GRAU EN ÒPTICA I OPTOMETRIA

Apunts de teoria de

FÍSICA II

ÒPTICA GEOMÈTRICA

CARLOS J. ZAPATA RODRÍGUEZ

PASCUALA GARCIA MARTÍNEZ

Programa de l'assignatura

- **TEMA I**. CONCEPTES I LLEIS FONAMENTALS DE L'ÒPTICA GEOMÈTRICA
- **TEMA II**. SISTEMES ÒPTICS AMB SUPERFÍCIES PLANES
- **TEMA III**. INTERFASES ESFÈRIQUES
- **TEMA IV**. SISTEMES ÒPTICS CENTRATS EN APROXIMACIÓ PARAXIAL
- **TEMA V**. ACOBLAMENTS DE SISTEMES
- **TEMA VI**. SISTEMES DE LENTS
- **TEMA VII**. ABERRACIONS DELS SISTEMES ÒPTICS

Tema I. Conceptes i lleis fonamentals de l'Òptica Geomètrica

Bibliografia

- E. Hecht i A. Zajac, *Óptica*, capítols 3 i 4
- G.A. Fry, *Geometrical Optics*, capítols 1-3
- J. Casas, *Óptica*, capítol 1

Tema I. Conceptes i lleis fonamentals de l'Òptica Geomètrica

- La naturalesa de la llum
- L'espectre electromagnètic
- Propagació d'ones electromagnètiques en medis dielèctrics i metalls
- Raigs de llum

La naturalesa de la llum

- Distintes formulacions de la llum:
  - **Teoria geomètrica**: Reflexió i refracció
  - **Teoria ondulatòria**: Interferències i difracció
  - **Teoria electromagnètica**: Polarització
  - **Teoria quàntica**: Interacció llum-matèria
- Gràcies a la Teoria Geomètrica podem estudiar de manera senzilla molts processos de **Formació d'imatges.**

La naturalesa de la llum

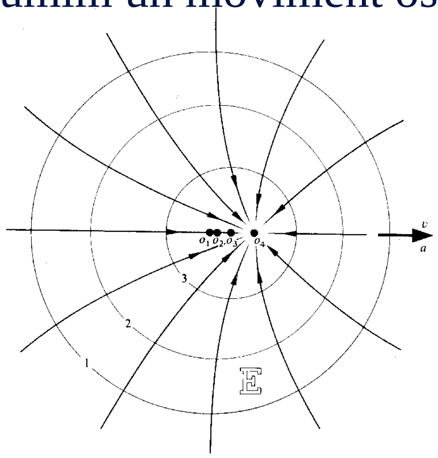
Fenomen físic de l'**emissió** i **propagació** lluminosa:

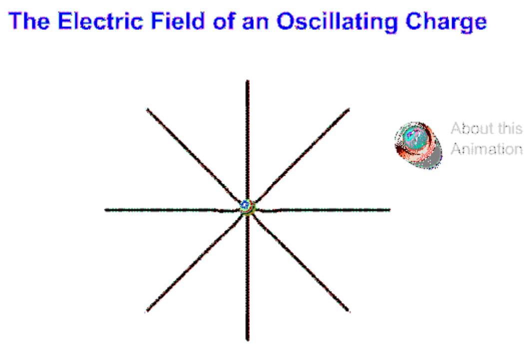
- Considerem una **càrrega elèctrica** en repòs.
- Aquesta càrrega genera un camp elèctric estàtic.

La naturalesa de la llum

Si la càrrega es mou, es genera una **pertorbació** en les línies del camp elèctric que es **propaga** en el **buit**.

- Generació d'un camp electromagnètic, és a dir, **LLUM**.
- Assumim un moviment oscil·latori harmònic de la càrrega.





Vegeu: http://www.cco.caltech.edu/~phys1/java/phys1/MovingCharge/MovingCharge.html

http://www.upscale.utoronto.ca/GeneralInterest/Harrison/Flash/EM/LightWave/About.html

La naturalesa de la llum

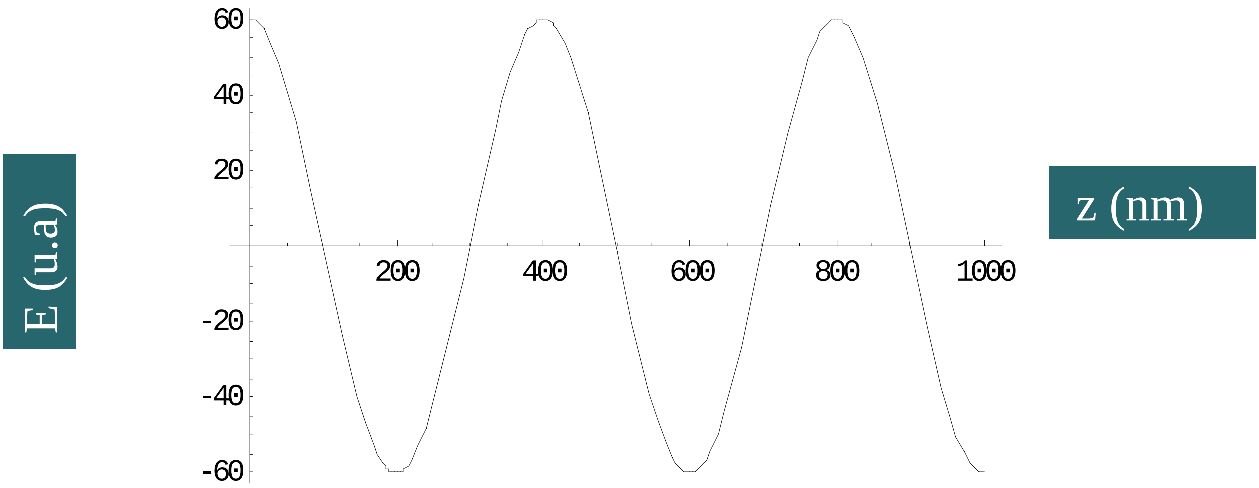
Estem creant una ona electromagnètica **monocromàtica**.

- **Camp elèctric**: $E(z,t) = E_0 \cos\phi(z,t)$
- **Fase de l'ona**: $\phi(z,t) = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda}\right)$
- **Longitud d'ona**: λ **Període**: T **Amplitud**: E_0
- **Velocitat de fase**: $c = \lambda/T = 3\cdot 10^8\ m/s$

La naturalesa de la llum

$\lambda = 400$ nm

$E_0 = 60$ (u.a.)



La naturalesa de la llum

Vegem un exemple típic: Làmpada espectral de Sodi (Na).

- **Longitud d'ona**: $\lambda = 589.0\,nm \quad (1\,nm = 10^{-9}\,m)$
- **Velocitat de fase**: $c = \lambda/T = 3 \cdot 10^{8}\ m/s$
- **Període**: $T = \lambda/c = 1.96\ fs \quad (1\ fs = 10^{-15}\,s)$

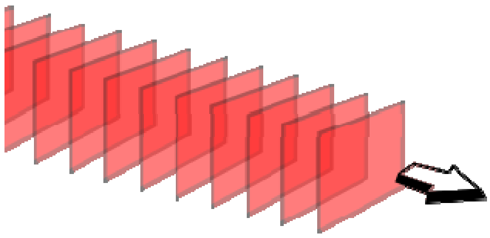
En lloc d'utilitzar el *Període*, és habitual emprar la **freqüència:**

$$\nu = \frac{1}{T} = 500\,THz \quad (1\,THz = 10^{12}\,s^{-1})$$

La naturalesa de la llum

Front d'ona: Punts de l'espai que tenen la mateixa fase.

- Front d'ones **esfèric**: Regió propera a la font puntual.
- Front d'ones **pla**: Regió llunyana a la font puntual.



La naturalesa de la llum

Ona electromagnètica **monocromàtica**: Té una variació espaciotemporal corresponent a una sola λ.

-S'associa a colors: Longituds d'ona de **Fraunhofer**.

-Produïdes per làmpades espectrals i làsers.

Ona electromagnètica **policromàtica**: Té una variació espaciotemporal corresponent a més d'una λ.

-Llum **blanca** o mescla de llums monocromàtiques.

-Produïdes per làmpades incandescents i el Sol.

La naturalesa de la llum

Longituds d'ona de **Fraunhofer**:

Símbol	**Causat per...**	**λ (nm)**	**Color**
A - (banda)	O_2	759.4 - 762.1	
B - (banda)	O_2	686.7 - 688.4	Roig
C	**H**	**656.3**	**Roig**
a - (banda)	O_2	627.6 - 628.7	Taronja
D - 1, 2	**Na**	**589.6 & 589.0**	**Groc**
E	Fe	527.0	Verd
F	**H**	**486.1**	**Blau**
f	H	434.0	Violeta
G	Fe & Ca	430.8	Violeta

Tema I. Conceptes i lleis fonamentals de l'Òptica Geomètrica

La naturalesa de la llum

La llum transporta **energia**:

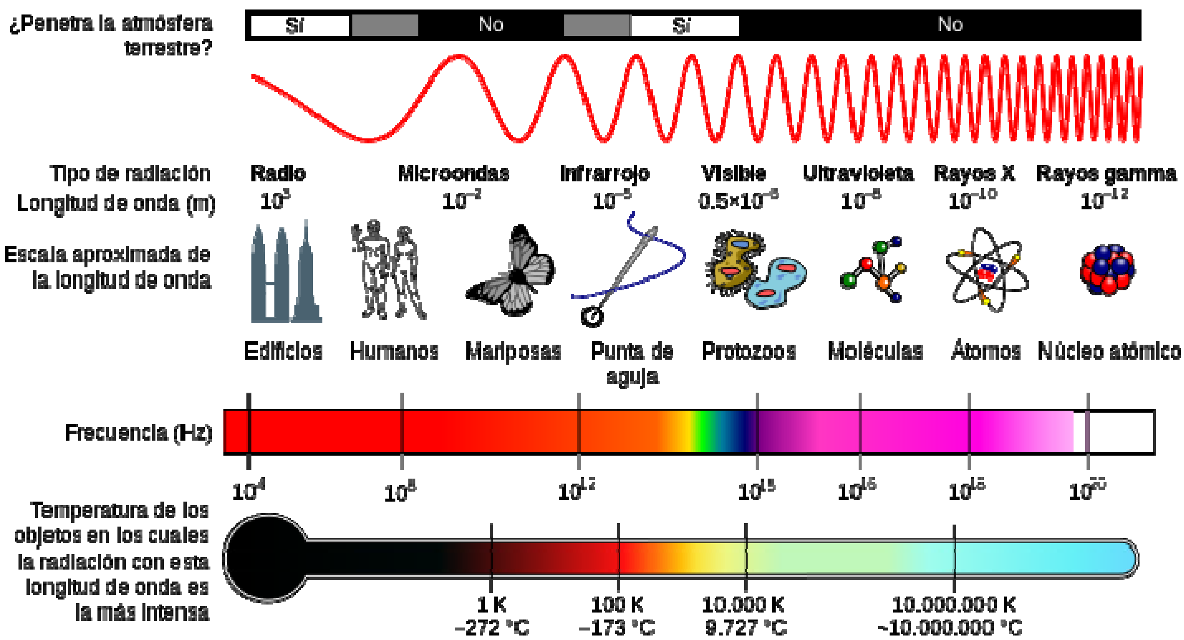
- Solen ser **quantitats xicotetes**: Amb una lupa es pot concentrar llum (energia) i cremar paper.
- El transport d'energia es dirigeix en la **direcció de propagació** de la llum: sobre les línies de camp.
- Teoria **electromagnètica**: $E \propto |E_0|^2$
- Teoria **quàntica**: Apareix el concepte de **fotó**, l'energia del qual es tant major com més alta és la freqüència òptica: $E = h\nu$

$$\left.\begin{array}{l} h = 6.6 \cdot 10^{-34}\, J \cdot s \\ \nu = 500 \cdot 10^{12}\, s^{-1}\, (Na) \end{array}\right\} E = 2.0\, eV \quad (1J = 6.2 \cdot 10^{18}\, eV)$$

Tema I. Conceptes i lleis fonamentals de l'Òptica Geomètrica

- La naturalesa de la llum
- L'espectre electromagnètic
- Propagació d'ones electromagnètiques en medis dielèctrics i metalls
- Raigs de llum

L'espectre electromagnètic



http://es.wikipedia.org/wiki/Espectro_electromagn%C3%A9tico

L'espectre electromagnètic

Regió espectral de l'**infraroig**:

- Des de 300 GHz (1 mm) fins a 400 THz (780 nm)
  - IR proper: 780 nm - 3000 nm (3 μm)
  - IR intermedi: 3 μm - 6 μm
  - IR llunyà: 6 μm - 15 μm
  - IR extrem: 15 μm - 1 mm
- **Generadors i fonts:** Oscil·ladors moleculars que per agitació tèrmica irradien i absorbeixen radiació IR (materials calents).
- **Detectors:** Sistemes que per absorció IR generen calor (bolòmetre i pel·lícules fotogràfiques especials).

L'espectre electromagnètic

Regió espectral del **visible**:

- Des de 384 THz (780 nm) fins a 769 THz (390 nm)

- **Generadors i fonts:** Arranjament dels electrons exteriors en els àtoms i molècules (llum solar).

- **Detectors:** Retina ocular.

L'espectre electromagnètic

Longituds d'ona de **Fraunhofer**:

Símbol	**Causat per...**	**λ (nm)**	**Color**
A - (banda)	O_2	759.4 - 762.1	
B - (banda)	O_2	686.7 - 688.4	Roig
C	**H**	**656.3**	**Roig**
a - (banda)	O_2	627.6 - 628.7	Taronja
D - 1, 2	**Na**	**589.6 & 589.0**	**Groc**
E	Fe	527.0	Verd
b - 1, 2	Mg	518.4 & 517.3	Verd
c	Fe	495.8	Anyil
F	**H**	**486.1**	**Blau**
d	Fe	466.8	Blau
e	Fe	438.4	Blau
f	H	434.0	Violeta
G	Fe & Ca	430.8	Violeta
g	Ca	422.7	Violeta
h	H	410.2	Violeta
H	Ca	396.8	Violeta
K	Ca	393.4	

L'espectre electromagnètic

Regió espectral de l'**ultravioleta**:

- Des de 800 THz (390 nm) fins a 3 10^5 THz (1 nm)
- **Generadors i fonts:** Electrons interiors i exteriors.
  - El sol emet radiació UV que ionitzen els àtoms de l'atmosfera (ionosfera).
  - L'ozó de l'atmosfera absorbeix aquesta radiació UV.
  - La radiació UV pot provocar càncer.
- **Detectors:** Pantalles fluorescents, emulsions fotogràfiques i fotocèl·lules (fotomultiplicador fotoelèctric).

L'espectre electromagnètic

Existeixen dos tipus de **fonts** de radiació electromagnètica:

- **Fonts de continu**. Emeten radiació la intensitat de la qual varia de forma gradual amb la longitud d'ona (llum policromàtica).
  - *Filament de metall incandescent*: La més comuna per la radiació UV és la del deuteri. En visible, el tungstè o wolframi; en infraroig, un sòlid incandescent.
- **Fonts de línia**. Emeten un nombre limitat de bandes de radiació que abasten un interval molt reduït de longituds d'ona (monocromàtica).
  - Hem de destacar les *fonts de làser*, que són relativament recents (1960).
  - *Tub de descàrrega gasosa*: Descàrrega elèctrica a través d'un tub ple de gas. Els àtoms s'exciten i irradien.

Tema I. Conceptes i lleis fonamentals de l'Òptica Geomètrica

L'espectre electromagnètic

Fonts de radiació electromagnètica:

Fonts	λ	**Tipus de radiació**
Llum solar	UV, visible i IR prop.	policromàtica
làmd. incandescent.	UV, visible i IR prop.	policromàtica
làmd. descàrrega (Xe)	UV i visible	policromàtica
làmd. descàrrega (Na,Hg)	visible	monocromàtica
LEDs (GaAs)	visible i IR prop.	monocromàtica
làser (He-Ne)	UV, visible i IR	monocromàtica

L'espectre electromagnètic

Fonts de radiació **làser** i aplicacions:

Tipus	**λ**	**Aplicacions**
Ar	458 - 515 nm	Coagulació retina; holografia
CO_2	10.6 μm	Cirurgia
colorant (s)	350 nm - 1 μm	Instrumentació
GaAs	850 - 950 nm	Comunicacions òptiques
HeNe	632.8 nm	Instrumentació; holografia
Nd-YAG	1.06 μm	Cirurgia

Tema I. Conceptes i lleis fonamentals de l'Òptica Geomètrica

- La naturalesa de la llum
- L'espectre electromagnètic
- Propagació d'ones electromagnètiques en medis dielèctrics i metalls
- Raigs de llum

Ones electromagnètiques en medis dielèctrics

Caracterització dels medis materials:

- Medis **dielèctrics** (o aïllants): Absència de càrregues lliures (vidre, aigua, aire). No conduixen el corrent elèctric.
- Medis **conductors**: Existeixen càrregues elèctriques lliures. En el cas dels metalls (coure), aquestes càrregues són electrons.
- Medis **semiconductors**: Material amb càrregues feblement lligades (Si, Ge). Funcionen com conductors en condicions particulars però actuen com medis aïllants en condicions diferents.

Tema I. Conceptes i lleis fonamentals de l'Òptica Geomètrica

Ones electromagnètiques en medis dielèctrics

Fenomenologia de la **propagació** d'una ona electromagnètica (llum) a través d'un medi **dielèctric**:

- La velocitat de fase (v) varia amb la freqüència de l'ona (**dispersió cromàtica**) i en general és diferent a *c*.
  - **Índex de refracció**: Magnitud adimensional. En la gran majoria dels casos és major a la unitat: $n = c/\mathrm{v}$

Ones electromagnètiques en medis dielèctrics

Fenomenologia de la **propagació** d'una ona electromagnètica (llum) a través d'un medi **dielèctric**:

- La velocitat de fase (v) varia amb la freqüència de l'ona (**dispersió cromàtica**) i en general és diferent a *c*.
    - **Índex de refracció**: Magnitud adimensional. En la gran majoria dels casos és major a la unitat: $n = c/\text{v}$
- La llum es absorbida parcialment o totalment pel medi (**absorció selectiva**), fenomen que també depèn de la freqüència de l'ona.

Ones electromagnètiques en medis dielèctrics

Índex de refracció $n = c/\text{v}$ per a diferents medis dielèctrics. Quan no s'indica explícitament, ens referirem a la longitud d'ona de Fraunhofer corresponent a la ratlla D.

Substància	**Índex de refracció (n_D)**
Sucre	1.56
Diamant	2.417
Mica	1.56 - 1.60
Benzè	1.504
Glicerina	1.47
Aigua	1.333
Alcohol etílic	1.362
Oli d'oliva	1.46

Ones electromagnètiques en medis dielèctrics

Fenomenologia microscòpica de la **dispersió cromàtica**:

- L'**ona primària** interacciona amb la partícula (àtom, molècula, etc.)
- La partícula absorbeix part de l'energia lluminosa i vibra amb la mateixa freqüència, ν, creant una **ona secundària**.
- La fase de l'ona primària i l'ona secundària no coincideixen.

Ones electromagnètiques en medis dielèctrics

Si considerem totes les partícules del medi (**medi dens**):

- Les ones primàries i secundàries es propaguen en els **espais interatòmics** amb velocitat *c*.
- Existeix un **desfasament** entre l'ona secundària i l'ona primària que explica que $n \neq 1$

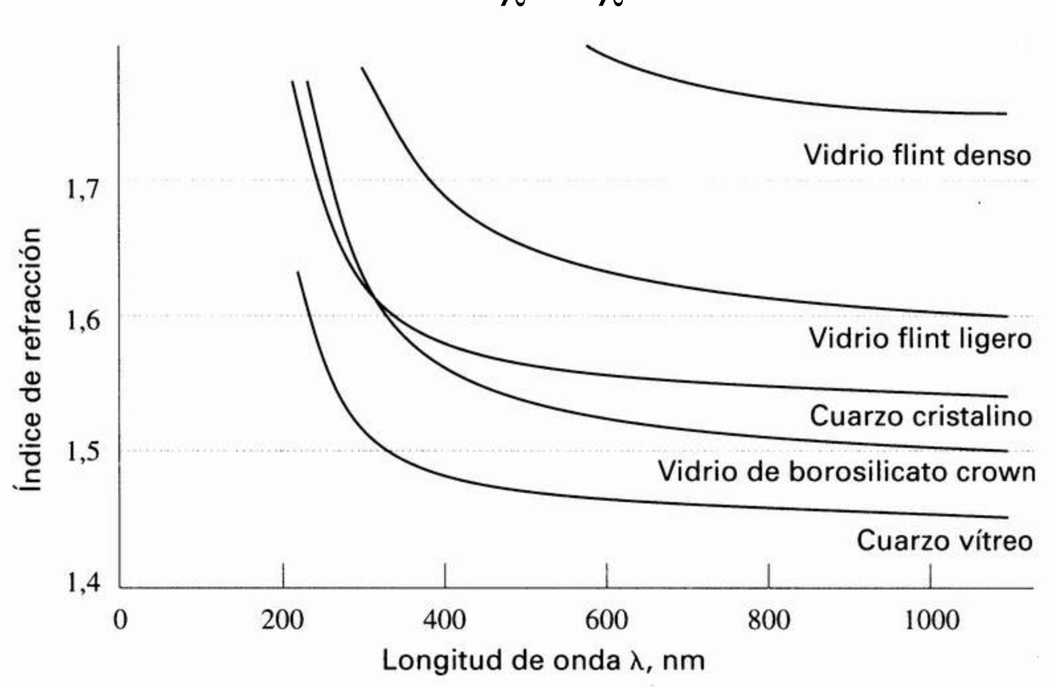
Es distingeixen els següents casos:

- $\nu < \nu_i \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\nu} > 0$ **Dispersió normal**
- $\nu > \nu_i \Rightarrow n < 1 \quad (v > c)$

Ones electromagnètiques en medis dielèctrics

- En la regió de dispersió normal s'utilitza la **fórmula de Cauchy**:

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4}$$



Tema I. Conceptes i lleis fonamentals de l'Òptica Geomètrica

Ones electromagnètiques en medis dielèctrics

Caracterització de la dispersió cromàtica en **vidres refractius**:

- **Número d'Abbe**:

$$\nu_D = \frac{n_D - 1}{n_F - n_C} \qquad \begin{cases} \lambda_C = 656.3\,nm \Rightarrow n_C = n(\lambda_C) & \text{Roig}\,(\mathrm{H}\alpha) \\ \lambda_D = 589.3\,nm \Rightarrow n_D = n(\lambda_D) & \text{Groc}\,(\mathrm{Na}) \\ \lambda_F = 486.1\,nm \Rightarrow n_F = n(\lambda_F) & \text{Blau}\,(\mathrm{H}\beta) \end{cases}$$

- Els vidres compleixen que $20 < \nu_D < 75$
- Se solen classificar en dues categories:
  - Vidres **Flint**: $\nu_D < 50$ (molt dispersius)
  - Vidres **Crown**: $\nu_D > 50$ (poc dispersius)

Ones electromagnètiques en metalls

Propietats òptiques dels **medis conductors**:

- Presència de **càrregues** elèctriques **lliures** (electrons en metalls).
- **Conductor perfecte**: càrregues excitades per una ona harmònica segueixen les alteracions del camp.

Conclusió: Quan una ona incideix sobre un metall, aquesta s'extingeix en el medi conductor. Però existeix una reflexió de pràcticament tota l'energia lluminosa.

Tema I. Conceptes i lleis fonamentals de l'Òptica Geomètrica

- La naturalesa de la llum
- L'espectre electromagnètic
- Propagació d'ones electromagnètiques en medis dielèctrics i metalls
- Raigs de llum

Raigs de llum

- Un **raig de llum** és una línia en l'espai que correspon a la direcció de propagació del flux radiant.
- És un instrument matemàtic més que una realitat física.

Raigs de llum

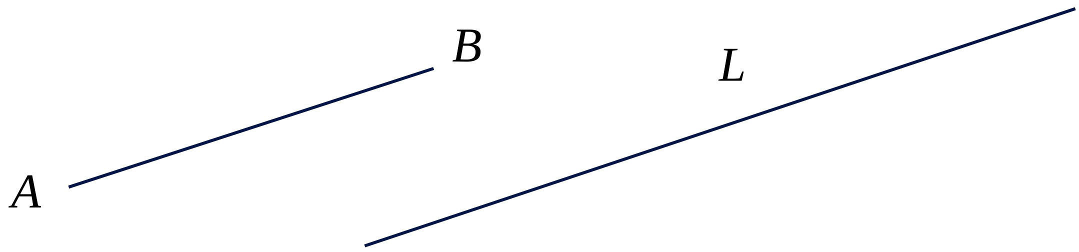
Propagació dels raigs lluminosos:

- **Llei de Malus**: En un medi homogeni i isòtrop, els raigs de llum són línies normals als fronts d'ona en cada punt d'intersecció.
- **1^{a} llei de l'Òptica Geomètrica**: En un medi homogeni i isòtrop els raigs de llum tenen una trajectòria rectilínia.
- **Propietat**: La separació espacial entre dos fronts d'ona al llarg de qualsevol raig lluminós ha de ser la mateixa.

Raigs de llum

- El **camí òptic** entre dos punts, A i B, que pertanyen a un raig de llum que es propaga en un medi homogeni, és la distància equivalent en el buit.
- Les dues distàncies són equivalents en el sentit que la llum tarda el mateix temps en recórrer les dues distàncies:
  - dielèctric: $\mathrm{v} = \overline{AB} / t_0$
  - buit: $c = L / t_0$

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{v} = \overline{AB} / t_0 \\ c = L / t_0 \end{array}\right\} L = \frac{c}{\mathrm{v}}\overline{AB} = n\overline{AB}$$

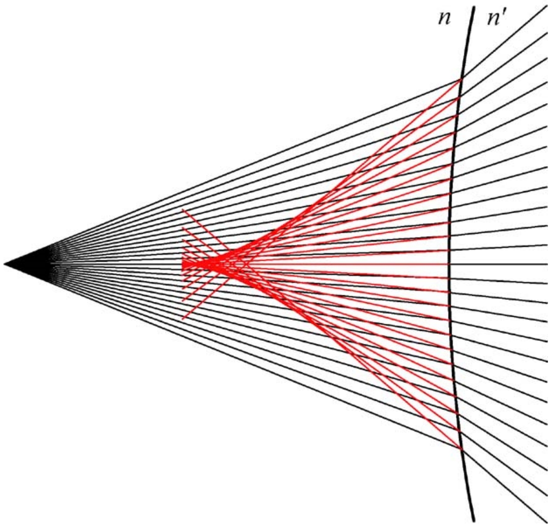


Raigs de llum

- Si un grup de raigs és tal que podem trobar una superfície que siga ortogonal a tots i cadascun d'ells, es diu que forma una **congruència normal**.
- Els raigs que emanen d'una font puntual són perpendiculars a una esfera centrada en la font i, conseqüentment, formen una congruència normal.
- Considerem una **congruència òptica** el conjunt de raigs que procedeixen d'un mateix punt emissor.

Raigs de llum

- Considerada una congruència òptica, és possible trobar la superfície envolupant de tots els raigs, que denominem **càustica**.
- En ella s'observa sempre una forta concentració de llum, i en la majoria dels casos també de calor –radiació IR–, i d'aquí el seu nom.



Tema II. Sistemes òptics amb superfícies planes

- Refracció i reflexió en una interfase plana
- Teoria geomètrica de la reflexió i la refracció. Lleis de Descartes
- La interfase plana com a sistema òptic formador d'imatges
- Làmina de cares planoparal·leles
- Refracció en prismes òptics
- El prisma com a sistema formador d'imatges. Prismes oftàlmics
- Dispersió en prismes
- Combinacions de prismes: prismes acromàtics i prismes de visió directa
- Prismes reflectors
- Espills dobles

Sistemes amb superfícies planes

Refracció i reflexió en una superfície plana

Propagació a través d'interfases:

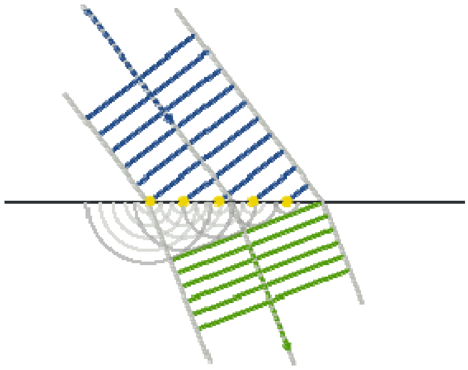
- Una **interfase** és una superfície que separa dos medis de diferents propietats elèctriques i magnètiques.
    - Estem interessats en interfases que separen **dos dielèctrics** amb diferent *n*, i interfases que separen **un dielèctric i un conductor** (metall).
- Experimentalment s'observa que, quan una ona arriba a una interfase plana, part de la densitat de flux incident es transforma en una **ona reflectida** i part del flux es transmet com a **ona refractada** (transmesa)

Sistemes amb superfícies planes

Refracció i reflexió en una superfície plana

Model de **construcció** del nou front d’ones

- **Principi de Huygens (1629-1695)**: Cada punt d’un front d’ones primari serveix com a font d’ones esfèriques secundàries tals que, un moment més tard, el front d’ones primari és l’envolvent d’aquestes ones secundàries. A més, aquestes ones avancen amb una velocitat i freqüència igual a l’ona primària en cada punt de l’espai.



Sistemes amb superfícies planes

Refracció i reflexió en una superfície plana

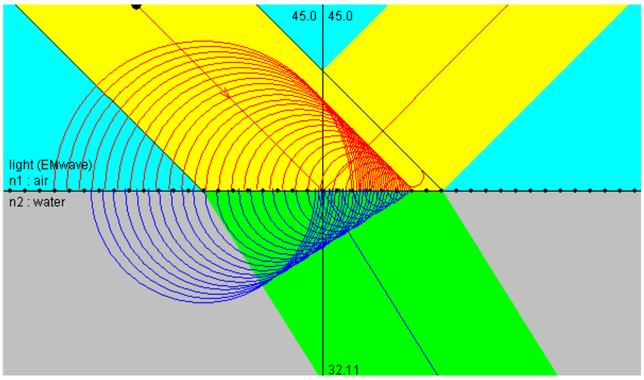
Model de **construcció** del nou front d’ones

- **Problema**: Segons el principi de Huygens, hauria d’existir una ona posterior avançant cap a la font: no s’ha observat.
- Açò és degut al fet que es consideren les partícules emissores de llum que pertanyen exclusivament al front d’ones. Si es té en compte **tot el volum** del medi, en especial les partícules que disten menys de $\lambda/2$, l’ona que avança cap a la font s’extingeix.

Sistemes amb superfícies planes

Refracció i reflexió en una superfície plana

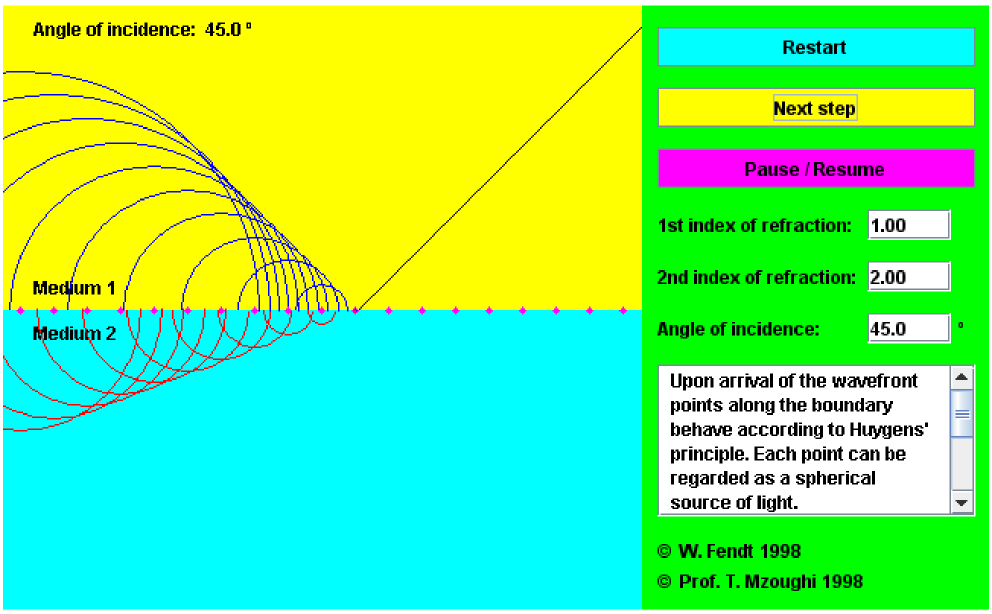
- En **escala submicroscòpica**, els àtoms de la interfase (i propers) interaccionen amb el feix incident i creen ones secundàries que se superposen i combinen entre si.
- Aquest procés és responsable de l'aparició d'ones reflectides i refractades que es propaguen al llarg de **certes direccions** de l'espai.



- La reflexió és un **efecte de superfície**, ja que involucra àtoms en una capa de profunditat al voltant de $\lambda/2$.
  - Els objectes que ens rodegen els veiem per la llum reflectida sobre les seues **superfícies** (interfases).

Sistemes amb superfícies planes

Refracció i reflexió en una superfície plana



http://www.walter-fendt.de/ph14e/huygenspr.htm

Sistemes amb superfícies planes

Refracció i reflexió en una superfície plana

Llei de **Snell** i de la **reflexió**: Considerem una ona plana monocromàtica que incideix sobre una interfase plana que separa dos medis dielèctrics d'índex de refracció *n* i *n'*.

- L'ona reflectida i l'ona transmesa tenen la mateixa freqüència, però es propaguen amb velocitats diferents.
- Llei de la reflexió:

$$\theta = \theta''$$

- Llei de la refracció de Snell:

$$n \,\mathrm{sen}\, \theta = n' \,\mathrm{sen}\, \theta'$$

Sistemes amb superfícies planes

Refracció i reflexió en una superfície plana

- En una interfase entre **dos dielèctrics**, quan els angles θ, θ' i θ'' tenen valors xicotets (incidència quasi-normal), gran quantitat de flux lluminós incident és **refractat**. Conseqüència: obviem la reflexió.
- Si considerem la interfase d'un **dielèctric amb un medi conductor** (metall), podem assumir que tota l'energia radiant es **reflecteix** en la superfície plana. Conseqüència: ens oblidem de la refracció.

Tema II. Sistemes òptics amb superfícies planes

- Refracció i reflexió en una interfase plana
- Teoria geomètrica de la reflexió i la refracció. Lleis de Descartes
- La interfase plana com a sistema òptic formador d'imatges
- Làmina de cares planoparal·leles
- Refracció en prismes òptics
- El prisma com a sistema formador d'imatges. Prismes oftàlmics
- Dispersió en prismes
- Combinacions de prismes: prismes acromàtics i prismes de visió directa
- Prismes reflectors
- Espills dobles

Sistemes amb superfícies planes

Lleis de Descartes

Lleis de l'Òptica Geomètrica:

1 Les trajectòries dels raigs en medis homogenis i isòtrops són **rectilínies**.

Lleis de Descartes: Considerem una superfície plana que separa dos medis homogenis i isòtrops d'índex *n* i *n'*, i suposem que un raig de llum incideix sobre la superfície:

2 Els raigs incident, refractat i reflectit, així com la normal a la superfície són coplanaris (**pla d'incidència**)

3 Llei de la **refracció** de Snell: $n \,\mathrm{sen}\, \varepsilon = n' \,\mathrm{sen}\, \varepsilon'$

4 Llei de la **reflexió**: $\varepsilon = -\varepsilon''$

5 Les trajectòries de la llum a través de distints medis són **reversibles**.

Sistemes amb superfícies planes
Lleis de Descartes

Criteri de signes: Els angles d'incidència (ε), refracció (ε') i reflexió (ε'') són positius si, en portar el raig, per gir, a coincidir amb la normal pel camí angular més curt, es va en el sentit de les agulles d'un rellotge.

- En el nostre cas, ε i ε' són positius, mentre que ε'' és negatiu.

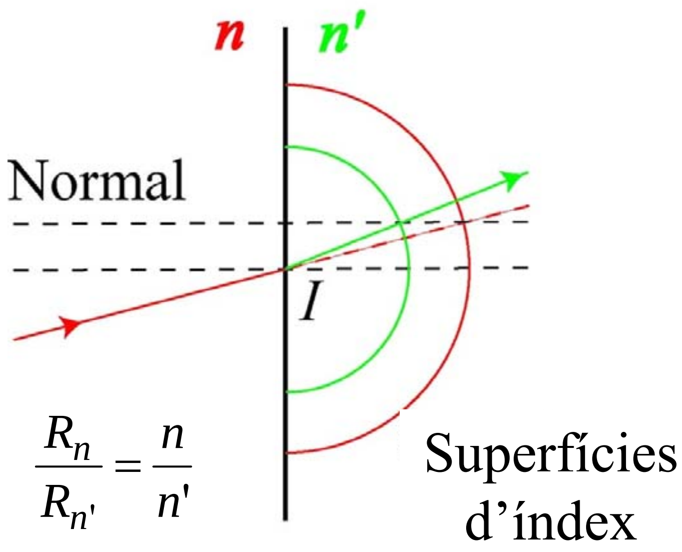
Truc per obtenir la llei de la reflexió a partir de la llei de la refracció: $n'' = -n$

$$n \operatorname{sen} \varepsilon = n'' \operatorname{sen} \varepsilon'' \xrightarrow{n''=-n} \operatorname{sen} \varepsilon = -\operatorname{sen} \varepsilon'' \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \operatorname{sen} \varepsilon = \operatorname{sen}\left(-\varepsilon''\right) \Rightarrow \varepsilon = -\varepsilon''$$

Sistemes amb superfícies planes
Lleis de Descartes

Mètode de les superfícies d'índex per a la construcció gràfica d'un raig **refractat**:

- Les **superfícies d'índex** són dues superfícies esfèriques els centres de curvatura de les quals coincideixen amb el punt d'incidència del raig considerat amb la interfase, *I*, i els radis de curvatura de les quals són proporcionals als índexs de refracció *n* i *n'* d'ambdós medis.



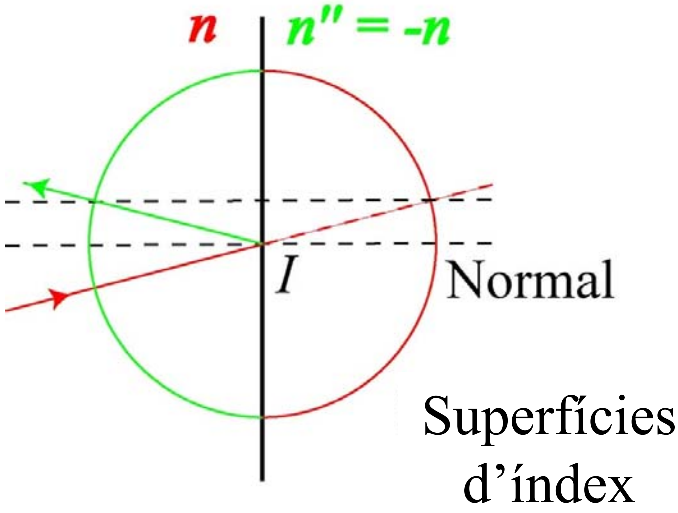
$$\frac{R_n}{R_{n'}} = \frac{n}{n'}$$

Sistemes amb superfícies planes

Lleis de Descartes

Mètode de les superfícies d'índex per a la construcció gràfica d'un raig **refractat**:

- En aquest cas les dues **superfícies d'índex** tenen el mateix centre i radi de curvatura. Per a l'ona reflectida s'ha de considerar la part de la superfície d'índex assignada a ones que viatgen en sentit oposat a la incident.



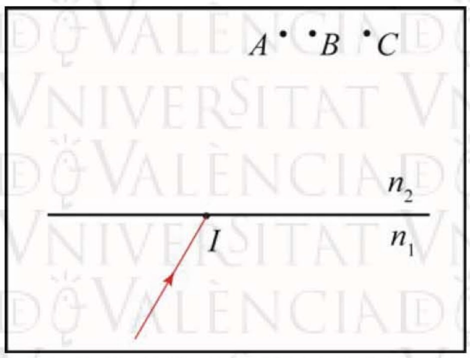
Sistemes amb superfícies planes

Lleis de Descartes

<u>Mètode de les superfícies d'índex</u>

Problema 1 En la figura adjunta es representa un raig que incideix sobre un dioptre pla que separa dos medis dielèctrics d'índex de refracció n_1=1,7 i n_2=1,3.
Determineu la trajectòria del raig refractat pel mètode de les superfícies d'índex. Indiqueu per quin d'aquests punts passa el raig refractat.

1. El punt A
2. El punt B
3. El punt C



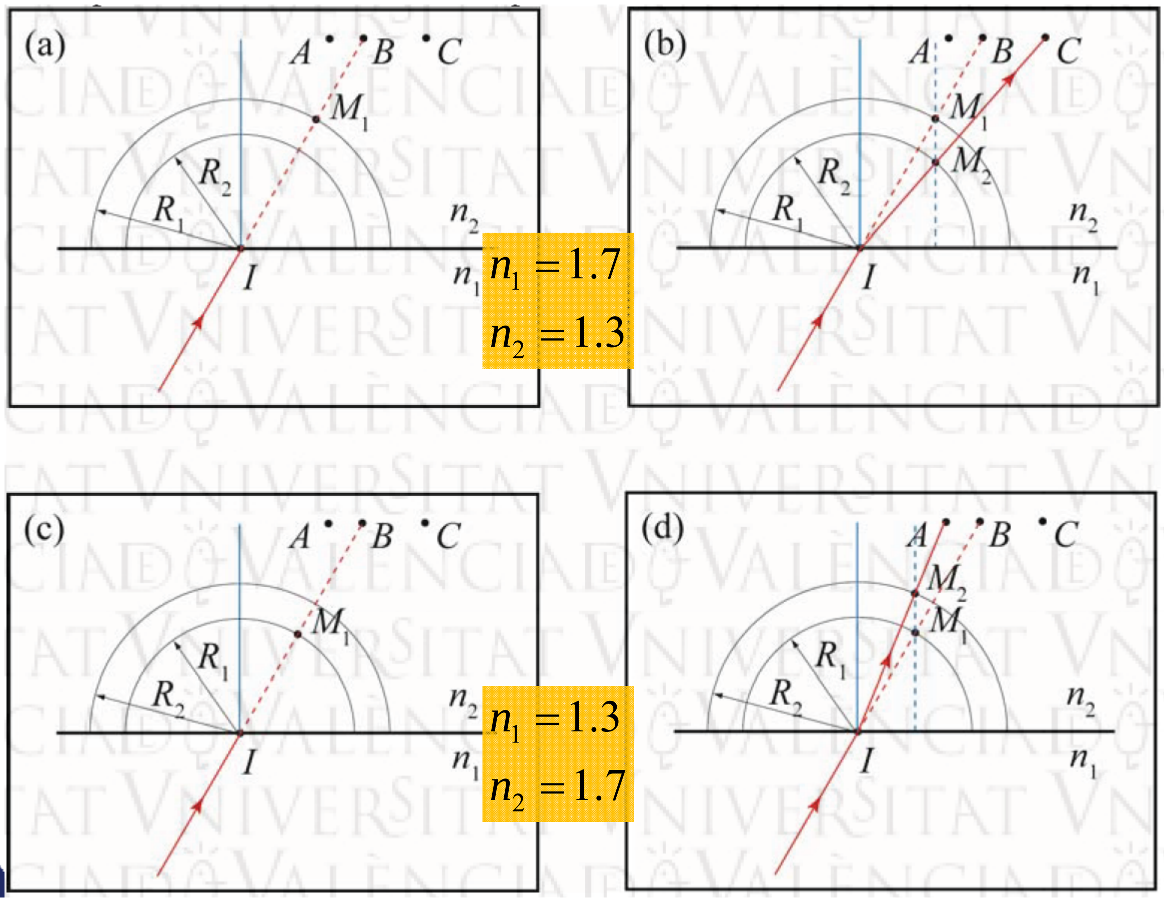
$$\boxed{\frac{R_1}{R_2} = \frac{n_1}{n_2}}$$

http://roderic.uv.es/handle/10550/24274

Sistemes amb superfícies planes

Lleis de Descartes

<u>**Mètode de les superfícies d'índex**</u>



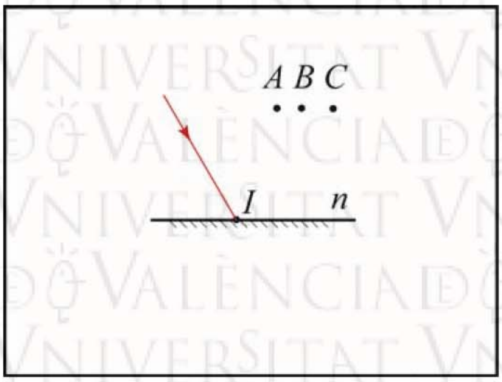
Sistemes amb superfícies planes

Lleis de Descartes

<u>**Mètode de les superfícies d'índex**</u>

Problema 3 En la figura es representa un raig que es propaga en un medi d'índex de refracció n=1,3 i incideix sobre un espill pla. Determineu la trajectòria del raig reflectit pel mètode de les superfícies d'índex.
A continuació, indiqueu per quin punt passa el raig reflectit.

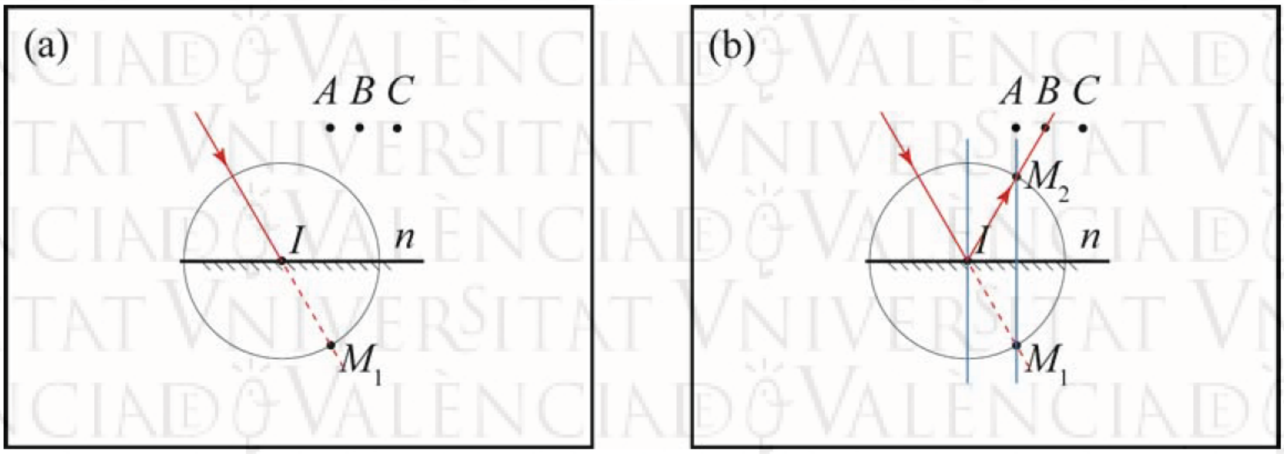
1. El punt A
2. El punt B
3. El punt C



Sistemes amb superfícies planes

Lleis de Descartes

Mètode de les superfícies d'índex

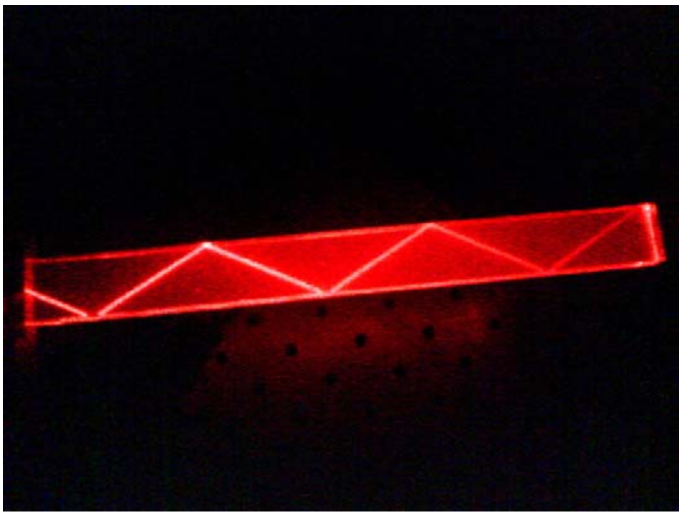


Sistemes amb superfícies planes

Lleis de Descartes

Fenomen de la **reflexió total**:

- Quan en la refracció la llum travessa una interfase a un altre medi de menor índex de refracció, l'angle de refracció és major que l'incident: $n > n'$ implica que $\varepsilon < \varepsilon'$.



Sistemes amb superfícies planes

Lleis de Descartes

Fenomen de la **reflexió total**:

- Quan en la refracció la llum travessa una interfase a un altre medi de menor índex de refracció, l'angle de refracció és major que l'incident: $n > n'$ implica que $\varepsilon < \varepsilon'$.
- Existeix un angle d'incidència (angles límit) per al qual el raig refractat emergeix rasant a la interfase ($\varepsilon' = 90º$). Per a dit angle d'incidència es compleix que:

$$n \,\mathrm{sen}\, \varepsilon_l = n' \Rightarrow \varepsilon_l = \mathrm{arcsen}\left(\frac{n'}{n}\right)$$

- Per a angles majors ($\varepsilon > \varepsilon_l$) no hi ha llum refractada, sinó que és reflectida. Aquest fenomen es diu **reflexió total**.

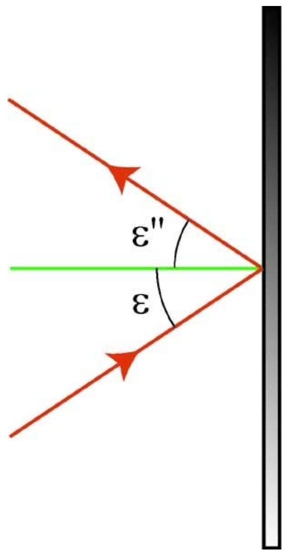
Tema II. Sistemes òptics amb superfícies planes

- Refracció i reflexió en una interfase plana
- Teoria geomètrica de la reflexió i la refracció. Lleis de Descartes
- La interfase plana com a sistema òptic formador d'imatges
- Làmina de cares planoparal·leles
- Refracció en prismes òptics
- El prisma com a sistema formador d'imatges. Prismes oftàlmics
- Dispersió en prismes
- Combinacions de prismes: prismes acromàtics i prismes de visió directa
- Prismes reflectors
- Espills dobles

Sistemes amb superfícies planes
Formació d'imatges. L'espill pla

Un **espill pla** és una superfície plana reflectant. Se solen utilitzar materials metàl·lics per aconseguir una reflexió pràcticament total del flux lluminós incident.

Reflexió d'un raig



Sistemes amb superfícies planes
Formació d'imatges. L'espill pla

Definicions:

- **Condició d'estigmatisme**: Es diu que un sistema òptic es comporta **estigmàticament** per un parell de punts, *O* i *O'*, quan tots els raigs que emergeixen de *O* passen **realment** o **virtualment** per ***O'*** després de travessar el sistema.

Sistemes amb superfícies planes

Formació d'imatges. L'espill pla

- Pot ocórrer que els raigs a la sortida siguen divergents, però les seues prolongacions en sentit contrari al de la propagació de la llum es tallen en un punt *O'*; d'aquest punt *O'* se'n diu en aquest cas **imatge virtual**.

- Un **espill pla** produeix d'un **objecte puntual** real, *O*, una **imatge virtual estigmàtica**, *O'*, simètrica del punt objecte respecte al pla de l'espill.

Sistemes amb superfícies planes

Formació d'imatges. L'espill pla

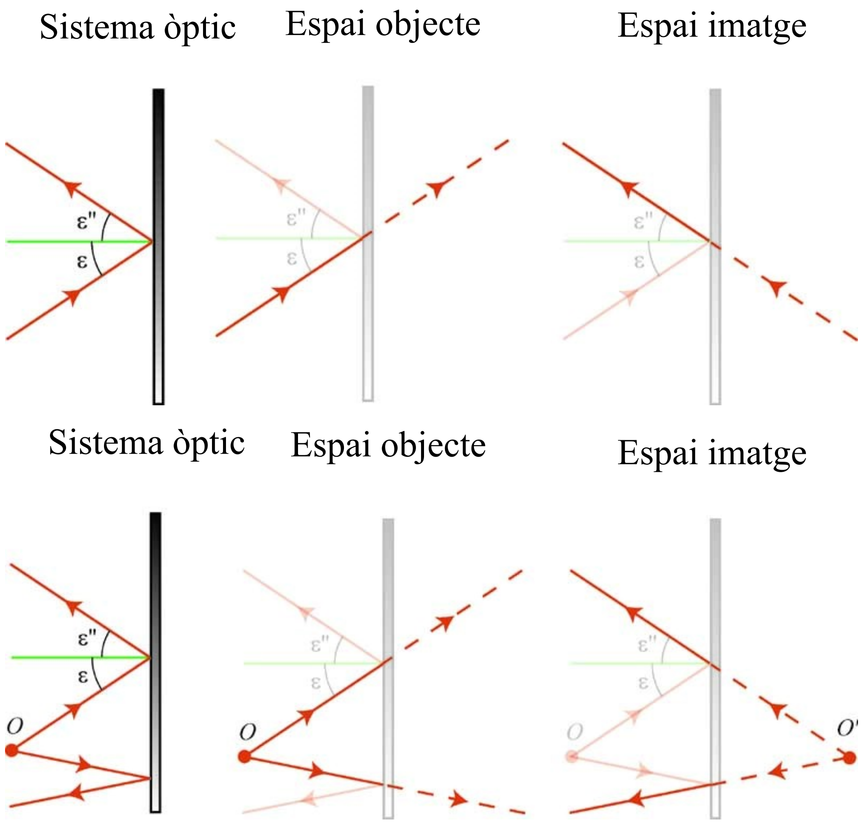
Definicions:

- **Espai objecte**: És aquell espai geomètric on els raigs de llum, ja siga realment o virtualment, no senten la influència del sistema òptic.

- **Espai imatge**: És aquell espai geomètric on els raigs ja han modificat (en cas necessari) la seua trajectòria, ja siga realment o virtualment, a causa de l'actuació del sistema òptic.

Sistemes amb superfícies planes

Formació d'imatges. L'espill pla

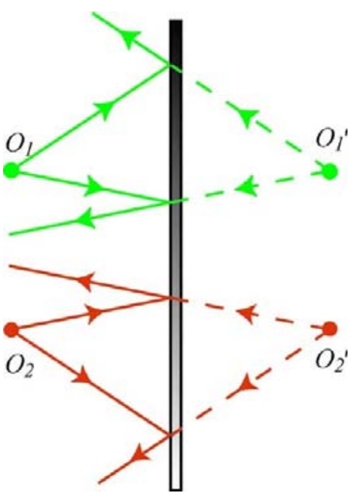


Sistemes amb superfícies planes

Formació d'imatges. L'espill pla

Considerem la formació de la imatge d'un objecte extens.

- La imatge és simètrica a l'objecte respecte al pla de l'espill. Conseqüentment, la imatge i l'objecte tenen la mateixa grandària.



$$\left.\begin{aligned} y &= \overline{O_1 O_2} \\ y' &= \overline{O'_1\, O'_2} \end{aligned}\right\}$$

$$\beta' = \frac{y'}{y} = 1$$

Sistemes amb superfícies planes

Formació d'imatges. L'espill pla

Hem de considerar **plans objecte** que són **paral·lels** a la superfície reflectant. Si agafem un pla perpendicular, observem una inversió de la imatge.

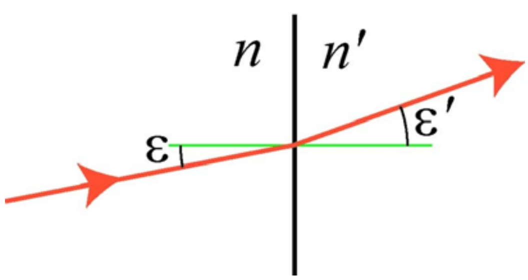
Un **dioptre pla** és un sistema òptic format per dos medis dielèctrics (transparents) d'índexs de refracció diferents, que estan separats per una interfase plana.

Sistemes amb superfícies planes

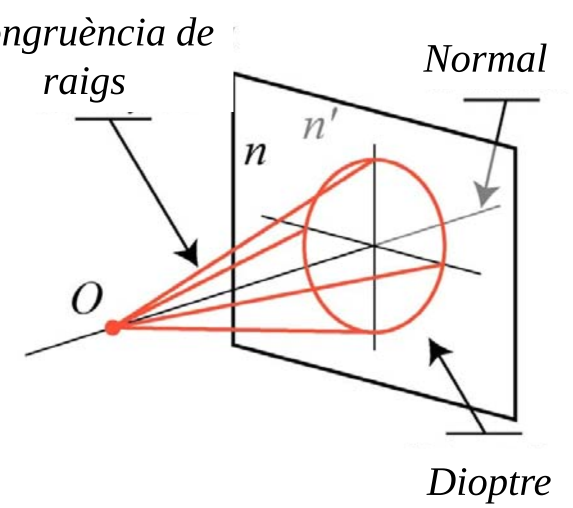
Formació d'imatges. El dioptre pla

Un **dioptre pla** és un sistema òptic format per dos medis dielèctrics (transparents) d'índexs de refracció diferents, que estan separats per una interfase plana.

