

# UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

DOCTORAT EN DIDÀCTIQUES ESPECÍFIQUES



## ESTUDIOS SOBRE EL ESTABLECIMIENTO DE ANALOGÍAS EN RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE CIENCIAS: EFECTOS DEL CONTEXTO, LA ESTRUCTURA Y LA FAMILIARIDAD CON LOS ENUNCIADOS

**TESIS DOCTORAL**

Presentada por:

CARLOS B. GÓMEZ-FERRAGUD

Director:

Dr. VICENTE SANJOSÉ

Universidad de Valencia

Co-Director:

Dr. JOAN JOSEP SOLAZ-PORTOLÉS

Universidad de Valencia

VALENCIA, 2014



# **Doctorado en Didácticas Específicas por la Universitat de València**

Vicente Sanjosé López, doctor en física y profesor titular de universidad a tiempo completo en el departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales y Sociales de la Universitat de València

Y

Joan Josep Solaz-Portolés, doctor en química y profesor asociado en el departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales y Sociales de la Universitat de València

## **CERTIFICAN**

- Que el presente trabajo titulado **“Estudios sobre el establecimiento de analogías en resolución de problemas de ciencias: efectos del contexto, la estructura y la familiaridad con los enunciados”** ha sido realizado bajo nuestra dirección por D. Carlos B. Gómez-Ferragud, y constituye su Memoria de Tesis Doctoral para optar al grado de doctor en Didácticas específicas por la Universitat de València (España).

Para que así conste, y en cumplimiento de la legislación vigente, presentamos esta memoria de Tesis Doctoral firmando el presente certificado en Valencia a 21 de Marzo de 2014.

Fdo.: Dr. Vicente Sanjosé

Fdo.: Dr Joan Josep Solaz-Portolés



# **Doctorado en Didácticas Específicas por la Universitat de València**

Vicente Sanjosé López, doctor en física y profesor titular de universidad a tiempo completo en el departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales y Sociales de la Universitat de València

Y

Joan Josep Solaz-Portolés, doctor en química y profesor asociado en el departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales y Sociales de la Universitat de València.

## **CERTIFICAN**

-Que D. Carlos B. Gómez-Ferragud es co-autor de todos y cada uno de los artículos publicados o aceptados para su publicación, compendiados en esta memoria, e incluidos en ella en los capítulos 3, 4, 5 6 y 7. Cada uno de estos capítulos incluye, íntegramente, un artículo publicado o aceptado para su publicación.

-Que D. Carlos B. Gómez Ferragud ha sido el autor principal en todos ellos y por tanto, los trabajos de elaboración de todos y cada uno –que implica el estudio de los antecedentes teóricos en las mejores revistas internacionales, el diseño y validación de materiales, el ajuste de los procedimientos de obtención de datos fiables, su vaciado y análisis, y la extracción de las conclusiones que se derivan- han servido para su formación como investigador, cumpliendo con los objetivos del Doctorado por la Universitat de València.

-Que todos y cada uno de los artículos publicados o aceptados para su publicación, compendiados en esta memoria son originales y no han sido utilizados por ninguno de sus autores en otros documentos ni tesis doctorales, ni para fines distintos de los descritos en la legislación.

-Que el material fotocopiado adjunto corresponde a la primera y última página de los artículos ya publicados en revistas especializadas, o bien a las cartas de aceptación de los artículos pendientes de publicación, todos ellos compendiados en esta memoria de tesis doctoral.

Para que así conste, y en cumplimiento de la legislación vigente, firmamos el presente certificado en Valencia a 21 de marzo de 2014.

Fdo.: Dr. Vicente Sanjosé

Fdo.: Dr. Joan Josep Solaz-Portolés



# Doctorado en Didácticas Específicas por la Universitat de València

Vicente Sanjosé López, doctor en física y profesor titular de universidad a tiempo completo en el departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales y Sociales de la Universitat de València

Y

Joan Josep Solaz-Portolés, doctor en química y profesor asociado en el departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales y Sociales de la Universitat de València.

**INFORMAN sobre la participación** de D. Carlos B. Gómez-Ferragud en la elaboración de las investigaciones y artículos de revistas especializadas compendiados en esta memoria de tesis doctoral.

1.-En cada uno de los artículos publicados o aceptados para su publicación, compendiados en esta memoria de tesis doctoral, D. Carlos B. Gómez Ferragud ha realizado las siguientes tareas:

- A.-Discusión con al menos uno de los directores de la tesis doctoral, de los objetivos principales de la investigación presente.
- B.-Estudio individual de las fuentes documentales especializadas que hayan abordado temáticas pertinentes, como revistas internacionales, libros y tesis doctorales. En todos los casos D. Carlos B. Gómez Ferragud ha consultado los catálogos, portales de difusión científica y bases de datos de reconocido prestigio internacional apropiados, como JCR, SSCI, ISI, ISOC, SCOPUS, DIALNET, RESH, INRECS, CIRC, Latindex, ULRICH's, MLA, DICE, ...
- C.-Determinación de las muestras experimentales más convenientes, en función de sus características y también de su accesibilidad respetando los códigos éticos, tras discusión con uno o ambos codirectores de la tesis doctoral.
- D.-Diseño y elaboración de materiales y/o instrumentos para la toma de datos, en interacción con uno o ambos directores de la tesis.
- E.-Conducción de las pruebas de validación de materiales e instrumentos, y posterior análisis de datos para determinar la conveniencia de modificaciones en interacción con uno o ambos directores.
- F.-Conducción del procedimiento de obtención de datos experimentales a partir de las muestras de sujetos.
- G.-Vaciado de los datos experimentales obtenidos, usando los medios e instrumentos adecuados, como Excel.
- H.-En colaboración con uno o ambos directores de la tesis, análisis de los datos obtenidos, tanto cualitativos como cuantitativos utilizando instrumentos adecuados, como SPSS.
- I.-En colaboración con los coautores de cada artículo, redacción del mismo, corrección y rescritura cuando procedió, tras las sugerencias de los revisores.

Para que así conste en cumplimiento de la legislación vigente y a los efectos oportunos, firmamos este documento en Valencia a 21 de marzo de 2014.

Fdo.: Dr. Vicente Sanjosé

Fdo.: Dr Joan Josep Solaz-Portolés





# Doctorado en Didácticas Específicas por la Universitat de València

Vicente Sanjosé López, doctor en física y profesor titular de universidad a tiempo completo en el departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales y Sociales de la Universitat de València

Y

Joan Josep Solaz-Portolés, doctor en química y profesor asociado en el departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales y Sociales de la Universitat de València.

**INFORMAN** sobre la **calidad de los artículos** publicados o aceptados para su publicación en revistas especializadas, compendiados en esta memoria de tesis doctoral, presentada por D. Carlos B. Gómez Ferragud.

## Artículos e indicadores de su calidad

1. Gómez, C. B., Solaz-portolés, J.J., & Sanjosé, V. (2012). Una revisión de los procesos de transferencia para el aprendizaje y enseñanza de las ciencias. *Didáctica de las Ciencias Experimentales y Sociales*, 26, 199-227.

Se trata de una revista categorizada como “**B**” por el CIRC (Clasificación Integrada de Revistas Científicas). Cumple los criterios **B1** y **B2**. Criterio **B1**: Revistas indexadas en el primer cuartil según promedio de citas de cualquiera de las categorías del Índice de impacto de las revistas españolas de ciencias sociales o del Índice de impacto de las revistas españolas de ciencias jurídicas (Grupo EC3). Se toma como referencia los impactos acumulativos de los últimos 5 años. En el RESH-2011 tiene un impacto acumulado de 0,356 que al sitúan en el 1er cuartil.

Criterio **B2**: Revistas indexadas en DICE (Difusión de las revistas españolas de ciencias sociales y humanas) (Grupo EPUB) y que cumplen con el requisito de contar con evaluación por expertos y además estar presentes en el Catálogo Latindex. Para ANEP/FECYT tiene también categoría “**B**” según DICE, y cumple 32 criterios Latindex de los 34 posibles.

2. Gómez, C.B., Solaz-Portolés, J.J., & Sanjosé, V. (2014). Dificultades para Codificar, Relacionar y Categorizar Problemas Verbales Algebraicos: dos estudios con estudiantes de secundaria y profesores en formación. Aceptado para su publicación en la revista *Bolema*.

En el CIRC (Clasificación Integrada de Revistas Científicas), se encuentra en la categoría “**A**” por el CIRC (Clasificación Integrada de Revistas Científicas). Cumple el criterio **A1**: Revistas indexadas en Social Sciences Citation Index (SSCI). Es una revista integrada en el Journal Citation Report (JCR).

3. Gómez-Ferragud, C.B., Solaz-Portolés, J. J., & Sanjosé, V. (2013). Efectos de la similitud superficial y estructural sobre la transferencia a

partir de análogos en problemas de alta y baja familiaridad: primeros resultados. *Enseñanza de las Ciencias*, 31 (1), 135-151.

En el CIRC (Clasificación Integrada de Revistas Científicas), se encuentra en la categoría “**A**” por el CIRC (Clasificación Integrada de Revistas Científicas). Cumple el criterio **AI**: Revistas indexadas en Social Sciences Citation Index (SSCI). Es una revista integrada en el Journal Citation Report (JCR).

4. Gómez-Ferragud, C.B.; Solaz-Portolés, J.J., & Sanjosé, V. (2013). Analogy Construction and Success in Mathematics and Science Problem-Solving: a Study with Secondary Students. *Revista de Psicodidáctica*, 18 (1), 81-108.

Es una revista categorizada como “**Ex**” por el CIRC (Clasificación Integrada de Revistas Científicas). Cumple el criterio **EXI**: revistas indexadas en el primer cuartil según el Impact Factor de cualquiera de las categorías del Journal Citation Reports (Thomson Reuters). En este caso, la categoría en el SSCI es “Psychology-Educational”.

5. Gómez-Ferragud, C.B., Solaz-Portolés, J. J., & Sanjosé, V. (2014). Efecto Pantalla y Efecto Sísifo: dos fenómenos didácticos en la resolución de problemas por transferencia analógica. Aceptado para su publicación en *Didáctica de las Ciencias Experimentales y Sociales*.

Se trata de una revista categorizada como “**B**” por el CIRC (Clasificación Integrada de Revistas Científicas). Cumple los criterios **B1** y **B2**. Criterio **B1**: Revistas indexadas en el primer cuartil según promedio de citas de cualquiera de las categorías del Índice de impacto de las revistas españolas de ciencias sociales o del Índice de impacto de las revistas españolas de ciencias jurídicas (Grupo EC3). Se toma como referencia los impactos acumulativos de los últimos 5 años. En el RESH-2011 tiene un impacto acumulado de 0,356 que al sitúan en el 1er cuartil.

Criterio **B2**: Revistas indexadas en DICE (Difusión de las revistas españolas de ciencias sociales y humanas) (Grupo EPUB) y que cumplen con el requisito de contar con evaluación por expertos y además estar presentes en el Catálogo Latindex. Para ANEP/FECYT tiene también categoría “**B**” según DICE, y cumple 32 criterios Latindex de los 34 posibles.

Para que conste a los efectos oportunos, firmamos este documento en Valencia a 21 de marzo de 2014.

Fdo.: Dr. Vicente Sanjosé

Fdo.: Dr Joan Josep Solaz-Portolés

---

**JUSTIFICACIÓN DE  
LAS PUBLICACIONES  
COMPENDIADAS EN  
ESTA TESIS  
DOCTORAL**

---



# *Una revisión de los procesos de transferencia para el aprendizaje y enseñanza de las ciencias*

**Carlos B. Gomez, Vicent Sanjosé y  
Joan Josep Solaz-Portolés**

Departament de Didàctica de les Ciències Experimentals i Socials  
Universitat de València

**Resumen:** En este trabajo se introduce el concepto de transferencia en el aprendizaje, se clasifican en sus diferentes tipos y se discute su importancia en la resolución de problemas de ciencias y matemáticas. Además se discute el papel de los procesos de transferencia y cómo se pueden mejorar en la enseñanza de las ciencias. A partir de todo ello, se recomiendan algunas medidas instruccionales que pueden ser aplicadas en el aula de ciencias.

**Palabras clave:** transferencia, resolución de problemas, enseñanza y aprendizaje de las ciencias.

**Abstract:** In this paper we introduced the concept of transfer in learning tasks, we classify the different types of transfer and we show its importance in problem-solving in science and mathematics. Moreover, it is brought out the role of transfer processes and how they can be improved in science teaching and in science problem-solving. Finally, a series of instructional measures that can be applied in the science classroom are recommended.

**Key Words:** transfer, problem-solving, science teaching and learning.

(Fecha de recepción: junio, 2012, y de aceptación: septiembre, 2012)

DOI: 10.7203/DCES.26.1934

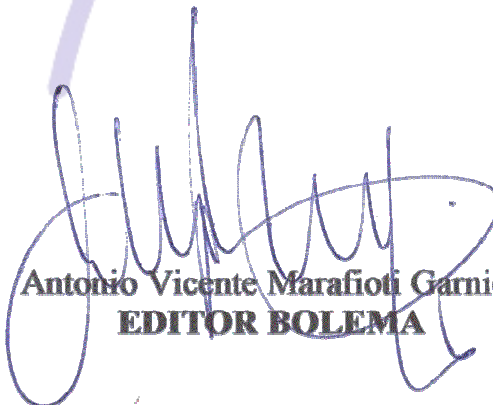
- VANLEHN, K. (1998). Analogy events: How examples are used during problem solving. *Cognitive Science*, 22, 347-388. [http://dx.doi.org/10.1207/s15516709cog2203\\_4](http://dx.doi.org/10.1207/s15516709cog2203_4)
- VOSS, J.F. (1987). Learning and transfer in subject-matter learning: a Problem-solving model. *International Journal of Educational Research*, 11, 607-622. [http://dx.doi.org/10.1016/0883-0355\(87\)90005-X](http://dx.doi.org/10.1016/0883-0355(87)90005-X)
- VOSNAIDOU, S. & ORTONY, A. (1989). Similarity and analogical reasoning: A synthesis. In S. Vosnaidou & A. Ortony (Eds.), *Similarity and analogical reasoning* (pp 1-17). Cambridge: Cambridge University Press. <http://dx.doi.org/10.1017/CBO9780511529863>
- WARNAKULASOORIYA, R., & PRITCHARD, D. E. (2005). Learning and problem-solving transfer between physics problems using webbased homework tutor. *EdMedia Conference Proceedings*.
- WESMAN, A. G. (1945). A study of transfer of training from high school subjects to intelligence. *Journal of Educational Research*, 39, 254-264.
- WILLIAMS, W. H., PAPIERNO, P. B., MAKEL, M. C., & CECI, S. J. (2004). Thinking like a scientist about real-world problems: The Cornell Institute for Research on children science education program. *Applied Developmental Psychology*, 25, 107-126. <http://dx.doi.org/10.1016/j.appdev.2003.11.002>
- ZOLLER, U., LUBEZKY, A., NAKHLEH, M. B., TESSIER, B., & DORI, Y. J. (1995). Success on algorithmic and LOCS vs. conceptual chemistry exam questions. *Journal of Chemical Education*, 72, 987-989. <http://dx.doi.org/10.1021/ed072p987>

**DECLARAÇÃO DE ACEITE**

O artigo intitulado **Dificultades para Codificar, Relacionar y Categorizar Problemas Verbales Algebraicos: dos estudios con estudiantes de secundaria y profesores en formación**, de autoria de Carlos B Gómez, Juan Jose Solaz-Portolés y Vicente Sanjosé, foi aprovado para ser publicado no *BOLEMA (Boletim de Educação Matemática)*, em edição futura, ainda neste ano de 2014.

O *Boletim de Educação Matemática* está indexado pelo ISI-JCR-Web of Knowledge e participa de distintas bases de dados, como o SciELO e o SCOPUS. Maiores informações sobre indexadores e bases de dados poderão ser obtidas pelo *site* <http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema>. No mesmo *site* é possível ter acesso integral às edições já publicadas.

Cordialmente



**Antonio Vicente Marafioti Garnica**  
**EDITOR BOLEMA**

Rio Claro, Janeiro de 2014





# EFECTOS DE LA SIMILITUD SUPERFICIAL Y ESTRUCTURAL SOBRE LA TRANSFERENCIA A PARTIR DE ANÁLOGOS EN PROBLEMAS DE ALTA Y BAJA FAMILIARIDAD: PRIMEROS RESULTADOS

EFFECTS FROM SURFACE AND STRUCTURAL SIMILARITY IN ANALOGICAL TRANSFER IN HIGH AND LOW FAMILIARITY PROBLEMS: FIRST RESULTS

Carlos B. Gómez  
*Didáctica de las Ciencias Experimentales, Florida Universitaria*

Joan Josep Solaz-Portolés  
*Didáctica de las Ciencias Experimentales, Universitat de València*  
joan.solaz@uv.es

Vicente Sanjosé  
*Didáctica de las Ciencias Experimentales, Universitat de València*

**RESUMEN:** Se desarrollan dos estudios exploratorios para analizar el éxito en la transferencia en resolución de problemas a partir de análogos. Las diferentes analogías entre problemas «ejemplo» y «propuestos» se suponen construidas a partir de dos variables: la superficie y la estructura. Los resultados muestran que cuando los contextos de los problemas son familiares para los estudiantes, las analogías superficiales pueden ocultar las diferencias estructurales. Sin embargo, cuando los contextos de los problemas son no familiares para los estudiantes, el único efecto significativo procede de la igualdad/diferencia estructural. El efecto global de la familiaridad de los problemas es una reducción sistemática del éxito en la transferencia en problemas no familiares, sea cual sea la relación entre problema «ejemplo» y problema «propuesto».

**PALABRAS CLAVE:** resolución de problemas algebraicos con enunciado, transferencia, similitud superficial, similitud estructural, familiaridad con el contexto.

**ABSTRACT:** Two exploratory studies were conducted in order to analyze the level of success in problem-solving transfer processes. Analogies between a «source» problem and different «target» problems were established through their Surface and Structural features. Results showed that when the context of the problems is familiar for students then Surface similarities can hide Structural differences. However, when the context of the problems is not familiar for students, the only significant effect came from the equal/different Structures. «Familiarity» with the context of the problems caused a global and systematic effect: non-familiar problems achieved lower success than familiar problems, no matter the relationship between source and target problems.

**KEYWORDS:** algebraic word problem-solving; transfer; surface similarity; structural similarity; context familiarity

Fecha de recepción: diciembre 2010 • Aceptado: octubre 2012

Gómez Ferragud, C., Solaz, J.J. y Sanjosé, V. (2013). Efectos de la similitud superficial y estructural sobre la transferencia a partir de análogos en problemas de alta y baja familiaridad: primeros resultados. *Enseñanza de las Ciencias*, 31 (1), pp. 135-151

# EFFECTS FROM SURFACE AND STRUCTURAL SIMILARITY IN ANALOGICAL TRANSFER IN HIGH AND LOW FAMILIARITY PROBLEMS: FIRST RESULTS

Carlos B. Gómez

Didáctica de las Ciencias Experimentales, Florida Universitaria

Joan Josep Solaz-Portolés

Didáctica de las Ciencias Experimentales, Universitat de València

joan.solaz@uv.es

Vicente Sanjosé

Didáctica de las Ciencias Experimentales, Universitat de València

In a typical problem-solving instruction, teachers solve a set of example problems ('source problems') involving basic principles, laws or theorems and then they propose analogous problems ('target problems') to be solved by students. Thus, most of these target problems can be solved by analogical transfer. According to Gentner theory (1983), transfer starts with the construction of an analogy between the target and the source problems. In this work we studied 10<sup>th</sup>-year students' success in science and mathematics problem solving based on the establishment of analogies between example problems. We studied word problems involving two linear equations. These problems are very common in Secondary subject matters of mathematics, physics and chemistry.

'Surface' and 'Structure' have been defined as essential components in word problems (Holyoak, 1984). 'Surface' describes the problematic situation in the real-world context and refers to the concrete objects and facts in non-abstract terms. In problems of algebraic nature, 'Structure' is determined basically by "how the quantities are related to each other rather by what the quantities are" (Novick, 1988, p. 511). In the algebraic problems considered here the equations summarize the relations among the quantities. Therefore, the analogy between problems can be constructed in terms of their superficial similarity and/or their structural similarity (Reed, 1987).

Additionally, we analyzed the effect that the students' familiarity with the subject matter (or context) of the problems had on the analogies between source and target problems. Obviously, 'Familiarity' is related to the Surface but not to the Structure component of our problems. We considered two levels for the Familiarity factor: in the high Familiarity condition, the statements of the problems included daily life situations and objects. In the low Familiarity condition, the statements of the problems implied science phenomena which were not yet studied by the participants. We elaborated two versions for each of the source and target problems, according to the low and high Familiarity conditions. A couple of low/high Familiarity problems differed only in the objects and situations mentioned in their statements, but not in their Structures.

Students were placed at random in the low or in the high Familiarity condition. In each Familiarity conditions, we delivered a booklet to each participant containing the instructions and five problems (all of them in the same Familiarity level): one 'source' problem, full solved and explained, and four 'target' problems to be solved. Each of the target problems had a particular relationship with the source problem, according to the following Table:

Table 1.  
Relationship between problems according to their structural and surface similarity or difference.

		Surface	
		Same	Different
Structure	Same	Equivalents	Isomorphs
	Different	Similar	Different

We performed different 2X2X2 mixed ANOVA to contrast the effects on the success solving the target problems, from the within-subjects factors (equal/different Surface X equal/different Structure) and from the between-subject factor (high/low Familiarity). The main effect of the Structure factor was significant ( $F(1,27) = 9,83; p = ,004$ ) but the Surface factor was not significant ( $p > ,05$ ). More interesting was the significant Surface X Structure interaction effect ( $F(1,27) = 13,33; p = ,001$ ) pointing out that the 'Similar' problem obtained the lowest success in the students' determination of the correct equations to solve it. This result suggests that structural differences between problems could be hidden by surface similarities. This effect was found by Chi *et al.* (1981) in novice subjects when they classified problems by its statements and not by their science structure.

The 'Familiarity' factor did not reach significance, probably due to the limited sample size. Nevertheless, students in the low Familiarity condition obtained a systematic lower success in the four target problems than students in the high Familiarity condition. Thus, this effect has to be investigated in future studies.

Structural analogies between problems are not as evident as some teachers consider (Oliva, 2004). Surface analogies are easier to construct than the structural ones. Novice students would be concerned by the first ones and to devote cognitive resources to them. Some people are not 'field independent' (Witkin *et al.*, 1977; Tsaparlis & Angelopoulos, 2000) and so they could find difficulties to keep apart surface, irrelevant features and to focus on important, structural ones. It seems important to increase efforts teaching students to abstract problem-schemata in which only crucial features are preserved.

Results also suggested that people need to elaborate mental model of the situation in the ordinary world before constructing the scientific mental model for this situation. Thus, a low familiarity with objects or situations can impede problem solving success.

## **Analogy Construction and Success in Mathematics and Science Problem-Solving: a Study with Secondary Students**

Carlos B. Gómez-Ferragud, Joan J. Solaz-Portolés, and Vicente Sanjosé  
Universitat de València

### Abstract

We conducted an empirical study to analyse the association between students' perception of surface and structural analogies among problems, and their algebraic success. Algebraic success was measured by the equations selected to solve each problem. Different surface and structural relationships between one source problem and four target problems were considered. We also considered high (daily life) and low (scientific) familiarity contexts for the problems. Similarities and differences between the source and each target problem were explicitly asked to students. Results showed a significant correlation between detecting the correct structural relation between these problems and selecting the correct equations to solve the target ones. Low familiarity (science) problems obtained lower success independently of other factors. Usual teaching procedures, based on isomorphism, could increase the probability that students consider isomorphism the only possible relationship between problems.

*Keywords:* Problem-solving, analogies, surface and structure, familiarity, transfer.

### Resumen

Se desarrolla un estudio empírico con estudiantes de Secundaria para analizar la asociación entre detectar las analogías superficiales y estructurales entre problemas, y el éxito algebraico medido a través de las ecuaciones seleccionadas para resolverlos. Se consideraron distintas relaciones superficiales y estructurales entre un problema fuente y cuatro problemas diana. Se consideraron problemas con temáticas de alta (vida diaria) o baja familiaridad (ciencia). Se pidió a los estudiantes comparar el problema fuente con cada problema diana para establecer las similitudes y diferencias entre ellos. Los resultados mostraron una correlación significativa entre detectar correctamente la relación estructural entre problemas y elegir las ecuaciones correctas para resolverlos. El éxito fue menor en los problemas de baja familiaridad (ciencias) independientemente de otros factores. La enseñanza habitual basada en la isomorfía podría incrementar la probabilidad de que los estudiantes considerasen este tipo de relación como la única posible entre problemas.

*Palabras clave:* Resolución de problemas, analogías, superficie y estructura, familiaridad, transferencia.

Correspondence: Joan Josep Solaz-Portolés, Departament Didàctica de les Ciències Experimentals i Socials, Universitat de València, Av Tarongers 4, 46022-Valencia. E-mail: joan.solaz@uv.es

Carlos Gómez Ferragud is graduated in Environmental Sciences and has obtained a Master in Science Education at the University of València (Spain). He is developing his doctoral dissertation on problem-solving in science and mathematics.

Joan Josep Solaz-Portolés is PhD in Chemistry by the University of Valencia (Spain). He is a Secondary Teacher and also Assistant Professor in the Experimental and Social Sciences Education department at this University. His research work focuses on problem-solving and also on reading comprehension of science texts. He has published many academic papers on these topics.

Vicente Sanjosé López is PhD in Physics by the University of Valencia (Spain). He is a Associate Professor in the Experimental and Social Sciences Education department at this University. He develops his research activity on the psychological basis of Didactics. He has published academic papers on reading comprehension of science information, comprehension monitoring and problem-solving in science and mathematics.

Received date: 09-05-2012

Review date: 28-05-2012

Accepted date: 24-07-2012

Rafael Valls Montés, profesor Catedrático de la Universitat de València y director de la revista DIDÁCTICA DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES Y SOCIALES,

CERTIFICA QUE

Los profesores Carlos B. Gómez; Joan Josep Solaz-Portolés y Vicente Sanjosé son los coautores del artículo

"Efecto pantalla y efecto Sísifo: dos fenómenos didácticos en la resolución de problemas por transferencia analógica", que ha sido ya aceptado por los revisores externos de dicha revista y de su Consejo editorial para que se publique en el número 28 de la misma durante el año 2014

Esta revista goza de una amplia difusión académica en muchos países europeos e iberoamericanos. Igualmente está indexada en los índices de impacto más importantes de España e Iberoamérica (INRECS, ISOC, DICE, DIALNET, LATINDEX, etc).

Para que conste a los efectos oportunos, firmo la presente certificación en Valencia, a 25 de marzo de 2014.



(Fdo.: Rafael Valls Montés)





## *Dedicatoria*

*“Si alguien no consigue aprender de la forma en la que le enseñas, quizá deberías intentar enseñarle de alguna forma en la que el aprenda”.*

Esta tesis está dedicada a mis padres. Si he aprendido de alguien es de vosotros, de vuestro esfuerzo, de vuestro sacrificio y de vuestro amor incondicional... las mejores personas, los mejores maestros.

También quiero dedicarla a mis otros 'grandes maestros', esos que se preocuparon por mí en los diversos contextos de aprendizaje, esos que se estrujaron los sesos para ayudarme a aprender y que me hicieron creer en mí mismo, esos que me trasladaron su pasión por aquello que enseñaban a la vez que me transmitían la pasión por enseñar.





# Agradecimientos

El proceso de formación de un investigador es una tarea tan emocionante como intensa. Son muchos los años de trabajo y son muchos los recursos, tanto materiales como emocionales, los necesarios para aprender el oficio de investigador, tanto, que sin guías y apoyos sería imposible lograrlo de forma satisfactoria. Los compañeros del viaje son los que hacen que este sea fascinante.

Agradezco en primer lugar y enormemente la labor del Dr. Vicente Sanjosé López. El mejor guía de los posibles, un compañero intachable y una motivación para seguir adelante día a día. Quiero agradecerle el haber confiado en mí y el haberme apoyado permanentemente. Le agradezco inmensamente el incontable tiempo de trabajo invertido en mi formación. Le agradezco muchísimo, los ánimos, que han sido muchos, en los momentos de decaimiento, y en fin, todo. Le agradezco el haberme enseñado tanto, en el terreno académico y en el humano. Como dicen los ‘Flamencos’, y los ‘Rockeros’: un verdadero ‘Maestro’ en su arte, el arte de investigar.

Agradezco al Dr. Joan Josep Solaz Portolés todo su apoyo incondicional, la motivación permanente y el conocimiento transmitido. Mi otro gran guía y compañero de viaje. Le agradezco la paciencia y la inmensa cantidad de horas invertidas en enseñarme a dar forma a las cosas, a pensar de forma estructurada, a ser pragmático, a escribir, a leer y a navegar por el fascinante mundo de las publicaciones científicas. Le agradezco el haberme enseñado a detenerme y a pensar. Gracias por todo Juanjo.

Agradezco a todos y cada uno de mis compañeros de Florida Universitaria sus ánimos. En especial doy las gracias a Loli Soto por confiar en mí y apoyarme cuando realmente lo necesitaba, y por creer en mi formación investigadora. Todas estas personas han hecho posible que crezca como docente en un ambiente amigable. Grandes compañeros, grandes amigos, grandes personas. Por todos los ánimos, el apoyo y la motivación, por todo eso y mucho más, muchísimas gracias.

Agradezco a todo el departamento de didáctica de las ciencias experimentales y sociales de la Universitat de València la formación recibida durante los años de Máster y el darme un lugar en el que aprender y crecer como docente y como investigador.

Agradezco al Dr. Carlos Caurín todo el apoyo recibido de forma general, y en particular toda la ayuda proporcionada para poder trabajar con sus estudiantes con todas las comodidades posibles.

Agradezco a todo el departamento de didáctica de las matemáticas de la Universitat de València el trato recibido durante todos estos años. Especialmente a José Eugenio Alós, Pepa Monte, el Dr. David Arnau y el Dr. Alejandro Fernández, por alegrarme los días duros con sus ánimos, su café y su conversación.

Quiero agradecer también a todos los profesores del departamento de didáctica de las matemáticas que se involucraron en la investigación, permitiéndome entrar en sus aulas para obtener los datos necesarios. De forma especial le doy las gracias a la profesora Teresa Navarro y al IES Veles e Vents de Torrent, por el apoyo recibido durante las últimas y complejas fases de la investigación. Tanto la profesora Teresa como el resto del equipo del centro me trataron tan bien que la delicadeza de la prueba a realizar se difuminó y salió todo perfecto.

No olvido a Tomás Queralt, Tomás Pardo, Iván Castanón, José F. Juan García, Onofre Monzó, Mauricio Contreras, Abilio Orts y Miguel Ángel García. Sin todos vosotros/as este trabajo no hubiera sido posible.

Gracias a Vicente Castelló y Antonio Moreno, dos grandes profesores de educación Secundaria y buenos amigos, que me permitieron entrar en sus aulas ‘como elefante en cacharrería’ para poder llevar a cabo la investigación.

Han sido importantes mis compañeros de café, alegrías y suspiros en la Universidad de Valencia, Ángela Gómez y Javier Verdugo, a quien debo momentos maravillosos, rebuscados entre las horas de trabajo. Ellos comprenden perfectamente lo difícil que ha sido todo esto.

En el terreno personal también son muchas las personas necesarias para que un trabajo de este nivel salga adelante. Estas personas muestran su apoyo sin estar

directamente relacionadas con la profesión o la tarea y por ello, su esfuerzo en comprender la situación es mucho mayor.

A mi padre, el Dr. Bernardo Gómez Alfonso, también profesor, por ser el ejemplo perfecto dentro del mundo académico, pero sobre todo, en el terreno personal. Por los consejos y las palabras, por haber tenido que aguantar tantas cosas y haber tenido tanta paciencia a lo largo de los años, por todas las horas que pasó sentado a mi lado enseñándome a aprender, por transmitirme los valores, el tesón y la pasión por la enseñanza, por ofrecerse siempre a todo y por apoyarme en todas y cada una de mis decisiones de forma incondicional. Por darme tanto siempre a cambio de nada, le agradezco muchísimo el haber estado tan cerca todo este tiempo.

A mi madre, Vicenta José Ferragud Caballero, mi compañera del alma, mi ángel de la guarda y mi confidente. Sin ella ni esto ni nada hubiera sido posible. Por tantísimas cosas y tanto esfuerzo, por los momentos en los que no he sabido andar, perdido, y ella siempre ha encontrado el mejor camino, por la tolerancia, la bondad y el corazón. Por darme tanto siempre a cambio de nada, le agradezco enormemente el haber estado tan cerca todo este tiempo.

A mi hermano, Alfons Gómez Ferragud, por soportarme, ser mi compañero y ser mi amigo.

A Álex mi mejor estudiante, y a Ester mi mejor 'madre de estudiante', por enseñarme a creer que para aprender sólo hacen falta ganas y entusiasmo.

A todos los componentes del grupo 'Capitán blues' y de la orquesta 'La Patrulla'. Los primeros por darme una familia y esperarme todo este tiempo y a los segundos por darme un hogar y un trabajo en tiempos difíciles. Gracias a todos por creer en mí y haber sido, de entre todos los posibles, los mejores compañeros de gira.

A todos y cada uno de mis amigos y amigas. Yo siempre me he sentido muy amigo de mis amigos/as y muy afortunado de tenerlos en el camino. Sois muchos y muchas, todos/as aquellos que habéis estado en mi vida, que considero muy importantes para mí y que en estos últimos años no os he podido hacer todo el caso que me hubiera gustado. A todos y todas, gracias por haber estado ahí siempre, a pesar de las inclemencias del tiempo.



# ÍNDICE

## Página

<b>Capítulo 1: Planteamiento del Problema de Investigación</b>	1
1.1 Introducción	3
1.2 Preguntas y objetivos de investigación	6
1.3 Interés y oportunidad de la investigación	10
1.4 Enfoque, ámbito y limitaciones de esta investigación	12
1.5 Estructura y organización de la tesis	15
Bibliografía	19
<b>Fundamentación Teórica</b>	25
<b>Capítulo 2: La Resolución de Problemas de Ciencias y Matemáticas</b>	27
2.1 ¿Qué se entiende por resolución de problemas?	31
2.1.1 Resolución de problemas y metodología instruccional	33
2.2 Procesos e instrumentos cognitivos implicados en la comprensión y resolución de problemas	36
2.2.1 Memoria a largo plazo, memoria de trabajo y resolución de problemas	37
2.2.2 Esquemas y resolución de problemas	40
2.2.3 Modelos mentales y resolución de problemas	48

2.3 Variables a considerar en la resolución de problemas	52
2.3.1 Variables relacionadas con el sujeto que resuelve un problema	54
2.3.2 Variables de los problemas	63
2.3.3 Variables relacionadas con el contexto de resolución del problema	69
2.4 Resumen del capítulo	71
Bibliografía	73
<b>Capítulo 3: Una Revisión de los Procesos de Transferencia para el Aprendizaje y Enseñanza de las Ciencias.</b>	91
3.1 Introducción	94
3.2 Objetivos	95
3.3 Transferencia y aprendizaje: una revisión histórica en las teorías e investigaciones sobre el aprendizaje	96
3.4 Transferencia y resolución de problemas	104
3.5 Transferencia y enseñanza de las ciencias	111
3.6 Implicaciones para la enseñanza de las ciencias	117
Bibliografía	119

<b>Estudios Empíricos</b>	131
<b>Capítulo 4: Dificultades para Codificar, Relacionar y Categorizar Problemas Verbales Algebraicos: Dos Estudios con Estudiantes de Secundaria y Profesores en Formación.</b>	133
4.1 Introducción	137
4.1.1 El proceso de transferencia	138
4.1.2 Factores característicos de un problema verbal	139
4.1.3 La tarea de agrupación de problemas y las analogías	141
4.1.4 Objetivos	142
4.2 Método	143
4.3 Resultados y discusión	148
4.3.1 Estudio 1: Percepción de analogías entre problemas de ciencias por estudiantes de Secundaria	148
4.3.2 Estudio 2: efectos de la Familiaridad y del Nivel educativo sobre las dificultades para construir analogías entre problemas.	152
4.4 Conclusiones	155
Referencias Bibliográficas	157
Anexo del artículo	162

<b>Anexo I: Materiales y producciones de los estudiantes correspondientes al capítulo 4</b>	163
I.1 Prueba de conocimiento previo	165
I.2 Producciones de los estudiantes	167
I.3 Materiales utilizados en la prueba de agrupación en la condición de ‘Alta Familiaridad’	169
I.4 Materiales utilizados en la prueba de agrupación en la condición de ‘Baja Familiaridad’.	173
I.5 Producciones de los estudiantes	175
<b>Capítulo 5: Efectos de la Similitud Superficial y Estructural sobre la Transferencia a Partir de Análogos en Problemas de Alta y Baja Familiaridad: Primeros Resultados</b>	179
5.1 Introducción y marco teórico	183
5.2 Método	188
5.3 Resultados y discusión	191
5.3.1 Estudio 1 (familiaridad Alta).	191
5.3.2 Estudio 2 (Familiaridad Baja)	193
5.3.3 Análisis conjunto. Efectos del factor familiaridad	194



5.4 Conclusiones	196
5.5 Implicaciones didácticas	198
Bibliografía	201
Anexo del artículo	205
<b>Capítulo 6: Analogy Construction and Success in Mathematics and Science Problem-Solving: a Study with Secondary Students</b>	207
6.1 Introduction	211
6.1.1 Goals and hypotheses	216
6.2 Method	217
6.3 Results	223
6.3.1 Structural similarities and differences by students	223
6.3.2 Familiarity and instructional effects on the equations	223
6.3.3 Effects from surface and structural similarities on the equations	224
6.3.4 Relationship between structural comparison and correct equations	225
6.3.5 Surface interferences in the detection of structural similarities	229
6.4 Discussion	230
References	236
Appendix	240

<b>Anexo II: Materiales y producciones de los estudiantes correspondientes a los capítulos 5 y 6.</b>	245
II.1 Materiales utilizados en la prueba de transferencia. Condición de Alta Familiaridad	247
II.2 Materiales utilizados en la prueba de transferencia. Condición de Baja Familiaridad	253
II.3 Producciones de los estudiantes	255
<b>Capítulo 7: Efecto Pantalla y Efecto Sísifo: dos Fenómenos Didácticos en la Resolución de Problemas por Transferencia Analógica</b>	257
7.1 Introducción	260
7.2 Método	263
7.3 Estudio de casos	268
7.3.1 Caso MLP: ‘Efecto Pantalla’, o imposibilidad de apreciar las diferencias estructurales entre problemas, a causa de sus similitudes superficiales.	268
7.3.2 Caso SuperMario64: ‘Efecto Sísifo’, o de retorno del sujeto al uso de criterios superficiales inapropiados, tras haber avanzado en la elaboración de criterios estructurales.	271
7.4 Discusión de los casos	274
7.5 Conclusiones y reflexiones didácticas	275
Referencias Bibliográficas	278
Anexo Artículo	281

<b>Capítulo 8: Effects of Topic Familiarity on Analogical Transfer in Problem-Solving: a Think-Aloud Study of Two Singular Cases</b>	283
8.1 Introduction: Problem-solving by transfer	286
8.1.1.-Problem features and its interaction with solvers: familiarity, surface and structure.	287
8.1.2 The present study	289
8.2 Method	289
8.3 Cases study and discussion	293
8.4 Final comments	302
References	303
Appendix	307
<b>Anexo III: Materiales y entrevistas correspondientes a los capítulos 7 y 8.</b>	309
III.1 Materiales utilizados durante las entrevistas en la condición de ‘Alta Familiaridad’	311
III.2 Materiales utilizados durante las entrevistas en la condición de ‘Baja Familiaridad’	317
III.3 Protocolo de actuación durante las entrevistas: segmentos de información invariables	319
III.4. Autorización para realizar grabaciones de video	323

III.5 Transcripciones de algunas de las entrevistas grabadas en video	324
<b>Capítulo 9: Conclusiones Generales. Problemas abiertos y Futuro de la Investigación</b>	349
9.1 Conclusiones generales	355
9.2 Problemas abiertos y futuro de la investigación	379
Bibliografía	382

# Capítulo 1

## Planteamiento del Problema de Investigación

---



# 1. Planteamiento del Problema de Investigación

## 1.1 Introducción

**E**l trabajo de investigación que se presenta se enmarca en el programa de doctorado en Didácticas Específicas de la *Universitat de València*, dentro del itinerario de Investigación en Didáctica de las Ciencias Experimentales.

Por tanto, el trabajo corresponde al proceso formativo como investigador, propio de los doctorados.

Antes de entrar de lleno en el desarrollo de este trabajo, parece conveniente situarlo dando sus coordenadas en el área de Didáctica de las Ciencias Experimentales. El objeto de esta investigación es avanzar unos pasos en el arduo camino del conocimiento necesario para enseñar a resolver problemas de ciencias. En particular, estamos interesados en los procesos de comprensión de problemas con enunciado y en las dificultades que los estudiantes tienen cuando las situaciones problemáticas expuestas involucran objetos y fenómenos científicos, en comparación con las dificultades en situaciones que involucran objetos y eventos de la vida diaria. Dado que la instrucción en resolución de problemas se realiza con mucha frecuencia usando la estrategia de transferencia, es decir, a partir de problemas ejemplo explicados y resueltos y que son similares de algún modo a los problemas propuestos, en esta tesis centraremos la atención en esta estrategia en particular, que involucra un proceso cognitivo de gran interés didáctico como es la elaboración de analogías entre problemas.

La resolución de problemas es una de las tareas características en la enseñanza y muy utilizadas para la evaluación del aprendizaje de las ciencias y las matemáticas, porque implica diferentes competencias que son puestas en juego en casos supuestamente prácticos de aplicación de los conocimientos y estrategias aprendidas

en las aulas. El núcleo de la presente investigación será la *transferencia analógica* en resolución de problemas y los factores que afectan a ésta. Analizaremos la transferencia entre problemas verbales (en esta tesis ello significa lo mismo que problemas con enunciado escrito) de estructura algebraica porque constituyen una tipología de problemas de amplísima presencia en los currículos de enseñanza secundaria, tanto de ciencias como de matemáticas. En el proceso de transferencia entre una situación conocida y una nueva se acepta que uno de los elementos esenciales es el reconocimiento de elementos comunes entre ellas (Thorndike y Woodworth, 1901), para poder establecer analogías entre las dos situaciones (Gentner, 1983). Estas analogías se construyen identificando rasgos característicos de los problemas y relacionándolos (*mapping*, en inglés). Por eso, dentro de los procesos implicados en la transferencia, nos detendremos especialmente en el proceso por el cual se establecen analogías (y diferencias) entre problemas con enunciado. Para ello consideraremos cómo los elementos constituyentes de los problemas, Superficie y Estructura, facilitan o dificultan la construcción de dichas analogías en resolutores no expertos, estudiantes de distintos niveles académicos.

La transferencia analógica es una de las estrategias instruccionales preferidas de los profesores de ciencias y matemáticas cuando enseñan a sus estudiantes a resolver problemas. Los profesores explican cómo se resuelve un conjunto de problemas-ejemplo (usualmente con cierto detalle) y luego proponen a sus alumnos uno o más problemas “similares” a los ejemplos, para que los resuelvan por sí mismos. Para ello, esperan que los alumnos tomen los elementos comunes a los ejemplos, elaboren representaciones mentales de un cierto nivel de abstracción y generalidad, y los transfieran a los problemas nuevos. Muchos profesores dan por hecho que las analogías entre problemas son fáciles de percibir por los estudiantes (Oliva, 2004), sin embargo Reeves y Weisberg (1994) exponen que los rasgos superficiales explícitos y de naturaleza ontológica concreta, son mucho más fáciles de reconocer que los abstractos. El contexto influye de forma significativa en la resolución y los estudiantes pueden considerar erróneamente la superficie cómo ‘la mejor guía’ para establecer analogías en la resolución de un problema, desviando así la atención de las analogías estructurales correctas y necesarias (Stein, 1986).



Una cantidad importante de trabajos de investigación se han dedicado, precisamente, a estudiar el efecto que un conjunto determinado de problemas-ejemplo produce en el *transfer* (Jonassen, 2003; Goldstone y Sakamoto, 2003; Loewenstein, Thompson y Gentner, 1999; Gick y Holyoak, 1983). Esta tesis se enmarca dentro de esta tradición, focalizando la atención sobre: a) problemas académicos con enunciado, de estructura algebraica correspondiente a dos ecuaciones lineales con solución única; b) el efecto que la Familiaridad mayor o menor del resolutor con la situación descrita por el enunciado tiene sobre el éxito en la resolución por transferencia a partir de análogos; nuestros problemas se sitúan en la zona común de las ciencias y las matemáticas, de modo que algunas de las situaciones de Familiaridad alta son típicamente utilizadas en las clases de matemáticas, mientras otras, de Familiaridad baja, son características de las clases de ciencias; c) el posible apantallamiento producido por las similitudes superficiales (situacionales) de dos problemas, sobre sus diferencias estructurales, un efecto, como ya se ha dicho, encontrado por Weisberg y Reeves (opus cit) y que podría tener impacto considerable en las situaciones didácticas habituales.

Nos interesa profundizar en los procesos cognitivos implicados en la construcción de analogías fructíferas entre problemas académicos con enunciado, en contextos escolares españoles actuales, y desde una perspectiva teórica distinta que permita arrojar algo de luz al conocimiento presente. Esta base teórica permite emitir hipótesis contrastables empíricamente, aunque con las limitaciones propias del desarrollo aún escaso de herramientas, instrumentos y conceptos para explorar la mente de los estudiantes.

Según la teoría clásica de resolución de problemas podemos distinguir al menos dos fases: comprensión y resolución (Polya, 1957; Newell y Simon, 1972). Para resolver un problema, en primer lugar hay que comprenderlo, lo que significa generar representaciones mentales en distintos niveles de elaboración a partir del texto que supone su enunciado. Kintsch y diversos colaboradores (Kintsch, 1998; Kintsch y van Dijk, 1978; Kintsch y Greeno, 1985; Nathan, Kintsch y Young, 1992; Greeno, 1989) propusieron un modelo específico de comprensión para la resolución de problemas con cuatro niveles de representación mental a partir del enunciado del problema. a) Nivel Superficial; b) Base del Texto, o nivel semántico; c) Modelo de la

Situación (MS), o nivel referencial, de naturaleza ontológica concreta (mundo ordinario), elaborado por la conexión de las proposiciones del texto con los esquemas de conocimiento preexistentes en la mente del resolutor; d) Modelo del Problema (MP) o representación abstracta del problema, compuesto por elementos matemáticos procedentes del enunciado y del conocimiento previo del sujeto, en términos de ecuaciones y operaciones matemáticas y lógico-formales. En función de cómo se modelen los dos primeros niveles en la mente del sujeto resolutor, este generará un modelo de la situación más o menos adecuado, a través del cual podrá alcanzar o no, la representación modelo del problema.

El establecimiento de analogías (y diferencias) entre problemas verbales implica entonces comparar y relacionar representaciones mentales de dos problemas (o más) a nivel semántico, referencial (situacional) o abstracto. La resolución correcta a nivel matemático y científico de un problema, implica la construcción de un adecuado MP, pero también la capacidad de transitar entre los distintos niveles de representación mental (por ejemplo, es necesario también saber interpretar los resultados matemáticos en términos de la realidad implicada en la situación problemática propuesta). Dado que la teoría anterior supone que la construcción de la Base del Texto y del Modelo de la Situación son condiciones necesarias (pero no suficientes) para la construcción el modelo abstracto o matemático (MP), se puede predecir que la aparición de obstáculos en la elaboración o en la comparación entre representaciones semánticas o referenciales, implique una tasa mayor de fracaso en la resolución correcta de problemas.

## **1.2 Preguntas y objetivos de investigación**

Para facilitar la construcción de tales representaciones mentales ante un nuevo problema, los profesores usan diversas técnicas instruccionales pero una de ellas destaca sobre el resto por su amplia utilización: la transferencia analógica, o '*transfer*', definida como la habilidad de aplicar lo que ha sido aprendido en un

determinado contexto a nuevos contextos (Byrnes, 1996) que presentan analogías con los anteriores.

¿Cómo se reconocen las similitudes y diferencias entre dos situaciones problemáticas? ¿Qué mecanismos cognitivos se ponen en juego? ¿Qué aspectos de los propios problemas facilitan o dificultan el reconocimiento de analogías entre situaciones similares? Estas preguntas nos intrigan y por esta razón indagaremos en los procesos cognitivos relacionados con la resolución de problemas por transferencia analógica.

Se han diferenciado cuatro etapas en el proceso de transferencia analógica (Chen y Klahr, 2008): a) Codificación del problema propuesto; b) Acceso a un problema análogo-fuente; c) *Mapping* entre el problema propuesto y el análogo-fuente; d) Ejecución de estrategias para solucionar el problema propuesto. Sanjosé, Valenzuela, Fortes y Solaz-Portoles (2007) mostraron que las dificultades principales que encuentran los estudiantes al intentar resolver un problema verbal algebraico derivan de dificultades en la comprensión e interrelación de los problemas (nivel semántico y referencial) más que de las dificultades en el uso de los procedimientos algebraicos y aritméticos necesarios. Por esta razón dirigimos nuestra atención en este trabajo a las tres primeras fases descritas, las relacionadas con la comprensión del problema y que preceden a la resolución algorítmica del problema propiamente dicha, o de ‘cálculo numérico’. Las dos primeras fases suponen la activación de elementos necesarios para la tercera fase que es, propiamente, la elaboración de la analogía entre dos situaciones problemáticas.

Concretamente estamos interesados en analizar las primeras fases del proceso de transferencia, Para ello, y con el fin de delimitar la indagación formulamos las siguientes preguntas de investigación:

Nuestras **preguntas de investigación** son las siguientes:

1. ¿Qué criterios utilizan los resolutores para establecer vínculos entre problemas que ayuden a su resolución? ¿Hay diferencias entre los estudiantes de Secundaria y los futuros profesores de ese nivel educativo?
2. ¿Qué aspectos característicos de los problemas verbales algebraicos son considerados determinantes para su resolución por los estudiantes de Secundaria? Estos estudiantes, ¿son capaces de percibir analogías y diferencias entre

problemas que pueden afectar su resolución correcta? En particular, ¿perciben las diferencias estructurales más allá de las similitudes superficiales o contextuales entre problemas? ¿Hasta qué punto las similitudes superficiales pueden “apantallar” las diferencias estructurales entre problemas?

3. ¿Cómo afecta la mayor o menor Familiaridad de los resolutores con las situaciones problemáticas descritas en los enunciados, al éxito en la resolución por transferencia? ¿Es suficiente una instrucción basada únicamente en resolver problemas isomorfos (como es habitual), para desarrollar la capacidad de los estudiantes de secundaria para establecer analogías y detectar diferencias entre problemas?

4. ¿Cuáles son los procesos cognitivos que los estudiantes con especiales dificultades ponen en juego cuando se trata de razonar para establecer analogías entre problemas con enunciado? ¿Cómo podemos describir los procesos resolutivos por transferencia?

5. ¿Qué situaciones didácticas merece la pena atender para solucionar las dificultades mostradas en algunos casos de interés?

Intentar arrojar algo de luz sobre todas y cada una de estas preguntas supone una labor ardua y dilatada. En este trabajo, claro está, sólo podremos abordar una parte de las respuestas con la esperanza de progresar en el conocimiento didáctico sobre resolución de problemas.

A partir de las preguntas de investigación planteadas con anterioridad se proponen los siguientes **objetivos específicos de investigación:**

1. Describir el tipo de analogías que los estudiantes de educación secundaria son capaces de percibir entre problemas algebraicos con enunciado. Estudiar los efectos de los diferentes caracteres constitutivos de los problemas verbales algebraicos, Superficie, Estructura y Magnitud incógnita, sobre los criterios usados por los resolutores a la hora de clasificar problemas según el modo en que se resuelven.

2. Analizar algunos efectos producidos por el nivel de conocimiento previo de los resolutores, estudiantes de Secundaria y futuros profesores, sobre la elaboración de analogías apropiadas entre problemas.

3. Analizar la relación entre establecer analogías correctas o incorrectas y su influencia sobre el éxito en la resolución.

4. Evaluar el grado en que las similitudes superficiales, o contextuales, entre problemas dificultan la percepción de sus diferencias estructurales, o matemáticas.
5. Analizar los efectos de la menor o mayor Familiaridad de los resolutores con el contexto de los enunciados, sobre el establecimiento de analogías apropiadas entre problemas.
6. Analizar en profundidad los procesos mentales de los estudiantes, a partir de estudio de casos concretos de especial interés, mediante técnicas cualitativas que muestren los procesos cognitivos implicados en la codificación de los problemas y el establecimiento de analogías y diferencias entre ellos.
7. Definir los obstáculos más importantes en el proceso de transferencia analógica entre problemas, surgidos en episodios en los que el estudiante razona sobre la tarea propuesta.

Responder a las preguntas de investigación y alcanzar los objetivos propuestos implicará la realización de las siguientes **tareas**:

1. Realizar una exhaustiva búsqueda y recopilación bibliográfica de los trabajos de investigación desarrollados y publicados en revistas especializadas, sobre la transferencia analógica, en particular, en resolución de problemas de ciencias y matemáticas.
2. Utilizar y, en su caso, crear instrumentos estandarizados y validados para determinar el nivel de conocimiento previo en resolución de problemas algebraicos.
3. Generar y optimizar colecciones de problemas verbales algebraicos, útiles para la investigación del establecimiento, entre ellos, de analogías de diversa naturaleza.
4. Desarrollar un protocolo de aproximación y un procedimiento de desarrollo tanto de los experimentos de carácter hipotético-deductivo, como de los estudios en profundidad de carácter cualitativo, con estudiantes de Secundaria y futuros profesores.

5. Desarrollar pruebas piloto para detectar deficiencias, corregir errores y sustituir elementos metodológicos que resultaron insatisfactorios de algún modo, por otros que se mostraran adecuados.
6. Realizar diversos experimentos y estudios de caso, con la suficiente validez y fiabilidad, en diferentes cursos y centros educativos, y analizar los resultados obtenidos en relación con las hipótesis formuladas en cada uno de ellos.
7. Utilizar los instrumentos metodológicos, descriptivos y estadísticos, apropiados en cada caso para procesar los datos obtenidos, con la validez y fiabilidad suficientes y obtener alguna evidencia que permita avanzar en el conocimiento implicado.

### **1.3 Interés y oportunidad de la investigación**

La ciencia es en sí una continua actividad de resolución de problemas (Laudan, 1986), por lo que cuando pretendemos enseñar ciencia o enseñar a un estudiante sobre cómo se hace la ciencia, se hace imprescindible la enseñanza en resolución de problemas. La importancia de la resolución de problemas en el currículo académico es una idea completamente aceptada por todos los profesionales de la investigación educativa y existe consenso en torno a que la resolución de problemas es además de una actividad científica, una obligación educativa en una posición de elevada importancia en los procesos de enseñanza aprendizaje (Lorenzo, 2005), en concreto en las aulas de ciencias y matemáticas.

Abundando en ello Heyworth afirma (1999 p.195): *“La enseñanza en las ramas de ciencia tiene como fin alcanzar dos objetivos: La adquisición de un cuerpo de conocimiento organizado en un dominio particular y la habilidad para resolver problemas en ese dominio”*.

El presente trabajo de investigación adquiere importancia, primero, por el hecho de ser la transferencia una de las estrategias más utilizadas para enseñar a resolver

problemas en las aulas (Bernardo, 2001, Mestre 2003; Hammer et al., 2005), y en segundo lugar, porque la mayoría de las investigaciones sobre la transferencia apuntan a hacia las enormes dificultades que los estudiantes encuentran para transferir lo aprendido en las aulas a nuevas situaciones, tanto académicas como en la vida real (Bereiter y Scardamalia, 1985) ¿Cuántos años llevamos enseñando a nuestros estudiantes a resolver problemas? Quizás esta pregunta sea muy similar a ¿cuántos años llevamos enseñando? El aprendizaje humano, en todas sus facetas, conlleva resolver problemas. Sin embargo pese a los esfuerzos de la comunidad educativa por mejorar en este ámbito, y aunque se han producido avances notables (ver, por ejemplo, Solaz-Portolés, Sanjosé y Gangoso, 2013), la realidad actual nos muestra que los métodos instruccionales no han logrado eliminar los obstáculos que los estudiantes de todos los niveles educativos todavía tienen resolviendo problemas. Ello nos anima a seguir indagando para lograr métodos instruccionales más eficientes.

Las dificultades de los estudiantes en resolución de problemas se han observado en situaciones y tareas distintas. Por ejemplo, son muchos los estudios que muestran las dificultades de los estudiantes para establecer las analogías apropiadas entre problemas (Gick y Holyoak, 1980 y 1983, Reed, Dempster y Ettinger ,1985). La transferencia se muestra especialmente difícil entre problemas de distinta estructura, incluso cuando se trata de transferir entre situaciones familiares, bien definidas (Rebello et al., 2007; Reed, Dempster y Ettinger, 1985). A esta dificultad, asociada probablemente con los procesos cognitivos implicados en la transferencia entre problemas, se unen otras propias de la resolución de problemas en general. Por ejemplo, se ha comprobado que muchos estudiantes basan sus procedimientos resolutivos en técnicas algorítmicas (Gabel, 1981) asociadas con escasa comprensión conceptual (Lythcott, 1990). Todo ello apunta que, cuando instruimos y pretendemos que los estudiantes resuelvan problemas en idénticas situaciones contextuales, familiares para ellos, transferir entre problemas con distinta estructura resulta complejo.

Con todo, también es importante señalar que la resolución de problemas por transferencia no es exclusiva del mundo académico ya que los estudiantes se enfrentan día a día a problemas en la vida real que pueden ser resueltos a partir de

conocimientos adquiridos en el ámbito académico mediante la transferencia analógica. Hegarty (1991) estudió cómo el resolver problemas de física en el ámbito académico influye en el momento de resolver situaciones problemáticas en la vida real. Parece pues, que mejorar la educación científica y matemática en tareas de resolución de problemas puede suponer un beneficio claro para los aprendices y para la sociedad.

## **1.4 Enfoque, ámbito, y limitaciones de esta investigación**

De entre las muchas posibilidades de realizar una contribución a la didáctica de las ciencias y de las matemáticas, una que parece sólida es tratar de dotarla de contenido científico, de modo que ésta oriente a los educadores hacia una enseñanza aplicable, bien fundamentada, fiable, efectiva y útil. La postura que asumiremos en este trabajo está basada en el principio de que el cerebro humano está sometido a limitaciones y regularidades en su funcionamiento. Describir y explicar estas regularidades, podría llevar a elaborar leyes sobre el aprendizaje (sean estas locales o generales, contextualizadas o no, limitadas a un cierto tipo de tareas o no). La enseñanza debería consistir, entonces, en favorecer los aprendizajes deseados a partir del conocimiento de tales regularidades y limitaciones del cerebro humano. Las regularidades y leyes (si existen) asociadas con la educación no pueden, por tanto, encontrarse en los procesos de enseñanza, sino en los de aprendizaje.

Esto significa que no asumiremos en este trabajo (aunque sea de interés), enfoques basados en presupuestos ideológicos que, muchas veces, son el auténtico origen de mucha investigación didáctica. Por tanto, en este trabajo enfocaremos el esfuerzo en investigar los procesos de aprendizaje de los estudiantes, aunque, eso sí, siempre en interacción con materiales de aprendizaje propios de las ciencias y las matemáticas, y con la intención última de poder fundamentar propuestas instruccionales efectivas.



La presente investigación se lleva a cabo mediante un enfoque experimental empírico deductivo (o hipotético predictivo) en una parte del trabajo, con la intención de contrastar hipótesis derivadas de los modelos teóricos utilizados, pero también se utiliza un enfoque cualitativo, personalizado y acotado cuando se requiere profundizar para atender a los procesos cognitivos específicos que producen estudiantes con determinadas dificultades de interés didáctico. Los estudios cuantitativos son apropiados para el contraste de hipótesis, pero no son apropiados cuando la teoría disponible no permite profundizar en situaciones particulares observadas. En estos casos conviene usar métodos cualitativos que, si bien no permiten trasladar los resultados a toda la comunidad sobre la que versa el estudio, al menos sí nos permiten aproximarnos con cierto nivel de detalle a la descripción (que no causación) de fenómenos didácticos de interés.

Una visión '*desde arriba*' de todo el trabajo permite contemplar cómo los estudios cualitativos complementan a los análisis cuantitativos. En primer lugar diseñamos materiales que nos permitan enfocar las ideas propias, adquiridas durante los años de estudio y la experiencia investigadora, de modo que podamos fijar las bases para, en segundo lugar, acercarnos mediante algunos métodos cualitativos a las hipótesis, cuestiones y factores de interés derivados de los estudios estadísticos.

El ámbito en el que se centra el trabajo es la didáctica de la resolución de problemas en ciencias y en matemáticas (Puig, 1996; Solaz-Portolés, Sanjosé y Gangoso 2013, Schoenfeld 1985, 1987, 1994; Newell y Simon, 1972; Stenberg, 1994; Vernaugd, 1983). En particular, nos interesan los problemas de dos ecuaciones lineales, bien definidos y con solución única que se enseñan en la educación secundaria obligatoria, por ser este un periodo en el que la resolución de problemas, en concreto, los problemas de ciencias con estructura algebraica, ocupan una importante posición en el currículo académico. Martínez Torregrosa (1982) ya apuntó que aunque un alumno se desenvuelva bien en el uso de procedimientos matemáticos, no tiene por qué saber aplicarlos al mundo físico. Por tanto, aunque en didáctica de las matemáticas existe una importante masa de investigación en el campo de resolución de problemas desde distintas perspectivas, nos ocuparemos de la didáctica de las ciencias para mejorar en la tarea de resolver problemas. Muchos estudios muestran que los estudiantes en esta etapa educativa no muestran el nivel de comprensión

conceptual necesario para la resolución de problemas científicos por transferencia (Gabel, 1981; Lythcott, 1990).

Aceptamos la idea de que los humanos comprenden la realidad a través de modelos mentales (Johnson-Laird, 1983 y Kintsch, 1998) y que para resolver una cuestión o problema en un determinado momento se han de recuperar de la memoria problemas solucionados con anterioridad. Estos problemas “fuente” se utilizan para establecer relaciones entre estos y otros problemas nuevos, de modo que se pueda dar solución a estos últimos (Barnett y Ceci, 2002). La conexión entre los elementos del problema descrito y el conocimiento base, es uno de los factores cognitivos más importantes implicados en este proceso (Brandsford, et al, 1986) ya que esta conexión es la que guía a los estudiantes hacia una representación correcta del problema. Es, precisamente, esta conexión posible entre un conocimiento base en forma de problema(s) ya resuelto(s), y un problema nuevo, propuesto, los que nos interesa estudiar aquí.

Esta tesis, como todas las investigaciones, presenta claras limitaciones definidas por su enfoque pero también por las posibilidades de desarrollo de sus objetivos. Estas limitaciones vienen dadas por: las muestras utilizadas, los materiales empleados, los sujetos analizados, los errores y sesgos no controlados.

Todos los estudios empíricos aquí presentados han sido realizados utilizando muestras, si no abundantes, sí suficientes para aportar un cierto grado de validez interna y fiabilidad a los resultados. Sin embargo, en ningún caso ha sido posible utilizar muestras representativas de toda la población. Por tanto, la generalización de nuestros resultados no está garantizada por falta de validez externa.

A excepción del capítulo 4, donde estudiamos futuros profesores, graduados en ciencias o matemáticas y tratamos las diferencias entre ellos y los estudiantes de educación secundaria, el resto de estudios de esta Memoria sólo consideran niveles educativos de educación secundaria. Somos conscientes de que esto supone una limitación de los trabajos realizados.

El uso de problemas algebraicos con enunciado está justificado por el currículo, la tradición y el extenso uso de estos en las aulas de ciencias y matemáticas, pero no se

puede pretender que los resultados que podamos obtener sean válidos para cualquier tipología de problemas, ni siquiera en el ámbito escolar.

Los objetivos propuestos, así como los estudios empíricos realizados para su consecución, han sido sometidos al juicio de expertos que representan a la comunidad científica. El respaldo de quienes son expertos en la materia, aporta valor y fiabilidad a este trabajo. Por esta razón presentamos la Tesis cómo compendio de artículos, un formato este, que ha determinado el orden y estructura de esta Memoria.

## **1.5 Estructura y organización de la tesis**

La magnitud del cuerpo teórico revisado y el número de experimentos realizados recomiendan la estructuración de esta tesis en dos partes. La primera parte (capítulos 1-3) muestra toda la *fundamentación teórica* en la que se acoda o sustenta el trabajo y que antecede a los estudios empíricos, los cuales, conforman la segunda parte. En esta segunda parte (capítulos 4-8) se desarrolla la búsqueda de respuestas a las preguntas de investigación planteadas y se distribuye en tres bloques.

En el primer bloque empírico, que corresponde al capítulo 4 de esta Memoria, se realiza un estudio exploratorio donde estudiar el producto de las primeras fases de la transferencia, donde los estudiantes codifican las características de los problemas y establecen analogías entre estos. El segundo bloque (capítulos 5 y 6) se analiza la relación entre la construcción de analogías y el éxito en la selección de la ecuación que resuelve un problema. Se presta especial atención al tipo de características, superficiales o estructurales, de los problemas. Por último, el tercer bloque empírico, se centra en el estudio de los procesos cognitivos asociados con el establecimiento de analogías y resolución del problema. Pretende analizar todo el proceso de resolución mediante una prueba, a través de entrevistas, que cubre todo el recorrido, desde que un estudiante empieza a leer el enunciado de un problema, hasta que interpreta su resultado.

En el primer bloque empírico (capítulo 4) se abordan los tres primeros objetivos específicos relativos a la descripción del tipo de analogías percibidas por los estudiantes de educación secundaria y por graduados universitarios, futuros profesores, entre problemas análogos. Se analiza también el efecto producido por los diferentes caracteres constitutivos de los problemas verbales algebraicos y se realiza una primera prospección de los efectos producidos por la mayor o menor Familiaridad de los resolutores con el contexto de los enunciados. Por último, se analiza del efecto derivado del nivel de conocimiento previo en la elaboración de analogías entre problemas. Realizamos dos estudios relacionados. El primer estudio pretende analizar en qué características se basan los estudiantes para codificar problemas y detectar sus analogías mediante tareas de categorización (*sorting*) de problemas. El segundo estudio, llevado a cabo mediante técnicas cualitativas, pretende avanzar una explicación de los resultados en las tareas de categorización. También se realiza un primer análisis del efecto de la Familiaridad sobre las analogías realizadas.

Los resultados obtenidos en esta investigación orientan los experimentos realizados en los capítulos 5 y 6 de esta Memoria, en los que se intentan alcanzar los objetivos específicos 4 y 5 antes planteados. En el capítulo 5 se investigan, los efectos que producen las características superficiales y estructurales de un problema, a la hora de facilitar o dificultar la percepción de sus similitudes o diferencias útiles entre problemas. El capítulo 6 muestra una investigación que amplía y que replica la investigación realizada en el capítulo 5 aumentando con ello la validez de los resultados obtenidos. Así mismo, en esta investigación se complementaron los análisis cuantitativos con otros cualitativos para clarificar algunos aspectos de los resultados y profundizar en los análisis.

Las investigaciones de los capítulos 5 y 6 dirigieron nuestra atención hacia los procesos cognitivos implicados en el establecimiento de analogías y diferencias entre problemas con enunciado. De especial interés pareció el estudio detallado de tales procesos en alumnos con dificultades manifiestas. La tercera sección del bloque empírico (capítulos 7 y 8) muestra un análisis cualitativo, en el que se intenta abordar los objetivos específicos 6 y 7 de esta tesis, llevado a cabo mediante técnicas o protocolos de pensamiento en voz alta (*Think Aloud*). El estudio de esta tercera

sección está centrado en analizar en profundidad los procesos cognitivos implicados en la codificación de los problemas, el establecimiento de analogías y diferencias entre ellos y en determinar donde aparecen los obstáculos más importantes en el proceso de transferencia analógica entre problemas. Aunque se indagó en los procesos de pensamiento de varios estudiantes, solo mostramos los dos casos principales, por razones limitantes en el espacio de las revistas. Por tal limitación, el contenido de las entrevistas realizadas al resto de estudiantes, pendientes de análisis, aparecen anexados a este capítulo.

El último capítulo (9) de esta Memoria se dedica a discutir el modo en que se han alcanzado los distintos objetivos plateados en el capítulo 1, y que constituyen las diferentes aportaciones de esta tesis doctoral. Con la prudencia propia de las limitaciones de todos nuestros estudios, se exponen algunas conclusiones y los problemas pendientes para su tratamiento futuro.



# Bibliografía

---

- Anglés A. (2012). Los ritos en la enseñanza de los problemas de mezclas. Trabajo fin de máster. No publicado. Valencia. Universidad de Valencia. Facultad de Magisterio.
- Barnett, S. M., y Ceci, S. J. (2002). When and where do we apply what we learn? *Psychological Bulletin*, 128, 612–637
- Bernardo, A.B.I. (2001). Analogical problema construction and transfer in mathematical problem solving. *Educational Psychology*, 21(2), 137-150.
- Byrnes, J. P. (1996). *Cognitive Development and Learning in Instructional Contexts*. Boston: Allyn and Bacon.
- Bransford, J. D. Stein, B. S. (1986). *Solución ideal de problemas*. Ed. Labor. Barcelona.
- Bransford, J. D., Sherwood, R., Vye, N. J., y Rieser, J. (1986). Teaching thinking and problem solving. *American Psychologist*, 41(10), 1078-1089.
- Bereiter, C., y Scardamalia, M. (1985). Cognitive coping strategies and the problem of “inert knowledge.” In S. F. Chipman, J. W. Segal, & R. Glaser (Eds.), *Thinking and learning skills: Current research and open questions* (pp. 65–80). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Gabel, D. L. (1981). *Facilitating problem solving in high school chemistry*. Indiana University, School of education, Bloomington (ERIC Doc. Reproduction Service No. ED 210 192).

- Chen, Z., y Klahr, D. (2008). Remote transfer of scientific reasoning and problem solving strategies in children. In R. V. Kail (Ed.), *Advances in Child Development and Behaviour* (pp. 419-470). Amsterdam: Elsevier.
- Gentner, D (1983). Structure mapping: A theoretical framework for analogy. *Cognitive Science*, 7, 155-170.
- Gick, M. L., y Holyoak, K. J. (1980). Analogical problem solving. *Cognitive Psychology*, 12, 306–355.
- Gick, M. L., y Holyoak, K. J. (1983). Schema induction and analogical transfer. *Cognitive Psychology*, 15, 1-38.
- Gil, D. y Martínez-Torregrosa, J. (1983). “A model for problemsolving in accordance with scientific methodology”, *European J. of Science Education*, 5 (4), pp. 447-455.
- Goldstone, R. L., y Sakamoto. (2003). The Transfer of Abstract Principles Governing Complex Adaptive Systems. *Cognitive Psychology*, 46, 414-466.
- Greeno, J. G. (1989). *Situations, mental models, and generative knowledge*. In D. Klahr & K. Kotovsky (Eds.), *Complex information processing: The impact of Herbert A. Simon*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Klahr, D., y kotovsky K. (1989). (Eds.), *Complex Information Processing: The Impact of Herbert Simon*, Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, NJ, pp. 285-318.
- Hammer, D., Elby, A., Scherr, R., y Redish, E. (2005). In *Transfer of Learning From a Modern Multidisciplinary Perspective*. (ed., Mestre, J. P.) Information Age, Greenwich, CT, pp. 89–120.
- Hegarty, M. (1991). Knowledge and processes in mechanical problem solving. In R. J. Sternberg & P. A. Frensch (Eds.), *Complex problem solving: Principles and mechanisms* (pp. 253-285). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Heyworth, R. M. (1999). Procedural and conceptual Knowledge of expert and novice students for the solving of a basic problem in chemistry. *International Journal Science Education* 21(2), 195-211.



- Lythcott, J. (1990). Problem solving and requisite Knowledge of chemistry. *Journal of Chemical education*, 67(3), 248-252.
- Loewenstein, J., Thompson, L. y Gentner, D. (1999). Analogical encoding facilitates knowledge transfer in negotiation. *Psychonomic Bulletin & Review*, 6, 586-597.
- Johnson-Laird, P. N. (1983). *Mental models: Towards a cognitive science of language, inference, and consciousness*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Jonassen, D.H. (2003). Using cognitive tools to represent problems. *Journal of Research on Technology in Education*, 35(3), 362-381,.
- Kintsch, W., y van Dijk, T.A. (1978). Toward a model of discourse comprehension and production. *Psychological Review*, 85, 363-394.
- Kintsch, W., y Greeno. J. (1985). Understanding and solving word arithmetic problems. *Psychological Review*, 92(1), 109-129.
- Kintsch. W. (1998). *Comprehension: a paradigm for cognition*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Laudan, L. (1986). *El Progreso y sus Problemas*. Madrid: Encuentro Ediciones.
- Lorenzo, M. (2005). The development, implementation, and evaluation of a problem solving heuristic. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 3, 33-58.
- Martinez Torregrosa, J. (1982). [Reconsideraciones de las relaciones entre Física y Matemáticas](#): Introducción a la Cinemática Diferencial. *Primeras jornadas de Investigación Didáctica en Física y Química* : Valencia., 133-142.
- Mestre, J.P. (2003). *Transfer of learning: Issues and research agenda*, <http://www.nsf.gov/pubs/2003/nsf03212/nsf03212.pdf>. Visitado el 12 de marzo de 2014).
- Nathan, M. J., Kintsch, W. y Young, E. (1992). A theory of algebra-word-problem comprehension and its implications for design of learning environments. *Cognition and Instruction*, 9, 329-389.

- Newell, A., y Simon, H.A. (1972). *Human Problem Solving*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- Oliva, J. M<sup>a</sup> (2004). El papel del razonamiento analógico en la construcción histórica de la noción de fuerza gravitatoria y del modelo del sistema solar (primera parte). *Revista Eureka sobre enseñanza y divulgación de las ciencias*. 1 (1), 30-43.
- Polya, M. (1957). *How to solve it*. (2nd Ed.). New York: Doubleday.
- Puig, L. (1996). *Elementos de Resolución de Problemas*. Granada: Comares.
- Rebello, N. S., Cui, L., Bennet, A. G., Zollman, D. A. y Ozimek, D. J. (2007). Transfer of learning in problem solving in the context of mathematics and physics. En D. Jonassen (Ed.), *Learning to solve complex scientific problems*. Hillsdale, N. J.: Lawrence Earlbaum.
- Reed, S. K., Dempster, A., y Ettinger, M. (1985). Usefulness of analogous solutions for solving algebra word problems. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, & Cognition*, 11, 106-125.
- Reeves, L. M., y Wiesberg, R. W. (1994). The role of content and abstract information in analogical transfer. *Psychological Review*, 115, 381-400.
- Sanjosé, V., Valenzuela, T., Fortes, M. C., y Solaz-Portolés, J. (2007). Dificultades algebraicas en la resolución de problemas por Transferencia. *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias*, 6 (3), 538-561.
- Shoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando: Academic Press.
- Schoenfeld, A. (1987). What's All the Fuss About Metacognition. In A. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive Science and Mathematics Education*. Hillsdale, N. J.: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
- Schoenfeld, A. H. (1994). Reflections on doing and teaching mathematics. In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical thinking and problem solving* (pp.53-70). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

- Solaz-Portolés, J.J., Sanjosé, V., y Gangoso, Z. (2013). La investigación en resolución de problemas instruccionales. Efectos de las variables del problema y de las variables cognitivas, metacognitivas y motivacionales del resolutor, en Benegas, J. Pérez de Ladazábal, Otero J. El aprendizaje activo de la física básica universitaria. Andavira (Eds). Santiago de Compostela, 7, 95-118.
- Sternberg, R. J. (1994). Allowing for thinking styles. *Educational Leadership*, 52(3), 36–40.
- Thorndike, E. L., y Woodworth, R. S. (1901). The influence of improvement in one mental function upon the efficiency of other functions. *Psychological Review*, 8, 247-261.
- Vergnaud, G. (1983). Multiplicative Structures. In Lesh, R., Landau, L. Acquisition of mathematic concepts and processes. New York: Academic Press. 127-174.



---

# FUNDAMENTACIÓN

# TEÓRICA

---



---

# Capítulo 2

## **La Resolución de Problemas en Ciencias y Matemáticas.**

---





## 2. La Resolución de Problemas en Ciencias y Matemáticas.

**S**on muchos los investigadores educativos (Puig, 1996; Sanjosé y Solaz-Portolés, 2013; Schoenfeld 1985, 1987, 1994), psicólogos (Mayer, 1986; Newell y Simon, 1972; Stenberg, 1994; Vernaugd, 1983; Marshall, 1995) y filósofos (Dewey, 1989) los que han centrado su atención en la resolución de problemas. Por tanto, existe en la actualidad una masa considerable de conocimiento sobre la materia y consenso creciente en torno a los procesos cognitivos implicados en esta tarea de crucial importancia, tanto para la ciencia como para la educación científica.

La investigación sobre la resolución de problemas evoluciona junto con las distintas corrientes psicológicas aplicadas a la educación. Así, en el punto de partida y apoyándose en la Psicología conductista, lo que importaba en resolución de problemas era la respuesta y su mecanismo de selección. Las primeras investigaciones se centraban en identificar mediante la observación qué estrategias empleaban distintos sujetos al abordar un problema. Wallas (1926) declaró las siguientes etapas: a) Preparación (acumulación de información); b) incubación (marginación transitoria del problema), iluminación (un «darse cuenta» repentino) y verificación (hallazgo y comprobación de la solución). También Polya (1945, 1968) trabajó en esta misma línea aportando la idea de que una estrategia adecuada para resolver problemas considerados muy difíciles consiste en su fraccionamiento en sub-problemas más simples que sí admiten una solución.

Son estas observaciones las primeras evidencias de la necesidad de enseñar las estrategias de resolución de problemas y, a partir de éstas, muchos investigadores decidieron aplicar sus esfuerzos en indagar sobre esta cuestión.

Con el paso del tiempo, la Psicología de la Gestalt, detectó la tendencia de los sujetos que resuelven los problemas a fraccionar estos éstos en diversas etapas, reforzando así los trabajos de Polya (1945). Duncker (1945), propuso la “valoración” de las distintas soluciones, este hecho tiene una importancia especial en la vida cotidiana, donde diversas soluciones a los problemas pueden generar ventajas e inconvenientes. En la misma línea, se encuentra Polya (op. cit.) quien planteó preguntar a los alumnos de qué otra manera pueden obtener la solución tiene efectos beneficiosos.

Tras la irrupción de la psicología cognitiva, y con ella la teoría del procesamiento de la información, la resolución de problemas aparece como una interacción entre “el sistema de procesamiento de la información” del sujeto y un “ambiente de tarea”. De tal manera que la superposición entre ambos produce en el solucionador una representación mental del problema denominada “espacio problema” (Simon y Simon, 1978). Con esta teoría y a partir de la investigación en el campo de la tecnología y la inteligencia artificial, se desarrollan los primeros modelos generales de estrategia para la resolución de problemas (Perales, 1993).

A partir del modelo constructivista de la enseñanza/aprendizaje, que tiene su origen en los trabajos de Piaget, Bruner y Ausubel entre otros, cobra fuerza la idea de que la experiencia (no en el sentido empírico de repetición, sino de actividad) y el conocimiento preexistente juegan un papel fundamental en el aprendizaje. Se cree que el conocimiento conceptual no puede transferirse como un producto elaborado de una persona a otra, sino que debe ser construido activamente desde la propia experiencia. Bajo esta idea, las teorías de Piaget insisten en potenciar el desarrollo cognitivo a través de la resolución de problemas: “el individuo que accede a las operaciones formales sería capaz de resolver cualquier tipo de problema” (Inhelder y Piaget, 1955).

Desde los años 60 se aprecia una preocupación creciente por incorporar la resolución de problemas al currículo escolar y, en la actualidad, la investigación educativa en resolución de problemas se centra principalmente en tres líneas: el análisis de los problemas, las prácticas de enseñanza en resolución de problemas o metodología instruccional, y el estudio del sujeto resolutor, donde entran en juego todos los procesos cognitivos, metacognitivos y motivacionales implicados en la resolución.

## 2.1 ¿Qué se entiende por resolución de problemas?

En los últimos años se ha prestado una considerable atención al tema de la resolución de problemas en ciencias experimentales y al modo de ayudar a los estudiantes en dicha actividad. La resolución de problemas desempeña un papel crucial en el currículo de las ciencias (Lorenzo, 2005). Aprender a resolver problemas es una de las habilidades más importantes que los estudiantes pueden aprender en cualquier lugar del mundo (Jonassen, 2004). Comencemos por esclarecer lo que en el contexto de la presente tesis se entiende por “resolución de problemas”.

La resolución de problemas se concibe ahora normalmente como una actividad de aprendizaje generadora de un mecanismo a través del cual, quien aprende, combina elementos del conocimiento, reglas, técnicas, destrezas y conceptos previamente adquiridos para dar una solución a una situación nueva (Orton, 1986). H.A. Simon (1978, p. 198) definió el concepto de problema de la siguiente forma: “Una persona se enfrenta a un problema cuando acepta una tarea, pero no sabe de antemano cómo realizarla. Aceptar una tarea implica poseer algún criterio que pueda aplicarse para determinar cuándo se ha realizado la tarea con éxito”. Chi y Glaser (1986, p. 295) definen los problemas cómo: “Los problemas son situaciones en las que se intenta alcanzar un objetivo y se hace necesario un medio para conseguirlo”.

Un problema siempre será una tarea que implique un cierto grado de incertidumbre y la resolución del problema es el proceso por el cual se intenta clarificar la situación incierta. Hay una diferencia básica entre el concepto "problema" y el concepto “ejercicio”. No es lo mismo hacer un ejercicio que resolver un problema. Una cosa es aplicar un algoritmo de forma más o menos mecánica, evitando las dificultades que introduce la aplicación de reglas cada vez más complejas, y otra resolver un problema. La solución de un problema puede ser única, pero la estrategia resolutoria está determinada por un amplio abanico de factores que iremos tratando. Así Garofalo y Lester (1985) indican que la resolución de problemas constituye una destreza de alto nivel que incluye procesos de visualización, asociación, abstracción, comprensión, manipulación, síntesis y generalización, es decir, un conjunto complejo de habilidades combinadas.

En esta línea, Puig y Cerdán (1988) resaltan que la tarea de resolver problemas es una tarea privilegiada para el aprendizaje, ya que la resolución de problemas es el lugar de la producción de conocimiento donde se aplican los conocimientos adquiridos a situaciones no familiares, nuevas, es decir, el lugar donde se pone de manifiesto la transferencia de aprendizaje. Según Gagné (1965), tras haber resuelto un problema, se ha aprendido. Puede que solo se haya aprendido a resolver ese problema, pero resulta más probable que se haya aprendido a solucionar una variedad de problemas semejantes y quizá incluso otros que poseen algunas características similares. El filósofo y matemático Descartes lo expresó del siguiente modo: “Cada problema que resolví se convirtió en una regla que sirvió después para resolver otros problemas”. Citado por Orton (1986).

Los ejercicios ayudan a automatizar reglas y procedimientos, pero no servirán de ayuda en nuevas situaciones o contextos diferentes. Cuando hablamos de resolución de problemas nos vienen a la cabeza los típicos problemas de libro de texto, en los que, a partir de ciertas reglas, conocimientos adquiridos y procedimientos básicos, conseguimos llegar a la solución buscada. Muchos de ellos son realmente problemas, pero el concepto de problema es mucho más amplio y los hay de múltiples formas, en diversos ámbitos y con distintos objetivos de resolución. Los problemas se pueden clasificar atendiendo a criterios varios, como pueden ser, el campo de conocimiento implicado, la naturaleza del problema, si el problema es real o ficticio, tipo de tarea requerida etc.; pero siempre, el concepto de resolución de un problema se refiere al proceso mediante el cual una situación con un cierto grado de incertidumbre e implica, en mayor o menor medida, la aplicación de conocimientos y procedimientos por parte del solucionador (Gagné, 1965; Ashmore, Frazer y Casey., 1979).

Gil, Martínez- Torregrosa y Senent (1988) plantean que las altas tasas de fracaso en la resolución de problemas básicos provienen del tratamiento ‘contra-natura’ que se le da a los problemas en las aulas. Los problemas se muestran como algo que se ha de saber hacer, cuando en realidad, la definición de problema propone todo lo contrario.

### **2.1.1 Resolución de problemas y metodología instruccional**

Las investigaciones en didáctica de las ciencias ponen de manifiesto las deficiencias de los modelos de instrucción habituales. La educación tradicional forma estudiantes que en muchas ocasiones se encuentran poco motivados, aburridos de la forma en la que aprenden. Memorizan gran cantidad de información que olvidan en poco tiempo y se vuelve irrelevante en el mundo exterior al centro educativo (Gil, Furió, Valdés, Salinas, Martínez-Torregrosa, Guisasola, Gonzalez, Dumas-Carré, Goffard y Pessoa, 1999).

Gabel (1981) en un experimento con estudiantes de la escuela superior obtiene resultados que indican que la mayoría de los estudiantes utilizan técnicas algorítmicas para la resolución de problemas. Un elevado porcentaje de estudiantes resolvió los problemas propuestos exitosamente, sin embargo, en la tarea de responder cuestiones acerca de los conceptos implicados los resultados fueron poco satisfactorios. Idéntico resultado obtuvieron Solaz-Portolés y Sanjosé (2006), en el sentido de que saber resolver problemas de carácter algorítmico no comporta comprender los conceptos subyacentes ni saberlos aplicar en otro tipo de problemas. Esto demuestra carencias de comprensión conceptual en los sujetos y el uso de estrategias de resolución basadas en la aplicación de reglas y procedimientos memorizados. Otro estudio sobre resolución de problemas realizado por Lythcott (1990) reafirma la idea de que los estudiantes fallan en la comprensión conceptual. El autor formó dos grupos, en el primero se propuso un enfoque algorítmico y en el segundo un enfoque conceptual para la resolución de problemas de química. Al terminar la fase de resolución los sujetos fueron entrevistados sobre los conceptos implicados en el problema. Las conclusiones del estudio muestran que, aunque el primer grupo (enfoque algorítmico) obtuvo resultados ligeramente mejores en el número de problemas resueltos correctamente, el segundo grupo (enfoque conceptual) obtuvo mejores resultados en las entrevistas sobre los conceptos relacionados.

Lang da Silveira, Moreira y Axt (1992) realizan un estudio con estudiantes de ingeniería. Compararon los resultados de una prueba básicamente conceptual con los obtenidos en una prueba basada únicamente en resolver problemas. El estudio

descrito sugiere que el dominio de la parte conceptual es condición necesaria pero no suficiente en el aprendizaje de la física.

En la actualidad existen alternativas de instrucción en resolución de problemas que buscan el avance de la comprensión conceptual. Un ejemplo de estas es el aprendizaje basado en problemas (ABP). El aprendizaje basado en problemas (ABP) es una metodología de instrucción que muestra ciertas virtudes e intenta modificar la metodología de enseñanza tradicional. Esta metodología intenta proponer al alumno como responsable de su propio aprendizaje de forma que este desarrolle habilidades cognitivas de alto nivel, como el análisis de las situaciones, resolución de problemas, pensamiento crítico, además de ser un método que tiene como objetivo potenciar la metacognición y el aprendizaje autorregulado (Barret, 2005).

La idea básica de esta metodología es que los estudiantes trabajen sobre problemas abiertos, propuestos en grupos reducidos de alumnos de entre cinco y ocho sujetos. El trabajo del profesor consiste en guiarles, pero no desde el mero transporte de la información sino desde la crítica constructiva a las aportaciones e ideas de los alumnos (Solaz-Portolés, Sanjosé y Gómez, 2011).

De acuerdo con Branda (2009) los objetivos y las tareas que debe cumplir el aprendizaje basado en problemas son:

- a) Utilizar estrategias de razonamiento para proponer hipótesis explicativas.
- b) Identificar necesidades de aprendizaje
- c) Capacitar para trasladar los aprendizajes conseguidos hacia otros problemas.

Tras la presentación del problema, los alumnos han de proponer un plan de resolución, un camino hacia el estudio, la investigación y el aprendizaje de determinados objetivos. Por último se evalúa el trabajo realizado teniendo en cuenta (Egido, Aranda, Cerrillo, De la Herrán, De Miguel, Gómez, Hernández, Izuzquiza, Murillo, Pérez y Rodríguez, 2007) los conceptos, procedimientos y estrategias empleadas.

Lorenzo (2005) propone una metodología para enseñar a resolver problemas denominada Heurístico de Resolución de Problemas en la que intenta potenciar el

éxito de los estudiantes ayudándoles a comprender los pasos implicados en el proceso de resolución, así como proporcionarles un enfoque organizativo para abordar los problemas de un modo sistemático.

Otra propuesta alternativa es la que plantean Gil y Martínez (1983). Los autores piensan que los alumnos no aprenden a resolver problemas sino que memorizan la instrucción del profesor. Gil y Martínez proponen un modelo de enseñanza en resolución de problemas basado en una aproximación al método científico, de modo que los problemas de resolución numérica adquieran una base más cualitativa.

En un trabajo en la misma línea de investigación (Gil, Furió et al., 1999) cuestionan la distinción clásica entre “teoría”, “prácticas de laboratorio” y “problemas”. Los autores exponen la idea de que separar estas actividades va en contra de la actividad científica real. Proponen un modelo de enseñanza donde estas actividades se entiendan como un todo y en el caso particular de la resolución de problemas, proponen un cambio hacia problemas abiertos donde el estudiante tenga que relacionar, prácticas, teoría y resolución de problemas en un modelo global.

Otras propuestas instruccionales pretenden elevar el desarrollo de esta competencia y dotarla de un mayor grado de aplicabilidad. Truyol et al. (2010) están estudiando el modo en que los enunciados de los problemas promueven el desarrollo de competencias propias de los físicos profesionales, como la construcción de un modelo físico a partir de un problema basado en la realidad.

## **2.2 Procesos e instrumentos cognitivos implicados en la comprensión y resolución de problemas.**

Según Polya (1945), la resolución de problemas es un constructo complejo en el cual se van a ver implicados una serie de pasos y procesos, que según él serían: comprensión, concepción de un plan, ejecución del plan y examen de la solución obtenida. Este esquema propone un modelo general para la resolución de problemas, pero no hemos de olvidar que en función de la materia o de los contenidos este esquema puede ser más específico. Así, por ejemplo, en el esquema de Polya para el caso específico de problemas de ciencias con estructura matemática, el primer paso, la comprensión, está ligada al lenguaje, contexto, situación, y tarea del problema (donde, a partir de estas variables, se ha de ver reflejada una correcta traducción matemática del problema). El segundo paso, la concepción de un plan, se traduce en la selección de estrategias para la resolución. Ejecutar el plan en este tipo de problemas en particular, se refiere a operar procedimientos de cálculo que permitan trabajar con el lenguaje matemático y, por último, se examina la solución y se interpreta el resultado.

Al mismo tiempo, para completar esas distintas fases o pasos en la solución de un problema, los alumnos necesitan adquirir procedimientos específicos. Aunque los procedimientos sean distintos en cada área de conocimiento, su función dentro del proceso de aprendizaje es relativamente similar. Así, por ejemplo, atendiendo a la función que cumplen para la solución de un problema, podríamos diferenciar cinco tipos de procedimientos (Pozo y Postigo, 1993):

1. Adquisición de la información.
2. Interpretación de la información.
3. Análisis de la información y realización de inferencias.
4. Comprensión y organización conceptual de la información.



## 5. Comunicación de la información.

Los investigadores están de acuerdo en que existen una serie de factores e instrumentos cognitivos involucrados en la resolución de problemas y durante las últimas dos décadas ha aumentado el consenso sobre los de procesos mentales que intervienen en esta tarea. La perspectiva dominante en resolución de problemas es la aproximación al procesamiento de la información (Heyworth, 1998). Para acercarnos a este proceso nos interesa averiguar los procedimientos y estrategias que los estudiantes utilizan.

