



Tratamiento Digital de Señales

Problemas y ejercicios resueltos

**Emilio Soria Olivas
Marcelino Martínez Sober
José Vicente Francés Villora
Gustavo Camps Valls**

TRATAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES. Problemas y ejercicios resueltos
Soria, E.; Martínez, M.; Francés, J.V.; Camps, G.

ISBN: 84-205-3559-1

Depósito legal: M.23.934-2003

Diseño de cubierta: Jose Vicente Francés
(cubierta basada en imágenes de Janet Ramsden y Alex F, CC-Attribution)



(CC BY-NC-ND 3.0 ES)

Reconocimiento - NoComercial - SinObraDerivada 3.0 España

PROBLEMAS DE TRATAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES

Emilio Soria Olivas

Marcelino Martínez Sober

José Vicente Francés Villora

Gustavo Camps i Valls

Grupo de Procesado Digital de Señales

Departament d'Enginyeria Electrònica

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA – ESTUDI GENERAL

València – Enero, 2003.

Agradecimientos

A todos aquellos que piensan que un libro no puede ocasionar problemas conyugales.

València.

7 de Enero de 2003.

Los autores.

Índice general

Prólogo.	VIII
1. Señales y sistemas en tiempo discreto	1
1.1. Introducción teórica	1
1.1.1. Introducción	1
Señales, sistemas y procesamiento de señales	1
Tipos de señales	2
1.1.2. Muestreo de señales	3
Frecuencia continua y discreta	3
Muestreo de señales analógicas	4
Teorema de Muestreo	4
1.1.3. Cuantización	6
1.1.4. Reconstrucción	7
1.1.5. Señales discretas básicas	8
1.1.6. Sistemas en tiempo discreto. Sistemas LIT	10
1.1.7. Convolución	11
1.1.8. Correlación	12
1.1.9. Sistemas L.I.T. y ecuaciones en diferencias de coeficientes constantes	13
Resolución de una ecuación en diferencias con coeficientes constantes	14
Respuesta a entrada nula y respuesta en estado nulo	14
1.1.10. Clasificación de los sistemas L.I.T. discretos	14
1.2. Problemas resueltos	16
1.3. Problemas propuestos	69
1.4. Prácticas con MATLAB	72
1.4.1. Muestreo	72
1.4.2. Cuantización	79
1.4.3. Estabilidad, linealidad e invarianza temporal	81
1.4.4. Correlación	85
2. Análisis frecuencial de señales y sistemas	89
2.1. Introducción teórica	89
2.1.1. Análisis frecuencial de Fourier	89
2.1.2. Transformada Discreta de Fourier	91
2.2. Problemas resueltos	96
2.3. Problemas propuestos	124
2.4. Prácticas con MATLAB	127
2.4.1. Respuesta en frecuencia	127

2.4.2.	Transformada Discreta de Fourier	133
3.	Transformada Z	143
3.1.	Introducción teórica	143
3.1.1.	Definición	143
3.1.2.	Región de convergencia	143
3.1.3.	Propiedades de la Transformada Z	145
3.1.4.	Transformada Z unilateral	147
3.1.5.	Causalidad y estabilidad	148
3.1.6.	Cálculo de la Transformada Z inversa	148
	Método de inspección	149
	Descomposición en fracciones simples	150
	División directa	150
3.1.7.	Análisis de sistemas L.I.T. usando la Transformada Z	151
	Sistemas L.I.T. caracterizados por ecuaciones en diferencias lineales con coeficientes constantes	151
	Respuesta en frecuencia usando la Transformada Z	152
	Obtención de sistemas discretos a partir de continuos	153
	Obtención de estructuras digitales	154
3.2.	Problemas resueltos	156
3.3.	Problemas propuestos	198
3.4.	Prácticas con MATLAB	200
3.4.1.	Media móvil, derivador y oscilador	200
3.4.2.	Efectos de Audio	206
4.	Realización de sistemas en tiempo discreto	211
4.1.	Introducción teórica	211
4.1.1.	Estructuras directas, traspuestas y celosía	211
4.1.2.	Implementación mediante espacio de estados	214
4.2.	Problemas resueltos	217
4.3.	Problemas propuestos	280
4.4.	Prácticas con MATLAB	282
5.	Efectos de longitud de palabra finita	289
5.1.	Introducción teórica	289
5.1.1.	Conceptos básicos	289
5.2.	Problemas resueltos	294
5.3.	Problemas propuestos	316
5.4.	Prácticas con MATLAB	318
6.	Diseño de filtros digitales	329
6.1.	Introducción teórica	329
6.1.1.	Introducción	329
	Especificaciones	329
	Procedimiento de diseño de filtros digitales	330
6.1.2.	Filtros FIR	330
	Características	330

Tipos de filtros FIR de fase lineal	331
Diseño de filtros FIR de fase lineal	332
Comparación entre los distintos métodos de diseño FIR	334
6.1.3. Filtros IIR	335
Características	335
Métodos de diseños de filtros IIR a partir de prototipos analógicos	336
Transformaciones en frecuencia analógicas	339
Transformaciones del dominio analógico al digital	340
Transformaciones en frecuencia en el dominio digital	341
6.1.4. Discusión entre filtros FIR e IIR	341
6.1.5. Modificación de la frecuencia de muestreo	341
Relación entrada–salida para un interpolador	342
Relación entrada–salida para un diezmador	342
Filtros en los procesos de diezmado e interpolación:	343
Modificación de la frecuencia de muestreo por un factor racional	343
6.2. Problemas resueltos	345
6.3. Problemas propuestos	400
6.4. Prácticas con MATLAB	403
6.4.1. Estudio de las propiedades de los filtros FIR	403
6.4.2. Estudio de las propiedades de los filtros IIR	416
7. Sistemas Adaptativos	425
7.1. Introducción teórica	425
7.1.1. Aplicaciones de los sistemas adaptativos	426
Estructura directa	426
Estructura inversa	426
Predictor	427
Cancelador activo de ruido	427
7.1.2. Algoritmos adaptativos. Algoritmo LMS	429
7.2. Problemas resueltos	432
7.3. Problemas propuestos	446
7.4. Prácticas con MATLAB	448
7.4.1. Diseño de un sistema con una determinada respuesta en frecuencia	448
7.4.2. Modelización de sistemas	451
7.4.3. Aplicaciones en el procesado digital de electrocardiogramas	453
Eliminación del ruido de red de 50 Hz	453
Determinación del electrocardiograma fetal	454
Eliminación de las variaciones de la línea basal	456
7.4.4. Aplicaciones en comunicaciones. Ecualización de canales	458
Bibliografía	463

Prólogo

EL libro que el lector tiene entre manos es el resultado de una serie de años de docencia de los autores en las titulaciones de Ingeniería Electrónica e Ingeniería Técnica de Telecomunicaciones de la Universitat de València en asignaturas del procesado digital de señales, sistemas adaptativos y neuronales y predicción de series temporales. Todos estos años de docencia nos han llevado a la conclusión que era necesario un libro de problemas de este campo de trabajo debido a la ausencia de este tipo de textos. Hay que tener en cuenta que nuestros estudiantes tienen que tener una formación eminentemente práctica y eso se consigue resolviendo un gran número de cuestiones/problemas sobre una determinada materia. Este objetivo, que todo docente en ingeniería tiene claro, ha llevado a los autores a desarrollar una serie de problemas para sus alumnos que, recopilados, han conducido a este texto.

La estructura en que se ha organizado el libro es la siguiente. En primer lugar revisamos problemas relacionados con las señales y sistemas para asentar las bases tanto en relación a la nomenclatura como en cuanto a las herramientas básicas de trabajo. Debemos destacar que aparece la Respuesta en Frecuencia y la Transformada Discreta de Fourier (DFT) antes que la Transformada Z. Este enfoque, seguido por textos muy extendidos en la literatura, creemos que es el adecuado ya que las funciones senoidales aparecen de forma natural como funciones propias de los sistemas y, a partir de este punto, se define la respuesta en frecuencia que conduce, de forma lógica, a la DFT. Posteriormente aparece la Transformada Z como una generalización de la respuesta en frecuencia. El siguiente capítulo está dedicado a la implementación de estructuras de sistemas y espacios de estados. De forma natural, llegamos al tema de análisis de los problemas de cuantificación de los coeficientes de los filtros. El texto continua con un tema dedicado al diseño de filtros digitales FIR e IIR. Finalizamos el libro con un tema dedicado al filtrado adaptativo. Los sistemas adaptativos no se han considerado en muchos textos de teoría, considerados como clásicos, dentro del procesado digital de señales y su inclusión aquí se debe, principalmente, al gran número de aplicaciones que tienen.

La estructura de cada capítulo es siempre la misma, al principio se da una pequeña introducción teórica que pretende ser una guía para la resolución de problemas pero que, en ningún caso, se plantea como un sustituto de los excelentes textos que se dan en la bibliografía. Seguidamente, aparecen una serie de ejercicios resueltos donde los autores, a modo de guía, les han otorgado una determinada dificultad y que se indica al márgen. Esta dificultad, evidentemente, es relativa ya que el estudiante tendrá menos dificultad en aquellos conceptos que mejor haya entendido, de ahí que se tenga cierta subjetividad a la hora de valorar los problemas. Seguidamente se proponen una serie de problemas para que el estudiante intente determinar la solidez de lo aprendido. Por último, al acabar cada sección, se dan una serie de ejemplos realizados usando el paquete informático MATLAB,

que se ha convertido en un estándar para trabajar en procesado digital de señales. Algunos de estos programas necesitan de ficheros que se proporcionan al lector en la página WEB del libro <http://www.prenhall.es/pds>, que pretende ser un foro para intercambiar ideas sobre el procesado digital de señales, su docencia, aplicaciones, etc.

Los autores quieren expresar, desde este mismo momento, su agradecimiento por todas las posibles mejoras al libro que el lector nos puede hacer llegar a través de la página WEB anteriormente comentada. Es nuestro ánimo seguir mejorando el presente texto en siguientes ediciones de forma que se convierta en una herramienta útil para todos aquellos que imparten y estudian procesado digital de señales.

En València, 7 Enero de 2003.

Capítulo 1

Señales y sistemas en tiempo discreto

1.1. Introducción teórica

1.1.1. Introducción

Podemos definir el Procesado Digital de Señales (PDS) como el conjunto de técnicas y herramientas para el tratamiento de señales en el dominio discreto o digital. Hasta el avance de los ordenadores digitales y el abaratamiento de costes de los circuitos integrados (CIs), el procesado de señal era analógico. Con el desarrollo de las tecnologías de alta escala de integración, se han conseguido CIs más potentes, pequeños, rápidos, baratos y efectivos. Además, esto ha derivado en una enorme expansión del PDS en las más diversas áreas de aplicación, tanto científicas como comerciales tales como el tratamiento de imágenes, voz, señales médicas, telecomunicaciones, etc.

A pesar del avance que el PDS ha impulsado en las diversas áreas de aplicación, no se trata de una panacea ya que, en algunos momentos, interesará utilizar técnicas analógicas en lugar de digitales. Así, para anchos de banda elevados es recomendable el procesado analógico (incluso, óptico). Cuando las tareas son muy complejas o el microprocesador está disponible, se emplea el procesado digital por sus características de bajo precio, efectividad, reprogramación sencilla, rediseño rápido y flexibilidad. Además, existen otras ventajas adicionales tales como el poseer una mayor precisión (los elementos no tienen tolerancias), el almacenamiento de la información es cómodo (“*software*”), sin pérdida/deterioro de fidelidad de la señal e incremento sustancial de la complejidad del procesado (operaciones matemáticas complejas, simulación, implementación), etc.

Señales, sistemas y procesado de señales

Existe una serie de definiciones en el campo del PDS que resulta conveniente revisar. Así, se puede definir *señal* como aquella cantidad física que varía con el tiempo, espacio o cualquier otra variable o variables independientes. En la vida cotidiana nos encontramos con muchas señales de ámbito físico como las señales electrocardiográficas (ECG), voz, electroencefalogramas (EEG), imágenes (señales bidimensionales), sísmicas, bursátiles, radar, satélite, etc.

Otro concepto importante en este contexto es el de *sistema*, definido como todo dispositivo que transforma una señal en otra. Ejemplos claros de sistemas son las cuerdas vocales ya

que modifican la señal de aire propulsado para generar señales de voz, el corazón produce señales de cambio de presión sistólica/diastólica, etc. El *dispositivo* puede ser físico como en los ejemplos anteriores o no, como un algoritmo implementado en *software*.

Estamos ahora en disposición de definir qué es procesar un señal y dónde encontramos la motivación de este procesado. Podemos definir el procesado de señales como aquella tarea que consiste en pasar una señal por un sistema. Así, filtrar, interpolar, desplazar en frecuencia, sintetizar, predecir, modelizar, son distintas formas de *procesar la señal*. En nuestro caso, estamos interesados en procesar *digitalmente* la señal, es decir, en realizar las operaciones de filtrado, correlación, análisis espectral, de estabilidad, etc sobre señales digitales.

Tipos de señales

Antes de aplicar cualquier técnica a un problema hay que conocer la procedencia y carácter de las señales. Así, podemos distinguir entre señales unidimensionales/multidimensionales, tiempo continuo/discreto, amplitud continua/discreta y deterministas/aleatorias:

- *Señal unidimensional*: Aquella que depende de una única variable independiente como por ejemplo $X(t) = te^{-t^3}$ donde t es la variable temporal.
- *Señal M -dimensional*: Aquella que posee una dependencia con M dimensiones como, por ejemplo, la iluminación de una imagen de TV. Aquí se tiene una dependencia temporal y espacialmente, $I(x, y, t)$.
- *Señal en tiempo continuo (analógicas)*: Están definidas para todos los valores de tiempo entre $-\infty$ y $+\infty$. Ej: $x(t) = A \cdot t^2$, donde $t \in [0, \infty)$.
- *Señal en tiempo discreto (muestreadas)*: están definidas sólo para determinados instantes temporales. Aunque no resulta estrictamente necesario un muestreo uniforme (instantes equidistantes), la mayoría de los textos asumen este hecho ya que es más sencillo de tratar y formular. Ej: $x(t_n) = e^{-|t_n|}$, donde $n = 0, 1, 2, \dots$. Notación: $x(t_n) \equiv x(nT) \equiv x(n)$ donde nT es la muestra n y T es el periodo de toma de muestras.
- *Señal determinista*: Cualquier señal que puede ser definida de forma matemática explícita, en función de datos pasados.
- *Señal aleatoria*: Señales que no pueden expresarse mediante fórmulas explícitas con cierto grado de precisión. Ej: señales sísmicas, ruido de electromiograma, ruido de red, etc.

Sin embargo, podemos establecer que el valor de una señal en tiempo continuo o discreto puede ser continuo o discreto. En ese sentido, podemos definir una *señal discreta o digital* como aquella señal en tiempo y amplitud discretos y, en consecuencia, una señal continua (analógica) para ser discreta (digital) ha de sufrir tres procesos: *muestreo*, *cuantificación* y *codificación*.

1.1.2. Muestreo de señales

Frecuencia continua y discreta

Podemos definir la *frecuencia* como una oscilación armónica de partículas oscilando. Llegado este punto, estamos interesados en conocer si la frecuencia de una señal se verá afectada al muestrearla. Así, para las señales sinusoidales en tiempo continuo, una oscilación armónica se define como:

$$x_a(t) = A \cos(\Omega t + \theta), \quad -\infty < t < \infty \quad (1.1)$$

que queda definida por las siguientes tres magnitudes:

- Amplitud: A
- Frecuencia angular: $\Omega \equiv 2\pi F$ [rad/s], F [Hz]
- Fase: θ [rad]

y tres propiedades básicas:

- *Periodicidad.* Para *todo* valor de frecuencia F , la señal es periódica: $x_a(t+T) = x_a(t)$, donde $T = 1/F$ es el periodo fundamental de la señal.
- *Unicidad.* Las señales en tiempo continuo con frecuencias diferentes son *siempre* diferentes.
- *Oscilación.* Un aumento de la frecuencia F implica *siempre* un aumento de la tasa de oscilación de la señal ya que aumenta el número de periodos en una ventana temporal dada.

Veamos qué ocurre ahora con señales sinusoidales en tiempo discreto. Una señal sinusoidal en tiempo discreto se expresa como:

$$x(nT) \equiv x(n) = A \cos(\omega n + \theta), \quad -\infty < n < \infty \quad (1.2)$$

donde n es un número entero (\equiv número de muestra), A es la amplitud y ω es la frecuencia [rad/muestra]. Definimos $w \equiv 2\pi f$ donde la frecuencia f tiene unidades de ciclos/muestra. Estas señales discretas tienen tres propiedades análogas a las señales de tiempo continuo:

- *Periodicidad.* Una senoide discreta es periódica si su frecuencia f es un número racional: $x(n+N) = x(n)$, $\forall n \leftrightarrow f = k/N$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. El periodo más pequeño de N se conoce como *periodo fundamental*. Esto tiene una consecuencia importante ya que una pequeña variación en frecuencia puede ocasionar una enorme variación en periodo.
- *Unicidad.* Las senoideas en tiempo discreto cuyas frecuencias están separadas por un múltiplo entero de 2π son idénticas. En efecto,

$$\cos[(w_0 + 2\pi)n + \theta] = \cos(w_0 n + 2\pi n + \theta) = \cos(w_0 n + \theta) \quad (1.3)$$

Por tanto, existen señales discretas iguales con frecuencias distintas. Esto se produce para todas las señales $x_k(n) = A \cos(w_k n + \theta)$ donde $k = 0, 1, 2, \dots$ y $w_k = w_0 + 2k\pi$ y $-\pi \leq w_0 \leq \pi$. Esto, por tanto, induce a tener señales que, en principio,

son indistinguibles (*idénticas*). Luego, cualquier secuencia con frecuencias $|w| \geq \pi$ o $|f| \geq \frac{1}{2}$ tiene una secuencia idéntica en $-\pi \leq w \leq \pi$ o $-\frac{1}{2} \leq f \leq \frac{1}{2}$. Recordemos que el rango de unicidad en el campo continuo es $-\infty < \Omega < \infty$ o $-\infty < F < \infty$. Decimos que las señales fuera del rango $|w| \geq \pi$ o $|f| \geq \frac{1}{2}$ tienen un *alias* dentro del rango $|w| < \pi$ o $|f| < \frac{1}{2}$. Este efecto se conoce como “*aliasing*”.

- *Oscilación máxima.* La mayor tasa de oscilación en una senoide en tiempo discreto se alcanza cuando $\omega = \pi$ (o $\omega = -\pi$) ó, equivalentemente $f = \frac{1}{2}$ (o $f = -\frac{1}{2}$).

Muestreo de señales analógicas

De acuerdo con lo visto en la sección anterior, para muestrear señales analógicas se deberán dar algunas condiciones para que no se produzcan pérdidas de información. En el presente texto, como se ha mencionado anteriormente, sólo se considerará un muestreo uniforme de la señal que es aquél en que la cadencia de toma de muestras es constante. En este caso se puede definir $x(n) = x_a(nT)$, $-\infty < n < \infty$, donde $x(n)$ es la señal en tiempo discreto obtenida tomando muestras de la señal analógica $x_a(t)$ cada T segundos. Así, *periodo (o intervalo) de muestreo* es el intervalo de tiempo T entre dos muestras y la *frecuencia (o velocidad) de muestreo* es la inversa del periodo de muestreo: $F_m = 1/T$ [Hz]. La *relación de muestreo* se puede definir como $t = nT = \frac{n}{F_m}$.

Veamos a continuación la relación entre las frecuencias analógicas y digitales (F y f) en una señal sinusoidal. Para ello, muestreemos la señal:

$$x_a(nT) \equiv x(n) = A \cos(2\pi F n T + \theta) = A \cos\left(\frac{2\pi n F}{F_m} + \theta\right). \quad (1.4)$$

Si ahora comparamos con

$$x(n) = A \cos(2\pi f n + \theta) \quad (1.5)$$

obtenemos: $f = \frac{F}{F_m}$, que se define como la frecuencia normalizada o relativa. Equivalentemente se puede expresar $\omega = \Omega T$.

En resumen, los rangos analógicos, son $-\infty < F < \infty$ ó $-\infty < \Omega < \infty$, mientras que los rangos digitales $-1/2 < f < 1/2$ ó $-\pi < \omega < \pi$. De este modo, la diferencia fundamental entre señales en tiempo continuo y discreto es el rango de valores de las correspondientes frecuencias y los valores máximos de muestreo vienen dados por los límites superiores: $F_{max} = \frac{F_m}{2} = \frac{1}{2T}$ y $\Omega_{max} = \pi F_m = \frac{\pi}{T}$. La conclusión fundamental es, por tanto, que el muestreo uniforme puede introducir ambigüedad en la señal digital obtenida e impone una restricción esencial: la máxima frecuencia analógica que podemos recuperar tras un muestreo de la señal a F_m es $F_{max} = F_m/2$.

Teorema de Muestreo

Hasta ahora hemos visto que para muestrear eficientemente una señal analógica, debemos elegir la F_m . Para ello necesitamos tener información sobre el contenido frecuencial de la señal a muestrear. Así, si conocemos la F_{max} , podemos escoger una F_m adecuada de tal manera que no exista “*aliasing*”, $F_m > 2 * F_{max}$. Una señal muestreada correctamente ($F_m > 2 * F_{max}$) podrá ser recuperada sin pérdida de información mediante un interpolador (convertor D/A). La fórmula de interpolación ideal o “*apropiada*” se especifica mediante el

Teorema de muestreo de Nyquist:

Teorema de muestreo de Nyquist.

Si la frecuencia más alta contenida en una señal analógica $x_a(t)$ es $F_{max} = B$ y la señal se muestrea a una velocidad $F_m > 2 * F_{max} \equiv 2B$, entonces $x_a(t)$ se puede recuperar totalmente a partir de sus muestras mediante la siguiente función de interpolación:

$$g(t) = \frac{\text{sen}(2\pi Bt)}{2\pi Bt}. \quad (1.6)$$

Así, $x_a(t)$ se puede expresar como:

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a\left(\frac{n}{F_m}\right) g\left(t - \frac{n}{F_m}\right) \quad (1.7)$$

donde $x_a(n/F_m) = x_a(nT) \equiv x(n)$ son las muestras de $x_a(t)$.

Cuando la señal se muestrea a la frecuencia (o tasa) mínima $F_m = 2B$, la fórmula de reconstrucción es:

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a\left(\frac{n}{2B}\right) \frac{\text{sen}(2\pi B(t - n/2B))}{2\pi B(t - n/2B)} \quad (1.8)$$

En este último caso hablamos de *frecuencia de Nyquist* y la expresamos como $F_N = 2B = 2F_{max}$. La reconstrucción de $x_a(t)$ a partir de $x(n)$ supone la suma ponderada de una función de interpolación $g(t)$ que se desplaza en el tiempo, $g(t - nT)$, con $-\infty < n < \infty$ y donde los coeficientes de ponderación son las muestras de $x(n)$.

Nyquist mostró que, para que podamos distinguir sin ambigüedad las componentes frecuenciales de una señal, es necesario que muestreemos al menos al doble de la frecuencia máxima contenida en la misma, para evitar los efectos del “*aliasing*”. La máxima frecuencia permitida en una señal para una frecuencia de muestreo dada se denomina frecuencia de Nyquist. Realmente el Teorema de Nyquist no es tan riguroso, la frecuencia de Nyquist no es necesario que sea el doble de la frecuencia máxima contenida en la señal, sino el doble del ancho de banda de la señal de interés. Este hecho se conoce como *Teorema de Nyquist Pasabanda* ya que no considera el caso en que las frecuencias se encuentren desplazadas en el espectro una cierta cantidad. La versión del *Teorema Generalizado de Nyquist* no identifica $B = F_{max}$ sino que B es, en realidad, el ancho de banda de la señal. Así, si tenemos que $F_1 < F < F_2$, entonces $B = F_2 - F_1$.

Cuando estamos trabajando con señales reales, aunque tengamos un conocimiento *a priori* de las frecuencias, lo más usual es que tengamos ruido solapado con componentes frecuenciales superiores a la de Nyquist, que nos producirían “*aliasing*”, por esta razón previa a la conversión analógico-digital es necesario filtrar pasa baja la señal de manera que se eliminen las frecuencia por encima de la banda de interés.

1.1.3. Cuantización

Hemos definido previamente que la conversión A/D está formada por tres etapas; el muestreo, la cuantificación y la codificación. Analicemos ahora la segunda tarea. Definimos la cuantificación como la conversión de una señal en tiempo discreto con valores continuos en una señal en tiempo discreto con valores discretos (señal digital). El valor de cada muestra se representa mediante un valor seleccionado de un conjunto finito de valores (*niveles de cuantificación*). La cuantificación es un proceso irreversible, no invertible, ya que siempre se produce una pérdida de información. Teóricamente esto se fundamenta en que, al existir un número limitado de niveles, a distintos valores continuos se les asigna un mismo valor discreto por lo que no se pueden obtener los valores originales a partir de los valores cuantificados.

En este proceso cada uno de los datos digitales se va a representar con un número de bits finito, lo cual hará que la señal muestreada y la original difieran. Podemos definir varios conceptos importantes:

- *Error o ruido de cuantificación o cuantización* es el error cometido al representar la señal de valor continuo por un conjunto finito de valores discretos.
- *Operación de cuantización*: $x_q(n) = Q[x(n)]$
- *Error de cuantización*: $e_q(n) = x_q(n) - x(n)$
- *Niveles de cuantización*: Son los niveles o valores permitidos en la señal digital.
- *Escalón de cuantización o resolución*: Es la distancia Δ entre dos niveles de cuantización. Si x_{min} y x_{max} son los valores máximo y mínimo de $x(n)$ y L es el número de niveles de cuantización, entonces:

$$\Delta = \frac{x_{max} - x_{min}}{L - 1} \quad (1.9)$$

El cuantificador por *redondeo* asigna a cada muestra de $x(n)$ el nivel de cuantización más cercano. Un cuantificador por *truncamiento* asigna el nivel inmediatamente por debajo de la muestra.

- *Rango dinámico*: $RD = x_{max} - x_{min}$
- *Resolución del cuantizador*: Si un sistema tiene una longitud de palabra de B bits, se pueden establecer $L = 2^B - 1$ niveles

$$\Delta = \frac{x_{max} - x_{min}}{2^B - 1} \simeq \frac{RD}{2^B} \quad (1.10)$$

- *Cuantificador constante*: Si el tamaño del escalón es constante. En aplicaciones de transmisión y almacenamiento de señales no se suele tomar constante sino variable.
- *Error por redondeo*: $e_{q,red}(n) \in [-\Delta/2 \leq \Delta/2]$.
- *Error por truncamiento*: $e_{q,tru}(n) \in [-\Delta, 0]$.
- *Ruido de sobrecarga*: Cuando la entrada excede el rango dinámico del cuantificador se recorta la señal. Este tipo de ruido puede producir graves distorsiones de la señal.

- *Calidad de la salida del conversor A/D*: Se proporciona la *Relación Señal-Ruido de Cuantificación* (“Signal-To-Quantization Noise Ratio”, SQNR), que define la relación entre la potencia de la señal y la de ruido:

$$SQNR = \frac{P_x}{P_q} = \frac{3}{2}2^{2b}, \quad P_x = \frac{A^2}{2}, \quad P_q = \frac{A^2/3}{2^{2b}}, \quad (\text{sinusoides}) \quad (1.11)$$

donde b es el número de bits de precisión del conversor y cubre el rango completo $2A$ (el escalón de cuantificación es $\Delta = 2A/2^b$).

- *Calidad (dB)*: $SQNR(\text{dB}) = 10\log_{10}SQNR = 1,76 + 6,02b$ para señales sinusoidales.
- *“Regla de los 6dB”*: De la expresión anterior, se deduce que cada bit adicional del conversor proporciona un aumento de la SQNR en unos 6dB.

1.1.4. Reconstrucción

Un convertidor discreto continuo (D/A) obtiene una señal continua $x(t)$ a partir de una secuencia de datos $x(n)$. Por tanto, un convertidor ideal, pasaría la secuencia

$$x(n) = A\cos\left(2\pi\frac{F}{F_m}n + \phi\right) \quad (1.12)$$

a

$$x(t) = A\cos(2\pi Ft + \phi). \quad (1.13)$$

Un convertidor D/A, mediante una función de interpolación, determina el valor de la señal entre las muestras discretas. La interpolación se lleva a cabo mediante la expresión general

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)p(t - nT_s). \quad (1.14)$$

Por tanto, un punto clave en la conversión es la elección de la función de interpolación. El teorema de muestreo especifica la función de interpolación ideal (ecuación (1.8)). En la práctica, sin embargo, la conversión D/A se realiza normalmente combinando un conversor D/A con un circuito de muestreo y mantenimiento (“*sample-and-hold*”, S/H) seguido de un filtro pasa-baja (suavizador) ya que el reconstructor ideal es no causal y de duración infinita, por tanto, no utilizable en la práctica. Existen tres tipos básicos de mantenedores:

- *Mantenedor de Orden Cero*:

$$\hat{x}(t) = x(nT), \quad nT \leq t \leq (n+1)T \quad (1.15)$$

- *Mantenedor de Orden Uno*:

$$\hat{x}(t) = x(nT) + \frac{x(nT) - x((n-1)T)}{T}(t - nT), \quad nT \leq t \leq (n+1)T \quad (1.16)$$

- *Interpolador lineal con retardo*:

$$\hat{x}(t) = x((n-1)T) + \frac{x(nT) - x((n-1)T)}{T}(t - nT), \quad nT \leq t \leq (n+1)T \quad (1.17)$$

En $t = nT$, $\hat{x}(nT) = x((n-1)T)$ y en $t = (n+1)T$, $\hat{x}((n+1)T) = x(nT)$ por lo que $x(t)$ tiene un retardo inherente de T segundos al interpolar la señal verdadera $x(t)$.

1.1.5. Señales discretas básicas

Una vez vistas las características básicas de las señales, su muestreo y cuantificación, resulta interesante detenerse en la representación matemática, propiedades y operaciones relacionadas.

■ *Representación de secuencias discretas:*

1. *Representación funcional:*

$$x(n) = \begin{cases} 1, & \text{para } n = 1, 3. \\ 4, & \text{para } n = 4 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (1.18)$$

2. *Representación tabular:*

n	... -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 ...
x(n)	... 0 0 0 1 4 1 1 0 0 0 0 ...

3. *Representación secuencial:* Se indica con una flecha el origen de tiempos:

$$x(n) = \{\dots, 0, 0, 0, \underset{\uparrow}{1}, 4, 1, 0, 0, 0, 0, \dots\} \quad (1.19)$$

■ *Secuencia de duración finita:* Las podemos representar por:

$$x(n) = \{3, -1, \underset{\uparrow}{-1}, 5, 6, 7, 8\} \quad (1.20)$$

mientras que si $x(n) = 0, \forall n < 0$, la secuencia se puede representar por:

$$x(n) = \{\underset{\uparrow}{0}, 1, 4, 1\} \quad (1.21)$$

■ *Señales elementales en tiempo discreto:*

• *Impulso unitario:*

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & \text{para } n = 0 \\ 0, & \text{para } n \neq 0 \end{cases} \quad (1.22)$$

• *Impulso unitario desplazado:*

$$\delta(n - n_0) = \begin{cases} 1, & \text{para } n = n_0 \\ 0, & \text{para } n \neq n_0 \end{cases} \quad (1.23)$$

• *Escalón unitario:*

$$u(n) = \begin{cases} 1, & \text{para } n \geq 0 \\ 0, & \text{para } n < 0 \end{cases} \quad (1.24)$$

- *Rampa unitaria:*

$$u_r(n) = \begin{cases} n, & \text{para } n \geq 0 \\ 0, & \text{para } n < 0 \end{cases} \quad (1.25)$$

- *Exponencial:* $u_e(n) = A\alpha^n$, $\forall n$ y $\alpha, A \in \mathbb{C}$. En función del valor de α y A se tratará de una exponencial creciente/decreciente compleja o real.

$$\alpha = |\alpha|e^{jw_0}, \quad A = |A|e^{j\phi} \quad (1.26)$$

$$x(n) = |A||\alpha|^n e^{jw_0n} e^{j\phi} = |A||\alpha|^n e^{j(w_0n+\phi)} \quad (1.27)$$

Si $|\alpha| = 1 \rightarrow x(n) = |A|e^{j(w_0n+\phi)}$ hablamos de una Secuencia Exponencial Compleja que puede descomponerse en las correspondientes componentes sinusoidales:

$$x(n) = |A|[\cos(w_0n + \phi) + j\text{sen}(w_0n + \phi)], \quad (1.28)$$

donde w_0 es la frecuencia de la senoide.

- *Operaciones con secuencias:* Para poder realizar operaciones con secuencias estas deben tener el mismo número de muestras. Esto se puede conseguir siempre mediante la técnica de añadir ceros.

1. *Producto o Modulación:* $y(n) = w(n) \cdot x(n)$. Una de las aplicaciones de esta operación consiste en obtener una secuencia de longitud finita a partir de una secuencia de infinitos términos. La secuencia finita por la que se multiplica se denomina ventana y al proceso enventanado.
2. *Sumador:* $y(n) = w(n) + x(n)$.
3. *Producto por un escalar (escalado):* $y(n) = Ax(n)$.
4. *Desplazamiento temporal:* $y(n) = x(n - N)$ donde si $N > 0$ tenemos la secuencia de entrada $x(n)$ retardada a la salida y si $N < 0$ tenemos un adelanto a la salida del sistema.
5. *Inversión temporal:* $y(n) = x(-n)$ con lo que se obtiene una secuencia reflejada respecto de $n = 0$.

- *Descomposición:* Toda secuencia se puede expresar como una combinación de señales impulsos retardados. Por ejemplo:

$$x(n) = \{ \underset{\uparrow}{1}, 2, 3, 4, \dots \} \rightarrow x(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1) + 3\delta(n-2) + \dots \quad (1.29)$$

El escalón unitario se puede expresar así:

$$u(n) = \sum_{k=-\infty}^n \delta(k) \quad (1.30)$$

y, de forma general, como:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k) \quad (1.31)$$

■ *Clasificación de señales en tiempo discreto:*

• *Energía y potencia:*

$$\text{Energía : } E \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 \quad (1.32)$$

Si E es finita se habla de $x(n)$ como una *señal de energía*.

$$\text{Potencia media : } P \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x(n)|^2 \quad (1.33)$$

Muchas señales con energía infinita poseen potencia media finita. Esta cantidad se puede expresar como:

$$P \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} E_N \quad (1.34)$$

donde E_N es la energía de la señal en el intervalo $-N \leq n \leq N$. Si P es finita se habla de $x(n)$ como una *señal de potencia*.

• *Simétricas y antisimétricas:*

$$\text{Simétrica (par) : } x(-n) = x(n) \quad (1.35)$$

$$\text{Antisimétrica (impar) : } x(-n) = -x(n) \quad (1.36)$$

Cualquier señal se puede expresar como suma de dos componentes, una par y la otra impar.

• *Periódicas y aperiódicas:*

$$\text{Periódica : } x(n+N) = x(n), \quad \forall n \text{ y } N > 0. \quad (1.37)$$

El valor más pequeño de N es el *periodo fundamental*.

1.1.6. Sistemas en tiempo discreto. Sistemas LIT

Podemos definir un sistema en tiempo discreto como toda transformación que realiza un mapeado entre una secuencia de entrada $\{x(n)\}$ en otra de salida $\{y(n)\}$: $y(n) = T\{x(n)\}$. Los sistemas discretos se puede clasificar de la siguientes formas:

- *Sistemas estáticos y dinámicos.* Un sistema es *estático* o sin memoria si su salida en cualquier instante n depende a lo sumo de la muestra de entrada en ese mismo instante pero *no* de muestras pasadas o futuras. En otro caso el sistema es *dinámico*.

$$\text{Estático : } y(n) = x^2(n) + nx(n) \quad (1.38)$$

$$\text{Dinámico : } y(n) = x(n) + 3x(n-1) - y(n-2) \quad (1.39)$$

- *Sistemas invariantes/variantes temporales.* Un sistema es *invariante temporal* si sus características de entrada-salida no cambian con el tiempo:

$$\text{Si } y(n) = T[x(n)] \rightarrow y(n-k) = T[x(n-k)] \quad (1.40)$$

para toda señal de entrada $x(n)$ y todo desplazamiento temporal k .

- *Sistemas lineales y no lineales.* Un sistema es lineal si y sólo si:

$$\mathcal{T}[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] = a_1\mathcal{T}[x_1(n)] + a_2\mathcal{T}[x_2(n)] \quad (1.41)$$

para cualquier par de secuencias arbitrarias de entrada $x_1(n)$ y $x_2(n)$, y cualesquiera constantes arbitrarias a_1 y a_2 .

- *Sistemas causales y no causales.* Un sistema es *causal* si $\forall n_0$, el valor de $y(n_0)$ es función *únicamente* de valores de la secuencia de entrada y salida para $n \leq n_0$. Un sistema *no causal* depende también de las muestras futuras. Un sistema no causal no es realizable físicamente (en tiempo real) ya que no se dispone de las muestras futuras.
- *Sistemas estables y no estables.* Se define un sistema estable BIBO (“*Bounded Input Bouded Output*”) como aquél en el que cualquier entrada acotada $x(n)$ produce una salida acotada $y(n)$. Es decir

$$|x(n)| \leq M_x < \infty \quad |y(n)| \leq M_y < \infty, \forall n \quad (1.42)$$

Si para alguna entrada acotada $x(n)$ la salida no está acotada (es infinita), el sistema se clasifica como no estable (inestable).

Una forma de caracterización de los sistemas discretos es atendiendo a si cumplen las propiedades de linealidad e invarianza temporal. En caso de cumplir estas características decimos que el sistema es *lineal, invariante temporal*, L.I.T:

$$y(n) = \mathcal{T}[x(n)] = \mathcal{T}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)\right] = \quad (1.43)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\mathcal{T}[\delta(n-k)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n)h(n-k) \quad (1.44)$$

donde se ha aplicado la propiedad de invarianza temporal:

$$h(n) = \mathcal{T}[\delta(n)] \leftrightarrow h(n-k) = \mathcal{T}[\delta(n-k)] \quad (1.45)$$

La secuencia $h(n)$ se denomina *respuesta al impulso*, *respuesta impulsional* o *respuesta impulsiva*.

1.1.7. Convolución

La respuesta impulsional (en el instante $n = k$) se define como $y(n, k) \equiv h(n, k) = \mathcal{T}[\delta(n-k)]$ donde n es el índice temporal y k la posición del impulso. Para un sistema L.I.T., en el que expresamos la entrada como una suma de impulsos retardados podemos calcular su salida como:

$$y(n) = \mathcal{T}[x(n)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n)h(n-k) \quad (1.46)$$

Esta expresión se denomina *suma o función de convolución* de las secuencias $x(n)$ y $h(n)$ y se representa de forma compacta como: $y(n) = h(n) * x(n)$. Esta propiedad es muy importante ya que permite calcular la salida de un sistema L.I.T. ante cualquier entrada conociendo su respuesta impulsional. De este modo, un sistema L.I.T. en reposo queda

completamente determinado (caracterizado) por la secuencia $h(n)$, es decir, su respuesta al impulso unitario $\delta(n)$. En cambio, la salida de un sistema L.I.T. queda caracterizado por un conjunto de infinitas funciones de respuesta a los impulsos unitarios desplazados; una por cada desplazamiento. Decimos que la entrada $x(n)$ se convoluciona con la respuesta impulsional $h(n)$ para producir la salida $y(n)$.

La convolución tiene tres importantes propiedades:

- *Conmutativa:* $h(n) * x(n) = x(n) * h(n)$
- *Distributiva:* $x(n) * [h_1(n) + h_2(n)] = x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n)$
- *Asociativa:* $h_2(n) * [h_1(n) * x(n)] = [h_2(n) * h_1(n)] * x(n)$

A partir de ellas, se pueden establecer dos propiedades esenciales de los sistemas L.I.T.:

- “Un sistema L.I.T. es estable $\leftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty$ ”
- “Un sistema L.I.T. es causal si $h(n) = 0, \forall n < 0$.”
- “Un sistema L.I.T. causal con $h(n) = 0, \forall n \geq n_0$ es siempre estable”.

Además, existen una íntima relación entre la convolución y la interconexión de sistemas, pues una conexión de dos sistemas en serie (cascada) conduce a un sistema equivalente cuya respuesta impulsional es la convolución de las respuestas impulsionales $h(n) = h_1(n) * h_2(n)$; mientras que el conexionado en paralelo de dos sistemas conduce a una respuesta impulsional del sistema total $h(n) = h_1(n) + h_2(n)$.

1.1.8. Correlación

Con frecuencia es necesario cuantificar el grado de similitud entre varias señales o procesos. Este grado de dependencia, que vamos a denominar correlación, se puede definir matemáticamente, lo que nos dará una medida objetiva. Podemos encontrar aplicaciones que emplean técnicas basadas en correlación en campos como bioingeniería para la detección de señales inmensas en ruido, sistemas de radar y sonar para la localización de la posición y velocidad de objetos, en la detección de códigos en comunicaciones etc. Además los procesos de correlación están muy ligados con los de convolución, tan empleados en PDS para obtener la respuesta de un determinado sistema, ya que una convolución no es más que una correlación invirtiendo el orden de una de las secuencias.

Consideremos dos secuencias de datos, correspondientes a dos procesos que queremos comparar. La correlación existente entre ambas secuencias o correlación cruzada (“*cross-correlation*”) la vamos a definir de acuerdo con la siguiente expresión:

$$r_{xy}(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n-k) \quad (1.47)$$

A priori puede parecer que una manera de estimar la similitud entre dos señales es calcular directamente el promedio de la suma de los productos, es decir eliminar el índice k del sumatorio anterior y que el resultado sea sólo un número. De esta forma cuando las dos secuencias sean parecidas la suma de los productos tenderá a incrementar este valor. Valores grandes y positivos indicaría que ambas señales son parecidas y crecen a la vez, y valores negativos indican que el crecimiento de una variable está asociado con el decrecimiento de la

otra. Por otra parte valores próximos a cero indican que las señales no tienen parecido, como ocurrirá al correlacionar dos señales de ruido aleatorio ya que las contribuciones positivas y negativas tenderán a cancelarse.

Un problema que podemos tener con la definición de correlación que hemos dado es la dependencia del valor obtenido con la energía de las señales, es decir, dadas dos señales idénticas en forma pero de magnitudes diferentes vamos a tener distintos valores de la correlación. Una forma de resolver este problema es dividir el valor obtenido en la ecuación anterior por la energía de las señales utilizadas. Al hacer esto obtenemos la definición del *coeficiente de correlación*:

$$\rho_{xy}(k) = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} x(n)y(n-k)}{[\sum_{n=0}^{N-1} x^2(n) \sum_{n=0}^{N-1} y^2(n)]^{1/2}} \quad (1.48)$$

El coeficiente de correlación toma valores en el intervalo $[-1,1]$. Un valor 1 indica máxima correlación y un valor -1 indica correlación máxima pero con señales desfasadas.

Un caso particular de la correlación cruzada es la *autocorrelación*, cuando las secuencias $x(n)$ e $y(n)$ coinciden. Particularizando la expresión de la correlación cruzada tendremos:

$$r_{xx}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)x(n-k) \quad (1.49)$$

En el caso particular que el desplazamiento entre secuencia sea 0; es decir, $k = 0$ la autocorrelación coincide con la energía de la señal.

$$r_{xx}(0) = \sum_{n=0}^{N-1} x^2(n) \quad (1.50)$$

Se puede demostrar que $r_{yx}(l)$ es sólo la versión reflejada de $r_{xy}(l)$ donde la reflexión se hace con respecto a $l = 0$. Por tanto, la matriz de correlación cruzada entre dos secuencias es *simétrica*; nos da la misma información hacer la correlación entre $x(n)$ e $y(n)$ que viceversa.

1.1.9. Sistemas L.I.T. y ecuaciones en diferencias de coeficientes constantes

Un caso particular de sistemas L.I.T. muy importantes son aquellos en los que la entrada y salida están relacionadas mediante una ecuación en diferencias de la forma

$$\sum_{k=0}^M b_k x(n-k) = \sum_{k=0}^N a_k y(n-k), \quad (1.51)$$

donde b_k y a_k con constantes.

Al valor máximo entre N y M se le denomina *orden del sistema*. Para calcular la salida del sistema a partir de un instante $n = n_0$ es necesario conocer los valores en los instantes $y(n_0 - 1), y(n_0 - 2), y(n_0 - N), \dots$, estos valores son lo que se denominan *condiciones iniciales del sistema*. Se dice que un sistema está *originalmente en reposo* o *relajado* si las condiciones iniciales son nulas ($y(n_0 - 1), y(n_0 - 2), y(n_0 - N), \dots = 0$).

Resolución de una ecuación en diferencias con coeficientes constantes

Para calcular la salida de un sistema descrito por una ecuación en diferencias con coeficientes constantes, se emplea un procedimiento análogo al utilizado para la resolución de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes. En primer lugar se divide la solución en dos partes:

$$y(n) = y_k(n) + y_p(n), \quad (1.52)$$

donde $y_k(n)$ es la *solución homogénea* y $y_p(n)$ es la *solución particular*. La solución homogénea se obtiene considerando $x(n) = 0$ y es la solución de

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = 0. \quad (1.53)$$

La solución particular es la solución específica para cada entrada ($x(n) \neq 0$), también se llama solución forzada, ya que la ha provocado la entrada. La suma de ambas soluciones es la solución total $y(n)$.

Respuesta a entrada nula y respuesta en estado nulo

Una forma alternativa de calcular la solución total de una ecuación en diferencias es determinando la respuesta ante una entrada nula y la respuesta en estado nulo que se definen de la siguiente forma:

- Respuesta ante entrada nula o respuesta natural y_{zi} : es la respuesta del sistema ante una entrada nula, considerando únicamente las condiciones iniciales.
- Respuesta en estado nulo y_{zs} : es la respuesta del sistema ante una entrada determinada considerando condiciones iniciales nulas.
- La respuesta total del sistema se puede escribir como:

$$y(n) = y_{zi}(n) + y_{zs}(n). \quad (1.54)$$

1.1.10. Clasificación de los sistemas L.I.T. discretos

Existen otros criterios de clasificación diferentes a los vistos anteriormente:

- *Según su respuesta impulsional:*
 - Un sistema cuya respuesta impulsional $h(n)$ tiene un número finito de términos no nulos $h(n) = 0$ para $n < N_1$ y $n > N_2$, $N_1 < N_2$ se denomina sistema de respuesta impulsional finita (FIR). Su salida se puede calcular directamente de la suma de convolución como:

$$y(n) = \sum_{k=N_1}^{N_2} h(k)x(n-k). \quad (1.55)$$

Si comparamos esta ecuación con la expresión general de los sistemas L.I.T. de coeficientes constantes observamos que $h(k) = b_k$.

- Si la respuesta impulsional no es finita se dice que es un sistema de respuesta impulsional infinita (IIR).

■ *Según el procedimiento para calcular su salida:*

- *No recursivos.* Son aquellos en los que la salida se puede calcular secuencialmente conociendo únicamente las entradas presentes y pasadas:

$$y(n) = F\{x(n), x(n-1), \dots, x(n-N)\}. \quad (1.56)$$

- *Recursivos.* Son aquellos en los que la salida en un instante dado depende de entradas presentes y pasadas así como también de salidas pasadas:

$$y(n) = F\{x(n), x(n-1), \dots, x(n-M), y(n-1), \dots, y(n-M)\}. \quad (1.57)$$

1.2. Problemas resueltos

1. Dada la señal discreta mostrada en la Fig. 1.1, dibuje cada una de las siguientes señales:

a) $x(n - 2)$

b) $x(n + 1)$

c) $x(2n)$

d) $x(-n)$

e) $x(4 - n)$

f) $x(n^2)$

g) $x(n - 1)\delta(n - 2)$

h) $\frac{1}{2}x(n) + (-1)^n \frac{1}{2}x(n)$

Resolución:

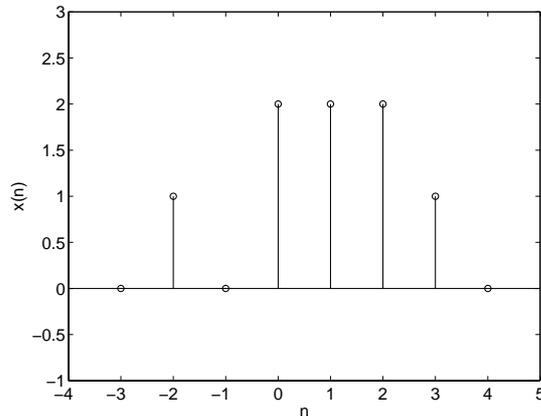


Figura 1.1: Secuencia original $x(n)$.

La secuencia original se puede expresar como $x(n) = \{0, 1, 0, \underset{\uparrow}{2}, 2, 2, 1, 0\}$, donde se ha indicado con una flecha la muestra correspondiente al índice $n = 0$, que representa el origen de tiempos. La Tabla 1.1 muestra la resolución de este ejemplo.

a) $x(n - 2)$

La secuencia ha sido retardada dos muestras, lo que equivale a un desplazamiento a la derecha de dos posiciones. Por tanto, $x(n - 2) = \{0, \underset{\uparrow}{1}, 0, 2, 2, 2, 1, 0\}$. La muestra que ocupaba la posición $n = 0$ ahora ocupa la posición $n = 2$, por esta razón se dice que se ha producido un *retardo*. La señal se muestra en la Fig. 1.2(a).

b) $x(n + 1)$

La Tabla 1.2 muestra la resolución de este ejemplo.

La secuencia ha sido desplazada hacia la izquierda una posición. Se ha producido un *adelanto*. La secuencia final es $x(n + 1) = \{0, 1, 0, \underset{\uparrow}{2}, 2, 2, 1, 0\}$. La señal

Tabla 1.1: Resolución del ejercicio 1(a).

$n = -4$	$x(-4 - 2) = x(-6) = 0$
$n = -3$	$x(-3 - 2) = x(-5) = 0$
$n = -2$	$x(-2 - 2) = x(-4) = 0$
$n = -1$	$x(-1 - 2) = x(-3) = 0$
$n = 0$	$x(0 - 2) = x(-2) = 1$
$n = 1$	$x(1 - 2) = x(-1) = 0$
$n = 2$	$x(2 - 2) = x(0) = 2$
$n = 3$	$x(3 - 2) = x(1) = 2$
$n = 4$	$x(4 - 2) = x(2) = 2$
$n = 5$	$x(5 - 2) = x(3) = 1$
$n = 6$	$x(6 - 2) = x(4) = 0$
$n = 7$	$x(7 - 2) = x(5) = 0$

Tabla 1.2: Resolución del ejercicio 1(b).

$n = -4$	$x(-4 + 1) = x(-3) = 0$
$n = -3$	$x(-3 + 1) = x(-2) = 1$
$n = -2$	$x(-2 + 1) = x(-1) = 0$
$n = -1$	$x(-1 + 1) = x(0) = 2$
$n = 0$	$x(0 + 1) = x(1) = 2$
$n = 1$	$x(1 + 1) = x(2) = 2$
$n = 2$	$x(2 + 1) = x(3) = 1$
$n = 3$	$x(3 + 1) = x(4) = 0$

resultante se muestra en la Fig. 1.2(b).

c) $x(2n)$

La Tabla 1.3 muestra la resolución de este ejemplo.

Tabla 1.3: Resolución del ejercicio 1(c).

$n = -3$	$x(2 \cdot (-3)) = x(-6) = 0$
$n = -2$	$x(2 \cdot (-2)) = x(-4) = 0$
$n = -1$	$x(2 \cdot (-1)) = x(-2) = 1$
$n = 0$	$x(2 \cdot 0) = x(0) = 2$
$n = 1$	$x(2 \cdot 1) = x(2) = 2$
$n = 2$	$x(2 \cdot 2) = x(4) = 0$

Hemos tomado las muestras pares de la secuencia, descartando las impares. La secuencia se ha comprimido: $x(2n) = \{0, 1, \underset{\uparrow}{2}, 2, 0\}$. La señal resultante se muestra en la Fig. 1.2(c).

d) $x(-n)$

La Tabla 1.4 muestra la resolución de este ejemplo. La secuencia ha sido reflejada respecto de la muestra $n = 0$. La señal resultante se muestra en la Fig. 1.2(d).

e) $x(4 - n)$

Aunque podemos repetir el proceso anterior, se puede considerar que esta secuencia está formada por una reflexión respecto del origen y posteriormente un

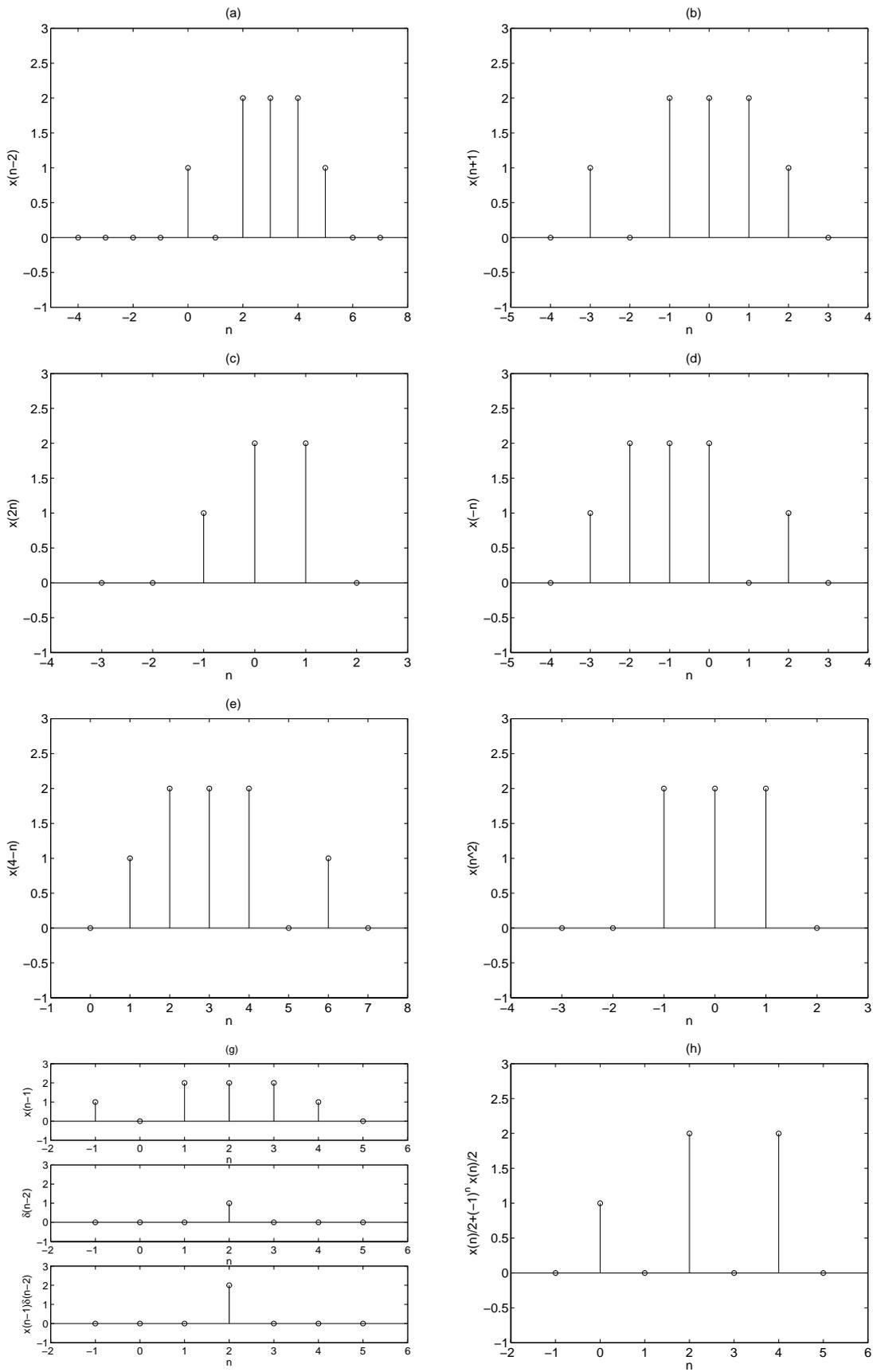


Figura 1.2: Secuencias resultantes para los distintos apartados del ejercicio 1.

Tabla 1.4: Resolución del ejercicio 1(d).

$n = -4$	$x(-(-4)) = x(4) = 0$
$n = -3$	$x(-(-3)) = x(3) = 1$
$n = -2$	$x(-(-2)) = x(2) = 2$
$n = -1$	$x(-(-1)) = x(1) = 2$
$n = 0$	$x(0) = 2$
$n = 1$	$x(1) = 0$
$n = 2$	$x(-2) = 1$
$n = 3$	$x(-3) = 0$

adelanto de cuatro muestras, tal que $x(-n+4)$. La secuencia reflejada la hemos calculado en (d). Si la adelantamos cuatro muestras, desplazándola a la izquierda se obtiene $x(-n+4) = \{0, 1, 2, 2, 2, 0, 1, 0\}$. La señal se muestra en la Fig. 1.2(e).

f) $x(n^2)$

La Tabla 1.5 muestra la resolución de este ejemplo mientras que la señal resultante se muestra en la Fig. 1.2(f). La señal resultante ha sido comprimida como se ha realizado en el apartado c), pero no uniformemente.

Tabla 1.5: Resolución del ejercicio 1(e).

$n = -3$	$x((-3)^2) = x(9) = 0$
$n = -2$	$x((-2)^2) = x(4) = 0$
$n = -1$	$x((-1)^2) = x(1) = 2$
$n = 0$	$x(0) = 2$
$n = 1$	$x(1^2) = x(1) = 2$
$n = 2$	$x(2^2) = x(4) = 0$

g) $x(n-1)\delta(n-2)$

El producto de dos secuencias es igual al producto muestra a muestra. Si las secuencias no tienen el mismo número de elementos, en primer lugar se iguala su longitud completando con ceros. La primera secuencia se obtiene retardando una muestra la original:

$$x(n-1) = \{0, 1, 0, 2, 2, 2, 1, 0\} \quad (1.58)$$

La segunda es una secuencia impulso retardada dos muestras:

$$\delta(n-2) = \{0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0\} \quad (1.59)$$

Si alineamos ambas secuencias respecto de $n = 0$ y multiplicamos:

$$x(n-1)\delta(n-2) = \{0, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0\} \quad (1.60)$$

La resolución de forma gráfica se muestra en la Fig. 1.2(g). Al multiplicar una secuencia por una señal impulso, el resultado es una secuencia que es cero en todas las muestras excepto en la posición del impulso, cuyo valor coincide con el valor de la secuencia original para esta muestra.

$$h) \quad \frac{1}{2}x(n) + (-1)^n \frac{1}{2}x(n)$$

Calculemos cada término suma por separado:

$$\frac{1}{2}x(n) = \{0, \underset{\uparrow}{\frac{1}{2}}, 0, 1, 1, 1, \frac{1}{2}, 0\} \quad (1.61)$$

$$(-1)^n \frac{1}{2}x(n) = \{0, \underset{\uparrow}{\frac{1}{2}}, 0, 1, -1, 1, -\frac{1}{2}, 0\} \quad (1.62)$$

$$\frac{1}{2}x(n) + (-1)^n \frac{1}{2}x(n) = \{0, \underset{\uparrow}{1}, 0, 2, 0, 2, 0, 0\} \quad (1.63)$$

En la Fig. 1.2(h) se muestra la secuencia resultante.

2. Considere el conjunto de señales periódicas armónicamente relacionadas, que pueden expresarse como:

$$\phi_k(n) = e^{jk(\frac{2\pi}{N})n}$$

Determine cuál es el período fundamental N_0 de esta señal.

Resolución:

Al tratarse de una señal periódica se debe verificar que:

$$\phi_k(n) = \phi_k(n + N_0), \quad (1.64)$$

donde N_0 es el período fundamental de la señal. Por tanto se debe cumplir:

$$e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = e^{j\frac{2\pi}{N}k(n+N_0)} = e^{j\frac{2\pi}{N}kn} e^{j\frac{2\pi}{N}kN_0} \quad (1.65)$$

De la expresión anterior se puede concluir que:

$$\frac{2\pi}{N}kN_0 = 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z} \quad (1.66)$$

y por tanto:

$$N_0 = \frac{N}{k}m. \quad (1.67)$$

El período fundamental se obtiene para $m = 1$ y cuando N y k son primos. Si esto no ocurre, deben tener divisores comunes. Por tanto, el período fundamental será:

$$N_0 = \frac{N}{MCD(k, N)}, \quad (1.68)$$

siendo $MCD(k, N)$ el Máximo Común Divisor entre k y N .

3. Considere la señal analógica siguiente:

$$x(t) = 3\cos(100\pi t)$$

donde t está expresado en segundos (s.) Se pide:

- Dibujar la señal $x(t)$, $0 \leq t \leq 30ms$
- La señal $x(t)$ se muestrea con un período $T_s = 1/300s.$, obtengase la frecuencia de la señal discreta $x(n)$ y compruebe si se trata de una secuencia periódica.
- Obtenga las muestras de $x(n)$ en un período y dibújela conjuntamente con $x(t)$.
- Determine un valor de la frecuencia de muestreo para que la señal muestreada alcance un valor de pico de 3. ¿Qué ocurriría si se tratase de la señal $x(n) = 3\sen(1000\pi t)$?

Resolución:

- a) La señal $x(t) = 3\cos(100\pi t) = A\cos(\Omega t + \phi)$ tiene la expresión de una senoide analógica. Por similitud, podemos identificar: $A = 3$, $\phi = 0$, $\Omega = 100\pi$. De este último valor podemos obtener la frecuencia de la señal $2\pi F = 100\pi$, con lo que $F = 50Hz$. ya que el tiempo está expresado en segundos.

Por tanto el período $T = 1/50 = 0'02s$. que equivale a $T = 20ms$. Como hay que dibujar la señal durante 30 ms., el número de periodos será $N_{periodos} = t/T = 30/20 = 1'5$ periodos (ver Fig. 1.3).

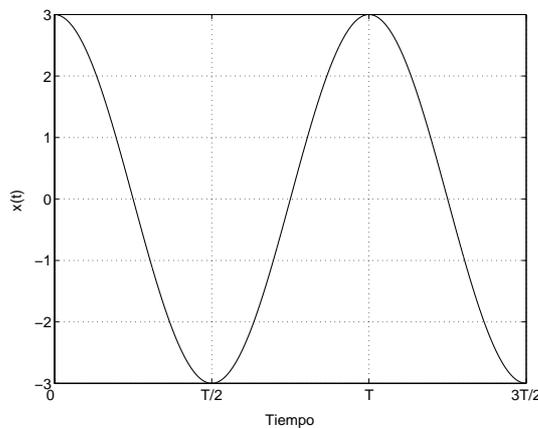


Figura 1.3: Representación de la señal del ejercicio 3(a).

- b) La expresión de la señal muestreada será:

$$x(nT_s) = 3\cos(100\pi nT_s) = 3\cos\left(\frac{100\pi}{300}n\right) = 3\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) \quad (1.69)$$

por lo que la frecuencia angular digital será $w_d = \pi/3$ y $f = w/2\pi = 1/6$. De este modo, la frecuencia digital verifica $-\frac{1}{2} < f < \frac{1}{2}$ luego el muestreo se ha realizado correctamente. Nótese que $F_m = 300Hz > 2F = 100Hz$.

Para que la señal discreta sea periódica se debe verificar que $x(n) = x(n + N)$ siendo N su periodo. Por tanto, hay que demostrar que existe un N tal que

$$3\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) = 3\cos\left(\frac{\pi}{3}(n + N)\right). \quad (1.70)$$

Comparando ambas expresiones, obtenemos que $\frac{\pi}{3}N$ debe ser múltiplo de 2π :

$$\frac{\pi}{3}N = 2\pi k, k = 1, 2, 3, \dots \quad (1.71)$$

de donde se concluye que $N = 6k$ para $k = 1, 2, 3, \dots$. Para $k = 1$ se obtiene el periodo fundamental; seis muestras.

c) Las muestras en un período serán:

$$x(n) = 3\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right), n = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \quad (1.72)$$

$$x(n) = \left\{ \underset{\uparrow}{3}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, -3, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\} \quad (1.73)$$

La señal discreta se representa en la Fig. 1.4.

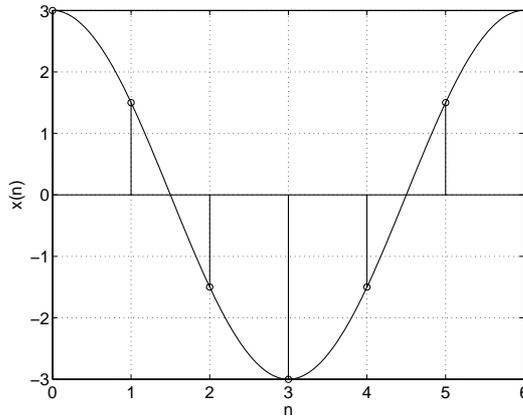


Figura 1.4: Muestras en un período para la señal del ejercicio 3.

d) Para que la señal muestreada alcance un valor máximo de tres, al tratarse de una señal coseno, hay que tener muestras en los múltiplos de 2π , luego:

$$\frac{2\pi F}{F_m}n = 2\pi k \implies F_m = nF, n = 1, 2, 3, \dots, k = 1, 2, 3. \quad (1.74)$$

Así pues, la frecuencia de muestreo debe ser un múltiplo entero de la frecuencia de la señal. Para que se verifique el Teorema de Muestreo, $n > 2$. Si se tratase de una señal 'seno', los máximos se producirían en los múltiplos de $\frac{\pi}{2}$:

$$\frac{2\pi F}{F_m}n = \frac{\pi}{2} \implies F_m = 4Fn, n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.75)$$

En ambos casos hay que restringir el ángulo entre 0 y 2π .

Si la señal tuviese una fase inicial ϕ , la condición para el coseno sería:

$$\frac{2\pi F}{F_m}n + \phi = \pi \implies \frac{F}{F_m}n = 1 - \frac{\phi}{2\pi}, n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.76)$$

$$(1.77)$$

y entonces:

$$F_m = \frac{F}{1 - \frac{\phi}{2\pi}}n, n > 2. \quad (1.78)$$

Análogamente para el seno se tiene

$$F_m = \frac{4F}{1 - \frac{2\phi}{\pi}} n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.79)$$

★ ★

4. Una señal analógica contiene frecuencias hasta $20kHz$. Se pide:

- a) ¿Qué frecuencias de muestreo se puede emplear para que sea posible una reconstrucción de la señal a partir de sus muestras?
- b) Si se considera que la frecuencia de muestreo es de $16kHz$, ¿qué ocurriría con una señal de $10kHz$ presente en la señal?
- c) ¿Qué ocurriría con una señal de $18kHz$?

Resolución:

- a) Para que se verifique el Teorema de Muestreo, es necesario tener más de dos muestras por período. Esto se cumple si $F_m > 2F_{max}$. En cambio, esta condición no resulta estrictamente necesaria sino que es suficiente con que se verifique que $F_m > 2B$, siendo B el ancho de banda de la señal.

Por tanto, $F_{max} = 20kHz$. Luego deberemos emplear $F_m > 40kHz$.

- b) Cuando trabajamos con $F_m = 16kHz$, no se verificará el Teorema de Muestreo y se producirá solapamiento. Analicemos ahora qué pasará con la presencia de una frecuencia de $10kHz$ en la señal.

La frecuencia máxima posible con $F_m = 16kHz$, es de $8kHz$, como consecuencia la señal de $F = 10kHz$ será interpretada como su alias en el intervalo $-F_m/2 < F < F_m/2$. Los alias se pueden obtener a partir de la expresión:

$$F_k = \pm F_0 + kF_m, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (1.80)$$

siendo F_k los alias de F_0 para la frecuencia de muestreo F_m . Por ello:

$$10 = F_0 + k16 \implies F_0 = 10 - 16 = -6kHz. \quad (1.81)$$

donde se ha considerado $k = 1$. La frecuencia de $10kHz$ muestreada a $16kHz$ se comporta como si se tratase de una señal de $-6kHz$.

- c) Si la señal es de $18kHz$, tendremos $F_m > 2 \cdot 18 = 36kHz$, con lo que sigue sin cumplirse el Teorema de Muestreo y se producirá solapamiento:

$$F_k = F_0 + kF_m, \quad 18 = F_0 + k16 \implies F_0 = 2kHz. \quad (1.82)$$

La señal se interpretará como si su frecuencia fuese de $2kHz$. Téngase en cuenta que para k tomaremos un valor entero apropiado para que F_0 esté siempre en el intervalo $-F_m/2 < F_0 < F_m/2$.

★ ★

5. La señal analógica $x(t) = \text{sen}(450\pi t) + 3\text{sen}(1450\pi t)$ (t en s.) se muestrea con una frecuencia de 500Hz . Se pide:
- Determinar cuál es la tasa (o frecuencia) de Nyquist para esta señal.
 - Calcule a qué frecuencias aparecen los ‘alias’ debido al muestreo inapropiado.
 - ¿Cuáles son las frecuencias digitales de la señal resultante del muestreo?
 - Si las muestras se pasan a través de un conversor D/A ideal, ¿qué frecuencias tendría la señal analógica reconstruida?

Resolución:

- a) Las frecuencias presentes en la señal original son:

$$\Omega_1 = 450\pi = 2\pi F_1, \Omega_2 = 1450\pi = 2\pi F_2 \quad (1.83)$$

$$F_1 = 225\text{Hz}, F_2 = 725\text{Hz}. \quad (1.84)$$

Con lo que la tasa de Nyquist es $2F_{max} = 2 \cdot 725 = 1450\text{Hz}$. Como la tasa de muestreo es de 500Hz , y esta es menor que la $F_{Nyquist}$, se producirá “aliasing”.

- b) Utilizando la misma expresión que en el ejercicio 4 para determinar los alias:

$$F_k = F_0 + kF_m \implies 725 = F_0 + 500k \implies F_0 = 725 - 500 = 225\text{Hz}. \quad (1.85)$$

La frecuencia F_1 sí verifica el Teorema de Muestreo luego no sufre cambios.

- c) La señal muestreada será:

$$\begin{aligned} x(n) &= \sin\left(\frac{450\pi}{500}n\right) + 3\sin\left(\frac{1450\pi}{500}n\right) \\ &= \sin\left(\frac{450\pi}{500}n\right) + 3\sin\left(\frac{(1000 + 450)\pi}{500}n\right) \\ &= \sin\left(\frac{450\pi}{500}n\right) + 3\sin\left(\frac{450\pi}{500}n + 2\pi n\right) \\ &= \sin\left(\frac{450\pi}{500}n\right) + 3\sin\left(\frac{450\pi}{500}n\right) = 4\sin\left(\frac{9\pi}{10}n\right), \end{aligned} \quad (1.86)$$

donde hemos tenido en cuenta que la señal seno es periódica de período 2π . Las frecuencias digitales para ambas señales son idénticas:

$$f_1 = f_2 = \frac{9}{20} \quad (1.87)$$

- d) Al reconstruir la señal sabemos que:

$$f = \frac{F_a}{F_m}, \quad (1.88)$$

siendo F_a la frecuencia analógica:

$$F_{a_1} = F_{a_2} = fF_m = \frac{9}{20} \cdot 500 = 225\text{Hz}. \quad (1.89)$$

Luego la señal obtenida a la salida del conversor D/A será:

$$y(t) = \text{sen}(2 \cdot 225\pi t) + 3\text{sen}(2 \cdot 225\pi t) = 4\text{sen}(450\pi t), \quad (1.90)$$

como habíamos obtenido en el apartado (b).

6. La señal analógica $x(t) = 2\text{sen}(100\pi t) + 0.8\text{sen}(178\pi t)$ (t en s.) se muestrea con una frecuencia tal que la componente de mayor frecuencia tiene 27 muestras por periodo. Se pide:
- Representa 54 puntos de la señal obtenida.
 - ¿Cuántos periodos de la señal de menor frecuencia hay en la representación anterior?

Resolución:

- a) Las frecuencia analógicas presentes en $x(t)$ son::

$$\Omega_1 = 100\pi \implies F_1 = 50\text{Hz}. \quad (1.91)$$

$$\Omega_2 = 178\pi \implies F_2 = 89\text{Hz}. \quad (1.92)$$

El número de muestras en un período puede obtenerse a partir de la Fig. 1.5, siendo $N_{per} = \frac{F_m}{F}$.

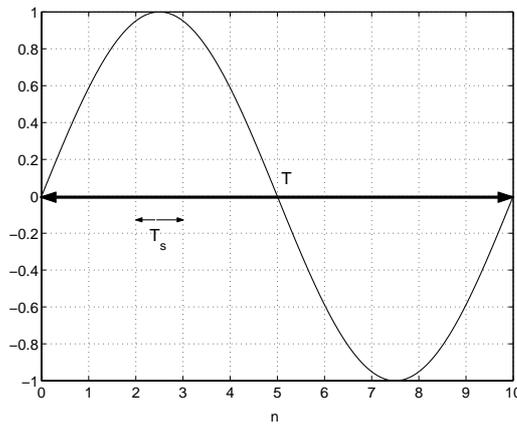


Figura 1.5: Determinación del número de muestras en un período de la señal.

Luego, $F_m = F_1 \cdot N_{per} = 89 \cdot 27 = 2403\text{Hz}$. La señal obtenida al muestrear será:

$$x(n) = 2\text{sen}\left(\frac{2 \cdot 50\pi}{2403}n\right) + 0.8\text{cos}\left(\frac{2 \cdot 89\pi}{2403}n\right). \quad (1.93)$$

Podemos hacer la representación con más detalle con el siguiente código de MATLAB:

```
>> n = 0:53;
>> Fs = 2403;
>> x = 2*sin(2*50*pi*n/Fs)+0.8*cos(2*89*pi*n/Fs);
>> stem(n,x)
```

cuyo resultado se muestra en la Fig. 1.6.

- b) El número de puntos por período para F_1 será:

$$N_{puntos} = \frac{F_m}{F_1} = \frac{2403}{50} \simeq 48 \quad (1.94)$$

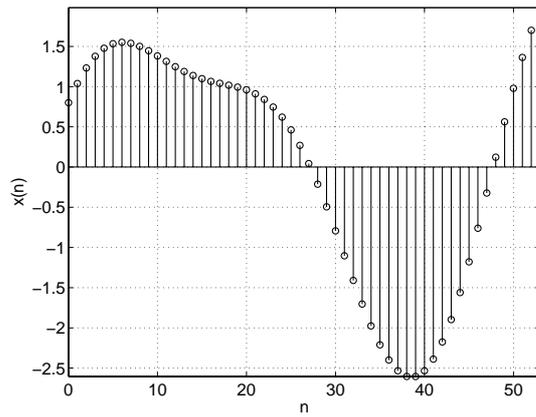


Figura 1.6: Muestras de la secuencia discreta obtenida.

El número de periodos vendrá dado por:

$$N_{\text{periodos}} = \frac{\text{Número de muestras}}{\text{Número de muestras por periodo}} = \frac{54}{48} = 1'125 \text{ periodos} \quad (1.95)$$

7. La señal analógica $x(t) = 0'5e^{j(2000\pi t)} + 3e^{j(10000\pi t + \pi/2)}$ (t en s.) se muestrea con una frecuencia $F_m = 8kHz$ y la señal resultante es reconstruida con un conversor D/A ideal utilizando la misma F_m . Determine la señal $x_r(t)$ obtenida tras este proceso.

Resolución:

La señal $x(t) = 0'5e^{j(2000\pi t)} + 3e^{j(10000\pi t + \pi/2)}$ (t en s.) es una señal compleja formada por dos exponenciales de frecuencias:

$$\Omega_1 = 2000\pi \implies F_1 = 1000Hz. \quad (1.96)$$

$$\Omega_2 = 10000\pi \implies F_2 = 5000Hz. \quad (1.97)$$

Si se muestrean con $F_m = 8kHz$, tenemos que $F_{Nyquist} = 4kHz$, y por tanto la segunda exponencial no cumple el Teorema de Muestreo, produciendo "aliasing".

La señal muestreada será, haciendo $t = nT$:

$$\begin{aligned} x(n) &= 0'5e^{j(\frac{2000\pi}{8000}n)} + 3e^{j(\frac{10000\pi}{8000}n)} \\ &= 0'5e^{j(\frac{\pi}{4}n)} + 3e^{j(2\pi - \frac{3\pi}{4})n} \\ &= 0'5e^{j\frac{\pi}{4}n} + 3e^{-j\frac{3\pi}{4}n} \end{aligned} \quad (1.98)$$

cuyas frecuencias digitales son $f_1 = 1/8$ y $f_2 = -3/8$. Si reconstruimos la señal, dado que $F_i = F_m \cdot f_i$ y $F_m = 8000Hz$, la señal analógica resultante será:

$$x_r(n) = 0'5e^{j2000\pi t} + 3e^{-j6000\pi t} \quad (1.99)$$

La señal de salida contiene dos exponenciales complejas al igual que la original pero la segunda ha cambiado su frecuencia de 5000 Hz. a -3000 Hz. como consecuencia del "aliasing".

8. Un sistema L.I.T. definido por el diagrama de bloques de la Fig. 1.7 es excitado con la señal $x(n) = 2^{-n}(u(n) - u(n - 4)) * \delta(n - 2)$. Se pide:
- Obtener la secuencia de muestras $x(n)$ y representarla gráficamente.
 - Calcular la respuesta impulsional del sistema.
 - Proponga un procedimiento para calcular la salida del sistema.

Resolución:

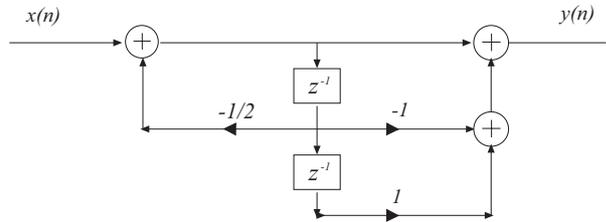


Figura 1.7: Diagrama de bloques del ejercicio 8.

- a) En primer lugar veamos cuál es la señal de entrada. Se trata de la convolución de dos secuencias pero una de ellas es una señal impulso, por lo que únicamente retardará a la otra secuencia.

Si denotamos:

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n) \quad (1.100)$$

con

$$x_1(n) = 2^{-n}(u(n) - u(n - 4)) \quad (1.101)$$

$$x_2(n) = \delta(n - 2), \quad (1.102)$$

podemos expresar:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)x_2(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{-k}(u(k) - u(k-4))\delta(n-k-2) \quad (1.103)$$

Sólo para $n = k - 2$, la secuencia $\delta(n - k - 2)$ no es nula, y en consecuencia:

$$x(n) = 2^{-(n-2)}[u(n-2) - u(n-6)] \quad (1.104)$$

Por tanto, la secuencia obtenida es:

$$x(n) = \{0, 0, 1, 2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, 0, 0, \dots\} \quad (1.105)$$

y su representación gráfica se muestra en la Fig. 1.8.

- b) Si calculamos la ecuación en diferencias del diagrama de bloques, definiendo una variable intermedia $w(n)$ tal como se muestra en la Fig.1.9 se obtiene fácilmente que:

$$w(n) = x(n) - \frac{1}{2}w(n-1) \quad (1.106)$$

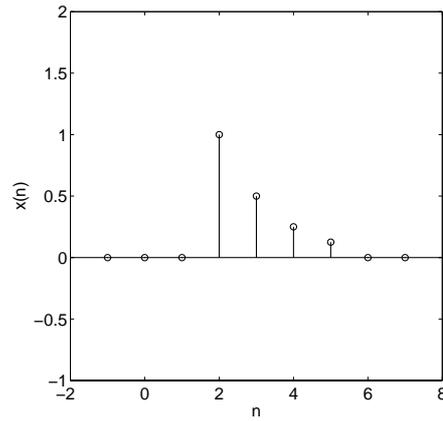


Figura 1.8: Secuencia de entrada al diagrama de bloques de la Fig. 1.7.

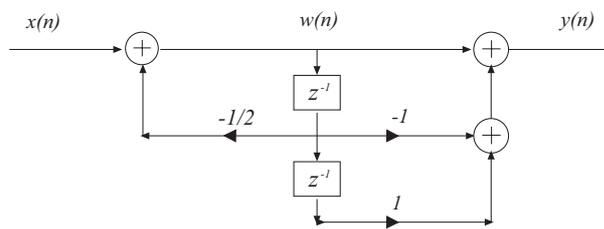


Figura 1.9: Utilización de una variable intermedia.

$$y(n) = w(n) - w(n-1] + w(n-2) \quad (1.107)$$

Para calcular la salida de este sistema hemos de conocer la respuesta impulsional del mismo ya que $y(n) = h(n) * x(n)$ ¹. Podemos considerar que tenemos dos sistemas en cascada de manera que la salida $y(n)$ viene proporcionada por la convolución de $h_2(n)$ por $w(n)$ que es la salida, a su vez, del sistema $h_1(n)$ ante la entrada $x(n)$, tal como se indica en la Fig.1.10. Por esto, la respuesta impulsional total vendrá dada por $h(n) = h_1(n) * h_2(n)$.

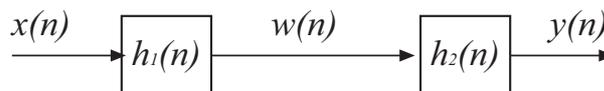


Figura 1.10: Representación en cascada del diagrama de bloques de la Fig. 1.9.

La ecuación en diferencias del sistema es:

$$w(n) = x(n) - \frac{1}{2}w(n-1] \quad (1.108)$$

Si $x(n) = \delta(n)$, y consideramos condiciones iniciales nulas, obtenemos:

$$h_1(n) = \delta(n) - \frac{1}{2}h_1(n-1] \quad (1.109)$$

¹Nótese que como, hasta el momento, no se ha introducido la Transformada Z, este ejemplo se resolverá sin hacer uso de ella. En el Capítulo 3 se introduce y se propone un gran número de ejemplos de su uso en situaciones similares a la planteada aquí.

A continuación, iterando:

$$\begin{aligned}
 n = 0 \quad h_1(0) &= \delta(0) - \frac{1}{2}h_1(-1) = 1 \\
 n = 1 \quad h_1(1) &= \delta(1) - \frac{1}{2}h_1(0) = -\frac{1}{2} \\
 n = 2 \quad h_1(2) &= \delta(2) - \frac{1}{2}h_1(1) = (-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}) \\
 &\vdots \quad \quad \quad \vdots
 \end{aligned} \tag{1.110}$$

Observamos que la expresión general es:

$$h_1(n) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n) \tag{1.111}$$

En cuanto al segundo sistema, tiene por ecuaciones en diferencias:

$$y(n) = w(n) - w(n-1) + w(n-2). \tag{1.112}$$

Si hacemos $w(n) = \delta(n)$,

$$h_2(n) = \delta(n) - \delta(n-1) + \delta(n-2) \tag{1.113}$$

Al igual que en el caso anterior, dando valores a n , obtenemos:

$$\begin{aligned}
 n = 0 \quad h_2(0) &= 1 \\
 n = 1 \quad h_2(1) &= -1 \\
 n = 2 \quad h_2(2) &= 1 \\
 n > 2 \quad h_2(n) &= 0
 \end{aligned} \tag{1.114}$$

De este modo, la respuesta impulsional total será:

$$h(n) = h_1(n) * h_2(n) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n) - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1) + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} u(n-2), \tag{1.115}$$

donde hemos aplicado la propiedad distributiva de la convolución respecto de la suma y la convolución con una secuencia impulso retardado.

- c) La salida se puede calcular como $y(n) = h(n) * x(n)$, donde podemos aplicar las propiedades distributiva y de desplazamiento temporal al convolucionar con una $\delta(n)$, si expresamos la entrada como una suma de impulsos retardados

$$x(n) = \delta(n-2) + \frac{1}{2}\delta(n-3) + \frac{1}{4}\delta(n-4) + \frac{1}{2}\delta(n-5) \tag{1.116}$$



9. Un sistema digital tiene la estructura representada de la Fig. 1.11. Sabiendo que $x(n)$ y $h(n)$ vienen definidas por las representaciones en la Fig. 1.12 y $h_1(n) = \{1, 1, 1, 1\}$. Calcule la salida del sistema.

Resolución:

Este sistema lo podemos ver como la conexión de dos sistemas en cascada y uno de ellos está formado por dos en paralelo (ver Fig. 1.13). La respuesta impulsional para el

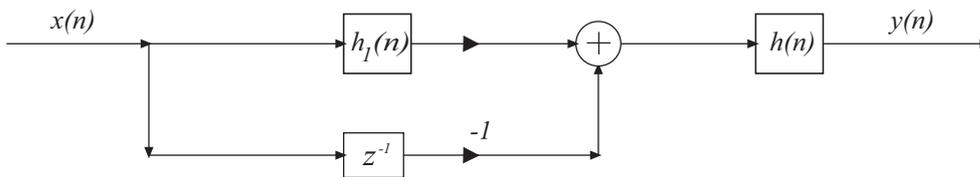


Figura 1.11: Diagrama de bloques del sistema.

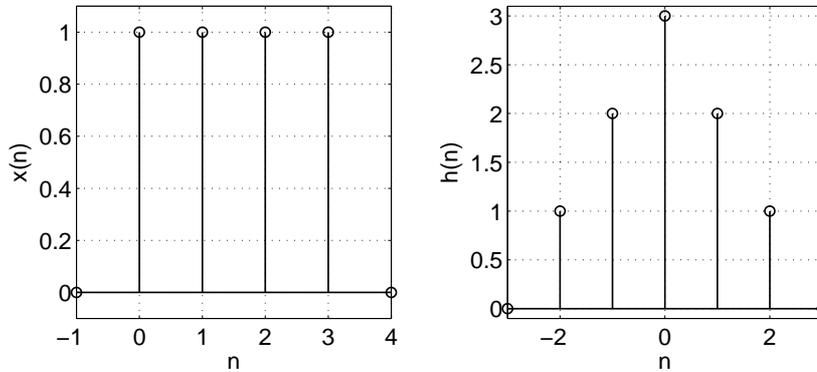


Figura 1.12: Muestras de la entrada y respuesta impulsional.

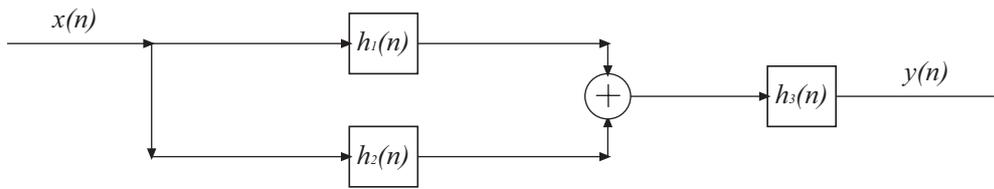


Figura 1.13: Esquema de conexión del sistema.

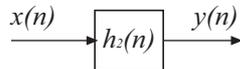


Figura 1.14: Relación entrada salida para el segundo sistema.

segundo sistema en paralelo es sencilla de calcular ya que la relación entre la entrada y la salida es, simplemente, $y(n) = -x(n - 1)$ (ver Fig. 1.14), luego $h_2(n) = \{0, -1\}$. Las respuestas impulsionales $h_1(n)$ y $h(n)$ las podemos poner como una suma de impulsos.

La respuesta impulsional total será:

$$\begin{aligned}
 h(n) &= [h_1(n) + h_2(n)] * h_3(n) \\
 &= (\delta(n) + \delta(n - 1) + \delta(n - 2) + \delta(n - 3) - \delta(n - 1)) * \\
 &\quad * (\delta(n + 2) + 2\delta(n + 1) + 3\delta(n) + 2\delta(n - 1) + \delta(n - 2))
 \end{aligned} \tag{1.117}$$

y, por tanto, las secuencias a convolucionar son:

$$h_a(n) = \{1, 0, 1, 1\} \tag{1.118}$$

$$h_b(n) = \{1, 2, \underset{\uparrow}{3}, 2, 1\} \quad (1.119)$$

$$h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_a(k)h_b(n-k) \quad (1.120)$$

Esta última expresión se puede resolver mediante el *método tabular* de cálculo de convoluciones. El caso general de la convolución de una secuencia de entrada $x(n)$ con la respuesta impulsional de un sistema $h(n)$, $y(n) = h(n) * x(n)$ se puede realizar siguiendo estos pasos:

- a) *Reflexión*: Reflejar $h(k)$ respecto de $k = 0$ para producir $h(-k)$.
- b) *Desplazamiento*: Desplazar $h(-k)$ n_0 veces hacia la derecha (izquierda) si n_0 es positivo (negativo), para obtener $h(n_0 - k)$.
- c) *Multiplicación*: Multiplicar $x(k)$ por $h(n_0 - k)$ para obtener la secuencia producto $x(k)h(n_0 - k)$.
- d) *Suma*: Sumar todos los valores de la secuencia producto anterior obteniéndose el valor de la salida en $n = n_0$ y $h(n_0)$.

En la Tabla 1.6 se muestra el cálculo de los distintos elementos de la respuesta impulsional:

Tabla 1.6: Cálculo de la respuesta impulsional del ejercicio 9 mediante el procedimiento de la tabulación.

k	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$h_a(k)$					1	0	1	1
$h(-2-k)$	1	2	3	2	1			
$h(-1-k)$		1	2	3	2	1		
$h(0-k)$			1	2	3	2	1	
$h(1-k)$				1	2	3	2	1
$h(2-k)$					1	2	3	2
$h(3-k)$						1	2	3
$h(4-k)$							1	2
$h(5-k)$								1

Multiplicando la primera fila por cada una de las siguientes y sumando los términos tenemos:

$$\begin{aligned}
 y(-2) &= 1, \\
 y(-1) &= 2, \\
 y(0) &= 4, \\
 y(1) &= 5, \\
 y(2) &= 6, \\
 y(3) &= 5, \\
 y(4) &= 3, \\
 y(5) &= 1.
 \end{aligned} \quad (1.121)$$

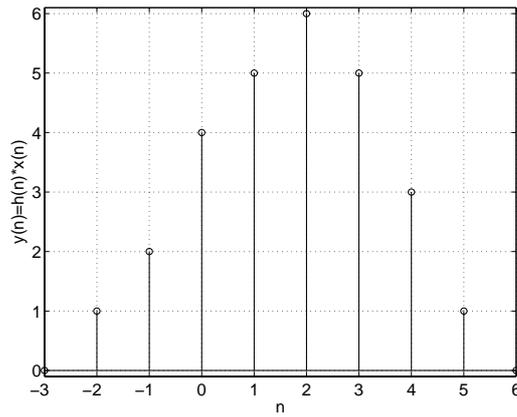


Figura 1.15: Salida del sistema del ejercicio 9.

En la Fig. 1.15 se muestra el resultado.

★ ★ ★

10. Determine la salida del sistema L.I.T. con respuesta impulsional $h(n)$ ante la entrada $x(n)$

$$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$$

y

$$h(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n, & n \geq 0. \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

Resolución: La secuencia de entrada es bilateral por lo que una forma alternativa de representación será:

$$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} u(-n-1) \quad (1.122)$$

La salida del sistema la obtenemos aplicando la convolución $y(n) = x(n) * h(n)$:

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k u(k) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} u(n-k) + \left(\frac{1}{2}\right)^k u(k) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-(n-k)} u(-(n-k)-1) \quad (1.123) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n u(k)u(n-k) + \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} u(k)u(-n+k-1). \end{aligned}$$

Calculemos los dos sumatorios por separado. Las señales escalón determinarán los límites de los sumatorios:

- *Primer sumatorio:* Calculamos por separado los términos para $n \geq 0$ y $n < 0$. Las condiciones $n \geq 0$, $k \geq 0$, $k \leq n$ nos proporcionan la siguiente expresión:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=0}^n u(k) = \left(\frac{1}{2}\right)^n (n+1), \text{ para } n \geq 0 \quad (1.124)$$

Los términos correspondientes a $n < 0$ se anula ya que las condiciones $k \geq 0$, $n < 0$ y $n \geq k$ son incompatibles.

■ *Segundo sumatorio:*

Para el caso $n \geq 0$, tenemos que $k \geq n + 1$ y $k \geq 0$, y por tanto:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-n} \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2(n+1)}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \dots = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad (1.125)$$

Para el caso $n < 0$, tenemos que $k \geq n + 1$ y $k \geq 0$, y por tanto:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \dots = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} \quad (1.126)$$

Luego la solución será:

$$y(n) = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n (n + 1) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] u(n) + \frac{4}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} u(-n - 1) \quad (1.127)$$

que equivale a:

$$y(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(n + \frac{4}{3}\right) u(n) + \frac{4}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} u(-n - 1) \quad (1.128)$$

Podemos hacerlo también sin descomponer el valor absoluto:

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k u(k) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{|n-k|} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{|n-k|} \quad (1.129)$$

Ahora tenemos que distinguir los dos casos $n - k > 0$ y $n - k < 0$. Si hacemos la distinción para $n \geq 0$ y $n < 0$, obtenemos las cuatro opciones analizadas anteriormente.

★ ★ ★

11. Un sistema estable BIBO verifica que para cualquier entrada acotada produce una salida acotada. Compruebe que para un sistema L.I.T. la estabilidad implica que $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty$.

Resolución:

Una entrada acotada verifica que $|x(n)| < M_x < \infty$, para $-\infty < n < \infty$. La salida de un sistema L.I.T. puede ser calculada mediante la suma de convolución:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n - k). \quad (1.130)$$

Si la salida está acotada:

$$|y(n)| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n - k) \right| \quad (1.131)$$

Aplicando la desigualdad triangular,

$$|y(n)| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| \cdot |x(n - k)|. \quad (1.132)$$

Como $x(n)$ está acotada, $|x(n - k)| < M_x$, y en consecuencia:

$$|y(n)| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| \cdot M_x. \quad (1.133)$$

Si la salida está acotada, $|y(n)| < M_y$, esto se verifica siempre que:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty \quad (1.134)$$

como queríamos demostrar. ★ ★

12. Considere el sistema definido por la ecuación en diferencias siguiente:

$$y(n) = x^2(n) + 1. \quad (1.135)$$

Se pide:

- a) Calcular la respuesta impulsional.
- b) Determinar $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)|$.
- c) ¿Contradice este resultado la condición de estabilidad BIBO del ejercicio 11?

Resolución:

- a) Para calcular la respuesta impulsional tomamos $x(n) = \delta(n)$:

$$h(n) = \delta^2(n) + 1, \quad h(0) = 1 + 1, \quad h(1) = 1, \quad h(-1) = 1 \quad (1.136)$$

y por tanto:

$$h(n) = \{1, \dots, \underset{\uparrow}{2}, 1, 1, \dots\} \quad (1.137)$$

La salida del sistema está acotada al igual que la entrada. Una cota es por ejemplo '3'.

- b) $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| = \infty$ ya que tenemos infinitos términos de valor '1'.
- c) Aplicando la definición, cualquier entrada acotada $|x(n)| < M_x < \infty$, produce una salida que siempre es menor que $M_x^2 + 1$, luego también está acotada. Por tanto, el sistema es estable BIBO.
- d) *A priori*, se puede pensar que dado que la suma de la respuesta impulsional no está acotada, no se cumpliría la definición y el sistema sería inestable. Sin embargo, estamos dejando de lado una condición esencial y es que el sistema debe ser L.I.T., es decir lineal e invariante temporal. Por tanto, deberemos comprobar estas características:

Para que un sistema sea lineal, los bloques de la Fig. 1.16 deben ser equivalentes. Nuestra secuencia de salida es:

$$\begin{aligned} y(n) = x^2(n) + 1 &= (\alpha x_1(n) + \beta x_2(n))^2 + 1 \\ &= \alpha^2 x_1^2(n) + \beta^2 x_2^2(n) + 2\alpha\beta x_1(n)x_2(n) + 1. \end{aligned} \quad (1.138)$$

Como las salidas que originarían $x_1(n)$ y $x_2(n)$ serían respectivamente:

$$y_1(n) = x_1^2(n) + 1, \quad y_2(n) = x_2^2(n) + 1, \quad (1.139)$$

se puede observar que $\alpha y_1(n) + \beta y_2(n) \neq y(n)$ por lo que el sistema no es lineal y, en consecuencia tampoco L.I.T. Por tanto, no podemos aplicar la condición derivada en el ejercicio 11. Concluimos que el sistema es estable BIBO y no hay ninguna contradicción.

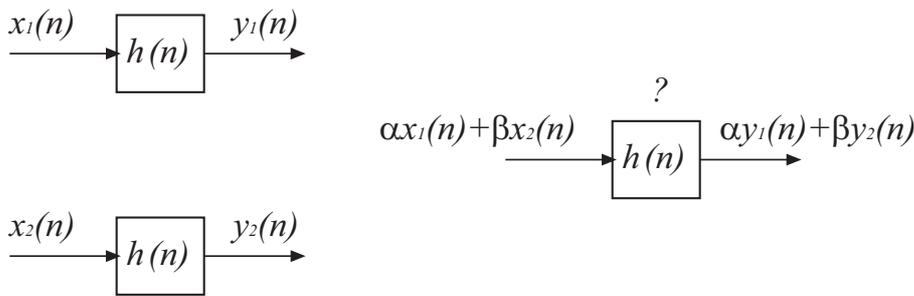


Figura 1.16: Verificación de la linealidad de un sistema.

13. Se sabe que un sistema es causal si, para cualquier pareja de entradas $x_1(n)$, $x_2(n)$ que son iguales para todo $n \leq n_0$ entonces las correspondientes salidas $y_1(n)$ e $y_2(n)$ son iguales para $n \leq n_0$. Verifique que para sistemas L.I.T., esta condición es equivalente a que $h(n) = 0, \forall n < 0$.

Resolución:

Para un sistema L.I.T., podemos calcular la salida como:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k). \quad (1.140)$$

Calculamos las salidas para ambas entradas en particular para $n = n_0$:

$$y_1(n_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x_1(n_0-k) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x_1(n_0-k) + \sum_{k=-\infty}^{-1} h(k)x_1(n_0-k) \quad (1.141)$$

$$y_2(n_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x_2(n_0-k) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x_2(n_0-k) + \sum_{k=-\infty}^{-1} h(k)x_2(n_0-k) \quad (1.142)$$

donde hemos dividido los sumatorios en dos términos de manera que en el primero de ellos nos aparecen las muestras $x_1(n)$ y $x_2(n)$ que coinciden. Nótese que dado que $k \geq 0$ en los sumatorios, $x_2(n_0-k)$, $x_1(n_0-k)$ serán las muestras de ambas secuencias que coinciden. Como $y_1(n_0) = y_2(n_0)$,

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} h(k)x_1(n_0-k) = \sum_{k=-\infty}^{-1} h(k)x_2(n_0-k) \quad (1.143)$$

y, por tanto,

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} h(k) \cdot [x_1(n_0-k) - x_2(n_0-k)] = 0. \quad (1.144)$$

Como k toma valores negativos $x_1(n_0-k) \neq x_2(n_0-k)$, en general, por lo que para que se verifique la relación es necesario que $h(k) = 0$, para $k < 0$, como se quería probar. ★

14. Dado el sistema de respuesta impulsional $h(n) = b^n u(n)$, $|b| < 1$. Definimos la constante de tiempo como el número de muestras necesarias para que la respuesta impulsional tenga un valor $h(n_\tau) = \frac{1}{e}h(0)$, donde e es la base de los logaritmos neperianos. Determine el valor de n_τ para valores de b próximos a la unidad.

Resolución:

El sistema $h(n) = b^n u(n)$ es una exponencial decreciente ya que $|b| < 1$. La condición para calcular n_τ es simplemente $b^{n_\tau} = \frac{1}{e} b^0$ con lo que $b^{n_\tau} = \frac{1}{e}$. Tomando logaritmos neperianos, conseguimos:

$$n_\tau \ln b = -1 \implies n_\tau = \frac{-1}{\ln b}. \quad (1.145)$$

Si desarrollamos en serie de Taylor el $\ln x$ en torno al punto $x = 1$, obtenemos:

$$\ln x = \ln(1) + (x - 1) - \frac{(x - 1)^2}{2} + \dots \simeq 0 + (x - 1) \quad (1.146)$$

Despreciando términos de orden superior, llegamos a:

$$n_\tau \simeq \left[\frac{1}{1 - b} \right], \quad (1.147)$$

donde $[\cdot]$ denota la parte entera del argumento.

15. Determine la respuesta impulsional de los sistemas definidos por:

$$h_1(n) = u(n) - u(n - 4)$$

$$h_2(n) = u(n + 4) - u(n)$$

cuando se combinan en paralelo y en cascada.

Resolución:

La respuesta impulsional de los sistemas descritos se muestran en la Fig. 1.17.

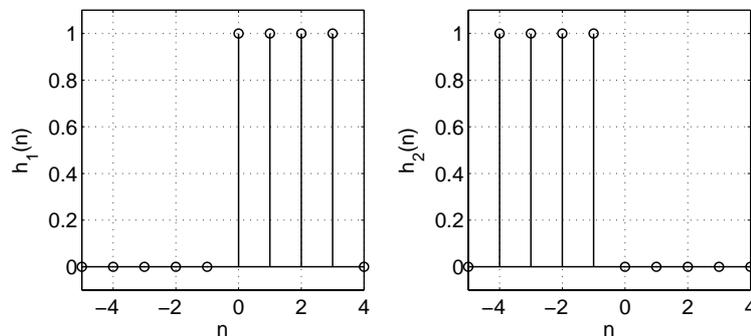


Figura 1.17: Respuesta impulsional de los sistemas del ejercicio 15.

- La conexión en paralelo:

$$h(n) = h_1(n) + h_2(n) = u(n) - u(n - 4) + u(n + 4) - u(n) \quad (1.148)$$

$$h(n) = u(n + 4) - u(n - 4) \quad (1.149)$$

- La conexión en cascada equivale a la convolución de ambas secuencias:

$$h(n) = h_1(n) * h_2(n) \quad (1.150)$$

Esto lo podemos resolver como en el ejercicio 9 dado que son secuencias discretas finitas. En la Tabla 1.7 se muestra el cálculo de los distintos elementos de la respuesta impulsional:

Tabla 1.7: Cálculo de la respuesta impulsional del ejercicio 15 mediante el método gráfico.

k	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$h_1(k)$					1	0	1	1
$h_2(-4-k)$	1	1	1	1	1			
$h_2(-3-k)$		1	1	1	1	1		
$h_2(-2-k)$			1	1	1	1	1	
$h_2(-1-k)$				1	1	1	1	1
$h_2(0-k)$					1	1	1	1
$h_2(1-k)$						1	1	1
$h_2(2-k)$							1	1

Multiplicando la primera fila por cada una de las siguientes y sumando los términos tenemos:

$$h(n) = \{1, 2, 3, 4, \underset{\uparrow}{3}, 2, 1\} \quad (1.151)$$

★

16. Calcule la combinación en cascada y paralelo de dos sistemas cuyas respuestas impulsionales son $h_1(n) = (j\alpha)^n u(n)$ y $h_2(n) = (-j\alpha)^n u(n)$, siendo $j = \sqrt{-1}$.

Resolución:

Para la combinación en paralelo,

$$h(n) = (j\alpha)^n u(n) + (-j\alpha)^n u(n) = j^n \alpha^n u(n) + (-j)^n \alpha^n u(n) = (j)^n [\alpha^n + (-1)^n \alpha^n] u(n) \quad (1.152)$$

De esta expresión observamos que los términos impares se anulan ya que el término entre paréntesis es cero. Además, $(j)^{4k} = 1$, para $k = 0, 1, \dots$ y $(j)^{4k+2} = -1$, para $k = 0, 1, \dots$, por lo que obtenemos:

$$h(n) = \begin{cases} 2\alpha^n, & n = 4k. \\ 0, & n = 4k + 1 \\ -2\alpha^n & n = 4k + 2 \\ 0 & n = 4k + 3 \end{cases} \quad (1.153)$$

La secuencia obtenida es real. Podríamos haber obtenido el mismo resultado expresando $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$ con lo que $h(n) = \alpha^n [e^{j\frac{\pi}{2}} + e^{-j\frac{\pi}{2}}] = 2\alpha^n \cos(\frac{\pi}{2}n)u(n)$.

Para la disposición en cascada:

$$\begin{aligned} h(n) &= h_1(n) * h_2(n) \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1(k)h_2(n-k) = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (j\alpha)^k (-j\alpha)^{n-k} u(k)u(n-k) = \\ &= (-1)^n j^n \alpha^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{-k} u(k)u(n-k) \end{aligned} \quad (1.154)$$

La primera función escalón es nula para $k < 0$ y la segunda para $k > n$. Por tanto, el sumatorio se convierte en:

$$h(n) = (-j\alpha)^n \sum_{k=0}^n (-1)^k = (-j\alpha)^n \frac{1 - (-1)^{n+1}}{2}. \quad (1.155)$$

Por tanto, para n impar tenemos que $h(n) = 0$ y para n par $h(n) = (-j\alpha)^n$ y, en consecuencia, la secuencia es compleja. Dado que $h_1(n)$ y $h_2(n)$ son secuencias causales, la secuencia resultante debe ser causal, como hemos obtenido.

17. La respuesta escalón de un sistema la podemos expresar como:

$$y(n) = h(n) * u(n). \quad (1.156)$$

Se pide:

- Expresar $y(n)$ en términos de $h(n)$ exclusivamente.
- Repita el apartado anterior considerando que el sistema es causal.
- Calcule $y(n)$ cuando $h(n) = u(n) - u(n - 3)$ y $h(n) = (-0'5)^n u(n)$.
- Determine la salida del sistema en régimen estacionario (cuando $n \rightarrow \infty$), para las salidas del apartado c).

Resolución:

a) La respuesta del sistema es:

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)u(n - k) \quad (1.157)$$

Los límites del sumatorio vienen especificados por $u(n - k)$ ya que la función escalón $u(n - k)$ será distinta de cero para $n \geq k$ y, por tanto,

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^n h(k) \quad (1.158)$$

b) Si el sistema es causal, $h(n) = 0$ para $n < 0$ luego a partir de la expresión anterior, se puede establecer:

$$y(n) = \left(\sum_{k=0}^n h(k) \right) u(n) \quad (1.159)$$

c) Aprovechando el resultado del apartado anterior y la propiedad distributiva de la convolución, se puede escribir:

$$\begin{aligned} y(n) &= u(n) * (u(n) - u(n - 3)) = u(n) * u(n) - u(n) * u(n - 3) \\ &= \sum_{k=0}^n u(k) - \sum_{k=0}^n u(k - 3) = (n + 1)u(n) - \sum_{k=3}^n u(k - 3) \\ &= (n + 1)u(n) - (n - 3 + 1)u(n - 3) = (n + 1)u(n) - (n - 2)u(n - 3). \end{aligned} \quad (1.160)$$

Si no aplicamos la propiedad anterior como $h(n) = u(n) - u(n - 3) = \delta(n) + \delta(n - 1) + \delta(n - 2)$, y aprovechando el resultado de convolucionar con $\delta(n - n_0)$:

$$x(n) * \delta(n - n_0) = x(n - n_0) \quad (1.161)$$

obtenemos:

$$y_2(n) = u(n) * [\delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2)] = u(n) + u(n-1) + u(n-2) \quad (1.162)$$

Si calculamos las primeras muestras de ambas secuencias comprobamos que coinciden dando como resultado:

$$y(n) = \{1, 2, 3, 3, 3, \dots\} \quad (1.163)$$

Para $h(n) = (-\frac{1}{2})^n u(n)$, que es una secuencia causal.

$$y(n) = \sum_{k=0}^n (-\frac{1}{2})^k = \frac{(-\frac{1}{2})^{n+1} - (-\frac{1}{2})^0}{(-\frac{1}{2}) - 1} \quad (1.164)$$

Donde hemos aplicado la expresión para el cálculo de la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica de razón menor que la unidad.

$$y(n) = \frac{2}{3} [1 - (-\frac{1}{2})^{n+1}] u(n). \quad (1.165)$$

d) Si consideramos valores grandes de n tenemos:

■ *Primer caso:*

$$y(n) = (n+1)u(n) - (n-2)u(n-3) \quad (1.166)$$

Para valores elevados de n ($n \rightarrow \infty$) tendremos:

$$y(n) \Big|_{n \rightarrow \infty} = [(n+1) - (n-2)]u(n) = 3u(n) \quad (1.167)$$

■ *Segundo caso:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y(n) = \frac{2}{3} [1 - (-\frac{1}{2})^{n+1}] u(n) = \frac{2}{3} u(n) \quad (1.168)$$

★

18. La correlación entre dos señales $x(n)$ e $y(n)$ viene dada por la expresión:

$$r_{xy}(l) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(k-l).$$

Determine qué relación existe entre la convolución de $x(n)$ e $y(n)$ y su correlación, r_{xy} .

Resolución:

Dadas dos secuencias $x(n), y(n)$ se define su convolución como:

$$x(n) * y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(n-k), \quad (1.169)$$

que podemos expresar como

$$x(n) * y(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(k)y(-(k-n)). \quad (1.170)$$

Si reflejamos la secuencia $y(n)$,

$$x(n) * y(-n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(k-n), \quad (1.171)$$

obtenemos la expresión de la correlación $r_{xy}(n)$ en el segundo término de la igualdad. Por tanto, la relación es

$$r_{xy}(n) = x(n) * y(-n). \quad (1.172)$$

Es decir, podemos aplicar los mismos procedimientos que hemos visto para la convolución y si empleamos el cálculo tabular, no será necesario reflejar la segunda secuencia.

19. Determine si la correlación de dos secuencias es conmutativa. ¿Qué relación existe entre $r_{xy}(n)$ y $r_{yx}(n)$?

Resolución:

La solución es inmediata a partir del ejercicio 18, ya que

$$r_{xy}(n) = x(n) * y(-n), \quad (1.173)$$

$$r_{yx}(n) = y(n) * x(-n). \quad (1.174)$$

Dado que la convolución es conmutativa,

$$r_{yx} = x(-n) * y(n), \quad (1.175)$$

si comparamos las ecuaciones (1.173) y (1.175), se observa que

$$r_{xy}(n) = r_{yx}(-n). \quad (1.176)$$

Luego no se cumple la propiedad conmutativa en la correlación y las secuencias obtenidas son versiones reflejadas respecto del origen

20. Determine la relación entrada-salida de los diagramas de la Fig. 1.18.

Resolución:

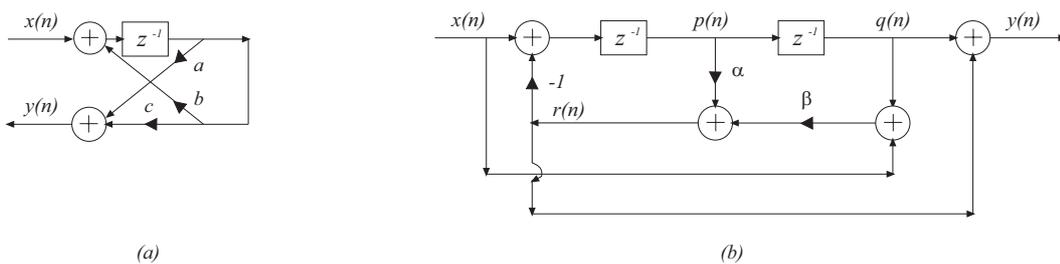


Figura 1.18: Diagramas de bloques del ejercicio 20.

- a) Si utilizamos una variable auxiliar $w(n)$ a la salida del bloque de retardo, podemos plantear las ecuaciones:

$$w(n) = x(n-1) + bw(n-1) \quad (1.177)$$

$$y(n) = aw(n) + cw(n) = (a+c)w(n) \quad (1.178)$$

Para eliminar la variable intermedia $w(n)$ consideramos la interconexión de los sistemas en cascada con respuestas impulsionales $h_1(n)$ y $h_2(n)$. El primer sistema tiene por entrada $x(n)$ y por salida $w(n)$, siendo esta última señal discreta la entrada del segundo cuya salida es $y(n)$ que es la salida final del sistema.

Si calculamos las respuestas impulsionales, considerando que el sistema es causal y las condiciones iniciales son nulas $w(-1) = 0$, obtenemos:

$$h_1(0) = \delta(n-1) + bh_1(n-1) = 0, \quad (1.179)$$

$$h_1(1) = 1 + bh_1(0) = 1, \quad (1.180)$$

$$h_1(2) = 0 + bh_1(1) = b, \quad (1.181)$$

$$h_1(3) = bh_1(2) = b^2. \quad (1.182)$$

Iterando se obtiene:

$$h_1(n) = b^{n-1}u(n-1). \quad (1.183)$$

La secuencia $h_2(n)$ es inmediata de calcular:

$$h_2(n) = (a+c)\delta(n) \quad (1.184)$$

Luego $h(n) = h_1(n) * h_2(n) = (a+c)b^{n-1}u(n-1)$ es la respuesta impulsional total del sistema. La relación entrada-salida la expresamos mediante la convolución de secuencias:

$$y(n) = h(n) * x(n) \quad (1.185)$$

- b) Si llamamos $p(n)$ a la salida del primer retardo, $q(n)$ a la salida del segundo y $r(n)$ al nodo anterior al multiplicador por -1 , podemos escribir:

$$p(n) = x(n-1) - r(n-1) \quad (1.186)$$

$$q(n) = p(n-1) \quad (1.187)$$

$$r(n) = \alpha p(n) + \beta(q(n) + x(n)) \quad (1.188)$$

$$y(n) = q(n) + k(n) \quad (1.189)$$

con lo que, sustituyendo $r(n)$ en $p(n)$:

$$p(n) = x(n-1) - \alpha p(n-1) - \beta p(n-2) - \beta x(n-1) \quad (1.190)$$

$$y(n) = p(n-1) + \alpha p(n) + \beta p(n-1) + \beta x(n) \quad (1.191)$$

Si ahora agrupamos términos:

$$p(n) = (1-\beta)x(n-1) - \alpha p(n-1) - \beta p(n-2) \quad (1.192)$$

$$y(n) = \beta x(n) + \alpha p(n) + (1+\beta)p(n-1) \quad (1.193)$$

En este caso vamos a dejar estas expresiones sin eliminar la variable intermedia. Más adelante veremos cómo, empleando la Transformada Z podemos eliminar dicha variable intermedia y obtener

$$y(n) = \beta x(n) + \alpha x(n-1) + x(n-2) - \alpha y(n-1) - \beta y(n-2). \quad (1.194)$$



21. Indique cuáles de las secuencias siguientes están acotadas:

- a) $x(n) = A\alpha^n$, $\alpha, A \in \mathbb{C}$, $|\alpha| < 1$, $-\infty < n < \infty$.
- b) $x(n) = A\alpha^n u(n)$, $\alpha, A \in \mathbb{C}$, $|\alpha| < 1$, $-\infty < n < \infty$.
- c) $x(n) = 2\text{sen}(w_0 n) - 5\text{cos}(w_1 n)$.
- d) $x(n) = \text{tan}(w_0 n)$.
- e) $x(n) = B\beta^n u(n)$, $\beta, B \in \mathbb{C}$, $|\beta| > 1$, $-\infty < n < \infty$.

Resolución:

- a) Las secuencias a) y b) están acotadas ya que A es una constante y dado que $|\alpha| < 1$, el valor máximo se obtiene con $n = 0$ y es A .
- b) La secuencia c) está acotada ya que las funciones seno y coseno lo están, podemos asegurar que la secuencia está contenida en el intervalo $[-7, 7]$.
- c) Esta secuencia no está acotada ya que para valores $w_0 n = (2k + 1)\pi/2$, siendo k un entero, la tangente diverge a $\pm\infty$.
- d) Esta secuencia, a diferencia de la a) y b) no está acotada ya que dado que $|\beta| > 1$, β^n crece indefinidamente a medida que n aumenta.

