VNIVERSITAT DE VALÈNCIA — Facultat de Magisteri

LA SIMULACIÓ EN L'APRENENTATGE DE LA PROBABILITAT EN PRIMÀRIA

Josep Capella Sanchis

Treball Fi de Grau de Mestre en Educació Primària
Especialitat de Matemàtiques i Ciències
Curs 2012-2013
Juliol 2013

Tutor de la Universitat:
Manuel Pedro Huerta Palau
(Departament de Didáctica de les Matemàtiques)

Resum

El present treball pretén fer un estudi exploratori de les possibilitats que ens ofereix la simulació com a mètode de resolució de problemes de probabilitat en l'aprenentatge de la probabilitat i l'estadística a l'educació primària. En la seua aplicació es planteja l'elaboració d'una unitat didàctica basada en la resolució de problemes i es mostren els resultats de l'aplicació d'aquesta a una aula de sisé de primària.

Paraules clau: Probabilitat, estadística, resolució de problemes, simulació, didàctica de les matemàtiques, educació primària.

Resumen

El presente trabajo pretende hacer un estudio exploratorio de las posibilidades que nos ofrece la simulación como método de resolución de problemas de probabilidad en el aprendizaje de la probabilidad y la estadística en la educación primaria. En su aplicación se plantea la elaboración de una unidad didáctica basada en la resolución de problemas y se muestran los resultados de la aplicación de esta a un aula de sexto de primaria.

Palabras clave: Probabilidad, estadística, resolución de problemas, simulación, didáctica de las matemáticas, educación primaria.

Abstract

In this report we intend to do an exploratory study of the possibilities offered by the simulation as a method for solving probability problems in the learning of probability and statistics in primary education. In its application it is planned to develop a teaching unit based on problem solving and it is shown the results of applying that to a sixth grade classroom.

Keywords: Probability, statistics, problem solving, simulation, mathematics education, primary education.

ÍNDEX

ÍNDEX D'OBJECTES

Equacions:

Figures:

Problemes:

Taules:

1 INTRODUCCIÓ

Des que l'ensenyament de la probabilitat es va generalitzar en la dècada dels 90 al segle passat amb la introducció al currículum de matemàtiques de l'ensenyament primari, gràcies a les investigacions de Fischbein i Gazit (1984), Fischbein, Nello i Marino (1991), Kahneman, Slovic i Tversky (1982) y Shaughnessy (1992), pocs avanços s'han produït, tant amb les tasques que han de resoldre's com amb els mètodes de resolució dels problemes. En general, aquestes tasques tenen a veure amb dos idees de la probabilitat: la laplaciana y la experimental o empírica. La primera basada en la regla de Laplace. La segona en la idea de freqüència relativa com millor aproximació a la probabilitat teòrica. Mentre que la primera està àmpliament arrelada en l'ensenyament, la segona a penes si té presència i si hi és ho és per tal de justificar la primera.

L'estudi d'Ortiz (2007) treballa la simulació a l'educació secundària basant-se en el suport d'investigacions que li confereixen un paper essencial a la simulació com a mètode de resolució de problemes de probabilitat. El propòsit d'aquest treball és experimentar la simulació com a mètode de resolució de problemes de probabilitat a l'educació primària, emprant problemes la solució dels quals és complexa per a estudiants de primària i fora del seu abast, com es vorà més endavant. Per tant, mitjançant la simulació, es pretén posar als estudiants en contacte amb els fenòmens relacionats amb la probabilitat com una forma de controlar les situacions d'incertesa. S'agafa aquesta postura, tant epistemològica com metodològica, perquè es considera que els estudiants que són objecte d'estudi en aquest treball poden estar més propers a l'experimentació que no a la resolució teòrica. Aquest treball necessita també de l'elaboració d'una unitat didàctica contextualitzada al grup d'estudiants esmentats, ja que sense aquesta no es pot entendre el treball al complet, és per aquest motiu que en l'elaboració de la memòria s'inclourà la unitat presentada a la memòria del Pràcticum III.

Si l'experimentació és adequada, es vol proposar aquesta aproximació a la probabilitat i a la resolució de problemes de probabilitat basada en la simulació com a eina per a l'ensenyament en l'etapa d'educació primària.

2 OBJECTIUS

Donat tot el que s'ha parlat a l'apartat anterior, es proposa un clar objectiu, esbrinar si és possible ensenyar probabilitat i estadística en educació primària en un context de resolució de problemes emprant la simulació com a mètode de resolució de problemes de probabilitat.

Per tant, el que es pretén en el desenvolupament d'aquest treball és fer un estudi exploratori en el que es reculla l'experiència dels xiquets de sisé curs d'educació primària a l'enfrontar-se a una proposta basada en la resolució de problemes de probabilitat per simulació. Així doncs, s'hi farà un registre del comportament i una anàlisi de les respostes dels alumnes per valorar si la simulació, efectivament, es pot proposar com a eina didàctica per a treballar la probabilitat i l'estadística a l'educació primària, i si l'estudi pot progressar i convertir-se en un treball de major envergadura.

3 FONAMENTACIÓ TEÒRICA

No hi ha estudis que analitzen la simulació a l'educació primària, però com a professors, la preocupació fonamental ha de ser facilitar l'aprenentatge dels alumnes, comptant per a això amb diversos recursos i materials didàctics (Ortiz, 2007) i per tant ens hem d'abastir de diferents eines, explorar-les i aprofitar-ne totes les seues característiques.

La simulació com a eina docent ens permet treballar tots els aspectes de la probabilitat i l'estadística des d'un context de resolució de problemes ric per a l'alumne, ja deia Huerta (2002) que "ensenyar probabilitat y estadística és ensenyar a resoldre problemes, tot i que en un domini particular" (p. 76). Aquesta és una característica prou important per a desenvolupar una eina docent a primària donat que, com ens diu Pazos (2001), a l'alumnat d'educació primària li agrada explorar sobre la casualitat i gaudeix fent-ho, per tant devem proporcionar-los material didàctic que els hi permeta explorar els diversos aspectes de la probabilitat i recollir i analitzar dades en un ambient de resolució de problemes.

3.1 LA SIMULACIÓ COM A MÈTODE DE RESOLUCIÓ DE PROBLEMES DE PROBABILITAT

Per a poder parlar de la simulació com a eina de resolució de problemes de probabilitat i, més enllà, com a eina didàctica per a treballar la probabilitat a l'educació primària, primer cal definir de què estem parlant. Huerta (2003) en fa una classificació dels problemes de probabilitat escolars deixant tres categories: els problemes d'assignació de probabilitats, els problemes de càlcul de probabilitats i els problemes de simulació, i d'aquestos últims ens dona la definició de simulació que emprem al desenvolupament d'aquest treball.

Llavors, entenem que la simulació d'un problema de probabilitat consisteix en transformar el problema original en un problema que probabilísticament és equivalent al problema original i que, fent servir qualsevol generador d'atzar que simule la situació problemàtica original, la solució del problema simulat siga considerada solució del problema original a través de la Llei dels Grans Nombres (Huerta, 2003).

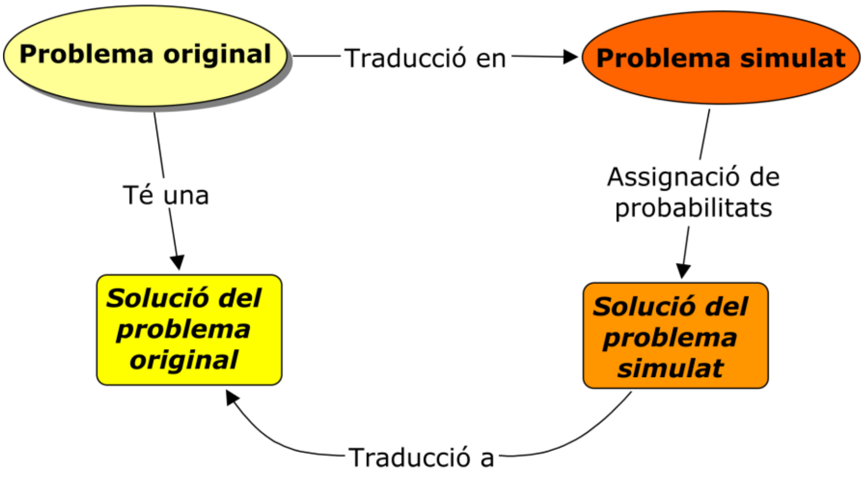


Figura 1 - Esquema del procés de simulació. (Huerta, 2013, p. 12)

Si reflexionem sobre perquè canviar la metodologia en l'aprenentatge de la probabilitat i l'estadística, i perquè fer-ho amb aquesta proposta tan atrevida, és perquè partim de la idea de què els continguts que s'estableixen al currículum d'educació primària són adequats per als alumnes, però la metodologia no ha canviat des què es va establir l'ensenyament de la probabilitat i l'estadística al currículum als anys 90. Manuel Pazos, en una entrevista a la revista *Cuadernos de pedagogía*, assegura que: "Crec que més que canviar els continguts s'hauria de revisar la manera d'ensenyar-los. Cal mostrar als xiquets la utilitat dels aprenentatges que van construint, i ensenyar-los a aplicar-los-hi." (Borrajo, 2006, p. 45). Crec que es refereix, tot i que ho fa de manera implícita, a una visió constructivista de l'aprenentatge de la probabilitat i ho fa a més donant-li importància a la contextualització de l'aprenentatge. El procés de resolució de problemes que ens ofereix la simulació ens garanteix una forma de treballar els problemes constructivista, on els xiquets no tenen més remei que explorar el problema i aplicar-hi el conjunt de ferramentes de probabilitat i estadística que es van desenvolupant a mesura que avancen en cada proposta.

Si a més a més tenim en compte el que diuen els *Estàndards Curriculars* del NCTM[1]:

"L'estudi de la probabilitat en els dos últims cicles d'educació primària no s'ha de centrar en el desenvolupament de fórmules o en calcular el més o menys probables que siguen els successos que presenten els textos. Els

[1] National Council of Teachers of Mathematics

> *estudiants deuen d'explorar situacions de forma activa experimentant i simulant models de probabilitat." (Pazos, 2001, p. 477)*

Aquestes paraules pareixen justificar de manera explícita la introducció de la simulació a l'educació primària, llavors opine que no és necessàriament una idea descabellada, fins i tot pareix natural el haver d'introduir-la.

4 INSTRUMENTS I PROCEDIMENTS METODOLÒGICS

Per a procedir a l'exploració he recollit uns problemes que poden resultar interessants i motivadors per als alumnes d'educació primària i que, a més, són problemes dignes de ser resolts emprant la simulació. Aquestos han estat reformulats per tal d'adequar-los al context d'un aula de primària, però els originals es poden torbar a un document de treball del Màster d'Educació Secundària del professor Manuel Pedro Huerta (2013) de la Universitat de València.

Com a instrument de recollida de dades de l'experiència dels alumnes s'hi ha elaborat una unitat didàctica composta per tres problemes, amb un altre previ a la proposta amb caràcter de pretest que tenia com a finalitat l'experimentació prèvia amb un grup més reduït d'estudiants per poder completar la resta de les propostes amb un major nivell d'informació.

4.1 ANÀLISI I SOLUCIÓ TEÒRICA DELS PROBLEMES

A continuació vaig a mostrar els problemes que van a ser el motor de la unitat didàctica i a fer la corresponent solució teòrica.

4.1.1 EL PROBLEMA DELS PASTISSETS

Una coneguda marca de pastissets, durant una promoció, regala junt a cada pastisset un cromo d'una col·lecció de 7 diferents. Quants pastissets creus que serà necessari comprar per tal de completar la col·lecció sencera?

Problema 1 - El problema dels pastissets, adaptació del problema dels ganxets (Huerta, 2013)

Aquest primer problema pot sorprendre per la simplicitat del seu enunciat, d'entrada sols podem trobar un nombre, el 7, però si ens fixem una mica més vorem que a cada pastisset es regala 1 cromo. Haurem de fer la hipòtesi de que la distribució dels cromos als paquets de les prestatgeries del les tendes on es troben es homogènia, llavors no costa fer l'assignació de la probabilitat corresponent a l'obtenció d'un dels 7 cromos i aquesta és $\frac{1}{7}$. Però si el que volem és completar la col·lecció haurem de veure el problema des d'altre angle, si analitzem el problema des d'un punt de vista estrictament teòric podem dir que es tracta d'un procés estocàstic[2] infinit, però si veiem el problema a la realitat, la producció de cromos és un procés finit, per tant el procés estocàstic, en la pràctica, ha de ser finit

[2] Entenem com a procés estocàstic aquell procés que varia en el temps de forma aleatòria.

Centrant-nos en el procés de resolució, quan comprem el primer pastisset tindrem un cromo que abans no teníem amb probabilitat 1, quan comprem el segon pastisset tindrem una probabilitat d'obtenir un cromo que no tenim de $\frac{6}{7}$ donat que ens falten 6 cromos per completar la col·lecció, però arribats a aquest punt entrem al món de la incertesa, no sabem a quin pastisset apareixerà el segon cromo de la nostra col·lecció, tal vegada al segon o tal vegada al vuité. No obstant això, independentment del nombre de pastissets que haguem comprat, sí que ens podem plantejar quina serà la probabilitat de que ens surta el tercer cromo de la col·lecció donat que ja en tenim dos, aquesta es $\frac{5}{7}$ donat que si en tenim dos en cada paquet poden aparèixer 5 cromos diferents que encara no hi tenim. Puc continuar amb aquest procés, però ja es veu quin és el camí, el que ens preocupa des d'aquest punt de vista no és el nombre de pastissets que ens hem menjat (o al menys que haguem comprat), el que ens ha de preocupar és quants cromos tenim a la col·lecció, d'això en direm un estat de transició[3].

Després d'introduir la idea dels estats de transició podem distingir que en aquest problema hi ha vuit estats diferents que definirem de la següent forma:

E_1 = Tindre 0 cromos.	E_5 = Tindre 4 cromos.
E_2 = Tindre 1 cromo.	E_6 = Tindre 5 cromos.
E_3 = Tindre 2 cromos.	E_7 = Tindre 6 cromos.
E_4 = Tindre 3 cromos.	E_8 = Tindre 7 cromos.

