlculs ja que ens crida l'atenció que escriviren la fórmula per a la resolució de l'equació de segon grau sense substituir les lletres pels valors corresponents i directament apuntaren el resultat, sense escriure els càlculs intermedis. Al principi sembla que no entenen bé la pregunta ja que pregunten a què ens referim però, després de concretar què és el que volem saber exactament, expliquen que ho feren a la calculadora, en particular, utilitzaren la del programa Free GraCalc® i substituïren els valors desconeguts a , b i c que apareixen a la fórmula pels nombres corresponents de la funció.

[262] E. Val, i on haveu calculat açò [el resultat de l'equació]?

[263] D. Com?

[266] E. On haveu fet els càlculs? En un altre full? Com ho haveu fet? >>

[267] D. >> En la calculadora.

[268] C. En la calculadora de l'iPad® amb les dades d'abans [assenyalen la funció de l'ítem 4]. >>

[269] D. >> Amb les dades de la gràfica, de la fórmula d'abans [es refereix a les de l'ítem 4, ja que les dades d'ací s'obtenen a partir de fer la regressió d'una sèrie de punts que tenen dibuixats en una gràfica]

Ara bé, com que pel que diuen els alumnes en [261] sembla que han considerat que l'altura del terra és zero com a resultat de les seues concepcions, des d'aquest instant fins la intervenció [301] tractem de guiar-los perquè se n'adonen de què açò no té perquè passar sempre i que, han de basar-se en la informació de què disposen per trobar quin valor pren aproximadament. Així doncs, és cert que podríem guiar els alumnes perquè trobaren els valors del temps mirant directament al full de coordenades, sense necessitat de calcular l'altura a la qual està el terra però, com que el raonament utilitzat en la resposta és correcte llevat de la manera en què li assignen un valor a y (ja que es basen en les seues concepcions), és açò l'únic que intentem corregir. A més, el fet de calcular els valors del temps directament no ens haguera permés intentar modificar la concepció que presenten els alumnes de què l'altura del terra és sempre zero.

Per aquest motiu, els preguntem, si creuen que és correcte haver considerat que y és igual a 0. Ara bé, com que vegem que no responen i tampoc no tracten de buscar una resposta mirant les dades que tenen de l'experiment (full de coordenades, representació gràfica de la funció al programa Free GraCalc®...) els preguntem si recorden si l'altura a la qual estava el terra a l'experiment era zero o no. C respon de seguida i diu que no, que era negativa, pel que ens adonem de què està pensant, de nou, en el seu experiment, és a dir, en el que ells gravaren en vídeo. Llavors, els recordem que les dades que utilitzaren per treballar a la segona fitxa no coincidien amb les del seu experiment.

[270] E. Val, molt bé. Penseu que està ben fet... és a dir, penseu que està bé igualar l'altura a zero per a traure els punts en aquest cas? (.) A l'experiment, l'altura [a què es troba el terra] era zero?

[271] C. No.

[272] E. Quin...què era la... l'altura?

[273] C. Negativa.

[274] E. No, en el vostre...

[275] C. No...

[276] E. ...cas no, en les dades... S'enrecordeu de què aquestes dades no coincidien amb l'experiment que havíeu fet?

[277] C. Sí sí.

[278] D. Sí.

Per això, com hem dit, tractem de què es basen en les dades del full de coordenades per respondre. En particular, els diguem que miren el full i que intenten esbrinar on estarà col·locat l'eix d'abscisses en aquest experiment (per a,

a partir d'ací, trobar a quina altura està el terra respecte a aquest). Ara bé, D (fixant-se en el primer punt del full de coordenades), respon referint-se al temps (cosa que no té massa sentit) ja que diu que l'eix d'abscisses l'hauran col·locat un segon abans de llançar la pilota. Tanmateix, tot i que aquesta resposta no ens permet deduir on pensa que estarà col·locat l'eix d'abscisses, ens fa adonar-nos-en de què per a ell la pilota es llança al segon u (que és la coordenada temporal del primer punt del full de coordenades).⁸

Tanmateix, no sabem ben bé per quin motiu, posteriorment en [285] sembla que D s'enrecorda de què els punts del full de coordenades corresponien als punts des del moment en què tocava terra la pilota per primera vegada fins que el tornava a tocar i, per això, el que realment passa al segon u és que la pilota toca el terra (no que és llançada). Per això, D rectifica la seua resposta dient que l'eix d'abscisses s'hauran col·locat un segon abans de què la pilota toque terra.

Ara bé, com que l'alumne respon fent referència al temps (que correspon a la variable x), li recordem que aquesta no és una variable que es pugui controlar ja que depèn de quan comença a gravar-se l'experiment (i, per tant, els eixos no es poden col·locar un segon abans de llançar la pilota).

[279] E. Aleshores, podríeu mirant això [el full de coordenades] dir-me eh... la persona que haja fet aquestes dades on haurà col·locat l'eix d'abscisses?

[280] D. Doncs (.) un segon abans de llançar, de què...

[283] D. L'ha llan... l'ha ficat... la... coordenada x [referint-se a l'eix de les x], una cap a l'esquerra...

[284] E. Però la x era el temps, recordes?

[285] D. Sí, un segon abans de què tocara el terra.

[286] E. Clar, però tu això no pots... o siga, tu graves i... dóna la casualitat que ha sigut així. No pots fixar-te en el temps. [...].

A continuació, els indiquem que s'han de fixar en l'altura (fent referència a les coordenades y dels punts del full de coordenades, que donen l'altura de la pilota respecte l'eix) i no en el temps, per la qual cosa, D (mirant la coordenada y del primer punt) ens diu que l'eix de les x l'hauran col·locat un poc per davall d'on bota la pilota, referint-se al lloc en què la pilota bota per primera vegada (no en general ja que la pilota va canviant de posició).

[286] E. [...] L'altura, s'haveu de fixar en l'altura (.) Aleshores on estarà col·locat l'eix de les x ?

[287] C. Doncs (.)

[288] D. Doncs un poc per davall de quan bota [la pilota]. >>

⁸ Pensem açò ja que, en general, els eixos són els que determinen on està "el zero" i si per a ell l'eix ("el zero") està un segon abans de llançar, serà perquè entén que es llança al segon u, cosa que explicaria també la seua resposta en [185] i [187].

[289] E. Molt bé [...]

Una vegada determinada la posició de l'eix d'abscisses respecte a la pilota (ja que, com diuen, està col·locat un poc per davall de quan aquesta toca el terra per primera vegada), tractem de què troben l'altura a la qual estarà el sòl. Ara bé, D especifica que estarà a altura 0.184773 (és a dir, a la mateixa altura que el primer punt del full de coordenades), per la qual cosa està pensant que els punts que indiquen la trajectòria de la pilota es marquen a la part baixa d'aquesta.

[289] E. [...] i podríeu dir-me on... a quina altura estarà el terra?

[290] D. A 0.184773...

[291] E. Per què? Per què dius això?

[292] D. Doncs perquè... ahí és on la pilota arriba al terra...

Ara bé, com que sabem que els moments en què la pilota es troba al terra corresponen als punts 1 i 31 del full de coordenades (que són els punts en què la pilota pega el primer bot i el segon), els preguntem perquè les altures d'aquests punts no coincideixen. Açò fa que es queden pensant sense respondre. Però, com que el temps de què es disposa per acabar de realitzar l'entrevista és escàs, decidim comentar-los que els punts no coincideixen perquè es produeix un error al marcar-los sobre el programa (cosa que és normal) però que en realitat els valors haurien de coincidir.

[293] E. Molt bé. I que passa ahí? [assenyalant l'últim punt del full de coordenades]

[294] D. (.) No sé...

[295] E. Ahí també toca terra la pilota no? Per què no coincideixen? [referint-nos a les coordenades temporals del primer i de l'últim punt] (.) Bé, açò passa perquè els punts que es marquen estan aproximadament però en realitat haurien de coincidir.

Aleshores, coneguent l'altura del primer punt i de l'últim i sabent que aquesta hauria de coincidir, els preguntem què pensen que valdrà l'altura del terra, al que respon ara C dient que serà pràcticament zero.

[297] E. Aleshores, què valdria l'altura del terra?

[298] C. Quasi zero?

[299] E. Exacte, quasi zero ja que l'altura de l'últim punt, que hauria de caure exactament damunt del primer, sí que és quasi zero [explicant-ho sobre el full de coordenades].

Finalment, passem a l'última pregunta ja que no disposem de molt més temps per continuar preguntant-los. Llegim l'enunciat (que demana calcular l'instant on l'altura és màxima) i els preguntem què és el que feren. D explica que calcularen el valor del vèrtex (la coordenada x) ja que és el punt de la funció on l'altura és màxima i ho feren utilitzant la fórmula de $x = -b/2a$ que, substituint pels valors

adequats, els dóna com a resultat 1.5. Però, quan els preguntem pel significat d'1.5, aquest es confon i diu que 1.5 és l'altura màxima que alcança la pilota.

[301] E. [...] I l'última... per a quins valors de x que és el temps la pilota arriba a la seua màxima altura? Per a quins valors de x . Què heu fet ahí?

[302] D. Calcular el vèrtex, que és el punt de màxima altura... amb la fórmula de menys b partit per dos a ... i ens ha eixit 1.5.

[303] E. Val, i això que ens dóna?

[304] D. L'altura a què es trobarà... l'altura màxima.

Aleshores C, recordant que el que els demanàvem a l'enunciat era el valor del temps, diu que cal calcular la x . Llavors D, considerant que y val 1.5 (i oblidant-se de què la fórmula utilitzada ja ens proporciona el temps i no l'altura) es disposa a substituir en la funció de l'ítem 4 per trobar el valor de x però, en eixe moment se n'adona de l'errada d'interpretació que ha comés i exclama que 1.5 no és l'altura màxima sinó l'instant en què aquesta s'alcança, cosa amb el que C està ara d'acord.

[305] C. Però no ens dóna el valor de x que és el temps.

[306] E. I com calcularíeu el valor de x ?

[307] D. En l'equació, canviant x ... Ah no, es que eixe [el valor que els ha eixit, 1.4933] ja és el que ens demana, això és el temps!

[308] C. Ah sí!

[309] E. Clar, això és el temps, no l'altura! Val molt bé, ara sí.

4.2.2. Resultats obtinguts

Quant als resultats obtinguts després d'analitzar les intervencions dels alumnes a partir de les transcripcions de les entrevistes, cal destacar que podem agrupar-los en quatre blocs importants: factors que influïren en l'elecció de les funcions, concepcions sobre l'altura, situacions d'ensenyament i ús de dades reals al nostre experiment. A continuació, passem a detallar en què consisteix cadascun d'aquests.

4.2.2.1. Factors que influïren en l'elecció de les funcions

La importància de l'anàlisi qualitatiu i el coneixement de les propietats qualitatives de les famílies de funcions

Notem, en primer lloc, que l'anàlisi qualitatiu que realitzen els alumnes a l'ítem 1 és un element clau en tot el procés d'ensenyament ja que es recolzen constantment en aquest per prendre decisions o buscar explicacions. Ara bé, aquest fet, que ja comentàvem a l'anàlisi de les dades de les fitxes i dels iPads®, es pot observar també a les distintes intervencions dels alumnes durant les entrevistes.

Així doncs, abans de passar a veure algun exemple, cal recordar que l'anàlisi que realitza cada parella és una mica distint ja que, d'una banda, la parella 1 dibuixa

una única paràbola que representa la relació entre el temps i l'altura de la pilota des del moment en què toca terra per primera vegada fins que el torna a tocar i, d'altra banda, la parella 2 dibuixa un conjunt de paràboles amb la intenció de representar la mateixa relació però des del moment en què la pilota toca terra per primera vegada fins que dóna uns quants bots més, tot i que destaquen amb una traçada més forta la primera d'aquestes indicant que és eixa part la que cal estudiar. Així mateix, les representacions d'ambdues parelles tenen elements en comú ja que tots els alumnes consideren que el núvol de punts ha de passar pel punt (0,0) i està dibuixat en el 1r quadrant, cosa que, fins ara, ens feia pensar que els alumnes tenien unes certes concepcions i que, gràcies a les entrevistes, hem pogut comprovar que així era, cosa que explicarem més endavant.

Ara bé, tal com hem comentat, els alumnes fan referència a l'anàlisi qualitatiu del fenomen per justificar les seues respostes a les fitxes. És el cas dels alumnes de la parella 1 que quan els preguntem perquè varen triar l'opció c) a l'ítem 2, ens diuen que fou perquè els va semblar la més coherent. Tanmateix, quan els preguntem més explícitament si es basaren en el gràfic de l'ítem 1 ens diuen que sí ja que es recolzen en el dibuix per dir que era una funció quadràtica. Vegem-ho:

[12] E. [...] Ara bé, en la pregunta 2, perquè vàreu triar la c)?

[13] A. [...] al final vàrem trobar eixa la més...

[14] B. Coherent.

[16] E. Val, però en algun moment es baseu en el dibuix per decidir que és aquesta funció?...

[19] B. Sí perquè com ja l'hem donada doncs... el dibuix era... sabíem que y portava un...

[21] B. ...quadrat [...].

Però, aquesta no és l'única intervenció que ens permet constatar com els alumnes es recolzen en l'anàlisi qualitatiu per donar les seues respostes. Vegem, que aquest anàlisi inicial també serveix de base a l'hora de prendre decisions sobre l'elecció de la funció de regressió a l'ítem 4. Per exemple, en el cas de la parella 1, els alumnes expliquen que trien com a funció de regressió $y=ax^2+bx$ perquè "és la funció d'abans", fent al·lusió a la funció que havien dibuixat a l'ítem 1. Així mateix, els alumnes de la parella 2 també fan referència a l'anàlisi qualitatiu ja que, tot i que en un principi diuen que no consideren en cap moment la funció que havien elegit inicialment per triar la de l'ítem 4, després afirmen que en realitat fou la primera que varen considerar, però que com sabien que no ajustaria, la varen descartar sense provar:

[161] D. Es què si haguérem agafat eixa [la que no té c] tindria que passar per eixe punt [pel (0,0)] i també per eixe [pel primer dels punts]...

[163] D. ...aleshores faria una forma estranya [es refereix a què quan uniren tots els punts amb el (0,0), no donaria una forma coneguda].

En definitiva, les nostres observacions confirmen la idea senyalada per Puig i Monzó (2013) de què tant l'anàlisi qualitatiu com el coneixement de les propietats qualitatives de les funcions són un element crucial per a la gestió i el control al llarg de tot el procés de modelització.

Els valors dels paràmetres

Evidentment, el significat que els alumnes atribueixen als paràmetres que apareixen en les distintes famílies de funcions és un altre element important en l'elecció de la funció. Ara bé, com hem dit, els alumnes d'aquestes dues parelles tenen clar que la funció que modelitza el fenomen estudiat és una paràbola. Per tant, com que hi ha dues famílies de funcions la representació de les quals és aquesta i la diferència en les fórmules és l'aparició del paràmetre c , la correcta interpretació d'aquest resulta un element fonamental en l'elecció.

Malgrat tot, cal destacar que els alumnes no només interpreten el significat del paràmetre c , sinó que sembla que a l'hora de justificar la resposta es veuen forçats a donar un significat a la resta de paràmetres de la família, cosa que en aquest cas no es pot fer. Tanmateix, sembla que el fet de tractar d'assignar-los un significat als paràmetres a i b correspon a una primera interpretació d'aquests sense massa reflexió ja que, com diuen uns dels alumnes a l'entrevista, en el moment de realització de la fitxa pensaven que era correcta la interpretació però ara ja saben que no és així.

Vegem, en primer lloc, les interpretacions que feren els alumnes de la parella 2. Però, abans de res, cal recordar que foren aquests els que manteniren una espècie de discussió durant la realització de la fitxa perquè no aconseguiren arribar a un acord sobre la funció que havien de triar, per això, el primer que fem és dir-los que expliquen que fou el que va passar exactament en aquell moment. Els alumnes responen diguent que un d'ells pensava que havien de triar la fórmula sense c directament ja que c valia zero i l'altre deia que havien de triar la que tenia c perquè "és una paràbola i té c i la c pot ser zero". Llavors, com a conseqüència d'aquesta resposta, ens adonem de què probablement el motiu pel qual no es posaven d'acord era perquè veien la família $y=ax^2+bx$ com una subfamília de $y=ax^2+bx+c$ i, per tant, les dues eren opcions vàlides, tot i que per a cadascun dels alumnes pareixia més correcte triar una que altra.

Ara bé, per tractar d'averiguar perquè diuen que c val zero els preguntem quin significat pensen que té exactament aquest paràmetre, al que responen fent referència a les propietats qualitatives del fenomen ja que expliquen que és l'altura de la pilota quan el temps val zero, que per a ells és quan la pilota toca el terra per primera vegada:

[22] E. Val, què significa la c en eixe cas per a vosaltres?

[23] C. Eh... l'altura, o siga, al al lloc... o siga, l'altura en què començaria... on on comptàriem el primer bot [...]

Així mateix, vegem que aquest no és l'únic paràmetre que tracten d'interpretar els alumnes ja que, com es pot veure a la resposta a l'ítem 3, justifiquen l'elecció de la funció dient que a i b indiquen l'eix de les x i l'eix de les y , respectivament. Per això, durant l'entrevista els preguntem en què es basen per donar eixa resposta, cosa que fa que expliquen que no recorden perquè la varen donar i que ara ja no pensen així (fet que es pot observar a les intervencions des de la [54] fins la [58]).

D'altra banda, al contrari que els alumnes de la parella 2, els de la parella 1 interpreten malament el paràmetre c , com a conseqüència de tractar de donar un significat als paràmetres a i b . Aquests expliquen, primerament, que el que fan és relacionar $(0,0)$ amb a i b :

[34] A. [...] a l'iniciar el moviment en el $(0,0)$ vaig relacionar el $(0,0)$ amb cadascun d'aquests nombres... [assenyala els monomis ax^2 i bx a la fórmula, referint-se als paràmetres a i b]

Ara bé, després d'intentar averiguar, sense èxit, la raó per la qual feren açò, els preguntem perquè elegiren c i no b). Llavors, B explica que varen triar c perquè apareixen dos paràmetres ja que per a ells cada paràmetre representa una variable i , com que en b) n'hi ha tres, no podia ser perquè no hi havia cap valor que poder assignar-li a c :

[55] E. ...la b) no podria ser aleshores?

[56] B. Perquè com portava la c , vam descartar les que tenien...

[58] B. ...més de a i b , no sé.

[66] B. ...perquè com sols tens l'equació d'altura i temps doncs... no sé, la c no... no trobava què ficar-li. >>

[70] E. ... Per a tu la a és l'altura i la b és el temps?

[71] B. Sí

Per últim, és important destacar que per la interpretació que fan els alumnes dels paràmetres, al contrari que els de la parella 2, aquests consideren les dues famílies com a famílies disjunctes.

Concepcions sobre el temps

Com ja hem comentat en apartats anteriors, a l'analitzar les respostes dels alumnes a les fitxes (en particular les dels ítems 1 i 2), sembla que aquests mostren una concepció absoluta del temps. Això és, consideren el fenomen estudiat fora del

context en què es presenta, que és des que es solta la pilota fins que aquesta es para. Per això, cal destacar que també ha sigut un factor important a l'hora de prendre decisions per escollir la funció que millor modelitza el fenomen. Ara bé, aquesta concepció també s'ha pogut observar en algunes intervencions durant les entrevistes, cosa que mostrarem a continuació.

Per exemple, en les següents intervencions de l'entrevista a la parella 1, es pot apreciar que els alumnes consideren el temps zero en el moment en què s'inicia el fenomen que es vol estudiar:

[4] E. Val, i perquè la vàreu dibuixar de manera que començara des del (0,0) i no en un altre lloc?

[6] A. [...] perquè considerarem el temps inicial zero i que l'altura inicial en el primer bot aleshores era zero també.

[7] E. Però per què? [...]

[9] B. Perquè ací fica que és des que toca terra per primera vegada [assenyala amb el dit l'enunciat del problema].

És a dir, com que el fenomen que cal estudiar és la relació entre altura i temps de la pilota des del primer bot que pega fins al segon, els alumnes consideren que el temps és zero quan aquesta toca terra per primera vegada i, per tant, obvien el context en què aquest està englobat.

Ara bé, un altre factor important que influeix en l'elecció de la funció que modelitza el fenomen estudiat és la concepció que tenen els alumnes del concepte d'altura. Així doncs, com que aquesta concepció té una gran influència no només a l'hora d'elegir la funció sinó també en moltes altres situacions al llarg de l'experiment, detallarem en què consisteix en l'apartat següent.

4.2.2.2. Sobre les concepcions del concepte d'altura

El terra com a sistema de referència

En general, com ja comentàvem a l'apartat 4.1, i en particular per a aquesta parella, els alumnes coincideixen quant a les concepcions que tenen del concepte d'altura ja que consideren que els valors que pot prendre aquesta han de ser positius quan treballem per damunt del nivell del sòl, i zero només en el cas en què ens referim a l'altura en què es troba el terra. Aquestes concepcions tenen una influència enorme en les respostes dels alumnes no sòls a les fitxes sinó també durant les entrevistes realitzades.

Per exemple, a les intervencions [196] i [197] de l'entrevista de la parella 2 podem observar com D considera que no té sentit que la imatge de 100 (que dona $f(100) = -122\,737.16$) siga un valor negatiu ja que en eixe cas estan treballant per damunt del nivell del sòl:

[196] E. I esta no [la $f(100)$]? Per què? Per què tampoc tindria sentit?

[197] D. Perquè és com... ahí en este cas es com si no... hi haguera sòl i la pilota se n'anara cap avall.

Ara bé, notem que el fet de què l'altura siga negativa els resulta més rellevant que el fet de què el nombre siga molt gran, cosa que ens permet fer-nos una idea de com és de forta aquesta concepció.

A més, podem observar també altres comentaris com ara el de l'alumne A de la parella 1 a la intervenció [221] que mostra, de manera implícita, la concepció que tenen de què l'altura del terra és zero. Aquesta intervenció té lloc quan els preguntem si té sentit calcular la imatge de 0.11 a l'ítem 5, al que A ens respon que sí, interpretant el resultat obtingut ($f(0.11)=0.330351$) en termes del fenomen estudiat:

[221] A. Està a ras de terra, a 0.30 centímetres...

Notem com aquest considera que el terra està a altura zero.

Així mateix, també es poden observar les intervencions dels alumnes d'ambdues parelles a l'inici de l'ítem 7 on expliquen que han considerat que y val zero per respondre, és a dir, que l'altura del sòl és zero.

Els conceptes altura i distància, i l'acceptació de l'existència dels nombres negatius

Ara bé, a continuació, cal comentar que, si ens fixem a l'enunciat de l'apartat a) de l'ítem 5, podem veure que es descriu la funció $f(x)$ en termes de distàncies i no en termes d'altura, tal i com es detalla a l'enunciat de l'experiment. És a dir, es diu que $f(x)$ és "la distància de la pilota a terra" al passar x segons, en compte de "l'altura a què es troba la pilota". Així doncs, com bé sabem, açò té algunes conseqüències ja que a l'espai euclidià la distància, per la pròpia definició, es defineix com una funció positiva que mai no pot prendre valors negatius (mentre que l'altura sí), cosa que podria portar als alumnes a una contradicció (o a interpretar que açò no té sentit) ja que la funció $f(x)$, que es defineix com a distància en l'ítem 5, sí que pot prendre valors negatius. Ara bé, és cert que amb les dades que s'utilitzen per a estudiar l'experiment, els valors que pren $f(x)$ en el seu domini de definició fan que les imatges siguen positives però, açò no hauria passat en cas de què l'eix d'abcises s'haguera fixat al programa Video Physics® per damunt del primer punt que es marca per mostrar la trajectòria de la pilota ja que haurien aparegut valors negatius i sí que tindrien sentit. Tanmateix, sembla que el fet d'utilitzar el terme distància a l'enunciat i no altura no ha influït en les respostes dels estudiants ja que tot i que és cert que la majoria d'aquests explica a l'ítem 6 que les dades que no mostren el que vertaderament ocorre són les negatives, justifiquen que açò és conseqüència de què l'altura (i no la distància) mai no pot ser negativa. És el cas dels alumnes de la parella 5 que al preguntar-los si les respostes de la pregunta anterior mostren el que vertaderament ocorre responen

que “no, perquè quan té un determinat valor en la x , la y dóna negatiu, la qual cosa és impossible ja que l'eix y representa l'altura, i aquesta no pot ser negativa”.

En definitiva, el problema de què els alumnes pensen que els valors negatius per a $f(x)$ no tenen sentit en aquest context sembla anar més enllà del fet de què aparega el terme distància a l'enunciat en compte del d'altura, i sembla ser, més bé, conseqüència de les concepcions que aquests tenen sobre els valors que pot prendre aquesta.

4.2.2.3. Situacions d'ensenyament

Com ja hem comentat, en altres moments, les entrevistes no es van produir només amb l'objectiu d'extraure informació sobre l'origen de les dades obtingudes de les fitxes i dels iPads®, sinó que també incloïen moments en què les preguntes tenien intenció d'ensenyar, mitjançant la reflexió dels alumnes sobre les seues respostes o sobre noves qüestions derivades d'aquestes. Per tant, aquestes foren una barreja entre el que anomenem entrevistes de diagnòstic i entrevistes amb ensenyament. A continuació, descriurem algunes d'aquestes situacions recolzant-nos amb cites dels alumnes.

