UNIVERSITAT DE VALÈNCIA
Máster en Profesor/a de Educación Secundaria

COMPETENCIAS EN LOS NÚMEROS DECIMALES PERIÓDICOS

Memoria de Trabajo de Fin de Máster presentada por:

YOLANDA BELTRÁN GARCÍA

Tutorizada por:
Dr. Bernardo Gómez Alfonso
Departamento de Didáctica de las Matemáticas

Valencia, 26 de Noviembre de 2013

Ficha técnica:

Máster: Máster en Profesor/a de Educación Secundaria por la Universitat de València

Especialidad: Matemáticas

Autor: Apellidos: Beltrán García

Nombre: Yolanda

Título de la memoria: Competencias en los números decimales periódicos

Tutor: Apellidos: Gómez Alfonso

Nombre: Bernardo

Departamento: Didáctica de las Matemáticas

Fecha de defensa: Diciembre 2013

Calificación (numérica y Matr. de Honor si procede):

Palabras clave: número decimal periódico, expresión decimal periódica, desarrollos decimales, operaciones, actuaciones de los estudiantes, didáctica de las matemáticas.

Keywords: periodic decimal number, periodic decimal expression, decimals developments, operations, students' performances, mathematics teaching.

Códigos Unesco: 5803.02 (Formación de profesores, 12 (Matemáticas), 1299 (Didáctica de las Matemáticas)

Resumen: El objetivo de este estudio es determinar las dificultades que estudiantes de cuarto de ESO, de Bachillerato y del Máster de Profesor de Educación Secundaria de la especialidad de Matemáticas tienen con la operatoria y el orden, cuando realizan cálculos con números decimales periódicos. El trabajo se sustenta en un estudio de Rittaud y Vivier, del cual se hace una réplica de una parte de su cuestionario que utilizamos para la toma de datos. El análisis de las respuestas de los estudiantes permite identificar errores y carencias en la enseñanza, conducentes a un esquema de clasificación e interpretación de las actuaciones de los estudiantes.

Abstract: The aim of this study is to determinate the difficulties that students of fourth course in secondary school, high school and teacher´s master of secondary school students have with operation and order when they realize calculations with periodic decimal numbers. The study is based in a previous article of Rittaud and Vivier which is a replica of a part of their test we used for data collection. The analysis of students' answers allows identifying mistakes and deficiencies in education, leading to a classification scheme and interpretation of student performances.

ÍNDICE

Pág.

1. INTRODUCCIÓN

Las concepciones que los estudiantes construyen de los conceptos matemáticos dependen de los acercamientos o enfoques escolares con que la enseñanza los pone a su alcance, y varían a medida que el conocimiento de los estudiantes va evolucionando hacia un estatus superior.

La identificación y caracterización de estas concepciones permite conocer el efecto de la enseñanza al determinar qué es lo que realmente están aprendiendo los estudiantes y tomar decisiones al respecto, ya que en algunos casos son conocimientos erróneos, y esto constituye un obstáculo para el aprendizaje y la evolución de las concepciones.

Según Socas (2001, p.298), "Los números decimales se han convertido, en estos últimos años, en los protagonistas de todos los cálculos, ordenadores, calculadoras,…, desplazando completamente las fracciones. Sin embargo, su tratamiento en el ámbito escolar, propuestas curriculares en programas oficiales y desarrollos didácticos, no parece estar a la altura de las circunstancias, y no sólo por el interés del cálculo con calculadoras y ordenadores, sino, también, por el papel determinante que pueden jugar en la organización y comprensión de los sistemas numéricos.

La escritura decimal de los números ha producido confusiones entre lo que es un número decimal y lo que no lo es, identificando más al número decimal por su escritura decimal que por sus propiedades intrínsecas, lo que ha originado cierta ambigüedad entre la escritura decimal y el número decimal, de tal manera que decimal está asociado a números con comas en contraposición al número entero o número sin comas; esta acepción del término decimal es origen de diferentes errores."

En relación con los decimales finitos, hay una problemática identificada (Centeno, 1988), o como acabamos de ver en Socas (2011), pero son pocos los trabajos en relación con los números decimales periódicos.

Con el fin de aportar conocimiento fundamentado sobre este tema, este trabajo se va a centrar en el tema de los números decimales periódicos. Se quiere indagar en qué de particular se puede decir de los números decimales periódicos, más allá de la problemática de los números decimales.

2. OBJETO DE ESTUDIO

En el apartado que sigue, se habla de los antecedentes históricos de los números decimales y de los principales contextos en su enseñanza e implicaciones educativas que estos conllevan. Finalmente, se plantean los principales objetivos de este estudio.

2.1. Antecedentes históricos de los números decimales

A grandes rasgos, se pueden encontrar las etapas en el desarrollo de los números decimales en Centeno (1988). Pero aquí vamos a mostrar el resumen que da Socas, 2001, y algunos aspectos recogidos de los apuntes de Gómez, 2012.

Según Socas (2001), durante siglos los números decimales sirvieron para medir y representar cantidades, al igual que se utilizaban los sexagesimales en la matemática babilónica, sin ser reconocidos ni como objeto de estudio ni útiles para la resolución de problemas. Este tratamiento tuvo especial interés a partir del siglo IX. La primera obra que se conoció de la propagación del sistema decimal de posición es el *Tratado de aritmética* de cuando Al-Kuwarizmi, quien unificó el cálculo de los naturales con el de las razones geométricas e introdujo la numeración decimal.

Se puede suponer que durante seis siglos (siglos X al XV), los decimales estuvieron potencialmente presentes en la cultura y su estatus estuvo en evolución. Es decir, desde el siglo X, con Al-Uglidisi, el decimal se utilizó conscientemente, se le reconoció y se le nombró, pero no era todavía un objeto de estudio. Fue en el siglo XV, con Al-Kashi, cuando se le reconoció como un descubrimiento matemático, pero carecía todavía de una caracterización teórica. Al-Kashi contribuyó al desarrollo último del sistema de numeración de posición y escribió un tratado de la aritmética, *La llave de la aritmética*.

En la primera mitad del siglo XVI aparecieron una gran cantidad de libros de álgebra, especialmente de origen germánicas, y es en una de ellas, la de Rudolff, en el año 1525, donde el autor mostró el carácter particular que tienen la división por 10, 100, 1000, etc. y señaló una notación eficiente. Durante algún tiempo este autor fue considerado el padre de las fracciones decimales y de su notación moderna, pero estudios posteriores pusieron de manifiesto que el autor no conocía la importancia y la generalidad de este método y que las cifras separadas no eran décimas, centésimas,…, sino simplemente el resto de la división. Fue Viète, en el año 1579, algebrista francés de la segunda mitad del siglo XVI, quien los utilizó sistemáticamente y de manera consciente en una de sus obras, y propuso sustituir las fracciones sexagesimales y sus múltiplos de sesenta, que eran utilizadas habitualmente desde la antigüedad, por los múltiplos y submúltiplos de diez.

A pesar de la propuesta de Viète de generalizar el uso de las fracciones decimales y de que éstas fueran aceptadas por los matemáticos y algunos astrónomos, esto no significó un reconocimiento de la importancia de lo que hoy conocemos como expresión decimal hasta que el matemático belga Simón Stevin publicó *La Disme* (1585), libro en donde se presentó por primera vez las reglas para operar con decimales que *permite efectuar los cálculos con fracciones propios de los negocios usando las mismas reglas de los enteros.* Explica la base del sistema de numeración decimal para números no enteros, y lo que es más importante, la descripción de los logaritmos de las cuatro operaciones elementales y el de la raíz cuadrada para estos números, y precisa el ámbito de utilización de estos nuevos números: la unificación de los sistemas de medida, pesos y monedas.

Aunque Stevin no recogió el punto o la coma para separar la parte entera de la decimal, sino parejas de símbolos formadas por una cifra en el papel de multiplicador y un círculo con un número dentro que indicaba el orden de unidad. Lo que estaba haciendo era extender los criterios de la numeración posicional a las potencias negativas de la base 10.

A parte de Stevin con la publicación en el año 1585 de su obra La Disme, los decimales también se extendieron gracias a las obras de otro autor, Napier, en el año 1617, autor de las primeras tablas de logaritmos publicadas. Con Napier se avanza hacia la notación moderna de los decimales, con un punto o una coma. En aras de mayor abreviación los círculos dejaron de escribirse, una vez incorporado un signo para separar lo entero de lo fraccionario. Sin embargo, el reconocimiento matemático de los números decimales no se dio hasta que los números reales fueron plenamente aceptados como objetos matemáticos.

La generalización de la notación decimal estuvo impulsada por el mayor uso de los valores trigonométricos al facilitar su uso y operación, especialmente tras la invención de los logaritmos (S. XVII), pero sobre todo empezó a generalizarse a partir de 1789 con el nacimiento y la implantación del Sistema Métrico Decimal (sistema unificado de pesas y medida) en Francia, que se expandió a Europa a partir de 1849.

2.2. Principales contextos en la enseñanza de los números decimales

Las prácticas de la enseñanza han utilizado diversos contextos para introducir los decimales. Gómez (2010) señala que una revisión de los libros de texto vigentes desde la implantación y generalización del sistema público de enseñanza permite distinguir cuatro contextos principales en la enseñanza de los números decimales:

- La numeración
- La medida
- Las fracciones decimales
- La ampliación de los campos numéricos

Esto ha dado lugar a concepciones sobre los mismos que constituyen maneras diferentes de entenderlos.

En el *contexto de numeración*, los números decimales se originan al prolongar el principio del valor relativo del sistema de numeración posicional de base diez en el sentido opuesto al de los números naturales y la coma decimal se introduce a fin de poder distinguir las cifras que corresponden a un orden de unidad inferior a la unidad natural.

En el *contexto de medida*, los números decimales surgen como una forma de codificar la medida en el Sistema Métrico Decimal. Son la expresión numérica de cantidades en términos de unidades y subunidades de medida en el S. M. D. y la coma decimal es la marca que sirve para diferenciar la unidad principal de las subunidades convencionales de medida, y actúa como el indicador que señala el paso de la una a las otras.

En el *contexto de las fracciones decimales*, los números decimales se presentan como una nueva forma de escritura de las fracciones decimales $\left(\frac{a}{10^n}\right)$, consideradas éstas como un caso particular de las fracciones $\frac{a}{b}$. Bajo esta interpretación, se trata de un cambio de sistema de representación de los decimales.

Finalmente, en el *contexto de la ampliación de los campos numéricos*, como los números racionales y los irracionales quedan determinados mediante expresiones decimales (finitas, periódicas o infinitas no periódicas) y admitiendo que juntos constituyen los números reales, se puede entender que los decimales son la expresión numérica de la recta real y por tanto se constituyen en concepto intuitivo de número real.

2.3. Implicaciones educativas

Las concepciones anteriores muestran enfoques diferentes para organizar la enseñanza de los números decimales. Estos enfoques están condicionados por decisiones curriculares que afectan al orden y enlace de las ideas matemáticas.

Así, si la medida se enseña antes que las fracciones, los decimales se enseñan antes que las fracciones y en el contexto de la medida. Recíprocamente, si las fracciones se enseñan antes que la medida, los decimales se enseñan en el contexto de las fracciones decimales y antes que la medida.

- **Efectos del enfoque de la numeración**

En el contexto de las reglas de numeración, los decimales aparecen como números abstractos que se incorporan al universo de los números naturales, pero de los que se desconoce su razón de ser, ya que se obvian los problemas reales que permitirían dar cuenta de la necesidad de su incorporación al sistema numérico.

Bajo este enfoque, la secuencia de enseñanza de los números decimales se limita a extender las reglas de la numeración, incorporar la coma decimal y ampliar el papel del cero, que adquiere nuevo significado.

Un efecto perverso de este enfoque de presentación de los números decimales es que induce a pensar que sólo es decimal la parte a la derecha de la coma. Esta idea se ve reforzada cuando se dice que las cifras a la derecha de la como se llaman decimales.

> “Las cifras a la derecha de la coma se llaman cifras decimales, o simplemente decimales” (Bruño, 1939 cit. Gómez, 2013).

También se refuerza esta idea inconscientemente por el uso cotidiano de los algoritmos de la suma y de la resta, donde se operan entre sí y por separado las partes enteras y decimales, por la forma de leer los decimales, y por la práctica con la calculadora, que explica la reticencia de los estudiantes a abreviar los resultados.

- **Efecto de la medición**

La introducción de los números decimales como medidas en el S. M. D. tiene la ventaja de que promueve un manejo temprano de las unidades convencionales. Su funcionamiento operatorio es idéntico al de los naturales, pero tiene restricciones, como por ejemplo que el producto de las medidas de longitudes da como resultado la de un área, que es una unidad de medida diferente.

Bajo este enfoque, la secuencia de enseñanza se limita a mostrar cómo se reduce un número compuesto de unidades de diversos órdenes de unidad a una sola unidad, a la unidad fundamental.

La introducción de los números decimales en el contexto de la medida tiene el inconveniente de presentar los decimales como números que podrían ser enteros siempre que se tome una unidad suficientemente pequeña. Esto enmascara una de las diferencias esenciales entre los enteros y los decimales, que es la principal utilidad de los decimales: la propiedad de que el conjunto D de los decimales es denso, o sea, que entre dos números decimales distintos, siempre se puede encontrar otro decimal distinto y, por tanto, existen infinidad de tales números decimales intermedios.

El desconocimiento por parte de los niños de esta propiedad puede explicar las dificultades que tienen para proponer números comprendidos entre dos decimales. La costumbre de detenerse en la unidad más pequeña explica que haya estudiantes que, por ejemplo, digan que el siguiente de 3’25 es 3’26, o que no hay ningún decimal entre ellos. Estos estudiantes no conciben que el orden de los naturales no funciona con los decimales, y que dado un decimal no es posible hallar su siguiente.

- **Efecto de las fracciones decimales:**

Aquí los números decimales se construyen de un modo intranumérico, ya que utilizan las fracciones decimales de la unidad $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{100}$ …, o unidades decimales, que son elementos abstractos desligados de la medida.

Estos elementos generan un nuevo conjunto numérico por iteración de la unidad decimal, lo que permite decir definir el número decimal como el que consta de unidades decimales. El proceso es similar al que se sigue con los números naturales que se generan por iteración de la unidad.

> “Número decimal es el que consta de unidades decimales” (Bruño, 1933, p.16 cit. Gómez, 2013)

2.4. Objetivos

Los objetivos principales que nos planteamos en este estudio son:

- Conocer el modelo de enseñanza vigente en la Comunidad Valenciana,
- Conocer los contenidos sobre los decimales en los libros de texto,
- Determinar y clasificar actuaciones y errores en los estudiantes en relación a la codificación, operatividad y orden de números decimales periódicos, a través de un experimento basado en un cuestionario, y
- Identificar los efectos de la enseñanza.

3. CONTEXTUALIZACIÓN DEL MODELO DE ENSEÑANZA

A continuación, describimos brevemente los aspectos que se contemplan en el currículum oficial y un ejemplo de una programación del IES Sorolla del curso 2012/13. Finalmente, describimos el tratamiento de los decimales en algunos libros de texto y proponemos algunos materiales y recursos para la enseñanza de los decimales.

3.1. Currículum oficial de la Comunidad Valenciana

En este apartado incluimos la parte del currículum de la ESO vigente actualmente en la Comunidad Valenciana (DOCV, 2007) y la de Bachillerato (DOCV, 2008). Analizaremos, en particular, los objetivos, contenidos y criterios de evaluación referentes al bloque donde vienen englobados los decimales.

Objetivos

La enseñanza de las Matemáticas en esta etapa tendrá como objetivo el desarrollo de las siguientes capacidades:

1. Mejorar la capacidad de pensamiento reflexivo e incorporar al lenguaje y modos de argumentación las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos o científicos como en los distintos ámbitos de la actividad humana, con el fin de comunicarse de manera clara, concisa y precisa.

2. Aplicar con soltura y adecuadamente las herramientas matemáticas adquiridas a situaciones de la vida diaria.

3. Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.

4. Detectar los aspectos de la realidad que sean cuantificables y que permitan interpretarla mejor: utilizar técnicas de recogida de la información y procedimientos de medida, realizar el análisis de los datos mediante el uso de distintas clases de números y la selección de los cálculos apropiados, todo ello de la forma más adecuada, según la situación planteada.

5. Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, geométricos, gráficos, cálculos, etc.) presentes en los medios de comunicación, Internet, publicidad u otras fuentes de información, analizar críticamente las funciones que desempeñan estos elementos matemáticos y valorar su aportación para una mejor comprensión de los mensajes.

6. Identificar las formas planas o espaciales que se presentan en la vida diaria y analizar las propiedades y relaciones geométricas entre ellas; adquirir una sensibilidad progresiva ante la belleza que generan.