22. Una secuencia se dice que es par si se verifica que $x(n) = x(-n)$, mientras que si se cumple que $x(n) = -x(-n)$ se dice que la secuencia es impar. Comprobar que una secuencia cualquiera puede ponerse como suma de una secuencia par y una impar.

Resolución:

Consideremos la secuencia $x(n)$, a partir de la ella construimos las secuencias:

$$x_p(n) = \frac{1}{2}(x(n) + x(-n)) \quad (1.195)$$

$$x_i(n) = \frac{1}{2}(x(n) - x(-n)) \quad (1.196)$$

Comprobemos ahora que la suma de ambas es $x(n)$, que $x_p(n)$ es par y que $x_i(n)$ es impar:

$$x_p(n) + x_i(n) = \frac{1}{2}(x(n) + x(-n)) + \frac{1}{2}(x(n) - x(-n)) = x(n) \quad (1.197)$$

$$x_p(-n) = \frac{1}{2}(x(-n) + x(-(-n))) = x_p(n) \implies PAR \quad (1.198)$$

$$x_i(-n) = \frac{1}{2}(x(-n) - x(-(-n))) = -x_i(n) \implies IMPAR \quad (1.199)$$

Así, podemos afirmar que cualquier señal se puede expresar como suma de dos componentes, una par y la otra impar.

23. Una secuencia $x(n)$ se dice que es absolutamente sumable si $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)| \leq M_x < \infty$. Probar que si una secuencia es absolutamente sumable tiene energía finita pero que lo contrario no es cierto.

Resolución:

Si una secuencia es absolutamente sumable se cumple $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)| \leq M_x < \infty$, se tiene entonces que los términos de la secuencia verifican $|x(n)| < N_x, \forall n$. La energía de la señal viene dada por:

$$E = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)| \cdot |x(k)| \leq N_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)| \leq N_x M_x < \infty \quad (1.200)$$

Podemos probarlo también sabiendo que por ser absolutamente sumable,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < M_x < \infty, \quad (1.201)$$

luego

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)| \right)^2 \leq M_x^2 < \infty \quad (1.202)$$

pero

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)| \right)^2 \geq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)|^2 = E, \quad (1.203)$$

luego $E \leq M_x^2$ y la energía es finita.

Para probar que lo contrario no es cierto basta con poner un contra ejemplo. Consideremos la serie armónica $x(n) = (\frac{1}{n})$, $n > 0$. La energía de esta serie es $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ que sabemos que se trata de una serie convergente²; luego tiene energía finita. Sin embargo, no es absolutamente sumable ya que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ no converge. ★

24. Probar que para una secuencia con energía finita, se verifica:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_p^2(n) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_i^2(n),$$

siendo $x_p(n)$ y $x_i(n)$ las partes par e impar de $x(n)$, respectivamente.

Resolución:

A partir del ejercicio 22, sabemos que cualquier secuencia se puede escribir como suma de una secuencia par y otra impar. Luego:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x_p(n) + x_i(n))^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_p^2(n) + x_i^2(n) + 2x_p(n)x_i(n). \quad (1.204)$$

El término $2x_p(n)x_i(n) = \frac{1}{2}(x^2(n) - x^2(-n))$, y por tanto, el sumatorio se reduce a:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_p^2(n) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_i^2(n) + \frac{1}{2} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(n) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(-n) \right) \quad (1.205)$$

Pero la energía de una secuencia y de su reflejada es la misma por lo que el último término se anula quedando

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_p^2(n) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_i^2(n) \quad (1.206)$$



25. Determine la energía de la siguiente secuencia:

$$x(n) = \begin{cases} \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Resolución:

Aplicando la definición de energía se tiene que $E = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x^2(k) = \sum_{k=0}^{N-1} \cos^2\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)$. Si aplicamos la fórmula de Euler para expresar el coseno como suma de exponenciales complejas ($\cos x = (e^{jx} + e^{-jx})/2$), obtenemos:

$$E = \sum_{k=0}^{N-1} ((e^{2jwn} + e^{-2jwn} + 2)/4), \quad w = 2\pi k/N \quad (1.207)$$

Calculamos $\sum_{k=0}^{N-1} (e^{j2w})^n = \frac{e^{j2wN} - 1}{e^{j2w} - 1}$. Si sustituimos $w = 2\pi k/N$ y tenemos en cuenta que $e^{j2 \cdot 2\pi k} = 1$, este sumatorio es nulo. Lo mismo ocurre con el término de la exponencial negativa, luego:

$$E = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2} = \frac{N}{2} \quad (1.208)$$

26. Determinar si las señales siguientes son de energía o de potencia y cuándo procede calcularlas:

- a) Señal de impulso unidad: $x(n) = \delta(n)$.
- b) Señal de escalón unidad: $x(n) = u(n)$.
- c) Señal rampa: $x(n) = nu(n)$.
- d) $x(n) = A \cos(2\pi kn)$.
- e) $x(n) = Ae^{jw_0 n}$

Resolución:

a) Se trata, claramente, de una señal de energía ya que:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\delta(n)|^2 = 1 \quad (1.209)$$

La potencia media es cero ya que:

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |\delta(n)|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} = 0 \quad (1.210)$$

²El valor al que converge es $\frac{\pi^2}{6}$.

b) $x(n) = u(n)$

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u^2(n) = \sum_{n=0}^{\infty} 1 = \infty \quad (1.211)$$

por lo que no es una señal de energía.

Si ahora calculamos la potencia media,

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N u^2(n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^N 1^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N+1}{2N+1} = \frac{1}{2} \quad (1.212)$$

observamos que sí es una señal de potencia.

c) $x(n) = nu(n)$

Vemos que no es una señal de energía ya que:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 u(n) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 = \infty. \quad (1.213)$$

Calculemos ahora la potencia media:

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N (nu(n))^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^N n^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N^2 + (N-1)^2 + \dots + 1 + 0}{2N+1}. \quad (1.214)$$

En el numerador aparece una dependencia cuadrática con N mientras que el denominador es lineal luego la potencia media tiende a infinito. No se trata de una señal de potencia ni de energía.

d) Teniendo en cuenta el ejercicio 25:

$$E_N = \lim_{N \rightarrow \infty} A^2 \sum_{n=-N}^N \cos^2(wn) = \lim_{N \rightarrow \infty} A^2 \sum_{n=-N}^N \frac{e^{-2jw} + e^{2jwn} + 2}{4}, w = 2\pi k \quad (1.215)$$

$$\sum_{n=-N}^N (e^{-2jw})^n = \frac{e^{-2jw(N+1)} - e^{2jwN}}{e^{-2jwn} - 1} = \dots = \frac{\sin[2w(N + \frac{1}{2})]}{\sen(w)} \quad (1.216)$$

Para la otra exponencial aparece un término similar cambiando w por $-w$ por lo que la suma será idéntica. De este modo, la suma total será:

$$E = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{A^2}{4} \left[\frac{2\sin[2w(N + \frac{1}{2})]}{\sen(w)} + (2N+1) \right] \quad (1.217)$$

El primer término está acotado ya que $|\sen(2w(N+1))| < 1$ y el segundo diverge luego la energía es infinita.

Para calcular la potencia media se tiene

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{E_N}{2N+1} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{A^2}{4} \left[\frac{2\sin[2w(N + \frac{1}{2})]}{(2N+1)\sen(w)} + \frac{2N+1}{2N+1} \right] = \dots = \frac{A^2}{4} \quad (1.218)$$

ya que el numerador del primer término entre corchetes está acotado y el denominador tiende a cero.

$$e) \quad x(n) = Ae^{jw_0n}$$

Esta secuencia ha aparecido en el apartado anterior:

$$E = \lim_{N \rightarrow \infty} E_N, E_N = \sum_{n=-N}^N x^2(n) \quad (1.219)$$

$$E_N = A^2 \sum_{n=-N}^N e^{j2wn} = A^2 \frac{e^{j2wN} e^{j2w} - e^{-j2wN}}{e^{j2w} - 1} = \dots = A^2 \frac{\sin[2w(N + \frac{1}{2})]}{\sin(w)} \quad (1.220)$$

$$E = \lim_{N \rightarrow \infty} E_N < \infty \quad (1.221)$$

ya que el seno está acotado. Al ser una señal de energía finita la potencia media será nula.

27. Las secuencias siguientes representan un período fundamental de una secuencia sinusoidal del tipo $x(n) = A \cos(wn + \phi)$. Determine los valores de A, w, ϕ en cada caso:

$$a) \quad x(n) = \{0, -\sqrt{2}, -2, -\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}, 2, \sqrt{2}\}$$

$$b) \quad x(n) = \{-3, 3\}$$

$$c) \quad x(n) = \{0, 3/2, 0, -3/2\}$$

Resolución:

$$a) \quad x(n) = \{0, -\sqrt{2}, -2, -\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}, 2, \sqrt{2}\}$$

A partir de $x(n) = A \cos(wn + \phi)$ y dando valores a n :

$$x(0) = A \cos(\phi), \quad x(1) = A \cos(w + \phi), \quad x(2) = A \cos(2w + \phi), \quad \dots \quad (1.222)$$

Consideramos el primer término ($n = 0$):

$$x(0) = A \cos(\phi) \implies 0 = A \cos \phi \implies \phi = \cos^{-1}(0) = \pi/2, 3\pi/2 \quad (1.223)$$

Consideremos $\phi = \pi/2$, para $n = 4$:

$$\begin{aligned} A \cos(w \cdot 4 + \pi/2) &= 0 \implies \cos(4w + \pi/2) = 0 \\ 4w + \pi/2 &= \pi/2, 3\pi/2, \dots \end{aligned} \quad (1.224)$$

La primera solución implica que $w = 0$ con lo que la secuencia generada sería constante que no coincide con $x(n)$. Con la segunda solución obtenemos $w = \pi/4$. Ahora, para determinar A , podemos calcular $x(n)$ para $n = 1$,

$$-\sqrt{2} = A \cos(\pi/4 \cdot 1 + \pi/2) = A(-1/\sqrt{2}) \implies A = 2 \quad (1.225)$$

La secuencia es $x(n) = 2 \cos(\pi/4 + \pi/2)$ si tomamos $\phi = 3\pi/2$ en la ecuación (1.223), y sustituimos para $n = 4$ en (1.224), obtenemos $4w + 3\pi/2 = \pi/2$ con lo

que $w = -\pi/4$. Sustituyendo estos valores en la expresión general y considerando $n = 1$, obtenemos $A = 2$ luego:

$$x(n) = 2\cos(-\pi n/4 + 3\pi/2) \quad (1.226)$$

Si manipulamos esta expresión:

$$x(n) = 2\cos(-\pi n/4 + 3\pi/2) = 2\cos(-\pi n/4 + 2\pi - \pi/2) = 2\cos(\pi n/4 + \pi/2) \quad (1.227)$$

donde hemos tenido en cuenta que la señal coseno es periódica con período 2π y simétrica; es decir obtenemos la misma solución: $A = \sqrt{2}$, $w = \pi/4$, $\phi = \pi/2$.

b) $x(n) = \{-3, 3\}$
 \uparrow

Otra forma de hacerlo sería considerando que la señal es periódica con período $N = 2$ luego $x(n) = x(n + N)$. Si $x(n) = A\cos(\omega n + \phi)$, podemos desarrollar así:

$$A\cos(\omega n + \phi) = A\cos(\omega(n + N) + \phi) \implies \omega N = 2\pi \implies \omega = 2\pi/N \quad (1.228)$$

Como $N = 2$, tenemos que $\omega = \pi$.

Para calcular ϕ y A sólo necesitamos conocer el valor de la secuencia en dos puntos.

Para $n = 0$, tenemos:

$$-3 = A\cos(\phi) \quad (1.229)$$

$$-3 = A\cos(\pi + \phi) = A(\cos\pi\cos\phi - \sin\pi\sin\phi) = -A\cos\phi \quad (1.230)$$

La solución más sencilla es considerar $\phi = 0$, $A = 3$ pero existen infinitas soluciones del tipo:

$$A = \frac{3}{\cos\phi}, \quad \omega = \pi, \quad \phi \neq (2k + 1)\pi/2, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.231)$$

Se propone repetir el apartado a) utilizando este procedimiento.

c) $x(n) = \{0, 3/2, 0, -3/2\}$
 \uparrow

La señal es periódica de período $N = 4$ luego $\omega N = 2\pi$ por lo que $\omega = \pi/2$. Considerando $x(0)$ y $x(1)$, obtenemos:

$$n = 0: \quad 0 = A\cos(\pi/2 \cdot 0 + \phi) \implies \phi = \pi/2 \text{ ó } 3\pi/2 \quad (1.232)$$

$$n = 1: \quad 3/2 = A\cos(\pi/2 \cdot 1 + \pi/2) \implies A = -3/2 \quad (1.233)$$

con lo que:

$$A = -\frac{3}{2}, \quad \omega = 1, \quad \phi = \frac{\pi}{2} \quad (1.234)$$

Si elegimos $\phi = 3\pi/2$ obtenemos $A = 3/2$ pero si damos valores a n comprobamos que la secuencia obtenida es $\{0, -3/2, 0, 3/2\}$, que no es la correcta.



28. Determinar cuál es el período fundamental de la señal $x(n) = A\cos(\omega n)$ para los siguientes valores de ω :

$$\omega_1 = 0'75\pi, \omega_2 = 0'15\pi, \omega_3 = 0'48\pi, \omega_4 = \sqrt{2}\pi, \omega_5 = 0'23985\pi, \omega_6 = 0'33$$

Resolución:

Para que una senoide discreta sea periódica se debe cumplir que $x(n) = x(n + N)$ siendo N el período de la señal. Para una senoide discreta, su período debe ser un número racional.

$$N_1 = \frac{2\pi k}{0'75\pi} = \frac{8}{3} \implies \text{PERIÓDICA}, N_1 = 8, \text{ para } k = 3. \quad (1.235)$$

$$N_2 = \frac{2\pi k}{0'15\pi} = \frac{40}{3} \implies \text{PERIÓDICA}, N_2 = 40, \text{ para } k = 3. \quad (1.236)$$

$$N_3 = \frac{2\pi k}{0'48\pi} = \frac{25}{6} \implies \text{PERIÓDICA}, N_3 = 25, \text{ para } k = 6. \quad (1.237)$$

$$N_4 = \frac{2\pi k}{\sqrt{2}\pi} = \frac{2}{\sqrt{2}} \implies \text{NO RACIONAL} \implies \text{NO PERIÓDICA}. \quad (1.238)$$

$$N_5 = \frac{2\pi k}{0'23985\pi} = \frac{40000}{4797} \implies \text{PERIÓDICA}, N_5 = 40000, \text{ para } k = 4797. \quad (1.239)$$

$$N_6 = \frac{2\pi k}{0'33\pi} = \frac{200\pi}{33} \implies \text{NO RACIONAL} \implies \text{NO PERIÓDICA}. \quad (1.240)$$

29. Determinar si los siguientes sistemas verifican las propiedades de linealidad, causalidad, estabilidad BIBO e invarianza temporal:

a) $y(n) = 2x(n - n_0), n_0 > 0.$

b)

$$y(n) = \begin{cases} 6x(n - 5), & x(n) \leq 6. \\ 7x(n - 5), & x(n) > 6 \end{cases}$$

c) $y(n) = (n + 3)x(n - 3)$

d) $y(n) = 5nx^2(n)$

e) $y(n) = 3x(n + 3)$

f) $y(n) = x(n)\text{sen}(\omega n)$

g) $y(n) = \alpha x(-n)$ con $\alpha \neq 0$

h) $y(n) = \alpha + \sum_{k=-4}^4 x(n - k)$

Resolución:

$$a) \quad y(n) = 2x(n - n_0)$$

- *Linealidad:* Dadas las salidas para $x_1(n)$ y $x_2(n)$

$$y_1(n) = 2x_1(n - n_0), y_2(n) = 2x_2(n - n_0) \quad (1.241)$$

hay que demostrar que para $x_3 = ax_1(n) + bx_2(n)$, siendo a y b constantes arbitrarias:

$$y_3(n) = 2[ax_1(n - n_0) + bx_2(n - n_0)] \quad (1.242)$$

Desarrollando la última ecuación,

$$y_3(n) = 2ax_1(n - n_0) + 2bx_2(n - n_0) = ay_1(n - n_0) + by_2(n - n_0), \quad (1.243)$$

comprobamos que el sistema es lineal.

- *Causalidad:* Como $n_0 > 0$ la salida depende de entradas anteriores exclusivamente luego es causal.
- *Invarianza temporal:* Si para $x(n)$ tenemos la salida del sistema $y(n) = 2x(n - n_0)$. Si retardamos la secuencia de entrada k muestras, obtenemos para la salida $y_r(n) = 2x(n - k - n_0)$. Ahora, si retardamos la salida de la secuencia original, tenemos que $y(n - k) = 2x(n - n_0 - k)$. Como $y_r(n) = y(n - k)$, el sistema es invariante temporal.

Al tratarse de un sistema L.I.T., la estabilidad implica que $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty$. Para este sistema, $h(n) = 2\delta(n - n_0)$, luego $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| = 2 < \infty$. En consecuencia el sistema es L.I.T., causal y estable.

b)

$$y(n) = \begin{cases} 6x(n - 5), & x(n) \leq 6. \\ 7x(n - 5), & x(n) > 6 \end{cases}$$

- *Linealidad.* El sistema no es lineal. Consideremos las secuencias de entrada $x_1(n) = 3u(n)$ y $x_2(n) = 5u(n)$ que proporcionan las salidas $y_1(n) = 6 \cdot 3u(n - 5)$ e $y_2(n) = 6 \cdot 5u(n - 5)$. Una combinación lineal de ambas secuencias de forma que $\alpha = \beta = 1$, esto es, $x_3(n) = \alpha x_1(n) + \beta x_2(n) = x_1(n) + x_2(n) = 8u(n)$ proporcionaría una salida $y_3(n) = 7 \cdot 8u(n - 5)$ que no coincide con $y_1(n) + y_2(n)$. De aquí que una señal lineal a tramos sea no lineal.
- *Invarianza temporal.* Sea

$$x(n) = \begin{cases} 10, & n > n_0. \\ 0, & n \leq n_0 \end{cases} \quad (1.244)$$

Para $n > n_0$, tendríamos $y(n) = 7x(n - 5)$ ya que $x(n) = 10 > 6$. Si retardamos k muestras la secuencia de entrada tal que $n - k < n_0$, obtendremos $y_r(n) = 6x(n - k - 5)$ ya que $x(n) = 0 < 6$, y si retardamos la secuencia de salida obtendremos $y(n - k) = 7x(n - k - 5) \neq 6x(n - k - 5)$. En consecuencia el sistema no es invariante temporal.

- *Causalidad.* El sistema es causal pues sólo depende de entradas pasadas.

- *Estabilidad.* El sistema es estable BIBO ya que para cualquier entrada acotada por un valor M_x , la salida está acotada por $7M_x$.

En consecuencia, el sistema es lineal, no invariante temporal, causal y estable.

c) $y(n) = (n + 3)x(n - 3)$

- *Linealidad.* Para demostrar la linealidad, dadas las salidas $y_1(n)$ e $y_2(n)$ obtenidas para las entradas $x_1(n)$ y $x_2(n)$,

$$y_1(n) = (n + 3)x_1(n - 3), \quad y_2(n) = (n + 3)x_2(n - 3), \quad (1.245)$$

hay que demostrar que para $x_3(n) = ax_1(n) + bx_2(n)$, se cumple que $y_3(n) = ay_1(n) + by_2(n)$ con $a, b \in \mathbb{C}$.

$$y_3(n) = (n + 3)[ax_1(n) + bx_2(n)]. \quad (1.246)$$

Desarrollando la última ecuación,

$$\begin{aligned} y_3(n) &= (n + 3)ax_1(n - 3) + (n + 3)bx_2(n - 3) = \\ &= a(n + 3)x_1(n - 3) + b(n + 3)x_2(n - 3) = ay_1(n) + by_2(n), \end{aligned} \quad (1.247)$$

por lo que podemos afirmar que es lineal.

- *Invarianza temporal.* Para una entrada $x(n)$ tenemos que $y(n) = (n - 3)x(n - 3)$. Si retardamos la entrada, la salida para $x(n - k)$ será $y_r(n) = (n - 3)x(n - k - 3)$. Si ahora retardamos la salida original k muestras, tenemos:

$$y_{r0}(n) = y(n - k) = (n - k - 3)x(n - k - 3) \quad (1.248)$$

Como $y_r(n) \neq y_{r0}(n)$, el sistema no es invariante temporal.

- *Causalidad.* El sistema es causal pues su salida sólo depende de entradas pasadas.
- *Estabilidad.* El sistema no es estable ya que si, por ejemplo, consideramos $x(n) = u(n)$, que está acotada, la salida $y(n) = (n - 3)u(n - 3)$ es una rampa que no está acotada.

En consecuencia, el sistema es lineal, no invariante temporal, causal y no estable.

d) $y(n) = 5nx^2(n)$

- *Linealidad.* El término $x^2(n)$ hace que el sistema no sea lineal.
- *Invarianza temporal.* El término n multiplicando hace que el sistema no sea invariante temporal, como en el apartado c).
- *Estabilidad.* Considerando la misma secuencia acotada que en c) vemos que la salida no está acotada, por lo que no es estable.
- *Causalidad.* El sistema es causal ya que las muestras de salida sólo dependen de muestras actuales de entrada.

En consecuencia, el sistema no es lineal, ni invariante temporal, ni estable pero sí causal.

e) $y(n) = 3x(n + 3)$

El sistema tiene las mismas propiedades que a) salvo la causalidad ya que la salida depende de entradas futuras, por ejemplo para $n = 0$, $y(n) = 3x(3)$. En consecuencia, el sistema es lineal, invariante temporal, no causal y estable.

$$f) \quad y(n) = x(n)\text{sen}(wn)$$

Este sistema, denominado *modulador*, es fácil de comprobar que es lineal y causal. Su estabilidad está asegurada ya que si $x(n)$ está acotada, el producto lo estará pues $|\text{sen}(wn)| < 1$ luego podemos afirmar que es estable.

Sin embargo es variante temporal ya que si $x(n)$ produce una salida

$$y(n) = x(n)\text{sen}(wn) \quad (1.249)$$

entonces para $x(n-k)$, tendríamos $y_r(n) = x(n-k)\text{sen}(wn)$. Si retardamos $y(n)$ k muestras, tenemos:

$$y(n-k) = x(n-k)\text{sen}(w(n-k)) \neq y_r(n) \quad (1.250)$$

Luego no es invariante temporal. En resumen, el sistema es lineal, no es invariante temporal, pero sí es causal y estable.

$$g) \quad y(n) = \alpha x(-n) \text{ con } \alpha \neq 0$$

- *Linealidad y estabilidad.* Se puede demostrar de forma muy sencilla que el sistema es lineal y estable, cuya tarea se deja al lector.
- *Invarianza temporal.* No es invariante temporal ya que si $x(n)$ proporciona:

$$y(n) = \alpha x(-n), \quad (1.251)$$

para $x(n-k)$, tendremos $y_r(n) = \alpha x(-n-k)$. La salida retardada $y(n-k) = \alpha x(-n+k) = y_r(n)$. Esto lo podemos ver más claro con un ejemplo:

Sea $x(n) = \{1, 2, 3\}$ considerando $\alpha = 1$, tendremos la salida $y(n) = \{3, 2, 1\}$.

Si retardamos dos muestras, tenemos $x(n-2) = \{0, 0, 1, 2, 3\}$, $y_r(n) = \{3, 2, 1, 0, 0\}$. Si retardamos la salida original dos muestras también $y(n-2) = \{3, 2, 1\}$, las salidas no coinciden.

- *Causalidad.* El sistema no es causal, ya que por ejemplo, para $n = -1$, $y(-1) = \alpha x(1)$ depende de una entrada futura.

De esta forma, el sistema es lineal, no es invariante temporal ni causal pero sí es estable BIBO.

$$h) \quad y(n) = \alpha + \sum_{k=-4}^4 x(n-k)$$

- *Linealidad.* Para dos secuencias de entrada $x_1(n)$ y $x_2(n)$ se tiene que el sistema responde con las siguientes salidas:

$$y_1(n) = \alpha + \sum_{k=-4}^4 x_1(n-k) \quad (1.252)$$

y

$$y_2(n) = \alpha + \sum_{k=-4}^4 x_2(n-k). \quad (1.253)$$

Si tenemos una combinación lineal de dichas entradas $x_3(n) = Ax_1(n) + Bx_2(n)$, la salida correspondiente será:

$$\begin{aligned} y_3(n) &= \alpha + \sum_{k=-4}^4 Ax_1(n-k) + Bx_2(n-k) = \\ &= \alpha + A \sum_{k=-4}^4 x_1(n-k) + B \sum_{k=-4}^4 x_2(n-k) \neq Ay_1(n) + By_2(n), \end{aligned} \quad (1.254)$$

luego el sistema no es lineal.

- *Estabilidad.* El sistema es estable ya que si $x(n)$ está acotada, la salida es una suma finita de entradas, luego también estará acotada.
- *Invarianza temporal.* La salida ante una entrada retardada $x(n - n_0)$ es

$$y_r(n) = \alpha + \sum_{k=-4}^4 x_1(n - k - n_0), \quad (1.255)$$

y si retardamos la entrada, se obtiene la siguiente salida

$$y(n - n_0) = \alpha + \sum_{k=-4}^4 x_1(n - n_0 - k) \quad (1.256)$$

que coincide con $y_r(n)$.

- *Causalidad.* El sistema no es causal ya que, por ejemplo, para $n = 0$, la salida $y(n)$ depende de muestras futuras: $x(4)$, $x(2)$, $x(1)$.

El sistema no es lineal, es invariante temporal, no causal y estable.

30. Probar que si la entrada a un sistema L.I.T. es una señal periódica la salida es también periódica con el mismo periodo.

Resolución:

Si $x(n)$ es periódica, $x(n) = x(n + N)$, N es el periodo. La salida del sistema L.I.T. es:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n - k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n + N - k) = y(n + N) \quad (1.257)$$

que es la definición de periodicidad para la salida.

31. Probar que la secuencia

$$x(n) = \begin{cases} 0, & n \leq 0. \\ \sum_{k=1}^n u(n - k), & n > 0 \end{cases}$$

es una rampa unidad. Aplicando esto, calcule la respuesta a la rampa unidad del sistema definido por el diagrama de bloques de la Fig. 1.19. Considere que las condiciones iniciales son nulas.

Resolución:

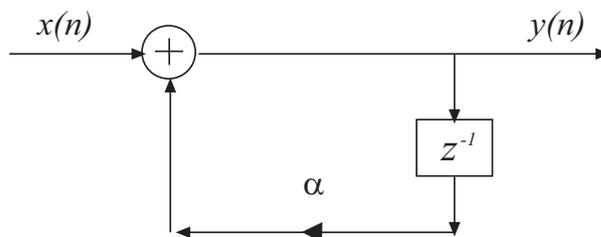


Figura 1.19: Diagrama de bloques del ejercicio 31.

La secuencia rampa unidad está definida como $r(n) = nu(n)$. Para $n \leq 0$, tenemos $r(n) = x(n) = 0$. Para $n > 0$, $x(n) = \sum_{k=1}^n u(n - k) = (\sum_{k=1}^n 1)u(n - 1) = nu(n - 1)$

ya que tenemos la suma de n términos iguales a uno. Para el caso de $n = 0$ también hay coincidencia, $x(n) = nu(n)$.

La ecuación en diferencias del sistema es $y(n) = y(n-1) \cdot \alpha + x(n)$. Para calcular la salida necesitamos $h(n)$, considerando $x(n) = \delta(n)$:

$$h(n) = \delta(n) + h(n-1)\alpha \quad (1.258)$$

Iterando, se llega a $h(n) = \alpha^n u(n)$, donde hemos considerado condiciones iniciales nulas ($h(-1) = 0$). La salida del sistema será:

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} ku(k)\alpha^{n-k}u(n-k) = \alpha^n \sum_{k=0}^n k\alpha^{-k}. \end{aligned} \quad (1.259)$$

Este sumatorio se puede expresar de forma compacta como sigue:

$$y(n) = \alpha^n \left[-(1/\alpha)^{n+1} \alpha(-n + (n+1)\alpha)/(-1 + \alpha)^2 + \alpha/(-1 + \alpha)^2 \right] u(n). \quad (1.260)$$

Este desarrollo se puede realizar consultando un libro de tablas matemáticas estándar o bien empleando las funciones de matemática simbólica que tiene MATLAB de la siguiente forma

```
>>syms k n alpha
>>symsum(k*alpha^(-k),1,n)
>> -(1/alpha)^(n+1)*alpha*(-n+(n+1)*alpha)/(-1+alpha)^2 + alpha/(-1+alpha)^2
```

donde se han definido, en primer lugar, las variables a emplear y, a continuación, se ha empleado el comando `symsum`, que devuelve en una cadena de texto el resultado para el sumatorio introducido. ★

32. Si $f(n) = x_1(n) * x_2(n)$ y $g(n) = x_1(n - N_1) * x_2(n - N_2)$. Determinar la relación entre $f(n)$ y $g(n)$.

Resolución:

Sabemos que $x(n) * \delta(n - k) = x(n - k)$ luego:

$$g(n) = [x_1(n) * \delta(n - N_1)] * [x_2(n) * \delta(n - N_2)]. \quad (1.261)$$

Aplicando la propiedad conmutativa de la convolución obtenemos

$$g(n) = x_1(n) * x_2(n) * \delta(n - N_1) * \delta(n - N_2) = f(n) * \delta(n - N_1 - N_2) \quad (1.262)$$

Luego

$$g(n) = f(n - (N_1 + N_2)). \quad (1.263)$$

Es decir, si calculamos la convolución de secuencias retardadas, la secuencia resultante experimenta un retardo total igual a la suma de los retardos parciales.

Podemos obtener este mismo resultado calculando directamente $g(n)$:

$$\begin{aligned}
 g(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k - N_1)x_2(n - k - N_2) \stackrel{m=k-N_1}{=} \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)x_2(n - m - N_1 - N_2) \stackrel{n'=n-N_1-N_2}{=} \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)x_2(n' - m) = f(n') = f(n - N_1 - N_2),
 \end{aligned} \tag{1.264}$$

tal y como se pretendía demostrar.

33. Sabemos que la convolución es conmutativa pero, en general, no es asociativa. Verifíquelo utilizando las secuencias siguientes:

$$\begin{aligned}
 x_1(n) &= B, B \text{ constante } \forall n, \\
 x_2(n) &= u(n), x_3(n) = \delta(n) - \delta(n - 1)
 \end{aligned}$$

Resolución:

Para ello deberemos probar la equivalencia entre $x_1(n) * (x_2(n) * x_3(n))$ y $(x_1(n) * x_2(n)) * x_3(n)$. Así pues, calculamos cada parte por separado:

- $(x_2(n) * x_3(n)) = u(n) * [\delta(n) - \delta(n - 1)] = u(n) * \delta(n) - u(n) * \delta(n - 1) = u(n) - u(n - 1) = \delta(n)$ Por tanto, $x_1(n) * (x_2(n) * x_3(n)) = \delta(n)B = B$.
- $(x_2(n) * x_1(n)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Bu(n - k) = B \sum_{k=-\infty}^{\infty} 1 = \infty$

No es necesario continuar ya que los resultados son distintos. Esta propiedad sólo se verifica si las secuencias son unilaterales y absolutamente convergentes.

34. El sistema definido por el diagrama de bloques de la Fig. 1.20 tiene un sistema H que actúa sobre una secuencia $w(n)$ proporcionando la salida $c + d \cdot w(n)$ siendo a , b , c , y d son constantes. Determine si se trata de un L.I.T. ¿Es causal? ¿Es estable?

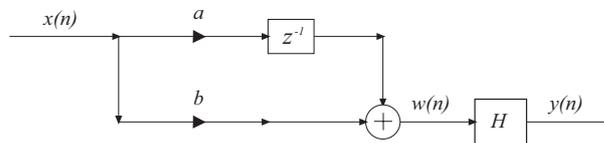


Figura 1.20: Diagrama de bloques del ejercicio 34.

- La ecuación en diferencias del sistema es:

$$w(n) = ax(n - 1) + bx(n) \tag{1.265}$$

$$y(n) = H(w(n)) = c + d(ax(n - 1) + bx(n)) \tag{1.266}$$

$$y(n) = c + adx(n - 1) + dbx(n) \tag{1.267}$$

Estudiamos la linealidad. Aunque aparentemente parece lineal, veámoslo más en detalle. Las señales de salida para $x_1(n)$ y $x_2(n)$ son, respectivamente:

$$y_1(n) = c + adx_1(n-1) + dbx_1(n) \quad (1.268)$$

$$y_2(n) = c + adx_2(n-1) + dbx_2(n) \quad (1.269)$$

y para $\alpha x_1(n) + \beta x_2(n)$,

$$\begin{aligned} y(n) &= c + ad(\alpha x_1(n-1) + \beta x_2(n-1)) + db(\alpha x_1(n) + \beta x_2(n)) \\ &= c + (adx_1(n-1) + dbx_1(n))\alpha + (adx_2(n-1) + dbx_2(n))\beta \neq \alpha y_1(n) + \beta y_2(n) \end{aligned} \quad (1.270)$$

Luego el sistema no es lineal.

- El sistema es causal ya que sólo depende de entradas presentes y pasadas.
- La invarianza temporal es fácil de verificar:

$$x(n) \implies y(n) = c + adx(n-1) + dbx(n) \quad (1.271)$$

$$x(n-k) \implies y_r(n) = c + adx(n-1-k) + dbx(n-k) \quad (1.272)$$

Si retardamos la salida $y(n-k) = c + adx(n-1-k) + dbx(n-k)$. Observamos que $y(n-k) = y_r(n)$ por lo que el sistema es invariante temporal.

- Si la entrada está acotada, la salida también lo estará. Si $|x(n)| < M_x$, la salida está acotada por $|y(n)| < c + (ad + db)M_x$

★

35. Un sistema digital que se encuentra inicialmente en reposo se puede representar mediante el diagrama de bloques de la Fig. 1.21. Determine las siete primeras muestras de la secuencia de salida del sistema para la entrada:

$$x(n) = \begin{cases} \text{sen}(\pi n/6), & n \geq 0. \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

siendo $r(n)$ una rampa unidad.

Resolución:

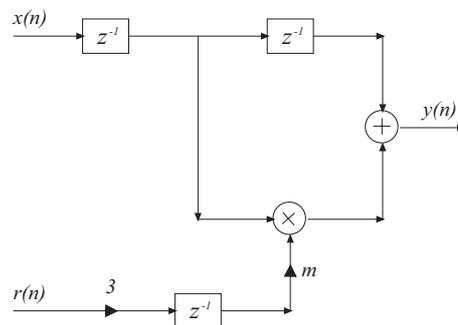


Figura 1.21: Diagrama de bloques del ejercicio 35.

La ecuación en diferencias del sistema es:

$$y(n) = x(n-2) + (x(n-1) \cdot m \cdot 3 \cdot r(n-1)) \quad (1.273)$$

Las siete primeras muestras de $x(n)$ son:

$$x(n) = \{0, \underset{\uparrow}{\text{sen}} \frac{\pi}{6}, \text{sen} \frac{\pi}{3}, \text{sen} \frac{\pi}{2}, \text{sen} \frac{2\pi}{3}, \text{sen} \frac{5\pi}{6}, \text{sen} \pi\} \quad (1.274)$$

$$x(n) = \{0, \underset{\uparrow}{\frac{1}{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0, \dots\} \quad (1.275)$$

$$r(n) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\} \quad (1.276)$$

Sustituyendo en la ecuación (1.273), obtenemos los valores de las primeras muestras:

$$y(0) = x(-2) + [x(-1) \cdot m \cdot 3 \cdot r(-1)] = 0 \quad (1.277)$$

$$y(1) = x(-1) + [x(0) \cdot m \cdot 3 \cdot r(0)] = 0 \quad (1.278)$$

$$y(2) = x(0) + [x(1) \cdot m \cdot 3 \cdot r(1)] = \frac{3}{2}m \quad (1.279)$$

$$y(3) = x(1) + [x(2) \cdot m \cdot 3 \cdot r(2)] = \frac{1}{2} + 3m\sqrt{3} \quad (1.280)$$

$$y(4) = x(2) + [x(3) \cdot m \cdot 3 \cdot r(3)] = \frac{\sqrt{3}}{2} + 9m \quad (1.281)$$

$$y(5) = x(3) + [x(4) \cdot m \cdot 3 \cdot r(4)] = 1 + 6m\sqrt{3} \quad (1.282)$$

$$y(6) = x(4) + [x(5) \cdot m \cdot 3 \cdot r(5)] = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{15}{2}m \quad (1.283)$$

36. Dadas las secuencias $x(n)$ e $y(n)$ definidas como:

$$x(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1. \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$y(n) = \begin{cases} n, & 0 \leq n \leq N-1. \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Determine, sin realizar la convolución cuál será el valor máximo de $x(n) * y(n)$ y el índice temporal de dicho máximo.

Resolución:

De la definición de ambas secuencias se sabe que son secuencias causales de N términos cada una. La convolución tendrá $2N - 1$ términos. Dado que los términos de ambas secuencias son positivos, los términos $x(k)y(n - k)$ de la convolución contribuirán positivamente a la suma global, luego el máximo se producirá cuando el número de términos producto coincida con la longitud de las secuencias que se corresponde con el índice $N - 1$. El valor será:

$$\sum_{k=0}^{N-1} x(k)y(N-1-k), \quad (1.284)$$

es decir, multiplicamos una secuencia por la otra invertida. En nuestro caso tendremos:

$$\sum_{k=0}^{N-1} 1 \cdot (-k + N - 1) = \dots = \frac{(N-1)N}{2} \quad (1.285)$$

donde hemos aplicado la fórmula para el cálculo de la suma de N términos en una progresión aritmética:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_N)N}{2}, \quad (1.286)$$

siendo a_1 el primer término y a_N el último término. ★

37. Considere el sistema digital cuya relación entre la entrada y la salida viene dada por la ecuación en diferencias siguiente:

$$y(n) = ay(n-1) + bx(n).$$

Sabiendo que se trata de un sistema causal. Determine:

- La salida del sistema general considerando que las condiciones iniciales son no nulas, esto es, que se cumple que $y(-1) \neq 0$.
- Determine si el sistema es L.I.T.
- Repita el proceso del apartado b) suponiendo que $y(-1) = 0$.

Resolución:

- a) Para calcular la salida del sistema procedemos de forma iterativa, haciendo:

$$y(n) = ay(n-1) + bx(n) \quad (1.287)$$

donde $n \geq 0$ pues el sistema es causal. Dando valores a n , tenemos:

$$y(0) = ay(-1) + bx(0) \quad (1.288)$$

$$y(1) = ay(0) + bx(1) = \dots = a^2y(-1) + abx(0) + bx(1) \quad (1.289)$$

$$y(2) = ay(1) + bx(2) = \dots = a^3y(-1) + a^2bx(0) + abx(1) + bx(2) \quad (1.290)$$

$$\vdots \quad (1.291)$$

Observamos que la expresión general que se puede inducir es:

$$y(n) = a^{n+1}y(-1) + b \sum_{k=0}^n a^k x(n-k), n \geq 0 \quad (1.292)$$

- b) Para determinar la linealidad calculamos la salida con

$$x(n) = \alpha x_1(n) + \beta x_2(n), \alpha, \beta \text{ constantes} \quad (1.293)$$

$$y(n) = a^{n+1}y(-1) + b \sum_{k=0}^n a^k [\alpha x_1(n-k) + \beta x_2(n-k)], n \geq 0 \quad (1.294)$$

$$y(n) = a^{n+1}y(-1) + \alpha \{b \sum_{k=0}^n a^k x_1(n-k)\} + \beta \{b \sum_{k=0}^n a^k x_2(n-k)\}, n \geq 0 \quad (1.295)$$

El término $a^{n+1}y(-1)$ hace que el sistema no sea lineal. Aunque sabemos que el sistema no es L.I.T., veamos si es invariante temporal. Para $x(n - n_0)$ tenemos:

$$y_r(n) = a^{n+1}y(-1) + b \sum_{k=0}^{n-n_0} a^k x(n-n_0-k) \quad (1.296)$$

Si calculamos

$$y(n - n_0) = a^{n-n_0+1}y(-1) + b \sum_{k=0}^{n-n_0} a^k x(n - n_0 - k) \quad (1.297)$$

El sistema no es invariante temporal debido al término que contiene la condición inicial.

- c) Si el sistema está inicialmente en reposo ($y(-1) = 0$), se cancela este término en las ecuaciones anteriores, y el sistema sí es L.I.T.

En general, un sistema discreto causal definido por la ecuación en diferencias:

$$\sum_{k=0}^M b_k x(n - k) = \sum_{k=0}^N a_k y(n - k) \quad (1.298)$$

será un sistema L.I.T. sólo si las condiciones iniciales son nulas, es decir, se encuentra inicialmente en reposo $y(-1) = y(-2) = \dots = y(-N) = 0$.

38. Una aplicación de la descomposición en cascada de sistemas es la determinación de sistemas inversos. Un sistema con respuesta impulsional $h_2(n)$ se dice que es el inverso de otro con respuesta impulsional $h_1(n)$ si $h_1(n) * h_2(n) = \delta(n)$. Esto se utiliza para recuperar señales ruidosas recibidas a través de un canal de comunicaciones, convolucionando la señal recibida con el sistema inverso de dicho canal. Consideremos un canal de comunicaciones que tenga por respuesta impulsional $h_1(n) = a^n u(n)$. Se pide que:
- Determine el sistema inverso de dicho canal.
 - Verifique que cualquier secuencia $x(n)$, al pasar por el sistema de la Fig. 1.22, es reconstruida a la salida perfectamente.

Resolución:

El sistema inverso viene dado por la interconexión en cascada mostrada en la Fig. 1.22. Siendo $h_I(n)$ el sistema inverso. Se debe verificar $h(n) * h_I(n) = \delta(n)$ como $h(n) = a^n u(n)$ sabemos que



Figura 1.22: Definición de sistema inverso.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_I(k) a^{n-k} u(n - k) = \delta(n) \quad (1.299)$$

$$\sum_{k=-\infty}^n h_I(k) a^{n-k} = \delta(n) \quad (1.300)$$

El sistema inverso debe ser causal ya que $h(n)$ lo es luego sólo calculamos para $n \geq 0$.

Iterando,

$$\begin{aligned}
 n = 0 : \quad h_I(0)a^0 = \delta(0) = 1 &\implies \boxed{h_I(0) = 1} \\
 n = 1 : \quad h_I(0)a^1 + h_I(1) = 0 &\implies \boxed{h_I(1) = -a} \\
 n = 2 : \quad h_I(0)a^2 + h_I(1)a^1 + h_I(2) = 0 &\implies \boxed{h_I(2) = 0} \\
 n = 3 : \quad h_I(0)a^3 + h_I(1)a^2 + h_I(2)a^1 + h_I(3) = 0 &\implies \boxed{h_I(3) = 0}
 \end{aligned}
 \tag{1.301}$$

Los términos a partir de $n = 2$ son todos nulos luego podemos escribir

$$h_I(n) = \delta(n) - a\delta(n-1) \tag{1.302}$$

Hay que comprobar que $h(n) * h_I(n) = \delta(n)$:

$$\begin{aligned}
 a^n u(n) * (\delta(n) - a\delta(n-1)) &= a^n u(n) * \delta(n) - a^{n+1} u(n) * \delta(n-1) \\
 &= a^n u(n) - a^n u(n-1) = a^n (u(n) - u(n-1)) = a^n \delta(n) = \delta(n),
 \end{aligned}
 \tag{1.303}$$

donde hemos aplicado las propiedades distributiva de la convolución y la de desplazamiento al convolucionar con una $\delta(n)$. Dado que la convolución de la respuesta del canal y del sistema inverso es una secuencia $\delta(n)$, la salida $y(n) = x(n) * \delta(n) = x(n)$ es una copia idéntica de la señal a la entrada. ★ ★

39. Dados los sistemas L.I.T. definidos por los diagramas de bloques de la Fig. 1.23, se desea determinar la expresión general de la respuesta impulsional cuando son conectados según los diagramas de bloques de la Fig. 1.24.

Resolución:

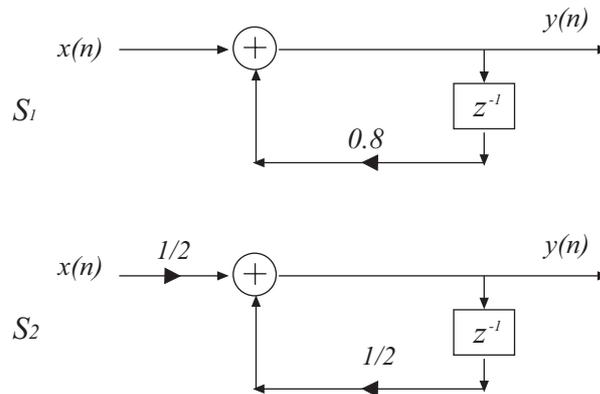


Figura 1.23: Diagramas de bloques de los sistemas del ejercicio 39.

En primer lugar determinaremos las respuestas impulsionales de cada sistema. Las ecuaciones en diferencias son:

$$s_1 : y(n) = 0.8y(n-1) + x(n) \tag{1.304}$$

$$s_2 : y(n) = \frac{1}{2}y(n-1) + \frac{1}{2}x(n) \tag{1.305}$$

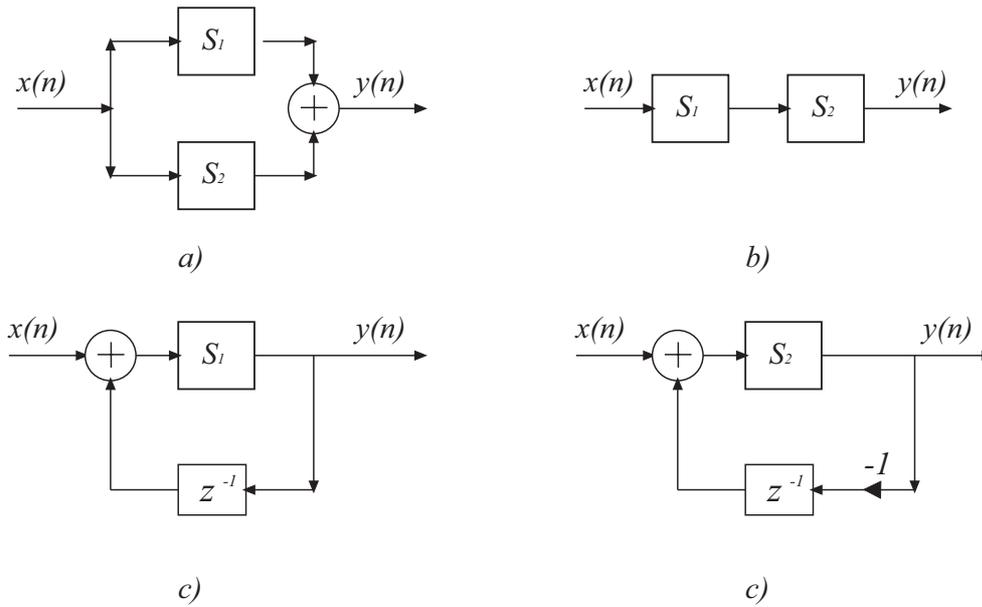


Figura 1.24: Diferentes conexiones para los sistemas S_1 y S_2 .

Sabemos que al ser L.I.T. los sistemas deben estar originalmente en reposo. Haciendo $x(n) = \delta(n)$, es sencillo determinar $h_1(n)$ y $h_2(n)$ como en ejercicios anteriores. Obtenemos:

$$h_1(n) = 0'8^n u(n) \quad (1.306)$$

$$h_2(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u(n) \quad (1.307)$$

Veamos cada una de las conexiones solicitadas:

a) Este diagrama de bloques se corresponde con una conexión paralelo luego:

$$h(n) = h_1(n) + h_2(n) = 0'8^n u(n) + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u(n) \quad (1.308)$$

b) En este caso tenemos una descomposición en serie:

$$\begin{aligned} h(n) &= h_1(n) * h_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1(k) h_2(n-k) = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} 0'8^k u(k) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k+1} u(n-k) \end{aligned} \quad (1.309)$$

Las condiciones para los límites de los sumatorios las proporcionan las $u(n)$ y por tanto: $k \geq 0$ y $k \leq n$, con lo que si $n \geq 0$:

$$h(n) = \sum_{k=0}^n 0'8^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k+1} = \dots = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \frac{(0'8 \cdot 2)^{n+1} - 1}{0'8 \cdot 2 - 1} \quad (1.310)$$

Si $n < 0$, las tres condiciones no son compatibles. Además, como $h_1(n)$ y $h_2(n)$ son causales, el sistema resultante también lo será:

$$h(n) = \left(\frac{0'8^{n+1}}{0'6} - \frac{(1/2)^{n+1}}{0'6} \right) u(n) = \frac{4}{3} 0'8^n u(n) - \frac{5}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) \quad (1.311)$$

- c) En primer lugar determinamos la ecuación en diferencias del sistema a partir del esquema de la Fig. 1.25:

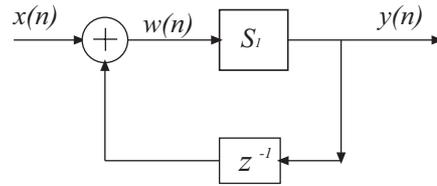


Figura 1.25: Cálculo de la ecuación en diferencias del ejercicio 39c).

$$w(n) = y(n-1) + x(n) \quad (1.312)$$

$$y(n) = 0.8y(n-1) + w(n) \quad (1.313)$$

y por tanto

$$y(n) = 0.8y(n-1) + y(n-1) + x(n) = 1.8y(n-1) + x(n) \quad (1.314)$$

Por comparación con la ecuación en diferencias de s_1 obtenemos que

$$h(n) = (1.8)^n u(n) \quad (1.315)$$

- d) Procediendo de forma análoga al anterior y definiendo las mismas variables intermedias, obtenemos las ecuaciones en diferencias siguientes:

$$y(n) = S_2[w(n)] \quad (1.316)$$

$$w(n) = x(n) - y(n-1) \quad (1.317)$$

luego

$$y(n) = 0.5[y(n-1) + w(n)] \quad (1.318)$$

$$w(n) = x(n) - y(n-1) \quad (1.319)$$

con lo que

$$y(n) = 0.5x(n) \quad (1.320)$$

La respuesta impulsional será por tanto:

$$h(n) = \frac{1}{2}\delta(n) \quad (1.321)$$

★

40. Aplicando las propiedades de la interconexión de sistemas determine la respuesta impulsional del diagrama de bloques mostrado en la Fig. 1.26.

Resolución:

Se verán en primer lugar qué salidas hay en cada nodo:

- Nodo 1: $h_1(n) * x(n)$
- Nodo 2: $h_1(n)$ en cascada con $h_2(n)$, por lo que se tiene $h_1(n) * h_2(n) * x(n)$.

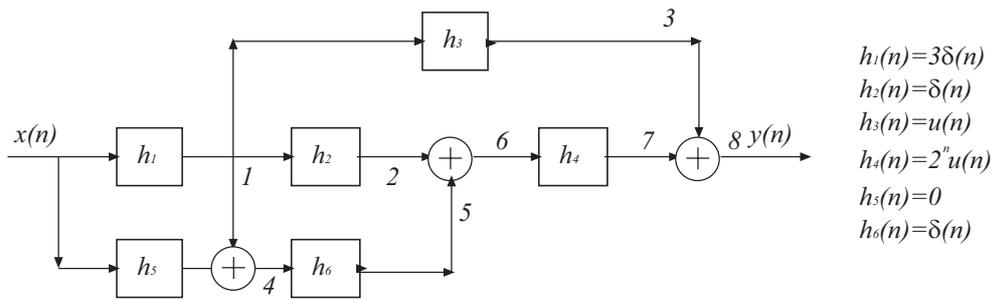


Figura 1.26: Diagrama de bloques del ejercicio 40.

- **Nodo 3:** $h_1(n)$ en cascada con $h_3(n)$, por lo que se tiene $h_1(n) * h_3(n) * x(n)$.
- **Nodo 4:** Paralelo de los sistemas h_1 y h_5 , por lo que se tiene $(h_1(n) + h_5(n)) * x(n)$.
- **Nodo 5:** Nodo 4 en cascada con $h_6(n)$, por lo que se tiene $(h_1(n) + h_5(n)) * h_6(n) * x(n)$.
- **Nodo 6:** Paralelo de las salidas de nodos 2 y 5, por lo que se tiene:

$$[h_1(n) * h_2(n) + (h_1(n) + h_5(n)) * h_6(n)] * x(n) \quad (1.322)$$

- **Nodo 7:** Cascada de la salida del nodo 6 con $h_4(n)$, por lo que se tiene:

$$[h_1(n) * h_2(n) + (h_1(n) + h_5(n)) * h_6(n)] * h_4(n) * x(n) \quad (1.323)$$

- **Nodo 8:** Paralelo de las salidas de nodos 3 y 7, por lo que se tiene:

$$h(n) = h_1(n) * h_3(n) + [h_1(n) * h_2(n) + (h_1(n) + h_5(n)) * h_6(n)] * h_4(n) * x(n) \quad (1.324)$$

Sustituyendo valores obtenemos:

$$h(n) = 3\delta(n) * u(n) + [3\delta(n) * \delta(n) + (3\delta(n) + 0) * \delta(n)] * 2^n u(n) \quad (1.325)$$

$$h(n) = 3u(n) + [3\delta(n) + 3\delta(n)] * 2^n u(n) = 3u(n) + 6 \cdot 2^n u(n) \quad (1.326)$$

$$h(n) = 3(2^{n+1} + 1)u(n) \quad (1.327)$$

Dado que $h_5(n) = 0$ podríamos haber eliminado esta rama en el diagrama original.

41. Determine cuáles de los siguientes sistemas L.I.T. son de respuesta impulsional finita (“*Finite Impulse Response*”, FIR) y cuáles de respuesta impulsional infinita (“*Infinite Impulse Response*”, IIR). Indique también cuáles son recursivos y cuáles no.

a) $y(n) = \delta(n) - 5\delta(n - 3)$

b) $y(n) = 2y(n - 1) + x(n)$

c) $y(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(n - k)$

d) $y(n) = x(n) - x(n - 5) + y(n - 1)$

e) $y(n) = x(n) + 2x(n - 1) + 3x(n - 2) + y(n - 3)$

Discuta las siguientes cuestiones:

a) ¿Un sistema recursivo es siempre IIR?

b) ¿Un sistema de tipo IIR puede implementarse mediante un diagrama de bloques con un número finito de retardos?

c) ¿Es cierto que un sistema IIR nunca podrá realizarse físicamente ya que sus respuestas impulsionales tienen infinitos términos?

Resolución:

Para determinar si un sistema es FIR o IIR deberemos calcular la respuesta impulsional. Para determinar si el sistema es recursivo verificaremos si la ecuación en diferencias depende de entradas anteriores únicamente (no recursiva) o si también depende de salidas anteriores (recursiva).

a) La respuesta impulsional de este sistema es $h(n) = \{1, 0, 0, -5\}$. El sistema es FIR, no recursivo.

b) $h(n) = 2h(n - 1) + \delta(n)$ considerando condiciones iniciales nulas, ya que es L.I.T. obtenemos que $h(n) = 2^n u(n)$, como $h(n)$ tiene infinitos términos no nulos, es de tipo IIR. En la ecuación en diferencias observamos que se trata de un sistema recursivo.

c) La respuesta impulsional es $h(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \delta(n - k)$. Si damos valores a n , los primeros N términos de la respuesta impulsional valen siempre $1/N$:

$$h(0) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \delta(0 - k) = \frac{1}{N} \quad (1.328)$$

$$h(1) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \delta(1 - k) = \frac{1}{N} \quad (1.329)$$

$$\vdots \quad (1.330)$$

$$h(N - 1) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \delta(N - 1 - k) = \frac{1}{N} \quad (1.331)$$

$$h(N) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \delta(N - k) = 0 \quad (1.332)$$

A partir de $n = N$ todos los términos son nulos:

$$h(n) = \left\{ \underset{\uparrow}{\frac{1}{N}}, \dots, \frac{1}{N} \right\}, \quad N \text{ términos} \quad (1.333)$$

Se trata de un sistema FIR no recursivo.

d) La respuesta impulsional será:

$$h(n) = \delta(n) - \delta(n - 5) + h(n - 1) \quad (1.334)$$

$$h(0) = \delta(0) - \delta(0 - 5) + h(0 - 1) = 1 \quad (1.335)$$

$$h(1) = \delta(1) - \delta(1 - 5) + h(1 - 1) = 1 \quad (1.336)$$

$$h(2) = \delta(2) - \delta(2 - 5) + h(2 - 1) = 1 \quad (1.337)$$

$$h(3) = \delta(3) - \delta(3 - 5) + h(3 - 1) = 1 \quad (1.338)$$

$$h(4) = \delta(4) - \delta(4 - 5) + h(4 - 1) = 1 \quad (1.339)$$

$$h(5) = \delta(5) - \delta(5 - 5) + h(5 - 1) = 0 \quad (1.340)$$

$$h(6) = \delta(6) - \delta(6 - 5) + h(6 - 1) = 0 \quad (1.341)$$

$$\vdots \quad (1.342)$$

Por tanto la respuesta impulsional es

$$h(n) = \left\{ \underset{\uparrow}{1}, 1, 1, 1, 1 \right\} \quad (1.343)$$

Se trata de un sistema FIR implementado recursivamente.

e) La respuesta impulsional es

$$h(n) = \delta(n) + 2\delta(n - 1) + 3\delta(n - 2) + h(n - 3) \quad (1.344)$$

dando valores a n obtenemos

$$h(n) = \left\{ \underset{\uparrow}{1}, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, \dots \right\} \quad (1.345)$$

La respuesta impulsional es infinita luego el sistema es IIR. El sistema es recursivo.

De los anteriores ejemplos podemos concluir que un sistema recursivo no necesariamente es de tipo IIR. Sin embargo, un sistema IIR obligatoriamente debe implementarse de forma recursiva. Un sistema IIR puede realizarse mediante un diagrama de bloques con un número finito de retardos. Por ejemplo, el sistema b) puede implementarse como en la Fig. 1.27, donde se aprecia la realimentación de la salida hacia la entrada, típica de sistemas recursivos.

El sistema definido en d) es FIR y lo podemos implementar como en el diagrama de bloques de la Fig. 1.28, ya que a partir de su respuesta impulsional podemos expresar su salida como

$$y(n) = x(n) + x(n - 1) + x(n - 2) + x(n - 3) + x(n - 4) \quad (1.346)$$

aunque también podemos emplear la estructura de la Fig. 1.29.

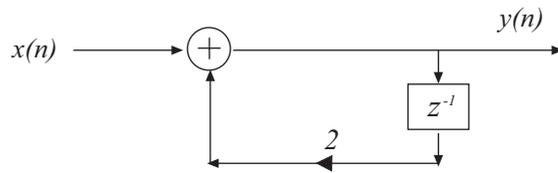


Figura 1.27: Implementación del sistema del ejercicio 41b)

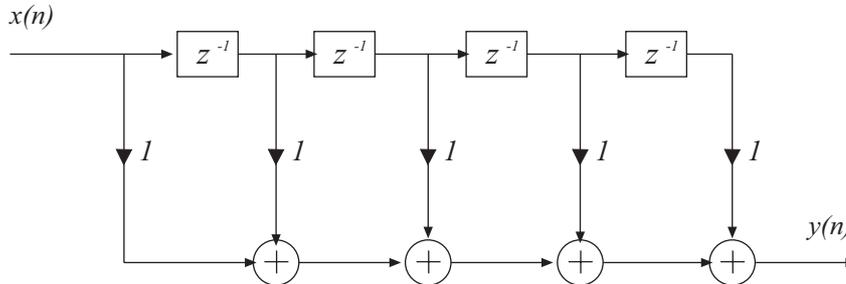


Figura 1.28: Implementación no recursiva del sistema del ejercicio 41d)

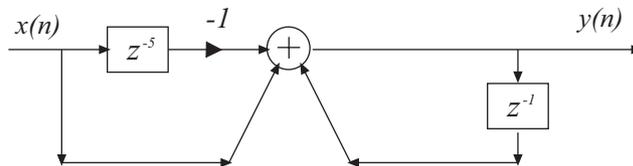


Figura 1.29: Implementación recursiva del sistema del ejercicio 41d)

42. Un sistema sencillo utilizado para eliminar ruido aleatorio de una señal es el promediador (a veces conocido como *suavizador*) de ventana móvil de N muestras. Su ecuación en diferencias es la siguiente:

$$y(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(n-k).$$

Expresé esta ecuación en diferencias de manera que se pueda calcular de forma recursiva.

Resolución:

Vamos a calcular la relación que existe entre dos muestras consecutivas de $y(n)$:

$$y(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(n-k) \quad (1.347)$$

$$y(n-1) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(n-k-1) = \frac{1}{N} \left(\sum_{k=1}^N x(n-k) \right) \quad (1.348)$$

$$y(n) - y(n-1) = \frac{1}{N} \left[\sum_{k=0}^{N-1} x(n-k) - \sum_{k=1}^N x(n-k) \right] \quad (1.349)$$

Del término entre corchetes quedará sólo el factor con $k = 0$ del primer sumatorio y

$k = N$ del segundo, el resto se cancelan:

$$y(n) - y(n-1) = \frac{1}{N} (x(n) - x(n-N)). \quad (1.350)$$

Se llega a la expresión recursiva del promediado móvil de N términos.

43. La salida de un sistema digital causal viene dada, para las primeras muestras por:

$$\begin{aligned} n = 0 \quad y(0) &= x(0) \\ n = 1 \quad y(1) &= x(1) + \frac{x(0)}{2} \\ n = 2 \quad y(2) &= x(2) + \frac{x(1)}{2} + \frac{x(0)}{3} \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \end{aligned}$$

Se pide:

- Determinar la expresión general de $y(n)$ y su respuesta impulsional.
- Indicar si se trata de un sistema L.I.T.

Resolución:

a) La relación de recurrencia observando la serie es

$$y(n) = \sum_{k=0}^n \frac{x(n-k)}{k+1} \quad (1.351)$$

con lo que la respuesta impulsional será

$$h(n) = \sum_{k=0}^n \frac{\delta(n-k)}{k+1} = \frac{1}{n+1}. \quad (1.352)$$

Como el sistema es causal, se tendrá:

$$h(n) = \frac{1}{n+1} u(n). \quad (1.353)$$

b) Comprobemos que el sistema es lineal.

Sea $x(n) = \alpha x_1(n) + \beta x_2(n)$ con α , β , $x_1(n)$ y $x_2(n)$ arbitrarias. Tendremos:

$$y(n) = \sum_{k=0}^n \frac{\alpha x_1(n-k) + \beta x_2(n-k)}{k+1} = \alpha \sum_{k=0}^n \frac{x_1(n-k)}{k+1} + \beta \sum_{k=0}^n \frac{x_2(n-k)}{k+1} \quad (1.354)$$

Observamos que sí es lineal ya que cada sumatorio coincide con la salida para las entradas $x_1(n)$ y $x_2(n)$ respectivamente.

Para ver si es invariante temporal calculamos la salida para una entrada retardada n_0 muestras:

$$y_r(n) = \sum_{k=0}^n \frac{x(n-k-n_0)}{k+1}. \quad (1.355)$$

Si ahora retardamos la salida:

$$y(n - n_0) = \sum_{k=0}^{n-n_0} \frac{x(n - n_0 - k)}{k + 1} \quad (1.356)$$

Observamos que ambas ecuaciones no coinciden por lo que no es un sistema L.I.T.

★

44. Definimos el coeficiente de correlación entre dos secuencias $x(n)$ e $y(n)$ como

$$\rho_{xy}(k) = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} x(n)y(n-k)}{[\sum_{n=0}^{N-1} x^2(n) \sum_{n=0}^{N-1} y^2(n)]^{1/2}} \equiv \frac{r_{xy}(l)}{\sqrt{r_{xx}(0)r_{yy}(0)}}.$$

Determinar $\rho_{xy}(l)$ entre las secuencias $x(n) = (0.5)^n u(n)$, $y(n) = 3^n u(-n - 1)$. A partir de esta expresión determinar el valor máximo de $\rho_{xy}(l)$.

Resolución:

Sabemos que $r_{xy}(l) = x(l) * y(-l) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(k-l)$, luego el cálculo de la correlación se reduce a una convolución reflejando la segunda secuencia:

$$p(n) = y(-n) = 3^{-n} u(n - 1). \quad (1.357)$$

Por tanto:

$$r_{xy}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k u(k) 3^{-(n-k)} u((n-k) - 1) \quad (1.358)$$

$$r_{xy}(n) = 3^{-n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^k u(k) u(n - k - 1) \quad (1.359)$$

Las señales escalón determinan los índices del sumatorio $k \geq 0$ y $k \leq n - 1$. Si $n < 0$, no hay términos en el sumatorio ya que las secuencias que convolucionamos son causales. Por tanto, nos centramos en $n \geq 0$:

$$r_{xy}(n) = 3^{-n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{3}{2}\right)^k = 3^{-n} \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}{\frac{3}{2} - 1} = \dots = 2[2^{-n} - 3^{-n}]u(n). \quad (1.360)$$

Calculemos $r_{xx}(0)$ y $r_{yy}(0)$. De la definición de la función de autocorrelación:

$$r_{xx}(l) = x(l) * x(-l) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)x(k-l), \quad (1.361)$$

se deduce que

$$r_{xx}(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)|^2 \quad (1.362)$$

que coincide con la energía de la señal $x(n)$. Por tanto:

$$r_{xx}(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} u(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = 4/3 \quad (1.363)$$

y

$$r_{yy}(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 3^k u(-k-1) 3^k u(-k-1) = \sum_{k=1}^{\infty} (3^{-2})^k = 1/8 \quad (1.364)$$

Luego

$$\sqrt{r_{xx}(0)r_{yy}(0)} = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{1}{8}} = \sqrt{\frac{1}{6}}, \quad (1.365)$$

y, por tanto, la expresión obtenida será:

$$\rho_{xy}(n) = 2\sqrt{6}[2^{-n} - 3^{-n}]u(n) \quad (1.366)$$

El valor máximo se produce para $n = 1$, $\rho_{xy}(1) = 2\sqrt{6}/6 = \sqrt{6}/3$.

45. Determine qué condición se debe cumplir para que el sistema L.I.T. causal definido por el diagrama de bloques de la Fig. 1.30 sea estable.

Resolución:

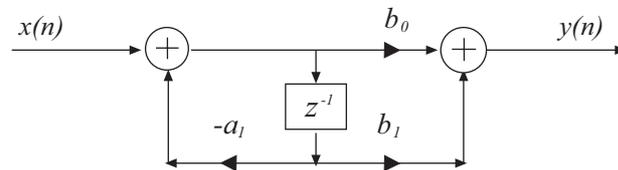


Figura 1.30: Diagrama de bloques del sistema del ejercicio 45.

Sabemos que la estabilidad de un sistema implica que, ante una entrada acotada, la salida debe estar acotada también. Para sistemas L.I.T. esto se traduce en que se debe verificar

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty \quad (1.367)$$

Se deja como ejercicio al lector (ejercicio 3 propuesto) obtener la respuesta impulsional de este sistema, que viene dada por:

$$h(n) = b_0(-a_1)^n u(n) + b_1(-a_1)^{n-1} u(n-1) \quad (1.368)$$

En nuestro caso:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |b_0(-a_1)^k u(k) + b_1(-a_1)^{k-1} u(k-1)| \quad (1.369)$$

donde aplicando la desigualdad triangular, y fijando el límite de los sumatorios:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| \leq b_0 \sum_{k=0}^{\infty} |(a_1)^k| + b_1 a^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} |a_1|^k \quad (1.370)$$

En ambos casos tenemos la suma de infinitos términos de una progresión geométrica. Para que se pueda calcular dicha suma es necesario que $|a_1| < 1$. En este caso la suma está acotada $\sum_{k=1}^{\infty} |a_1|^k < M < \infty$ y $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| \leq (b_0 + b_1 a^{-1})M < \infty$. Si $|a_1| \geq 1$, los sumatorios tienden a infinito y el sistema es inestable. Luego la condición de estabilidad es $|a_1| < 1$.

1.3. Problemas propuestos

★

1. Calcule la salida de un sistema con respuesta impulsional $h(n) = (0'5)^n u(n)$ ante una entrada $x(n) = u(n) - u(n - 3)$. Repita el procedimiento para $h(n) = (-0'5)^n u(n)$.

★

2. Dadas las secuencias siguientes:

$$x(n) = \{-3, -2, -1, 0, 2, 4, 6\}$$

$$y(n) = \{1, 3, 5, -0'2\}$$

$$w(n) = \{-5, 3, 2, 1\}$$

calcule y represente las siguientes secuencias:

$$a(n) = x(n) + y(n)$$

$$b(n) = x(n)y(n)$$

$$c(n) = x(n) + y(n) - w(n)$$

$$d(n) = 0'72x(n)$$

$$e(n) = w(n) * y(n)$$

$$f(n) = r_{yw}(n).$$

★★

3. Calcule la autocorrelación de la respuesta impulsional del sistema L.I.T. causal definido por el diagrama de bloques de la Fig. 1.31. ¿Para qué desplazamiento ('lag') será máxima la autocorrelación?

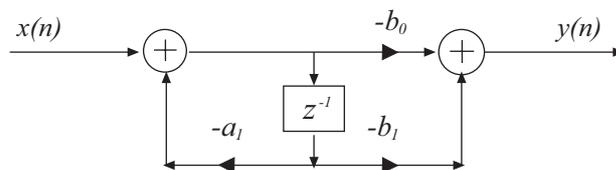


Figura 1.31: Diagrama de bloques del sistema del ejercicio propuesto 3.

★

4. Determine para qué valores de θ , la señal $x(n) = e^{j\theta n}$ es periódica. ¿Cuál es el periodo para $\theta = \frac{\pi}{6}$?

★

5. Calcule la correlación r_{xy} de las secuencias $x(n) = u(n)$ y $y(n) = 2^n u(-n)$.

★

6. Un sistema de procesamiento digital tiene el diagrama de bloques mostrado en la Fig. 1.32. Suponiendo que los convertidores A/D y D/A son ideales y que la frecuencia de muestreo es de 300 Hz., determine la salida $y(t)$ si la entrada al sistema viene dada por la siguiente expresión:

$$y(t) = 3\cos(1100\pi t) + 2\sin(500\pi t) + \sin(150\pi t).$$

Si como etapa previa al convertidor A/D se hubiese colocado con un filtro “*antialiasing*” que eliminase todas las frecuencias por encima de 100 Hz. ¿Qué señal se tendría a la salida? ¿y si el filtro “*antialiasing*” se colocase después del A/D? Justifique su respuesta.

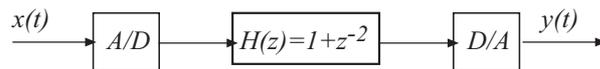


Figura 1.32: Diagrama de bloques propuesto.

7. Considere el esquema de la Fig. 1.33. Calcule la ecuación en diferencias del sistema y determine si el sistema es causal. ¿Se trata de un sistema L.I.T.?

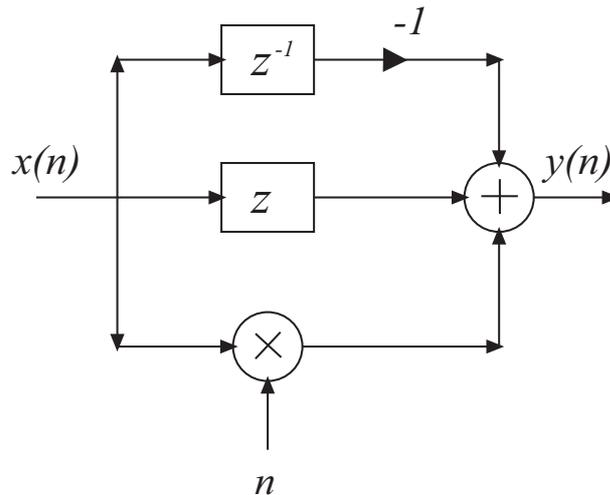


Figura 1.33: Esquema del sistema propuesto.

8. La señal analógica $x(t)$ se muestrea con un periodo de muestreo de 2 ms. Su salida se hace pasar por un convertidor D/A ideal. Determine la señal $y(t)$ obtenida.

$$x(t) = \sin(1050\pi t) + \cos(50\pi t) + 2\cos(950\pi t), \quad t \text{ en segundos.}$$

9. Evaluando directamente la suma de convolución, determine la respuesta al escalón de un sistema L.I.T. cuya respuesta al impulso es $h(n) = a^{-n}u(-n)$ con $|a| < 1$.

10. Determine cuál es la salida $y(n)$ de un sistema L.I.T. ante una entrada del tipo $x(n) = Ae^{jwn}$ con $-\infty < n < \infty$. Comente la importancia de este resultado.

11. Un sistema causal, con condiciones iniciales nulas viene definido por la siguiente ecuación en diferencias $y(n) = ny(n-1) + x(n)$.
- a) Calcule la respuesta impulsional del sistema y proporcione una expresión general para la misma. ★
- b) ¿Es invariante temporal?
12. Un sistema modulador está definido por la ecuación en diferencias $y(n) = m(n)x(n)$, siendo $m(n)$ la señal moduladora y $x(n)$ la entrada. Determine si se trata de un sistema L.I.T. ★
13. Un periodo de la señal analógico $x(t) = 2\cos(52\pi t)$ (t en segundos) se muestrea con una frecuencia de 250 Hz. Se pide:
- a) Determinar los valores de $x(n)$ obtenidos si se emplea un conversor A/D bipolar de 8 bits de cuantización por redondeo cuyo rango de entrada es el doble de la amplitud pico a pico de $x(t)$. ★
- b) ¿Cuál es el rango de entrada mínimo que debe tener el conversor para que no se produzca ruido de sobrecarga con esta señal de entrada?
14. Comente cada uno de los siguientes párrafos indicando si son ciertos o falsos:
- “Una de las principales aplicaciones de los filtros digitales es su utilización en las etapas de conversión A/D y D/A. Estos se utilizan para evitar que se produzca solapamiento frecuencial cuando no se verifica el Teorema de Muestreo, y también para eliminar las imágenes del espectro en la conversión D/A como consecuencia de no utilizar un reconstructor ideal”.
 - “Para un sistema lineal invariante temporal causal, podemos calcular su salida en régimen permanente ante una entrada tipo $x(n) = A\cos(\omega n)u(n)$, a partir de su respuesta en frecuencia, y ésta coincidirá con la salida del sistema sólo si el sistema es estable”.
 - “Para un sistema lineal invariante temporal, podemos calcular su salida en régimen permanente ante una entrada tipo $x(n) = A\cos(\omega n)u(n)$, a partir de su respuesta en frecuencia, y ésta coincidirá con la salida del sistema, independientemente de que el sistema sea estable o no. La única condición necesaria es que el sistema sea L.I.T.”. ★
15. Una forma de determinar si un sistema es lineal es comprobando que no modifica las frecuencias presentes en la señal de entrada. De acuerdo con esto, verifique si el sistema causal definido por $y(n) = x^2(n) + 1$ es lineal. Utilice la señal de entrada $x(n) = \cos(\frac{\pi}{3}n)$. ¿Sería lineal si el sistema estuviese definido por la ecuación en diferencias $y(n) = x(n) + 1$? ★
16. Calcule la expresión general de la autocorrelación de la señal $x(n) = 2^{-n}u(n)$. A partir de ella determine el valor de la energía de dicha señal.

1.4. Prácticas con MATLAB

Esta sección contiene varios ejemplos prácticos sobre conceptos esenciales al tratar con señales y sistemas discretos como son el muestreo, cuantificación, las propiedades de estabilidad, linealidad e invarianza temporal de los sistemas y la correlación entre señales.

1.4.1. Muestreo

En esta práctica se estudiarán las consecuencias del teorema de muestreo, haciendo especial hincapié en los efectos que se pueden producir si se muestrea una señal con la frecuencia incorrecta.

1. Se desea generar 2 períodos de una senoide analógica de amplitud 1 y frecuencia 200 Hz, muestreada a 1 kHz.

Sabemos que una senoide continua de frecuencia F_a queda definida por la siguiente expresión:

$$x(t) = A \cos(2\pi F_a t + \theta), \quad (1.371)$$

donde A y θ son, respectivamente, la amplitud y fase del sistema. Si muestreamos a una frecuencia F_m obtenemos:

$$x(n) \equiv x(nT) = A \cos(2\pi nT + \theta) = A \cos(2\pi n \frac{F_a}{F_m} + \theta). \quad (1.372)$$

Sustituyendo, en nuestro caso tendríamos:

$$x(n) = \cos(2\pi n \frac{200}{1000}) = \cos(0.4\pi n). \quad (1.373)$$

De forma inmediata se comprueba que el periodo de la señal discreta es de 5 muestras, como nos piden dos periodos el número de muestras a generar es de 10.

Las instrucciones de MATLAB para generar y dibujar la señal son:

```
n=0:9;
Fm=1000;
Fa=200;
x=cos(2*pi*Fa*n/Fm);
stem(n,x)
xlabel('n')
ylabel('x(n)')
```

Con estas instrucciones se obtiene la Fig. 1.34:

2. Realice la misma operación pero ahora la senoide a muestrear es de 1.2 kHz.

Utilizando el mismo código que en el apartado anterior modificando el valor de la frecuencia de muestreo obtenemos la Fig. 1.35.

```
n=0:9;
Fm=1000;
Fa=1200;
xx=cos(2*pi*Fa*n/Fm);
stem(n,xx)
xlabel('n')
ylabel('x(n)')
```

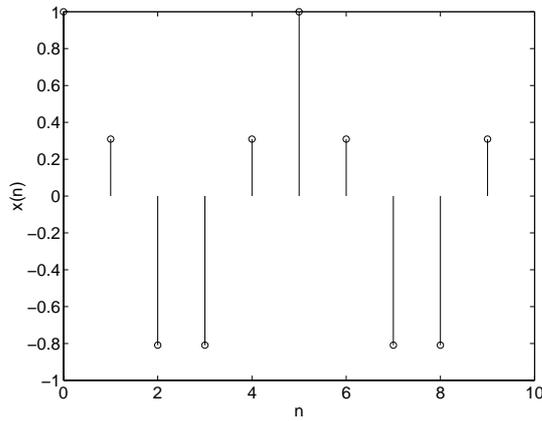


Figura 1.34: Diez primeras muestras de una senoide analógica de frecuencia 200Hz muestreada a 1kHz.

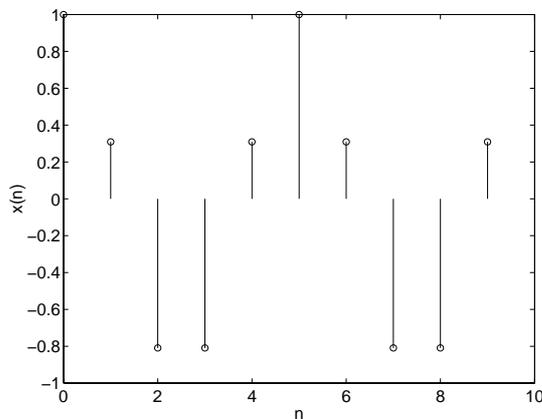


Figura 1.35: Diez primeras muestras de una senoide analógica de frecuencia 1200Hz muestreada a 1kHz.

3. Superponga sobre la gráfica obtenida en el punto anterior los puntos obtenidos en el primer apartado. ¿qué ocurre?, ¿qué consecuencias se pueden sacar de las gráficas?

Con el siguiente código podemos superponer ambas gráficas, donde, en lugar de emplear la instrucción `hold on` hemos utilizado la opción de `plot` para superponer múltiples gráficas (Fig. 1.36).

```
plot(n,x,'o',n,xx,'+')
legend('Fa=200Hz','Fa=1200Hz')
xlabel('n')
ylabel('x(n)')
```

Se observa que los puntos de las dos señales coinciden. La razón es que la segunda señal (la componente de 12 kHz) no cumple el teorema de muestreo. Mediante la relación siguiente podemos determinar la frecuencia aparente obtenida tras el muestreo

$$F_a = F_b \pm kF_m \quad (1.374)$$

Siendo F_b una frecuencia en el intervalo $[-F_m/2, F_m/2]$, y F_a la frecuencia original. Si consideramos nuestros valores ($F_a=200\text{Hz}$ y $F'_a=1200\text{Hz}$) con frecuencia de muestreo

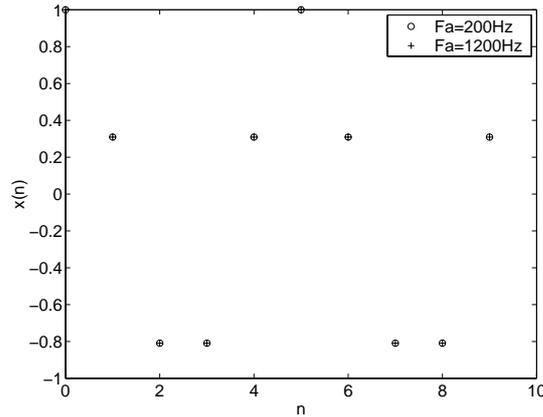


Figura 1.36: Superposición de las muestras de las Figs. 1.34 y 1.35.

igual a 1 kHz, la primera señal no produce solapamiento y la segunda se apreciará como una frecuencia de 200Hz (considerando $k = 1$).

Podemos ver el efecto del solapamiento en el dominio temporal si superponemos las dos señales continuas. La manera de simular estas señales es considerar un periodo de muestreo “muy pequeño”³. Es una aproximación pero, a nivel gráfico, es bastante ilustrativa.

El siguiente programa muestra este proceso

```
n=0:9;
t=0:0.01:9;
Fa1=200;
Fa2=1200;
Fs=1000;
xt1=cos(2*pi*Fa1*t/Fs); %Señal continua Fa1=200Hz
xt2=cos(2*pi*Fa2*t/Fs); %Señal continua Fa2=1200Hz
x1=cos(2*pi*Fa1*n/Fs); %Señal discreta Fa1=200Hz
x2=cos(2*pi*Fa2*n/Fs); %Señal discreta Fa2=1200Hz
plot(t,xt1,'k-',t,xt2,'k:',n,x1,'ko',n,x2,'k+')
xlabel('n')
```

La gráfica obtenida se muestra en la Fig. 1.37, en la que se aprecia claramente que para la señal de 1200 Hz no llegamos a tener al menos dos puntos por período produciéndose “aliasing”.

4. En este apartado vamos a estudiar el efecto del muestreo sobre el espectro de la señal. Genere la serie obtenida al muestrear una senoide de 100 Hz y amplitud unidad con un periodo de muestreo de 1 ms durante un segundo. Represente el espectro de la señal usando la instrucción `abs(fft(y))`. Comente el resultado.

Sabemos que una señal continua periódica puede escribirse como una suma ponderada de exponenciales complejas, esto es fácil de ver si consideramos señales sinusoidales,

³En la práctica esto significa utilizar una frecuencia de muestreo muy elevada, por lo que se verificará el teorema de Muestreo y tendremos un gran número de muestras por período por lo que al unir dichas muestras, simulará una señal continua.

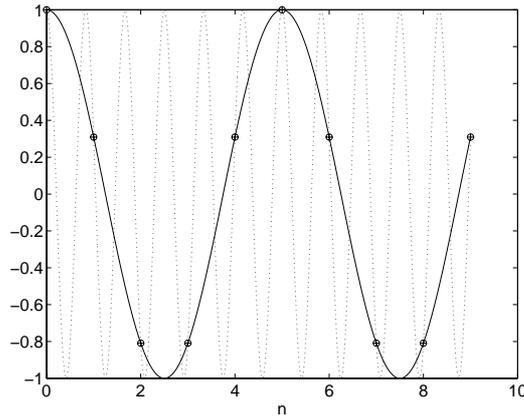


Figura 1.37: Superposición de las señales continuas de 200Hz y 1200Hz, y los 10 primeros valores obtenidos cuando se muestrean a 1 kHz.

ya que la fórmula de Euler ($e^{j\Omega t} = \cos(\Omega t) + j\text{sen}(\Omega t)$) nos permite escribir seno y coseno como suma de exponenciales complejas, cada una de ellas con una amplitud mitad de la que tiene la señal original. La representación de la contribución de cada senoide constituye el espectro de la señal. Se puede hacer un razonamiento similar para señales discretas. Si bien, en temas posteriores se analizará con todo detalle el espectro de una señal discreta y como calcularlo, vamos considerar que la instrucción `fft` de MATLAB, me permite representar el espectro de una señal discreta.

La instrucción `fft` es una de las más utilizadas al estudiar procesado digital de señales con MATLAB. Esta operación descompone la señal como una serie ponderada de exponenciales complejas. Esta ponderación se realiza con una serie de constantes complejas que, en definitiva, son las que aportan la información sobre la señal. Hay que tener en cuenta que la salida de la instrucción `fft` son muestras y cada uno de ellas se corresponde con el armónico de frecuencia:

$$F_k = \frac{F_m}{N}k, \quad k = 0, 1, \dots, N \quad (1.375)$$

donde N es el número de muestras consideradas.

Tenemos que muestrear durante un segundo con un periodo de muestreo de 1 ms lo que supone que tenemos que tomar 1000 muestras. El programa en MATLAB que implementa lo que nos piden es:

```
N=1000;
n=0:N-1;
Fa=100;
Fm=1000;
x=cos(2*pi*Fa*n/Fm);
plot(-N/2:N/2-1,abs(fftshift(fft(x))));
xlabel('Frecuencia (Hz)')
```

Dado que el número de puntos de utilizado para la `fft` es de 1000 y la frecuencia de muestreo también es 1000, cada punto de la `fft` obtenido se corresponderá con un armónico de 1 Hz.

Sabemos que cuando muestreamos con una frecuencia de 1000 Hz, las frecuencias analógicas que verifican el teorema de muestreo se encuentran en el intervalo $[-F_m/2, F_m/2]$. Para desplazar el resultado de la FFT, de manera que la frecuencia de continua se encuentre en el centro hemos empleado la función `fftshift`. El resultado son dos picos, a las frecuencias de -100 Hz y +100 Hz, como corresponde a una senoide de frecuencia 100 Hz (suma de 2 exponenciales complejas). La gráfica obtenida se muestra en la Fig. 1.38.

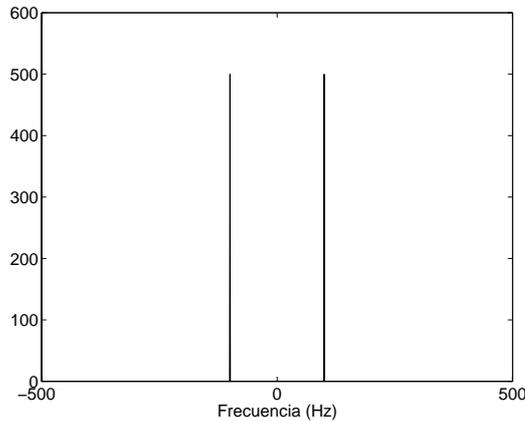


Figura 1.38: Espectro de la señal obtenido al muestrear con una frecuencia de 1000 Hz.

Observamos que el espectro es simétrico⁴, por lo que sólo con la mitad es suficiente para interpretar las componentes frecuenciales presentes en la señal original.

5. Repita el apartado anterior pero ahora la señal a muestrear es la suma de cuatro sinusoides de amplitud uno y frecuencias 100, 200 y 600 y 2100 Hz. Utilice señales de tipo coseno. Comente los resultados.

El siguiente código me permite calcular las secuencia y representar el espectro de la suma. En lugar de utilizar un bucle para calcular cada una de las secuencias hemos utilizado las propiedades de MATLAB para trabajar con matrices de datos y la función `sum` que al ser aplicada sobre una matriz suma sus elementos por columnas.

```
N=1000;
n=0:N-1;
Fa=[100,200,600,2100]'; %Tenemos un vector de frecuencias
Fm=1000;
x=cos(2*pi*Fa*n/Fm); %Calculamos todas las sinusoides
x=sum(x); %Sumamos las sinusoides
plot(-N/2:N/2-1,abs(fftshift(fft(x))));
xlabel('Frecuencia')
```

La gráfica obtenida se muestra en la Fig. 1.39. Interpretamos esta gráfica. Las frecuencias analógicas de 600 Hz y 2100 Hz no verifican el teorema de muestreo por lo que aplicando la ecuación (1.374) obtenemos que las frecuencias aparentes correspondientes

⁴El espectro de una secuencia es simétrico si la secuencia es real.

son:

$$600Hz \longrightarrow -400Hz. \quad (1.376)$$

$$2100Hz \longrightarrow 100Hz. \quad (1.377)$$

Independientemente de que se trate de frecuencias positivas o negativas, cada una de estas señales esta representada en el espectro por dos picos. Por lo que observamos picos en frecuencias 100, 200 y 400, sin embargo la amplitud para frecuencia 100 es el doble. Esto es debido a que para esta frecuencia contribuyen las frecuencias analógicas de 100 Hz y 2100 Hz, que por efecto del alising se corresponden con la misma frecuencia aparente.

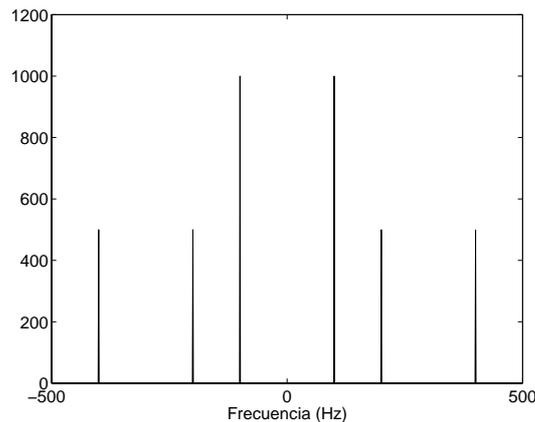


Figura 1.39: Espectro de la señal suma de cuatro sinusoides.

6. Repita el apartado anterior pero sustituyendo la frecuencia de 2100 Hz por una de 1900 Hz. ¿Obtendríamos el mismo resultado si hubiésemos generado las señales con funciones seno?

En este caso se sigue produciendo “*aliasing*”. Aplicando la misma expresión que en apartado anterior obtenemos que la frecuencia aparente es:

$$1900Hz \longrightarrow -100Hz. \quad (1.378)$$

Como las señales han sido generadas con la función coseno, que es par, no habrá ninguna diferencia en el resultado.

```
N=1000;
n=0:N-1;
Fa=[100,200,600,1900]';           % Tenemos un vector de frecuencias
Fm=1000;
x=cos(2*pi*Fa*n/Fm);              % Calculamos todas las sinusoides (coseno)
xx=sin(2*pi*Fa*n/Fm);             % Calculamos todas las sinusoides(seno)
x=sum(x);                          % Sumamos las sinusoides
xx=sum(xx);                         % Sumamos las sinusoides

subplot(211)
plot(-N/2:N/2-1,abs(fftshift(fft(x))));
xlabel('Frecuencia (Hz)')
```

```

title('a')
subplot(212)

plot(-N/2:N/2-1,abs(fftshift(fft(xx))));
xlabel('Frecuencia (Hz)')
title('b')

```

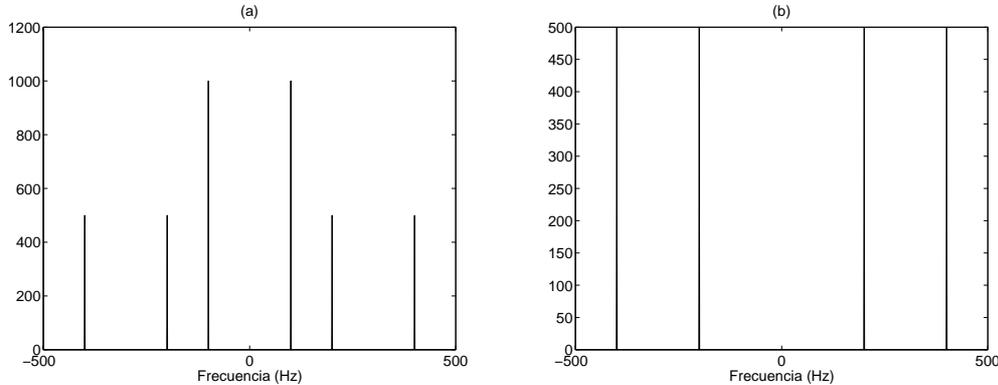


Figura 1.40: Espectro de la señal del apartado 6. (a) Señales generadas con la función \cos . (b) Señales generadas con la función \sin .

En las gráficas de la Fig. 1.40 observamos que cuando las señales son generadas con la función seno tenemos una frecuencia de 100Hz, que verifica el teorema de muestreo y una señal de -100Hz, obtenida a partir de la de 1900Hz, que genera muestras de signo contrario a la anterior, por lo que se anularán. Esta es la razón por la que la frecuencia de 100Hz no aparece en el espectro (Fig. 1.40). Se deja como ejercicio al lector, verificar que si la señal de 1900Hz, se sustituye por la de 2100Hz, aunque se utilice la función seno los resultados no varían ya que la frecuencia aparente en ambos casos es de 100Hz, produciendo un pico a esta frecuencia de amplitud doble, exactamente igual a lo que ocurría al generarse con la función coseno.

7. Genere una señal cuadrada de 1000 puntos con frecuencia de 150 Hz y muestreada a 1000 Hz. Represente el espectro de la señal y explique el resultado.

Sabemos que una señal cuadrada analógica está formada por una suma infinita de armónicos impares de la frecuencia fundamental. La amplitud de dichos armónicos decrece a medida que aumenta la frecuencia del mismo.

Nuestra señal contendrá armónicos a las frecuencias: 150Hz, 450Hz, 750Hz, 1050Hz, 1350Hz, 1650Hz, 1950Hz, \dots . Como la frecuencia de muestreo es de 1 kHz para que no se produzca “aliasing”, las frecuencias analógicas deberán estar comprendidas en el intervalo $[-500\text{Hz}, \dots, 500\text{Hz}]$. En nuestra señal cuadrada esto no se verifica a partir de la frecuencia de 750Hz. Veamos cuáles serán las frecuencias aparentes obtenidas por cada uno de estos armónicos, para ello utilizamos la expresión (1.374). En la práctica, podemos obtener las frecuencias aparentes sin más que restar a la señal múltiplos de la frecuencia de muestreo hasta que nos encontremos en el intervalo de frecuencias determinado por la frecuencia de muestreo (Tabla 1.8).

El siguiente código nos permite ilustrar gráficamente este resultado

```
N=1000;
```

Tabla 1.8: Representación de las frecuencias original y aparente.

Frecuencia original	Frecuencia aparente
150Hz	150Hz. No produce “aliasing”.
450Hz	450Hz. No produce “aliasing”.
750Hz	-250Hz
1050Hz	50Hz
1350Hz	350Hz
1650Hz	-450Hz
1950Hz	-50Hz

```

n=0:N-1;
F=150;
Fm=1000;
x=square(2*pi*F*n/Fm);
subplot(211)
stem(n(1:50),x(1:50))
xlabel('n')
ylabel('x(n)')
title('(a)')
subplot(212)
plot(-N/2:N/2-1,abs(fftshift(fft(x))));
xlabel('Frecuencia')
title('(b)')

```

En la Fig. 1.41 se aprecian componentes que, en principio, no deberían aparecer. Entre ellas destacan, por su valor, las componentes de 50 y 250 Hz resultantes del “aliasing” como hemos comentado anteriormente.

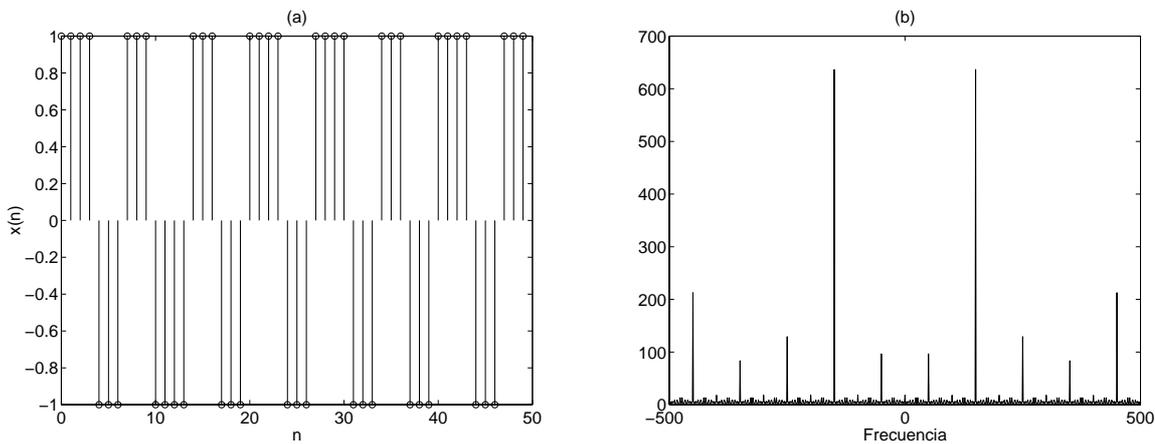


Figura 1.41: (a) Primeras muestras de la señal cuadrada. (b) Espectro de la señal cuadrada de apartado 7.

1.4.2. Cuantización

En esta práctica se estudiarán los efectos de la cuantización de las señales al realizar la conversión analógico–digital.

1. Escriba una función que acepte como parámetros un vector de muestras, el número de bits del cuantificador y el rango de entrada, y devuelva la señal cuantificada por redondeo. Considérese que el intervalo de entrada es bipolar.

El código de la función solicitada se muestra a continuación:

```
function y=cuanti(x,bits,m)

% x: señal de entrada
% bits: número de bits del cuantificador
% m: rango de entrada del cuantificador [-m,m]
% La cuantificación se realiza por redondeo.

Resol=2*m/(2^bits-1);           % Resolución del cuantificador
nivel=x/Resol;                  % Determinamos el número de
                                % niveles del cuantificador
                                % correspondientes (no entero)
nivel=round(nivel);             % Redondeamos al nivel más próximo (entero)
y=nivel*Resol;                  % Expresamos la señal cuantizada en las
                                % unidades de la señal original.
```

2. La siguiente ecuación en diferencias recursiva permite calcular el valor de la raíz cuadrada de A , tomando como condición inicial $x(-1)$ una aproximación burda a dicha raíz. Para valores de $A > 1$, $x(-1) = 1$ es una aproximación adecuada.

$$x(n) = \frac{1}{2} \left[\frac{A}{x(n-1)} + x(n-1) \right] \quad (1.379)$$

Se desea

- a) Escriba un programa que permita calcular el valor de la raíz cuadrada de 2. Compruebe que a partir de un pequeño número de iteraciones el valor almacenado en $x(n)$ coincide con $\sqrt{2}$.
- b) Repita el procedimiento anterior cuantificando el resultado de cada iteración antes de realimentar de nuevo al sistema. Muestre las gráficas obtenidas para un cuantificador de 4, 5, 6, 8 y 12 bits, si el intervalo de entrada al cuantificador es de ± 5 .

- a) El siguiente programa muestra la implementación recursiva de la ecuación en diferencias del sistema, mediante un bucle. El bucle finalizará cuando la diferencia entre el valor calculado con esta expresión y el valor real sea menor que $1/10000$.

```
clear
A=2;
valor_exacto=sqrt(2);
n=1;
x(n)=1; %condición inicial
error=1/10000;
while(abs(x(n)-valor_exacto)>=error)
    n=n+1;
    x(n)=0.5*(A/x(n-1)+x(n-1));
end
```

Si ejecutamos `disp(x)`, MATLAB nos devuelve por pantalla

```
>> disp(x)
    1.0000    1.5000    1.4167    1.4142
```

Observamos como en muy pocas iteraciones el resultado converge al valor de $\sqrt{2}$. Para otro valor de A , por ejemplo $A = 356$ obtenemos la secuencia:

```
1.0000 178.5000  90.2472  47.0960  27.3275  20.1773  18.9104  18.8680
```

Observamos que la convergencia es rápida.

- b) Veamos como se modifican los resultados al cuantificar las operaciones tras cada iteración. En este caso vamos a fijar el número de iteraciones en 15, independiente del número de bits considerado, y mostraremos en una gráfica los resultados. El programa utilizado es el siguiente:

```
%Cuantización ii)
clear
A=2;
m=5;
valor_exacto=sqrt(A);
n=1;
N=10 %número de iteraciones
x(:,n)=[1,1,1,1,1]'; %condición inicial
j=1;
for(bits=[4,5,6,8,12])
    for (n=2:N)
        x(j,n)=cuanti(0.5*(A/x(j,n-1)+x(j,n-1)),bits,m);
    end
    j=j+1;
end
n=1:N;
plot(n,x(1,:), 'k-',n,x(2,:), 'k:',n,x(3,:), 'k.-',n,x(4,:), 'k--',n,x(5,:), 'k-')
legend(['b=4 valor=' num2str(x(1,N))], ['b=5 valor=' num2str(x(2,N))], ...
['b=6 valor=' num2str(x(3,N))], ['b=8 valor=' num2str(x(4,N))], ...
['b=12 valor=' num2str(x(5,N))])
xlabel('Iteración')
ylabel('Valor aproximado de la raíz')
```

A medida que se incrementa el número de bits los resultados son más próximos al obtenido sin cuantificar como podemos apreciar en la Fig. 1.42.

1.4.3. Estabilidad, linealidad e invarianza temporal

En esta práctica se estudiarán los conceptos de estabilidad y linealidad básicos a la hora de analizar sistemas discretos. Determine si los sistemas definidos por las ecuaciones en diferencias siguientes verifican las propiedades de linealidad, invarianza temporal y estabilidad

1. $y(n) = x^2(n) + 1$.
2. $y(n) = \frac{n-1}{n}y(n-1) + \frac{1}{n}x(n)$.
3. $y(n) = ay(n-1) + x(n)$, para $a = 1/2$ y $a = 0/8$.

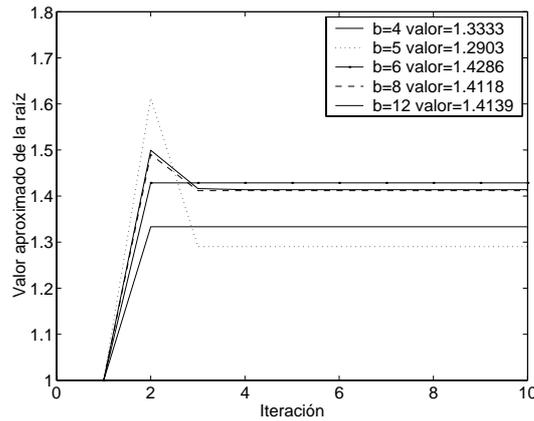


Figura 1.42: Muestras de la raíz cuadrada de 2 cuando se cuantifica la salida de cada iteración, para diversos valores del número de bits..

Si bien las propiedades de linealidad y estabilidad de un sistema se deben verificar para cualquier secuencia de entrada, para comprobarlo con MATLAB emplearemos secuencias particulares. Algo similar ocurre con la estabilidad. Sabemos que un procedimiento para determinar si un sistema es estable, si este es L.I.T. es determinando si la respuesta impulsional tiene suma acotada, sin embargo para sistemas no L.I.T. debemos aplicar la definición general (cualquier entrada acotada produce una entrada acotada). En este sentido vamos a utilizar como entrada acotada un impulso y observaremos si la salida está acotada.

Los programas utilizados serán los mismos para todos los sistemas, si bien cada sistema tiene sus particularidades:

1. El sistema no es recursivo ni depende de entradas pasadas por lo que se puede implementar de forma vectorizada.
2. No se puede vectorizar. Lo implementaremos mediante un bucle `for` y sacaremos del bucle aquellos valores de n que puedan dar problemas con los índices (MATLAB no permite índices con valor 0 o negativos).
3. Análogo al anterior.

Para verificar las propiedades de linealidad e invarianza temporal aplicaremos la definición y para comparar las secuencia obtenidas utilizaremos para una de ellas círculos y para la otra cruces, de esta forma la igualdad entre secuencias se producirá cuando cada círculo contenga en su interior una cruz. Dentro del mismo bucle `for` calcularemos todas las secuencias necesarias para verificar las propiedades. A continuación mostraremos el programa utilizado para estudiar el segundo sistema. Se deja como ejercicio al lector escribir los programas correspondientes a los otro dos sistemas a partir del anterior, si bien mostraremos los resultados obtenidos si utilizamos las mismas secuencias de entrada.

```
%Sistema 2
clear
close all
N=100;
x1=sin(2*pi*0.1*(0:N-1));           % Secuencia 1 para linealidad
x2=sin(2*pi*0.3*(0:N-1));           % Secuencia 2 para linealidad
```



```

xlabel('n')
disp('Pulse una tecla')
pause

```

Las gráficas obtenidas son las mostradas en las Figs. 1.43, 1.44, 1.45 y 1.46 para los sistemas 1, 2 y 3 ($a = 1/2$, $a = 0.8$), respectivamente. De las gráficas en la Fig. 1.43 se deduce que el sistema es no lineal, lo cual era de esperar debido al término cuadrático, estable y variante temporal. No es un sistema L.I.T. Por su parte, a partir de las gráficas en la Fig. 1.44 se deduce que el sistema es lineal, estable, ya que la salida está acotada, y variante temporal y, por tanto, no es un sistema L.I.T. De las gráficas en la Fig. 1.45 se deduce que el sistema es lineal, inestable, ya que la salida diverge, e invariante temporal. Se trata de un sistema L.I.T. Sin realizar ningún tipo de operación sabemos que se trata de un sistema L.I.T. ya que se trata de un sistema definido por una ecuación en diferencias lineal con todos los coeficientes constantes. El parámetro a únicamente puede afectar a la estabilidad. Para $a = 1/2$ el sistema es inestable (Fig. 1.45) mientras que para $a = 0.8$ el sistema es estable (Fig. 1.46). Es sencillo determinar que la respuesta impulsional de este sistema es:

$$h(n) = a^n u(n). \quad (1.380)$$

Al tratarse de un sistema L.I.T. podemos determinar la estabilidad calculando la suma de dicha respuesta. Se trata de una serie geométrica, por lo tanto la condición para que la suma converja es que $|a| < 1$, como ocurre con $a = 0.8$. Si $a = 1/2$ la suma de la serie diverge y el sistema es inestable.

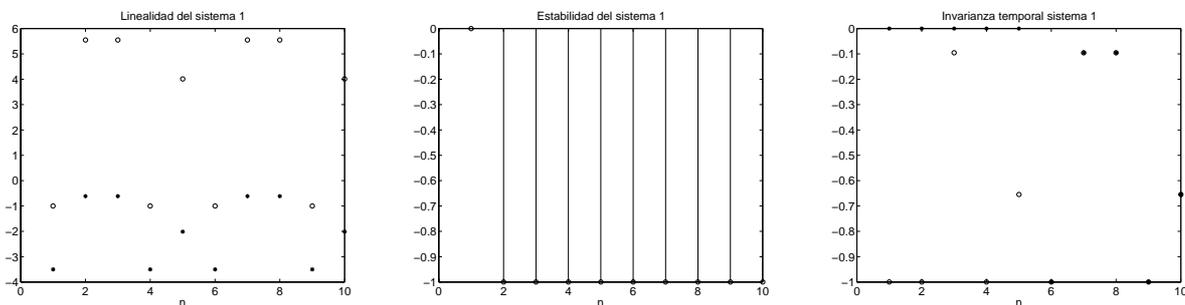


Figura 1.43: Estudio de las propiedades del sistema 1.

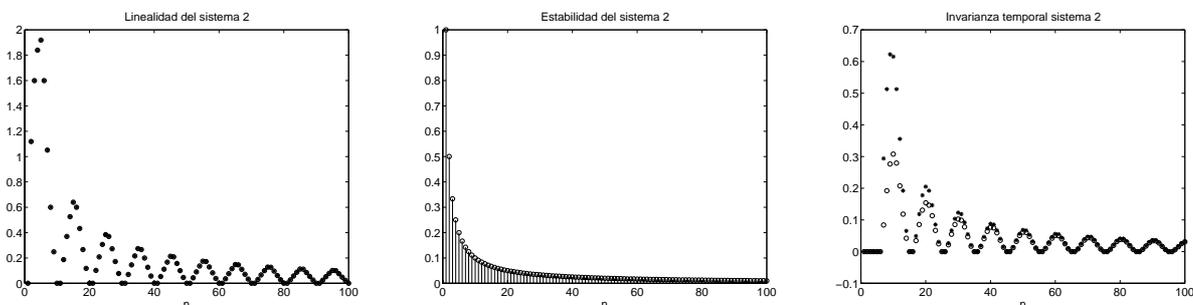


Figura 1.44: Estudio de las propiedades del sistema 2.

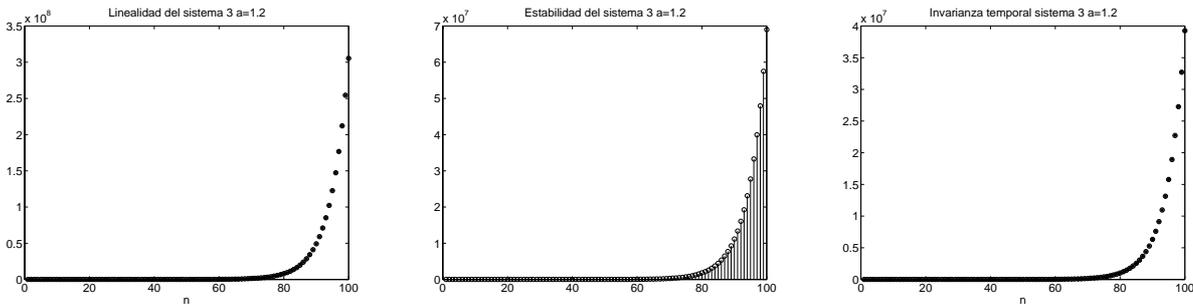


Figura 1.45: Estudio de las propiedades del sistema 3 con $a = 1.2$.

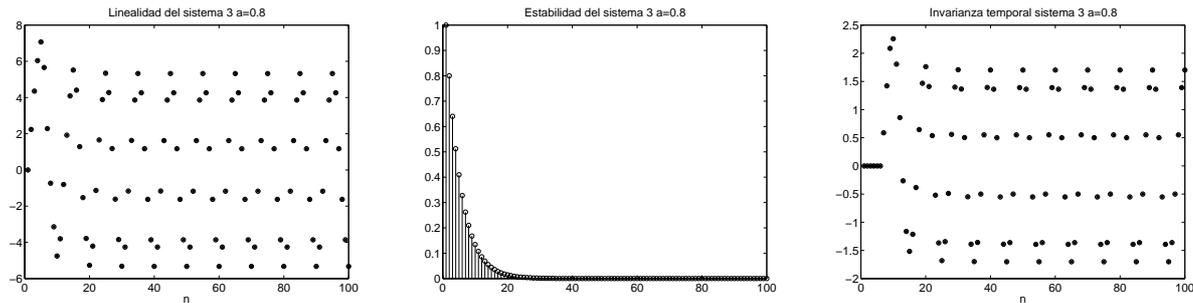


Figura 1.46: Estudio de las propiedades del sistema 3 con $a = 0.8$.

1.4.4. Correlación

En esta práctica se estudiará el uso de la autocorrelación y de la correlación cruzada. Estas operaciones se van a utilizar principalmente para el reconocimiento de determinados patrones dentro de una señal, para la identificación de pautas y para la determinación de la relación existente entre sucesivas muestras.

1. La primera aplicación de la autocorrelación de una señal es determinar las posibles repeticiones de patrones en la señal. Para comprobar este punto se va a generar una senoide de frecuencia igual a 100 Hz con amplitud uno y muestreada a 1 kHz (consideremos una secuencia de 100 puntos). Determine la autocorrelación de esta señal normalizada a uno y representéla junto a la secuencia, ¿qué conclusiones se pueden sacar?

El programa en MATLAB que implementa lo que nos piden es:

```
% Generación de la señal
n=0:99;
x=cos(2*pi*n*0.1);
% Cálculo de la autocorrelación
y=xcorr(x,'coeff');
% Representación de las dos señales
subplot(211),stem(x,'k'),title('(a)')
subplot(212),stem(y,'k'),title('(b)')
xlabel('Muestras')
```

La gráfica obtenida al emplear este código se muestra en la Fig. 1.47. Podemos apreciar que la autocorrelación tiene una longitud doble que la señal temporal. Este hecho se

debe a que los desplazamientos, a la hora de calcular la autocorrelación, pueden ser positivos o negativos. El índice central se corresponde con un desplazamiento cero y, se corresponde, lógicamente, con el valor máximo de dicha correlación.

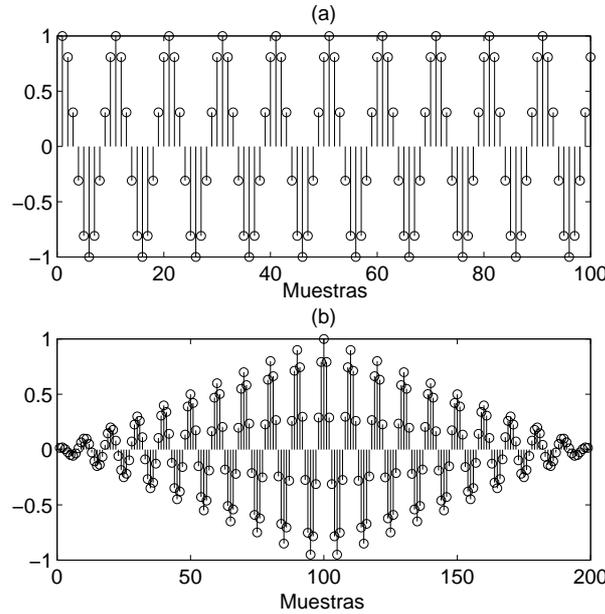


Figura 1.47: (a) Secuencia senoidal y (b) su función de autocorrelación.

2. Una segunda aplicación relacionada con la anterior es la determinación del desfase entre dos señales. Se pide generar dos sinusoides de frecuencia 50 Hz ($F_m=1$ kHz), amplitud uno y desfasadas 90° y determinar la correlación cruzada de ellas. ¿Cómo se podría determinar el desfase entre estas señales? Realice una gráfica donde aparezcan las matrices de autocorrelación y correlación cruzada. ¿Qué conclusiones se pueden sacar?

Para entender este apartado de forma sencilla consideremos las sinusoides dadas por

$$x(n) = \cos(2\pi f n + \theta_1), \quad y(n) = \cos(2\pi f n + \theta_2), \quad (1.381)$$

donde se puede definir $\theta = \theta_1 - \theta_2$ como el desfase entre las dos señales. Se puede calcular el desfase comprobando cuándo las dos señales vuelven a estar en fase. Para $n = 0$ se tiene:

$$x(0) = \cos(\theta_1), \quad y(0) = \cos(\theta_2). \quad (1.382)$$

Si ahora se desplaza una de las señales, por ejemplo $x(n)$, hasta que las dos estén en fase de nuevo, se tiene que

$$x(N) = \cos(2\pi f N + \theta_1) = y(0) = \cos(\theta_2). \quad (1.383)$$

De la igualdad anterior se desprende que:

$$2\pi f N + \theta_1 = \theta_2 \quad (1.384)$$

Luego el desfase vendrá dado por:

$$\theta = \theta_2 - \theta_1 = 2\pi f N, \quad (1.385)$$

siendo f la frecuencia digital de la señal.