L'elecció de les coordenades dels punts

Quant a l'elecció que fan els alumnes dels punts del full de coordenades cal destacar que, com ells mateixos expliquen en les entrevistes, els criteris en els quals es basaren foren més o menys aleatoris. Per aquest motiu, decidim preguntar-los què haguera passat si en compte de triar eixos punts n'hagueren elegit sis o set consecutius i, mitjançant preguntes, tractem de guiar-los perquè se n'adonen de les conseqüències que haguera tingut aquest fet. Explicuem cada cas per separat.

D'una banda, quan els preguntem als alumnes de la parella 1 si creuen que hauria sigut el mateix triar els sis o set primers punts que els que ells triaren, un d'ells, A, intenta explicar que la mitjana seria més correcta en un dels casos però B l'interromp abans de què acabe la frase afirmant que el millor per representar la funció és que els punts estiguen separats, referint-se probablement a què cobrisquen tota la funció. Ara bé, perquè se n'adonen que en el cas que els proposem no hauria sigut fàcil identificar la funció, els fem dibuixar alguns punts molt pròxims uns d'altres i unir-los, pel que fa que expliquen que en eixe cas haurien identificat que la funció es tractava més bé d'una corba qualsevol o inclús d'una recta, en compte d'una paràbola.

D'altra banda, els alumnes de la parella 2 (que trien els punts tal i com es mostren a l'annex 9 perquè, segons ells, són més fàcils d'introduir a la calculadora) els preguntem si creuen que aquesta és la millor manera d'agafar-los, al que D respon que no. Aquest alumne explica que hauria sigut millor agafar-los més

separats, amb el que el seu company no està d'acord i justifica que quan més junts estiguen millor ja que menor serà l'error d'aproximació:

[101] C. Perquè... a lo millor si de un punt que hi ha eh... A veure, si hi ha una distància major, doncs tu a l'hora de representar-ho doncs fas una línia que... a lo millor si passa un punt entremig, eixa línia no passa pel punt eixe.

Llavors, tot i que en part el que diu C és cert, cal destacar que no seria adequat en cas de què els sis o set punts que es triaren foren tots consecutius ja que, com hem dit, açò faria que, per una banda, la funció només estiguera ben aproximada en l'interval on es prenen els punts i, per una altra banda, que fora difícil reconèixer quina funció ajusta millor a aquests. Per tant, perquè se n'adonen d'açò, els guiem mitjançant les preguntes adequades cap a aquesta conclusió.

Posició de l'eix d'abscisses i altura del terra

Com sabem, les dades que utilitzaren els alumnes en la segona part de l'experiment d'ensenyament foren les que els proporcionàrem a partir del full de coordenades, de les quals, l'única informació que tenien eren les pròpies coordenades, és a dir, només coneixien els valors del temps i de l'altura dels punts que es marquen en el programa Video Physics. Per tant, es pot averiguar on estarà col·locat l'eix d'abscisses (que és el que determina la referència que es pren) però no es pot conèixer exactament ni en quin lloc de la pilota es marcaren els punts, ni en quina posició respecte al terra es troba aquest eix.

Tanmateix, tot i que en l'ítem 7 a) de les fitxes no és necessari conèixer l'altura en què es troba el terra per respondre (ja que es poden buscar els valors del temps directament al programa Video Physics®), el que fan els alumnes d'ambdues parelles inicialment és suposar, com a resultat de les seues concepcions, que aquesta és zero i calcular els valors del temps a partir d'aquest fet. Aleshores, durant l'entrevista, el que tractem no és de canviar la manera en què han contestat l'ítem, sinó de modificar allò que han fet malament perquè, seguint el seu raonament puguen obtindre la resposta correcta. Per això, intentem guiar els alumnes perquè, mitjançant preguntes, compreguen que no es pot suposar que l'altura del terra és zero directament, sinó que cal basar-se en la informació de què es disposa per comprovar-ho. I, encara que no es puga trobar el valor exacte per a aquesta, com és el cas, sempre se'n pot donar una interpretació aproximada basant-se en les dades de què es disposa, interpretació que segurament serà més bona que el suposar simplement que aquesta sempre valdrà zero.

Ara bé, com que la posició en què està col·locat l'eix d'abscisses en les dades d'aquest experiment sí que es pot determinar i l'altura en què es troba el terra està relacionat amb aquesta, tractem, primerament, que els alumnes troben la posició de l'eix i, a continuació, a partir d'aquesta, l'altura del sòl. Llavors, passem a explicar què va fer cada parella per separat.

D'una banda, en un moment donat durant l'entrevista de la parella 1, en particular després de què els alumnes se n'adonen de què no poden utilitzar les dades que ells mateixos obteniren per dir si els resultats de l'ítem 5 mostren el que vertaderament ocorre, apareix la necessitat d'averiguar en quina posició pensen que està col·locat l'eix d'abscisses en el cas de les noves dades i, així, poder respondre si realment té sentit que apareguen imatges amb valors negatius o no. Llavors, vegem com els alumnes són capaços de trobar la posició d'aquest sense moltes indicacions:

[181] E. ... La persona que haja tret aquestes dades, on haurà col·locat l'eix d'abscisses en el programa Video Physics®? (.). A veure, quin és el punt que més avall estarà?

[182] B. Es... este [0.0036].

[183] E. [...] Aleshores, on estarà col·locat l'eix de les x?

[184] A. Mm... En el zero... o siga, en el zero també.

[185] B. Sí... Un poc més avall.

És a dir, A explica que l'eix d'abscisses estarà al zero, afirmació que, evidentment, és certa ja que precisament l'altura zero vé determinada per la posició del propi eix. Tanmateix, B aporta més informació ja que explica que aquest estarà col·locat una mica més avall de 0.0036 (que correspon a l'altura de la pilota en el punt més baix), pel que es conclou que no poden aparèixer valors negatius per a l'altura en aquest cas.

Així doncs, és més tard quan els preguntem per l'altura en què es troba el terra, en concret a l'apartat a) de l'ítem 7. Ho fem després d'adonar-nos de què el fet d'assignar-li el valor zero al terra és conseqüència de les idees i concepcions dels alumnes i no de cap comprovació en les dades del full de coordenades. Per la qual cosa, intentem guiar els alumnes perquè, basant-se en la informació de què disposen, tracten d'interpretar quin valor podria prendre l'altura. Tanmateix, quan els preguntem on creuen que tocarà terra la pilota, el que fan és donar directament els valors del temps per als que açò passa, és a dir, responen l'apartat a) de l'ítem sense necessitat d'averiguar el valor de l'altura:

[278] E. On serà on toca el terra la pilota?

[279] B. En el segon u.

[280] E. En el segon u, val... En algun lloc més?

[281] B. [Mira el full de coordenades] En eixe [assenyala la coordenada x de l'últim punt que apareix al full], en el dos.

Tot i això, com que, com ja hem dit, el que ens interessa no sòls és que responguen bé l'apartat sinó també guiar els alumnes perquè se n'adonen de la necessitat de buscar el valor de l'altura del terra en les dades de què disposen, intentem que averigüen aquest valor inclús quan ja no és necessari per respondre.

Per això, els preguntem a quina altura pensen que estarà el sòl, al que respon B basant-se en els seus coneixements sobre les propietats qualitatives del fenomen ja que diu que açò passarà al primer punt i a l'últim del full de coordenades. Ara bé, aquest es mostra estranyat ja que els valors de l'altura per a aquests punts no coincideixen, per la qual cosa els expliquem que si s'hagueren pogut fer exactament sí que ho farien (referint-nos a si es trobaren en una situació ideal i a si es pogueren marcar els punts de manera exacta). Després d'açò, A afirma que l'altura del terra serà quasi zero i nosaltres, tractant d'afinar una mica més, expliquem que es trobarà a una altura de 0.08 o 0.09 metres respecte a l'eix d'abscisses.

[289] E. Aleshores, quin...eh...el sòl a quina altura estarà?

[290] B. A la 0.1846 (.) [coordenada y del primer punt] o en esta [coordenada y de l'últim punt]

[291] E. Sí, molt bé. El que passa és que com que [les dades o valors de l'altura en el primer i en l'últim punt] estan aproximades no coincideixen, però si es poguera fer exactament...

[292] A. Però serà pràcticament zero, no?.

[293] E. Sí, més o menys, l'altura [a què es trobarà el sol] serà 0.08, 0.09... no? [tractant de trobar la mitjana entre l'altura del primer punt i de l'últim]...

[294] A. Sí.

Notem que, realment l'altura del sòl no té perquè ser aquesta. Aquesta només és una de les possibles interpretacions, la que té lloc quan es considera que els punts donats es marquen a la part baixa de la pilota (que és el que ha considerat B en [290] ja que està pensant en què el sòl està a la mateixa altura que el primer i l'últim full del punt).

D'altra banda, en la segona parella no els preguntem res sobre la posició dels eixos coordinats fins a l'ítem 7. En aquest, intentem que se n'adonen de què no poden suposar que l'altura del terra és zero directament i, per això, tractem de guiar-los perquè, consultant el full de coordenades, interpreten les dades i troben una solució. A més, els preguntem per la posició de l'eix d'abscisses perquè el determinen abans de trobar l'altura del terra.

Tanmateix, D, fixant-se en el primer punt que apareix al full de coordenades respon fent referència a la coordenada que dóna el temps, en compte de la que dóna l'altura, per la qual cosa li indiquem que la coordenada temporal no es pot controlar perquè depèn de quan comences a gravar el vídeo, que s'ha de fixar en la coordenada y (que dóna l'altura de la pilota respecte l'eix d'abscisses). Aleshores D, sense massa complicacions, diu que es trobarà una mica més avall d'on bota la pilota en el primer punt:

[286] E. [...] L'altura, s'haveu de fixar en l'altura (.). Aleshores on estarà col·locat l'eix de les x ?

[287] C. Doncs (.)

[288] D. Doncs un poc per davall de quan bota [la pilota]. >>

[289] E. Molt bé [...]

Llavors, després de conèixer la posició de l'eix d'abscisses, els preguntem per l'altura a la qual es troba el terra, pel que respon D indicant que es trobarà a la mateixa altura que el primer punt del full de coordenades, fet pel qual es pot deduir que, a l'igual que la parella 1, aquestos alumnes consideren que els punts es marquen a la part baixa de la pilota.

[289] E. [...] i podríeu dir-me on... a quina altura estarà el terra?

[290] D. A 0.184773...

[291] E. Per què? Per què dius això?

[292] D. Doncs perquè... ahí és on la pilota arriba al terra...

Ara bé, finalment, els preguntem què és el que passa amb l'altura de l'últim punt del full (que representa l'altura el segon bot de la pilota) ja que no coincideix amb la del primer. Però, com que el temps s'esgota, decidim comentar-los que, en realitat, l'altura d'aquests hauria de coincidir però que no ho fa perquè els punts no es poden marcar de manera exacta al programa Video Physics®. Per tant, els preguntem què valdrà l'altura del terra, al que respon ara C explicant que serà quasi zero, probablement seguint el que els acabem d'explicar i calculant (aproximadament) que el seu valor serà semblant als de les altures del primer i de l'últim punt del full (mirar intervencions [293]-[299]).

En definitiva, en un primer moment els alumnes es basen en les seues concepcions per trobar l'altura del sòl, tanmateix, les nostres suggerències tenen efectes d'aprenentatge ja que, posteriorment, aquestos són capaços d'apartar-se d'aquestes idees per fixar-se en les dades del full de coordenades i donar, així, una interpretació de quin creuen que serà el valor d'aquesta.

Domini de definició de la funció

Per últim, abordem les qüestions relacionades amb la importància de tenir present quin és el domini on està definida, en aquest experiment, la funció escollida a l'ítem 4. Com bé sabem, quan tractem de trobar una funció que modelitza un fenomen, no busquem una funció que descriga el seu comportament globalment, sinó una que el descriga en l'interval en què ens interessa estudiar-lo. És per això que no tindrà sentit analitzar-la fora d'aquest interval ja que allí el seu comportament no té perquè correspondre's amb el del fenomen, sinó que tan sols coincidirà amb aquest en el seu domini de definició.

Ara bé, l'ítem 6 està posat per veure si els alumnes són capaços d'adonar-se'n d'aquest fet. Malgrat tot, després d'emplenar les fitxes, sembla que, en general, els resulta més cridaner que els valors de les imatges de la funció siguin negatius que el fet de què s'hagen calculat valors que estan fora del domini d'estudi d'aquesta. Per això, el que tractem durant les entrevistes és de què els alumnes se n'adonen que els valors de les imatges poden ser negatius (encara que no en aquest cas) i que, per tant, no és açò el que fa que hi hagen valors que no mostren el que vertaderament ocorre, sinó l'haver realitzat el càlcul de les imatges d'uns valors que ni tan sols es troben a l'interval per al qual hem definit la funció. Expliquem, a continuació, el comportament dels alumnes de cada parella.

D'una banda, com ja hem dit, els alumnes de la parella 1 només consideren que hi ha un valor que no mostra el que vertaderament ocorre i aquest és $f(100)$ (mirar les respostes a l'annex 10), cosa que justifiquen com un error seu. Tanmateix, durant l'entrevista els preguntem perquè pensen això, al que responen fent referència al valor de la imatge, i no al del domini. En particular, mentre B explica que no té sentit que $f(100)$ done -14 166.75 "perquè continua baixant" (és a dir, perquè és negatiu i, per tant, la pilota continuaria descendant) A diu que "està desproporcionat", referint-se a què es tracta d'un valor molt diferent, en tamany, a la resta.

Ara bé, després de diverses intervencions (en les quals tractem d'averiguar on es va fixar l'eix d'abscisses en les dades en aquest cas) els preguntem quin significat té $f(10)$, esperant que interpreten que és l'altura a què es troba la pilota als deu segons i, així, preguntar-los si té sentit calcular les imatges que els demanen a l'ítem 5. Però, una vegada fet açò, l'alumne A ens respon directament basant-se en el domini, ja que explica que tindria més sentit calcular les imatges d'altres valors.

[206] E. [...] Té sentit, aleshores, calcular f de tots aquests valors? f de...

[208] E. ... $f(0.76)$, $f(100)$... [assenyalant els nombres a l'ítem 5]

[209] A. Tindria més sentit calcular d'un segon, dos segons, tres segons...

Tanmateix, notem que aquesta deducció la fa basant-se en els seus coneixements sobre les propietats qualitatives del fenomen ja que, en realitat, el domini de la funció restringit a aquest cas va d'u fins a dos (mirar el full de coordenades a l'annex 5) i per a tres segons ja no tindria sentit calcular la imatge. Per això, en el moment en què ens n'adonem, els indiquem que s'han de fixar en les dades del full de coordenades per respondre, cosa que els permet delimitar el domini i respondre correctament:

[224] E. ... Comencem a comptar des de...

[225] A. Des d'un segon!...

[243] B. Doncs... sols té sentit a partir d'u fins que torna a botar.

[245] B. En el segon dos [mirant el full de coordenades]

[248] E. Aleshores, quines dades no tindrien sentit?

[249] A. Doncs totes.

[251] A. >> Menys la b).

D'altra banda, els alumnes de la parella 2 sí que es fixen en el domini de la funció per justificar l'existència de valors que no tenen sentit, però no sempre ja que expliquen que els valors que no mostren el que vertaderament ocorre són $f(0.76)$ i $f(0.11)$ per ser imatges de nombres menors que u i $f(100)$ perquè la imatge dóna un nombre negatiu.

Llavors, el que fem en aquest cas és, per un costat, averiguar en què es basen exactament els alumnes per dir que les imatges de 0.11 i 0.76 no tenen sentit i, per altre costat, conduir-los a què es fixen en el domini quan intenten justificar $f(100)$ i no en el valor de la imatge.

Com dèiem, els alumnes veuen que els valors que no mostren el que vertaderament ocorre són els que es donen abans d' u però, com vegem a continuació, cadascun d'ells en fa una interpretació distinta:

[181] E. [...] en la següent pregunta, en la 6, diu: en general, creus que les respostes obtingudes en la pregunta anterior mostren el que vertaderament ocorre? I responeu: no, per què les coordenades donades comencen a temps u . Què vol dir això?

[182] C. Que ja... o siga, a l'hora de les coordenades que ens donen no estan a temps zero, o siga, de... en el moment en què la pilota toca el sòl a... al moment en què ens donen les coordenades ja ha passat un segon.

[185] D. Es que estes són abans de u [Assenyala el 0.76].

[187] D. [...] És com si fora abans de que la llançarem.

Notem que, en primer lloc, C fa una interpretació incorrecta dels valors del temps en el fenomen estudiat ja que interpreta que la pilota toca terra en el segon zero.

Tanmateix, a continuació, D explica que els nombres 0.11 i 0.76 són abans de què la pilota es llance i que, per això, no tenen sentit. Ara bé, en el moment de l'entrevista, nosaltres entenem que per a ell la pilota es llança després del segon 0.76 i toca el terra en el segon u (tal i com es pot observar al full de coordenades) però, posteriorment (a la intervenció [280]), es veu que la idea de D no és exactament aquesta. D interpreta que la pilota es llança exactament al segon u i, per això, explica que les dades de 0.76 i 0.11 no tenien sentit per a ell, per tant, la seua interpretació tampoc no era correcta.

Per un altre costat, quant els preguntem per què diuen que $f(100)$ tampoc no tindria sentit, responen que "en este cas es com si no... hi haguera sòl i la pilota se n'anara cap avall", fent referència al signe negatiu que apareix a la imatge. Aleshores, decidim preguntar-los si haurien considerat correcte calcular $f(100)$ en

cas de què haguera donat un valor positiu, al que D respon que no, justificant la resposta basant-se en els valors que (per a ell) pot prendre la variable temporal:

[200] E. Però penses que si t'haguera donat un nombre positiu seria... hauries considerat que estava bé?

[201] D. Mm... No.

[205] D. Perquè... el temps que tarda en botar no arriba a 100 segons.

[207] D. >> Està parada.

Per últim, per tal de veure si són capaços de delimitar el domini, els preguntem en quin moment acabarien d'estudiar el bot de la pilota, pel que expliquen que ho fan quan la pilota toca el terra per segona vegada i, mirant el full de coordenades, expliquen que açò passarà en el segon dos exactament.

Per tant, podem dir que, donant les indicacions pertinents, els alumnes són capaços de calcular el domini de la funció interpretant les dades del full de coordenades i fixar-se en aquest per determinar si té sentit calcular les imatges que els demanem.

4.2.2.4. El paper de les dades reals al nostre experiment

Notem que, tot i que al nostre experiment els alumnes obtenen dades reals mitjançant la gravació i l'anàlisi de vídeos amb iPads®, realment no les utilitzaren per realitzar la segona part d'aquest ja que s'hagueren de proporcionar les dades d'un altre experiment pels motius que ja hem explicat.

Ara bé, el fet de què els alumnes no utilitzaren les dades obtingudes de la representació del fenomen en aquesta part, condiona el desenvolupament de l'estudi així com els resultats obtinguts. És cert que hi ha alumnes que sí que aconseguen desvincular-se de les seues dades i centrar-se en les noves però, hi ha d'altres que sembla que continuen molt pegats a aquestes i als resultats obtinguts, a més de tindre present l'estudi previ del fenomen durant tot l'experiment. Ara bé, quan diguem que tenen present l'estudi previ del fenomen no ens referim a què tinguen presents sòls les propietats generals o globals (com ara el tipus de funció que modelitza el fenomen, les propietats qualitatives d'aquesta...), cosa que seria favorable per a la interpretació de les noves dades, sinó que el que tenen en ment són les característiques peculiars d'aquest, com ara l'altura en què es va fixar l'eix d'abscisses en el programa Video Physics®, el lloc on es marcaren els punts que indiquen la trajectòria de la pilota o el temps que passa des que es llança la pilota fins que toca terra en el vídeo, entre altres.

Un clar exemple d'alumnes que continuen pensant en les seues dades després d'haver-les abandonat són els alumnes de la parella 1 ja que, com hem vist, no aconseguen, ni tan sòls, desprendre's de la idea de què la família de funcions que modelitza el fenomen és $y=ax^2+bx$, i no $y=ax^2+bx+c$ que seria la correcta en aquest cas. Ara bé, probablement açò no siga conseqüència de què tinguen en

ment les característiques peculiars del fenomen i que aquest fet no els deixi avançar, sinó més bé com a conseqüència de què conceben les famílies com a famílies disjunctes i continuen pensant que és la primera d'aquestes la que representa el fenomen i no la segona.

Així mateix, cal destacar que la reticència a abandonar les dades que obtenen els alumnes no només es pot observar en les respostes que donen a les fitxes, sinó també en les nombroses intervencions durant l'entrevista. És el cas de l'alumne B en la intervenció [174] que utilitza l'argument de què donaren el valor zero al terra en el programa Video Physics® per justificar que no té sentit que apareguen valors negatius per a l'altura de la pilota a l'ítem 6, en el qual ja utilitzen les dades del full de coordenades per resoldre'l.

D'altra banda, notem que els alumnes de la parella 2, també fan al·lusions en algun moment a les característiques del fenomen que ells varen representar quan els preguntem sobre les respostes que donen a la segona fitxa. És el cas de l'alumne C que quan els preguntem si creuen que és correcte igualar y a zero per respondre l'ítem 7a) explica que no perquè l'altura del terra en el seu cas és negativa, fent referència a les dades del seu experiment, no a les del full de coordenades (mirar figura 2 de l'annex 11).

Ara bé, el fet de què utilitzaren les dades d'un altre experiment en la segona part no només provoca l'aparició de confusions en les intervencions d'alguns alumnes, sinó que permet explorar una part d'aquest que no haguérem pogut explorar d'altra manera. Per exemple, aquest fet ens va permetre averiguar si, donades les dades a partir del full de coordenades i com a única informació coneguda, els alumnes eren capaços de determinar aproximadament a quina altura es trobava el terra en aquest experiment.

Tot i això, no podem afirmar que el fet de no haver utilitzat les dades reals obtingudes pels alumnes a la segona part no contribueix a l'elaboració de conceptes per part d'aquests, sinó més bé al contrari ja que, a pesar de fer-se'n un ús distint al que preteníem inicialment, a partir d'aquest els alumnes poden treballar conceptes com ara el d'altura del sòl, explorant-lo des d'un altre punt de vista diferent al que l'hagueren estudiat si hagueren utilitzat les seues pròpies dades, cosa que permet modificar i reelaborar el significat que tenien inicialment de dit concepte.

5. Conclusions

Com ja hem dit, l'estil que caracteritza el nostre treball condiona el tipus de conclusions que extraguem d'aquest ja que el seu objectiu no és la investigació experimental d'una hipòtesi, sinó la realització d'una exploració del procés de modelització en una situació real determinada. Ara bé, per aquest motiu, les conclusions que extraguem són una recopilació dels resultats obtinguts en general, tant d'aquells que s'obtenen per a tots els alumnes estudiats com per a les parelles analitzades amb major profunditat, relatius a les actuacions i les concepcions d'aquests al llarg de tot l'experiment d'ensenyament.

El primer dels resultats que hem pogut observar és que, efectivament, l'anàlisi qualitatiu del fenomen, així com el coneixement de les propietats qualitatives de les famílies de funcions, són elements clau per a la gestió i el control del procés de modelització ja que els alumnes es basen en aquests per prendre decisions i per justificar les seues respostes tant a les fitxes com durant les entrevistes.

Així doncs, també ha resultat ser un factor decisiu el coneixement del significat dels paràmetres de les diverses famílies de funcions o, més bé, la interpretació que fan els alumnes d'aquests ja que, tot i que en alguns casos no en fan una interpretació correcta del significat, és aquesta la que permet que trien entre una funció o altra. Però, sobretot és clau la interpretació que fan del paràmetre c de la família $y=ax^2+bx+c$ i els valors que li assignen ja que açò els ajuda a elegir entre aquesta i $y=ax^2+bx$ que, en la majoria dels casos, són les famílies entre les quals dubten.

D'altra banda, cal comentar que en gran part dels alumnes analitzats en aquest experiment es pot observar una concepció absoluta del temps ja que consideren que

aquest és zero en el moment en què comencen a estudiar el fenomen, sense tenir en compte que es presenta englobat en un determinat context; factor que, per tant, influeix també en la família de funcions que elegeixen.

Ara bé, la concepció que hem pogut observar que es presenta en totes i cadascuna de les parelles estudiades és la de considerar que els valors que pot prendre l'altura quan es treballa per damunt del nivell del sòl han de ser positius i, exactament zero en el terra. A més, es tracta d'una concepció molt arrelada amb una gran influència en les respostes dels alumnes ja que, inclús quan es disposa de dades que permeten trobar el valor de l'altura en què es troba el terra, els alumnes li assignen el valor zero sense realitzar cap mena de comprovació.

Així mateix, pel que fa a les breus situacions d'ensenyament que tenen lloc durant les entrevistes, podem concloure que, a partir de les reflexions dels propis alumnes, s'aconsegueix modificar les seues conductes i concepcions sobre els diversos temes que abordem. Entre altres, aquests són capaços d'adonar-se'n de què el valor de l'altura per al terra depèn de la referència que es pren en cada cas i no té perquè ser zero sempre, ja que són capaços d'apartar-se de les seues idees i fixar-se en les dades del full de coordenades per donar una interpretació aproximada del valor que té aquesta. A més, reflexionant sobre les nostres qüestions, aconseguixen també, d'una banda, adonar-se'n de què l'elecció dels punts del full de coordenades no es pot fer aleatòriament ja que açò no garanteix poder trobar un bon ajust ni poder reconèixer la funció que millor representa el fenomen i, d'altra banda, adonar-se'n de què aquesta funció només descriu el fenomen estudiat en un interval determinat, no en tot el seu domini de definició.