7. Utilizar de forma adecuada los distintos medios tecnológicos (calculadoras, ordenadores, etc.) tanto para realizar cálculos como para buscar, tratar y representar informaciones de índole diversa y también como ayuda en el aprendizaje.

8. Actuar ante los problemas que se plantean en la vida cotidiana de acuerdo con modos propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.

9. Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados y de su carácter exacto o aproximado.

10. Manifestar una actitud positiva muy preferible a la actitud negativa ante la resolución de problemas y mostrar confianza en la propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito y adquirir un nivel de autoestima adecuado, que les permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos y utilitarios de las Matemáticas.

11. Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que se van adquiriendo desde las distintas materias de modo que puedan emplearse de forma creativa, analítica y crítica.

12. Valorar las Matemáticas como parte integrante de nuestra cultura: tanto desde un punto de vista histórico como desde la perspectiva de su papel en la sociedad actual y aplicar las competencias matemáticas adquiridas para analizar y valorar fenómenos sociales como la diversidad cultural, el respeto al medio ambiente, la salud, el consumo, la igualdad entre los sexos o la convivencia pacífica.

Figura 3.1 Objetivos generales del currículum oficial de la ESO

De los objetivos generales que menciona el currículum oficial a los efectos que tiene este trabajo, los únicos que interesa destacar son:

> "Detectar los aspectos de la realidad que sean cuantificables y que permitan interpretarla mejor: utilizar técnicas de recogida de la información y procedimientos de medida, realizar el análisis de los datos mediante el uso de distintas clases de números y la selección de los cálculos apropiados,

> Utilizar de forma adecuada los distintos medios tecnológicos (calculadoras, ordenadores…)
>
> Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados y de su carácter exacto o aproximado.”

El estudio de estos contenidos ya se ha iniciado en primaria; nosotros nos centraremos en su tratamiento en la etapa de Enseñanza Secundaria Obligatoria y Bachillerato. El currículum de la Comunidad Valenciana sitúa los decimales en los cuatro cursos de la ESO y, solamente, en el primer curso del Bachillerato de Ciencias Sociales.

Los *contenidos de la ESO* aparecen en el Bloque 2: Números. Distinguimos los siguientes puntos:

> “Primer curso
> Números naturales. Sistemas de numeración decimal y romano. Interpretación de códigos numéricos presentes en la vida cotidiana.
> Números fraccionarios y decimales. Relaciones entre fracciones y decimales. Comparación y orden en los números fraccionarios y decimales. Operaciones elementales. Aproximaciones y redondeos.
> Utilización de estrategias personales para el cálculo mental, aproximado y con calculadoras.
> Las magnitudes y su medida. El sistema métrico decimal.
>
> Segundo curso
> Operaciones elementales con fracciones, decimales y números enteros.
> Expresiones sexagesimales complejas y expresiones decimales. Conversión de una expresión a otra. Operaciones.
> Porcentajes. Relaciones entre fracciones, decimales y porcentajes. Uso de estas relaciones para elaborar estrategias de cálculo práctico con porcentajes.

> Tercer curso
> Decimales y fracciones. Transformación de fracciones en decimales y viceversa. Decimales exactos y decimales periódicos. Fracción generatriz.
> Operaciones con fracciones y decimales.
>
> Cuarto curso. Opción A.
> Operaciones con números enteros, fracciones y decimales.
> Decimales infinitos no periódicos: números irracionales.
> Expresión decimal de los números irracionales.
> Interpretación y utilización de los números y las operaciones en diferentes contextos, eligiendo la notación y precisión más adecuadas en cada caso." (DOCV, 2007)

Los *contenidos* de primer curso del Bachillerato de Ciencias Sociales se sitúan en el apartado Aritmética y Álgebra. Distinguimos:

> "Números racionales e irracionales. Aproximación decimal de un número real." (DOCV, 2008)

Como se ve, los decimales es tema presente en el currículum en todos los cursos de la ESO. En primero se trabaja la comparación y las operaciones elementales con números decimales finitos. En segundo se utilizan los decimales para introducir los porcentajes. En tercero se trabaja la relación entre las fracciones y los decimales (exactos y periódicos) mediante técnicas de transformación. Y, finalmente, en cuarto se amplía el concepto y se introducen los decimales infinitos no periódicos.

Finalmente, por lo que respeta a los *criterios de evaluación*, y en particular a lo que nuestro estudio se refiere, se exige que:

> "Primer y segundo curso,
> Utilizar los números decimales, sus operaciones y propiedades para recibir y producir información en actividades relacionadas con la vida cotidiana.
> Calcular el valor de expresiones numéricas sencillas de números decimales (basadas en las cuatro operaciones elementales)

> Identificar y describir regularidades, pautas y relaciones en conjuntos de números.
>
> Tercer y Cuarto curso (opción A),
> Calcular expresiones numéricas sencillas de números racionales (basadas en las cuatro operaciones elementales).
>
> Cuarto curso. Opción A,
> Utilizar convenientemente la calculadora científica en las operaciones con números expresados en forma decimal o en notación científica.”
>
> “1º Bachillerato Ciencias Sociales,
> Utilizar los números racionales e irracionales, sus notaciones, operaciones y procedimientos asociados, para presentar e intercambiar información y resolver problemas de la vida cotidiana.
> Utilizar adecuadamente los números y sus operaciones y recurrir a la notación numérica más conveniente para expresar los resultados de estimaciones, cálculos y problemas.”

3.2. Programación del curso 2012/13 IES Sorolla

La programación que vamos a tratar es la que se usó en el centro donde se tomó la muestra durante el curso 2012/13 (IES Sorolla, 2013). Vamos a mostrar aquí las similitudes y diferencias entre esta programación y el currículum oficial.

Se observa que los *objetivos generales* de la programación del centro son los mismos que los del currículum oficial. Pero además, se detallan los objetivos concretos a cada unidad. Veamos los referentes al tema de los decimales, curso por curso de la ESO:

> “Primer curso,
> Conocer la estructura del sistema de numeración decimal.
> Ordenar números decimales y representarlos sobre la recta numérica.
> Conocer las operaciones entre números decimales y manejarlas con soltura.
>
> Segundo curso,
> Comprender la estructura del sistema de numeración decimal y manejar las equivalencias entre los distintos órdenes de unidades.

Ordenar y aproximar números decimales.

Operar con números decimales.

Tercer curso,

Conocer los distintos tipos de números decimales y su relación con las fracciones.

Cuarto curso,

Manejar con soltura la expresión de un número y hacer aproximaciones, así como conocer y controlar los errores cometidos.

Conocer la notación científica y efectuar operaciones con la calculadora.

Relacionar los números fraccionarios con su expresión decimal.”

En cuanto a los *contenidos*, podemos agruparlos por ciclos de la siguiente manera:

Primer y segundo curso,

Órdenes de unidades decimales. Equivalencias.

Clases de números decimales.

Orden en el conjunto de los números decimales.

Aplicación de los distintos algoritmos para sumar, restar, multiplicar y dividir números decimales.

Tercer y cuarto curso,

Tipos de números decimales: exactos, periódicos y otros.

Paso de fracción a decimal.

Paso de decimal exacto y decimal periódico a fracción.

Si comparamos estos contenidos con los del currículum oficial, vemos que esta programación centra el orden y la operatividad con números decimales en el primer ciclo de la ESO, y las transformaciones de fracción a decimal o viceversa, en el segundo ciclo, al igual que hace el currículum oficial.

Y finalmente, los *criterios de evaluación* correspondientes a este tema son:

“Primer y segundo cursos,

Lee y escribe números decimales.

Conoce las equivalencias entre los distintos órdenes de unidades.

Ordena series de números decimales. Asocia números decimales con los correspondientes puntos de la recta numérica.

Dados dos números decimales, escribe otro entre ellos.
Suma y resta números decimales. Multiplica números decimales.

En segundo curso, además,
Diferencia los distintos tipos de números decimales (exactos, periódicos, otros).

Tercer curso,
Conoce los números decimales y sus distintos tipos, los compara y los sitúa aproximadamente sobre la recta.
Pasa de fracción a decimal, y viceversa.

Cuarto curso,

Halla un número fraccionario equivalente a un decimal exacto o periódico.
Domina la expresión decimal de un número o una cantidad, y calcula o acota los errores absoluto y relativo en una aproximación."

La diferencia más significativa entre los criterios de evaluación del currículum y los de la programación del IES Sorolla es que, en esta última, no se contempla el criterio de utilizar los números decimales para resolver problemas de la vida cotidiana. Esto lo comprobaremos en el apartado que presentamos a continuación, ya que observaremos en los libros de texto la ausencia de problemas de situaciones significativas para los alumnos.

3.3. Tratamiento de los decimales en los libros de texto

A lo largo de este apartado se hace una breve descripción del tratamiento escolar de los decimales a la vista de lo que queda reflejado en los libros de texto. Dado que el currículum oficial es común para todos, nos limitaremos a resaltar los contenidos de una sola editorial, Anaya, ya que es con la que trabajaban los alumnos del centro donde se tomó la muestra para este estudio.

En primer lugar, se verá como viene reflejado el tema de los decimales en 3º de ESO para poder entender la situación en la que llegan los alumnos a cuarto curso. Y seguidamente, nos fijaremos en los contenidos nuevos que aparecen en 4º de ESO.

<u>3º de ESO - Anaya (2010)</u>

Este libro se divide en tres cuadernos, uno por cada trimestre. En particular, el bloque donde viene incluido el tema de los decimales es el primero, correspondiente a la primera unidad del primer trimestre. Cabe destacar que no coincide con el bloque en donde se sitúan los decimales en el currículum (bloque 2).

Unidad	Contenidos	Competencias
1 Fracciones y decimales Página 18		

Figura 3.2 Contenidos unidad 1

Para introducir el tema, aparece una breve explicación del recorrido de los números decimales a lo largo de la historia.

Seguidamente, se señala la utilidad de los números decimales, “sirven para designar medidas”, y cómo podemos representarlos, “sobre la recta numérica, de tal modo que con ellos podemos aproximarnos tanto como queramos a cualquiera de sus puntos”, resumiendo todo en la siguiente frase: “La expresión decimal de los números permite valorarlos, compararlo y operar con ellos de forma muy cómoda y eficaz”.

A continuación, según indican los autores del libro, se presentan los *tipos de números decimales,* con una nota recordatoria que define la expresión “periodo”:

Recuerda

En un número, el grupo de cifras decimales que se repite una y otra vez se llama **periodo.** Se indica poniendo un arco sobre las cifras correspondientes:

$7{,}\overset{\frown}{81}$ $\quad 18{,}35\overset{\frown}{2}$

- **Decimal exacto** es el que tiene un número limitado de cifras decimales.

  Por ejemplo: 5,4; 0,97; 8; –0,0725

- **Decimal periódico** es el que tiene infinitas cifras decimales que se repiten periódicamente.

  $7{,}81818181... = 7{,}\overset{\frown}{81}$

  PERIODO

  $0{,}735735735... = 0{,}\overset{\frown}{735}$

  Estos se llaman **periódicos puros,** porque en ellos el periodo empieza inmediatamente después de la coma.

  $18{,}352222... = 18{,}35\overset{\frown}{2}$

  $0{,}0454545... = 0{,}0\overset{\frown}{45}$

  Son **periódicos mixtos,** porque antes del periodo tienen otras cifras decimales.

- **Decimales no exactos ni periódicos.** Son los números decimales que tienen infinitas cifras que no se repiten periódicamente.

  Por ejemplo: $\sqrt{2} = 1{,}4142135...$

  $\pi = 3{,}14159265...$

Figura 3.3 Tipos de números decimales

El siguiente punto que aparece en el libro es el *paso de fracción a decimal*, en donde se indica que “para obtener la expresión decimal de una fracción, se efectúa la división entre el numerador y el denominador”. El cociente puede ser, a parte de un número entero si el numerador es múltiplo del denominador, decimal exacto o periódico:

Recuerda

Números racionales son los que se pueden poner en forma de fracción.

Toda **fracción irreducible** da lugar a un número decimal:

- **Decimal exacto,** si el denominador solo tiene los factores 2 y 5.
- **Decimal periódico,** si el denominador tiene factores distintos a 2 y 5.

Por tanto, unos y otros son **números racionales**. Sin embargo, los decimales con infinitas cifras no periódicas no son racionales.

Figura 3.4 Paso de fracción a decimal

Además, hay que destacar la nota recordatoria que aparece a la izquierda de la figura que dice que “números racionales son los que se pueden poner en forma de fracción”, en donde aparece por primera vez una relación entre números decimales y racionales.

A este punto le siguen el *paso de decimal exacto a fracción*: “expresar en forma de fracción un número decimal exacto es muy fácil, pues el denominador es una potencia de base 10”, y *los pasos de decimal periódico puro y mixto a fracción:*

Para escribir un número **periódico puro,** N, **en forma de fracción:**

- Multiplicamos N por una potencia de base 10 para hallar otro número con la misma parte decimal.
- Al restar ambos números, obtenemos un número entero.
- Despejando N, llegaremos a la fracción buscada.

Para escribir un número **periódico mixto,** N, **en forma de fracción:**

- Multiplicamos N dos veces por potencias de base 10 para conseguir dos decimales periódicos puros con el mismo periodo.
- Al restarlos, se obtiene un número entero.
- Despejando N, se obtiene la fracción buscada.

Figura 3.5 Paso de decimal a fracción

Finalmente, al finalizar cada punto que acabamos de explicar, aparecen actividades para practicar los contenidos. Son las siguientes:

Actividades

1 Indica qué tipo de número decimal es cada uno de los siguientes:

3,52 $\quad 2,\widehat{8} \quad 1,\widehat{54} \quad \sqrt{3} = 1,7320508\ldots$

$2,7\widehat{3} \quad 3,5222\ldots \quad \pi - 2 = 1,1415926\ldots$

2 Ordena de menor a mayor estos números:

$2,\widehat{5} \quad 2,5 \quad 2,3\widehat{5} \quad 2,505005\ldots$

3 Escribe tres números decimales comprendidos entre 2,5 y $2,\widehat{5}$.

4 Sin efectuar la división, y atendiendo solo al denominador de la fracción simplificada, di si las siguientes fracciones darán lugar a decimales exactos o periódicos:

a) $\frac{44}{150}$ b) $\frac{42}{150}$ c) $\frac{101}{1\,024}$ d) $\frac{1\,001}{500}$

1 Expresa en forma de fracción los siguientes números decimales:

a) 6,2 b) $3,\widehat{5}$ c) $0,\widehat{23}$ d) $41,\widehat{041}$ e) $5,\widehat{9}$ f) $40,\widehat{028}$

2 Completa el proceso para expresar como fracción el número dado.

$$a)\ 6,21\widehat{7} \begin{cases} N = 6,21777\ldots \\ 100N = 621,77777\ldots \\ 1\,000N = 6\,217,7777\ldots \end{cases}$$

$$b)\ 0,031\widehat{62} \begin{cases} N = 0,0316262\ldots \\ 1\,000N = 31,626262\ldots \\ 100\,000N = 3\,162,626262\ldots \end{cases}$$

3 Expresa como fracción los decimales siguientes:

a) $6,2\widehat{5}$ b) $0,00\widehat{1}$ c) $5,0\widehat{18}$

4 ¿Cuáles de los siguientes números son racionales? Ponlos en forma de fracción:

a) 3,51 b) 5,202002000…

c) $5,\widehat{03}$ d) 0,3212121…

e) $\pi = 3,141592\ldots$ f) $7,4\widehat{331}$

Figura 3.6 Actividades

<u>4º de ESO (opción A) - Anaya (2010)</u>

En 4º de ESO, el bloque donde viene incluido el tema de los decimales también es el primero, correspondiente a la segunda unidad del primer trimestre.

En este curso, se recuerda la relación entre los números decimales y las fracciones que se vio en el curso anterior, y aparece un nuevo concepto, el de decimales no periódicos o irracionales.

DECIMALS NO PERIÒDICS

El nombre decimal 7,51551555155551… no és exacte ni periòdic. No pot posar-se en forma de fracció i, per tant, no és un nombre racional.

Això ocorre amb les expressions decimals de $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π, i molts altres nombres que anomenem **irracionals**.

$\sqrt{2} = 1,414213562\ldots$

$\sqrt{3} = 1,732050808\ldots$

$\pi = 3,141592654\ldots$

Figura 3.7 Decimales no periódicos

Además, en este curso hay un apartado dedicado a las aplicaciones de los decimales, en el cual se estudian los conceptos de error absoluto y error relativo. Y por último, hay otro apartado en donde se explica cómo escribir un número en notación científica y su utilidad.

Este tema, *números decimales*, y el anterior, *números naturales, enteros y racionales*, sirven como introducción al tercer tema, el de los *números reales*, el cual viene introducido por un esquema que engloba todos los números, racionales y no racionales.

Cabe destacar que aparece un problema del estilo de los que propusieron en el test (Figura 3.8), pero sólo uno. Y como hemos podido comprobar, ni en este curso ni en el anterior hay problemas de operar con números decimales periódicos, lo cual puede ayudar a entender las dificultades de los alumnos al resolverlos.

