UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

Máster Universitario en Investigación en Didácticas Específicas

INVESTIGACIÓN SOBRE VARIABLES EN EL DISEÑO DE ACTIVIDADES ESCOLARES PARA ALUMNOS CON ALTAS CAPACIDADES MATEMÁTICAS

Memoria de Trabajo de Fin de Máster presentada por:

CLARA BENEDICTO BALDONADO

Tutorizada por:

Dr. Ángel Gutiérrez y Dra. Adela Jaime

Departamento de Didáctica de la Matemática

Valencia, 29 Noviembre 2013

FICHA TÉCNICA

MÁSTER: Máster Universitario en Investigación en Didácticas Específicas

ESPECIALIDAD: Matemáticas

AUTOR: Benedicto Baldonado, Clara

TÍTULO DE LA MEMORIA: Investigación sobre variables en el diseño de actividades escolares para alumnos con altas capacidades matemáticas

TUTOR 1: Gutiérrez, Ángel

TUTOR 2: Jaime, Adela

Departamento de Didáctica de la Matemática

FECHA DE DEFENSA:

CALIFICACIÓN:

PALABRAS CLAVE: Didáctica de las matemáticas; Geometría; Educación primaria; Talento matemático; Desarrollo curricular.

CÓDIGOS UNESCO: 1204.99 (otros, Didáctica de la geometría); 5802.03 (Desarrollo de asignaturas); 6104.01 (Procesos cognitivos).

RESUMEN

El objetivo de este trabajo, es proporcionar materiales para ayudar a cubrir la carencia de recursos que se adapten a los alumnos con altas capacidades matemáticas. Dichos recursos deberán ser un complemento para estos alumnos, de manera que estudiando los contenidos integrados en el tema y curso correspondiente, propongan ampliaciones o profundizaciones que se adapten a sus capacidades.

Para ello, en este Trabajo de Fin de Máster, proponemos una herramienta de análisis de actividades que permita diseñar unidades de enseñanza que presten atención a las necesidades de aprendizaje de estos alumnos. Además, mostramos una aplicación de esta herramienta a través del diseño y análisis de una unidad de enseñanza para el curso de 5º de E. Primaria.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo no se podría haber realizado sin el apoyo y la ayuda de algunas personas. Quiero agradecerles a todos ellos cuanto han hecho por mí para que este trabajo saliera adelante de la mejor manera posible.

Quiero agradecerles especialmente a mis tutores del Trabajo fin Máster, Adela Jaime y Ángel Gutiérrez, por ayudarme en todo momento y darme siempre la posibilidad de mejorarlo.

También quiero expresar mi agradecimiento, a mis padres y amigos, por su paciencia y colaboración durante todo este año.

Índice

1 INTRODUCCIÓN 17
2 REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA 21
2.1 ANÁLISIS DE TEXTOS Y ACTIVIDADES 21
2.2 ESPACIO Y ESPACIO BÁSICO DEL PROBLEMA 22
2.3 CLASIFICACIÓN DEL PROBLEMA 23
2.4 HERRAMIENTAS HEURÍSTICAS 24
2.5 DEMANDA COGNITIVA DEL PROBLEMA 25
2.6 NIVELES DEL RAZONAMIENTO 26
2.7 MAPAS CONCEPTUALES 27
3 MARCO TEÓRICO 29
3.1 ANÁLISIS DE LOS CONTENIDOS MATEMÁTICOS DEL LIBRO DE TEXTO 29
3.1.1 Elaboración del mapa conceptual del libro de texto 29
3.1.2 Elaboración del mapa conceptual de experto 30
3.1.3 Comparación de los diferentes mapas 30
3.2 ANÁLISIS DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS 31
3.2.1 Espacio básico del problema 31
3.2.2 Clasificación del problema 31
3.2.3 Herramientas heurísticas 32
3.2.4 Demanda cognitiva del problema 33
3.2.5 Nivel de razonamiento 36
4 METODOLOGÍA 39
4.1.1 Elección de la muestra 39
4.1.2 Análisis del tema elegido y elaboración de mapas conceptuales 39
4.1.3 Ampliación y/o profundización de los contenidos 39
4.1.4 Análisis teórico de sus posibles resoluciones 40
4.1.5 Realización de doble formato 40
5 DISEÑO DE LA UNIDAD DE ENSEÑANZA 41
5.1 ELABORACIÓN DE LOS MAPAS CONCEPTUALES 41
5.2 DISEÑO DE ACTIVIDADES 46
5.2.1 ACTIVIDAD 1: Desigualdad triangular 46

5.2.2 ACTIVIDAD 2: Construcción de triángulos 46
5.2.3 ACTIVIDAD 3: Suma de los ángulos interiores de un polígono. 47
5.2.4 ACTIVIDAD 4: Triángulos equiláteros 48
5.2.5 ACTIVIDAD 5: Propiedades paralelogramos 49
5.2.6 ACTIVIDAD 6: Propiedades del rombo 50
5.2.7 ACTIVIDAD 7: Diagonales 51
5.2.8 ACTIVIDAD 8: Polígonos regulares (ángulo central) 52
5.2.9 ACTIVIDAD 9: Simetrías 53
6 APLICACIÓN DE LA HERRAMIENTA PARA EL ANÁLISIS DE UNIDADES DE ENSEÑANZA 55
6.1 ESPACIO BÁSICO DEL PROBLEMA 55
6.2 CLASIFICACIÓN DE UN PROBLEMA 59
6.2.1 Tipología I 59
6.2.2 Tipología II 62
6.3 HERRAMIENTAS HEURÍSTICAS 65
6.3.1 Consideración de un caso o una serie de casos 66
6.3.2 División del problema en partes 66
6.3.3 Examen de posibilidades 67
6.3.4 Introducción de una figura auxiliar 68
6.4 DEMANDA COGNITIVA DEL PROBLEMA 69
6.11 Demanda cognitiva de un problema 75
6.5 NIVELES DE RAZONAMIENTO 76
6.12 Niveles de razonamiento de un problema 78
7 RESULTADOS OBTENIDOS TRAS LA APLICACIÓN DE LA HERRAMIENTA DE ANÁLISIS 79
7.1 CLASIFICACIÓN DE LOS PROBLEMAS 79
7.2 HERRAMIENTAS HEURÍSTICAS 81
7.3 DEMANDA COGNITIVA DEL PROBLEMA 82
7.4 NIVELES DE RAZONAMIENTO 84
8 CONCLUSIONES 87
8.1 VALORACIÓN DE LA HERRAMIENTA DE ANÁLISIS 87
8.2 LIMITACIONES 88
8.3 PROYECCIONES FUTURAS 88
9 BIBLIOGRAFÍA 91
ANEXOS 95

ANEXO I 97
ACTIVIDAD 1: DESIGUALDAD TRIANGULAR 97
ACTIVIDAD 1: FORMATO LÁPIZ Y PAPEL 97
ACTIVIDAD 1: FORMATO GEOGEBRA 99
ACTIVIDAD 2: CONSTRUCCIÓN DE TRIÁNGULOS 101
ACTIVIDAD 2: FORMATO LÁPIZ Y PAPEL 101
ACTIVIDAD 2: FORMATO GEOGEBRA 102
ACTIVIDAD 3: SUMA DE LOS ÁNGULOS INTERIORES DE UN POLÍGONO 103
ACTIVIDAD 3: FORMATO LÁPIZ Y PAPEL 104
ACTIVIDAD 3: FORMATO GEOGEBRA 108
ACTIVIDAD 4: TRIÁNGULOS EQUILÁTEROS 113
ACTIVIDAD 4: FORMATO LÁPIZ Y PAPEL 113
ACTIVIDAD 4: FORMATO GEOGEBRA 115
ACTIVIDAD 5: PROPIEDADES PARALELOGRAMOS 119
ACTIVIDAD 5: FORMATO LÁPIZ Y PAPEL 120
ACTIVIDAD 5: FORMATO GEOGEBRA 123
ACTIVIDAD 6: PROPIEDADES DEL ROMBO 127
ACTIVIDAD 6: FORMATO LÁPIZ Y PAPEL 127
ACTIVIDAD 6: FORMATO GEOGEBRA 128
ACTIVIDAD 7: DIAGONALES 129
ACTIVIDAD 7: FORMATO LÁPIZ Y PAPEL 130
ACTIVIDAD 7: FORMATO GEOGEBRA 133
ACTIVIDAD 8: POLÍGONOS REGULARES (ÁNGULO CENTRAL) 137
ACTIVIDAD 8: FORMATO LÁPIZ Y PAPEL 137
ACTIVIDAD 8: FORMATO GEOGEBRA 140
ACTIVIDAD 9: SIMETRÍAS 142
ACTIVIDAD 9: FORMATO LÁPIZ Y PAPEL 142
ACTIVIDAD 9: FORMATO GEOGEBRA 145
ANEXO II: ANÁLISIS DE LAS ACTIVIDADES 147
ACTIVIDAD 1: DESIGUALDAD TRIANGULAR 147
1. Espacio básico del problema 147
2. Clasificación del problema 148
3. Herramientas heurísticas 149

4. Demanda cognitiva del problema 149
5. Niveles de razonamiento 149
ACTIVIDAD 2: CONSTRUCCIÓN DE TRIÁNGULOS 150
1. Espacio básico de problema 150
2. Clasificación del problema 151
3. Herramientas heurísticas 151
4. Demanda cognitiva del problema 152
5. Niveles de razonamiento 152
ACTIVIDAD 3: Suma de los ángulos interiores de un polígono 153
1. Espacio básico del problema 153
2. Clasificación del problema 155
3. Herramientas heurísticas 156
4. Demanda cognitiva del problema 157
5. Nivel de razonamiento 158
ACTIVIDAD 4: Triángulos equiláteros 160
1. Espacio básico del problema 160
2. Clasificación del problema 161
3. Herramientas heurísticas 161
4. Demanda cognitiva del problema 162
5. Niveles de razonamiento 162
ACTIVIDAD 5: Propiedades paralelogramos 163
1. Espacio básico del problema 163
PROPIEDADES COMUNES DE CADA FAMILIA DE PARALELOGRAMOS 163
2. Clasificación del problema 164
3. Herramientas heurísticas 164
4. Demanda cognitiva del problema 164
5. Niveles de razonamiento 165
ACTIVIDAD 6: Propiedades del rombo 166
1. Espacio básico del problema 166
2. Clasificación del problema 168
3. Herramientas heurísticas 168
4. Demanda cognitiva del problema 168
5. Niveles de razonamiento 168
ACTIVIDAD 7: Diagonales 169

1. Espacio básico del problema 169
2. Clasificación del problema 171
3. Herramientas heurísticas 172
4. Demanda cognitiva del problema 173
5. Niveles de razonamiento 173
ACTIVIDAD 8: Polígonos regulares (Ángulo central) 174
1. Espacio básico del problema 174
2. Clasificación del problema 175
3. Herramientas heurísticas 176
4. Demanda cognitiva del problema 176
5. Niveles de razonamiento 176
ACTIVIDAD 9: Simetrías 177
1. Espacio básico del problema 177
2. Clasificación del problema 178
3. Herramientas heurísticas 179
4. Demanda cognitiva del problema 179
5. Niveles de razonamiento 179

Índice de Tablas

3.1Tipología I 32
3.2 Tipología II 32
3.3 Nivel bajo de demanda cognitiva 34
3.4 Nivel alto de demanda cognitiva 35
3.5 Niveles de razonamiento 36
5.1 Contenidos matemáticos 54

Índice de Actividades

5.1 Actividad 1: Desigualdad Triangular 46
5.2 Actividad 2: Construcción de triángulos 46
5.3 Actividad 3: Suma de los ángulos interiores de un polígono 47
5.4 Actividad 4: Triángulos equiláteros 48
5.5 Actividad 5: Propiedades paralelogramos 49
5.6 Actividad 6: Propiedades del rombo 50
5.7 Actividad 7: Diagonales 51
5.8 Actividad 8: Polígonos regulares 52
5.9 Actividad 9: Simetrías 53

Índice de Ejemplos

6.1 Problema de encontrar 60
6.2 Problema por probar 60
6.3 Problema de encontrar y probar 61
6.4 Ejercicios Algorítmicos 62
6.5 Problema de Aplicación 63
6.6 Problema de Búsqueda 64
6.7 Consideración de un caso o una serie de casos 66
6.8 División del problema en partes 67
6.9 Examen de posibilidades 68
6.10 Introducción de una figura auxiliar 68
6.11 Demanda cognitiva de un problema 75
6.12 Niveles de razonamiento de un problema 78

Índice de Resultados

7.1 Clasificación del problema 80
7.2 Tipología II 81
7.3 Herramientas heurísticas...82
7.4 Demanda cognitiva del problema 84
7.5 Niveles de razonamiento 86

1 INTRODUCCIÓN

Los alumnos de nuestras aulas son muy diversos unos de otros, por ello la escuela debería ofrecer una respuesta diferenciada y ajustada a las necesidades de todos ellos.

No es infrecuente ver que, en clases estándar, no se tienen en cuenta las necesidades específicas de formación de los alumnos de altas capacidades[1]. Entendiendo el concepto de altas capacidades como un término más general al de superdotación, integrando en este grupo aquellos alumnos que demuestran diariamente un rendimiento superior a sus compañeros, siendo capaces de realizar las tareas con mayor facilidad o rapidez, pero sin alcanzar el nivel de superdotación.

En ocasiones, algunos de estos estudiantes ven frustrados sus intentos de originalidad a causa de que, tradicionalmente, el sistema educativo no ha tenido en cuenta el potencial de los estudiantes al implementar los currículos oficiales y trata los grupos de clase como si fueran homogéneos, excepto para los estudiantes con dificultades de aprendizaje. Esto puede causar que ese colectivo, a pesar de sus posibilidades, no alcance el máximo desarrollo posible de sus capacidades e incluso llegue a fracasar, como han expuesto algunos autores (Benito 1999).

Esta situación debería cambiar, dado que el sistema educativo español ha mostrado recientemente un interés por atender las necesidades de los niños con altas capacidades e implementar una serie de actuaciones que se adapten a las características de estos alumnos. Atendiendo a un documento del Centro Nacional de Información y Comunicación Educativa (CNICE) (citado en Ardanaz, 2008), se determinan tres estrategias de intervención escolar para niños con altas capacidades:

- *Aceleración:* Consiste en adelantar al estudiante de altas capacidades escolarizándolo en un curso superior al que le corresponde por su edad.

[1] Este Trabajo de Fin de Máster se ha realizado en el contexto del proyecto de investigación *Análisis de procesos de aprendizaje de estudiantes de altas capacidades matemáticas de E. Primaria y ESO en contextos de realización de actividades matemáticas ricas* (EDU2012-37259) del Programa Nacional de I+D+i.

El principal problema de la aceleración es que únicamente puede implementarse en el caso de que el estudiante destaque en todas las asignaturas, para poder integrarle plenamente en el curso superior. Además de ello, esta actuación tiene dos puntos débiles. El primero se presenta cuando las habilidades sociales y el desarrollo emocional del niño son inferiores a los de sus nuevos compañeros de curso, lo cual puede dificultar su integración en el grupo. El otro punto débil es que, frecuentemente, el proceso de aprendizaje de los niños acelerados es más rápido que el de sus nuevos compañeros, por lo que en dos o tres años vuelven a encontrarse en la misma situación.

- *Enriquecimiento curricular:* Consiste en proporcionar a los alumnos de altas capacidades un complemento que haga su formación más rica y variada, mediante el estudio de contenidos que no se encuentran normalmente en el currículo ordinario.

Esta actuación tiene el inconveniente de que, con frecuencia, las tareas que preparan los maestros para sus alumnos de altas capacidades son totalmente diferentes de las que preparan para el resto del grupo, lo cual puede inducir al aislamiento del niño de altas capacidades y a un rechazo por parte de sus compañeros. Muchos niños no aceptan fácilmente tener que realizar tareas distintas de las planteadas a sus compañeros.

- *Profundización:* Consiste en proporcionar a los alumnos de altas capacidades actividades complementarias integradas en los temas del curso, de forma que les ayuden a tener mayor dominio de esos contenidos y a aprender partes de los temas que no se estudiarán porque no están incluidos en el currículo ordinario, todo ello teniendo cuidado de no entrar en contenidos propios de cursos posteriores.

Esta actuación es la que nosotros consideramos más adecuada, siempre y cuando las actividades propuestas sean problemas ricos, no lineales, sino que presenten diferentes grados de complejidad y profundidad, de manera que toda la clase trabaje en los mismos problemas (evitando el aislamiento y el rechazo), pero que permitan un avance mayor o menor en la resolución, dependiendo de las capacidades de los estudiantes. El principal problema de esta actuación y al cual hay que presentar especial atención, es que resulta complicado no entrar en contenidos pertenecientes a cursos superiores, por lo que hay que ser cuidadoso a la hora del diseño del bloque de actividades.

Algunos profesores, especialmente de primaria, se encuentran ante un problema cuando tienen que atender a alumnos de altas capacidades, debido a su falta de formación especializada y la escasez de recursos ya disponibles para ser usados.

El objetivo último de este trabajo es proporcionar materiales para ayudar a cubrir la carencia de recursos que se adapten a los alumnos con altas capacidades matemáticas. Dichos recursos deberán ser un complemento para estos alumnos, de manera que estudiando los contenidos integrados en el tema y curso correspondiente, propongan ampliaciones o profundizaciones que se adapten a sus capacidades. Para ello, en este Trabajo de Fin de Máster proponemos una herramienta de análisis de actividades que permita diseñar unidades de enseñanza que presten atención a las necesidades de aprendizaje de estos alumnos, y mostramos una aplicación concreta de su utilización.

Para perseguir este propósito, el trabajo ha sido dividido en dos objetivos específicos:

1. **Elaborar una técnica de análisis de problemas** que nos permita crear y organizar actividades. Esta herramienta debe permitir realizar un análisis detallado de cada unidad de enseñanza, con el fin de validar su adecuación, detectar carencias y proporcionar criterios para su secuenciación.

   Para el desarrollo de esta herramienta tendremos en cuenta diversas variables:

   - Conjunto de resoluciones de cada actividad (adaptadas al nivel del curso específico).
   - El objetivo del problema.
   - La complejidad o dificultad de su resolución.
   - Las herramientas heurísticas utilizadas en su resolución.
   - Las habilidades y los niveles de razonamiento utilizados.
   - La demanda cognitiva del problema.

2. **Aplicar esta herramienta en el diseño de una unidad de enseñanza**, de manera que podamos elaborar actividades que faciliten el trabajo inicial con todos los alumnos del grupo pero que vayan incrementando la exigencia de la capacidad de razonamiento y adecuándose a las necesidades de alumnos con altas capacidades matemáticas.

Una vez planteado el problema y los objetivos de este trabajo de investigación, el capítulo 2 ofrece una revisión de trabajos anteriores sobre: análisis de textos y actividades; espacio y espacio básico del problema; clasificación de los problemas; herramientas heurísticas; demanda cognitiva del problema; niveles de razonamiento y mapas conceptuales. Este capítulo tiene la misión de mostrar algunas investigaciones previas que utilizaremos en nuestro trabajo.

El capítulo 3 describe el marco teórico de este trabajo basado en dos componentes: el análisis de los contenidos matemáticos y el análisis de la resolución de problemas. El primero nos permitirá conocer los contenidos implicados en la unidad de enseñanza y las posibles profundizaciones que puedan complementar a los alumnos con altas capacidades, y el segundo nos ayudará a verificar que las actividades elegidas son adecuadas, están correctamente integradas en los contenidos del libro de texto y contienen variedad de grados de dificultad y niveles de razonamiento adaptados a las diferentes capacidades de los alumnos.

El capítulo 4 describe la metodología seguida para la realización de este trabajo de investigación, comenzado con la elección de la muestra (libro de texto, curso y tema), continuando con el análisis de los contenidos y la elaboración de mapas conceptuales, siguiendo con el diseño y análisis de actividades de ampliación y profundización, y terminando con la elaboración de las actividades en doble formato.

El capítulo 5 está dedicado al estudio de las actividades de la unidad de enseñanza. En este capítulo mostramos los dos mapas conceptuales elaborados (el mapa conceptual del libro de texto y el mapa conceptual de experto), los objetivos de las 9 actividades diseñadas y la tabla resumen donde podemos observar los contenidos que estudian cada actividad.

El capítulo 6 muestra algunos ejemplos de cómo aplicamos la herramienta de análisis para el diseño de nuestra unidad de enseñanza. Su consulta es indispensable si se quiere entender el funcionamiento de nuestra herramienta de análisis.

El capítulo 7 resume los resultados obtenidos tras la aplicación de la herramienta de análisis a la unidad de enseñanza diseñada.

Por último, el capítulo 8 ofrece un resumen organizado, a modo de conclusiones donde valoramos nuestra herramientas de análisis, comentamos algunas limitaciones de trabajo y proponemos algunas proyecciones futuras.

2 REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

Una vez hemos definido nuestros objetivos y justificado el interés de nuestra investigación, en este capítulo hacemos una revisión bibliográfica centrada en las investigaciones previas que utilizaremos en el trabajo.

Dividiremos el capítulo en siete apartados: análisis de textos y actividades, espacio y espacio básico del problema, clasificación del problema, herramientas heurísticas, demanda cognitiva del problema y niveles de razonamiento y mapas conceptuales.

2.1 ANÁLISIS DE TEXTOS Y ACTIVIDADES

Los documentos curriculares que elabora la administración educativa para el profesorado suelen venir estructurados mediante cuatro componentes: objetivos, contenidos, metodología y evaluación.

Rico (1997) observa como el Currículo de Matemáticas únicamente ofrece una adaptación específica para cada tema en lo que respecta a los contenidos, mientras que en los otros tres componentes el currículo presenta unos criterios generales para la asignatura como única referencia.

Estas carencias provocan que el profesor no disponga de herramientas suficientes y adecuadas para desarrollar una buena planificación de la unidad de enseñanza. Para solventar este problema, Rico (1997) propone una herramienta que nos permita planificar, organizar y realizar un análisis didáctico de cada uno de los temas de matemáticas, utilizando cinco organizadores: *"errores y dificultades usualmente detectados", "diversidad de las representaciones utilizadas para cada sistema conceptual", "fenomenología de los conocimientos implicados", "diversidad de los materiales de tipo manipulativo y de los recursos que puedan emplearse" y "evolución histórica".*

A partir de este momento, son muchos los autores que han utilizado estas cinco perspectivas para analizar y detectar las carencias de los libros de texto de las editoriales más frecuentes. Bodí (2002), por ejemplo, realiza análisis de libros de texto tomando las 5 editoriales más utilizadas en Alicante. En su trabajo detecta una deficiencia en el análisis fenomenológico, e igualmente, valora negativamente la presencia de materiales de tipo manipulativo, el estudio de la evolución histórica y el análisis de los errores.

Con el paso de los años, algunos autores han tratado de perfeccionar dicho modelo de análisis, añadiendo o modificando alguno de los componentes del modelo original de Rico. Monterubio y Ortega (2009) crean un modelo exhaustivo para analizar y valorar los libros de textos escolares. Su modelo se compone de los siguientes organizadores: *"objetivos", "contenidos", "conexiones", "actividades", "metodología", "lenguaje", "ilustraciones", "motivación", "tecnologías de la información y la comunicación", "evaluación", "enfatización", "aspectos formales", "recursos generales" y "entorno".*

Por otra parte, otros autores centran su atención únicamente en el análisis de las actividades, creando una herramienta específica para detectar cómo de adecuadas y estimulantes resultan las tareas propuestas por los libros de texto.

Por ejemplo, Brändström (2005) analiza los niveles de dificultad de las actividades de tres libros de texto diferentes haciendo uso de una herramienta de análisis basada en cuatro variables: "*representaciones"* (ninguna, decorativa o funcional), "número de operaciones", "procedimientos *utilizados en la resolución*" y "*nivel de demanda cognitiva del problema*". De forma similar, Pepin y Haggarty (2008) examina las oportunidades de aprendizaje que ofrecen las actividades propuestas en libros de texto en inglés, francés y alemán, utilizando como variables: *"características generales de las tareas matemáticas para mejorar el aprendizaje", "demanda cognitiva del problema", "características del contexto y objetivos de la actividad"* y *"conexiones".*

2.2 ESPACIO Y ESPACIO BÁSICO DEL PROBLEMA

La resolución de problemas con ordenador aportó nuevos conceptos teóricos. La programación de computadoras para la resolución de problemas exigía una descripción exacta de las estrategias que utilizan los sujetos al resolver el problema. Tras un análisis cuidadoso de los protocolos obtenidos por los sujetos, estos procesos eran introducidos como un programa de computadora. Una de las mayores contribuciones teóricas al enfoque de la simulación por computadoras para la resolución de problemas, es la idea de *espacio del problema.* Fueron Newell y Simon (1972, citado en Mayer, 1986) los que introdujeron la idea de "espacio del problema", definida como "conjunto de todos los estados (o todas las secuencias posibles de operadores) que conoce el que resuelve el problema".

Más tarde, Simon y Simon (1978), establecieron diferencias entre el espacio del problema, que tiene como punto de referencia un resolutor particular, y el espacio básico del problema, que es "el espacio del problema generado por alguien que resuelve perfectamente el problema". Ambos pueden no coincidir cuando el resolutor sea, por ejemplo, un alumno.

Unos años después, Cobo (1998) adapta estos dos conceptos a un contexto de enseñanza, definiendo **espacio de un problema** como el "*conjunto de posibilidades que tiene el resolutor de resolver un problema, que dependen entre otros factores de los conocimientos de que disponga y de los que utilice en la resolución y de los enfoques que sea capaz de identificar*". Al "*espacio de un problema hecho por el resolutor experto*" lo denomina **espacio básico del problema**.

2.3 CLASIFICACIÓN DEL PROBLEMA

A lo largo de la historia son muchos los autores que han estudiado el término "problema" y han tratado de caracterizar los enunciados matemáticos para poder clasificar los problemas atendiendo a diferentes criterios. En este apartado presentamos dos tipologías diferentes que usaremos en nuestro trabajo para clasificar los problemas planteados.

La primera de ellas es la clasificación que presenta Polya (1945) y que más tarde usará Puig (1996). Esta clasificación hace referencia al objetivo planteado por el problema. Polya (1945) denomina "**problema de probar**" al teorema, donde encontramos una hipótesis y una conclusión que el resolutor tendrá que demostrar, y "**problema de encontrar**" al problema donde, dados unos datos y una condición, el resolutor tendrá que encontrar una incógnita que verifique la condición.

La segunda tipología, detalla la distinción entre problema y ejercicio en función de los requisitos necesarios para su resolución, para la que usaremos la clasificación realizada por Butts (1980, citada en Puig, 1996). Tomaremos las definiciones de (Puig, 1996, pp. 30), distinguiendo entre: "**ejercicios de reconocimiento**", aquellas tareas en las que el resolutor lo único que tiene que hacer es buscar en la memoria el resultado; "**ejercicios algorítmicos**", si ha de ejecutar un algoritmo de forma automática; "**problemas de aplicación**" cuando el resolutor conoce un procedimiento para resolver el problema y ha de justificar que ese procedimiento es adecuado para obtener su solución; "**problemas de búsqueda**", cuando el resolutor ha de crear un procedimiento de solución; y por último, "**situaciones problemáticas**", cuando en su enunciado no se precisa qué es lo que hay que hacer, y esa es la primera tarea del resolutor.

2.4 HERRAMIENTAS HEURÍSTICAS

El estudio de la heurística en la resolución de problemas tiene dos autores imprescindibles, las obras desarrolladas por Polya hasta los años sesenta, y los trabajos de Schoenfeld en los años ochenta. No obstante, no utilizan la misma metodología de análisis.

Según Puig (1996), mientras Polya se centra en explorar una tras otra las maneras de actuar de un resolutor ideal, los trabajos de Schoenfeld (1985) tratan de buscar explicaciones a las conductas de los resolutores reales observando y analizando sus comportamientos.

Puesto que en nuestro trabajo nos limitaremos al diseño de actividades, sin explorar las resoluciones por resolutores reales, nos centraremos únicamente en el trabajo realizado por Polya.

El estudio de Polya sobre la resolución de problemas se resume en tres libros. En el primero de ellos, Polya (1945), elabora un modelo del proceso de resolución de problemas dividido en fases que el resolutor ideal recorre, pasando de una a otra solo cuando la anterior ha concluido: *comprensión, elaboración de un plan, ejecución del plan* y *mirada retrospectiva*. Además de este modelo, el trabajo contiene una primera exploración de los rasgos heurísticos de la resolución de problemas. El segundo libro, Polya (1954), está dedicado al estudio de la estructura de los razonamientos durante la resolución de problemas. Finalmente, en el tercer libro, Polya (1962-1965), estudia las diferentes maneras de elaborar planes de resolución.

Más tarde, Puig (1996), elabora un modelo de competencia, reformulando lo estudiado por Polya y Schoenfeld desde el punto de vista de la semiótica. El modelo de competencia está compuesto por una lista de elementos:

- Destrezas con potencial heurístico
- Sugerencias heurísticas
- Herramientas heurísticas
- Métodos de resolución con contenido heurístico
- Patrones plausibles
- El gestor instruido
- Concepción de la naturaleza de la tarea

Nosotros en nuestro trabajo utilizaremos únicamente el análisis de uno de los elementos. Estudiaremos las herramientas heurísticas necesarias para la resolución de nuestros problemas.

Puig (1996) define una **herramienta heurística** como "*un procedimiento independiente del contenido del problema que lo transforma en otro*". El uso de las herramientas heurísticas tiene el objetivo de ayudar a resolver el problema, pero no resuelve ni garantiza su solución.

2.5 DEMANDA COGNITIVA DEL PROBLEMA

Las tareas propuestas a los estudiantes juegan un papel muy importante en su aprendizaje, como concluyeron Stein y Lane (1996) en su estudio. Estos autores sugirieron que, para que un alumno desarrolle la capacidad de reflexión, razonamiento y resolución de problemas matemáticos, es necesario comenzar con actividades de un nivel alto de complejidad.

Para poder clasificar una actividad como "buena", es necesario considerar la edad, curso, conocimientos previos y experiencias de los estudiantes. Cuando un profesor escoge una actividad para sus clases, debe tener en cuenta todos estos factores.

Smith y Stein (1998) presentaron el concepto de "**demanda cognitiva"** como *"el tipo y nivel de pensamiento requerido de los estudiantes para poder participar en la tarea y resolverla con éxito".* Así mismo, en este trabajo, diseñaron un esquema para identificar el nivel de demanda cognitiva necesario para la resolución de actividades de los libros de texto. Su clasificación identifica el nivel de demanda cognitiva de las actividades a través de una evaluación de la reflexión y razonamiento requeridos del estudiante para resolver la tarea.

Las tareas fueron divididas en dos niveles de demanda cognitiva. Clasificaron las tareas de "**memorización"** y "**algoritmos sin conexiones"** dentro de la categoría de tareas que requieren un **nivel bajo de demanda cognitiva**. Mientras que consideraron como tareas que requieren un **nivel de demanda cognitiva alto**, las tareas más complejas, menos estructuradas y no algorítmicas, y a menudo con más de una solución posible, que denominaran "**algoritmo con conexiones"** y **"hacer matemáticas"**.

A partir de este momento, son varios los autores que, junto con Smith y Stein, se han dedicado al diseño de actividades y al análisis de su demanda cognitiva, destacando la importancia de las actividades de un nivel de demanda cognitiva alto. La puesta en práctica de algunos estudios con estudiantes, como Hibert y Wearne (1993) o Stein y Lane (1996) sugieren que la implementación de un número mayor de actividades de un nivel alto de demanda cognitiva incrementa el aprendizaje de los alumnos.

Más tarde, Boston y Smith (2009) ampliaron su estudio prestando atención a como las instrucciones del profesor hacia sus alumnos puede variar el nivel de demanda cognitiva de las actividades.

Por otra parte, algunos autores como Cruz (2009), han estudiado la falta de actividades de demanda cognitiva alta en los libros de texto, identificando más del 90% de las actividades analizadas como tareas de un nivel bajo de demanda cognitiva.

2.6 NIVELES DEL RAZONAMIENTO

A menudo observamos cómo muchos alumnos de matemáticas no saben razonar lo que están haciendo, no comprenden el significado y la utilidad de las matemáticas y no son capaces de resolver problemas diferentes de los ya conocidos.

Hace más de 50 años, Pierre M. van Hiele y Dina van Hiele-Geldof (1957) se plantearon este problema, lo que les indujo a estudiar a fondo la situación para tratar de encontrar una solución. Los Van Hiele proponen un modelo para explicar el proceso de aprendizaje de la Geometría, según el cual, el razonamiento de los estudiantes pasa por una serie de niveles, que son secuenciales, ordenados y tales que no se puede saltar ninguno. Cada nivel supone la comprensión y utilización de los conceptos y propiedades geométricas de manera distinta, lo cual se refleja en una manera diferente de interpretarlos, definirlos, clasificarlos, y hacer demostraciones.

Tras la publicación del primer planteamiento de su modelo de razonamiento y enseñanza, los Van Hiele siguieron trabajando en su desarrollo y perfeccionamiento. El propio Van Hiele (1986) explica sus ideas sobre el modelo 29 años después de su primera publicación.

En el periodo de 1979 a 1982, se realizaron los primeros trabajos en EE.UU. A partir de entonces, surgen nuevos proyectos que tratan de validar las propuestas del modelo, incluyendo los métodos e instrumentos para medir y describir los distintos niveles de razonamiento demostrados o asignados a los estudiantes, los proyectos de Brooklyn (Fuys, Geddes, Tischler, 1988), de Chicago (Usiskin, 1982) y de Oregón (Burger, Shaughnessy, 1990 y 1986), que junto con las publicaciones de los Van Hiele son, los que han marcado las pautas de los trabajos de investigación posteriores.

Hay que destacar algunos de los trabajos más importantes realizados en castellano, Corberán y otros (1989), Jaime y Gutiérrez (1990, 1993). Además, en Gutiérrez y Jaime (1989) se ofrece una relación detallada de referencias comentadas en relación con el Modelo de Van Hiele.

2.7 MAPAS CONCEPTUALES

La técnica conocida como Mapas Conceptuales se introduce en el ambiente de la comunidad didáctica de las ciencias experimentales con el objetivo de mejorar la enseñanza y aprendizaje de dichas ciencias. A pesar de que algunos autores como Gómez y Carulla (2001) consideran que dicha técnica existe desde la Edad Media, se considera que los primeros en utilizarla en el ámbito de la enseñanza fueron Novak y Gowin (1988), que desarrollaron esta herramienta para determinar cómo ocurren los cambios en la comprensión conceptual de los estudiantes.

Los **mapas conceptuales** son un sistema de representación cuyas normas son relativamente sencillas, (Lanzing, 1998): "*los conceptos se representan por nodos a los que se les da una etiqueta por medio de una palabra o frase corta que indica el concepto. Las relaciones se representan por líneas (enlaces) que conectan los nodos*".

Los mapas conceptuales se han utilizado de manera sistemática en la educación, particularmente como herramienta para describir el currículo y como herramienta de la instrucción.

Algunos estudios también han utilizado los mapas conceptuales como instrumento de evaluación. Novak y Gowin (1988) sugirieron un complejo método para puntuar los mapas conceptuales, basados en el número de relaciones válidas y significativas, el número de niveles jerárquicos válidos, el número de conexiones cruzadas significativas y el número de objetos que se incluyen como objetos. Poco después, Mansfield y Happs (1989) usaron los mapas conceptuales para explorar la comprensión de los estudiantes de geometría, evaluando los mapas conceptuales construidos por los estudiantes y determinando qué conceptos les eran familiares y qué conexiones habían construido.

Unos años más tarde, Huerta (1995) utiliza los mapas conceptuales como instrumento de evaluación. A partir de las respuestas de los estudiantes a un test, construye mapas conceptuales de cada estudiante que reflejan la manera en la que se organizan en su mente los conceptos estudiados.