Així doncs, per finalitzar, cal destacar les nombroses possibilitats que ofereix aquesta línia de treball per poder continuar investigant en el futur. D'una banda, una de les possibles opcions seria realitzar un experiment semblant al nostre però amb la peculiaritat d'utilitzar les dades que obtenen els alumnes per treballar en la segona fitxa, cosa que ens permetria explorar una altra part d'aquest i obtindre altre tipus de resultats. Altra possibilitat podria ser, per exemple, realitzar un estudi ampliant el nombre de casos observats o, inclús, dissenyar un model d'ensenyament més ampli (compost per diverses situacions en què treballar el procés de modelització), i analitzar els resultats de la seua aplicació. Això sí, per portar a terme aquest tipus d'experiments, seria necessari aprofundir en l'estudi de la teoria, afinar les eines informàtiques i, sobretot, disposar de més temps per tal de què aquest no limitara les condicions de la investigació.

En qualsevol cas, seria interessant contrastar els resultats obtinguts quant a les concepcions observades relatives als conceptes d'altura i temps en altres experiments per poder, així, establir conclusions més contundents.

6. Referències bibliogràfiques

- Balacheff, N. i Laborde, C (1985). Social interactions for experimental studies of pupils conceptions: its relevance for research in didactics of mathematics. *First Conference on the Theory of Mathematics Education*. Bielefeld: I.D.M.-T.M.E.
- Blum, W. i Niss, M (1991). Applied Mathematical Problem Solving, Modelling, applications, and links to other subjects. State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics* 22, 37-68. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Blum, W., Galbraith, P., Henn, H.W., i Niss, M. (2007). *Modelling and applications in mathematics education: the 14th ICMI study*. New York: Springer.
- Blum, W. i Borromeo, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*,1, 45-58.
- Bressan, A., Zolkower, B. i Gallego, F. (2004, agost). *La educación matemática realista. Principios en que se sustenta*. Comunicació presentada en la Escuela de invierno en Didáctica de la Matemática. Buenos Aires. Recuperat el 20 de novembre des de http://www.gpdmatematica.org.ar/publicaciones/articulo_escuela_invierno2.pdf
- De Lange, J. (1987). *Mathematics, insight and meaning*. Utrech: OW & OC.
- Generalitat Valenciana (2007). Decreto 112/2007, de 24 de julio, del Govern Valencià, pel que s'establix el currículum de l'Educació Secundària Obligatoria a la Comunitat Valenciana, DOGV, 5562.
- Filloy, E. (1990). PME Algebra Research. A working perspective. En G. Booker, P. Cobb i T.N. de Mendicuti (Eds.), *Proceedings of the Fourteenth Annual Conference for the Psychology of Mathematics Education* (1, PII 1-PII 33). Oaxtepec, Morelos, México.

- Filloy, E. (2006). CAS en EFIT-EMAT. En T. Rojano (Ed.), *Enseñanza de la Física y las Matemáticas con Tecnología: Modelos de transformación de las prácticas y la interacción social en el aula* (130-137). México, DF: Secretaría de Educación Pública.
- Filloy, E., Rojano, T i Puig, L (2008). El estudio teórico local del desarrollo de competencias algebraicas. *Enseñanza de las Ciencias*, 26 (3), 327-342.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education: China Lectures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Gravemeijer, K. P. E. (1994). *Developing realistic mathematics education*. Utrech: Freudenthal Institute.
- Infante, F. i Puig, L. (2013). Modelos emergentes en un primer curso de economía y administración. *Modelling in science education and learning*, 6 (2), 235-248.
- Janvier, C. (1978). *The interpretation of complex cartesian graphs representing situations. Studies and teaching experiments*. Tesis Doctoral. Universidad de Nottingham.
- Juan, M. A. (2012). *Modelo plausible vs. Modelo esperable. Un estudio exploratorio de aspectos del proceso de modelización*. Treball de fi de màster del màster d'investigació en didàctiques específiques. València: Universitat de València. Disponible en roderic.uv.es.
- Kaiser, G., Blomhøj, M. i Sriraman, B. (2006). Towards a didactical theory for mathematical modelling. *ZDM*, 38 (2), 82-85
- Kaiser, G., Blum, W., Borromeo, R. i Stillman, G. (Eds.) (2011). *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling*. Dordrecht, Heidelberg, London, New York: Springer.
- Kieran, C. i Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias*, 7, 230-240.
- Maaß, K. (2006). *What are modelling competencias?* *ZDM*, 38, 113-142.
- Monzó, O. i Puig, L. (2007). Modelización con la ClassPad 300, 1ª parte. *Veintidós Séptimos*, 24, 26-29.
- Monzó, O. i Puig, L. (2008). Modelización con calculadoras gráficas. *Actas de las XIII Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas* (CD3, T05-01). Badajoz: Servicio de Publicaciones de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.
- Monzó, O. i Puig, L. (2010). Modelización con la ClassPad 300, 2ª parte. *Veintidós Séptimos*, 26, 4-6.

- Monzó, O. i Puig, L. (2011). Materials per a l'estudi de famílies de funcions. En M. Contreras, O. Monzó y L. Puig (Eds.). *Actes de les IX Jornades d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana* (I, 167-185). València: Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "Al-Khwārizmī",
- Monzó, O. i Puig, L. (2012). Familias de funciones. En Torralbo, M. y Carrillo, A. (Eds.) *Matemáticas con calculadora gráfica. Unidades didácticas* (103-133). Sevilla: SAEM Thales y División didáctica CASIO-Flamagas.
- Monzó, O., Puig, L. i Navarro, M.T. (en premsa). Un estudio sobre el proceso de modelización, en el entorno informático de las tabletas. *Actas de las XVI JAEM*. Palma: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.
- Polya, G. (1945). *How to Solve It*. Princeton: Princeton University Press.
- Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Granada: Comares, col. Mathema.
- Puig, L. (2008). Sentido y elaboración del componente de competencia de los modelos teóricos locales en la investigación de la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos. *PNA*, 2 (3), 87-107.
- Puig, L. (en premsa). Modelización con datos reales. *Actas de las XVI JAEM*. Palma: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.
- Puig, L. i Monzó, O. (2008). Competencias algebraicas en el proceso de modelización. En F. Gracia, A. Monedero, J. Palomo i M^a J. Peris, (Eds.), *El discret encant de les matemàtiques. Actes de les VIII Jornades d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana*, 142-158. Castelló: SEMCV.
- Puig, L. i Monzo, O. (2013). Fenómenos y ajustes. Un modelo de enseñanza del proceso de modelización y los conceptos de parámetro y familia de funciones. En T. Rojano (Ed.), *Las tecnologías digitales en la enseñanza de las matemáticas*, 9-35. México: Trillas.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando, FL: Academic Press.
- Treffers, A. (1987). *Three dimensions: a model of goal and theory description in mathematics education, the Wiskobas Project*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.
- Treffers, A. i Goffree, F. (1985). Rational analysis of realistic mathematics education, the Wiskobas Program. En L. Streefland (Ed.), *Proceedings of the Ninth International Conference For the Psychology of Mathematics Education*, 2, 97-121. Utrech: OW & OC.

Annexos

Annex 1. Full d'activitats de l'experiment original

Annex 2. Full d'activitats de l'experiment original

Annex 3. Full d'instruccions

Annex 4. Full d'ajuda per al càlcul de punts

Annex 5. Full de coordenades

Annex 6. Full de coordenades numerades

Annex 7. La funció de regressió

Annex 8. Taules amb els punts que tria cada grup

Annex 9. Representació gràfica dels punts que tria cada parella

Annex 10. Respostes dels alumnes

Annex 11. Imatges de l'experiment

Annex 12. Transcripcions de les entrevistes

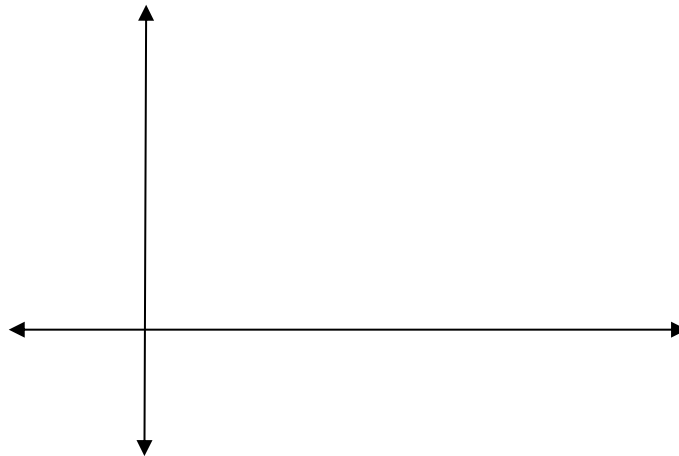
Annex 1. Full d'activitats de l'experiment original (part 1 i part 2)

Bot d'una pilota

Volem estudiar el moviment de caiguda lliure i xoc elàstic d'un cos en l'atmosfera. Per la qual cosa gravarem i analitzarem les dades de la caiguda d'una pilota des d'una certa altura fins al sòl. Gravarem en vídeo el bot d'una pilota de bàsquet i estudiarem el moviment de la pilota des de que colpeja el terra per primera vegada fins que ho torna a fer, i la seua modelització matemàtica.

El que anem a analitzar és la relació entre l'altura a la que es troba la pilota y i el temps x .

1. Dibuixa en el següent sistema d'eixos el núvol de punts que penses que obtindrem després d'analitzar les imatges.



2. A quina de les següents famílies pertany la gràfica d'una funció que s'ajuste bé al núvol de punts?

a) $y = ax + b$

b) $y = ax^2 + bx + c = A(x-B)^2 + C$

c) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

d) $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

e) $y = a + b \cdot \ln(x)$

f) $y = a \cdot e^{bx}$

g) $y = a \cdot b^x$

h) $y = ax^b$

i) $y = a \cdot \sin(bx + c) + d$

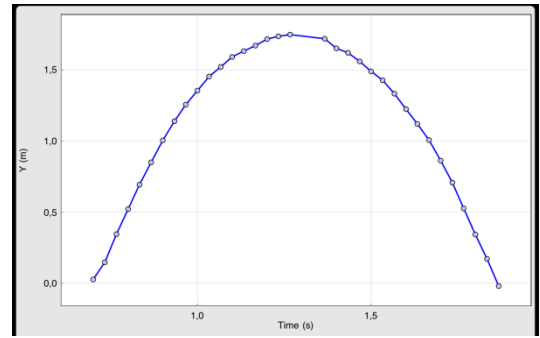
j) $y = c / (1 + a \cdot e^{-bx})$

3. Per què ho creus?

4. Efectúa l'experiment.

5. Després de realitzar l'experiment i definir els eixos i els punts a tindre en compte, has d'obtenir una imatge com aquesta:

Tria'n els punts que consideres importants.



4. Obtén la funció que millor s'ajuste a les dades obtingudes en el núvol. Pots intentar fer-ho tenint en compte les característiques de la corba o introduint les dades en una calculadora i fent la regressió.

$y = f(x) =$ _____

5. a) Quina és llavors la distància de la pilota al terra quan $x = 0,76$? $f(0,76) =$ _____

b) I quan $x = 1,1$? $f(1,1) =$ _____

c) I quan $x = 0,11$? $f(0,11) =$ _____

d) I quan $x = 100$? $f(100) =$ _____

6. a) Creus que les respostes obtingudes mostren el que verdaderament ocorre?

b) Quines són les dades que no s'ajusten al que esperaves? _____

Per què?

7. a) Per a quins valors de x (temps) la pilota colpeja el terra?

b) Per a quins valors de x (temps) la pilota arriba a la seua màxima altura?

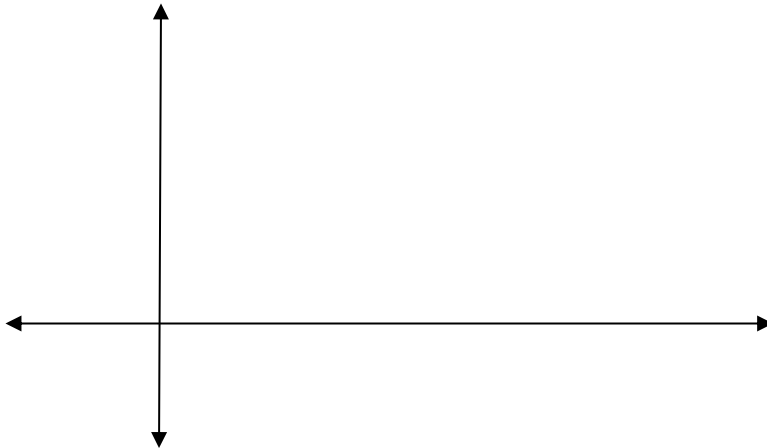
Annex 2. Full d'activitats (part 1 i part 2)

BOT D'UNA PILOTA

Volem estudiar el moviment de tir vertical d'un cos en l'atmosfera. Per la qual cosa, gravarem en video el bot d'una pilota de bàsquet, deixada caure des d'una certa altura, i estudiarem el moviment d'aquesta des que colpeja el terra per primera vegada fins que ho torna a fer per tractar de trobar la seua modelització matemàtica.

El que analitzarem serà la relació entre l'altura a la qual es troba la pilota (y) i el temps (x).

1. Dibuixa en el següent sistema d'eixos el núvol de punts que penses que obtindrem després d'analitzar les imatges.



2. A quina de les següents famílies pertany la gràfica d'una funció que s'ajuste bé al núvol de punts?

a) $y = ax + b$

b) $y = ax^2 + bx + c = A(x - B)^2 + C$

c) $y = ax^2 + bx$

d) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

e) $y = a + b \cdot \ln(x)$

f) $y = ax^b$

g) $y = a \cdot e^{bx}$

h) $y = a \cdot e^{-bx} + c$

i) $y = a \cdot \sin((x-c)/b) + d$

j) Altra opció. Indica-ho: _____

3. Explica per què has fet aquesta elecció (pots continuar escrivint darrere del full).

4. Obtén la funció que millor s'ajuste a les dades obtingudes en el núvol. Pots intentar fer-ho tenint en compte les característiques de la corba o introduint les dades en l'aplicació *Data Analysis* i fent la regressió.

$$y = f(x) = \underline{\hspace{15cm}}$$

5. Respon les següents qüestions. Pots utilitzar l'aplicació *Free GraClac*.

- a) Quina és, llavors, la distància de la pilota al terra quan $x = 0,76$? $f(0,76) = \underline{\hspace{2cm}}$
- b) I quan $x = 1,1$? $f(1,1) = \underline{\hspace{2cm}}$
- c) I quan $x = 0,11$? $f(0,11) = \underline{\hspace{2cm}}$
- d) I quan $x = 100$? $f(100) = \underline{\hspace{2cm}}$

6. Respon les següents qüestions.

- a) En general, creus que les respostes obtingudes en la pregunta anterior mostren el que vertaderament ocorre? Per què? (Pots continuar escrivint darrere del full)

- b) Quines són les dades que no s'ajusten al que esperaves? Per què? (Pots continuar escrivint darrere del full)

7. Respon les següents qüestions.

- a) Per a quins valors de x (temps) la pilota colpeja el terra? Explica què has fet per a obtenir el resultat (Pots continuar escrivint darrere del full).


- b) Per a quins valors de x (temps) la pilota arriba a la seua màxima altura? Explica com has trobat el resultat (Pots continuar escrivint darrere del full).


Annex 3. Fulls d'instruccions




Instruccions



Video Physics[®] (aplicació que permet gravar en vídeo un moviment i, mitjançant una sèrie d'operacions, obtenir un núvol de punts que el descriuen)

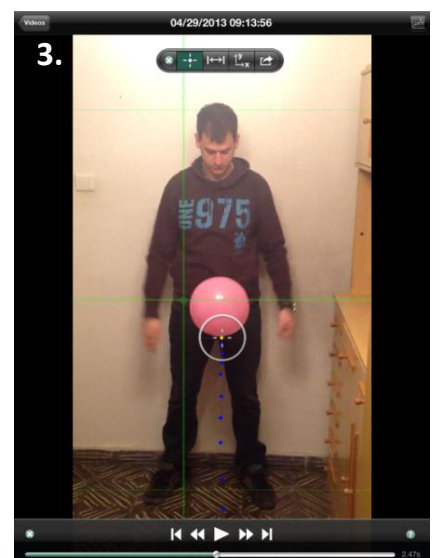
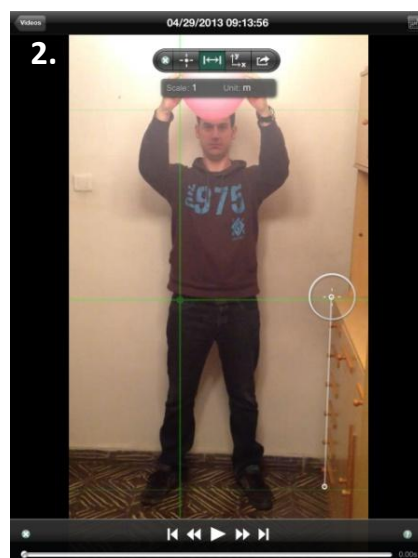
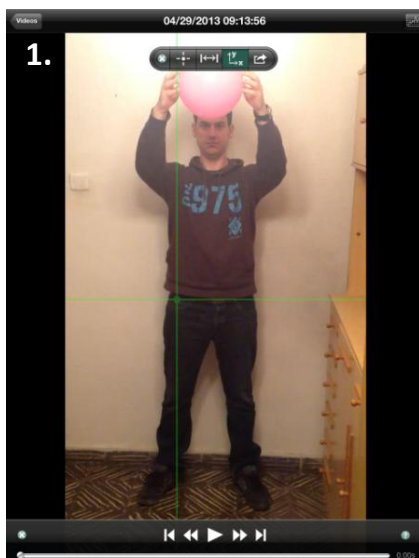
En primer lloc, polsant el botó “+” pots, o bé gravar un vídeo (opció “Take a Video”); o bé seleccionar-ne un ja gravat prèviament (opció “Choose Existing”).


1. Decideix on fixar els **eixos coordenats** de manera que la funció resultant quede de la forma més senzilla possible. Per col·locar-los has de polsar el botó  i arrastrar el dit per la pantalla fins que quede en la posició desitjada.

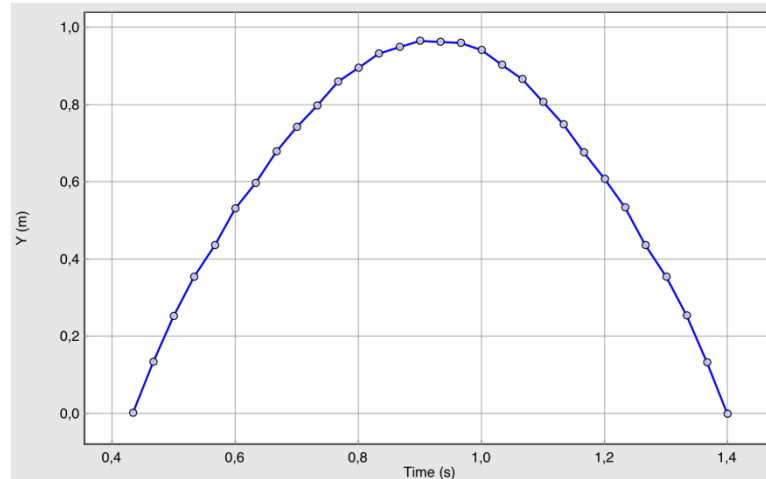
2. Pren una **mesura de referència** el més exacta possible per determinar l'escala. Fes-ho marcant un segment sobre la imatge del qual es coneix la mesura real. Per això, polsa el botó , arrastra la circumferència per la pantalla i, quan estiga col·locada on desitges, polsa sobre ella per marcar un punt. Posteriorment torna a arrastrar-la i marca un altre punt de la mateixa manera que ho has fet abans. Açò farà que aparega un segment en la pantalla, que posteriorment hauràs de mesurar de manera exacta amb l'ajuda d'un metre en la realitat. Seguidament, hauràs d'introduir la mesura que has obtingut en l'aplicació polsant sobre “Scale” i amb l'ajuda del teclat. Si és necessari, també pots modificar les unitats de mesura en “Unit”.

3. Senyala **punts** sobre la gravació de manera que indiquen la trajectòria que fa la pilota. Per marcar els punts, tria l'opció . Després, situat (utilitzant  i ) en el moment en què la pilota toca el terra per primera vegada. Marca un punt de referència de la trajectòria de la pilota arrastrant la circumferència i polsant sobre ella. Tot seguit, la imatge es mourà, marca un nou punt que determine la posició de la pilota en eixe instant. Repeteix aquest procés fins que la pilota torne a tocar el terra, obtenint així un conjunt de punts que mostren el recorregut que ha seguit aquesta.

Si desitges esborrar algun punt, utilitza els botons  i  fins que aquest quede seleccionat. Manté el dit sobre la circumferència fins que apareguen les opcions i tria “Delete”.



Una vegada realitzat el procés anterior, polsa el botó  que es troba a la part superior dreta de la pantalla per veure les gràfiques. T'eixiran diverses pantalles amb gràfiques, situat en aquella en què apareix la gràfica de la funció que ens dóna la relació entre l'altura, " $Y(m)$ ", i el temps, "Time(s)"; que és el que ens interessa estudiar. Hauràs d'obtenir una imatge com aquesta:



És important destacar que aquest programa no permet analitzar els aspectes de la gràfica que ens interessin estudiar, per això, hauràs de copiar-la a altres programes que si ho permeten.

Per copiar la gràfica a altres programes, hauràs de fer-ho copiant punt a punt (amb uns sis o set serà suficient); i, a més, hauràs de fer-ho manualment amb l'ajuda d'un regle, ja que volem les coordenades exactes dels punts. Recorda que ho has de fer mirant la gràfica que ens dóna la relació entre l'altura i el temps.

Tot seguit, s'explica com realitzar aquestos càlculs però, abans de res, cal distingir la nomenclatura que utilitzarem:

Anomenarem **mesura real** a la mesura que apareix als eixos, ja que és aquesta la que ens dóna l'altura real a què es troba la pilota en cada instant (en el cas de l'eix vertical) i el temps real (en el cas de l'eix horitzontal). D'altra banda, anomenarem **mesura en cm** a la mesura que es pren amb el regle sobre la pantalla de l'iPad.

A més, s'han de tenir en compte els següents aspectes:

- L'escala de l'eix x no té perquè ser la mateixa que la de l'eix y.
- La mesura real no té perquè coincidir amb la mesura en *cm* del regle.
- L'origen de coordenades no té perquè aparèixer al gràfic.


Per tant, caldrà fer canvis d'escala per passar d'unes mesures a altres i ho farem calculant proporcions.

Data Analysis® (aplicació que permet representar en una gràfica un núvol de punts i calcular la funció de regressió que millor s'ajusta a aquests d'entre totes les que es presenten en una llista)

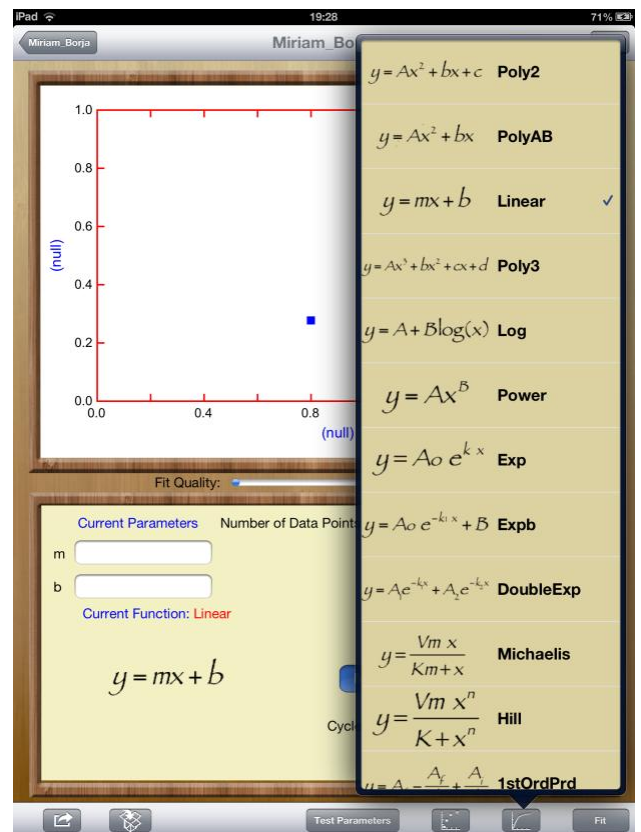
El primer que has de fer és obrir un nou document triant l'opció "New Document".

En segon lloc, escriu els punts que has elegit abans a l'arxiu en forma de columna, tal com s'observa al dibuix (utilitza la tecla de "Retorn" per canviar de fila). Recorda separar les coordenades de cada punt amb un espai en blanc.

Tot seguit, escriu el nom del document en "File Name" que tindrà el format *Grup_x*, on x serà el nombre assignat al grup.

A continuació, selecciona "Plot" per poder veure els punts representats. Per dibuixar la gràfica de la funció, hauràs de seleccionar a quin tipus de família de funcions creus que pertany (polsant  i triant aquella que creus que descriu el moviment del fenomen estudiat).

Per finalitzar, polsa "Fit" per veure la representació gràfica. Si vols veure el valor dels paràmetres pots fer-ho en la pantalla inferior o polsant "Clear Fit".