Es pot observar amb facilitat que si partim sempre d'un E_n amb $n < 8$ ens mourem sempre cap a l'estat immediatament superior (E_{n+1}) o ens quedarem al mateix estat (E_n), però mai no podrem tornar a un estat anterior. Considerem llavors l'E_1 com a l'estat inicial del procés estocàstic i l'E_8 com l'estat absorbent[4]. Considerant el problema d'aquesta manera podem determinar que es tracta d'una cadena de Markov[5]. Podem associar el següent grafo al procés estocàstic:

[3] Estat que pot donar-se en algun moment degut al procés estocàstic.
[4] Estat al que una vegada s'arriba es deté el procés estocàstic.
[5] Una cadena de Markov es un procés estocàstic discret en que la probabilitat de que ocorrega un fet esta lligada al fet immediatament anterior.

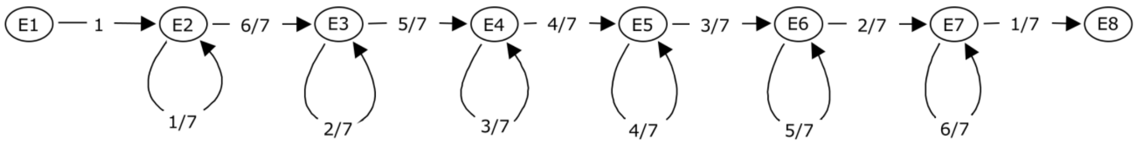


Figura 2 - Grafo associat al Problema 1

Emprant les regles del valor mitjà (Engel, 1975a) podem esbrinar el nombre esperat de moviments (en aquest cas seran el nombre de pastissets que cal comprar) que calen per passar d'un estat a l'estat absorbent. Aquestes regles es poden resumir interpretant que el nombre esperat de moviments que calen per a arribar d'un estat fins a l'absorbent sempre serà 1 més el producte de la probabilitat de moure'ns a cadascun dels estats contigus pel nombre de moviments esperat que calen des de cadascun d'aquests estats. Així doncs, anomenem m_i al nombre de moviments esperat que calen per arribar des de l'E_i fins a l'E_8, i ara podem escriure un sistema d'equacions que ens portarà cap a la solució del problema, m_1, tenint en compte que en nombre de moviments m_8 serà igual a 0 donat que quan ens trobem a l'E_8 ja tenim la col·lecció completa.

$$m_7 = 1 + \frac{1}{7}m_8 + \frac{6}{7}m_7 \rightarrow m_7 = 7$$

$$m_6 = 1 + \frac{2}{7}m_7 + \frac{5}{7}m_6 \rightarrow m_6 = \frac{21}{2}$$

$$m_5 = 1 + \frac{3}{7}m_6 + \frac{4}{7}m_5 \rightarrow m_5 = \frac{77}{6}$$

$$m_4 = 1 + \frac{4}{7}m_5 + \frac{3}{7}m_4 \rightarrow m_4 = \frac{175}{12}$$

$$m_3 = 1 + \frac{5}{7}m_4 + \frac{2}{7}m_3 \rightarrow m_3 = \frac{959}{60}$$

$$m_2 = 1 + \frac{6}{7}m_3 + \frac{1}{7}m_2 \rightarrow m_2 = \frac{1029}{60}$$

$$m_1 = 1 + m_2 \rightarrow m_1 = \frac{1089}{60} = 18'15$$

Equació 1 - Sistema d'equacions associat al Problema 1

Llavors, el nombre esperat de pastissos que cal comprar per tal d'aconseguir completar la col·lecció serà 18'15.

4.1.2 EL PROBLEMA DE LA COVA

El proper problema ha estat extret d'un article de Huerta (2002) que porta per nom el mateix nom que té aquest problema i que he decidit mantenir idèntic, si es que la traducció m'ho permet, a com es troba a dit article.

> *Vint-i-set exploradors es troben perduts en una cova de la què en surten 3 camins. Un d'aquests camins porta a l'exterior de la cova en una hora. Els altres dos no tenen eixida, si entren per un d'ells tornaran a la cova en 2 dies i si ho fan per l'altre tornaran en 3 dies.*
>
> *Com que els exploradors no porten cap llum i la cova està obscura i plena d'obstacles, cada vegada que fan un intent per eixir trien a l'atzar un dels tres camins.*
>
> *Si cada explorador sols té menjar per sobreviure durant menys de 6 dies, quants dels 27 exploradors creus que aconseguiran eixir de la cova?*

Problema 2 - El problema de la cova (Huerta, 2002)

Aquest sembla plantejar una situació més complexa que la del Problema 1 donat que entren més nombres en joc, però si ens centrem en l'elecció inicial que hi pot fer cada explorador, donat que cada vegada que tria ho fa a l'atzar i sols pot triar 1 camí entre els 3 que hi ha, la probabilitat d'agafar un determinat camí i no cap altre és $\frac{1}{3}$. Aquest és altre exemple d'un problema d'assignació de probabilitat.

Donat que la pregunta que es planteja al problema fa referència a un procés estocàstic finit, es poden explorar totes les diferents combinacions de camins que pot escollir un explorador fàcilment amb un arbre probabilístic. Els criteris per a detindre l'arbre seran, o bé haver triat el camí que ix a l'exterior en 1 hora, o bé haver esgotat els 6 dies de menjar. Anomenarem camí 1 al camí que porta a l'exterior en una hora i camins 2 i 3 als que porten cap a la cova de nou passats 2 i 3 dies respectivament.

Con es pot observar a l'arbre hi ha un total de 6 camins que porten a l'exterior amb probabilitats diferents d'ocórrer i per tant amb diferents esperances[6] front al nombre d'exploradors que en surten. Els itineraris seguits pels diferents exploradors els podem enregistrar emprant vectors ordenats on cada nombre equival al camí triat en cada cas. Donat que el màxim de camins que pot triar un explorador, abans no se li acaba el

[6] En el sentit matemàtic del terme.

menjar no pot ser superior a 3, els vectors dels itineraris tindran aquesta mida i els completaré amb zeros sempre que s'haja sortit o acabat el menjar abans de la tercera triada.

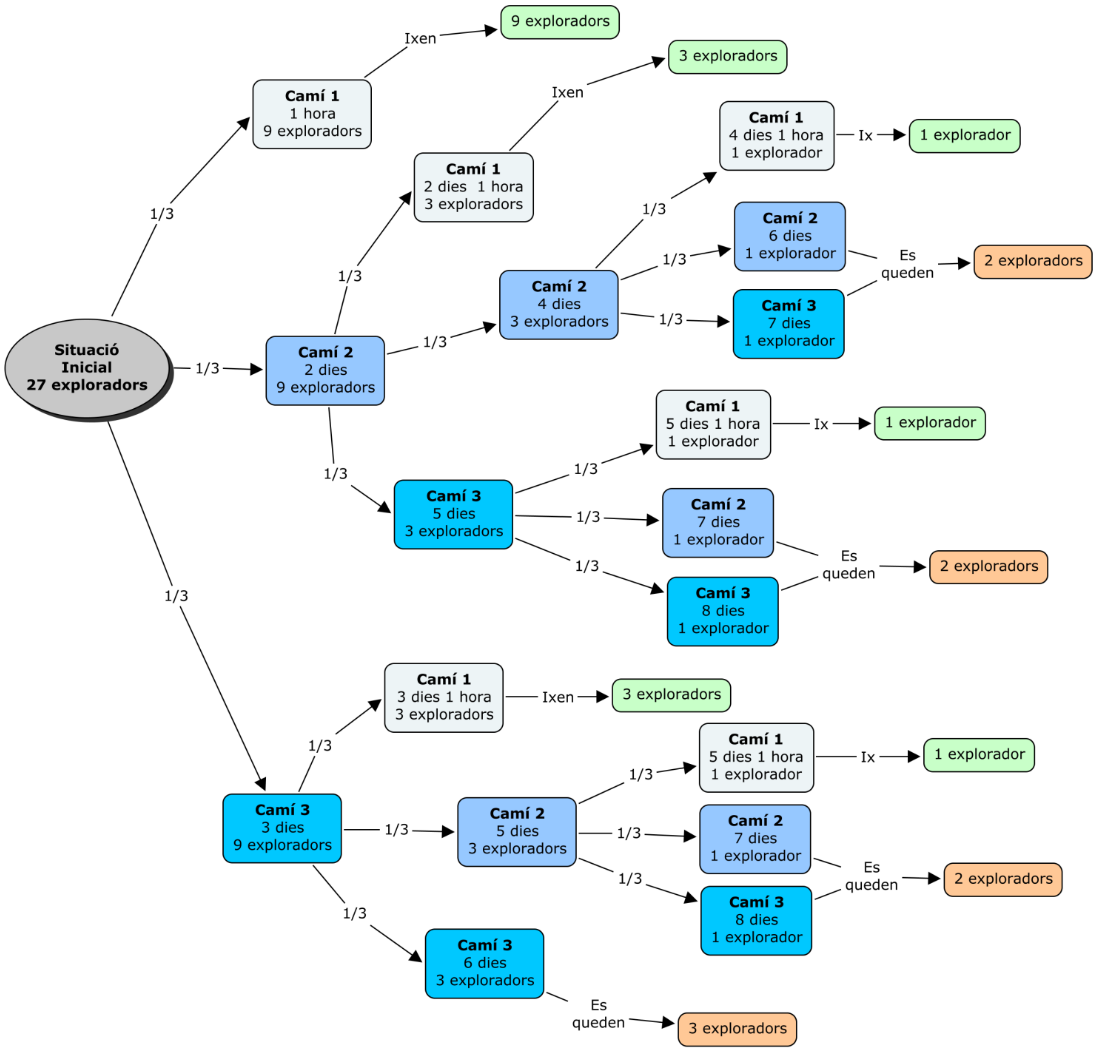


Figura 3 - Diagrama d'arbre associat al Problema 2

Taula 1 - Taula d'itineraris amb la relació d'exploradors que hi passen

Itineraris amb sortida	Exploradors que hi surten	Itineraris sense sortida	Exploradors que no surten
(1,0,0)	9	(2,2,2)	1
(2,1,0)	3	(2,2,3)	1
(2,2,1)	1	(2,3,2)	1
(2,3,1)	1	(2,3,3)	1
(3,1,0)	3	(3,2,2)	1
(3,2,1)	1	(3,2,3)	1
		(3,3,0)	3
Total	18		9

Llavors queda clar que el nombre d'exploradors que aconseguiran eixir de a cova sota aquestes condicions serà 18, el que suposa una probabilitat teòrica d'eixir de la cova abans no s'acabe el menjar de $\frac{2}{3}$.

4.1.3 EL PROBLEMA DE LES VESPES

Un bon dia arribem a l'aula pel matí i ens trobem una petita sorpresa, tres vespes estan voltant per dins de l'aula. Un company corre a obrir la finestra per deixar que puguen eixir totes soles de l'aula.

Amb la finestra oberta, cada minut, una de les vespes i de forma aleatòria decideix creuar per la finestra. Quin serà el temps que caldrà esperar per terme mig per que totes les vespes es troben fora i puguem tancar la finestra i continuar amb la classe?

Problema 3 - El problema de les vespes (Huerta, 2013)

Aquest és altre problema que ens meravella per la simplicitat del seu enunciat, 3 vespes, 2 habitacles i 1 minut per transició. No obstant això, el problema té una solució que requereix que en fem ús altra vegada de les cadenes de Markov, donat que es tracta d'un procés estocàstic infinit.

Si considerem el nombre de vespes que queden dins de l'aula a cada moment hi podem distingir 4 estats:

E_1 = Queden 3 vespes.
E_2 = Queden 2 vespes.
E_3 = Queda 1 vespes.
E_4 =Han eixit totes les vespes.

Cal considerar que la vespa que ha eixit pot tornar a entrar, per aquest motiu és que es tracta d'un procés infinit. La probabilitat de què una determinada vespa creue, i no cap altra, és de $\frac{1}{3}$ donat que hi passa una de tres que hi ha. Partim de l'E_1 que anomenarem l'estat inicial, tot i que en un moment donat podem tornar a ell, i l'E_4 serà l'estat absorbent. Tenint en compte aquests fets podem construir un grafo on es mostren els diferents estats i les probabilitats de transició cap als estats contigus, de tal manera que des de l'estat inicial la probabilitat d'arribar a l'E_2 és 1, però una vegada en l'E_2 podem tornar a l'estat inicial o arribar a l'E_3, la cosa continua fins que s'arriba a l'E_4, on es deté el procés estocàstic.

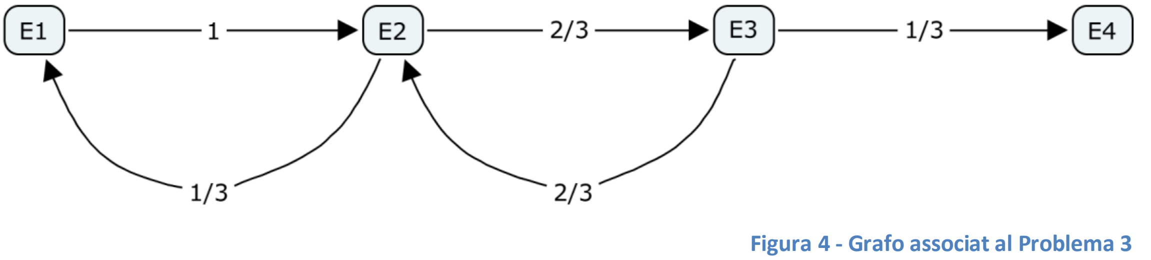


Figura 4 - Grafo associat al Problema 3

Emprant les regles del valor mitjà (Engel, 1975a) emprades al Problema 1, podem escriure un conjunt d'equacions que tindran per incògnites el nombre esperat de moviments per aconseguir arribar des d'un determinat estat fins a l'estat absorbent. Així doncs, anomenem m_i al nombre esperat de moviments que calen per arribar des de l'E_i fins a l'E_4, i ara podem escriure un sistema d'equacions que ens portarà cap a la solució del problema, m_1, tenint en compte que el nombre de moviments m_4 serà igual a 0 donat que quan ens trobem a l'E_4 ja es troben totes les vespes fora i podem tancar la finestra per tal de detindre el procés estocàstic.

$$m_3 = 1 + \frac{1}{3}\, m_4 + \frac{2}{3}\, m_2$$

$$m_2 = 1 + \frac{2}{3}\, m_3 + \frac{1}{3}\, m_1$$

$$m_1 = 1 + m_2$$

Equació 2 - Sistema d'equacions associat al Problema 3

Les solucions d'aquest sistema són $m_3 = 7$, $m_2 = 9$ i $m_1 = 10$. Per tant, el temps que caldrà esperar per tal de trobar l'aula buida serà de 10 minuts quan tenim les tres vespes dins, de 9 minuts si ja hi ha una fora i de 7 minuts si sols en queda una dins.