Refracció d'un raig

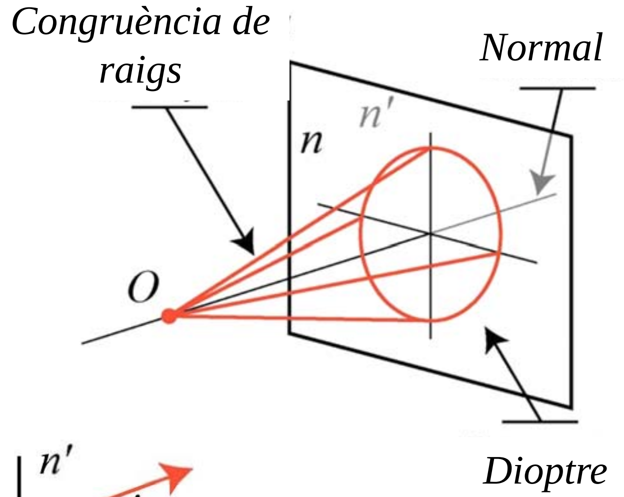


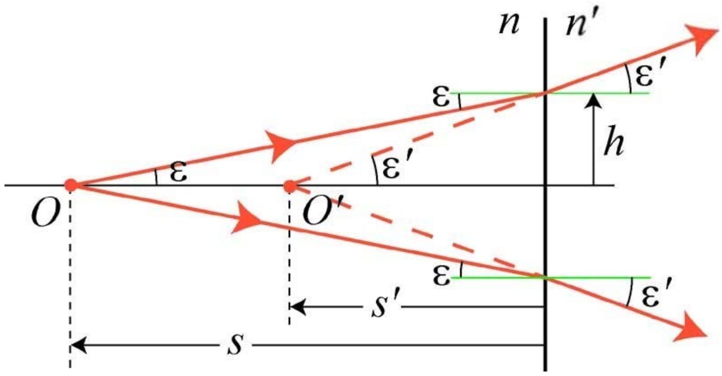
Refracció d'una congruència



Sistemes amb superfícies planes

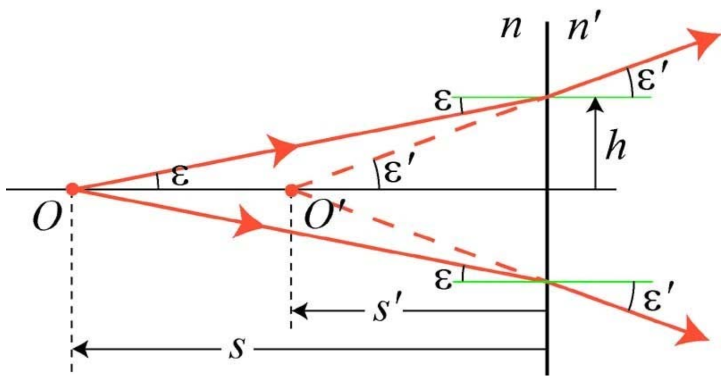
Formació d'imatges. El dioptre pla





Sistemes amb superfícies planes

Formació d'imatges. El dioptre pla

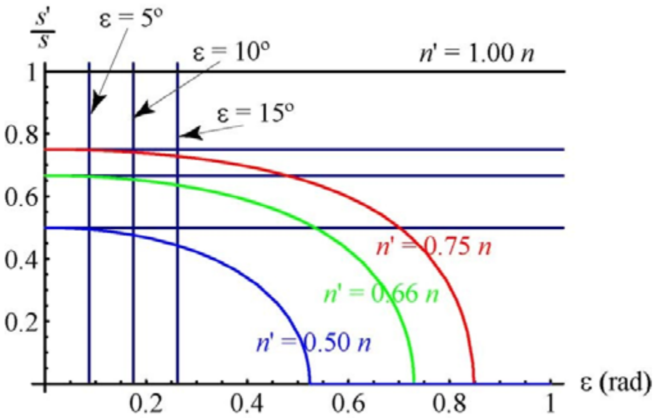


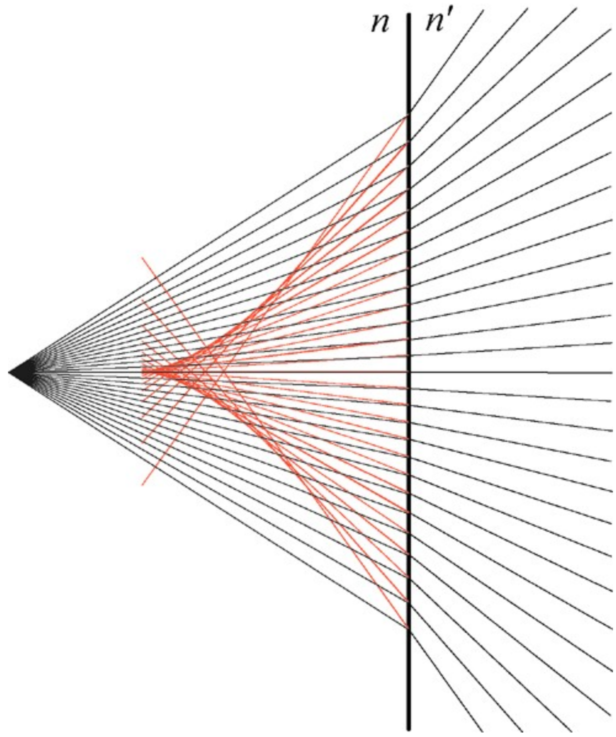
$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\varepsilon &= \frac{h}{-s} \\ \operatorname{tg}\varepsilon' &= \frac{h}{-s'} \end{aligned}\right\} s' = s\,\frac{\operatorname{tg}\varepsilon}{\operatorname{tg}\varepsilon'}$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\varepsilon' &= \frac{\operatorname{sen}\varepsilon'}{\cos\varepsilon'} = \frac{\operatorname{sen}\varepsilon'}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\varepsilon'}} \\ \operatorname{sen}\varepsilon' &= \frac{n}{n'}\operatorname{sen}\varepsilon \end{aligned}\right\} s' = s\,\frac{1}{\cos\varepsilon}\sqrt{\left(\frac{n'}{n}\right)^2 - \operatorname{sen}^2\varepsilon}$$

Sistemes amb superfícies planes

Formació d'imatges. El dioptre pla





Sistemes amb superfícies planes

Formació d'imatges. El dioptre pla

Observem que la posició del punt *O'*, caracteritzada per la distància *s'*, depèn de:

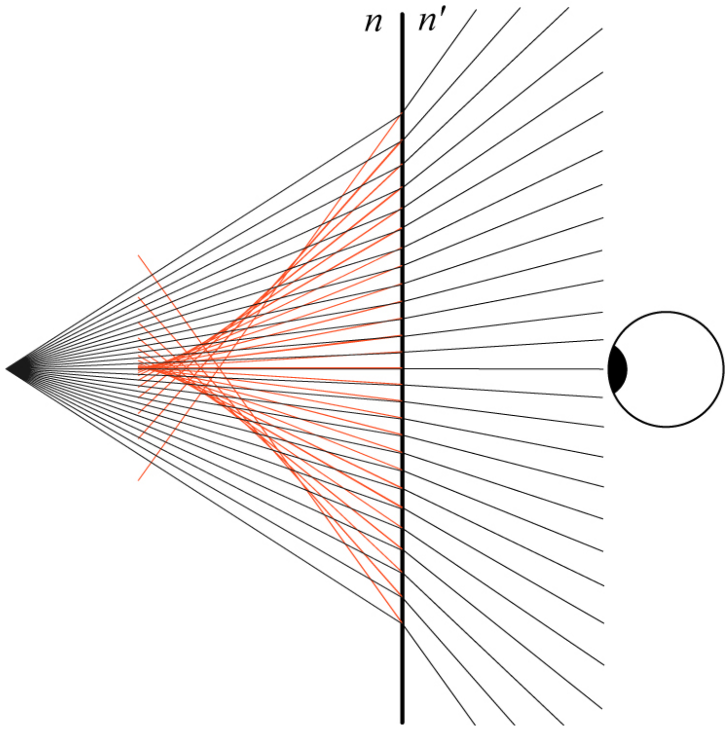
- La **posició** del punt **objecte** *O* caracteritzada per *s*.
- El quocient d'**índexs de refracció** *n'*/*n*. Si suposem que *n'* = 1 (aire) resulta que:
  - $n \approx 4/3$ (aigua) $\rightarrow n'/n = 0.75$
  - $n \approx 3/2$ (vidre) $\rightarrow n'/n = 0.66$
  - $n \approx 2$ (vidre refractiu) $\rightarrow n'/n = 0.50$

$$s' = s\frac{1}{\cos\varepsilon}\sqrt{\left(\frac{n'}{n}\right)^2 - \mathrm{sen}^2\,\varepsilon}$$

- L'**angle d'incidència** ε dels raigs.

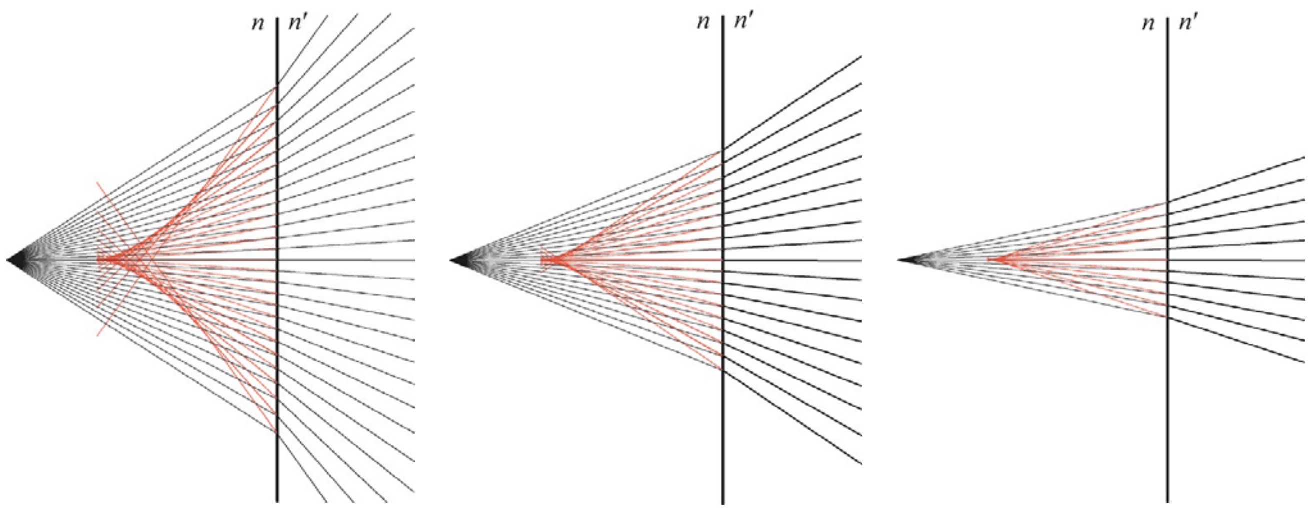
Sistemes amb superfícies planes

Formació d'imatges. El dioptre pla



Sistemes amb superfícies planes

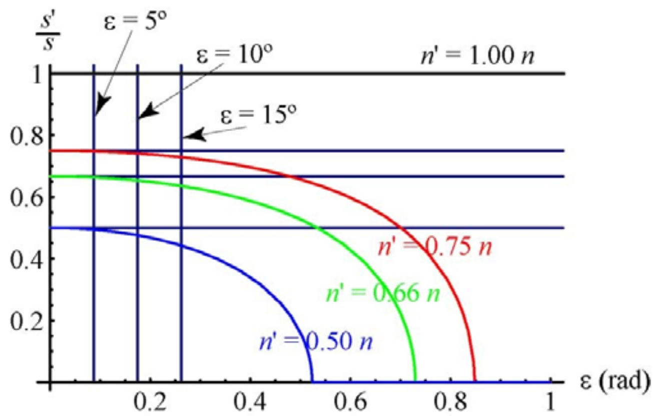
Formació d'imatges. El dioptre pla

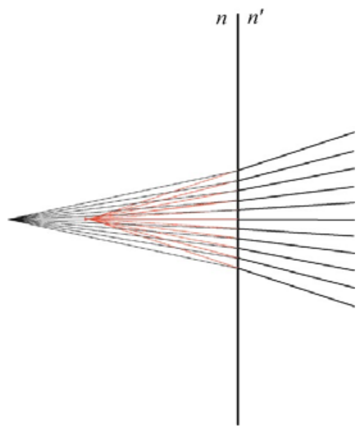


Sistemes amb superfícies planes
Formació d'imatges. El dioptre pla

- S'observa, per a una posició fixa del punt objecte *O* (*s* fix), una **posició diferent del punt *O'***, ja que *s'* varia. Considerem raigs amb angles d'incidència ε diferents.

- Però, per a **angles** d'incidència **xicotets** ($\varepsilon < 5^o$) i variacions de l'índex de refracció xicotetes ($0.5 < n'/n < 2$), la posició de *O'* és pràcticament invariable.





Sistemes amb superfícies planes
Formació d'imatges. El dioptre pla

Aproximació paraxial: Considerem angles d'incidència xicotets ($\varepsilon < 5^o$):

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon^3 + \frac{2}{15}\varepsilon^5 + \cdots \approx \varepsilon$$
$$\operatorname{sen}\varepsilon = \varepsilon - \frac{1}{6}\varepsilon^3 + \frac{1}{120}\varepsilon^5 + \cdots \approx \varepsilon$$

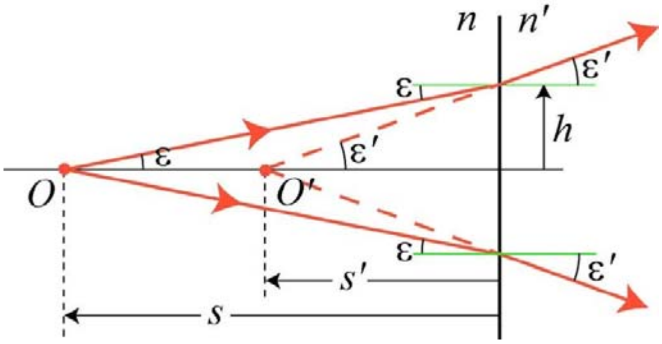
Si a més exigim que les variacions de l'índex de refracció siguen xicotetes ($0.5 < n'/n < 2$), trobem que l'angle d'emergència també és xicotet ($\varepsilon' < 10^o$):

$$\left.\begin{array}{l} n\operatorname{sen}\varepsilon = n'\operatorname{sen}\varepsilon' \\ s' = s\dfrac{\operatorname{tg}\varepsilon}{\operatorname{tg}\varepsilon'} \end{array}\right\} \xrightarrow{\varepsilon,\varepsilon'\approx 0} \begin{array}{l} n\varepsilon = n'\varepsilon' \\ s' = s\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon'} = s\dfrac{n'}{n} \end{array}$$

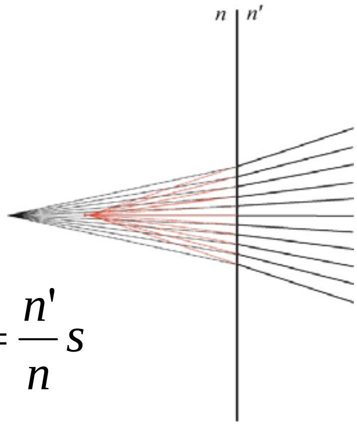
Sistemes amb superfícies planes

Formació d'imatges. El dioptre pla

- Ara *s'* no depèn de ε.
- Existeix una condició d'**estigmatisme aproximat** si considerem raigs amb angles d'incidència ε i emergència ε' xicotets (**raigs paraxials**).
- En la pràctica s'aconsegueix amb l'ús de **diafragmes** eliminar els raigs que no compleixen la condició d'estigmatisme aproximat.



$$s' = \frac{n'}{n} s$$



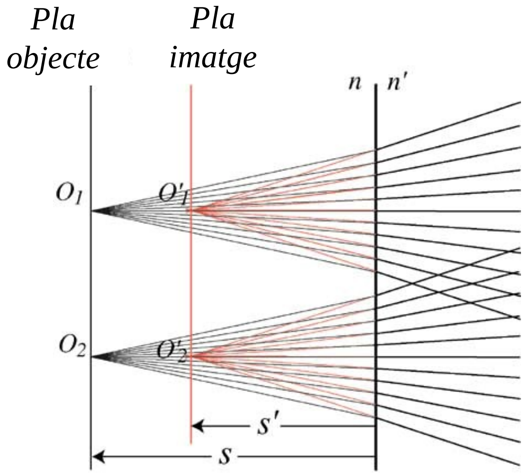
Sistemes amb superfícies planes

Formació d'imatges. El dioptre pla

Imatge d'un objecte pla perpendicular a l'eix òptic:

- L'**eix d'un sistema òptic** queda determinat per la trajectòria d'un raig que no es desvia en travessar-lo.
- Si l'objecte extens és pla i perpendicular a l'eix òptic, la **imatge** també és **plana** i perpendicular a l'eix.

$$s' = \frac{n'}{n} s$$



$$\left.\begin{aligned} y &= \overline{O_1 O_2} \\ y' &= \overline{O'_1\, O'_2} \end{aligned}\right\}$$

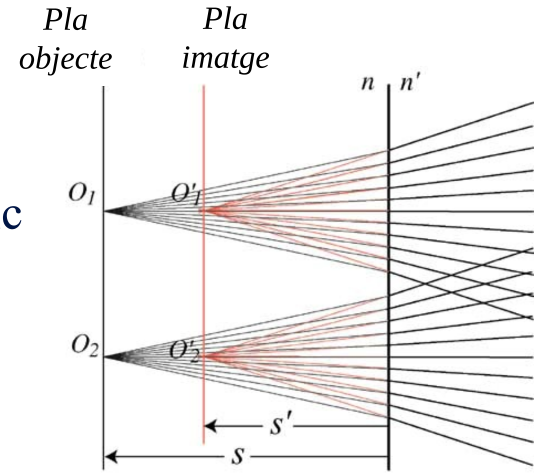
$$\beta' = \frac{y'}{y} = 1$$

Sistemes amb superfícies planes

Formació d'imatges. El dioptre pla

Perquè la condició d'estigmatisme aproximat siga vàlida, s'ha de complir l'**aproximació de Gauss**:

- Dioptre amb superfície activa xicoteta.
  - Superfície d'extensió xicoteta
  - Ús de **diafragmes** (**d'obertura**): pupil·la ocular
- Objecte pla perpendicular a l'eix òptic i centrat, de xicoteta dimensió activa.
  - Objecte d'extensió xicoteta
  - Ús de **diafragmes** (**de camp**): retina ocular



Tema II. Sistemes òptics amb superfícies planes

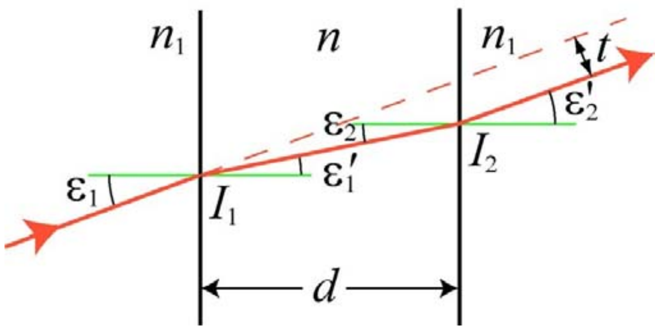
- Refracció i reflexió en una interfase plana
- Teoria geomètrica de la reflexió i la refracció. Lleis de Descartes
- La interfase plana com a sistema òptic formador d'imatges
- Làmina de cares planoparal·leles
- Refracció en prismes òptics
- El prisma com a sistema formador d'imatges. Prismes oftàlmics
- Dispersió en prismes
- Combinacions de prismes: prismes acromàtics i prismes de visió directa
- Prismes reflectors
- Espills dobles

Sistemes amb superfícies planes

Làmina de cares planoparal·leles

Una **làmina** és un conjunt de dos dioptres plans entre si.

Quan una làmina de cares planoparal·leles d'índex n, submergida en un medi d'índex n_1 és travessada per un raig, l'emergent és paral·lel a l'incident.

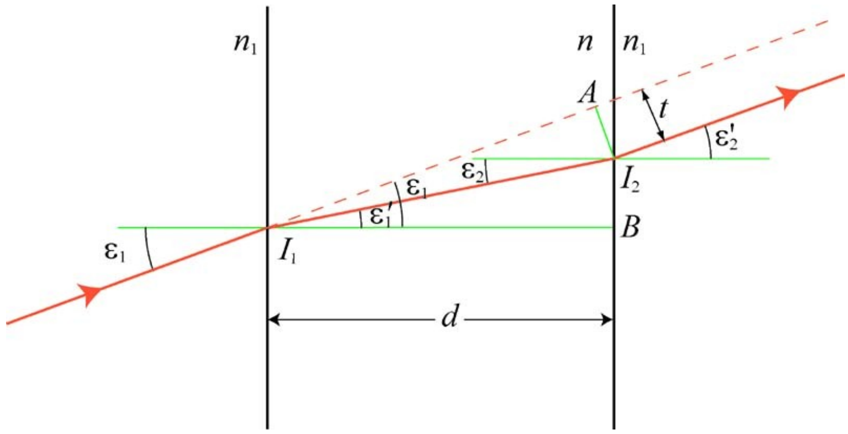


$$\left.\begin{aligned} n_1 \operatorname{sen} \varepsilon_1 &= n \operatorname{sen} \varepsilon'_1 \\ n \operatorname{sen} \varepsilon_2 &= n_1 \operatorname{sen} \varepsilon'_2 \end{aligned}\right\} \quad \varepsilon'_1 = \varepsilon_2 \Rightarrow \varepsilon_1 = \varepsilon'_2$$

Sistemes amb superfícies planes

Làmina de cares planoparal·leles

Determinació de la translació que pateix un raig en travessar una làmina de cares planoparal·leles:



$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}(\varepsilon_1 - \varepsilon'_1) &= \frac{t}{\overline{I_1 I_2}} \\ \cos\varepsilon'_1 &= \frac{d}{\overline{I_1 I_2}} \end{aligned}\right\} \quad t = d\,\frac{\operatorname{sen}(\varepsilon_1 - \varepsilon'_1)}{\cos\varepsilon'_1}$$

Sistemes amb superfícies planes

Làmina de cares planoparal·leles

Observem que la translació del raig *t* depèn de l'angle d'incidència ε_1, i varia linealment amb gruix *d* de la làmina.

$$t = d\,\frac{\operatorname{sen}(\varepsilon_1 - \varepsilon'_1)}{\cos\varepsilon'_1}$$

- Altres expressions més útils per trobar la translació del raig:

$$t = d\,\frac{\operatorname{sen}(\varepsilon_1 - \varepsilon'_1)}{\cos\varepsilon'_1} = d\,\frac{\operatorname{sen}\varepsilon_1 \cos\varepsilon'_1 - \cos\varepsilon_1 \operatorname{sen}\varepsilon'_1}{\cos\varepsilon'_1} =$$

$$= d \operatorname{sen}\varepsilon_1\left(1 - \frac{\operatorname{sen}\varepsilon'_1 \cos\varepsilon_1}{\operatorname{sen}\varepsilon_1 \cos\varepsilon'_1}\right) \Rightarrow \left\{\begin{aligned} t &= d \operatorname{sen}\varepsilon_1\left(1 - \frac{n_1}{n}\,\frac{\cos\varepsilon_1}{\cos\varepsilon'_1}\right) \\ t &= d \operatorname{sen}\varepsilon_1\left(1 - \frac{\operatorname{tg}\varepsilon'_1}{\operatorname{tg}\varepsilon_1}\right) \end{aligned}\right.$$

Sistemes amb superfícies planes

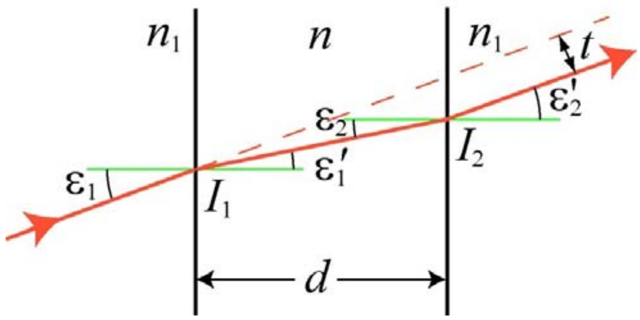
Làmina de cares planoparal·leles

- En l'aproximació paraxial es compleix que els angles d'incidència, ε_1 i ε_2, i refracció, ε'_1 i ε'_2, són xicotets.

$$t = d \operatorname{sen} \varepsilon_1 \left(1 - \frac{\operatorname{tg} \varepsilon'_1}{\operatorname{tg} \varepsilon_1}\right) \approx d\, \varepsilon_1 \left(1 - \frac{\varepsilon'_1}{\varepsilon_1}\right) = d\, \varepsilon_1 \left(1 - \frac{n_1}{n}\right)$$

• la translació del raig varia linealment amb l'angle d'incidència ε_1

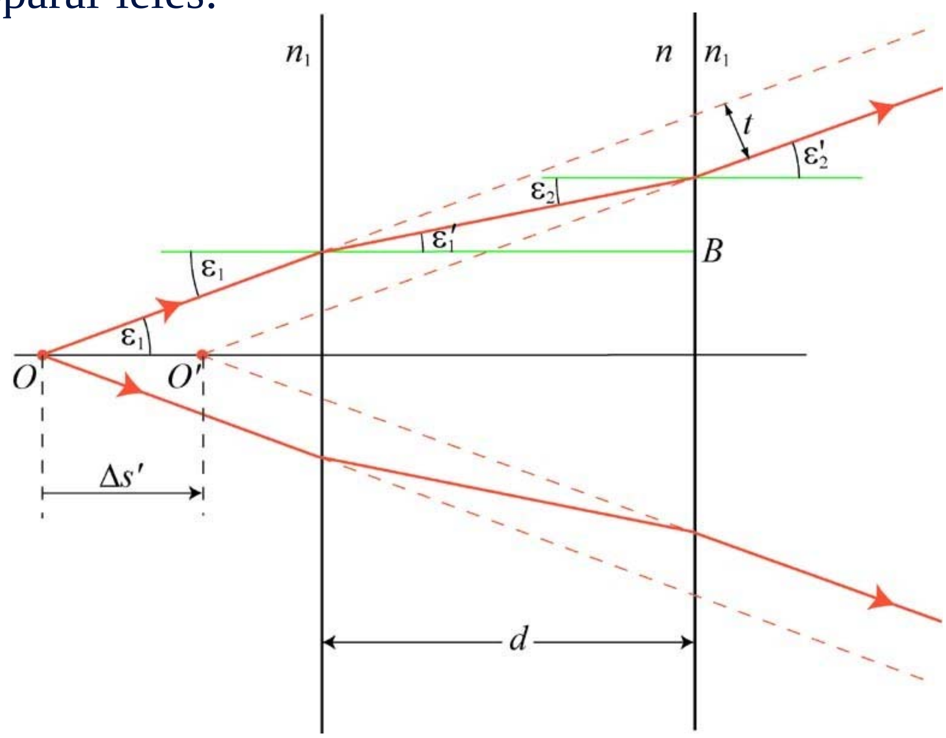
$$t = \varepsilon_1 d \left(1 - \frac{n_1}{n}\right)$$



Sistemes amb superfícies planes

Làmina de cares planoparal·leles

Formació de la imatge generada per una làmina de cares planoparal·leles:

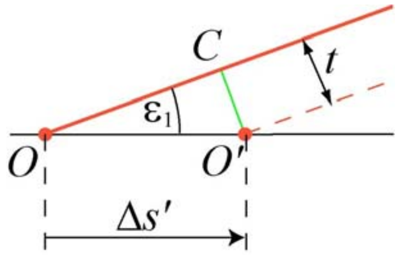


Sistemes amb superfícies planes

Làmina de cares planoparal·leles

Formació de la imatge generada per una làmina de cares planoparal·leles:

$$\Delta s' = \frac{t}{\operatorname{sen}\varepsilon_1} \Rightarrow \begin{cases} \Delta s' = d\left(1 - \dfrac{n_1}{n}\dfrac{\cos\varepsilon_1}{\cos\varepsilon'_1}\right) \\ \Delta s' = d\left(1 - \dfrac{\operatorname{tg}\varepsilon'_1}{\operatorname{tg}\varepsilon_1}\right) \end{cases}$$



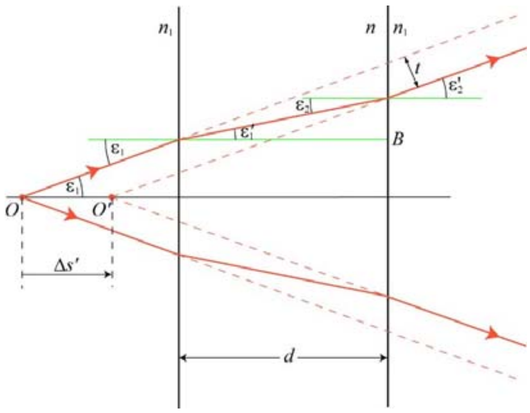
De nou, trobem que aquest sistema **no compleix** la condició d'estigmatisme, ja que la posició de la imatge, Δ*s*', varia amb l'angle d'incidència ε_1.

Sistemes amb superfícies planes

Làmina de cares planoparal·leles

Formació de la imatge en una làmina de cares planoparal·leles amb l'**aproximació de Gauss**:

$$\Delta s' = d\left(1 - \frac{\operatorname{tg}\varepsilon'_1}{\operatorname{tg}\varepsilon_1}\right) \approx d\left(1 - \frac{n_1}{n}\right)$$



- Observem que es compleix la **condició d'estigmatisme aproximat**.
- Existeix un **desplaçament axial** de la imatge que no depèn de la posició del pla objecte.
  - Se complix que β' = 1

Tema II. Sistemes òptics amb superfícies planes

- Refracció i reflexió en una interfase plana
- Teoria geomètrica de la reflexió i la refracció. Lleis de Descartes
- La interfase plana com a sistema òptic formador d'imatges
- Làmina de cares planoparal·leles
- Refracció en prismes òptics
- El prisma com a sistema formador d'imatges. Prismes oftàlmics
- Dispersió en prismes
- Combinacions de prismes: prismes acromàtics i prismes de visió directa
- Prismes reflectors
- Espills dobles

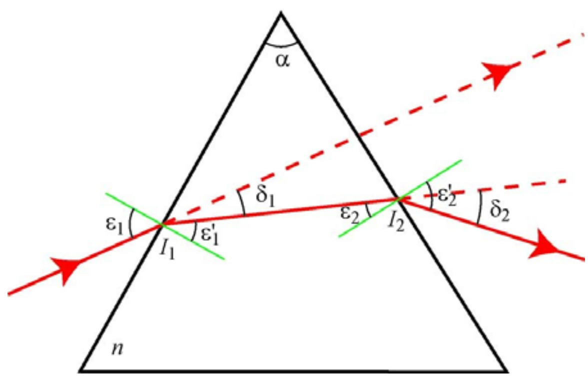
Sistemes amb superfícies planes

Refracció en prismes òptics

Un **prisma òptic** és un medi (dielèctric) transparent limitat per dues superfícies planes que formen un angle diedre, α, denominat **angle de refringència**.

- Tota secció normal a l'aresta del prisma s'anomena **secció principal**.

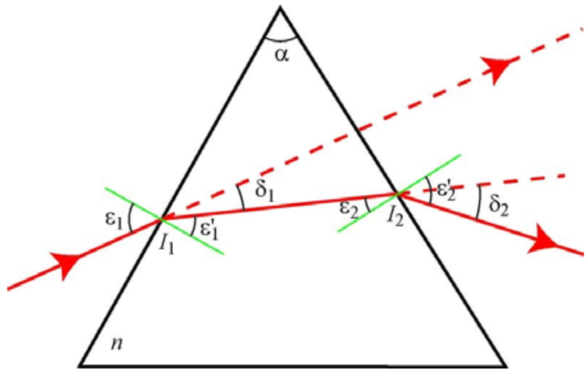
- Estudiarem la refracció en una secció principal generada per un índex de refracció n i submergit en un medi d'índex de refracció $n' = 1$



Sistemes amb superfícies planes

Refracció en prismes òptics

- L’angle δ que forma la prolongació del raig incident amb l’emergent s’anomena **desviació angular** del raig.



Conveni de signes:

- L’angle α s’agafa com a positiu si en portar per gir amb l’eix de l’aresta de la primera cara sobre la segona es va en sentit antihorari ($\alpha > 0$)
- La desviació angular δ s’agafa com a positiva si en portar el raig emergent sobre l’incident es va en sentit antihorari ($\delta_1, \delta_2 > 0$)

Sistemes amb superfícies planes

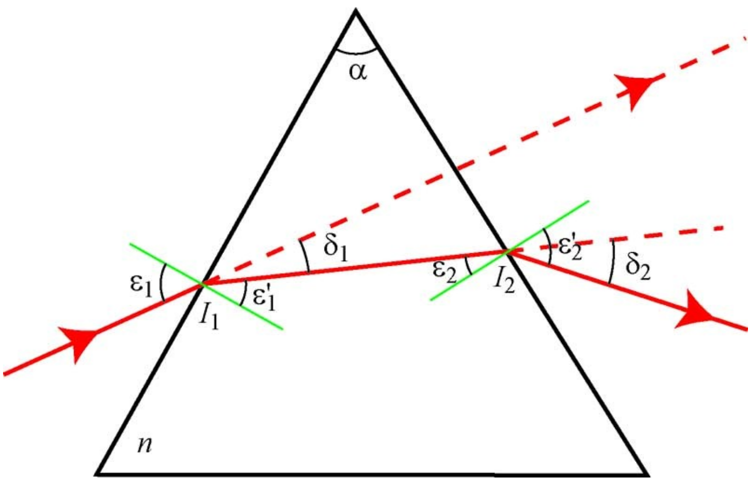
Refracció en prismes òptics

- Segons el triangle interior del prisma com a base el raig refractat:

$$\alpha + \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon'_1\right) + \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon_2\right) = \pi \quad \Rightarrow \quad \alpha = \varepsilon'_1 - \varepsilon_2$$

- Càlcul de la **desviació angular**:

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = \left(\varepsilon_1 - \varepsilon'_1\right) + \left(\varepsilon_2 - \varepsilon'_2\right) \quad \Rightarrow \quad \delta = \varepsilon_1 - \varepsilon'_2 - \alpha$$

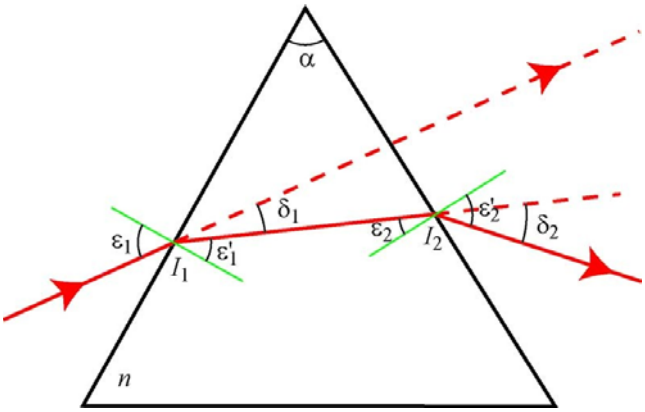


Sistemes amb superfícies planes

Refracció en prismes òptics

Condició d'emergència: Considerant el fenomen de la reflexió total:

$$|\varepsilon_2| \leq \varepsilon_l = \text{arcsen}(1/n)$$



Sistemes amb superfícies planes

Refracció en prismes òptics

Condició d'emergència: Considerant el fenomen de la reflexió total: $|\varepsilon_2| \leq \varepsilon_l = \text{arcsen}(1/n)$

A més es compleix que: $|\varepsilon_1| \leq \pi/2 \quad \Rightarrow \quad |\varepsilon'_1| \leq \varepsilon_l$

$$|\alpha| = |\varepsilon'_1 - \varepsilon_2| \leq |\varepsilon'_1| + |\varepsilon_2| \leq \varepsilon_l + \varepsilon_l$$

- Condició d'emergència: $|\alpha| \leq 2\varepsilon_l$
- Aquesta condició assegura que almenys 1 raig emergeix del prisma òptic.
- En cas contrari, exigim que $|\alpha| > 2\varepsilon_l$ per aconseguir que tots els raigs es reflectixen en la segona cara del prisma.

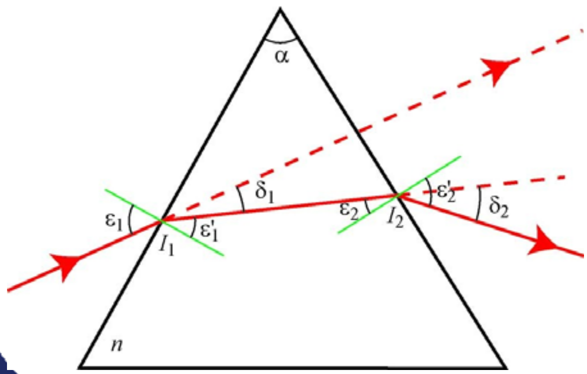
Sistemes amb superfícies planes

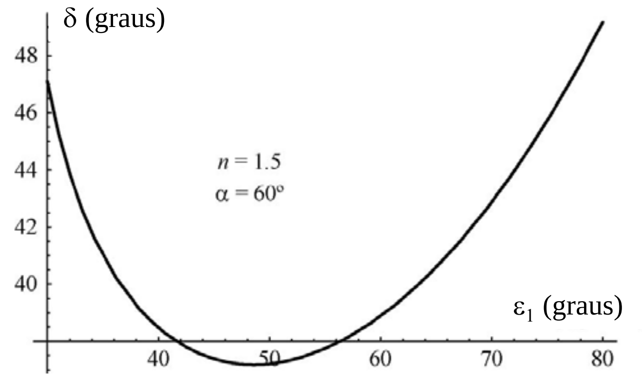
Refracció en prismes òptics

Desviació angular en funció de l'**angle d'incidència** del raig ε_1, i dels paràmetres opticogeomètrics n i α.

$$\delta = \varepsilon_1 - \varepsilon'_2 - \alpha \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} n \operatorname{sen} \varepsilon_2 = \operatorname{sen} \varepsilon'_2 \\ \alpha = \varepsilon'_1 - \varepsilon_2 \\ \operatorname{sen} \varepsilon_1 = n \operatorname{sen} \varepsilon'_1 \end{cases}$$

$$\delta = \varepsilon_1 - \arcsin\left\{\cos\alpha \operatorname{sen}\varepsilon_1 - \operatorname{sen}\alpha\sqrt{n^2 - \operatorname{sen}^2\varepsilon_1}\right\} - \alpha$$



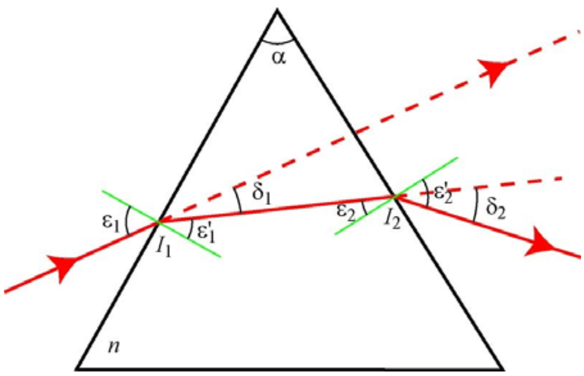


Sistemes amb superfícies planes

Refracció en prismes òptics

Desviació mínima: Es produeix quan la trajectòria és simètrica i el raig interior del prisma és normal al pla bisector del prisma.

$$\frac{d\delta}{d\varepsilon_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \varepsilon'_1 = -\varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 = -\varepsilon'_2 \end{cases}$$



- A més es compleix:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon'_1 &= \frac{\alpha}{2} \\ \delta_m &= 2\varepsilon_1 - \alpha \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\operatorname{sen}\varepsilon_1 = n\operatorname{sen}\varepsilon'_1} n = \frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{\delta_m + \alpha}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}$$

Tema II. Sistemes òptics amb superfícies planes

- Refracció i reflexió en una interfase plana
- Teoria geomètrica de la reflexió i la refracció. Lleis de Descartes
- La interfase plana com a sistema òptic formador d'imatges
- Làmina de cares planoparal·leles
- Refracció en prismes òptics
- El prisma com a sistema formador d'imatges. Prismes oftàlmics
- Dispersió en prismes
- Combinacions de prismes: prismes acromàtics i prismes de visió directa
- Prismes reflectors
- Espills dobles

Sistemes amb superfícies planes

Prismes oftàlmics

Prisma prim és tot prisma òptic l'angle de refringència α del qual és xicotet.

- No és estrictament necessari que el gruix del prisma siga xicotet. Però estudiarem aquest cas més simple.

Sistemes amb superfícies planes

Prismes oftàlmics

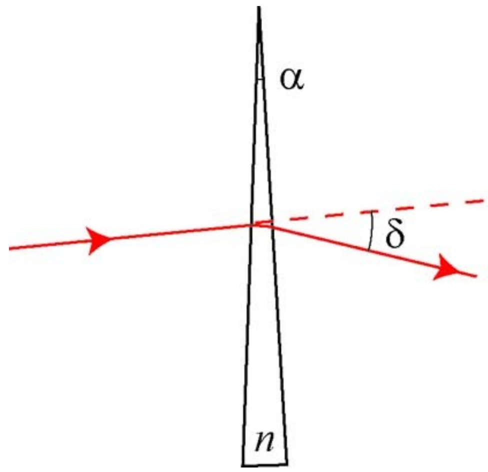
Considerem la desviació angular produïda per un prisma prim quan l'angle d'incidència ε_1 és xicotet.

$$\delta = \varepsilon_1 - \varepsilon'_2 - \alpha \quad \Rightarrow \quad \delta = (n-1)\alpha$$

$$n \,\mathrm{sen}\, \varepsilon_2 = \mathrm{sen}\, \varepsilon'_2 \Rightarrow n\varepsilon_2 = \varepsilon'_2$$

$$\alpha = \varepsilon'_1 - \varepsilon_2$$

$$\mathrm{sen}\, \varepsilon_1 = n \,\mathrm{sen}\, \varepsilon'_1 \Rightarrow \varepsilon_1 = n\varepsilon'_1$$

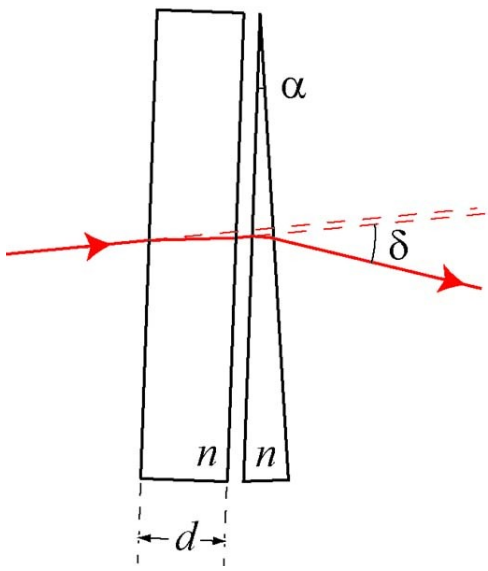


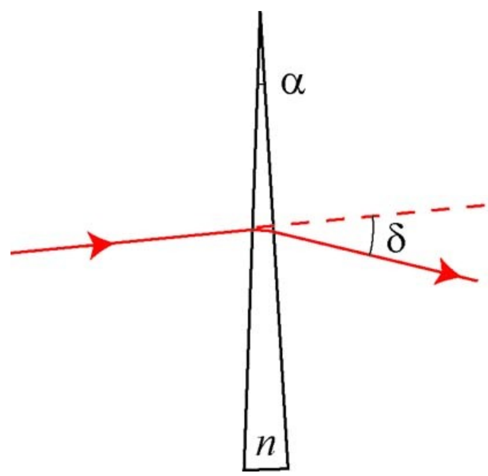
- La desviació angular produïda per un prisma prim **no depèn** de l'angle d'incidència ε_1 del raig.

Sistemes amb superfícies planes

Prismes oftàlmics

En cas que el gruix del prisma *d* no siga menyspreable, hem de considerar que el sistema es comporta com l'acoblament d'una làmina prima de cares planoparal·leles i gruix *d*, i un prisma prim de gruix menyspreable.





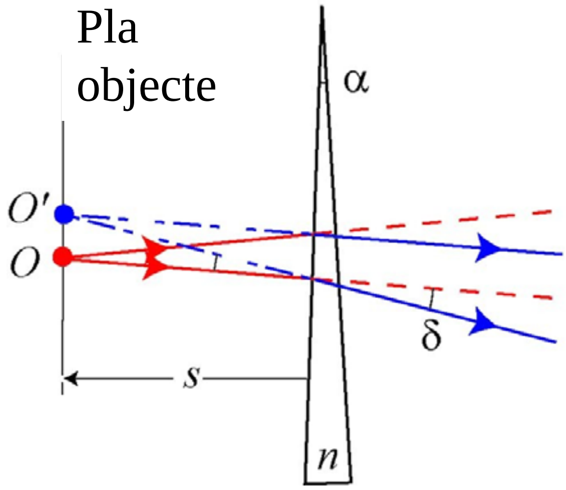
Sistemes amb superfícies planes

Prismes oftàlmics

Considerem la formació d'imatges produïda per un prisma prim (denominats per aquest fi **prismes oftàlmics**) quan l'angle d'incidència ε_1 és xicoteta.

$$\left.\begin{aligned}\delta &= (n-1)\alpha \\ \overline{OO'} &= -s\delta\end{aligned}\right\}$$

$$\overline{OO'} = -(n-1)s\alpha$$



- Un prisma oftàlmic genera una imatge de la mateixa grandària que l'objecte, en el mateix pla, però desplaçada.

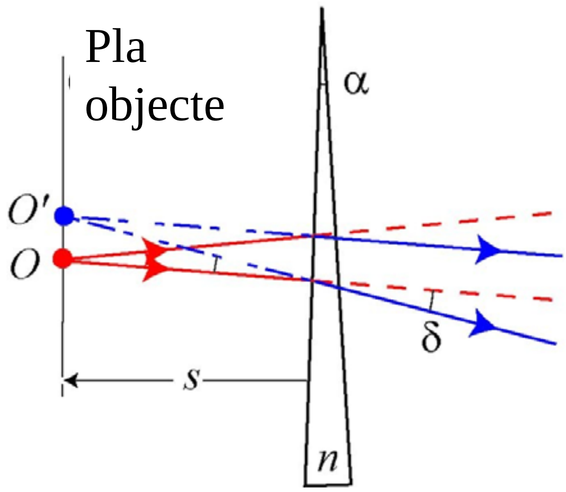
Sistemes amb superfícies planes

Prismes oftàlmics

Un prisma oftàlmic genera una imatge de la mateixa grandària que l'objecte, en el mateix pla, però **desplaçada lateralment**.

$$\overline{OO'} = -(n-1)s\alpha$$

$$\Delta s' = d\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$



- Quan el gruix del prisma, *d*, no és menyspreable, existeix a més un **desplaçament axial** del pla imatge.

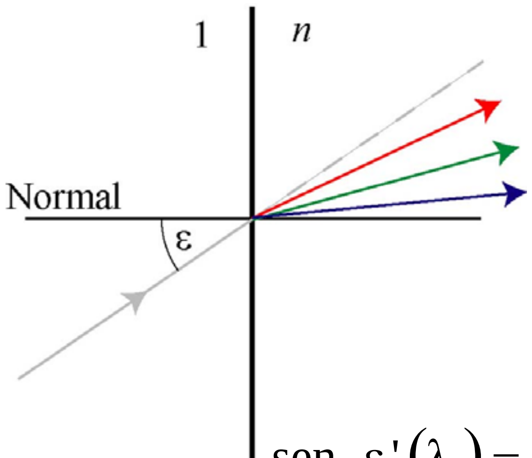
Tema II. Sistemes òptics amb superfícies planes

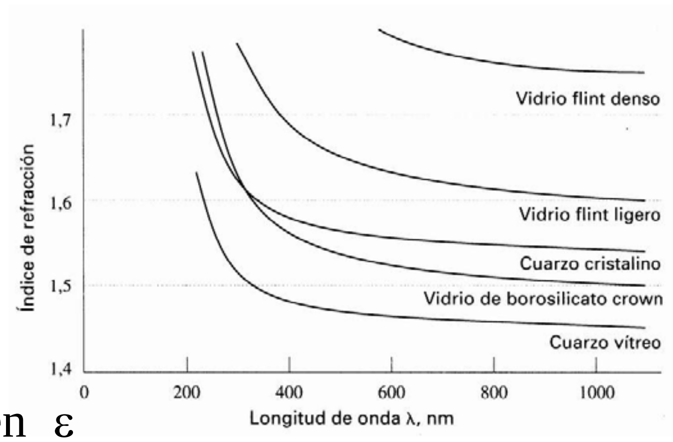
- Refracció i reflexió en una interfase plana
- Teoria geomètrica de la reflexió i la refracció. Lleis de Descartes
- La interfase plana com a sistema òptic formador d'imatges
- Làmina de cares planoparal·leles
- Refracció en prismes òptics
- El prisma com a sistema formador d'imatges. Prismes oftàlmics
- Dispersió en prismes
- Combinacions de prismes: prismes acromàtics i prismes de visió directa
- Prismes reflectors
- Espills dobles

Sistemes amb superfícies planes

Dispersió en prismes

Separació espacial dels components espectrals d'un feix policromàtic en travessar un dioptre pla:





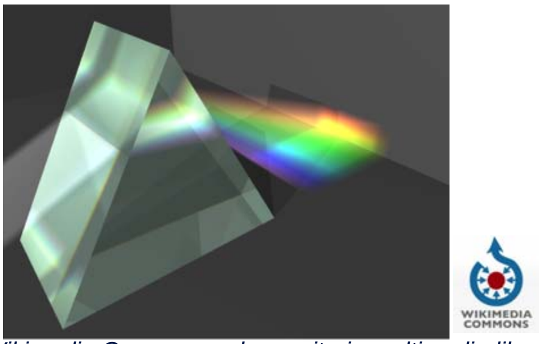
$$\text{sen } \varepsilon'(\lambda) = \frac{\text{sen } \varepsilon}{n(\lambda)}$$

- Les longituds d'ona curtes (blaves) pateixen una major desviació angular que les longituds llargues (roges).

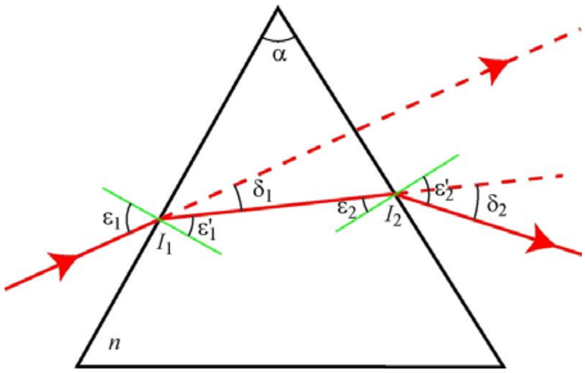
Sistemes amb superfícies planes

Dispersió en prismes

Dispersió cromàtica en un prisma:



De Wikimedia Commons, el repositorio multimedia libre



$$\delta(\lambda) = \varepsilon_1 - \operatorname{arcsen}\left\{\cos\alpha \operatorname{sen}\varepsilon_1 - \operatorname{sen}\alpha\sqrt{n^2(\lambda) - \operatorname{sen}^2\varepsilon_1}\right\} - \alpha$$

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{d\delta}{dn} = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\varepsilon'_1 \cos\varepsilon'_2} > 0 \\ \dfrac{dn}{d\lambda} < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{d\delta}{d\lambda} = \frac{d\delta}{dn}\frac{dn}{d\lambda} < 0$$

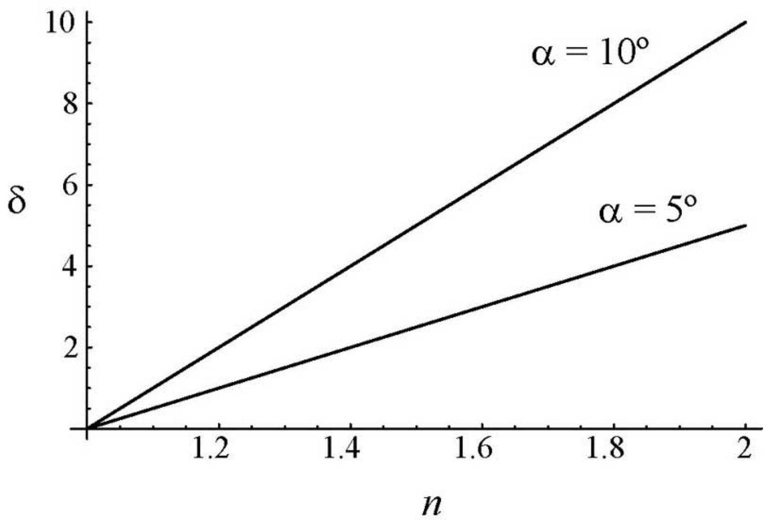
Sistemes amb superfícies planes

Dispersió en prismes

Dispersió cromàtica en un prisma prim:

$$\delta(\lambda) = (n-1)\alpha$$

$$\frac{d\delta}{dn} = \alpha = \frac{\delta(\lambda)}{n(\lambda) - 1}$$



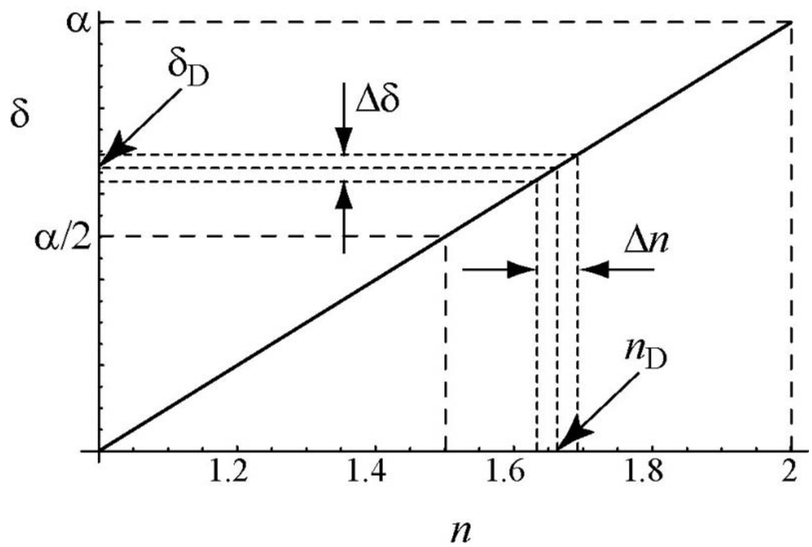
Sistemes amb superfícies planes
Dispersió en prismes

Dispersió cromàtica en un prisma prim:

$$\Delta\delta \approx \frac{d\delta}{dn}\Delta n$$

$$\begin{cases} \Delta\delta = \delta_F - \delta_C \\ \Delta n = n_F - n_C \end{cases}$$

$$\Delta\delta = \alpha\,\Delta n$$



$$\Delta\delta = \frac{\delta_D}{n_D - 1}(n_F - n_C) = \frac{n_F - n_C}{n_D - 1}\delta_D \qquad \Delta\delta = \frac{\delta_D}{\nu_D}$$

Sistemes amb superfícies planes
Dispersió en prismes

Dispersió cromàtica en un prisma prim:

$$\Delta\delta = \frac{\delta_D}{\nu_D} \qquad \Delta\delta = \alpha\,\Delta n \qquad \begin{cases} \Delta\delta = \delta_F - \delta_C \\ \Delta n = n_F - n_C \end{cases}$$

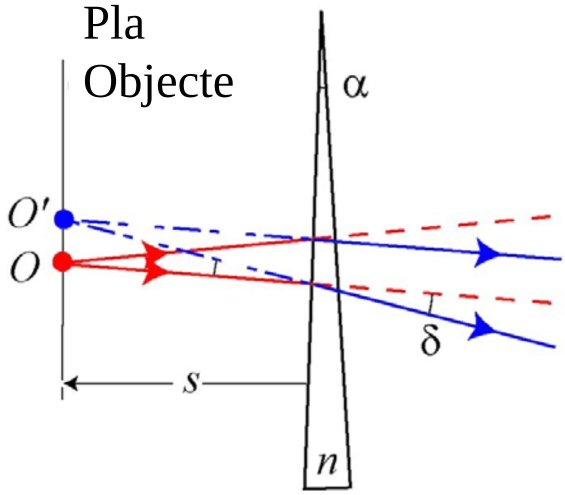
- En la primera expressió obtenim la diferència en la desviació angular per les ratlles C i F en funció del número d’Abbe.
  - En un vidre crown (ν_D alt) $\Delta\delta$ és xicotet. Açò és degut que el material és poc dispersiu.
  - En un vidre flint (ν_D baix) $\Delta\delta$ és gran. Açò és degut que el material és molt dispersiu.

Sistemes amb superfícies planes

Dispersió en prismes

Dispersió cromàtica en la formació d'imatges d'un prisma prim:

$$\left.\begin{aligned}\overline{OO'} &= -s\delta \\ \overline{OO'} &= -s(n-1)\alpha\end{aligned}\right\}$$



$$\Delta\overline{OO'} = \overline{OO'}_F - \overline{OO'}_C = \overline{O'_C\,O'_F}$$

$$\Delta\overline{OO'} = -s\Delta\delta$$

$$\Delta\overline{OO'} = -s\frac{\delta_D}{\nu_D} = \frac{\overline{OO'}_D}{\nu_D} \qquad \Delta\overline{OO'} = \overline{O'_C\,O'_F} = -s\,\alpha\,\Delta n$$

Sistemes amb superfícies planes

Dispersió en prismes

Dispersió cromàtica en la formació d'imatges d'un prisma prim:

$$\Delta\overline{OO'} = -s\frac{\delta_D}{\nu_D} = \frac{\overline{OO'}_D}{\nu_D} \qquad \Delta\overline{OO'} = \overline{O'_C\,O'_F} = -s\,\alpha\,\Delta n$$

- En la primera expressió obtenim la distància entre dos punts imatge generats per les ratlles C i F en funció del número d'Abbe.
- En un vidre crown (ν_D alt) $\overline{O'_C\,O'_F}$ és xicotet. Açò és degut que el material és poc dispersiu.
- En un vidre flint (nD baix) $\overline{O'_C\,O'_F}$ és gran. Açò és degut que el material és molt dispersiu.

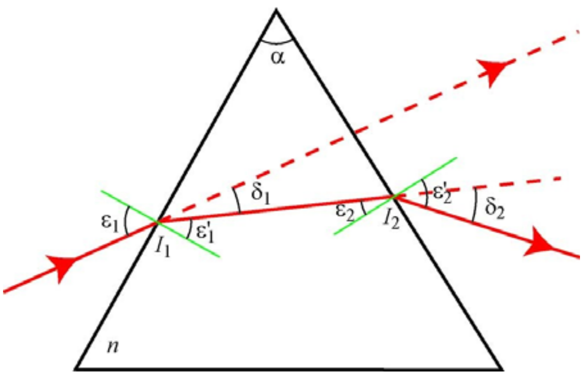
Tema II. Sistemes òptics amb superfícies planes

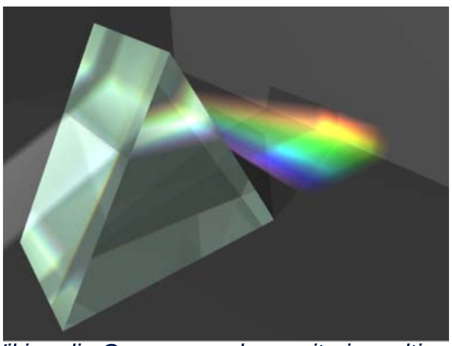
- Refracció i reflexió en una interfase plana
- Teoria geomètrica de la reflexió i la refracció. Lleis de Descartes
- La interfase plana com a sistema òptic formador d'imatges
- Làmina de cares planoparal·leles
- Refracció en prismes òptics
- El prisma com a sistema formador d'imatges. Prismes oftàlmics
- Dispersió en prismes
- Combinacions de prismes: prismes acromàtics i prismes de visió directa
- Prismes reflectors
- Espills dobles

Sistemes amb superfícies planes

Combinacions de prismes

- Un prisma únic produeix, en general, desviació i dispersió:





De Wikimedia Commons, el repositorio multimedia libre

Sistemes amb superfícies planes

Combinacions de prismes

- Un **tren de prismes** és un conjunt de prismes, que poden estar pegats, dissenyats per controlar la dispersió cromàtica i/o la desviació angular:

$$\delta = \delta_1 + \delta_2$$

- Un doblet de **prismes de visió directa** és una combinació de dos prismes prims que, per una longitud d'ona (en general s'elegeix la ratlla D), no pateix desviació angular:

$$\delta_D = \delta_{1D} + \delta_{2D} = 0 \qquad \delta_i = (n_i - 1)\alpha_i$$

$$(n_{1D} - 1)\alpha_1 + (n_{2D} - 1)\alpha_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{n_{1D} - 1}{n_{2D} - 1} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$$

- És necessari que els signes de α_1 i α_2 siguen de signe oposat.
- Existeix desviació angular per altres longituds d'ona.