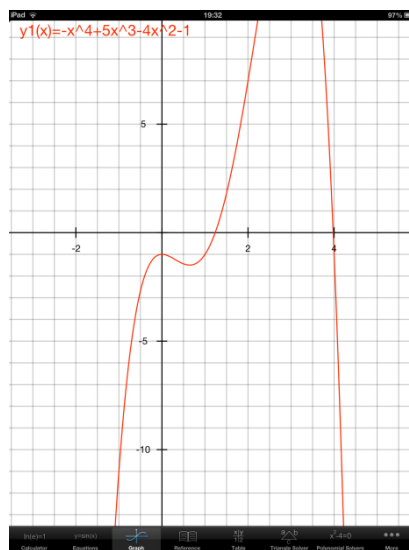
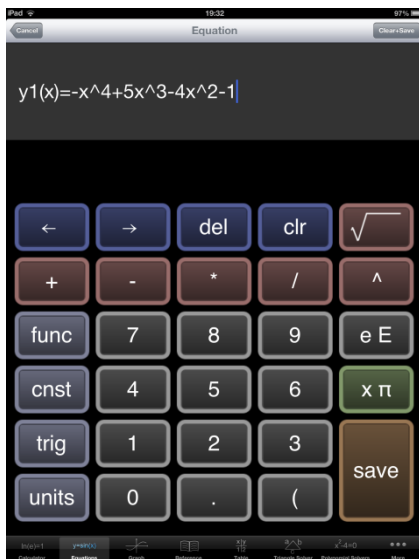


Free GraCalc® (aplicació que permet representar la gràfica d'una funció donada a partir de la seua fórmula i calcular fàcilment els punts que l'acompleixen)

En el menú de la part inferior, selecciona l'opció "Equations". Escriu la funció obtinguda amb el programa *Data Analysis* i polsa "Save" per començar a treballar amb ella.

Per veure la representació de la gràfica, has de seleccionar l'opció "Graph" del menú.

A més, també pots veure una taula (seleccionant l'opció "Table" del menú) on apareixen les coordenades d'alguns dels punts de la funció en forma de dues columnes, la primera per a les coordenades x i la segona per a les y. Si te n'adones, la coordenada x del primer punt és menys deu i, conforme baixes en la taula, la coordenada x de cada punt és l'anterior més u. Açò es pot canviar seleccionant l'opció "Edit" i modificant els nombres que apareixen en "Initial x" i en "Delta x".



The screenshot shows the 'Table' screen of the Free GraCalc application. The table displays the values of the function $y_1(x) = -x^4 + 5x^3 - 4x^2 - 1$ for x values from -10 to 18. The x values increase by 1 unit from one row to the next. The y1 values are calculated based on the function.

x	y1
-10	-15.401
-9	-10.531
-8	-6.913
-7	-4.313
-6	-2.521
-5	-1.351
-4	-0.641
-3	-0.253
-2	-0.73
-1	-1.11
0	-1
1	-1
2	7
3	17
4	-1
5	-101
6	-361
7	-883
8	-1793
9	-3241
10	-5401
11	-8471
12	-12.673
13	-18.253
14	-25.481
15	-34.651
16	-46.081
17	-60.113
18	-77.113

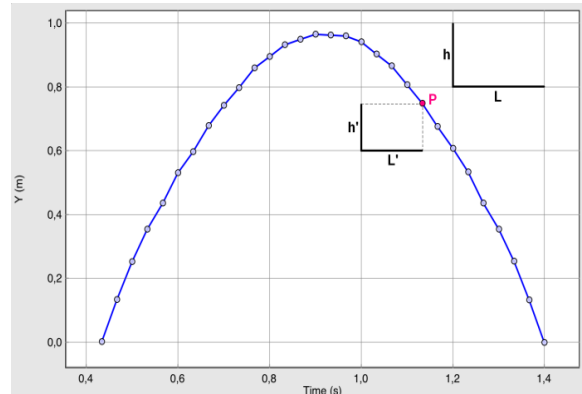
Annex 4. Full d'ajuda per al càlcul de punts

EXEMPLE DE CÀLCUL DE LES COORDENADES D'UN PUNT

Suposem que volem calcular la mesura real de les coordenades del punt $P = (x, y)$.

Com podem observar a la gràfica, apareix una quadrícula on l'altura de cada rectangle equival a 0.2m d'altura en la realitat, i la llargària a 0.2s de temps.

Tanmateix, no podem conèixer el valor exacte de les coordenades del punt P ; per això haurem de calcular les mesures en cm amb el regle i fer comparacions per trobar quan valdrien en m (per a l'eix de les y) i en s (per a l'eix de les x).



Coordenada y

En primer lloc, cal mesurar amb el regle l'altura d'un rectangle qualsevol (h). Notem que la mesura real de h és 0.2m, mentre que utilitzant el regle fa 1.4cm.

Ara bé, si volem calcular la mesura real de h' , haurem de mesurar-la amb el regle i fer la proporció pertinent. En el nostre cas, com que h' mesura 1.1cm amb el regle, i sabem que 1.4cm equivalen a 0.2m, tenim que la seua mesura real serà de 0.157m.

Però, ahí no acaba la cosa, si observem el dibuix, a 0.157m haurem de sumar-li 0.6m ja que és des d'on hem començat a mesurar la coordenada y .

Per tant, la coordenada y de P és 0.757.

Coordenada x

Per al càlcul d'aquesta coordenada seguirem un procediment anàleg a l'anterior.

En primer lloc, mesurem amb el regle la llargària d'un rectangle qualsevol (L) i obtenim que fa 2.3cm. D'altra banda, recordem que abans havíem dit que la mesura real de L era 0.2s.

Ara bé, si volem calcular la mesura real de L' , haurem de mesurar-la amb el regle i, com abans, fer la proporció pertinent. En aquest cas, com que L' mesura 1.5cm amb el regle, i sabem que 2.3cm equivalen a 0.2s, tenim que L' valdrà 0.13s.

Però, tal com hem fet per a la coordenada y , ara també haurem de sumar-li 1s (mira el dibuix per a entendre perquè) a 0.13s per obtenir el que mesura exactament la coordenada x .

Per tant, la coordenada x de P és 1.13.

En definitiva, el punt P que buscàvem és $P = (1.13, 0.757)$.

Consells:

- Per estalviar-te feina, pots triar els sis o set punts que se't demanen de manera que es troben sobre alguna línia de la quadrícula.
- Ves amb compte de no moure l'iPad ja que poden canviar les mesures i pots fer-te un embolic.

Annex 5. Full de coordenades

Temps (coordenada x)	Altura (coordenada y)
1.000000000000	0.1847734600306
1.033333333333	0.5543352961540
1.068333333333	0.9202743172646
1.101666666667	1.2898361682892
1.135000000000	1.5833116769791
1.168333333333	1.8731645345688
1.201666666667	2.1050465106964
1.235000000000	2.3804063796997
1.268333333333	2.5905492305756
1.301666666667	2.7717070579529
1.335000000000	2.9238793849945
1.368333333333	3.0543131828308
1.401666666667	3.1412689685822
1.435000000000	3.1992392539978
1.468333333333	3.2463405132294
1.501666666667	3.2463405132294
1.535000000000	3.2463405132294
1.568333333333	3.1992392539978
1.601666666667	3.1122837066650
1.635000000000	2.9963426589966
1.668333333333	2.8767786026001
1.701666666667	2.7101132869720
1.735000000000	2.5217094421387
1.768333333333	2.3079428672791
1.801666666667	2.0506992340088
1.835000000000	1.7789621353149
1.868333333333	1.4601247310638
1.901666666667	1.1485329866409
1.935000000000	0.7898408770561
1.968333333333	0.4202785789967
2.001666666667	0.0036155637354

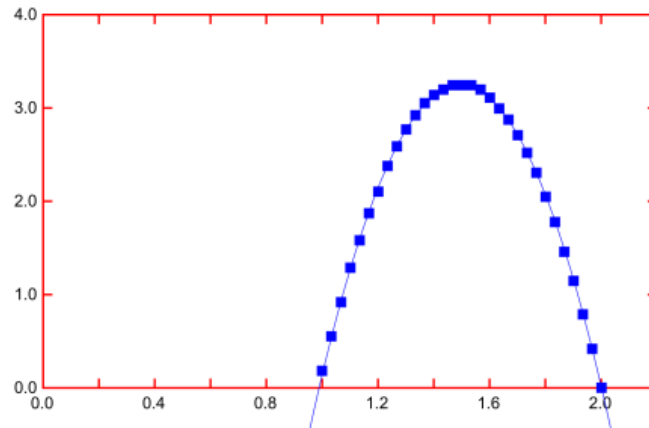
Annex 6. Full de coordenades numerades

Punts experiment

- 1) (1.000000000000, 0.1847734600306)
- 2) (1.033333333333, 0.5543352961540)
- 3) (1.068333333333, 0.9202743172646)
- 4) (1.101666666667, 1.2898361682892)
- 5) (1.135000000000, 1.5833116769791)
- 6) (1.168333333333, 1.8731645345688)
- 7) (1.201666666667, 2.1050465106964)
- 8) (1.235000000000, 2.3804063796997)
- 9) (1.268333333333, 2.5905492305756)
- 10) (1.301666666667, 2.7717070579529)
- 11) (1.335000000000, 2.9238793849945)
- 12) (1.368333333333, 3.0543131828308)
- 13) (1.401666666667, 3.1412689685822)
- 14) (1.435000000000, 3.1992392539978)
- 15) (1.468333333333, 3.2463405132294)
- 16) (1.501666666667, 3.2463405132294)
- 17) (1.535000000000, 3.2463405132294)
- 18) (1.568333333333, 3.1992392539978)
- 19) (1.601666666667, 3.1122837066650)
- 20) (1.635000000000, 2.9963426589966)
- 21) (1.668333333333, 2.8767786026001)
- 22) (1.701666666667, 2.7101132869720)
- 23) (1.735000000000, 2.5217094421387)
- 24) (1.768333333333, 2.3079428672791)
- 25) (1.801666666667, 2.0506992340088)
- 26) (1.835000000000, 1.7789621353149)
- 27) (1.868333333333, 1.4601247310638)
- 28) (1.901666666667, 1.1485329866409)
- 29) (1.935000000000, 0.7898408770561)
- 30) (1.968333333333, 0.4202785789967)
- 31) (2.001666666667, 0.0036155637354)

Annex 7. La funció de regressió

Notem que la funció de regressió que ajusta als punts del full de coordenades és la funció quadràtica $y = -12.673x^2 + 37.899x - 25.088$. Gràficament, és la següent:



Per tant, les imatges dels punts que cal calcular a l'ítem 5 són les següents:

$$f(0.76) = -3.604685$$

$$f(1.1) = 1.26657$$

$$f(0.11) = -21.072453$$

$$f(100) = -122\,965.188$$

Annex 8. Taules amb els punts que tria cada grup

GRUP 1	
Posició punt	Punt
1	(1.000000000000, 0.1847734600306)
3	(1.068333333333, 0.9202743172646)
5	(1.135000000000, 1.5833116769791)
7	(1.201666666667, 2.1050465106964)
9	(1.268333333333, 2.5905492305756)
12	(1.368333333333, 3.0543131828308)
31	(2.001666666667, 0.0036155637354)

GRUP 2	
Posició punt	Punt
1	(1.000000000000, 0.1847734600306)
2	(1.033333333333, 0.5543352961540)
14	(1.435000000000, 3.1992392539978)
15	(1.468333333333, 3.2463405132294)
26	(1.835000000000, 1.7789621353149)
27	(1.868333333333, 1.4601247310638)

GRUP 3	
Posició punt	Punt
1	(1.000000000000, 0.1847734600306)
8	(1.235000000000, 2.3804063796997)
12	(1.368333333333, 3.0543131828308)
16	(1.501666666667, 3.2463405132294)
20	(1.635000000000, 2.9963426589966)
23	(1.735000000000, 2.5217094421387)
31	(2.001666666667, 0.0036155637354)

GRUP 4	
Posició punt	Punt
3	(1.068333333333, 0.9202743172646)
5	(1.135000000000, 1.5833116769791)
9	(1.268333333333, 2.5905492305756)
15	(1.468333333333, 3.2463405132294)
18	(1.568333333333, 3.1992392539978)
23	(1.735000000000, 2.5217094421387)
28	(1.901666666667, 1.1485329866409)

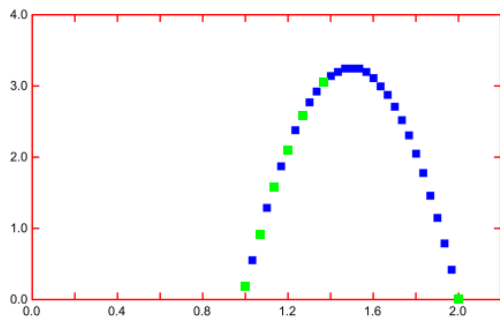
GRUP 5	
Posició punt	Punt
5	(1.135000000000, 1.5833116769791)
7	(1.201666666667, 2.1050465106964)
14	(1.568333333333, 3.1992392539978)
16	(1.501666666667, 3.2463405132294)
19	(1.601666666667, 3.1122837066650)
26	(1.835000000000, 1.7789621353149)

GRUP 6	
Posició punt	Punt
1	(1.000000000000, 0.1847734600306)
5	(1.135000000000, 1.5833116769791)
10	(1.301666666667, 2.7717070579529)
15	(1.468333333333, 3.2463405132294)
20	(1.635000000000, 2.9963426589966)
25	(1.801666666667, 2.0506992340088)
30	(1.968333333333, 0.4202785789967)

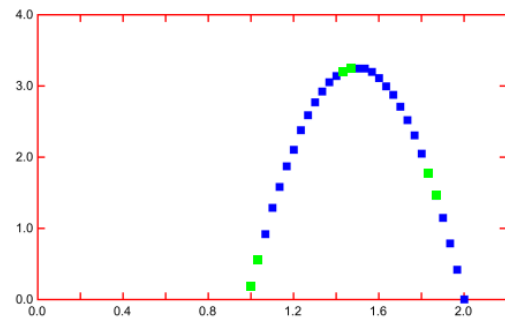
GRUP 7	
Posició punt	Punt
1	(1.000000000000, 0.1847734600306)
7	(1.201666666667, 2.1050465106964)
12	(1.368333333333, 3.0543131828308)
16	(1.501666666667, 3.2463405132294)
23	(1.735000000000, 2.5217094421387)
31	(2.001666666667, 0.0036155637354)

GRUP 8	
Posició punt	Punt
3	(1.068333333333, 0.9202743172646)
6	(1.168333333333, 1.8731645345688)
9	(1.268333333333, 2.5905492305756)
12	(1.368333333333, 3.0543131828308)
15	(1.468333333333, 3.2463405132294)
18	(1.568333333333, 3.1992392539978)
21	(1.668333333333, 2.8767786026001)

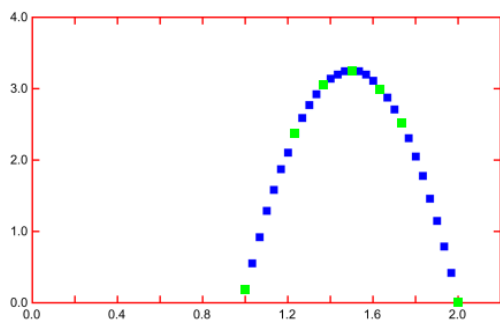
Annex 9. Representació gràfica dels punts que tria cada parella



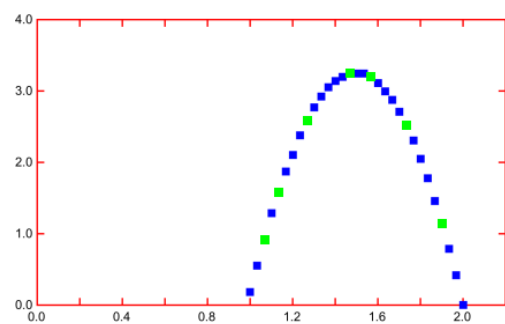
Parella 1



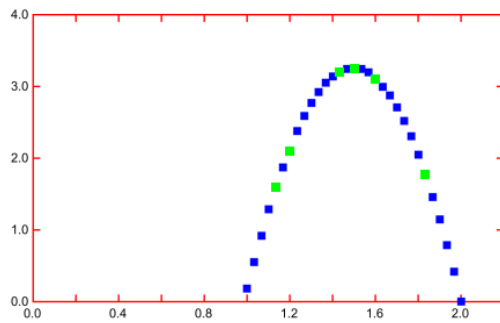
Parella 2



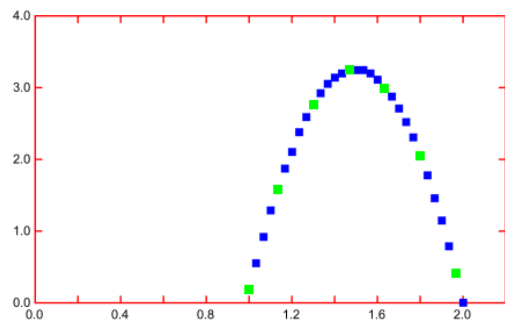
Parella 3



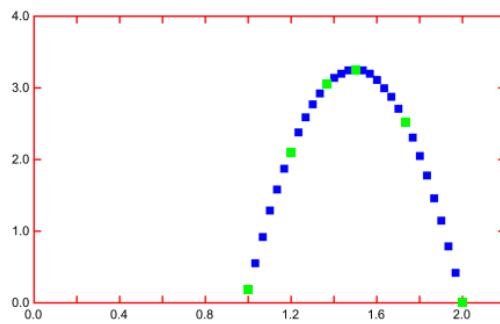
Parella 4



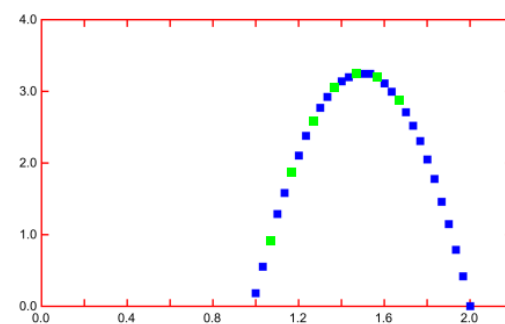
Parella 5



Parella 6



Parella 7



Parella 8

Annex 10. Respostes dels alumnes

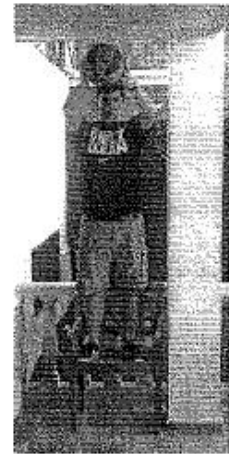
Part I

Noms: _____

Número: 1

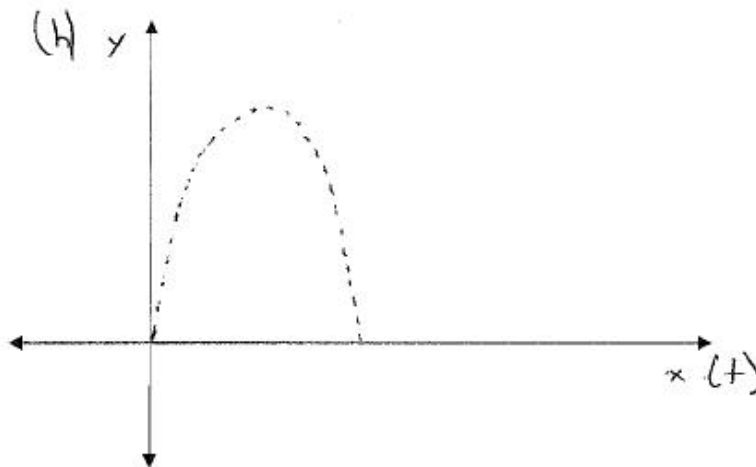
BOT D'UNA PILOTA

Volem estudiar el moviment de tir vertical d'un cos en l'atmosfera. Per la qual cosa, gravarem en video el bot d'una pilota de bàsquet, deixada caure des d'una certa altura, i estudiarem el moviment d'aquesta des que colpeja el terra per primera vegada fins que ho torna a fer per tractar de trobar la seua modelització matemàtica.



El que analitzarem serà la relació entre l'altura a la qual es troba la pilota (y) i el temps (x).

1. Dibuixa en el següent sistema d'eixos el núvol de punts que penses que obtindrem després d'analitzar les imatges.



2. A quina de les següents famílies pertany la gràfica d'una funció que s'ajuste bé al núvol de punts?

a) $y = ax + b$

b) $y = ax^2 + bx + c = A(x - B)^2 + C$

c) $y = ax^2 + bx$

d) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

e) $y = a + b \cdot \ln(x)$

f) $y = ax^b$

g) $y = a \cdot e^{bx}$

h) $y = a \cdot e^{-bx} + c$

i) $y = a \cdot \sin((x-c)/b) + d$

j) Altra opció. Indica-ho: _____

3. Explica per què has fet aquesta elecció (pots continuar escrivint darrere del full).

Per que la pilota forma parabolles que es una equació de 2^{on} grau i es la que mes coincideix.

Noms: _____ Número: 1

4. Obtén la funció que millor s'ajuste a les dades obtingudes en el núvol. Pots intentar fer-ho tenint en compte les característiques de la corba o introduint les dades en l'aplicació *Data Analysis* i fent la regressió.

$$y = f(x) = \underline{Ax^2 + bx} = \underline{-1'4483x^2 + 3'1625x}$$

5. Respon les següents qüestions. Pots utilitzar l'aplicació *Free GracIac*.

- a) Quina és, llavors, la distància de la pilota al terra quan $x = 0,76$? $f(0,76) = \underline{1'566962}$
- b) I quan $x = 1,1$? $f(1,1) = \underline{1'726307}$
- c) I quan $x = 0,11$? $f(0,11) = \underline{0'330351}$
- d) I quan $x = 100$? $f(100) = \underline{-14166'75}$

6. Respon les següents qüestions.

- a) En general, creus que les respostes obtingudes en la pregunta anterior mostren el que verdaderament ocorre? Per què? (Pots continuar escrivint darrere del full)

Algunes sí, la majoria, però ~~la~~ la de $-14166'75$ és un error nostre, no té sentit.

- b) Quines són les dades que no s'ajusten al que esperaves? Per què? (Pots continuar escrivint darrere del full)

La dada que no s'ajusta és $-14166'75$, està molt allunyada de les esperades.

7. Respon les següents qüestions.

- a) Per a quins valors de x (temps) la pilota colpeja el terra? Explica què has fet per a obtenir el resultat (Pots continuar escrivint darrere del full).

Per a $x=0$ i $x=2'2$. He observat en la gràfica que he dibuixat al programa just quan la altura senyala 0. I els valors de x per $y=0$, són els apuntats.

- b) Per a quins valors de x (temps) la pilota arriba a la seua màxima altura? Explica com has trobat el resultat (Pots continuar escrivint darrere del full).

Doncs en la màxima altura de la gràfica, x es igual a 1,1 s. Mirant la gràfica el punt més alt i apuntant el valor de x .

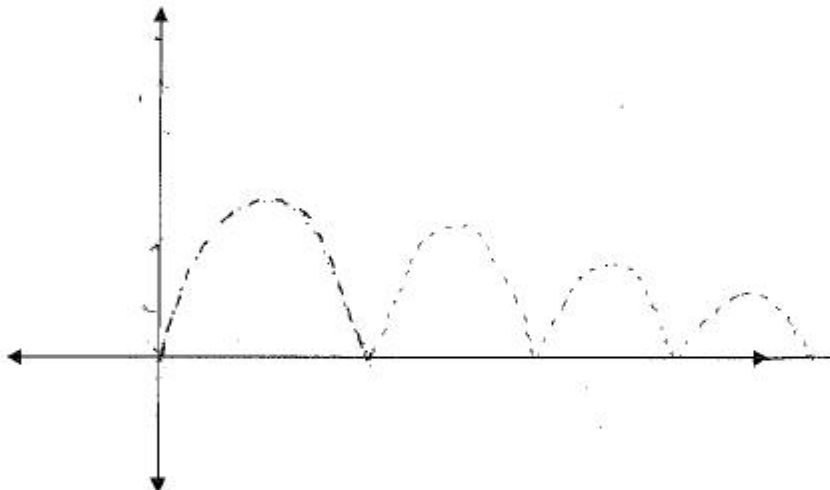
Noms: _____ Número: 9**BOT D'UNA PILOTA**

Volem estudiar el moviment de tir vertical d'un cos en l'atmosfera. Per la qual cosa, gravarem en video el bot d'una pilota de bàsquet, deixada caure des d'una certa altura, i estudiarem el moviment d'aquesta des que colpeja el terra per primera vegada fins que ho torna a fer per tractar de trobar la seua modelització matemàtica.



El que analitzarem serà la relació entre l'altura a la qual es troba la pilota (y) i el temps (x).

1. Dibuixa en el següent sistema d'eixos el núvol de punts que penses que obtindrem després d'analitzar les imatges.



2. A quina de les següents famílies pertany la gràfica d'una funció que s'ajuste bé al núvol de punts?

a) $y = ax + b$

b) $y = ax^2 + bx + c = A(x - B)^2 + C$

c) $y = ax^2 + bx$

d) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

e) $y = a + b \cdot \ln(x)$

f) $y = ax^b$

g) $y = a \cdot e^{bx}$

h) $y = a \cdot e^{-bx} + c$

i) $y = a \cdot \sin((x-c)/b) + d$

j) Altra opció. Indica-ho: _____

3. Explica per què has fet aquesta elecció (pots continuar escrivint darrere del full).

Perque la a indica leia de les y i la b el de les x
i com comença en el $(0,0)$ no tenim c

Noms: _____ Número: 2

4. Obtén la funció que millor s'ajuste a les dades obtingudes en el núvol. Pots intentar fer-ho tenint en compte les característiques de la corba o introduint les dades en l'aplicació *Data Analysis* i fent la regressió.

$$y = f(x) = \underline{-12,649x^2 + 37,778x - 29,96}$$

5. Respon les següents qüestions. Pots utilitzar l'aplicació *Free GraClac*.

- a) Quina és, llavors, la distància de la pilota al terra quan $x = 0,76$? $f(0,76) = \underline{-3,554782}$
- b) I quan $x = 1,1$? $f(1,1) = \underline{1,29051}$
- c) I quan $x = 0,11$? $f(0,11) = \underline{-20,957473}$
- d) I quan $x = 100$? $f(100) = \underline{-122737,16}$

6. Respon les següents qüestions.

- a) En general, creus que les respostes obtingudes en la pregunta anterior mostren el que verdaderament ocorre? Per què? (Pots continuar escrivint darrere del full) *No, perquè les coordenades donades comencen a temps 1.*

- b) Quines són les dades que no s'ajusten al que esperaves? Per què? (Pots continuar escrivint darrere del full)

Quan passa molt de temps i al principi, perquè estan molt per davall.