3 MARCO TEÓRICO

El marco teórico de este trabajo está integrado por dos componentes: el análisis de los contenidos matemáticos y el análisis de la resolución de problemas. El análisis de los contenidos matemáticos nos permitirá conocer los contenidos implicados en la unidad de enseñanza y las posibles profundizaciones que puedan complementar a los alumnos con altas capacidades. Por otra parte, el análisis de la resolución de problemas nos ayudará a verificar que las actividades elegidas son adecuadas, están correctamente integradas en los contenidos del libro de texto y contienen variedad de grados de dificultad y niveles de razonamiento adaptados a las diferentes capacidades de los alumnos.

3.1 ANÁLISIS DE LOS CONTENIDOS MATEMÁTICOS DEL LIBRO DE TEXTO

El análisis de los contenidos matemáticos implicará el conocimiento y la descripción de todos los conceptos y sus relaciones. Para representar toda esta información utilizaremos como herramienta los mapas conceptuales.

Este método de representación resulta muy útil especialmente en el área de las matemáticas, debido a que la estructura del contenido matemático no es lineal, los conceptos están relacionados con otros conceptos.

Para llevar a cabo el análisis de los contenidos matemáticos utilizaremos dos mapas conceptuales diferentes: mapa conceptual del libro de texto y mapa conceptual de experto.

3.1.1 Elaboración del mapa conceptual del libro de texto

Primeramente, elaboraremos un mapa conceptual con todos los contenidos matemáticos presentes en el libro de texto con el que trabajamos. No se trata de un mapa conceptual dado por el libro de texto, sino de nuestra interpretación de los contenidos y su jerarquía tras examinar detenidamente el libro de texto. En este mapa representaremos también los conocimientos previos necesarios y las relaciones (si las hay) con conceptos del curso presente.

Este mapa nos ayudará a conocer mejor los contenidos y propiedades esenciales que los alumnos deben aprender durante ese tema. La representación gráfica de los contenidos del tema del libro de texto nos facilitará reconocer los conceptos, sus propiedades y relaciones exigidos por el currículo, que son presentadas en el libro de texto tanto de manera teórica como en actividades.

3.1.2 Elaboración del mapa conceptual de experto

A continuación, elaboraremos un "**mapa conceptual de experto"**, un mapa conceptual más completo, para los mismos contenidos (o más) y sus relaciones.

El análisis de este mapa nos permitirá encontrar algunas ampliaciones o profundizaciones, que son susceptibles de ser aprendidas por estudiantes de altas capacidades matemáticas y que no se encontraban contempladas en el mapa conceptual de libro de texto, siempre teniendo cuidado de no entrar en contenidos de cursos superiores. Estos nuevos conceptos y sus relaciones nos permitirán crear nuevas actividades que sirvan de complemento para los alumnos con altas capacidades matemáticas.

3.1.3 Comparación de los diferentes mapas

Por último, para concluir el análisis de los contenidos, compararemos ambos mapas y valoraremos la complejidad de la red de relaciones presente en cada uno de los mapas. Observaremos las diferencias presentes entre ambos, identificando que aportan los nuevos conceptos o relaciones contemplados en el mapa conceptual de experto, si se tratan de ideas nuevas, de relaciones de inclusión entre los conceptos ya estudiados o generalizaciones de ejemplos vistos en el mapa conceptual del libro de texto. Esto nos ayudará a identificar la dificultad de las ampliaciones que servirán como complemento para los alumnos con altas capacidades matemáticas.

3.2 *ANÁLISIS DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS*

Para realizar un análisis detallado de las actividades (ejercicios o problemas), diseñaremos una técnica de análisis. Esta herramienta consiste en cinco componentes teóricos, cada una de ellas basada en estudios realizados por otros autores, que nos permitirán no solo un análisis exhaustivo, sino también la creación y selección de estas actividades dentro de la unidad de enseñanza.

En este apartado nos dedicaremos a conocer mejor cada uno de los componentes que integran esta herramienta.

3.2.1 Espacio básico del problema

Comenzaremos el análisis de la resolución de problemas tratando de conocer todas las posibles soluciones que tiene el problema en cuestión. Para ello, empezaremos nuestro análisis con el estudio del **espacio básico del problema**, que como define Cobo (1998) y ya indicamos anteriormente, *"es el conjunto de resoluciones del problema hechas por un resolutor experto"*.

Tomaremos únicamente aquellas resoluciones que consideremos pertinentes en relación con los conceptos del tema y el nivel de los alumnos según el curso al que pertenecen, independientemente de que posean altas capacidades matemáticas. Asimismo, solamente incluiremos las resoluciones que podamos obtener atendiendo a las indicaciones dadas en el enunciado.

3.2.2 Clasificación del problema

Una vez conocidas todas sus posibles resoluciones correctas, pasaremos a clasificar el problema siguiendo dos criterios diferentes.

Primeramente, el enunciado del problema nos permitirá clasificarlo según la tipología de Polya, que hace referencia al objetivo planteado por el problema.

En la práctica escolar, es frecuente hallar problemas de encontrar que, además, exigen la inclusión de una prueba que demuestre que lo que se ha encontrado verifica las condiciones del problema. En sentido estricto, estos problemas se deben considerar como un par de problemas, uno de encontrar seguido de otro de probar, pero a la hora de clasificar los problemas escolares, consideramos más operativo atribuir a estos la etiqueta de "**problemas de encontrar y probar**". Consideramos, por tanto, como problemas de encontrar aquellos que no exigen demostración, y como problemas de probar aquellos que incluyen la conjetura en su enunciado.

TIPOLOGIA I (Polya, 1945; Puig, 1996)	PROBLEMA DE **PROBAR**
	PROBLEMA DE **ENCONTRAR**
	PROBLEMA DE **ENCONTRAR Y PROBAR**

3.1Tipología I

Por otra parte, el espacio básico del problema estudiado anteriormente, ayudará a clasificarlo según la tipología de Butts, que hace referencia a los requisitos necesarios para la resolución.

TIPOLOGIA II (Butts, 1980; Puig, 1996)	EJERCICIOS DE **RECONOCIMIENTO**
	EJERCICIOS **ALGORÍTMICOS**
	PROBLEMAS DE **APLICACIÓN**
	PROBLEMAS DE **BÚSQUEDA**
	SITUACIONES PROBLEMÁTICAS

3.2 Tipología II

3.2.3 Herramientas heurísticas

Consideramos como otro factor importante a tener en cuenta en el análisis de la resolución de los problemas, las posibles herramientas heurísticas a utilizar durante la resolución.

Tomaremos algunas de las principales **herramientas heurísticas** citadas en trabajo de Puig (1996):

- Consideración de un caso (o una serie de casos)
- División del problema en partes
- Reformulación

- Variación parcial
- Examen de posibilidades
- Contrarrecíproco
- Figura auxiliar
- Analogía aclarada

3.2.4 Demanda cognitiva del problema

Para conocer mejor la dificultad o reto que supone la resolución del problema para el alumno estudiaremos la **demanda cognitiva del problema**.

Utilizando la clasificación de Smith y Stein (1998), diferenciamos entre cuatro tipos de tareas según la complejidad de los procesos cognitivos que intervienen en la resolución de dicha tarea.

Estas tareas están ordenadas de menor a mayor complejidad, separadas en actividades de nivel inferior de demanda cognitiva, y actividades de nivel superior de demanda cognitiva.

Las actividades de nivel inferior, son tareas rutinarias que se aprenden por repetición y están constituidas por las actividades de **"memorización"** y los **"algoritmos sin conexiones"**.

NIVELES DE DEMANDA COGNITIVA	CARACTERÍSTICAS
NIVEL BAJO DE DEMANDA (NB) **(MEMORIZACIÓN)**	• **Reproducción de elementos previamente aprendidos** (datos, reglas, fórmulas, definiciones). • No pueden ser resueltas usando algoritmos. • No son ambiguas. • No tienen conexión con los conceptos o significado subyacentes a los datos, reglas, fórmulas o definiciones que se están aprendiendo o reproduciendo.
NIVEL BAJO-MEDIO DE DEMANDA (NBM) **(ALGORITMOS SIN CONEXIONES)**	• Son **algorítmicas.** • Su resolución con éxito requiere una demanda cognitiva limitada. Existe una pequeña ambigüedad sobre el que hacer y cómo hacerlo. • No hay conexión con los conceptos o significados subyacentes a los algoritmos usados. • Enfocadas a la resolución correcta de la actividad en vez de al desarrollo de la comprensión matemática. • Requieren explicaciones que se enfocan únicamente a describir el algoritmo usado.

3.3 Nivel bajo de demanda cognitiva

Las actividades de demanda cognitiva superior requieren de la comprensión y conexión de propiedades y conceptos, y están constituidas por los **"algoritmos con conexiones"** y **"haciendo matemáticas"**.

NIVELES DE DEMANDA COGNITIVA	CARACTERÍSTICAS
NIVEL ALTO-MEDIO DE DEMANDA (NAM) **(ALGORÍTMOS CON CONEXIONES)**	• Están enfocadas al uso de algoritmos con el objetivo de profundizar en los niveles de comprensión de los conceptos e ideas matemáticas. • Sugieren explícita o implícitamente las vías a seguir, que son algoritmos generales que tienen conexiones estrechas con las ideas conceptuales subyacentes. • Se representan en múltiple formas (diagramas visuales, manipulativos, símbolos, situaciones problemáticas) • Requieren cierto grado de esfuerzo cognitivo. Aunque se pueden utilizar algoritmos generales, no se pueden seguir sin estar atentos. Los alumnos necesitan considerar ideas conceptuales que subyacen a los algoritmos necesarios para resolver con éxito la tarea.
NIVEL ALTO DE DEMANDA (NA) **(HACER MATEMÁTICAS)**	• Requieren pensamiento complejo y no algorítmico. • Requieren que los estudiantes exploren y comprendan la naturaleza de los conceptos, procesos o relaciones matemáticas. • Necesitan auto-control y auto-regulación de los propios procesos cognitivos. • Requieren que los estudiantes accedan a conocimiento relevante y experiencias y hacer uso adecuado de ellos durante la resolución de la tarea. • Requieren que los estudiantes analicen la tarea y examinen activamente restricciones en la tarea que puedan limitar posibles estrategias de resolución y soluciones. • Requieren un considerable esfuerzo cognitivo.

3.4 Nivel alto de demanda cognitiva

3.2.5 Nivel de razonamiento

Finalmente, el último de los componentes de nuestra herramienta nos permitirá estudiar las habilidades de razonamiento implicadas en la resolución del problema y las diferentes respuestas dependiendo el nivel del alumno. Para ello utilizaremos la clasificación de Van Hiele (1986, citado en Jaime y Gutiérrez, 1990).

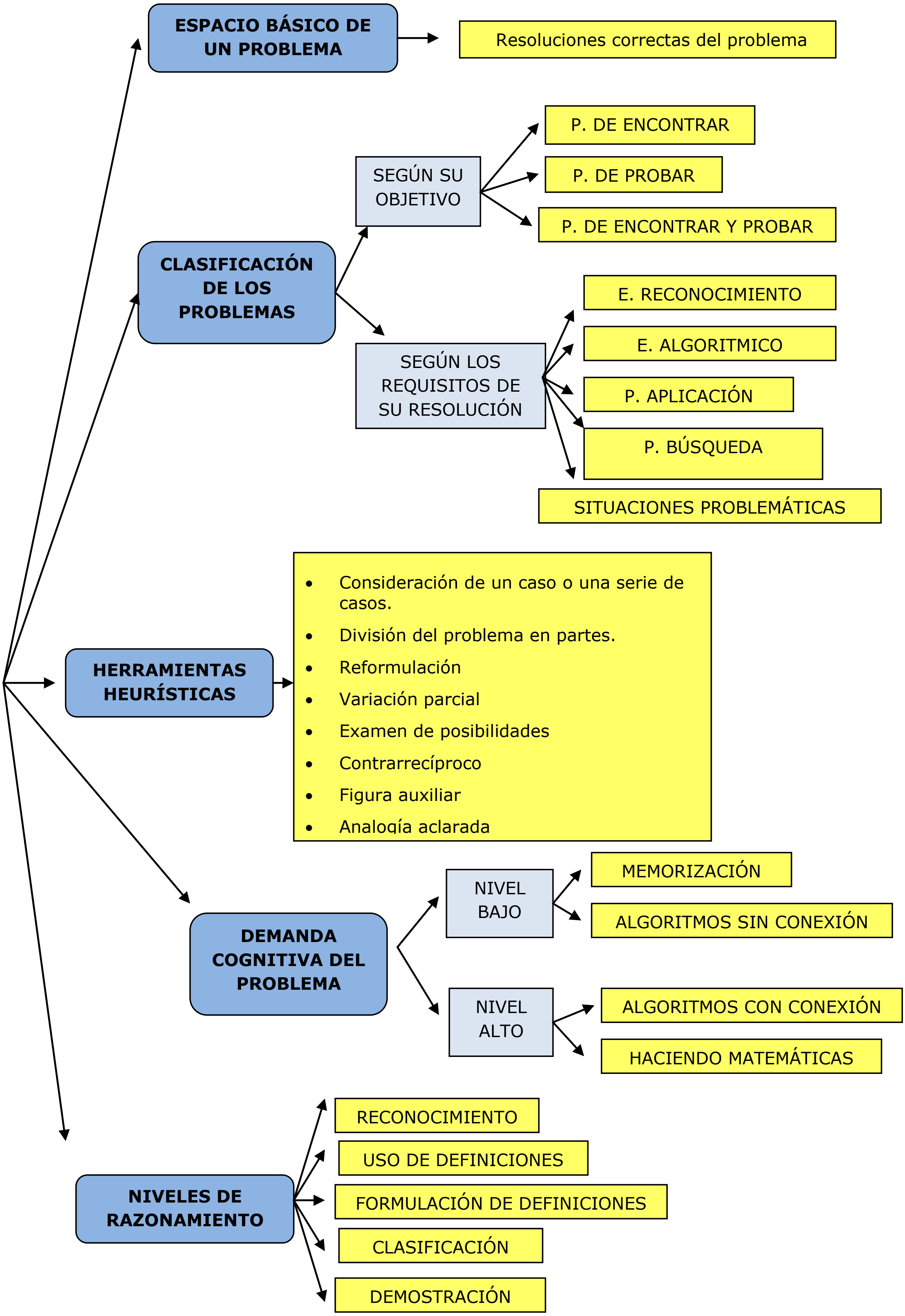
El modelo de Van Hiele tiene dos componentes, el primero es descriptivo, identifica una secuencia de tipos de razonamientos, llamados "niveles de razonamiento", y el segundo es instructivo, marca las pautas a seguir por los profesores para favorecer el avance de los estudiantes en su nivel de razonamiento, "fases de aprendizaje".

Utilizaremos los "**niveles de razonamiento**" para el diseño de nuestras actividades, presentando así una batería de problemas en los que se requieren diferentes **habilidades de razonamiento** y de los cuales podremos obtener diferentes respuestas dependiendo del nivel de razonamiento del alumno, prestando atención a los niveles superiores para alumnos con altas capacidades.

	NIVEL 1	**NIVEL 2**	**NIVEL 3**	**NIVEL 4**
RECONOCIMIENTO	Propiedades físicas	Propiedades matemáticas		
USO DE DEFINICIONES		Definiciones de estructura simple	Cualquier definición	Definiciones equivalentes
FORMULACIÓN DE DEFINICIONES	Propiedades físicas	Propiedades matemáticas	Propiedades necesarias y suficientes	Demostración de equivalencias de definiciones
CLASIFICACIÓN	Basada en propiedades físicas	Basada en propiedades matemáticas básicas	Puede oscilar entre inclusiva y exclusiva	
DEMOSTRACIÓN		Ejemplos	Deductivas informales	Deductivas formales

3.5 Niveles de razonamiento

A continuación mostramos un esquema con todos los componentes implicados en el marco teórico:


ESPACIO BÁSICO DE UN PROBLEMA
Resoluciones correctas del problema
CLASIFICACIÓN DE LOS PROBLEMAS
SEGÚN SU OBJETIVO
P. DE ENCONTRAR
P. DE PROBAR
P. DE ENCONTRAR Y PROBAR
SEGÚN LOS REQUISITOS DE SU RESOLUCIÓN
E. RECONOCIMIENTO
E. ALGORITMICO
P. APLICACIÓN
P. BÚSQUEDA
SITUACIONES PROBLEMÁTICAS
HERRAMIENTAS HEURÍSTICAS
Consideración de un caso o una serie de casos.
División del problema en partes.
Reformulación
Variación parcial
Examen de posibilidades
Contrarrecíproco
Figura auxiliar
Analogía aclarada
DEMANDA COGNITIVA DEL PROBLEMA
NIVEL BAJO
MEMORIZACIÓN
ALGORITMOS SIN CONEXIÓN
NIVEL ALTO
ALGORITMOS CON CONEXIÓN
HACIENDO MATEMÁTICAS
NIVELES DE RAZONAMIENTO
RECONOCIMIENTO
USO DE DEFINICIONES
FORMULACIÓN DE DEFINICIONES
CLASIFICACIÓN
DEMOSTRACIÓN

4 METODOLOGÍA

4.1.1 Elección de la muestra

Para comenzar el trabajo elegimos un libro de texto con el que poder formar la base de nuestros contenidos. Hemos utilizado la editorial Anaya, que es una de las más utilizadas actualmente en España.

A continuación, decidimos concentrarnos en el curso de 5º de E. Primaria, en particular en el tema dedicado al estudio de las figuras planas y sus propiedades. Hemos elegido un tema de geometría, dado que el modelo de Van Hiele que empleamos como instrumento de análisis, es en este campo en el que está totalmente validado.

4.1.2 Análisis del tema elegido y elaboración de mapas conceptuales

Una vez elegido el libro y tema, realizamos un análisis del tema escogido para conocer todos los conceptos presentes en libro de texto, tanto en la parte teórica como en las actividades(ejercicios o problemas). Toda esta información fue recogida en un mapa conceptual que denominamos *mapa conceptual del libro de texto*, donde podemos comprobar la jerarquía de las figuras y sus propiedades.

Para completar este mapa conceptual, elaboramos un nuevo mapa, *el mapa conceptual de experto*, donde incluimos algunas propiedades y relaciones que no estaban presentes en el libro de texto pero que consideramos que podían resultar interesantes para el diseño de actividades de ampliación. Este nuevo mapa nos será de gran ayuda a la hora de crear actividades de profundización que puedan enriquecer los conocimientos de los alumnos con altas capacidades matemáticas.

4.1.3 Ampliación y/o profundización de los contenidos

Haciendo uso de ambos mapas, estudiamos posibles ampliaciones o profundizaciones para complementar los contenidos del libro de texto, teniendo cuidado de no entrar en contenidos propios de cursos superiores.

- Introdujimos nuevos conceptos y sus propiedades.

- Incluimos algunas propiedades de los conceptos representados en el mapa conceptual del libro de texto.

- Generalizamos algunas propiedades que únicamente eran estudiadas para casos concretos.

- Establecimos nuevas relaciones entre los conceptos.

4.1.4 Análisis teórico de sus posibles resoluciones

Para verificar que las actividades eran adecuadas y estaban correctamente integradas en la unidad de enseñanza realizamos un análisis teórico de las posibles formas de resolución haciendo uso de nuestra herramienta de análisis.

El diseño de actividades y su análisis se realizó de forma cíclica hasta alcanzar el resultado deseado.

4.1.5 Realización de doble formato

Por último, la mayoría de las actividades han sido realizadas en doble formato, de manera que los alumnos puedan resolver las actividades en formato tradicional de lápiz y papel, y en formato Geogebra.

La geometría dinámica, Geogebra en este caso, proporciona imágenes visuales de los contenidos, ayudando a visualizar el problema y evitando obstáculos algebraicos. Las actividades que han sido adaptadas resultan muy útiles y enriquecedoras, ya que facilitan la comprensión de los problemas y al mismo tiempo resultan muy atractivas para el alumnado.

Las actividades cuya adaptación a Geogebra no aportaba una visión diferente también han sido realizadas en este formato, de manera que hemos diseñado una unidad de enseñanza completa para ser resuelta con Geogebra.

El potencial que nos ofrecen las actividades de geometría dinámica puede ayudarnos a despertar el interés por el razonamiento matemático y desarrollar el pensamiento creativo de los alumnos con altas capacidades matemáticas. Además, la claridad y exactitud con las que pueden observarse los problemas con Geogebra, les ayuda a crear y comprender las demostraciones de los apartados más avanzados.

5 DISEÑO DE LA UNIDAD DE ENSEÑANZA

Para poder poner en práctica la herramienta de análisis de problemas, diseñamos un bloque de actividades. El proceso de creación de estas actividades se desarrolló de manera cíclica junto con el análisis de su resolución, con el objetivo de obtener un conjunto de actividades variadas, con diversos niveles de dificultad y adaptadas a las diferentes capacidades del alumnado.

Puesto que las actividades debían estar integradas en los contenidos del tema del libro de texto escogido, figuras planas y sus propiedades, comenzamos el diseño de la unidad de enseñanza con la elaboración de los dos mapas conceptuales, el **mapa conceptual del libro de texto** y el **mapa conceptual de experto**.

Una vez sintetizados todos los contenidos y sus posibles ampliaciones, diseñamos un bloque actividades compuesto por **9 actividades** (que se pueden encontrar en los anexos) y definimos los objetivos de cada una de ellas.

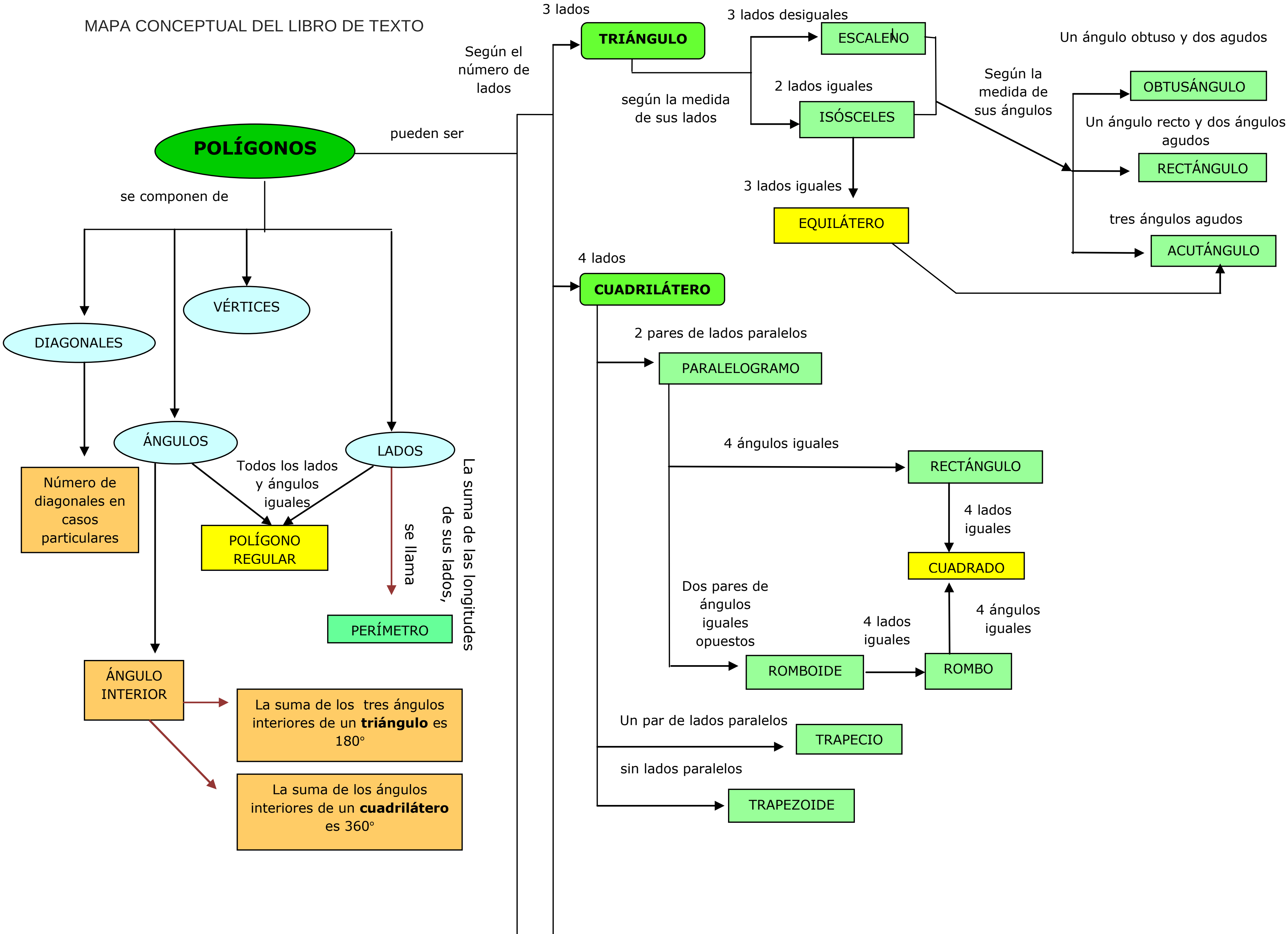
Para terminar con el diseño, comprobamos que todos los contenidos contemplados en los mapas eran tratados en las actividades.

En este capítulo mostramos los dos mapas conceptuales elaborados (el mapa conceptual del libro de texto y el mapa conceptual de experto), los objetivos de las 9 actividades diseñadas y la tabla resumen donde podemos observar los contenidos que estudian cada actividad.

5.1 ELABORACIÓN DE LOS MAPAS CONCEPTUALES

A continuación podemos observar los dos mapas conceptuales diseñados. En el primero de ellos, únicamente se incluyen los conceptos y relaciones presentes en el libro de texto, mientras que el segundo, es un mapa más completo donde podemos observar nuevas ampliaciones.

MAPA CONCEPTUAL DEL LIBRO DE TEXTO



5 lados

PENTÁGONO

8 lados

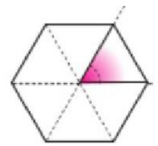
OCTÓGONO

Según sus lados y sus ángulos

Todos los lados y ángulos iguales

POLIGONO REGULAR

ÁNGULO CENTRAL de una caso particular. Ángulo central de un hexágono



El ángulo central de un hexágono regular mide:

360° : 6 = 60°

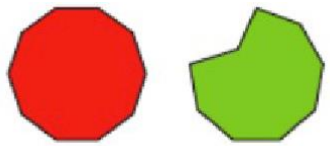
Algún lado o ángulo diferente

POLIGONO IRREGULAR

Según su forma

CONVEXO

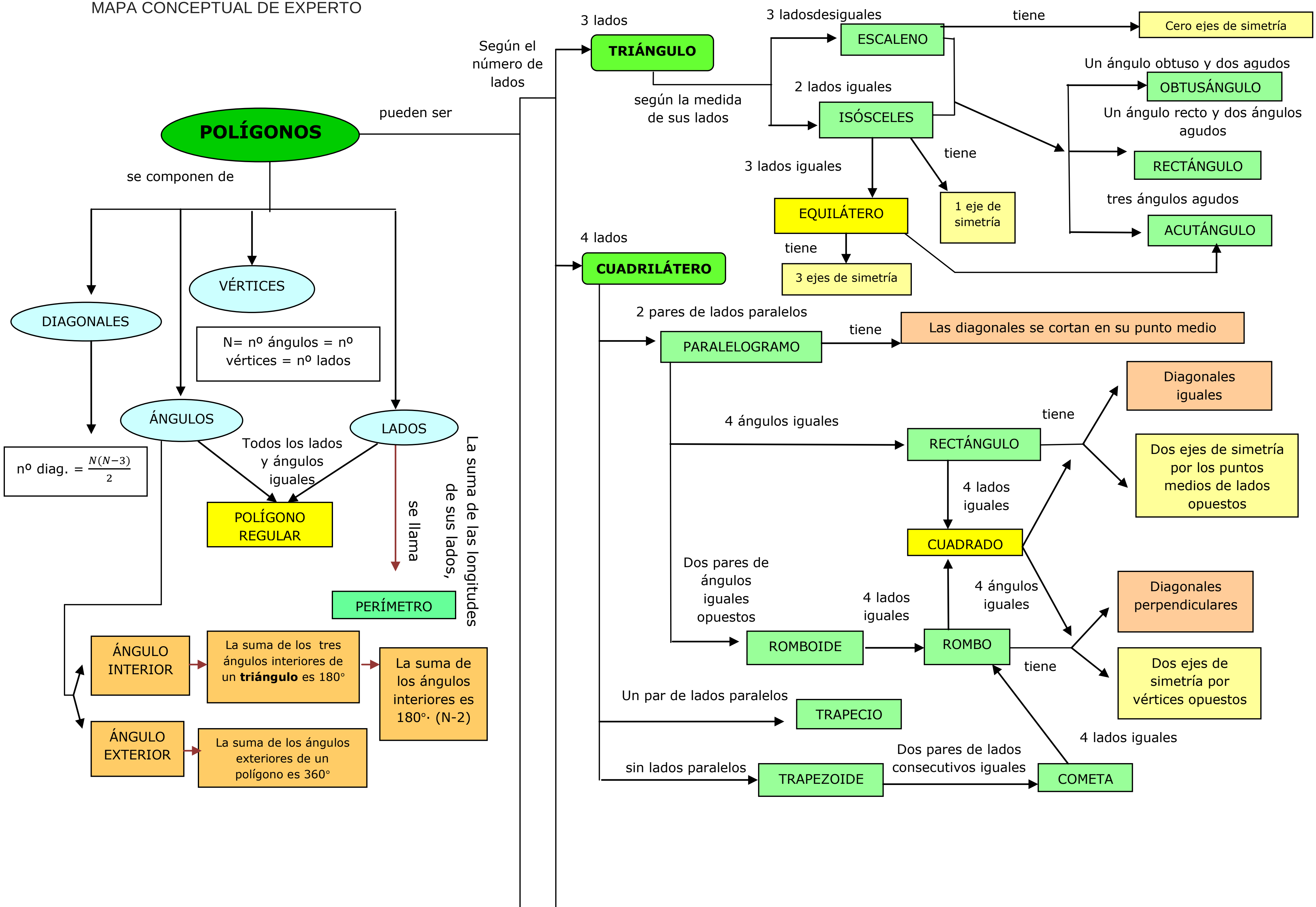
CÓNCAVO

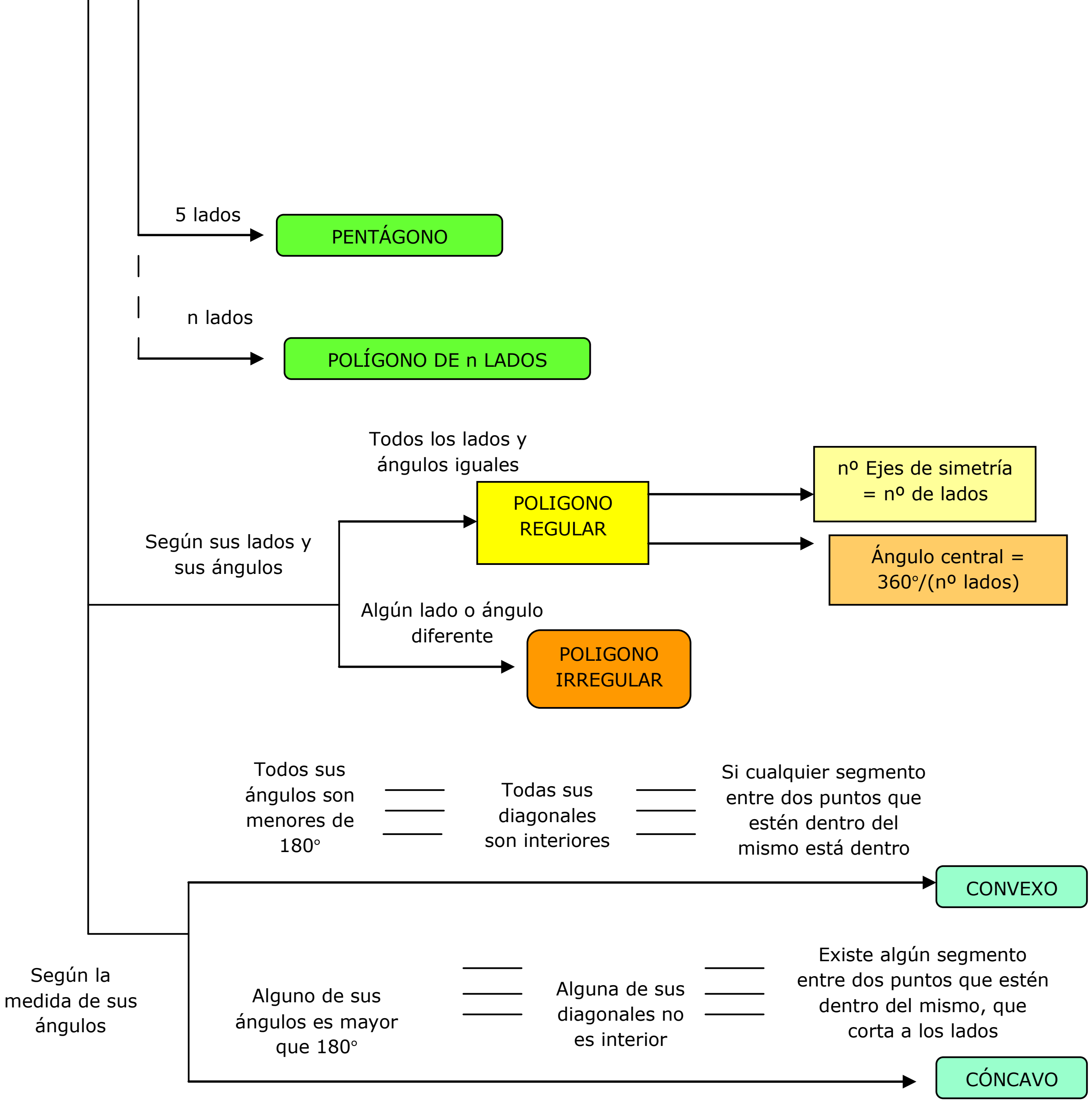


DECÁGONO CONVEXO

ENEÁGONO CÓNCAVO

MAPA CONCEPTUAL DE EXPERTO




5 lados
PENTÁGONO
n lados
POLÍGONO DE n LADOS
Todos los lados y ángulos iguales
POLIGONO REGULAR
nº Ejes de simetría = nº de lados
Ángulo central = 360°/(nº lados)
Según sus lados y sus ángulos
Algún lado o ángulo diferente
POLIGONO IRREGULAR
Todos sus ángulos son menores de 180°
Todas sus diagonales son interiores
Si cualquier segmento entre dos puntos que estén dentro del mismo está dentro
CONVEXO
Según la medida de sus ángulos
Alguno de sus ángulos es mayor que 180°
Alguna de sus diagonales no es interior
Existe algún segmento entre dos puntos que estén dentro del mismo, que corta a los lados
CÓNCAVO

5.2 DISEÑO DE ACTIVIDADES

La unidad de enseñanza está integrada por 9 actividades diferentes que tratan los contenidos comprendidos en los mapas conceptuales. En este apartado veremos los objetivos de cada una de las actividades, que se encuentran en el anexo.

5.2.1 ACTIVIDAD 1: Desigualdad triangular

OBJETIVOS	1. Conociendo la medida de los lados, trazar los triángulos que sean posibles utilizando material escolar (regla y lápiz). 2. Comprobar cómo deben ser las medidas de los lados de un triángulo para que sea posible dibujarlo. (Desigualdad triangular)

5.1 Actividad 1: Desigualdad Triangular

5.2.2 ACTIVIDAD 2: Construcción de triángulos

OBJETIVOS	1. Trazar un triángulo isósceles conociendo uno de los lados iguales. 2. Trazar un triángulo isósceles conociendo el lado desigual. 3. Trazar un triángulo rectángulo conociendo uno de sus catetos.