Sistemes amb superfícies planes

Combinacions de prismes

- Un doblet de **prismes acromàtics** és una combinació de dos prismes prims que pateixen la mateixa desviació angular per a dues longituds d'ona (en general s'elegeixen les ratlles C i F) :

$$\Delta\delta = \alpha\,\Delta n \qquad \begin{cases} \Delta\delta = \delta_F - \delta_C \\ \Delta n = n_F - n_C \end{cases}$$

$$\delta_C = \delta_F \quad \Rightarrow \quad \Delta\delta = 0 = \Delta\delta_1 + \Delta\delta_2 = \alpha_1 \Delta n_1 + \alpha_2 \Delta n_2$$

$$\frac{n_{1F} - n_{1C}}{n_{2F} - n_{2C}} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$$

- És necessari que els signes de α_1 i α_2 siguen de signe oposat.
- Existeix una desviació angular diferent per altres longituds d'ona.

Tema II. Sistemes òptics amb superfícies planes

- Refracció i reflexió en una interfase plana
- Teoria geomètrica de la reflexió i la refracció. Lleis de Descartes
- La interfase plana com a sistema òptic formador d'imatges
- Làmina de cares planoparal·leles
- Refracció en prismes òptics
- El prisma com a sistema formador d'imatges. Prismes oftàlmics
- Dispersió en prismes
- Combinacions de prismes: prismes acromàtics i prismes de visió directa
- Prismes reflectors
- Espills dobles

Sistemes amb superfícies planes

Prismes reflectors

- En els **prismes reflectors**, on la dispersió és un efecte no desitjat, el feix s'introdueix de tal manera que almenys es produeix una reflexió total, pel propòsit específic de canviar la direcció de propagació, o l'orientació de la imatge, o ambdues.

- En el **prisma rectangular** existeix 1 reflexió total interna:
  - Els raigs es desvien 90º.
  - Existeix inversió de la imatge en una sola direcció.

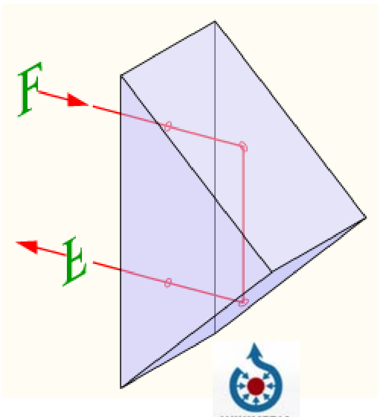
$$\begin{cases} \beta_x = +1 \\ \beta_y = -1 \end{cases}$$

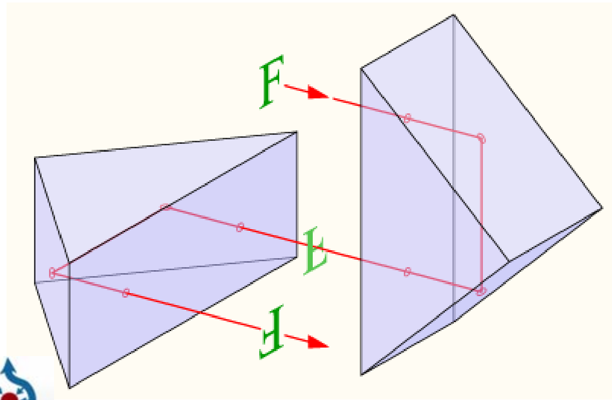
Sistemes amb superfícies planes

Prismes reflectors

- En el **prisma de Porro** existeixen 2 reflexions internes:
  - Els raigs es desvien 180º.
  - Existeix inversió de la imatge en una sola direcció.

$$\begin{cases} \beta_x = +1 \\ \beta_y = -1 \end{cases}$$



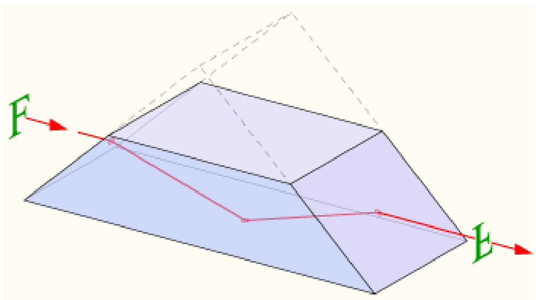


Sistemes amb superfícies planes

Prismes reflectors

- En el **prisma de Dove** existeix 1 reflexió total interna:
  - Els raigs no es desvien.
  - Existeix inversió de la imatge en una sola direcció.

$$\begin{cases} \beta_x = +1 \\ \beta_y = -1 \end{cases}$$



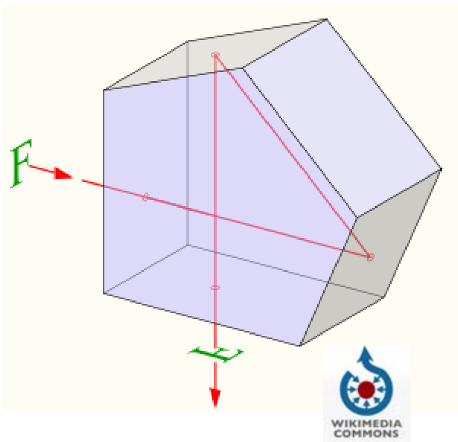
http://commons.wikimedia.org/wiki/File%3ADove-prism.png

Sistemes amb superfícies planes

Prismes reflectors

- En el **pentaprisma** existeixen 2 reflexions internes:
  - Els raigs es desvien 270º (= 90º).
  - No hi ha inversió de la imatge.

$$\begin{cases} \beta_x = +1 \\ \beta_y = +1 \end{cases}$$

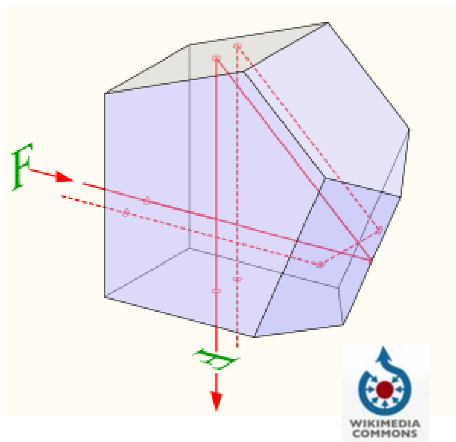


Sistemes amb superfícies planes

Prismes reflectors

- El **pentaprisma amb sostre** és un dispositiu de reflexió de dues cares que formen un angle recte i que produeix la inversió total de la imatge en una direcció:
  - Els raigs es desvien 90º.
  - Existeix inversió de la imatge en dues direccions.

$$\begin{cases} \beta_x = -1 \\ \beta_y = -1 \end{cases}$$



Tema II. Sistemes òptics amb superfícies planes

- Refracció i reflexió en una interfase plana
- Teoria geomètrica de la reflexió i la refracció. Lleis de Descartes
- La interfase plana com a sistema òptic formador d'imatges
- Làmina de cares planoparal·leles
- Refracció en prismes òptics
- El prisma com a sistema formador d'imatges. Prismes oftàlmics
- Dispersió en prismes
- Combinacions de prismes: prismes acromàtics i prismes de visió directa
- Prismes reflectors
- Espills dobles

Sistemes con superfícies planes

Espills dobles

Un **espill doble** és un sistema òptic **descentrat**, és a dir, l'eix òptic del sistema canvia de direcció en travessar-lo.

$$\delta_1, \delta_2 > 0$$

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2 < 0$$

$$\varepsilon''_1, \varepsilon''_2 > 0$$

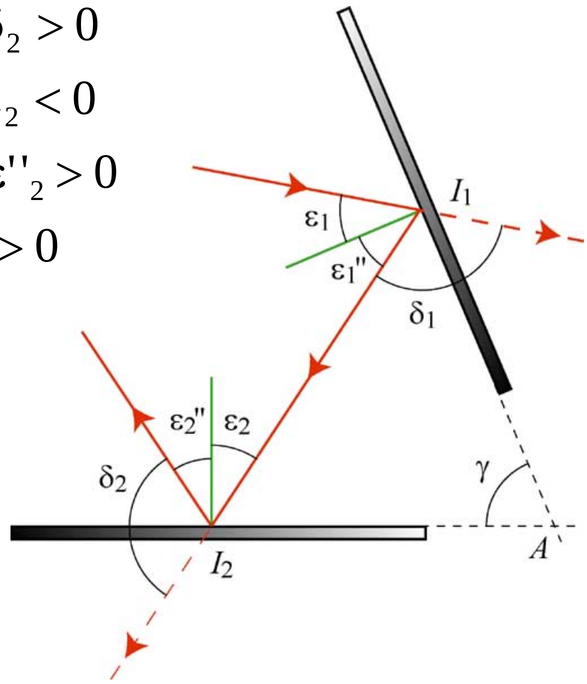
$$\gamma > 0$$

$$\pi = \delta_1 + \varepsilon''_1 - \varepsilon_1$$

$$\pi = \delta_2 + \varepsilon''_2 - \varepsilon_2$$

$$\pi = \gamma + \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon''_1\right) + \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon_2\right)$$

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = 2\pi - 2\gamma$$

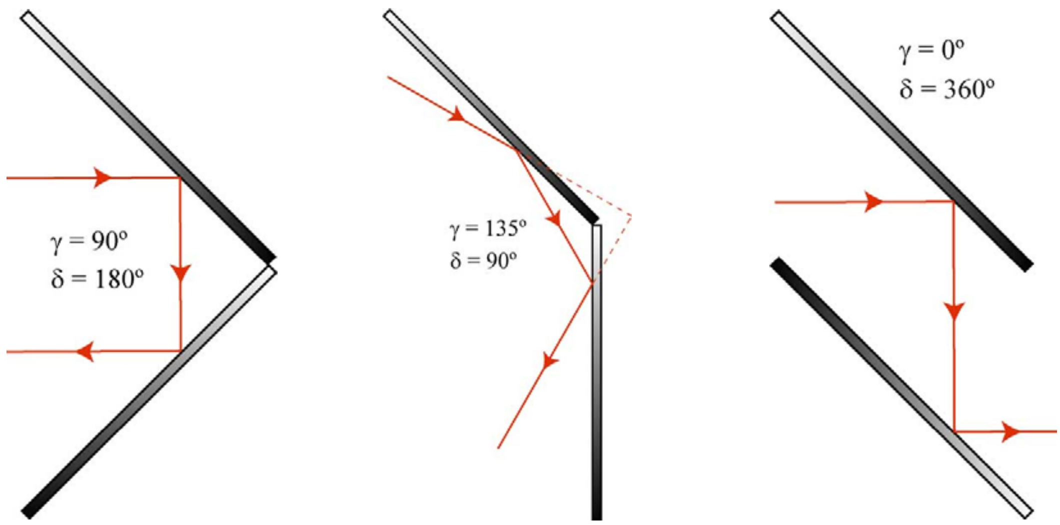


Sistemes amb superfícies planes

Espills dobles

Espill d'angle recte

Muntatge romboide: usat als periscopis

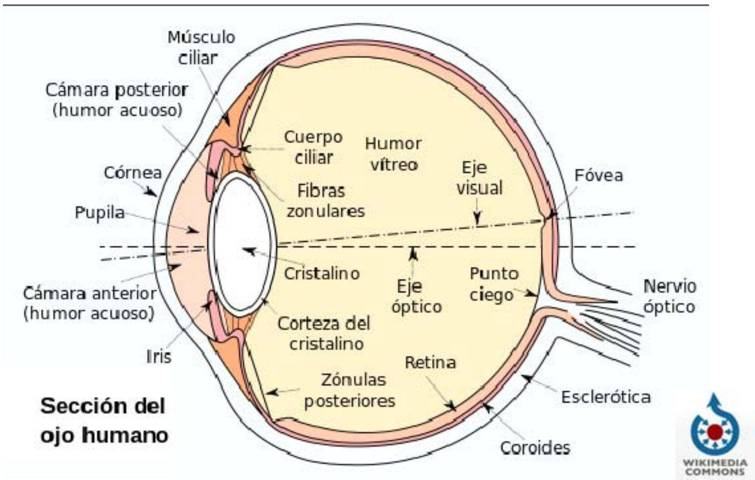


Tema III. Interfases esfèriques

- El dioptre esfèric
- Relacions paraxials de la superfície esfèrica
- Concepte d'augment
- Introducció a les lents esfèriques
- Espills esfèrics
- Traçat gràfic de raigs

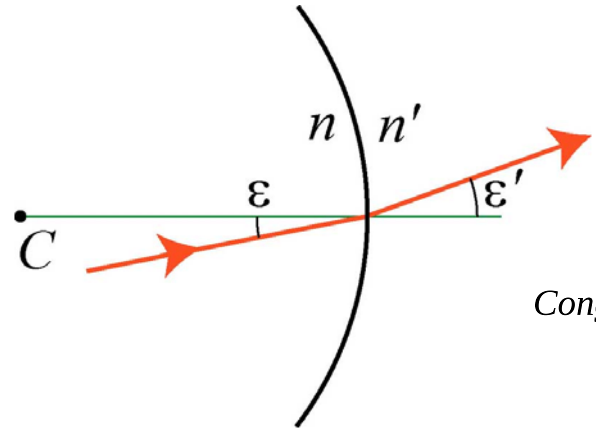
Interfases esfèriques
El dioptre esfèric

- Un **dioptre esfèric** és un sistema òptic format per dos medis dielèctrics d'índexs de refracció diferents, *n* i *n'*, que estan separats per una interfase esfèrica amb centre de curvatura *C*.

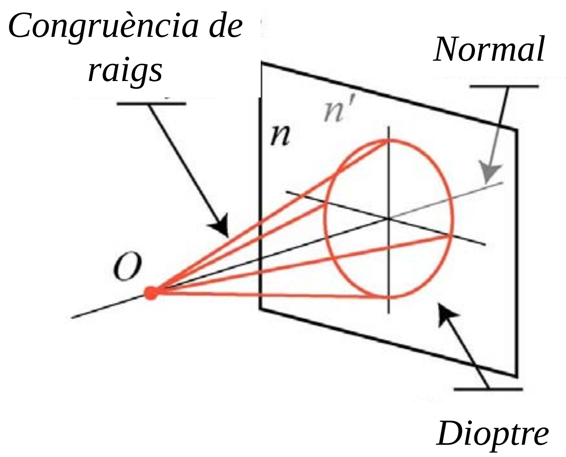


Interfases esfèriques

El dioptre esfèric



$$n \,\mathrm{sen}\,\varepsilon = n' \,\mathrm{sen}\,\varepsilon'$$



Interfases esfèriques

El dioptre esfèric

Criteri de signes:

- Per a les distàncies en eix i al llarg de qualsevol raig, s’agafa com a sentit positiu el de la llum incident.

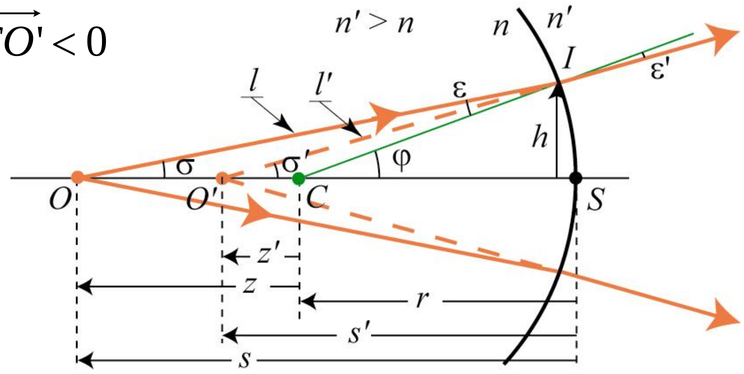
$$l = \overrightarrow{IO} < 0 \qquad z = \overrightarrow{CO} < 0$$

$$l' = \overrightarrow{IO'} < 0 \qquad z' = \overrightarrow{CO'} < 0$$

$$r = \overrightarrow{SC} < 0$$

$$s = \overrightarrow{SO} < 0$$

$$s' = \overrightarrow{SO'} < 0$$



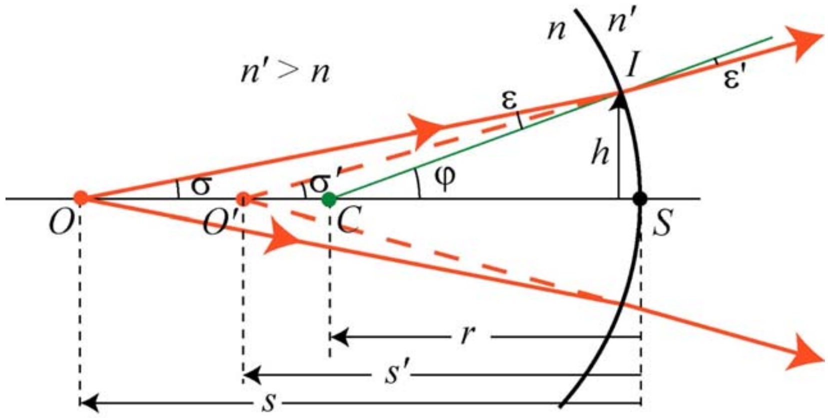
Interfases esfèriques

El dioptre esfèric

Criteri de signes:

- Els segments normals a l'eix seran positius cap a dalt i negatius cap a baix.

$h > 0$



Interfases esfèriques

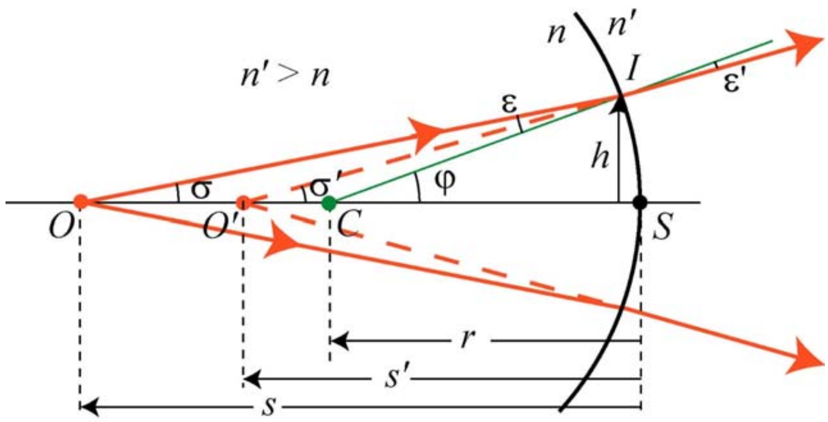
El dioptre esfèric

Criteri de signes:

- Els angles d'incidència i refracció són positius si en portar el raig, per gir, a coincidir amb la normal pel camí angular més curt es va en el sentit de les agulles del rellotge

$\varepsilon < 0$

$\varepsilon' < 0$



Interfases esfèriques

El dioptre esfèric

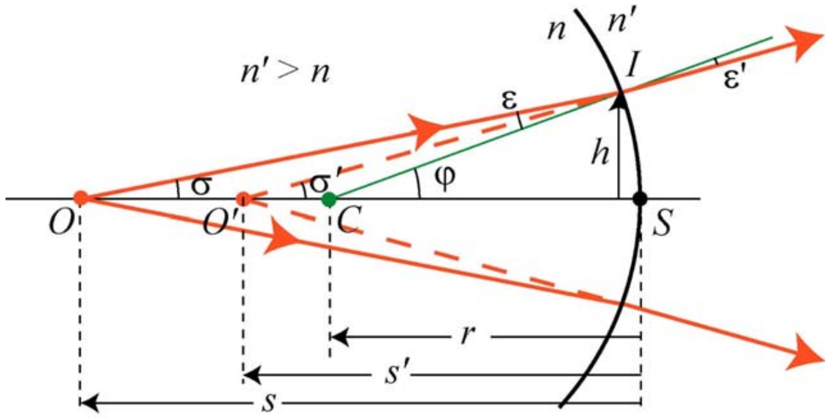
Criteri de signes:

- Els angles amb l’eix són positius si en portar la recta que els forma a coincidir per gir amb l’eix es va en sentit contrari a les agulles del rellotge.

$\varphi < 0$

$\sigma < 0$

$\sigma' < 0$



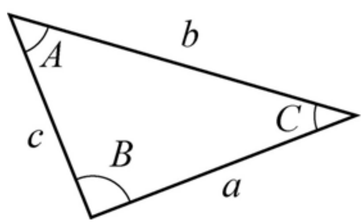
Interfases esfèriques

El dioptre esfèric

Recordem un poc de trigonometria:

- **Llei del sinus**:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$



- **Llei del cosinus**:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

- Suma dels angles interiors:

$$\pi = A + B + C$$

Interfases esfèriques
El dioptre esfèric

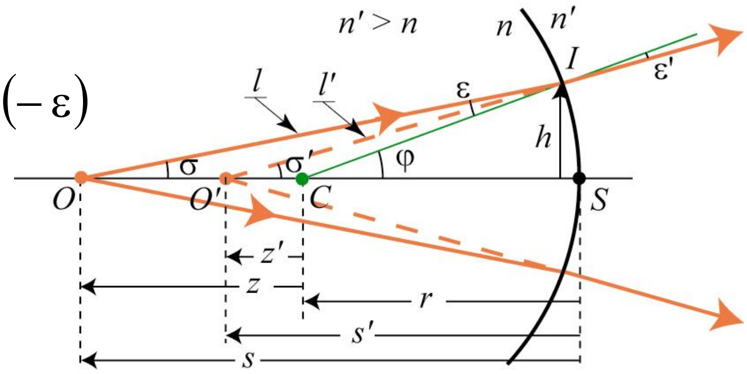
Si apliquem aquestes relacions trigonomètriques al triangle *OIC*

- **Llei del sinus**:

$$\frac{-l}{\mathrm{sen}(\pi+\varphi)}=\frac{-r}{\mathrm{sen}(-\sigma)}=\frac{-z}{\mathrm{sen}(-\varepsilon)}$$

- **Llei del cosinus**:

$$z^2=r^2+l^2-2rl\cos(-\varepsilon)$$



- Suma d'angles:

$$\pi=-\sigma-\varepsilon+(\pi+\varphi)$$

Interfases esfèriques
El dioptre esfèric

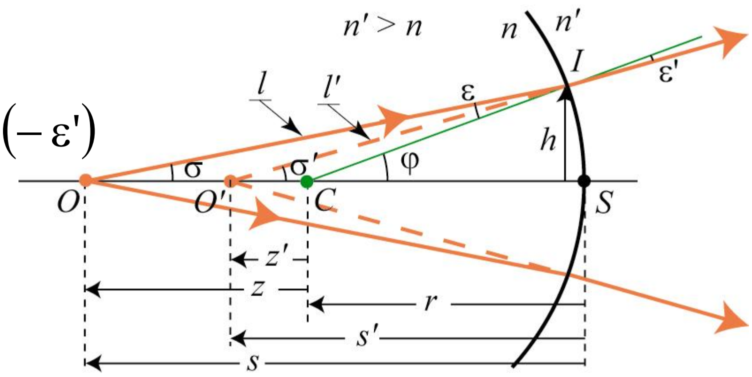
Si apliquem aquestes relacions trigonomètriques al triangle *O'IC*

- **Llei del sinus**:

$$\frac{-l'}{\mathrm{sen}(\pi+\varphi)}=\frac{-r}{\mathrm{sen}(-\sigma')}=\frac{-z'}{\mathrm{sen}(-\varepsilon')}$$

- **Llei del cosinus**:

$$z'^2=r^2+l'^2-2rl'\cos(-\varepsilon')$$



- Suma d'angles:

$$\pi=-\sigma'-\varepsilon'+(\pi+\varphi)$$

Interfases esfèriques

El dioptre esfèric

Resum de les expressions trobades:

$$\frac{l}{\operatorname{sen}\varphi}=\frac{r}{\operatorname{sen}\sigma}=\frac{z}{\operatorname{sen}\varepsilon} \qquad \frac{l'}{\operatorname{sen}\varphi}=\frac{r}{\operatorname{sen}\sigma'}=\frac{z'}{\operatorname{sen}\varepsilon'}$$

$$z^2=r^2+l^2-2rl\cos\varepsilon \qquad z'^2=r^2+l'^2-2rl'\cos\varepsilon'$$

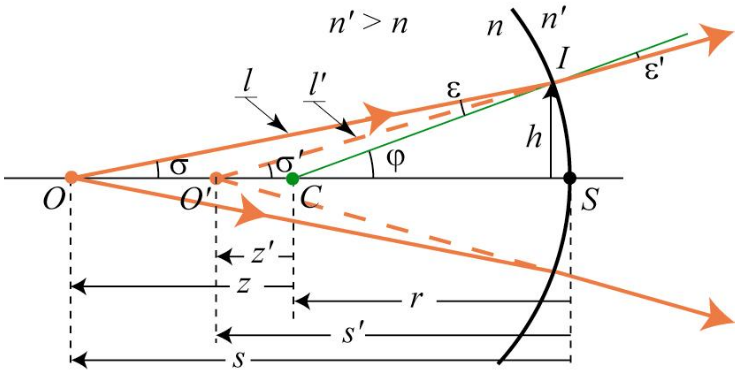
$$\varphi=\sigma+\varepsilon \qquad \varphi=\sigma'+\varepsilon'$$

Interfases esfèriques

El dioptre esfèric

Una relació geomètrica útil:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{l}{\operatorname{sen}\varphi}=\dfrac{r}{\operatorname{sen}\sigma}=\dfrac{z}{\operatorname{sen}\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad r\operatorname{sen}\varphi=l\operatorname{sen}\sigma \\[2ex] \dfrac{l'}{\operatorname{sen}\varphi}=\dfrac{r}{\operatorname{sen}\sigma'}=\dfrac{z'}{\operatorname{sen}\varepsilon'} \quad \Rightarrow \quad r\operatorname{sen}\varphi=l'\operatorname{sen}\sigma' \end{array}\right\} \; l\operatorname{sen}\sigma=l'\operatorname{sen}\sigma'$$



Interfases esfèriques
El dioptre esfèric

Una altra relació opticogeomètrica útil:

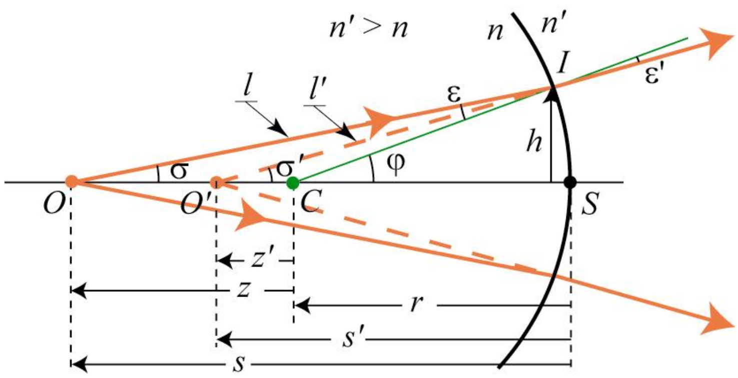
$$\frac{l}{\operatorname{sen}\varphi}=\frac{r}{\operatorname{sen}\sigma}=\frac{z}{\operatorname{sen}\varepsilon} \Rightarrow \operatorname{sen}\varphi=\frac{l}{z}\operatorname{sen}\varepsilon$$

$$\frac{l'}{\operatorname{sen}\varphi}=\frac{r}{\operatorname{sen}\sigma'}=\frac{z'}{\operatorname{sen}\varepsilon'} \Rightarrow \operatorname{sen}\varphi=\frac{l'}{z'}\operatorname{sen}\varepsilon'$$

$$\frac{l}{z}\operatorname{sen}\varepsilon=\frac{l'}{z'}\operatorname{sen}\varepsilon'$$

$$n\operatorname{sen}\varepsilon=n'\operatorname{sen}\varepsilon'$$

$$\frac{1}{n}\frac{l}{z}=\frac{1}{n'}\frac{l'}{z'}$$



Interfases esfèriques
El dioptre esfèric

Deduïm que la quantitat *n z / l* és una quantitat invariant en la refracció sobre un dioptre esfèric. Aquesta quantitat rep el nom d'**invariant fonamental**.

- L'únic **invariant òptic** és la llei de Snell de la refracció:

$$n\operatorname{sen}\varepsilon=n'\operatorname{sen}\varepsilon' \quad\Rightarrow\quad C_1=n\operatorname{sen}\varepsilon$$

- A més de les constants geomètriques r i φ, ja hem obtingut l'**invariant geomètric**:

$$l\operatorname{sen}\sigma=l'\operatorname{sen}\sigma' \quad\Rightarrow\quad C_2=l\operatorname{sen}\sigma$$

- i a partir de C_1 i C_2 podem obtenir altres invariants opticogeomètrics:

Interfases esfèriques
El dioptre esfèric

Utilitzant la relació

$$\frac{r}{\operatorname{sen}\sigma} = \frac{z}{\operatorname{sen}\varepsilon}$$

podem deduir altres invariants opticogeomètrics:

$$C_3 = r\frac{C_1}{C_2} = r\frac{n}{l}\left(\frac{\operatorname{sen}\varepsilon}{\operatorname{sen}\sigma}\right) = r\frac{n}{l}\left(\frac{z}{r}\right) = n\frac{z}{l}$$

$$C_4 = r\,C_1 = \left(z\frac{\operatorname{sen}\sigma}{\operatorname{sen}\varepsilon}\right) n\operatorname{sen}\varepsilon = nz\operatorname{sen}\sigma$$

Interfases esfèriques
El dioptre esfèric

Un altre invariant opticogeomètric:

$$C_5 = C_1\sqrt{\frac{1}{C_2^2} - \frac{1}{r^2}} = n\sqrt{\frac{1}{l^2}\left(\frac{\sin\varepsilon}{\sin\sigma}\right)^2 - \frac{\sin^2\varepsilon}{r^2}}$$

$$\frac{r}{\operatorname{sen}\sigma} = \frac{z}{\operatorname{sen}\varepsilon}$$

$$z^2 = r^2 + l^2 - 2rl\cos\varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$C_5 = n\left(\frac{1}{l} - \frac{\cos\varepsilon}{r}\right)$$

Interfases esfèriques
El dioptre esfèric

Resum dels invariants opticogeomètrics més importants:

$$C_1 = n \,\mathrm{sen}\, \varepsilon \quad \Rightarrow \quad n \,\mathrm{sen}\, \varepsilon = n' \,\mathrm{sen}\, \varepsilon'$$

$$C_2 = l \,\mathrm{sen}\, \sigma \quad \Rightarrow \quad l \,\mathrm{sen}\, \sigma = l' \,\mathrm{sen}\, \sigma'$$

$$C_3 = n \frac{z}{l} \quad \Rightarrow \quad n \frac{z}{l} = n' \frac{z'}{l'}$$

$$C_4 = nz \,\mathrm{sen}\, \sigma \quad \Rightarrow \quad nz \,\mathrm{sen}\, \sigma = n' z' \,\mathrm{sen}\, \sigma'$$

$$C_5 = n\left(\frac{1}{l} - \frac{\cos\varepsilon}{r}\right) \quad \Rightarrow \quad n\left(\frac{1}{l} - \frac{\cos\varepsilon}{r}\right) = n'\left(\frac{1}{l'} - \frac{\cos\varepsilon'}{r}\right)$$

Interfases esfèriques
El dioptre esfèric

Observem que la posició del punt *O'*, caracteritzada per la distància *l'*, depèn de:

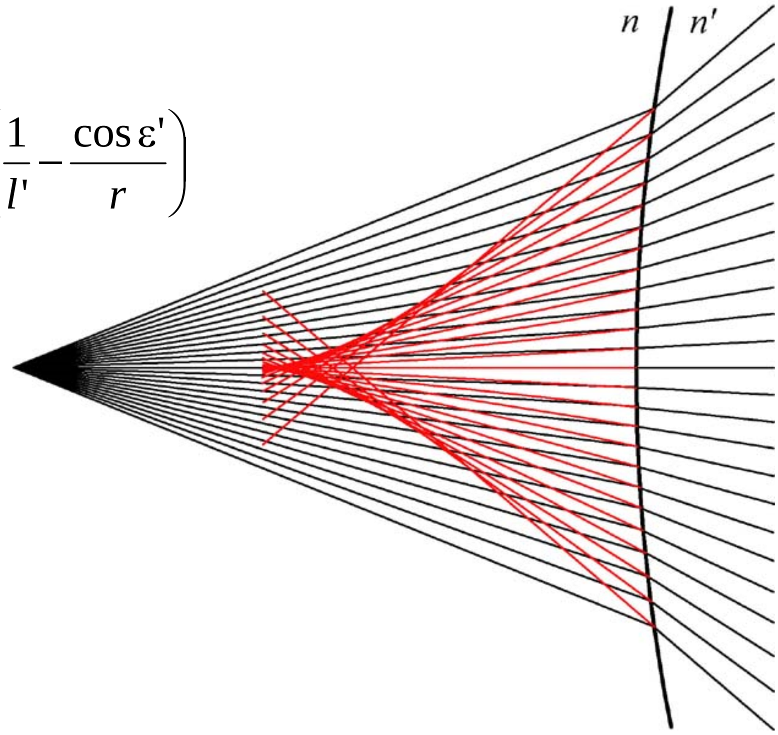
- La **posició** del punt **objecte** *O* caracteritzada per *l*.
- El quocient d'**índexs de refracció** *n'*/*n*:
- L'**angle d'incidència** ε dels raigs.
- El **radi de curvatura** *r* del dioptre esfèric.

$$n\left(\frac{1}{l} - \frac{\cos\varepsilon}{r}\right) = n'\left(\frac{1}{l'} - \frac{\cos\varepsilon'}{r}\right)$$

Interfases esfèriques

El dioptre esfèric

$$n\left(\frac{1}{l}-\frac{\cos\varepsilon}{r}\right)=n'\left(\frac{1}{l'}-\frac{\cos\varepsilon'}{r}\right)$$



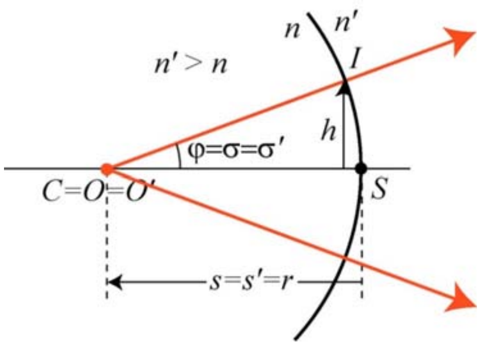
Interfases esfèriques

El dioptre esfèric

Volem estudiar el dioptre esfèric com a **superfície estigmàtica**:
Hem de trobar per a quins valors de *z* (posició del punt *O*), el valor de *z’* no depèn de ε (posició fixa per *O’*)

$$nz\,\mathrm{sen}\,\sigma = n'z'\,\mathrm{sen}\,\sigma' \quad\Rightarrow\quad z = z' = 0$$

- Tota esfera és estigmàtica per al seu centre.



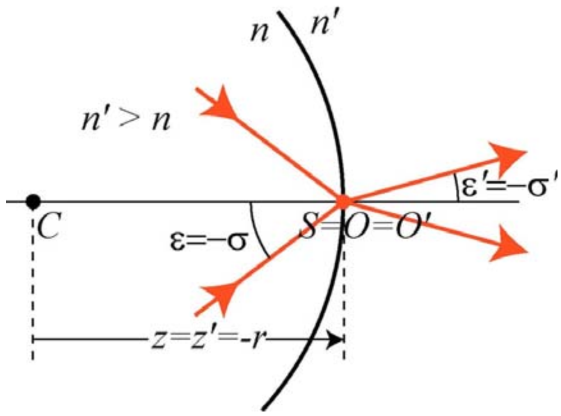
$$\varepsilon=\varepsilon'=0$$
$$\varphi=\sigma=\sigma'$$
$$s=s'=r$$

Interfases esfèriques

El dioptre esfèric

$$l \operatorname{sen}\sigma = l' \operatorname{sen}\sigma' \quad \Rightarrow \quad l = l' = 0$$

- Per als punts de la superfície esfèrica, la imatge es confon amb l'objecte.



$$\varepsilon \neq \varepsilon' \qquad \varphi = 0 \qquad s = s' = 0$$

Interfases esfèriques

El dioptre esfèric

- **Condició del sinus d'Abbe**:

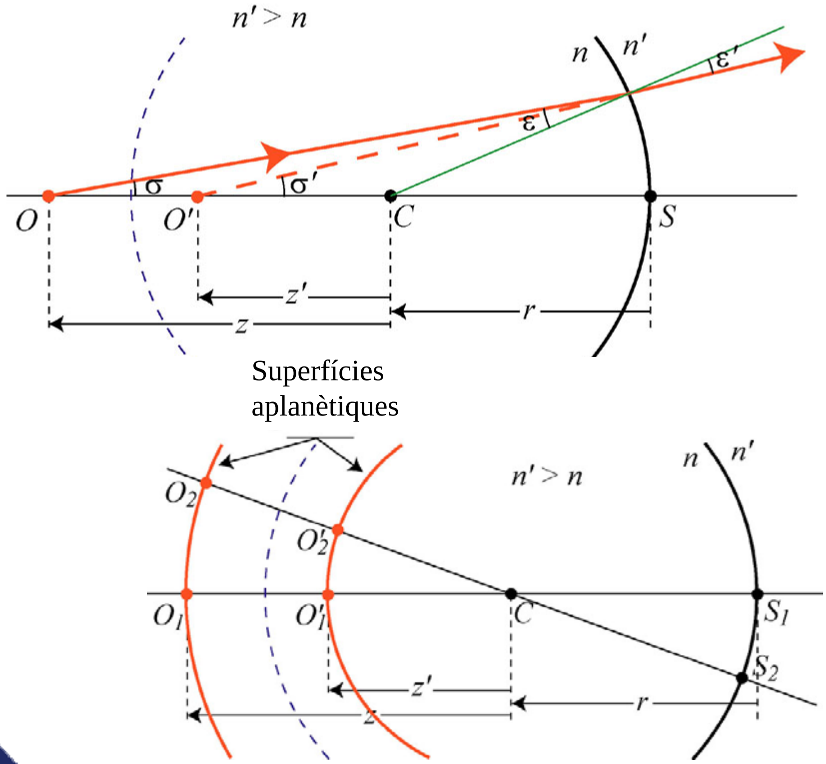
$$nz \operatorname{sen}\sigma = n' z' \operatorname{sen}\sigma' \quad \Rightarrow \quad \frac{\operatorname{sen}\sigma}{\operatorname{sen}\sigma'} = \frac{n' z'}{nz} = cte.$$

$$\left.\begin{aligned} z &= \frac{\operatorname{sen}\varepsilon}{\operatorname{sen}\sigma} r \\ z' &= \frac{\operatorname{sen}\varepsilon'}{\operatorname{sen}\sigma'} r \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\sigma=\varepsilon' \, y \, \sigma'=\varepsilon} \left\{\begin{aligned} z &= \frac{\operatorname{sen}\varepsilon}{\operatorname{sen}\varepsilon'} r = \frac{n'}{n} r \\ z' &= \frac{\operatorname{sen}\varepsilon'}{\operatorname{sen}\varepsilon} r = \frac{n}{n'} r \end{aligned}\right.$$

- Les variables axials *z* i *z'* tenen el mateix signe que *r*. Els punts objecte *O* i imatge *O'* que compleixen l'anterior s'anomenen **punts de Young** o **punts de Weïerstrass**.

Interfases esfèriques

El dioptre esfèric



$$z = \frac{n'}{n} r$$

$$z' = \frac{n}{n'} r$$

$$\varepsilon = \sigma'$$

$$\varepsilon' = \sigma$$

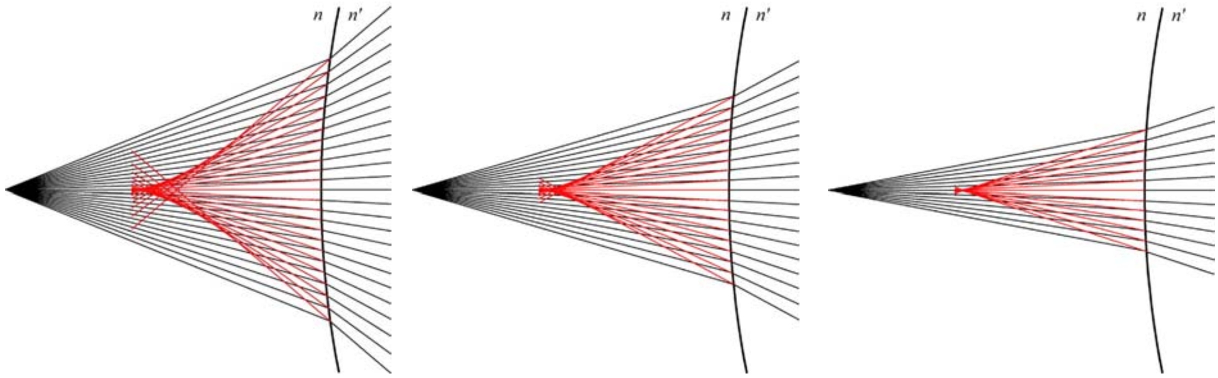
$$\varphi = \varepsilon + \varepsilon'$$

Tema III. Interfases esfèriques

- El dioptre esfèric
- Relacions paraxials de la superfície esfèrica
- Concepte d'augment
- Introducció a les lents esfèriques
- Espills esfèrics
- Traçat gràfic de raigs

Interfases esfèriques

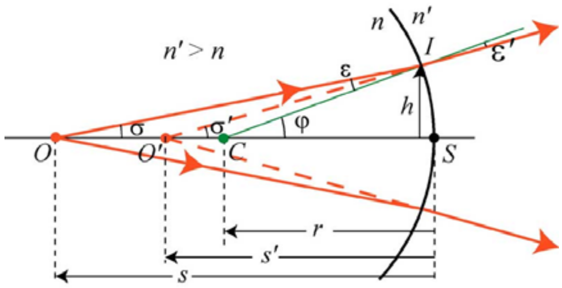
Relacions paraxials de la superfície esfèrica

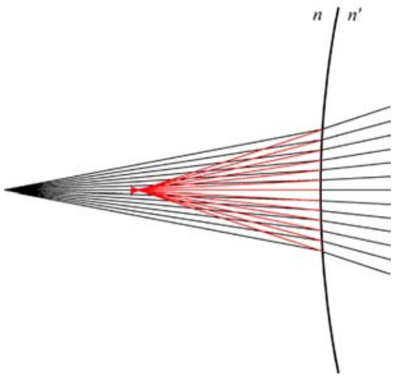


Interfases esfèriques

Relacions paraxials de la superfície esfèrica

- Per una posició fixa del punt objecte *O* (*s* fixe), s'obté una **posició diferent del punt *O'***.
- Però, per a **angles** d'incidència i emergència **xicotets** (ε,ε' < 5º), la posició de *O'* és pràcticament invariable.





- En aquest cas, s'ha de complir que φ, σ i σ' siguen xicotets.

Interfases esfèriques

Relacions paraxials de la superfície esfèrica

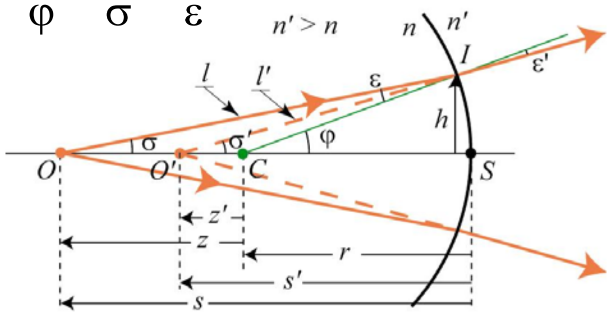
A partir de les expressions trobades per al dioptre esfèric:

$$\frac{l}{\operatorname{sen}\varphi}=\frac{r}{\operatorname{sen}\sigma}=\frac{z}{\operatorname{sen}\varepsilon} \qquad z^2=r^2+l^2-2rl\cos\varepsilon$$

podem obtenir expressions compatibles amb l'aproximació paraxial:

$$\frac{l}{\varphi}=\frac{r}{\sigma}=\frac{z}{\varepsilon} \qquad z^2=r^2+l^2-2rl=(r-l)^2 \Rightarrow$$

$$z=-r+l$$



$$z=-r+s$$

$$l\approx s$$

$$l'\approx s'$$

Interfases esfèriques

Relacions paraxials de la superfície esfèrica

Resum dels invariants opticogeomètrics més importants en l'aproximació paraxial:

$$C_1=n\operatorname{sen}\varepsilon \quad\Rightarrow\quad n\varepsilon=n'\varepsilon'$$

$$C_2=l\operatorname{sen}\sigma \quad\Rightarrow\quad s\sigma=s'\sigma'$$

$$C_3=n\frac{z}{l} \quad\Rightarrow\quad n\frac{z}{s}=n'\frac{z'}{s'}$$

$$C_4=nz\operatorname{sen}\sigma \quad\Rightarrow\quad nz\sigma=n'z'\sigma'$$

$$C_5=n\left(\frac{1}{l}-\frac{\cos\varepsilon}{r}\right) \quad\Rightarrow\quad n\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{r}\right)=n'\left(\frac{1}{s'}-\frac{1}{r}\right)$$

Invariant d'Abbe

Interfases esfèriques

Relacions paraxials de la superfície esfèrica

Invariant d'Abbe:

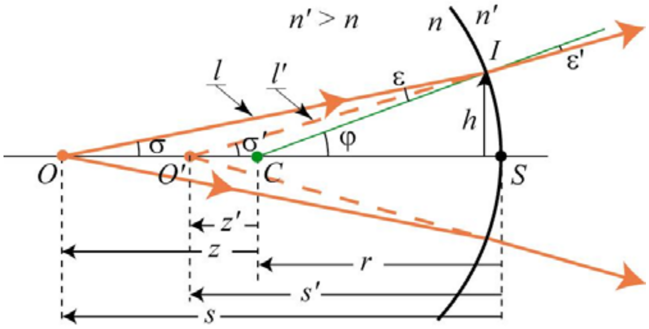
$$n\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{r}\right)=n'\left(\frac{1}{s'}-\frac{1}{r}\right)$$

Cas particular: dioptre pla

$$r \to \infty \quad \Rightarrow \quad s'=\frac{n'}{n}s$$

Si ens interessa treballar amb les variables axials *z* i *z'*:

$$\left.\begin{array}{l} s=r+z \\ s'=r+z' \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{r}\right)=\frac{1}{n'}\left(\frac{1}{z'}+\frac{1}{r}\right)$$

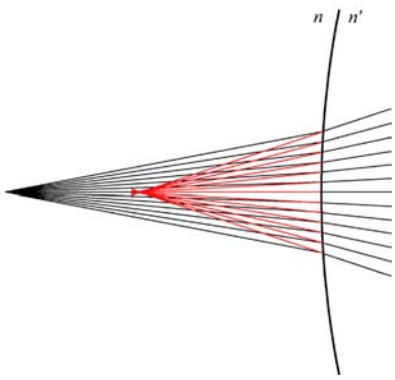


Interfases esfèriques

Relacions paraxials de la superfície esfèrica

- Ara *s'* no depèn de ε.
- Existeix una condició d'**estigmatisme aproximat** si considerem raigs amb angles d'incidència ε i emergència ε' xicotets (**raigs paraxials**).
- En la pràctica s'aconsegueix amb la inserció de **diafragmes** que eliminen els raigs que no compleixen la condició d'estigmatisme aproximat.

$$n\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{r}\right)=n'\left(\frac{1}{s'}-\frac{1}{r}\right)$$

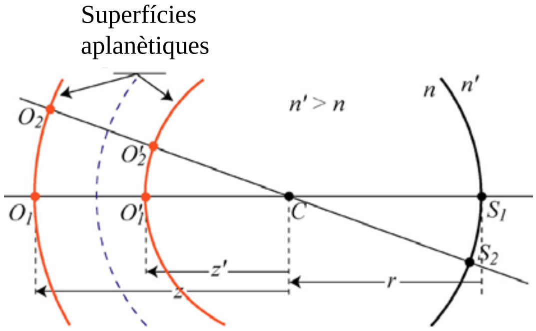


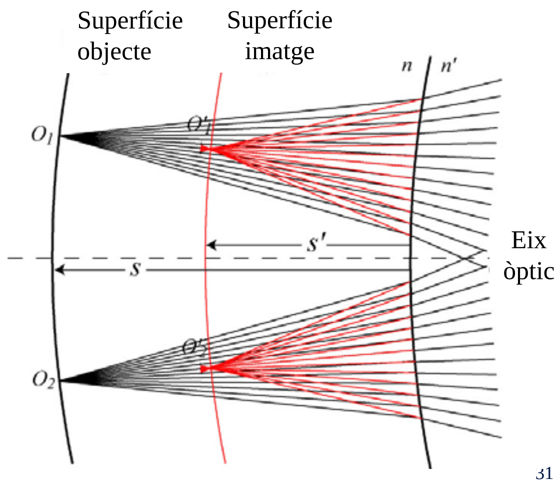
Interfases esfèriques

Relacions paraxials de la superfície esfèrica

Imatge d'un objecte pla perpendicular a l'eix òptic:

- L'**eix d'un sistema òptic** queda determinat per la trajectòria d'un raig que no es desvia en refractar-se.
- Si l'objecte extens és pla i perpendicular a l'eix òptic, la **imatge no és plana**.



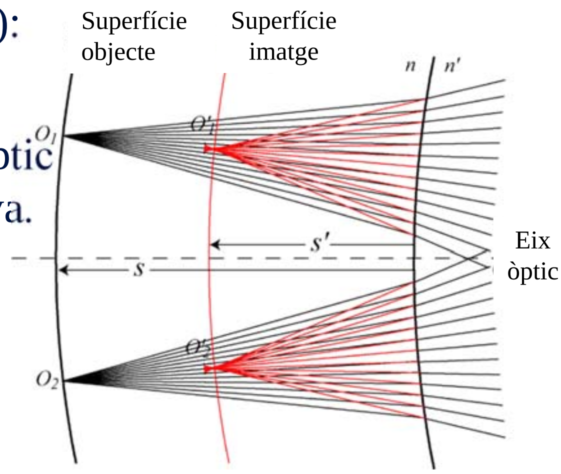


Interfases esfèriques

Relacions paraxials de la superfície esfèrica

Perquè la condició d'estigmatisme aproximat siga vàlida, s'ha de complir l'**aproximació de Gauss**:

- Dioptre amb superfície activa xicoteta.
  - Superfície d'extensió xicoteta
  - Ús de **diafragmes (d'obertura)**: pupil·la ocular
- Objecte pla perpendicular a l'eix òptic i centrat, de xicoteta dimensió activa.
  - Objecte d'extensió xicoteta
  - Ús de **diafragmes (de camp)**: retina ocular



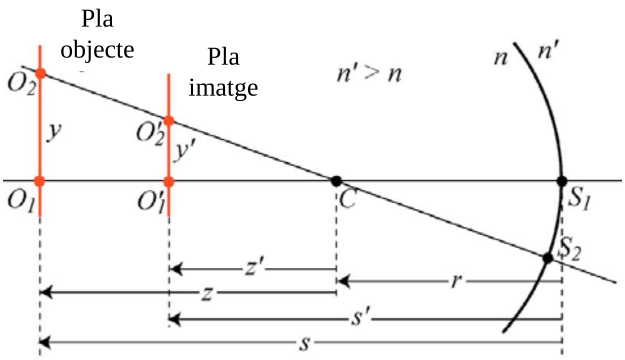
Interfases esfèriques

Relacions paraxials de la superfície esfèrica

Fins ara hem obtingut les següents **equacions de conjugació**:

$$n\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{r}\right)=n'\left(\frac{1}{s'}-\frac{1}{r}\right)$$

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{r}\right)=\frac{1}{n'}\left(\frac{1}{z'}+\frac{1}{r}\right)$$

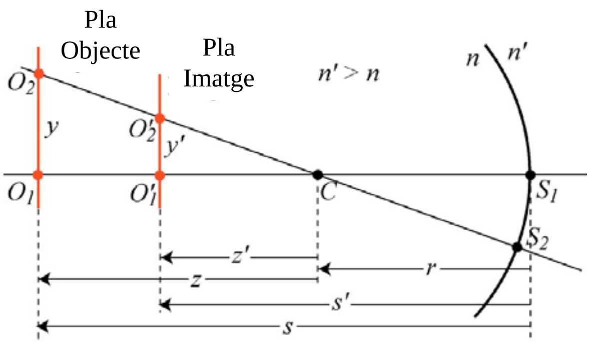


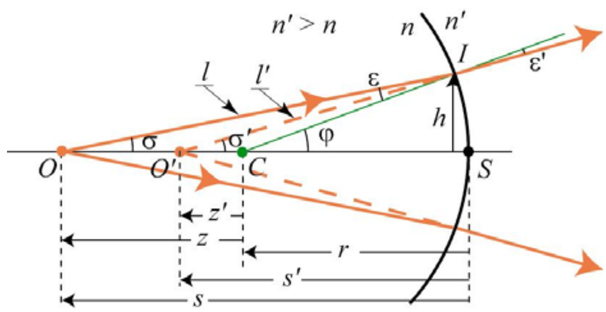
- L'**equació de Lagrange-Helmholtz** relaciona l'índex de refracció, *n*, la grandària de l'objecte, *y*, i l'angle σ corresponent a un raig que parteix d'un punt en eix del pla objecte, amb les magnituds homòlogues de la imatge.

Interfases esfèriques

Relacions paraxials de la superfície esfèrica

Relació de Lagrange-Helmholtz:





$$\left.\begin{array}{l} y=\overline{O_1O_2} \\ y'=\overline{O'_1O'_2} \end{array}\right\}$$

$$\beta'=\frac{y'}{y}=\frac{z'}{z}\neq 1$$

$$nz\sigma=n'z'\sigma'$$

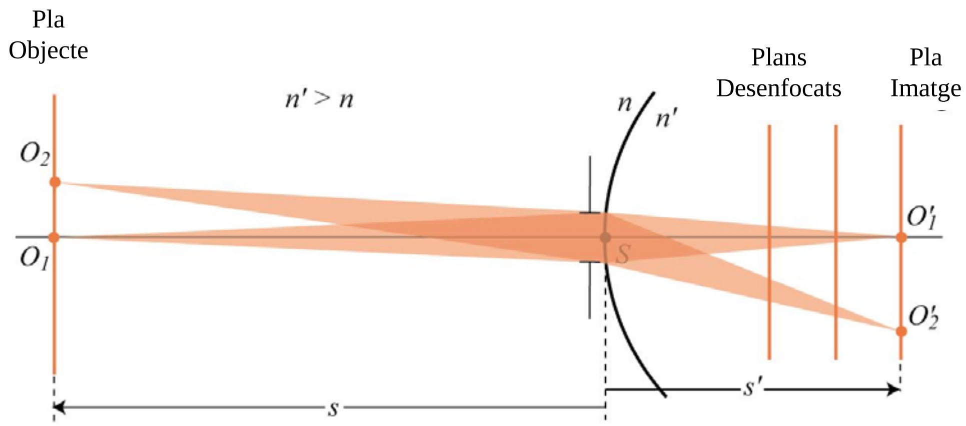
$$z'=\frac{y'}{y}z$$

$$ny\sigma=n'y'\sigma'$$

Interfases esfèriques

Relacions paraxials de la superfície esfèrica

Aplicacions: Imatge retiniana en el modelo de **ull** esquemàtic d'**Emsley**



Tema III. Interfases esfèriques

- El dioptre esfèric
- Relacions paraxials de la superfície esfèrica
- Concepte d'augment
- Introducció a les lents esfèriques
- Espills esfèrics
- Traçat gràfic de raigs

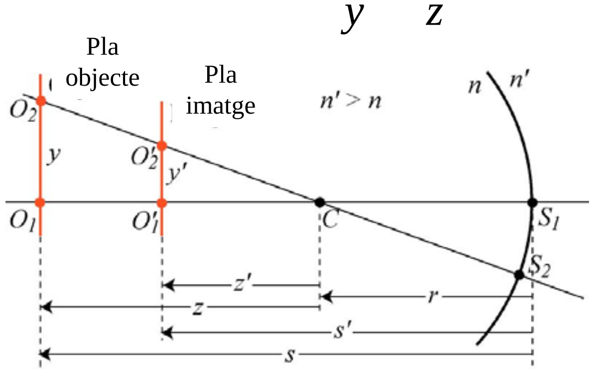
Interfases esfèriques

Concepte d'augment

- En l'**aproximació de Gauss**, si davant un dioptre esfèric se situa un **objecte pla** normal a l'eix i de grandària *y*, el sistema en donarà una **imatge** semblant, **plana** normal a l'eix i de grandària *y'*.
- La raó β' de semblança rep el nom d'**augment lateral**.

$$\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z}$$

- Segons que l'augment lateral siga positiu o negatiu, la imatge serà **directa** o **invertida**, respectivament.