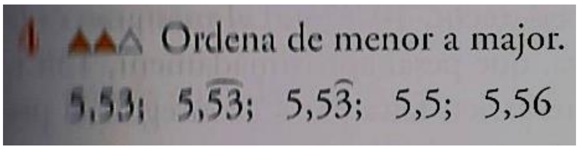

Ordena de menor a major.
$5{,}53$; $5{,}\widehat{53}$; $5{,}5\widehat{3}$; $5{,}5$; $5{,}56$

Figura 3.8 Actividad de orden

3.4. Materiales y recursos

En este apartado proponemos algunos materiales y recursos para la enseñanza de los decimales:

- El material multibase se puede utilizar para introducir las décimas, centésimas, milésimas en los primeros cursos de la enseñanza de los decimales, partiendo de sucesivas divisiones del cubo más grande
- La calculadora es un recurso esencial para trabajar con los números decimales, aunque en la práctica manejen números aproximados. También hay calculadoras que permiten trabajar con fracciones, así como facilitar el paso de la fracción a la expresión decimal y viceversa.
- Finalmente, para trabajar en contextos significativos de los números decimales, se puede recurrir a resultados deportivos, composición de medicamentos, o a cualquiera de las numerosas actividades cotidianas que están relacionadas con la medida de alguna magnitud.

4. MARCO TEÓRICO

Como ya se ha dicho antes, existen dificultades en el estudio de los números decimales y, además, también existen problemas a la hora de enseñar esta parte de las matemáticas a los alumnos.

Para poder entender toda la problemática que representa el estudio de los números decimales, y en concreto el de los decimales periódicos, se han consultado los textos de "Números decimales. ¿Por qué? ¿Para qué?" (Centeno, 1988), "Números decimales" (Castro, 2001), entre otros, y el estudio de Rittaud y Vivier sobre el cual se sustenta este trabajo.

4.1. Errores y dificultades

Según Castro (2001, p.325, 326) "los números naturales son un obstáculo para el aprendizaje de los decimales. Durante la etapa del aprendizaje de los decimales muchos niños suelen extender su conocimiento de los naturales y aplicarlo de manera equivocada a los decimales, predominando el conocimiento ya consolidado del número natural sobre el conocimiento en construcción de los decimales. En otro grupo de errores el número decimal es considerado como una pareja de números naturales. También provoca errores la falta de conocimiento del sistema de numeración decimal."

Los aspectos del concepto decimal que ofrecen una mayor resistencia a su adquisición por parte de los alumnos los conocemos a través del análisis de las respuestas que los alumnos dan a problemas que les planteamos. De esta manera, Centeno (1988, cap.9, p.136-138) analiza las dificultades, errores y obstáculos en los números decimales, e identifica los errores siguientes:

El primero de ellos está relacionado con *la lectura y escritura de los números decimales.* Cuando leemos un número decimal, primero pronunciamos la parte entera y después la parte decimal. Esta práctica lleva a pensar en la representación decimal como dos números enteros separados por una coma, lo que puede explicar ciertas creencias erróneas en la comparación de números expresados en forma decimal, como: un número decimal es mayor que otro cuantas más cifras tenga ($3'9 < 3'12$ porque $9 < 12$).

Otro obstáculo en la comprensión de la representación decimal nace de la utilización d*el cero*, que forma parte de mecanismos que funcionan de distinta forma según el contexto en que aparece. Por ejemplo, algunos alumnos ignoran el cero e interpretan 0'036 como

36, perdiendo la estructura global del número y viéndolo sólo como un número entero. O, otros, consideran 1’27 distinto de 1’270.

El tercer error que identifica Centeno está relacionado con *el orden entre decimales*. La aplicación del “orden lexicográfico” en la comparación de enteros y decimales requiere que los números tengan las mismas cifras, lo que en el caso de los decimales periódicos se logra desarrollando el período. Así, para la comparación de $3'\overline{91}$ y $3'\overline{125}$ debe hacerse expresando $3'919191$ y $3'125125$; de este modo se ve claramente que $919.191 > 125.125$.

Y, finalmente, el cuarto error aparece en *las operaciones.* El autor observa dificultades en el producto y la división debido a que se rompe la regla: multiplicar es aumentar y dividir es disminuir.

Ahora nos preguntamos, ¿son útiles ciertos errores en los procesos de aprendizaje?, ¿qué pueden revelarnos?

“Los errores que no se deben a distracciones, sino que se reproducen sistemáticamente en situaciones similares, son muy interesantes porque nos revelan la existencia de modelos implícitos erróneos. (…) Los comportamientos de los alumnos pueden ser correctos, aunque estén sometidos por modelos falsos.”(Centeno, 1988, p. 141).

Y, ¿son los errores únicamente índices de un aprendizaje incompleto o de un fracaso?

No. Todas las formas de introducir los números decimales que permitan su aparición como números nuevos, con algunas propiedades diferentes a los naturales, pueden ocasionar obstáculos suplementarios que se añaden a la resistencia a la evolución del concepto. Además, muchas veces los alumnos se fabrican sus propias reglas de acción, las cuales no son siempre válidas y conducen al error.

Por tanto, los errores identificados por Centeno (1988) nos van a servir, en el apartado de la parte experimental, para construir el esquema de clasificación de las respuestas que dan los alumnos a las tareas, el cual completaremos con actuaciones observadas en las respuestas de los alumnos elegidos para nuestro experimento.

A continuación, presentamos los procesos para la comparación y la suma de números decimales periódicos identificados en los trabajos de investigación de Rittaud y Vivier (2013) y de Vivier (2011).

4.2. Los procesos de Rittaud y Vivier para la comparación y la suma de números decimales periódicos

Como bien hemos dicho, este estudio se sustenta en un trabajo de investigación de Rittaud y Vivier (2013), en el cual se presentan los resultados de un experimento en el que unos estudiantes fueron cuestionados para hacer algunos cálculos englobando los números decimales periódicos, y algoritmos derivados de algoritmos usados para números decimales. Estos autores pretenden mostrar de qué manera pueden ser útiles estos algoritmos para aumentar la comprensión de la igualdad $0'\overline{9} = 1$, ya que consideran que la comprensión de la doble representación de números decimales en el sistema de base diez es un tema importante para los estudiantes.

El trabajo de estos investigadores consiste en una articulación entre los marcos de Chevallard (1999) y Duval (1995, 2006): Chevallard define un sistema de números como un conjunto de objetos que puede compararse, sumarse y multiplicarse con las propiedades usuales. Duval distingue registros de representaciones, en particular, dos registros numéricos de representación para los números racionales: las fracciones y el registro con sistema de base diez o decimal periódico.

No detallaremos aquí esta articulación y referimos a Rittaud y Vivier (2013) para una exposición más precisa. Pero sí vamos a describir, con la ayuda de ejemplos extraídos de Vivier (2011), los algoritmos que presentan estos autores para la comparación y la suma de números decimales periódicos:

La *comparación de dos decimales periódicos* consiste en desarrollar el periodo y comparar cifra por cifra de izquierda a derecha.

Los autores dicen que los estudiantes no tienen dificultad con esta técnica, pero conduce a la desigualdad $0,\overline{9} < 1$, cuando debería conducir a $0,\overline{9} = 1$. Esto demuestra que aunque no veamos las mismas cifras en las expresiones decimales, pueden ser exactamente la misma expresión. La diferencia está en la interpretación de lo que se representa. Por eso, es necesario conocer otras técnicas como las que se describen en Vivier (2011), en particular, para el caso $0,\overline{9} = 1$:

1- $\frac{1}{3} = 0'\overline{3} \rightarrow 3 \times \frac{1}{3} = 3 \times 0'\overline{3}$. Entonces, $1 = 0'\overline{9}$.

2- $10 \times 0'\overline{9} = 9 + 0'\overline{9} \rightarrow 9 \times 0'\overline{9} = 9$. Entonces, $0'\overline{9} = 1$.

3- $\frac{1}{9} = 0'\overline{1}$; $\frac{2}{9} = 0'\overline{2}$; $\frac{3}{9} = 0'\overline{3}$; …; $\frac{9}{9} = 0'\overline{9}$. Entonces, $1 = 0'\overline{9}$.

Los cuatro procesos o técnicas que describen Rittaud y Vivier (2013) para calcular la *suma de dos números decimales periódicos* son los siguientes:

1- Técnica de conversión a decimal finito, guiado por la codificación.

Consiste en truncar los números tomando valores aproximados, efectuar la suma de estos números decimales e inducir el resultado. Eventualmente, hay que efectuar varias sumas con muchos períodos antes de dar el resultado, es decir, utilizar todas las aproximaciones posibles, y considerar el período como un entero para sumar. Además, hay que tener en cuenta que la suma de dos decimales periódicos es un decimal periódico y la suma es continua.

Por ejemplo, si queremos obtener el resultado de la suma $0'\overline{5} + 0'\overline{7}$, procederemos como sigue:

$$0'5 + 0'7 = 1'2;\ \ 0'55 + 0'77 = 1'32;\ \ 0'555 + 0'777 = 1'332;\ \ldots$$

Así, podemos concluir que $0'\overline{5} + 0'\overline{7} = 1'\overline{3}$.

Según Vivier (2011), este proceso causa errores en los estudiantes. Algunos utilizan las aproximaciones sin conocer que el resultado es periódico (explica $1'66\overline{6}5$ y responde $1'6665$ ...), o no saben que el resultado presenta necesariamente un período (“no hay un período”).

2- Técnica de conversión a fracción y haciendo la suma después

Los alumnos que utilizan esta técnica, utilizan el hecho que saben efectuar la suma de dos racionales en el registro fraccionario pero no en el de los decimales periódicos.

$$0,\overline{5} + 0,\overline{7} = \frac{5}{9} + \frac{7}{9} = \frac{12}{9} = 1 + \frac{3}{9} = 1,\overline{3}$$

Según Vivier (2011), para los alumnos es difícil entender como los números decimales periódicos pasan a fracciones.

3- Uso explícito de $0,\overline{9} = 1$

$$0,\overline{5} + 0,\overline{7} = 0,\overline{9} + 0,\overline{3} = 1 + 0,\overline{3} = 1,\overline{3}$$

4- Algoritmo de la suma de dos números decimales en el sistema de base diez

Sin llevar de la parte periódica a la aperiódica

$$\begin{array}{rrrrrr} & 1 & & & 1 & \\ & & 4, & 2 & \overline{4} & \overline{2} \\ + & 1 & 7, & 0 & \overline{4} & \overline{9} \\ \hline & 2 & 1, & 2 & \overline{9} & \overline{1} \end{array}$$

$$4{,}2\,\overline{42} + 17{,}0\,\overline{49} = 21{,}2\,\overline{91}$$

Cuando un acarreo aparece en el digito más a la izquierda de la parte periódica

$$\begin{array}{rrrr} & 1 & & (1) \\ & 0, & \overline{8} & \overline{2} \\ + & 0, & \overline{4} & \overline{1} \\ \hline & 1, & \overline{2} & \overline{\cancel{3}4} \end{array}$$

$$0,\overline{82} + 0,\overline{41} = 1,\overline{24}$$

Al igual que los errores, estos algoritmos nos van a servir, en el apartado de la parte experimental, para construir el esquema de clasificación, el cual completaremos con otras formas de proceder observadas en las respuestas de los alumnos elegidos para nuestro experimento.

5. PARTE EXPERIMENTAL

En este apartado se explica cómo se elaboró el experimento, en qué se basó, cuál es la muestra para el test de diagnóstico, cuáles son las características de los problemas del cuestionario y los criterios para el análisis y clasificación de las respuestas, así como una descripción de los mismos.

5.1. Metodología

Para conseguir los objetivos marcados al inicio de este estudio, se consulta el trabajo de investigación de Rittaud y Vivier (2013), en el cual se presentan los resultados de un experimento en el que unos estudiantes fueron cuestionados para hacer cálculos con números decimales periódicos. Estos autores presentan un cuestionario dividido en dos partes: un test individual (ver Anexo) y otro para realizar en grupo.

El trabajo que aquí se trata realiza una réplica de la parte del cuestionario individual de Rittaud y Vivier aplicada a distintos grupos de ESO y Bachillerato del IES Sorolla de Valencia, y a alumnos del Máster en Profesor de Matemáticas de la Universidad de Valencia. Nosotros nos vamos a centrar sólo en el test individual, en el cual los autores dan una caracterización a cada una de las cinco tareas que lo componen, con los siguientes títulos:

- Comprensión de la codificación (Tareas 1 y 2)
- Comparación (Tarea 3)
- Suma (Tarea 4)
- Diferencia (Tarea 5)

5.1.1. Elección de la muestra

El cuestionario se aplicó a un total de 107 estudiantes, distribuidos en los cursos de 4º ESO, 1º Bachillerato Científico y los grupos de 2º de Bachillerato Científico-Tecnológico y Ciencias-Sociales del IES Sorolla, en sus correspondientes horarios de tutorías. También se aplicó a los grupos de estudiantes de la especialidad de Matemáticas del presente Máster en Profesor de Educación Secundaria, de los cursos 2012/13 y 2013/14, de la Universidad de Valencia. (Ver Tabla 5.1)

CURSO	GRUPOS	ESPECIALIDAD	GÉNERO M	GÉNERO F	ALUMNOS
4º ESO	1	Opción A	3	10	13
1º Bachillerato	1	Científico	17	7	24
2º Bachillerato	2	Científico-Tecnológico	5	0	5
		Ciencias-Sociales	2	8	10
Máter en Profesor/a	2	Matemáticas (curso 2012/13)	9	12	21
		Matemáticas (curso 2013/14)	15	19	34
					Total: 107

Tabla 5.1. Distribución de la muestra

En primer lugar, se les explicó el objetivo del cuestionario y se insistió en que no copiaran por su carácter individual. Después se matizaron algunos aspectos del cuestionario y, finalmente, se marcó un tiempo máximo de 30 minutos para resolverlo.

5.2. Resultados del cuestionario de Rittaud y Vivier

En el experimento de Rittaud y Vivier, el test se pasó a 29 estudiantes de primer curso de Matemáticas. Primero se les pasó el test individual y, dos días después, el que realizaron en equipo con tres estudiantes por grupo. Los resultados de esta prueba fueron los siguientes:

La *codificación*, como ellos llaman a las tareas 1 y 2, causó algunos problemas en 6 alumnos y no tuvo éxito la prueba.

La *comparación* de los tres casos no problemáticos, es decir de los ítems a, b y d de la tarea 3, fue un éxito para todos los estudiantes. Escribieron la extensión de los números y utilizaron la técnica la comparación cifra a cifra. Sin embargo, para el caso $0'\overline{9}$ y 1 (ítem c) sólo 8 estudiantes señalaron la igualdad: uno dijo que era un caso “extraño”; otro dijo que ya lo había visto antes; y otro señaló tanto la igualdad como la desigualdad, argumentando a favor de la igualdad “porque no es un número real” y de la desigualdad mediante la comparación cifra a cifra. Es aquí donde puede verse la brecha entre las dos organizaciones matemáticas.

Según Rittaud y Vivier, era de esperar que las sumas y diferencias las calcularan por aproximación, como hicieron 25 estudiantes. Algunos utilizaron una conversión al registro fraccionario y la igualdad $0,\overline{9} = 1$. 14 alumnos dieron algunas respuestas infinitesimales ($0,\overline{5} + 0,\overline{7} = 1,\overline{3}2$).

Por último, 7 estudiantes concluyeron que $2 - 1,\overline{9} = 0$, declarando previamente que $1 = 0,\overline{9}$; 11 dieron una respuesta infinitesimal ($2 - 1,\overline{9} = 0'\overline{0}1$); 6 dieron $0,\overline{1}$; 2 dieron una respuesta con un número finito de ceros, $0'0001$; y uno dio $0'\overline{10}$. Más en general, ningún estudiante que afirmó $1 = 0,\overline{9}$ dio una respuesta infinitesimal.

A partir de los resultados obtenidos al pasar el cuestionario, los autores determinan que algunos estudiantes dicen que $0,\overline{9} = 1$, pero realmente no entienden la razón. Según ellos, la comparación y la suma pueden ayudar a entender esta igualdad.

5.3. Caracterización de las tareas del cuestionario

Este apartado contiene la información que caracteriza cada una de las tareas del cuestionario. Aunque los autores Rittaud y Vivier no dicen cuál es el objetivo de las tareas ni las caracterizan, en lo que sigue vamos a caracterizarlas de acuerdo con nuestra propia opinión. Mostramos las tareas tal y como se presentaron a los estudiantes, la interpretación que se hace de cada una de ellas, y el procedimiento de resolución esperado, así como también indicamos la solución de cada tarea.