5.2 Actividad 2: Construcción de triángulos

5.2.3 ACTIVIDAD 3: Suma de los ángulos interiores de un polígono

OBJETIVOS	1. Trazar triángulos, medir sus ángulos y obtener la suma de sus ángulos. 2. Obtener la suma de los ángulos de un triángulo dada la medida de cada uno de los ángulos de varios triángulos. 3. Comprobar la suma de los ángulos de un triángulo observando tres copias de un mismo triángulo unidas por los vértices, de manera que los tres ángulos del triángulo estén unidos. 4. Comprobar la suma de los ángulos de un triángulo colocando los tres ángulos consecutivos. 5. Comprobar la suma de los ángulos interiores de un triángulo trazando una recta paralela a uno de sus lados. 6. Demostrar que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º trazando una recta paralela a uno de sus lados. 7. Calcular la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero, dividiendo el polígono en triángulos mediante el trazado de la diagonal desde un solo vértice. 8. Calcular la suma de los ángulos interiores de un pentágono, dividiendo el polígono en triángulos mediante el trazado de las diagonales desde un solo vértice. 9. Calcular la suma de los ángulos interiores para polígonos de 3, 4,5, 6 y 7 lados ayudándose de dibujos. 10. Deducir la suma de los ángulos interiores para un polígono de 20 lados. 11. Encontrar una fórmula general para el cálculo de la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados.

5.3 Actividad 3: Suma de los ángulos interiores de un polígono

5.2.4 ACTIVIDAD 4: Triángulos equiláteros

OBJETIVOS	1. Tratar de representar triángulos equiláteros rectángulos, obtusángulos y acutángulos. 2. Caracterizar los ángulos de un triángulo equilátero. 3. Partiendo de un triángulo con todos sus lados iguales, comprobar que sus ángulos también son iguales. 4. Partiendo de un triángulo con todos sus ángulos iguales, comprobar que sus tres lados también son iguales. 5. Calcular la medida de los ángulos de un triángulo con todos sus lados iguales y justificar haciendo uso del valor de la suma de los ángulos interiores de un triángulo. 6. Clasificar los triángulos equiláteros atendiendo al valor de sus ángulos (rectángulo, acutángulo u obtusángulo) y justificar haciendo uso del valor de la suma de los ángulos interiores de un triángulo.

5.4 Actividad 4: Triángulos equiláteros

5.2.5 ACTIVIDAD 5: Propiedades paralelogramos

OBJETIVOS	1. Describir todas las propiedades comunes de la familia de los cuadrados. 2. Describir todas las propiedades comunes de la familia de los rectángulos. 3. Describir todas las propiedades comunes de la familia de los rombos. 4. Describir todas las propiedades comunes al cuadrado y al rectángulo. 5. Describir todas las propiedades comunes a los cuadrados pero NO a los rectángulos. 6. Describir todas las propiedades comunes a los rectángulos pero NO a los cuadrados. 7. Establecer una relación de inclusión entre el cuadrado y el rectángulo. 8. Describir todas las propiedades comunes al cuadrado y al rombo. 9. Describir todas las propiedades comunes a los cuadrados pero NO a los rombos. 10. Describir todas las propiedades comunes a los rombos pero NO a los cuadrados. 11. Establecer una relación de inclusión entre el cuadrado y el rombo.

5.5 Actividad 5: Propiedades paralelogramos

5.2.6 ACTIVIDAD 6: Propiedades del rombo

OBJETIVOS	1. Recordar en el punto donde se cortan las diagonales de un rombo. 2. Recordar el ángulo que forman las diagonales del rombo. 3. Dibujar un rombo conociendo dos de sus vértices y la recta donde se encuentra otro de ellos.

5.6 Actividad 6: Propiedades del rombo

5.2.7 ACTIVIDAD 7: Diagonales

OBJETIVOS	1. Dibujar una diagonal en un cuadrilátero y en un pentágono. 2. Calcular el número de diagonales desde un vértice en un cuadrilátero y un pentágono. 3. Comprobar que el número de diagonales desde cada vértice es el mismo. 4. Calcular el número de diagonales desde un vértice de un triángulo. 5. Trazar las diagonales desde un vértice de diferentes polígonos ayudándose de un dibujo. 6. Deducir en número de diagonales desde un vértice de un polígono de 20 lados (sin ayuda de un dibujo). 7. Deducir la relación existente entre en número de lados del polígono y el número de diagonales desde uno de sus vértices. 8. Calcular el número de diagonales totales de diferentes polígonos (se pueden ayudar de dibujos). 9. Relacionar el número de diagonales totales con el número de vértices y el número de diagonales desde cada vértice. 10. Deducir el número de diagonales totales de un polígono de 20 lados (sin ayuda de un dibujo). 11. Establecer una regla general para el cálculo del número de diagonales de cualquier polígono convexo.

5.7 Actividad 7: Diagonales

5.2.8 ACTIVIDAD 8: Polígonos regulares (ángulo central)

OBJETIVOS	1. Recordar la necesidad de que tanto los lados como los ángulos de un polígono regular han de ser iguales. 2. Calcular el ángulo central de polígonos regulares ayudándose de dibujos. 3. Deducir el ángulo central de un polígono regular de 20 lados sin la ayuda de dibujos. 4. Deducir la relación existente entre el número de lados de un polígono regular y su ángulo central. 5. Comprobar si ocurre lo mismo en polígonos no regulares y justificar.

5.8 Actividad 8: Polígonos regulares

5.2.9 ACTIVIDAD 9: Simetrías

OBJETIVOS	1. Calcular el número de ejes de simetría de un triángulo equilátero y un triángulo isósceles. 2. Calcular el número de ejes de simetría de un cuadrado y de un paralelogramo no rectángulo. 3. Calcular el número de ejes de simetría de diferentes polígonos regulares dependiendo de su número de lados. 4. Comprobar por donde cortan los ejes de simetría de los polígonos regular al polígono dependiendo de su número de lados (con la ayuda de dibujos). 5. Deducir el número de ejes de simetría y su posición de polígonos regulares de 20 y 21 lados (sin la ayuda de dibujos). 6. Deducir la una regla general para el cálculo del número de ejes de simetría de un polígono regular. 7. Deducir por dónde cortarán los ejes de simetría al polígono regular dependiendo si el número de lados es par o impar.

5.9 Actividad 9: Simetrías

Por último, para comprobar que todos los contenidos han sido trabajados en alguna de las actividades, realizamos un cuadro resumen con los contenidos comprendidos en los mapas conceptuales y las actividades que estudian dichos contenidos.

Observamos como los contenidos de perímetro y área no han sido trabajados, pues consideramos que era más apropiado dejarlos para el tema de medidas.

Por otra parte, tampoco se han tratado los contenidos de convexidad y concavidad, ya que en el libro de texto, las propiedades que utilizamos en nuestras actividades están restringidas a polígonos convexos. Por ello, hemos considerado dejar el estudio de estos contenidos para cursos superiores.

<table>
<tr><th>CONTENIDOS</th><th colspan="3">SUBCONTENIDOS</th><th>ACTIVIDADES</th></tr>
<tr><td rowspan="3">1. SIMETRÍAS</td><td colspan="3">NÚMERO DE EJES DE SIMETRÍA</td><td>ACT5, ACT9</td></tr>
<tr><td colspan="3">PUNTOS DE CORTE DE LOS EJES</td><td>ACT5</td></tr>
<tr><td colspan="3">POSICIÓN RELATIVA DE LOS EJES</td><td>ACT5</td></tr>
<tr><td rowspan="12">2. POLÍGONOS</td><td rowspan="5">ELEMENTOS DEL POLÍGONO</td><td rowspan="2">ÁNGULOS</td><td>Ángulo exterior</td><td rowspan="2">ACT2, ACT3, ACT4, ACT5</td></tr>
<tr><td>Ángulo interior</td></tr>
<tr><td colspan="2">VÉRTICES</td><td>ACT7</td></tr>
<tr><td colspan="2">DIAGONALES</td><td>ACT5, ACT6, ACT7</td></tr>
<tr><td colspan="2">LADOS</td><td>ACT1, ACT2, ACT5</td></tr>
<tr><td rowspan="2">POLÍGONOS REGULARES</td><td rowspan="2">PROPIEDADES</td><td>Ejes de simetría</td><td>ACT9</td></tr>
<tr><td>Ángulo central</td><td>ACT8</td></tr>
<tr><td rowspan="3">CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD</td><td colspan="2">A partir de sus ángulos</td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="2">A partir de diagonales</td></tr>
<tr><td colspan="2">A partir de segmentos o rectas</td></tr>
<tr><td rowspan="2">MÉTRICA</td><td colspan="2">PERÍMETRO</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">ÁREA</td></tr>
<tr><td rowspan="9">3. TRIÁNGULOS</td><td rowspan="6">CLASIFICACIÓN</td><td rowspan="3">Según sus ángulos</td><td>Acutángulo</td><td>ACT4</td></tr>
<tr><td>Rectángulo</td><td>ACT2, ACT4</td></tr>
<tr><td>Obtusángulo</td><td>ACT4</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Según sus lados</td><td>Equilátero</td><td>ACT4, ACT9</td></tr>
<tr><td>Isósceles</td><td>ACT2, ACT9</td></tr>
<tr><td>Escaleno</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">PROPIEDADES</td><td colspan="2">Medida de sus lados</td><td>ACT1</td></tr>
<tr><td colspan="2">Suma ángulos interiores</td><td>ACT3, ACT4</td></tr>
<tr><td colspan="3">CONSTRUCCIÓN DE TRIÁNGULOS</td><td>ACT2</td></tr>
<tr><td rowspan="5">4. CUADRILÁTEROS</td><td rowspan="4">CLASIFICACIÓN</td><td colspan="2">Según sus lados</td><td>ACT5</td></tr>
<tr><td colspan="2">Según sus ángulos</td><td>ACT5</td></tr>
<tr><td colspan="2">Según sus ejes de simetría</td><td>ACT5</td></tr>
<tr><td colspan="2">Según sus diagonales</td><td>ACT5, ACT6</td></tr>
<tr><td>PROPIEDADES</td><td colspan="2">Suma ángulos interiores</td><td>ACT3</td></tr>
</table>

5.1 Contenidos matemáticos

6 APLICACIÓN DE LA HERRAMIENTA PARA EL ANÁLISIS DE UNIDADES DE ENSEÑANZA

En este capítulo mostramos algunos ejemplos de cómo aplicamos la herramienta de análisis en la unidad de enseñanza diseñada para comprobar que las actividades tienen diversos grados de dificultad y niveles de razonamiento, adecuados a las diferentes capacidades del alumnado.

6.1 ESPACIO BÁSICO DEL PROBLEMA

El estudio de las resoluciones de nuestra unidad de enseñanza implica el análisis de sus actividades. Cada una de las actividades de la unidad de enseñanza está dividida en varios apartados. Para realizar el análisis de las actividades consideraremos cada apartado como un problema independiente.

Con la identificación de los diferentes enfoques de resolución y la construcción del espacio básico del problema conseguimos delimitar tanto las técnicas que se emplean en la resolución de cada problema, como los conceptos implicados en cada uno de estos. Es decir, determinamos los conocimientos específicos necesarios que un alumno debe tener para poder resolver cada uno de los apartados que componen la actividad.

En el espacio básico de un problema representaremos aquellas posibles soluciones que podemos esperar por parte de los alumnos ciñéndose a las indicaciones del enunciado, omitiendo posibles resoluciones de la actividad que no sigan dichas indicaciones.

Para construir el espacio básico de un problema, realizamos un esquema donde podemos observar diferentes caminos o formas para resolverlo. En ocasiones, los caminos de resolución de diferentes apartados de una actividad de la unidad de enseñanza no son independientes, pues podemos comprobar en los problemas propuestos, que varios de ellos comparten técnicas o conceptos comunes. Ello hace que los espacios básicos de estos problemas sean muy similares. En estas ocasiones, hemos optado por integrar en un único esquema los espacios básicos de los diferentes apartados de una actividad que están relacionados.

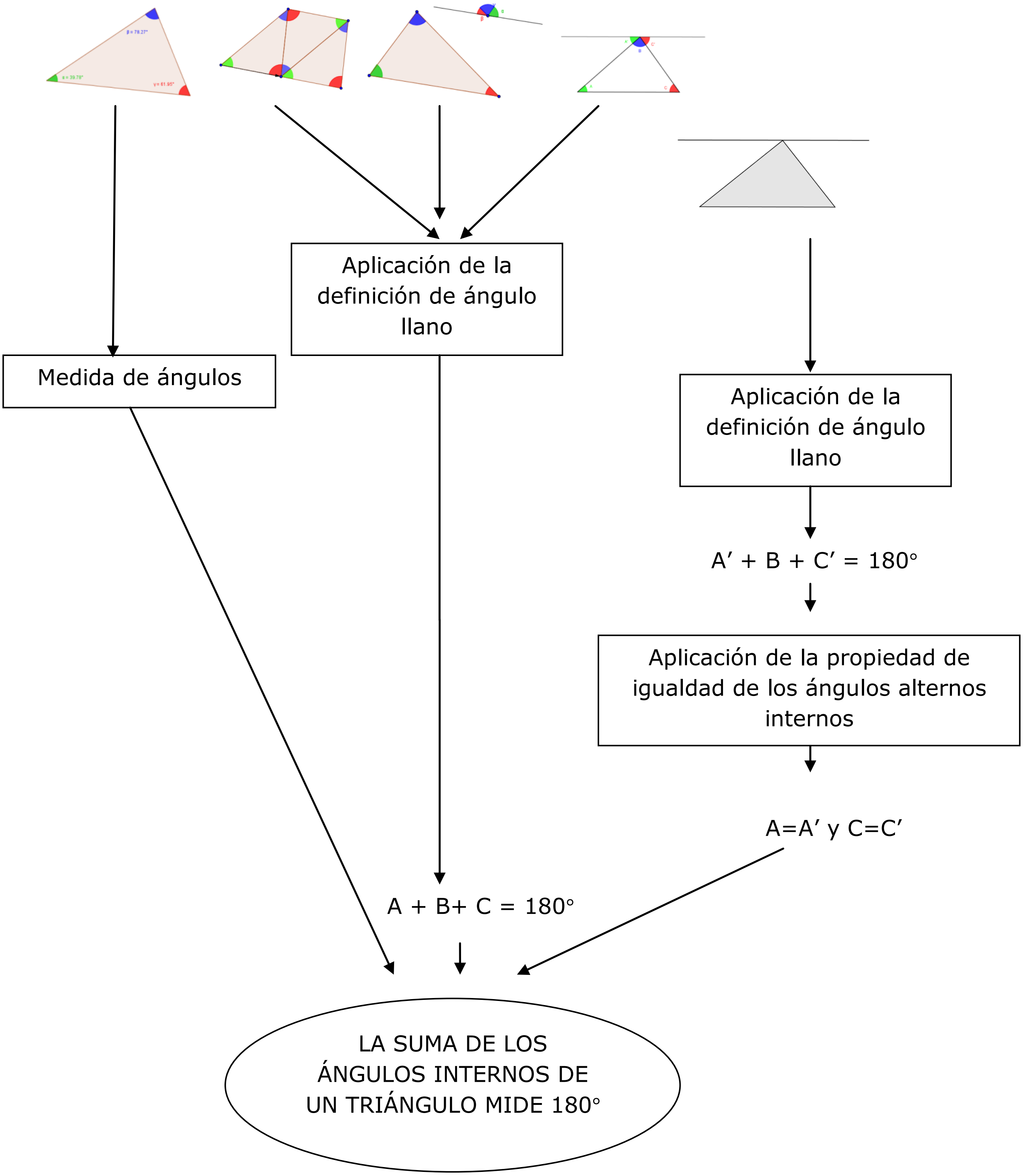
En otras ocasiones, unos apartados de una actividad de la unidad de enseñanza son muy diferentes de otros. En estos casos, hemos construido varios esquemas para presentar los diferentes grupos de espacios de los problemas de la actividad que están relacionados.

En la Actividad 3 por ejemplo, podemos observar dos esquemas diferentes, el primero de ellos hace referencia a los apartados 1-6, y el segundo a los apartados 7-9.

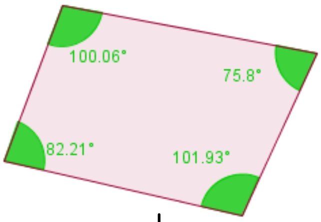
En estos esquemas podemos observar las diferentes resoluciones dependiendo del nivel del alumno, partiendo de ejemplos concretos o aplicando propiedades aprendidas. En el espacio básico del problema únicamente consideramos aquellas resoluciones que son propias del curso al que pertenece el alumnado, omitiendo aquellas que no son posibles de obtener si no se tienen unos conocimientos superiores.

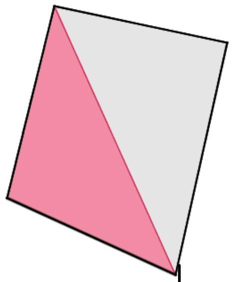
6.1.1.1 Espacio básico del problema: Actividad 3

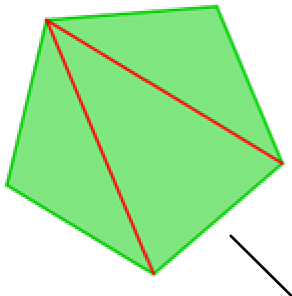
(APARTADOS 1-6)



(APARTADOS 7-9)







Medida de los ángulos interiores del cuadriláteros

Cuadrilátero se divide en dos triángulos

Un pentágono se divide en tres triángulos

Aplicación de la suma de los ángulos internos de un triángulo

2· 180° = 360°

3· 180° = 540°

LA SUMA DE LOS ÁNGULO INTERIORES DE UN CUADRILÁTERO ES 360°

LA SUMA DE LOS ÁNGULO INTERIORES DE UN PENTÁGONO ES 540°

GENERALIZACIÓN: CONSIDERACIÓN DE UN CASO O UNA SERIE DE CASOS

NÚMERO DE LADOS	**NÚMERO DE TRIÁNGULOS**	**SUMA ÁNGULOS INTERNOS**
3	1	180
4	2	2·180=360
5	3	3·180 = 540
20	18	18·180= 3240
…	…	…
n	n-2	(n-2)·180

LA SUMA DE LOS ÁNGULOS INTERIORES DE UN POLÍGONO DE N LADOS ES (N-2)·180°

En estos esquemas podemos ver cada una de las resoluciones de esta actividad, que puede ser resuelta tanto en formato tradicional como usando el Geogebra. A pesar de que ambas resoluciones son válidas, la geometría dinámica agiliza el proceso de comprensión, debido a que no es necesario utilizar materiales como tijeras y papeles para observar con claridad la suma de los ángulos interiores, ya bien sea uniendo sus ángulos o tres triángulos idénticos. Además, el uso del programa informático permite observar una gran variedad de ejemplos sin ningún esfuerzo.

6.2 CLASIFICACIÓN DE UN PROBLEMA

Para conocer un poco mejor las características del problema utilizaremos dos tipologías diferentes para clasificar los problemas. La primera de ellas hace referencia al objetivo del problema, y la segunda estudia los requisitos necesarios para su resolución.

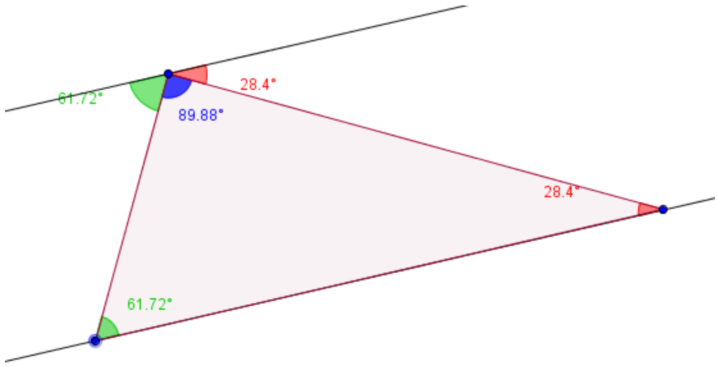
6.2.1 Tipología I

A pesar de que la distinción entre "*problemas de encontrar*", "*problemas de probar*" o "*problemas de encontrar y probar*" parece clara, las características de cada uno de estos problemas tendrán importantes consecuencias en la resolución. Por ello consideramos que la presencia de problemas de los tres tipos puede resultar beneficiosa para el desarrollo de las capacidades de los alumnos con altas capacidades matemáticas, debido a que frecuentemente los libros de texto únicamente contemplan los "*problemas de encontrar*".

En el análisis de nuestra unidad de enseñanza podemos comprobar la existencia de problemas de los tres tipos. Vamos a observar la Actividad 3, donde podemos comprobar cómo comienza con algunos apartados del tipo "*de encontrar*", continúa incorporando algún apartado "de probar" *y* finaliza con problemas "*de encontrar y probar*".

6.2.1.1 Problema de encontrar: Actividad 3.5

5.- *Otra forma de ver cuánto mide la suma de los tres ángulos de un triángulo es trazando una recta paralela a uno de los lados del triángulo (ver dibujo). a) ¿Qué puedes observar en los dos ángulos rojos y los dos ángulos verdes? b) ¿Cuánto mide la suma de los tres ángulos coloreados que tienen un vértice común? ¿Cuánto mide la suma de los ángulos interiores de un triángulo?*

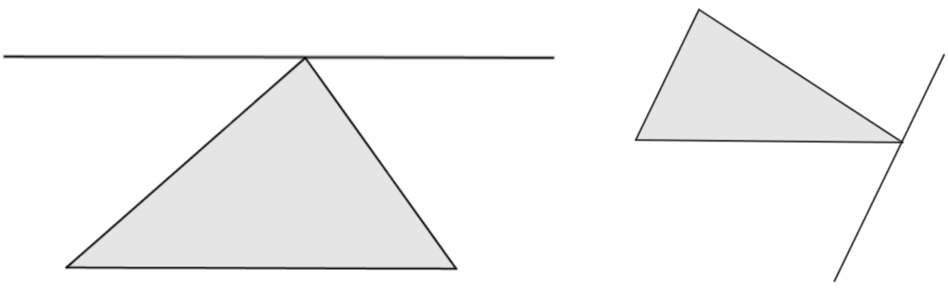


6.1 Problema de encontrar

En este ejemplo podemos ver un "*problema de encontrar*", donde dados los datos de la medida de cada ángulo de un triángulo, que son representados en una figura, el alumno debe encontrar el resultado de la suma de los ángulos interiores de un triángulo. Únicamente se precisa la resolución del problema calculando el resultado, pero no es necesaria ninguna justificación.

6.2.1.2 Problema de probar: Actividad 3.6

6.- *Por lo que has estado viendo, la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°. Sin usar el transportador, explica por qué sucede eso con la ayuda de estas figuras, utilizando el método visto anteriormente que se basaba en el trazado de una línea paralela a un lado.*

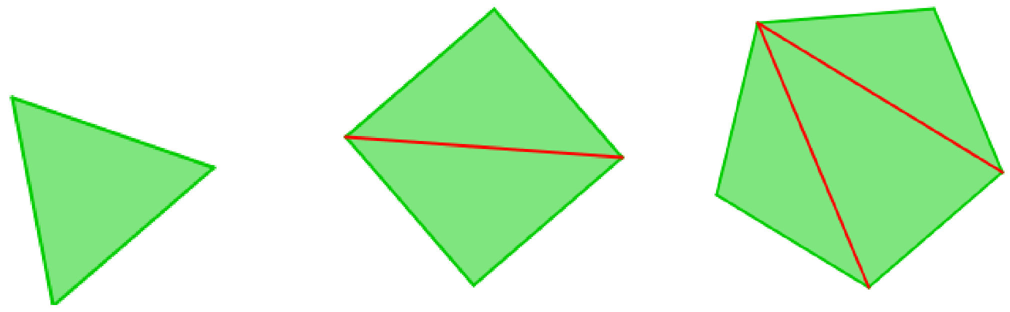


6.2 Problema por probar

A diferencia del ejemplo anterior, en este apartado existe una hipótesis y un resultado. “Si sumas la medida de los ángulos interiores de un triángulo obtienes 180º”. El objetivo de este ejemplo no es encontrar un resultado, sino demostrar el resultado dado por el enunciado.

6.2.1.3 Problema de encontrar y probar: Actividad 3.9

9.- *Observando las figuras, completa la tabla donde consideres el número de triángulos en el que se divide cada polígono al trazar las diagonales desde un vértice y el número de lados del polígono.*



a) *Una vez conocido el número de triángulos, completa la tabla calculando la suma de los ángulos interiores de cada uno de estos polígonos.*

POLÍGONO	NÚMERO LADOS	NÚMERO TRIÁNGULOS	SUMA ÁNGULOS INTERIORES
TRIÁNGULO			
CUADRILATERO			
PENTÁGONO			
HEXÁGONO			
HEPTÁGONO			
P. DE 20 LADOS			
P. DE N LADOS			

b) Observando la tabla, ¿podrías decir en cuántos triángulos se puede dividir un polígono de 20 lados? ¿Cuánto medirá la suma de sus ángulos interiores? Justifica tu respuesta.

6.3 Problema de encontrar y probar

Por último, en este apartado podemos observar un "*problema de encontrar y probar*". Pues el alumno debe encontrar la suma de los ángulos de un polígono de 20 lados y así mismo justificar que dicho resultado es correcto.

6.2.2 Tipología II

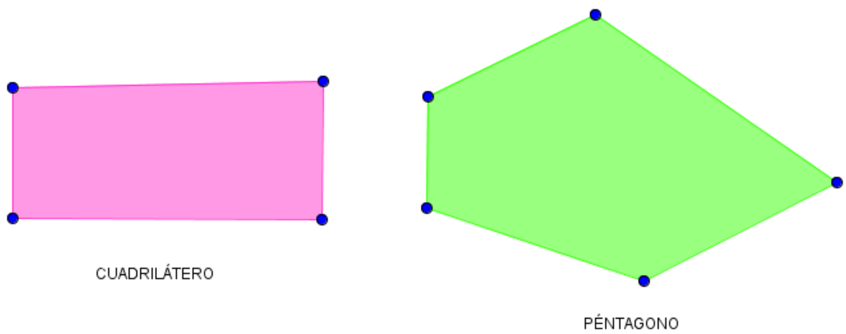
Esta segunda tipología recoge la distinción entre ejercicio y problema, y nos permite clasificar las actividades atendiendo a los requisitos que necesita el resolutor para resolver la tarea. Esto nos ayudará a ordenar las actividades, de manera que conforme el alumno avance, las exigencias de los apartados sean mayores.

En el análisis de nuestras actividades no hemos encontrado ninguna que pertenezca al tipo de "situaciones problemáticas", debido a que el nivel de los alumnos no es suficientemente elevado para enfrentarse a ese tipo de problemas.

Tomaremos como ejemplo la Actividad 7, donde podemos observar una progresión conforme la actividad avanza, aumentado los requisitos necesarios para su resolución.

6.2.2.1 Ejercicio Algorítmico: Actividad 7.1

1.- *Dibuja una diagonal en cada uno de estos polígonos:*



a) ¿Cuántas diagonales puedes trazar desde cada uno de los vértices del cuadrilátero? ¿Desde todos los vértices se puede trazar el mismo número de diagonales?

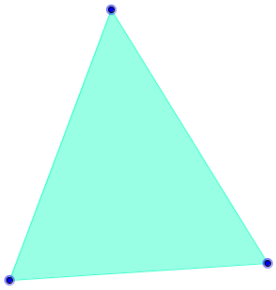
b) ¿Cuántas diagonales puedes trazar desde cada uno de los vértices del pentágono? ¿Desde todos los vértices se puede trazar el mismo número de diagonales?

6.4 Ejercicios Algorítmicos

En este primer apartado el alumno debe ejecutar un algoritmo de forma automática haciendo uso de la definición de diagonal. Siguiendo las pautas indicadas en la definición, el alumno traza cada una de las diagonales desde un vértice uniendo dicho vértice con cada uno de los otros vértices no consecutivos.

6.2.2.2 Problema de Aplicación: Actividad 7.2

2.- *¿Cuántas diagonales salen desde un vértice en un triángulo? ¿Por qué?*

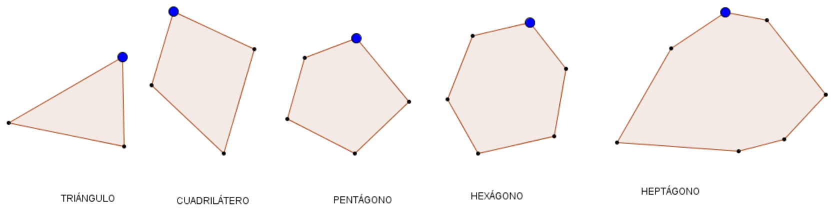


6.5 Problema de Aplicación

En el segundo apartado, el alumno conoce el algoritmo para el trazado de diagonales, pero en este caso al tratarse de un caso especial, deberá justificar que el algoritmo es adecuado y argumentar el resultado obtenido.

6.2.2.3 Problema de Búsqueda: Actividad 7.3

3.-*Observa los siguientes polígonos y responde a las siguientes preguntas.*



a) *Traza las diagonales para cada uno de los polígonos desde el vértice señalado y rellena la siguiente tabla.*

POLÍGONO	Nº DE LADOS	Nº DE DIAGONALES DESDE UN VÉRTICE
TRIÁNGULOS		
CUADRILÁTERO		
…		
HEPTÁGONO		

b) *¿Cuántas diagonales desde un vértice podremos trazar en un polígono de 20 lados?*

c) *¿Qué relación existe entre el número de lados del polígono y el número de diagonales desde un vértice? ¿Por qué?*

d) *Dibuja y calcula el número de diagonales totales de cada polígono.*

POLÍGONO	Nº DE LADOS	Nº DE DIAGONALES DESDE UN VÉRTICE	Nº DE DIAGONALES TOTALES
TRIÁNGULOS			
CUADRILÁTERO			
PENTÁGONO			
HEXÁGONO			
HEPTÁGONO			

e) *Podríamos pensar que una manera sencilla de calcular el número de diagonales de un polígono sería multiplicar el número de vértices por el número de diagonales por cada vértice. Compruébalo. ¿Se corresponde con el número total de diagonales hallado en el apartado anterior? ¿Por qué?*

f) *Calcula el número de diagonales de un polígono de 20 lados.*

g) *¿Podrías hallar una fórmula general que nos permita calcular el número de diagonales de un polígono teniendo en cuenta el número de lados del polígono?*

En este último apartado, el alumno comienza en el *7.3.a* aplicando de manera rutinaria el algoritmo utilizado en los apartados anteriores para unos polígonos concretos (*ejercicio algorítmico).* El alumno traza las diagonales desde uno de los vértices y completa la tabla.

A continuación, *7.3.b* y*7.3.c,* observando el algoritmo utilizado anteriormente, el alumno debe ser capaz de aplicar dicho algoritmo en un polígono de 20 lados y de n lados, donde será necesaria la descripción y argumentación del algoritmo ya que esta vez no puede ayudarse de dibujos (*problema de aplicación)*.

Una vez conocida la fórmula para calcular el número de diagonales desde un vértice, de nuevo el alumno comenzará aplicando de manera automática un algoritmo y dibujando el número de diagonales totales para unos polígonos concretos, *7.3.d, (ejercicio algorítmico).*

Seguidamente, *7.3.e,* el alumno deberá comprobar y argumentar si el número de diagonales totales coincide con el número de diagonales por cada vértice multiplicado por el número de vértices. Esta vez a pesar de que el alumno conoce el algoritmo a seguir, es necesario la argumentación de la respuesta *(problema de aplicación).*

Para terminar, *7.3.f* y *7.3.*g, el alumno deberá crear un algoritmo para poder calcular el número de diagonales totales para un polígono de 20 lados y uno de n lados. En este caso el alumno desconoce el algoritmo a seguir, pues conoce el número de diagonales de cada vértice pero la relación de esta fórmula con el número de diagonales totales no es evidente, por lo que deberá crear un procedimiento para resolver el problema (*problema de búsqueda).*

6.3 HERRAMIENTAS HEURÍSTICAS

Para estudiar el modo y los medios que pueden utilizar los alumnos para resolver los problemas hemos identificado algunas de las herramientas heurísticas que pueden emplear en la resolución de cada una de nuestras actividades.

Al analizar cada una de las actividades hemos observado que únicamente utilizamos cuatro herramientas heurísticas de las ocho que habíamos seleccionado para nuestro análisis. Esto probablemente es debido a que al tratarse de un tema de geometría, no es tan sencillo encontrar problemas donde se utilicen todas estas herramientas.

Vamos a ver un ejemplo de cada una de las herramientas heurísticas utilizadas en nuestras actividades.

6.3.1 Consideración de un caso o una serie de casos

Para resolver algunos problemas resulta muy útil utilizar esta herramienta, por ello es una de las más frecuentes en nuestro bloque de actividades. Este procedimiento consiste en utilizar uno o varios "ejemplos" para verificar o demostrar una aserción.

A la hora de emplear dicha herramienta resulta provechoso hacer uso de una tabla donde podamos observar cada uno de los "ejemplos" utilizados. El uso de esta herramienta, al igual que el resto, no garantiza la solución del problema, pero facilita el proceso.

6.3.1.1 Consideración de un caso o una serie de casos: Actividad 3.9.3

c) Si se tratara de un polígono general de n lados, ¿podrías decir en cuántos triángulos se puede dividir el polígono? ¿Cuánto medirá la suma de sus ángulos? Justifica tu respuesta.

6.7 Consideración de un caso o una serie de casos

En la Actividad 3.9.3 podemos comprobar como para calcular la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados, anteriormente se comprueba la suma de los ángulos interiores de polígonos conocidos. El uso de otros ejemplos más sencillos ayuda a encontrar una regla general para un polígono de n lados.

NÚMERO DE LADOS	NÚMERO DE TRIÁNGULOS	SUMA ÁNGULOS INTERNOS
3	1	180
4	2	2·180=360
5	3	3·180 = 540
6	4	4·180 = 720
7	5	5·180=900
20	18	18·180= 3240
…	…	…
n	n-2	(n-2)·180

6.3.2 División del problema en partes

Otra herramienta para facilitar la resolución del problema, es la división del problema en partes, que consiste en transformar el problema original en un conjunto de problemas menos ambiciosos. A pesar de que la conjunción de los pequeños problemas no es equivalente al problema original, la combinación de los resultados obtenidos simplifica la solución del problema original.

6.3.2.1 División del problema en partes: Actividad 6.1

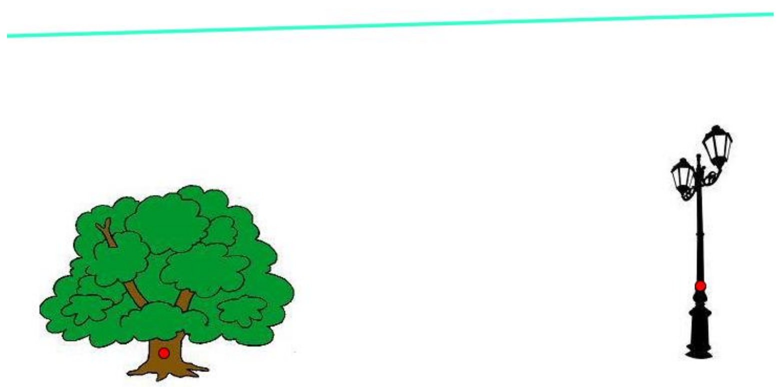
6. *En un pequeño pueblo entre las montañas, un legendario aventurero cansado y al borde de la muerte ha enterrado un tesoro. En el plano que ha dejado, solamente está señalado un árbol y una farola. También ha anotado que el árbol, la farola y el punto donde está enterrado el tesoro, son tres vértices de un rombo. Sabemos que uno de los vértices esta sobre la pista rectilínea azul celeste.*

a) Si el tesoro se encuentra sobre la pista rectilínea, ¿Dónde habría que cavar para encontrar el tesoro?

b) ¿Y si el tesoro se encuentra en el otro vértice del rombo?

Recuerda las propiedades del rombo para resolver el problema.

- *¿En qué punto se cortan las diagonales del rombo?*
- *¿Qué ángulo forman las diagonales del rombo?*



6.8 División del problema en partes

En la Actividad 6 para facilitar su resolución podemos transformar el problema en tres problemas más sencillos:

1.- ¿En qué punto se cortan las diagonales?

2.- ¿Qué ángulo forman las diagonales?

3.- ¿Cómo trazo un rombo conociendo tres vértices?

La unión de los resultados obtenidos en cada uno de estos tres problemas facilita la comprensión del problema y de su solución.

6.3.3 Examen de posibilidades

El examen de posibilidades consiste en examinar los diferentes casos que pueden presentarse. De esta manera se descompone el problema en un conjunto de problemas menos ambiciosos, de manera que su conjunción es equivalente al problema original.

