LLIÇÓ 5

EQUACIONS DE MOVIMENT

Objectius

- Conèixer les **forces** que actuen sobre les masses d'aire en moviment
- Definir el sistema de **coordenades terrestres**
- Obtenir les **equacions del moviment** de les masses d'aire
- Aprendre a fer **l'anàlisi d'escala** de les equacions de moviment per tal de simplificar-les
- Analitzar les **aproximacions geostròfica i hidrostàtica** (primera aproximació)
- Analitzar les **equacions de pronòstic** (segona aproximació)

Índex

5.1 Conceptes previs

- Els moviments atmosfèrics estan definits per *tres principis bàsics*:
  - Conservació del *moment lineal* (2on Principi Newton → **eq. Navier-Stokes**)
  - Conservació de la *massa* (**eq. Continuïtat**)
  - Conservació de *l'energia* (**eq. Energia Termodinàmica**)
- Per al plantejament i solució de les equacions utilitzarem, segons convinga, dos tipus diferents de *sistemes de referència*:
  - **EULERIÀ**: es defineix com a volum de control un paral·lelepípede de dimensions (dx, dy, dz) *fix en l'espai*, i s'estudia el flux de fluid que el travessa.
  - **LAGRANGIÀ**: es defineix com a volum de control una massa infinitesimal de fluid "marcada" en moviment i se segueix la seua evolució a través de l'espai.

5.1 Conceptes previs

- Per tal d'aplicar correctament en el *sistema Eulerià* (fix en l'espai) les equacions de moviment que deduirem, cal interpretar el significat de les *derivades temporals* de totes les magnituds d'interés (temperatura, pressió, velocitat, etc.).

- Considerem una magnitud G que depén de la posició i el temps, G=G(x, y, z, t). La seua **derivada total**, en primera aproximació, serà:

COMPONENTS DEL VECTOR VELOCITAT

$$\underbrace{\frac{dG}{dt}}_{\text{DERIVADA TOTAL}} = \underbrace{\left(\frac{\partial G}{\partial t}\right)}_{\text{DERIVADA LOCAL}} + \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)\frac{dx}{dt} + \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)\frac{dy}{dt} + \left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)\frac{dz}{dt}$$

GRADIENT DE G

5.1 Conceptes previs

- En forma vectorial:

$$\boxed{\frac{dG}{dt} = \left(\frac{\partial G}{\partial t}\right) + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}G}$$

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} \qquad \vec{\nabla}G = \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)\vec{k}$$

- La **derivada total** representa la variació completa de G que acompanya el moviment.

- La **derivada local** representa la variació de G causada localment en un punt fix, independentment dels moviments d'aire.

- El **terme d'advecció** ($\vec{v}\cdot\vec{\nabla}G$) defineix la variació de G associada estrictament al moviment del vent.

5.1 Conceptes previs

PROBLEMA 5.1

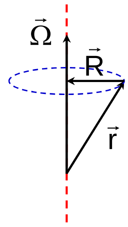
La pressió atmosfèrica a nivell de superfície en una determinada zona disminueix 3 hPa/180 km en direcció cap a l'est. En eixa regió hi ha un vaixell que es mou cap a l'est a una velocitat de 10 km/h i enregistra en un baròmetre a bord una caiguda de pressió de 1 hPa cada 3 hores. Quina serà la variació de pressió local en una illa prop de la qual passa el vaixell? (NOTA: prengueu l'eix x en direcció EST-OEST).

Índex

5.2 Equació Navier-Stokes en coordenades terrestres

- Per tal de deduir les equacions del moviment, apliquem el *2on Principi de Newton* (vàlid en sistemes *INERCIALS*) a un volum d'aire que es desplaça sobre la superfície terrestre.

- El sistema de referència que anem a utilitzar és un *sistema en rotació lligat a la Terra (NO INERCIAL)*. Les relacions entre els vectors velocitat i acceleració en un sistema de referència inercial amb origen al centre de la Terra (subíndex "i") i un sistema de referència no inercial lligat a la Terra i que gira a la seua velocitat de rotació (Ω=7,292 x 10^{-5} rad s^{-1}) són:



VELOCITAT

$$\boxed{\vec{v}_i = \vec{v}_r + \vec{\Omega} \times \vec{r}}$$

ACCELERACIÓ

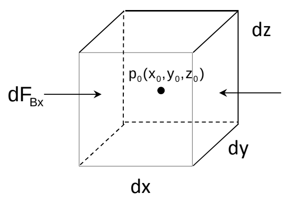
$$\boxed{\vec{a}_i = \vec{a}_r + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_r - \Omega^2 \vec{R}}$$