Uno de los factores cognitivos más importantes implicados en este proceso es la conexión entre los elementos de un problema descrito y la base de conocimientos disponible en la memoria del sujeto que va a resolverlo (de la cual hablaremos posteriormente), ya que esta conexión es la que guía a los estudiantes hacia una representación correcta del problema. De este aspecto nos ocuparemos seguidamente.

### **2.2.1 Memoria a largo plazo, memoria de trabajo y resolución de problemas**

La teoría del procesamiento de la información se centra en el aprendizaje y en el aprendiz y sugiere los mecanismos que entran en juego en el proceso de aprendizaje (Osborne, 1985). Esta teoría nos permite comprender las limitaciones del aprendizaje pero sobre todo nos permite ayudar a los estudiantes a evitar ciertas dificultades. En términos de esta teoría, la memoria a largo plazo (MLP) nos ayuda a diferenciar la información importante de todo aquello irrelevante. Si decidimos actuar en sobre esta información, se codifica para el almacenamiento o se traduce en una respuesta. El proceso de almacenamiento es más eficiente si relacionamos la información nueva con algún o algunos elementos de la memoria a largo plazo (MLP). La MLP parece tener una capacidad casi ilimitada para el almacenamiento de información, pero el sistema de recuperación no siempre es eficiente. Cuanto mayores sean las similitudes y los anclajes útiles para la fijar la nueva información, más fácil será la recuperación de contenido. La memoria de trabajo (*working memory*), es el espacio donde la información derivada de la MLP y la información obtenida del exterior se procesa mediante operaciones mentales y transformaciones. Es aquí donde el nuevo

conocimiento y la información contenida en la memoria interactúan, se vinculan y se secuencian para una dar respuesta (a la tarea de aprendizaje o de resolución de problemas) o para almacenar nueva información (Johnstone, 1993 ; Kempa , 1991 ) .

La memoria de trabajo juega un papel crucial en el proceso de resolución de problemas de ciencias y matemáticas (Solaz-Portoles, Sanjosé, 2009). Se han descrito once modelos distintos de memoria de trabajo (Miyake & Shah, 1999), pero en la actualidad el modelo más aceptado es el modelo de Baddeley (1995). Este modelo describe tres tipos principales de memoria: La memoria a corto plazo (*Short-term memory*), la memoria a largo plazo (*Long-term memory*) y la memoria de trabajo (*Working memory*). La memoria a corto plazo tiene una vida media de unos 15 segundos y se compone de unos siete (7+-2) bloques o unidades de información (Miller's, 1956), que pueden ser palabras, teoremas, imágenes, etc. que se procesan por separado. El resto de información se encuentra en la memoria a largo plazo. Como ya se ha dicho, la memoria a largo plazo tiene una gran capacidad y funciona como un almacén, pero con algunas limitaciones, y la información almacenada no está disponible en todo momento y no se tiene consciencia de todo su contenido. La memoria a corto plazo se nutre de este almacén y los procesos para conectar la información son llevados a cabo mediante la memoria de trabajo, por tanto, la memoria de trabajo se puede definir como el conjunto de mecanismos que utiliza la cognición humana para recuperar, manipular y mantener la información durante su procesamiento (Baddeley, 1986, 1990). La memoria de trabajo también tiene función de almacenaje y muchos investigadores le achacan la capacidad de representar la cantidad de información, activada, procesada y retenida, durante el procesamiento de la información en tareas cognitivas (Yuan, Steedle, Shavelson, Alonzo & Pezzo, 2006).

En el modelo de la memoria de trabajo desarrollado por Baddeley (2000), que es en realidad una revisión de un iniciático modelo postulado en la década de los setenta por Baddeley y Hitch (1974), se mencionan tres componentes de la memoria de trabajo: el *ejecutivo central*, que es el componente principal, gestiona el control de la atención y coordinada el conjunto de actividades de este sistema de memoria; el *bucle fonológico* y la *agenda viso-espacial*, estos dos componentes son subsistemas subordinados del *ejecutivo central* y se encargan del almacenamiento y manipulación

de la información verbal (palabras, números, etc.) y de la creación y manipulación de imágenes, respectivamente. La investigación de Alsina (2007) indica que existe una relación entre la habilidad del *ejecutivo central* de los niños con edades de entre 7 y 8 años y su rendimiento en cálculos aritméticos. El trabajo de Andersson (2007) con niños de 10 años demuestra que el *bucle fonológico* y determinadas funciones del *ejecutivo central* (desplazamiento, coordinación del procesamiento y almacenamiento de la información y acceso a la memoria a largo plazo) contribuyen decisivamente al éxito en la resolución de problemas de matemáticas.

La teoría neopiagetiana de Pascual-Leone, nos indica que el desarrollo cognitivo está constituido por distintos bloques y como tal se debe abordar desde distintos ángulos, que se describen a continuación. En primer lugar tenemos el M-operador o M-espacio, una medida de la capacidad mental que da cuenta del incremento de la capacidad de procesamiento de la información con la edad (Pascual-Leone y Goodman, 1979), esta está directamente relacionada con la memoria de trabajo. En la resolución de problemas, como ejemplo de tarea cognitiva, se puede modificar la M-demanda (demanda mental) de un problema sin cambiar su estructura lógica. De este modo se facilita el éxito de los estudiantes mediante la reducción de la cantidad de información por procesar, esto es, evitando la sobrecarga de la memoria de trabajo (Níaz, 1987). Por su parte Johnstone, Hogg y Ziane (1993), ponen en evidencia que un problema de Física puede presentarse de manera que se reduzca la entrada de *ruido* (información no relevante) al sistema de procesamiento de la información. Con esto, posibilitamos el acceso a la solución del problema a mayor número de estudiantes. También podemos ayudar a nuestros estudiantes utilizando problemas abiertos (sin datos numéricos, sin metodología prefijada), esto, en opinión de Sweller, van Merriënboer y Paas (1998), reduce la carga cognitiva. En consecuencia, para el progreso de los estudiantes con baja capacidad de memoria de trabajo se deben reducir las demandas de memoria de trabajo en las actividades del aula. Alloway (2006) propone ciertas recomendaciones para minimizar los fracasos relacionados con la memoria de trabajo en las actividades de aprendizaje, estas son: dar las instrucciones lo más breves posibles, reducir la complejidad lingüística de las frases, trocear las tareas en diferentes pasos, proporcionar apoyos a la memoria y desarrollar estrategias para que los estudiantes sean conscientes de sus déficits en la memoria de trabajo.

## **2.2.2 Esquemas y resolución de problemas**

Poseer un determinado conocimiento no es suficiente para resolver problemas, este ha de estar organizado para que pueda ser útil en diferentes situaciones. Los humanos organizamos el conocimiento a través de esquemas, estructuras de almacenaje de información asociada, construidos a partir de diversas situaciones tanto en el contexto escolar como en la vida ordinaria.

### ***Teoría cognitiva de esquemas***

La teoría del procesamiento de la información se ocupó de la llamada 'teoría cognitiva de esquemas' (CTS), desarrollada durante los años 70 y el inicio de los 80 (Anderson, Spiro y Montague, 1977; Schank y Abelson, 1977; Bruce y Brewen, 1980). Los esquemas cognitivos se definen como estructuras de conocimiento contenidas en la memoria y son todavía hoy un concepto de gran interés en el campo instruccional. Se emplean en la interpretación de los datos sensoriales, en la recuperación de la información contenida en la memoria, organizando acciones, determinando objetivos, movilizando recursos y generalmente guiando el procesamiento de la información (Rumelhart, 1980).

De acuerdo con Marshall (1995), los esquemas poseen unas características determinadas, estas son:

1. Son un dispositivo básico de almacenaje de información
2. Tienen una estructura en red.
3. El grado de conectividad entre los componentes del esquema determinan su longitud y accesibilidad.
4. Los esquemas tienen una estructura flexible y accesible a través de muchos canales.
5. Los esquemas tienen un tamaño variable.
6. Los esquemas se pueden colapsar y superponerse

Se han definido en la investigación reciente tres tipos de esquemas cognitivos: Los *objetos de memoria*, los *modelos mentales* y los *campos cognitivos* (Derry, 1996).

Los *objetos de memoria* hacen referencia a los componentes básicos de almacenamiento de información en los humanos. Estos módulos se caracterizan en la memoria a partir de distintos tipos de representaciones que pueden ser, pictóricas, declarativas, auditivas, emocionales, etc., y que se combinan para formar objetos simples de memoria. Los humanos desarrollan objetos de memoria relacionando todo aquello que se aprende en las aulas a partir de las distintas disciplinas académicas (Lengua, física, algebra, etc.) con las construcciones sociales, las prácticas propias de la cultura y la experiencia diaria adquirida. Existen diversos tipos de objetos de memoria: Los más simples o primitivos serán llamados objetos p-primos (*phenomenological primitives*), definidos como esquemas básicos, intuitivos, relacionados con las abstracciones simples de los eventos comunes (Dissesa, 1993) durante las primeras etapas del desarrollo cognitivo. Por encima de estos objetos primarios encontramos lo que Kinsch y Greeno (1985), Marshall (1990), Sweller and Cooper (1985) y otros definieron como los esquemas que permiten a los humanos reconocer y clasificar patrones del mundo real y que conllevan acciones tanto físicas como mentales. Les llamaremos objetos secundarios y pese a que estos esquemas representan elementos básicos del conocimiento humano, son muy complejos y están bien estructurados. Por ejemplo, los esquemas aritméticos de Marshall, incorporan muchos tipos de conocimiento, incluyendo señales visuales, conjuntos relacionales, asociaciones inyectivas, procedimientos de planificación, etc. Por último encontramos unos esquemas en un nivel de elaboración superior llamados objetos de categoría, que hacen referencia a un conjunto de ideas organizadas libremente que tienden a trabajar de forma conjunta ante un determinado tipo de situaciones. Así, por ejemplo, un estudiante que realiza una tarea relacionada con el movimiento de las placas tectónicas, activará un conjunto de ideas (esquema) relacionadas con la geología.

En segundo lugar, *los modelos mentales* se refieren a construcciones que comparan y se ajustan a una situación problemática a través de una representación mental y su función principal es la comprensión de los diversos fenómenos del mundo real. Los esquemas aprendidos con anterioridad (*objetos de memoria*) proporcionan las piezas

que construirán los modelos, pero estos modelos dependen siempre de un contexto y no existen fuera de una situación determinada. Estos modelos se construyen organizando y conectando los objetos contenidos en la memoria con una situación del mundo real. Muchas situaciones de enseñanza requieren de la construcción de modelos mentales por parte de los aprendices. Así, cuando un estudiante pretende resolver un problema adecuadamente debe, en primer lugar, construir un modelo de la situación descrita en el texto a partir de conexiones entre la nueva información que presenta el problema y el conocimiento previo contenido en su memoria. Sobre este punto incidiremos nuevamente, dada su relevancia, en un apartado posterior dedicado específicamente a modelos mentales.

El tercer tipo de esquemas lo constituyen los *campos cognitivos*, correspondientes a patrones de activación de la memoria que se dan como respuesta a determinados sucesos (un problema planteado en clase, un debate, una demostración, etc.). Estos patrones determinan la importancia de unos objetos de memoria sobre otros en función de la necesidad de uso. Estos esquemas son de gran importancia en las tareas educativas, ya que son los encargados de mediar entre la experiencia y el aprendizaje. La experiencia desencadena la activación de un campo cognitivo que delimitará los objetos de memoria necesarios para modelizar una situación adecuadamente. Los *campos cognitivos* también delimitan las interpretaciones y el conocimiento necesario para modelar situaciones e incluso definen qué objetos de la memoria podrán ser modificados en una nueva situación de aprendizaje. Diversos investigadores han dedicado sus esfuerzos a comprender como actúan los campos cognitivos en las situaciones de aprendizaje, sobre todo estudios centrados en la comprensión y la memoria, por estar estas variables fuertemente interrelacionadas en el aprendizaje. Uno de los focos más importantes de estas investigaciones ha sido la manipulación de los campos cognitivos activados por los estudiantes durante el procesamiento de un discurso (Anderson et al, 1977; Bransford and Johnson, 1972; Sulin and Dooling, 1974). Estos estudios analizaron los campos cognitivos activados en un discurso después de mostrar imágenes, mencionar argumentos relacionados con el tema a desarrollar y seleccionar sujetos en función de su conocimiento previo sobre una situación determinada. Se ha acumulado abundante información substancial sobre los mecanismos cognitivos a través de los cuales se integra el conocimiento previo y la experiencia en la memoria (diSibio, 1982). Esta línea de

trabajo confirmó que la interpretación y el recuerdo posterior de una experiencia están fuertemente influenciados por el dominio, la situación y el conocimiento activado por los estudiantes.

### ***Teoría de esquemas y resolución de problemas***

Las señales que perciben los estudiantes del enunciado de un problema determinan la selección de esquemas resolutivos, es decir, en función de cómo un estudiante codifica la información de un enunciado, se activan unos determinados esquemas u otros. El tipo de esquema activado es un gran predictor del éxito en la resolución, por lo que un hecho deseable, sería aquel en el que el resolutor es capaz de usar las características relevantes del problema para seleccionar el esquema correcto para la resolución. Los resolutores expertos y los novatos, codifican la información de un problema de un modo diferente y es esta la causa por la que utilizan esquemas diferentes en sus resoluciones (Sabella, 1999).

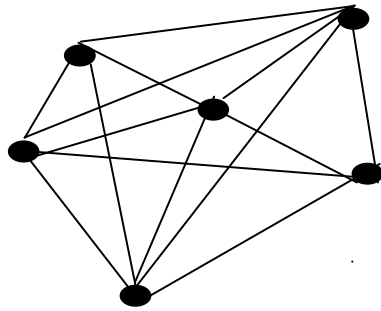
Por su parte, los profesores resuelven y explican uno o varios problemas de ciencias con la pretensión de que los estudiantes desarrollen un esquema que válido para resolver otros problemas similares. Sin embargo, muchas veces los estudiantes solo son capaces de aplicar los esquemas aprendidos a problemas idénticos, es decir, algunos estudiantes, clasifican cada esquema como útil solo para un determinado problema, el explicado. Cuando los estudiantes resuelven problemas por transferencia analógica, o bien rescatan de su memoria los esquemas adquiridos en la resolución de problemas anteriores, o toman un esquema general, de orden superior, construido desde la experiencia previa. En ambos casos, el estudiante debe moldear estos esquemas en función de la demanda del nuevo problema. En muchas ocasiones, los esquemas que poseen los estudiantes son incompletos o poco flexibles para adaptarlos a nuevos problemas y, en su afán por resolver un problema similar (de características similares a los problemas aprendidos pero con alguna característica estructural distinta), seleccionan un esquema aprendido en algún ejemplo anterior, pero no lo modifican correctamente y por tanto, no alcanzan el resultado esperado.

Estas estructuras rígidas e incompletas, son también esquemas porque se componen de conocimiento y procedimientos de aplicación de este conocimiento, pero no son

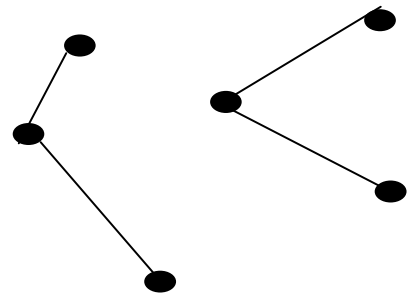
esquemas efectivos ya que no poseen la naturaleza dinámica necesaria para modelar el esquema en función de la situación. Para que los esquemas sean útiles en la resolución de problemas se deben de poder conectar con la nueva situación problemática y, a continuación, adaptarse al problema concreto. Los esquemas rígidos, es decir, aquellos que solo somos capaces de aplicar a un determinado tipo de problema, completamente definido, no ayudan a la transferencia del aprendizaje previo. Los estudiantes, durante su proceso de formación, muchas veces memorizan una gran cantidad de esquemas resolutivos para poder aplicarlos a cada uno de los problemas trabajados, pero, en vez de esto, deberían abstraer características generales de cada uno de los esquemas aprendidos, a partir de las cuales, construir un esquema general flexible, capaz de ser aplicado a distintos problemas.

Cuando se resuelve un problema de ciencias físicas se suele hacer a través de la construcción de una respuesta en términos matemáticos, obtenidos mediante relaciones, a partir de información descrita en el enunciado. Marshall (1995) representó los esquemas mentales a partir de unos grafos formados por nodos y sus conexiones. Los nodos representan hechos declarativos y los procedimientos, reglas o algoritmos. Las líneas que conectan los nodos se refieren a las relaciones entre los hechos declarativos y los procedimientos. Estos esquemas son individuales y pueden tener uniones entre nodos, más fuertes o más débiles, en función del sujeto. Los nodos pueden estar completamente unidos o relacionados (*strong schema*) o pueden tener relaciones débiles o incluso, no estar relacionados (*weak schema*). Según Marshall (opus cit), cuando se activa uno de los nodos de conocimiento, este se relacionará con otros nodos, internos (dentro del propio esquema) o externos (nodos pertenecientes a un esquema diferente). La figura 1 muestra dos ejemplos de esquemas donde uno tiene todos sus nodos conectados y otro que solamente muestra conexiones parciales.





*Esquema con nodos de información completamente conectados*



*Esquema con nodos de información parcialmente conectados*

**Figura 1:** *Representación de esquemas. Los nodos representan el conocimiento declarativo y los procedimientos, las líneas representan las relaciones entre los distintos nodos (Tomado de Sabella, 1999, p.11).*

En un esquema particular, la relación entre los nodos internos debería ser más fuerte que entre los nodos de diferentes esquemas. Entonces, para que un esquema sea realmente útil en la resolución de un problema, este ha de ser completo, es decir, poseer todos los nodos de información necesarios y ha de ser exacto, esto es, las relaciones entre sus nodos, han de ser correctas. Los estudiantes expertos, además de poseer mayor conocimiento (nodos) que los novatos, también saben usarlo mejor (relaciones). Los expertos y los novatos difieren en la forma en que integran el conocimiento desde diferentes temas. Un buen ejemplo lo encontramos en el ámbito de la física escolar, en la relación entre la dinámica y los conceptos trabajo y energía. Para un experto, los conceptos de dinámica, trabajo y energía están completamente relacionados. Por ello, si un problema lo requiere, son capaces de establecer relaciones y aplicar un esquema completo donde aparezcan todos los componentes necesarios. Los resolutores novatos, sin embargo, encontrarán muchas dificultades para relacionar estos conceptos en un mismo esquema, por lo que activarán esquemas diferentes (uno relacionado con la dinámica y otro con los conceptos trabajo y energía).

En resumen, los esquemas son fuertes patrones de asociación entre elementos de conocimiento que se activan cuando un individuo se enfrenta a un problema. Los componentes de estos esquemas son tanto declarativos como procedimentales y a

mayor relación y conectividad entre sus componentes (es decir, sus componentes no están separados en distintos objetos de conocimiento), más útiles y efectivos serán estos esquemas.

### ***Resultados empíricos sobre instrucción, esquemas y estructura de los problemas***

Los estudiantes con pocas habilidades para resolver problemas, en algunas ocasiones, toman los datos del enunciado y empiezan a calcular antes de haberse detenido a comprender la naturaleza del problema. En la actualidad se sabe que enfatizar en la comprensión conceptual ayuda significativamente a los estudiantes en la tarea de resolver problemas (Xin y Jitendra, 1999). Son muchos los estudios centrados en mejorar la comprensión conceptual, desde la instrucción, para mejorar de los esquemas resolutivos de los estudiantes.

Dos investigaciones realizadas con estudiantes de secundaria (Quilici & Mayer, 1996; Tookey, 1994) han demostrado que practicar la construcción y la inducción de esquemas mejora los resultados en resolución de problemas matemáticos, especialmente en los estudiantes con pocas habilidades para estas tareas. Quilici and Mayer (1996) diseñaron un experimento con problemas de estadística para determinar si las tareas de agrupación de estructuras básicas facilitaban la abstracción de esquemas de problema. La inducción de esquemas fue más fuerte en los estudiantes que trabajaron los problemas agrupando sus estructuras que en aquellos que focalizaron su atención en las características superficiales. El efecto fue mayor en los estudiantes con pocas habilidades. Por otra parte, Chen's (1999) trabajó con estudiantes de educación primaria donde, a partir de una serie de problemas de jarras de agua, determinó que los problemas con estructuras procedimentales variantes son de mayor ayuda para facilitar la inducción de esquemas que los problemas con estructuras invariantes.

Jitendra (2002) diseñó un experimento en el que se enseña a resolver problemas de matemáticas, concretamente problemas básicos de adición, mediante representaciones gráficas. El experimento lo llevó a cabo con estudiantes en las primeras etapas de educación primaria, y en él escogió cuidadosamente, entre los

problemas de sumas y restas, tres tipologías de problema. La categorización en las diferentes tipologías la realizó en función del tipo de historia narrada en el enunciado: a) problemas de cambio, b) problemas de agrupaciones y c) problemas de comparación. Los aspectos clave fueron: identificar las características de cada tipo de problema y diferenciarlos según sus estructuras (cambio, agrupación y comparación), y organizar y representar los hechos relevantes de la historia narrada en los enunciados utilizando diagramas esquemáticos. Tras el análisis de las resoluciones de los problemas propuestos a los estudiantes se encontraron grandes mejoras en los resultados finales en aquellos estudiantes que utilizaban representaciones gráficas para organizar la información.

En otro trabajo de este mismo autor (Jitendra, Griffin, Deatline-Buchman, Sczesniak, 2007) buscó comprobar la eficacia de la instrucción basada en esquemas, con estudiantes novales, a partir de problemas de estructura aditiva. El diseño experimental constaba de dos fases: a) instrucción en esquemas de problema; b) instrucción en resolución. Los autores proporcionaron a los estudiantes un material de apoyo compuesto por seis ítems: a) leer detenidamente el problema y determinar a qué tipología corresponde; b) Representar la información relevante en un diagrama esquemático; c) Decidir si se debe sumar o restar alguna cantidad para resolver el problema; d) Resolver el problema con las reglas matemáticas; e) escribir la respuesta; f) comprobar la respuesta. La instrucción se focalizó en mostrar cada uno de los esquemas de problema correspondientes a cada problema y en representar las situaciones descritas en los enunciados mediante diagramas esquemáticos. Durante la instrucción se presentaron los problemas y sus esquemas uno a uno, retrocediendo y repitiendo explicaciones para diferenciar entre las distintas estructuras y sus esquemas. Los resultados al comparar *pre-test* y *post-test*, mostraron que la instrucción basada en esquemas ayuda significativamente a los estudiantes en la resolución de problemas de estructura aditiva.

Otra línea de investigación interesante es la dirigida por Furch y colaboradores (Fuchs, et al., 2003; Fuchs, Fuchs, Finelli, Courey, & Hamlet, 2004). Estos autores han encontrado que la instrucción directa del profesor en inducción de esquemas y el desarrollo de estrategias metacognitivas mejoran sustancialmente la habilidad para resolver problemas matemáticos. Los investigadores analizaron repetidamente la

efectividad de la instrucción basada en esquemas y se centraron en cómo las características superficiales llaman la atención de los estudiantes en la resolución de nuevos problemas. Se pidió a los estudiantes que agruparan nuevos problemas en función de algún tipo de resolución aprendida durante la instrucción. Los estudiantes clasificaron los problemas basándose en características superficiales (Fuchs et al., 2004)

Por último, en un estudio de Friedge and Lind (2006) se concluye que el conocimiento conceptual y el conocimiento de esquemas de problemas (o conocimiento esquemático de problemas) son excelentes predictores del desempeño en resolución de problemas. De acuerdo con estos investigadores el conocimiento de esquemas de problemas consiste en la combinación de los conocimientos conceptual, procedimental y situacional (de estos conocimientos hablaremos posteriormente). Según ellos un conocimiento esquemático de problemas de alta calidad implica un profundo e interconectado conjunto de conocimientos.

### **2.2.3 Modelos mentales y resolución de problemas**

La teoría de modelos mentales de Johnson–Laird (1983, 2000), intenta dar una explicación general al pensamiento humano y la teoría gira en torno a una idea principal: los humanos utilizan representaciones mentales para comprender los fenómenos de la naturaleza, para comprender lo que ocurre a su alrededor. Esta teoría intenta explicar los procesos cognitivos del razonamiento humano.

Esta teoría de modelos mentales propone un enfoque semántico para el razonamiento humano que no se basa en reglas. De acuerdo con esta teoría, la deducción humana depende de la elaboración de modelos analógicos en la mente. La construcción y manipulación de los modelos mentales se lleva a cabo *on line*. Esto es, los modelos mentales no se recuperan de la memoria a largo plazo. Para efectuar tareas cognitivas, las personas confeccionan en su memoria de trabajo modelos mentales a partir de la combinación de la información almacenada en la memoria a largo plazo y de la que se extrae de la tarea mediante procesos perceptuales (Cañas, Antolí y Quesada, 2001). Se puede afirmar que cuando la descripción del problema se ha transformado en un modelo mental adecuado, el estudiante ha comprendido el

problema y está en condiciones de solucionarlo correctamente (Solaz-Portolés y Sanjosé, 2007).

### ***Del modelo de la situación al modelo físico formalizado***

En el modelo de comprensión de textos propuesto por van Dijk y Kintsch (1978; van Dijk y Kintch, 1983; Kintch 1998) se postulan tres niveles de representación mental: a) Nivel Superficial, o representación con las mismas palabras y estructura sintáctica del texto; b) Base del texto, o nivel semántico, constituido por el significado de las proposiciones del texto con independencia de su forma gramatical; c) *Modelo de la situación*, formado por la conexión de las proposiciones del texto con los esquemas de conocimiento preexistentes. Kintch y Greeno (1985) postularon un cuarto nivel de representación mental específico para la resolución de problemas: el *Modelo del problema* o representación abstracta del problema en términos de ecuaciones y operaciones matemáticas. Nathan, Kintsch y Young. (1992) propusieron un modelo de comprensión para los denominados problemas algebraicos con enunciado (*algebra-word-problem*). El modelo gira en torno a la representación mental que se genera en el estudiante durante la lectura comprensiva del enunciado, esto es, el ‘‘*Modelo de la situación*’’. La evolución de este modelo se dirige hacia el ‘‘*Modelo de problema*’’ donde entran en juego las resoluciones en el lenguaje matemático. La propuesta de estos autores es interesante, pero no tiene un amplio ámbito de aplicación, dado que se reduce a problemas de cálculos simples. En los problemas habituales de los cursos básicos de ciencias físicas, las ‘‘reglas’’ para establecer correspondencias son reguladas por las leyes de las ciencias físicas y son parte del conocimiento específico al que la persona que resuelve debe acceder (Buteler y Gangoso, 2003).

Gangoso (1999) propone un modelo de comprensión de problemas en física que está centrado en el proceso de abstracción y formalización necesario para alcanzar la solución de los mismos. Según este autor, la representación formal incluye los objetos, eventos descritos en la situación en conceptos, leyes y principios, a partir de los cuales se obtienen modelos físicos abstractos que, en última instancia, se escriben en lenguaje matemático. Este modelo de comprensión conserva la representación *Modelo de la Situación* (MS) pero disociando la representación *Modelo de Problema*

propuesto por Kintsch, y Greeno (1985) en dos representaciones diferentes: el *Modelo Físico Conceptual* (MFC) y el *Modelo Físico Formalizado* (MFF). El *Modelo Físico Formalizado* está en condiciones de incorporar los datos necesarios para realizar cálculos y obtener resultados con significado físico. *El Modelo Físico Conceptual* se concibe como una representación que puede subsumir los objetos en conceptos y los eventos en las leyes físicas correspondientes. Se incorporan también procedimientos: condiciones de validez, posibilidad de generalización, etc. Así pues, este modelo de comprensión propone la existencia de tres niveles de representación, interdependientes, con diferente naturaleza ontológica y diferente nivel de abstracción: MS, MFC y MFF. El modelo da cuenta de la complejidad y dinámica del proceso de resolución. Las representaciones MS, MFC y MFF son flexibles y dinámicas, pero además son idiosincráticas, por ello no necesariamente conducen a una resolución exitosa. Por consiguiente, el modelo es capaz de justificar tanto soluciones exitosas como fallidas, superando de esta manera el vacío dejado por las tradicionales descripciones de “diferencias entre expertos y novatos”.

En la tabla I se recoge la información correspondiente a las diferentes representaciones de los modelos.

	Modelo de la Situación	Modelo Físico Conceptual	Modelo Físico Formalizado
<b>Elementos</b>	Objetos y sus atributos. Eventos y sus características espacio temporales.	Modelizaciones de objetos, eventos, sus características y relaciones.	Símbolos abstractos o expresiones formales que representan a los objetos, eventos, sus características y relaciones.
<b>Regido por</b>	Principios cotidianos sobre el funcionamiento del mundo.	Principios y leyes físicas. Condiciones de aplicación o validez física.	Formalismo matemático. Condiciones de aplicabilidad o validez matemática.
<b>Categorías ontológicas</b>	No abstractas, perceptibles con los sentidos o a través de elementos de la vida cotidiana.	Abstractas, son representaciones teóricas de los objetos, eventos con sus atributos y características (aun cuando sus referentes puedan ser concretos)	
<b>Evidencias que da el sujeto</b>	Representaciones concretas, dibujos, diagramas, esquemas, símbolos, palabras, etc.	Diagramas, esquemas, gráficos, símbolos, palabras, etc.	Símbolos, ecuaciones, gráficos.
<b>Lenguaje</b>	Natural	Técnico, específico de la disciplina.	Matemático
<b>Posibilita</b>	Describir, analizar, predecir a nivel cualitativo.	Describir, analizar y predecir en términos de órdenes de magnitud. Análisis de situaciones límite, prohibidas o imposibles.	Analizar las expresiones en cuanto a la "legalidad" del formalismo. Calcular y operar.

**Tabla I.** Modelo de Comprensión en la Resolución de Problemas de Física (tomado de Solaz-Portolés, Sanjosé y Gangoso (2013).

La forma en la que opera el modelo es la siguiente (Buteler, 2003):

1. El texto enunciado del problema presenta las características superficiales con las que el lector, utilizando su conocimiento del mundo, construye el MS que le posibilita realizar inferencias y predecir comportamientos referidos al enunciado del problema.
2. Una vez construido el MS, el sujeto debe relacionar esa situación con los conocimientos específicos disponibles en su memoria de largo plazo, dando a lugar un proceso de *cambio de representación* que le permita visionar los objetos y eventos del enunciado en términos de conceptos, principios y leyes para generar el MFC.
3. Por último, se debe construir el *modelo físico formalizado* que será aquel que integre todos los objetos y eventos, expresados en el lenguaje matemático y que esté en condiciones de incorporar los datos necesarios para así obtener un resultado con sentido físico.

## **2.3 Variables a considerar en la resolución de problemas**

Como hemos explicado anteriormente, en el proceso de resolución de problemas entran en juego una gran cantidad de variables, y podemos agruparlas utilizando distintos criterios.

Lester (1983) indica que la multitud de variables que inciden en la resolución de un problema hace realmente complejo el análisis del proceso en su globalidad, sin embargo propone la categorización de al menos algunos elementos claramente identificables para dirigir las principales líneas de investigación en resolución de problemas. Distingue entre, factores de tarea, factores de sujeto, factores ambientales, factores de instrumentación y metodología de la investigación.



Perales (1993) agrupa estas variables en torno a:

- a) La naturaleza del problema
- b) El contexto de la resolución del problema
- c) El solucionador del problema

En cuanto a la naturaleza del problema, las variables se refieren a los aspectos formales del problema tales como la estructura, contexto, lenguaje, complejidad, tipo de tarea requerida, etc. Este grupo de variables es muy extenso ya que podemos hablar tanto de problemas de ciencias como problemas sociales y, por ejemplo, dentro de los problemas de ciencias, problemas de física o de química. Recordemos que en la vida ordinaria se resuelve un problema para obtener un resultado; por el contrario, en el contexto escolar el resultado importa menos que el procedimiento de resolución (Dumas-Carré 1987). Por este motivo además de la naturaleza del problema se debe prestar atención a la naturaleza de la resolución.

El contexto de resolución, engloba a aquellas variables intervinientes en el proceso que no tienen en cuenta al propio solucionador, como pueden ser el tiempo de resolución, consulta o no de fuentes de información, si se suministra o no el algoritmo puesto en juego, etc. Esto es, son las condiciones externas al problema y externas al solucionador. Estas variables acotan el proceso de resolución en función de las necesidades del docente.

Por último, las características del solucionador del problema tales como conocimiento previo, habilidades cognitivas y metacognitivas, motivación, creatividad, actitud, edad, sexo son variables a tener en cuenta y que influyen de forma significativa en el proceso de resolución.

Solaz-Portolés, et al (2013) agrupan las variables de importancia en resolución de problemas en: Variables de los problemas y Variables del sujeto resolutor. En cuanto a las variables de los problemas los autores distinguen entre el tipo de problema y las características que lo definen. Las variables del sujeto resolutor estudiadas son el conocimiento previo del sujeto, las variables cognitivas, metacognitivas y motivacionales.

### 2.3.1 Variables relacionadas con el sujeto que resuelve el problema

#### *Diferencias entre expertos y novatos*

Existen numerosos estudios que tratan las diferencias entre resolutores expertos y novatos, por ejemplo, Larkin y Reif (1979, 1983) examinaron, mediante entrevistas basadas en protocolos '*think aloud*', cómo un experto, profesor de física resolvía problemas de mecánica, en comparación con un novato, (estudiante del primer curso de mecánica). Lo primero que encontraron es que el estudiante novato empezó por anotar los términos matemáticos en un papel, mientras que el experto leyó detenidamente el problema, construyó una representación cualitativa de la situación y a continuación la definió en forma matemática. Larkin y Reif exponen que los expertos tienden a pensar más sobre la estructura profunda del problema, organizando y estructurando toda la información hasta que consiguen un modelo global y lo traducen a términos matemáticos. En cambio, los novatos no son capaces de organizar toda la información de forma coherente y buscan 'atajos' matemáticos.

Chi y colaboradores (Chi, Feltovich y Glaser, 1981, Chi, Glaser y Rees, 1982) propusieron a dos grupos de alumnos, diferenciados por el nivel de conocimiento previo, una clasificación en función del proceso de resolución de un conjunto de problemas. Una de las conclusiones de mayor trascendencia que encontramos en dicho trabajo fue que se observaron diferencias significativas respecto a la categorización que hicieron los distintos sujetos de un problema de física. La experiencia involucró a 8 doctorandos en física y 8 estudiantes de grado que acababan de aprobar un curso de mecánica. Se les solicitó que categorizaran, sobre la base de su similitud en el proceso de resolución, un conjunto de 24 problemas de un libro de texto de nivel básico universitario. Los resultados indican que la categorización hecha por los estudiantes atiende principalmente a lo que los autores denominan la "estructura superficial" del problema, mientras que los graduados hacen su clasificación teniendo en cuenta los principios físicos, que denominan "estructura profunda" del problema.

Anzai y Yokoyama (1984) investigaron sobre los diferentes modelos que utilizan resolutores expertos y novatos. También exploraron el efecto que tienen las ayudas o

pistas sobre los modelos citados. Sus estudios describen tres tipos de modelos: a) Modelo experiencial, determinado por la experiencia adquirida durante los años de vida; b) Modelo científico, definido por los conceptos científico-matemáticos adquiridos durante los años de instrucción, c) Modelo científico incorrecto, que muestra todos aquellos conceptos científico-matemáticos incorrectos. Comparó la resolución de tres sujetos, dos profesores de física considerados como expertos (E1 y E2) y un estudiante recién llegado a una carrera de ingeniería, considerado como novato (N1). Los resultados mostraron que el primer experto (E1), en primer lugar, propuso un simple modelo experiencial de la situación y a partir de este logró sin dificultades el modelo científico. El segundo experto (E2), propuso inicialmente un modelo científico incorrecto, pero inmediatamente encontró el error y cambió al modelo científico correcto. El estudiante novato construyó un modelo experiencial pero al intentar trasladarlo al modelo científico erró y mostró un resultado erróneo. Se presentó una pista al estudiante que le permitió, en primer lugar, variar el modelo experiencial, y en segundo lugar, resolver el problema con éxito.

Otros estudios basados en la comparación de expertos y novatos en resolución de problemas ponen de relieve que las diferencias encontradas entre ambos grupos son debidas a que los esquemas que los expertos mantienen en sus memorias son muy amplios y densos mientras que los esquemas de los novatos son parcelados, locales y específicos para cada tipo de problema. Esto comporta que en cuanto se les solicita vincular entre sí dos o más esquemas parciales aparecen frecuentes problemas de coherencia interna (Zajchowski & Martín, 1993).

Heyworth (1998) en un estudio exploratorio con estudiantes expertos y novatos determina que los problemas de reconocimiento, las conexiones, la carga cognitiva del problema y el conocimiento previo de los estudiantes van a tener gran importancia en el momento de enfrentarse a un problema. El autor utiliza problemas de dos tipos, el primer tipo necesita una serie pequeña de pasos para su resolución, mientras que el segundo necesita un número de pasos mayor para llegar a la solución. Los estudiantes expertos reconocen el enunciado y descomponen los problemas compuestos; en cambio, los estudiantes novatos tienen resultados menos satisfactorios en estos problemas. En cuanto a las estrategias de resolución también se encuentran diferencias entre expertos y novatos, los estudiantes avanzados

empiezan con la información del enunciado, modelizan y mediante operaciones trabajan para conseguir sus objetivos. Sin embargo, los estudiantes con menos experiencia, identifican el objetivo, buscan diferencias entre el objetivo y la información, utilizan un algoritmo u operación que reduce estas diferencias; y si no sirve, repiten los pasos anteriores.

En cuanto a la representación del problema, que es la base para una buena resolución, el estudio de Heyworth muestra que las representaciones son diferentes en expertos y novatos. En primer lugar, los expertos muestran representaciones iniciales concretas o abstractas y a partir de estas construyen una segunda representación, cualitativa, con la línea de procedimiento, para terminar con la representación matemática que da solución al problema; en cambio, los estudiantes novatos utilizan directamente la representación matemática una y otra vez, hasta que dan con el algoritmo adecuado.

### ***Conocimiento necesario para la resolución de problemas.***

La resolución de problemas pone en juego y desarrolla diferentes tipos de conocimientos (Solaz-Portolés y Sanjosé, 2008b; Nakhleh, 1993). Existe un amplio consenso en torno a la idea de que la experiencia en la tarea de resolver problemas es uno de los factores más relevantes para el éxito en la resolución. Ya hemos hablado de que cuanto mayor sea el conjunto de problemas resueltos por un estudiante más generales serán sus esquemas de resolución almacenados en la memoria a largo plazo y por tanto, mayor será la probabilidad de encontrar análogos adecuados para abordar la resolución. Pero no siempre la experiencia es equivalente a la pericia, y la exposición a una amplia variedad de ejemplos no asegura la inducción del esquema mental adecuado (Solaz-Portolés, Sanjosé y Gangoso, 2013).

El proceso de resolución de un problema va a depender en gran medida de los conocimientos que el estudiante tenga almacenados en su memoria y de la forma en que los active, facilitando o dificultando su ejecución. Problemas los hay de múltiples formas y relacionados con todos los ámbitos que podamos imaginar, por lo que se hace necesario para su resolución el hecho de poseer conocimientos específicos relacionados con los problemas a resolver. Así, por ejemplo, no podemos

resolver un problema de genética sin conocer las leyes de Mendel, o un problema de edafología, sin tener conocimientos previos sobre las características de los suelos. No obstante, además de la información particular en un ámbito dado, existe una serie de conocimientos generales o una forma de generalizar y/o procesar el conocimiento necesario para abordar un problema de forma satisfactoria independientemente del contexto de resolución implicado.

Muchos son los autores que han estudiado y clasificado los tipos de conocimiento que la educación científica y la resolución de problemas exigen. Shavelson, Ruíz-Primo y Wiley (2005) presentan una clasificación de los distintos tipos de conocimiento necesarios para lograr los objetivos que plantea la enseñanza de las ciencias. Estos autores dividen su clasificación en cuatro tipos de conocimiento. El declarativo, referido al contenido específico, “saber qué”, hechos, definiciones, etc. En segundo lugar encontramos el conocimiento procedimental, vinculado al “saber cómo”, a la producción y aplicación de reglas, procedimientos y pasos a seguir. Se distingue también el conocimiento esquemático, referido al “saber por qué”, referido a los principios, esquemas conceptuales y las relaciones entre conceptos. Finalmente describen el conocimiento estratégico que hace referencia a cuándo, dónde y cómo aplicar los conocimientos y las estrategias necesarios. Por su parte Ferguson-Hessler y de Jong (1990) realizan una clasificación diferente en la que añaden a la lista anterior el conocimiento situacional, que permite reconocer situaciones que aparecen dentro de una disciplina específica. A partir de este conocimiento, los estudiantes pueden extraer la información relevante del enunciado de un problema.

Como ya se ha dicho anteriormente Friege y Lind (2006) destacan su la importancia del conocimiento esquemático de problemas como clave del éxito en la resolución de problemas. Para estos autores este tipo de conocimiento resulta de la interacción del conocimiento situacional, procedimental y conceptual y está caracterizado por la profundidad e interconexión de todos ellos.

La “traducción” de un problema puede suponer la conversión de la información que contiene el enunciado del problema en una serie de operaciones mentales, formales o algorítmicas. Por tanto debe incluir la comprensión del lenguaje utilizado. Para traducir el problema y transformar la información inicial en otra que pueda ser utilizada, el alumno necesita una serie de conocimientos básicos, como el lingüístico,

que hace referencia al lenguaje en el que está redactado el problema y que nos permite comprender las expresiones que aparecen en el enunciado. Según Mayer (1983) el conocimiento semántico nos sirve para interpretar el contexto, para darle sentido al problema, todo esto ligado al conjunto de conocimientos tratados anteriormente, define el conocimiento de traducción de problemas.

La capacidad de procesar información está ligada a las habilidades cognitivas y metacognitivas, las cuales están íntimamente relacionadas a pesar de ser conceptualmente distintas. Las estrategias cognitivas son modalidades de trabajo intelectual que permiten adquirir, codificar y recuperar información. Estas estrategias están guiadas por las estrategias metacognitivas, las cuales autorregulan dicho proceso cognitivo a través de la toma conciencia y decisiones durante el procedimiento (Correa, Castro y Lira, 2004). Weinstein y Meyer (1991) definen una estrategia cognitiva como un plan para movilizar recursos cognitivos, como pueden ser las acciones que se llevan a cabo para retener información en la memoria a largo plazo, acceder a ella, organizar esta información y establecer relaciones.

### ***Metacognición***

Hemos hablado con anterioridad de los procesos cognitivos implicados en la resolución pero Jiménez y Segarra (2004), señalan que el principal componente de un adecuado enfoque didáctico en la resolución de problemas es que el estudiante reflexione acerca de sus recursos cognitivos y cómo emplearlos. Schraw, Crippen y Hartley (2006) han analizado los principales componentes de la denominada teoría del aprendizaje autorregulado y cómo estos pueden tener implicaciones para la enseñanza de las ciencias. Esta teoría se centra en los procesos cognitivos, metacognitivos y motivacionales. La metacognición la definen como todas las habilidades que ayudan a comprender, controlar y evaluar los procesos cognitivos. Las estrategias metacognitivas se focalizan principalmente en la planificación para llevar a cabo, controlar y evaluar los procesos cognitivos (Schraw, 1998). Se ha demostrado que enseñar estrategias cognitivas y metacognitivas ayuda significativamente a los estudiantes en ciertas tareas de aprendizaje (Bielaczyc, Pirolli y Brown, 1995; Stenberg, 1998).

Flavell (1979) dio los primeros pasos en la formación de un modelo formal sobre la metacognición, según el autor la metacognición está implicada en la conciencia que se tiene de cómo se aprende, en la habilidad de juzgar la dificultad de una tarea, en el control de la comprensión, en el uso de determinada información para lograr un objetivo y en la evaluación del progreso en el aprendizaje. En la actualidad se distinguen dos componentes de la metacognición, el conocimiento de la cognición y su regulación. El conocimiento de la cognición viene determinado por aquello que sabemos sobre nuestra propia cognición, este conocimiento se desarrolla con la edad y puede ser de tipo declarativo (saber sobre cosas) o procedimental (saber hacer cosas), etc. La regulación de la cognición se considera como el conjunto de actividades que ayudan a los estudiantes a controlar su aprendizaje. Las tres habilidades de regulación esenciales son la planificación, el control y la evaluación (Schraw & Moshman, 1995). Estas destrezas cobran especial interés en el ámbito de la resolución de problemas, planificar estrategias para abordar el problema, controlarlas y evaluar los resultados son las acciones que permiten al resolutor desenvolverse con facilidad en el espacio de resolución.

Son muchas las investigaciones dedicadas a las estrategias metacognitivas y muchas las pruebas de que el desarrollo de estas mejora la competencia de los estudiantes en resolución de problemas académicos (Leal, 1987; Pintrich y DeGroot, 1990; Pokay y Blumenfeld, 1990; Wang, Haertel y Walberg, 1993). Dhillon (1998) muestra la relevancia del control de la comprensión; los estudiantes que resuelven bien los problemas de física evalúan de forma constante su progreso en el avance hacia la solución. Chi, Bassok, Lewis, Reimann y Glaser (1989) al pedir a los estudiantes que expliquen su proceso resolutivo verifican que los buenos solucionadores de problemas controlan sus déficits de comprensión en mayor medida que los malos resolutores.

Todos estos estudios que acabamos de mencionar encuentran sus limitaciones en el hecho de que la información obtenida, siempre proviene de las declaraciones de los estudiantes a cerca de su propia comprensión o su propio control de la comprensión, Otero, Campanario y Hopkins (1992), han desarrollado un instrumento de medida de la habilidad del control y comprensión de la metacognición (CMA) que no se basa exclusivamente en los informes elaborados por los propios estudiantes. Los

investigadores muestran claros indicios de que la metacognición está significativamente relacionada con el éxito académico. Estos trabajos constatan la importancia del control de los procesos cognitivos, pero no hay que olvidar que estas estrategias necesitan de la propia voluntad del sujeto y el grado de voluntad depende directamente de la motivación.

En conclusión, se pueden distinguir siete tipos de conocimientos necesarios para la resolución de problemas, estos son: declarativo, procedimental, esquemático, estratégico, situacional, metacognitivo y de traducción de problemas. Un análisis más extenso de todos los tipos de conocimiento necesarios para resolver problemas puede encontrarse en el trabajo de revisión de Solaz- Portolés y Sanjosé (2008b).

### ***Razonamiento formal y otras variables neopiagetianas***

Uno de los aspectos de los trabajos de Piaget que ha suscitado más el interés de los educadores de ciencias es el tránsito desde la etapa de las operaciones concretas a la de las operaciones formales, por la importancia que puede tener en el diseño de la instrucción (Bodner, 1986). De hecho, los seguidores de Piaget (Herron, 1978; Lawson y Karplus, 1977) defienden que los estudiantes que no hayan alcanzado la habilidad de las operaciones formales serán incapaces de asimilar significativamente los conceptos y principios de la ciencia y, en consecuencia, no podrán llevar a cabo los procesos cognitivos exigidos en la resolución de problemas.

La teoría Neo-Piagetiana de Pascual-Leone sostiene que el razonamiento formal, por sí sólo, no puede explicar el desempeño de los estudiantes. Dicha teoría postula para el desarrollo cognitivo los siguientes constructos:

-El M-operador o M-espacio, que es una medida de la cantidad de información que puede procesar el sujeto en una determinada tarea (también se le ha llamado capacidad mental y capacidad de la memoria de trabajo), y que da cuenta del incremento de la capacidad de procesamiento de la información con la edad (Pascual-Leone y Goodman, 1979).

-Dependencia/ independencia de campo, que representa la destreza de un sujeto para extraer información a partir de variados y complejos contextos



instruccionales. Los aprendices que tienen mayor dificultad para separar la *señal* del *ruido* son clasificados como dependientes de campo (Pascual-Leone, 1989).

-Estilo cognitivo móvil/fijo, resultado de la combinación de la capacidad mental (M-espacio) y de la dependencia/independencia de campo (Pascual-Leone, 1989).

En un trabajo de Solaz-Portolés y Sanjosé (2008c), se recogen las investigaciones que muestran que los resultados de los estudiantes en la resolución de problemas dependen de: su nivel de razonamiento formal (mayor nivel de razonamiento, mejores resultados), su capacidad mental (M-espacio) (mayor capacidad, mejores resultados), si son dependientes o independientes de campo (independientes de campo, mejores resultados), y de su estilo cognitivo móvil/fijo (los móviles lo hacen mejor en pruebas creativas, los fijos en pruebas de mayor razonamiento formal).

### ***Capacidad de la memoria de trabajo***

La capacidad limitada de la memoria de trabajo restringe el número de modelos mentales que pueden mantenerse activos (Santamaría, García-Madruga y Carretero, 1996). Así, se ha encontrado que cuantos más modelos mentales es necesario activar y procesar en la memoria de trabajo, tanto más difícil resulta un problema de resolver (Solaz-Portolés y Sanjosé, 2008d). En el trabajo de Bodner y Domin (2000) se pone de relieve que los estudiantes más exitosos en la resolución de problemas construyen significativamente más modelos mentales de un problema que aquéllos que no consiguen resolverlo bien.

Se ha constatado que la capacidad de la memoria de trabajo desempeña un papel crucial en la resolución de problemas de ciencias (Solaz-Portolés y Sanjosé, 2009). La habilidad para mantener la información en un estado de activación elevado y controlado puede resultar decisivo para la integración de la información en los sucesivos pasos de la resolución, incluyendo la construcción y manipulación de modelos mentales. No debe resultar raro, pues, que se encuentre un buen número de dificultades en los procesos cognitivos de resolución de problemas en las que está implicada la capacidad de la memoria de trabajo. Los resultados de los experimentos

sobre la asociación entre la capacidad de la memoria de trabajo y la carga de información en la resolución de problemas, efectuados por Opdenacker, Fierens, Brabant, Sevenants, Slootamekers, et al.(1990), Gathercole (2004), Danili y Reid (2004) y Tsaparlis (2005) apoyan la relación positiva existente entre capacidad de memoria de trabajo y éxito en la resolución de problemas de ciencias.

Johnstone y El-Banna (1986) han propuesto un modelo de resolución de problemas basado en la teoría de la memoria de trabajo y en el M-espacio de la teoría de Pascual-Leone. Este modelo establece que un estudiante tendrá éxito en la resolución de un problema si su demanda mental (M-demanda o Z-demanda, los autores aproximan el valor de Z al número de pasos efectuado en la resolución por el alumno menos talentoso, pero exitoso en dicha resolución) es menor o igual a la capacidad de la memoria de trabajo del estudiante, X (esto es,  $Z \leq X$ ). La bondad del modelo ha sido puesta a prueba en los trabajos de Tsaparlis (1998) y Tsaparlis y Angelopoulos (2000).

### ***Motivación***

Wolters y Rosenthal (2000) definen la motivación como el conjunto de recursos que animan a una persona a implicarse en una tarea o a alcanzar un objetivo. La motivación deriva de las creencias sobre la autoeficacia, creencias sobre el valor de la tarea y las actitudes. Escudero (1995) indica que la actitud de los alumnos ante la resolución de problemas no puede obviarse, y frecuentemente no es la más apropiada para dirigirse hacia el éxito en la resolución. La motivación es un factor que afecta al uso y desarrollo de las habilidades cognitivas y metacognitivas, por tanto un factor presente y activo en todo proceso de resolución y son muchos los estudios que constatan la influencia de factores motivacionales tanto en el desempeño académico (Sadowski y Gulgoz, 1996; Coutinho, 2007), como en la resolución de problemas (Wieth y Burns, 2000; Coutinho, Wiemer-Hastings, Skowronski y Britt, 2005; Marcou y Philippou, 2005; Beal y Stevens, 2007).

Todas las variables que acabamos de mencionar se encuentran relacionadas en el proceso de resolución de un problema, y el éxito en la resolución dependerá de todas ellas. Por tanto, cualquier análisis de los procesos de resolución de problemas

requerirá un minucioso control de todas las variables implicadas alrededor del sujeto resolutor.

### **2.3.2 Variables de los problemas.**

#### ***Clasificación de los problemas***

Podemos clasificar los problemas desde muchos ángulos y son muchas las clasificaciones hechas hasta el momento. Por ejemplo, Perales (1993) establece una clasificación de los problemas atendiendo al campo de conocimiento implicado. Propone diferenciar entre problemas de ciencias y problemas cotidianos, y señala que la principal diferencia entre ambos radica en que cuando intentamos resolver un problema científico lo importante no es la solución (a menudo conocida), sino el proceso hasta llegar a ella. En cambio, en los problemas cotidianos o reales, no ocurre así.

También es interesante la clasificación que propone Valenzuela (2003), donde diferencia los problemas en rutinarios o no. Los problemas rutina o rutinarios son aquellos para los que el estudiante tiene preparado un mecanismo de resolución; por ejemplo, si un alumno conoce el procedimiento y todos los pasos para factorizar un número cualquiera, presentarle un problema que consista en aplicar dicha regla es presentarle un problema rutina. Si por el contrario, el problema que presentamos al alumno es no rutinario, supone que el alumno ha de procesar la información que posee hasta obtener los pasos para llegar a la solución.

El grupo de Gil (Gil, Martínez-Torregrosa y Senent, 1988) halló consecuencias didácticas de interés asociadas al carácter “abierto” o “cerrado” de un problema, entendiendo esto cómo el nivel de conocimiento y explicitación de las variables relevantes, sus relaciones y valores. Dicho grupo aboga por la utilización en el aula de problemas “abiertos” bajo una orientación metodológica de carácter socio-constructivista.

Finalmente, destacaremos en este apartado la clasificación de problemas realizada por Johnstone (1993). Dicho autor sugiere que todos los problemas tienen tres

variables asociadas: los datos proporcionados, la metodología a emplear en su resolución, y los objetivos a alcanzar. En función de estas variables identifica ocho tipos diferentes de problemas y enumera las habilidades necesarias para abordar su resolución, que se hallan recogidas en la Tabla II

Tipo	Datos	Método	Objetivos	Habilidades
1	Proporcionados	Familiar	Proporcionados	Recuerdo de algoritmos
2	Proporcionados	Desconocido	Proporcionados	Búsqueda de paralelismos con otros métodos conocidos.
3	Incompletos	Familiar	Proporcionados	Análisis del problema para decidir qué datos adicionales son necesarios para su resolución.
4	Incompletos	Desconocido	Proporcionados	Sopesar métodos posibles y a continuación decidir qué datos son necesarios.
5	Proporcionados	Familiar	Abierto	Toma de decisiones sobre los objetivos más apropiados. Exploración en los esquemas de conocimiento de la memoria a largo plazo.
6	Proporcionados	Desconocido	Abierto	Toma de decisiones sobre objetivos y selección de métodos idóneos. Exploración en los esquemas de conocimiento de la memoria a largo plazo.
7	Incompletos	Familiar	Abierto	A partir de los objetivos seleccionados analizar los datos requeridos
8	Incompletos	Desconocido	Abierto	Proponer objetivos y métodos, y a partir de ellos decidir sobre la necesidad de datos. Además, aplicar todas las habilidades mencionadas en los siete tipos anteriores.

**Tabla II.** Clasificación de los problemas según Johnstone (1993).

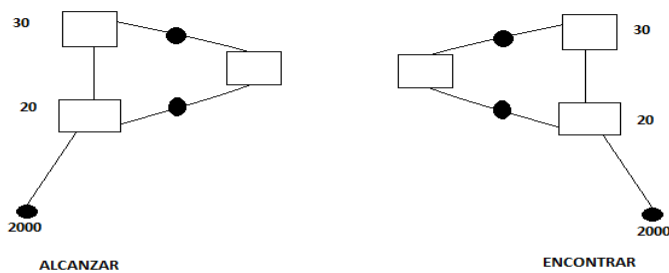
Podríamos aportar muchas otras clasificaciones, no obstante, para el presente trabajo, circunscrito a la Didáctica de las Ciencias Experimentales, lo que nos interesa es caracterizar los problemas escolares de esta área.

### ***Caracterización de los problemas. Superficie y estructura***

Para caracterizar los problemas, en particular los problemas escolares, debemos partir de algún modelo teórico que defina los factores constituyentes de un problema, de modo que podamos diferenciar entre problemas. Un ejemplo clarificador de un método riguroso para clasificar problemas lo proporcionan los estudios de Cerdán (2008), donde, desde la didáctica de las matemáticas, desarrolla un análisis intensivo mediante grafos trinomiales. Estos grafos proporcionan una clasificación de estructuras aritmético-algebraicas con tres variables implicadas. Como ejemplo encontramos los problemas de móviles con las variables implicadas distancia-velocidad- tiempo. Existe un grafo para cada relación implicada entre las tres variables de modo que el asociar un grafo a un problema permite definir conjuntos de problemas de modo que a igualdad de grafos entre problemas igual procedimiento algebraico de resolución.

De esta forma y tomando como ejemplo los clásicos problemas de móviles asociados al estudio de la cinemática donde o “un móvil alcanza a otro” o “dos móviles se encuentran el mismo punto”, llamados coloquialmente problemas de “Alcanzar o encontrar”, y que vienen representados siempre por un sistema de ecuaciones donde dos rectas se cortan con pendientes del mismo signo o dos rectas que se cortan con pendientes de diferente signo. Un ejemplo de esta cuestión se presenta en la Figura 2, donde podemos observar dos grafos orientados con todas las relaciones entre las variables implicadas similares, excepto una, que es la que cambia su orientación debido a la diferencia en el signo de las pendientes.

En esta figura, 20 y 30 son los valores correspondientes a la velocidad (expresados en m/s), 2000 corresponde a la distancia (expresada en m) y el tiempo es la variable demandada en los problemas.



**Figura 2:** Grafos orientados de dos problemas de móviles con los mismos datos ofrecidos y solo una relación diferente. Diferente signo en la pendiente de una de las dos rectas implicadas.

En los problemas escolares de ciencias se suele plantear un contexto mediante el lenguaje natural en el que se intentan relacionar fenómenos naturales con algunas reglas, principios o leyes. Existen aspectos, atributos o características de la situación que son conocidos y una demanda concreta sobre otro aspecto no conocido (Sanjosé, Valenzuela, Fortes y Solaz-Portolés, 2007). Si nos centramos en el ambiente académico, los problemas en ciencias y matemáticas poseen dos factores que los caracterizan según algunos autores (Chi, Feltovich y Glaser, 1981; Holyoak y Koh, 1987): contexto y estructura. El contexto o superficie, corresponde al nivel concreto; y la estructura corresponde al nivel abstracto de la situación. El contexto o superficie del problema hace referencia a la temática concreta o al ámbito de la realidad descrito en el enunciado, mientras que la estructura se refiere a las relaciones entre las variables que relacionan este enunciado con las reglas, leyes y procedimientos necesarios para la representación abstracta del problema.

Los problemas que tienen idéntico contexto y diferente estructura se denominan similares; isomorfos si tienen diferente contexto e idéntica estructura; equivalentes cuando tienen igual contexto e igual estructura, y, finalmente, no-relacionados o diferentes, cuando tienen diferente contexto y diferente estructura (Reed, 1987). En la Tabla III se recoge la información que acabamos de mencionar.

	<b>Igual Superficie</b>	<b>Diferente superficie</b>
<b>Igual Estructura</b>	Equivalentes	Isomorfos
<b>Diferente Estructura</b>	Similares	Diferentes

**Tabla III:** Relaciones entre problemas en términos de la similitud de sus superficies y estructuras. (Reed, 1987).

En nuestro caso en particular, cuando hablamos de estructura nos referimos a las relaciones algebraicas que se dan entre las variables asociadas a las entidades expuestas en el enunciado, es decir, cuando dos problemas tienen idéntica estructura sus relaciones abstractas son idénticas y se resuelven aplicando el mismo tipo de reglas, procedimientos y algoritmos. Un ejemplo de problemas con la misma estructura sería: a) un problema en el que un motorista ha de alcanzar a un coche en una autovía; y b) un problema en el que un tren ha de alcanzar a otro en algún punto de la vía. En ambos la pregunta podría ser: ¿cuándo alcanzará, el segundo móvil (Motorista/Tren) al primero? Como vemos, poseen historias distintas pero la estructura y el método de resolución son similares. Un caso de problemas con la misma superficie o contexto y distinta estructura podrían ser dos problemas de trenes que salen, bien de la misma estación, bien de estaciones distintas, y se ha de averiguar el punto de encuentro de ambos trenes.

Además del contexto o situación real descrita en el enunciado, son también elementos superficiales los valores numéricos de las cantidades explicitadas como datos. En problemas multiplicativos se ha observado que los estudiantes cambian la operación elegida cuando se les presentan, sucesivamente, problemas que sólo difieren en términos numéricos (Bell, Swan y Taylor, 1981). También la incógnita, o la magnitud demandada son elementos de la superficie. Se ha demostrado que la incógnita de un problema influye directamente en la dificultad del problema y condiciona el proceso de resolución (Hiebert, 1982; Vergnaug, 1982). Se ha encontrado también que los estudiantes con bajo conocimiento previo y pericia centran su atención en la incógnita, e incluso es frecuente el uso de la estrategia de

trabajar “hacia atrás” (Chi, Glaser y Rees, 1982), comenzando por la incógnita y retrocediendo paso a paso hasta encontrar los datos del problema.

Diversos estudios (Bashkar y Simon, 1977; Larkin y Rief, 1979; Chi et al, 1981) han mostrado que los expertos poseen, además de un conocimiento base mayor que los novatos, esquemas mejor organizados, principalmente en torno a principios, leyes y procedimientos, es decir, esquemas construidos a partir de las estructuras procedimentales subyacentes a los enunciados, además, son capaces de interrelacionar temáticas científicas entre ellas a partir de estas reglas o leyes, en cambio, los estudiantes con poca experiencia, construyen los esquemas, principalmente, en torno a elementos superficiales.

Novick (1988), concluyó que cuando los problemas tienen las mismas características estructurales y diferente superficie o contexto se obtiene un nivel de transferencia positivo espontáneo (el aprendizaje previo interfiere en una nueva situación facilitando la identificación de características comunes entre dos situaciones) mayor en resolutores expertos, mientras que cuando los problemas tienen la misma superficie, se produce transferencia negativa (el aprendizaje previo interfiere en una nueva situación dando lugar a una identificación incorrecta de características comunes entre dos situaciones) en ambos grupos pero los resolutores novatos tienden a producirlo con mucha más frecuencia que los resolutores expertos.

### ***Familiaridad con el enunciado de los problemas***

Algunos de los problemas que se proponen en las aulas de ciencias, representan situaciones desconocidas o, al menos, poco familiares para los estudiantes. La familiaridad se relaciona directamente con el conocimiento previo y se define como el grado de conocimiento debido a la experiencia y relación de un sujeto con los objetos y eventos narrados en el enunciado de un problema. La mayoría de los conceptos que nos son familiares tienen algo de tangible, algo que puede ser reconocido por los sentidos. El aprendizaje de este tipo de conceptos nos resulta más sencillo que el de conceptos abstractos. Los conceptos tratados en la enseñanza de las ciencias tales como *fotones*, *moléculas*, etc., son ideas que están más allá de nuestros



sentidos, y los alumnos no tienen experiencia previa que les facilite dar un significado preciso a estas palabras. (Galagovsky, et al, 2003).

Jonassen (2000) considera la familiaridad con los enunciados de los problemas como un gran predictor del éxito en la resolución de un problema determinado. El autor señala que la habilidad para resolver problemas no es una competencia fácilmente transferible desde problemas familiares a problemas no familiares. Por su parte, Mayer y Wittrock (1996) apoyan esta afirmación y determinan que los problemas de rutina o familiares para los estudiantes son fáciles de transferir. En cambio, la transferencia a partir de problemas no-familiares requiere siempre más esfuerzo y resulta más difícil.

Fernández, Anaya, y Suárez, (2012) muestran que los contextos poco familiares disminuyen la motivación de los estudiantes en la tarea de resolver problemas y Alant (2004) defiende que la familiaridad con los problemas crea una especie de zona de acomodamiento o ‘colchón’ para la comprensión conceptual. El aprendizaje a través de problemas familiares requiere que los estudiantes trabajen con problemas directamente relacionados con su conocimiento de forma que se facilite la comprensión de las estructuras abstractas subyacentes.

Cheng et al. (1986) encontraron que el entrenamiento puramente formal en procedimientos tenía poco impacto en la capacidad de los sujetos para resolver problemas poco familiares o desconocidos. Sin embargo, si la formación lógica era junto con un pequeño número de ejemplo problemas, los sujetos fueron capaces de aplicar los procedimientos aprendidos en problemas isomorfos en contextos poco familiares para los estudiantes.

### **2.3.3 Variables relacionadas con el contexto de resolución del problema**

La teoría de Piaget hace explícita referencia a la importancia del contexto social en el aprendizaje. Diversos seguidores de Piaget han puesto de relieve este aspecto en la resolución de problemas. De hecho, algunos de ellos (Doise, 1986; Doise y Mugny, 1984; Doise y Palmonari, 1984), aseguran que la colaboración en tareas de resolución de problemas incrementa el desempeño académico de los estudiantes.

Lumpe (1995) ofrece los resultados de varios trabajos que destacan repercusión positiva de la colaboración entre estudiantes en la asimilación de conceptos científicos y en la resolución de problemas.

Parra y Flores (2008) muestran un estudio relacionando el aprendizaje cooperativo y la resolución de problemas de fracciones, que la interacción entre grupos de estudiantes con el profesor proporciona buenos resultados. Los estudiantes al trabajar en grupos exponen sus problemas y limitaciones de una forma natural y desde este estado resulta más sencillo guiar el trabajo y ayudar a resolver dificultades por parte del profesor.

El aprendizaje cooperativo permite a los estudiantes la internalización de procesos así como la organización y retención de las ideas (Jones, Wilson y Bhojwani, 1997) además de externalizar los conocimientos matemáticos individuales de forma que puedan ser criticados y corregidos por el grupo lo que a su vez dirige a los estudiantes a la creación de nuevo conocimiento (Ernest, 1998). En esta línea se encuentra el aprendizaje basado en problemas (ABP), una metodología que ha mostrado diversas bondades desde la resolución de problemas de distinta índole, a partir del trabajo cooperativo.

## **2.4 Resumen del capítulo**

Con este capítulo se ha abierto un bloque teórico (capítulos 2 y 3) a partir del cual se sustentan todos los estudios empíricos de esta tesis doctoral.

En primer lugar se han mostrado brevemente las distintas corrientes de pensamiento en resolución de problemas y su evolución a lo largo de la historia. Se ha definido el término problema desde la perspectiva de diferentes investigadores (Simon, 1978; Chi y Glaser, 1986; Orton, 1986) y se ha justificado el trabajo mediante estudios que muestran los factores que influyen en los estudiantes cuando resuelven problemas (Gabel 1981; Lythcott, 1990; Solaz-Portolés y Sanjosé, 2006).

En segundo lugar se ha prestado atención a todos los procesos cognitivos involucrados en la resolución de un problema, con especial énfasis, en aquellos relacionados directamente con la comprensión. Se ha recopilado información sobre cómo los humanos organizamos la información adquirida a lo largo de nuestra vida, social y académica, a partir de la teoría de esquemas (Anderson, Spiro y Montague, 1977; Schank y Abelson, 1977; Bruce y Brewen, 1980; Rumelhart, 1980; Marshall, 1995).

Se ha comprobado que los resolutores expertos, además de poseer más conocimiento general, organizan mejor la información mediante esquemas más completos (Bashkar y Simon, 1977; Larkin y Rief, 1979; Chi et al, 1981) y que instruir en la construcción de esquemas proporciona buenos resultados (Quilici & Mayer, 1996; Tookey, 1994; Asha 2007). Se han estudiado también diversas teorías de construcción de modelos mentales en relación con la resolución de problemas, con particular atención al modelo de Kintsch y Van Dijk (1978; van Dijk y Kintch, 1983; Kintch 1998) por ser uno de los modelos utilizados en la explicación de los objetivos planteados y los resultados obtenidos en este trabajo.

A continuación se ha llevado a cabo una extensa revisión bibliográfica sobre aquellas variables involucradas en la resolución de problemas, prestando atención tanto a las variables relacionadas con el sujeto que resuelve como con las relacionadas con el propio problema.

En cuanto a las variables de la persona que resuelve un problema, se ha investigado acerca de las diferencias entre expertos y novatos (Larkin y Reif, 1979, Chi, Feltovich y Glaser, 1981, Chi, Glaser y Rees, 1982; Novick, 1988; Anzai y Yokoyama, 1984; Heyworth (1998), el uso de estrategias metacognitivas (Jiménez y Segarra, 2004; Schraw, G., 1998; Bielaczyc, Pirolli y Brown, 1995) y en como la motivación puede afectar a la resolución de problemas (Escudero, 1995; Wieth y Burns, 2000; Coutinho, Wiemer-Hastings, Skowronski y Britt, 2005).

En cuanto a las variables de los problemas, en primer lugar se han clasificado los problemas, en torno a distintos criterios, mediante una revisión exhaustiva de la investigación reciente. En segundo lugar se han caracterizado los problemas a través de diversos modelos teóricos que definen sus características principales (Cerdán,

2008; Reed, 1987; Chi, Feltovich y Glaser, 1981; Holyoak y Koh, 1987). Por último se ha tratado la familiaridad con el enunciado de los problemas (Jonassen, 2000; Mayer y Wittrock 1996; Alant 2004)

El siguiente capítulo (capítulo 3) completa el bloque teórico a partir del estudio de la investigación existente sobre el proceso de transferencia analógica en resolución de problemas. Focalizamos nuestra atención en el establecimiento de analogías (Gentner, 1983) y en cómo éste afecta a la resolución de problemas.

# Bibliografía

---

- Alant, B. (2004). Researching problem solving in introductory physics: Towards a new understanding of familiarity. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, 8, pp. 29-40.
- Alloway, T. P. (2006). How does working memory work in the classroom? *Educational Research and Reviews*, 1, 134-139.
- Alsina, A. (2007). ¿Por qué algunos niños tienen dificultades para calcular? Una aproximación desde el estudio de la memoria humana. *Revista Latinoamericana de Educación Matemática*, 10(3), 315-333.
- Anderson, Richard C., Spiro, Rand J., y William E. Montague. (1977). *Schooling and the Acquisition of Knowledge*. (Eds). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Andersson, U. (2007). The contribution of working memory to children's mathematical word problem solving. *Applied Cognitive Psychology*, 21, 1201-1216.
- Anzai, Y., & Yokoyama, T. (1984). Internal models in physics problem solving. *Cognition and Instruction*, 1(4), 397-450.
- Ashmore, A.D., Frazer, M.J. y Casey, R.J. (1979). Problem solving and problem solving networks in chemistry. *J. Chem. Educ.*, 56, 377-379.
- Baddeley, A. D. y Hitch, G. J. (1974). Working memory. En G. H. Bower (Ed.), *The psychology of learning and motivation*, Vol. 8. London: Academic Press.
- Baddeley, A. D. (1986). *Working Memory*. New York: Oxford University Press.

- Baddeley, A. D. (1990). *Human Memory: Theory and Practice*. Boston: Allyn and Bacon.
- Baddeley, A. D. (1995). Working memory. In M. S. Gazzaniga (Ed.), *The Cognitive NeuroSciences*, pp. 755-764. Cambridge, MA: MIT Press.
- Baddeley, A. D. (2000). The episodic buffer: A new component of working memory? *Trends in Cognitive Sciences*, 4, 417-423.
- Barrett, T. (2005). Understanding problem-based learning. En T. Barrett, I. Mac Labhrainm, H. Fallon (Eds.), *Handbook of enquiry & problem based learning*, pp 13-25. Galway: CELT.
- Beal, C. R., & Stevens, R. H. (2007). Student motivation and performance in scientific problem solving simulations. In R. Luckin, K. R. Koedinger, & J Greer (Eds.), *Artificial intelligence in education: Building technology rich learning contexts that works*, pp. 539-541. IOS Press, Amsterdam.
- Bhaskar, R. and Simon, H.A. (1977). Problem solving in semantically rich domains: an example from engineering thermodynamics. *Cognitive Science*, 1, 216.
- Bielaczyc, K., Pirolli, P. L., & Brown, A. L. (1995). Training in self-explanation and self-regulation strategies: Investigating the effects of knowledge acquisition activities on problem solving, *Cognition and Instruction* 13, 221-252.
- Bodner, G. M. (1986). Constructivism: A theory of Knowledge. *Journal of Chemical Education*, 63(10), 873-877.
- Bodner, G. M. y Domin, D. S. (2000). Mental models: The role of representations in problema solving in Chemistry. *University Chemistry Education*, 4, 24-30.
- Branda, L. A. (2009). A problem based learning approach to analytical and applied chemistry. *University Chemistry Education*, 6, 65-72.
- Bransford, J. D., & Johnson, M. K. (1972). Contextual prerequisites for understanding: Some investigations of comprehension and recall. *Journal of Verbal Learning and Verbal Behavior*, 11, 717-726.

- Buteler, L. (2003). *La resolución de problemas en física y su relación con el enunciado*. Tesis doctoral no publicada. Universidad Nacional de Córdoba. Facultad de Matemática, Astronomía y Física. Argentina.
- Buteler, L. y Gangoso, Z. (2003). La representación externa en la resolución de un problema de física: ¿una cuestión de fondo o de forma? *Cognitiva*, 25 (1), 51-66.
- Cañas, J. J., Antolí, A., & Quesada, J. F. (2001). The role of working memory on measuring mental models of physical systems. *Psicológica*, 22, 25-42.
- Cerdán, F. (2008). *Estudios sobre la familia de problemas aritmético-algebraicos*. Tesis Doctoral. Valencia: Servicio de Publicaciones de la Universitat de València.
- Chen, Z. (1999). Schema induction in children's analogical problem solving. *Journal of Educational Psychology*, 91, 703-715.
- Cheng, P., Holyoak, K., Nisbett, R., y Oliver, I. (1986). Pragmatic versus syntactic approaches to training deductive reasoning. *Cognitive Psychology*, 18, 293-328.
- Chi, M. T. H., Feltovich, P. S. y Glaser, R. (1981). Categorization and representation of physics problems by experts and novices. *Cognitive science*, 5, 121-152.
- Chi, M.T.H., Glaser, R. y Rees, E. (1982). Expertise in problem solving. En R. Sternberg (Ed.): *Advances in the psychology of human intelligence*. Hillsdale, N.J.: Erlbaum.
- Chi, M. y Glaser, R. (1986). Capacidad de resolución de problemas, en R. F. Sternberg (Ed.) *Las capacidades humanas. Un enfoque desde el procesamiento de la información*, pp. 303-324. Barcelona, Labor.
- Chi, M. T. H., Bassok, M., Lewis, M. W., Reimann, P., y Glaser, R. (1989). Self-explanations: How students study and use examples in learning to solve problems. *Cognitive Science*, 13, 145-182.

- Coutinho, S. A., Wiemer-Hastings, K., Skowronski, J. J., y Britt, M. A. (2005). Metacognition, need for cognition and use of explanations during ongoing learning and problem solving. *Learning and Individual Differences*, 15, 321-337.
- Coutinho, S. A. (2007). The relationship between goals, metacognition and academic success, *Educate*, 7, 39-47.
- Correa, Z. M.; Castro, R. F. y Lira, R. H. (2004). Estudio descriptivos de las estrategias cognitivas y metacognitivas de los alumnos y alumnas de primer año de pedagogía en la enseñanza media de la universidad del BÍO-BÍO. *Revista Theoria*. vol. 13, 103-110.
- Danili, E. y Reid, N. (2004). Some strategies to improve performance in school chemistry, base on two cognitive factors. *Research in Science and Technological Education*, 22, 203-226.
- Derry, S. J. (1996). Cognitive schema theory in the constructivist debate. *Educational Psychologist*, 31: 163–174.
- Dewey, J. (1989). *Cómo pensamos*. Barcelona: Paidós.
- Dijk, T. A. van y Kintsch, W. (1983). *Strategies of discourse comprehension*, Nueva York, Academic Press.
- Dhillon, A. (1998). Individual differences within problem-solving strategies used in physics. *Science Education*, 82, 379-405.
- Dissesa, A.A. (1993). Toward an epistemology of Physics. *Cognition and instruction*, 10, 105-125.
- DiSibio, M. (1982). Memory for connected discourse: A constructivist view. *Review of Educational Research*, 52, 149-174.
- Doise, W. y Mugny, G. (1984). *The social development of the intellect*. Oxford, UK. Pergamon Press.



- Doise, W. y Palmonari, A. (1984). *Social interaction in individual development*. Cambridge, UK. Cambridge University Press.
- Doise, W. (1986). *Levels of explanation in social psychology*. Cambridge, UK. Cambridge University Press.
- Dumas-Carré, A. (1987). *la resolution de problemes en physique au lycée*. Tesis doctoral. Paris: Universidad de París 7.
- Duncker, K. (1945). On problem-solving. *Psychological Monographs*, 58(5), Whole No. 270.
- Egido, I., Aranda, R., Cerrillo, R., De la Herrán, A., De Miguel, S., Gómez, M., Hernández, R., Izuzquiza, D., Murillo, F. J., Pérez, M. & Rodríguez, R. (2007). El aprendizaje basado en problemas como innovación docente en la universidad; posibilidades y limitaciones. *Educación y futuro*, 16, 85-100.
- Ernest, P. (1998). *The Culture of Mathematics Classroom and the Relations between Personal and Public Knowledge: An Epistemological Perspective*, en Falk Seeger, Jörg Voigt y Ute Waschescio (eds), *The Culture of the Mathematics Classroom*, Cambridge University Press.
- Escudero, T. (1995). La evaluación de las actitudes científicas. *Didáctica de las ciencias experimentales*, 2(4), 33-41.
- Ferguson-Hessler, M. G. M. y de Jong, T. (1990). Studying physics texts: differences in study processes between good and poor performers. *Cognition and Instruction*, 7, 41-54.
- Fernández, A. P., Anaya, D., y Suárez, J. M. (2012). Motivation features and motivational self-regulatory strategies in the Middle School students. *Revista de Psicodidáctica*, 17(1), 95-111.
- Flavell, J. H. (1976). Metacognitive Aspects of Problem Solving. In L. B. Resnick (Ed.), *The nature of intelligence*. Hillsdale, N. J.: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

- Flavell, J. H. (1979). Metacognition and cognitive monitoring: A new area of cognitive-developmental inquire. En *American Psychologist*, 34, 906-911.
- Fuchs, L. S., Fuchs, D., Prentice, K., Burch, M., Hamlett, C. L., y Owen, R., et al. (2003). Enhancing third-grade students' mathematical problem solving with self-regulated learning strategies. *Journal of Educational Psychology*, 95, 306-315.
- Fuchs, L. S., Fuchs, D., Finelli, R., Courey, S. J., y Hamlett, C. L. (2004). Expanding schema-based transfer instruction to help third graders solve real-life mathematical problems. *American Educational Research Journal*, 41, 419-445.
- Furió, C. J., Iturbe, J. y Reyes, J. V. (1994). Contribución de la resolución de problemas como investigación al paradigma constructivista de aprendizaje de las ciencias. *Investigación en la Escuela*, 24, 89-99.
- Friege, G. y Lind G. (2006). Types and qualities of knowledge and their relation to problem solving in physics. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 4, 437-465.
- Gabel, D. L. (1981). *Facilitating problem solving in high school chemistry*. Indiana University, School of education, Bloomington (ERIC Doc. Reproduction Service No. ED, 210 192).
- Gagné, R. M. (1965). *The conditions of learning*. New York: Holt, Rinehart & Winston (Trad. española: 1971, *Las condiciones del aprendizaje*. Madrid. Aguilar).
- Galagovsky, Lydia R., Rodríguez, María Alejandra, Stamati, Nora y Morales, Laura F. (2003). Representaciones mentales, lenguajes y códigos en la enseñanza de ciencias naturales. Un ejemplo para el aprendizaje del concepto de reacción química a partir del concepto de mezcla. *Enseñanza de las ciencias*, 21(1), 107-121 107.
- Gangoso, Z. (1999). Investigaciones en resolución de problemas en ciencias. *Investigações em Ensino de Ciências*, 4(1), 7-50.

- Garofalo, J., y Lester, F. K. (1985). Metacognition, cognitive monitoring, and mathematical performance. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16, 163-176.
- Gathercole, S. E. (2004). Working memory and learning during school years. *Proceedings of the British Academy*, 125, 365-380.
- Gentner, D. (1983). Structure-Mapping: a Theoretical Framework for Analogy, *Cognitive Science*, vol. 7, 155-170.
- Gil, D. y Martínez, J. (1983). A model for problem solving in accordance with scientific methodology. *European Journal of Science Education*, 5(4), 447-445.
- Gil D., Martínez, J. y Senent F. (1988). El fracaso en la resolución de problemas: una investigación orientada por nuevos supuestos. *Enseñanza de las Ciencias*, 6(2), 131-146.
- Gil, D., Furió, C., Valdés, P., Salinas, J., Martínez, J., Guisasola, J., Gonzalez, E., Dumas, A., Goffard, M. y Pessoa, A. (1999). ¿Tiene sentido seguir distinguiendo entre aprendizaje de conceptos, resolución de problemas de lápiz y papel y realización de prácticas de laboratorio? *Enseñanza de las ciencias*, 17(2), 311-320.
- Herron, J. D. (1978). Role of learning and development critique of Novak's comparison of Ausubel and Piaget. *Science Education*, 62, 593-605.
- Heyworth R. M. (1998). Quantitative Problems Solving In Science: Cognitive Factors and directions for practice. *Education journal*, Vol.22, No.1, pp.13-30.
- Holyoak, K. J. K. y Koh, K. (1987). Surface and structural similarity in analogical transfer. *Memory and Cognition*, 15, 332-340.
- Inhelder, B. y Piaget, J. (1955). *De la logique de l'enfant a la logique de l'adolescent*. Paris. Presses Universitaires de France (Trad. española: 1985, *De la lógica del niño a la lógica del adolescente* Barcelona. Paidós).

- Jiménez, E., y Segarra, P. (2004). Metacognitive abilities in physics problem solving. In E. Mechlova (Ed.), *GIREP Conference 2004 Proceedings: Teaching and Learning Physics in new contexts*, pp. 159-160.
- Jitendra, A. (2002). Teaching students math problem-solving through graphic representations. *Teaching Exceptional Children*, Vol. 34, No. 4, pp. 34-38.
- Jitendra, A., Griffin, C., Deatline-Buchman, A., Sczesniak, E. (2007). Mathematical Word Problem Solving in Third-Grade Classrooms. *The Journal of Educational Research*. Vol 100, No.5, pp 283-302.
- Johnson-Laird, P. N. (1983). *Mental models: Towards a cognitive science of language, inference, and consciousness*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Johnson-Laird, P. N. (2000). The current state of the mental model theory. In J. A. García-Madruga, N. Carriedo y M. J. González-Labra (Eds.), *Mental models in reasoning* (pp. 16-40). Madrid: UNED.
- Johnstone, A. H. y El-Banna, H. (1986). Capacities, demands and processes: A predictive model for science education. *Education in Chemistry*, 23, 80-84.
- Johnstone, A.H. (1993). The development of chemistry teaching. *Journal of Chemical Education*, 70(9), 701-705.
- Johnstone, A. H., Hogg, W. R. y Ziane, M. (1993). A working memory applied to physics problem solving. *International Journal of Science Education*, 15, 663-672.
- Jonassen, D.H. (2000). Toward a design theory of problem-solving. *Educational Technology: Research and Development*, 48, 63-85.
- Jonassen, D. H. (2004). *Learning to solve problems: an instructional design guide*. San Francisco, CA: Preiffer.
- Jones, E., R. Wilson y Bhojwani (1997). Mathematics Instruction for Secondary Students with Learning Disabilitie, *Journal of Learning Disabilities*, vol. 2, 151-163.

- Kempa, R.F. (1991). Students learning difficulties in science. Causes and possible remedies. *Enseñanza de las ciencias*, 9(2), 119-128.
- Kintsch, W. (1998). *Comprehension: a paradigm for cognition*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Kintsch, W. y van Dijk, T.A. (1978). Toward a model of discourse comprehension and production. *Psychological Review*, 85, 363-394.
- Kintsch, W. y Greeno, J. (1985). Understanding and solving word arithmetic problems. *Psychological Review*, 92(1), 109-129.
- Lang da Silveira, F., Moreira, M.A. y Axt, R. (1992). Habilidad en preguntas conceptuales y en resolución de problemas de física. *Enseñanza de las Ciencias*, 10(1), 58-62.
- Larkin, J. H. y Reif, F. (1979). Understanding and teaching problemsolving in physics. *European Journal of Science Education*, 1(2), 191-203.
- Lawson, A. E. y Karplus, R. (1977). Should theoretical concepts be taught before formal operations? *Science education*, 61, 123-125.
- Leal, L. (1987). Investigation of the relation between metamemory and university students' examination performance, *Journal of Educational Psychology*, 79, 35-40.
- Lester, F. K. (1983) Trends and issues en mathematical problem solving research. En: R. Lesh y M. Landau (eds.), *Acquisition of mathematical concepts and processes*. Nueva York: Academic Press.
- Lythcott, J. (1990). Problem solving and requisite Knowledge of chemistry. *Journal of Chemical education*, 67(3), 248-252.
- Lorenzo, M. (2005). The development, implementation, and evaluation of a problem solving heuristic *International Journal of Science and Mathematics Education*, 3, 33-58.

- Lumpe, A. T. (1995). Peer interaction in science concept development and problem solving. *School Science and Mathematics, 95*(6), 302-309.
- Mayer, R. E. (1983). *Pensamiento, resolución de problemas y cognición*. Barcelona: Piados.
- Mayer, R. E., and Wittrock, M. C. (1996). Problem-solving transfer. In D. C. Berliner and R. C. Calfee (eds.), *Handbook of educational psychology* (pp. 47–62). New York: Macmillan.
- Marcou, A., y Philippou, G. (2005). Motivational beliefs, self-regulated learning and mathematical problem solving. In H. L. Chick y J. L. Vincent (Eds.). *Proceedings of the 29 Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. PME, Melbourne, Vol.3, pp 297-304.
- Marshall, S.P. (1990). The assessment of schema knowledge for arithmetic story problems: A cognitive perspective. In G. Kulm (Ed.), *Assessing higher order thinking in mathematics*. Washington, DC: American Association for the Advancement of Science.
- Marshall S.P. (1995). *Schemas in problem-solving*. New York: Cambridge University Press.
- Miller, G. A. (1956). The magical number seven, plus or minus two: Some limits on our capacity for processing information. *Psychological Review, 63*, 81-97.
- Miyake, A. y Shah, P. (1999). *Models of Working Memory: Mechanisms of Active Maintenance and Executive Control*. (Eds). New York: Cambridge University Press.
- Nakhleh. M.B. (1993). Are our students conceptual thinkers or algorithmic problem solvers? *Journal of Chemical Education, 70* (1), 52-55.
- Nathan, M. J., Kintsch, W. & Young, E. (1992). A theory of algebra-word-problem comprehension and its implications for design of learning environments. *Cognition and Instruction, 9*, 329-389.

- Newell, A.; Simon, H.A. (1972). *Human Problem Solving*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- Níaz, M. (1987). Relation between M-space of students and M-demand of different items of general chemistry and its interpretation based upon the neo-Piagetian theory of Pascual-Leone. *Journal of Chemical Education*, 64, 502-505.
- Novick, L. (1988). Analogical transfer, problem similarity, and expertise. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition*, 14, 510-520.
- Opendacker, C. Fierens, H., Brabant, H. V., Sevenants, J., Sloomakers, P. J., et al. (1990). Academic performance in solving chemistry problems related to student working memory capacity. *International Journal of Science Education*, 12, 177- 185.
- Orton, A. (1986). *Didáctica de las matemáticas: Cuestiones, teoría y práctica en el aula*. Madrid: Morata y M.E.C.
- Osborne, R. (1985). *Theories of learning*. In Osborne, R. and Gilbert, J. (Eds.), Some issues of theory in science education. Waikato. University of New Zealand.
- Otero, J.; Campanario, J.M. y Hopkins, K. D. (1992). The relationship between academia achievement and metacognitive comprehension monitoring ability of Spanish secondary school Students. *Educational & Psychological Measurement*, 52, 419 - 430.
- Parra, M.A. y Flores, R. (2008). Aprendizaje cooperativo en la solución de problemas con fracciones. *Educación Matemática*, 20(1), 31-52.
- Pascual-Leone, J. y Goodman, D. (1979). Intelligence and experience: A neo-Piagetian approach. *Instructional Science*, 8, 301-367.
- Pascual-Leone, J. (1989). *An organismic process model of Witkin's field dependence-independence*. In T. Globerson and T. Zelniker (Eds.), Cognitive style and cognitive development (pp. 36-70). Norwood, NJ. Ablex.
- Perales, F. J. (1993). La resolución de problemas: Una revisión estructurada. *Enseñanza de las ciencias*, Vol. 11(2), 170-178.

- Pokay, P. and Blumenfeld, P. C. (1990). Predicting achievement early and late in the semester: The role of motivation and use of learning strategies, *Journal of Educational Psychology*, 82, 41-50.
- Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton: Princeton University Press (2<sup>a</sup> ed., 1973). (Trad. castellana: 1981, *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trias).
- Polya, G. (1968). *Mathematics and plausible reasoning*. (2nd ed.). Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Pozo, J. I. y Postigo, Y. (1993). Las Estrategias De Aprendizaje Como Contenido Del Currículo. En: C. MONEREO (Ed.), *Estrategias de aprendizaje: procesos, contenidos e interacción*. Barcelona: Domenech.
- Pintrich, P. R. y DeGroot, E. V. (1990). Motivational and self-regulated learning components of classroom academic performance, *Journal of Educational Psychology* 82, 33-40
- Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas Aritméticos Escolares*. Colección Matemáticas cultura y aprendizaje. Madrid: Síntesis (Disponible en: <http://www.uv.es/puigl/libros.html>).
- Puig, L. (1996). *Elementos de Resolución de Problemas*. Granada: Comares.
- Quilici, J. L., y Mayer, R. E. (1996). Role of examples in how students learn to categorize statistics word problems. *Journal of Educational Psychology*, 88, 144-161.
- Reed, S.K. (1987). A structure-mapping model for word problems. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition*, 13, 124-139.
- Rumelhart, D. (1980). Schemata: The building blocks of cognition. In: R. J. Spiro, B. C. Bruce & W. F. Brewer. (Eds.), *Theoretical issues in reading comprehension*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Sabella, M.S. (1999). *Using the context of physics problem solving to evaluate the coherence of student knowledge*. Tesis doctoral. University of Maryland.



- Sadowski, C., y Gulgoz, S. (1996). Elaborative processing mediates the relationship between the need for cognition and academic performance, *The Journal of Psychology: Interdisciplinary and Applied*, 30, 303-307.
- Sanjosé, V., Valenzuela, T., Fortes, M. C., y Solaz-Portolés, J. (2007). Dificultades algebraicas en la resolución de problemas por Transferencia. *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias*, 6 (3), 538-561.
- Santamaría, C., García-Madruga, J. A. y Carretero, M. (1996). Beyond belief bias. Reasoning from conceptual structures by mental models manipulation. *Memory & Cognition*, 24, 250-261.
- Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando: Academic Press.
- Schoenfeld, A. (1987). What's All the Fuss About Metacognition. In A. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive Science and Mathematics Education*. Hillsdale, N. J.: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
- Schoenfeld, A. H. (1994). Reflections on doing and teaching mathematics. In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical thinking and problem solving* (pp.53-70). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Schraw, G., Crippen, K. J., & Harley, K. (2006). Promoting self-regulation in science education: metacognition as part of a broader perspective on learning. *Research in Science Education*. 36, 111-139.
- Schraw, G., y Moshman, D. (1995). Metacognitive theories. *Educational Psychology Review*, 7, 351-373.
- Schraw, G. (1998). Promoting general metacognitive awareness, *Instructional Science* 26, 113-125.
- Shank, R. y Abelson, R. (1977). *Scripts, Plans, Goals and Understanding*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Shavelson, R. J., Ruiz-Primo, M. A. y Wiley, E. W. (2005). Windows into the mind. *Higher Education*, 49, 413-430.