4.1.4 EL PROBLEMA DELS CASAMENTS

En un país molt estrany, quan una persona compleix els 18 anys sol·licita autorització per casar-se. El jutge de pau li proporciona sis trossos de corda iguals que agafa amb la ma per la meitat de tots ells de manera que per cada costat del puny ixen els sis extrems de les cordes.

A cada costat del puny nuga tots els extrems per parelles triant a l'atzar. Si amb això aconsegueix formar un únic bucle tancat rep autorització per casar-se. Si no ho aconsegueix, repeteix l'experiència un any després.

¿Quina és la probabilitat d'aconseguir el permís del jutge de pau? ¿Quina és la probabilitat que una persona no aconseguisca autorització en sis anys seguits?

Problema 4 – Adaptació del problema dels casaments en Engel (1975b)

Aquest és tal vegada el problema que presenta una major complexitat de tots els de la proposta, però permet fer experimentació a l'aula, amb els altres només ens podíem plantejar fer simulació. Per tal de donar resposta a aquest problema cal primer esbrinar quin és el nombre total de combinacions que es poden fer al lligar les 6 cordes per parelles i a cada costat del puny. Cal fer notar que en considerar sols els nusos que cal fer a un dels costats es suficient, donat que si variem la combinació de nusos i moguem les cordes podem arribar a una solució equivalent. Tal vegada la imatge següent ajude a entendre aquesta idea.

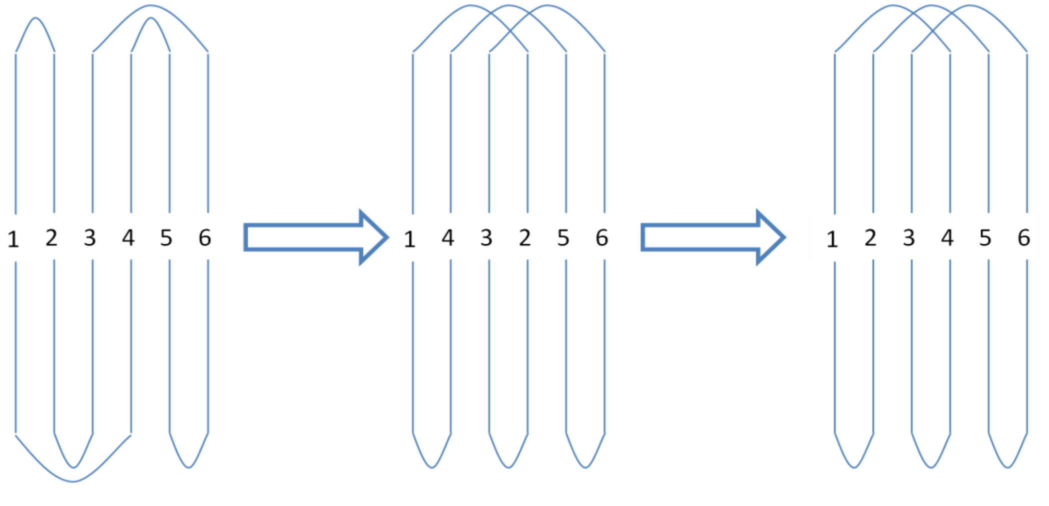


Figura 5 - Reorganització de les cordes del Problema 4

A la figura anterior es pot veure com les 6 cordes, nugades de forma aleatòria en un primer moment, s'han reordenat fins a veure per davall les cordes nugades cadascuna amb la del seu costat, després sols cal tornar a numerar les cordes i obtenim una combinació concreta de les cordes de baix. Llavors, es pot portar qualsevol combinació a una canònica on sols cal tenir en compte els nusos que se'n fan a la part de dalt del puny. En el context del problema, seria com si la persona que anara a demanar el permís es trobara amb la situació d'haver de triar els nusos a la part de dalt i prou, donat que les cordes que pengen per baix ja estan nugades.

Aquest raonament ens permet considerar sols les combinacions de la banda de dalt, que en són moltes menys, i a més ens hi permet establir un codi numèric en forma de vector per determinar de manera més ràpida els nusos corresponents. Llavors anem a procedir a escriure els vectors de totes les possibles combinacions de nusos que es poden fer de manera ordenada.

(1,2;3,4;5,6)	(1,3;2,4;5,6)	(1,4;2,3;5,6)	(1,5;2,3;4,6)	(1,6;2,3;4,5)
(1,2;3,5;4,6)	(1,3;2,5;4,6)	(1,4;2,5;3,6)	(1,5;2,4;3,6)	(1,6;2,4;3,5)
(1,2;3,6;4,5)	(1,3;2,6;4,5)	(1,4;2,6;3,5)	(1,5;2,6;3,4)	(1,6;2,5;3,4)

Aquest codi s'associa a una forma de fer els nusos de la següent manera, si agafem el vector (1,4;2,5;3,6), per exemple, la informació que ens dona és que hem nugat la corda 1 amb la 4, la 2 amb la 5 i les dues que queden entre elles, 3 i 6.

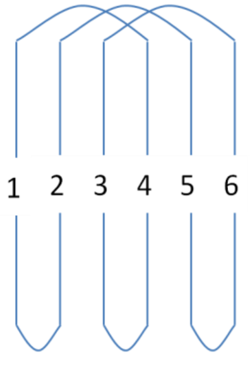
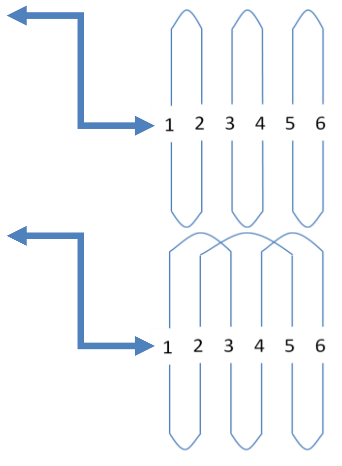


Figura 6 - Representació del vector (1,4;2,5;3,6)

Determinar quins d'aquestos formaran un únic bucle no és massa costos, tenint en compte com han estat nugats baix, de forma canònica, formarà un únic bucle sempre que no es forme un bucle menut, i això esdevindrà si alguna de les parelles nugades són (1,2), (3,4) o (5,6).

Taula 2 - Relació de nusos, bucles i permís del Problema 4

Combinació	*Nombre de bucles*	*Obté el permís?*
(1,2;3,4;5,6)	3	No
(1,2;3,5;4,6)	2	No
(1,2;3,6;4,5)	2	No
(1,3;2,4;5,6)	2	No
(1,3;2,5;4,6)	1	Si
(1,3;2,6;4,5)	1	Si
(1,4;2,3;5,6)	2	No
(1,4;2,5;3,6)	1	Si
(1,4;2,6;3,5)	1	Si
(1,5;2,3;4,6)	2	No
(1,5;2,4;3,6)	1	Si
(1,5;2,6;3,4)	1	Si
(1,6;2,3;4,5)	2	No
(1,6;2,4;3,5)	1	Si
(1,6;2,5;3,4)	1	Si



Ara ja tenim prou informació per a respondre a la primera pregunta. Fent un recompte de les dades de la taula anterior vegem que hi ha un total de 15 combinacions de nusos diferents i que en 8 d'elles s'aconsegueix un únic bucle, i per tant el permís. Aleshores, fent l'assignació corresponent, la probabilitat d'obtenir el permís cada vegada que fas l'intent és $\frac{8}{15}$.

Per respondre a la següent pregunta del problema, quina és la probabilitat de no obtenir el permís en 6 anys, hem de resoldre un problema de càlcul de probabilitats. Tenint en compte que la probabilitat de no aconseguir el permís cada vegada que hi fa un intent és de $\frac{7}{15}$, i que no ha d'aconseguir-lo en 6 anys seguits, el resultat serà multiplicar aquesta probabilitat per ella mateixa 6 vegades, és a dir:

$$\left(\frac{7}{15}\right)^6 = \frac{117649}{11390625} \cong 0{,}010329$$

Per tant aquesta probabilitat és un poc major que l'1%, el que vol dir que aquest succés és d'esperar que li ocorrega a aproximadament 1 de cada 100 persones que hi sol·liciten el permís.

4.2 ELABORACIÓ I INTERVENCIÓ DE LA PROPOSTA PRÈVIA A L'ELABORACIÓ DE LA UNITAT DIDÀCTICA

Com s'ha dit anteriorment, per tal de poder elaborar amb major projecció la unitat didàctica que es vol abordar, s'ha elaborat una proposta prèvia amb el Problema 1 que es va passar a un grup experimental de cinc alumnes d'altre grup de sisé de l'escola on s'han fet les proves. El grup amb qui s'ha fet la prova tenia unes característiques en comú, tots ells eren alumnes obedients i treballadors i que, per tant, obtenien bons resultats. L'elecció dels alumnes que formaren part d'aquesta primera experiència fou cosa del seu tutor, els hi va escollir precisament per ser treballadors i poder recuperar sense problemes les dues classes de castellà que van haver de perdre en el desenvolupament de la proposta.

L'objectiu de la proposta ha estat fer un primer estudi exploratori per veure si la proposta és viable per a la mostra d'estudiants per a la que s'hi dirigia, per comprovar si els alumnes estan realment capacitats per enfrontar-se a problemes d'aquestes característiques i, a més, esbrinar la duració del desenvolupament d'aquesta per tal de poder establir la temporalització correcta de la unitat didàctica.

4.2.1 DISSENY DE LA PROPOSTA PRÈVIA PER ALS ESTUDIANTS

La proposta prèvia, en el format en què serà presentada als estudiants, es pot veure als documents annexos.

4.3 DESENVOLUPAMENT DE LA UNITAT DIDÀCTICA

4.3.1 OBJECTIUS DE LA UD

4.3.1.1 Objectius generals

En un principi, la UD pretén que els alumnes treballen d'una manera diferent a la que estan acostumats, deixant el llibre de text de costat i incitant-los a la reflexió i a l'anàlisi, al desenvolupament d'un esperit crític. D'altra banda, també es pretén introduir una nova metodologia de treball per a tractar els temes de probabilitat i estadística a través de la simulació.

També és un objectiu de la unitat aconseguir que el comportament dels alumnes i la seua actitud a classe milloren, i per fer-ho es tractarà de millorar la afinitat per l'assignatura amb aquest nou recurs, la simulació, i també es tractarà de construir una UD que els hi entretinga i els mantinga atents i ocupats.

Segons el Decret 111/2007 pel qual s'estableix el currículum d'Educació Primària de la Comunitat Valenciana, podem trobar un llistat d'objectius de l'àrea de les Matemàtiques dels quals es treballaran els següents a la UD:

1. Utilitzar el coneixement matemàtic per a comprendre, valorar i produir informacions i missatges sobre fets i situacions de la vida quotidiana, i reconéixer el seu caràcter instrumental per a altres camps de coneixement.
2. Reconéixer situacions del seu medi habitual per a la comprensió o el tractament de les quals es requerisquen operacions elementals de càlcul, formular-les per mitjà de formes senzilles d'expressió matemàtica o resoldre-les utilitzant els algoritmes corresponents, valorar el sentit dels resultats i explicar oralment i per escrit els processos seguits.
3. Apreciar el paper de les matemàtiques en la vida quotidiana, disfrutar amb el seu ús i reconéixer el valor d'actituds com l'exploració de distintes alternatives, la conveniència de la precisió o la perseverança en la busca de solucions, i l'esforç i interés pel seu aprenentatge.
4. Conéixer, valorar i adquirir seguretat en les pròpies habilitats matemàtiques per a afrontar situacions diverses, que permeten disfrutar dels aspectes creatius, estètics o utilitaris i confiar en les seues possibilitats d'ús.

5. Elaborar i utilitzar instruments i estratègies personals de càlcul mental i mesura, així com procediments d'orientació espacial, en contextos de resolució de problemes, i decidir, en cada cas, els avantatges del seu ús i valorar-ne la coherència dels resultats.
9. Utilitzar tècniques elementals d'arreplegada de dades per a obtindre informació sobre fenòmens i situacions del seu entorn; representar-la de forma gràfica i numèrica i formar-se'n un juí.
10. Resoldre i plantejar problemes matemàtics usant un llenguatge correcte i els procediments adequats de càlcul, mesura, estimació i comprovació de resultats.
12. Emprar adequadament el llenguatge matemàtic per a identificar relacions i conceptes apresos i per a comprendre i anomenar-ne uns altres de nous.
13. Fomentar la utilització del llenguatge propi del camp científic amb precisió, tant de les Matemàtiques com del conjunt de les ciències.
14. Comprendre la necessitat de l'argumentació per mitjà de raonaments lògics en l'estudi de les Matemàtiques.
15. Desenvolupar estratègies de comprensió lectora en els missatges transmesos pels textos escrits utilitzats en l'àrea.
16. Utilitzar un llenguatge correcte, amb el vocabulari específic de les matemàtiques, en l'exposició i la resolució de problemes.

4.3.1.2 Objectius específics

Dintre de la UD i en el context del bloc corresponent a l'estadística i la probabilitat, el bloc 4, es desenvoluparan els següents objectius didàctics:

- Valorar la utilitat de l'organització en taules per facilitar l'estudi de les dades recollides.
- Valorar l'estadística com a eina per a la descripció i l'anàlisi de conjunts de dades.
- Reconèixer i representar els conjunts de dades estadístiques en gràfics de barres.
- Calcular i interpretar les freqüències absolutes i relatives, la moda i la mitjana aritmètica.
- Apreciar la pulcritud en la presentació dels càlculs i els resultats així com en la representació de gràfics.