TAREA 1: Redondea el número que es diferente a los otros:
$5{,}0\overline{0100}$ $5{,}001\overline{0001}$ $5{,}0\overline{01000100}$ $5{,}0\overline{0101}$ $5{,}00\overline{1000}$

La expresión numérica con decimal periódico no es única. Por eso se plantean en la tarea 1 cinco expresiones decimales periódicas, de las cuales cuatro son equivalentes (representan el mismo número), y la otra representa un número diferente.

Las cuatro expresiones equivalentes se diferencian en que el período representado es diferente, no así el efecto que produce al repetirlo.

El procedimiento esperado para contestar la tarea es que desarrollen los períodos y los comparen, para identificar el número $5{,}0\overline{0101}$ diferente a los otros.

TAREA 2: Escribe de cuatro formas distintas el número $14,\overline{121}$.

Como ya hemos dicho, la expresión numérica con decimal periódico no es única. Esta tarea es recíproca a la anterior; ahora se pide encontrar otras expresiones decimales equivalentes a la dada.

El procedimiento esperado, para que perciban otros períodos distintos que expresan el mismo número decimal, es que desarrollen el período. Así pues, desarrollando el periodo obtenemos: $14,\overline{121} = 14'121121121121\ldots$ Por tanto, de aquí se obtienen dos expresiones decimales equivalentes, que son: $14{,}1\overline{211}$ y $14{,}12\overline{112}$.

La tercera, se obtiene convirtiendo la expresión decimal a fracción, ya que es otra forma de expresar los números decimales periódicos:

$$14,\overline{121} = \frac{14121 - 14}{999} = \frac{14107}{999}$$

Como podemos observar, en la tarea se pide encontrar cuatro expresiones decimales equivalentes, pero sólo existen tres, y son las que acabamos de obtener. Como consecuencia, los alumnos dan respuestas producto de alargar el período repetidas veces para obtener la cuarta expresión equivalente, como por ejemplo $14'\overline{121121}$, las cuales consideramos incorrectas. Esto dará lugar al punto 1.3.1 del esquema de clasificación que aparece en el apartado 5.4.

TAREA 3: Redondea la respuesta correcta y justifica tu respuesta:

a)	$8{,}13 < 8,\overline{13}$	$8{,}13 = 8,\overline{13}$	$8{,}13 > 8,\overline{13}$
b)	$3,\overline{4} < 3,\overline{40}$	$3,\overline{4} = 3,\overline{40}$	$3,\overline{4} > 3,\overline{40}$
c)	$0,\overline{9} < 1$	$0,\overline{9} = 1$	$0,\overline{9} > 1$
d)	$45,\overline{101} < 45{,}1\overline{01}$	$45,\overline{101} = 45{,}1\overline{01}$	$45,\overline{101} > 45{,}1\overline{01}$

Aunque el orden de los números naturales viene determinado por el valor del dígito de mayor orden, en la comparación de decimales periódicos no basta con mirar únicamente las cifras significativas del período. Es decir, no basta con la comparación cifra a cifra como ocurre con los naturales, sino que hay que tener en cuenta también los desarrollos. El efecto de los desarrollos decimales es clave.

Esta tarea se presenta en cuatro ítems, en los que se pide determinar si un número es menor, igual o mayor que otro. Cabe destacar algunas variantes entre los ítems:

El ítem a) trata de comparar un número decimal finito con uno decimal periódico puro con partes periódicas iguales. Se espera que, desarrollando el periodo de $8,\overline{13}$ y añadiendo ceros al decimal finito hasta igualar el número de cifras decimales en ambos números, se den cuenta que $8,\overline{13}$ es mayor que $8{,}13$ (ya que $1313 > 1300$).

En el ítem b), se comparan dos números decimales puros, pero con una y dos cifras periódicas, respectivamente. En este caso, con desarrollar sólo la parte periódica del primer número es suficiente, ya que se consiguen dos cifras decimales en cada número. Por tanto, se espera que identifiquen $3,\overline{4} > 3,\overline{40}$ porque $44 > 40$.

Para abordar el ítem c) se necesitan conocimientos superiores, como por ejemplo conocer el concepto de límite, ya que si procedemos como anteriormente, comparando las partes enteras, llegamos a conclusiones erróneas, $0,\overline{9} < 1$, de las cuales Rittaud y Vivier hablan en su trabajo. Mediante demostraciones también se puede llegar a la conclusión acertada, que es $0,\overline{9} = 1$.

Finalmente en el ítem d), se trata de comparar un número decimal periódico puro con uno mixto, de tres y dos cifras periódicas, respectivamente. Al tener las mismas cifras periódicas, se espera que los alumnos se den cuenta que al desarrollar los períodos, la diezmilésima marca la diferencia y lleva a que $45,\overline{101} > 45{,}1\overline{01}$.

En conclusión, como ya hemos dicho, los números decimales no se pueden comparar atendiendo a su tamaño al igual que los enteros. Por eso, el procedimiento que cabe esperar para la resolución de esta tarea es que desarrollen los períodos y los comparen.

TAREA 4: Realiza las siguientes sumas:

a) $0,\overline{24} + 0,\overline{57} =$

b) $6{,}7\overline{1} + 1{,}8\overline{5} =$

c) $0,\overline{5} + 0,\overline{7} =$

d) $0{,}0\overline{8} + 0,\overline{2} =$

e) $0,\overline{9} + 0,\overline{4} =$

f) $0,\overline{5} + 0,\overline{72} =$

TAREA 5: Realiza las siguientes restas:

a) $2{,}1\overline{7} - 0{,}\overline{7} =$

b) $2 - 1{,}\overline{9} =$

c) $1{,}\overline{28} - 0{,}\overline{72} =$

En la adición y sustracción de decimales periódicos no basta con sumar cifra a cifra las partes periódicas, es necesario tener en cuenta los desarrollos.

Lo que se espera que hagan los estudiantes en esta tarea es que desarrollen los períodos, para que, teniendo el mismo número de cifras después de la coma, operen como si fuesen enteros y, al percibir regularidades, escriban el resultado en forma de expresión decimal periódica.

Veamos las características de cada operación por separado:

	Tarea 4	**Tarea 5**
Ítem a)	Suma de dos n.d.p. puros con dos cifras periódicas. Sin llevar de la parte periódica a la aperiódica.	Diferencia entre un n.d.p. mixto y uno puro, con una cifra periódica. Sin acarreo
Ítem b)	Suma de dos n.d.p. mixtos con una cifra periódica. Sin llevar de la parte periódica a la aperiódica.	Diferencia entre un entero y un n.d.p. puro con una cifra periódica. Con acarreo
Ítem c)	Suma de dos n.d.p. puros con una cifra periódica. Con acarreo	Diferencia entre dos n.d.p. puros con dos cifras periódicas. Con acarreo
Ítem d)	Suma de un n.d.p. mixto y un puro con una cifra periódica. Sin llevar de la parte periódica a la aperiódica. Con acarreo.	*n.d.p.: número(s) decimal(es) periódico(s)
Ítem e)	Suma de dos n.d.p. puros con una cifra periódica. Con acarreo	
Ítem f)	Suma de dos n.d.p. puros con una y dos cifras periódicas. Con acarreo	

5.4. Criterios para el análisis y clasificación de las respuestas

El esquema de clasificación es el siguiente:

1. **RESPUESTA CORRECTA**
   - *1.1. SIN JUSTIFICACIÓN*
   - 1.2. *CON JUSTIFICACIÓN*
     - 1.2.1. Desarrollan el período
       - *1.2.1.1. Comparan números*
       - *1.2.1.2. Comparan por órdenes de unidad*
       - *1.2.1.3. Operan*
     - 1.2.2. Perciben la regularidad
       - *1.2.2.1. Total*
       - *1.2.2.2. Parcial*
     - 1.2.3. Conversión a fracción
     - 1.2.4. Utilizan la igualdad $0,\overline{9} = 1$
   - *1.3. JUSTIFICACIÓN INSUFICIENTE O INCORRECTA*
     - 1.3.1. Completan las respuestas correctas con incorrectas
     - 1.3.2. Por aproximación / Por el siguiente
     - 1.3.3. Perciben mayor el número con mayor cantidad de cifras en el período
2. **RESPUESTA INCORRECTA**
   - *2.1. SIN JUSTIFICACIÓN*
   - *2.2. CON JUSTIFICACIÓN*
     - 2.2.1. Comparan la parte periódica y se fijan en sus diferencias
     - 2.2.2. Perciben números decimales finitos
     - 2.2.3. Alargan el periodo
     - 2.2.4. Acortan el periodo
     - 2.2.5. Señalan un periodo arbitrario y/o añaden ceros
     - 2.2.6. Resultado en forma de fracción (a veces incorrecta) o aproximación
     - 2.2.7. Desarrollan el periodo y/o perciben diferencias
       - *2.2.7.1. Operan y/o diferencian la n-ésima cifra decimal*
       - *2.2.7.2. Comparan por órdenes de unidad*
       - *2.2.7.3. Desarrollo parcial o no interpretan bien el resultado*
     - 2.2.8. Diferencian la parte entera de la decimal y operan por separado
     - 2.2.9. Error de cálculo
     - 2.2.10. Interpretación del enunciado incorrecta y/o diferente a la esperada
3. **EN BLANCO O NO IDENTIFICADA**

En este apartado presentamos el modelo de interpretación y clasificación con el que se han examinado las respuestas de los alumnos al resolver las actividades del cuestionario en las que está involucrado el tema matemático de los números decimales periódicos.

El modelo de interpretación se ha elaborado para este trabajo a partir de los datos obtenidos del análisis de las respuestas de los alumnos, para caracterizar tipos de comportamiento.

Las categorías se han tomado como punto de partida para clasificar las actuaciones de los estudiantes. A su vez estas categorías se subdividen en subcategorías, éstas en clases, y éstas en subclases, según se profundiza en la apreciación de similitudes y diferencias en las interpretaciones plausibles, tanto de las expresiones escritas por los estudiantes, como de los procedimientos llevados a cabo por ellos.

5.4. Descripción del esquema de clasificación

En este apartado realizamos una descripción amplia de las categorías, subcategorías, clases y subclases del esquema de clasificación. También incluimos ejemplos, extraídos de las diferentes tareas del test, de los comportamientos de los estudiantes, así como explicaciones plausibles de ellos.

CATEGORÍA 1. RESPUESTA CORRECTA

Las respuestas de los estudiantes que se agrupan en esta categoría contienen evidencias sobre el reconocimiento por parte de los estudiantes de relaciones numéricas y de diferencias entre diferentes expresiones decimales periódicas, de regularidades y de técnicas para operar con números decimales periódicos.

Esta categoría comprende las siguientes subcategorías, clases y subclases:

SUBCATEGORÍA 1.1. SIN JUSTIFICACIÓN

Esta subcategoría incluye todas las respuestas correctas en las que el alumno no deja ninguna prueba de cómo ha obtenido la respuesta.

SUBCATEGORÍA 1.2. CON JUSTIFICACIÓN

Las respuestas que son las acertadas y en las que se evidencia una coherencia con las estrategias que usan los estudiantes para justificarlas, se incluyeron en esta subcategoría. En ella se incluyen las siguientes clases y subclases, a saber:

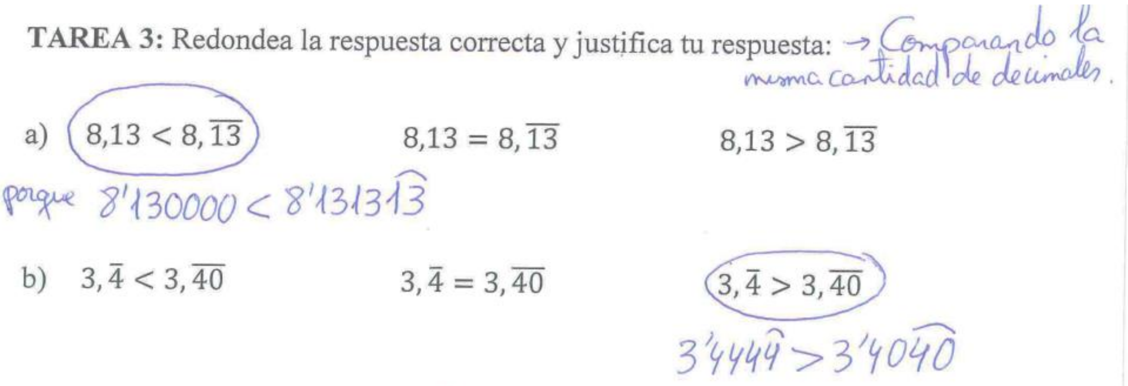
Clase 1.2.1. Desarrollan el periodo

En esta clase, se incluyen las respuestas en las cuales se encuentran evidencias de que los estudiantes centran su atención en el desarrollo del periodo, bien sea fijándose en los números originados o en cada cifra. Por ello se incluyen las siguientes subclases:

Subclase 1.2.1.1. Comparan números

En esta subclase se han agrupado todas aquellas respuestas en las que se manifiesta la atención del alumno en el número de la parte decimal como tal.

Un ejemplo de este tipo de comportamiento es el que se recoge en la figura 5.1, donde la alumna 65 (Máster), en la tarea 3, manifiesta que obtiene la solución “comparando la misma cantidad de decimales”. Lo que hace es desarrollar el periodo del número decimal si es periódico o añadir ceros si es finito, hasta obtener el mismo número de cifras en ambas partes decimales, y luego compara los números obtenidos en la parte decimal.



TAREA 3: Redondea la respuesta correcta y justifica tu respuesta: → Comparando la misma cantidad de decimales.

a) $8{,}13 < 8{,}\overline{13}$ $\quad$ $8{,}13 = 8{,}\overline{13}$ $\quad$ $8{,}13 > 8{,}\overline{13}$

porque $8'130000 < 8'131313$

b) $3{,}\overline{4} < 3{,}\overline{40}$ $\quad$ $3{,}\overline{4} = 3{,}\overline{40}$ $\quad$ $3{,}\overline{4} > 3{,}\overline{40}$

$3'4444 > 3'4040$

Figura 5.1

Subclase 1.2.1.2. Comparan por órdenes de unidad

Esta subclase corresponde a las “respuestas esperadas”. Incluye todas aquellas repuestas en las que se aprecia un centramiento del alumno en parte de la información derivada de desarrollar la parte periodica. Es decir, desarrollan el periodo de varias expresiones decimales periódicas y comparan cifra a cifra, hasta encontrar en la n-ésima posición cifras diferentes.

Un ejemplo de este tipo de comportamiento es el que se recoge en la figura 5.2, donde la alumna 53 (Máster), en la tarea 1, desarrolla el periodo de cada expresión decimal y reconoce cuatro expresiones decimales equivalentes, así como también identifica la no equivalente señalando la cifra que marca la diferencia.

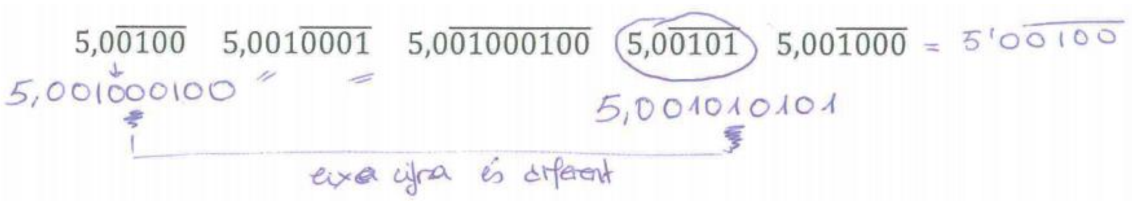


Figura 5.2

En la figura 5.3 se ilustra otro ejemplo de este tipo de comportamiento. En ella se recoge la actuación del alumno 77 (Máster) en la tarea 3 y se observa que se centra en la cifra que marca el orden.