6.3.3.1 Examen de posibilidades: Actividad 1.2

2.- *Observando la suma del segundo (b) y el tercer (c) lado, ¿Qué condición debe cumplir la suma de los dos lados del triángulo para que se pueda* construir?

6.9 Examen de posibilidades

En la Actividad 1.2 podemos examinar los diferentes casos que pueden darse atendiendo al valor de la suma de dos de los lados (mayor, menor o igual que el tercero).Resolviendo estos tres problemas, obtenemos la solución del problema planteado.

LADO a + LADO b	TERCER LADO	SE PUEDE/ NO SE PUEDE CONSTRUIR
$a + b < c$		
$a + b = c$		
$a + b > c$		

6.3.4 Introducción de una figura auxiliar

Por último, otra de las herramientas heurísticas más utilizadas en nuestro bloque de actividades es la introducción de una figura auxiliar. Esta herramienta resulta especialmente útil en nuestro caso, ya que al tratarse de un tema de geometría las figuras pueden resultar de gran ayuda.

Este procedimiento consiste en representar, dibujar o esquematizar la situación descrita por el problema.

6.3.4.1 Introducción de una figura auxiliar: Actividad 3.8

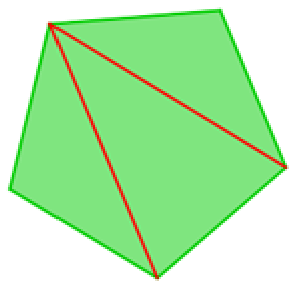
8.- *Responde a las siguientes preguntas:*

a) Traza las diagonales desde un solo vértice de un pentágono. Prueba con diferentes pentágonos. ¿En cuántos triángulos quedan divididos?

b) Recordando el valor de la suma de los ángulos interiores de un triángulo, ¿cuánto medirá la suma de los ángulos interiores de un pentágono?

6.10 Introducción de una figura auxiliar

En la Actividad 3.8 podemos utilizar un pentágono dividido en triángulos para representar la situación descrita en el problema, de manera que nos ayude a realizar el cálculo de la medida de los ángulos interiores de este polígono, conociendo la suma de los ángulos interiores de un triángulo.



6.4 *DEMANDA COGNITIVA DEL PROBLEMA*

Para organizar nuestras actividades según los niveles de dificultad que suponía la resolución de las tareas, hemos analizado la demanda cognitiva de cada problema.

El análisis de la demanda cognitiva de cada actividad se ha realizado observando detenidamente cada una de las resoluciones presentes en el espacio básico del problema, determinando las características de cada resolución e identificando a qué nivel pertenecían.

A la hora de examinar las características de las tareas y las de los niveles definidos por Smith y Stein (1998) hemos tenido dificultades al intentar asignarles uno de los niveles, dado que compartían características de dos de ellos. Esto nos ha llevado a situar algunas actividades entre dos niveles consecutivos.

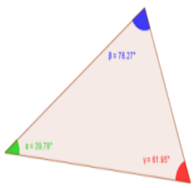
La identificación de los niveles de demanda cognitiva de cada tarea nos ha permitido ordenar los apartados de manera que conforme el alumno avanza, el reto o dificultad de la actividad va aumentando, incrementando el nivel de demanda cognitiva.

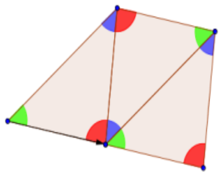
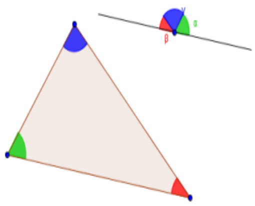
Tomaremos como ejemplo la Actividad 3, ya que hemos observado anteriormente su espacio básico y nos resultará más sencillo comprender el siguiente análisis.

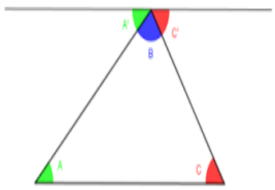
Para facilitar el estudio de la demanda cognitiva de la actividad, numeramos las características de cada nivel descritas en el marco teórico (pp. 33). Una vez numeradas, analizamos cada uno de los apartados comprobando que características cumplían, representando en azul aquellas que se cumplían y en rojo aquellas que no se cumplían.

En esta actividad podemos observar cómo aumenta progresivamente el nivel de demanda cognitiva, comenzando con un "*nivel bajo medio*" y terminando con un "*nivel alto medio".*

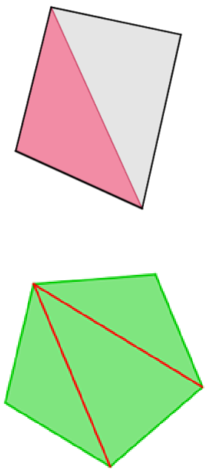
6.4.1.1 Demanda cognitiva del problema: Actividad 3

	ESPACIO BÁSICO	NIVEL DE DEMANDA	JUSTIFICACIÓN
3.1, 3.2		NMB	*NO 1.1 No se reproducen elementos memorizados anteriormente.* *NO 1.2 Si se utiliza un algoritmo para la resolución (algoritmo de medida y suma de ángulos)* *NO 1.3 No es una reproducción exacta de un material visto anteriormente.* *NO 1.4 Si existe conexión entre la definición ángulo, concepto utilizado, y la fórmula a la que se quiere llegar, suma de los ángulos interiores.* ***2.1 Se utiliza el algoritmo de medida y suma de los ángulos interiores.*** ***2.2 No se especifica explícitamente como deben medirse los ángulos (con transportador).*** ***2.3 No existe conexión entre los conceptos utilizados (ángulos) y el significado subyacente al algoritmo que se está utilizando (suma de los ángulos interiores de un triángulo).*** ***2.4 Está orientada a obtener un resultado correcto (suma de los ángulos interiores), no a desarrollar la comprensión matemática.*** ***2.5 No se piden explicaciones.*** *NO 3.1 No está dirigido a la comprensión profunda de la demostración de la suma de los ángulos interiores.* *NO 3.2 No se hace uso del algoritmo general para el cálculo de la suma de los ángulos interiores de un triángulo.* *NO 3.3 No existen diferentes representaciones.* *NO 3.4 Si son fáciles de seguir.*

	ESPACIO BÁSICO	NIVEL DE DEMANDA	JUSTIFICACIÓN
3.3 3.4	 	NMB-NMA	***2.1* Se dan instrucciones específicas de los pasos a seguir. En el enunciado se dan una serie de instrucciones.** ***2.2* Requiere demanda cognitiva limitada. A pesar de que el enunciado dicta unas pautas a seguir, una vez se han completado las instrucciones existe cierta ambigüedad de qué es lo que hay que hacer, pues el alumno debe relacionar los tres ángulos consecutivos que forman el ángulo llano con la suma de los ángulos interiores del triángulo.** *NO 2.3 Si existe conexión entre los conceptos utilizados (ángulos) y el significado subyacente del algoritmo que se está utilizando (suma de los ángulos interiores de un triángulo).* *NO 2.4 Si está orientada a la comprensión de la demostración de la suma de los ángulos interiores de un triángulo.* ***2.5* No se piden explicaciones.** ***3.1* Se pide el uso del algoritmo con el fin de desarrollar la comprensión de la demostración de la suma de los ángulos interiores de un triángulo.** *NO 3.2 No utiliza el algoritmo general para la suma de los ángulos interiores de un triángulo.* ***3.3* La misma idea puede ser representada de diferentes maneras.** ***3.4*El algoritmo puede seguirse sin un alto grado de esfuerzo cognitivo.**

	ESPACIO BÁSICO	NIVEL DE DEMANDA	JUSTIFICACIÓN
3.5		NMB-NMA	NO 2.1 *No se dan instrucciones específicas de los pasos a seguir.* ***2.2 Requiere demanda cognitiva limitada. A pesar de que el enunciado dicta unas pautas a seguir, una vez se han completado las instrucciones existe cierta ambigüedad de qué es lo que hay que hacer, pues el alumno debe relacionar los tres ángulos consecutivos que forman el ángulo llano con la suma de los ángulos interiores del triángulo.*** NO 2.3 *Si existe conexión entre los conceptos utilizados (ángulos) y el significado subyacente del algoritmo que se está utilizando (suma de los ángulos interiores de un triángulo).* NO 2.4 *Si está orientada a la comprensión de la demostración de la suma de los ángulos interiores de un triángulo.* ***2.5 No se piden explicaciones.*** ***3.1 Se pide el uso del algoritmo con el fin de desarrollar la comprensión de la demostración de la suma de los ángulos interiores de un triángulo.*** ***3.2 Utiliza el algoritmo general para la suma de los ángulos interiores de un triángulo.*** ***3.3 La misma idea puede ser representada de diferentes maneras.*** ***3.4El algoritmo puede seguirse sin un alto grado de esfuerzo cognitivo.***

	ESPACIO BÁSICO	NIVEL DE DEMANDA	JUSTIFICACIÓN
3.6	**Aplicación de la propiedad de igualdad de los ángulos alternos internos**	NMA	NO 2.1 *No se dan instrucciones específicas de los pasos a seguir.* NO 2.2 *No existe ambigüedad en qué hay que hacer, se pide explícitamente que se utilice el método visto anteriormente para demostrar la aserción.* NO 2.3 *Si existe conexión entre los conceptos utilizados (ángulos) y el significado subyacente del algoritmo que se está utilizando (suma de los ángulos interiores de un triángulo).* NO 2.4 *Está orientada a la comprensión de la demostración de la suma de los ángulos interiores de un triángulo.* NO 2.5 *Se piden explicaciones.* ***3.1 Se pide el uso del algoritmo con el fin de desarrollar la comprensión de la demostración de la suma de los ángulos interiores de un triángulo.*** ***3.2 Se utiliza el algoritmo general para demostrar la suma de los ángulos interiores de un triángulo.*** NO 3.3*No existen diferentes representaciones de la solución. Se requiere la demostración de la suma de los ángulos interiores del triángulo haciendo uso de la igualdad de los ángulos alternos internos.* ***3.4 Los estudiantes necesitan considerar ideas que subyacen a los algoritmos necesarios para resolver la tarea con éxito (igualdad de los ángulos alternos internos).***

	ESPACIO BÁSICO	NIVEL DE DEMANDA	JUSTIFICACIÓN
3.7 3.8		NMB-NMA	***2.1 Se dan instrucciones específicas de los pasos a seguir.*** ***2.2 Requiere demanda cognitiva limitada. A pesar de que se dictan unas pautas a seguir para dividir los polígonos en triángulos, existe cierta ambigüedad ya que no se especifica que hacer con los triángulos.*** *NO 2.3 Si existe conexión entre los conceptos utilizados (ángulos) y el significado subyacente del algoritmo que se está utilizando (suma de los ángulos interiores de un polígono).* *NO 2.4 Si está orientada a la comprensión de la demostración de la suma de los ángulos interiores de un polígono.* ***2.5 No se piden explicaciones.*** ***3.1 Se pide el uso del algoritmo con el fin de desarrollar la comprensión de la demostración de la suma de los ángulos interiores de un polígono.*** ***3.2 Se utiliza el algoritmo general para demostrar la suma de los ángulos interiores de un polígono.*** *NO 3.3 La misma idea no puede ser representada de diferentes maneras.* *NO 3.4 Los estudiantes no necesitan considerar ideas que subyacen a los algoritmos necesarios para resolver la tarea con éxito.*

	ESPACIO BÁSICO	NIVEL DE DEMANDA	JUSTIFICACIÓN
3.9	**TABLA**	NMA-NA	***3.1**Se utiliza como algoritmo la fórmula general con el fin de desarrollar niveles más profundos de comprensión.* ***3.2**Se sugiere el camino a seguir a través de la tabla y los ejemplos vistos anteriormente.* ***3.3** Existen varias representaciones de la misma idea (representación gráfica con figuras y representación tabular).* ***3.4**Se utiliza el algoritmo general para el cálculo de la suma de los ángulos interiores de un triángulo.* *NO 4.1 Existe un camino predecible y ensayado anteriormente con polígonos conocidos.* ***4.2** Requiere que los alumnos exploren los resultados obtenidos para obtener una fórmula general.* *NO 4.4 No requiere un conocimiento relevante y experiencias.* *NO 4.5 La tarea no tienen restricciones que puedan limitar posibles estrategias.* *4.3; 4.6No tenemos información experimental para conocer como actuarían los alumnos ante estas tareas.*

6.11 Demanda cognitiva de un problema

6.5 NIVELES DE RAZONAMIENTO

Para terminar el análisis de nuestras actividades hemos estudiado las diferentes habilidades de razonamiento necesarias para la resolución de cada una de ellas. Asimismo, hemos tratado de plantear las posibles resoluciones que podríamos obtener por parte de los alumnos, dependiendo del nivel de cada uno de ellos. Todo esto ha sido clasificado según los niveles de razonamiento de Van Hiele.

Esta última parte ha facilitado la creación de un bloque de actividades variadas donde los alumnos puedan desarrollar diferentes habilidades y a diferentes niveles dependiendo de sus capacidades.

Tomaremos de nuevo como ejemplo la Actividad 3 para observar cómo realizábamos el análisis de los niveles de razonamiento para cada uno de los apartados.

Para facilitar la observación del análisis hemos utilizado colores más cálidos para las celdas con mayor nivel de razonamiento.

En esta actividad podemos ver cómo el alumno desarrolla de tres de las habilidades definidas *"reconocimiento", "uso de definiciones"* y *"demostración".* Además podemos comprobar cómo el nivel de las resoluciones aumenta conforme avanza la actividad.

6.5.1.1 Niveles de razonamiento: Actividad 3

	RECONOCIMIENTO	USO DE DEF.	FORMULACIÓN DE DEF.	CLASIFICACIÓN	DEMOSTRACIÓN
3.1, 3.2		**NIVEL II:** Uso de la definición de ángulo para calcular la suma de los ángulos.			**NIVEL II:** Verificación de la propiedad de la suma de los ángulos haciendo uso de uno o varios ejemplos de triángulos.
3.3 3.4	**NIVEL I:** El alumno es capaz de reconocer el aspecto físico de un ángulo llano pero no utiliza la medida de este ángulo. **NIVEL II:** El alumno identifica el ángulo llano y utiliza su medida (180°)	**NIVEL II:** Uso de las definiciones de ángulo y ángulo llano. **NIVEL II:** Uso de las definiciones de ángulo, ángulo llano y ángulos consecutivos.			
3.5	**NIVEL I:** El alumno observa la igualdad de las medidas de los ángulos del mismo color. **NIVEL II:** El alumno observa la igualdad de las medidas de los ángulos alternos internos, y además identifica la suma de los ángulos internos del triángulo con el ángulo llano de 180°. Asimismo, es capaz de generalizar este procedimiento para cualquier triángulo.	**NIVEL II:** Uso de las definiciones de ángulo, ángulo llano y ángulos consecutivos.			
3.6	**NIVEL II:** Identificación de la igualdad de medida de los ángulos alternos internos.				**NIVEL III:** Se transfiere de lo aprendido anteriormente una demostración abstracta informal.

	RECONOCIMIENTO	USO DE DEF.	FORMULACIÓN DE DEF.	CLASIFICACIÓN	DEMOSTRACIÓN
3.7, 3.8	**NIVEL I:** El alumno identifica la división del polígono en triángulos pero no relaciona esto con la suma de los ángulos interiores del polígono. **NIVEL II:** El alumno identifica el número de triángulos y relaciona esto con la suma de los ángulos interiores de un triángulo y del polígono.	**NIVEL II:** Uso de la definición de diagonal.			
3.9	**NIVEL II:** El alumno identifica y utiliza los elementos que intervienen en la fórmula general para el cálculo de la suma de los ángulos internos.				**NIVEL II:** El alumno dibuja un polígono de 20 lados, pero no relaciona. **NIVEL III:** Uso de demostraciones abstractas informales para generalizar para un polígono de 20 o n lados.

6.12 Niveles de razonamiento de un problema

7 RESULTADOS OBTENIDOS TRAS LA APLICACIÓN DE LA HERRAMIENTA DE ANÁLISIS

Para terminar con el análisis, en este capítulo mostramos un resumen de los resultados obtenidos tras analizar nuestro bloque de actividades. En este capítulo recogemos los datos de cada una de las variables utilizadas en cada actividad.

Con este resumen pretendemos sintetizar la importancia de la variedad de actividades, tanto en las habilidades y procedimientos utilizados para la resolución, como en los niveles de dificultad y razonamiento.

7.1 CLASIFICACIÓN DE LOS PROBLEMAS

En este apartado mostramos las dos tipologías utilizadas para clasificar las actividades.

- Respecto a la primera tipología, podemos observar que, a pesar de que los *"problemas de probar"* no sean tan frecuentes como los *"problemas de encontrar"*, sí que hay variedad de *"problemas de encontrar y probar"* donde se ponen de manifiesto ambos procedimientos.

- En lo que respecta a la segunda tipología, como ya hemos comentado anteriormente, no hemos diseñado ninguna actividad del tipo *"situaciones problemáticas"*, debido al bajo nivel de los contenidos y del alumnado, pero si podemos observar variedad entre los otros cuatro tipos. Además, en la segunda tabla podemos comprobar cómo en la mayoría de las actividades los apartados más altos exigen unos requisitos mayores para su resolución.

	TIPOLOGÍA I			TIPOLOGÍA II				
	P. DE ENCONTRAR	P. PROBAR	P. DE ENCONTRAR Y PROBAR	E. RECONOCIMIENT	E. ALGORÍTMICO	P. APLICACIÓN	P. BÚSQUEDA	S. PROBLEMÁT
1	1.2		1.1, 1.3		1.1		1.1, 1.2, 1.3	
2	2.1, 2.2					2.1, 2.2		
3	3.3, 3.4, 3.5	3.6	3.1,3.2, 3.7, 3.8, 3.9	3.2,3.3, 3.4,3.5	3.9	3.6 ,3.9	3.1, 3.2, 3.7,3.8	
4	4.1		4.2, 4.3, 4.4		4.1	4.2, 4.3, 4.4		
5	5.1, 5.2, 5.3		5.4, 5.5	5.1, 5.2, 5.33, 5.4, 5.5				
6	6.1					6.1		
7	7.1, 7.3	7.3	7.2, 7.3		7.1, 7.3	7.2, 7.3	7.3	
8	8.1, 8.2	8.2	8.2	8.1	8.2		8.2	
9	9.1, 9.2, 9.3		9.3		9.1, 9.2, 9.3		9.3	

7.1 Clasificación del problema

ACT	E. RECONOCIMIENTO	E. ALGORÍMICO	P. APLICACIÓN	P. BÚSQUEDA
1.1		X		X
1.2				X
1.3				X
2.1			X	
2.2			X	
3.1				X
3.2	X			X
3.3	X			
3.4	X			
3.5	X			
3.6			X	
3.7				X
3.8				X
3.9			X	
4.1		X		
4.2			X	
4.3			X	

ACT	E. RECONOCIMIENTO	E. ALGORÍMICO	P. APLICACIÓN	P. BÚSQUEDA
4.4			X	
5.1	X			
5.2	X			
5.3	X			
5.4	X			
5.5	X			
6			X	
7.1		X		
7.2			X	
7.3				X
8.1	X			
8.2		X		X
9.1		X		
9.2		X		
9.3		X		X

7.2 Tipología II

7.2 HERRAMIENTAS HEURÍSTICAS

En el análisis de las herramientas heurísticas detectamos únicamente cuatro de las ocho herramientas definidas. Esto posiblemente sea debido a que, al tratarse de un tema de geometría resulta más infrecuente encontrar actividades donde podamos utilizar todas las herramientas.

Entre las herramientas encontradas destacan las herramientas heurísticas de "*consideración de un caso o una serie de casos*" e "*introducción de una figura auxiliar*".

	HERRAMIENTAS HEURÍSTICAS							
	CONSIDERACIÓN DE UN CASO O UNA SERIE DE CASOS	**DIVISÓN DEL PROBLEMA EN PARTES**	**REFORMULACIÓN**	**VARIACIÓN PARCIAL**	**EXAMEN DE POSIBILIDADES**	**PASO AL CONTRAREPRÍCO**	**INTRODUCCIÓN DE UNA FIGURA AUXILIAR**	**ANALOGÍA ACLARADA**
1	1.2, 1.3				1.2			
2								
3	3.1, 3.2, 3.3 ,3.4, 3.5, 3.9						3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6, 3.7,3.8, 3.9	
4	4.1, 4.2, 4.3						4.1, 4.2, 4.3	
5								
6		6						
7	7.1, 7.3						7.3	
8	8.2						8.2	
9	9.3						9.1, 9.2, 9.3	

7.3 Herramientas heurísticas

7.3 DEMANDA COGNITIVA DEL PROBLEMA

A la hora de realizar el análisis de la demanda cognitiva de los problemas, observamos como algunas de las actividades cumplían propiedades de dos niveles consecutivos, por ello decidimos realizar el análisis numerando las propiedades características de cada nivel y comprobando que propiedades cumplía cada actividad.

En la siguiente tabla podemos observar como a cada actividad no se le asigna un único nivel. No obstante, conforme la actividad avanza los apartados van cumpliendo más propiedades de los niveles superiores, aumentando progresivamente el nivel de demanda cognitiva. Esto último queda representado en la tabla con un desplazamiento paulatino de las cruces hacia la derecha en cada una de las actividades.

ACT	NB				NBM					NAM				NA					
	1	2	3	4	1	2	3	4	5	1	2	3	4	1	2	3	4	5	6
1.1					X	X	X	X											
1.2					X	X		X	X	X	X								
1.3					X		X			X	X								
2.1a					X	X		X	X										
2.1b					X	X		X	X										
2.2					X	X		X	X										
3.1					X	X	X	X	X										
3.2					X	X	X	X	X										
3.3					X	X			X	X		X	X						
3.4					X	X			X	X		X	X						
3.5						X			X	X	X	X	X						
3.6										X	X		X						
3.7					X	X			X	X	X								
3.8					X	X			X	X	X								
3.9										X	X	X	X		X				
4.1					X	X	X	X	X										
4.2					X	X	X			X									
4.3					X	X	X			X									
4.4					X	X				X	X								
5.1	X	X	X																
5.2	X	X	X																
5.3	X	X	X																
5.4	X	X	X			X													
5.5	X	X	X			X													
6					X	X			X	X	X								
7.1					X		X	X	X										

ACT	NB				NBM					NAM				NA					
	1	**2**	**3**	**4**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**1**	**2**	**3**	**4**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
7.2					X	X	X	X	X										
7.3										X	X	X	X		X				
8.1	X	X	X					X											
8.2a					X			X	X			X							
8.2b					X	X				X	X		X						
8.2c					X	X				X	X		X						
8.2d					X	X				X	X								
9.1					X	X	X	X	X										
9.2					X	X	X	X	X										
9.3										X	X	X	X						

7.4 Demanda cognitiva del problema

7.4 NIVELES DE RAZONAMIENTO

En la siguiente tabla podemos ver resumidos los resultados obtenidos tras el análisis de los niveles de razonamiento de Van Hiele.

Por una parte, podemos comprobar cómo resolviendo el bloque de actividades, los alumnos utilizarán todas las habilidades de razonamiento definidas según este modelo. Además, como era de esperar, en todas las actividades se hace uso de más de una habilidad de razonamiento.

Por otra parte, como ya comentamos anteriormente, el nivel de razonamiento de cada actividad dependerá de las respuestas obtenidas, ya que una misma actividad puede ser resuelta con diferentes niveles de razonamiento, dependiendo de la capacidad del alumno. No obstante, podemos observar, como en muchas de las actividades los últimos apartados requieren un nivel más alto de razonamiento, ya que están adaptadas a los alumnos con altas capacidades matemáticas.

ACT	NIVELES				HABILIDADES				
	1	2	3	4	RECONOC.	USO DEF.	FORMUL.	CLASIFIC.	DEMOST.
1.1		X				X			X
1.2		X	X			X			X
1.3		X	X			X			X
2.1a	X	X			X	X			
2.1b	X	X			X	X			
2.2	X	X			X	X			
3.1		X				X			X
3.2		X				X			X
3.3	X	X			X	X			
3.4	X	X			X	X			
3.5	X	X			X	X			
3.6		X	X		X				X
3.7	X	X			X	X			
3.8	X	X			X	X			
3.9		X	X		X				X
4.1	X	X			X	X			
4.2	X	X	X		X	X			X
4.3	X	X	X			X		X	X
4.4		X	X		X	X		X	X
5.1	X	X				X	X		
5.2	X	X				X	X		
5.3	X	X				X	X		
5.4	X	X						X	
5.5	X	X						X	
6	X	X			X	X			
7.1	X	X			X	X			

ACT	NIVELES				HABILIDADES				
	1	2	3	4	RECONOC.	USO DEF.	FORMUL.	CLASIFIC.	DEMOST.
7.2	X	X			X	X			
7.3	X	X	X		X	X			X
8.1	X	X			X	X			
8.2	X	X	X		X	X			X
9.1	X	X			X	X			
9.2	X	X			X	X			
9.3	X	X	X		X	X			X

7.5 Niveles de razonamiento

8 CONCLUSIONES

Dedicaremos este último capítulo a dar respuesta a los objetivos planteados en la delimitación del problema. Además, detallaremos algunas de las dificultades con las que nos hemos encontrado para llevar a cabo nuestros objetivos, y por último, terminaremos considerando algunas posibles proyecciones futuras para continuar el trabajo.

8.1 VALORACIÓN DE LA HERRAMIENTA DE ANÁLISIS

El uso de nuestra herramienta nos ha permitido la creación de un bloque de actividades completas, variadas y adaptadas a las diferentes capacidades del alumnado. Asimismo, esta técnica nos ha ayudado a realizar un análisis exhaustivo de las actividades, permitiendo detectar la dificultad de cada una de ellas y los niveles de razonamiento y habilidades necesarios para su resolución, lo cual ha facilitado la organización y secuenciación de las actividades, de manera que la complejidad de las tareas aumente conforme el alumno avanza.

El análisis de las actividades se realizado con la ayuda de nuestra herramienta, basada en cinco componentes: *"espacio básico del problema", "clasificación del problema", "herramientas heurísticas", "demanda cognitiva del problema"* y "*niveles de razonamiento de Van Hiele*".

No obstante, la importancia de cada una de estas variables puede ser relativa y discutida.

Por una parte, el uso de la clasificación de Polya (1945) ha resultado menos útil de lo esperado. A pesar de que el objetivo del problema resulta muy interesante para determinar qué tipo de habilidades necesita usar el alumno a la hora de resolver un problema, consideramos que sin el uso de la clasificación de Butts (1980) o las habilidades de razonamiento de Van Hiele (1957) esta clasificación resulta insuficiente.

Por otra parte, el estudio del espacio básico del problema ha sido de gran utilidad para observar las posibles resoluciones de cada una de las actividades y las dificultades que puede tener cada una de estas resoluciones. El espacio básico del problema nos ha ayudado a estudiar con detenimiento la demanda cognitiva del problema, observando el reto o dificultad que suponía la resolución del problema para el alumno.

Por último, el análisis de la demanda cognitiva y los niveles de razonamiento de Van Hiele han facilitado la secuenciación de las actividades, permitiendo ordenar estas por niveles de complejidad según las diferentes capacidades del alumnado.

8.2 LIMITACIONES

El diseño de nuestro bloque de actividades ha estado delimitado por los contenidos del tema y el curso seleccionado.

Al haber elegido para este estudio el curso de 5º de E. Primaria, la complejidad matemática del tema analizado está limitada a cierto rango, lo cual no ha permitido aplicar la herramienta de análisis que proporcionamos en esta investigación a temas más simples o más complejos, propios de cursos inferiores o superiores, respectivamente.

El análisis de las actividades que hemos presentado en esta memoria ha estado condicionado por nuestra herramienta de análisis.

Por una parte, debido a la limitación del razonamiento en 5º E. Primaria, el espacio básico del problema ha estado muy condicionado, ya que únicamente hemos considerado aquellas resoluciones que son propias del nivel que poseen los alumnos de este curso.

Por otra parte, consideramos necesario la obtención de resoluciones reales para confirmar la validez y la fiabilidad de la aplicación que hemos hecho de nuestra herramienta de análisis de actividades.

8.3 PROYECCIONES FUTURAS

Para continuar con este trabajo consideramos esencial realizar algunas mejoras y modificaciones en nuestra herramienta de análisis.

Como ya hemos comentado anteriormente, uno de los principales problemas que encontramos en la realización de esta investigación fue adaptar nuestras actividades a los niveles de demanda cognitiva definidos por Smith y Stein (1998), debido a que varias actividades poseen características de dos niveles de demanda cognitiva consecutivos. Por ello, creemos que es interesante explorar de forma más detallada la aplicación de los niveles de demanda cognitiva para analizar la adecuación de actividades matemáticas a estudiantes de diferentes capacidades matemáticas.

Una vez mejorada nuestra metodología, creemos que es necesario poner en práctica con alumnos ésta u otras unidades de enseñanza diseñadas con la herramienta de análisis. De esta manera obtendremos información sobre resoluciones reales que más tarde puedan ser analizadas. En la puesta en práctica de la unidad de enseñanza consideramos imprescindible la variedad de capacidades en la muestra de alumnos seleccionados para poder detectar las diferencias en sus resoluciones.

Por otra parte, consideramos que las actividades diseñadas de geometría dinámica son muy atractivas y sería muy interesante trabajarlas con el alumnado para observar cómo reaccionan ante este tipo de actividades.

Tras el análisis de los resultados obtenidos, sería conveniente someter a examen de nuevo la herramienta de análisis y la unidad de enseñanza, realizando los cambios oportunos.

Por último, este trabajo puede ser extendido a otros temas de este y otros cursos de Educación Primaria y Educación Secundaria.

9 BIBLIOGRAFÍA

Adanaz, T. (2008). Integración de un niño superdotado en educación infantil. *Innovación y experiencias educativas, 12.*

Benito, Y. (1999). *¿Existen los superdotados?*. Barcelona: Ed. Praxis S.A.

Bodí, S. y Valls, J. (2002). Análisis del bloque curricular de números en los libros de texto de matemáticas. En Penalva, M., Torregosa. G. y Valls, J. (Eds.), *Aportaciones de la didáctica de la matemática a diferentes perfiles profesionales.* Alicante: Compobell, S.L.

Boston, M. y Smith, M. (2009). Transforming Secondary Mathematics Teaching: Increasing the Cognitive Demands of Instructional Tasks Used in Teachers' Classrooms. *Journal for Research in Mathematics Education, 40* (2), pp. 119-156.

Brändström, A. (2005). *Differentiated tasks in mathematics textbooks. An analysis of the levels of difficulty.* Suecia: Luleä University of Technology.

Burger, W. y Shaughnessy, J. (1986). Characterizing the Van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education, 17* (1), pp. 31-48.

Burger, W. y Shaughnessy, J. (1990). *Assessing children's intellectual growth in geometry.* Corvallis, EE.UU.: Oregon State University.

Butts, T. (1980). Posing Problemas Properly. En S. Krulik (Ed.), *Problem Solving School Mathematics*. Reston: NCTM.

CNICE. (s.f.). *Cómo se reconoce a un alumno superdotado*. Documento no publicado.

Cobo, P. (1998). *Análisis de los procesos cognitivos y de las iteracciones sociales entre alumnos (16-17) en la resolución de problemas que comparan áreas de superficies planas. Un estudio de casos.* (Tesis doctoral no publicada). Bellaterra, Barcelona: Universidad Autónoma de Barcelona.

Corberán, R. y otros (1989). *Didáctica de la geometría: Modelo de Van Hiele.* Valencia: Universitat de València.

Cruz, G. (2009). La Demanda Cognitiva como Oportunidad de Aprendizaje en el Área de Matemáticas. *Colegios Peruanos.* Obtenido de http://tegperu.brinkster.net/SOPEMAT/userfiles/File/Otros/CONEM/Documentos/La%20Demanda%20Cognitiva%20como%20Oportunidad%20de%20Aprendizaje%20en%20el%20%C3%81rea%20de%20Matem%C3%A1tica%20-%20Gustavo%20Cruz.pdf

Fuys, D., Geddes, D. y Tischler, R. (1988). *English translations of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele.* New York: School of Education, Brooklyn College.

Gómez, P. y Carulla, C. (2001). *Sistemas de representación y mapas conceptuales.* Bogotá: Gaia.

Hibert, J. y Wearne, D. (1993). Instructional tasks, classroom discourse, and students' learning in second-grade arithmetic. *American Educational Research Journal, 30*, pp. 393-425.

Huerta, P. (1995). Uso de los Mapas Conceptuales para explorar conceptos y relaciones: El caso de los cuadriláteros. En *II Jornades d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana.* La Safor: SEMCV.

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1989). *Diseño de un programa de enseñanza progresiva de las isometrías del plano en E.G.B.* Valencia: Conselleria de Cultura, Ed. i C.

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El Modelo de Van Hiele. En Llinares, S. y Sánchez, M.V. (Eds.), *Teoría práctica en educación matemática* (colección "Ciencias de la Educación" nº 4) (pp. 295-384). Sevilla: Alfar.

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento.* Valencia: Universitat de València.

Kommers, P. y Lanzing, J. (1998). Mapas conceptuales para el diseño de sistemas hipermedia. Navegación por la Web y autoevaluación. En Vizcarro, C. y León, J. (Eds.), *Nuevas tecnologías para el aprendizaje* (pp. 103-127). España: Pirámide.

Mansfield, H. y Happs, J. (1989). Using concepts maps to explore students' understanding in geometry. En *Proceedings of the 13 Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, pp. 250-257.

Mayer, R. (1986 [Ed. Or. 1983]). *Pensamiento, resolución de problemas y cognición.* Barcelona: Ed. Paidós.

Mentrard, D. (2013). *Mathematiques et Sciencies Physiques*. Página web http://dmentrard.free.fr/

Miranda, R. (2013). *Geometría Dinámica*. Página web http://www.geometriadinamica.cl/

Monterubio, M. y Ortega, T. (2011). Diseño y aplicación de instrumentos de análisis y valoración de textos escolares de matemáticas. *PNA, 5 (3)*, pp. 105-127.

Newell, A. y Simon, H. A. (1972). *Human problem solving.* Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Novak, J. y Gowing, D. (1988). *Aprendiendo a aprender.* Barcelona: Ediciones Martínez Roca.

Pepin, B. y Haggarty, L. (2008). M*aking connections and seeking understanding: Mathematical tasks in English, French and German textbooks* (manuscrito no publicado). Cambridge, G.B.: University of Cambridge. Obtenido de: <http://www.mkit.maths-ed.org.uk/MKiT5_Pepin&Haggarty.pdf>.

Polya, G. (1945). *How to Solve it: a new aspect of mathematical method*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Polya, G. (1954). *Mathematics and Plausible Reasoning.* Princeton, NJ: Princeton University Press.

Polya, G. (1962-1965). *Mathematica Discovery.* New York: John Wiley and Sons.

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas.* Granada: Comares.

Rico, L., Castro, E., Marín, A., Puig, L., Sierra, M. y Socas, M. (1997). *La educación matemática en la enseñanza secundaria.* Barecelona: ice-Horsori.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving.* Orlando, FL: Academic Press.

Simon, D. P. y Simon, H. A. (1978). Individual differences in solving physics problems. En Siegler R. (Ed.), *Children's thinking: What develops?.* Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Smith, M. y Stein, M. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*, pp. 344-350.

Stein, M. y Lane, S. (1996). Instructional Tasks and the Development of Student Capacity to Think and Reason: An Analysis of the Relationship between Teaching and Learning in a Reform Mathematics Project. *Educational Research and Evaluation, 2*, pp. 50-80.

Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry.* Columbus, EE.UU.: ERIC.

Van Hiele, P. (1957). *El problema de la comprensión (en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría)* (tesis doctoral). (Utrecht, Holanda: Universidad de Utrecht). (Traducción al español para el proyecto de investigación Gutiérrez y otros, 1991).

Van Hiele, P. (1986). *Structure and insight. A theory of mathematics education.* Londres: Academic Press.