3. Podemos emplear la correlación cruzada para determinar cuándo las señales estarán en fase, que ocurrirá en los máximos de dicha correlación. Como en los cálculos realizados se ha considerado como punto inicial $n = 0$, se deben determinar los máximos a partir del punto central de la correlación cruzada que, recordemos, es el punto de la correlación correspondiente a un desplazamiento cero. El programa de MATLAB que implementa esto es el siguiente:

```
% Generación de las señales
n=0:99;
x=cos(2*pi*n*(50/1000));
y=cos(2*pi*n*(50/1000)+pi/2);
% Determinación de la correlación cruzada
z=xcorr(x,'coeff');
zz=xcorr(x,y,'coeff');
% Representación de las señales
subplot(211),stem(z,'k'),title('(a)')
subplot(212),stem(zz,'k'),title('(b)')
```

La gráfica obtenida con este código se representa en la Fig. 1.48. Hay que determinar la posición del primer máximo por lo que realizaremos un zoom sobre la gráfica para determinar de forma exacta dicho desfase. En este caso, $N = 5$ (100-95), por lo que, sustituyendo en la expresión del desfase, obtenemos

$$2\pi \frac{50}{1000} 5 = \frac{\pi}{2}, \quad (1.386)$$

que es el desfase que presentan las dos señales.

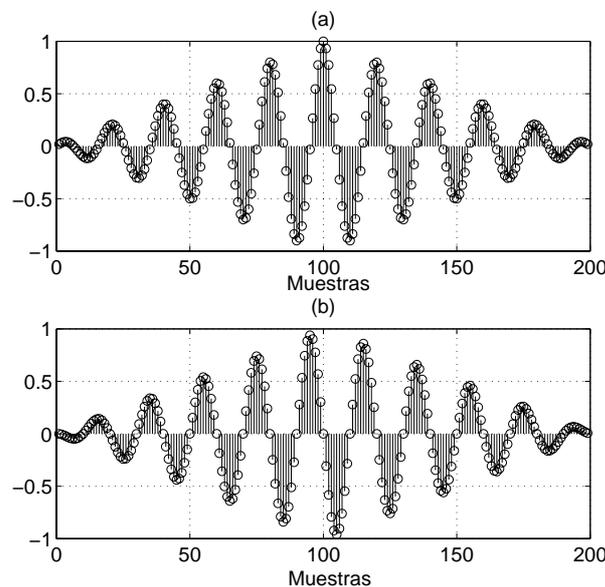


Figura 1.48: (a) Función de autocorrelación de la secuencia $x(n)$ (no desplazada) y (b) Correlación cruzada de las secuencias $x(n)$ e $y(n)$.

Capítulo 2

Análisis frecuencial de señales y sistemas

2.1. Introducción teórica

2.1.1. Análisis frecuencial de Fourier

El análisis de Fourier de sistemas continuos es una de las herramientas matemáticas más usadas por los ingenieros que trabajan en sistemas continuos. Dicho análisis tiene su equivalente en el dominio digital a través de diferentes elementos que se verán en este capítulo.

Desde el punto de vista analógico, la señal básica a la hora de trabajar con este tipo de análisis es la senoide descrita por $x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \theta)$. Esta señal se utiliza, normalmente, usando la exponencial compleja $x(t) = A \cdot e^{j\omega t + \theta}$ por razones de simplicidad matemática. En el caso digital se consideran las versiones discretas de dichas señales analógicas. Así, se considera como punto de partida la señal discreta $x(n) = A \cdot e^{j\omega n + \theta}$ con $-\infty < n < +\infty$. Sea ahora un sistema L.I.T. cuya respuesta impulsional queda definida por $h(n)$; la salida de dicho sistema tomando como entrada la anterior señal compleja será,

$$\begin{aligned} y(n) &= x(n) * h(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)Ae^{j\omega(n-k)+\theta} \\ &= Ae^{j\omega n + \theta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k} \equiv Ae^{j\omega n + \theta} H(e^{j\omega}) \end{aligned} \quad (2.1)$$

La expresión $H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k}$ se conoce como *respuesta en frecuencia del sistema*. En la expresión (2.1) se aprecia un hecho de importancia capital a la hora de analizar un sistema; las exponenciales complejas son funciones propias de los sistemas L.I.T. siendo los valores propios asociados a dichas funciones el valor de la respuesta en frecuencia. Según esto, conociendo la respuesta en frecuencia de un sistema se puede determinar la salida de éste ante cualquier combinación de exponenciales complejas, debido a la propiedad de linealidad de los sistemas L.I.T. analizados. Extendiendo el razonamiento a señales sinusoidales se llega a la misma conclusión ya que hay que recordar que este tipo de señales se puede expresar como combinación de exponenciales complejas. Así pues, si una señal se divide como suma de exponenciales complejas, o senoideas, su salida se puede determinar usando la respuesta en frecuencia. Dicha división se puede realizar usando una expresión

análoga a la respuesta en frecuencia, que viene dada por:

$$X(e^{jw}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{-jwk}, \quad (2.2)$$

y que se conoce como la Transformada de Fourier (TF) de la secuencia $x(n)$. La TF se puede indicar por simplicidad de la forma $X(w)$. Existe una transformación inversa a la anterior que traslada la información del dominio frecuencial al temporal y que viene dada por la siguiente expresión:

$$x(n) \equiv F^{-1}\{X(w)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(w)e^{jwn} dw \quad (2.3)$$

La expresión (2.3) tiene un claro significado intuitivo ya que el término $e^{jwn} dw$ se puede considerar como una componente infinitesimal de frecuencia w a la señal $x(n)$ y, por tanto, la superposición de cada una de estas componentes pesadas por los factores $X(e^{jw})$ y normalizado todo ello por el intervalo de integración (2π) define la señal temporal $x(n)$. La aplicación de (2.3) tiene mucho uso en procesado digital de señales ya que permite determinar la respuesta impulsional de un sistema con una determinada respuesta en frecuencia.

Existe un gran número de propiedades de la Transformada de Fourier de secuencias discretas pero sólo se comentarán aquí las de mayor uso en procesado digital de señales. Se recomienda al lector que consulte los libros que se dan en la bibliografía.

1. *Linealidad:*

Si

$$x_1(n) \xleftrightarrow{F} X_1(w) \text{ y } x_2(n) \xleftrightarrow{F} X_2(w)$$

entonces

$$x(n) = a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) \xleftrightarrow{F} X(w) = a_1 X_1(w) + a_2 X_2(w)$$

2. *Desplazamiento temporal:*

Si

$$x(n) \xleftrightarrow{F} X(w)$$

entonces

$$x(n - k) \xleftrightarrow{F} e^{-jwk} X(w)$$

donde $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

3. *Inversión temporal:*

Si

$$x(n) \xleftrightarrow{F} X(w)$$

entonces

$$x(-n) \xleftrightarrow{F} X(-w)$$

4. *Convolución de dos secuencias:*

Si

$$x_1(n) \xleftrightarrow{F} X_1(w) \text{ y } x_2(n) \xleftrightarrow{F} X_2(w)$$

entonces

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n) \xleftrightarrow{F} X(z) = X_1(w) \cdot X_2(w)$$

5. *Desplazamiento en frecuencia:*

Si

$$x(n) \xleftrightarrow{F} X(w)$$

entonces

$$e^{jw_0n} x(n) \xleftrightarrow{F} X(w - w_0)$$

6. *Teorema de Parseval:*Si $x_1(n)$ y $x_2(n)$ son dos secuencias complejas, entonces:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)x_2^*(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(w)X_2^*(w)dw$$

Si $x_1(n) = x_2(n)$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(w)|^2 dw$$

y

$$E_x = r_{xx}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{xx}(w)dw$$

7. *Diferenciación en el dominio de la frecuencia:*

Si

$$x(n) \xleftrightarrow{F} X(w)$$

entonces

$$nx(n) \xleftrightarrow{F} j \frac{dX(w)}{dw}$$

2.1.2. Transformada Discreta de Fourier

En el apartado anterior se ha comentado la aplicabilidad de la Transformada de Fourier en el campo del procesamiento digital de señales. Existe, sin embargo, un problema a la hora de trabajar con esta transformada ya que en la expresión (2.2) se observa un sumatorio con

índices que tienden a infinito. El problema es evidente, si no se conoce *a priori* la señal de interés, no se podrá determinar la Transformada de Fourier y, por tanto, no se podrá realizar ningún análisis en el dominio frecuencial. Para resolver este problema aparece la Transformada Discreta de Fourier (“*Discrete Fourier Transform*”, DFT) que será introducida en esta sección. Para entender dicha transformada discreta se comentarán en primer lugar las secuencias discretas de periodo N y su desarrollo en serie.

Sea una señal discreta periódica $x(n)$. Si el periodo fundamental lo denotamos por N , podemos escribir $x(n + kN) = x(n)$ para $k = 0, 1, \dots$. Como toda la información de la señal se encuentra en el intervalo $n = 0, \dots, N - 1$ (N términos) lo que se plantea es la transformación de este *vector* temporal en otro *espacio* o *dominio* frecuencial mediante la expansión en series de Fourier, definido por la siguiente expresión de síntesis:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi kn/N}, \quad (2.4)$$

donde $\{c_k\}$ son los coeficientes de la amplitud y $e^{j2\pi kn/N}$ las fases correspondientes en el dominio de la frecuencia. Recordemos que los coeficientes de la TF representan la importancia relativa de cada armónico en la señal.

Al igual que ocurría en la TF también existe una transformación que conduce del desarrollo en serie de Fourier al dominio temporal discreto, conocida como la Transformada Inversa Discreta de Fourier (“*Inverse Discrete Fourier Transform*”, IDFT), la cual queda reflejada en la siguiente ecuación de análisis:

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N} \quad (2.5)$$

Esta transformación inversa se puede determinar usando la ecuación del desarrollo en serie de Fourier y la propiedad de ortogonalidad de las funciones base, esto es, las exponenciales complejas $e^{j\frac{2\pi kn}{N}}$ usadas en dicho desarrollo. Destacar que los coeficientes del desarrollo forman una secuencia discreta de periodo N .

Ya se tienen los elementos necesarios para introducir la DFT y, a partir de lo comentado, determinar su significado. Si se muestrea la TF de la expresión (2.2) en frecuencias equiespaciadas $w_k = \frac{2\pi k}{N}$ se obtiene una secuencia periódica con periodo N . Esta secuencia obtenida se podría relacionar con los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de una secuencia discreta de periodo N . Si se sigue en esta dirección, y aplicando la transformación inversa del desarrollo en serie de Fourier periódico, se llega a una relación entre esta última señal obtenida, que denotaremos por $\chi(n)$, y la señal original $x(n)$ que dio lugar a la Transformada de Fourier que se muestreó

$$\chi(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n - kN). \quad (2.6)$$

Así pues, la señal obtenida se obtiene sumando infinitas réplicas de la señal original desplazadas cierto número de periodos de la señal. Si este desplazamiento no cumple determinadas condiciones se producirá un solape *temporal* de tal forma que, a partir de la señal $\chi(n)$ no será posible determinar la señal $x(n)$. Por tanto, estamos ante la versión *temporal* del teorema de Muestreo apareciendo la dualidad de los dominios temporal–frecuencial. La Fig. 2.1 muestra una situación donde no se produce solape temporal; la señal vale cero antes del periodo fundamental N . En este ejemplo, hemos considerado una secuencia con $N = 6$.

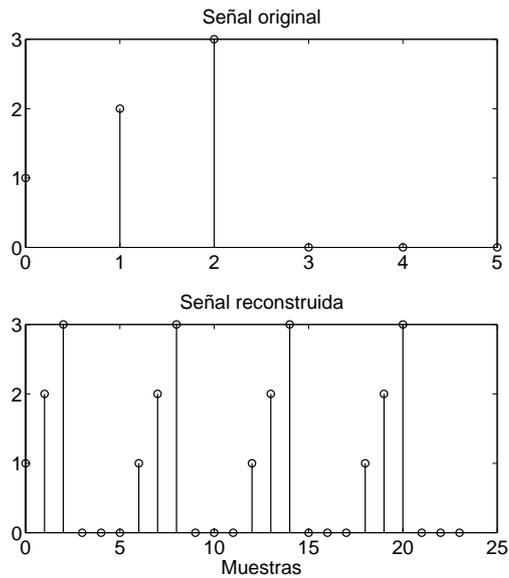


Figura 2.1: Señal original y reconstruida en que no se produce un solapamiento temporal.

Sin embargo, en la Fig. 2.2 se muestra el caso de una secuencia exponencial decreciente del tipo $\alpha^n u(n)$. Se comprueba que los valores de la señal reconstruida no son iguales a los de la señal original como ocurría en el caso anterior. Para la Fig. 2.2 se ha considerado $\alpha = 0.95$ y $N = 3$.

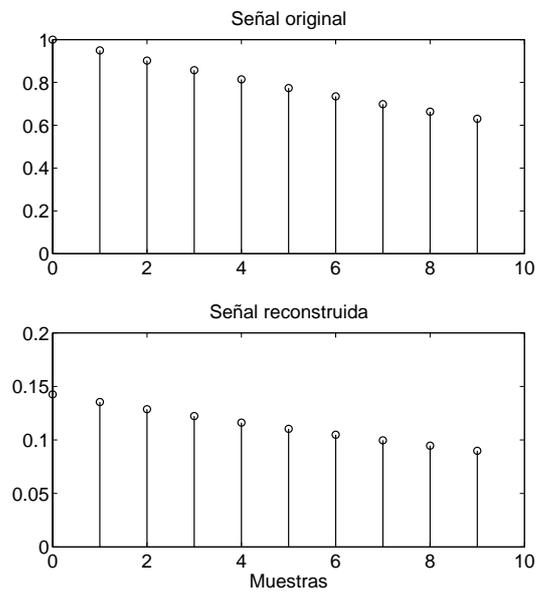


Figura 2.2: Señal original y reconstruida en que sí se produce un solapamiento temporal.

Así pues lo que se ha observado es que, las muestras de una Transformada de Fourier de una secuencia discreta que, en principio, no tiene por qué ser periódica, se corresponden con los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de una señal periódica que es el resultado de sumar infinitas versiones retardadas un número dado de periodos de la señal original $x(n)$. La situación ideal sería aquella en la que no se produce el solape temporal anteriormente

mencionado ya que, a partir de dichos coeficientes, se podría obtener la señal original al quedarse con una sola de las infinitas réplicas, al igual que se hace cuando se aplica el Teorema de muestreo y los conversores D/A.

Ya se está en condiciones de definir la Transformada Discreta de Fourier y su correspondiente inversa como:

TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER (DFT):

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi kn/N}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

TRANSFORMADA DISCRETA INVERSA DE FOURIER (IDFT):

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j2\pi kn/N}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

Es importante remarcar que al utilizar la DFT se supone, de forma implícita, que la señal temporal es periódica de periodo N ; esta periodicidad no se puede y no se debe ignorar ya que muchos de los problemas de la DFT, por ejemplo el goteo o derrame espectral (*spectral leakage*), tienen su base en esta repetición de la señal $x(n)$.

A continuación se enumeran las propiedades de la DFT más empleadas. Para una revisión más extensa se pueden consultar la bibliografía.

1. *Periodicidad:*

Si $X(k)$ es la DFT de N muestras de una secuencia $x(n)$, si

$$x(n+N) = x(n), \quad \forall n$$

entonces

$$X(k+N) = X(k), \quad \forall k$$

2. *Linealidad:*

Si

$$x_1(n) \xleftrightarrow{DFT} X_1(k) \quad \text{y} \quad x_2(n) \xleftrightarrow{DFT} X_2(k)$$

entonces

$$x(n) = a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) \xleftrightarrow{DFT} X(k) = a_1 X_1(k) + a_2 X_2(k)$$

donde $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

3. *Simetría circular de una secuencia:*

La DFT de N puntos de una secuencia de duración finita $x(n)$ ($L \leq N$) es equivalente a la DFT de N puntos de una secuencia periódica $x_p(n)$ de periodo N que se obtiene expandiendo $x(n)$ periódicamente:

$$x_p(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n - lN)$$

El desplazamiento circular de la secuencia se expresa así:

$$x'(n) = x(n - k, \text{módulo } N) \equiv x((n - k))_N$$

Decimos, por tanto, que:

- Una secuencia es *circular par* si es simétrica respecto al punto cero de la circunferencia: $x(N - n) = x(n)$, $1 \leq n \leq N - 1$
- Una secuencia es *circular impar* si es antisimétrica respecto al punto cero de la circunferencia: $x(N - n) = -x(n)$, $1 \leq n \leq N - 1$

4. Convolución circular:

Si

$$x_1(n) \xleftrightarrow{DFT} X_1(k) \text{ y } x_2(n) \xleftrightarrow{DFT} X_2(k)$$

entonces

$$x_1(n) \circledast x_2(n) \xleftrightarrow{DFT} X_1(k) \otimes X_2(k)$$

donde $x_1(n) \circledast x_2(n)$ es la convolución circular de las dos secuencias.

La DFT tiene un gran número de aplicaciones en el procesamiento digital de señales. Algunas de ellas tienen su base en los algoritmos óptimos de cálculo de dicha transformada conocidos como Transformadas Rápidas de Fourier (“*Fast Fourier Transform*”, FFT). Los autores consideran que existe un gran número de referencias sobre estos algoritmos como para incidir más sobre ellos aquí. Los libros de Oppenheim y Proakis dados en la bibliografía son una excelente fuente para este tema. Aquí se destacará una aplicación típica como es la determinación de la convolución lineal entre dos secuencias usando la DFT. De las propiedades de la DFT se aprecia que el producto de dos DFT de dos secuencias $x(n)$ e $y(n)$ proporciona una secuencia cuya DFT inversa, IDFT, es el resultado de la *convolución circular* de esas dos secuencias. Si lo que se busca es la convolución lineal entre esas secuencias hay que modificar ligeramente este procedimiento. En primer lugar se determina la longitud de la convolución de las dos secuencias que será igual a la suma de las longitudes de las secuencias menos uno. Seguidamente se rellenan con ceros las secuencias hasta llegar a dicha longitud. Se calculan sus DFT y se multiplican punto a punto determinándose seguidamente su IDFT. El resultado obtenido es la convolución de las dos secuencias.

El procedimiento comentado es usado habitualmente porque el coste computacional es mucho menor que usar la definición de la convolución. De hecho, gran parte de las librerías de procesamiento digital de señales en programas comerciales utilizan la DFT a la hora de filtrar secuencias de larga duración.

2.2. Problemas resueltos

1. Dado un sistema L.I.T. de respuesta impulsional $h(n)$ determine la salida del sistema cuando:

a) La entrada vale $x(n) = Ae^{jw_0n}$ para $-\infty < n < \infty$.

b) La entrada vale $x(n) = Ae^{jw_0n}u(n)$.

¿Qué conclusiones se pueden sacar de a) y b)?

Resolución:

- a) La salida del sistema viene definida por

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k), \quad (2.7)$$

por lo que

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)Ae^{jw_0(n-k)} = Ae^{jw_0n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-jw_0k}. \quad (2.8)$$

Llamando $H(e^{jw_0}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-jw_0k}$, se tiene que

$$y(n) = Ae^{jw_0n}H(e^{jw_0}) \equiv x(n)H(e^{jw_0}), \quad (2.9)$$

donde $H(e^{jw_0})$ es la respuesta en frecuencia del sistema para $w = w_0$. Se comprueba que las entradas del tipo Ae^{jw_0n} son autofunciones del sistema y su autovalor asociado es la respuesta en frecuencia.

- b) Ahora se tiene que

$$y(n) = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (2.10)$$

Resolviendo el caso de interés ($n \geq 0$) se tiene

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)Ae^{jw_0(n-k)}u(n-k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^n h(k)Ae^{jw_0(n-k)} = Ae^{jw_0n} \sum_{k=-\infty}^n h(k)e^{-jw_0k}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Queremos relacionar la salida de este apartado con la del a), por lo que, operando llegamos a que

$$y(n) = Ae^{jw_0n} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-jw_0k} - \sum_{k=n+1}^{\infty} h(k)e^{-jw_0k} \right], \quad (2.12)$$

y por tanto

$$y(n) = Ae^{jw_0n}H(e^{jw_0n}) - Ae^{jw_0n} \sum_{k=n+1}^{\infty} h(k)e^{-jw_0k}. \quad (2.13)$$

Tenemos dos términos; el primero de ellos se corresponde con el obtenido en el apartado a) de este problema y se conoce como *término estacionario*. El segundo de ellos se conoce como *respuesta transitoria*. Este último término aparece debido a la transición abrupta que se produce en la entrada para $n = 0$.

2. Dada la respuesta en frecuencia de la secuencia real $x(n)$ denotada por $X(e^{jw})$, se pide demostrar que:

- a) $X_{REAL}(e^{jw})$ es una función par de w .
- b) $X_{IMAG}(e^{jw})$ es una función impar de w .
- c) $|X(e^{jw})|$ es una función par de w .
- d) $\varphi_{X(e^{jw})}$ es una función impar de w .

donde $|X(e^{jw})|$ y $\varphi_{X(e^{jw})}$ representan la magnitud y fase de la respuesta en frecuencia del sistema $X(e^{jw})$, respectivamente.

Resolución:

a) Sabemos que la parte real de la TF de una secuencia se puede descomponer como

$$X_{REAL} = \frac{1}{2} [X(e^{jw}) + X^*(e^{jw})] \quad (2.14)$$

donde

$$X(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jwn}. \quad (2.15)$$

Si se toman conjugados en esta última expresión, se llega a

$$X^*(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n)e^{jwn}. \quad (2.16)$$

Como $x(n)$ es real, $x^*(n) = x(n)$ y, por tanto,

$$\begin{aligned} X_{REAL} &= \frac{1}{2} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jwn} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{jwn} \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(e^{-jwn} + e^{jwn}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\cos(wn). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Como la función \cos es par, es decir $\cos(wn) = \cos(-wn)$, se tiene que $X_{REAL}(e^{jw})$ es una función par.

b) Para comprobar que $X_{IMAG}(e^{jw})$ es una función impar, se sigue un camino análogo. Ahora se tiene

$$X_{IMAG} = \frac{1}{2j} [X(e^{jw}) - X^*(e^{jw})] \quad (2.18)$$

$$X(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jwn} \quad (2.19)$$

$$X^*(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n)e^{jwn} \quad (2.20)$$

Como $x(n)$ es real, $x^*(n) = x(n)$ y, por tanto,

$$\begin{aligned} X_{IMAG} &= \frac{1}{2j} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jwn} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{jwn} \right] \\ &= -\frac{1}{2j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(e^{jwn} - e^{-jwn}) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\sen(wn). \end{aligned} \quad (2.21)$$

- c) Como la función sen es impar, es decir $\text{sen}(wn) = -\text{sen}(-wn)$, tenemos que $X_{IMAG}(e^{jw})$ es una función impar.

Para comprobar que $|X(e^{jw})|$ es una función par, se aplica su definición:

$$|X(e^{jw})| = \sqrt{X_{REAL}^2(e^{jw}) + X_{IMAG}^2(e^{jw})} \quad (2.22)$$

$$|X(e^{-jw})| = \sqrt{X_{REAL}^2(e^{-jw}) + X_{IMAG}^2(e^{-jw})}. \quad (2.23)$$

Por lo visto anteriormente,

$$X_{REAL}(e^{jw}) = X_{REAL}^2(e^{-jw}) \implies X_{REAL}^2(e^{jw}) = X_{REAL}^2(e^{-jw}) \quad (2.24)$$

y

$$X_{IMAG}(e^{jw}) = X_{IMAG}(e^{-jw}) \implies X_{IMAG}^2(e^{jw}) = X_{IMAG}^2(e^{-jw}). \quad (2.25)$$

Por tanto, tenemos que $|X(e^{jw})| = |X(e^{-jw})|$ y, en consecuencia, se trata de una función par.

- d) Analicemos ahora la fase de la respuesta en frecuencia φ_H :

$$\varphi_H = \text{arctg} \left(\frac{X_{IMAG}}{X_{REAL}} \right), \quad (2.26)$$

de donde

$$\varphi_H(e^{jw}) = \text{arctg} \left(\frac{X_{IMAG}(e^{jw})}{X_{REAL}(e^{jw})} \right) \quad (2.27)$$

y

$$\varphi_H(e^{-jw}) = \text{arctg} \left(\frac{X_{IMAG}(e^{-jw})}{X_{REAL}(e^{-jw})} \right). \quad (2.28)$$

Aplicando lo obtenido en los apartados a) y b) se obtiene

$$\varphi_H(e^{-jw}) = \text{arctg} \left(\frac{-X_{IMAG}(e^{jw})}{X_{REAL}(e^{jw})} \right). \quad (2.29)$$

Como la función arctg es una función impar, se llega a

$$\varphi_H(e^{-jw}) = -\varphi_H(e^{jw}) \quad (2.30)$$

y por tanto φ_H es una función impar.

3. Determinar la respuesta en frecuencia de un sistema cuya respuesta impulsional viene dada por $h(n) = A\alpha^n \cos(w_0 n)u(n)$ con $|\alpha| < 1$.

Resolución:

Aplicando la definición se tiene

$$H(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-jwn} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A\alpha^n \cos(w_0 n)u(n)e^{-jwn}. \quad (2.31)$$

Descomponiendo el coseno como suma de exponenciales complejas se llega a

$$\begin{aligned} H(e^{jw}) &= A \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \left(\frac{e^{jw_0 n} + e^{-jw_0 n}}{2} \right) e^{-jwn} \\ &= \frac{A}{2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha e^{j(w_0-w)})^n + \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha e^{-j(w_0+w)})^n \right] \\ &= \frac{A}{2} \left[\frac{1}{1 - \alpha e^{j(w_0-w)}} + \frac{1}{1 - \alpha e^{-j(w_0+w)}} \right]. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Se puede realizar la suma infinita pues $|\alpha| < 1$ y por tanto, se puede desarrollar la expresión anterior de la forma:

$$H(e^{jw}) = \frac{A}{2} \left[\frac{2 - \alpha(e^{j(w_0-w)} + e^{-j(w_0+w)})}{1 + \alpha^2 e^{-2jw} - \alpha(e^{j(w_0-w)} + e^{-j(w_0+w)})} \right]. \quad (2.33)$$

Sustituyendo $e^{j(w_0-w)} + e^{-j(w_0+w)} = e^{-jw} [e^{jw_0} + e^{-jw_0}] = 2\cos(w_0)e^{-jw}$ podemos obtener:

$$H(e^{jw}) = \frac{A(1 - \alpha\cos(w_0)e^{-jw})}{1 + \alpha^2 e^{-2jw} - 2\alpha\cos(w_0)e^{-jw}}. \quad (2.34)$$

★

4. Determinar la transformada de Fourier de la siguiente señal discreta:

$$x(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Comentar las repercusiones de este resultado.

Resolución:

Aplicando la definición de la respuesta en frecuencia, se tiene

$$X(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jwn} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-jwn} = \frac{1 - e^{-jwN}}{1 - e^{-jw}}. \quad (2.35)$$

Operando llegamos a

$$X(e^{jw}) = \frac{e^{-jwN/2}}{e^{-jw/2}} \left[\frac{e^{jwN/2} - e^{-jwN/2}}{e^{jw/2} - e^{-jw/2}} \right] = e^{-jw(N-1)/2} \frac{\text{sen}(wN/2)}{\text{sen}(w/2)}. \quad (2.36)$$

La representación del módulo y la fase de la transformada de Fourier obtenida es la mostrada en la Fig. 2.3.

La importancia de esta transformada se debe a que cualquier señal discreta finita se puede construir a partir de su versión infinita y su producto por esta función; esto es

$$\hat{y}(n) = y(n) \cdot x(n), \quad (2.37)$$

por lo que, pasando al dominio frecuencial, se tiene

$$\hat{Y}(e^{jw}) = Y(e^{jw}) * X(e^{jw}), \quad (2.38)$$

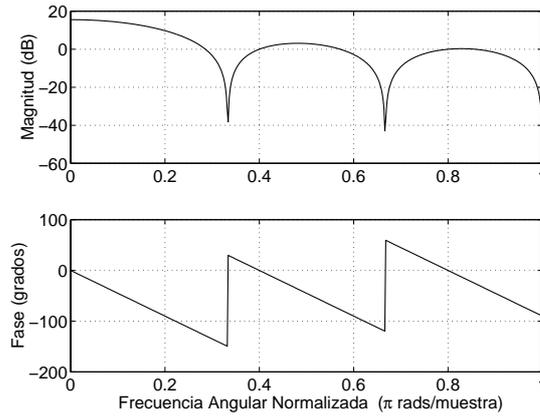


Figura 2.3: Módulo y la fase de la transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$.

donde $*$ indica la operación de la convolución. Por consiguiente, se tiene un camino alternativo para calcular la transformada de Fourier de la señal discreta finita usando su versión infinita.

Otro punto a tener en cuenta es que esta función aparecerá en todas aquellas señales con un final “abrupto” por lo que su transformada de Fourier aparecerá indirectamente a través de la convolución en la transformada de Fourier de la señal que se quiere determinar.

5. Demuestre que la señal discreta temporal cuya transformada de Fourier es

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - \alpha e^{-j\omega})^m}$$

para $|\alpha| < 1$ es

$$x(n) = \frac{(n+m-1)!}{n!(m-1)!} \alpha^n u(n) = \binom{n+m-1}{m-1} \alpha^n u(n).$$

Resolución:

Este problema se va a resolver aplicando el *principio de inducción*; principio fundamental en matemática discreta. Este principio dice lo siguiente; dada una cierta propiedad, si se prueba para $n = 0$ o $n = 1$ (valor inicial de la propiedad) y, suponiéndola cierta para n se prueba para $n + 1$, entonces es cierto para todo n .

Así pues, para $m = 1$, se puede demostrar sencillamente ya que

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}} \implies x(n) = \frac{(n+1-1)!}{n!(1-1)!} \alpha^n u(n) = \alpha^n u(n). \quad (2.39)$$

Ahora se supone cierto para $m = k$ y se comprueba la validez para $m = k + 1$.

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - \alpha e^{-j\omega})^{k+1}} = \frac{1}{(1 - \alpha e^{-j\omega})^k} \cdot \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}} = H_1(e^{j\omega}) \cdot H_2(e^{j\omega}) \quad (2.40)$$

con

$$H_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - \alpha e^{-j\omega})^k}, \quad H_2(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}}. \quad (2.41)$$

De aquí podemos definir la secuencia de entrada como convolución de las dos respuestas impulsionales correspondientes a las TF anteriores (ver Ejercicio 4):

$$x(n) = h_1(n) * h_2(n) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} h_1(n-s)h_2(s) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} h_1(s)h_2(n-s). \quad (2.42)$$

Aplicando que la propiedad se cumple para $m = k$, se sustituye en la ecuación anterior dicha propiedad, llegando a:

$$x(n) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \underbrace{\binom{s+k-1}{k-1} \alpha^s u(s)}_{h_1(s)} \underbrace{\alpha^{n-s} u(n-s)}_{h_2(n-s)} = \alpha^n \sum_{s=0}^n \binom{s+k-1}{k-1}. \quad (2.43)$$

Si el resultado fuera el correcto se tendría que

$$\sum_{s=0}^n \binom{s+k-1}{k-1} = \binom{n+(k+1)-1}{(k+1)-1} = \binom{n+k}{k}. \quad (2.44)$$

Esta última igualdad se demostrará aplicando de nuevo el *principio de inducción*. Tomamos el caso de $n = 0$ se tiene

$$\binom{0+k-1}{k-1} = \binom{0+k}{k} \longleftrightarrow 1 = 1 \quad (2.45)$$

y, por tanto, se cumple para $n = 0$.

Se supone cierto para n y se comprueba si se cumple para $n + 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{n+1} \binom{s+k-1}{k-1} &= \underbrace{\sum_{s=0}^n \binom{s+k-1}{k-1}}_{s=0\dots n} + \underbrace{\binom{k+n}{k-1}}_{s=n+1} = \binom{n+k}{k} + \binom{k+n}{k-1} \\ &= \frac{(n+k)!}{k!n!} + \frac{(k+n)!}{(k-1)!(n+1)!} = \frac{(n+k)!}{(k-1)!n!} \left[\frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} \right] \\ &= \frac{(n+k)!(n+k+1)}{k!(n+1)!} = \frac{(n+k+1)!}{k!(n+1)!} \\ &= \binom{n+k+1}{k}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

con lo que queda demostrado.

Se tiene que se cumple la expresión del sumatorio y, por tanto, se demuestra la equivalencia siguiente para todo n :

$$X(e^{jw}) = \frac{1}{(1 - \alpha e^{-jw})^m} \longleftrightarrow \binom{n+m-1}{m-1} \alpha^n u(n). \quad (2.47)$$

★★

6. Dado el sistema definido por la ecuación en diferencias acopladas

$$\begin{aligned}w(n) &= x(n) - 0.81w(n-2) \\ y(n) &= w(n) + w(n-1)\end{aligned}$$

Determinar:

- a) La respuesta en frecuencia del sistema.
- b) La salida en el estado estacionario cuando la entrada es

$$x(n) = \begin{cases} 0 & n \text{ impar} \\ 1 & n \text{ par.} \end{cases}$$

Resolución:

- a) Aplicando la propiedad de desplazamiento en el tiempo se tiene

$$W(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) - 0.81e^{-j2\omega}W(e^{j\omega}) \quad (2.48)$$

$$Y(e^{j\omega}) = W(e^{j\omega}) + e^{-j\omega}W(e^{j\omega}). \quad (2.49)$$

Despejando en la primera expresión se obtiene

$$W(e^{j\omega}) = \frac{X(e^{j\omega})}{1 + 0.81e^{-j2\omega}}, \quad (2.50)$$

y agrupando términos en la ecuación anterior se llega a

$$Y(e^{j\omega}) = W(e^{j\omega})[1 + e^{-j\omega}]. \quad (2.51)$$

A partir de aquí, obtenemos

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \frac{1 + e^{-j\omega}}{1 + 0.81e^{-j2\omega}}. \quad (2.52)$$

y, por tanto,

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{1 + e^{-j\omega}}{1 + 0.81e^{-j2\omega}}. \quad (2.53)$$

La Fig. 2.4 muestra dicha respuesta en frecuencia.

- b) La salida en estado estacionario se puede calcular usando la respuesta en frecuencia. Hay que tener en cuenta que $Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$. El siguiente paso es poner la señal como combinación de sinusoides que, en nuestro caso, sería

$$x(n) = \frac{1}{2}[1 + (-1)^n]u(n). \quad (2.54)$$

Esta señal es la composición de dos sinusoides con frecuencias $\omega = 0$ y $\omega = \pi$, esto es

$$x(n) = \frac{1}{2}[\cos(0n) + \cos(\pi n)]u(n). \quad (2.55)$$

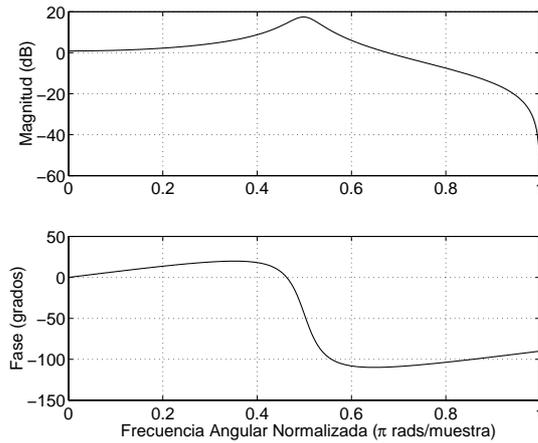


Figura 2.4: Respuesta frecuencia en magnitud y fase del sistema $H(e^{j\omega})$.

Para $\omega = 0$ se tendría

$$Y(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=0} = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=0} = \frac{1}{2} \frac{1+1}{1+0.81} = 0.55. \quad (2.56)$$

$$Y(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\pi} = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\pi} = \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1-1}{1+0.81} = 0. \quad (2.57)$$

La Fig. 2.5 muestra la salida obtenida usando la entrada anterior. Se aprecia la respuesta transitoria del sistema hasta alcanzar el valor de 0.55.

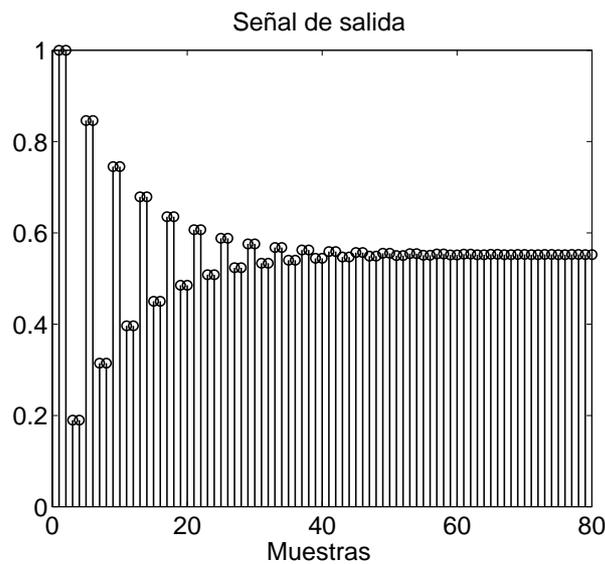


Figura 2.5: Respuesta transitoria del sistema.

7. Un efecto de audio digital típico es el eco. Este efecto seguiría la siguiente ecuación en diferencias

$$y(n) = x(n) + ay(n - D)$$

correspondiente al diagrama de bloques mostrado en la Fig. 2.6. Este diagrama refleja, de forma intuitiva, el significado de un eco ya que la secuencia de salida estará formada por una versión de la secuencia de entrada atenuada y retardada varias muestras. Determine la respuesta en frecuencia de este sistema determinando los máximos y los mínimos de dicha respuesta dando un significado intuitivo de ellos.

Resolución:

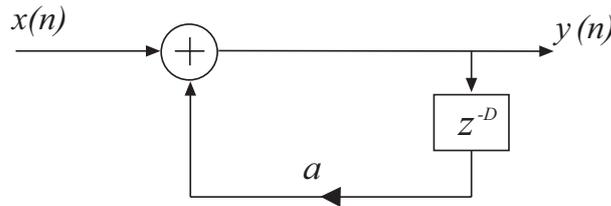


Figura 2.6: Diagrama de bloques correspondiente a la implementación de un eco mediante una unidad de retardo de orden D .

Aplicando la propiedad del retardo temporal a la ecuación en diferencias se tiene la siguiente igualdad:

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) + aY(e^{j\omega})e^{-j\omega D}. \quad (2.58)$$

Despejando se obtiene

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{X(e^{j\omega})}{1 - ae^{-j\omega D}}, \quad (2.59)$$

por lo que

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega D}}. \quad (2.60)$$

Se tiene entonces que

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{|1 - ae^{-j\omega D}|}, \quad (2.61)$$

que será mínima cuando $|1 - ae^{-j\omega D}|$ sea máximo. Se tendrá entonces que localizar el máximo de $[(1 - a\cos(\omega D))^2 + a^2\sin^2(\omega D)]^{1/2} = [1 + a^2 - 2a\cos(\omega D)]^{1/2}$. Esta cantidad será máxima cuando $\cos(\omega D) = 1$, esto es, cuando $\omega D = \pm k\pi$ con $k = 1, 3, 5, \dots$, o lo que es lo mismo, $\omega D = (2k + 1)\pi$ con $k = 0, 1, 2, \dots$. Esto equivale, por tanto, a

$$\frac{2\pi f_a D}{f_m} = (2k + 1)\pi, \quad (2.62)$$

de donde

$$f_a = \frac{f_m}{2D}(2k + 1). \quad (2.63)$$

Si se quiere el máximo de $|H(e^{jw})|$ y se sigue un razonamiento similar se llega a que dicho máximo se produce para $wD = 2k\pi$, de donde $f_a = kf_m/D$.

Los significados están claros al nivel de señales, en el caso del mínimo se produce una suma de cosenos en contrafase y en el del máximo están en fase. El resto de situaciones son intermedias entre estas dos. La Fig. 2.7 muestra la respuesta en frecuencia del sistema para el caso de $D = 10$ y $a = 0.8$.

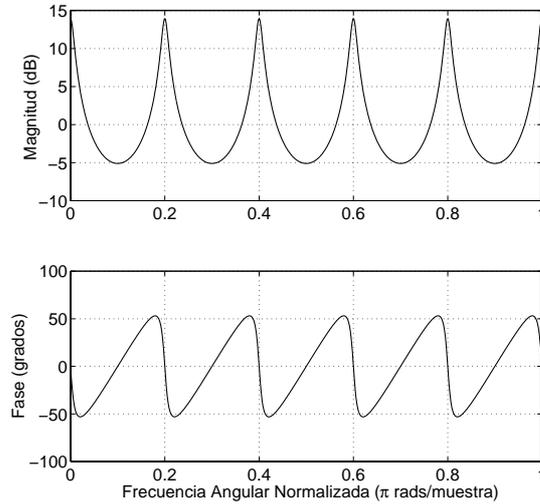


Figura 2.7: Respuesta frecuencial (magnitud y fase) del sistema diseñado.

★★

8. Se tiene un filtro digital ideal que presenta la siguiente respuesta en frecuencia

$$H(e^{jw}) = \begin{cases} e^{-jwD} & |w| \leq \pi/2 \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Determine la respuesta impulsional del sistema que da lugar a dicha respuesta frecuencial.

Resolución:

Se tiene la siguiente igualdad:

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{jw}) e^{jwn} dw, \quad (2.64)$$

donde, sustituyendo la función $H(e^{jw})$, se tiene:

$$\begin{aligned} h(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-jwD} e^{jwn} dw \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{jw(n-D)} dw \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{j(n-D)} \left[e^{j\frac{\pi}{2}(n-D)} - e^{-j\frac{\pi}{2}(n-D)} \right] \\ &= \frac{2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}(n-D)\right)}{2\pi(n-D)} = \frac{\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{2}(n-D)\right)}{2}, \end{aligned} \quad (2.65)$$

con $-\infty < n < \infty$, siendo $\text{sinc}(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x}$. Se tiene un sistema no causal de longitud infinita por lo que el sistema es ideal (no se puede implementar físicamente). Lo que sí se puede hacer es calcular una serie de términos de la expresión anterior y calcular su respuesta frecuencial. Las gráficas de la Fig. 2.8 muestra la respuesta en frecuencia obtenida usando $-15 \leq n \leq 15$ y $D = 5$.

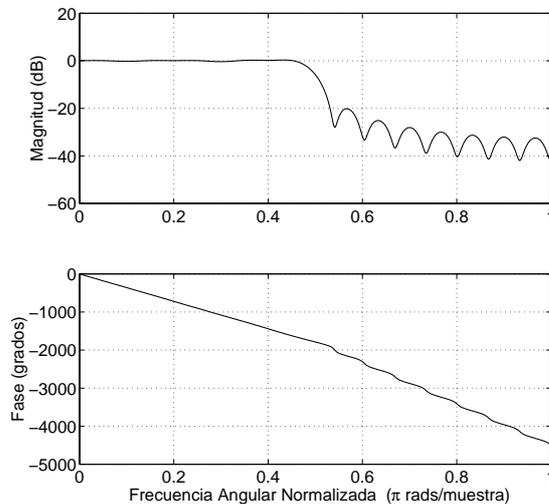


Figura 2.8: Respuesta en frecuencia del sistema.

Se han calculado los términos y se han desplazado “temporalmente” para hacer el sistema causal. Este desplazamiento temporal se corresponde con un término frecuencial de la forma $e^{-jw\alpha}$. Este hecho se deduce de la aplicación de la propiedad del retardo temporal expresada como sigue

Si

$$x(n) \xleftrightarrow{F} X(w)$$

entonces

$$x(n - k) \xleftrightarrow{F} e^{-jwk} X(w)$$

Se tendrá pues un efecto sobre la fase pero no sobre la magnitud al realizar este desplazamiento temporal. Este efecto sobre la fase aparece en el *retardo de grupo* o *envolvente*, que se define como la derivada de la fase respecto a la frecuencia y viene expresada así

$$\tau_g = -\frac{d\varphi(w)}{dw} \quad (2.66)$$

Se puede ver el retardo de grupo como el retardo temporal que experimenta una serie de componentes frecuenciales al pasar por un determinado sistema. Cuando la fase sigue una dependencia lineal con la frecuencia, el retardo es constante.

La Fig. 2.9 muestra que existe un retardo de 20 muestras; 15 correspondiente al desplazamiento para que el sistema sea causal y 5 debidos a la elección de D . Si se hubiera tomado más términos, la respuesta sería más cercana al caso ideal.

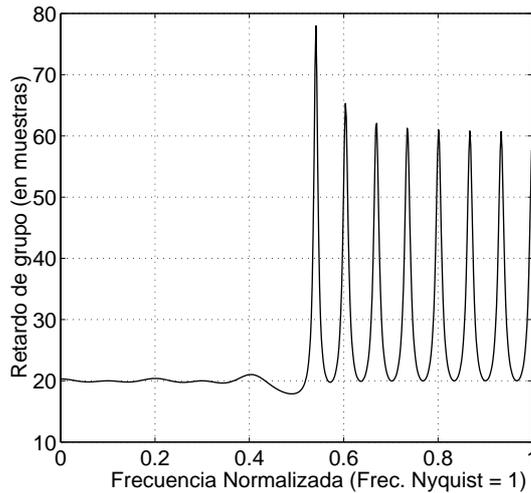


Figura 2.9: Retardo de grupo del sistema.

9. Se tiene un filtro cuya respuesta en frecuencia es

$$H(e^{jw}) = \begin{cases} j & -\pi < w < 0 \\ -j & 0 < w < \pi. \end{cases}$$

Determine la respuesta impulsional de dicho sistema.

Resolución:

Aplicando la definición

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{jw}) e^{jwn} dw, \quad (2.67)$$

se tiene que

$$\begin{aligned} h(n) &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^0 j e^{jwn} dw - \int_0^{\pi} j e^{jwn} dw \right] = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{j}{jn} e^{jwn} \Big|_{-\pi}^0 - \frac{j}{jn} e^{jwn} \Big|_0^{\pi} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi n} [1 - e^{-j\pi n} - (e^{j\pi n} - 1)] = \frac{1}{2\pi n} [2 - 2\cos(\pi n)]. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Según esto, se tendría

$$h(n) = \begin{cases} 0 & n \text{ par} \\ \frac{2}{\pi n} & n \text{ impar.} \end{cases} \quad (2.69)$$

Este filtro es ideal ya que $-\infty < n < \infty$, además de ser no causal. La actuación de este filtro será la siguiente; sea una señal $x(n) = \cos(\omega n) = \frac{1}{2}[e^{j\omega n} + e^{-j\omega n}]$. La salida del filtro para la primera componente sería

$$y_1(n) = \frac{1}{2} j e^{j\omega n} \quad (2.70)$$

mientras que para la segunda sería

$$y_2(n) = -\frac{1}{2} j e^{-j\omega n}. \quad (2.71)$$

Aplicando la linealidad de los sistemas estudiados se tiene

$$y(n) = y_1(n) + y_2(n) = \frac{1}{2j}[e^{jwn} - e^{-jwn}] = \text{sen}(wn), \quad (2.72)$$

la señal de salida tiene un desplazamiento de fase de $\pi/2$.

10. Se plantea un sistema digital, causal, cuya respuesta impulsional viene dada por la siguiente serie:

$$h(n) = \{0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, \dots\}.$$

Determine la respuesta en frecuencia de dicho sistema.

Resolución:

Este sistema, al ser periódico con $N = 6$ cumplirá la siguiente relación $h(n) = h(n-6)$ excepto en $n < 5$ por lo que para los términos $0 \leq n \leq 5$ se usarán deltas para caracterizarlo. De esta forma se obtiene:

$$h(n) = 0 \cdot \delta(n) + 0 \cdot \delta(n-1) + 0 \cdot \delta(n-2) + 1 \cdot \delta(n-3) + 1 \cdot \delta(n-4) + 1 \cdot \delta(n-5) + h(n-6) \quad (2.73)$$

Aplicando la propiedad del retardo temporal y la transformada de Fourier de una delta

Si

$$\delta(n) \xleftrightarrow{F} 1$$

entonces

$$\delta(n-n_0) \xleftrightarrow{F} e^{-jwn_0}$$

se llega a

$$H(e^{jw}) = e^{-jw3} + e^{-jw4} + e^{-jw5} + e^{-jw6} = \frac{1}{1 - e^{-6jw}}(e^{-jw3} + e^{-jw4} + e^{-jw5}) \quad (2.74)$$

Se puede aplicar

$$\sum_{k=L}^M s^k = \frac{s^{M+1} - s^L}{s - 1}, \quad (2.75)$$

a la suma de exponenciales complejas ($s = e^{-jw}$, $L = 3$, $M = 5$), obteniendo

$$H(e^{jw}) = \frac{e^{-jw6} - e^{-jw3}}{(1 - e^{-jw6})(e^{-jw} - 1)}. \quad (2.76)$$

Reagrupando términos para expresarlos en forma de senos y cosenos, se tiene que

$$H(e^{jw}) = \frac{e^{-9/2jw}(e^{-jw3/2} - e^{jw3/2})}{e^{-jw3}(e^{jw3} - e^{-jw3})e^{-jw2}(e^{-jw/2} - e^{jw/2})}. \quad (2.77)$$

De esta forma,

$$H(e^{jw}) = e^{-jw} \frac{-2j\text{sen}(\frac{3}{2}w)}{2j\text{sen}(3w)(-2j)\text{sen}(\frac{w}{2})} = \frac{e^{-j(w+\frac{\pi}{2})}}{4} \frac{1}{\cos(\frac{3}{2}w)\text{sen}(\frac{1}{2}w)}. \quad (2.78)$$

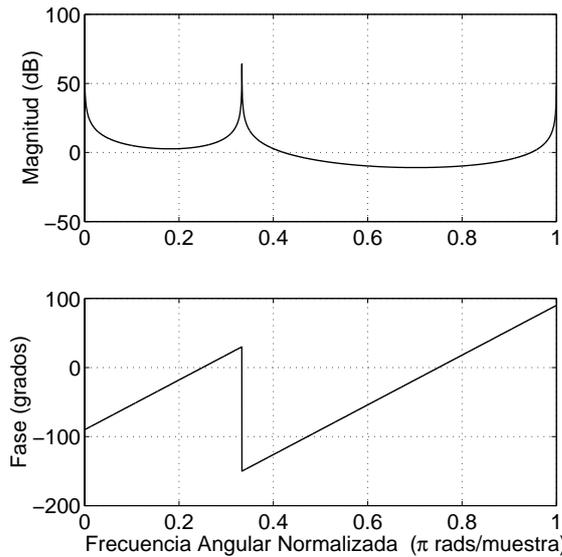


Figura 2.10: Respuesta en frecuencia (magnitud y fase) del sistema.

Tendremos que $|H(e^{jw})| \rightarrow \infty$ para $w = 0$ y $w = \pi/3$, estando acotada dicha respuesta en frecuencia el resto de valores. La Fig. 2.10 muestra dicha respuesta en frecuencia.

11. Dada la respuesta en frecuencia de un sistema $H(e^{jw})$ se define el retardo de grupo como

$$\tau_g = -\frac{d\varphi_{H(e^{jw})}}{dw},$$

donde $\varphi_{H(e^{jw})}$ representa la fase del sistema $H(e^{jw})$. Determine dicho retardo en los siguientes casos:

- a) $h(n) = \frac{1}{2}[1 + (-1)^n][u(n) - u(n - 8)]$.
 b) $h(n) = \alpha^n u(n)$.

Resolución:

- a) La primera respuesta impulsional se puede escribir como

$$h(n) = \begin{cases} 1, & n \text{ par y } 0 \leq n < 8 \\ -1, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.79)$$

Se tendría entonces

$$H(e^{jw}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-jwk} = \sum_{k=0}^3 h(2k)e^{-2jwk} = \sum_{k=0}^3 e^{-2jwk}. \quad (2.80)$$

Si se aplica la expresión de la suma de una serie geométrica finita se llega a

$$H(e^{jw}) = \frac{1 - e^{-2jw4}}{1 - e^{-2jw}} = \frac{1 - e^{-8jw}}{1 - e^{-2jw}} = e^{-3jw} \frac{\text{sen}(4w)}{\text{sen}(w)}. \quad (2.81)$$

La fase de $H(e^{jw})$ será igual a $-3w$ (fase de la exponencial compleja) y entonces se tiene que el retardo de grupo es

$$\tau_g = -\frac{d\varphi_{H(e^{jw})}}{dw} = 3. \quad (2.82)$$

b) En este caso tenemos

$$H(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-jwn} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^n u(n)e^{-jwn} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n e^{-jwn} = \frac{1}{1 - \alpha e^{-jw}} \quad (2.83)$$

De esta expresión podemos calcular la fase del sistema:

$$\varphi_{H(e^{jw})} = \varphi(1) - \varphi(1 - \alpha e^{-jw}) = 0 - \varphi(1 - \alpha \cos w + j\alpha \sin w) = -\arctg\left(\frac{\alpha \sin w}{1 - \alpha \cos w}\right) \quad (2.84)$$

y por tanto, derivando podemos calcular el retardo de grupo:

$$\begin{aligned} \tau_g &= -\frac{d\varphi_{H(e^{jw})}}{dw} = \frac{1}{1 + \frac{\alpha^2 \sin^2 w}{(1 - \alpha \cos w)^2}} \alpha \frac{\cos w(1 - \alpha \cos w) - (\alpha \sin w)\sin w}{(1 - \alpha \cos w)^2} \\ &= \frac{\alpha[\cos w - \alpha \cos^2 w - \alpha \sin^2 w]}{(1 - \alpha \cos w)^2 + \alpha^2 \sin^2 w} = \frac{\alpha(\cos w - 1)}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos w}. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Si ahora tomamos $\alpha = 1/2$,

$$\tau_g = \frac{\frac{1}{2}(\cos w - 1)}{\frac{5}{4} - \cos w} = \frac{2(\cos w - 1)}{5 - 4\cos w}, \quad (2.86)$$

que no es constante y sí producirá distorsión en fase.

12. Sea $x(n)$ una secuencia real de N puntos tal que cumple la siguiente relación de simetría $x(n + \frac{N}{2}) = -x(n)$, $n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$ (N par). Demuestre que su DFT de orden N :

- a) Tiene los armónicos pares igual a 0.
 b) Los armónicos impares se pueden calcular usando la DFT de orden $N/2$ de la señal $x(n)$ modulada por la exponencial $e^{-j\frac{2\pi n}{N}}$, esto es

$$\hat{x}(n) = 2x(n)e^{-j\frac{2\pi n}{N}}, n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1.$$

Resolución:

Para demostrarlo se usa la definición de la DFT:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} \quad (2.87)$$

Cambiando el índice al segundo sumatorio ($s = n - N/2$) se llega a

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} + \sum_{s=0}^{N/2-1} x(s + N/2)e^{-j\frac{2\pi k}{N}(s+N/2)} \quad (2.88)$$

Aplicando que $x(s+N/2) = -x(s)$, $\forall s = 0, \dots, N/2-1$ y desarrollando la exponencial compleja, se llega a

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} - \sum_{s=0}^{N/2-1} x(s+N/2)e^{-j\frac{2\pi ks}{N}} e^{-j\pi k}. \quad (2.89)$$

Agrupando los dos sumatorios se llega a

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n)(1 - e^{-j\pi k})e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}. \quad (2.90)$$

Si k es par se llega a $X(k) = 0$. En el caso de que k sea impar se llega a

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} 2x(n)e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}, \quad k \text{ impar} \quad (2.91)$$

Si k es impar se debe cumplir $k = 2u + 1$ con $u = 0, \dots, N/2 - 1$. Esto se traduce en

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} 2x(n)e^{-j\frac{2\pi n}{N}(2u+1)} = \sum_{n=0}^{N/2-1} (2x(n)e^{-j\frac{2\pi n}{N}})e^{-j\frac{2\pi n}{N}u}, \quad u = 0, \dots, N/2 - 1 \quad (2.92)$$

con lo que queda demostrada la segunda proposición. ★★

13. Dada una secuencia $x(n)$ que es diferente de cero en el intervalo $0 \leq n \leq N - 1$ (N par) y nula fuera de él y tiene como DFT $X(k)$, determine la relación existente entre dicha transformada y las DFT de orden N de las secuencias

- a) $y(n) = (-1)^n x(n)$
 b) $z(n) = x^*(n)$, conjugado de $x(n)$.
 c) Respuesta impulsional dada por

$$h(n) = \begin{cases} x(n), & n \text{ par} \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$

Resolución:

- a) Determinemos el valor de $Y(k)$

$$\begin{aligned} Y(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} y(n)e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n x(n)e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} e^{j\pi n} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} e^{j\frac{2\pi nN}{2N}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi n}{N}(k-\frac{N}{2})} = X(k - \frac{N}{2}) \end{aligned} \quad (2.93)$$

Si $k < N/2$ en lugar de sustituir $(-1)^n$ por $e^{j\pi n}$ se sustituye por $e^{-j\pi n}$, llegando a:

$$\begin{aligned} Y(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} y(n)e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n x(n)e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} e^{-j\frac{2\pi nN}{2N}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi n}{N}(k+\frac{N}{2})} = X(k + \frac{N}{2}) \end{aligned} \quad (2.94)$$

Por tanto, se tiene

$$Y(k) = \begin{cases} X(k + \frac{N}{2}), & k < N/2 \\ X(k - \frac{N}{2}), & k \geq N/2 \end{cases} \quad (2.95)$$

b) En este caso, se tiene

$$\begin{aligned} Z(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x^*(n) e^{-j \frac{2\pi kn}{N}} \implies Z^*(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{j \frac{2\pi kn}{N}} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{j \frac{2\pi kn}{N}} e^{-j \frac{2\pi nN}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi n}{N} (N-k)} = X(n-k) \end{aligned} \quad (2.96)$$

y, por tanto, volviendo a conjugar se llega a

$$Z(k) = X^*(n-k). \quad (2.97)$$

c) La señal de la cual se nos pide calcular su DFT se puede escribir como

$$v(n) = \frac{1}{2} [1 + (-1)^n] x(n). \quad (2.98)$$

Como la DFT es un operador lineal,

$$DFT\{v(n)\} = \frac{1}{2} [DFT\{x(n)\} + DFT\{(-1)^n x(n)\}] \quad (2.99)$$

que, a partir de los resultados del apartado a),

$$V(k) = \frac{1}{2} \left[X(k) + X(k + \frac{N}{2}) \right], \quad k < \frac{N}{2} \quad (2.100)$$

y

$$V(k) = \frac{1}{2} \left[X(k) + X(k - \frac{N}{2}) \right], \quad k \geq \frac{N}{2} \quad (2.101)$$

14. Considere la secuencia temporal $x(n) = (\frac{1}{2})^n u(n)$. Se pide

- a) Determinar $X(e^{jw})$.
- b) Determinar la secuencia $X(k) = X(e^{jw}) \Big|_{w=\frac{2\pi k}{4}}$, $k = 0, 1, 2, 3$.
- c) Suponiendo que la secuencia obtenida en b) fueran los coeficientes de una DFT, determinar la secuencia temporal que se deriva de dicha secuencia.
- d) Comparar la secuencia obtenida con $x(n)$ y justificar el resultado.

Resolución:

a)

$$X(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jwn} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\frac{1}{2})^n u(n) e^{-jwn} = \sum_{n=0}^{\infty} ((\frac{1}{2}) e^{-jw})^n \quad (2.102)$$

por lo que

$$X(e^{jw}) = \frac{1}{1 - \frac{e^{-jw}}{2}} = \frac{2}{2 - e^{-jw}}. \quad (2.103)$$

b)

$$X(k) = \frac{2}{2 - e^{-jw}} \Big|_{w=\frac{2\pi k}{4}=\frac{\pi k}{2}} \quad (2.104)$$

de donde

$$X(0) = 2 \quad (2.105)$$

$$X(1) = \frac{2}{2 + j} \quad (2.106)$$

$$X(2) = \frac{2}{2 - e^{-j\frac{2\pi}{2}}} = \frac{2}{3} \quad (2.107)$$

$$X(3) = \frac{2}{2 - e^{-j\frac{3\pi}{2}}} = \frac{2}{2 - j} \quad (2.108)$$

c) Se aplica la IDFT para obtener $\hat{x}(n)$:

$$\hat{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} \quad (2.109)$$

Si se desarrolla esta expresión para cada término:

$$\begin{aligned} \hat{x}(0) &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{N-1} X(k) = \frac{1}{4} \left[2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{2+j} + \frac{2}{2-j} \right] = \frac{16}{15} \\ \hat{x}(1) &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 X(k) e^{j\frac{\pi k}{2}} = \frac{1}{4} [X(0) + jX(1) - X(2) - jX(3)] \\ &= \frac{1}{4} [(X(0) - X(2)) + j(X(1) - X(3))] = \frac{1}{4} \left[\left(2 - \frac{2}{3}\right) + j\left(\frac{2}{2+j} - \frac{2}{2-j}\right) \right] = \frac{8}{15} \\ \hat{x}(2) &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 X(k) e^{j\pi k} \quad (2.110) \\ &= \frac{1}{4} [X(0) - X(1) + X(2) - X(3)] = \frac{1}{4} \left[2 + \frac{2}{3} - \left(\frac{2}{2+j} + \frac{2}{2-j}\right) \right] = \frac{4}{15} \\ \hat{x}(3) &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 X(k) e^{j\frac{3\pi k}{2}} \\ &= \frac{1}{4} [X(0) - jX(1) - X(2) + jX(3)] = \frac{1}{4} \left[2 - \frac{2}{3} + j\left(\frac{2}{2-j} - \frac{2}{2+j}\right) \right] = \frac{2}{15} \end{aligned}$$

d) La secuencia obtenida ha sido

$$\hat{x}(n) = \left\{ \frac{16}{15}, \frac{8}{15}, \frac{4}{15}, \frac{2}{15} \right\} \quad (2.111)$$

La secuencia $x(n)$ para $n = 0, 1, 2, 3$ es $\{1, (2)^{-1}, (4)^{-1}, (8)^{-1}\}$. Se comprueba que la secuencia $\hat{x}(n)$ se genera de acuerdo a la expresión

$$\hat{x}(n) = \frac{x(n)}{1 - a^4}, a = \frac{1}{2} \quad (2.112)$$

En nuestro caso

$$\hat{x}(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{16}{15} \quad (2.113)$$

La diferencia entre las dos series viene del factor $\frac{1}{1-(\frac{1}{2})^4}$ que es debido al solape temporal ya que $x(n) \neq 0$ para $n > N$. De la teoría se tiene

$$\begin{aligned}\hat{x}(n) &= \sum_{l=0}^{\infty} x(n+lN) = \sum_{l=0}^{\infty} x(n+l4) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+4l} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{l=0}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^4\right]^l = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{16}{15}\right)\end{aligned}\quad (2.114)$$

con lo que queda demostrado el resultado obtenido.

15. Sea $x(n)$ una secuencia tal que $x(n) = 0, \forall n < 0$ o $n \geq N$, siendo $X(k)$ su DFT de orden N . Se pide

a) Demostrar la identidad de Parseval

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2.$$

b) Calcule la DFT de orden N con $N > L$ de la señal

$$x(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n < L \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$

c) Utilice los resultados de b) y c) para determinar la suma

$$\frac{1}{100} \sum_{k=0}^{99} \left(\frac{\text{sen}\left(\frac{\pi k}{4}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi k}{100}\right)} \right)^2$$

Resolución:

a) Aplicando la definición de la DFT se tiene

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi kn}{N}}. \quad (2.115)$$

Se se conjuga la anterior expresión, se tiene

$$X^*(k) = \sum_{s=0}^{N-1} x^*(s) e^{j \frac{2\pi ks}{N}}, \quad (2.116)$$

con lo que

$$|X(k)|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{s=0}^{N-1} x(n) x^*(s) e^{j \frac{2\pi k}{N} (s-n)} = \sum_{s=0}^{N-1} |x(n)|^2 e^{j \frac{2\pi k}{N} (s-n)}. \quad (2.117)$$

Las exponenciales complejas presentan la propiedad de ortogonalidad dada por:

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi k}{N} (s-n)} = \begin{cases} 0, & s \neq n \\ N, & s = n \end{cases} \quad (2.118)$$

Se tiene entonces

$$\sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2 = N \sum_{s=0}^{N-1} |x(s)|^2 \quad (2.119)$$

con lo que

$$\sum_{s=0}^{N-1} |x(s)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2 \quad (2.120)$$

y por tanto queda demostrado la Identidad de Parseval.

b) Aplicando la definición de la DFT, se tiene

$$\begin{aligned} X(k)|_N &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} = \sum_{n=0}^{L-1} e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} \\ &= \frac{1 - e^{-j\frac{2\pi k}{N}L}}{1 - e^{-j\frac{2\pi k}{N}}} = \frac{e^{-j\frac{\pi k}{N}L}}{e^{-j\frac{\pi k}{N}}} \left[\frac{e^{j\frac{\pi k}{N}L} - e^{-j\frac{\pi k}{N}L}}{e^{j\frac{\pi k}{N}} - e^{-j\frac{\pi k}{N}}} \right] \\ &= \frac{e^{-j\frac{\pi k}{N}L}}{e^{-j\frac{\pi k}{N}}} \cdot \frac{\text{sen}(\frac{\pi k}{N}L)}{\text{sen}(\frac{\pi k}{N})} = e^{-j\frac{\pi k}{N}(L-1)} \cdot \frac{\text{sen}(\frac{\pi k}{N}L)}{\text{sen}(\frac{\pi k}{N})} \end{aligned} \quad (2.121)$$

c) Nos piden determinar el sumatorio

$$\frac{1}{100} \sum_{k=0}^{99} \left(\frac{\text{sen}(\frac{\pi k}{4})}{\text{sen}(\frac{\pi k}{100})} \right)^2 \quad (2.122)$$

Comparando el término general del sumatorio con el obtenido en el apartado b), tenemos que $N = 100$ y $L = N/4 = 25$, por lo que

$$\sum_{n=0}^{24} x^2(n) = \frac{1}{100} \sum_{k=0}^{99} \left(\frac{\text{sen}(\frac{\pi k}{4})}{\text{sen}(\frac{\pi k}{100})} \right)^2 \quad (2.123)$$

como $x(n) = 1$, $0 \leq n \leq 24$, ese sumatorio es igual a 24.

★

16. Determine la DFT de orden N de la secuencia e^{jwn} , $n = 0, \dots, N-1$ siendo $w \neq \frac{2\pi k}{N}$, $\forall k = 0, \dots, N-1$.

Resolución:

Aplicando la definición se llega a

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{jwn} e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(w - \frac{2\pi k}{N})n} \\ &= \frac{1 - e^{j(w - \frac{2\pi k}{N})N}}{1 - e^{j(w - \frac{2\pi k}{N})}} = \frac{1 - e^{jwN}}{1 - e^{j(w - \frac{2\pi k}{N})}} = \frac{e^{jwN/2}}{e^{j(w - \frac{2\pi k}{N})\frac{1}{2}}} \cdot \frac{e^{-jwN/2} - e^{jwN/2}}{e^{j(w - \frac{2\pi k}{N})\frac{1}{2}} - e^{-j(w - \frac{2\pi k}{N})\frac{1}{2}}} \quad (2.124) \\ &= e^{j(\frac{w(N-1)}{2} + \frac{\pi k}{N})} \cdot \frac{\text{sen}(\frac{wN}{2})}{\text{sen}[(w - \frac{2\pi k}{N})\frac{1}{2}]} \end{aligned}$$

Destacar que si $w = \frac{2\pi\alpha}{N}$, $\alpha \in \mathbb{Z}$, entonces $X(k) = 0$, $\forall k \neq \alpha$ y $X(\alpha) = N$.

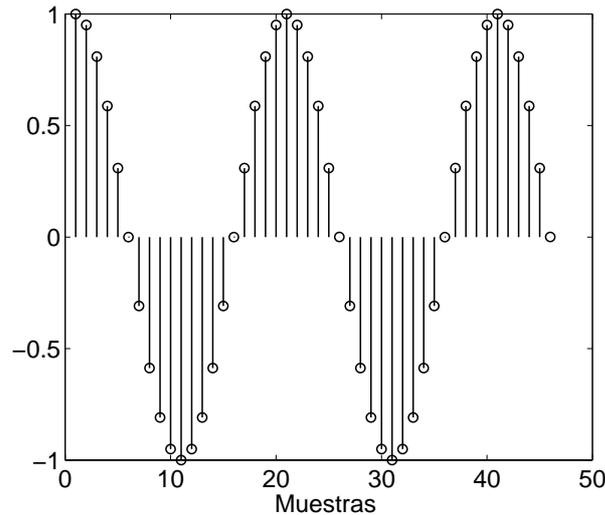


Figura 2.11: Secuencia temporal.

Veamos que a toda señal periódica discreta cuya frecuencia sea múltiplo de la fundamental, le corresponde una DFT cuyos coeficientes son todos diferentes de cero, salvo el correspondiente a la frecuencia de la señal periódica. La explicación temporal queda reflejada en la Fig. 2.11.

Cuando se calcula una DFT se supone que la señal obtenida al aplicar la Transformada Inversa será periódica. Esto es inmediato de comprobar de la siguiente forma. Partiendo de la expresión que define $x(n)$ en función de $X(k)$, se tiene que

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j \frac{2\pi k n}{N}}, \quad 0 \leq n \leq N-1. \quad (2.125)$$

Si sustituimos $n = n_0 + N$, se llega a

$$\begin{aligned} x(n_0 + N) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j \frac{2\pi k}{N} (n_0 + N)} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j \frac{2\pi k}{N} n_0} e^{j 2\pi k} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j \frac{2\pi k}{N} n_0} = x(n_0). \end{aligned} \quad (2.126)$$

Se tiene entonces que la señal debería repetirse cada N muestras, lo que ocurre con las funciones cuya frecuencia se corresponde con múltiplos de la fundamental.

Esto no ocurre con la señal que se quiere descomponer y, a pesar de ser periódica, al realizar la DFT aparece como no periódica; tenemos un “salto” entre el primer periodo de $x(n)$ y el siguiente. Ese “salto” entre periodos consecutivos provoca que los coeficientes de la DFT sean diferentes de 0. A este fenómeno se le conoce como “goteo o derrame espectral” (“*spectral leakage*”). Este efecto se verá en mayor detalle en el apartado de prácticas con MATLAB de este mismo capítulo.

17. Sea $x(n)$ una secuencia periódica de periodo N , se desea determinar la relación entre $X(k) \Big|_N$ y $X(k) \Big|_{2N}$ siendo $X(k) \Big|_\alpha$ la DFT de orden α de $x(n)$.

Resolución:

Escribiendo la DFT de orden $2N$ de la secuencia $x(n)$,

$$X(k) \Big]_{2N} = \sum_{n=0}^{2N-1} x(n)e^{-j2\pi kn/2N} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi kn/2N} + \sum_{n=N}^{2N-1} x(n)e^{-j2\pi kn/2N} \quad (2.127)$$

Si ahora se cambia el índice en el segundo sumatorio $n \equiv s + N$, se tiene

$$X(k) \Big]_{2N} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi kn/2N} + \sum_{s=0}^{N-1} x(s+N)e^{-j2\pi k(s+N)/2N}. \quad (2.128)$$

Aprovechando que $x(t+N) = x(s)$, se puede escribir

$$X(k) \Big]_{2N} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi kn/2N} + \sum_{s=0}^{N-1} x(s)e^{-j2\pi ks/2N} e^{-j\pi k}. \quad (2.129)$$

Agrupando términos se llega a

$$X(k) \Big]_{2N} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi kn/2N} (1 + e^{-j\pi k}) = X(k/2) \Big]_N (1 + e^{-j\pi k}). \quad (2.130)$$

Por tanto se tiene que $X(k) \Big]_{2N}^{k \text{ impar}} = 0$ y $X(k) \Big]_{2N}^{k \text{ par}} = 2X(k/2) \Big]_N$.

Así pues se aporta información adicional si usamos otro periodo para calcular la DFT. Visto de otra forma, el aumentar las funciones base en nuestro espacio de la DFT no resulta necesario ya que, en el espacio original de la DFT de orden N todas las muestras temporales quedan claramente definidas. ★ ★

18. Se tiene una señal periódica $x(n)$ de periodo N . Se genera una nueva señal

$$y(n) = \begin{cases} 0 & n \text{ impar} \\ x(n/2) & n \text{ par.} \end{cases}$$

de tamaño $2N$. Se desea determinar la relación entre $Y(k) \Big]_{2N}$ y $X(k) \Big]_N$.

Resolución:

Aplicando la definición de la DFT se tiene

$$Y(k) \Big]_{2N} = \sum_{n=0}^{2N-1} y(n)e^{-j2\pi kn/2N} = \underbrace{\sum_{s=0}^{N-1} y(2s)e^{-j2\pi k(2s)/2N}}_{n \text{ par}} + \underbrace{\sum_{s=0}^{N-1} y(2s+1)e^{-j2\pi k(2s+1)/2N}}_{n \text{ impar}} \quad (2.131)$$

por lo que

$$Y(k) \Big]_{2N} = \sum_{s=0}^{N-1} x(s)e^{-j2\pi ks/N} = X(k) \Big]_N. \quad (2.132)$$

No se tiene información adicional por introducir ceros en la secuencia de ahí que no se tengan cambios en la DFT. Además, destacar que como $X(k) \Big]_N$ tiene periodo

$N, Y(k) \Big]_{2N}$ también tendrá periodo N . Es decir, añadiendo ceros entre muestras se obtiene una “repetición” del espectro de la señal. ★ ★

19. Se tiene una DFT $X(k)$ de N puntos correspondiente a la señal $x(n)$. Determine las secuencias temporales que dan lugar a las siguientes DFT, también de orden N , con N par, relacionándolas con $X(k)$.

a) $Y(k) = (-1)^k X(k)$.

b) $Y(k) = \frac{1}{2} [X(k) + X(k^*)] = \text{Real}\{X(k)\}$.

c) $Y(k) = X(k - \frac{N}{2})$ para $k \geq N/2$ y $X(k + \frac{N}{2})$ para $k < N/2$.

Resolución:

- a) Aplicando la definición de la inversa de la DFT, se tiene

$$\begin{aligned} y(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y(k) e^{j2\pi kn/N} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) (-1)^k e^{j2\pi kn/N}. \end{aligned} \quad (2.133)$$

Como $(-1)^k = e^{j\pi k}$, se tiene que

$$\begin{aligned} y(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\pi k} e^{j2\pi kn/N} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi k N/2N} e^{j2\pi nk/N}. \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi k}{N}(n + \frac{N}{2})} = x(n + \frac{N}{2}). \end{aligned} \quad (2.134)$$

y, por tanto, se llega a

$$y(n) = x(n + \frac{N}{2}) \quad (2.135)$$

si $0 \leq n < N/2$.

En el caso de que $n \geq N/2$ se puede hacer el cambio $(-1)^k = e^{j\pi k}$. En esta situación se llega a

$$y(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{-j\frac{2\pi k N}{2N}} e^{j\frac{2\pi nk}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi k}{N}(n - \frac{N}{2})} = x(n - \frac{N}{2}) \quad (2.136)$$

si $N/2 \leq n < N$.

- b) Aplicando la propiedad de linealidad de la DFT a

$$Y(k) = \frac{1}{2} [X(k) + X^*(k)] \quad (2.137)$$

se llegaría a

$$y(n) = \frac{1}{2} [x(n) + \hat{x}(n)] \quad (2.138)$$

donde $\hat{x}(n)$ es la DFT inversa de $X^*(k)$. A continuación, se determinará dicho valor:

$$\begin{aligned}\hat{x}(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X^*(k) e^{j \frac{2\pi kn}{N}} \\ &= \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{-j \frac{2\pi kn}{N}} \right]^*\end{aligned}\quad (2.139)$$

y como $e^{j \frac{2\pi kN}{N}} = 1, \forall k \in \mathbb{Z}$, podemos escribir

$$\begin{aligned}\hat{x}(n) &= \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j \frac{2\pi kN}{N}} e^{-j \frac{2\pi kn}{N}} \right]^* \\ &= \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j \frac{2\pi k(N-n)}{N}} \right]^* = x^*(N-n),\end{aligned}\quad (2.140)$$

por lo que

$$y(n) = \frac{1}{2} [x(n) + x^*(N-n)]. \quad (2.141)$$

En este caso se han “reflejado” los términos de la DFT.

c) Aplicando la definición de la IDFT se tiene

$$\begin{aligned}y(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y(k) e^{j \frac{2\pi kn}{N}} \\ &= \frac{1}{N} \left[\sum_{k=0}^{N/2-1} Y(k) e^{j \frac{2\pi kn}{N}} + \sum_{k=N/2}^{N-1} Y(k) e^{j \frac{2\pi kn}{N}} \right] \\ &= \frac{1}{N} \left[\sum_{k=0}^{N/2-1} X(k+N/2) e^{j \frac{2\pi kn}{N}} + \sum_{k=N/2}^{N-1} X(k-N/2) e^{j \frac{2\pi kn}{N}} \right].\end{aligned}\quad (2.142)$$

Tomando un cambio de índices como sigue:

$$k + N/2 \equiv u, \quad k - N/2 \equiv v, \quad (2.143)$$

se obtiene

$$\begin{aligned}y(n) &= \frac{1}{N} \left[\sum_{u=N/2}^{N-1} X(u) e^{j \frac{2\pi n}{N} (u - \frac{N}{2})} + \sum_{v=0}^{N/2-1} X(v) e^{j \frac{2\pi n}{N} (v + \frac{N}{2})} \right] \\ &= \frac{1}{N} \left[\sum_{u=N/2}^{N-1} X(u) e^{j \frac{2\pi nu}{N}} e^{-j\pi n} + \sum_{v=0}^{N/2-1} X(v) e^{j \frac{2\pi nv}{N}} e^{j\pi n} \right].\end{aligned}\quad (2.144)$$

Como los índices u y v son mudos y $e^{j\pi n} = e^{-j\pi n}$, se llega a la expresión

$$y(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j \frac{2\pi nk}{N}} e^{-j\pi n}. \quad (2.145)$$

En el caso de que n sea par se tiene

$$y(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j \frac{2\pi nk}{N}} = x(n). \quad (2.146)$$

mientras que si n es impar se llega a

$$y(n) = -\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j \frac{2\pi nk}{N}} = -x(n). \quad (2.147)$$

con lo que se puede escribir

$$y(n) = (-1)^n x(n) \quad (2.148)$$

Los resultados obtenidos en este ejercicio son los duales de los conseguidos en el ejercicio 13, demostrando la dualidad de los dominios temporal y frecuencial.

20. Dada una secuencia discreta real $x(n)$ con periodo N siendo $X(k)$ su DFT de orden N , compruebe las siguientes igualdades:

- a) $\text{Real}\{X(k)\} = \text{Real}\{X(N - k)\}$.
 b) $\text{Imag}\{X(k)\} = -\text{Imag}\{X(N - k)\}$.

Resolución:

De las dos igualdades propuestas se deberá cumplir que $X(k) = X^*(N - k)$. Aplicando la definición de DFT se tendría:

$$X(N - k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi n}{N}(N-k)} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{j\frac{2\pi nk}{N}}e^{-j2\pi n} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{j\frac{2\pi nk}{N}} \quad (2.149)$$

Aplicando que $x(n)$ es real, es decir se cumple $x(n) = x^*(n)$, se obtiene

$$X(N - k) = \left(\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} \right)^* = X^*(k) \quad (2.150)$$

con lo que quedan demostradas las igualdades proporcionadas.

21. Dadas las secuencias $x(n) = \{+1, -1\}$ e $y(n) = \{-1, +1\}$, utilice la DFT para

- a) Determinar la convolución circular de las dos secuencias.
 b) Determinar la convolución lineal de las dos secuencias.

Resolución:

- a) La convolución circular de dos secuencias se puede determinar usando la DFT de acuerdo al siguiente esquema:

Si

$$\begin{array}{l} x(n) \xrightarrow{DFT} X(k) \Big|_N \\ y(n) \xrightarrow{DFT} Y(k) \Big|_N \end{array}$$

entonces

$$Z(k) = X(k)Y(k) \xrightarrow{IDFT} z(n) = x(n) \otimes y(n).$$

En el caso planteado tenemos

$$x(n) : X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} \quad (2.151)$$

y, por tanto, para $N = 2$

$$X(k) = \sum_{n=0}^1 x(n)e^{-j\frac{2\pi kn}{2}}, \quad (2.152)$$

con lo que

$$X(0) = x(1) + x(2) = 0, \quad X(1) = 2. \quad (2.153)$$

Para la segunda secuencia tenemos

$$y(n) : Y(k) = \sum_{n=0}^{N-1} y(n)e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} \quad (2.154)$$

y, por tanto, para $N = 2$

$$Y(k) = \sum_{n=0}^1 x(n)e^{-j\frac{2\pi kn}{2}}, \quad (2.155)$$

con lo que

$$Y(0) = y(0) + y(1) = 0, \quad Y(1) = -1 - 1 = -2. \quad (2.156)$$

De este modo,

$$Z(k) = Y(k)X(k) \quad (2.157)$$

y podemos obtener $Z(0) = 0$ y $Z(1) = -4$. Planteando transformadas inversas se tiene

$$z(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Z(k)e^{j\frac{2\pi kn}{N}} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 Z(k)e^{j\pi kn} = \frac{1}{N}[Z(0) + Z(1)e^{j\pi n}], \quad (2.158)$$

por lo que podemos calcular los valores de la secuencia resultante

$$z(0) = \frac{1}{2}[Z(0) + Z(1)] = -2 \quad (2.159)$$

$$z(1) = \frac{1}{2}[Z(0) + Z(1)e^{j\pi}] = 2. \quad (2.160)$$

Por consiguiente, la convolución circular será entonces $z(n) = \{-2, 2, 0, 0, \dots\}$.

- b) Para determinar la convolución lineal hay que añadir a las secuencias ceros hasta que tengan una longitud igual a la de la convolución lineal de las dos secuencias. En este caso, la longitud de la convolución lineal es $L = 2 + 2 - 1 = 3$. Se tiene entonces que

$$\hat{x}(n) = \{\underset{\uparrow}{+1}, -1, 0\}, \quad \hat{y}(n) = \{\underset{\uparrow}{-1}, 1, 0\}, \quad (2.161)$$

y hay que calcular entonces las DFT de las dos secuencias, multiplicarlas, y por último determinar la IDFT de dicho producto.

Se tiene, en primer lugar,

$$\hat{X}(k) = \sum_{n=0}^2 \hat{x}(n)e^{-j\frac{2\pi kn}{3}} = \left[\hat{x}(0) + \hat{x}(1)e^{-j\frac{2\pi k}{3}} + \hat{x}(2)e^{-j\frac{4\pi k}{3}} \right] = \left[1 - e^{-j\frac{2\pi k}{3}} \right] \quad (2.162)$$

Para $\hat{Y}(k)$ se tendrá:

$$\hat{Y}(k) = \sum_{n=0}^2 \hat{y}(n)e^{-j\frac{2\pi kn}{3}} = \left[\hat{y}(0) + \hat{y}(1)e^{-j\frac{2\pi k}{3}} + \hat{y}(2)e^{-j\frac{4\pi k}{3}} \right] = \left[-1 + e^{-j\frac{2\pi k}{3}} \right] \quad (2.163)$$

A partir de las dos últimas expresiones se puede establecer

$$\hat{Z}(k) = \hat{X}(k)\hat{Y}(k) = (1 - e^{-j\frac{2\pi k}{3}})(-1 + e^{-j\frac{2\pi k}{3}}) = -(1 - e^{-j\frac{2\pi k}{3}})^2, \quad (2.164)$$

y se tiene entonces

$$\hat{Z}(0) = 0 \quad (2.165)$$

$$\hat{Z}(1) = -(1 - e^{-j\frac{2\pi}{3}})^2 = \dots = -3e^{j\frac{\pi}{3}} \quad (2.166)$$

$$\hat{Z}(2) = -(1 - e^{-j\frac{4\pi}{3}})^2 = \dots = -3e^{-j\frac{\pi}{3}}. \quad (2.167)$$

Aplicando la transformada inversa se tiene

$$\hat{z}(n) = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^2 \hat{Z}(k)e^{j\frac{2\pi kn}{3}}. \quad (2.168)$$

Por tanto, podemos calcular su valor para $n = 0, 1, 2$ como sigue. Para $n = 0$,

$$\hat{z}(0) = \frac{1}{3}[\hat{Z}(0) + \hat{Z}(1) + \hat{Z}(2)] = \frac{1}{3}[0 - 3e^{j\frac{\pi}{3}} - 3e^{-j\frac{\pi}{3}}] = -1. \quad (2.169)$$

Para $n = 1$,

$$\hat{z}(1) = \frac{1}{3}[-3e^{j\frac{\pi}{3}}e^{j\frac{2\pi}{3}} + (-3e^{-j\frac{\pi}{3}})e^{j\frac{4\pi}{3}}] = 2. \quad (2.170)$$

Para $n = 2$,

$$\hat{z}(2) = \frac{1}{3}[-3e^{j\frac{\pi}{3}}e^{j\frac{4\pi}{3}} + (-3e^{-j\frac{\pi}{3}})e^{j\frac{8\pi}{3}}] = -1. \quad (2.171)$$

Si se aplica la expresión de la convolución lineal de dos señales, se tiene

$$z(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(n-k) = \sum_{k=0}^1 x(k)y(n-k), \quad (2.172)$$

con lo que

$$z(0) = x(0)y(0) = -1 \quad (2.173)$$

$$z(1) = x(0)y(1) + x(1)y(0) = 2 \quad (2.174)$$

$$z(2) = x(1)y(1) = -1 \quad (2.175)$$

que es lo obtenido usando la DFT.

22. Determine la señal temporal que da lugar a la siguiente DFT:

$$X(k) = \{1, j, -1, -j\}.$$

Resolución:

Aplicando la expresión general de la IDFT a la expresión proporcionada,

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j\frac{2\pi kn}{N}}, \quad (2.176)$$

y sustituyendo valores ($N = 4$), se llega a

$$x(n) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 X(k) e^{j \frac{\pi k n}{2}}. \quad (2.177)$$

Los valores de la secuencia recuperada son

$$x(0) = \frac{1}{4} [X(0) + X(1) + X(2) + X(3)] = \frac{1}{4} [1 + j - 1 - j] = 0 \quad (2.178)$$

$$x(1) = \frac{1}{4} [X(0) + X(1)e^{j \frac{\pi}{2}} + X(2)e^{j \pi} + X(3)e^{j \frac{3\pi}{2}}] = \frac{1}{4} [1 - 1 + 1 - 1] = 0 \quad (2.179)$$

$$x(2) = \frac{1}{4} [X(0) + X(1)e^{j \pi} + X(2)e^{2j \pi} + X(3)e^{3j \pi}] = \frac{1}{4} [1 - j - 1 + j] = 0 \quad (2.180)$$

$$x(3) = \frac{1}{4} [X(0) + X(1)e^{j \frac{3\pi}{2}} + X(2)e^{3j \pi} + X(3)e^{j \frac{9\pi}{2}}] = \frac{1}{4} [1 + 1 + 1 + 1] = 1 \quad (2.181)$$

2.3. Problemas propuestos

- Determinar los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier del siguiente pulso periódico:

$$x(n) = x(n + N)$$

donde

$$x(n)|_{\text{en un periodo}} = \begin{cases} 1, & 0 < n < L \\ -1, & L \leq n \leq N - 1 \end{cases}$$

- Demostrar, con la ayuda de las secuencias $h(n)$ y $x(n)$ que se puede usar la convolución circular (añadiendo ceros a las secuencias originales) para determinar la convolución lineal.

$$h(n) = \{\underset{\uparrow}{-1}, 1\}$$

$$x(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 1\}$$

- Dadas las siguientes ecuaciones en diferencias determine la correspondiente respuesta en frecuencia en magnitud de:

a) $y(n) = x(n) - x(n - 2) - 0.81y(n - 2)$.

b) $y(n) = x(n) - x(n - N)$ con N par.

- Determine la salida, en estado estacionario, del sistema definido por $h(n)$ cuando la entrada es $x(n)$:

$$x(n) = \frac{1}{2}(1 + (-1)^n)u(n)$$

$$h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos(w_0 n)u(n), \quad w_0 = \pi/2.$$

- Implemente un sistema que elimine la componente de 50 Hz, la frecuencia de muestreo del sistema es de 250 Hz, alterando lo menos posible el resto de componentes. Seguidamente determine la salida en estado estacionario de dicho sistema cuando la entrada es:

$$x(n) = \frac{1}{2}(1 + (-1)^n)u(n)$$

6. Determine la salida del sistema, en estado estacionario, definido por $h(n)$ cuando la entrada es $x(n)$:

$$h(n) = \frac{1}{2}(1 + (-1)^n)u(n)$$

$$x(n) = 2\cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right)u(n) - \text{sen}\left(\frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{4}\right)u(n).$$

7. Dada la secuencia $x(n)$ definida como $\{1, 2, 1, 0, 0, 0, 0\}$ determinar:

- a) La respuesta en frecuencia $X(e^{j\omega})$.
 b) Su Transformada Discreta de Fourier de orden N , ¿qué tienen en común los resultados a) y b)?

8. Calcular las DFT de N puntos (N par) de las siguientes señales:

a) $x(n) = \delta(n)$

b)

$$x(n) = \begin{cases} 1, & 0 < n < \frac{N}{2} - 1 \\ -1, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

9. Aplicando las propiedades de la DFT exprese las DFT (orden N) de las siguientes señales en función de la DFT de orden N de $x(n)$, $X(k)$:

a) $y(n) = x(n)\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$

b) $z(n) = x(n)\text{sen}\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$

10. Una señal de tiempo continuo $x(t)$ cuya frecuencia máxima es de 4 kHz se muestrea a 10 kHz. Seguidamente, con la señal muestreada se determina su DFT de 1000 puntos. ¿A qué frecuencias corresponden los términos 150 y 180 de esta DFT?

11. Dadas las señales:

$$x = \{x(1), x(2), \dots, x(N-1)\},$$

$$\uparrow$$

$$y = \{x(N-1), x(N-2), \dots, x(1)\}$$

$$\uparrow$$

Determinar la relación que existe entre sus DFT de orden N .

12. Determinar la DFT de las siguientes señales periódicas:

a) $x(n) = \{1, 0, -1, 1, 0, -1, 1, 0, -1, \dots\}$ DFT de orden 3.

b) $x(n) = \{1, 0, 0, -1, 1, 0, 0, -1, 1, 0, 0, -1, \dots\}$ DFT de orden 4.

13. Dada la secuencia $x(n)$ diferente de 0 en el intervalo $0 \leq n \leq N - 1$ cuya DFT de orden N es $X(k)$. A partir de dicha secuencia se obtiene $y(n)$ de la siguiente forma

$$y(n) = \begin{cases} x(n) & 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0 & N \leq n \leq 2N - 1. \end{cases}$$

Determine $Y(k)$ relacionándola con la obtenida usando $x(n)$.

2.4. Prácticas con MATLAB

2.4.1. Respuesta en frecuencia

En esta práctica se estudiará el concepto de respuesta en frecuencia de un sistema. Veremos cómo podemos utilizar ésta para determinar la salida de un sistema dada una cierta entrada. También estudiaremos la relación entre los polos y ceros de la transformada Z y la respuesta en frecuencia de un determinado sistema.

1. Un hecho que normalmente no se tiene muy en cuenta a la hora de trabajar con la respuesta en frecuencia es la respuesta transitoria de un sistema. Cuando se analiza la respuesta en frecuencia de un sistema se supone que las señales tienen longitud infinita. En cambio, dado que se trabaja con señales causales (valen cero para tiempos negativos), la hipótesis de partida no es verdadera. Este hecho se traduce en la aparición de una respuesta transitoria que desaparecerá con el tiempo dejando la respuesta estacionaria determinada por la respuesta en frecuencia. Esta respuesta transitoria es propia de cada sistema y no depende de las entradas que se le aplican. A modo de ejemplo se considera el sistema definido por la ecuación en diferencias:

$$y(n) = x(n) + \mu y(n-1), \quad (2.182)$$

siendo μ una constante. Para resaltar todavía más la respuesta transitoria del sistema se considera un valor cercano a 1, en nuestro caso consideramos 0'99. Se considera que la señal de entrada al sistema es $x(n) = \cos(2\pi 0'1n)$. Para determinar la respuesta en frecuencia a partir de la ecuación en diferencias se aplica la propiedad del retardo temporal a dicha ecuación, obteniéndose

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) + \mu Y(e^{j\omega})e^{-j\omega}. \quad (2.183)$$

Agrupando términos se obtiene:

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{X(e^{j\omega})}{1 - \mu e^{-j\omega}}. \quad (2.184)$$

Si se determina la salida analíticamente, usando la respuesta en frecuencia se tendría:

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \mu e^{-j0'2\pi}} \rightarrow y(n) = |Y(e^{j\omega})| \cos(2\pi 0'1n + \varphi(Y(e^{j\omega}))) = 1'70 \cos(0'2\pi n - 0'92). \quad (2.185)$$

El siguiente programa en MATLAB determina la salida del sistema usando la respuesta en frecuencia, de forma análoga a la comentada e implementando la ecuación en diferencia mediante un bucle `for`.

```
% -----
% Programa de la respuesta en frecuencia
% -----
N=input('Longitud de la secuencia a filtrar ');
mu=input('Parámetro del sistema ');
x=cos(2*pi*0.1*(0:N-1));

% Salida usando la respuesta en frecuencia
ycom=1/(1-mu*exp(-0.2*pi*j));
```

```

y=abs(ycom)*cos(0.2*pi*(0:N-1)+angle(ycom));

% Salida usando la ecuación en diferencias
yy=zeros(1,N);
yy(1)=x(1);
for t=2:N,
    yy(t)=x(t)+mu*yy(t-1);
end

% Representación de las secuencias
subplot(2,1,1), stem(y, '*-')
title('Secuencia usando la respuesta en frecuencia ');

subplot(2,1,2), stem(yy, '*-')
title('Secuencia usando la ecuación en diferencias ');

```

La Fig. 2.12 muestra lo obtenido para los dos casos. Se aprecia que existe una discordancia inicial entre los dos métodos debida a la respuesta transitoria del sistema.

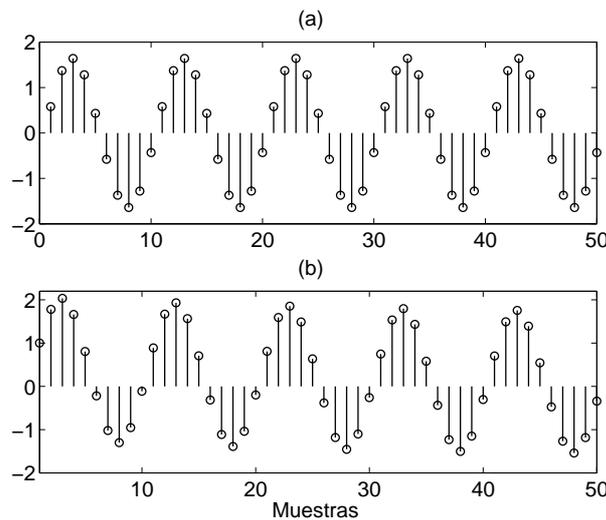


Figura 2.12: Secuencias obtenidas mediante (a) la respuesta en frecuencia y (b) la implementación de la ecuación en diferencias.

- Otro punto importante a tener en cuenta al estudiar la respuesta en frecuencia es el hecho de considerar que un sistema modifica la amplitud y la fase. Por inercia se tiende a estudiar solamente el módulo de la frecuencia que da información sobre el cambio de la amplitud. Esta forma de proceder tiene una razón de “uso”. La mayoría de filtros digitales se orientan a aplicaciones de audio donde la fase de la señal no tiene excesiva importancia recayendo en la amplitud la caracterización de las señales. Sin embargo, cuando la forma de la señal es importante, el considerar la fase es fundamental, como por ejemplo en la transmisión de datos o en el procesado de señales biomédicas. A modo de ejemplo se considera la siguiente entrada:

$$x(n) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{10} \cos\left(\frac{2\pi}{256}(n-129)k\right), n = 1, \dots, 256 \quad (2.186)$$

La representación temporal y frecuencial de esta señal viene dada en la Fig. 2.13.

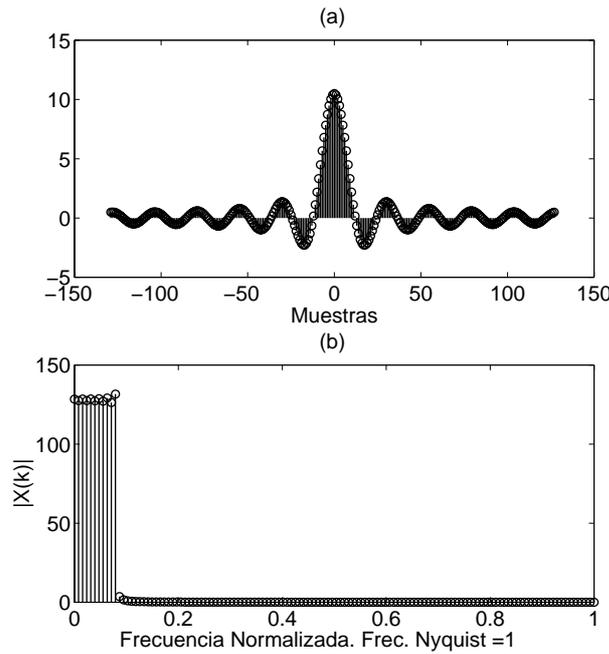


Figura 2.13: Representación (a) temporal y (b) frecuencial de la señal.

De la expresión que define $x(n)$ y de su caracterización frecuencial se deduce que esta señal está formada por la suma de un conjunto de sinusoides cuya frecuencia digital oscila entre 0 (nivel de continua correspondiente al factor $1/2$) y $10/256$. Seguidamente se filtra esta señal con el siguiente filtro:

$$y(n) = -ax(n) + x(n-1) + ay(n-1) \quad (2.187)$$

En primer lugar se determina la respuesta en frecuencia del filtro que se obtiene usando la instrucción `freqz(num, den)` donde `num` y `den` son, respectivamente, el numerador y denominador de la respuesta en frecuencia del sistema. Aplicando la propiedad del retardo a la ecuación (2.187) se tiene

$$Y(e^{j\omega}) = -aX(e^{j\omega}) + X(e^{j\omega})e^{-j\omega} + aY(e^{j\omega})e^{-j\omega} \quad (2.188)$$

de donde, agrupando términos, se llega a la respuesta en frecuencia del sistema

$$H(e^{j\omega}) = \frac{-a + e^{-j\omega}}{1 - ae^{-j\omega}} \quad (2.189)$$

Según esto, la instrucción de MATLAB a utilizar sería `freqz([-a 1], [1 -a])`. Si se utiliza $a = 0.9$ se obtiene lo representado en la Fig. 2.14.

Se observa que la ganancia es de 0 dB para todas las frecuencias (observar la escala). Sin embargo sí que aparece un efecto sobre la fase; si se determina el retardo de grupo de este sistema mediante la instrucción `grpdelay`, y con el mismo uso que la instrucción `freqz`, se obtiene la Fig. 2.15. Se observa que el retardo no es igual en todas las componentes y, por tanto, aparecerá una distorsión en el pulso debido al sistema.

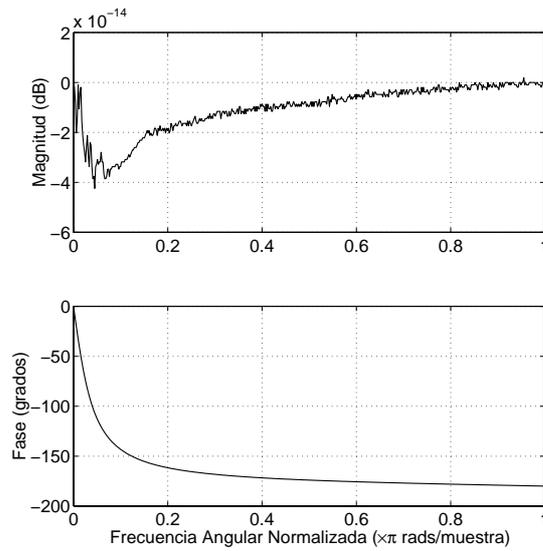


Figura 2.14: Respuesta en frecuencia (magnitud y fase) del sistema.

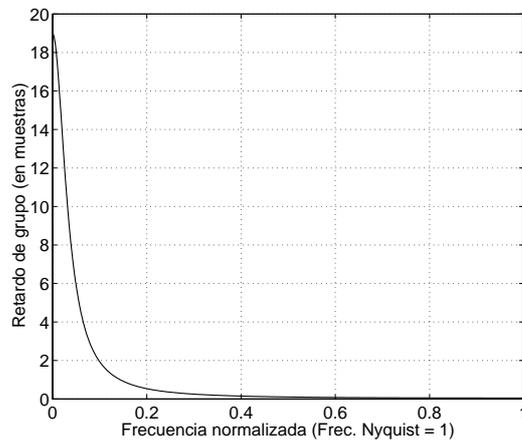


Figura 2.15: Retardo de grupo en función de la frecuencia normalizada. Se aprecia un descenso aproximadamente exponencial.

Esta distorsión se comprueba si la señal generada anteriormente se toma como entrada al sistema. El siguiente programa en MATLAB implementa la ecuación en diferencias (2.187).

```

clc
clear
close all
a=0.9;

% Generación del pulso
x=0.5*ones(1,256);
for t=1:10,
    wk=2*pi*t/256;
    x=x+cos(wk*((1:256)-129));
end

```

```

% Determinación de la salida
y=zeros(1,256);
y(1)=x(1);
for k=2:256,
    y(k)=-a*x(k)+x(k-1)+a*y(k-1);
end

subplot(2,1,1)
stem(-128:127,x)
title('Señal de entrada')

subplot(2,1,2)
stem(-128:127,y)
title('Señal de salida')

```

La Fig. 2.16 muestra las señales de entrada y salida del sistema. Se aprecia que, aunque la magnitud de las componentes permanece inalterada (ganancia del sistema igual a la unidad para todas las frecuencias), el desfase que se introduce a cada una de las componentes distorsiona la señal.

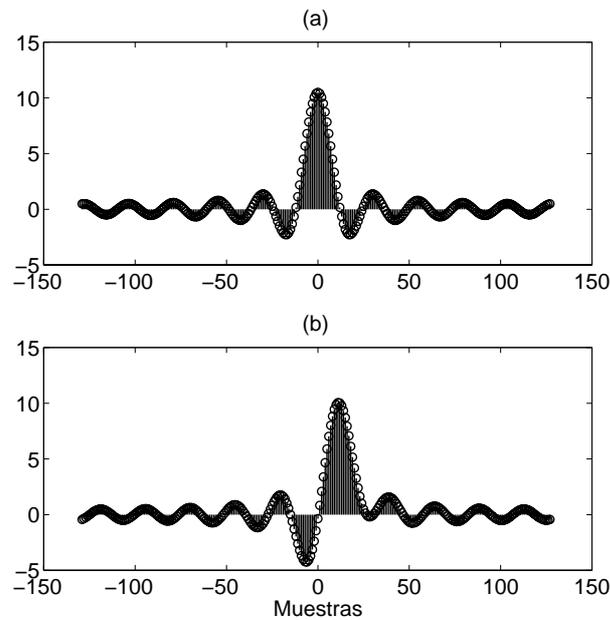


Figura 2.16: Señales de (a) entrada y (b) salida del sistema.

3. A continuación se plantea el mismo ejercicio pero usando el siguiente sistema:

$$y(n) = \frac{1}{20} \sum_{k=0}^{19} x(n-k). \quad (2.190)$$

Esta ecuación se corresponde con un promediador móvil, “*moving average*”. Se determinará en primer lugar la respuesta en frecuencia que, aplicando la propiedad del retardo temporal, se puede escribir así:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{20} \sum_{k=0}^{19} e^{-j\omega k} \quad (2.191)$$

Se podría aplicar la expresión de una suma geométrica pero no merece la pena ya que se puede utilizar la instrucción `ones`, genera un vector/matriz de unos para determinar la respuesta en frecuencia de este sistema de una forma relativamente sencilla. Así, la siguiente instrucción determina dicha respuesta en frecuencia para $N = 20$, `freqz(0.05*ones(1,20),1)`. El resultado obtenido se muestra en la Fig. 2.17.

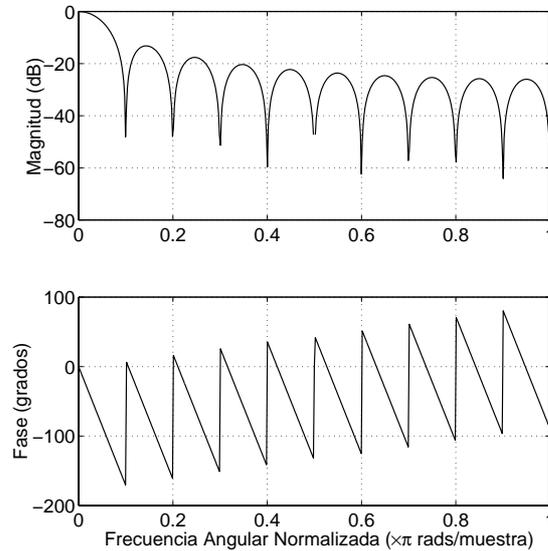


Figura 2.17: Respuesta en frecuencia (magnitud y fase) del sistema.

El sistema tiene una ganancia unidad para frecuencias bajas (las que tiene la entrada considerada) y presenta una fase lineal que conduce a un retardo de grupo constante. Hay que recordar que dicho retardo se determina a partir de la derivada de la fase de la respuesta en frecuencia. El retardo constante que proporciona MATLAB mediante la función `grpdelay` es 9.5. El siguiente programa en MATLAB filtra la señal usando este promediador móvil.

```

clc
clear
close all
a=0.9
% Generación del pulso
x=0.5*ones(1,256);

for t=1:10,
    wk=2*pi*t/256;
    x=x+cos(wk*((1:256)-129));
end

% Determinación de la salida
y=zeros(1,256);
yy=[zeros(1,19) x];

for k=2:256,
    y(k)=0.05*sum(yy(k+19:-1:k));

```

```

end

subplot(121),stem(-128:127,x)
title('Señal de entrada')
grid
hold on
subplot(122),stem(-128:127,y,'*-')
grid
title('Señal de salida')

```

Se aprecia que las dos señales son similares en su forma pero la ganancia es diferente para las distintas componentes frecuenciales existiendo un evidente retardo de grupo sobre toda la señal (Fig. 2.18).

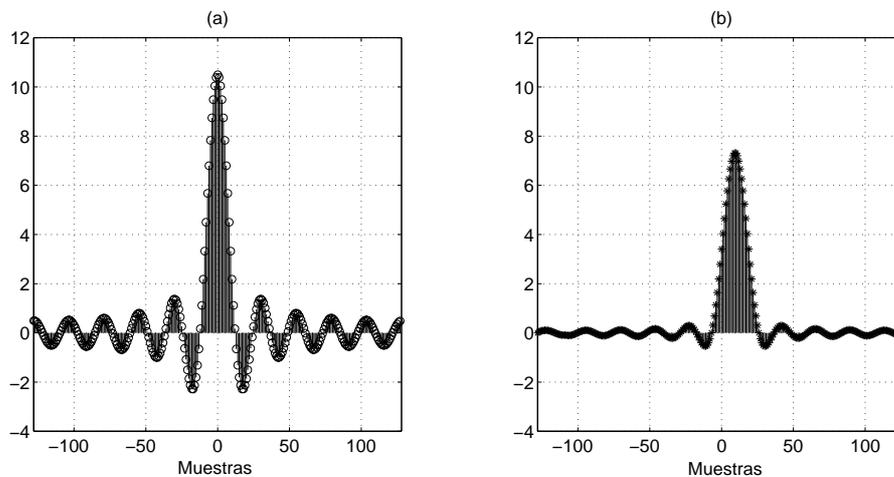


Figura 2.18: Señales de (a) entrada y (b) salida del sistema.

2.4.2. Transformada Discreta de Fourier

1. Antes de empezar con esta transformada hay que destacar unos problemas que aparecen debido a la precisión en las operaciones matemáticas al trabajar con MATLAB. Las instrucciones de MATLAB para determinar la DFT y su inversa son, respectivamente, `fft` y `ifft`. Como son operaciones inversas la actuación de una de ellas seguida por la otra debería dejar inalterada la señal. Sin embargo, a pesar de la alta precisión de MATLAB en sus cálculos aparecen una serie de errores en los mismos. Para demostrar este hecho se generan 100 puntos de la señal definida por $x(n) = 0.5[u(n) + (-1)^n u(n)]$ se calcula su DFT, seguidamente la inversa de esta transformación y se representa, finalmente, la diferencia entre la señal original y la obtenida con la transformación inversa (Fig. 2.19).

Se aprecia que esa diferencia es muy pequeña y no afecta en la gran mayoría de los casos que se utiliza dicha transformada. De hecho, podemos conocer la precisión relativa en coma flotante de MATLAB mediante las siguientes instrucciones

```

>> format long
>> eps

```

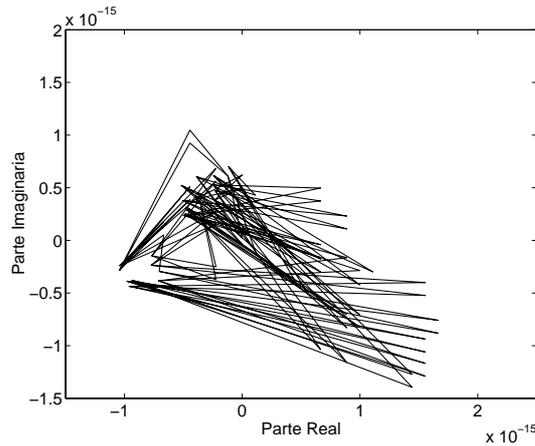


Figura 2.19: Comprobación de la resolución de MATLAB en el cálculo de la DFT y su inversa.

2. A continuación se va a demostrar el efecto del “solape temporal” que tiene el muestreo en frecuencia, dual al efecto del solape frecuencial al muestrear una señal temporal. Para ello se utilizará la señal $x(n) = a^n u(n)$. En primer lugar se determina su transformada de Fourier, cálculo ya realizado en el apartado de problemas. Esta transformada viene definida por la siguiente expresión:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \quad (2.192)$$

A continuación se toman N componentes equidistantes de dicha respuesta en frecuencia que vendrán dadas por la relación $w_k = \frac{2\pi k}{N}$. Este muestreo proporciona una secuencia de valores complejos. Asimilando dicha serie a un desarrollo en serie de Fourier, se determinará la respuesta temporal que da lugar a dicha secuencia de coeficientes usando el comando `ifft` de MATLAB. Finalmente se representará las dos secuencias. El siguiente programa implementa lo comentado en este párrafo.

```
% Muestreo de la respuesta en frecuencia
a=input('Introducción del factor a ');
N=input('Introducción del orden de la DFT ');

% Vectores de frecuencias
w=2*pi*(0:N-1)/N;

% Muestreo de la respuesta en frecuencia
Xk=1./(1-a*exp(-j*w));

% Determinación de la señal temporal
xx=ifft(Xk);

% Para evitar los problemas de la precisión directamente
% se considera la parte real
xx=real(xx);

% Representación de los resultados
subplot(2,1,1)
stem(a.^(0:N-1), '*-')
```

```

title('Señal original')

subplot(2,1,2)
stem(xx, '*-');
title('Señal obtenida a partir del muestreo en frecuencia ')
xlabel('Muestras')

```

La Fig. 2.20 muestra lo obtenido con este programa para $a=0.97$ y $N=25$. La explicación de la diferencia entre la señal original y lo obtenido se encuentra en el solape temporal. Al muestrear la respuesta en frecuencia y calcular la IDFT de la serie obtenida lo que se obtiene es la señal definida por

$$\chi(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n - kN), \quad (2.193)$$

siendo N la longitud de la secuencia muestreada. En el caso planteado

$$\chi(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^{n-kN} u(n - kN) = a^n \sum_{k=0}^{\infty} a^{kN} \quad (2.194)$$

$$\chi(n) = \frac{a^n}{1 - a^N} \quad (2.195)$$

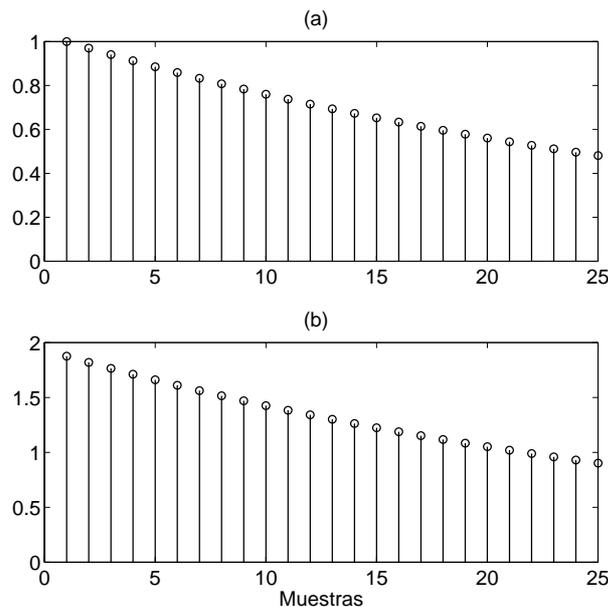


Figura 2.20: Representación de la señal (a) original y (b) la obtenida a partir del muestreo en frecuencia.

- Otro punto importante a estudiar es la resolución de una DFT. Hay que distinguir aquí dos tipos de resolución: la física y la “operacional”. Si se tiene una señal de longitud L , la mínima frecuencia que se podrá discernir será aquella cuyo periodo sea, precisamente, el correspondiente al producto $L \cdot T$ donde T es el periodo de muestreo. Desde un punto de vista intuitivo esta afirmación está clara; este periodo es el máximo que se puede abarcar con las muestras consideradas y la frecuencia de muestreo escogida. Una sinusoides con un periodo mayor no se considerará completa. Sin embargo en una DFT la resolución es igual a la frecuencia de muestreo dividida

por el número de puntos. Esto se deduce de las frecuencias muestreadas $w_k = \frac{2\pi k}{N}$. Así la separación entre dos frecuencias consecutivas es $\Delta w = \frac{2\pi}{N}$ y, como $w = \frac{2\pi f_a}{F_m}$, se tiene $\Delta w = \frac{f_m}{N}$ donde F_m es la frecuencia de muestreo.

A continuación se verá la diferencia entre ellas usando el siguiente programa de MATLAB:

```
close all
clc
f1=90;
f2=100;
f3=240;
f4=360;
fm=input('Frecuencia de muestreo (Hz) ');
tt=input('Duración del muestreo en ms ');
N=input('Longitud de la DFT aumentada ');

t=(fm*tt)*0.001;
x1=cos(2*pi*(f1/fm)*(0:t-1))+cos(2*pi*(f2/fm)*(0:t-1));
x2=x1+cos(2*pi*(f3/fm)*(0:t-1))+cos(2*pi*(f4/fm)*(0:t-1));
y=fft(x2);

t1=0:(fm/t):fm-(fm/t);
plot(t1,abs(y),'*-r');
yy=fft(x2,N);
hold on

t2=0:(fm/N):fm-(fm/N);
plot(t2,abs(yy),'+-k');
axis([0 fm/2 0 max([abs(y) abs(yy)])]);

grid, zoom on
```

En este programa se considera en primer lugar 1kHz como frecuencia de muestreo con un intervalo de muestreo de 25 ms. En primer lugar se toma el orden de la DFT igual a la longitud de la señal. Se tendrá entonces que la resolución de la DFT vendrá dada por:

$$\Delta w = \frac{f_m}{N} = \Delta w = \frac{1000}{25} = 40 \text{ Hz}.$$

Según este valor las componentes de 90 y 100 Hz no serían discernibles pues su separación frecuencial es de 10 Hz y la resolución de la DFT es de 40 Hz. La Fig. 2.21 muestra los resultados obtenidos.