Interfases esfèriques

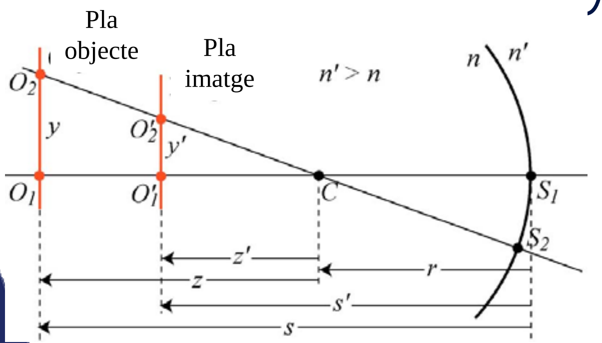
Concepte d'augment

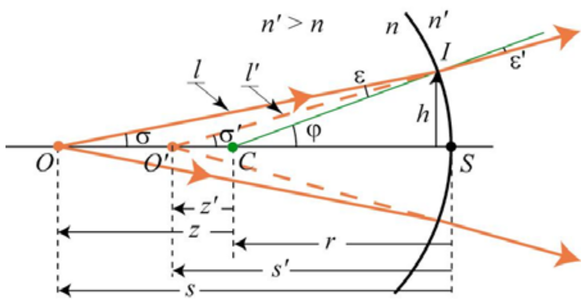
$$nz\sigma = n'z'\sigma' \quad \Rightarrow \quad \frac{z'}{z} = \frac{n\sigma}{n'\sigma'}$$

$$s\sigma = s'\sigma' \quad \Rightarrow \quad \frac{\sigma}{\sigma'} = \frac{s'}{s}$$

$$\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z}$$

$$\beta' = \frac{n}{n'}\frac{s'}{s}$$





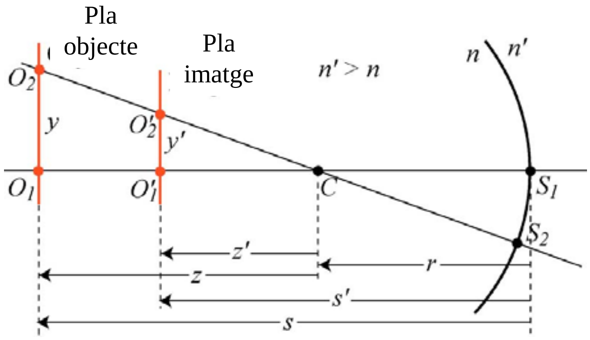
Interfases esfèriques

Concepte d'augment

Resum de les principals **equacions de conjugació**:

$$n\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{r}\right)=n'\left(\frac{1}{s'}-\frac{1}{r}\right) \qquad \beta'=\frac{n}{n'}\frac{s'}{s}$$

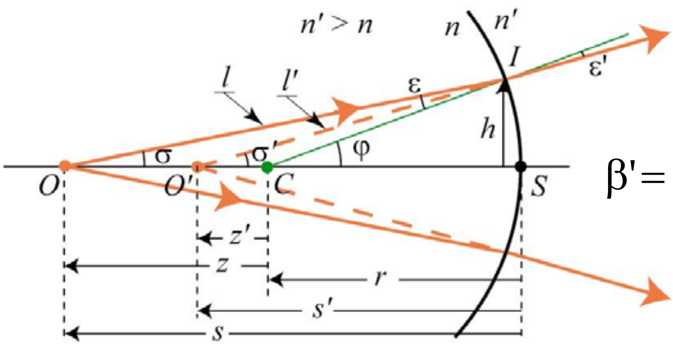
$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{r}\right)=\frac{1}{n'}\left(\frac{1}{z'}+\frac{1}{r}\right) \qquad \beta'=\frac{z'}{z}$$



Interfases esfèriques

Concepte d'augment

- Si del punt axial del pla objecte *O* emergeix un raig formant un angle σ amb l'eix òptic, el raig emergent es dirigeix cap al punt axial del pla imatge *O'* formant un angle σ'.
- La raó γ' rep el nom d'**augment angular**.



$$\left.\begin{aligned}\gamma'&=\frac{\sigma'}{\sigma}\\ \beta'&=\frac{y'}{y}=\frac{z'}{z}=\frac{n\sigma}{n'\sigma'}\end{aligned}\right\}\ \beta'\gamma'=\frac{n}{n'}$$

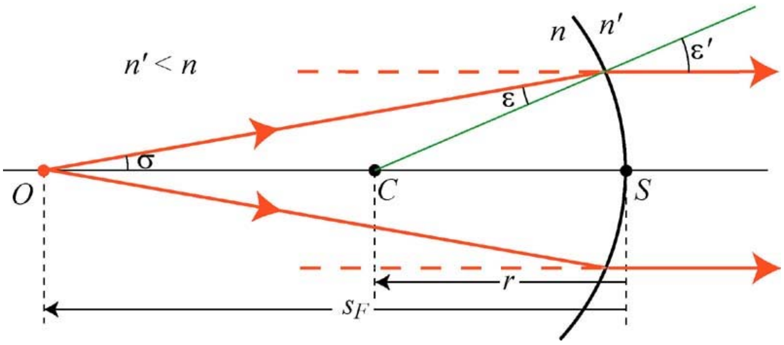
$$\gamma'=\frac{n}{n'}\frac{z}{z'}=\frac{s}{s'}$$

Interfases esfèriques

Concepte d'augment

Imatge en l'infinit: Podem trobar la posició d'un pla objecte, caracteritzat per s_F, per al qual la distància *s'* és infinit, és a dir, la imatge es troba a una distància infinita del dioptre.

$$n\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{r}\right)=n'\left(\frac{1}{s'}-\frac{1}{r}\right)\xrightarrow{\frac{1}{s'}=0} s_F=\frac{n}{n-n'}r$$

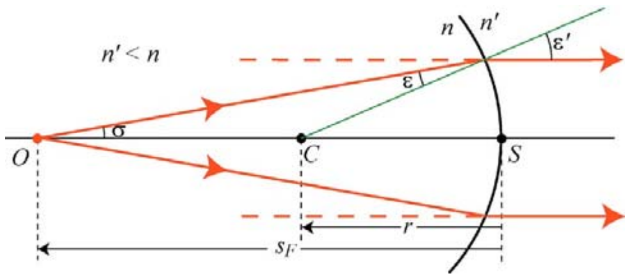


Interfases esfèriques

Concepte d'augment

- La posició del punt axial objecte *O* la imatge del qual es troba en l'infinit s'anomena **punt focal objecte** (*F*), i el pla transversal objecte que el conté s'anomena **pla focal objecte**.

$$s_F=\frac{n}{n-n'}r$$



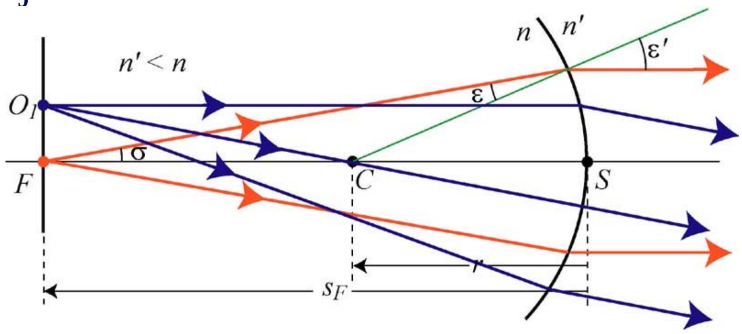
- Tots els raigs que tallen *F* en l'espai objecte emergeixen de la superfície paral·lels a l'eix òptic.

$$\forall\sigma,\ \sigma'=0 \quad\Rightarrow\quad \gamma'=\frac{\sigma'}{\sigma}=0 \qquad\qquad \gamma'=\frac{s}{s'}\xrightarrow{s'\to\infty}0$$

Interfases esfèriques

Concepte d'augment

Estudiem el cas d'un punt objecte extraaxial contingut en el pla focal objecte:



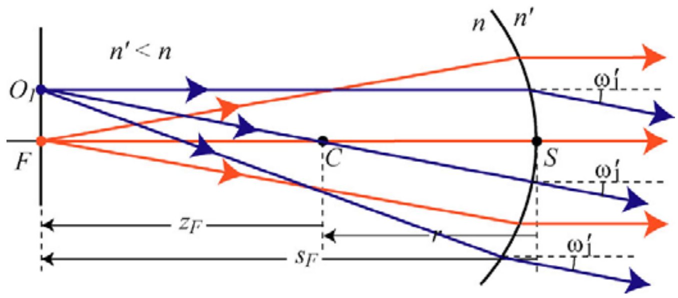
$$\left.\begin{array}{l}\beta'\gamma' = \dfrac{n}{n'} \xrightarrow{\gamma'=0} \beta' \to \infty \\ \beta' = \dfrac{n}{n'}\dfrac{s'}{s} \xrightarrow{s'\to\infty} \infty\end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l}\beta' = \dfrac{y'}{y} \\ y = \overline{FO_1}\end{array}$$

- La grandària de la imatge $y' \to \infty$

Interfases esfèriques

Concepte d'augment

Habitualment es caracteritzen les grandàries de les imatges (i objectes) en l'infinit amb **magnituds angulars**:



$$y = \overline{FO_1} \quad \Rightarrow \quad \omega'_1 = \frac{y}{-z_F}$$

- A la magnitud longitudinal de l'objecte, *y*, li correspon una magnitud angular de la imatge, ω'_1

$$\omega'_1 = \frac{y}{-z_F} = \frac{y}{-(-r + s_F)} = \left(1 - \frac{n}{n'}\right)\frac{y}{r}$$

Interfases esfèriques

Concepte d'augment

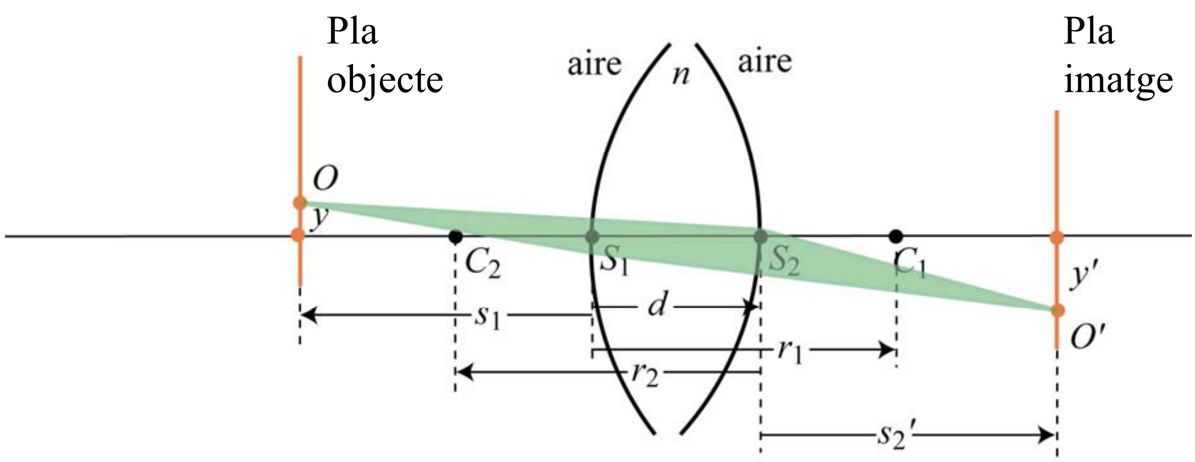
De forma pràctica, les grandàries d'objectes i imatges allunyats de l'element formador d'imatges (ex. ull) es caracteritzen amb **magnituds angulars**.

Tema III. Interfases esfèriques

- El dioptre esfèric
- Relacions paraxials de la superfície esfèrica
- Concepte d'augment
- Introducció a les lents esfèriques
- Espills esfèrics
- Traçat gràfic de raigs

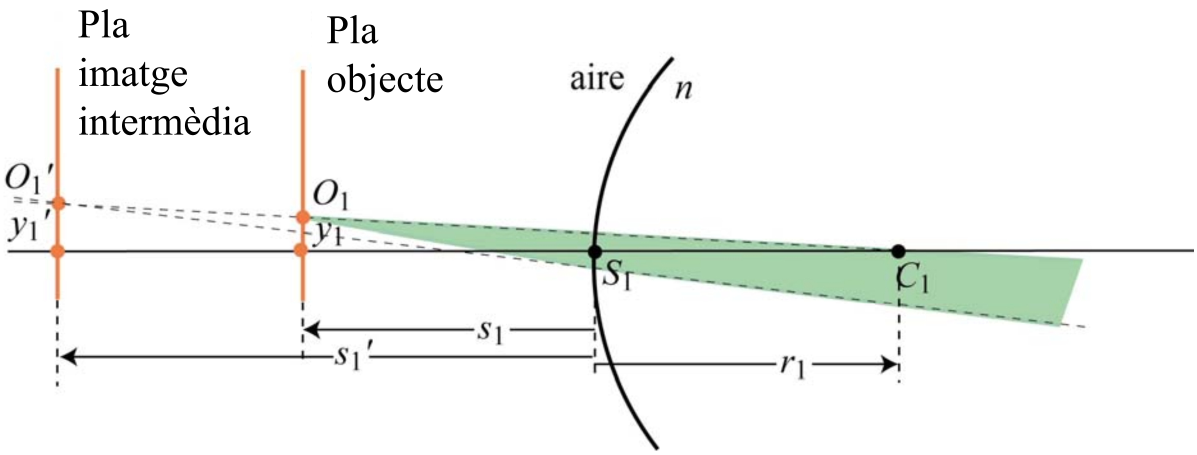
Interfases esfèriques

Introducció a les lents esfèriques



Interfases esfèriques

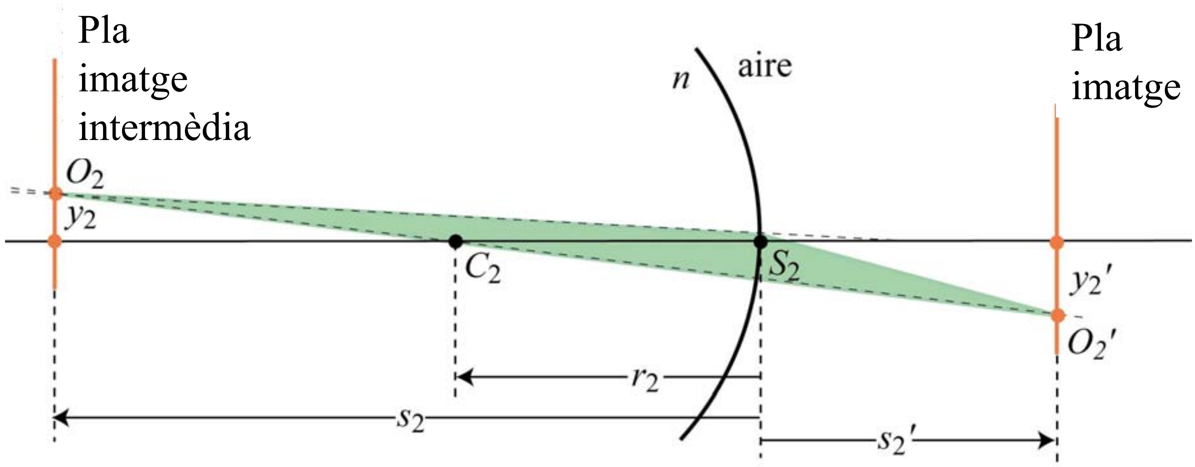
Introducció a les lents esfèriques



$$\left(\frac{1}{s_1}-\frac{1}{r_1}\right)=n\left(\frac{1}{s_1'}-\frac{1}{r_1}\right) \qquad \beta_1'=\frac{y_1'}{y_1}=\frac{1}{n}\frac{s_1'}{s_1}$$

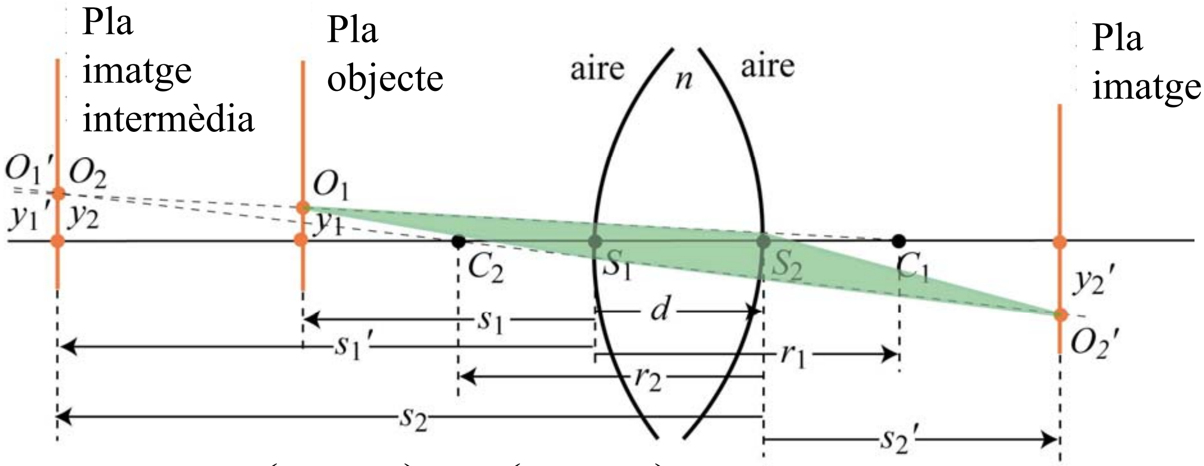
Interfases esfèriques

Introducció a les lents esfèriques



$$n\left(\frac{1}{s_2}-\frac{1}{r_2}\right)=\left(\frac{1}{s_2'}-\frac{1}{r_2}\right) \qquad \beta_2'=\frac{y_2'}{y_2}=\frac{n}{1}\frac{s_2'}{s_2}$$

Interfases esfèriques
Introducció a les lents esfèriques

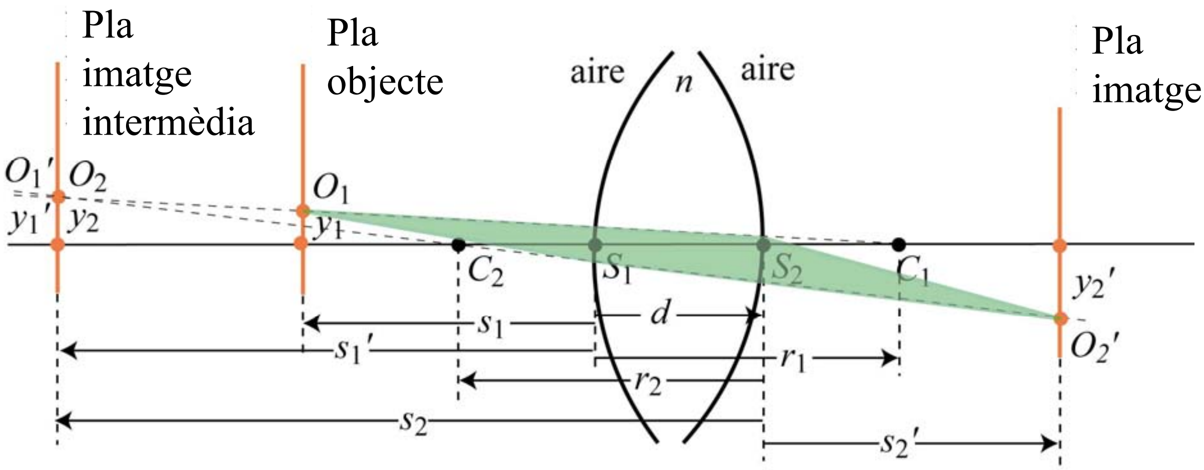


$$\left(\frac{1}{s_1}-\frac{1}{r_1}\right)=n\left(\frac{1}{s_1'}-\frac{1}{r_1}\right)$$

$$n\left(\frac{1}{s_2}-\frac{1}{r_2}\right)=\left(\frac{1}{s_2'}-\frac{1}{r_2}\right)$$

$$s_2=-d+s_1'$$

Interfases esfèriques
Introducció a les lents esfèriques



$$\beta_1'=\frac{y_1'}{y_1}=\frac{1}{n}\frac{s_1'}{s_1}$$

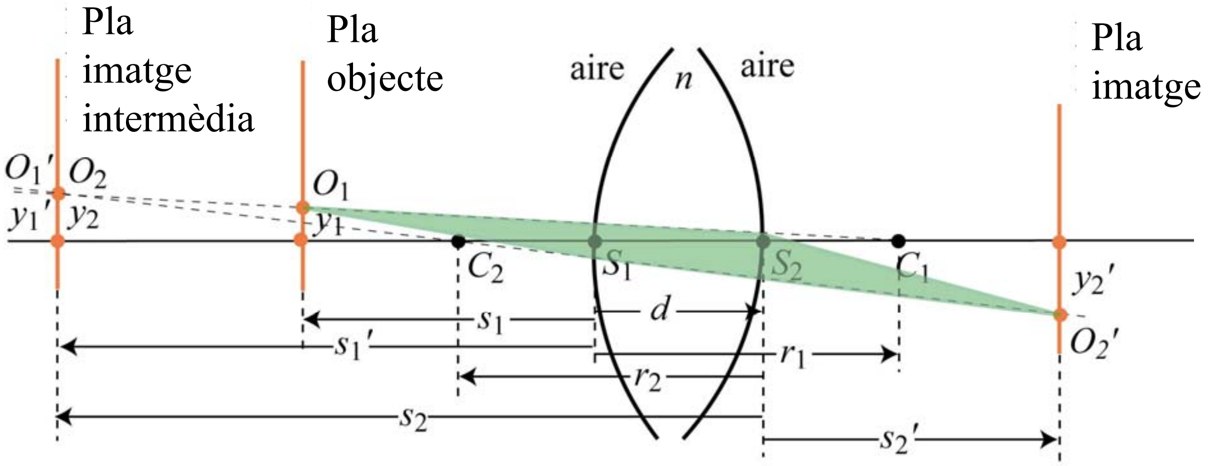
$$\beta_2'=\frac{y_2'}{y_2}=\frac{n}{1}\frac{s_2'}{s_2}$$

$$\beta'=\frac{y'}{y}=\beta_1'\beta_2'$$

Interfases esfèriques

Introducció a les lents esfèriques

Aproximació de **lent prima**: $s_2 = -d + s_1' \approx s_1'$



$$\left(\frac{1}{s_1}-\frac{1}{r_1}\right)=n\left(\frac{1}{s_1'}-\frac{1}{r_1}\right)$$

$$n\left(\frac{1}{s_2}-\frac{1}{r_2}\right)=\left(\frac{1}{s_2'}-\frac{1}{r_2}\right)$$

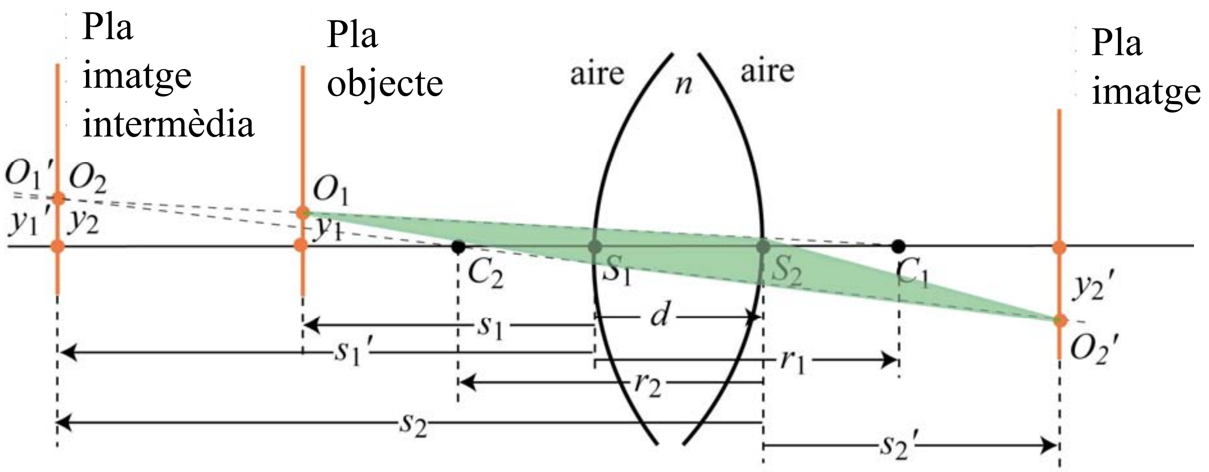
$$-\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_2'}=(n-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$

Equació de Gauss

Interfases esfèriques

Introducció a les lents esfèriques

Aproximació de **lent prima**: $s_2 = -d + s_1' \approx s_1'$



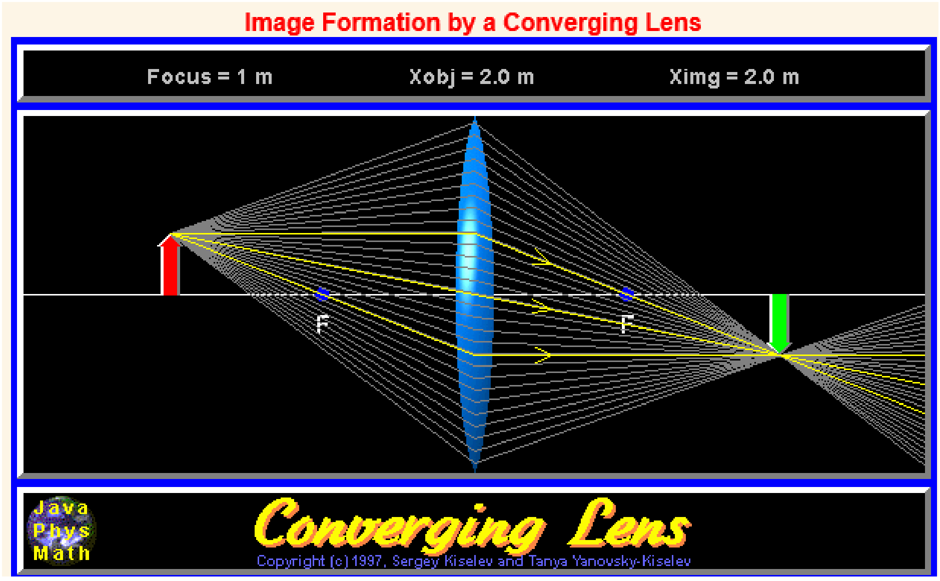
$$\beta_1'=\frac{y_1'}{y_1}=\frac{1}{n}\frac{s_1'}{s_1}$$

$$\beta_2'=\frac{y_2'}{y_2}=\frac{n}{1}\frac{s_2'}{s_2}$$

$$\beta'=\frac{s_2'}{s_1}$$

Interfases esfèriques

Introducció a les lents esfèriques



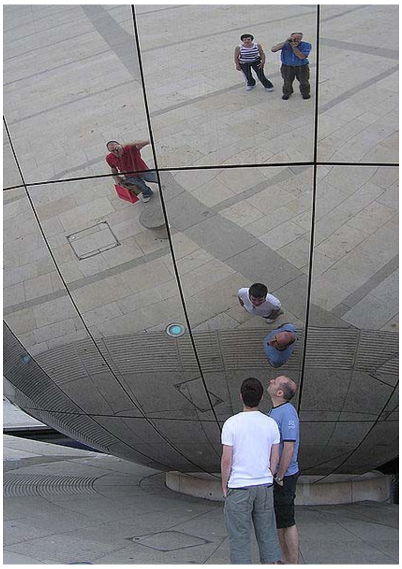
http://library.thinkquest.org/C003776/espanol/fun/java.htm

Tema III. Interfases esfèriques

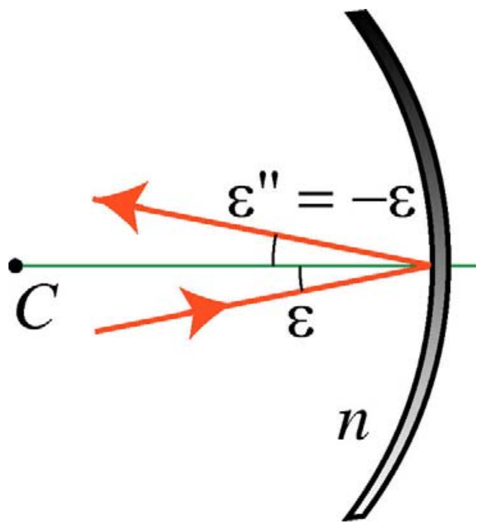
- El dioptre esfèric
- Relacions paraxials de la superfície esfèrica
- Concepte d'augment
- Introducció a les lents esfèriques
- Espills esfèrics
- Traçat gràfic de raigs

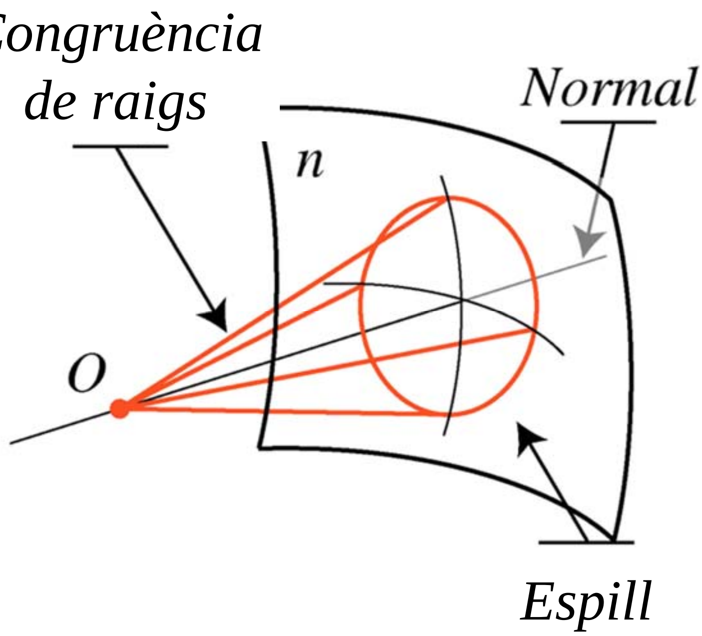
Interfases esfèriques
Espills esfèrics

- Un **espill esfèric** és un sistema òptic format per un medi dielèctric d'índex de refracció *n*, que està separat d'un medi conductor per una interfase esfèrica amb centre de curvatura *C*.



Interfases esfèriques
Espills esfèrics





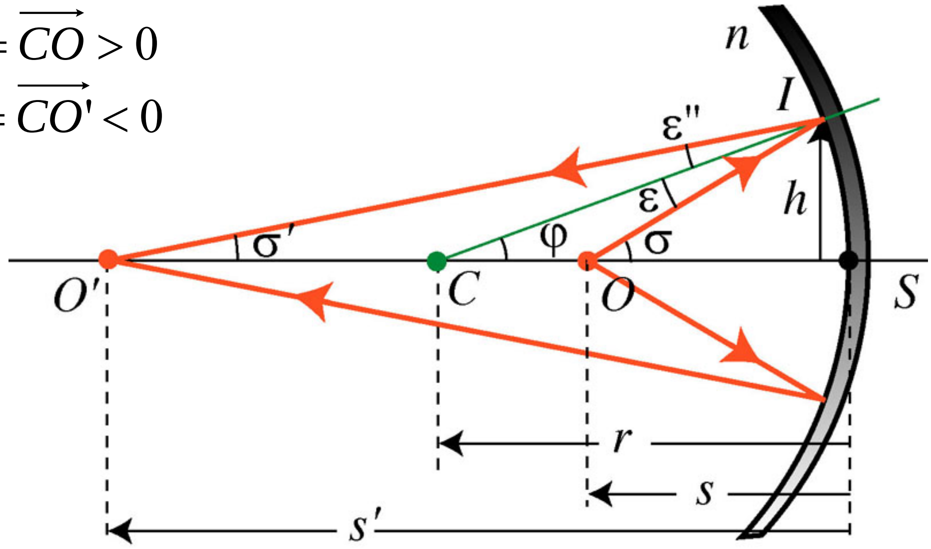
Interfases esfèriques
Espills esfèrics

Criteri de signes:

- Per a les distàncies en eix i al llarg de qualsevol raig, s'agafa com a sentit positiu el de la **llum incident**.

$$l = \overrightarrow{IO} < 0 \qquad z = \overrightarrow{CO} > 0$$
$$l' = \overrightarrow{IO'} < 0 \qquad z' = \overrightarrow{CO'} < 0$$

$$r = \overrightarrow{SC} < 0$$
$$s = \overrightarrow{SO} < 0$$
$$s' = \overrightarrow{SO'} < 0$$

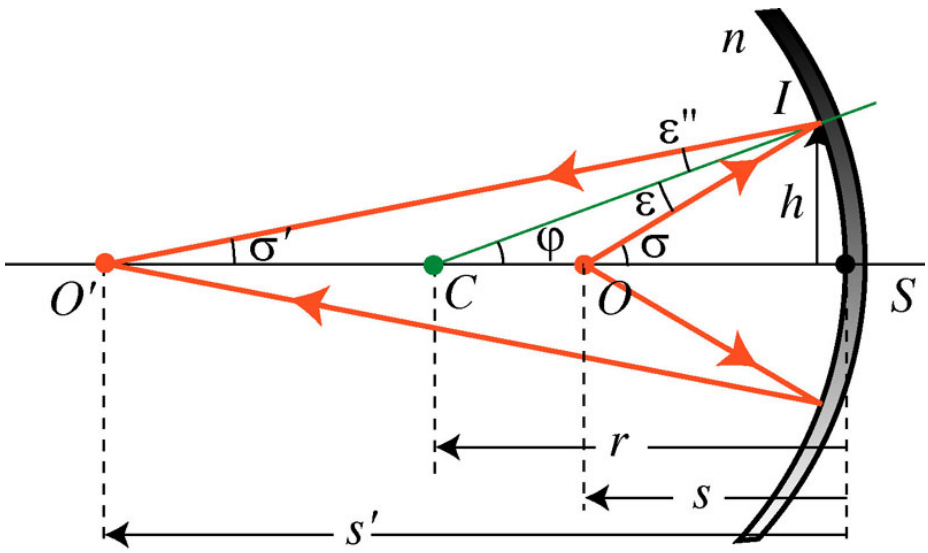


Interfases esfèriques
Espills esfèrics

Criteri de signes:

- Els segments normals a l'eix seran positius cap a dalt i negatius cap a baix.

$$h > 0$$



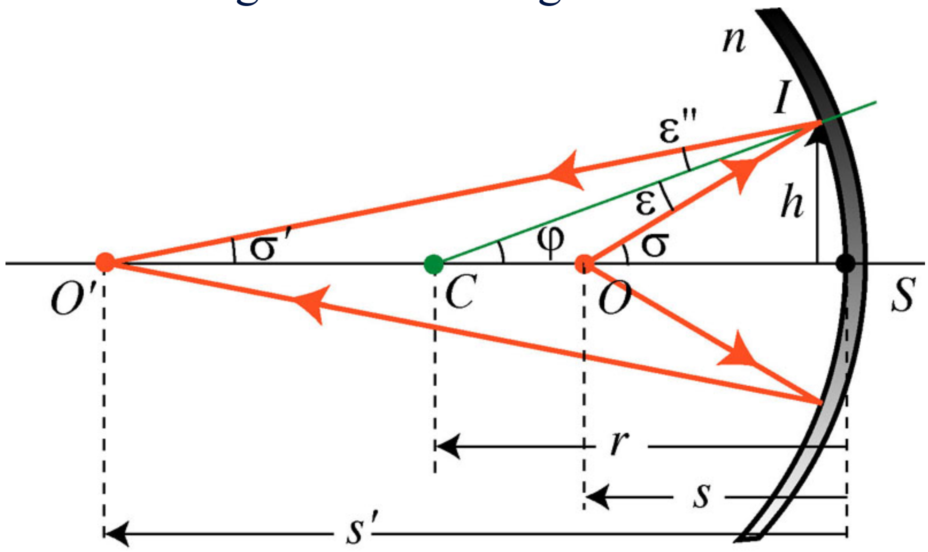
Interfases esfèriques
Espills esfèrics

Criteri de signes:

- Els angles d'incidència i refracció són positius si, en portar el raig per gir a coincidir amb la normal pel camí angular més curt, es va en sentit de les agulles del rellotge.

$\varepsilon > 0$

$\varepsilon'' < 0$



Interfases esfèriques
Espills esfèrics

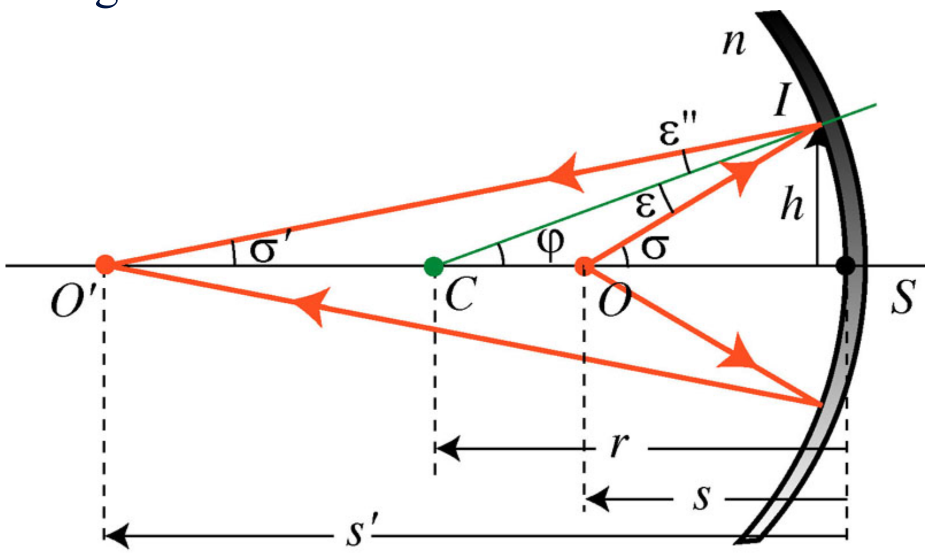
Criteri de signes:

- Els angles amb l'eix són positius si, en portar la recta que els forma a coincidir per gir amb l'eix, es va en sentit contrari a les agulles del rellotge.

$\varphi < 0$

$\sigma < 0$

$\sigma' < 0$



Interfases esfèriques
Espills esfèrics

Resum de les **equacions de conjugació** més importants per a l'espill esfèric, obtingudes a partir de la refracció utilitzant l'artifici matemàtic *n'* → −*n* i ε' → ε ''

$$n \operatorname{sen}\varepsilon = n' \operatorname{sen}\varepsilon' \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = -\varepsilon''$$

$$l \operatorname{sen}\sigma = l' \operatorname{sen}\sigma' \quad \Rightarrow \quad l \operatorname{sen}\sigma = l' \operatorname{sen}\sigma'$$

$$n\frac{z}{l} = n'\frac{z'}{l'} \quad \Rightarrow \quad \frac{z}{l} + \frac{z'}{l'} = 0$$

$$nz \operatorname{sen}\sigma = n' z' \operatorname{sen}\sigma' \quad \Rightarrow \quad z \operatorname{sen}\sigma + z' \operatorname{sen}\sigma' = 0$$

$$n\left(\frac{1}{l} - \frac{\cos\varepsilon}{r}\right) = n'\left(\frac{1}{l'} - \frac{\cos\varepsilon'}{r}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{l} + \frac{1}{l'} = \frac{2\cos\varepsilon}{r}$$

Interfases esfèriques
Espills esfèrics

Observem que la posició del punt *O'*, caracteritzada per la distància *l'*, depèn de:

- La **posició** del punt **objecte** *O* caracteritzada per *l*.
- L'**angle d'incidència** ε dels raigs.
- El **radi de curvatura** *r* de l'espill esfèric.

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{l'} = \frac{2\cos\varepsilon}{r}$$

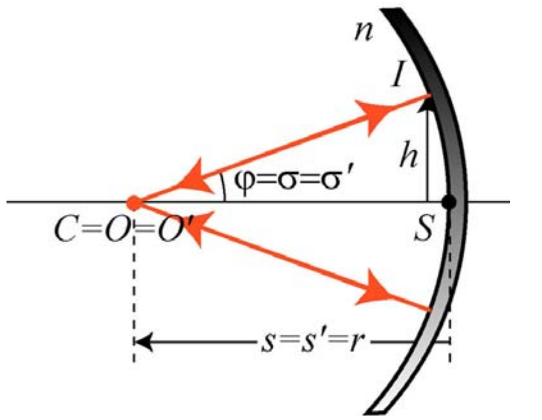
Interfases esfèriques
Espills esfèrics

Volem estudiar l'espill esfèric com a **superfície estigmàtica**:

Hem de trobar per a quins valors de *z* (posició del punt *O*), el valor de *z'* no depèn de ε (posició fixa per a *O'*)

$$z \operatorname{sen} \sigma + z' \operatorname{sen} \sigma' = 0 \quad \Rightarrow \quad z = z' = 0$$

- Tota esfera és estigmàtica per al seu centre.

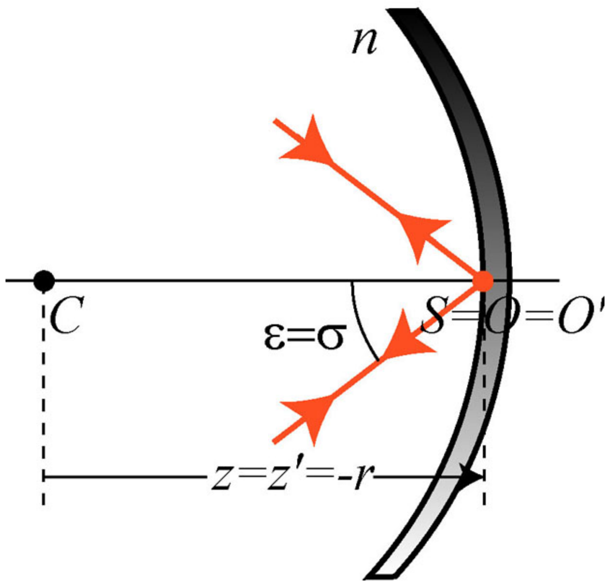


$$\varepsilon = \varepsilon'' = 0$$
$$\varphi = \sigma = \sigma'$$
$$s = s' = r$$

Interfases esfèriques
Espills esfèrics

$$l \operatorname{sen} \sigma = l' \operatorname{sen} \sigma' \quad \Rightarrow \quad l = l' = 0$$

- Per als punts de la superfície esfèrica, la imatge es confon amb l'objecte.



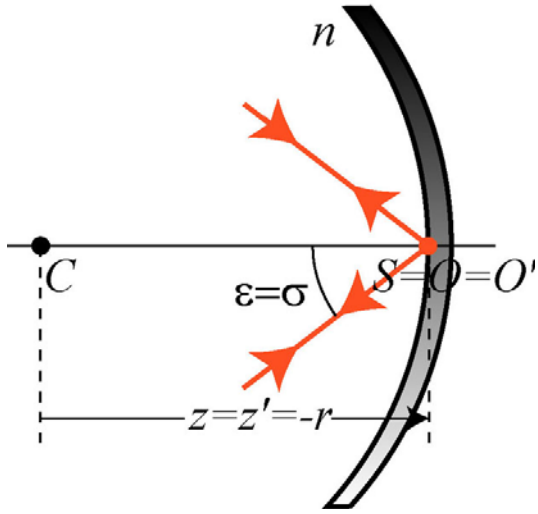
$$\varepsilon = -\varepsilon''$$
$$\varphi = 0$$
$$s = s' = 0$$

Interfases esfèriques
Espills esfèrics

- Què ocorre amb els **punts de Young** o **punts de Weïerstrass**?

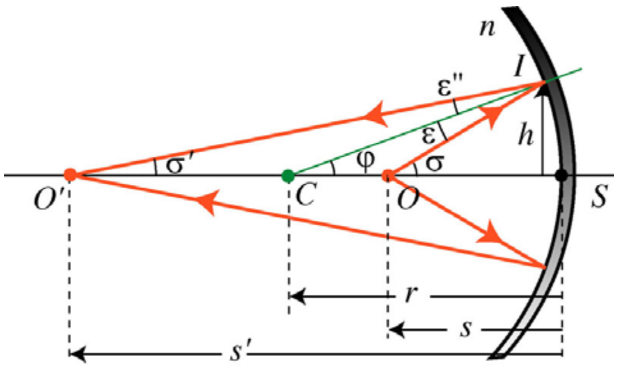
$$\left.\begin{aligned} z &= \frac{n'}{n} r \\ z' &= \frac{n}{n'} r \end{aligned}\right\} \xrightarrow{n'=-n} \left\{\begin{aligned} z &= -r \\ z' &= -r \end{aligned}\right.$$

- Els punts de la superfície espillada formen els punts de Young. Existeix redundància en la relació de solucions!



Interfases esfèriques
Espills esfèrics

- Per a una posició fixa del punt objecte *O* (*s* fix), s'obté una **posició diferent del punt *O'***.
- Però, per a **angles** d'incidència i emergència **xicotets** ($\varepsilon, \varepsilon'' < 5^{\circ}$), la posició de *O'* és pràcticament invariable.



- En aquest cas, s'ha de complir que φ, σ i σ' siguen xicotets. Aquest fet implica que $l \cong s$ i $l' \cong s'$.

Interfases esfèriques

Espills esfèrics

Resum dels invariants opticogeomètrics més importants en l’aproximació paraxial:

$$\varepsilon = -\varepsilon'' \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = -\varepsilon''$$

$$l \,\mathrm{sen}\, \sigma = l' \mathrm{sen}\, \sigma' \quad \Rightarrow \quad s\sigma = s'\sigma'$$

$$\frac{z}{l} + \frac{z'}{l'} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{z}{s} + \frac{z'}{s'} = 0$$

$$z \,\mathrm{sen}\, \sigma + z' \mathrm{sen}\, \sigma' = 0 \quad \Rightarrow \quad z\sigma + z'\sigma' = 0$$

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{l'} = \frac{2\cos\varepsilon}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{r}$$

Equació de conjugació

Interfases esfèriques

Espills esfèrics

Equació de conjugació:

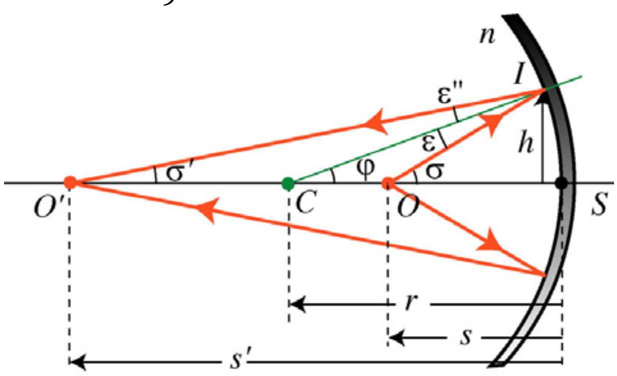
$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{r}$$

Cas particular: espill pla

$$r \to \infty \quad \Rightarrow \quad s' = -s$$

Si ens interesa treballar amb les variables axials *z* i *z’*:

$$\left.\begin{aligned} s &= r + z \\ s' &= r + z' \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{z} + \frac{1}{z'} = -\frac{2}{r}$$



Interfases esfèriques
Espills esfèrics

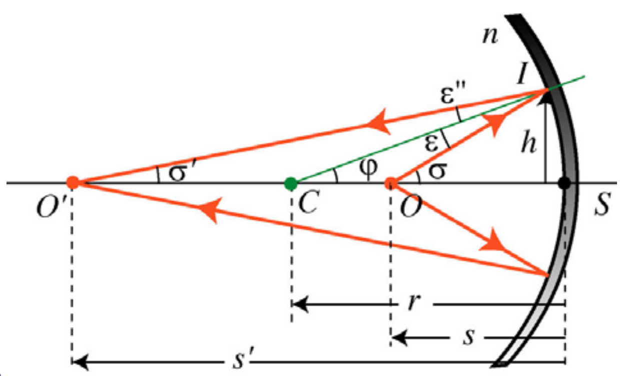
- Ara *s'* no depèn de ε.
- Existeix una condició d'**estigmatisme aproximat** si considerem raigs amb angles d'incidència ε i emergència ε'' xicotets (**raig paraxials**).
- En la pràctica s'aconsegueix amb la inserció de **diafragmes** que elimina els raigs que no compleixen la condició d'estigmatisme aproximat.

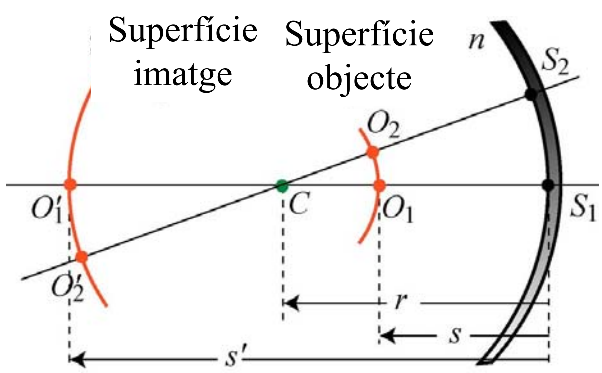
$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{2}{r}$$

Interfases esfèriques
Espills esfèrics

Imatge d'un objecte pla perpendicular a l'eix òptic:

- L'**eix d'un sistema òptic** queda determinat per la trajectòria d'un raig que no es desvia en travessar-lo.
- Si l'objecte extens és pla i perpendicular a l'eix òptic, la **imatge no és plana**.



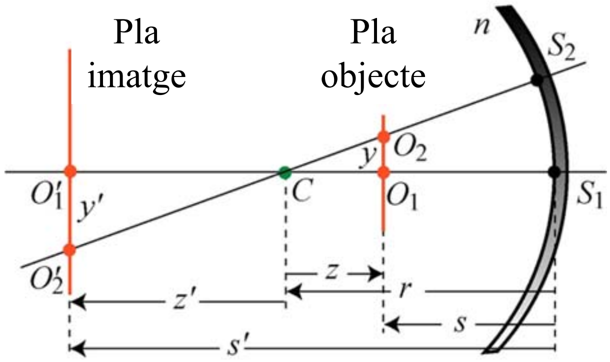


Interfases esfèriques

Espills esfèrics

Perquè la condició d'estigmatisme aproximat siga vàlida, s'ha de complir l'**aproximació de Gauss**:

- Espill amb superfície activa xicoteta.
  - Superfície d'extensió xicoteta
  - Ús de **diafragmes** (**d'obertura**): pupil·la ocular
- Objecte pla perpendicular a l'eix òptic i centrat, de xicoteta dimensió activa.
  - Objecte d'extensió xicoteta
  - Ús de **diafragmes** (**de camp**): retina ocular



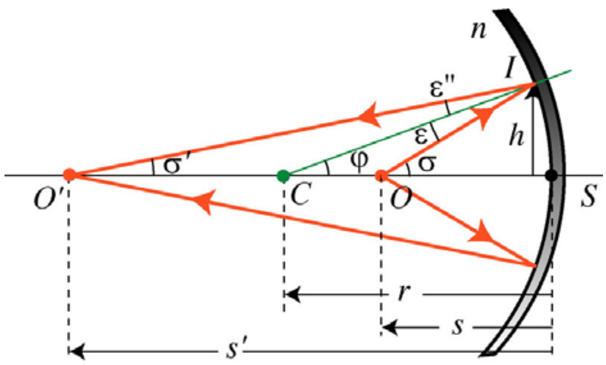
Interfases esfèriques

Espills esfèrics

Fins ara hem obtingut les següents **equacions de conjugació**:

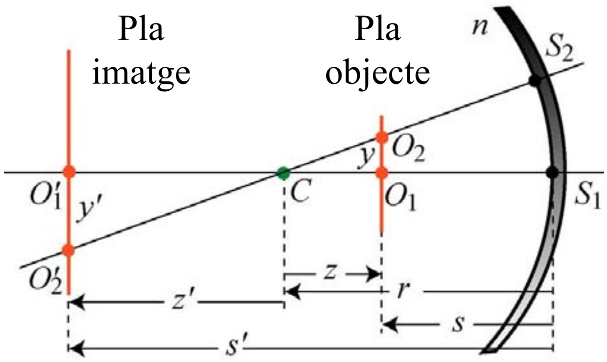
$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{2}{r}$$

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{z'}=-\frac{2}{r}$$



$$\left.\begin{aligned} y &= \overline{O_1O_2} \\ y' &= \overline{O'_1O'_2} \end{aligned}\right\}$$

$$\beta'=\frac{y'}{y}=\frac{z'}{z}\neq 1$$

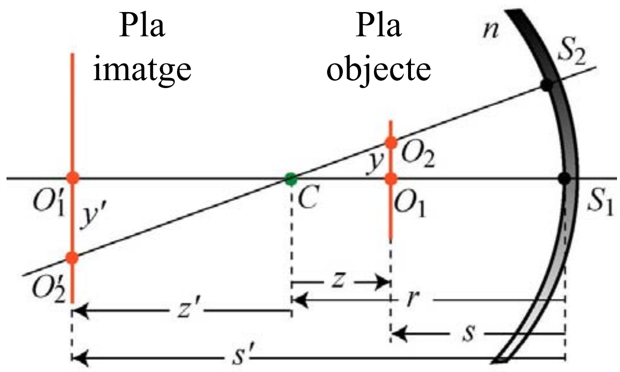


Interfases esfèriques

Espills esfèrics

Augment lateral en espills esfèrics:

$$\left.\begin{aligned} \beta' &= \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z} \\ \beta' = \frac{n}{n'}\frac{s'}{s} \quad &\Rightarrow \quad \beta' = -\frac{s'}{s} \end{aligned}\right\}$$



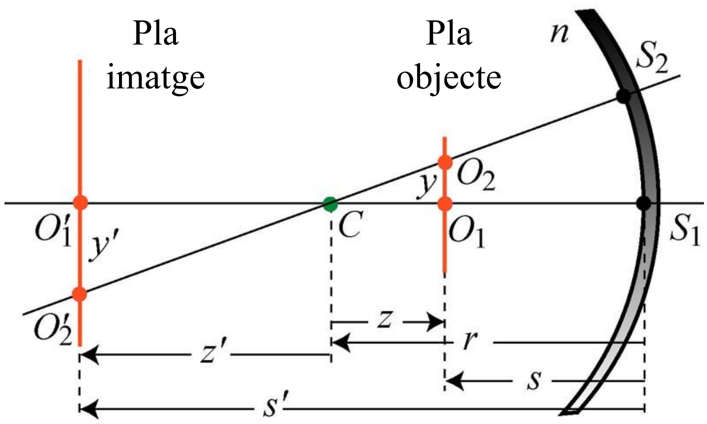
Interfases esfèriques

Espills esfèrics

Resum de les principals **equacions de conjugació**:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{r} \qquad \beta' = -\frac{s'}{s}$$

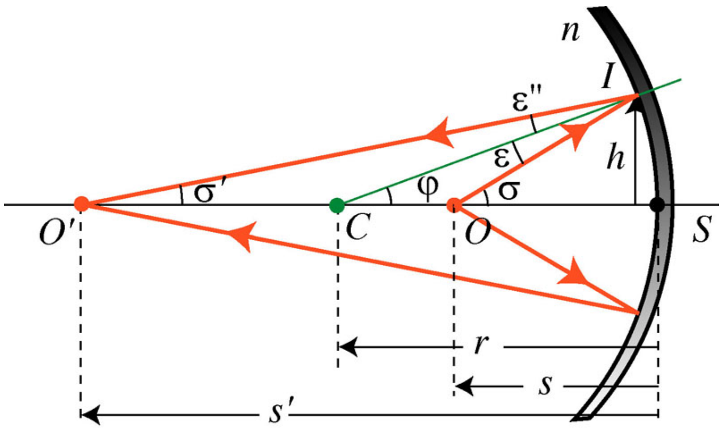
$$\frac{1}{z} + \frac{1}{z'} = -\frac{2}{r} \qquad \beta' = \frac{z'}{z}$$



Interfases esfèriques

Espills esfèrics

- Considerem ara l'**augment angular**.



$$\gamma' = \frac{\sigma'}{\sigma}$$

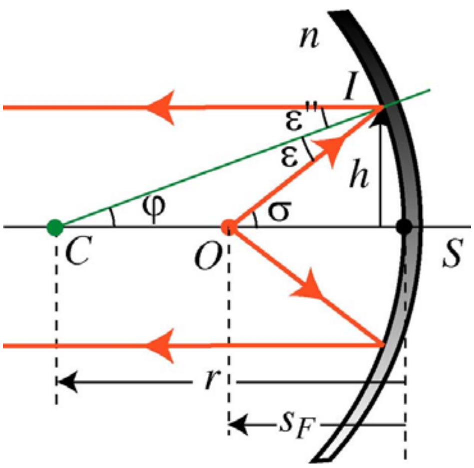
$$\beta'\gamma' = \frac{n}{n'} \quad \Rightarrow \quad \beta'\gamma' = -1$$

$$\gamma' = -\frac{z}{z'} = \frac{s}{s'}$$

Interfases esfèriques

Espills esfèrics

Imatge en l'infinit: Podem trobar la posició d'un pla objecte, caracteritzat per s_F, per al qual la distància *s'* és infinita, és a dir, la imatge es troba a una distància infinita del dioptre.