- Simon, H.A. (1978). *Information-processing theory of human problem solving*, en Estes W.K. (ed.), *Handbook of Learning and Cognitive Processes*. Vol. 5: *Human Information Processing*. (Hillsdale: Nueva Jersey). Trad. española: *La teoría del procesamiento de la información sobre la solución de problemas*, en: Carretero, M., y García, J.A. (1984). *Lecturas de Psicología y Pensamiento*. (Eds), (pp. 197-219). Madrid: Alianza Psicología.
- Solaz-Portolés, J.J. y Sanjosé V. (2006). Problemas algorítmicos y conceptuales: Influencia de algunas variables instruccionales. *Educación Química*, 17(3), 372-378.
- Solaz-Portolés, J. J. y Sanjosé, V. (2007). Representations in problem solving in science: Directions for practice. *Asia Pacific Forum on Science Learning and Teaching*, 8(2), Article 4. <http://www.ied.edu.hk/apfslt>.
- Solaz-Portolés, J. J. y Sanjosé-López, V. (2008a). Conocimientos y procesos cognitivos en la resolución de problemas de ciencias: consecuencias para la enseñanza. *Magis, Revista Internacional de Investigación en Educación*, 1, 147-162.
- Solaz-Portolés, J. J. y Sanjosé, V. (2008b). Types of knowledge and their relations to problem solving in science: directions for practice. *Sísifo. Educational Sciences Journal*, 6, 105-112. Retrieved from <http://sisifo.fpce.ul.pt>
- Solaz-Portolés, J.J., y Sanjosé, V. (2008c). Neo-Piagetian variables in science problema solving. *Ciências y cognição*, 13(2), 192-200.
- Solaz-Portoles, J. J. y Sanjosé, V. (2008d). Conocimiento previo, modelos mentales y resolución de problemas. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 10(1). Retrieved 19-3-20014, from <http://redie.uabc.mx/vol10no1/contenido-contenido.html>.
- Solaz-Portolés, J. J. y Sanjosé, V. (2009). Working memory in science problem solving: A review of research. *Revista Mexicana de Psicología*, 26 (1), 79-90.

- Solaz-Portolés, J.J.; Sanjosé, V. y Gómez, A. (2011). Aprendizaje basado en problemas en la Educación Superior: una metodología necesaria en la formación del profesorado. *Didáctica de las ciencias experimentales y sociales*, 25, 177-186.
- Solaz-Portolés, J. J.; Sanjosé, V. y Gómez, C B. (2011). La investigación sobre la influencia de las estrategias y la motivación en resolución de problemas: implicaciones para la enseñanza. *Latin American Journal of Physics Education*, 5(4), 788-795.
- Solaz-Portolés, J.J., Sanjosé, V., y Gangoso, Z. (2013). La investigación en resolución de problemas instruccionales. Efectos de las variables del problema y de las variables cognitivas, metacognitivas y motivacionales del resolutor, en Benegas, J. Pérez de Ladazábal, Otero J. El aprendizaje activo de la física básica universitaria. Andavira (Eds). Santiago de Compostela, 7, 95-118.
- Sternberg, R. J. (1994). Allowing for thinking styles. *Educational Leadership*, 52(3), 36-40.
- Sulin, R. A., y Sooling, D. J. (1974). Intrusion of a thematic idea in retention of prose. *Journal of Experimental Psychology*, 103, 255-262.
- Sweller, J., y Cooper, G. A. (1985). The use of worked examples as a substitute for problem solving in learning algebra. *Cognition and Instruction*. 2, 59-89.
- Sweller, J., van Merriënboer, J. J. y Pass, F. G. (1998). Cognitive architecture and instructional design. *Educational Psychology Review*, 10, 251-296.
- Tookey, K. R. (1994). Arithmetic schema and strategy instruction. *Dissertation Abstracts International*, 55(11A), 3458.
- Tsaparlis, G. (1998). Dimensional analysis and predictive models in problem solving. *International Journal of Science Education*, 20, 335-350.

- Tsaparlis, G. y Angelopoulos, V. (2000). A model of problema solving: Its operation, validity, and usefulness in the case of organic-synthesis problems. *Science Education*, 84(2), 131-153.
- Tsaparlis, G. (2005). Non-algorithmic quantitative problem solving in university physical chemistry: a correlation study of the selective cognitive factors. *Reasearch in Science y Technological Education*, 23, 125-148.
- Truyol, M.E. y Gangoso, Z. (2010). La selección de diferentes tipos de problemas de Física como herramienta para orientar procesos cognitivos. *Investigações em Ensino de Ciências*, 3(15), 463-484.
- Vergnaud, G. (1983). Multiplicative Structures. En Lesh, R., Landau, L. *Acquisition of mathematic concepts and processes*. New York: Academic Press. 127-174.
- Wallas, G. (1926). *The Art of Thought*. New York: Franklin Watts.
- Wang, M.C.; Haertel, G.D. y Walberg, H.J. (1993). Toward a knowledge base for school. *Review of Educational Research*, 63, 249-294.
- Weinstein, C.E. y Meyer, D. K. (1991). Cognitive learning strategies and college teaching. *New directions for teaching and learning*, No. 45. 15-26.
- Wolters, C. A. y Rosenthal, H. (2000). The relation between students' motivational beliefs and their use of motivational regulation strategies. *International Journal of Educational Research*, 33, 801- 820.
- Xin, Y. P., y Jitendra, A. K. (1999). The effects of instruction in solving mathematical problems for students with learning problems: A meta-analysis. *The Journal of Special Education*, 32(4), 207-225.
- Yuan, K., Steedle, J., Shavelson, R., Alonzo, A. y Pezzo, M. (2006). Working memory, fluid intelligence, and science learning. *Educational Research Review*, 1, 83-98.
- Valenzuela, T. (2003). *Estudio de la influencia de la relación entre los problemas, el conocimiento previo del sujeto y la instrucción sobre el transfer en ciencias*. Tesis doctoral. Universidad de Valencia.

Zajchowski, R., & Martin, J. (1993). Differences in the problem solving of stronger and weaker novices in physics: Knowledge, strategies, or knowledge structure? *Journal of Research in Science Teaching*, 30(5), 459-470.



# Capítulo 3

## Una Revisión de los Procesos de Transferencia para el Aprendizaje y Enseñanza de las Ciencias

---

### Referencia:

Gómez, C. B., Solaz-Portolés, J.J. y Sanjosé, V. (2012). Una revisión de los procesos de transferencia para el aprendizaje y enseñanza de las ciencias. *Didáctica de las Ciencias Experimentales y Sociales*, 26, 199-227.





# 3. Una Revisión de los Procesos de Transferencia para el Aprendizaje y Enseñanza de las Ciencias

## Resumen

En este trabajo se introduce el concepto de transferencia en el aprendizaje, se clasifican en sus diferentes tipos y se discute su importancia en la resolución de problemas de ciencias y matemáticas. Además se discute el papel de los procesos de transferencia y cómo se pueden mejorar en la enseñanza de las ciencias. A partir de todo ello, se recomiendan algunas medidas instruccionales que pueden ser aplicadas en el aula de ciencias.

**Palabras clave:** transferencia, resolución de problemas, enseñanza y aprendizaje de las ciencias.

## Abstract

In this paper we introduced the concept of transfer in learning tasks, we classify the different types of transfer and we show its importance in problem-solving in science and mathematics. Moreover, it is brought out the role of transfer processes and how they can be improved in science teaching and in science problem-solving. Finally, a series of instructional measures that can be applied in the science classroom are recommended.

**Keywords:** transfer, problem-solving, science teaching and learning.

### 3.1 Introducción

**E**s un hecho constatado que la mayoría de las investigaciones sobre el aprendizaje de las ciencias no se centran en los procesos cognitivos (Siegler, 2006). Sin embargo, la comprensión de los procesos cognitivos subyacentes en el aprendizaje de las ciencias son esenciales para el diseño y desarrollo de programas instruccionales más eficientes. La transferencia, se puede definir como la habilidad de aplicar lo que ha sido aprendido en un determinado contexto a nuevos contextos (Byrnes, 1996). Se trata de un proceso cognitivo esencial en la educación (Voss, 1987) y, por ello, resulta especialmente importante comprender las diferentes experiencias de aprendizaje que conducen al éxito en la transferencia. Sin embargo, y a pesar que los psicólogos de la educación llevan ocupándose de la transferencia desde comienzos del siglo XX (desde los conductistas hasta los cognitivistas y constructivistas), ésta ha constituido un tema periférico en el ámbito de las ciencias cognitivas: sólo un 1% de los trabajos de las revistas más prestigiosas se han ocupado de la transferencia (Chen y Klahr, 2008).

Las investigaciones sobre transferencia en el aprendizaje señalan las enormes dificultades que suelen tener los estudiantes de todos los niveles académicos para transferir lo que han aprendido en el aula a nuevas situaciones o problemas, sean o no académicos (Bransford, Brown y Cocking, 2000). Por ejemplo, en el caso particular de la enseñanza de las ciencias se han encontrado también dificultades para la transferencia de aprendizajes (Ceci, 1991; Barnett y Ceci, 2002). En las ciencias físicas, suele atribuirse el fracaso en la resolución de problemas por transferencia a la falta de dominio matemático. No obstante, Sanjosé y colaboradores (2007) verificaron con estudiantes de enseñanza secundaria que las dificultades matemáticas no son necesariamente el principal obstáculo en la transferencia en resolución de problemas en Física y Química.

Aunque no hay un acuerdo entre investigadores sobre la naturaleza de la transferencia y cómo se produce (Lobato, 2006), parece existir un consenso generalizado entre ellos en señalar al establecimiento de analogías como el recurso

más utilizado en el aprendizaje cuando se emplean los mecanismos de transferencia del conocimiento (Duit, 1991; Van Lehn, 1990; Gentner et al., 1997). También los profesores de secundaria de ciencias en formación consideran a la analogía como el recurso más empleado, más útil y más fácil de aplicar en la resolución de problemas (Solaz-Portolés et al., 2010). En efecto, una vez establecidos los vínculos analógicos entre dos situaciones, el conocimiento que se posee sobre una de las situaciones permite realizar inferencias sobre la otra. Si no fuera por el reconocimiento de una analogía entre situaciones previamente experimentadas y una nueva situación, este conocimiento almacenado en la memoria sería difícil de utilizar ya que la probabilidad de vivir dos veces exactamente la misma experiencia vital es muy baja (Gentner, Holyoak y Kokinov, 2001).

De entre todas las tareas académicas empleadas en la enseñanza y el aprendizaje de las ciencias, resolver problemas es una de las más importantes puesto que implica una gran creatividad y exige aplicación de conocimientos (y no meramente su reproducción). Despierta tal interés en la enseñanza que incluso existe una metodología instruccional que centra sus objetivos en los problemas y su resolución: el aprendizaje basado en problemas (ABP), -o problem based learning (PBL) en su versión anglosajona (Solaz-Portolés, Sanjosé y Gómez, 2011). En el ámbito didáctico el procedimiento habitual para enseñar a resolver problemas y evaluar el aprendizaje se basa en la transferencia: se resuelve un conjunto de problemas y se pide seguidamente a los estudiantes que resuelvan problemas similares. Para su resolución los estudiantes han de recuperar de su memoria ejemplos resueltos con anterioridad y usarlos para resolver el nuevo problema (Barnett y Ceci, 2002). Sternberg (1996) apunta hacia la extrapolación de conocimientos y habilidades de una situación a otra –esto es, la transferencia- como uno de los principales elementos que facilitan la tarea de resolver problemas.

### **3.2 Objetivos**

Teniendo presentes los antecedentes expuestos que subrayan la importancia de la transferencia en el aprendizaje en general, y en la resolución de problemas en

particular, los objetivos de este trabajo van a fijarse en una revisión de información que nos permita:

1. Conocer la evolución histórica del concepto de transferencia en las teorías e investigaciones sobre el aprendizaje desde su introducción hasta nuestros días.
2. Clasificar los tipos posibles de transferencia y su importancia para el aprendizaje.
3. Subrayar el papel de la transferencia en la resolución de problemas
4. Acercarnos a la investigación sobre transferencia en didáctica de las ciencias.
5. Extraer las oportunas consecuencias que puedan derivarse para una enseñanza de las ciencias más eficaz.

### **3.3 Transferencia y aprendizaje: una revisión histórica en las teorías e investigaciones sobre el aprendizaje**

En los primeros años del siglo XX, las ideas pioneras sobre la transferencia en el aprendizaje se recogían en la denominada “*doctrina de la disciplina formal*”, esta teoría expuso que ciertas materias llamadas disciplinas formales, tales como la geometría o las matemáticas podían usarse como herramientas para aprender a razonar y de esta forma generar destrezas cognitivas transferibles a diferentes ámbitos o dominios.

Thorndike cuestionó las bases de esta teoría y no encontró evidencias empíricas de la misma (Thorndike, 1924). Un estudio ulterior (Wesman, 1945), corroboró los resultados obtenidos por Thorndike. En una de las primeras investigaciones empíricas en la que se implicaba a la transferencia (Thorndike y Woodworth, 1901) se estudió el transfer en el cálculo del tamaño de figuras

geométricas. Sus primeros resultados, mostraron que no se produce transferencia desde aprendizajes generales hacia tareas específicas. Otros trabajos posteriores mostraron de nuevo que puede aumentarse la transferencia en el aprendizaje mediante la instrucción en tareas específicas que incidan en aplicaciones, relaciones y metodología; lo que conlleva, además, a un aumento de la comprensión y del conocimiento utilizable (Klausmier, 1969). El mismo Thorndike (1932) formuló la “*ley de los elementos idénticos*” en la que plantea que la transferencia es el resultado de aplicar el conocimiento adquirido mediante un aprendizaje previo, a una nueva tarea que requiere exactamente la misma conducta que la que se aprendió. Para que haya transferencia debe haber una similitud de hechos, actitudes y habilidades específicas. Las consecuencias de estos estudios fueron notables, llegando incluso a modificar el currículo hacia contenidos más específicos (Carpintero 2002).

Según este principio, la transferencia está influenciada por: 1) la mayor o menor similitud entre dos situaciones (la de aprendizaje y la nueva o de aplicación); 2) la actitud del aprendiz para aplicar de un modo más o menos activo, y más o menos consciente lo aprendido a la nueva situación; 3) las disponibilidades de aprendizajes no solo conceptuales, sino también estratégicos que puedan permitir reconocer los elementos idénticos entre dos situaciones, activar el conocimiento apropiado y aplicarlo a la situación nueva planteada.

Sin embargo, en un breve lapso de tiempo, Judd (1908) analizó la transferencia de un Principio general de una situación a otra. En concreto, investigó la influencia de la instrucción de la ley de Snell de la refracción de la luz sobre el acierto a un blanco situado bajo la superficie del agua. El grupo instruido superó al otro cuando el blanco cambiaba de profundidad. Un experimento posterior parecido produjo idénticos resultados (Hendrickson y Schroeder, 1941). Ambos experimentos pusieron en evidencia la posibilidad de la transferencia de un conocimiento general a una tarea más específica.

Bloom (2007) retomó más tarde el estudio de los factores que afectan la transferencia y postuló que posee tres dimensiones: 1) el contexto, 2) el nivel de cognición y 3) la *sustancia* de la transferencia.

Los niveles de la dimensión contextual son seis, estos van desde el contexto muy próximo hasta el contexto nuevo o desconocido: el primer nivel se relaciona con la transferencia no específica (se relaciona información en el mismo contexto) y el último con la transferencia creativa (se proponen nuevos conceptos en nuevos contextos).

Los niveles de cognición los clasifica, de menor a mayor, en: a) reacción valorativa, b) reconocimiento, c) comprensión (de palabras y significados), d) análisis (de relaciones y asunciones), e) abstracción, y f) transformación de ideas, puntos de vista y conceptualizaciones.

Finalmente, los niveles de *sustancia* de la transferencia, de menor a mayor, los ordena en: a) patrones, b) funciones, c) significados, d) interconexiones e interrelaciones, e) comprensión intuitiva (*insight*), y f) creatividad.

Haskell (2001) diferencia seis niveles de transferencia que pueden producirse en el aprendizaje. La Tabla 1 recoge estos niveles. El primer nivel, la transferencia no específica, es el más sencillo y común en todos los aprendizajes. El último nivel, la transferencia creativa, es el más complejo, y difícilmente se consigue en los contextos académicos convencionales.

<b>Tabla 1. Los seis niveles de transferencia de Haskell (2001, pp 29-30).</b>		
Intracontextual	Transferencia no específica	Lo que se aprende se conecta con el conocimiento previo (mecanismo interno).
	Transferencia de aplicación	Se aplica lo que se aprende en el mismo contexto
	Transferencia de contexto	Se aplica lo que se aprende en un contexto no muy diferente.
	Transferencia próxima	Se transfiere conocimiento previo a situaciones similares, pero no idénticas.
Intercontextual o transcontextual	Transferencia lejana	Se transfiere conocimiento previo a situaciones o contextos muy diferentes
	Transferencia creativa	La transferencia va más allá de la analogía simple y se crean (o utilizan) nuevos conceptos

En cuanto al contexto, el nivel de similitud que puede reconocerse entre dos situaciones determina que la transferencia sea más o menos probable. Gagné (1971) identificó dos tipos de transferencia: lateral y vertical. La ‘transferencia lateral’ se produce cuando el conocimiento adquirido previamente y la nueva tarea o problema son de la misma naturaleza y nivel de dificultad; por ejemplo, conocer las operaciones aritméticas elementales permite resolver una ecuación de primer grado con una incógnita. Por su parte, la ‘transferencia vertical’ tiene lugar cuando el conocimiento previamente adquirido permite comprender una nueva tarea de naturaleza o nivel de complejidad distinto al del aprendizaje previo; por ejemplo, saber resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita posibilita resolver sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

Posteriormente, otros investigadores han renombrado estos dos tipos de transferencia del aprendizaje en ‘cercana’ (*near transfer*) y ‘lejana’ (*far transfer*) (Klausmeir, 1985), similares a transferencia lateral y a la vertical, respectivamente. La transferencia lejana se realiza con menor frecuencia y con mayor dificultad que la cercana. Esto se debe, según Salomon y Perkins (1989), a que el estudiante debe efectuar un análisis y representación de la situación que le permita determinar qué reglas, principios y conceptos aprendidos tiene que aplicar.

Recientemente, esta diferenciación ha sido retomada por Rebello y colaboradores (2007) que diferencian entre transferencia ‘horizontal’ y ‘vertical’. El modelo de transfer de los autores, muestra el proceso de transferencia mediante las asociaciones creadas por el estudiante a partir de una nueva situación problemática. Los autores se centran en dos tipos principales de asociaciones que los estudiantes pueden realizar a partir de un enunciado, en la resolución de un problema.

La primera clase de asociación implica relacionar la información descrita a través de las palabras en el enunciado de un problema fuente, con algún o algunos elementos del conocimiento previo del estudiante. Un claro ejemplo de este tipo de asociación lo encontramos cuando un estudiante lee las unidades de un valor numérico descrito en el enunciado de un problema. Si el problema relata que un móvil se mueve a 20 metros/segundo, es muy probable que el estudiante reconozca que este valor corresponde a la velocidad del coche, incluso que sea capaz de relacionar el dato con las ecuaciones correspondientes a la velocidad, las cuales

forman parte de su conocimiento previo y que a su vez, pasarán a formar parte del esquema de resolución que el sujeto generará para enfrentarse al problema en cuestión.

La segunda clase de asociaciones se da cuando un estudiante es capaz de encontrar en su memoria a largo plazo algún tipo de conocimiento aplicable a la resolución del problema, sin que ningún elemento del enunciado “descubra” toda la información necesaria. Este tipo de asociación es más abstracta y compleja, por ejemplo, un estudiante al que se le muestra una animación de un coche en movimiento, sin darle ningún tipo de información sobre la velocidad de este, ni especificar que esta sea relevante en la tarea, puede pensar que la velocidad es importante para resolver el problema. En este caso el estudiante hace una asociación implícita entre dos ideas, movimiento (mostrado en el problema)-velocidad (conocimiento muy relacionado con la información mostrada e inferido a partir de esta relación).

Esta idea del tipo de asociación define dos tipos de transferencia. El *Transfer Horizontal*, que es el que se da cuando un estudiante extrae explícitamente la información del enunciado de un problema y ésta activa directamente algún esquema de problema *completo* (que alberga todas las herramientas necesarias para la resolución del problema) contenido en la memoria del sujeto. Y, el *Transfer vertical*, que se produce cuando el estudiante reconoce características de la situación que intuitivamente activan elementos de su conocimiento previo, pero al contrario que en el transfer horizontal, en este tipo de transfer, el sujeto no posee a priori un esquema de problema “completo” para asociar al problema a resolver. El sujeto construye entonces, un modelo mental “in situ” de la situación, a través de sucesivas construcciones y deconstrucciones de asociaciones entre la información del enunciado y su conocimiento disponible.

El aprendizaje previo puede dejar una cierta impronta (*priming*) que induzca a los aprendices a creer que cualquier situación que siga a aquella en que se ha producido el aprendizaje va a ser análoga a la anterior. En estos casos el aprendizaje en la situación primera interfiere en las acciones que se deberían ejecutar en la situación segunda como consecuencia de una identificación incorrecta de características comunes en dos situaciones diferentes. Esto se conoce como



‘transferencia negativa’ (Chaplin y Kramiec, 1984; Novick, 1988) que se opone a la ‘transferencia positiva’. La transferencia negativa se asocia con falta de percepción consciente de las analogías entre las dos situaciones comparadas (la del aprendizaje primero y la nueva situación).

En la década de los ochenta, Perkins y Salomon (1988) desarrollaron una fructífera teoría sobre la transferencia del aprendizaje. En ella, se habla de transferencia de ‘escaso recorrido’ (*low-road transfer*) y de ‘largo recorrido’ (*high-road transfer*). La transferencia de escaso recorrido no implica un esfuerzo consciente para abstraer elementos de una situación y aplicarlos a otra situación que se debe reconocer como similar. En consecuencia, esta transferencia se circunscribe al desarrollo de un conocimiento o destreza con un alto nivel de automaticidad y poco pensamiento reflexivo. Normalmente esta transferencia requiere mucha práctica en variadas condiciones y suele ser de gran utilidad. Conducir un coche o realizar cálculos aritméticos son ejemplos en los que se puede conseguir un elevado grado de automaticidad. En el contexto educativo se aprenden conocimientos y destrezas que pueden ser transferidas a la vida diaria mediante este mecanismo *low-road*. Sin embargo, la transferencia de largo recorrido requiere intentos conscientes de reconocer características similares en situaciones que son muy diferentes. Si al aprendiz se le ha enseñado a mirar más allá de las características superficiales y a reconocer las “reglas abstractas” que pueden aplicarse en situaciones variadas, la transferencia de largo recorrido tiene una mayor probabilidad de producirse. Como puede observarse, esta transferencia de largo recorrido depende de la “abstracción consciente y deliberada de destrezas y/o conocimientos en un contexto para aplicarlas en otro” (Perkins y Salomon, 1988, p.25). Muchas de las tareas que se proponen en el aula requieren este tipo de transferencia, que comporta el desarrollo de habilidades complejas y de comprensión conceptual.

Para que haya transferencia de conocimiento, son necesarias ciertas habilidades para reconocer la similitud entre dos situaciones, activar el conocimiento necesario y aplicarlo correctamente. Es un hecho bien conocido en los estudios sobre la transferencia que los estudiantes son incapaces, en muchas ocasiones, de aplicar los aprendizajes en las aulas al mundo real o, incluso, a situaciones didácticas nuevas. Así, Brandsford y colaboradores (1986, p.1080) señalan que *El hecho de que*

*la gente disponga de conocimiento relevante para una situación particular no garantiza que puedan acceder a él.* A este problema se le ha dado el nombre de ‘problema del conocimiento inerte’ (Bereiter y Scardamalia, 1985).

Gick y Holyoak (1983) apuntan a que los estudiantes pueden fallar al reconocer en su memoria problemas análogos útiles para enfrentarse a un nuevo problema. Los procesos implicados en el mecanismo de recuperación de esquemas de problema (análogos) potencialmente relevantes para la transferencia son los peor comprendidos (Holyoak y Koh, 1987). Ross (1987,1989), indagó en estos procesos y mostró que si los estudiantes consiguen recordar el ejemplo adecuado mejora la resolución en problemas propuestos. El proceso cognitivo mediante el que se codifica la información de un problema, está caracterizado por “cómo se selecciona la información desde el texto y se añade esta información a la memoria de trabajo”(Mayer, 1984) y por “cómo se separa la información relevante de la irrelevante”(Stenberg, 1985). Es en este proceso donde los estudiantes encuentran una de las principales barreras para transferir conocimiento y encuentran muchas dificultades para acceder a la información realmente importante. Una vez recuperado el problema análogo de la memoria, la principal dificultad supone construir conexiones apropiadas entre el análogo y el problema propuesto (Anolli, Antonietti, Crisafulli & Cantoia, 2001)

Uno de los parámetros que dificulta la activación y aplicación del conocimiento adquirido a una nueva situación, es el lapso de tiempo transcurrido. Chem y Klahr (2008) destacan que, en la mayoría de investigaciones sobre la transferencia de aprendizajes, el tiempo transcurrido entre la generación de aprendizaje y transferencia del mismo en una nueva tarea suele ser corto. Los autores introducen el término transferencia remota (*remote transfer*) como la aplicación de conceptos y estrategias en diferentes contextos tras un período de tiempo largo. Para ellos, la transferencia remota es un verdadero indicador de aprendizaje, ya que refleja la profundidad de la comprensión, la amplitud de la generalización de conceptos y estrategias aprendidas a diferentes situaciones, y la flexibilidad para pensar y razonar. El proceso de transferencia remota implica codificar la información de una situación original de aprendizaje, recuperar dicha información ante una nueva tarea,

y establecer correspondencias entre la situación de aprendizaje original y la nueva tarea.

Brandsford y colaboradores (2000) recopilaron todos los aspectos clave que influyen en la transferencia:

- El principal factor en la transferencia es el grado de pericia que se tiene sobre el dominio que se trate. Sin un adecuado nivel de conocimientos no puede esperarse transferencia alguna.

- La transferencia se ve afectada por el contexto en que se produjo el aprendizaje inicial. La transferencia se dificulta si los sujetos han aprendido en un solo contexto, y se favorece cuando se aprende en múltiples contextos (Bassok y Holyoak, 1989).

- La transferencia se mejora mediante una instrucción que ayuda a los estudiantes a representar de manera abstracta las situaciones problemáticas. Para ello, se deben proporcionar muchas oportunidades de observar similitudes y diferencias en situaciones diversas. El conocimiento esquemático (Solaz-Portolés y Sanjosé, 2008a) es particularmente importante en la transferencia, ya que guía el razonamiento analógico.

- La transferencia es un proceso dinámico que demanda del aprendiz escoger y evaluar estrategias, tomar en consideración recursos, y recibir retroalimentación. Por esta razón, se mejorará la transferencia si ayudamos a nuestros estudiantes a controlar sus estrategias de aprendizaje y sus recursos, y a valorar la disponibilidad de sus conocimientos. En definitiva, la transferencia aumentará si aumentan los conocimientos y las estrategias metacognitivas de los estudiantes. En el trabajo de Solaz-Portolés, Sanjosé y Gómez (2011) se recogen algunas posibles medidas instruccionales que pueden ser útiles para desarrollar conocimientos y estrategias metacognitivas.

- Todo nuevo aprendizaje necesita transferencia, que se basa en aprendizajes previos. Así pues, el diseño instruccional debe hacerse partiendo de esta premisa: hemos de ayudar a los estudiantes a aprender.

- Se debe promover en la enseñanza la conexión de los aprendizajes en el centro educativo con los conocimientos de la vida diaria que tienen los estudiantes.

Naturalmente, ello puede requerir en ocasiones poner en cuestión ideas o esquemas conceptuales incompatibles con el conocimiento científico. Como es obvio, es muy importante que los estudiantes pongan a prueba sus ideas de manera rigurosa en experiencias diseñadas a estos efectos.

### **3.4 Transferencia y resolución de problemas**

Uno de los objetivos curriculares de nuestro sistema educativo es enseñar cómo resolver problemas. Un ‘problema’ es una situación nueva en la vida diaria, laboral, académica o personal, que presenta una demanda (por ejemplo, una serie de acciones) que, *a priori*, no se sabe satisfacer. El proceso que permite activar y aplicar el conocimiento necesario para satisfacer la demanda se conoce como “resolución del problema”. Dado que exigen aplicación del conocimiento de un modo práctico, la resolución de problemas es una de las actividades de aprendizaje y de evaluación del mismo, más empleadas en la educación, en especial, en la enseñanza de las ciencias y las matemáticas.

Es usual en nuestras aulas esperar que los estudiantes tengan éxito en la transferencia en la resolución de problemas a partir de problemas-modelo que, bien aparecen en los libros de texto, bien son resueltos y explicados por el profesor. Sin embargo, como veremos a continuación, las investigaciones muestran que la transferencia en resolución de problemas tiene muchas dificultades.

Resulta obvio que el interés del profesorado se debe centrar en procurar que los aprendizajes en el aula se puedan aplicar en la resolución de problemas. De acuerdo con Niedelman (1991) esto se puede lograr tomando como base la comprensión relacional de los contenidos, esto es, que el alumno sepa lo que hace y por qué lo hace. Solaz-Portolés y Sanjosé (2008b) han ofrecido algunos procedimientos para lograr la comprensión relacional. 1) Proponen esforzarse en mejorar la comprensión conceptual, 2) estimular los procesos de estudio del texto en profundidad mediante explicaciones, relaciones y confrontación de los contenidos, 3) potenciar la metacognición, 4) utilizar metodologías que permitan hacer los

conceptos abstractos más accesibles a los estudiantes, 5) trabajar en grupo para fomentar las funciones socio-cognitivas, 6) resolver problemas abiertos (sin datos numéricos, sin metodología prefijada), 7) promover la comprensión cualitativa de los problemas, antes que ofrecer procedimientos numéricos de resolución. Mediante estos y otros procedimientos, los autores ponen de manifiesto el papel que desempeña una buena base de conocimientos relacionada con la ejecución de ciertos procesos cognitivos.

Según Picus (1983), son necesarios dos tipos de contenidos para que se produzca la transferencia en resolución de problemas: el primero está relacionado con un dominio de conocimientos específicos, el segundo está referido al desarrollo de habilidades cognitivas. El contenido relacionado con un conocimiento específico incluye reglas, principios, hechos y conceptos sobre un tema concreto, así como “planes” sobre los mismos, que requieren el uso de uno o más elementos para aplicar en la resolución del problema. El desarrollo de habilidades cognitivas está basado en la utilización de destrezas de alto nivel: comparación, categorización, análisis, síntesis, inferencia, razonamiento abstracto, etc.

Cuando los estudiantes utilizan conocimientos y estrategias que han desarrollado en la resolución de problemas para resolver otro problema que representa una situación similar se dice que se ha producido el fenómeno de *transferencia analógica* (Van Lehn, 1990). Es decir, una transferencia lateral, horizontal, de aplicación o de contexto, según las diferentes clasificaciones mostradas en el epígrafe anterior. Algunos investigadores arguyen que la transferencia analógica es la principal metodología que utilizan los humanos cuando se enfrentan ante un problema real sea cual sea el dominio al que éste pertenezca, académico o no académico (Polya, 1957; Rumelhart, 1989).

En la resolución de problemas mediante transferencia analógica, el sujeto recupera de su memoria ejemplos resueltos antes y los usa para resolver el nuevo problema (Goldstone y Sakamoto, 2003; Barnett y Ceci, 2002). El aprendizaje inicial de ejemplos relevantes y su comparación es la estrategia de referencia para favorecer la abstracción de ‘esquemas de problema’ (Loewenstein, Thompson y Gentner, 1999; Gick y Holyoak, 1983). En este proceso los problemas comparados deben poseer elementos comunes relevantes. Por tanto, el establecimiento de analogías entre el

problemas es esencial para la construcción de tales esquemas (Gentner, 1983). Cuando el estudiante se enfrenta a un nuevo problema, alguna de sus características deberá activar uno de los ‘esquemas de problema’ que este sujeto tiene almacenados en la memoria, o al menos deberá activar un problema ejemplo (llamado ‘problema fuente’) ya conocido. Una vez activados, el estudiante debe construir una relación analógica (*mapping*) entre estos problemas análogos y el problema nuevo propuesto que le permita utilizar conscientemente el proceso de resolución de aquellos, y aplicarlo con éxito a este último.

Es decir, usualmente se diferencian al menos dos fases: 1) activación de análogos almacenados en la memoria; 2) *mapping* entre el análogo y el problema propuesto (llamado ‘problema diana’). Salomon y Perkins (1987) apuntan que en la resolución de verdaderos problemas (es decir, no algorítmicos) el estudiante debe ser capaz de, en primer lugar, descontextualizar el problema y abstraer su “esquema” a partir de las situaciones problemáticas en las que ha sido instruido. En segundo lugar, el estudiante ha de reconocer las identidades (similitudes) relevantes entre la situación instruccional y la situación en la que se ha de llevar a cabo la transferencia.

Hummel y Holyoak (1997) coinciden en que los primeros pasos de la transferencia analógica son el ‘acceso’ y el *mapping*. Mediante el acceso se recupera un problema análogo fuente (o esquema de problema o regla) de la memoria a partir de la información propuesta en el problema a resolver (problema diana). Mediante el *mapping* o establecimiento de correspondencias se ponen al descubierto los elementos del problema diana que se corresponden con el problema fuente. Posteriormente ambos, ‘acceso’ y *mapping*, pueden ser utilizados para generar inferencias; esto es, para inducir un esquema más general que capture las propiedades esenciales que tienen en común fuente y diana, y proceder a la resolución del último.

Para Keane (1997) los procesos que se deben llevar a cabo en la transferencia analógica son: representación del problema (problema diana), recuperación de esquemas de problema (problema fuente), establecimiento de correspondencias entre ambos problemas (*mapping*), adaptación e inducción de la resolución.

Finalmente, Chan y Klahr (2008) distinguen cuatro pasos: a) Codificación de las características del análogo fuente; b) Acceso a la información del análogo fuente; c) *Mapping* de carácter estructural entre el problema diana y análogo fuente; y d) Ejecución de estrategias para llegar a la solución del problema diana.

Desde una perspectiva empírica VanLehn (1998) encontró, tomando como base el análisis de protocolos de resolución de problemas de estudiantes, que la transferencia analógica se podía explicar en dos fases. En la primera fase, que denomina fase de iniciación, el solucionador del problema recupera de la memoria el ejemplar (el análogo, el problema fuente), efectúa el *mapping*, y decide si el análogo es útil para resolver el problema. En la segunda fase, o fase de transferencia propiamente dicha, tomando como referencia el análogo se procede a realizar inferencias que le permiten resolver el problema 'diana' o propuesto.

En resumen, el establecimiento de analogías entre problemas es esencial, tanto para la abstracción de esquemas de problema, para la activación de los mismos ante un nuevo problema diana, y también para la aplicación del conocimiento que se posee sobre el análogo en el problema diana a partir del *mapping*. La teoría de Gentner (1983) sobre el modo en que se construyen analogías en ciencias postula que entre el dominio fuente, base de conocimientos precedente, y el dominio diana deben evidenciarse semejanzas en las relaciones que existen entre los objetos y sus atributos, pero no semejanzas en los propios objetos y atributos. Gentner (1983) define tres tipos de '*mapping*' entre situaciones: 1) *Literal similarity*: Dentro del conjunto de proposiciones interconectadas que representa el contenido semántico del problema fuente se pueden dar numerosas relaciones entre los atributos, objetos y hechos pertenecientes al análogo-base y los del problema diana. 2) *Analogy*, se refiere a la comparación entre predicados, la relación de los hechos descritos, de esta forma no se pueden establecer relaciones solo mediante objetos o atributos. *Abstraction*, comparación entre distintos dominios a partir de las relaciones que se dan entre las estructuras abstractas internas, los objetos y los hechos dejan de ser concretos para relacionar así dos situaciones distintas (p.160).

El establecimiento de analogías entre problemas depende, lógicamente, de sus características respectivas. Holyoak (1984) distinguió dos tipos de características en todos los problemas: las estructurales y las superficiales o de contexto. La superficie

describe la situación problemática en términos de objetos y hechos concretos del mundo real. La estructura hace referencia a las relaciones existentes entre los conceptos implicados en dicha situación (Novick, 1988). Las analogías en ciencias exigen una extrapolación estructural mucho más compleja que la mera asociación entre pares de elementos entre dominios y debe darse en diferentes niveles jerárquicos (Reed, 1987). En este punto, puede ser particularmente relevante citar el trabajo de Chi, Feltovich y Glaser (1981), en él se concluyó que los expertos basaban las similitudes entre problemas de física en elementos estructurales (por ejemplo, los principios de Newton), en tanto que los novatos la hacían basándose en elementos superficiales de los problemas (planos inclinados, poleas, etc). De acuerdo con este modelo en la transferencia siempre se lleva a cabo un *mapping* estructural, en el que se establecen relaciones entre el análogo-base (problema fuente) recuperado de la memoria y el problema diana que permiten llegar a solucionar este último. Como puede verse, este modelo hace particular énfasis en la estructura como elemento vertebrador en los procesos de resolución de problemas por transferencia analógica

Para Reeves y Weisberg (1994) el contenido de un problema está constituido por la conjunción del dominio semántico y de los elementos superficiales. La estructura de un problema puede ser caracterizada como una organización jerárquica que va desde sus detalles concretos hasta la descripción abstracta del enunciado. Para estos autores, la similitud entre problemas puede darse a nivel estructural o superficial, aunque los problemas análogos son aquellos que comparten la misma estructura, pero no necesariamente el mismo contenido específico. Además, subrayan que si los problemas presentan similitudes superficiales (como ocurre, por ejemplo, cuando se está desarrollando una unidad didáctica del currículum de una asignatura), sus diferencias estructurales pueden quedar *apantalladas*. Este efecto de apantallamiento ha sido encontrado en un trabajo empírico reciente (Gomez, Solaz y Sanjosé, 2012 a).

Parte de los rasgos superficiales de los problemas con enunciado la constituyen las variables léxicas y sintácticas. El modo en que se redacta un enunciado puede hacer que dos situaciones similares se perciban diferentes dificultando la transferencia o que dos situaciones estructuralmente idénticas se perciban diferentes (Puig y Cerdán, 1988; Cerdán, 2008; Orrantia et al., 2005,



Valentín y Chap-Sam, 2005; Christou y Philippou, 1998; Nesher y HersHKovitz, 1994; Carpenter, Hiebert y Moser, 1981). La mayor o menor familiaridad que el resolutor tenga con los objetos y eventos mencionados en los enunciados también influirá en su capacidad para reconocer analogías (Gómez, Solaz y Sanjosé, 2012 b).

Chen y Klahr (2008) hablan también de similitud de contexto. Entienden por contexto los aspectos físicos y/o sociales implicados en los problemas. Para ellos el contexto físico está relacionado con el lugar físico donde se sitúan los problemas, y el contexto social se refiere a los sujetos y actividades imbricadas en los problemas. El trabajo de Spencer y Weisberg (1986) halló que los estudiantes universitarios mostraban dificultades cuando se les variaba el contexto físico (laboratorio o aula) donde se debía efectuar la transferencia de conocimientos de un problema fuente explicado previamente.

Holland y colaboradores (1986) defienden que en los procesos de recuperación de análogos (o esquemas de problema) están fundamentalmente guiados por elementos estructurales. Por el contrario, Keane (1988) sostiene que en la recuperación de análogos participan tanto elementos estructurales como superficiales. La investigación de Spencer y Weisberg (1986) revela que el contexto (o características superficiales del problema) puede facilitar la recuperación de esquemas de problema y, consiguientemente, favorecer la transferencia; y que la posesión de esquemas de problema es condición necesaria pero no suficiente para que se produzca la transferencia. En este sentido, De la Fuente y colaboradores (1989) han encontrado que no hay diferencias en la recuperación de análogos entre problemas que comparten sólo similitud estructural, y entre aquellos otros que comportan similitud estructural y superficial. Además, estos autores han observado un efecto de transferencia negativa generado por las similitudes superficiales

A pesar de que se asume que la transferencia analógica es muy frecuente en el razonamiento de los humanos (Gentner y Holyoak, 1997), lo cierto es que, cuando se ha intentado reproducir el fenómeno experimentalmente, los resultados han sido desalentadores (Gick y Holyoak, 1980 y 1983, Reed, Dempster y Ettinger, 1985). Estas dificultades en la transferencia analógica aparecen incluso cuando el contexto (o superficie) del problema es familiar para los estudiantes, hecho que facilita el establecimiento de correspondencias entre elementos comunes (Price y

Driscoll, 1997). A pesar de esto, Reed y Bolstad (1991) han mostrado que el conocimiento o desconocimiento del dominio semántico de los problemas tiene una significativa influencia en todas las fases de la transferencia analógica. Butterfield y Nelson (1991) hallaron que representa una ardua tarea para los aprendices encontrar similitudes entre problemas. En su trabajo analizaron la influencia de la instrucción previa en similitudes sobre la transferencia y no encontraron diferencias significativas entre el grupo que recibía instrucción y el que no la recibía.

Aunque se ha sugerido que la disponibilidad del problema fuente resuelto cuando se resuelve el problema diana es esencial para la transferencia analógica (Reed et al., 1985; Spencer y Weisberg, 1986), Pulido, de la Garma y Pérez (2010) han comprobado, con un problema de secuencia de letras, que los estudiantes que dispusieron del problema fuente resuelto delante no resolvieron significativamente mejor el problema diana que aquellos que no lo tuvieron. Además, constataron que las estrategias de resolución del problema diana se basaron mayoritariamente en las similitudes superficiales con el problema fuente. Esto último, ya fue constatado en un estudio previo (Pulido, Olmos y Lanzagorta, 2005).

En relación específicamente a la transferencia de destrezas de alto nivel cognitivo en resolución de problemas, no existen evidencias claras de que la formación en estas destrezas suponga una mejora en la transferencia de éstas a otros dominios de conocimiento. Así, las evaluaciones efectuadas de cursos de formación en estas destrezas muestran un incremento del desempeño en problemas de los mismos dominios a los planteados en los cursos, pero no en aquellos problemas que pertenecen a dominios diferentes (Niedelman, 1991). En estos cursos se suelen proponer actividades, dentro de un área concreta de conocimiento, en la que se promueve el razonamiento silogístico, la indagación, la búsqueda de patrones, la selección de la información, la formulación de hipótesis y otras estrategias propias de la metodología científica.

Varias son las explicaciones de la ineficacia de estos cursos de formación en destrezas de alto nivel cognitivo. Una de las explicaciones subraya el hecho de que estos cursos se centran en el desarrollo de habilidades cognitivas, pero soslayan la importancia de los conocimientos específicos en un dominio (Resnick, 1987). Según Brandsford y colaboradores (1986), las competencias en un dominio y la habilidad

para razonar en ese dominio parecen desarrollarse conjuntamente. Esto es, los estudiantes no pueden razonar con facilidad sobre temas o cuestiones que no les son familiares. Otra explicación apunta hacia la necesidad de descontextualización, y la capacidad para reconocer similitudes entre las situaciones de aprendizaje y de transferencia. Y estos procesos raramente son fomentados en el contexto escolar, ya que no se llevan a cabo conexiones entre diferentes materias, ni se extraen generalizaciones de una disciplina que puedan aplicarse a otras (Salomon y Perkins, 1989).

### **3. 5 Transferencia y enseñanza de las ciencias**

Comenzaremos esta sección por un trabajo relativamente reciente y que nos pone en alerta en relación a la transferencia y la enseñanza de las ciencias. En dicho trabajo se pone de manifiesto, mediante la aplicación de la metodología ‘estudio de caso’ a sesenta estudiantes de secundaria en trece unidades didácticas, la escasa transferencia a otros ámbitos de conocimientos y habilidades científicas que supuestamente se han aprendido en el aula (Keiler, 2007).

Por otra parte, en un estudio que recoge la opinión de expertos (Schönborn y Bögeholz, 2009), se destaca la relevancia de los procesos de transferencia en el aprendizaje de las ciencias (en concreto de la Biología) como demostración de que realmente se ha producido comprensión. Esto es, para los expertos sólo hay comprensión cuando los estudiantes son capaces de aplicar conocimientos y habilidades adquiridas a nuevas tareas. Estos autores acaban concluyendo que la enseñanza para la comprensión de las ciencias debe estar basada en actividades de aprendizaje que promuevan tanto la transferencia horizontal como vertical. Resulta conveniente destacar aquí las investigaciones que han defendido el uso de analogías para desarrollar el razonamiento para la transferencia y la comprensión de conceptos científicos (Heywood y Parker, 1997).

A continuación daremos a conocer los estudios que han incidido en metodologías, estrategias o recursos instruccionales que favorecen la transferencia de

conocimientos y destrezas en la enseñanza de las ciencias. Keselman (2003) ha constatado que los estudiantes que se les enseña de forma explícita a formular hipótesis fundamentadas, tomando como bases todas las posibles variables intervinientes en la situación problemática, efectuaron significativamente mejor que otros tareas que implicaban transferencia. McIntosh (1986) comprobó el efecto de actividades que requieren la elaboración de representaciones mentales sobre el recuerdo y la transferencia: obtuvo mejoras ostensibles tanto en el recuerdo como en la transferencia de aprendizajes. Schwartz (1993) estudió en adolescentes la construcción de representaciones abstractas a partir de información escrita de estructura compleja, y observó que un buen número de ellos podía llevar a cabo transferencia analógica de estas representaciones; además, verificó que la instrucción específica en la representación abstracta permite a los estudiantes desarrollar estrategias que facilitan la transferencia

Gilbert, Bulte y Pilot (2011) proponen varios criterios para diseñar currículos “basados en el contexto de aprendizaje” (*context-based courses*) y toman como *leitmotiv* la transferencia de los aprendizajes; señalan que las “estructuras mentales” que elaboran los estudiantes en un determinado contexto de aprendizaje les son muy útiles para comprender y abordar nuevos contextos.

Williams y colaboradores (2004) proponen, aunque no pueden ofrecer evidencia empírica fiable todavía, una metodología de enseñanza de las ciencias que, en lugar de centrarse en contenidos específicos, o en conseguir que los alumnos utilicen pautas de razonamiento científico en un contexto particular de un dominio científico, intenta conseguir que los aprendices empleen dichas pautas en contextos que resulten de interés para ellos. Esperan conseguir dos objetivos, por una parte, mejorar en el uso de estrategias propias de la metodología científica y, por otra, que los estudiantes realicen la transferencia de conocimientos y destrezas aprendidas a situaciones de la vida cotidiana. En la misma línea, Fortus y colaboradores (2005), utilizan un programa de aprendizaje de la ciencia basado en la indagación que tiene como objetivos el diseño y la construcción de artefactos útiles. Dicho programa se llama *Design-based science*. La puesta a prueba de esta metodología resultó muy satisfactoria en la transferencia de conocimiento y habilidades en la resolución de

problemas a otros contextos del mundo real: los estudiantes mejoraron significativamente en tareas de transferencia.

Hsu y Thomas (2002) estudian los efectos de la instrucción basada en simulaciones “*web-aided*” sobre el cambio conceptual, la resolución de problemas y la transferencia. Concluyen que las simulaciones, la utilización de representaciones múltiples y la posibilidad de revisar y/o corregir acciones ejecutadas mejora los resultados en la enseñanza de las ciencias. En concreto, las simulaciones estimularon la transferencia de conocimientos ante nuevas situaciones. Un trabajo publicado con anterioridad por Oliver y Okey (1986) también ponía de relieve el papel de las simulaciones con ordenador como promotoras de la transferencia. Otro trabajo publicado con posterioridad por Day y Goldstone (2011) constatan asimismo, en varios experimentos, que los estudiantes pueden transferir con cierta facilidad las estrategias y conocimientos aprendidos en simulaciones con sistemas físicos a otras tareas muy diferentes en contenido y apariencia. En concreto, los estudiantes interactúan, en el ordenador, con una bola que, suspendida entre dos bandas elásticas, efectúa un movimiento oscilatorio. La tarea que tienen que efectuar seguidamente tiene relación con la regulación de población de una ciudad. Los autores reconocen que el factor más importante para llevar a cabo la transferencia es que los estudiantes elaboren una representación mental adecuada del sistema físico que les permita ver la similitud entre las estructuras de ambas situaciones problemáticas. En este caso, ambas situaciones están gobernadas por las mismas ecuaciones matemáticas.

Para finalizar este apartado comentaremos aquellos estudios que han abordado la transferencia específicamente en resolución de problemas de ciencias. En primer lugar, mencionaremos dos trabajos en los que se consigue mejorar el rendimiento en resolución de problemas por transferencia.

Así, Warnakulasooriya y Pritchard (2005) muestran que la transferencia entre problemas de Física mejora significativamente cuando los problemas vienen acompañados de ayudas, consejos, textos descriptivos y retroalimentación. Sampson y Clark (2009) en un estudio en el que se analiza el impacto del modelo de aprendizaje colaborativo en el aula sobre la resolución de problemas por transferencia, obtienen que los estudiantes que trabajan en la resolución de

problemas en grupo y colaborando entre sí tienen un mejor desempeño en la resolución de problemas que los que no lo hacen.

Por su parte, en la investigación de Lin y Lehman (1999), se valora la habilidad para resolver problemas de contexto similar (transferencia próxima o *near transfer*) y contexto diferente (transferencia lejana o *far transfer*), en estudiantes que fueron distribuidos en cuatro grupos que siguieron distintos modelos instruccionales. Los resultados revelan que sólo el grupo de estudiantes que siguió un aprendizaje focalizado en la comprensión de los contenidos, en el diseño de experiencias y en estrategias de actuación en las que se justifica el cómo, el cuándo y el porqué, consiguió puntuaciones significativamente mejores en la resolución de problemas de contexto diferente (transferencia lejana).

Chen (1995), diseñó un experimento con estudiantes de educación secundaria, en el que demostró que aportando imágenes explicativas de la solución de un problema fuente se mejoraba el transfer hacia problemas diana. Pasado un tiempo, Chen y Marvin (2000) realizan diversos estudios con el fin de probar que el refuerzo en el reconocimiento de estructuras abstractas mejora el transfer en resolución de problemas. Los dos primeros experimentos, indagaron en los efectos del llamado “refuerzo externo”, esto es, mostrar en un ejemplo detallado la información abstracta del problema fuente. Los resultados muestran que proveer a los estudiantes de ejemplos con esta información mejora el transfer a partir de soluciones análogas. Los siguientes experimentos analizaron los efectos del “refuerzo interno”, motivaron a los estudiantes a generar sus propios modelos, ejemplos o esquemas de la información abstracta del problema fuente, los resultados fueron alentadores, mostrando una notable mejora en el transfer en resolución de problemas. Las evidencias encontradas apuntaron a que los refuerzos tanto el externo, como el interno, para recuperar y generar información abstracta a partir de análogos, facilitan el proceso de transferencia.

Bernardo (2001), mediante estrategias de aprendizaje que consisten fundamentalmente en permitir a los estudiantes construir sus propios problemas análogos, pudo mejorar de manera notable la resolución de problemas que requerían la transferencia analógica de información entre un problema fuente y un problema diana.

Dos trabajos se han ocupado de estudiar si las dificultades en la resolución de problemas, en los que transferencia lleva implícita ecuaciones matemáticas, tienen su origen en la falta de pericia en los fundamentos o procedimientos matemáticos. Sanjosé y colaboradores (2007), en un experimento con problemas cuya resolución demandaba plantear y resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, acaban concluyendo que la causa principal de las dificultades no está en la falta de dominio matemático sino en el proceso de traducción del lenguaje natural al lenguaje del álgebra; esto es, en la construcción de un modelo de la situación (representación mental construida a partir de la información semántica y del conocimiento previo del sujeto) y/o de un modelo de problema (representación mental elaborada a partir del modelo de la situación y que contiene conceptos, leyes y ecuaciones matemáticas) adecuados. Por el contrario, Potgieter y colaboradores (2008), ponen de manifiesto en un estudio donde se investigan las dificultades de estudiantes de Química en problemas en los que se ha de aplicar la ecuación de Nernst (problemas de electroquímica), que el origen de tales dificultades se halla en déficits de conocimiento matemático y no en los procesos de transferencia del dominio matemático al dominio químico.

En relación con la resolución de problemas y la transferencia analógica, el trabajo de Solomon (1994) parte del hecho de que la mayoría de las investigaciones efectuadas sobre ambas variables siempre se hacen en un “medio extraño” para los estudiantes y que los resultados corroboran la escasa transferencia analógica en problemas de diferente estructura. Por ello, la autora lleva a cabo sus experimentos como si se trataran de una actividad más en el aula de ciencias y en sus resultados se observa que un porcentaje destacado de estudiantes de *High School* consigue aplicar los elementos estructurales del análogo (o problema fuente) para resolver otros problemas que incluso tienen distinta superficie o contexto al del análogo. Destaca, además, que esto último sólo se produce si el formato de presentación del análogo es el mismo que el del problema diana.

Por su parte, Ngu y Yeung (2012) estudian el efecto que genera en la resolución de problemas de Química, con una estructura algebraica subyacente, la incorporación al enunciado del problema fuente, del problema diana o en ambos, de ecuaciones, símbolos, categorización y consejos. Acaban concluyendo que sólo

cuando confluyen los cuatro elementos en alguno de los problemas fuente o diana, se facilita el *mapping* o establecimiento de correspondencias y, por tanto, la transferencia analógica.

Por último comentaremos las investigaciones centradas en la resolución de problemas de ciencias que requieren el planteamiento de sistemas de ecuaciones lineales, caso bastante habitual en la Física y Química de secundaria y bachillerato. Sanjosé y colaboradores (2009) usan una metodología instruccional que enseña a “traducir” los problemas al lenguaje del álgebra (y, consecuentemente, ayuda en la elaboración de un adecuado modelo del problema a partir del enunciado del problema), con independencia de las superficies asociadas a su ámbito temático. Comprueban que dicha metodología, aplicada en estudiantes de secundaria, mejora la transferencia inter-dominios y, por tanto, ayuda a resolver gran parte de los obstáculos de los estudiantes en la resolución de problemas. En otro estudio (Gómez, Solaz-Portolés y Sanjosé, 2012a), también con estudiantes de secundaria, se constata que:

1. El análogo (o problema fuente) más adecuado para facilitar la transferencia es aquel que presenta una estructura similar al problema que se intenta resolver (o problema diana).
2. Cuando el problema fuente y el problema diana tienen la misma superficie se produce un *apantallamiento* de las diferencias estructurales, perturbándose con ello el proceso de transferencia.
3. El problema fuente ayuda menos en la transferencia si el contexto del enunciado del problema resulta poco familiar para los estudiantes

Estos mismos autores en una investigación posterior (Gómez, Solaz-Portolés, Sanjosé, 2012b) vuelven a obtener los mismos resultados referidos anteriormente y, además, sacan a la luz las diferencias en la transferencia entre estudiantes instruidos recientemente (menos de quince días) en resolución de problemas que demandan la aplicación de sistemas de ecuaciones lineales y estudiantes que recibieron dicha instrucción bastante antes: los primeros tienden a efectuar, más que los segundos, una transferencia errónea del problema fuente a problemas diana de diferente estructura al del fuente. Esto es, la instrucción recibida por los estudiantes parece



inducir a creer que todos los problemas diana son isomorfos (tienen la misma estructura) al problema fuente.

### **3.6 Implicaciones para la enseñanza de las ciencias**

Hasta aquí se ha puesto de relieve la incidencia de los mecanismos de la transferencia en las tareas de aprendizaje en general, y en la resolución de problemas en particular. También se ha destacado el papel que desempeñan ciertas variables y procesos cognitivos y metacognitivos, así como el de determinadas metodologías de enseñanza/aprendizaje sobre la transferencia. A partir de todo ello, se plantean a continuación algunas posibles medidas instruccionales que pueden ser útiles para ayudar a los estudiantes en el desarrollo de estrategias para la transferencia.

1. Hay que conseguir una comprensión y aplicación de los contenidos. Para ello los estudiantes tienen que saber siempre lo que hacen y por qué lo hacen. Una didáctica de las ciencias rigurosa tendría que integrar los procesos de asimilación y aplicación del conocimiento conceptual. El diseño de las unidades didácticas debe basarse tanto en los contenidos específicos de la asignatura (conceptos, teorías, leyes, etc), como en el desarrollo de habilidades cognitivas (análisis, síntesis, inferencia, razonamiento abstracto, etc)

2. Los métodos de enseñanza tradicionales (clases magistrales, resolución de problemas algorítmicos, trabajo individual en exclusiva, etc.) no son compatibles con la consecución del aprendizaje significativo de conceptos ni con el fomento de habilidades cognitivas de alto nivel (Zoller et al., 1995). La educación científica tiene que desplegar prácticas instruccionales de trabajo colaborativo para desarrollar capacidades básicas y de razonamiento científico (formular hipótesis, poner a prueba hipótesis, explicar, interpretar, diseñar experimentos o dispositivos, justificar decisiones, razonar críticamente, etc.). Esto es, el trabajo en grupo en el aula debería ser

diseñado para maximizar su función sociocognitiva, de modo que pueda producirse un *conflicto* beneficioso.

3. Proveer a los estudiantes de diversas, continuas y prolongadas experiencias de resolución de problemas. Con este fin es importante: a) practicar estrategias de reconocimiento de similitudes entre problemas de diferente/igual estructura y superficie o contexto, con el objetivo fundamental de aprender a abstraer el “esquema” del problema; b) resolver problemas tanto de la misma estructura en múltiples contextos, como del mismo contexto con diferentes estructuras; y c) llevar a cabo una gradación en el nivel de transferencia requerida en la resolución de los problemas que se planteen en una secuencia didáctica: comenzar por problemas de transferencia de aplicación (del mismo contexto que con el que se ha aprendido) y acabar en problemas de transferencia lejana (muy distinto contexto que con el que se ha aprendido).

4. Se ha de ayudar a los estudiantes a que elaboren representaciones abstractas de las situaciones problemáticas. Es decir, los estudiantes han de asumir que la construcción de modelos mentales adecuados (modelo de la situación y modelo del problema) constituyen pasos básicos para resolver problemas. Estos modelos permiten abstraer el “esquema” del problema y “traducir” el enunciado del problema al lenguaje matemático. Una buena manera de hacerlo puede ser usar representaciones externas mediante símbolos y objetos que pueden ayudar al aprendiz a comprender el enunciado de un problema, explicitar sus condiciones, limitar la carga cognitiva y generar vías de solución para el problema (Scaife & Rogers, 1996). En este sentido, Bauer y Johnson-Laird (1993), confirman que los diagramas ayudan eficazmente a los estudiantes a resolver los problemas.

5. Se han de diseñar actividades en el currículo que permitan: a) la conexión entre los conocimientos y destrezas aprendidos en el aula y los que los estudiantes tienen procedentes del mundo que les rodea; b) aprender en contextos del mundo real que resulten interesantes para

los estudiantes; y c) aplicar aprendizajes de una asignatura en otras. En este punto, las simulaciones con ordenador u otro tipo de aplicaciones informáticas pueden resultar de gran utilidad.

6. Ofrecer actividades de carácter metacognitivo como parte del currículo científico. Tales actividades deben tratar, entre otros aspectos, la existencia de diferentes tipos de conocimiento, la importancia del conocimiento esquemático de problemas, el uso de heurísticos en la resolución de problemas y la explicación del papel de las estrategias/habilidades metacognitivas en los distintos pasos o procesos de resolución de problemas (Solaz-Portolés, Sanjosé y Gómez, 2011). Se debe prestar especial atención al conocimiento esquemático de problemas, por su decisivo papel como guía en el razonamiento analógico.

## Bibliografía

---

- Anolli, L., Antonietti, A., Crisafulli, L., y Cantoia, M. (2001). Accessing source information in analogical problem-solving. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 54A (1), 237–261.
- Barnett, S. M., y Ceci, S. J. (2002). When and where do we apply what we learn? A taxonomy for far transfer. *Psychological Bulletin*, 128, 612–637.
- Bauer, M. I., y Johnson-Laird, P. N. (1993). How diagrams can improve reasoning. *Psychological Science*, 4, 372-378.
- Bassok, M. y Holyoak, K. J. (1989). Interdomain transfer between isomorphic topics in algebra and physics. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 15, 153-166.
- Bloom, J. W. (2007). A theoretical model of learning for complexity: Depth, extent, abstraction, and transfer. Annual Meeting of the American Educational

- Research Association, Chicago, April 11. Disponible en [www.jeffbloom.net/docs/CmplxTchgLrngModelAERA07.pdf](http://www.jeffbloom.net/docs/CmplxTchgLrngModelAERA07.pdf)
- Butterfield, E. C., & Nelson, G. D. (1991). Promoting positive transfer of different types. *Cognition and Instruction*, 8(1), 69–102.
- Bereiter, C., y Scardamalia, M. (1985). Cognitive coping strategies and the problem of “inert knowledge.” In S. F. Chipman, J. W. Segal, & R. Glaser (Eds.), *Thinking and learning skills: Current research and open questions* (pp. 65–80). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Bernardo, A.B.I. (2001). Analogical problem construction and transfer in mathematical problem solving. *Educational Psychology*, 21(2), 137-150.
- Brandsford, J. D., Brown, A. L., & Cocking, R. R. (2000). *How people learn: Brain, Mind, Experience, and School: Expanded Edition*. Washington: National Academic Press. Disponible en [www.nap.edu/catalog/9853.html](http://www.nap.edu/catalog/9853.html)
- Brandsford, J. D., Sherwood, R., Vye, N., & Reiser, J. (1986). Teaching thinking and problem solving: Research foundations. *American Psychologist*, 41, 1078-1089.
- Byrnes, J. P. (1996). *Cognitive Development and Learning in Instructional Contexts*. Boston: Allyn and Bacon.
- Carpenter, T. P., Hiebert, J. y J.M. Moser (1981). Problem structure and first grade children’ s initial solution processes for simple addition and subtraction problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 12(1), 27-39.
- Carpintero M.E. (2002). *El proceso del transfer: revisión y nuevas perspectivas*. Departamento de Psicología y Educación. Universidad Camilo José Cela (Consultado en: <http://www.ucjc.edu/pdf/publicaciones/Edupsikhe/vol-1/cap4-vol1-num1.pdf>).
- Ceci, S. J. (1991). How much does schooling influence general intelligence and its cognitive components? A reassessment of the evidence. *Developmental Psychology*, 27, 703–722.

- Cerdán, F. (2008). Estudios sobre la Familia de Problemas Aritmético-Algebraicos. Tesis doctoral. Valencia: Servei de Publicacions de la Universitat de València
- Chaplin, J. P., y Kraniec, T. (1984). *Psicología : Sistemas y teorías*. México, D. F.: Nueva Editorial Interamericana.
- Chen, Z., Yanowitz, K. L., y Daehler, M. W. (1995). Constraints on processing abstract source information: Instantiation of principles facilitates children's analogical transfer. *Journal of Educational Psychology*, 87, 445–454.
- Chen, Z. y Daehler, M. W. (2000) 'External and Internal Instantiation of Abstract Information Facilitates Transfer in Insight Problem Solving'. *Contemporary Educational Psychology*, 25: 423–49.
- Chen, Z., y Klahr, D. (2008). Remote transfer of scientific reasoning and problem solving strategies in children. En R. V. Kail (Ed.), *Advances in Child Development and Behaviour* (pp. 419-470). Amsterdam: Elsevier.
- Chi, M. T. H., Feltovich, P. J., & Glaser, R. (1981). Categorization and representation of physics problems by experts and novices. *Cognitive Science*, 5, 121-152.
- Christou, C. y Philippou, G. (1998). The developmental nature of ability to solve onestep word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(4), 436-443.
- Clement, C. A., y Gentner, D. (1991). Systematicity as a selection constraint in analogical mapping. *Cognitive Science*, 15, 89-132.
- Day, S. B., & Goldstone, R. L. (2011). Analogical transfer from a simulated physical system. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition*, 37, 551-567.
- De la Fuente, J., Baillo, M., Gabucio, F., & Tubau, E. (1989). Similitudes superficiales en solución de problemas por analogía. *Cognitiva*, 2(2), 3-19.
- Duit, R. (1991). On the role of analogies and metaphors in learning science. *Science Education*, 75, 649-672.

- Fortus, D., Krajcik, J., Dershimer, R. C., Marx, R. W., & Namlok-Naaman, R. (2005). Design-based science and real world problem-solving.. *International Journal of Science Education*, 27, 855-879.
- Gagné, R. M. (1971). *Las condiciones del aprendizaje*. Madrid: Aguilar.
- Gagné, R. M. (1976). *Les principes fondamentaux de l'apprentissage*. Montreal: Editions HRW.
- Gentner, D (1983). Structure mapping: A theoretical framework for analogy. *Cognitive Science*, 7, 155-170.
- Gentner, D., Brem, S., Ferguson, R., Markman, A., Levidow, B., Wolff, P., y Forbus, K. (1997). Analogical Reasoning and Conceptual Change: A Case Study of Johannes Kepler. *The Journal of the Learning Sciences*, 6 (1), 3-40.
- Gentner, D. y Holyoak, K. J. (1997). Reasoning and learning by analogy. *American Psychologist*, 52, pp. 32-34.
- Gentner, D., Holyoak, K. J., y Kokinov, B. (Eds.). (2001). *The analogical mind: Perspectives from cognitive science*. Cambridge, MA: MIT Press.
- Gick, M. L. y Holyoak (1980), K. J..Analogical problem-solving. *Cognitive Psychology*, 15, pp. 306-355.
- Gick, M. L., y Holyoak, K. J. (1983).Schema induction and analogical transfer. *Cognitive Psychology*, 15, 1-38.
- Gilbert, J. K., Bulte, A. M. W., y Pilot, A. (2011).*International Journal of Science Education*, 33, 817-837.
- Goldstone, R.L. y Sakamoto, Y. (2003). The transfer of abstract principles governing complex adaptative systems. *Cognitive Psychology*, 46, 414-466.
- Gómez, C. B., Solaz-Portolés, J. J., & Sanjosé, V. (2012 (a)) Efectos de la similitud superficial y estructural sobre la transferencia a partir de análogos en problemas de alta y baja familiaridad. Aceptado para su publicación en *Enseñanza de las Ciencias*.

- Gómez, C. B., Solaz-Portolés, J. J., & Sanjosé, V. (2012 (b)). Analogy construction and success in mathematics and science problem-solving: A study with secondary students. Aceptado para su publicación en *Revista de Psicodidáctica*
- Haskell, R. E. (2001). *Transfer of learning: Cognition, instruction and reasoning*. San Diego, CA: Academic Press.
- Hendrickson, G., y Schroeder, W. H. (1941). Transfer of training to hit a submerged target. *Journal of Educational Psychology*, 32, 205-213.
- Heywood, D. y Parker, J. (1997). Confronting the analogy: Primary teachers exploring the usefulness of analogies in the teaching and learning of electricity. *International Journal of Science Education*, 19, 869-885.
- Holland, J. H., Holyoak, K. J., Nisbett, R. E., & Thagard (1986). *Induction: Processes of inference, learning, and discovery*. Cambridge MASS: MIT Press.
- Holyoak, K. J. (1984). Mental models in problem solving. En J. R. Anderson y S. M. Kosslyn (Eds.) *Tutorials in learning and memory: Essays in honour of Gordon Bower*. S. Francisco: Freeman.
- Holyoak, K. J., y Koh, K. (1987), Surface and structural similarity in analogical transfer. *Memory and Cognition*, 15, 332-340.
- Hsu, Y. S., & Thomas, R. A. (2002). The impact of a web-aided instructional simulation on science learning. *International Journal of Science Education*, 24, 955-979.
- Hummel, J. E., & Holyoak, K. J. (1997). Distributed representations of structure: A theory of analogical access and mapping. *Psychological Review*, 104, 427-466.
- Keane, M. T. (1987). On retrieving analogues when solving problems. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 39, 29-41.
- Keane, M. T. (1988). *Analogical problem solving*. Chichester: Ellis Horwood.

- Judd, C. H. (1908). The relation of special training to general intelligence. *Educational Review*, 36, 28-42.
- Keiler, L. S. (2007). Students' explanations of their data handling: Implications for transfer of learning. *International Journal of Science Education*, 29, 151-172.
- Keselman, A. (2003). Supporting inquiry learning by promoting normative understanding of multivariate causality. *Journal of Research in Science Teaching*, 49, 898-921.
- Klausmier, H. J. (1984). *Educational Psychology* (5<sup>th</sup> Ed.). New York: Harper and Row.
- Lin, X., y Lehman, J. D. (1999). Supporting learning of variable control in a computer-based biology environment: Effects of prompting college students to reflect on their own thinking. *Journal of Research in Science Teaching*, 36, 837-858.
- Lobato, J. (2006). Alternative perspectives on the transfer of learning: History, issues, and challenges for future research. *Journal of the Learning Sciences*, 15(4), 431-449.
- Loewenstein, J., Thompson, L. y Gentner, D. (1999). Analogical encoding facilitates knowledge transfer in negotiation. *Psychonomic Bulletin & Review*, 6, 586-597.
- Mayer R. (1984). Aids to text comprehension. *Educational Psychologist*, 19 (1), 30-42.
- McIntosh, W. J. (1986). The effect of imagery generation on science rule learning. *Journal of Research in Science Teaching*, 23, 1-9.
- Nesher, P. y S. HersHKovitz (1994). The role of schemes in two-step problem: Analysis and research findings. *Educational Studies in Mathematics*, 26(1), 1-23.
- Niedelman, M. (1991). Problem solving and transfer. *Journal of Learning Disabilities*, 24(6), 322-329.



- Novick, L. (1988). Analogical transfer, problem similarity, and expertise. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition*, 14, 510-520.
- Oliver, R., & Okey, J. (1986). Using computer simulations to promote achievement and transfer. *Research in Science Education*, 16, 191-198.
- Orrantia, J., González, L.B. & Vicente, S. (2005). Analysing arithmetic Word problems in Primary Education textbooks. *Infancia y Aprendizaje*, 28(4), 429-451.
- Perkins, D. N., y Salomon, G. (1988). Teaching for transfer. *Educational Leadership*, 46(1) 22-32.
- Picus, L. (1983). *Teaching problem solving: A research synthesis*. Portland, OR: NREL
- Potgieter, M., Harding, A., y Engelbrecht, J. (2008). Transfer of algebraic and graphical thinking between mathematics and chemistry. *Journal of Research in Science Teaching*, 45, 197-218.
- Price, E. A., y Driscoll, M. P. (1997). An inquiry into the spontaneous transfer of problem-solving skill. *Contemporary Educational Psychology*, 22, 472-494.
- Pulido, M. A., de la Garma, M., y Pérez, C. (2010). Solución de problemas por transferencia analógica: efectos de la disponibilidad del modelo. *Revista Intercontinental de Psicología y Educación*, 12, 157-170.
- Pulido, M. A., Olmos, E., y Lanzagorta, N. (2005). La solución de problemas de cuatro términos por transferencia analógica: el efecto de las similitudes superficiales y del tipo de problema. *Revista Mexicana de Psicología*, 22, 433-440.
- Puig, L. y Cerdán, F. (1988). Problemas aritméticos escolares. Madrid: Síntesis.
- Rebello, N. S.; Cui, L., Bennet, A. G.; Zollman, D. A. y Ozimek, D. J. (2007). Transfer of learning in problem solving in the context of mathematics and physics. En D. Jonassen (Ed.), *Learning to solve complex scientific problems*. Hillsdale, N. J.: Lawrence Earlbaum.

- Reed, S. K., y Bolstad, C. A. (1991). Use of examples and procedures in problem solving. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition*, 17, 753-766.
- Reed, S. K., Dempster, A., y Ettinger, M. (1985). Usefulness of analogous solutions for solving algebra word problems. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition*, 11, 106-125.
- Reed, S.K. (1987). A structure-mapping model for word problems. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition*, 13, 124-139.
- Reed, S. K., Ernst, G., y Banerji, R. (1974). The role of analogy in transfer between similar problem states. *Cognitive Psychology*, 6, 436-450.
- Resnick, L. (1987). *Education and learning to think*. Washington, DC: National Academic Press.
- Reeves, L. M., y Wiesberg, R. W. (1994). The role of content and abstract information in analogical transfer. *Psychological Review*, 115, 381-400.
- Salomon, G., y Perkins, D. N. (1987). Transfer of cognitive skills from programming: When and how? *Journal of Educational Computing Research*, 3(2), 149-169.
- Sampson, V., y Clark, D. (2009). The impact of collaboration on the outcomes of scientific argumentation. *Science Education*, 93, 448-484.
- Sanjosé, V., Solaz-Portolés, J. J., y Valenzuela, T. (2009). Transferencia interdominios en resolución de problemas: una propuesta instruccional basada en el proceso de “traducción algebraica”. *Enseñanza de las Ciencias*, 27, 169-184.
- Sanjosé, V., Valenzuela, T., Fortes, M. C., y Solaz-Portolés, J. J. (2007). Dificultades algebraicas en la resolución de problemas por transferencia. *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias*, 6, 538-561.

- Salomon, G., y Perkins, D. N. (1989). Rocky roads to transfer: Rethinking mechanisms of a neglected phenomenon. *Educational Psychologist*, 24 (2), 113-142.
- Scaife, M., y Rogers, Y. (1996). External cognition: How do graphical representations work?. *International Journal of Human-computer Studies*, 45, 185-213.
- Siegler, R. S. (2006). Microgenetic analyses of learning. En W. Damon y R. M. Lerner (Series Eds.) y D. Kuhn y R. S. Siegler (Vol. Eds.), *Handbook of child psychology: Volume 2: Cognition, perception, and language* (6th ed., pp. 464–510). Hoboken, NJ: Wiley.
- Singley, K., y J.R. Anderson (1989). *The Transfer of Cognitive Skill*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Schönborn, K. J. y Bögeholz, S. (2009). Knowledge transfer in Biology and translation across external representations: Experts' views and challenges for learning. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 7, 931-955.
- Schwartz, D. L. (1993). The construction and analogical transfer of symbolic visualizations. *Journal of Research in Science Teaching*, 30, 1309-1325.
- Solaz-Portolés, J. J., Rodríguez, C., Gómez, A., y Sanjosé, V. (2010). Conocimiento metacognitivo de las estrategias y habilidades mentales utilizadas para resolver problemas: un estudio con profesores de ciencias en formación. *Didáctica de las Ciencias Experimentales y Sociales*, 24, 139-152.
- Solaz-Portolés, J. J., y Sanjosé, V. (2008a). Types of knowledge and their relations to problem solving in science: directions for practice. *Sísifo, Educational Sciences Journal*, 6, 105-112.
- Solaz-Portolés, J. J. y Sanjosé, V. (2008b). Conocimientos y procesos cognitivos en la resolución de problemas de ciencias: consecuencias para la enseñanza. *Magis, Revista Internacional de Investigación en la Educación*, 1, 147-162.

- Solaz-Portolés, J. J., Sanjosé, V., y Gómez, A. (2011). Aprendizaje basado en problemas en la educación superior: una metodología necesaria en la formación del profesorado. *Didáctica de las Ciencias Experimentales y Sociales*, 25, 177-186.
- Solaz-Portolés, J. J., Sanjosé, V., & Gómez, C. B. (2011). La investigación sobre la influencia de las estrategias y la motivación en la resolución de problemas: implicaciones para la enseñanza. *Latin American Journal of Physics Education*, 5(4), 788-795.
- Solomon, I. (1994). Analogical transfer and “functional fixedness” in the science classroom. *Journal of Educational Research*, 37, 371-377.
- Spencer, R. M. y Weisberg, R. W. (1986). Context-dependent effects on analogical transfer. *Memory and Cognition*, 14, 442-449.
- Sternberg, R.J. (1985). *Beyond IQ. A triarchic theory of human intelligence*. Nueva York: Cambridge University Press.
- Sternberg, R. (1996). *Cognitive Psychology*. Orlando: Harcourt Brace College Publishers.
- St-Yves, A. (1988). *Psicología de la enseñanza-aprendizaje*. México, D. F.: Trillas.
- Thorndike, E. L. (1924). Mental discipline in high school studies. *Journal of Educational Psychology*, 25, 1-22.
- Thorndike, E. L., y Woodworth, R. S. (1901). The influence of improvement in one mental function upon the efficiency of other functions. *Psychological Review*, 8, 247-261.
- Valentin, J.D. y Chap-Sam, L. (2005). Roles of semantic structure of arithmetic word problems on pupils’ ability to identify the correct operation. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning (electronic journal)*. En <http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/valentin.pdf>.
- VanLehn, K. (1990). *Mind bugs: origins of procedural misconceptions*. Cambridge, Mass.: MIT Press

- Van Lehn, K. (1990). Problem solving and cognitive skill acquisition. En H. A. Simon y C. A. Kaplan (Eds.). *Foundations of Cognitive Science*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- VanLehn, K. (1998). Analogy events: How examples are used during problem solving. *Cognitive Science*, 22, 347-388.
- Voss, J. F. (1987). Learning and transfer in subject-matter learning: a Problem-solving model. *International Journal of Educational Research*, 11, 607-622.
- Vosnaidou, S. y Ortony, A. (1989). Similarity and analogical reasoning: A synthesis. En S. Vosnaidou y A. Ortony (Eds.), *Similarity and analogical reasoning* (pp 1-17). Cambridge: Cambridge University Press.
- Warnakulasooriya, R., y Pritchard, D. E. (2005). Learning and problem-solving transfer between physics problems using webbased homework tutor. *EdMedia Conference Proceedings*.
- Wesman, A. G. (1945). A study of transfer of training from high school subjects to intelligence. *Journal of Educational Research*, 39, 254-264.
- Williams, W. H., Papierno, P. B., Makel, M. C., y Ceci, S. J. (2004). Thinking like a scientist about real-world problems: The Cornell Institute for Research on children science education program. *Applied Developmental Psychology*, 25, 107-126.
- Zoller, U., Lubezky, A., Nakhleh, M. B., Tessier, B., y Dori, Y. J. (1995). Success on algorithmic and LOCS vs. conceptual chemistry exam questions. *Journal of Chemical Education*, 72, 987-989.



---

# **ESTUDIOS EMPÍRICOS**

---





# Capítulo 4

## **Dificultades para Codificar, Relacionar y Categorizar Problemas Verbales Algebraicos: Dos Estudios con Estudiantes de Secundaria y Profesores en Formación.**

---

### **Referencia:**

Gómez, C.B., Solaz-Portolés, J.J., Sanjosé, V. (2014). Dificultades para Codificar, Relacionar y Categorizar Problemas Verbales Algebraicos: dos estudios con estudiantes de secundaria y profesores en formación. *Aceptado para su publicación en la revista Bolema.*



# 4. Dificultades para Codificar, Relacionar y Categorizar Problemas Verbales Algebraicos: dos Estudios con Estudiantes de Secundaria y Profesores en Formación

## Resumen

En resolución de problemas verbales por transferencia, la activación de problemas ya conocidos que sirvan de guía, depende de las analogías percibidas entre éstos y el problema a resolver. Se desarrollan dos estudios relacionados para analizar en qué características se basan los estudiantes para codificar problemas y detectar sus analogías, en tareas de categorización (*sorting*). Se utilizaron técnicas cuantitativas y cualitativas combinadas. Primero se analizó cómo los estudiantes de secundaria son influidos por diferentes variables características de problemas de ciencias. Una gran proporción de sujetos no fue capaz de percibir las analogías y diferencias adecuadas entre problemas. El segundo estudio trató de avanzar una explicación de estos resultados. El nivel académico y la familiaridad con las temáticas fueron factores significativos, pero los futuros profesores participantes mostraron demasiadas dificultades, alertando sobre la conveniencia de revisar algunos supuestos instruccionales habituales.

**Palabras clave:** Resolución de Problemas Verbales Algebraicos. Superficie y Estructura de problemas. Familiaridad con la temática. Analogías entre Problemas. Categorización de problemas.

## **4. Difficulties in codifying, relating and sorting algebraic verbal problems: two studies with secondary students and pre-service teachers.**

### **Abstract**

Solving verbal problems by transfer implies the activation of other, previously solved problems by means of the analogies perceived between these and the 'target problems'. Two related studies are conducted to analyse what features students focus on to codify problems and to build analogies among them when sorting tasks are proposed. Quantitative and also qualitative techniques were used in the analyses. First we analysed how different science problem characteristics influence secondary students' task performance. A high proportion of participants were not able to perceive suitable analogies and differences among problems. The second study tried to look forward for explanations. The Academic level and the Familiarity with the problems topic were significant factors. However, our grade participants, in a pre-service post-grade course to be teachers of mathematics, found more difficulties than expected, indicating that some usual instructional assumptions should be reconsidered.

**Keywords:** Algebraic Verbal Problem Solving. Problem Surface and Structure. Familiarity with the subject. Analogies among Problems. Problem sorting.

## 4.1. Introducción

La resolución de problemas verbales es una tarea clásica en el aprendizaje de las ciencias y las matemáticas. Un enunciado permite conectar situaciones en el mundo real con las abstracciones propias de las matemáticas, dándoles sentido y haciendo útil este conocimiento. En el proceso de resolución de un problema Polya (1957) diferenció 4 fases distintas: comprensión, elaboración de un plan, ejecución del plan, y comprobación. En Educación Secundaria un modo frecuente de instruir para abordar esas cuatro fases se basa en la ‘transferencia analógica’ (Gómez, Solaz-Portolés y Sanjosé, 2012; Bernardo, 2001): típicamente, el profesor resuelve un conjunto de problemas basados en algún procedimiento, principio, ley o teorema y, a continuación propone problemas ‘análogos’ a aquellos para que los estudiantes intenten resolverlos. En este proceso es muy importante que los estudiantes sean capaces de codificar adecuadamente los problemas para poder luego construir vínculos analógicos entre ellos (Gentner, 1983). Por un lado, la activación del esquema mental apropiado para resolver un problema dependerá de los vínculos entre éste y otros problemas ya resueltos. Por otro lado, la elaboración de esquemas mentales para su uso posterior, dependerá de los vínculos establecidos entre los problemas ya resueltos. Tal es su importancia, que la ‘búsqueda y activación de problemas relacionados con el propuesto’ ha sido considerada por algunos autores como una fase diferenciada del resto, por considerar que en toda resolución hay que activar conocimiento previo en forma de ‘esquemas resolutivos’ previamente elaborados (Queroz y Lins, 2011, Figura 1, p. 81).

El propósito del presente trabajo es estudiar cómo diferentes características definitorias de los problemas verbales, afectan a su codificación y a las analogías entre ellos percibidas por estudiantes de distinto nivel académico. Consideraremos problemas cuya resolución exige el uso de estructuras algebraicas correspondientes a dos funciones lineales, que tienen múltiples aplicaciones en el mundo real y desempeñan un papel relevante en la comprensión de temas matemáticos y científicos (Birgin, 2012).

### 4.1.1 El proceso de Transferencia

Transferir significa aplicar el conocimiento aprendido en determinadas situaciones y contextos, a nuevas situaciones o contextos diferentes. Aunque sus mecanismos cognitivos no son bien conocidos, desde la Teoría de los Componentes Idénticos de Thorndike (Thorndike y Woodworth, 1901), se acepta que uno de los elementos esenciales de este proceso es el reconocimiento de elementos comunes entre las situaciones conocidas y la nueva. Desde hace mucho, se ha estudiado la transferencia en resolución de problemas verbales algebraicos (Gick y Holyoak, 1980; Reed, Dempster y Ettinger, 1985). Se ha estudiado, sobre todo, el aprendizaje inicial de ejemplos relevantes y su comparación, para favorecer la abstracción de ‘esquemas de problema’ que puedan ser usados después (Jonassen, 2003; Goldstone y Sakamoto, 2003; Loewenstein, Thompson y Gentner, 1999; Gick y Holyoak, 1983).

El análisis del proceso de transferencia ha llevado a diferentes autores a distinguir distintas fases constituyentes del mismo (Hummel y Holyoak, 1997; Salomon y Perkins, 1987). Chen y Klahr (2008) distinguen cuatro fases que podemos aplicar a la resolución de problemas:

- a) Codificación de las características del problema propuesto (o ‘diana’) durante la fase de Comprensión del problema, (Polya, opus cit.; Newel y Simon, 1972). Previamente, se debe haber codificado un problema ya conocido (o ‘fuente’) que va a ser usado como ‘análogo’ posteriormente.
- b) Acceso a la información de un ‘análogo fuente’. Las ‘señales de recuperación’ de un determinado análogo desde la memoria a largo plazo del resolutor deben ser, por hipótesis, algunos de sus rasgos característicos que el sujeto percibe comunes con el problema diana. Esta fase implica el establecimiento de vínculos analógicos entre el problema diana y alguno de los problemas ya estudiados, y se sitúa en la fase que Polya llamó Planificación de la resolución.
- c) *Mapping* o correspondencia entre el problema diana y análogo fuente, aún dentro de la fase de Planificación. Las características percibidas de ambos problemas son relacionadas explícitamente. Una vez establecido este *mapping*, el resolutor decide que el análogo recuperado es útil o no (VanLehn, 1998). Esta

correspondencia implica la utilización de los vínculos analógicos ya establecidos entre ambos problemas en la fase anterior.

- d) Ejecución de estrategias para llegar a la solución del problema diana (fase de Ejecución de la resolución, de Polya), navegando por el ‘espacio del problema’ (Newel y Simon, opus cit.). Cuando el análogo recuperado se considera apropiado tras el *mapping*, el resolutor debe realizar las inferencias necesarias para que ciertas (todas o parte) relaciones estructurales del problema fuente se puedan usar para el problema diana, *mutatis-mutandis*.

Las tres primeras fases constituyen lo que Vergnaud (1982) denomina ‘cálculo relacional’ y preceden a la resolución del problema propiamente dicha, de ‘cálculo numérico’. La pregunta es, ¿sobre qué rasgos se puede codificar y construir analogías entre problemas con enunciado?

#### **4.1.2 Factores Característicos de un Problema Verbal**

Se han descrito dos componentes básicos para los problemas verbales: la ‘Superficie’ y la ‘Estructura’ (Holyoak, 1984). La Superficie describe la historia o situación problemática en un contexto del mundo ordinario. Son elementos superficiales:

a) La situación problemática descrita, con sus personajes, objetos y eventos del mundo ordinario involucrados, y sus atributos.

b) Las variables lingüísticas implicadas en el texto que constituye el enunciado. El modo en que se redacta un enunciado puede hacer que dos situaciones similares se perciban diferentes, dificultando la transferencia, o que dos situaciones estructuralmente idénticas se perciban diferentes (Cerdán, 2008; Puig y Cerdán, 1988; Valentín y Chap-Sam, 2005; Carpenter, Hiebert y Moser, 1981).

c) Los valores numéricos de las cantidades explicitadas como datos. En problemas multiplicativos se ha observado que los estudiantes cambian la operación elegida cuando se les presentan, sucesivamente, problemas que sólo difieren en términos numéricos (Bell, Swan y Taylor, 1981).

La Estructura de un problema algebraico está determinada por “*cómo se relacionan las cantidades unas con otras, más que por cuáles son esas cantidades*” (Novick, 1988; p.511). Obviamente, el acceso a la estructura de un problema es decisivo para su comprensión y resolución correcta. Para ello es necesario que el resolutor conecte las representaciones mentales semántica y referencial del problema (o ‘Modelo de la Situación’, Kintsch, 1998), con la representación abstracta, matemática (o ‘Modelo del Problema’; Kintsch y Greeno, 1985; Nathan, Kintsch, y Young, 1992). Esto puede hacerse mediante el proceso conocido como ‘traducción’ (Puig, 1998) o mediante transferencia analógica, aprovechando una traducción ya realizada en otro problema.

En el caso de problemas de ciencias, la temática particular del problema puede influir tanto en la superficie como en la estructura de un problema. Por un lado, un tema científico contiene determinadas situaciones, entidades y fenómenos específicos con sus magnitudes particulares. Estos elementos están incluidos en la Superficie. Por otro lado, las leyes y principios propios de esa temática de la ciencia forman parte de la Estructura, pues implican ciertas relaciones entre magnitudes (que, a su vez, contienen cantidades). Una temática poco familiar para un estudiante podría dificultar la representación mental de la situación descrita y, con ello dificultar también la activación de esquemas abstractos apropiados para resolver correctamente un problema.

La pregunta o incógnita de un problema influye directamente en la dificultad del problema y condiciona el proceso de resolución (Hiebert, 1982; Vergnaug, 1982). Hay evidencia de que los estudiantes con bajo conocimiento previo y pericia focalizan su atención en la incógnita, e incluso es frecuente el uso de la estrategia de trabajar “hacia atrás” (Chi, Glaser y Rees, 1982), comenzando por la incógnita y retrocediendo paso a paso hasta encontrar los datos del problema. Es de esperar que las relaciones entre la incógnita y el resto de cantidades afecten la resolución de un problema, ya que ello configura la estructura del mismo. Sin embargo, el nombre concreto de la incógnita, su posición concreta dentro de un enunciado (Castro, Rico, Batanero y Castro 1991), o su rol matemático (como “x” o como “y” en ecuaciones, o como numerador o denominador en razones, etc.) pueden también afectar la percepción de un problema por los resolutores no expertos.



En resumen, en este trabajo consideraremos 3 factores característicos de un problema verbal algebraico: a) su superficie (incluyendo la familiaridad con la temática); b) su estructura algebraica; c) su incógnita.

### **4.1.3 La tarea de Agrupación de Problemas y las Analogías**

En resolución de problemas verbales, los expertos y los novicios parecen diferenciarse, precisamente, por el tipo de características en que se basan para codificarlos y relacionarlos con otros, antes de resolverlos. Chi, Feltovich y Glaser (1981) propusieron a expertos y estudiantes novicios una tarea sencilla de agrupación de problemas algebraicos de física, a partir de la lectura de su enunciado (sin resolverlos explícitamente). Este tipo de tarea parece explorar las 3 primeras fases del proceso de resolución por transferencia señaladas antes: la codificación o indexación del problema diana, la recuperación de ‘análogos fuente’ y el establecimiento de un *mapping* entre problemas. La investigación mencionada reveló que el nivel de conocimientos afecta el modo en que la información específica se codifica en la memoria a largo plazo (indexación). Los expertos basaron las similitudes entre problemas de física en elementos estructurales, y definieron las clases de problemas construidas a partir de ello (por ejemplo, problemas que implican la tercera ley de Newton, problemas que implican el principio de conservación de la energía, etc.). Sin embargo, los principiantes se basaron en elementos superficiales de los problemas (problemas de planos inclinados, problemas de movimiento circular, problemas de poleas, etc.). Sanjosé, Solaz-Portolés y Valenzuela, (2009) utilizaron la tarea de agrupación de problemas de física con enunciado para replicar los resultados de Chi y col. (opus cit) encontrando que una gran proporción de estudiantes de Secundaria, únicamente establecía vínculos temáticos entre problemas (problemas de cinemática, de electricidad, de termodinámica, etc.). Esto tal vez sea un producto de la enseñanza, ya que los materiales y procedimientos instruccionales en ciencias suelen agrupar los problemas de la misma temática. En cualquier caso, los resultados de Chi y colaboradores muestran que los expertos logran superar este condicionante.

En resumen, si se toman colecciones adecuadas de problemas, la tarea de agrupación a partir de la lectura de sus enunciados puede ser utilizada para evaluar si

los resolutores son capaces de categorizar problemas según su estructura, como hacen los expertos, o no pueden ir más allá de sus características superficiales.

#### **4.1.4 Objetivos**

A partir del propósito general de esta investigación expuesto en la introducción, y de los fundamentos teóricos explicitados, nos planteamos los siguientes objetivos:

1. Estudiar las analogías entre problemas verbales que los estudiantes de secundaria son capaces de percibir en tareas de agrupación de problemas de ciencias con estructura algebraica.
2. Analizar el efecto de diferentes caracteres constitutivos de los problemas, superficie, estructura e incógnita, sobre la codificación y percepción de analogías entre problemas de ciencias.
3. Explorar las causas, es decir, hasta qué punto las dificultades de los estudiantes en el establecimiento de analogías estructurales, son debidos a su nivel de conocimiento y pericia, a la escasa familiaridad con los temas de ciencias, o a una instrucción que presta poca atención a los procesos de codificación y clasificación de problemas.

Los dos primeros objetivos se abordarán en el estudio 1, mientras el objetivo 3 será abordado en el estudio 2 de este trabajo.