- Determinar el grau de probabilitat de fenòmens aleatoris i escriure probabilitats en forma de fracció.
- Reconèixer jocs d'atzar i distingir entre els resultats possibles com esdeveniments segurs, probables i impossibles.
- Reconèixer i treballar adequadament amb diferents generadors d'atzar com el dau o la taula de nombres aleatoris.
- Valorar la simulació com a eina per a recollir dades fiables amb les que poder aplicar l'estadística.

4.3.2 CONTINGUTS ESPECÍFICS DE LA UNITAT

4.3.2.1 Relació amb els continguts del currículum

Taula 3 - Taula de continguts de la UD

Segons el curriculum	*Continguts propis*	*On trobar-los*
Generals:		
- Capacitat per formular raonaments i per argumentar sobre la validesa d'una solució, identificant, si escau, els errors.	- Raonar sobre les solucions pròpies i dels companys.	El raonament s'empra al llarg de tota la UD.
- Utilització del mesurament i les mesures per resoldre problemes, comprendre i transmetre informacions.	- Emprar mesures de temps i d'edat en la resolució de problemes.	Les tres propostes empren mesures de temps en el càlcul.
- Disposició a l'elaboració i presentació de gràfics i taules de forma ordenada i clara.	- Classificació de les dades recollides en taules. - Representació gràfica de les dades mitjançant gràfics de barres.	La classificació en taules es du a terme als apartats de *Procés de resolució* i *Anàlisi estadístic.* La representació de gràfics es troba a l'última activitat de les dues primeres propostes.
- Obtenció i utilització d'informació per a la realització de gràfics.		
- Valoració de la necessitat de reflexió, raonament i perseverança per superar les dificultats implícites en la resolució de problemes.		Estos continguts es treballen de manera constant a tota la UD.
- Confiança en les pròpies possibilitats i interès per utilitzar les eines tecnològiques en la comprensió dels continguts funcionals.	- Confiança en les pròpies possibilitats per a resoldre els problemes.	
- Col·laboració activa i responsable en el treball en equip, manifestant iniciatives per a resoldre problemes que impliquen l'aplicació dels continguts estudiats.	- Participació en el treball en equip i a l'aula de manera responsable.	

<table>
<tr><th colspan="3">Bloc 4. Tractament de la informació, atzar i probabilitat
Gràfics i paràmetres estadístics</th></tr>
<tr><td>- Recollida i classificació de dades qualitatives i quantitatives.</td><td>- Recollida de dades mitjançant diferents processos de simulació.
- Classificació de les dades recollides en taules.</td><td>Estos continguts es treballen a les tres propostes a l’apartat de Procés de resolució.</td></tr>
<tr><td>- Construcció de taules de freqüències absolutes i relatives.</td><td>- Càlcul de les freqüències absolutes i relatives del fenomen estudiat.
- L’ús de les taules en el càlcul de les freqüències.</td><td rowspan="2">Estos continguts es treballen a les tres propostes a l’apartat de Anàlisi estadístic.</td></tr>
<tr><td>- Iniciació intuïtiva a les mesures de centralització: la mitjana aritmètica, la moda i el rang. Aplicació a situacions familiars.</td><td>- Obtenció de la moda i la mitjana aritmètica.</td></tr>
<tr><td>- Realització i interpretació de gràfics senzills: diagrames de barres, poligonals i sectorials.</td><td rowspan="2">- Representació gràfica de les dades mitjançant gràfics de barres.
- Localització dels estadístics de centralització als gràfics corresponents.</td><td rowspan="2">La representació de gràfics es troba a l’última activitat de les dues primeres propostes.</td></tr>
<tr><td>- Anàlisi crítica de les informacions que es presenten mitjançant gràfics estadístics.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Caràcter aleatori d'algunes experiències</td></tr>
<tr><td>- Els experiments on els resultats depenen de la sort: experiments aleatoris.</td><td>- Tipus de successos aleatoris.
- Estimació i càlcul de la probabilitat d’esdeveniments simples.
- Ús de generadors d’atzar.</td><td>Els tipus de successos i les estimacions sempre es realitzaran a l’apartat d’Anàlisi del problema. L’ús de generadors d’atzar em el del Procés de resolució.</td></tr>
<tr><td>- Iniciació intuïtiva al càlcul de la probabilitat d'un succés en experiments realitzats per l'alumnat.</td><td>- Càlcul de probabilitats per associació i per experimentació.
- Càlcul de la esperança.</td><td>El càlcul de probabilitat i de l’esperança a que fa referència es troba a Anàlisi estadístic.</td></tr>
</table>

4.3.3 RELACIÓ DE LA UD AMB LES COMPETÈNCIES BÀSIQUES

Les diferents competències bàsiques, que els alumnes han d'adquirir segons el currículum de primària, també han estat contemplades en el desenvolupament de la UD fent les següents aportacions:

Taula 4 - Taula de competències bàsiques de la UD

Competència Matemàtica	- Aquesta es treballa de manera explicita al llarg de la UD.
Coneixement i interacció amb el món físic	- Aplicar sistemes de numeració i procediments de mesura de magnituds del món físic.
Tractament de la informació i competència digital	- Organitzar la informació en taules i gràfics. - Emprar traducció entre codis numèrics i gràfics.
Autonomia i iniciativa personal	- Resoldre un problema relacionant les dades. - Comparar i valorar dades i resultats. - Dissenyar estratègies de resolució i sistematització.
Competència per aprendre a aprendre	- Desenvolupament de la capacitat d'esforç en activitats complexes. - Comprovació de les solucions obtingudes.
Competència en comunicació lingüística	- Comprensió dels enunciats dels problemes i de les activitats.
Competència cultural i artística	- Desenvolupar estratègies creatives de càlcul mental o de sistematització. - Dibuixar gràfics mitjançant dades proporcionades aplicant la creativitat personal.
Competència social i ciutadana	- Argumentar els propis punts de vista davant les afirmacions dels altres en la resolució dels exercicis.

4.3.4 FONAMENTS

4.3.4.1 Anàlisi formal dels continguts

Tot i que la UD es troba dins d'un únic bloc de continguts al currículum en realitat cal distingir dos grans blocs de continguts des del coneixement matemàtic, que tot i anar lligats es troben separats: la probabilitat i l'estadística.

Pel que fa a la probabilitat, en el context de les diferents propostes és el motor global, donat que els problemes que es presenten són realment de càlcul de probabilitats. No obstant, donat que el nivell de les matemàtiques que donen solució a aquestos problemes supera per molt el nivell de l'educació primària, com s'ha pogut veure a la resolució teòrica, es planteja donar a l'alumne les ferramentes que es troben al seu abast per tal de donar una solució aproximada del problema, i aquestes ferramentes utilitzen l'estadística.

L'estructura de les tres propostes de la UD és semblant. Primer comença l'anàlisi del problema, deixant clar que es tracta de problemes que venen determinats per experiments aleatoris, aquells que no estan determinats, que no venen lligats per la denominada llei de causa i efecte. Dintre d'aquest món de la incertesa els farem reflexionar sobre la seguretat o impossibilitat de diversos successos, determinant quina es la natura de l'aleatorietat.

Pel que fa a l'assignació de la probabilitat d'un succés, cal distingir-ne tres tipus. L'assignació subjectiva que en farà l'alumne, tal vegada una aproximació més qualitativa que no quantitativa del concepte de probabilitat emprant els termes molt o poc o les comparacions. L'assignació experimental, quan es realitza un experiment moltes vegades i se'n fa un recompte dels resultats ens podem fer una idea aproximada de la probabilitat que té d'ocórrer un determinat succés, aquesta assignació correspondrà amb la raó entre el nombre de vegades que ocorre un succés i el nombre total d'experiments realitzats. I per últim, l'assignació teòrica, la regla de càlcul definida per Laplace es pot aplicar a les experiències aleatòries que tenen un nombre determinat de successos elementals equiprobables, llavors la probabilitat teòrica de cada succés és l'invers del nombre d'aquestos successos, i en el cas de ser un succés compost es pot determinar per la raó entre els casos favorables i els casos possibles. Donat que la probabilitat experimental depén dels experiments realitzats pot variar d'un a altre, mentre que la probabilitat teòrica és sempre constant. No obstant, la Llei dels Grans Nombres ens garanteix que la probabilitat de que la probabilitat experimental s'aproxime a la probabilitat teòrica puja a mesura que augmentem el nombre d'experiments, i aquest es el principi que ens permet parlar de la simulació.

El món de les matemàtiques i de la ciència actual, en la vesant de la recerca, tracta de donar solució al càlcul de probabilitats de problemes dels quals fer un càlcul teòric és costós o impossible. En aquestos casos, en canvi, la simulació a través de superordinadors que són capaços de fer milers de milions de operacions per segon ens porten a un món on la solució experimental s'aproxima ràpidament a la solució teòrica dels problemes. Llavors, entenem que la resolució de problemes per simulació és un procés pel qual es transforma el problema donat en un equivalent, de manera que, fent servir algun generador d'atzar i la Llei dels Grans Nombres, aconseguim apropar-nos tant com vulguem a la solució teòrica, suposant que disposem del suficient temps o de les eines de càlcul adequades. Dintre d'una aula no es pot aconseguir el nivell de precisió que caldria per dir que la solució es prou bona, però si que podem emprar aquest mètode per a desenvolupar una proposta rica en contextualització i ús de diferents eines matemàtiques.

Una de les eines que als xiquets tant agrada d'aquesta UD, tot i que en desconeixen l'autèntic potencial, són els generadors d'atzar, daus, ruletes, taules de nombres aleatoris, etc. Entenem com a generador d'atzar qualsevol instrument o mètode que ens garanteix una resposta que depén completament de l'atzar. Quan som capaços de controlar el conjunt de respostes del generador d'atzar i en fem l'estadística corresponent podrem emprar-lo per fer la simulació corresponent.

Ara que ja tenim clar el que és un generador d'atzar sols ens queda enregistrar les dades que aquest ens dona. Si a continuació fem el recompte de les vegades que ocorre un succés n'obtindrem la freqüència absoluta, i si aquesta la posem en relació en el total d'experiments realitzats tindrem la freqüència relativa, que determinarà la probabilitat experimental del succés en qüestió.

Per tal d'obtenir una major informació dels valors de la mostra podem aplicar-hi estadístics de centralització, la moda serà aquell valor que més es repeteix, aquest estadístic sobretot te paper en l'estudi de variables qualitatives on no es pot fer la mitjana aritmètica. La mitjana aritmètica, que s'aplicarà sols en estudis quantitatius, es pot treballar a primària com el repartiment equitatiu de tots els valors de la variable a analitzar, és un paràmetre estadístic associat a un conjunt de dades numèriques que s'obté sumant els valors de totes les dades i dividint-lo pel nombre d'elements del conjunt.

Aquesta mitjana aritmètica, quan estudiem les possibles respostes a la pregunta dels problemes plantejats, ens proporcionarà el valor mitja de tots ells, i per tant el valor esperat. Entendrem, doncs, com esperança matemàtica a aquest valor.

Per últim, com a introducció a la representació gràfica emprarem un dels gràfic més utilitzats als mitjans de comunicació, el gràfic de barres. Es tracta d'una representació bidimensional amb dos eixos on s'hi representen respectivament els valors de la variable i el rang de freqüències, a continuació es situa sobre cada valor una barra de longitud variable que representa la freqüència absoluta d'aquest valor.

4.3.4.2 Anàlisi de l'estructura conceptual als llibres de text escolars

Si fem una anàlisi del llibre de text que porten treballant els alumnes d'aquest curs durant tot l'any, podem observar una UD de probabilitat i estadística contextualitzada en el món de l'esport. L'estadística es fa amb les dades de diferents marques esportives, pot parèixer que és l'única cosa amb la que fer estadística, donat que no s'explica el concepte en altres contextos, però si ens fixem en les activitats proposades si que podem observar que s'empren altres contextos que tal vegada puguen ser més propers a l'alumnat, enquestes sobre menjar preferit, sabors d'una fàbrica de gelat, etc. En el cas de la probabilitat vegem que el llibre trenca totalment el context, la probabilitat, dintre del mateix tema que l'estadística, es una cosa totalment diferent i que no es pot lligar a cap context tret del propi de la probabilitat, boles de colors, ruletes i daus.

Ens hem de fixar també en que tots els conceptes s'expliquen per separat, sense establir cap relació entre ells. Hi ha un apartat individual per a cada concepte on s'explica què és i per a què serveix, es fan una sèrie d'activitats al voltant d'aquest concepte i ja no es torna a veure en la resta del tema. Es treballen llavors els següents continguts:

- Gràfics de línies, de barres i de sectors.
- Freqüència absoluta i relativa. Moda.
- Mitjana aritmètica.
- Jocs d'atzar i probabilitat.
- Expressió de la probabilitat amb fraccions, decimals i percentatges.
- Diagrama d'arbre.

4.3.5 CONTEXTUALITZACIÓ DE LA UD EN EL NIVELL EDUCATIU A QUÈ ES REFEREIX

4.3.5.1 Localització temporal de la UD

La UD anirà localitzada en el tercer trimestre, després d'haver fet les unitats corresponents a mesura de magnituds de longitud, superfície, capacitat i volum. En la programació d'aula de la professora era l'últim tema que es donaria i per aquest motiu sabia segur que en arribar allí no hauria estat treballat encara, llavors varem haver de modificar la programació d'aula per deixar darrere de la nostra UD els temes corresponents a geometria de mesura d'angles i el de les figures planes. Donat que són temes relativament desconnectats no va suposar cap impediment.