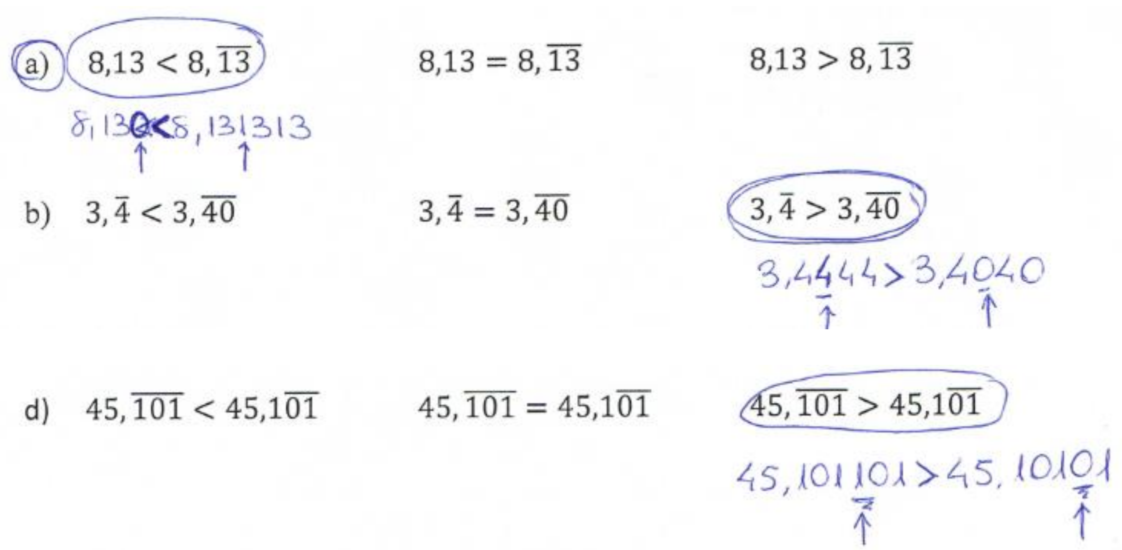


Figura 5.3

Subclase 1.2.1.3. Operan

Se ubican en esta subclase las respuestas de los alumnos que ven los números decimales periódicos como cantidades. Por ello, para compararlos necesitan demostrar que uno es una cantidad mayor o menor que otro. También se ubican en esta clase todas las respuestas de los alumnos que en las tareas 4 y 5 desarrollan primero el periodo para luego operar.

Un ejemplo de este tipo de comportamiento es el que se recoge en la figura 5.4, donde la alumna 56 (Máster), en los apartados a) y b) de la tarea 3, manifiesta que se centra en determinar la cantidad que diferencia un número de otro para poder decidir cuál es mayor, menor o igual que el otro.

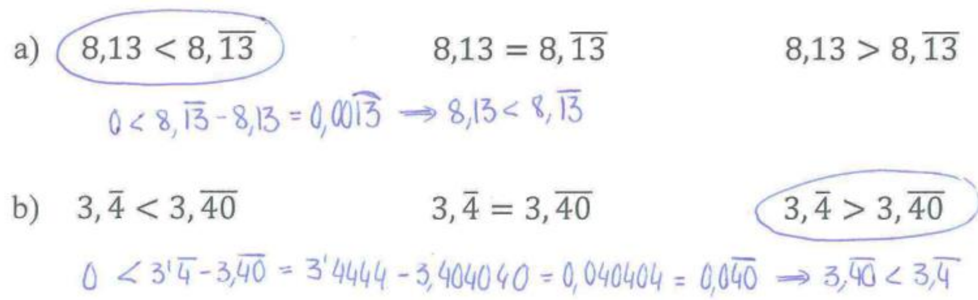


Figura 5.4

Otro ejemplo de este comportamiento se observa en la figura 5.5, donde la alumna 101 (Máster), en la tarea 5 recurre a tratar los decimales periódicos como decimales finitos. Se puede apreciar como primero desarrolla el periodo y luego opera.

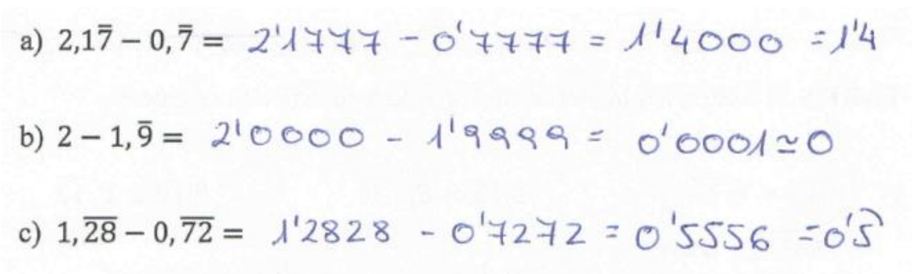


Figura 5.5

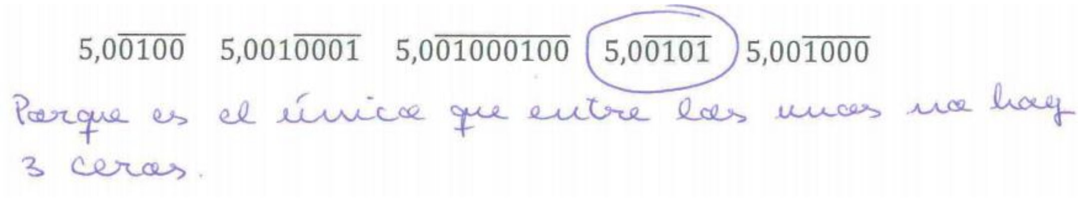
Clase 1.2.2. Perciben la regularidad

En esta clase se han agrupado las respuestas de los alumnos en las cuales se manifiesta un dominio de la interpretación de los decimales periódicos al percibir regularidades, sin necesidad de desarrollar el periodo, excepto en la tarea 2. Se distinguen dos subclases:

Subclase 1.2.2.1. Total

En esta subclase se ubican las respuestas en las cuales los alumnos reconocen todas las expresiones decimales equivalentes, y/o la fracción equivalente en el caso de la tarea 2.

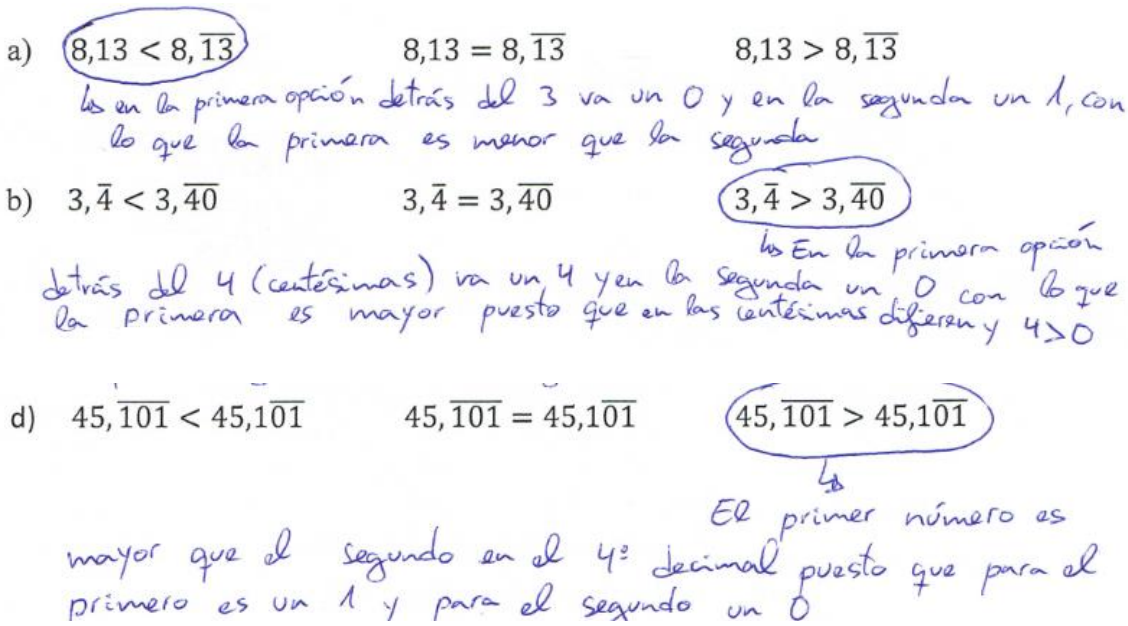
Un ejemplo de este tipo de comportamiento se muestra en la figura 5.6, donde se recoge la respuesta del alumno 67 (Máster), quien, en la tarea 1, justifica su elección diciendo: “porque es el único que entre los unos no hay tres ceros”.


$5{,}0\overline{0100}$ $5{,}001\overline{0001}$ $5{,}0\overline{01000100}$ $5{,}0\overline{0101}$ $5{,}00\overline{1000}$

Porque es el único que entre los unos no hay 3 ceros.

Figura 5.6

En la figura 5.7 se ilustra otro ejemplo de este tipo de comportamiento. En ella se recoge la actuación del alumno 88 (Máster) en la tarea 3, en la cual se observa que al percibir la regularidad, compara por órdenes de unidad.


a) $8{,}13 < 8{,}\overline{13}$ $8{,}13 = 8{,}\overline{13}$ $8{,}13 > 8{,}\overline{13}$

~~ls~~ en la primera opción detrás del 3 va un 0 y en la segunda un 1, con lo que la primera es menor que la segunda

b) $3{,}\overline{4} < 3{,}\overline{40}$ $3{,}\overline{4} = 3{,}\overline{40}$ $3{,}\overline{4} > 3{,}\overline{40}$

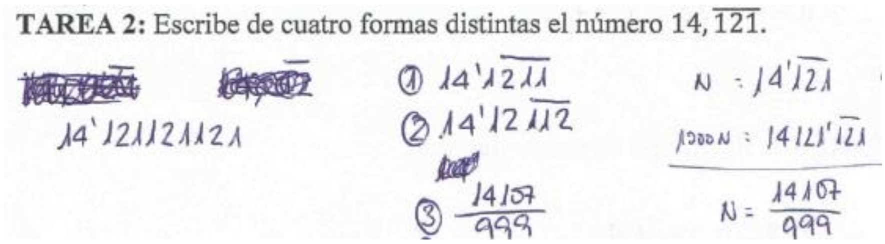
~~ls~~ En la primera opción detrás del 4 (centésimas) va un 4 y en la segunda un 0 con lo que la primera es mayor puesto que en las centésimas difieren y 4>0

d) $45{,}\overline{101} < 45{,}1\overline{01}$ $45{,}\overline{101} = 45{,}1\overline{01}$ $45{,}\overline{101} > 45{,}1\overline{01}$

El primer número es mayor que el segundo en el 4º decimal puesto que para el primero es un 1 y para el segundo un 0

Figura 5.7

En la figura 5.8, se recoge la actuación del alumno 81 (Máster) en relación a la tarea 2. Parece que primero desarrolla el periodo y luego percibe las diferentes regularidades. Da como tercera respuesta la fracción equivalente, ya que no existen más respuestas representadas en forma decimal periódica.


TAREA 2: Escribe de cuatro formas distintas el número $14,\overline{121}$.

14'121121121

① $14'\overline{121}$

② $14'12\overline{112}$

③ $\frac{14107}{999}$

$N = 14'\overline{121}$

$1000N = 14121'\overline{121}$

$N = \frac{14107}{999}$

Figura 5.8

Subclase 1.2.2.2. Parcial

Se ubican en ella las respuestas de los alumnos que no reconocen la totalidad de expresiones decimales equivalente. Este comportamiento sólo se percibe en la tarea 2.

Clase 1.2.3. Conversión a fracción

Las respuestas consideradas en esta clase se caracterizan por la necesidad de los alumnos de pasar las expresiones decimales periódicas a fracciones, ya que utilizan el hecho que saben efectuar sumas y restas de dos racionales en el registro fraccionario o, en el caso de la tarea 3c), para efectuar demostraciones.

Un ejemplo de actuación ubicada en esta clase, en este caso asociada a la tarea 4, es el que se observa en la figura 5.9, donde el alumno 90 del Máster pasa a fracción cada expresión decimal periódica, después opera con las fracciones y, finalmente, deshace el cambio.

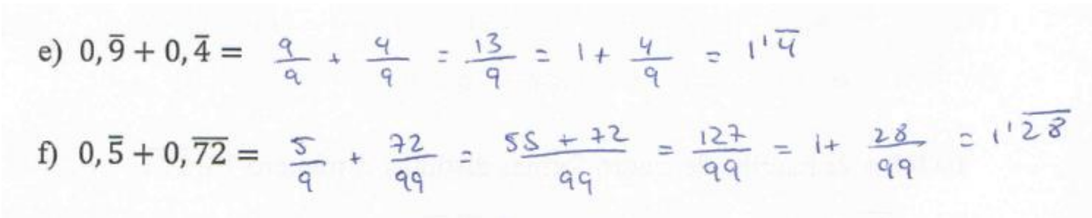


Figura 5.9

Otro ejemplo de este tipo de comportamiento, pero ahora asociado al apartado c) de la tarea 3, es el que se recoge en la figura 5.10, donde el alumno 83 (Máster) establece relaciones con fracciones hasta llegar a una conclusión.

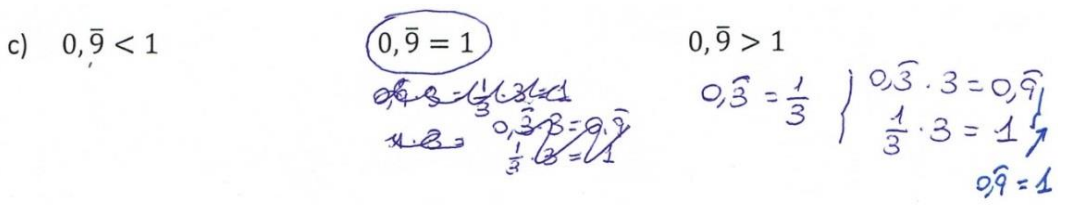


Figura 5.10

Otro ejemplo es el que se observa en la figura 5.11, donde se recoge la respuesta del alumno 90 (Máster) en la tarea 3c), quien utiliza la igualdad $0'\overline{9}=\frac{9}{9}$ para demostrar que $0'\overline{9}=1$.

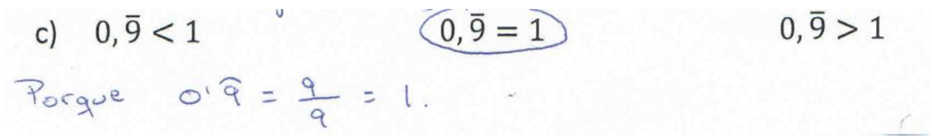


Figura 5.11

Clase 1.2.4. Utilizan la igualdad $0'\bar{9} = 1$

En las respuestas agrupadas en esta clase se puede apreciar que los alumnos identifican la igualdad $0'\bar{9} = 1$ y hacen los cálculos más sencillos.

Un ejemplo de este tipo de comportamiento es el que se refleja en la figura 5.12, donde la alumna 31 del Máster, en las tareas 4e) y 5b), reescribe la operación cambiando $0'\bar{9}$ por 1:

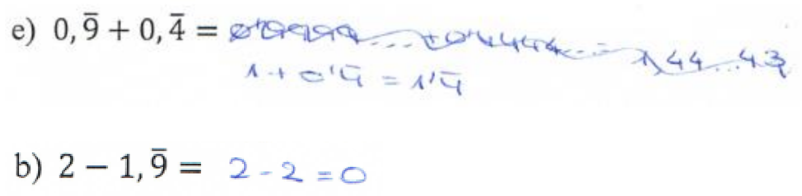


Figura 5.12

SUBCATEGORÍA 1.3. JUSTIFICACIÓN INSUFICIENTE O INCORRECTA

Se ubican en ella las respuestas en las que se contesta a la demanda de la tarea, pero con una justificación impropia o irrelevante y de la cual es posible o no identificar las interpretaciones utilizadas por los estudiantes.

Un ejemplo de este tipo de comportamiento se recoge en la figura 5.13, donde se muestra la respuesta del alumno 37 (1º Bachillerato), quien percibe en el número redondeado una regularidad, pero no es capaz de dar una justificación coherente con lo que identifica.

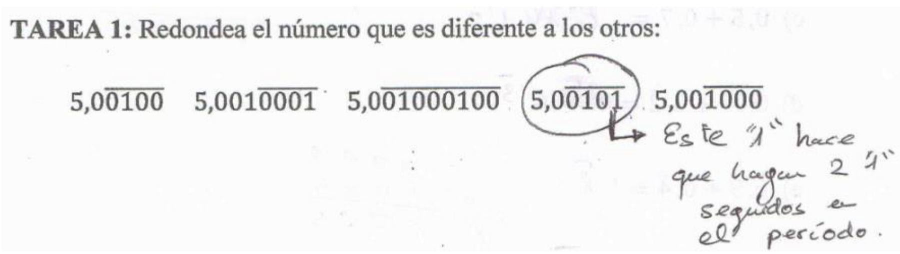


Figura 5.13

Otro ejemplo asociado a este comportamiento es el que se recoge en la figura 5.14, donde se muestra la respuesta que da el estudiante 11 (4º ESO) a la tarea 1, quien justifica su elección diciendo que los otros son diferentes: “Perquè tots els altres són diferents”.

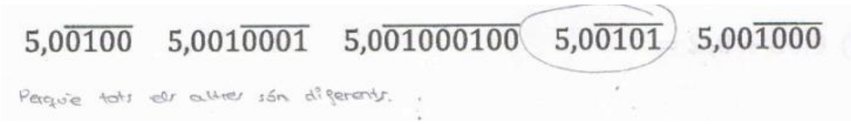


Figura 5.14

Dentro de esta subcategoría, además, se pueden distinguir tres clases:

Clase 1.3.1. Completan las respuestas correctas con incorrectas

Las respuestas ubicadas en esta clase solo se encuentran en la tarea 2, y evidencian que los alumnos, al no encontrar cuatro formas equivalentes, buscan la manera de completar la tarea con respuestas que en este trabajo consideramos incorrectas, como por ejemplo son las respuestas que surgen de alargar o acortar el periodo.