A continuación se aumenta la longitud de la DFT añadiendo ceros la final de la secuencia. Por ejemplo se considera una DFT de 100 puntos. Según esto, la resolución sería en este caso de 10 Hz y ya se podrían distinguir las componentes de 90 y 100 Hz. La Fig. 2.22 muestra lo obtenido en este caso. En la figura aparecen dos gráficas correspondientes a la DFT sin añadir ceros (símbolos +) y añadiendo ceros. Se muestran las dos gráficas para destacar el hecho que siguen sin ser discernibles; el añadir ceros supone una interpolación en el dominio frecuencial pero, evidentemente, no se aporta más información sobre la señal que se analiza con la DFT.

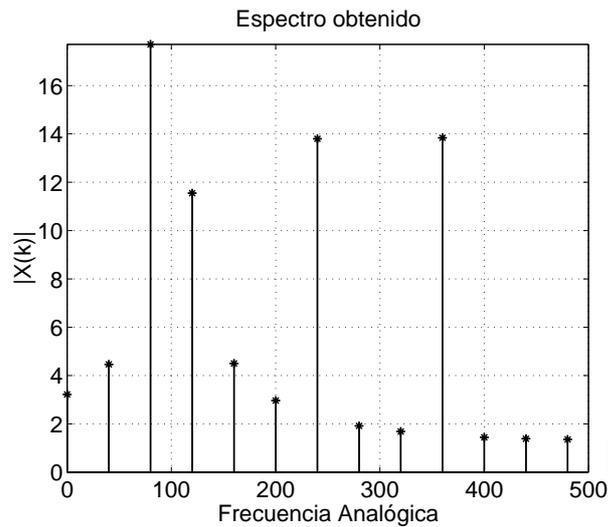


Figura 2.21: Espectro obtenido mediante una $F_m = 1000\text{Hz}$ y un intervalo de muestreo de 25ms.

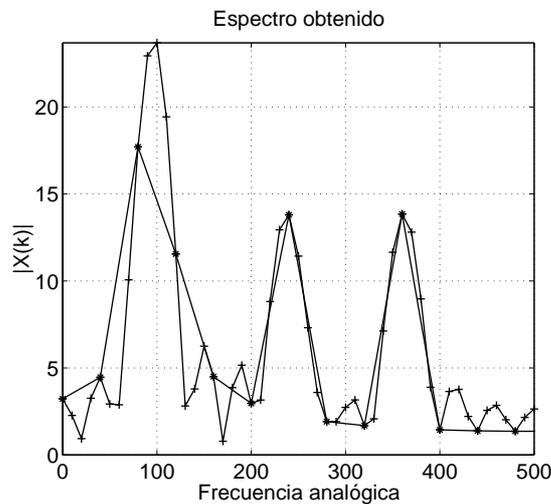


Figura 2.22: Espectros obtenidos con $\Delta w = 40\text{Hz}$ (*) y $\Delta w = 10\text{Hz}$ (+). Se han unido con líneas las muestras $|X(k)|$ de cada uno de ellos para una mejor visualización.

Si ahora se aumenta el tiempo de muestreo a 100 ms y se considera una DFT igual a la longitud de la secuencia obtenida, 100 muestras, se obtiene una resolución operacional de 10 Hz. Ejecutando el programa de MATLAB en este caso se obtiene lo representado en la Fig. 2.23. En este caso, y dado que todas las componentes frecuenciales son múltiplos de la resolución de la DFT, aparecen solamente los armónicos correspondientes a las componentes de la señal.

- El último caso estudiado no es el más corriente ya que pueden ocurrir casos en los que la resolución física es suficiente pero la frecuencia de las componentes no es un múltiplo de la resolución de la DFT. Como ejemplo se considera una senoide de frecuencia 10 Hz muestreada a 1000 Hz durante un periodo de 250 ms. Seguidamente se calcula la DFT de esta señal (N es la longitud de la señal) obteniéndose lo representado en la Fig. 2.24. En este caso la resolución de la DFT es $1000/250=4$ Hz. Este efecto se conoce como “goteo o derrame espectral”, (“*spectral leakage*”).

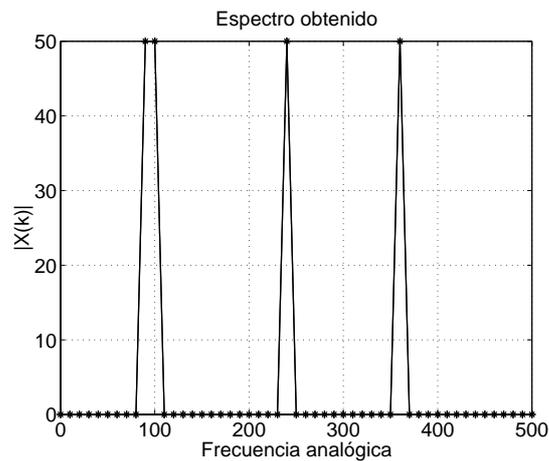


Figura 2.23: Espectro obtenido con un tiempo de muestreo de 100ms y una longitud de la secuencia de 100 muestras. La resolución operativa es de 10 Hz. y, por tanto, se pueden recuperar eficientemente las componentes de 90 Hz. y 100 Hz. Se han unido con líneas las muestras $|X(k)|$ de cada uno de ellos para una mejor visualización.

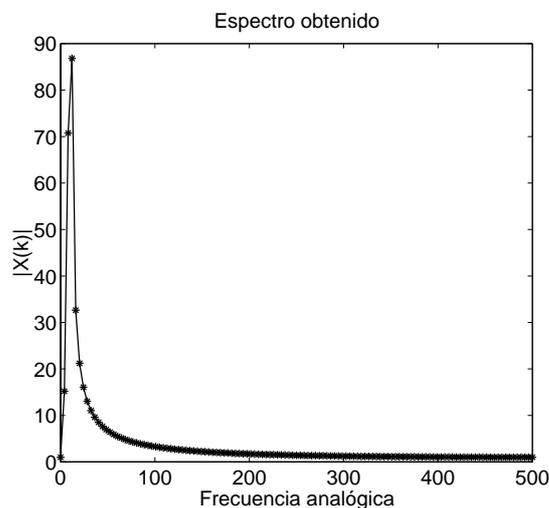


Figura 2.24: Ilustración del goteo espectral al tomar una resolución de 4Hz no múltiplo de la frecuencia de la señal analógica aunque con un número suficiente de muestras. Se han unido con líneas las muestras $|X(k)|$ de cada uno de ellos para una mejor visualización.

Otra forma de verlo es analizar el dominio temporal. La Fig. 2.25 muestra la representación temporal de la señal. La DFT es la representación de la señal $x(n)$ si se repitiera de forma infinita: como hay una diferencia entre el punto inicial y final de dicha señal se produce un “salto” en esa señal periódica que la DFT intenta modelizar.

Para evitar este problema se plantea el uso de una ventana en forma de secuencia discreta que multiplica a la secuencia cuya DFT se quiere determinar. Este producto hace que el punto original y final de la secuencia resultado sean el mismo y, por lo tanto, se evite el “salto” anteriormente comentado. Una multiplicación en el dominio temporal supone una convolución en el dominio frecuencial por lo que las características frecuenciales de la señal quedan, lógicamente, condicionadas por dicha ventana. MATLAB tiene implementadas varias ventanas. Así, las que estudiaremos serán la rectangular (`boxcar`), triangular (`triang`), Hanning (`hanning`) y Hamming (`hamming`),

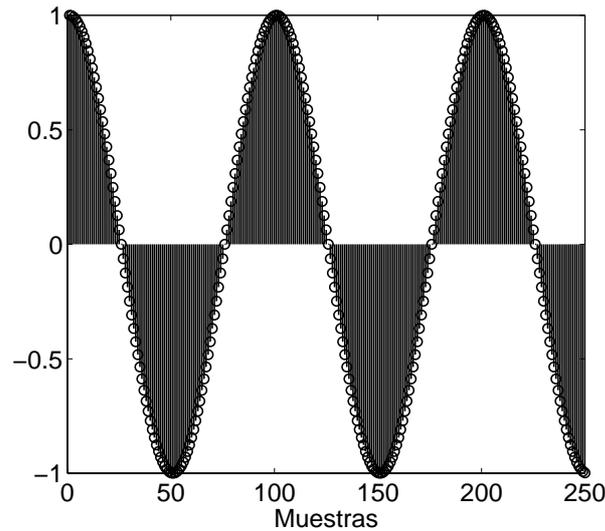


Figura 2.25: Representación temporal de la secuencia $x(n)$.

etc. A continuación se aplicará una ventana a la sinusoide comentada antes de determinar su DFT. La Fig. 2.26(a) muestra la señal temporal obtenida al usar una ventana de Hamming y la Fig. 2.26(b) muestra el espectro de esta señal. Si se comparan las Figs. 2.26(a) y 2.24 se aprecia que el “goteo espectral” se ha reducido en gran manera. Comentar que lo que se gana al usar ventanas se pierde en resolución; estos métodos de enventanado se seguirán estudiando en el tema de filtros por lo que no se incidirá más en ellas en este capítulo.

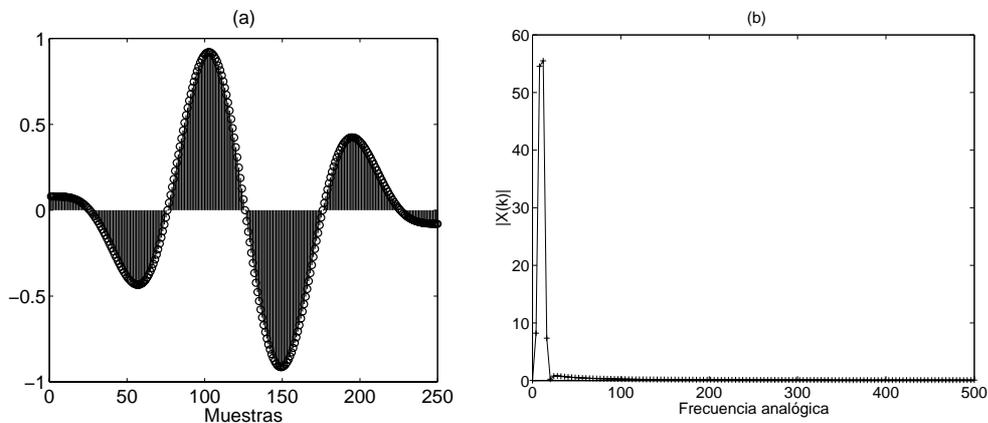


Figura 2.26: (a) Secuencia temporal y (b) espectro obtenido mediante una ventana de Hamming. Se han unido con líneas las muestras $|X(k)|$ de cada uno de ellos para una mejor visualización.

5. A continuación se plantea el uso de la DFT para determinar la convolución lineal de dos secuencias. El procedimiento a seguir es el comentado en la sección de teoría de este capítulo y que queda reflejado en los siguientes puntos:
 - a) Se determina la longitud que tendrá la convolución lineal de las dos señales (L).
 - b) Se determina la DFT de orden L de las dos señales añadiendo ceros a las secuencias.

- c) Se multiplican punto a punto las secuencias obtenidas aplicando la DFT.
 d) Se calcula la IDFT de dicho producto.

Para comprobar lo comentado, se pide al lector que considere las siguientes señales: $X1=[1,2,3]$; $X2=[-1,1]$; y que determine su convolución. Realice los pasos (a)–(d) anteriormente comentados para comprobar su resultado. ¿Se obtiene lo mismo si se rellenan las señales con 2 ceros?

6. Las secuencias anteriores son de corta duración; si se tienen secuencias de larga duración se aplica uno de los métodos de *solapamiento y suma* o su dual (*solapamiento y almacenamiento*). Estos métodos aparecen explicados en los textos dados en la bibliografía. El siguiente programa implementa este último método. El lector puede utilizarlo para comprobar su funcionamiento con una serie de secuencias y desde aquí se le anima para que intente implementar el método de solapamiento y suma.

```
% Método de solapamiento y almacenamiento
clear
clc
aa=input('Número de bloques ');
M=input('Longitud del filtro FIR ');
N=input('Longitud de las DFT ');
long=N-M+1;
h=(0.8).^(0:M-1);
x=cos(0.2*pi*(0:aa*long-1));
hh=[h zeros(1,N-M)];
XX=zeros(N,aa);

% Creación de los bloques
a=zeros(1,M-1);
for k=1:aa,
    XX(1:M-1,k)=a';
    XX(M:N,k)=x((k-1)*long+1:k*long)';
    a=x(k*long-M+2:k*long);
end

% Determinación de las Transformadas de Fourier
XF=fft(XX);
HF=fft(hh');
gg=HF*ones(1,aa);
resul=XF.*gg;

% Determinación de las transformadas inversas
yy=ifft(resul);
yy=real(yy);
[mm,nn]=size(yy);
y1=yy(M:mm,:);
[a,b]=size(y1);
ysalida=reshape(y1,1,a*b);

% Representación de la diferencia entre conv y éste método
yout=conv(x,h);
```

```
s=min([length(yout) length(ysalida)]);  
plot(yout(1:s)-ysalida(1:s));
```


Capítulo 3

Transformada Z

3.1. Introducción teórica

La Transformada Z (TZ) tiene el mismo papel en el análisis de señales y sistemas discretos lineales invariantes temporales (L.I.T.) que la transformada de Laplace en el análisis de señales y sistemas continuos L.I.T. A modo de ejemplo, la convolución de dos señales en el dominio temporal tiene su equivalente con la operación de multiplicar sus respectivas transformadas en el dominio Z. Como se verá a lo largo de este capítulo, ésta propiedad simplifica, enormemente, el análisis de los sistemas discretos. Además, la transformada Z proporciona una manera de caracterizar señales, sistemas L.I.T. y sus respuestas a varias señales usando para ello los polos y los ceros de la función de transferencia en el dominio transformado, conocido como dominio o plano Z.

Destacar que, desde un punto de vista matemático, la transformada Z de una señal discreta supone una representación alternativa a la que, normalmente, se utiliza, esta es, la representación temporal. De hecho, el índice temporal desaparece en dicha transformada Z. Es una representación alternativa pero se tiene la misma información que en el dominio temporal.

3.1.1. Definición

La Transformada Z de una señal discreta $x(n)$ se define como la serie de potencias:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (3.1)$$

donde z es una variable compleja. También se denota como $X(z) \equiv Z\{x(n)\}$ y la relación entre $x(n)$ y $X(z)$ se puede indicar con:

$$x(n) \xleftrightarrow{z} X(z)$$

3.1.2. Región de convergencia

Dado que la transformada Z es una suma de una serie geométrica (suma de series de potencias negativas de z), esta transformada sólo existe para aquellos valores del plano complejo para los que dicha suma de serie de potencias converge. Así pues, la región de convergencia (“*Region Of Convergence*”, R.O.C.) de $X(z)$ es el conjunto de todos los valores

de z para los que $X(z)$ es finita:

$$X(z) = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \right| < \infty$$

Aparte de lo que supone en sí la R.O.C. de una transformada Z, se da el caso de que dicha transformada no determina de forma única una señal en el dominio del tiempo. Esta ambigüedad sólo se resuelve si, además de la transformada Z, se especifica la R.O.C.

A modo de ejemplo, se considera la transformada Z de las siguientes señales discretas $x_1(n) = a^n u(n)$ y $x_2(n) = -a^n u(-n-1)$. Si se determina la transformada Z de las dos secuencias se tiene lo siguiente:

$$X_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a} \quad (3.2)$$

si y sólo si $|az^{-1}| < 1$. Por tanto, la R.O.C. viene definida por la condición $|az^{-1}| < 1$ que conduce a $|z| > |a|$. Esta es la ecuación que define el exterior de un círculo de radio $|a|$.

Se calcula ahora la segunda transformada Z

$$X_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -a^n u(-n-1)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} -a^n z^{-n}. \quad (3.3)$$

Si se hace un cambio de variable $n = -k$ se llega a:

$$X_2(z) = - \sum_{k=1}^{\infty} a^{-k} z^k = - \left(\sum_{k=0}^{\infty} a^{-k} z^k - 1 \right) = - \left(\sum_{k=0}^{\infty} (a^{-1}z)^k - 1 \right) = \frac{z}{z-a} \quad (3.4)$$

si y sólo si $|a^{-1}z| < 1$. La R.O.C. viene definida por la condición $|a^{-1}z| < 1$ que conduce a $|z| < |a|$. Esta es la ecuación que define el interior de un círculo de radio $|a|$.

De lo comentado anteriormente se pueden extraer una serie de importantes conclusiones:

- La transformada Z de una secuencia discreta, junto con su región de convergencia, define de forma unívoca dicha secuencia; esto es, no se puede determinar la secuencia discreta que da lugar a una transformada Z sin conocer la región de convergencia de dicha transformada.
- Todas las transformadas Z racionales se pueden descomponer en términos de la forma

$$\frac{A}{1-az^{-1}}. \quad (3.5)$$

Aplicando la propiedad de linealidad de las Transformadas Z (punto siguiente de este capítulo) y usando lo obtenido anteriormente, se llega a la conclusión de que la R.O.C. de este tipo de transformadas será una combinación de las R.O.C. vistas anteriormente. Según esto se pueden tener las siguientes situaciones:

- **Señal estrictamente no causal (vale 0 para tiempos positivos).** En este caso la región de convergencia va a ser un círculo.
- **Señal estrictamente causal: (vale 0 para tiempos negativos).** En este caso la región de convergencia va a ser el exterior de una determinada circunferencia.

- **Señal no causal (mezcla de las anteriores).** En este caso se pueden dar dos situaciones:
 - *La R.O.C. es un anillo.* Para que se de esta situación el mayor módulo de los polos de la Transformada Z, correspondientes a la parte no causal, debe ser mayor que los correspondientes causales.
 - *No existe la R.O.C.* Estamos en el caso opuesto al anterior.

3.1.3. Propiedades de la Transformada Z

1. Linealidad:

Si

$$x_1(n) \xrightarrow{z} X_1(z) \text{ y } x_2(n) \xrightarrow{z} X_2(z)$$

entonces

$$x(n) = a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) \xrightarrow{z} X(z) = a_1 X_1(z) + a_2 X_2(z), \quad (3.6)$$

donde la R.O.C. es la intersección de R.O.C₁ y R.O.C₂, y $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$.

2. Desplazamiento temporal:

Si

$$x(n) \xrightarrow{z} X(z)$$

entonces

$$x(n-k) \xrightarrow{z} z^{-k} X(z)$$

Se mantiene la R.O.C. aunque se le puede añadir/eliminar el 0 y el ∞

3. Escalado en el dominio Z:

Si

$$x(n) \xrightarrow{z} X(z), \text{ R.O.C. : } r_1 < |z| < r_2$$

entonces

$$a^n x(n) \xrightarrow{z} X(a^{-1}z), \text{ R.O.C. : } |a|r_1 < |z| < |a|r_2$$

4. Inversión temporal:

Si

$$x(n) \xrightarrow{z} X(z), \text{ R.O.C. : } r_1 < |z| < r_2$$

entonces

$$x(-n) \xrightarrow{z} X(z^{-1}), \text{ R.O.C. : } \frac{1}{r_1} < |z| < \frac{1}{r_2}$$

5. *Diferenciación en Z:*

Si

$$x(n) \xleftrightarrow{z} X(z)$$

entonces

$$nx(n) \xleftrightarrow{z} -z \frac{dX(z)}{dz} \quad (3.7)$$

Misma R.O.C. que en el caso del desplazamiento temporal.

6. *Convolución de dos secuencias:*

Si

$$x_1(n) \xleftrightarrow{z} X_1(z) \text{ y } x_2(n) \xleftrightarrow{z} X_2(z)$$

entonces

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n) \xleftrightarrow{z} X(z) = X_1(z) \cdot X_2(z), R.O.C = R.O.C_1 \cap R.O.C_2$$

7. *Correlación de dos secuencias:*

Si

$$x_1(n) \xleftrightarrow{z} X_1(z) \text{ y } x_2(n) \xleftrightarrow{z} X_2(z)$$

entonces

$$r_{x_1 x_2}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)x_2(n-l) \xleftrightarrow{z} R_{x_1 x_2}(z) = X_1(z) \cdot X_2(z^{-1})$$

8. *Multiplicación de dos secuencias:*

Si

$$x_1(n) \xleftrightarrow{z} X_1(z) \text{ y } x_2(n) \xleftrightarrow{z} X_2(z)$$

entonces

$$x(n) = x_1(n)x_2(n) \xleftrightarrow{z} X(z) = \frac{1}{2\pi j} \int_C X_1(v)X_2\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1}dv$$

donde C es un contorno cerrado que encierra al origen y se encuentra en la R.O.C. común a $X_1(v)$ y $X_2(1/v)$.

9. *Relación de Parseval:*

Si $x_1(n)$ y $x_2(n)$ son dos secuencias complejas, entonces:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)x_2^*(n) = \frac{1}{2\pi j} \int_C X_1(v)X_2^*\left(\frac{1}{v^*}\right)v^{-1}dv$$

siempre que $r_{1l}r_{2l} < 1 < r_{1u}r_{2u}$, donde $r_{1l} < |z| < r_{1u}$ y $r_{2l} < |z| < r_{2u}$ son las R.O.C. de $X_1(z)$ y $X_2(z)$.

10. *Teorema del Valor Inicial:*

Si $x(n)$ es causal, es decir, $x(n) = 0$ para $n < 0$, entonces:

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$

3.1.4. Transformada Z unilateral

Si la señal es causal (vale 0 para índices temporales negativos) se tiene:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}. \quad (3.8)$$

En el caso más general, cuando se tiene una transformada Z cuyos índices van de 0 a $+\infty$ se habla de transformada Z unilateral $X^+(z)$. El límite inferior es la única diferencia, siempre nulo, independiente de que la señal sea causal ($x(n) = 0$, para $n < 0$) o no. Con esta transformada se tienen algunas propiedades importantes:

1. No contienen información sobre $x(n)$ para $n < 0$.
2. Es *única* sólo para señales causales.
3. La Transformada Z unilateral cumple $Z^+\{x(n)\} = Z\{x(n)u(n)\}$, siendo $u(n)$ la función escalón.
4. Como $x(n)u(n)$ es causal, la R.O.C. de $Z\{x(n)u(n)\}$ y, por tanto, la R.O.C. de $Z^+\{x(n)\}$ es *siempre* exterior a un círculo de radio $r \in \mathbb{R}$.

Tiene también otras peculiaridades, recogidas en las siguientes propiedades:

1. *Retardo temporal:*

Si

$$x(n) \xleftrightarrow{z^+} X^+(z)$$

entonces

$$x(n-k) \xleftrightarrow{z^+} z^{-k} [X^+(z) + \sum_{n=1}^k x(-n)z^n]$$

2. *Adelanto temporal:*

Si

$$x(n) \xleftrightarrow{z^+} X^+(z)$$

entonces

$$x(n+k) \xleftrightarrow{z^+} z^k \left[X^+(z) - \sum_{n=1}^k x(n)z^{-n} \right]$$

3. Teorema del Valor Final:

Si

$$x(n) \xleftrightarrow{z^+} X^+(z)$$

entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X^+(z)$$

3.1.5. Causalidad y estabilidad

Recordemos que un sistema es estable cuando, ante entradas acotadas, se tienen salidas acotadas. Hablamos entonces de un tipo de estabilidad BIBO (“*Bounded Input Bounded Output*”). Usando la Transformada Z, un sistema es estable BIBO cuando la Transformada Z de su respuesta impulsional presenta todos los polos dentro de la circunferencia unidad. Esta característica hace que la Transformada Z sea una herramienta muy útil en el análisis de sistemas discretos.

Para estudiar la causalidad de un sistema también se puede utilizar la transformada Z. Así un sistema es causal si y sólo si la R.O.C. de la transformada Z de su respuesta impulsional, $H(z)$, es el exterior de un círculo.

3.1.6. Cálculo de la Transformada Z inversa

El fin de la Transformada Z en el procesado digital de la señal es el análisis de sistemas lineales en tiempo discreto de tipo L.T.I. La forma de proceder, en la gran mayoría de los casos, es pasar del dominio temporal al transformado Z para realizar una determinada operación y, finalmente, volver otra vez al dominio temporal. Esta última operación se realiza determinando la transformada Z inversa (TZI). Existen métodos más o menos formales para realizar esta operación, la cuál, matemáticamente, se puede definir como

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \int_C X(z)z^{n-1} dz, \quad (3.9)$$

donde C es cualquier contorno que encierre al origen y se encuentra en la R.O.C. de $X(z)$ en el plano Z. La integral se evalúa en una circunferencia en un sentido contrario al de las agujas del reloj.

Existen tres formas básicas para el cálculo de la Transformada Z inversa:

1. *Cálculo Directo. Integración del Contorno.*

$$\begin{aligned}
 x(n) &= \frac{1}{2\pi j} \int_C X(z) z^{n-1} dz = \\
 &= \sum_{\text{polos}\{z_i\} \in \mathbb{C}} [\text{residuo de } X(z) z^{n-1} \text{ en } z = z_i] = \\
 &= \sum_i (z - z_i) X(z) z^{n-1} \Big|_{z=z_i},
 \end{aligned}$$

siempre que los polos $\{z_i\}$ sean simples. Si $X(z)z^{n-1}$ no tiene polos dentro del contorno \mathbb{C} para uno o más valores de n , entonces $x(n) = 0$ para esos valores. Estos métodos se encuentran extensamente relatados, por ejemplo en (Riley, Hobson y Bence, 1998).

2. *Expansión en serie de términos en z y z^{-1} .*

La idea es expandir $X(z)$ en una serie de potencias de la forma:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^{-n}$$

que converge en la R.O.C. dada. Como la Transformada Z es *única*, $x(n) = c_n, \forall n$. Cuando $X(z)$ es racional, la expansión se hace dividiendo numerador y denominador.

3. *Expansión en fracciones simples.*

La idea es expresar $X(z)$ como una combinación lineal:

$$X(z) = \alpha_1 X_1(z) + \alpha_2 X_2(z) + \dots + \alpha_K X_K(z)$$

donde $X_1(z), \dots, X_K(z)$ son expresiones con Transformadas Z inversas de $x_1(n), \dots, x_K(n)$ disponibles en compendios de tablas matemáticas estándar (Beyer, 1984).

Si la descomposición es posible, usando la propiedad de linealidad, se obtiene:

$$x(n) = \alpha_1 x_1(n) + \alpha_2 x_2(n) + \dots + \alpha_K x_K(n)$$

Este método es muy útil si la función de transferencia es racional:

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_N z^{-N}}$$

Dado que las secuencias con las que se suele trabajar son, casi siempre, las mismas, los dos últimos métodos son los preferidos por su sencillez. A continuación se exponen más extensamente.

Método de inspección

El método de inspección consiste, simplemente, en reconocer, usando unas determinadas tablas, ciertos pares de transformadas. En la Tabla 3.1 se presentan las transformadas más comunes que se pueden encontrar.

Tabla 3.1: Señales características y sus correspondientes R.O.C.

SEÑAL TEMPORAL	TRANSFORMADA Z	R.O.C.
$\delta(n)$	1	Todo el plano \bar{Z}
$u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z > 1$
$a^n u(n)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z > a $
$\cos(wn)u(n)$	$\frac{1-z^{-1}\cos(w)}{1-2\cos(w)z^{-1}+z^{-2}}$	$ z > 1$
$\text{sen}(wn)u(n)$	$\frac{z^{-1}\text{sen}(w)}{1-2\cos(w)z^{-1}+z^{-2}}$	$ z > 1$
$a^n \cos(wn)u(n)$	$\frac{1-az^{-1}\cos(w)}{1-2a\cos(w)z^{-1}+a^2z^{-2}}$	$ z > a $
$a^n \text{sen}(wn)u(n)$	$\frac{az^{-1}\text{sen}(w)}{1-2a\cos(w)z^{-1}+a^2z^{-2}}$	$ z > a $

Descomposición en fracciones simples

En muchas ocasiones la transformada Z inversa no se puede encontrar a través de una tabla. No obstante, debido a las características de linealidad de la transformada Z sí que es posible dividir la transformada Z original en una serie de transformadas Z más simples cada uno de las cuales aparece en dicha tabla. El método de descomposición en fracciones simples se basa, justamente, en aprovechar este hecho.

Se sabe que existe la siguiente relación entre transformada Z, señales temporales y regiones de convergencia:

$$TZI \left\{ \frac{1}{1-az^{-1}} \right\} = \begin{cases} a^n u(n), & R.O.C. : |z| > |a| \\ -a^n u(-n-1), & R.O.C. : |z| < |a| \end{cases} \quad (3.10)$$

Se observa que se tiene la misma transformada Z pero la R.O.C. es diferente según el tipo de señal considerada (causal o no causal). Así pues, si se tiene una transformada de la forma

$$H(z) = \frac{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_M z^{-M}}{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_N z^{-N}}, \quad (3.11)$$

se puede descomponer en forma de fracciones simples de la siguiente forma:

$$H(z) = \sum_s \frac{A_s}{1-p_s z^{-1}}. \quad (3.12)$$

Cada uno de los términos de la descomposición tienen TZI inmediatas como se ha visto anteriormente. Lo que hay que tener en cuenta es la R.O.C. de $H(z)$ para utilizar la transformada inversa causal o no causal de cada uno de los términos de la descomposición.

División directa

Ese método está directamente relacionado con el anterior ya que se aplica a funciones racionales de z . Como su nombre indica consiste en realizar la división entre numerador y denominador de tal forma que, como resultado de esa división, se tendrá una serie de términos del tipo:

$$H(z) \equiv \frac{N(z)}{D(z)} = c_{-m}z^m + \dots + c_{-2}z^2 + c_{-1}z + c_0 + c_1z^{-1} + c_2z^{-2} + \dots + c_kz^{-k}. \quad (3.13)$$

La expresión que define la transformada Z es

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n}. \quad (3.14)$$

Si se compara este sumatorio con el resultado de la división se llega a

$$h(-m) = c_{-m}, \dots, h(-2) = c_{-2}, h(-1) = c_{-1}, h(0) = c_0, h(1) = c_1, \dots, h(k) = c_k. \quad (3.15)$$

3.1.7. Análisis de sistemas L.I.T. usando la Transformada Z

La transformada Z es una herramienta importante en el análisis y representación de sistemas L.I.T. discretos. Esto es debido, principalmente, a la propiedad de la convolución; por ella se establece que la convolución en el dominio del tiempo es equivalente a una multiplicación en el dominio de la transformada Z. De esta forma, se obtiene una manera, relativamente sencilla, de determinar la salida de un sistema sin necesidad de utilizar la convolución. Se hace uso de las transformadas Z de la entrada y la respuesta impulsional del sistema para, en un último paso, calcular la transformada inversa del resultado del producto.

Sistemas L.I.T. caracterizados por ecuaciones en diferencias lineales con coeficientes constantes

Para los sistemas caracterizados por ecuaciones en diferencias lineales con coeficientes constantes, las propiedades de la transformada Z proporcionan un procedimiento muy conveniente para obtener la función de transferencia del sistema, la respuesta en frecuencia o la respuesta en el dominio del tiempo.

Considérese un sistema L.I.T. que viene definido por una determinada ecuación en diferencias lineal con coeficientes constantes, de la forma

$$y(n) = - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k x(n-k). \quad (3.16)$$

Aplicando la propiedad de desplazamiento en el tiempo se tiene

$$Y(z) = - \sum_{k=1}^N a_k Y(z)z^{-k} + \sum_{k=0}^M b_k X(z)z^{-k}, \quad (3.17)$$

por lo que la función de transferencia será

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}. \quad (3.18)$$

Sobre la R.O.C. que debe asociarse a $H(z)$, la ecuación en diferencias no proporciona ninguna información. Sin embargo, restricciones como la causalidad o estabilidad definen la R.O.C. de dicha transformada.

Según lo obtenido, se puede establecer diferentes modelos:

- *Sistema FIR* (“Moving Average”, MA): Si $a_k = 0$, para $1 \leq k \leq N$, se obtiene que

$$H(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} = \frac{1}{z^M} \sum_{k=0}^M b_k z^{M-k}. \quad (3.19)$$

□ El sistema tiene M ceros determinados por $\sum_{k=0}^M b_k z^{M-k} = 0$ y un polo de orden M en el origen ($z = 0$). Esto hace que este tipo de sistemas sean conocidos como “sistemas todo ceros”.

□ El sistema tiene una respuesta impulsional de duración finita (FIR, “Finite Impulse Response”). Esto significa que $h(n) = 0$ para $n > M$.

- *Sistema IIR* (“AutoRegressive”, AR): Si $b_k = 0$, para $1 \leq k \leq M$, se obtiene

$$H(z) = \frac{b_0}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = \frac{b_0 z^N}{\sum_{k=0}^N a_k z^{N-k}}. \quad (3.20)$$

□ El sistema tiene N polos determinados por $\sum_{k=0}^N a_k z^{N-k} = 0$ y un cero de orden N en el origen ($z = 0$). Decimos entonces que se tiene un “sistema todo polos”.

□ El sistema tiene una respuesta impulsional de duración infinita (IIR, “Infinite Impulse Response”). Esto significa que $h(n) \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

- *Sistema ARMA*. Cuando se tiene la expresión conjunta

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}, \quad (3.21)$$

se tiene un sistema ARMA (“AutoRegressive Moving Average”). Como se tienen ceros y polos el sistema es de tipo IIR.

Respuesta en frecuencia usando la Transformada Z

La respuesta en frecuencia de un sistema $H(e^{jw})$ se puede determinar usando la transformada Z sustituyendo la variable compleja z por e^{jw} . Así pues, dada una determinada transformada Z definida como

$$H(z) = \frac{\prod_{s=1}^M (z - z_s)}{\prod_{k=1}^N (z - p_k)}, \quad (3.22)$$

siendo z_s los ceros y p_k los polos de la Transformada Z de la respuesta impulsional $H(z)$, la respuesta en frecuencia de este sistema vendría dada por:

$$H(jw) = \frac{\prod_{s=1}^M (e^{jw} - z_s)}{\prod_{k=1}^N (e^{jw} - p_k)}. \quad (3.23)$$

Si estamos interesados en el módulo de la frecuencia se tienen que tomar módulos en la última expresión, llegando a:

$$|H(jw)| = \frac{\prod_{s=1}^M |e^{jw} - z_s|}{\prod_{k=1}^N |e^{jw} - p_k|}. \quad (3.24)$$

Los términos que aparecen en los diferentes productos son la distancia que hay entre los ceros/polos y el número complejo e^{jw} de módulo uno y fase w (puntos que definen la circunferencia de radio unidad). El módulo de la respuesta en frecuencia es, en definitiva, la relación entre la distancia de los ceros/polos de la transformada Z y los puntos que pertenecen a la circunferencia de radio unidad. Esta igualdad permite determinar la respuesta en frecuencia de un sistema de forma intuitiva a partir de sus polos/ceros. A modo de ejemplo, si se quieren eliminar una serie de frecuencias f_k , la Transformada Z de ese sistema tendrá sus ceros en $w_k = e^{\frac{2\pi f_k}{F_m}}$, siendo F_m la frecuencia de muestreo. Si se quiere determinar la respuesta en fase entonces, tomando fases en la ecuación (3.23), se llega a

$$\varphi(H(e^{jw})) = \sum_{s=1}^M \varphi(e^{jw} - z_s) - \sum_{k=1}^N \varphi(e^{jw} - p_k). \quad (3.25)$$

La fase de la respuesta en frecuencia es la resultante de las fases de los vectores que van de los ceros/polos al número complejo e^{jw} .

Obtención de sistemas discretos a partir de continuos

Existen numerosos métodos de diseño de sistemas continuos. Este conocimiento se puede aprovechar desde el punto de vista digital ya que se puede pasar del dominio continuo al digital mediante dos transformaciones. Estas transformaciones se conocen como bilineal e impulso invariante. Como se utilizan mucho en el diseño de filtros, no se profundizará en ellas ahora. Además sólo se comentará la transformación impulso invariante por su valor pedagógico. El esquema de obtención de esta transformación es el que refleja la Fig. 3.1.

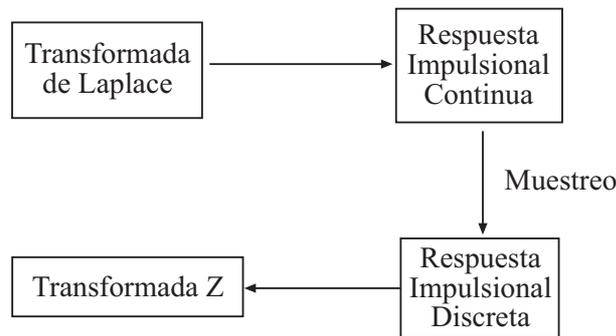


Figura 3.1: Esquema de la Transformación Impulso Invariante.

El esquema parte de la Transformada de Laplace de un determinado sistema continuo y, a partir de ella, determina la respuesta impulsional del sistema. La mayoría de los sistemas continuos con los que se trabaja tienen funciones de transferencia en el dominio de Laplace racionales. Todas estas funciones racionales se pueden descomponer en términos más simples de la siguiente forma:

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \sum_k \frac{A_k}{s - p_k}. \quad (3.26)$$

Cada uno de estos términos tiene una Transformada de Laplace inversa igual a $A_k e^{p_k t}$ por lo que la respuesta impulsional del sistema continuo será:

$$h(t) = \sum_k A_k e^{p_k t}. \quad (3.27)$$

Si se muestrea esta señal continua (T es el periodo de muestreo) se obtiene

$$h(nT) = \sum_k A_k e^{p_k nT}. \quad (3.28)$$

Calculando la transformada Z de esta señal temporal discreta se obtiene (por simple inspección de las tablas y suponiendo la señal causal) la expresión

$$H(z) = \sum_k \frac{A_k}{1 - e^{p_k T} z^{-1}}. \quad (3.29)$$

Se podría haber establecido un camino directo entre las transformadas llegando a la siguiente relación general:

$$H(s) = \frac{A_k}{s - p_k} \implies H(z) = \frac{A_k}{1 - e^{p_k T} z^{-1}}. \quad (3.30)$$

Se tiene, pues, un procedimiento para diseñar sistemas discretos a partir de sistemas continuos.

Obtención de estructuras digitales

Tal y como se ha comentado en temas anteriores, los sistemas digitales se pueden combinar de diferentes formas siendo las más comunes las conexiones en *paralelo* y en *serie*. La Transformada Z es la herramienta a utilizar cuando se quiere cambiar una estructura dada y, lo que se busca es la implementación del mismo sistema digital de una forma diferente. Así se sabe que la relación que define la entrada, salida y respuesta impulsional de un sistema en el dominio Z es la siguiente:

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z). \quad (3.31)$$

La Transformada $H(z)$ se puede factorizar de diferentes formas:

$$H(z) = H_1(z) + H_2(z) + \cdots + H_n(z) \quad (3.32)$$

$$H(z) = G_1(z) \cdot G_2(z) \cdots G_n(z). \quad (3.33)$$

En el primer caso y, de acuerdo a la ecuación (3.31), se tendría:

$$Y(z) = [H_1(z) + H_2(z) + \cdots + H_n(z)]X(z), \quad (3.34)$$

que conduciría, aplicando Transformadas Z inversas a

$$y(n) = \sum_k y_k(n) \quad (3.35)$$

donde $y_k(n)$ es la Transformada Z Inversa de $H_k(z)X(z)$. La ecuación (3.35) indica que la salida del sistema es el resultado de sumar la salida de una serie de sistemas por lo que se tiene una estructura en paralelo. En el segundo caso (ecuación (3.33)) se tendría que el sistema definido por $H(z)$ es equivalente a la asociación en serie de los diferentes $G_k(z)$. Las diferentes estructuras digitales se verán más adelante en detalle. Sin embargo aquí, por su especial utilidad se verá una aplicación de este tipo de descomposición. El objetivo es implementar un sistema con el menor número de retardos. La forma de proceder es siempre

la misma; el sistema definido como $H(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$ se divide en dos subsistemas de acuerdo a la siguiente relación:

$$H(z) = G_1(z) \cdot G_2(z) \implies G_1(z) = N(z), \quad G_2(z) = \frac{1}{D(z)}. \quad (3.36)$$

Tal como se han definido los sistemas, la salida del sistema $G_2(z)$, que denominaremos $w(n)$, será la entrada de $G_1(z)$. Se tendrán entonces las siguientes igualdades:

$$G_2(z) = \frac{W(z)}{X(z)} = \frac{1}{D(z)} \quad (3.37)$$

$$G_1(z) = \frac{Y(z)}{W(z)} = N(z) \quad (3.38)$$

Una vez que se tienen esas igualdades se puede pasar al dominio temporal, ecuaciones en diferencias, aplicando la propiedad del retardo temporal de la Transformada Z. El último paso es combinar las dos ecuaciones en diferencias acopladas que se obtendrán. Se puede demostrar que este procedimiento conduce a la implementación de un sistema digital con el menor número de retardos.

3.2. Problemas resueltos

1. Determine la Transformada Z inversa de $H(z) = \frac{1}{(1 - 0'5z^{-1})^2}$, aplicando:
- Diferenciación en el dominio Z.
 - Desarrollo en serie de potencias.
 - División directa.

Resolución:

- a) Se cumple la propiedad de diferenciación expresada como

Si

$$x(n) \xleftrightarrow{z} X(z)$$

entonces

$$nx(n) \xleftrightarrow{z} -z \frac{dX(z)}{dz}$$

Si se considera

$$G(z) = \frac{z}{z - 0'5}, \quad (3.39)$$

y observando las tablas de Transformadas Z Inversas se llega a $g(n) = (\frac{1}{2})^n u(n)$. Se puede calcular ahora

$$-z \frac{dG(z)}{dz} = \frac{0'5z}{(z - 0'5)^2} = \frac{0'5z^{-1}}{(1 - 0'5z^{-1})^2}. \quad (3.40)$$

Si se aplica ahora la propiedad de la diferenciación se llega a:

$$TZI \left\{ -z \frac{dG(z)}{dz} \right\} = n \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) = n \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n-1). \quad (3.41)$$

Usando la expresión de $H(z)$ y de la derivada de $G(z)$ se llega a:

$$H(z) = 2z \left\{ -z \frac{dG(z)}{dz} \right\}. \quad (3.42)$$

Aplicando ahora la propiedad del adelanto temporal (hay un factor z multiplicando a la derivada de $G(z)$) y multiplicando por 2 se obtiene:

$$h(n) = 2(n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u(n) = (n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) \quad (3.43)$$

- b) *Desarrollo en serie de potencias.* En este caso cabe considerar la expresión del desarrollo de una serie del tipo

$$H(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad (3.44)$$

cuyo desarrollo es el siguiente

$$H(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H^n(0)}{n!} x^n, \quad (3.45)$$

siendo $H^n(0)$ la derivada n -ésima de la función $H(x)$ evaluada en el origen. Por tanto, se tiene que

$$\begin{aligned} H(0) &= 1 \\ H'(x) &= (-2)(-1)(1-x)^{-3} \implies H'(0) = 2 \\ H''(x) &= (-3)(2)(-1)(1-x)^{-4} \implies H''(0) = 6 \end{aligned}$$

que, generalizando, se llega a la expresión general

$$H^n(0) = (n+1)! \quad (3.46)$$

Teniendo en cuenta que $x = 0'5z^{-1}$ se tiene entonces que, a partir de la (3.45),

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} \frac{(n+1)!}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n}. \quad (3.47)$$

Si se compara esta expresión con $H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)z^{-k}$, se llega a la siguiente igualdad

$$h(n) = (n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) \quad (3.48)$$

c) *División directa.* Si se divide numerador y denominador de

$$H(z) = \frac{1}{1 - z^{-1} + 0'25z^{-2}}, \quad (3.49)$$

se obtiene el siguiente divisor $1 + z^{-1} + 0'75z^{-2} + 0'5z^{-3} + \dots$

Comparando lo obtenido con $H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)z^{-k}$. Se tiene entonces que

$$h(0) = 1, h(1) = 1, h(2) = 3/4, h(3) = 4/8 = 1/2 \quad (3.50)$$

que se corresponde con la expresión general:

$$h(n) = \left(\frac{n+1}{2^n}\right)u(n) \quad (3.51)$$

Evidentemente, las soluciones coinciden sea cuál sea el método empleado. En función de la dificultad de la función de transferencia del sistema, resultará conveniente escoger un determinado método de resolución. ★

2. Determine, aplicando la propiedad de diferenciación en el dominio Z, la Transformada Inversa de $G(z) = e^{z^{-1}}$.

Resolución:

Esta transformada es típicamente empleada cuando se explica el método del desarrollo en serie a la hora de determinar Transformadas Z Inversas. Sin embargo aquí se aplicará el método de diferenciación en el dominio Z.

Si se define $X(z) = e^{z^{-1}}$, se tendría

$$-z \frac{dX(z)}{dz} = (-z)e^{z^{-1}} z^{-2}(-1) = z^{-1}X(z) \quad (3.52)$$

Aplicando la propiedad del retardo temporal a esta última expresión y teniendo en cuenta la propiedad de la diferenciación en el dominio Z, se llega a

$$nx(n) = x(n-1). \quad (3.53)$$

o equivalentemente

$$x(n) = \frac{x(n-1)}{n}. \quad (3.54)$$

Si se itera se obtiene

$$x(n-1) = \frac{x(n-2)}{n-1} \quad (3.55)$$

que, sustituyendo en la expresión original (Ec. (3.54)) conduce a

$$x(n) = \frac{x(n-2)}{n(n-1)}, \quad (3.56)$$

a partir de la cual se llega de forma general a

$$x(n) = \frac{u(n)}{n!}. \quad (3.57)$$

3. Se tiene un sistema que, ante una entrada escalón unitario $x(n) = u(n)$, la salida es $y(n) = a^n u(n+1)$. Determine:
- La respuesta impulsional del sistema.
 - Las condiciones sobre a para que el sistema sea estable.
 - Discuta la causalidad del sistema.

Resolución:

- a) Para determinar la respuesta impulsional del sistema se usarán Transformadas Z aplicando que

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}, \quad (3.58)$$

donde $X(z)$ e $Y(z)$ son las Transformadas Z de la entrada y salida respectivamente y $H(z)$ es la Transformada Z de la respuesta impulsional del sistema. Una vez que se tenga dicha transformada se aplican TZI obteniéndose la respuesta impulsional. Observando las tablas se tiene

$$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}. \quad (3.59)$$

Para el cálculo de $Y(z)$ se aplicará que $y(n) = \frac{1}{a}\delta(n+1) + a^n u(n)$ por lo que la Transformada Z de la salida será la suma de las dos transformadas Z de las

señales que forman $y(n)$. Se tendrá entonces (usando tablas de transformadas y la propiedad de desplazamiento temporal) que

$$Y(z) = \frac{1}{a}z + \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad (3.60)$$

la cual conduce a

$$Y(z) = \frac{\frac{1}{a}z}{1 - az^{-1}}. \quad (3.61)$$

Se tiene pues que

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{a} \left[\frac{z}{1 - az^{-1}} - \frac{1}{1 - az^{-1}} \right]. \quad (3.62)$$

Aplicando la propiedad del adelanto temporal a la expresión anterior se obtiene

$$h(n) = \frac{1}{a} [a^{n+1}u(n+1) - a^n u(n)]. \quad (3.63)$$

Esta señal temporal se puede reescribir de otra forma teniendo en cuenta que

$$h(-1) = \frac{1}{a}, \quad h(k) = \frac{1}{a} a^k (a - 1) = a^k \left(1 - \frac{1}{a}\right), \quad \forall k \geq 0 \quad (3.64)$$

Teniendo en cuenta lo anterior se tiene la expresión siguiente para la respuesta impulsional:

$$h(n) = \frac{1}{a} \delta(n+1) - a^n \left(1 - \frac{1}{a}\right) u(n). \quad (3.65)$$

- b) Para que el sistema sea estable, los polos de $H(z)$ deben estar en el interior de la circunferencia de radio unidad. Este hecho conduce a la condición $|a| < 1$ ya que el polo se encuentra en $z = a$.
- c) El sistema es no causal pues $h(n) \neq 0$ para un índice temporal negativo, en este caso $n = -1$.

★ ★

4. Diseñe un sistema digital causal que, ante la entrada $x(n) = \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \cos\left(\frac{3\pi n}{4}\right) + \cos(\pi n)$, elimine las dos primeras componentes y la tercera la deje inalterada salvo por un determinado desfase. A partir de dicho diseño, determine:
- a) La respuesta impulsional del sistema.
- b) La salida del sistema cuando la entrada es $x(n) = u(n)$.

Resolución:

- a) Este sistema se puede diseñar teniendo en cuenta la relación existente entre los polos y ceros de la Transformada Z y su respuesta en frecuencia. Así, hay que situar los ceros de la Transformada Z en las frecuencias que se quieren eliminar. Se tendrá entonces la siguiente expresión:

$$H(z) = G(z - e^{j\frac{\pi}{2}})(z - e^{j\frac{3\pi}{4}}) \quad (3.66)$$

siendo G un factor de ganancia. Como los coeficientes de $H(z)$ tienen que ser reales, deben aparecer los conjugados de los ceros, y se tiene entonces:

$$H(z) = G(z - e^{j\frac{\pi}{2}})(z - e^{j\frac{3\pi}{4}})(z - e^{-j\frac{\pi}{2}})(z - e^{-j\frac{3\pi}{4}}) \quad (3.67)$$

que se puede simplificar como

$$H(z) = G(z^2 + 1)(z^2 + \sqrt{2}z + 1) = G[z^4 + \sqrt{2}z^3 + 2z^2 + \sqrt{2}z + 1]. \quad (3.68)$$

Como queremos un sistema causal, se divide la función de transferencia $H(z)$ por z^4 , obteniendo fácilmente

$$H(z) = G[1 + \sqrt{2}z^{-1} + 2z^{-2} + \sqrt{2}z^{-3} + z^{-4}]. \quad (3.69)$$

Nótese que con esta división no se modifica el módulo de la respuesta en frecuencia. Ahora, si se compara $H(z)$ con su definición

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)z^{-k}, \quad (3.70)$$

se obtiene la respuesta impulsional del sistema buscado:

$$h(0) = G, h(1) = \sqrt{2}G, h(2) = 2G, h(3) = \sqrt{2}G, h(4) = G \quad (3.71)$$

con $h(n) = 0, \forall n > 4$.

Queda por determinar el factor de ganancia para lo cual se usará la condición sobre la tercera componente (ganancia en módulo igual a uno). Sustituyendo $z = e^{jw}$, se llega a la siguiente respuesta en frecuencia

$$H(e^{jw}) = G[1 + \sqrt{2}e^{-jw} + 2e^{-2jw} + \sqrt{2}e^{-3jw} + e^{-4jw}]. \quad (3.72)$$

La señal de interés tiene una frecuencia digital de π por lo que, sustituyendo en la respuesta en frecuencia se llega a

$$H(e^{jw}) = G[1 - \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} + 1] = 1 \implies G = \frac{1}{4 - 2\sqrt{2}}. \quad (3.73)$$

En la Fig. 3.2 se muestra la salida resultante de la convolución de $h(n)$ y $x(n)$.

- b) Para determinar la salida del sistema ante la entrada escalón unitario, $x(n) = u(n)$, se aplicará la propiedad del retardo temporal a la Transformada Z, obteniendo la siguiente ecuación en diferencias

$$y(n) = G[x(n) + \sqrt{2}x(n-1) + 2x(n-2) + \sqrt{2}x(n-3) + x(n-4)]. \quad (3.74)$$

Para $n \geq 4$ se particulariza a

$$y(n) = G[4 + 2\sqrt{2}] = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{4 - 2\sqrt{2}} = 3 + 2\sqrt{2}. \quad (3.75)$$

Falta determinar la *respuesta transitoria* del sistema, que se puede obtener por sustitución directa, de forma que

$$y(0) = G, y(1) = G(1 + \sqrt{2}), y(2) = G(3 + \sqrt{2}), y(3) = G(3 + 2\sqrt{2}). \quad (3.76)$$

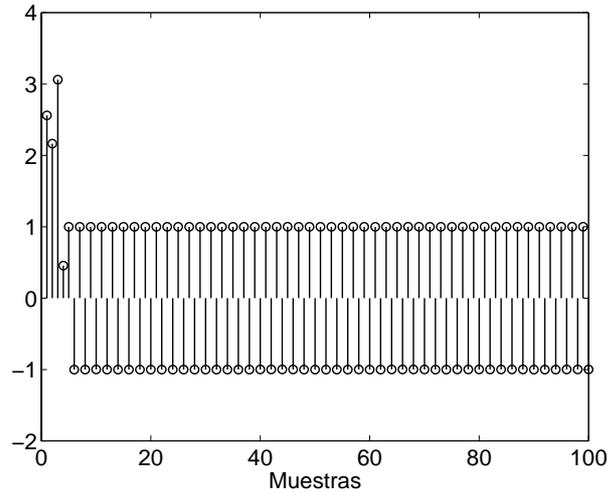


Figura 3.2: Salida obtenida del sistema mediante la convolución de $h(n)$ y $x(n)$ en el ejercicio 4.

5. Determine la Transformada Z inversa de $H(z) = \log(1 - az^{-1})$ mediante:

- a) Series de potencias.
- b) Diferenciación en el dominio Z.

Resolución:

- a) Si se considera $x = az^{-1}$, hay que obtener el desarrollo de $f(x) = \log(1 - x)$. Dicho desarrollo tendría la siguiente expresión (ver ejercicio 1 de este mismo capítulo)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!} x^n. \quad (3.77)$$

Se determinará la expresión general de $f^n(0)$:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f'(x) &= (1-x)^{-1}(-1) \implies f'(0) = -1 \\ f''(x) &= (-1)(1-x)^{-2}(-1)^2 \implies f''(0) = -1 \\ f'''(x) &= (-1)(-2)(1-x)^{-3}(-1) \implies f'''(0) = -2. \end{aligned}$$

Se puede ver que $f^n(0) = -(n-1)!$ con $f(0) = 0$. Sustituyendo y teniendo en cuenta que $x = az^{-1}$, se llega a

$$\log(1 - az^{-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-(n-1)!}{n!} a^n z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-a^n}{n} z^{-n}. \quad (3.78)$$

Si se compara esta expresión con la que proporciona la Transformada Z,

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n}, \quad (3.79)$$

se llega a

$$h(n) = \frac{-a^n}{n} u(n-1) \quad (3.80)$$

b) Usando a continuación la propiedad de diferenciación se obtiene

$$X(z) = \log\left(1 - \frac{a}{z}\right) = \log\left(\frac{z-a}{z}\right), \quad (3.81)$$

cuyo desarrollo es

$$-z \frac{dX(z)}{dz} = -az^{-1} \frac{1}{1-az^{-1}}. \quad (3.82)$$

Usando que la Transformada Z Inversa de $\frac{1}{1-az^{-1}}$ es $a^n u(n)$, y si se aplica ahora la propiedad del retardo temporal, se obtiene:

$$TZI \left\{ -z \frac{dX(z)}{dz} \right\} = -aa^{n-1} u(n-1) = -a^n u(n-1) \quad (3.83)$$

Utilizando ahora la propiedad de la diferenciación se llegaría a $nx(n) = -a^n u(n-1)$, por lo que

$$x(n) = -\frac{a^n}{n} u(n-1). \quad (3.84)$$

6. La serie o secuencia de Fibonacci se usa extensamente en economía y viene definida de la siguiente forma: dados dos términos iniciales cualesquiera, el término n -ésimo vendrá definido por la suma de los dos anteriores ($n-1$ y $n-2$). Use la Transformada Z para determinar la expresión general (sin recurrencias) de un término de esta serie considerando los dos primeros términos iguales a la unidad.

Resolución:

Según la descripción se tendrá la siguiente ecuación en diferencias

$$h(n) = h(n-1) + h(n-2). \quad (3.85)$$

Esta ecuación no se cumple para $n=0$ y $n=1$ si se impone que $h(k) = 0, \forall k < 0$ (sistema causal). En estos casos, hay que utilizar deltas para completar la ecuación. Estos deltas definen los primeros términos de la respuesta impulsional:

$$h(n) = h(n-1) + h(n-2) + \delta(n) + \delta(n-1). \quad (3.86)$$

Aplicando la propiedad del retardo temporal a esta ecuación en diferencias se llega a

$$H(z) = z^{-1}H(z) + z^{-2}H(z) + 1 + z^{-1}. \quad (3.87)$$

que, despejando $H(z)$, se obtiene

$$H(z) = \frac{z^2 + z}{z^2 - z - 1}. \quad (3.88)$$

El siguiente paso es descomponer en fracciones simples la expresión $\frac{H(z)}{z}$, de la forma

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{z+1}{(z-p_1)(z-p_2)}, \quad (3.89)$$

donde p_1 y p_2 son los polos de la Transformada Z. Operando, se llega a $p_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $p_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Si ahora descomponemos esta expresión en fracciones simples se puede establecer que

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{A_1}{(z-p_1)} + \frac{A_2}{(z-p_2)}, \quad (3.90)$$

donde se tiene

$$A_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}, A_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{-2\sqrt{5}}. \quad (3.91)$$

De esta forma, se llega a la expresión siguiente:

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{A_1 z}{(z-p_1)} + \frac{A_2 z}{(z-p_2)} = \frac{A_1}{(1-p_1 z^{-1})} + \frac{A_2}{(1-p_2 z^{-1})}, \quad (3.92)$$

de donde, aplicando Transformadas Z Inversas se obtiene

$$h(n) = [A_1(p_1)^n + A_2(p_2)^n]u(n), \quad (3.93)$$

que, sustituyendo valores, conduce a

$$h(n) = \left[\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \right) \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \right) \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] u(n) \quad (3.94)$$

★

7. Determine la respuesta impulsional del sistema causal definido por

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0'8z^{-1} + 0'15z^{-2}}.$$

Resolución:

Como $H(z)$ es una función racional, el primer paso es descomponerla en fracciones simples en forma de potencias de z^{-1} . Una posible forma de hacerlo es descomponer $\frac{H(z)}{z}$ en potencias de z :

$$H(z) = \frac{z^2}{z^2 - 0'8z + 0'15} \implies \frac{H(z)}{z} = \frac{z}{z^2 - 0'8z + 0'15}. \quad (3.95)$$

Los polos de $\frac{H(z)}{z}$ son $p_1 = 0'5$, $p_2 = 0'3$. De esta forma, podemos escribir:

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{A}{z-0'5} + \frac{B}{z-0'3}. \quad (3.96)$$

Si se igualan las ecuaciones (3.95) y (3.96), es inmediato obtener $A = 5/2$ y $B = -3/2$. Sustituyendo se llega a la forma sencilla de la función de transferencia siguiente:

$$H(z) = \frac{5/2}{z-0'5} - \frac{3/2}{z-0'3}. \quad (3.97)$$

La respuesta temporal de un sistema causal con una Transformada Z del tipo

$$H(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} \quad (3.98)$$

es $h(n) = a^n u(n)$. Aplicando este hecho junto con que la Transformada Z es un operador lineal, se llega a

$$h(n) = \left[\frac{5}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^n - \frac{3}{2} \left(\frac{3}{10} \right)^n \right] u(n). \quad (3.99)$$

★ ★

8. Implemente, mediante el menor número de retardos, el sistema digital equivalente al sistema continuo definido mediante la siguiente Transformada de Laplace

$$G(s) = \frac{10^3}{s^2 + 10^3},$$

con una frecuencia de muestreo $F_m = 10k Hz$.

Resolución:

Para determinar el sistema digital equivalente utilizaremos la transformación impulso-invariante. En ella se hace la siguiente equivalencia entre los sistemas continuos y discretos.

$$G(s) = \frac{1}{s+a} \longleftrightarrow G(z) = \frac{1}{1 - e^{-aT_m} z^{-1}}$$

siendo T_m el periodo de muestreo.

El primer paso que hay que dar es descomponer $G(s)$ en fracciones simples de la forma:

$$G(s) = \frac{A}{s^2 + A}, \quad A = 10^3. \quad (3.100)$$

Los polos de $G(s)$ son $\pm \sqrt{A}j$. Si se descompone $G(s)$ en fracciones simples se llega a

$$G(s) = \frac{\alpha}{s + \sqrt{A}j} + \frac{\beta}{s - \sqrt{A}j} \quad (3.101)$$

Igualando las ecuaciones (3.100) y (3.101), se llega a

$$\alpha = \frac{\sqrt{A}}{2}j, \beta = -\alpha. \quad (3.102)$$

Se tiene pues la expresión

$$G(s) = \alpha \left[\frac{1}{s + \sqrt{A}j} - \frac{1}{s - \sqrt{A}j} \right]. \quad (3.103)$$

Se puede entonces aplicar la transformación impulso-invariante, obteniendo

$$G(z) = \alpha \left[\frac{1}{1 - e^{-\sqrt{A}jT} z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{\sqrt{A}jT} z^{-1}} \right]. \quad (3.104)$$

Empleando las ecuaciones de Euler, se puede simplificar esta expresión, llegando a

$$G(z) = \sqrt{A} \frac{\text{sen}(\sqrt{A}T)z^{-1}}{1 - 2\cos(\sqrt{A}T)z^{-1} + z^{-2}}, \quad (3.105)$$

de donde, sustituyendo valores, se llega a

$$G(z) = \frac{0'1z^{-1}}{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}. \quad (3.106)$$

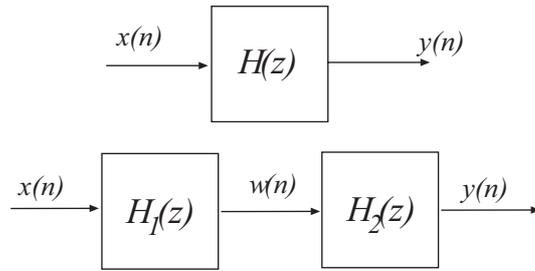


Figura 3.3: Diagrama de bloques a implementar en la estructura II. En el segundo caso se considera una composición en cascada de dos sistemas con un nodo intermedio. La salida del primer sistema $w(n)$ es la secuencia de entrada al segundo.

Para implementar una estructura con el menor número de retardos se utiliza la estructura directa de tipo II. Consiste en aplicar la descomposición mostrada en la Fig. 3.3.

En este caso se definirá

$$H_1(z) = \frac{1}{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}, \quad H_2(z) = 0'1z^{-1}. \quad (3.107)$$

De acuerdo a la Fig. 3.3 se tiene

$$\frac{W(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - 2z^{-1} + z^{-2}} \quad (3.108)$$

$$\frac{Y(z)}{W(z)} = 0'1z^{-1} \quad (3.109)$$

llegando a

$$W(z)(1 - 2z^{-1} + z^{-2}) = X(z) \quad (3.110)$$

$$Y(z) = 0'1z^{-1}W(z) \quad (3.111)$$

Si se calcula la Transformada Z Inversa de ambas ecuaciones (aplicando la propiedad del retardo temporal de la Transformada Z), se llega a las ecuaciones en tiempo discreto acopladas siguientes:

$$w(n) = x(n) + 2w(n-1) - w(n-2) \quad (3.112)$$

$$y(n) = 0'1w(n-1). \quad (3.113)$$

Combinando las ecuaciones anteriores, se llega a la estructura mostrada en la Fig. 3.4.

★ ★

9. Determine la Transformada Z y la R.O.C. de la secuencia temporal $x(n) = (0'25)^{|n|}$ con $-\infty < n < \infty$.

Resolución:

Aplicando la definición de la Transformada Z de una secuencia $x(n)$ se tiene:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (0'25)^{|n|}z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} (0'25)^{|n|}z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} (0'25)^{|n|}z^{-n} \quad (3.114)$$

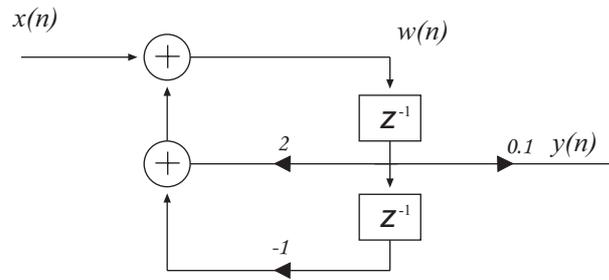


Figura 3.4: Esquema del sistema a implementar. La definición del nodo intermedio $w(n)$ resulta muy útil a la hora de dibujar el esquema a partir de las ecuaciones en diferencias encadenadas.

Aplicando la definición de módulo de un número se llega a

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} (0'25)^{-n} z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} (0'25)^n z^{-n} \quad (3.115)$$

Haciendo un cambio de variable ($n = -k$) en el primer sumatorio, se obtiene

$$X(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (0'25)^k z^k + \sum_{n=0}^{\infty} (0'25)^n z^{-n} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} (0'25z)^k - 1 \right) + \sum_{n=0}^{\infty} (0'25z^{-1})^n \quad (3.116)$$

y usando la expresión de la suma de una serie geométrica infinita:

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}, \quad |r| < 1, \quad (3.117)$$

se puede calcular

$$X(z) = \left(\frac{1}{1-0'25z} - 1 \right) + \frac{1}{1-0'25z^{-1}} \quad (3.118)$$

si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones (necesarias para que ambos sumatorios converjan):

- *Primer sumatorio:*

$$\left| \frac{1}{4}z \right| < 1 \implies |z| < 4 \quad (3.119)$$

- *Segundo sumatorio:*

$$\left| \frac{1}{4}z^{-1} \right| < 1 \implies |z| > \frac{1}{4} \quad (3.120)$$

con lo que se deberá cumplir que

$$\frac{1}{4} < |z| < 4 \quad (3.121)$$

Esta zona del plano complejo (la Región de Convergencia de la Transformada Z planteada) se muestra en la Fig. 3.5.

Si realizamos la suma de $X(z)$, se tiene:

$$X(z) = \frac{0'25z}{1-0'25z} + \frac{z}{z-0'25} = \frac{15z^{-1}}{-4+17z^{-1}-4z^{-2}}. \quad (3.122)$$

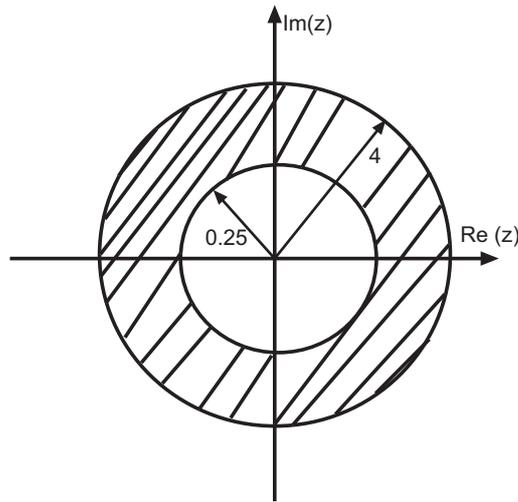


Figura 3.5: Región de Convergencia de la Transformada Z.

10. Dados los diagramas de bloques mostrados en la Fig. 3.6, con las secuencias

$$y_1(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} [(-1) + 3 \cdot (-1)^n] u(n),$$

$$y_2(n) = (-1)^n u(n),$$

$$y_3(n) = \frac{4}{3}(-1)^n + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} u(n),$$

se pide determinar:

- La señal de entrada y respuesta impulsional de los sistemas $H_1(z)$ y $H_2(z)$.
- La estructura con el menor número de retardos correspondiente a la asociación en paralelo de los sistemas $H_1(z)$ y $H_2(z)$.
- Realizar un pequeño *script* de MATLAB para determinar la salida del sistema definido en b) cuando la entrada es un pulso de longitud 10 que empieza en $n = 11$.

Resolución:

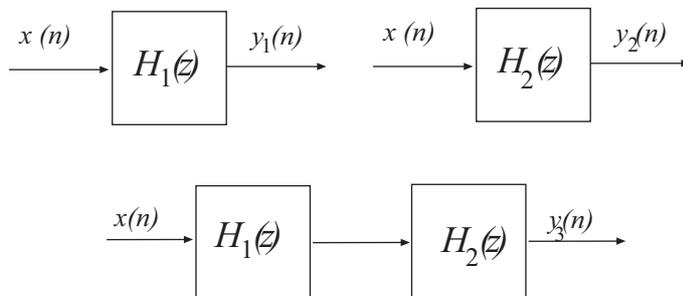


Figura 3.6: Esquema del sistema que se persigue en el ejercicio 10.

- a) Para determinar la entrada $x(n)$ y las respuestas impulsionales de los sistemas $H_1(z)$ y $H_2(z)$ se tienen que usar Transformadas Z. En efecto, si se consideran los diagramas de bloques que aparecen en el enunciado usando Transformada Z se tiene:

$$Y_1(z) = H_1(z)X(z) \quad (3.123)$$

$$Y_2(z) = H_2(z)X(z) \quad (3.124)$$

$$Y_3(z) = H_1(z)H_2(z)X(z) \quad (3.125)$$

Si se consideran la primera y tercera ecuación, se llega a

$$H_2(z) = \frac{Y_3(z)}{Y_1(z)} \quad (3.126)$$

y con la segunda y tercera se puede definir:

$$H_1(z) = \frac{Y_3(z)}{Y_2(z)}. \quad (3.127)$$

A partir de aquí sería inmediato calcular $X(z)$ a partir de las transformadas $Y_1(z)$, $Y_2(z)$ e $Y_3(z)$. Hay que calcular entonces las Transformadas Z de las diferentes salidas:

$$\begin{aligned} Y_1(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_1(n)z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}(-1)^n z^{-n} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{1 - 0'5z^{-1}} + \frac{3}{2} \frac{1}{1 + 0'5z^{-1}} \end{aligned} \quad (3.128)$$

con lo que, operando, se tiene

$$Y_1(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 - 0'25z^{-2}} \quad (3.129)$$

Ahora se calcula la Transformada Z de la secuencia $y_2(n)$:

$$Y_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_2(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{-n} = \frac{1}{1 + z^{-1}}. \quad (3.130)$$

La TZ de la secuencia $y_3(n)$ vendrá dada por

$$Y_3(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_3(n)z^{-n}, \quad (3.131)$$

que, al ser causal, se puede escribir como

$$\begin{aligned} Y_3(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} y_3(n)z^{-n} \\ &= \frac{4}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{-n} + \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^n \\ &= \frac{1}{(1 + z^{-1})(1 - 0'25z^{-2})} \end{aligned} \quad (3.132)$$

De todas estas expresiones se pueden calcular las funciones de transferencia:

$$H_1(z) = \frac{Y_3(z)}{Y_2(z)} = \frac{1}{1 - 0'25z^{-2}} \quad (3.133)$$

$$H_2(z) = \frac{Y_3(z)}{Y_1(z)} = \frac{1}{1 - z^{-2}} \quad (3.134)$$

$$X(z) = \frac{Y_1(z)}{H_1(z)} = 1 - z^{-1} \quad (3.135)$$

El último paso es determinar la Transformada Z Inversa para $H_1(z)$, $H_2(z)$ y $X(z)$. La de $X(z)$ es inmediata:

$$x(n) = \{1, -1, 0, 0, 0, \dots\}. \quad (3.136)$$

La de $H_1(z)$ se puede resolver expandiendo la expresión en fracciones simples de la siguiente forma:

$$H_1(z) = \frac{Y_3(z)}{Y_2(z)} = \frac{1}{1 - 0'25z^{-2}} = \frac{A}{1 + 0'5z^{-1}} + \frac{B}{1 - 0'5z^{-1}} \quad (3.137)$$

de donde se puede calcular $A = B = 1/2$. Con estos valores, la respuesta impulsional es:

$$h_1(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} [1 + (-1)^n] u(n). \quad (3.138)$$

Respecto a $H_2(z)$, tendremos

$$H_2(z) = \frac{Y_3(z)}{Y_1(z)} = \frac{1}{1 - z^{-2}} = \frac{A}{1 + z^{-1}} + \frac{B}{1 - z^{-1}} \quad (3.139)$$

de donde $A = B = 1/2$ y

$$h_2(n) = \frac{1}{2} [1 + (-1)^n] u(n). \quad (3.140)$$

b) Se quiere poner en paralelo los sistemas representados por $h_1(n)$ y $h_2(n)$:

$$H_1(z) = \frac{1}{1 - 0'25z^{-2}}, H_2(z) = \frac{1}{1 - z^{-2}}. \quad (3.141)$$

Se puede pensar que, ya que se pide la estructura con el menor número de retardos, hay que sumar $H_1(z)$ y $H_2(z)$ para, posteriormente, plantear la estructura canónica directa de tipo II. Sin embargo, por este camino se necesitarían cuatro retardos (orden del denominador de $H_1(z)$ más el de $H_2(z)$) que son los mismos que si se implementa, directamente, la estructura en paralelo de estos dos sistemas. En cambio, si se plantean las ecuaciones en diferencias de cada bloque, se tiene

$$H_2(z) = \frac{W(z)}{X(z)} \equiv \frac{1}{1 - z^{-2}}, \quad (3.142)$$

con lo que

$$w(n) = x(n) + w(n - 2). \quad (3.143)$$

Además se tiene

$$H_1(z) = \frac{V(z)}{X(z)} \equiv \frac{1}{1 - 0.25z^{-2}}, \quad (3.144)$$

con lo que

$$v(n) = x(n) + 0.25v(n-2). \quad (3.145)$$

Como están en paralelo, la secuencia de salida es la suma de la secuencia de entrada y la del nodo intermedio, $y(n) = w(n) + v(n)$, por lo que se llega a la implementación mostrada en la Fig. 3.7.

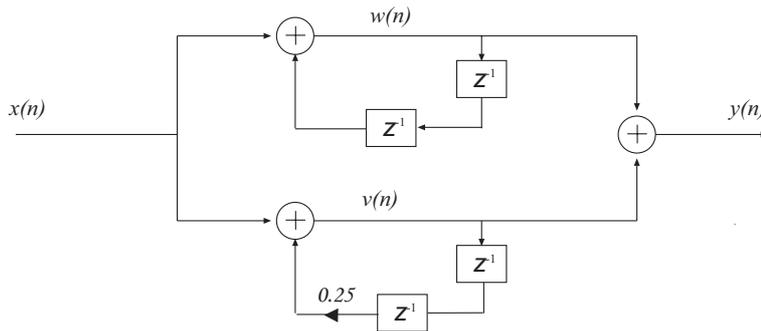


Figura 3.7: Implementación del sistema planteado.

c) Se puede definir el pulso en MATLAB como sigue

```
% Definición del pulso.
>>pulso = [zeros(1,10), ones(1,10), zeros(1,80)]      % Long. total = 100 puntos
>>y=filter(B,A,pulso);
```

En el *script* anterior falta por determinar los parámetros B y A correspondientes al numerador y denominador de $H_1(z) + H_2(z)$ respectivamente. Realizando esta suma:

$$H_1(z) + H_2(z) = \frac{1}{1 - 0.25z^{-2}} + \frac{1}{1 - z^{-2}} = \frac{2 - 1.25z^{-2}}{1 - 1.25z^{-2} + 0.25z^{-4}} \quad (3.146)$$

con lo que se debe definir previamente

```
>> A = [1 0 -1.25 0 0.25];
>> B = [2 0 -1.25];
```

11. Implemente un sistema digital, causal, usando el menor número de retardos cuya respuesta impulsional sea la correspondiente al siguiente oscilador

$$h(n) = \{ \underset{\uparrow}{1}, 2, 3, 1, 2, 3, \dots \}.$$

Resolución:

Para determinar la ecuación en diferencias de cualquier oscilador se plantea la periodicidad general en la respuesta impulsional y luego se analizan los primeros valores de dicha respuesta. En nuestro caso $h(n) = h(n-3)$ para valores iguales o superiores

a $n = 3$ ya que se tiene un sistema causal ($h(n) = 0, \forall n < 0$). Los casos $n = 0, 1$ y 2 se implementarán mediante impulsos unitarios (funciones delta). En nuestro caso:

$$h(n) = h(n - 3) + \delta(n) + 2\delta(n - 1) + 3\delta(n - 2) \quad (3.147)$$

Tomando Transformadas Z se llega fácilmente a

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + 3z^{-2}}{1 - z^{-3}}. \quad (3.148)$$

Como se pide implementar el sistema con el menor número de retardos, se considera la estructura directa de tipo II. Consiste en dividir la función $H(z)$ en dos partes: $H(z) = H_1(z) \cdot H_2(z)$, donde

$$H_1(z) = \frac{1}{1 - z^{-3}}, \quad H_2(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2}. \quad (3.149)$$

A nivel de diagramas de bloques, esto se puede representar como en la Fig. 3.3. Las ecuaciones en diferencias quedarán como:

$$H_1(z) = \frac{1}{1 - z^{-3}} \equiv \frac{W(z)}{X(z)}, \quad (3.150)$$

de donde, aplicando la propiedad del retardo temporal, se llega a:

$$w(n) = x(n) + w(n - 3) \quad (3.151)$$

y

$$H_2(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} \equiv \frac{Y(z)}{W(z)}. \quad (3.152)$$

Aplicando la misma propiedad que antes se llega a

$$y(n) = w(n) + 2w(n - 1) + 3w(n - 2). \quad (3.153)$$

La primera estructura queda representada en la Fig. 3.8(a) mientras que en 3.8(b) se representa el sistema total. ★ ★

12. Dado el sistema de ecuaciones en diferencias acopladas

$$\begin{aligned} w(n) &= 0'75w(n - 1) - 0'125w(n - 2) + x(n) \\ y(n) &= w(n) - w(n - 1) \end{aligned}$$

Determinar

- a) La relación existente, en forma de ecuaciones en diferencias, entre $x(n)$ e $y(n)$.
- b) La respuesta impulsional del sistema $h(n)$ que define la relación entre dichas entradas.

Resolución:

- a) Para determinar la relación directa entre $x(n)$ e $y(n)$, el camino más sencillo es usar Transformadas Z. Así, tomando dichas transformadas y aplicando la propiedad del retardo temporal, se llega a

$$W(z) = 0'75z^{-1}W(z) - 0'125z^{-2}W(z) + X(z) \quad (3.154)$$

$$Y(z) = W(z) - z^{-1}W(z) = W(z)(1 - z^{-1}), \quad (3.155)$$

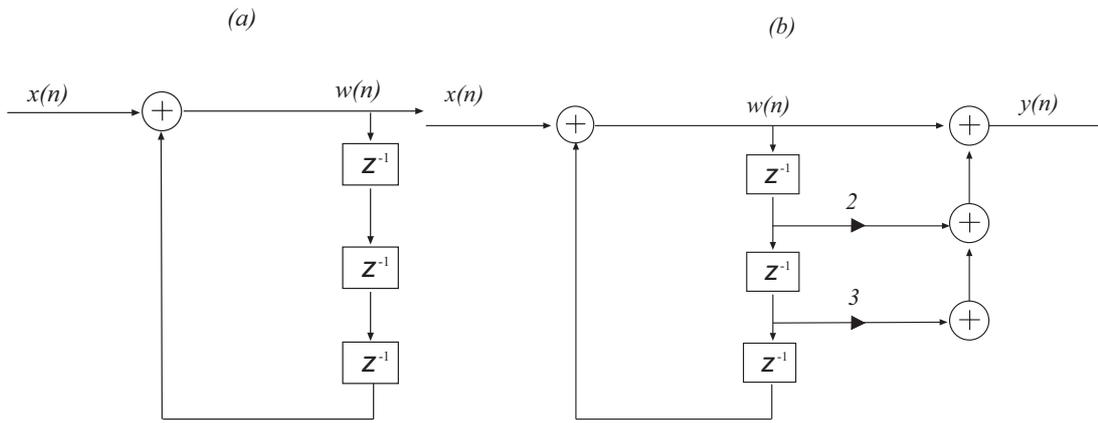


Figura 3.8: (a) Estructura del primer subsistema. El nodo intermedio $w(n)$ es en este caso la salida del subsistema ante una secuencia de entrada $x(n)$. (b) Estructura del sistema total. Una vez añadido el segundo sistema, la salida total $y(n)$ toma muestras actuales y retardadas de la secuencia intermedia $w(n)$.

de donde

$$W(z) = \frac{X(z)}{1 - 0'75z^{-1} + 0'125z^{-2}} \quad (3.156)$$

y, por tanto, sustituyendo en la segunda expresión obtenida

$$Y(z) = \frac{X(z)(1 - z^{-1})}{1 - 0'75z^{-1} + 0'125z^{-2}} \quad (3.157)$$

de donde

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 - 0'75z^{-1} + 0'125z^{-2}}. \quad (3.158)$$

Se puede obtener la ecuación en diferencias entre $y(n)$ y $x(n)$ a partir de la expresión anterior ya que $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$:

$$Y(z)(1 - 0'75z^{-1} + 0'125z^{-2}) = X(z)(1 - z^{-1}), \quad (3.159)$$

de donde, aplicando la propiedad del retardo temporal, se obtiene al ecuación en diferencias siguiente:

$$y(n) = x(n) - x(n-1) + 0'75y(n-1) - 0'125y(n-2) \quad (3.160)$$

b) *Respuesta impulsional $h(n)$:*

La respuesta impulsional se puede calcular usando $H(z)$:

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 - 0'75z^{-1} + 0'125z^{-2}} = \frac{1 - z^{-1}}{(1 - az^{-1})(1 - bz^{-1})}. \quad (3.161)$$

Igualando términos se llega a los valores de $a = 0'5$ y $b = 0'25$ por lo que se tiene finalmente:

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{(1 - 0'5z^{-1})(1 - 0'25z^{-1})} = \frac{(z-1)z}{(z-0'5)(z-0'25)}. \quad (3.162)$$

De aquí, se puede expandir la expresión en fracciones simples, considerando:

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{(z-1)z}{(z-0'5)(z-0'25)} = \frac{A}{z-0'5} + \frac{B}{z-0'25} \quad (3.163)$$

Calculando A y B ,

$$A = \left. \frac{z-1}{z-0'25} \right|_{z=0'5} = -2 \quad (3.164)$$

$$B = \left. \frac{z-1}{z-0'5} \right|_{z=0'25} = 3 \quad (3.165)$$

Por tanto, se puede escribir

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{-2}{z-0'5} + \frac{3}{z-0'25} = \frac{-2}{1-0'5z^{-1}} + \frac{3}{1-0'25z^{-1}}. \quad (3.166)$$

Calculando Transformadas Z Inversas, se llega a

$$h(n) = \left\{ (-2)\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3\left(\frac{1}{4}\right)^n \right\} u(n) \quad (3.167)$$

★

13. Un sistema muy empleado en el procesamiento de la señal es el conocido como *promediador móvil* y viene definido por la siguiente ecuación en diferencias:

$$y(n) = \frac{1}{N}[x(n) + \dots + x(n-N+1)]$$

que realiza un promediado de los N últimos puntos de una secuencia. Se pide

- Determinar un sistema recursivo equivalente a este promediador.
- Comentar, en virtud de la posición de los polos y ceros del sistema la respuesta en frecuencia (magnitud) de dicho sistema

Resolución:

- a) Este apartado se puede hacer usando Transformadas Z. Si se aplica la propiedad del retardo temporal en la ecuación en diferencias se llega a

$$Y(z) = \frac{1}{N}[X(z) + X(z)z^{-1} + \dots + X(z)z^{-(N-1)}] \quad (3.168)$$

con lo que, sacando el factor común $X(z)$ se obtiene la expresión general:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} z^{-n} = \frac{1}{N} \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}. \quad (3.169)$$

Planteando la ecuación en diferencias para el sistema obtenido se llega a

$$Y(z)(1-z^{-1}) = \frac{1}{N}[1-z^{-N}]X(z). \quad (3.170)$$

Si se aplica la propiedad del retardo temporal su Transformada Z Inversa es:

$$y(n) = y(n-1) + \frac{1}{N}(x(n) - x(n-N)). \quad (3.171)$$

- b) Hay que determinar los polos y ceros de $H(z)$, por lo que, multiplicando numerador y denominador por z^N , se llega a

$$H(z) = \frac{z^N(1 - z^{-N})}{(1 - z^{-1})z^N} = \frac{1}{N} \frac{z^N - 1}{(z - 1)z^{N-1}}, \quad (3.172)$$

que tiene los polos en $z = 1$ y $z = 0$ (orden $N - 1$), y los ceros en $z^N = 1$. Los ceros, por tanto se pueden expresar como $z = e^{j\frac{2\pi k}{N}}$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$. El diagrama de polos y ceros se representa en la Fig. 3.9 para un valor $N = 5$.

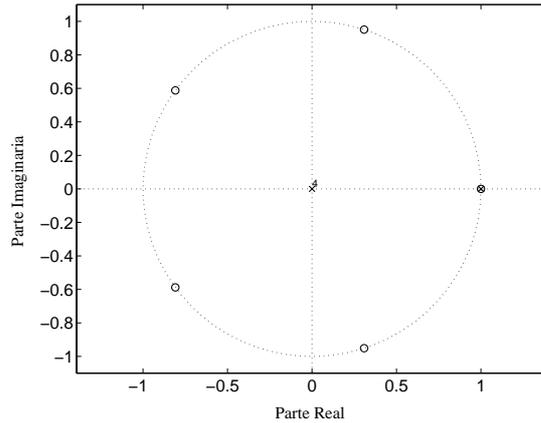


Figura 3.9: Diagrama de polos y ceros de un promediador móvil para $N = 5$.

La respuesta en frecuencia (magnitud) será la representada en la Fig. 3.10. Esta respuesta se puede explicar de forma intuitiva ya que los ceros de la Transformada Z hacen que la magnitud de la respuesta en tales posiciones se anule.

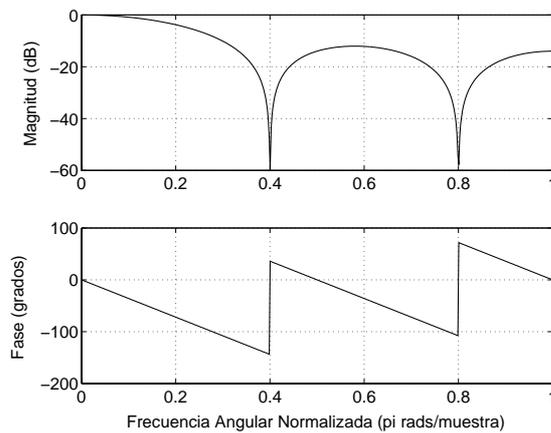


Figura 3.10: Respuesta en frecuencia del promediador móvil para $N = 5$.

14. Determine la correlación cruzada de las señales $x(n) = a^n u(n)$ e $y(n) = b^n u(n)$ usando la Transformada Z y sabiendo que se cumple la relación $|a| < \frac{1}{|b|}$.

Resolución:

La correlación cruzada entre dos señales se define como

$$r_{xy}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n-l). \quad (3.173)$$

A nivel de Transformada Z, esta operación se puede expresar como

$$\mathfrak{R}_{xy} = X(z)Y(z^{-1}). \quad (3.174)$$

Las Transformadas Z y las respectivas Regiones de Convergencia, R.O.C, de las señales son

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}, \quad R.O.C. : |z| > |a| \quad (3.175)$$

$$Y(z) = \frac{1}{1-bz^{-1}} \implies Y(z^{-1}) = \frac{1}{1-bz}, \quad R.O.C. : |z| < \frac{1}{|b|} \quad (3.176)$$

Ahora se puede definir

$$\mathfrak{R}_{xy} = \frac{1}{(1-az^{-1})(1-bz)} = \frac{z}{(z-a)(1-bz)}, \quad (3.177)$$

con lo que

$$\frac{\mathfrak{R}_{xy}}{z} = \frac{1}{(z-a)(1-bz)}, \quad R.O.C. : |a| < |z| < \frac{1}{|b|}. \quad (3.178)$$

Mediante la expansión en fracciones simples de la expresión anterior, se puede escribir

$$\frac{\mathfrak{R}_{xy}}{z} = \frac{A}{z-a} + \frac{B}{1-bz}, \quad (3.179)$$

y calculando A , B , se llega a

$$A = \frac{1}{1-ab}, B = \frac{b}{1-ab} \quad (3.180)$$

por lo que:

$$\mathfrak{R}_{xy} = \frac{1}{1-ab} \left[\frac{1}{1-az^{-1}} - \frac{1}{1-\frac{1}{b}z^{-1}} \right], \quad R.O.C. : |a| < |z| < \left| \frac{1}{b} \right| \quad (3.181)$$

Haciendo la Transformada Z Inversa de esta expresión se llega a

$$r_{xy}(n) = \frac{1}{1-ab} \left[a^n u(n) - \frac{1}{b} u(-n-1) \right], \quad (3.182)$$

donde se tiene que la secuencia de correlación cruzada es no causal .

★ ★

15. Dada la Transformada Z de la respuesta impulsional de un sistema causal

$$H(z) = \frac{1}{(1-0.5z^{-1})^2(1+z^{-1})},$$

determine dicha respuesta impulsional.

Resolución:

La función de transferencia $H(z)$ se puede expresar como

$$H(z) = \frac{z^3}{(z - 0'5)^2(z + 1)} \Rightarrow \frac{H(z)}{z} = \frac{z^2}{(z - 0'5)^2(z + 1)}, \quad (3.183)$$

que, descomponiendo en fracciones simples, se puede expresar en función de tres constantes como sigue:

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{A}{(z - 0'5)^2} + \frac{B}{z - 0'5} + \frac{C}{z + 1}. \quad (3.184)$$

Empleando el Teorema de los Residuos (Riley et al., 1998), se puede calcular de forma sencilla las constantes A, B, C :

$$A = \left. \frac{z^2}{z + 1} \right|_{z=0'5} = 1/6 \quad (3.185)$$

$$B = \left. \frac{d}{dz} \left(\frac{z^2}{z + 1} \right) \right|_{z=0'5} = 5/9 \quad (3.186)$$

$$C = \left. \frac{z^2}{(z - 0'5)^2} \right|_{z=-1} = 4/9 \quad (3.187)$$

Se tiene entonces que

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{1/6}{(z - 0'5)^2} + \frac{5/9}{z - 0'5} + \frac{4/9}{z + 1}, \quad (3.188)$$

por lo que se puede escribir:

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{1/6z^{-1}}{(1 - 0'5z^{-1})^2} + \frac{5/9z^{-1}}{1 - 0'5z^{-1}} + \frac{4/9z^{-1}}{1 + z^{-1}}. \quad (3.189)$$

A partir de la expresión anterior, se puede plantear Transformadas Z Inversas de forma directa para los dos últimas fracciones y llegar a

$$h_2(n) = \frac{5}{9}(0'5)^n u(n), \quad h_3(n) = \frac{4}{9}(-1)^n u(n). \quad (3.190)$$

Para el primer término se puede aplicar la propiedad de la derivada de la Transformada Z, con lo que si se toma

$$X(z) = \frac{1}{1 - 0'5z^{-1}} = \frac{z}{z - 0'5}, \quad (3.191)$$

se calcula la Transformada Z Inversa siguiente:

$$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n). \quad (3.192)$$

Ahora se tiene que

$$-z \frac{dX(z)}{dz} = \frac{0'5z}{(z - 0'5)^2} = \frac{0'5z^{-1}}{(1 - 0'5z^{-1})^2}, \quad (3.193)$$

cuya Transformada Z Inversa es

$$n \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n), \quad (3.194)$$

por lo que se llega que la Transformada Z Inversa de $\frac{z^{-1}}{(1-0'5z^{-1})^2}$ es $n(\frac{1}{2})^{n-1}u(n)$ que es equivalente a $n(\frac{1}{2})^{n-1}u(n-1)$. Por tanto, se tendrá finalmente la respuesta impulsional siguiente:

$$h(n) = \frac{1}{6}n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u(n) + \frac{5}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + \frac{4}{9}(-1)^n u(n) \quad (3.195)$$

16. Dado el sistema definido por $H(z)$ que tiene como polos $p_1 = 0'9j$ y $p_2 = -0'9j$, y como ceros el origen de coordenadas (doble), determine la salida del sistema, en estado estacionario, cuando la entrada es

$$x(n) = 2\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)u(n)$$

usando la Transformada Z y la respuesta en frecuencia del sistema.

Resolución:

Dados los polos y ceros de $H(z)$ esta función tendrá la siguiente forma:

$$H(z) = \frac{z^2}{(z-0'9j)(z+0'9j)} = \frac{z^2}{z^2+0'81} = \frac{1}{1+0'81z^{-2}}. \quad (3.196)$$

La Transformada Z de la entrada será:

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2 \left(\frac{e^{j\frac{\pi n}{2}} + e^{-j\frac{\pi n}{2}}}{2} \right) z^{-n} u(n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (e^{j\frac{\pi n}{2}} z^{-1})^n + \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-j\frac{\pi n}{2}} z^{-1})^n \\ &= \frac{1}{1 - e^{j\frac{\pi}{2}} z^{-1}} + \frac{1}{1 - e^{-j\frac{\pi}{2}} z^{-1}} = \frac{2}{1 + z^{-2}} \end{aligned} \quad (3.197)$$

siempre que $|z| > 1$. Se tiene entonces

$$\begin{aligned} Y(z) &= H(z) \cdot X(z) = \frac{1}{1+0'81z^{-2}} \cdot \frac{2}{1+z^{-2}} = \\ &= \frac{2}{(1+0'9z^{-1})(1-0'9z^{-1})(1+jz^{-1})(1-jz^{-1})}. \end{aligned} \quad (3.198)$$

Al descomponer $Y(z)$ en fracciones simples, se obtiene

$$Y(z) = \frac{A}{(1+0'9z^{-1})} + \frac{B}{(1-0'9z^{-1})} + \frac{C}{(1+jz^{-1})} + \frac{D}{(1-jz^{-1})}. \quad (3.199)$$

Cuando se plantean Transformadas Z Inversas, los dos primeros términos tenderán a cero conforme $n \rightarrow \infty$ ya que darán lugar a términos de la forma $(0'9)^n$.

El término estacionario saldrá de la combinación de las dos últimas Transformadas Z Inversas. Así pues hay que calcular C y D :

$$C = \frac{1}{(1+0'81z^{-2})(1-jz^{-1})} \Bigg|_{z^{-1}=j} = 50/19 \quad (3.200)$$

$$D = \frac{1}{(1+0'81z^{-2})(1+jz^{-1})} \Bigg|_{z^{-1}=-j} = 50/19 \quad (3.201)$$

con lo que, sacando el factor común $C = D = 50/19$, se puede escribir

$$Y(z) = \frac{50}{19} \left(\frac{1}{(1 + jz^{-1})} + \frac{1}{(1 - jz^{-1})} \right). \quad (3.202)$$

Aplicando Transformadas Z Inversas se puede calcular $y(n)$:

$$y(n) = \frac{50}{19} [(-j)^n + (j)^n] = \frac{50}{19} [e^{j\frac{\pi n}{2}} + e^{-j\frac{\pi n}{2}}] = \frac{100}{19} \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right). \quad (3.203)$$

Si se usa la respuesta en frecuencia, se tiene que hacer el cambio $z = e^{jw}$, obteniendo:

$$H(e^{jw}) = \frac{1}{1 + 0'81e^{-2jw}}, \quad (3.204)$$

con lo que, para $w = \pi/2$, se obtiene

$$H(e^{jw}) = \frac{1}{1 + 0'81e^{-2j\pi/2}} = \frac{1}{1 - 0'81} = \frac{100}{19}. \quad (3.205)$$

La salida será, por tanto:

$$y(n) = |H(e^{jw})| \cdot \cos\left(\frac{\pi n}{2} + \Phi_H\right). \quad (3.206)$$

Como la fase de $H(e^{jw})$ es cero para esa frecuencia se llega a

$$y(n) = \frac{100}{19} \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) \quad (3.207)$$

17. Determine la salida, usando Transformadas Z, del sistema definido por $h(n) = 2^n u(-n)$ cuando la entrada vale

$$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n).$$

Resolución:

Se sabe que $Y(z) = H(z)X(z)$, por lo que, si se determinan las transformadas $H(z)$ y $X(z)$ se podrá calcular $Y(z)$ y, en consecuencia, la salida en forma de ecuaciones en diferencias. De esta forma, en primer lugar tenemos que la transformada Z de la respuesta impulsional vendrá dada por

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^n u(-n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^0 2^n z^{-n}. \quad (3.208)$$

Si se hace un cambio de variable $k = -n$, se llega a

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} (2^{-1}z)^k = \frac{1}{1 - \frac{z}{2}}, \quad (3.209)$$

si y sólo si $|\frac{z}{2}| < 1$ con lo que la R.O.C. quedará definida por $|z| < 2$.

Calculamos ahora $X(z)$:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} = \frac{1}{1 - 0'5z^{-1}} = \frac{z}{z - 0'5} \quad (3.210)$$

cuya expresión será válida si y sólo si $|0.5z^{-1}| < 1$, con lo que la R.O.C. quedará definida por $|z| > 1/2$.

Como se tiene que $Y(z) = H(z)X(z)$ se llega a:

$$Y(z) = \frac{2z}{(2-z)(z-0.5)} \quad (3.211)$$

que tendrá como R.O.C. la definida por $1/2 < |z| < 2$. Esta transformada Z se puede expandir en fracciones simples de la siguiente forma:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{2}{(2-z)(z-0.5)} \equiv \frac{A}{2-z} + \frac{B}{z-0.5} \quad (3.212)$$

y la igualdad se cumple cuando $A - B = 0$ y $2B - \frac{A}{2} = 2$, por lo que se deberá cumplir $A = B = \frac{4}{3}$. De este modo, se puede hacer

$$Y(z) = \frac{4}{3} \left[\frac{z}{2-z} + \frac{z}{z-0.5} \right], \quad R.O.C. : 1/2 < |z| < 2 \quad (3.213)$$

La Transformada Z Inversa será, considerando la R.O.C. que la caracteriza, la siguiente ecuación en tiempo discreto:

$$y(n) = \frac{4}{3} \left[2^n u(-n-1) + \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) \right] \quad (3.214)$$

★ ★ ★

18. Se tiene el sistema causal definido por las siguientes ecuaciones en diferencias

$$\begin{aligned} w(n) &= x(n) + \sqrt{2}w(n-1) - w(n-2) \\ y(n) &= w(n) - w(n-1) \end{aligned}$$

Se pide:

- Determinar la ecuación en diferencias entre $y(n)$ y $x(n)$.
- Discutir la estabilidad del sistema.
- Determinar la salida, en estado estacionario, cuando la entrada es

$$x(n) = \left[1 + 2\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) \right] u(n).$$

Resolución:

- Para determinar la relación entre $x(n)$ e $y(n)$ se aplicará la propiedad del retardo de las Transformadas Z en las ecuaciones en diferencias. Se llega entonces a:

$$W(z) = X(z) + \sqrt{2}z^{-1}W(z) - W(z)z^{-2}, \quad (3.215)$$

$$Y(z) = W(z) - z^{-1}W(z). \quad (3.216)$$

Combinando las dos ecuaciones se obtiene

$$W(z) = \frac{X(z)}{1 - \sqrt{2}z^{-1} + z^{-2}} \quad (3.217)$$

$$Y(z) = W(z)(1 - z^{-1}). \quad (3.218)$$

Despejando y agrupando términos se llega a

$$Y(z) = \frac{(1 - z^{-1})X(z)}{1 - \sqrt{2}z^{-1} + z^{-2}}. \quad (3.219)$$

La ecuación en diferencias se obtiene de forma obvia multiplicando en cruz y aplicando la propiedad del retardo temporal:

$$y(n) = x(n) - x(n-1) + \sqrt{2}y(n-1) - y(n-2). \quad (3.220)$$

b) Para determinar la estabilidad, se estudia la posición de los polos de $H(z)$:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - z^{-1}}{1 - \sqrt{2}z^{-1} + z^{-2}} = \frac{z^2 - z}{z^2 - \sqrt{2}z + 1} \quad (3.221)$$

donde los polos son

$$p_{1,2} = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2-4}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm j). \quad (3.222)$$

Por tanto, se tiene que los polos están en la circunferencia de radio unidad. Según esto, el sistema sería inestable ya que existe, al menos, una entrada acotada para la que la salida no está acotada. En este caso particular de polos en la circunferencia de radio unidad esta entrada tendría como Transformada Z una función cuyos polos estarían en el mismo lugar que los de $H(z)$ de tal forma que la salida $Y(z) = H(z)X(z)$ presentará un polo doble y tendrá una respuesta temporal que crecerá con n .

c) Para determinar la salida en el estado estacionario cuando la entrada es

$$x(n) = [1 + 2\cos(\frac{\pi n}{2})]u(n) \quad (3.223)$$

si se usa la respuesta en frecuencia (se hace el cambio $z = e^{jw}$)

$$H(e^{jw}) = \frac{1 - e^{-jw}}{1 - \sqrt{2}e^{-jw} + e^{-j2w}} \quad (3.224)$$

se tienen dos componentes frecuenciales $w = 0$, $w = \pi/2$. Si evaluamos la respuesta en frecuencia para esas dos componentes, se llega a

$$H(0) = 0 \quad (3.225)$$

$$H(e^{j\pi/2}) = \frac{1+j}{\sqrt{2}j}, \quad (3.226)$$

con lo que

$$\varphi_H(e^{j\pi/2}) = \pi/4 - \pi/2 = -\pi/4, \quad |H(e^{j\pi/2})| = 1. \quad (3.227)$$

Se tiene entonces que la salida sería $2\cos(\frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4})$. Esta respuesta sería correcta si el sistema no tuviese polos en la circunferencia de radio unidad. En efecto, si se usan Transformadas Z, se puede escribir

$$X(z) = TZ\{u(n)\} + TZ\left\{2\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right\} = \frac{1}{1-z^{-1}} + TZ\left\{2\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right\}. \quad (3.228)$$

Si ahora calculamos la segunda transformada $\hat{X}(z) = TZ\{2\cos(\frac{\pi n}{2})\}$, se tiene que:

$$\hat{X}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)u(n)z^{-n} \quad (3.229)$$

Esta transformada se ha calculado anteriormente y su expresión general se puede consultar en la Tabla 3.1. Ahora se determinará de otra forma. El coseno vale 0 para índices impares, por lo que se tiene entonces:

$$\hat{X}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} 2\cos\left(\frac{\pi 2k}{2}\right)z^{-2k} \quad (3.230)$$

Sustituyendo el coseno por su valor según k

$$\hat{X}(z) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{-2k} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-(z)^{-2})^k, \quad (3.231)$$

y, realizando la suma infinita, se llega a

$$\hat{X}(z) = \frac{2}{1+z^{-2}}. \quad (3.232)$$

Por tanto,

$$Y(z) = \left(\frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{2}{1+z^{-2}} \right) \cdot \left(\frac{1-z^{-1}}{1-\sqrt{2}z^{-1}+z^{-2}} \right) = \frac{z^2 - 2z^3 + 3z^4}{(z^2 + 1)(z^2 - \sqrt{2}z + 1)} \quad (3.233)$$

Si se expande en fracciones simples la expresión $\frac{Y(z)}{z}$ se llega a la siguiente forma:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{3z^3 - 2z^2 + z}{(z^2 + 1)(z^2 - \sqrt{2}z + 1)} = \frac{A}{z+j} + \frac{B}{z-j} + \frac{C}{z-p_1} + \frac{D}{z-p_2}. \quad (3.234)$$

Los términos con A y B se agrupan para dar lugar a la expresión ya obtenida con la respuesta en frecuencia y que se corresponde con la componente estacionaria de la entrada. Ahora falta añadir la respuesta propia del sistema correspondiente a la agrupación de términos C y D . Por tanto,

$$C = 0'7929 + 0'2071j, \quad D = 0'7929 - 0'2071j, \quad D = C^* \quad (3.235)$$

de donde los polos son

$$p_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+j), \quad p_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-j). \quad (3.236)$$

y, por consiguiente, se tiene que

$$Y(z) = \frac{Az}{z+j} + \frac{Bz}{z-j} + \frac{Cz}{z-p_1} + \frac{C^*z}{z-p_1^*}, \quad (3.237)$$

de donde se llega a

$$y(n) = [2\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + (Cp_1^n + C^*(p_1^*)^n)]u(n). \quad (3.238)$$

Se puede obtener una representación más compacta utilizando la representación módulo-argumento para los números complejos:

$$p_1 = Re^{j\varphi} = 1e^{j\pi/4}, p_1^* = e^{-j\pi/4}. \quad (3.239)$$

Si se designan como $\Re(C)$ y $\Im(C)$ la parte real e imaginaria respectivamente del número complejo C , y si se reagrupan términos, se llega a la expresión de la secuencia discreta de salida

$$y(n) = 2\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \Re(C)(e^{j\pi n/4} + e^{-j\pi n/4}) + j\Im(C)(e^{j\pi n/4} - e^{-j\pi n/4}). \quad (3.240)$$

Sustituyendo valores se tiene finalmente

$$y(n) = 2\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)u(n) + 1'58\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)u(n) - 0'4142\text{sen}\left(\frac{\pi n}{4}\right)u(n). \quad (3.241)$$

19. Se tienen dos sistemas $H_1(z)$ y $H_2(z)$ tal que, para toda secuencia de entrada $x(n)$, se cumplen las relaciones representadas en la Fig. 3.11 donde $y(n) = \{1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, \dots\}$. Determinar:
- Las respuestas impulsionales $h_1(n)$ y $h_2(n)$.
 - La estabilidad de dichos sistemas.

Resolución:

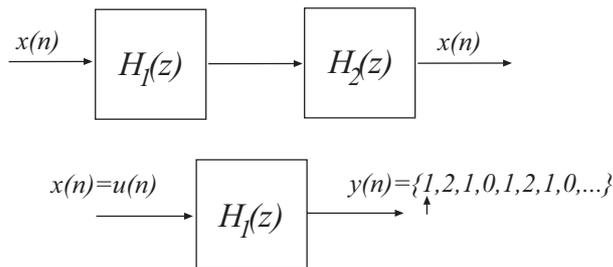


Figura 3.11: Sistema a desarrollar. (a) La primera relación que deben cumplir $H_1(z)$ y $H_2(z)$ es que dispuestos los sistemas en cascada implementan una función pasa-todo y por tanto la secuencia de salida final es la misma que la secuencia de entrada $y(n) = x(n)$. En este caso, la función de transferencia $H_2(z)$ se puede ver como el sistema inverso de $H_1(z)$. (b) El segundo esquema relaciona una entrada escalón unitario con una salida periódica $y(n)$.

- a) De la primera condición se tiene que $Y(z) = H_1(z)H_2(z)X(z) = X(z)$, por lo que

$$H_1(z) = \frac{1}{H_2(z)}. \quad (3.242)$$

De la segunda condición se obtiene $Y(z) = H_1(z)X(z)$. Al calcular la Transformada Z de $y(n)$, de acuerdo con lo comentado en el problema 11, se obtiene

$$y(n) = y(n-4) + \delta(n) + 2\delta(n-1) + \delta(n-2). \quad (3.243)$$

Tomando Transformadas Z se llega a

$$Y(z) = z^{-4}Y(z) + 1 + 2z^{-1} + z^{-2}, \quad (3.244)$$

con lo que

$$Y(z) = \frac{1 + 2z^{-2} + z^{-2}}{1 - z^{-4}} = \frac{(1 + z^{-1})^2}{(1 - z^{-2})(1 + z^{-2})} = \frac{1 + z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 + z^{-2})} \quad (3.245)$$

Considerando las expresiones anteriores y que $X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$, se obtiene

$$H_1(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + z^{-1}}{1 + z^{-2}} \quad (3.246)$$

y por tanto, a partir de la ecuación (3.242),

$$H_2(z) = \frac{1 + z^{-2}}{1 + z^{-1}}. \quad (3.247)$$

Calculando las respuestas impulsionales $h_1(n)$ y $h_2(n)$, se pueden calcular sus TZ mediante la expansión en fracciones simples, tal y como sigue:

$$H_1(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 + z^{-2}} \implies \frac{H_1(z)}{z} = \frac{z + 1}{z^2 + 1} = \frac{A}{z + j} + \frac{B}{z - j} \quad (3.248)$$

Igualando términos se obtiene

$$A = (1 + j)/2, \quad B = (1 - j)/2. \quad (3.249)$$

y, por tanto, $H_1(z)$ se puede escribir como:

$$H_1(z) = \frac{(1 + j)/2}{z + j} + \frac{(1 - j)/2}{z - j} \quad (3.250)$$

que, calculando la Transformada Z Inversa conduce a:

$$h_1(n) = \frac{1 + j}{2}(-j)^n u(n) + \frac{1 - j}{2}(j)^n u(n). \quad (3.251)$$

La última expresión se puede reescribir de la siguiente forma:

$$h_1(n) = \frac{1}{2}[e^{0'5\pi j n} + e^{-0'5\pi j n}]u(n) + \frac{j}{2}[e^{-0'5\pi j n} - e^{0'5\pi j n}]u(n) \quad (3.252)$$

Recordando las relaciones trigonométricas de Euler de las funciones seno y coseno se llega a:

$$h_1(n) = \left[\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{2}\right) \right] u(n). \quad (3.253)$$

Repitiendo los pasos para $H_2(z)$, se obtiene

$$H_2(z) = \frac{z^2 + 1}{z^2 + z} \implies \frac{H_2(z)}{z} = \frac{z^2 + 1}{z^2(z + 1)} = \frac{A}{z^2} + \frac{B}{z} + \frac{C}{z + 1} \quad (3.254)$$

Calculando A , B y C :

$$A = \frac{z^2 + 1}{z + 1} \Bigg|_{z=0} = 1 \quad (3.255)$$

$$B = \left[\frac{d}{dz} \left\{ \frac{z^2 + 1}{z + 1} \right\} \right] \Bigg|_{z=0} = -1 \quad (3.256)$$

$$C = \frac{z^2 + 1}{z^2} \Bigg|_{z=-1} = 2 \quad (3.257)$$

con lo que

$$h_2(n) = -\delta(n) + \delta(n - 1) + 2(-1)^n u(n) \quad (3.258)$$

- b) Para estudiar la estabilidad de los sistemas planteados se determinará la posición de los polos de las funciones de transferencia,

$$H_1(z) = \frac{z^2 + z}{z^2 + 1} \implies \text{polos} = \pm j \implies \text{Sistema Inestable} \quad (3.259)$$

$$H_2(z) = \frac{z^2 + 1}{z^2 + z} \implies \text{polos} = 0, -1 \implies \text{Sistema Inestable} \quad (3.260)$$

Estos dos sistemas no cumplen el criterio BIBO para una determinada entrada. Se analizará a modo de ejemplo el sistema $H_2(z)$:

$$H_2(z) = \frac{z^2 + 1}{z^2 + z} = \frac{1 + z^{-2}}{1 + z^{-1}} = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (3.261)$$

de donde

$$y(n) = x(n) + x(n-2) - y(n-1). \quad (3.262)$$

Si se toma como entrada $x(n) = (-1)^n u(n)$, se tiene que

$$y(0) = 1, y(1) = -2, y(2) = 4, y(3) = -6, \dots \quad (3.263)$$

En definitiva, se tiene la expresión

$$y(n) = (-1)^n 2nu(n) + \delta(n). \quad (3.264)$$

Evidentemente, la salida no está acotada y, por tanto, el sistema es inestable.

Si se ve desde el punto de vista de la Transformada Z, se tiene que en $z = -1$ se tiene un polo doble para $Y(z)$. En efecto

$$Y(z) = H_2(z)X(z) = \frac{1 + z^{-2}}{1 + z^{-1}} \frac{1}{1 + z^{-1}} = \frac{1 + z^{-2}}{(1 + z^{-1})^2}, \quad (3.265)$$

con lo que la inestabilidad se muestra de igual forma.

20. Implemente un sistema digital, usando el menor número de retardos tal que tenga una ganancia máxima de 10 a una frecuencia $f = 100\text{Hz}$ y deje el resto de frecuencias inalteradas ($F_m = 1k\text{Hz}$).

Resolución:

Según los requerimientos del sistema, la posición de polos y ceros de la Transformada Z de la respuesta impulsional del sistema será la mostrada en la Fig. 3.12. La fase de los polos/ceros complejos viene dada por $\theta = \frac{2\pi 100}{1000}$.

Falta por determinar la distancia al origen de dichos polos y ceros. Como el resto de frecuencias permanecen inalteradas, la distancia entre ceros y polos hay que tomarla muy pequeña ($d = 0'01$). Se tiene entonces el diagrama de polos/ceros mostrado en la Fig. 3.13.

La Transformada Z, de acuerdo con el diagrama de polos/ceros será la siguiente:

$$H(z) = \frac{z^2 - 2r_1 \cos\theta + r_1^2}{z^2 - 2r_2 \cos\theta + r_2^2}, \quad (3.266)$$

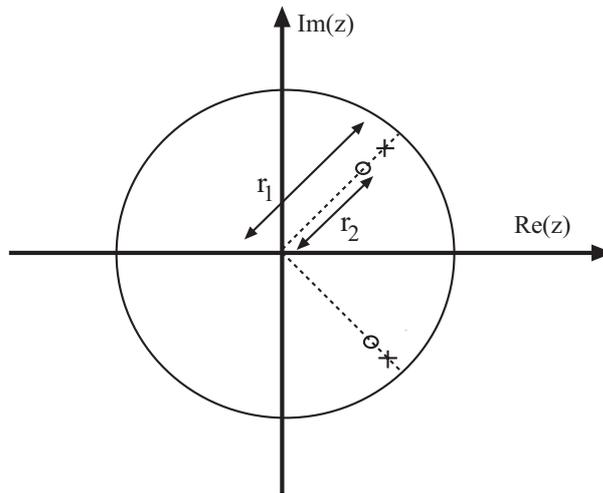


Figura 3.12: Diagrama de polos y ceros del sistema a desarrollar en el ejercicio 20.

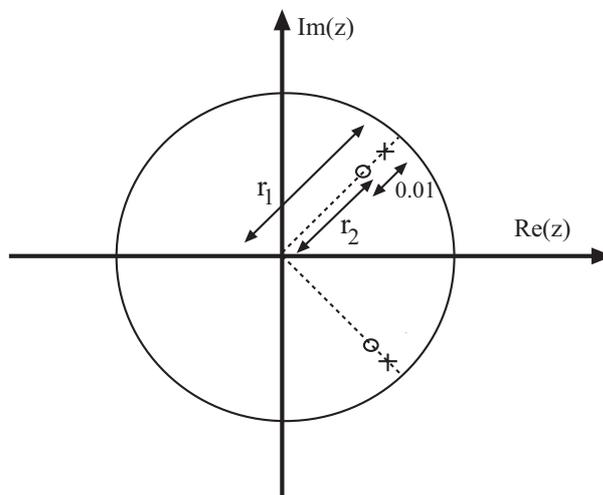


Figura 3.13: Diagrama de polos y ceros de la Transformada Z del problema 20.

donde se puede sustituir $z = e^{j\frac{2\pi 100}{1000}}$ para, seguidamente, utilizar el segundo dato del problema; la ganancia es 10 para $w = \frac{2\pi 100}{1000} = w_A$. Existe un camino más sencillo que emplea la expresión de evaluación del módulo de una respuesta en frecuencia en función de la distancia de polos y ceros:

$$|H(e^{jw})| \Big|_{w=w_A} = \frac{\prod_k \text{dist}(\text{ceros}, w_A)}{\prod_k \text{dist}(\text{polos}, w_A)}. \quad (3.267)$$

Por tanto, utilizando el gráfico de la Fig. 3.14 se puede obtener:

$$|H(e^{jw})| = \frac{d_2 d_4}{d_1 d_3} = \frac{d_2}{d_1} \cdot \frac{d_4}{d_3} \simeq \frac{d_4}{d_3} = \frac{r}{r - 0'01} = 10, \quad (3.268)$$

de donde se obtiene:

$$r = 10r - 0'1 \rightarrow r = 0'0111. \quad (3.269)$$

De esta forma, podemos calcular las distancias al origen de los polos y ceros del sistema:

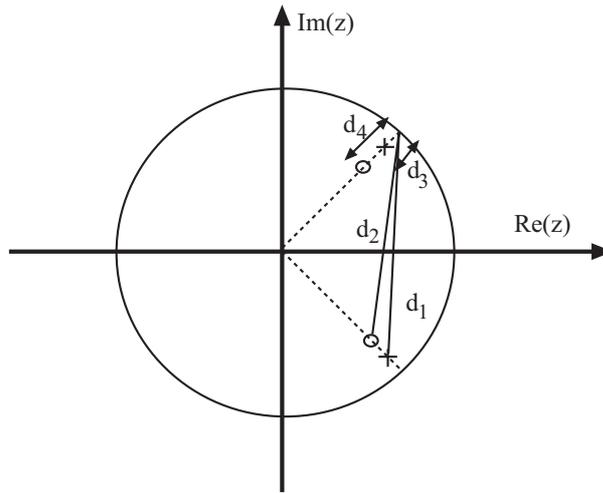


Figura 3.14: Representación de las diferentes distancias polos/ceros.