## 4.2 Método

### 4.2.1 Diseño

En los dos estudios realizados la tarea propuesta fue la de agrupar colecciones de problemas según el modo en que se resuelven. Se siguió una metodología mixta en dos fases: análisis cuantitativo (descriptivo, y contrastes pertinentes) y análisis cualitativo (entrevistas semi-estructuradas).

En el estudio 1 las variables consideradas fueron las características de los problemas suministrados, todos ellos de ciencias. En el estudio 2 se consideraron los efectos de una mayor o menor familiaridad de los resolutores con el contexto de los problemas, y también los efectos del nivel académico, ligado al conocimiento previo y la experiencia resolviendo problemas. La Familiaridad (Baja/Alta) fue un factor intra-sujetos mientras que el Nivel Académico (Secundaria/ Master) fue un factor entre-sujetos. En ambos estudios, la variable objetivo fue el tipo de características en que se basaron los estudiantes para definir conjuntos de problemas que se resolvieran con las mismas ecuaciones.

### 4.2.2 Participantes

En el primer estudio participaron 109 estudiantes españoles de ambos sexos, en 9º y 10º grados de Secundaria<sup>1</sup> (14-16 años), de dos centros educativos situados en poblaciones entre 10000 y 20000 habitantes. En el segundo estudio participaron 118 estudiantes españoles de ambos sexos. De ellos, 69 pertenecían a 3 grupos intactos, dos de 9º y uno de 10º grado, de dos centros educativos distintos en dos poblaciones de más de 20000 habitantes. El resto fueron 49 graduados universitarios, futuros profesores de Matemáticas en formación docente inicial<sup>2</sup>. Aunque se trató de una muestra de conveniencia, ésta no presentó ninguna característica diferencial con el resto de sus poblaciones.

---

<sup>1</sup> En España se corresponden con 3º y 4º de ESO (Educación Secundaria Obligatoria)

<sup>2</sup> La formación docente inicial de los profesores de Secundaria en España, se realiza a través del Máster Universitario en Profesor de Educación Secundaria. A este máster se accede después de obtener un Grado universitario adecuado a cada especialidad.

### 4.2.3 Materiales empleados

Se diseñaron dos colecciones, cada una de 8 enunciados de problemas algebraicos, cuya resolución implica un sistema de 2 ecuaciones lineales con 2 incógnitas en todos los casos. En una colección, las superficies implicaron temáticas científicas consideradas de Baja Familiaridad para los estudiantes. En estos problemas se procuró reducir al mínimo las diferencias entre problemas, escogiendo objetos y eventos de fácil representación mental para los estudiantes (globos que se hinchan o se deshinchán mediante bombas que inyectan o extraen gas o calor), de modo que las diferencias superficiales se concentrasen en las magnitudes implicadas al tratar como ‘fenómenos’ dichos eventos. Esta colección se utilizó en ambos estudios 1 y 2.

En la otra colección, los enunciados de los problemas incluyeron objetos, eventos y situaciones de la vida diaria, es decir, contextos de Alta Familiaridad (piscinas que se llenan o se vacían) para los estudiantes. Esta colección se utilizó sólo en el estudio 2.

Los 8 problemas de cada colección se configuraron a partir de un diseño factorial  $2 \times 2 \times 2$  con 3 factores: a) Superficie (temática): mecánica/térmica o piscinas/ahorros); b) Estructura: ‘encontrar’ o ‘alcanzar’<sup>3</sup>; y c) Incógnita del problema. Otros elementos importantes, como las cantidades dadas como datos, y las variables sintácticas, fueron fijados para minimizar su impacto. Las colecciones de problemas pueden verse en el Anexo.

Se elaboraron dos cuadernillos, uno para Alta y otro para Baja Familiaridad. Cada cuadernillo incluyó, por orden, las instrucciones, un ejemplo de práctica y los 8 enunciados de los problemas para realizar la tarea. Los alumnos debían dibujar diagramas de Venn con los problemas correspondientes en su interior, identificados por su número en el listado suministrado. El ejemplo consistió en un ejercicio sencillo de práctica de la tarea principal. La Tabla 1 muestra este ejemplo.

---

<sup>3</sup> Se consideraron dos estructuras correspondientes a dos ecuaciones que se pueden representar por dos rectas que se cortan, con pendientes del mismo signo o de distinto signo. Desde ahora, denominamos estas estructuras ‘Alcanzar’ y ‘Encontrar’ respectivamente, en reconocimiento a los clásicos problemas de móviles que, bien circulan por la misma ruta y en el mismo sentido y uno alcanza al otro en un punto, o bien se mueven en sentidos opuestos y se encuentran (cruzan) en un punto de la ruta.

**Extracto del cuadernillo proporcionado a los estudiantes**

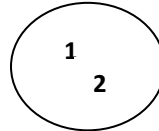
**EJEMPLO DE PRÁCTICA**

Imagina que te pedimos agrupar estos 4 problemas según el modo en que se resuelven:

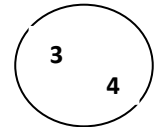
1. Calcular el área de una moneda cuyo radio es 2cm
2. Calcula el perímetro de una moneda cuyo radio es 3cm
3. ¿Cuál será el área de un disco cuyo radio vale 3 cm?
4. Calcula el perímetro de un disco de 2 cm de radio.

Podríamos realizar varias agrupaciones diferentes:

Esta es una de esas posibilidades →  
(Fíjate que usamos el número de cada problema para identificarlo dentro del conjunto)

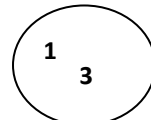


*Problemas de Monedas*

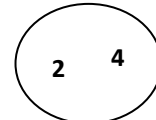


*Problemas de Discos*

Otra posibilidad es : →

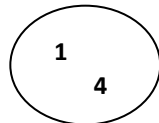


*Problemas con:  $A = \pi r^2$*

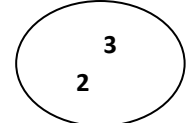


*Problemas con:  $L = 2\pi r$*

Aún hay más formas de agruparlos: →



*Problemas con dato= 2 cm*



*Problemas con dato= 3 cm*

**¿Tú cómo lo harías?**

**Tabla 1.** Ejemplo para practicar la tarea de agrupación de problemas según su modo de resolución.

Se controló el conocimiento mínimo necesario para acometer la tarea propuesta en ambos estudios mediante una prueba consistente en 5 problemas sencillos, cuya solución exigía plantear un sistema de ecuaciones lineales. La Tabla 2 muestra uno de ellos.

**Extracto de la Prueba de Conocimientos necesarios para abordar la tarea**

5 camisetas y 3 suéteres cuestan 65 euros en total. El precio total de una camiseta y un suéter son 17 euros. ¿Cuánto cuesta un suéter? Las ecuaciones que solucionan correctamente este problema son:

a)  $5x + 3y = 65$   
 $x + y = 17$

b)  $x + y = 17$   
 $5x + 65 = 3y$

c)  $x + y = 65$   
 $5x - 3y = 17$

**Tabla 2.** Uno de los ejercicios de la prueba de conocimientos necesarios.

Se excluyeron de los análisis los cinco participantes de Secundaria que resolvieron menos de 3 problemas en esta prueba.

#### 4.2.4. Análisis: posibles analogías entre problemas

La Tabla 3 muestra los resultados previstos para las agrupaciones en la condición de baja familiaridad si los alumnos utilizan criterios basados en las características constitutivas consideradas de los problemas. Cada criterio conduce a un resultado distinto, por lo que se puede asociar unívocamente un criterio a una agrupación determinada.

<b>criterios simples Estructurales</b>	<b>criterios compuestos Estructurales</b>	
<b>A. Según la Estructura</b>	<b>B. Según Estructura X Rol de la Incógnita</b>	
Estructura-Alcanzar $\rightarrow \{2, 4, 5, 7\}$	Alcanzar x Rol-x $\rightarrow \{1, 8\}$	Encontrar x Rol-x $\rightarrow \{4, 5\}$
Estructura-Encontrar $\rightarrow \{1, 3, 6, 8\}$	Alcanzar x Rol-y $\rightarrow \{3, 6\}$	Encontrar x Rol-y $\rightarrow \{2, 7\}$
<b>criterios simples Superficiales</b>	<b>criterios compuestos Superficiales</b>	
<b>C. Según la Temática</b>	<b>E. Según Temática X Nombre de la Incógnita</b>	
Contexto Mecánico $\rightarrow \{2, 3, 5, 8\}$	Térmico x Calorías $\rightarrow \{1, 4\}$	Termod. x Litros $\rightarrow \{6, 7\}$
Contexto Termodinámico $\rightarrow \{1, 4, 6, 7\}$	Mecánico x Litros $\rightarrow \{2, 3\}$	Mecánico x Gramos $\rightarrow \{5, 8\}$
<b>D. Según el Nombre de la Incógnita</b>		
Volumen (litros) $\rightarrow \{2, 3, 6, 7\}$		
Masa (gramos) $\rightarrow \{5, 8\}$		
Calor (calorías) $\rightarrow \{1, 4\}$		
<b>Otros criterios simples</b>	<b>Otros criterios compuestos</b>	
<b>F. Según el Rol de la Incógnita</b>	<b>G. Según Estructura X Temática</b>	
Rol de Incógnita es "x" $\rightarrow \{1, 4, 5, 8\}$	Alcanzar x Termod. $\rightarrow \{4, 7\}$	Alcanzar x Termod. $\rightarrow \{4, 7\}$
Rol de Incógnita es "y" $\rightarrow \{2, 3, 6, 7\}$	Alcanzar x Mecánico $\rightarrow \{2, 5\}$	Alcanzar x Mecánico $\rightarrow \{2, 5\}$
	<b>H. Otros criterios inidentificables</b>	
	Respuestas incompletas, incoherentes o inidentificables	

**Tabla 3:** Relación entre agrupaciones y criterios vinculados con los distintos factores característicos de los problemas. Ejemplo para Familiaridad Baja. El número de cada problema corresponde al que tiene asignado en el listado del Anexo.

Para validar los materiales, la codificación y el procedimiento, se utilizó un grupo de 7 profesores universitarios, todos ellos expertos matemáticos. Primero, 2 de ellos analizaron los materiales y propusieron algunas modificaciones que afectaron variables sintácticas de los problemas y la forma de la pregunta en algunos de ellos. Una vez atendidas esas sugerencias, otros 5 expertos realizaron la tarea de agrupación. Todos ellos utilizaron como único criterio el de la estructura algebraica de los problemas (criterio A en la Tabla 3).

#### 4.2.5 Procedimiento

Para acceder éticamente a los participantes de Secundaria, se obtuvo el permiso de profesores, tutores y padres. La actividad se presentó como una investigación dedicada a mejorar la instrucción en resolución de problemas. En el estudio 1 se usaron 2 sesiones. En la primera se realizó el test de conocimientos mínimos (15 min). A continuación se repartieron los cuadernillos, se leyeron las instrucciones en voz alta, se explicó la tarea de agrupación, y se realizó y discutió el ejemplo de práctica (10 min) junto con los estudiantes. Luego los alumnos realizaron sin ayuda la tarea de agrupación y la entregaron en la hoja correspondiente (25 min).

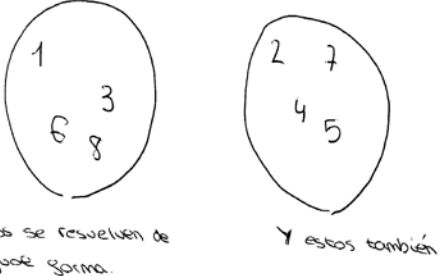
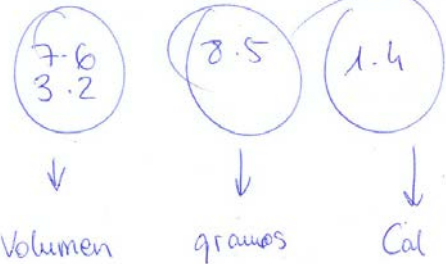
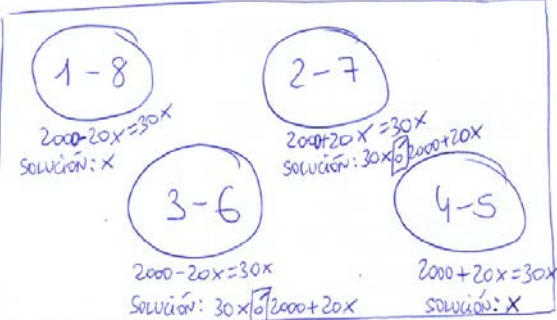
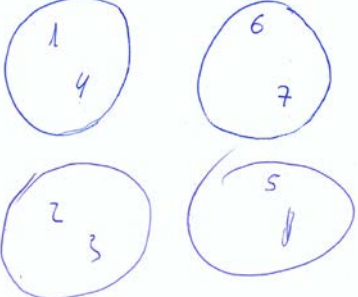
Una segunda sesión se dedicó a entrevistar un conjunto de estudiantes de Secundaria. Estas entrevistas se realizaron 4-5 días después de la tarea de agrupación, de modo individual, y en un espacio del centro educativo con privacidad. Las entrevistas fueron grabadas con permiso para su posterior transcripción y análisis. Se siguió un procedimiento semi-estructurado consistente en: a) Recordatorio de la agrupación de problemas ya realizada y objetivos de la misma; b) Entrega de la agrupación realizada por el sujeto entrevistado; c) Demanda de revisión, confirmación o rectificación, explicación y clarificación de la respuesta final, con especial énfasis en el criterio empleado para construir grupos de problemas que “se resuelven con las mismas ecuaciones”. No se limitó el tiempo de la entrevista y se procuró la total explicitación de las analogías entre problemas percibidas por cada alumno. En ningún caso se proporcionó la respuesta correcta ni se emitió juicio alguno sobre la ejecución del alumno.

En el estudio 2 fueron necesarias también 2 sesiones, una para agrupar problemas de Baja Familiaridad y otra para agrupar los de Alta Familiaridad. Se siguió idéntico procedimiento que en el estudio 1, aunque en la segunda sesión no se requirió la prueba de conocimientos mínimos ni la realización del ejemplo de práctica, por lo que su duración fue menor en promedio. El orden en que se repartieron los cuadernillos de Familiaridad Baja/Alta se contrabalanceó entre los participantes.

## 4.3. Resultados y Discusión

### 4.3.1 Estudio 1: Percepción de analogías entre problemas de ciencias por estudiantes de Secundaria

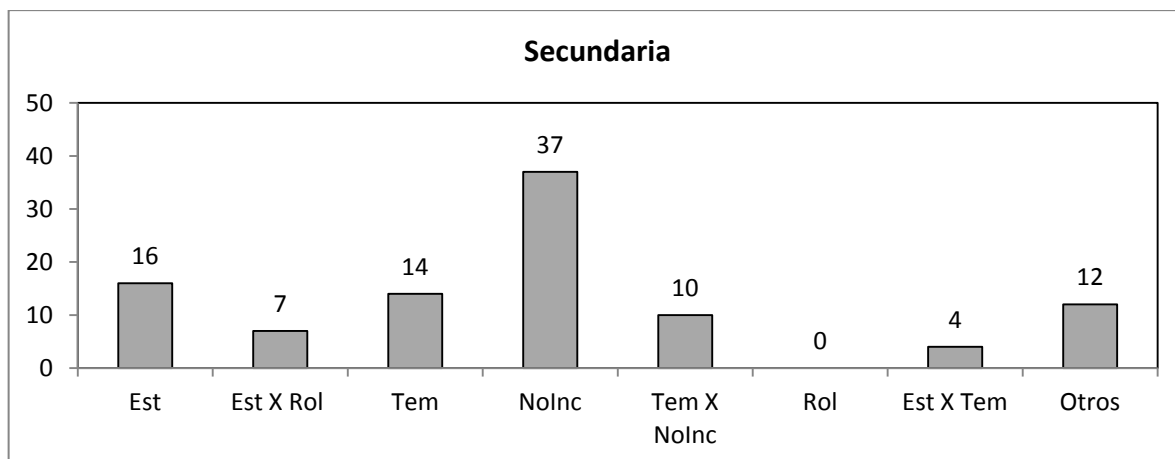
Primero se analizaron las posibles diferencias entre los estudiantes de 3° y 4° de ESO en la tarea. Distintas pruebas  $\chi^2$  mostraron que no hubo ninguna asociación significativa entre curso y criterio de agrupación ( $p > .40$  en todos los casos). Por ello, se colapsaron ambos cursos en todos los análisis posteriores. La Tabla 4 muestra ejemplos de producciones de estos estudiantes.

<p>HAZ AQUÍ TU DIBUJO CON LOS GRUPOS DE PROBLEMAS</p>  <p>Estos se resuelven de igual forma.</p> <p>Y estos también</p>	<p>HAZ AQUÍ TU DIBUJO CON LOS GRUPOS DE PROBLEMAS</p>  <p>Volumen</p> <p>gramos</p> <p>Cal</p>
<p>HAZ AQUÍ TU DIBUJO CON LOS GRUPOS DE PROBLEMAS</p> <p>Misma ecuación y misma pregunta:</p>  <p>2000-20x=30x SOLUCIÓN: X</p> <p>2000+20x=30x SOLUCIÓN: <math>30x/1000+20x</math></p> <p>2000-20x=30x SOLUCIÓN: <math>30x/1000+2000+20x</math></p> <p>2000+20x=30x SOLUCIÓN: X</p>	<p>HAZ AQUÍ TU DIBUJO CON LOS GRUPOS DE PROBLEMAS</p> 

**Tabla 4.** Ejemplos de agrupaciones elaboradas por los participantes.

La Figura 1 muestra el porcentaje de estudiantes de Secundaria que usaron los criterios de la Tabla 3 en la tarea de agrupación.





**Figura 1.** Porcentaje de estudiantes de secundaria participantes que utilizaron diferentes criterios para agrupar problemas. ‘Est’ alude a “estructura”, ‘Rol’ al rol, “x” o “y” de la incógnita en las ecuaciones, ‘Tem’ abrevia la palabra “temática”, y ‘NoInc’ significa “nombre de la incógnita”.

El diseño de la colección de problemas permitió, en un porcentaje elevado de casos, asociar unívocamente el uso de los criterios predichos (Tabla 3), con las producciones de los estudiantes. El criterio basado sólo en el rol de la incógnita del problema no fue utilizado por ningún estudiante de Secundaria. Sin embargo, el criterio basado solamente en el nombre de la incógnita, claramente superficial, fue usado por el 37% de estos participantes. El criterio basado en la temática científica de los problemas, también superficial, fue usado por un grupo significativo de estudiantes, el 14%. En resumen, un porcentaje del 61% de estos estudiantes de secundaria guió sus agrupaciones por criterios basados únicamente en características superficiales de los problemas (criterios C, D y E de la Tabla 3). Tan sólo el 27% usaron criterios que implicaron la estructura de los problemas (criterios A, B y G en Tabla 4), entre los cuales el 16% utilizó el criterio A, basado sólo en la Estructura, tal como hicieron los expertos. Un 12% de estudiantes usaron criterios indescifrables, incoherentes, mal definidos, incompletos y difícilmente asimilables a los factores característicos de los problemas. Fueron asignados a la categoría “Otros criterios inidentificables” (H en la Tabla 3).

Para aumentar la fiabilidad de nuestra interpretación sobre los criterios utilizados por los estudiantes, se realizaron entrevistas semi-estructuradas a un subconjunto de 40 estudiantes representativos de distintos modos de agrupación. La Tabla 5 muestra fragmentos de entrevistas realizadas a dos de ellos como ejemplo. Algunos estudiantes propusieron varias alternativas en sus agrupaciones. Entonces la

entrevista sirvió para explicar de nuevo la tarea y pedirles que escogieran aquella que les parecía la apropiada. En todos los casos se alentó a los estudiantes a re-pensar su agrupación y se esperó a que ‘estabilizaran’ su criterio. La Figura 1 anterior recoge los resultados obtenidos después de las entrevistas.

---

**Segmentos de información de entrevistas**

---

**Caso #3.**

I: Hola, Buenos días. [*El entrevistador entrega la agrupación*]. ¿Podrías intentar recordar tu respuesta?

S: Si... [*El estudiante repasa el cuadernillo*]

I: Voy a intentar ayudarte a recordar. La tarea os pedía que agruparais los problemas en función de si se resolvían del mismo modo, es decir, con idénticas ecuaciones. ¿Puedes volver a pensar en ello y explicármelo para que yo comprenda bien?

S: Si no he entendido mal, ¿te he de decir qué problemas se resuelven con las mismas ecuaciones?

I: ¡Exactamente!

S: Bien! ... [*El sujeto relee de nuevo sus respuestas...*] Ya lo tengo claro: los problemas que preguntan por “gramos” tendrán las mismas ecuaciones y así igual con las “calorías” y el “volumen”. (...)

---

**Caso #6.**

I: Hola, ¿qué tal? [*El entrevistador entrega la agrupación y solicita aclaración*]. No he entendido bien tu respuesta. Primero indicas que hay unos problemas de  $\text{cm}^3/\text{g}$  y otros problemas de  $\text{cm}^3/\text{cal}$  [*criterio basado en la temática*]. Luego expresas que hay unos problemas donde dos globos aumentan de volumen y otros problemas donde un globo aumenta y el otro disminuye [*que tiene que ver con la estructura*]. Finalmente realizas la agrupación en función de si la pregunta se refería a los “gramos”, a las “calorías” o al “volumen” [*nombre de la incógnita*]. ¿Recuerdas?

S: Si, lo recuerdo bien

I: Veo que has reconocido varias características que diferencian los problemas, pero lo que yo necesito saber es cuál crees que hace que los problemas de un mismo grupo se resuelvan igual, con las mismas ecuaciones.

S: Entonces, ¿he de elegir sólo un criterio?

I: ¡Sí, exacto! Te dejo un tiempo para que vuelvas a pensar en la tarea y recuerda que lo que pretendo es que los agrupes en función de si se resuelven exactamente con las mismas ecuaciones.

S:[*El estudiante repasa sus respuestas*] Yo creo que lo importante para que sean las mismas ecuaciones es que los dos globos aumenten o que uno aumente y el otro disminuya...[*se decide finalmente por el criterio estructural*]

---

**Tabla 5.** Ejemplos de entrevistas realizadas tras la tarea de agrupación para clarificar su codificación y las analogías encontradas entre problemas.

El porcentaje elevado de estudiantes que fueron incapaces de establecer analogías estructurales entre problemas de ciencias, permite aventurar dificultades cuando tengan que resolver nuevos problemas por transferencia. Aunque la ejecución de la resolución puede modificar el plan inicial, la activación de análogos inapropiados (que comparten características superficiales, pero no estructurales con el problema propuesto) supone un obstáculo a salvar para el éxito en la resolución.

Los resultados obtenidos en el estudio 1 no son tan buenos como los profesores desearían, e invitan a formular conjeturas o hipótesis para explicarlos. Una primera conjetura es, naturalmente, que los rasgos superficiales, explícitos y de naturaleza ontológica concreta, son mucho más fáciles de reconocer que los abstractos, implícitos, como ya señalaron Reeves y Weisberg (1994). En otros estudios se encontró apoyo empírico a esta afirmación (Gómez, Solaz-Portolés y Sanjosé, 2013). Un conocimiento previo elevado y una cierta experiencia resolviendo problemas podrían ser necesarios para salvar el ‘efecto de apantallamiento’ que los rasgos superficiales de los problemas producen sobre los estructurales (Chi et al. op cit).

Otra posibilidad para explicar los resultados se asociaría con la dificultad en construir una representación mental adecuada de la situación descrita en el enunciado cuando los contextos son poco familiares para el resolutor, como es el caso de muchos problemas de ciencias. Comprender el enunciado de un problema implica la construcción de representaciones mentales con distinto grado de abstracción (Kintsch, 1998; Greeno, 1989). Disponer de poco conocimiento previo sobre la situación descrita en el enunciado puede dificultar la representación ‘concreta’ (no abstracta) de la situación y, con ello, obstaculizar la representación matemática del problema.

Finalmente, no se puede excluir la posibilidad de que la instrucción recibida por los estudiantes no atienda suficientemente a las analogías y diferencias, superficiales y estructurales, entre problemas. Los materiales instruccionales en ciencias suelen estar secuenciados según las temáticas, mientras que en matemáticas suelen estar secuenciados por las estructuras subyacentes. Además, las historias de los problemas de matemáticas suelen pertenecer a la vida diaria, y son de gran familiaridad para los estudiantes. En todo caso, muchos profesores suponen que las analogías estructurales entre problemas son fácilmente percibidas por sus estudiantes, cuando no es así (Oliva, 2004), pero esto puede significar que no trabajen suficientemente con sus alumnos las tres fases que preceden a la ejecución de una resolución: codificación del problema, activación de análogos-fuente, y *mapping*.

El estudio 2 que sigue intentó realizar una primera contrastación de estas hipótesis, para explorar su verosimilitud.

### **4.3.2 Estudio 2: efectos de la Familiaridad y del Nivel educativo sobre las dificultades para construir analogías entre problemas.**

Como se dijo antes, en el estudio 2 participaron alumnos de Secundaria (ninguno de ellos participó en el estudio 1), y también graduados universitarios en formación docente inicial, especialidad de Matemáticas (alumnos de Máster). Se utilizaron dos colecciones de problemas, una con contextos temáticos de Baja Familiaridad (los mismos del estudio 1) y otra con contextos de Alta Familiaridad para los estudiantes (ver Anexo). La tarea y los análisis (las descripciones estadísticas y las entrevistas) fueron idénticos a los del estudio 1. Un subconjunto de 15 estudiantes de ambos niveles educativos fue entrevistado sobre cada una de las agrupaciones realizadas en ambos niveles de Familiaridad. La Tabla 6 muestra fragmentos de entrevistas realizadas a dos estudiantes del Máster sobre la tarea en Baja Familiaridad.

---

#### **Segmentos de información de entrevistas**

---

##### **Caso #4.**

I: Hola, Buenos días. *[El entrevistador entrega la agrupación]*. ¿Recuerdas como clasificaste los problemas?

S: ... *[El estudiante repasa su agrupación]*

I: Recuerda que la tarea pedía agrupar los problemas en función de si estos se resuelven con idénticas ecuaciones o no...

S: Yo me fijé en cómo se resolvía el problema, en que el problema se resolviera igual independientemente de si el problema me preguntaba por volúmenes o por gramos...

Lo hice así: *[El sujeto utiliza el criterio de agrupación basado en la Estructura X el Rol de la incógnita; B en la Tabla 4]*.

I: Muy bien, muchas gracias.

---

##### **Caso #11.**

I: Hola, ¿qué tal? *[El entrevistador entrega la agrupación]*. Me gustaría que recordaras la tarea que hiciste.

S: Claro, aunque creo recordarla bastante bien...*[El estudiante repasa su agrupación]*... Si, ya lo recuerdo... Agrupé los problemas según preguntaban por volumen, por calorías o por la cantidad de gramos.....

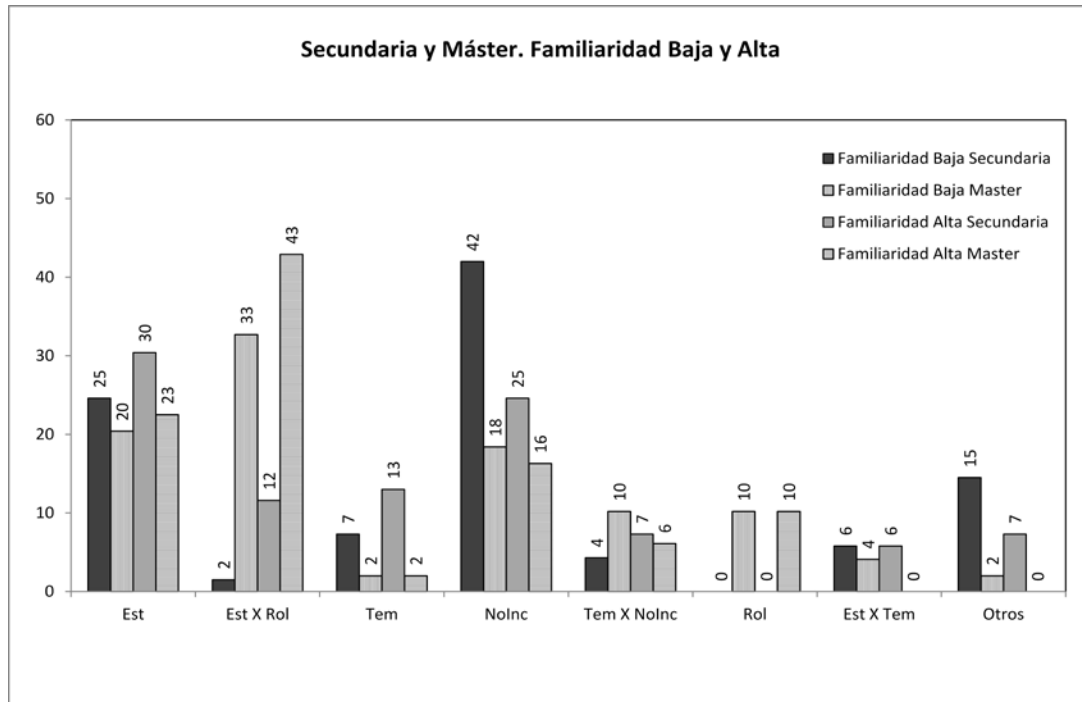
I: Y, ahora que puedes volver a pensarlo, ¿sigues pensando lo mismo?

S: *[El estudiante repasa la tarea]*... quizá con el volumen se pueda calcular la cantidad de calorías pero yo en aquel momento no recordaba cómo se calculaba un volumen... *[El estudiante piensa]*... Al final aquí lo que es importante es que pregunta por el volumen *[El estudiante insiste en el criterio Superficial basado en el nombre de la Incógnita]*

---

**Tabla 6.** Ejemplos de entrevistas realizadas a los estudiantes del Máster tras la tarea de agrupación para clarificar las analogías que establecieron entre los problemas de Baja Familiaridad.

La Figura 2 muestra, y permite comparar, los porcentajes de estudiantes de Secundaria y de Máster cuyas agrupaciones en Baja y Alta Familiaridad, pueden asociarse con cada uno de los criterios expuestos en la Tabla 3.



**Figura 2:** Porcentaje de participantes que utilizaron cada uno de los criterios para agrupar problemas. ‘Est’ alude a “estructura”, ‘Rol’ al rol, x o y de la incógnita, ‘Tem’ abrevia la palabra “temática” y ‘NoInc’ significa “nombre de la incógnita”.

Los porcentajes de alumnos de Máster que usaron el “criterio experto” (criterio A en Tabla 3) no son muy diferentes de los de Secundaria, tanto en Baja como en Alta Familiaridad, e incluso son menores. Sin embargo, más estudiantes del Máster usaron el criterio Rol X Est, (criterio B en Tabla 3), que no es el elegido por los expertos, pero que puede considerarse correcto. En efecto, este criterio puede suponer una aplicación más estricta del significado “se resuelven igual” al incluir no sólo las ecuaciones, sino también el modo en que éstas se resuelven para obtener el valor de la incógnita (despejando la variable “x” o la “y”). Si se colapsan estos dos criterios considerados correctos de acuerdo con la tarea propuesta, encontramos el resultado mostrado en la Tabla 7:

<b>% alumnos</b>	<b>Secundaria</b>	<b>Máster</b>
<b>Baja Fam</b>	26,1	53,1
<b>Alta Fam</b>	42,0	65,4

**Tabla 7:** Porcentaje de alumnos en cada nivel educativo que utilizaron un criterio estructural correcto para agrupar problemas de baja y alta Familiaridad

Como muestra la Tabla 7, en Familiaridad Alta los porcentajes de estudiantes que son capaces de establecer analogías estructurales correctas entre problemas son significativamente mayores que en Familiaridad Baja (McNemar<sup>4</sup>:  $X^2 = 6,919$ ;  $p = ,009$ ). También el nivel académico es importante y se asocia significativamente con un criterio correcto, tanto en Familiaridad Baja ( $X^2(1) = 7,799$  con corrección de Yates;  $p = ,005$ ), como en Alta ( $X^2(1) = 5,320$  con corrección de Yates;  $p = ,021$ ).

También analizamos el uso de criterios de clasificación basados solamente en rasgos superficiales, como la temática, o el nombre de la magnitud incógnita, o su combinación (criterios C, D y E en Tabla 3). La Tabla 8 recoge los porcentajes de alumnos de cada nivel que usaron este tipo de criterios en ambas Familiaridades.

<b>% alumnos</b>	<b>Secundaria</b>	<b>Máster</b>
<b>Baja Fam</b>	53,6	30,6
<b>Alta Fam</b>	44,9	24,4

**Tabla 8.** *Porcentaje de alumnos en cada nivel educativo que utilizaron un criterio superficial incorrecto para agrupar problemas de baja y alta Familiaridad*

Hubo significativamente más estudiantes que utilizaron un criterio basado en rasgos superficiales en Familiaridad Baja, que en Alta (McNemar:  $X^2 = 6,323$ ;  $p = ,012$ ). El nivel educativo también tuvo influencia, ya que un porcentaje significativamente menor de alumnos de Máster que de Secundaria, usaron criterios superficiales en ambos niveles de Familiaridad, Baja ( $X^2(1) = 13,090$  con corrección de Yates;  $p < ,001$ ), o Alta ( $X^2(1) = 7,989$  con corrección de Yates;  $p = ,005$ ).

Los resultados del estudio 2 permiten substanciar algunas de las hipótesis formuladas tras el estudio 1. El mejor desempeño en la tarea de los estudiantes de mayor conocimiento previo, en ambos niveles de Familiaridad (problemas con temáticas de la vida diaria o científicas), indica que establecer analogías estructurales entre problemas, más allá de los rasgos superficiales explícitos en sus enunciados, resulta una tarea de especial dificultad para los estudiantes menos expertos. De nuevo se encuentra empíricamente que el grado de experiencia es importante para poder salvar el “apantallamiento” que los rasgos superficiales producen sobre los rasgos estructurales en resolución de problemas (Reeves y Weisberg, 1994). Sin embargo, los porcentajes de estudiantes de Máster (entre 35% y 45%) que no fueron capaces

<sup>4</sup> A partir de una tabla 2x2 (Fam Alta/Baja) X (Analogía correcta/ incorrecta), esta prueba contrasta la hipótesis nula de ‘no diferencias’ entre ambos niveles de familiaridad, que es un factor intra-sujeto. Los niveles educativos fueron colapsados para este cálculo.

de establecer analogías estructurales, o que utilizaron criterios superficiales en este estudio 2 (entre 25% y 30%) son inquietantes, especialmente al tratarse de futuros profesores de matemáticas en Secundaria. Estrictamente hablando, sólo entre el 20% y el 23% utilizaron un “criterio experto”, basado sólo en la estructura algebraica de los problemas para codificarlos y clasificarlos. Estos bajos porcentajes suscitan la duda de si estos futuros profesores serán capaces de instruir a sus estudiantes de una forma eficaz en resolución de problemas verbales.

Se encontraron diferencias significativas debidas al nivel de Familiaridad en ambos niveles académicos. Esto apoya la hipótesis de que cuando los resolutores tienen más dificultad en construir una representación mental concreta, como en el caso de los problemas de ciencias comparado con los problemas de la vida diaria, se obstaculiza alcanzar la representación matemática. En la Figura 2, las diferencias entre Alta y Baja Familiaridad en el uso de criterios correctos, fueron especialmente visibles entre los estudiantes de Secundaria. Eso sugiere que el ‘apantallamiento de los rasgos abstractos por parte de los concretos’ les afecta más que a los alumnos mayor conocimiento y experiencia. Sin embargo, vuelve a ser preocupante que los alumnos de Máster, supuestos expertos y futuros profesores, sean tan sensibles a la Familiaridad, que en este estudio tuvo carácter superficial.

## 4.4 Conclusiones

Aunque las muestras de conveniencia utilizadas en los dos estudios expuestos no permiten generalizar o concluir de modo general, podemos subrayar algunos aspectos que merecen especial atención desde la didáctica de las matemáticas. En primer lugar, el establecimiento de analogías durante el aprendizaje parece más complejo y dificultoso de lo que los profesores esperan, como otros investigadores han señalado (Oliva, 2004). Por ello, las fases previas a la resolución de un problema por transferencia analógica deberían recibir más atención durante la instrucción. Estas fases implican: a) el reconocimiento de características constitutivas del problema propuesto; b) su clasificación dentro de una clase de problemas, y c) la

activación, bien de un esquema resolutivo de cierta generalidad, previamente elaborado (relacionado con el ‘transfer vertical’ de Rebello, Cui, Bennet, Zollman, y Ozimek, 2007), o bien de un análogo previamente aprendido y almacenado en la memoria del resolutor (relacionado con un ‘transfer horizontal’; Rebello et al. opus cit.). Que un alumno atiende a rasgos superficiales o estructurales para activar un análogo (o un esquema abstracto), es un aspecto muy importante para el éxito o fracaso en la resolución de problemas. Los resultados encontrados en los estudios 1 y 2 aconsejan a los profesores abordar explícitamente las analogías y diferencias entre problemas atendiendo no sólo a sus estructuras matemáticas, sino también a sus temáticas y las magnitudes implicadas, para diferenciarlas claramente de las relaciones entre cantidades, que es el foco importante de atención. Atravesar las barreras entre temas en las clases de ciencias, o incluir contextos científicos en las clases de matemáticas, parece conveniente para ayudar a los estudiantes menos expertos a ir más allá de los rasgos superficiales y crear vínculos más profundos entre problemas.

Finalmente, las propuestas recientes en formación inicial de los futuros profesores de matemáticas, que ayudan a promover el conocimiento necesario para una mejor enseñanza en resolución de problemas (Rivas, Godino y Castro, 2012), deberían considerarse con urgencia. El rendimiento de nuestros participantes en particular, aunque fue mejor que el de los estudiantes de Secundaria, no es el esperado en quienes podrían estar instruyendo a otros estudiantes inexpertos, en poco tiempo.

**Agradecimientos:** Los autores agradecen al profesor Bernardo Gómez sus comentarios y sugerencias que han ayudado a mejorar este trabajo.



## Referencias Bibliográficas

---

- Bell, A.; Swan, M.; Taylor, G. (1981). Choice of operation in verbal problems with decimal numbers. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 399-420.
- Bernardo, A.B.I. (2001). Analogical problem construction and transfer in mathematical problem solving. *Educational Psychology*, 21(2), 137-150.
- Birgin, O. (2012). Investigation of Eighth-Grade Students' Understanding of the Slope of the Linear Function. *Bolema*, 26 (42), 139-162.
- Carpenter, T.; Hiebert, J.; Moser, J. (1981). Problem structure and first grade children's initial solution processes for simple addition and subtraction problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 12, 1, 27-39.
- Castro, E.; Rico, L.; Batanero, C.; Castro, E. (1991). *Dificultad en problemas de comparación multiplicativa*, en F. Furinghetti (ed.) Proceedings Fifteenth PME Conference. Vol. 1, pp. 192-198. Assisi. Italy.
- Cerdán, F. (2008). Estudios sobre la familia de problemas aritmético-algebraicos. Tesis Doctoral. Valencia: Servicio de Publicaciones de la Universitat de València.
- Chen, Z.; Klahr, D. (2008). Bridging the gap: Remote transfer of problem-solving and scientific reasoning strategies in children. In R. Kail (Ed.), *Advances in child development and behavior*. Vol. 36, pp. 419-470, Burlington, MA: Academic Press.
- Chi, M.T.H.; Feltovich, P.J.; Glaser, R. (1981). Categorization and representation of physics problems by experts and novices. *Cognitive Science*, 5, 121-152.
- Chi, M.T.H.; Glaser, R.; Rees, E. (1982). Expertise in problem solving. In R. J. Sterbergn (Ed.), *Advances in the psychology of human intelligence*, (Vol.1.). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

- Gentner, D. (1983). Structure-mapping. A theoretical framework for analogy. *Cognitive Science*, 7, pp. 155-170.
- Gick, M.L.; Holyoak, K.J. (1980). Analogical problem-solving. *Cognitive Psychology*, 15, pp. 306-355, 1980.
- Gick, M. L.; Holyoak, K. J. (1983). Schema induction and analogical transfer. *Cognitive Psychology*, 15, 1–38.
- Goldstone, R. L.; Sakamoto, Y. (2003). The Transfer of Abstract Principles Governing Complex Adaptive Systems. *Cognitive Psychology*, 46, pp. 414-466.
- Gómez Ferragud, C.B.; Solaz, J.J.; Sanjosé, V. (2012). Una revisión de los procesos de transferencia para el aprendizaje y enseñanza de las ciencias. *Didáctica de las ciencias experimentales y sociales*, 26, 199-227.
- Gómez, C.B.; Solaz, J.J.; Sanjosé, V. (2013). Analogy Construction and Success in Mathematics and Science Problem-Solving: a Study with Secondary Students. *Revista de Psicodidáctica*, 18(1), 81-108.
- Greeno, J.G. (1989). *Situations, Mental Models, and Generative Knowledge*, in D. Klahr y K. kotovsky (eds.), *Complex Information Processing: The Impact of Herbert Simon*, Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, NJ, 1989, pp. 285-318.
- Hiebert, H. (1982). The position of the unknown set and children's solutions of verbal problems, *Journal for Research in Mathematics Education*, 13(5), 341-349.
- Holyoak, K.J. (1984). Analogical thinking and human intelligence. In R.J. Sternberg (ed.). *Advances in the psychology of human intelligence*. Vol. 2. Hillsdale, NJ: Erlbaum, pp. 199-230.
- Hummel, J. E.; Holyoak, K. J. (1997). Distributed representations of structure: A theory of analogical access and mapping. *Psychological Review*, 104, 427-466.
- Jonassen, D.H. (2003). Using cognitive tools to represent problems. *Journal of Research on Technology in Education*, 35(3), pp. 362-381.

- Kintsch, W.; Greeno, J. (1985). Understanding and solving word arithmetic problems. *Psychological Review*, 92(1), 109-129.
- Kintsch, W. (1998). *Comprehension: a paradigm for cognition*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Loewenstein, J.; Thompson, L.; Gentner, D. (1999). Analogical encoding facilitates knowledge transfer in negotiation. *Psychonomic Bulletin and Review*, 6, 586-597.
- Nathan, M.; Kintsch, W.; Young, E. (1992). A Theory of Algebra-Word- Problem Comprehension and Its Implications for the Design of Learning Environments. *Cognition and Instruction*, 9(4), 329-389.
- Newell, A.; Simon, H.A. (1972). *Human Problem Solving*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- Novick, L. (1988). Analogical transfer, problem similarity, and expertise. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition*, 14, 510-520, 1988.  
Disponibile en:  
<http://psycnet.apa.org/index.cfm?fa=search.displayRecord&uid=1988-31644-001>
- Oliva, J. M. (2004). El pensamiento analógico desde la investigación educativa y desde la perspectiva del profesor de ciencias. *Revista electrónica de Enseñanza de las Ciencias*, 3 (3), Artículo 7.
- Polya, M. (1957). *How to solve it*. (2nd Ed.). New York: Doubleday.
- Puig, L.; Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis, (edición conmemorativa 20º aniversario).
- Puig, L. Poner un problema en ecuaciones. (1998). Consultado el 11 de junio de 2013 en <<http://www.uv.es/puigl/ppe.pdf>>.
- Queiroz, S.; Lins, M. A. (2011). Aprendizagem de matemática por alunos adolescentes na modalidade educação de jovens e adultos: analisando as dificuldades na resolução de problemas de estrutura aditiva. *Bolema*, 24 (38), 75-96.

- Rebello, N. S.; CUI, L.; Bennet, A. G.; Zollman, D. A.; Ozimek, D. J. (2007). *Transfer of learning in problem solving in the context of mathematics and physics*. En D. Jonassen (Ed.), *Learning to solve complex scientific problems*. Hillsdale, N. J.: Lawrence Earlbaum,.
- Reed, S. K., Dempster, A.; Ettinger, M. (1985). Usefulness of analogous solutions for solving algebra word problems. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, & Cognition*, 11, 106-125.
- Reeves, L. M.; Weisberg, R. W. (1994). The role of content and abstract information in analogical transfer. *Psychological Bulletin*, 115, 381-400.
- Rivas, M. A.; Godino, J.D.; Castro, W. F. (2012). Desarrollo del Conocimiento para la Enseñanza de la Proporcionalidad en Futuros Profesores de Primaria. **Bolema**, Rio Claro (SP), 26 (42B),559-588.
- Salomon, G.; Perkins, D. N. (1987). Transfer of cognitive skills from programming: When and how? *Journal of Educational Computing Research*, 3(2), 149-169.
- Sanjosé, V.; Solaz-Portolés, J.J.; Valenzuela, T. (2009). Transferencia inter-dominios en resolución de problemas: una propuesta instruccional basada en el proceso de “traducción algebraica”. *Enseñanza de las Ciencias*, 27(2), 169-184.
- Thorndike, E.L.; Woodworth, R.S. (1901). The influence of improvement in one mental function upon the efficiency of other functions. *Psychological Review*, 84, 127-90.
- Valentin, J.D.; L. Chap-Sam. (2005). Roles of semantic structure of arithmetic word problems on pupils’ ability to identify the correct operation. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning (electronic journal)*. In: <http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/>; (Valentin.pdf). Consultado el 13/06/2013.
- Vanlehn, K. (1998). Analogy Events: How Examples are Used During Problem Solving. *Cognitive Science*, 22(3), 347-388.

Vergnaud, G. A. (1982). Classification of Cognitive Tasks and Operations of thought Involved in Addition and Subtractions Problems. In: Carpenter, T., Moser, J.; Romberg, T. Addition and Subtraction: a cognitive perspective. New Jersey: Ed. Lawrence Erlbaun Hillsdale, USA, pp. 39 – 59.

## 8. ANEXO: Problemas de Baja y Alta Familiaridad utilizados

### Baja Familiaridad

- 1. Enunciado:** Consideremos dos globos de diferente tamaño y fabricados con distinto material A y B. Inicialmente el globo A tiene un volumen de  $2000 \text{ cm}^3$  y el globo B está vacío. Entonces se conectan a la vez dos bombas térmicas idénticas, una que transfiere calor de A a un acumulador y otra que transfiere calor del acumulador a B. El globo A va disminuyendo su volumen a razón de  $20 \text{ cm}^3/\text{cal}$  y el globo B va aumentando su volumen a razón de  $30 \text{ cm}^3/\text{cal}$ .  
**Pregunta:** ¿Cuántas calorías se habrán transferido de A a B, cuando sus volúmenes sean iguales?
- 2. Enunciado:** Consideremos dos globos de diferente tamaño y fabricados con distinto material A y B. Inicialmente el globo A tiene un volumen de  $2000 \text{ cm}^3$  y el globo B está vacío. Entonces se conectan a la vez dos bombas neumáticas idénticas, que extraen gas de un depósito y se lo introducen a cada globo. El globo A va aumentando su volumen a razón de  $20 \text{ cm}^3/\text{g}$  de gas y el globo B va aumentando su volumen a razón de  $30 \text{ cm}^3/\text{g}$  de gas.  
**Pregunta:** ¿Qué volumen habrá en A y en B cuando sus volúmenes sean iguales?
- 3. Enunciado:** Consideremos dos globos de diferente tamaño y fabricados con distinto material A y B. Inicialmente el globo A tiene un volumen de  $2000 \text{ cm}^3$  y el globo B está vacío. Entonces se conectan a la vez dos bombas neumáticas idénticas, una que extrae gas de A y lo introduce en un depósito y otra que extrae gas del depósito y lo introduce en B. El globo A va disminuyendo su volumen a razón de  $20 \text{ cm}^3/\text{g}$  de gas, y el globo B va aumentando su volumen a razón de  $30 \text{ cm}^3/\text{g}$  de gas.  
**Pregunta:** ¿Qué volumen habrá en A y en B cuando sus volúmenes sean iguales?
- 4. Enunciado:** Consideremos dos globos de diferente tamaño y fabricados con distinto material A y B. Inicialmente el globo A tiene un volumen de  $2000 \text{ cm}^3$  y el globo B está vacío. Entonces se conectan a la vez dos bombas térmicas idénticas, que transfieren calor de un acumulador a cada globo. El globo A va aumentando su volumen a razón de  $20 \text{ cm}^3/\text{cal}$  y el globo B va aumentando su volumen a razón de  $30 \text{ cm}^3/\text{cal}$ .  
**Pregunta:** ¿Cuántas calorías se habrán transferido a A y a B cuando sus volúmenes sean iguales?
- 5. Enunciado:** Consideremos dos globos de diferente tamaño y fabricados con distinto material A y B. Inicialmente el globo A tiene un volumen de  $2000 \text{ cm}^3$  y el globo B está vacío. Entonces se conectan a la vez dos bombas neumáticas idénticas, que extraen gas de un depósito y se lo introducen a cada globo. El globo A va aumentando su volumen a razón de  $20 \text{ cm}^3/\text{g}$  de gas y el globo B va aumentando su volumen a razón de  $30 \text{ cm}^3/\text{g}$  de gas.  
**Pregunta:** ¿Cuántos gramos se habrán transferido a A y a B cuando sus volúmenes sean iguales?
- 6. Enunciado:** Consideremos dos globos de diferente tamaño y fabricados con distinto material A y B. Inicialmente el globo A tiene un volumen de  $2000 \text{ cm}^3$  y el globo B está vacío. Entonces se conectan a la vez dos bombas térmicas idénticas, una que transfiere calor de A a un acumulador, y otra que transfiere calor del acumulador a B. El globo A va disminuyendo su volumen a razón de  $20 \text{ cm}^3/\text{cal}$  y el globo B va aumentando su volumen a razón de  $30 \text{ cm}^3/\text{cal}$ .  
**Pregunta:** ¿Qué volumen habrá en A y en B cuando sus volúmenes sean iguales?
- 7. Enunciado:** Consideremos dos globos de diferente tamaño y fabricados con distinto material A y B. Inicialmente el globo A tiene un volumen de  $2000 \text{ cm}^3$  y el globo B está vacío. Entonces se conectan a la vez dos bombas térmicas idénticas, que transfieren calor de un acumulador a cada globo. El globo A va aumentando su volumen a razón de  $20 \text{ cm}^3/\text{cal}$  y el globo B va aumentando su volumen a razón de  $30 \text{ cm}^3/\text{cal}$ .  
**Pregunta:** ¿Qué volumen habrá en A y en B cuando sus volúmenes sean iguales?
- 8. Enunciado:** Consideremos dos globos de diferente tamaño y fabricados con distinto material A y B. Inicialmente el globo A tiene un volumen de  $2000 \text{ cm}^3$  y el globo B está vacío. Entonces se conectan dos bombas neumáticas idénticas, una que extrae gas de A y lo introduce en un depósito, y otra que extrae gas del depósito y lo inyecta en B. El globo A va disminuyendo su volumen a razón de  $20 \text{ cm}^3/\text{g}$  de gas, y el globo B va aumentando su volumen a razón de  $30 \text{ cm}^3/\text{g}$  de gas.  
**Pregunta:** ¿Cuántos gramos se habrán transferido de A a B, cuando sus volúmenes sean iguales?

Los problemas de Alta Familiaridad se diseñaron sobre las mismas estructuras que los de Baja Familiaridad, pero con temáticas de la vida diaria: llenado/vaciado de piscinas con el tiempo, y aumento/disminución de dinero en cuentas de ahorro con el tiempo. Por ejemplo, el problema 1 de esa colección sería el siguiente:

### Alta Familiaridad

- 1. Enunciado:** Consideremos dos piscinas de diferente tamaño A y B. Inicialmente la piscina A tiene un volumen de 2000 litros y la piscina B está vacía. Entonces se conectan a la vez dos bombas hidráulicas idénticas, una que extrae agua de A y la introduce en un depósito, y otra que extrae agua del depósito y la introduce en B. La piscina A se vacía a razón de 20 litros/día y la piscina B se llena a razón de 30 litros/día.  
**Pregunta:** ¿Cuánto tiempo habrá pasado cuando las dos piscinas tengan la misma cantidad de agua?

El resto puede deducirse fácilmente.

# Anexo I

Materiales y producciones de los estudiantes  
correspondientes al capítulo 4.

---





## I.1 Prueba de conocimiento previo

**Nota:** Esta prueba se utilizó en todos los estudios de esta tesis.

### PRUEBA DE CONOCIMIENTO PREVIO.

Escoge la opción que corresponda al sistema de ecuaciones que resuelve correctamente el problema.

1.- A Juan y a Andrés les dan 381 euros para repartir entre ellos. La parte que le corresponde a Juan es justo la mitad que la que le corresponde a Andrés. ¿Cuántos euros le corresponden a cada uno?

a)  $x + y = 381$   
 $x = y/2$

b)  $2y = x$   
 $x + 2y = 381$

c)  $y/2 = x$   
 $x + 2y = 381$

2.- En un colegio hay 6 veces más alumnos que profesores. Si en total hay 168 personas en el colegio, ¿cuántos estudiantes y cuantos profesores hay?

a)  $x = y$   
 $x + y = 168$

a)  $6x = y$   
 $x + y = 168$

b)  $x = y/6$   
 $y/6 + x = 168$

3.- 5 camisas y 3 suéteres cuestan 65 euros en total. El precio total de una camisa y un suéter son 17 euros. ¿Cuánto cuesta un suéter?

a)  $5x + 3y = 65$   
 $x + y = 17$

b)  $x + y = 17$   
 $5x + 65 = 3y$

c)  $x + y = 65$   
 $5x - 3y = 17$

**4.- José es 5 veces más mayor que Luís. Dentro de 8 años, Luís tendrá 1/3 de la edad de José. ¿Qué edad tiene José ahora?**

a)  $x = y/5$   
 $x + y = 5/3$

b)  $5x = y$   
 $x + 8 = y/3$

c)  $5x = y$   
 $8x = 5y$

**5.- Una floristería vende un total de 52 ramos de flores entre ramos de rosas y ramos de margaritas. El total de las ventas asciende a 240 euros. Si el ramo de rosas cuesta 3 euros y el de margaritas cuesta 7 euros, ¿cuántos ramos de rosas ha vendido la floristería?**

a)  $x + y = 52$   
 $x + y = 3 + 7 + 240$

b)  $x = 240 + y$   
 $y = 52 - x$

c)  $x + y = 52$   
 $3x + 7y = 240$

## I.2 Producciones de los estudiantes

### Muestra de producción de la prueba de conocimiento previo:

Laura Sanchez

5

#### PRUEBA DE CONOCIMIENTO PREVIO

Escoge la opción que corresponda al sistema de ecuaciones que resuelve correctamente el problema.

1.- A Juan y a Andrés les dan 381 euros para repartir entre ellos. La parte que le corresponde a Juan es justo la mitad que la que le corresponde a Andrés. ¿Cuántos euros le corresponden a cada uno?

a)  $x + y = 381$   
 $x = y/2$

b)  $2y = x$   
 $x + 2y = 381$

c)  $y/2 = x$   
 $x + 2y = 381$

✓

2.- En un colegio hay 6 veces más alumnos que profesores. Si en total hay 168 personas en el colegio, ¿cuántos estudiantes y cuantos profesores hay?

a)  $x = y$   
 $x + y = 168$

b)  $6x = y$   
 $x + y = 168$

c)  $x = y/6$   
 $y/6 + x = 168$

✓

3.- 5 camisas y 3 suéteres cuestan 65 euros en total. El precio total de una camisa y un suéter son 17 euros. ¿Cuánto cuesta un suéter?

a)  $5x + 3y = 65$   
 $x + y = 17$

b)  $x + y = 17$   
 $5x + 65 = 3y$

c)  $x + y = 65$   
 $5x - 3y = 17$



4.- José es 5 veces más mayor que Luis. Dentro de 8 años, Luis tendrá 1/3 de la edad de José. ¿Qué edad tiene José ahora?

a)  $x = y/5$   
 $x + y = 5/3$

b)  $5x = y$   
 $x + 8 = y/3$

c)  $5x = y$   
 $8x = 5y$



5.- Una floristería vende un total de 52 ramos de flores entre ramos de rosas y ramos de margaritas. El total de las ventas asciende a 240 euros. Si el ramo de rosas cuesta 3 euros y el de margaritas cuesta 7 euros, ¿cuántos ramos de rosas ha vendido la floristería?

a)  $x + y = 52$   
 $x + y = 3 + 7 + 240$

c)  $x = 240 + y$   
 $y = 52 - x$

d)  $x + y = 52$   
 $3x + 7y = 240$



## I.3 Materiales utilizados en la prueba de agrupación en la condición de ‘Alta Familiaridad.

**NOMBRE:**.....

**PROCEDENCIA (Bachiller ciencias/letras/ciclos):**.....

### INSTRUCCIONES

Esta prueba pertenece a una investigación del departamento de didáctica de las ciencias experimentales de la Universidad de Valencia y tiene como último fin mejorar el proceso de enseñanza–aprendizaje en la resolución de problemas.

El siguiente cuadernillo consta de cuatro hojas. En la hoja 2 encontrarás un ejemplo que detalla paso a paso como realizar la tarea exigida. Después de haberlo leído y comprendido, pasaremos a las dos hojas siguientes que contienen ocho enunciados de problemas a partir de los cuales se realiza una tarea que consiste en agrupar los problemas según el modo de resolución.

La tarea que pedimos consiste en **agrupar un conjunto de 8 problemas en función de si se resuelven con idénticas ecuaciones o con ecuaciones distintas**. Si piensas que dos problemas se resuelven con **idénticas ecuaciones** entonces debes situarlos en el **mismo grupo**, de este modo, todos los problemas que creas que se resuelven igual deben de estar dentro del mismo conjunto. Si dos problemas se resuelven usando distintas ecuaciones, entonces deben estar en grupos diferentes. Por tanto, los distintos grupos que formes deben corresponder a problemas que se resuelven con ecuaciones diferentes.

No resuelvas los problemas. Únicamente debes pensar como se resolverían y en función de esto, agruparlos dibujando los conjuntos en la última hoja. Esta es la hoja que debes entregar, así que debes poner el nombre (el verdadero o uno falso)

Puedes consultar el ejemplo tantas veces como sea necesario a lo largo de la prueba..

Pregunta AHORA TUS DUDAS.

Ahora vas a realizar la tarea de práctica.

**Muchas gracias por tu colaboración!!!!**

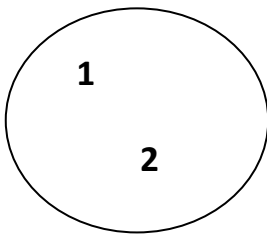
## TAREA DE PRÁCTICA:

Imagina que pedimos a otros alumnos agrupar estos cuatro problemas según el modo en que se resuelven, es decir, según las operaciones a realizar:

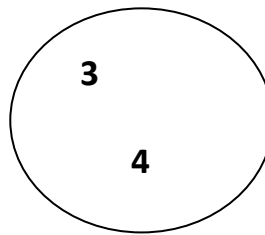
1. Calcula el área de una moneda cuyo radio es de 2 cm
2. Calcula el perímetro de una moneda cuyo radio es de 3 cm
3. ¿Cuál será el área de un disco cuyo radio vale 3 cm?
4. Calcula el perímetro de un disco de 2 cm de radio.

Veamos distintas posibilidades de conjuntos que podrían hacer los alumnos:

A- Conjuntos de problemas de monedas y problemas de discos

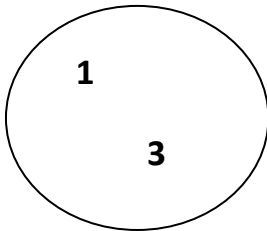


Conjunto de problemas de monedas

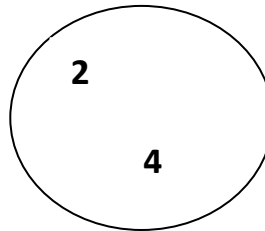


Conjunto de problemas de discos

B- Conjuntos de problemas área de círculo y de perímetro de circunferencia.

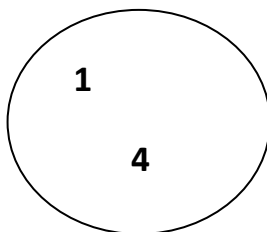


Problemas que se resuelven:  $A = \pi r^2$

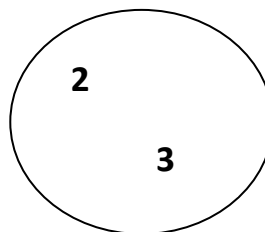


Problemas que se resuelven con:  $2\pi r$

C- Conjuntos de problemas cuyo dato vale 2 cm y problemas cuyo dato vale 3 cm.



Conjunto de problemas de 2cm



Conjunto de problemas de 3cm

¿Tú como lo harías?

## PROBLEMAS PARA AGRUPAR

**Lee con cuidado los enunciados. Hay similitudes y diferencias entre ellos que debes detectar.**

**1.Enunciado:** Consideremos dos piscinas diferentes A y B. Inicialmente la piscina A tiene un volumen de 2000 litros y la piscina B está vacía. Entonces se conectan a la vez dos bombas hidráulicas idénticas, una que extrae agua de A y la introduce en un gran depósito, y otra que extrae agua del depósito y la introduce en B. La piscina A se vacía a razón de 20 litros/día y la piscina B se llena a razón de 30 litros/día.

**Pregunta:** ¿Cuánto tiempo pasará, cuando las dos piscinas tengan la misma cantidad de agua?

**2.Enunciado:** Consideremos dos huchas diferentes A y B. Inicialmente la hucha A tiene 2000 Euros y la hucha B está vacía. Entonces, se ponen en marcha a la vez dos procesos bancarios idénticos que extraen dinero de una gran cuenta y lo introducen en cada hucha. La hucha A va aumentando su dinero a razón de 20 euros/día y la hucha B va aumentando su dinero a razón de 30 euros/día.

**Pregunta:** ¿Qué cantidad de dinero habrá en A y en B cuando las dos huchas tengan el mismo dinero?

**3.Enunciado:** Consideremos dos huchas de ahorro diferentes A y B. Inicialmente la hucha A tiene 2000 Euros y la hucha B está vacía. Entonces, se ponen en marcha a la vez dos procesos bancarios idénticos, uno que extrae dinero de A y lo introduce en una gran cuenta de ahorro, y otro que extrae dinero de esta gran cuenta de ahorro y lo introduce en B. La hucha A va disminuyendo su dinero a razón de 20 Euros/día y la hucha B va aumentando su dinero a razón de 30 euros/día.

**Pregunta:** ¿Qué cantidad de dinero habrá en A y en B cuando las dos huchas tengan el mismo dinero?

**4.Enunciado:** Consideremos dos piscinas diferentes A y B. Inicialmente la piscina A tiene un volumen de 2000 litros y la piscina B está vacía. Entonces se conectan a la vez dos bombas hidráulicas idénticas que extraen agua de un gran depósito y la introducen en cada piscina. La piscina A se llena a razón de 20 Litros/día y la piscina B se llena a razón de 30 litros/Día.

**Pregunta:** ¿Cuánto tiempo pasará, cuando tengan la misma cantidad de agua?

**5.Enunciado:** Consideremos dos huchas diferentes A y B. Inicialmente la hucha A tiene 2000 Euros y la hucha B está vacía. Entonces, se ponen en marcha a la vez dos procesos bancarios idénticos que extraen dinero de una gran cuenta y lo introducen en cada hucha. La hucha A va aumentando su dinero a razón de 20 euros/día y la hucha B va aumentando su dinero a razón de 30 euros/día.

**Pregunta:** ¿Cuánto tiempo habrá pasado cuando las dos huchas tengan el mismo dinero?

**6.Enunciado:** Consideremos dos piscinas diferentes A y B. Inicialmente la piscina A tiene un volumen de 2000 litros y la piscina B está vacía. Entonces se conectan a la vez dos bombas hidráulicas idénticas, una que extrae agua de A y la introduce en un gran depósito, y otra que extrae agua del depósito y la introduce en B. La piscina A va disminuyendo su volumen a razón de 20 litros/día y la piscina B va aumentando su volumen a razón de 30 litros/día.

**Pregunta:** ¿Qué cantidad de agua habrá en cada piscina cuando las dos piscinas tengan la misma cantidad de agua?

**7.Enunciado:** Consideremos dos piscinas diferentes A y B. Inicialmente la piscina A tiene un volumen de 2000 litros y la piscina B está vacía. Entonces se conectan a la vez dos bombas hidráulicas idénticas que extraen agua de un gran depósito y la introducen en cada piscina. La piscina A va aumentando su volumen a razón de 20 litros/día y la piscina B va aumentando su volumen a razón de 30 litros/Día.

**Pregunta:** ¿Qué cantidad de agua habrá en cada piscina cuando las dos piscinas tengan la misma cantidad de agua?

**8. Enunciado:** Consideremos dos huchas de ahorro diferentes A y B. Inicialmente la hucha A tiene 2000 Euros y la hucha B está vacía. Entonces, se ponen en marcha a la vez dos procesos bancarios idénticos, uno que extrae dinero de A y lo introduce en una gran cuenta de ahorro, y otro que extrae dinero de esta gran cuenta de ahorro y lo introduce en B. La hucha A va disminuyendo su dinero a razón de 20 euros/día y la hucha B va aumentando su dinero a razón de 30 euros/día.

**Pregunta:** ¿Cuánto tiempo habrá pasado cuando las dos huchas tengan el mismo dinero?

**NOMBRE:**

**Dibuja aquí tus grupos o conjuntos:**



## I.4 Materiales utilizados en la prueba de agrupación en la condición de ‘Baja Familiaridad.’

**Los cuadernillos fueron exactamente idénticos a los mostrados en la condición de alta familiaridad exceptuando los enunciados por lo que solo mostraremos los problemas:**

**1. Enunciado:** Consideremos dos globos de diferente tamaño y fabricados con distinto material, A y B. Inicialmente el globo A tiene un volumen de  $2000 \text{ cm}^3$  y el globo B está vacío. Entonces se conectan a la vez dos bombas térmicas idénticas, una que transfiere calor de A a un acumulador y otra que transfiere calor del acumulador a B. El globo A va disminuyendo su volumen a razón de  $20 \text{ cm}^3/^{\circ}\text{C}$  y el globo B va aumentando su volumen a razón de  $30 \text{ cm}^3/^{\circ}\text{C}$ .

**Pregunta:** ¿Cuántos  $^{\circ}\text{C}$  se habrán transferido de A a B, cuando sus volúmenes sean iguales?

**2. Enunciado:** Consideremos dos globos de diferente tamaño y fabricados con distinto material, A y B. Inicialmente el globo A tiene un volumen de  $2000 \text{ cm}^3$  y el globo B está vacío. Entonces se conectan a la vez dos bombas neumáticas idénticas, que extraen gas de un depósito y se lo transfieren a cada globo. El globo A va aumentando su volumen a razón de  $20 \text{ cm}^3/\text{g}$  de gas y el globo B va aumentando su volumen a razón de  $30 \text{ cm}^3/\text{g}$  de gas.

**Pregunta:** ¿Qué volumen habrá en A y en B cuando sus volúmenes sean iguales?

**3. Enunciado:** Consideremos dos globos de diferente tamaño y fabricados con distinto material A y B. Inicialmente el globo A tiene un volumen de  $2000 \text{ cm}^3$  y el globo B está vacío. Entonces se conectan a la vez dos bombas neumáticas idénticas, una que extrae gas de A y lo transfiere a un depósito y otra que extrae gas del depósito y lo transfiere a B. El globo A va disminuyendo su volumen a razón de  $20 \text{ cm}^3/\text{g}$  de gas extraído y el globo B va aumentando su volumen a razón de  $30 \text{ cm}^3/\text{g}$  de gas inyectado.

**Pregunta:** ¿Qué volumen habrá en A y en B cuando sus volúmenes sean iguales?

**4. Enunciado:** Consideremos dos globos de diferente tamaño y fabricados con distinto material A y B. Inicialmente el globo A tiene un volumen de  $2000 \text{ cm}^3$  y el globo B está vacío. Entonces se conectan a la vez dos bombas térmicas idénticas, que transfieren calor de un acumulador a cada globo. El

globo A va aumentando su volumen a razón de  $20 \text{ cm}^3/^\circ\text{C}$  y el globo B va aumentando su volumen a razón de  $30 \text{ cm}^3/^\circ\text{C}$ .

**Pregunta:** ¿Cuántos  $^\circ\text{C}$  se habrán transferido a A y a B cuando sus volúmenes sean iguales?

**5. Enunciado:** Consideremos dos globos de diferente tamaño y fabricados con distinto material A y B. Inicialmente el globo A tiene un volumen de  $2000 \text{ cm}^3$  y el globo B está vacío. Entonces se conectan a la vez dos bombas neumáticas idénticas, que extraen gas de un depósito y se lo introducen a cada globo. El globo A va aumentando su volumen a razón de  $20 \text{ cm}^3/\text{g}$  de gas y el globo B va aumentando su volumen a razón de  $30 \text{ cm}^3/\text{g}$  de gas.

**Pregunta:** ¿Cuántos gramos se habrán transferido a A y a B cuando sus volúmenes sean iguales?

**6. Enunciado:** Consideremos dos globos de diferente tamaño y fabricados con distinto material A y B. Inicialmente el globo A tiene un volumen de  $2000 \text{ cm}^3$  y el globo B está vacío. Entonces se conectan a la vez dos bombas térmicas idénticas, una que transfiere calor de A a un acumulador y otra que transfiere calor del acumulador a B. El globo A va disminuyendo su volumen a razón de  $20 \text{ cm}^3/^\circ\text{C}$  y el globo B va aumentando su volumen a razón de  $30 \text{ cm}^3/^\circ\text{C}$ .

**Pregunta:** ¿Qué volumen habrá en A y en B cuando sus volúmenes sean iguales?

**7. Enunciado:** Consideremos dos globos de diferente tamaño y fabricados con distinto material A y B. Inicialmente el globo A tiene un volumen de  $2000 \text{ cm}^3$  y el globo B está vacío. Entonces se conectan dos bombas térmicas a la vez, que transfieren calor de un acumulador a cada globo. El globo A va aumentando su volumen a razón de  $20 \text{ cm}^3/^\circ\text{C}$  y el globo B va aumentando su volumen a razón de  $30 \text{ cm}^3/^\circ\text{C}$ .

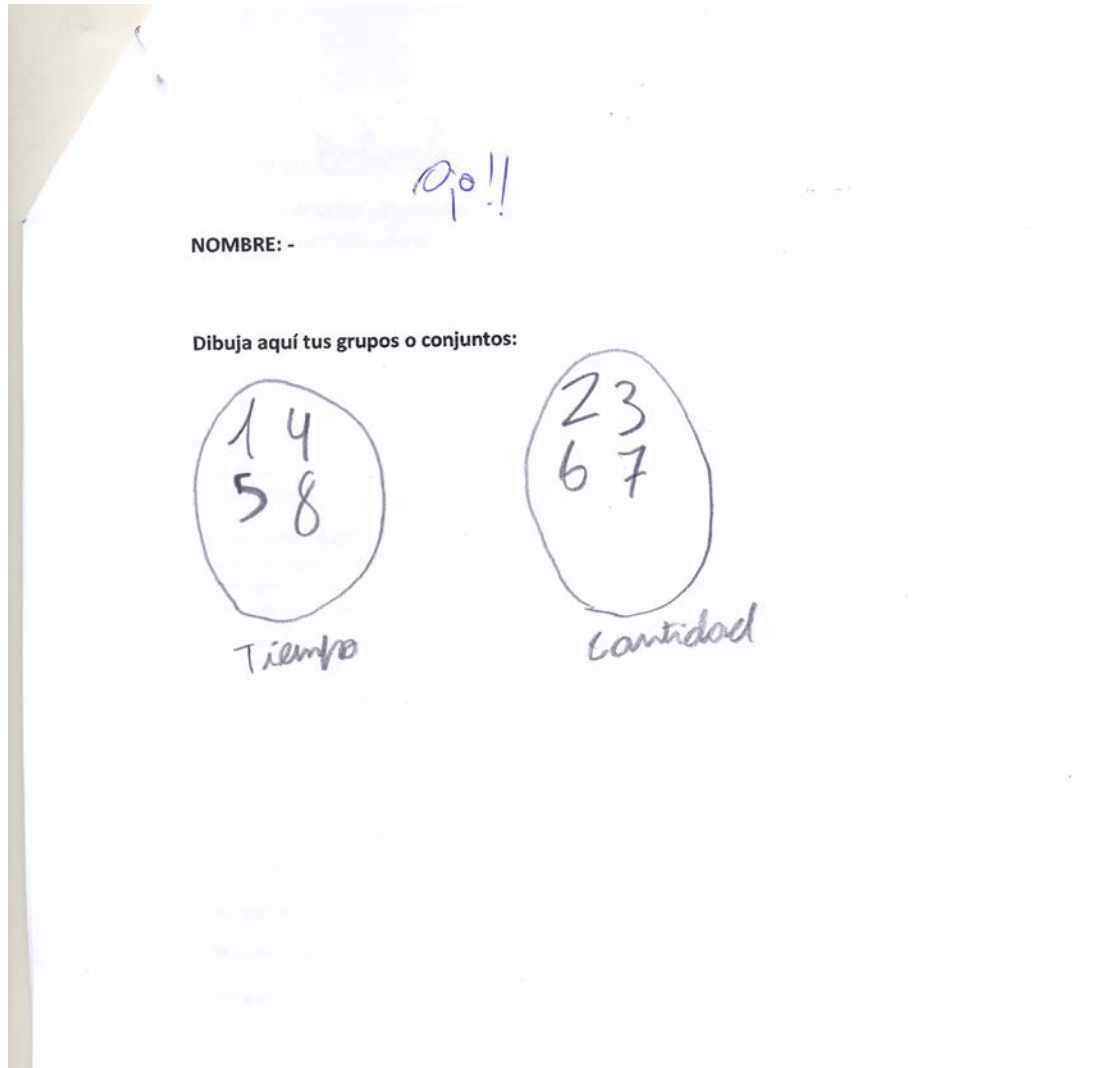
**Pregunta:** ¿Qué volumen habrá en A y en B cuando sus volúmenes sean iguales?

**8. Enunciado:** Consideremos dos globos de diferente tamaño y fabricados con distinto material A y B. Inicialmente el globo A tiene un volumen de  $2000 \text{ cm}^3$  y el globo B está vacío. Entonces se conectan a la vez dos bombas neumáticas idénticas, una que extrae gas de A y lo transfiere a un depósito y otra que extrae gas del depósito y lo transfiere a B. El globo A va disminuyendo su volumen a razón de  $20 \text{ cm}^3/\text{g}$  de gas extraído y el globo B va aumentando su volumen a razón de  $30 \text{ cm}^3/\text{g}$  de gas inyectado.

**Pregunta:** ¿Cuántos gramos se habrán transferido de A a B, cuando sus volúmenes sean iguales?

## I.5 Producciones de los estudiantes

Ejemplo de un estudiante que agrupó los problemas basándose en elementos superficiales:



**Ejemplo de un estudiante que agrupó los problemas basándose en el nombre de la magnitud incógnita preguntada:**

NOMBRE: - Piterra

Dibuja aquí tus grupos o conjuntos:

1 4

2 3

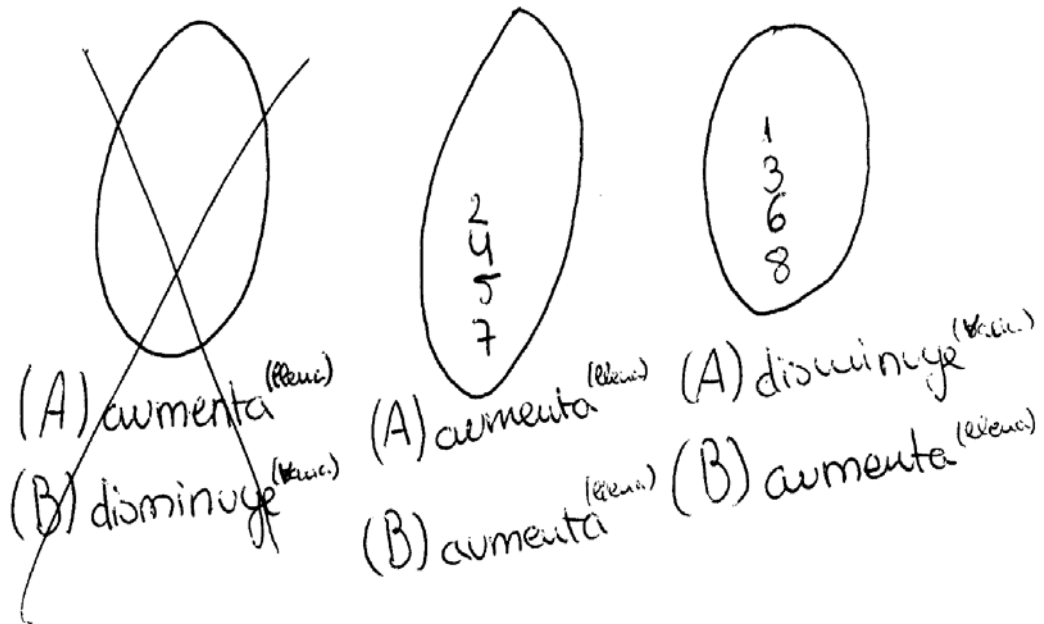
8 5

6 7

**Ejemplo de un estudiante que agrupó los problemas basándose en el criterio estructural correcto:**

NOMBRE: - Colombarre

Dibuja aquí tus grupos o conjuntos:





# Capítulo 5

## **Efectos de la Similitud Superficial y Estructural Sobre la Transferencia a Partir de Análogos en Problemas de Alta y Baja Familiaridad: Primeros Resultados**

---

### **Referencia:**

Gómez-Ferragud, C.B., Solaz-Portolés, J. J., & Sanjosé, V. (2013b). Efectos de la similitud superficial y estructural sobre la transferencia a partir de análogos en problemas de alta y baja familiaridad: primeros resultados. *Enseñanza de las ciencias, Vol.31, No. 1*, pp. 135-151.





# 5. Efectos de la Similitud Superficial y Estructural sobre la Transferencia a Partir de Análogos en Problemas de Alta y Baja Familiaridad: Primeros Resultados.

## Resumen

Se desarrollan dos estudios exploratorios para analizar el éxito en la transferencia en resolución de problemas a partir de análogos. Las diferentes analogías entre problemas ‘ejemplo’ y ‘propuestos’ se suponen construidas a partir de dos variables: la Superficie y la Estructura. Los resultados muestran que cuando los contextos de los problemas son familiares para los estudiantes, las analogías superficiales pueden ocultar las diferencias estructurales. Sin embargo, cuando los contextos de los problemas son no-familiares para los estudiantes, el único efecto significativo procede de la igualdad/diferencia estructural. El efecto global de la familiaridad de los problemas es una reducción sistemática del éxito en la transferencia en problemas no familiares, sea cual sea la relación entre problema ‘ejemplo’ y problema ‘propuesto’.

**Palabras clave:** resolución de problemas algebraicos con enunciado; transferencia; similitud superficial; similitud estructural; familiaridad con el contexto

## **5. Effects from surface and structural similarity in analogical transfer in high and low familiarity problems: first results**

### **Abstract**

Two exploratory studies were conducted in order to analyze the level of success in problem-solving transfer processes. Analogies between a ‘source’ problem and different ‘target’ problems were established through their Surface and Structural features. Results showed that when the context of the problems is familiar for students then Surface similarities can hide Structural differences. However, when the context of the problems is not familiar for students, the only significant effect came from the equal/different Structures. ‘Familiarity’ with the context of the problems caused a global and systematic effect: non-familiar problems achieved lower success than familiar problems, no matter the relationship between source and target problems.

**Keywords:** algebraic word problem-solving; transfer; surface similarity; structural similarity; context familiarity

## 5.1 Introducción y Marco Teórico

De acuerdo con Schroeder y Lester (1989), los currículos suelen contemplar el papel de la resolución de problemas de tres modos diferentes: 1) se enseña *para* la resolución de problemas, 2) se enseña *acerca de* la resolución de problemas y 3) se enseña *a través de* la resolución de problemas. Pues bien, si se enseña *para* la resolución de problemas, el currículo determina los problemas que deben saber resolverse (Cerdán, 2007, p. 2). En tal caso el procedimiento didáctico habitual para enseñar a resolver problemas académicos se basa en la transferencia ('transfer'): se resuelve un conjunto de problemas y se pide luego a los estudiantes que resuelvan problemas similares. Los profesores esperan que los estudiantes detecten con facilidad la similitud entre los nuevos problemas y los resuelvan con éxito (Oliva, 2004). Esta esperanza está basada en una de dos suposiciones, al menos:

(1) De los problemas-ejemplo estudiados, y merced a algún tipo de similitud entre ellos, los estudiantes serán capaces de abstraer 'esquemas de problema' es decir, representaciones mentales comunes a varios problemas y, por tanto, de un nivel de generalidad y abstracción superior a cada uno de los problemas particulares (Loewenstein, Thompson and Gentner, 1999; Gick and Holyoak, 1983). Después, ante un nuevo problema, determinados rasgos o características del mismo deberían activar alguno de los 'esquemas de problema' almacenados en la memoria a largo plazo (MLP). Aplicar el esquema rescatado de la memoria a largo plazo a la resolución del nuevo problema significa reconocer a ese nuevo problema como un ejemplo particular adicional (particularización) de ese esquema. Cuanto más generales sean los 'esquemas de problema' construidos, más fácil será la transferencia a problemas nuevos (Jonassen, 2003).

(2) Alguno de los rasgos o características del nuevo problema activará uno o más problemas ya aprendidos y almacenados en la MLP que se consideran 'análogos' (Goldstone y Sakamoto, 2003; Barnett y Ceci, 2002); el estudiante simplemente deberá aplicar el procedimiento de resolución de los problemas 'análogos' ya conocidos al nuevo problema, *mutatis mutandis*. Este supuesto no requiere de una

abstracción-generalización previa. Los problemas ya conocidos que se toman como ejemplo se suelen denominar ‘problemas fuente’ y se diferencian de los ‘problemas diana’, que son los problemas nuevos a resolver.

Sin entrar a analizar ambos supuestos de transferencia, conviene notar que ambos implican que el sujeto resolutor es capaz de construir analogías entre problemas (bien para poder construir esquemas de problema, bien para activar un problema adecuado que sirva como ejemplo) de modo que pueda reconocer similitudes y diferencias entre cada par de problemas (Gentner, 1983; Lobato, 2003). La analogía entre diferentes problemas se construye identificando los mismos ‘rasgos’ en ellos (Hesse, 1966; Tversky, 1977). Los rasgos identificados en los problemas con enunciado pueden referirse a características perceptibles de los objetos y eventos en el mundo real, o a entidades abstractas como el ‘espacio del problema’ (Newel and Simon, 1972), las ecuaciones, reglas o leyes, etc. El conjunto de rasgos perceptibles en una situación problemática del mundo real, que involucra objetos y hechos en términos concretos (es decir, no abstractos), se denomina ‘Superficie’ (o también ‘Historia’ ó ‘Contexto’) del problema. Los conceptos matemáticos o científicos, las leyes, principios, las relaciones entre cantidades, las ecuaciones, etc., constituyen la ‘Estructura’ del problema (Holyoak y Koh, 1987; Holyoak, 1984). La mayor parte de los problemas académicos de ciencias que se proponen y resuelven en las aulas tienen una Estructura algebraica, determinada por “*el modo en que las cantidades se relacionan unas con otras, más que por las propias cantidades*” (Novick, 1988; pp 511; traducción de los autores). Así pues, en problemas algebraicos las ecuaciones (su forma matemática y su significado) resumen la Estructura del problema.

La analogía entre problemas puede, entonces, construirse en términos de su similitud Superficial y/o Estructural (Holyoak, 1984). Reed (1987) propuso una nomenclatura para las relaciones entre problemas que parece conveniente para nuestros propósitos por su sencillez (Tabla 1):

		<b>Superficie</b>	
		<b>Igual</b>	<b>Diferente</b>
<b>Estructura</b>	<b>Igual</b>	Equivalentes	Isomorfos
	<b>Diferente</b>	Similares	Diferentes

Tabla 1: Relaciones entre problemas en términos de la similitud o diferencia de sus superficies y estructuras

El éxito en la resolución de problemas por transferencia se basa en reconocer problemas ‘isomorfos’ como ‘problemas fuente’ adecuados, y diferenciarlos claramente de los problemas ‘similares’ que son inadecuados como ‘fuente’, lo que implica filtrar y rechazar detalles irrelevantes, asociados a la Superficie del problema (Hummel y Holyoak, 1997; Forbus et al., 1995). Sin embargo la instrucción en muchas disciplinas, como por ejemplo las ciencias, se suele organizar en torno a temáticas (por ejemplo, cinemática, calor y temperatura o electricidad) y no en torno a relaciones abstractas intra-temáticas (por ejemplo, relaciones causa-efecto lineales, del tipo Causa = propiedad característica X Efecto). Entonces, incluso dentro de un mismo dominio temático, el transfer entre problemas de estructura diferente puede resultar difícil (Rebello et al., 2007; Reed, Dempster y Ettinger, 1985).

En este trabajo estudiamos con cierto detalle el éxito en resolución de problemas (‘problemas diana’) basado en el establecimiento de analogías con problemas ejemplo (‘problemas fuente’). Para simplificar el diseño, intentamos fijar los modos en que esas analogías pueden establecerse: seleccionamos el problema fuente particular que los estudiantes deben considerar como análogo (al menos, en primera instancia) para resolver el problema diana. Consideraremos las diferentes relaciones que pueden darse entre un problema fuente dado y un problema diana, dadas por la tabla 1. Concentraremos la atención en problemas algebraicos cuya estructura se concreta en un sistema de 2 ecuaciones lineales, habituales en una amplia variedad de temas de Secundaria.

Adicionalmente, analizaremos el efecto que la ‘familiaridad’ con el contexto temático de los problemas tiene sobre el establecimiento de esas relaciones estructurales entre problemas fuente y diana. Este es uno de los factores contemplados por Jonassen (2000) en su modelo de resolución de problemas.

Llamaremos ‘familiaridad’ con un problema al nivel de conocimiento experiencial, ordinario, procedente de la vida diaria, que un sujeto resolutor tiene con los objetos y eventos narrados en el enunciado del problema. Los estudiantes suelen acumular experiencia vivida asociada con las Superficies de muchos problemas, bastante antes de poder adquirir pericia en resolverlos. Por ejemplo, un estudiante puede estar familiarizado con el dinero, el ahorro, el gasto, los bancos y los intereses... mucho antes de poder considerarse un experto en problemas académicos de crecimiento o decrecimiento lineal. La ‘familiaridad’ implica, por tanto, una interacción entre el conocimiento ordinario del sujeto y la Superficie del problema. Una alta familiaridad con el enunciado de un problema significa que el sujeto puede fácilmente representar en su mente las situaciones, los objetos y eventos narrados en el enunciado. En términos de Kintsch y van Dijk (1978), en una situación de alta familiaridad el sujeto puede construir una buena representación mental ‘Modelo de la Situación’, de carácter concreto (por oposición a abstracto). Sin embargo, lo que se entiende por ‘pericia’ implica la capacidad para construir una representación mental ‘Modelo del Problema’ (Greeno y Kintsch, 1985), de carácter matemático.

En este trabajo presentamos dos estudios exploratorios coordinados. El primero se destinó a obtener datos sobre transferencia entre problemas con diferente tipo de similitud superficial y estructural. En este estudio se usaron problemas con alta familiaridad para los estudiantes (piscinas que se llenan o vacían y cuentas corrientes que incrementan o menguan su saldo). En el segundo estudio se replicó el estudio con problemas cuyos enunciados tenían baja familiaridad para los estudiantes al corresponder a temáticas científicas no estudiadas previamente (objetos que se dilatan o contraen al calentarlos o enfriarlos y temperaturas que se incrementan o decrecientan al absorber o expulsar energía térmica). Finalmente, el análisis conjunto de ambos grupos de datos permitió visualizar el efecto de la familiaridad de los problemas. En los dos estudios, se distinguen dos fases en la transferencia a partir de análogos: la percepción inicial de la analogía ‘fuente-diana’ y la transferencia de ecuaciones para resolver cada problema diana.

### 5.1.1 Hipótesis

H1.- En el momento o fase inicial de comprensión del problema (Newell and Simon, 1972), antes de la resolución propiamente dicha, el problema fuente será percibido como un análogo más adecuado (es decir, de menor ayuda) para resolver los problemas diana que presenten estructura igual a la de aquel problema ('equivalente' e 'isomorfo'. Es decir, esperamos que los estudiantes sean capaces de diferenciar los rasgos superficiales de los estructurales a la hora de comenzar a construir la analogía entre el problema fuente y cada problema diana.

H2.- Una vez establecida la analogía estructural con el problema fuente, los estudiantes podrán transferir fácilmente las ecuaciones usadas para resolver el problema fuente, al caso de los problemas diana con igual estructura. Por tanto, ya en la fase de resolución propiamente dicha, los problemas diana con estructura igual a la del problema fuente serán los que mayor éxito obtengan en el planteamiento de las ecuaciones correctas para resolverlos.

H3.- En contextos de baja familiaridad, tanto la ayuda percibida del problema fuente como el éxito en el planteamiento de las ecuaciones, será menor que en contextos de alta familiaridad de los problemas. Comprender un enunciado implica construir la representación mental "Modelo de la Situación" (Kintsch y van Dijk, 1978; Kintsch, 1998) y luego la representación "Modelo del Problema" o "Modelo Abstracto" (Greeno y Kintsch, 1985; Greeno, 1989). Una baja familiaridad con las entidades presentes en los enunciados de los problemas fuente y diana, puede dificultar la construcción de la primera de ellas, de carácter concreto (no abstracto) y, con ello, impedir la segunda de ellas (abstracta, que incluye la estructura de los problemas). El paso de una representación concreta a la abstracta involucra el llamado "proceso de traducción" para que el que se han sugerido procedimientos didácticos que lo facilitan (Sanjosé, Solaz y Valenzuela, 2009)

## 5.2 Método

### 5.2.1 Sujetos

Los sujetos intervinientes en este experimento pertenecen a 4 centros de la provincia de Valencia, situados en ciudades de más de 10.000 habitantes y en entornos socioculturales medios. Todos ellos se encontraban en el mismo nivel de estudios, 4º ESO con la opción de Física y Química y pertenecían a 4 grupos naturales en esos centros. Obtuvimos datos completos y fiables de un total de 49 estudiantes. De ellos, 28 participantes se asignaron a la condición “Alta Familiaridad” (el estudio 1). Los 21 restantes participaron en el estudio 2 y se asignaron a la condición de “Baja Familiaridad”. Cada nivel de familiaridad se asignó a dos grupos al azar.

Aunque se trató de una muestra de conveniencia, disponible para el experimento, *a priori* no presenta ningún rasgo distintivo del resto de la población de estudiantes de secundaria del mismo nivel sociocultural.

### *Diseño y Materiales*

Se estudió si los estudiantes reunían o no los conocimientos indispensables para poder comprender los problemas usados luego en la prueba de transferencia. Esta prueba consistió en 5 cuestiones cuya respuesta exige plantear una ecuación lineal. Se ofrecían 3 respuestas, una de ellas la correcta. Todos los estudiantes participantes obtuvieron 3 puntos o más en este test.

Para activar los conocimientos previos sobre ecuaciones lineales se preparó un material que recogió los conceptos, procedimientos principales, así como diversos ejemplos resueltos. El tema ya había sido tratado en la asignatura de Matemáticas, de modo que solo se trató de rescatar de la memoria a largo plazo los conocimientos importantes para la prueba de transferencia a realizar después.

Para la prueba de transferencia, se confeccionó un cuadernillo que contenía un problema-ejemplo (problema ‘fuente’) total y detalladamente resuelto y explicado, y



otros cuatro problemas a resolver (problemas ‘diana’). Los 4 problemas ‘diana’ se relacionaron con el ‘fuente’ de los 4 modos distintos que indica la tabla 1, y serán denominados en lo sucesivo como problema diana equivalente (misma superficie y misma estructura que el fuente), isomorfo (distinta superficie y misma estructura que el fuente), similar (misma superficie y diferente estructura que el fuente) y diferente (distinta superficie y distinta estructura que el fuente). Para diseñar estos 1+4 problemas se utilizó un diseño 2 X 2 (2 superficies diferentes y 2 estructuras diferentes), como muestra el cuadro 1. Como se ha dicho antes, las superficies consideradas fueron, en el estudio 1, ‘llenado/vaciado de piscinas’ y ‘aumento/disminución de ahorros en cuentas corrientes’. En el estudio 2, las superficies fueron: ‘dilatación/contracción de longitudes debido a aumento/disminución de la temperatura’ y ‘aumento/disminución de temperatura debido a absorción/cesión de calor’. Las estructuras consideradas fueron dos rectas que se cortan con pendientes del mismo signo y dos rectas que se cortan con pendientes de diferente signo. En lo que sigue, nos referiremos a estas estructuras como ‘Alcanzar’ (A) y ‘Encontrar’ (E) respectivamente, por analogía con los clásicos problemas de dos móviles en Cinemática (bien uno alcanza al otro, bien uno se encuentra con el otro).