Van Hiele-Geldof, D. (1957). *The didactics of geometry in the lowest class of Secondary School* (tesis doctoral). (Utrecht, Holanda: Universidad de Utrecht). (Traducción al inglés en Fuys; Geddes; Tischler (1984)).

ANEXOS

ANEXO I

ACTIVIDAD 1: DESIGUALDAD TRIANGULAR

OBJETIVOS	1.- Conociendo la medida de los lados, trazar los triángulos que sean posibles utilizando material escolar (regla y lápiz). 2.- Comprobar cómo deben ser las medidas de los lados de un triángulo para que sea posible dibujarlo. (Desigualdad triangular)

ACTIVIDAD 1: FORMATO LÁPIZ Y PAPEL

1.- Utilizando regla y papel, trata de dibujar triángulos con las siguientes medidas de sus lados:

- a=2cm, b=4cm y c=7cm;
- a=3cm, b=4cm, y c=7cm;
- a=5cm, b=6cm y c=7cm;

¿Se pueden dibujar todos? ¿Por qué?

2.- Observando la suma del segundo (b) y el tercer (c) lado, ¿Qué condición deben cumplir la suma de los dos lados del triángulo para que se pueda construir?

LADO a + LADO b	TERCER LADO	SE PUEDE/ NO SE PUEDE CONSTRUIR

3.-Trata de representar los siguientes triángulos.

- 3cm, 4cm, 8cm; 5cm, 2cm, 2cm; 1cm, 6cm, 3cm;

¿Se pueden construir estos triángulos? ¿Por qué?

- 2cm, 3cm, 5cm; 6cm, 4cm, 2cm; 3cm, 7cm, 4cm;

¿Se pueden construir estos triángulos? ¿Por qué?

- 4cm, 5cm, 8cm; 5cm, 3cm, 4 cm; 6cm, 7cm, 3cm;

¿Se pueden construir estos triángulos? ¿Por qué?

ACTIVIDAD 1: FORMATO GEOGEBRA

1.- Utilizando regla y papel, trata de dibujar triángulos con las siguientes medidas de sus lados:

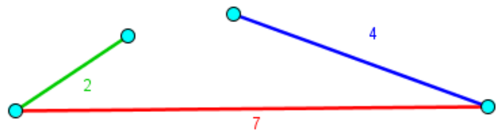
- a=2cm, b=4cm y c=7cm;
- a=3cm, b=4cm, y c=7cm;
- a=5cm, b=6cm y c=7cm;

¿Se pueden dibujar todos? ¿Por qué?

2.- (APPLET 1.1) Moviendo los puntos y variando la longitud de los lados, trata de representar los triángulos del ejercicio anterior.

Observando la suma de los lados b y c (lado verde y azul), ¿Qué condición deben cumplir la suma de los dos lados del triángulo para que se pueda construir?

LADO a + LADO b	TERCER LADO	SE PUEDE/ NO SE PUEDE CONSTRUIR



3.- (APPLET 1.2) Moviendo los puntos y variando la longitud de los lados trata de representar los siguientes triángulos.

- 3cm, 4cm, 8cm; 5cm, 2cm, 2cm; 1cm, 6cm, 3cm;

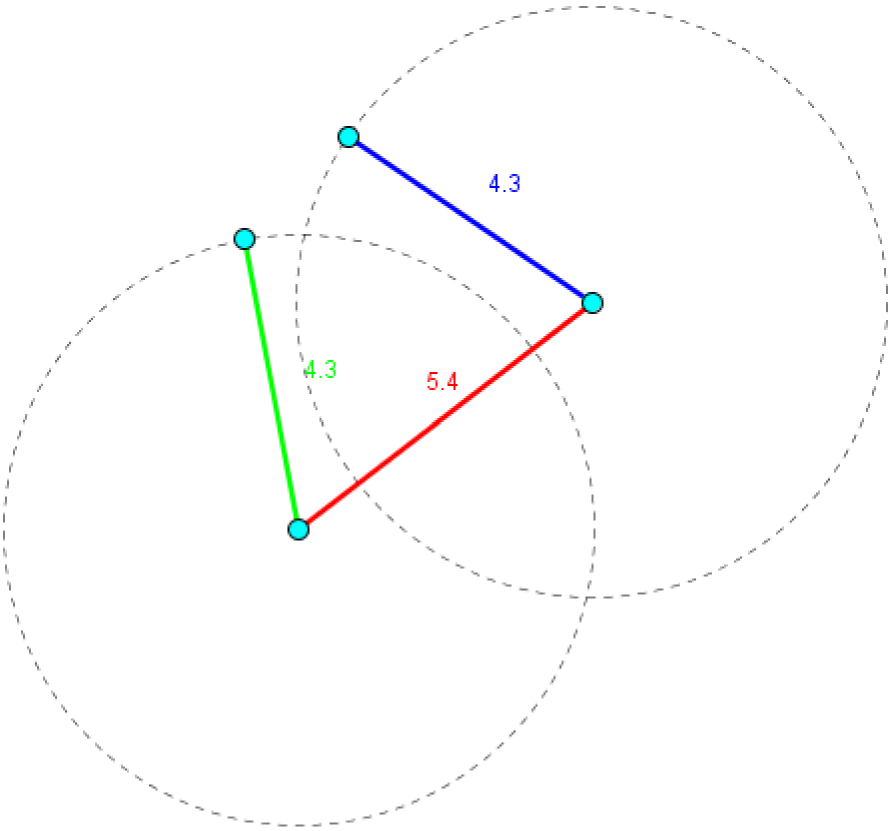
¿Se pueden construir estos triángulos? ¿Por qué?

- 2cm, 3cm, 5cm; 6cm, 4cm, 2cm; 3cm, 7cm, 4cm;

¿Se pueden construir estos triángulos? ¿Por qué?

- 4cm, 5cm, 8cm; 5cm, 3cm, 4 cm; 6cm, 7cm, 3cm;

¿Se pueden construir estos triángulos? ¿Por qué?



ACTIVIDAD 2: CONSTRUCCIÓN DE TRIÁNGULOS

OBJETIVOS	1.-Trazar un triángulo isósceles conociendo uno de los lados iguales. 2.- Trazar un triángulo isósceles conociendo el lado desigual. 3.- Trazar un triángulo rectángulo conociendo uno de sus catetos.

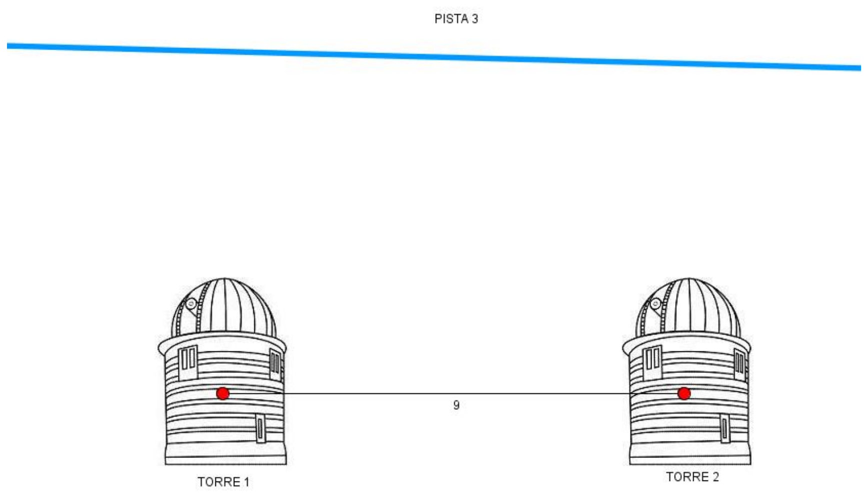
ACTIVIDAD 2: FORMATO LÁPIZ Y PAPEL

1.- Un avión debe realizar un aterrizaje forzoso en el aeropuerto más cercano. El piloto sabe que debe aterrizar en la PISTA 3, pero desconoce en qué punto exacto, únicamente sabe que el punto de aterrizaje forma un triángulo isósceles con las dos torres de control. Encuentra el punto o los puntos donde debe aterrizar el avión si:

a) El segmento que une las dos torres es uno de los lados iguales del triángulo isósceles.

b) El segmento que une las dos torres es el lado diferente del triángulo isósceles.

2.- Encuentra el punto de aterrizaje si el triángulo fuese rectángulo. ¿Existe un único punto? Tomando el lado dado como uno de los lados que forman 90º.



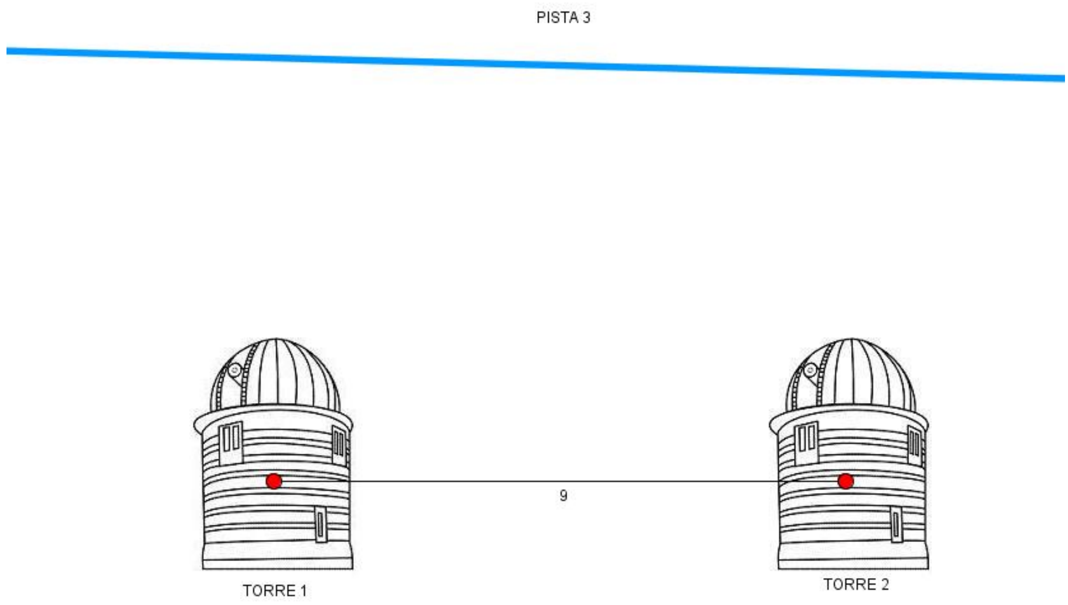
ACTIVIDAD 2: FORMATO GEOGEBRA

1.- (APPLET 2) Un avión debe realizar un aterrizaje forzoso en el aeropuerto más cercano. El piloto sabe que debe aterrizar en la PISTA 3, pero desconoce en qué punto exacto, únicamente sabe que el punto de aterrizaje forma un triángulo isósceles con las dos torres de control. Encuentra el punto o los puntos donde debe aterrizar el avión si:

a) El segmento que une las dos torres es uno de los lados iguales del triángulo isósceles.

b) El segmento que une las dos torres es el lado diferente del triángulo isósceles.

2.- Encuentra el punto de aterrizaje si el triángulo fuese rectángulo. ¿Existe un único punto? Tomando el lado dado como uno de los lados que forman 90º.



ACTIVIDAD 3: SUMA DE LOS ÁNGULOS INTERIORES DE UN POLÍGONO

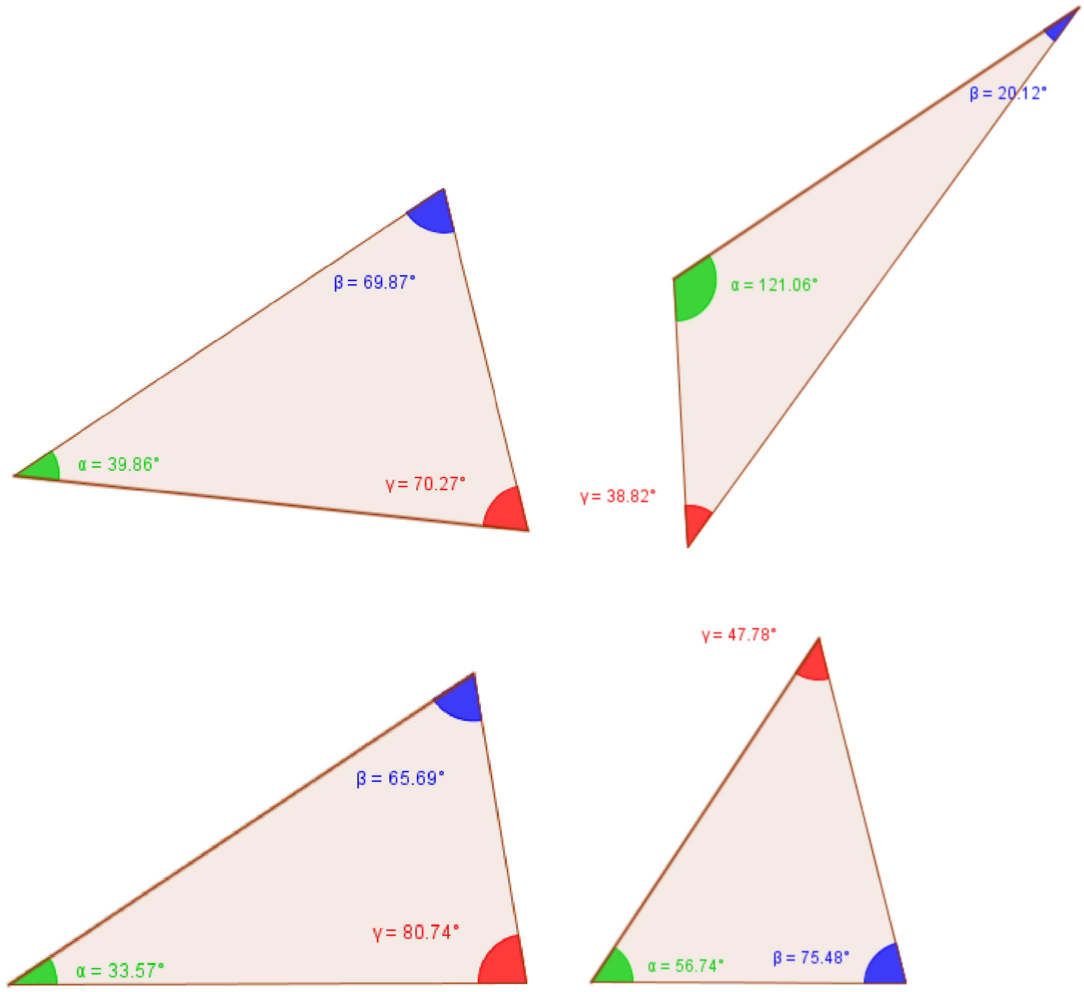
OBJETIVOS	1.-Trazar triángulos, medir sus ángulos y obtener la suma de sus ángulos. 2.-Obtener la suma de los ángulos de un triángulo dada la medida de cada uno de los ángulos de varios triángulos. 3.- Comprobar la suma de los ángulos de un triángulo observando tres copias de un mismo triángulo unidas por los vértices, de manera que los tres ángulos del triángulo estén unidos. 4.- Comprobar la suma de los ángulos de un triángulo colocando los tres ángulos consecutivos. 5.- Comprobar la suma de los ángulos interiores de un triángulo trazando una recta paralela a uno de sus lados. 6.- Demostrar que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º trazando una recta paralela a uno de sus lados. 7.- Calcular la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero, dividiendo el polígono en triángulos mediante el trazado de la diagonal desde un solo vértice. 8.- Calcular la suma de los ángulos interiores de un pentágono, dividiendo el polígono en triángulos mediante el trazado de las diagonales desde un solo vértice. 9.- Calcular la suma de los ángulos interiores para polígonos de 3, 4,5, 6 y 7 lados ayudándose de dibujos. 10.- Deducir la suma de los ángulos interiores para un polígono de 20 lados. 11.- Encontrar una fórmula general para el cálculo de la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados.

ACTIVIDAD 3: FORMATO LÁPIZ Y PAPEL

A pesar de no expresarse explícitamente, tomaremos en todos los apartados siguientes polígonos convexos.

1.- ¿Cuánto mide la suma de los ángulos interiores de un triángulo? ¿Se cumple para todos los triángulos? Justifica tu respuesta.

2.-Observa los siguientes triángulos. ¿Cuánto vale su suma? ¿Se cumple para todos los triángulos?



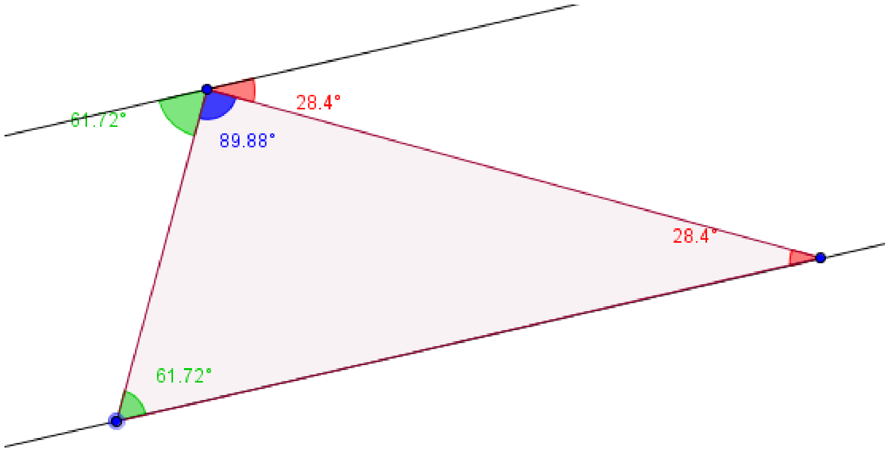
3.- Dibuja tres triángulos idénticos, colorea cada uno de sus ángulos de un color diferente y recórtalos. Coloca los tres triángulos de manera que queden unidos los tres ángulos diferentes, sin solaparse los triángulos. Observa los puntos donde puedes ver los tres ángulos del triángulo, uno al lado de otro (son consecutivos). Se puede ver cuánto mide la suma de los tres ángulos interiores del triángulo. ¿Cuánto mide?

4.- Recorta los tres ángulos de uno de los triángulos dibujado anteriormente y coloca los ángulos de manera que sean consecutivos. ¿Cuánto mide su suma?

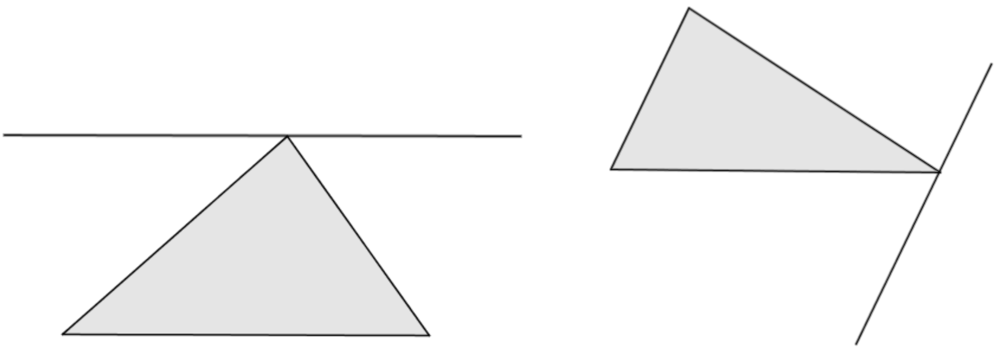
5.- Otra forma de ver cuánto mide la suma de los tres ángulos de un triángulo es trazando una recta paralela a uno de los lados del triángulo (ver dibujo).

a) ¿Qué puedes observar en los dos ángulos rojos y los dos ángulos verdes?

b) ¿Cuánto mide la suma de los tres ángulos coloreados que tienen un vértice común? ¿Cuánto mide la suma de los ángulos interiores de un triángulo?



6.- Por lo que has estado viendo, la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°. Sin usar el transportador, explica por qué sucede eso con la ayuda de estas figuras, utilizando el método visto anteriormente que se basaba en el trazado de una línea paralela a un lado.



7.- Responde a las siguientes preguntas:

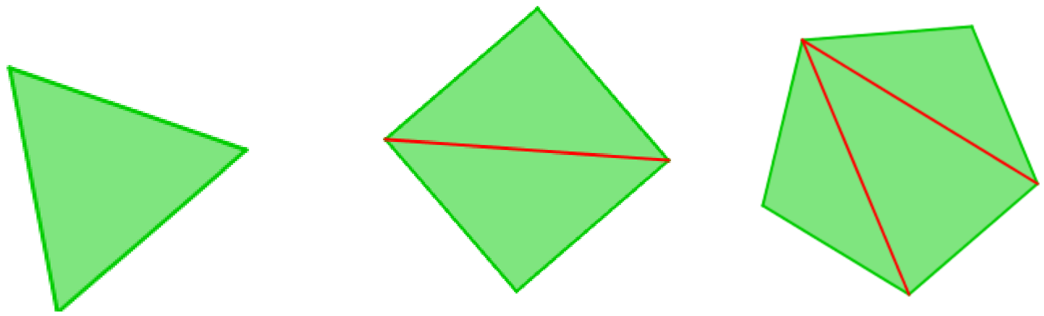
a) Traza una diagonal en un cuadrilátero ¿En cuántos triángulos queda dividido?

b) Recordando el valor de la suma de los ángulos interiores de un triángulo, ¿cuánto medirá la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero?

8.- Responde a las siguientes preguntas:

a) Traza las diagonales desde un solo vértice de un pentágono. Prueba con diferentes pentágonos. ¿En cuántos triángulos quedan divididos?
b) Recordando el valor de la suma de los ángulos interiores de un triángulo, ¿cuánto medirá la suma de los ángulos interiores de un pentágono?

9.- Observando las figuras, completa la tabla donde consideres el número de triángulos en el que se divide cada polígono al trazar las diagonales desde un vértice y el número de lados del polígono.



a) Una vez conocido el número de triángulos, completa la tabla calculando la suma de los ángulos interiores de cada uno de estos polígonos.

POLÍGONO	**NÚMERO LADOS**	**NÚMERO TRIÁNGULOS**	**SUMA ÁNGULOS INTERIORES**
TRIÁNGULO			
CUADRILATERO			
PENTÁGONO			
HEXÁGONO			
HEPTÁGONO			
P. DE 20 LADOS			
P. DE N LADOS			

b) Observando la tabla, ¿podrías decir en cuántos triángulos se puede dividir un polígono de 20 lados trazando las diagonales desde un vértice? ¿Cuánto medirá la suma de sus ángulos interiores? Justifica tu respuesta.

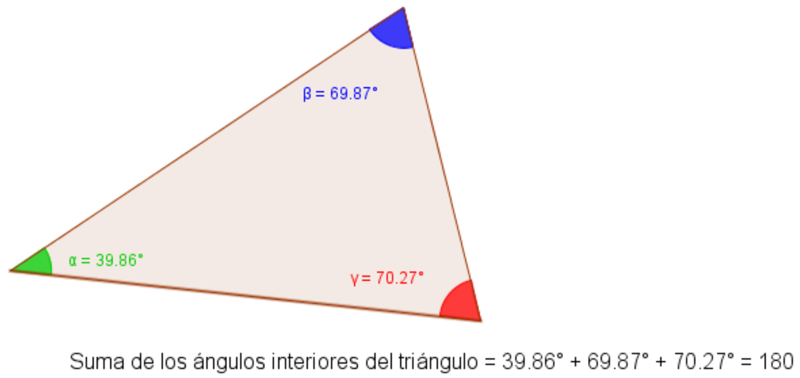
c) Si se tratara de un polígono general de n lados, ¿podrías decir en cuántos triángulos se puede dividir el polígono trazando las diagonales desde un vértice? ¿Cuánto medirá la suma de sus ángulos? Justifica tu respuesta.

ACTIVIDAD 3: FORMATO GEOGEBRA

A pesar de no expresarse explícitamente, tomaremos en todos los siguientes apartados polígonos convexos.

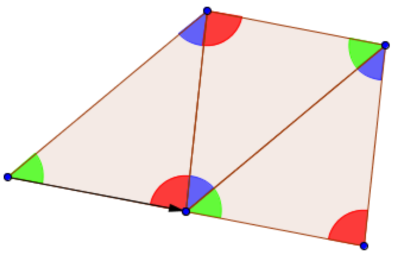
1.- ¿Cuánto mide la suma de los ángulos interiores de un triángulo? ¿Se cumple para todos los triángulos? Justifica tu respuesta.

2.- (APPLET 3.1) Mide los tres ángulos de un triángulo utilizando el applet de Geogebra. ¿Cuánto vale su suma? ¿Se cumple para todos los triángulos? Prueba con diversos triángulos

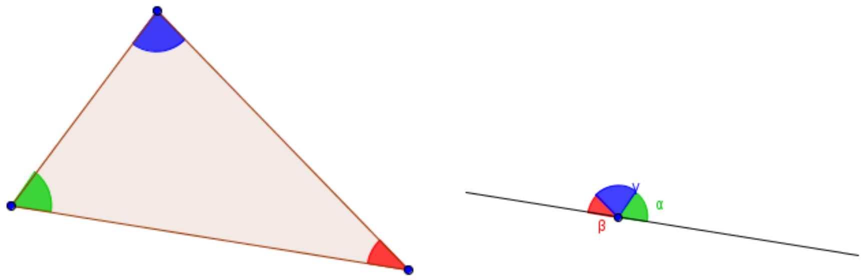


3.- (APPLET 3.2) Tenemos un triángulo, hacemos copias y las colocamos como ves en el dibujo. Observa los puntos donde puedes ver los tres ángulos del triángulo, uno al lado de otro (son consecutivos). Se puede ver cuánto mide la suma de los tres ángulos interiores del triángulo. ¿Cuánto mide?

Modifica el triángulo y mira lo que sucede con otros triángulos. ¿Qué resultado sale?



4.- (APPLET 3.3) Copiamos los tres ángulos del triángulo, de manera que sean consecutivos (ver dibujo). ¿Cuánto mide su suma? Prueba con distintos triángulos.

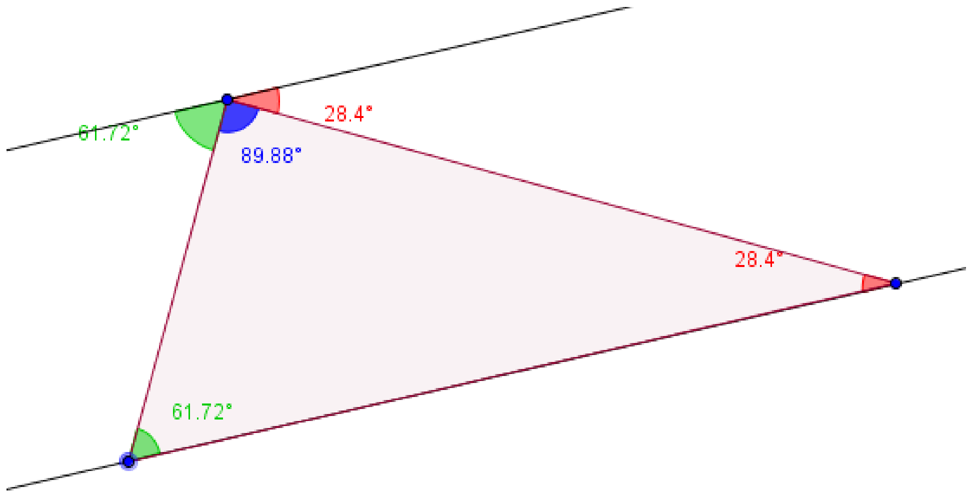


5.- (APPLET 3.4) Otra forma de ver cuánto mide la suma de los tres ángulos de un triángulo es trazando una recta paralela a uno de los lados del triángulo (ver dibujo).

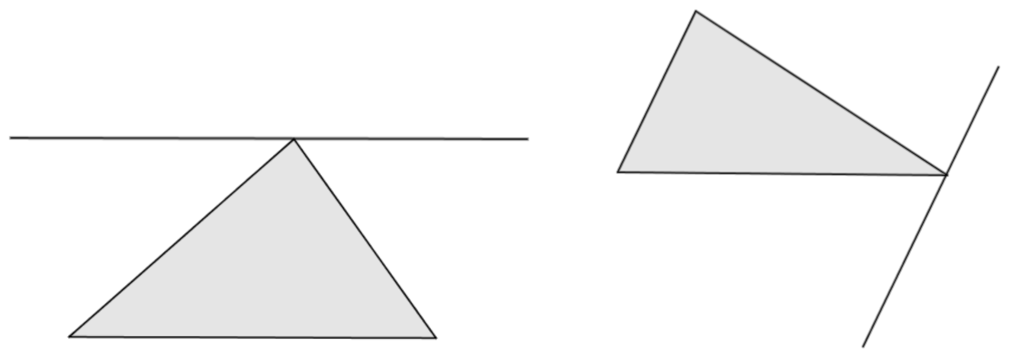
a) ¿Qué puedes observar en los dos ángulos rojos y los dos ángulos verdes?

b) ¿Cuánto mide la suma de los tres ángulos coloreados que tienen un vértice común? Prueba con distintos triángulos.

¿Cuánto mide la suma de los ángulos interiores de un triángulo?



6.- Por lo que has estado viendo, la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°. Sin usar el transportador, explica por qué sucede eso con la ayuda de estas figuras, utilizando el método visto anteriormente que se basaba en el trazado de una línea paralela a un lado.



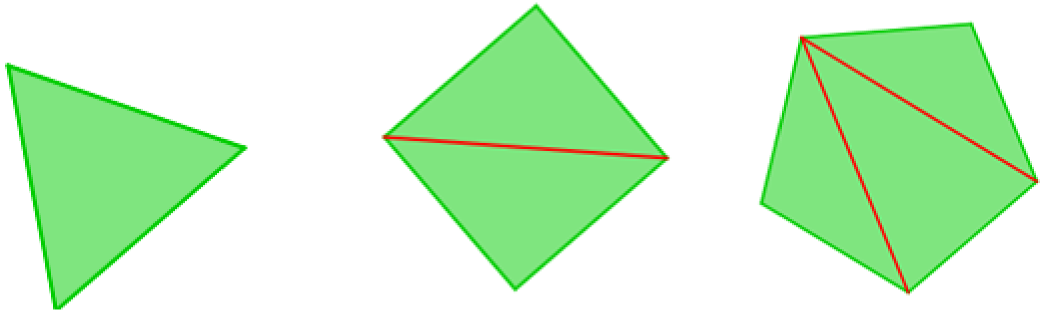
7.- Responde a las siguientes preguntas:

a) Traza una diagonal en un cuadrilátero ¿En cuántos triángulos queda dividido?
b) Recordando el valor de la suma de los ángulos interiores de un triángulo, ¿cuánto medirá la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero?

8.- Responde a las siguientes preguntas:

a) Traza las diagonales desde un solo vértice de un pentágono. Prueba con diferentes pentágonos. ¿En cuántos triángulos quedan divididos?
b) Recordando el valor de la suma de los ángulos interiores de un triángulo, ¿cuánto medirá la suma de los ángulos interiores de un pentágono?

9.- (APPLET 3.5) Observando las figuras, completa la tabla donde consideres el número de triángulos en el que se divide cada polígono al trazar las diagonales desde un vértice y el número de lados del polígono.



a) Una vez conocido el número de triángulos, completa la tabla calculando la suma de los ángulos interiores de cada uno de estos polígonos.

POLÍGONO	**NÚMERO LADOS**	**NÚMERO TRIÁNGULOS**	**SUMA ÁNGULOS INTERIORES**
TRIÁNGULO			
CUADRILATERO			
PENTÁGONO			
HEXÁGONO			
HEPTÁGONO			
P. DE 20 LADOS			
P. DE N LADOS			

b) Observando la tabla, ¿podrías decir en cuántos triángulos se puede dividir un polígono de 20 lados trazando las diagonales desde un vértice? ¿Cuánto medirá la suma de sus ángulos interiores? Justifica tu respuesta.

c) Si se tratara de un polígono general de n lados, ¿podrías decir en cuántos triángulos se puede dividir el polígono trazando las diagonales desde un vértice? ¿Cuánto medirá la suma de sus ángulos? Justifica tu respuesta.

ACTIVIDAD 4: TRIÁNGULOS EQUILÁTEROS

OBJETIVOS	1.-Tratar de representar triángulos equiláteros rectángulos, obtusángulos y acutángulos. 2.-Caracterizar los ángulos de un triángulo equilátero. 3.-Partiendo de un triángulo con todos sus lados iguales, comprobar que sus ángulos también son iguales. 4.-Partiendo de un triángulo con todos sus ángulos iguales, comprobar que sus tres lados también son iguales. 5.- Calcular la medida de los ángulos de un triángulo con todos sus lados iguales y justificar haciendo uso del valor de la suma de los ángulos interiores de un triángulo. 6.- Clasificar los triángulos equiláteros atendiendo al valor de sus ángulos (rectángulo, acutángulo u obtusángulo) y justificar haciendo uso del valor de la suma de los ángulos interiores de un triángulo.

ACTIVIDAD 4: FORMATO LÁPIZ Y PAPEL

1. Trata de dibujar los siguientes triángulos:

a) Un triángulo equilátero rectángulo ¿Se puede dibujar?

b) Un triángulo equilátero obtusángulo ¿Se puede dibujar?

c) Un triángulo equilátero acutángulo ¿Se puede dibujar?

d) ¿Qué puedes decir del triángulo equilátero respecto a sus ángulos?

2. Toma tres varillas de igual medida para formar un triángulo equilátero (recuerda que tiene sus tres lados iguales):

a) ¿Se puede formar un triángulo equilátero rectángulo? Justifica tu respuesta.

b) ¿Se puede formar un triángulo equilátero obtusángulo? Justifica tu respuesta.

c) ¿Se puede formar un triángulo equilátero acutángulo? Justifica tu respuesta.

d) ¿Qué puedes decir de los ángulos de un triángulo equilátero?

3. Dibuja triángulos con los tres ángulos iguales.

a) ¿Cuántos triángulos diferentes puedes crear con los tres ángulos iguales? Justifica tu respuesta.

b) ¿Cuánto mide cada ángulo de esos triángulos? ¿Siempre miden lo mismo? Justifica tu respuesta.

(Recuerda que la suma de los ángulos interiores de un triángulo mide 180º)

c) ¿Qué tienen en particular los lados de esos triángulos?

d) ¿Qué puedes decir de ese triángulo?

4. Recordando que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º. Responde justificadamente las siguientes preguntas.

a) ¿Se puede formar un triángulo equilátero rectángulo? Justifica tu respuesta.

b) ¿Se puede formar un triángulo equilátero obtusángulo? Justifica tu respuesta.

c) ¿Se puede formar un triángulo equilátero acutángulo? Justifica tu respuesta.

d) Completa la tabla indicando SI en el caso de que haya triángulos equiláteros de ese tipo, y NO si no los hay.

	ACUTÁNGULO	**RECTÁNGULO**	**OBTUSÁNGULO**
EQUILÁTERO			

e) Completa:

*Todos los **triángulos equiláteros** son ………………………………………………………, sus ángulos miden………………………..*

(Escribe el nombre de un tipo de triángulo atendiendo al valor de sus ángulos: acutángulo, rectángulo u obtusángulo)

ACTIVIDAD 4: FORMATO GEOGEBRA

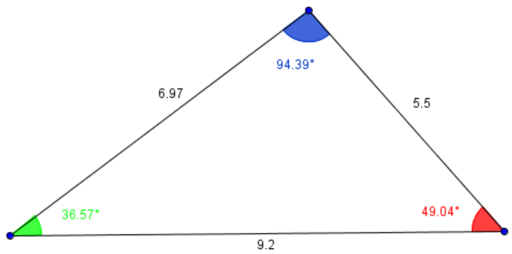
1. (APPLET 4.1) Moviendo los vértices forma diferentes triángulos.

a) ¿Se puede formar un triángulo equilátero rectángulo?

b) ¿Se puede formar un triángulo equilátero obtusángulo?

c) ¿Se puede formar un triángulo equilátero acutángulo?

d) ¿Qué puedes decir del triángulo equilátero respecto a sus ángulos?