En la figura 5.15 se recoge la respuesta de la estudiante 56 (Máster). Como se puede ver, ha encontrado las dos expresiones decimales periódicas equivalentes y completa, hasta dar cuatro respuestas, con expresiones obtenidas al alargar el periodo.

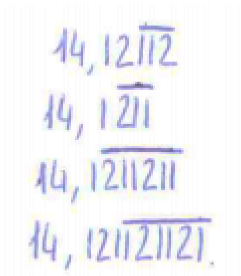


Figura 5.15

Clase 1.3.2. Por aproximación/ Por el siguiente

Las respuestas de los alumnos en la tarea 3c), en las que aparecen justificaciones por aproximación o mencionando un siguiente, se agruparon en esta clase.

En la figura 5.16 se ilustra un ejemplo del primer tipo de comportamiento. En ella se recoge la actuación del alumno 71 (Máster), quien justifica la igualdad “porque al redondear $0'\overline{9}$ queda 1”.

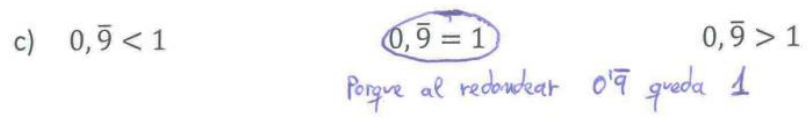


Figura 5.16

Un ejemplo que hace referencia al segundo tipo de comportamiento es el que se ilustra en la figura 5.17, donde se recoge la respuesta del alumno 23 (1º Bachillerato), quien justifica la igualdad "porque acaba en 9999 y su siguiente número es 1".

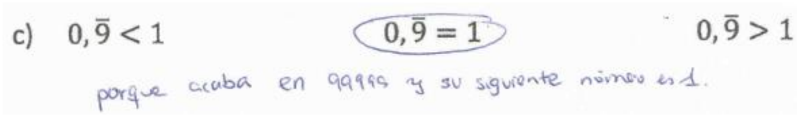


Figura 5.17

Clase 1.3.3. Perciben mayor el número con mayor cantidad de cifras en el periodo

Esta clase incluye las respuestas de los alumnos que enfrentan dificultades para establecer relaciones entre números decimales periódicos, ya que perciben mayor el número con mayor cantidad de cifras en el periodo.

Una actuación ubicada en esta clase se puede observar en la figura 5.18, donde se recoge la respuesta del alumno 19 (1º Bachillerato) a la tarea 3d). Él justifica su elección diciendo: "porque el número periódico que es 101 es mayor que el 01".

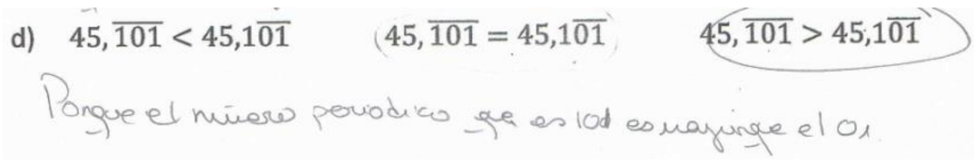


Figura 5.18

CATEGORÍA 2. RESPUESTA INCORRECTA

Las respuestas que se agrupan en esta categoría contienen evidencias de la falta de percepción por parte de los estudiantes de regularidades y de técnicas para comparar y operar con números decimales periódicos.

En esta categoría se incluyen las siguientes subcategorías, clases y subclases:

SUBCATEGORÍA 2.1. SIN JUSTIFICACIÓN

Esta subcategoría incluye todas las respuestas incorrectas en las que el alumno no deja ninguna prueba de cómo ha obtenido la respuesta.

SUBCATEGORÍA 2.2. CON JUSTIFICACIÓN

Esta subcategoría incluye las respuestas en las cuales hay evidencias de que los alumnos no han identificado las relaciones apropiadas entre los datos.

En ella se distinguen las siguientes clases y subclases:

Clase 2.2.1. Comparan la parte periódica y se fijan en sus diferencias

Las respuestas de los alumnos que se ubican en esta clase, se caracterizan por identificar diferencias centradas en las cifras que abarca la raya del periodo.

Un ejemplo de este tipo de comportamiento se muestra en la figura 5.19, donde se recoge la respuesta del estudiante 23 (1º Bachillerato) en la tarea 1, quien justifica su elección de la respuesta así: “porque el número 1 no lleva periodo”.

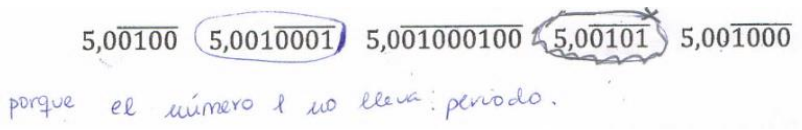


Figura 5.19

Clase 2.2.2. Perciben números decimales finitos

En esta clase se ubican las respuestas en las cuales se manifiestan dificultades por parte de los alumnos en el concepto de número decimal periódico y una tendencia a trabajar con los números decimales finitos.

Un ejemplo de este tipo de comportamiento es el que se recoge en la figura 5.20, donde, en la tarea 3, el alumno 24 (1º Bachillerato) manifiesta que se centra en el número sin tener en cuenta la barra del periodo. Sus respuestas: “he puesto esto porque el $8'13$ no puede ser mayor o menor que $8'\overline{13}$” y “$3'4$ es lo mismo que $3'40$”, respectivamente, son coherentes con este tipo de comportamiento.

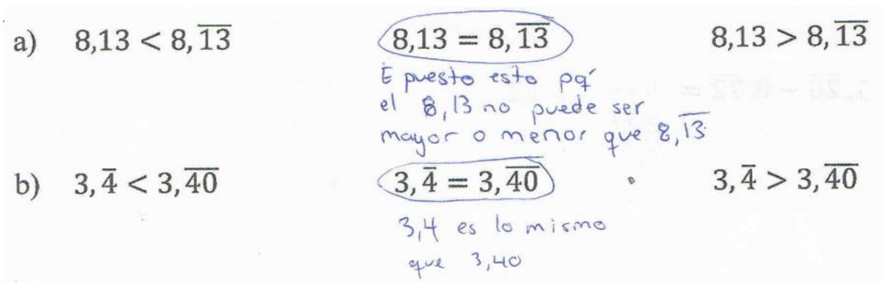


Figura 5.20

Otra actuación ubicada en esta clase se puede observar en la figura 5.21, donde se recoge la respuesta del alumno 29 (1º Bachillerato) a la tarea 5. Al parecer, interpreta las expresiones decimales periódicas como finitas, ya que opera como así fueran, sin preocuparse de desarrollar el periodo o de las variaciones que este pudiera comportar.

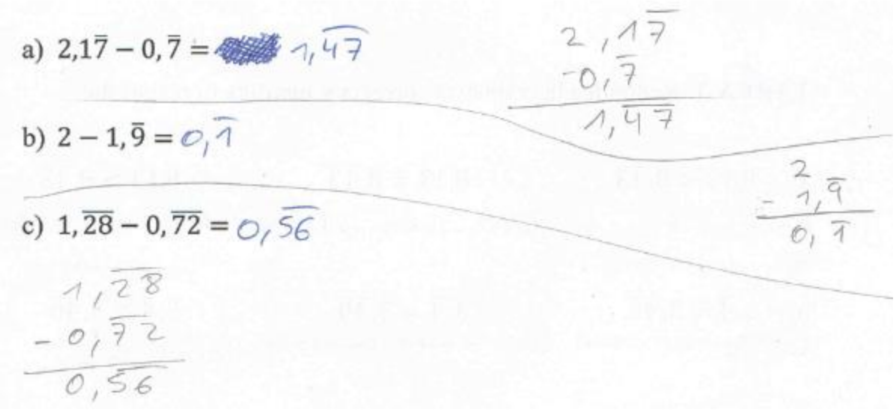


Figura 5.21

Clase 2.2.3. Alargan el periodo

Las respuestas ubicadas en esta subcategoría evidencian que los alumnos toman el periodo de la expresión decimal del enunciado y lo reproducen.

Un ejemplo de este tipo de comportamiento es el que se recoge en la figura 5.22, donde el alumno 94 (Máster), en la tarea 2, combina varias veces el periodo para obtener expresiones decimales equivalentes a la dada.

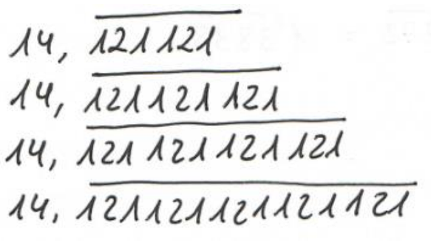


Figura 5.22

Clase 2.2.4. Acortan el periodo

La característica principal de estas respuestas es que estos alumnos advierten una sucesión numérica dentro del periodo y lo acortan, sin embargo no es la apropiada. Además, para expresar de diferentes formas el número dado, alargan esta sucesión.

Un ejemplo de actuación ubicada en esta clase, asociada a la tarea 2, es la respuesta del alumno 71 (Máster) que se observa en la figura 5.23.

Figura 5.23

Clase 2.2.5. Señalan un periodo arbitrario y/o añaden ceros

En las respuestas agrupadas en esta subcategoría se puede apreciar que los alumnos, guiados por la tarea 1, o bien añaden ceros a la expresión del enunciado o bien señalan periodos arbitrarios.

En las figuras 5.24 y 5.25 se ilustra un ejemplo de este tipo de comportamiento. En ellas se recogen, respectivamente, las actuaciones del alumno 11 (4º ESO), quien añade ceros a la derecha del número y alarga la barra del periodo, y del alumno 19 (1º Bachillerato), quien señala un periodo arbitrario, en la tarea 2.

TAREA 2: Escribe de cuatro formas distintas el número $14,\overline{121}$.

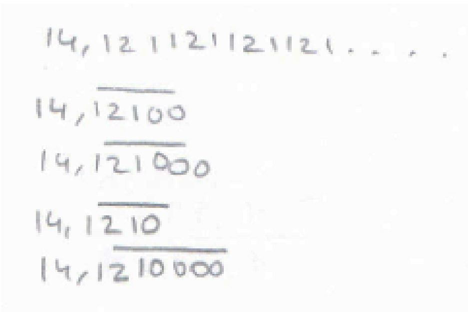


Figura 5.24

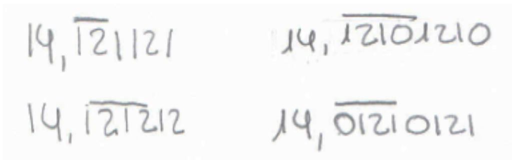


Figura 5.25

Clase 2.2.6. Resultado en forma de fracción (a veces incorrecta) o aproximación

Se ubican en esta clase las respuestas de los alumnos, quienes ante los números decimales periódicos sólo saben recurrir al registro fraccionario, pero sin tener tampoco una concepción clara de éste, ya que cometen errores al pasar a fracción, o utilizan la aproximación, ya que no conocen que el resultado es periódico

Un ejemplo de este tipo de comportamiento se recoge en la figura 5.26, donde se muestra la respuesta del alumno 64 (Máster) en la tarea 2, quién se equivoca en su intento de pasar a fracción:

① $\frac{14121}{999}$ ② $\frac{141210}{9990}$ ③ $\frac{1412106}{99900}$ ④ $\frac{14121006}{999000}$

Figura 5.26

Otra actuación ubicada en esta clase se puede observar en la figura 5.27, donde se recoge la respuesta del alumno 90 (Máster) a la tarea 4d). Se puede observar que conoce el cambio de expresión decimal periódica a fracción, pero tiene dificultades para deshacer ese cambio y dejar la respuesta en forma de expresión decimal periódica.

d) $0{,}0\overline{8} + 0{,}\overline{2} = \frac{8}{90} + \frac{2}{9} = \frac{8+20}{90} = \frac{28}{90} = 0'\overline{28}$

Figura 5.27

Finalmente, en la figura 5.28 se recoge la actuación del alumno 67 (Máster) en la tarea 4, quién utiliza las aproximaciones sin conocer que el resultado es periódico.

a) $0,\overline{24} + 0,\overline{57} =$

$0'242424\ldots + 0'575757 = 0'818181\ldots$

Figura 5.28

Clase 2.2.7. Desarrollan el periodo y/o perciben diferencias

Las respuestas de los alumnos que se ubican en esta clase se caracterizan por la atención en el desarrollo del periodo y/o la falta de percepción.

En ella se distinguen tres subclases, las dos primeras sólo presentes en la tarea 3c).

Subclase 2.2.7.1. Operan y/o diferencian la n-ésima cifra decimal

En esta clase se agrupan las respuestas, solo referentes a la tarea 3c), en las que hay evidencia de una toma de conciencia, por parte de los alumnos, de encontrar diferencias entre los números. Sin embargo, enfrentan dificultades para establecer relaciones entre las cantidades.

Unos realizan operaciones con intención de proporcionar un resultado, como se refleja en la figura 5.29, donde se recoge la actuación de la alumna 56 (Máster).

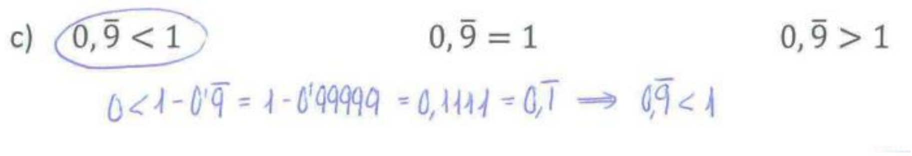


Figura 5.29

Otros justifican que perciben diferencias en la n-ésima cifra decimal. En la figura 5.30 se ilustra un ejemplo de este comportamiento, donde se recoge la respuesta del alumno 88 (Máster): “En el infinito al $0'\bar{9}$ le seguirá faltando un infinitesimal para llegar al 1 y ser iguales”.

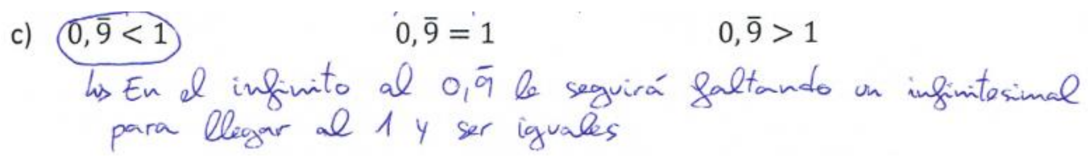


Figura 5.30

Subclase 2.2.7.2. Comparan por órdenes de unidad

Las respuestas de los alumnos que se ubican en esta clase se caracterizan por su centramiento en la parte entera del número decimal periódico.

Una actuación ubicada en esta clase se puede observar en la figura 5.31, donde se recoge la respuesta del alumno 57 (Máster) a la tarea 3c).

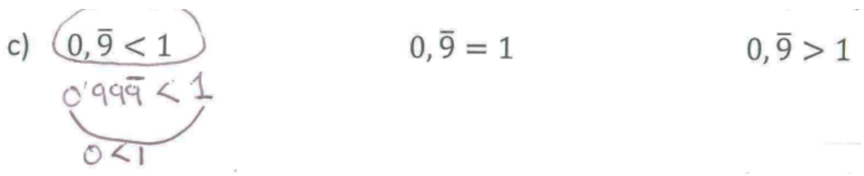


Figura 5.31

Subclase 2.2.7.3. Desarrollo parcial o no interpretan bien el resultado

En las respuestas agrupadas en esta subclase se puede apreciar que los alumnos no desarrollan el periodo hasta tener la misma cantidad de cifras decimales en ambos números.

En la figura 5.32 se ilustra un ejemplo de este tipo de comportamiento. En ella se recoge la actuación del alumno 19 (1º Bachillerato) en la tarea 4d) y se observa que no hay pruebas de que consideren necesario que haya la misma cantidad de decimales en ambos números.

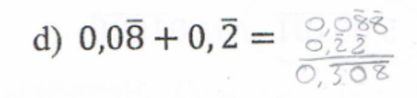


Figura 5.32

En este estudio, se han ubicado además en esta subclase las respuestas de los alumnos que realizan interpretaciones incorrectas de los resultados obtenidos. La figura 5.33 recoge la respuesta de la alumno 61 (Máster) a la tarea 4f) y en ella se observa que opera correctamente pero no manifiesta una percepción de regularidades.