Fuente: Piscinas/ Alcanzar (Fuente: Dilatación/Alcanzar)	Superficie: Piscinas (Dilatación)	Superficie: Ahorros (Calor y temperatura)
Estructura: Alcanzar	Equivalente	Isomorfo
Estructura: Encontrar	Similar	Diferente

Cuadro 1: Superficies y Estructuras usados en los estudios 1 y 2 para los problemas fuente y dianas.

Una vez definido el problema fuente a partir de una de las dos superficies y una de las dos estructuras, cada uno de los problemas diana quedó totalmente determinado también. Los enunciados de los problemas se recogen en el Anexo.

### 5.2.2 Variables y Medidas

En ambos estudios, los factores independientes son: la Superficie y la Estructura de los problemas diana, cada uno con 2 valores, Igual/Diferente al problema fuente. En el análisis conjunto final, la Familiaridad de los enunciados (alta/baja) fue el factor independiente.

En cada uno de los 4 problemas diana propuestos los estudiantes debían realizar varias tareas, que asociamos a variables dependientes diferentes:

1. Indicar el grado de ayuda que percibían del problema fuente. Se utilizó una escala Likert con cinco niveles: '*Mucha, Bastante, Algo, Poco, Nada*'. Esta variable pretendió medir la percepción inicial de la analogía entre cada problema diana y el problema fuente. Cuando fue necesario, se asignó valor 1 al nivel asociado con "*Mucha*" y valor 5 a "*Nada*".
2. Elegir, entre tres sistemas de ecuaciones lineales, el correcto para resolver cada problema fuente (solo una opción era correcta). Esta variable está asociada con la fase de aplicación de la transferencia, una vez acabada la construcción de la analogía entre el problema 'diana' y el 'fuente'. Fue valorada como 'Correcta' o 'Incorrecta'.

### 5.2.3 Procedimiento

En cada estudio utilizamos dos sesiones de unos 50 min cada una. En la primera sesión explicamos la finalidad de la tarea que llevarían a cabo y se explicó el material didáctico para activar los conocimientos ya estudiados. En la segunda sesión realizamos la prueba de "transfer".

En estos estudios iniciales, la posible significación de las relaciones entre variables fue analizada mediante diferentes pruebas estadísticas: ANOVA, t-Student, Q-Cochran, W-Wilcoxon. A pesar de que nuestras medidas no son de intervalo y del pequeño tamaño de las muestras en los estudios 1 y 2, ANOVA fue empleado para estudiar el efecto conjunto de dos o más factores. Debido a la robustez de este

estadístico, se supuso que la discriminación entre efectos significativos y no significativos sería fiable. El paquete SPSS 17.0 fue usado para los cálculos.

## 5.3 Resultados y Discusión

### 5.3.1 Estudio 1 (Familiaridad alta)

#### *Percepción de ayuda procedente del problema fuente*

La tabla 2 muestra los promedios (y desviaciones típicas) obtenidas. En este estudio, la ayuda percibida es alta (recordemos que valor 1= “*Mucha ayuda*” y que el valor 5= “*Ninguna ayuda*”) en todos los casos, con algunas diferencias entre problemas:

Problema diana	Equivalente	Similar	Isomorfo	Diferente
Media (DT)	1,82 (.72)	1,86 (.71)	1,36 (.56)	2,07 (.81)

Tabla 2. Familiaridad Alta. Promedios (Desviación típica) de la percepción de ayuda procedente del problema fuente, a la hora de abordar cada problema diana.

Un ANOVA de medidas repetidas 2X2 con los factores Superficie (igual/ diferente al fuente) y Estructura (igual/ diferente al fuente) como factores intra-sujetos, indica que el factor Estructura es significativo ( $F(1,27)= 9,83$ ;  $p= ,004$ ), es decir, en los problemas diana con igual estructura al fuente (‘Equivalente’ + ‘Isomorfo’) se percibe mayor ayuda del problema fuente. El factor Superficie no es significativo ( $p> ,05$ ).

La interacción Superficie X Estructura sí es significativa ( $F(1,27)= 13,33$ ;  $p= ,001$ ) debido a que los estudiantes parecen reconocer de forma especial esta ayuda en el problema diana ‘Isomorfo’. A pesar de que las analogías estructurales con el problema fuente son las mismas en los problemas ‘equivalente’ e ‘isomorfo’, los estudiantes perciben más ayuda en el segundo de ellos. Este es un efecto no esperado y que necesita posterior estudio para ver si se replica o es un efecto de variables extrañas al diseño.

*Elección de ecuaciones correctas*

La tabla 3 recoge las proporciones de acierto en la elección de ecuaciones.

Problema diana	Equivalente	Similar	Isomorfo	Diferente
Media (DT)	,96 (.19)	,68 (.48)	,89 (.32)	,89 (.32)

Tabla 3. Familiaridad Alta. Proporciones (Desviación típica) de acierto en la selección de ecuaciones en cada problema diana.

Contrariamente a lo esperado (H2) el factor estructura no es significativo (test Wilcoxon,  $Z = -1,628$ ;  $p = ,103$ ). Sin embargo, hay un efecto interesante: el bajo nivel de éxito en el problema ‘similar’, significativamente menor al del resto de problemas diana ( $Q$  Cochran = 11,37;  $p = ,010$ ). Es decir, se produce una interacción entre los factores Superficie y Estructura que hace más difícil de plantear el problema similar que el diferente. La figura 1 muestra este efecto de interacción.

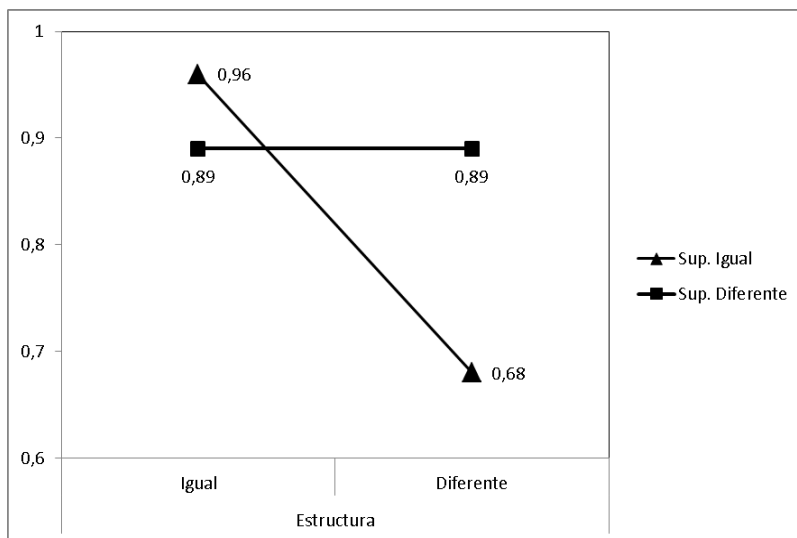


Figura 1. Familiaridad Alta. Efecto de interacción Superficie X Estructura en la elección del sistema de ecuaciones correctas: el problema ‘Similar’ alcanza significativamente menor proporción de éxito que el resto.

Esta interacción parece apuntar a un efecto de ‘apantallamiento’ de las diferencias importantes, estructurales, causado por las similitudes superficiales.

### 5.3.2 Estudio 2 (Familiaridad baja)

#### *Percepción de ayuda procedente del problema fuente*

La tabla 4 recoge los promedios (DT) obtenidos:

Problema diana	Equivalente	Similar	Isomorfo	Diferente
Media (DT)	2,24 (1,14)	2,71 (1,06)	2,52 (1,08)	3,33 (1,07)

Tabla 4. Familiaridad Baja. Promedios (Desviación típica) de la percepción de ayuda procedente del problema fuente, a la hora de abordar cada problema diana.

El ANOVA de medidas repetidas 2X2 (Superficie X Estructura) indica que tanto el factor Superficie ( $F(1,20) = 5,95$ ;  $p = ,024$ ) como el factor Estructura ( $F(1,20) = 8,24$ ;  $p = ,009$ ) son significativos, pero no la interacción entre ellos. Los dos problemas de diferente estructura al fuente alcanzan un valor conjunto mayor (ayuda menor) que los de la misma estructura, tal como se esperaba (H1). El efecto principal del factor Superficie indica que se percibe menos ayuda en los problemas con diferente superficie que el problema fuente. Este efecto significativo no se obtuvo en el caso de familiaridad alta. Las diferencias superficiales entre problemas se convierten en un obstáculo cuando la familiaridad temática de los problemas es baja.

#### *Elección de ecuaciones correctas*

La tabla 5 recoge las proporciones de acierto en la elección de ecuaciones para cada problema diana.

Problema diana	Equivalente	Similar	Isomorfo	Diferente
Media (DT)	,81 (,40)	,57 (,51)	,81 (,40)	,67 (,48)

Tabla 5. Familiaridad Baja. Proporciones (Desviación típica) de acierto en la selección de ecuaciones en cada problema diana.

En este caso, se revela el efecto de la estructura (test de Wilcoxon,  $Z = -2,126$ ;  $p = ,033$ ) lo cual significa que los dos problemas diana con estructura distinta al fuente ('similar' + 'diferente'), alcanzan un éxito significativamente menor que los dos problemas con igual estructura al fuente ('equivalente' + 'isomorfo'). El resto de

contribuciones no alcanzan significación estadística. No hay diferencias individuales entre los 4 problemas diana ( $Q= 5,684$ ;  $p= ,128$ ).

### 5.3.3 Análisis conjunto: Efectos del factor Familiaridad

#### *Percepción de ayuda procedente del problema fuente*

La figura 2 muestra los resultados para los 4 problemas diana en ambos niveles de Familiaridad. El análisis del conjunto de mediante un ANOVA mixto con Superficie y Estructura del problema como factores intra-sujetos, y Familiaridad del enunciado como variable entre-sujetos, pone de manifiesto un efecto principal significativo de la Familiaridad ( $F(1,47)= 25,27$ ;  $p< ,001$ ) lo que indica que los estudiantes perciben significativamente menos ayuda del problema fuente cuando los enunciados pertenecen a contextos poco familiares para ellos.

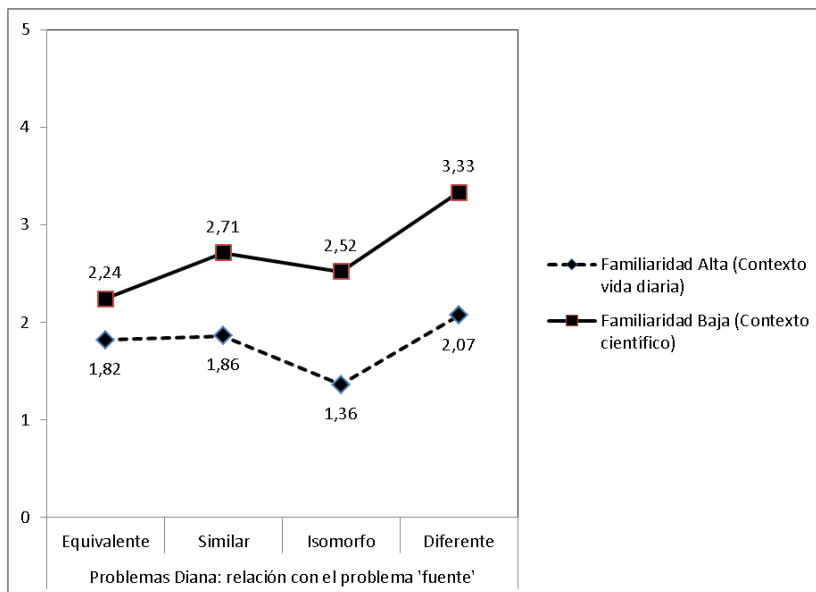


Figura 2. Percepción de ayuda del problema fuente en cada problema diana (1= 'Mucha ayuda'; 5= 'Ninguna ayuda').

El efecto principal conjunto del factor Estructura es significativo ( $F(1,47)= 18,327$ ;  $p< ,001$ ), de acuerdo con la hipótesis H1. La interacción Superficie X Estructura alcanza significación ( $F(1,47)= 8,65$ ;  $p= ,005$ ) debido a que en el problema 'diferente' la ayuda del 'fuente' se percibe significativamente menor que en el resto en ambos niveles de Familiaridad.

*Elección de ecuaciones correctas*

La Figura 3 refleja la proporción de acierto en la elección del sistema de ecuaciones en función de la Estructura, Superficie y Familiaridad del problema diana. Lo más destacable es que los resultados para los problemas diana en la condición baja familiaridad son sistemáticamente peores que los obtenidos para los problemas diana en la condición alta familiaridad. El factor Familiaridad no alcanza significatividad, seguramente debido al tamaño reducido de la muestra, ya que la significación queda muy cercana al límite admitido ( $t(31,9) = 1,853$ , g.l. corregidos por varianzas no iguales,  $p = 0,07$ ). El efecto principal de la Estructura igual/diferente al problema fuente es significativo en este estudio conjunto ( $Z = -2,583$ ;  $p = ,01$ ). El efecto de la Superficie no es significativo.

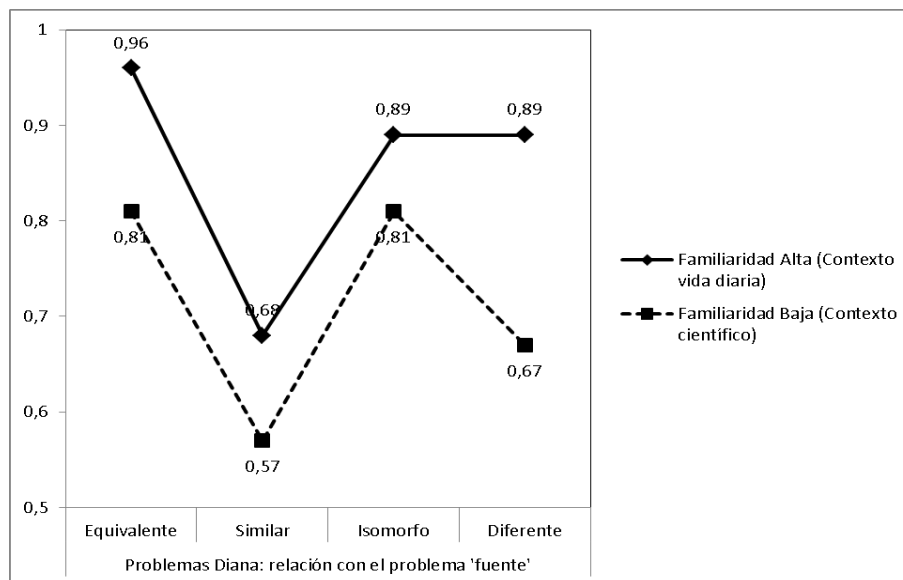


Figura 3. Proporciones de éxito en la elección del sistema de ecuaciones para resolver cada uno de los problemas diana en ambas condiciones de familiaridad.

Hay una diferencia significativa entre los 4 problemas ( $Q=13,481$ ;  $p = ,004$ ), debido a la menor proporción de éxito de los problemas ‘similares’ en comparación con el resto de problemas diana. En la condición de Alta Familiaridad, la diferencia es muy apreciable. En la condición de Baja Familiaridad el resultado es parecido al obtenido en el problema ‘diferente’ y peor que el de los otros dos problemas diana.

## 5.4 Conclusiones

Nuestra hipótesis 1 hacía referencia a la percepción de ayuda del problema fuente suministrado para poder resolver cada problema diana. Los resultados de ambos estudios por separado, así como del estudio conjunto de todos los datos, apoyan la hipótesis 1, ya que en los problemas ‘diana’ con igual estructura al ‘fuente’ (problemas ‘Equivalente’ e ‘Isomorfo’) se percibe mayor ayuda del problema fuente que en los problemas con diferente estructura a la del fuente (problemas ‘Similar’ y ‘Diferente’). Tal como se esperaba, resulta más fácil detectar analogías a nivel abstracto, estructural, cuando los problemas fuente y diana comparten los rasgos apropiados, algebraicos en este caso, con independencia de que el contexto temático de los problemas sea de alta o de baja familiaridad para los estudiantes.

A la hora de plantear las ecuaciones que deben resolver cada problema diana, el efecto principal de la Estructura igual/diferente al problema fuente es significativo cuando se analizan los datos de ambos estudios conjuntamente. Ello apoya nuestra hipótesis 2. El efecto de la Superficie no es significativo.

El análisis del estudio 1 por separado, revela un efecto interesante de interacción Superficie X Estructura que se manifiesta en el problema diana ‘Similar’ en forma de un nivel de éxito demasiado bajo en el planteamiento del sistema de ecuaciones. Este resultado sugiere un ‘apantallamiento’ de las diferencias estructurales cuando las superficies de los problemas son iguales. En general, los rasgos superficiales de los objetos y eventos del mundo real son más fáciles de detectar que las características abstractas. Quiere esto decir que las entidades de la Superficie de los problemas son más eficientes activando ejemplos conocidos de la memoria a largo plazo (que actúan como problemas fuente) que las entidades abstractas de la Estructura (Reeves and Weisberg, 1994). Entonces, si un conjunto de problemas presenta similitudes superficiales, sus diferencias estructurales podrían quedar ‘apantalladas’ por esta similitud fácilmente perceptible para los estudiantes. De hecho, Chi et al (1981) encontraron este efecto en sujetos novatos a la hora de tomar un criterio para clasificar problemas de física: los novatos utilizaron mayormente rasgos superficiales (de objetos como planos inclinados o poleas, o de eventos como movimiento circular



o rectilíneo) para agrupar problemas, mientras los expertos utilizan rasgos estructurales (leyes y principios de la física).

La pericia (*expertise*) está basada en la interacción entre el conocimiento del sujeto y la estructura de los problemas: una gran pericia implica una gran experiencia vivida asociada con determinadas estructuras de problemas (quizás en determinados contextos temáticos). La adquisición de la pericia necesaria para encontrar relaciones estructurales con independencia de los objetos y eventos particulares no es sencilla. En resolución de problemas algebraicos se conoce una amplia variedad de situaciones en las que los estudiantes parecen haber abstraído una ‘esquema de problema’ a partir de muchos ejemplos resueltos pero luego tienden a abusar de ella aplicándola erróneamente a problemas con diferente estructura (Van Dooren et al, 2006). En el caso de relaciones lineales, este fenómeno es especialmente conocido y es habitual referirse a él como “ilusión de linealidad”. Freudenthal, (1983, p. 267) lo formuló como sigue: “*la linealidad es una propiedad de las relaciones tan sugestiva que uno se siente inclinado a caer en la seducción de tratar cada relación numérica como si fuese lineal*”.

En cuanto al efecto particular sobre el éxito en el transfer del factor Familiaridad, los datos muestran que los estudiantes perciben significativamente menos ayuda del problema fuente cuando los enunciados pertenecen a contextos poco familiares para ellos. Los resultados para los problemas diana en la condición baja familiaridad son sistemáticamente peores que los obtenidos para los problemas diana en la condición alta familiaridad. Este resultado, junto con el hecho de que la Superficie tenga efecto significativo cuando la Familiaridad es baja, pero no cuando es alta, indica que los estudiantes tienen dificultades para construir la representación Modelo de la Situación. Esta dificultad en construir la representación de carácter concreto, asociado al mundo real, puede conducir a obstáculos en la construcción de la representación abstracta del problema, necesaria para resolverlo algebraicamente.

Sin embargo, el factor Familiaridad no alcanza significatividad, seguramente debido al tamaño reducido de la muestra por lo cual este resultado debe ser replicado en futuros estudios.

## 5.5 Implicaciones didácticas

La transferencia en el aprendizaje ha sido recientemente reconceptualizada en función de las nuevas necesidades que los productos tecnológicos traen consigo. El vector de cambio tiene su punto de aplicación en la concepción “*just-in-case*”, típica escolar -en la que el alumno recibe una cantidad de conocimientos con la esperanza de que en algún momento le pueden ser de utilidad-, y apunta hacia la concepción “*just-in-time*” -que permite actualizar los conocimientos en el momento preciso en que se necesiten. El proceso de enseñanza se dedica a diseñar (definir) objetos (contenidos) cuyo aprendizaje pueda ser útil en diferentes contextos junto a otros contenidos, y a diseñar también el modo en que diferentes contenidos pueden ‘ensamblarse’ para dar solución a problemas. Surge así el concepto de ‘objeto de aprendizaje reutilizable y ensamblable’ (Wiley, 2000; Santacruz, 2005) entroncado directamente con los procesos de transferencia del aprendizaje.

En esta visión, nuestra investigación intenta arrojar luz sobre los factores que ayudan o entorpecen la delimitación y el ‘ensamblaje’ de ‘objetos algebraicos reutilizables’. Es evidente que dos experimentos realizados con muestras de conveniencia no permiten extraer consecuencias generales, pero nos atrevemos a subrayar, al menos, algunos aspectos que nuestros estudios sugieren y que deben ser atendidos en futuras replicaciones y estudios.

El primero, y que resulta más evidente, es que la transferencia analógica en la resolución de problemas implica a variables de los problemas y de los estudiantes, y también a procesos cognitivos que nos pueden hacer entender las dificultades que muestran los estudiantes para llevarla a cabo y que la mayoría del profesorado desconoce. La Superficie de los problemas (los objetos y eventos del mundo ordinario implicados) y su Estructura (relaciones entre las cantidades) son dos variables de los problemas que se revelan útiles para analizar con detalle la construcción de analogías que facilitan o impiden el transfer. El establecimiento de analogías superficiales o estructurales es un proceso cognitivo que puede ser estudiado experimentalmente manipulando estas dos variables.

El segundo aspecto hace referencia a la familiaridad del contexto del enunciado del problema. Es fundamental que a la hora de abordar la resolución de problemas en

el aula los estudiantes conozcan previamente los conceptos implicados, así como en las situaciones o fenómenos en los que intervienen. Así pues, parece que cualquier intento de transferencia de conocimientos en problemas cuyos conceptos y situaciones en los que se aplican sean desconocidos para los estudiantes, puede resultar baldío. La explicación puede encontrarse en la necesidad de construir la representación mental “Modelo de la Situación”, referida a los objetos y eventos del mundo ordinario, antes de poder construir el “Modelo del Problema”, matemático y abstracto, que incluye la Estructura. Cuando la familiaridad es baja, la construcción de la primera representación mental se dificulta y, con ello, la construcción de la segunda, necesaria para resolver el problema con éxito. Si un problema tiene la misma Estructura que otro, pero su Superficie resulta poco familiar para el estudiante, pueden aparecer dificultades añadidas para la transferencia.

El tercero hace referencia al conocimiento esquemático de problemas. A los estudiantes se les ha de instruir sobre los distintos conocimientos necesarios para resolver problemas (Solaz-Portolés y Sanjosé, 2008), en especial en el conocimiento esquemático o de esquemas de problemas (Friege y Lind, 2006). Este conocimiento posibilita poder distinguir claramente entre la Superficie y la Estructura del enunciado de un problema, que como hemos observado es fundamental para efectuar una transferencia adecuada y para evitar efectos indeseables sobre la misma, como por ejemplo, que la información sobre la superficie del enunciado de un problema pueda apantallar la información sobre la estructura de un problema. Este efecto de ‘apantallamiento’ cuando los contextos son familiares al alumno, debe recordar a los profesores que las analogías superficiales son mucho más fáciles de detectar que las analogías estructurales y los estudiantes pueden sentirse tentados a destinar recursos cognitivos a las primeras. No todos los estudiantes manifiestan un estilo cognitivo “Independiente de Campo” (Witkin et al. 1977; Tsaparlis & Angelopoulos, 2000) con lo cual, tendrán dificultades para no atender los rasgos superficiales y atender únicamente a los estructurales. El trabajo didáctico destinado a desarrollar la destreza de relegar los detalles irrelevantes y atender a la información crucial no es suficientemente atendido, porque pasa desapercibido: muchos profesores asumen de forma más o menos inconsciente, que detectar la semejanza estructural de dos problemas isomorfos es trivial, pero no lo es (Oliva, 2004). Precisamente, nuestros estudios prueban que el éxito en el transfer depende fuertemente del establecimiento

de analogías entre problemas, pero que el proceso de construcción de esas analogías no está exento de obstáculos didácticos.

## Bibliografía

---

Barnett, S.M. & Ceci, S.J. (2002). When and where do we apply what we learn? A taxonomy for far transfer. *Psychological Bulletin*, 128(4), 612-637.

Cerdán, F (2007). *Estudios sobre la Familia de problemas Aritmético-Algebraicos*. Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Valencia.

Chi, M.T.H., Feltovich, P.J. & Glaser, R. (1981). Categorization and representation of physics problems by experts and novices. *Cognitive Science*, 5, 121-152.

Forbus, K.D., Gentner, D. & Law, K. (1995). MAC/FAC: A model of similarity-based retrieval. *Cognitive Science*, 19, 141-205.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, Holland: Reidel Publishing Company.

Friege, G. & Lind, G. (2006). Types and qualities of knowledge and their relation to problem solving in physics. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 4, 437-465.

Gentner, D. (1983). Structure-mapping. A theoretical framework for analogy. *Cognitive Science*, 7, 155-170.

Gick, M.L. & Holyoak, K.J. (1983). Schema induction and analogical transfer. *Cognitive Psychology*, 15, 1-38

Goldstone, R. L., & Sakamoto, Y. (2003). The Transfer of Abstract Principles Governing Complex Adaptive Systems. *Cognitive Psychology*, 46, 414-466.

- Greeno, J.G. (1989). "Situations, Mental Models, and Generative Knowledge," in D. Klahr and K. Kotovsky (eds.), *Complex Information Processing: The Impact of Herbert Simon*, Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, NJ, 1989, pp. 285-318.
- Hesse, M.B. (1966). *Models and analogies in science*. Notre Dame, IN: Notre Dame University Press.
- Holyoak, K.J. (1984). Analogical thinking and human intelligence. In R.J. Sternberg (Ed.), *Advances in the psychology of human intelligence (Vol. 2)* (pp. 199-230). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Holyoak, K.J. & Koh, K. (1987). Surface and structural similarity in analogical transfer. *Memory & Cognition*, *15*(4), 332-340.
- Hummel, J.E. & Holyoak, K.J. (1997). Distributed representations of structure: A theory of analogical access and mapping. *Psychological Review*, *104*, 427-466.
- Jonassen, D.H. (2000). Toward a Design Theory of Problem Solving. *Educational Technology Research and Development*, *48*(4), 63-85.
- Jonassen, D.H. (2003). Using cognitive tools to represent problems. *Journal of Research on Technology in Education*, *35*(3), 362-381.
- Kintsch, W. y van Dijk, T. A. (1978). Toward a model of discourse comprehension and production. *Psychological Review*, *85*, pp. 363-394
- Kintsch, W. y Greeno. J. (1985). Understanding and solving word arithmetic problems. *Psychological Review*, *92*(1), 109-129.
- Kintsch, W. (1998). *Comprehension: a paradigm for cognition*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Lobato, J. E. (2003). How Design Experiments Can Inform a Rethinking of Transfer and Vice Versa. *Educational Researcher*, *32*(1), 17-20.

- Newell, A. & Simon, H.A: (1972). *Human Problem Solving*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- Novick, L. (1988). Analogical transfer, problem similarity, and expertise. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition*, 14, 510-520.
- Oliva, J. M. (2004). El pensamiento analógico desde la investigación educativa y desde la perspectiva del profesor de ciencias. *Revista electrónica de Enseñanza de las Ciencias*, 3 (3), Artículo 7. Retrieved July 1, 2007, Disponible online en: [www.saum.uvigo.es/reec/volumenes/volumen3/Numero3/ART7\\_VOL3\\_N3.pdf](http://www.saum.uvigo.es/reec/volumenes/volumen3/Numero3/ART7_VOL3_N3.pdf).
- Rebello, N. S.; Cui, L., Bennet, A. G.; Zollman, D. A. y Ozimek, D. J. (2007). Transfer of learning in problem solving in the context of mathematics and physics. En D. Jonassen (Ed.), *Learning to solve complex scientific problems*. Hillsdale, N. J.: Lawrence Earlbaum.
- Reed, S.K., Dempster, A. & Ettinger, M. (1985). Usefulness of analogous solutions for solving algebra word problems. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition*, 11, 106-125.
- Reed, S.K. (1987). A structure-mapping model for word problems. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition*, 13, 124-139
- Reeves, L.M. & Weisberg, R.W. (1994). The role of content and abstract information in analogical transfer. *Psychological Bulletin*, 115, 381-400.
- Sanjosé, V., Solaz-Portolés, J.J. y Valenzuela, T. (2009). Transferencia interdominios en resolución de problemas: una propuesta instruccional basada en el proceso de “traducción algebraica”. *Enseñanza de las Ciencias*, 27(2), 169-184.
- Santacruz, L. (2005). *Automatización de los procesos para la generación ensamblaje y reutilización de objetos de aprendizaje*. Tesis doctoral. Departamento de ingeniería telemática. Universidad Carlos III de Madrid.

- Schroeder, T., Lester, F. (1989). Developing understanding in mathematics via problem solving. En P. Trafton & A. Shulte (Eds). *New directions for elementary school mathematics (1989 Yearbook)*. Reston, VA, NCTM.
- Solaz-Portolés, J. J. y Sanjosé V. Types de knowledge and their relations to problem solving in science: directions for practice. *Sísifo. Educational Sciences Journal*, 6, 105-112.
- Tsaparlis, G. & Angelopoulos, V. (2000). A model of problem solving: Its operation, validity, and usefulness in the case of organic-synthesis problems. *Science Education*, 84(2), 131-153.
- Tversky, A. (1977). Features of similarity. *Psychological Review*, 84, 327-352.
- Van Dooren, W., De Bock, D., y Verschaffel, L. (2006). La búsqueda de las raíces de la ilusión de Linealidad. [Monografía IX]. *INDIVISA. Boletín de Estudios e Investigación*. 115-138 (Hay una versión precedente del 2003 en *Educational Studies in Mathematics*, 53, 113-118).
- Wiley, D. A. (2000). Connecting learning objects to instructional design theory: A definition, a metaphor, and a taxonomy. En D. A. Wiley (2000), *The Instructional Use of Learning Objects*, Version Online. Recuperado el 23 de 01 de 2012: <http://reusability.org/read/chapters/wiley.doc>
- Witkin, H.A., Moore, C.A., Goodenough, D.R. & Cox, P.W. (1977). Field-dependent and field-independent cognitive styles and their educational implications. *Review of Educational Research*, 47, 1-64.

## Anexo

---

### **Problemas de “Alta Familiaridad”**

#### **Fuente**

Dos vecinos poseen idénticas piscinas. La primera piscina se está llenando a razón de 25 l/min y la segunda comienza a llenarse a razón de 30 l/min. La segunda piscina comienza a llenarse cuando la primera contenía 1000 l de agua. ¿Cuánto tiempo pasará hasta que ambas piscinas tengan la misma cantidad de agua?

#### **Isomorfo**

Dos amigos tienen huchas de ahorro iguales. La cantidad en primera hucha aumenta 10 euros/semana y la cantidad en la segunda aumenta 15 euros/semana. El segundo amigo comienza a meter dinero en su hucha cuando el primero tenía 100 euros en su hucha. ¿Cuánto tiempo pasará hasta que ambas huchas contengan el mismo dinero?

#### **Similar**

Dos vecinos poseen idénticas piscinas. La primera piscina se está vaciando a razón de 20 l/min y la segunda comienza a llenarse a razón de 40 l/min. La segunda piscina comienza a llenarse cuando la primera contenía 6000 l de agua. ¿Cuánto tiempo pasará hasta que ambas piscinas tengan la misma cantidad de agua?

#### **Diferente**

Dos amigos tienen huchas de ahorro iguales. La cantidad en primera hucha disminuye 10 euros/semana y la cantidad en la segunda aumenta 15 euros/semana. El segundo amigo comienza a meter dinero en su hucha cuando el primero tenía 800 euros en su hucha. ¿Cuánto tiempo pasará hasta que ambas huchas contengan el mismo dinero?

#### **Equivalente**

Se quieren llenar dos depósitos industriales de leche. Para llenar el primero se usa una bomba que introduce 50 l/min de leche y para llenar el segundo se usa una bomba de 75 l/min. El segundo depósito comienza a llenarse cuando el primero contiene ya 1500 l de leche. ¿En qué momento tendrá el segundo depósito más leche que el primero?



### **Problemas de “Baja Familiaridad”**

#### **Fuente**

Dos varillas metálicas A y B se ponen a calentar a la vez en fuegos iguales. La Varilla A se va alargando a razón de 25 mm/Kilocaloría y la varilla B se alarga a Razón de 30 mm/Kilocaloría. Inicialmente la varilla A mide 1000 mm más que la B. ¿Qué cantidad de calor habrán recibido del fuego cuando tengan la misma longitud.

#### **Isomorfo**

Dos cuerpos A y B se calientan aportando calor con idénticas llamas. Calentamos primero el cuerpo A y observamos que su temperatura aumenta a razón de 1,0°C/Kilocaloría. Cuando se han transferido 100 Kilocalorías al primer cuerpo, empezamos a calentar el segundo cuerpo y observamos que su temperatura aumenta a razón de 1,5°C/Kilocaloría. ¿Qué cantidad de calor se habrá transferido al cuerpo B, cuando ambos cuerpos tengan la misma temperatura?

#### **Similar**

Se quiere igualar la longitud de dos varillas A y B del mismo metal. Inicialmente, la varilla A mide 6000 micras más que la varilla B. Se dispone de un dispositivo térmico que extrae calor de la varilla A y lo cede a la varilla B. La varilla A se contrae a razón de 20 micras/kilocaloría y la varilla B se dilata a razón de 40 micras/Kilocaloría. ¿Qué cantidad de calor se habrá transferido de la varilla A a la B cuando tengan la misma longitud? Nota: ( $1 \text{ micra} = 10^{-6} \text{ metros}$ )

#### **Diferente**

Dos cuerpos A y B a distinta temperatura se ponen en contacto. Inicialmente, el cuerpo A tiene 800°C más que el B. La cantidad de calor que pierde A es la misma que gana B. El cuerpo A baja su temperatura a razón de 10°C/Kilocaloría y el cuerpo B aumenta su temperatura a razón de 15°C/Kilocaloría. ¿Qué cantidad de calor se habrá transferido de A a B cuando ambos cuerpos tengan la misma temperatura?

### **Equivalente**

Dos amigos poseen dos cables, uno de cobre y otro de aluminio. Calentamos los dos cables simultáneamente en fuegos iguales, incrementándose su longitud. El hilo de cobre varía su longitud a razón de 50 micras/Kilocaloría y el de aluminio lo hace a razón de 75 micras/Kilocaloría. Inicialmente la longitud del hilo de cobre es 1500 micras mayor que la del hilo de aluminio. ¿Qué cantidad de calor habrán recibido del fuego cuando tengan la misma longitud? Nota: ( $1 \text{ micra} = 10^{-6} \text{ metros}$ ).

# Capítulo 6

## **Analogy Construction and Success in Mathematics and Science Problem-Solving: a Study with Secondary Students.**

---

### **Referencia:**

Gómez-Ferragud, C.B., Solaz-Portolés, J.J. & Sanjosé, V. (2013a). Analogy Construction and Success in Mathematics and Science Problem-Solving: a Study with Secondary Students. *Revista de Psicodidáctica*, 18(1), 81-108.



# 6. Analogy Construction and Success in Mathematics and Science Problem-Solving: a Study with Secondary Students

## Abstract

We conducted an empirical study to analyse the association between students' perception of surface and structural analogies among problems, and their algebraic success. Algebraic success was measured by the equations selected to solve each problem. Different surface and structural relationships between one source problem and four target problems were considered. We also considered high (daily life) and low (scientific) familiarity contexts for the problems. Similarities and differences between the source and each target problem were explicitly asked to students. Results showed a significant correlation between detecting the correct structural relation between these problems and selecting the correct equations to solve the target ones. Low familiarity (science) problems obtained lower success independently of other factors. Usual teaching procedures, based on isomorphism, could increase the probability that students consider isomorphism the only possible relationship between problems.

**Keywords:** Problem-solving, analogies, surface and structure, familiarity, transfer.

## **6. Construcción de analogías y éxito en la resolución de problemas de ciencias y matemáticas: un estudio con alumnado de Secundaria**

### **Resumen**

Se desarrolla un estudio empírico con estudiantes de Secundaria para analizar la asociación entre detectar las analogías superficiales y estructurales entre problemas, y el éxito algebraico medido a través de las ecuaciones seleccionadas para resolverlos. Se consideraron distintas relaciones superficiales y estructurales entre un problema fuente y cuatro problemas diana. Se consideraron problemas con temáticas de alta (vida diaria) o baja familiaridad (ciencia). Se pidió a los estudiantes comparar el problema fuente con cada problema diana para establecer las similitudes y diferencias entre ellos. Los resultados mostraron una correlación significativa entre detectar correctamente la relación estructural entre problemas y elegir las ecuaciones correctas para resolverlos. El éxito fue menor en los problemas de baja familiaridad (ciencias) independientemente de otros factores. La enseñanza habitual basada en la isomorfía podría incrementar la probabilidad de que los estudiantes considerasen este tipo de relación como la única posible entre problemas.

**Palabras clave:** Resolución de problemas, analogías, superficie y estructura, familiaridad, transferencia.

## 6.1. Introduction

**P**roblem solving is a classical learning task in learning science and mathematics (Polya, 1957). In science and mathematical education many problems are verbal (or word) problems, i.e., problems with statements describing a certain world situation.

Comprehension and resolution are the two phases in classical problem-solving theory (Newell & Simon, 1972). In psychological terms comprehending a word problem means constructing mental representations at different levels of elaboration of the situation described in the statement, usually a short text. Several mental representations have been proposed (Kintsch, 1998; Kintsch & van Dijk, 1978): Surface (word level); Textbase (semantic level); Situation Model (SM, referential level) and Problem Model (PM, abstract level). The Situation Model and the Problem Model involve the subject's previous knowledge, but both differ in their constituents. SM is made from concrete, usual world objects and events, and also world rules, whereas PM is made from abstract entities as relations among quantities, functions, concepts, laws, principles, etc. (Kintsch & Greeno, 1985; Nathan, Kintsch, & Young, 1992).

This paper focuses in the comprehension phase of mathematics and science problem solving. We are interested in the way some problem variables can facilitate or impede Secondary students' construction of SM and PM and so, to increase or decrease their success in the solving phase. We will study problems involving two linear equations. These problems are usual in Secondary subject-matters of mathematics, physics and chemistry.

We will refer to algebraic translation as the process building PM from SM in problems of algebraic nature (Puig, 1998; Sanjosé, Solaz-Portolés, & Valenzuela, 2009). It is supposed that lower levels of representation are necessary steps to reach the higher ones (Vidal- Abarca & Sanjosé, 1998). Thus, building an appropriate and rich SM would be necessary to construct a suitable and useful PM to solve a problem.

Our first wide research question is: In problem-solving, could difficulties building SM cause special difficulties building PM?

As SM is built linking the semantic content of the text to the subject's previous knowledge (via inferences), having poor previous knowledge would cause a poorer mental SM too. Thus, considering problematic situations in non-familiar contexts for solvers could create difficulties to build the SM. This is a relevant research question in science education because teachers usually expect that learning problem-solving procedures in math classes will lead to students' success in science problem-solving. Verbal problems in mathematics usually refer to daily life contexts whereas science problems usually do not. If the more or less familiarity with the context of the problems affects problem-solving success, some instructional procedures should be reviewed.

Although conceptual learning, problem-solving and experimental work in the laboratory should be integrated in a coherent instruction (Gil et al., 1999) these aspects are usually dealt with separately in many classrooms. In a typical problem-solving instruction, teachers solve a set of example problems involving basic principles, laws or theorems. Later they propose analogous problems to be solved by students. Thus, most of these target problems can be solved by analogical transfer (Bassok & Holyoak, 1989; Bernardo, 2001; Gick & Holyoak, 1983; Hammer, Elby, Scherr, & Redish, 2005; Holyoak, 1984; Mestre, 2003; Reed, Dempster, & Ettinger, 1985).

Transfer demands the construction of an analogy between the known situation and the new situation (Gentner, 1983). The analogy between different problems is constructed identifying and mapping the same features in the compared problems. Features can refer to characteristics of the concrete and real-world objects and facts, or to abstract entities as problem space, equations, scientific laws, etc. Thus, being able to establish suitable analogies between problems facilitates transfer and so, increases the academic problem solving success.

Surface and Structure have been defined as essential components in word problems (Holyoak, 1984). Surface describes the problematic situation in the real-world context and refers to the concrete objects and facts in non-abstract terms. In



Secondary School a significant group of academic word problems are of algebraic nature. Structure in an algebraic problem is determined basically by “how the quantities are related to each other rather by what the quantities are” (Novick, 1988, p. 511). In the algebraic problems considered here the equations summarize the relations among the quantities.

Therefore, from a theoretical perspective the relationship between two problems can be characterized in terms of their surface and structural similarity (Holyoak & Koh, 1987). Reed (1987) labelled the relation between problems according to their surface or/and structural similarity, as shown in Chart 1.

**Chart 1**  
*Surface and Structural Relationships between Problems*

	<b>Surface: Same</b>	<b>Surface: Different</b>
<b>Structure: Same</b>	Equivalent	Isomorphic
<b>Structure: Different</b>	Similar	Related

Equivalent problems are related according to Gentner’s definition of *literal similarity* (1983, p 159): in the set of interconnected propositions representing the semantic content of each problem statement, a very large number of predicates of one problem (the Source from here onwards) can be mapped to the other one (the Target problem) including both, object-attributes and relational predicates.

Isomorphic problems have the same Structure but they have different Surfaces so objects and events mentioned in their statements are different. These problems cannot be related by means of literal similarity but by means of a Gentner’s analogy: “... the comparison in which relational predicates, but few or no object attributes, can be mapped from base to target” (Gentner, 1983, p.159). Mapping the objects in one Source problem to the objects in an Isomorphic problem, all relational predicates in the Source are also valid in the Isomorphic (see Appendix, Tables 4 and 5). When this full analogy has been constructed, solvers could reach the PM representation for a target problem without doing the algebraic translation explicitly, by simply

mapping concepts from the Source to the Isomorphic at Surface (or SM representation) level. This can be seen in the Appendix (Diagram 1).

Similar problems have exactly the same objects and attributes but their Structures are different so they have different relational predicates. Therefore, literal similarity is only apparent in this case. Opposite to the Isomorphic relationship, solvers cannot reach the PM in the target problem by simply mapping concepts from one Source to one Similar problem. Solvers have to read the statements and notice the differences. Then, they have to explicitly translate the different relational predicates from the natural language to algebra and thus, from the SM to the PM. This relationship can be conceptualized as a *far analogy* in Gentner's terms.

Related problems do not share Surfaces or Structures. Literal similarity is not apparent in this case and constructing an analogy could require building a more general PM representation (a PM representation) able to include both related problems as particular issues. In Gentner's theory this corresponds to an 'abstraction': "a comparison in which the base domain is an abstract relational structure" (Gentner, op.cit., p.159). In an abstract structure the object nodes are not ontological concrete objects but abstract entities, and "predicates from the abstract base domain are mapped into the target domain; there are no non-mapped predicates" (Gentner, op.cit., p.160). The problems used in this study can be related by means of a common abstract schema. This schema is, in essence, a set of algebraic expressions corresponding to two linear equations with a unique solution, i.e. two intersecting straight lines:

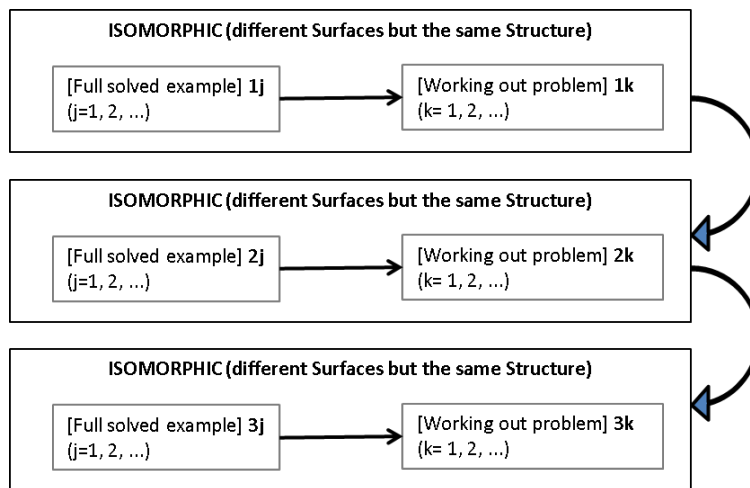
$$\text{Eq}_1: y_1 = y_{10} + r_1 x \qquad \text{Eq}_2: y_2 = y_{20} + r_2 x$$

where  $y_{10}$  and  $y_{20}$  are the corresponding y-intercepts and  $r_1$  and  $r_2$  are the slopes, i.e. the ratios of increasing or decreasing of  $y_1$  and  $y_2$ . When  $r_1$  and  $r_2$  are both positive,  $r_1 < r_2$  and  $y_{10} > y_{20}$ , the schema corresponds to the *Catching up* structure. When  $r_1$  is positive,  $r_2$  is negative, and  $y_{10} < y_{20}$  the schema corresponds to the *Meeting* structure. The names of both structures are taken from the usual problems in kinematics: one vehicle catching up another moving along the same way, or two vehicles moving in opposite direction and meeting each other.

Our second wide research question is: To what extent surface and structural similarities or differences between source and target problems can facilitate or obstruct Secondary students' construction of analogies and so, the construction of the PM representation?

From Gentner's theory of analogy construction (opus cit.), we expected that subjects detecting relational similarities and differences at the Situation Model level will improve their performance at the Problem Model level, i.e. at algebraic level.

There are some interesting pedagogical proposals on problem-solving based on constructivist principles (Gil & Martínez-Torregrosa, 1983). However, many Secondary teachers and texts follow instructional sequences similar to the next one:



**Figure 1.** Usual teaching procedure in mathematics and science problem solving.

Therefore, the isomorphic relationship between problems is heightened over other relationships. Less time is devoted to compare different structures to help students to build more general algebraic schemas.

Our last research question is: How effective is the instructional sequence based on isomorphs making students aware of analogies and differences between algebraic verbal problems?

### 6.1.1 Goals and hypotheses

Goal 1: In order to give answer to our first general research question in this study, the possible effects on the algebraic problem solving success coming from more or less familiarity with the problems' context were analysed. As we were interested only in the comprehension phase and not in the solving phase of problem-solving by transfer, 'algebraic success' refers here to: a) detecting the correct structural similarities or differences between problems; b) recognizing what are the correct equations to solve the problem. Thus, our hypothesis could be formulated as follows:

— H1: A low Familiarity with the situations implied in the statements will cause lower success in problem-solving than a high Familiarity.

Goal 2: According to the second research question, we aimed at analysing the level of algebraic success in verbal problems having specific surface and structural relations to one given example. We aimed to replicate a previous result (Gómez, Solaz-Portolés, & Sanjosé, 2012): surface similarities seemed to hide structural differences between problems to Secondary students. Perceptible features of real-world objects and facts are easier to detect than abstract features. Surface entities are more efficient in activating base examples from memory than abstract entities in transfer activities (Reeves & Weisberg, 1994). Nevertheless, transfer in science and mathematics problem solving entails the identification of structural features; recognizing Isomorphic problems and differentiating them from Similar problems is important for transfer success because it involves filtering out irrelevant and specific details in particular situations (Forbus, Gentner, & Law, 1995; Hummel & Holyoak, 1997). Our second hypothesis is:

— H2: Surface similarities between problems could hide structural differences to Secondary students.

— We also studied the benefits from being explicitly aware of the structural similarities or differences between problems on the success in selecting the correct equations. Specifically, we were interested on how surface features can obstruct this structural relationship. For that reason, we focused on Isomorphic and Similar problems.

— H3: Establishing correct analogies between target problems and the examples (or Source problems) will improve success in algebraic problem solving.

Goal 3: According to the third research question the effect due to the usual instruction was also investigated. We compared students who received a recent instruction to others who received instruction long time ago in some tasks: a) the success selecting the correct equations, and b) the detection of betweenproblems similarities or differences. We had no clear predictions, but some effect from the instructional use of isomorphic problems with little use of generalization processes could appear.

## **6.2 Method**

### **6.2.1 Sample**

One hundred and ninety-four male and female Secondary students, (15-16 years old) participated in this experiment. They belonged to eight intact groups from three different Secondary Schools of middle sociocultural level. One hundred and seven students had been recently instructed in algebraic verbal problem solving and belonged to two academic levels in compulsory Secondary Education: 9th grade (53 students) and 10th grade (54 students). They constituted the Recently Instructed group. Solving algebraic verbal problems is a subject matter included in the 9th-grade curriculum, as an application of knowledge about solving linear equations. Later, in the 10th grade, this topic is re-studied and more verbal problems are solved. The instructional procedure is based on solving and explaining some examples on the blackboard and then proposing isomorphic working out problems to the students.

The remaining eighty-seven 10th-grade students studied algebraic verbal problem solving a year ago. By the time of this experiment, this subject matter had not been dealt with yet. This was the Not-recently Instructed group.

One hundred and one participants were assigned to the high Familiarity condition, and the remaining 93 to the low Familiarity condition.

This sample was selected because of its accessibility so there was not sampling procedure. However, these students did not present any especial distinguishing feature.

## 6.2.2 Materials

We elaborated two different booklets, one per Familiarity condition, to group the instructions, one problem fully solved and explained considered as the reference (the Source from here onwards), and four target problems: one Equivalent, one Isomorphic, one Similar and one Related to the Source, according to Chart 1. Target problems were defined introducing the minimum possible changes with respect to the Source problem. Thus, the Similar target problem and the Source problem differed in just one but very important relational predicate having just the opposite meaning (see Appendix). In that way, we wanted to make clearer the expected experimental effects.

In the high Familiarity condition, the surfaces of the problems included daily life situations and objects. In the low Familiarity condition, the five surfaces of the problems implied science phenomena which had not been studied by the participants yet. We selected two different Surfaces in each Familiarity condition:

High Familiarity: Filling/ Emptying swimming pools and Increasing/ Decreasing the credit balance in saving accounts.

Low Familiarity: Increase/ Decrease of gas pressure by Heating/ Cooling the gas and Increase/ Decrease of the length of metal bars by Heating/ Cooling them.

We also considered just two algebraic Structures corresponding to two crossing straight lines: the Caching up and the Meeting structures defined above. These structures were the same in both Familiarity conditions. The Source problems (one per Familiarity condition) had the same structure in both Familiarity conditions (Catching up).

In the Equivalent target problem the Surface was not exactly the same as the one of the Source in both Familiarity levels (filling swimming pools/ increasing gas pressure in tanks by heat transferring), but it was very similar (filling milk tanks/ increasing gas pressure in balloons by heat transferring). Otherwise, the Source and the Equivalent would be the same problem.

In each booklet the materials were presented in the following order: instructions, Source, Equivalent and, next, the other three target problems in a counterbalanced order.

The problems in both Familiarity conditions are included in the Appendix.

Students had to be able to understand the Source problems to be aware of the structural analogies or differences when dealing with each target problem. This was a pre-requisite in the experiment. Thus, we prepared a basic test of five items consisting in linear equations to be solved (without verbal statements). We assigned score 1/0 to each item when its answer was correct or not. All participants obtained three or more points.

### **6.2.3 Experimental design**

This study was divided in two phases. In the first one, the quantitative phase, the experimental design was factorial  $2 \times 2 \times (2 \times 2)$  with two between-subjects factors, Instructional delay (recently instructed/ not-recently instructed students) and Familiarity (low/ high); and also two within-subjects factors, the problems' Surface (same/ different from the Source problem) and Structure (same/ different from the Source problem). The academic level (9th/10th grades) did not produce any significant effect so we collapsed both academic levels in the study.

In the second phase we interviewed a subgroup of participants in order to obtain some extra information about their mental processes while dealing with the tasks. Students' performance and reasoning was analysed and classified in provisional categories to be contrasted in further, more accurate qualitative study.

## 6.2.4 Variables and measurements

In each target problem we proposed students two different tasks:

a).-To explicitly relate the present target problem to the Source problem using surface and structural factors. We offered students several possible relationships between these two problems and students had to select the most relevant in their opinion. The 6 different options were: (a/b) *same/ different objects or events*, (c/d) *same/ different quantities*, (e/f) *same/ different relations among quantities*. Options (e/f) were expected when appropriate structural comparisons were made. We assigned score 1/0 when students established the correct/wrong relationship between problems at structural level. In addition, we took into account the different answers to study their frequency and their association to the equations selected.

b).-To select the correct equations to solve the present problem. We offered three options but only one was correct (see Appendix).

Students had to choose the preferred option. In the Similar and Related problems one option offered the same equations solving the Source problem. These equations were not the correct ones to solve these target problems. Selecting them could mean a copy-and-paste strategy from the Source to the Target problems so doing the so-called Negative Transfer (Novick, 1988). We assigned 1/0 points when the equations selected were the correct ones/wrong to solve each target problem.

In each experimental condition we defined the following variables:

1.-The number of students who were/were not aware of the structural similarity /difference between the 'source' and the target problems. In some analyses we defined the variable *Number of Correct Structural Comparisons* accounting for the amount of correct structural Target-Source comparisons. This variable ranged from 0 to 4 as there were only 4 target problems. In other analyses we specifically focused on interferences detecting structural similarities or differences caused by surface features. In the Isomorphic, surface differences would make some students believe that both structures would be also different. In the Similar, the surface similarity would make



some students believe that both structures would also be the same. In both problems, the proportion of students committing these errors was computed.

2.-The number of selected equations which were/were not the correct ones to solve each target problem.

In some analyses we defined the variable *Number of Correct Equations* accounting for the total amount of target problems in which the correct equations were selected. This variable also ranged from 0 to 4.

Finally, we accounted for specific errors committed choosing the equations in the Isomorphic and the Similar. When students chose different equations for the Isomorphic than for the Source, they erroneously thought that a different surface would imply a different structure too. In the Similar problem we focused on *negative transfer*, i.e. when surface similarity made students believe that there would also be structural similarity.

### **6.2.5 Procedure**

Data was collected in two sessions. The first one took about 55 min. This session did not include problem-solving instruction or teaching students in any solving methodology. One of the researchers conducted the session. He was not the teacher of any of the groups of participants. In this first session students completed the algebra pre-requisites test (15 min). Next, the booklets were handed out to the students in a counterbalanced manner, so about one half corresponded to the low Familiarity and the other half to the high Familiarity condition. The researcher read the instructions aloud together with students and solved their doubts (10 min). Next, he suggested participants to study the Source and explained the solving procedure to them (10 min). The Equivalent (same surface and same structure as the Source) served as an example for practice. The researcher helped the students in the proposed tasks but he did not solve them (5 min). Finally, the remaining three target problems were dealt with by students alone, without being helped by the researcher (15 min). Students consulted the Source at their own pace.

As a consequence of the answers given to the two tasks in the booklets, we returned to the educational centres and interviewed a subgroup of ten students who had previously provided intriguing or interesting answers. We did not interview all the students in the sample providing incoherent or intriguing answers but those volunteers available at that moment. This interview was conducted in a semi-structured format with the aim of clarifying students' thoughts and reasoning. Interviews took about 10 min per student. First, the researcher gave the corresponding booklet back to each student and then he asked him/ her to re-think his/her answers. Second, the researcher asked the student to justify his/her answers, paying attention to the understanding of the tasks demand. Third, the interviewer asked the student to explicitly relate the two tasks (1) establishing the relationship between the Source and the target, (2) Selecting the correct equations to solve the target) with the help of the Source solving explanation (provided in the booklet). In case students did not understand and the incoherent answers remained, he would explain the correct solution to the student step by step. He would stop the explanation when the student understood and expressed it explicitly. After assuring the student's full understanding, the interview finished.

Protocols were independently analysed by two researchers and the occasional discrepancies were resolved by discussion.

### **6.2.6 Statistical analyses**

We contrasted our hypotheses using statistical tests. Our quantitative variables were not of interval nature or were not normally distributed according to the Kolmogórov-Smirnov test. Therefore, we used non-parametric test to contrast our hypotheses. In particular we used the Mann-Whitney  $U$ -statistics for independent groups and the Wilcoxon  $Z$ -statistics for paired groups. Finally, for correlations we used the Spearman's rho ( $\rho$ ).

## 6.3 Results

### 6.3.1 Structural similarities and differences detected by students

We analysed the extent to which participants correctly declared the similarity or the difference between each target problem structure and the Source problem structure. We studied the variable *Number of correct structural comparisons* (values 0, 1, 2, 3, 4). Familiarity had a significant main effect. In the low Familiarity condition students found more difficulties to detect the correct structural relationship between the target and the source problems than in the high Familiarity condition ( $MIF = 1.56$ ;  $MhF = 2.30$ ; Mann-Whitney  $U = 2852.0$ ;  $p < .001$ ). The Instructional-Delay had a non-significant effect ( $p > .1$ ).

### 6.3.2 Familiarity and instructional effects on the equations

Table 1 shows the proportion of correct equations in each of the target problems in both Familiarity conditions. Table 2 shows the same proportions for the recently or not recently instructed students.

**Table 1**

*Proportion of Correct Equations Chosen in each Target Problem in both Familiarity Conditions*

	Equivalent	Similar	Isomorphic	Related
Familiarity Low	.81	.58	.72	.70
Familiarity High	.88	.73	.86	.77
Total	.85	.66	.79	.74

**Table 2**

*Proportion of Correct Equations Chosen in each Target Problem in the Instructional-Delay Conditions*

	Equivalent	Similar	Isomorphic	Related
Recently instructed	.83	.59	.84	.76
Not recently instructed	.86	.72	.74	.71

All the target problems in the low Familiarity condition obtained significantly lower proportions of success than the corresponding problems in the high Familiarity condition (see Table 1). Non-parametric Mann-Whitney test showed that this main effect was significant ( $U = 3631.0$ ;  $p = .004$ ). We did not find any interaction of this factor with other factors ( $p > .1$ ).

The Instructional Delay factor did not produce a significant main effect ( $p > .1$ ).

When we considered the variable *Number of correct equations* selected in the four target problems (values 0, 1, 2, 3, 4), the Familiarity produced again significant differences ( $U = 3657.5$ ;  $p = .005$ ). Instructional-Delay had non-significant effects as before ( $p > .8$ ).

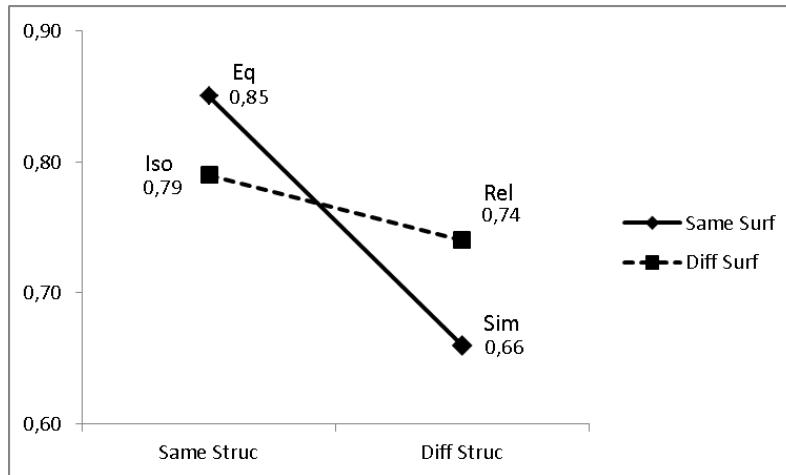
### **6.3.3 Effects from surface and structural similarities on the equations**

Non-parametric Wilcoxon paired test showed a significant main effect from the Structure factor ( $Z = -4.019$ ;  $p < .001$ ): the Similar and Related problems, with different structure than the Source, obtained a significant lower success ( $MdS = .70$ ) than the Equivalent and the Isomorphic, with the same structure as the Source ( $MdS = .82$ ).

The Surface factor did not produce a significant main effect ( $p > .1$ ).

Interestingly enough, the proportion of correct equations in the Similar was lower than the one in the Related (see Table 1) but the proportion in the Equivalent was

higher than the one in the Isomorphic. Wilcoxon paired test showed a significant Surface X Structure interaction effect: the Equivalent-Similar differences were significantly higher than the Isomorphic-Related differences ( $MES = .19$ ;  $MIR = .06$ ;  $Z = -2.382$ ;  $p = .017$ ). Figure 2 shows this interaction effect.

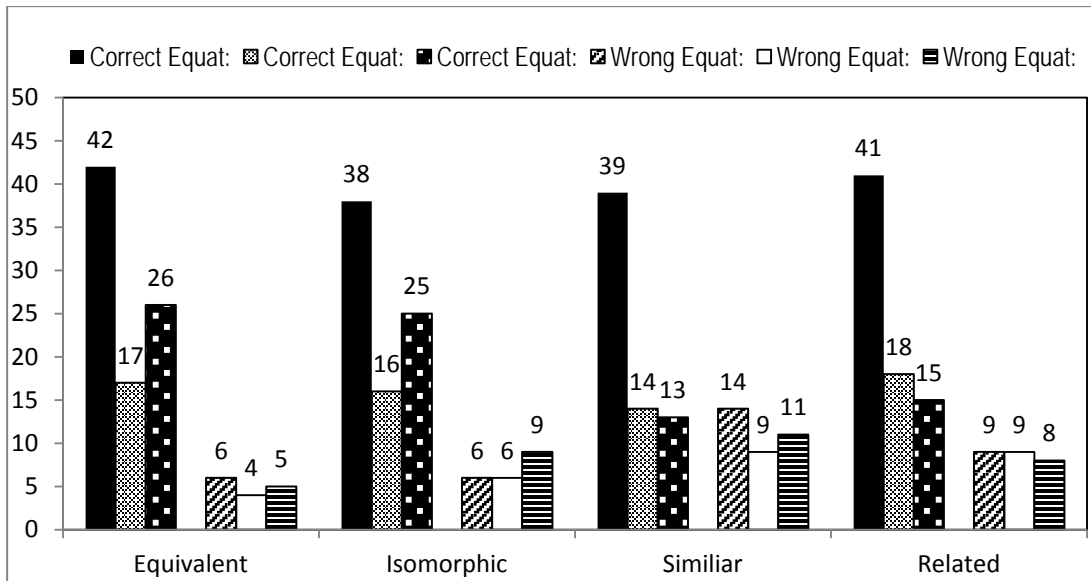


**Figure 2.** Proportion of correct equations to solve the target problems. A Surface X Structure interaction effect is shown.

### 6.3.4 Relationship between structural comparisons and correct equations

There was an association between detecting the correct structural relations and choosing the correct equations in the target problems. The variable *Number of correct structural comparisons* had a significant correlation with the variable *Number of correct equations* (Spearman's  $\rho = .490$ ;  $p < .001$ ).

However, a significant amount of participants who did not detect the correct structural association between problems were also able to choose the correct equations for the target problems. A percentage of 66% of the participants established a wrong structural relation with the Source problem for two or more target problems. The remaining 34% declared a correct structural relation for three target problems (13%) or for four target problems (21%).



**Figure 3.** Percentage of participants perceiving Target-Source analogies or differences and choosing the correct/ wrong equations.

We studied the association between the perceived Target-Source relationship and the correctness of the equations chosen. Figure 3 shows this association in each target problem.

In order to deeply study the students' thoughts we conducted semi-structured interviews with a subgroup of ten students in the low Familiarity condition. We focused on the Isomorphic and the Similar target problems as a first approach. From the analysis of students' protocols we provisionally defined three main categories: a) the SM representation and the PM representation are disassociated; the relationship between problems is established from surface features (6 out of 10 cases); b) the algebraic translation process is not understood: the relationship between problems is established from surface features and the students tend to do *negative transfer* (2 out of 10 cases); c) Lack or attention of effort: the student is aware of his/ her inconsistencies or wrong answers and correct them in the interview (2 out of 10 cases). Record 1 shows excerpts from interviews corresponding to categories (a) and (b).

**Chart 2**

*Classification of Students' Behaviour in the Interviews*

---

Cases and information segments from the interviews

---

(a) *Case 4: This student constructed the analogy between the Source and the target problems based on the type of magnitude present (i.e. pressure or length). She chose the options “both problems have to be solved using different equations because they both have different quantities” and “both problems have to be solved using different equations because they both have different relations among quantities” when she compared the Similar to the Source problem in task 1. However, she chose the correct equations in both the Isomorphic and the Similar target problems.*

I: Good morning! (...). Could you please re-think these tasks?

S: *(Re-reading the Isomorphic and comparing it to the Source)* Both problems have different quantities and also different relations among quantities.

I: Do you think so? Ok. You think the relations among quantities in both problems are different.

Hence, why did you select the same equations to solve both problems (*Source and Isomorphic*)?

S: Because they are the logical equations.

I: I see... Concerning the quantities themselves, do you still think they are different in both problems?

S: Yes, they have different quantities because here (*referring to the target*) there is micra but here (*referring to the Source*) there is milibar.

(b) *Case 7: This student selected the same equations for the Source, the Isomorphic and the Similar problems (negative transfer). However, she chose the option “both problems have to be solved using different equations because they both have different relations among quantities” in task 1.*

I: Good afternoon! (...). Please, consider this target problem (*the Isomorphic target problem*). What do you think about this option in task 1: “both problems have to be solved using the same equations because both have the same relations among quantities”?

S: I don't agree. The relations among quantities are not the same (*in the Source and the Isomorphic target problems*). Quantities in one problem are micras but in the other problem quantities are milibars.

I: Ok. Now please compare the statements of these two problems (*the Source and the Similar*). Do you find any differences between them?

S: (*She reads both statements*). I do not notice any difference.

I: Please, re-read them again slowly.

S: (*After reading again*) Oh yes! In one problem (*the Similar*) pressure is decreasing in one of the tanks but in the other problem (*the Source*) pressure is increasing in the two tanks.

I: Then, what does it mean? Are there any consequences for the equations?

S: I don't know.

(*The student does not change the wrong equations in the Similar target problem*)

---

*Note: “S” stands for “Student” and “I” stands for “Interviewer”.*

---



### 6.3.5 Surface interferences in the detection of structural similarities

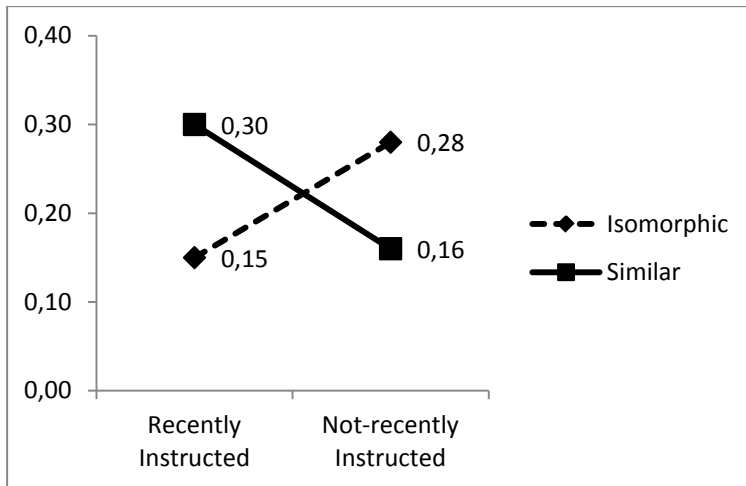
We focused our attention on particular errors committed in two of the target problems: the Isomorphic (different surface implying different equations compared to the Source) and the Similar (negative transfer).

We analysed the number of specific errors in these two target problems (Isomorphic and Similar) considering the Familiarity (low/ high) and the Instructional-Delay (recently instructed/ not-recently instructed) as the independent factors.

There was a main effect of Familiarity. In the low Familiarity condition students committed a significant higher number of the considered errors than in the high Familiarity condition ( $MIF = .31$ ;  $MhF = .15$ ;  $U = 3562.5$ ;  $p = .001$ ).

We found a Target X Instructional Delay interaction effect. In the Isomorphic, the recently instructed students committed fewer errors than the not-recently instructed students, whereas in the Similar the recently instructed students committed more errors than the not-recently instructed students. Mann-Whitney test indicated that these differences were significant ( $U = 3604.5$ ;  $p = .001$ ). Figure 4 depicts this interaction effect.

In the Similar, not detecting/ detecting the structural differences with the Source was significantly associated to doing/ not doing *negative transfer* ( $X^2(df = 1; N = 150) = 17.128$ ;  $p < .001$  ). Only 4.5 per cent of the participants who correctly detected the structural differences made negative transfer. In the Isomorphic, there was also a significant association between correctly detecting the structural similarity and not choosing a wrong equation ( $X^2(df = 1; N = 157) = 7.171$ ;  $p = .007$ ). Only 10.1 per cent of students who correctly detected the structural similarity chose wrong equations in this problem.



*Figure 4.* Proportion of errors due to surface interferences in structural analogies between the Source problem and the Isomorphic and Similar target problems. A significant Target X Instruction interaction effect is shown. Familiarity conditions have been collapsed.

## 6.4 Discussion

### 6.4.1 Goal 1 and hypothesis 1

Familiarity with the context of the problems had the expected effects: when the events and objects were not familiar to the students, they had more difficulties to detect the structural analogies/ differences between the problems. Not only is the similarity between the solved and the proposed problems important, but also the context in which the problematic situation is placed. This effect can be explained using the psychological reading comprehension model by Kintsch and colleagues (op. cit.). A problem statement is a short text and many inferences are needed to build the Situation Model. This representation is previous to the abstract Problem Model representation, which includes the algebraic structure. The less the solver's experience with certain objects, attributes and events in the ordinary world, the poorer their knowledge about these objects and events. Therefore, the corresponding Situation Model representation will be poorly constructed and this will affect the Problem Model representation diminishing problem-solving success. Hypothesis H1 received support from our data.

### 6.4.2 Goal 2 and hypotheses 2 and 3

The number of correct equations chosen by students to solve the target problems was an indicator of students' algebraic success. In our sample the global percentage of wrong equations was moderate (about 24%). Thus, most students differentiated surface from structural similarities properly. However, there were interesting differences among problems. The percentage of participants choosing incorrect equations in the Isomorphic problem was low, about 21%, but the percentage of students choosing incorrect equations in the 'Similar' problem was higher, about 34%.

Once mapping concepts has been done, the correct Problem Model for the Isomorphic is achieved even without doing the algebraic translation process (see Appendix). Thus, many students could succeed in choosing the equations in the Isomorphic without deep understanding of the algebraic translation process. This situation cannot happen in the Similar or the Related problems. Mapping concepts from the Source problem is not enough to achieve the appropriate PM in these problems due to the semantic differences with the Source. Therefore, students would obtain less success in the Similar and the Related. This is the significant effect from the Structure factor we found in our data.

However, the Similar obtained lower proportions of students' success in the equation than the Related, although the latter had not only different structure but also different surface than the Source. This is not a trivial result and is in line with Novick's (1988) findings about novices' behaviour solving verbal problems. In a previous study the same non-trivial effect was obtained (Gómez et al., 2012) but it was significant only for the high Familiarity problems. In the present experiment with a greater statistical power, the effect is replicated and it also appears in the low Familiarity condition. It seems that surface similarities can hide structural differences as Reeves and Weisberg (1994) pointed out from psychological grounds. Their claim becomes a reality in algebraic verbal problem-solving by analogy.

Therefore, Hypothesis H2 received support.

More than 65% of the participants failed to establish the correct structural relationship between two or more target problems, i.e. failed to construct the

corresponding analogies. Substantial percentages of students mentioned surface features to relate problems. Thus, it was not easy for them to correctly detect structural analogies or differences. In our sample, 31% of the participants detected the correct structural relation and also chose the correct equations for most target problems, no matter their surface and structural relation with the Source problem. These students seemed to be able to abstract and use an algebraic general schema, perhaps recovered from their long term memory or constructed along the experiment by target comparison (Kurtz & Loewenstein, 2007). The detection of structural similarity between problems consulting a solved example (task 1) seemed to help students to identify important features for choosing the correct equations (task 2) in a similar way helping students to better identify the goal improved success in question answering (Llorens & Cerdán, 2012) consulting a text. The number of target problems in which a correct structural comparison to the Source problem was made correlated with the number of correct equations chosen, as expected. Both the number of correct structural comparisons and the number of correct equations chosen were affected by the Familiarity with the problem contexts. If we take into account the three variables together a logical picture appears: the Familiarity seems to affect the number of correct structural comparisons between each target problem and the source problem, and in turn, the number of correct structural comparisons seems to affect the number of correct equations selected by participants for each target problem.

Therefore, Structure comparison was a good predictor of equation success in our experiment, but not the other way round, i.e. structure comparison was an almost sufficient condition but not a necessary condition for equation success. Building a Gentner's analogy between problems seemed not to be essential for many students to recognize the correct equations. Hence, our hypothesis H3 received only partial support.

There was a particular subgroup of students with a low level of correct detection of structural similarities or differences (0-2 correct structural detections) but with a high level in the selection of correct equations (3-4 correct equations). In our sample, 37% of the participants showed this behaviour. As we offered 3 options for the equations, 1/3 of the success is possible at random. Taking this possibility into account, there

could even be 25 per cent of the participants in the aforementioned situation. Thus, some successful students differentiated the correct equations from the wrong options without paying attention to structural relations.

Additional data from the interviews also suggested the disassociation between problem analogies at Situation Model mental representation and the Problem Model (algebraic) mental representation in some students. These students seemed to solve new problems by algebraic translation and not by analogical transfer. Hence, students which were able to select the correct equations without making correct structural analogy activated and correctly used a suitable algebraic schema without building explicit analogies with previous solved problems.

### **6.4.3 Goal 3**

We had no clear expectations about the instructional effects, beyond the trivial ones (the more instruction received the better the learning results). Interestingly, the recently instructed students tended to erroneously transfer the algebraic structure from the Source problem to other non-isomorphic problems more than the not-recently instructed students; on the contrary, the not-recently instructed students tended to erroneously avoid transferring the algebraic structure from the ‘source’ problem to the isomorphic problem more than the recently instructed students. Taking into account the usual teaching procedure (working out isomorphic examples), it is not a surprising result. The notrecently instructed students found more surface difficulties and were less able to construct structural analogies between isomorphic problems or between non-isomorphic problems. After the instruction, students seemed to become overconfident believing that every proposed problem would be isomorphic to the problem the teacher had solved first (negative transfer). The recent instruction seemed to provoke some kind of *Priming* effect so students tended to see every proposed problem as an isomorph of the previous solved example.

#### **6.4.4 Limitations of this study and open problems**

This study has some limitations. First, we focused on a specific type of problems: those containing just two linear equations. Although this kind of problems is very frequent in several science subjects, there are other interesting problems. Second, in order to simplify our study and to be as close as possible to the classroom practices, we chose well-defined problems instead of ‘open’ or ‘ill-structured’ problems. ‘Ill-structured’ problems could produce a greater variability in students’ strategies, so generating richer data about students’ reasoning in problem-solving, in particular about transfer. Third, students’ reasoning will be analysed in a deeper detail in a future study, considering the four target problems and the two Familiarity conditions. More students have to be interviewed and the provisional categories defined here have to be reconsidered.

#### **6.4.5 Educational consequences**

Therefore, taking into account these limits and being cautious due to the lack of external validity, some educational consequences could be derived from the results.

1.-First, the instruction based on analogical transfer in problem solving, i.e. solving examples and then proposing working out problems which are isomorphic with the previously solved examples, gives good results and most students learn properly. However, the usual instruction based on solving isomorphic problems could let students to an overuse of negative transfer. Problems having different structures should also be compared in the classroom to foster the abstraction of problem schemata.

2.-Students could find difficulties to be aware of structural differences when problems share surface features because surface features are first perceived. Teachers should not suppose that students are able to filter out irrelevant surface details and focus on relevant algebraic information. Constructing analogies between problems is an important solving strategy that can be taught in the classroom. Analogies and differences teachers easily perceive between problems could not be evident for students (Oliva, 2004). In fact, the solving strategies teachers declare to teach and those strategies students

perceive are being taught to them, could not match (Caño, Román, & Foces, 2000). It seems interesting to focus on explicit structural comparisons because this strategy helps generalization processes. Having abstract and general problem schemata at hand is the best way to avoid surface interferences, when there are surface differences but structural analogies as well as when there are surface similarity but structural differences. Vertical transfer should also be taught (Rebello, Cui, Bennet, Zollman, & Ozimek, 2007) in the classroom. Instructional procedures based on the algebraic translation (Puig, 1998; Sanjosé et al., 2009) have proven to be useful for that educational goal.

3.-Teachers should not identify correct problem solving with having an algebraic schema in mind. Some novice students learn to solve algebraic problems without being aware of structural analogies or differences among them. These students seem to base their performance on the use of particular cases, making the changes they need to adapt the case to the present example.

4.-When students work on unfamiliar contexts, such as it is the case of most Science subject matters, detecting structural analogies or differences becomes more difficult. Perhaps the unfamiliar contexts would decrease students' motivation to the task (Fernández, Anaya, & Suárez, 2012), so decreasing their attention and success. Perhaps the abstract mental representation is obstructed by a poor concrete mental representation built from the problem statement. Thus, even when the surface and structural relationship among problems is preserved, changing the context could diminish students' understanding. Instructional sequences from familiar contexts to less familiar ones seem to be recommendable.

## References

---

Bassok, M., & Holyoak, K. J. (1989). Interdomain transfer between isomorphic topics in algebra and physics. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition*, *15*, 153-166. doi: 10.1037//0278- 7393.15.1.153

Bernardo, A. B. I. (2001). Analogical problem construction and transfer in mathematical problem solving. *Educational Psychology*, *21*(2), 137-150. doi:10.1080//01443410124314

Caño del, M., Román, J., & Foces, J. (2000). Estrategias de aprendizaje de las matemáticas: enseñanza explícita vs. enseñanza implícita y estilos de solución de problemas. *Revista de Psicodidáctica*, *5*, 47-58.

Fernández, A. P., Anaya, D., & Suárez, J. M. (2012). Motivation features and motivational self-regulatory strategies in middle-school students. *Revista de Psicodidáctica*, *17*(1), 95- 111.

Forbus, K. D., Gentner, D., & Law, K. (1995). MAC/FAC: A model of similarity-based retrieval. *Cognitive Science*, *19*, 141-205. doi: 10-1016/0364-0213(95)90016-0

Gentner, D. (1983). Structure-mapping. A theoretical framework for analogy. *Cognitive Science*, *7*, 155-170. doi: 10.1016/S0364-0213(83)80009-3

Gick, M. L., & Holyoak, K. J. (1983). Schema induction and analogical transfer. *Cognitive Psychology*, *15*, 1-38. doi: 10.1016/0010- 0285(83)90002-6

Gil, D., & Martínez-Torregrosa, J. (1983). A model for problem-solving in accordance with scientific methodology. *European Journal of Science Education*, *5*(4), 447-455.



Gil, D., Furió, C., Valdés, P., Salinas, J., Martínez-Torregrosa, J., Guisasola, J., González, E., Dumas-Carré, A., Goffard, M., & Pessoa, A. M. (1999). ¿Tiene sentido seguir distinguiendo entre aprendizaje de conceptos, resolución de problemas de lápiz y papel y realización de prácticas de laboratorio?. *Enseñanza de las Ciencias*, 17(2), 311-320.

Gómez, C., Solaz-Portolés, J. J., & Sanjosé, V. (2012). Efectos de la similitud superficial y estructural sobre la transferencia a partir de análogos en problemas de alta y baja familiaridad: primeros resultados. *Enseñanza de las Ciencias*. Aceptado para su publicación.

Hammer, D., Elby, A., Scherr, R., & Redish, E. (2005). Resources, framing and transfer. In J. Mestre (Ed.), *Transfer of learning from a modern multidisciplinary perspective* (pp. 89- 119). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Holyoak, K. J. (1984). Analogical thinking and human intelligence. In R. J. Sternberg (Ed.), *Advances in the psychology of human intelligence* (Vol. 2) (pp. 199-230). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Holyoak, K. J., & Koh, K. (1987). Surface and structural similarity in analogical transfer. *Memory & Cognition*, 15(4), 332-340. doi: 10.3758/BF3197035

Hummel, J. E., & Holyoak, K. J. (1997). Distributed representations of structure: A theory of analogical access and mapping. *Psychological Review*, 104, 427-466. doi: 10.1037//0033.295X.104.3.427

Kintsch, W. (1998). *Comprehension: a paradigm for cognition*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Kintsch, W., & Greeno. J. (1985). Understanding and solving word arithmetic problems. *Psychological Review*, 92(1), 109-129. doi: 10.1037//0033-295X.92.1.109

Kintsch, W., & van Dijk, T. A. (1978). Toward a model of discourse comprehension and production. *Psychological Review*, 85, 363-394. doi: 10.1037//0033-295X.85.5.363

Kurtz, K. J., & Loewenstein, J. (2007). Converging on a new role of analogy in problem solving and retrieval: when two problems are better than one. *Memory & Cognition*, 35(2), 334-341. doi: 10.3758/BF03193454

Llorens, A. C., & Cerdán, R. (2012). Assessing the Comprehension of Questions in Task-Oriented Reading. *Revista de Psicodidáctica*, 17(2) (preprint). Retrieved May 14th, 2012 from: <http://www.ehu.es/ojs/index.php/psicodidactica/article/view/4496/5808>

Mestre, J. (2003). Transfer of learning. Issues and research agenda. (National Science Foundation Report #NSF03- 212). Retrieved Mars 5th, 2012 from: <http://www.nsf.gov/pubs/2003/nsf03212/nsf03212.pdf>

Nathan, M., Kintsch, W., & Young, E. 1992. A Theory of Algebra-Word-Problem Comprehension and Its Implications for the Design of Learning Environments. *Cognition and Instruction*, 9(4), 329-389. doi: 10.1207/s1532690xci0904\_2

Newell, A., & Simon, H.A. (1972). *Human Problem Solving*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Novick, L. (1988). Analogical transfer, problem similarity, and expertise. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition*, 14, 510-520. doi: 10.1037//0278- 7393.14.3.510

Oliva, J. M. (2004). El pensamiento analógico desde la investigación educativa y desde la perspectiva del profesor de ciencias. *Revista electrónica de Enseñanza de las Ciencias*, 3(3), Artículo 7. Retrieved July 1, 2007, Disponible online en: [www.saum.uvigo.es/reec/volumenes/volumen3/Numero3/ART7\\_VOL3\\_N3.pdf](http://www.saum.uvigo.es/reec/volumenes/volumen3/Numero3/ART7_VOL3_N3.pdf).

Polya, M. (1957). *How to solve it*. (2nd Ed.). New York: Doubleday.

Puig, L. (1998). Poner un problema en ecuaciones. Consultado el 2 de abril de 2008 en: <http://www.uv.es/puigl/ppe.pdf>.

Rebello, N. S., Cui, L., Bennet, A. G., Zollman, D. A., & Ozimek, D. J. (2007). Transfer of learning in problem solving in the context of mathematics and physics. In D. Jonassen (Ed.), *Learning to solve complex scientific problems* (pp. 223-246). Hillsdale, N. J.: Lawrence Earlbaum.

Reed, S. K. (1987). A structure-mapping model for word problems. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition*, *13*, 124-139. doi: 10.1037//0278-7393.13.1.124

Reed, S. K., Dempster, A., & Ettinger, M. (1985). Usefulness of analogous solutions for solving algebra word problems. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition*, *11*, 106-125. doi: 10.1037//0278-7393.11.1.106

Reeves, L. M., & Weisberg, R. W. (1994). The role of content and abstract information in analogical transfer. *Psychological Bulletin*, *115*, 381-400. doi: 10.1037//0033-2909.115.3.381

Sanjosé, V., Solaz-Portolés, J. J., & Valenzuela, T. (2009). Transferencia inter-dominios en resolución de problemas: una propuesta instruccional basada en el proceso de “traducción algebraica”. *Enseñanza de las Ciencias*, *27*(2), 169-184.

Vidal-Abarca, E., & Sanjosé, V. (1998). Levels of comprehension of scientific prose: the role of text variables. *Learning and Instruction*, *8*(3), 215-233. doi: 10.1016/S0959-4752(97)00020-0

## Appendix

---

### *Source/Similar Problem (Low Familiarity condition):*

---

Consider two identical tanks A and B to store gas. These tanks are connected to identical thermal devices to transfer heat or to extract heat from the gas they store. Initially, the internal pressure of gas in tank A is 2000 milibar higher than the pressure of gas in tank B. Then, both thermal devices are switched on at the same time and heat is transferred to A and to B. Pressure in A **increases/decreases** at a ratio of 20 milibar/kcalorie, and pressure in B increases at a ratio of 30 milibar/kcalorie. How much heat does it have to be transferred to A and also to B until their internal pressures are the same? (*One milibar is a pressure unit*).

---

### *Source/Similar Problem (High Familiarity condition):*

---

Consider two identical swimming pools A and B. Initially, swimming pool A contains 2000 l of water more than swimming pool B. Then, water starts to enter in both swimming pools at the same time. The quantity of water in A **increases/decreases** at a ratio of 20 l/min, and the quantity of water in B increases at a ratio of 30 l/min. How long will it take until there is the same quantity of water in both swimming pools?

---

We offered students the following options:

(a)  $y_1 = y_2 + 2000 - 20 x$   
 $y_2 = y_2 + 30 x$

(b)  $y_1 = y_2 + 2000 + 20 x$   
 $y_2 = y_2 + 30 x$

(c)  $y_1 = y_1 + 20 x$   
 $y_2 = y_1 + 2000 + 30 x$

*Note:* Option (b) is the correct one for the Source, the Equivalent and the Isomorphic problems. Option (a) is the correct one for the Similar and the Related problems. Option (c) was wrong in any target problem. In each Familiarity condition, the Equivalent (the Isomorphic) problem can be related to the Source problem by simply mapping the concepts, as indicated in Chart 3. Thus, all the relational predicates in the Source are also valid in the Equivalent (the Isomorphic). Of course, the Related can also be associated to the Similar by mapping concepts in the same way shown in Chart 3

### Chart 3

*Relationship between the Source problem and the Equivalent or the Isomorphic target problems according to Gentner's theory. Concepts in the low Familiarity condition (Scientific context) have been highlighted*

Target problema	Mapping from Source to Target problem	Gentner's comparison
Equivalent	Gas → Gas Tank <sub>1,2</sub> → Balloon <sub>1,2</sub> Water → Milk Swimming pool <sub>1,2</sub> → Tank <sub>1,2</sub>	Literal Similarity → same Surface and same Structure
Isomorphic	Gas → Metal bars Pressure → Length Milibar → Micra Water → Money Swimming pool <sub>1,2</sub> → Saving account <sub>1,2</sub> Volume → Balance Litre → Euro Minute → Week	Full Analogy → different Surface but same Structure

**Chart 4**

*Propositions representing the semantic content in the Situation Model for the Sourceproblem (S) in the Low Familiarity condition.*

Source problem	Concepts in the Isomorphic and Related problems	Source problem (cont.)	Propositions different in the Similar/ Related problems
C1S: Heat	C1Iso: Heat	P6S-a: LABEL(P5S-a, x, y <sub>1</sub> )	
C2S-a: Gas-Tank-1	C2Iso: Metal Bar-1	P6S-b: LABEL(P5S-b, x, y <sub>2</sub> )	
C2S-b: Gas-Tank-2	C3Iso: Metal Bar-2	P7S: TIME(initial)	
C3S: Pressure	C3Iso: Length	P8S: VALUE(x, IN(P7S), 0)	
C4S: milibar/Kcalorie	C4S: micra/Kcalorie	P9S-a: LABEL(P5S-a, x=0, y <sub>10</sub> )	
P1S-a: TRANSFER(device, heat)		P9S-b: LABEL(P5S-b, x=0, y <sub>20</sub> )	
P1S-b: EXTRACT(device, heat)		P10S: EQUAL-TO(y <sub>10</sub> , y <sub>20</sub> + 2000)	
P2S: OR(P1S-a, P1S-b)			
P3S-a: TRANSFER-TO(heat, C2S-a)		P11S-a: INCREASE(y <sub>1</sub> )	P11Sim-a: DECREASE(y <sub>1</sub> )
P3S-b: TRANSFER-TO(heat, C2S-b)			
INF1S: EQUAL-TO(P3S-a, P3S-b)		P11S-b: INCREASE(y <sub>2</sub> )	
P4S-a: LABEL(P3S-a, x)		P12S-a: RATIO(P11S-a, 20 milibar/Kcalorie)	
P4S-b: LABEL(P3S-b, x)		P12S-b: RATIO(P11S-b, 30 milibar/Kcalorie)	
P5S-a: IN(C2S-a, pressure)		P13S: EQUAL-TO(y <sub>1</sub> , y <sub>2</sub> )	
P5S-b: IN(C2S-b, pressure)		P14S: VALUE(x, x <sub>p</sub> )	
INF2S: DEPEND-ON(pressure, x)		P15S: CAUSE(x <sub>p</sub> , P13S)	
		P16S: DETERMINE(x <sub>p</sub> )	

**Note:** Concepts (C) which are different in Isomorphic (Iso) and the Related problems, and also the relational predicate (P11-a) which is different in the Similar (Sim) and Related problems, have been highlighted. INF stands for inference.

The Similar and the Related problems include semantic differences with respect to the Source problem. These differences imply differences in the Situation

Model and then also differences in the Problem Model. Chart 4 shows most of the propositions representing the semantic content in the Source statement, and the differences with target problems.

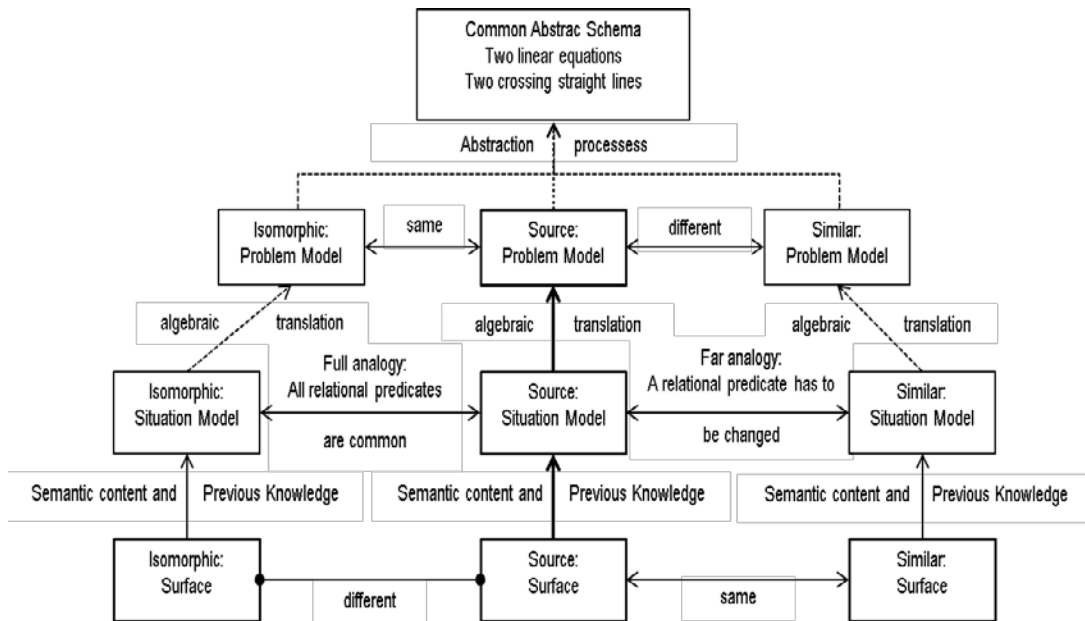
In order to build the Problem Model representation from the Situation Model, an algebraic translation process has to be implemented. This process produces the semantic content in the Problem Model representation from the semantic content in the Situation Model representation. Clear differences between the Source and the Similar/ Related problems are obtained at this PM level from differences at the SM level. Chart 5 shows the main propositions in the PM for the Source and the Similar problems. Inferential processes have been represented by arrows.