7. Respon les següents qüestions.

- a) Per a quins valors de x (temps) la pilota colpeja el terra? Explica què has fet per a obtenir el resultat (Pots continuar escrivint darrere del full).

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \begin{cases} 3,94 \\ 2 \end{cases} \text{ realitzant la equació de 2 grau}$$

- b) Per a quins valors de x (temps) la pilota arriba a la seua màxima altura? Explica com has trobat el resultat (Pots continuar escrivint darrere del full).

$$\text{vertex} = \frac{-b}{2a} = 1,49332 \text{ realitzant la equació per a trobar el vertex}$$

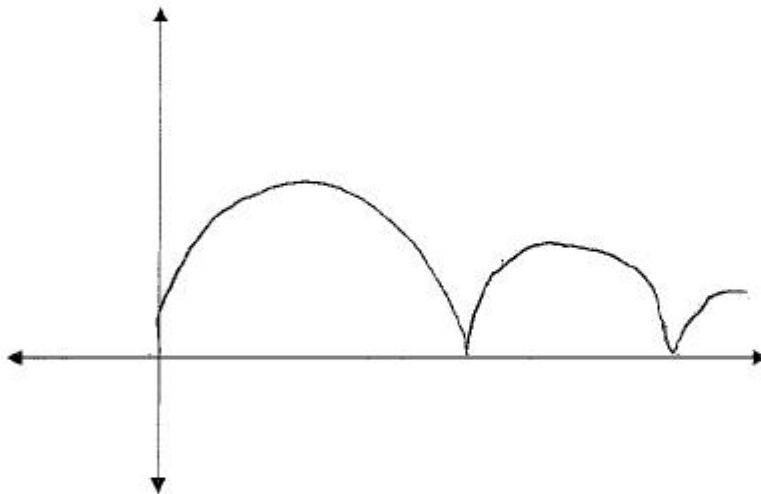
Noms: _____ Número: 3**BOT D'UNA PILOTA**

Volem estudiar el moviment de tir vertical d'un cos en l'atmosfera. Per la qual cosa, gravarem en video el bot d'una pilota de bàsquet, deixada caure des d'una certa altura, i estudiarem el moviment d'aquesta des que colpeja el terra per primera vegada fins que ho torna a fer per tractar de trobar la seua modelització matemàtica.



El que analitzarem serà la relació entre l'altura a la qual es troba la pilota (y) i el temps (x).

1. Dibuixa en el següent sistema d'eixos el núvol de punts que penses que obtindrem després d'analitzar les imatges.



2. A quina de les següents famílies pertany la gràfica d'una funció que s'ajuste bé al núvol de punts?

a) $y = ax + b$

b) $y = ax^2 + bx + c = A(x - B)^2 + C$

c) $y = ax^2 + bx$

d) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

e) $y = a + b \cdot \ln(x)$

f) $y = ax^b$

g) $y = a \cdot e^{bx}$

h) $y = a \cdot e^{-bx} + c$

i) $y = a \cdot \sin((x-c)/b) + d$

j) Altra opció. Indica-ho: _____

3. Explica per què has fet aquesta elecció (pots continuar escrivint darrere del full).

No pot ser la A, E, F, G, H, I perquè no es corresponen amb l'equació d'una paràbola que és el dibuix que faria la pilota, i tampoc la B i la D perquè tenen un punt d'origen.

Noms: _____ Número: 3

4. Obtén la funció que millor s'ajuste a les dades obtingudes en el núvol. Pots intentar fer-ho tenint en compte les característiques de la corba o introduint les dades en l'aplicació *Data Analysis* i fent la regressió.

$$y = f(x) = \underline{-12'152x^2 + 36'452x - 24'103}$$

5. Respon les següents qüestions. Pots utilitzar l'aplicació *Free GraClac*.

- a) Quina és, llavors, la distància de la pilota al terra quan $x = 0,76$? $f(0,76) = \underline{-3'418475}$
- b) I quan $x = 1,1$? $f(1,1) = \underline{1'29028}$
- c) I quan $x = 0,11$? $f(0,11) = \underline{-20'240319}$
- d) I quan $x = 100$? $f(100) = \underline{-117898'903}$

6. Respon les següents qüestions.

- a) En general, creus que les respostes obtingudes en la pregunta anterior mostren el que verdaderament ocorre? Per què? (Pots continuar escrivint darrere del full)

No, perquè hi ha valors negatius i la pilota mai travessaria el terra.

- b) Quines són les dades que no s'ajusten al que esperaves? Per què? (Pots continuar escrivint darrere del full)

Els valors negatius de la y .
 $-3'418475$ $-20'240319$ $-117898'903$

7. Respon les següents qüestions.

- a) Per a quins valors de x (temps) la pilota colpeja el terra? Explica què has fet per a obtenir el resultat (Pots continuar escrivint darrere del full).

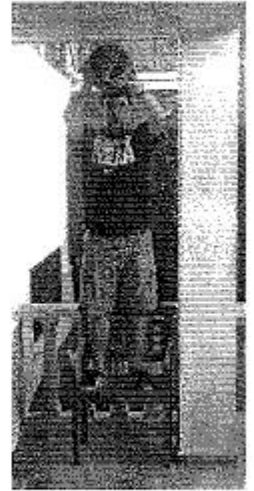
0,984 i 2,015 segons. Trobar els valors de x que més s'aproximen al valor de la $y = 0$

- b) Per a quins valors de x (temps) la pilota arriba a la seua màxima altura? Explica com has trobat el resultat (Pots continuar escrivint darrere del full).

1,5. El punt intermig entre els dos temps anterior ja que és un lloc aproximat on es trobaria el vertex de la paràbola

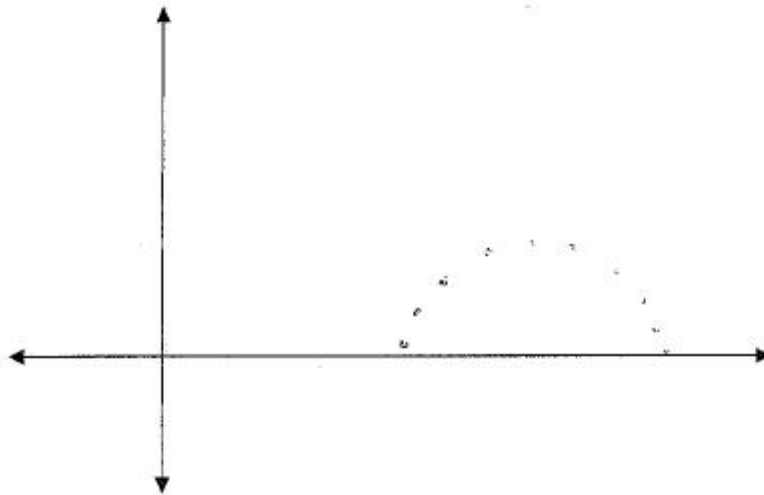
Noms: _____ Número: 4**BOT D'UNA PILOTA**

Volem estudiar el moviment de tir vertical d'un cos en l'atmosfera. Per la qual cosa, gravarem en video el bot d'una pilota de bàsquet, deixada caure des d'una certa altura, i estudiarem el moviment d'aquesta des que colpeja el terra per primera vegada fins que ho torna a fer per tractar de trobar la seua modelització matemàtica.



El que analitzarem serà la relació entre l'altura a la qual es troba la pilota (y) i el temps (x).

1. Dibuixa en el següent sistema d'eixos el núvol de punts que penses que obtindrem després d'analitzar les imatges.



2. A quina de les següents famílies pertany la gràfica d'una funció que s'ajuste bé al núvol de punts?

a) $y = ax + b$

b) $y = ax^2 + bx + c = A(x - B)^2 + C$

c) $y = ax^2 + bx$

d) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

e) $y = a + b \cdot \ln(x)$

f) $y = ax^b$

g) $y = a \cdot e^{bx}$

h) $y = a \cdot e^{-bx} + c$

i) $y = a \cdot \sin((x-c)/b) + d$

j) Altra opció. Indica-ho: _____

3. Explica per què has fet aquesta elecció (pots continuar escrivint darrere del full).

Perque el moviment que descriuria la pilota formaria un angle amb la horitzonal. i com te sinus, hem escallit aquesta.

Noms: _____ Número: 4

4. Obtén la funció que millor s'ajuste a les dades obtingudes en el núvol. Pots intentar fer-ho tenint en compte les característiques de la corba o introduint les dades en l'aplicació *Data Analysis* i fent la regressió.

$$y = f(x) = \underline{Ax^2 + bx + c}$$

$A \rightarrow -12'858$
 $B \rightarrow 35'479$
 $C \rightarrow -25'529$

5. Respon les següents qüestions. Pots utilitzar l'aplicació *Free GraClac*.

- a) Quina és, llavors, la distància de la pilota al terra quan $x = 0,76$? $f(0,76) = \underline{-3'711741}$
- b) I quan $x = 1,1$? $f(1,1) = \underline{1'23972}$
- c) I quan $x = 0,11$? $f(0,11) = \underline{-21'451892}$
- d) I quan $x = 100$? $f(100) = \underline{-7'1242,757'629}$

6. Respon les següents qüestions.

- a) En general, creus que les respostes obtingudes en la pregunta anterior mostren el que verdaderament ocorre? Per què? (Pots continuar escrivint darrere del full)

No perquè mostra valors negatius.

- b) Quines són les dades que no s'ajusten al que esperaves? Per què? (Pots continuar escrivint darrere del full)

Les negatives perquè la pilota no pot atravesar el sol ja que nosaltres tenim el sol com a sistema de referència.

7. Respon les següents qüestions.

- a) Per a quins valors de x (temps) la pilota colpeja el terra? Explica què has fet per a obtenir el resultat (Pots continuar escrivint darrere del full).

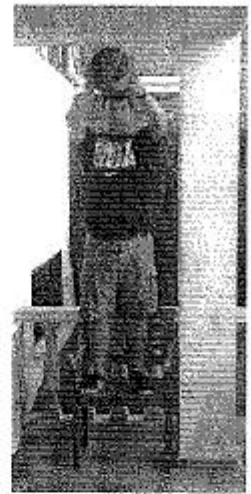
~~Quan estiga en el~~ Quan la x siga 0.

- b) Per a quins valors de x (temps) la pilota arriba a la seua màxima altura? Explica com has trobat el resultat (Pots continuar escrivint darrere del full).

En el que la y aconseguisca la màxima altura.

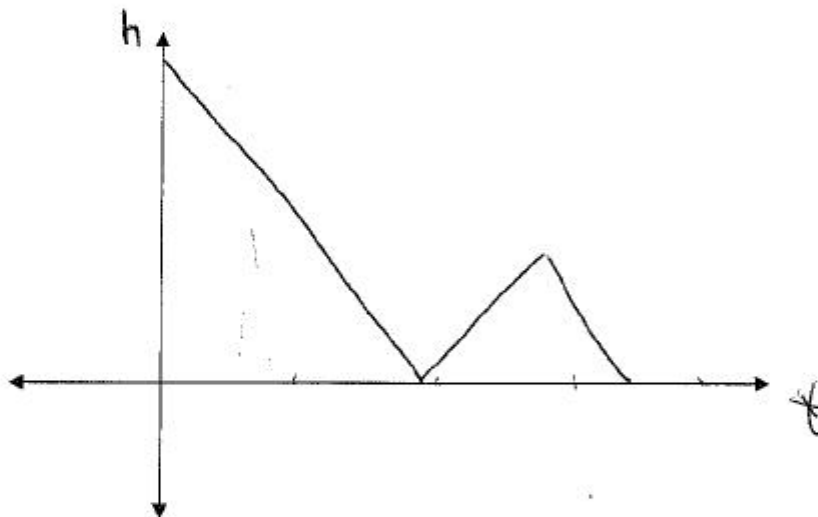
Noms: _____ Número: 5**BOT D'UNA PILOTA**

Volem estudiar el moviment de tir vertical d'un cos en l'atmosfera. Per la qual cosa, gravarem en video el bot d'una pilota de bàsquet, deixada caure des d'una certa altura, i estudiarem el moviment d'aquesta des que colpeja el terra per primera vegada fins que ho torna a fer per tractar de trobar la seua modelització matemàtica.



El que analitzarem serà la relació entre l'altura a la qual es troba la pilota (y) i el temps (x).

1. Dibuixa en el següent sistema d'eixos el núvol de punts que penses que obtindrem després d'analitzar les imatges.



$h \rightarrow$ altura
 $t \rightarrow$ temps

2. A quina de les següents famílies pertany la gràfica d'una funció que s'ajuste bé al núvol de punts?

a) $y = ax + b$

b) $y = ax^2 + bx + c = A(x - B)^2 + C$

c) $y = ax^2 + bx$

d) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

e) $y = a + b \cdot \ln(x)$

f) $y = ax^b$

g) $y = a \cdot e^{bx}$

h) $y = a \cdot e^{-bx} + c$

i) $y = a \cdot \sin((x-c)/b) + d$

j) Altra opció. Indica-ho: _____

3. Explica per què has fet aquesta elecció (pots continuar escrivint darrere del full).

Perquè pensem que la gràfica que relaciona l'altura i el temps que necessita per arribar al terra són diverses rectes, la fórmula de la qual és la que hem elegit anteriorment.

Noms: _____ Número: 5

4. Obtén la funció que millor s'ajuste a les dades obtingudes en el núvol. Pots intentar fer-ho tenint en compte les característiques de la corba o introduint les dades en l'aplicació *Data Analysis* i fent la regressió.

$$y = f(x) = \underline{Ax^2 + bx + c = -12,821x^2 + 38,386x - 25,486}$$

5. Respon les següents qüestions. Pots utilitzar l'aplicació *Free GraClac*.

- a) Quina és, llavors, la distància de la pilota al terra quan $x = 0,76$? $f(0,76) = \underline{-3,71805}$
- b) I quan $x = 1,1$? $f(1,1) = \underline{1,22519}$
- c) I quan $x = 0,11$? $f(0,11) = \underline{-21,418674}$
- d) I quan $x = 100$? $f(100) = \underline{124\ 396,886}$

6. Respon les següents qüestions.

- a) En general, creus que les respostes obtingudes en la pregunta anterior mostren el que verdaderament ocorre? Per què? (Pots continuar escrivint darrere del full) No, perquè quan té un determinat valor en la x , la y dona negatiu, la qual cosa és impossible ja que l'eix y representa l'altura, i aqueste no pot ser negatiu.
- b) Quines són les dades que no s'ajusten al que esperaves? Per què? (Pots continuar escrivint darrere del full)

Les que corresponen a l'eix y i donen negatiu, perquè l'altura no pot ser negatiu.

$x = 0,76$; $y = -3,71805$
 $x = 0,11$; $y = -21,418674$

7. Respon les següents qüestions.

- a) Per a quins valors de x (temps) la pilota colpeja el terra? Explica què has fet per a obtenir el resultat (Pots continuar escrivint darrere del full).

Hem igualat la y que correspon a l'altura a zero que és quan colpeja amb el terra.

$x_1 = -0,552805$
 $x_2 = 3,552899$

- b) Per a quins valors de x (temps) la pilota arriba a la seua màxima altura? Explica com has trobat el resultat (Pots continuar escrivint darrere del full).

Sera trobant el vèrtex, però no tenim temps així que gràficament i aproximant-ho és $x = 1,5$

$$12,821x^2 + 38,386x - 25,486 = 0$$

$$x = \frac{-38,386 \pm \sqrt{38,386^2 + 1307,024024}}{-25,642} = \frac{-38,386 \pm 52,71749}{-25,642} =$$

$$= \begin{cases} \nearrow -0,658905 \\ \searrow 3,552899 \end{cases}$$

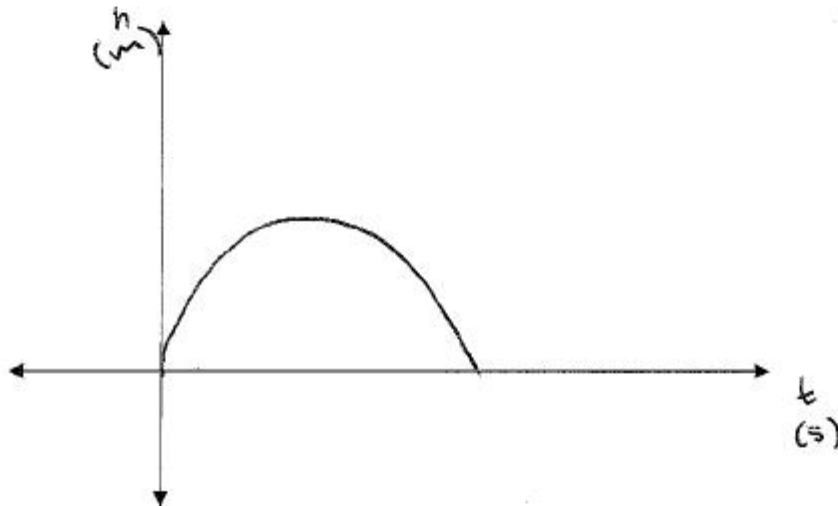
Noms: _____ Número: **BOT D'UNA PILOTA**

Volem estudiar el moviment de tir vertical d'un cos en l'atmosfera. Per la qual cosa, gravarem en video el bot d'una pilota de bàsquet, deixada caure des d'una certa altura, i estudiarem el moviment d'aquesta des que colpeja el terra per primera vegada fins que ho torna a fer per tractar de trobar la seua modelització matemàtica.



El que analitzarem serà la relació entre l'altura a la qual es troba la pilota (y) i el temps (x).

1. Dibuixa en el següent sistema d'eixos el núvol de punts que penses que obtindrem després d'analitzar les imatges.



2. A quina de les següents famílies pertany la gràfica d'una funció que s'ajuste bé al núvol de punts?

- | | |
|---|------------------------------------|
| a) $y = ax + b$ | f) $y = ax^b$ |
| b) $y = ax^2 + bx + c = A(x - B)^2 + C$ | g) $y = a \cdot e^{bx}$ |
| <input checked="" type="radio"/> c) $y = ax^2 + bx$ | h) $y = a \cdot e^{-bx} + c$ |
| d) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ | i) $y = a \cdot \sin((x-c)/b) + d$ |
| e) $y = a + b \cdot \ln(x)$ | j) Altra opció. Indica-ho: _____ |

3. Explica per què has fet aquesta elecció (pots continuar escrivint darrere del full).

• Ens hem regit per la fórmula de física

$$x = x_0 + vt + \frac{a}{2}t^2$$

x : espai que s'obté al moment t
 x_0 : espai o altura inicial que és 0
 v : velocitat inicial
 t : temps
 a : acceleració.

Noms: _____ Número: 6

4. Obtén la funció que millor s'ajuste a les dades obtingudes en el núvol. Pots intentar fer-ho tenint en compte les característiques de la corba o introduint les dades en l'aplicació *Data Analysis* i fent la regressió.

$$y = f(x) = \underline{-12'564x^2 + 37'557x - 24'828}$$

5. Respon les següents qüestions. Pots utilitzar l'aplicació *Free GraClac*.

- a) Quina és, llavors, la distància de la pilota al terra quan $x = 0,76$? $f(0,76) = \underline{-3'541646}$
- b) I quan $x = 1,1$? $f(1,1) = \underline{1'28226}$
- c) I quan $x = 0,11$? $f(0,11) = \underline{-20'848754}$
- d) I quan $x = 100$? $f(100) = \underline{-121909'328}$

6. Respon les següents qüestions.

- a) En general, creus que les respostes obtingudes en la pregunta anterior mostren el que verdaderament ocorre? Per què? (Pots continuar escrivint darrere del full) - No, perquè l'altura en aquest cas no pot ser negativa ja que la pilota no atravesa el terra, sino que rebota, i per tant la y no deu ser negativa.
- b) Quines són les dades que no s'ajusten al que esperaves? Per què? (Pots continuar escrivint darrere del full) - És que la y es negativa, perquè la pilota deu rebotar, mai pot ser negativa.

7. Respon les següents qüestions.

- a) Per a quins valors de x (temps) la pilota colpeja el terra? Explica què has fet per a obtenir el resultat (Pots continuar escrivint darrere del full).

$$y = 0 \text{ m} \rightarrow 0 = -12'564x^2 + 37'557x - 24'828$$

$$x = \frac{-37'557 \pm \sqrt{37'557^2 - 4(-12'564)(-24'828)}}{-2 \cdot (-12'564)} \begin{cases} x_1 = 0'986897485 \\ x_2 = 2'00235753 \end{cases}$$

- b) Per a quins valors de x (temps) la pilota arriba a la seua màxima altura? Explica com has trobat el resultat (Pots continuar escrivint darrere del full).

$$\frac{0'986897485 + 2'00235753}{2} = 1'494627507 \rightarrow x$$

$$y = -12'564 \cdot 1'494627507^2 + 37'557 \cdot 1'494627507 - 24'828$$

$$y = \underline{3'238862643 \text{ m}}$$

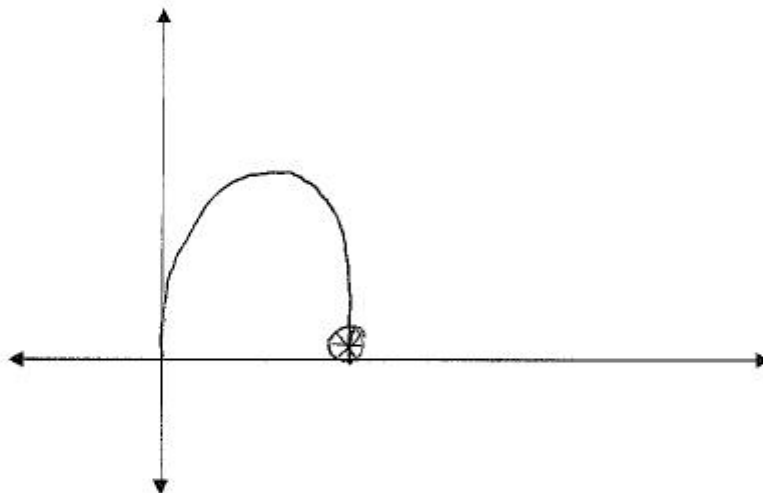
Noms: _____ Número: 7**BOT D'UNA PILOTA**

Volem estudiar el moviment de tir vertical d'un cos en l'atmosfera. Per la qual cosa, gravarem en video el bot d'una pilota de bàsquet, deixada caure des d'una certa altura, i estudiarem el moviment d'aquesta des que colpeja el terra per primera vegada fins que ho torna a fer per tractar de trobar la seua modelització matemàtica.



El que analitzarem serà la relació entre l'altura a la qual es troba la pilota (y) i el temps (x).

1. Dibuixa en el següent sistema d'eixos el núvol de punts que penses que obtindrem després d'analitzar les imatges.



2. A quina de les següents famílies pertany la gràfica d'una funció que s'ajuste bé al núvol de punts?

~~a)~~ $y = ax + b$

~~b)~~ $y = ax^2 + bx + c = A(x - B)^2 + C$

c) $y = ax^2 + bx$

~~d)~~ $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

~~e)~~ $y = a + b \cdot \ln(x)$

~~f)~~ $y = ax^b$

~~g)~~ $y = a \cdot e^{bx}$

~~h)~~ $y = a \cdot e^{-bx} + c$

~~i)~~ $y = a \cdot \sin((x-c)/b) + d$

~~j)~~ Altra opció. Indica-ho: _____

3. Explica per què has fet aquesta elecció (pots continuar escrivint darrere del full).

Suposem que seria una opció que descriu una paràbola, com és l'opció C.

El quadrat ens indica que descriu un moviment parabòlic.

Noms: _____ Número: 7

4. Obtén la funció que millor s'ajuste a les dades obtingudes en el núvol. Pots intentar fer-ho tenint en compte les característiques de la corba o introduint les dades en l'aplicació *Data Analysis* i fent la regressió.

$$y = f(x) = -12.668 x^2 + 37.99 x + 25.078$$

5. Respon les següents qüestions. Pots utilitzar l'aplicació *Free GraClac*.

- a) Quina és, llavors, la distància de la pilota al terra quan $x = 0,76$? $f(0,76) = -3.5986$
- b) I quan $x = 1,1$? $f(1,1) = -1.2727$
- c) I quan $x = 0,11$? $f(0,11) = -24.063$
- d) I quan $x = 100$? $f(100) = -0.422$

6. Respon les següents qüestions.

- a) En general, creus que les respostes obtingudes en la pregunta anterior mostren el que verdaderament ocorre? Per què? (Pots continuar escrivint darrere del full)

No, perquè pensem que els punts al ser negatius no tenen massa coherència en una situació real.

- b) Quines són les dades que no s'ajusten al que esperaves? Per què? (Pots continuar escrivint darrere del full)

Les preguntes: A, C, D → pel fet de ser negatius

7. Respon les següents qüestions.

- a) Per a quins valors de x (temps) la pilota colpeja el terra? Explica què has fet per a obtenir el resultat (Pots continuar escrivint darrere del full).