4.3.5.2 Coneixements previs dels estudiants

Els estudiants de sisé de primària, segons el curriculum ja deurien d'haver treballat conceptes de probabilitat i estadística a un nivell intuïtiu i amb tècniques o eines més elementals. Si observem el currículum veurem que el xiquets hauran treballat els següents continguts al llarg de primària:

Taula 5 - Continguts de probabilitat i estadística del 1r i 2n cicle de primària

Primer Cicle	Segon Cicle
Bloc 4. Tractament de la informació, atzar i probabilitat	
Gràfics estadístics	Gràfics i taules
- Descripció verbal, obtenció d'informació qualitativa i interpretació d'elements significatius de gràfics senzills relatius a fenòmens pròxims.	- Arreplega i registre de dades sobre objectes, fenòmens i situacions familiars utilitzant tècniques elementals d'enquesta, observació i mesurament.
- Utilització de tècniques elementals per a l'arreplega i ordenació de dades en contextos familiars i pròxims.	- Lectura, interpretació i elaboració de taules de doble entrada d'ús habitual en la vida quotidiana.
	- Construcció de taules de freqüències absolutes.
	- Interpretació i descripció verbal d'elements significatius de gràfics senzills relatius a fenòmens familiars.

	- Realització de gràfiques senzilles: pictogrames, diagrames de barres.
	- Disposició a l'elaboració i presentació de gràfics i taules de forma ordenada i clara.
Caràcter aleatori d'algunes experiències	
- Experiències el resultat de les quals depén de l'atzar. Utilització, en el llenguatge habitual, d'expressions relacionades amb la probabilitat.	- Valoració dels resultats d'experiències en què intervé l'atzar, per a apreciar que hi ha successos més o menys probable i la impossibilitat de predir un resultat concret.
	- Introducció al llenguatge de l'atzar.

Per tant els alumnes deuen d'estar familiaritzats amb el llenguatge i els continguts que anem a treballar. Si fem una ullada als continguts que varen treballar l'any anterior, en cinqué, amb el llibre corresponent de la mateixa editorial, veurem que els alumnes varen treballar els continguts següents:

- Freqüència, moda i mitjana aritmètica.
- Gràfics de barres, de línies i circulars.
- Probabilitat i fraccions.

A l'hora de desenvolupar la UD corresponent tindrem en compte tot el que els alumnes han estudiat i deurien de conèixer, és per això que plantejarem una UD on es partisca de les idees prèvies dels alumnes per al desenvolupament de les propostes, sols intervindrem quan siga necessari fent preguntes oportunes per a que els alumnes hi reflexionen i puguen desenvolupar els nous continguts.

4.3.6 PROPOSTA D'ACTIVITATS PER ALS ESTUDIANTS

La UD s'estructura en un total de tres propostes[7] que porten per títol el nom del problema que les originen. Cada proposta naix de la lectura d'un problema de probabilitat amb un resolució teòrica fora de l'abast dels alumnes de primària com s'ha comprovat anteriorment, estos problemes seran el pretext per a l'elaboració de la resta de la proposta emprant eines d'estadística i probabilitat que el currículum de primària estableix per a alumnes del tercer cicle de primària i seguint el plantejament i les idees de Polya (1973) sobre la resolució de problemes.

En cada proposta es poden distingir tres apartats. Al primer es proposa fer una anàlisi del problema on l'estudiant posa de manifest els coneixements previs sobre el problema plantejat i les seues intuïcions. El segon apartat és aquell en què es realitza la simulació, contant amb la capacitat de raonament dels alumnes per desenvolupar la manera més adequada de fer-ho, i portant a terme la simulació i el corresponent registre de dades. Per últim es proposa una anàlisi estadístic de les dades recollides amb l'objectiu de donar la resposta, o respostes, al plantejament inicial del problema.

Les propostes tenen durades d'aplicació diferent, les dues primeres propostes estan preparades per a poder treballar-les en un total de dues sessions cadascuna, deixant per a casa l'activitat de la realització del gràfic, l'última proposta, degut al major volum de treball i a la dedicació d'una sessió a l'experimentació, tindrà un volum total de quatre sessions. En total es desenvolupen vuit sessions.

4.3.7 METODOLOGIA A EMPRAR

4.3.7.1 Orientacions generals

Tenint en compte que la UD ha estat dissenyada per a complir l'objectiu del TFG, per abordar la observació sobre el comportament dels alumnes front a la simulació coma nova eina per a l'aprenentatge de la probabilitat i l'estadística, l'objectiu es deixar que els alumnes comenten tot allò que els vinga en gana referent a la resolució de les activitats que tindran al davant.

Amb açò, les tres propostes tindran un patró d'actuació semblant. El primer serà repartir els fulls del problema a cada alumne perquè puguen fer les anotacions

[7] Veure annexos corresponents a les propostes desenvolupades per als estudiants.

oportunes i seguir la classe. Deixarem que els propis alumnes s'encarreguen de fer totes les intervencions possibles, llavors serà necessari establir un torn de paraula i anar fent de guia. Farem la lectura dels problemes i de totes les activitats en veu alta i tractarem d'aclarir els possibles dubtes, sempre deixant actuar primer als alumnes que pensen que sàpiguen resoldre'ls i animant a la participació. El dubtes més grossos o aquelles activitats que ho necessiten es faran a la pissarra fent eixir a algun voluntari.

Caldrà deixar sempre un temps per a que els alumnes puguen escriure les seues respostes i en acabant en llegirem algunes per que tota la classe veja i comente els resultats dels companys. Haurem de prestar atenció als comentaris erronis i no criticar-los, cal reforçar la voluntat de esforç i no estigmatitzar l'error. El que sí que hem de fer en tot moment és plantejar els interrogants oportuns que puguen fer als alumnes reflexionar i profunditzar en els seus pensaments.

Durant les activitats de simulació caldrà deixar un temps prudencial, prestar atenció individual a l'alumnat amb dificultats i tractar de localitzar els possibles errors que trobem, caldrà insistir també en la importància de realitzar correctament els experiments aleatoris i anotar només aquells resultats que siguen completament aleatoris perquè sinó els resultats no seran correctes. En aquest punt sempre trobarem alumnes que acaben molt abans que altres, la solució serà fer que aquests acudeixen en l'ajut del que té més problemes.

En la construcció i l'anàlisi de les taules s'actuarà de manera semblant fent sempre participar a algun alumne que eixirà a fer la activitat corresponent a la pissarra.

La realització de gràfics serà una tasca per a casa perquè és una activitat que ocupa molt de temps a l'aula.

Respecte a l'atenció de l'alumne amb un ACIS, donat que aquesta es una proposta experimental i el que volem es precisament analitzar el comportament dels estudiants, no anem a fer cap adaptació especial, deixarem que hi participe com la resta d'alumnes però li dedicarem especial atenció en la realització de les activitats.

4.3.7.2 Metodologia específica de cada activitat

4.3.7.2.1 El problema de la cova

La proposta 1, el problema de la cova, serà una proposta introductòria del funcionament de la resta de propostes, els xiquets s'hauran de familiaritzar amb el mètode de treball. En la lectura del problema caldrà insistir en el segon paràgraf que diu:

> *Com que els exploradors no porten cap llum i la cova està obscura i plena d'obstacles, cada vegada que fan un intent per eixir trien a l'atzar un dels tres camins.*

És en aquest paràgraf on es justifica l'aleatorietat i la incertesa que ens permet defendre pensar en el problema en termes de probabilitat. Les possibles aportacions dels alumnes no s'han de descartar sense més, caldrà fer-los primer reflexionar sobre el conjunt de possibilitats que s'obriria si aquesta fora la forma de pensar, però al final hem de recordar-los que ens trobem en una situació d'incertesa absoluta.

La primera activitat busca que el xiquet done la seua probabilitat subjectiva del problema, que se'n faça una idea abans de començar a treballar. La segona activitat pregunta el valor mínim, però també ens permetrà jugar amb la idea de succés segur i impossible. A l'activitat 3 fem un problema d'assignació de probabilitats simple en que la probabilitat que es demana és teòrica, amb molta probabilitat els alumnes contesten amb el llenguatge "*un de tres camins*", caldrà doncs explicar als xiquets que aquesta relació que ells diuen de veu es converteix en una fracció quan parlem de probabilitat.

L'activitat 6 busca realitzar un exercici de sistematització, on els alumnes han de trobar el seu propi sistema per a contar tots els camins possibles sense deixar-ne cap, tenint en compte que agafarem un nou camí sempre que no l'explorador no haja perdut ja els 6 dies. Es recomana establir un codi en que els camins estiguen etiquetats i anar fent tots els recorreguts possibles, també és una bona estratègia emprar ací un diagrama d'arbre.

Per tal de preparar la simulació caldrà que els alumnes identifiquen com fer ús del generador d'atzar proposat, el dau que caldrà demanar-los el dia d'abans o bé tindre'n per a tots a l'aula. La cosa és fàcil quan els alumnes se'n adonen que cal assignar dos valors del dau a cada camí.

L'activitat 8 serà imprescindible treballar-la abans de començar a omplir la graella de l'activitat 9, però si algun alumne no ha sigut capaç de respondre o no ha acabat de respondre li proposarem que ho deixe córrer per a respondre ell mateix després de recollir les dades.

Després de fer-los reflexionar una mica, a l'activitat 11 es demana calcular una probabilitat experimental, primer haurem d'assegurar-nos que saben el que els hi estem demanant, després caldrà que tots els alumnes diguen les probabilitats experimentals que han obtés i que se n'adonen de que aquestes són diferents, donat que la probabilitat de que als 19 alumnes d'una classe els done el mateix resultat és pràcticament nul·la. A l'activitat 13 els estem fent arribar de manera intuïtiva a la idea que s'amaga darrere de la Llei dels Grans Nombres.

Per a l'apartat de l'anàlisi estadístic caldrà tindre en compte que no tots han aconseguit eixir, per tant s'està parlant en termes de probabilitat condicionada, donat que un explorador ha eixit de la cova, quin serà el temps mitja que tardarà a fer-ho. Caldrà fer notar als alumnes que la mostra no compta amb 27 exploradors doncs, només amb els que hagen eixit segons la seua pròpia simulació.

4.3.7.2.2 El problema de les vespes

Ara que els alumnes ja s'han familiaritzat amb la metodologia es pot treballar una mica més ràpid i es pot fer als alumnes reflexionar una mica més. La primera pregunta te com a objectiu fer que els alumnes donen la seua intuïció inicial, però en aquest cas, amb molta probabilitat, no s'hagen adonat que hi ha una frase al problema que pot fer canviar la percepció del mateix: "*Amb la finestra oberta, cada minut, una de les vespes i de forma aleatòria decideix creuar per la finestra*.". Segurament molts, per no dir tots, interpreten que la vepsa que decideix creuar és una de dins i per tant l'experiència s'acaba en exactament 3 minuts. Però en realitat pot ser la vespa que està fora la que torna a creuar, aquesta vegada cap a dins, llavors és quan entrem en el procés d'incertesa.

A l'activitat 4 tornem a demanar una probabilitat experimental i cal observar si els alumnes ja són capaços d'assignar la probabilitat com cal o encara es troben amb dificultats.

Donat que la probabilitat del succés elemental es la mateixa que en el problema de la cova, es pot emprar el mateix generador d'atzar amb un codi semblant per tal de simular l'experiència, però anem a veure primer si els xiquets són capaços de determinar algun altre procés per tal de fer-ho i hi introduirem la taula de dígits aleatoris de l'1 al 3. Caldrà explicar com emprar aquesta correctament i recordar que no podem triar nosaltres el nombre perquè si ho fem podem pecar de ser subjectius i alterar el procés aleatori, hem d'establir un mètode inicial i seguir-lo fins que acabem la simulació. Serà interessant explorar diferents mètodes per assegurar-nos que no tots segueixen el mateix, ja que si tots fan el mateix mètode obtindran els mateixos resultats.

Caldrà que els alumnes es fixen en quan hauran d'aturar el procés, és a dir, establir quan amb un codi numèric hauran determinat que les tres vespes es troben fora. Per a alumnes amb problemes els podem facilitar la tasca si preparen tres paperets numerats de l'1 al 3 i simulen el moviment de les vespes damunt d'un full, fent la distinció de dins i fora de l'aula.

Per a completar l'anàlisi estadístic, aquesta vegada anem a recollir les dades de tots els alumnes de la classe per tal de tindre una mostra més gran amb la que treballar. Açò es pot organitzar fàcilment amb dos alumnes, un que anote les dades en una taula a la pissarra i altre que vaja assenyalant i recollint les dades dels alumnes en veu alta.

Una vegada recollides totes les dades els alumnes les copiaran a la nova graella i podran fer els càlculs dels estadístics corresponents.

4.3.7.2.3 El problema dels casaments

Aquest problema s'ha quedat per al final perquè d'entre els tres problemes és l'únic que es pot experimentar emprant sis cordes tal com es diu al problema. Açò obrirà altra dimensió i mostrarà als alumnes la realitat del procés de l'experimentació i, a més, els hi mostrarà que la simulació pot ser un procés més ràpid per a obtenir dades que l'experimentació, donat que fer tots els nusos i comprovar si s'ha creat un únic bucle és una tasca costosa en temps.

Com sempre inaugurem el problema preguntant per la intuïció de l'alumne, però ara, en compte de preguntar de manera explicita pel nombre mínim i màxim d'intents que li caldrà a una persona per tal d'aconseguir el permís ho farem de manera més oberta, per veure si se n'adonen de què estem preguntant-los.

Ací deixarem tota la resta de la sessió perquè els alumnes hi experimenten amb les cordes, és important analitzar el que li passa a cadascú i per tant haurem de deixar que tots hi participen en aquesta experimentació.

En acabant els hi demanarem altra vegada la idea subjectiva de probabilitat que tenen després d'experimentar amb les cordes i insistirem en si aquesta s'ha vist modificada.

Ara, amb l'ajut de la plantilla de cordes, proposarem als alumnes comptar totes les diferents combinacions que poden fer amb les cordes a un costat de la mà, açò enceta altra vegada un procés de sistematització i altre de codificació dels resultats diferents. Caldrà indicar que per a simplificar els experiments es deixaran les cordes nugades a una banda i sols caldrà nugar a l'altra, açò ho reflexionaran a l'activitat 5.