### Chart 5

*Source and Similar/Related problems in the high Familiarity condition:  
Propositions representing the semantic content in the Problem Model after algebraic translation from the Situation Model. Not all the possible propositions have been included. INF stands for inference.*

Source Problem	Similar/ Related Problem
P11S-a & P12S-a →	P11Sim-a & P12S-a →
INF3S-a: VALUE(INCREASE( $y_1$ ), $x$ , $20x$ )	INF3Sim-a: VALUE(DECREASE( $y_1$ ), $x$ , $20x$ )
P6S-a & INF3S-a →	P6S-a & INF3Sim-a →
INF4S-a: EQUAL-TO( $y_1$ , $y_{10} + 20x$ )	INF4Sim-a: EQUAL-TO( $y_1$ , $y_{10} - 20x$ )
P10S & INF4S-a →	P10S & INF4Sim-a →
INF5S: EQUAL-TO( $y_1$ , $y_{20} + 2000 + 20x$ )	INF5Sim: EQUAL-TO( $y_1$ , $y_{20} + 2000 - 20x$ )
P11S-b & P12S-b →	
INF3S-b: VALUE(INCREASE( $y_2$ ), $x$ , $30x$ )	
P6S-b & INF3S-b →	
INF4S-b: EQUAL-TO( $y_2$ , $y_{20} + 30x$ )	
P13S & P15S & INF5S & INF4S-b →	P13Sim & P15Sim & INF5Sim & INF4Sim-b →
INF6S: EQUAL-TO( $y_{20} + 2000 + 20x_p$ , $y_{20} + 30x_p$ )	INF6Sim: EQUAL-TO( $y_{20} + 2000 - 20x_p$ , $y_{20} + 30x_p$ )
INF7S: P16S & INF6S → PERFORM( $x_p = 2000 / (30 - 20)$ )	INF7Sim: P16Sim & Inf6Sim → PERFORM( $x_p = 2000 / (30 + 20)$ )

**Diagram 1** summarizes the comparison of the Source, the Isomorphic and the Similar problems at different levels of mental representation (the cases of the Equivalent and the Related target problems can be easily inferred).



**Diagram 1.** Relationship between the Source problem and the Isomorphic or the Similar problems at Surface, Situation Model, Problem Model and Abstract Schema levels. Dark lines show the explicit information given to the students.



# Anexo II

Materiales y producciones de los estudiantes  
correspondientes a los capítulos 5 y 6.

---



## **II.1 Materiales utilizados en la prueba de transferencia. Condición de ‘Alta Familiaridad’.**

**Nombre:** ..... **Edad:** .....

### **INSTRUCCIONES**

Esta prueba pertenece a una investigación del departamento de didáctica de las ciencias experimentales de la Universidad de Valencia y tiene como último fin mejorar el proceso de enseñanza–aprendizaje en la resolución de problemas.

El siguiente cuadernillo consta de seis hojas. En la segunda hoja encontrarás un problema resuelto completamente y explicado paso a paso. Este problema es el eje de la prueba y le llamamos “problema-ejemplo”. Después de haberlo leído y comprendido, pasaremos a las 4 hojas siguientes que contienen cuatro problemas relacionados con el anterior “problema-ejemplo”. En cada una de esas hojas siguientes encontrarás el enunciado de un problema sin resolver y tendrás que realizar dos tareas sobre ese problema en cuestión. El primero de estos problemas, servirá como práctica para los otros tres.

La primera tarea se refiere al grado de ayuda que el problema-ejemplo te ofrece si tuvieras que resolver el problema en cuestión. En la segunda tarea debes escoger el sistema de ecuaciones correcto para resolver el problema entre tres opciones que te ofrecemos. Sólo una de las opciones es correcta. Para elegir, fíjate bien en las cantidades, en sus signos y en el papel que juegan esas cantidades en las ecuaciones.

Puedes consultar el problema-ejemplo tantas veces como sea necesario a lo largo de la prueba. También puedes realizar cálculos en una hoja en blanco a parte, la cual no recogeremos. Es decir, sólo recogeremos el cuadernillo con las tareas realizadas.

Ahora vas a realizar el problema de práctica.

Pregunta AHORA TUS DUDAS.

**Muchas gracias por tu colaboración!!!!**

### PROBLEMA-EJEMPLO

Dos piscinas A y B almacenan agua en dos chalets diferentes. Inicialmente la piscina A contiene 2000 l más que la B. Entonces comienzan a llenarse ambas piscinas, A y B al mismo tiempo. La cantidad de agua en A va aumentando a razón de 20 l/min, y la cantidad de agua en B va aumentando a razón de 30 l/min. ¿Qué tiempo tendrá que pasar hasta que ambas piscinas tengan la misma cantidad de agua?

Cada piscina se llena a un ritmo constante que viene dado por la cantidad de litros que entran cada minuto. En la primera piscina, entran 20 litros cada minuto (20 l/min). En la segunda piscina entran 30 litros cada minuto (30 l/min).

1.-Elegimos las variables. Llamamos “x” al tiempo que pasa; denominamos “ $y_A$ ” a la cantidad de agua en la piscina A; llamamos “ $y_B$ ” a la cantidad de agua en la piscina B. Al principio, las cantidades de agua en A y en B las llamaremos “ $y_{A0}$ ”, “ $y_{B0}$ ”.

La cantidad de agua final debe ser la misma:  $y_A = y_B$ . Sin embargo, cantidad inicial de agua no es la misma en ambas piscinas:  $y_{A0} = y_{B0} + 2000$ .

2.-Si en A entran 20l de agua cada minuto, “20x” es la cantidad de litros de agua que entrarán en A cuando pasen “x” minutos. En B entrarán “30x” litros cada minuto.

3.-En cada momento, la cantidad de agua en una piscina es la suma de la cantidad inicial y de la que ha entrado durante el tiempo “x” que ha transcurrido. Entonces:

$$y_A = y_{A0} + 20x = (y_{B0} + 2000) + 20x \text{ ecuación 1.}$$

$$y_B = y_{B0} + 30x \text{ ecuación 2.}$$

$$\text{Resolvamos: } y_A = y_B \text{ implica } (y_{B0} + 2000) + 20x = y_{B0} + 30x \rightarrow 2000 = 30x - 20x \rightarrow 2000 = 10x$$

Por tanto:  $x = 200$  minutos.

Dos depósitos A y B almacenan leche en una industria láctea. Inicialmente el depósito A contiene 2000 l más que el B. Entonces comienzan a llenarse ambos depósitos, A y B al mismo tiempo. La cantidad de leche en A va aumentando a razón de 20 l/min, y la cantidad de leche en B va aumentando a razón de 30 l/min. ¿Qué tiempo tendrá que pasar hasta que ambos depósitos tengan la misma cantidad de leche?

**Tarea 1.-** Imagina que tienes que resolver este problema. En tu opinión, este problema y el ejemplo resuelto de la pag 2 (por favor, marca con una X solo una opción):

<p><b>Se resuelven igual porque ambos problemas tienen...</b></p>	-El mismo tema con los mismos objetos y sucesos.	
	-Las mismas cantidades.....	
	-Iguales todas las relaciones entre cantidades.....	

<p><b>No se resuelven igual porque ambos problemas tienen...</b></p>	-Diferente tema con diferentes objetos y sucesos..	
	-Diferentes cantidades.....	
	-Diferente alguna relación entre cantidades.....	

De acuerdo con el parecido que tienen ambos problemas, **califica entre 0 y 10 el grado de ayuda que puede suponer el problema ejemplo resuelto de la pag 2: '0'= no sirve de ayuda para nada. '10'= ayuda completamente. Grado de ayuda**

**Tarea 2.-** Toma la hoja en blanco e intenta plantear las ecuaciones que resuelven este problema. Si lo deseas, puedes consultar el ejemplo resuelto de la pag 2.

De entre los siguientes sistemas de ecuaciones, ¿cuál es el que resuelve correctamente este problema? Marca la opción correcta (Sólo una es correcta).

(a) $y_A = (y_{B0} + 2000) - 20x$ <input type="checkbox"/>	(b) $y_A = y_{B0} + 20x$ <input type="checkbox"/>
$y_B = y_{B0} + 30x$	$y_B = (y_{B0} + 2000) + 30x$

(b)  $y_A = (y_{B0} + 2000) + 20$      

$y_B = y_{B0} + 30x$

Dos piscinas A y B almacenan agua en dos chalets diferentes. Inicialmente la piscina A contiene 2000 l más que la B. Entonces comienza a cambiar la cantidad de agua en ambas piscinas, A y B, al mismo tiempo. La cantidad de agua en A va disminuyendo a razón de 20 l/min, y la cantidad de agua en B va aumentando a razón de 30 l/min. ¿Qué tiempo tendrá que pasar hasta que ambas piscinas tengan la misma cantidad de agua?

**Tarea 1.-** Imagina que tienes que resolver este problema. En tu opinión, este problema y el ejemplo resuelto de la pag 2 (por favor, marca con una X solo una opción):

<b>Se resuelven igual porque ambos problemas tienen...</b>	-El mismo tema con los mismos objetos y sucesos.	<input type="checkbox"/>
	-Las mismas cantidades.....	<input type="checkbox"/>
	-Iguales todas las relaciones entre cantidades.....	<input type="checkbox"/>
<b>No se resuelven igual porque ambos problemas tienen...</b>	-Diferente tema con diferentes objetos y sucesos..	<input type="checkbox"/>
	-Diferentes cantidades.....	<input type="checkbox"/>
	-Diferente alguna relación entre cantidades.....	<input type="checkbox"/>

De acuerdo con el parecido que tienen ambos problemas, **califica entre 0 y 10 el grado de ayuda que puede suponer el problema ejemplo resuelto de la pag 2: '0' = no sirve de ayuda para nada. '10' = ayuda completamente. Grado de ayuda**

---

**Tarea 2.-** Toma la hoja en blanco e intenta plantear las ecuaciones que resuelven este problema. Si lo deseas, puedes consultar el ejemplo resuelto de la pag 2.

De entre los siguientes sistemas de ecuaciones, ¿cuál es el que resuelve correctamente este problema? Marca la opción correcta (Sólo una es correcta).

(a) $y_A = (y_{B0} + 2000) - 20x$	<input type="checkbox"/>	(c) $y_A = y_{B0} + 20x$	<input type="checkbox"/>
$y_B = y_{B0} + 30x$		$y_B = (y_{B0} + 2000) + 30x$	
(b) $y_A = (y_{B0} + 2000) + 20x$	<input type="checkbox"/>		
$y_B = y_{B0} + 30x$			

Dos cuentas corrientes A y B almacenan los beneficios de dos negocios diferentes. Inicialmente la cuenta corriente A contiene 2000 euros más que la B. Entonces comienzan los negocios y empieza a variar la cantidad de dinero en A y en B al mismo tiempo. La cantidad de dinero en A va disminuyendo a razón de 20 euros/día y la cantidad de dinero en B va aumentando a razón de 30 euros/día. ¿Qué tiempo tendrá que pasar para que la cantidad de dinero en A y B sea la misma?

**Tarea 1.-** Imagina que tienes que resolver este problema. En tu opinión, este problema y el ejemplo resuelto de la pag 2 (por favor, marca con una X solo una opción):

Se resuelven igual porque ambos problemas tienen...  
 -El mismo tema con los mismos objetos y sucesos.   
 -Las mismas cantidades.....   
 -Iguales todas las relaciones entre cantidades.....

No se resuelven igual porque ambos problemas tienen...  
 -Diferente tema con diferentes objetos y sucesos..   
 -Diferentes cantidades.....   
 -Diferente alguna relación entre cantidades.....

De acuerdo con el parecido que tienen ambos problemas, **califica entre 0 y 10 el grado de ayuda que puede suponer el problema ejemplo resuelto de la pag 2: '0'= no sirve de ayuda para nada. '10'= ayuda completamente. Grado de ayuda**

**Tarea 2.-** Toma la hoja en blanco e intenta plantear las ecuaciones que resuelven este problema. Si lo deseas, puedes consultar el ejemplo resuelto de la pag 2.

De entre los siguientes sistemas de ecuaciones, ¿cuál es el que resuelve correctamente este problema? Marca la opción correcta (Sólo una es correcta).

(a)  $y_A = (y_{B0} + 2000) - 20x$   (b)  $y_A = y_{B0} + 20x$    
 $y_B = y_{B0} + 30x$   $y_B = (y_{B0} + 2000) + 30x$

(b)  $y_A = (y_{B0} + 2000) + 20x$    
 $y_B = y_{B0} + 30x$

Dos cuentas corrientes A y B almacenan los beneficios de dos negocios diferentes. Inicialmente la cuenta corriente A contiene 2000 euros más que la B. Entonces comienzan los negocios y empieza a llegar dinero a A y también a B, al mismo tiempo. La cantidad de dinero en A va aumentando a razón de 20 euros/día y la cantidad de dinero en B va aumentando a razón de 30 euros/día. ¿Qué tiempo tendrá que pasar para que la cantidad de dinero en A y B sea la misma?

**Tarea 1.-** Imagina que tienes que resolver este problema. En tu opinión, este problema y el ejemplo resuelto de la pag 2 (por favor, marca con una X solo una opción):

<b>Se resuelven igual porque ambos problemas tienen...</b>	-El mismo tema con los mismos objetos y sucesos.	<input type="checkbox"/>
	-Las mismas cantidades.....	<input type="checkbox"/>
	-Iguales todas las relaciones entre cantidades.....	<input type="checkbox"/>
<b>No se resuelven igual porque ambos problemas tienen...</b>	-Diferente tema con diferentes objetos y sucesos..	<input type="checkbox"/>
	-Diferentes cantidades.....	<input type="checkbox"/>
	-Diferente alguna relación entre cantidades.....	<input type="checkbox"/>

De acuerdo con el parecido que tienen ambos problemas, **califica entre 0 y 10 el grado de ayuda que puede suponer el problema ejemplo resuelto de la pag 2: '0'= no sirve de ayuda para nada. '10'= ayuda completamente. Grado de ayuda**

---

**Tarea 2.-** Toma la hoja en blanco e intenta plantear las ecuaciones que resuelven este problema. Si lo deseas, puedes consultar el ejemplo resuelto de la pag 2.

De entre los siguientes sistemas de ecuaciones, ¿cuál es el que resuelve correctamente este problema? Marca la opción correcta (Sólo una es correcta).

(a) $y_A = (y_{B0} + 2000) - 20x$	<input type="checkbox"/>	(b) $y_A = y_{B0} + 20x$	<input type="checkbox"/>
$y_B = y_{B0} + 30x$		$y_B = (y_{B0} + 2000) + 30x$	

(b) $y_A = (y_{B0} + 2000) + 20x$	<input type="checkbox"/>
$y_B = y_{B0} + 30x$	



## II.2 Materiales utilizados en la prueba de transferencia en la condición de ‘Baja Familiaridad’.

Los cuadernillos fueron exactamente idénticos a los mostrados en la condición de alta familiaridad exceptuando los enunciados por lo que en este anexo solo mostraremos los problemas:

### Problema Ejemplo:

Dos depósitos de gas A y B están conectados a dispositivos térmicos iguales para calentar o enfriar su conte **Materiales y producciones de los** estudiantes correspondientes al segundo bloque empírico (capítulos 5 y 6).

nido. Inicialmente el depósito A está a una presión interior 2000 milibares mayor que el B. Entonces se conectan los dispositivos térmicos a la vez y comienza a transferir calor a A y también a B. El depósito A va aumentando su presión interior a razón de 20 milibares/caloría y el depósito B va aumentando su presión interior a razón de 30 milibares/caloría. ¿Cuánto calor se habrá transferido a A y también a B cuando sus presiones interiores sean iguales? (*Nota: 1 milibar es una medida de presión*)

### Problemas Diana:

1. Dos ollas de presión A y B están colocadas sobre dos fuegos iguales para calentar o enfriar su contenido. Inicialmente la olla A está a una presión interior 2000 milibares mayor que la B. Entonces se encienden los fuegos a la vez y comienza a calentarse A y también B. La olla A va aumentando su presión interior a razón de 20 milibares/caloría y la olla B va aumentando su presión interior a razón de 30 milibares/caloría. ¿Cuánto calor se habrá transferido a A y también a B cuando sus presiones interiores sean iguales? (*Nota: 1 milibar es una medida de presión*).

2. Dos varillas metálicas A y B están unidas a un dispositivo térmico por el que se puede transferir calor de una a la otra. Inicialmente la varilla A tiene una longitud 2000 micras mayor que B. Entonces se conecta el dispositivo térmico y comienza a transferir calor de A a B. La varilla A va disminuyendo su longitud a razón de 20 micras/kilocaloría que cede y la varilla B va aumentando su longitud a razón de 30 micras/kilocaloría que absorbe. ¿Qué

cantidad de calor se habrá transferido de A a B cuando sus longitudes sean iguales? (*Nota: 1 micra es una medida de longitud*).

3. Dos varillas metálicas A y B están unidas a dispositivos térmicos iguales para transferir calor a ambas. Inicialmente la varilla A tiene una longitud 2000 micras mayor que B. Entonces se conectan los dispositivos térmicos a la vez y comienza a transferir calor a A y también a B. La varilla A va aumentando su longitud a razón de 20 micras/kilocaloría que absorbe y la varilla B va aumentando su longitud a razón de 30 micras/kilocaloría que absorbe. ¿Qué cantidad de calor se habrá transferido a A y también a B cuando sus longitudes sean iguales? (*Nota: 1 micra es una medida de longitud*).

4. Dos depósitos de gas A y B están unidos a un dispositivo térmico por el que se puede transferir calor de uno al otro. Inicialmente el depósito A está a una presión interior 2000 milibares mayor que el B. Entonces se conecta el dispositivo térmico y comienza a transferir calor de A a B. El depósito A va disminuyendo su presión interior a razón de 20 milibares/kilocaloría y el depósito B va aumentando su presión interior a razón de 30 milibares/kilocaloría. ¿Cuánto calor se habrá transferido de A a B cuando sus presiones interiores sean iguales? (*Nota: 1 milibar es una medida de presión*)

## II.3 Producciones de los estudiantes

### Ejemplo de un estudiante que relaciona los problemas basándose en el contexto de los problemas y falla al escoger las ecuaciones en un problema isomorfo:

Dos globos llenos de gas A y B están colocados sobre dos fuegos iguales para calentar o enfriar su contenido. Inicialmente el globo A tiene un volumen  $2000 \text{ cm}^3$  mayor que el B. Entonces se encienden los fuegos a la vez y comienza a calentarse A y también B. El globo A va aumentando su volumen a razón de  $20 \text{ cm}^3/\text{caloría}$  y el globo B va aumentando su volumen a razón de  $30 \text{ cm}^3/\text{caloría}$ . ¿Cuánto calor se habrá transferido a A y también a B cuando sus volúmenes sean iguales?

**Tarea 1.** Imagina que tienes que resolver este problema. En tu opinión, este problema y el ejemplo resuelto de la pag 2 (por favor, marca con una X solo una opción):

Se resuelven igual porque ambos problemas tienen...	-El mismo tema con los mismos objetos y sucesos.	<input type="checkbox"/>
	-Las mismas cantidades.....	<input checked="" type="checkbox"/>
	-Iguales todas las relaciones entre cantidades.....	<input type="checkbox"/>
No se resuelven igual porque ambos problemas tienen...	-Diferente tema con diferentes objetos y sucesos..	<input checked="" type="checkbox"/>
	-Diferentes cantidades.....	<input type="checkbox"/>
	-Diferente alguna relación entre cantidades.....	<input type="checkbox"/>

De acuerdo con el parecido que tienen ambos problemas, califica entre 0 y 10 el grado de ayuda que puede suponer el problema ejemplo resuelto de la pag 2: '0' = no sirve de ayuda para nada. '10' = ayuda completamente. Grado de ayuda 6

**Tarea 2.** Toma la hoja en blanco e intenta plantear las ecuaciones que resuelven este problema. Si lo deseas, puedes consultar el ejemplo resuelto de la pag 2.

De entre los siguientes sistemas de ecuaciones, ¿cuál es el que resuelve correctamente este problema? Marca la opción correcta (Sólo una es correcta).

- (a)  $y_A = (y_{B0} + 2000) - 20x$   (c)  $y_A = y_{B0} + 20x$    
 $y_B = y_{B0} + 30x$   $y_B = (y_{B0} + 2000) + 30x$
- (b)  $y_A = (y_{B0} + 2000) + 20x$    
 $y_B = y_{B0} + 30x$

**Ejemplo de un estudiante que relaciona los problemas basándose en diferencias estructurales y que acierta al escoger las ecuaciones en un problema similar:**

Dos globos llenos de gas A y B están unidos a un dispositivo térmico por el que se puede transferir calor de uno al otro. Inicialmente el globo A tiene un volumen  $2000 \text{ cm}^3$  mayor que el B. Entonces se conecta el dispositivo térmico y comienza a pasar calor de A a B. El globo A va disminuyendo su volumen a razón de  $20 \text{ cm}^3/\text{cal}$  y el globo B va aumentando su volumen a razón de  $30 \text{ cm}^3/\text{cal}$ . ¿Cuánto calor se habrá transferido de A a B cuando sus volúmenes sean iguales?

**Tarea 1.**-Imagina que tienes que resolver este problema. En tu opinión, este problema y el ejemplo resuelto de la pag 2 (por favor, marca con una **X solo una opción**):

Se resuelven igual porque ambos problemas tienen...	-El mismo tema con los mismos objetos y sucesos.	<input type="checkbox"/>
	-Las mismas cantidades.....	<input type="checkbox"/>
	-Iguales todas las relaciones entre cantidades.....	<input type="checkbox"/>
No se resuelven igual porque ambos problemas tienen...	-Diferente tema con diferentes objetos y sucesos..	<input type="checkbox"/>
	-Diferentes cantidades.....	<input type="checkbox"/>
	-Diferente alguna relación entre cantidades.....	<input checked="" type="checkbox"/>

De acuerdo con el parecido que tienen ambos problemas, califica entre 0 y 10 el grado de ayuda que puede suponer el problema ejemplo resuelto de la pag 2: '0' = no sirve de ayuda para nada. '10' = ayuda completamente. Grado de ayuda 10

**Tarea 2.**-Toma la hoja en blanco e intenta plantear las ecuaciones que resuelven este problema. Si lo deseas, puedes consultar el ejemplo resuelto de la pag 2.

De entre los siguientes sistemas de ecuaciones, ¿cuál es el que resuelve correctamente este problema? Marca la opción correcta (Sólo una es correcta).

- |     |                               |                                     |     |                               |                          |
|-----|-------------------------------|-------------------------------------|-----|-------------------------------|--------------------------|
| (a) | $y_A = (y_{B0} + 2000) - 20x$ | <input checked="" type="checkbox"/> | (c) | $y_A = (y_{B0} + 2000) + 20x$ | <input type="checkbox"/> |
|     | $y_B = y_{B0} + 30x$          |                                     |     | $y_B = y_{B0} + 30x$          |                          |
|     |                               |                                     |     |                               |                          |
| (b) | $y_A = y_{B0} + 20x$          | <input type="checkbox"/>            |     |                               |                          |
|     | $y_B = (y_{B0} + 2000) + 30x$ |                                     |     |                               |                          |

# Capítulo 7

## **Efecto Pantalla y Efecto Sísifo: dos Fenómenos Didácticos en la Resolución de Problemas por Transferencia Analógica**

---

### **Referencia:**

Gómez, C. B., Solaz-Portolés, J. J. y Sanjosé, V. (2014). Efecto pantalla y efecto Sísifo: dos fenómenos didácticos en la resolución de problemas por transferencia analógica. Aceptado para su publicación en *Didáctica de las ciencias experimentales y sociales*.



# 7. Efecto Pantalla y Efecto Sísifo: dos Fenómenos Didácticos en la Resolución de Problemas por Transferencia Analógica

## Resumen

Se presenta un estudio cualitativo, basado en entrevistas semi-estructuradas, de 2 casos que muestran dos fenómenos didácticos de interés en la resolución de problemas por transferencia analógica. El primero muestra un ‘efecto pantalla’, en el cual el sujeto no puede acceder a la estructura de los problemas a partir de los enunciados. En el segundo caso, el sujeto no logra alcanzar un estado estable de comprensión, a pesar de su avance, y por tanto acaba por retroceder a un estado de ausencia de conflicto cognitivo, pero indeseado desde el punto de vista didáctico (‘efecto Sísifo’). Se discuten las posibles implicaciones didácticas de estos casos.

**Palabras clave:** Resolución de problemas; Transferencia analógica; Superficie y Estructura de problemas; Entrevista semiestructurada; Educación secundaria.

## Abstract

A qualitative study, based on semi-structured interviews to two students, is presented. These two cases represent interesting learning phenomena related to problem-solving by analogical transfer. The first one shows a ‘Screen effect’ in which the student cannot access to the problems structure from their statements. The second case shows the ‘Sisifo effect’: the subject is progressing up on the ‘learning slope’, but is not able to arrive to a steady, new cognitive state. As a consequence, he/she returns to a ‘lower’ cognitive state, free from cognitive conflict but undesirable from the educational point of view. The possible educational consequences of these cases are discussed.

**Keywords:** Problem solving; Analogical transfer; Problems surface and structure; semi-structured interviews; Secondary education.

## 7.1 Introducción

Cuando se instruye en resolución de problemas en el aula, una estrategia frecuentemente utilizada es la transferencia analógica (Gómez-Ferragud, Solaz-Portolés y Sanjosé, 2012; Bernardo, 2001; Reed, Dempster y Ettinger, 1985; Gick y Holyoak, 1983): el profesor resuelve un conjunto de problemas que tienen algo en común, alguna regla, procedimiento, principio, ley o teorema y, a continuación, plantea problemas análogos a los estudiantes.

Chen y Klahr (2008) diferencian cuatro etapas el transfer analógico: a) Codificación del problema propuesto; b) Acceso a un problema análogo-fuente; c) *Mapping*, o correspondencia, entre el problema propuesto y el análogo-fuente; d) Ejecución de estrategias para solucionar el problema propuesto. La codificación permite la ‘indexación’ del problema en el ‘archivo’ de la memoria a largo plazo (MLP), de modo que pueda luego ser re-activado cuando el sujeto resolutor busque un problema análogo (‘análogo fuente’) que le ayude a resolver el problema que se le ha planteado (‘diana’). Una vez reactivado el análogo fuente, el resolutor debe establecer una correspondencia o *mapping* entre las variables características de ambos problemas y así, el análogo-fuente queda listo para ser usado en la resolución del diana.

Por tanto, la transferencia analógica requiere que el alumno establezca una analogía entre una situación problemática conocida y una nueva (Gentner, 1983). Cuando los problemas tienen enunciado, es usual que la analogía entre problemas diferentes se tenga que construir a partir de la identificación y construcción de relaciones (*mapping*) entre elementos presentes en ellos, característicos de los problemas. Holyoak (1984) ha diferenciado dos grupos de características definitorias de los problemas matemáticos: la ‘Superficie’ y la ‘Estructura’. La Superficie describe la situación problemática en el mundo real, y alude a objetos y eventos en términos concretos (no abstractos). En la educación Secundaria, un grupo importante de problemas académicos tienen naturaleza algebraica. La Estructura de un problema algebraico está determinada básicamente por “*cómo se relacionan las cantidades unas con otras más que por cuáles son esas cantidades*” (Novick, 1988; p. 511). En los problemas que vamos a considerar en este estudio, las ecuaciones resumen las relaciones entre cantidades. Así pues, desde el punto de vista teórico la relación entre



dos problemas puede caracterizarse en términos similitud superficial y/o estructural (Holyoak y Koh, 1987).

Los problemas utilizados en este trabajo se pueden relacionar mediante un esquema abstracto común. Este esquema implica dos ecuaciones lineales con una solución única, esto es, se representan geoméricamente por dos líneas rectas que se cortan:

$$\text{Ecuación 1: } y_1 = y_{10} + r_1 x \qquad \text{Ecuación 2: } y_2 = y_{20} + r_2 x$$

donde  $y_{10}$  e  $y_{20}$  son los puntos de corte con el eje de ordenadas y  $r_1$ ,  $r_2$  son las pendientes de las rectas (o ‘razones’ de crecimiento o decrecimiento de la variable dependiente). Denominaremos ‘Alcanzar’ la estructura correspondiente a pendientes positivas y de diferente valor, y ordenadas en el origen también diferentes. Si las pendientes de las rectas tienen signo y valor diferentes, y sus ordenadas en el origen son también distintas, la estructura resultante será denominada ‘Encontrar’<sup>1</sup>.

En investigaciones anteriores (Reed, 1987; Gómez-Ferragud, Solaz-Portolés y Sanjosé, 2013a, Gómez-Ferragud, Solaz-Portolés y Sanjosé, 2013b), este planteamiento teórico ha servido de base para estudiar las dificultades que los estudiantes de Secundaria tienen en las fases a, b y c del transfer según Chen y Klahr (op.cit.). Se ha analizado si los estudiantes prestan más atención a los elementos superficiales o a los estructurales a la hora de construir esas analogías. Entre los resultados de interés se encontró que muchos estudiantes focalizan su atención sobre la pregunta o demanda del problema: el nombre de la magnitud implicada, su rol algebraico o aritmético, su posición dentro del enunciado, etc. (Castro, Rico, Batanero y Castro, 1991). Muchos estudiantes usan una estrategia “hacia atrás”, desde la pregunta del problema hacia los datos, para intentar resolverlo y, por tanto, los rasgos de la pregunta son elementos de primera importancia para ellos. También se encontró que las similitudes superficiales entre problemas parecían dificultar a los alumnos detectar sus diferencias estructurales. Con mucha frecuencia, los elementos superficiales fueron tomados como base de la codificación y categorización de los problemas (Gómez-Ferragud, Solaz-Portolés y Sanjosé, 2013c).

---

<sup>1</sup> Los nombres de ambas estructuras se han tomado de la cinemática de móviles: un vehículo que alcanza a otro moviéndose por la misma carretera (Alcanzar), o dos vehículos que se mueven en sentido opuesto en la misma carretera y acaban encontrándose (Encontrar).

Los estudios estadísticos mencionados apuntan la existencia de algunos fenómenos didácticos interesantes, pero los procesos mentales implicados no han sido aún analizados. El objetivo del presente trabajo es indagar en las dificultades de los estudiantes durante el proceso de realizar una transferencia analógica entre problemas. Usaremos dos tareas, una de categorización de problemas, y otra de establecimiento de analogías entre problemas con diferentes relaciones analógicas entre ellos. En la segunda tarea usaremos entrevistas y protocolos *think aloud* para tratar de obtener evidencias de los procesos cognitivos y metacognitivos implicados en el establecimiento de analogías o diferencias entre problemas propuestos la segunda tarea. Atenderemos en especial a la influencia de elementos superficiales o estructurales de los problemas. Finalmente, intentaremos extraer las posibles consecuencias didácticas y aprender de estos análisis.

En este trabajo mostramos el análisis de dos entrevistas que ejemplifican dos fenómenos didácticos de interés: el ‘efecto pantalla’ y el ‘efecto Sísifo’. En el primer caso, los elementos superficiales de los problemas impiden al estudiante acceder a la estructura de los mismos y establecer analogías en función de ella. Sin embargo, cuando el estudiante es situado en la representación abstracta, matemática de los problemas, no tiene ninguna dificultad en comprenderla y vincular las ecuaciones con las ideas apropiadas de los enunciados. El segundo caso alude a Sísifo, rey de Corinto mencionado en La Odisea, que fue condenado por los dioses a pasar toda la eternidad en el infierno empujando hacia arriba una pesada roca por la ladera de una montaña. Antes de alcanzar la cima, la roca caía a la base y Sísifo tenía que repetir el esfuerzo. En este caso, el sujeto analizado avanza con esfuerzo a lo largo de la entrevista por un camino correcto, pero no alcanza el estado final de equilibrio cognitivo asociado con una comprensión completa. Entonces, el sujeto acaba regresando a un estado que, para él, resuelve su conflictivo cognitivo, pero que no es aceptable desde el punto de vista instruccional, con lo cual el estudiante tendrá que repetir el esfuerzo más adelante.

## 7.2 Método

### 7.2.1 Estudiantes participantes

En la primera tarea participaron 21 sujetos pertenecientes a un grupo intacto de 3er curso de ESO (9º grado) de un centro público de enseñanza en un barrio de nivel socio-económico medio en una ciudad de unos 80.000 habitantes. Aunque los sujetos no presentaron *a priori* ninguna característica diferenciadora del resto de la población de ese curso, se trató de una muestra de conveniencia. En la segunda tarea, se excluyeron aquellos estudiantes que mostraron poco interés o entusiasmo en la primera prueba.

Se entrevistaron 11 estudiantes que representaron diferentes criterios en la tarea 1: 4 estudiantes representaron a los que usaron un criterio experto correcto; 4 estudiantes basaron su agrupación en el nombre de la magnitud incógnita; 1 estudiante utilizó un criterio mixto cruzando la Estructura con el Contexto de los problemas; 2 estudiantes usaron criterios incoherentes. De estos estudiantes, 2 mostraron dos fenómenos didácticos de interés que se muestran en este trabajo. Uno/a de ellos basó la tarea 1 en un criterio superficial asociado al nombre de la magnitud incógnita. El/la otro/a es el estudiante que utilizó el criterio mixto basado en la conjunción Estructura x Contexto.

### 7.2.2 Diseño y materiales

El estudio implicó dos tareas. Primero se realizó una categorización de problemas (Chi, Feltovich y Glaser, 1981) para activar los procesos básicos implicados en la resolución de problemas por transferencia analógica: codificación, indexación y relación entre problemas. La tarea propuesta al grupo completo de participantes consistió en agrupar enunciados de 8 problemas (ver Anexo 1) en conjuntos, dentro de los cuales sus elementos se resolvieran con las mismas ecuaciones.

La segunda parte del estudio se dedicó al análisis detallado de los procesos mentales de los estudiantes cuando intentan resolver un problema mediante transferencia

analógica. La tarea planteada consistió en relacionar un problema propuesto ('diana') con diferentes problemas 'fuente', y explicar cuál o cuáles de los 'fuentes' resultaban de más ayuda para resolver el 'diana'. Esta tarea se realizó individualmente, mediante una entrevista extensa semiestructurada a cada participante con instrucciones para narrar en voz alta sus pensamientos e intenciones. Se buscó asociar procesos mentales con el establecimiento de analogías de distinto tipo (Clement, 1988) y diferencias entre problemas. La entrevista consistió en las siguientes fases: 1) Recordatorio y clarificación del criterio empleado en la tarea de agrupación; 2) Suministro del problema diana y diferentes problemas fuente para el establecimiento de analogías (y diferencias) que sirvan para la resolución del diana por transferencia; 3) Explicitación de las ecuaciones que resuelven correctamente los problemas fuente y revisión de las analogías y diferencias establecidas. Los problemas utilizados en la entrevista se encuentran en el Anexo 2.

### **7.2.3 Análisis**

Todos los problemas utilizados en nuestro estudio están caracterizados por 3 variables o factores: 1.-La Superficie, cuyos elementos son irrelevantes para resolver los problemas; 2.-La Estructura, o relaciones entre las cantidades dadas y la cantidad demandada (la incógnita); 3.-La variable demandada, o Incógnita, que se puede diferenciar por la magnitud que la define, y por el rol algebraico que juega en las ecuaciones (como 'x' o como 'y'). La magnitud demandada está asociada con la temática científica del problema. Se ha probado que los estudiantes de menor conocimiento previo focalizan su atención y son muy influidos por el nombre de la incógnita, su posición en un enunciado o su rol matemático, etc. (Gómez-Ferragud et al, 2013c).

En la Tabla I se analiza uno de los problemas utilizados, para mostrar sus elementos superficiales, aquellos de relevancia estructural y la incógnita.

Tabla I

*Componentes superficiales e ideas de relevancia estructural del enunciado de uno de los problemas utilizados en el estudio.*

<b>Elementos Superficiales</b>	
<b>Objetos y entidades:</b> Globos; Bombas Neumáticas; gas; depósito.	
<b>Eventos:</b> Considerar dos globos; Conectar a la vez dos bombas neumáticas idénticas; Extraer gas; Inyectar gas; Disminuir volumen; Aumentar volumen; Transferir gas.	
<b>Magnitudes implicadas:</b> $\text{cm}^3$ ; g; $\text{cm}^3/\text{g}$	
<b>Magnitud-incógnita:</b> gramos	
<b>Ideas con relevancia estructural</b>	<b>Traducción algebraica de las ideas con relevancia estructural</b>
1- El volumen del globo A va disminuyendo a razón de $20 \text{ cm}^3/\text{g}$	$\Delta V_A = -20 \Delta m_A$
2-El volumen del globo B va aumentando a razón de $30 \text{ cm}^3/\text{g}$ :	$\Delta V_B = +30 \Delta m_B$
3-Antes de conectar las bombas, el globo A tiene un volumen de $2000 \text{ cm}^3$	$V_A = 2000 - 20 \Delta m_A$ ; en cualquier momento a partir de la conexión de la bomba A.
4- Antes de conectar las bombas el globo B está vacío	$V_B = +30 \Delta m_B$ ; en cualquier momento a partir de la conexión de la bomba B
<b>Pregunta</b>	<b>Traducción algebraica de la pregunta</b>
¿Cuántos gramos de gas se habrán transferido de A a B, cuando sus volúmenes sean iguales?	encuentra $\Delta m_B$ cuando $V_A = V_B$

Los problemas fuente usados durante la entrevista individual se relacionaron con el problema diana de formas muy bien definidas (Anexo 2). Los 3 problemas ‘fuente lejanos’ que se suministraron en la fase 2A de la entrevista, sólo comparten uno de sus elementos característicos con el ‘diana’ (problemas ‘fuente lejanos’). Así, el fuente ‘Similar lejano’ compartió con el Diana los objetos y situación, pero no la estructura, ni la temática científica (magnitudes) que afecta el nombre de la variable incógnita. El fuente ‘Isomorfo lejano’, compartió la estructura con el Diana, pero no el resto de características (temática, incógnita, objetos y situación). Asimismo, el fuente ‘Relacionado lejano’ compartió con el Diana el nombre de la magnitud incógnita demandada, pero no la estructura, ni los objetos o la situación. Por su parte, los 2 problemas ‘fuente cercanos’ (fase 2B de la entrevista), sólo se diferenciaron del ‘diana’ en una característica constitutiva. El problema ‘Isomorfo cercano’, compartió con el Diana la estructura y el nombre de la magnitud incógnita, pero no los objetos ni la situación; el fuente ‘Relacionado cercano’ compartió con el Diana los objetos y

situación, así como el nombre de la magnitud incógnita, pero no la estructura<sup>2</sup>. Naturalmente, solamente los problemas Isomorfos (lejano y cercano) se resuelven exactamente con las mismas ecuaciones que el problema Diana.

### *Codificación del comportamiento de los sujetos durante la tarea de transferencia*

Se utilizó la codificación propuesta por Codina, Castro y Cañadas (2011, pp. 160-161) para el análisis de los protocolos de resolución de problemas, aunque adaptada a la tarea de transfer analógico. Esta codificación se apoya, a su vez, en el trabajo de Artzt y Armour-Thomas (1992), y en la propuesta anterior de Schoenfeld (1985). Tanto en la etapa en la que se suministró el problema a resolver ('Diana') como en la que se ofrecieron los problemas 'fuente', se diferenciaron los episodios: Lectura, Análisis y Exploración. La ejecución de la resolución, propiamente dicha, no fue abordada en este trabajo: la tarea demandada a los sujetos fue la de establecer analogías y diferencias entre problemas, es decir, basarse en los problemas fuente para determinar cuál de ellos podría ayudar más a resolver el Diana, pero no ejecutar la resolución completa de éste.

Dentro del episodio de Exploración, se contempló específicamente el establecimiento de similitudes y diferencias entre problemas. Para esta parte tomamos como referencia el trabajo de Clement (1988) sobre el establecimiento y utilización de analogías para resolver problemas de física de cierta dificultad. Dentro de esta fase, diferenciamos las etapas y episodios incluidos en la Tabla II.

Tabla II

*Etapas, episodios y elementos contemplados en la codificación de analogías entre los problemas fuente y el problema diana. Los códigos se expresan entre corchetes.*

---

**A.-Analogías y diferencias entre el(los) problema(s) 'Fuente(s)' y el 'Diana'.**

**Episodio 1 [GA/GD]:** GENERACIÓN de una ANALOGÍA/DIFERENCIA entre problemas. Distinguimos 3 tipos de analogías o diferencias (Clement, 1988): a) aquellas basadas en un (o más) principio(s) más general(es), del/de los cual(es) ambos problemas comparados son casos particulares o instancias; b) identificar las ideas de ambos problemas que son equivalentes y no lo son, es decir, aquellas que podrían/no podrían intercambiarse entre ellos sin que cambiara su resolución (analogía/diferencia basada en una transformación), sin hacer referencia a una estructura abstracta más general; c) relacionar una idea o un rasgo del problema diana con otra idea o rasgo del problema fuente que desempeña/no desempeña el mismo rol, sin identificar correctamente las diferencias entre otras ideas (analogía basada en una asociación).

---

<sup>2</sup> La estructura de este problema 'Relacionado cercano' corresponde 'mezclas', como el 'Relacionado lejano, REL1'. Por eso no lo denominamos 'Similar cercano', a pesar de que ahora comparte objetos y magnitudes con el Diana. El 'Similar lejano SIM1' de la parte anterior, tiene estructura 'Alcanzar'.

---

**Episodio 2 [DA/DD]:** DISCUSIÓN de la ANALOGÍA/DIFERENCIA establecida, revisión de la confianza en la analogía. Se atendió a las manifestaciones del sujeto al analizar la corrección de la analogía establecida.

**Episodio 3 [UA/UD]:** UTILIDAD de la ANALOGÍA/DIFERENCIA. Se atendió a las manifestaciones del sujeto sobre la utilidad de la analogía establecida para comprender y resolver el problema diana.

---

**B.-Comparación o relación entre problemas Fuente.**

Idem etapa A, pero entre los problemas fuente entre sí.

---

## 7.2.4 Procedimiento

En una sesión ordinaria de clase, se llevó a cabo la tarea de agrupación de problemas (30 min). Se repartió y leyó la hoja de instrucciones, se realizó una tarea de práctica y a continuación los estudiantes categorizaron y agruparon los 8 problemas propuestos, a partir de la lectura de sus enunciados (sin resolverlos efectivamente).

El estudio de transfer analógico, realizado mediante entrevistas, se inició una semana más tarde y se prolongó dos meses. Las entrevistas se realizaron en un espacio distinto al aula, en condiciones de privacidad y confort suficiente del estudiante. Se obtuvieron los permisos necesarios de profesores y padres para entrevistar y grabar las sesiones en video. La cámara se dispuso de tal forma que el rostro del participante nunca estuvo en plano, pero sí los problemas y las acciones del sujeto. Cada problema se mostró sobre una cartulina de diferente color, de modo que fue siempre perfectamente distinguible en las imágenes grabadas. Las acciones y verbalizaciones de cada estudiante pudieron ser asociadas claramente con los distintos problemas.

Uno de los investigadores (CG) actuó como entrevistador. La entrevista siguió un protocolo planificado que se ajustó a cada sujeto. Comenzó recordando la agrupación realizada por el sujeto en la primera tarea. El propósito fue activar los criterios de codificación y categorización de problemas, que son procesos subyacentes en el establecimiento de analogías entre problemas. Luego, el entrevistador planteó a cada sujeto la segunda tarea: determinar cuál o cuáles de los problemas ‘fuente’ suministrados era de mayor ayuda para resolver el problema ‘diana’, y explicar la razón. También recordó que el propósito del estudio era estudiar los procesos mentales que siguen los estudiantes cuando han de resolver problemas, y no juzgar la calidad de la resolución. Las entrevistas se articularon sobre un protocolo predefinido, aunque se adaptaron a cada participante. El entrevistador intervino siempre que se hizo necesario estimular al estudiante para que expresara en voz alta

sus pensamientos, o clarificara sus acciones y sus objetivos. Se advirtió que las interrupciones en ningún caso se deberían a la correcta o incorrecta actuación del estudiante durante la ejecución de la prueba. La duración de las entrevistas fue variable, entre 15 y 25 min.

## 7.3 Estudio de casos

A continuación se presentan porciones extensas de las entrevistas a dos estudiantes. Se ha respetado el progreso mental de los alumnos, de modo que los fragmentos eliminados son mínimos, y han sido sustituidos por narraciones (en cursiva).

En negrita se recogen las intervenciones literales del sujeto (S) y del entrevistador (E). En cursiva y entre corchetes se realizan los comentarios y análisis pertinentes. En la columna de la izquierda, se muestra el momento de cada segmento de la entrevista (*minuto:segundo*), y el código asociado con los 3 episodios definidos en el establecimiento de analogías y diferencias entre problemas, recogido en la Tabla II (GA/GD; DA/DD; UA/UD).

### 7.3.1 Caso MLP: ‘Efecto Pantalla’, o imposibilidad de apreciar las diferencias estructurales entre problemas, a causa de sus similitudes superficiales.

Cuadro I

*Caso MLR: Análisis del protocolo de la entrevista mostrando el ‘efecto pantalla’.*

<b>Min y Código</b>	<b>Caso: MLR</b>
00:00-07:45	<b>Fase 1</b> (resumen): En la tarea de agrupación, el sujeto definió los conjuntos de problemas según el nombre de la magnitud-incógnita. La fase 1 de la entrevista sólo sirve para confirmar ese criterio.
	<b>Fase 2: analogías y diferencias entre enunciados de problemas</b>
08:10-09:02	<i>El entrevistador explica la nueva tarea y su propósito, da las instrucciones y clarifica que sus intervenciones estarán destinadas a explicitar pensamientos del sujeto y no a juzgar la corrección o incorrección de los mismos. Primero entrega el problema Diana que el sujeto lee en silencio sin mostrar dudas ni pedir aclaraciones. A continuación el entrevistador entrega los enunciados de 3 problemas fuente (sin resolver). Los ubica en la mesa, frente al sujeto, en posiciones equidistantes a él. El sujeto tiene ante sí el Diana, y los 3 fuentes algo</i>



*separados, pero al alcance de su vista. El entrevistador plantea la tarea con claridad y recuerda el procedimiento a seguir.*

- 09:03 **E:** **Entonces, mirando los tres problemas de las fichas** [*El entrevistador señala las 3 fichas de colores que contienen los problemas fuente*], **¿cuáles crees que te ayudaran más o no te ayudarán para resolver el problema objetivo? Recuerda que puedes coger los problemas en el orden que quieras. Como están en cartulinas de colores la cámara recogerá qué problema estás mirando y puedes leer y releer cualquiera de ellos en todo momento...Recuerda también que te haré preguntas en función de lo que vayas haciendo...** [*nueva clarificación de las instrucciones y del procedimiento*]. **Puedes empezar.**
- 09:20-11:15 **S:** [*El sujeto realiza primero un chequeo, una lectura general rápida de los 3 problemas fuente, comparando con el problema diana, sin tomar ninguno para procesarlo con calma. Emplea solamente 12s para leer 3 problemas nuevos. Ello hace sospechar que el sujeto intenta 'buscar y detectar' la presencia de algún elemento predeterminado. Luego toma el problema SIMI y lo sitúa ante sí. Lo lee en silencio y lo compara con el diana. A continuación toma el problema ISOI y lo lee en silencio. Finalmente, lee en silencio el problema fuente restante, con igual pregunta al diana, el RELI. Lo hace desde lejos, sin modificar su posición.*]
- 11:16 **S:** [*De pronto, con un gesto rápido, el sujeto toma el problema RELI y lo coloca ante sí.*]
- 11:17 **E:** **¿Por qué de repente estudias ese problema [RELI]?**
- 11:18 **S:** **Es que en estos dos problemas [señala el SIMI y el ISOI] las unidades que me dan son diferentes a las del problema que he de resolver...** [*Explicita diferencias, basadas en una característica superficial, entre SIMI y DIANA, y entre ISOI y DIANA. Es el primer rasgo en el que centra su atención. Nótese que es el mismo rasgo en que este sujeto basó su categorización de problemas en la primera tarea, que fue recordada en la fase 1 como introducción a ésta de transfer.*]
- 11:21-11:51 **S:** **Voy a ver el otro** [*se refiere al problema RELI. El sujeto toma el problema rojo RELI y lo sitúa delante de sí junto al problema ISOI. Luego compara ambos problemas con el diana de sendos vistazos. Retira de delante de sí el problema con igual estructura al fuente, ISOI, y luego se detiene a releer RELI.*]
- 11:52 **S:** **Éste [señala el RELI] es el que veo más parecido.** [*El sujeto ha establecido una analogía significativa entre RELI y DIANA, pero no la especifica de momento.*]
- 11:54 **E:** **¿El rojo [RELI, con misma pregunta que el problema diana] es el que ves más parecido? ¿Exactamente por qué?** [*El entrevistador demanda especificar el tipo de analogía establecido*]
- 11:56 **S:** [*Piensa en silencio unos segundos*]
- 12:05 **S:** **Sí, porque aunque en uno hay globos, y en el otro depósitos de ácido** [*explicita diferencias superficiales, basadas en los objetos mencionados en los enunciados, entre RELI y DIANA*], **en los dos te piden lo mismo** [*Focaliza la atención en la demanda o incógnita de los problemas*]. **El problema que he de resolver me pide los 'gramos' y éste también** [*señala el RELI, que tiene delante*]; **además tienen las mismas unidades en todo** [*Explicita una analogía significativa entre RELI y DIANA basada en el nombre de la magnitud incógnita (similitud superficial). No menciona otras diferencias en objetos y situaciones. No hace mención de rasgos estructurales.*]
- 12:20 **E:** **Entonces tú dices que aunque aquí [señala el problema DIANA] hay globos y aquí depósitos [señala el fuente RELI], ambos tienen las mismas unidades y te preguntan por lo mismo** [*El entrevistador solicita aclaración sobre la irrelevancia de los objetos y situación, y sobre la relevancia de la magnitud incógnita*] **y tú crees que, de los tres problemas de las fichas de color, ése [señala el RELI] es el que más te va a ayudar...** [*demanda de revisión de la analogía entre DIANA y RELI, y de la relación posible con los otros fuente*].
- 12:32 **S:** **¡Si, eso!** [*Utilidad de la analogía. Confirma la relevancia de la incógnita para la analogía establecida entre DIANA y RELI. Persiste la ausencia de mención de rasgos estructurales.*]
- 12:49 **E:** **Entiendo lo que me dices... (...) ¿Lo puedes repetir por favor?**
- 12:53 **S:** [*Tras breve pausa*] **Si... Porque estos dos [señala consecutivamente el problema verde SIMI cuya magnitud incógnita es 'Kilocalorías', y al problema azul ISOI cuya incógnita son 'microCulombios'] tienen unidades diferentes a éste [señala el DIANA], y te piden cosas diferentes** [*Explicita diferencias entre DIANA y SIMI, y entre DIANA e ISOI, basadas en las distintas magnitudes incógnita que contienen. no explicita ninguna analogía significativa entre DIANA y SIMI, ni entre DIANA e ISOI.*]

13:04 **E: ¿Puedes explicarme eso mejor? ¿A qué te refieres cuando dices ‘unidades’?** [El entrevistador vuelve a solicitar confirmación del rasgo o característica de los problemas sobre las que el sujeto establece las diferencias y las analogías entre ellos]

13:06- **S: Sí; estos dos problemas por ejemplo..., en el problema a resolver [DIANA] pone ‘cm<sup>3</sup> por gramos’ y aquí [señala el ISO1] pide ‘microCulombios’ y ‘Voltios’... Y aquí [ahora se refiere al problema SIM1] pide ‘Kilocalorías’... ..** [Insiste una vez más en tomar como característica clave para comparar problemas la magnitud asociada con la incógnita (nótese que el sujeto dice que el problema “pide...” que es un rasgo superficial].

---

**Fase 3: analogías y diferencias con los problemas resueltos**

13:25- El entrevistador cambia las fichas con los enunciados de los fuente, por otras con los mismos

18:01 **problemas pero resueltos. Luego plantea la misma tarea al estudiante y le dice que puede, o no, cambiar de opinión. Con determinación, el sujeto toma primero para leer en silencio y por orden los problemas REL1, SIM1 e ISO1. Al acabar, vuelve a tomar el problema REL1 y se detiene en él. Los tiempos, mayores que los empleados en la fase 2 para leer los problemas, indican que está reprocesándolos, salvando dificultades, y no únicamente comprobando algo predicho. Compara REL1 y DIANA. Luego lee el problema SIM1 muy rápidamente sin traerlo ante sí. Deja el problema rojo REL1 a un lado y toma de nuevo el problema ISO1, lo pone justo debajo del problema DIANA ante sí, y comienza a compararlos con detenimiento.**

18:02 **E: ¿Qué piensas? ¿Por qué has cambiado de problema de repente?**

18:04 **S: Creo que es éste [la alumna se refiere al problema ISO1,] el que se resuelve igual que éste [el DIANA].**

18:06 **E: ¿Y porque has cambiado de opinión?**

18:10 **S: Aquí es diferente [la estudiante señala el problema REL1] del problema Diana, porque dice la palabra ‘contiene’ [En efecto, esta palabra y la frase en la que está inserta, supone una idea de relevancia estructural en el problema fuente REL1. Nótese que antes de ver las ecuaciones explicitadas, el sujeto no atendió a esta idea]. En cambio aquí [problema ISO1. El sujeto compara los fuentes REL1 e ISO1 entre sí por primera vez] dice que ‘el condensador va disminuyendo a razón de ...’ [Otra vez esta frase tiene relevancia estructural en el problema fuente ISO1. Antes de ver las ecuaciones explicitadas, el sujeto tampoco atendió a esta idea], al igual que en el problema Diana [El sujeto ha atendido también una idea de relevancia estructural del problema DIANA que antes no atendió. Es interesante darse cuenta de que el sujeto, tras estudiar las ecuaciones de los 4 problemas, ha regresado a los enunciados para tratar de comprender cómo se vinculan con las ecuaciones, completando así correctamente la traducción inversa Ecuaciones → Enunciado]. Miro los dos y veo que podría sustituir aquí [en el problema DIANA] estas fórmulas [las ecuaciones del problema ISO1. El sujeto construye una nueva analogía estructural por transformación, para completar la transferencia] porque aunque tengan distintas unidades yo creo que se resolverá igual. [El sujeto declara ahora que la diferencia entre DIANA e ISO1 debida a las diferentes magnitudes mencionadas, no es relevante. Con ello cambia el foco de atención de las fases anteriores, para las analogías y diferencias relevantes entre problemas. Declara que si esos elementos irrelevantes se transforman en los otros, se obtienen problemas equivalentes, es decir, con ecuaciones iguales... lo cual es correcto en el caso del fuente-isomorfo y el Diana].**

18:35 **E: ¿Y éste [señala el problema SIM1], no crees que te pueda ayudar?** [El entrevistador trata de incrementar la fiabilidad de la respuesta, completando las diferencias y similitudes entre problemas].

18:37 **S: No, porque no es igual que el Diana. En éste [señala el SIM1], los dos ‘aumentan a razón de...’** [Subraya la idea de relevancia estructural del problema similar. Explicita las diferencias entre DIANA y SIM1 en las ideas de los respectivos enunciados que tienen relevancia estructural].

18:44 **E: ¿Puedes repetirlo en voz alta?**

- 18:49 **S: Si. Descarto los problemas rojo [REL1] y verde [SIM1], porque aunque el rojo tenga las mismas unidades, al sustituir en el problema diana [se refiere a usar las ecuaciones del problema REL1 en el DIANA] no lo podría hacer porque aquí tengo cosas diferentes [la estudiante señala la idea de relevancia estructural del enunciado del DIANA, rechazando la importancia de la similitud basada en las magnitudes]. En cambio con éste [señala el problema, ISO1], si sustituyo según lo que va diciendo el enunciado, ¡sí lo podría poner igual!** [Se refiere a que sí podría obtener las mismas ecuaciones. El sujeto comprende que las ideas de relevancia estructural de ambos enunciados son las mismas, y por tanto, el resto de ideas diferentes, pueden ser intercambiadas entre problemas sin alterar sus ecuaciones. Por tanto, declara irrelevantes las diferencias superficiales entre DIANA e ISO1. Ahora, el sujeto recorre el camino resolutivo en el sentido Enunciado → Ecuaciones, cuando en las fases 1 y 2 no lo pudo hacer. La transición a la que pudo acceder, Ecuaciones → Enunciado, le permite ahora realizar también la opuesta completando su comprensión de los problemas.].
- DD**  
**DA**  
**UA**
- 19:12 **E: Muy bien. ¡Muchísimas gracias por tu colaboración!** [Finaliza la entrevista]

### 7.3.2 Caso SuperMario64: ‘Efecto Sísifo’, o de retorno del sujeto al uso de criterios superficiales inapropiados, tras haber avanzado en la elaboración de criterios estructurales.

#### Cuadro II

Caso SuperMario64: Análisis del protocolo de la entrevista mostrando el ‘efecto Sísifo’.

Min y Código	Caso: SuperMario64
	<b>Fase 1</b> (resumen): En la tarea de agrupación, el sujeto definió los conjuntos de problemas según un criterio mixto, que cruzaba la temática con la estructura de los problemas. Durante la fase 1 de la entrevista el sujeto modifica rápidamente su criterio y adopta el de la estructura, que es el de los expertos. <i>El entrevistador sigue el protocolo: explica la intención de la entrevista y entrega la tarea de agrupación realizada por el sujeto.</i>
03:20	<b>E: ¿Me puedes explicar por qué crees que se resuelven igual, unos sí y otros no?</b>
03:23	<b>S: Mira, entonces lo puse así pero ahora cambiaría y pondría el 1 y el 6 con el 8 y el 3, y el 2 y el 5 con el 4 y el 7</b> [designa los problemas por su número en el listado suministrado]. [El sujeto al releer su agrupación cambia de criterio y escoge el criterio puramente estructural].
03:30	<b>E: ¿Por qué?</b>
03:31	<b>S: Porque 1, 3, 6 y 8 en todos A aumenta, y B disminuye, y en 2, 5,4 y 7, A aumenta y B aumenta.</b> [El sujeto, durante esta fase 1, ha cambiado su criterio de codificación y categorización de problemas, pasando de uno mixto, en el que la temática tenía importancia para él, a uno que parece puramente estructural: ahora focaliza la atención en una idea de relevancia estructural de los enunciados, proponiendo dos conjuntos: los problemas con estructura Encontrar y aquellos con estructura Alcanzar. No menciona otras ideas]
	<b>Fase 2A: analogías y diferencias entre enunciados de problemas</b>
03:35	<i>El entrevistador sigue el mismo protocolo que en el caso anterior.</i>
04:09	<b>S: [El Sujeto toma el problema verde SIM1 y lo acerca al problema diana. Lo lee en silencio] Este no me serviría para resolver el Diana.</b>
<b>GD</b>	
04:31	<b>E: ¿Por qué crees eso?</b>

- 04:32 **S: Porque en el problema a resolver, A disminuye y B aumenta, y aquí** [señala el **DD** SIM1], **A aumenta y B también aumenta.** [El sujeto mantiene el criterio que ha adoptado en la fase 1. Percibe una diferencia entre ambos problemas en una idea que tiene relevancia estructural. Esta diferencia le parece importante para descartar que ambos se resuelvan igual. No menciona otras similitudes o diferencias entre ellos].  
(...)
- 04:49 **S:** [El sujeto aparta el problema SIM1, toma el problema ISO1 y lo acerca al DIANA].  
**GA** Este sí.
- 04:57 **E: ¿Ese si te ayudaría? ¿Por qué?**
- 04:59 **S: Si, porque A disminuye, igual que en problema a resolver, y B aumenta.** [El sujeto insiste en focalizar su atención en esta idea que tiene relevancia estructural, pero solamente en ella. No menciona ninguna otra idea. Al no desarrollar esta similitud, no se puede saber todavía qué tipo de analogía está elaborando].
- 05:04 **E: Déjame que aclare una cosa. Este problema** [señala el problema DIANA] **te pregunta por los gramos de masa, en cambio este problema** [señala el problema ISO1] **te está preguntando por los microCulombios, y aun así tú me dices que este te ayudaría a resolver el problema fuente, incluso cuando te están pidiendo cosas distintas.**
- 05:15 **S: Si.**
- 05:17 **E: ¿Por qué?**
- 05:18 **S: Porque da igual la unidad con la que lo hagas, si A disminuye, disminuye en ambos y si B aumenta y aumenta en ambos.** [El sujeto mantiene el criterio correcto, rechazando la relevancia de la magnitud incógnita. Parece que el sujeto sigue elaborando analogías y diferencias apropiadas...]
- 05:40-  
06:10 **S:** [El sujeto toma el problema rojo REL1 y lo acerca para compararlo con el Diana. Lee en silencio]. **El problema rojo [REL1] también me serviría de ayuda, porque en éste, aunque no lo diga directamente en el problema, A disminuye y B aumenta** [Inferencia correcta, pero aquí se revela un problema importante: pese a focalizar sobre una idea relevante de los enunciados, y rechazar la importancia de elementos superficiales, en realidad el sujeto no ha percibido la estructura de los problemas. Por esa razón, el sujeto no distingue la estructura "mezcla" del problema REL1 de la estructura "encontrar" del problema DIANA].
- 06:22 **E: Entonces, ¿dices que como aquí** [señala el REL1] **A aumenta y B disminuye también se resuelve igual que el problema diana?**
- 06:26 **S: Si.**  
**UA**
- 06:28 **E: ¿Si comparas estos dos** [El entrevistador hace referencia a los problemas ISO1 y REL1] **¿Crees que los dos te ayudarían igual?; ¿Ves alguna diferencia entre ellos?**
- 06:46 **E: ¿Qué quieres decir? ¿Y esto quiere decir algo? ¿Cuál te ayudaría más a resolver el problema diana?**
- 06:47-  
7:02 **S:** [Vuelve a leer pensativamente unos segundos, pero no es capaz de llegar a una conclusión y contestar. Entonces el investigador decide aportar dos problemas fuente más, ISO2 y REL2, por si ayudan a clarificar los procesos mentales del sujeto].

---

**Fase 2B: analogías y diferencias entre enunciados de problemas (continuación)**

- 07:03 *El entrevistador entrega 2 problemas-fuente adicionales con cartulinas morada, ISO2 y amarilla, REL2. Ahora el sujeto dispone de 4 problemas fuente, 2 (ISO1 e ISO2) con estructura "encontrar" como el DIANA, y 2 con estructura 'mezcla' (REL1 y REL2).*
- 07:46 **S:** [Lee en silencio los nuevos problemas diana]. **Este [ISO2] también serviría porque **GA/DA** pasa lo mismo, A disminuye y B aumenta.**
- 07:51 **S:** [El sujeto, acerca el problema REL2 para estudiarlo mejor]. **Este también podría ser de ayuda, pero ahora ya no lo tengo tan claro porque aquí te dan el dato de la densidad** [el sujeto se refiere al problema REL2]... **No sé seguro si serviría..., pero en teoría, si mantengo la misma regla como A disminuye y B aumenta, sí que serviría.** [El sujeto, aunque explicita una duda asociada con el concepto de densidad, acaba por atender solo a la idea ya antes señalada, pero obvia el resto de ideas. Esto le lleva al error. No es capaz de completar la traducción y acceder a la estructura de los problemas. A pesar de la relevancia de la idea focalizada, la analogía que establece entre los problemas DIANA, ISO1, ISO2, REL1 y REL2 es por asociación (Clement,

1988), ya que ignora otras ideas importantes que deberían participar también en un 'mapping' adecuado. Sin esas otras ideas no se pueden detectar las diferencias estructurales entre DIANA, ISO1 e ISO2 por un lado, y REL1 y REL2 por el otro]

- 09:00 **E: Entonces dices que aquí [señala el REL2] aparece la 'densidad' y eso te genera dudas...**
- 09:02-09:27 **S: Sí. Yo estos cuatro [se refiere a ISO1, REL1, ISO2 y REL2], a excepción del dato de la densidad [focaliza ahora en un concepto que también tiene relevancia estructural, y que podría diferenciar entre las estructuras ISO y REL2,] pienso que son bastante parecidos [El sujeto no logra extraer el significado estructural asociado con la presencia de la densidad en REL2, o de la concentración en REL1, en contraste con la idea del aumento o disminución de una cantidad a una razón constante en el DIANA, ISO1 e ISO2. Sigue sin acabar de distinguir entre las estructuras 'mezcla' y 'encontrar'. El investigador decide entonces pasar a la siguiente fase y proporcionar al sujeto los problemas fuente con sus ecuaciones explicitadas, con la esperanza de que al fin consiga percibir las diferencias entre estas dos estructuras].**
- DA**
- 
- Fase 3 : analogías y diferencias con los problemas resueltos**  
*El entrevistador sigue el protocolo. Retira todos los problemas fuente y suministra los mismos problemas pero con las ecuaciones explicitadas. Los ubica en las mismas posiciones.*
- 10:30 **S: [Estudia en silencio. El sujeto compara con mayor interés los problemas ISO1 y REL2]. Los resultados son iguales en el azul [ISO1] y el morado [ISO2], pero diferentes con el rojo [REL1] y el amarillo [REL2]. [El sujeto se percata de diferencias en las ecuaciones que resuelven los problemas].**
- GA**
- GD**
- 10:37 **E: ¿Pero tú pensabas que esos cuatro se iban a resolver todos con las mismas ecuaciones?**
- 10:46 **S: [El sujeto lee de nuevo y compara los 5 problemas fuente con el problema Diana].**
- 11:11 **S: Creo que es por los datos, porque en éste [señala el problema REL1] pone 'gramos por centímetro cúbico' al igual que éste [señala el REL2] y como en el problema Diana [¿está diciendo que la causa de que las ecuaciones sean diferentes son las magnitudes implicadas!]. En cambio aquí [señala el ISO1] pide 'microCulombios por Voltio'. [De forma inesperada, el sujeto cambia el foco de su atención y se centra en las magnitudes asociadas con las temáticas, y en particular, en la magnitud-incógnita].**
- DA**
- DD**
- 11:24 **E: ¿Entonces cuales crees que te ayudarían más a resolver el problema diana?**
- 11:26 **S: Pues los que tienen  $\text{g/cm}^3$  [El sujeto confirma el nuevo criterio erróneo]**
- UA**
- 11:28 **E: Tú antes te fijabas sobre todo en que en el problema disminuyera A y aumentara B. En cambio, después de verlos resueltos dices que lo que importa es si el problema trata de gramos o de microCulombios (...). [El entrevistador trata de reconducir al sujeto a la concepción anterior, que era apropiada, y alejarlo de esta nueva concepción equivocada].**
- 11:45 **S: Pues sí, primero pensaba eso. Creía que la unidad no variaba el resultado pero ahora que veo los problemas resueltos y los distintos resultados, los que mantienen la unidad mantienen un resultado igual y los que mantienen unidades diferentes son de diferente resultado [Claramente equivocado, probablemente debido a un mapping erróneo. No entiende el significado de las ecuaciones]**
- DA**
- DD**
- 12:12 **E: Muy bien, y si ahora tuvieras que escoger que problemas te ayudarían más para resolver el problema diana, ¿cuáles escogerías?**
- 12:16 **S: El problema amarillo [REL2] y el rojo [REL1]. [El sujeto persiste en el criterio erróneo. Esto supone un retroceso en el camino para el establecimiento de analogías correctas, tras su avance en las fases 1 y 2. Parece que, en efecto, la analogía de la fase 2, basada en la idea clave aumento/disminución, fue solamente una asociación entre elementos explícitos de los enunciados, pero nunca accedió a la estructura de los problemas. Al no acabar su proceso de transición Enunciado → Ecuaciones, ni tampoco lograr la transición inversa Ecuaciones → Enunciado, los avances logrados con esfuerzo acaban por desvanecerse y el sujeto regresa a su estado cognitivo original]**
- UA**

12:20 E: **Muy bien SuperMario, hemos terminado. Muchísimas gracias por tu colaboración.** [Finaliza la entrevista]

---

## 7.4 Discusión de los casos

El caso MLR es un ejemplo claro, prototípico, de “efecto pantalla” según el cual las características estructurales de los problemas son ocultadas al sujeto por las superficiales. En el caso anterior, el sujeto no pudo establecer las analogías apropiadas entre problemas porque los rasgos superficiales y explícitos (en este caso, el nombre de las magnitudes-incógnita de los problemas) captaron toda su atención y recibieron una importancia espuria, inadecuada (ver transcripción entre los minutos 11:52 y 13:10, por ejemplo). Sin embargo, una vez es situado por el entrevistador en la representación abstracta, matemática de los problemas, es capaz de comprender el significado de las ecuaciones, y es capaz de asociar las ecuaciones a las ideas clave de los enunciados, completando la “traducción inversa”: puede hacer la transición Ecuaciones  $\rightarrow$  Enunciados, pero no la transición Enunciados  $\rightarrow$  Ecuaciones a causa del “apantallamiento”. Cuando se retira la “pantalla”, el sujeto percibe correctamente lo que se le muestra y entiende todo el proceso de transferencia (ver entrevista a partir del minuto 18:10).

El efecto pantalla es específico de la situación mostrada. Cuando un estudiante no puede realizar la traducción algebraica de los problemas pero tampoco es capaz de entender las ecuaciones en sí mismas, ni su relación con ideas expresadas en los enunciados, no existe “efecto pantalla”, ya que este estudiante no puede percibir lo que se le muestra tras las “pantalla”, cuando ésta se retire.

Varios son los aspectos particulares que pueden distinguirse en el proceso seguido por el segundo caso, SuperMario64. Como se ha visto en la evolución de los razonamientos de SuperMario64 durante las tres fases de la entrevista, el sujeto establece analogías y diferencias entre problemas, usando un criterio aparentemente adecuado. Sin embargo ese criterio no acaba de ser bien comprendido, al menos no en sus implicaciones, por lo que el sujeto no alcanza el éxito pretendido en la

entrevista. La explicación de esto es que las ideas-clave sobre las que razona, que son relevantes para comprender la estructura de los problemas, están en realidad explicitadas en los enunciados, (ver entrevista entre los minutos 04:32 y 5:03), por lo que su mención no es garantía de que el sujeto haya llegado a comprender qué significado matemático tienen (ver transcripción a partir del minuto 11:11). En un cierto momento de la entrevista, el sujeto comienza a manifestar su falta de comprensión de la estructura cuando se enfrenta a los problemas ‘Relacionados lejano’ y ‘cercano’, cuya estructura es “*Mezclas*”, y afirma que se resuelven igual que el Diana y los ‘Isomorfos lejano y cercano’, cuya estructura es “*Encontrar*” (ver 06:10-07:02 y 07:51-09:27). Cuando el investigador presente intenta averiguar si la argumentación sobre ideas-clave de los enunciados conlleva el abandono de criterios superficiales, el sujeto comienza a dudar y aparece el conflicto cognitivo (ver fragmento en el intervalo 05:04-07:02). Este conflicto cognitivo no se resuelve de forma adecuada en la fase 3 de la entrevista, cuando se suministran los cinco problemas fuente correctamente solucionados. Las ecuaciones se convierten para el estudiante en obstáculos de comprensión: no logra entenderlas ni vincularlas con las ideas correspondientes de los enunciados, ni siquiera con las ideas-clave que él mismo tomó como sostén de su criterio. No consigue, por tanto, realizar ninguna de las dos transiciones necesarias, ni la traducción Enunciados  $\rightarrow$  Ecuaciones, ni tampoco la inversa Ecuaciones  $\rightarrow$  Enunciados. Al no lograr alcanzar un estado final estable de comprensión, y hallarse en una situación de conflicto cognitivo, regresa a un estado no-conflictivo para él, sostenido por un criterio incorrecto. Esto supone un retroceso en su avance hacia el aprendizaje. Como Sísifo, cuando empujaba la roca montaña arriba y ésta caía de nuevo antes de alcanzar la cumbre, si el alumno no logra llegar hasta el equilibrio que significa la comprensión, estará condenado a realizar esfuerzos ímprobos continuamente.

## 7.5 Conclusiones y reflexiones didácticas

El efecto de apantallamiento de lo estructural por lo superficial ha sido encontrado antes en estudios similares de resolución de problemas (Gómez-Ferragud et al,

2013b), y antes, sugerido por Reeves y Weisberg (1994) quienes mostraron la dificultad psicológica de atender lo abstracto, no evidente, pasando más allá de lo superficial y evidente. Estas ideas junto con los resultados empíricos anteriores de naturaleza estadística, parecen apoyar la conjetura de que muchos alumnos de secundaria elaboran modelos mentales analógicos, concretos, del mundo ordinario, antes de intentar elaborar representaciones abstractas, matemáticas de los problemas. En ocasiones, la representación abstracta contiene elementos llamativos que obstaculizan al sujeto construir la representación abstracta adecuada, pues son irrelevantes. El trabajo didáctico consistiría entonces en ayudar a los estudiantes a filtrar y eliminar los elementos irrelevantes, superficiales de los enunciados, para aprender a concentrarse solamente en los estructurales. Esto no parece tarea sencilla, e incluso algunos investigadores han sugerido que el éxito en este cometido depende más bien de un factor psicológico interno de los sujetos: la dependencia/independencia de campo (Witkin, Moore, Godenough y Cox, 1975). Los estudiantes independientes de campo son capaces de abstraer con facilidad los elementos importantes, comunes a varias situaciones particulares, y alcanzar la estructura de las mismas rápidamente, mientras los dependientes de campo dependen fuertemente de los contextos particulares para comprender los conceptos implicados, por lo que tienen dificultades en generalizar y abstraer. En este caso, la pregunta sería, ¿pueden los profesores ayudar de algún modo a los estudiantes dependientes a ser independientes de campo? En todo caso, los profesores deben ser conscientes de la dificultad grande que el proceso de traducción algebraica implica. Cuando enseñan a sus estudiantes a resolver problemas, y resuelven varios ejemplos apropiados, en realidad están ayudando a esos estudiantes a conectar la resolución matemática con el enunciado (Ecuaciones  $\rightarrow$  Enunciado). La comprensión de este proceso de “traducción algebraica inversa” no implica la comprensión del proceso deseado, Enunciado  $\rightarrow$  Ecuaciones. Hay que tratar de evitar la confusión entre los dos sentidos de la transición para lograr el éxito instruccional.

El segundo caso nos permite conocer, no sólo un efecto indeseado en el proceso de comprensión, sino también un fenómeno didáctico de importancia para los profesores. Este fenómeno didáctico está motivado por la ‘apariencia de comprensión’ que el sujeto muestra cuando sostiene que las analogías y diferencias entre problemas estriban en la igualdad o diferencia en ciertas ideas clave (ver Tabla



II). El ‘efecto Sísifo’ mostrado en la entrevista -o de ‘retroceso’ del sujeto tras un avance incompleto-, se produce como consecuencia de la imposibilidad del sujeto de alcanzar un nuevo estado cognitivo de estabilidad, asociado con una comprensión completa de las analogías y diferencias en la estructura algebraica de los problemas. No completar el proceso de elaboración de una representación mental adecuada de todos esos problemas, acaba por suponer un fracaso didáctico. Los profesores deberían prestar atención a la diferencia entre una ‘apariencia de comprensión’ y la comprensión real. Cuando el sujeto expresa una idea de relevancia estructural para sostener sus argumentos, se puede producir en los profesores una ilusión de que el sujeto está comprendiendo cuando, en realidad, no es así. Esto puede conducir a relajar el trabajo instruccional necesario para llevar al alumno definitivamente a la representación abstracta de los problemas. Esta ilusión está provocada por las inferencias que el propio profesor elabora para conectar la parte de la información (las ideas clave) mencionadas por el alumno, que en realidad están explícitas en los enunciados, con otra parte (las estructuras de los problemas) que están implícitas. Esto recuerda uno de los fenómenos didácticos que Brousseau definió como “efecto Jourdain” (Brousseau, 1986) según el cual, el profesor intelectualiza y da importancia a ciertas respuestas y comportamientos de los alumnos en los que reconoce indicios de conocimiento, cuando en realidad estas respuestas y comportamientos tienen causas, motivaciones y significados triviales. Este caso nos previene de trivializar los procesos mentales de los sujetos cuando tratan de establecer analogías estructurales entre problemas, y nos hace ver que los estudiantes se encuentran grandes obstáculos en el camino de la comprensión de la transferencia analógica, que es una de las estrategias más usadas en las aulas para enseñar a resolver problemas.

## Bibliografía

---

- Artzt, A. y Armour-thomas, E. (1992). Development of a cognitive-metacognitive framework for protocol analysis of mathematical problem solving in small groups. *Cognition and Instruction*, 9 (2), 137-175.
- Bernardo, A.B.I. (2001). Analogical problem construction and transfer in mathematical problem solving. *Educational Psychology*, 21(2), 137-150.
- Brousseau, G. (1986). Fondaments et méthodes de la didactique des Mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 33-115.
- Castro, E.; Rico, L.; Batanero, C. y Castro, E. (1991). Dificultad en problemas de comparación multiplicativa. En F. Furinghetti (Ed) *Proceedings Fifteenth PME Conference* Vol 1. Assisi, Italy, (pp 192- 198).
- Chen, Z. y Klahr, D. (2008). Bridging the gap: Remote transfer of problem-solving and scientific reasoning strategies in children. In R. Kail (Ed.), *Advances in child development and behavior*. Vol. 36, Burlington, MA: Academic Press, (pp. 419–470)
- Chi, M.T.H., Feltovich, P.J. y Glaser, R. (1981). Categorization and representation of physics problems by experts and novices. *Cognitive Science*, 5, 121-152.
- Clement, J. (1988). Observed methods to generate analogies in scientific problem solving. *Cognitive Science*, 12, 563-586.
- Codina, A.; Castro, E. y Cañadas, M.C. (2011). Un sistema de categorías para el análisis de la interactividad en una i-actividad de resolución de problemas. En J.L. Lupiañez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. M. Palarea y A. Maz (Eds), *Investigaciones en pensamiento numérico y algebraico e historia de la matemática y educación matemática*. Granada: Grupo de pensamiento numérico y algebraico e historia de la matemática y educación matemática, (pp. 157-164)

- Gentner, D. (1983). Structure-mapping. A theoretical framework for analogy. *Cognitive Science*, 7, 155-170.
- Gick, M.L. y Holyoak, K.J. (1983). Schema induction and analogical transfer. *Cognitive Psychology*, 15, 1-38.
- Gómez-ferragud, C.B.; Solaz-Portolés, J.J. y Sanjosé, V. (2012). Una revisión de los procesos de transferencia para el aprendizaje y enseñanza de las ciencias. *Didáctica de las Ciencias Experimentales y Sociales*, vol. 26,199-227.
- Gómez-Ferragud, C.B., Solaz-Portolés, J.J. y Sanjosé, V. (2013a). Efectos de la similitud superficial y estructural sobre la transferencia a partir de análogos en problemas de alta y baja familiaridad: primeros resultados. *Enseñanza de las Ciencias*, 31(1), 135-151.
- Gómez-Ferragud, C.B.; Solaz-Portolés, J.J. y Sanjosé, V. (2013b). Analogy Construction and Success in Mathematics and Science Problem-Solving: a Study with Secondary Students. *Revista de Psicodidáctica*, 18(1), 81-108.
- Gómez-ferragud, C.B., Solaz-portolés, J.J. y Sanjosé, V. (2013c). Dificultades para codificar, relacionar y categorizar problemas verbales algebraicos: Dos estudios con alumnos de secundaria y profesores en formación. Aceptado para su publicación en *Bolema*.
- Holyoak, K.J. (1984). Analogical thinking and human intelligence. In R.J. Sternberg (Ed). *Advances in the psychology of human intelligence*, vol. 2. Hillsdale, NJ: Erlbaum, (pp. 199-230).
- Holyoak, K.J., y Koh, K. (1987). Surface and structural similarity in analogical transfer. *Memory and Cognition*, 15(4), 332-340.
- Novick, L. (1988). Analogical transfer, problem similarity, and expertise. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition*, 14, 510-520.
- Reed, S.K., Dempster, A. y Ettinger, M. (1985). Usefulness of analogous solutions for solving algebra word problems. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition*, 11, 106-125.

Reed, S.K. (1987). A structure-mapping model for word problems. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition*, 13, 124- 139.

Shoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando: Academic Press.

Witkin, H.A., Moore, C.A., Godenough, D.R. y Cox, P.W. (1975). *Field-dependent and field-independent cognitive styles and their educational implications*. Research bulletin. Princeton, New Jersey: Educational Testing Service

**8.-Anexo 1: Problemas utilizados en la tarea de agrupación**

Los 8 problemas de esta tarea se obtuvieron de un diseño 2X2X2 (estructura X temática X magnitud incógnita), manteniendo común el máximo de elementos sintácticos. (Entre paréntesis los cambios de uno a otro problema en el enunciado y en la pregunta).

<b>Estructura Encontrar</b>	<b>Estructura Alcanzar</b>
<p><b>Enunciados:</b> Consideremos dos globos A y B de diferente tamaño y fabricados con distinto material. Inicialmente el globo A tiene un volumen de 2000 cm<sup>3</sup> y el globo B está vacío. Entonces se conectan a la vez dos bombas térmicas (<i>neumáticas</i>) idénticas, una que toma calor (<i>extrae gas</i>) de A y lo transfiere a (<i>introduce en</i>) un acumulador (<i>depósito</i>) y otra que toma el calor (<i>extrae el gas</i>) del acumulador (<i>depósito</i>) y lo transfiere a (<i>introduce en</i>) B. El globo A va disminuyendo su volumen a razón de 20 cm<sup>3</sup>/cal (<i>cm<sup>3</sup>/g</i>) y el globo B va aumentando su volumen a razón de 30 cm<sup>3</sup>/cal (<i>cm<sup>3</sup>/g</i>).</p> <p><b>Preguntas:</b> ¿Cuántas calorías (<i>gramos</i>) se habrán transferido de A a B, cuando sus volúmenes sean iguales? (<i>¿Qué volumen habrá en A y en B cuando sus volúmenes sean iguales?</i>)</p>	<p><b>Enunciados:</b> Consideremos dos globos A y B de diferente tamaño y fabricados con distinto material. Inicialmente el globo A tiene un volumen de 2000 cm<sup>3</sup> y el globo B está vacío. Entonces se conectan a la vez dos bombas térmicas (<i>neumáticas</i>) idénticas, que extraen calor (<i>toman gas</i>) de un acumulador (<i>depósito</i>) y lo transfieren a (<i>introducen en</i>) cada globo. El globo A va aumentando su volumen a razón de 20 cm<sup>3</sup>/cal (<i>cm<sup>3</sup>/g</i>) y el globo B va aumentando su volumen a razón de 30 cm<sup>3</sup>/cal (<i>cm<sup>3</sup>/g</i>).</p> <p><b>Preguntas:</b> ¿Cuántas calorías (<i>gramos</i>) se habrán transferido a A y a B, cuando sus volúmenes sean iguales? (<i>¿Qué volumen habrá en A y en B cuando sus volúmenes sean iguales?</i>)</p>
<p><b>Nota:</b> Para reducir la extensión ocupada, entre paréntesis se indican las diferencias entre enunciados de los 8 problemas utilizados en la prueba. Téngase en cuenta que se ha indicado que los globos son de distinto material para permitir que el gas en su interior esté sometido a distintas presiones.</p>	

**9.-Anexo 2: Problemas utilizados en la prueba de transfer (fase 2 de las entrevistas).**

<p><b>PROBLEMA DIANA</b></p> <p>Consideremos dos globos A y B de diferente tamaño y fabricados con distinto material. Inicialmente el globo A tiene un volumen de <math>2000 \text{ cm}^3</math> y el globo B está vacío. Entonces se conectan a la vez dos bombas neumáticas idénticas, una que extrae gas de A y lo introduce en un depósito y otra que extrae el gas del depósito y lo introduce en B. El globo A va disminuyendo su volumen a razón de <math>20 \text{ cm}^3/\text{g}</math> y el globo B va aumentando su volumen a razón de <math>30 \text{ cm}^3/\text{g}</math>.</p> <p>¿Cuántos gramos de gas se habrán transferido de A a B, cuando sus volúmenes sean iguales?</p>
<p><b>PROBLEMAS FUENTE LEJANOS (FASE 2A)</b></p> <p><b>(Similar: SIM1)</b> Consideremos dos globos A y B de diferente tamaño y fabricados con distinto material. Inicialmente el globo A tiene un volumen de <math>2000 \text{ cm}^3</math> y el globo B está vacío. Entonces se conectan a la vez dos bombas térmicas idénticas que extraen calor de un acumulador y lo transfieren a cada globo. El globo A va aumentando su volumen a razón de <math>20 \text{ cm}^3/\text{kilocaloría}</math> y el globo B va aumentando su volumen a razón de <math>30 \text{ cm}^3/\text{kilocaloría}</math>.</p> <p>¿Cuántas kilocalorías se habrán transferido a A y a B cuando sus volúmenes sean iguales?</p> <p><b>(Isomorfo: ISO1)</b> Dos condensadores eléctricos A y B diferentes están conectados a un circuito eléctrico. Inicialmente el condensador A tiene una diferencia de potencial eléctrico entre sus bornes 2000 Voltios mayor que B. Entonces se conectan a la vez dos dispositivos idénticos, uno que extrae carga de A y la transfiere a un acumulador y otro que extrae la carga del acumulador y la transfiere a B. El condensador A va disminuyendo su potencial a razón de <math>20 \text{ Volt/microculombio}</math> y el condensador B va aumentando su potencial a razón de <math>30 \text{ Volt/microculombio}</math>.</p> <p>¿Cuántos microculombios se habrán transferido de A a B cuando sus diferencias de potencial sean iguales?</p> <p><b>(Relacionado: REL1)</b> Consideremos dos depósitos A y B diferentes, con disolución de ácido ascórbico en agua. Inicialmente el contenedor A contiene un volumen <math>2000 \text{ cm}^3</math> de disolución más que B. Entonces se conectan a la vez dos bombas hidráulicas idénticas, una que extrae disolución de A y la introduce en un contenedor vacío y otra que extrae la disolución del contenedor y la introduce en B. La disolución A contiene ácido con densidad de <math>20 \text{ g/cm}^3</math> y la disolución B contiene ácido con una densidad de <math>30 \text{ g/cm}^3</math>.</p> <p>¿Cuántos gramos de ácido ascórbico se habrán transferido de A a B cuando sus volúmenes sean iguales?</p>
<p><b>PROBLEMAS FUENTE CERCANOS (FASE 2B)</b></p> <p><b>(Relacionado: REL2)</b> Consideremos dos globos A y B de diferente tamaño y fabricados con distinto material. Inicialmente el globo A tiene un volumen <math>2000 \text{ cm}^3</math> mayor que B. Entonces se conectan a la vez dos bombas neumáticas idénticas, una que extrae gas licuado de A y lo introduce en un depósito vacío y otra que extrae el gas licuado del depósito y lo introduce en B. El globo A tiene un gas licuado con una densidad de <math>20 \text{ g/cm}^3</math> y el globo B tiene un gas licuado con una densidad de <math>30 \text{ g/cm}^3</math>.</p> <p>¿Cuántos gramos de gas licuado se habrán transferido de A a B, cuando sus volúmenes sean iguales?</p> <p><b>(Isomorfo: ISO2)</b> Consideremos dos depósitos A y B de diferente tamaño con disolución de ácido ascórbico en agua. Inicialmente el depósito A contiene un volumen <math>2000 \text{ cm}^3</math> de disolución y el depósito B está vacío. Entonces se conectan a la vez dos bombas hidráulicas idénticas, una que extrae disolución de A y la introduce en un contenedor con agua, y otra que extrae disolución del contenedor y la introduce en B. La disolución A va disminuyendo su volumen a razón de <math>20 \text{ cm}^3/\text{g}</math> de ácido y la disolución B va aumentando su volumen a razón de <math>30 \text{ cm}^3/\text{g}</math> de ácido.</p> <p>¿Cuántos gramos de ácido ascórbico se habrán transferido de A a B cuando sus volúmenes sean iguales?</p>

# Capítulo 8

## **Effects of Topic Familiarity on Analogical Transfer in Problem-Solving: a Think-Aloud Study of Two Singular Cases.**

---

### **Referencia:**

Gómez-Ferragud, C.B., Solaz-Portolés, J.J. & Sanjosé, V. (2014). Effects of topic familiarity on analogical transfer in problem-solving: a think-aloud study of two singular cases. Artículo enviado a *The Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*.





# 8. Effects of Topic Familiarity on Analogical Transfer in Problem-Solving: a Think-Aloud Study of Two Singular Cases.

## Abstract:

Analogical transfer is one of the most frequently used strategies to teach problem-solving in science and math's primary classrooms. We conducted a qualitative research through two case studies based on think-aloud protocols in order to study in depth the cognitive processes involved in the early stages of the transfer process. The problems were designed using familiar contexts and unfamiliar scientific contexts for students. As well as the effect of familiarity, the effect of the algebra word problems defining features (surface and structure) was also studied. We started from two effects found in a previous study. The first (screen effect) shows how a subject can't access to the structure of the problem due to interference generated by the surface. The second effect (Sisifo effect) shows how a subject, despite his cognitive advance, fails to reach a steady comprehension state and as a consequence, goes back to avoid the cognitive conflict state. Both effects increase under a low familiarity condition.

**Key-words:** Transfer, problem solving, analogies, surface and structure, familiarity, Algebra word problems, think- aloud.

## 8.1 Introduction: problem-solving by transfer

Word problems, in particular those well-structured of algebraic nature, are one the most used tools to facilitate deep comprehension and to assess it in science and mathematics education. Two main components have been defined in problem-solving (Newell and Simon, 1972): comprehension and resolution. Comprehending a word problem implies the elaboration of mental representations of the problematic situation at different level of elaboration. Kintsch and colleagues, (Kintsch, 1998; Kintsch and van Dijk, 1978; Kintsch and Greeno, 1985; Nathan, Kintsch and Young, 1992; Greeno, 1989) proposed several levels: Word level; Semantic level; Situation Model, or referential level (SM onwards) and Problem Model, or abstract level (PM onwards). The integration of the semantic content with the prior knowledge is necessary to build the top representations, SM and PM. They both differ in their constituents. SM is made from non-abstract, ordinary world objects and events, and also world rules, whereas PM is made from abstract entities as relations among quantities, functions, concepts, laws, principles, etc. Resolution implies connecting SM and PM in pre-definite manners. As SM is usually easier to build than PM, the instructional work mainly focus on this SM $\rightarrow$ PM transition, so-called '*algebraic translation*' when problems are of algebraic nature (Puig, 1998; Sanjosé, Solaz-Portolés and Valenzuela, 2009).

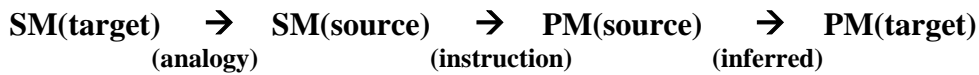
Among the diverse instructional strategies, a well-known and wide-used one is “analogical transfer” (Hammer et al., 2005; Mestre, 2003; Bernardo, 2001; Bassok and Holyoak, 1989; Reed, Dempster and Ettinger, 1985; Gick and Holyoak, 1983). In a typical instruction by analogical transfer, the teacher first solves a set of example problems ('source' problems onwards) involving basic principles, laws or theorems, and next he/she proposes analogous problems to be solved by his/her students ('target' problems onwards).

Students are expected to learn suitable solving procedures from the examples, and apply them consistently to solve the target problems (transfer). When source examples and target problems are perceived as dissimilar, transfer becomes difficult (Klausmeir, 1985). Thus, success in problem-solving by transfer depends on the solver's ability for establishing suitable analogies between problems (Gentner, 1983;

Reed, 1987). On the basis of these analogies, the solver is expected to build the abstract mental representation, PM, for the target problem, similar to the one constructed for the example(s) considered as ‘source’. Specifically, this implies the path shown in Figure I. This path is possible because the connection SM(source) → PM(source) has been explicitly built before, in the instructional sessions.

Figure I

*Path to connect SM to PM for the ‘target’ problem using analogical transfer.*



Note: SM and PM stand for ‘Situation Model’ and ‘Problem Model’ mental representations.

This paper focuses on the crucial first step in Figure I. Our research questions are:

In problem-solving by transfer, 1) Can the more or less solvers’ familiarity with the situations difficult building suitable analogies between problems?; 2) How the problem characteristics difficult or facilitate analogy construction in familiar and non-familiar situations?