- Distancia cero–origen = $1 - r = 0'9889$
- Distancia polo–origen = $0'9989$

Con esto se tiene:

$$H(z) = \frac{z^2 - 2r_1 \cos\theta + r_1^2}{z^2 - 2r_2 \cos\theta + r_2^2}, \quad \theta = \pi/5, \quad r_1 = 0'9889, \quad r_2 = 0'9989. \quad (3.270)$$

Sustituyendo y tomando potencias negativas de z , se llega a

$$H(z) = \frac{1 - 1'6z^{-1} + 0'977z^{-2}}{1 - 1'616z^{-1} + 0'9978z^{-2}}. \quad (3.271)$$

Para implementar este sistema con el menor número de retardos, se divide $H(z)$ según

$$H(z) = H_1(z)H_2(z). \quad (3.272)$$

En definitiva, se quiere el esquema mostrado en la Fig. 3.6 con

$$\frac{W(z)}{X(z)} = H_1(z), \quad \frac{Y(z)}{W(z)} = H_2(z). \quad (3.273)$$

Si se toma

$$H_1(z) = \frac{1}{1 - 1'616z^{-1} + 0'9978z^{-2}} \equiv \frac{W(z)}{X(z)} \quad (3.274)$$

$$X(z) = W(z) - 1'616z^{-1}W(z) + 0'9978W(z) \quad (3.275)$$

Multiplicando en cruz y aplicando la propiedad del retardo temporal de la Transformada Z, se llega a

$$w(n) = x(n) + 1'616w(n-1) - 0'9978w(n-2). \quad (3.276)$$

La implementación de esta ecuación en diferencias es la mostrada en la Fig. 3.15.

Si se considera $H_2(z)$ se llega a la expresión

$$\frac{Y(z)}{W(z)} = 1 - 1'6z^{-1} + 0'977z^{-2} \quad (3.277)$$

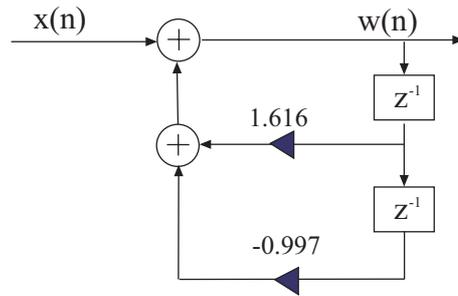


Figura 3.15: Implementación de la ecuación en diferencias del nodo intermedio $w(n)$ en función de sus muestras retardadas y de la secuencia de entrada $x(n)$.

con lo que

$$y(n) = w(n) - 1.6w(n-1) + 0.977w(n-2). \quad (3.278)$$

Si se usa el anterior diagrama de bloques se llega al sistema completo mostrado en la Fig. 3.16.

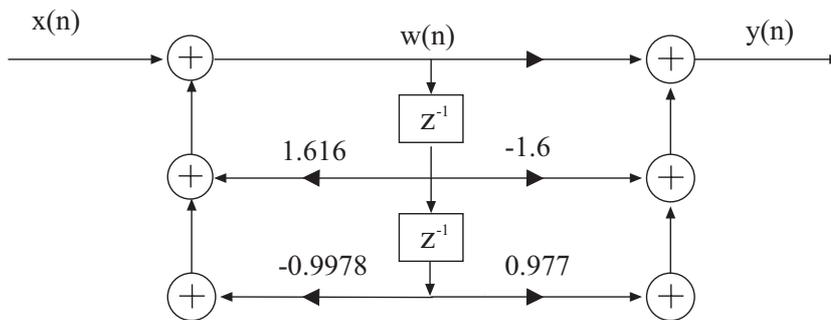


Figura 3.16: Implementación del sistema deseado total. Ahora la salida $y(n)$ final toma las muestras del primer subsistema $w(n)$ y sus muestras retardadas.

Utilizando MATLAB, se comprueba que la respuesta en frecuencia de $H(z)$ es la que se pide tal y como se muestra en la Fig. 3.17. ★ ★

21. Determine la señal discreta que da lugar a la siguiente Transformada Z

$$H(z) = \text{sen}(z^{-1})$$

Resolución:

Si se toma $f(x) = \text{sen}(x)$ y se desarrolla en serie de potencias:

$$f'(0) = 0$$

$$f'(x) = \cos(x) \rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\text{sen}(x) \rightarrow f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -\cos(x) \rightarrow f'''(0) = -1$$

$$f^{(4)}(x) = \text{sen}(x) \rightarrow f^{(4)}(0) = 0$$

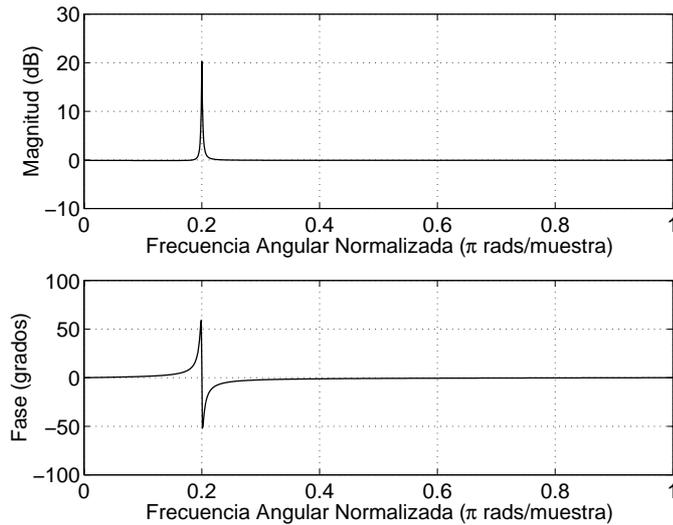


Figura 3.17: Respuesta en frecuencia del sistema planteado en el ejercicio 20 en magnitud y fase.

con lo que se puede concluir que los términos pares son nulos y los impares dan +1 y -1 alternativamente. Por tanto

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}. \quad (3.279)$$

Tomando $x = z^{-1}$, se llega a

$$\text{sen}(z^{-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{-(2n+1)}. \quad (3.280)$$

Igualando esta expresión a la Transformada Z de una secuencia $h(n)$

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n}, \quad (3.281)$$

se llega a la conclusión:

$$h(n) = \begin{cases} h(2n) = 0, & \forall n \\ h(2n+1) = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} & n > 0 \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases} \quad (3.282)$$

22. Se tiene un sistema causal cuya Transformada Z de su respuesta impulsional presenta los polos y ceros de la Fig. 3.18. Determine la respuesta impulsional de dicho sistema así como un esbozo de su respuesta en frecuencia.

Resolución:

Del diagrama de polos y ceros se puede ver que se tienen como ceros $z = 1$, $z = -1$ y como polos $z = 0.9$ y $z = -0.9$. Estos polos y ceros conducen a la siguiente Transformada Z:

$$H(z) = \frac{z^2 - 1}{z^2 - 0.81} = \frac{1 - z^{-2}}{1 - 0.81z^{-2}}. \quad (3.283)$$

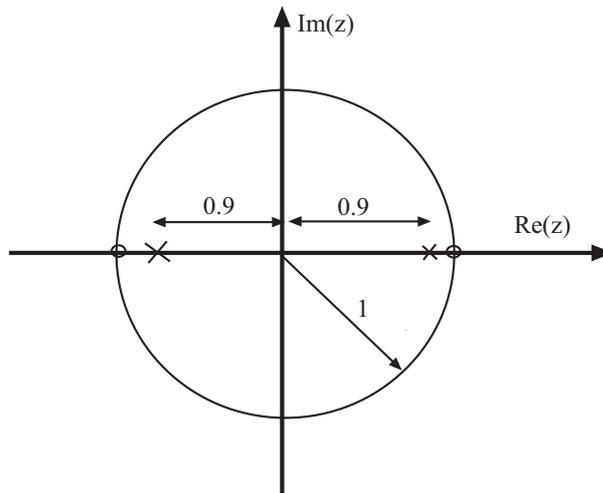


Figura 3.18: Diagrama de polos y ceros del sistema del ejercicio 22.

Si se descompone en fracciones simples, se tiene

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{z^2 - 1}{z(z^2 - 0'81)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z - 0'9} + \frac{C}{z + 0'9}. \quad (3.284)$$

Si se determinan los coeficientes A, B, C

$$A = \left. \frac{z^2 - 1}{z^2 - 0'81} \right|_{z=0} \implies A = 1'23 \quad (3.285)$$

$$B = \left. \frac{z^2 - 1}{z(z + 0'9)} \right|_{z=0'9} \implies B = -0'117 \quad (3.286)$$

$$C = \left. \frac{z^2 - 1}{z(z - 0'9)} \right|_{z=-0'9} \implies C = -0'117 \quad (3.287)$$

de donde

$$H(z) = 1'23 - \frac{0'117z}{z - 0'9} - \frac{0'117z}{z + 0'9} = 1'23 - \frac{0'117}{1 - 0'9z^{-1}} - \frac{0'117}{1 + 0'9z^{-1}}. \quad (3.288)$$

Aplicando que

$$H(z) = \frac{A}{1 - az^{-1}} \xleftrightarrow{z} h(n) = Aa^n u(n) \quad (3.289)$$

se llega a

$$h(n) = 1'23\delta(n) - 0'117(0'9)^n [1 + (-1)^n] u(n) \quad (3.290)$$

En cuanto a su respuesta en frecuencia se tienen dos ceros en las frecuencias $w = 0$ y $w = \pi$. Esto supone que dichas frecuencias se eliminarán. Además los polos y ceros están muy próximos por lo que el valor de la respuesta en frecuencia será muy cercana a uno en el resto de frecuencias; al hacer el balance de distancias, los polos compensarán la influencia de los ceros. La Fig. 3.19 representa la respuesta en frecuencia del sistema y se adapta a lo comentado. ★

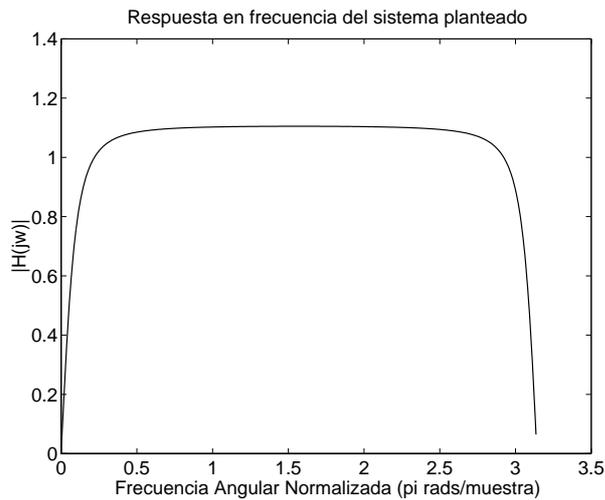


Figura 3.19: Respuesta en frecuencia del sistema planteado en el ejercicio 22.

23. Dado el sistema definido por

$$y(n) = x(n) - x(n-1] + 0'81y(n-2),$$

determine la respuesta impulsional de dicho sistema. ¿Cuál es la salida del sistema si la entrada es $x(n) = (-1)^n u(n)$?

Resolución:

Se puede aplicar la propiedad del retardo a la ecuación en diferencias llegando a

$$Y(z) = X(z) - z^{-1}X(z) + 0'81z^{-2}Y(z) \quad (3.291)$$

con lo que, aplicando la propiedad del retardo temporal se tiene,

$$H(z) \equiv \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - z^{-1}}{1 - 0'81z^{-2}} = \frac{z^2 - z}{z^2 - 0'81}. \quad (3.292)$$

Si ahora se descompone

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{z-1}{z^2-0'81} = \frac{A}{z+0'9} + \frac{B}{z-0'9} \quad (3.293)$$

y se calcula A y B :

$$A = 1'05, \quad B = -0'05. \quad (3.294)$$

Se puede escribir:

$$H(z) = \frac{1'05}{1+0'9z^{-1}} - \frac{0'05}{1-0'9z^{-1}}, \quad (3.295)$$

y, aplicando que

$$H(z) = \frac{A}{1-az^{-1}} \xleftrightarrow{z} h(n) = Aa^n u(n), \quad (3.296)$$

se llega a

$$h(n) = (0'9)^n [1'05(-1)^n - 0'05] u(n). \quad (3.297)$$

Para la segunda parte se seguirá un procedimiento análogo; $Y(z) = H(z) \cdot X(z)$. Aplicando la definición de Transformada Z sobre $x(n)$ se obtiene:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n u(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{-n} = \frac{1}{1+z^{-1}}. \quad (3.298)$$

De acuerdo a $Y(z) = H(z)X(z)$ se puede escribir

$$Y(z) = \frac{1-z^{-1}}{(1-0'81z^{-2})(1+z^{-1})} = \frac{z^3-z^2}{(z^2-0'81)(z+1)}. \quad (3.299)$$

Si ahora se descompone

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z^2-z}{(z^2-0'81)(z+1)} = \frac{A}{z-0'9} + \frac{B}{z+0'9} + \frac{C}{z+1}, \quad (3.300)$$

y se calculan los coeficientes de la forma habitual;

$$A = -0'0263, \quad B = -9'5, \quad C = 10'526. \quad (3.301)$$

podemos escribir, operando de la misma forma que en el primer caso,

$$Y(z) = -\frac{0'0263}{1-0'9z^{-1}} - \frac{9'5}{1+0'9z^{-1}} + \frac{10'526}{1+z^{-1}} \quad (3.302)$$

de donde se obtiene, mediante las tablas de TZI,

$$y(n) = [-0'0263(0'9)^n - 9'5(0'9)^n(-1)^n + 10'52(-1)^n]u(n). \quad (3.303)$$

Se puede comprobar la validez del resultado observando el término estacionario donde la entrada es una senoide de frecuencia π ,

$$x(n) = (-1)^n u(n) = \cos(\pi n) u(n), \quad (3.304)$$

donde, usando la respuesta en frecuencia para determinar dicho término estacionario, se obtiene

$$H(e^{jw}) = \left. \frac{e^{j2w} - e^{jw}}{e^{j2w} - 0'81} \right|_{w=\pi} = 10'52. \quad (3.305)$$

Como $X(e^{jw}) = 1$ (fasor de la entrada), se puede escribir:

$$Y(e^{jw}) = \frac{e^{j2\pi} - e^{j\pi}}{e^{j2\pi} - 0'81} = 2/0'19 = 10'52. \quad (3.306)$$

Se tiene entonces que para n grandes (régimen estacionario), la salida del sistema es

$$y(n) = 10'52 \cos(\pi n) \simeq 10'52(-1)^n. \quad (3.307)$$

que es el mismo resultado obtenido anteriormente.



24. Dado el sistema definido por la función de transferencia

$$H(z) = \frac{1 - z^{-D}}{1 - az^{-D}}$$

determine

- Los polos y ceros del sistema.
- Esboce la respuesta en frecuencia del sistema (magnitud).
- Dada la entrada definida por

$$x(n) = \begin{cases} 1, & n \text{ par} \\ 0, & n \text{ impar} \end{cases}$$

con $n \geq 0$, determine la salida en estado estacionario del sistema ante dicha entrada.

- Determine el valor mínimo de D si se quiere usar este sistema para eliminar la interferencia del ruido de red (50Hz.) en un problema de electrocardiografía ($F_m = 250\text{Hz.}$).

Resolución:

- Polos y ceros del sistema.* A partir de la definición del sistema

$$H(z) = \frac{1 - z^{-D}}{1 - az^{-D}}, \quad (3.308)$$

tenemos que los ceros del sistema son:

$$z^D = e^{j2\pi k} \equiv 1 \implies z_c = e^{j\frac{2\pi k}{D}}, \quad k = 0, \dots, D-1 \quad (3.309)$$

y los polos son

$$z^D = ae^{j2\pi k} \equiv 1 \implies z_p = (a)^{1/D} e^{j\frac{2\pi k}{D}}, \quad k = 0, \dots, D-1 \quad (3.310)$$

- Respuesta en frecuencia.* Por simetría, y dado que

$$|H(e^{jw})| = \frac{\prod d_z}{\prod d_p}, \quad (3.311)$$

donde d_z representa las distancias a los ceros y d_p las distancias a los polos, se tendrá que el valor máximo se consigue para $w = \pi/D$:

$$H(e^{jw}) = \frac{1 - e^{-jwD}}{1 - ae^{-jwD}} \Big|_{w=\pi/D} = \frac{2}{1+a}. \quad (3.312)$$

En la Fig. 3.20(a) se representa el diagrama de polos y ceros del sistema y en la Fig. 3.20(b) su respuesta en frecuencia para $a = 0.7$ y $D = 6$.

- Salida en estado estacionario.* A partir de la secuencia de entrada definida por

$$x(n) = \frac{1}{2}[1 + (-1)^n]u(n) \quad (3.313)$$

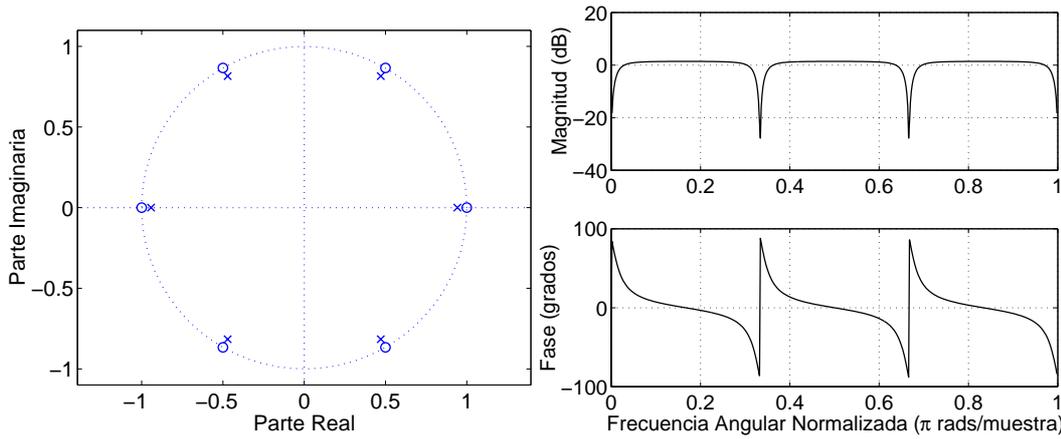


Figura 3.20: (a) Diagrama de polos y ceros del sistema. (b) Respuesta en frecuencia (magnitud y fase) del sistema para $a = 0.7$ y $D = 6$.

se puede definir su TZ sencillamente como sigue

$$X(z) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 - z^{-1}} + \frac{1}{1 + z^{-1}} \right], \quad (3.314)$$

y, por tanto,

$$Y(z) = H(z)X(z) = \sum_{k=0}^{D-1} \frac{A_k}{1 - p_k z^{-1}} + \frac{B_1}{1 - z^{-1}} + \frac{B_2}{1 + z^{-1}}, \quad (3.315)$$

siendo p_k los polos de la función de transferencia $H(z)$. En el caso de $|p_k| < 1$, la respuesta temporal de estos términos tenderá a cero conforme n tienda a infinito (da lugar a señales de la forma $(p_k)^n$). Tendremos que calcular B_1 y B_2 de la siguiente forma:

$$B_1 = \left. \frac{(1 - z^{-D})(1 - z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 - az^{-D})(1 + z^{-1})} \right|_{z^{-1}=1} = 0, \quad (3.316)$$

por lo que elimina la componente de continua. En cuanto a B_2 , tendremos

$$B_2 = \left. \frac{(1 - z^{-D})(1 + z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 - az^{-D})(1 + z^{-1})} \right|_{z^{-1}=-1} = \frac{1 - (-1)^D}{(1 + a)(2)} \quad (3.317)$$

que en el caso de D par valdrá cero y para D impar valdrá $\frac{1}{1+a}$. Esta conclusión la podríamos haber deducido a partir de la posición de polos y ceros del sistema.

- d) *Valor de D .* Hay que hacer coincidir el segundo cero ($k = 1$) con la frecuencia digital correspondiente a 50 Hz, por lo que

$$2\pi \frac{50}{250} = \frac{2\pi}{D} \implies D = 5. \quad (3.318)$$

La forma más general sería

$$2\pi \frac{50}{250} = \frac{2\pi k}{D} \implies \frac{1}{5} = \frac{k}{D}, \quad (3.319)$$

que para $k = 1$ se obtiene $D = 5$.



25. Se quiere diseñar un sistema para electrocardiografía de forma que elimine la componente de continua y los 50 Hz, alterando lo menos posible el resto de componentes frecuenciales del ECG. Implemente dicho sistema usando el menor número de retardos.

Resolución:

El sistema a diseñar debe tener ceros para las frecuencias que se quieren eliminar, donde los ángulos correspondientes a dichos ceros vienen definidos por

$$\phi_1 = 2\pi \frac{f_a}{F_m}, \quad (3.320)$$

que se corresponden con

$$\phi_{f=0} = 2\pi \cdot 0 = 0, \quad \phi_{f=50 \text{ Hz.}} = 2\pi \frac{50}{250} = \frac{2\pi}{5}. \quad (3.321)$$

Como los ceros deben estar en la circunferencia de radio unidad, se tendrá que

$$H(z)(z - e^{j \cdot 0})(z - e^{j2\pi/5}) = (z - 1)(z - e^{j2\pi/5}). \quad (3.322)$$

Como los coeficientes deben ser reales también debe aparecer el conjugado del cero complejo y se tiene entonces que

$$H(z) = (z - 1)(z - e^{j2\pi/5})(z - e^{-j2\pi/5}) = (z - 1)(z^2 - 2\cos(\frac{2\pi}{5})z + 1). \quad (3.323)$$

Se pretende que no se modifiquen el resto de componentes frecuenciales por lo que habrá que colocar *polos* cercanos a los ceros encargados de eliminar las frecuencias $f = 0$ y $f = 50\text{Hz}$. Ahora la función de transferencia será entonces:

$$H(z) = \frac{(z - 1)(z^2 - 2\cos(\frac{2\pi}{5})z + 1)}{(z - r)(z - re^{j2\pi/5})(z - re^{-j2\pi/5})}, \quad (3.324)$$

siendo r un valor muy cercano a la unidad. Si se considera $r = 0.95$, la función de transferencia queda, finalmente:

$$H(z) = \frac{z^3 - 2'618z^2 + 2'618z - 1}{z^3 - 2'487z^2 + 2'363z - 0'857} = \frac{1 - 2'618z^{-1} + 2'618z^{-2} - z^{-3}}{1 - 2'487z^{-1} + 2'363z^{-2} - 0'857z^{-3}} \quad (3.325)$$

La Fig. 3.21 muestra el diagrama de polos y ceros de esta función de transferencia.

Para implementar esta estructura con el menor número de retardos dividimos $H(z)$ en dos funciones $H_1(z)$ y $H_2(z)$ de la forma $H(z) = H_1(z)H_2(z)$, con

$$H_1(z) = \frac{1}{1 - 2'487z^{-1} + 2'363z^{-2} - 0'857z^{-3}} \quad (3.326)$$

$$H_2(z) = 1 - 2'618z^{-1} + 2'618z^{-2} - z^{-3}. \quad (3.327)$$

Planteando ecuaciones en diferencias se tiene para H_1 :

$$w(n) = x(n) + 2'487w(n - 1) - 2'363w(n - 2) + 0'857w(n - 3) \quad (3.328)$$

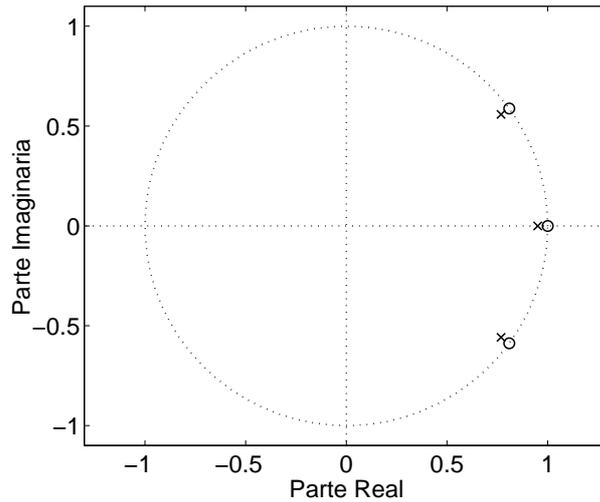


Figura 3.21: Diagrama de polos y ceros de la función de transferencia $H(z)$.

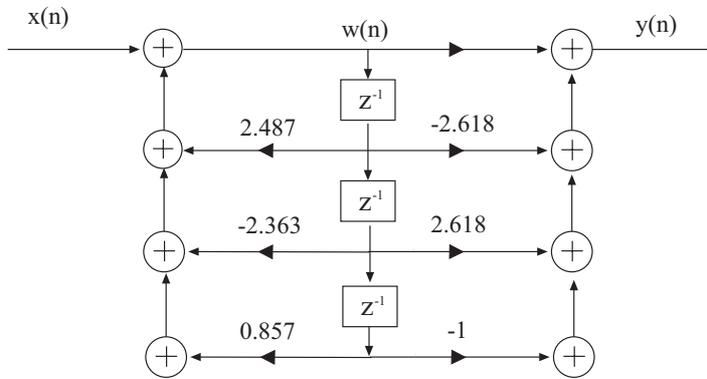


Figura 3.22: Implementación del sistema a partir de la ecuación en diferencias.

y para H_2 :

$$y(n) = w(n) - 2'618w(n - 1) + 2'618w(n - 2) - w(n - 3). \quad (3.329)$$

Este sistema de ecuaciones en diferencias se puede implementar tal y como se recoge en la Fig. 3.22.

26. Un sistema L.I.T. causal tiene una salida $y(n) = (1/3)^n u(n)$ ante una entrada $x(n) = (1/2)^n u(n) - (1/4)(1/2)^{n-1} u(n)$. Determine su función de transferencia, el diagrama de polos y ceros e indique de qué filtro se trata.

Resolución:

Si calculamos la transformada Z en la salida y la entrada obtenemos

$$Y(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}, \text{ROC} : |z| > \frac{1}{3} \quad (3.330)$$

$$X(z) = \frac{1/2}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \text{ROC} : |z| > \frac{1}{2} \quad (3.331)$$

por tanto, la función de transferencia del sistema es

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 2 \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}, \text{ROC} : |z| > \frac{1}{3} \quad (3.332)$$

El sistema tiene un cero en $z = 1/2$ y un polo en $z = 1/3$. El diagrama de polos y ceros se muestra en la Fig. 3.23(a).

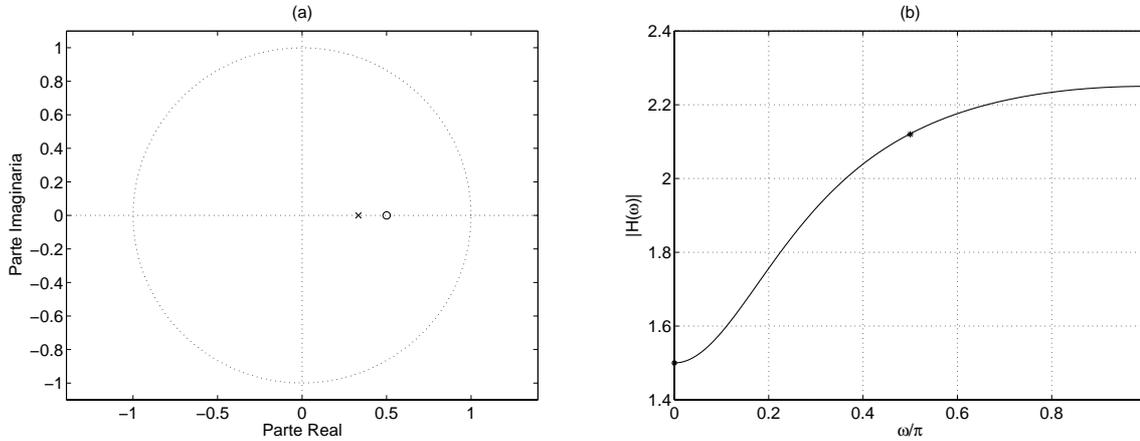


Figura 3.23: (a) Diagrama de polos y ceros del sistema del ejercicio 26. (b) Respuesta en frecuencia (módulo) del filtro.

Si tenemos en cuenta la interpretación geométrica de la respuesta en frecuencia, a partir del diagrama de polos y ceros

$$|H(w)| = 2 \frac{\prod_k |\text{distancia a ceros}|}{\prod_k |\text{distancia a polos}|} \quad (3.333)$$

Para $w = 0$, la distancia al cero es $|1 - 1/2|$ y la distancia al polo es $|1 - 1/3|$ luego

$$\left| H(w) \right|_{w=0} = 2 \frac{|1 - 1/2|}{|1 - 1/3|} = 3/2. \quad (3.334)$$

Para $w = \pi/2$, aplicando el Teorema de Pitágoras, la distancia al cero y al polo es la hipotenusa de un triángulo rectángulo, por lo que:

$$\left| H(w) \right|_{w=\pi/2} = 2 \frac{\sqrt{1 + (1/2)^2}}{\sqrt{1 + (1/3)^2}} = 2\sqrt{12} \quad (3.335)$$

Para $w = \pi$,

$$\left| H(w) \right|_{w=\pi} = 2 \frac{\sqrt{1 + 1/2}}{\sqrt{1 + 1/3}} = 2\sqrt{25} \quad (3.336)$$

La respuesta en módulo se representa en la Fig. 3.23(b) donde se observa que el sistema tiene un comportamiento pasa-alta.

27. Un sistema de segundo orden estable tiene una respuesta impulsional dada por $h(n) = A_1 p_1^n u(n) + A_2 p_2^n u(n)$. Si la entrada al sistema es una secuencia exponencial compleja del tipo $x(n) = A e^{j w_d n}$, determine la función de transferencia del sistema y la salida ante esta entrada $y(n)$. Obtenga la salida en régimen estacionario para el caso particular $p_1 = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} j$, $p_2 = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} j$, $A_1 = j$, $A_2 = -j$, $w_d = \frac{\pi}{2}$.

Resolución:

La función de transferencia es sencillamente la Transformada Z de la respuesta impulsional:

$$H(z) = Z\{h(n)\} = A_1 \frac{1}{1 - p_1 z^{-1}} + A_2 \frac{1}{1 - p_2 z^{-1}}, \text{ROC} : |z| > \max(|p_1|, |p_2|) \quad (3.337)$$

por lo que

$$H(z) = \frac{A_1 + A_2 - (A_1 p_2 + A_2 p_1) z^{-1}}{1 - (p_1 + p_2) z^{-1} + p_1 p_2 z^{-2}}. \quad (3.338)$$

Al tratarse de un sistema L.I.T., $H(z)$ puede expresarse, en general, como

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}. \quad (3.339)$$

Identificando términos, $b_0 = A_1 + A_2$, $b_1 = -(A_1 p_2 + A_2 p_1)$, $a_0 = 1$, $a_1 = -(p_1 + p_2)$ y $a_2 = p_1 p_2$.

La salida en régimen estacionario ante una señal exponencial compleja será una señal de la misma frecuencia que habrá modificado su amplitud y fase, siempre que el sistema sea estable, esto es

$$y(n) = |H(w)|_{w=w_d} A e^{j w_d n + \Phi(w)|_{w=w_d}}. \quad (3.340)$$

El sistema es estable ya que $|p_1| < 1$ y $|p_2| < 1$ y podemos calcular $H(w)$ como $H(z)|_{z=e^{jw}}$. Sustituyendo para $w = w_d$, se obtiene:

$$H(w) \Big|_{w=w_d} = \frac{(A_1 + A_2) - (A_1 p_2 + A_2 p_1) e^{-j w_d}}{1 - (p_1 + p_2) e^{-j w_d} + (p_1 p_2) e^{-2j w_d}}. \quad (3.341)$$

Sólo tenemos que calcular el módulo y fase de la expresión anterior. Si particularizamos para $A_1 = j$, $A_2 = -j$, $p_1 = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} j$, $p_2 = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} j$, $w_d = \pi/2$, tenemos

$$H(w) \Big|_{w=\pi/2} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} j}{\frac{13}{6} + \frac{1}{2} j} = 0'3885 + j0'6312 \quad (3.342)$$

$$\text{Módulo : } H(w) \Big|_{w=\pi/2} = 0'7412 \quad (3.343)$$

$$\text{Fase : } \Phi(w) \Big|_{w=\pi/2} = 1'019 \text{ rad} \quad (3.344)$$

luego

$$y(n) = A \cdot 0'7412 \cdot e^{j(\frac{\pi}{2}n + 1'019)}. \quad (3.345)$$

3.3. Problemas propuestos

1. Dado un sistema discreto con la siguiente función de transferencia

$$H(z) = \frac{z^2 - 0'99z^2 - 0'01}{z^4 - 0'81z^2}$$

- a) Determinar la ecuación en diferencias que define el sistema.
 b) Estudia su estabilidad.
 c) Obtén el módulo de la respuesta en frecuencia del sistema de forma aproximada.

2. Implemente un sistema causal, utilizando el menor número de retardos, cuya respuesta impulsional sea la función $\text{sen}(w_0n)$.

3. Determine, usando la transformada Z, la convolución de las siguientes secuencias:

- a) $h(n) = \{-1, 0, 1, 2, 0, 0, 0, 0, \dots\}$ con $h(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, -2, 1, 0, 0, 0, \dots\}$
 b) $h(n) = b^n u(n)$ con $x(n) = u(n)$

4. Determine la transformada Z y la R.O.C. de las siguientes señales:

- a) $y(n) = (\frac{1}{2})^n \text{sen}(\frac{2\pi n}{3})u(n)$
 b) $y(n) = (-1)^n [u(n+3) - u(n-3)]$
 c) $y(n) = (\frac{1}{2})^{|n|}$, $-\infty < n < \infty$

5. Se tiene un sistema L.I.T. causal que, cuando la entrada es el escalón unitario, proporciona la siguiente salida $y(n) = [1 - (-1)^n](\frac{1}{2})^n u(n)$. Determine la respuesta impulsional de dicho sistema. ¿Qué entrada se debe tener para obtener a la salida un escalón unitario?

6. Se tiene un sistema cuya respuesta impulsional es $h(n) = r^n \cos(w_0n)u(n)$. Implementar dicho sistema con el menor número de retardos. ¿Qué se puede comentar sobre la estabilidad de dicho sistema y la posición de los polos de su Transformada Z?

7. Se tiene un sistema que, cuando la entrada es el escalón unitario se obtiene como salida $(0'9)^n u(n)$. Determinar la respuesta impulsional del sistema aplicando transformadas Z inversas.

8. Determinar la secuencia temporal (causales en los dos primeros casos), que da lugar a las siguientes transformadas Z:

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 - 0'3z^{-1} + 0'02z^{-2}}$$

$$H(z) = e^{z^{-1}} + e^z$$

9. Determinar la secuencia temporal que da lugar a la siguiente transformada Z

$$H(z) = \frac{1 - 0'2z^{-1}}{1 - 0'75z^{-1} + 0'125z^{-2}}, R.O.C. : 0'25 < |z| < 0'5$$

10. Dado el sistema L.I.T. definido por

$$H(z) = \frac{2}{1 + 0'5z^{-1}},$$

y sabiendo que la entrada a dicho sistema es el escalón unitario, determinar la salida $y(n)$ aplicando:

- Convolución de $x(n)$ y $h(n)$.
- Transformadas Z inversas.

11. Dado el sistema continuo definido por su función de transferencia en el dominio de Laplace como

$$T(s) = \frac{1}{(s + a)^2 + b^2}.$$

Se desea determinar la función de transferencia discreta correspondiente a dicho sistema al aplicar la técnica de invarianza al impulso.

12. Dada la secuencia causal $x(n)$ con transformada Z, $X(z)$, determine la transformada de las siguientes secuencias:

$$y(n) = \begin{cases} x(n), & n \text{ par} \\ 0, & n \text{ impar} \end{cases}$$

e

$$y(n) = \sum_{k=0}^n x(k).$$

3.4. Prácticas con MATLAB

En este apartado se resuelven varios ejemplos con MATLAB sobre la caracterización de sistemas en el dominio Z. Veremos cómo la definición de un sistema mediante la Transformada Z permite su análisis de forma sencilla y eficiente, de forma que se puede investigar su estabilidad, respuesta frecuencial, etc. Para ello se consideran distintos sistemas como el filtro de media móvil, un derivador y un oscilador. La última práctica se centra en el diseño de efectos de audio tales como el eco y la reverberación.

3.4.1. Media móvil, derivador y oscilador

1. *Moving Average.*

En este punto se implementará un sistema digital que realice un “*moving-average*”, cuyo orden de promediado se pasa al programa. Se comprueba el funcionamiento del sistema usando como entrada la suma de sinusoides de frecuencias 50, 100 y 125 Hz (frecuencia de muestreo igual a 500 Hz), usando como ordenes del promediado 4, 10 y 20. Se explicará el resultado en función de la posición de polos y ceros de la transformada Z del sistema.

Un “moving average” de orden N tiene la siguiente ecuación en diferencias:

$$y(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(n-k). \quad (3.346)$$

La respuesta impulsional de este sistema vendría determinada por:

$$h(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \delta(n-k) \quad (3.347)$$

Sustituyendo queda $h(n) = 1/N$, ($0 \leq n \leq N-1$). Dos formas de implementar este sistema serían:

- a) **Convolución.** Utilizando la instrucción `conv` que implementa la convolución entre dos señales. La salida de un sistema viene determinada por la siguiente expresión $y(n) = h(n) * x(n)$. Es decir, la salida es la convolución entre la entrada y la respuesta impulsional del sistema.
- b) **Filtrado.** Utilizando la instrucción `filter`. Para usar esta instrucción se necesita calcular la transformada Z a partir de la ecuación en diferencias del sistema:

$$Y(z) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(z)z^{-k} \implies H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{N} \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}}. \quad (3.348)$$

Para determinar los polos y ceros del sistema se multiplica y divide por z^N la expresión de $H(z)$ obteniéndose,

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{N} \frac{z^N - 1}{z^{N-1}(z - 1)}. \quad (3.349)$$

Los polos del sistema están claros: $z = 1$ y $z = 0$ (orden $N-1$). En cuanto a los ceros:

$$z^N = 1 \implies z^N = e^{j2\pi k} \implies z = e^{j2\pi k/N}. \quad (3.350)$$

De este modo, tenemos que los ceros se distribuyen de forma uniforme alrededor de la circunferencia de radio unidad (el índice k varía de 0 a $N - 1$). El primer cero, $k = 0$, se compensa con el polo $z = 1$.

El programa en MATLAB que implementa el “*moving average*”, usando la instrucción `filter` sería:

```
function y=moving(x,N)
num=(1/N)*ones(1,N);
y=filter(num,1,x);
```

La señal a filtrar tiene tres componentes frecuenciales de 50, 100 y 125 Hz (frecuencia de muestreo $F_m = 500$ Hz). Para el caso de $N = 4$ los resultados se muestran en la Fig. 3.24 En este caso, los ceros estarían situados en la circunferencia de radio unidad con las siguientes fases:

$$\frac{2\pi k}{4} \Rightarrow \frac{\pi k}{2} \quad (3.351)$$

Estos ceros se corresponden con las siguientes frecuencias digitales:

$$\frac{2\pi f_a}{F_m} \Rightarrow \frac{\pi k}{2} \quad (3.352)$$

donde f_a es la frecuencia analógica y F_m es la frecuencia de muestreo. Sustituyendo valores se llega a $f_a = 125k$. Es decir, el sistema elimina las frecuencias múltiplo de 125 Hz., por lo que desaparecerán, en nuestro caso, la componente de 125 Hz.

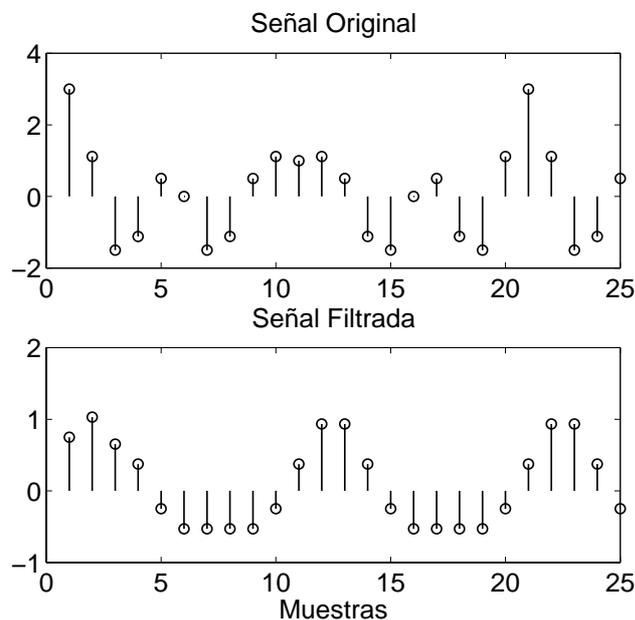


Figura 3.24: Resultados obtenidos con $N = 4$.

Si $N = 10$ se obtiene $f_a = 50k$ y, en consecuencia, el sistema elimina las frecuencias 50, 100, 150, 200 y 250 Hz. Los resultados obtenidos se muestran en la Fig. 3.25

Para $N = 20$ se eliminan las frecuencias $f_a = 25k$. En este caso todas las componentes son eliminadas, como se observa en la Fig. 3.26. El tramo original, hasta la muestra 20, se corresponde con el transitorio del sistema.

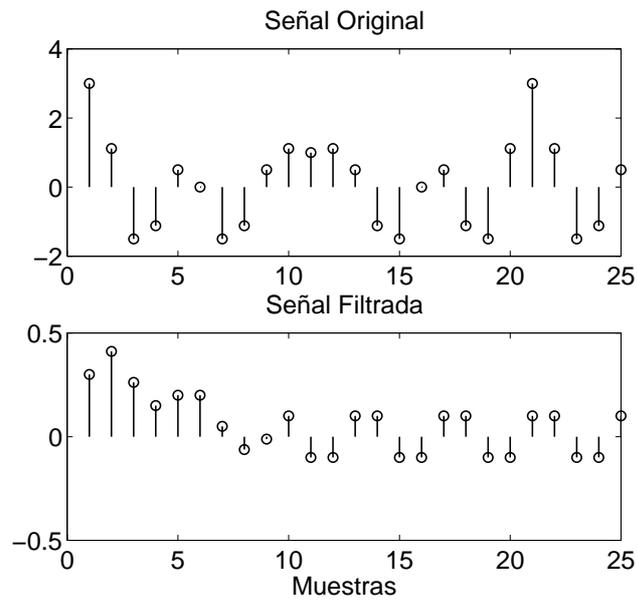


Figura 3.25: Resultados obtenidos con $N = 10$.

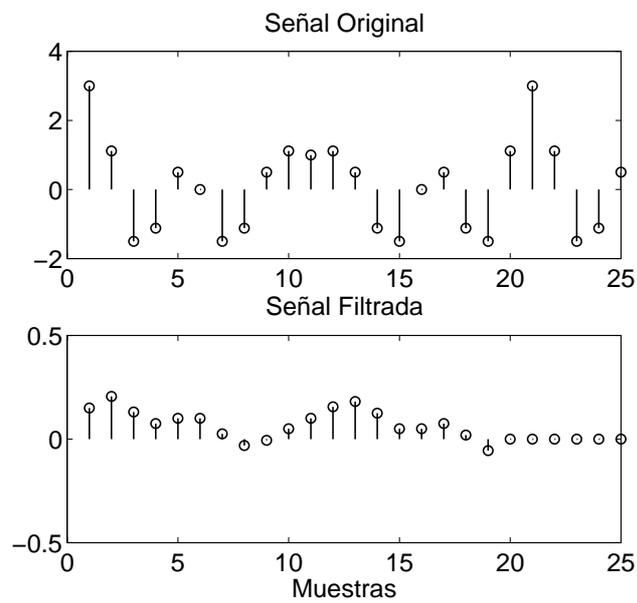


Figura 3.26: Resultados obtenidos con $N = 20$.

2. *Derivada segunda.*

Un sistema que determina la derivada segunda de una señal es el definido por la siguiente ecuación en diferencias:

$$y(n) = x(n) - 2x(n-1) + x(n-2). \quad (3.353)$$

Se pide determinar la salida del sistema cuando la entrada es $x(n) = \cos(\pi n)$. Se calculará dicha salida con diferentes métodos, pasando la señal por el sistema implementado mediante ecuación en diferencias, usando la respuesta en frecuencia del sistema y, finalmente, usando la instrucción `filter`. El programa en MATLAB que implementa el sistema en forma de ecuación en diferencias es:

```
n=0:99;
x=cos(pi*n);
y=zeros(1,100);
y(1)=x(1);
y(2)=x(2)-2*x(1);

for s=3:100,
    y(s)=x(s)-2*x(s-1)+x(s-2);
end
```

En este programa se consideran condiciones iniciales nulas y, por ello, se han inicializado los dos primeros valores de $y(n)$ a $y(1) = x(1)$ e $y(2) = x(2) - 2x(1)$. En la Fig. 3.27 se muestra la señal original y la salida.

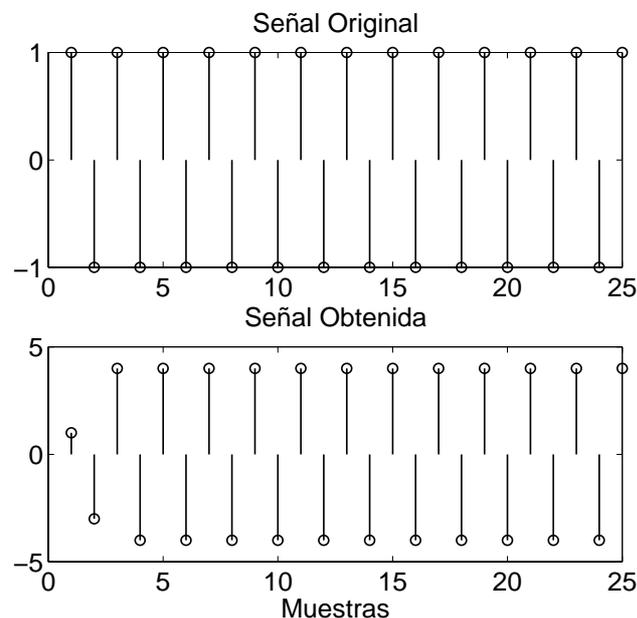


Figura 3.27: Salida obtenida usando la ecuación en diferencias de la ecuación (3.353).

La señal se ha amplificado por cuatro y no existe desfase entre la entrada y la salida. Si se quisiera utilizar la instrucción `filter` se necesita la transformada Z de la ecuación en diferencias por lo que, aplicando la propiedad del retardo temporal en la ecuación (3.353), se obtiene

$$Y(z) = [1 - 2z^{-1} + z^{-2}]X(z) \implies H(z) = 1 - 2z^{-1} + z^{-2} \quad (3.354)$$

El programa en MATLAB será entonces,

```
n=0:99;
x=cos(pi*n);
y=filter([1 -2 1],1,x);
```

Para usar la respuesta en frecuencia del sistema se hace el cambio $z=e^{jw}$ en la Transformada Z obtenida, de forma que obtenemos

$$H(z) = 1 - 2z^{-1} + z^{-2} \implies H(e^{jw}) = 1 - 2e^{-jw} + e^{-2jw} \quad (3.355)$$

que para $w = \pi$

$$H(e^{j\pi}) = 1 - 2e^{-j\pi} + e^{-j2\pi} = 4 \quad (3.356)$$

El valor de la respuesta en frecuencia vale 4 (módulo 4 y fase cero al ser un número real), por lo que la salida está en fase con la entrada y presenta una amplitud cuatro veces mayor que es el resultado obtenido.

3. Oscilador.

Se quiere implementar un oscilador muy sencillo cuya respuesta impulsional viene dada por:

$$h(n) = \{-1, 1, -1, 1, -1, \dots\} \quad (3.357)$$

Se pide:

- Ecuación en diferencias del sistema. Comprobar su funcionamiento usando MATLAB.
- Respuesta en frecuencia del sistema mediante la posición de polos y ceros de la Transformada Z del sistema.
- Comprobar el punto b) mediante la instrucción `freqz`.

Cuando se tiene un sistema que presenta una respuesta impulsional periódica el procedimiento consiste en primero identificar la periodicidad y después completar con impulsos unitarios las muestras iniciales. La señal es periódica con periodo fundamental $N = 2$ luego se cumplirá, para $n > 2$, $h(n) = h(n - 2)$. Esta ley de recurrencia no se puede aplicar para n igual a 0 y 1 (hay que recordar que es un sistema causal). Estos casos quedan completados con impulsos unitarios de la siguiente forma:

$$h(n) = h(n - 2) - \delta(n) + \delta(n - 1). \quad (3.358)$$

En esta ecuación se puede cambiar la respuesta impulsional por la salida y la función delta por la entrada siempre que $x(n)$ sea la entrada impulsional, obteniéndose la ecuación en diferencias del sistema:

$$y(n) = y(n - 2) - x(n) + x(n - 1) \quad (3.359)$$

Para comprobar que este es el sistema buscado, se toma como entrada la función impulso. El programa en MATLAB que realiza esta operación es el siguiente:

```

% Implementación de un oscilador
x=[1 zeros(1,99)];
y(1)=-1;
y(2)=1;
for s=3:100,
    y(s)=y(s-2);
end

```

Al ejecutar este programa y representar la respuesta impulsional se obtiene la Fig. 3.28. Observando el programa se puede comprobar que el funcionamiento de la ecuación en diferencias es muy sencillo. Se obtiene el mismo resultado si se utiliza la instrucción `filter`. Para ello hay que calcular la TZ de la ecuación (3.359). Si se aplica la propiedad del retardo temporal en dicha ecuación, se obtiene

$$Y(z) = z^{-2}Y(z) - X(z) + z^{-1}X(z) \implies H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{-1 + z^{-1}}{1 - z^{-2}} \quad (3.360)$$

La transformada Z puede simplificar la expresión del oscilador; en efecto la ecuación (3.360) se puede simplificar obteniéndose:

$$H(z) = \frac{-1}{1 + z^{-1}}. \quad (3.361)$$

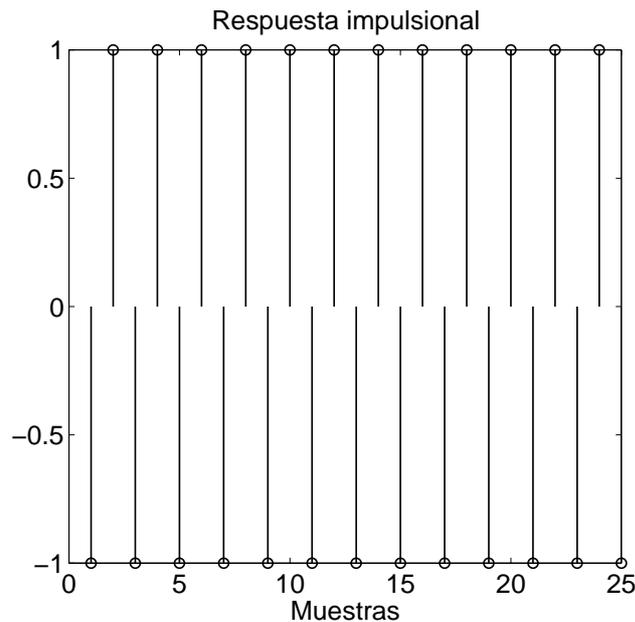


Figura 3.28: Respuesta impulsional $h(n)$ del sistema planteado mostrada en la ecuación (3.361). Esto se puede realizar fácilmente empleando el comando de MATLAB `impz`.

Según esto, el programa que determina la respuesta impulsional buscada sería:

```

% Implementación de un oscilador
x=[1 zeros(1,99)];
y=filter(-1,[1 1],x);

```

Otra opción consiste en usar la instrucción `impz` que también hace uso de la transformada Z; el siguiente programa usaría dicha instrucción:

```
% Implementación de un oscilador
y=impz(-1,[1 1]);
```

Si se quieren usar los polos/ceros del sistema para esbozar la respuesta en frecuencia el primer paso será determinar dichos elementos. Multiplicando el numerador y denominador de la ecuación (3.361) por z , se obtiene:

$$H(z) = \frac{-z}{1+z}. \quad (3.362)$$

El sistema presenta un polo en $z = -1$ y un cero en $z = 0$. Según esta disposición de polos y ceros, nuestro sistema debe presentar una ganancia infinita en la mitad de la frecuencia de muestreo que se corresponde en el plano complejo con el valor -1 (distancia al polo igual a cero).

Se puede comprobar que se tiene esta respuesta en frecuencia mediante el comando `freqz`. Esta instrucción se usa de la misma forma que la instrucción `filter`:

```
freqz(-1, [1 1])
```

Al ejecutar esta instrucción se obtiene la Fig. 3.29.

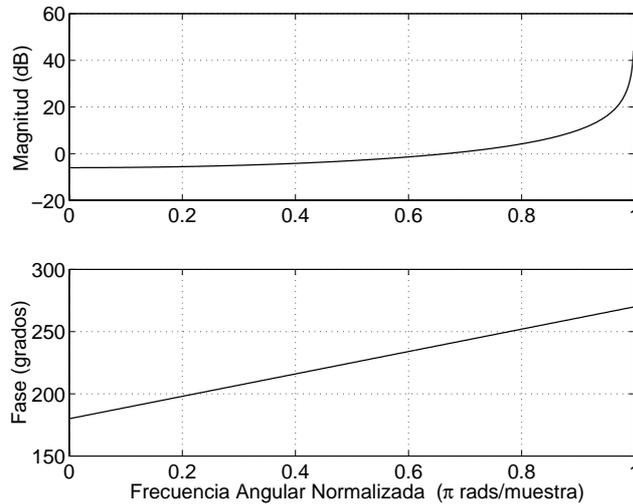


Figura 3.29: Respuesta en frecuencia del sistema planteado en la ecuación (3.362).

3.4.2. Efectos de Audio

En este bloque se utilizará la Transformada Z para la implementación de efectos típicos de audio. En principio se verá una imagen intuitiva de ellos para, posteriormente, implementarlos. Un sistema digital que implementa un eco tiene el diagrama de bloques de la Fig. 3.30.

A partir del diagrama de bloques, la ecuación en diferencias que define el sistema viene determinada por la siguiente expresión:

$$y(n) = x(n) + ky(n - D). \quad (3.363)$$

El eco representado de esta forma es un eco infinito. Si se aplica la propiedad del retardo temporal de la transformada Z en la ecuación (3.363) se llega a

$$Y(z) = X(z) + kY(z)z^{-D} \implies H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - kz^{-D}}. \quad (3.364)$$

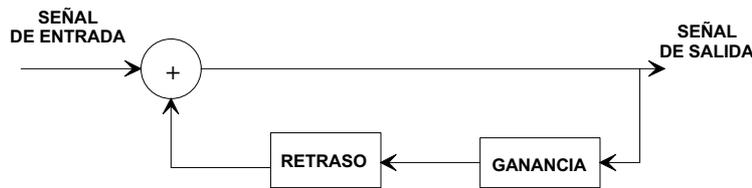


Figura 3.30: Esquema de la implementación de un eco infinito por el cual la señal de salida es una suma retardada y pesada por una ganancia de las muestras de salida anteriores.

A la hora de implementar este eco en MATLAB hay que introducir tres parámetros: la señal a filtrar, el retardo D y el factor de ganancia k . El siguiente programa implementa este tipo de eco:

```
% Implementación de un eco infinito
x=input('Señal a filtrar ');
k=input('Factor de ganancia (entre 0 y 1) ');
D=input('Retardo del eco (positivo y entero) ');
y=filter(1,[1 zeros(1,D-1) -k],x);
```

Otro tipo de eco es el *finito*, de una forma intuitiva, un eco es el resultado de sumar a una determinada señal una versión retardada de sí misma y atenuada es decir:

$$y(n) = x(n) + kx(n - D) + k^2x(n - 2D) + \dots \quad (3.365)$$

Si se aplican transformadas Z a la ecuación en diferencias (considerando sólo dos términos en el eco) se llega a:

$$Y(z) = X(z)(1 + kz^{-D} + k^2z^{-2D}) \implies H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 1 + kz^{-D} + k^2z^{-2D} \quad (3.366)$$

El programa de MATLAB que implementa este eco vendría definido por:

```
% Implementación del eco finito
x=input('Señal a filtrar ');
k=input('Factor de ganancia (entre 0 y 1) ');
D=input('Retardo del eco (positivo y entero) ');
y=filter([1 zeros(1,D-1) k zeros(1,D-1) k^2],1,x);
```

El segundo efecto a estudiar es la reverberación. Este efecto aparece en los equipos de sonido cuando se reproducen diferentes ambientes (estadio, iglesia, etc) y está formado por la combinación de diferentes señales procedentes de diferentes ecos (los producidos al rebotar la señal de sonido en las paredes del recinto). El diagrama de bloques de este efecto de sonido se muestra en la Fig. 3.31.

Normalmente las cantidades especificadas son el tiempo del eco inicial (*“Interaural Time Difference”*, ITD) y el *tiempo de reverberación* que es el tiempo en que un sonido reduce su amplitud en una milésima parte. La elección de los retrasos y ganancias en el diagrama de bloques anterior se hace según las siguientes relaciones:

$$D_1 = ITD, \quad D_2 = 2 * D_1, \quad D_3 = 50ms. \quad G_1 = G_3, \quad G_3 = 10^{-3 \cdot D_3 / t_r} \quad (3.367)$$

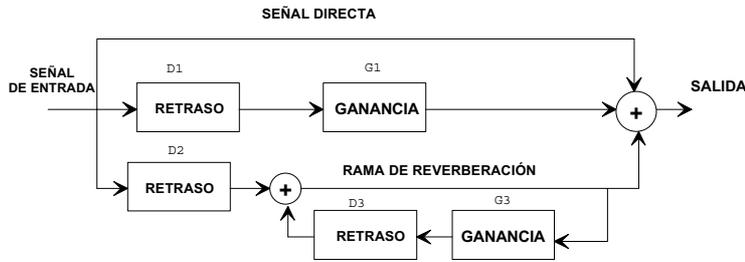


Figura 3.31: Esquema de una reverberación digital. En este caso la salida del sistema es una suma de la señal de entrada directa, de su retrasada ponderada muestra a muestra y de una rama de reverberación o eco infinito.

donde t_r es el *tiempo de reverberación*. Por ejemplo para el Symphony Hall (Boston), el ITD es de 15 ms y el tiempo de reverberación es de 1'8 segundos si está ocupado por lo que se obtiene:

$$D_1 = 15ms, G_1 = 0'855, D_2 = 30ms, D_3 = 50ms, G_3 = 0'8913 \quad (3.368)$$

En la Tabla 3.4.2 se muestran los valores de ITD y tiempo de reverberación necesarios para la simulación de otros ambientes.

Tabla 3.2: Valores de ITD y tiempo de reverberación necesarios para la simulación de distintos ambientes.

LUGAR	ITD (ms)	Tiempo de reverberación (s)
Estudio	20	0'4
Auditorio	40	0'75
Sala de concierto	25	1'8
Iglesia	50	3'25

Para implementar el diagrama de bloques anterior (Fig. 3.31) en MATLAB se necesita determinar la transformada Z correspondiente a dicho diagrama. De la figura se pueden plantear dos ecuaciones en diferencias:

$$y(n) = x(n) + G_1x(n - D_1) + w(n) \quad (3.369)$$

$$w(n) = x(n - D_2) + G_3w(n - D_3) \quad (3.370)$$

Aplicando transformadas Z a la ecuación (3.370) se llega a la siguiente igualdad:

$$W(z) = \frac{X(z)z^{-D_2}}{1 - G_3z^{-D_3}}. \quad (3.371)$$

Si se aplican ahora transformadas Z a la ecuación (3.369) se llega a:

$$Y(z) = X(z)(1 + G_1z^{-D_1}) + W(z) \quad (3.372)$$

y se sustituye la expresión en la Ec. (3.371) se obtiene

$$Y(z) = X(z)(1 + G_1z^{-D_1}) + \frac{X(z)z^{-D_2}}{1 - G_3z^{-D_3}}. \quad (3.373)$$

Por tanto, la función de transferencia del sistema queda como:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = (1 + G_1 z^{-D_1}) + \frac{z^{-D_2}}{1 - G_3 z^{-D_3}} = \frac{(1 + G_1 z^{-D_1})(1 - G_3 z^{-D_3}) + z^{-D_2}}{1 - G_3 z^{-D_3}} \quad (3.374)$$

La implementación de esta función de transferencia en MATLAB sería:

```
% Reverberación.
% Variables necesarias
itd=input('Eco inicial (segundos) ');
trev=input('Tiempo de reverberación (segundos) ');
fm=input('Frecuencia de muestreo (en Hz) ');

% Cálculo de los retardos y las ganancias
D1=fix(itd*fm);
D2=2*D1;
D3=fix(0'05*fm);
G3=10^(-3*D3/trev);
G1=G3;

% Cálculo de la función de transferencia

% Numerador
Y1=[1 zeros(1,D1-1) G1];
Y2=[1 zeros(1,D3-1) -G3];

% Convolución
Y=conv(Y1,Y2);

% Añadimos el término situado en z^(-D2)
Y(D2+1)=Y(D2+1)+1;

% Calculamos la salida
Salida=filter(Y,Y2,x);
```


Capítulo 4

Realización de sistemas en tiempo discreto

4.1. Introducción teórica

Una representación estructural utilizando bloques es el primer paso en la realización software o hardware de un sistema digital. La representación de la estructura proporciona relaciones entre algunas variables internas con la entrada y la salida que, a su vez, es la clave de la implementación.

Existe una gran diversidad de realizaciones. Estas pueden poseer diferente complejidad computacional o requisitos de memoria. Sin embargo, una de las características más importantes es la robustez frente a los efectos de la representación de la información con una longitud de palabra finita. Como veremos, son particularmente importantes las estructuras en cascada, paralelo y celosía, por la robustez que muestran en las implementaciones con palabras de longitud finita. Sin embargo, también se describirán otros sistemas como el de muestreo en frecuencia, formas directas, etc.

La segunda mitad de este capítulo realiza una descripción de espacios de estados de sistemas causales lineales e invariantes temporales. La *descripción interna* o de *espacio de estados* del sistema implica, además de una relación entre las señales de entrada y salida, un conjunto adicional de variables denominadas variables de estado.

La siguiente introducción presenta nociones básicas a la vez que estructura los ejercicios del capítulo. Aquellos ejercicios que necesitan de un mayor conocimiento teórico lo incorporarán, surgiendo éste como una necesidad dentro del contexto planteado por el ejercicio.

4.1.1. Estructuras directas, traspuestas y celosía

- El algoritmo de computación de un sistema lineal e invariante temporal, LTI, puede representarse mediante un diagrama de bloques usando los bloques básicos de construcción, que son: el retardo, el multiplicador, el sumador, y el nodo de bifurcación, como se muestra en la Fig. 4.1.
- Un sistema digital puede realizarse según diferentes estructuras, representadas por diagramas de bloques diferentes. Esto implica formas diferentes de realizar el algoritmo. Es decir, la programación de dos realizaciones diferentes del mismo sistema da lugar a programas distintos. Ambas realizaciones proporcionarían los mismos resultados si la longitud de palabra fuera infinita, pero por cuestiones de robustez frente

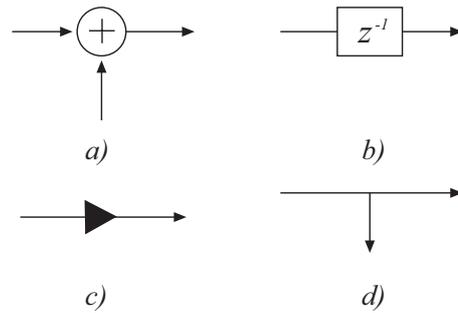


Figura 4.1: Componentes básicos de un diagrama de bloques. a) Nodo sumador, b) Retardo, c) Multiplicador y d) Bifurcación.

a longitud de palabra finita, cantidad de memoria o complejidad computacional, se selecciona finalmente una de ellas, ejercicios 1 y 2 de las prácticas de MATLAB.

- Las estructuras cuyos coeficientes son los coeficientes de la función de transferencia, son llamadas estructuras de forma directa, ejercicio 1. La Fig. 4.2 presenta la forma directa I. Se describirá, ejercicio 13, su equivalencia con la forma directa regular II, y la obtención de la forma directa traspuesta II, ejercicio 14.

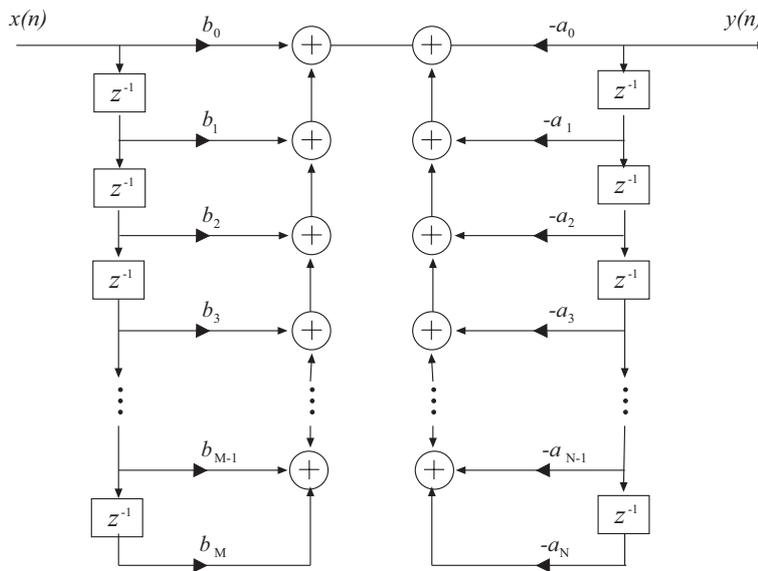


Figura 4.2: Realización en forma directa I.

- Dos estructuras son equivalentes cuando, a pesar de poseer un diagrama de bloques diferente, representan la misma función de transferencia. Una forma simple de generar una estructura equivalente de una realización dada es obtener su traspuesta, ejercicios 14, 15 y 16, de la siguiente forma:
 - Inversión de todos los caminos,
 - Reemplazo de las bifurcaciones por sumadores y viceversa, y
 - Intercambio de entrada y salida.
- Una de las estructuras alternativas para filtros FIR son las realizaciones de muestreo en frecuencia, ejercicios 2 y 3, fáciles de implementar a partir de los valores del mues-

treo de la respuesta en frecuencia deseada, dado que éstos son los parámetros que caracterizan el sistema.

- Una de las estructuras más utilizadas por sus ventajas en cuanto a la precisión, es la realización del sistema como una cascada de secciones de primer y segundo orden, ejercicios 17 y 18. Con este fin, la función de transferencia se factoriza como

$$H(z) = \prod_{k=1}^K H_k(z), \quad (4.1)$$

donde K es la parte entera de $(N + 1)/2$ y $H_k(z)$ tiene la forma general

$$H_k(z) = \frac{b_{k0} + b_{k1}z^{-1} + b_{k2}z^{-2}}{1 + a_{k1}z^{-1} + a_{k2}z^{-2}}, \quad (4.2)$$

donde cada una de las etapas puede realizarse de forma directa.

- Una función de transferencia puede ser realizada en forma paralela haciendo uso de la expansión en fracciones simples de dicha función. Una expansión de la función de transferencia, donde cada una de las subsecciones está formada por sistemas de segundo orden, evita operaciones con complejos, ejercicios 19 a 21. Así, $H(z)$ se expresa en la forma

$$H(z) = \varphi_0 + \sum_{k=1}^K \left(\frac{\varphi_{0k} + \varphi_{1k}z^{-1}}{1 + \alpha_{1k}z^{-1} + \alpha_{2k}z^{-2}} \right) \quad (4.3)$$

donde para una sección de primer orden $\varphi_{1k} = \alpha_{2k} = 0$.

- La realización en celosía es ampliamente utilizada en procesamiento digital de la voz y en la implementación de filtrado adaptativo por sus características de estabilidad. La realización de sistemas FIR (todo-ceros) en celosía se hace a partir de la etapa básica representada en la Fig. 4.3.

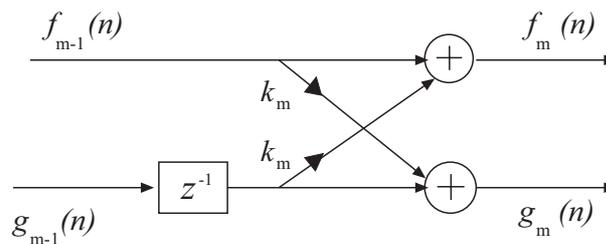


Figura 4.3: M -ésima etapa de la realización de un sistema FIR en celosía.

Para esta etapa tenemos que las salidas son,

$$f_m(n) = f_{m-1}(n) + K_m g_{m-1}(n - 1), \quad (4.4)$$

$$g_m(n) = K_m f_{m-1}(n) + g_{m-1}(n - 1). \quad (4.5)$$

Los ejercicios 4 y 5 ilustran la obtención de los coeficientes de la celosía a partir de los coeficientes de la forma directa de un filtro FIR. Los ejercicios 6 y 14, inversamente, muestran la obtención de los coeficientes de la forma directa a partir de los de celosía.

Cualquier sistema todo-polos $H(z) = 1/A(z)$ puede realizarse en celosía simplemente, a partir de la realización en celosía del sistema FIR $H'(z) = A(z)$, sin más que intercambiar la entrada con la salida, ejercicio 8. Así, el cálculo de los coeficientes de celosía, ejercicios 8 y 9, es similar al de los sistemas todo-ceros, pero utilizando una etapa básica como la de la Fig. 4.4.

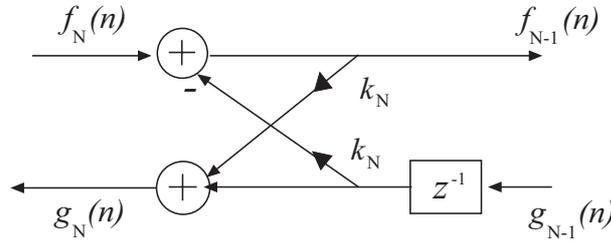


Figura 4.4: Etapa básica de la celosía para un sistema IIR todo-polos.

En general, un sistema IIR utilizará la misma etapa básica que un sistema IIR todo-polos, Fig. 4.4, pero en este caso la salida resulta de una combinación lineal de las secuencias $g_i(n)$, $\forall i \in [0, N]$. Los ejercicios 10 a 14 muestran la obtención de los coeficientes directos y de celosía para sistemas IIR.

4.1.2. Implementación mediante espacio de estados

La descripción de espacio de estados indica no sólo la relación entre las señales de entrada y salida de un sistema, también relaciona la salida con un conjunto adicional de variables denominadas variables de estado. Las ecuaciones matemáticas que describen el espacio de estados se dividen en dos partes:

1. Un conjunto de ecuaciones matemáticas que relacionan las variables de estado con la señal de entrada.
2. Un segundo conjunto de ecuaciones matemáticas que relacionan las variables de estado y la entrada actual con la señal de salida.

La utilización de variables de estado proporciona información sobre todas las señales internas del sistema. Como resultado, esta caracterización proporciona una descripción más detallada de éste.

Aunque nuestro estudio se reduce a sistemas LTI, la utilización de técnicas de espacio de estados proporciona un método potente y directo para tratar con sistemas de múltiples entradas y múltiples salidas, sistemas no lineales e incluso variante temporales. Aunque no hemos considerado tales sistemas en nuestro estudio, es en estos donde puede apreciarse la verdadera potencia y belleza de la formulación de espacio de estados.

Veamos algunos conceptos importantes:

- Se define el estado de un sistema en el instante n_0 como la cantidad de información que se debe proporcionar en el instante n_0 , que junto con la señal de entrada $x(n)$ para $n \geq n_0$, determinan unívocamente la salida del sistema para todo $n \geq n_0$.

Así, el sistema se divide en dos partes, una que contiene memoria y otra que no. La salida actual se convierte entonces en una función del valor actual de la entrada y del

estado actual, ejercicio 22. De esta forma, para determinar la salida en un momento dado sólo necesitamos el valor actual del estado y de la entrada. Como el valor actual de la entrada está disponible, sólo se necesita un mecanismo para actualizar el estado del sistema recursivamente.

- El siguiente conjunto de ecuaciones proporciona la descripción de espacio de estados del sistema.

$$\mathbf{v}(n+1) = \mathbf{F}\mathbf{v}(n) + \mathbf{q}x(n) \quad (4.6)$$

$$y(n) = \mathbf{g}^T \mathbf{v}(n) + dx(n) \quad (4.7)$$

donde los elementos \mathbf{F} , \mathbf{q} , \mathbf{g} y d son constantes para cada sistema (no cambian como una función con índice temporal) determinando un sistema L.I.T., ejercicios 22 a 25. Por otra parte, $\mathbf{v}(n)$ es el vector de las variables de estado.

- Un sistema discreto, caracterizado por una función de transferencia, puede ser realizado de diferentes formas, cada una de ellas con una descripción de espacios de estados diferente. Sin embargo, diagramas de bloques en apariencia diferentes no tienen porque corresponder siempre a descripciones de espacios de estados diferentes, sino que pueden corresponder a una misma descripción de espacio de estados, ejercicio 26.
- Para resolver las ecuaciones de espacio de estados, se plantea una solución recursiva que hace uso del hecho de que las ecuaciones de espacio de estados son un conjunto de ecuaciones en diferencias de primer orden. En general, podemos determinar la salida como

$$y(n) = \mathbf{g}^T \mathbf{F}^{n-n_0} \mathbf{v}(n_0) + \sum_{k=n_0}^{n-1} \mathbf{g}^T \mathbf{F}^{n-1-k} \mathbf{q}x(k) + dx(n). \quad (4.8)$$

De aquí podemos obtener dos casos especiales. Primero la respuesta del sistema cuando la entrada es cero

$$y_{zi}(n) = \mathbf{g}^T \mathbf{F}^{n-n_0} \mathbf{v}(n_0), \quad (4.9)$$

por otro lado, la respuesta del sistema cuando el estado es cero

$$y_{zs}(n) = \sum_{k=n_0}^{n-1} \mathbf{g}^T \mathbf{F}^{n-1-k} \mathbf{q}x(k) + dx(n). \quad (4.10)$$

La salida genérica será la suma de ambas

$$y(n) = y_{zi}(n) + y_{zs}(n). \quad (4.11)$$

En particular, $y_{zi}(n)$ es un método excelente para el cálculo analítico de la respuesta impulsional del sistema, ejercicios 34, 35 y 38.

- Para cualesquiera dos descripciones de espacio de estados correspondientes al mismo sistema discreto, existirá una transformación de las matrices

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{P}\mathbf{F}\mathbf{P}^{-1}, \hat{\mathbf{q}} = \mathbf{P}\mathbf{q}, \hat{\mathbf{g}}^T = \mathbf{g}^T \mathbf{P}^{-1}, \quad (4.12)$$

donde \mathbf{P} es la matriz de transformación. Como el número de elecciones de \mathbf{P} es infinito, podemos decir que hay también un número infinito de descripciones de espacio de estados y, por tanto, de estructuras para realizar el mismo sistema, ejercicio 33.

- Una realización de espacio de estados mínima es la que posee como dimensión del vector de estados \mathbf{v} , o número de variables de estado, la menor de todas las realizaciones posibles.
- Existen descripciones de espacios de estados que se corresponden con las estructuras más comunes:
 - Las realizaciones de espacios de estados de tipos I y II corresponden a las formas directas II, ejercicio 22, y la forma directa II traspuesta, ejercicio 23, respectivamente.
 - Como se podrá observar, una de las descripciones de espacios de estados más importantes es la forma normal, correspondiente a la realización en paralelo del sistema, ejercicios 27 a 29.

La formulación de variables de estado nos permite representar el sistema mediante un conjunto (habitualmente acoplado) de ecuaciones en diferencias de primer orden. El desacoplo de las ecuaciones se puede lograr mediante una transformación lineal que se obtiene por medio del cálculo de los autovalores y autovectores del sistema.

La importancia de esta realización es que corresponde a la descripción de espacio de estados que diagonaliza el sistema.
 - Una forma adicional muy empleada es la realización de *espacio de estados de forma acoplada* de un sistema de segundo orden. Esta estructura se usa como bloque constructivo en la implementación de realizaciones en forma de cascada para sistemas IIR, ejercicios 30 a 32.
- La estructura traspuesta también puede obtenerse de forma sencilla mediante técnicas de espacios de estados, ejercicios 36 a 37.
- Se estudiará el método de cálculo de la función de transferencia a partir de la descripción de espacio de estados, ejercicios 39 y 41. Finalmente, los ejercicios 40 a 42 incluyen ejercicios completos de espacios de estados.

4.2. Problemas resueltos

★★

1. Determine la realización en forma directa del filtro de fase lineal cuya respuesta impulsional es

$$h(n) = \{1, 2, 4, 3, 4, 2, 1\}$$

Resolución:

En un sistema FIR, la respuesta impulsional define la ecuación en diferencias dado que la respuesta impulsional de un FIR es idéntica a los coeficientes $\{b_k\}$ de la realización en forma directa, por lo que

$$y(n) = x(n) + 2x(n-1) + 4x(n-2) + 3x(n-3) + 4x(n-4) + 2x(n-5) + x(n-6) \quad (4.13)$$

La respuesta del filtro FIR mediante una estructura directa es inmediata y se representa en la Fig. 4.5.

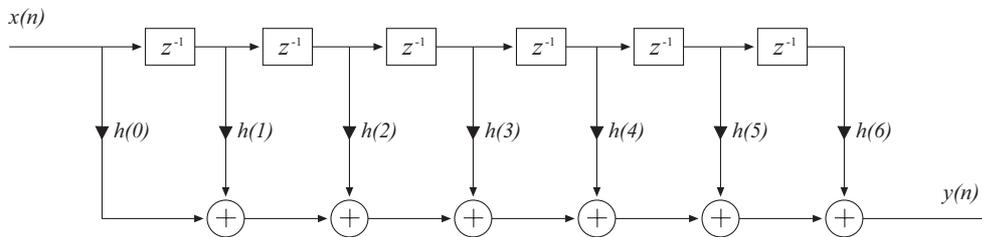


Figura 4.5: Realización en forma directa del sistema FIR del ejercicio 1.

Podemos observar que esta realización requiere $M - 1$ posiciones de memoria para almacenar las M entradas anteriores y tiene complejidad equivalente a M multiplicaciones y $M - 1$ sumas para calcular cada salida.

Sin embargo, dado que el caso que nos ocupa es un sistema FIR de fase lineal, es decir, la respuesta impulsional satisface las condiciones de simetría o antisimetría, como se verá en el Capítulo de Filtros Digitales,

$$h(n) = \pm h(M - 1 - n) \quad (4.14)$$

donde el orden del sistema que nos ocupa es $M = 7$.

Podemos observar que el sistema es simétrico en cuanto que

$$\begin{aligned} h(0) &= h(6), \\ h(1) &= h(5), \\ h(2) &= h(4), \\ h(3) &= h(3). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Para estos sistemas, dado que tenemos coeficientes comunes, el número de multiplicaciones se reduce de M a $M/2$ para M par y a $(M + 1)/2$ para M impar, por lo que la estructura de la Fig. 4.6 sería la realización en forma directa que aprovecha esta simetría de $h(n)$.

★★★

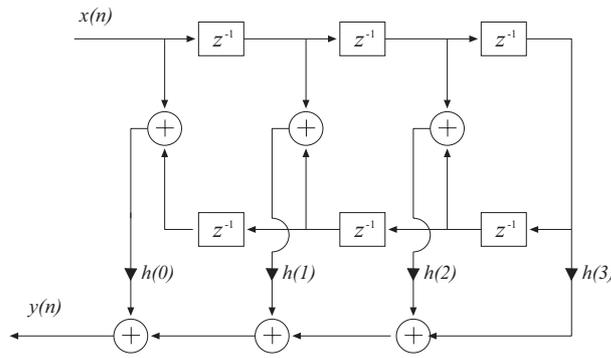


Figura 4.6: Realización en forma directa del sistema FIR de fase lineal.

2. Obtenga el diagrama de bloques para la realización de muestreo en frecuencia de un filtro FIR de fase lineal ($h(n)$ simétrico) con $M = 32$ y cuyas muestras de la respuesta en frecuencia son

$$H\left(\frac{2k\pi}{M}\right) = \begin{cases} 1, & k = 0, 1 \\ 1/2, & k = 2 \\ 0, & k = 3, \dots, 15 \end{cases}$$

Resolución:

Cuando los datos que caracterizan a un filtro FIR son valores de la respuesta en frecuencia, en vez de los coeficientes respuesta impulsional, podemos derivar inmediatamente a partir de estos la estructura de muestreo en frecuencia, mediante la cual podemos realizar el sistema e incluso, en muchos casos, podemos mejorar sensiblemente los requerimientos computacionales respecto a la forma directa.

Para ello se nos da un conjunto de muestras en frecuencia equiespaciadas. En general estas vendrán dadas por

$$w_k = \frac{2\pi k}{M}, \quad (4.16)$$

donde $k = 0, 1, \dots, \frac{M-1}{2}$ para M impar o $k = 0, 1, \dots, \frac{M}{2} - 1$ para M par.

Para obtener la respuesta en frecuencia tenemos

$$H(w) = \sum_{n=0}^{M-1} h(n)e^{-jwn}. \quad (4.17)$$

Sin embargo conocemos las muestras de la respuesta en frecuencia de nuestro sistema

$$H(k) = \sum_{n=0}^{M-1} h(n)e^{-j2\pi kn/M}, \quad (4.18)$$

que se corresponde con la DFT de M puntos de $\{h(n)\}$. El cálculo de $h(n)$ es simplemente la IDFT de $\{H(k)\}$

$$h(n) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H(k)e^{j2\pi kn/M} \quad (4.19)$$

que puede usarse para sustituir $h(n)$ en la Ec. (4.18), por lo que tenemos

$$H(z) = \sum_{n=0}^{M-1} h(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{M-1} \left[\frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H(k)e^{j2\pi kn/M} \right] z^{-n} \quad (4.20)$$

que intercambiando el orden de los sumandos en (4.20) y sumando sobre el índice n queda

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M-1} H(k) \left[\frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} (e^{j2\pi kn/M} z^{-1})^n \right], \quad (4.21)$$

con lo que

$$H(z) = \frac{1 - z^{-M}}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \frac{H(k)}{1 - e^{j2\pi kn/M} z^{-1}}. \quad (4.22)$$

Este filtro puede verse como una cascada de dos etapas, es decir, $H(z) = H_1(z)H_2(z)$. La primera de ellas es un filtro peine con función de transferencia

$$H_1(z) = \frac{1}{M}(1 - z^{-M}) \quad (4.23)$$

cuyos ceros se localizan equiespaciados en la circunferencia de radio unidad

$$z_k = e^{j2\pi k/M}, \quad k = 0, 1, \dots, M-1. \quad (4.24)$$

Por otra parte, la segunda etapa posee la función de transferencia

$$H_2(z) = \sum_{k=0}^{M-1} \frac{H(k)}{1 - e^{j2\pi kn/M} z^{-1}}. \quad (4.25)$$

que consiste en un banco de filtros de polo único en paralelo, con polos en

$$p_k = e^{j2\pi k/M}, \quad k = 0, 1, \dots, M-1. \quad (4.26)$$

Nótese que las localizaciones de los polos son idénticas a las de los ceros y ambas ocurren en $w_k = 2\pi k/M$ para $k = 0, 1, \dots, M-1$, que son las frecuencias en las que tenemos especificados la respuesta en frecuencia. Cabe remarcar que, en general, los valores $\{H(k)\}$ son valores complejos pues especifican los requerimientos de módulo y fase del sistema.

La realización de la cascada $H(z) = H_1(z)H_2(z)$ se representa en la Fig. 4.7. Nótese que el banco de filtros $H_2(z)$ no posee 32 etapas en paralelo sino solamente 5, aquellas que se corresponden a $H(0)$, $H(1)$, $H(2)$, $H(30)$ y $H(31)$, que son los únicos valores especificados que no son cero. Nótese que en la etapa correspondiente a $H(0) = 1$ el filtro no requiere multiplicaciones. De la misma forma se obtiene $H(1) = H(M-1) = 1$.

Este tipo de realización será tanto más aconsejable cuanto mayor sea la aproximación de la respuesta en frecuencia a un sistema de banda estrecha. En particular la Fig. 4.8 describe el mismo sistema realizado en forma directa considerando la simetría de la respuesta impulsional. Analizando los requerimientos de ambas realizaciones, llegamos a los resultados de la Tabla 4.1.

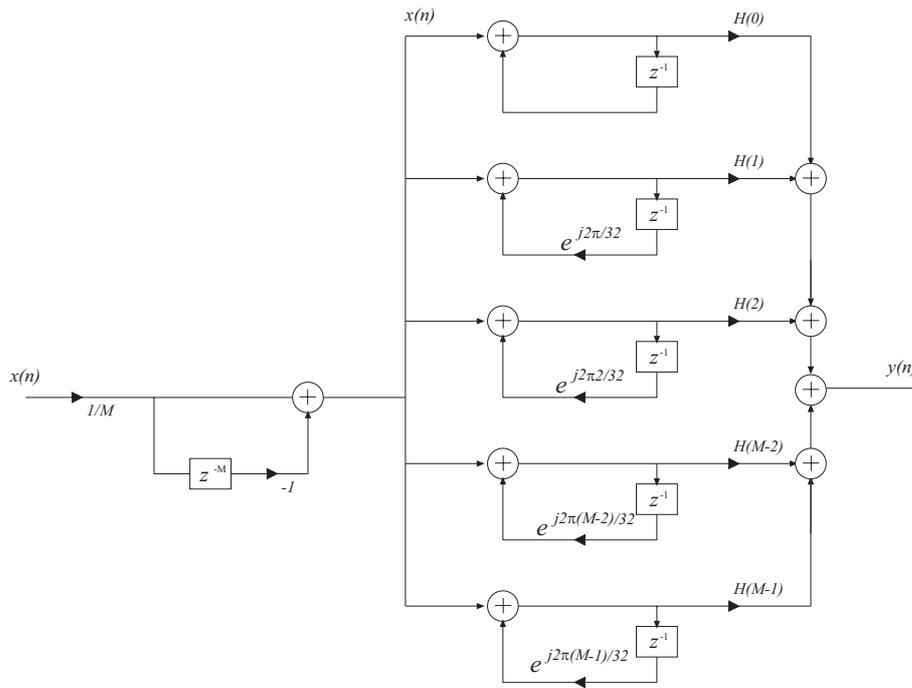


Figura 4.7: Realización de muestreo en frecuencia.

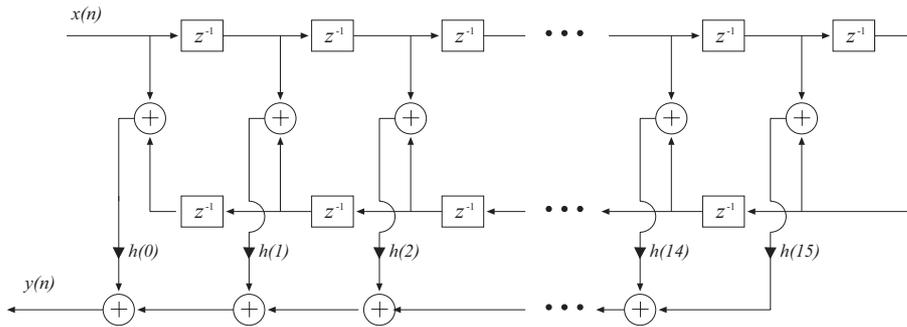


Figura 4.8: Realización en forma directa aprovechando la simetría de los coeficientes.

Sin embargo, a pesar de la simplificación, algunos coeficientes de la realización de muestreo en frecuencia son complejos y la complejidad de un producto complejo es superior a la del producto real. No obstante, la estructura de muestreo en frecuencia puede ser simplificada aún más explotando la simetría de $H(k)$, es decir

$$H(k) = H^*(M - k). \quad (4.27)$$

Como el filtro es simétrico, explotamos la simetría para transformar los productos en reales. Para ello, combinamos pares de filtros con polos complejos conjugados para formar filtros de dos polos con parámetros reales. Así, la función de transferencia $H_2(z)$ se reduce a

$$H_2(z) = \frac{H(0)}{1 - z^{-1}} + \sum_{k=1}^{(M-1)/2} \frac{A(k) + B(k)z^{-1}}{1 - 2\cos(2\pi k/M)z^{-1} + z^{-2}}, \quad M \text{ impar} \quad (4.28)$$

Tabla 4.1: Requerimientos

	Forma Directa	Forma Muestreo en frecuencia
Multiplicaciones	16	8
Sumas	31	10

y

$$H_2(z) = \frac{H(0)}{1-z^{-1}} + \frac{H(M/2)}{1+z^{-1}} + \sum_{k=1}^{(M/2)-1} \frac{A(k) + B(k)z^{-1}}{1 - 2\cos(2\pi k/M)z^{-1} + z^{-2}}, \quad M \text{ par} \quad (4.29)$$

donde

$$A(k) = H(k) + H(M - k)$$

$$B(k) = H(k)e^{-j2\pi k/M} + H(M - k)e^{j2\pi k/M}. \quad (4.30)$$

Por lo tanto, obtenemos finalmente la realización de muestreo en frecuencia de la Fig. 4.9

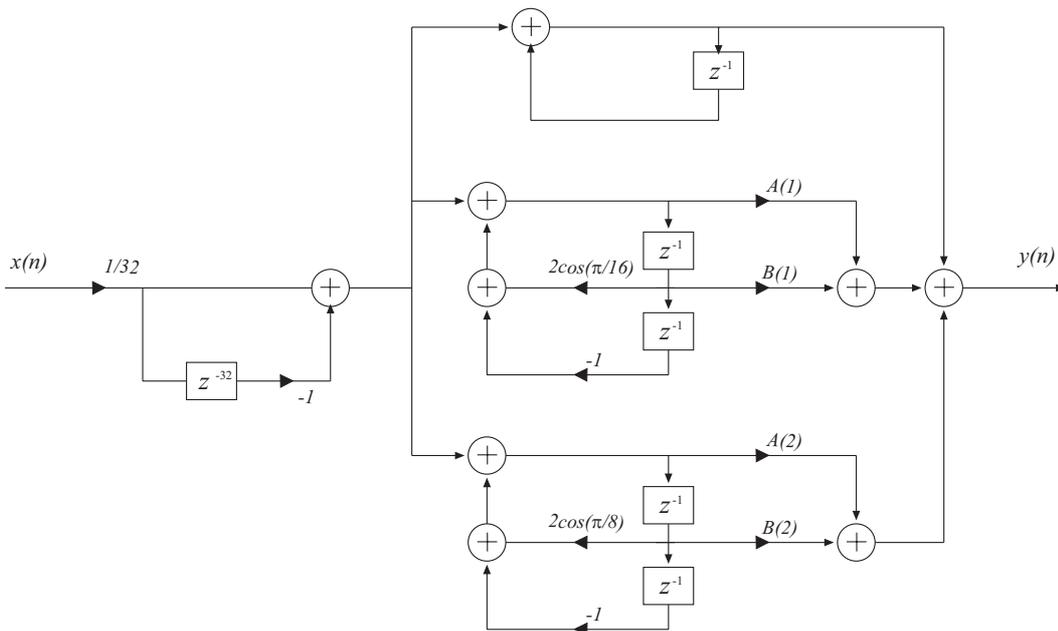


Figura 4.9: Realización de muestreo en frecuencia con coeficientes reales.

Como podemos ver, la complejidad computacional es similar a la realización anterior con productos complejos, pero ahora todos los productos son reales. Cabe remarcar que esta realización es computacionalmente más eficiente que la realización en forma directa. No obstante, esta realización sólo será tolerable con gran precisión aritmética, ya que una precisión deficiente puede sacar los polos fuera de la circunferencia de radio unidad y desestabilizar el sistema.

★★

3. Se pretende aplicar un filtrado y amplificación con ganancia 2 entre 48 y 54 kHz. La señal se muestrea a 186 kHz. Obtenga un conjunto de 31 muestras de la respuesta en frecuencia buscada y dibuje el diagrama de bloques para la realización de muestreo en frecuencia.

Resolución:

En primer lugar hemos de buscar el conjunto de 31 muestras que especifiquen la respuesta en frecuencia buscada. Para ello la Fig. 4.10 representa el intervalo de frecuencias en el que se encuentra la banda pasante requerida. Como puede verse, dado que se han de tomar 31 muestras del intervalo de 186 kHz., el intervalo $[0, f_m]$ se divide en subintervalos de 6 kHz.

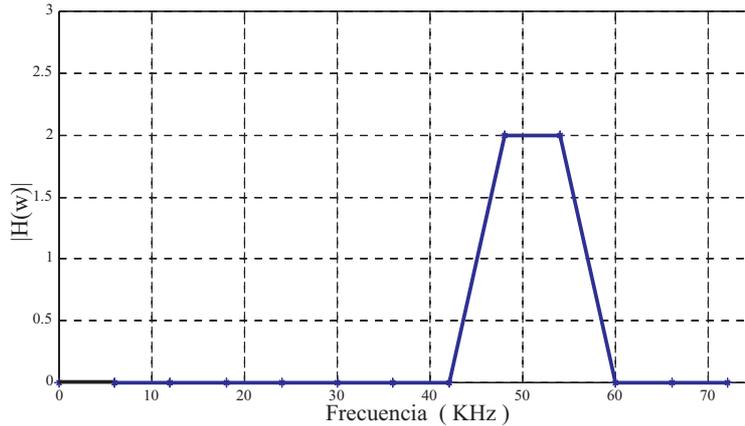


Figura 4.10: Representación del muestreo en frecuencia.

En nuestro caso, dado que se pretende un pasa-banda entre 48 y 54 kHz, tenemos que

$$H\left(\frac{2k\pi}{32}\right) = \begin{cases} 0, & k = 0, 1, \dots, 7 \\ 2, & k = 8, 9 \\ 0, & k = 10, 11, \dots, 15 \end{cases} \quad (4.31)$$

Como vemos, los valores del muestreo en frecuencia distintos de cero son las muestras 8 y 9 que corresponden a las frecuencias 48 kHz y 54 kHz, pero además, las muestras 23 y 24 dada la simetría

$$H(k) = H^*(M - k), \quad (4.32)$$

porque la respuesta en frecuencia debe ser una función real. Podemos observar que el conjunto de muestras en frecuencia es el de un sistema de banda estrecha, lo cual implica una realización eficiente computacionalmente según una estructura de muestreo en frecuencia.

Para obtener la realización en cuestión, partimos de M par y aplicamos la Ec. (4.29) cuya obtención se describió en el ejercicio anterior. Sabemos que $H(z) = H_1(z)H_2(z)$. Esta realización está formada por una cascada de un filtro peine (todo-ceros) y una realización en paralelo de filtros todo-polos donde

$$H_1(z) = \frac{1}{M}(1 - z^{-M}) \quad (4.33)$$

$$H_2(z) = \frac{H(0)}{1 - z^{-1}} + \frac{H(M/2)}{1 + z^{-1}} + \sum_{k=1}^{(M/2)-1} \frac{A(k) + B(k)z^{-1}}{1 - 2\cos(2\pi k/M)z^{-1} + z^{-2}}, \quad M \text{ par} \quad (4.34)$$

De esta forma, el diagrama de bloques de la realización de muestreo en frecuencia queda como se representa en la Fig. 4.11, donde, como vemos, desaparecen los términos que tengan coeficientes $\{H(k)\}$ de ganancia nula. Los coeficientes $\{H(k)\}$ distintos de cero (para $k=8, 9$) y sus pares $H(M - k)$ correspondientes se agrupan para formar dos secciones de segundo orden con coeficientes reales. Los coeficientes $A(8)$ y $A(9)$ se calculan mediante la ecuación (4.30). Esta realización requiere un total de siete multiplicaciones y ocho sumas.

Si estos valores se comparan frente a las 16 multiplicaciones y 31 sumas de la realización directa, aprovechando la simetría del sistema, comprobamos la mayor eficiencia computacional de la realización de muestreo en frecuencia.

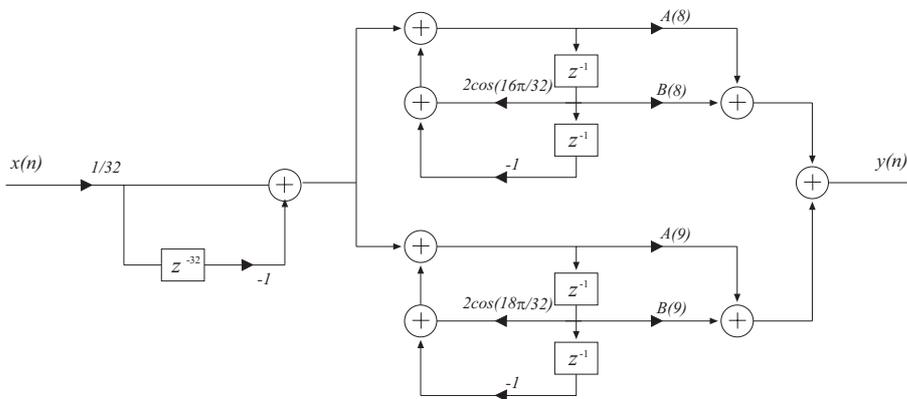


Figura 4.11: Realización de muestreo en frecuencia del filtro propuesto.



4. Obtener los coeficientes de la celosía correspondiente al filtro FIR con función de transferencia

$$A(z) = 1 + \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} + \frac{1}{4}z^{-3}$$

Resolución:

La estructura en celosía se usa ampliamente en procesamiento digital de la voz y en la realización de filtros adaptativos. Un sistema en celosía presenta una serie de etapas en cascada como la representada en la Fig. 4.12(b), donde el filtro describe el conjunto de ecuaciones siguiente

$$F_0(z) = G_0(z) = X(z) \quad (4.35)$$

$$F_m(z) = F_{m-1}(z) + K_m z^{-1} G_{m-1}(z), \quad m = 1, 2, \dots, M - 1 \quad (4.36)$$

$$G_m(z) = K_m F_{m-1}(z) + z^{-1} G_{m-1}(z), \quad m = 1, 2, \dots, M - 1 \quad (4.37)$$

donde K_m es el parámetro de celosía de la etapa m -ésima, también denominados coeficientes de reflexión por ser idénticos a los coeficientes de reflexión introducidos

en el test de estabilidad de Schür–Cohn. Las ecuaciones (4.36) y (4.37) describen el comportamiento de la etapa m -ésima, donde las entradas son $F_{m-1}(z)$ y $G_{m-1}(z)$, proporcionando las salidas $F_m(z)$ y $G_m(z)$. En conjunto, las ecuaciones (4.35) a (4.37) son un conjunto de ecuaciones recursivas que describen el filtro en celosía. Como vemos, Fig. 4.12(a), en la primera etapa, la entrada $x(n)$ está conectada a $f_0(n)$ y $g_0(n)$, y la salida $f(n)$ de la última etapa se considera la salida del filtro.

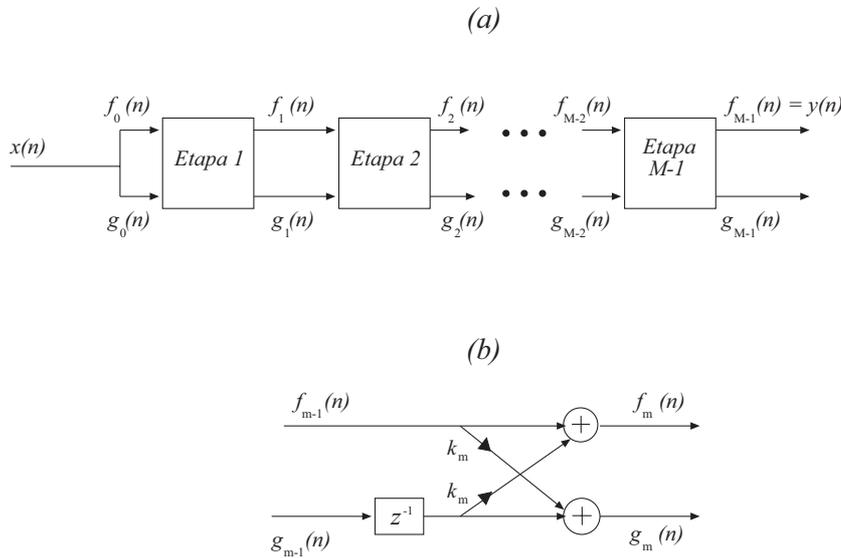


Figura 4.12: (a) Filtro en celosía de $M - 1$ etapas y (b) estructura de cada etapa.

Dado que el sistema tiene dos salidas, $F_M(z)$ y $G_M(z)$, y una única entrada, $X(z)$, podemos diferenciar dos funciones de transferencia:

$$A_M(z) = \frac{F_M(z)}{X(z)} = \frac{F_M(z)}{F_0(z)} \quad (4.38)$$

$$B(z) = \frac{G_M(z)}{X(z)} = \frac{G_M(z)}{G_0(z)} \quad (4.39)$$

por lo que dividiendo las ecuaciones (4.35) a (4.37) por $X(z)$, tenemos

$$A_0(z) = B_0(z) = 1 \quad (4.40)$$

$$A_m(z) = A_{m-1}(z) + K_m z^{-1} B_{m-1}(z), \quad m = 1, 2, \dots, M - 1 \quad (4.41)$$

$$B_m(z) = K_m A_{m-1}(z) + z^{-1} B_{m-1}(z), \quad m = 1, 2, \dots, M - 1 \quad (4.42)$$

Como partimos de los coeficientes del filtro FIR para la realización en forma directa, tenemos el polinomio $A(z)$ que es:

$$A_3(z) = 1 + \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} + \frac{1}{4}z^{-3} = \alpha_3(0) + \alpha_3(1)z^{-1} + \alpha_3(2)z^{-2} + \alpha_3(3)z^{-3} \quad (4.43)$$

Además, sabemos que los coeficientes del filtro de salida $B(z)$ son inversos a los de $A(z)$ por lo que

$$B_3(z) = \beta_3(0) + \beta_3(1)z^{-1} + \beta_3(2)z^{-2} + \beta_3(3)z^{-3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{3}{4}z^{-2} + z^{-3} \quad (4.44)$$

y por tanto

$$\begin{aligned}\beta_3(0) &= \alpha_3(3), \\ \beta_3(1) &= \alpha_3(2), \\ \beta_3(2) &= \alpha_3(1), \\ \beta_3(3) &= \alpha_3(0).\end{aligned}\tag{4.45}$$

Deseamos determinar los correspondientes parámetros del filtro de celosía $\{K_i\}$. Para ello sabemos que $K_i = \alpha_i(i)$. Dado que el grado del polinomio $A(z)$ es tres, tendremos una celosía de tres etapas, de la cual podremos obtener inmediatamente el parámetro $K_3 = \alpha_3(3) = 1/4$.

Para obtener el parámetro K_2 necesitaremos el polinomio $A_2(z)$. La relación recursiva general se determina fácilmente a partir de las ecuaciones (4.41) y (4.42), donde

$$A_m(z) = A_{m-1}(z) + K_m z^{-1} B_{m-1}(z) = A_{m-1}(z) + K_m [B_m(z) - K_m A_{m-1}(z)],\tag{4.46}$$

donde si conocemos K_m , B_m y $A(z)$ podemos resolver $A_{m-1}(z)$:

$$A_{m-1}(z) = \frac{A_m(z) - K_m B_m(z)}{1 - K_m^2}\tag{4.47}$$

la cual es precisamente la recursión descendente usada en el Test de estabilidad de Schür-Cohn.

Mediante la recursión descendente (4.47), con $m = 3$, se obtiene

$$A_2(z) = \frac{A_3(z) - K_3 B_3(z)}{1 - K_3^2} = 1 + \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2},\tag{4.48}$$

por lo que $K_2 = \alpha_2(2) = 1/3$ y $B_2(z) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}z^{-1} + z^{-2}$. Al repetir la recursión descendente, obtenemos

$$A_1(z) = \frac{A_2(z) - K_2 B_2(z)}{1 - K_2^2} = 1 + \frac{1}{2}z^{-1},\tag{4.49}$$

por lo que finalmente $K_1 = \alpha_1(1) = 1/2$ con lo que los coeficientes de la estructura celosía resultan

$$K_1 = 1/2, \quad K_2 = 1/3, \quad K_3 = 1/4.\tag{4.50}$$

La estructura en celosía del sistema FIR propuesto es la representada en la Fig. 4.13.

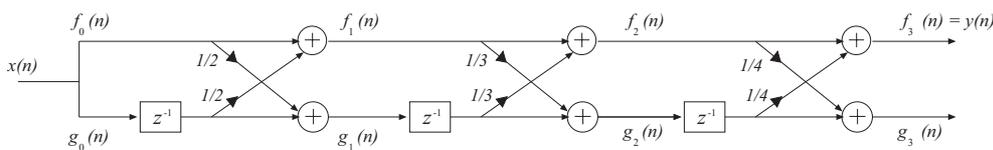


Figura 4.13: Realización en celosía del sistema FIR propuesto.



5. Obtenga los coeficientes de reflexión correspondientes al filtro FIR con función de transferencia

$$H(z) = 2 - \frac{7}{2}z^{-1} - z^{-2}$$

Resolución:

Para aplicar la recursión descendente mediante la que se obtendrán los coeficientes en celosía, también denominados coeficientes de reflexión, el coeficiente $\alpha_m(0)$ debe definirse como 1 por conveniencia matemática, luego tomaremos

$$H(z) = 2 \cdot H'(z) \quad (4.51)$$

con

$$H'(z) = 1 - \frac{7}{4}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}. \quad (4.52)$$

Así, obtendremos los coeficientes en celosía de $H'(z)$ y aplicaremos un factor de ganancia 2 a la salida de la estructura resultante.

Otra peculiaridad que debe tenerse en cuenta es que caso de que $\alpha_2(0)$ hubiera sido 1, nos hubiéramos encontrado con $K_2 = -1 = \alpha_2(2)$. Ha de tenerse presente que siempre que un parámetro de celosía es $|K_m| = 1$ es una indicación de que el polinomio $A_{m-1}(z)$ tiene una raíz en la circunferencia de radio unidad. Así, siempre que se obtiene un parámetro de celosía $|K_m| = 1$ se rompe la ecuación recursiva y no se podrá seguir la recursividad descendente. En estos caso, dicha raíz puede ser factorizada y extraída de $A_{m-1}(z)$, continuando el proceso iterativo para el sistema de orden reducido.

Siguiendo con el caso que nos ocupa, dado $H'(z)$ tenemos que los polinomios $A_2(z)$ y $B_2(z)$ se definen como

$$A_2(z) = H'(z) = 1 - \frac{7}{4}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2} \quad (4.53)$$

$$B_2(z) = -\frac{1}{2} - \frac{7}{4}z^{-1} + z^{-2}. \quad (4.54)$$

Por tanto, $K_2 = \alpha_2(2) = -1/2$. Siguiendo con la ecuación recursiva descendente tenemos que

$$A_1(z) = \frac{A_2(z) - K_2 B_2(z)}{1 - K_2^2} = \frac{(1 - \frac{7}{4}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}) + \frac{1}{2}(-\frac{1}{2} - \frac{7}{4}z^{-1} + z^{-2})}{1 - \frac{1}{4}} = 1 - \frac{7}{2}z^{-1} \quad (4.55)$$

y por lo tanto $K_1 = -7/2$. La representación final del diagrama de bloques de $H(z)$ según una estructura de celosía se representa en la Fig. 4.14. Cabe remarcar en esta realización el factor de ganancia dos de la salida del mismo.

6. Considere el filtro FIR dado por los siguientes coeficientes en celosía:

$$K_1 = \frac{2}{3}, K_2 = \frac{1}{4}, K_3 = \frac{1}{3}$$

- a) Obtenga la estructura equivalente en forma directa.
b) Determine todos los filtros FIR especificados por los parámetros anteriores.

Resolución:

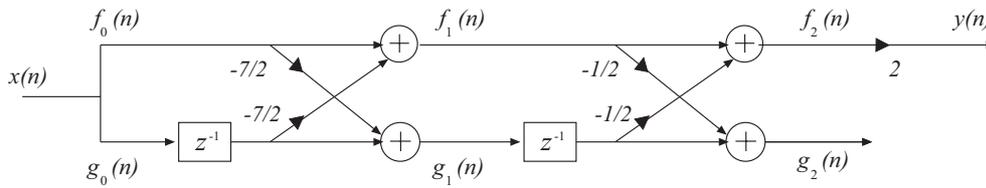


Figura 4.14: Realización en celosía resultante.

- a) Los coeficientes del filtro FIR en forma directa $\{\alpha_m(k)\}$ se pueden obtener a partir de los coeficientes de la celosía $\{K_i\}$ usando las expresiones

$$A_0(z) = B_0(z) = 1 \quad (4.56)$$

$$A_m(z) = A_{m-1}(z) + K_m z^{-1} B_{m-1}(z), \quad m = 1, 2, \dots, M-1 \quad (4.57)$$

$$B_m(z) = z^{-m} A_m(z^{-1}), \quad m = 1, 2, \dots, M-1 \quad (4.58)$$

Las Ecs. (4.56) y (4.57) son equivalentes a las Ecs. (4.40) y (4.41). La Ec. (4.58) establece que el polinomio $B(z)$ es el que posee idénticos coeficientes que $A_m(z)$ pero en orden inverso.

Dado que partimos de los coeficientes de celosía, la solución se obtendrá realizando una recursión ascendente empezando para $m = 1$ hasta obtener $A_3(z)$. Así, tenemos que

$$A_1(z) = A_0(z) + K_1 z^{-1} B_0(z) = 1 + \frac{2}{3} z^{-1}. \quad (4.59)$$

Como $B(z)$ es el polinomio inverso de $A_m(z)$, tenemos que

$$B_1(z) = \frac{2}{3} + z^{-1}. \quad (4.60)$$

A continuación añadimos la segunda etapa a la celosía realizando una recursión ascendente para $m = 2$. Esto produce

$$A_2(z) = A_1(z) + K_2 z^{-1} B_1(z) = 1 + \frac{10}{12} z^{-1} + \frac{1}{4} z^{-2}. \quad (4.61)$$

Por lo tanto $B_2(z)$ será el polinomio inverso de $A_2(z)$:

$$B_2(z) = \frac{1}{4} + \frac{10}{12} z^{-1} + z^{-2}. \quad (4.62)$$

Finalmente, la adición de la tercera etapa a la celosía resulta en una última recursión para $m = 3$, con lo que

$$H(z) = A_3(z) = A_2(z) + K_3 z^{-1} B_2(z) = 1 + \frac{11}{12} z^{-1} + \frac{19}{36} z^{-2} + \frac{1}{3} z^{-3}. \quad (4.63)$$

La representación equivalente a la forma directa, derivada de $H(z)$, se indica en la Fig. 4.15.

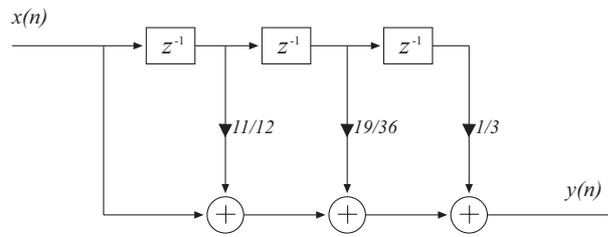


Figura 4.15: Realización en forma directa.

- b) Nótese que la celosía con parámetros K_1, K_2, \dots, K_p se corresponde con una clase de p -filtros FIR en forma directa con funciones de transferencia $A_1(z), A_2(z), \dots, A_p(z)$. Cabe destacar que la caracterización de p filtros FIR en forma directa requiere $(p+1)p/2$ coeficientes del filtro. En contraste, la caracterización en forma de celosía requiere sólo p coeficientes de reflexión $\{K_i\}$.

La razón por la que la celosía proporciona una representación más compacta para esta clase de p filtros FIR, es que añadiendo una etapa p -ésima a una celosía de $p-1$ etapas se incrementa la longitud del filtro sin alterar los parámetros de las etapas previas. El filtro $A_p(z)$ resultante poseerá coeficientes en forma directa totalmente diferentes de los del filtro FIR de menor orden dado por $A_{p-1}(z)$.

En nuestro caso, la clase de filtros que los parámetros K_1, K_2, K_3 producen son

$$A_1(z) = 1 + \frac{2}{3}z^{-1} \quad (4.64)$$

$$A_2(z) = 1 + \frac{10}{12}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2} \quad (4.65)$$

$$A_3(z) = 1 + \frac{11}{12}z^{-1} + \frac{19}{36}z^{-2} + \frac{1}{3}z^{-3} \quad (4.66)$$

sin mencionar sus polinomios inversos, dados por $B_1(z), B_2(z)$ y $B_3(z)$.

7. Determine la respuesta impulsional de un filtro FIR en celosía con parámetros

$$K_1 = \frac{2}{3}, K_2 = \frac{1}{3}, K_3 = \frac{1}{6}$$

Resolución:

En un filtro FIR, los coeficientes en forma directa equivalen a la respuesta impulsional finita del mismo. Por lo tanto, hemos de utilizar las recursiones ascendentes de la expresión,

$$A_m(z) = A_{m-1}(z) + K_m z^{-1} B_{m-1}(z), \quad m = 1, 2, \dots, M-1 \quad (4.67)$$

con $A_0(z) = B_0(z) = 1$, para obtener los coeficientes de la estructura en forma directa y, por tanto, la respuesta impulsional pedida. Así, tenemos que

$$A_1(z) = A_0(z) + K_1 z^{-1} B_0(z) = 1 + \frac{2}{3}z^{-1} \quad (4.68)$$

y como $B_1(z)$ es el polinomio inverso de $A_1(z)$, queda

$$B_1(z) = \frac{2}{3} + z^{-1}. \quad (4.69)$$

A continuación, añadiremos la segunda etapa a la celosía, realizando una recursión ascendente para $m = 2$. Esto produce

$$A_2(z) = A_1(z) + K_2 z^{-1} B_1(z) = 1 + \frac{8}{9} z^{-1} + \frac{1}{3} z^{-2}. \quad (4.70)$$

Por lo tanto $B_2(z)$ será el polinomio inverso de $A_2(z)$:

$$B_2(z) = \frac{1}{3} + \frac{8}{9} z^{-1} + z^{-2}. \quad (4.71)$$

Finalmente, la adición de la tercera etapa a la celosía resulta en una última recursión para $m = 3$, con lo que

$$H(z) = A_3(z) = A_2(z) + K_3 z^{-1} B_2(z) = 1 + \frac{17}{18} z^{-1} + \frac{13}{27} z^{-2} + \frac{1}{6} z^{-3}, \quad (4.72)$$

por lo que la respuesta impulsional es

$$h(n) = \left\{ \underset{\uparrow}{1}, \frac{17}{18}, \frac{13}{27}, \frac{1}{6} \right\}. \quad (4.73)$$



8. Determine el procedimiento de obtención de la estructura en celosía de los sistemas IIR todo-polos a partir de las estructuras en celosía de sistemas FIR.