ACCELERACIÓ CORIOLIS — **ACCELERACIÓ CENTRÍPETA**

5.2 Equació Navier-Stokes en coordenades terrestres

- Les *forces fonamentals* que determinen els moviments atmosfèrics són:

GRADIENT DE PRESSIONS



$$dF_{Ax} = -\left(p_0 + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dydz$$

$$\left.\begin{aligned} dF_x &= dF_{Bx} - dF_{Ax} = -\frac{\partial p}{\partial x}dxdydz \\ dF_y &= -\frac{\partial p}{\partial y}dxdydz \\ dF_z &= -\frac{\partial p}{\partial z}dxdydz \end{aligned}\right] \Longrightarrow \boxed{\vec{f}_p = \frac{d\vec{F}_p}{dm} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p}$$

5.2 Equació Navier-Stokes en coordenades terrestres

- Les *forces fonamentals* que determinen els moviments atmosfèrics són:

GRAVETAT

$$\vec{F}_g = -\frac{GMm}{r^2}\vec{u}_r \Longrightarrow \boxed{\vec{g}^* = \frac{\vec{F}_g}{m} = -\frac{GM}{r^2}\vec{u}_r}$$

FRICCIÓ (VISCOSITAT)

- La fricció al si d'un fluid provoca una *tensió de cisallament* que correspon a un transport de moment lineal mitjançant el moviment aleatori de les molècules de fluid (**viscositat molecular**).

- La viscositat molecular és menyspreable en l'atmosfera, excepte als primers centímetres sobre la superfície. El transport de moment lineal es fa principalment a través del moviment de bombolles d'aire dins el flux de fluid a gran escala (**viscositat turbulenta**).

5.2 Equació Navier-Stokes en coordenades terrestres

- Utilitzant el 2on Principi de Newton i l'expressió de l'acceleració en sistemes no inercials:

$$\left.\begin{aligned} \vec{a}_i &= \vec{a}_r + 2\vec{\Omega}\times\vec{v}_r - \Omega^2\vec{R} \\ \vec{a}_i &= -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \vec{g}^* + \vec{f}_f \end{aligned}\right] \Longrightarrow \boxed{\vec{a}_r = \frac{d\vec{v}_r}{dt} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \vec{g}^* + \Omega^2\vec{R} + \vec{f}_f - 2\vec{\Omega}\times\vec{v}_r}$$

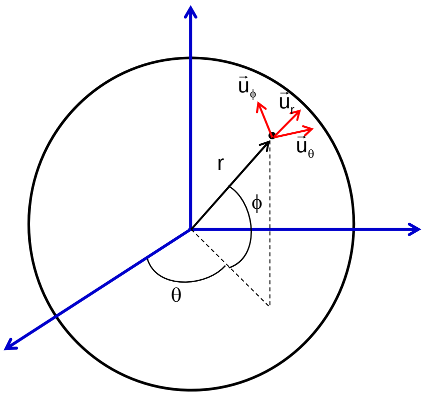
- Definint: $\vec{g} = \vec{g}^* + \Omega^2\vec{R}$

$$\boxed{\frac{d\vec{v}_r}{dt} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \vec{g} + \vec{f}_f - 2\vec{\Omega}\times\vec{v}_r}$$

EQUACIÓ VECTORIAL DE CONSERVACIÓ DEL MOMENT LINEAL
EN UN SISTEMA DE COORDENADES EN ROTACIÓ

5.2 Equació Navier-Stokes en coordenades terrestres

- Per tal d'expressar aquesta equació vectorial en components utilitzarem el **sistema de coordenades terrestres**: és un sistema de *coordenades esfèriques* que pren el nivell mitjà de la mar com origen en la coordenada vertical.