$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{r}$$

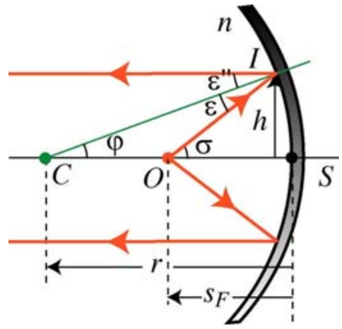
$$s_F = \frac{n}{n-n'} r \xrightarrow{n'=-n} s_F = \frac{r}{2}$$

Interfases esfèriques

Espills esfèrics

- La posició del punt axial objecte *O* la imatge del qual es troba en l'infinit es denomina **punt focal objecte** (*F*) i el pla transversal objecte que el conté es denomina **pla focal objecte**.

$$s_F = \frac{r}{2}$$



- Tots els raigs que tallen *F* en l'espai objecte emergeixen de la superfície paral·lels a l'eix òptic.

$$\forall\sigma,\ \sigma' = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma' = \frac{\sigma'}{\sigma} = 0 \qquad\qquad \gamma' = \frac{s}{s'} \xrightarrow{s'\to\infty} 0$$

Interfases esfèriques

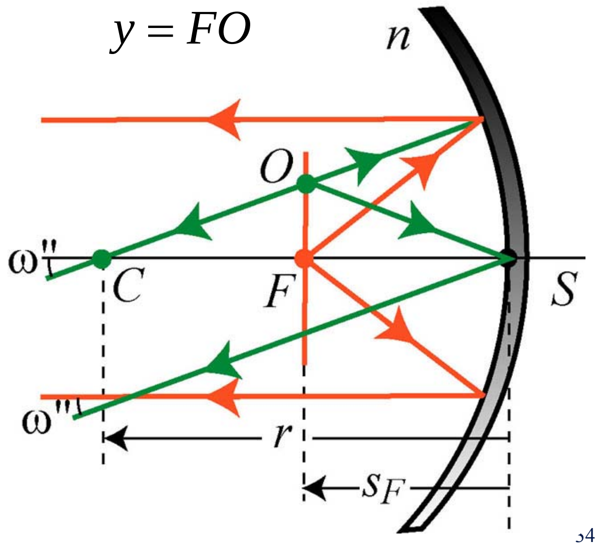
Espills esfèrics

Estudiem el cas d'un punt objecte extraaxial contingut en el pla focal objecte:

$$\left.\begin{aligned} \beta'\gamma' = -1 \xrightarrow{\gamma'=0} \beta' \to \infty \\ \beta' = -\frac{s'}{s} \xrightarrow{s'\to\infty} \infty \end{aligned}\right\} \qquad \beta' = \frac{y'}{y} \qquad y = \overline{FO}$$

- La grandària de la imatge

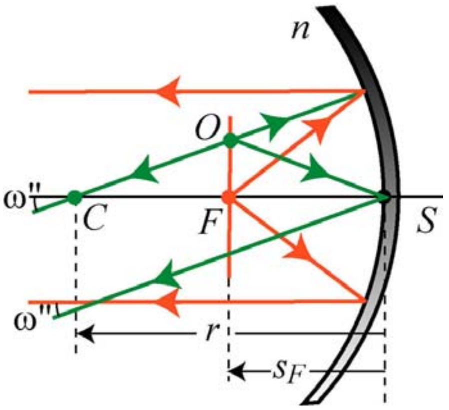
$$y' \to \infty$$



Interfases esfèriques

Espills esfèrics

Habitualment es caracteritzen les grandàries de les imatges (i objectes) en l'infinit amb **magnituds angulars**:



$$y = \overline{FO} \quad \Rightarrow \quad \omega'' = \frac{y}{-z_F}$$

- A la magnitud longitudinal de l'objecte, *y*, li correspon una magnitud angular de la imatge, ω''

$$\omega'' = \frac{y}{-z_F} = \frac{y}{-\left(-r + s_F\right)} = 2\frac{y}{r}$$

Tema III. Interfases esfèriques

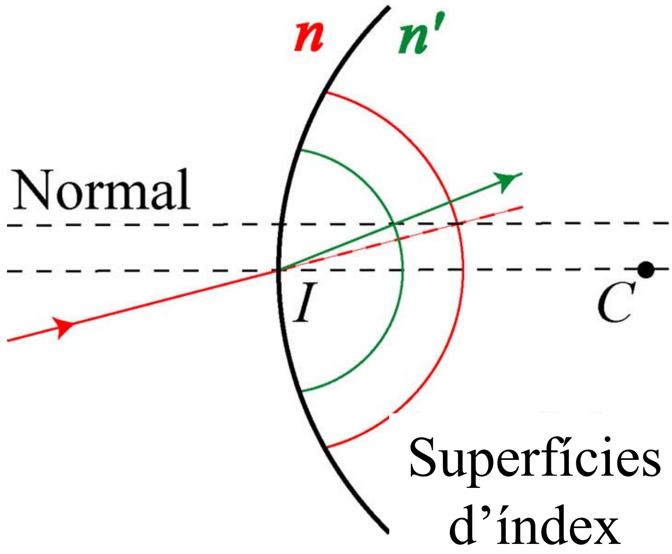
- El dioptre esfèric
- Relacions paraxials de la superfície esfèrica
- Concepte d'augment
- Introducció a les lents esfèriques
- Espills esfèrics
- Traçat gràfic de raigs

Interfases esfèriques

Traçat de raigs

Mètode de les superfícies d'índex per a la construcció gràfica d'un raig **refractat**:

- Les **superfícies d'índex** són dues superfícies esfèriques els centres de curvatura de les quals concideixen amb el punt d'incidència del raig considerat amb la interfase, *I*, i els radis de curvatura dels quals són proporcionals als índexs de refracció *n* i *n'* d'ambdós medis.

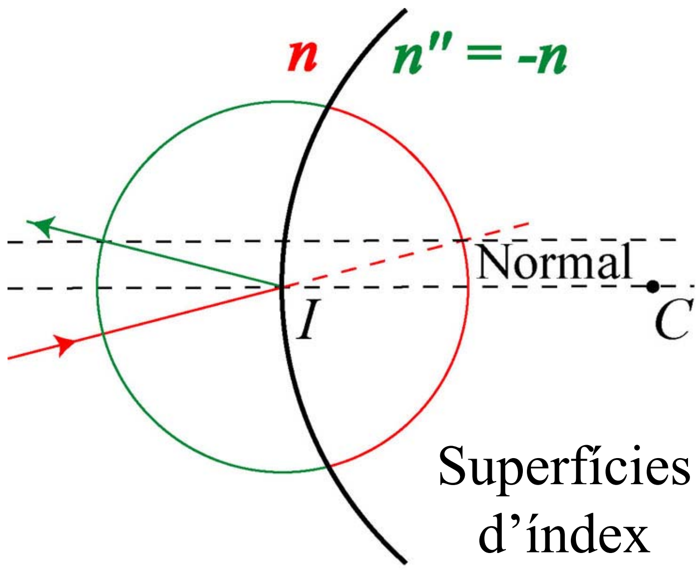


Interfases esfèriques

Traçat de raigs

Mètode de les superfícies d'índex per a la construcció gràfica d'un raig **reflectit**:

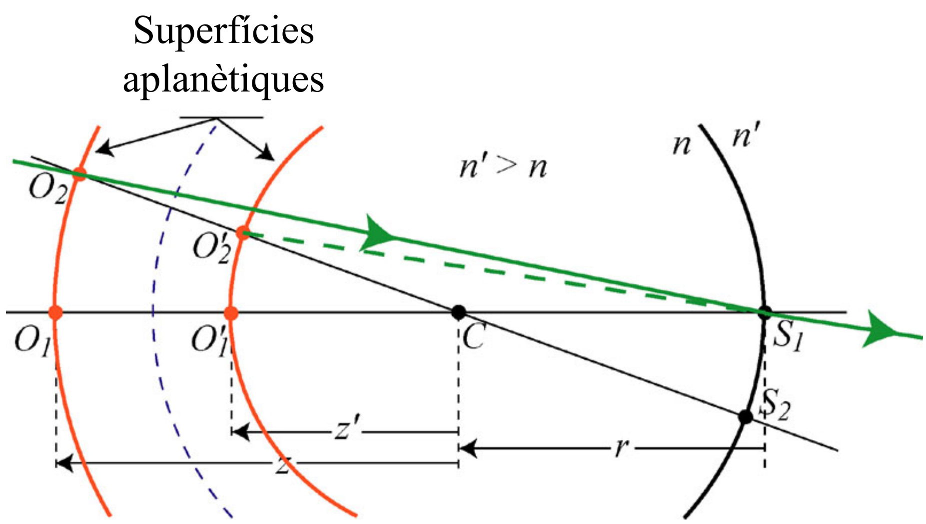
- En aquest cas les dues **superfícies d'índex** tenen el mateix centre i radi de curvatura. Per a l'ona reflectida s'ha de considerar la part de la superfície d'índex assignada a ones que viatgen en sentit oposat a l'incident.



Interfases esfèriques

Traçat de raigs

Mètode de les superfícies aplanètiques per a la construcció gràfica d'un raig **refractat**: S'utilitza el fet que O_2 i O'_2 són punts de Young, és a dir, tot raig emergent de O_2 ha de passar realment o virtualment per O'_2.



$$z = \frac{n'}{n} r$$

$$z' = \frac{n}{n'} r$$

Tema IV. Sistemes òptics centrats en aproximació paraxial

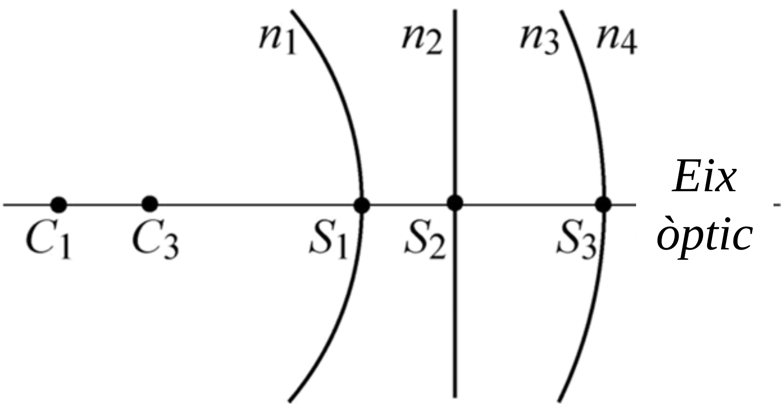
- Generalitats dels sistemes òptics centrats
- Plans focals i plans principals
- Traçat de raigs
- Distància focal i potència d'un sistema òptic
- Plans nodals
- Equacions de correspondència

Sistemes òptics centrats

Generalitats

- Un conjunt d'interfases que separen medis de diferents característiques electromagnètiques (dioptres i espills) constituixen un **sistema òptic**.

- Un **sistema centrat** és tot acoblament de dioptres i/o espills esfèrics (o plans) amb simetria de revolució al llarg d'un eix (**eix òptic** del sistema), és a dir, els seus centres estan alineats al llarg de l'eix òptic.



Sistemes òptics centrats

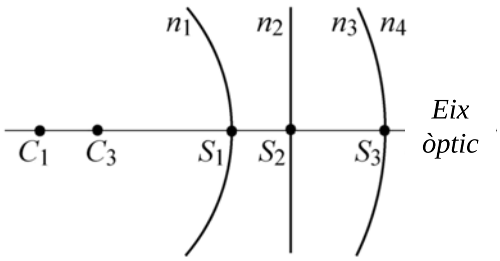
Generalitats

- L'**eix òptic** d'un sistema centrat està determinat per la trajectòria d'un raig que no es desvia en travessar-lo (incidència normal):

  - Per a una interfase plana, l'eix òptic és qualsevol recta perpendicular a la superfície.

  - Per a una interfase esfèrica, l'eix òptic és qualsevol recta que passa pel centre de curvatura.

  - Per a un conjunt d'interfases, existeix un únic eix òptic si els centres de curvatura estan alineats.



Sistemes òptics centrats

Generalitats

Classificació dels sistemes òptics formadors d'imatges:

- Un **sistema diòptric** és aquell sistema òptic format per superfícies refractants (dioptres) solament.
- Un **sistema catòptric** és aquell sistema òptic format sols per espills.
- Un **sistema catadiòptric** és un sistema òptic format per dioptres i espills.

Sistemes òptics centrats
Generalitats

Un **sistema òptic perfecte** ha de complir les següents **condicions** establides per **Maxwell**:

- Condició d'**estigmatisme** (aproximat).
- **Correspondència pla a pla**: Si els punts objecte estan continguts en un pla perpendicular a l'eix, els punts imatge també estan continguts en un pla perpendicular.
- Raó de **semblança transversal** invariable: Si dos punts continguts en un pla transversal disten una quantitat *y*, els seus punts imatge disten una quantitat *y'* que no varia independentment de la posició dels punts objecte.

$$\beta' = \frac{y'}{y}$$

Sistemes òptics centrats
Generalitats

Un **sistema òptic perfecte** ha de complir les següents **condicions** establides per **Maxwell**:

- Condició d'**estigmatisme** (aproximat)
- **Correspondència pla a pla**
- Raó de **semblança transversal** invariable

Sistemes òptics centrats
Generalitats

- L'*espill pla* és un sistema òptic perfecte.
- El *dioptre pla* també és un sistema òptic perfecte, ja que compleix la condició d'estigmatisme (aproximat) sota l'aproximació de Gauss, té una correspondència pla a pla i la raó de semblança denominada **augment lateral** és la unitat.

$$\beta' = \frac{y'}{y} = 1$$

- Però no tota combinació d'espills i dioptres plans formen un sistema òptic perfecte. Per això exigim que el sistema siga centrat, és a dir, que es trobe un eix òptic (Contraexemple: Prisma òptic).

Sistemes òptics centrats
Generalitats

Perquè una sola superfície es considere sistema òptic perfecte, ja siga dioptre o espill, exigim condicions per aplicar l'**aproximació de Gauss**:

- Dioptre/espill amb superfície activa xicoteta.
  - Superfície d'extensió xicoteta
  - Ús de **diafragmes (d'obertura)**: pupil·la ocular
- Objecte pla perpendicular a l'eix òptic i centrat, de xicoteta dimensió activa.
  - Objecte d'extensió xicoteta
  - Ús de **diafragmes (de camp)**: retina ocular

Sistemes òptics centrats
Generalitats

Propietats generals dels sistemes centrats dins de l'aproximació de Gauss:

En primer lloc hem d'exigir que:

- totes les interfases tinguen una superfície activa xicoteta, i que
- l'objecte siga pla, perpendicular a l'eix òptic i centrat, amb xicoteta dimensió activa.

Sistemes òptics centrats
Generalitats

<u>Propietats generals dels sistemes centrats dins de l'aproximació de Gauss:</u>

- Sota aquestes premisses, podem afirmar que **el sistema acoblat** compleix les condicions de sistema òptic perfecte:
  - Condició d'**estigmatisme** (aproximat).
  - Correspondència **pla a pla.**
  - Raó de **semblança transversal** invariable.

$$\beta' = \frac{y_k'}{y_1} = \frac{y_k'}{y_k}\frac{y_{k-1}'}{y_{k-1}}\cdots\frac{y_2'}{y_2}\frac{y_1'}{y_1} = \beta_k'\beta_{k-1}'\cdots\beta_2'\beta_1'$$

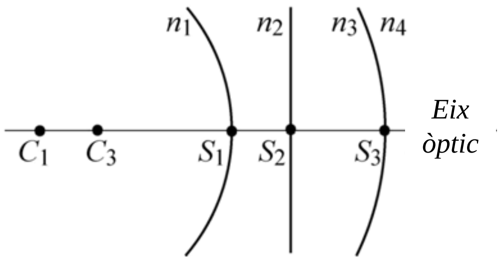
$$y_1' = y_2$$
$$y_{k-1}' = y_k$$

Sistemes òptics centrats

Generalitats

Propietats generals dels sistemes centrats dins de l’aproximació de Gauss:

- La imatge que genera un element del sistema òptic actua com a objecte per al següent sistema que la llum ha de travessar, denominada **imatge intermèdia**.
- En conseqüència, existeix una **correspondència objecte-imatge** que és **única** dins de tot el sistema: a cada pla objecte li correspon un pla imatge i sols un, i recíprocament.



Sistemes òptics centrats

Generalitats

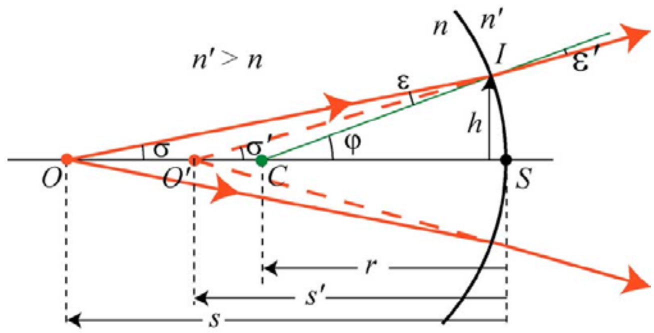
Propietats generals dels sistemes centrats dins de l’aproximació de Gauss :

- La **relació de Lagrange-Helmholtz** es pot aplicar directament entre l’espai objecte i l’espai imatge per a un sistema de k superfícies**.**

$$\left.\begin{aligned} n_1 y_1 \sigma_1 &= n'_1\, y'_1\, \sigma'_1 \\ n_2 y_2 \sigma_2 &= n'_2\, y'_2\, \sigma'_2 \\ &\dots \\ n_k y_k \sigma_k &= n'_k\, y'_k\, \sigma'_k \end{aligned}\right\}$$

$$n_1' = n_2 \qquad y_1' = y_2 \qquad \sigma_1' = \sigma_2$$
$$n_{k-1}' = n_k \qquad y_{k-1}' = y_k \qquad \sigma_{k-1}' = \sigma_k$$

$$\boxed{n_1 y_1 \sigma_1 = n'_k\, y'_k\, \sigma'_k}$$

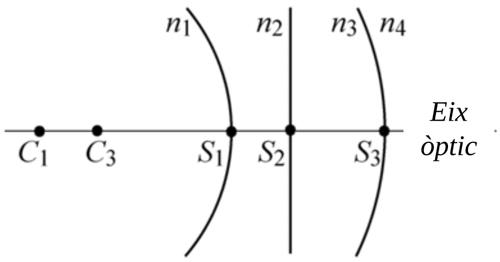


Sistemes òptics centrats
Generalitats

- La invariant Lagrange-Helmholtz ens dóna una idea que no és necessari descriure la formació d'imatges **en cascada**, a través de totes les interfases que componen el sistema, per obtenir la imatge final.

$$n_1 y_1 \sigma_1 = n'_k \, y'_k \, \sigma'_k$$

- Tenim accés a l'espai imatge sense passar pels espais intermedis.



Tema IV. Sistemes òptics centrats en aproximació paraxial

- Generalitats dels sistemes òptics centrats
- Plans focals i plans principals
- Traçat de raigs
- Distància focal i potència d'un sistema òptic
- Plans nodals
- Equacions de correspondència

Sistemes òptics centrats

Plans focals i principals

- En tot sistema òptic centrat existeixen tres parells de punts i plans conjugats d’especial rellevància:
    - els focus i plans **focals**,
    - els punts i plans **principals**, i
    - els punts i plans **nodals**.
- Tots ells es denominen **elements cardinals** del sistema.

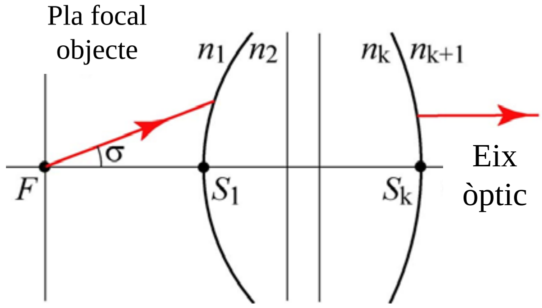
Sistemes òptics centrats

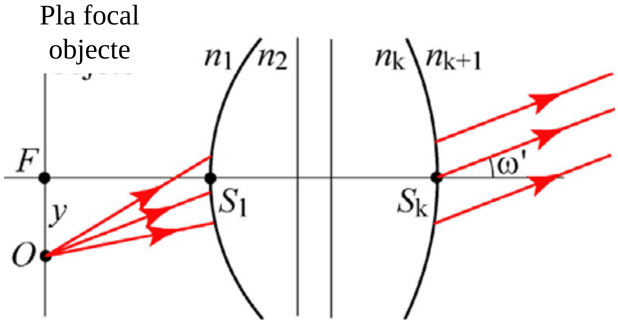
Plans focals i principals

- Per a un sistema òptic, el **punt focal objecte** és aquell que, emergint-ne els raigs, a la sortida del sistema es propaguen paral·lels a l’eix.

$$\forall\sigma, \sigma' = 0$$

$$\gamma' = 0 \ y \ \beta' \rightarrow \infty$$





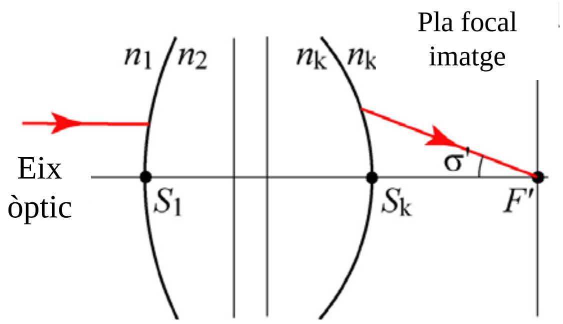
Sistemes òptics centrats

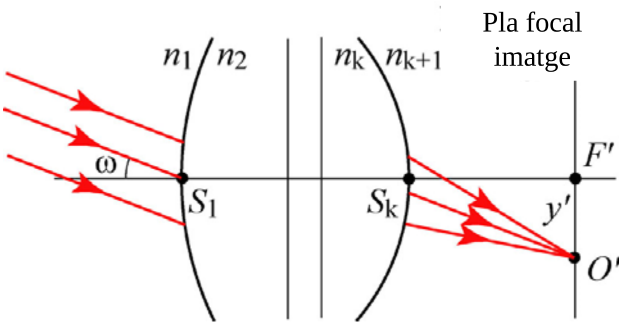
Plans focals i principals

- Per a un sistema òptic, el **punt focal imatge** és la imatge d'un punt objecte situat a distància infinita del sistema.

$$\forall\sigma', \sigma = 0$$

$$\gamma' \to \infty \ y \ \beta' = 0$$

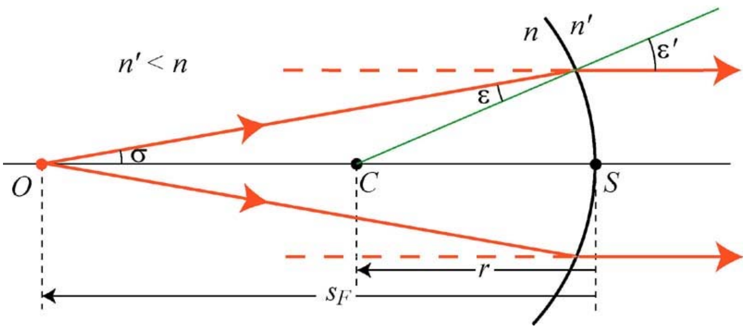




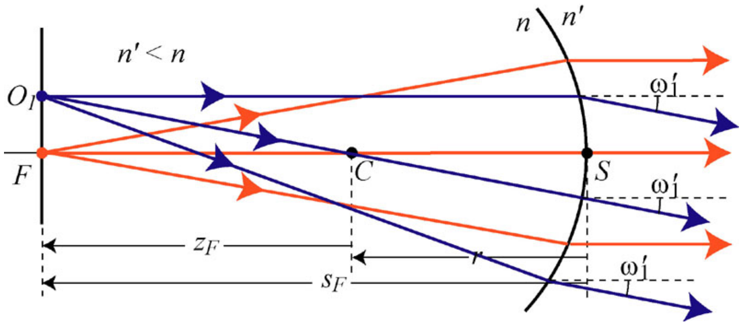
Sistemes òptics centrats

Plans focals i principals

- Ja coneixem el **punt focal objecte** d'un <u>dioptre esfèric</u>:



$$s_F = \frac{n}{n - n'} r$$

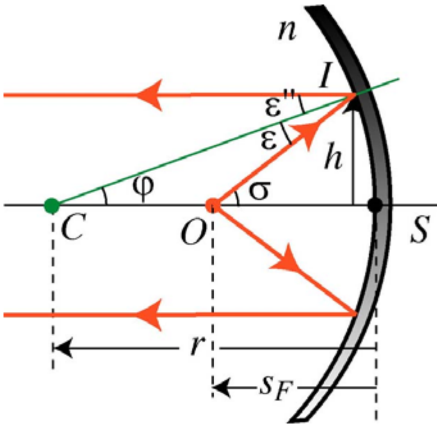


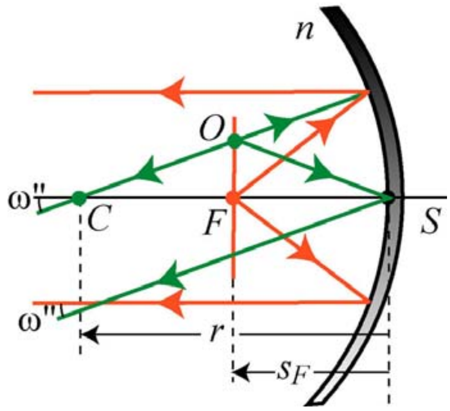
$$\omega'_1 = \left(1 - \frac{n}{n'}\right)\frac{y}{r}$$

Sistemes òptics centrats

Plans focals i principals

- Ja coneixem el **punt focal objecte** d'un <u>dioptre esfèric</u>:





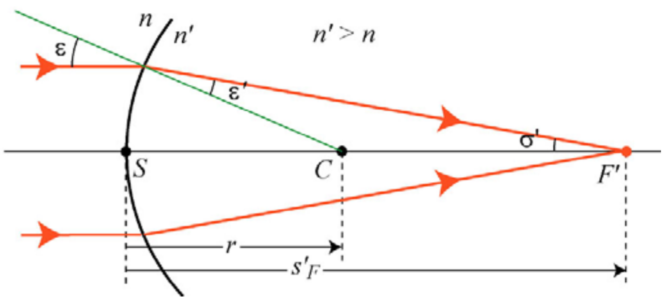
$$s_F = \frac{r}{2}$$

$$\omega'' = 2\frac{y}{r}$$

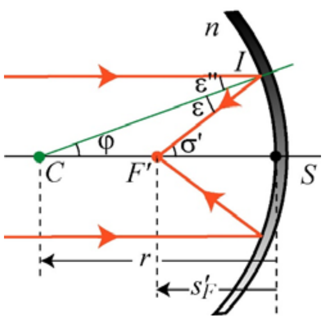
Sistemes òptics centrats

Plans focals i principals

- El **punt focal imatge** d'una interfase esfèrica:



$$\left.\begin{aligned} s'_F &= \frac{n'}{n'-n}r \\ \omega_1 &= \left(1-\frac{n'}{n}\right)\frac{y'}{r} \end{aligned}\right\}$$

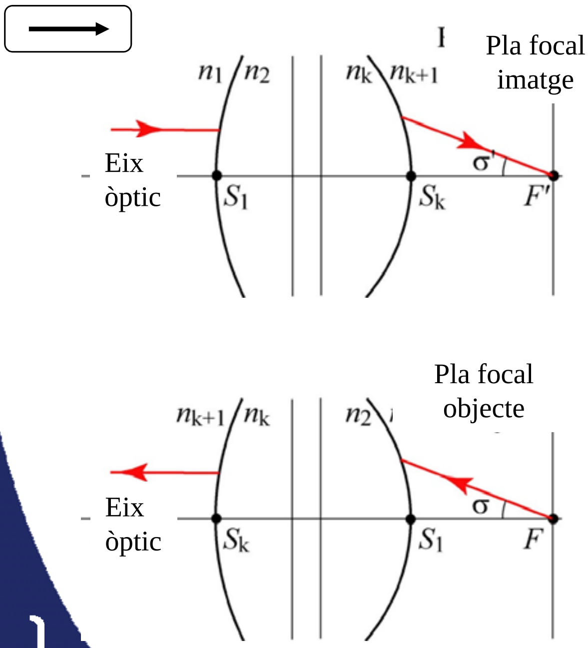


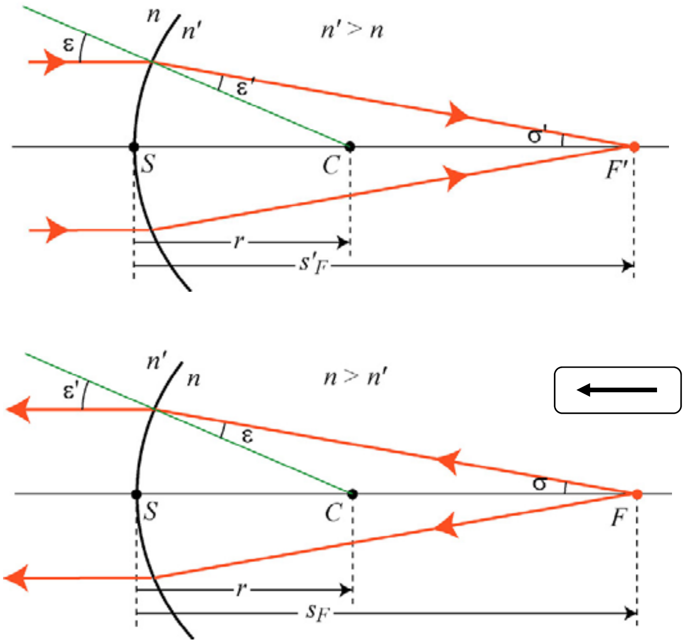
$$\left.\begin{aligned} s'_F &= \frac{r}{2} \\ \omega &= 2\frac{y'}{r} \end{aligned}\right\}$$

Sistemes òptics centrats

Plans focals i principals

- La posició del punt focal objecte (*F*) i del punt focal imatge (*F'*) depenen del <u>sentit de propagació de la llum</u>:





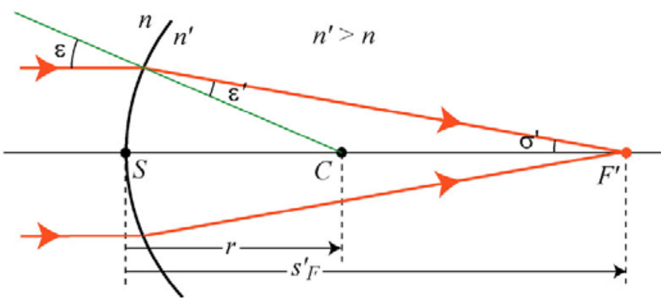
Sistemes òptics centrats

Plans focals i principals

- Definició:

  • Un sistema **convergent** és aquell sistema formador d'imatges el focus imatge del qual (*F'*) és real.

  • Un sistema **divergent** és aquell sistema òptic el punt focal imatge del qual és virtual.



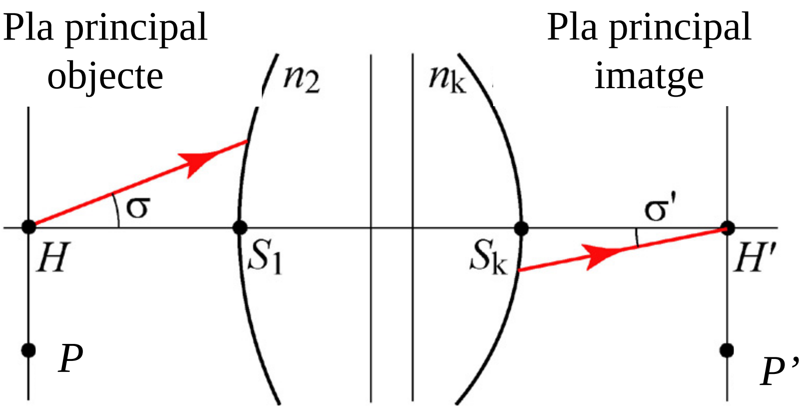
Sistema convergent

Exercici: Demostri's que aquest mateix dioptre esfèric és divergent si $n' < n$

Sistemes òptics centrats

Plans focals i principals

- Els **plans principals** són plans objecte i imatge conjugats a través del sistema òptic caracteritzats per tenir un augment lateral unitat (β’ = 1).



$$\beta' = 1$$

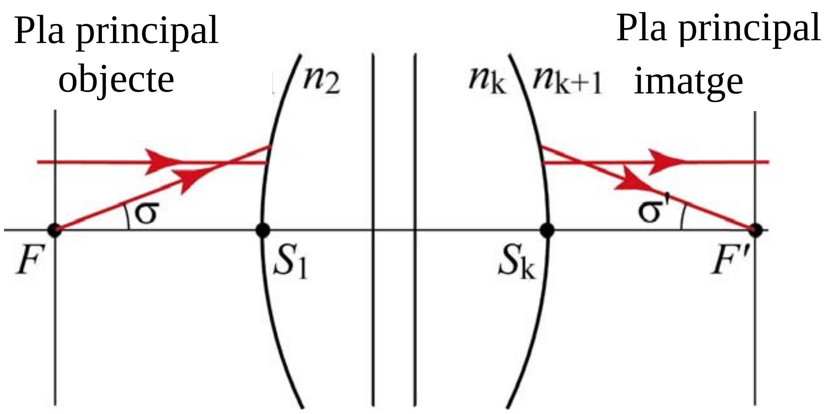
$$\beta'\gamma' = \frac{n_1}{n_{k+1}}$$

$$\gamma' = \frac{n}{n'}$$

- Els **punts principals** objecte, ***H***, i imatge, ***H’***, són punts en eix que pertanyen als plans principals. *H* i *H’* són punts conjugats a través del sistema.

Sistemes òptics centrats

Plans focals i principals

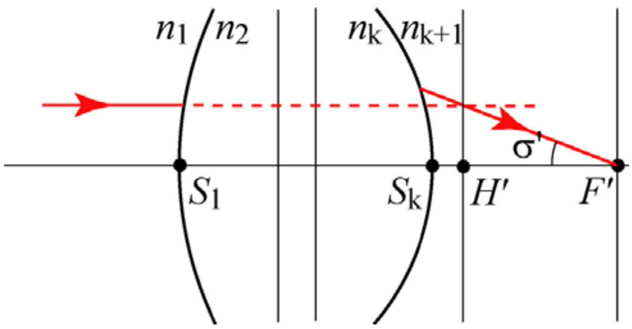


-Per trobar el pla focal objecte fem ús que quan la llum viatja de dreta a esquerra *F’* coincideix amb *F* en sentit contrari de la propagació de la llum.

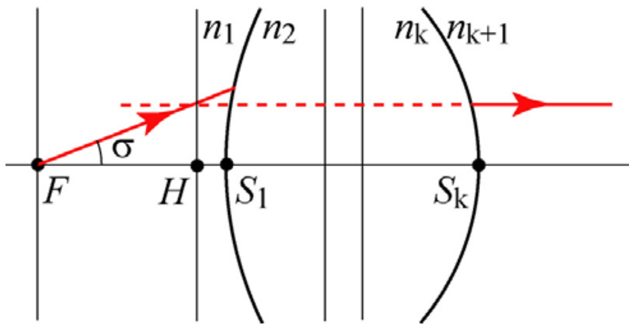
Sistemes òptics centrats

Plans focals i principals

- **Mètode gràfic** per a l'obtenció dels plans principals.



Obtenció de *H'*



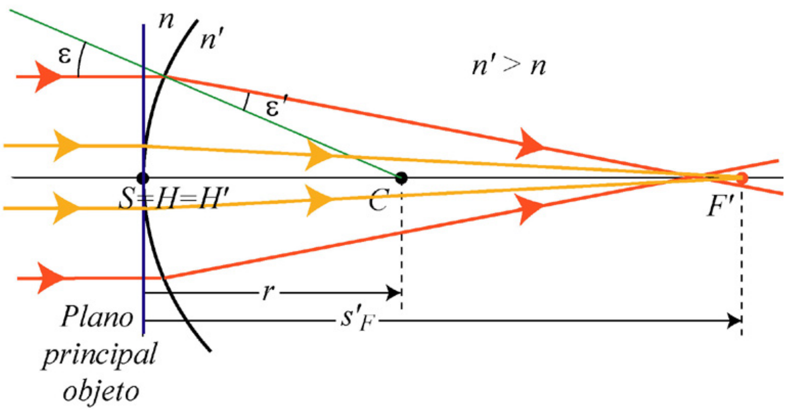
Obtenció de *H*

- Per trobar el pla principal objecte fem ús que quan la llum viatja de dreta a esquerra *H'* coincideix amb *H* en sentit contrari de la propagació de la llum.

Sistemes òptics centrats

Plans focals i principals

- Plans principals en un dioptre esfèric:



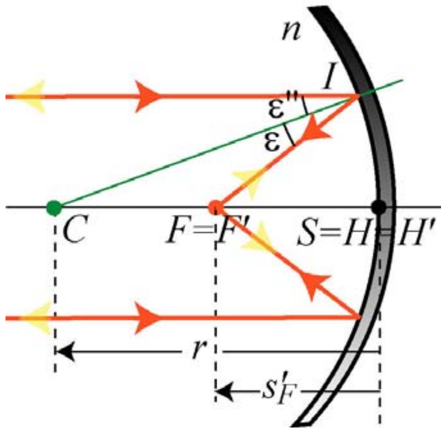
$$\left.\begin{aligned} &\beta' = \frac{z'}{z} = 1 \quad \Rightarrow \quad z = z' \\ &\frac{1}{n}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{n'}\left(\frac{1}{z'}+\frac{1}{r}\right) \end{aligned}\right\}$$

- Els punts principals *H* i *H'* coincideixen amb el vèrtex *S* de la superfície (*z* = *z'* = –*r*).
- Els conceptes de punt focal imatge i de *pla* principal imatge pertanyen a l'**òptica paraxial**.

Sistemes òptics centrats

Plans focals i principals

- Plans principals en un espill esfèric:



$$\left.\begin{array}{l} \beta' = \dfrac{z'}{z} = 1 \quad \Rightarrow \quad z = z' \\ \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{z'} = -\dfrac{2}{r} \end{array}\right\}$$

- Els punts principals *H* i *H'* coincideixen amb el vèrtex *S* de la superfície ($z = z' = -r$).
- Els conceptes de punt focal imatge i de *pla* principal imatge pertanyen a l'**òptica paraxial**.

Tema IV. Sistemes òptics centrats en aproximació paraxial

- Generalitats dels sistemes òptics centrats
- Plans focals i plans principals
- Traçat de raigs
- Distància focal i potència d'un sistema òptic
- Plans nodals
- Equacions de correspondència

Sistemes òptics centrats

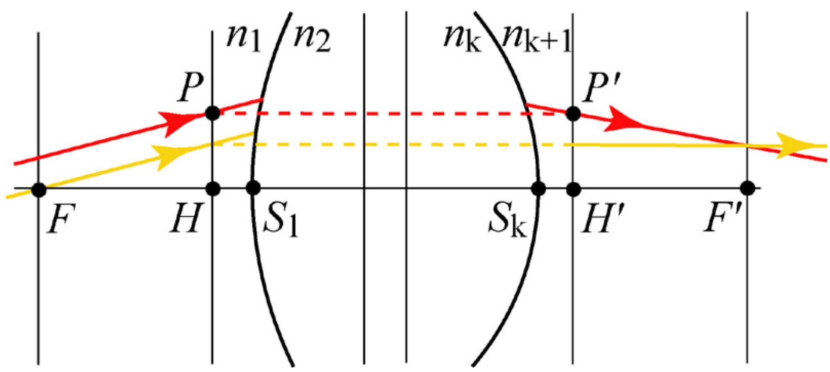
Traçat de raigs

- El coneixement de les posicions dels plans principals d'un sistema òptic és de gran utilitat per resoldre els problemes que es presenten en òptica paraxial:
  - Trajectòria d'un **raig paraxial**
  - Formació d'**imatges paraxials**. Punts extraaxials

Sistemes òptics centrats

Traçat de raigs

- Trajectòria d'un **raig paraxial (cas 1)**:

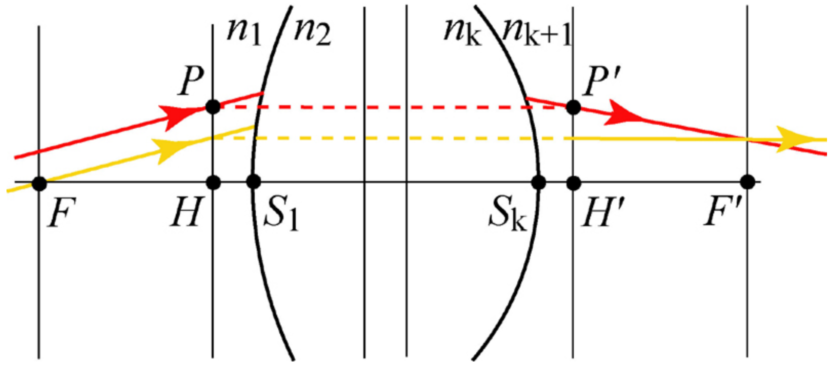


- Un **raig auxiliar** (raig groc) és aquell que la seua trajectòria és coneguda mitjançant els elements cardinals *H*, *H'*, *F i F'*.
- En aquest cas, el raig auxiliar passa per *F*; per tant, ha d'emergir paral·lel a l'eix del sistema.

Sistemes òptics centrats

Traçat de raigs

- Trajectòria d'un **raig paraxial (cas 1)**: :

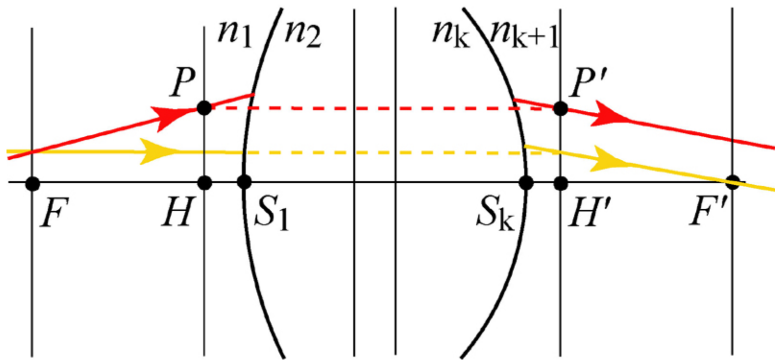


- El **raig problema** (raig roig):
  - és paral·lel al raig auxiliar ➡ tallen en el mateix punt del pla focal imatge.
  - passa per *P* en l'espai objecte ➡ passa per *P'* en l'espai imatge.

Sistemes òptics centrats

Traçat de raigs

- Trajectòria d'un **raig paraxial (cas 2)**:

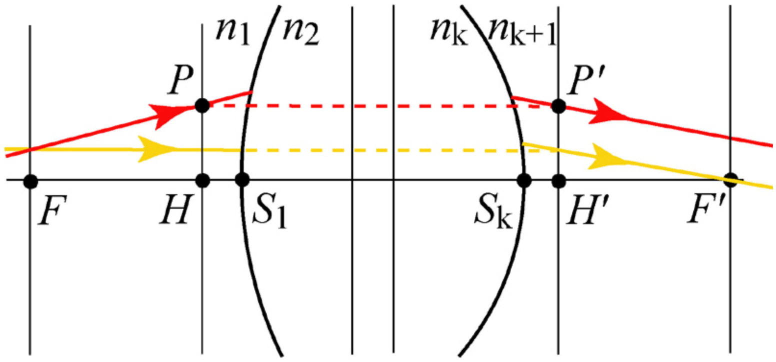


- En aquest cas, el raig auxiliar incideix en el sistema paral·lel a l'eix òptic; per tant, ha d'emergir passant pel punt focal imatge *F'*.

Sistemes òptics centrats

Traçat de raigs

- Trajectòria d'un **raig paraxial (cas 2)**:

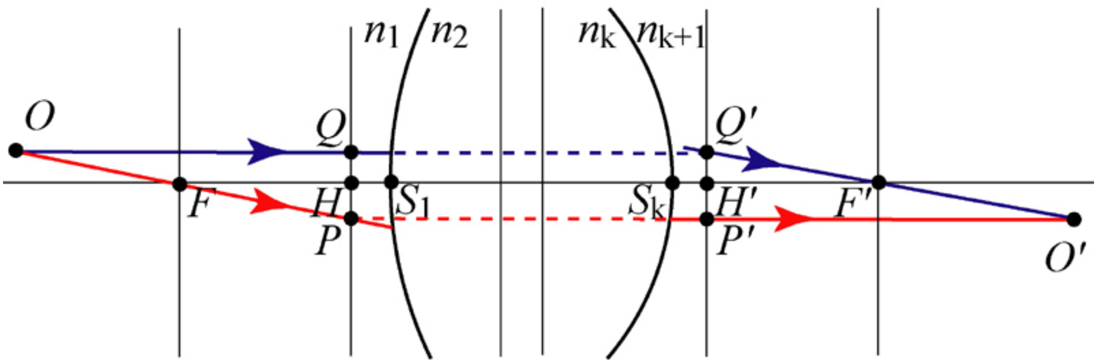


- El **raig problema** (raig roig):
  - talla en el mateix punt del pla focal objecte que el raig auxiliar ➡ ambdós raigs emergeixen paral·lels.
  - passa per *P* en l'espai objecte ➡ passa per *P'* en l'espai imatge.

Sistemes òptics centrats

Traçat de raigs

- <u>Formació d'imatges de **punts extraaxials**</u>:

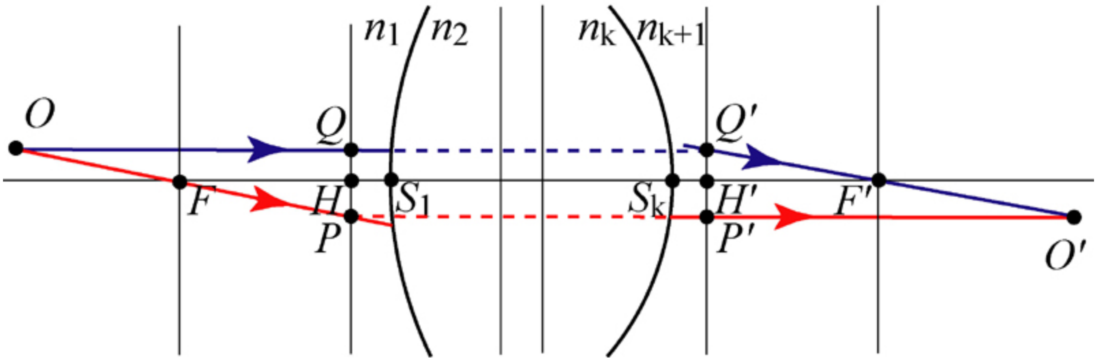


- Necessitem conèixer la trajectòria de (almenys) <u>dos raigs</u> que emergeixen de *O*.
- Utilitzem el raig auxiliar (roig) que, en l'espai objecte, passa per *F*, i el raig auxiliar (blau) que incideix paral·lel a l'eix òptic del sistema.

Sistemes òptics centrats

Traçat de raigs

- Formació d'imatges de **punts extraaxials**:

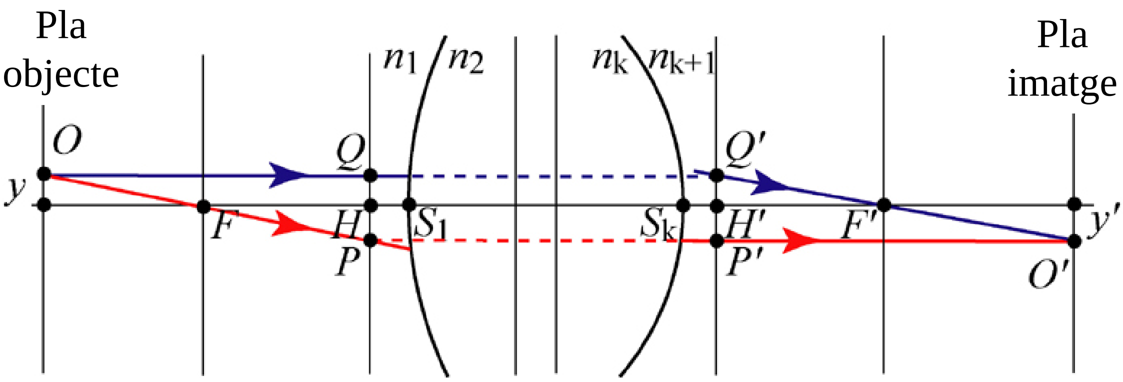


- El **raig auxiliar roig** passa en l'espai objecte per P i per F; aleshores en l'espai imatge passa per P' i es propaga paral·lel a l'eix òptic.
- El **raig auxiliar blau** passa per Q i es propaga paral·lel a l'eix òptic en l'espai objecte; aleshores en l'espai imatge passa per Q' i per F'.

Sistemes òptics centrats

Traçat de raigs

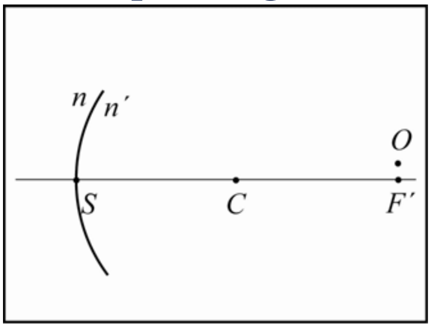
- Aquest estudi gràfic ens permet avaluar, donat un pla objecte:
  - la **posició** del pla **imatge**,
  - l'**augment lateral** β' del sistema òptic.



Sistemes òptics centrats

Traçat de raigs

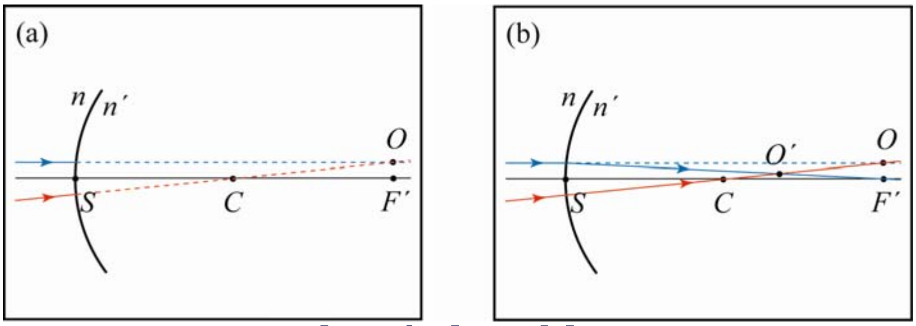
-*Problema*: Trobar gràficament la imatge del punt *O* que genera el dioptre següent. Tria una d'aquestes 3 opcions:



a) La imatge és real i directa

b) La imatge és real i invertida

c) La imatge és virtual i invertida



Solució al problema

http://roderic.uv.es/handle/10550/24274

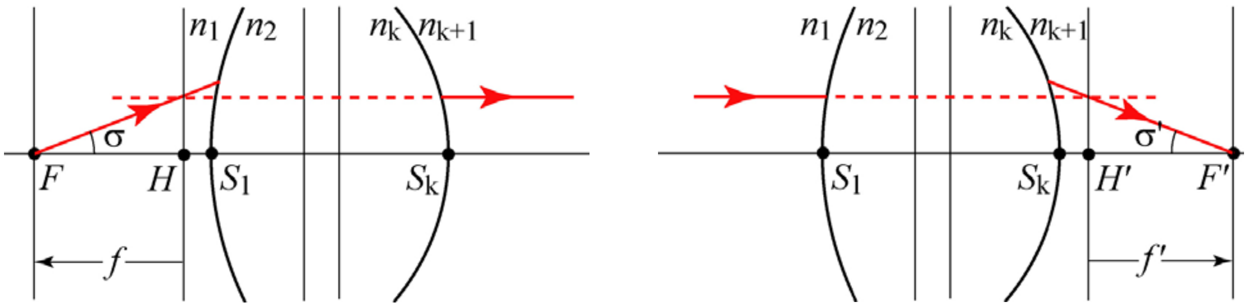
Tema IV. Sistemes òptics centrats en aproximació paraxial

- Generalitats dels sistemes òptics centrats
- Plans focals i plans principals
- Traçat de raigs
- Distància focal i potència d'un sistema òptic
- Plans nodals
- Equacions de correspondència

Sistemes òptics centrats

Distància focal i potència

- La **distància focal imatge** (*f'*) és la distància compresa entre el punt principal imatge *H'* i el punt focal imatge *F'*.
- La **distància focal objecte** (*f*) és la distància compresa entre el punt principal objecte *H* i el punt focal objecte *F*.



Sistemes òptics centrats

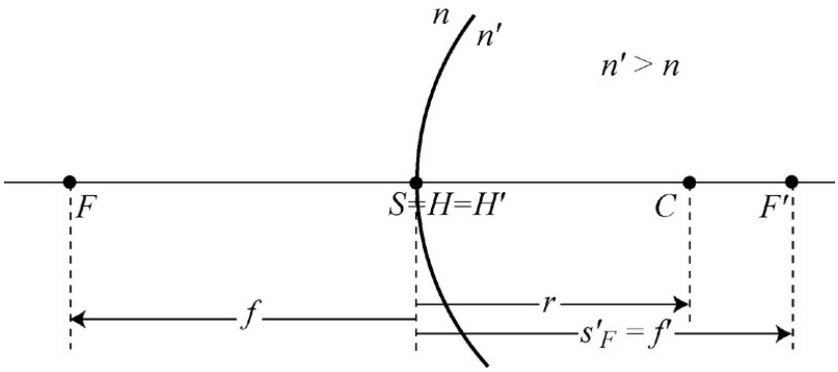
Distància focal i potència

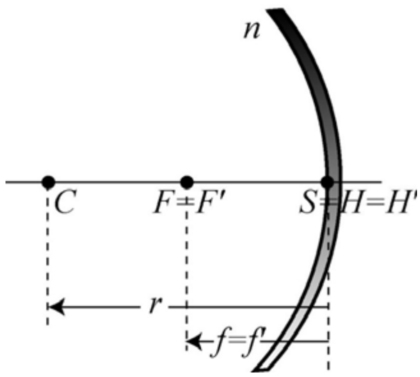
- La **distància focal imatge** (*f'*) és la distància compresa entre el punt principal imatge *H'* i el punt focal imatge *F'*.
- La **distància focal objecte** (*f*) és la distància compresa entre el punt principal objecte H i el punt focal objecte *F*.
- La **potència** (imatge) d'un sistema òptic és la inversa de la seua distància focal imatge: $\varphi' = 1/f'$
- En el S.I. la distància focal es mesura en metres (*m*) i la potència es mesura en **diòptries** ($D = m^{-1}$)

Sistemes òptics centrats

Distància focal i potència

- Exemples:





$$\left.\begin{aligned} f' &= \frac{n'}{n'-n}r \\ f &= \frac{n}{n-n'}r \end{aligned}\right\} \frac{f'}{f} = -\frac{n'}{n}$$

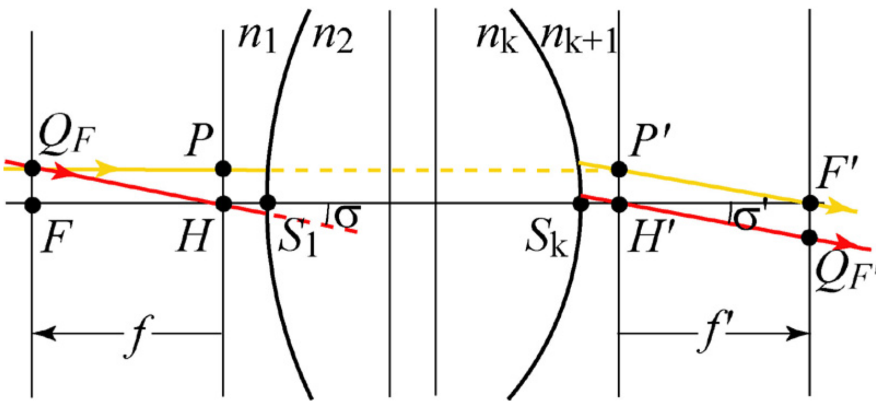
$$f = f' = \frac{r}{2}$$

Sistemes òptics centrats

Distància focal i potència

- Relació entre *f* i *f'*:

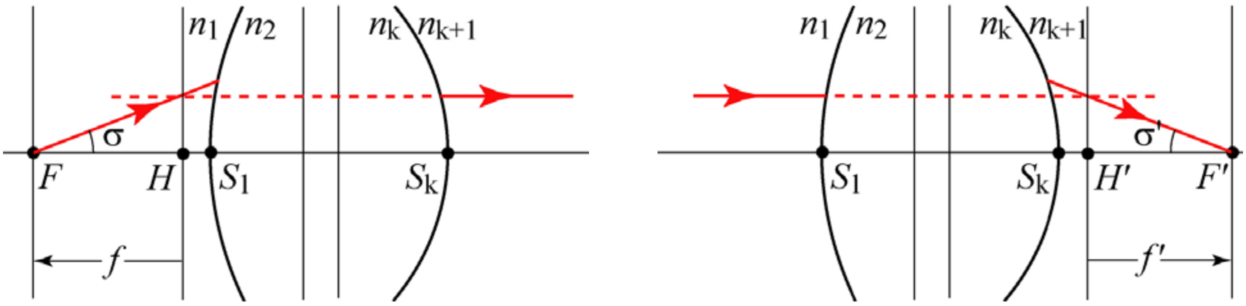
$$\overline{FQ_F} = \overline{HP} = \overline{H'P'} = \overline{Q_{F'}F'} = h$$



$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\sigma' &= \frac{h}{f'} \cong \sigma' \\ \operatorname{tg}\sigma &= \frac{h}{-f} \cong \sigma \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} \frac{\sigma'}{\sigma} &= -\frac{f}{f'} \\ \frac{\sigma'}{\sigma} &= \gamma' = \frac{1}{\beta'}\frac{n_1}{n_{k+1}} \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\beta'=1} \frac{f'}{f} = -\frac{n_{k+1}}{n_1}$$

Sistemes òptics centrats
Distància focal i potència

- Relació entre *f* i *f'*: **Casos particulars**.



- Sistema òptic en un mateix medi dielèctric:

$$n_{k+1} = n_1 \quad \Longrightarrow \quad f' = -f$$

$$\frac{f'}{f} = -\frac{n_{k+1}}{n_1}$$

- Sistemes catadiòptrics:

$$n_{k+1} = -n_1 \quad \Longrightarrow \quad f' = f$$

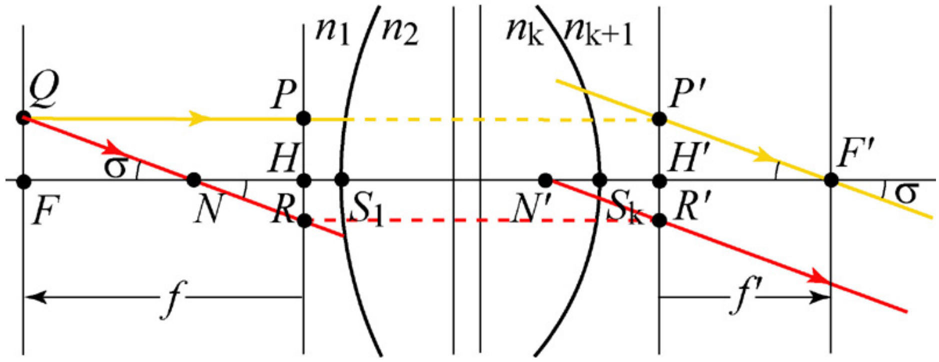
Tema IV. Sistemes òptics centrats en aproximació paraxial

- Generalitats dels sistemes òptics centrats
- Plans focals i plans principals
- Traçat de raigs
- Distància focal i potència d'un sistema òptic
- Plans nodals
- Equacions de correspondència

Sistemes òptics centrats

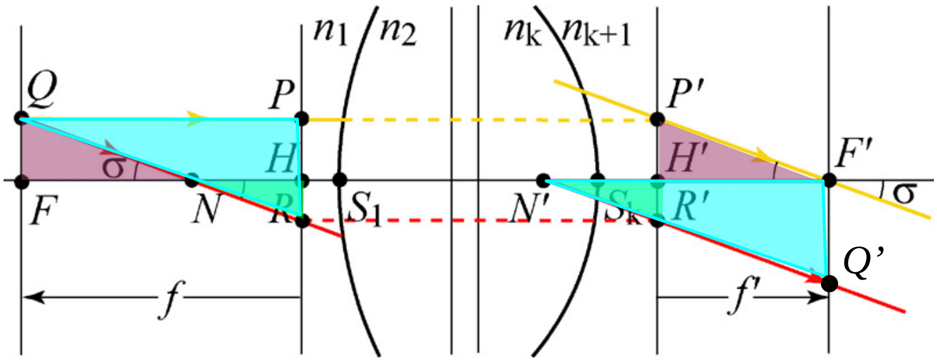
Plans nodals

- Els **plans nodals** són <u>plans conjugats</u> a través d'un sistema òptic caracteritzats per $\gamma' = 1$. Els **punts nodals**, N i N' són els punts en eix dels plans nodals.