Resolución:

Dada la estructura en celosía de un sistema FIR de orden N , Fig. 4.12, con función de transferencia $A_N(z)$, si intercambiamos los papeles de la entrada y la salida, como ilustra la Fig. 4.16, el nuevo sistema describe un sistema IIR con función de transferencia

$$H(z) = \frac{1}{A_N(z)}. \quad (4.74)$$

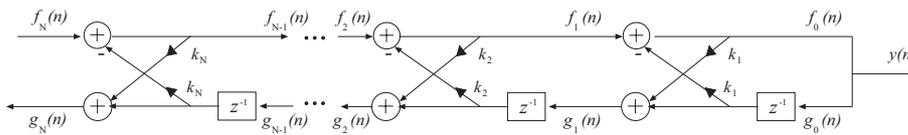


Figura 4.16: Estructura en celosía para un sistema IIR todo-polos.

La función de transferencia, pues, del sistema IIR todo-polos es

$$H_a(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{F_0(z)}{F_m(z)} = \frac{1}{A_m(z)}. \quad (4.75)$$

Por otro lado, la salida $g_N(n)$ (Fig. 4.16) representa una combinación lineal de las salidas

$$H_b(z) = \frac{G_m(z)}{Y(z)} = \frac{G_m(z)}{G_0(z)} = B_m(z) = z^{-m} A_m(z^{-1}). \quad (4.76)$$

Es decir, la función de transferencia $B_m(z)$, tomando como entrada la salida $Y(z)$, y la salida $G_m(z)$, es un sistema FIR que se caracteriza por ser el polinomio inverso de $A_m(z)$, por lo que los coeficientes son idénticos a los de $A_m(z)$ salvo que ocurren en

orden inverso. Esto supone una trayectoria todo-ceros que tiene comienzo en $g_0(n)$ y salida en $g_N(n)$. Se dice que $B_m(z)$ es la función de transferencia hacia atrás porque proporciona una trayectoria hacia atrás en la estructura todo-polos.

De esto se desprende que las estructuras IIR en celosía estarán caracterizadas por los mismos coeficientes de reflexión K_1, \dots, K_N . Éstas se diferencian de las FIR simplemente por la interconexión de sus diagramas de bloques. De aquí que para obtener los parámetros de celosía $\{K_i\}$ de un sistema todo-polos $\frac{1}{A_N(z)}$ se obtengan los parámetros de celosía del sistema todo ceros $A_N(z)$, que coincide con los del sistema todo-polos $\frac{1}{A_N(z)}$ aunque, como puede observarse en la Fig. 4.16, se presentan en orden inverso.

Cabe destacar que los parámetros de celosía $\{K_i\}$ coinciden con los coeficientes de reflexión del test de estabilidad de Schür-Cohn que afirma que “el polinomio $A_N(z)$ tiene todas sus raíces dentro de la circunferencia de radio unidad si y sólo si los coeficientes de K_m satisfacen la condición $|K_m| < 1, \forall m = 1, \dots, N$.” Así, si todos los parámetros de celosía son menores que 1 en módulo, todos los polos de $A_N(z)$ se encuentran dentro de la circunferencia de radio unidad en el plano Z , siendo la condición necesaria y suficiente para que el sistema sea estable.

En aplicaciones prácticas, la estructura todo-polos en celosía se usa para modelar el tracto vocal humano y la estratificación de la tierra. En esta última, los parámetros de celosía equivalen a los coeficientes de reflexión del medio físico. Esto es por lo que estos parámetros también son denominados “coeficientes de reflexión”. Nótese que los coeficientes de reflexión en estas aplicaciones son menores que la unidad.

9. Obtener la estructura en celosía equivalente al sistema

$$H(z) = \frac{1}{1 + \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{2}{3}z^{-2} + \frac{1}{2}z^{-3}}$$

Analice la estabilidad del sistema.

Resolución:

Considerando la función de transferencia

$$H(z) = \frac{1}{A_3(z)} \quad (4.77)$$

se obtendrán los coeficientes de celosía del sistema FIR todo-ceros siguiente

$$A_3(z) = 1 + \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{2}{3}z^{-2} + \frac{1}{2}z^{-3}. \quad (4.78)$$

Los coeficientes obtenidos para $A_3(z)$ coinciden con los del sistema todo-polos $H(z) = \frac{1}{A_3(z)}$. La diferencia estriba en la interconexión del diagrama de bloques de la estructura.

En primer lugar, se calculan los coeficientes en celosía $\{K_i\}$ utilizando la recursión descendente dada por la ecuación

$$A_{m-1}(z) = \frac{A_m(z) - K_m B_m(z)}{1 - K_m^2} \quad (4.79)$$

que es precisamente la recursión descendente usada en el Test de estabilidad de Schür-Cohn.

Para $m = 3$, sabemos que

$$B_3(z) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{5}{6}z^{-2} + z^{-3} \quad (4.80)$$

y conocemos el parámetro de celosía K_3 , ya que

$$K_3 = \alpha_3(3) = \frac{1}{2}. \quad (4.81)$$

Para $m = 2$ tenemos

$$A_2(z) = \frac{A_3(z) - K_3 B_3(z)}{1 - K_3^2} = 1 + \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2}, \quad (4.82)$$

por lo que $K_2 = \alpha_2(2) = 1/3$ y $B_2(z) = 1/3 + 2/3z^{-1} + z^{-2}$.

Al repetir la recursión descendente, obtenemos

$$A_1(z) = \frac{A_2(z) - K_2 B_2(z)}{1 - K_2^2} = 1 + \frac{1}{2}z^{-1} \quad (4.83)$$

con lo que obtenemos el último coeficientes de celosía

$$\alpha_1(1) = \frac{1}{2} = K_1. \quad (4.84)$$

El sistema todo-polos $H(z)$ presentará coeficientes de celosía $K_1 = 1/2$, $K_2 = 1/3$, $K_3 = 1/2$. Se cumple que $|K_m| < 1$ $m = 1, 2, 3$ y, en consecuencia, podemos afirmar que el sistema es estable. ★ ★ ★

10. Determine el procedimiento de obtención de la estructura en celosía para los sistemas IIR genéricos.

Resolución:

El procedimiento para encontrar los parámetros en celosía del sistema IIR todo-polos se describió en el ejercicio 8. La celosía todo polos es el bloque básico a partir del cual construir estructuras de tipo celosía conteniendo polos y ceros. consideremos un sistema IIR cuya función de transferencia sea

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M c_m(k)z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_N(k)z^{-k}} = \frac{C_M(z)}{A_N(z)}. \quad (4.85)$$

Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $M \leq N$. Para construir un sistema IIR utilizamos el procedimiento descrito en el ejercicio 8. Así, mediante el polinomio $A_N(z)$, se calculan los coeficientes de celosía, que coinciden con los del sistema todo-polos $\frac{1}{A_N(z)}$.

A continuación, se toma la celosía todo-polos como el bloque básico de construcción. De la forma IIR directa II se puede observar que la salida del sistema todo-ceros es una combinación lineal de salidas retardadas del sistema todo-polos. En este sentido, podemos observar que la función de transferencia $B_m(z)$

$$H_G(z) = \frac{G_m(z)}{Y(z)} = B_m(z) \quad (4.86)$$

es una combinación lineal de salidas presentes y pasadas, por lo que añadiremos una parte “escalonada” a la celosía tomando como salida una combinación lineal de $B_m(z)$. Así, la estructura en celosía escalonada queda como la representada en la Fig. 4.17.

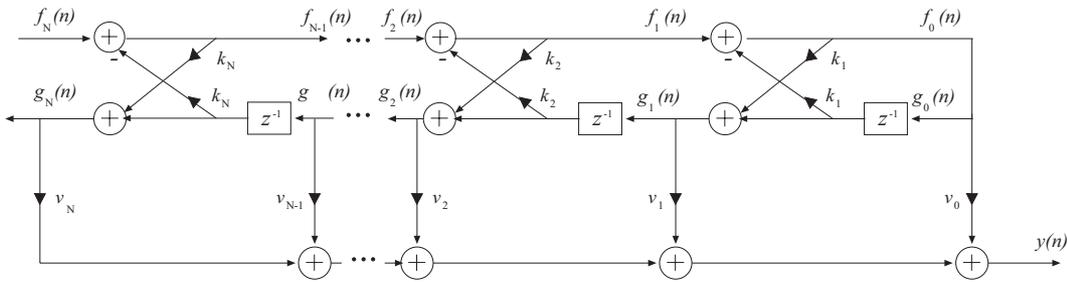


Figura 4.17: Estructura en celosía escalonada.

La función de transferencia correspondiente a la Fig. 4.17 quedaría

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{m=0}^M v_m \frac{B_m(z)}{A_N(z)} = \frac{\sum_{m=0}^M v_m B_m(z)}{A_N(z)} = \frac{C_M(z)}{A_N(z)}, \quad (4.87)$$

con

$$C_M(z) = \sum_{m=0}^M v_m B_m(z). \quad (4.88)$$

Si bien mediante el polinomio del denominador $A_N(z)$ se determinan los parámetros de la celosía, $\{K_m\}$, por medio de las relaciones recursivas descendentes, dichas recursiones también obtienen, como resultados intermedios, los polinomios $B_m(z)$ para $m = 1, 2, \dots, N$. Estos serán utilizados ahora para determinar los coeficientes de ponderación $\{v_n\}$, es decir, los parámetros de la escalera.

Los parámetros de la escalera se pueden expresar como

$$C_m(z) = \sum_{k=0}^{M-1} v_k B_k(z) + v_m B_m(z) = C_{m-1}(z) + v_m B_m(z), \quad (4.89)$$

por lo que, utilizando la ecuación recursiva descendente en m ($m = M, M-1, \dots, 2$), obtendremos los coeficientes $C_m(m) = v_m$ para $m = 0, 1, 2, \dots, M$, es decir, los parámetros de la escalera. Reescribiendo, la ecuación recursiva queda finalmente como

$$C_{m-1}(z) = C_m(z) - v_m B_m(z). \quad (4.90)$$

Cabe destacar que el número de multiplicadores requerido por la estructura en celosía escalonada no es el mínimo aunque sí la cantidad de memoria requerida para implementar los retardos.

Las estructuras de celosía poseen un buen número de características deseables como modularidad, estabilidad inherente a los coeficientes $\{K_i\}$ y robustez frente a los efectos de palabra de longitud finita, que hacen estas estructuras atractivas en multitud de aplicaciones prácticas, entre las cuales destacan procesamiento de voz y filtrado adaptativo.

11. Considere un sistema IIR causal con función de transferencia

$$H(z) = \frac{1 + \frac{1}{2}z^{-1} + 2z^{-2}}{1 + \frac{53}{36}z^{-1} + \frac{13}{12}z^{-2} + \frac{1}{3}z^{-3}}$$

- Determine la estructura equivalente en celosía escalonada.
- Compruebe si el sistema es estable.

Resolución:

- a) Denominemos $C_2(z)$ y $A_3(z)$ a los polinomios del numerador y denominador de $H(z)$

$$H(z) = \frac{C_2(z)}{A_3(z)}. \quad (4.91)$$

Para obtener los parámetros en celosía del sistema IIR, dividimos el problema en obtener los coeficientes de celosía del sistema todo polos $1/A_3(z)$ que se tomará como bloque básico de construcción, dado que el sistema todo-ceros es una combinación lineal de salidas retardadas del sistema todo-polos, las funciones $B_m(z)$.

En primer lugar, pues, debemos calcular los coeficientes de celosía de

$$H'(z) = \frac{1}{A_3(z)} = \frac{1}{1 + \frac{53}{36}z^{-1} + \frac{13}{12}z^{-2} + \frac{1}{3}z^{-3}}. \quad (4.92)$$

Sin embargo, estos coinciden con los del sistema todo-ceros $A_3(z)$. Para la obtención de los coeficientes de celosía, se procede de la misma forma que en el ejercicio 9, obteniendo los coeficientes de celosía

$$K_1 = 3/4, \quad K_2 = 2/3, \quad K_3 = 1/3, \quad (4.93)$$

y la funciones intermedias $B_m(z)$, que serían usadas para el cálculo de los parámetros escalera, $v_m(z)$. Estas son

$$B_3(z) = \frac{1}{3} + \frac{13}{12}z^{-1} + \frac{53}{36}z^{-2} + z^{-3}, \quad (4.94)$$

$$B_2(z) = \frac{2}{3} + \frac{5}{4}z^{-1} + z^{-2} \quad (4.95)$$

y

$$B_1(z) = \frac{3}{4} + z^{-1}. \quad (4.96)$$

Ahora podemos calcular los parámetros de la escalera mediante la ecuación recursiva descendente

$$C_{m-1}(z) = C_m(z) - v_m B_m(z). \quad (4.97)$$

sabiendo que $C_m(m) = v_m$. De $C_2(z)$ tenemos que

$$C_2(2) = 2 = v_2. \quad (4.98)$$

Con este parámetro y las funciones $C_2(z)$ y $B_2(z)$ podemos realizar una recursión descendente

$$C_1(z) = (1 + \frac{1}{2}z^{-1} + 2z^{-1}) - 2(\frac{2}{3} + \frac{5}{4}z^{-1} + z^{-2}) = -\frac{1}{3} - 2z^{-1}, \quad (4.99)$$

de donde se desprende que $C_1(1) = -2 = v_1$. Continuando la recursión descendente una vez más, se obtiene

$$C_0(z) = \left(-\frac{1}{3} - 2z^{-1}\right) + 2\left(\frac{3}{4} + z^{-1}\right) = \frac{7}{6} \quad (4.100)$$

con lo que finalmente $v_0 = c_0(0) = \frac{7}{6}$. La estructura en celosía del sistema $H(z)$ viene representada en la Fig. 4.18.

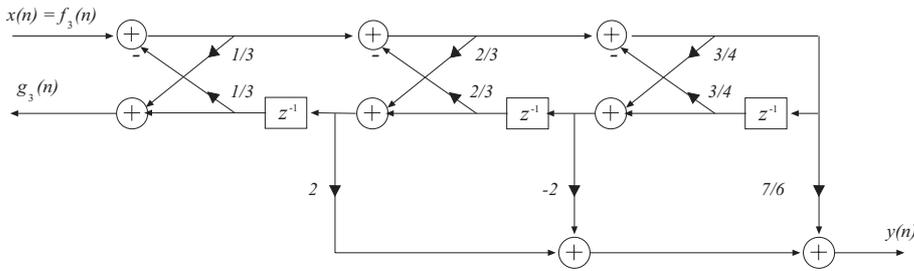


Figura 4.18: Realización en celosía escalonada.

- b) Para estudiar la estabilidad del sistema $H(z)$, sólo se utilizan los parámetros de celosía $\{K_m\}$. Los parámetros de celosía determinan los polos del sistema. Los parámetros de escalamiento, si bien se calculan para unos coeficientes $\{K_m\}$ dados, sólo afectan a la posición de los ceros. Por ello, el análisis de la estabilidad del sistema se basa únicamente en los parámetros de celosía.

Dado que $K_1 = 3/4$, $K_2 = 2/3$ y $K_3 = 1/3$, se cumple el test de estabilidad de Schür-Cohn ($|K_m| < 1$, $\forall m=1, 2, 3$) y podemos afirmar que el sistema es estable.

12. Determine el diagrama de bloques de la estructura en celosía escalonada para el sistema definido por

$$H(z) = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}z^{-2} + z^{-3}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-3}}.$$

Resolución:

Para empezar, denominaremos $B_3(z)$ y $A_3(z)$ a los polinomios del numerador y denominador de la función de transferencia

$$H(z) = \frac{B_3(z)}{A_3(z)}. \quad (4.101)$$

Para determinar la realización en celosía escalonada necesitaremos los parámetros de celosía $\{K_m\}$ y los parámetros de escalamiento $\{v_m\}$. Los parámetros de celosía son los primeros en calcularse y para ello se utiliza la coincidencia de estos con los del sistema todo-ceros $A_3(z)$.

Por ello, comenzaremos calculando $\{K_m\}$ mediante las ecuaciones recursivas descendentes del tipo

$$A_{m-1}(z) = \frac{A_m(z) - K_m B_m(z)}{1 - K_m^2}, \quad \alpha_m(m) = K_m. \quad (4.102)$$

En primer lugar tenemos

$$K_3 = \alpha_3(3) = \frac{1}{2}, \quad (4.103)$$

$$A_3(z) = 1 - \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-3} \quad (4.104)$$

y

$$B_3(z) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z^{-2} + z^{-3} \quad (4.105)$$

con lo que

$$A_2(z) = \frac{A_3(z) - K_3 B_3(z)}{1 - K_3^2} = 1 - \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2} \quad (4.106)$$

de donde resulta

$$K_2 = \alpha_2(2) = \frac{1}{3} \quad (4.107)$$

$$B_2(z) = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}z^{-1} + z^{-2}. \quad (4.108)$$

Iterando para $m = 2$, tenemos

$$A_1(z) = \frac{A_2(z) - K_2 B_2(z)}{1 - K_2^2} = 1 - \frac{1}{2}z^{-1} \quad (4.109)$$

con lo que resulta

$$K_1 = \alpha_1(1) = -\frac{1}{2} \quad (4.110)$$

y

$$B_1(z) = -\frac{1}{2} + z^{-1}. \quad (4.111)$$

Ahora podemos calcular los parámetros de escalera mediante la ecuación recursiva descendente

$$C_{m-1}(z) = C_m(z) - v_m B_m(z), \quad v_m = c_m(m). \quad (4.112)$$

Como vemos, hemos dejado para el final el cálculo de los parámetros de escalera ya que el cálculo de estos se basa en las funciones de transferencia hacia atrás $B_m(z)$ obtenidos durante el cálculo de los parámetros en celosía.

Inicialmente tenemos que

$$v_3 = c_3(3) = 1. \quad (4.113)$$

Para el cálculo de $C_2(z)$, fijémosnos en que $C_3(z) = B_3(z)$, esto redundando en que

$$C_2(z) = C_3(z) - 1 \cdot B_3(z) = C_3(z) - B_3(z) = 0 \quad (4.114)$$

por lo cual

$$C_2(2) = 0 = v_2 \quad (4.115)$$

y cualquier otro parámetro posterior de escalera será cero:

$$c_1(1) = 0 = v_1, \quad c_0(0) = 0 = v_0. \quad (4.116)$$

El diagrama de bloques resultante para la estructura en celosía escalonada se representa en la Fig. 4.19. Nótese como la salida del sistema todo polos es la salida $g_3(n)$, es decir, la salida de la función de transferencia hacia atrás. Esto es lógico porque, por un lado, la variable $f_0(n)$ presenta una función de transferencia $1/A_3(z)$ con respecto a la entrada, mientras que la función de transferencia hacia atrás está relacionada con $A_3(z)$ según

$$B_3(z) = z^{-3} A_3(z^{-1}) \quad (4.117)$$

o lo que es lo mismo, $B_3(z)$ es el polinomio inverso de $A_3(z)$. Por otro lado, el sistema todo-ceros es una combinación lineal de las funciones $B_m(z)$. Nótese que $B_3(z)$ es exactamente $C_3(z)$, por lo que no hace falta tomar combinación lineal de los $B_m(z)$ para formar $C_3(z)$ y, por ello, $v_3 = 1$ y el resto es cero:

$$c_3(3) = 1 = v_3, c_2(2) = 0 = v_2, c_1(1) = 0 = v_1, c_0(0) = 0 = v_0. \quad (4.118)$$

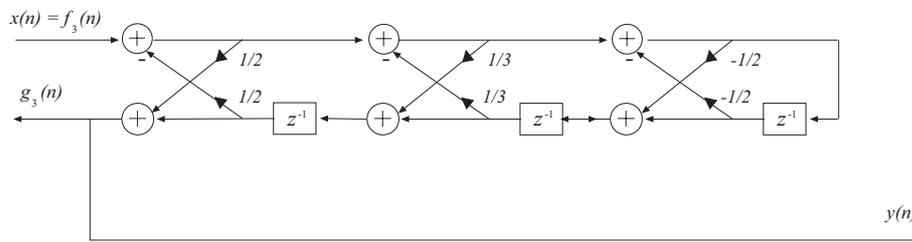


Figura 4.19: Realización en celosía escalonada del sistema propuesto.

13. Describa la obtención de la realización de un sistema IIR en forma directa II a partir de la realización en forma directa I.

Resolución:

La expresión de la estructura de un sistema IIR en forma directa I (Fig. 4.20) es la realización inmediata que intuitivamente se obtiene de la ecuación en diferencias

$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k). \quad (4.119)$$

De hecho, la función de transferencia $H(z)$ de un sistema IIR puede verse como dos sistemas en cascada

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = H_1(z) \cdot H_2(z) \quad (4.120)$$

donde

$$H_1(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \quad (4.121)$$

y

$$H_2(z) = \frac{1}{1 + \sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}. \quad (4.122)$$

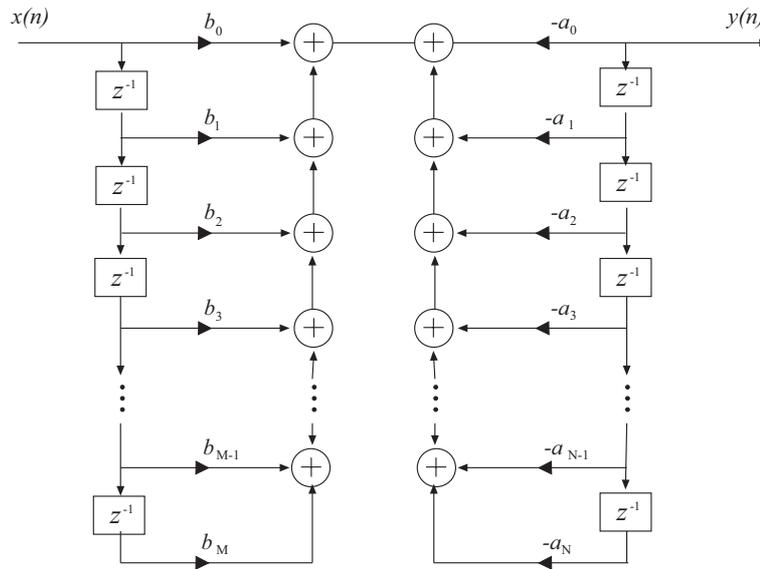


Figura 4.20: Realización en forma directa I.

Así, en la Fig. 4.20, forma directa tipo I, puede identificarse una primera etapa todo-ceros $H_1(z)$ que precede al sistema todo-polos $H_2(z)$ o segunda etapa. Esta es la representación usual de la realización en forma directa I, aunque también se puede representar como en la Fig. 4.21, donde la primera etapa de la cascada es el sistema todo polos $H_2(z)$ seguida de $H_1(z)$. En esta figura puede verse cómo la línea de retardos de ambos bloques es redundante, de forma que si se utiliza sólo una línea de retardos para eliminar la redundancia, obtenemos la estructura de la Fig. 4.22, que es la denominada realización en forma directa II.

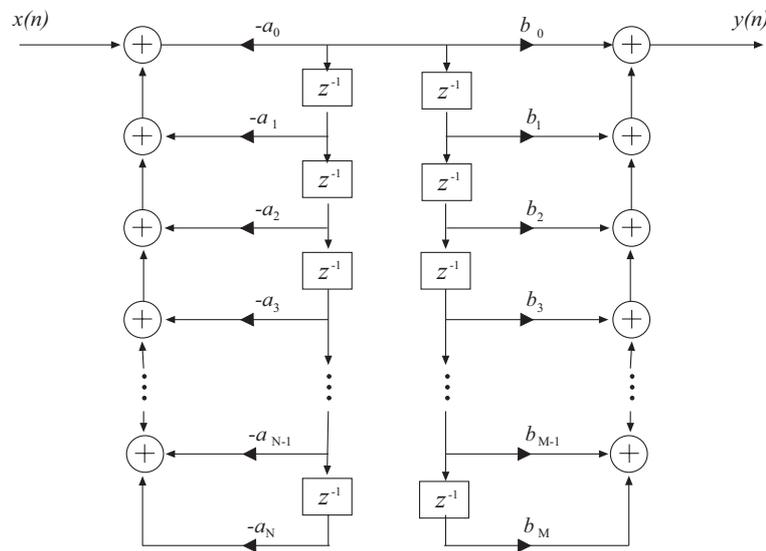


Figura 4.21: Inversión de las etapas en cascada de la forma directa I. Aparecen bloques de retardo redundantes.

La ventaja de la realización en forma directa II es que, si bien requiere el mismo número de multiplicaciones y sumas que la forma directa I, posee un menor requerimiento de memoria, el máximo de $\{M, N\}$ frente a $M + N$ posiciones de memoria en

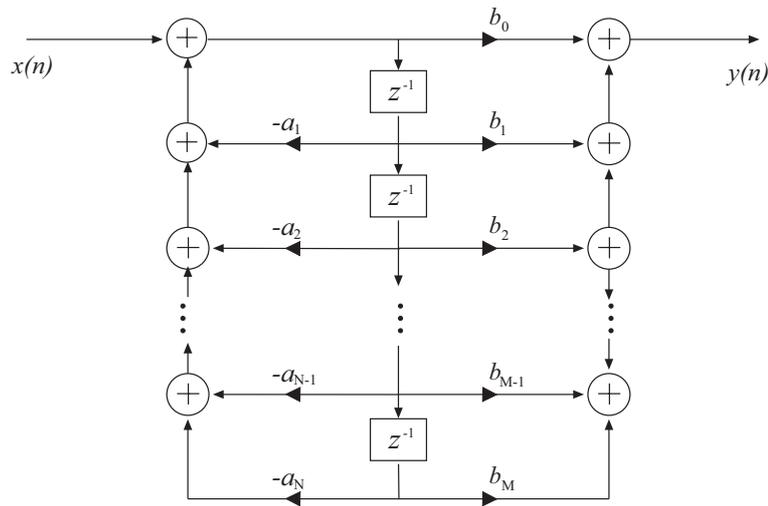


Figura 4.22: Realización en forma directa II para el caso $N = M$.

la forma directa I.

14. Obtener la estructura que resulta de la transposición de la forma directa II.

Resolución:

La técnica de transposición establece que si invertimos las direcciones del flujo en todas las ramas y cambiamos la entrada por la salida, la función de transferencia permanece invariable.

Así, aplicaremos la transposición a la estructura en forma directa II, Fig. 4.22. Esto consiste en

- a) Invertir las direcciones del flujo de las ramas.
- b) Intercambiar nodos por sumadores y viceversa.
- c) Intercambiar entrada por salida.

Nótese que el hecho de que la transposición haya cambiado la dirección de las transmitancias de todas las ramas, o lo que es lo mismo, la dirección del flujo de todas las ramas, conduce a que allí donde antes había sumadores, Fig. 4.23(a), aparecen nodos de distribución, Fig. 4.23(b), y viceversa.

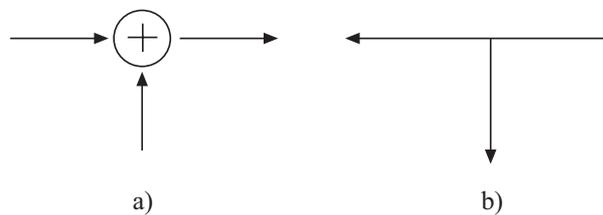


Figura 4.23: Nodos (a) sumador y de (b) distribución.

Así, la transposición de la estructura en forma directa II de la Fig. 4.22 se muestra en la Fig. 4.24.

15. Considere el sistema mostrado en la Fig. 4.25. Determine su estructura traspuesta.

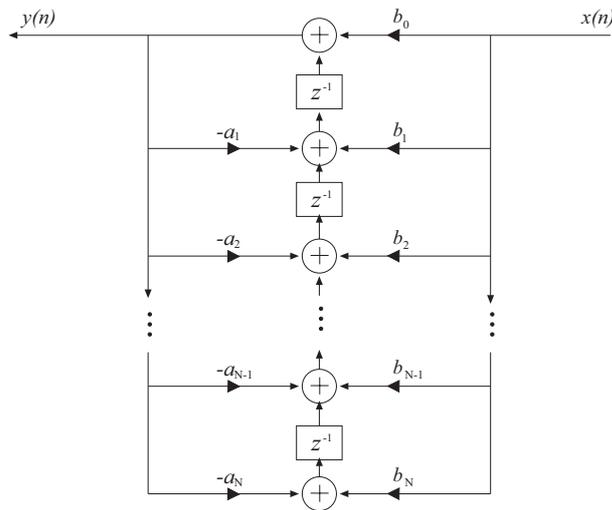


Figura 4.24: Forma traspuesta de la forma directa II.

Resolución:

Para aplicar la transposición, los pasos son esencialmente:

- Invertir las direcciones del flujo de las ramas.
- Intercambiar nodos por sumadores y viceversa.
- Intercambiar la entrada por la salida.

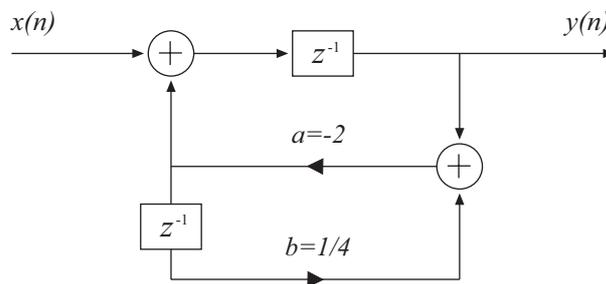


Figura 4.25: Diagrama de bloques del sistema propuesto.

Dentro de la simplicidad de cada uno de los pasos, vamos a examinar un poco más detenidamente el segundo de ellos. En la Fig. 4.25 tenemos cuatro nodos, dos de ellos son nodos sumadores, sumando dos entradas para proporcionar una salida, y otros dos son nodos de distribución, aquellos que presentan bifurcación de una entrada a dos salidas. La transformación pues de los cuatro nodos indicados en la Fig. 4.25 se ilustra en las Figs. 4.26(a)–4.26(d).

Cabe destacar que al invertir las direcciones de flujo de las ramas, los multiplicadores también se invierten señalando en la nueva dirección del flujo. Si a esto le añadimos los cambios de la entrada por la salida y viceversa, obtenemos la estructura traspuesta representada en la Fig. 4.27, que poseerá la misma función de transferencia que el sistema original.



16. Determine la estructura traspuesta del sistema en paralelo representado en la Fig. 4.28.

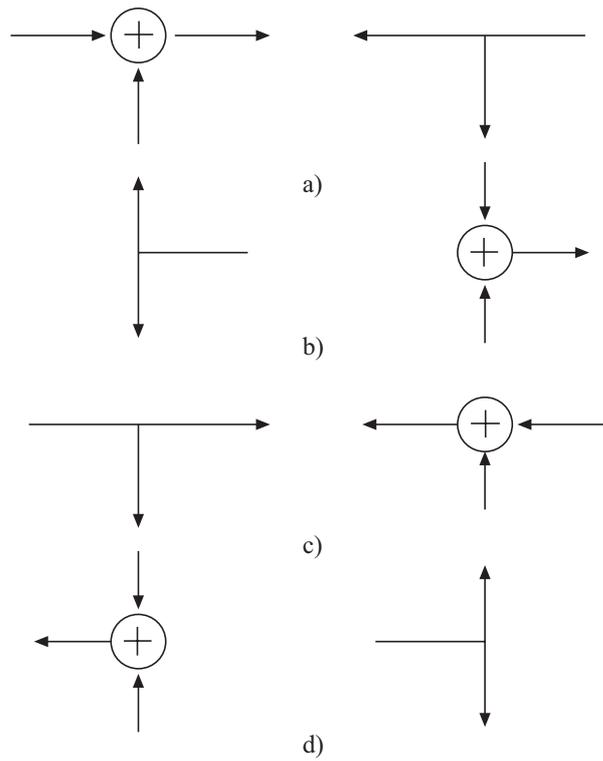


Figura 4.26: Transformación que se produce en cada uno de los cuatro nodos del diagrama de bloques del sistema propuesto.

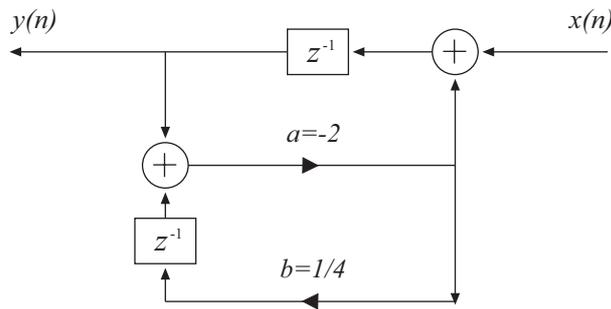


Figura 4.27: Estructura traspuesta resultante.

Resolución:

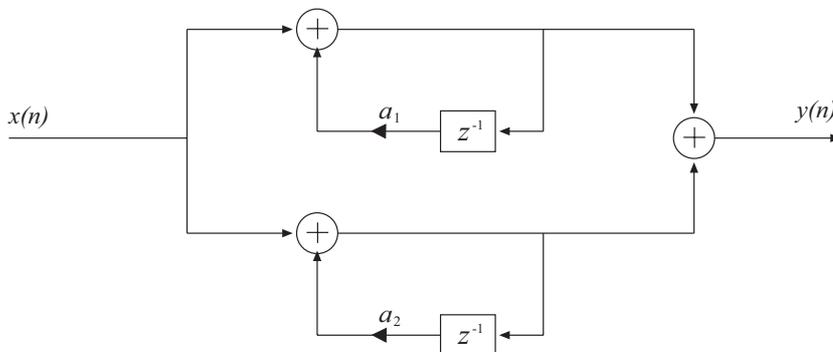


Figura 4.28: Diagrama de bloques del sistema propuesto.

Actuando de la misma forma que en el ejercicio anterior, para hallar la estructura traspuesta tenemos que:

- Invertir las direcciones del flujo de las ramas.
- Intercambiar nodos por sumadores y viceversa.
- Intercambiar entrada por salida.

El resultado de la transposición se muestra en la Fig. 4.29. Nótese que la traspuesta es una imagen especular de la Fig. 4.28 excepto por el orden en que aparecen el bloque de retardo y el multiplicador en ambas etapas. Sin embargo, la transmitancia de la rama correspondiente es la misma, por lo que podemos decir que la estructura traspuesta de la forma normal es ella misma. Esto puede generalizarse para cualquier número de etapas siempre que todas ellas sean subsistemas IIR de primer orden.

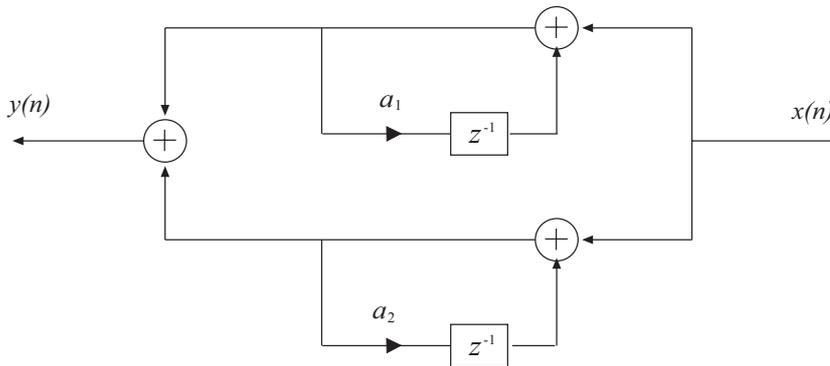


Figura 4.29: Resultado de la transposición.

★★

17. Obtenga la realización en cascada del sistema

$$H(z) = 1 + \sqrt{2}z^{-1} + 3z^{-2} + 2\sqrt{2}z^{-3} + 2z^{-4}$$

Resolución:

Sea $H(z)$ el sistema FIR propuesto. En general, la realización en cascada de un sistema FIR se obtiene factorizando $H(z)$ en sistemas de segundo orden, de tal forma que

$$H(z) = \prod_{k=1}^K H_k(z) \quad (4.123)$$

con

$$H_k(z) = b_{k0} + b_{k1}z^{-1} + b_{k2}z^{-2}, \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (4.124)$$

Para formar cada $H_k(z)$ hemos de agrupar los pares de ceros complejos conjugados de $H(z)$, para ello podemos acabar de factorizar $H(z)$ como sigue

$$H(z) = (1 - j\sqrt{2}z^{-1})(1 + j\sqrt{2}z^{-1})(1 + (\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2})z^{-1})(1 + (\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2})z^{-1}) \quad (4.125)$$

Es conveniente que las raíces estén agrupadas según pares complejas conjugadas para que los coeficientes $\{b_{ki}\}$ de $H_k(z)$ sean reales. Sin embargo, las raíces reales puede ser agrupadas de forma arbitraria, o incluso formar etapas de primer orden en la cascada.

Como podemos ver en la Ec. (4.125), existen un par de raíces complejas conjugadas en $z = \frac{\sqrt{2}}{2} \pm j\frac{\sqrt{2}}{2}$, por lo que necesariamente habríamos de agrupar ambas para formar una etapa de la cascada

$$H_1(z) = \left(1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z^{-1}\right)\left(1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z^{-1}\right) = 1 + \sqrt{2}z^{-1} + z^{-2} \quad (4.126)$$

tenemos que

$$b_{10} = 1, b_{11} = \sqrt{2}, b_{12} = 1. \quad (4.127)$$

Por otra parte, dado que sólo restan dos raíces complejas conjugadas por agrupar, tomaremos ambas para obtener $H_2(z)$. En este caso, el hecho de que las cuatro raíces sean complejas conjugadas ha impuesto el agrupamiento. En definitiva, $H_2(z)$ estará formado por la agrupación de las raíces en $z = j\sqrt{2}$ y $z = -j\sqrt{2}$, con lo que

$$H_2(z) = (1 - j\sqrt{2}z^{-1})(1 + j\sqrt{2}z^{-1}) = 1 + 2z^{-1} \quad (4.128)$$

de lo cual se extrae que

$$b_{20} = 1, b_{21} = 0, b_{22} = 2. \quad (4.129)$$

La realización en cascada de $H(z)$ queda representada en la Fig. 4.30.

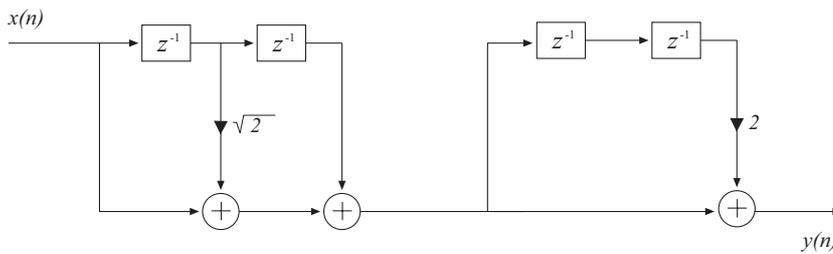


Figura 4.30: Realización en cascada.

18. Determine una realización en cascada del sistema expresado por

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1} + 2z^{-2} - 2z^{-3}}{1 - z^{-1} + \frac{13}{16}z^{-2} - \frac{1}{2}z^{-3} + \frac{5}{32}z^{-4}}$$

Resolución:

La factorización de los polinomios de numerador y denominador queda de la siguiente manera

$$H(z) = \frac{(1 - z^{-1})(1 - \sqrt{2}jz^{-1})(1 + \sqrt{2}jz^{-1})}{\left(1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}j\right)z^{-1}\right)\left(1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}j\right)z^{-1}\right)\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}jz^{-1}\right)\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}jz^{-1}\right)} \quad (4.130)$$

A partir de aquí, hemos de expresar el sistema de la forma

$$H(z) = \prod_{k=1}^K H_k(z) \quad (4.131)$$

donde cada $H_k(z)$ será una etapa de la cascada y tiene la forma general

$$H_k(z) = \frac{b_{k0} + b_{k1}z^{-1} + b_{k2}z^{-2}}{1 + a_{k1}z^{-1} + a_{k2}z^{-2}} \quad (4.132)$$

es decir, cada sección o etapa se expresa como un sistema de segundo orden en el que se deben agrupar un par de polos complejos conjugados y un par de ceros complejos conjugados. Nótese, sin embargo, que el agrupamiento de los ceros con los polos puede realizarse de forma arbitraria.

Comenzaremos agrupando los polos $z_p = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{4}j$ y los ceros $z_c = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}j$ para formar la etapa

$$H_1(z) = \frac{(1 - \sqrt{2}jz^{-1})(1 + \sqrt{2}jz^{-1})}{(1 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{4}j)z^{-1})(1 - (\frac{1}{2} - \frac{1}{4}j)z^{-1})} = \frac{1 + 2z^{-1}}{1 - z^{-1} + \frac{5}{16}z^{-2}} \quad (4.133)$$

por lo que

$$b_{10} = 1, b_{11} = 0, b_{12} = 2, a_{11} = -1, a_{12} = 5/16. \quad (4.134)$$

Tanto para el numerador como para el denominador, también pueden ser agrupadas pares de raíces reales. En nuestro caso, sólo quedan un par de polos complejos conjugados y un cero real que deberán ser agrupados para formar la siguiente etapa

$$H_2(z) = \frac{(1 - z^{-1})}{(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}jz^{-1})(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}jz^{-1})} = \frac{1 - z^{-1}}{1 + \frac{1}{2}z^{-2}}, \quad (4.135)$$

por lo cual

$$b_{20} = 1, b_{21} = -1, b_{22} = 0, a_{21} = 0, a_{22} = 1/2. \quad (4.136)$$

Obtenidos los coeficientes, al realizar la cascada cada una de las etapas de segundo orden se suele realizar en forma directa, tanto en forma directa II como en la forma traspuesta directa II. Basándonos en la forma directa II podemos concluir con la realización de $H(z)$ representada en la Fig. 4.31.

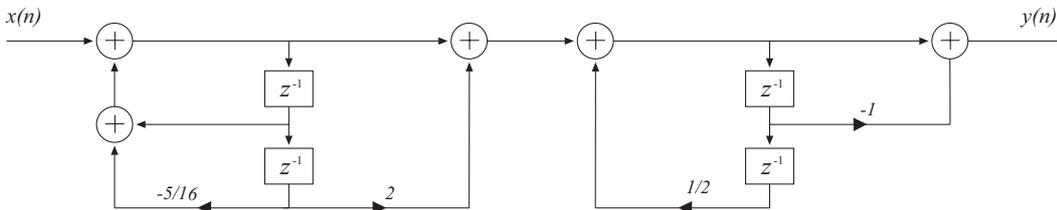


Figura 4.31: Realización de cascada del sistema del ejercicio 18.

En MATLAB puede obtenerse una realización en cascada mediante la orden:

```
>> [sos,G]=tf2sos([1,-1,2,-2],[1,-1,13/16,-1/2,5/32]);
```

Finalmente, cabe destacar que existen otras maneras de emparejar los ceros y los polos, por lo que es posible obtener una variedad de realizaciones en cascada. Todas ellas serían equivalentes si se utilizara aritmética de precisión infinita.

★ ★

19. Obtenga la estructura en paralelo del siguiente sistema

$$H(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 - \frac{9}{16}z^{-2}}$$

Resolución:

Las formas en paralelo se pueden obtener realizando una expansión de $H(z)$ en fracciones simples. En general, asumiendo que el orden del denominador es mayor que el del numerador, $N \geq M$, y que los polos son distintos obtenemos

$$H(z) = C + \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - p_k z^{-1}}, \quad (4.137)$$

donde $\{p_k\}$ son los polos y $\{A_k\}$ los coeficientes de la expansión de $H(z)$ en fracciones simples.

En nuestro caso, tenemos

$$H(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 - \frac{9}{16}z^{-2}} = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{(1 - \frac{3}{4}z^{-1})(1 + \frac{3}{4}z^{-1})}. \quad (4.138)$$

Después de algunas operaciones tenemos que

$$H(z) = \frac{A}{1 + \frac{3}{4}z^{-1}} + \frac{B}{1 - \frac{3}{4}z^{-1}} = \frac{5/6}{1 + \frac{3}{4}z^{-1}} + \frac{1/6}{1 - \frac{3}{4}z^{-1}} \quad (4.139)$$

con $A = 5/6$ y $B = 1/6$. La realización en forma paralela se ilustra en la Fig. 4.32.

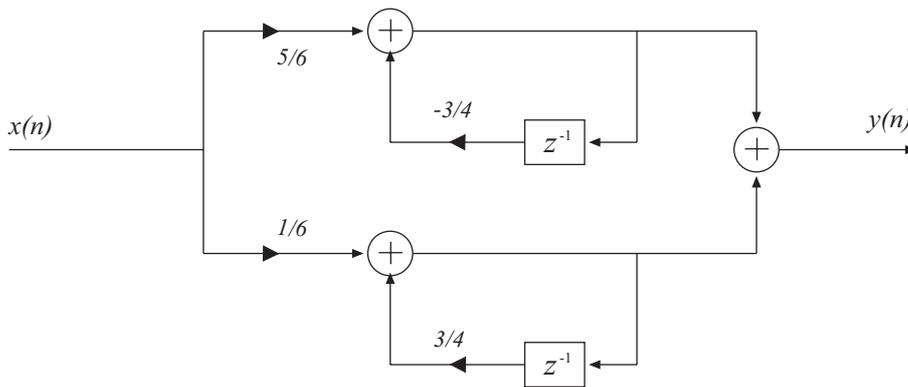


Figura 4.32: Realización en forma paralela.

20. Determine y dibuje la realización en paralelo para el siguiente sistema

$$H(z) = \frac{1 + \frac{9}{16}z^{-2}}{1 - \frac{5}{4}z^{-1} + \frac{3}{8}z^{-2}}$$

Resolución:

La factorización de los polinomios del numerador y denominador queda

$$H(z) = \frac{1 + \frac{9}{16}z^{-2}}{1 - \frac{5}{4}z^{-1} + \frac{3}{8}z^{-2}} = \frac{(1 - \frac{3}{4}z^{-1})(1 + \frac{3}{4}z^{-1})}{(1 - \frac{3}{4}z^{-1})(1 - \frac{1}{2}z^{-1})}. \quad (4.140)$$

Dado que $M = N$, puede realizarse la división previa a la expansión en fracciones para obtener $C = b_N/a_N = b_3/a_3 = 3/2$, por lo que tras unos cálculos la función de transferencia queda

$$H(z) = \frac{3}{2} + \frac{-\frac{1}{2} + \frac{15}{8}z^{-1}}{1 - \frac{5}{4}z^{-1} + \frac{3}{8}z^{-2}} = \frac{3}{2} + \frac{-\frac{1}{2} + \frac{15}{8}z^{-1}}{(1 - \frac{3}{4}z^{-1})(1 - \frac{1}{2}z^{-1})}. \quad (4.141)$$

Si realizamos una expansión en fracciones simples de la misma forma que en el problema anterior, queda

$$H(z) = \frac{3}{2} + \frac{6}{1 - \frac{3}{4}z^{-1}} + \frac{-13/2}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}. \quad (4.142)$$

La realización en forma paralela se ilustra en la Fig. 4.33.

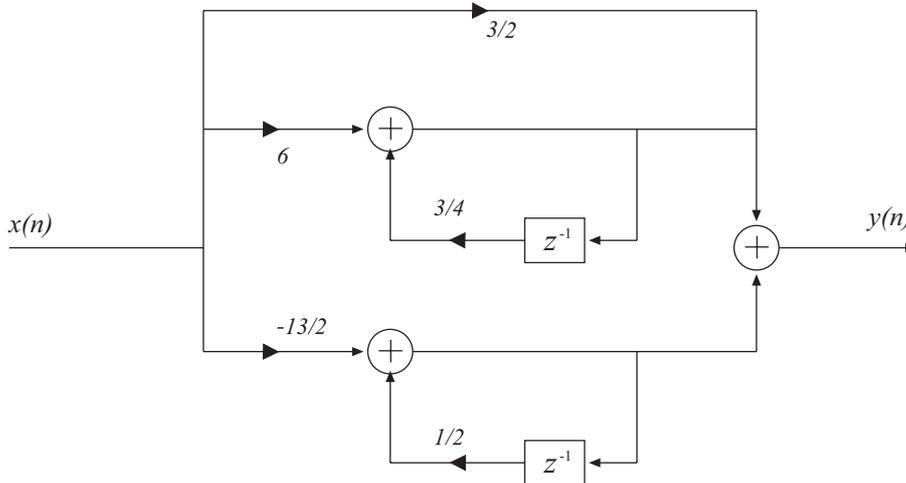


Figura 4.33: Realización en forma paralela.

★ ★ ★

21. Determine y dibuje la realización en paralelo para el sistema siguiente

$$H(z) = \frac{1 - \frac{7}{20}z^{-1} - \frac{9}{16}z^{-2} - \frac{63}{320}z^{-3} - \frac{81}{128}z^{-4}}{1 - \frac{7}{4}z^{-1} + \frac{3}{2}z^{-2} - \frac{9}{16}z^{-3}} \quad (4.143)$$

Resolución:

Si factorizamos los polinomios del numerador y denominador para observar la naturaleza de sus raíces, tenemos que

$$H(z) = \frac{(1 - \frac{5}{4}z^{-1})(1 + \frac{9}{10}z^{-1})(1 - \frac{j}{2}z^{-1})(1 + \frac{j}{2}z^{-1})}{(1 - (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}j)z^{-1})(1 - (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}j)z^{-1})(1 - \frac{3}{4}z^{-1})} \quad (4.144)$$

El denominador muestra un par de polos complejos conjugados y un polo simple, por lo que se prevee una etapa de primer orden y otra de segundo orden. Además, en este caso, el orden del numerador es mayor que el orden del denominador, por lo que la expansión en fracciones quedará como

$$H(z) = G(z) + \sum_{k=1}^2 H_k(z) \quad (4.145)$$

donde $H_1(z)$ y $H_2(z)$ son los dos subsistemas y dado que $M > N$, $G(z)$ es un polinomio en z^{-1} y no una única constante.

Dividiendo ambos polinomios se obtiene que

$$H(z) = \left(\frac{67}{20} + \frac{9}{8}z^{-1} \right) + \frac{-\frac{47}{20} + \frac{351}{80}z^{-1} - \frac{579}{160}z^{-2}}{1 - \frac{7}{4}z^{-1} + \frac{3}{2}z^{-2} - \frac{9}{16}z^{-3}} = \frac{67}{20} + \frac{9}{8}z^{-1} + H'(z). \quad (4.146)$$

A continuación se realizan las operaciones que conducen a la expansión en fracciones simples de $H'(z)$, quedando

$$H'(z) = \frac{A}{1 - (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}j)z^{-1}} + \frac{A^*}{1 - (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}j)z^{-1}} + \frac{B}{1 - \frac{3}{4}z^{-1}} \quad (4.147)$$

con $A = \frac{7}{24} - \frac{131}{120}\sqrt{2}j$, $B = -\frac{44}{15}$ por lo que la función de transferencia $H(z)$ queda finalmente como

$$H(z) = \frac{67}{20} + \frac{9}{8}z^{-1} + \frac{\frac{7}{12} + \frac{227}{120}z^{-1}}{1 - z^{-1} + \frac{3}{4}z^{-2}} + \frac{-\frac{44}{15}}{1 - \frac{3}{4}z^{-1}}. \quad (4.148)$$

La realización del sistema en forma paralelo se representa en la Fig. 4.34.

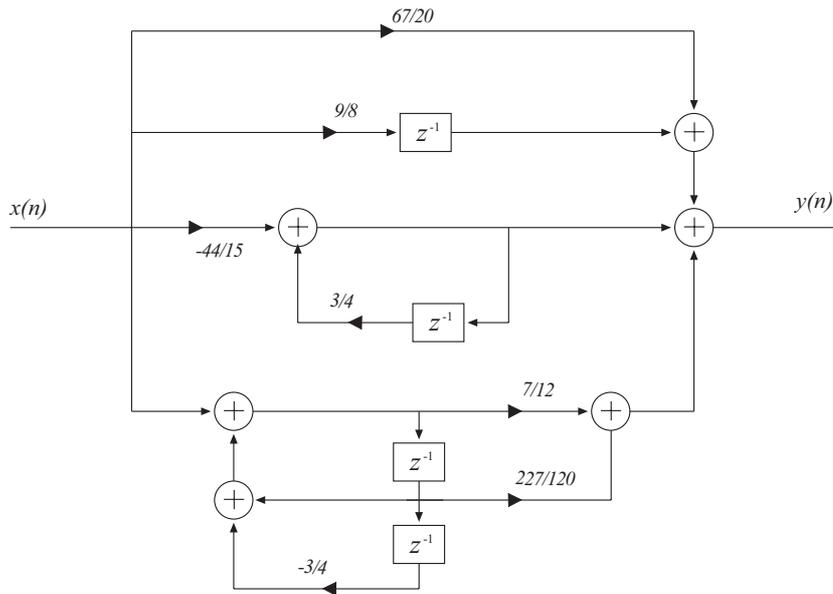


Figura 4.34: Realización paralela obtenida.

Los residuos, polos y términos directos pueden obtenerse directamente en MATLAB mediante la instrucción

```
>> [r,p,k]=residuez([1,-7/20,-9/16,-63/320,-81/128],[1,-7/4,3/2,-9/16]);
```

22. A partir del diagrama de bloques mostrado en la Fig. 4.35 de la realización en forma directa II, obtener las ecuaciones de espacio de estados que describen el sistema.

Resolución:

El estado de un sistema en el instante $n = n_0$ se define como “la cantidad de información que se debe proporcionar en el instante n_0 , la cual, junto con la entrada $x(n)$ para $n \geq n_0$, determina unívocamente la salida del sistema para todo $n \geq n_0$ ”.

De esto se desprende que la salida del sistema puede ponerse en función de la entrada actual y el estado actual (siendo esta la información almacenada en la componente de memoria del sistema, es decir, en los bloques de retardo).

Además, conociendo el estado en el instante n_0 y la entrada actual y futura, para $N \geq n_0$, se puede calcular la salida del sistema en cualquier momento posterior, sin necesidad de conocer las entradas anteriores.

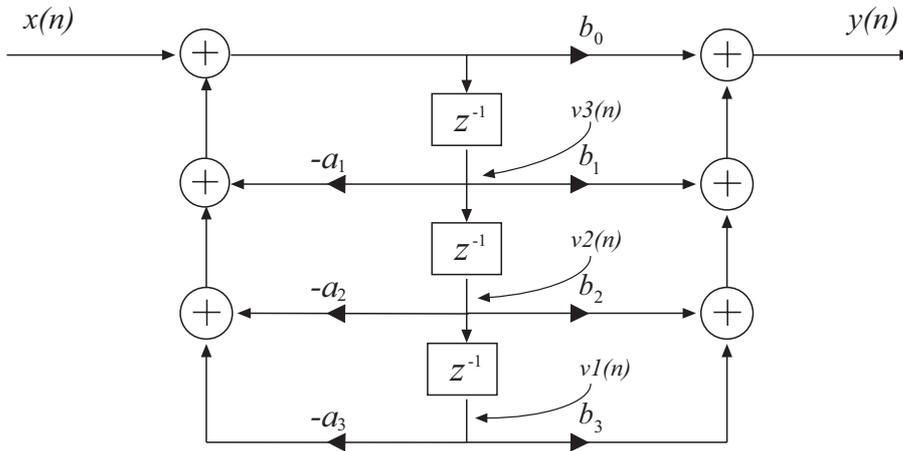


Figura 4.35: Realización en forma directa II.

Llamaremos *variables de estado* a los contenidos de los registros de los bloques de retardo, las ecuaciones que describen la actualización de las variables de estado son en nuestro caso

$$v_1(n+1) = v_2(n),$$

$$v_2(n+1) = v_3(n),$$

$$v_3(n+1) = -a_3v_1(n) - a_2v_2(n) - a_1v_3(n) + x(n) \quad (4.149)$$

Nótese que, tal como se indica en la Fig. 4.36, el bloque de retardo está formado por un registro de memoria. La salida de dicho bloque es el valor actual almacenado en el registro, $v(n)$, y el valor siguiente que será almacenado es el valor que tiene en la entrada, denominado $v(n+1)$.

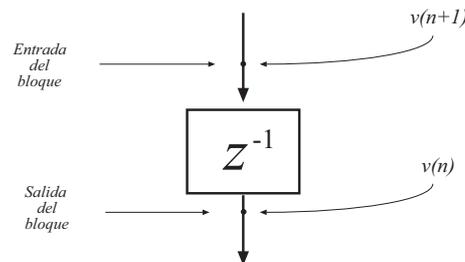


Figura 4.36: Bloque de retardo.

Por otra parte, como se mencionó anteriormente, la salida es una combinación lineal de la entrada actual y el estado del sistema, por lo que

$$y(n) = b_0v_3(n+1) + b_1v_3(n) + b_2v_2(n) + b_3v_1(n) \quad (4.150)$$

sustituyendo $v_3(n+1)$ queda

$$\begin{aligned} y(n) &= (-a_3v_1(n) - a_2v_2(n) - a_1v_3(n) + x(n))b_0 + b_1v_3(n) + b_2v_2(n) + b_3v_1(n) \\ &= (b_3 - b_0a_3)v_1(n) + (b_2 - b_0a_2)v_2(n) + (b_1 - b_0a_1)v_3(n) + b_0x(n) \end{aligned} \quad (4.151)$$

Si ponemos las Ecs. (4.149) y (4.151) en forma matricial tenemos que

$$\begin{bmatrix} v_1(n+1) \\ v_2(n+1) \\ v_3(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(n) \\ v_2(n) \\ v_3(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x(n) \quad (4.152)$$

$$y(n) = \begin{bmatrix} (b_3 - b_0 a_3) & (b_2 - b_0 a_2) & (b_1 - b_0 a_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(n) \\ v_2(n) \\ v_3(n) \end{bmatrix} + b_0 x(n) \quad (4.153)$$

Las Ecs. (4.152) y (4.153) describen el espacio de estados del sistema. Éstas describen un sistema en forma directa II. A la descripción del espacio de estados que realizan estas ecuaciones se le conoce como *realización de espacio de estados tipo I*.

Dado que, en general, las ecuaciones de entrada y salida son

$$\mathbf{v}(n+1) = \mathbf{F}\mathbf{v}(n) + \mathbf{q}x(n) \quad (4.154)$$

$$y(n) = \mathbf{g}^T \mathbf{v}(n) + dx(n) \quad (4.155)$$

podemos describir la realización de espacio de estados mediante las matrices \mathbf{F} , \mathbf{q} , \mathbf{g} y d . Para nuestro sistema será

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}, \mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{g} = \begin{bmatrix} b_3 - b_0 a_3 \\ b_2 - b_0 a_2 \\ b_1 - b_0 a_1 \end{bmatrix}, d = b_0. \quad (4.156)$$

En general, la realización de espacio de estados de tipo I para un sistema de orden N vendrá dada por

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_N & -a_{N-1} & -a_{N-2} & \dots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}, \mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{g} = \begin{bmatrix} (b_N - b_0 a_N) \\ (b_{N-1} - b_0 a_{N-1}) \\ \vdots \\ (b_2 - b_0 a_2) \\ (b_1 - b_0 a_1) \end{bmatrix}, d = b_0. \quad (4.157)$$

23. Obtener las ecuaciones del espacio de estados que describen un sistema como el mostrado en la Fig. 4.37, forma traspuesta directa II.

Resolución:

Utilizamos como variables de entrada la salida de los bloques de retardo, es decir, la información contenida en su registro de memoria (véase el Ejercicio 22), tal como se ilustra en la Fig. 4.37. A partir de ésta podemos obtener la ecuación de salida

$$y(n) = b_0 x(n) + v_3(n) \quad (4.158)$$

y las ecuaciones de estado quedan

$$v_1(n+1) = -a_3 y(n) + b_3 x(n) = -a_3 v_3(n) + (b_3 - a_3 b_0) x(n) \quad (4.159)$$

$$v_2(n+1) = -a_2 y(n) + b_2 x(n) + v_1(n) = v_1(n) - a_2 v_3(n) + (b_2 - a_2 b_0) x(n) \quad (4.160)$$

$$v_3(n+1) = -a_1 y(n) + b_1 x(n) + v_2(n) = v_2(n) - a_1 v_3(n) + (b_1 - a_1 b_0) x(n) \quad (4.161)$$

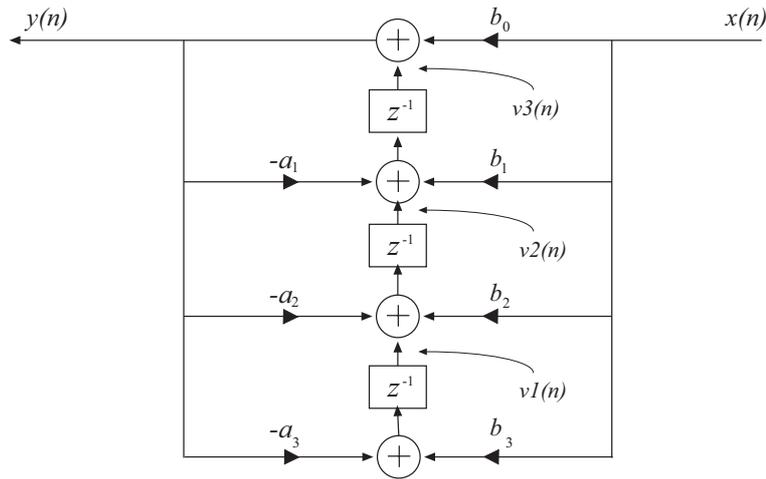


Figura 4.37: Realización en forma traspuesta directa II.

donde en todas ellas se ha sustituido la ecuación de salida. La realización de espacio de estado queda finalmente como

$$\begin{bmatrix} v_1(n+1) \\ v_2(n+1) \\ v_3(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(n) \\ v_2(n) \\ v_3(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_3 - b_0 a_3 \\ b_2 - b_0 a_2 \\ b_1 - b_0 a_1 \end{bmatrix} x(n) \quad (4.162)$$

$$y(n) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(n) \\ v_2(n) \\ v_3(n) \end{bmatrix} + b_0 x(n). \quad (4.163)$$

Ésta se conoce como *realización de espacio de estados de tipo II*. En general, las matrices de realización de espacio de estados de tipo II para un sistema de orden N vendrá dada por

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_N \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{N-1} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_{N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_1 \end{bmatrix}, \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{q} = \begin{bmatrix} b_N - b_0 a_N \\ b_{N-1} - b_0 a_{N-1} \\ b_{N-2} - b_0 a_{N-2} \\ \vdots \\ (b_1 - b_0 a_1) \end{bmatrix}, d = b_0. \quad (4.164) \quad \star$$

24. Determine las realizaciones de espacio de estados de tipo I y II para el sistema de Fibonacci.

Resolución:

Como sabemos, la secuencia de Fibonacci es $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 15, \dots\}$, que puede generarse como respuesta impulsional del sistema que satisface la ecuación en diferencias siguiente

$$y(n) = x(n) + y(n-1) + y(n-2). \quad (4.165)$$

Dado que se trata de un sistema de segundo orden, la realización de tipo I vendrá dada por

$$\begin{bmatrix} v_1(n+1) \\ v_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(n) \\ v_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x(n) \quad (4.166)$$

$$y(n) = \begin{bmatrix} (b_2 - b_0 a_2) & (b_1 - b_0 a_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(n) \\ v_2(n) \end{bmatrix} + b_0 x(n). \quad (4.167)$$

Dado que $b_0 = 1$, $b_1 = 0$, $b_2 = 0$, $a_1 = -1$ y $a_2 = -1$, tenemos que la realización de espacio de estados de tipo I es

$$\mathbf{v}(n+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{v}(n) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x(n) \quad (4.168)$$

$$y(n) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{v}(n) + x(n) \quad (4.169)$$

Por otra parte, la realización de espacio de estados de tipo II viene dada por

$$\begin{bmatrix} v_1(n+1) \\ v_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a_2 \\ 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(n) \\ v_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_2 - b_0 a_2 \\ b_1 - b_0 a_1 \end{bmatrix} x(n) \quad (4.170)$$

$$y(n) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(n) \\ v_2(n) \end{bmatrix} + b_0 x(n). \quad (4.171)$$

por lo que para nuestro caso en concreto tenemos

$$\mathbf{v}(n+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{v}(n) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x(n) \quad (4.172)$$

$$y(n) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{v}(n) + x(n). \quad (4.173)$$

25. A partir del diagrama de bloques de la Fig. 4.38, obtener la descripción de espacio de estados.

Resolución:

Usando las variables de estado que se ilustran en la Fig. 4.38 obtenemos las siguientes ecuaciones en diferencias para la descripción del estado y la salida

$$v_1(n+1) = x(n) + \frac{1}{2}v_1(n) \quad (4.174)$$

$$v_2(n+1) = \frac{1}{2}v_1(n) + v_3(n) \quad (4.175)$$

$$v_3(n+1) = v_2(n) \quad (4.176)$$

$$y(n) = 2(3x(n) + v_1(n+1)) + 2v_1(n) + \frac{1}{4}v_2(n) + v_3(n). \quad (4.177)$$

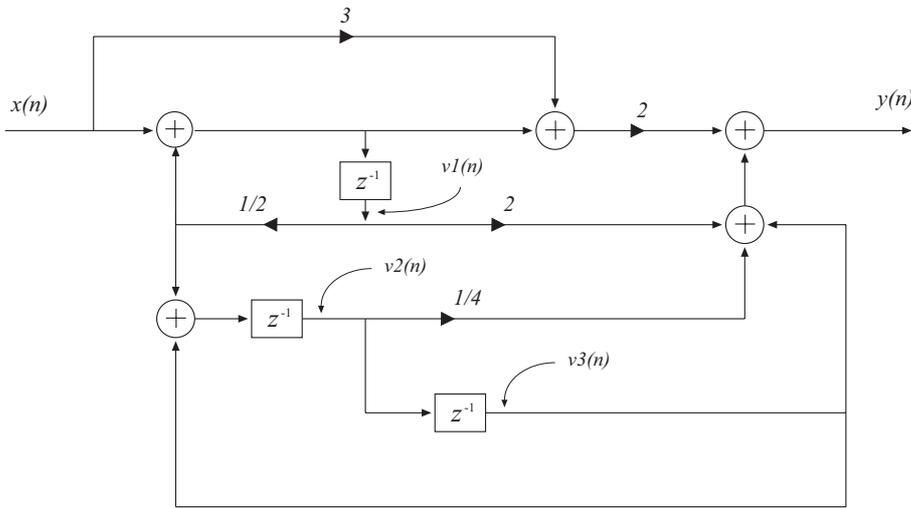


Figura 4.38: Diagrama de bloques del sistema propuesto.

Despejando $v_1(n + 1)$ de la ecuación anterior llegamos a la ecuación de salida

$$y(n) = 8x(n) + 3v_1(n) + \frac{1}{4}v_2(n) + v_3(n). \quad (4.178)$$

La descripción del espacio de estados del sistema vendrá dado de forma matricial por

$$\begin{bmatrix} v_1(n + 1) \\ v_2(n + 1) \\ v_3(n + 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(n) \\ v_2(n) \\ v_3(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x(n) \quad (4.179)$$

$$y(n) = \begin{bmatrix} 3 & 1/4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(n) \\ v_2(n) \\ v_3(n) \end{bmatrix} + 8x(n). \quad (4.180)$$

★ ★ ★

26. Obtener la realización de espacio de estados cuyo diagrama de bloques se representa en la Fig. 4.39.

Resolución:

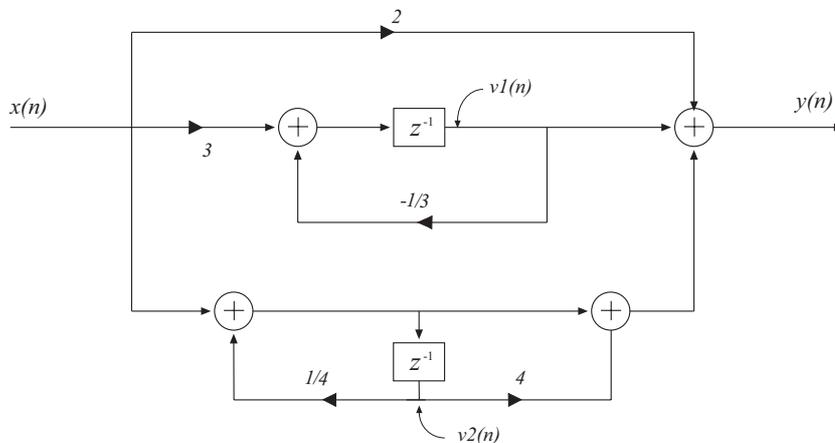


Figura 4.39: Diagrama de bloques del sistema propuesto.

Tomando como variables de estado las salidas de los bloques de retardo, tal como se ilustra en la Fig. 4.39, se obtienen las siguientes ecuaciones en diferencias para la descripción del estado y la salida

$$v_1(n+1) = 3x(n) - \frac{1}{3}v_1(n) \quad (4.181)$$

$$v_2(n+1) = \frac{1}{4}v_2(n) + x(n) \quad (4.182)$$

$$y(n) = 2x(n) + v_1(n) + v_2(n+1) + 4v_2(n). \quad (4.183)$$

Sustituyendo $v_2(n+1)$ en la ecuación de diferencias de la salida, ésta queda como

$$y(n) = 3x(n) + v_1(n) + \frac{17}{4}v_2(n). \quad (4.184)$$

En notación matricial se obtiene que la realización de espacio de estados es

$$\begin{bmatrix} v_1(n+1) \\ v_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(n) \\ v_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} x(n) \quad (4.185)$$

$$y(n) = \begin{bmatrix} 1 & 17/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(n) \\ v_2(n) \end{bmatrix} + 3x(n). \quad (4.186)$$

Cabe notar que la matriz \mathbf{F} es diagonal. Esto se debe a que, como se ve en el ejercicio 27, la realización de espacio de estados corresponde a una realización en paralelo (ver Fig. 4.39).

Por otra parte, es interesante dibujar el diagrama de bloques que se infiere a partir de la realización de espacio de estados. Este se representa en la Fig. 4.40. Como vemos, se obtiene un diagrama de bloques ligeramente distinto, simplificado, donde la rama superior posee un multiplicador $\times 3$ en lugar de $\times 2$ del diagrama de bloques original. También pueden observarse otras simplificaciones. Sin embargo, debe notarse que ambos diagramas de bloques corresponden a la misma realización de espacio de estados.

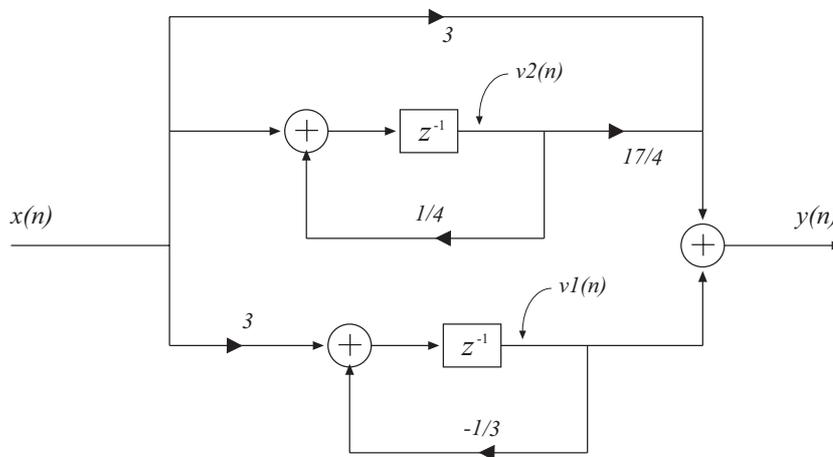


Figura 4.40: Diagrama de bloques que se infiere a partir de la descripción de espacio de estados.

27. Describa la forma en paralelo en el espacio de estados.

Resolución:

La estructura en forma paralela de espacio de estados se obtiene a partir de la expansión de la función de transferencia en fracciones simples. Así, asumiendo que $N \geq M$, tenemos que

$$H(z) = C + \sum_{k=1}^N \frac{B_k}{z - p_k}. \quad (4.187)$$

Nótese que en esta expansión tenemos el numerador y denominador como polinomios de z en lugar de z^{-1} . La salida del sistema es

$$Y(z) = H(z)X(z) = CX(z) + \sum_{k=1}^N B_k Y_k(z) \quad (4.188)$$

donde

$$Y_k(z) = \frac{X(z)}{z - p_k}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (4.189)$$

Si pasamos $Y_k(z)$ al dominio temporal, tenemos que

$$y_{k+1}(n+1) = p_k y_k(n) + x(n), \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (4.190)$$

Las ecuaciones de estado se pueden expresar como sigue

$$\mathbf{v}(n+1) = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & p_N \end{bmatrix} \mathbf{v}(n) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} x(n) \quad (4.191)$$

$$y(n) = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_N \end{bmatrix} \mathbf{v}(n) + Cx(n). \quad (4.192)$$

Esta es la denominada realización de espacio de estados en forma normal. En ella la matriz \mathbf{F} es diagonal y, por tanto, todas las variables de estado están desacopladas. ★ ★

28. Determine la realización del espacio de estados en forma normal del sistema siguiente

$$H(z) = \frac{1 + \frac{9}{16}z^{-2}}{1 - \frac{5}{4}z^{-1} + \frac{3}{8}z^{-2}}$$

Resolución:

Lo primero que hemos de hacer es poner $H(z)$ en función de polinomios de z para proceder a la expansión en fracciones simples:

$$H(z) = \frac{1 + \frac{9}{16}z^{-2}}{1 - \frac{5}{4}z^{-1} + \frac{3}{8}z^{-2}} = \frac{z^2 + \frac{9}{16}}{z^2 - \frac{5}{4}z + \frac{3}{8}} = \frac{(z - \frac{3}{4}j)(z + \frac{3}{4}j)}{(z - \frac{3}{4})(z - \frac{1}{2})}. \quad (4.193)$$

Así, expresamos $H(z)$ como

$$H(z) = C + \frac{B_1}{z - \frac{3}{4}} + \frac{B_2}{z - \frac{1}{2}}. \quad (4.194)$$

Tras algunos cálculos, obtenemos que los coeficientes de la expansión son

$$C = 1, B_1 = 9/2, B_2 = -13/4 \quad (4.195)$$

con lo que

$$H(z) = 1 + \frac{9/2}{z - \frac{3}{4}} + \frac{-13/4}{z - \frac{1}{2}}. \quad (4.196)$$

por lo que la realización de espacio de estados en forma normal queda como

$$\mathbf{v}(n+1) = \begin{bmatrix} 3/4 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \mathbf{v}(n) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x(n) \quad (4.197)$$

$$y(n) = \begin{bmatrix} 9/2 & -13/4 \end{bmatrix} \mathbf{v}(n) + x(n). \quad (4.198)$$

De estas ecuaciones cabe destacar que \mathbf{F} es una matriz diagonal, cuya diagonal está formada por los polos $\{p_k\}$ de $H(z)$, \mathbf{q} está formada por unos, d es C y la matriz \mathbf{g}^T son los coeficientes $\{B_k\}$ de la expansión en fracciones simples.

Nótese que los coeficientes de la expansión en fracciones simples tomando polinomios en z^{-1} hubiera sido diferente ya que

$$H(z) = \frac{1 + \frac{9}{16}z^{-2}}{1 - \frac{5}{4}z^{-1} + \frac{3}{8}z^{-2}} = \frac{3}{2} + \frac{6}{1 - \frac{3}{4}z^{-1}} + \frac{-13/2}{1 - \frac{1}{2}z^{-2}}. \quad (4.199)$$

La Fig. 4.41 ilustra el diagrama de bloques de la realización en forma normal.

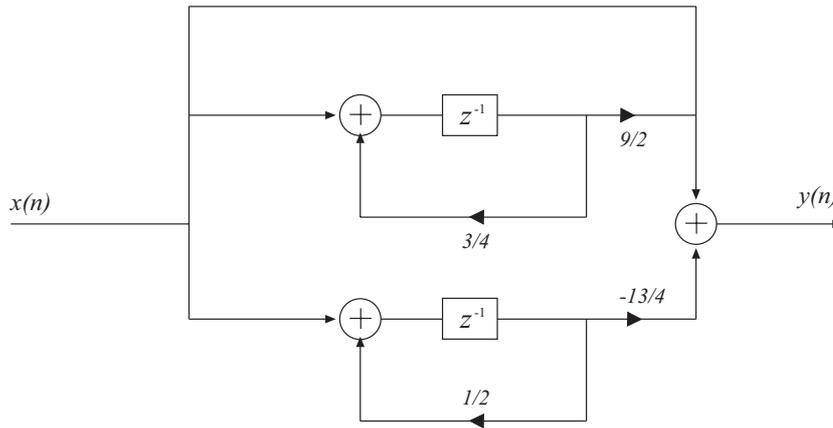


Figura 4.41: Realización en forma normal.

29. Determine y dibuje la realización del espacio de estados en forma normal del sistema siguiente

$$H(z) = \frac{\frac{1}{2} - 2z^{-1}}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2} - \frac{3}{16}z^{-3}}$$

Resolución:

En primer lugar ponemos numerador y denominador como polinomios de z , en lugar de z^{-1} .

$$H(z) = \frac{\frac{1}{2} - 2z^{-1}}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2} - \frac{3}{16}z^{-3}} = \frac{\frac{1}{2}z^3 - 2z^2}{z^3 - \frac{3}{4}z^2 + \frac{1}{4}z - \frac{3}{16}}. \quad (4.200)$$

A continuación ya podemos desarrollar $H(z)$ en fracciones simples de la forma

$$H(z) = C + \frac{B_1}{z - \frac{j}{2}} + \frac{B_2}{z + \frac{j}{2}} + \frac{B_3}{z - \frac{3}{4}}. \quad (4.201)$$

En primer lugar, tenemos que $C = 1/2$ por ser el cociente entre los dos coeficientes de grado 3. Por otra parte, tras unos cálculos, obtenemos que

$$B_1 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}j = A,$$

$$B_2 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}j = A^*,$$

$$B_3 = -\frac{9}{8}. \quad (4.202)$$

La realización de espacio de estados en forma normal queda como sigue

$$\mathbf{v}(n+1) = \begin{bmatrix} j/2 & 0 & 0 \\ 0 & -j/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 \end{bmatrix} \mathbf{v}(n) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} x(n) \quad (4.203)$$

$$y(n) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}j & -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}j & -\frac{9}{8} \end{bmatrix} \mathbf{v}(n) + \frac{1}{2}x(n). \quad (4.204)$$

Nótese que al realizar este sistema de forma normal, obtenemos elementos complejos fruto de la existencia de polos complejos en el denominador. Dado que una realización de este tipo es computacionalmente más compleja, podemos agrupar las fracciones que posean polos complejos conjugado para eliminar los coeficientes complejos. Así,

$$H(z) = \frac{1}{2} + \frac{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}z}{z^2 + \frac{1}{4}} + \frac{-\frac{9}{8}}{z - \frac{3}{4}} \quad (4.205)$$

donde, como vemos, hemos eliminado los coeficientes complejos. En este caso, la representación de la realización del sistema sería la mostrada en la Fig. 4.42. El sistema de segundo orden procedente de la agrupación es realizado en forma directa II. La realización de espacio de estados es

$$\mathbf{v}(n+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 \end{bmatrix} \mathbf{v}(n) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} x(n) \quad (4.206)$$

$$y(n) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{9}{8} \end{bmatrix} \mathbf{v}(n) + \frac{1}{2}x(n). \quad (4.207)$$

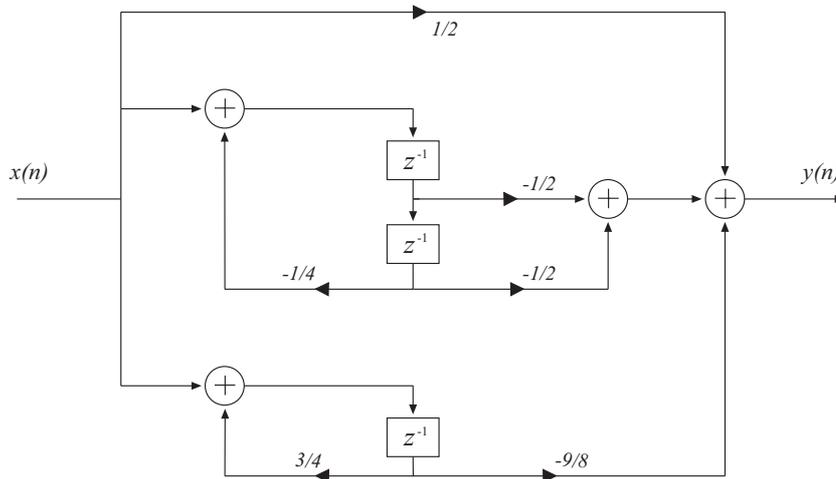


Figura 4.42: Realización en forma normal.

donde puede observarse que las variables de estado $v_1(n)$ y $v_2(n)$ eran independientes entre sí en la forma normal y en esta última vuelven a acoplarse. Sin embargo, hemos conseguido eliminar los coeficientes complejos.

★ ★ ★

30. Describir y representar la realización de estados en forma acoplada para un sistema de segundo orden.

Resolución:

Dado un sistema de segundo orden, o en su caso, una sección de segundo orden de un sistema, es útil emplear la denominada *realización en forma acoplada* cuando presente un par de polos complejos conjugados.

Dada $H(z)$, si presenta un par de polos complejos conjugados, podemos realizar una expansión en fracciones simples como

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = \frac{b_0 z^2 + b_1 z + b_2}{z^2 + a_1 z + a_2} = b_0 + \frac{A}{z - p} + \frac{A^*}{z - p^*}. \quad (4.208)$$

De forma idéntica al desarrollo utilizado en la realización en forma normal, la salida $Y(z)$ podemos ponerla como

$$Y(z) = b_0 X(z) + \frac{AX(z)}{z - p} + \frac{A^* X(z)}{z - p^*}. \quad (4.209)$$

Si ahora definimos

$$S(z) = \frac{AX(z)}{z - p} \quad (4.210)$$

y pasamos ésta al dominio temporal, tenemos que

$$s(n+1) = ps(n) - Ax(n). \quad (4.211)$$

El problema es que las cantidades p , A y $s(n)$ son complejas, por lo que, en lugar de definir $s(n)$ como variable de estado, podemos hacerlo como

$$s(n) = v_1(n) + jv_2(n) \quad (4.212)$$

donde $v_1(n)$ y $v_2(n)$ serán las variables de estado y

$$p = \alpha_1 + j\alpha_2, \quad A = q_1 + jq_2. \quad (4.213)$$

Sustituyendo p y A en la Ec. (4.212), obtenemos las ecuaciones de estado siguientes

$$v_1(n+1) = \alpha_1 v_1(n) - \alpha_2 v_2(n) + q_1 x(n) \quad (4.214)$$

$$v_2(n+1) = \alpha_2 v_1(n) + \alpha_1 v_2(n) + q_2 x(n). \quad (4.215)$$

Por otro lado, la ecuación de salida se puede poner como

$$y(n) = b_0 x(n) + s(n) + s^*(n) = b_0 x(n) + 2v_1(n). \quad (4.216)$$

Así, la realización de espacio de estados en forma acoplada queda

$$\mathbf{v}(n+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & -\alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_1 \end{bmatrix} \mathbf{v}(n) + \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} x(n) \quad (4.217)$$

$$y(n) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v}(n) + b_0 x(n). \quad (4.218)$$

y su representación para una sección de segundo orden se muestra en la Fig. 4.43. Como vemos, los coeficientes utilizados en la realización son directamente b_0 y A , obtenidos de la expansión en fracciones simples, y los polos complejos conjugados.

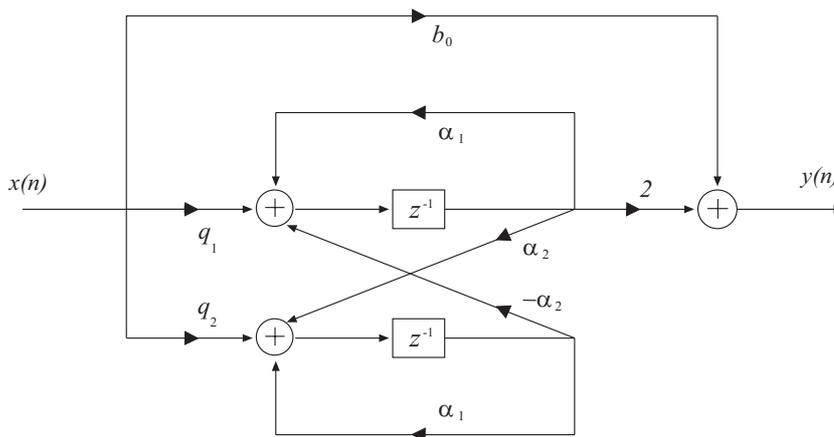


Figura 4.43: Realización en forma acoplada de un sistema de segundo orden.



31. Determine la realización de espacio de estados en forma acoplada para el sistema

$$H(z) = \frac{2r \sin \theta z^{-1}}{1 - 2r \cos \theta z^{-1} + r^2 z^{-2}}$$

Resolución:

Poniendo numerador y denominador como polinomios en z y realizando la descomposición en fracciones simples se puede obtener

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{2r \sin \theta z^{-1}}{1 - 2r \cos \theta z^{-1} + r^2 z^{-2}} \\ &= \frac{2r \sin \theta z}{z^2 - 2r \cos \theta z + r^2} = \frac{A}{z - (r \cos \theta + jr \sin \theta)} + \frac{B}{z - (r \cos \theta - jr \sin \theta)}. \end{aligned} \quad (4.219)$$

Tenemos un par de polos complejos conjugados en $p = r\cos\theta \pm jr\sin\theta$, por lo que $\alpha_1 = r\cos\theta$ y $\alpha_2 = r\sin\theta$. Realizando algunos cálculos tenemos que $A = B^* = r\sin\theta - jr\cos\theta$ con lo que $q_1 = r\sin\theta$ y $q_2 = -r\cos\theta$. Las cantidades α_1 , α_2 , q_1 y q_2 se asignan a partir de los polos y coeficientes complejos como se vió en el ejercicio 30. Así, la realización de espacio de estados en forma acoplada viene dada por las ecuaciones siguientes:

$$\mathbf{v}(n+1) = \begin{bmatrix} r\cos\theta & -r\sin\theta \\ r\sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix} \mathbf{v}(n) + \begin{bmatrix} r\sin\theta \\ -r\cos\theta \end{bmatrix} x(n) \quad (4.220)$$

$$y(n) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v}(n). \quad (4.221)$$

y su representación para una sección de segundo orden se muestra en la Fig. 4.44.

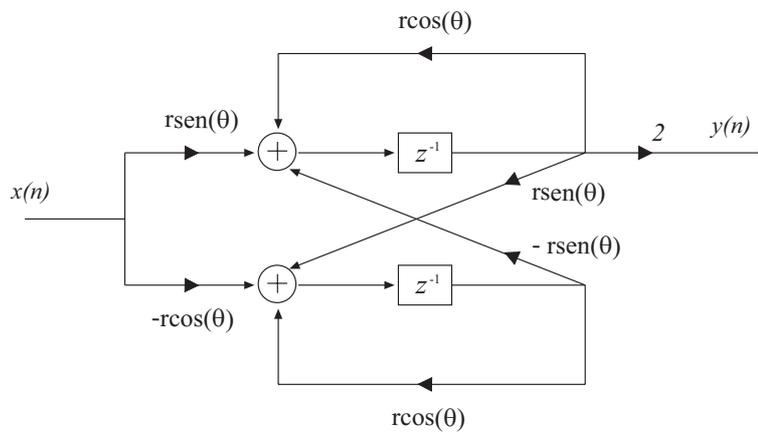


Figura 4.44: Realización en forma acoplada.

32. Dado el sistema

$$y(n) = x(n-1) - \frac{1}{3}x(n-2) - \frac{1}{4}y(n-2),$$

obtenga y dibuje la realización de espacio de estados en forma acoplada.

Resolución:

Para proceder a la obtención de la realización requerida, obtendremos la función de transferencia $H(z)$, que es

$$H(z) = \frac{z^{-1} - \frac{1}{3}z^{-2}}{1 + \frac{1}{4}z^{-2}} = \frac{z - \frac{1}{3}}{z^2 + \frac{1}{4}} \quad (4.222)$$

Realizando la expansión en fracciones simples, tenemos que

$$H(z) = \frac{z - \frac{1}{3}}{z^2 + \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}j}{z - \frac{1}{2}j} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}j}{z + \frac{1}{2}j}. \quad (4.223)$$

Nótese que tenemos polos y coeficientes complejos conjugados. Los polos $\{p, p^*\}$ son $p = \alpha_1 \pm j\alpha_2 = 0 \pm j\frac{1}{2}$, por lo que $\alpha_1 = 0$ y $\alpha_2 = \frac{1}{2}$. En cuanto a los coeficientes $\{A, A^*\}$ son $A = q_1 \pm jq_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}j$, por lo que $q_1 = \frac{1}{2}$ y $q_2 = \frac{1}{3}$.

Así, la realización de espacio de estados en forma acoplada queda expresada por

$$\mathbf{v}(n + 1) = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v}(n) + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/3 \end{bmatrix} x(n) \quad (4.224)$$

$$y(n) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v}(n). \quad (4.225)$$

y su representación para una sección de segundo orden se muestra en la Fig. 4.45.

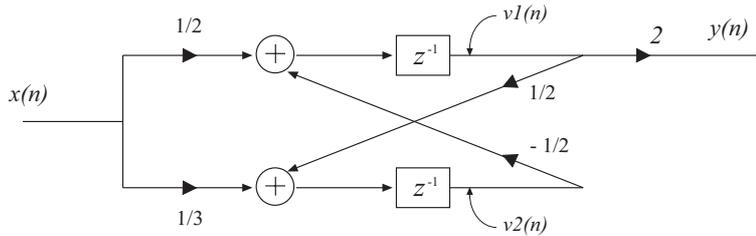


Figura 4.45: Realización en forma acoplada obtenida.



33. Dada la siguiente realización de espacio de estados

$$\mathbf{v}(n + 1) = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix} \mathbf{v}(n) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x(n)$$

$$y(n) = \begin{bmatrix} 2 & 1/4 \end{bmatrix} \mathbf{v}(n) + x(n)$$

se desea hallar una realización equivalente.

Resolución:

Como sabemos, un determinado sistema posee una gran variedad de posibilidades en su realización. En concreto, la realización de espacio de estados propuesta puede representarse mediante el diagrama de bloques de la Fig. 4.46.

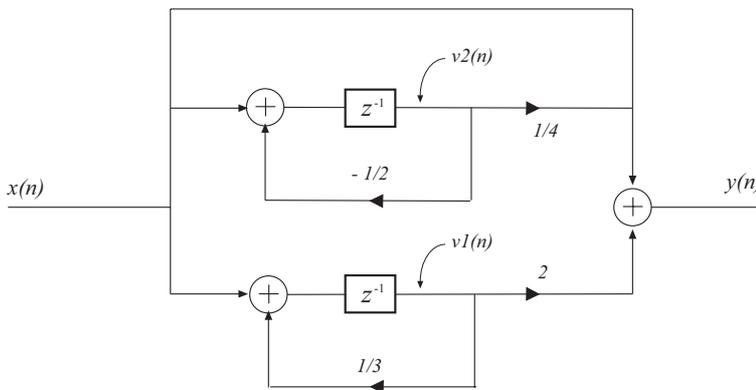


Figura 4.46: Realización del sistema propuesto.

Si pasamos las ecuaciones en diferencias, de estado y de salida, al plano transformado

Z, obtenemos

$$V_1(z)\left(z - \frac{1}{3}\right) = X(z), \quad (4.226)$$

$$V_2(z)\left(z + \frac{1}{2}\right) = X(z), \quad (4.227)$$

$$Y(z) = 2V_1(z) + \frac{1}{4}V_2(z) + X(z). \quad (4.228)$$

Sustituyendo las dos primeras en $Y(z)$, obtenemos que

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^2 + \frac{29}{12}z + \frac{3}{4}}{z^2 + \frac{1}{6}z - \frac{1}{6}} = \frac{1 + \frac{58}{24}z^{-1} + \frac{9}{12}z^{-2}}{1 + \frac{1}{6}z^{-1} - \frac{1}{6}z^{-2}} \quad (4.229)$$

de donde podemos utilizar los coeficientes $\{b_k\}$ del numerador y $\{a_k\}$ del denominador para obtener la realización equivalente de tipo I:

$$b_0 = 1, b_1 = 29/12, b_2 = 3/4, a_1 = 1/6, a_2 = -1/6. \quad (4.230)$$

Así, la realización equivalente de tipo I vendrá dada por

$$\mathbf{v}(n+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/6 & -1/6 \end{bmatrix} \mathbf{v}(n) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x(n) \quad (4.231)$$

$$y(n) = \begin{bmatrix} 11/12 & 27/12 \end{bmatrix} \mathbf{v}(n) + x(n). \quad (4.232)$$

Sin embargo, dado que la relación entrada-salida no describe la realización del sistema, podemos obtener infinidad de realizaciones equivalentes. En general, dada una realización de un sistema de dimensión N :

$$\mathbf{v}(n+1) = \mathbf{F}\mathbf{v}(n) + \mathbf{q}x(n) \quad (4.233)$$

$$y(n) = \mathbf{g}^T \mathbf{v}(n) + dx(n). \quad (4.234)$$

Si tomamos cualquier matriz invertible \mathbf{P} de dimensión $N \times N$, podemos definir un nuevo vector de entrada

$$\hat{\mathbf{v}}(n) = \mathbf{P}\mathbf{v}(n). \quad (4.235)$$

Usando esta expresión, las ecuaciones de estado y salida se convierten en

$$\hat{\mathbf{v}}(n+1) = (\mathbf{P}\mathbf{F}\mathbf{P}^{-1})\hat{\mathbf{v}}(n) + (\mathbf{P}\mathbf{q})x(n) \quad (4.236)$$

$$y(n) = (\mathbf{g}^T \mathbf{P}^{-1})\hat{\mathbf{v}}(n) + dx(n). \quad (4.237)$$

Es decir, a partir de una transformación \mathbf{P} , se definen los nuevos parámetros del sistema

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{P}\mathbf{F}\mathbf{P}^{-1}, \hat{\mathbf{q}} = \mathbf{P}\mathbf{q}, \hat{\mathbf{g}}^T = \mathbf{g}^T \mathbf{P}^{-1}, \hat{d} = d. \quad (4.238)$$

Y así, las ecuaciones de estados y salida se pueden expresar como

$$\hat{\mathbf{v}}(n+1) = \hat{\mathbf{F}}\hat{\mathbf{v}}(n) + \hat{\mathbf{q}}x(n) \quad (4.239)$$

$$y(n) = \hat{\mathbf{g}}^T \hat{\mathbf{v}}(n) + dx(n). \quad (4.240)$$

Nótese que transformando las variables de estado hemos obtenido un nuevo conjunto de ecuaciones de estado y de salida. Este nuevo conjunto de ecuaciones equivale a una estructura diferente. En general, habrá tantas como infinitas posibilidades de elección de \mathbf{P} .

Si, por ejemplo, transformamos la realización normal propuesta, a partir de una matriz de transformación $\mathbf{P}_{2 \times 2}$,

$$\mathbf{P}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.241)$$

tenemos la nueva realización

$$\mathbf{v}(n+1) = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 \\ -5/6 & 1/3 \end{bmatrix} \mathbf{v}(n) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} x(n) \quad (4.242)$$

$$y(n) = \begin{bmatrix} -7/4 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{v}(n) + x(n). \quad (4.243)$$

La representación de esta realización se ilustra en la Fig. 4.47. Como podemos ver, el diagrama de bloques de la realización es considerablemente diferente de la realización inicial, aunque son equivalentes, pues se corresponden con el mismo sistema.

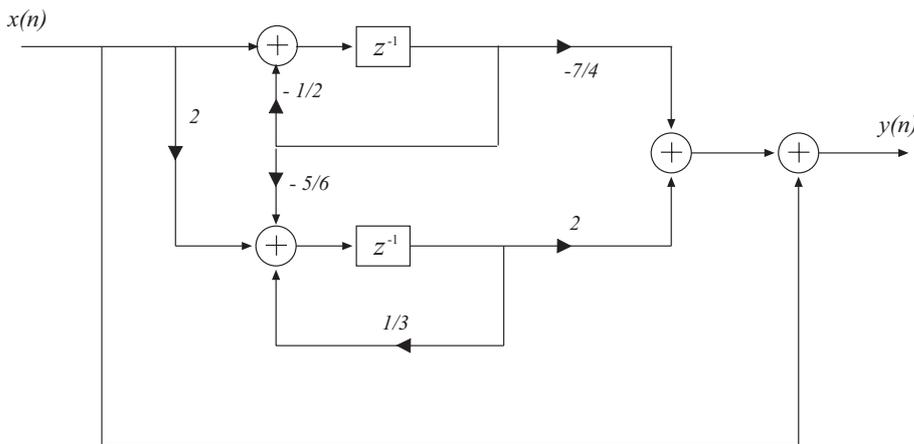


Figura 4.47: Realización equivalente a la mostrada en la Fig. 4.46.

★ ★ ★

34. Determinar la respuesta impulsional que genera el sistema definido por

$$\mathbf{v}(n+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{v}(n) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x(n)$$

$$y(n) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{v}(n) + x(n).$$

Resolución:

A partir de la realización de espacio de estados podemos obtener la expresión analítica de la respuesta impulsional, $h(n)$, del sistema digital. Esta se obtiene de aplicar una entrada impulso unitario $x(n) = \delta(n)$ en la expresión (4.244), que permite determinar la salida a partir de la entrada $x(n)$, el estado inicial $\mathbf{v}(n_0)$ y las matrices de la

realización del espacio de estados

$$y(n) = \mathbf{g}^T \mathbf{F}^{n-n_0} \mathbf{v}(n_0) + \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{g}^T \mathbf{F}^{n-1-k} \mathbf{q} x(k) + dx(n). \quad (4.244)$$

Si particularizamos para $x(n) = \delta(n)$ y suponemos estado inicial cero, la expresión de la respuesta impulsional $y(n) = h(n)$ queda

$$h(n) = \mathbf{g}^T \mathbf{F}^{n-1} \mathbf{q} u(n-1) + d\delta(n). \quad (4.245)$$

Nótese que conocemos todas las matrices y vectores \mathbf{g} , \mathbf{F} , \mathbf{q} y d , pero el problema es el exponente de la matriz \mathbf{F} . Este cambia para cada n . Sin embargo, existe una forma de resolver este problema, obtener la realización de espacio de estados en forma normal, es decir, aquella cuya matriz $\hat{\mathbf{F}}$ es diagonal. Así, \mathbf{F}^n es la matriz diagonal cuyos elementos se elevan a n .

Por ello, hemos de hallar primero la forma normal, por lo que primero calculamos el polinomio característico

$$\det(\mathbf{F} - \lambda \mathbf{I}) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \quad (4.246)$$

por lo que los autovalores son

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}. \quad (4.247)$$

El autovector asociado a λ_1 ha de cumplir

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}_1 = \lambda_1 \mathbf{u}_1. \quad (4.248)$$

Por tanto,

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} \quad (4.249)$$

es el autovector de λ_1 , mientras que

$$\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (4.250)$$

es el de λ_2 .

Ahora formamos la matriz \mathbf{U} cuyas columnas son los autovectores de \mathbf{F} :

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix}. \quad (4.251)$$

A partir de esta ya podemos obtener la matriz de transformación de la realización propuesta a la realización de forma normal:

$$\mathbf{P} = \mathbf{U}^{-1} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{bmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.252)$$

A continuación podemos obtener todas las matrices $\hat{\mathbf{F}}$, $\hat{\mathbf{q}}$ y $\hat{\mathbf{g}}$ de la forma general

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{P}\mathbf{F}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad (4.253)$$

$$\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{P}\mathbf{q} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \end{bmatrix}, \quad (4.254)$$

$$\hat{\mathbf{g}}^T = \mathbf{g}^T\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{g}^T\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \frac{3+\sqrt{5}}{2} & \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}. \quad (4.255)$$

El valor escalar d se mantiene entre transformaciones. La respuesta impulsional que producen ambas realizaciones es idéntica, aplicando las matrices de la forma normal tenemos que

$$\begin{aligned} h(n) &= \hat{\mathbf{g}}^T \hat{\mathbf{F}}^{n-1} \hat{\mathbf{q}} u(n-1) + d\delta(n) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{3+\sqrt{5}}{2} & \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^{n-1} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \end{bmatrix} u(n-1) + \delta(n) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \right] u(n-1) + \delta(n). \end{aligned} \quad (4.256)$$

Esta es la expresión analítica de la respuesta impulsional, que será la secuencia

$$h(n) = \{ \underset{\uparrow}{1}, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots \}, \quad (4.257)$$

es decir, la secuencia de Fibonacci. Nótese como ha sido sencillo obtener esta dado que para una matriz diagonal se debe cumplir

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix}. \quad (4.258)$$

★ ★ ★

35. Determine la respuesta impulsional del sistema descrito por

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 5/6 & 4/3 & 4/3 \\ -1/3 & -5/6 & -4/3 \\ 1/3 & 1/3 & 5/6 \end{bmatrix}, \mathbf{q} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}, d = 1$$

usando técnicas de espacio de estados.

Resolución:

En primer lugar hemos de obtener la realización equivalente en forma normal, para conseguir una matriz $\hat{\mathbf{F}}$ diagonal. Para ello, primero calculamos el determinante $\det(\mathbf{F} - \lambda\mathbf{I})$

$$\det \left(\begin{bmatrix} 5/6 - \lambda & 4/3 & 4/3 \\ -1/3 & -5/6 - \lambda & -4/3 \\ 1/3 & 1/3 & 5/6 - \lambda \end{bmatrix} \right) = \lambda^3 - \frac{5}{6}\lambda^2 - \frac{1}{4}\lambda + \frac{5}{24} = \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\left(\lambda - \frac{5}{6}\right) = 0. \quad (4.259)$$

De aquí, los autovalores son

$$\lambda_1 = 5/6, \lambda_2 = 1/2, \lambda_3 = -1/2, \quad (4.260)$$

y los autovectores asociados son, respectivamente,

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.261)$$

La matriz \mathbf{U} cuyas columnas son los autovectores es

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.262)$$

A partir de ésta obtenemos la matriz de transformación de la realización propuesta a la realización de espacio de estados en forma normal. Ésta es

$$\mathbf{P} = \mathbf{U}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (4.263)$$

y las nuevas matrices y vectores son los siguientes

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{P}\mathbf{F}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 5/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}, \quad (4.264)$$

$$\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{P}\mathbf{q} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad (4.265)$$

$$\hat{\mathbf{g}}^T = \mathbf{g}^T\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{g}^T\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}. \quad (4.266)$$

junto con el valor escalar d que se mantiene entre transformaciones:

$$\hat{d} = d = 1. \quad (4.267)$$

Finalmente, calculamos la respuesta impulsional

$$y_{zs}(n) = \sum_{k=n_0}^{n-1} \hat{\mathbf{g}}^T \hat{\mathbf{F}}^{n-1-k} \hat{\mathbf{q}} x(k) + \hat{d} x(n) \quad (4.268)$$

donde, asumiendo una entrada impulsional $x(n) = \delta(n)$, se obtiene

$$\begin{aligned} y_{zs}(n) &= h(n) = \hat{\mathbf{g}}^T \hat{\mathbf{F}}^{n-1} \hat{\mathbf{q}} u(n-1) + \hat{d} \delta(n) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} u(n-1) + \delta(n) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/2(-1/2)^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} + \delta(n) \\ &= (-1/2)^{n-1} u(n-1) + \delta(n). \end{aligned} \quad (4.269)$$

36. Determine el sistema traspuesto de la realización

$$\mathbf{v}(n+1) = \mathbf{F}\mathbf{v}(n) + \mathbf{q}x(n) \quad (4.270)$$

$$y(n) = \mathbf{g}^T \mathbf{v}(n) + dx(n)$$

y compruebe que ambos son equivalentes a partir de la respuesta impulsional.

Resolución:

El hecho de aplicar la transposición a una realización como la indicada implica una transformación de las ecuaciones de estado y de salida

$$\mathbf{v}'(n+1) = \mathbf{F}^T \mathbf{v}'(n) + \mathbf{g}x(n) \quad (4.271)$$

$$y'(n) = \mathbf{q}^T \mathbf{v}'(n) + dx(n). \quad (4.272)$$

Nótese que se han transformado las variables de estado y $\mathbf{F}' = \mathbf{F}^T$, $\mathbf{q}' = \mathbf{g}$, y $\mathbf{g}'^T = \mathbf{q}^T$, es decir, los vectores \mathbf{q} y \mathbf{g} se intercambian, y \mathbf{F} se traspone.

Sabemos que la respuesta impulsional viene dada por

$$h'(n) = \mathbf{q}^T (\mathbf{F}^T)^{n-1} \mathbf{g}u(n-1) + d\delta(n) \quad (4.273)$$

aplicando que $(\mathbf{F}^T)^{n-1} = (\mathbf{F}^{n-1})^T$ queda

$$h'(n) = \mathbf{q}^T (\mathbf{F}^{n-1})^T \mathbf{g}u(n-1) + d\delta(n). \quad (4.274)$$

Dado que $\mathbf{q}^T (\mathbf{F}^{n-1})^T \mathbf{g}$ es un escalar, será igual a su traspuesta, por lo que

$$(\mathbf{q}^T (\mathbf{F}^{n-1})^T \mathbf{g})^T = \mathbf{g}^T \mathbf{F}^{n-1} \mathbf{q} \quad (4.275)$$

lo cual implica que

$$h'(n) = (\mathbf{q}^T (\mathbf{F}^{n-1})^T \mathbf{g})u(n-1) + d\delta(n) = \mathbf{g}^T \mathbf{F}^{n-1} \mathbf{q}u(n-1) + d\delta(n) = h(n) \quad (4.276)$$

con lo que $h'(n) = h(n)$. Así, podemos afirmar que una realización y su traspuesta son equivalentes pues poseen la misma respuesta impulsional.

Como ejemplo, podemos considerar las matrices \mathbf{F} , \mathbf{q} , \mathbf{g} y d que se obtuvieron en el ejercicio 22 para la forma directa II. Si comparamos estos con las matrices \mathbf{F}' , \mathbf{q}' , \mathbf{g}' y d' obtenidas para la realización de la forma directa II traspuesta, inmediatamente observamos lo anterior, es decir

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F}^T, \quad \mathbf{g}' = \mathbf{q}, \quad \mathbf{q}' = \mathbf{g}, \quad d' = d \quad (4.277)$$

siendo ambos equivalentes y, por tanto, su respuesta impulsional idéntica. ★

37. Determinar las realizaciones de espacio de estados del sistema del ejercicio 17 y su traspuesta.

Resolución:

La Fig. 4.25 representa el sistema propuesto. Tomando $v_1(n)$ como la salida del bloque superior de retardo y $v_2(n)$ como la salida del restante, la realización de espacio de estados de esta estructura es

$$\mathbf{v}(n+1) = \begin{bmatrix} -2 & -1/2 \\ -2 & -1/2 \end{bmatrix} \mathbf{v}(n) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x(n) \quad (4.278)$$

$$y(n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v}(n) + 0 \cdot x(n) \quad (4.279)$$

El diagrama de bloques transpuesto se representa en la Fig. 4.27 y su realización de espacio de estados es

$$\mathbf{v}'(n+1) = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \mathbf{v}'(n) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x(n) \quad (4.280)$$

$$y'(n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v}'(n) + 0 \cdot x(n) \quad (4.281)$$

De estas podemos ver que, efectivamente, ambas realizaciones se transforman mediante

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F}^T, \mathbf{g}' = \mathbf{q}, \mathbf{q}' = \mathbf{g}, d' = d \quad (4.282)$$

siendo ambos equivalentes y, por tanto, su respuesta impulsional idéntica.

38. Dada la realización de espacio de estados del sistema descrito por las siguientes matrices

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1/8 & 5/8 \\ 5/8 & 1/8 \end{bmatrix}, \mathbf{q} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, d = 1$$

se pide:

- Hallar la salida de la respuesta impulsional para $n = 57$.
- Ante la entrada 0, asumiendo

$$\mathbf{v}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.283)$$

como estado inicial del sistema, calcular la salida para el instante $n = 12$.

- Determine el estado inicial ante el cuál la respuesta es idéntica a la respuesta impulsional con estado inicial nulo.

Resolución:

A partir de una realización de espacio de estados, la expresión que proporciona la salida del sistema ante una entrada $x(n)$ y un estado inicial $\mathbf{v}(n_0)$ es

$$y(n) = \mathbf{g}^T \mathbf{F}^{n-n_0} \mathbf{v}(n_0) + \sum_{k=n_0}^{n-1} \mathbf{g}^T \mathbf{F}^{n-1-k} \mathbf{q} x(k) + dx(n). \quad (4.284)$$

Nótese que esta expresión es tan completa que tiene en cuenta incluso el estado inicial del sistema y como éste, caso de no ser cero, interviene en las salidas futuras del sistema.

A partir de esta expresión podemos determinar la salida para dos casos especiales. El primero es la respuesta del sistema cuando la entrada es nula

$$y_{zi}(n) = \mathbf{g}^T \mathbf{F}^{n-n_0} \mathbf{v}(n_0). \quad (4.285)$$

Por otra parte, la respuesta cuando el estado es cero viene dada por

$$y_{zs}(n) = \sum_{k=n_0}^{n-1} \mathbf{g}^T \mathbf{F}^{n-1-k} \mathbf{q} x(k) + dx(n). \quad (4.286)$$

En general, se cumple que

$$y(n) = y_{zi}(n) + y_{zs}(n). \quad (4.287)$$

- a) Para poder calcular la respuesta impulsional, caso especial donde el estado inicial es cero y la entrada $x(n) = \delta(n)$, hallamos las matrices de la realización de espacio de estados en forma normal. Para ello primero calculamos el siguiente determinante

$$\det \left(\begin{bmatrix} 1/8 - \lambda & 5/8 \\ 5/8 & 1/8 - \lambda \end{bmatrix} \right) = \lambda^2 - \frac{1}{4}\lambda - \frac{3}{8} = \left(\lambda - \frac{3}{4}\right)\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) = 0. \quad (4.288)$$

Los autovalores que se extraen del polinomio característico son

$$\lambda_1 = 3/4, \lambda_2 = -1/2 \quad (4.289)$$

cuyos autovectores correspondientes son

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}. \quad (4.290)$$

Ahora formamos la matriz \mathbf{U} cuyas columnas son los autovectores de \mathbf{F} :

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (4.291)$$

A partir de esta ya podemos obtener la matriz de transformación desde la realización propuesta a la realización de forma normal:

$$\mathbf{P} = \mathbf{U}^{-1} = \frac{-1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.292)$$

A continuación podemos obtener todas las matrices $\hat{\mathbf{F}}$, $\hat{\mathbf{q}}$ y $\hat{\mathbf{g}}$ de la forma normal

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{P}\mathbf{F}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 3/4 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix}, \quad (4.293)$$

$$\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{P}\mathbf{q} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 3/4 \\ -1/4 \end{bmatrix}, \quad (4.294)$$

$$\hat{\mathbf{g}}^T = \mathbf{g}^T\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{g}^T\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.295)$$

y

$$\hat{d} = d = 1. \quad (4.296)$$

Cabe remarcar que los elementos de la diagonal de $\hat{\mathbf{F}}$ son las raíces del polinomio característico, que coinciden con los polos del sistema, por lo que podemos decir que éste es estable.

La expresión analítica de la respuesta impulsional viene dada por

$$\begin{aligned}
 h(n) &= \hat{\mathbf{g}}^T \hat{\mathbf{F}}^{n-1} \hat{\mathbf{q}} u(n-1) + \hat{d} \delta(n) \\
 &= \begin{bmatrix} 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (3/4)^{n-1} & 0 \\ 0 & (-1/2)^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/4 \\ -1/4 \end{bmatrix} u(n-1) + \delta(n) \\
 &= \left[5 \left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right] u(n-1) + \delta(n)
 \end{aligned} \tag{4.297}$$

por lo que podemos calcular la salida para el instante $n = 57$ sin necesidad de cálculos intermedios iterativos

$$h(57) = \left[5 \left(\frac{3}{4}\right)^{57} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^{57} \right] = 3'78 \cdot 10^{-7} \tag{4.298}$$

b) Calculemos la salida ante entrada cero y estado inicial

$$\mathbf{v}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{4.299}$$

utilizaremos la expresión siguiente

$$y_{zi}(n) = \mathbf{g}^T \mathbf{F}^{n-n_0} \mathbf{v}(n_0) \tag{4.300}$$

para el cálculo de la salida. Sin embargo, como sabemos, es más sencillo en el sistema transformado, por lo que lo primero es encontrar el estado inicial en el sistema transformado

$$\hat{\mathbf{v}}(0) = \mathbf{P} \mathbf{v}(0) = U^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.301}$$

por lo que

$$y_{zi}(n) = \mathbf{g}^T \mathbf{F}^{n-n_0} \mathbf{v}(n_0) = \begin{bmatrix} 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (3/4)^n & 0 \\ 0 & (-1/2)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \dots = 5 \left(\frac{3}{4}\right)^n. \tag{4.302}$$

Para el instante $n = 12$ la salida en estas condiciones sería $y_{zi}(12) = 0'1584$.

c) También se puede encontrar una expresión de la respuesta impulsional de forma que esta pueda ser considerada como respuesta del sistema ante entrada cero, obtenida como consecuencia de un estado inicial. Así, tomando condiciones iniciales

$$v_1(0) = 1'5, v_2(0) = 0'5 \tag{4.303}$$

tenemos que

$$\mathbf{v}(0) = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \tag{4.304}$$

y el estado transformado es

$$\hat{\mathbf{v}}(0) = \mathbf{P} \mathbf{v}(0) = U^{-1} \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} \tag{4.305}$$

Así, la salida ante entrada cero es

$$y_{zi}(n) = \hat{\mathbf{g}}^T \hat{\mathbf{F}}^{n-n_0} \hat{\mathbf{v}}(0) = \begin{bmatrix} 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (3/4)^n & 0 \\ 0 & (-1/2)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \dots = 5\left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \quad (4.306)$$

Nótese que esta es una respuesta similar a la respuesta impulsional pero en lugar de haber sido producida por una entrada impulso, lo es por un estado inicial equivalente.

Así, $\mathbf{v}(0)$ es el estado inicial buscado mientras que $\hat{\mathbf{v}}(0)$ es dicho estado transformado a la realización de espacio de estados en forma normal.