~~0,5 segons~~ mitjançant

~~l'aplicació~~ l'ipad obtenim que la pilota colpeja terra als 0,9 s i 2,0 s

- b) Per a quins valors de x (temps) la pilota arriba a la seua màxima altura? Explica com has trobat el resultat (Pots continuar escrivint darrere del full).

1,5 segons. Ens hem basat en el gràfic mirant el punt més alt i mitjançant l'observació de la pantalla de l'ipad.

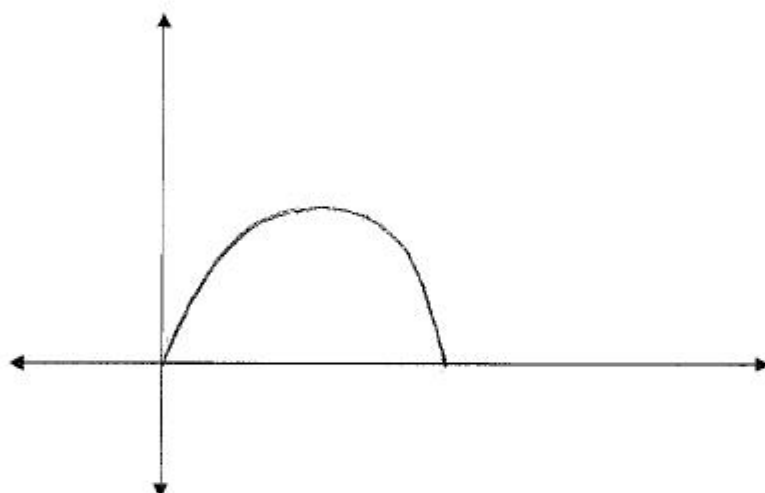
Noms: _____ Número: 8**BOT D'UNA PILOTA**

Volem estudiar el moviment de tir vertical d'un cos en l'atmosfera. Per la qual cosa, gravarem en video el bot d'una pilota de bàsquet, deixada caure des d'una certa altura, i estudiarem el moviment d'aquesta des que colpeja el terra per primera vegada fins que ho torna a fer per tractar de trobar la seua modelització matemàtica.



El que analitzarem serà la relació entre l'altura a la qual es troba la pilota (y) i el temps (x).

1. Dibuixa en el següent sistema d'eixos el núvol de punts que penses que obtindrem després d'analitzar les imatges.



2. A quina de les següents famílies pertany la gràfica d'una funció que s'ajuste bé al núvol de punts?

a) $y = ax + b$

b) $y = ax^2 + bx + c = A(x - B)^2 + C$

c) $y = ax^2 + bx$

d) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

e) $y = a + b \cdot \ln(x)$

f) $y = ax^b$

g) $y = a \cdot e^{bx}$

h) $y = a \cdot e^{-bx} + c$

i) $y = a \cdot \sin((x-c)/b) + d$

j) Altra opció. Indica-ho: _____

3. Explica per què has fet aquesta elecció (pots continuar escrivint darrere del full).

Per que aquest moviment pertany a una paràbola conca i per tant la seua funció és una equació de segon grau.

Noms: _____ Número: 8

4. Obtén la funció que millor s'ajuste a les dades obtingudes en el núvol. Pots intentar fer-ho tenint en compte les característiques de la corba o introduint les dades en l'aplicació *Data Analysis* i fent la regressió.

$$y = f(x) = \underline{1 - 12'788x^2 + 38'225x - 25'38}$$

5. Respon les següents qüestions. Pots utilitzar l'aplicació *Free GraClac*.

- a) Quina és, llavors, la distància de la pilota al terra quan $x = 0,76$? $f(0,76) = \underline{-3'677349}$
 b) I quan $x = 1,1$? $f(1,1) = \underline{1'24902}$
 c) I quan $x = 0,11$? $f(0,11) = \underline{-2'324485}$
 d) I quan $x = 100$? $f(100) = \underline{-124077'88}$

6. Respon les següents qüestions.

- a) En general, creus que les respostes obtingudes en la pregunta anterior mostren el que verdaderament ocorre? Per què? (Pots continuar escrivint darrere del full)

No perquè les dades obtingudes en $x = 0,11$ i $x = 100$ dona un valor que ~~no~~ és ~~negatiu~~ negatiu i no és possible.

- b) Quines són les dades que no s'ajusten al que esperaves? Per què? (Pots continuar escrivint darrere del full)

les dades que hem obtingut en $x = 0,11$ i $x = 100$, ja que són nombres negatius i no s'ajusten a la vida real.

7. Respon les següents qüestions.

- a) Per a quins valors de x (temps) la pilota colpeja el terra? Explica què has fet per a obtenir el resultat (Pots continuar escrivint darrere del full).

L'equació la y és l'altura, aleshores li donarem el valor 0 i traurem el valor de x que seria el temps en el qual la pilota toca terra.

- b) Per a quins valors de x (temps) la pilota arriba a la seua màxima altura? Explica com has trobat el resultat (Pots continuar escrivint darrere del full).

(altura màxima seria de 3'5 aproximadament)

Annex 11. Imatges de l'experiment

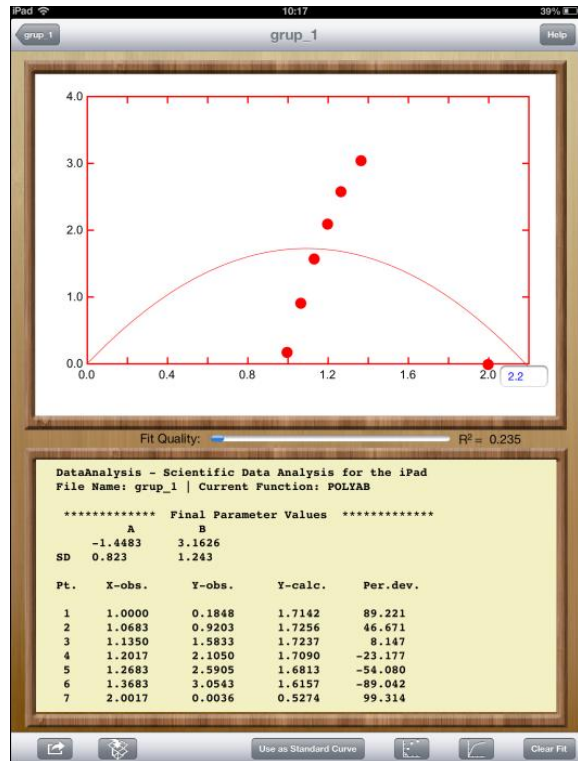
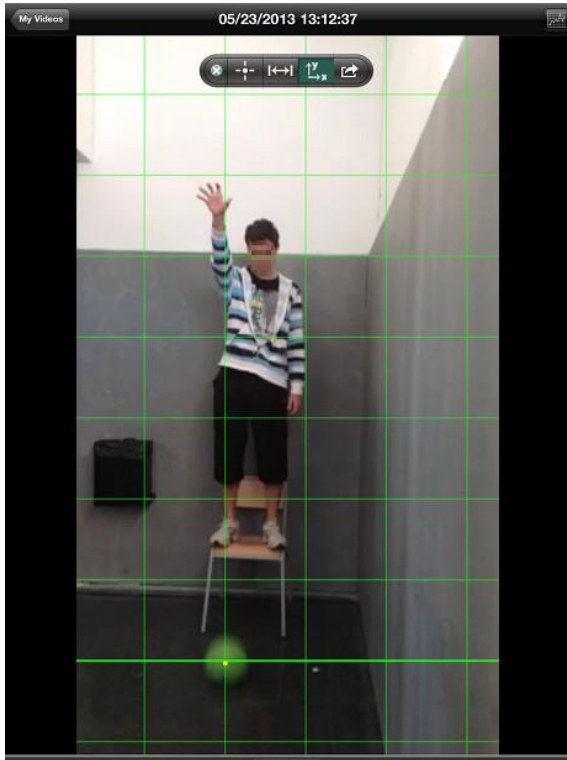


Figura 1. Grup 1

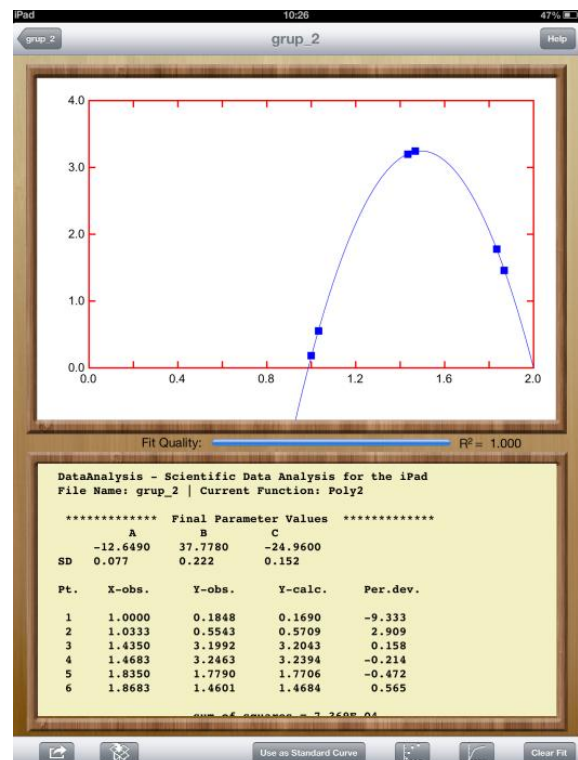
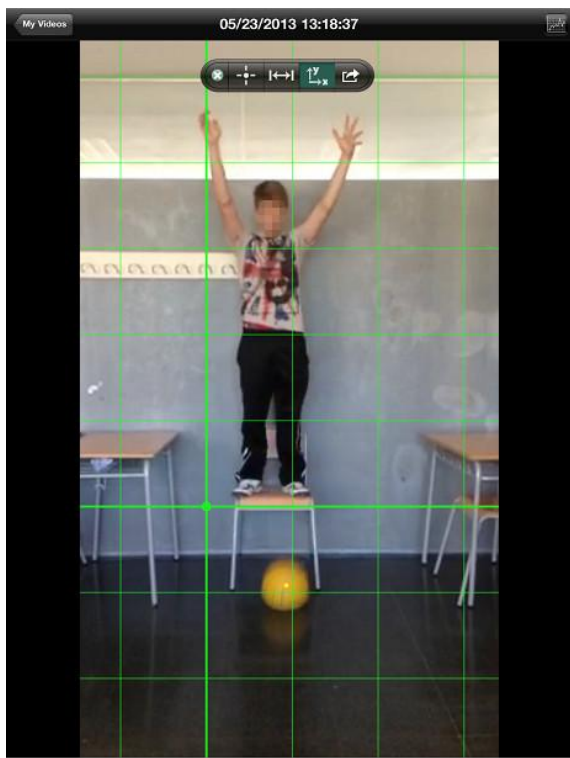


Figura 2. Grup 2

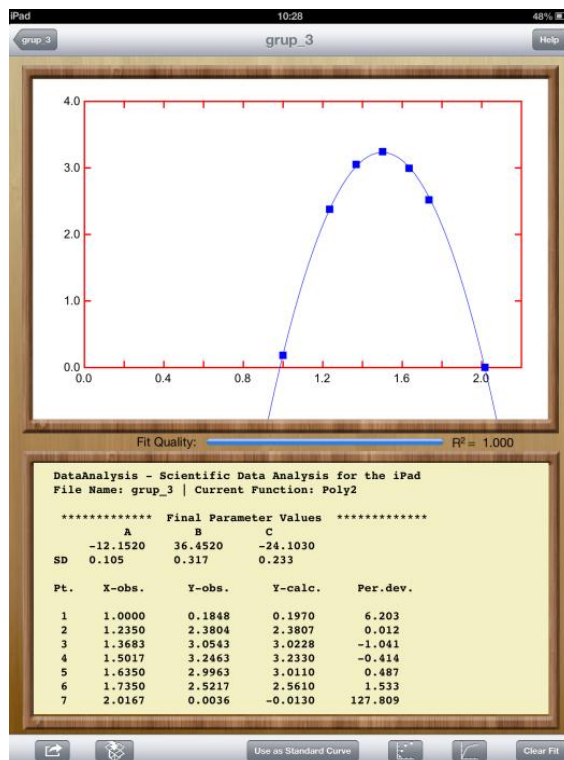
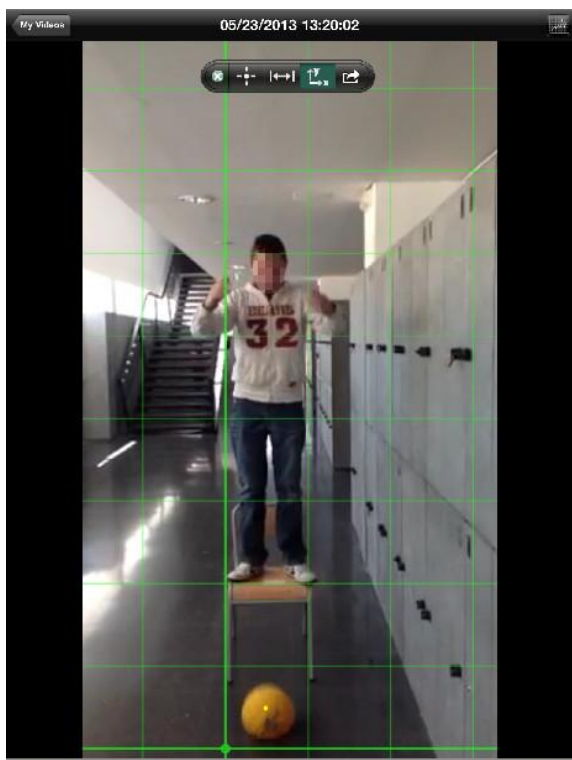


Figura 3. Grup 3

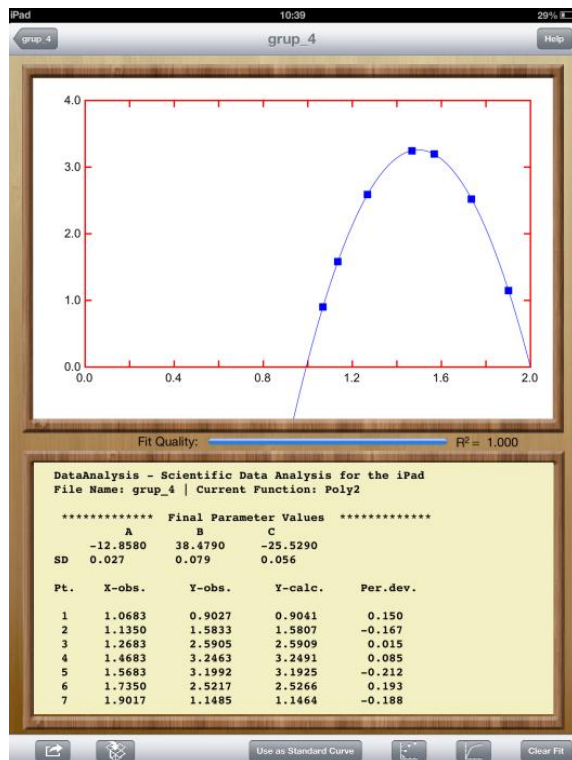
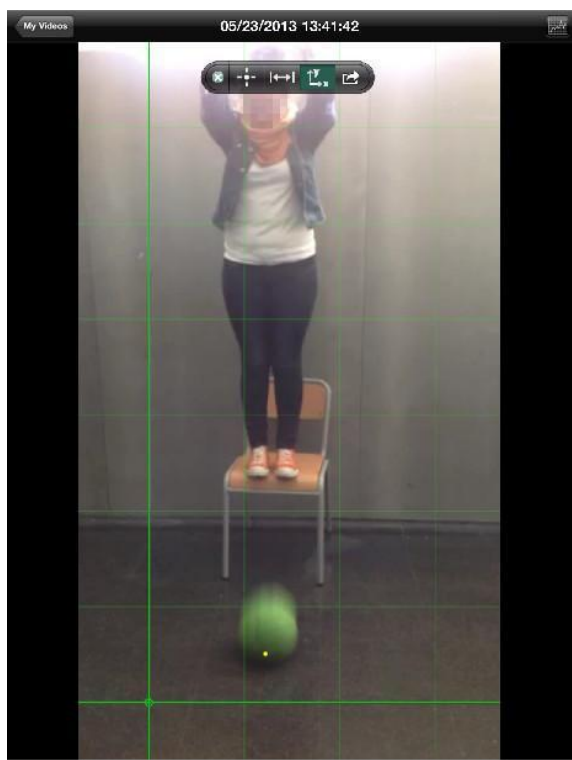


Figura 4. Grup 4

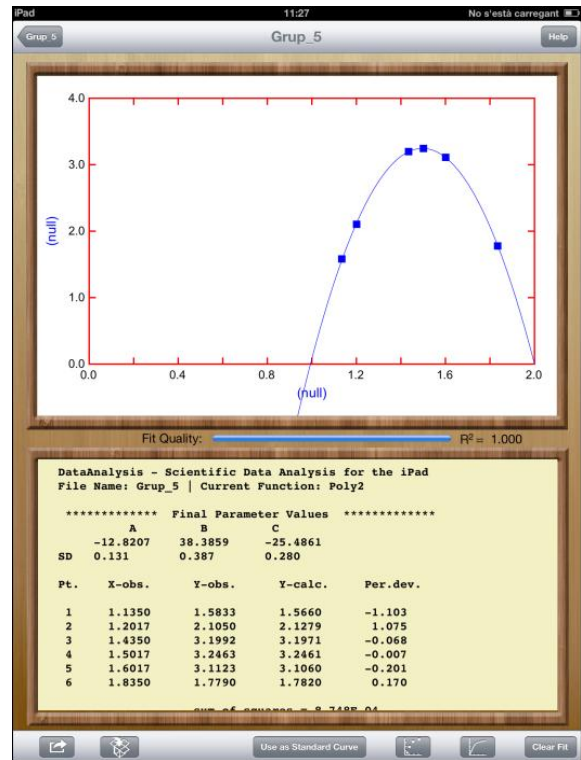


Figura 5. Grup 5

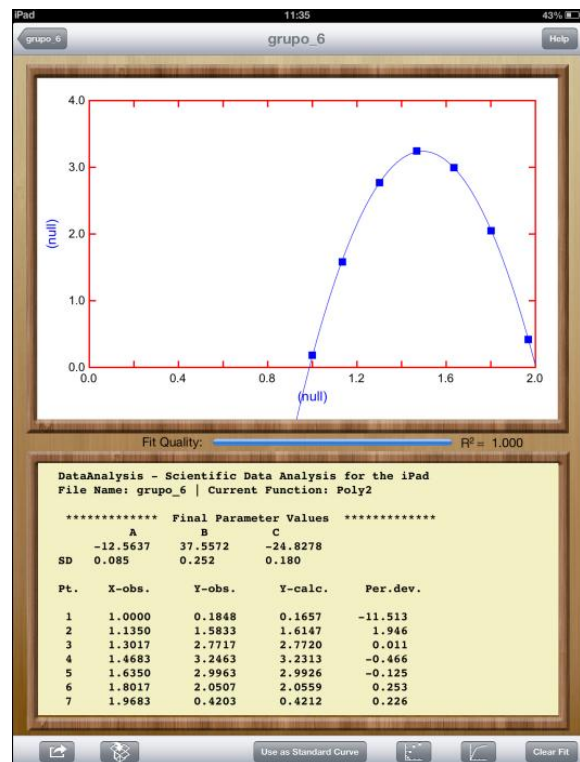


Figura 6. Grup 6

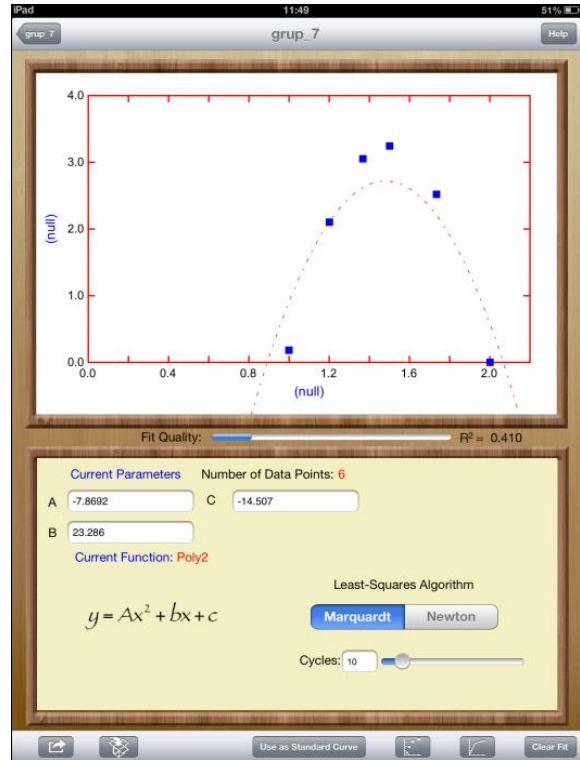
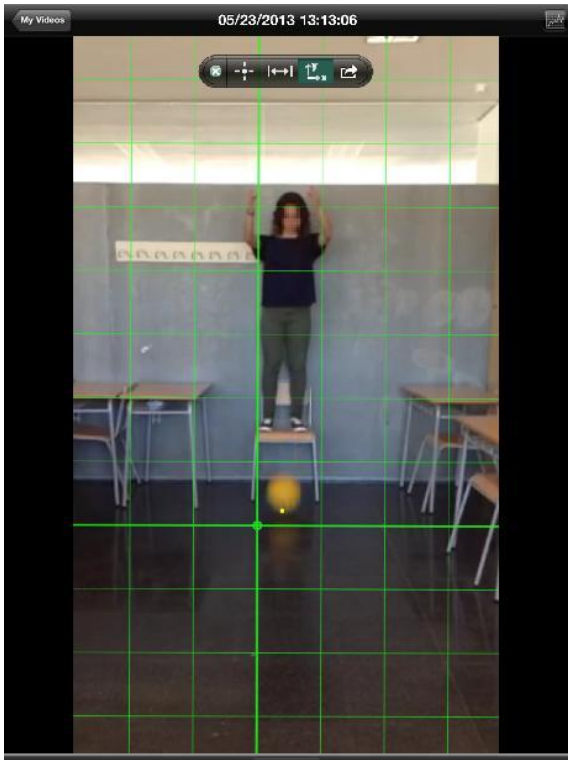


Figura 7. Grup 7

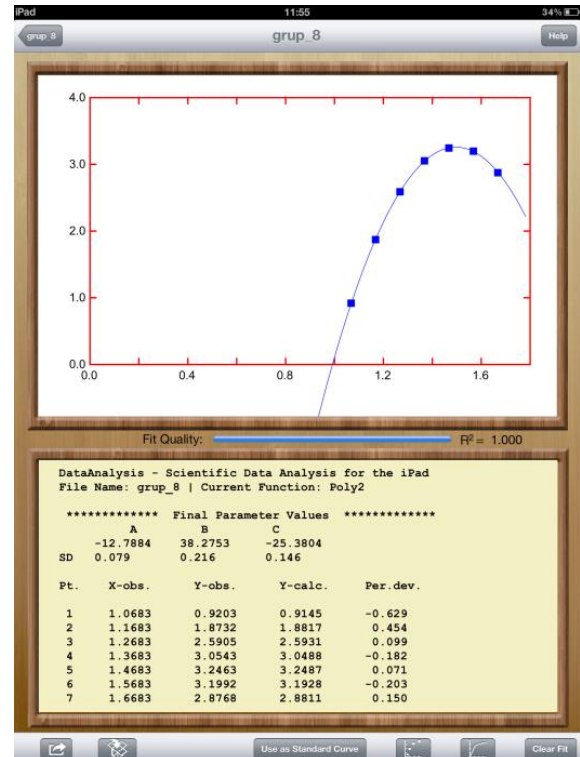
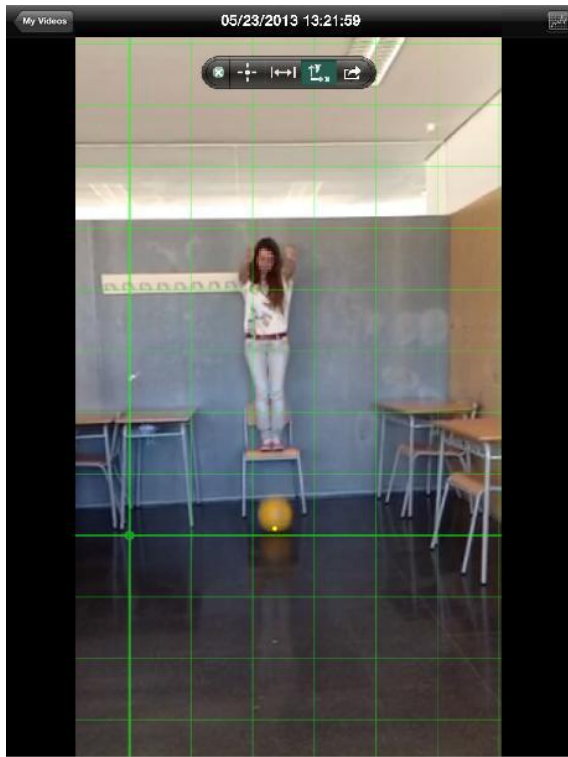


Figura 8. Grup 8

Annex 12. Transcripcions de les entrevistes

Llegenda

- **A, B, C, D:** Indica la intervenció dels alumnes A, B, C o D.
- **E:** Indica la intervenció de l'entrevistadora o investigadora.
- ***Intervenció:*** S'usa la cursiva per a indicar les intervencions dels participants.
- **[...]:** S'usa per indicar que falta un tros d'intervenció, no és una intervenció sencera.
- **,:** Pausas naturals que es donen a la parla habitualment.
- **...:** S'usa per a indicar intervencions solapades. Es col·loca en la intervenció del primer participant en el moment immediatament anterior a què es solapen, posteriorment s'escriu la intervenció del segon participant en una línia distinta i es torna a col·locar en la línia següent a l'inici del que continuaria de la intervenció del primer participant. També s'usa per a indicar vacil·lacions, dubtes en el discurs o quan té lloc una pausa curta.
- **(.):** Per a indicar que té lloc una pausa llarga (superior a 5 segons), probablement quan els alumnes no saben alguna cosa o necessiten pensar-la amb més deteniment. També s'utilitza quan hi ha una pausa llarga per preparar el material que s'utilitzarà a continuació o per canviar de tema.
- **[Comentari]:** Per incloure comentaris sobre els gestos, aclaracions sobre les intervencions o descripcions de comportaments al mateix temps que té lloc una intervenció.
- **>>:** Per a indicar una intervenció immediatament després d'altra, però no solapada (es col·loquen al final d'una intervenció i a l'inici de l'altra).