La simulació, aquesta vegada la farem amb un dels generadors d'atzar més comuns, una bossa amb paperets. Com deia Polya (1966), tots els problemes de probabilitat es poden reproduir emprant aquest mateix mètode sempre que s'hi trien les quantitats adequades. Cal que els xiquets entenguen com es va a realitzar la simulació emprant la bossa i els paperets, i és per això que els hi fem reflexionar primer. Amb 4 extraccions de la bossa serà suficient per a determinar tots els nusos donat que es nuguen per parelles i per tant el tercer nus quedarà definit amb els dos que queden a la bossa. Alguns alumnes se n'adonaran que si una de les parelles que han de nugar són les parelles (1,2), (3,4) o (5,6) s'haurà format més d'un bucle i per tant no s'aconsegueix el permís.

A l'hora d'enregistrar les dades s'haurà de fer notar que hi ha una correlació entre el nombre d'intents i l'edat a la que s'aconsegueix el permís, però tot i això són conceptes diferents. Continuaran amb l'anàlisi de les dades com en els problemes anteriors.

Cal tindre en compte que al calcular la mitjana que es sol·licita a l'activitat 15 no s'ha resolt el problema i és per això que se'ls hi demana als alumnes de manera explicita que ho fasen a l'activitat 17 i haurem de deixar que ho fasen ells mateixa emprant com sempre les intervencions dels alumnes per tractar de resoldre l'activitat.

5 RESULTATS

A continuació anem a desenvolupar una anàlisi de les respostes dels alumnes a les diferents activitats que presenten algun interés dintre de cada proposta. Començarem fent una ullada a la proposta prèvia.

5.1 EL PROBLEMA DELS PASTISSETS

Els resultats de la posada en pràctica van mostrar una duració aproximada d'una hora i mitja de la tasca, tenint en compte que es una proposta amb menor volum de treball que les altres hi va permetre establir aproximadament i planificar la temporalització que es mostra al desenvolupament de la UD.

Pel que fa a l'actitud dels alumnes davant de la proposta, tots es van mostrar dispostos i van demostrar obertament gaudir de la proposta i de la resolució del problema fent especial èmfasi en que el que més els hi havia agradat fou justament la part corresponent a la simulació. Aquests resultats van ser prou encoratjadors per acabar de desenvolupar la resta de la unitat.

A les preguntes d'anàlisi del problema ja es veuen algunes respostes interessants. A l'activitat 1 tots han identificat de manera explicita la incertesa de l'experiència fent al·lusió a la possibilitat de trobar cromos que ja tenien.

Al preguntar pel nombre mínim de pastissets tots li confereixen una importància al 7, però alguns n'identifiquen múltiples ni no han acabat d'entendre la idea de mínim. Concretament 3 dels 5 alumnes asseguren que amb 7 és possible completar la col·lecció, però els altres 2 proposen nombres com el 14 i el 21 i ho justifiquen dient que d'aquesta forma, si en els primers 7 n'ix algun de repetit, es quasi segur que després ens surta. Aquestes idees han estat aclarides al moment sense dificultats quan s'han adonat del que significa exactament la idea de mínim, i han sigut els propis company els qui han pogut resoldre aquest conflicte.

En l'activitat següent se'ls hi pregunta pel màxim, 2 dels alumnes confonen aquest amb l'esperança i responen 21 i 24 però després indiquen que amb aquest nombre serà "quasi segur" completar la col·lecció. Els altres 3 diuen que és impossible saber el màxim però hi identifiquen la idea de procés estocàstic infinit al dir que la incertesa la produeix el no saber quans cromos poden "eixir repetits" o que "pot ser mai eixirà el que et falta". Ací cal destacar el comentari molt agut d'una alumna que explica que tot i la incertesa de l'experiment, "si compres tots els paquets de la promoció si que els tindràs tots" i açò és perquè quan contextualitzem el problema ens adonem de que realment la producció de paquets no podrà ser mai un procés infinit.

A l'hora d'identificar la simulació no tenen cap problema per a comprendre com una bossa amb boletes pot ajudar a simular el problema, i a més identifiquen clarament que les boletes han d'estar distribuïdes a la babalà i que després de cada extracció han de tornar la boleta a la bossa.

El procés de simulació, com ja s'ha dit abans, ha sigut molt satisfactori donat que els alumnes han demostrat gaudir amb l'experiència mentre feien ús del generador d'atzar i hi recollien les dades.

Al fer-los reflexionar sobre si poden respondre a la pregunta amb les dades obtingudes han mostrat diversitat d'opinions, mentre que uns reiteren que és cosa de l'atzar i no poden dir res de nou, altres responen amb les dades que els hi ha sortit, però a més són capaços de distingir que les respostes dels companys no han de ser les mateixes. No obstant, si els hi fem reflexionar sobre el que podem aconseguir augmentant el nombre de simulacions, vegem que els alumnes mostren idees semblants a la llei dels grans nombres, dient que amb més simulacions aconseguiran més respostes que giraran al voltant d'un nombre. Una alumna diu concretament: "m'aproparia més al nombre de cromos".

L'anàlisi estadístic els hi ha suposat poc d'esforç, han sigut capaços de respondre correctament i amb facilitat després de fer una parell d'explicacions. La resposta que han obtingut en fer la mitjana aritmètica de totes les simulacions fetes pels cinc ha estat 16'92. Per a haver fet les poques simulacions que s'han fet ha estat una resposta prou bona, recordem que la resposta teòrica d'aquest problema era 18'15, si les posem en relació vorem que l'error relatiu comés és aproximadament del 6'78%.

Al acabar la proposta se'ls hi va demanar per escrit la opinió al respecte i varen contestar dient que els agradà molt el problema, sobretot la part corresponent a la simulació. Un d'ells, a més, va dir que li agradà perquè va aprendre a raonar. Llavors, no hi ha cap dubte de que aquesta proposta fou un èxit.

5.2 EL PROBLEMA DE LA COVA

Aquest és el primer problema que es presenta davant del grup de classe. Va costar una mica que tots compreneren l'enunciat del problema i fou necessari fer eixir un alumne a fer algun dibuix per a poder fer una visualització gràfica de l'enunciat.

La primera activitat demanava la probabilitat subjectiva que cada alumne estimava al fet de eixir de la cova. Un ampli sector de la classe respongué que no era fàcil degut a la foscor de la cova, sols cal destacar les respostes de dos alumnes. Un va pensar que seria fàcil perquè deia que amb el menjar que tenen poden passar per tots els camins. L'altre tenia una resposta més interessant, afirma que és fàcil eixir perquè si saps que el camí que et du cap a l'exterior de la cova està sols a una hora, si has agafat un camí durant eixe temps i no has trobat la eixida ja pots fer enrere, caldria fer saber que els exploradors no saben tampoc la duració de cada camí mentre es troben a la cova.

Al preguntar pel nombre mínim d'intents hi ha una clara divisió d'opinions, un gran grup de la classe, 12 alumnes responen que sols 1 intent és necessari, la resta opten per dir que calen 3 intents, tot i que alguns especifiquen després que "si tens sort un és suficient".

Les respostes de l'activitat 3 són curioses, mostren que la preocupació dels alumnes gira en torn a la disponibilitat de menjar, no es pregunten si han eixit o no, sols es limiten a respondre si o no però fent al·lusió al menjar.

Al demanar-los respondre a l'activitat 4, un problema d'assignació de probabilitats, alguns si que eren capaços de posar en relació els dos nombres i dir un de 3, però ningú no fou capaç de donar el resultat en forma de fracció, va ser necessari introduir aquest concepte a l'aula abans de continuar.

L'activitat 5 al principi els hi paregué complicada, però van eixir alguns companya a la pissarra per a començar a establir el codi i després els costà poc acabar ells sols d'escriure tots els itineraris i identificar els que et portaven fora de la cova.

Quan introduïm el dau com a recurs per al procés de resolució no els costa identificar com assignar dues cares del dau a cada camí, establint la equivalència entre el problema original i el simulat. En total es mostren a l'aula dues formes de fer l'assignació, una assigna els nombres 1 i 2 al camí 1 mentre que l'altra hi assigna el 1 i el 4, però per evitar confusions a l'hora d'interpretar les taules dels diferents alumnes en comú en pacten una entre tota la classe per poder continuar.

L'activitat 7 sembla que és de les que ha presentat una major dificultat als alumnes donat que molts d'ells (9) l'han deixat en blanc. La resta han contestat dient que han de tirar el dau fins que els hi surta un 1 o un 2, nombres assignats al camí 1, o fins a esgotar els 6 dies,, però no han dit el que van a enregistrar, ha estat necessari començar a fer l'activitat 8 per a comprendre aquesta. Sols 2 alumnes han indicat que van a tirar el dau fins que hi aparega una de les combinacions de l'activitat 5 i després anotar-la.

En general, l'enregistrament de les dades de la simulació ha estat correcte, llevat de 3 alumnes que no han entés del tot el criteri de parada i en els casos que en els dos primers moviments arribaven a 6 dies, l'itinerari (3,3), tiraven una tercera vegada. Aquest error ha provocat que alguns registres apareguen sortides de la cova en 6 dies i 1 hora, aquesta no deuria d'haver estat enregistrada com a sortida, però llevat d'aquest contratemps, la resta ha anat bé. Alguns alumnes han acabat molt prompte i d'altres han trigat més de 15 minuts, però tots han aconseguit omplir la graella.

Els resultats obtinguts de la simulació han donat resultats al voltant del 18, el resultat teòric que hem calculat anteriorment, concretament entre 15 i 21. Aquesta experiència ha servit per a que els alumnes se n'adonen de què les respostes dels companys, amb molta probabilitat, poden ser diferents. Tampoc han tingut dificultats per fer l'assignació de probabilitats corresponent amb les dades que els hi han sortit.

Respecte a l'activitat 12, volíem comprovar si els alumnes estaven capaços d'identificar d'alguna manera la propietat que ens dona la llei dels grans nombres. En el xicotet grup si que es va aconseguir, però en el gran grup fou necessària una explicació aproximada de la idea, després la majoria van respondre emprant la paraula fiable, dient que més simulacions li donen un caràcter de major fiabilitat a la resposta. Possiblement algunes d'aquestes respostes hagen estat induïdes pel professor, però en qualsevol cas, com a primera aproximació, la fiabilitat de la resposta es un paràmetre acceptable.

Per últim, els gràfics de barres no han estat presentats per tots els alumnes, al ser una activitat per a casa molts l'han deixada de costat, els que l'han presentada ho han fet prou bé, tot i que no acaben de representar correctament els eixos i les barres no han estat totes del mateix grossor. Per ser el primer gràfic se'ls hi ha indicat els errors per tal que els hi puguen corregir al gràfic següent.

5.3 EL PROBLEMA DE LES VESPES

Aquest problema, en la posada en pràctica a l'aula, va estar contextualitzat fent al grup protagonista de l'experiència, és a dir, després de fer la lectura del problema se'ls va explicar emprant al propi grup com a subjecte de l'enunciat del problema. Aquest detall pense que ha aconseguit una major implicació per part dels alumnes a l'hora de tractar el problema.

La primera pregunta que se'ls hi proposava dir el temps que pensaven que tardaria en buidar-se l'aula, tots, sense excepció van respondre que 3 minuts eres suficients. D'una banda m'alegra que tots foren capaços de fer l'associació: 3 vespes, un minut per vespa, en total 3 minuts. Per desgracia ningú es va adonar que al problema no es diu que la vespa que ix pot tornar a entrar. Quan a l'activitat 2 se'ls hi fa reflexionar sobre aquest fet canvien completament totes les respostes, a excepció d'una alumna que continua dient que el resultat previst és que es buide la classe en 3 minuts, i altres que asseguren que açò ocorrerà en exactament 6 i 9 minuts respectivament, la resta donen respostes com "més de 3 minuts", "molts minuts" o "tarda més".

Quan preguntem pel màxim i el mínim, a l'activitat 3, amb el mínim no tenen problemes, tots asseguren que és 3, però amb el màxim canvia la cosa. Hi ha un grup d'alumnes que donen per resposta "infinit", altres diuen "no es pot saber" i un alumne diu que en el pitjor dels casos sols cal esperar fins que moren.

L'assignació de probabilitat al succés que una determinada vespa decidisca creuar, aquesta vegada no ha estat un problema, tots han segut capaços d'escriure la resposta en forma de fracció.

Per al procés de resolució se'ls fa pensar en els diversos tipus de generadors d'atzar que coneixen que poden representar aquesta situació. Les respostes de la majoria dels alumnes assenyalen que es pot usar una bossa o urna amb boles o paperets, uns quants diuen també de fer ús de la taula de nombres aleatoris, però els que ho han dit ho han fet després d'haver llegit l'activitat 6, donat que ningú no sabia el que era ni com s’havia de fer ús. Ningú no es va atrevir a respondre a l’activitat 6 fins que no se’ls va explicar el que és exactament la taula de nombres aleatoris i com fer-ne un bon ús.

Tot i això, en el transcurs de la simulació van demostrar que la taula de nombres aleatoris no pareix una bona eina per a treballar a l’aula de primària, molts alumnes, amb ganes d’acabar prompte i tenir els resultats de la simulació tiraven el camí que anaven a seguir a la taula perquè veien que en el seu itinerari anaven a acabar abans la simulació. Açò, òbviament, va afectar als resultats obtinguts d’aquesta experiència com es comprovarà a continuació. Llevat de l’abús que alguns alumnes han fet de la taula, el registre de moviments ha segut correcte, i en aparença senzill per als alumnes, i no han presentat problemes en associar el temps corresponent a cada simulació.

A l’activitat 8, quan se’ls demana que interpreten les dades que han obtés de manera individual, alguns alumnes no responen (5), en altres persisteix la idea de que després d’haver simulat no tenen cap informació ja que el procés és aleatori (3), i d’altres responen amb la moda (9). Hi ha dos alumnes que responen amb el màxim de la seua mostra.

Durant l’anàlisi estadístic es fa una mica complicat recollir les dades de tots els alumnes, va ser necessari el treball voluntari de dos companys per tal d’organitzar tota la informació. El volum de la mostra prengué una mida considerable que dificultava el treball dels alumnes, per això dedicaren prou temps a la resolució dels últims apartats, però la majoria se’n sortiren amb èxit.