★ ★ ★

39. Determine la función de transferencia cuya respuesta impulsional es la secuencia de Fibonacci, mediante a) el empleo de la transformada Z y b) las técnicas de espacio de estados. Este sistema se puede describir por la siguiente realización de espacio de estados:

$$\mathbf{v}(n+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{v}(n) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x(n) \quad (4.307)$$

$$y(n) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{v}(n) + x(n)$$

Resolución:

- a) En primer lugar, podemos encontrar $H(z)$ a partir de la transformada Z de las ecuaciones de estado y de salida. Así, tenemos que ésta es

$$V_1(z)z = V_2(z) \quad (4.308)$$

$$V_2(z)z = V_1(z) + V_2(z) + X(z) \quad (4.309)$$

$$Y(z) = V_1(z) + V_2(z) + X(z) \quad (4.310)$$

De las dos primeras ecuaciones (4.308) y (4.309), obtenemos

$$V_2(z) = X(z) \frac{z}{z^2 - 1 - z}, \quad V_1(z) = X(z) \frac{1}{z^2 - 1 - z}. \quad (4.311)$$

Si sustituimos estas ecuaciones en la transformada de la salida (Ec. (4.310)), tenemos que

$$Y(z) = X(z) \left(\frac{1}{z^2 - 1 - z} + \frac{z}{z^2 - 1 - z} + \frac{z^2 - 1 - z}{z^2 - 1 - z} \right) = X(z) \left(\frac{z^2}{z^2 - 1 - z} \right) \quad (4.312)$$

por lo que queda

$$H(z) = \frac{1}{1 - z^{-1} - z^{-2}}. \quad (4.313)$$

- b) Por otra parte, la función de transferencia también se puede obtener mediante técnicas de espacio de estados. Considerando las ecuaciones de estado y salida

$$\mathbf{v}(n+1) = \mathbf{F}\mathbf{v}(n) + \mathbf{q}x(n) \quad (4.314)$$

$$y(n) = \mathbf{g}^T \mathbf{v}(n) + dx(n). \quad (4.315)$$

en el plano transformado, el estado es

$$V(z) = \begin{bmatrix} V_1(z) \\ V_2(z) \\ \vdots \\ V_N(z) \end{bmatrix}. \quad (4.316)$$

Las ecuaciones de estados se transforman como

$$zV(z) = \mathbf{F}V(z) + \mathbf{q}X(z), \quad (4.317)$$

que equivale a

$$V(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{q}X(z). \quad (4.318)$$

Finalmente la ecuación de salida queda como

$$Y(z) = \mathbf{g}^T V(z) + dX(z) \quad (4.319)$$

por lo que si sustituimos la Ec. (4.318) en (4.319), tendremos la salida en función de la entrada

$$Y(z) = [\mathbf{g}^T (z\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{q} + d]X(z) \quad (4.320)$$

y

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \mathbf{g}^T (z\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{q} + d. \quad (4.321)$$

Aplicando esta expresión para el sistema de Fibonacci, tenemos que

$$(z\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1} = \begin{bmatrix} z & -1 \\ -1 & z-1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{z^2 - z - 1} \begin{bmatrix} z-1 & 1 \\ 1 & z \end{bmatrix}, \quad (4.322)$$

por lo que

$$H(z) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{z^2 - z - 1} \begin{bmatrix} z-1 & 1 \\ 1 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 = \dots = \frac{z^2}{z^2 - z - 1}. \quad (4.323)$$

Finalmente llegamos a la misma conclusión que en el apartado anterior utilizando técnicas de espacios de estados:

$$H(z) = \frac{1}{1 - z^{-1} - z^{-2}}. \quad (4.324)$$

40. Considere un sistema descrito por las siguientes ecuaciones de espacio de estados:

$$\mathbf{v}(n+1) = \begin{bmatrix} -1/4 & 3/2 \\ 0 & 5/4 \end{bmatrix} \mathbf{v}(n) + \begin{bmatrix} 5/4 \\ 1 \end{bmatrix} x(n) \quad (4.325)$$

$$y(n) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{v}(n) + x(n)$$

Se pide:

- Dibuje el diagrama de bloques correspondiente a dicha realización de espacio de estados.
- Determine la realización equivalente en forma normal.
- Determine la función de transferencia y la respuesta impulsional del sistema mediante técnicas de espacio de estados.
- Calcule la respuesta ante entrada cero si

$$\mathbf{v}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T. \quad (4.326)$$

Resolución:

- El diagrama de bloques se muestra en la Fig. 4.48.

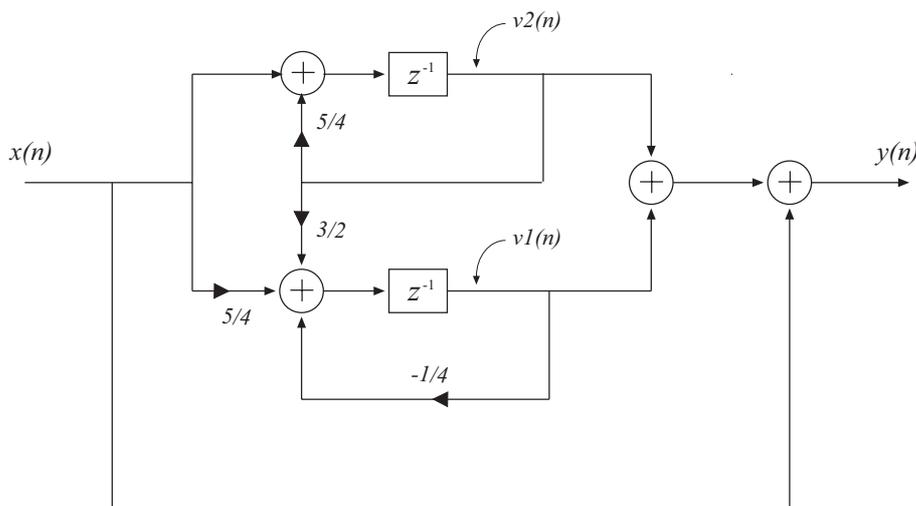


Figura 4.48: Diagrama de bloques correspondiente a la descripción de espacio de estados propuesta.

- Para obtener la realización de espacio de estados en forma normal, el primer paso es determinar la matriz de transformación \mathbf{P} de tal forma que $\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{P}\mathbf{F}\mathbf{P}^{-1}$ sea diagonal. Para ello, calculamos el determinante

$$\det(\mathbf{F} - \lambda\mathbf{I}) = \det \left(\begin{bmatrix} -1/4 - \lambda & 3/2 \\ 0 & 5/4 - \lambda \end{bmatrix} \right) = \lambda^2 - \lambda - \frac{5}{16} = 0. \quad (4.327)$$

Los autovalores de $\hat{\mathbf{F}}$ son, por tanto, $\lambda_1 = 5/4$ y $\lambda_2 = -1/4$. Sus autovectores correspondientes vienen dados por

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.328)$$

La matriz \mathbf{U} cuyas columnas son los autovectores es

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.329)$$

siendo la matriz de transformación \mathbf{P} ,

$$\mathbf{P} = \mathbf{U}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (4.330)$$

Así, las nuevas matrices y vectores tienen la forma normal siguiente

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{P}\mathbf{F}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 5/4 & 0 \\ 0 & -1/4 \end{bmatrix} \quad (4.331)$$

$$\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{P}\mathbf{q} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/4 \end{bmatrix} \quad (4.332)$$

$$\hat{\mathbf{g}}^T = \mathbf{g}^T\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{g}^T\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.333)$$

y el valor escalar d se mantiene entre transformaciones:

$$\hat{d} = d = 1. \quad (4.334)$$

La realización de espacio de estados en forma normal es

$$\mathbf{v}(n+1) = \begin{bmatrix} 5/4 & 0 \\ 0 & -1/4 \end{bmatrix} \mathbf{v}(n) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1/4 \end{bmatrix} x(n) \quad (4.335)$$

$$y(n) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{v}(n) + x(n) \quad (4.336)$$

Como vemos, el hecho de que la matriz $\hat{\mathbf{F}}$ sea diagonal implica que las variables de estado están desacopladas.

- c) La respuesta impulsional del sistema es igual si utilizamos las matrices del sistema equivalente

$$\begin{aligned} h(n) &= \hat{\mathbf{g}}^T \hat{\mathbf{F}}^{n-1} \hat{\mathbf{q}} u(n-1) + d\delta(n) \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (5/4)^{n-1} & 0 \\ 0 & (-1/4)^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1/4 \end{bmatrix} u(n-1) + \delta(n) \\ &= [2(5/4)^{n-1} + \frac{1}{4}(-1/4)^{n-1}]u(n-1) + \delta(n). \end{aligned} \quad (4.337)$$

Como vemos, la ventaja de utilizar el sistema equivalente con $\hat{\mathbf{F}}$ diagonal es que el cálculo de $\hat{\mathbf{F}}^{n-1}$ es inmediato, siendo la matriz diagonal $\hat{\mathbf{F}}$ cuyos elementos de la diagonal están elevados a $n-1$. De la observación de $\hat{\mathbf{F}}$ vemos que existen polos en $5/4$ y $-1/4$ por lo que el sistema en cuestión es inestable.

Para determinar la función de transferencia primero calculamos $(z\mathbf{I}-\mathbf{F})^{-1}$. Puede hacerse de la misma manera para cualquiera de las realizaciones.

$$(z\mathbf{I}-\mathbf{F})^{-1} = \begin{bmatrix} z+1/4 & -3/2 \\ 0 & z-5/4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{z^2-z-\frac{5}{16}} \begin{bmatrix} z-5/4 & 3/2 \\ 0 & z+1/4 \end{bmatrix} \quad (4.338)$$

por lo que

$$\begin{aligned} H(z) &= \mathbf{g}^T(z\mathbf{I}-\mathbf{F})^{-1}\mathbf{q} + d \\ &= \frac{1}{z^2-z-\frac{5}{16}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z-5/4 & 3/2 \\ 0 & z+1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5/4 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 = \dots = \frac{z^2 + \frac{5}{4}z - \frac{1}{8}}{z^2 - z - \frac{5}{16}}. \end{aligned} \quad (4.339)$$

Finalmente tenemos que

$$H(z) = \frac{1 + \frac{5}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}}{1 - z^{-1} - \frac{5}{16}z^{-2}}. \quad (4.340)$$

- d) Para calcular la respuesta ante una entrada cero, dado el estado para $n = 0$, tenemos que

$$y_{zi}(n) = \mathbf{g}^T \mathbf{F}^n \mathbf{v}(0) = \hat{\mathbf{g}}^T \hat{\mathbf{F}}^n \hat{\mathbf{v}}(0) \quad (4.341)$$

Lo primero será calcular el estado inicial transformado en la realización normal

$$\hat{\mathbf{v}}(0) = \mathbf{P}\mathbf{v}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (4.342)$$

por lo que

$$y_{zi}(n) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (5/4)^n & 0 \\ 0 & (-1/4)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \dots = 2\left(\frac{5}{4}\right)^n - \left(-\frac{1}{4}\right)^n \quad (4.343)$$

que será la salida del sistema que evoluciona desde el estado dado, $n = 0$, en ausencia de entrada.

★ ★ ★

41. Considere el sistema siguiente

$$y(n) = x(n) + \frac{3}{2}x(n-1) - y(n-1) + \frac{3}{4}y(n-2)$$

Se pide:

- Determinar las realizaciones de espacio de estados de tipo I y II.
- Obtener la realización de espacio de estados de forma normal.
- Determinar la función de transferencia de, al menos, dos formas diferentes.
- Determinar la respuesta impulsional del sistema.
- Analizar la estabilidad del sistema.

Resolución:

a) De la ecuación en diferencias obtenemos los coeficientes

$$b_0 = 1, b_1 = 3/2, b_2 = 0, a_1 = 1, a_2 = -3/4. \quad (4.344)$$

por lo que podemos obtener directamente la realización de espacio de estados de tipo I a partir de la forma general del ejercicio 22. Así, dicha realización queda

$$\mathbf{v}(n+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3/4 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{v}(n) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x(n) \quad (4.345)$$

$$y(n) = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/2 \end{bmatrix} \mathbf{v}(n) + x(n). \quad (4.346)$$

De la misma forma, la realización de espacios de tipo II se puede obtener a partir de los coeficientes $\{b_k\}$ y $\{a_k\}$, tal como se vió en el ejercicio 23. Así, la realización de tipo II queda

$$\mathbf{v}(n+1) = \begin{bmatrix} 0 & 3/4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{v}(n) + \begin{bmatrix} 3/4 \\ 1/2 \end{bmatrix} x(n) \quad (4.347)$$

$$y(n) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{v}(n) + x(n). \quad (4.348)$$

b) Para obtener la realización de espacio de estados en forma normal nos basaremos en la realización de tipo II. Inicialmente calculamos el polinomio característico:

$$\det(\mathbf{F} - \lambda \mathbf{I}) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 3/4 \\ 1 & -1 - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + \lambda - \frac{3}{4} = 0 \quad (4.349)$$

por lo que los autovalores de \mathbf{F} son

$$\lambda_1 = -\frac{3}{2}, \lambda_2 = \frac{1}{2}. \quad (4.350)$$

El autovector asociado a λ_1 será, por tanto,

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.351)$$

mientras que

$$\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2/3 \end{bmatrix} \quad (4.352)$$

es el autovector de λ_2 .

Ahora formamos la matriz \mathbf{U} cuyas columnas son los autovectores de \mathbf{F}

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & 2/3 \end{bmatrix}. \quad (4.353)$$

A partir de esta ya podemos obtener la matriz de transformación a la realización de forma normal

$$\mathbf{P} = \mathbf{U}^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 3/4 \\ 3/4 & 3/8 \end{bmatrix}. \quad (4.354)$$

Ahora ya se pueden obtener todas las matrices $\hat{\mathbf{F}}$, $\hat{\mathbf{q}}$ y $\hat{\mathbf{g}}$ de la forma normal

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{P}\mathbf{F}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{U} = \begin{bmatrix} -3/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \quad (4.355)$$

$$\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{P}\mathbf{q} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3/4 \end{bmatrix} \quad (4.356)$$

$$\hat{\mathbf{g}}^T = \mathbf{g}^T\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{g}^T\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 2/3 \end{bmatrix}. \quad (4.357)$$

El valor d se mantiene entre transformaciones. Así pues, la realización de espacio de estados en forma normal queda

$$\mathbf{v}(n+1) \begin{bmatrix} -3/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \mathbf{v}(n) + \begin{bmatrix} 0 \\ 3/4 \end{bmatrix} x(n) \quad (4.358)$$

$$y(n) = \begin{bmatrix} 1 & 2/3 \end{bmatrix} \mathbf{v}(n) + x(n) \quad (4.359)$$

c) Determinación de la función de transferencia.

1) La forma más sencilla de obtener la función de transferencia es a partir de la ecuación en diferencias, realizando la transformada Z, por lo que

$$Y(z) = X(z) + \frac{3}{2}X(z)z^{-1} - Y(z)z^{-1} + \frac{3}{4}Y(z)z^{-2} \quad (4.360)$$

de donde

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + \frac{3}{2}z^{-1}}{1 + z^{-1} - \frac{3}{4}z^{-2}} \quad (4.361)$$

2) Sin embargo, si partimos de una realización de espacio de estados, por ejemplo la de tipo I, tendremos que realizar la transformada Z de las ecuaciones de estado

$$V_1(z)z = V_2(z) \quad (4.362)$$

$$V_2(z)z = \frac{3}{4}V_1(z) - V_2(z) + X(z) \quad (4.363)$$

de las cuales se obtiene

$$V_1(z) = \frac{1}{z^2 - \frac{3}{4} + z} X(z), \quad V_2(z) = \frac{z}{z^2 - \frac{3}{4} + z} X(z), \quad (4.364)$$

que deben sustituirse en la ecuación de salida transformada

$$Y(z) = \frac{3}{4}V_1(z) + \frac{1}{2}V_2(z) + X(z) = \frac{z^2 + \frac{3}{2}z}{z^2 + z - \frac{3}{4}} X(z) \quad (4.365)$$

para obtener finalmente la función de transferencia requerida

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^2 + \frac{3}{2}z}{z^2 + z - \frac{3}{4}} = \frac{1 + \frac{3}{2}z^{-1}}{1 + z^{-1} - \frac{3}{4}z^{-2}}. \quad (4.366)$$

- 3) Otra forma de obtener $H(z)$ es mediante técnicas de espacio de estados. Dado que conocemos las matrices $\hat{\mathbf{F}}$, $\hat{\mathbf{q}}$ y $\hat{\mathbf{g}}$ en forma normal, empezaremos calculando

$$(z\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1} \quad (4.367)$$

por lo que

$$(z\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1} = \begin{bmatrix} z + 3/2 & 0 \\ 0 & z - 1/2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{z^2 + z - 3/4} \begin{bmatrix} z - 1/2 & 0 \\ 0 & z + 3/2 \end{bmatrix} \quad (4.368)$$

mediante lo cual podemos abordar el cálculo de $H(z)$ como sigue

$$\begin{aligned} H(z) &= \hat{\mathbf{g}}^T (z\mathbf{I} - \hat{\mathbf{F}})\hat{\mathbf{q}} + \hat{d} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2/3 \end{bmatrix} \frac{1}{z^2 + z - 3/4} \begin{bmatrix} z - 1/2 & 0 \\ 0 & z + 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3/4 \end{bmatrix} + 1 \\ &= \dots = \frac{z^2 + \frac{3}{2}z}{z^2 + z - 3/4}. \end{aligned} \quad (4.369)$$

Finalmente llegamos a

$$H(z) = \frac{1 + \frac{3}{2}z^{-1}}{1 + z^{-1} - \frac{3}{4}z^{-2}}. \quad (4.370)$$

Como vemos, cualquiera de las tres aproximaciones ofrece la misma solución. El empleo de una u otra dependerá de la información de partida.

- d) Ahora obtenemos la expresión analítica de la respuesta impulsional mediante técnicas de espacio de estados

$$\begin{aligned} h(n) &= \hat{\mathbf{g}}^T \hat{\mathbf{F}}^{n-1} \hat{\mathbf{q}} u(n-1) + \hat{d} \delta(n) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 3/4 \end{bmatrix} u(n-1) + \delta(n) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n-1) + \delta(n). \end{aligned} \quad (4.371)$$

- e) Para analizar la estabilidad del sistema, hemos de centrar la atención en los autovalores de \mathbf{F} , que coinciden con los polos del sistema. Estos son

$$\lambda_1 = -3/2, \lambda_2 = 1/2. \quad (4.372)$$

Dado que $\lambda_1 = -3/2$ sale del círculo de radio unidad, tenemos el argumento de inestabilidad para el sistema. Sin embargo, nótese que la respuesta impulsional

$$h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n-1) + \delta(n) \quad (4.373)$$

converge. En contra de que esto pudiera parecer un conflicto, es correcto, dado que si nos fijamos en el numerador de $H(z)$, este indica un cero en $-3/2$, por lo que el cero anula el polo con lo cual, al estar el polo $\lambda_2 = 1/2$ dentro del círculo unidad podemos decir que el sistema es estable.

42. Dado el sistema descrito por las siguientes ecuaciones de espacio de estados:

$$\mathbf{v}(n+1) \begin{bmatrix} -1/4 & 0 & -3/4 \\ 7/12 & 1/3 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \mathbf{v}(n) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x(n) \quad (4.374)$$

$$y(n) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{v}(n) + 2x(n)$$

Se desea:

- Dibujar la estructura correspondiente de espacio de estados.
- Determinar la realización de espacio de estados en forma normal.
- Determinar la función de transferencia $H(z)$ mediante técnicas de espacio de estados.
- Determinar la realización de espacio de estados de tipo I y II.
- Determinar la respuesta impulsional del sistema.
- Analizar la estabilidad del sistema.

Resolución:

a) El esquema se muestra en la Fig. 4.49.

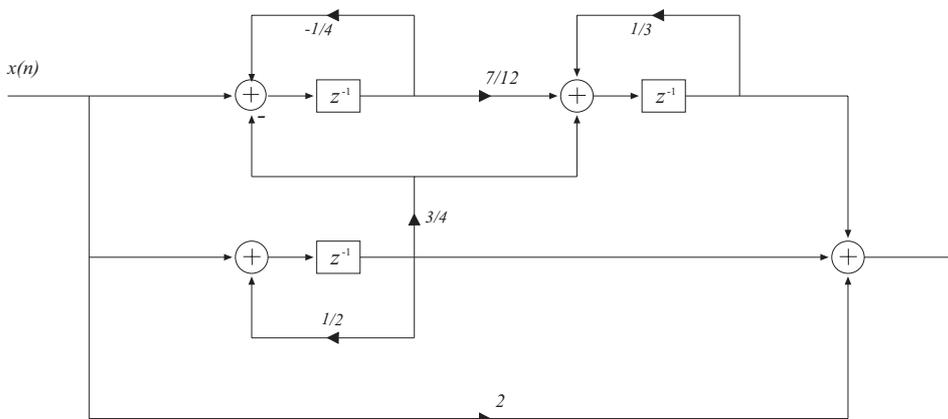


Figura 4.49: Estructura correspondiente a la realización de espacio de estados propuesta.

b) Para obtener la realización de espacio de estados en forma normal, el primer paso es determinar la matriz de transformación \mathbf{P} de tal forma que $\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{P}\mathbf{F}\mathbf{P}^{-1}$ sea diagonal. Para ello, calculamos el determinante

$$\det(\mathbf{F} - \lambda\mathbf{I}) = \det \left(\begin{bmatrix} -1/4 - \lambda & 0 & 3/2 \\ 7/12 & 1/3 - \lambda & 3/4 \\ 0 & 0 & 1/2 - \lambda \end{bmatrix} \right) = (\lambda - 1/2)(\lambda - 1/3)(\lambda + 1/4) = 0. \quad (4.375)$$

Los autovalores de $\hat{\mathbf{F}}$ son, por tanto, $\lambda_1 = 1/2$, $\lambda_2 = 1/3$ y $\lambda_3 = -1/4$. Sus autovectores correspondientes vienen dados por

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.376)$$

La matriz \mathbf{U} cuyas columnas son los autovectores es

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.377)$$

La matriz \mathbf{U} da lugar a la matriz de transformación \mathbf{P}

$$\mathbf{P} = \mathbf{U}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.378)$$

mediante la cual obtenemos las matrices transformadas siguientes:

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{P}\mathbf{F}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 \end{bmatrix} \quad (4.379)$$

$$\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{P}\mathbf{q} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{q} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (4.380)$$

$$\hat{\mathbf{g}}^T = \mathbf{g}^T\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{g}^T\mathbf{U} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.381)$$

y el valor escalar d se mantiene entre transformaciones

$$\hat{d} = d = 2. \quad (4.382)$$

Por tanto, la realización de espacio de estados en forma normal es

$$\mathbf{v}(n+1) = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 \end{bmatrix} \mathbf{v}(n) + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} x(n) \quad (4.383)$$

$$y(n) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{v}(n) + 2x(n) \quad (4.384)$$

- c) A continuación calculamos la función de transferencia $H(z)$ mediante técnicas de espacio de estados. Para determinar la función de transferencia primero calculamos $(z\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}$.

$$(z\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{2z-1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{3z-1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{4z+1} \end{bmatrix} \quad (4.385)$$

por lo que

$$\begin{aligned}
 H(z) &= \mathbf{g}^T (z\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1} \mathbf{q} + d = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{2z-1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{3z-1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{4z+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 2 \\
 &= \dots = \frac{2z^3 - \frac{1}{6}z^2 + \frac{7}{6}z - \frac{13}{24}}{z^3 - \frac{7}{12}z^2 - \frac{1}{24}z + \frac{1}{24}} = \frac{2 - \frac{1}{6}z^{-1} + \frac{7}{6}z^{-2} - \frac{13}{24}z^{-3}}{1 - \frac{7}{12}z^{-1} - \frac{1}{24}z^{-2} + \frac{1}{24}z^{-3}} = H(z).
 \end{aligned} \tag{4.386}$$

d) A partir de la función de transferencia, obtenemos los coeficientes

$$a_1 = -7/12, a_2 = -1/24, a_3 = 1/24, b_0 = 2, b_1 = -1/6, b_2 = 7/6, b_3 = -13/24$$

y con estos, a partir de las expresiones generales (ver ejercicio 22), la realización de tipo I queda

$$\mathbf{v}(n+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1/24 & 1/24 & 7/12 \end{bmatrix} \mathbf{v}(n) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x(n) \tag{4.388}$$

$$y(n) = \begin{bmatrix} -5/8 & 5/4 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{v}(n) + 2x(n). \tag{4.389}$$

De la misma forma, la realización de espacio de estados de tipo II se puede obtener a partir de los coeficientes $\{b_k\}$ y $\{a_k\}$, tal como se vió en el ejercicio 23. Así, dicha realización de tipo II queda como

$$\mathbf{v}(n+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/24 \\ 1 & 0 & 1/24 \\ 0 & 1 & 7/12 \end{bmatrix} \mathbf{v}(n) + \begin{bmatrix} -5/8 \\ 5/4 \\ 1 \end{bmatrix} x(n) \tag{4.390}$$

$$y(n) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{v}(n) + 2x(n). \tag{4.391}$$

e) La respuesta impulsional del sistema es idéntica si utilizamos las matrices del sistema equivalente

$$\begin{aligned}
 h(n) &= \hat{\mathbf{g}}^T \hat{\mathbf{F}}^{n-1} \hat{\mathbf{q}} u(n-1) + d\delta(n) \\
 &= \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(n-1) + 2\delta(n) \\
 &= [2(\frac{1}{2})^{n-1} + (\frac{1}{3})^{n-1} - 2(-\frac{1}{4})^{n-1}] u(n-1) + 2\delta(n) = h(n)
 \end{aligned} \tag{4.392}$$

f) Los elementos de la diagonal de $\hat{\mathbf{F}}$ son las raíces del polinomio característico y coinciden con los polos del sistema. Los polos del sistema son

$$p_k = \left\{ \underset{\uparrow}{\frac{1}{2}}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4} \right\}. \tag{4.393}$$

Como todos ellos están dentro del círculo de radio unidad, el sistema es estable.

4.3. Problemas propuestos

- Determine los coeficientes a_1 , a_2 , b_0 y b_1 de manera que los dos sistemas de la Fig. 4.50 sean equivalentes.

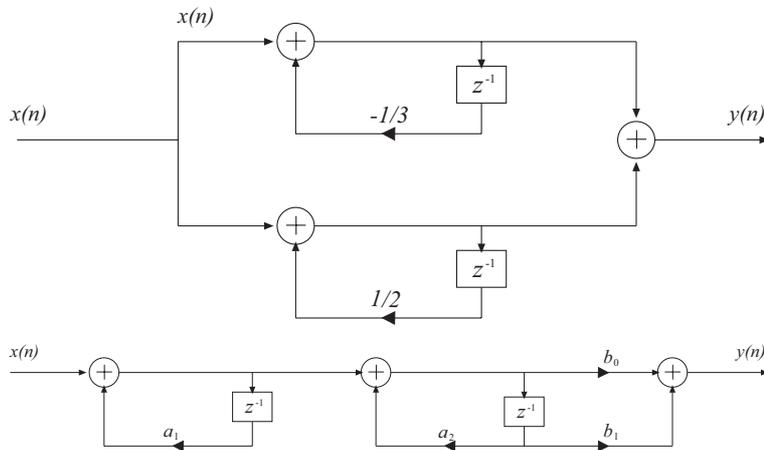


Figura 4.50: Diferentes realizaciones del mismo sistema.

- Obtener la estructura en celosía equivalente al sistema siguiente

$$H(z) = \frac{1}{1 + \frac{53}{36}z^{-1} + \frac{13}{12}z^{-2} + \frac{1}{3}z^{-3}}$$

Discutir la estabilidad del sistema.

- Considere el sistema de la Fig. 4.51.
 - Determine la estructura equivalente en celosía escalonada.
 - Analice la estabilidad del sistema.

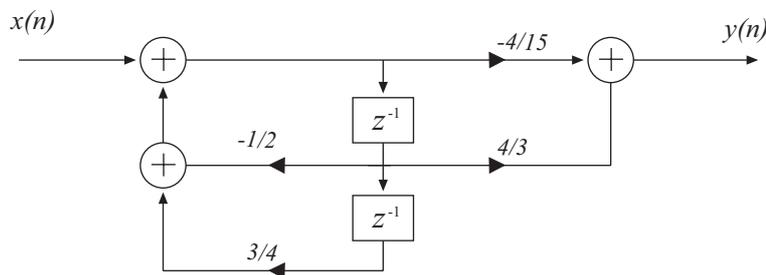


Figura 4.51: Diagrama de bloques del sistema propuesto.

- Determine la realización en cascada del sistema

$$H(z) = 1 + \frac{97}{36}z^{-2} + z^{-4}$$

5. Obtener la realización en cascada del sistema

$$y(n) = x(n) - x(n-1) + 0,9y(n-1) - 0,8y(n-2) + 0,729y(n-3)$$

6. Obtenga la realización en paralelo para el siguiente sistema

$$H(z) = \frac{1 + \frac{3}{2}z^{-1} - \frac{34}{25}z^{-2} - \frac{18}{25}z^{-3}}{1 - z^{-1} + \frac{3}{4}z^{-2} - \frac{1}{4}z^{-3} + \frac{1}{8}z^{-4}}$$

7. Un sistema discreto tiene el siguiente conjunto de ceros y polos: $p_1 = 0,95e^{j\frac{7\pi}{15}}$, $p_2 = 0,95e^{-j\frac{7\pi}{15}}$, $p_3 = 0,8e^{j\frac{3\pi}{15}}$, $p_4 = 0,8e^{-j\frac{3\pi}{15}}$, $z_1 = e^{j\frac{\pi}{4}}$, $z_2 = e^{-j\frac{\pi}{4}}$, $z_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}$, $z_4 = \frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2}$.

Dibuje una representación del sistema como etapas de segundo orden en cascada y en paralelo y determine la ganancia del sistema para una señal de continua.

8. Determine las realizaciones de espacio de estado tipo I y II del sistema descrito por

$$y(n) = \frac{1}{2}y(n-1) - \frac{1}{3}y(n-2) + x(n) - \frac{2}{3}x(n-1)$$

9. Obtener la realización de espacio de estados traspuesta a la realización propuesta en el ejercicio 35.

10. Repetir el ejercicio 40 para la siguiente realización de espacio de estados:

$$\mathbf{v}(n+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/4 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v}(n) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x(n)$$

$$y(n) = \begin{bmatrix} 1/8 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{v}(n) + 2x(n).$$

Analizar la estabilidad del sistema.

11. Repetir el ejercicio 40 para el sistema descrito por las ecuaciones de espacio de estado:

$$\mathbf{v}(n+1) = \begin{bmatrix} 1/6 & 0 \\ \sqrt{2}/12 & 1/3 \end{bmatrix} \mathbf{v}(n) + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} x(n)$$

$$y(n) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{v}(n) + x(n)$$

12. Determinar las matrices de la realización de espacio de estados de un sistema todo-ceros en celosía.

13. Determinar las matrices de la realización de espacio de estados de un sistema todo-polos en celosía.

4.4. Prácticas con MATLAB

1. Programe la realización del sistema digital cuya ecuación en diferencias es

$$y(n) = x(n) - \sqrt{2}x(n-1) + x(n-2) + y(n-1) - 1/4y(n-2) - 1/4y(n-3) + 1/8y(n-4)$$

según las estructuras directa II y cascada. Observe y comente las diferencias.

Resolución:

De la ecuación en diferencias del sistema podemos obtener que la función de transferencia a realizar es

$$H(z) = \frac{1 - \sqrt{2}z^{-1} + z^{-2}}{1 - z^{-1} + 1/4z^{-2} + 1/4z^{-3} - 1/8z^{-4}} = \frac{1}{1 - 1/4z^{-2}} \cdot \frac{1 - \sqrt{2}z^{-1} + z^{-2}}{1 - z^{-1} + 1/2z^{-2}} \quad (4.394)$$

La estructura de la Fig. 4.52(a) es una implementación en forma directa II y la estructura Fig. 4.52(b) es una implementación en cascada. De la expresión (4.394) se desprende que los coeficientes son $a_1 = -1$, $a_2 = +1/4$, $a_3 = +1/4$, $a_4 = -1/8$, $b_0 = 1$, $b_1 = -\sqrt{2}$, $b_2 = 1$ para la estructura IIR directa II y $d_1 = -1$, $d_2 = +1/2$, $e_0 = 1$, $e_1 = -\sqrt{2}$, $e_2 = 1$, $c_2 = -1/4$ para la estructura en cascada.

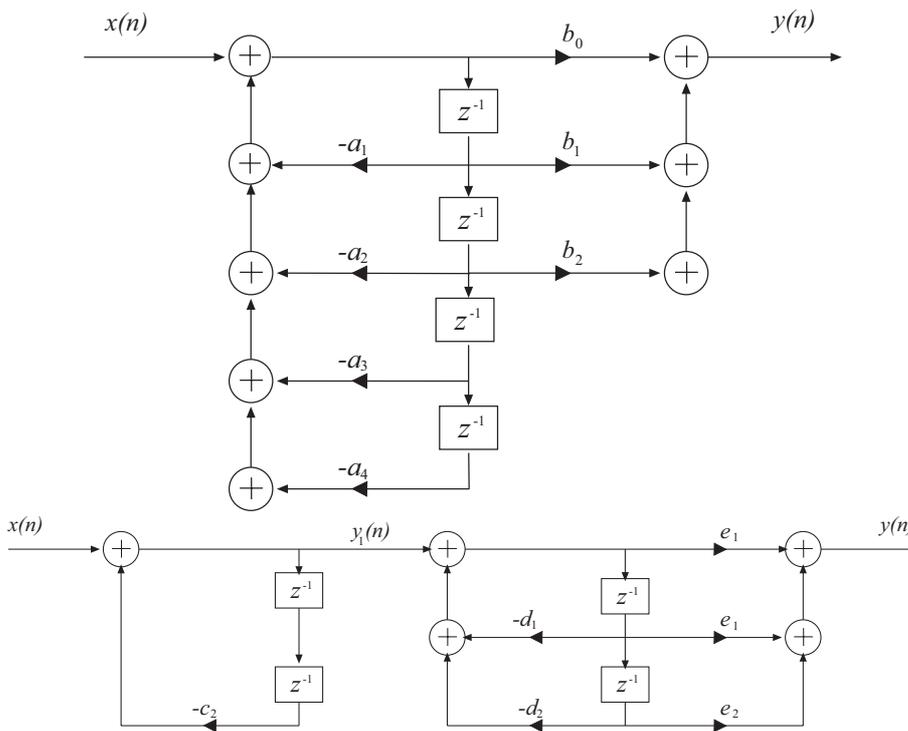


Figura 4.52: (a) Realización en forma directa y (b) realización en cascada.

Ambos diagramas de bloques consideran una realización o estructura para la realización del sistema. Cada realización o estructura define un procedimiento computacional o algoritmo para implementar el sistema. Si el sistema va a ser implementado en software, la realización describe la conversión en un programa que funcione en un ordenador. La realización en MATLAB de la forma directa de la Fig. 4.52(a) sería:

```
tmp1= -a1*u1(n)-a2*u2(n)-a3*u3(n)-a4*u4(n);
```

```
tmp2= b1*u1(n)+b2*u2(n);
y(n)= ( tmp1+x(n) )*b0 + tmp2;
```

donde $u_1(n)$ a $u_4(n)$ describen las salidas de los bloques de retardo. Para mayor claridad se han usado dos variables temporales, $tmp1$ es el resultado de la suma de los productos $a_1*u_1(n)$ a $a_4*u_4(n)$, mientras que $tmp2$ es el resultado de la suma de los productos $b_1*u_1(n)$ y $b_2*u_2(n)$.

Por otro lado, la realización de la Fig. 4.52(b) sería:

```
y1(n)= -c2*y1(n-2)+x(n);
tmp1= -d1*w1(n)-d2*w2(n);
tmp2= e1*w1(n)+e2*w2(n);
y(n)= ( y1(n) + tmp1 )* e0 + tmp2;
```

donde como podemos observar se ha calculado previamente $y_1(n)$, salida de la primera etapa de la cascada, para ser tomada como entrada de la segunda etapa.

Ambas realizaciones o estructuras equivalen a la misma ecuación en diferencias y, si los cálculos se realizaran con elementos aritméticos ideales, ambas estructuras darían lugar al mismo resultado.

Dado que se está realizando el mismo sistema de formas diferentes, surgen diferentes preguntas como ¿Por qué se considera esta diferenciación? ¿Porque no implementar de forma directa?, o ¿Cuáles son los beneficios de poder utilizar diferentes realizaciones? Algunos de los factores importantes que influyen es la complejidad computacional y los requisitos de memoria. Como podemos observar, la forma en cascada necesita una suma menos y un producto menos que la estructura directa Tipo II, y por lo tanto su realización finalizará antes. Otras realizaciones presentan menores requisitos de memoria, ya que cada retardo está implementado por una posición de memoria.

Uno de los factores más importantes que influyen en la elección de una realización específica son los efectos en los cálculos por la utilización de palabra de longitud finita, como se verá en el Capítulo 5, ya que la realización de los cálculos por procesadores de punto fijo implica la aparición de errores aritméticos que se acarrean a la salida, siendo considerables cuando estos resultados se realimentan y pudiendo incluso llegar a transformar un sistema estable en inestable.

Existen otras razones para seleccionar estructuras específicas, como la sensibilidad de los coeficientes, obtener rápidamente una implementación a partir de un determinado conjunto inicial de datos, etc.

Si bien los segmentos de código ofrecidos anteriormente sirven para calcular la salida a partir de la entrada en el momento n ($x(n)$), los coeficientes y los valores retardados, es necesario, tras el cálculo de la salida, calcular el valor retardado que será usado para el cálculo de la siguiente salida, es decir, las variables $u_i(n+1)$ en la Fig. 4.52(a) y $w_i(n+1)$ en la Fig. 4.52(b). Para la implementación en software de la realización de la Fig. 4.52(a) sería

```
u1(n+1)=tmp1 + x(n);
u2(n+1)=u1(n);
u3(n+1)=u2(n);
u4(n+1)=u3(n);
```

y para la implementación en software de la realización la Fig. 4.52(b) sería

```
w1(n+1)= tmp1 + y1(n);
w2(n+1)=w1(n);
```

Vamos a suponer que se pretende obtener la salida del sistema ante la entrada rampa $x(n) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. El sistema se realizaría mediante un bucle. Para cada iteración del bucle se calcula la salida y los nuevos valores que contendrán los bloques de retardo en la siguiente iteración, que es el estado del sistema, y serán utilizados para el cálculo de la siguiente salida. Para un sistema L.I.T. causal se supone $y(n) = 0$ para $n < 0$, por lo que para el cálculo de $y(0)$ todos los bloques de retardo poseen valor a cero.

Antes de pasar al código en MATLAB, cabe remarcar que existe una objeción en la programación de esto en MATLAB; este entorno no permite utilizar el índice 0 (al contrario que C), por lo que se asumirá que $y(n) = 0$, $x(n) = 0$ para $n \leq 0$. Así, la realización de la forma directa II queda

```
x=[1 2 3 4 5 6 7 8];
u1(1)=0;
u2(1)=0;
u3(1)=0;
u4(1)=0;

for n=1:10
    tmp1= -a1*u1(n)-a2*u2(n)-a3*u3(n)-a4*u4(n);
    tmp2= b1*u1(n)+b2*u2(n);
    y(n)= ( tmp1+x(n) )*b0 + tmp2;

    u1(n+1)=tmp1 + x(n);
    u2(n+1)=u1(n);
    u3(n+1)=u2(n);
    u4(n+1)=u3(n);
end

plot(y)
```

Vemos que las partes en que podemos dividir la realización son:

- a) Inicialmente se define la entrada, vector x como rampa en este caso.
- b) Se inicializan las variables que representan los bloques de retardo de u1 a u4.
- c) El bucle itera 10 veces, una para cada uno de los elementos de la entrada, calculando la salida del sistema para cada iteración.
- d) Finalmente se realiza la visualización de los datos de salida.

El código completo para la realización de Fig. 4.52(b) se obtiene mediante un procedimiento análogo.

2. Programar la realización del sistema que se muestra en la Fig. 4.53 a partir de su ecuación en diferencias.

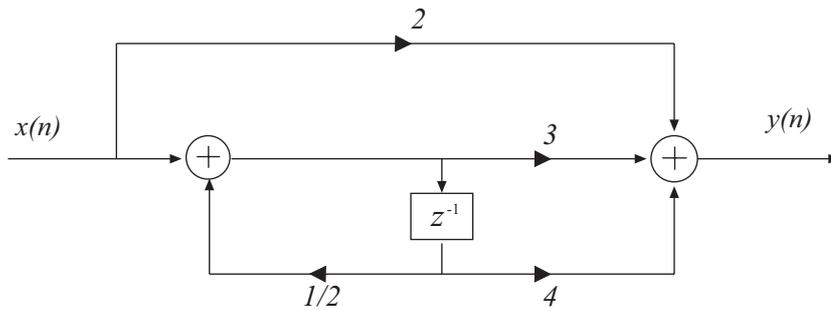


Figura 4.53: Diagrama de bloques del sistema propuesto.

Resolución:

Para obtener la ecuación en diferencias del sistema, partimos del siguiente sistema de ecuaciones en diferencias:

$$v(n+1) = x(n) + \frac{1}{2}v(n) \quad (4.395)$$

$$y(n) = 2x(n) + 3(x(n) + \frac{1}{2}v(n)) + 4v(n) \quad (4.396)$$

pasando ambas al dominio Z, podemos obtener la función de transferencia

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{5 + 3z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \quad (4.397)$$

por lo que la ecuación en diferencias del sistema es

$$y(n) = 5x(n) + 3x(n-1) + \frac{1}{2}y(n-1). \quad (4.398)$$

Ésta se puede usar para realizar el sistema sin utilizar variables internas, únicamente mediante entradas y salidas presentes y anteriores. En este caso, la programación de la realización es parecida a la del código del ejercicio 1. Consideraremos la entrada $x(n) = 2 \cdot n$. Cabe recordar la limitación de MATLAB de no poder utilizar índices nulos en los vectores.

```
x = [2 4 6 8 10 12 14 16 18 20];
y(1) = 5*x(1);
for n=2:10
    y(n)=5*x(n)-2*x(n-1)+0.5*y(n-1);
end
plot(y)
```

Como vemos, el código resulta sencillo. Sin embargo, existen sensibles diferencias con respecto al ejercicio anterior ya que no se utilizan los valores de los bloques de retardo, es decir, el estado del sistema. La estructura de la programación es

- a) Definición del vector que contiene la entrada.
- b) Inicialización.
- c) Iteración para obtener salidas mediante un bucle.

d) Visualización de la salida.

Comentaremos a continuación ciertas peculiaridades de interés:

- En la inicialización se define $y(1)=5*x(1)$, es decir, la salida para $n = 1$. El bucle se utiliza para calcular las salidas $y(2)$ a $y(10)$. Esto se hace así para evitar errores en MATLAB. Si eliminamos la línea de inicialización y forzamos el cálculo de $y(1)$ en el bucle, en la primera iteración tendríamos $y(1)=5*x(1)-2*x(0)+0.5*y(0)$. Nótese que la definición de $x(0)$ e $y(0)$ no está permitida en MATLAB (índice nulo), por lo que se produciría un error. Por ello, como conocemos las condiciones iniciales de entrada y salida, forzamos a $x(0)=y(0)=0$ y calculamos $y(1)$ antes del bucle como $y(1)=5*x(1)$.
- Nótese que la primera iteración del bucle calcula $y(2)$ mediante $y(2)=5*x(2)-2*x(1)+0.5*y(1)$. En general, para orden N , tendríamos que calcular inicialmente antes del bucle las salidas desde $y(1)$ hasta $y(N)$ para evitar errores con los índices.
- Cabe destacar que realizar directamente el sistema a partir de la ecuación en diferencias equivale a una realización en forma directa. Este tipo de realización es permisible en un entorno como MATLAB, con gran cantidad de memoria disponible y aritmética de gran precisión. Sin embargo, debe evitarse, en general, en realizaciones reales mediante procesadores con aritmética en punto fijo.

3. Dado el sistema IIR representado por la función de transferencia

$$H(z) = \frac{2 + 12z^{-1} + 24z^{-2} + 34z^{-3} + 31z^{-4} + 14z^{-5} + 4z^{-6}}{16 + 20z^{-1} + 24z^{-2} + 24z^{-3} + 14z^{-4} + 5z^{-5} + z^{-6}}, \quad (4.399)$$

obtener, mediante el entorno MATLAB:

- a) Los coeficientes para la realización en cascada de $H(z)$.
- b) Los coeficientes de la realización paralela de $H(z)$.
- c) Los coeficientes de reflexión $\{K_i\}$ y de escalera $\{v_i\}$ de la realización en celosía escalonada.

Resolución:

La función de transferencia dada proporciona los coeficientes para la realización en forma directa. Mediante MATLAB podemos obtener fácilmente los coeficientes para otras realizaciones.

- a) Para realizar el sistema en cascada se ha de representar la función de transferencia $H(z)$ factorizada, formada por lo general por etapas de segundo orden. Para ello utilizamos el siguiente código

```
num = [2 12 24 34 31 14 4] ;
den = [16 20 24 24 14 5 1] ;
[z,p,k]=tf2zp(num,den);
[sos,G]=zp2sos(z,p,k);
```

La función `zp2sos` agrupa los polos y los ceros complejos conjugados para crear las secciones de segundo orden. Cada fila de la matriz `sos` resultante representa una etapa de la cascada. Por defecto, la función `zp2sos` ordena las secciones por

orden ascendente de la distancia de los polos al cero. Es decir, la primera fila corresponde a aquella etapa que contiene los polos más cercanos al origen. Así,

$$sos = \begin{bmatrix} 0'13 & 4'87 & 4'20 & 1'00 & 0'39 & 0'20 \\ 1'00 & 0'57 & 0'28 & 1'00 & 1'12 & 0'34 \\ 1'00 & 0'57 & 1'68 & 1'00 & -0'26 & 0'92 \end{bmatrix}, \quad (4.400)$$

donde los elementos se han redondeado a dos cifras decimales. Además, mediante el uso del resto de parámetros disponibles, `zpsos` permite ordenar las secciones para minimizar la posibilidad de `overflow` en la realización, minimizar el ruido de redondeo a la salida, etc.

Los coeficientes de la realización son los de la siguiente representación factorizada de $H(z)$:

$$H(z) = 0'125 \cdot \frac{0'13 + 4'87z^{-1} + 4'20z^{-2}}{1 + 0'39z^{-1} + 0'20z^{-2}} \cdot \frac{1 + 0'57z^{-1} + 0'28z^{-2}}{1 + 1'12z^{-1} + 0'34z^{-2}} \cdot \frac{1 + 0'57z^{-1} + 1'68z^{-2}}{1 - 0'26z^{-1} + 0'92z^{-2}} \quad (4.401)$$

- b) Para obtener los coeficientes de la realización en paralelo, utilizamos la función `residuez`, que proporciona los residuos, polos y términos directos de la expansión en fracciones parciales. El código a utilizar es sencillamente

```
[r,p,k]=residuez(num,den);
```

Esta sentencia asigna al vector `r` los residuos, al vector `p` los polos y al `k` los términos directos.

La función de transferencia $H(z)$, desarrollada en fracciones parciales, queda

$$\begin{aligned} r(1) &= -0,3712 + 0,1173j \\ r(2) &= -0,9902 + 1,2059j \\ r(3) &= -0,5761 + 0,1071j \\ p(1) &= 0,1321 + 0,9526j \\ p(2) &= -0,5623 + 0,1393j \\ p(3) &= -0,1948 + 0,4043j \end{aligned} \quad (4.402)$$

$$\begin{aligned} H(z) &= 4 + \frac{r(1)}{1 - p(1)z^{-1}} + \frac{r(1)^*}{1 - p(1)^*z^{-1}} \\ &+ \frac{r(2)}{1 - p(2)z^{-1}} + \frac{r(2)^*}{1 - p(2)^*z^{-1}} \\ &+ \frac{r(3)}{1 - p(3)z^{-1}} + \frac{r(3)^*}{1 - p(3)^*z^{-1}} \end{aligned} \quad (4.403)$$

Podemos, por otro lado, utilizar la función `residuez` invésamente, `[num,den]=residuez(r,p,k)`, para convertir de nuevo la expansión en fracciones parciales a la forma `num/den`.

Para eliminar los coeficientes complejos agruparemos en etapas de segundo orden las fracciones de polos complejos conjugados. Para realizar las sumas de dichas fracciones, podemos hacerlo, como hemos descrito, mediante la función `residuez`

```
[n1,d1]=residuez(r(1:2),p(1:2),0);
[n2,d2]=residuez(r(3:4),p(3:4),0);
[n3,d3]=residuez(r(5:6),p(5:6),0);
```

Así, obtenemos finalmente los coeficientes de la realización en paralelo con

$$H(z) = 4 + \frac{-0'74 - 0'13z^{-1}}{1 - 0'26z^{-1} + 0'92z^{-2}} + \frac{-1'98 - 1'45z^{-1}}{1 + 1'12z^{-1} + 0'34z^{-2}} + \frac{-1'15 - 0'31z^{-1}}{1 + 0'39z^{-1} + 0'20z^{-2}} \quad (4.404)$$

donde los coeficientes han sido redondeados a dos cifras decimales.

- c) Finalmente, los coeficientes para la realización en celosía escalonada se obtienen directamente mediante la función `tf2latc` de la siguiente manera:

```
[k,v]=tf2latc(num,den);
```

Esta proporciona los coeficientes de reflexión:

$$\begin{aligned} K1 &= 0,1901, \\ K2 &= 0,5537, \\ K3 &= 0,7591, \\ K4 &= 0,5226, \\ K5 &= 0,2353, \\ K6 &= 0,0625 \end{aligned} \quad (4.405)$$

y los coeficientes de escalera:

$$\begin{aligned} V0 &= -0,4518, \\ V1 &= -4,6006, \\ V2 &= -4,1447, \\ V3 &= -0,2503, \\ V4 &= 6,9412, \\ V5 &= 4,5, \\ V6 &= 2. \end{aligned} \quad (4.406)$$

Capítulo 5

Efectos de longitud de palabra finita

5.1. Introducción teórica

Hasta ahora hemos analizado sistemas que se modelan como lineales y, sin embargo, no hemos tenido en cuenta que el efecto que supone la utilización de palabra de longitud finita es la introducción de no-linealidades. Así, en este capítulo se consideran varias formas de efectos de cuantificación que aparecen en procesamiento digital de señal en las realizaciones de aritmética de precisión finita, incluyendo los efectos sobre las características de la respuesta en frecuencia resultantes de la cuantificación de los coeficientes, y los efectos de ruido de redondeo inherentes a la implementación digital de sistemas en tiempo discreto.

En la introducción se presentan nociones básicas, a complementar con textos de teoría, que son utilizadas para estructurar los ejercicios del capítulo. Aquellos ejercicios que necesitan un mayor conocimiento teórico lo incorporan, surgiendo éste como una necesidad dentro del contexto planteado por el ejercicio.

5.1.1. Conceptos básicos

- La principal característica de la aritmética digital es el limitado número de bits para la representación numérica. Esta limitación conduce a precisión numérica finita en los cálculos, causando errores de redondeo y efectos no lineales en el funcionamiento de los sistemas discretos.
- La representación de números en punto fijo es una generalización de la representación decimal de un número como una cadena de dígitos con un punto decimal. En esta notación los dígitos de la izquierda del punto decimal representan la parte entera del número, y los dígitos de la derecha representan la parte fraccional del número. Así, un número real X , puede representarse como

$$X = \{b_{-A}, \dots, b_{-1}, b_0, b_1, \dots, b_B\}_r = \sum_{i=-A}^B b_i r^{-i}, \quad 0 \leq b_i \leq (r-1) \quad (5.1)$$

donde b_i representa el dígito, r es la base, A es el número de dígitos enteros, y B es el número de dígitos fraccionales. Así, este formato puede variar desde el formato entero ($A = n - 1, B = 0$), hasta el formato fraccional ($A = 0, B = n - 1$), ejercicios 1 a 4.

El formato para fracciones positivas es

$$X = 0.b_1b_2 \dots b_B = \sum_{i=1}^B b_i 2^{-i}, \quad X \geq 0 \quad (5.2)$$

Sin embargo, para fracciones negativas pueden usarse los siguientes formatos:

- **Formato de signo y magnitud.**

En este formato, el bit más significativo, MSB, se pone a 1 para representar el signo negativo y a 0 para representar el signo positivo.

$$X_{SM} = 1.b_1b_2 \dots b_B, \quad \text{para } X \leq 0 \quad (5.3)$$

- **Formato de complemento a uno.**

En este formato los números negativos se representan, a partir del positivo, de la siguiente forma,

$$X_{C1} = 1.\bar{b}_1\bar{b}_2 \dots \bar{b}_B, \quad \text{para } X \leq 0, \quad (5.4)$$

donde $\bar{b}_i = 1 - b_i$ es el complemento a 1 de b_i . Una definición alternativa para X_{C1} se puede obtener mediante

$$X_{C1} = 2 - 2^{-B}|X|. \quad (5.5)$$

- **Formato de complemento a dos.**

En este formato, el número negativo se representa formando el complemento a dos del número positivo correspondiente,

$$X_{C2} = 1.\bar{b}_1\bar{b}_2 \dots \bar{b}_B + 0,0000 \dots 1, \quad \text{para } X < 0, \quad (5.6)$$

Se puede ver que

$$X_{C2} = X_{C1} + 2^{-B} = 2 - |X|. \quad (5.7)$$

- Usualmente se emplean dos tipos de cuantificación para representar un número de punto fijo en un registro de palabra finita; el truncamiento y el redondeo. El truncamiento consiste simplemente en la eliminación de los bits menos significativos, de los que se pretende prescindir. En el redondeo, el número es aproximado por el valor de cuantificación más cercano.
- Dado que la característica de transferencia de un conversor A/D no es lineal y la señal analógica de entrada no es conocida *a priori*, en la mayoría de los casos prácticos, se asume que, para propósitos de análisis, el error de cuantificación $e(n)$ es una señal aleatoria. La Fig. 5.1 muestra el modelo de la operación del cuantificador.
- Al hacer cálculos, como multiplicaciones, con aritmética de punto fijo o flotante, normalmente nos enfrentamos al problema de recuantificar desde un nivel de precisión a otro dado. El efecto es introducir un error cuyo valor depende tanto del número de bits del valor original como del número de bits después de la cuantificación.

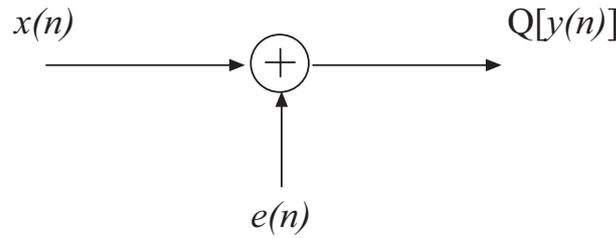


Figura 5.1: Modelo estadístico del cuantificador A/D.

Para una representación en complemento a dos, el error de truncamiento, E_t , es siempre negativo y cae en el rango

$$-(2^{-b} - 2^{-b_u}) \leq E_t \leq 0. \quad (5.8)$$

En cuanto al error de redondeo, E_r , es simétrico respecto a cero y cae en el rango

$$-\frac{1}{2}(2^{-b} - 2^{-b_u}) \leq E_r \leq \frac{1}{2}(2^{-b} - 2^{-b_u}). \quad (5.9)$$

En el caso en que x sea una señal de amplitud continua $b_u = \infty$. Considérense los ejercicios 3 y 5.

- La función de transferencia $H'(z)$ de un sistema implementado tanto en software como en “hardware”, con coeficientes cuantificados, es diferente de la función de transferencia deseada, $H(z)$. El efecto principal de la cuantificación es el desplazamiento de los polos y los ceros de la función de transferencia, desplazados a localizaciones diferentes de las teóricas, ejercicio 6.

En general, podemos determinar el error de perturbación como

$$\Delta p_i = - \sum_{k=1}^N \frac{p_i^{N-k}}{\prod_{l=1, l \neq i}^N (p_i - p_l)} \Delta a_k, \quad (5.10)$$

que nos proporciona una medida de la sensibilidad del polo frente a cambios en los coeficientes $\{a_k\}$. Una expresión análoga se puede obtener para la sensibilidad de los ceros a errores en los parámetros $\{b_k\}$, ejercicio 7.

La sensibilidad frente a la cuantificación de los coeficientes puede disminuirse utilizando realizaciones en cascada o en paralelo, ejercicios 10 y 11.

- En ocasiones, es conveniente aplicar un factor multiplicativo a los coeficientes, de forma que estos ocupen el mayor rango posible antes de ser cuantificados. Ésto se hace para aumentar la precisión del sistema. Este factor suele ser una potencia de dos para que su aplicación simplemente consista en la realización de un desplazamiento lógico, ejercicios 8 y 9.
- Para determinar el ruido que genera a la salida el ruido de cuantificación del conversor A/D, se utiliza el modelo estadístico que se indicó en la Fig. 5.1. Con este, asumimos que el sistema lineal e invariante temporal $H(z)$ está implementado con precisión finita. Así, la salida actual del sistema discreto viene dada por $y(n) + v(n)$, donde $y(n)$ es la salida generada por la entrada no cuantificada $x(n)$, y $v(n)$ es la salida

generada por la secuencia de error $e(n)$. La componente del error de salida $v(n)$ viene dada por

$$v(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e(m)h(n-m) \quad (5.11)$$

donde $h(n)$ es la respuesta impulsional del filtro digital. La siguiente expresión indica la varianza del ruido a la salida del sistema cuando la varianza a la entrada es la unidad:

$$\sigma^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)|^2. \quad (5.12)$$

- Para el caso particular de un filtro FIR, el error que se produce en la respuesta en frecuencia por la cuantificación de sus coeficientes es

$$E_M = \sum_{n=0}^{M-1} e_h(n)e^{-jwn} \quad (5.13)$$

donde $e_h(n)$ es la diferencia entre la respuesta impulsional del sistema cuantificado y la del sistema ideal. Asumiendo que la secuencia de error de los coeficientes $e_h(n)$ es incorrelada, para $0 \leq n \leq M-1$, la varianza del error $E_M(w)$ es

$$\sigma_E^2 = \frac{2^{-2(b+2)}}{3}M. \quad (5.14)$$

Nótese como la varianza del error se incrementa linealmente con M . Utilizando la desviación estándar puede controlarse el error que se produce en la respuesta en frecuencia, para que este quede acotado dentro de unos márgenes tolerables, ejercicios 12 y 13.

- La presencia de uno o varios cuantificadores en la realización de un sistema discreto resulta en la introducción de no-linealidades que lo transforman en otro con características significativamente diferentes al sistema lineal ideal. Por ejemplo, un filtro lineal recursivo puede exhibir oscilaciones indeseables a su salida, incluso en ausencia de entrada o ante una entrada constante con valor distinto de cero. Semejantes oscilaciones aparecen en los sistemas recursivos y se denominan ciclos límite. Los ciclos límite pueden atribuirse directamente a los errores de redondeo en la multiplicación y a los errores de desbordamiento en la adición, ejercicios 14 y 15.
- El uso de la aritmética de saturación soluciona los problemas de ciclos límite causados por errores de desbordamiento en la adición. Sin embargo, esto causa una distorsión indeseable debido a la no-linealidad de dicha saturación. Para limitar esta distorsión, es importante escalar la señal de entrada, y con ello la respuesta impulsional entre la entrada y cualquier nodo sumador interno del sistema, de forma que el desbordamiento se elimine o se convierta en un suceso extraño. Para ello se aplica un factor de normalización a la señal de entrada, ejercicio 16.
- Al cuantificar los productos de dos números y utilizar aritmética de saturación para prevenir el desbordamiento en nodos intermedios, se complica el análisis del error producido por las cuantificaciones en sistemas complejos. Para obtener resultados más

generales sobre los efectos de cuantificación en filtros digitales, el error de cuantificación en la multiplicación se modela como una secuencia de ruido aditivo $e(n)$, de la misma forma que en la conversión A/D de una señal analógica.

En general, el análisis del error de cuantificación se puede aplicar directamente a filtros de alto orden mediante una realización en paralelo. En este caso, cada sección del filtro, de primer o segundo orden, es independiente de todas las demás y, por tanto, la potencia total del ruido de cuantificación a la salida es simplemente la suma lineal de las potencias de ruido de cuantificación de cada una de las secciones individuales.

La realización en cascada es más difícil de analizar. Para ésta interconexión, el ruido que se genera en cualquier sección del filtro actúa como entrada para la siguiente. Como consecuencia, aparecen dos problemas, en primer lugar se plantea cómo emparejar los polos y los ceros para formar secciones de segundo orden, y, en segundo lugar, cómo organizar las secciones resultantes para minimizar la potencia total de ruido a la salida. Cabe remarcar que la ordenación de las secciones de la cascada influirá en la potencia total de ruido a la salida. En general los polos cercanos a la circunferencia unidad deberían estar emparejados con ceros cercanos para reducir la ganancia de cada sección de segundo orden. En cuanto a la ordenación de las secciones de segundo orden, una estrategia razonable es colocar las secciones de la cascada en orden decreciente desde la máxima ganancia en frecuencia. Así, la potencia de ruido generada en secciones previas (de ganancias altas) no se realzará significativamente en las secciones posteriores, ejercicios 17 y 18.

5.2. Problemas resueltos

1. Expresar $5/8$, $9/16$, $-5/8$ y $-9/16$ en formato de signo-magnitud, complemento a uno y complemento a dos.

Resolución:

La representación numérica en punto fijo es similar a la decimal. Los dígitos a la parte izquierda de la coma representan la parte entera del número y los de la derecha la parte decimal.

De esta forma un número X cualquiera se puede representar como

$$X = \{b_{-A}, \dots, b_{-1}, b_0, b_1, \dots, b_B\}_r = \sum_{i=-A}^B b_i r^{-i}, \quad 0 \leq b_i \leq (r-1) \quad (5.15)$$

donde b_i representa cada dígito. Por ejemplo, si queremos representar en decimal el número $431'28$, hacemos

$$(431'28)_{10} = 4 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 8 \cdot 10^{-2}. \quad (5.16)$$

Sin embargo, nuestra atención se centrará en representaciones binarias. Más concretamente nos centraremos en formato de fracción binaria. Para un procesador de coma fija supone una complejidad el operar con números de diferente formato o, lo que es lo mismo, de la misma longitud de bits en los que la cantidad de bits de parte fraccional son distintos. Nótese que el procesador habría de realizar desplazamientos, por lo que en este caso sería mejor utilizar un procesador de coma flotante y un formato numérico de coma flotante.

Cuando representamos enteros, utilizamos el formato ($A = n - 1, B = 0$). Para representar fracciones tenemos ($A = 0, B = n - 1$) que tendría el punto binario entre b_0 y b_1 , y permite números, en el rango de los números positivos, de 0 a $1 - 2^{-(n-1)}$.

La representación en formato enteramente fraccional de los números positivos propuestos es:

- a) $\frac{5}{8} = 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} + 0 \cdot 2^{-4} \implies \frac{5}{8} = 0.1010$
- b) $\frac{9}{16} = 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4} \implies \frac{9}{16} = 0.1001$

Sin embargo, las fracciones negativas tienen tres posibles representaciones:

- a) *Formato de signo y magnitud.* Dado que para fracciones positivas, b_0 siempre es cero, en este formato se pone b_0 a uno para indicar signo negativo, por lo que tendríamos:

$$\left. \frac{-5}{8} \right|_{SM} = 1,1010 \quad (5.17)$$

$$\left. \frac{-9}{16} \right|_{SM} = 1,1001 \quad (5.18)$$

- b) *Formato de complemento uno.* En este formato los números negativos se representan complementando cada bit de la fracción positiva:

$$X_{C1} = 1.\bar{b}_1\bar{b}_2 \dots \bar{b}_B, X \leq 0 \quad (5.19)$$

Así, tenemos

$$\left. \frac{-5}{8} \right|_{C1} = 1,0101, \quad (5.20)$$

$$\left. \frac{-9}{16} \right|_{C1} = 1,0110 \quad (5.21)$$

- c) *Formato de complemento a dos.* En este formato los números negativos se representan formando el complemento a dos, es decir, el número negativo se forma sustrayendo ndo el número negativo de 2:

$$X_{C2} = 2 - |X|. \quad (5.22)$$

Aunque se puede ver de una forma más simple como la suma de un bit menos significativo al complemento a 1.

$$X_{C2} = X_{C1} + 2^{-B} = 1.\bar{b}_1\bar{b}_2 \dots \bar{b}_B + 0,00 \dots 1, X < 0 \quad (5.23)$$

por lo que

$$\left. \frac{-5}{8} \right|_{C2} = 1,0101 + 0,0001 = 1,0110, \quad \left. \frac{-9}{16} \right|_{C2} = 1,0110 + 0,001 = 1,0111 \quad (5.24)$$

La mayoría de los procesadores digitales de señal de punto fijo usan aritmética de complemento a dos, entre otras cosas porque si la suma de una serie de números X_1, X_2, \dots, X_N está dentro del rango numérico, será calculada correctamente incluso si las sumas parciales individuales provocan desbordamientos.

El rango del formato de complemento a dos de $n+1$ bit ($A = 0, B = n$) es $[-1, 1-2^{-B}]$. Cuando se conoce la longitud de bits de palabra, es usual la utilización del formato Q para describir el formato de representación. En general, el valor Q indica el número de bits que se desplaza la coma decimal. Así, el valor representado se puede encontrar a través de la expresión

$$Valor = Entero/2^{ValorQ}. \quad (5.25)$$

Un valor Q de x indica un entero con signo de complemento a dos cuya coma decimal se desplaza x posiciones desde el bit menos significativo (LSB). De esta forma, la representación enteramente fraccional en complemento a dos de $n + 1$ bits será un formato Q_n . Por ejemplo, si la palabra es de 16 bits una representación enteramente fraccionaria sería Q_{15} ($A = 0, B = 15$), si fuera de 32 bits Q_{31} ($A = 0, B = 31$) y si fuera de 8 bits Q_7 ($A = 0, B = 7$).



2. Expresar el número $105'676$ en formato binario:

- a) Con $(A = 4, B = 6)$.
- b) Con $(A = 8, B = 2)$.
- c) Con $(A = 2, B = 8)$.
- d) Con $(A = 8, B = 8)$.

La cuantificación se debe realizar por truncamiento. Además debe hallarse en cada caso el error de cuantificación.

Resolución:

- a) En este caso, dado que $A = 4$, la parte entera el rango de representación es desde -16 a $16 - 2^{-6}$. El número $105'676$ no está incluido en dicho rango, por lo que no puede expresarse.
- b) Con ocho bits para la parte entera y dos para la parte decimal tenemos

$$Q_{A=8, B=2}(105'676) = 001101001,10 \quad (5.26)$$

cuyo decimal equivalente es $105'50$, por lo que el error obtenido de la cuantificación por truncamiento es

$$E_t = 105'50 - 105'676 = -0'176. \quad (5.27)$$

- c) De la misma forma que en el apartado (a), el rango de representación del binario con $(A = 2, B = 8)$ no incluye al número dado.
- d) Con $(A = 8, B = 8)$ tenemos 8 bits para describir la parte entera y 8 bits para la fraccionaria, por lo que

$$Q_{A=8, B=8}(105'676) = 001101001,10101101 \quad (5.28)$$

cuyo decimal equivalente $105'6757$, por lo que el error de cuantificación es

$$E_t = 105'6757 - 105'676 = -3 \cdot 10^{-4}. \quad (5.29)$$

3. Represente $0'574$ en formato enteramente fraccional para 4, 8 y 16 bits. Compruebe que el error cometido cumple la condición

$$-2^{-b} \leq E_t \leq 0$$

siendo

$$E_t = Q_t(x) - x. \quad (5.30)$$

Resolución:

Dados $b + 1$ bits de palabra, Q_b representa el formato enteramente fraccional. Se hallarán representaciones de $0'574$ en Q_3 , Q_7 y Q_{15} .

- a) $Q[0'574]|_{Q_3} = 0,100$ cuyo decimal equivalente es $0'5$, por lo que el error de cuantificación es $E_t = 0'5 - 0'574 = -0'074 \geq -2^{-b} = -0'125$

- b) $Q[0'574]_{Q_7} = 0,1001001$ cuyo decimal equivalente es $2^{-1} + 2^{-4} + 2^{-7} = 0'5703125$, por lo que el error de cuantificación es $E_t = 0'5703125 - 0'574 = -0'0036875 \geq -2^{-b} \simeq -0'0078$
- c) $Q[0'574]_{Q_{15}} = 0,100100101111000$ cuyo decimal equivalente es $0'5739746$, por lo que el error de cuantificación es $E_t = 0'5739746 - 0'574 = -0'0000254 \geq -2^{-b} \simeq -0'00003$

Cabe destacar que este número, a pesar de que en representación decimal posee únicamente tres dígitos decimales, en representación binaria no es suficiente con 15 bits fraccionarios para realizar una representación exacta.

Cuando se realiza un sistema digital en un procesador los coeficientes habrán de convertirse a un formato binario. Sin embargo, un reducido número de decimales en la representación decimal de esos coeficientes, de ninguna manera implica la conversión sin error a un número finito de bits en binario. ★

4. Expresar en Q_3 , Q_7 y Q_{15} el número $\frac{\sqrt{2}}{2}$, para una longitud de palabra de 16 bits.

Resolución:

El número $\frac{\sqrt{2}}{2}$ es en decimal

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = 0'70710678118655 \dots \quad (5.31)$$

De la misma forma que en el ejercicio 3:

- a) $Q[\frac{\sqrt{2}}{2}]_{Q_3} = 000000000000,101$ cuyo decimal equivalente es $2^{-1} + 2^{-3} = 0'625$, por lo que el error de cuantificación es $E_t \simeq -0'082$.
- b) $Q[\frac{\sqrt{2}}{2}]_{Q_7} = 00000000,1011010$ cuyo decimal equivalente es $2^{-1} + 2^{-3} + 2^{-4} + 2^{-6} \simeq 0'703$, por lo que el error de cuantificación es $E_t \simeq -0'004$.
- c) $Q[\frac{\sqrt{2}}{2}]_{Q_{15}} = 0,101101010000010$ cuyo decimal equivalente es $2^{-1} + 2^{-3} + 2^{-4} + 2^{-6} + 2^{-8} + 2^{-14} \simeq 0'707092$, por lo que el error de cuantificación es $E_t \simeq -1'5 \cdot 10^{-5}$. ★ ★ ★

5. Supóngase que un procesador DSP de 16 bits de longitud de palabra realiza el sistema digital cuya ecuación en diferencias es

$$y(n) = x(n) + ay(n-1).$$

Asumiendo que no tenemos pérdidas de precisión en la representación Q_{15} de $x(n)$, a , e $y(n-1)$. ¿El procesador puede entonces obtener $y(n)$ sin pérdida de precisión?

Resolución:

En general podemos decir que no, ya que la multiplicación de dos números de b bits de longitud resulta en un producto de $2b$ bits de longitud. En aritmética de punto fijo, el producto debe redondearse de nuevo a b bits, con lo que tenemos un error de cuantificación al perder los b bits menos significativos.

En nuestro caso particular, el producto $ay(n-1)$ proporciona un resultado de 32 bits, que ha de truncarse o redondearse a 16 bits. Esto implica una fuente de pérdida de precisión en el cálculo. ★ ★

6. Determinar el efecto que la cuantificación de los coeficientes de la función de transferencia

$$H(z) = \frac{4}{(1 + 0'97z^{-1})(1 + 0'98z^{-1})(1 + 0'99z^{-1})}$$

tiene sobre los polos del sistema. La representación de los coeficientes debe realizarse con una longitud de palabra de 8 bits.

Resolución:

Hemos de destacar inicialmente que el efecto de la cuantificación sobre los polos del sistema es tanto mayor cuanto mayor sea el orden del denominador. Es decir, el efecto de la cuantificación aumenta con el número de polos, que en nuestro caso sólo es tres.

Así, la realización en forma directa se obtendrá a partir de los coeficientes del polinomio del denominador:

$$H(z) = \frac{1}{0'25 + 0'735z^{-1} + 0'720275z^{-2} + 0'2352735z^{-3}}. \quad (5.32)$$

Nótese que así expresada $H(z)$, podemos ver que los coeficientes $\{a_k\}$ son enteramente fraccionales. Los coeficientes decimales equivalentes a la cuantificación de los coeficientes $\{a_k\}$ en Q_7 por redondeo son $\{a'_k\}$

$$a'_1 = 0'734375, a'_2 = 0'71875, a'_3 = 0'234375 \quad (5.33)$$

donde se han conservado todos los decimales para poder calcular la variación exacta de los coeficientes. Los coeficientes decimales equivalentes a la cuantificación en binario se han calculado mediante

```
>> round(a*2^7)/2^7.
```

Así, la función de transferencia queda como

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{0'25 + 0'734375z^{-1} + 0'71875z^{-2} + 0'234375z^{-3}} \\ &\simeq \frac{4}{(1 + 0'9375z^{-1})(1 + z^{-1})^2}. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Como vemos, un polo se ha desplazado hacia $-\infty$ quedando en $p = -0'9375$ y los otros también hacia $-\infty$ formando, aproximadamente, un polo doble en -1 , por lo que la cuantificación de los coeficientes para posibilitar la realización del sistema lo ha hecho inestable.

Este efecto del desplazamiento de los polos a causa de la cuantificación de los coeficientes es mayor conforme aumenta el número de polos y conforme disminuye el número de bits de palabra.

7. Calcular analíticamente la perturbación Δp_i de los polos del sistema digital dado por la función de transferencia propuesta en el ejercicio 6, siendo Q_7 la representación de los coeficientes.

Resolución:

Para el cálculo de la perturbación Δp_i utilizamos la siguiente expresión:

$$\Delta p_i = - \sum_{k=1}^N \frac{p_i^{N-k}}{\prod_{l=1, l \neq i}^N (p_i - p_l)} \Delta a_k. \quad (5.35)$$

A partir de la función de transferencia propuesta

$$H(z) = \frac{4}{(1 + 0'97z^{-1})(1 + 0'98z^{-1})(1 + 0'99z^{-1})}. \quad (5.36)$$

tenemos que la posición ideal de los polos es

$$p_1 = -0'97, p_2 = -0'98, p_3 = -0'99. \quad (5.37)$$

Además, del ejercicio 6 podemos calcular las variaciones en los coeficientes por la cuantificación, éstas son

$$\Delta a_1 \simeq 6'25 \cdot 10^{-4}, \Delta a_2 \simeq 15'25 \cdot 10^{-4}, \Delta a_3 \simeq 8'98 \cdot 10^{-4}. \quad (5.38)$$

Así, tenemos que las perturbaciones de los polos son

$$\Delta p_1 = - \frac{p_1^{3-1} \Delta a_1 + p_1^{3-2} \Delta a_2 + p_1^{3-3} \Delta a_3}{(p_1 - p_2)(p_1 - p_3)} \simeq -0'0366. \quad (5.39)$$

$$\Delta p_2 = - \frac{p_2^{3-1} \Delta a_1 + p_2^{3-2} \Delta a_2 + p_2^{3-3} \Delta a_3}{(p_2 - p_1)(p_2 - p_3)} \simeq 0'0425. \quad (5.40)$$

$$\Delta p_3 = - \frac{p_3^{3-1} \Delta a_1 + p_3^{3-2} \Delta a_2 + p_3^{3-3} \Delta a_3}{(p_3 - p_1)(p_3 - p_2)} \simeq -0'0066. \quad (5.41)$$

En estas expresiones se ha hecho uso de que el orden es $N = 3$. El resultado Δp puede ser, en general, complejo. Sin embargo obtenemos perturbaciones reales por ser reales los tres polos.

A partir de las perturbaciones $\{\Delta p_k\}$ podemos obtener la posición de los polos $\{p_k\}$ tras la cuantificación de los coeficientes. Así,

$$p'_1 = p_1 + \Delta p_1 = -0'97 - 0'0366 = -1'0066 \quad (5.42)$$

$$p'_2 = p_2 + \Delta p_2 = -0'98 + 0'0425 = -0'9375 \quad (5.43)$$

$$p'_3 = p_3 + \Delta p_3 = -0'99 - 0'0066 = -0'9965. \quad (5.44)$$

Nótese que los resultados son similares a los obtenidos en el ejercicio 6, aunque se aportan más cifras decimales. Este método proporciona, además, la información sobre qué polo ha sido la “víctima” de cada desplazamiento específico.

En general, la Ec. (5.35) nos proporciona la medida de la sensibilidad del i -ésimo polo frente a cambios en los coeficientes $\{a_k\}$. Para la sensibilidad de los ceros frente a errores en $\{b_k\}$ se puede obtener una relación análoga.

Los términos $p_i - p_l$ en el denominador de esta expresión representan los vectores en el plano Z que comienzan en p_l y terminan en p_i . Si, como ocurre en los filtros de banda estrecha, tenemos muchos polos agrupados, las longitudes $|p_i - p_l|$ son pequeñas para los polos vecinos. Estas pequeñas longitudes contribuyen con grandes errores para la perturbación Δp_i . Así, para minimizar el error de perturbación Δp_i , se deben

maximizar las distancias entre polos. Una forma de hacer esto es realizar el sistema como cascada de etapas de segundo orden. ★ ★ ★

8. Analizar la realización del filtro FIR cuya función de transferencia es

$$H(z) = 0'0625 + 0'24z^{-1} + 0'24z^{-2} + 0'0625z^{-3}$$

y el efecto en la respuesta en frecuencia de la cuantificación por truncamiento de los coeficientes de dicho sistema. Para la realización se utiliza un procesador digital de señal con una longitud de palabra de sólo cuatro bits.

Resolución:

De un primer vistazo a los coeficientes del filtro vemos que son enteramente fraccionarios, por lo que podrían representarse en un formato binario como Q_3 . Sin embargo, si cuantificamos los coeficientes decimales a Q_3 por truncamiento, tenemos que

$$Q_3[0'0625] = 0,000, \quad (5.45)$$

que equivale a un valor decimal de cero y un error de cuantificación por truncamiento $E_t = Q[0'0625] - 0'0625 = -0'0625$. Por otro lado, tenemos

$$Q_3[0'24] = 0,001, \quad (5.46)$$

que equivale a un valor decimal de $0'125$ y un error de cuantificación por truncamiento $E_t = Q[0'125] - 0'24 = -0'115$.

Así, la función de transferencia que, bajo esta aproximación, realizará el DSP es

$$H'(z) = 0 + 0'125z^{-1} + 0'125z^{-2} + 0 \cdot z^{-3}, \quad (5.47)$$

donde, como vemos, el efecto de la cuantificación ha sido anular dos coeficientes, reduciendo el orden del sistema. Además, los coeficientes restantes han sido bastante modificados por la cuantificación.

El efecto referente a la respuesta en frecuencia puede observarse en la Fig. 5.2, donde comparando las respuestas en frecuencia correspondientes a $H(z)$ y $H'(z)$, podemos observar una gran diferencia.

En este punto puede plantearse qué se puede hacer para disminuir el efecto de la cuantificación sin aumentar la longitud de palabra. Para responder a esta cuestión, hemos de observar que los coeficientes de $H(z)$ no ocupan el máximo rango posible de la representación Q_3 . Es decir, $b_1 = b_2 = 0'24$ es el mayor coeficiente en un sistema de representación que puede llegar a $1 - 2^{-3}$.

Una forma de realizar el filtrado es multiplicar todos los coeficientes por un factor común de forma que se acomoden más ampliamente en el rango de representación. Para obtener el factor por el que multiplicar los coeficientes tomamos el valor máximo, en módulo, de los coeficientes $\{b_k\}$:

$$\max\{b_k\} = 0'24, \quad k = 0, 1, 2, 3 \quad (5.48)$$

y el factor multiplicativo f será

$$f < \frac{1}{\max\{|b_k|\}} = \frac{1}{0'24} = 4'167, \quad (5.49)$$

por lo que f debe ser menor que $4'167$. En general, se toma el máximo valor $f = 2^m$, $m \in \mathbb{Z}$ que satisfaga $f < 4'167$ para así poder realizar la multiplicación y división por dicho factor como desplazamiento de bits.

De esta forma, tomaríamos $f = 4$, con lo que partimos de

$$\begin{aligned} H''(z) &= \frac{1}{f}(f \cdot 0'0625 + f \cdot 0'24z^{-1} + f \cdot 0'24z^{-2} + f \cdot 0'0625z^{-3}) \\ &= \frac{1}{4} \underbrace{(0'25 + 0'96z^{-1} + 0'96z^{-2} + 0'25z^{-3})}_{H_1(z)}. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Nótese que, en definitiva, la función de transferencia es idéntica pero los coeficientes de $H_1(z)$ son mayores, de forma que ahora

$$Q_3[0'25] = 0,010 \quad (5.51)$$

cuyo valor decimal es $0'25$ y el error de cuantificación por truncamiento es $E_t = Q_3[0'25] - 0'25 = 0$. Por otro lado, tenemos

$$Q_3[0'96] = 0,111 \quad (5.52)$$

cuyo valor decimal es $0'875$ y el error de cuantificación por truncamiento es $E_t = Q_3[0'96] - 0'96 = -0'085$.

Como podemos ver, los coeficientes son mayores, acomodándose mejor al rango de representación Q_3 , y minimizando con mucho los errores de cuantificación respecto a la aproximación anterior.

Así, la nueva aproximación será realizar

$$H_1(z) = 0'25 + 0'875z^{-1} + 0'875z^{-2} + 0'25z^{-3} \quad (5.53)$$

mediante la ecuación en diferencias

$$y_1(n) = 0'25x(n) + 0'875x(n-1) + 0'875x(n-2) + 0'25x(n-3) \quad (5.54)$$

Posteriormente, dado que

$$H''(z) = \frac{H_1(z)}{4}, \quad (5.55)$$

la salida $y_1(n)$ se debe dividir entre 4, división que el procesador realizará mediante un desplazamiento lógico hacia la derecha de dos bits.

Realizando el sistema mediante esta última aproximación, tenemos en la Fig. 5.2 la respuesta en frecuencia $H''(w)$ así obtenida, frente a la $H(w)$ ideal. Podemos observar que, de esta forma, se obtiene una mejor aproximación a la respuesta en frecuencia ideal sin aumentar la longitud de palabra.

Cabe destacar que el efecto se ha exagerado usando una longitud de palabra reducida. Sin embargo, la utilización de un factor mejora, en general, la precisión para un mismo número de bits. No obstante, el factor de escalado de los coeficientes también vendrá limitado por las características de la señal de entrada, para que no haya desbordamiento a la salida.



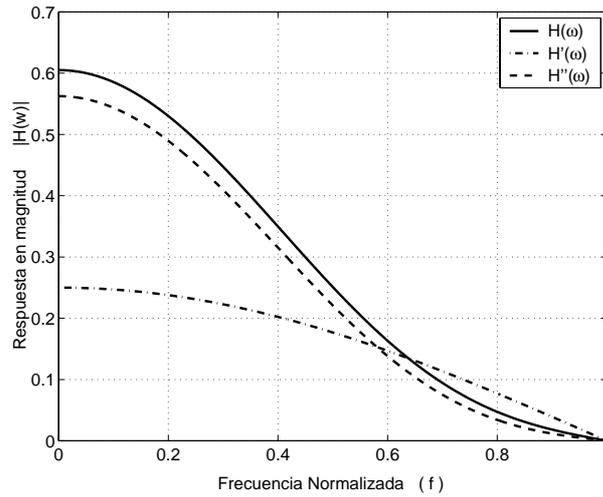


Figura 5.2: Comparación de la respuesta en frecuencia ideal con la obtenida mediante las aproximaciones realizadas.

9. Analice la realización del filtro pasa-baja de Chebyshev con función de transferencia

$$H(z) = \frac{0'0458 + 0'0755z^{-1} + 0'1024z^{-2} + 0'0755z^{-3} + 0'0458z^{-4}}{1 - 1'5233z^{-1} + 1'2537z^{-2} - 0'4602z^{-3} + 0'0747z^{-4}}.$$

Dicho sistema de orden cuatro ha de realizarse en un procesador digital de seis bits de longitud de palabra.

Resolución:

Para cuantificar los coeficientes hemos de plantearnos qué formato de representación utilizaremos. Dado que $\max\{|a_k|, |b_k|\} = 1'52$, podemos elegir un formato de complemento a dos con $(A = 1, B = 4)$. De esta forma el rango de representación es -2 a $2 - 2^{-4}$.

Si cuantificamos por truncamiento los coeficientes $\{a_k\}$ y $\{b_k\}$ a sus equivalentes decimales, tenemos la función de transferencia siguiente

$$H(z) = \frac{0 + 0'0625z^{-1} + 0'0625z^{-2} + 0'0625z^{-3} + 0 \cdot z^{-4}}{1 - 1'5625z^{-1} + 1'25z^{-2} - 0'5z^{-3} + 0'0625z^{-4}}. \quad (5.56)$$

La realización de este sistema produce una respuesta en frecuencia $H'(w)$ que puede compararse en la Fig. 5.3 con la respuesta en frecuencia ideal, $H(w)$. En este punto cabe preguntarse cómo puede realizarse el sistema con la misma longitud de palabra, alcanzado mayor precisión.

Vamos, a continuación, a abordar un segundo planteamiento que nos permitirá obtener mayor precisión a costa de un pequeño aumento de la complejidad de la realización. Si nos fijamos en el numerador de la función de transferencia, se tiene que el factor de escalado aplicado al numerador podría ser menor que el que se aplique al denominador, ya que

$$f_n < \frac{1}{\max\{|b_k|\}} = 9'7656. \quad (5.57)$$

Como sabemos, f_n se toma potencia de dos para poder multiplicar o dividir mediante desplazamiento de bits. Por ello tomamos $f_n = 8$.

Así, tendríamos que la realización del numerador sería:

$$B(z) = \frac{1}{8} \underbrace{[0'3664 + 0'604z^{-1} + 0'8192z^{-2} + 0'604z^{-3} + 0'3664z^{-4}]}_{B_1(z)} \quad (5.58)$$

donde primero se realiza $B_1(z)$ y el resultado se desplaza 3 bits a la derecha, equivalente a dividir por 8.

De la observación del denominador tenemos que el factor de normalización aplicado al denominador sería

$$f_d < \frac{1}{\max\{|a_k|\}} = 0'656. \quad (5.59)$$

De donde tomando $f_d = \frac{1}{2} = 2^{-1}$, el denominador queda

$$A(z) = 2 \underbrace{[0'5 - 0'7617z^{-1} + 0'6268z^{-2} - 0'2301z^{-3} + 0'0374z^{-4}]}_{A_1(z)}, \quad (5.60)$$

donde, de nuevo se realiza primero $A_1(z)$ y después se multiplica el resultado por dos.

En conclusión, podríamos describir la realización del sistema mediante la siguiente ecuación en diferencias:

$$y''(n) = \left[\sum_{k=0}^4 b''(k)x(n-k) \right]_{\gg 3} + \left[\sum_{k=1}^4 a''(k)y(n-k) \right]_{\ll 1} \quad (5.61)$$

donde $b''(k) = Q_5[b(k) \cdot 8]$ y $a''(k) = Q_5[\frac{a(k)}{2}]$. Como vemos, la realización planteada consiste en el cálculo de cada término entre corchetes, con coeficientes normalizados, lo cual implica mayor precisión. Tras el cálculo de las operaciones de cada corchete se desnormaliza el resultado desplazando 3 bits a la derecha el valor resultante del primer sumatorio (dividir entre 8), y 1 bit a la izquierda el valor resultante del segundo sumatorio (multiplicar por dos), sumando ambos finalmente, para dar lugar a $y''(n)$.

Esta estrategia aprovecha que un procesador DSP puede realizar una suma de productos y posterior desplazamiento lógico sin perder precisión, dado que, en general, posee bits de guarda, acumulador de $2 \times n$ bits (siendo n la longitud de palabra de datos) y la característica orden **MAC**.

Como puede verse, esta forma de realizar el sistema proporciona mayor precisión con la misma longitud de palabra. Esto se puede observar en la Fig. 5.3, con $H''(w)$ aproximándose mejor a $H(w)$ que la respuesta $H'(w)$ obtenida con el primer planteamiento. Así, el hecho de utilizar dos factores de normalización separados implica un aumento de la precisión.

Tanto este ejercicio como el anterior ilustran las ventajas de la normalización de los coeficientes. Se ha utilizado la cuantificación por truncamiento y un bajo número de bits para que aparezca más claramente el aumento de la precisión. Sin embargo, existen otras consideraciones secundarias que pueden limitar los factores de normalización planteados y que no han sido considerados en este ejercicio.

★ ★ ★

10. Para disminuir los errores de perturbación de polos y ceros ante una cuantificación de los coeficientes, se plantea la necesidad de realizar sistemas de alto orden mediante secciones de primer o segundo orden. Discutir las ventajas y desventajas de la utilización de una configuración en paralelo o en cascada.

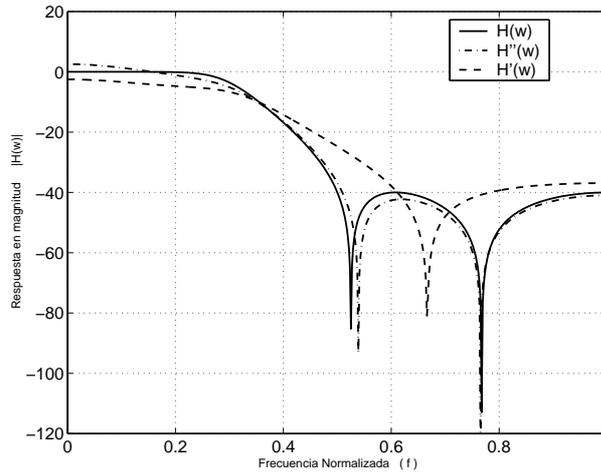


Figura 5.3: Comparación de la respuesta en frecuencia ideal con la obtenida mediante las aproximaciones realizadas.

Resolución:

En definitiva se trata de elegir la configuración más robusta a la cuantificación, entre la realización en cascada

$$H_c(z) = \prod_{k=1}^K \frac{b_{k_0} + b_{k_1}z^{-1} + b_{k_2}z^{-2}}{1 + a_{k_1}z^{-1} + a_{k_2}z^{-2}} \quad (5.62)$$

y la realización en paralelo

$$H_p(z) = \sum_{k=1}^K \frac{c_{k_0} + c_{k_1}z^{-1}}{1 + a_{k_1}z^{-1} + a_{k_2}z^{-2}}. \quad (5.63)$$

En el caso de la configuración en cascada, los coeficientes $\{b_k\}$ y $\{a_k\}$ determinan directamente la localización de los ceros y los polos, respectivamente. Por ello, es fácil controlar la sensibilidad frente al error de cuantificación tomando un número de bits lo suficientemente grande para controlar la perturbación. Así, con el número de bits puede controlarse la perturbación que introducen las raíces.

Sin embargo, en la configuración paralela de $H(z)$, sólo controlamos directamente la perturbación de los polos de la sección, ya que los coeficientes c_{k_0} y c_{k_1} no especifican directamente las posiciones de los ceros, sino indirectamente por medio de la combinación de todas las etapas de $H(z)$. Esto redundará en una gran dificultad para determinar la perturbación que el efecto de la cuantificación ejerce sobre los ceros.

En general, podemos decir que es mayor la probabilidad de que la cuantificación de los coeficientes $\{c_{k_i}\}$ de la configuración en paralelo produzca una mayor perturbación sobre los ceros del sistema, que la cuantificación de los coeficientes $\{b_k\}$ de la configuración en cascada. Por ello, y dado que en ambas configuraciones se permite el control directo de los polos, podemos seleccionar la configuración en cascada como idónea para realizaciones en las que se emplea representación en punto fijo y se desea minimizar las perturbaciones en la posición de ceros y polos, desde el punto de vista de la robustez frente a la cuantificación de los coeficientes.

11. Considérese un filtro elíptico pasa-alta de frecuencia normalizada de corte en 0.4, orden 8, con 2 dB de rizado en banda pasante y 30 dB de atenuación en la banda eliminada. Determine el efecto de la cuantificación de los coeficientes cuando se realiza en forma directa y como cascada de secciones de segundo orden. Se asume una longitud de palabra de 8 bits.

Resolución:

Los coeficiente del filtro no se especificarán por la sencillez de su obtención en el entorno MATLAB mediante la sentencia `ellip` y los parámetros dados en el enunciado:

```
>> [B,A] = ellip(8,2,30,0.4,'high');
```

Si cuantificamos por redondeo los coeficientes de la realización en forma directa, obtenemos, como se ilustra en la Fig. 5.4, una respuesta en frecuencia sustancialmente diferente de la respuesta en frecuencia ideal. Esta degradación se obtiene de la perturbación de los ceros y polos del sistema debido a la cuantificación de los coeficientes.

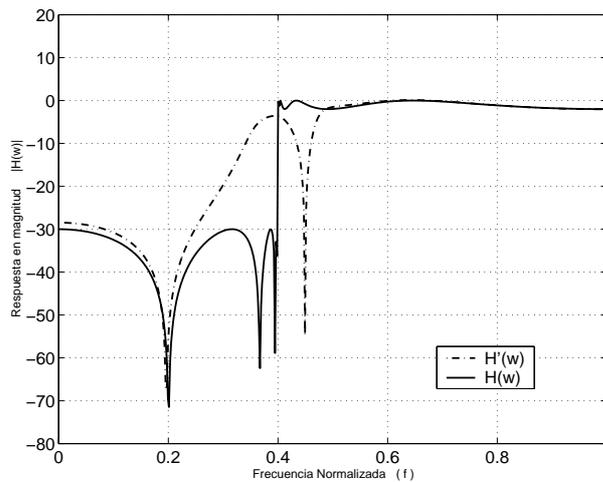


Figura 5.4: Comparación entre la respuesta en frecuencia ideal y la obtenida por cuantificación de los coeficientes de la realización en forma directa.

Por otro lado, cuantificando los coeficientes de la realización en cascada del filtro en cuestión, es casi inapreciable la degradación de la respuesta en frecuencia, Fig. 5.5. Como puede apreciarse, la realización en cascada es más robusta frente a la cuantificación de los coeficientes. Los coeficientes de la realización en cascada se han obtenido utilizando la orden `tf2sos` de MATLAB, realizando una ordenación de las etapas según distancia de los polos al cero.

El procedimiento seguido para obtener las respuestas en frecuencia es similar al del ejercicio 1 de la sección de “Prácticas con MATLAB” de este mismo capítulo.



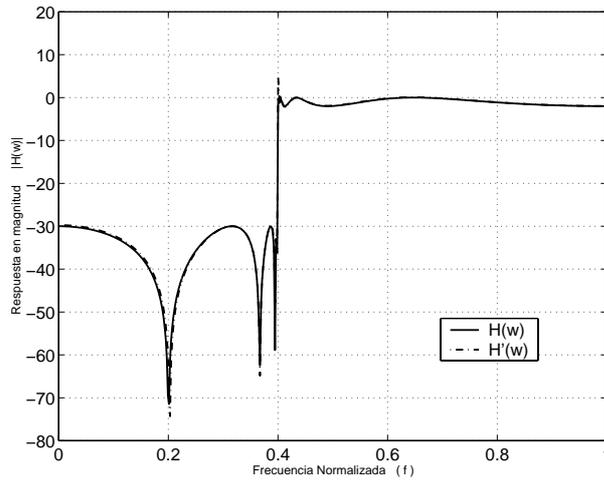


Figura 5.5: Comparación entre la respuesta en frecuencia ideal y la obtenida por cuantificación de los coeficientes de la realización en cascada.

12. Un filtro de fase lineal de orden 32 se realiza de forma directa utilizando una longitud de palabra de 10 bits (9 bits más uno adicional para el signo). Con esta precisión posee una determinada desviación estándar, σ_{32} , que determina el error que se produce en la respuesta en frecuencia cuantificada $H_q(w)$ respecto de la respuesta en frecuencia ideal.
- Si se pretende aumentar el orden de filtro para hacer más abruptas ciertas transiciones, ¿cuántos bits se necesitan para mantener la misma varianza del error con orden 128 y 256?
 - ¿Qué ocurre si el procesador digital usado no llega a obtener dicha longitud de palabra?

Resolución:

- a) La expresión de la varianza del error de la respuesta en frecuencia se obtiene a partir de los valores cuantificados:

$$h_q(n) = h(n) + e_h(n), \quad (5.64)$$

donde los valores cuantificados que forman la respuesta impulsional real se pueden expresar linealmente introduciendo una perturbación dada por una secuencia de error $e_h(n)$. La respuesta en frecuencia de dicha secuencia es

$$E_M = \sum_{n=0}^{M-1} e_h(n) e^{-jwn}, \quad (5.65)$$

que como $e_h(n)$ tiene media cero y asumiendo que es incorrelada, la varianza del error es la suma de las varianzas de M términos,

$$\sigma_E^2 = \frac{2^{-2(b+2)}}{3} M. \quad (5.66)$$

Asumiendo que σ_{32}^2 sea el valor de la varianza para $M = 32$, para $M = 128$ tendremos

$$\sigma_{128}^2 = \sigma_{32}^2 \cdot 4. \quad (5.67)$$

A partir de la Ec. (5.66), para mantener la varianza de error se debe incrementar un bit de precisión a medida que el orden se aumenta en un factor cuatro.

Así, para $M = 128$ el incremento de M es por un factor 4, por lo que se necesita una longitud de palabra de 11 bits para mantener constante la varianza del error.

Para $M = 256$, el incremento de M es por un factor 8, por lo que un aumento de la longitud de palabra de 1 bit no sería suficiente. Se necesita un incremento de dos bits de longitud de palabra, quedando finalmente la varianza del error menor que la de la realización con $M = 30$ y 10 bits.

- b) Si el procesador digital usado no llegara a obtener dicha longitud de palabra de 11 o 12 bits, para $M = 128$ y $M = 256$ respectivamente, debería pensarse en implementar el filtro como una cascada de secciones para reducir los requisitos de la precisión y poder continuar con 10 bits de longitud de palabra.

★ ★

13. Se pretende realizar de forma directa un filtro FIR de fase lineal con una varianza del error de la respuesta en frecuencia de $\sigma_E^2 < 10^{-9}$.

- a) Si el orden del filtro FIR en cuestión es $M = 32$. ¿Qué longitud de palabra debemos requerir?
- b) ¿Hasta qué orden podremos extender la realización de forma directa de manera que se cumpla la condición respecto de la varianza del error? Supongamos disponibilidad de un DSP de 16 bits de longitud de palabra.
- c) ¿Qué debemos plantear para la realización de filtros de mayor orden que el determinado en el apartado (b) en el mismo DSP y satisfaciendo la condición de la varianza del error?

Resolución:

- a) Si el orden del filtro es $M = 32$, podemos calcular fácilmente el número de bits a través de

$$\sigma_E^2 \leq 10^{-9} = \frac{2^{-2(b+2)}}{3} M = \frac{2^{-2(b+2)}}{3} 32. \quad (5.68)$$

Mediante unos pocos cálculos llegamos a que son necesarios

$$b \geq 14'6562. \quad (5.69)$$

Como, obviamente, hemos de tomar b entero, tomaremos $b = 15$. Esto quiere decir que se necesita un procesador digital de longitud de palabra $b + 1 = 16$ bits como mínimo.

- b) Si disponemos de un DSP de 16 bits de longitud de palabra, ¿hasta qué orden se cumple la condición para la varianza del error? Nótese que anteriormente obtuvimos que, para $M = 32$ se necesitaba $b \geq 14'6562$. Podemos realizar ordenes mayores hasta $b = 15$ ($b + 1 = 16$ bits de longitud de palabra). Si sustituimos la condición de la varianza y $b = 15$ con la expresión

$$\sigma_E^2 = \frac{2^{-2(b+2)}}{3} M \quad (5.70)$$

obtendríamos $M = 51'53$ de lo cual se desprende que con dicho DSP podríamos realizar en forma directa hasta $M = 51$.

- c) Para órdenes $M \geq 52$, si queremos garantizar que se satisface la condición de la varianza del error, debemos estudiar la realización del filtro como una cascada de secciones, si queremos seguir utilizando el mismo procesador.

14. Sea un sistema recursivo de primer orden, como el que se ilustra en la Fig. 5.6, que se realiza mediante un procesador DSP de aritmética de punto fijo de cinco bits de longitud de palabra.
Asumiendo cuantificación por redondeo, obténgase la respuesta impulsional con coeficientes $a = 3/4$ y $a = -3/4$. Compárese con la respuesta impulsional ideal.

Resolución:

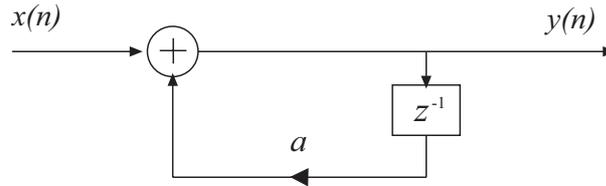


Figura 5.6: Diagrama de bloques del sistema propuesto.

Asumimos un formato de representación Q_4 . En este, la entrada impulsional no puede representarse ya que no lo puede obtener el 1. Sin embargo, asumimos la cuantificación de esta a

$$x(n) = (1 - 2^{-4})\delta(n) = \frac{15}{16}\delta(n) \quad (5.71)$$

que es la entrada impulsional con el valor del impulso cuantificado.

En la Fig. 5.7(a), vemos como la salida ideal para $a = \frac{3}{4}$ es una exponencial decreciente que converge a cero. No obstante, podemos observar también como la salida real difiere, Fig. 5.7(b), alcanzando un valor estacionario diferente de cero. Este valor depende del valor del polo y para $a = \frac{3}{4}$ es de $0.125 = 1/8$. Este es un ciclo límite que ocurre como resultado de los efectos de cuantificación en las multiplicaciones, que puede describirse a través de la ecuación en diferencias no lineal

$$v(n) = Q[av(n-1)] + x(n). \quad (5.72)$$

Asumimos aquí que la cuantificación se realiza por redondeo. Ésta es fácilmente expresable en un entorno matemático como MATLAB. La cuantificación por redondeo de un valor $av(n-1) \in [-1, 1]$ se puede obtener

$$Q[av(n-1)] = \frac{\text{round}(av(n-1)2^b)}{2^b} \quad (5.73)$$

donde $b+1$ es la longitud de palabra y siempre teniendo en cuenta que esta expresión no modela los ciclos límite causados por desbordamiento en las sumas.

Volviendo al caso que nos ocupa, tenemos que la amplitud de la salida cuando ya se ha entrado en un ciclo límite queda confinada dentro del rango de valores denominado "banda muerta". En general, la expresión que define la banda muerta para un filtro IIR de primer orden es

$$|v(n-1)| \leq \frac{\frac{1}{2}2^{-b}}{1-|a|} \quad (5.74)$$

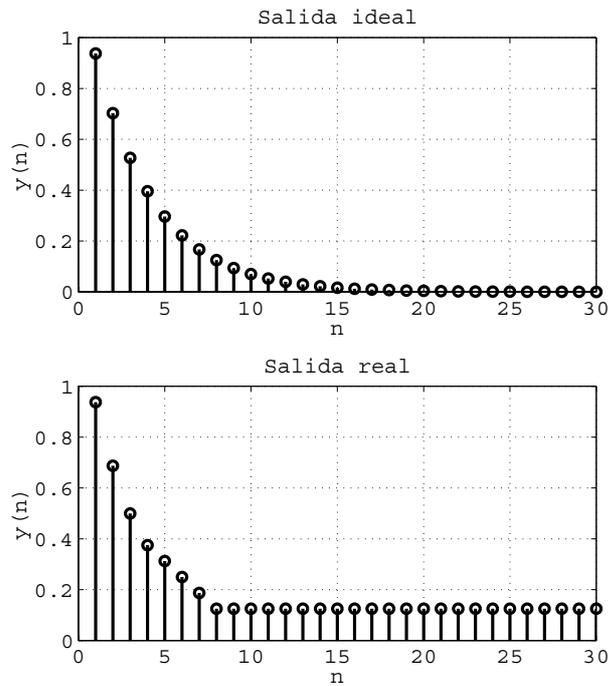


Figura 5.7: Respuesta impulsional del sistema ideal y cuantificado para $a = 3/4$.

con $b + 1$ la longitud de palabra. Para el caso que nos ocupa, $b = 4$ y $a = 0'75$, se obtiene que, efectivamente, la banda muerta es aquella para la cual

$$|v(n - 1)| \leq 0'125, \quad (5.75)$$

que es el valor estacionario para el que se estabiliza la respuesta impulsional real, tabulada en la Tabla 5.1.

Tabla 5.1: Efectos de la cuantificación de la respuesta impulsional para distintos valores del parámetro a .

n	$a=0'75$	$a=-0'75$
0	0.1111 (+0'9376)	0.1111 (+0'9376)
1	0.1011 (+0'6875)	1.0101 (-0'6875)
2	0.1000 (+0'5000)	0.1000 (+0'5000)
3	0.0110 (+0'3750)	1.1010 (-0'3750)
4	0.0101 (+0'3125)	0.0101 (+0'3125)
5	0.0100 (+0'2500)	1.1100 (-0'2500)
6	0.0011 (+0'1875)	0.0011 (+0'1875)
7	0.0010 (+0'1250)	1.1110 (-0'1250)
8	0.0010 (+0'1250)	0.0010 (+0'1250)
9	0.0010 (+0'1250)	1.1110 (-0'1250)
10	0.0010 (+0'1250)	0.0010 (+0'1250)

La Fig. 5.8(a), por otro lado, ilustra la salida ideal para $a = -3/4$. Como vemos, ésta es alterna y converge a cero para $n \rightarrow \infty$. En la Fig. 5.8(b) observamos la salida real, también tabulada en la Tabla 5.1. Como vemos, cuando entra en el ciclo limite oscila dentro, y siempre confinado, de la banda muerta.

En general, la salida presentará el ciclo límite hasta que se aplique otra entrada de suficiente tamaño que conduzca el sistema fuera del ciclo límite.

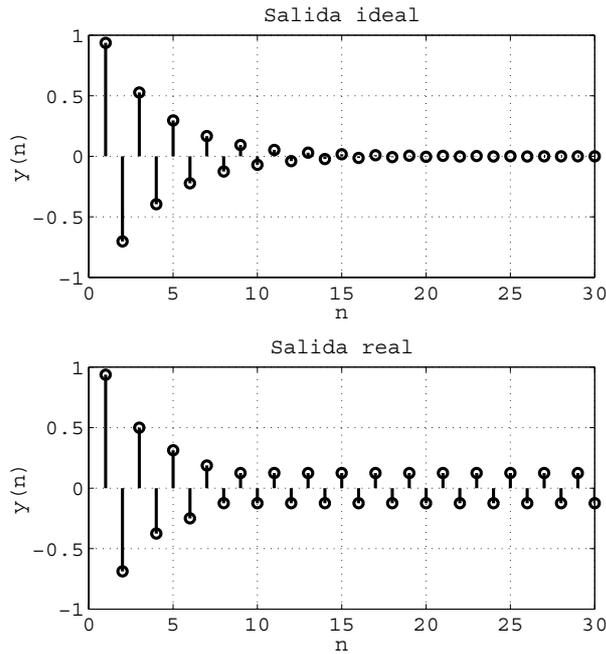


Figura 5.8: Respuesta impulsional del sistema ideal y cuantificado para $a = -3/4$.

15. Repetir el ejercicio 14 para un sistema recursivo de dos polos, como ilustra la Fig. 5.9, con coeficientes $a_1 = -0,75$ y $a_2 = -0,25$.

Resolución:

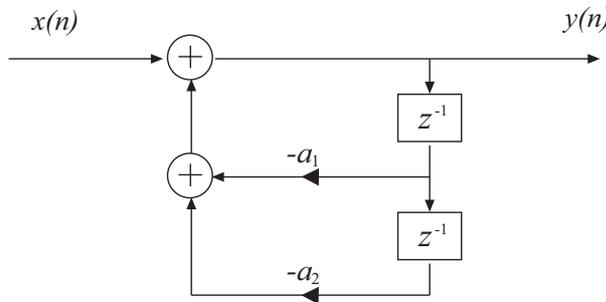


Figura 5.9: Sistema propuesto en el ejercicio 15.

Asumiendo un formato de representación Q_4 , aplicaremos la cuantificación de la entrada impulso, que es $x(n) = \frac{15}{16}\delta(n)$.

La Fig. 5.10(a) muestra la salida ideal del sistema frente al impulso dado. Como vemos, para $a_1 = -0,75$ y $a_2 = -0,25$ tenemos una salida que converge a cero. Sin embargo, el comportamiento de la salida real, Fig. 5.10(b), es distinto. Esta no converge, queda oscilando eternamente, definiendo los límites de la banda muerta para este ciclo límite a partir de $n = 6$.

Tenemos un ciclo límite alterno en la banda muerta de amplitud $0,0625$. La salida del sistema presentará el ciclo límite hasta que se aplique otra entrada de tamaño suficiente como para conducir el sistema fuera del ciclo límite.

Es inmediato deducir que en las realizaciones de un sistema en forma paralela, cada sección del primer o segundo orden exhibirá su propio comportamiento de ciclo límite, sin interacción entre secciones, por lo que cuando todas ellas lo presenten, a la salida existirá un ciclo límite suma de los ciclos límite de las secciones.

En las realizaciones en cascada, los ciclos límite presentan un comportamiento más complejo, ya que el ciclo límite de una sección se filtra en las secciones sucesivas. Si se diera el caso, por ejemplo, de que la oscilación del ciclo límite de una sección cae dentro de la frecuencia de resonancia de la sección siguiente, se produciría un efecto indeseado, ya que dicha amplitud se amplificaría por la resonancia.

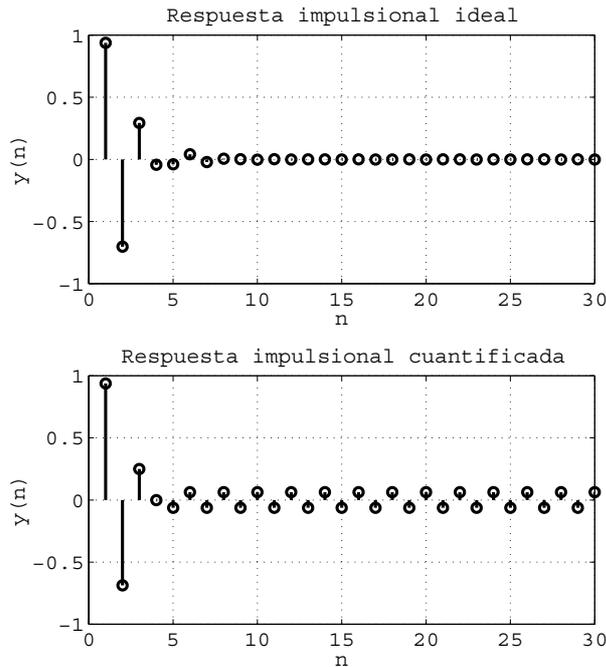


Figura 5.10: Respuesta impulsional ideal y cuantificada.

★ ★ ★

16. En el sistema digital de la Fig. 5.11 se usa un convertor A/D excitado por un potenciómetro que es usado para atenuar la señal de entrada analógica $x(t)$. ¿Qué valor de atenuación debe ser aplicado en el potenciómetro para asegurar que no hay desbordamiento?

Resolución:

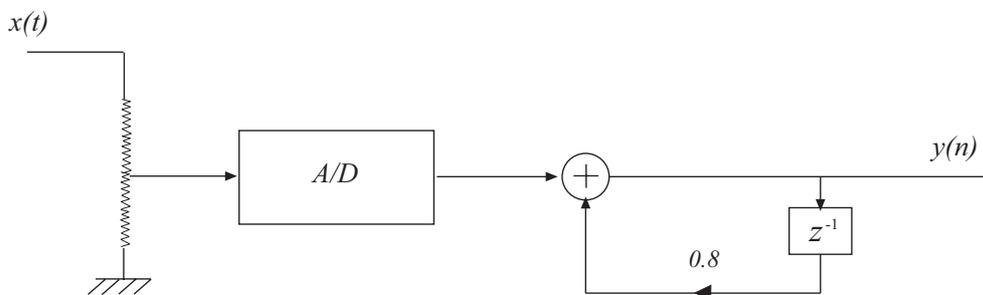


Figura 5.11: Ilustración del esquema planteado en el ejercicio 16.

La aritmética de saturación elimina los ciclos límite debidos al desbordamiento en

nodos suma. Sin embargo, su utilización produce distorsión no lineal ante desbordamiento de cualquier nodo suma del sistema. Por ello, un planteamiento estricto es no permitir el desbordamiento de ningún nodo intermedio. Para ello se realiza una atenuación de la señal de entrada a través de

$$A_x < \frac{1}{\sum_{m=-\infty}^{\infty} |h(m)|}. \quad (5.76)$$

Dado que la respuesta impulsional de nuestro sistema es positiva y monótona decreciente queda como

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} |h(m)| = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) = \sum_{m=0}^{\infty} (0'8)^n = \frac{1}{1-0'8} = 5, \quad (5.77)$$

por lo que para evitar desbordamiento alguno, debe ser aplicada una atenuación:

$$A_x < \frac{1}{\sum_{m=-\infty}^{\infty} |h(m)|} = \frac{1}{5} = 0'2. \quad (5.78)$$

No obstante, esta atenuación puede resultar excesivamente conservativa, perdiendo bastante precisión para representar $x(n)$. Esto es especialmente cierto para secuencias de entrada de banda estrecha. Para estos casos, puede utilizarse otro factor de escalado que proporciona generalmente un escalado menos severo. Este es

$$A_x < \frac{1}{\max_{0 \leq w \leq \pi} |H(w)|}, \quad (5.79)$$

que en nuestro caso $\max_{0 \leq w \leq \pi} |H(w)| = 5$, por lo que implica la misma atenuación que en la primera aproximación. Sin embargo, este valor es, por lo general, igual o menor que la primera aproximación implicando, en general, menor atenuación y asegurando que ante entradas estacionarias no hay desbordamiento, aunque sí probablemente durante los transitorios.

Una tercera aproximación menos conservativa todavía, consiste en escalar mediante

$$A_x < \frac{1}{\sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)|^2}} = \frac{1}{1'67} = 0'6. \quad (5.80)$$

Claramente, la primera es la aproximación más pesimista, aunque mediante ésta no existe posibilidad alguna de desbordamiento.

17. Determine la expresión para la varianza del ruido de redondeo a la salida del sistema mostrado en la Fig. 5.12.

Resolución:

El ruido de redondeo se modela como una secuencia de error, $e(n)$, que añadida al producto asimila la pérdida de precisión en éste como consecuencia de dicha entrada error.

Asumimos que el error $\{e(n)\}$ está distribuido uniformemente con media cero y varianza

$$\sigma_e^2 = \frac{2^{-2b}}{12}. \quad (5.81)$$

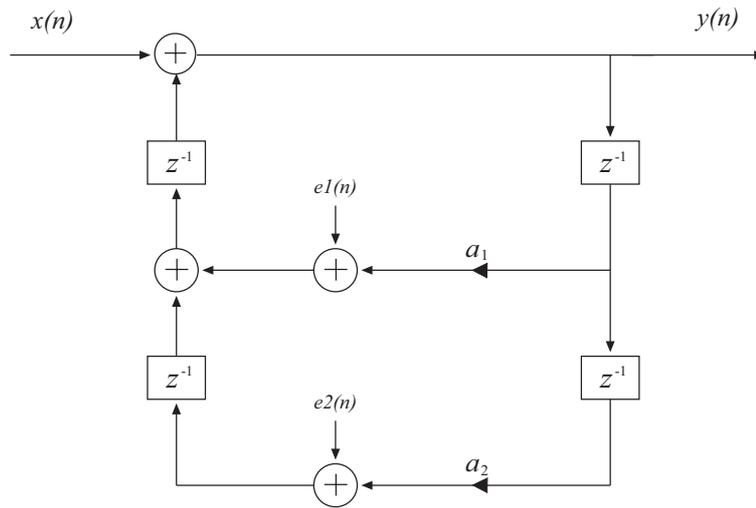


Figura 5.12: Sistema propuesto en el ejercicio 17. Modelado del error de redondeo en cada producto.

Asumiremos que $e(n)$ y $e(m)$ no se correlacionan para $n \neq m$ y que $e(n)$ no se correlaciona con la secuencia de entrada $\{x(n)\}$. En la Fig. 5.12 se identifican dos fuentes de error, una en cada producto. Asociados a cada uno de ellos tenemos las secuencias de error $e_1(n)$ y $e_2(n)$.

Sea $H(z)$ la función de transferencia del sistema con las fuentes de error anuladas. Esto es,

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - a_1 z^{-2} - a_2 z^{-4}} \quad (5.82)$$

y consideramos $h(n)$ a su respuesta impulsional.