Sistemes òptics centrats

Plans nodals



$$\frac{\overline{HR}}{\overline{HN}} = \frac{\overline{H'R'}}{\overline{H'N'}} \xrightarrow{\overline{HR}=\overline{H'R'}} \overline{HN} = \overline{H'N'}$$

$$\frac{\overline{QF}}{\overline{FN}} = \frac{\overline{P'H'}}{\overline{H'F'}} \xrightarrow{\overline{QF}=\overline{P'H'}} \overline{FN} = \overline{H'F'} = f'$$

$$\frac{\overline{PR}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{F'Q'}}{\overline{F'N'}} \xrightarrow{\overline{PR}=\overline{F'Q'}} \overline{F'N'} = \overline{PQ} = f$$

$$\overline{HN} = \overline{HF} + \overline{FN}$$

$$\Downarrow$$

$$\overline{HN} = f + f'$$

$$\overline{H'N'} = f + f'$$

Sistemes òptics centrats

Plans nodals

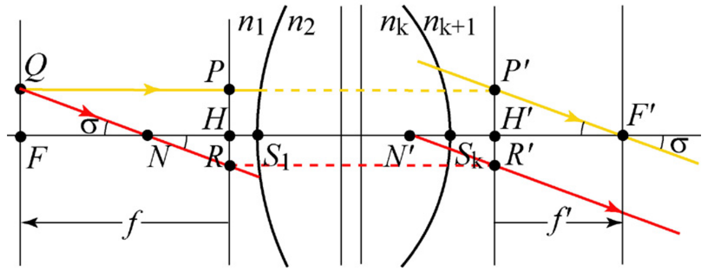
- En el cas particular que: $n_{k+1} = n_1$ $\longrightarrow$ $f' = -f$

$$\overline{HN} = f + f' = 0$$

$$\overline{H'N'} = f + f' = 0$$

- Els punts principals i els punts nodals coincideixen.
- *Nota*: Aquest fet es podria haver deduït de l'expressió:

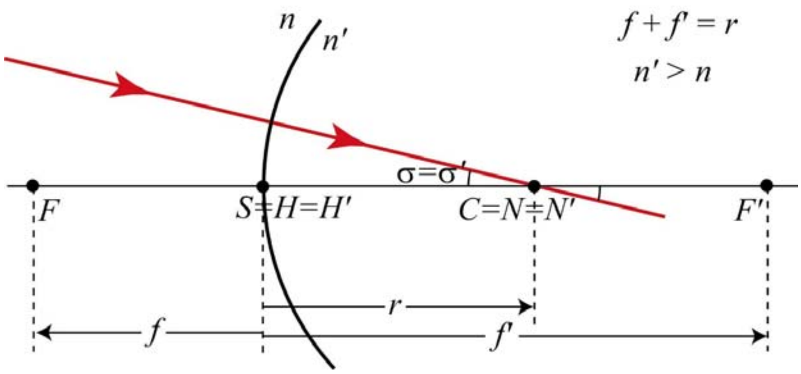
$$\beta'\gamma' = \frac{n_1}{n_{k+1}} = 1 \xrightarrow{\gamma'=1} \beta' = 1$$

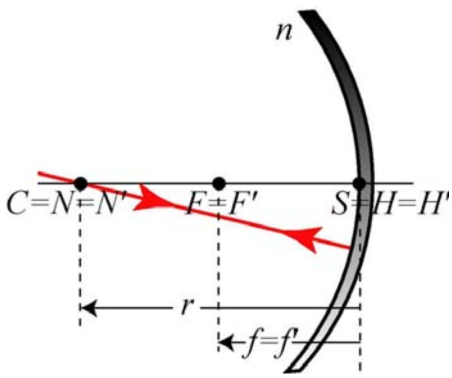


Sistemes òptics centrats

Plans nodals

- Exemples:





$$H \equiv H' \equiv S$$

$$N \equiv N' \equiv C$$

$$\overline{HN} = f + f' = r$$

- En aquest cas, la quantitat $f + f'$ no depèn dels índexs de refracció n i n'.

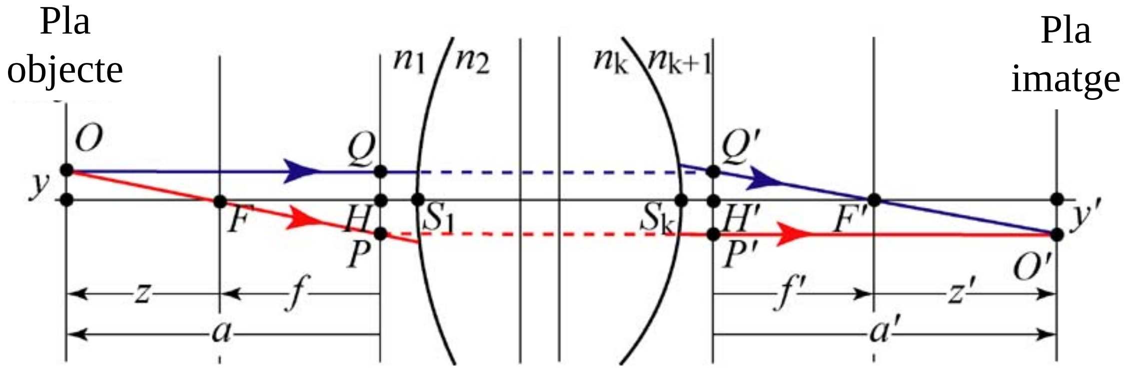
Tema IV. Sistemes òptics centrats en aproximació paraxial

- Generalitats dels sistemes òptics centrats
- Plans focals i plans principals
- Traçat de raigs
- Distància focal i potència d'un sistema òptic
- Plans nodals
- Equacions de correspondència

Sistemes òptics centrats

Equacions de correspondència

- Considerem un sistema òptic centrat, compost per una sèrie de dioptres i espills, de tal manera que
  - la primera superfície i l'última són dioptres (no és estrictament necessari),
  - coincideix el sentit de propagació de la llum incident i emergent



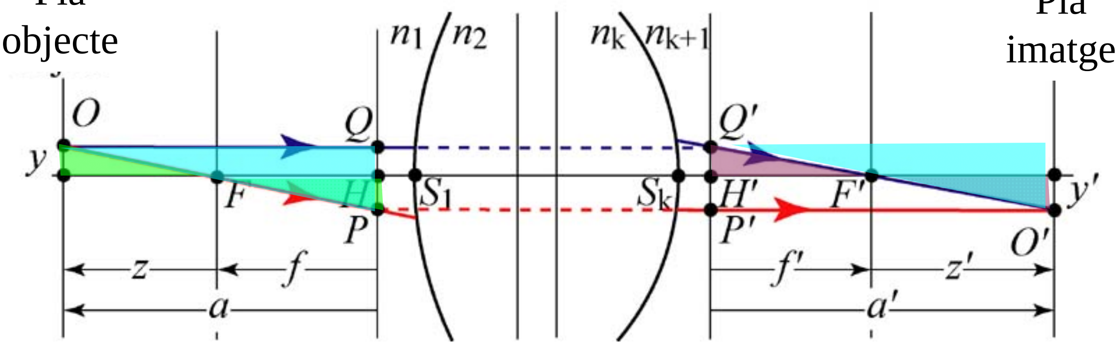
Sistemes òptics centrats

Equacions de correspondència

$$\frac{y}{-z}=\frac{-y'}{-f}=\frac{y-y'}{-a} \qquad \frac{-y'}{z'}=\frac{y}{f'}=\frac{y-y'}{a'}$$

$$\left(\frac{y}{-z}\right)\left(\frac{-y'}{z'}\right)=\left(\frac{-y'}{-f}\right)\left(\frac{y}{f'}\right) \Rightarrow zz'=ff'$$

Equació de correspondència de Newton



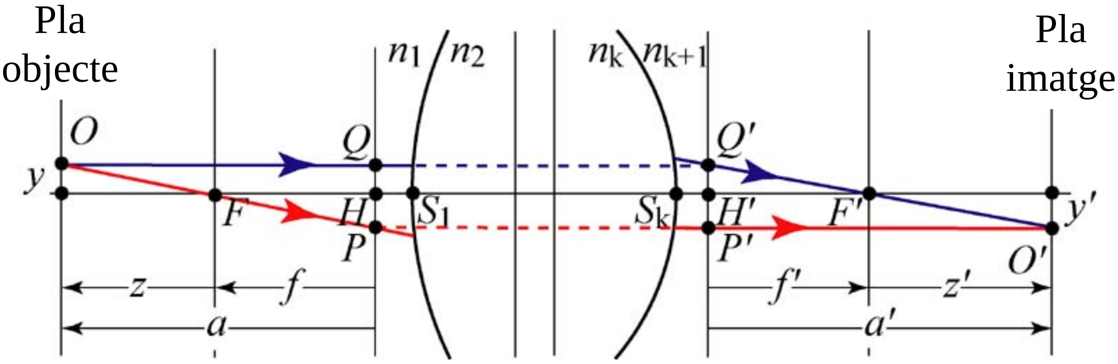
Sistemes òptics centrats

Equacions de correspondència

$$\frac{y}{-z}=\frac{-y'}{-f}=\frac{y-y'}{-a} \qquad \frac{-y'}{z'}=\frac{y}{f'}=\frac{y-y'}{a'}$$

$$1=\left(\frac{y}{-z}\right)\Big/\left(\frac{-y'}{-f}\right) \Rightarrow \beta'=-\frac{f}{z}$$

Augment lateral



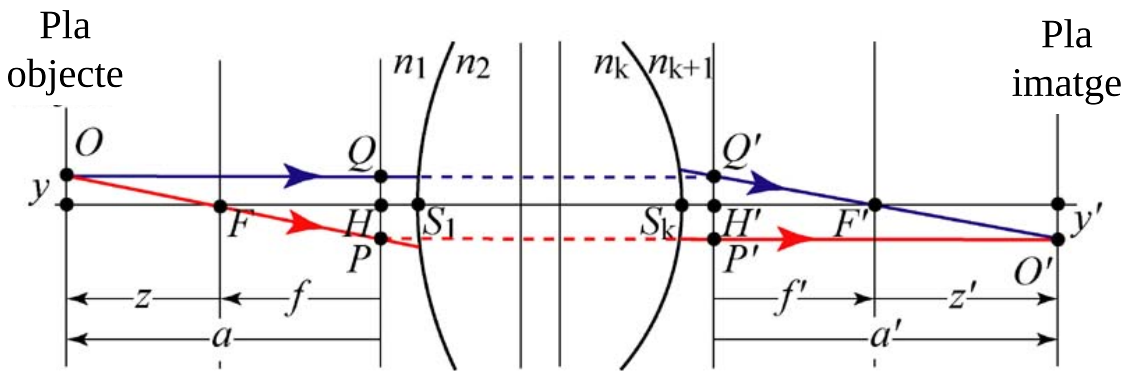
Sistemes òptics centrats

Equacions de correspondència

$$\frac{y}{-z}=\frac{-y'}{-f}=\frac{y-y'}{-a} \qquad \frac{-y'}{z'}=\frac{y}{f'}=\frac{y-y'}{a'}$$

$$1=\left(\frac{-y'}{z'}\right)\Big/\left(\frac{y}{f'}\right) \Rightarrow \beta'=-\frac{z'}{f'}$$

Augment lateral

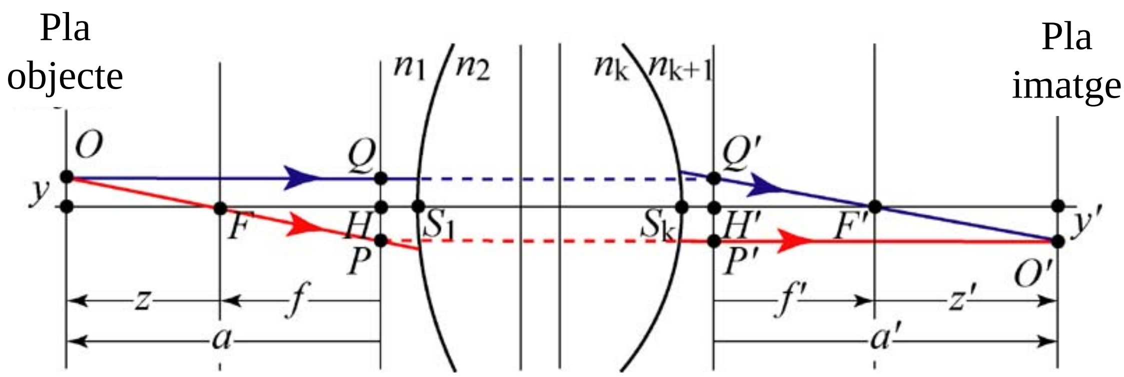


Sistemes òptics centrats

Equacions de correspondència

$$zz'=ff' \qquad \beta'=-\frac{f}{z} \qquad \beta'=-\frac{z'}{f'}$$

$$zz'=-f'^2 \qquad \beta'=\frac{f'}{z} \qquad \beta'=-\frac{z'}{f'}$$



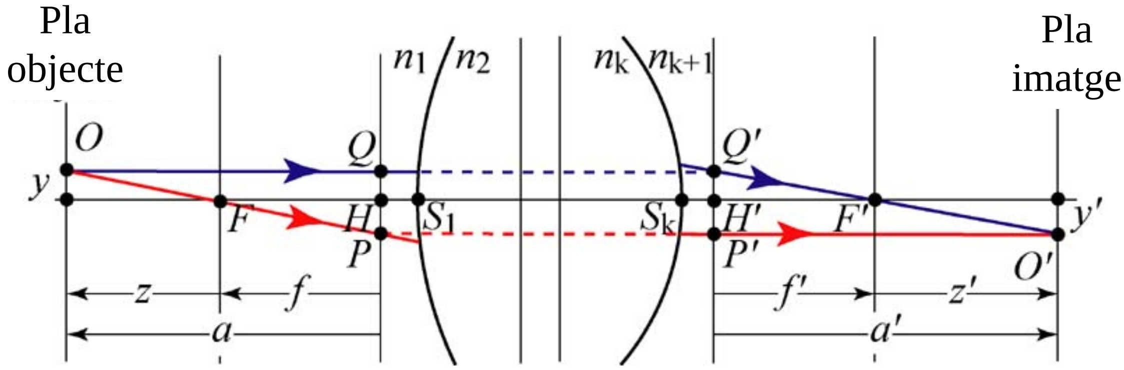
Sistemes òptics centrats

Equacions de correspondència

$$\frac{y}{-z}=\frac{-y'}{-f}=\frac{y-y'}{-a} \qquad \frac{-y'}{z'}=\frac{y}{f'}=\frac{y-y'}{a'}$$

Equació de correspondència de Gauss

$$(-f)\left(\frac{y-y'}{-a}\right)+(f')\left(\frac{y-y'}{a'}\right)=(-f)\left(\frac{-y'}{-f}\right)+(f')\left(\frac{y}{f'}\right) \Rightarrow \frac{f}{a}+\frac{f'}{a'}=1$$

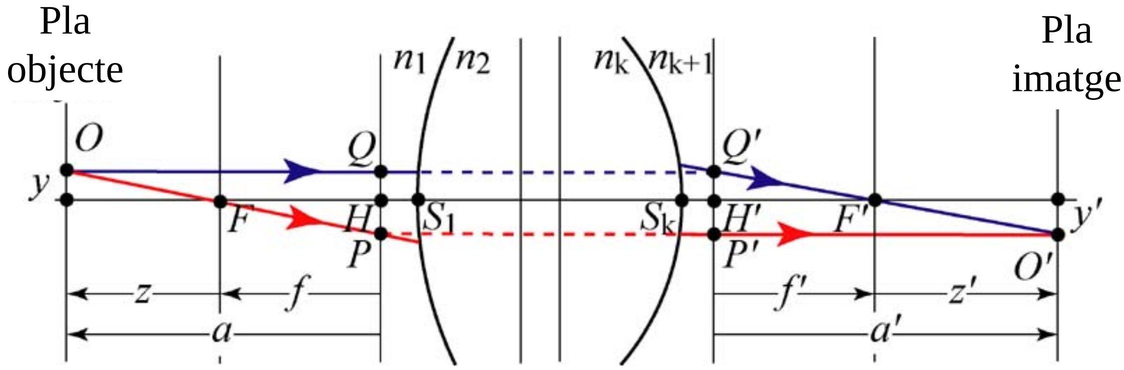


Sistemes òptics centrats

Equacions de correspondència

$$\frac{y}{-z}=\frac{-y'}{-f}=\frac{y-y'}{-a} \qquad \frac{-y'}{z'}=\frac{y}{f'}=\frac{y-y'}{a'}$$

$$\left(\frac{-y'}{-f}\right)\Big/\left(\frac{y}{f'}\right)=\left(\frac{y-y'}{-a}\right)\Big/\left(\frac{y-y'}{a'}\right) \Rightarrow \beta'=-\frac{f}{f'}\frac{a'}{a}$$



Sistemes òptics centrats

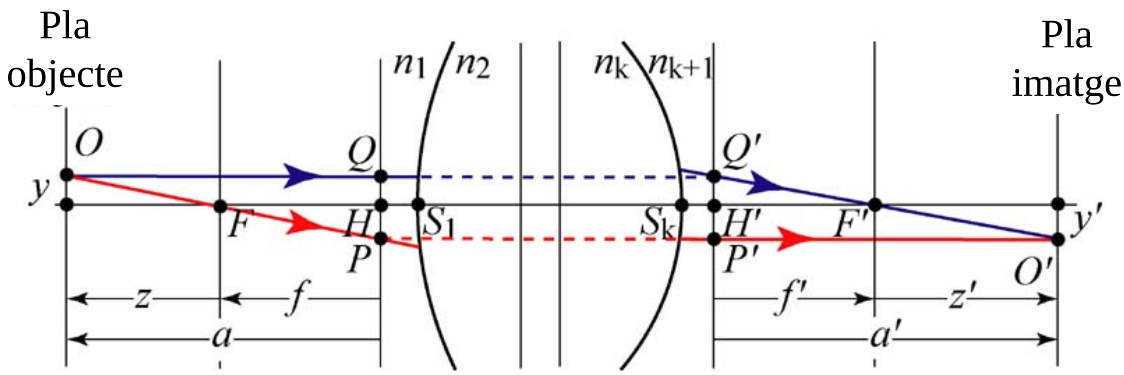
Equacions de correspondència

- Resum:

$$\frac{f}{a}+\frac{f'}{a'}=1 \qquad \beta'=-\frac{f}{f'}\frac{a'}{a}$$

- En el cas particular que $n_1 = n_{k+1}$ ($f = -f'$):

$$-\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}=\frac{1}{f'} \qquad \beta'=\frac{a'}{a}$$

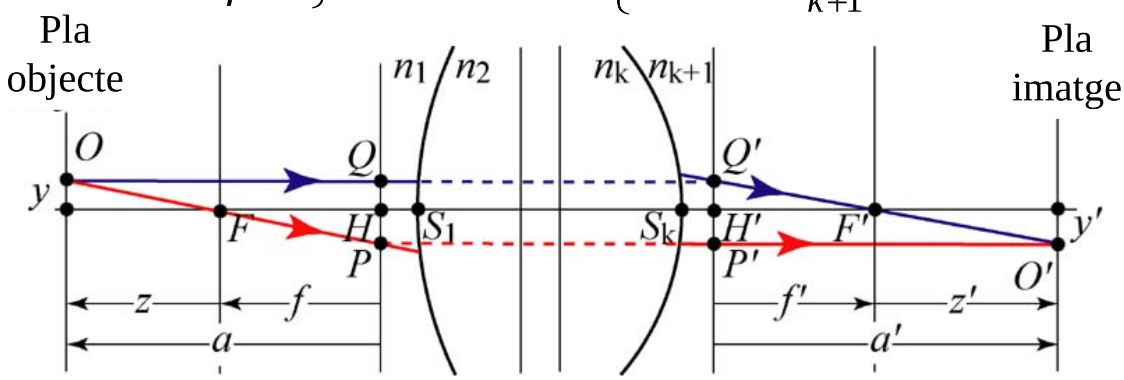


Sistemes òptics centrats

Equacions de correspondència

- Habitualment l'equació de correspondència de Gauss s'expressa en funció de la distància focal imatge *f'* i dels índexs de refracció dels medis extrems, n_1 i n_{k+1}

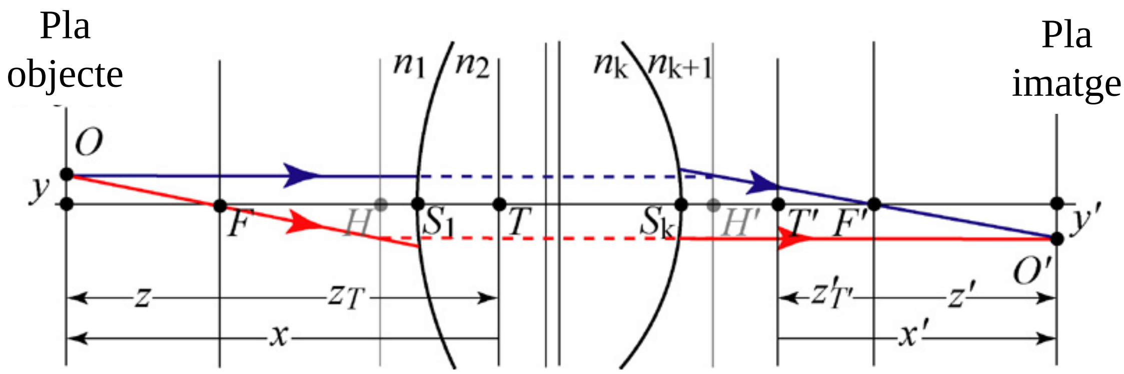
$$\left.\begin{aligned}&\frac{f}{a}+\frac{f'}{a'}=1\\ &\beta'=-\frac{f}{f'}\frac{a'}{a}\end{aligned}\right\} \xrightarrow{f=-\frac{n_1}{n_{k+1}}f'} \left\{\begin{aligned}&-\frac{n_1}{a}+\frac{n_{k+1}}{a'}=\frac{n_{k+1}}{f'}\\ &\beta'=\frac{n_1}{n_{k+1}}\frac{a'}{a}\end{aligned}\right.$$



Sistemes òptics centrats

Equacions de correspondència

- En el cas general, l'equació de correspondència (generalitzada) de Gauss pot utilitzar distàncies axials l'origen de les quals no siga H i H', sinó qualsevol parella de punts conjugats en eix (T i T').
  - Treballem amb les distàncies z_T i $z'_{T'}$ en comptes de f i f'.
  - Treballem amb les distàncies x i x' en comptes de a i a'.



Sistemes òptics centrats

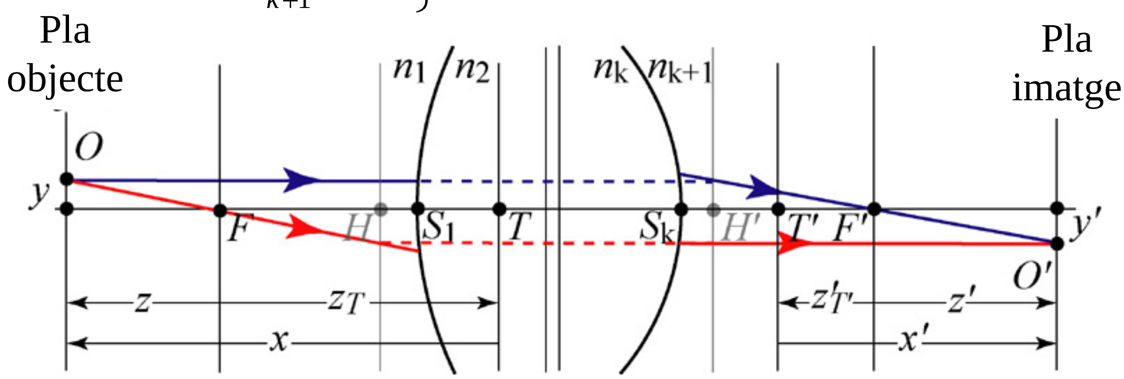
Equacions de correspondència

$$\left.\begin{aligned} z &= z_T + x \\ z' &= z'_{T'} + x' \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} zz' &= ff' \\ z_T z'_{T'} &= ff' \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{(-z_T)}{x} + \frac{(-z'_{T'})}{x'} = 1$$

$$\left.\begin{aligned} \beta'_T &= -\frac{f}{z_T} = -\frac{z'_{T'}}{f'} \\ f &= -\frac{n_1}{n_{k+1}} f' \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

Equació Generalitzada de Gauss

$$-\frac{1}{\beta'_T}\frac{n_1}{x} + \beta'_T \frac{n_{k+1}}{x'} = \frac{n_{k+1}}{f'}$$



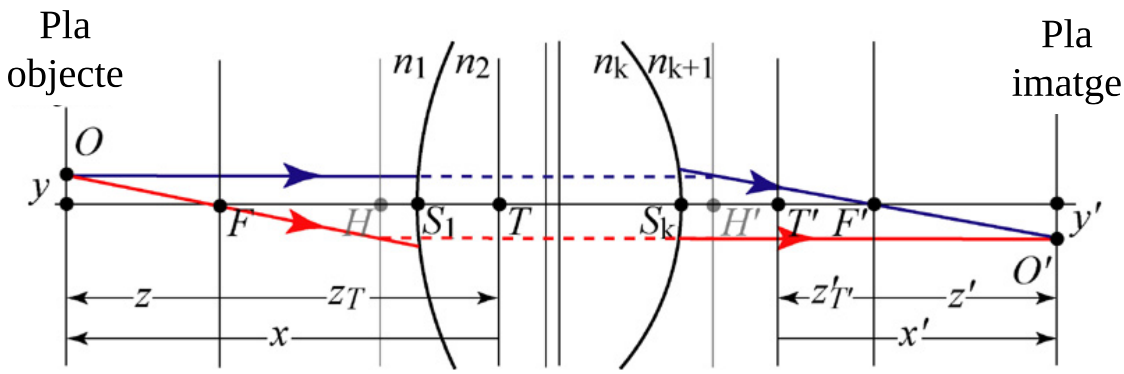
Sistemes òptics centrats

Equacions de correspondència

$$\left(\frac{x'}{n_{k+1}}\right)\left(-\frac{1}{\beta'_T}\frac{n_1}{x}+\beta'_T\frac{n_{k+1}}{x'}\right)=\left(\frac{x'}{n_{k+1}}\right)\left(\frac{n_{k+1}}{f'}\right) \Rightarrow -\frac{1}{\beta'_T}\frac{n_1}{n_{k+1}}\frac{x'}{x}+\beta'_T=\frac{x'}{f'}$$

$$\beta'=-\frac{z'}{f'}=-\frac{z'_{T'}+x'}{f'}=\beta'_{T'}-\frac{x'}{f'}$$

$$\beta'=\frac{1}{\beta'_T}\frac{n_1}{n_{k+1}}\frac{x'}{x}$$



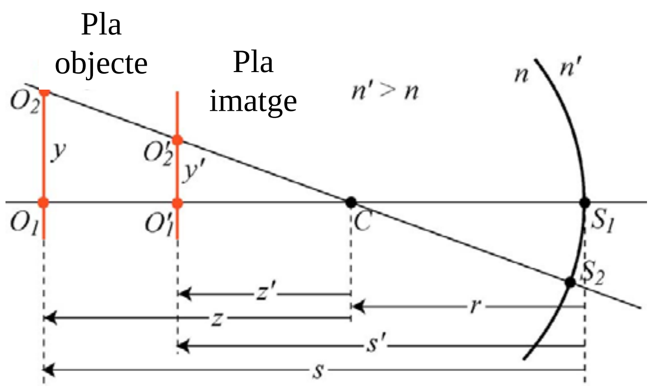
Sistemes òptics centrats

Equacions de correspondència

- Cas particular: **el dioptre esfèric**.
  - En aquest cas $S = H = H'$, si utilitzo l'equació de correspondència de Gauss, i sabent que $a = s$ i $a' = s'$

$$\left.\begin{aligned}-\frac{n}{a}+\frac{n'}{a'}&=\frac{n'}{f'}\\ f'&=\frac{n'}{n'-n}r\end{aligned}\right\} \Rightarrow n\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{r}\right)=n'\left(\frac{1}{s'}-\frac{1}{r}\right)$$

$$\beta'=\frac{n}{n'}\frac{a'}{a} \Rightarrow \beta'=\frac{n}{n'}\frac{s'}{s}$$



Sistemes òptics centrats

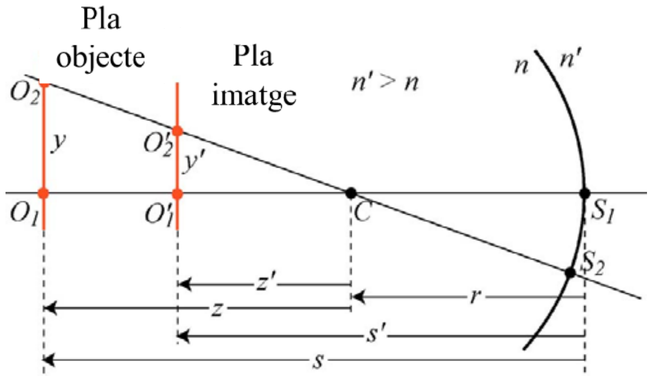
Equacions de correspondència

- Cas particular: **el dioptre esfèric**.

  • Si utilitzo l'equació de correspondència generalitzada de Gauss, on $C = T = T'$, i sabent que $x = z$ i $x' = z'$

$$\left.\begin{array}{c} -\dfrac{1}{\beta'_T}\dfrac{n}{x}+\beta'_T\dfrac{n'}{x'}=\dfrac{n'}{f'} \\[2ex] f'=\dfrac{n'}{n'-n}r \end{array}\right\} \xrightarrow{\beta'_T=n/n'} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{r}\right)=\frac{1}{n'}\left(\frac{1}{z'}+\frac{1}{r}\right)$$

$$\beta'=\frac{1}{\beta'_T}\frac{n}{n'}\frac{x'}{x} \quad \Rightarrow \quad \beta'=\frac{z'}{z}$$



Tema V. Acoblaments de sistemes

- Associació de dos sistemes centrats diòptrics
- Associació d'espills esfèrics centrats i sistemes catadiòptrics
- Sistemes afocals

Acoblaments de sistemes

Associació de sistemes diòptrics

- Considerem un sistema òptic centrat, compost per l'**acoblament de dos sistemes** diòptrics.

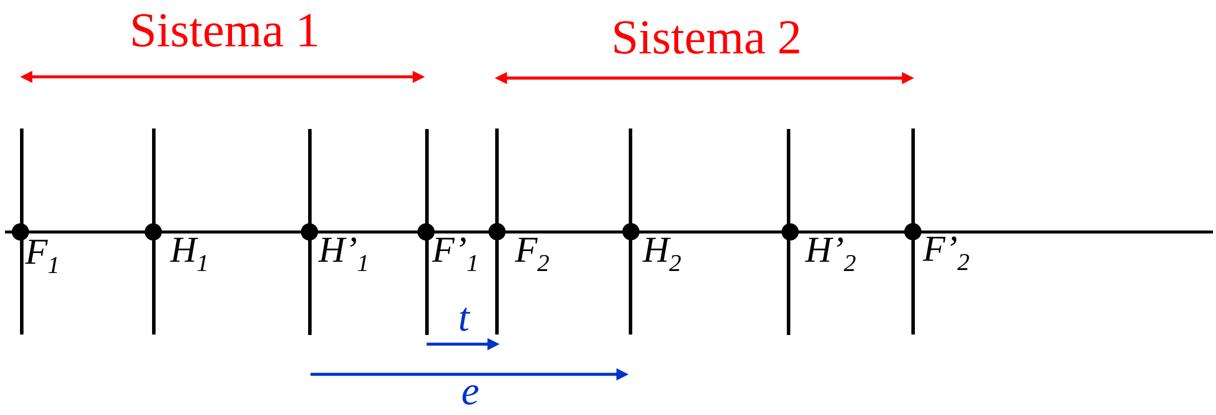
- En realitat és suficient amb exigir que coincideix el sentit de propagació de la llum incident i emergent en cadascun dels sistemes òptics acoblats.

$$\underbrace{\textbf{Sistema 1}\ (H_1, H'_1, F_1, F'_1) \qquad \textbf{Sistema 2}\ (H_2, H'_2, F_2, F'_2)}$$

Sistema acoblat (H, H', F, F')

Acoblaments de sistemes

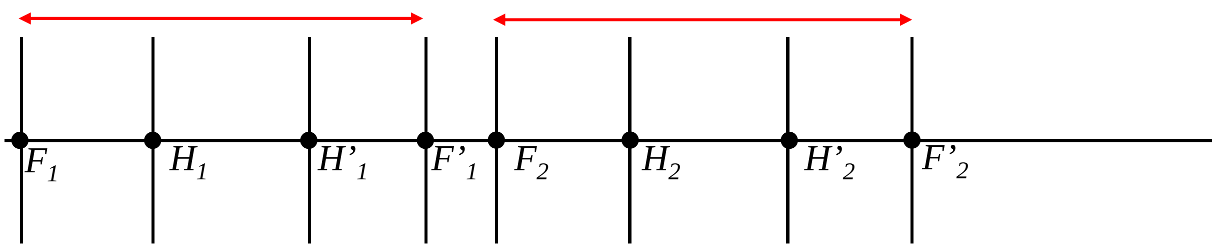
Associació de sistemes diòptrics



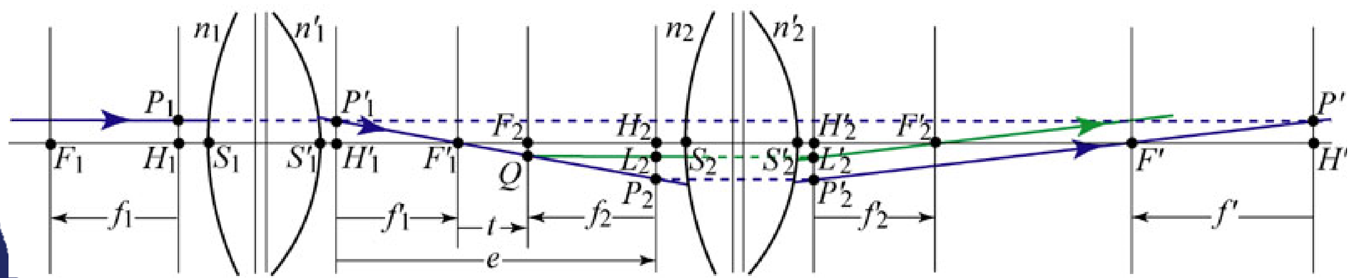
- Definim les següents magnituds:
  - **Interval òptic** $t = \overline{F'_1 F_2}$
  - **Distància d'acoblament** $e = \overline{H'_1 H_2}$

Acoblaments de sistemes

Associació de sistemes diòptrics

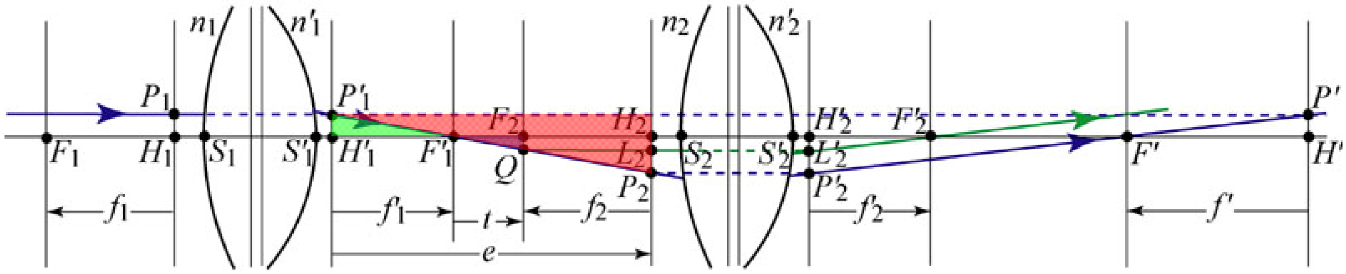


- Determinarem on està *H´* i *F´* amb l'ajuda d'un raig auxiliar (raig verd)



Acoblaments de sistemes
Associació de sistemes diòptrics

- Calculem la distància focal imatge (f') del sistema acoblat:

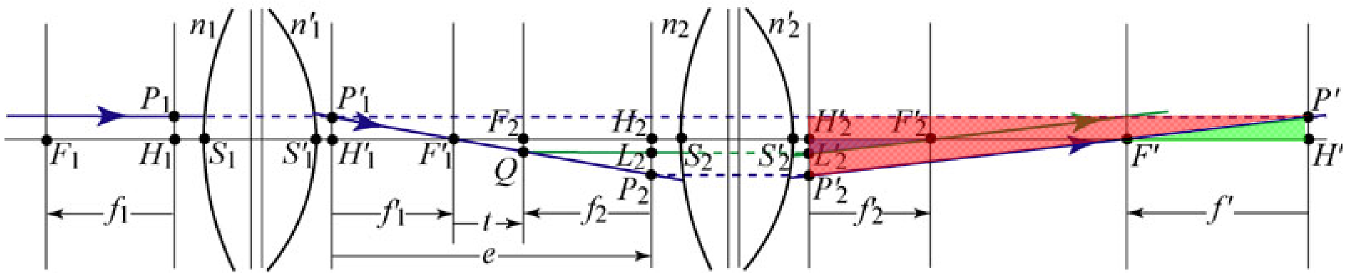


$$\begin{cases} h_1 = \overline{H_1P_1} = \overline{H'_1P'_1} = \overline{H'P'} \\ h_2 = \overline{H_2P_2} = \overline{H'_2P'_2} \\ q = \overline{H_2L_2} = \overline{H'_2L'_2} = \overline{F_2Q} \end{cases}$$

$$\frac{h_1}{f'_1} = \frac{-q}{t} = \frac{h_1 - h_2}{e}$$

Acoblaments de sistemes
Associació de sistemes diòptrics

- Calculem la distància focal imatge (f') del sistema acoblat:

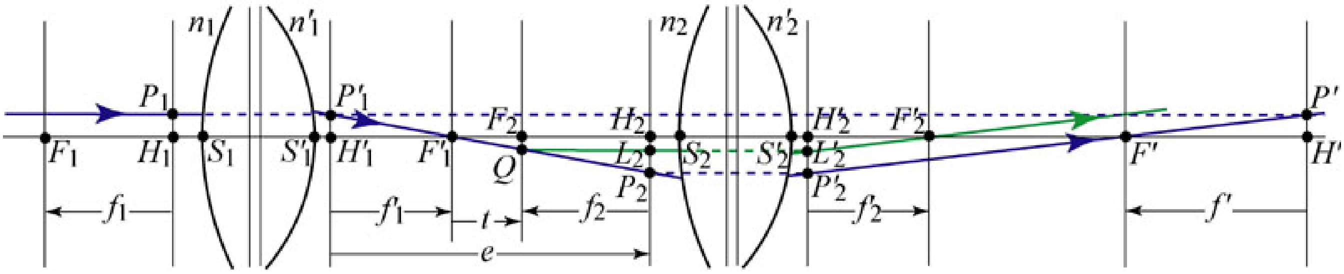


$$\begin{cases} h_1 = \overline{H_1P_1} = \overline{H'_1P'_1} = \overline{H'P'} \\ h_2 = \overline{H_2P_2} = \overline{H'_2P'_2} \\ q = \overline{H_2L_2} = \overline{H'_2L'_2} = \overline{F_2Q} \end{cases}$$

$$\frac{h_1}{-f'} = \frac{-q}{f'_2} = \frac{h_1 - h_2}{\overline{H'_2H'}}$$

Acoblaments de sistemes

Associació de sistemes diòptrics

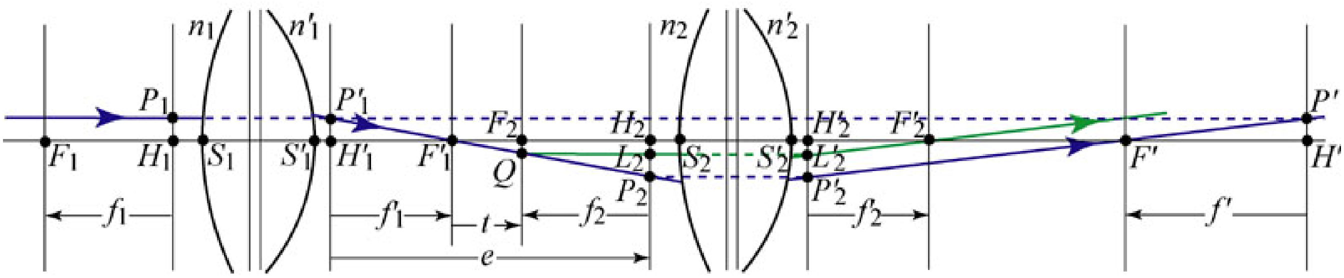


$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{h_1}{-q} = \dfrac{f'_1}{t} = \dfrac{-f'}{f'_2} \\[2ex] \dfrac{-q}{h_1 - h_2} = \dfrac{t}{e} = \dfrac{f'_2}{\overline{H'_2 H'}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f' = -\dfrac{f'_1 f'_2}{t} \\[2ex] \overline{H'_2 H'} = \dfrac{e}{t} f'_2 \end{array}\right.$$

$$e = \overline{H'_1 H_2} = f'_1 + t - f_2$$

Acoblaments de sistemes

Associació de sistemes diòptrics



- D'una manera similar, fent incidir un raig paral·lel a l'eix òptic en sentit contrari es dedueix que:

$$\left.\begin{array}{l} f' = -\dfrac{f'_1 f'_2}{t} \\[2ex] \overline{H'_2 H'} = \dfrac{e}{t} f'_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f = \dfrac{f_1 f_2}{t} \\[2ex] \overline{H_1 H} = \dfrac{e}{t} f_1 \end{array}\right.$$

Acoblaments de sistemes
Associació de sistemes diòptrics

- Algunes relacions útils:

$$\left.\begin{aligned} f' &= -\frac{f'_1 f'_2}{t} \\ f &= \frac{f_1 f_2}{t} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{f'}{f} = -\frac{f'_1}{f_1}\frac{f'_2}{f_2} = -\left(-\frac{n'_1}{n_1}\right)\left(-\frac{n'_2}{n_2}\right) = -\frac{n'_2}{n_1}$$

$$\left.\begin{aligned} \overline{H'_2 H'} &= \frac{e}{t} f'_2 \\ \overline{H_1 H} &= \frac{e}{t} f_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\overline{H'_2 H'}}{\overline{H_1 H}} = \frac{f'_2}{f_1}$$

$$\varphi' = \frac{1}{f'} = -\frac{-f'_1 + e + f_2}{f'_1 f'_2} = \frac{1}{f'_2} - \frac{e}{f'_1 f'_2} - \frac{f_2}{f'_2}\frac{1}{f'_1}$$

$$\varphi' = \frac{n_2}{n'_2}\varphi'_1 + \varphi'_2 - e\varphi'_1\varphi'_2$$

Acoblaments de sistemes
Associació de sistemes diòptrics

- Resum de les equacions d'acoblament de sistemes:

$$\boxed{\begin{aligned} \overline{H_1 H} &= \frac{e}{t} f_1 & \qquad f' &= -\frac{f'_1 f'_2}{t} \\ \overline{H'_2 H'} &= \frac{e}{t} f'_2 & \qquad \frac{f'}{f} &= -\frac{n'_2}{n_1} \end{aligned}}$$

- Altres expressions útils:

$$\varphi' = \frac{n_2}{n'_2}\varphi'_1 + \varphi'_2 - e\varphi'_1\varphi'_2$$

$$\frac{\overline{H'_2 H'}}{\overline{H_1 H}} = \frac{f'_2}{f_1} \qquad f = \frac{f_1 f_2}{t}$$

Tema V. Acoblaments de sistemes

- Associació de dos sistemes centrats diòptrics
- Associació d'espills esfèrics centrats i sistemes catadiòptrics
- Sistemes afocals

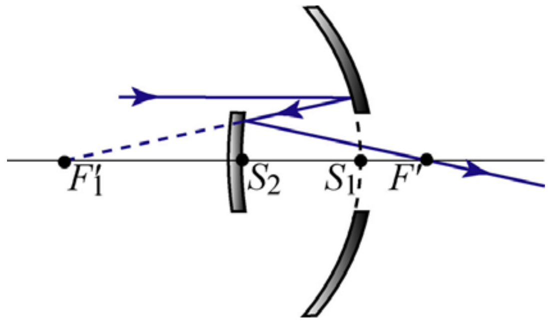
Acoblaments de sistemes

Sistemes catadiòptrics

- L'**associació de dos espills esfèrics** pot tractar-se analíticament com l'acoblament de dos dioptres, la distància d'acoblament dels quals $e = S_1S_2$ és negativa:

$$\left.\begin{aligned} n'_1 &\equiv -n_1 \\ n'_2 &\equiv -n_2 \end{aligned}\right\} \quad \text{com} \quad n'_1 = n_2 \Rightarrow n_1 = n'_2$$

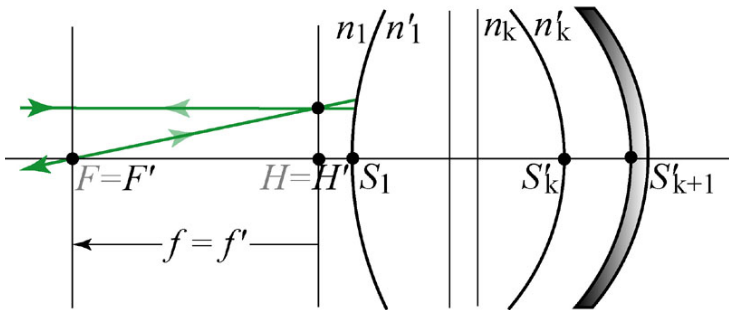
- Aquest sistema es comporta com un sistema dioptre amb índexs de refracció iguals en l'espai objecte i imatge.
- Un nombre parell ($2k$) d'espills pot tractar-se com l'acoblament de k sistemes diòptrics, que també és diòptric.

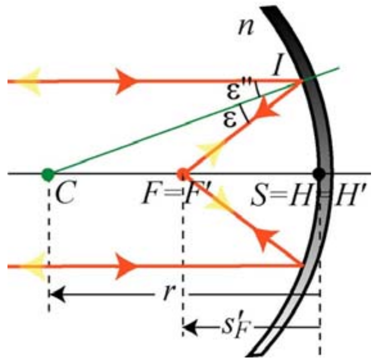


Acoblaments de sistemes

Sistemes catadiòptrics

- Un **nombre imparell** ($2k + 1$) **d'espills** pot tractar-se com l'acoblament de k sistemes diòptrics i un espill (l'última superfície), que és un sistema catadiòptric.
- Un sistema catadiòptric es comporta de manera idèntica, en el que concerneix a la posició i grandària de les imatges, encara que no en la seua condició de realitat o virtualitat, a un únic espill, que anomenem **espill equivalent**.

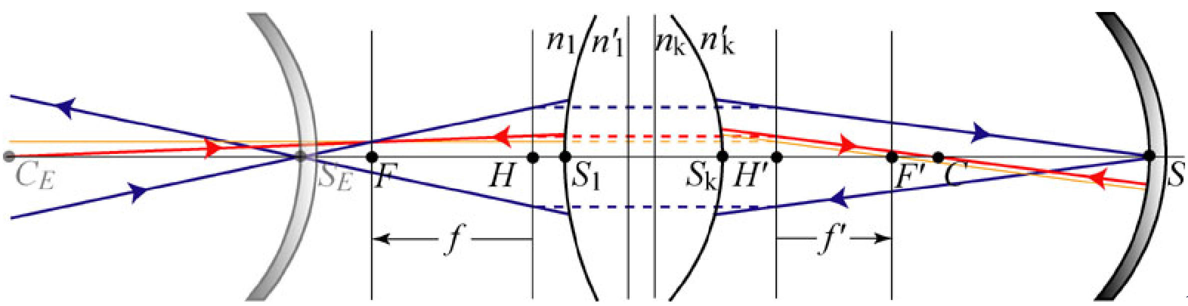




Acoblaments de sistemes

Sistemes catadiòptrics

- Encara que, per avaluar la posició i el radi de l'espill equivalent és suficient amb trobar H=H' i F=F', se sol fer ús dels següents fets:
  - El centre de curvatura de l'espill (C) i el de l'espill equivalent (C_E) són conjugats a través del sistema diòptric.
  - El vèrtex de la superfície de l'espill (S) i el de l'espill equivalent (S_E) són conjugats a través del sistema diòptric.



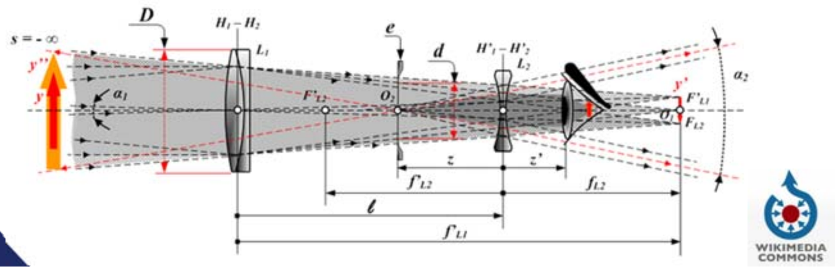
Tema V. Acoblaments de sistemes

- Associació de dos sistemes centrats diòptrics
- Associació d'espills esfèrics centrats i sistemes catadiòptrics
- Sistemes afocals

Acoblaments de sistemes

Sistemes afocals

- Els **sistemes afocals** o **telescòpics** són aquells que tenen els seus focus objecte i imatge en l'infinit.
- Característiques:
  - Tot raig que incideix paral·lel a l'eix òptic, emergeix del sistema seguint una trajectòria rectilínia també paral·lela a l'eix òptic.
  - Dos raigs que incideixen paral·lels, amb qualsevol angle d'obliqüitat, emergeixen del sistema seguint trajectòries paral·leles.



Telescopi galileà

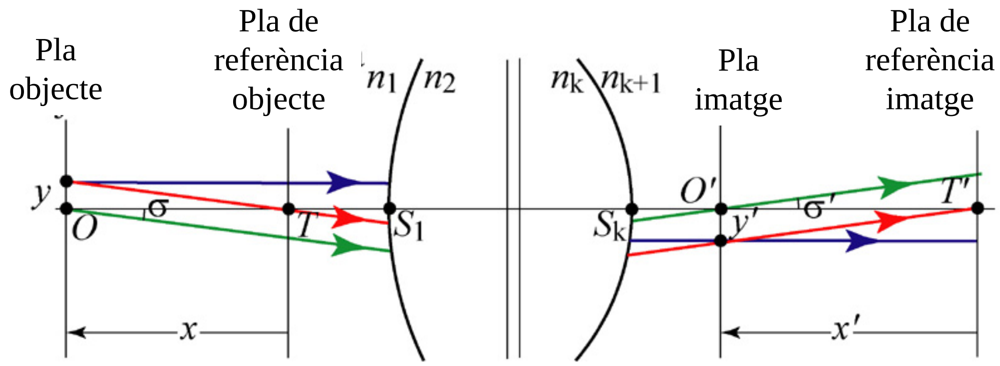
Acoblaments de sistemes

Sistemes afocals

- Conseqüències:

  - L’augment lateral β’ = *y*’/*y* no depèn de la posició del pla objecte.

  - L’augment angular γ’ = σ’/σ tampoc depèn de la posició del pla objecte.



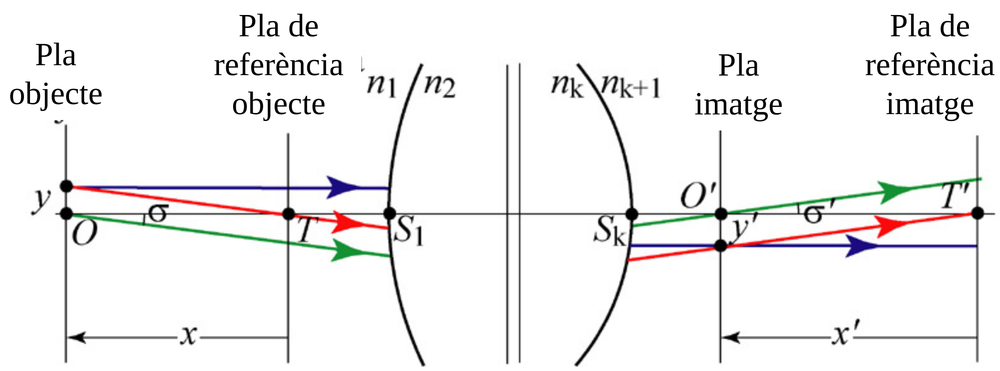
Acoblaments de sistemes

Sistemes afocals

- Conseqüències:

  - Si β’ = 1, totes les parelles de plans conjugats es poden denominar plans principals objecte i imatge.

  - En aquest cas, tant *f* com *f’* tenen un valor que tendeix a infinit.

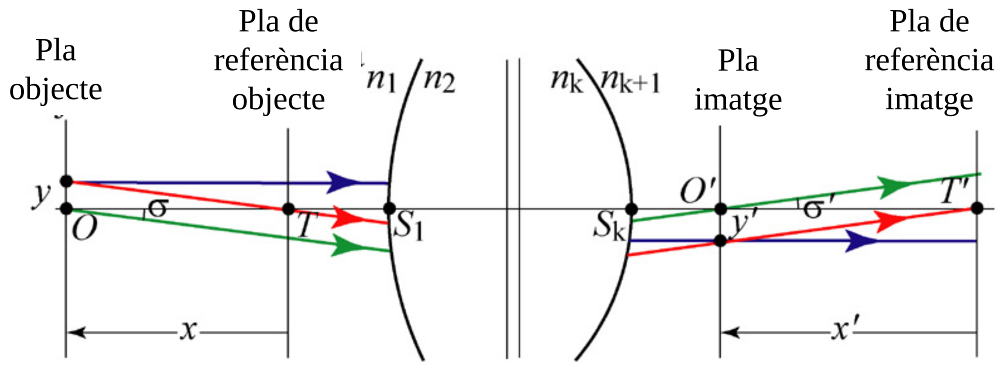


Acoblaments de sistemes
Sistemes afocals

- Conseqüències:

  • Si β' ≠ 1, no existeixen els plans principals (idealment es considera que es troben en l'infinit).

  • En aquest cas, no es poden definir les variables axials *f* i *f'* (encara que se'ls atribueix un valor que tendeix a infinit).

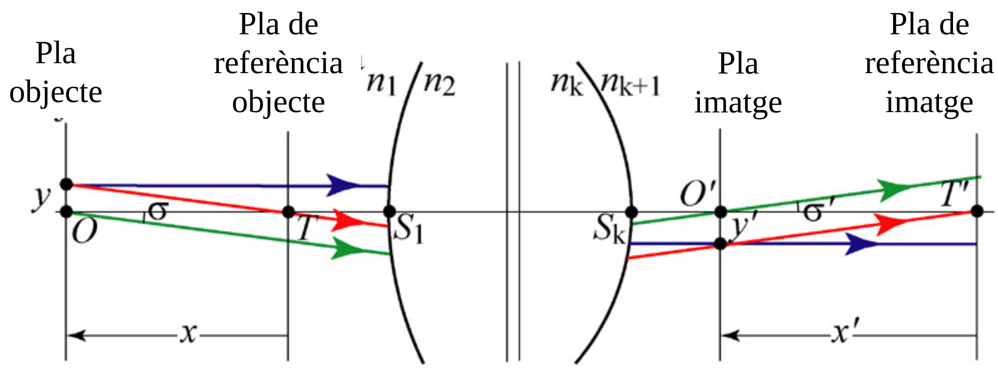


Acoblaments de sistemes
Sistemes afocals

- Conseqüències:

  • No es pot fer ús de les equacions de correspondència de Gauss i Newton.

  • Però podem utilitzar l'equació de correspondència generalitzada de Gauss.



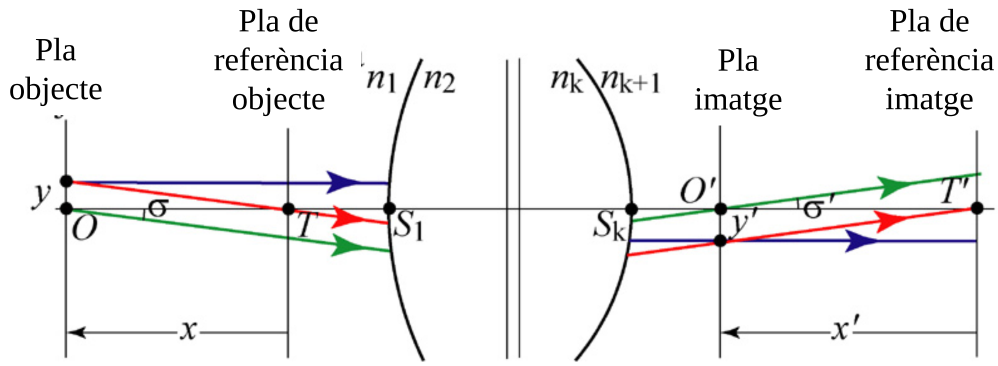
Acoblaments de sistemes

Sistemes afocals

- Equació de correspondència per a sistema afocals:

$$\left.\begin{array}{c} -\dfrac{1}{\beta'_T}\dfrac{n_1}{x}+\beta'_T\dfrac{n_{k+1}}{x'}=\dfrac{n_{k+1}}{f'} \\ \beta'_T=\beta' \end{array}\right\} \xrightarrow{f'\to\infty} x'=\beta'^2\dfrac{n_{k+1}}{n_1}x$$

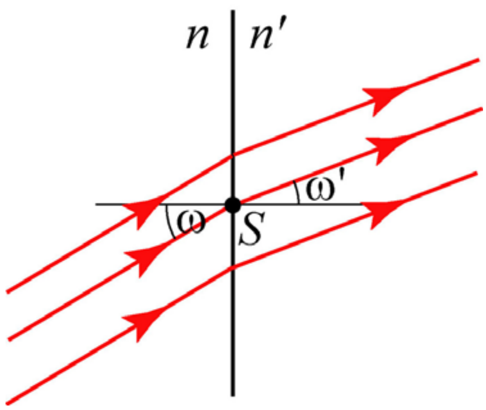
- Exemples: el dioptre (i espill) pla i la làmina de cares planoparal·leles.



Acoblaments de sistemes

Sistemes afocals

- Cas particular: **El dioptre pla**.



$$\beta'=1 \xrightarrow{\beta'\gamma'=n/n'} \gamma'=\frac{n}{n'}$$

$$\gamma'=\frac{\omega'}{\omega} \xrightarrow{n\omega=n'\omega'} \gamma'=\frac{n}{n'}$$

- Cal tenir una mica de cura, ja que en la definició de $\gamma' = \sigma'/\sigma$, es tenen en compte raigs que emergeixen dels punts objecte i imatge en eix, és a dir $\sigma' = \sigma = 0$.