La resposta que va sortir de la mostra dels alumnes fou 6’8 minuts, si recordem que la esperança teòrica era 10 minuts açò ens dona un error relatiu del 32%, probablement aquest error es degués al mal ús que alguns alumnes han fet de la taula, com s’ha indicat abans.

Aquesta vegada els gràfics presentats pels alumnes han millorat la seva qualitat, atenent a les indicacions que se’ls va donar després de corregir el gràfic anterior i han demostrat ser capaços d’interpretar la informació gràfica.

5.4 EL PROBLEMA DELS CASAMENTS

Donat que les dues primeres propostes ja han servit d'entrenament, aquesta s'ha de prendre amb major serietat i per estimular la participació dels alumnes s'hi introduirà l'experimentació amb les cordes donat que el problema ho permet.

Quan es pregunta per les seues primeres impressions hi ha diversitat d'opinions. 10 pensen que és difícil aconseguir el permís, uns expliquen que és "perquè hi ha molts nusos" i altres que "no saps el que estàs nugant". 5 asseguren que serà fàcil, però no són capaços de donar cap raonament. 1 diu que "no serà ni fàcil ni difícil, depén de la sort". Els altres no han contestat.

En l'activitat 2, després d'haver desenvolupat ja altres dos propostes s'esperava que contestaren fent referència a la informació inicia de què disposen i comenten el mínim i el màxim d'intents. Sols 7 persones han contestat com s'esperava i sols dos d'elles han contestat correctament al mínim i al màxim nombre d'intents.

En l'activitat 3 es proposa dur a terme l'experimentació, en general s'han sorprés perquè han comprovat que era molt més fàcil què no pensaven, a més, s'han divertit molt fent l'experimentació, van emprar més de mitja hora en aquesta activitat fent tots els alumnes els nusos un a un. Van comprovar també que aquesta forma és una mica lenta per a poder fer el registre, però tot i això la podem fer servir. De fet, en el procés d'experimentació 10 dels 19 alumnes van obtenir el permís i 9 no, tal vegada és el resultat més pròxim a la resposta teòrica que podia haver sortit amb aquest nombre d'experiments, amb un error relatiu pròxim al 0'7%, un colp de sort, tot hi ha que dir-ho.

L'activitat 4 demanava als alumnes escriure totes les diferents combinacions de nusos que es poden fer, per tal de poder-la fer correctament i facilitar als alumnes la manera d'establir el codi fou necessari adelantar l'activitat 5, aspecte a tindre en compte per a futures aplicacions de la UD. Una vegada establert el codi a seguir els alumnes pogueren resoldre l'activitat sense dificultats tret de 3 alumnes que ho deixaren incomplet.

A l'activitat 6, respecte al procés de simulació, tots responen correctament dient que la distribució de les boletes ha de ser a la babalà indicant que d'aquesta fora existeix l'atzar.

L'activitat 7 i la 8 han presentat algunes confusions i alguns alumnes han donat resposta a la 8 ja en l'activitat anterior, caldria reformular aquestes dues preguntes per poder fer-ne la distinció adequada. Les respostes que han donat diuen que cal fer extraccions sense reposició fins a extraure'n les 6 paperetes i establir els nusos emprant el full de les cordes per parelles en l'ordre en que van eixint, no obstant això, 7 alumnes s'han adonat que en extraure'n 4 ja era suficient, donat que la ultima parella queda determinada.

Per a respondre a l'activitat 9 els alumnes han hagut d'ajudar-se del full de cordes i de l'activitat 4 en la que havien escrit totes les combinacions. Amb aquestes dos ferramentes no han tingut massa dificultats per a resoldre les combinacions que hi donen el permís, tret d'algun error puntual possiblement ocasionat per una confusió de l'alumne al recórrer les cordes per esbrinar si es forma un únic bucle. Cal destacar ací que 2 alumnes han sigut capaços de descobrir que si apareixen les combinacions de nusos que hem deixat fetes a l'altra part del puny, (1,2), (3,4) o (5,6), es formava més d'un bucle i per tant era possible detindre les extraccions a la segona papereta si apareixia alguna combinació d'aquestes.

El procés de simulació de l'activitat 10 ha sigut dut a terme correctament per tots els alumnes a excepció d'un que no ha sigut capaç de comprendre bé com convertir les extraccions de la bossa en una de les combinacions enregistrades al principi.

L'activitat 11 mostra un resultat curiós, després d'haver contestat de maneres diferents a aquesta pregunta a les propostes anteriors, ara tots responen que "tenim les dades però no les hem analitzat encara". Això pareix demostrar que ja comprenen el significat o l'objectiu de l'estadística. Sols hi ha hagut una persona que respon de manera incongruent dient que "a més intents, més respostes afirmatives hi haurà", pareix que el que volia era fer la aproximació a la Llei dels Grans Nombres que hem fet anteriorment i que tornaran a fer a l'activitat següent.

A l'activitat 12 responen amb paraules que fan referència a la fiabilitat i a la generalitat dels resultats, per tant si que han comprés que un major nombre de simulacions pot donar-nos la capacitat per a generalitzar resultats més fiables.

L'apartat de l'anàlisi estadístic, com en les altres propostes, no ha presentat cap dificultat, els alumnes han demostrat saber calcular correctament la moda i la mitjana aritmètica i fer les corresponents taules de freqüències s'hi demanen. Però aquesta vegada s'inclou una activitat diferent, l'activitat 16, on es pregunta a l'alumne el significat de la mitjana que han estat calculant. 12 han contestat dient que aquesta mitjana per a ells significa la resposta del problema, és una aproximació correcta, però hi ha un alumne que ha escrit que el significat que li mereix es "saber què té més probabilitat, què és més probable", aquesta idea s'aproxima millor al concepte d'esperança matemàtica. La resta no han pogut respondre.

Per últim, respecte a les respostes a les preguntes del problema, a la primera pregunta han donat un resultat conjunt de $\frac{117}{174} \cong$ 0'67 que s'allunya més del resultat teòric (aproximadament 0'53) que no el resultat que han obtingut a l'experimentació inicial, però, tot i això, l'aproximació representa que és més fàcil obtindre el permís en cada intent que no obtindre'l, que és el que preteníem que l'alumne observara. A l'altra pregunta han contestat la majoria dient que "la probabilitat és 0 segons els nostres experiments", algun fins i tot ha dit que "és molt menuda", el que està clar és que són conscients de que no és un resultat impossible.

6 CONCLUSIONS

El treball portat a terme ha demostrat que la resolució de problemes de probabilitat per simulació és possible per alumnes d'educació primària, donat que molts dels alumnes de la mostra s'han sortit en el procés de resolució açò fa preveure que de la mateixa manera altres alumnes de la mateixa etapa podrien fer-ho. A més a més, els permet desenvolupar estratègies de comprensió lectora i de desenvolupament del raonament crític i matemàtic. També ha quedat clar que es poden treballar tots els continguts del curriculum i d'altres amb la profunditat requerida per l'etapa.

Després d'haver fet aquesta anàlisi de l'estudi exploratori sols em queda proposar la simulació per a un estudi de major impacte amb una mostra d'estudiants més amplia per tal d'observar-ne les seues respostes i veure amb quins comentaris són capaços de seguir sorprenent-nos els alumnes de primària.

També caldria pensar la possibilitat d'incloure problemes semblants però de menor dificultat per a cursos previs per tal de desenvolupar abans aquesta metodologia. Es poden reduir tots els problemes per fer els càlcul molt més simples fent les següents modificacions:

- Problema 1: Ajustar a 5 el total de cromos de la col·lecció.
- Problema 2: Ajustar el nombre de dies de menjar a 4.
- Problema 3: Baixar el nombre de vespes a 2.
- Problema 4: limitar el nombre de cordes a 4.

Amb aquestes modificacions aconseguim que els problemes tinguen un volum de combinacions més menut i, per tant, apte per a ser controlat per alumnes de cinqué o, fins i tot, de quart de primària. També s'aconsegueix reduir els càlculs i les mides de les simulacions.

Caldria també instruir als mestres en tècniques com aquesta i dotar-los del coneixement i les ferramentes adequades per poder innovar a l'aula amb els resultats de la investigació. El mestre sempre ha d'anar com a mínim un pas per davant de l'alumne.

7 REFERÈNCIES BIBLIOGRÀFIQUES

BORRAJO, G. (2006). Manuel Pazos Crespo. Enseñar a resolver problemas con humor. *Cuadernos de Pedagogía*. Nº355 Marzo, pp. 42-47.

ENGEL, A. (1975a). The probabilístic abacus. *Educational studies in mathematics*, 6, pp. 1-22.

ENGEL, A. (1975b). *L'enseignement des probabilités et de la statistiques*, (2 vols.). Cedic: París. Trad. de Engel, A. 1988. *Probabilidad y estadística* (2 vols.). Mestral: Valencia.

FISCHBEIN, E. i GAZIT, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions?. *Educational Studies in Mathematics*. 15, pp. 1-24.

FISCHBEIN, E., NELLO, M.S. i MARINO, M.S. (1991). Factors affecting probabilistic judgments in children and adolescents. *Educational Studies in Mathematics*, 22, pp. 523-549.

HUERTA, M.P. (2002). El problema de la cueva. Elementos para un anàlisis didáctico de los problemas de probabilidad. *Enseñanza de las ciencias*, 20 (1), pp. 75-86.

HUERTA, M.P. (2003). *Didàctica de la probabilitat i l'estadística* (Curso de Doctorado). Universitat de València.

HUERTA, M.P. (2013). La resolució de problemes escolars de probabilitat (Document de treball per al màster de professorat). Universitat de València.

KAHNEMAN, D., SLOVIC, P. i TVERSKY, A. (1982). Judgment Under Uncertainty: Heuristics and Biases. New York: Cambridge University Press.

ORTIZ, J.J., BATANERO, C. i SERRANO, L. (2007). Modelización y simulación de la estadística y la probabilidad en los libros de texto de educación secundaria. En *X SIMPOSIO DE LA SEIEM* (p. 115).

PAZOS, M. (2001). La probabilidad en la educación primaria. ¿Una casualidad? *X JAEM*. Ponencia P52, pp. 467-484.

POLYA, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Madrid: Tecnos.

POLYA, G. (1973). *How to solve it. A new aspect of mathematical method*. New Jersey: Princeton University Press.

SHAUGHNESSY, J.M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions, en Grouws, D. (ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, pp. 465-494. Nueva York: Macmillan Publishing Company.

8 ANNEXOS

8.1 PROPOSTA PRÈVIA A L'ELABORACIÓ DE LA UD

EL PROBLEMA DELS PASTISSETS

Una coneguda marca de pastissets, durant una promoció, regala junt a cada pastisset un cromo d'una col·lecció de 7 diferents. Quants pastissets creus que serà necessari comprar per tal de completar la col·lecció sencera?

Anàlisi del problema

1. Penses que serà fàcil completar la col·lecció? Per què?

2. Estima quants pastissets hauràs de comprar, com a mínim, per completar la col·lecció. Per què?

3. I com a molt? És a dir, pots dir un nombre de pastissos amb el que estàs segur que ja tindràs la col·lecció? Per què?

Procés de resolució

Per tal de poder resoldre el problema anem a tractar de simular l'experiència. Per aconseguir-ho haurem de col·locar a una bossa boletes amb 7 marques diferents, per exemple poden estar numerades de l'1 al 7.

4. Com haurem de col·locar-les dins la bossa? Uniformement distribuïdes o a la babalà? Per què?

5. Ara es tracta de que proves a traure boletes. Determina com vas a realitzar aquest procés per simular l'experiència del problema. Quantes boletes vas a extraure? Què vas a fer amb elles després de traure-les de la bossa? Per què?

6. Fes un registre de diferents simulacions per tal de comprovar quantes extraccions són necessàries.

	Escriu per ordre les boletes que extraus cada vegada	Total de pastissets que has hagut de comprar
1a prova		
2a prova		
3a prova		

4a prova		

7. Pots donar una resposta concreta a la pregunta del problema després d'haver fet aquestes simulacions? Per què?

8. Creus que és necessari seguir fent simulacions? Què esperes aconseguir amb més simulacions?

9. Pots fer-te una idea del nombre de simulacions que vas a necessitar? Per què?

Anàlisi estadístic

Junta els teus resultats amb els dels teus companys i respon:

10. Quina és la moda, és a dir, el valor que més vegades s'ha repetit?

11. Obteniu la mitjana aritmètica del total de pastissets que hauríeu de menjar per tal d'obtenir un valor més pròxim a la realitat.

12. Construïu la taula de freqüències associada a les dades que heu obtés:

Total de pastissets necessaris per completar la col·lecció	Freqüència absoluta	Freqüència relativa
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
...		

8.2 PROPOSTA 1

EL PROBLEMA DE LA COVA

Vint-i-set exploradors es troben perduts en una cova de la què en surten 3 camins. Un d'aquests camins porta a l'exterior de la cova en una hora. Els altres dos no tenen eixida, si entren per un d'ells tornaran a la cova en 2 dies i si ho fan per l'altre tornaran en 3 dies.

Com que els exploradors no porten cap llum i la cova està obscura i plena d'obstacles, cada vegada que fan un intent per eixir trien a l'atzar un dels tres camins.

Si cada explorador sols té menjar per sobreviure durant menys de 6 dies, quants dels 27 exploradors creus que aconseguiran eixir de la cova?

Anàlisi del problema

13. Penses que serà fàcil eixir de la cova? Per què?

14. Quin és el nombre mínim d'intents que haurà de realitzar cada explorador per tal d'eixir de la cova? Per què?

15. Es possible que després de 6 dies encara queden exploradors a la cova? Per què?

16. Donat que hi ha 3 camins i els exploradors trien a l'atzar un d'ells cada vegada, creus que podries assignar-ne la probabilitat de triar un dels tres camins? Com ho has fet?

17. Eres capaç d'anotar tots els itineraris que podrà fer un explorador fins a aconseguir eixir de la cova o quedar-se sense menjar? Hauràs d'emprar algun codi per distingir els 3 camins. Prova a fer-ho.

Procés de resolució

Per tal de donar una solució a la pregunta del problema de la cova anem a tractar de simular l'experiència dels exploradors. Has de fer passar els diferents exploradors per la cova i per algun procés aleatori que ens indique quin camí ha de triar un explorador anar fent el camí dels 27 exploradors i anotar les dades obtingudes.