Transcripcions

Parella 1. Alumnes A i B

[1] E. En primer lloc, en la primera pregunta, expliqueu-me perquè vàreu dibuixar aquesta gràfica.

[2] A. Doncs, vàrem ficar aquesta... Pense que era la que vàrem trobar més coherent, no sé, es que no...

[3] B. Perquè si el temps passa i la pilota bota, va cap amunt [es refereix a quan rebotja sobre el terra per primera vegada], doncs ha d'eixir aquesta gràfica.

[4] E. Val, i perquè la vàreu dibuixar de manera que començara des del (0,0) i no en un altre lloc?

[A i B es miren i es queden pensant]

[5] E. Si es fixeu, comença ací [assenyalant l'origen de coordenades] i no ací o ací... [assenyalant altres llocs de la gràfica i tractant d'explicar allò a què ens referíem en [4]]

[6] A. Ah, no, perquè considerarem el temps inicial zero i que l'altura inicial en el primer bot aleshores era zero també.

[7] E. Però per què? Per alguna raó en especial?

[8] A. No, vàrem >>

[9] B. >> Perquè ací fica que és des que toca terra per primera vegada [assenyala amb el dit l'enunciat del problema].

[10] E. Val, ahí fica que el que estudiarem és des que toca terra per primera vegada però tu comences... O siga, tu primer soltes la pilota, val? Se suposa que el temps comença a comptar des que la soltes, encara que només estudiem el moviment en el primer bot [intentant explicar què és el que volia dir l'enunciat]. Però bé si... si ho havíeu pensat així també està bé >>

[11] A. >> No no, ho vàrem fer així per... per mira >>

[12] E. >> Està bé, sou coherents amb el que... val? Ara bé, en la pregunta 2, perquè vàreu triar la c)?

[13] A. Ah, ahí està el tema... [A. i B. riuen] Eh... perquè... perquè les altres les vam anar descartant i crec que al final vàrem trobar eixa la més...

[14] B. Coherent.

[15] A. Sí, la més... la que vàrem vore la més... Es que tampoc ho sabíem segur.

[16] E. Val, però en algun moment es baseu en el dibuix per decidir que és aquesta funció?...

[17] B. Sí.

[18] E. ... En què es baseu?

[19] B. Sí perquè com ja l'hem donada doncs... el dibuix era... sabíem que y portava un...

[20] A. I x...

[21] B. ...quadrat >> [Ací podem observar com l'alumne és capaç d'associar la gràfica de la funció amb una funció quadràtica].

[22] >> A. I... x i... se suposa que b és l'altura... no [intentant donar-li significat als paràmetres]? No ho sé. Bé >>

[23] E. >> b és l'altura?

[24] A. No ho sé no ho sé. En... què és b i x ?

[25] E. Jo no ho sé, dis-m'ho tu.

[26] A. Ah, jo tampoc ho sé.

[27] E. Tu has triat c).

[28] A. No jo no...

[29] B. a l'altura...

[30] A. ...Vàrem suposar que... que... com començava en el (0,0) no... no alterava... Donaria valor zero açò [assenyala la fórmula $y=ax^2+bx$]. Bé i ja eh... Jo que sé!

[31] E. No no, explica't explica't... tu tranquil.

[32] A. No, doncs...

[33] E. Que com començava des del (0,0) que? Anaves bé anaves bé... Digues.

[34] A. Doncs això, que a l'iniciar el moviment en el (0,0) vaig relacionar el (0,0) amb cadascun d'aquests nombres... [assenyala els monomis ax^2 i bx a la fórmula]

[35] E. En la x ?

[36] A. Sí, en la x ... la x ... el temps... No sé (.)

[37] E. A veure, és açò el que vàreu fer? Vàreu substituir ací [en la x] el valor zero i la y et donava zero i aleshores això volia dir que passava pel (0,0)? És això o no?

[38] A. Per exemple [riuen].

[39] E. O siga, no era això, no?

[40] A. Jo que sé, vàrem descartar i al final la que més s'assemblava... La que més pareixia ser la més... coherent... jo que sé...

[41] E. Vàreu copiar d'algú la resposta [ja que sembla que no tenen cap explicació per justificar com obtenen la resposta]? >>

[42] A. >> No, no...

- [43] B. No
- [44] A. ...no.
- [45] E. No? Segur?
- [46] A. A voleo, en serio, es que va ser més...
- [47] E. Sí? De veritat...? A voleo?
- [48] B. No, és perquè és una paràbola, no?
- [49] E. Molt bé, sí... [invitant-lo a continuar]
- [50] B. Doncs a mi em sonava que la paràbola era una equació pareguda a aquesta... [es refereix a una equació quadràtica pareguda a la que van triar]
- [51] E. Val
- [52] B. ...per això la vam ficar...
- [53] E. I perquè...
- [54] A. El quadrat...
- [55] E. ...la b) no podria ser aleshores?
- [56] B. Perquè com portava la c , vam descartar les que tenien...
- [57] A. Ah, doncs sí que pot ser!
- [58] B. ...més de a i b , no sé.
- [59] A. No, però a)... [es queda pensant]
- [60] E. I la c què vol dir? Quin significat té per a tu? [dirigint-me a B]
- [61] A. No, però esta és una equació normal, no? Esta hauria de ser una línia recta... [A continua amb els seus raonaments sense prestar massa atenció a les preguntes]
- [62] E. Em referisc a la b).
- [63] A. Ah, a la b)! Doncs... perquè és tan llarga que... [riuen].
- [64] B. Mmm... No sé...
- [65] A. Jo que sé...
- [66] B. ...perquè com sols tens l'equació d'altura i temps doncs... no sé, la c no... no trobava què ficar-li. >>
- [67] A. >> Perquè...
- [68] E. Ahh val...
- [69] A. No, perquè la a sí...
- [70] E. ... Per a tu la a és l'altura i la b és el temps?

[71] B. Sí

[72] E. Bé... Passem >>

[73] A. >> I perquè no hi ha cap valor per a c , o siga, començant per $(0,0)$... [es refereix a què han triat l'opció c] ja que no hi ha cap altra variable a banda del temps i de l'altura, que per a ells són a i b respectivament, per a assignar-li'l a c .]

[74] E. Val... Després la pregunta 3 diu: explica perquè has fet aquesta elecció... I digueu: perquè la pilota forma paràboles, que és una equació de segon grau. És la que més coincideix...

[75] B. Esta la vas dir tu [dirigint-se a A].

[76] E. ... Expliqueu-me.

[77] A. Això, que varem relacionar la funció aquesta... [assenyala la que han triat a l'ítem anterior]...

[78] E. Sí, la fórmula.

[79] A. ...la fórmula amb la paràbola, pareguda a aquesta [assenyala el dibuix de l'ítem 1].

[80] E. Val, però bé, perquè digueu que la pilota forma paràboles? Perquè en realitat la pilota, tu quan la soltes...

[81] A. No forma par...

[82] E. ...bota sobre...

[83] B. El que forma paràboles és la relació entre el temps i l'altura.

[84] E. Ah val, val això sí, molt bé (.) Quant al que vàreu fer a l'iPad®... s'enrecordeu, no? [mentrestant, es va preparant l'iPad® per mostrar-los el que varen fer el primer dia al programa Video Physics®]

[85] A. Sí.

[86] E. Que vos vaig dir que posareu els... els eixos coordenats on pensàveu que eixiria més senzilla la fórmula posterior, val? Eh... vàreu posar els eixos coordenats ahí [assenyalant la imatge del vídeo que mostra on estan col·locats] per alguna raó?

[87] A. Vàrem ficar eh... la x coincidint amb el primer bot, bé, on colpeja la pilota, i la y ...

[88] E. La y ?

[89] A. ...arreu.

[90] E. Val. I per què vàreu decidir posar l'eix de les x justament on bota la pilota?

[91] B. Perquè on... quan cau, l'altura és zero [es refereix al moment en què la pilota toca terra]. >>

[92] A. >> Per a què el bot no començara en negatiu...

[93] E. Molt bé...

[94] A. ...o en pos... doncs ho posem a eixa altura.

[95] E. Molt bé (.) Després, quant al full que us vaig passar amb les coordenades dels punts... [els mostrem el full de les coordenades] vàreu decidir triar aquestes [assenyalant les què trien els alumnes], ho vàreu fer per alguna raó en especial? >>

[96] A. >> Arreu.

[97] E. Penseu que haguera sigut exactament igual triar les les... els sis primers punts o els set primers punts? Haguera donat el mateix? Haguera sigut igual de fàcil ajustar la funció?

[98] A. A lo millor al... dóna un temps més [menys] ampli... la mitjana... no sé si...

[99] E. Dignes digues, tu tranquil...

[100] A. No no que... que a lo millor trac els p... jo que sé... [bufa amb desesperació]

[101] E. Tu tranquil, si no passa...

[102] A. No, si ja sé que no passa res...

[103] E. ...res si t'equivoques. Tu tranquil.

[104] A. Si l'únic que veig és que a lo millor està més proporcionat o... o la mitjana és més correcta elegint-los més més...

[105] B. Separats.

[106] E. Mmm... A veure, i si haguérem elegit els sis o set primers punts, que us haguera donat? Més o menys...

[107] B. Doncs, la mitat. Bé, no però...

[108] E. ... Vull dir, què haguera passat? Com seria el dibuix dels punts? (.) Si voleu dibuixar-ho ací... [es prepara foli i bolígraf perquè ho dibuixen si és necessari] Més o menys, com seria?

[109] B. [Dibuixa uns quants punts de manera que a l'unir-los formarien un tros de paràbola quasi recte] Un tros d'una paràbola, no?

[110] E. Clar.

[111] B. Més o menys, no? >>

[112] E. >> I així haguera sigut fàcil ajustar-la?

[113] B. No, perquè... a lo millor estan tan apegats [els punts] que no pareix.

[114] E. Que podríem dir si veiérem açò [fent referència al dibuix]? Què... què penseu... què diríeu que és?

[115] A. Una corba. >>

[116] B. >> Sí.

[117] E. Molt bé, o inclús si estan molt apegats [els punts] podríeu arribar a pensar que és una recta, no?

[118] B. També.

[119] E. Aleshores val, molt bé (.) [Es prepara l'iPad® amb una imatge del què van fer al programa Data Analysis®]. Passem ara ací [referint-se al segon full de preguntes]. En l'exercici 4, perquè heveu triat aquesta funció?

[120] A. És la funció d'abans...

[121] B. La funció d'abans, clar.

[122] A. ...i hem substituït dos punts... per a i per b , no? [preguntant-li a B]

[123] E. No vàreu utilitzar el programa Data Analysis® per fer-ho?

[124] B. Sí.

[125] A. Sí, sí...

[126] E. Era aquest [mostrant-los-el a l'iPad®], el vàreu utilitzar, no?

[127] B. Sí.

[128] E. A veure... I... per què vàreu triar la funció d'abans? (.) Ajustava als punts que teníeu (.)?

[129] B. Mmm... [es miren l'un a l'altre]

[130] E. O no ho vàreu provar, directament?

[131] A. Crec que directament no ho vàrem provar... Com era la d'abans... [referint-se a que era la funció que havien pensat en els ítems del primer full]

[132] E. No vos vàreu parar a apretar el boto este després de triar les gràfiques i veure que eixia... [assenyalem el botó Fit que hi ha a la pantalla de l'iPad®]? [Cal destacar que el botó el polsarien, perquè és imprescindible que ho facen per obtenir l'expressió de la funció de regressió, però probablement no es fixarien si ajustava o no la gràfica als punts]

[133] B. No.

[134] A. No em sona...

[135] E. Val, es que si... És el que hauríeu d'haver fet, que és apretar aquest botó [es mostra com fer-ho] i mirar... i eixia una llista de funcions, que coincidia amb la llista de... del principi [amb la llista de funcions que apareixen a l'ítem 2]. Aleshores, tu havies d'anar provant i mirant...

[136] A. Ah...

[137] E. ...si ajustava més o menys als punts [es mostra què havien d'haver fet]. Clar, la vostra [gràfica] va així [els mostra a la pantalla de nou què haguera passat si hagueren provat a ajustar als punts la funció que ells havien triat]. O siga, evidentment no és la... [riuen] no és la correcta perquè no ajusta als punts [Cal destacar que les instruccions per realitzar aquest procés correctament es troben al full d'instruccions].

[138] A. Ja...

[139] E. Però, en el cas de què el vídeo que vam fer haguérem començat a gravar-lo des del moment en què toca a terra la pilota si que haguera sigut correcte, val? Enteneu perquè?

[140] B. Ja, perquè haguera començat des de zero.

[141] E. Exacte i hagueren coincidit els punts [amb la funció que ells van triar, $y=ax^2+bx$]. Val?

[142] A. Mmm [afirma amb el cap].

[143] E. Després eh... en l'exercici 5. Com haveu calculat aquestos valors? [assenyalant els resultats de calcular $f(0.76)$, $f(0.11)$...]

[144] A. Substituint x en aquesta... [en veu molt baixa i assenyalant la funció de l'exercici 4]

[145] E. Com?

[146] A. Substituint... en... per exemple en la a) que dona que x és igual a 0.76, doncs substituint en aquesta... fórmula [la de l'ítem 4] per x .

[147] E. Però... Ho vàreu fer amb la calculadora? O ho vàreu fer en el programa aquest... el FreeGraCalc®. >>

[148] B. >> En... [assenyale el programa a l'iPad®] Sí, en eixe.

[149] A. Mmm.

[150] E. En eixe, d'acord. I què fèieu per trobar les imatges d'eixos punts [se'ls deixa l'iPad®]?

[151] A. Ací...

[152] E. En Edit?...

[153] A. Sí...

[154] E. ...I què més? Per exemple, per a calcular el primer [$f(0.76)$], què fèieu?

[155] A. Eh (.) ostres... [sembla que no ho recorda]

[156] E. Recordeu que Initial ens donava el valor pel qual començava la taula...

[157] A. Sí, de zero a u per exemple...

[158] E. ...i l'altre, com anaven botant els punts. Què va posar en cada lloc?

[159] A. No m'enrecorde.

[160] B. 0.76 en un lloc però no sé en quin...

[161] A. En Initial... [amb una mica d'inseguretat]

[162] B. Ah sí, en Initial i després el buscaves.

[163] E. Bé, després digueu en aquesta pregunta [la 6]: en general, creus que les respostes obtingudes en la pregunta anterior mostren el que vertaderament ocorre? Per què? (.) I digueu: algunes sí, la majoria, però la de -14 166 coma no se què és un error nostre, no té sentit. Per què penseu que és un error vostre?

[164] B. Perquè continua... baixant, no?

[165] E. Què vols dir?

[166] B. És...

[167] A. Està desproporcionat [es refereix a què el valor és molt baix a diferència de la resta].

[168] B. Perquè ahí en aquest cas és com si... hi haguera un... una fossa o alguna cosa així, no? Se n'aniria cap avall, la pilota.

[169] E. Molt bé, i per què...

[170] A. Però...

[171] E. ...se n'aniria cap avall? Té sentit això?

[172] A. No, no pot travessar el terra.

[173] E. Però que siga negatiu, vol dir que atravesse el terra sempre?

[174] B. Com hem donat el valor zero al terra... no?

[175] E. En el vostre cas...

[176] B. En el nostre cas...

[177] E. ... Però, recordeu que aquestes dades vos les vaig donar jo i no coincidien amb les les... vostres, recordeu?

[178] A. Sí, sí.

[179] E. En aquest cas [assenyalant el full de coordenades], on penseu que estaria...?...

[180] A. Home, el 14 000 està molt lluny...

[181] E. ... La persona que haja tret aquestes dades, on haurà col·locat l'eix d'abscisses en el programa Video Physics®? (.) A veure, quin és el punt que més avall estarà?

[182] B. Es... este.

[183] E. Molt bé, ja que l'altura d'aquest punt és 0.0036, la més xicoteta. Aleshores, on estarà col·locat l'eix de les x (.)?

- [184] A. Mm... En el zero... o siga, en el zero també.
- [185] B. Sí... Un poc més avall. >>
- [186] E. >> Si es fixeu en... Molt bé, ja que el punt és quasi zero, no?
- [187] A. Sí...
- [188] B. Sí.
- [189] A. ...clar.
- [190] E. Aleshores, s'haurà fixat un poc més avall d'on bota la pilota.
- [191] A. Sí.
- [192] E. En aquest cas, és a dir, tenint aquestos punts, té sentit que ixca un valor negatiu?
- [193] B. No i menys tan gran [en mòdul].
- [194] E. Val, per què penseu que és aleshores? Per què penseu que passa açò? (.) Ho hem fet malament a la funció?
- [195] A. Segurament... [B riu]. No sé (.).
- [196] E. Què significa f de... f de deu [$f(10)$], per exemple?
- [197] B. La x , no?
- [198] E. La x ?...
- [199] A. La x ...
- [200] E. I la x que era?
- [201] A. El temps.
- [202] E. Val, i aleshores... i f de x que era? La y que era?
- [203] B. L'altura.
- [204] E. L'altura, que és el mateix que f de x , no? Aleshores, què significa f de deu, per exemple?
- [205] A. L'altura als deu segons?
- [206] E. L'altura als deu segons, molt bé. Té sentit, aleshores, calcular f de tots aquestos valors? f de...
- [207] A. Si té sentit? Doncs...
- [208] E. ... $f(0.76)$, $f(100)$... [assenyalant els nombres a l'ítem 5]
- [209] A. Tindria més sentit calcular d'un segon, dos segons, tres segons...
- [210] E. Val, i què passarà en f de 100?
- [211] A. Doncs que... Estaran... estarà parada en terra ja [la pilota]. Ja...

[212] E. Ja no estarà ni botant, no?

[213] A. Clar, això. Estarà parada.

[214] E. Això és el que no té sentit, ho vegeu ara? Nosaltres volíem estudiar des del moment en què toca terra la primera vegada fins que el torna a tocar. Això, als 100 segons ja fa molta estona que ha passat. Quines dades més penseu que no tindran sentit? Si és que penseu que hi ha alguna més.

[215] A. (.) No, doncs... més o menys, si aquesta és 0.76 segons [apartat a) de l'ítem] un metre i mig pot ser... [mirant la seua resposta]

[216] E. (.) I f d'1.1 tindria sentit?

[217] A. Sí, que... ja està baixant.

[218] E. I f de 0.11?

[219] A. També. >>

[220] B. >> Sí.

[221] A. Està a ras de terra, a 0.30 centímetres... [mirant de nou la seua resposta] >>

[222] E. >> Fixeu-se en les dades [els mostrem el full amb les coordenades dels punts]...

[223] A. En...

[224] E. ... Comencem a comptar des de...

[225] A. Des d'un segon!...

[226] E. Molt bé.

[227] A. ...Ah, doncs...

[228] E. Aleshores quines no tenen sentit?

[229] A. Doncs la de... esta no té sentit [assenyala $f(0.11)$].

[230] E. Val.

[231] A. La la... la c).

[232] E. Alguna més?

[233] A. Mmm (.)

[234] B. La de 0.76. >>

[235] A. >> La b) tam... >>

[236] E. >> Clar, la de 0.76 i evidentment...

[237] A. I la b)...

[238] E. ...l'última.

[239] A. I la b) tampoc, no? Per què si a un segon està a 0.1 metre [mirant el punt (1, 0.18477) al full de coordenades]... puja molt en una dècima [mirant la resposta donada a la segona fitxa, que és $f(1.1)=1.726307$] [interpreta bé el resultat, però cal recordar que les seues dades no eren correctes a l'haver triat una funció que no ajustava]

[240] E. No et fixes en la solució, perquè la solució vostra no està molt...

[241] B. Ja. >>

[242] E. >> Fixa't soles en les dades del full...

[243] B. Doncs... sols té sentit a partir d'u fins que torna a botar.

[244] E. Exacte, i això quan és?

[245] B. En el segon dos [mirant el full de coordenades]

[246] E. Al segon dos, molt bé. Val, està clar?

[247] A. Sí.

[248] E. Aleshores, quines dades no tindrien sentit?

[249] A. Doncs totes.

[250] B. Menys >>

[251] A. >> Menys la b).

[252] E. Val, menys la d'1.1, molt bé. Està tot clar això ja?

[253] A, B. Sí

[254] E. Aleshores... val, la b) ja està contestada... Llegiu la pregunta 7. En veu alta.

[255] A. Respon les següents qüestions... que lligc? La resposta?

[256] E. La pregunta primer. Va, rapidet.

[257] A. Ah, per a quins valors de x , temps, la pilota colpeja el terra. Explica què has de... què has fet per obtindre el resultat.

[258] E. Val, i ahí què heveu dit? [assenyalem la resposta]

[259] A. Doncs que colpeja el terra en el segon zero i en el segon 2.2.

[260] E. I això per què? (.) Com ho heveu fet? >>

[261] A. >> Doncs, hem substituït la y per zero.

[262] E. Val, i on heveu fet els càlculs?

[263] A. Mmm...

[264] B. La calculadora no la... no la vàrem traure... [dirigint-se al seu company]

[265] A. Doncs supose que en l'iPad®.

[266] B. Sí, sí!

[267] E. D'acord, no ho féreu a mà ni res.

[268] A, B. No.

[269] E. Val, aleshores vàreu considerar que y és zero, no? [Ja que ho afirma A en [261]]

[270] A. Sí.

[271] E. Realment y és zero?

[272] A. En el nostre... en el nostre sí, no? [es refereix al seu experiment] >>

[273] E. >> En el vostre sí, i en aquestes dades? (.) Quina y és la que considereu... En quina y...

[274] A. Terra?

[275] E. ...toca a terra?

[276] A. (.) En zero també. No ho sé.

[277] B. U...

[278] E. On serà on toca el terra la pilota?

[279] B. En el segon u [es fixa en el temps ja que, tot i que se'ls està preguntant per l'altura, en l'ítem 7a) ens pregunten pel temps].

[280] E. En el segon u, val... En algun lloc més?

[281] B. [Mira el full de coordenades] En eixe [assenyala la coordenada x de l'últim punt que apareix al full], en el dos.

[282] E. Molt bé. Tornant al que estàvem mirant, eh... sabem que... la pilota toca terra en els segons u i dos, l'altura quina serà en el segon u?

[283] B. Esta [assenyala la coordenada y del primer punt de la taula] zero coma >>

[284] A. >> Però en el... en el segon u, el segon u és el temps inicial, el segon u?

[285] E. Recordes que començàvem... El primer punt que dibuixàvem era quan la pilota tocava el terra, val? És des d'on tu comences a comptar... >>

[286] A. >> Ah, ja porte un segon, val val.

[287] E. Però el que estic preguntant-vos ara és a quina altura toca terra, no en quin segon [reconduint la conversa]. Açò passarà en el primer punt que assenyaem i en l'últim, sí o no?

[288] B. Sí.

[289] E. Aleshores, quin...eh...el sòl a quina altura estarà?

[290] B. A la 0.1846 (.) [coordenada y del primer punt] o en esta... [coordenada y de l'últim punt]

[291] E. Sí, molt bé. El que passa és que com que [les dades o valors de l'altura en el primer i en l'últim punt] estan aproximades no coincideixen, però si es poguera fer exactament...

[292] A. Però serà pràcticament zero, no?.

[293] E. Sí, més o menys, l'altura [a què es trobarà el sol] serà 0.08, 0.09... no? [tractant de trobar la mitjana entre l'altura del primer punt i de l'últim]...

[294] A. Sí.

[295] E. ... Val, passem a l'última pregunta... Per a quins valors de x la pilota arriba a la seua màxima altura [llegint l'enunciat]? Ara heu posat: doncs en la màxima altura de la gràfica x és igual a 1.15. Per què eixa és la màxima altura? Com ho heu fet?

[296] A. Supose que mirant a la gràfica [la del programa Free GraCalc®] el punt més alt.

[297] E. Val, se vos ocorre alguna manera de fer-ho analíticament? (.) Analíticament significa... >> [Se'ls pregunta per si la resposta que donaren va estar condicionada a la falta de temps]

[298] A. >> Ja ja sí sí.

[299] B. Fent el punt mitjà entre què... la primera vegada que bota i la que cau [es refereix a quan torna a tocar el sòl].

[300] E. Val, calcularíeu el punt mitjà entre... què exactament?

[301] A. Doncs si... tenim que el primer bot es dona en el zero... i el 2.2, no? Doncs... a 1.1.

[302] E. Molt bé. Això sí, considerant les vostres dades.

[303] A, B. Sí sí.

[304] E. Val, doncs res, ja està tot. Moltes gràcies als dos.

Parella 2. Alumnes C i D

[1] E. Primer de tot, mirem l'exercici 1. Per què vàreu dibuixar aquesta funció?