### **8.1.1.-Problem features and its interaction with solvers: familiarity, surface and structure.**

Concerning the first research question, the SM is built linking the semantic content of the text to the subject’s previous knowledge. Thus, having a limited previous knowledge with the situation described in the statement, could cause a poor SM mental representation. In the academic setting, if the situations implied in the statements were non-familiar for the solvers, they could have difficulties to represent these problematic situations in their minds so hindering the appropriate analogy construction between them.

The solver’s familiarity with the (problematic) situations described in the statements (‘Familiarity’ onwards) can be defined as his/her previous experience and (non-abstract) knowledge about the spatio-temporal contexts, objects, events, agents and actions...Familiarity depends on a solver-problem interaction. Familiarity has been considered as one of the strongest predictors of problem-solving ability but this skill

itself is not easily transferable from familiar to non-familiar problematic situations (Jonassen, 2000). This is a relevant point in science education because teachers usually expect that learning problem-solving procedures in math classes will significantly increase students' success in science problem-solving. However, verbal problems in mathematics usually refer to daily life (familiar) contexts whereas science problems usually do not (non-familiar contexts).

Transfer difficulty inside familiar or inside non-familiar contexts have been also compared. Mayer and Wittrock (1996) sustained that routine and more familiar problems are easy to transfer, whereas transferring non-familiar problems requires more and a conscious effort. Therefore, cognitive processes implied in analogical transfer dealing with familiar or non-familiar problematic situations seem to be different. We will try to discover some of these differences in the present study.

Our second research question is motivated by previous work. Gómez, Solaz-Portolés and Sanjosé (2013a) found that students have difficulties to filter irrelevant problem features out, just keeping only the ones relevant to solve them. Difficulties could be higher when solvers had less familiarity with the problematic situations (Gómez, Solaz-Portolés and Sanjosé, 2013b).

Long time ago, Holyoak (1984) differentiated two main kinds of problem features: Surface and Structure. Surface elements are irrelevant to formally solve the problem. Surface features are syntactic variables, objects and events, numerical quantities and magnitudes, defining the context and problematic situation in the ordinary world. Structure is the abstract, mathematical nature of the problem. In an algebraic problem, structure is determined basically by "*how the quantities are related to each other rather by what the quantities are*" (Novick, 1988, p. 511). The problems considered here are of algebraic nature so their equations summarize the relations among the quantities, including the unknown. Different characteristics of the unknown have been proven to cause different solving behavior in novice students, as its position in the statement (Castro, Rico, Batanero y Castro, 1991), its algebraic or arithmetic role, or the name of the unknown magnitude (Gómez, Solaz-Portolés and Sanjosé, 2013c).

### **8.1.2. The present study**

We tried to advance in the answers to the above research questions by developing a qualitative in-deep cases study, based on think-aloud protocols. Participants were interviewed individually and a think-aloud protocol was followed to collect detailed data about their cognitive processes in familiar and in non-familiar problematic situations. We concentrated on mental processes associated to building analogies (Clement, 1988) and differences among problems. Among the group of participants, two cases have been selected here due to their singularities and virtual contributions to instruction improvement. Along the interviews the students' showed different levels of difficulties in the task in familiar or non-familiar problems and this shed light on the answers to the research questions.

## **8.2 Method**

### **8.2.1. Participants**

Twenty-one, 9th-grade, male and female students of an intact group in a public Spanish school participated in this qualitative study. The educational center was located in a medium-size city (about 80000 inhabitants) in an intermediate socio-economic level zone. Even though it was a convenience sample, these students did not show any special feature compared to their average population in Spain.

### **8.2.2 Design and Materials**

Two different tasks were developed. First, students performed a sorting problems task, (Chi, Feltovich and Glaser, 1981). They had to sort 8 (unsolved) problems and to define groups according to their mathematical solution (Gómez, Solaz-Portolés and Sanjosé, 2013c). The objective of this task was to activate basic cognitive processes implied in problem-solving by analogical transfer: codifying, indexing and

mapping problems. Performance in this task was the starting point of the second and main part of this study.

The second part of this study was devoted to analyze in some detail, the possible effects on analogical transfer processes due to the solver's greater or lesser familiarity with the problem topic. Individual semi-structured interviews were carried out. Participants were asked to explain aloud their thoughts, judgments and feelings along the second task: relating one to-be-solved problem (the 'target' problem onwards) to several analogous problems ('source' problems onwards) in order to determine what source problem(s) would provide suitable help to solve the target problem, and the reason why.

The problems used in this experiment were defined by 4 factors: a) Surface; b) Structure (Holyoak, 1984); c) Unknown and d) Familiarity.

Two levels of Familiarity have been considered: problems with scientific contexts are expected to create a low familiarity level condition, whereas problems with daily life contexts are expected to create a high familiarity level condition.

In the transfer task, we also used a set of problems for each familiarity condition: just one 'target' problem, 3 far-analogous 'source' problems, and 2 near-analogous 'source' problems. Therefore, in each familiarity condition and from a theoretical perspective, the relationship between two problems can be characterized in terms of their surface and structural similarity (Holyoak and Koh, 1987). Table I displays the relationship between the 'target' problem and the different analogous, example or 'source' problems used. The source problems have been labelled using the Reed's (1987) suggestion according to their surface and structural relationship with the target problem. Appendix includes the statements of the problems used in the transfer task.

**Table I:** Relationship among the ‘target’ problem and the analogous, ‘source’ problems, according to their surfaces, structures and unknowns.

SURFACES	STRUCTURES	Meeting	Catching-up	Mixtures
	UNKNOWNNS			
Gases	Grams	TARGET		REL2
	Kilocalories		SIM1	
Capacitors	microcoulombs	ISO1		
Liquids	Grams	ISO2		REL1

Note: ISO stands for ‘isomorphic’, SIM stands for ‘similar’ and REL stands for ‘related’.

Table II shows the surface and structural analysis for one problem used in the low familiarity condition. Some key-ideas have been underlined for latter identification. The underlined ideas are not enough to determine the equations, as can be verified by comparing the target and isomorphic problems to the related problems in the Appendix.

**Table II:** Constitutive elements and algebraic translation of a problem statement.

Surface Elements	
<b>Objects:</b> balloons, pneumatic pumps, gas, container.	
<b>Events:</b> Consider two balloons; Connecting two identical pneumatic pumps simultaneously; Taking gas off; Putting gas inside; Diminishing the volume; Increasing the volume; Gas transfer.	
<b>Involved magnitudes:</b> cm <sup>3</sup> ; g; cm <sup>3</sup> /g	<b>Unknown magnitude:</b> grams
Ideas having structural relevance	Algebraic translation of the structurally relevant ideas
1- <u>The balloon A decreases its volume</u> at a ratio of 20 cm <sup>3</sup> /g	$\Delta V_A = -20 \Delta m_A$
2- <u>The balloon B increases its volume</u> at a ratio of 30 cm <sup>3</sup> /g	$\Delta V_B = +30 \Delta m_B$
3- Before connecting the pumps, the volume of the balloon A is 2000 cm <sup>3</sup>	$V_A = 2000 - 20 \Delta m_A$ ; after the pumps were connected
4- Before switching on the pumps, the balloon B is empty.	$V_B = +30 \Delta m_B$ ; after the pumps were connected.
Question	Algebraic translation of the question
How many grams of gas will be transferred from A to B when their volumes are the same?	Find $\Delta m_B$ when $V_A = V_B$

### 8.2.3 Procedure

Permission was obtained from parents and tutors to develop every part of this study, in particular, for the individual interview. For each familiarity condition, the sorting task was carried out in a usual classroom session (30min). After reading the instructions, students completed a practice example. Then, they dealt with the 8

statements in order to sort them according to their mathematical solving procedures (Gómez, Solaz-Portolés y Sanjosé, 2013c; Gómez, Solaz-Portolés y Sanjosé, 2013d). The individual interviews initiated 7-10 days after the sorting task was done and extended for 2-3 weeks. Participants were interviewed twice, for low and high familiarity conditions. Sessions were video-recorded. Video-camera was placed in such a way that the table and the students' actions were recorded, but not their faces. Each problem on the table had different color, so they were easily distinguished when the recordings were visioned and analyzed.

Interviews lasted about 15-25 min. One of the researchers (CG) was the interviewer. The interviews followed the above defined three-phases-protocol shown in Table III, but it was slightly modified to fit every case and situation. The interviewer read the instructions to the student, and informed him/her about the tasks and its goal. Subjects were also informed about possible interviewer's breaks to ask them to express their thoughts aloud, but never caused by positive or negative judgments about the student's performance.

**Table III:** *Interview procedure in the think-aloud sessions.*

---

**Phase 1: Revision of the criterion used in the sorting task to categorize problems**

Delivery of the performed task to the student; reading and recall of the criterion used; explanation of this criterion or of a new one, if it is the case.

---

**Phase 2A: Analogies and differences between source problems (only the statements without solutions) and one proposed, target problem**

Delivering the target problem and proposing the task; reading and clarifying doubts if it is the case; delivering the three source far-analogous problems (SIM1, ISO1 and REL1) and location in equidistant positions from the subject; reading and clarifying if it is the case; Student's comparison among problems, specially between any source and the target problem; confirming the kind of analogy/ difference between problems.

**Phase 2B:** When the student is not able to give an answer, or he/she shows a low reliability in it, the interviewer delivered two additional source, near-analogous problems (ISO2 and REL2) and stated the task again.

---

**Phase 3: Analogies between problems with the help of the solutions for the source problems**

Delivery of the source problems full solved; same procedure than in phase 2; student's final answer.

---

## 8.2.4 Codifying the students' behaviour

We used the codification categories proposed by Codina, Castro and Cañadas (2011, pp. 160-161). These authors, in turn, based their categories on the Artzt and Armour-Thomas' (1992) paper, and also Schoenfeld's (1985) previous work. Execution of the



solving procedure was the last episode not considered here, because we were interested in the analogy construction only. As the task proposed to the students in this study was to relate problems in order to establish analogies and differences among them, we developed the Exploration episode to consider Clement's (1988) stages in analogy construction in science problem-solving: a) generating an analogy/difference among source problems/between a source problem and the target (AG/DG); b) discussing the generated analogy/ difference (AD/DD); c) using the analogy/ difference to solve the target problem or to understand, etc. (AU/DU).

### **8.3 Cases study and discussion**

Different effects coming from the subject's familiarity with the problematic situation on the analogy construction were found. Some students were not affected by the greater or lesser familiarity with the problematic situation. These subjects can be classified in two extreme groups: a) students able to establish structural similarities and differences among problems, filtering-out the problems surface features, as experts do; b) students unable to access the problems structure whatever the level of familiarity. However, most students were influenced by the level of familiarity, so they changed their behaviour from low familiar contexts to high familiar contexts. In this paper we analysed two interesting cases whose behaviour changed from low to high familiarity.

In the following transcripts the most informative segments have been selected due to space limitations. Subjects (S) and interviewer (I) literal (but translated from Spanish to English) verbalizations have been differentiated. Square brackets and italics are used to indicate subject's evident but silent actions. Discussions and comments are stated in different letters and usual brackets for their easy location when they are inserted in the dialogs. Codes have been also included when it was applicable: AG/DG (analogy/difference generation); AD/DD (analogy/difference discussion); AU/DU (analogy/difference use). Problems are labeled using capital letters (TARGET, SIM, ISO and REL). The recording time (min:sec) has been added to

every information segment. In order to facilitate comparisons, subject's behaviour in low and high familiarity has been organized in parallel columns.

***Case “MLR”: Surface similarities hide structural differences between problems causing a ‘Screen Effect’. A low or high Familiarity implies more or less ‘opacity in the screen’.***

The ‘Screen effect’ has been defined as the impossibility of detecting the structural differences between problems due to their surface similarities, although the subject is able to understand such differences (Gómez, Solaz-Portolés and Sanjosé, 2013d). The surface elements act as a screen hiding the problems structure to the solver.

In the low familiarity condition, ‘MLR’ used the name of the unknown (related to the science subject matter involved in the problematic situation) to classify problems, which is a surface criterion. At the beginning of phase 2, the subject takes the same surface feature to relate problems.

In the high familiarity condition, this same subject found less (but some) obstacles and used a different criterion: problems had the same or different key-ideas in their statements. These key-ideas are the ones underlined in sentences 1 and 2 in Table II and have structural relevance. It seems that the subject did not consider “litres” and “euros” important to determine the way problems are solved. In phase 2, MLR uses this same indicator at the beginning of the second task.

Low Familiarity	High Familiarity
<b>Phase 2A: transfer task. One target problem first, and then three source problems are delivered</b>	
<i>MLR studies the TARGET first. Then, takes the source problems one per one and read them carefully. When she finishes, she considers again the REL1 problem.</i>	<i>As in low familiarity, MLR reads the TARGET first and then the source problems in order.</i>
<b>I: [08:06] Why did you return on this particular problem [he points his finger at REL1]?</b>	<b>I: [03:34] What have you seen in the problems?</b>
<b>S: [08:07] Because in these other two problems [she points SIM1 and ISO1] the given units are different from the TARGET.</b>	<b>S: [03:39] This problem [ISO1] seems to have the same structure than this one [the TARGET]: first, one thing diminishes and then other thing increases...</b>
(DG: She focuses on the name of the magnitudes to establish differences between problems).	(AG: Soon mention of problems structure, although she does not explain its meaning).
<b>S: [08:21-08:50] I’m going to read the third one [She re-read REL1 and ISO1, and compares both to the TARGET. Then, she takes ISO1 away and keeps REL1 in front of her,</b>	<b>But concerning this problem [she points at REL1], I see at a glance that both have the same quantities, 20 and 30... Perhaps it could be of some help even though it is about concentrations...Ups! I see that they do not ask the same thing! ...</b>

*studying it in some detail...*

**S:** [08:51] **This one** [*pointing her finger at REL1*] **is the one I find more similar!**

(AG: REL1 and TARGET have the same magnitudes and also share some ideas in their statements. However, both problems have different structures).

**I:** [08:53] **Can you tell me exactly why?**

**S:** [09:00] **Yes. Although in one there are balloons and in the other one there are tanks with dissolutions, ...**

(DG: She explicitly mentions some irrelevant differences between TARGET and REL1...)

**...they both ask you the same.**

(AD: ... but focus on the unknowns as the relevant components).

**The problem I have to solve ask me the 'grams' and this one too** [*she points at REL1 placed in front of her*]. **In addition, they both have the same units in everything** (*sic*).

**Anyway, perhaps it could be of some help although I see both problems do not ask the same things.**

(AD/AD: As in the low familiarity condition, the unknowns are still important for her, but now there are other important factors she considers).

**S:** [04:09-04:26] **Let me see the remaining problem...** [*she takes the SIM1, put it in front of her and read it once more*] **In this problem, both things** (*sic*) **are increasing** [*she refers to the underlining ideas in Table II*] **and then I think it is not useful.**

(DG: The student focuses on the same key-ideas used in the TARGET-ISO1 relationship, to find a difference between TARGET and SIM1).

**I:** [04: 27] **Have you found other similarities or differences among these problems?**

**S:** [04:28-04:47] **No** [*after a quick reading*].

At the end of phase 2A in the low familiarity condition, the subject (MLR) built an analogy between TARGET and REL1 based on a surface similarity: the name of the magnitude of the unknown. She did not mention any structural feature. This 'screen' was hiding the structural, relevant features to her. MLR looked so confident on her criterion that the interviewer decided to provide her with the solution of the target problems so starting phase 3 (see below).

At the end of the same phase 2A in the high familiarity condition, some obstacles from the name of the unknown magnitudes remained. This created an obstructive REL1-TARGET similarity and the subject did not mention the REL1-TARGET structural differences. Thus, the 'screen' was still present. However, MLR was been able to perceive other similarities and differences related to the meaning of the key-ideas underlined in Table II, having structural relevance. On these key-ideas she established a TARGET-ISO1 similarity and a TARGET-SIM1 difference. The specific meaning of these key-ideas was not explained at the end of phase 2A, therefore the interviewer decided to provide the subject with two additional source problems, ISO2 and REL2 (phase 2B).

---

**High Familiarity only**

---

**Phase 2B: transfer task (extension): two new and near-analogous source problems are provided.**

---

*The interviewer provides the new source problems and let the student read them at their own pace.*

**I: [05:58] Have you found something interesting in these new problems? Anyone could help you solve the target?**

**S: [05:59] I see that these problems [she points at REL1 and at REL2] have the same structure and both tell us about ‘concentrations’... However, this one [ISO2] is like the blue one [ISO1] because it tells that something decreases and something increases.**

(...)

**I: [06:10-06:25] I still have a question for you. The target problem asks for the litres of water, while the yellow and the blue problems, (the problems that could help you in your opinion), ask for litres or air and for Euros... Do you think it is important to solve the target or not?**

**S: [06:40] [The student takes some time to think about before giving an answer] No, I guess, because the structure is the same no matters the problem asking.**

---

The student has the opportunity of comparing couples of source problems (far to near analogous) and then captures new correct similarities between them (AG). This fact supports previous findings about the importance of having enough quantity of source problems to deal with, necessary to abstract the shared structure (Gick & Holyoak, 1983; Goldstone & Sakamoto, 2003). Finally MLR discards the name of the unknowns as relevant factors and keeps the ‘structure’ as relevant (DA), although its meaning is not yet clear. However, the similarities between source problems do not imply similarities between source and the target problems. This last relationship is still implicit at the end of phase 2B.

In phase 3, the solutions for the source problems are provided to the student.

<b>Low Familiarity</b>	<b>High Familiarity</b>
<b>Phase 3: transfer with the source problems full solved (not the target)</b>	
<i>MLR studies REL1 first. Then reads ISO1 for long time.</i>	<i>The student studies the solutions for the source</i>
<b>I: [12:32] What do you think now?</b>	<i>problems for less time than in</i>
<b>S: [12:34] Well... I think this one [she points at ISO1] has the same solution procedure that the target.</b>	<i>the low familiarity condition.</i>
<b>I: [12:36] Why did you change your opinion?</b>	<b>S: [07:04-07:016] Can you</b>
<b>S: [12:41] Because looking at the units... Let me see... Here is different [the student points at REL1] from the target problem because says the word ‘contains’, whereas here [ISO1] says ‘the voltage decreases at a ratio of...’ the same that in the target problem. Now I see that I could use these formulas (sic) [the equations of ISO1] here [in the TARGET] because even though they have different units, I think both will be solved in the same way.</b>	<b>see? As I said before, these two problems [pointing at ISO1 and ISO2], with the same structures that the TARGET, have the same equations. However, these two [pointing now at REL1 and REL2] do not.</b>

---

In the low familiarity condition, MLR was not able to access to the structure of the problems and then, she proposed unhelpful analogies between problems based on the magnitude of the unknown in each problem. However, when the solutions for the source problems were delivered to her, she had no obstacles to understand the algebraic content, and also to correctly relate the equations to the statement ideas. When she studied the equations for the source problems, she changed their first criterion and based the analogies on the structure. She was not able to make the transition Statement  $\rightarrow$  Equations (the ‘algebraic translation’), due to the ‘screen effect’ (Gómez, Solaz-Portolés y Sanjosé, 2013b; Gómez, Solaz-Portolés y Sanjosé, 2013d) produced by the surface similarities between problems. Nevertheless, when the ‘screen’ was put away, the student was able to understand the mathematical solutions and relate the equations to the statements, so making the transition Equations  $\rightarrow$  Statement.

In the high familiarity condition, MLR showed less but some obstacles to elaborate suitable analogies. At the end of phase 2A, she was not able to properly differentiate ISO1 from REL1 and she was troubled by the name of the magnitudes implied. The ‘screen’ was still present. With the help of two additional source problems, she made source-to-source comparisons and then she could categorize the source problems according to their ‘structure’. Although these relations were correct and related to some key-ideas explicit in the statements, the meaning of the ‘structure’ was unclear. The solutions provided for the source problems in phase 3, allowed the student clarify her vague meaning of ‘structure’ and supported their criterion in the relation source-to-source. Related and isomorphic problems were clearly detached. Thus, she used this ‘success’ to reinforce the relationship between ISO1 and TARGET first stated in phase 2A.

Using the ‘visual’ parallel, for this subject the familiarity with the problem situations seemed to be related to the ‘opacity of the screen’: when familiarity increased, the ‘screen’ became less ‘opaque’ so the student could access to the correct structural relationship between problems, beyond their surface analogies or differences.

***Case “SuperMario64”: Even though the student makes a great effort, failure and deceit causes a ‘Sisyphus effect’ in low familiarity. Higher Familiarity implies higher likelihood to succeed after the effort.***

Frequently science and mathematics learning implies solving cognitive conflicts coming from alternative frameworks or misconceptions. In fact, the theory of conceptual change suggests promote in students, and resolve, cognitive conflicts in order to them can reach new, suitable states of knowledge. A lot of educational work is needed and long term success in conceptual change is a rare event: students tend to return to their initial mental state when they cannot arrive to a better, stronger and fruitful new cognitive position. Therefore, they are involved in a sequence of effort and deceit.

According to the Homer’s *Odyssey*, Sisyphus, the king of Ephyra (today’s Corinth), was punished by gods to roll a huge rock up an abrupt hill. Before he could reach the top, however, the massive stone would always roll back down, forcing him to begin again... and forever, causing him a chronic deception. The ‘Sisyphus effect’ appears when a student, after doing a hard cognitive effort in some learning task, comes into a cognitive conflict, does not reach comprehension and then goes back down to their initial position, free from cognitive conflict but unacceptable for teachers (Gómez, Solaz-Portolés y Sanjosé, 2013d).

As we can see below, in the low familiarity condition ‘*SuperMario64*’ makes us remember this effort-deception sequence. However, this not happens in the high familiarity condition.

In the sorting task corresponding to both familiarity conditions, this student assumed a mixed ‘Surface X Structure’ criterion. Thus, surface (and not only structural) elements seemed relevant for him to solve the problems. This was his mental state at the beginning of the second task (phase 2A).

Low Familiarity	High Familiarity
<p><b>Phase 2A: transfer task. One target problem first, and then three source problems are delivered</b></p>	
<p><i>The student takes SIM1 and brings it close to TARGET to read it carefully.</i></p>	<p><i>The subject reads TARGET first, then reads SIM1 and compares them both. Next, he puts SIM1 aside and takes and reads ISO1. He puts ISO1 aside too and takes REL1. When he finishes, he re-reads SIM1.</i></p>
<p><b>I:</b> [04:26]; <b>Have you found anything interesting in this problem?</b></p>	<p><b>I:</b> [03:07]; <b>What are you thinking about?</b></p>
<p><b>S:</b> [04:28]; <b>This one does not help me</b></p>	<p><b>S:</b> [03:09]; <b>To be honest, I don't know whether anyone could help me or not ...</b></p>
<p><b>E:</b> [04:31]; <b>Why?</b></p>	<p><b>I:</b> [03:17]; <b>Why? Read them carefully, please.</b></p>
<p><b>S:</b> [04:32]; <b>Because in the target, A decreases and B increases, but here [points at SIM1], A increases and B also increases. I think I was wrong before [in task 1 and phase 1], but now I would change [my criterion].</b></p>	<p><b>S:</b> [03:50]; <b>I think any of the three problems can help me, because when A decreases and B increases as in the target problem, the units are different: 'euros per day', or 'litres of air per kilogram', while in the target are 'litres per minute'.</b></p>
<p>(AG/DG: The student focuses on key-ideas having structural relevance (underlined in Table II). Different key-ideas imply different solving procedure).</p>	<p>(He keeps on considering relevant the name of the magnitudes. This was the criterion he assumed at the end of the interview in the low familiarity condition).</p>
<p><b>I:</b> [04:47]; <b>OK. Please, go ahead.</b></p>	
<p><i>The subject puts SIM1 aside, and brings ISO1 closer to TARGET. Then, read it.</i></p>	
<p><b>S:</b> [04:56]; <b>This one is OK because, A decreases, as in the problem to be solved, and B increases...</b></p>	
<p>(AG: Analogy generated using the new criterion).</p>	
<p><b>I:</b> [05:04]; <b>Ok. Let me ask you an additional question (...). This problem [TARGET] and this one [ISO1] ask you for different things, 'grams' or 'microcoulombs'. However, you told me that ISO1 will help you to solve the target problem, right?</b></p>	
<p><b>S:</b> [05:15]; <b>Yes, because the units do not matter. If A decreases, it decreases in both problems, and if B increases, it increases in both problems.</b></p>	
<p>(GD/DD: He explicitly rejects the name of the unknown magnitude as relevant, and strengthens his criterion based on the key-ideas. The student seems to make progress).</p>	
<p><b>I:</b> [05:36]; <b>Ok. Thank you. Go on, please.</b></p>	
<p><i>SuperMario64 brings REL1 close to TARGET, reads the former and compares both problems.</i></p>	
<p><b>S:</b> [06:14]; <b>This one helps me too, because A decreases and B increases, even though the statement does not say it explicitly.</b></p>	
<p>(UG: Evidence of misunderstanding).</p>	

In the high familiarity condition, the subject generated differences between problems using his first criterion. This criterion is based on two features: a) the key-ideas in the statements (the ones underlined in Table II), and b) the name of the magnitudes.

In the low familiarity condition, the student made progress along phase 2A. However, at the end we found an evidence of misunderstanding. Although the key-ideas mentioned are of structural relevance, they were explicit in the statements. Thus, noticing similarities and differences in these ideas does not imply detecting

structural similarities or differences. Other relevant ideas were also needed to full algebraic translation, and these other ideas bring about the isomorphic/related structural difference.

*SuperMario64* needed go on working and the interviewer provided him with the two additional near-analogous, source problems in phase 2B.

Low Familiarity	High Familiarity
<b>Phase 2B: transfer task (extension): two new and near-analogous source problems are provided.</b>	
<i>The student reads the new problems in the order ISO2-REL2-ISO2.</i>	<i>The student reads the new problems in the order REL2-ISO2.</i>
<b>S: [07:46]; This one [ISO2] helps me too because the same happens: A decreases and B increases.</b>	<b>S: [05:00] This one would help me [he points at ISO2] (...)</b>
<b>I: [07:51]; Ok.</b>	<b>because, as in the target problem, A decreases and B increases, and in addition, the unit are the same: 'litres per minute'.</b>
<i>The subject re-reads REL2.</i>	<b>I: [05:17]; And the yellow one [REL2]?</b>
<b>S: [08:46]; This one could be useful too, but now I not sure, because here it is 'density'. If I follow my rule, as A decreases and B increases, this problem should help me too.</b>	<b>S: [05:20]; No. Though it says extracting from A to B (sic), the units are 'litres per ton' of mixture.</b>
<b>I: [09:00]; So, the density makes you hesitate</b>	
<b>S: [09:02]; Yes. Keeping apart the 'density' these four problems [he points at ISO1, REL1, ISO2 and SIM2] are very similar and will be solved in the same way.</b>	

In phase 2B in the low familiarity condition, *SuperMario64* detected a key-word, important for the structural differences between TARGET and REL2: the 'density'. This fact represented a new hopeful progress, though he couldn't access to the implications at that moment. His answer was not correct as ISO1 and TARGET have different solution of REL1 or SIM2. In the high familiarity condition, the subject used their mixed criterion almost till the end.

As the subject looked confident in his (not suitable) criteria, the interviewer decided to provide him with the full solved source problems, so starting phase 3.

Low Familiarity	High Familiarity
<b>Phase 3: transfer with the source problems full solved (not the target)</b>	
<i>The subject studies the solved problems in the order: ISO1, ISO2, REL2 and REL1.</i>	<i>The student takes and studies the solved problems in the following order: ISO2, SIM1, ISO1, REL1, REL2 and ISO2. Finally, he re-studies ISO1 and ISO2...</i>
<i>When he finishes, he compares these problems and TARGET for some time.</i>	
<b>I: [11:25] Therefore, which could help you more solve the target problem?</b>	<b>I: [06:31] What do you think about?</b>
<b>S: [11.26]; The ones having 'g/cm<sup>3</sup>'</b>	<b>S: [06:33] Here is something troubling...[he takes a long time comparing</b>



(AG: Warning! This is a wrong analogy. The interviewer thought that he was near giving the correct answer but the student does not understand).

**I:** [11:28]; **Before, you focused on the fact the statement included “decreasing A and increasing B”. Nevertheless, when you have seen the solutions, you say that the important thing is the problem deals with ‘grams’ or ‘microcoulombs’, don’t you?**

**S:** [11:45]; **Yes, I thought this before. I supposed the units did not change the results. But now, when I can see the different solutions, the ones with the same unit, have also the same solution, and the ones having different units have different results.**

**I:** [12:12]; **Thus, if you had to choose the problems helping you more to solve the target, what problems would you choose?**

**S:** [12:16]; **The red and the purple problems [REL1 and REL2].**

(UA/UD: Using the generated (and wrong) analogy. The student seems to not understand the algebraic solutions).

*ISO1 and ISO2]*

**S:** [07:34] **According to that [he refers to the solutions] when the question is the same, and the process is the same, i.e. A decreasing and B increasing, the data (sic) do not influence on the problem.**

(AG/DG: Comparing ISO1 and ISO2 *SuperMario64* infers that the name of the magnitudes is not relevant to solve them (and the TARGET). Therefore, he takes this factor away from his criterion, and keeps only the key-ideas in the statements).

**I:** [07:57] **Wait! Do you say that here is not the same question...?** [*The interviewer points at ISO1*]

**S:** [08:02] **I mean it doesn’t matter ‘euros’ or ‘litres’ because the structure is the same. I think the problems having the same solution procedure than the target one, are these [He points at the problems ISO1 and ISO2]. These can help me but the yellow, red and green ones do not help me because they have different equations.**

(AU/DU: Once he accepted that ISO1 and ISO2 are the structural analogous to the ‘target’, the subject rejects other problems having different equations, as REL1 and REL2, or SIM1).

In the low familiarity condition, the behaviour of this subject was very interesting. After an apparent advance step by step, this student fell back to a former position, unacceptable from the educational point of view. Instead of giving him decisive help, the full solutions provided generated a cognitive conflict in the subject: He was not able to understand the algebraic content or the relationship between the equations and the statement in each problem. Thus, he returned to a free-from-cognitive-conflict state, taking the name of the magnitude as the relevant factor (‘Sisyphus effect’, Gómez, Solaz-Portolés y Sanjosé, 2013d). Perhaps, if the interviewer had provided him to some explanation or extra-help (not considered yet in this study), *SuperMario64* could arrive to the educative goal, i.e. full comprehension. The whole process makes us remember a failed conceptual change: the lack of understanding of the new offered scientific ideas causes in the student a rejection and to conserve his former ideas.

In the high familiarity condition, however, the student reached the educational goal. The well-known situations made easier to hem focusing on the important factors.

After studying the source problem solutions, he was able to recognize and use structural features to relate problems properly. Without extra-help from the interviewer, the effort was now successful. Of course, at the end of the interview we got limited evidence of full comprehension because the student did not relate the differences in the equations to differences in some key-ideas in the problem statements. In the *Sisyphus* analogy, it seems that in the high familiarity condition ‘the mountain’ became lower and the student could reach ‘the summit’ at least. However, even in the correct place, he was far from a relaxing position yet, so educational work was not finished.

## 8.4. Final comments

The two cases analysed here in some detail support previous results of statistical nature obtained in other studies (Gómez, Solaz-Portolés y Sanjosé, 2013a; Gómez, Solaz-Portolés y Sanjosé, 2013b): the solver’s level of familiarity with the problematic situations in the statements, seriously influence his/her mental processes implied in problem-solving by analogical transfer. When the level of familiarity is low, to establish structural analogies filtering-out irrelevant elements is difficult. This is because there is a great demand of cognitive resources to mentally represent the entities mentioned in the statements. Therefore, there are less cognitive resources free for abstract constructions, as the algebraic ones. Thus, there is less expectancy of transfer success.

The two cases analysed in the present study suggest that training students in daily life problems does not guarantees success in science problem-solving, even though they have the same structures as other authors found (Jonassen, opus, cit.). At least in mathematics and science problem-solving, the ability of transfer is difficult to be transferred from one context to other. Teachers should be aware of this fact in order to adapt their instruction avoiding easy transfer assumptions.

Another educational outcome from the present study is that students probably show a greater variability in their degree of incomprehension of problem-solving than

expected by teachers. Wrong-solvers should not be considered as just one coherent group but a multiple different cases. In the present study we have shown two solvers with a different obstacles also demanding different type of instructional work to make them reach full comprehension. The ‘Screen effect’ and the ‘Sisyphus effect’ these two cases showed are two of the undesired educational situations we could find in the classroom. The level of familiarity had significant influence on students in both situations, but its impact on the subjects’ performance was different because the cognitive processes subjects activated along the task were also different. Again, a different instructional extra-effort would be necessary in order to help these students raise the educational goal.

## References

---

- Bassok, M., & Holyoak, K. J. (1989). Interdomain transfer between isomorphic topics in algebra and physics. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition*, 15, 153-166. doi: 10.1037//0278-7393.15.1.153
- Bernardo, A.B.I. (2001.). Analogical problem construction and transfer in mathematical problem solving. *Educational Psychology*, 21(2), 137-150.
- Castro, E.; Rico, L.; Batanero, C. & Castro, E. (1991). Dificultad en problemas de comparación multiplicativa. En F. Furinghetti (ed) *Proceedings Fifteenth PME Conference Vol 1*, pp 192- 198. Assisi, Italy.
- Chi, M.T.H., Feltovich, P.J. & Glaser, R. (1981). Categorization and representation of physics problems by experts and novices. *Cognitive Science*, 5, pp. 121-152.
- Clement, J. (1988). Observed methods to generate analogies in scientific problem solving. *Cognitive Science* 12, 563-586.
- Gentner, D. (1983). Structure-mapping. A theoretical framework for analogy. *Cognitive Science*, 7, 155-170.

- Gick, M.L. & Holyoak, K.J. (1983). Schema induction and analogical transfer. *Cognitive Psychology*, *15*, 1-38
- Goldstone, R.L. & Sakamoto, Y. (2003). The transfer of abstract principles governing complex adaptative systems. *Cognitive Psychology*, *46*, 414-466.
- Gómez-Ferragud, C.B.; Solaz-Portolés, J.J. & Sanjosé, V. (2013a). Analogy Construction and Success in Mathematics and Science Problem-Solving: a Study with Secondary Students. *Revista de Psicodidáctica*, *18(1)*, 81-108.
- Gómez-Ferragud, C.B., Solaz-Portolés, J. J., & Sanjosé, V. (2013b). Efectos de la similitud superficial y estructural sobre la transferencia a partir de análogos en problemas de alta y baja familiaridad: primeros resultados. *Enseñanza de las Ciencias*, *31(1)*, 135-151.
- Gómez-Ferragud, C.B., Solaz-Portolés, J. J., & Sanjosé, V. (2013c). Dificultades para codificar, relacionar y categorizar problemas verbales algebraicos: Dos estudios con alumnos de secundaria y profesores en formación. Submitted to *Bolema*.
- Gómez-Ferragud, C.B., Solaz-Portolés, J. J., & Sanjosé, V. (2013d). Efecto Pantalla y Efecto Sísifo: dos fenómenos didácticos en la resolución de problemas por transferencia analógica. Aceptado para su publicación en *Didáctica de las ciencias experimentales y sociales*.
- Greeno, J.G. (1989). Situations, Mental Models, and Generative Knowledge. In D. Klahr & K. Hammer, D., Elby, A., Scherr, R., & Redish, E. (2005). Resources, framing and transfer. In J. Mestre (Ed.), *Transfer of learning from a modern multidisciplinary perspective* (pp. 89-119). Greenwich, CT: Information Age Publishing.
- Holyoak, K.J. (1984). Analogical thinking and human intelligence. In R.J. Sternberg (ed.). *Advances in the psychology of human intelligence*. Vol. 2. Hillsdale, NJ: Erlbaum, pp. 199-230.
- Holyoak, K.J. & Koh, K. (1987). Surface and structural similarity in analogical transfer. *Memory & Cognition*, *15(4)*, pp. 332-340. Kotovsky (eds.). *Complex Information*

*Processing: The Impact of Herbert Simon*, Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, NJ, pp. 285-318.

Jonassen, D.H. (2000). Toward a design theory of problem-solving. *Educational Technology: Research and Development*, 48, 63-85.

Kintsch, W. (1998). *Comprehension: a paradigm for cognition*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Kintsch, W., & Greeno. J. (1985). Understanding and solving word arithmetic problems. *Psychological Review*, 92(1), 109-129. doi: 10.1037//0033-295X.92.1.109

Kintsch, W., & van Dijk, T. A. (1978). Toward a model of discourse comprehension and production. *Psychological Review*, 85, 363-394. doi: 10.1037//0033-295X.85.5.363

Klausmier, H. J. (1984). *Educational Psychology* (5th Ed.). New York: Harper and Row.

Mayer, R. E., and Wittrock, M. C. (1996). "Problem-solving transfer." In D. C. Berliner and R. C. Calfee (eds.), *Handbook of educational psychology* (pp. 47–62). New York: Macmillan.

Mestre, J. (2003). Transfer of learning. Issues and research agenda. (National Science Foundation Report #NSF03-212). Retrieved Mars 5th, 2012 from: <http://www.nsf.gov/pubs/2003/nsf03212/nsf03212.pdf>

Nathan, M., Kintsch, W., & Young, E. 1992. A Theory of Algebra-Word-Problem Comprehension and Its Implications for the Design of Learning Environments. *Cognition and Instruction*, 9(4), 329-389. doi: 10.1207/s1532690xci0904\_2

Newell, A., & Simon, H.A. (1972). *Human Problem Solving*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Novick, L. (1988). Analogical transfer, problem similarity, and expertise. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition*, 14, pp. 510-520.

Reed, S. K., Dempster, A.; Ettinger, M.(1985). Usefulness of analogous solutions for solving algebra word problems. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, & Cognition*, *11*, 106-125.

Reed, S.K. (1987). A structure-mapping model for word problems. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition*, *13*, pp. 124-139.

Sanjosé, V., Solaz-Portolés, J. J., & Valenzuela, T. (2009). Transferencia inter-dominios en resolución de problemas: una propuesta instruccional basada en el proceso de “traducción algebraica”. *Enseñanza de las Ciencias*, *27*(2), 169-184.

Puig, L. (1998). Poner un problema en ecuaciones. Consultado en: <http://www.uv.es/puigl/ppe.pdf>.

## APPENDIX

LOW FAMILIARITY	HIGH FAMILIARITY
<p><b>TARGET PROBLEM</b>  <b>Statement:</b> Consider two different balloons A and B. At the beginning A has a volume of 2000 cm<sup>3</sup> and B is empty. Then, two identical pneumatic pumps are connected to each balloon at the same time. One pump takes gas out of A and puts it inside a big container, and the other pump takes gas out of the container and puts it into B. As a consequence balloon A decreases its volume at a rate of 20 cm<sup>3</sup>/g, and balloon B increases its volume at a rate of 30 cm<sup>3</sup>/g.  <b>Question:</b> How many grams of gas will be transferred from A to B, when both balloons have the same volume?</p>	<p><b>TARGET PROBLEM</b>  <b>Statement:</b> Consider two pools A and B. At the beginning A has a volume of 2000 litres and pool B is empty. Then, two identical hydraulic pumps are connected to each pool at the same time. One pump takes water out of A and puts it inside a big container, and the other pump takes water out of the container and puts it into B. As a consequence pool A decreases its volume at a rate of 20 litres/minute and pool B increases its volume at a rate of 30 litres/minute.  <b>Question:</b> How many litres of water will there be in A, when both pools have the same amount of water?</p>
<p><b>SIMILAR PROBLEM</b>  <b>Statement:</b> Consider two different balloons A and B. At the beginning A has a volume of 2000 cm<sup>3</sup> and B is empty. Then, two identical heat pumps are connected to each balloon at the same time. One pump takes heat out of a big oven and puts it into A, and the other pump takes heat out of the oven and puts it into B. As a consequence balloon A increases its volume at a rate of 20 cm<sup>3</sup>/kilocalorie and pool B increases its volume at a rate of 30 cm<sup>3</sup>/kilocalorie.  <b>Question:</b> How many kilocalories will be transferred to A and to B, when both balloons have the same volume?</p>	<p><b>SIMILAR PROBLEM</b>  <b>Statement:</b> Consider two pools A and B. At the beginning A has 2000 kg of water and pool B is empty. Then, two identical hydraulic pumps are connected to each pool at the same time. One pump takes water out of a big container and puts it into A. And the other pump takes water out of the container and puts it into B. As a consequence pool A increases its mass of water at a rate of 20 Kg/min and pool B increases its mass of water at a rate of 30 kg/minute.  <b>Question:</b> How many kilograms of water will there be in A, when both pools have the same amount of water?</p>
<p><b>ISOMORPHIC PROBLEM</b>  <b>Statement:</b> Consider two different capacitors A and B. At the beginning A has an electric potential difference of 2000 volts between its poles and capacitor B has 0 volts. Then, two identical circuits are connected to each capacitor at the same time. One circuit takes electric charge out of A and puts it inside a big battery, and the other circuit takes charge out of the big battery and puts it into B. As a consequence capacitor A decreases its potential at a rate of 20 volt/microCoulomb, and capacitor B increases its potential at a rate of 30 volt/microCoulomb.  <b>Question:</b> How many microCoulombs will be transferred from A to B when both capacitors have the same potential difference in their poles?</p>	<p><b>ISOMORPHIC PROBLEM</b>  <b>Statement:</b> Consider two money boxes A and B. At the beginning A has 2000 Dollars and B is empty. Then, two banking processes begin at the same time. One process takes money out of A and puts it inside a big money box, and the other process takes money out of the big money box and puts it into B. As a consequence money box A decreases its savings at a rate of 20 Dollars/day and money box B increases its volume at a rate of 30 Dollars/day.  <b>Question:</b> How many Dollars will there be in A, when both money boxes have the same amount of Dollars?</p>

<p><b>PROBLEMA REL1</b>  <b>Statement:</b> Consider two different ascorbic acid solution tanks, A and B. At the beginning A has a volume of 2000 cm<sup>3</sup> and B is empty. Then, two identical hydraulic pumps are connected to each tank at the same time. One pump takes solution out of A and puts it inside a big container, and the other pump takes solution out of the container and puts it into B. Tank A has an acid concentration of 20 g/cm<sup>3</sup> and tank B has an acid concentration of 30 g/cm<sup>3</sup>.  <b>Question:</b> How many grams of ascorbic acid will be transferred from A to B when both tanks have the same volume?</p>	<p><b>PROBLEMA REL1</b>  <b>Statement:</b> Consider two balloons A and B. At the beginning A has a volume of 2000 cm<sup>3</sup> and balloon B is empty. Then, two identical pneumatic pumps are connected to each balloon at the same time. One pump takes gas out of A and puts it inside a big container, and the other pump takes gas out of the tank and puts it into B. Balloon A has an O<sub>2</sub> concentration of 20 l/kg of air and the balloon B has an O<sub>2</sub> concentration of 30 l/kg of air  <b>Question:</b> How many litres of O<sub>2</sub> will there be in A, when both balloons have the same amount of gas?</p>
<p><b>PROBLEMA REL2</b>  <b>Statement:</b> Consider two different balloons A and B. At the beginning A has a volume of 2000 cm<sup>3</sup> and B is empty. Then, two identical pneumatic pumps are connected to each balloon at the same time. One pump takes gas out of A and puts it inside a container, and the other pump takes solution out of the container and puts it into B. Balloon A has a gas density of 20 g/cm<sup>3</sup> and balloon B has a gas density of 30 g/cm<sup>3</sup>.  <b>Question:</b> How many grams of gas will be transferred from A to B when both balloons have the same volume?</p>	<p><b>PROBLEMA REL2</b>  <b>Statement:</b> Consider two pools A and B (containing clay mixed with water). At the beginning A has a volume of 2000 tons and pool B is empty. Then, two identical hydraulic pumps are connected to each pool at the same time. One pump takes mixture out of A and puts it inside a container, and the other pump takes mixture out of the container and puts it into B. Pool A has a concentration of 20 l/kg of mixture and pool B has a concentration of 30 l/kg of mixture  <b>Question:</b> How many litres of water will there be in A, when both pools have the same amount of mixture?</p>
<p><b>PROBLEMA ISO2</b>  Consider two different ascorbic acid solution tanks. A and B. At the beginning A has a volume of 2000 cm<sup>3</sup> and tank B is empty. Then, two identical hydraulic pumps are connected to each tank at the same time. One pump takes solution out of A and puts it inside a big container, and the other pump takes gas out of the container and puts it into B. As a consequence tank A decreases its volume at a rate of 20 cm<sup>3</sup>/g, and tank B increases its volume at a rate of 30 cm<sup>3</sup>/g.  <b>Question:</b> How many grams of solution will be transferred from A to B when both tanks have the same volume?</p>	<p><b>PROBLEMA ISO2</b>  <b>Statement:</b> Consider two balloons A and B. At the beginning A has a volume of 2000 litres and balloon B is empty. Then, two identical pneumatic pumps are connected to each balloon at the same time. One pump takes air out of A and puts it inside a container, and the other pump takes air out of the container and puts it into B. As a consequence balloon A decreases its volume at a rate of 20 l/minute and balloon B increases its volume at a rate of 30 l/minute.  <b>Question:</b> How many litres of air will there be in A, when both balloons have the same amount of air?</p>



# Anexo III

Materiales y Entrevistas correspondientes a los capítulos  
7 y 8.

---



### **III.1 Materiales utilizados durante las entrevistas en la condición de ‘Alta Familiaridad’.**

#### ***PROBLEMA A RESOLVER (“Problema Diana”)***

**Enunciado:** *Consideremos dos piscinas diferentes A y B. Inicialmente la piscina A tiene 2000 litros y la piscina B está vacía. Entonces se conectan a la vez dos bombas hidráulicas idénticas, una que extrae agua de A y la introduce en un gran depósito, y otra que extrae agua del depósito y la introduce en B. La piscina A se vacía a razón de 20 litros/minuto y la piscina B se llena a razón de 30 litros/minuto.*

**Pregunta:** *¿Cuántos litros de agua habrá en A, cuando ambas piscinas tengan la misma cantidad de agua?*

### PROBLEMA EJEMPLO 1 (problema Fuente Isomorfo lejano)

**Enunciado:** Consideremos dos piscinas diferentes A y B. Inicialmente la piscina A tiene 2000 Kg de agua y la piscina B está vacía. Entonces se conectan a la vez dos bombas hidráulicas idénticas que extraen agua de un gran depósito y la introducen en cada piscina. La piscina A se llena a razón de 20 Kg/minuto y la piscina B se llena a razón de 30 Kg/minuto.

**Pregunta:** ¿Cuántos Kilogramos de agua habrá en A, cuando ambas piscinas tengan la misma cantidad de agua?

Llamaremos:

$x$  a los minutos que van pasando desde que empiezan a funcionar las bombas hidráulicas.

$y_A$  a la masa de la piscina A;  $y_{A0}$  a la masa inicial de la piscina A

$y_B$  a la masa de la piscina B;  $y_{B0}$  a la masa inicial de la piscina B.

La condición es:  $y_A = y_B$

Entonces, según el enunciado:

$y_{B0} = 0$ ; Porque la masa inicial en B es 0

$y_{A0} = y_{B0} + 2000$ ; Porque la masa inicial de A es 2000 Kg mayor que la de B.

$y_A = y_{A0} + 20 x$ ; Porque la masa de A aumenta a razón de 20 Kg/min

$y_B = y_{B0} + 30 x$ ; Porque el volumen de B aumenta a razón de 30Kg/min

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$x = \frac{2000}{30-20} = 200 \text{ minutos} \longrightarrow Y_A = Y_B = 6000 \text{ Litros}$$

## PROBLEMA EJEMPLO 2 (Problema Fuente Similar lejano)

**Enunciado:** Consideremos dos huchas de ahorro diferentes A y B. Inicialmente la hucha A tiene 2000 Euros y la hucha B está vacía. Entonces, se ponen en marcha a la vez dos procesos bancarios idénticos, uno que extrae dinero de A y lo introduce en una cuenta de ahorro, y otro que extrae dinero de esta cuenta de ahorro y lo introduce en B. La hucha A va disminuyendo su dinero a razón de 20 Euros/día y la hucha B va aumentando su dinero a razón de 30 Euros/día.

**Pregunta:** ¿Cuántos Euros habrá en A cuando ambas huchas tengan la misma cantidad de dinero?

Llamaremos:

$x$  a los días que van pasando.

$y_A$  al dinero de la hucha A;  $y_{A0}$  al dinero inicial en la hucha A

$y_B$  al dinero en la hucha B;  $y_{B0}$  al dinero inicial en la hucha B.

La condición es:  $y_A = y_B$

Entonces, según el enunciado:

$y_{B0} = 0$ ; Porque el dinero inicial en B es 0

$y_{A0} = y_{B0} + 2000$ ; Porque el dinero inicial de A es 2000 euros mayor que el de B.

$y_A = y_{A0} - 20 x$ ; Porque el dinero de A disminuye a razón de 20 euros/día

$y_B = y_{B0} + 30 x$ ; Porque el dinero de B aumenta a razón de 30 euros/día

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$x = \frac{2000}{30+20} = 40 \text{ días} \quad \longrightarrow \quad Y_A = Y_B = 1200 \text{ euros}$$

### **PROBLEMA EJEMPLO 3 (problema Fuente diferente lejano)**

**Enunciado.** Consideremos dos globos A y B de diferente tamaño y fabricados con distinto material, llenos de aire con concentraciones de  $O_2$  distintas. Inicialmente el globo A contiene 2000 kilogramos de aire más que B. Entonces se conectan a la vez dos bombas idénticas, una que extrae aire de A y lo introduce en un gran depósito, y otra que extrae aire del depósito y lo introduce en B. Al principio, el globo A tiene una concentración de  $O_2$  de 20 l/Kg de aire y el globo B tiene una concentración de  $O_2$  de 30 l/Kg de aire.

**Pregunta.** ¿Cuántos litros de  $O_2$  habrá en A cuando ambos globos tengan la misma cantidad de aire?

Llamaremos:

$x$  a los litros de  $O_2$  que se transfieren en cada momento entre A y B.

$y_A$  a la masa de aire en el globo A;  $y_{A0}$  a la masa de aire inicial en el globo A

$y_B$  a la masa de aire en el globo B;  $y_{B0}$  a la masa de aire inicial en el globo B.

La condición es:  $y_A = y_B$

Entonces, según el enunciado:

$y_{A0} = y_{B0} + 2000$ ; Porque la masa de aire inicial de A es 2000 Kilogramos mayor que B.

$y_A = y_{A0} - 2000/2$ ; Porque la masa de aire de A disminuye hasta igualarse con el de B;

$y_B = y_{B0} + 2000/2$ ; Porque la masa de aire de B aumenta hasta igualarse con el de A ;

Resolviendo:

$$x = (2000 - \frac{2000}{2}) 20 = 20000 \text{ litros de } O_2 \text{ habrá en A.}$$

### **PROBLEMA EJEMPLO 4 (problema Fuente diferente cercano)**

**Enunciado:** Consideremos dos piscinas diferentes A y B que contienen arcilla mezclada con agua. Inicialmente la piscina A tiene 2000 toneladas de mezcla más que la piscina B. Entonces se conectan a la vez dos bombas hidráulicas idénticas, una que extrae mezcla de A y la introduce en un gran depósito, y otra que extrae mezcla del depósito y la introduce en B. Al principio, la piscina A tiene una concentración de agua de 20 l/Tonelada de mezcla y la piscina B tiene una concentración de agua de 30 l/Tonelada de mezcla.

**Pregunta:** ¿Cuántos litros de agua habrá en A, cuando ambas piscinas tengan la misma cantidad de mezcla?

Llamaremos:

$x$  a los litros de agua que se transfieren en cada momento entre A y B.

$y_A$  a la masa de mezcla en la piscina A;  $y_{A0}$  a la masa de mezcla inicial en la piscina A

$y_B$  a la masa de mezcla en la piscina B;  $y_{B0}$  a la masa de mezcla inicial en la piscina B.

La condición es:  $y_A = y_B$

Entonces, según el enunciado:

$y_{A0} = y_{B0} + 2000$ ; porque la masa de mezcla inicial de A es 2000 Toneladas mayor que B.

$y_A = y_{A0} - 2000/2$ ; porque la masa de mezcla de A disminuye hasta igualarse con la de B;

$y_B = y_{B0} + 2000/2$ ; porque la masa de mezcla de B aumenta hasta igualarse con la de A ;

Resolviendo:

$$x = \left(2000 - \frac{2000}{2}\right) 20 = 20000 \text{ litros de agua habrá en A.}$$

### PROBLEMA EJEMPLO 5 (problema Fuente Isomorfo cercano)

**Enunciado.** Consideremos dos globos de diferente tamaño y fabricados con distinto material. Los globos están unidos entre sí a través de una bomba. Inicialmente el globo A contiene 2000 litros de aire y el globo B está vacío. Entonces se conectan a la vez dos bombas idénticas, una que extrae aire de A y lo introduce en un gran depósito, y otra que extrae aire del depósito y lo introduce en B. El globo A se vacía a razón de 20 litros/minuto y el globo B se llena a razón de 30 litros/minuto.

**Pregunta.** ¿Cuántos litros de aire habrá en A cuando ambos globos tengan la misma cantidad de aire?

$x$  a los minutos que van pasando.

$y_A$  al volumen del globo A;  $y_{A0}$  al volumen inicial del globo A  
 $y_B$  al volumen del globo B;  $y_{B0}$  al volumen inicial del globo B.  
La condición es:  $y_A = y_B$

Entonces, según el enunciado:

$y_{B0} = 0$ ;                    porque el volumen inicial en B es 0  
 $y_{A0} = y_{B0} + 2000$ ;    porque el volumen inicial de A es 2000 l mayor que el de B.  
 $y_A = y_{A0} - 20 x$ ;      porque el volumen de A disminuye a razón de 20 l/min  
 $y_B = y_{B0} + 30 x$ ;      porque el volumen de B aumenta a razón de 30 l/min

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$x = \frac{2000}{30+20} = 40 \text{ minutos} \longrightarrow Y_A = Y_B = 1200 \text{ Litros de aire habrá en A}$$



## III.2 Materiales utilizados durante las entrevistas en la condición de ‘Baja Familiaridad’.

**Los Materiales y el procedimiento fueron exactamente idénticos a los mostrados en la condición de alta familiaridad exceptuando los enunciados por lo que en este anexo solo mostraremos los problemas:**

### **PROBLEMA DIANA:**

Consideremos dos globos A y B de diferente tamaño y fabricados con distinto material. Inicialmente el globo A tiene un volumen de  $2000 \text{ cm}^3$  y el globo B está vacío. Entonces se conectan a la vez dos bombas neumáticas idénticas, una que extrae gas de A y lo transfiere a un depósito y otra que extrae el gas del depósito y lo transfiere a B. El globo A va disminuyendo su volumen a razón de  $20 \text{ cm}^3/\text{g}$  y el globo B va aumentando su volumen a razón de  $30 \text{ cm}^3/\text{g}$ .

**Pregunta:** ¿Cuántos gramos de gas se habrán transferido de A a B, cuando sus volúmenes sean iguales?

### **PROBLEMAS FUENTE LEJANOS (FASE 2a):**

**(Similar: SIM1 Lejano)** Consideremos dos globos A y B de diferente tamaño y fabricados con distinto material. Inicialmente el globo A tiene un volumen de  $2000 \text{ cm}^3$  y el globo B está vacío. Entonces se conectan a la vez dos bombas térmicas idénticas que extraen calor de un acumulador y lo transfieren a cada globo. El globo A va aumentando su volumen a razón de  $20 \text{ cm}^3/\text{kilocaloría}$  y el globo B va aumentando su volumen a razón de  $30 \text{ cm}^3/\text{kilocaloría}$ .

**Pregunta:** ¿Cuántas kilocalorías se habrán transferido a A y a B cuando sus volúmenes sean iguales?

**(Isomorfo: ISO1 Lejano)** Dos condensadores eléctricos A y B diferentes están conectados a un circuito eléctrico. Inicialmente el condensador A tiene una diferencia de potencial eléctrico entre sus bornes  $2000 \text{ Voltios}$  mayor que B. Entonces se conectan a la vez dos dispositivos idénticos, uno que extrae carga de A y la transfiere a un acumulador y otro que extrae la carga del acumulador y la transfiere a B. El condensador A va disminuyendo su potencial a razón de  $20 \text{ Volt/microculombio}$  y el condensador B va aumentando su potencial a razón de  $30 \text{ Volt/microculombio}$ .

**Pregunta:** ¿Cuántos microculombios se habrán transferido de A a B cuando sus diferencias de potencial sean iguales?

**(Relacionado: REL1 lejano)** Consideremos dos depósitos A y B diferentes, con disolución de ácido ascórbico en agua. Inicialmente el contenedor A contiene un volumen  $2000 \text{ cm}^3$  de disolución más que B. Entonces se conectan a la vez dos bombas hidráulicas idénticas, una que extrae disolución de A y la introduce en un contenedor vacío y otra que extrae la disolución del contenedor y la introduce en B. La disolución A contiene ácido con densidad de  $20 \text{ g/cm}^3$  y la disolución B contiene ácido con una densidad de  $30 \text{ g/cm}^3$ .

**Pregunta:** ¿Cuántos gramos de ácido ascórbico se habrán transferido de A a B cuando sus volúmenes sean iguales?

### **PROBLEMAS FUENTE CERCANOS (FASE 2b)**

**(Relacionado: REL2 cercano)** Consideremos dos globos A y B de diferente tamaño y fabricados con distinto material. Inicialmente el globo A tiene un volumen  $2000 \text{ cm}^3$  mayor que B. Entonces se conectan a la vez dos bombas neumáticas idénticas, una que extrae gas licuado de A y lo introduce en un depósito vacío y otra que extrae el gas licuado del depósito y lo introduce en B. El globo A tiene un gas licuado con una densidad de  $20 \text{ g/cm}^3$  y el globo B tiene un gas licuado con una densidad de  $30 \text{ g/cm}^3$ .

**Pregunta:** ¿Cuántos gramos de gas licuado se habrán transferido de A a B, cuando sus volúmenes sean iguales?

**(Isomorfo: ISO2 cercano)** Consideremos dos depósitos A y B de diferente tamaño con disolución de ácido ascórbico en agua. Inicialmente el depósito A contiene un volumen  $2000 \text{ cm}^3$  de disolución y el depósito B está vacío. Entonces se conectan a la vez dos bombas hidráulicas idénticas, una que extrae disolución de A y la introduce en un contenedor con agua, y otra que extrae disolución del contenedor y la introduce en B. La disolución A va disminuyendo su volumen a razón de  $20 \text{ cm}^3/\text{g}$  de ácido y la disolución B va aumentando su volumen a razón de  $30 \text{ cm}^3/\text{g}$  de ácido.

**Pregunta:** ¿Cuántos gramos de ácido ascórbico se habrán transferido de A a B cuando sus volúmenes sean iguales?

### **III.3 Protocolo de actuación durante las entrevistas: segmentos de información invariables.**

#### **1.-En las Instrucciones para la prueba:**

**Investigador:** La tarea consiste en intentar resolver un problema con ayuda de otros problemas. Para eso, te voy a pedir que compares el problema a resolver (problema que llamaremos “Diana”) con otros problemas que pueden servir de ejemplo y de ayuda, y que te voy a proporcionar.

Tengo que decirte que nos ha gustado tu trabajo anterior y nos gustaría conocer cómo piensas para realizar esas tareas. Es decir, no solo queremos ver como llegas al resultado final, sino el proceso mental que sigues para llegar a ese resultado. Para que yo pueda saber lo que piensas, la única vía es que lo expliques en voz alta. Desde luego, pensar y decir lo que piensas al mismo tiempo es muy difícil. Por eso, yo te lo preguntaré varias veces. Recuerda que estas interrupciones mías no se deben a que hagas algo incorrecto o correcto, sino a que necesito saber qué estás pensando en esos momentos.

Te voy a dar un problema a resolver con ayuda de otros problemas que te voy a dar también. Al principio, ninguno de los ejemplos está resuelto porque lo que necesito saber primero es en qué se parece y en qué se diferencia cada uno de esos ejemplos con el problema a resolver. Cada uno de los ejemplos se parece en algo y se diferencia en algo con el problema a resolver y me gustaría saber qué parecidos y diferencias encuentras tú, de modo que pueda yo saber cuál de esos problemas ejemplo (o cuáles si son más de uno, o ninguno de ellos si así lo consideras) te ayudaría más a resolver tu problema.

Luego te daremos la solución de cada uno de los problemas ejemplo para que las estudies y nos digas si te mantienes en tu primera impresión o has cambiado de criterio.

Es decir: después de leer los problemas ejemplo debes decidir, en primer lugar, si cada uno te ayuda o no a resolver el problema diana. En segundo lugar, debes

expresar por qué te ayuda o no, como te ayuda o no y en qué se parece y diferencia cada ejemplo con el problema diana.

Recuerda que debes expresar tus pensamientos en voz alta de modo que el micrófono pueda captar tus palabras.

Durante toda la prueba te interrumpiré y te haré preguntas sobre porqué lees un problema o en que piensas mientras lo lees ya que es de vital importancia para la investigación que expliques tus razonamientos y estos queden reflejados en la grabación.

## **2.-En la Fase 1: Recordar la tarea de agrupación**

**Investigador:** En una sesión anterior, agrupaste estos 8 problemas en función de si se resolvían con las mismas ecuaciones o no. Te voy a dejar unos minutos para que recuerdes lo que hiciste.

¿Recuerdas porque agrupaste de esa forma? ¿Qué te llevó a colocar estos dos problemas (cualquier pareja del mismo grupo) en el mismo grupo? **¿Qué tienen en común en tu opinión?** Ya que la tarea consistió en agrupar juntos los problemas que se resolvían igual, ¿querías decir que estos dos problemas se resuelven del mismo modo a pesar de sus diferencias.

Ahora que puedes volver a pensarlo, ¿sigues pensando del mismo modo? ¿Los volverías a agrupar con el mismo criterio?

**Cuando quede claro por qué él sujeto cree que los problemas de cada grupo están juntos pasamos a la siguiente fase.**

### **3.-En la Fase 2: Estudio de Analogías entre problemas a partir del enunciado en la primera etapa del transfer.**

#### *Fase 2.a (3 fuentes- 1 diana/Todos los sujetos)*

**Investigador:** Bien, aquí tienes el problema (Problema diana) que has de intentar resolver. Léelo por favor.

Aquí tienes otros tres problemas-ejemplo que te pueden ayudar a resolver ese problema.

*(El alumno tomará uno a uno esos ejemplos y los leerá en silencio. En cada uno preguntaremos: ¿Qué estás pensando ahora? Diga lo que diga, intentaremos clarificarlo para no dudar nosotros -datos claros- y luego lo dejaremos seguir otro rato. Si relea, le volvemos a preguntar ¿qué estás pensando ahora? Etc.*

*(Al acabar de leer cada uno, le pediremos que haga un primer juicio sobre analogías y diferencias entre ese ejemplo recién leído y el problema diana)*

#### **Sobre los 3 problemas:**

-¿En crees que se parece o diferencia CADA UNO DE ELLOS del problema diana (a resolver)?

-¿De qué manera crees que cada uno de ellos puede ayudarte, o por el contrario, por qué crees que cada uno de ellos no puede ayudarte?

-(Si señala uno en concreto que le ayuda más) ¿Y estos porque no?

- Entonces, ¿me puedes decir otra vez por qué crees que este te ayuda a resolver el problema diana?

Y estos, ¿no se resuelven igual?, ¿por qué no?

***Prestar atención a las relecturas (que son frecuentes): necesitamos saber qué están pensando y volver a preguntar ¿qué estás pensando ahora? En general, cada acción que el sujeto realice debería ir acompañada de esta pregunta, a no ser que la verbalice.***

-Nota 1: Si el alumno selecciona un problema en función de alguna característica repetida (Bombas que inyectan o extraen) mostrarle el otro problema y forzar para que continúe razonando.

-Nota 2: Si el alumno escoge un problema, de modo que construye las analogías de igual manera que en la tarea de agrupación y deja muy claro el criterio pasamos directamente a la fase 3 Si el alumno tiene problemas para escoger uno u otro, pasamos a la fase 2b).

### ***Fase 2.b: (5 Fuentes-1 Diana/ Solo algunos alumnos)***

*Solo en el caso en que el sujeto no haya encontrado ayuda definitiva en ninguno de los 3 ejemplos iniciales, o bien haya escogido más de un ejemplo... es decir, que el sujeto no tenga clara de donde vendría la ayuda para resolver el diana. En esta fase se proporciona a los alumnos dos ejemplos más que, en lugar de tener solo un elemento común con el diana, tienen dos: Un isomorfo (estructura y pregunta igual al diana) y un similar (contexto y pregunta igual al diana).*

**Investigador:** Ahora, realiza la misma tarea con estos dos problemas. ¿Cuál crees que te puede ayudar mejor a resolver esta tarea? ¿Por qué? ¿En qué crees que se parecen y diferencian del problema a resolver?

### **4.-En la Fase 3 (que realizan todos los alumnos): Problemas resueltos. ¿Ayudan las ecuaciones (pista algebraica) al establecimiento de analogías entre problemas? (Etapa 2 del transfer)**

**Investigador:** Ahora te voy a proporcionar (3 o 5 problemas en función de las fases anteriores con la solución matemática correcta a cada problema (ecuaciones). Te pido que las estudies y vuelvas a decidir qué ejemplo te ayudaría mejor a resolver tu problema y por qué (*De nuevo interrumpiremos los silencios pidiendo que digan qué está pensando en ese momento*). Al final, ¿qué ecuaciones crees que debes usar para resolver el problema diana?

En las entrevistas realizadas, hay otros segmentos de información que fueron variando según las respuestas y las acciones de cada sujeto entrevistado.

### **III.4 Autorización para realizar grabaciones de video**

**I.E.S. "VELES E VENTS'**

#### **AUTORIZACIÓN PARA LA GRABACIÓN ANÓNIMA DE LOS ALUMNOS/AS**

D/Dña. .... con  
N.I.F.,nº..... Padres del ALUMNO/a:  
.....

**NO AUTORIZAMOS**

**AUTORIZAMOS**

Al I.E.S. "VELES E VENTS" de Torrent para que nuestro hijo/a aparezca en los videos y grabaciones de voz anónimas que se realizarán para una investigación didáctica de la Universidad de Valencia, cuyo único fin es la mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje. Las grabaciones se harán de forma que en ningún momento aparecerá la cara del/la menor y en ningún momento se dirá su nombre ni ningún elemento que le pueda identificar por lo que se consideran grabaciones completamente anónimas. La utilización de estas grabaciones tendrá como objetivo único y último, la investigación educativa en ciencias experimentales.

Torrent, a 22 de Febrero de 2013

**Fdo. PADRE / MADRE / TUTOR/A.**

## **III.5 Transcripciones de algunas de las entrevistas grabadas en video.**

**Los casos mostrados en este anexo son distintos a los analizados en los capítulos 7 y 8.**

### **Notas**

**#1:** Estas entrevistas sólo muestran un análisis parcial por estar pendientes de su publicación. Los sujetos se han identificado por el nombre ficticio utilizado por ellos mismos.

**#2:** *En cursiva*, aparecen los comentarios sobre acciones significativas del sujeto (que se observan en el video) y los análisis.

### **Caso 1. Sujeto DDG17.**

**Familiaridad Baja. (No realiza Familiaridad Alta).**

**Por ser el primer sujeto entrevistado, sirvió de prueba y sirvió para afinar el procedimiento. Nos llevó a buscar mejores preguntas para obtener más información y de mejor calidad.**

*El sujeto agrupa los problemas según el criterio basado en la estructura (1).*

*Utiliza mucho tiempo en procesar información de todos los problemas de la tarea de agrupación pero codifica sin dificultades los problemas, parece que los traduce sin dificultad de modo que al pasar a la prueba de transfer necesita poco tiempo para encontrar las analogías correctas entre fuentes y diana. Parece no tener ninguna dificultad en obviar las diferencias superficiales y detectar las analogías estructurales. En el momento de escoger que ecuaciones le ayudarían más a resolver el problema indica las correctas sin ningún tipo de interferencia. Es un ejemplo claro de un estudiante al cual no le afectan los elementos superficiales de los problemas.*



## **Fase 1. Recordatorio de la tarea de agrupación.**

**Protocolo de actuación:** 1. Se leyeron las instrucciones generales de todo el procedimiento. 2. Se entregó el cuadernillo al estudiante y se le dejó un tiempo para que repasara y recordara la tarea; 3. Se le preguntó al estudiante por su tarea y se indagó sobre la razón del criterio escogido de modo que pudiéramos asegurarnos que agrupó los problemas a partir de alguna de las posibles relaciones estructurales o superficiales determinadas anteriormente; 4. Se le preguntó al estudiante si agrupó los problemas en función de si se resolvían igual, exactamente con las mismas ecuaciones; 5. Se señalaron las diferencias entre problemas y se le preguntó al estudiante cuales de estas diferencias creía que eran importantes para que los problemas se resolvieran igual; 6. Se le preguntó al sujeto si mantenía el criterio escogido. Cuando quedó completamente claro que el sujeto incluía los problemas en un conjunto pensando en que estos se resolvían igual, pasamos a la siguiente fase.

**E:** [Min: 00:01] **Hola, buenos días (...).**

**S:** [Min: 00:03] Hola.

**E:** [Min: 00:04] **Yo quería decirles que estén tranquilos, que si te he seleccionado es porque ya lo has hecho muy bien.....vamos a empezar.... ¿puedes decir en voz alta para que la cámara capte el sonido, el nombre ficticio que pusiste en el cuadernillo?**

**S:** [Min: 00:08]; Si... DDG17.

**E:** [Min: 00:09]; **Muy bien DDG17...En primer lugar te voy a leer unas instrucciones aclaratorias de todo el proceso y te voy a dar un diploma en agradecimiento a tu colaboración.**

**Protocolo de actuación:** 1. Se leyeron unas instrucciones completas de todo el proceso antes de empezar la tarea.

**E:** [Min: 00:20]; **Vamos a empezar...En una sesión anterior, agrupaste estos 8 problemas en función de si se resolvían con las mismas ecuaciones o no.**

**E:** [Min: 00:54]; **Te voy a dejar unos minutos para que recuerdes lo que hiciste.**

**S:** [Min: 00:54- 00:59]; [El sujeto repasa su tarea y el investigador la interrumpe para ayudarla a recordar].

**E:** [Min: 00:59]; **Te voy a ayudar a recordar, ¿ves estos 8 problemas? recuerda que se parecían y diferenciaban en algunas cosas. Nosotros te pedimos que los agruparas en un mismo conjunto cuando creyeras que se resolvían exactamente igual, es decir, con las mismas ecuaciones.**

**S:** [Min: 01:05]; Si ya veo... empiezo a recordar

**E:** [Min: 01:06]; **Tú aquí dijiste que los problemas 2, 4, 5, 7 se resolvían igual porque están en el mismo grupo y lo mismo para los problemas (1, 3, 6, 8)...** [*Criterio estructural*]; **¿Puedes recordar porqué pensaste que el problema 2 y el problema 4 se resuelven igual? ¿Qué te llevó a colocar los problemas de esa forma?**

**S:** [Min: 01:24-02:03]; [*El sujeto se concentra en su tarea; procesa información durante 39 segundos*].

**E:** [Min 02:03]; **¿Qué piensas?** [*El entrevistador interrumpe para indagar en el pensamiento del sujeto*].

**S:** [Min 02:04]; Necesito algo más de tiempo [*Expresión meta-cognitiva*].

**S:** [Min: 02:04-02:29]; [*El sujeto continúa procesando información*].

**E:** [Min: 02:29]; **¿Recuerdas ya porqué agrupaste así?**

**S:** [Min: 02:30]; En el 2 y el 4, un globo aumenta y el otro disminuye, como en estos [*El sujeto hace referencia a los problemas 5, 7*]... en unos problemas un globo aumenta y el otro disminuye...y en estos otros, los dos globos aumentan...

**E:** [Min: 02:33]; **¿Entonces tú crees que por eso se resuelven igual?**

**S:** [Min: 02:34]; Si, yo creo que eso es lo importante. [*El sujeto directamente escoge el criterio puro estructural y decidimos seguir adelante con la prueba sin más preguntas*].

## **Fase 2. Prueba de transfer.**

### ***Fase 2a) Transfer lejano***

**Protocolo de actuación:** 1. Se entregó al estudiante el problema a resolver (diana) y se le dio un tiempo de lectura; 2. Se entregaron a los estudiantes 3 problemas ejemplo (fuentes). Se le indicó que esos ejemplos podían ayudarle a resolver el problema diana y se dejó un tiempo para la lectura (los alumnos tomaron los ejemplos uno a uno para leerlos y en cada lectura se les preguntó qué pensaban, al terminar de leerlos se les pidió un primer juicio sobre analogías y diferencias entre los ejemplos leídos y el problema a resolver); 3. Se le preguntó a los estudiantes sobre los tres problemas: a) ¿En qué crees que se parece o diferencia cada uno de los ejemplos con el problema a resolver? b) ¿De qué manera crees que cada uno de ellos puede ayudarte, o por el contrario, por qué crees que no pueden ayudarte? c) ¿Hay alguno o algunos en concreto que te ayuden más que otros, y porque crees que te ayuda o te ayudan? En todo momento se insistió para que el sujeto relatará el porqué de todas sus acciones y se indagó en las relecturas de los problemas.

**E:** [Min 02:45] **Te entrego el problema que has de resolver y aunque como te he dicho en las instrucciones, en realidad no debes resolverlo pero si ha de ser siempre tu objetivo, te voy a entregar tres fichas de colores con el enunciado de un problema distinto en cada una de las fichas. La tarea consiste en que leas los tres enunciados y hagas comparaciones entre ellos y el problema que te he dado primero. Después de comparar los problemas todo el tiempo que necesites, debes decidir si alguno o algunos de estos problemas te ayudarán en la resolución del problema a resolver (...), recuerda que yo te haré preguntas durante todo el tiempo.**

**E:** [Min: 03:23] **Te doy un tiempo para que lo leas y lo comprendas.**

**S:** [Min: 03:24- 04:02]; *[El sujeto lee el problema diana y hace una comparación general con los 3 fuentes; Procesa información durante 38 segundos].*

**S:** [Min: 04:02-04:35]; *[El sujeto toma el problema ISO1 y lo acerca al diana; Realiza una lectura por comparación con los problemas ISO1 y DIANA].*

**S:** [Min: 04:35-04:42]; *[El sujeto aleja el problema ISO1, toma el SIM1, lo acerca al fuente, lo lee durante 7 segundos y lo aparta. Es muy poco tiempo, parece que detecta muy rápido la diferencia estructural].*

**S:** [Min: 04:43- 05:41]; *[El sujeto toma el problema REL1 y lo acerca al fuente y al ISO1; compara en estos momentos, REL1, ISO1 y DIANA].*

**E:** [Min: 05:42]; **¿Ves algo en los problemas que te pueda ayudar?, ¿Te resultan familiares? (...).** *[El investigador interrumpe al sujeto].*

**S:** [Min 05:43-06:14]; *[El sujeto continúa procesando información].*

**S:** [Min: 06:14] **Creo que este problema me ayudaría claramente más que los otros** *[El sujeto toma el problema ISO1].*

**E:** [Min: 06:16]; **¿El problema azul te ayudaría más que los demás? ¿Por qué?, ¿exactamente qué has visto en el problema que te lleve a pensar que este te ayudaría más que los demás?**

**S:** [Min: 06:23] **A parte de que los datos son iguales, igual que en todo (...)** aquí pone que se conecta un circuito que extrae calor y en el que tengo que resolver también se extrae calor y también uno disminuye *[El sujeto describe las relaciones superficiales pero no les da importancia. Muestra un razonamiento analógico de tipo experto, es capaz de describir las relaciones superficiales a la vez que es capaz de obviarlas en el momento de conectar problemas por analogía, momento en el que utiliza una analogía estructural].*

**E:** [Min: 06:45]; **¿Quieres decir cuando dices “que en dos problemas diga que un globo disminuye es lo que hace que se resuelvan igual”?**

**S:** [Min: 06:45]; Si, exacto, eso pienso, cuando en los problemas un globo disminuye hace que se resuelvan igual. [*El sujeto declara analogía estructural*].

**E:** [Min: 06:51]; Muy bien.

### ***Fase 2b) Transfer cercano***

*Este sujeto no realizó esta fase por encontrar rápidamente las analogías estructurales entre problemas.*

**Protocolo de actuación:** *En esta fase se les entregó a los estudiantes dos problemas fuente extra. Estos dos problemas, a diferencia de los tres anteriores, solo tenían un factor diferente al problema ejemplo, es decir, compartían dos de los rasgos estudiados y se diferenciaban en un solo elemento. De esta forma estudiamos las analogías establecidas desde un nivel de transferencia algo más "cercano" (Klausmeir, 1985). La ayuda aportada por los ejemplos es mayor tanto por el uso de problemas con un mayor grado de similitud con el problema diana, como por la disponibilidad de un mayor número de ejemplos.*

*Esta fase solo la realizaron aquellos estudiantes que no fueron capaces de encontrar ayuda definitiva en ninguno de los problemas anteriores. Es decir, los estudiantes que expresaron claramente que algún problema les ayudaría a resolver el problema diana pasaron directamente a la siguiente fase. El procedimiento (pensamiento en voz alta) seguido fue idéntico a la etapa anterior.*

### **Fase 3. Prueba de transfer con ayuda de traducción (Fuentes Resueltos- Pista algebraica).**

**Protocolo de actuación:** *En esta fase se proporcionó a los estudiantes, 3 o 5 problemas resueltos (en función de la ayuda necesitada). No se les proporcionó en ningún caso una explicación detallada del problema, simplemente la traducción algebraica con el fin de cerciorarnos de si aportar las ecuaciones que resuelven los problemas provoca algún efecto sobre las analogías establecidas en las anteriores fases. El procedimiento seguido fue el similar al expuesto en los dos apartados anteriores, se repitieron todas las preguntas y se añadió una: ¿Qué ecuaciones crees que resuelven el problema?*

**E:** [Min: 07:25]; **Ahora voy a entregarte tres fichas más, con exactamente los mismos colores de antes pero esta vez, como puedes ver los problemas tienen debajo las ecuaciones que los resuelven. Te pido que los vuelvas a mirar y realices la misma tarea, es decir, que me digas ¿cual o cuales crees que te podrían ayudar a resolver el problema, y porque?...Es posible que cambies de**

**opinión o es posible que sigas pensando lo mismo...te dejo un tiempo para que los leas...**

**S:** [Min: 07:55-08:32]; [*El sujeto toma directamente la cartulina con el problema isomorfo y sus ecuaciones*].

**S:** [Min 08:32- 09:26]; [*El sujeto toma los otros dos problemas resueltos [SIM1 y REL1], y los acerca al ISO1 y al diana para comparar las ecuaciones*].

**S:** [Min: 09:26]; Este es el que se resuelve igual

**E:** [Min: 09:27]; **¿Por qué? ¿Hay alguna cosa que te llame la atención?**

**S:** [Min: 09:29]; Si, al ver las ecuaciones sigo pensando que el problema que más se parece y más me ayudaría es el problema azul. [*Confirmación de criterio estructural*].

## **Caso 2. Sujeto: “El Paludo Enmascarado”**

### **Familiaridad Alta.**

#### **Fase 1. Recordar la tarea de agrupación.**

*El sujeto toma inicialmente el criterio puro basado en la estructura (1), con una pequeña interferencia superficial, El sujeto agrupa todos los problemas de estructura Encontrar y separa los problemas de estructura alcanzar según la temática (Dinero/Litros de agua). Durante la entrevista corrige el criterio y apunta a la estructura de los problemas como única característica diferenciadora.*

**E:** [Min: 00:02]; **Buenos días, sujeto número 2, El Paludo Enmascarado. Vamos a proceder a la lectura de las instrucciones de la prueba (...).**

(Se leyeron las instrucciones, se le dio un diploma de participación y se explicó todo con detalle al igual que en los casos anteriores....).

**E:** [Min: 00:21]; **Aquí tienes el cuadernillo, recuerda que había 8 problemas y que tú debías agruparlos en función de si se resolvían con las mismas ecuaciones o no (...).**

**E:** [Min: 00:50]; **Tú hiciste estos tres grupos, es decir que tú pensaste que el 1 y el 4 se resolvían igual, que el 5 y el 8 también y por último incluiste en un solo conjunto a los problemas 2, 3, 6 y 7.** [*El investigador recuerda la tarea al sujeto para adelantar el procedimiento*].

**E:** [Min: 01:10]; **Te voy a dejar unos minutos para que recuerdes lo que hiciste.**

**S:** [Min: 01:10- 01:16]; [*El sujeto repasa la tarea*].

**S:** [Min: 01:16]; Ya lo tengo.

**E:** [Min: 01:17]; **¿Ya lo recuerdas?**

**S:** [Min: 01:21]; Pues mira, he agrupado el 1, 3, 6 y 8 [*declara criterio basado en la estructura*] porque veo que simplemente juega con las palabras y son los mismos datos solo que en el 1, 3, 6 y 8, en algunos cambia de nombres y en otros es lo mismo.

**E:** [Min: 01:56]; [*El sujeto procede de un país Islámico por lo que le cuesta expresarse, el investigador le ayuda en el proceso*]. **¿Lo que quieres decir es que los problemas que me has nombrado son iguales, es decir, se resuelven igual pero cambian las palabras?**

**S:** [Min: 02:01]; Si, exacto. [*Confirma criterio estructural*].

**E:** [Min: 02:06]; **¿Por qué has agrupado estos así?** [*El investigador indica un conjunto de problemas que contiene únicamente los problemas 5 y 4*] y **Por qué lo has separado de este otro grupo** [*el investigador señala un conjunto de problemas que contiene únicamente los problemas 2 y 7*]. **Es decir, ¿Por qué crees que los problemas de esos dos conjuntos se resuelven de forma diferente?**

**S:** [Min: 02:31- 02:48]; [*El sujeto repasa los problemas 5, 4, 2 y 7; Procesa información durante 17 segundos*].

**S:** [Min: 02:48]; Son exactamente iguales, solo que cambia las huchas por las piscinas. [*Declara criterio estructural y explicita diferencia superficial*]

**E:** [Min: 03:01]; **¿Y sigues pensando que esos problemas (2, 4, 5 y 7) han de ir en grupos distintos o por el contrario podrían estar en el mismo grupo?**

**S:** [Min: 03:04-03:18]; [*El sujeto repasa los problemas 2, 4, 5 y 7; Procesa información durante 14 segundos*].

**S:** [Min 03:07]; Pues ahora pienso que sí, bueno (...). Sí, estarían en el mismo grupo. [*Declara criterio estructural*].

**E:** [Min: 03:26]; **¿Por qué?**

**S:** [Min: 03:33]; Porque en los dos se extrae agua o dinero de un deposito o de una cuenta y se introduce o en dos piscinas o en dos cuentas. [*Confirma criterio estructural*]

**E:** [Min: 03:43]; **¿Y qué diferencias encuentras con los problemas que acabas de nombrar y los 4 que agrupaste en otro conjunto?** [*El entrevistador fuerza al sujeto para que dé más detalles pese haber obtenido ya la respuesta pretendida*]

**S:** [Min: 03:48-04:11]; [*Relectura silenciosa de los problemas*]

**S:** [Min; 04:11]; Pues porque, por ejemplo en el problema 3 cuando extrae dinero lo mete en otra cuenta y el dinero que ha metido en esa cuenta lo mete en otra. (...).

**E:** [Min: 04:27]; **No lo sé, míralo bien y fíjate en todo con calma.** [*El sujeto parece que se cansa y el investigador le anima a volver a pensar en los problemas, está cansado, quizá le hemos forzado demasiado*].

**S:** [Min: 04:27-00:49]; [*Vuelve a repasar los problemas*].

**S:** [Min: 04:49] volviéndolo a pensar quizá todos puedan resolverse igual [*El sujeto muestra dudas fruto del cansancio y de nuestra insistencia, ahora cree que todos los problemas pueden resolverse igual lo que muestra dificultades en la traducción aunque en ningún momento hace alusión a ningún rasgo superficial de los problemas*].

**E:** [Min: 05:00]; **Muy bien pero ¿Por qué? Lo que quiero saber es porque piensas que los de este grupo se resuelven entre ellos igual y modo diferente que los del otro grupo.** [*El investigador presta ayuda al sujeto*] **Por ejemplo tú has puesto 5 y 8 en dos conjuntos diferentes, compáralos para ver si encuentras algo interesante.**

**S:** [Min: 05:15-06:10]; [*Relectura silenciosa; El sujeto compara los problemas 5 y 8; procesa información durante 55 segundos*].

**E:** [Min: 06:11]; **¿Ves algo que te llame la atención? (...).** [*El entrevistador interrumpe*].

**S:** [Min: 06:11-06:18]; [*Piensa en los problemas*].

**S:** [Min: 06:20] Yo los he agrupado así porque es como pienso que se resolverán igual.

**E:** [Min: 06:25]; Pero si está muy bien, no te preocupes. Cómo te he dicho en las instrucciones yo te voy a estar preguntando todo el tiempo lo hagas bien o mal, porque lo que quiero saber es porque piensas de una determinada forma u otra.

**E:** [Min: 06:32]; **Te dejo pensar un poco más.**

**S:** [Min: 06:32-06:36]; [*Relectura silenciosa*].

**E:** [Min: 06:36]; Mira el 3, el 8, el 6 y el 1 que los has puesto en un grupo y este grupo no tiene el 5, eso es porque pensaste que el 8 y el 5 se resolvían diferente ¿sigues pensando eso?

**S:** [07:00- 07:33]; [*Relectura silenciosa de los problemas 5 y 8*].

**E:** [Min 07:33-07:50]; [*El entrevistador, con el fin de despejar la mente del sujeto, saca un tema de conversación trivial e intenta ganar su confianza*]

**E:** [Min: 07:51]; **Puedes seguir leyendo**

**E:** [Min: 07:51-08:54] [*Relectura silenciosa de todos los problemas*].

**E:** [Min: 08:55]; **¿Recuerdas bien la tarea?**

**S:** [Min: 08:57]; Si.

**S:** [Min: 08:54-09:30]; [*Relectura silenciosa de todos los problemas*].

**S:** [Min 09.29]. Ya lo tengo claro. En unos problemas como por ejemplo en este [*hace referencia al problema 8*], quita el dinero de A para introducirlo en B (...). [*Declara ideas ligadas al criterio estructural*].

**E:** [Min 09:53]; **Y que más (...).**



**S:** [Min: 09:53]; Y en este, *[problema 5]* extraen dinero de una cuenta ajena y lo reparten entre A y B.

**E:** [Min 10:19]; **Muy bien, vamos a pasar a la siguiente fase.** *[El sujeto detecta rasgos estructurales pero tiene muchas dificultades para traducir los problemas, se bloquea durante largos periodos de tiempo y pierde de vista su agrupación inicial por lo que navega sin rumbo en muchas ocasiones, aún así nunca nombra los rasgos superficiales por lo que no los considera importantes para la resolución de los problemas. No hay apantallamiento superficial].*

## **Fase 2. Prueba de transfer**

### *Fase 2a) Transfer lejano*

**E:** [Min 10:37]; **Ahora te voy a proporcionar el problema a resolver pero recuerda que no has de resolverlo, simplemente ha de ser tu objetivo cómo te he indicado en las instrucciones iniciales. También te voy a entregar tres fichas de colores con un enunciado de un problema distinto en cada una de las fichas. La tarea consiste en que leas los tres enunciados y hagas comparaciones entre ellos y el problema ha resolver. Después de comparar todo el tiempo que necesites, debes decidir si alguno o algunos de esto problemas te ayudarán en la resolución del problema diana...recuerda que yo te haré preguntas durante todo el tiempo...**

**S:** [Min 11:00-11:21]; *[El sujeto realiza una lectura general de los problemas].*

**S:** [Min 11:21-11:47]; *[El sujeto toma el problema SIM1 y lo acerca al diana].*

**S:** [Min: 11:47-12:07]; *[El sujeto toma el problema ISO1 y lo acerca al diana].*

**S:** [Min 12:07-12:47]; *[El sujeto toma el problema REL1 y lo acerca al fuente; Con este problema el sujeto realiza una lectura por sustitución con el diana].*

**E:** [Min: 12:48]; **¿Ves algo de interés?**

**S:** [Min: 12:54]; Pues veo los tres problemas iguales.

**E:** [Min 12:56]; **Los tres iguales, ¿qué quieres decir con eso?**

**S:** [Min: 13:04] Tengo alguna duda con este *[El sujeto señala el problema REL1]*, pero estos dos los veo muy parecidos *[Se refiere a los problemas ISO1 Y SIM1]*. *[El sujeto sugiere que tiene dudas con el problema con la estructura mezcla y no distingue las estructuras alcanzar y encontrar de los problemas SIM1 y ISO1, se desconcentra y pierde de vista la meta, detectar analogías con el problema diana].*

**E:** [Min: 13:18]; **¿Estos dos los ves iguales?** *[El investigador separa el problema REL1 de los demás y apunta a los problemas ISO1 y SIM1]. [El sujeto es capaz de*

*obviar los elementos superficiales ya que en ningún momento señala diferencias en relación a la temática (ahorros/piscinas) ni a la magnitud preguntada (Litros/Euros/tiempo) pero tampoco es capaz de establecer ningún tipo de relación estructural por lo que parece no tener acceso a la estructura algebraica de los problemas, no es capaz de traducir los problemas].*

**S:** [Min 13:20]; Si.

**E:** [Min 13:20-13:40]; *[El investigador ayuda a leer los enunciados de los problemas SIM1 y ISO1 al sujeto con el fin de ayudarlo a detectar las diferencias estructurales pero no obtiene una respuesta acertada].*

**E:** [Min 13:53]; *[El investigador decide pasar al siguiente episodio y entregar al sujeto dos problemas adicionales].*

### **Fase 2b) Transfer cercano**

*En esta fase el sujeto percibe mucha más ayuda de los problemas y es capaz rápidamente de establecer las analogías estructurales; Efecto ' Distancia de Transferencia'.*

**E:** [Min 13:58]; **Aquí tienes otros dos problemas [REL2 e ISO2]. Te dejo un tiempo para que los estudies a ver si con estos si encuentras ayuda (...).** [En esta fase el sujeto dispone de 5 cartulinas con 5 enunciados y el enunciado del problema diana].

**S:** [Min: 14:02-14:34]; *[El sujeto toma primero el problema ISO2 y lo acerca al diana]. Este y este son los mismos; [El sujeto se refiere a los problemas ISO1 y ISO2; Detecta la relación estructural correcta, analogía estructural por sustitución entre los dos problemas isomorfos al diana].*

**S:** [Min: 14:43-15:14]; *[El sujeto toma el problema REL2 y lo acerca al diana para leerlo].*

**S:** [Min: 15:14-15:39]; *[El sujeto toma el problema REL1 y lo compara con el problema REL2]. Estos también se resuelven igual. [De nuevo es capaz de establecer una analogía estructural correcta, en este caso entre los dos problemas con estructura mezcla; Realiza en dos ocasiones analogía por sustitución]*

**E:** [Min: 15:40]; **¿Estos también qué?**

**S:** [Min: 15:43]; También se resuelven igual.

**E:** [Min: 15:45]; **Muy Bien, entonces tú dices que estos dos se resolverán igual [ISO1 y ISO2] y estos dos también [REL1 y REL2] pero yo te pido que los compares con el problema diana ¿Cuáles te ayudarían más a resolverlo? [El investigador guía al sujeto hacia la meta de la tarea]**

**S:** [Min: 15:58-16:21]; [Relectura silenciosa. El sujeto compara de nuevo el problema diana con los demás, lectura global].

**S:** [Min: 16:21]; Estos dos se resolverían igual que el diana [*El sujeto hace referencia a los problemas ISO1 y ISO2; Declara analogía estructural correcta*].

**E:** [Min: 16:23]; **¿Por qué? ¿Qué es lo que pone en los problemas que te lleva a esa conclusión?**

**S:** [Min: 16:29]; Porque dice siempre que se conecta una bomba o un proceso que extrae de A, pasa por un depósito y se introduce en B. [*Declara idea relacionada con la estructura encontrar; Analogía por sustitución*]. Y eso pasa en los tres problemas. [*El sujeto hace referencia al los problemas ISO1, ISO2 y DIANA*].