18. Si volguérem emprar un dau per tal de simular la elecció del camí de cada explorador, com hauríem de fer-ho? Per què?

19. El proper pas és el d'emprar el dau per a simular l'experiència. Determina com vas a realitzar aquest procés per fer-ho. Quantes vegades hauràs de tirar el dau? Què és el que vas a enregistrar? Per què?

20. Fes un registre de diferents simulacions per tal de comprovar quantes extraccions són necessàries.

Explorador número	Itinerari que ha seguit	Aconsegueix eixir de la cova?	Temps que ha tardat en eixir de la cova
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			
16			
17			
18			
19			
20			
21			
22			
23			
24			
25			
26			
27			

21. Pots donar una resposta concreta a la pregunta del problema després d'haver fet aquestes simulacions? Es a dir, quants dels 27 exploradors creus que aconseguiran eixir de la cova? Per què?

22. Amb les dades que has obtés, posat en el lloc d'un explorador que es troba a la cova en el moment inicial i determina quina probabilitat tens d'eixir abans no se t'acabe el menjar. Explica el per què.

23. Creus que tots els teus companys tindran la mateixa resposta que tu? Explica't.

24. Què creus que passarà si augmentem el nombre d'exploradors? Obtindràs una resposta més o menys fiable? Per què?

Anàlisi estadístic

Anem a fer l'anàlisi del temps que tarden en eixir els exploradors de la cova, tin en compte que els què no aconsegueixen eixir de la cova no seran dades en aquest apartat:

25. Quin és el valor que més vegades s'ha repetit, és a dir, la moda?

26. Obteniu la mitjana aritmètica del total de temps que tarda un explorador en eixir de la cova.

27. Construïu la taula de freqüències associada a les dades que heu obtés:

Temps que tarda un explorador en eixir de la cova	Freqüència absoluta (Nombre d'exploradors)	Freqüència relativa (Nombre d'exploradors respecte del total)

28. Per últim, amb les dades de la taula, construeix un gràfic de barres on s'hi indique la freqüència. Fes-ho en un full apart amb paper quadriculat. També hauràs de localitzar on es troben la mitjana i la moda.

8.3 PROPOSTA 2

EL PROBLEMA DE LES VESPES

Un bon dia arribem a l'aula pel matí i ens trobem una petita sorpresa, tres vespes estan voltant per dins de l'aula. Un company corre a obrir la finestra per deixar que puguen eixir totes soles de l'aula.

Amb la finestra oberta, cada minut, una de les vespes i de forma aleatòria decideix creuar per la finestra. Quin serà el temps que caldrà esperar per terme mig per que totes les vespes es troben fora i puguem tancar la finestra i continuar amb la classe?

Anàlisi del problema

1. Quan de temps penses tu que durarà aquest procés? Per què?

2. Has tingut en compte la possibilitat de què la vespa que surt pot tornar enrere un minut després? Aquest fet pot canviar la resposta anterior d'alguna manera?

3. Tenint en compte la possibilitat de què una vespa pot tornar a l'aula, podries dir el mínim i el màxim de temps que tardaran les vespes en abandonar l'aula? Explica els teus raonaments.

4. Quina es la probabilitat que una determinada vespa creue per la finestra? Explica-ho.

Procés de resolució

Per tal de donar una solució a la pregunta del problema de les vespes anem a simular l'experiment. Cal determinar quina és la vespa que creua cada vegada i per fer-ho haurem d'establir algun procés aleatori i anotar les dades obtingudes.

5. Ja hem vist com un dau ens pot ajudar a fer l'experiència, però coneixes alguna altra manera d'aconseguir la aleatorietat estipulada? Explica-ho.

6. Per tal de simular aquest procés anem a emprar aquesta vegada una taula de nombres aleatoris[8]. Aquesta conté aleatòriament distribuïts nombres del 1 al 3. Com farem les lectures de la taula per tal de enregistrar les diferents simulacions?

7. Fes un registre de diferents simulacions emprant la taula següent:

Simulació número	Registre dels moviments	Temps que han tardat en eixir les tres vespes
1		
2		

[8] Veure annex: Taula de nombres aleatoris de l'1 al 3

3		
4		
5		
6		
7		
8		

8. Que pots dir després d'haver fet les simulacions sobre la pregunta del problema? Pots dir el temps estimat? Per què?

Anàlisi estadístic

Ara anem a recollir les dades de tots els companys per tindre una mostra més gran amb la que treballar.

9. Construïu la taula de freqüències amb les dades que hem recollit entre tota la classe:

Temps que tarden en eixir les tres vespes	Freqüència absoluta (Número de vegades que es repeteix aquesta solució)	Freqüència relativa

10. Quina és la moda?

11. Obteniu la mitjana aritmètica del total de temps que tarden en eixir les 3 vespes.

12. Que penses d'aquest valor que t'ha eixit de calcular-ne la mitjana? Quina informació et dona?

13. Per últim, amb les dades de la taula, construeix un gràfic de barres on s'hi indique la freqüència. Fes-ho en un full apart amb paper quadriculat. Situa-hi també la mitjana i la moda.

8.4 PROPOSTA 3

EL PROBLEMA DELS CASAMENTS

En un país molt estrany, quan una persona compleix els 18 anys sol·licita autorització per casar-se. El jutge de pau li proporciona sis trossos de corda iguals que agafa amb la ma per la meitat de tots ells de manera que per cada costat del puny ixen els sis extrems de les cordes.

A cada costat del puny nuga tots els extrems per parelles triant a l'atzar. Si amb això aconsegueix formar un únic bucle tancat rep autorització per casar-se. Si no ho aconsegueix, repeteix l'experiència un any després.

¿Quina és la probabilitat d'aconseguir el permís del jutge de pau? ¿Quina és la probabilitat que una persona no aconseguisca autorització en sis anys seguits?

Anàlisi del problema

1. Quina és la teua primera impressió? Penses que serà difícil aconseguir el permís per casar-se? Per què?

2. Què pots dir del nombre d'intents que caldran per aconseguir el permís? Per què?

3. Experimentem a l'aula amb sis trossos de corda igual que la persona que sol·licita el permís en aquest país estrany. Després de fer l'experimentació, penses que es més o menys difícil del que estimaves en un principi?

4. Series capaç de comptar totes les combinacions de nusos[9] que es poden fer? Justifica-ho. Tal volta pot ajudar-te pensar primer en el cas de que hi hagueren sols 4 cordes.

5. Serà el mateix si deixem les cordes nugades a un dels costats sempre de la mateixa manera i fem els nusos només a l'altra banda?

Procés de resolució

Emprant el codi que hem usat per contar els nusos, ara anem a determinar alguna forma de simular l'experiència per tal que tots puguem recollir dades de manera individual. Si hem numerat les 6 cordes per tal d'identificar-les, seria senzill simular l'experiència posant 6 boletes a una bossa i fent extraccions per determinar les parelles.

[9] Se'ls hi proporcionarà als alumnes una full amb una representació de les cordes numerades per facilitar el compte. Veure annex: Plantilla amb cordes per a simular l'experiència del problema dels casaments.

6. Com haurem de col·locar-les dins la bossa? Uniformement distribuïdes o a la babalà? Per què?

7. Ara es tracta de que proves a traure boletes. Quantes boletes vas a extraure? Què vas a fer amb elles després de traure-les de la bossa? Per què?

8. Quan vas a donar per conclosa una simulació? Per què?

9. Amb quines simulacions podràs dir que s'aconsegueix el permís? Pot ajudar-te que anotes totes les combinacions que suposen un únic bucle.

10. Fes un registre de diferents simulacions per tal de comprovar a quina edat obtindria una persona l'edat per casar-se.

Persona sol·licita el permís	Registre de les extraccions					Nombre d'intents	Edat a la que obté el permís
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							

11. Pots donar una resposta concreta a la pregunta del problema després d'haver fet aquestes simulacions? Per què?

12. Creus que podríem millorar la resposta si preguntarem a més gent quants intents han necessitat per aconseguir el permís? Per què?

Anàlisi estadístic

Junta els teus resultats amb els dels teus companys i respon:

13. Construïu la taula de freqüències associada a les dades que heu obtés:

Nombre d'intents	Edat a la que una persona aconsegueix el permís	Freqüència absoluta	Freqüència relativa

14. Quina és la moda?

15. Sent que partim de 18 per a fer el primer intent, sabries dir la mitjana aritmètica de l'edat a la què s'obté el permís? Explica com ho fas.

16. Quin significat té per a tu aquesta mitjana?

17. Quines són ara les respostes a les dues preguntes del problema? Com ho has calculat?

8.5 TAULA DE NOMBRES ALEATORIS DEL 1 AL 3

2 1 1 1 2 3	3 1 3 2 2 1	1 1 2 2 3 2	3 2 1 1 3 2	1 1 2 3 2 2
1 3 1 3 1 2	1 3 2 2 2 3	1 3 3 3 1 3	3 2 1 3 3 3	2 3 2 1 1 2
2 1 1 3 1 2	2 3 1 1 3 3	2 1 3 2 1 2	2 3 3 2 2 2	2 3 2 1 1 2
2 1 2 3 3 3	3 1 1 1 1 2	1 3 2 3 2 2	2 3 3 3 1 3	1 3 3 3 3 1
2 2 1 3 2 3	2 2 2 1 3 2	1 2 3 2 3 2	3 1 2 1 2 1	2 3 3 2 3 3
2 2 3 3 2 3	3 1 1 3 3 2	1 2 2 2 1 1	1 1 1 3 3 3	3 1 2 1 3 2

2 3 2 2 2 3	2 3 1 2 3 1	1 1 2 3 2 2	2 3 1 3 2 1	2 1 2 2 3 2
1 1 1 2 2 2	3 1 3 1 1 1	1 1 3 3 3 3	3 3 2 1 3 2	1 1 2 1 3 3
3 1 1 1 1 3	1 3 2 3 3 2	3 3 2 1 2 2	2 2 3 3 3 3	2 2 3 3 1 3
3 1 1 1 1 2	1 3 1 1 1 2	1 3 1 3 2 1	2 3 1 3 3 2	2 2 1 3 2 3
3 1 3 2 1 2	2 1 1 2 3 3	3 2 3 3 1 1	3 1 1 1 1 2	2 2 3 2 1 2
3 2 2 3 3 2	3 1 3 1 2 3	3 3 2 2 2 1	3 2 2 3 1 2	3 2 3 3 2 3

1 3 1 2 2 1	3 2 3 2 3 1	1 3 2 1 2 2	3 3 1 2 1 1	1 1 2 3 1 3
1 2 2 3 1 1	3 2 3 1 3 2	2 1 3 3 1 1	3 1 3 1 1 1	3 3 2 3 1 1
2 3 2 2 3 1	3 2 1 2 1 2	2 1 2 1 2 2	1 2 3 2 3 2	1 2 3 1 3 3
1 2 1 1 1 2	3 2 3 2 2 1	3 1 1 1 3 3	2 2 3 1 3 2	1 2 3 2 1 1
1 1 1 2 3 2	1 3 1 3 2 2	1 3 3 3 1 3	2 2 2 2 2 2	3 3 1 3 1 3
3 2 3 3 3 3	3 1 2 2 2 3	3 3 3 1 2 3	1 2 3 2 1 3	3 1 3 3 3 2

1 3 3 3 2 3	2 2 3 2 2 1	2 2 3 2 2 1	3 3 1 1 1 3	2 2 3 1 1 1
1 3 2 3 2 1	1 1 1 2 3 1	3 2 3 1 2 2	3 3 3 3 1 3	3 3 1 2 1 2
1 2 1 1 1 1	1 1 2 2 3 2	2 2 2 1 1 1	1 1 3 3 2 1	1 1 2 3 2 3
1 1 1 2 2 2	1 3 1 1 3 2	1 3 3 2 1 3	1 1 3 1 2 1	1 1 1 2 3 1
2 1 2 1 1 1	2 2 3 1 3 2	2 2 3 1 3 2	3 2 3 1 1 2	1 2 3 1 2 3
2 2 2 2 1 2	3 1 3 3 3 3	1 3 3 1 3 1	2 2 3 3 2 3	2 3 3 2 2 2

2 3 1 2 3 3	3 3 2 3 1 3	3 3 3 3 3 3	2 1 1 1 3 3	3 2 2 1 1 2
2 1 2 3 1 1	1 1 3 1 1 2	1 3 2 2 2 1	3 2 1 1 1 1	1 1 1 1 3 3
2 1 1 2 2 1	3 1 3 3 3 2	3 1 2 3 1 1	3 1 2 3 2 1	1 1 1 1 1 2
2 2 3 3 2 3	1 3 2 1 3 1	2 2 3 1 3 1	2 2 2 1 1 2	1 1 1 2 3 2
1 1 1 1 3 3	3 2 3 2 2 3	3 1 2 2 1 1	3 2 2 2 3 1	3 3 1 2 3 2
3 1 1 3 1 1	2 3 1 3 2 1	1 3 2 1 2 2	3 1 3 1 3 3	3 2 1 3 3 1

3 3 1 3 1 1	3 2 1 2 2 3	3 1 3 2 1 1	2 3 1 1 2 2	3 1 2 2 2 2
2 3 3 1 2 2	2 2 2 2 3 1	2 2 3 3 1 3	3 3 2 2 3 2	1 3 3 3 3 2
3 2 1 2 3 1	1 3 3 1 1 3	1 1 3 1 1 2	3 3 2 2 3 1	1 1 3 3 1 3
1 1 3 2 3 3	2 2 3 3 3 3	2 3 3 1 1 3	1 1 2 2 1 1	3 3 2 1 3 1
1 1 2 3 3 2	3 1 1 3 1 3	2 1 2 3 3 3	3 1 3 3 1 1	1 2 1 2 2 3
2 3 3 1 2 2	2 2 1 3 1 1	1 1 2 2 2 1	3 3 1 3 2 3	2 1 1 2 3 1

8.6 PLANTILLA AMB CORDES PER A SIMULAR L'EXPERIÈNCIA DEL PROBLEMA DELS CASAMENTS