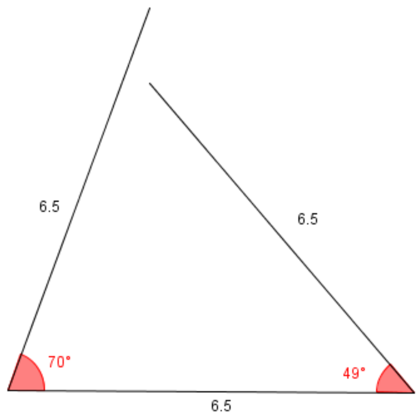
2. (APPLET 4.2) Dado un triángulo equilátero (recuerda que tiene sus tres lados iguales), varía la medida de sus ángulos y responde a las siguientes preguntas:

a) ¿Se puede formar un triángulo equilátero rectángulo? Justifica tu respuesta.

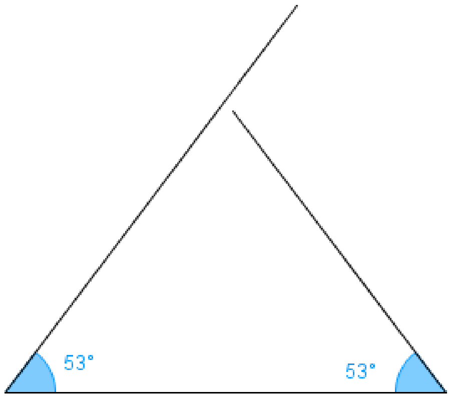
b) ¿Se puede formar un triángulo equilátero obtusángulo? Justifica tu respuesta.

c) ¿Se puede formar un triángulo equilátero acutángulo? Justifica tu respuesta.

d) ¿Qué puedes decir de los ángulos de un triángulo equilátero?



4. (APPLET 4.3) Tenemos un triángulo con dos ángulos iguales, trata de formar un triángulo con los tres ángulos iguales variando la longitud de los lados.



a) ¿Cuántos triángulos diferentes puedes crear con los tres ángulos iguales? Justifica tu respuesta.

b) ¿Cuánto mide cada ángulo de esos triángulos? ¿Siempre miden lo mismo? Justifica tu respuesta.

Recuerda que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º.

c) ¿Qué tienen en particular los lados de esos triángulos?

d) ¿Qué puedes decir de ese triángulo?

4. Recordando que la suma de los ángulos interiores de un triángulos es 180º. Responde justificadamente las siguientes preguntas.

a) ¿Se puede formar un triángulo equilátero rectángulo? Justifica tu respuesta.

b) ¿Se puede formar un triángulo equilátero obtusángulo? Justifica tu respuesta.

c) ¿Se puede formar un triángulo equilátero acutángulo? Justifica tu respuesta.

d) Completa la tabla indicando SI en el caso de que haya triángulos equiláteros de ese tipo, y NO si no los hay.

	ACUTÁNGULO	**RECTÁNGULO**	**OBTUSÁNGULO**
EQUILÁTERO			

e) Completa:

*Todos los **triángulos equiláteros** son ………………………………………………………….,*

Sus ángulos miden………………………….

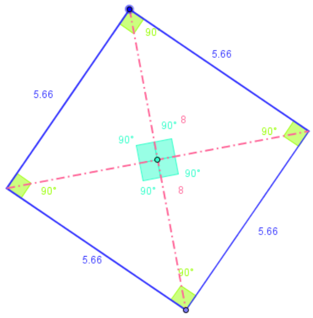
(Escribe el nombre de un tipo de triángulo atendiendo al valor de sus ángulos: acutángulo, rectángulo u obtusángulo)

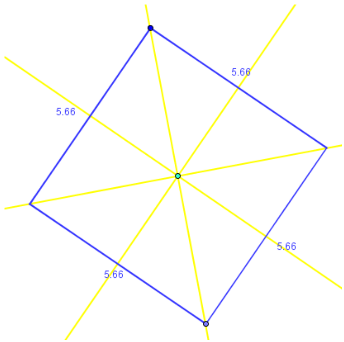
ACTIVIDAD 5: PROPIEDADES PARALELOGRAMOS

OBJETIVOS	1.-Describir todas las propiedades comunes de la familia de los cuadrados. 2.- Describir todas las propiedades comunes de la familia de los rectángulos. 3.- Describir todas las propiedades comunes de la familia de los rombos. 4.- Describir todas las propiedades comunes al cuadrado y al rectángulo. 5.- Describir todas las propiedades comunes a los cuadrados pero NO a los rectángulos. 6.- Describir todas las propiedades comunes a los rectángulos pero NO a los cuadrados. 7.- Establecer una relación de inclusión entre el cuadrado y el rectángulo. 8.- Describir todas las propiedades comunes al cuadrado y al rombo. 9.- Describir todas las propiedades comunes a los cuadrados pero NO a los rombos. 10.- Describir todas las propiedades comunes a los rombos pero NO a los cuadrados. 11.- Establecer una relación de inclusión entre el cuadrado y el rombo.

ACTIVIDAD 5: FORMATO LÁPIZ Y PAPEL

1.- Observando el cuadrado escribe las propiedades que cumplen todos los cuadrados.





a) Medida de sus lados.

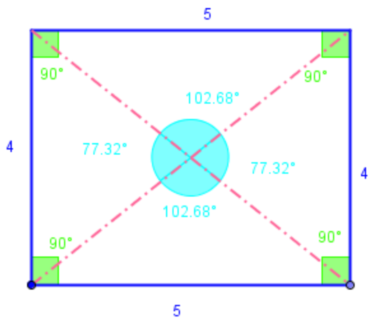
b) Medida de sus ángulos.

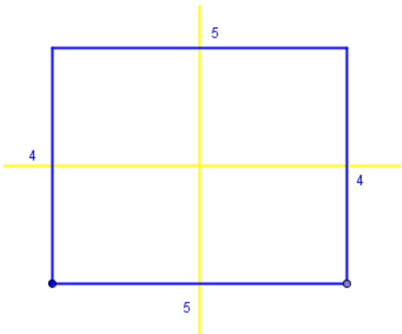
c) Medida de sus diagonales.

d) Ángulos de sus diagonales.

e) Número de ejes de simetría y tipo de ángulo que forman.

2.- Observando el rectángulo escribe las propiedades que cumplen todos los rectángulos.





a) Medida de sus lados.

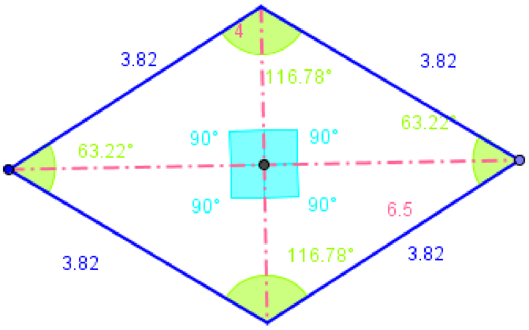
b) Medida de sus ángulos.

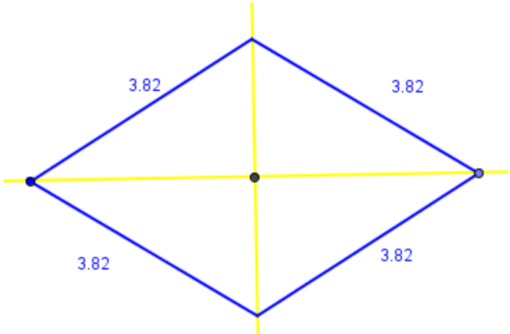
c) Medida de sus diagonales.

d) Ángulos de sus diagonales.

e) Número de ejes de simetría y tipo de ángulo que forman.

3.- Observando el rombo escribe las propiedades que cumplen todos los rombos.





a) Medida de sus lados.

b) Medida de sus ángulos.

c) Medida de sus diagonales.

d) Ángulos de sus diagonales.

e) Número de ejes de simetría y tipo de ángulo que forman.

4.- Recordando los ejercicios anteriores:

a) Escribe todas las propiedades comunes al cuadrado y al rectángulo.

b) Escribe las propiedades que conozcas que tienen todos los cuadrados pero NO todos los rectángulos. (O sea, puede que algunos rectángulos si las tengan pero no todos)

c) Escribe todas las propiedades que conozcas que tienen todos los rectángulos pero NO las tienen todos los cuadrados. (O sea, puede que algunos cuadrados si las tengan pero no todos)

d) ¿Todos los cuadrados cumplen las condiciones que hace falta para ser rectángulo? ¿Todos los rectángulos cumplen las condiciones que hace falta para ser cuadrado? Justifica tus respuestas.

5.- Recordando los ejercicios anteriores:

a) Escribe todas las propiedades comunes al cuadrado y al rombo.

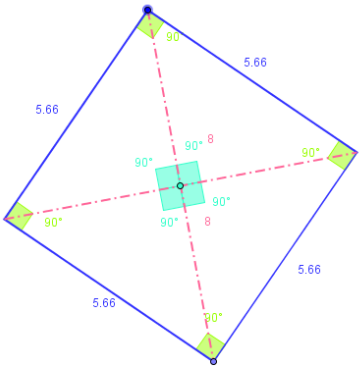
b) Escribe todas las propiedades que conozcas que tienen todos los cuadrados pero NO las tienen todos rombos. . (O sea, puede que algunos rombos si las tengan pero no todos)

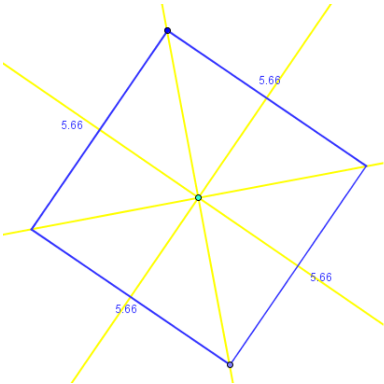
c) Escribe todas las propiedades que conozcas que tienen todos los rombos pero NO las tienen todos los cuadrados. . (O sea, puede que algunos cuadrados si las tengan pero no todos)

d) ¿Todos los cuadrados cumplen las condiciones que hace falta para ser rombo? ¿Todos los rombos cumplen las condiciones que hace falta para ser cuadrado? Justifica tus respuestas.

ACTIVIDAD 5: FORMATO GEOGEBRA

1.- (APPLET 5.1) Observando el cuadrado escribe las propiedades que cumplen todos los cuadrados. Prueba con diferentes cuadrados variando la longitud de sus lados.





a) Medida de sus lados.

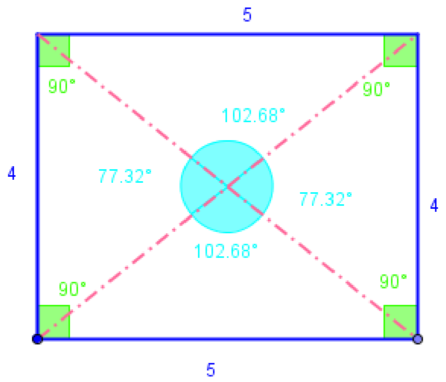
b) Medida de sus ángulos.

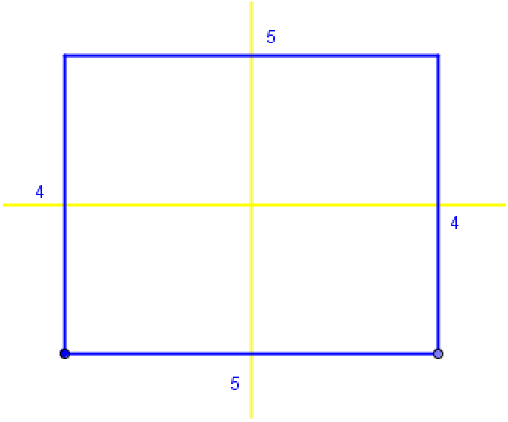
c) Medida de sus diagonales.

d) Ángulos de sus diagonales.

e) Número de ejes de simetría y tipo de ángulo que forman.

2.- (APPLET 5.2) Observando el rectángulo escribe las propiedades que cumplen todos los rectángulos. Prueba con diferentes rectángulos variando la longitud de sus lados.





a) Medida de sus lados.

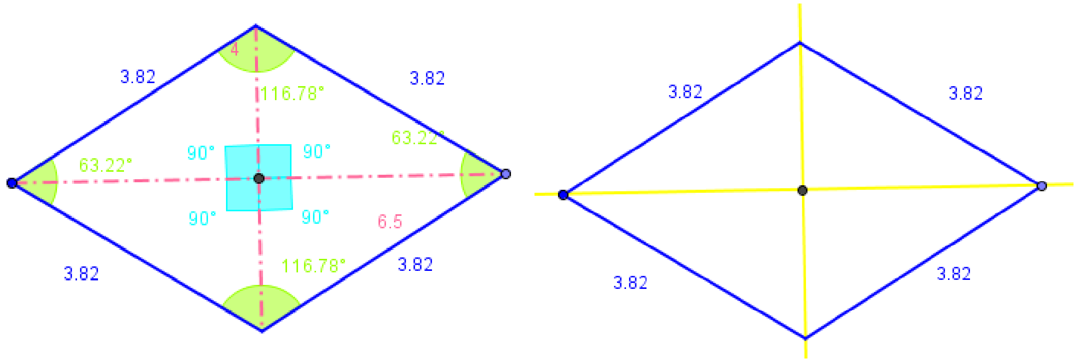
b) Medida de sus ángulos.

c) Medida de sus diagonales.

d) Ángulos de sus diagonales.

e) Número de ejes de simetría y tipo de ángulo que forman.

3.- (APPLET 5.3) Observando el rombo escribe las propiedades que cumplen todos los rombos. Prueba con diferentes rombos variando la longitud de sus diagonales.



a) Medida de sus lados.

b) Medida de sus ángulos.

c) Medida de sus diagonales.

d) Ángulos de sus diagonales.

e) Número de ejes de simetría y tipo de ángulo que forman.

4.- Recordando los ejercicios anteriores:

a) Escribe todas las propiedades comunes al cuadrado y al rectángulo.

b) Escribe las propiedades que conozcas que tienen todos los cuadrados pero NO todos los rectángulos. (O sea, puede que algunos rectángulos si las tengan pero no todos)

c) Escribe todas las propiedades que conozcas que tienen todos los rectángulos pero NO las tienen todos los cuadrados. (O sea, puede que algunos cuadrados si las tengan pero no todos)

d) ¿Todos los cuadrados cumplen las condiciones que hace falta para ser rectángulo? ¿Todos los rectángulos cumplen las condiciones que hace falta para ser cuadrado? Justifica tus respuestas.

5.- Recordando los ejercicios anteriores:

a) Escribe todas las propiedades comunes al cuadrado y al rombo.

b) Escribe todas las propiedades que conozcas que tienen todos los cuadrados pero NO las tienen todos rombos. . (O sea, puede que algunos rombos si las tengan pero no todos)

c) Escribe todas las propiedades que conozcas que tienen todos los rombos pero NO las tienen todos los cuadrados. . (O sea, puede que algunos cuadrados si las tengan pero no todos)

d) ¿Todos los cuadrados cumplen las condiciones que hace falta para ser rombo? ¿Todos los rombos cumplen las condiciones que hace falta para ser cuadrado? Justifica tus respuestas.

ACTIVIDAD 6: PROPIEDADES DEL ROMBO

OBJETIVOS	1.- Recordar en el punto donde se cortan las diagonales de un rombo. 2.- Recordar el ángulo que forman las diagonales del rombo. 3.- Dibujar un rombo conociendo dos de sus vértices y la recta donde se encuentra otro de ellos.

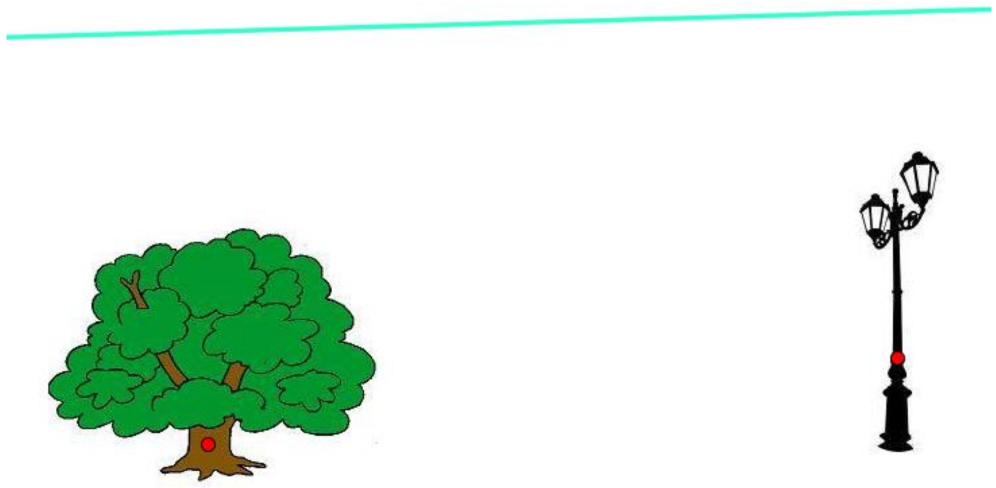
ACTIVIDAD 6: FORMATO LÁPIZ Y PAPEL

En un pequeño pueblo entre las montañas, un legendario aventurero cansado y al borde de la muerte ha enterrado un tesoro. En el plano que ha dejado, solamente está señalado un árbol y una farola. También ha anotado que el árbol, la farola y el punto donde está enterrado el tesoro, son tres vértices de un rombo. Sabemos que uno de los vértices esta sobre la pista rectilínea azul celeste.

c) Si el tesoro se encuentra sobre la pista rectilínea, ¿Dónde habría que cavar para encontrar el tesoro?
d) ¿Y si el tesoro se encuentra en el otro vértice del rombo?

Recuerda las propiedades del rombo para resolver el problema.

- ¿En qué punto se cortan las diagonales del rombo?
- ¿Qué ángulo forman las diagonales del rombo?



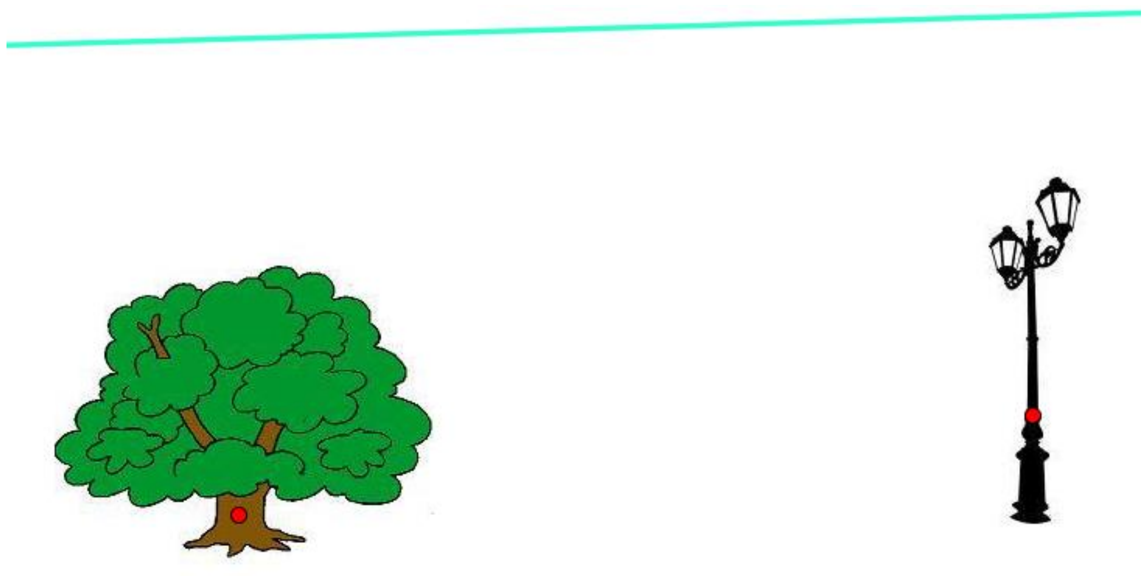
ACTIVIDAD 6: FORMATO GEOGEBRA

(APPLET 6) En un pequeño pueblo entre las montañas, un legendario aventurero cansado y al borde de la muerte ha enterrado un tesoro. En el plano que ha dejado, solamente está señalado un árbol y una farola. También ha anotado que el árbol, la farola y el punto donde está enterrado el tesoro, son tres vértices de un rombo. Sabemos que uno de los vértices esta sobre la pista rectilínea azul celeste.

e) Si el tesoro se encuentra sobre la pista rectilínea, ¿Dónde habría que cavar para encontrar el tesoro?
f) ¿Y si el tesoro se encuentra en el otro vértice del rombo?

Recuerda las propiedades del rombo para resolver el problema.

- ¿En qué punto se cortan las diagonales del rombo?
- ¿Qué ángulo forman las diagonales del rombo?



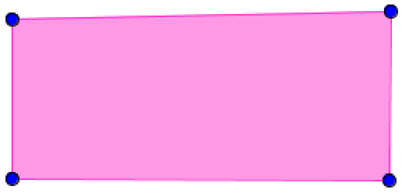
ACTIVIDAD 7: DIAGONALES

OBJETIVOS	1.- Dibujar una diagonal en un cuadrilátero y en un pentágono. 2.- Calcular el número de diagonales desde un vértice en un cuadrilátero y un pentágono. 3.- Comprobar que el número de diagonales desde cada vértice es el mismo. 4.- Calcular el número de diagonales desde un vértice de un triángulo. 5.- Trazar las diagonales desde un vértice de diferentes polígonos ayudándose de un dibujo. 6.- Deducir en número de diagonales desde un vértice de un polígono de 20 lados (sin ayuda de un dibujo) 7.- Deducir la relación existente entre en número de lados del polígono y el número de diagonales desde uno de sus vértices. 8.- Calcular el número de diagonales totales de diferentes polígonos (se pueden ayudar de dibujos). 9.- Relacionar el número de diagonales totales con el número de vértices y el número de diagonales desde cada vértice. 10.- Deducir el número de diagonales totales de un polígono de 20 lados (sin ayuda de un dibujo). 11.- Establecer una regla general para el cálculo del número de diagonales de cualquier polígono convexo.

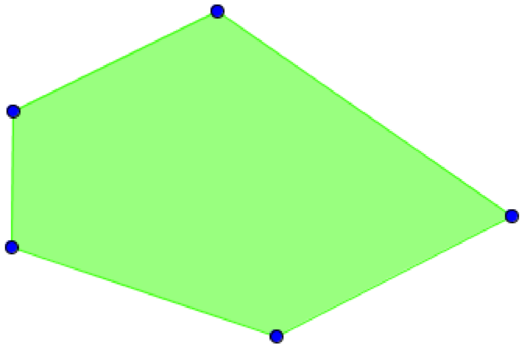
ACTIVIDAD 7: FORMATO LÁPIZ Y PAPEL

La **diagonal** de un polígono es el segmento que une dos vértices no consecutivos.

1.- Dibuja una diagonal en cada uno de estos polígonos:



CUADRILÁTERO

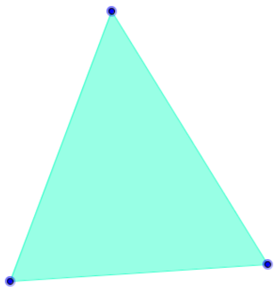


PÉNTAGONO

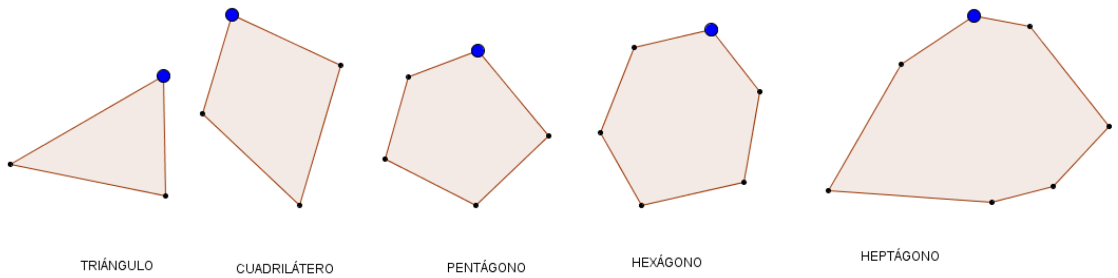
c) ¿Cuántas diagonales puedes trazar desde cada uno de los vértices del cuadrilátero? ¿Se pueden trazar el mismo número de diagonales desde todos los vértices?

d) ¿Cuántas diagonales puedes trazar desde cada uno de los vértices del pentágono? ¿Se pueden trazar el mismo número de diagonales desde todos los vértices?

2.- ¿Cuántas diagonales salen desde un vértice en un triángulo? ¿Por qué?



3.-Observa los siguientes polígonos y responde a las siguientes preguntas.



h) Traza las diagonales para cada uno de los polígonos desde el vértice señalado y rellena la siguiente tabla.

POLÍGONO	**Nº DE LADOS**	**Nº DE DIAGONALES DESDE UN VÉRTICE**
TRIÁNGULOS		
CUADRILÁTERO		
PENTÁGONO		
HEXÁGONO		
HEPTÁGONO		

i) ¿Cuántas diagonales desde un vértice podremos trazar en un polígono de 20 lados?

j) ¿Qué relación existe entre el número de lados del polígono y el número de diagonales desde un vértice? ¿Por qué?

k) Dibuja y calcula el número de diagonales totales de cada polígono.

POLÍGONO	**Nº DE LADOS**	**Nº DE DIAGONALES DESDE UN VÉRTICE**	**Nº DE DIAGONALES TOTALES**
TRIÁNGULOS			
CUADRILÁTERO			
PENTÁGONO			
HEXÁGONO			
HEPTÁGONO			

l) Podríamos pensar que una manera sencilla de calcular el número de diagonales de un polígono sería multiplicar el número de vértices por el número de diagonales por cada vértice. Compruébalo. ¿Se corresponde con el número total de diagonales hallado en el apartado anterior? ¿Por qué?

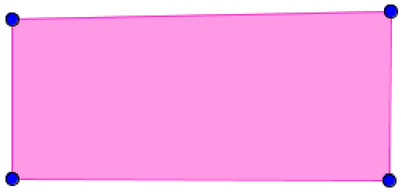
m) Calcula el número de diagonales de un polígono de 20 lados.

n) ¿Podrías hallar una fórmula general que nos permita calcular el número de diagonales de un polígono teniendo en cuenta el número de lados del polígono?

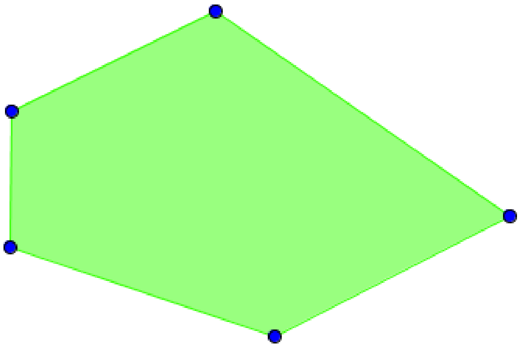
ACTIVIDAD 7: FORMATO GEOGEBRA

La **diagonal** de un polígono es el segmento que une dos vértices no consecutivos.

1.- Dibuja una diagonal en cada uno de estos polígonos:



CUADRILÁTERO

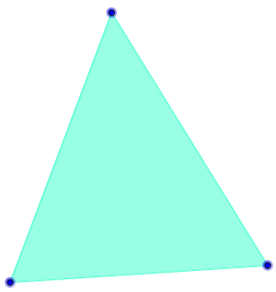


PÉNTAGONO

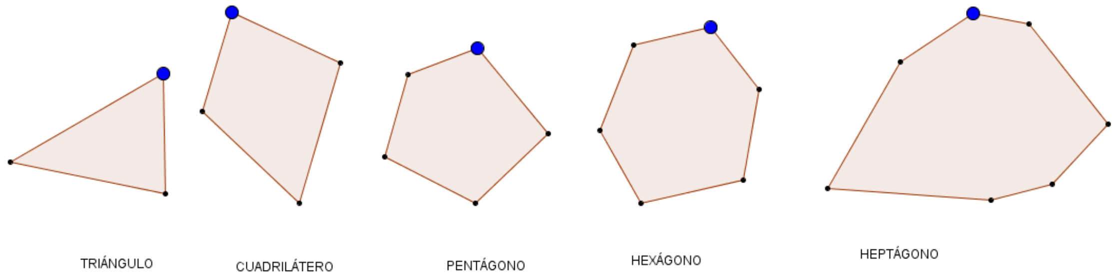
e) ¿Cuántas diagonales puedes trazar desde cada uno de los vértices del cuadrilátero? ¿Desde todos los vértices se puede trazar el mismo número de diagonales?

f) ¿Cuántas diagonales puedes trazar desde cada uno de los vértices del pentágono? ¿Desde todos los vértices se puede trazar el mismo número de diagonales?

2.- ¿Cuántas diagonales salen desde un vértice en un triángulo? ¿Por qué?



3.- (APPLET 7.1) Observa los siguientes polígonos y responde a las siguientes preguntas.



Modifica la forma de los polígonos moviendo los vértices y comprueba que se cumple para todos los polígonos con el mismo número de lados.

a) Traza las diagonales para cada uno de los polígonos desde el vértice señalado y rellena la siguiente tabla.

POLÍGONO	**Nº DE LADOS**	**Nº DE DIAGONALES DESDE UN VÉRTICE**
TRIÁNGULOS		
CUADRILÁTERO		
PENTÁGONO		
HEXÁGONO		
HEPTÁGONO		

b) ¿Cuántas diagonales desde un vértice podremos trazar en un polígono de 20 lados?

c) ¿Qué relación existe entre el número de lados del polígono y el número de diagonales desde un vértice? ¿Por qué?

d) Dibuja y calcula el número de diagonales totales de cada polígono.

POLÍGONO	Nº DE LADOS	Nº DE DIAGONALES DESDE UN VÉRTICE	Nº DE DIAGONALES TOTALES
TRIÁNGULOS			
CUADRILÁTERO			
PENTÁGONO			
HEXÁGONO			
HEPTÁGONO			

e) Podríamos pensar que una manera sencilla de calcular el número de diagonales de un polígono sería multiplicar el número de vértices por el número de diagonales por cada vértice. Compruébalo. ¿Se corresponde con el número total de diagonales hallado en el apartado anterior? ¿Por qué?

f) Calcula el número de diagonales de un polígono de 20 lados.

g) ¿Podrías hallar una fórmula general que nos permita calcular el número de diagonales de un polígono teniendo en cuenta el número de lados del polígono?

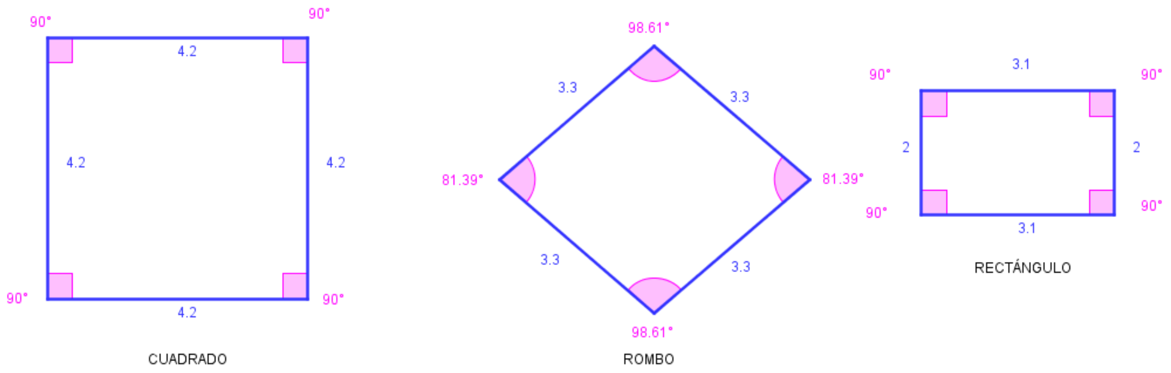
ACTIVIDAD 8: POLÍGONOS REGULARES (ÁNGULO CENTRAL)

OBJETIVOS	1.- Recordar la necesidad de que tanto los lados como los ángulos de un polígono regular han de ser iguales. 2.- Calcular el ángulo central de polígonos regulares ayudándose de dibujos. 3.- Deducir el ángulo central de un polígono regular de 20 lados sin la ayuda de dibujos. 4.- Deducir la relación existente entre el número de lados de un polígono regular y su ángulo central. 5.- Comprobar si ocurre lo mismo en polígonos no regulares y justificar.

ACTIVIDAD 8: FORMATO LÁPIZ Y PAPEL

Un **polígono regular** es un polígono con todos sus lados y todos sus ángulos iguales.

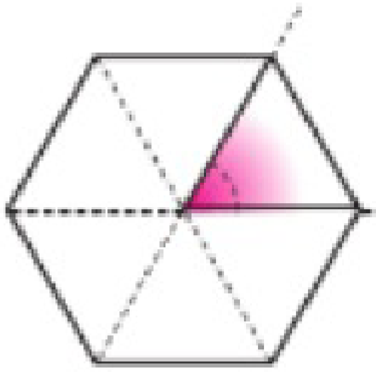
1.- Observa las figuras del cuadrado, rombo y rectángulo y contesta a las siguientes preguntas:



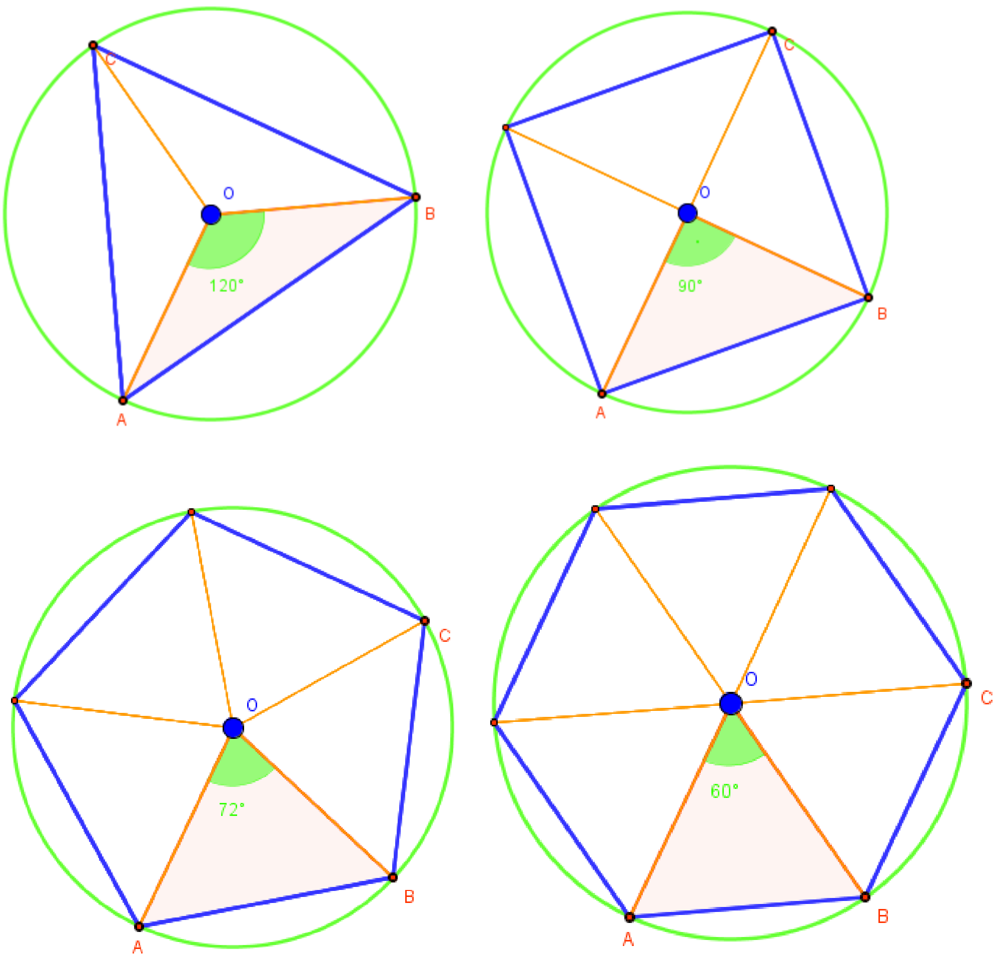
a) ¿Cómo tienen los lados el cuadrado y el rombo? ¿Son los dos polígonos regulares? Justifica tu respuesta.