[2] C. Perquè... No sé, pensàrem que la trajectòria de la pilota seria eixa [referint-se al gràfic], simplement. O siga, a mesura que hi ha més temps... hi hauria un desplaçament de la pilota perquè en realitat no sabíem que era vertical totalment, aleshores... ho vam dibuixar així.

[3] E. I si fora verticalment, com seria...? Segons tu.

[4] C. (.) Seria igual.

[5] E. Però en principi vàreu pensar que la pilota anava desplaçant-se... horitzontalment?

[6] C. No sé, es que va ser... No, o siga, si el temps... hi ha una variable de temps, simplement doncs... la pilota té diverses altures i, a mesura que va passant el temps, hi ha un moment en què torna a la mateixa altura que seria la inicial que seria la zero...

[7] E. Molt bé.

[8] C. ...i passa el temps i tornaria a la... a la inicial que seria zero... i cada vegada pujaria menys... O siga...

[9] E. Molt bé.

[10] C. ...tindria una altura menor.

[11] E. Val, encara que botara sobre... ella mateixa? >>

[12] C. >> Encara que botara sobre el mateix lloc.

[13] E. Val. Eh... abans de res... el que vos demanaven era que, val, el moviment és eixe [el que acaba de descriure l'alumne], tu soltes la pilota cau a terra i tal, però el que anàvem a estudiar era solament el primer bot... de la pilota.

[14] C. Val.

[15] E. Val? Aleshores... açò no és el primer bot, no? Evidentment... >>

[16] C. >> No, el primer seria aquest [assenyala el tros de la funció corresponent a la primera paràbola que dibuixen].

[17] E. Seria sols eixe, val. En el segon exercici, com recorde, vàreu tindre uns pocs problemes perquè un deia que era l'opció b) i l'altre la c). Què va passar al final? Vàreu arribar a un acord...?

[18] C. Sí perquè eh... sabíem que hi havien dos variants [variables], la de posició [altura] i la de temps, però en l'equació de... estàvem guiant-nos perquè formava una paràbola i aleshores dèiem que havia de ser una equació de segon grau [una funció quadràtica] i hi havien dos opcions, la b) i la c). Estavem entre aquestes dos opcions però eh... ell deia que hi havia c però com partia del punt (0,0) no hi havia ningun...

[19] D. No però jo...

[20] C. ...no hi havia c que variara en quina posició començava ja el moviment del cos.
>>

[21] D. >> Jo deia que era eixa [l'opció b)] perquè és una paràbola i té c i la c pot ser zero.

[22] E. Val, què significa la c en eixe cas per a vosaltres?

[23] C. Eh... l'altura, o siga, al al lloc... o siga, l'altura en què començaria... on on comptàriem el primer bot, si el llançarem des de dalt doncs a lo millor la c seria l'altura d'on llançaríem i el primer bot ja no seria, o siga, no comptàriem des del (0,0) sinó que

seria del zero a lo millor... un metre [es refereix a què l'origen de coordenades seria (0,1) si soltarem la pilota des d'un metre] per l'altura des d'on soltaríem la pilota.

[24] E. Val, aleshores què seria en eixe cas la c per a tu [assenyalant el dibuix]?

[25] C. Doncs... la posició de l'altura.

[26] E. Quina altura?

[27] C. La de la pilota.

[28] E. Ja, però la pilota va botant i canviant d'altura, com tu m'has explicat abans (.) Què vol dir que c siga zero?

[29] C. Doncs... que l'altura...que està al sòl.

[30] E. Molt bé, però quan? En algun moment en particular?

[31] C. Ací, ací, ací... [Assenyala tots els punts en què toca a terra la pilota].

[32] E. Segur? Tu estàs d'acord?

[33] D. Jo crec que soles ahí [assenyala el punt (0,0)].

[34] E. Molt bé, això...

[35] C. Ah sí!

[36] E. ...sí. I al final vàreu arribar a un acord o què va passar?

[37] C. Em tingué que imposar [riuen].

[38] E. Vos vaig dir que si no arribàveu a cap acord escrivíreu les dues respostes i explicareu perquè...

[39] D. Ja però al final vàrem pensar que era igual.

[40] E. Què era igual?

[41] D. Posar una equació o l'altra perquè com c era zero...

[42] E. Val, bé (.) I ací expliqueu que... bé, la pregunta és: explica... eh... perquè has fet aquesta elecció i poseu perquè la a indica l'eix de les y i la b l'eix de les x i com comença en (0,0) no tenim c [risses].

[43] E. L'últim ho tinc clar perquè és el que m'estàveu explicant, no?

[44] C, D. Sí.

[45] E. Per què vàreu dir que la a indica l'eix de les y i la b l'eix de les x ?

[46] C. Això ja sí que no ho sé... [risses] Ho va dir ell [assenyala al seu company].

[47] D. Doncs perquè (.) [Sembla que dubta perquè no sap perquè han escrit això i com, casualment, els seus companys del grup 1 han respost de forma similar els preguntem si s'ho van copiar d'ells]

- [48] E. Pot ser que s'ho copiareu del grup de davant?
- [49] D. [Risses] No...
- [50] C. No.
- [51] D. ... no
- [52] E. Segur?
- [53] C. Això sí que no ho copiàrem. No copiàrem res.
- [54] E. Val, aleshores perquè vàreu respondre açò? Es vàreu equivocar o què va passar?
- [55] C. No, perquè... >>
- [56] D. >> Pensàvem que era així...
- [57] E. Així com?
- [58] D. Que la a és la x ... que era el temps i la b l'altura.
- [59] E. En realitat no és així...
- [60] D. Ja...
- [61] E. Ací no podeu vore... no podeu interpretar què són les lletres ja que no és tan simple com pareix.
- [62] D. Val...
- [63] E. Bé, passem (.). Quant a... al que vàreu fer el primer dia [els mostrem una imatge a l'iPad® que es veu on varen col·locar els eixos coordenats], eh... per què vàreu elegir exactament l'eix d'abscisses posar-lo ahí? [Es miren amb cara com si no ho recordaren] S'enrecordeu que vos vaig dir: poseu l'eix d'abscisses on cregueu que després la funció eixirà millor?
- [64] D. (.) Sí.
- [65] E. El poseu exactament als peus [de l'alumne].
- [66] C. Sí.
- [67] E. Per què?
- [68] C. No sé, va ser una elecció a l'atzar.
- [69] E. A l'atzar? >>
- [70] D. >> I com vàiem que la pilota quan tocava al sòl coincidia amb un quadre del... del per dir-ho així, les coordenades que fa l'iPad® doncs diguérem que donaria una forma regular.
- [71] E. D'acord... A veure, que més... Quant a les coordenades dels punts, vos vaig passar aquest full. Per què vàreu triar... eixes coordenades exactament?

- [72] D. Per què eren més fàcils d'escriure a la calculadora [riuen]...
- [73] E. Ah, val.
- [74] D. ... Acaben tots en zero o en període.
- [75] E. Val, però ahí [assenyalant la coordenada 29 del full] també hi ha altres que acaben en zero, per què eixes no?
- [76] D. Per què no ens vàrem donar compte.
- [77] E. D'acord. I si els nombres que acabaren... en zero o període hagueren sigut els sis primers, també haguéreu agafat eixos (.)?
- [78] C. No, però també vam... O siga, també... els nombres aquestos els vaig agafar jo però vaig seguir el de... el... el primer decimal va ser zero, després quatre i perquè com vaig veure una... com una distància, doncs vaig agafar la mateixa, la distància del quatre... doncs el següent el huit...
- [79] E. Ah, val, com de zero a quatre van quatre...
- [80] C. ... I com vaig... I com i com no agafarem el quatre zero [el 1.401666666667], agafarem el tres [el 1.435000000000] [ara es refereix a la segona xifra decimal], doncs el huit tres també [el 1.835000000000], el quatre sis [el 1.468333333333] i el huit sis [el 1.868333333333].
- [81] E. D'acord. Penseu que és la millor manera d'agafar els punts...
- [82] D. No...
- [83] E. ...per representar-los?
- [84] D. No.
- [85] E. Quina haguera sigut la millor?
- [86] D. Doncs, agafar-los més separats. Que no estiguen junts entre sí.
- [87] E. Val, com per exemple.
- [88] D. Doncs, el u... [Assenyalant el primer punt]...
- [89] E. Aquest...
- [90] D. ... Un altre per ací... Altre per ací, per ací, per ací [assenyala punts que equidisten entre ells]. >>
- [91] C. >> Però no els agafes tan di... jo els he agafat més diferents. Tu el que has fet ha sigut agafar més punts però jo els he agafat més consecutius [en realitat agafa el mateix nombre de punts però equidistants].
- [92] E. Però, per què vols agafar-los més consecutius?
- [93] C. Per a tindre un marge d'error menor. Però >>

[94] D. >> El meu és menor.

[95] C. El teu marge d'error és menor perquè tens més punts.

[96] E. No, té sis punts, igual que tu.

[97] C. [Compta els punts] Ah, si. Ah val val (.). Però al ser més consecutius... no hi ha tanta distància d'un punt a altre, per tant...

[98] E. I això és millor per a representar una funció?

[99] C. Jo crec que sí.

[100] E. Per què?

[101] C. Perquè... a lo millor si de un punt que hi ha eh... A veure, si hi ha una distància major, doncs tu a l'hora de representar-ho doncs fas una línia que... a lo millor si passa un punt entremig, eixa línia no passa pel punt eixe.

[102] E. Ja, però si tu per exemple els agafes molt amuntonats... Si tries per exemple estos sis primers punts... [assenyalant els punts al full] què passaria aleshores?...

[103] C. Que...

[104] E. ... Seguint el teu criteri, triem més punts junts per a què així... Què passaria aleshores?

[105] C. Doncs... >>

[106] D. >> Ja... >>

[107] E. >> Tindríem molt ben aproximat un trosset aixina de la funció, no [es fan gestos amb les mans indicant que seria un tros xicotet]? Representeu-los [se'ls facilita llapis i paper].

[108] D. Com?

[109] E. Més o menys, no cal que ho mesures ni res (.). [D dibuixa un grapat de punts molt junts].

[110] D. Així?

[111] E. Val sí. Això i la funció que heu dibuixat després es pareixen?

[112] C. No.

[113] E. Haguéreu pogut pensar que és una altra funció. Açò que podria ser [assenyalant els punts que han dibuixat]?

[114] D. Podria ser una recta o el que siga.

[115] E. Clar. Aleshores, com més separat millor, no?

[116] D. Sí. >>

[117] C. >> Ja...

[118] E. Molt bé. I quin penseu que seria el nombre mínim de punts per a... que podríeu triar per dibuixar la funció que heveu triat després?

[119] C. Quatre. Quatre o... dos.

[120] E. El...

[121] C. No...

[122] E. ...mínim, el mínim.

[123] C. Ah, el mínim... Doncs tres. >>

[124] D. >> Tres.

[125] E. Per què?

[126] D. El vèrtex...

[127] C. El vèrtex...

[128] D. ...i dos punts que estiguen... [fa uns gestos amb les mans indicant que necessiten estar un a cada costat]

[129] E. I dos no? Pregunte.

[130] D. Com que dos? >>

[134] C. >> I com...

[135] E. soles dos [com a resposta a D]

[136] C. ...saps... I com saps què fa la paràbola? >>

[137] D. >> Sí, també.

[138] E. També? Explica't.

[139] D. Si estan a la mateixa distància del vèrtex... fas com si fora una media... mediatriu...

[140] E. Simetria, sí molt bé.

[141] D. I ja fas el mateix.

[142] E. Sí, molt bé. Val... Passem al segon full. Per què heveu triat ací aquesta funció? [A l'activitat 4].

[143] D. Com que eixa? Perquè ja la posava ahí en la... en la esta [assenyala l'iPad®].

[144] E. Sí, però per què vàreu decidir que era una funció quadràtica?

[145] D. Doncs per què vàiem que el dibuix... Perquè era... perquè la forma que feia era de paràbola

[146] E. Val. I vàreu descartar la que hi havia... que havíeu triat inicialment [$y=ax^2+bx$], això per què? Perquè la que triareu inicialment no és la que tenia c (.). Què va fer que canviareu d'opinió?

[147] C. [Bufa] No sé, simplement que els següents exercicis... Crec que... O siga, no els vam fer... sí que els vam fer referents al... a l'anterior [al primer full] però a l'hora de ficar-lo en el iPad®...

[148] E. Sí...

[149] C. ...no sé, no vam tindre en compte l'equació que... que elegírem a l'exercici 2, el que férem.

[150] E. Val i, a banda, vos va influir en alguna cosa l'haver triat la funció... vàreu provar a veure si eixa [$y=ax^2+bx$] ajustava?

[151] C. No.

[152] E. I per què vàreu triar aquesta [assenyalant la funció de l'ítem 4]? Per alguna raó seria.

[153] C. Perquè ho posava ahí simplement [assenyala l'iPad®], o siga, férem l'equació i donava eixos resultats [referint-se a què a l'ajustar la funció, els valors dels paràmetres que van sortir van ser eixos]

[154] E. Quina equació? A veure... per què vàreu triar >>

[155] C. >> Esta d'ací [assenyala la funció de l'ítem 4].

[156] E. Sí però per a fer això primer heu de triar quina... Triàveu ací [en la llista de funcions]. Apretàveu ací i vos eixia una llista de fórmules [se'ls indica a l'iPad®].

[157] C. Sí.

[158] E. I vàreu triar eixa i després...

[159] D. En Fit.

[160] E. ...apretaríeu Fit... >>

[161] D. Es què si haguérem agafat eixa [la que no té c] tindria que passar per eixe punt [pel (0,0)] i també per eixe [pel primer dels punts]...

[162] E. Clar...

[163] D. ...aleshores faria una forma estranya [es refereix a què quan uniren tots els punts amb el (0,0), no donaria una forma coneguda].

[164] E. Sí, aleshores vàreu triar eixa per què?

[165] D. Per què ajustava als punts.

[166] E. Val. Després... Em podeu explicar el 5 com el vàreu fer?

[167] C. Doncs... >>

[168] D. >> Mmm...

[169] E. El féreu amb el programa Free GraCalc®? O ho féreu...

[170] D. Sí, no, amb el programa...

[171] E. Val.

[172] D. ... Vam posar... la taula però que passara pel 0.76.

[173] E. Val, i com féreu el del 0.76? [D agafa l'iPad® i comença a fer-ho] Així, en Edit, no [tractant de descriure verbalment el que fa D]?

[174] D. Sí, i ahí [en Initial] ficàvem... menys u? I el Delta de... [es queda pensant]

[175] E. El menys u per què?

[176] D. Ah que és 0.76! Doncs (.) [Borra el menys u i escriu un zero i, seguidament escriu "0,01" i el programa li indica que ha comés un error].

[177] E. Dis-m'ho si vols i jo ho escric.

[178] D. Des de zero i de 0.01 [assenyala per referir-se a què en Initial hem d'escriure zero i en Delta 0.01].

[179] E. Val, i després què fèieu?

[180] D. I anàvem buscant i també teníem ahí el 0.11 [un altre dels valors que volien calcular].

[181] E. Ah, molt bé molt bé. Ara, en la següent pregunta, en la 6, diu: en general, creus que les respostes obtingudes en la pregunta anterior mostren el que vertaderament ocorre? I responeu: no, per què les coordenades donades comencen a temps u. Què vol dir això? Teniu l'iPad® i el full de coordenades ací, per si els necessiteu (.). Què vol dir això?

[182] C. Que ja... o siga, a l'hora de les coordenades que ens donen no estan a temps zero, o siga, de... en el moment en què la pilota toca el sòl a... al moment en que ens donen les coordenades ja ha passat un segon.

[183] E. I això d'on ho has deduït?

[184] C. Mm... (.)

[185] D. Es que estes són abans de u [Assenyala el 0.76].

[186] E. El 0.76?

[187] D. Clar... És com si fora abans de que la llançarem.

[188] E. Però això per què...? En què s'haveu basat per dir-ho? (.) On haveu mirat per deduir-ho? (.)

[189] D. Mmm... Ací [assenyala la coordenada x (temps) del primer punt, al full de coordenades]

- [190] E. D'acord, aleshores quines dades no tindrien sentit?
- [191] D. Esta també és abans de u [assenyala $f(0.11)$].
- [192] E. El 0.11?
- [193] D. Sí.
- [194] E. Val, molt bé. I aquesta, la d'1.1 tindria sentit?
- [195] C. Seria la única.
- [196] E. I esta no [la $f(100)$]? Per què? Per què tampoc tindria sentit?
- [197] D. Perquè és com... ahí en este cas es com si no... hi haguera sòl i la pilota se n'anara cap avall.
- [198] E. Ah, en aquest cas mires que siga un nombre negatiu, mires la segona part... [la coordenada y]
- [199] D. Clar.
- [200] E. Però penses que si t'haguera donat un nombre positiu seria... hauries considerat que estava bé?
- [201] D. Mm... No.
- [202] E. Per què?
- [203] D. Doncs... No sé.
- [204] E. Pensa-ho. Tranquil que tenim temps.
- [205] D. Perquè... el temps que tarda en botar no arriba a 100 segons.
- [206] E. Molt bé, als 100 segons la pilota ja... >>
- [207] D. >> Està parada.
- [208] E. Sí, molt bé. I exactament, podries dir-me en quin moment acabaries d'estudiar la... el bot de la pilota? És a dir, estudiàvem des del primer bot fins al segon. En quin moment... en quin segon parem d'estudiar el moviment?
- [209] D. Fins que fa el primer bot? O siga, el segon >>
- [210] E. >> Des del primer bot fins al segon.
- [211] D. Doncs dos coma... [i assenyala la coordenada x de l'últim punt que és 2.001666]
- [212] E. Dos coma zero zero... val. És a dir, si jo et diguera que eh... f de 2.2, tindria sentit?
- [213] D. Donaria zero coma zero zero zero... quasi zero.
- [214] E. Però tindria sentit?

- [215] D. No, perquè ja ens en passem [es refereix a què ja estem fora del domini].
- [216] E. Val, molt bé. Per què penses que es contradiu que hi haja un nombre negatiu ací [referint-nos al valor que resulta de calcular $f(100)$, ja que abans diu que la pilota se n'aniria cap avall en aquest cas]? Per què ho penseu? Tu ho penses també o penses que no [dirigint-nos a C]? Es contradiu que hi haja un nombre negatiu? (.). Què significa f d'alguna cosa? f d'alguna cosa que era?
- [217] D. On x val...
- [218] C. On està la x .
- [219] E. Però què era... la y ?
- [220] C. L'altura.
- [221] E. L'altura. I y és el mateix que $f(x)$, no?
- [222] C, D. Sí, sí.
- [223] E. I si la y era l'altura, la y pot ser un nombre negatiu?
- [224] D. No.
- [225] E. No, perquè? Mai?
- [226] D. Depén. Si...
- [227] E. Depén de què?
- [228] D. ...doncs... segons si hi ha terra o no.
- [229] E. Si que?
- [230] D. Si hi haguera terra o no. Si... si llances una pilota i continua caent caent caent pot ser que siga [negativa], segons el teu origen de coordenades.
- [231] E. El nostre cas és així? Vull dir, al nostre cas la pilota no va caent, para en un determinat lloc i rebot, no?
- [232] C. Sí.
- [233] E. Aleshores, té sentit que siguen negatives les dades?
- [234] D. No...sí, no ho sé (.)
- [235] E. A veure, pensem en el vostre experiment. Si haguéreu utilitzat les dades que vos eixien, hagueren pogut eixir nombres negatius?
- [236] C., D. Sí .
- [237] E. Per què?
- [238] C. Per què l'eix d'abscisses està per dalt de la pilota.
- [239] E. Val, i tindria sentit que haguera eixit un nombre negatiu?

[240] C. Sí >>

[241] D. >> No.

[242] E. [Risses] Sí o no?

[243] D. Sí que eixiria però no tindria sentit.

[244] C. Sí que té sentit perquè nosaltres hem posat l'eix d'abscisses... aleshores sabem que al... bota per baix de l'eix de les... de les x.

[245] D. Clar, però el més lògic haguera sigut l'eix d'abscisses posar-lo on...

[246] C. A l'altura de la pilota [es refereix a l'altura en què la pilota toca el sòl ja que en la imatge de l'iPad® la pilota està sobre el terra].

[247] D. ...a l'altura de terra i aixina segur que sempre serà l'altura positiva.

[248] E. Clar, i exactament... si estem estudiant el bot de la pilota on haguera tingut sentit posar l'eix d'abscisses exactament?

[249] D. En el sòl >>

[250] C. >> En el primer punt on bota la pilota [referint-se no al punt que marquen, ja que ells el marquen al centre de la pilota, sinó al punt en què la pilota tocaria el terra].

[251] E. En el primer punt, per què?

[252] C. Perquè així l'altura seria positiva sempre.

[253] E. I seria? Però l'altura en què tocaria la pilota a terra sempre quina seria?

[254] C, D. Zero.

[255] E. Zero, val molt bé (.). Tornant on estàvem... Ací vos preguntava: quines són les dades que no s'ajusten al que esperàveu? Ja m'haveu dit que són la de l'apartat a), la de l'apartat c) perquè no arriben i la de l'apartat d), val. No obstant... ací [a l'apartat b) de l'ítem 6] escriviu: quan passa molt de temps i al principi perquè estan molt per davall. A què es referiu?

[256] C. Es que era perquè estes eren negatives... [assenyalant els valors de l'altura per a 0.76, 0.11 i 100] però està mal.

[257] E. Ah, d'acord. Clar, ara ja hem vist que no era així... molt bé. I, per últim, la pregunta 7. Llegiu l'enunciat.

[258] D. Per a quins valors de x (temps) la pilota colpeja el terra. Explica què has fet per a obtindre el resultat.

[259] E. Val. Què haveu fet ahí?

[260] C. Una equació de segon grau, la resolució.

[261] D. Quan... y val zero, quan val la x.

[262] E. Val, i on haveu calculat açò [el resultat de l'equació]?

[263] D. Com?

[264] E. Vull dir, ahí... ahí estan... ahí heu escrit l'equació amb lletres no...

[265] D. Sí.

[266] E. On heu fet els càlculs? En un altre full? Com ho heu fet? >>

[267] D. >> En la calculadora.

[268] C. En la calculadora de l'iPad® amb les dades d'abans [assenyalen la funció de l'ítem 4]. >>

[269] D. >> Amb les dades de la gràfica, de la fórmula d'abans [es refereix a les de l'ítem 4, ja que les dades d'ací s'obtenen a partir de fer la regressió d'una sèrie de punts que tenen dibuixats en una gràfica]

[270] E. Val, molt bé. Penseu que està ben fet... és a dir, penseu que està bé igualar l'altura a zero per a traure els punts en aquest cas? (.) A l'experiment, l'altura [a què es troba el terra] era zero?

[271] C. No.

[272] E. Quin...què era la... l'altura?

[273] C. Negativa.

[274] E. No, en el vostre...

[275] C. No...

[276] E. ...cas no, en les dades... S'enrecordeu de què aquestes dades no coincidien amb l'experiment que havíeu fet?

[277] C. Sí sí.

[278] D. Sí.

[279] E. Aleshores, podríeu mirant això [el full de coordenades] dir-me eh... la persona que haja fet aquestes dades on haurà col·locat l'eix d'abscisses?

[280] D. Doncs (.) un segon abans de llançar, de què...

[283] D. L'ha llan... l'ha ficat... la... coordenada x [referint-se a l'eix de les x], una cap a l'esquerra...

[284] E. Però la x era el temps, recordes?

[285] D. Sí, un segon abans de què tocara el terra.

[286] E. Clar, però tu això no pots... o siga, tu graves i... dóna la casualitat que ha sigut així. No pots fixar-te en el temps. L'altura, s'heu de fixar en l'altura (.) Aleshores on estarà col·locat l'eix de les x?

[287] C. Doncs (.)

- [288] D. Doncs un poc per davall de quan bota [la pilota]. >>
- [289] E. Molt bé i podríeu dir-me on... a quina altura estarà el terra?
- [290] D. A 0.184773...
- [291] E. Per què? Per què dius això?
- [292] D. Doncs perquè... ahí és on la pilota arriba al terra...
- [293] E. Molt bé. I que passa ahí? [assenyalant l'últim punt del full de coordenades]
- [294] D. (.) No sé...
- [295] E. Ahí també toca terra la pilota no? Per què no coincideixen? [referint-nos a les coordenades temporals del primer i de l'últim punt] (.) Bé, açò passa perquè els punts que es marquen estan aproximadament però en realitat haurien de coincidir.
- [296] D. Ah... ja.
- [297] E. Aleshores, què valdria l'altura del terra?
- [298] C. Quasi zero?
- [299] E. Exacte, quasi zero ja que l'altura de l'últim punt, que hauria de caure exactament damunt del primer, sí que és quasi zero [explicant-ho sobre el full de coordenades].
- [300] D. Sí.
- [301] E. Molt bé. I l'última... per a quins valors de x que és el temps la pilota arriba a la seua màxima altura? Per a quins valors de x . Què heu fet ahí?
- [302] D. Calcular el vèrtex, que és el punt de màxima altura... amb la fórmula de menys b partit per dos a ... i ens ha eixit 1.5.
- [303] E. Val, i això que ens dóna?
- [304] D. L'altura a què es trobarà... l'altura màxima.
- [305] C. Però no ens dóna el valor de x que és el temps.
- [306] E. I com calcularíeu el valor de x ?
- [307] D. En l'equació, canviant x ... Ah no, es que eixe [el valor que els ha eixit, 1.4933] ja és el que ens demana, això és el temps!
- [308] C. Ah sí!
- [309] E. Clar, això és el temps, no l'altura! Val molt bé, ara sí.