**E:** [Min: 16:40]; **Muy bien, pues ya vamos terminando la prueba, te voy a pedir una última tarea.** [*El investigador decide pasar al último episodio por la claridad en la expresión del sujeto*].

### **Fase 3, Prueba de transfer con ayuda de traducción (Fuentes Resueltos)**

**E:** [Min: 16:45]; **Bien pues ahora te voy a proporcionar 5 cartulinas más, con los mismos colores de antes. Cada cartulina nueva lleva el mismo enunciado que en la cartulina anterior del mismo color pero además en estas te proporcionamos las ecuaciones que resuelven directamente el problema.** [*El investigador proporciona al alumno las nuevas cartulinas y pide que las vuelva a comparar con el problema fuente para repetir el procedimiento anterior*].

**E:** [Min: 16:49]; **Te dejo unos minutos para que los estudies y los compares.**

**S:** [Min: 17:05-17:13]; [*El sujeto realiza una lectura general de las ecuaciones de los problemas*].

**E:** [Min: 17:13]; **Fíjate bien en las ecuaciones**

**S:** [Min: 17:05-17:13]; Estos dos se resuelven igual. [*El sujeto escoge los problemas correctos y establece analogías estructurales a partir de las ecuaciones, confirma su criterio*].

**E:** [Min: 17:25] **Muy bien, pues con esto hemos terminado, muchísimas gracias por tú colaboración.**

## Familiaridad Baja.

### Fase 1. Recordar la tarea de agrupación.

*El sujeto toma inicialmente el criterio basado en el nombre de la magnitud incógnita. En la primera fase invierte mucho tiempo porque no consigue encontrar un criterio claro para la agrupación.*

*En la prueba de transfer se produce un efecto ‘Sísifo Indeciso’. Pese al criterio superficial escogido en la fase de agrupación, el sujeto navega de forma confusa, en dirección estructural pero con interferencias superficiales. En el momento de tomar decisiones, se apoyó siempre primero en ideas relacionadas con la estructura de los problemas. En el último momento, ante un obstáculo inesperado, escoge como opción final un problema no isomorfo cómo análogo adecuado, utilizando la temática de los problemas, como instrumento para salvar el obstáculo estructural.*

**E:** [Min: 00:01] **Buenos días, sujeto número 2, El Paludo Enmascarado, día 22 de Marzo de 2013. Vamos a proceder a la lectura de las instrucciones de la prueba (...).**

(Se leyeron las instrucciones, se le dio un diploma de participación y se explicó todo con detalle al igual que en los casos anteriores....).

**E:** [Min: 02:38] Aquí tienes el cuadernillo, recuerda que había 8 problemas y que tú debías agruparlos en función de si se resolvían con las mismas ecuaciones o no. Tú hiciste estos tres grupos, es decir que tú pensaste que el 1 y el 4 se resolvían igual, que el 5 y el 8 también y por último incluiste en un solo conjunto a los problemas 2, 3, 6 y 7. [El entrevistador recuerda su brevemente su agrupación para adelantar el proceso].

**E:** [Min: 03:01] Te voy a dejar unos minutos para que recuerdes lo que hiciste.

**S:** [Min: 03:08] [El sujeto repasa su agrupación pero parece no recordar demasiado bien la tarea y en concreto su respuesta]

**E:** [Min: 03:33] **Voy a intentar ayudarte a recordar, yo si fuera tu miraría porqué puse unos problemas en un conjunto y porque lo separé de los demás (...).**

**S:** [Min: 03:34] Si, estoy en ello pero necesito algo más de tiempo.

**E:** [Min: 03:35] bien, adelante (...).

**S:** [Min: 03:36-04:35] [*El sujeto repasa la tarea durante 60 segundos*].

**E:** [Min: 04:36] **¿Qué estas pensando?** [*Interrupción con el fin de profundizar en el pensamiento del sujeto*].

**S:** [Min: 04:39] Yo creo que ya lo recuerdo (...).

**E:** [Min: 04:41] **A ver, cuéntame.**

**S:** [Min: 04:43] Pues los he agrupado así porque cuando lees, por ejemplo, el 1 y el 4, tus ves que aquí te dice (...).

**S:** [Min 04:44-04:58] [*El sujeto realiza una rápida relectura de la tarea*].

**S:** [Min 05:02] Yo creo que solo cambian algunos detalles, como (...).

**E:** [05:04] **¿Qué detalles cambian?**

**S:** [Min: 05:09] Por ejemplo, aquí te dice disminuyendo [*el sujeto alude al problema 5 del cuadernillo*] y aquí va aumentando y aumentando [*el sujeto hace referencia al problema 8 del cuadernillo. Atiende en primer lugar en la relación estructural*].

**S:** [Min: 05:22] Por ejemplo este [*el sujeto señala el problema 7 del cuadernillo*], te pide dos soluciones [*Este problema pregunta cuánto volumen habrá en A y en B, el sujeto cree que son dos preguntas distintas, una respuesta para A y otra respuesta para B*].

**E:** [Min: 05:36] **Tranquilo, piensa un poco más pero recuerda siempre el objetivo de la tarea y tu agrupación (...).** [*El sujeto parece no tener claro ningún criterio por lo que el investigador le anima a seguir pensando*].

**S:** [Min: 05:59-06:05] [*El sujeto realiza una relectura rápida de los problemas y su agrupación*].

**S:** [Mi: 06:07] Pues es que veo muy pocas diferencias. Son los mismos y solo cambia que aumenta o que disminuye [*Indica criterio estructural cómo única diferencia entre los problemas*].

**E:** [Min: 06:15] **¿Y en este no ves que cambien más cosas?** [*El investigador hace referencia al problema 3 del cuadernillo*].

**S:** [Min: 06:22] En este cambia una cosa más, aquí yo creo que te pide dos soluciones [*El sujeto piensa que existen dos demandas diferentes cuando pregunta por el volumen en A y en B, una solución por piscina*]

**E:** [Min: 06:30] **¿Porqué te está diciendo que volumen habrá en A y en B? (...) en cambio en este otro te pregunta cuánto calor ¿Tú crees que en un problema habría que buscar dos soluciones y en el otro solo una** [*El investigador compara los problemas 3 y 4 del cuadernillo de agrupación*]?

**S:** [Min: 06:40] Sí.

**E:** [Min: 06:41] **Muy Bien, continua.**

**S:** [Min: 06:45-07:19] [*El sujeto vuelve a leer la tarea*]

**E:** [Min: 07:20] **¿Que estás pensando?**

**S:** [Min: 07:23-07:27] [*Piensa*]

**S:** [Min: 07:27] Bueno, ahora no se (...) creo que voy a cambiar de opinión, veo que juega con las palabras (...).

**E:** [Min: 07:33] **No te preocupes, puedes cambiar de opinión las veces que creas oportuno, que quieres decir (...)**

**S:** [Min: 07:40] Yo creo que es lo mismo, porque dice “¿qué cantidad de gramos se habrán transferido a cada globo cuando sus volúmenes sean iguales?”, y en este “que volumen habrá en A y en B...” A y B son los globos, solo está jugando con las palabras [*El sujeto se cuenta de que no son dos preguntas distintas*].

**E:** [Min: 08:00] **Vale, entonces ahora, con todo esto que me dices ¿Cuáles crees que se resolverían igual y porqué?**

**S:** [Min: 08:28] Pensando que juegan con las palabras, si te fijas bien son casi iguales, entonces creo que claramente se resolverán todos igual. [*El sujeto tomó como última opción la idea de que todos los problemas se resolvían igual. Ha mencionado elementos relativos a la estructura en diversas ocasiones pero para el no esto no implicó que dos problemas se resolvieran de modo diferente. En ningún momento aludió a la magnitud preguntada pese a que realizó una agrupación basada en este criterio, tampoco aludió a otros criterios superficiales, excepto una confusión en la pregunta que habrá que estudiar. El investigador decidió pasar a la siguiente fase para indagar sobre cómo este sujeto, un tanto desordenado, construye analogías entre problemas*].

**E:** [Min: 08:40] **Muy bien, vamos a continuar (...).**

## **Fase 2. Prueba de transfer.**

### *Fase 2a) Transfer lejano*

**E:** [Min: 08:50] **En primer lugar te doy el problema diana o problema a resolver, que aunque no tienes que resolverlo, siempre será tu objetivo cómo te he indicado en las instrucciones iniciales (...).**

**E:** [Min: 09:00] **Te dejo un tiempo para que lo leas.**

**S:** [Min: 09:03- 09:23]. [*El sujeto lee el problema diana*].

**S:** [Min 09:23] Vale.

**E:** [09:25] **¿Ya lo has entendido?, pues a continuación te daré los tres problemas ejemplo que has de comparar para ver si te ayudan o no y ¿Por qué?** [*El entrevistador entrega el material para la prueba al estudiante y le recuerda las instrucciones de la prueba*] **y te voy a pedir que los leas, que los comprendas y**

**que los compares entre ellos. Que veas en que se parecen, que veas en que se diferencian, cuales crees que te ayudan más, cuales crees que te ayudan menos, etc. Te dejo unos minutos para que los leas.**

**S:** [Min: 09:50-10:18] [*El sujeto toma primero el problema verde SIM1 y lo acerca al problema DIANA para leerlo; Procesa el problema; 28 segundos*].

**S:** [Min: 10:18-10:26] Aparta el SIM1 y toma el problema ISO1].

**E:** [Min: 10:26] **¿Ves algo interesante en los problemas?** [*El investigador le interrumpe para obtener información*]

**S:** [Min: 10:28] Pues aquí en principio se parece [*el sujeto hace referencia al problema SIM1*] pero no están hablando de las mismas unidades [*El sujeto hace referencia a las magnitudes y no diferencia entre las estructuras encontrar y alcanzar*].

**E:** [Min: 10:43] **¿A qué te refieres con unidades?**

**S:** [Min: 10:48] Pues que aquí está hablando de Kilocalorías (...) y aquí también cambia que la A aumenta y la B disminuye [*El sujeto hace referencia a la estructura comparando el problema SIM1 con el problema diana*]. Por tanto creo que este no me serviría mucho. Y en este [problema azul] lo primero que veo es que pone condensadores [*temática, elemento superficial*] eléctricos que eso no tiene nada que ver. [*El sujeto no es capaz de ver la relación estructural (isomorfía) entre el problema azul y el problema diana, la estructura queda apantallada por un contexto desconocido completamente para el sujeto (APANTALLAMIENTO)*].

**E:** [Min: 11:04] **Muy bien, puedes continuar (...).**

**S:** [Min: 11:07- 11:30] [*El sujeto toma el problema REL1 y lo acerca al diana; lee durante unos segundos*].

**E:** [Min: 11:30] **¿Qué estás pensando?**

**S:** [Min: 11:31] Necesito algo más de tiempo.

**S:** [Min: 11:53] Yo creo que este es el que más me ayudaría a resolver el problema diana [*Problema REL1*].

**E:** [Min: 11:54] **¿Por qué?**

**S:**[Min: 11:56] No estoy seguro pero (...), aunque cambian las unidades, me dice que tiene más disolución, mayor que B, entonces conectan y comienza a pasar de A a B, que es lo mismo que en el problema diana, va disminuyendo de la A y pasa a la B, entonces introduce 30 gramos de gas inyectado, ahí es de ácido[*El sujeto no consigue construir un modelo de la situación adecuado, aunque busca similitudes estructurales, no es capaz de percibir las diferencias entre la estructura "mezcla" y*

*la estructura ‘encontrar’*]. Yo creo que para resolver el diana, este es el que más me ayudaría. [Problema REL1].

**E:** [Min: 12:33] **Muy bien, vamos a continuar (...).** [El investigador decide pasar al siguiente episodio].

**Fase 2b) Transfer cercano**

**E:** [Min: 12:50] **Aquí tienes otros dos problemas [ISO2 y REL2], te pido que hagas lo mismo que hasta ahora pero con estos dos, a ver si alguno te ayuda.**

**S:** [Min: 13:01-13:50] [El sujeto compara los dos nuevos problemas con el problema rojo de la fase anterior, aparta los problemas ISO1 e SIM 1 y trabaja con los problemas ISO2; REL2 y REL1].

**E:** [Min: 13:50] **¿Qué piensas?** [El investigador interrumpe para indagar en los procesos realizados hasta el momento].

**S:** [Min: 13:54] Pues aquí tengo algunas dudas.

**E:** [Min: 13:55] **¿Por qué?**

**S:** [Min: 13:56] Pues aquí tengo más dudas porque yo creo que todos se parecen [El sujeto compara tres problemas de los cuales dos tienen estructura mezcla y uno tiene estructura encontrar, en todos ellos hay una transferencia de A a B, este hecho es importante y hay que analizarlo con detalle. El sujeto consigue distinguir entre transferir de A a B, y transferir a A y a B, pero al igual que en el caso del sujeto Súper Mario, se produce un efecto Sísifo al no ser capaz de traducir el problema correctamente].

**E:** [Min: 14:05] **¿Y en qué cosas se parecen?**

**S:** [Min: 14:07] Pues que en los tres se extrae de la A y pasa a la B [Alude a la transferencia sin relatar ningún elemento superficial].

**S:** [Min: 14:20]; Y también que los volúmenes son todos iguales [El sujeto se refiere a las cantidades (30 y 20) cuando habla de volúmenes, aquí si señala elementos superficiales].

**E:** [Min: 14:29]; **¿Y si tuvieras que decidir cuál te ayudaría más para resolver el problema diana? Léelos y compáralos el tiempo que necesites.**

**S:** [Min: 14:42]; **Pues este [El sujeto se refiere al problema REL2], como estamos hablando de globos y en este también habla de globos [Cae en la trampa superficial. Efecto Sísifo de nuevo. En el momento de decidir qué problema le ayudaría más, al no conseguir detectar las diferencias estructurales toma una opción incorrecta basada en la superficie del problema]. [El investigador decide pasar al siguiente episodio].**



### **Fase 3, Prueba de transfer con ayuda de traducción (Fuentes Resueltos).**

**E:** [Min: 15:23]; **Vamos a la última fase. Ahora te voy a proporcionar 5 cartulinas más, con los mismos colores de antes. Cada cartulina nueva lleva el mismo enunciado que en la cartulina anterior del mismo color pero además en estas te proporcionamos las ecuaciones que resuelven directamente el problema.** *[El investigador proporciona al alumno las nuevas cartulinas y pide que las vuelva a comparar con el problema fuente para repetir el procedimiento anterior].*

**E:** [Min: 15:48] **Te dejo unos minutos para que los estudies y los compares.**

**S:** [Min: 15:49-1601]; *[El sujeto mira rápidamente las soluciones de los problemas].*

**S:** [Min: 16:01]; **Pues directamente te digo este, yo creo que el que me va a ayudar es el amarillo porque me da la solución exacta, los gramos de gas. En el problema diana pide los gramos de gas y aquí tengo la solución exacta.** *[El sujeto va directo a la solución de las ecuaciones].*

**E:** [Min: 16:03]; **Pero mira los problemas, ¿estás seguro?**

**S:** [Min: 16:04]; Claro, el problema diana me pide los gramos de gas y en esta la solución son los gramos de gas. *[El sujeto no se fija en las ecuaciones sino en las soluciones finales, alude a "los gramos de gas" como único criterio para resolver el problema diana, recordemos que en la tarea de agrupación escogió el criterio basado en la magnitud incógnita].*

**E:** [Min: 16:10]; **Muy Bien, muchas gracias por tu trabajo.**

## **Caso 3. Eustaquia Habichuela**

### **Familiaridad Alta**

#### **Fase 1. Recordar la tarea de agrupación**

*El sujeto agrupó en la fase inicial según el criterio basado en la temática de los problemas (3). Se leyeron las instrucciones y se siguió el protocolo al igual que en los casos anteriores.*

**E:** [Min: 00:02]; Hola Buenos días, Sujeto numero 12, Eustaquia habichuela (...). En primer lugar a leer las instrucciones de la prueba para comprender todo (...).

*[El investigador recuerda la tarea de agrupación de problemas y entrega el cuadernillo al sujeto].*

**E:** [Min: 01:54]; **Viendo el cuadernillo que tienes delante ¿recuerdas la tarea de agrupación que hiciste?**

**S:** [Min: 01:56]; Si

**E:** [Min: 01:57]; **¿Me lo puedes explicar?**

**S:** [Min: 01:59]; Pues creo que me basé en las Preguntas.

**E:** [Min: 02:03]; **Muy bien, entonces dices que agrupaste según lo que preguntaba el problema y yo aquí veo que hiciste dos grupos de problemas, uno con los problemas 2, 3, 5 y 8 en un grupo y otro con los problemas 1, 4, 6, y 7. ¿Recuerdas que la tarea pedía agrupar los problemas según si se resolvían con las mismas ecuaciones o no? (...) Por favor, puedes repasar tus respuestas y decirme como agruparías los problemas según lo que pide la tarea.**

**S:** [Min: 02:47-]; *[El sujeto repasa la tarea de agrupación; Lectura silenciosa].*

**S:** [Min: 03:01]; Vale, ya recuerdo porqué los agrupé así, fue por los procesos bancarios (...). *[Declara criterio superficial basado en la temática de los problemas].*

**E:** [Min: 03:06]; **¿Qué quieres decir con eso? (...).**

**S:** [Min: 03:13]; Si, pues que hay problemas de procesos bancarios y problemas de los litros de la piscina *[Confirma criterio superficial basado en la temática de los problemas]*

**E:** [Min: 03:14]; **Muy Bien.**

**E:** [Min: 03:20]; **Al iniciar la prueba, antes de leer los problemas me has hablado de las preguntas y ahora me has dicho que los agrupaste según trataran de piscinas o de ahorros ¿Cómo agruparías hoy los problemas pensando en poner en el mismo grupo los que se resuelvan con las mismas ecuaciones?**

**S:** [Minuto: 03:28-03:38]; *[El sujeto repasa la tarea; Relectura silenciosa];*

**S:** [Min: 03:38]; Pues es que ahora mismo no lo sé muy bien.

**E:** [Min: 03:40]; **Muy bien, no te preocupes que no pasa nada, vamos a seguir (...).**

*[El sujeto parece muy desorientado en la prueba y el investigador decide pasar a la siguiente fase para centrar sus ideas y no perder tiempo. Antes de leer el cuadernillo el sujeto responde con un criterio ('la pregunta') preconcebido, ya sea por recuerdo o por intuición. El investigador le ayuda a repasar sus respuestas y el sujeto*

*recuerda que agrupó según la temática de los problemas (criterio superficial) y declara no saber muy bien cómo responder ahora a la tarea de agrupación].*

## **Fase 2. Prueba de transfer.**

### *Fase 2a) Transfer lejano*

**E:** [Min: 03:45]; **Muy bien, pues vamos a continuar (...)** Aquí tienes el problema a resolver, recuerda que no has de resolverlo (...). *[El entrevistador entrega el material y recuerda la tarea al sujeto].*

**E:** [Min: 03:52]; **Te doy unos minutos para que lo leas y lo comprendas bien** *[Problema Diana].*

**S:** [Min: 03:53-04:10]; *[El sujeto lee el problema DIANA; Lectura silenciosa].*

**E:** [04:11]; **Aquí te entrego los tres ejemplos** *[El entrevistador entrega los tres problemas fuente].*

**E:** [Min: 04:20]; **Me gustaría que me dijeras en que se pareen y en qué se diferencian unos de otros y cuando los hayas comprendido, necesito también que me digas ¿Cual o cuales te ayudarán más a resolver el problema diana?**

**E:** [Min: 04:30]; **Te dejo que pienses el tiempo que necesites.**

**S:** [Min: 04:32-04:37]; *[El sujeto realiza una lectura general de los problemas].*

**S:** [Min: 04:38-04:57]; *[El sujeto toma el problema SIM1 y lo acerca para procesarlo].*

**S:** [Min: 04:58-05:15]; *[El sujeto deja de lado el problema SIM1 y toma el ISO1].*

**E:** [Min: 05:15]; **¿Qué piensas?** *[El investigador demanda información].*

**S:** [Min: 05:20]; **Pues que no podría relacionar ahora ninguno de los problemas (...).**

**E:** [Min: 05:25]; **Tranquila, tomate el tiempo que necesites.**

**S:** [Min: 05:26-05:47]; *[El sujeto aparta el problema ISO1 y toma el problema REL1; Lo compara señalando con una mano el problema DIANA y con la otra el REL1 (Analogía por transformación)].*

**S:** [Min: 05:48]; *[El sujeto aparta el problema REL1 y se dirige a coger el SIM1].*

**S:** [Min: 05:49]; **Pues ahora creo que este [SIM1] es el que más me ayudaría a resolver el problema diana (...).**

**E:** [Min: 05:51]; **¿Por qué?**

**S:** [Min: 05:56]; Porqué cómo habla de piscinas y el problema a resolver también habla de piscinas (...); este [ISO1] habla de euros y este de globos [RELI].

**E:** [Min: 06:04]; **Muy bien: Pues me gustaría los leyeras otra vez, fijándote bien en todo lo que pone en los enunciados para ver encuentras más ayudas en los problemas ejemplo o por el contrario crees que esa es la única razón por la que se resolverán igual. (...).**

**E:** [Min: 06:21]; **Puedes leer el tiempo que necesites (...).**

**S:** [Min: 06:22-06:34]; [*El sujeto realiza una lectura general de los problemas y los compara con el diana*].

**S:** [Min: 06:35]; Siempre hay dos huchas, dos globos etc. Con dos mil de algo (...).

**S:** [Min: 06:41-06:46]; [*El sujeto vuelve a los problemas; Relectura general silenciosa*].

**S:** [Min: 06:46]; Y va disminuyendo una cosa, a la vez de la otra (...). Y luego aumenta (...). [*Primera idea relacionada con la estructura del problema. Hasta ahora no había hecho mención alguna. Señalar que lo destaca después de que el investigador la fuerce a ello al demandarle un estudio completo de analogías, después de destacar todos los elementos superficiales y de forma muy confusa; Parece que el sujeto realmente no detecta estos rasgos (estructurales) cómo importantes o necesarios para la resolución de los problemas*].

**S:** [Min: 06:52]; ¿Y en todos los problemas ves que algo aumenta y disminuye a la vez? ¿En todos es igual? ¿Y en este también [El investigador acerca al sujeto el problema SIM1]? ¿Me puedes explicar eso mejor? [*Demanda de aclaración*].

**S:** [Min: 07:05]; Pues en este hay bombas hidráulicas que extraen (...), si yo lo veo igual que todos, en todos se extra algo de algún sitio y llena algo (...). Si es igual (...). [*El sujeto no es capaz de diferenciar las estructuras de los problemas*].

**S:** [Min: 07:08]; **Entonces tú ves que en todos se llena algo, se introducen cosas etc, ¿todo esto no te dice nada?**

**S:** [Min: 07:18- 07:25]; [*Lectura global de los problemas*].

**S:** [Min: 07:26]; Siempre preguntan ‘cuando tengan la misma cantidad de (...). [*El sujeto declara rasgos superficiales, en este caso la condición en la demanda del problema*].

**S:** [Min: 07:32]; **Muy bien, Pues si te parece vamos a pasar a la última fase.** [*El entrevistador decide pasar a la siguiente fase; El sujeto no realiza la fase tres por declarar ayuda directa de un problema*].

**Fase 2a) Transfer lejano**

**E:** [Min: 07:340] **Te voy a proporcionar 5 cartulinas más, con los mismos colores de antes. Cada cartulina nueva lleva el mismo enunciado que en la cartulina anterior del mismo color pero además en estas te proporcionamos las ecuaciones que resuelven directamente el problema.** [*El investigador proporciona al alumno las nuevas cartulinas y pide que las vuelva a comparar con el problema fuente para repetir el procedimiento anterior*].

**E:** [Min: 07:59]; **Te dejo unos minutos para que los estudies y los compares.**

**S:** [Min: 08:03- 08:25]; [*Lectura silenciosa de las ecuaciones del problema SIM1*].

**S:** [Min: 08:25-08:44]; [*Lectura silenciosa de las ecuaciones del problema ISO1*]

**S:** [Min: 08:44-08:59]; [*Lectura silenciosa del problema REL1*].

**S:** [Min: 09:00]; Yo creo que este es el que más me podría ayudar; [*Problema SIM1*].

**E:** [Min: 09:03]; **¿Por qué?**

**S:** [Min: 09:06]; Porque sigue relacionándose con los litros y las piscinas y a mí no me interesan ni los euros ni los globos de aire.

**E:** [Min: 09:15]; **¿Entonces el problema 1[*SIM1*] es el que más te ayudaría?**

**S:** [Min: 09:20]; Si, porque habla de piscinas

**E:** [Min: 09:21]; **Muy bien, hemos terminado, muchas gracias por tu colaboración.**

## **Familiaridad Baja.**

### **Fase 1. Recordar la tarea de agrupación.**

*El sujeto agrupó en la fase inicial según el criterio basado en el nombre de la magnitud -incógnita (7).*

(Se han leído las instrucciones, se ha dado el diploma de participación y se ha explicado todo con detalle al igual que en todos los casos....)

**E:** [Min: 00:00-00:50]; **Sujeto número 6, Eustaquia Habichuela. [El investigador lee las instrucciones cómo en los casos anteriores].**

**E:** [Min: 00:50]; **Aquí tenemos el cuadernillo, si recuerdas, te pedíamos que agruparas los problemas según se resolvieran con las mismas ecuaciones o no. Tú agrupaste en un mismo conjunto el problema 5 y el problema 8, en otro**

**conjunto pusiste el 1 y el 4. Te voy a dejar unos minutos para que recuerdes lo que hiciste.**

**S:** [Min: 01:14-02:10]; *[El sujeto repasa su tarea de agrupación; Procesa información durante 56 segundos].*

**E:** [Min: 02:10]; **¿Recuerdas la tarea?** *[El investigador interrumpe al sujeto].*

**S:** [Min: 02:11]; Si, agrupé los problemas según lo que preguntaban.

**E:** [Min: 02:12]; **Pues vamos a pasar a la siguiente fase.** *[El entrevistador decide pasar a la siguiente fase por considerar muy claras las palabras del sujeto].*

## **Fase 2. Prueba de transfer.**

### ***Fase 2a) Transfer lejano***

*Se le ofreció el problema diana al sujeto y se colocaron los problemas fuente cómo en las otras ocasiones, de modo que la cámara pudiera grabar todas sus acciones. Se recordó al sujeto la tarea y se le ofreció un tiempo de lectura.*

**S:** [Min: 03:24-03:56]; *[El sujeto lee el problema DIANA].*

**S:** [Min: 03:57-04:23]; *[El sujeto toma el problema SIM1 y lo acerca al problema DIANA para procesarlo].*

**S:** [Min: 04:24- 04:53] *[El sujeto aparta el problema SIM1, toma el problema ISO1 y lo acerca para procesarlo].*

**S:** [Min: 04:54-05: 17] *[El sujeto aleja el problema ISO1 y toma el problema RELI]*

**S:** [Min: 05:17]; Yo creo que este problema es el que más me ayudaría a resolver el diana. *[El sujeto hace referencia al problema RELI; declara analogía superficial basada en la magnitud-incógnita].*

**E:** [Min: 05:20]; **Muy bien, ¿por qué piensas eso? ¿Qué hay en ese problema que te haya llevado a esa conclusión?**

**S:** [Min: 05:36]; Pues mira, en este problema [DIANA] pregunta los gramos al igual que en este otro [RELI]; *[El sujeto confirma criterio]*

**E:** [Min: 05:39]; **¿Lo que quieres decir es que cómo en los dos problemas pregunta por los gramos, se resolverán igual?**

**E:** [Min: 05:41]; Si

**E:** [Min: 05:42]; **¿Y los otros problemas?**

**E:** [Min: 05:44]; Pues no me sirven porque en este [ISO1] pide microCulombios y en este otro Kilocalorías. [El sujeto reafirma su criterio y declara literalmente que la magnitud-incógnita es la clave para resolver el problema diana].

**E:** [Min: 04:46]; Muy bien. [El entrevistador decide pasar a la siguiente fase al detectar rápidamente el tipo de analogía construida por el sujeto]

### **Fase 2b) Transfer cercano**

*El sujeto escoge el problema REL1 en la anterior fase, declarando que le ayudaría a resolver el problema fuente porque 'trata de gramos'. El investigador sospecha que el sujeto realiza inferencias muy pobres por lo que intenta replicar el proceso aportando dos problemas más.*

**E:** [Min: 05:56]; [El investigador aparta los problemas ISO1 y SIM1 y suma los problemas ISO2 y REL2 al REL 1. A partir de ahora el sujeto trabaja con 3 problemas].

**S:** [Min: 06:13-06:31]; [El sujeto realiza una lectura general de los problemas]

**S:** [Min: 06:31]; Este [El sujeto señala el problema REL2]

**E:** [Min: 06:32]; **¿Qué quieres decir? (...).**

**S:** [Min: 06:40]; Pues me he fijado en los gramos de gas, que es lo mismo que te pide aquí. [El sujeto hace referencia al problema Diana];

**E:** [Min: ]

*[Compara los problemas y decide que el que más le ayudaría es el problema REL2 por que la magnitud implicada en la demanda del problema es la misma, gramos de gas]*

**E:** [Min: 06:50]; **Muy bien. Vamos a seguir (...).**

*El entrevistador decide continuar al comprobar que el sujeto realiza las analogías en torno a la magnitud-incógnita de los problemas. Es un pensamiento de muy poca profundidad y lo demuestra al escoger otro problema cuando se le pregunta ¿Cuál de ellos crees ahora que te proporcionaría más ayuda para resolver el fuente?*

### **Fase 3, Prueba de transfer con ayuda de traducción (Fuentes Resueltos).**

**E:** [Min: 07:02]; **Bien pues ahora te voy a proporcionar más cartulinas, con los mismos colores de antes, donde podrás ver las ecuaciones con las que se**

**resuelven los problemas ejemplo (...).** [*El entrevistador proporciona el nuevo material*].

**E:** [Min: 07:36]; **Te dejo unos minutos para que los leas y los comprendas.**

**S:** [Min: 07:39-07:46]; [*El sujeto toma el problema REL2 y lo acerca para leerlo*].

**S:** [Min: 07:47-07:51]; [*El sujeto lee el problema DIANA; Relectura silenciosa*]

**S:** [Min: 07:51-07:56]; [*El sujeto lee las ecuaciones del problema ISO1; Relectura silenciosa*].

**S:** [Min: 07:56-08:14]; [*El sujeto vuelve a coger el problema REL2. Procesa información, 18 segundos*].

**S:** [Min: 08:14]; Sigo pensando que este problema es el que me ayudaría más a resolver el problema diana.

**E:** [Min: 08:19]. **Muy bien, hemos terminado. Muchas gracias por tu ayuda.**

*El sujeto en todo momento atiende a los rasgos más superficiales de los problemas como son las magnitudes-incógnita incluidas en la demanda de los problemas. La magnitud- incógnita está en todo momento en su punto de mira y no diferencia en ningún caso, la estructura de los problemas. Es un pensamiento de baja profundidad aún en los momentos de concentración. El sujeto no puede traducir los problemas al lenguaje matemático.*



# Capítulo 9

## **Conclusiones Generales. Problemas Abiertos y Futuro de la Investigación**

---



## **9. Conclusiones Generales.**

# **Problemas Abiertos y Futuro de la Investigación**

El ámbito general de esta investigación fue el estudio de de la transferencia analógica en resolución de problemas verbales algebraicos en el área de ciencias. En concreto, nos dirigimos a las primeras etapas de la transferencia, las directamente relacionadas con la comprensión de los problemas. En esta fase el establecimiento de analogías entre problemas cobra especial importancia. Las características definitorias de estos problemas, superficie y estructura deberían interactuar con los resolutores en la construcción de estas analogías, tal como indican algunos estudios anteriores.

Los problemas académicos en el área de ciencias experimentales (usualmente en física y/o química) suelen involucrar situaciones específicas, contextos característicos y alejados de los propios de la vida ordinaria, y por tanto, poco conocidos por los estudiantes. El estudio de la Familiaridad con los enunciados de los problemas, entendida ésta como el grado de conocimiento que se tiene sobre la situación involucrada en el enunciado de un problema, ha sido un objetivo importante en esta tesis, pues podría ser un factor causal decisivo en la tasa de éxito de los estudiantes en la resolución de problemas de ciencias (usualmente contextos de baja familiaridad), comparada con la que se tiene en la resolución de problemas en matemáticas (usualmente, contextos de alta familiaridad).

La construcción de analogías (primeras fases de la transferencia) y el efecto de la familiaridad con los enunciados de los problemas fue objeto de estudio en todos y cada uno de los estudios empíricos de esta tesis. Ligados a ellos, otros objetivos, más específicos fueron definidos y abordados en los diversos estudios empíricos desarrollados. El presente capítulo pretende dar algunas respuestas a las preguntas

planteadas al inicio de la investigación, así como describir el grado de consecución de los objetivos derivados de dichas preguntas y la discusión de los mismos.

Las **preguntas de investigación** que se plantearon en esta tesis fueron las siguientes:

1. ¿Qué criterios utilizan los resolutores para establecer vínculos entre problemas que ayuden a su resolución? ¿Hay diferencias entre estos estudiantes y los futuros profesores?
2. ¿Qué aspectos característicos de los problemas verbales algebraicos son considerados determinantes para su resolución por los estudiantes de Secundaria? Estos estudiantes, ¿son capaces de percibir analogías y diferencias entre problemas que pueden afectar su resolución correcta? En particular, ¿perciben las diferencias estructurales más allá de las similitudes superficiales o contextuales entre problemas? ¿Hasta qué punto las similitudes superficiales pueden “apantallar” las diferencias estructurales entre problemas?
3. ¿Cómo afecta la mayor o menor Familiaridad de los resolutores con las situaciones problemáticas descritas en los enunciados, al éxito en la resolución por transferencia? ¿Es suficiente una instrucción basada únicamente en resolver problemas isomorfos (como es habitual), para desarrollar la capacidad de los estudiantes de secundaria para establecer analogías y detectar diferencias entre problemas?
4. ¿Cuáles son los procesos cognitivos que los estudiantes con especiales dificultades ponen en juego cuando se trata de razonar para establecer analogías entre problemas con enunciado? ¿Cómo podemos describir los procesos resolutivos por transferencia?
5. ¿Qué situaciones didácticas merece la pena atender para solucionar las dificultades mostradas en algunos casos de interés?

Y los **objetivos** formulados, con el fin de responder a las preguntas anteriores fueron los siguientes:

1. Describir el tipo de analogías que los estudiantes de educación secundaria son capaces de percibir entre problemas algebraicos con enunciado. Estudiar los efectos de los diferentes caracteres constitutivos de los problemas verbales algebraicos, Superficie, Estructura y Magnitud incógnita, sobre los criterios usados por los resolutores a la hora de clasificar problemas según el modo en que se resuelven.
2. Analizar algunos efectos producidos por el nivel de conocimiento previo de los resolutores, estudiantes de Secundaria y futuros profesores, sobre la elaboración de analogías apropiadas entre problemas.
3. Analizar la relación entre establecer analogías correctas o incorrectas y su influencia sobre el éxito en la resolución.
4. Evaluar el grado en que las similitudes superficiales, o contextuales, entre problemas dificultan la percepción de sus diferencias estructurales, o matemáticas.
5. Analizar los efectos de la menor o mayor Familiaridad de los resolutores con el contexto de los enunciados, sobre el establecimiento de analogías apropiadas entre problemas.
6. Analizar en profundidad los procesos mentales de los estudiantes, a partir de estudio de casos concretos de especial interés, mediante técnicas cualitativas que muestren los procesos cognitivos implicados en la codificación de los problemas y el establecimiento de analogías y diferencias entre ellos.
7. Definir los obstáculos más importantes en el proceso de transferencia analógica entre problemas, surgidos en episodios en los que el estudiante razona sobre la tarea propuesta.

Responder a las preguntas establecidas y alcanzar los objetivos planteados supuso, en primer lugar, la creación de un cuerpo teórico (capítulos 2-3) acorde a las necesidades del trabajo a partir de un amplio estudio de la bibliografía especializada. En segundo lugar, la ejecución de una serie de estudios empíricos (capítulos 4-7), interrelacionados y dirigidos, todos ellos, a lograr los objetivos propuestos.

Los estudiantes participantes en todos los experimentos, cursaban los niveles 3º y 4º de la educación secundaria obligatoria en España (ESO), a excepción de un grupo de futuros profesores, la mayoría licenciados en matemáticas, pero también algunos en ingeniería, arquitectura o física, que cursaban el máster en profesor de educación secundaria oficial en el estado español. Somos totalmente conscientes de que las muestras utilizadas no permiten generalizar nuestros resultados a otras muestras de la población de estudiantes de educación secundaria o de profesores en formación. Sin embargo, también debemos matizar que las distintas muestras participantes de los diferentes experimentos conducidos, no presentaron rasgos o características que les diferencien del resto de la población y por tanto, nos permitiremos subrayar algunos de los resultados obtenidos que podrían ser de interés para la didáctica de las ciencias y las matemáticas, si estudios futuros aumentan la validez externa de los nuestros. Por el momento, las conclusiones y discusiones presentadas aquí deberán ser tomadas con la cautela propia de estas limitaciones.

Las conclusiones que vamos a presentar, asociadas a la mayor o menor consecución de estos objetivos específicos, deben ser tomadas con cautela, dadas las limitaciones consustanciales de toda investigación científica. Estas limitaciones serán recordadas después explícitamente. Por tanto, las conclusiones solo muestran, una modesta contribución para el avance de la investigación educativa en resolución de problemas académicos, pero también permiten visualizar una panorámica abierta para continuar explorando este campo de conocimientos.

## 9.1. Conclusiones generales

El primer objetivo definido en esta tesis doctoral fue el siguiente:

1. Describir el tipo de analogías que los estudiantes de educación secundaria son capaces de percibir entre problemas algebraicos con enunciado. Estudiar los efectos de los diferentes caracteres constitutivos de los problemas verbales algebraicos, Superficie, Estructura y Magnitud incógnita, sobre los criterios usados por los resolutores a la hora de clasificar problemas según el modo en que se resuelven.

Este objetivo fue abordado en el primer bloque empírico, que corresponde al capítulo 3 de esta tesis pero los resultados obtenidos aconsejaron retomarlo en todos los estudios empíricos siguientes (capítulos 5, 6, 7).

Comenzamos por realizar un análisis exploratorio de las primeras etapas de la transferencia analógica (Chen y Klahr, 2008) en resolución de problemas. En concreto se pretendió analizar la codificación de las características de los problemas a partir de sus enunciados, el acceso a la información de análogos fuente y la relación (*mapping*) entre los problemas ya conocidos y los propuestos. Este examen prospectivo se realizó a partir de una tarea de agrupación de problemas (*sorting*), ya usada desde hace mucho en la investigación en resolución de problemas en ciencias (Chi et al, 1981).

Entonces, cuando se intenta resolver un problema por transferencia analógica, ¿Qué analogías perciben y construyen los estudiantes como ‘importantes’ para la resolución, entre los diferentes problemas-ejemplo presentados en nuestras clases? ¿En torno a que características indexan los estudiantes un problema en su memoria? ¿Cómo utilizan estos índices para elaborar analogías entre problemas?

La tarea de *sorting* o categorización de problemas propuesta consistió en agrupar una colección de problemas verbales algebraicos a partir de su enunciado, pero según su modo de resolución. Para ejecutar esta tarea correctamente, un sujeto debe: a) comprender cada situación problemática presentada y codificar cada problema a partir de ciertos índices elaborados a partir del enunciado explícito y/o de la

estructura algebraica cada problema; b) Asociar esos índices con el modo de resolución del problema, diferenciando entre índices superficiales e índices estructurales; c) Relacionar los problemas entre sí a partir de esos índices, estableciendo un *mapping* entre sus características estructurales, algebraicas, desechando los indicadores superficiales; d) Diferenciar problemas cuyo conjunto de indicadores estructurales no son idénticos; e) Definir conjuntos de problemas con idénticos indicadores estructurales, sean cuales sean sus indicadores superficiales.

Dado que la tarea no incluye la resolución explícita de los problemas, los sujetos no tienen oportunidad de comprobar los modelos mentales inicialmente construidos para cada situación problemática y, en su caso, de rectificar. Por tanto, la tarea explora, tal como se ha dicho antes, las fases iniciales de la resolución por transferencia que implican el establecimiento de analogías entre problemas.

Alumnos de secundaria y alumnos del máster de profesorado de matemáticas participaron en este estudio inicial. Los resultados permitieron diferenciar con claridad diversos criterios de agrupación. Durante el análisis de los resultados, todos los criterios se pudieron asociar unívocamente a los conjuntos producidos por los estudiantes de ambos niveles educativos, y se pudieron diferenciar en función de su naturaleza, superficial o estructural (algebraica). En concreto, las categorías más frecuentes contemplaron como indicadores apropiados la temática de los problemas, su estructura y el nombre de la incógnita preguntada en el problema. Los resultados obtenidos (y que se analizan después con detalle) indicaron que, aunque muchos estudiantes son capaces de atender a las características estructurales de los problemas, la proporción que se ve afectada por indicadores superficiales o contextuales es importante, especialmente cuando la familiaridad con los enunciados es baja (como veremos más adelante). Un elevado porcentaje de los estudiantes de educación secundaria no fue capaz de establecer las analogías estructurales correctas entre problemas. El criterio más utilizado para agrupar los problemas fue el relacionado con el nombre de la magnitud incógnita, criterio claramente superficial y utilizado por el 37% de los sujetos. El criterio basado en la temática de los problemas, también superficial, fue usado por el 14% de los estudiantes y el criterio basado en el rol de la incógnita (su rol algebraico en las ecuaciones) no se usó en ningún caso. Agrupando los criterios en superficiales y estructurales observamos que



el 61% de los estudiantes de secundaria, estableció las relaciones entre problemas basándose en criterios superficiales. Solo el 27% de los sujetos de la muestra utilizaron criterios estructurales y el criterio puro estructural considerado como correcto, después del acuerdo entre expertos, tan solo fue seleccionado por un 16% de los estudiantes.

Incluso entre los graduados, profesores de secundaria en formación para la especialidad de matemáticas, la proporción de sujetos que atendió a indicadores superficiales, en solitario o en conjunción con los estructurales, es preocupante.

La información obtenida en este estudio inicial (capítulo 4) sobre los criterios manejados por los estudiantes, e indicadores que los sustentan, fue apoyada en los estudios empíricos siguientes (capítulos 5 y 6). En estos estudios se manipularon experimentalmente los indicadores superficiales y estructurales (Holyoack, 1994, Reed, 1987; Novick, 1998; Puig y Cerdán, 1998, Cerdán, 2008) para establecer analogías entre problemas diana y problemas fuente (ya conocidos, resueltos), incluyendo las cantidades explicitadas como datos (Bell, Swan y Taylor, 1981).

Estos resultados permiten enunciar las primeras conclusiones de esta tesis:

---

## **Conclusión 1**

Ya que más de la mitad de los estudiantes establecieron analogías entre problemas basándose sólo en rasgos superficiales tales como el contexto de los problemas, los objetos y eventos implicados o la magnitud concreta que representaba la incógnita preguntada en el problema, se puede concluir que el establecimiento de analogías correctas entre problemas durante el aprendizaje resulta más complejo y dificultoso de lo que muchos profesores esperan. Los mecanismos cognitivos implicados se ven fácilmente obstaculizados por (los variados y a veces numerosos) elementos superficiales e irrelevantes de los problemas.

---

Estos resultados alertan de la posibilidad de que muchos profesores den por hecho que las analogías estructurales entre problemas resultan fáciles de percibir por parte

de sus estudiantes, cuando no es así (Oliva, 2004). Esto puede ser una consecuencia del modo en que se instruye, es probable que no trabajen suficientemente con sus alumnos las tres fases que preceden a la ejecución de una resolución: codificación del problema, activación de análogos-fuente, y *mapping*. Por tanto, las fases previas a la resolución de un problema, es decir, las directamente relacionadas con la comprensión de este deberían ser tratadas con más profundidad en nuestras aulas.

Más aún, es posible que una fracción de profesores esté provocando confusión entre sus estudiantes, al no diferenciar con claridad los indicadores estructurales, algebraicos, de los puramente superficiales como el nombre de la incógnita del problema, o el contexto temático en el que aparecen los objetos y eventos concretos involucrados. La formación de profesores debe atender de forma explícita y atenta estas cuestiones.

El segundo objetivo que nos planteamos en esta investigación fue:

*2. Analizar algunos efectos producidos por el nivel de conocimiento previo de los resolutores, estudiantes de Secundaria y futuros profesores, sobre la elaboración de analogías apropiadas entre problemas.*

Este objetivo se abordó también en el bloque II, capítulo 4 de esta tesis, como se ha anunciado antes.

Son muchos los estudios que muestran que el conocimiento previo es un factor fundamental para predecir el éxito en la resolución de problemas por transferencia (Heyworth, 1998; Novick, 1998). Todo aquello que ya se sabe, se relaciona con todo aquello que se pretende aprender y los estudiantes expertos poseen en sus mentes esquemas de resolución más completos que atienden a los elementos estructurales por encima de los superficiales (Chi, Bassok, Lewis, Riemann y Glaser, 1981). La segunda sección del primer estudio (capítulo 4) estuvo dirigida a determinar

diferencias entre los estudiantes de educación secundaria obligatoria (3º y 4º curso de la ESO) y los futuros profesores de ciencias y matemáticas (Licenciados en matemáticas o en Ciencias o en Ingenierías superiores que cursaban el máster de profesorado en educación secundaria).

Como suponíamos, la pericia y la experiencia adquiridas con los años de formación parecen ser factores clave para el éxito en la resolución de problemas. Los estudiantes de máster establecieron un mayor número de analogías estructurales entre problemas. El criterio estructural, propio del comportamiento reconocido como experto, obtuvo niveles de aplicación muy parecidos a los de la muestra de educación secundaria, pero los futuros profesores utilizaron en el 33% de los casos un criterio basado en la interacción entre la estructura y el rol de la incógnita en la ecuación, criterio de naturaleza estructural y que no apareció en ningún caso en el estudio con los estudiantes de secundaria. Agrupando estos criterios estructurales, el porcentaje de estudiantes de máster de profesorado que estableció analogías estructurales entre problemas fue significativamente superior al de los estudiantes de secundaria pero, aún así, no fue un resultado del todo satisfactorio. El 35% de los futuros profesores de matemáticas usó elementos superficiales como indicadores para agrupar problemas considerados análogos y las entrevistas cualitativas mostraron un interés preocupante hacia el criterio superficial relacionado con magnitud de la incógnita preguntada. Esto señala deficiencias preocupantes y genera cierta incertidumbre respecto a la capacidad de estos ‘futuros profesores’ para instruir en las aulas de ciencias y matemáticas, de forma satisfactoria, en resolución de problemas algebraicos con enunciado.

La comparación entre resolutores expertos y noveles dio pie a nuestra segunda conclusión:

---

## Conclusión 2

Al parecer, muchos de estos futuros profesores, que deberían manifestar un comportamiento experto, no son capaces de filtrar las características superficiales de los problemas y estas producen en ellos interferencias en la detección de los elementos estructurales, necesarios para la correcta resolución de los problemas y, sobre todo, para una instrucción correcta de sus futuros alumnos. Parece aconsejable atender mejor a la formación de los futuros profesores para asegurar que manejan criterios expertos basados en indicadores estructurales a la hora de resolver problemas por transferencia analógica.

---

Los resultados de este primer estudio motivaron la investigación de la relación entre elaborar analogías correctas o incorrectas entre problemas (primeros estadios del ‘transfer’) y el éxito en la resolución por transferencia (aplicación de la última fase del ‘transfer’) y fue precisamente esta idea la que dirigió el segundo bloque de estudios empíricos (capítulos 5 y 6).

El tercer objetivo de esta tesis se enunció de la siguiente manera:

*3. Analizar la relación entre establecer analogías correctas o incorrectas entre problemas y su influencia en el éxito en la resolución.*

Este objetivo se abordó en los capítulos 5 y 6 de esta tesis doctoral, correspondientes al bloque III y cuyos resultados se recogen en Gómez, Solaz-Portolés y Sanjosé 2013(a) y Gómez, Solaz-Portolés y Sanjosé 2013(b).

Se diseñaron los experimentos de modo que permitieran explorar los efectos de los distintos factores constitutivos de los problemas, superficiales y estructurales, sobre las distintas etapas del proceso de transferencia analógica. Particularmente nos preocupamos por el modo en que las variables del problema pueden facilitar o dificultar la elaboración del Modelo de la Situación (Kintsch, 1998) y su paso al Modelo del Problema (Kintsch y Greeno, 1985). Se proporcionó a los estudiantes un problema totalmente resuelto (Fuente) y cuatro problemas a resolver (Diana). Los 4 problemas Diana mantenían con el fuente relaciones definidas por la igual/diferente superficie o por la igual/diferente estructura (diseño 2X2). En este caso no se consideró la magnitud preguntada debido a limitaciones de diseño derivadas del interés último del estudio, relacionar la detección (estructural-superficial) con el éxito en la selección de ecuaciones correctas.

Todos los participantes demostraron un nivel de conocimiento algebraico suficiente como para poder enfrentarse a los problemas propuestos (en este y en el resto de los experimentos). Todos ellos habían recibido instrucción en resolución de problemas algebraicos anteriormente, aunque, en los casos en que se consideró necesario, se preparó un material recordatorio y se diseñó una prueba de conocimiento previo consistente en resolver cinco problemas algebraicos del nivel más sencillo posible compatible con 2 ecuaciones y 2 incógnitas, extraídos de un libro de texto de 1º de ESO. Se proporcionaron tres opciones por problema donde solo una fue correcta. La prueba se puntuó entre 1 y 5 en función del número de ecuaciones correctas seleccionadas y se excluyeron todos aquellos participantes que obtuvieron una puntuación promedio menor o igual a 3.

En cada problema Diana se establecieron dos tareas independientes. En la primera se pidió a los estudiantes que explicitaran las razones por las que pensaran que los problemas Diana se relacionaban con el fuente, preguntándoles directamente por las posibles relaciones superficiales y estructurales entre el Diana y el fuente. La segunda tarea consistió en escoger un sistema de ecuaciones de entre tres propuestos, de los cuales, solo uno resolvía el problema correctamente. Entre las opciones, siempre apareció el sistema que resolvía correctamente el problema fuente. Cada opción incorrecta se asoció con posibles errores de elaboración de analogías entre problemas fuente y Diana y/o errores de comprensión de los enunciados.

Como se esperaba, se encontró una asociación significativa entre elaborar las relaciones estructurales correctas entre problemas diana y fuente, y escoger las ecuaciones adecuadas para los problemas diana. Se correlacionó significativamente la variable ‘número de comparaciones estructurales correctas’ entre problemas diana y fuente, con la variable ‘número de ecuaciones correctas’ seleccionadas. En el caso particular de los problemas similares (idéntico contexto pero distinta estructura que el fuente) detectar explícitamente las similitudes o diferencias estructurales se asoció significativamente con no realizar “transferencia negativa” (Chaplin y Kramiec, 1984; Novick, 1988), consistente en elegir incorrectamente el sistema de ecuaciones correspondiente al problema fuente ofrecido. En los problemas “isomorfos” (distinto contexto o superficie, pero idéntica estructura al fuente) se detectó también asociación significativa entre explicitar relaciones estructurales y seleccionar las ecuaciones correctas.

Sin embargo, los estudiantes de secundaria manifestaron dificultades para establecer las analogías correctas entre problemas. El 66% de los participantes estableció una relación estructural incorrecta con el problema Fuente para dos o más problemas diana. Los problemas diana con igual estructura al fuente («equivalente» + «isomorfo») mostraron mayor percepción de ayuda del problema fuente pero solo el 21% de la muestra estableció relaciones estructurales correctas para los cuatro problemas diana.

Estos resultados nos permiten proponer la tercera conclusión de esta tesis doctoral:

---

### **Conclusión 3**

En la resolución por transferencia analógica de problemas algebraicos con enunciado, detectar correcta o incorrectamente las analogías adecuadas entre problemas se asocia significativamente con el éxito o el fracaso en la resolución (es decir seleccionar las ecuaciones correctas). Por tanto, el establecimiento de analogías correctas entre problemas fuente, ya conocidos, y problemas propuestos, es un buen predictor del éxito en la resolución de problemas. De ello se deduce la importancia de atender a estas primeras fases en el transfer analógico durante la instrucción.

---

De nuevo parece que la instrucción recibida por los estudiantes no atiende suficientemente a las analogías y diferencias, superficiales y estructurales, entre problemas. Las fases previas a la resolución de un problema por transferencia analógica deberían recibir más atención durante la instrucción. Que un alumno construya las analogías en torno a rasgos superficiales o estructurales influirá directamente en el éxito o el fracaso en la resolución de un problema. Los resultados encontrados aconsejan a los profesores abordar explícitamente las analogías y diferencias entre problemas. Tratar los diversos temas de forma transversal en las clases de ciencias y abordar los diversos contextos científicos en las clases de matemáticas, parece de gran ayuda para los estudiantes menos expertos para conseguir superar las barreras generadas por los rasgos superficiales y ser capaces de crear vínculos más profundos entre problemas (Sanjosé, Solaz-Portoles y Valenzuela, 2009).

El quinto objetivo de este trabajo fue el siguiente:

4. Evaluar el grado en que las similitudes superficiales, o contextuales, entre problemas dificultan la percepción de sus diferencias estructurales, o matemáticas

Este objetivo se abordó en los dos estudios que componen el bloque III (capítulos 5 y 6) y se retomó en el bloque IV (capítulos 7 y 8).

En los dos estudios experimentales expuestos en el bloque III (capítulos 5 y 6) se controlaron las relaciones entre problemas diana y un problema fuente, a partir de sus similitudes o diferencias en estructura y/o superficie. Ya se ha comentado en el objetivo anterior que hubo un efecto predictivo de establecer analogías correctas entre problemas para el éxito en las ecuaciones. Ahora podemos discutir con algo más de detalle en qué consiste establecer una ‘analogía apropiada’ en términos de esas dos características, superficie y estructura.

En primer lugar, y tal como se desprende de la discusión alrededor del objetivo 4, apareció un efecto significativo del factor asociado con la similitud o diferencia estructural entre el problema propuesto (diana) y el problema ejemplo (fuente). Los problemas ‘Similar’ y ‘Relacionado’, con estructura distinta al problema fuente obtuvieron de forma significativa un grado de éxito menor que los problemas ‘Equivalente’ e ‘Isomorfo’, ambos con la misma estructura que el problema ‘Fuente’. Esto indica claramente que los estudiantes tienen dificultades en aprovechar el conocimiento de problemas ya estudiados cuando la estructura del nuevo problema no es idéntica.

Además de este efecto significativo (y positivo desde el punto de vista educativo) de las similitudes estructurales entre problemas, apareció un efecto que podría despertar particularmente el interés de cualquier profesor. Se trata de un efecto estadísticamente significativo de interacción Superficie X Estructura que se asoció a un menor éxito en los problemas diana de tipo ‘Similar’ sobre el resto, incluyendo los problemas ‘Relacionados’. Es decir, la similitud superficial entre estos problemas y el fuente, apantalló de algún modo la captación por los resolutores de sus diferencias estructurales. Este efecto se vio replicado en los experimentos siguientes (capítulos 6 y 7). Este efecto parece estar en concordancia con las conclusiones de Reeves y Weisberg (1994) sobre la mayor facilidad de percepción de las características perceptibles con los sentidos, respecto de las abstractas en cualquier sistema estudiado. Esta facilidad para la percepción ‘cautiva’ los recursos cognitivos e impide que éstos se dediquen a los indicadores abstractos. Los elementos superficiales, de naturaleza ontológica concreta son más fáciles de detectar que los elementos de naturaleza abstracta (Stain, 1986). En el caso concreto de los problemas utilizados en este estudio, el paso del MS al MP se da a través de la ‘traducción algebraica’ del enunciado (Puig 1998; Sanjosé, Valenzuela y Fortes, 2007). Entonces, si los estudiantes construyen las analogías a través de características superficiales, la estructura algebraica de los problemas puede quedar ‘enmascarada’, incluso demostrando las competencias algebraicas necesarias es probable que debido a esto, escojan un esquema resolutivo total o parcialmente incorrecto.



En nuestros experimentos, los estudiantes también parecieron desviar, en muchas ocasiones, la atención hacia elementos superficiales y no fueron conscientes de las diferencias en los elementos estructurales, algo necesario para la correcta ejecución de la tarea y que presentó menor dificultad cuando los problemas fuente y diana fueron claramente diferenciables en sus superficies además de en sus estructuras ('Relacionado'). Estos resultados estimularon hacia el análisis detallado de este efecto en los todos los estudios posteriores. Los resultados expuestos nos permiten mostrar la cuarta conclusión de esta tesis doctoral:

---

### **Conclusión 4**

En resolución de problemas verbales algebraicos por transferencia, los estudiantes de Secundaria parecen mostrar especiales dificultades para detectar diferencias estructurales entre problemas cuando sus elementos superficiales o contextuales (objetos y eventos del mundo real) narrados en los enunciados de los problemas son iguales. Es decir, las similitudes superficiales parecen apantallar las diferencias estructurales ("Efecto pantalla").

Aparece un efecto de interacción Estructura X Tiempo transcurrido desde la instrucción que parece indicar deficiencias en la instrucción basada en el uso de problemas isomorfos.

---

La pregunta que siempre subyace en una investigación didáctica es: ¿cómo pueden solucionarse estos problemas con una instrucción adecuada?

En nuestros experimentos, los problemas con la misma estructura obtuvieron sistemáticamente mayores niveles de éxito, como se ha dicho ya. Sin embargo, los estudiantes no pudieron alcanzar el mismo éxito con problemas cuya estructura era ligeramente distinta a la del problema fuente (tan sólo un signo de diferencia en una de las ecuaciones). Es decir, pequeñas variaciones en la estructura algebraica de los problemas puede suponer una notable diferencia en el éxito en la resolución. Esto podría ser debido a una instrucción basada excesivamente en la isomorfía de problemas. Observamos casos de transferencia negativa (Chaplin y Kramiec, 1984; Novick, 1988), es decir, casos en los que el aprendizaje en la situación primera

interfiere negativamente en las acciones que se deberían ejecutar en la situación segunda, como consecuencia de una identificación incorrecta de elementos comunes en dos situaciones diferentes (analogía incorrecta). En resolución de problemas con estructura algebraica subyacente, son muchas las situaciones en las que los estudiantes parecen haber abstraído un «esquema de problema» a partir de muchos ejemplos resueltos, y luego tienden a ‘abusar’ de él, aplicándolo erróneamente a problemas con diferente estructura (Van Dooren et al., 2006).

Otro indicador del posible ‘abuso’ de la transferencia negativa de esquemas basados en la isomorfía se obtuvo del tercer experimento (ver capítulo 6). Apareció un efecto significativo de interacción entre el tipo de relación entre problema diana y el fuente (Similaridad/Isomorfía), y el tiempo transcurrido desde la instrucción. En el problema diana Similar, la estructura era ligeramente distinta de la del fuente pero sus superficies eran iguales. En el problema diana isomorfo, las estructuras eran idénticas pero las superficies eran distintas. ¿Captarían los estudiantes ambos tipos de diferencia de un modo comparable (con o sin éxito en la resolución)? ¿Cuál sería el efecto de la instrucción recibida sobre ello?

Controlamos los tiempos transcurridos desde la última instrucción recibida por los estudiantes diferenciando entre sujetos que habían recibido instrucción reciente en resolución de problemas algebraicos, y sujetos que hacía meses que habían recibido tal instrucción y se habían centrado en otros temas. Los sujetos instruidos recientemente obtuvieron mejores resultados en los problemas con la misma estructura (‘Isomorfos’) que el problema fuente; en cambio, en los problemas ‘Similares’ el resultado se invirtió, de modo que los estudiantes con instrucción reciente cometieron más errores que los instruidos no recientemente. Este resultado es congruente con una instrucción basada exclusivamente en la isomorfía entre problemas que puede no ser del todo satisfactoria desde el punto de vista de la transferencia analógica al centrarse en las similitudes, pero no en las diferencias entre problemas. Por supuesto, estos resultados necesitan una mayor profundidad en el análisis y una mayor validez para poder establecer conclusiones fiables, pero definen una línea de investigación educativa en resolución de problemas.

El objetivo 5 de esta tesis se enunció de la siguiente forma:

5. Analizar los efectos de la menor o mayor Familiaridad de los resolutores con el contexto de los enunciados, sobre el establecimiento de analogías apropiadas entre problemas.

Este es uno de los objetivos generales de esta tesis y se abordó en todos y cada uno de los estudios empíricos llevados a cabo (Bloques II, III y IV, Capítulos 4, 5, 6, 7, 8 y 9).

La Familiaridad con los enunciados se define como el grado de conocimiento, experiencial, ordinario, de la vida diaria, que un sujeto resolutor tiene sobre los objetos y eventos descritos en el enunciado de un problema.

Dado que esta es una investigación en el área de didáctica de las ciencias, aunque con claras concomitancias con el área de didáctica de las matemáticas, en todos los experimentos realizados se compararon, dos supuestos de familiaridad de los resolutores con las situaciones problemáticas expuestas en los enunciados de todos los problemas. En la condición de “alta familiaridad” los enunciados siempre trataron situaciones propias y usuales de la vida diaria, como por ejemplo, llenado y vaciado de piscinas o llenado y vaciado de huchas de ahorros, donde los objetos y eventos narrados se consideraron claramente familiares para los participantes. La condición de “baja familiaridad” implicó temáticas científicas en las que aparecen objetos, fenómenos, conceptos poco conocidos por los estudiantes en comparación con los elementos de las situaciones de alta familiaridad. Estos problemas de baja familiaridad incluyeron, por ejemplo, el aumento del volumen debido a la transferencia de calor, disoluciones con cambios en su masa o condensadores eléctricos que varían su potencial. La comparación entre las dos condiciones de familiaridad podría proporcionar alguna evidencia de por qué los estudiantes de secundaria no parecen capaces de trasladar lo aprendido en clase de matemáticas a la clase de ciencias.

En el primer experimento (Bloque III, Capítulo 4) hubo significativamente más estudiantes que utilizaron un criterio de agrupación basado en rasgos superficiales en familiaridad baja, que en alta. Los porcentajes de estudiantes de Secundaria que fueron capaces de categorizar problemas a partir de analogías estructurales correctas entre ellos fueron significativamente mayores en la condición de alta familiaridad que en la condición de baja familiaridad.

La familiaridad alta o baja influyó menos a los sujetos de alto conocimiento previo, futuros profesores de matemáticas, que a los estudiantes de Secundaria, con menor conocimiento previo. Aún así, los resultados en los profesores en formación fueron menos satisfactorios que en la condición de alta familiaridad. Un análisis detallado de los resultados mostró que los estudiantes del máster de profesorado fueron también sensibles a los efectos derivados de la baja familiaridad con los enunciados de los problemas, cuando se entiende este como un elemento claramente superficial. Esto apunta, de nuevo, a la necesidad de mejorar la formación de los futuros profesores.

Los resultados anteriores apoyan la hipótesis de que los resolutores tienen más dificultades en construir una representación mental concreta (en términos ontológicos) en el caso de los problemas en la condición de baja familiaridad (contextos científicos) que en los de alta familiaridad. Si se asume que el Modelo de la Situación es un elemento esencial (o, al menos, facilitador) para la construcción de la representación mental Modelo del Problema, nos atrevemos a indicar que, en los problemas de ciencias, donde los estudiantes se encuentran ante situaciones poco familiares, en contraposición con los problemas que narran situaciones de la vida diaria, pueden aparecer obstáculos adicionales para la comprensión del problema y, por tanto, con la navegación en el 'espacio del problema' para su resolución correcta.

En el segundo bloque empírico (Bloque III, Capítulos 5 y 6) se consideraron siempre dos condiciones experimentales (factor entre-sujetos): problemas de alta o de baja familiaridad. Encontramos sistemáticamente una reducción del éxito en las tareas de transferencia analógica cuando usamos los problemas diseñados bajo la condición de baja familiaridad. Recordaremos que estos experimentos (Capítulos 5 y 6) exploraron el establecimiento inicial de analogías, y la relación con la posterior selección de las ecuaciones apropiadas para resolver un problema.

En la condición de baja familiaridad (ciencias), el primer experimento del segundo bloque (capítulo 5) muestra efectos significativos de los factores superficie y estructura sobre el tipo de analogía inicial que se establece entre problemas diana y fuente. Los estudiantes de secundaria indicaron percibir una ayuda del problema fuente significativamente menor en los problemas diana con distinta superficie (isomorfo/relacionado) que en los diana de igual superficie (equivalente/similar). Sin embargo, este efecto significativo del factor superficie (igual o distinta a la del problema fuente) no apareció en la condición de ‘Alta Familiaridad’ (vida diaria). La comparación de ambas condiciones se hace especialmente relevante en el caso de los problemas diana isomorfos. Esa comparación muestra que los estudiantes no detectaron analogías estructurales en el problema isomorfo con contexto de ‘Baja Familiaridad’ con la misma facilidad que en el caso del problema isomorfo con contexto de alta familiaridad, lo que parece indicar que las diferencias superficiales podrían convertirse en obstáculos importantes para elaborar un modelo del problema adecuado, si los estudiantes no logran elaborar un modelo mental apropiado de la situación narrada en el enunciado. Muchas de las situaciones problemáticas expuestas en los enunciados de ciencias se encuentran en esta situación.

Se estudiaron los efectos conjuntos del factor familiaridad sobre el resultado global de éxito en los cuatro problemas diana (selección de sistema de ecuaciones correcta). Este análisis conjunto pone de manifiesto un efecto significativo del factor familiaridad tanto en el establecimiento de analogías como en la selección de ecuaciones. Esto significa que los estudiantes encuentran más dificultades en condiciones de baja familiaridad, durante todo el proceso de transferencia, tanto en las primeras fases relacionadas con la comprensión y el establecimiento de analogías, como en la última fase, relacionada con la resolución y la selección de los procedimientos matemáticos necesarios

Estos efectos encontrados aconsejaron considerar el factor nivel de familiaridad en el experimento siguiente. El experimento mostrado en el capítulo 6 de esta memoria replicó los resultados a los descritos en el capítulo 5 sobre los efectos del nivel de familiaridad con las situaciones descritas en los enunciados. En adición, el efecto de apantallamiento de las diferencias estructurales entre problemas debido a sus similitudes superficiales se vio acentuado en la condición de baja familiaridad. Los

estudiantes mostraron una tendencia más acusada a realizar transferencia negativa cuando los objetos y eventos descritos en el enunciado son poco familiares para ellos.

En resumen, el efecto global de una baja familiaridad de los sujetos con las situaciones descritas en los problemas es una reducción sistemática del éxito en la transferencia, sea cual sea la relación entre problema «fuente o ejemplo» y problema «diana o propuesto». En todas las pruebas se obtienen proporciones de éxito significativamente menores en la condición de baja Familiaridad que en la condición de alta Familiaridad. Tal como se esperaba, resulta más fácil codificar problemas, establecer analogías entre ellos y determinar relaciones estructurales correctas cuando los eventos y objetos narrados en los enunciados, son ‘familiares’ para los estudiantes. Dicho en otros términos: las dificultades para elaborar una representación mental de la situación descrita en el enunciado de un problema, pueden suponer un obstáculo importante para la elaboración de un modelo del problema (un modelo algebraico en nuestro caso) adecuado para dar la solución correcta pedida.

Los resultados de los estudios empíricos llevados a cabo para el estudio del factor familiaridad nos permiten describir la conclusión 5 de esta tesis doctoral:

---

### **Conclusión 5**

Cuando los objetos y acontecimientos expuestos en una situación problemática son poco familiares para los estudiantes, como es típico del mundo científico, estos tienen más dificultades para establecer un modelo de la situación adecuado y por tanto, tienen más dificultades para alcanzar el modelo de problema que les permita resolver con éxito ese problema. En estas situaciones, el establecimiento de analogías entre problemas parece más complejo en situaciones de baja familiaridad, para los estudiantes y, por tanto, la utilización de problemas fuente o ejemplo, ya conocidos, es menos útil de lo esperado en situaciones más familiares, como son las propias de la vida diaria.

---

Los materiales instruccionales en resolución de problemas de ciencias suelen estar ordenados según las temáticas, mientras que en matemáticas suelen estar secuenciados por las estructuras subyacentes. Además, las historias de los problemas tratados en las asignaturas de matemáticas suelen pertenecer a la vida diaria, y son, por tanto, de gran familiaridad para los estudiantes. Cuando los estudiantes abordan problemas de ciencias, donde los objetos y eventos narrados en los enunciados son poco familiares para ellos, tienen mayores dificultades en elaborar un modelo de la situación adecuado, por la misma razón, encuentran mayores obstáculos para detectar las diferencias y similitudes estructurales entre problemas y por tanto, tienen mayores dificultades para llegar a plantear correctamente las ecuaciones. Los profesores deberían de aplicar parte de sus esfuerzos en relacionar los problemas utilizados en las aulas de matemáticas con los problemas en contextos científicos, se debe interrelacionar el conocimiento matemático con los fenómenos naturales de forma más explícita y mostrar a los estudiantes también en las aulas de ciencias, como operan los elementos matemáticos en función del fenómeno que se quiera modelizar. Por último, también parece recomendable seguir secuencias instructivas

desde contextos familiares a contextos menos familiares, explicitando las relaciones estructurales en todos los casos, de modo que el estudiante pueda superar los efectos de apantallamiento estructural debido al escaso conocimiento previo sobre una situación determinada.

Todos estos resultados precedentes nos animaron estudiar con mayor profundidad los procesos cognitivos que los estudiantes ponen en juego en el momento de resolver problemas por transferencia analógica.

Los objetivos séptimo y octavo, formulados en esta tesis fueron los siguientes:

7. Analizar en profundidad los procesos mentales de los estudiantes, a partir de estudio de casos concretos de especial interés, mediante técnicas cualitativas que muestren los procesos cognitivos implicados en la codificación de los problemas y el establecimiento de analogías y diferencias entre ellos.

8. Definir los obstáculos más importantes en el proceso de transferencia analógica entre problemas, surgidos en episodios en los que el estudiante razona sobre la tarea propuesta.

Estos objetivos se tratan de forma conjunta porque fueron abordados a lo largo de todo el tercer bloque empírico (Bloque IV, Capítulos 7 y 8), basado en una metodología cualitativa a través de entrevistas, donde pretendimos reforzar las conclusiones obtenidas hasta el momento.

En las entrevistas personales realizadas en los casos clasificados como ‘interesantes’ se utilizaron técnicas basadas en protocolos *think aloud*. Combinamos dos tareas, una primera, de carácter cuantitativo basada en una categorización de problemas similar a la utilizada en un experimento anterior (Bloque II, Capítulo 4) y una segunda tarea basada en la utilización de diferentes problemas análogos para ayudar a resolver un problema diana. En esta tarea la similitud fuente-diana se manipuló



mediante distintos problemas ejemplo, considerando, además de las estructuras y las temáticas tratadas en los enunciados, la magnitud de la incógnita demandada. El hecho de manejar tres variables nos permitió diseñar problemas lejanos (dos variables diferentes y una común entre problemas ejemplo y diana) y problemas cercanos (una sola variable diferente entre problemas ejemplo y diana). De esta forma, cuando un estudiante selecciona un análogo cómo adecuado basándose en rasgos superficiales (por ejemplo la magnitud preguntada) y no detecta los rasgos estructurales correctos, se le puede ofrecer un problema más, con la misma variable seleccionada (magnitud), la misma estructura que el problema diana y solo la superficie distinta, acercándole así, hacia un sentido estructural y forzándole de esta forma a repensar su respuesta.

Se entrevistó a 11 estudiantes, seleccionados a partir de los resultados de la tarea de categorización y por su especial interés o especificidad como representantes de un conjunto de estudiantes. Se diseñó un material compuesto por un problema a resolver ('problema diana') y diferentes problemas ejemplo o 'fuente' en cada nivel de familiaridad (alta/baja). Cada uno de los 11 estudiantes seleccionados fue entrevistado dos veces a con materiales en ambas condiciones de familiaridad. Las entrevistas se dividieron en 4 fases bien definidas en función de la cantidad de ayuda aportada por el entrevistador al estudiante en forma de distintos problemas fuente, como ya se ha dicho, diseñados de modo que su similitud con el problema diana fuera aumentando. Se pidió a los estudiantes que narraran sus pensamientos en voz alta en todo momento. Para codificar las entrevistas se utilizó una adaptación de la codificación propuesta por Codina, Castro y Cañadas (2011, pp. 160-161) y se utilizó también una clasificación de analogías propuesta por Clement (1988) para analizar los resultados.

Este último bloque empírico muestra el análisis de dos de los sujetos entrevistados, en los dos supuestos de familiaridad. Por razones de espacio en las revistas especializadas, sólo dos de los casos disponibles para su análisis pudieron ser publicados. De todos modos se trata de dos de los casos que resultaron de mayor interés por mostrar dos efectos didácticos representativos de fenómenos encontrados en diferentes estudios de esta tesis doctoral, y que hemos llamado 'efecto pantalla' y 'efecto Sísifo'. El resto de las entrevistas pueden consultarse en el anexo (III) pero en el momento de escribir esta Memoria, sus análisis están pendientes de publicación.

El primer caso descrito recibe el nombre de '**Efecto Pantalla**' por mostrar un estudiante cuyos procesos mentales son perturbados claramente por las similitudes superficiales entre problemas, apantallando inicialmente las diferencias estructurales entre ellos. Este sujeto basó su categorización de problemas en la tarea inicial, en características superficiales, usando el criterio basado en el nombre de la magnitud incógnita de los problemas (igual incógnita  $\rightarrow$  mismo grupo de problemas). Este criterio, claramente superficial, captó su atención en un primer momento impidiéndole detectar las analogías y diferencias estructurales correctas. Sin embargo, al 'retirar la pantalla' y descubrir la estructura de los problemas (proporcionar las ecuaciones de todos los problemas, los diversos fuentes y el diana), el sujeto consigue diferenciar claramente los problemas según sus estructuras y obtener éxito en la selección del sistema de ecuaciones correcto. Es decir, el sujeto que durante gran parte de la entrevista no fue capaz de realizar la traducción correcta de los problemas (es decir, la conexión Enunciado  $\rightarrow$  Ecuaciones) si fue, sin embargo capaz de realizar la "traducción inversa" de los problemas, esto es, en el sentido: Ecuaciones  $\rightarrow$  Enunciados.

El "efecto pantalla" no se produce en todos los estudiantes con dificultades. Cuando un sujeto no tiene el conocimiento matemático necesario, es decir, no es capaz de comprender el proceso de traducción algebraica o no es capaz de establecer relaciones estructurales entre problemas, el efecto pantalla no puede producirse, ya que el sujeto no es capaz de comprender la situación cuando se retira "la pantalla", es decir, cuando se le muestran las ecuaciones que resuelven todos los problemas (fuentes y diana). Para que se produzca este efecto, ha de existir en la mente del resolutor aquello (la estructura) que oculta la pantalla (formada por las características superficiales).

El efecto pantalla, se amplifica en la entrevista realizada con los materiales con enunciados en contextos científicos (baja familiaridad). La "pantalla se vuelve más opaca" y resulta más complicado detectar elementos estructurales entre problemas. De nuevo se encuentra que cuando los objetos y eventos descritos en los enunciados son propios de la ciencia (de baja familiaridad para los estudiantes), aparecen dificultades añadidas en comparación con el estudio en condición de alta familiaridad. Ya se ha advertido que no es sencillo transferir entre situaciones

problemáticas cuando sus contextos son no familiares (Jonassen, 2000); para ello se requiere un grado de pericia y experiencia, que en muchos casos los estudiantes en estas etapas no alcanzan. La capacidad de transferir entre situaciones familiares y no familiares ha sido también estudiada por Mayer y Wittrock (1996) quienes determinaron que la transferencia resulta más sencilla cuando los problemas se encuentran en situaciones familiares para los estudiantes, en cambio, transferir entre situaciones en condiciones de baja familiaridad necesita de un esfuerzo cognitivo extra.

En la condición de baja familiaridad el estudiante agrupó los problemas basándose también en el nombre de la magnitud incógnita de los problemas. Sin embargo, durante la entrevista modificó algunos criterios o razonamientos y expresó (erróneamente) que existía una relación importante entre problemas en función de la temática de estos. Esto no sucedió en la condición de alta familiaridad, donde el sujeto desde el principio intuyó ciertas relaciones estructurales, lo que indica que el sujeto tuvo más dificultades en el establecimiento de analogías estructurales correctas en situaciones de baja familiaridad, en concordancia con Mayer y Wittrock (1996). Al final de la segunda fase de la entrevista, el estudiante relacionó el problema diana propuesto, con un problema fuente cuya superficie y estructura son distintas de las del diana (un problema “relacionado”, según la nomenclatura adoptada en esta tesis) pero cuyas magnitudes incógnitas eran las mismas en ambos. Esto indica que el estudiante clarificó la pantalla pero todavía, razonando en términos superficiales, más próximos a los razonamientos establecidos en la condición de alta familiaridad. Por último, al mostrar las ecuaciones que resuelven los problemas, el sujeto descartó las analogías superficiales y relacionó los problemas a partir del criterio estructural correcto, es decir, el estudiante consiguió apartar la pantalla por completo y tradujo de forma inversa (dirección ecuaciones  $\rightarrow$  enunciados) llegando a una conclusión correcta y estable. Por tanto, el mismo estudiante replicó el efecto pantalla en ambos niveles de familiaridad (tareas realizadas en momentos distintos y con materiales diferentes), lo cual apoya la idea de que el fenómeno tiene relevancia educativa.

Si generalizamos asumiendo la posibilidad de error, podemos resumir diciendo que muchos estudiantes elaboran modelos mentales analógicos, concretos, del mundo

ordinario, antes de intentar elaborar representaciones abstractas, matemáticas de los problemas. Estos modelos parecen apantallar, en algunos casos, las estructuras matemáticas subyacentes a los enunciados.

En la condición de baja familiaridad, el efecto se replica, pero en este caso la pantalla producida por los elementos superficiales se vuelve más opaca y resulta más complejo realizar la traducción algebraica inversa.

El siguiente caso analizado recibió el nombre de '**Efecto Sísifo**' por mostrar un símil con el rey Sísifo, figura de la mitología Griega, castigado por los dioses a llevar permanentemente una pesada piedra montaña arriba. Antes de llegar a la cima, la piedra volvía a caer siempre a la posición inicial y Sísifo estaba condenado a repetir el esfuerzo eternamente. La metáfora hace referencia a un estudiante que avanza correctamente en el proceso de resolución, pero al no alcanzar un estado de estabilidad que representa la comprensión, entra conflicto cognitivo y vuelve a 'caer' hasta un estado inicial estable para él, pero 'incorrecto' desde el punto de vista estructural.

Este sujeto agrupó los problemas en la primera tarea, en torno a un criterio mixto cruzando la estructura y el contexto de los problemas. En la entrevista, el estudiante se dirigió en un principio sus razonamientos en el sentido correcto, explicitó analogías y diferencias estructurales durante la evolución del proceso, pero estas ideas solo fueron acertadas en parte. El sujeto no acabó de comprender correctamente las relaciones entre los problemas porque al pedirle una comparación entre problemas con mayores diferencias superficiales, manifestó dificultades de comprensión estructural. Este conflicto cognitivo persistió durante el resto de la entrevista, incluso en la fase en que el entrevistador descubrió las ecuaciones que resolvían los problemas, donde el sujeto terminó relacionando incorrectamente los problemas en torno a características superficiales. El estudiante no consiguió realizar la traducción de las ecuaciones en ninguna dirección, ni en una dirección Enunciado  $\rightarrow$  Ecuaciones, ni en la inversa: Ecuaciones  $\rightarrow$  Enunciado. El estudiante, pese a tener los enunciados de los problemas con sus respectivas ecuaciones, no fue capaz de relacionar entre sí los problemas isomorfos de forma apropiada. Al no ser capaz de llegar a un estado estable de comprensión, tomó un criterio incorrecto para evitar el estado de conflicto cognitivo, y ese criterio fue el original adoptado en la tarea de

categorización. Es decir, un avance claro, positivo pero incompleto, produjo un efecto indeseado: el regreso a un estado erróneo de conocimiento.

En la condición de baja familiaridad, esta secuencia descrita de esfuerzo-decepción-error no se replicó de forma exacta. El estudiante, en la primera tarea de agrupación volvió a escoger un criterio mixto, Contexto X Estructura, al igual que en la condición de alta familiaridad. Pero en este caso el estudiante no avanzó inicialmente en la comprensión de las relaciones estructurales sino que explicitó únicamente las diferencias entre las temáticas científicas propuestas. Es en la segunda fase, pero no en la primera, donde el estudiante avanzó unos pasos en la comprensión y declaró ciertas analogías de carácter estructural. Ya en la última fase, con todas las ecuaciones mostradas explícitamente, el estudiante detectó un elemento superficial común a dos problemas 'la densidad' y es este elemento el que gobierna su razonamiento hasta el final de la prueba. La conclusión relacionada con la familiaridad es que este sujeto utiliza un criterio mixto durante todo el recorrido de la entrevista, al contrario de la condición de alta familiaridad, donde en algunas fases el sujeto solo razonó en torno a características estructurales.

El abordaje de los objetivos 6 y 7 de esta tesis doctoral nos permiten mostrar la sexta conclusión.

---

## Conclusión 6

Algunos estudiantes que manifiestan comprender la resolución de ejemplos por parte del profesor, aún no pueden alcanzar éxito por sí mismos en problemas propuestos. Estos estudiantes poseen el conocimiento algebraico necesario para comprender la relación entre superficie y estructura de los problemas cuando ello implica el proceso de “traducción inversa”, desde las ecuaciones a los enunciados, y pueden también entender la ayuda de problemas fuente en condiciones de isomorfía explicitada. Sin embargo, estos estudiantes pueden presentar obstáculos para realizar la traducción directa desde el enunciado a las ecuaciones de los problemas propuestos, a causa de la atención prestada a elementos superficiales perturbadores. La ayuda potencial de los problemas fuente no podrá tampoco llevarse a efecto cuando la relación estructural entre esos problemas y el propuesto no se haga explícita a nivel algebraico.

Esta asimetría entre traducción directa e inversa de problemas algebraicos con enunciado se acrecienta en situaciones de baja familiaridad para los estudiantes, como es el caso de los problemas de ciencias.

Por otra parte, determinados estudiantes parecen avanzar en una dirección adecuada y esto podría ‘engañar’ a los profesores y hacerles pensar que sus estudiantes han comprendido y aprendido lo necesario, cuando en realidad, son fenómenos relacionados con una ‘apariencia de comprensión’: un estudiante puede evolucionar, aparentemente de forma correcta, pero sin alcanzar un estado estable de comprensión. Los estudiantes al hallarse en una situación de conflicto cognitivo, regresan a su zona de confort, definida por un criterio incorrecto, pero fuera de la zona inestable del conflicto.

Que los estudiantes no completen el proceso de elaboración de un modelo mental adecuado termina en un fracaso didáctico en la resolución de problemas.

Cuando los enunciados de los problemas son poco familiares para los estudiantes, el avance en la comprensión es más complejo y pese a detectar ciertas relaciones estructurales, algunos estudiantes no abandonan las ideas superficiales prácticamente en ningún momento del proceso.

---

Todas estas conclusiones no son definitivas y somos conscientes de que la investigación necesita seguir avanzando. Como hemos indicado en el capítulo introductorio, el trabajo tiene limitaciones y estas no hacen sino impulsar nuestros ánimos para abordar los problemas abiertos en esta investigación.

A continuación se detallan los problemas abiertos que dirigirán el futuro próximo de la investigación:

## 9.2 Problemas abiertos y Futuro de la investigación

Los estudios empíricos de esta tesis han tenido diversas limitaciones que deberían ser abordadas en el futuro. Estas limitaciones están relacionadas con las muestras utilizadas y los diseños de investigación y deben transformarse en nuevas preguntas, objetivos e hipótesis.

1. Considerar **otros niveles educativos**: Es bien sabido que el nivel de conocimiento previo influye de forma significativa en la resolución de problemas y son muchos los autores que han estudiado las diferencias entre resolutores expertos y novatos (Chi, Feltovich y Glaser, 1981; Novick, 1988). El estudio podría ser extendido a otras etapas y niveles académicos, como por ejemplo, la educación primaria, los cursos de bachillerato o los primeros niveles universitarios, donde, o no se posee el conocimiento relacionado con los problemas algebraicos o se da por supuesto que los estudiantes son ya

competentes en la resolución de este tipo de problemas, pero a quienes se podrían plantear otros, adecuados a su nivel de formación.

2. Estudiar los efectos en **otro tipo de problemas**: El uso de otros contextos científicos y otras estructuras matemáticas proporcionaría extensión y fiabilidad a nuestros resultados. Los problemas utilizados en el estudio se limitan a los definidos por un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas en unos pocos contextos o situaciones. Sería interesante trasladar el estudio a problemas con otras estructuras y superficies, por ejemplo a problemas aritméticos o los típicos problemas de ‘mezclas’ que se trabajan tanto en el área de las matemáticas, al estudiar la proporcionalidad, cómo desde las ciencias químicas en el estudio de las disoluciones (Anglés A, 2012). El uso, por ejemplo, de problemas abiertos los cuales producen debido a su naturaleza una mayor variabilidad en las estrategias utilizadas por los estudiantes, podría aportar mucha información respecto al razonamiento en la resolución de problemas por transferencia analógica.

3. Estudiar en profundidad la **relación** entre los **procedimientos matemáticos** que subyacen en la resolución de los problemas verbales y los **procesos cognitivos** necesarios por parte del resolutor. Por ejemplo el estudio de la ‘traducción Inversa’ podría proporcionar información interesante sobre el establecimiento de analogías desde un modelo de problema (MP) a un modelo de la situación (MP).

4. Estudiar otras variables que implican al **sujeto resolutor**: Las estrategias metacognitivas, los estilos cognitivos, las actitudes frente a la tarea, la motivación y los estados emocionales, son variables de gran interés y no han sido consideradas en nuestros diseños empíricos.

5. Investigar los modelos **de instrucción**: Estos pueden tener carencias asociadas a creencias erróneas y parece de gran interés el estudio de los efectos producidos. Deberíamos entrevistar a los profesores e indagar en el modo en que hacen explícitas las relaciones entre problemas, averiguar si focalizan la atención en unos pocos contextos de la vida diaria o por el contrario, interrelacionan temáticas científicas en sus enseñanzas diarias.



Averiguar si diferencian claramente los factores característicos de los problemas y si distinguen claramente entre elementos superficiales y estructurales.

Por supuesto que debemos diseñar estudios que sigan la dirección de los indicios encontrados. Debemos replicar los experimentos y aumentar la validez, analizar detalladamente todas las entrevistas realizadas y volver a intervenir para obtener mayor información acerca de los procesos cognitivos llevados a cabo debemos también incidir en las dificultades que los estudiantes encuentran cuando resuelven problemas por transferencia.

Sobre todo, debemos seguir pensando en encontrar patrones en el aprendizaje de las ciencias, patrones que nos ayuden definir métodos instruccionales más afinados y métodos didácticos mejor definidos. Métodos pensados siempre para poder enseñar más y mejor a los estudiantes.

# Bibliografía

---

- Anglés A. (2012). *Los ritos en la enseñanza de los problemas de mezclas*. Trabajo fin de máster. No publicado. Valencia. Universidad de Valencia. Facultad de Magisterio.
- Bell, A.; Swan, M.; y Taylor, G. (1981). Choice of operation in verbal problems with decimal numbers. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 399-420.
- Cerdán, F. (2008). Estudios sobre la familia de problemas aritmético-algebraicos. Tesis Doctoral. Valencia: *Servicio de Publicaciones de la Universitat de València*,.
- Chaplin, J. P., y Kraniec, T. (1984). *Psicología: Sistemas y teorías*. México, D. F.: Nueva Editorial Interamericana.
- Chen, Z.,y Klahr, D. (2008). Remote transfer of scientific reasoning and problem solving strategies in children. In R. V. Kail (Ed.), *Advances in Child Development and Behaviour*, 36, pp. 419-470. Amsterdam: Elsevier.
- Chi, M. T. H., Feltovich, P. S. y Glasser, R. (1981). Categorization and representation of physics problems by experts and novices. *Cognitive science*, 5, 121-152.
- Clement, J. (1988). Observed methods to generate analogies in scientific problem solving. *Cognitive Science*, 12, 563-586.

- Codina, A.; Castro, E. y Cañadas, M.C. (2011). Un sistema de categorías para el análisis de la interactividad en una i-actividad de resolución de problemas. En J. L. Lupiañez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. M. Palarea y A. Maz (Eds), *Investigaciones en pensamiento numérico y algebraico e historia de la matemática y educación matemática*, pp. 157-164. Granada: SEIEM, Grupo de pensamiento numérico y algebraico e historia de la matemática y educación matemática.
- Gómez-Ferragud, C. B.; Solaz-Portolés, J. J., y Sanjosé, V. (2013a). Analogy Construction and Success in Mathematics and Science Problem-Solving: a Study with Secondary Students. *Revista de Psicodidáctica*, 18(1), 81-108.
- Gómez-Ferragud, C.B., Solaz-Portolés, J. J., & Sanjosé, V. (2013b). Efectos de la similitud superficial y estructural sobre la transferencia a partir de análogos en problemas de alta y baja familiaridad: primeros resultados. *Enseñanza de las ciencias*, Vol.31, No. 1, pp. 135-151.
- Heyworth R. M. (1998). Quantitative Problems Solving In Science: Cognitive Factors and directions for practice. *Education journal*, Vol.22, No.1, 13-30.
- Holyoak, K.J. (1984). Analogical thinking and human intelligence. In R.J. Sternberg (Ed.). *Advances in the psychology of human intelligence*. Vol. 2, pp. 199-230. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Jonassen, D.H. (2000). Toward a design theory of problem-solving. *Educational Technology: Research and Development*, 48, 63-85.
- Jonassen, D. H. (2003). Using cognitive tools to represent problems. *Journal of Research on Technology in Education*, 35(3), 362-381.
- Kintsch, W. y Greeno. J. (1985). Understanding and solving word arithmetic problems. *Psychological Review*, 92(1), 109-129.
- Kintsch, W. (1998). *Comprehension: a paradigm for cognition*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

- Mayer, R. E., and Wittrock, M. C. (1996). Problem-solving transfer. In D. C. Berliner and R. C. Calfee (Eds.), *Handbook of educational psychology*, pp. 47–62. New York: Macmillan.
- Novick, L. (1988). Analogical transfer, problem similarity, and expertise. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition*, 14, 510-520.
- Oliva, J. M. (2004). El pensamiento analógico desde la investigación educativa y desde la perspectiva del profesor de ciencias. *Revista electrónica de Enseñanza de las Ciencias*, 3(3), Artículo 7.
- Puig, L. Y Cerdán, F. (1988). *Problemas Aritméticos Escolares*. Colección Matemáticas cultura y aprendizaje. Madrid: Síntesis (Disponible en: <http://www.uv.es/puigl/libros.html>).
- Puig, L. (1998). Poner un problema en ecuaciones. Consultado el 5 de marzo de 2014 (Disponible en <http://www.uv.es/puigl/ppe.pdf>).
- Reed, S.K. (1987). A structure-mapping model for word problems. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition*, 13, 124-139.
- Reeves, L. M., y Wiesberg, R. W. (1994). The role of content and abstract information in analogical transfer. *Psychological Review*, 115, 381-400.
- Sanjosé, V., Solaz-Portolés, J. J., y Valenzuela, T. (2009). Transferencia interdominios en resolución de problemas: una propuesta instruccional basada en el proceso de «traducción algebraica». *Enseñanza de las Ciencias*, 27(2), 169-184.
- Sanjosé, V., Valenzuela, T., Fortes, M. C., y Solaz-Portolés, J. (2007). Dificultades algebraicas en la resolución de problemas por Transferencia. *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias*, 6(3), 538-561.
- Van Dooren, W., De Bock, D. y Verschaffel, L. (2006). La búsqueda de las raíces de la ilusión de Linealidad. *INDIVISA. Boletín de Estudios e Investigación*, [Monografía IX]. pp. 115-138 (Hay una versión precedente del 2003 en *Educational Studies in Mathematics*, 53, pp. 113-118).