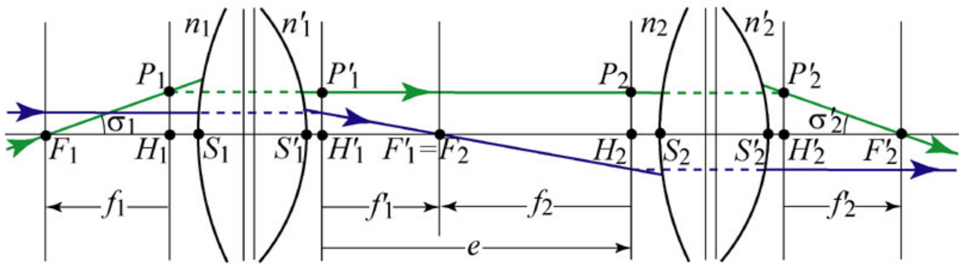
- Ara γ' té un significat distint: relaciona grandàries angulars de l'objecte i imatge.

Acoblaments de sistemes

Sistemes afocals

- Associació afocal de sistemes òptics:
  - Es compleix quan $F'_1 = F_2$, és a dir, quan $t = 0$. En aquest cas F i F' de l'acoblament estan en l'infinit. Els punts F_1 i F'_2 són conjugats a través del sistema.
  - Quan e ≠ 0 es compleix que β' ≠ 1. En aquest cas H i H' de l'acoblament estan idealment en l'infinit

$$f' = -\frac{f'_1 f'_2}{t} \xrightarrow{t\to 0} \infty \qquad \overline{H_1H} = \frac{e}{t} f_1 \xrightarrow{t\to 0} \infty$$

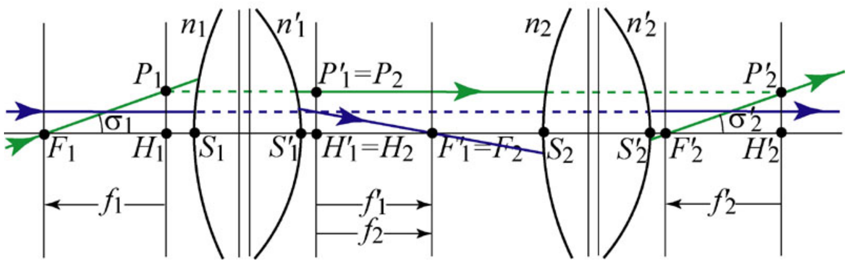


Acoblaments de sistemes

Sistemes afocals

- Associació afocal de sistemes òptics:
  - Quan e = 0 es compleix que β' = 1. En aquest cas qualsevol parella de punts conjugats en eix poden actuar com H i H'.
  - Com tot sistema afocal, els punts F_1 i F'_2 són conjugats a través del sistema. A més, quan e = 0, els punts H_1 i H'_2 també són conjugats a través del sistema.

$$\overline{H_1H} = \frac{e}{t} f_1 \xrightarrow{t\to 0, e\to 0} ??$$

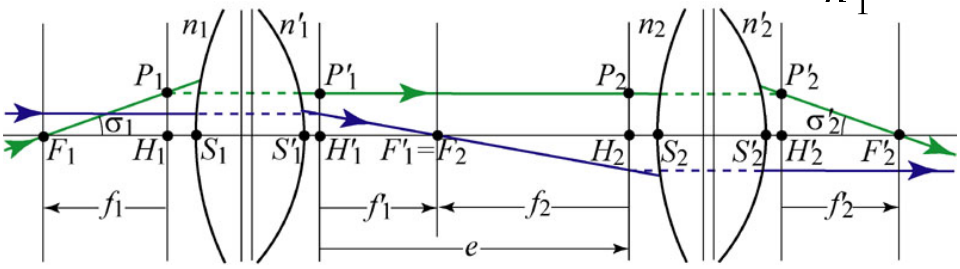


Acoblaments de sistemes

Sistemes afocals

- Associació afocal de sistemes òptics:
  - Avaluem el β’ per als plans conjugats caracteritzats per F_1 i F'_2.

$$\left.\begin{aligned} -\sigma_1 &= \frac{\overline{H_1P_1}}{-f_1} \\ \sigma'_2 &= \frac{\overline{H'_2\,P'_2}}{f'_2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} \gamma' &= \frac{\sigma'_2}{\sigma_1} = \frac{f_1}{f'_2} \\ \beta' &= \frac{n_1}{n'_2}\frac{1}{\gamma'} = \frac{n_1}{n'_2}\frac{f'_2}{f_1} = \frac{n_1}{n'_2}\frac{-\frac{n'_2}{n_2}f_2}{-\frac{n_1}{n'_1}f'_1} = \frac{f_2}{f'_1} \end{aligned}$$



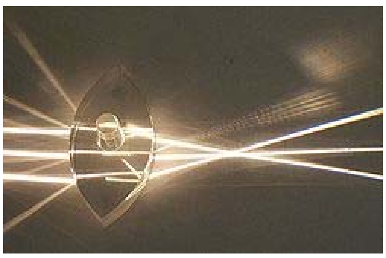
Tema VI. Sistemes de lents

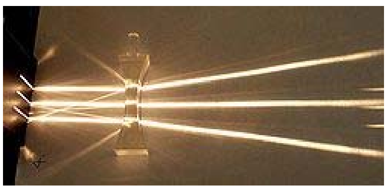
- Lents esfèriques
- Lents primes
- Lents cilíndriques
- Doblet de lents esfèriques
- Dispersió en lents i doblets: condició d'acromatisme

Sistemes de lents
Lents esfèriques

- Una **lent esfèrica** és un sistema òptic centrat compost per l'acoblament de dos dioptres esfèrics de radis de curvatura r_1 i r_2 .

- El **gruix** de la lent és la distància entre els vèrtexs de les dues superfícies, $d = S_1S_2$.



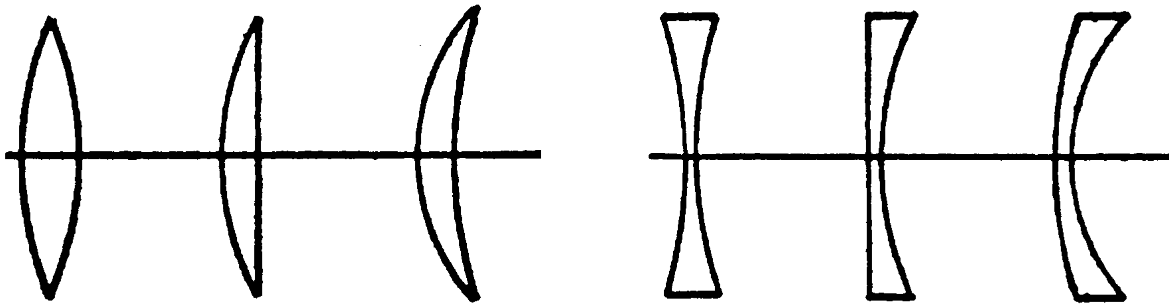


Sistemes de lents

Lents esfèriques

- **Tipus de lents esfèriques**:

Biconvexa — Menisc convex — Planocòncava

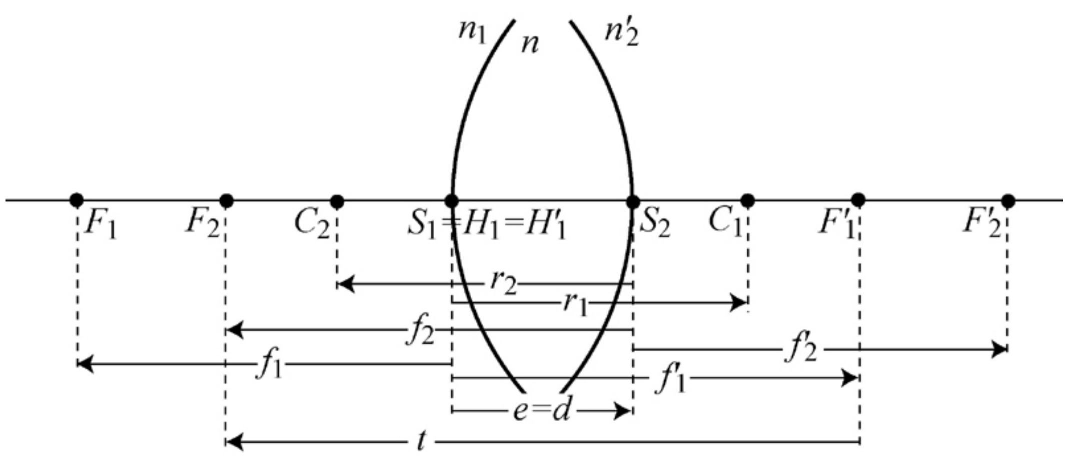


Planoconvexa — Bicòncava — Menisc còncau

Sistemes de lents

Lents esfèriques

- Les condicions de Maxwell (de sistema òptic perfecte) per a la lent esfèrica es compleixen si, dins de l'aproximació de Gauss, també les satisfà cadascun dels seus dos dioptres.



Sistemes de lents

Lents esfèriques

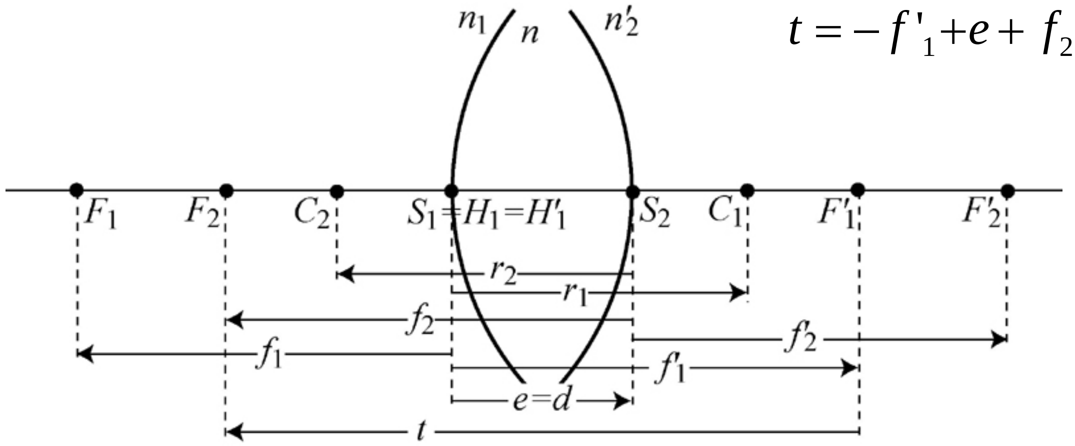
- Punts cardinals de la lent esfèrica:

$$\left.\begin{aligned} e = \overline{H'_1\, H'_2} = d \\ n'_1 = n_2 \equiv n \\ H_1 \equiv H'_1 \equiv S_1 \\ H_2 \equiv H'_2 \equiv S_2 \end{aligned}\right\}$$

$$f_1 = \frac{n_1}{n_1 - n} r_1 \qquad f'_1 = \frac{n}{n - n_1} r_1$$

$$f_2 = \frac{n}{n - n'_2} r_2 \qquad f'_2 = \frac{n'_2}{n'_2 - n} r_2$$

$$t = -f'_1 + e + f_2$$



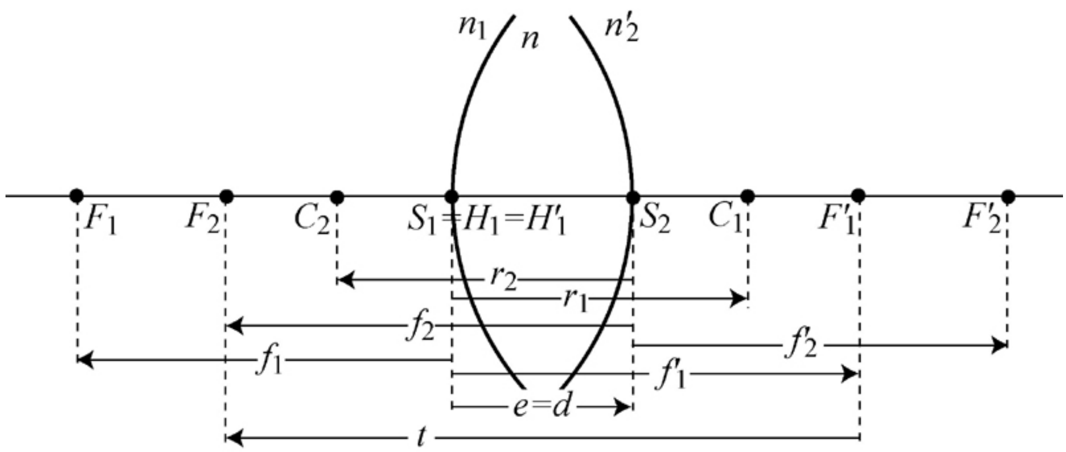
Sistemes de lents

Lents esfèriques

- Punts cardinals de la lent esfèrica:

$$\overline{H_1 H} = \frac{e}{t} f_1 \qquad \overline{H'_2\, H'} = \frac{e}{t} f'_2$$

$$f' = -\frac{f'_1\, f'_2}{t} \qquad f = -\frac{n_1}{n'_2} f'$$



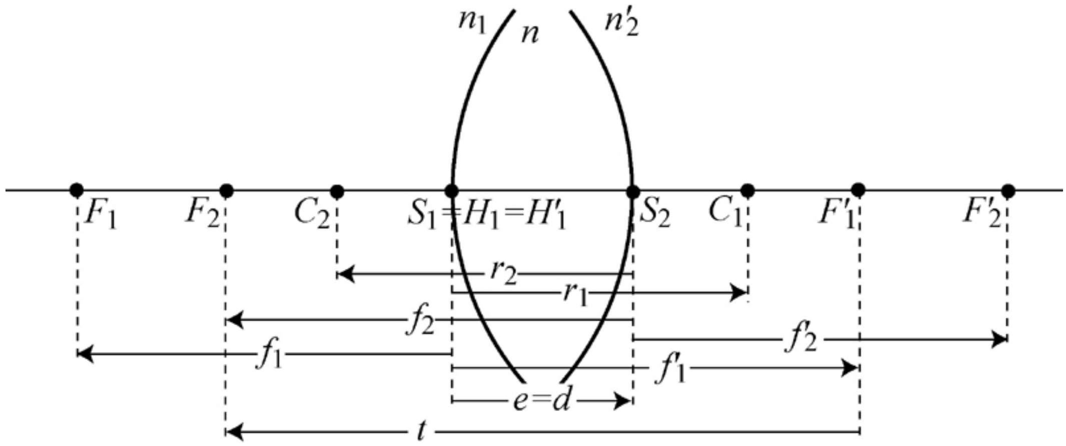
Sistemes de lents
Lents esfèriques

- Punts cardinals de la lent esfèrica immersa en aire ($n_1 = n'_2 = 1$):

$$\varphi' = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) + \frac{(n-1)^2}{n}\frac{d}{r_1 r_2}$$

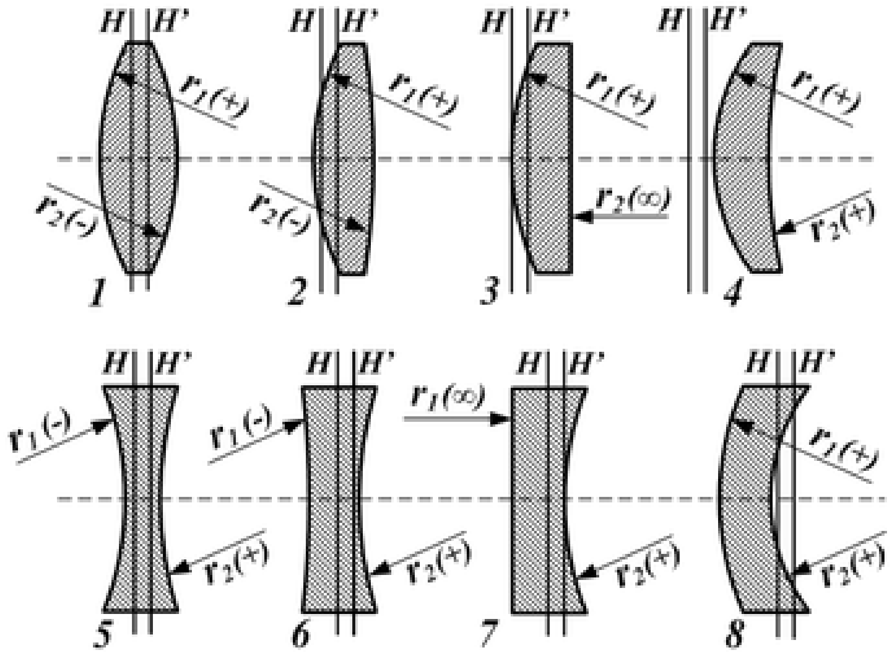
$$\overline{H_1 H} = \frac{d}{n(r_1 - r_2) - (n-1)d} r_1$$

$$\overline{H'_2 H'} = \frac{d}{n(r_1 - r_2) - (n-1)d} r_2$$



Sistemes de lents
Lents esfèriques

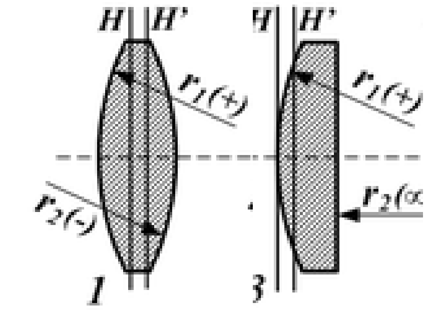
- Punts cardinals de la lent esfèrica immersa en aire ($n_1 = n'_2 = 1$):



Sistemes de lents

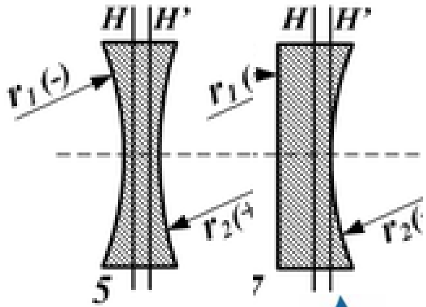
Lents esfèriques

- Punts cardinals de la lent esfèrica immersa en aire. Casos particulars:



• Lent equicòncava o equiconvexa ($r_1 = -r_2$)

$$\overline{H_1H} = -\overline{H'_2H'} \quad \Rightarrow \quad \overline{S_1H} = -\overline{S_2H'}$$



• Lent planocòncava o planoconvexa ($r_2 \to \infty$

$$\overline{H_1H} = \frac{d}{n(r_1 - r_2) - (n-1)d} r_1 \xrightarrow{r_2 \to \infty} 0$$

$$\overline{H'_2H'} = \frac{d}{n(r_1 - r_2) - (n-1)d} r_2 \xrightarrow{r_2 \to \infty} -\frac{d}{n}$$

Sistemes de lents

Lents esfèriques

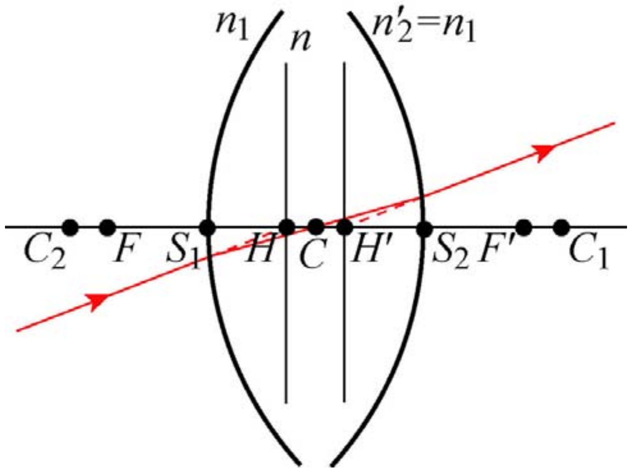
- Quan la lent està immersa en un mateix medi ($n_1 = n'_2$), es compleix que els plans principals i nodals de la lent esfèrica coincideixen ($H = N$ i $H' = N'$).

- Quan un raig que incideix sobre la lent passa, en l'espai objecte, per N, en l'espai imatge passa per N', i ambdós raigs segueixen trajectòries paral·leles.

- Si una lent és equicòncava o equiconvexa, un raig que en l'espai objecte passa per N i en l'espai imatge passa per N', creua l'eix òptic pel centre físic de la lent C. Aquest punt es denomina **centre òptic** de la lent.

Sistemes de lents
Lents esfèriques

- El **centre òptic** d'una lent esfèrica, *C*, s'obté com a imatge de *N* = *H* a través del primer dioptre, o com a **antiimatge** (objecte) de *N'* = *H'* a través del segon dioptre.
- Quan la lent no és equicòncava ni equiconvexa, *C* no es troba en el centre físic de la lent.

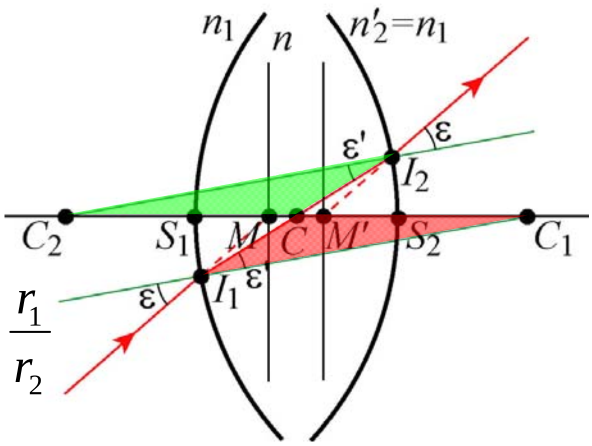


Sistemes de lents
Lents esfèriques

- Es pot demostrar que tot raig que, en l'espai intermedi, passe per *C*, emergeix de la lent paral·lel al raig incident. Aquesta propietat es compleix fora de l'aproximació paraxial:
  - Els triangles CC_1I_1 i CC_2I_2 són equivalents.

$$\frac{\overline{C_1C}}{\overline{C_1I_1}} = \frac{\overline{C_2C}}{\overline{C_2I_2}} \Rightarrow \frac{\overline{C_1C}}{\overline{C_2C}} = \frac{r_1}{r_2}$$

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\overline{C_1C}}{\overline{C_2C}} = \frac{\overline{C_1S_1}+\overline{S_1C}}{\overline{C_2S_2}+\overline{S_2C}} \Rightarrow \frac{\overline{S_1C}}{\overline{S_2C}} = \frac{r_1}{r_2}$$



Tema VI. Sistemes de lents

- Lents esfèriques
- Lents primes
- Lents cilíndriques
- Doblet de lents esfèriques
- Dispersió en lents i doblets: Condició d'acromatisme

Sistemes de lents

Lents primes

- És usual definir **lent prima** com aquella lent esfèrica el gruix de la qual, $d = S_1S_2$, és xicotet en comparació amb els radis de curvatura dels dioptres que la componen: r_1 i r_2. A menys que s'indique el contrari, suposem que la lent està immersa en el mateix medi ($n_1 = n'_2$).

- De forma més genèrica, definim lent prima com aquella lent esfèrica el segment HH' de la qual és xicotet ($HH' \ll d$) i el seu centre òptic C es confon amb els vèrtexs S_1 i S_2. Per això hem d'exigir:

$$d \ll |r_1|, |r_2|, |r_1 - r_2|$$

Sistemes de lents

Lents primes

- Propietats d'una lent prima:

  - Les dues cares es confonen en un mateix pla.

$$d = \overline{S_1 S_2} = 0$$

  - Els punts principals *H* i *H'*, els punts nodals *N* i *N'* i el centre òptic *C* es confonen en el punt en eix de la lent.

$$\overline{H_1 H} = \overline{S_1 H} = 0 \qquad \overline{H'_2 H'} = \overline{S_2 H'} = 0$$

  - Els plans focals són simètrics respecte del pla de la lent ($H_1F = -S_2F'$).

$$f' = -f \Leftrightarrow \overline{HF} = -\overline{H'F'} \qquad \overline{S_1 F} = -\overline{S_2 F'}$$

Sistemes de lents

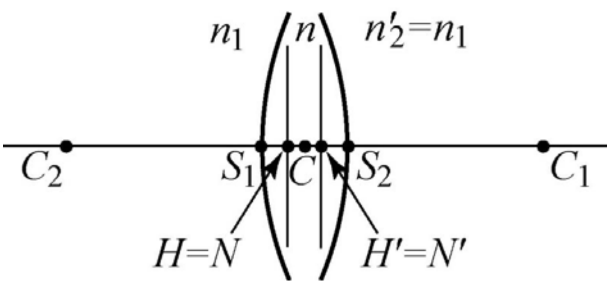
Lents primes

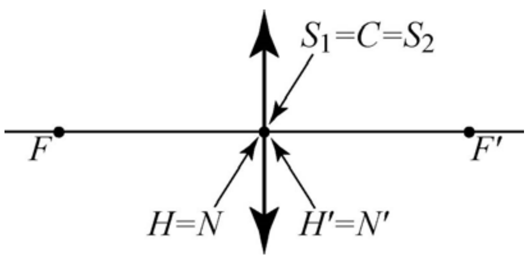
- Propietats d'una lent prima:

  - La potència d'una lent prima es redueix a:

$$\varphi' = \frac{n-n_1}{n_1}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right) + \frac{(n-n_1)^2}{nn_1}\frac{d}{r_1 r_2} \xrightarrow{d=0,n_1=1} \varphi' = (n-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$

  - Una lent prima és convergent si $\varphi' > 0$ i divergent si $\varphi' < 0$.



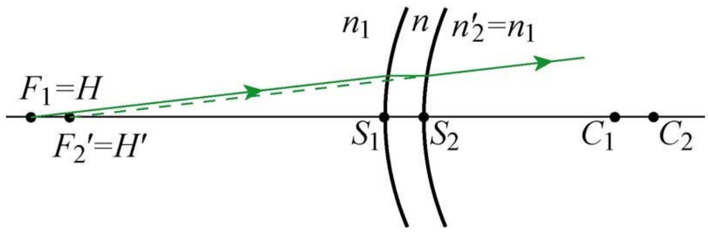


Sistemes de lents
Lents primes

- Contraexemples de lent prima:

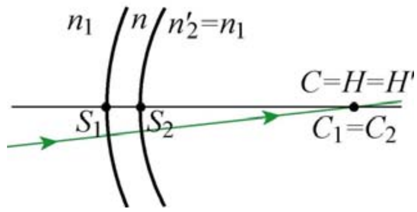
  • <u>Menisc de Hoegh</u> ($r_1 = r_2$). En aquest cas trobem que $H = F_1$ i que $H' = F'_2$; a més, C es troba en l'infinit.

$$\overline{H_1H} = \overline{H_1F_1}$$
$$\overline{H'_2\,H'} = \overline{H'_2\,F'_2}$$



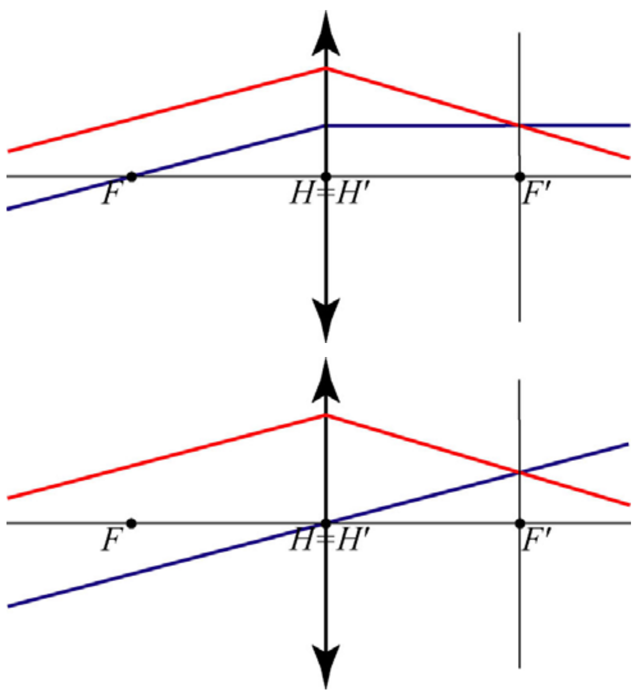
  • <u>Menisc de cares concèntriques</u> ($d = r_1 - r_2$). En aquest cas els punts H, H', i C es troben en el centre de curvatura dels dioptres, $C_1 = C_2$.

$$\overline{H_1H} = r_1 \qquad \overline{H'_2\,H'} = r_2$$



Sistemes de lents
Lents primes

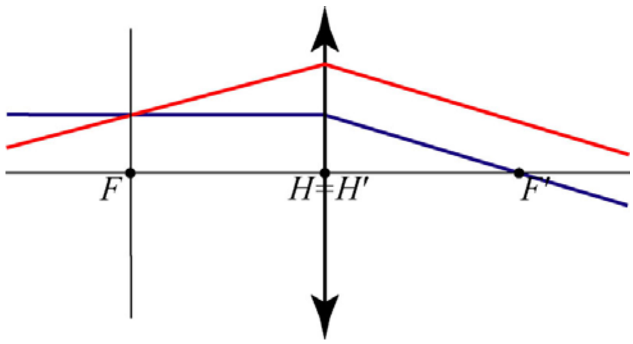
- Traçat de raigs:

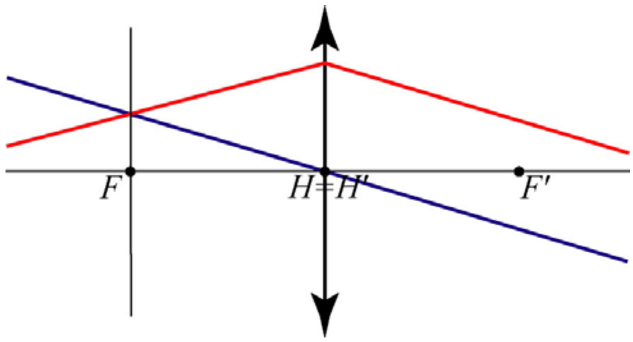


Sistemes de lents

Lents primes

- Traçat de raigs:

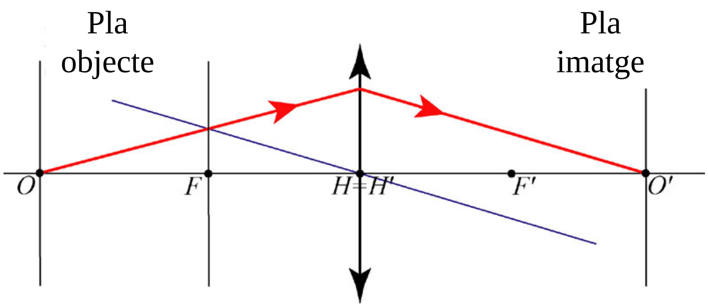


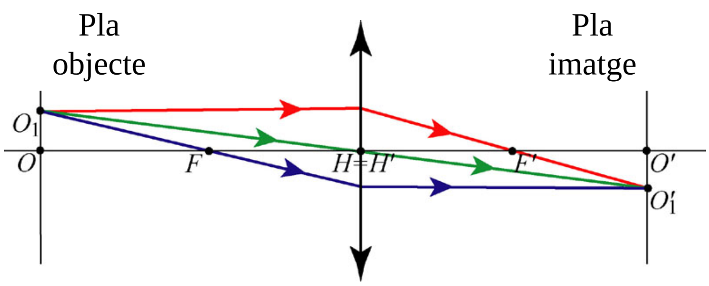


Sistemes de lents

Lents primes

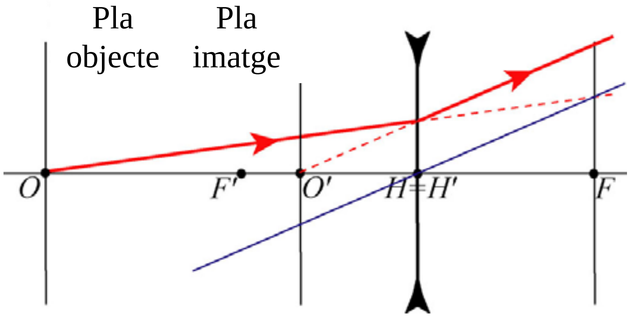
- Construcció gràfica de la formació d'imatges. Lent convergent:

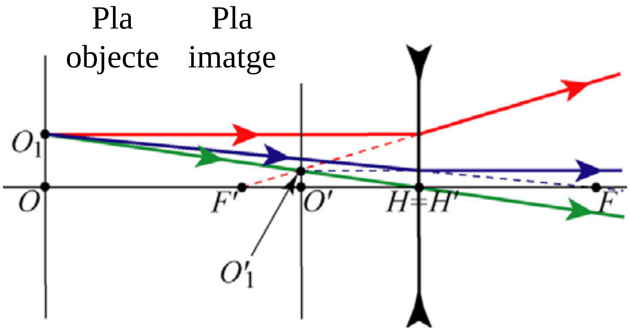




Sistemes de lents
Lents primes

- Construcció gràfica de la formació d'imatges. Lent divergent:





Sistemes de lents
Lents primes

- Equacions de correspondència.
  - Equació de Gauss: $-\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}=\frac{1}{f'}$ $\quad \beta'=\frac{a'}{a}$
  - Equació de Newton: $zz'=-f'^2$ $\quad \beta'=-\frac{z'}{f'}=\frac{f'}{z}$

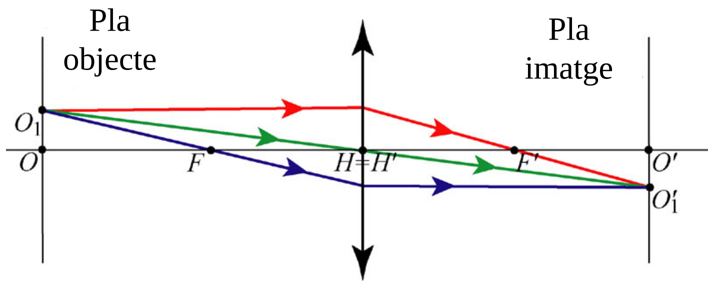
- Parelles de punts conjugats rellevants:
  - Els focus i l'infinit: $(z,z')=(0,\infty)$ $\quad \beta'\to\infty$

    $(z,z')=(\infty,0)$ $\quad \beta'=0$
  - Els punts principals: $(z,z')=(f',-f')$ $\quad \beta'=1$
  - Els punts antiprincipals: $(z,z')=(-f',f')$ $\quad \beta'=-1$

Sistemes de lents

Lents primes

- Formació d'imatges desenfocades: **Profunditat de camp**.



Sistemes de lents

Lents primes

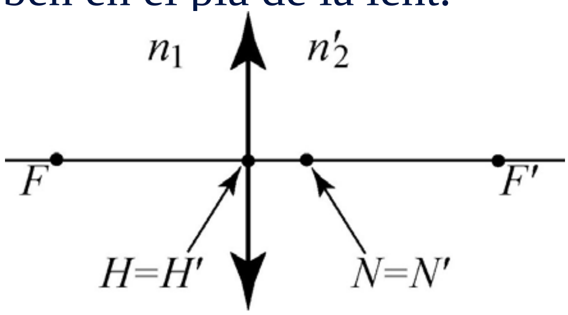
- Lent prima immersa en medis de diferent índex ($n_1 \neq n'_2$):
  - Els plans principals segueixen confosos en el pla de la lent.

$$\overline{S_1H} = \overline{H_1H} = \frac{e}{t} f_1 = 0 \qquad \overline{S_2H'} = \overline{H'_2 H'} = \frac{e}{t} f'_2 = 0$$

  - Els plans nodals ja no es troben en el pla de la lent.

$$\frac{f'}{f} = -\frac{n'_2}{n_1} \neq -1$$

$$\overline{H'N'} = \overline{HN} = f + f' \neq 0$$



Tema VI. Sistemes de lents

- Lents esfèriques
- Lents primes
- Lents cilíndriques
- Doblet de lents esfèriques
- Dispersió en lents i doblets: Condició d'acromatisme

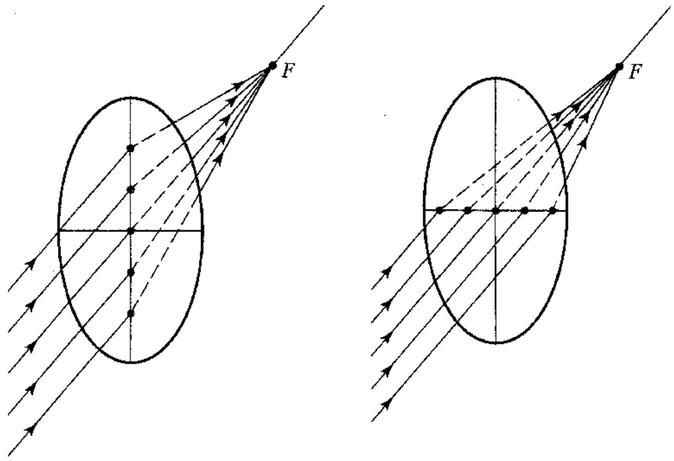
Sistemes de lents

Lents cilíndriques

- Considerem **lents astigmàtiques** primes, formades per superfícies planes, esfèriques i cilíndriques.
- Una **lent cilíndrica** és l'acoblament d'un dioptre cilíndric i un dioptre pla.

Sistemes de lents
Lents cilíndriques

- Una lent esfèrica produeix un punt imatge d'un punt objecte (**lent astigmàtica**).
- Considerant un feix de raigs paral·lel a l'eix, aquells raigs que incideixen sobre una secció vertical o horitzontal convergeixen en el mateix punt *F*.



Sistemes de lents
Lents cilíndriques

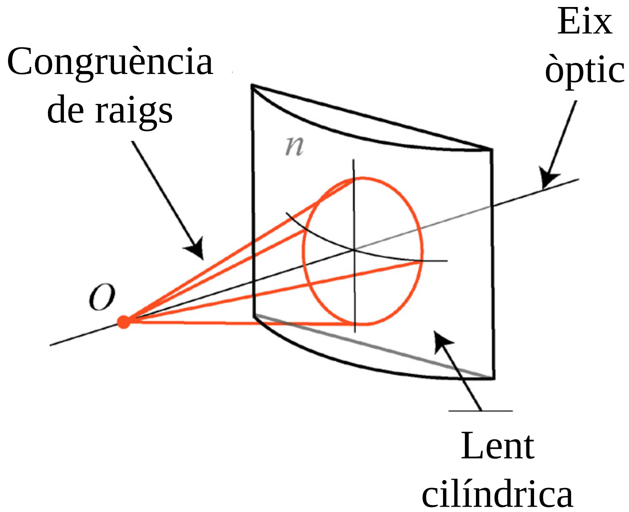
- Una lent cilíndrica produeix dues imatges lineals d'un punt objecte (**lent astigmàtica**).
- Considerant un feix de raigs paral·lel a l'eix, aquells raigs que incideixen sobre el meridià d'eix (horitzontal) no desvien les seues trajectòries, i els que incideixen sobre el meridià de potència (vertical) convergeixen generant un **focus imatge lineal** (horitzontal).

Sistemes de lents
Lents cilíndriques

- Formació dels *focus lineals* generats per lents cilíndriques:
  - en la lent cilíndrica convergent *el focus* és **real**, i
  - en la lent cilíndrica divergent *el focus* és **virtual**.
- El focus lineal és paral·lel a l'eix de la superfície cilíndrica.

Sistemes de lents
Lents cilíndriques

- Estudiem la **formació d'imatges**, dins de l'aproximació paraxial, d'una **lent cilíndrica prima**.
- Considerem exclusivament els raigs que emergeixen del punt objecte i pertanyen al meridià d'eix (vertical) i al meridià de potència (horitzontal).

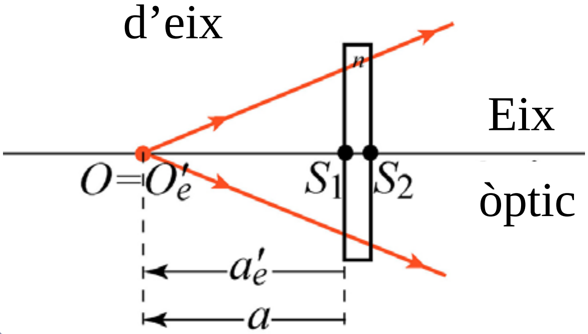


Sistemes de lents

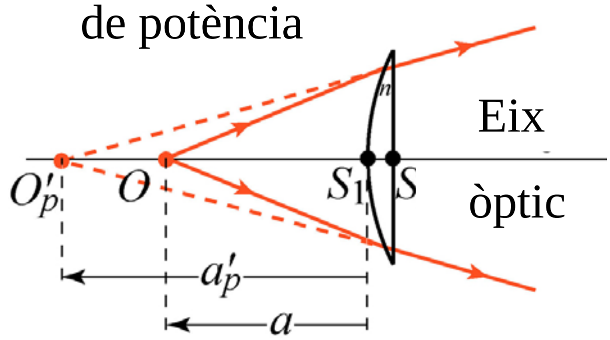
Lents cilíndriques

- Al llarg del **meridià d'eix**, els raigs desvien les seues trajectòries com si travessaren una làmina de cares planoparal·leles amb un gruix menyspreable, $d = S_1S_2 = 0$.
- Sobre el **meridià de potència**, els raigs es refracten com si travessaren una lent planoconvexa prima.

Meridià d'eix



Meridià de potència



Sistemes de lents

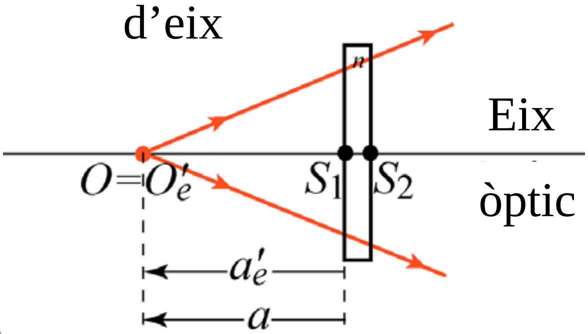
Lents cilíndriques

$$\varphi' = \frac{1}{f'} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \varphi_e' = 0 \\ \varphi_p' = \dfrac{n-1}{r} \end{cases}$$

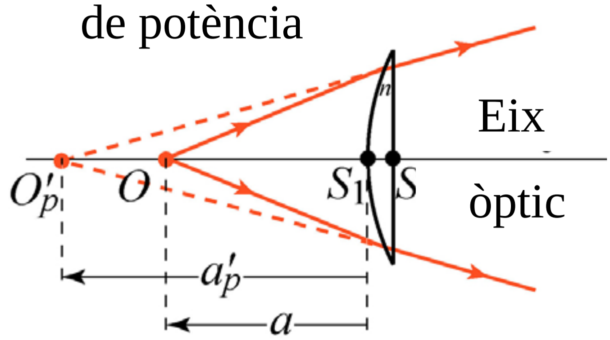
$$S_1 \equiv S_2 \equiv H \equiv H'$$

$$-\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f'} = \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a_e' = a \\ -\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{a_p'} = \varphi_p' = \dfrac{n-1}{r} \end{cases}$$

Meridià d'eix



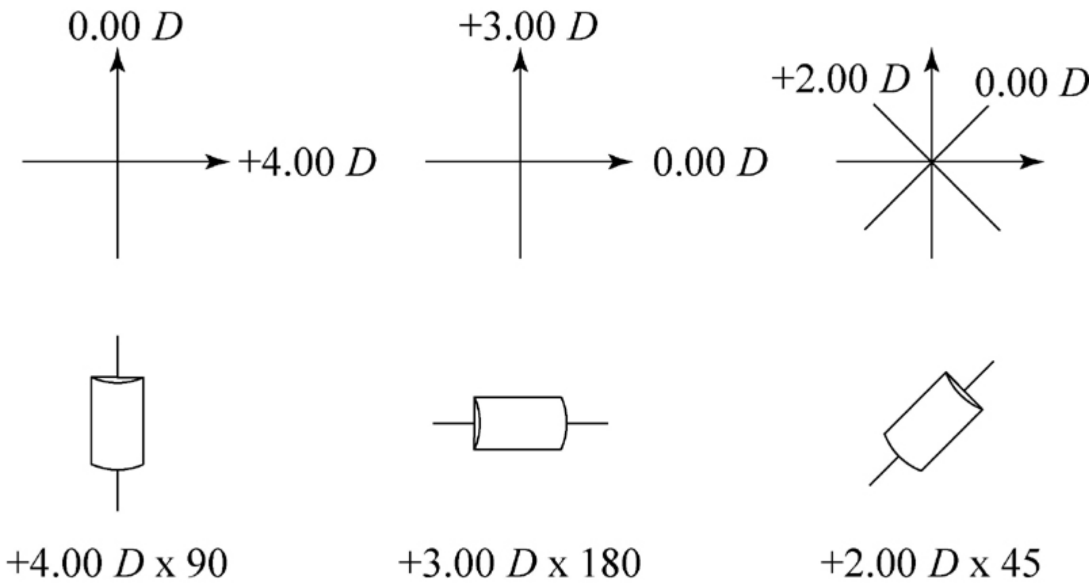
Meridià de potència



Sistemes de lents

Lents cilíndriques

- **Diagrama òptic:** Caracterització de lents cilíndriques amb orientacions arbitràries.



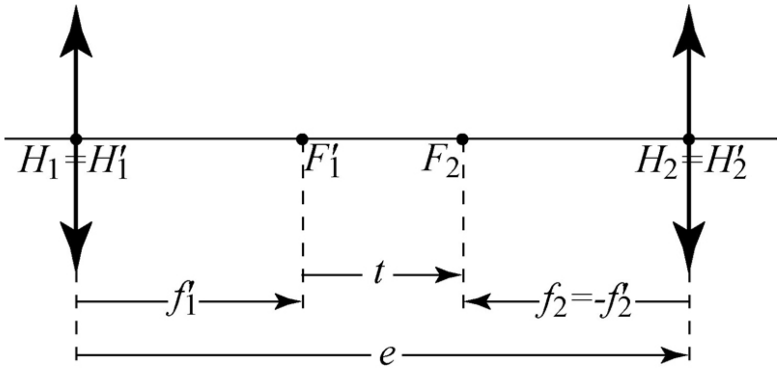
Tema VI. Sistemes de lents

- Lents esfèriques
- Lents primes
- Lents cilíndriques
- Doblet de lents esfèriques
- Dispersió en lents i doblets: Condició d'acromatisme

Sistemes de lents

Doblets de lents

- Un **doblet** de lents és l'acoblament de dues lents primes immerses dins del mateix medi (aire en general).
- **Símbol** del doblet: (p, q, r)



$$\frac{f_1'}{p} = \frac{e}{q} = \frac{f_2'}{r} = a$$

- El paràmetre a té dimensions de longitud (p, q i r són adimensionals). Modificant a canviem els valors opticogeomètrics del doblet, però no les seues propietats òptiques.

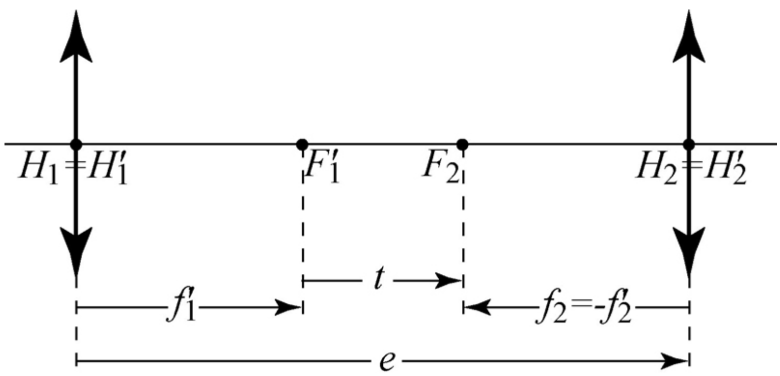
Sistemes de lents

Doblets de lents

- Punts cardinals del doblet:

$$\overline{H_1H} = \frac{e}{t} f_1 = \frac{e}{f_1' + f_2' - e} f_1' \qquad \overline{H_2'H'} = \frac{e}{t} f_2' = \frac{e}{e - f_1' - f_2'} f_2'$$

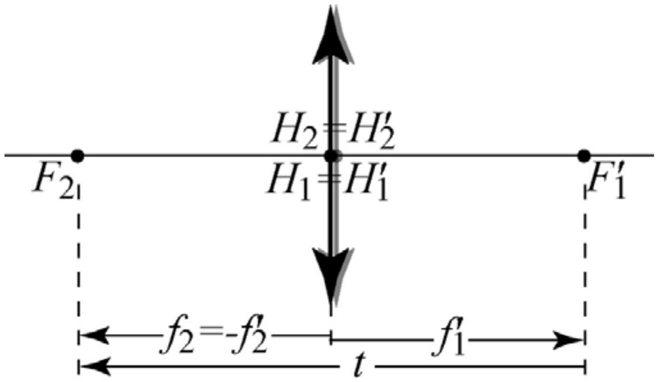
$$\varphi' = \frac{n_2}{n'_2} \varphi'_1 + \varphi'_2 - e\varphi'_1 \varphi'_2 \rightarrow \varphi' = \varphi'_1 + \varphi'_2 - e\varphi'_1 \varphi'_2$$



Sistemes de lents

Doblets de lents

- **Doblet** de lents pegades ($e = 0$).
    - **Símbol** del doblet: (p, *0*, r)



$$\overline{H_1H} = \overline{H'_2\,H'} = 0$$

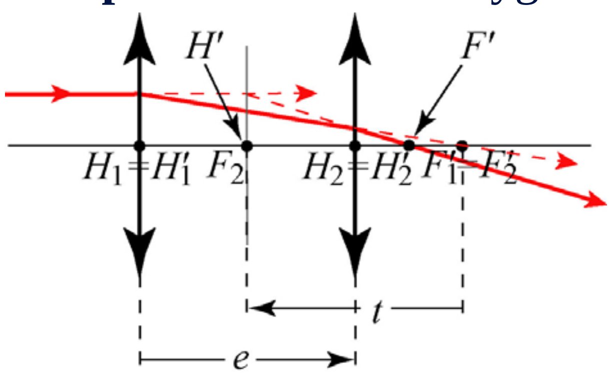
$$\varphi' = \varphi'_1 + \varphi'_2$$

- L'acoblament de dues lents primes és equivalent a una altra lent prima la potència de la qual és la suma de les potències de cadascuna de les lents que formen el doblet.

Sistemes de lents

Doblets de lents

- **Exemple 1:** Ocular de Huygens. Símbol: (3,2,1)



$$\frac{f_1'}{3} = \frac{e}{2} = \frac{f_2'}{1} = a$$

$$\overline{H_1H} = 3a$$

$$\overline{H'_2\,H'} = -a$$

$$f' = \frac{3}{2}a$$

- Característiques:
    - Sistema convergent.
    - El pla focal objecte és virtual (utilitzat pels oculars).
    - Els plans focals i principals són simètrics respecte de la segona lent.

Sistemes de lents

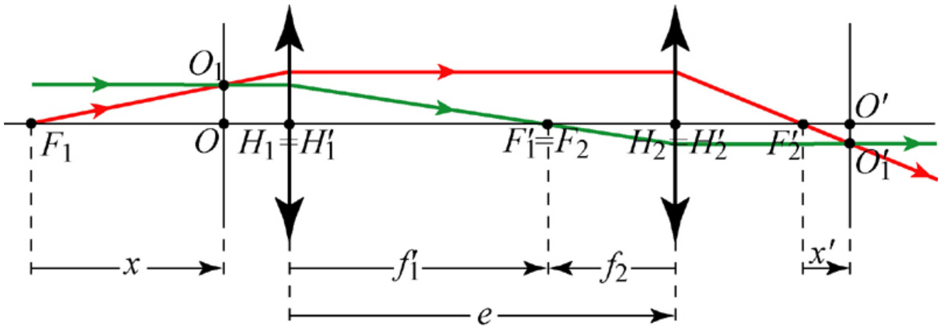
Doblets de lents

- **Exemple 2:** Doblet afocal. (t = 0, e = $f'_1 + f'_2$)

$$\overline{H_1H} = \frac{e}{t} f_1 \xrightarrow{e>0} \infty$$

$$\overline{H'_2H'} = \frac{e}{t} f'_2 \xrightarrow{e>0} \infty$$

$$f' = -\frac{f'_1 f'_2}{t} \to \infty$$



$$\beta' = \frac{f_2}{f'_1} = -\frac{f'_2}{f'_1}$$

$$x' = \frac{n'}{n}\beta'^2\, x \xrightarrow{n'=n} x' = \beta'^2\, x$$

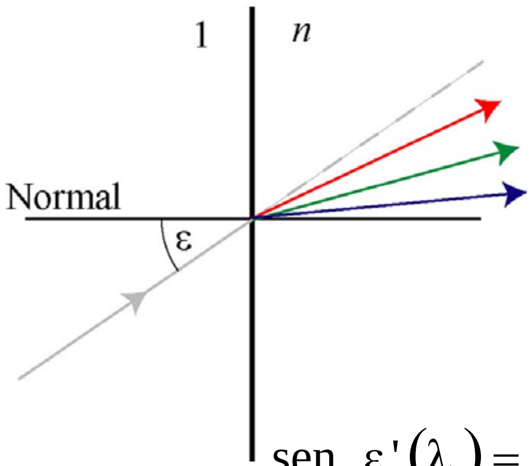
Tema VI. Sistemes de lents

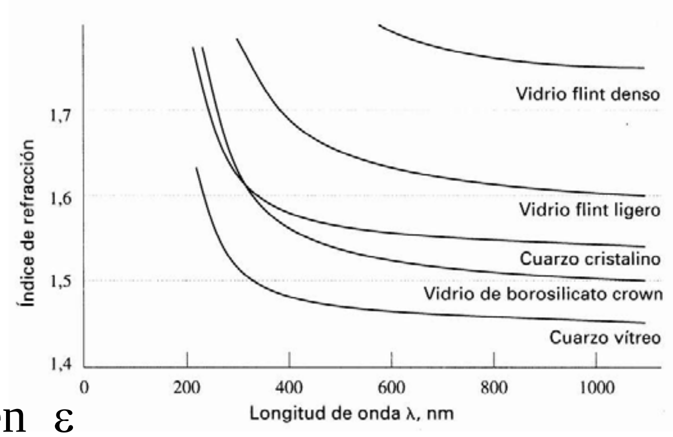
- Lents esfèriques
- Lents primes
- Lents cilíndriques
- Doblet de lents esfèriques
- Dispersió en lents i doblets: Condició d'acromatisme

Sistemes de lents

Dispersió en lents i doblets

Separació espacial dels components espectrals d'un feix policromàtic en travessar un dioptre pla:





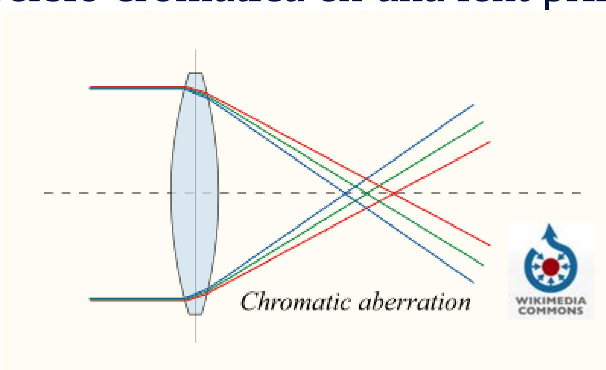
$$\text{sen}\ \varepsilon'(\lambda) = \frac{\text{sen}\ \varepsilon}{n(\lambda)}$$

- Les longituds d'ona curtes (blaves) sofreixen una major desviació angular que les longituds llargues (roges).

Sistemes de lents

Dispersió en lents i doblets

Dispersió cromàtica en una lent prima:



$$\left.\begin{array}{l} r_1 > 0 \\ r_2 \to \infty \end{array}\right\}$$

$$\varphi'(\lambda) = \frac{1}{f'(\lambda)} = (n_\lambda - 1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

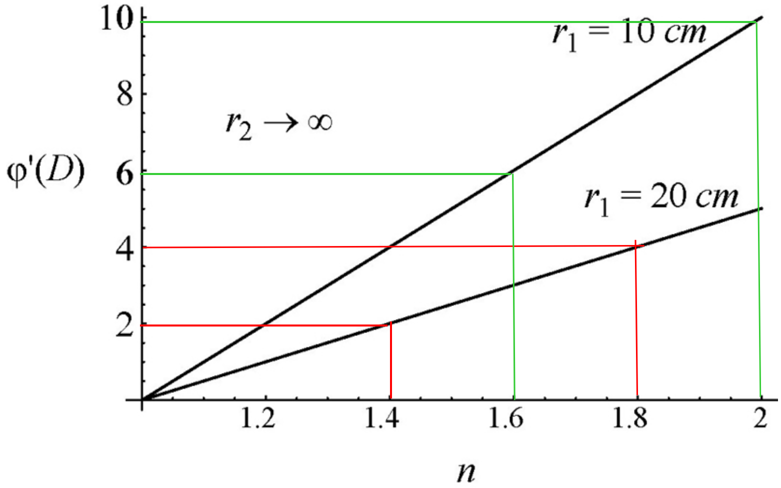
$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d\varphi'}{dn} = \left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}\right) > 0 \\ \dfrac{dn}{d\lambda} < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{d\varphi'}{d\lambda} = \frac{d\varphi'}{dn}\frac{dn}{d\lambda} < 0$$

Sistemes de lents
Dispersió en lents i doblets

Dispersió cromàtica en una lent prima:

$$\varphi'(\lambda)=(n-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$

$$\frac{d\varphi'}{dn}=\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)=\frac{\varphi'(\lambda)}{n(\lambda)-1}$$



- Aquest fenomen es denomina **cromatisme de posició** o **cromatisme longitudinal**.