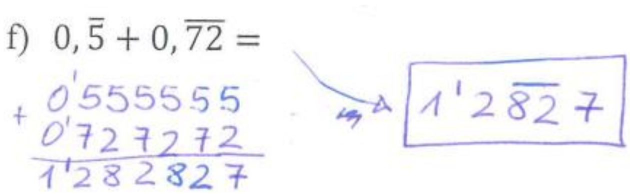


Figura 5.33

Clase 2.2.8. Diferencian la parte entera de la parte decimal y operan por separado

En esta clase se ubican las respuestas en las cuales se manifiestan dificultades con el concepto de la coma decimal y una tendencia a trabajar por separado la parte entera y la parte decimal. Estos estudiantes tienen una concepción de número decimal como dos números enteros separados por el punto decimal

Un ejemplo de este tipo de comportamiento es el que se recoge en la figura 5.34, donde el alumno 46 de 2º Bachillerato C.S., en la tarea 4, realiza las operaciones separando la parte decimal de la parte entera, con la peculiaridad de los apartados d), en el cual tiene en cuenta que delante del 8 hay un 0, y el f), en el que se intuye que desarrolla el periodo del primer número decimal periódico.

Otro ejemplo de este comportamiento se observa en la figura 5.35. En ella se recoge la actuación del estudiante 50 (2º Bachillerato C.S.), quien responde a la misma tarea y lo hace de la misma manera, pero este alumno no tiene en cuenta, en el apartado d), el 0 de delante del 8.

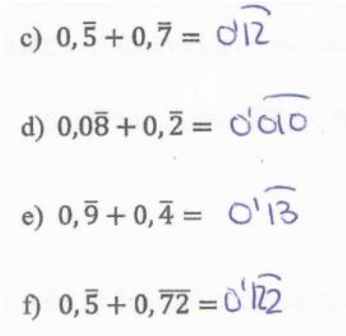


Figura 5.34

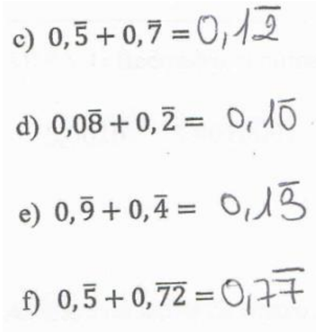


Figura 5.35

Clase 2.2.9. Error de cálculo

Esta clase se incorpora al esquema clasificatorio para recoger las respuestas de los alumnos que cometen errores de cálculo en las tareas 4 y 5.

Clase 2.2.10. Interpretación del enunciado incorrecta y/o diferente a la esperada

Los comportamientos ubicados en esta clase muestran que los alumnos otorgan significados particulares incorrectos a expresiones contenidas en el enunciado.

Un ejemplo de este comportamiento se observa en la figura 5.36, donde se recoge la actuación del alumno 11 (4º ESO) en el apartado a) de la tarea 5, quien identifica $2'1\overline{7}$ como $2'\overline{17}$.

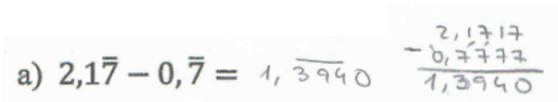


Figura 5.36

Otro ejemplo de este comportamiento se observa en la figura 5.27. Al parecer, el alumno 35 (1º Bachillerato) ha interpretado la expresión $0'\overline{7}$ como $0'0\overline{7}$.

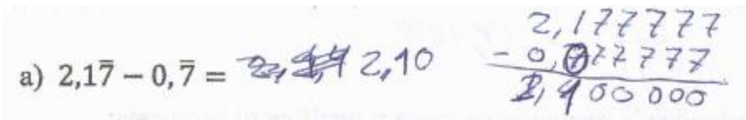
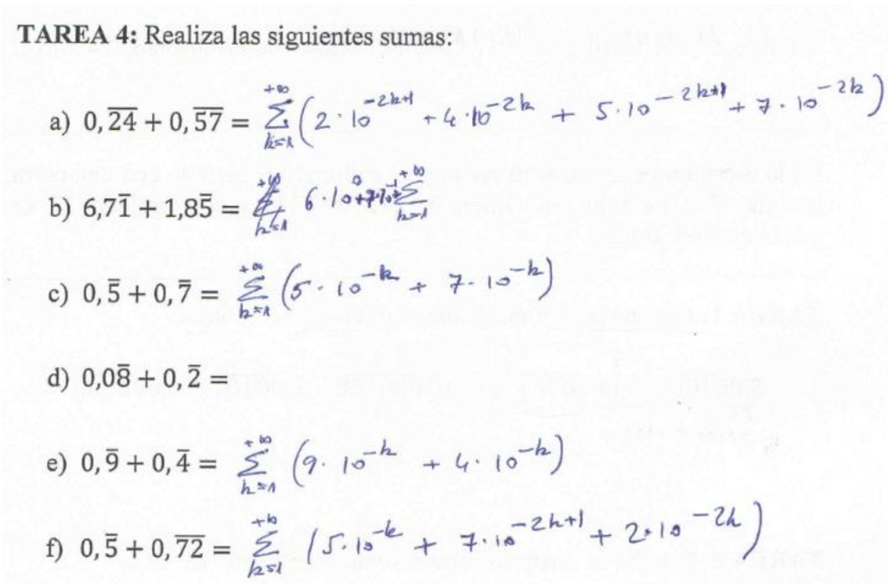


Figura 5.37

Otro ejemplo de tarea no identificada es el que se recoge en la figura 5.38, donde el alumno 96 del Máster, en la tarea 4, hace una interpretación distinta de la esperada, formalizando con sumatorios. Se limita a cambiar de registro, buscando la expresión decimal como serie de fracciones decimales, pero no da el resultado.



TAREA 4: Realiza las siguientes sumas:

a) $0,\overline{24}+0,\overline{57} = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(2\cdot 10^{-2k+1}+4\cdot 10^{-2k}+5\cdot 10^{-2k+1}+7\cdot 10^{-2k}\right)$

b) $6,7\overline{1}+1,8\overline{5} = \sum_{k=1}^{+\infty} 6\cdot 10^{0}+7\cdot 10^{-1}+\sum_{k=1}^{+\infty}$

c) $0,\overline{5}+0,\overline{7} = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(5\cdot 10^{-k}+7\cdot 10^{-k}\right)$

d) $0,0\overline{8}+0,\overline{2} =$

e) $0,\overline{9}+0,\overline{4} = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(9\cdot 10^{-k}+4\cdot 10^{-k}\right)$

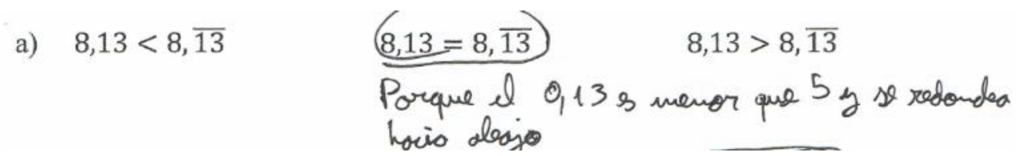
f) $0,\overline{5}+0,\overline{72} = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(5\cdot 10^{-k}+7\cdot 10^{-2k+1}+2\cdot 10^{-2k}\right)$

Figura 5.38

CATEGORÍA 3. EN BLANCO O NO IDENTIFICADA

En ella ubicamos las actuaciones de los alumnos en las que se considera que el alumno no contesta a la tarea o no ha sido posible identificar las interpretaciones utilizadas por los estudiantes.

Un ejemplo de respuesta no identificada es el que se recoge en la figura 5.39, donde el alumno 36 (1º Bachillerato), en la tarea 3a), da la siguiente justificación: “porque el 0’13 es menor que 5 y se redondea hacia abajo”.

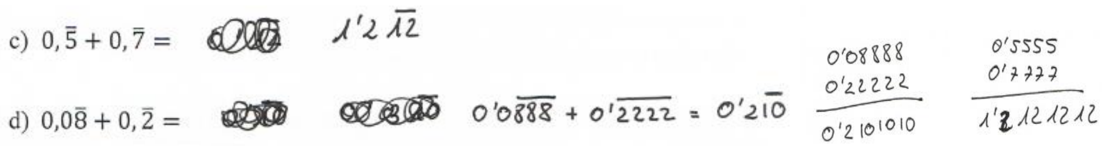


a) $8,13 < 8,\overline{13}$ $\quad$ $8,13 = 8,\overline{13}$ $\quad$ $8,13 > 8,\overline{13}$

Porque el 0,13 es menor que 5 y se redondea hacia abajo

Figura 5.39

Otro ejemplo que merece ser mencionado es la respuesta a los ítem c) y d) de la tarea 4 de la alumna 94 (Máster), recogido en la figura 5.40. No hemos podido identificar por qué en estos ítems opera sin tener en cuenta “las llevadas”.



c) $0,\overline{5}+0,\overline{7} =$ $1'2\overline{12}$

d) $0,0\overline{8}+0,\overline{2} =$ $0'0\overline{888}+0'\overline{2222} = 0'2\overline{10}$

0'08888 + 0'22222 = 0'2101010

0'5555 + 0'7777 = 1'2121212

Figura 5.40

6. RESULTADOS DE APLICACIÓN DEL CUESTIONARIO

En el apartado que se presenta a continuación, se recogen los resultados tras el análisis de los datos obtenidos en el cuestionario que se les pasó a estudiantes del IES Sorolla y futuros profesores de matemáticas. Hemos organizado esos resultados según los esquemas descritos en el apartado anterior, atendiendo a los niveles de éxito y los comportamientos predominantes.

Para simplificar, vamos a abreviar los nombres de cada curso de la siguiente manera:

4º: 4º ESO
1º: 1º Bachillerato
2º C: 2º Bachillerato de Ciencias
2º H: 2º Bachillerato de Ciencias Sociales y Humanidades
M1: Máster en Profesor/a especialidad de matemáticas, curso 2012/13
M2: Máster en Profesor/a especialidad de matemáticas, curso 2013/14

TAREA 1. *Codificación*

La información de las respuestas a la primera pregunta se recoge en la tabla 6.1.

	4º	**1º**	**2º C**	**2º H**	**M1**	**M2**	
11	**9/13**	1/24	1/5	**3/10**	4/21		Respuesta correcta sin justificación
1212	1/13	**11/24**	**2/5**	1/10	**12/21**	**21/34**	Comparan por órdenes de unidad
1221		5/24	1/5	3/10	4/21	9/34	Perciben la regularidad - Total
13	2/13	4/24	1/5	1/10	1/21	2/34	Justificación insuficiente/incorrecta
21		1/24				2/34	Respuesta incorrecta sin justificación
221		2/24		1/10			Comparan la parte periódica
3	1/13			1/10			En blanco o no identificada

Tabla 6.1 Frecuencias de respuestas por cursos en la tarea 1

Alrededor de la mitad de los estudiantes de 1º de Bachillerato y de Máster siguen el procedimiento de resolución esperado: desarrollan el periodo del número dado y comparan cifra a cifra. Como podemos observar, no hay variaciones significativas en estos grupos en cuanto a la estrategia de resolución y al total de respuestas correctas.

La diferencia más significativa está en los alumnos de la ESO, y es que no justifican las respuestas. También hay un número significativo de estudiantes que perciben la regularidad.

Por tanto, se puede decir que los estudiantes resuelven acertadamente la tarea, ya que casi la totalidad de los alumnos dan una respuesta correcta.

TAREA 2. *Codificación*

En la tabla 6.2 se recoge la información correspondiente a la segunda pregunta.

	4º	1º	2º C	2º H	M1	M2	
1221	1/13		1/5			2/34	Perciben la regularidad – Total
1222						1/34	Perciben la regularidad – Parcial
131	1/13	**5/24**	2/5	1/10	**15/21**	**17/34**	Completan con resp. incorrectas
223	1/13	**6/24**	1/5	3/10	2/21	6/34	Alargan el periodo
224	2/13	3/24	1/5	2/10	2/21	3/34	Acortan el periodo
223+224	**4/13**	3/24					
225	2/13	3/24				1/34	Periodo arbitrario y/o añaden ceros
226					2/21	2/34	Paso a fracción incorrecto
3	2/13	4/24		**4/10**		2/34	En blanco o no identificada

Tabla 6.2 Frecuencias de respuestas en la tarea 2

El bajo nivel de éxito indica que los estudiantes tienen dificultades para interpretar adecuadamente la tarea. A pesar de que es el recíproco de la tarea 1, no se dan cuenta. No han entendido bien que se espera que den como respuestas diferentes expresiones decimales periódicas y/o la fracción equivalente, y no lo que hace la mayoría, que es alargar el periodo dado en la tarea y hacer diferentes combinaciones

En la ESO y 1º Bachillerato es significativa la falta de respuestas correctas. En el máster, en cambio, es alto el número de respuestas correctas, pero en menor medida que la tarea anterior. Eso sí, completadas con incorrectas, ya que, como bien hemos señalado en la caracterización, las diferentes combinaciones que salen de alargar el periodo las consideramos como respuesta incorrecta. También es significativo el número de alumnos del Máster 13/14 que dan una respuesta en forma de fracción. Lo hacen 11 de ellos, una tercera parte del total.

TAREA 3. *Comparación*

La información de las respuestas de los ítems a), b) y d) se recoge en las tablas 6.3.1, 6.3.2, y la del ítem c) en la tabla 6.3.3. El análisis de este último ítem lo separamos porque es diferente al de los otros. Desarrollando el periodo y comparando las cifras se llega a una solución errónea, aquí es necesaria la concepción de límite o el uso de demostraciones.

	4º			**1º**			**2º C**		
	a	**b**	**d**	**a**	**b**	**d**	**a**	**b**	**d**
11					1/24				
1211	**9/13**	**7/13**	**3/13**	**9/24**	**10/24**	**8/24**	**4/5**	**4/5**	**3/5**
1212		2/13	**4/13**	**4/24**	**5/24**	**6/24**		1/5	1/5
1213				1/24	1/24	2/24			
1221	3/13	2/13		2/24	2/24	1/24	1/5		
13			1/13	3/24	1/24	1/24			
133						2/24			
21			1/13			1/24			
222		2/13	3/13	3/24	3/24	1/24			
3	1/13		1/13	2/24	1/24	2/24			1/5

Tabla 6.3.1 Frecuencias de respuestas en la tarea 3

	2º H			**M1**			**M2**		
	a	**b**	**d**	**a**	**b**	**d**	**a**	**b**	**d**
11	**3/10**	3/10	4/10	1/21					1/34
1211	**3/10**	**5/10**	**2/10**	**8/21**	**8/21**	**5/21**	**16/34**	**14/34**	**10/34**
1212			2/10	**8/21**	**8/21**	**11/21**	**5/34**	**10/34**	**16/34**
1213				3/21	3/21	2/21	4/34	3/34	3/34
1221					1/21	2/21	9/34	4/34	3/34
13	1/10			1/21					
21			1/10		1/21				
222	2/10	1/10						2/34	
3	1/10	1/10	1/10			1/21		1/34	1/34

Tabla 6.3.2 Frecuencias de respuestas en la tarea 3

11	Respuesta correcta sin justificación	13	Justificación insuficiente
1211	Desarrollan el periodo y comparan números	133	Perciben mayor el número con mayor cantidad de cifras en el periodo
1212	Desarrollan el periodo y comparan por órdenes de unidad	21	Respuesta incorrecta sin justificación
1213	Desarrollan el periodo y operan	222	Perciben números decimales finitos
1221	Perciben la regularidad - Total	3	En blanco o no identificada

Observamos en los alumnos dos tendencias en relación a la comparación de números decimales periódicos: la primera, se caracteriza por desarrollar el periodo y comparar el número natural que resulta de este desarrollo en la parte decimal. La segunda, minoritaria en los alumnos de la ESO y 2º Bachillerato, y significativa en los grupos de 1º Bachillerato y Máster, se caracteriza por desarrollar el periodo, pero esta vez la comparación es cifra a cifra.

Debemos destacar otras dos tendencia significativa en los alumnos del Máster 13/14, que son la búsqueda de diferencias entre cantidades y la percepción de regularidades.

En términos totales, el nivel de éxito es alto, con una evolución natural al pasar de ciclo.

	4º	1º	2º C	2º H	M1	M2	
11				1/10		1/34	Respuesta correcta sin justificación
123					**7/21**	4/34	Conversión a fracción
132	1/13	1/24			1/21	2/34	Por aproximación/ Por el siguiente
21		2/24		3/10		3/34	Respuesta incorrecta sin justificación
2271		3/24	1/5		2/21	3/34	Operan
2272	**12/13**	**16/24**	**4/5**	**5/10**	**11/21**	**20/34**	Comparación por órdenes de unidad
3		2/24		1/10		1/34	En blanco o no identificada

Tabla 6.3.3 Frecuencias de respuestas en la tarea 3, ítem c)

Como cabía esperar, es significativa la cifra de estudiantes que justifican este ítem de la misma manera que los anteriores, comparando las cifras, en este caso las unidades. La mayoría de los estudiantes no están de acuerdo con la igualdad $0'\overline{9} = 1$ y más de la mitad de ellos justifican la desigualdad $0'\overline{9} < 1$ con repuestas infinitesimales.