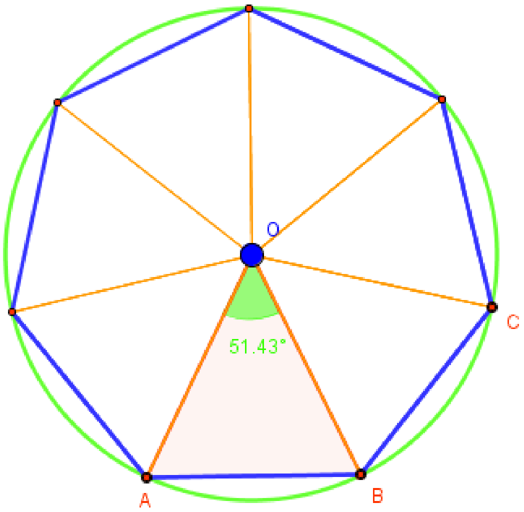
b) ¿Cómo tienen los ángulos el cuadrado y el rectángulo? ¿Son los dos polígonos regulares? Justifica tu respuesta.

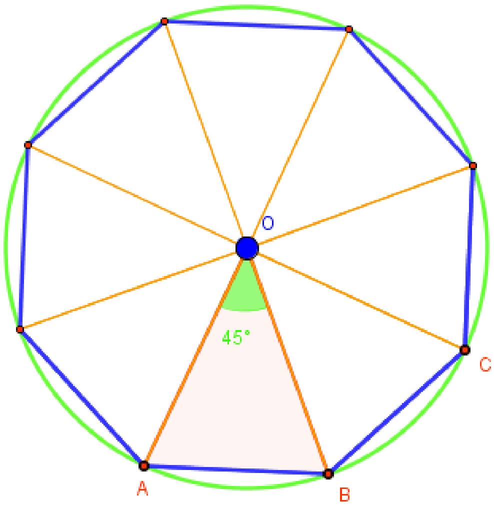
El **ángulo central** de un polígono regular tiene el vértice en el centro del polígono y sus lados pasan por dos vértices consecutivos.



2.- Observando los siguientes polígonos regulares, comprueba como al modificar el valor de los lados y varía el valor del ángulo central.







a) Rellena la siguiente tabla.

NÚMERO DE LADOS	ÁNGULO CENTRAL
3	
4	
5	
6	
7	
8	

b) Recuerda que una circunferencia completa mide 360º, ¿cómo podemos calcular el ángulo central de un polígono regular si tiene 20 lados?

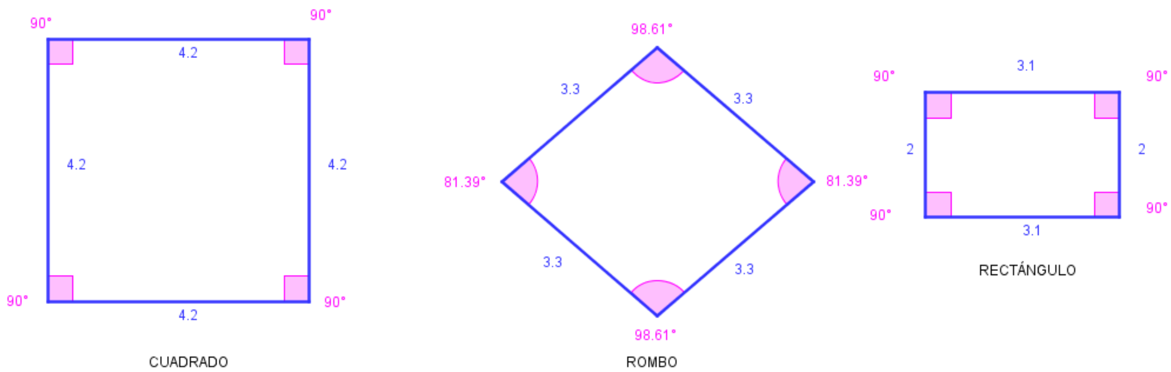
c) ¿Cómo calcularemos el ángulo central de un polígono regular de n lados? Justifica tu respuesta.

d) ¿Se cumple también para polígonos no regulares? Justifica tu respuesta.

ACTIVIDAD 8: FORMATO GEOGEBRA

Un **polígono regular** es un polígono con todos sus lados y todos sus ángulos iguales.

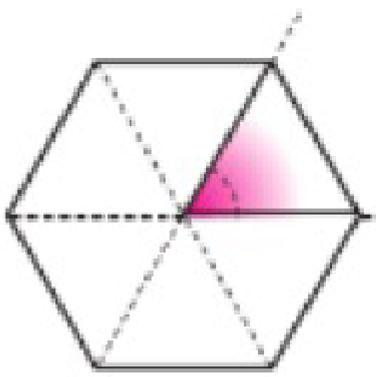
1.- (APPLET 8.1) Observa las figuras del cuadrado, rombo y rectángulo y contesta a las siguientes preguntas:



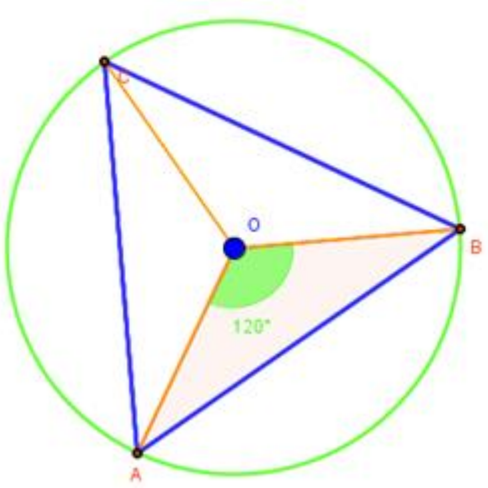
a) ¿Cómo tienen los lados el cuadrado y el rombo? ¿Son los dos polígonos regulares? Justifica tu respuesta.

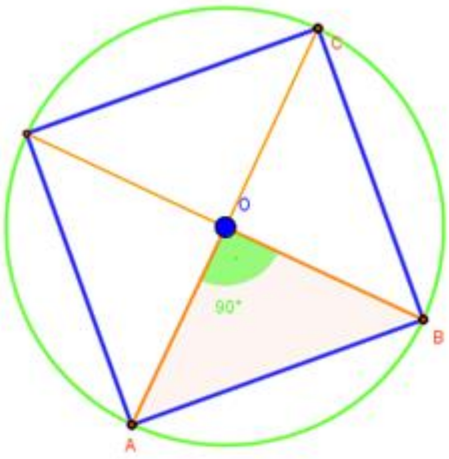
b) ¿Cómo tienen los ángulos el cuadrado y el rectángulo? ¿Son los dos polígonos regulares? Justifica tu respuesta.

El **ángulo central** de un polígono regular tiene el vértice en el centro del polígono y sus lados pasan por dos vértices consecutivos.



2.- (APPLET 8.2)[2] El polígono de centro O es un polígono regular, mueve el valor del deslizador para modificar el valor de los lados y observa como varia el valor del ángulo central.





a) Rellena la siguiente tabla.

NÚMERO DE LADOS	ÁNGULO CENTRAL
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	

b) Recuerda que una circunferencia completa mide 360º, ¿cómo podemos calcular el ángulo central de un polígono regular si tiene 20 lados?

c) ¿Cómo calcularemos el ángulo central de un polígono regular de n lados? Justifica tu respuesta.

d) ¿Se cumple también para polígonos no regulares? Justifica tu respuesta.

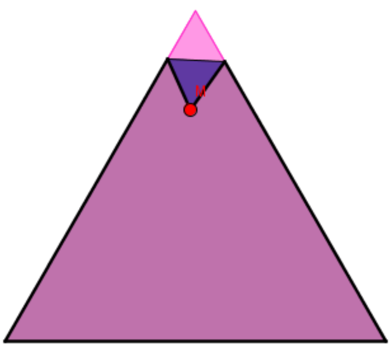
[2]Miranda, R. (2013) http://www.geometriadinamica.cl

ACTIVIDAD 9: SIMETRÍAS

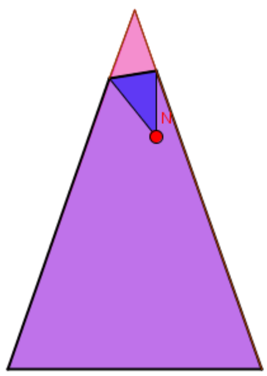
OBJETIVOS	1.- Calcular el número de ejes de simetría de un triángulo equilátero y un triángulo isósceles. 2.- Calcular el número de ejes de simetría de un cuadrado y de un paralelogramo no rectángulo. 3.-Calcular el número de ejes de simetría de diferentes polígonos regulares dependiendo de su número de lados. 4.-Comprobar por donde cortan los ejes de simetría de los polígonos regular al polígono dependiendo de su número de lados (con la ayuda de dibujos). 5.-Deducir el número de ejes de simetría y su posición de polígonos regulares de 20 y 21 lados (sin la ayuda de dibujos). 6.- Deducir la una regla general para el cálculo del número de ejes de simetría de un polígono regular. 7.- Deducir por dónde cortarán los ejes de simetría al polígono regular dependiendo si el número de lados es par o impar.

ACTIVIDAD 9: FORMATO LÁPIZ Y PAPEL

1.- Recorta dos triángulos, uno equilátero y otro isósceles. Realiza los dobles necesarios hasta encontrar todos los ejes de simetría posible de cada uno de ellos. Traza en los siguientes dibujos por donde pasan los ejes de simetría.

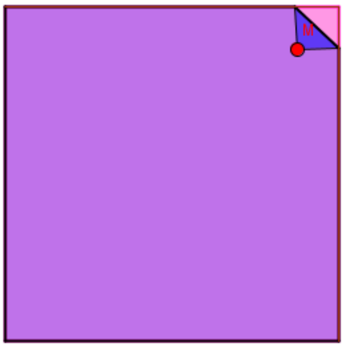


TRIÁNGULO EQUILÁTERO

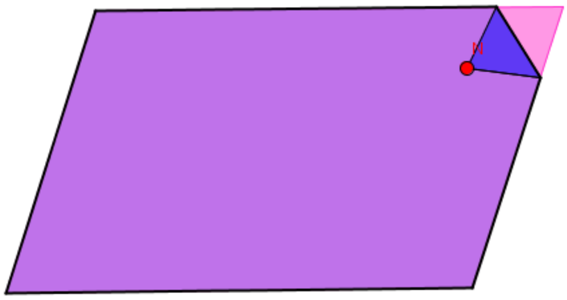


TRIÁNGULO ISÓSCELES

2.- Recorta un cuadrado y un paralelogramo. Realiza los dobles necesarios hasta encontrar todos los ejes de simetría posible de cada uno de ellos. Traza en los siguientes dibujos por donde pasan los ejes de simetría.

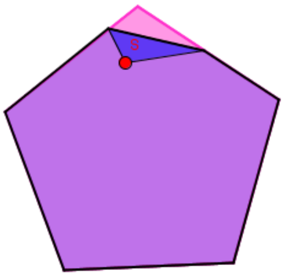


CUADRADO

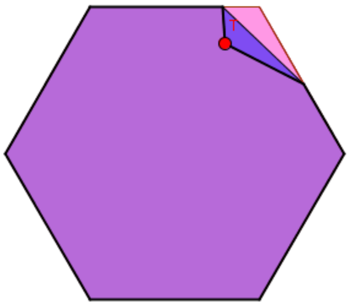


PARALELOGRAMO

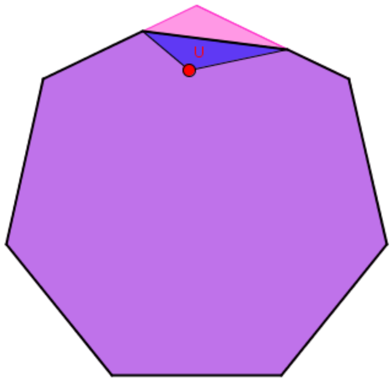
3.- Recorta un pentágono, un hexágono y un heptágono regular. Realiza los dobles necesarios hasta encontrar todos los ejes de simetría posible de cada uno de ellos. Traza en los siguientes dibujos por donde pasan los ejes de simetría.



PENTÁGONO REGULAR



HEXÁGONO REGULAR



HEPTÁGONO REGULAR

a) Rellena la siguiente tabla.

POLIGONOS REGULARES	**NÚMERO DE LADOS**	**NÚMERO DE EJES DE SIMETRÍA**	**¿POR DÓNDE CORTAN LOS EJES AL POLÍGONO?**
TRIÁNGULO EQUILÁTERO			
CUADRADO			
PENTÁGONO REGULAR			
HEXÁGONO REGULAR			
HEPTÁGONO REGULAR			

b) ¿Podrías deducir cuantos ejes de simetría tendrá un polígono regular de 20 lados? ¿Y de 21? Justifica tu respuesta.

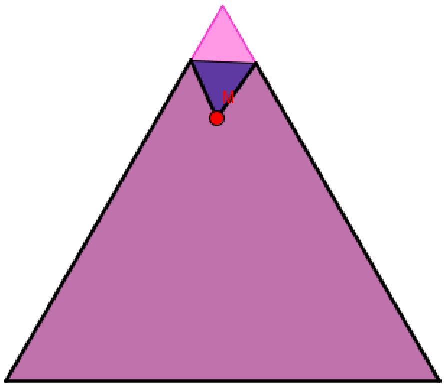
c) ¿Por dónde cortarán los ejes de simetría del polígono regular de 20 lados al polígono? ¿Y los de 21?

d) ¿Cuántos ejes de simetría tendrá un polígono de n lados? Justifica tu respuesta.

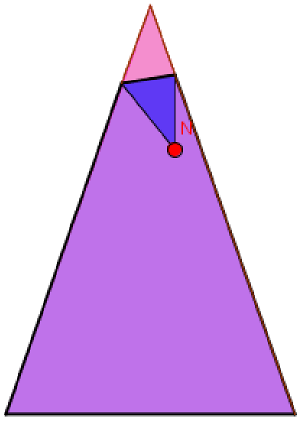
e) Si el número de lados es par, ¿por dónde cortarán los ejes de simetría al polígono? ¿Y si es impar?

ACTIVIDAD 9: FORMATO GEOGEBRA

1.- (APPLET 9.1) Moviendo el punto rojo, calcula los ejes de simetría de un triángulo isósceles y de un triángulo equilátero.

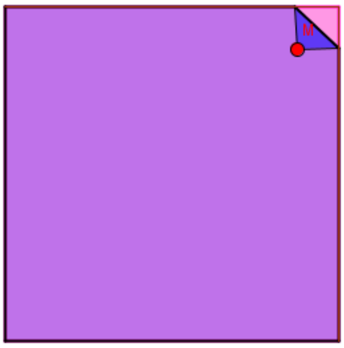


TRIÁNGULO EQUILÁTERO

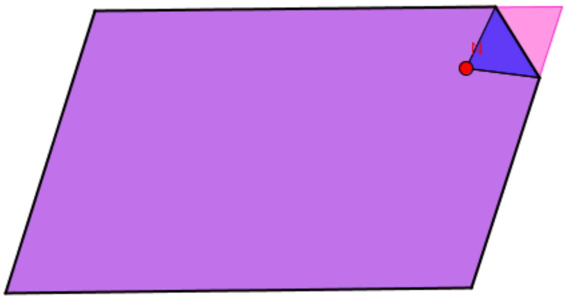


TRIÁNGULO ISÓSCELES

2.- (APPLET 9.2)[3] Moviendo el punto rojo, calcula los ejes de simetría de un cuadrado y un paralelogramo cualquiera.



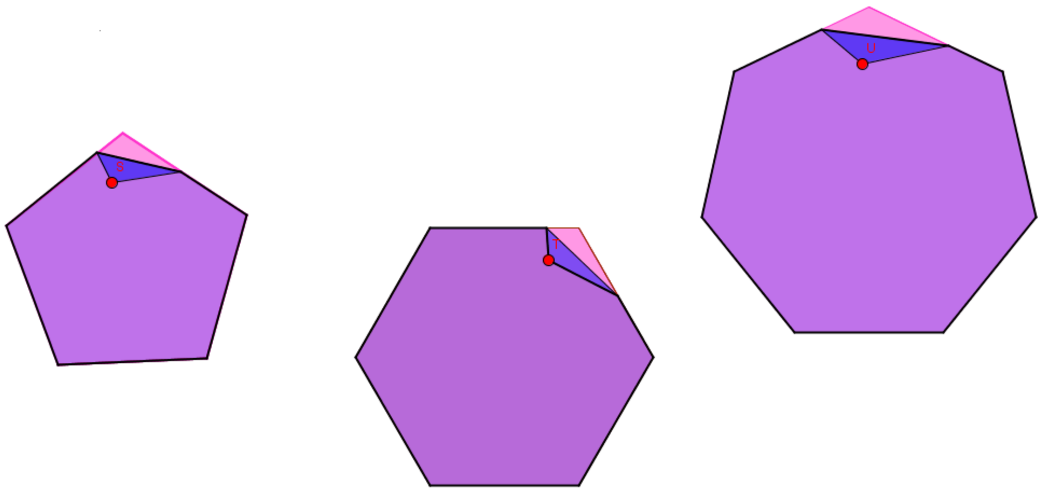
CUADRADO



PARALELOGRAMO

[3] Mentrard, D. (2013) http://dmentrard.free.fr

3.- (APPLET 9.3) Moviendo el punto rojo, calcula los ejes de simetría de un pentágono regular, de un hexágono regular y de un heptágono regular.



PENTÁGONO REGULAR HEXÁGONO REGULAR HEPTÁGONO REGULAR

a) Rellena la siguiente tabla.

POLIGONOS REGULARES	**NÚMERO DE LADOS**	**NÚMERO DE EJES DE SIMETRÍA**	**¿POR DÓNDE CORTAN LOS EJES AL POLÍGONO?**
TRIÁNGULO EQUILÁTERO			
CUADRADO			
PENTÁGONO REGULAR			
HEXÁGONO REGULAR			
HEPTÁGONO REGULAR			

b) ¿Podrías deducir cuantos ejes de simetría tendrá un polígono regular de 20 lados? ¿Y de 21? Justifica tu respuesta.

c) ¿Por dónde cortarán los ejes de simetría del polígono regular de 20 lados al polígono? ¿Y los de 21?

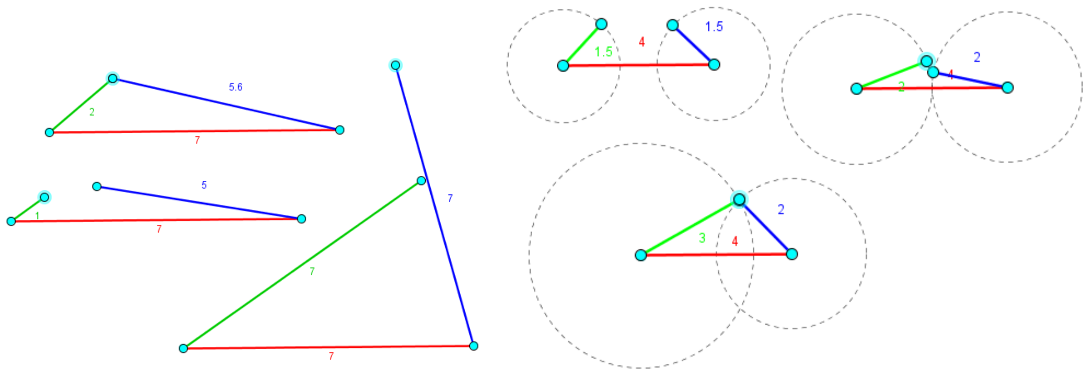
d) ¿Cuántos ejes de simetría tendrá un polígono de n lados? Justifica tu respuesta.

e) Si el número de lados es par, ¿por dónde cortarán los ejes de simetría al polígono? ¿Y si es impar?

ANEXO II: ANÁLISIS DE LAS ACTIVIDADES

ACTIVIDAD 1: DESIGUALDAD TRIANGULAR

1. Espacio básico del problema



Trazado de triángulos dadas las medidas de sus lados

LADO a + LADO b	TERCER LADO	SE PUEDE/ NO SE PUEDE CONSTRUIR

EXAMEN DE POSIBILIDADES. Estudio de las propiedades de las medidas de los lados para la construcción de triángulos

Comprobación de aquellos triángulos que pueden o no construirse dadas unas medidas concretas de sus lados

Generalización de la condición que deben cumplir las medidas de los lados para que un triángulos pueda construirse

DESIGUALDAD TRIÁNGULAR

Todos los triángulos cumplen la siguiente propiedad: la suma de las medidas de dos de sus lados es mayor que la medida del tercero

2. Clasificación del problema

<table>
<tr><th></th><th>TIPOLOGÍA I</th><th>TIPOLOGÍA II</th></tr>
<tr><td>APARTADO 1</td><td>PROBLEMA DE ENCONTRAR Y PROBAR
Consiste en averiguar qué triángulos son posibles de dibujar, y justificar por qué únicamente pueden trazarse esos triángulos.</td><td>EJERCICIO ALGORÍTMICO Y PROBLEMA DE BÚSQUEDA
Es necesaria la aplicación del algoritmo para el trazado de triángulos, y además encontrar un procedimiento para justificar porque únicamente algunos pueden trazarse.</td></tr>
<tr><td>APARTADO 2</td><td>PROBLEMA DE ENCONTRAR
Se trata de hallar la regla que deben cumplir las longitudes de los lados de los triángulos para poderse dibujar</td><td rowspan="2">PROBLEMA DE BÚSQUEDA
No se conoce un procedimiento para resolver el problema, será necesaria la búsqueda de alguna manera para encontrar la regla que cumplen los triángulos para poder ser trazados.</td></tr>
<tr><td>APARTADO 3</td><td>PROBLEMA DE ENCONTRAR Y PROBAR
Este apartado puede que únicamente sea de verificación dependiendo de si se ha obtenido la regla anteriormente. En caso de no haber sido obtenida será análogo al primer apartado.</td></tr>
</table>

3. Herramientas heurísticas

En la resolución de esta actividad se puede hacer uso de las siguientes herramientas heurísticas:

CONSIDERACIÓN DE UN CASO O UNA SERIE DE CASOS	En los APARTADO 2 y 3 se utilizan diferentes ejemplos de triángulos para deducir o verificar la desigualdad triangular.
EXAMEN DE POSIBILIDADES	En el APARTADO 2 se pueden examinar las diferentes alternativas de resultado que podría darnos la suma de los dos lados (mayor, menor o igual que el tercer lado)

4. Demanda cognitiva del problema

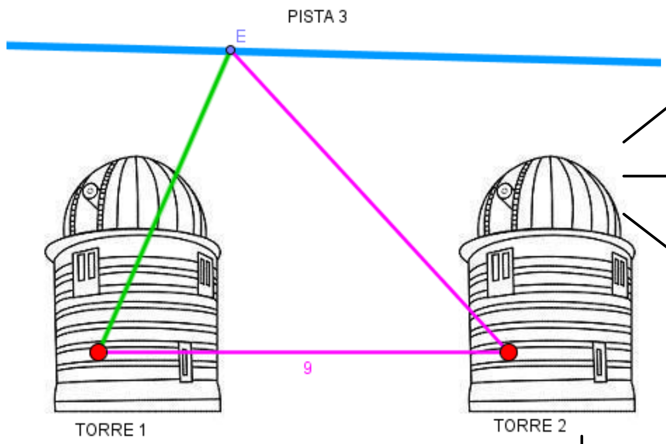
A1	**NB**				**NBM**					**NAM**				**NA**					
	1.1	1.2	1.3	1.4	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	3.1	3.2	3.3	3.4	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6
1.1	-	-	-	-	X	X	X	X	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1.2	-	-	-	-	X	X	-	X	X	X	X	-	-	-	-	-	-	-	-
1.3	-	-	-	-	X	-	X	-	-	X	X	-	-	-	-	-	-	-	-

5. Niveles de razonamiento

A1	RECONOCIMIENTO	USO DE DEF	FORMULACIÓN DE DEF	CLASIFICACIÓN	DEMOSTRACIÓN
1.1		NII			NII
1.2		NII			NII/NIII
1.3		NII			NII/NIII

ACTIVIDAD 2: CONSTRUCCIÓN DE TRIÁNGULOS

1. Espacio básico de problema

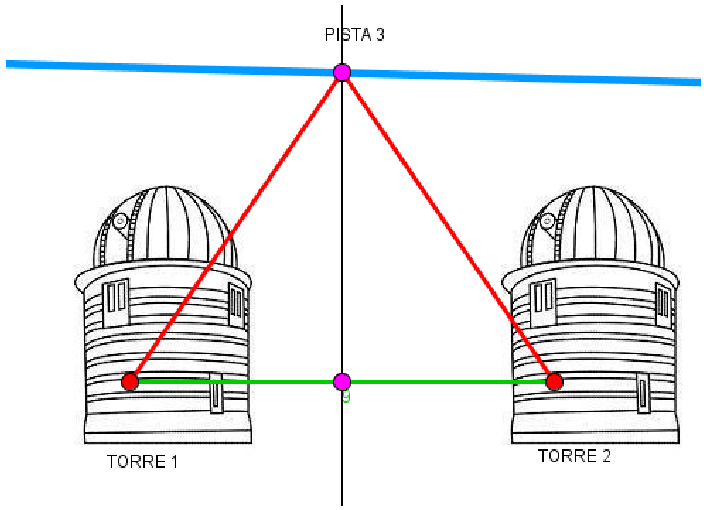


Haciendo uso del compás

Haciendo uso de la regla

Haciendo uso del Geogebra

Trazar un triángulo isósceles conociendo uno de sus lados iguales



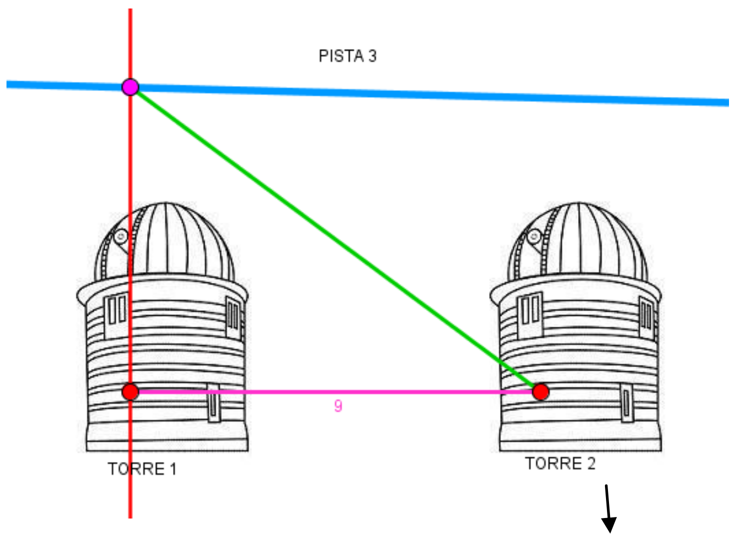
Trazar el punto medido del lado desigual

Trazar una recta perpendicular al lado desigual que pase por el punto medio

Trazar el punto de corte de la recta perpendicular con la recta de la pista de aterrizaje

Unir el punto de corte con los extremos del lado desigual

Trazar un triángulo isósceles conociendo el lado desigual



Trazar una recta perpendicular al lado conocido por cualquier de los extremos del segmento

↓

Trazar el punto de corte de la recta perpendicular y la recta de la pista

↓

Unir el punto de corte con el otro extremo del lado conocido

Trazar un triángulo rectángulo conociendo uno de sus catetos

2. Clasificación del problema

	TIPOLOGÍA I	**TIPOLOGÍA II**
APARTADO 1	PROBLEMA DE ENCONTRAR Dados unos datos y unas condiciones, el problema consiste en hallar la manera de trazar los triángulos pedidos	PROBLEMA DE APLICACIÓN Aunque se conoce el procedimiento de trazado de triángulos la aplicación de esos métodos en este problema su aplicación no es evidente.
APARTADO 2		

3. Herramientas heurísticas

No encontramos ninguna herramienta heurística que pueda ser utilizada para la resolución de este problema.

4. Demanda cognitiva del problema

A2	NB				NBM					NAM				NA					
	1.1	1.2	1.3	1.4	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	3.1	3.2	3.3	3.4	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6
2.1.a	-	-	-	-	X	X	-	X	X	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2.1.b	-	-	-	-	X	X	-	X	X	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2.2	-	-	-	-	X	X	-	X	X	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

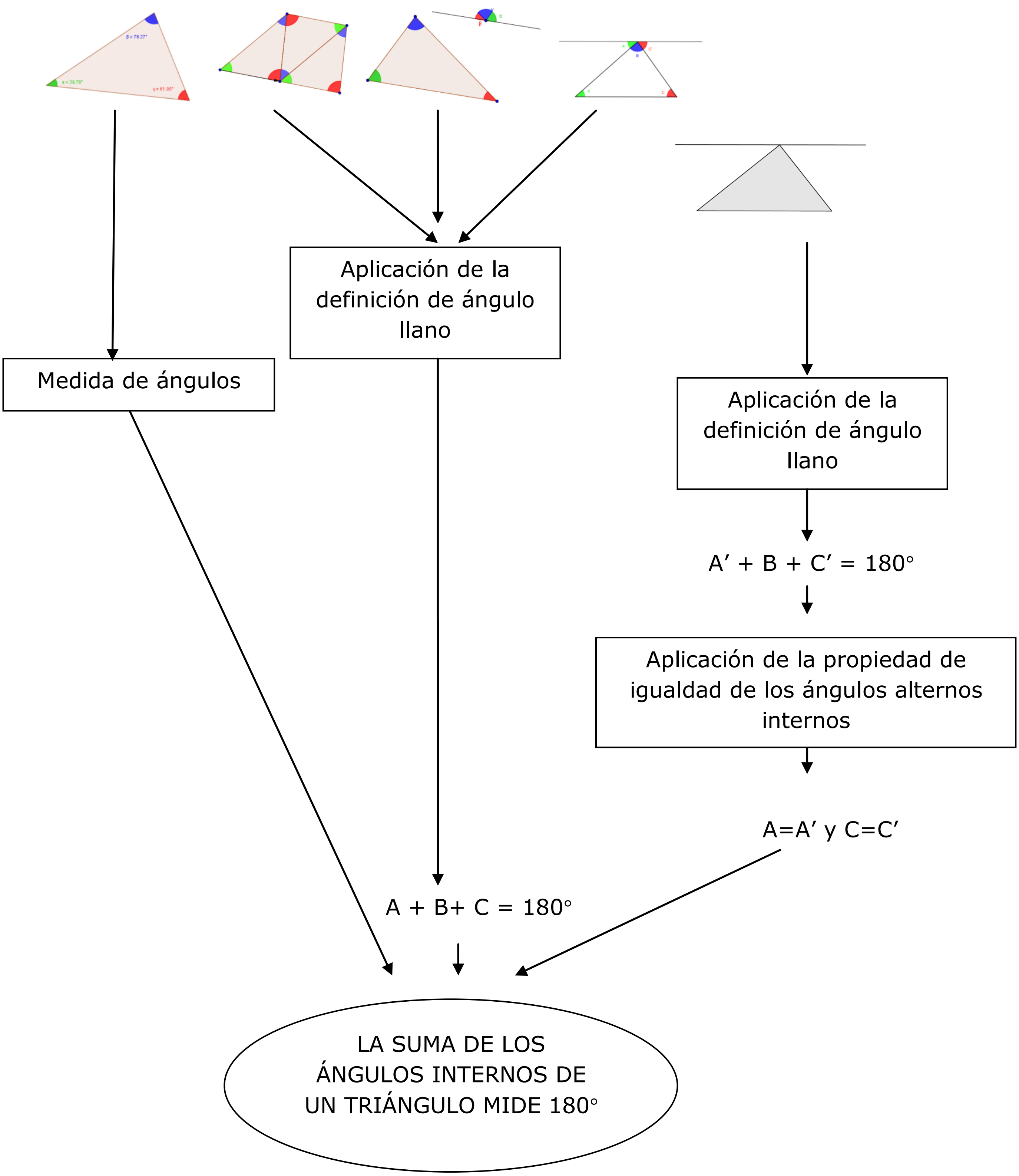
5. Niveles de razonamiento

A2	RECONOCIMIENTO	USO DE DEF	FORMULACIÓN DE DEF	CLASIFICACIÓN	DEMOSTRACIÓN
2.1a	NI/NII	NII			
2.1b	NI/NII	NII			
2.2	NI/NII	NII			

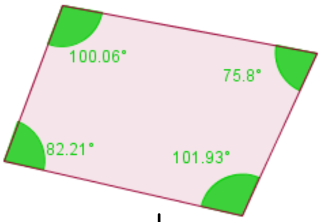
ACTIVIDAD 3: Suma de los ángulos interiores de un polígono

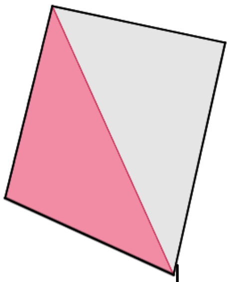
1. Espacio básico del problema

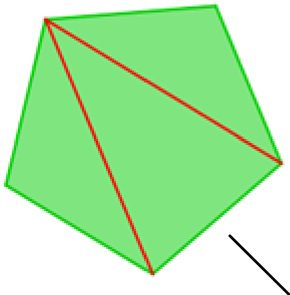
(APARTADOS 1-6)



(APARTADOS 7-9)







Medida de los ángulos interiores del cuadriláteros

Cuadrilátero se divide en dos triángulos

Un pentágono se divide en tres triángulos

Aplicación de la suma de los ángulos internos de un triángulo

2· 180° = 360°

3· 180° = 540°

LA SUMA DE LOS ÁNGULO INTERIORES DE UN CUADRILÁTERO ES 360°

LA SUMA DE LOS ÁNGULO INTERIORES DE UN PENTÁGONO ES 540°

GENERALIZACIÓN: CONSIDERACIÓN DE UN CASO O UNA SERIE DE CASOS

NÚMERO DE LADOS	**NÚMERO DE TRIÁNGULOS**	**SUMA ÁNGULOS INTERNOS**
3	1	180
4	2	2·180=360
5	3	3·180 = 540
20	18	18·180= 3240
…	…	…
n	n-2	(n-2)·180

LA SUMA DE LOS ÁNGULOS INTERIORES DE UN POLÍGONO DE N LADOS ES (N-2)·180°

2. Clasificación del problema

	TIPOLOGÍA I	TIPOLOGÍA II
APARTADO 1	PROBLEMA DE ENCONTRAR Y PROBAR Consiste en averiguar cuánto mide la suma de los ángulos interiores y justificar que este resultado se cumple para todos los triángulos.	PROBLEMA DE BÚSQUEDA Es necesaria la creación de un procedimiento que permita medir la suma de los ángulos de un triángulo y justificar que el resultado se cumple en todos los triángulos.
APARTADO 2		EJERCICIO DE RECONOCIMIENTO Y PROBLEMA DE BÚSQUEDA Puesto que la medida de los ángulos ya viene dado por el programa, se utilizara la definición de ángulo para reconocer el resultado y a su vez será necesaria la creación de un algoritmo para justificar que se cumple para todos los triángulos.
APARTADO 3	PROBLEMA DE ENCONTRAR Se trata de hallar la medida de la suma de los ángulos interiores de un triángulo.	EJERCICIO DE RECONOCIMIENTO Únicamente se precisa de la definición de ángulo de 180° para identificar este en el dibujo.
APARTADO 4		
APARTADO 5		
APARTADO 6	PROBLEMA DE PROBAR Dada una hipótesis y una conclusión, se requiere una demostración de ese resultado.	PROBLEMA DE APLICACIÓN. Adaptación del procedimiento que se ha presentado anteriormente. Se conoce el procedimiento para resolver el problema pero se debe justificar que ese procedimiento es adecuado para obtener su solución. La ejecución del procedimiento debe ir acompañada de la argumentación.
APARTADO 7	PROBLEMA DE ENCONTRAR Y PROBAR Se trata de encontrar la suma de los ángulos interiores de un polígono y demostrar el resultado obtenido.	PROBLEMA DE BÚSQUEDA Creación de un procedimiento para averiguar el resultado y para demostrarlo.
APARTADO 8		

	TIPOLOGÍA I	TIPOLOGÍA II
APARTADO 9	PROBLEMA DE ENCONTRAR Se trata de encontrar la suma de los ángulos interiores de algunos polígonos, ayudándose de dibujos.	(a)EJERCICIOS ALGORÍTMICO Una vez resueltos los apartados 7-8, el alumno realiza este apartado de forma automática, ayudándose de dibujos.
	b,c) PROBLEMA DE ENCONTRAR Y PROBAR Consiste en calcular la suma de los ángulos de un polígono de 20 lados y justificar la respuesta, esta vez sin la ayuda de ningún dibujo.	b,c) PROBLEMA DE APLIACIÓN Se conoce el procedimiento para resolver el problema, pues se ha aplicado en los apartados anteriores, pero esta vez debe argumentarse que su aplicación es adecuada para obtener la solución en un polígono de 20 lados y en un polígono de n lados.