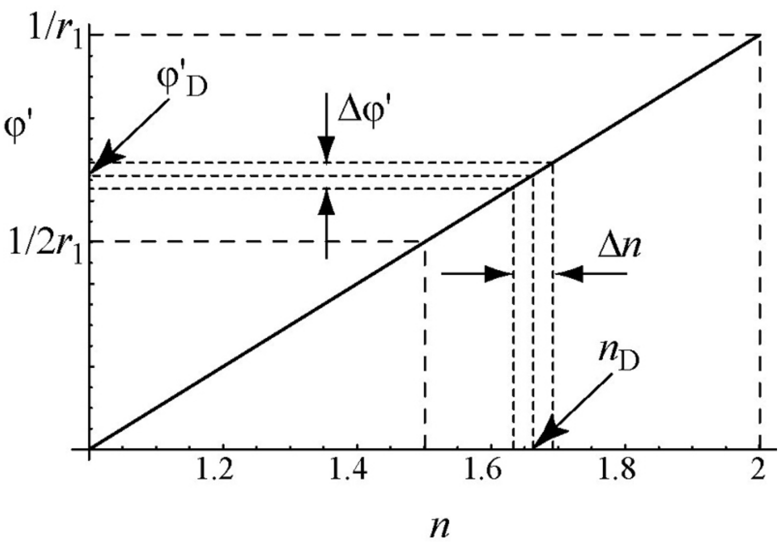
Sistemes de lents
Dispersió en lents i doblets

Dispersió cromàtica en una lent prima:

$$\Delta\varphi'\approx\frac{d\varphi'}{dn}\Delta n$$

$$\begin{cases}\Delta\varphi'=\varphi'_F-\varphi'_C\\ \Delta n=n_F-n_C\end{cases}$$

$$\Delta\varphi'=\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\Delta n$$



$$\Delta\varphi'=\frac{\varphi'_D}{n_D-1}(n_F-n_C)=\frac{n_F-n_C}{n_D-1}\varphi'_D \qquad \Delta\varphi'=\frac{\varphi'_D}{\nu_D}$$

Sistemes de lents
Dispersió en lents i doblets

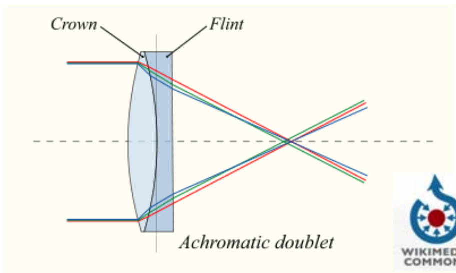
Dispersió cromàtica en una lent prima:

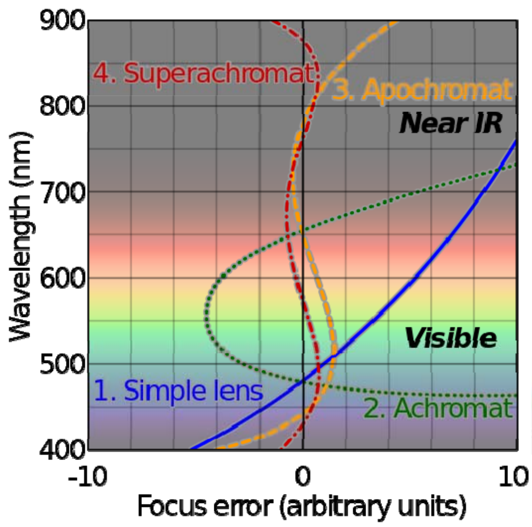
$$\Delta\varphi' = \frac{\varphi'_D}{\nu_D} \qquad \Delta\varphi' = \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\Delta n \qquad \begin{cases} \Delta\varphi' = \varphi'_F - \varphi'_C \\ \Delta n = n_F - n_C \end{cases}$$

- En la primera expressió obtenim la diferència en la potència de la lent per a les ratlles C i F en funció del número d'Abbe.
    - En un vidre crown (ν_D alt) $\Delta\varphi$' és xicotet. Açò és degut que el material és poc dispersiu.
    - En un vidre flint (ν_D baix) $\Delta\varphi$' és gran. Açò és degut que el material és molt dispersiu.

Sistemes de lents
Dispersió en lents i doblets

- Un **doblet acromàtic** és un conjunt de dues lents primes, que poden estar pegades, dissenyat per controlar la dispersió cromàtica:





Sistemes de lents

Dispersió en lents i doblets

- Un doblet pegat **acromàtic** és un sistema de dues lents primes pegades que compleixen la condició d'acromatisme:

$$\Delta\varphi'_i = \frac{\varphi'_{iD}}{\nu_{iD}} \qquad \varphi' = \varphi'_1 + \varphi'_2$$

$$\varphi'_C = \varphi'_F \quad \Rightarrow \quad \Delta\varphi' = 0 = \Delta\varphi'_1 + \Delta\varphi'_2 = \frac{\varphi'_{1D}}{\nu_{1D}} + \frac{\varphi'_{2D}}{\nu_{2D}}$$

$$-\frac{\varphi'_{1D}}{\varphi'_{2D}} = \frac{\nu_{1D}}{\nu_{2D}}$$

- Els signes de φ'_1 i φ'_2 han de ser de signe oposat. Si es desitja un doblet convergent, la lent convergent es contrueix amb un vidre crow i la divergent amb un vidre flint.

Sistemes de lents

Dispersió en lents i doblets

- Considerem ara un doblet **acromàtic** de lents desenganxades: el sistema acoblat té la mateixa potència per a dues longituds d'ona (en general s'elegeixen les ratlles C i F) :

$$\Delta\varphi'_i = \frac{\varphi'_{iD}}{\nu_{iD}} \qquad \varphi' = \varphi'_1 + \varphi'_2 - e\varphi'_1\,\varphi'_2$$

$$\varphi'_C = \varphi'_F \quad \Rightarrow \quad 0 = \Delta\varphi' \approx \Delta\varphi'_1 + \Delta\varphi'_2 - e(\Delta\varphi'_1)\varphi'_{2D} - e\varphi'_{1D}\,\Delta\varphi'_2$$

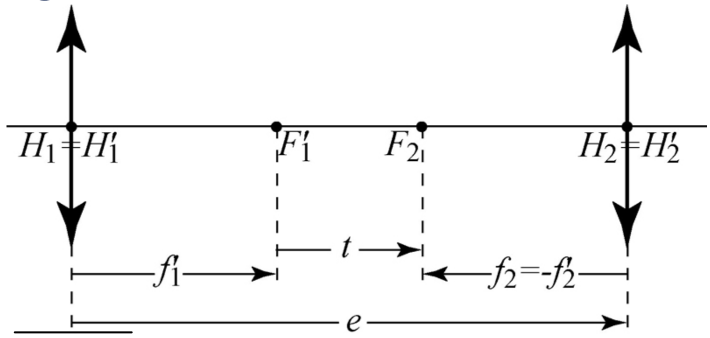
$$\left.\begin{aligned} \frac{\varphi'_{1D}}{\nu_{1D}} + \frac{\varphi'_{2D}}{\nu_{2D}} - e\varphi'_{1D}\,\varphi'_{2D}\left(\frac{1}{\nu_{1D}} + \frac{1}{\nu_{2D}}\right) = 0 \\ \frac{\nu_{1D} f'_{1D} + \nu_{2D} f'_{2D}}{\nu_{1D} + \nu_{2D}} = e \end{aligned}\right\}$$

Sistemes de lents

Dispersió en lents i doblets

- La condició d'**acromatisme** en els doblets desenganxats **no** assegura un acromatisme longitudinal:

$$\left.\begin{array}{l} e \neq e(\lambda) \\ f'_1 = f'_1(\lambda) \\ f'_2 = f'_2(\lambda) \end{array}\right\} \Rightarrow t = t(\lambda)$$



$$\overline{H_1 H} = \frac{e}{t(\lambda)} f_1(\lambda) \Rightarrow \overline{H_1 H_C} \neq \overline{H_1 H_F}$$

$$\overline{H'_2 H'} = \frac{e}{t(\lambda)} f'_2(\lambda) \Rightarrow \overline{H'_2 H'_C} \neq \overline{H'_2 H'_F}$$

- Conclusió: Encara que $f'_C = f'_F$, els punts focals imatge F'_C i F'_F no se situen en la mateixa posició.

Tema VII. Aberracions dels sistemes òptics

- Introducció
- Aberració esfèrica
- Coma
- Astigmatisme
- Curvatura de la imatge
- Distorsió

Aberracions dels sistemes òptics

Introducció

Un **sistema òptic perfecte** ha de complir les següents **condicions** establides per **Maxwell**:

- Condició d'**estigmatisme** (aproximat).
- **Correspondència pla a pla**: Si els punts objecte estan continguts en un pla perpendicular a l'eix, els punts imatge també estan continguts en un pla perpendicular.
- Raó de **semblança transversal** invariable: Si dos punts objecte continguts en un pla transversal disten una quantitat *y*, els seus punts imatge disten una quantitat *y'* que no varia independentment de la posició dels punts objecte.

$$\beta' = \frac{y'}{y}$$

Aberracions dels sistemes òptics
Introducció

- Les **aberracions** en un sistema òptic apareixen quan alguna (o vàries) de les condicions establides per Maxwell no se satisfà.
- Les **aberracions monocromàtiques** en un sistema òptic centrat són aquelles que s'observen amb llum monocromàtica (longitud d'ona *D* de Fraunhofer).
- Tipus d'aberracions monocromàtiques:
  - No es compleix la condició d'estigmatisme: Aberració esfèrica, coma meridional, astigmatisme.
  - No existeix correspondència pla a pla: Curvatura.
  - No existeix una raó de semblança invariable: Distorsió.

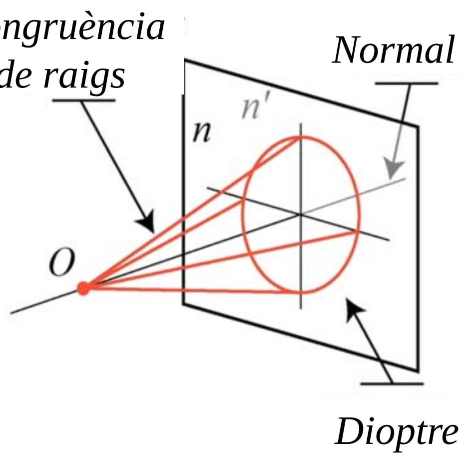
Tema VII. Aberracions dels sistemes òptics

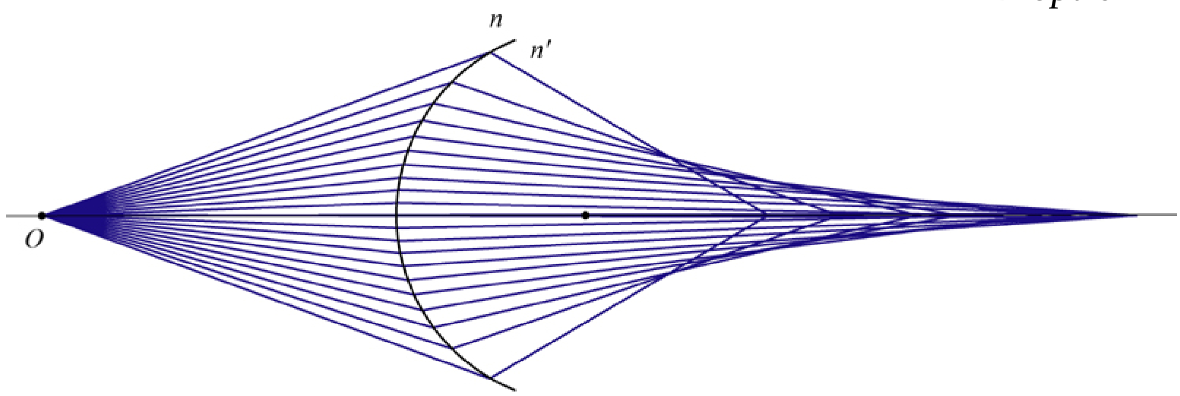
- Introducció
- Aberració esfèrica
- Coma
- Astigmatisme
- Curvatura de la imatge
- Distorsió

Aberracions dels sistemes òptics

Aberració esfèrica

- Tipus d'aberracions monocromàtiques:
  - No es compleix la condició d'estigmatisme: Aberració esfèrica, coma meridional, astigmatisme.

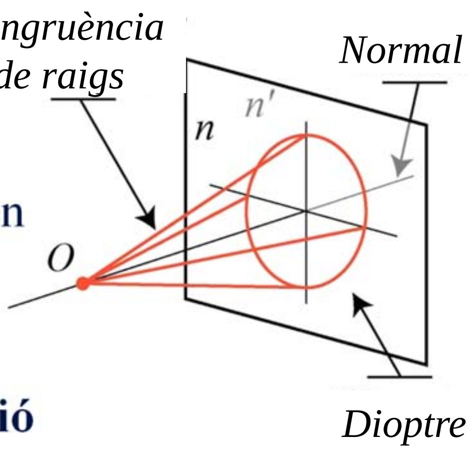


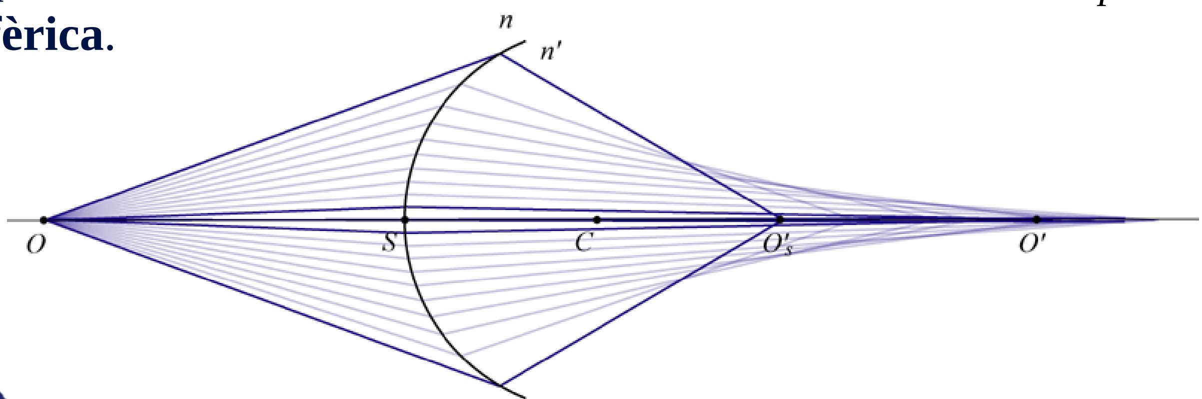


Aberracions dels sistemes òptics

Aberració esfèrica

- Els raigs que emergeixen de *O* i incideixen prop del vèrtex *S* de la superfície convergeixen en la imatge paraxial *O'*, però aquells que incideixen amb gran angle d'incidència ε convergeixen en el punt O'_s.
- Aquest fenomen constitueix l'**aberració esfèrica**.



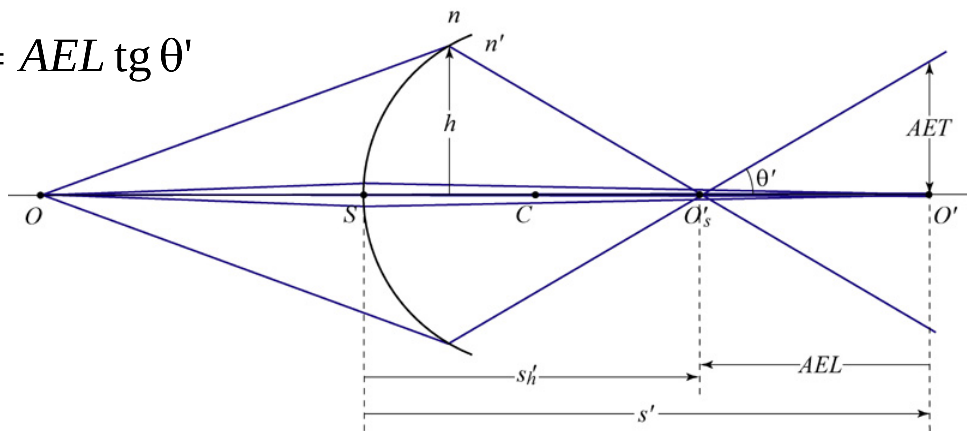


Aberracions dels sistemes òptics

Aberració esfèrica

- Es defineix l'**aberració esfèrica longitudinal** (*AEL*) d'un raig que emergeix de *O*, el conjugat del qual en l'espai imatge talla l'eix en O'_s, al segment $O'O'_s$.
- Aquests raigs tallen el pla imatge paraxial en un cercle, el radi del qual rep el nom d'**aberració esfèrica transversal** (*AET*).

$$AET = AEL\,\mathrm{tg}\,\theta'$$



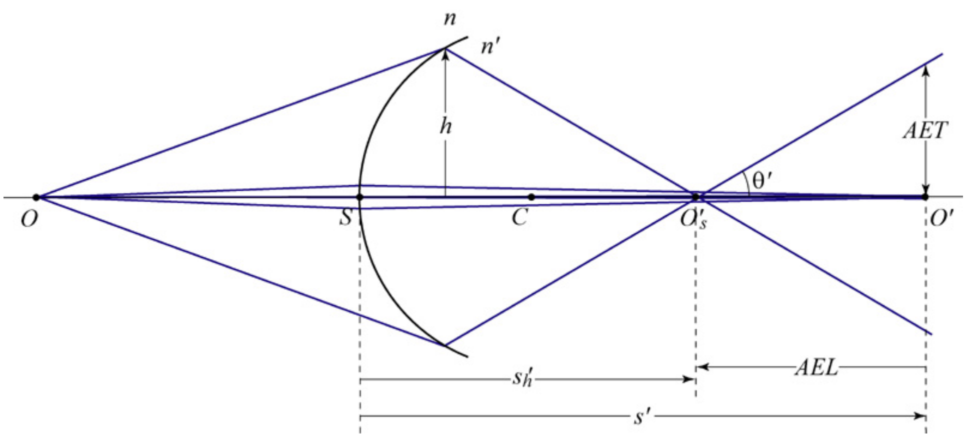
Aberracions dels sistemes òptics

Aberració esfèrica

- **Aberració esfèrica** en un dioptre esfèric.

$$\frac{n}{s} - \frac{n'}{s'} = \frac{n-n'}{r} \qquad f' = \frac{n'}{n'-n} r$$

$$\frac{n}{s} - \frac{n'}{s'_h} = \frac{n-n'}{r} - \frac{h^2 n^2 r}{2 f' n'} \left(\frac{1}{r} - \frac{n+n'}{ns} \right) \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{r} \right)^2$$

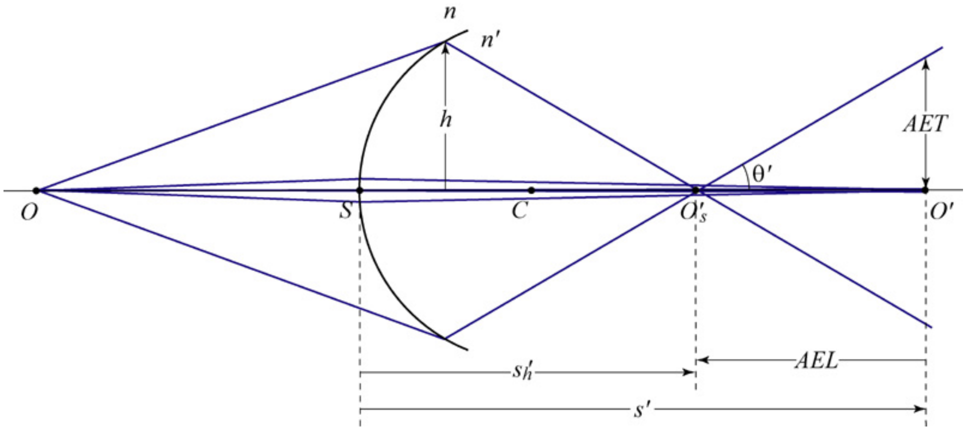


Aberracions dels sistemes òptics

Aberració esfèrica

- **Aberració esfèrica** en un dioptre esfèric:
  - és proporcional a h^2.
  - depèn del radi de curvatura r.

$$\frac{h^2 n^2 r}{2f'n'}\left(\frac{1}{r}-\frac{n+n'}{ns}\right)\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{r}\right)^2=-\frac{n'}{s'}+\frac{n'}{s'_h}\cong\frac{n'(s'-s'_h)}{s'^2}$$

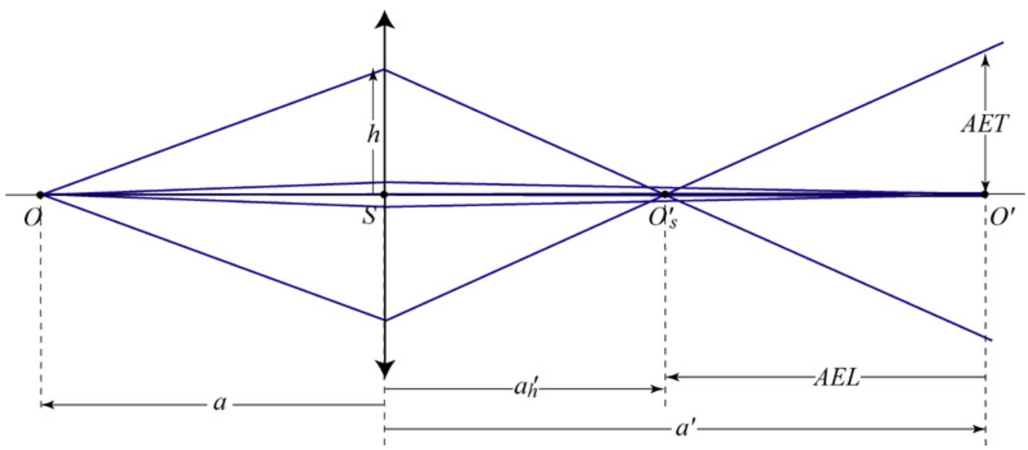


Aberracions dels sistemes òptics

Aberració esfèrica

- **Aberració esfèrica** en una lent prima.

$$-\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}=\frac{1}{f'} \qquad \frac{1}{f'}=(n-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$



Aberracions dels sistemes òptics

Aberració esfèrica

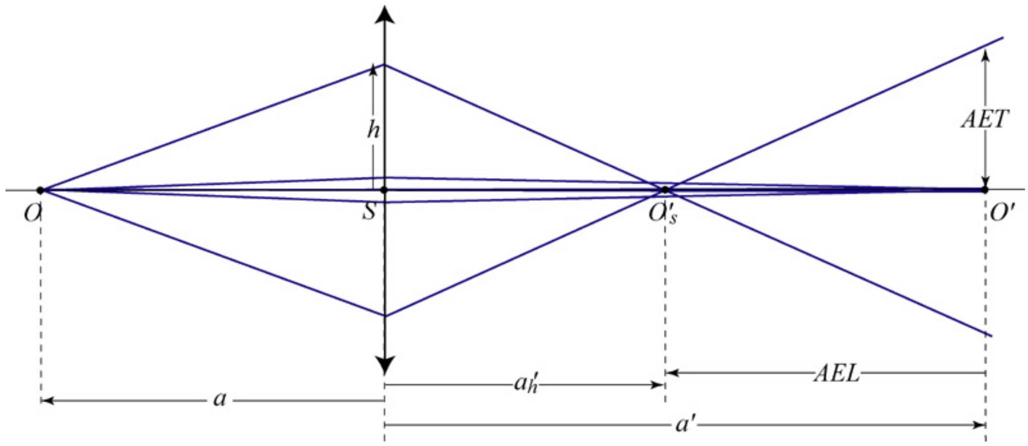
- **Aberració esfèrica** en una lent prima.

$$L_s = \frac{1}{a'_h} - \frac{1}{a'} = \frac{h^2}{8f'^3}\frac{1}{n(n-1)} \times$$

$$\times\left\{\frac{n+2}{n-1}q^2 + 4(n+1)pq + (3n+2)(n-1)p^2 + \frac{n^3}{n-1}\right\}$$

$$q = \frac{r_2 + r_1}{r_2 - r_1}$$

$$p = \frac{a'+a}{a'-a}$$



Aberracions dels sistemes òptics

Aberració esfèrica

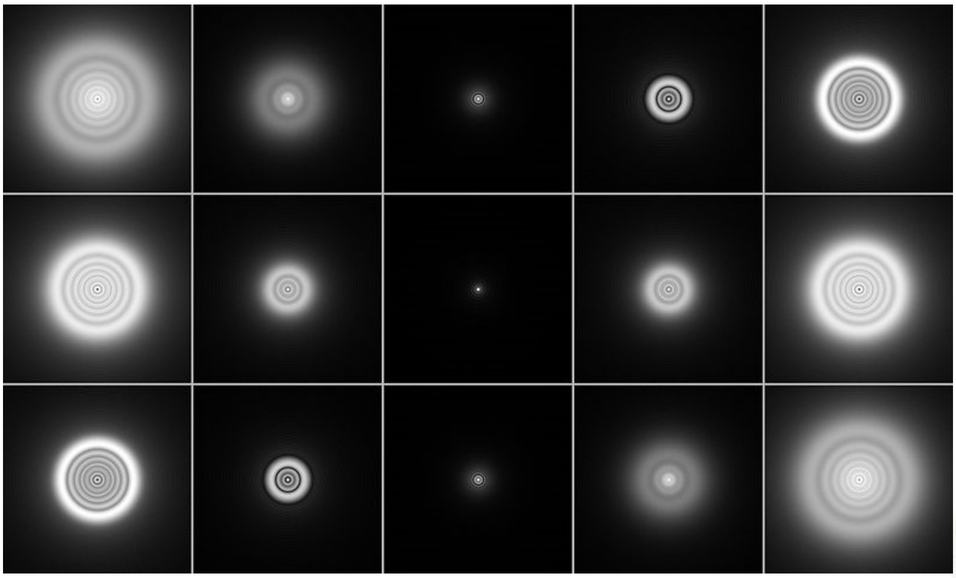
- **Aberració esfèrica** en una lent prima:
  - depèn del factor de forma, q, i del factor de posició, p, de Coddington.
  - l'*AEL* és proporcional a h^2.
  - l'*AET* és proporcional a h^3.

$$q = \frac{r_2 + r_1}{r_2 - r_1} \qquad p = \frac{a'+a}{a'-a}$$

Aberracions dels sistemes òptics

Aberració esfèrica

- **Aberració esfèrica** en una lent prima:



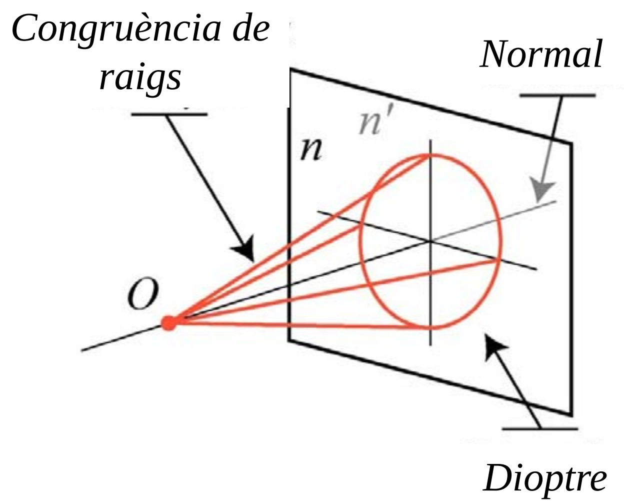
Tema VII. Aberracions dels sistemes òptics

- Introducció
- Aberració esfèrica
- Coma
- Astigmatisme
- Curvatura de la imatge
- Distorsió

Aberracions dels sistemes òptics

Coma

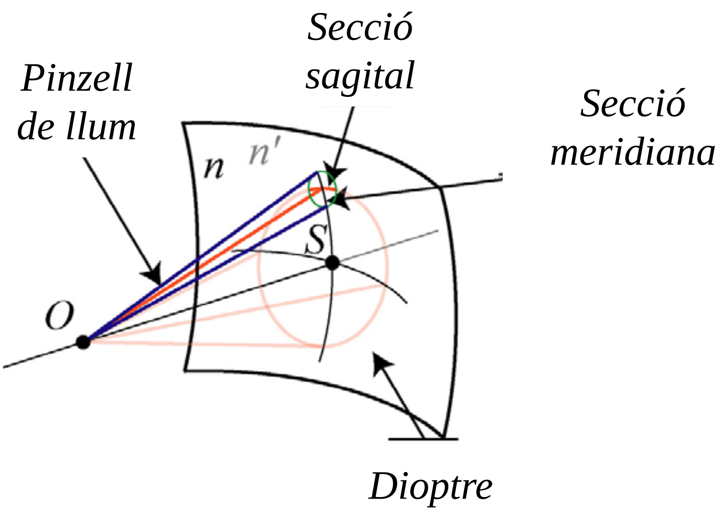
- El **raig principal** d'un pinzell (cònic) de llum és aquell que es propaga al llarg de l'eix de revolució del con.
- Els **raigs paraprincipals** són aquells que es propaguen en regions properes al raig principal.
- Els **raigs marginals** són aquells que, podent travessar el sistema òptic, es propaguen més allunyats de raig principal.



Aberracions dels sistemes òptics

Coma

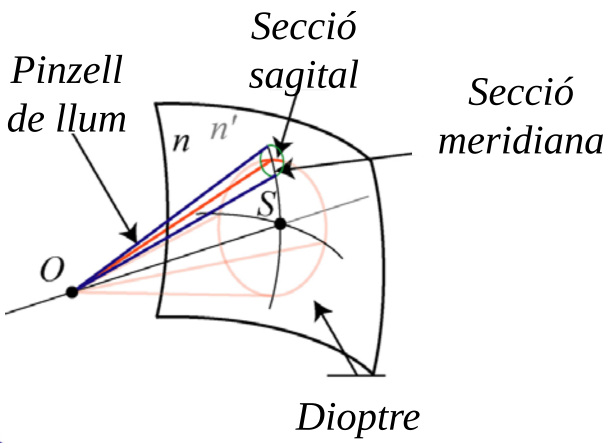
- El pla que conté el raig principal i l'eix òptic del sistema es denomina **secció meridiana** o **tangencial** (BLAU).
- La **secció sagital** (ROIG) del pinzell de llum conté el raig principal i és normal a la secció meridiana.

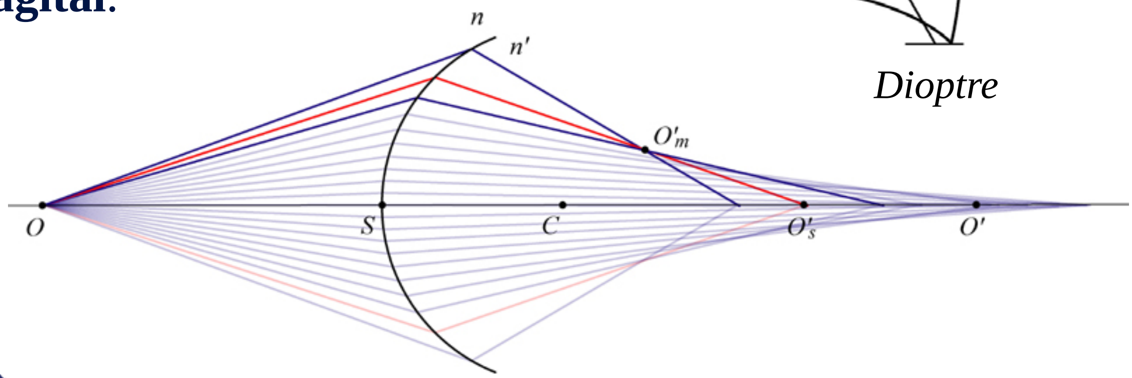


Aberracions dels sistemes òptics

Coma

- Els raigs paraprincipals pertanyents a la secció meridiana focalitzen en O'_m, coneguda com a **imatge meridiana** o **tangencial**.
- Els raigs paraprincipals pertanyents a la secció sagital focalitzen en O'_s, coneguda com a **imatge sagital**.

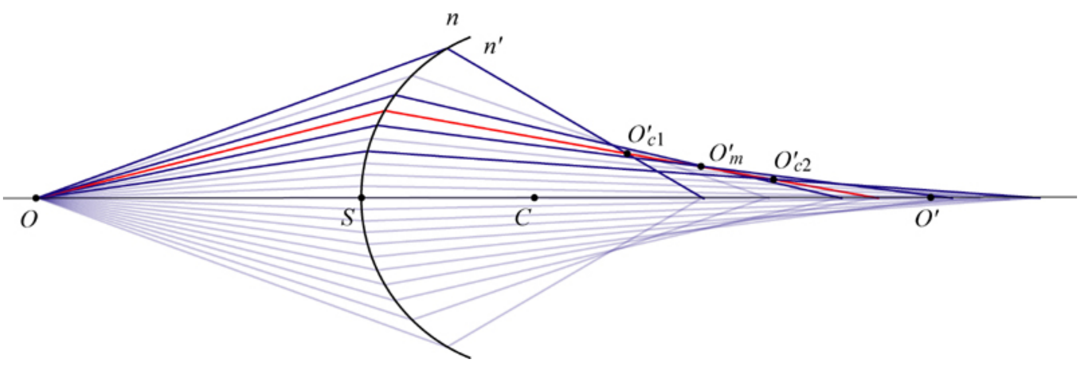




Aberracions dels sistemes òptics

Coma

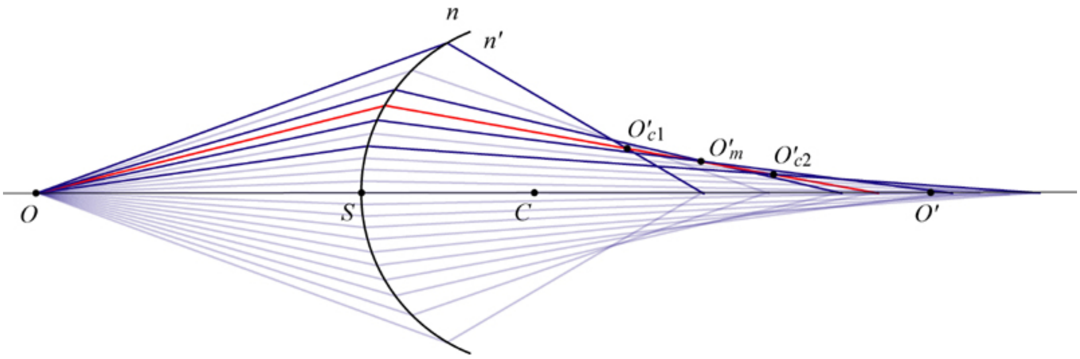
- En la secció meridiana d'un pinzell de llum, els raigs paraprincipals focalitzen en la imatge meridiana O'_m.
- Els raigs marginals no focalitzen en O'_m, sinó que creuen el raig principal pels punts O'_{c1} i O'_{c2}.
- Aquesta aberració es denomina **coma meridional**, i es quantifica amb la distància $O'_m O'_{c1}$ i $O'_m O'_{c2}$, respectivament.



Aberracions dels sistemes òptics

Coma

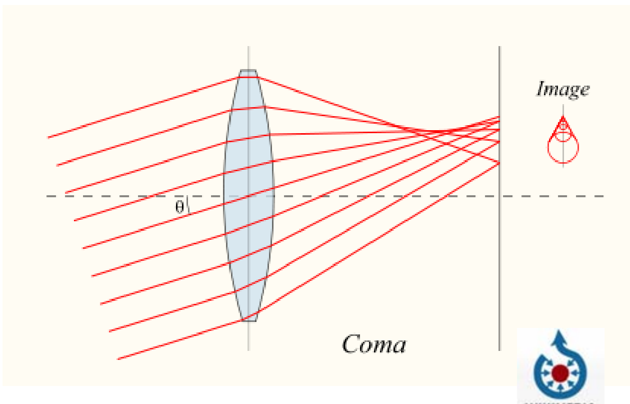
- El coma meridional és **negatiu** quan els raigs marginals creuen el pla transversal de la imatge meridiana O'_m en punts encara més propers a l'eix òptic (com en la figura).

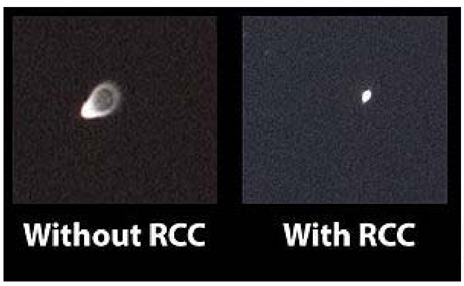


Aberracions dels sistemes òptics

Coma

- **Altra definició** de coma: Quan el sistema òptic no compleix la condició d'estigmatisme, si succeeix que la taca de llum produïda en el pla imatge (paraxial) té sols un pla de simetria (pla meridià determinat pel raig principal i l'eix òptic), el sistema està afectat de **coma**.





Tema VII. Aberracions dels sistemes òptics

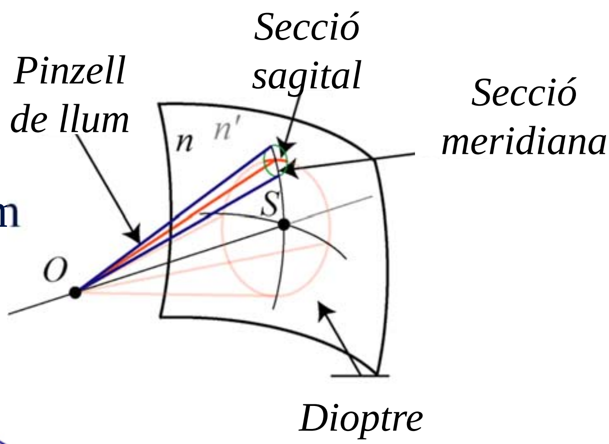
- Introducció
- Aberració esfèrica
- Coma
- Astigmatisme
- Curvatura de la imatge
- Distorsió

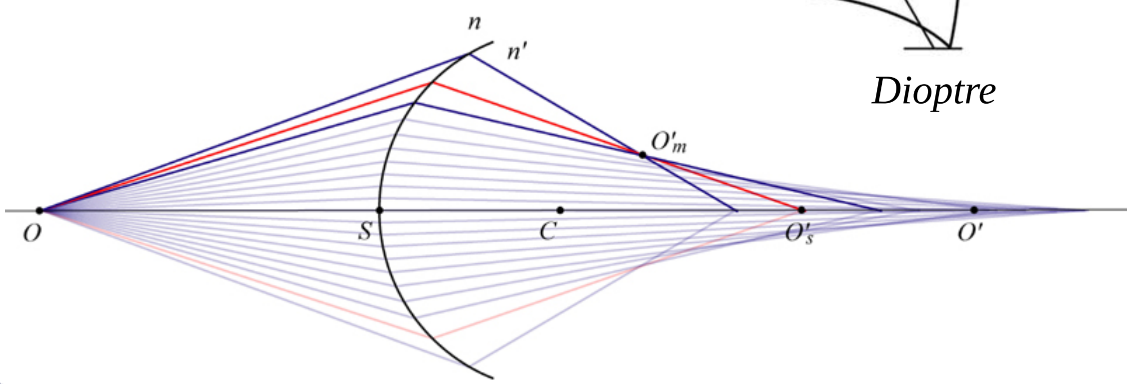
Aberracions dels sistemes òptics

Astigmatisme

- Els raigs paraprincipals pertanyents a la secció meridiana focalitzen en O'_m, coneguda com a **imatge meridiana** o **tangencial**.

- Els raigs paraprincipals pertanyents a la secció sagital focalitzen en O'_s, coneguda com a **imatge sagital**.

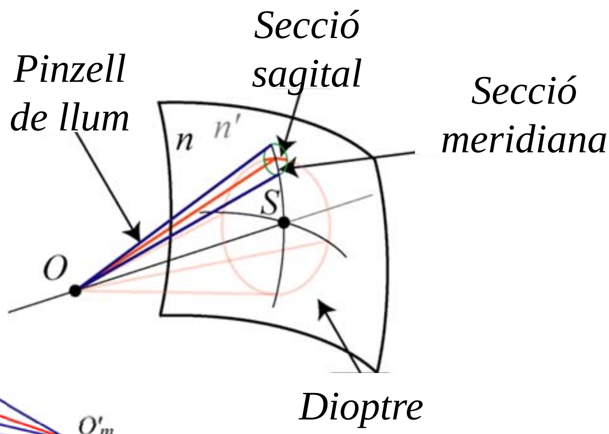


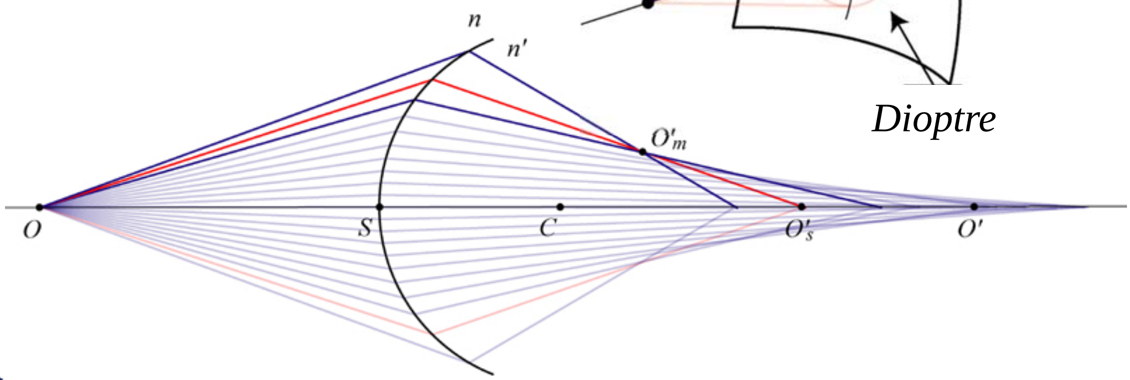


Aberracions dels sistemes òptics

Astigmatisme

- El fenomen de l'aparició de la imatge meridiana i la imatge sagital separades, anomenades genèricament **imatges astigmàtiques**, es denomina **astigmatisme radial**.
- La separació entre ambdues imatges es denomina **interval de Sturm**.





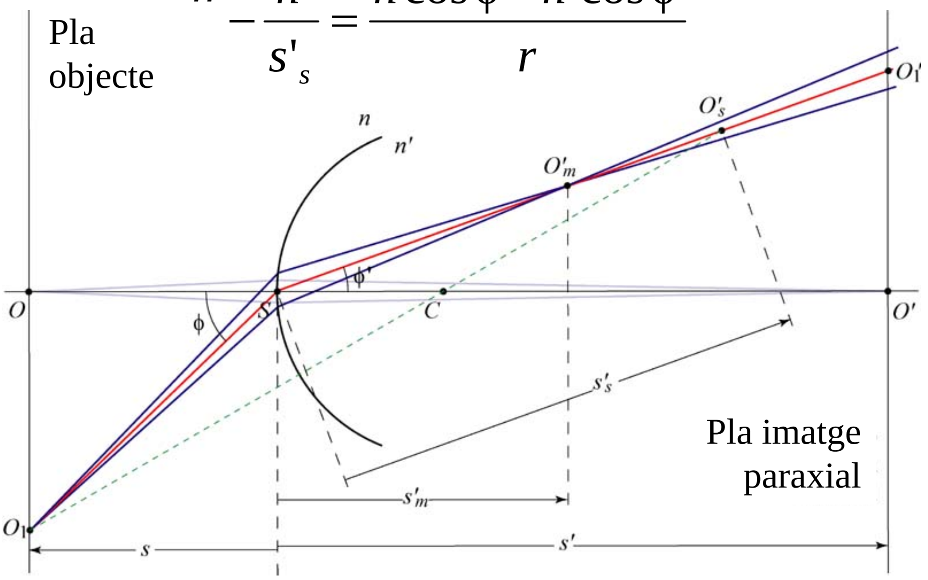
Aberracions dels sistemes òptics

Astigmatisme

- **Imatges astigmàtiques** en un dioptre esfèric.

$$\frac{n\cos^2\phi}{s} - \frac{n'\cos^2\phi'}{s'_m} = \frac{n\cos\phi - n'\cos\phi'}{r} \qquad\qquad \frac{n}{s} - \frac{n'}{s'} = \frac{n-n'}{r}$$

$$\frac{n}{s} - \frac{n'}{s'_s} = \frac{n\cos\phi - n'\cos\phi'}{r}$$

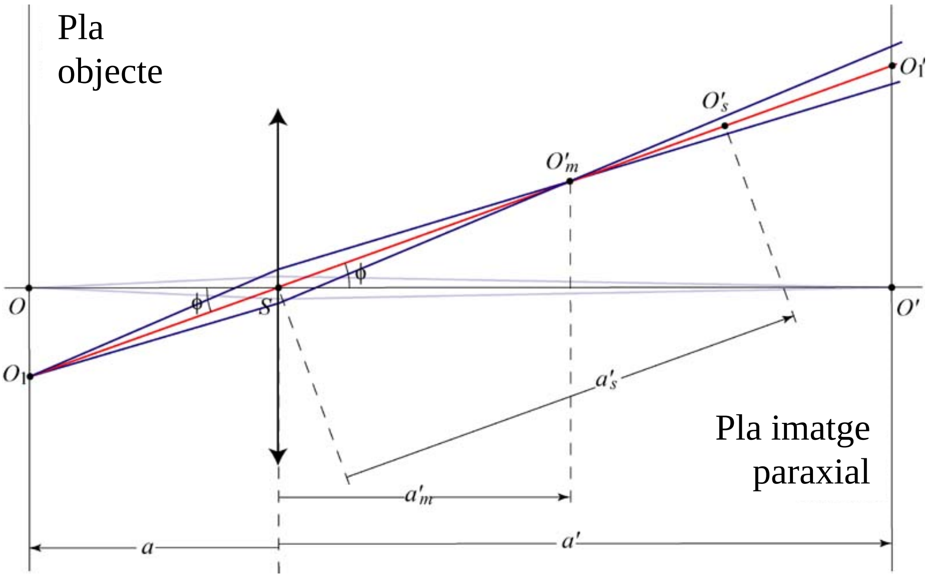


Aberracions dels sistemes òptics

Astigmatisme

- **Imatges astigmàtiques** en una lent prima.

$$-\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}=\frac{1}{f'}=(n-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$



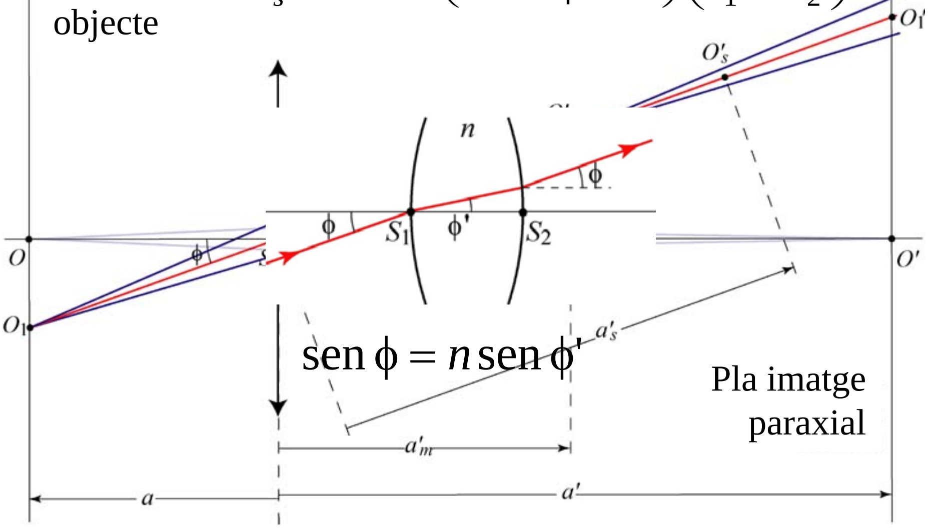
Aberracions dels sistemes òptics

Astigmatisme

- **Imatges astigmàtiques** en una lent prima.

$$-\frac{1}{a}+\frac{1}{a'_m}=\frac{1}{\cos\phi}\left(\frac{n\cos\phi'}{\cos\phi}-1\right)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$

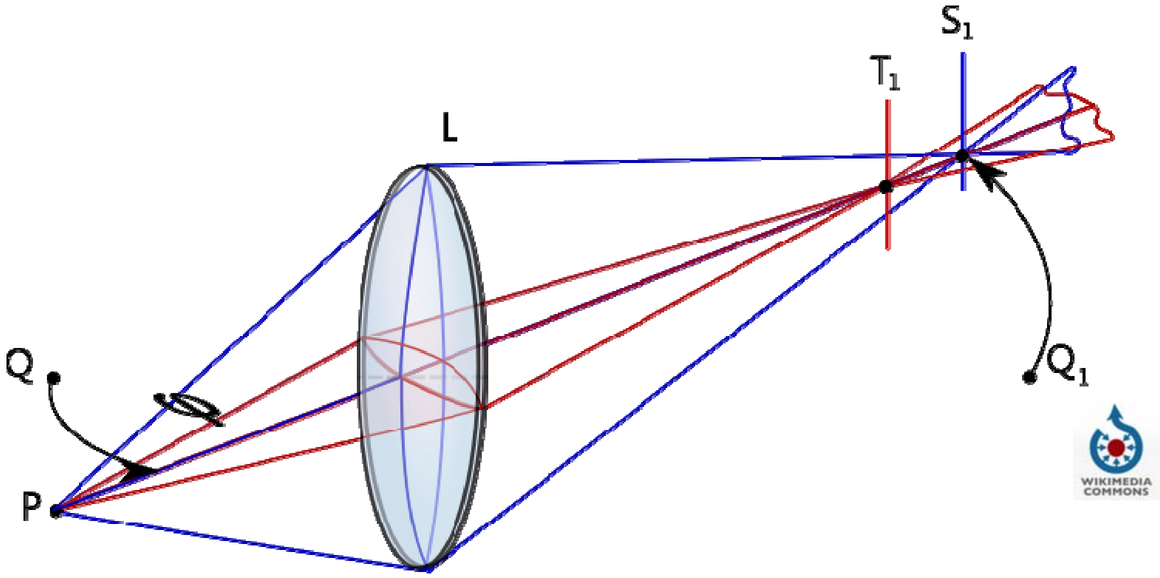
$$-\frac{1}{a}+\frac{1}{a'_s}=\cos\phi\left(\frac{n\cos\phi'}{\cos\phi}-1\right)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$



$$\operatorname{sen}\phi = n\operatorname{sen}\phi'$$

Aberracions dels sistemes òptics

Astigmatisme



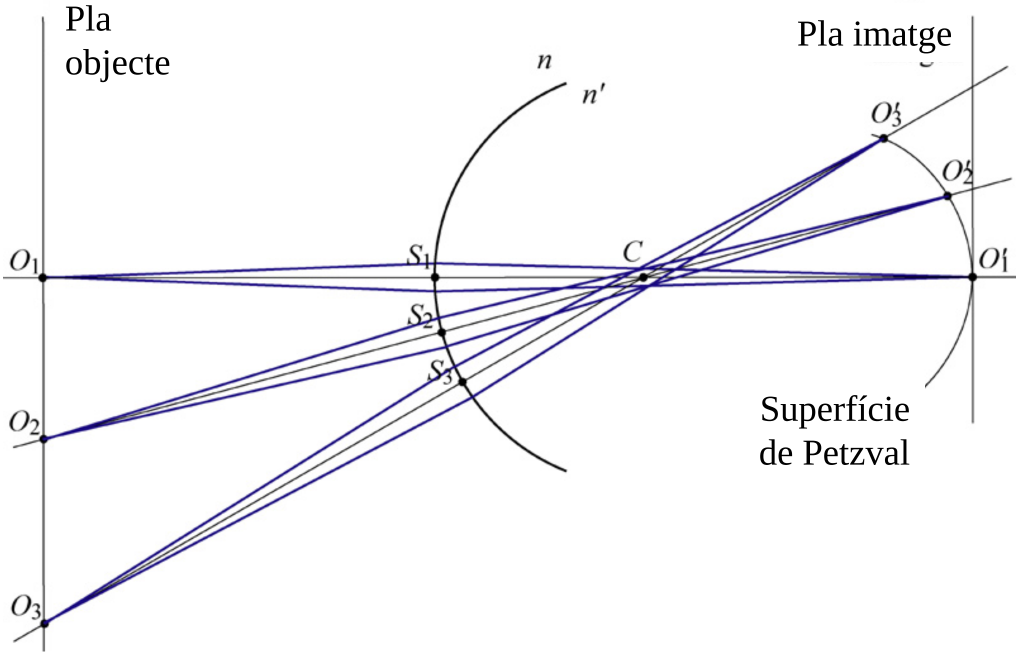
Tema VII. Aberracions dels sistemes òptics

- Introducció
- Aberració esfèrica
- Coma
- Astigmatisme
- Curvatura de la imatge
- Distorsió

Aberracions dels sistemes òptics

Curvatura de la imatge

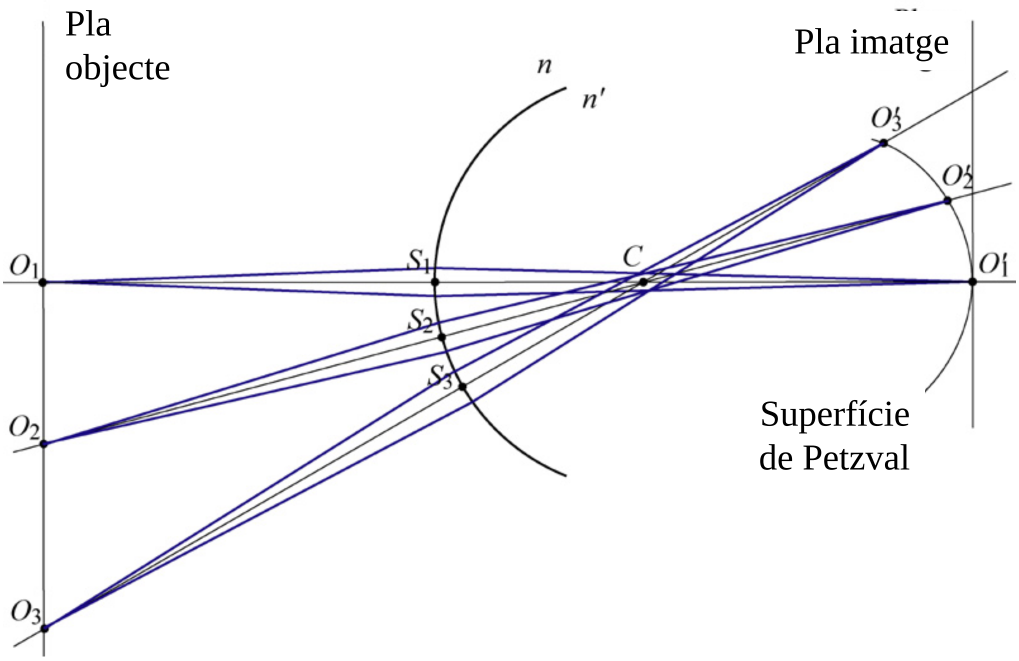
- Considerant els raigs que passen prop de *C*, la superfície imatge meridional i sagital es confonen en una única superfície anomenada **superfície imatge de Petzval**.



Aberracions dels sistemes òptics

Curvatura de la imatge

- El fet que la superfície imatge de Petzval no siga plana constitueix l'aberració coneguda com a **curvatura de la imatge**.



Tema VII. Aberracions dels sistemes òptics

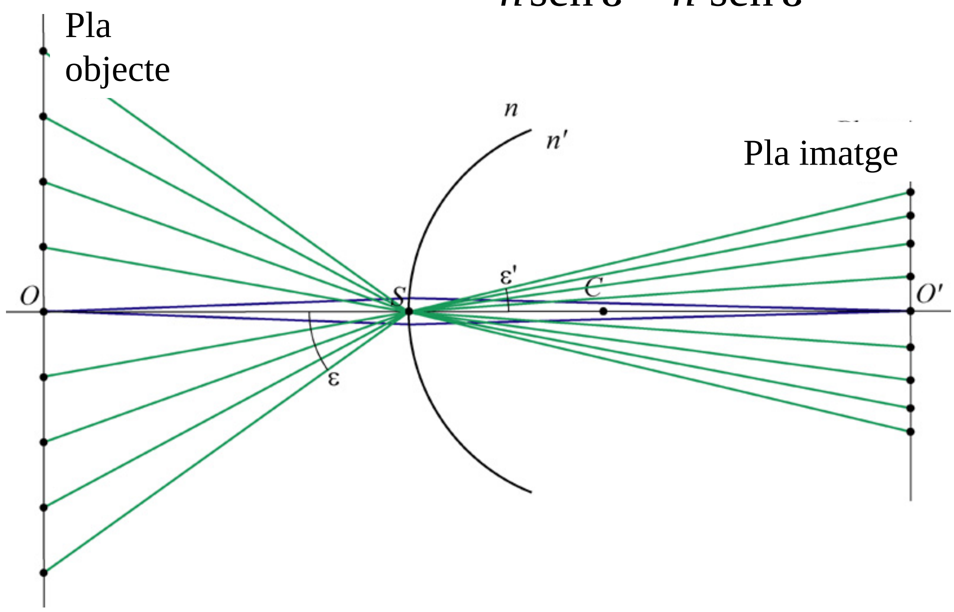
- Introducció
- Aberració esfèrica
- Coma
- Astigmatisme
- Curvatura de la imatge
- Distorsió

Aberracions dels sistemes òptics

Distorsió

- Considerant els raigs que passen prop de *S*, punts objecte equiespaciats produeixen punts imatge que no se situen a la mateixa distància.

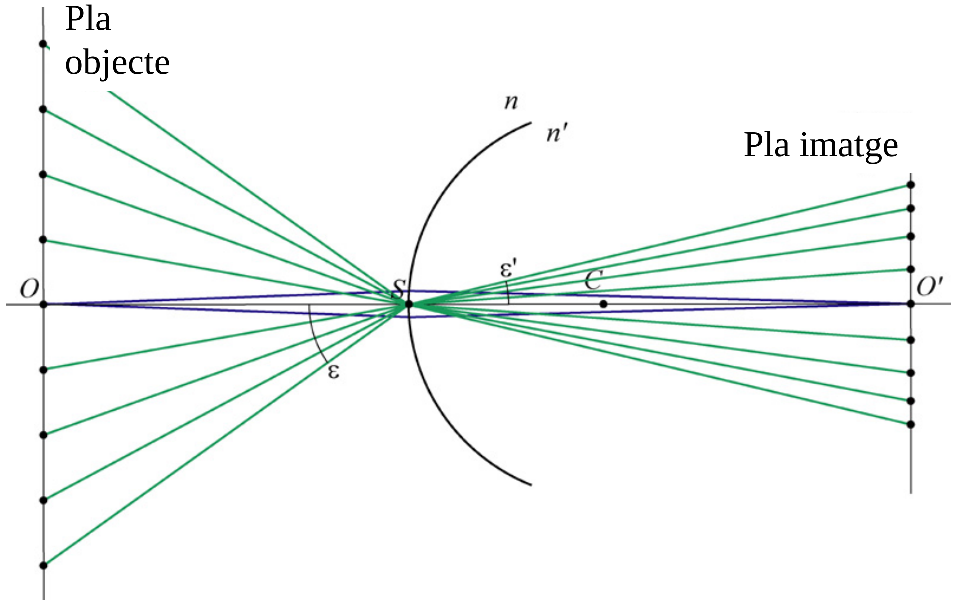
$$n \operatorname{sen} \varepsilon = n' \operatorname{sen} \varepsilon'$$



Aberracions dels sistemes òptics

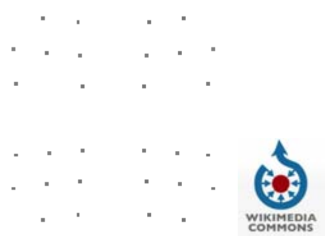
Distorsió

- La **distorsió** és una aberració que designa la condició per la qual un objecte pla produeix una imatge plana que, depenent de la seua distància a l'eix òptic, té una grandària lateral diferent.



Aberracions dels sistemes òptics

Distorsió



- La **distorsió de cotilla** té augments majors per punts extraaxials.
- La **distorsió de barril** té augments menors per punts extraaxials.