Para la resolución de esta pregunta se necesitan conocimientos superiores, como ya habíamos dicho. Esto se refleja en los resultados, ya que la justificación mediante el uso de demostraciones no ha sido observado entre los alumnos de secundaria y bachillerato. En cambio, aparece a menudo con los estudiantes de Máster.

TAREA 4. *Suma*

Las tablas 6.4.1, 6.4.2 y 6.4.3 contienen la información de las respuestas a las sumas.

	4º						1º					
	a	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**
11	**4/13**	**3/13**					**8/24**	**12/24**	4/24	4/24	2/24	1/24
1213	**4/13**	**4/13**	**4/13**	**4/13**	**4/13**	**3/13**	**6/24**	**5/24**	**8/24**	**6/24**	**7/24**	**6/24**
21							3/24	1/24	2/24	2/24	5/24	2/24
222	**5/13**	**5/13**	**8/13**	**8/13**	**7/13**	**8/13**	**5/24**	**5/24**	**8/24**	**6/24**	**7/24**	**8/24**
2273					1/13	1/13				1/24	1/24	3/24
228			1/13		1/13				2/24	2/24	2/24	2/24
229		1/13		1/13		1/13	2/24	1/24		2/24		2/24
3										1/24		

Tabla 6.4.1 Frecuencias de respuestas en la tarea 4

	2º C						2º H					
	a	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**
11	1/5	2/5	1/5	1/5			**4/10**	**6/10**	1/10			
1213	**4/5**	**3/5**	1/5	**2/5**	**2/5**	**3/5**						
21					1/5	1/5	1/10					
222			1/5	1/5		1/5	2/10	3/10	**5/10**	**5/10**	**6/10**	**6/10**
2273			**2/5**	1/5	1/5							
228							1/10		3/10	3/10	3/10	3/10
229					1/5					1/10		
3							1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	

Tabla 6.4.2 Frecuencias de respuestas en la tarea 4

	M1						M2					
	a	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**
11	2/21	6/21	2/21	1/21	3/21	2/21	4/34	**13/34**	4/34	4/34	8/34	4/34
1213	**13/21**	**10/21**	**13/21**	**11/21**	**12/21**	**11/21**	**24/34**	**16/34**	**20/34**	**14/34**	**19/34**	**19/34**
123	2/21	2/21	3/21		1/21		4/34		2/34	1/34	2/34	2/34
124					1/21						1/34	
21	1/21	1/21		1/21				1/34	3/34	6/34	1/34	1/34
222	1/21						2/34					1/34
226	2/21	2/21	3/21	5/21	4/21	5/21		3/34	3/34	4/34		2/34
2273				1/21		2/21		1/34		2/34		2/34
228									1/34		2/34	
229										1/34	1/34	3/34
22.10				1/21					1/34	2/34		
3				1/21		1/21						

Tabla 6.4.3 Frecuencias de respuestas en la tarea 4

11	Respuesta correcta sin justificación	226	Resultado como aproximación
1213	Desarrollan el periodo y operan	2273	Desarrollo parcial
123	Conversión a fracción	228	Diferencian la parte entera de la decimal y operan por separado
124	Utilizan la igualdad $0'\overline{9} = 1$	229	Error de cálculo
21	Respuesta incorrecta sin justificación	22.10	Interpretación del enunciado incorrecta y/o diferente a la esperada
222	Perciben números decimales finitos	3	En blanco o no identificada

En esta tarea se percibe que el nivel de éxito aumenta de modo natural al avanzar de nivel. La tendencia de conversión al registro fraccionario no se ha observado entre los alumnos de ESO y Bachillerato. En cambio, es una técnica que utilizan a menudo los estudiantes de Máster.

En las respuestas no acertadas predomina un comportamiento, el de tratar los decimales periódicos como decimales finitos. Como podemos observar, la mitad de los alumnos de 4º curso realizan las operaciones como si se tratara de números decimales finitos. La otra mitad, igual que la mayoría de los estudiantes de bachillerato y de máster, tienden a desarrollar primero el periodo, luego operar como si se tratara de números decimales finitos y, finalmente, vuelven a escribir el resultado en forma de expresión decimal periódica.

Además, es significativo el número de alumnos que dan un resultado correcto a los dos primeros ítems y, en cambio, son incorrectos los de los demás ítems. Esto es debido a las características de las expresiones decimales periódicas, que aunque los alumnos las vean como expresiones decimales finitos u operen por separado la parte entera y la parte decimal, hace que den un resultado correcto. Al intuir esto, estas respuestas están clasificadas como las de los demás ítems.

Finalmente, también podemos observar que los alumnos que tienden a realizar las operaciones desarrollando el periodo, el ítem 2 lo calculan de cabeza por su simplicidad. En cambio, hay un número significativo de alumnos con tendencia a operar de cabeza y eso les lleva a muchos errores.

TAREA 5. *Sustracción*

La información de las respuestas a la pregunta se recoge en las tablas 6.5.1 y 6.5.2.

	4º			1º			2º C		
	a	**b**	**c**	**a**	**b**	**c**	**a**	**b**	**c**
11				1/24					
1213	2/13		4/13	**8/24**	3/24	**7/24**	2/5		1/5
21	1/13	1/13		4/24		2/24		2/5	
222	**7/13**	**8/13**	**9/13**	**6/24**	**14/24**	**10/24**	**2/5**	**3/5**	**3/5**
2273	1/13	2/13		1/24	**6/24**				
228						1/24			
229	1/13	2/13				3/24	1/5		1/5
22.10	1/13			4/24					
3					1/24	1/24			

Tabla 6.5.1 Frecuencias de respuestas en la tarea 5

	2º H			**M1**			**M2**		
	a	**b**	**c**	**a**	**b**	**c**	**a**	**b**	**c**
11				2/21	4/21	1/21	6/34	**9/34**	5/34
1213				**10/21**	**8/21**	**11/21**	**19/34**	3/34	**18/34**
123					3/21	1/21	2/34	3/34	2/34
124		1/10						2/34	
21	2/10	3/10		1/21	1/21		2/34	**7/34**	2/34
222	**4/10**	**5/10**	**9/10**						1/34
226				3/21		4/21	1/34		2/34
2273				1/21	2/21		2/34	**7/34**	1/34
229	2/10			2/21	3/21	3/21	1/34	2/34	2/34
22.10	1/10			2/21			1/34	1/34	
3	1/10	1/10	1/10			1/21			1/34

Tabla 6.5.2 Frecuencias de respuestas en la tarea 5

11	Respuesta correcta sin justificación	226	Resultado como aproximación
1213	Desarrollan el periodo y operan	2273	Desarrollo parcial
123	Conversión a fracción	228	Diferencian la parte entera de la decimal y operan por separado
124	Utilizan la igualdad $0'\overline{9} = 1$	229	Error de cálculo
21	Respuesta incorrecta sin justificación	22.10	Interpretación del enunciado incorrecta y/o diferente a la esperada
222	Perciben números decimales finitos	3	En blanco o no identificada

En términos totales, el nivel de éxito sufre una evolución natural de la ESO al Máster.

A la vista de los datos se puede decir que otra vez aparece una tendencia parecida en los alumnos de 1º de Bachillerato y los de Máster a desarrollar el periodo para luego operar. Además, se observa en estos últimos otra tendencia, la de conversión al registro fraccionario, la cual no se ha observado entre los alumnos de ESO y Bachillerato.

Los comportamientos predominantes asociados a las respuestas incorrectas son los asociados a operar como si se tratara de números decimales finitos, el cual sólo se observa en los alumnos de ESO y Bachillerato, y el de no desarrollar hasta tener la misma cantidad de cifras decimales en ambas expresiones. Además, hay un número significativo de alumnos del Máster 13/14 que dan respuestas, tanto correctas como incorrectas, sin justificación.

7. SÍNTESIS DE RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Como síntesis de lo observado, tras haber concluido la parte experimental y el análisis de los resultados, basado en el recuento y clasificación de las respuestas de los alumnos a través de una réplica de una parte del cuestionario de Rittaud y Vivier (2013), hemos obtenido una series de conclusiones, que vamos a relacionar con las obtenidas en el trabajo de investigación de estos autores.

- En nuestro estudio, la tarea 1, que Rittaud y Vivier llaman de *codificación*, tuvo éxito, ya que sólo 8 alumnos del total no fueron capaces de identificar la expresión decimal diferente. En cambio, en la tarea 2, a pesar de ser recíproca a la tarea 1, los estudiantes tuvieron dificultades para abordarla y, o bien daban respuestas incorrectas, o bien completaban las correctas con incorrectas. Por tanto, no tuvo éxito, al igual que en el estudio de estos autores.
- La *comparación* de los ítems a, b y d de la tarea 3 fue un éxito en ambos estudios. Además de la tendencia a desarrollar el periodo y comparar cifra a cifra, en nuestro estudio observamos otra actuación predominante: desarrollan el periodo y comparan el número natural que resulta de este desarrollo.
- Para la comparación del caso $0'\overline{9}$ y 1, en nuestro estudio se ha obtenido un mayor número de errores en comparación con la investigación de Rittaud y Vivier. Para la resolución de esta pregunta se necesitan conocimientos superiores, como los que deberían haber alcanzado los estudiantes de Máster. Sin embargo, vemos que actúan de forma similar a los estudiantes de Bachillerato y eso significa que siguen ligados a los primeros conocimientos sobre los números decimales periódicos y no han avanzado.
- Por último, en las *sumas y diferencias* se observa una tendencia a trabajar con los números decimales periódicos como si se tratara de números decimales finitos, y además, algunas de las actuaciones de los estudiantes elegidos para este trabajo coinciden con las de los estudiantes franceses en el estudio de Rittaud y Vivier, como son la conversión a fracción y la utilización de la igualdad $0'\overline{9} = 1$.

Para finalizar y cumplimentar todos los objetivos que nos habíamos planteado al inicio de este trabajo, vamos a destacar los efectos de la enseñanza y a proponer algunas propuestas para un estudio futuro.

Un efecto de la enseñanza es que hace pensar que si las expresiones del período son diferentes, los números que expresan son diferentes, lo cual es falso. Podemos asumir que la dificultad para caracterizar a los números decimales periódicos independientemente de las expresiones decimales periódicas, persiste en los alumnos de niveles superiores, y que se originaría en una primera aproximación a las características de estos números, la cual aparece ligada a su representación "con coma", en oposición a los números naturales "sin coma", sin que esto sea cuestionado en estudios posteriores de los alumnos. No parece tener cabida en la enseñanza la reflexión y profundización progresiva de este conocimiento, lo cual produce una falta de percepción y lleva a arrastrar los procedimientos aprendidos los primeros años de la enseñanza

Además, como podemos observar, en los libros de texto no aparecen problemas de la vida cotidiana en las que el estudiante encuentre los números decimales periódicos, sólo se plantean ejercicios puramente mecánicos en los que hay que aplicar técnicas de cálculo, y esta es una de las principales causas que lleva a errores.

Propuestas para un estudio futuro

Para ampliar el estudio que hemos realizado, sería interesante introducir al cuestionario una tarea de *multiplicación y división con números decimales periódicos*, y así poder identificar las actuaciones más frecuentes que tienen los estudiantes en estos cálculos, así como confirmar que los errores más frecuentes son que piensan que el producto de dos números decimales tiene que dar siempre un número mayor que los propuestos y que la división, tiene que dar siempre como resultado un número menor que los dados.

Castro (2001) confirma el interés de este problema al afirmar que "de todos los errores de las operaciones con decimales más del 80% lo acaparan la multiplicación y la división" (p.332). Según él, esto se debe, en parte, a que los números naturales pueden ser un obstáculo para el aprendizaje de los decimales, ya que los estudiantes suelen extender su conocimiento de los naturales y aplicarlo de manera equivocada a los decimales, predominando el conocimiento ya consolidado del número natural sobre el conocimiento en construcción de los decimales.

Otra tarea interesante sería la de encontrar números decimales comprendidos entre dos cantidades decimales dadas. Castro (2001) confirma que "la propiedad de densidad de los decimales es también una fuente de dificultad", ya que el hecho de que entre dos números naturales no hay otro número natural conduce a la conclusión errónea que pasa lo mismo con los números decimales. De nuevo aquí aparecen los números naturales como un obstáculo a la hora del aprendizaje de los decimales.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Castro, E. (2001). Números decimales. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria* (págs. 315-345). Madrid: Síntesis.

Castro, E. y Ruiz, J. F. (2011). Decimales. En L. Rico y I. Segovia (Eds.), *Matemáticas para maestros de Educación Primaria* (págs. 219-244). Madrid: Grupo Anaya, S. A.

Centeno, J. (1988). *Números decimales. ¿Por qué? ¿Para qué?* Madrid: Síntesis.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19.2, 222-265.

Colera, J., Gaztelu, I. y Oliveira, Mª. J. (2010). *Matemáticas 3º ESO*. Madrid: Anaya.

Colera, J., Gaztelu, I. y Oliveira, Mª. J. (2010). *Matemáticas 4º ESO*. Madrid: Anaya.

Conell, A. (2002). ¿Se puede predecir el número de cifras de un número periódico estudiando la fracción que lo genera?, *Suma*, (41), 65-68.

DOCV (2007). Decreto 112/2007, de 20 de julio, del Consell, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunitat Valenciana. Diari Oficial de la Comunitat Valenciana. Núm. 5562/24-07-2007

DOCV (2008). Decreto 102/2008, de 11 de julio, del Consell, por el que se establece el currículo del bachillerato en la Comunitat Valenciana. [2008/8761]

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics, *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103-131.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Peter Lang, Berne. Glaeser.

Fernández, A., Figueres O., Gómez, B., Monzó, O. y Puig, L. (2009). *Competencias en razón y proporción en la Escuela Primaria*. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Valencia, España.

Godino, J. D., Cid, E. y Batanero, C. (2004). Números y expresiones decimales. En J. D. Godino (Ed.), *Matemáticas para maestros* (págs. 124-142). Universidad de Granada.

Gómez, B. (2013). Apuntes de clase en el Máster de Profesor/a en Educación Secundaria de la Universidad de Valencia. No publicado.

IES Sorolla, (2013). Programación del Departamento de Matemáticas. Valencia. Documento interno.

Rittaud, B. and Vivier, L. (2013). Different Praxeologies for rational numbers in decimal system – the $0,\overline{9}$ case. *CERME 8 - Congress of The European Society for Research in Mathematics Education*. Pre-congress publication. Papers in the website of the congress: Research Report. Working Group 2 Arithmetic and number systems. ERME (European Society for Research in Mathematics Education). Middle East Technical University. Manavgat-side/Antalya. Turquía. http://www.cerme8.metu.edu.tr

Socas, M. (2001). Problemas didácticos entre el objeto matemático y su representación semiótica. Estudio con números decimales. En M. Socas, M. Camacho y A. Morales (Eds.), *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática III* (págs. 297-318). Universidad de la Laguna.

Vivier, L. (2011). El registro semiótico de los Desarrollos Decimales Ilimitados. Recuperado el 28 de septiembre de 2013, de http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/data/docs/VIVIER_4oCalculo_Puebla2010.pdf

<u>Anexo</u>: Test

Nº Test…………… Curso…………………….. Fecha……………………..

En la escritura de un número racional, escribimos el período con una barra encima. Por ejemplo, el número 0,12727272727... con período 27 se puede escribir $0{,}1\overline{27}$.

TAREA 1: Redondea el número que es diferente a los otros:

$5{,}0\overline{0100}$ $5{,}001\overline{0001}$ $5{,}0\overline{01000100}$ $5{,}0\overline{0101}$ $5{,}00\overline{1000}$

TAREA 2: Escribe de cuatro formas distintas el número $14,\overline{121}$.

TAREA 3: Redondea la respuesta correcta y justifica tu respuesta:

a)	$8{,}13 < 8,\overline{13}$	$8{,}13 = 8,\overline{13}$	$8{,}13 > 8,\overline{13}$
b)	$3,\overline{4} < 3,\overline{40}$	$3,\overline{4} = 3,\overline{40}$	$3,\overline{4} > 3,\overline{40}$
c)	$0,\overline{9} < 1$	$0,\overline{9} = 1$	$0,\overline{9} > 1$
d)	$45,\overline{101} < 45{,}1\overline{01}$	$45,\overline{101} = 45{,}1\overline{01}$	$45,\overline{101} > 45{,}1\overline{01}$

TAREA 4: Realiza las siguientes sumas:

a) $0,\overline{24} + 0,\overline{57} =$

b) $6{,}7\overline{1} + 1{,}8\overline{5} =$

c) $0,\overline{5} + 0,\overline{7} =$

d) $0{,}0\overline{8} + 0,\overline{2} =$

e) $0,\overline{9} + 0,\overline{4} =$

f) $0,\overline{5} + 0,\overline{72} =$

TAREA 5: Realiza las siguientes restas:

a) $2{,}1\overline{7} - 0,\overline{7} =$

b) $2 - 1,\overline{9} =$

c) $1,\overline{28} - 0,\overline{72} =$