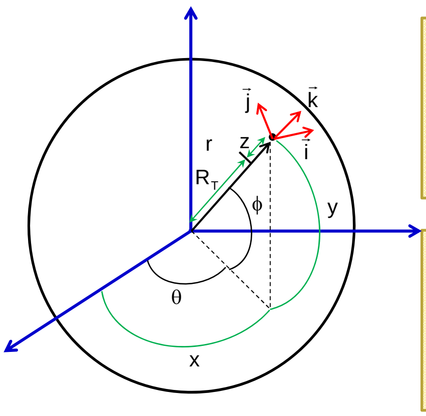
θ : longitud

ϕ : latitud

r : distància al centre de la Terra

5.2 Equació Navier-Stokes en coordenades terrestres

- Habitualment s'utilitza un sistema de *coordenades lineals* associat al sistema de coordenades esfèriques:



x : arc associat a la coordenada θ (est +, oest -)

y : arc associat a la coordenada ϕ (nord +, sud -)

z : altura sobre nivell del mar ($r = R_T + z$)

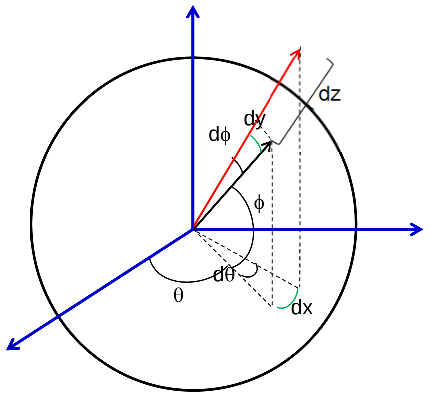
$\vec{i}$: tangent a la superfície i en direcció est

$\vec{j}$: tangent a la superfície i en direcció nord

$\vec{k}$: normal a la superfície i dirigit cap a fora

5.2 Equació Navier-Stokes en coordenades terrestres

- En aquest darrer sistema el **vector velocitat** té les següents components respecte de les coordenades esfèriques:



$$v_x = \frac{dx}{dt} = r\cos\phi\frac{d\theta}{dt}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = r\frac{d\phi}{dt}$$

$$v_z = \frac{dz}{dt}$$

5.2 Equació Navier-Stokes en coordenades terrestres

- L'equació vectorial del moviment es descomposa en *components* en aquest sistema en termes de les següents equacions (*veure Holton, pp. 32-37*):

EQUACIONS DE NAVIER-STOKES

$$\frac{dv_x}{dt} - v_x v_y \frac{tg\phi}{R_T} + \frac{v_x v_z}{R_T} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + 2\Omega v_y \sin\phi - 2\Omega v_z \cos\phi + f_x$$

$$\frac{dv_y}{dt} - \frac{v_x^2 tg\phi}{R_T} + \frac{v_y v_z}{R_T} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - 2\Omega v_x \sin\phi + f_y$$

$$\frac{dv_z}{dt} - \frac{v_x^2 + v_y^2}{R_T} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + 2\Omega v_x \cos\phi - g + f_z$$

- Aquestes equacions descriuen tots els tipus de moviment atmosfèric en totes les escales, respecte d'un sistema en rotació uniforme.

Índex

5.3 Discussió ordres de magnitud

- Anem a veure els *ordres de magnitud* dels diferents termes de les equacions de Navier-Stokes per a l'anàlisi de *moviments a escala sinòptica* (L~10^6 m) i en la *troposfera* (H~10^4 m). Per fer l'anàlisi d'escala utilitzarem les següents *escales típiques de latituds mitjanes* (ϕ=45°) obtingudes a partir de valors observats :

v_x, v_y ~ 10 m s^{-1}; v_z ~ 10^{-2} m s^{-1}; R_T=6,37 x 10^6 m ~ 10^7 m; Δp(horit.) ~ 10 hPa

ρ_o=1,225 kg m^{-3} ~ 1 kg m^{-3}; Ω=7,292 x 10^{-5} rad s^{-1} ~ 10^{-4} rad s^{-1}; Δp(vert.) ~ 10^3 hPa

ANÀLISI D'ESCALA EN LA COMPONENT HORITZONTAL X DEL MOVIMENT

TERME	dv_x/dt	$-v_x v_y \,\mathrm{tg}\phi/R_T$	$v_x v_z/R_T$	$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$	$2\Omega v_y \sin\phi$	$-2\Omega v_z \cos\phi$
ESCALA	v_x^2/L	$v_x v_y/R_T$	$v_x v_z/R_T$	$\Delta p(h)/\rho L$	Ωv_y	Ωv_z
MAGNITUD	10^{-4}	10^{-5}	10^{-8}	10^{-3}	10^{-3}	10^{-6}

5.3 Discussió ordres de magnitud

PROBLEMA 5.2

Feu l'anàlisi d'escala de les components "y" i "z" de les equacions del moviment:

ANÀLISI D'ESCALA EN LA COMPONENT HORITZONTAL Y DEL MOVIMENT

TERME						
ESCALA						
MAGNITUD						

ANÀLISI D'ESCALA EN LA COMPONENT VERTICAL Z DEL MOVIMENT

TERME						
ESCALA						
MAGNITUD						

Índex

5.4 Aproximacions geostròfica i hidrostàtica

- L' **APROXIMACIÓ GEOSTRÒFICA** s'obté simplificant les equacions del moviment en les *coordenades horitzontals* (en x i y) *mantenint només els termes de major magnitud (~10^{-3})* i menyspreant la resta:

$$\left.\begin{aligned} 2\Omega v_y \sin\phi &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \\ 2\Omega v_x \sin\phi &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \boxed{\begin{aligned} v_{gx} &= -\frac{1}{f\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \\ v_{gy} &= +\frac{1}{f\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \end{aligned}}$$

APROXIMACIÓ GEOSTRÒFICA

(f = 2Ωsinϕ → Paràmetre Coriolis)

- Amb aquestes equacions es defineix un vector velocitat que representa una bona aproximació a escala sinòptica del camp de vent horitzontal real (error ~10-15% en latituds mitjanes):

$$\boxed{\vec{v}_g = \vec{k} \times \frac{1}{f\rho}\vec{\nabla}_z p}$$

VENT GEOSTRÒFIC

5.4 Aproximacions geostròfica i hidrostàtica

PROBLEMA 5.3

Quin és el gradient de pressió necessari en la superfície de la Terra a una latitud de 45° per tal de mantenir un vent geostròfic amb una magnitud de 30 m s^{-1}?

5.4 Aproximacions geostròfica i hidrostàtica

- L' **APROXIMACIÓ HIDROSTÀTICA** s'obté simplificant l'equació del moviment en la *coordenada vertical* mantenint només els *termes de major magnitud (~10)* i menyspreant la resta:

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = g \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_{x,y} = -\rho g} \quad \text{APROXIMACIÓ HIDROSTÀTICA}$$

- Aquest resultat ens diu que en primera aproximació, *l'atmosfera es troba a escala sinòptica en equilibri hidrostàtic*. La component vertical de les equacions del moviment no es veuen pràcticament afectades per la fricció ni el terme de Coriolis.

- Per altra banda, els *moviments horitzontals i els verticals estan pràcticament desacoblats*, de manera que la descripció dels dos tipus de moviment es pot fer de manera independent.

Índex

5.5 Equacions aproximades de pronòstic

- Per tal de poder *PRONOSTICAR* el camp de velocitats horitzontal es necessari retenir en les equacions del moviment el terme d'acceleració que conté la variable temporal. En aquest cas les equacions són:

$$\frac{dv_x}{dt} - fv_y = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$
$$\frac{dv_y}{dt} + fv_x = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

EQUACIONS APROXIMADES DE PRONÒSTIC

$$\frac{dv_x}{dt} = f(v_y - v_{gy})$$
$$\frac{dv_y}{dt} = -f(v_x - v_{gx})$$

- En forma vectorial:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + f(\vec{k} \times \vec{v}) = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}_z p$$

5.5 Equacions aproximades de pronòstic

PROBLEMA 5.4

En una estació meteorològica situada a una latitud de 30°N s'observa que la pressió disminueix 0,6 hPa cada 50 km cap al sud, i que augmenta 1,0 hPa cada 100 km cap a l'oest.

a) Determineu les components del vent geostròfic.
b) Si el vent real té una magnitud de 10 m s^{-1} i forma una angle de 25° a la dreta del vent geostròfic, quina és l'acceleració del vent?

5.5 Equacions aproximades de pronòstic

- Com que l'acceleració és un ordre de magnitud inferior al gradient de pressió i el terme de Coriolis (velocitats), cal mesurar amb molta precisió aquestes magnituds per tal d'obtenir una bona estimació de l'acceleració.

- El **nombre de Rossby** (quocient entre les escales característiques de l'acceleració i el terme de Coriolis) defineix la validesa de l'aproximació geostròfica:

$$\boxed{Ro = \frac{V_x}{fL}}$$ **NOMBRE DE ROSSBY**

- Quant més petit siga Ro, més s'aproxima el vent geostròfic al camp de vent real.

- Al cas de l'atmosfera en moviments a escala sinòptica, $Ro \sim 10^{-1}$.