3. Herramientas heurísticas

CONSIDERACIÓN DE UN CASO O UNA SERIE DE CASOS	(APARTADOS 1-5) Uso de varios ejemplos de triángulos para verificar la aserción.
	(APARTADO 9) Se hace uso de una tabla donde se consideran casos particulares de polígonos dependiendo de su número de lados. Con esto se pretende obtener una fórmula general de la suma de los ángulos interiores de un polígono dependiendo el número de lados.
INTRODUCCIÓN DE UNA FIGURA AUXILIAR	En todos los apartados hacemos uso de una figura que representa la situación descrita por el problema y que nos facilita la comprensión de este.

4. Demanda cognitiva del problema

A3	NB				NBM					NAM				NA					
	1.1	1.2	1.3	1.4	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	3.1	3.2	3.3	3.4	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6
3.1	-	-	-	-	X	X	X	X	X	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3.2	-	-	-	-	X	X	X	X	X	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3.3	-	-	-	-	X	X	-	-	X	X	-	X	X	-	-	-	-	-	-
3.4	-	-	-	-	X	X	-	-	X	X	-	X	X	-	-	-	-	-	-
3.5	-	-	-	-	-	X	-	-	X	X	X	X	X	-	-	-	-	-	-
3.6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	X	X	-	X	-	-	-	-	-	-
3.7	-	-	-	-	X	X	-	-	X	X	X	-	-	-	-	-	-	-	-
3.8	-	-	-	-	X	X	-	-	X	X	X	-	-	-	-	-	-	-	-
3.9	-	-	-	-	-	-	-	-	-	X	X	X	X	-	X		-	-	

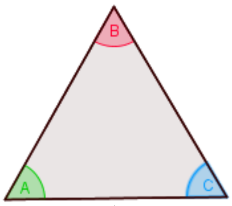
5. Nivel de razonamiento

	RECONOCIMIENTO	USO DE DEF.	FORMULACIÓN DE DEF.	CLASIFICACIÓN	DEMOSTRACIÓN
3.1, 3.2		**NIVEL II:** Uso de la definición de ángulo para calcular la suma de los ángulos.			**NIVEL II:** Verificación de la propiedad de la suma de los ángulos haciendo uso de uno o varios ejemplos de triángulos.
3.3	**NIVEL I:** El alumno es capaz de reconocer el aspecto físico de un ángulo llano pero no utiliza la medida de este ángulo. **NIVEL II:** El alumno identifica el ángulo llano y utiliza su medida (180°)	**NIVEL II:** Uso de las definiciones de ángulo y ángulo llano.			
3.4		**NIVEL II:** Uso de las definiciones de ángulo, ángulo llano y ángulos consecutivos.			
3.5	**NIVEL I:** El alumno observa la igualdad de las medidas de los ángulos del mismo color. **NIVEL II:** El alumno observa la igualdad de las medidas de los ángulos alternos internos, y además identifica la suma de los ángulos internos del triángulo con el ángulo llano de 180°. Asimismo, es capaz de generalizar este procedimiento para cualquier triángulo.	**NIVEL II:** Uso de las definiciones de ángulo, ángulo llano y ángulos consecutivos.			

	RECONOCIMIENTO	USO DE DEF.	FORMULACIÓN DE DEF.	CLASIFICACIÓN	DEMOSTRACIÓN
3.6	**NIVEL II:** Identificación de la igualdad de medida de los ángulos alternos internos.				**NIVEL III:** Se transfiere de lo aprendido anteriormente una demostración abstracta informal.
3.7, 3.8	**NIVEL I:** El alumno identificala división del polígono en triángulos pero no relaciona esto con la suma de los ángulos interiores del polígono. **NIVEL II:** El alumno identifica el número de triángulos y relaciona esto con la suma de los ángulos interiores de un triángulo y del polígono.	**NIVEL II:** Uso de la definición de diagonal.			
3.9	**NIVEL II:** El alumno identifica y utiliza los elementos que intervienen en la fórmula general para el cálculo de la suma de los ángulos internos.				**NIVEL II:** El alumno dibuja un polígono de 20 lados, pero no relaciona. **NIVEL III:** Uso de demostraciones abstractas informales para generalizar para un polígono de 20 o n lados.

ACTIVIDAD 4: Triángulos equiláteros

1. Espacio básico del problema



DEFINICIÓN DE UN TRIÁNGULO EQUILÁTERO. Igualdad de sus lados y de sus ángulos.

TODOS LOS LADOS IGUALES

TODOS LOS ÁNGULOS

Aplicación de la suma de los ángulos interiores de un triángulo

La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°

A+B+C = 180°

Como A=B=C

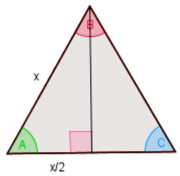
3·A= 180°

Entonces A=B=C= 60°

Particularización

Dibujo de triángulos equiláteros y medida de sus ángulos

División de triángulo equilátero en dos triángulos rectángulos



$$\cos A = \frac{x/2}{x} = \frac{1}{2} \qquad A = 60°$$

Como A=B=C= 60°

Un triángulo EQUILATERO siempre es ACUTÁNGULO, sus tres ángulos miden 60°

2. Clasificación del problema

	TIPOLOGÍA I	TIPOLOGÍA II
APARTADO 1	PROBLEMA DE ENCONTRAR Consiste en averiguar que triángulos equiláteros pueden formarse dependiendo de la medida de sus ángulos.	EJERCICIOS ALGORÍTMICO El alumno realiza de manera automática el algoritmo de trazado de triángulos y va contestando a las preguntas observando si puede o no trazar dichos triángulos.
APARTADO 2 **APARTADO 3** **APARTADO 4**	PROBLEMA DE ENCONTRAR Y PROBAR Se trata de hallar qué triángulos equiláteros pueden trazarse dependiendo de la medida de sus ángulos, y justificar por qué solo éstos. A diferencia del apartado anterior estos apartados exigen justificación.	PROBLEMA DE APLIACIÓN A diferencia del apartado anterior en estos el alumno conoce el algoritmo para trazar triángulos, pero además debe argumentar los resultados obtenidos.

3. Herramientas heurísticas

CONSIDERACIÓN DE UN CASO O UNA SERIE DE CASOS	(APARTADOS 1-3) Representación de varios ejemplos de triángulos para verificar las aserciones.
INTRODUCCIÓN DE UNA FIGURA AUXILIAR	(APARTADOS 1-3) Se hace uso de una figura que representa la situación descrita por el problema (triángulos equiláteros rectángulos, triángulos equiláteros acutángulos, triángulos equiláteros obtusángulos, triángulos con tres lados iguales, triángulos con tres ángulos iguales) y que nos facilita la comprensión de este.

4. Demanda cognitiva del problema

A4	NB				NBM					NAM				NA					
	1.1	1.2	1.3	1.4	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	3.1	3.2	3.3	3.4	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6
4.1	-	-	-	-	X	X	X	X	X	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4.2	-	-	-	-	X	X	X	-	-	X	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4.3	-	-	-	-	X	X	X	-	-	X	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4.4	-	-	-	-	X	X	-	-	-	X	X	-	-	-	-	-	-	-	-

5. Niveles de razonamiento

A4	RECONOCIMIENTO	USO DE DEF	FORMULACIÓN DE DEF	CLASIFICACIÓN	DEMOSTRACIÓN
4.1	NI/NII	NII			
4.2	NI/NII	NII			NII/NIII
4.3	NI/NII	NII			NII/NIII
4.4		NII		NI/NII	NII/NIII

ACTIVIDAD 5: Propiedades paralelogramos

1. Espacio básico del problema

PROPIEDADES COMUNES DE CADA FAMILIA DE PARALELOGRAMOS

	MEDIDA DE LADOS	MEDIDA ÁNGULOS	MEDIDA DIAGONALES	ÁNGULOS DIAGONALES	EJES SIMETRÍA POR SUS VÉRTICES OPUESTOS	EJES DE SIMETRÍA POR SUS PUNTOS MEDIOS OPUESTOS
CUADRADO	4 lados iguales	4 ángulos iguales	Diagonales de igual medida	Perpendiculares	2	2
RECTÁNGULO	2 pares de lados iguales	4 ángulos iguales	Diagonales de igual medida			2
ROMBO	4 lados iguales	2 pares de ángulos iguales		Perpendiculares	2	

PROP. COMUNES CUADRADO Y RECTÁNGULO

- 4 ángulos iguales.
- Diagonales de igual medida.
- Dos ejes de simetría por sus puntos medios .opuestos.

PROP. COMUNES CUADRADO Y NO RECTÁNGULO

- 4 lados iguales.
- Diagonales perpendiculares.
- Dos ejes de simetría por sus vértices opuestos.

PROP. COMUNES RECTÁNGULO Y NO CUADRADO: Ninguna

TODOS LOS CUADRADO SON RECTÁNGULOS, PERO TODOS LOSRECTÁNGULOS NO SON CUADRADOS

PROP. COMUNES CUADRADO Y ROMBO

- 4 lados iguales.
- Diagonales perpendiculares.
- Dos ejes de simetríapor sus vértices opuestos.

PROP. COMUNES CUADRADO Y NO ROMBO

- 4 ángulos iguales.
- Diagonales de igual medida.
- Dos ejes de simetría porsus puntos medios opuestos

PROP. COMUNES ROMBO Y NO CUADRADO: Ninguna

TODOS LOS CUADRADOS SON ROMBOS, PERO TODOS LOS ROMBOS NO SONCUADRADOS

2. Clasificación del problema

<table>
<tr><th></th><th>TIPOLOGÍA I</th><th>TIPOLOGÍA II</th></tr>
<tr><td>APARTADO 1</td><td rowspan="3">PROBLEMA DE ENCONTRAR
Consiste en enumerar una serie de propiedades.</td><td rowspan="5">EJERCICIO DE RECONOCIMIENTO
Únicamente es necesario el uso de las definiciones y propiedades de los polígonos estudiados (cuadrado, rombo y rectángulo)</td></tr>
<tr><td>APARTADO 2</td></tr>
<tr><td>APARTADO 3</td></tr>
<tr><td>APARTADO 4</td><td rowspan="2">PROBLEMA DE ENCONTRAR Y PROBAR
Se trata de encontrar la relación de inclusión existente entre ambos polígonos y la justificación de esta.</td></tr>
<tr><td>APARTADO 5</td></tr>
</table>

3. Herramientas heurísticas

No existen herramientas heurísticas pues no se trata de un problema.

4. Demanda cognitiva del problema

A5	**NB**				**NBM**					**NAM**				**NA**					
	1.1	1.2	1.3	1.4	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	3.1	3.2	3.3	3.4	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6
5.1	X	X	X	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5.2	X	X	X	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5.3	X	X	X	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5.4	X	X	X	-	-	X	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5.5	X	X	X	-	-	X	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

5. Niveles de razonamiento

A5	RECONOCIMIENTO	USO DE DEF	FORMULACIÓN DE DEF	CLASIFICACIÓN	DEMOSTRACIÓN
5.1		NII	NI/NII		
5.2		NII	NI/NII		
5.3		NII	NI/NII		
5.4				NI/NII	
5.5				NI/NII	

ACTIVIDAD 6: Propiedades del rombo

1. Espacio básico del problema

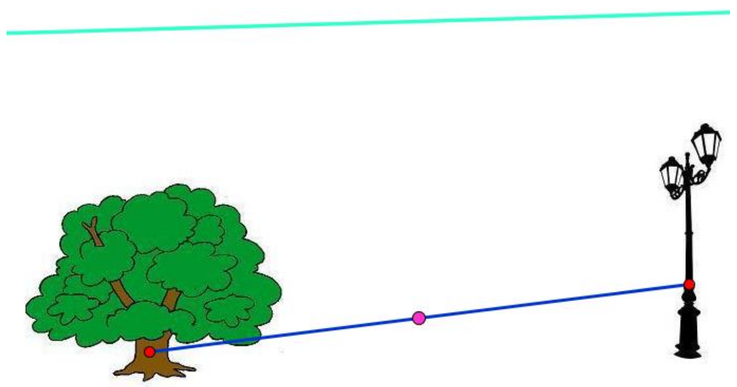
DIVISIÓN DEL PROBLEMA EN PARTES

P1: ¿Dónde se cortan las diagonales de un rombo?

Las diagonales se cortan en el punto medio

Trazar la diagonal uniendo los dos vértices conocidos

Trazar el punto medio de la diagonal



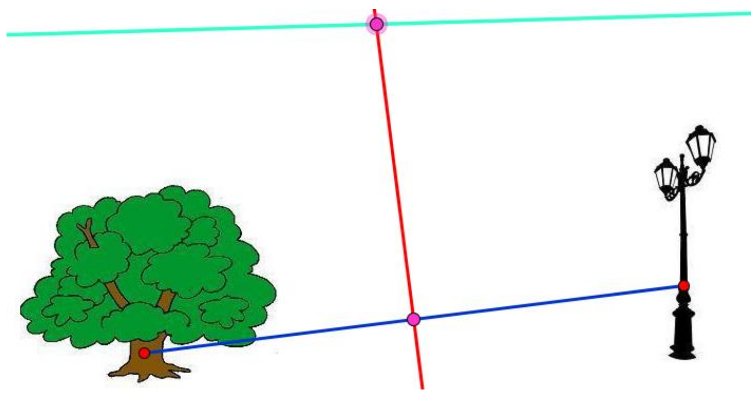
Trazar una de las diagonales de un rombo conociendo dos de sus vértices, y el punto de corte de las diagonales

P2: ¿Qué ángulo forman las diagonales de un rombo?

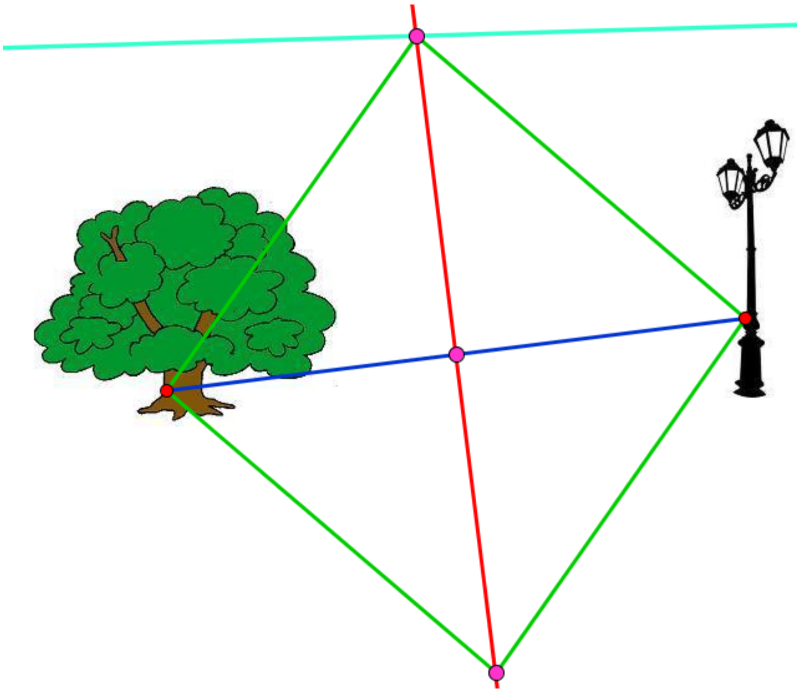
Las diagonales de un rombo son perpendiculares

Trazar una recta perpendicular por el punto medio de la diagonal conocida

Trazar el punto de corte de la perpendicular y la recta donde se encuentra el tercer vértice



Trazar el tercer vértice del rombo y la recta donde se encuentra la segunda diagonal



P3: ¿Cómo trazar un rombo conociendo tres vértices?

Aplicación de la propiedad de igualdad de lados de un rombo

Utilizando regla o compás trazar los lados desconocidos del rombo, sabiendo que tienen la misma medida que los otros dos y que cortan con la recta perpendicular

Aplicación de la propiedad del punto de corte de las diagonales

Las diagonales se cortan en el punto medio

Medir la mitad de la diagonal y utilizar dicha medida para calcular la otra mitad de la diagonal y el cuarto vértice

Reflejar el tercer vértice

Dibujar un triángulo simétrico

Reflejar el triángulo superior del rombo

Dibujar un rombo conociendo tres vértices

2. Clasificación del problema

	TIPOLOGÍA I	TIPOLOGÍA II
APARTADO 1	PROBLEMA DE ENCONTRAR Dados unos datos y unas condiciones, el problema consiste hallar la manera de trazar el rombo.	PROBLEMA APLICACIÓN A pesar de que se conoce el procedimiento para trazar rombos la aplicación del algoritmo en este problema no es evidente.

3. Herramientas heurísticas

DIVISIÓN DEL PROBLEMA EN PARTES	Se transforma el problema original en un conjunto de problemas: 1.- ¿En qué punto se cortan las diagonales? 2.- ¿Qué ángulo forman las diagonales? 3.- ¿Cómo trazo un rombo conociendo tres vértices?

4. Demanda cognitiva del problema

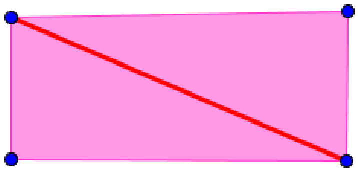
A6	NB				NBM					NAM				NA					
	1.1	1.2	1.3	1.4	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	3.1	3.2	3.3	3.4	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6
6.a	-	-	-	-	X	X	-	-	X	X	X	-	-	-	-	-	-	-	-
6.b	-	-	-	-	X	X	-	-	X	X	X	-	-	-	-	-	-	-	-

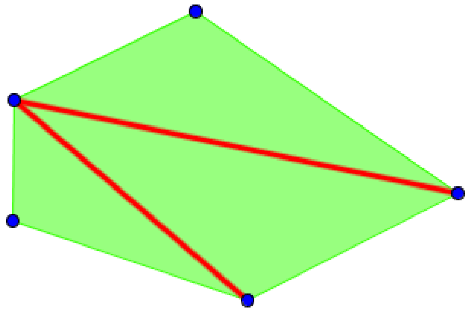
5. Niveles de razonamiento

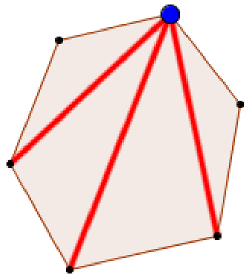
A6	RECONOCIMIENTO	USO DE DEF	FORMULACIÓN DE DEF	CLASIFICACIÓN	DEMOSTRACIÓN
6.a	NI/NII	NII			
6.b	NI/NII	NII			

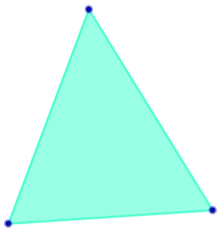
ACTIVIDAD 7: Diagonales

1. Espacio básico del problema









Trazar las diagonales desde un vértice de polígonos concretos

Trazar las diagonales desde un vértice de un triángulo

Calcular el número de diagonales desde un vértice de polígonos concretos

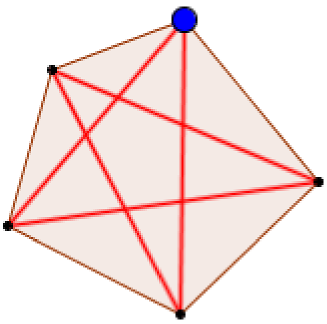
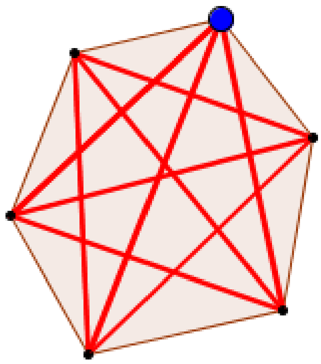
Relacionar el número de diagonales desde un vértice de un polígono con el número de lados del polígono

GENERALIZACIÓN: CONSIDERACIÓN DE UN CASO O UNA SERIE DE CASOS

POLÍGONO	Nº DE LADOS	Nº DE DIAGONALES DESDE UN VÉRTICE
TRIÁNGULOS		
CUADRILÁTERO		
…		
HEPTÁGONO		

El número de diagonales desde un vértice=

(número de lados – 3) = (n-3)

Trazar las diagonales totales de unos polígonos concretos

↓

Calcular el número de diagonales totales de unos polígonos concretos

↓

Relacionar el número de diagonales totales con el número de diagonales por cada vértice y el número de lados del polígono

↓

El número de diagonales totales ≠ (número de diagonales por vértice) ·(número de lados)

↓

¿Por qué?

↓

Al multiplicar por el número de lados cada diagonal la estamos contando dos veces, de A a B y de B a A

↓

El número de diagonales totales de un polígono es

$$\frac{(\text{número de lados})\cdot(\text{número de lados}-3)}{2}$$

2. Clasificación del problema

<table>
<tr><th></th><th>TIPOLOGÍA I</th><th>TIPOLOGÍA II</th></tr>
<tr><td>APARTADO 1</td><td>PROBLEMA DE ENCONTRAR
Consiste en encontrar el número de diagonales que se puede trazar desde cada vértice y comprobar si en todos los vértices encontramos el mismo número de diagonales.</td><td>EJERCICIOS ALGORÍTMICO
Se ejecuta un algoritmo de forma automática. Haciendo uso de la definición de diagonal se van trazando cada una de las diagonales desde un vértice.</td></tr>
<tr><td>APARTADO 2</td><td>PROBLEMA DE ENCONTRAR Y PROBAR
Se trata de encontrar el número de diagonales desde un vértice de un triángulo, y justificar el por qué de ese resultado.</td><td>PROBLEMA DE APLICACIÓN
Se conoce el algoritmo que hay que utilizar para el trazado de diagonales pero debe ser argumentado que su utilización es adecuada ya que se trata de un caso especial como es el triángulo.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">APARTADO 3</td><td>PROBLEMA DE ENCONTRAR
Consiste en completar la tabla con los resultados obtenidos del cálculo de diagonales desde cada vértice para diferentes polígonos.</td><td>EJERCICIOS ALGORÍTMICO
Se ejecuta un algoritmo de forma automática. Haciendo uso de la definición de diagonal se van trazando cada una de las diagonales desde un vértice ayudándose de dibujos.</td></tr>
<tr><td>PROBLEMA DE ENCONTRAR
Se trata de obtener el número de diagonales desde un vértice de un polígono de 20 lados.</td><td rowspan="2">PROBLEMA DE APLICACIÓN
Se conoce el algoritmo que hay que utilizar para el trazado de diagonales pero debe ser argumentado que su utilización es adecuada ya que esta vez no se pueden utilizar dibujos, ni para el caso de 20 lados ni para el caso de n lados.</td></tr>
<tr><td>PROBLEMA DE ENCONTRAR Y PROBAR
Se trata de obtener una regla general para calcular el número de diagonales desde un vértice para cualquier polígono y argumentar dicha regla.</td></tr>
<tr><td>PROBLEMA DE ENCONTRAR
Consiste en completar la tabla con los resultados obtenidos del cálculo de diagonales totales para diferentes polígonos.</td><td>EJERCICIOS ALGORÍTMICO
Se ejecuta un algoritmo de forma automática. Haciendo uso de la definición de diagonal se van trazando cada una de las diagonales ayudándose de dibujos.</td></tr>
</table>

	TIPOLOGÍA I	TIPOLOGÍA II
	PROBLEMA PROBAR Se trata de probar si el número de diagonales es igual al producto del número de vértices por el número de diagonales desde cada vértices	PROBLEMA DE APLICACIÓN. A pesar de que se conoce el algoritmo a seguir para obtener la respuesta, la actividad exige que la respuesta sea argumentada, por lo tanto no es suficiente con realizar los cálculo y comprobar que la afirmación es falsa.
	PROBLEMA DE ENCONTRAR Se trata de obtener el número de diagonales totales de un polígono de 20 lados.	PROBLEMA DE BÚSQUEDA En este caso es necesario crear un algoritmo para calcular el número de diagonales totales de un polígono de 20 lados y de n lados, ya que la relación existente entre el número de diagonales desde un vértice y el número de diagonales totales no es evidente.
	PROBLEMA DE ENCONTRAR Y PROBAR Se trata de obtener una regla general para calcular el número de diagonales totales para cualquier polígono y argumentar dicha regla.	

3. Herramientas heurísticas

CONSIDERACIÓN DE UN CASO O UNA SERIE DE CASOS	(APARTADO 1) Representación de las diagonales desde diferentes vértices para comprobar que siempre se mantiene el número de diagonales desde un vértice.
	(APARTADOS 3 a y d) Consideración de varios polígonos y sus diagonales para encontrar una regla general.
	(APARTADO 3 e) Consideración de un caso singular para comprobar que la afirmación es falsa.
INTRODUCCIÓN DE UNA FIGURA AUXILIAR	(APARTADOS 3 a y d) Se hace uso de figuras que representa la situación descrita por el problema (polígonos y sus diagonales) y que nos facilita la comprensión de este.

4. Demanda cognitiva del problema

A7	NB				NBM					NAM				NA					
	1.1	1.2	1.3	1.4	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	3.1	3.2	3.3	3.4	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6
7.1	-	-	-	-	X	-	X	X	X	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
7.2	-	-	-	-	X	X	X	X	X	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
7.3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	X	X	X	X	-	X	-	-	-	-

5. Niveles de razonamiento

A7	RECONOCIMIENTO	USO DE DEF	FORMULACIÓN DE DEF	CLASIFICACIÓN	DEMOSTRACIÓN
7.1	NI/NII	NII			
7.2	NI/NII	NII			
7.3	NI/NII	NII			NII/NIII

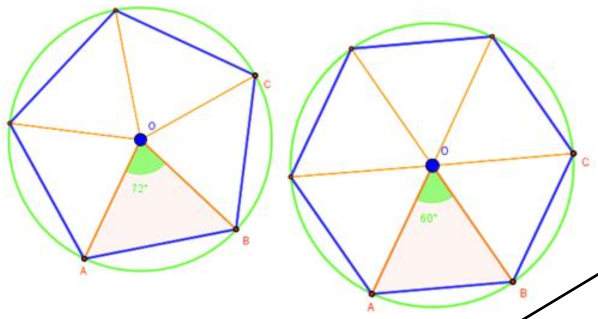
ACTIVIDAD 8: Polígonos regulares (Ángulo central)

1. Espacio básico del problema

Uso de la definición de polígonos regulares

Uso de la definición de ángulo central

Medida del ángulo central de unos polígonos concretos



GENERALIZACIÓN: CONSIDERACIÓN DE UN CASO O UNA SERIE DE CASOS

NÚMERO DE LADOS	ÁNGULO CENTRAL
3	
4	
…	
8	

EL ÁNGULO CENTRAL DE UN POLÍGONO REGULAR DE n LADOS =

$$\frac{360°}{número\ de\ lados} = \frac{360}{n}$$

Comprobar si también se cumple para polígonos irregulares

NO

¿Por qué?

Al no tener los ángulos iguales el ángulo central no será siempre el mismo

2. Clasificación del problema

<table>
<tr><th></th><th>TIPOLOGÍA I</th><th>TIPOLOGÍA II</th></tr>
<tr><td>APARTADO 1</td><td>PROBLEMA DE ENCONTRAR
Se trata de encontrar la respuesta a las preguntas mediante la observación.</td><td>EJERCICIO DE RECONOCIMIENTO
Es necesaria la búsqueda en la memoria de las propiedades estudiadas de los polígonos (cuadrado, rombo y rectángulo).</td></tr>
<tr><td rowspan="4">APARTADO 2</td><td>PROBLEMA DE ENCONTRAR
Se trata de completar la tabla calculando el ángulo central de cada polígono regular.</td><td>EJERCICIO ALGORÍTMICO
Únicamente es necesario el cálculo del ángulo central observando las figuras representadas.</td></tr>
<tr><td>PROBLEMA DE ENCONTRAR
Consiste en el cálculo del ángulo central de un polígono regular de 20 lados.</td><td rowspan="2">PROBLEMA DE APLICACIÓN
A pesar de que el alumno conoce el algoritmo para medir el ángulo central en estos casos será necesario argumentar como realiza ese cálculo.</td></tr>
<tr><td>PROBLEMA DE ENCONTRAR Y PROBAR
Se trata de encontrar una regla general para el cálculo del ángulo central de un polígono regular de n lados y argumentar dicha regla.</td></tr>
<tr><td>PROBLEMA DE PROBAR
Consiste en probar si esta regla se cumple también para polígonos no regulares.</td><td>PROBLEMA DE APLICACIÓN
El alumno conoce el algoritmo para calcular la medida del ángulo central en polígonos regulares pero debe justificar si este procedimiento es igual de válido para polígonos irregulares.</td></tr>
</table>

3. Herramientas heurísticas

CONSIDERACIÓN DE UN CASO O UNA SERIE DE CASOS	(APARTADO 2) Se consideran una serie de polígonos regulares con diferente número de lados para alcanzar una regla general.
INTRODUCCIÓN DE UNA FIGURA AUXILIAR	(APARTADOS 2) Se hace uso de polígonos regulares para comprender el problema y calcular el ángulo central de cada uno de ellos.

4. Demanda cognitiva del problema

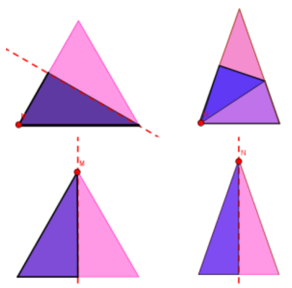
A8	**NB**				**NBM**					**NAM**				**NA**					
	1.1	1.2	1.3	1.4	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	3.1	3.2	3.3	3.4	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6
8.1	X	X	X	-	-	-	-	X	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
8.2.a	-	-	-	-	X	-	-	X	X	-	-	X	-	-	-	-	-	-	-
8.2.b	-	-	-	-	X	X	-	-	-	X	X	-	X	-	-	-	-	-	-
8.2.c	-	-	-	-	X	X	-	-	-	X	X	-	X	-	-	-	-	-	-
8.2.d	-	-	-	-	X	X	-	-	-	X	X	-	-	-	-	-	-	-	-

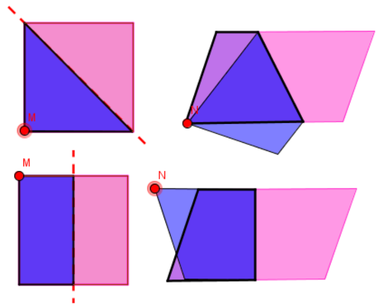
5. Niveles de razonamiento

A8	RECONOCIMIENTO	USO DE DEF	FORMULACIÓN DE DEF	CLASIFICACIÓN	DEMOSTRACIÓN
8.1	NI/NII	NII			
8.2	NI/NII	NII			NII/NIII

ACTIVIDAD 9: Simetrías

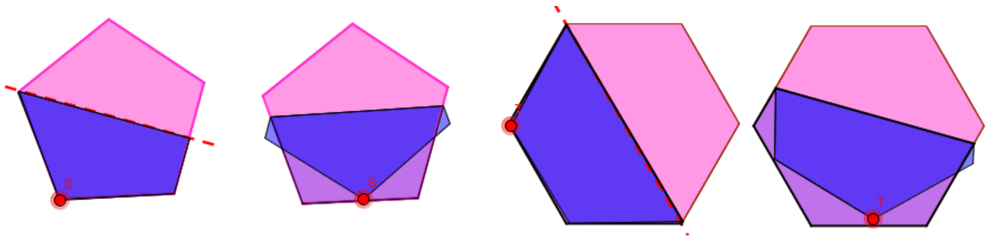
1. Espacio básico del problema





Calcular el número de ejes de simetría de un TRIÁNGULO EQUILÁTERO y de un TRIÁNGULO ISÓSCELES

Calcula el número de ejes de simetría de un CUADRADO y un PARALELOGRAMO



Cálculo del número de ejes de simetrías de algunos polígonos regulares concretos

Estudiar el punto de corte de los ejes simetría de algunos polígonos regulares concretos

GENERALIZACIÓN: CONSIDERACIÓN DE UN CASO O UNA SERIE DE CASOS

POLIGONOS REGULARES	**NÚMERO DE LADOS**	**NÚMERO DE EJES DE SIMETRÍA**	**¿POR DÓNDE CORTAN LOS EJES AL POLÍGONO?**
TRIÁNGULO EQUILÁTERO			
...			
HEPTÁGONO REGULAR			

El número de ejes de simetría de un polígono regular es igual al número de lados del polígono

Los ejes de simetría de un polígono regular con número de lados PAR cortan en los vértices. Los ejes de simetría de un polígono regular con número de lados IMPAR cortan por los puntos medios de los lados

2. Clasificación del problema

<table>
<tr><th></th><th>TIPOLOGÍA I</th><th>TIPOLOGÍA II</th></tr>
<tr><td>APARTADO 1</td><td rowspan="2">PROBLEMA DE ENCONTRAR
Se trata de encontrar el número de ejes de simetría de ciertos polígonos.</td><td rowspan="2">EJERCICIOS ALGORÍTMICO
El alumno realizando de manera rutinaria los pliegues hasta encontrar todos los ejes de simetría.</td></tr>
<tr><td>APARTADO 2</td></tr>
<tr><td rowspan="4">APARTADO 3</td><td>PROBLEMA DE ENCONTRAR
Consiste en calcular el número de ejes de simetría de diferentes polígonos regulares (ayudándose de dibujos).</td><td>EJERCICIOS ALGORÍTMICO
Se trata de repetir el algoritmo para el cálculo del número de ejes de simetría para otros polígonos.</td></tr>
<tr><td>PROBLEMA DE ENCONTRAR
Se trata de encontrar como varía la posición de los ejes de simetría dependiendo si el número de lados es par o impar.</td><td rowspan="3">PROBLEMA DE APLICACIÓN
A pesar de que el alumno conoce el algoritmo para el cálculo del número de ejes de simetría, esta vez al tratarse de casos especiales en los que no puede hacer uso de dibujos, el alumno deberá argumentar el uso del algoritmo.</td></tr>
<tr><td>c, d) PROBLEMA DE ENCONTRAR Y PROBAR
Consiste en encontrar una regla para calcular el número de ejes de simetría de un polígono y justificar esta regla.</td></tr>
<tr><td>PROBLEMA DE ENCONTRAR
Se trata de encontrar como varía la posición de los ejes de simetría dependiendo si el número de lados es par o impar.</td></tr>
</table>

3. Herramientas heurísticas

CONSIDERACIÓN DE UN CASO O UNA SERIE DE CASOS	(APARTADO 3) Se consideran una serie de polígonos regulares con diferente número de lados para alcanzar una regla general para el cálculo del número de ejes de simetría y su posición.
INTRODUCCIÓN DE UNA FIGURA AUXILIAR	En todos los apartados se hace uso de figuras que ayudan a comprender el problema y calcular número de ejes de simetría y su posición.

4. Demanda cognitiva del problema

A9	**NB**				**NBM**					**NAM**				**NA**					
	1.1	1.2	1.3	1.4	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	3.1	3.2	3.3	3.4	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6
9.1	-	-	-	-	X	X	X	X	X	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
9.2	-	-	-	-	X	X	X	X	X	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
9.3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	X	X	X	X	-	-	-	-	-	-

5. Niveles de razonamiento

A9	RECONOCIMIENTO	USO DE DEF	FORMULACIÓN DE DEF	CLASIFICACIÓN	DEMOSTRACIÓN
9.1	NI/NII	NII			
9.2	NI/NII	NII			
9.3	NI/NII	NII			NII/NIII