Si anulamos la entrada y una de las fuentes de error podemos encontrar

$$H_1(z) = \frac{Y(z)}{E_1(z)} = \frac{z^{-1}}{1 - a_1 z^{-2} - a_2 z^{-4}} \quad (5.83)$$

$$H_2(z) = \frac{Y(z)}{E_2(z)} = \frac{z^{-2}}{1 - a_1 z^{-2} - a_2 z^{-4}} \quad (5.84)$$

que son las funciones de transferencia entre la salida y la secuencia de error de entrada $e_1(n)$ y $e_2(n)$, respectivamente. Denominemos $h_1(n)$ y $h_2(n)$ las respuestas impulsionales de $H_1(z)$ y $H_2(z)$, respectivamente. Así, la varianza del ruido de redondeo a la salida es

$$\sigma^2 = \sigma_e^2 \left[\sum_{n=0}^{\infty} h_1^2(n) + \sum_{n=0}^{\infty} h_2^2(n) \right] \quad (5.85)$$

y dado que $h_1(n) = h(n-1)$ y $h_2(n) = h(n-2)$, podemos escribir

$$\sum_{n=0}^{\infty} h^2(n) = \sum_{n=0}^{\infty} h_1^2(n) = \sum_{n=0}^{\infty} h_2^2(n). \quad (5.86)$$

Finalmente, la expresión para la varianza del ruido de redondeo a la salida del sistema es

$$\sigma^2 = \sigma_e^2 \cdot 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} h^2(n), \quad (5.87)$$

que dependerá tanto de a_1 y a_2 como del número de bits de la longitud de palabra utilizada.

18. Determine la varianza del ruido de redondeo en la salida de las dos realizaciones en cascada $H(z) = H_1(z) \cdot H_2(z)$ y $H(z) = H_2(z) \cdot H_1(z)$ que se indican en la Fig. 5.13 siendo

$$H_1(z) = \frac{1}{1 - 0'2z^{-1}}, H_2(z) = \frac{1}{1 - 0'75z^{-1}}.$$

Resolución:

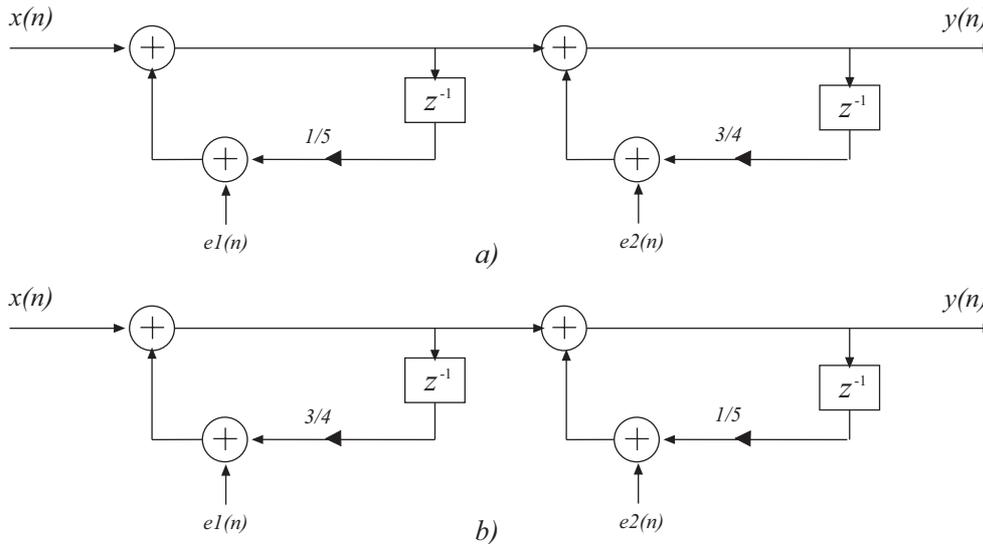


Figura 5.13: Posibles realizaciones en cascada.

Sean las respuestas impulsionales correspondientes a $H(z)$, $H_1(z)$ y $H_2(z)$ son respectivamente

$$h_1(n) = \left(\frac{1}{5}\right)^n u(n) \quad (5.88)$$

$$h_2(n) = \left(\frac{3}{4}\right)^n u(n) \quad (5.89)$$

$$h(n) = \left[\frac{15}{11} \left(\frac{3}{4}\right)^n - \frac{4}{11} \left(\frac{1}{5}\right)^n \right] u(n) \quad (5.90)$$

donde $h(n)$ se ha obtenido directamente de la expansión de $H(z)$ en fracciones simples:

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0'95z^{-1} + 0'15z^{-2}} = \frac{1'36}{1 - 0'75z^{-1}} - \frac{0'36}{1 - 0'2z^{-1}}. \quad (5.91)$$

Comenzaremos con la realización de la Fig. 5.13(a). Como vemos, tenemos dos entradas de error, por lo que para calcular la varianza de salida necesitaremos la respuesta impulsional entre cada entrada $e_m(n)$ para $m = 1, 2$ y la salida. Sin embargo, puede verse fácilmente que la función de transferencia, para este caso, entre $e_1(n)$ e $y(n)$ es

$$H(z) = \frac{Y(z)}{E_1(z)} \quad (5.92)$$

y entre $e_2(n)$ e $y(n)$

$$H_2(z) = \frac{Y(z)}{E_2(z)} \quad (5.93)$$

por lo que la varianza de ruido de redondeo en la salida de la primera realización es

$$\sigma_1^2 = \sigma_e^2 \left[\sum_{n=0}^{\infty} h^2(n) + \sum_{n=0}^{\infty} h_2^2(n) \right]. \quad (5.94)$$

En la segunda realización tenemos que

$$H(z) = \frac{Y(z)}{E_1(z)} \quad (5.95)$$

y entre $e_2(n)$ e $y(n)$

$$H_1(z) = \frac{Y(z)}{E_2(z)} \quad (5.96)$$

por lo que la varianza de ruido de redondeo en la salida de esta segunda realización es

$$\sigma_2^2 = \sigma_e^2 \left[\sum_{n=0}^{\infty} h^2(n) + \sum_{n=0}^{\infty} h_1^2(n) \right]. \quad (5.97)$$

Así, con

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} h^2(n) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{225}{121} \left(\frac{9}{16} \right)^n + \frac{16}{121} \left(\frac{1}{25} \right)^n - \frac{120}{121} \left(\frac{3}{20} \right)^n \right] \\ &= \frac{225/121}{1 - 9/16} + \frac{16/121}{1 - 1/25} - \frac{120/121}{1 - 3/20} = 3'221 \end{aligned} \quad (5.98)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_2^2(n) = \frac{1}{1 - 9/16} = 2'285714$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_1^2(n) = \frac{1}{1 - 1/25} = 1'04166$$

con lo cual

$$\sigma_1^2 = 5'5067\sigma_e^2, \quad (5.99)$$

$$\sigma_2^2 = 4'2626\sigma_e^2. \quad (5.100)$$

Si calculamos el cociente entre ambos tenemos que

$$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1'292. \quad (5.101)$$

Por lo que la potencia de ruido en la primera realización es un 29'2 % mayor que en la segunda. Obviamente, utilizaremos la segunda realización. Nótese que si todas las secciones fueran de primer orden con polos reales, las ordenaríamos según orden decreciente.

5.3. Problemas propuestos

1. Sea el sistema

$$y(n) = 0,6x(n) - 0,48y(n-1) + 0,1y(n-2)$$

- Cuantifique mediante truncamiento los coeficientes del sistema. Estos deben representarse en formato Q_3 con una longitud de palabra de cuatro bits.
- Repita el apartado a) utilizando la cuantificación por redondeo.
- Dibuje las respuestas en frecuencia obtenidas y compárelas con la respuesta en frecuencia ideal. ¿Qué tipo de cuantificación es mejor?

2. La entrada al sistema dado por la ecuación en diferencias

$$y(n) = ay(n-1) + x(n), \quad (5.102)$$

se cuantifica con b bits de longitud de palabra.

- Determine la potencia de ruido producida por el ruido de cuantificación, a la salida del sistema, si $a = 0,9$.
- Repetir el apartado a) para $a = 0,99$ y $a = 0,999$.
- ¿Qué implica el hecho de existir una potencia de ruido considerable a la salida?

3. El sistema de segundo orden dado por

$$H(z) = \frac{1}{1 + 0,5z^{-1} - 0,125z^{-2}}$$

se ha de realizar en aritmética fraccional con formato Q_4 y longitud de palabra de 5 bits. Considerando la recuantificación de los productos a dicho formato, obtenga las 12 primeras muestras de la respuesta impulsional y determine si el sistema tiende a un ciclo límite.

4. Determine la varianza de ruido de redondeo a la salida de cada una de las dos posibles realizaciones en cascada de $H(z) = H_1(z)H_2(z)$ con

$$H_1(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}, \quad H_2(z) = \frac{1}{1 + \frac{3}{4}z^{-1}} \quad (5.103)$$

Determinese la realización que minimiza la potencia de ruido a la salida.

5. Dos sistemas de primer orden de funciones de transferencia

$$H_1(z) = \frac{2}{1 + \frac{1}{4}z^{-1}}, \quad H_2(z) = \frac{2}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

se colocan en cascada. Determine qué ordenación es más adecuada para disminuir el ruido debido al redondeo de la operación producto.

6. Determine la expresión del ruido a la salida debido a la cuantificación de las operaciones producto de un sistema genérico de un cero y un polo cuando se realizan mediante la forma directa II traspuesta.

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}},$$

Considere la cuantificación de cada operación producto. Particularice para

$$H(z) = \frac{2 - 5z^{-1}}{1 - 0,5z^{-1}}.$$

7. Determine la varianza de ruido de redondeo a la salida de la realización en paralelo

$$H(z) = H_1(z) + H_2(z)$$

donde $H_1(z)$ y $H_2(z)$ vienen dadas por las Ecs. (5.103)

5.4. Prácticas con MATLAB

En este apartado vamos a realizar cuatro prácticas con MATLAB sobre distintas aplicaciones reales de diseño. La primera de ellas analiza cómo la sensibilidad frente a la cuantificación de los coeficientes puede disminuirse utilizando realizaciones en cascada o en paralelo. En general, la cuantificación de los coeficientes resulta en que tanto los polos como los ceros pasan a disponer de un número discreto de posibles localizaciones en el plano Z , es decir, las raíces ya no podrán situarse en cualquier punto del diagrama sino en un número finito de lugares puntuales. Es interesante destacar que, dependiendo de la realización del sistema, la distribución de dichos puntos varía, pudiendo seleccionar aquella realización que más nos interese. Esto se mostrará en las prácticas 2 a 4.

La cuantificación, desde el punto de vista de la respuesta en frecuencia, modifica los coeficientes de forma que la respuesta en frecuencia $H'(w)$ será diferente de la respuesta en frecuencia deseada $H(w)$. Más aún, los polos podrían desplazarse fuera del círculo de radio unidad, causando inestabilidad en el sistema implementado aunque la función de transferencia con coeficientes no cuantificados sea estable.

1. Dado un filtro elíptico pasa-baja de frecuencia de corte normalizada 0'25 y orden 8, 2 dB de rizado en banda pasante y 30 dB de atenuación de la banda eliminada:
 - a) Determinése el efecto sobre la respuesta en frecuencia de la cuantificación de los coeficientes de la realización en forma directa, con una longitud de palabra de 15 bits.
 - b) Determinése el efecto sobre la respuesta en frecuencia de la cuantificación de los coeficientes de la realización en cascada con una longitud de palabra de 9 bits.

Resolución:

Dados los parámetros del filtro, es sencillo obtener los coeficientes en el entorno MATLAB mediante la función `ellip`, por lo cual estos no se transcriben aquí (ver programa).

- a) Si cuantificamos por redondeo los coeficientes de la forma directa con una longitud de palabra de 15 bits, tenemos la respuesta en frecuencia que observamos en la Fig. 5.14. En esta podemos observar una buena coincidencia con la respuesta en frecuencia ideal, con excepción de un intervalo de frecuencias alrededor de la frecuencia de corte. De hecho, ni la frecuencia de corte ni la caída del a transición coinciden con las de la realización ideal.
- b) Por otro lado, la cuantificación de los coeficientes de la realización en cascada proporciona la respuesta en frecuencia $H'(w)$ que se ilustra en la Fig. 5.15. Como vemos, a pesar de que la longitud de palabra para la representación de los coeficientes de la realización en cascada es la mitad, podemos considerar que es una buena aproximación.

A partir de la comparación de ambas realizaciones podemos concluir que la realización en cascada es muy robusta cuando empleamos representación en punto fijo, y por tanto existe cuantificación de los coeficientes. De hecho, es mucho más robusta que la realización en forma directa aún utilizando longitudes de palabra mucho menores.

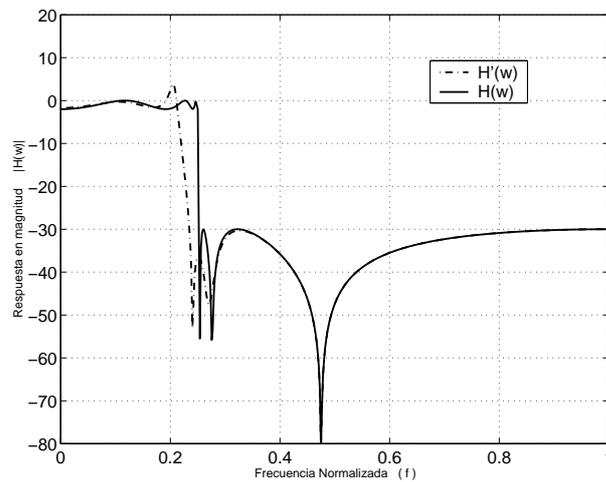


Figura 5.14: Respuesta en frecuencia ideal y la obtenida por cuantificación de los coeficientes de la realización de la forma directa.

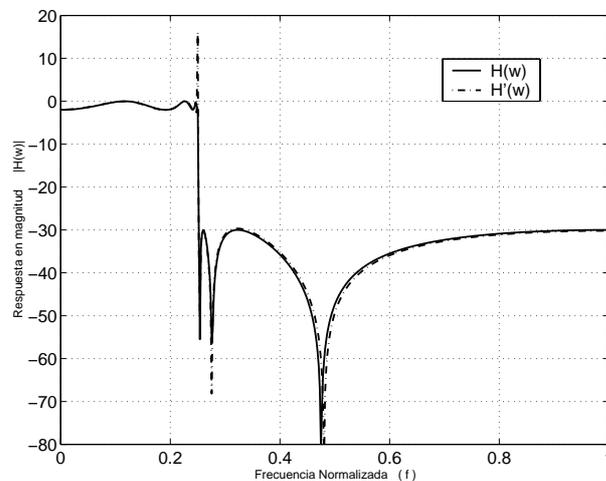


Figura 5.15: Respuesta en frecuencia ideal y la obtenida por cuantificación de los coeficientes de la realización en cascada.

A continuación mostramos el código en MATLAB para realizar esta práctica:

```
% Número de bits para la realización en forma directa.
b=14;
```

```
[B,A]=ellip(8,2,30,.25)
```

```
Bn=B/max(abs(B));
Bn=round(Bn.*2^(b))/2^(b);
Bq=Bn.*max(abs(B));
```

```
An=A/max(abs(A));
An=round(An.*2^(b))/2^(b);
Aq=An.*max(abs(A));
```

```
[Hq,W]=freqz(Bq,Aq);
[H,W]=freqz(B,A);
```

```

plot(W/pi,20*log10(abs(Hq)), 'r');
hold on;
plot(W/pi,20*log10(abs(H)), 'b');
xlabel('Frecuencia Normalizada ( f )')
ylabel('Respuesta en magnitud |H(w)|')
grid on
axis([0 1 -80 20]);

%Número de bits de la realización en cascada.
b=8;

[J]=zp2sos(roots(B),roots(A),B(1))
[m,n]=size(J);
for i=1:m
    Jn=J(i,:)/max(abs(J(i,:)))
    Jn=round(Jn.*2^(b))/2^(b);
    Jq(i,:)=Jn.*max(abs(J(i,:)));
end

figure(2);
plot(W/pi,20*log10(abs(H)), 'b');
hold on;
[Bsos,Asos]=sos2tf(Jq);
[Hsos,W]=freqz(Bsos,Asos);
plot(W/pi,20*log10(abs(Hsos)), 'r');
xlabel('Frecuencia Normalizada ( f )')
ylabel('Respuesta en magnitud |H(w)|')
grid on
axis([0 1 -80 20]);

```

Como vemos, se ha aplicado un factor de escalado de los coeficientes diferente para numerador y denominador. Este se ha tomado como el máximo de los valores absolutos de los coeficientes, a pesar de no ser potencia de dos.

2. Analizar las posibles situaciones de los polos de un sistema todo-polos definido por

$$H(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

considerando la cuantificación de los coeficientes según una longitud de palabra de 5 bits y una realización en forma directa.

Resolución:

El filtro todo-polos de segundo orden propuesto, asumiendo polos complejos conjugados en $p = re^{\pm j\theta}$, también puede expresarse como

$$H(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = \frac{1}{1 - (2r \cos \theta) z^{-1} + r^2 z^{-2}} \quad (5.104)$$

con $a_1 = -2r \cos \theta$ y $a_2 = r^2$. La realización en forma directa de éste responde al digrama de bloques de la Fig. 5.16.

Si utilizamos precisión infinita, podríamos emplazar los polos en cualquier posición. Sin embargo, con precisión finita (cuantificando a_1 y a_2), las posibles posiciones de

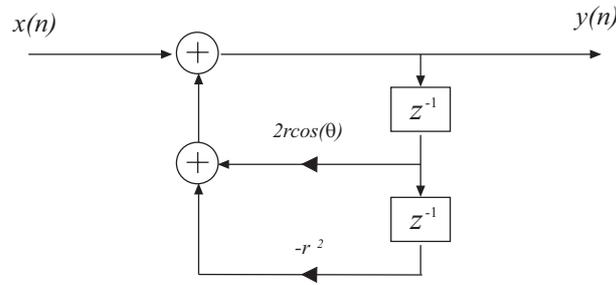


Figura 5.16: Estructura del sistema IIR todo-polos de segundo orden.

los polos también se cuantifican. De hecho, cuando se usan $b + 1$ bits para representar los coeficientes a_1 y a_2 , existen como máximo $(2^b - 1)^2$ posiciones posibles de polos en cada cuadrante, excluyendo $a_1 = 0$ y $a_2 = 0$.

Así, para conocer las posibles posiciones de los polos en el primer cuadrante, damos valores a a_1 y a_2 . El siguiente código de MATLAB ilustra la forma de obtener los polos del primer cuadrante:

```
i=1;
for a2=0:1/2^4:(2^4-1)/2^4
    r=sqrt(a2);
    for a1 = 0:2/2^4:2*(2^4-1)/2^4
        theta = acos(a1/(2*r));
        y(:,i) = [r;theta];
        i=i+1;
    end;
end;
```

Como vemos, al dar valores cuantificados a a_1 y a_2 , obtenemos la posición de los polos mediante

$$r = \sqrt{a_2}, \quad (5.105)$$

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{a_1}{2r} \right). \quad (5.106)$$

Cabe notar varias cuestiones:

- A partir de la expresión de r , se desprende que para que $r \in [0, 1]$, se necesita $a_2 \in [0, 1]$, por lo que como $b = 4$, damos a a_2 16 valores desde 0 a 1 (en realidad hasta $1 - 2^{-4}$).
- Mediante la expresión de θ se obtiene que, para que $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, se necesita $a_1 \in [0, 2]$, por lo que tomamos 16 valores de a_1 desde 0 hasta 2 (en realidad hasta $2 - 2^{-3}$).
- Cabe remarcar que de las 256 iteraciones, algunas obtienen valores de a_1 que hacen compleja a θ , en los casos en los que $a_1 > 2r$, o se obtiene $\theta = NaN$ (**Not A Number**), cuando $a_1 \neq 0$ y $r = 0$. Estos caso se deben descartar.

Así, obtenemos 170 posibles posiciones de polos en el primer cuadrante (169 si excluimos el caso $a_1 = 0$ y $a_2 = 0$), como se ilustra en la Fig. 5.17.

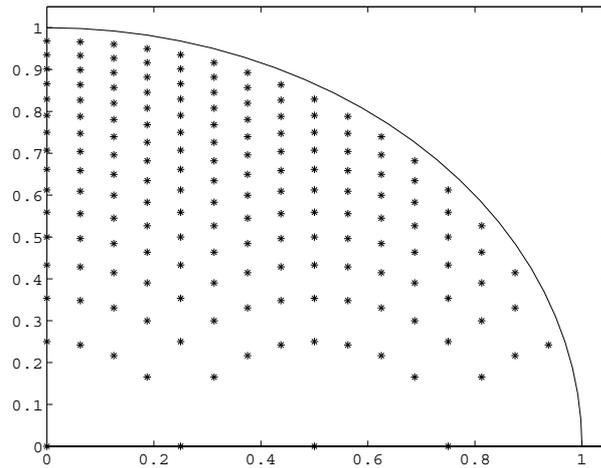


Figura 5.17: Cuantificación de las posiciones de los polos en la realización en forma directa.

De la Fig. 5.17 se desprende que las posiciones no son uniformes por el hecho de haber cuantificado r^2 . Cabe destacar la gran dispersión de los puntos en la zona de θ cercano a cero.

Como ilustran los siguientes problemas, 3 y 4, las posiciones de los polos cambian dependiendo de la realización del sistema. Así, para un determinado tipo de filtro, al realizarse con precisión finita podría elegirse una estructura que ofreciera un conjunto más denso de puntos en la región donde yacen los polos del filtro para minimizar las perturbaciones de estos. Por ejemplo, para realizar un filtro con polos agrupados cerca de $\theta = 0$ y $\theta = \pi$, sería desastrosa una realización en forma directa ya que, como vemos en la Fig. 5.17, la dispersión de puntos en esa zona es grande produciéndose gran perturbación en la posición de los polos. Sin embargo, usando la realización en forma acoplada del ejercicio 4 de esta sección de prácticas, tendríamos una mejor aproximación. No obstante, esta estructura es mejor para aquellos filtros con polos concentrados en $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$, donde existe mayor densidad de puntos.

```

nb=4;
i=1;
for a2=0:1/(2^nb):(2^nb-1)/(2^nb)
    r=sqrt(a2);
    for a1=0:2/(2^nb):2*(2^nb-1)/(2^nb)
        t=acos((a1)/(2*r));
        y(:,i)=[r;t];
        i=i+1;
    end
end

yr=[0;0];
j=2;
for i=1:i-1
    if (isreal(y(:,i)))
        yr(:,j)=y(:,i);
        j=j+1;
    end
end

```

end

```
plot(yr(1,:).*cos(yr(2,:)),yr(1,:).*sin(yr(2,:)), '*')
```

3. Repita el ejercicio 2 utilizando una estructura en celosía para el sistema IIR de segundo orden.

Resolución:

Partiendo de la función de transferencia

$$H(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = \frac{1}{1 - (2r \cos \theta) z^{-1} + r^2 z^{-2}} \quad (5.107)$$

hemos de conseguir establecer una relación de r y θ , que determinan las posiciones de los polos, con los parámetros de celosía, que serán los que se cuantifican. Para ello, obtenemos

$$A_2(z) = 1 - (2r \cos \theta) z^{-1} + r^2 z^{-2} \quad (5.108)$$

de donde

$$\begin{cases} K_2 = r^2 \\ B_2(z) = z^{-2} - (2r \cos \theta) z^{-1} + r^2 \end{cases}$$

y

$$A_1(z) = \frac{A_2(z) - k_2 B_2(z)}{1 - k_2^2} = 1 + (2r \cos \theta) \frac{r^2 - 1}{1 - r^4} z^{-1} \quad (5.109)$$

de donde

$$K_1 = (2r \cos \theta) \frac{r^2 - 1}{1 - r^4}. \quad (5.110)$$

La estructura en celosía se ilustra en la Fig. 5.18.

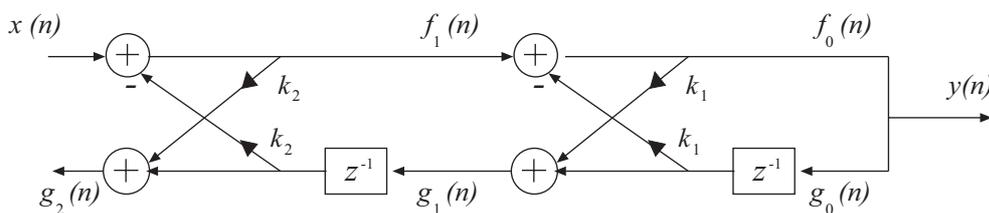


Figura 5.18: Estructura en celosía todo-polos de segundo orden propuesta, con $K_2 = r^2$ y $K_1 = (2r \cos \theta) \frac{r^2 - 1}{1 - r^4}$.

Para conocer las posibles posiciones de los polos en el primer cuadrante, damos valores a K_1 y K_2 . El siguiente código ilustra la obtención y representación en MATLAB de los polos del primer cuadrante del círculo de radio unidad, donde **nb** es el número de bits considerado.

```

nb=4;
i=1;
for k2=0:1/(2^nb):(2^nb-1)/(2^nb)
    r=sqrt(k2);
    for k1=0:1/(2^nb):(2^nb-1)/(2^nb)
        t=acos(k1*(1-r^4)/((r^2-1)*2*r));
        y(:,i)=[r;t];
        i=i+1;
    end
end

yr=[0;0];
j=2;
for i=1:i-1
    if (isreal(y(:,i)))
        yr(:,j)=y(:,i);
        j=j+1;
    end
end

plot(-1*yr(1,:).*cos(yr(2,:)),yr(1,:).*sin(yr(2,:)),'*')

```

Como vemos, al dar valores cuantificados a K_1 y K_2 , obtenemos, de la misma forma que se planteó en el problema 2 de esta sección de prácticas, la posición de los polos usando

$$\begin{cases} r = \sqrt{K_2} \\ \theta = \cos^{-1} \left(K_1 \frac{1 - r^4}{(r^2 - 1)2r} \right) \end{cases}$$

Cabe notar que tanto para K_1 como para K_2 se ha tomado 16 valores desde 0 a $1 - 2^{-4}$. Asumimos formato Q_4 . Por otra parte, de los 256 posibles polos, tal como pasaba en el problema 2 de esta sección de prácticas, se obtienen algunos con valores de θ compleja o *NaN*. Estos casos se descartan.

Así, tenemos 217 posibles posiciones de polos en el primer cuadrante (216 si excluimos el caso de $K_1 = 0$ y $K_2 = 0$), como se ilustra en la Fig. 5.19.

Comparando la Fig. 5.19 procedente de la realización en celosía con la Fig. 5.17, procedente de la realización en forma directa, podemos comprobar que la distribución de los puntos es diferente, aunque las posiciones son también no uniformes por el hecho de haber cuantificado $K_2 = r^2$.

De la misma forma que ocurría en forma directa, seguimos teniendo una mayor dispersión de puntos en la zona de $\theta = 0$, en la cual se producirán grandes perturbaciones en filtros con polos en esta zona. No obstante, esta estructura es mejor para filtros con polos concentrados en $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ y más o menos cercanos al círculo unidad, ya que la densidad de puntos es mayor, implicando menor perturbación en estos.

Cabe remarcar que ésta, o bien la forma directa, sería la estructura seleccionada para realizar aquellos sistemas cuyos polos yacen en las zonas de mayor densidad de puntos ya que, como veremos, la forma acoplada (práctica 4) posee en estas zonas una densidad menor.

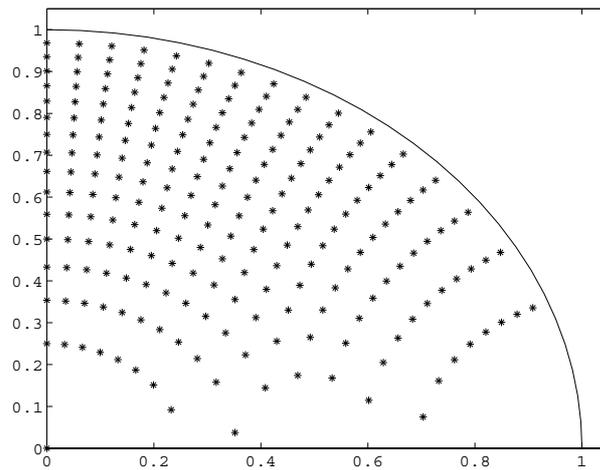


Figura 5.19: Cuantificación de las posiciones de los polos en la realización en celosía.

4. Analizar las posibles situaciones de los polos de un sistema de dos polos que cumpla las ecuaciones en diferencias acopladas siguientes

$$y_1(n) = x(n) + r\cos\theta y_1(n-1) - r\sin\theta y(n-1)$$

$$y(n) = r\sin\theta y_1(n-1) + r\cos\theta y(n-1).$$

La realización se representa en la Fig. 5.20. Se considera una cuantificación de los coeficientes según una longitud de palabra de cinco bits.

Resolución:

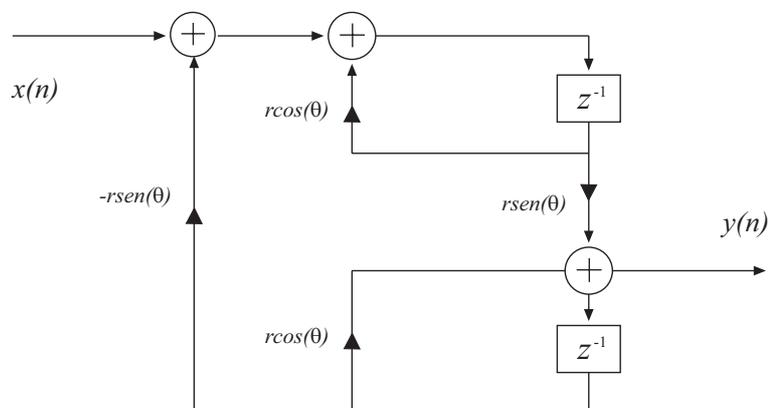


Figura 5.20: Estructura en forma acoplada de un sistema IIR de dos polos.

Transformando al plano Z las ecuaciones en diferencias, llegamos rápidamente a que la función de transferencia es

$$H(z) = \frac{(r\sin\theta)z^{-1}}{1 - (2r\cos\theta)z^{-1} + r^2z^{-2}} \quad (5.111)$$

con polinomio denominador similar al de los problemas 8 y 9.

Volviendo a la forma acoplada mostrada en la Fig. 5.20 podemos observar como todos los coeficientes de la realización son bien $m = r\sin\theta$ o bien $n = r\cos\theta$. Estos, pues, son

los valores a cuantificar. El siguiente código de MATLAB ilustra la forma de obtener los polos del primer cuadrante

```
nb=4;
i=1;
for m=0:1/(2^nb):(2^nb-1)/(2^nb)
    for n=0:1/(2^nb):(2^nb-1)/(2^nb)
        r=sqrt(m^2+n^2);
        t=asin(m/r);
        y(:,i)=[r;t];
        i=i+1;
    end
end
```

Como vemos, m y n son los coeficientes a cuantificar, obteniendo de la misma forma que se plantea en las prácticas 2 y 3, la posición de los polos usando

$$\begin{cases} r = \sqrt{m^2 + n^2} \\ \theta = \sin^{-1} \left(\frac{m}{r} \right) \end{cases}$$

Cabe notar que tanto m como n toman 16 valores desde 0 hasta $1 - 2^{-4}$. Asumimos formato Q_4 . A diferencia de los problemas anteriores, los 256 puntos son válidos.

Así, obtenemos 256 posibles posiciones de polos en el primer cuadrante (255 si excluimos $m = 0$ y $n = 0$), tal y como se ilustra en la Fig. 5.21. En ésta figura podemos observar una rejilla rectangular de puntos, posibles posiciones de polos, dado que los coeficientes m y n son proporcionales a r . Como existe una densidad uniforme de puntos, esta realización es más apropiada para un realización de filtros con polos agrupados en la zona $\theta = 0$, como filtros pasa-baja.

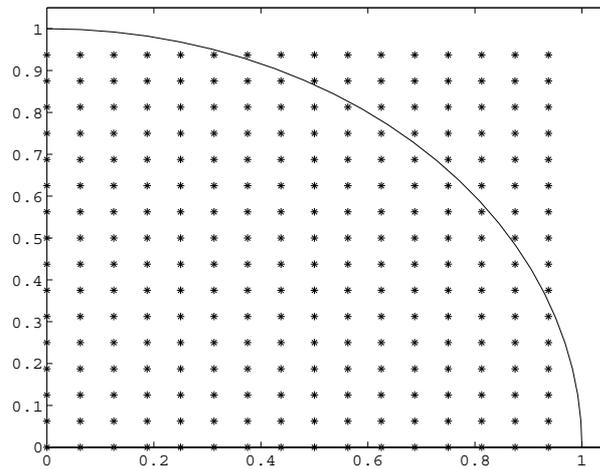


Figura 5.21: Cuantificación de las posiciones de los polos en la realización en forma acoplada del sistema de la Fig. 5.20.

Esta distribución uniforme de puntos, a diferencia de las distribuciones no uniformes obtenidas en los ejercicios 2 y 3, proporciona mayor “tranquilidad” para la realización de un sistema genérico porque se sabe la máxima perturbación que puede ocurrir. Sin embargo, esto sucede a costa de un aumento de las operaciones de la realización.

```
nb=4;
i=1;
for m=0:1/(2^nb):(2^nb-1)/(2^nb)
    for n=0:1/(2^nb):(2^nb-1)/(2^nb)
        r=sqrt(m^2+n^2);
        t=asin(m/r);
        y(:,i)=[r;t];
        i=i+1;
    end
end

yr=[0;0];
j=2
for i=1:i-1
    if (isreal(y(:,i)))
        yr(:,j)=y(:,i);
        j=j+1;
    end
end
plot(yr(1,:).*cos(yr(2,:)),yr(1,:).*sin(yr(2:)), '*')
```


Capítulo 6

Diseño de filtros digitales

6.1. Introducción teórica

En los capítulos anteriores hemos visto que cualquier sistema digital actúa sobre unas señales de entrada proporcionando una salida que ha visto modificadas sus propiedades en alguna medida, eliminando o amplificando componentes frecuenciales presentes en la señal de entrada. Es decir el sistema digital actúa como un filtro. Hasta ahora hemos estudiado las características de un sistema conocida su función de transferencia. En este capítulo vamos a considerar el problema inverso; es decir, hemos de determinar la función de transferencia de un sistema digital que verifique unas especificaciones sobre su respuesta en frecuencia. Se analizarán los filtros de respuesta impulsional finita (FIR) e infinita (IIR), sus características y los métodos de diseño más habituales.

6.1.1. Introducción

Especificaciones

En primer lugar veamos cuáles son las especificaciones de diseño de un filtro (Fig. 6.1):

- Banda de paso: $0 \leq |\omega| \leq \omega_p$
- Banda atenuada: $\omega_s \leq |\omega| \leq \pi$
- Banda de transición: $\omega_p \leq |\omega| \leq \omega_s$
- Rizado en banda pasante: $1 - \delta_1 \leq |H(\omega)| \leq 1 + \delta_1$
- Rizado en banda no pasante: $|H(\omega)| \leq \delta_2$

Estos parámetros pueden ser expresados en decibelios de acuerdo con

$$|H(\omega)|(dB) = 20 \log_{10} |H(\omega)|, \quad (6.1)$$

y, análogamente, se pueden expresar los rizados también en dB

- Rizado en banda pasante en dB: $r_p(dB) = 20 \log_{10} \left| \frac{1 + \delta_1}{1 - \delta_1} \right|$.
- Rizado en banda atenuada en dB: $r_s(dB) = 20 \log_{10} |\delta_2|$.

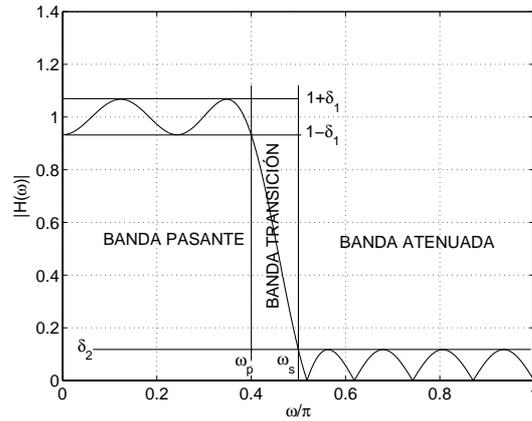


Figura 6.1: Esquema de especificaciones de diseño de un filtro digital.

Procedimiento de diseño de filtros digitales

En el diseño de un filtro digital se siguen los siguientes pasos:

- Determinar las especificaciones del filtro.
- Decidir qué tipo de filtro se ha de utilizar.
- Elegir el método de diseño y determinar los coeficientes del mismo.
- Proponer una estructura o realización para el filtro.
- Analizar la estructura elegida, y los efectos debidos a la cuantización de los coeficientes y las operaciones.
- Implementar el filtro resultante.

Los filtros ideales pueden tener cuatro tipos de respuesta; pasa-baja, pasa-alta, pasa-banda y elimina-banda. Estos filtros se caracterizan por tener transiciones abruptas en la respuesta en frecuencia que se traducen en respuestas impulsionales infinitas y no causales; así pues no pueden obtenerse en la práctica. El objetivo será diseñar filtros que se aproximen a esta respuesta ideal. En lugar de tener transiciones abruptas y bandas de transición nulas obtendremos respuestas en frecuencia como se muestran en la figura anterior.

Vamos a hacer un estudio paralelo para filtros FIR e IIR. Describiremos las propiedades más representativas de cada uno de ellos y los métodos de diseño:

6.1.2. Filtros FIR

Características

Las características principales de los filtros FIR son:

- *Función de transferencia:* $H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)z^{-k}$
- *Fase lineal:* Estos filtros se pueden diseñar para que su respuesta en fase sea lineal ($\Phi(\omega) = \pm\omega D$), por tanto, su retardo de grupo es constante. Si $H(\omega) = A(\omega)e^{j\Phi(\omega)}$:

$$\tau(\omega) = -\frac{\Phi(\omega)}{d\omega} = \text{constante}. \quad (6.2)$$

esto significa que, al hacer pasar una señal por un filtro FIR de estas características, el retardo es el mismo para todos los armónicos que componen la señal y ésta no se distorsiona.

La linealidad de fase se obtiene si existe simetría en los coeficientes del filtro: $h(n) = \pm h(N - n)$. Dado que el número de coeficientes del filtro puede ser par o impar, y que los coeficientes pueden ser simétricos o antisimétricos se originan cuatro tipos de filtro FIR de fase lineal.

- *Ceros en filtros FIR de fase lineal:* Si se consideramos ceros complejos conjugados siempre aparecerán grupos de ceros en

$$\left\{ z_k, z_k^*, \frac{1}{z_k}, \frac{1}{z_k^*} \right\} \quad (6.3)$$

Tipos de filtros FIR de fase lineal

1. Tipo I: Número de coeficientes impar (N impar). Simetría par:

$$h(n) = h(N - 1 - n), \quad 0 \leq n \leq N - 1 \quad (6.4)$$

$$H(w) = \left[\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} a(n) \cos(wn) \right] e^{-jw(N-1)/2}, \quad a(0) = h\left(\frac{N-1}{2}\right) \quad (6.5)$$

$$a(n) = 2h\left(\frac{N-1}{2} - n\right), \quad 1 \leq n \leq \frac{N-3}{2} \quad (6.6)$$

2. Tipo II: Número de coeficientes par (N par). Simetría par:

$$h(n) = h(N - 1 - n), \quad 0 \leq n \leq N - 1 \quad (6.7)$$

$$H(w) = \left[\sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} b(n) \cos\left(w\left(n - \frac{1}{2}\right)\right) \right] e^{-jw(N-1)/2}, \quad b(n) = 2h\left(\frac{N}{2} - n\right), \quad 1 \leq n \leq \frac{N}{2} \quad (6.8)$$

$$|H(w)|_{w=\pi} = 0 \quad (6.9)$$

Este tipo de filtro no es adecuado para diseñar filtros pasa alta ni elimina-banda

3. Tipo III: Número de coeficientes impar (N impar). Simetría impar:

$$h(n) = -h(N - 1 - n), \quad 0 \leq n \leq N - 1 \quad (6.10)$$

$$H(w) = \left[\sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} c(n) \sin(wn) \right] e^{j\left[\frac{\pi}{2} - \frac{N-1}{2}w\right]}, \quad c(n) = 2h\left(\frac{N-1}{2} - n\right), \quad 1 \leq n \leq \frac{N-1}{2} \quad (6.11)$$

$$|H(w)|_{w=\pi} = 0 \quad (6.12)$$

$$|H(w)|_{w=0} = 0, \quad |H(w)|_{w=\pi} = 0 \quad (6.13)$$

No es adecuado para el diseño de filtro filtros pasa-baja ni pasa-alta. Se utilizan para diseñar transformadores de Hilbert (es un tipo de filtro pasa todo que produce un desfase de $\pi/2$ a la señal de entrada) y diferenciadores.

4. Tipo IV: Número de coeficientes impar (N par). Simetría impar:

$$h(n) = -h(N - 1 - n), \quad 0 \leq n \leq N - 1 \quad (6.14)$$

$$H(\omega) = \left[\sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} d(n) \operatorname{sen}\left(\omega\left(n - \frac{1}{2}\right)\right) \right] e^{j\left[\frac{\pi}{2} - \frac{N-1}{2}\omega\right]}, \quad d(n) = 2h\left(\frac{N}{2} - n\right), \quad 1 \leq n \leq \frac{N}{2} \quad (6.15)$$

$$|H(\omega)|_{\omega=0} = 0, \quad (6.16)$$

como en el caso anterior se utiliza para diseñar Transformadores de Hilbert y diferenciadores.

Diseño de filtros FIR de fase lineal

Existen tres grandes bloques de métodos de diseño de filtros FIR con fase lineal: método de las ventanas, muestreo en frecuencia y rizado constante.

■ MÉTODO DE LAS VENTANAS

Se basan en truncar la respuesta impulsional infinita de un filtro ideal.

Procedimiento:

- Obtener la respuesta impulsional del filtro ideal que deseamos diseñar $h(n)$ (pasa-baja, pasa-alta, etc.)
- Enventanar (truncar) dicha respuesta impulsional: $\hat{h}(n) = h(n)w(n)$, donde $w(n)$ es la respuesta impulsional de la ventana.
- Desplazar la respuesta impulsional enventanada un número adecuado de muestras para hacerla causal.

El enventanado de la respuesta impulsional del filtro hace que en el filtro real diseñado aparezca rizado u oscilaciones en la respuesta en frecuencia y además se obtengan transiciones menos abruptas. Aparte de la ventana rectangular existen otras que permiten mejorar las prestaciones del filtro, ya que la ventana rectangular presenta una discontinuidad abrupta que en el dominio frecuencial, da lugar a oscilaciones (Efecto Gibbs). Los parámetros a tener en cuenta son la atenuación del primer lóbulo secundario y la anchura del lóbulo principal. La tabla 6.1 muestra las principales características de las ventanas más empleadas.

De especial interés resulta la ventana de Kaiser, que viene definida por

$$w(n) = \frac{I_0(\beta\sqrt{1 - (n - N)^2})}{I_0(\beta)}, \quad (6.17)$$

siendo I_0 la función de Bessel modificada de orden 0. Existen expresiones aproximadas que permiten seleccionar β (parámetro relacionado con la atenuación, A) y el orden del filtro N . Son las siguientes:

$$\beta = \begin{cases} 0'1102(A - 8'7), & A \geq 50 \text{ dB} \\ 0'5842(A - 21)^{0'4} + 0'07886(A - 21), & 21 < A < 50 \\ 0, & A < 21 \end{cases} \quad (6.18)$$

Tabla 6.1: Características temporales y frecuenciales de las ventanas más empleadas.

Ventana	Secuencia temporal $0 \leq n \leq N-1$	Anchura aproximada del lóbulo principal	Pico secundario (dB)
Rectangular	1	$4\pi/N$	-13
Bartlett	$\begin{cases} \frac{2n}{N-1}, & 0 \leq n \leq \frac{N-1}{2} \\ 2 - \frac{2n}{N-1}, & \frac{N-1}{2} \leq n \leq N-1 \end{cases}$	$8\pi/N$	-27
Hanning	$\frac{1}{2} \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi n}{N-1} \right) \right)$	$8\pi/N$	-32
Hamming	$0'54 - 0'46 \cos \left(\frac{2\pi n}{N-1} \right)$	$8\pi/N$	-43
Blackman	$0'54 - 0'5 \cos \left(\frac{2\pi n}{N-1} \right) + 0'08 \cos \left(\frac{4\pi n}{N-1} \right)$	$12\pi/N$	-58

$$\Delta f = F_m - F_p = \frac{DF_m}{N-1}, \quad D = \begin{cases} \frac{A - 7'95}{14'36}, & A > 21 \\ 0'922, & A < 21 \end{cases} \quad (6.19)$$

■ MÉTODO DEL MUESTREO EN FRECUENCIA

El procedimiento de diseño es el siguiente:

- Especificar la respuesta en frecuencia deseada del filtro en N puntos equiespaciados: $H\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \equiv H(k)$.
- Calcular $h(n)$ como la transformada discreta de Fourier inversa de las muestras anteriores.

$$h(n) = IDFT\{H(k)\} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) e^{j\frac{2\pi kn}{N}} \quad (6.20)$$

Como existen cuatro posibles respuestas en frecuencia para los filtros FIR de fase lineal aparecen cuatro expresiones distintas para el cálculo de $h(n)$. La siguiente tabla muestra las expresiones obtenidas en cada caso. En todos ellos se han considerado muestras equiespaciadas y la primera en $w = 0$. $A(k)$ es el módulo de la respuesta en frecuencia en la muestra k -ésima (Tabla 6.2).

Si calculamos la función de transferencia del sistema aplicando la transformada Z a la expresión general de $h(n)$ obtenemos:

$$H(z) = \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - e^{j\frac{2\pi k}{N}} z^{-1}} \quad (6.21)$$

■ DISEÑO DE FILTROS POR APROXIMACIÓN DE TCHEBYSHEV

Se plantea el diseño del filtro como un problema de aproximación de Tchebyshev, para ello se propone un criterio de diseño óptimo, en el sentido de que el error de aproximación

Tabla 6.2: Longitud, simetría y respuesta impulsiva de los cuatro tipos de filtros.

TIPO	LONGITUD SIMETRÍA	$h(n)$
I	IMPAR (N impar) PAR	$\frac{1}{N} \left[A(0) + \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} 2A(k) \cos \left(2\pi \frac{k}{N} \left(n - \frac{N-1}{2} \right) \right) \right]$
II	PAR (N par) PAR	$\frac{1}{N} \left[A(0) + \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} 2A(k) \cos \left(2\pi \frac{k}{N} \left(n - \frac{N-1}{2} \right) \right) \right]$
III	IMPAR (N impar) IMPAR	$\frac{1}{N} \left[\sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} 2A(k) \sin \left(2\pi \frac{k}{N} \left(n - \frac{N-1}{2} \right) \right) \right]$
IV	PAR (N par) IMPAR	$\frac{1}{N} \left[\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} 2A(k) \sin \left(2\pi \frac{k}{N} \left(n - \frac{N-1}{2} \right) \right) \right] +$ $+ A \left(\frac{N}{2} \right) \sin \left(\pi \left(\frac{N-1}{2} - n \right) \right) \right]$

entre la respuesta en frecuencia ideal y la real se reparten uniformemente en cada banda, pasante y atenuada (de ahí el apelativo de *equiripple*), minimizando el error máximo en cada una de ellas. El filtro resultante presenta, pues, rizado en ambas bandas. Para su diseño consideramos cinco características:

- N el orden del filtro
- w_p límite superior de la banda pasante
- w_s límite inferior de la banda atenuada
- δ_1 máximo rizado de la banda pasante
- δ_2 mínima atenuación de la banda atenuada.

Para su diseño se plantea una función de error, de manera que hay que encontrar los valores del filtro que minimizan el error. Parks y McClellan resolvieron el problema en 1972 con el *Teorema de la Alternancia* basándose en la teoría de aproximaciones de Tchebyshev y empleando el algoritmo de intercambio de Remez. El resultado final es un procedimiento en el cual se escogen cuatro de los parámetros citados y el algoritmo optimiza el valor de los coeficientes minimizando el valor del parámetro restante. Dado que no es posible diseñar filtros de este tipo manualmente mostraremos su uso mediante una práctica de MATLAB al final de este capítulo.

Comparación entre los distintos métodos de diseño FIR

- Método de las ventanas.
 - Históricamente, fue el primero en aparecer, los otros dos se desarrollaron en la década de los 70.
 - No fija de manera adecuada las frecuencias críticas w_p y w_s ya que éstas dependen del tipo de ventana y de la longitud seleccionada.

- Muestreo en frecuencia.
 - Existe un gran control de la anchura de la zona de transición, ya que es igual a $2\pi/N$.
 - Hay procedimientos rápidos para el cálculo de los coeficientes, bien basándose en la FFT, bien con las ecuaciones propuestas anteriormente. Especialmente interesante si la mayor parte de los puntos el módulo de la ganancia son cero o uno.
 - Como inconveniente, se tiene un pobre control de la respuesta fuera de esos

puntos y el procedimiento puede convertirse en un esquema de prueba y error.

- Aproximación de Tchebyshev.
 - Permite un control total de las características del filtro en cuanto a frecuencias, ganancias y longitud.
 - No existe una forma fácil de optimizar el diseño respecto a la longitud del filtro, aunque existen aproximaciones como la de Kaiser:

$$\hat{N} = \frac{-20 \log_{10}(\sqrt{\delta_1 \delta_2}) - 13}{14'6 \Delta f} + 1, \quad (6.22)$$

con

$$\Delta f = \frac{w_s - w_p}{2\pi}. \quad (6.23)$$

6.1.3. Filtros IIR

Características

Son filtros que presentan ceros y polos por lo que pueden ser inestables, a diferencia de los filtros FIR que siempre son estables. Su respuesta impulsional es infinita por lo que deben implementarse de forma recursiva. La función de transferencia del filtro en el dominio Z es:

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}. \quad (6.24)$$

Existen dos filosofías de diseño de filtros IIR:

- *Indirecta*. Se basa en diseñar filtros analógicos que verifiquen las especificaciones y, posteriormente, transformarlos al dominio digital preservando estas características.
- *Directa*. Se propone el diseño de filtros digitales imponiendo una serie de condiciones a la respuesta en frecuencia para determinar los coeficientes. Estos métodos se utilizan cuando conocemos la respuesta impulsional de un sistema y queremos determinar la función de transferencia que mejor se ajusta. Son procedimientos en los que se minimiza algún criterio de error para determinar los coeficientes del filtro. Se puede encontrar un estudio detallado en (Jackson, 1996).

Nos vamos a centrar en el diseño indirecto.

Métodos de diseños de filtros IIR a partir de prototipos analógicos

Estos métodos parten de un prototipo analógico que cumple las especificaciones por lo que en primer lugar veremos los filtros analógicos más habituales, y sus características.

1. Filtros de Butterworth.

La función de transferencia viene dada por

$$H(s)H(-s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{-s^2}{\Omega_c^2}\right)^N} \quad (6.25)$$

Se trata de filtros que sólo contienen polos, su respuesta en frecuencia es monótona decreciente y es máximamente plana a frecuencia cero.

Ecuaciones de diseño: Estimación del orden a partir de la atenuación deseada y de las frecuencias de corte (Ω_c) y la frecuencia límite de la banda de atenuación (Ω_s) que especifican la bandas.

$$N = \frac{\log_{10}[(1/\delta_2^2) - 1]}{2 \log_{10}(\Omega_s/\Omega_c)} \quad (6.26)$$

Polos en el semiplano izquierdo:

$$s_k = \Omega_c e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j(2k+1)\frac{\pi}{2N}}, k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (6.27)$$

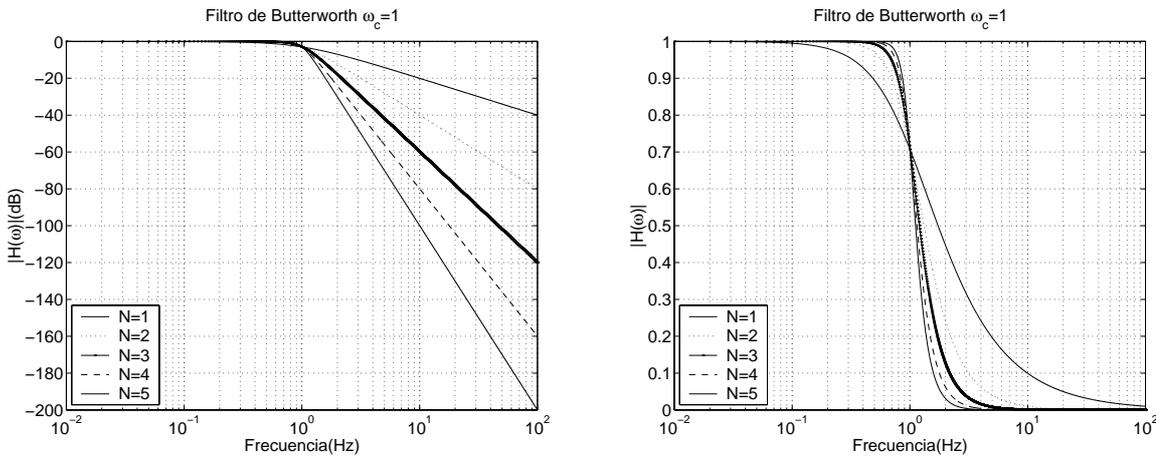


Figura 6.2: Respuesta en frecuencia del filtro de Butterworth para distintos órdenes.

2. Filtros de Tchebyshev. Los filtros de Tchebyshev consiguen una caída más abrupta a frecuencias bajas en base a permitir un rizado constante de la respuesta en frecuencia en alguna de las bandas, esto hace que, al igual que con filtros FIR de rizado constante, se obtengan órdenes menores. Los hay de dos tipos:

- Tipo I: Son filtros solo polos, presentan rizado constante en la banda pasante y una caída monótona en la banda no pasante.

Su respuesta en frecuencia es de la forma:

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \mathcal{T}_N^2(\Omega/\Omega_c)}, \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1, \quad (6.28)$$

siendo $\mathcal{T}_N(x)$, el polinomio de Tchebyshev que se define como:

$$\mathcal{T}_N(x) = \begin{cases} \cos(N \cdot \cos^{-1} x), & |x| \leq 1 \\ \cosh(N \cdot \cosh^{-1} x), & |x| > 1 \end{cases} \quad (6.29)$$

y que puede definirse de forma recursiva como $\mathcal{T}_{N+1}(x) = 2\mathcal{T}_N(x) - \mathcal{T}_{N-1}(x)$ con $\mathcal{T}_0(x) = 1$ y $\mathcal{T}_1(x) = x$. En estos filtros, la frecuencia de corte es Ω_c , no depende de N y sólo corresponde con una caída de 3 dB si $\varepsilon = 1$,

$$|H(\Omega = \Omega_c)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \mathcal{T}_N^2(1)} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2} \quad (6.30)$$

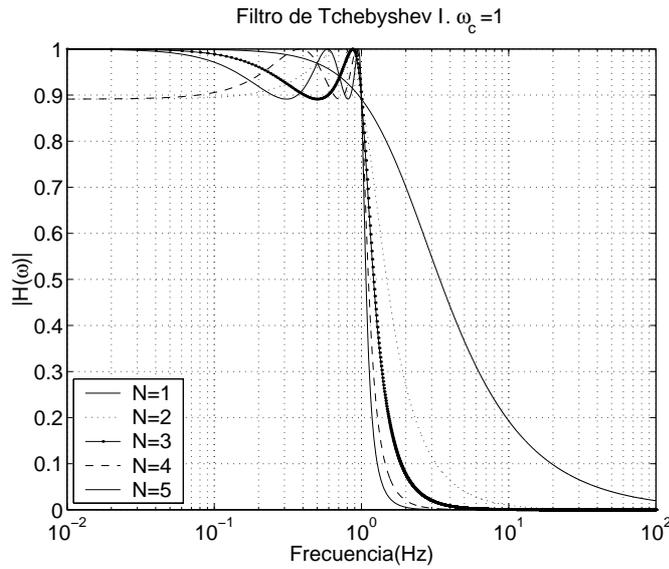


Figura 6.3: Respuesta en frecuencia de un filtro de Tchebyshev I.

Las ecuaciones de diseño son las siguientes:

- Estimación del orden a partir de la atenuación deseada y el rizado en banda no pasante (δ_2) así como las frecuencias de corte de las bandas pasante Ω_c y no pasante Ω_s :

$$N = \frac{\log_{10} \left[\frac{\sqrt{1 - \delta_2^2} + \sqrt{1 - \delta_2^2(1 + \varepsilon^2)}}{\varepsilon \delta_2^2} \right]}{\log_{10} \left[\frac{\Omega_s}{\Omega_c} + \sqrt{(\Omega_s/\Omega_c)^2 + 1} \right]} \quad (6.31)$$

- Los polos de $H(s)H(s^{-1})$ son de la forma $s_k = \sin \alpha_k \sinh \beta + j \cos \alpha_k \cosh \beta$, donde

$$\alpha_k = \frac{\pi}{2N} + \frac{k\pi}{N}, k \in \mathbb{Z} \quad (6.32)$$

$$\beta = \pm \frac{1}{N} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{\varepsilon^2 + 1}}{\varepsilon} \right) \quad (6.33)$$

Los polos de semiplano izquierdo formarán la función de transferencia.

- Tipo II: Son filtros que presentan ceros y polos, un rizado constante en la banda no pasante y una caída monótonica en la banda pasante.

Su respuesta en frecuencia es de la forma:

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \frac{\mathcal{T}_N^2(\Omega_s/\Omega_c)}{\mathcal{T}_N^2(\Omega_s/\Omega)}}, \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1, \quad (6.34)$$

Los polos se disponen sobre una elipse como en el caso anterior y los ceros se sitúan sobre el eje imaginario del plano s . La estimación del orden se realiza mediante la misma expresión que para los de tipo I.

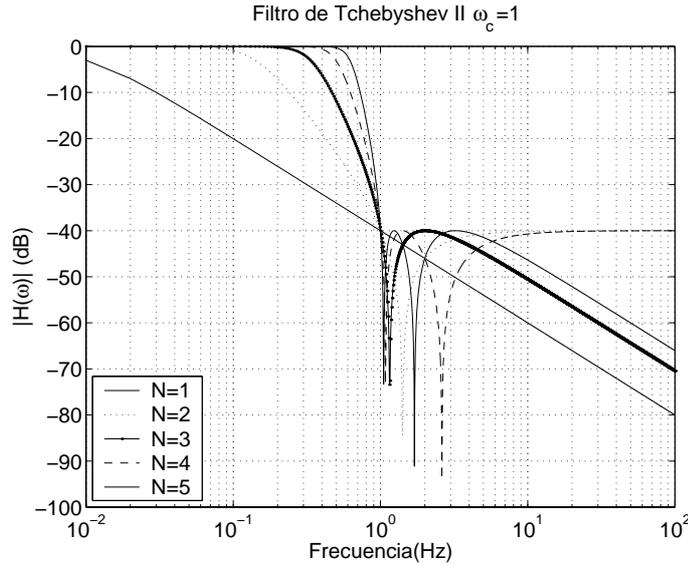


Figura 6.4: Respuesta en frecuencia de un filtro de Tchebyshev II.

3. Filtros elípticos. Los filtros elípticos o de Cauer consiguen estrechar la zona de transición permitiendo un rizado constante en ambas bandas. Su función de transferencia es:

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \mathcal{U}_N^2(\Omega/\Omega_c)}, \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1, \quad (6.35)$$

donde $\mathcal{U}_N(x)$ es una función Jacobiana elíptica de orden N , habitualmente la de primera clase definida como,

$$\mathcal{U}_N(x) = \mathcal{K}_N(x) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 \theta}}. \quad (6.36)$$

Los diseños más eficientes son los que distribuyen el error de aproximación sobre todo el espectro, en realidad, uniformemente sobre cada una de las bandas, pasante y no pasante, por igual. Por tanto, los filtros elípticos son los más eficientes en el sentido de dar lugar al menor orden para una anchura de la banda de transición determinada.

Para diseñar filtros de Cauer con integrales elípticas de primera clase, se selecciona el orden del filtro considerando los parámetros ε , δ_2 (caída en la banda no pasante) y las frecuencias de corte de las bandas pasante Ω_c y no pasante Ω_s :

$$N = \frac{\mathcal{K}(\Omega_c/\Omega_s) \mathcal{K}(\sqrt{1 - \delta_2^2(1 + \varepsilon^2)}) / \sqrt{1 - \delta_2^2}}{\mathcal{K}(\varepsilon \delta_2 / \sqrt{1 - \delta_2^2}) \mathcal{K}(\sqrt{1 - (\Omega_c/\Omega_s)^2})}. \quad (6.37)$$

Estos filtros son los que presentan fase menos lineal, especialmente en el extremo de la banda pasante.

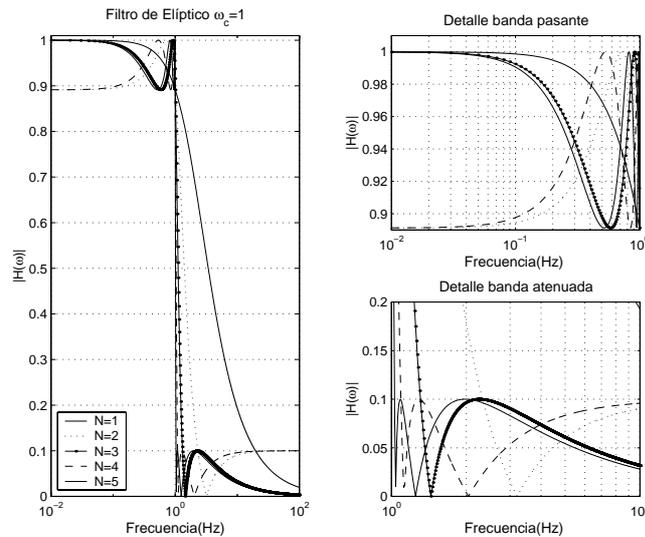


Figura 6.5: Respuesta en frecuencia de un filtro elíptico de distintos órdenes. En el panel de la derecha se muestran zonas ampliadas de la banda pasante y atenuada.

4. Filtros de Bessel. Los filtros de Bessel son filtros solo polos que no pretenden optimizar la anchura de la zona de transición sino asegurar fase lineal en toda la banda pasante, ya que los filtros anteriores la degradaban progresivamente. Su función de transferencia es de la forma:

$$H(s) = \frac{1}{\mathcal{B}_N(s)}, \quad \mathcal{B}_N(s) = \sum_{k=0}^N a_k s^{-k}, \quad (6.38)$$

donde $\mathcal{B}_N(s)$ es un polinomio de Bessel cuyos coeficientes vienen dados por:

$$a_k = \frac{(2N - k)!}{2^{N-k} k! (N - k)!}, \quad k = 0, 1, \dots, N \quad (6.39)$$

y que se puede definir de forma recursiva como

$$\mathcal{B}_N(s) = (2N - 1)\mathcal{B}_N(s) + s^2 \mathcal{B}_{N-2}(s), \quad (6.40)$$

siendo $\mathcal{B}_0(s) = 1$ y $\mathcal{B}_1(s) = s + 1$.

Estos filtros presentan fase lineal en la banda pasante, es decir, no distorsionan la señal a costa de aumentar la zona de transición.

Transformaciones en frecuencia analógicas

Las ecuaciones de diseño anteriores eran todas para filtros pasa-baja. Si necesitamos diseñar otro tipo de filtros realizaremos una transformación en frecuencia sobre el filtro pasa-baja. La Tabla 6.3 muestra las ecuaciones de transformación de frecuencias para filtros analógicos.

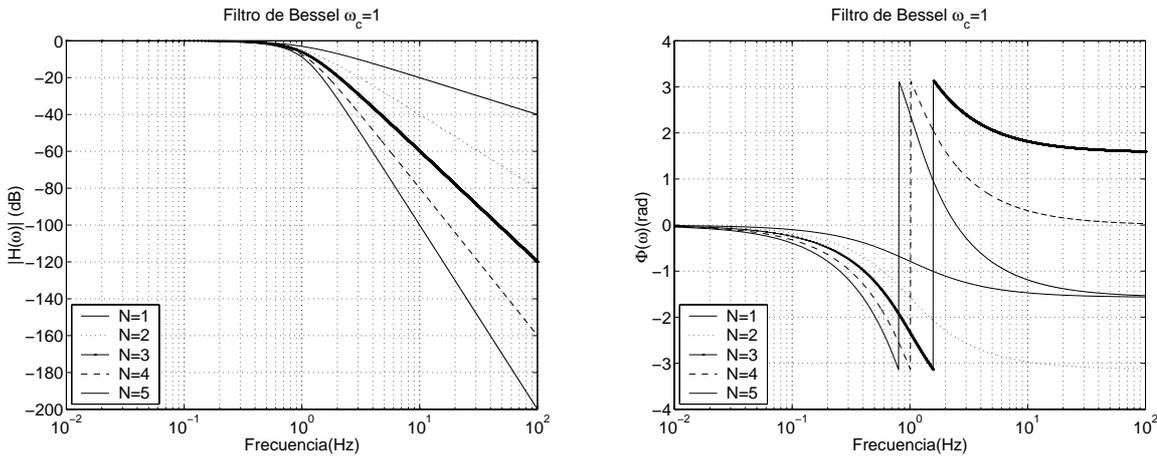


Figura 6.6: Respuesta en frecuencia (magnitud y fase) de un filtro de Bessel para distintos órdenes.

Tabla 6.3: Transformaciones analógicas para el diseño de filtros digitales.

Pasa baja a Pasa baja	$s \rightarrow \frac{\Omega_c}{\Omega'_s} s$	Ω'_c es la nueva frecuencia de corte
Pasa baja a Pasa alta	$s \rightarrow \frac{\Omega_c \Omega'_c}{s}$	Ω'_c es la nueva frecuencia de corte
Pasa baja a Pasa banda	$s \rightarrow \Omega_c \frac{s^2 + \Omega_l \Omega_u}{s(\Omega_u - \Omega_l)}$	Ω_l es la frecuencia inferior de la banda y Ω_u la superior
Pasa baja a Elimina banda	$s \rightarrow \Omega_c \frac{s(\Omega_u - \Omega_l)}{s^2 + \Omega_l \Omega_u}$	Ω_l es la frecuencia inferior de la banda y Ω_u la superior

Hay que tener en cuenta que los filtros pasa-banda y elimina-banda, sobre todo los estrechos (resonadores o “notch”) suelen definirse con el factor de calidad que equivale a:

$$Q = \frac{\sqrt{\Omega_u \Omega_l}}{\Omega_u - \Omega_l}. \quad (6.41)$$

Transformaciones del dominio analógico al digital

Una vez diseñado el filtro analógico que verifica las especificaciones de diseño se plantea la utilización de una transformación entre el dominio analógico y digital. Las transformación habitual es la transformación bilineal, que asegura la estabilidad del filtro en el dominio digital. Además existe la transformación del impulso invariante comentada en el Capítulo de la transformada Z.

- *Impulso invariante.* Asegura que el filtro analógico y digital tendrán la misma respuesta impulsional. Dado el filtro analógico factorizado en fracciones simples como

$$H(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k}, \quad (6.42)$$

da lugar al filtro digital

$$H(z) = \sum_{k=1}^N A_k \frac{1}{1 - e^{p_k T} z^{-1}}, \quad (6.43)$$

donde p_k son los polos y T es el periodo de muestreo.

El procedimiento es descomponer en fracciones simples el filtro analógico y transformar a digital cada una de las fracciones.

El problema es que se produce *aliasing* cuando existen polos a frecuencias altas lo que hace que el método no resulte adecuado para diseñar filtros pasa-alta o elimina-banda.

- *Transformación bilineal.* Es el método más común para convertir un filtro analógico en digital. Asegura la estabilidad del filtro digital, y mantiene el orden. La transformación es:

$$s = \frac{2}{T} \frac{z - 1}{z + 1} \implies z = \frac{1 + s \frac{T}{2}}{1 - s \frac{T}{2}} \quad (6.44)$$

Una particularidad de esta transformación es el mapeado no lineal entre las frecuencias analógicas y digitales. La relación entre ambas es

$$\Omega = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad \omega = 2\pi \frac{F}{F_m}. \quad (6.45)$$

Luego si queremos diseñar un filtro digital de frecuencia de corte ω deberemos utilizar un filtro analógico cuya frecuencia de corte sea Ω definida por la expresión anterior. Esta operación de ajuste de frecuencias se denomina “*prewarping*”.

Transformaciones en frecuencia en el dominio digital

Cuando deseamos diseñar filtro digitales IIR pasa-alta, pasa-banda o elimina-banda, a partir de filtros analógicos podemos realizar las transformaciones en frecuencia en el filtro analógico antes de transformarlo a digital o bien, transformar a digital el prototipo analógico pasa-baja y posteriormente transformar este filtro a digital mediante las transformaciones de la Tabla 6.4. Estas se han obtenido a partir de las transformaciones analógicas aplicando la transformación bilineal.

6.1.4. Discusión entre filtros FIR e IIR

Para concluir el capítulo presentaremos, a modo de resumen, una tabla comparativa entre los filtros FIR e IIR (Tabla 6.5).

6.1.5. Modificación de la frecuencia de muestreo

Existen muchos sistema de procesado digital es lo que es necesario modificar la frecuencia de muestreo de una señal de una valor original F_m a un nuevo valor F'_m . Las tareas básicas son:

- Incrementar la frecuencia de muestreo por un factor entero L (*Interpolación*).
- Decrementar la frecuencia de muestreo por un factor entero M (*diezmado*)

Si se desea modificar la frecuencia de muestreo por un factor no entero (racional) se hará combinando etapas de interpolación y diezmado.

Tabla 6.4: Transformaciones analógicas para el diseño de filtros digitales.

Pasa baja a Pasa baja	$z^{-1} \longrightarrow \frac{z^{-1} - a}{1 - az^{-1}}$	ω' es la nueva frecuencia de corte. $a = \frac{\sin[(w - w')/2]}{\sin[(w + w')/2]}$
Pasa baja a Pasa alta	$z^{-1} \longrightarrow -\frac{z^{-1} - a}{1 - az^{-1}}$	ω' es la nueva frecuencia de corte. $a = \frac{\cos[(w + w')/2]}{\cos[(w - w')/2]}$
Pasa baja a Pasa banda	$z^{-1} \longrightarrow -\frac{z^{-2} + a_1z^{-1} + a_2}{a_2z^{-2} + a_1z^{-1} + 1}$	ω_l es la frecuencia inferior de la banda y ω_u la superior $K = \cot\left(\frac{\omega_u - \omega_l}{2}\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2}\right)$
Pasa baja a Elimina banda	$z^{-1} \longrightarrow -\frac{z^{-2} + a_1z^{-1} + a_2}{a_2z^{-2} + a_1z^{-1} + 1}$	ω_l es la frecuencia inferior de la banda y ω_u la superior $K = \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_u - \omega_l}{2}\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2}\right)$
$a_1 = -\frac{2\alpha K}{K+1}$	$a_2 = \frac{K-1}{K+1}$	$\alpha = \frac{\cos[(w + w')/2]}{\cos[(w - w')/2]}$

Relación entrada–salida para un interpolador

- *Dominio temporal:*

$$y(n) = \begin{cases} x(n/L), & n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (6.46)$$

- *Dominio frecuencial:*

$$Y(z) = X(z^L), \quad Y(e^{jw}) = X(e^{jwL}) \quad (6.47)$$

El espectro de la señal interpolada es una versión comprimida de la señal original por un factor L y repetida L veces en el intervalo $[0, 2\pi]$. A estas repeticiones se las denomina imágenes.

Relación entrada–salida para un diezmador

- *Dominio temporal:*

$$y(n) = x(nM) \quad (6.48)$$

La salida se obtiene tomando una de cada M muestras y descartando las $M - 1$ intermedias.

- *Dominio frecuencial:* La transformada Z de la salida de un diezmador está relacionada con la entrada según la expresión

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{M-1} X\left(z^{1/M} W_M^k\right) \quad (6.49)$$

$$Y(e^{jw}) = \sum_{k=0}^{M-1} X\left(e^{(jw-2\pi k)/M}\right) \quad (6.50)$$

Tabla 6.5: Características de los filtros FIR e IIR.

FIR	IIR
Son siempre estables	Aún cuando los polos estén situados dentro del círculo de radio unidad, pueden presentar inestabilidades si se implementan en sistemas con aritmética de coma fija.
	Presentan mayor error de cuantización en función del número de bits empleado para almacenar los coeficientes y las variables intermedias.
Pueden diseñarse para que presenten fase lineal, no distorsionando las características de fase y el retardo de grupo	
	Son más apropiados cuando se desea obtener regiones de transición estrechas.
Requieren un mayor orden para valores de la atenuación y zonas de transición similares lo que supone un mayor retardo en la obtención de la respuesta y mayor consumo de memoria.	

Es decir, la salida es una suma de espectros de la señal original desplazados uniformemente, “estirados” y escalados por un factor $1/M$. Ya que los espectros son “estirados” un factor M , la condición para que no se produzca aliasing es que:

$$X(e^{jw}) \geq 0 \quad (6.51)$$

para $|w| \geq \pi/M$.

Filtros en los procesos de diezmado e interpolación:

El teorema de muestreo nos indica que la frecuencia de muestreo de una señal no puede reducirse más allá de la tasa de Nyquist (doble de la frecuencia máxima contenida en la señal), ya que se produciría “aliasing”, luego el ancho de banda de una señal debe limitarse ($|w| \geq \pi/M$) como paso previo a la modificación de la frecuencia de muestreo para que este efecto no se produzca. Este filtro previo se denomina *filtro diezmador*, que tendrá las siguientes características:

$$|H(e^{jw})| = \begin{cases} 1, & |w| \leq w_c/M \\ 0, & \pi/M \leq |w| \leq \pi \end{cases} \quad (6.52)$$

Por otra parte, el proceso de interpolación produce repeticiones de espectro que deben ser eliminadas mediante la utilización de un filtro posterior al proceso de interpolación. Las características del filtro serán:

$$|H(e^{jw})| = \begin{cases} L, & |w| \leq w_c/L \\ 0, & \pi/L \leq |w| \leq \pi \end{cases} \quad (6.53)$$

Modificación de la frecuencia de muestreo por un factor racional

Si el cociente entre la frecuencia de muestreo deseada y la original no es un número entero, el procedimiento también puede llevarse a cabo intercalando etapas de diezmado e

interpolación. Una vez expresado el cociente entre las frecuencias de muestreo como una fracción irreducible realizaremos primero la interpolación +filtrado+ diezmado. De esta forma se preserva el mayor ancho de banda y los filtros *anti-imágenes* y “*anti-aliasing*” se pueden fusionar en uno solo, que será aquel con una frecuencia de corte mas baja.

6.2. Problemas resueltos



1. Determine qué orden debe tener un filtro de Butterworth para que la pendiente de la zona de transición entre la banda pasante y atenuada sea $-\frac{5}{2\sqrt{2}}$ para $\Omega/\Omega_c = 1$, $\Omega_c = 1$.

Resolución:

El filtro de Butterworth viene dado por la expresión

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega/\Omega_c)^{2N}} \implies |H(\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\Omega/\Omega_c)^{2N}}}. \quad (6.54)$$

La pendiente viene dada por

$$m = \left. \frac{d|H(\Omega)|}{d\Omega} \right|_{\Omega=\Omega_c} = -\frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N} \right)^{-\frac{1}{2}-1} \frac{2N}{\Omega_c} \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N-1} \Big|_{\Omega=\Omega_c} \quad (6.55)$$

Particularizando a $\Omega = \Omega_c$, se obtiene

$$m = -\frac{1}{2} (1 + (1)^{2N})^{-\frac{3}{2}} \frac{2N}{\Omega_c} (1)^{2N-1} = \dots = -\frac{N}{2\sqrt{2}\Omega_c} \quad (6.56)$$

Con lo que si $\Omega_c = 1$, $m = -\frac{N}{2\sqrt{2}}$.

El orden del filtro será vendrá dado por

$$m = -\frac{N}{2\sqrt{2}} = -\frac{5}{2\sqrt{2}} \implies N = 5 \quad (6.57)$$



2. Determine el orden de un filtro de Butterworth de manera que la atenuación para frecuencias normalizadas hasta 0'9 sea menor que 0'9.

Resolución:

La expresión general de la respuesta de módulo para este filtro es

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega/\Omega_c)^{2N}}. \quad (6.58)$$

con lo que, sustituyendo en la expresión anterior los datos proporcionados, tenemos

$$0'9^2 = \frac{1}{1 + \Omega^{2N}}, \quad (6.59)$$

donde Ω es la frecuencia de corte normalizada. Por tanto

$$0'9^2 = \frac{1}{1 + 0'9^{2N}}, \quad (6.60)$$

y en consecuencia, despejando N de la ecuación anterior, llegamos a $N = 6'8$. Como el orden ha de ser un número entero elegimos el entero más próximo por exceso, con lo que el orden escogido en el diseño es $N = 7$.



3. Dibujar aproximadamente la respuesta en frecuencia (módulo y fase) de un sistema cuya función de transferencia es:

$$H(z) = \frac{1 + z^{-5}}{1 + 0'9^5 z^{-5}}$$

Resolución:

Los ceros de la función de transferencia aparecen cuando $z^5 = -1$, con lo que tendrán la expresión general siguiente

$$z_k = e^{j\frac{\pi+2k\pi}{5}}, k = 0, 1, 2, 3, 4. \quad (6.61)$$

Por tanto, serán los siguientes:

$$z_0 = e^{j\frac{\pi}{5}}, z_1 = e^{j\frac{3\pi}{5}}, z_2 = e^{j\frac{5\pi}{5}}, z_3 = e^{j\frac{7\pi}{5}}, z_4 = e^{j\frac{9\pi}{5}} \quad (6.62)$$

Procediendo de forma análoga se obtiene la posición de los polos del sistema:

$$p_k = 0'9e^{j\frac{\pi+2k\pi}{5}}, k = 0, 1, 2, 3, 4. \quad (6.63)$$

Se encuentra en el mismo ángulo que los ceros pero a una distancia 0'9, tal y como se aprecia en el diagrama de polos y ceros de la Fig. 6.7.

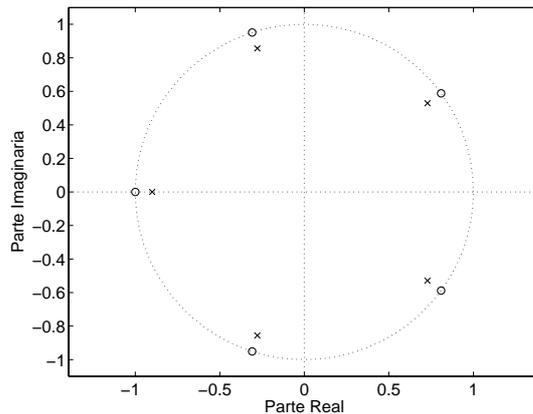


Figura 6.7: Diagrama de polos y ceros del sistema del ejercicio 3.

Tenemos un filtro con ceros uniformemente distribuidos cuya respuesta en frecuencia se muestra en la Fig. 6.8 (magnitud y fase). Este tipo de filtro, por la forma de su respuesta se denomina filtro *peine* o “*comb filter*”.

La respuesta en fase es la siguiente:

$$H(w) = \frac{e^{j5w} + 1}{e^{j5w} + 0'9^5} = \frac{2e^{j5w/2} \cos(5w/2)}{\cos 5w + 0'9^5 + j \sin(5w/2)} \quad (6.64)$$

por lo que, obtenemos

$$\Phi(w) = \frac{5}{2}w - \arctg \left(\frac{\sin(5w/2)}{0'9^5 + \cos(5w/2)} \right) \quad (6.65)$$

cuya representación gráfica se muestra en la Fig. 6.8(b).

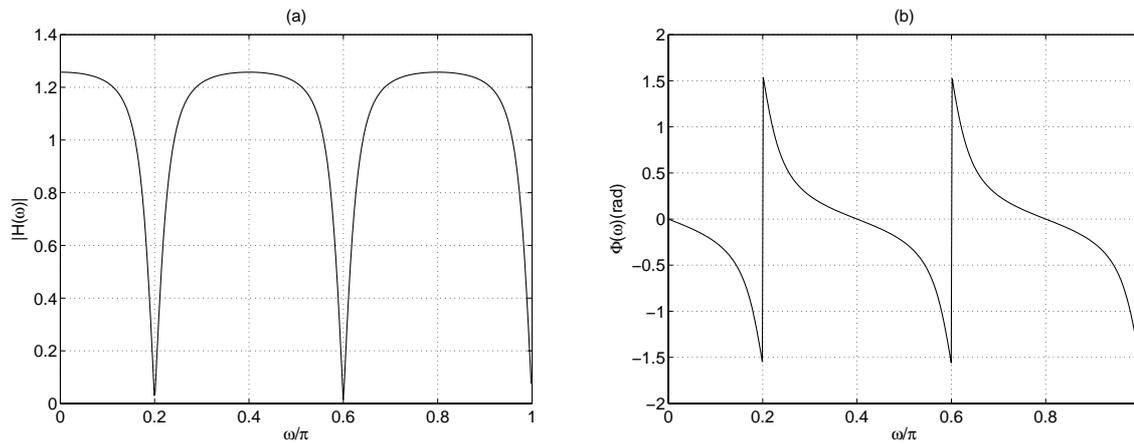


Figura 6.8: "Comb filter" del ejercicio 3. (a) Magnitud y (b) Fase.

4. Compruebe que los filtros de Butterworth de orden impar pueden escribirse de la forma factorizada siguiente:

$$H(s) = \frac{1}{1+s} \prod_k \frac{1}{s^2 + 2\cos\left(\frac{k\pi}{2N}\right)s + 1}, \quad k = 2, 4, 6, \dots, N-1 \quad (N \text{ impar})$$

Resolución:

Intuitivamente al tener un orden impar, habrá $(N-1)/2$ pares de polos complejos y un polo real. Los polos complejos se agrupan por parejas dando lugar a las expresiones de segundo orden, y el polo real aparece como un factor adicional. La expresión general de los polos de un filtro de Butterworth viene dada por

$$s_k = e^{j\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k+1}{2N}\pi\right)}, \quad k = 0, 1, \dots, 2N-1 \quad (6.66)$$

De estos polos, sólo aquellos situados en el semiplano izquierdo se emplearán para formar $H(s)$; es decir, aquellos que tengan una fase comprendida entre $\pi/2 < \phi < 3\pi/2$. Por tanto tendremos dos condiciones:

- a) $\frac{\pi}{2} + \frac{2k+1}{2N}\pi > \frac{\pi}{2}$. De donde $2k+1 > 0$ que equivale a $k > -1/2$. Como k debe ser positivo, la condición última es más restrictiva y por tanto $k \geq 0$
- b) $\frac{\pi}{2} + \frac{2k+1}{2N}\pi < \frac{3\pi}{2}$. De donde $k < N - \frac{1}{2}$ con $k = 0, \dots, (2N-1)/2$. Como k debe ser un número natural, $k = 0, \dots, N-1$ (N impar).

El polo que no tiene conjugado es el correspondiente al elemento central $k = (N-1)/2$:

$$s_{(N-1)/2} = e^{j\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2((N-1)/2)+1}{2N}\pi\right)} = \dots = e^{j\pi} = -1 \quad (6.67)$$

que da lugar al término

$$\frac{1}{s+1}. \quad (6.68)$$

El complejo conjugado del término s_k será s_{N-1-k} como se comprueba a continuación

$$s_{N-1-k} = e^{j\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2(N-1-k)+1}{2N}\pi\right)} = \dots = e^{-j\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k+1}{2N}\pi\right)} = s_k^* \quad (6.69)$$

Luego,

$$H(s) = \frac{1}{1+s} \prod_{k=0}^{\frac{N-1}{2}-1} \frac{1}{(s-s_k)(s-s_k^*)} = \frac{1}{1+s} \prod_{k=0}^{\frac{N-1}{2}-1} \frac{1}{s^2 - 2\operatorname{Re}\{s_k\}s + |s_k|^2} \quad (6.70)$$

Sustituyendo $|s_k| = 1$,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{s_k\} &= \operatorname{Re}\{e^{j\pi/2} e^{j(2k+1)\pi/(2N)}\} = \\ &= \operatorname{Re}\{j\cos((2k+1)\pi/(2N)) + j \cdot j\operatorname{sen}((2k+1)\pi/(2N))\} = -\operatorname{sen}((2k+1)\pi/(2N)). \end{aligned} \quad (6.71)$$

Por tanto,

$$H(s) = \frac{1}{1+s} \prod_{k=0}^{\frac{N-1}{2}-1} \frac{1}{s^2 + 2\operatorname{sen}((2k+1)\pi/(2N))s + 1}. \quad (6.72)$$

Si hacemos un cambio de índice $k' = (N-1)/2 - k$, y posteriormente simplificamos obtenemos:

$$H(s) = \frac{1}{1+s} \prod_{k'=1}^{\frac{N-1}{2}} \frac{1}{s^2 + 2\operatorname{sen}((N-2k')\pi/(2N))s + 1}. \quad (6.73)$$

Como $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - \frac{k'\pi}{N}) = \cos(\frac{k'\pi}{N})$,

$$H(s) = \frac{1}{1+s} \prod_{k'=1}^{\frac{N-1}{2}} \frac{1}{s^2 + 2\cos(k'\pi/N)s + 1}. \quad (6.74)$$

que coincide con la expresión propuesta.

5. Determine los valores A y Ω_0 para que el filtro pasa-baja $H(s)$ se transforme en un filtro pasa-banda $H(p)$ haciendo corresponder Ω_c a Ω_u y $-\Omega_c$ a Ω_l , con la transformación indicada:

$$H(s) \xrightarrow{s = \frac{p^2 + \Omega_0^2}{pA}} H(p),$$

siendo Ω_l y Ω_u las frecuencias inferior y superior de la banda, respectivamente.

Resolución:

Teniendo en cuenta $s = j\Omega$,

$$j\Omega_c = \frac{(j\Omega_u)^2 + \Omega_0^2}{j\Omega_u A} \implies -\Omega_c \Omega_u A = -\Omega_u^2 + \Omega_0^2 \quad (6.75)$$

$$-j\Omega_c = \frac{(j\Omega_l)^2 + \Omega_0^2}{j\Omega_l A} \implies \Omega_c \Omega_l A = -\Omega_l^2 + \Omega_0^2 \quad (6.76)$$

$$A = \frac{\Omega_u^2 - \Omega_0^2}{\Omega_c \Omega_u} \quad (6.77)$$

Sustituyendo las expresiones anteriores, llegamos a la expresión

$$\Omega_0 = \sqrt{\Omega_l \Omega_u}, \quad (6.78)$$

y

$$A = \frac{\Omega_u^2 - \Omega_l \Omega_u}{\Omega_c \Omega_u} = \frac{\Omega_u - \Omega_l}{\Omega_c} \quad (6.79)$$

★

6. Diseñe un filtro FIR de fase lineal y mínimo orden que tenga un cero en $z_1 = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}j$ y ganancia a altas frecuencias igual a la unidad. Repita el procedimiento considerando que el cero se encuentra en $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j$.

Resolución:

Para que el filtro FIR tenga coeficientes reales debe haber un cero complejo conjugado en $z = z_1^*$. Para que se verifique la condición de linealidad de fase deben haber dos ceros adicionales correspondientes a los recíprocos de los anteriores, En total tendremos

$$z_1 = \frac{1}{4} + j\frac{\sqrt{3}}{4}, \quad z_1^* = \frac{1}{4} - j\frac{\sqrt{3}}{4}, \quad (6.80)$$

y los recíprocos $1/z_1$ y $1/z_1^*$,

$$\frac{1}{z_1} = 1 - j\sqrt{3}, \quad \frac{1}{z_1^*} = 1 + j\sqrt{3}. \quad (6.81)$$

y

$$\begin{aligned} H(z) &= G(z - z_1 z^{-1})(z - z_1^* z^{-1}) = G\left(z - \frac{1}{z_1} z^{-1}\right)\left(z - \frac{1}{z_1^*} z^{-1}\right) = \\ &= G(1 - 2\operatorname{Re}\{z_1\}z^{-1} + |z_1|^2 z^{-2})(1 - 2\operatorname{Re}\{\frac{1}{z_1}\}z^{-1} + |\frac{1}{z_1}|^2 z^{-2}) \quad (6.82) \\ &= \dots = G\left(1 - \frac{5}{2}z^{-1} + \frac{21}{4}z^{-2} - \frac{5}{2}z^{-3} + z^{-4}\right). \end{aligned}$$

La ganancia para $w = \pi$ (altas frecuencias) es 1. Cuando $w \rightarrow \pi$ es equivalente a considerar $z \rightarrow -1$:

$$H(z) \Big|_{z=-1} = 1, \quad (6.83)$$

con lo que

$$1 = G\left(1 - \frac{5}{2} + \frac{21}{4} - \frac{5}{2} + 1\right) \implies G = \frac{4}{49} \quad (6.84)$$

Si el cero se encuentra en $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j$, el conjugado es $z_1^* = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j$. Estos ceros se encuentran sobre la circunferencia unidad por lo que sus conjugados serán

$$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} = z_1^*, \quad \frac{1}{z_1^*} = z_1. \quad (6.85)$$

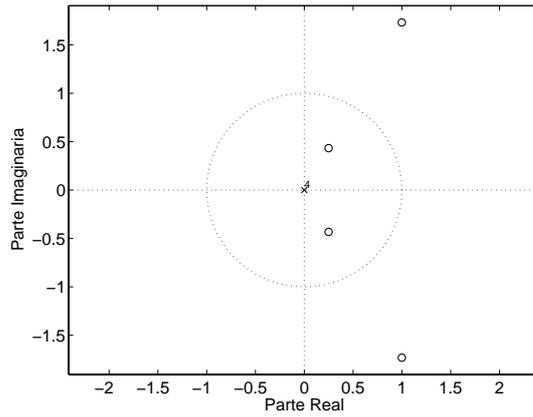


Figura 6.9: Diagrama de polos y ceros del sistema del ejercicio 6a).

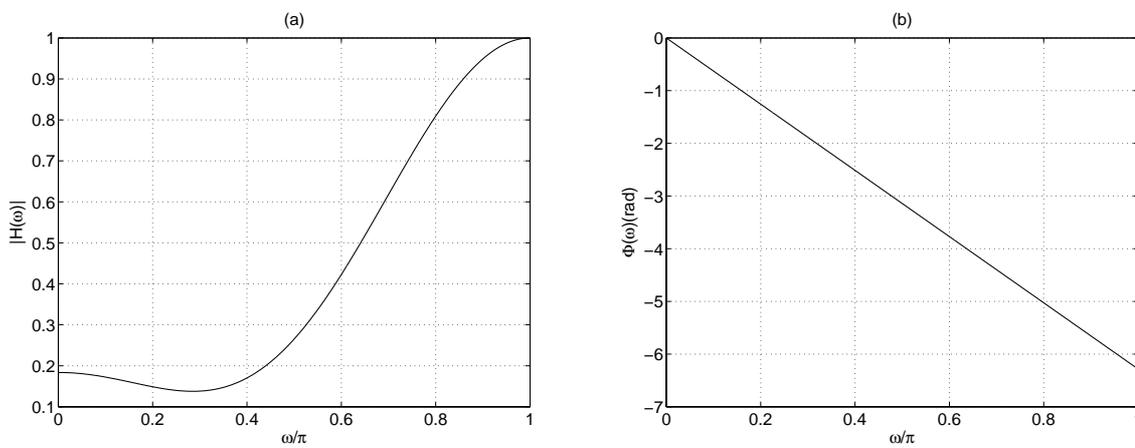


Figura 6.10: Ejercicio 6a). Se tiene un cero en $z = \frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{3}}{4}j$ y la ganancia a altas frecuencias es igual a la unidad. Representación de (a) Magnitud y (b) fase.

Luego el filtro tiene únicamente dos ceros:

$$H(z) = G(z - z_1 z^{-1})(z - z_1^* z^{-1}) = G(1 - 2\text{Re}\{z_1\}z^{-1} + |z_1|^2 z^{-2}) = \dots = G(1 - z^{-1} + z^{-2}) \quad (6.86)$$

Sustituyendo $z = 1$,

$$H(z) \Big|_{z=-1} = 1 = G(1 - (-1)^{-1} + (-1)^{-2}) = G(1 + 1 + 1) = 3G \implies G = 1/3 \quad (6.87)$$

y, por tanto,

$$H(z) = \frac{1}{3}(1 - z^{-1} + z^{-2}). \quad (6.88)$$

7. Diseñe un filtro FIR pasa-baja de fase lineal con frecuencia de corte en banda pasante de 1500 Hz. y anchura de banda de transición 500 Hz. El rizado en la banda pasante es $\delta_1 = 0.01$ y en la banda atenuada $\delta_2 = 0.1$. La frecuencia de muestreo es de 8kHz.

Resolución:

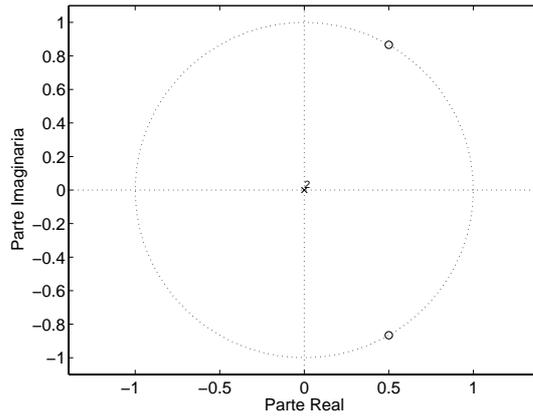


Figura 6.11: Diagrama de polos y ceros del sistema del Ejercicio 6b).

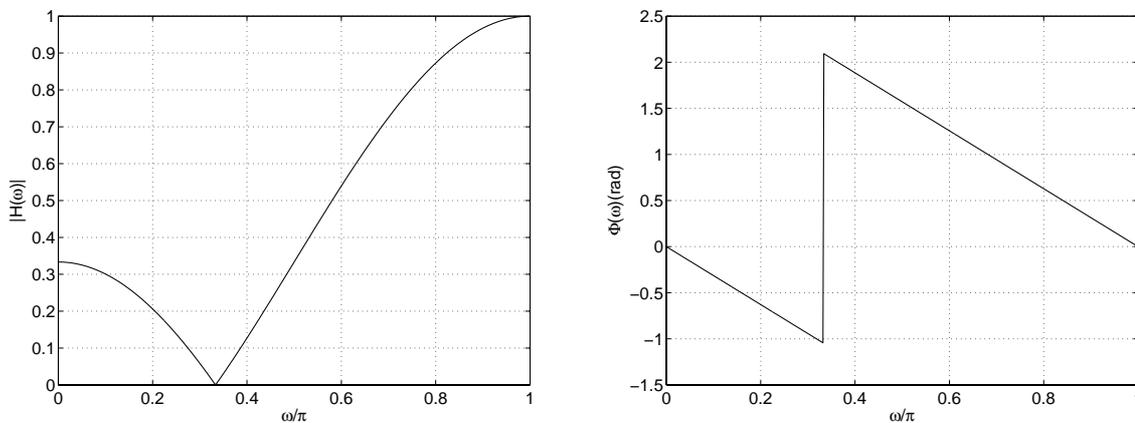


Figura 6.12: Ejercicio 6b). Se tiene un cero en $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j$ y la ganancia a altas frecuencias es igual a la unidad. (a) Magnitud y (b) Fase.

La única ventana que proporciona ecuaciones de diseño aproximadas es la de Kaiser, por lo que será ésta la utilizada. En primer lugar estimamos la atenuación que hemos de emplear en el diseño:

$$A = -20 \log_{10} \delta \quad (6.89)$$

con $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) = 0'01$, por lo que

$$A = -20 \log_{10} 0'01 = 40dB. \quad (6.90)$$

Hemos de tener en cuenta que no es la atenuación en la banda atenuada la que hemos de emplear como valor de A , sino la condición restrictiva calculada con la expresión anterior. Utilizando las expresiones aproximadas de la ventana de Kaiser, obtenemos

$$D = \frac{A - 7'95}{14'36} = \frac{40 - 7'95}{14'36} = 2'232 \quad (6.91)$$

ya que $21 < A < 40$ dB.

El orden viene dado por

$$N \geq \frac{w_m D}{B} + 1. \quad (6.92)$$

En nuestro caso tenemos

$$w_m = 2\pi 8000 \text{ rad/s}, \quad D = 2'232, \quad B = 2\pi 500 \text{ rad/s} \quad (6.93)$$

con lo que $N \geq 35'71$. Si consideramos que el filtro diseñado es de Tipo I (simetría par, número de muestras impar), tenemos $N = 37$.

Nos falta por determinar el valor de α . Para nuestra atenuación, $\alpha = 0'1102(A - 8'7)$ con lo que obtenemos $\alpha = 3'3959$.

Con estos datos obtenemos los coeficientes de la ventana de Kaiser $w_k(N, \alpha) = w_k(37, 3'3959)$. Podemos utilizar la instrucción `kaiser` de MATLAB para realizar esta tarea.

```
>> w = kaiser(N,alpha);
```

El siguiente paso es obtener los coeficientes de la respuesta impulsional del filtro pasa-baja ideal. Tomemos como frecuencia de corte el promedio de los vértices de las bandas, es decir 1500 Hz y 2000 Hz. Por tanto,

$$F_c = \frac{1}{2}(1500 + 2000) = 1750 \text{ Hz} \implies w_c = \frac{2\pi F_c}{F_m} = 1'3744 \text{ rad} \quad (6.94)$$

Para el filtro pasa-baja ideal, tenemos

$$h(n) = \begin{cases} \frac{w_c \operatorname{sen}(w_c n)}{\pi w_c n}, & n \neq 0 \\ \frac{w_c}{\pi}, & n = 0 \end{cases} \quad (6.95)$$

Dando valores a n en el intervalo $[-(N-1)/2, (N-1)/2]$, es decir con $n \in [-18, 18]$ y multiplicando estos coeficientes por los obtenidos para la ventana de Kaiser obtenemos el filtro deseado.

En las Figs. 6.13 y 6.14 mostramos las muestras de la respuesta impulsional del filtro ideal y la ventana así como la respuesta en frecuencia en módulo. Hemos trazado líneas horizontales que delimitan los rizados permitidos y líneas verticales que delimitan las bandas pasante y atenuada o la banda de transición. El filtro diseñado está dentro de este “esqueleto”, luego se cumplen entonces las especificaciones de diseño.

8. Se debe diseñar un filtro pasa-banda de fase lineal con las siguientes especificaciones:
- Atenuación mínima: $0 < F < 200$ Hz de 45 dB.
 - Rizado mínimo de banda pasante: $250 < F < 450$ Hz de 0'5 dB.
 - Atenuación mínima en $550 < F < 1000$ Hz de 60 dB.
 - Frecuencia de muestreo: 2000 Hz.

Resolución:

Emplearemos un filtro FIR de Tipo I. Para ello se hará uso de la ventana de Kaiser ya que nos proporciona ecuaciones de diseño. Calculemos los rizados en cada banda:

$$A_p = 20 \log \frac{1 + \delta_1}{1 - \delta_1} \implies \delta_1 = \frac{10^{A_p/20} - 1}{10^{A_p/20} + 1} = 0'0288 \quad (6.96)$$

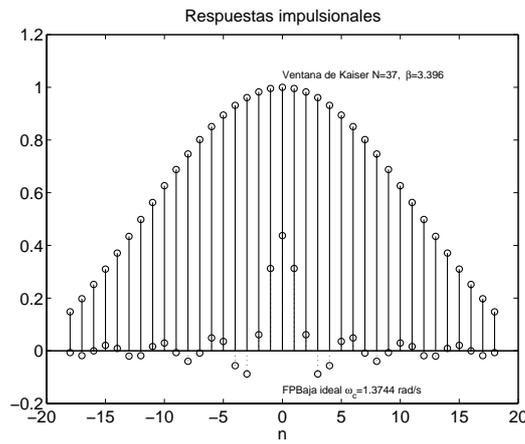


Figura 6.13: Muestras de la ventana y del filtro ideal del ejercicio 7.

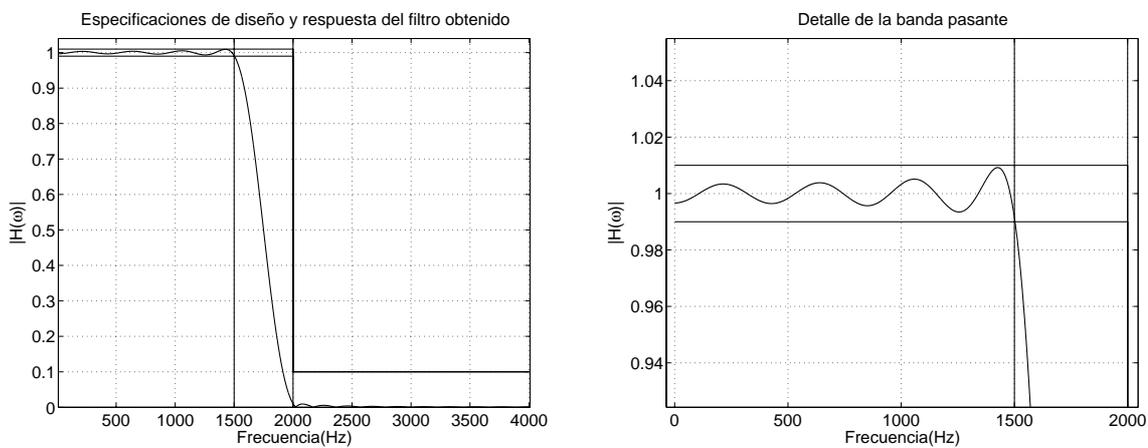


Figura 6.14: Ejercicio 7. (a) Especificaciones de diseño y respuesta del filtro obtenido. (b) Detalle de la banda pasante.

donde hemos empleado $A_p = 0'5$. Si hacemos lo mismo para δ_2 y δ_3 :

$$\delta_2 = 10^{-A_s/20} = 10^{-45/20} = 0'0056, \delta_3 = 10^{-60/20} = 10^{-3} = 0'001 \quad (6.97)$$

Ahora bien, como

$$\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3) = 0'001 \quad (6.98)$$

y, por tanto, la atenuación del filtro será $A = -20 \log \delta = 60 \text{ dB}$.

Sustituimos en las ecuaciones de diseño de Kaiser y calculamos

$$\alpha = 0'1102(A - 8'7) = 0'1102(60 - 8'7) = 5'653 \quad (6.99)$$

donde hemos aplicado la condición de $A > 50$,

$$D = \frac{A - 7'95}{14'36} = 3'624. \quad (6.100)$$

Con lo que el orden del filtro será:

$$N \geq \frac{w_s D}{BT} + 1 = \frac{2\pi 2000 3'624}{2\pi(250 - 200)} + 1 = 145'96 \quad (6.101)$$

donde para la $BT = \min(250 - 200, 550 - 450) = 50\text{Hz}$. ya que es la condición más restrictiva. Elegimos para N el número impar más próximo por exceso: $N = 147$.

Para obtener las frecuencias w_{c1} y w_{c2} para el filtro ideal, tomamos las frecuencias centrales de cada banda. Como la frecuencia de muestreo es $F_m = 2000$, tendremos:

$$F_{c1} = \frac{1}{2}(200 + 250) = 225 \implies w_{c1} = 9\pi/40 \quad (6.102)$$

$$F_{c2} = \frac{1}{2}(450 + 550) = 500 \implies w_{c2} = \pi/2 \quad (6.103)$$

El filtro pasa-banda tiene por respuesta:

$$H_{pb}(w) = \begin{cases} 0, & w \leq w_{c1} \\ 1, & w_{c1} < w \leq w_{c2} \\ 0, & w_{c2} < w \leq \pi \end{cases} \quad (6.104)$$

Por tanto la respuesta impulsional será (ver Capítulo 2):

$$\begin{aligned} h(n) &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-w_{c2}}^{-w_{c1}} H_{pb}(w) e^{jwn} dw + \int_{w_{c1}}^{w_{c2}} H_{pb}(w) e^{jwn} dw \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-w_{c2}}^{-w_{c1}} e^{jwn} dw + \int_{w_{c1}}^{w_{c2}} e^{jwn} dw \right] = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{w_{c1}}^{w_{c2}} e^{-jwn} dw + \int_{w_{c1}}^{w_{c2}} e^{jwn} dw \right] \quad (6.105) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{w_{c1}}^{w_{c2}} 2\cos(w_n) dw = \frac{2}{2\pi} \frac{\text{sen}(wn)}{n} \Big|_{w_{c1}}^{w_{c2}} \end{aligned}$$

de donde se puede calcular

$$h(n) = \frac{1}{\pi n} [\text{sen}(w_{c2}n) - \text{sen}(w_{c1}n)], \forall n \neq 0 \quad (6.106)$$

Para el caso en que $n = 0$ se llega

$$h(n) = \frac{w_{c2} - w_{c1}}{\pi} \quad (6.107)$$

En la Fig. 6.15 mostramos los resultados. Comprobamos que se cumplen las especificaciones ya que en Fig. 6.15(a) hemos dibujado el “esqueleto” de las especificaciones. Si la respuesta en frecuencia está en su interior, las especificaciones se cumplen tal y como observamos que ocurre.

Nota:

Cuando diseñamos con un ventana de Kaiser si no se especifica nada, el rizado en banda pasante es igual a la atenuación. Por ejemplo, si la atenuación en banda no pasante es de 40 dB., tendremos $\delta_2 = 0'01$. Si no se especifica δ_1 sería también 0'01. Si el rizado en banda pasante fuese menor, el filtro se habrá diseñado con esta restricción con lo que la atenuación sería mayor de 40 dB. Así, al diseñar una ventana de Kaiser, tendremos en cuenta:

$$\delta = \min(\delta_1, \delta_2), \quad A = 20 \log_{10} \delta \quad (6.108)$$

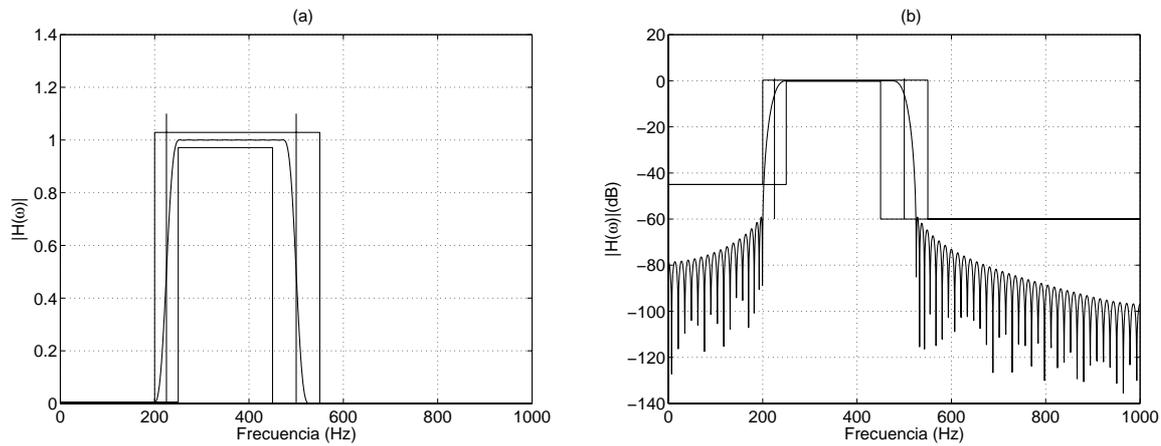


Figura 6.15: Ejercicio 8. Especificaciones de diseño y respuesta del filtro obtenido en (a) escala lineal y una (b) escala logarítmica.

y el rizado en banda pasante será

$$r_{bp}(dB) = 20 \log_{10} \left| \frac{1 + \delta}{1 - \delta} \right|. \quad (6.109)$$

9. Una aplicación de electrocardiografía necesita un filtro que realice la derivada de la señal de entrada para frecuencias comprendidas en el intervalo 0 a 25 Hz. Se desea que la atenuación para frecuencias por encima de 40 Hz. sea de 40 dB. Realice el diseño para una frecuencia de muestreo $F_1 = 250Hz$ y $F_2 = 1000Hz$.

Resolución:

Un diferenciador ideal tiene una respuesta en frecuencia dada por:

$$H(w) = \begin{cases} jw, & |w| < w_c \\ 0, & |w| > w_c \end{cases}$$

y que se representa en la Fig. 6.16.

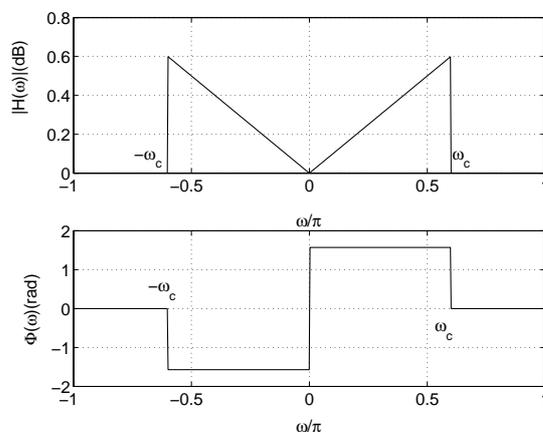


Figura 6.16: Respuesta en frecuencia del diferenciador ideal del ejercicio 9.

Vamos a utilizar el método de ventanas con ventana de Kaiser. El prototipo más adecuado para el filtro es el tipo III de acuerdo con la respuesta del diferenciador. Podemos calcular:

$$A = -20 \log \delta_2, \delta_2 = 10^{-A/20} = 10^{-40/20} = 0'01. \quad (6.110)$$

Como únicamente especificamos la atenuación en banda no pasante, ésta será la empleada para determinar el parámetro β :

$$\beta = 0'5842(40 - 21)^{0'4} + 0'07886(40 - 21) = 3'3953 \quad (6.111)$$

Calculamos D :

$$D = \frac{40 - 7'95}{14'36} = 2'2318. \quad (6.112)$$

El orden del filtro depende de la frecuencia elegida:

$$N \geq \frac{w_s D}{BT} + 1 = \frac{F_m 2'2318}{40 - 25} = F_m \cdot 0'1487 + 1 \quad (6.113)$$

Por tanto, para $F_m = 250Hz$ tendremos un $N_1 = 38'19$ y para $F_m = 1000Hz$ se obtiene $N_2 = 149'7$. Como estos valores deben ser enteros impares, se eligen $N_1 = 39$ y $N_2 = 151$.

La frecuencia de corte w_c para el filtro ideal la elegiremos en la mitad de la banda pasante:

$$w_c = \frac{1}{2}(w_1 + w_2) = \frac{1}{2}2\pi(25 + 40) = 65\pi. \quad (6.114)$$

La respuesta impulsional del diferenciador ideal será:

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-w_c}^{w_c} H(w) e^{jwn} dw = \frac{1}{2\pi} \int_{-w_c}^{w_c} jwe^{jwn} dw = \dots = \frac{w_c}{\pi n} \cos(w_c n) - \frac{1}{\pi n^2} \text{sen}(w_c n) \quad (6.115)$$

Sabemos que para $n = 0$, la muestra debe ser nula y, en consecuencia:

$$h(n) = \begin{cases} 0, & n = 0. \\ \frac{w_c}{\pi n} \cos(w_c n) - \frac{1}{\pi n^2} \text{sen}(w_c n), & n \neq 0 \end{cases} \quad (6.116)$$

En los gráficos 6.17 y 6.18 mostramos los resultados. Comprobamos que se cumplen las especificaciones.

10. Se desea construir un diferenciador pasa-baja para amplificar los complejos QRS en registros de electrocardiografía de superficie (ECG). Por requerimientos de memoria, el número de coeficientes del filtro debe ser, como máximo, 15. Las frecuencias que experimenten más amplificación debe estar en torno a los 18Hz. Para frecuencias por encima de los 25 Hz. la atenuación será la máxima posible. La frecuencia de muestreo es de 250Hz. La ganancia para $F = 18Hz$. debe ser la unidad.

Resolución:

Utilizando la aproximación de la ventana de Kaiser, podemos calcular la banda de transición:

$$BT = 2\pi(25 - 18) = 14\pi, w_c = \frac{1}{2}2\pi(18 + 25) = 33\pi \text{ rad/s} \quad (6.117)$$

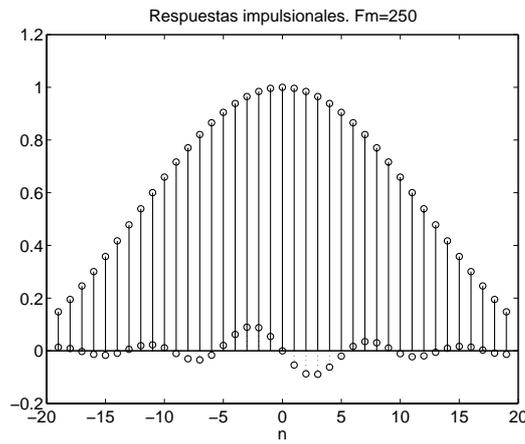


Figura 6.17: Ejercicio 9. Muestras de la ventana de Kaiser (superior) y del filtro ideal (inferior).

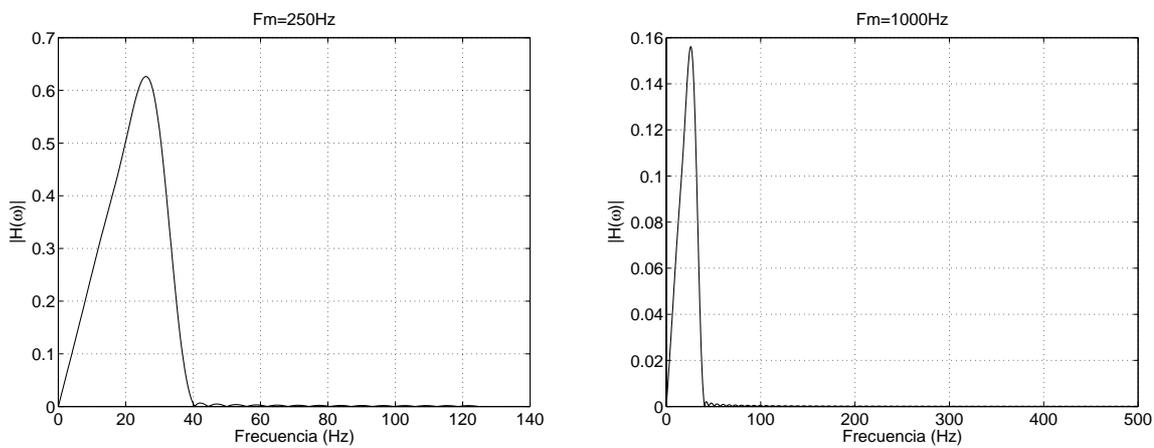


Figura 6.18: Ejercicio 9. (a) Respuesta del filtro obtenido para $F_m = 250\text{Hz}$. (b) Respuesta del filtro obtenido para $F_m = 1000\text{Hz}$.

La atenuación y el parámetro α a partir del orden del filtro vienen dadas por

$$N \geq \frac{w_s D}{BT} + 1 \implies D = \frac{(N - 1)BT}{w_s} = 0'392 \quad (6.118)$$

A partir de aquí podemos calcular el valor de A ,

$$A = 14'36 \cdot D + 7'95 = 13'57 \quad (6.119)$$

Como $A < 21$ tomaremos $\alpha = 0$ en cuyo caso sabemos que la ventana de Kaiser se transforma en la ventana rectangular.

Sustituyendo en la respuesta ideal del diferenciador obtenida en el ejercicio anterior,

obtenemos los valores:

$$h(0) = 0'0158 = -h(14) \quad (6.120)$$

$$h(1) = 0'0276 = -h(13) \quad (6.121)$$

$$h(2) = 0'0365 = -h(12) \quad (6.122)$$

$$h(3) = 0'0405 = -h(11) \quad (6.123)$$

$$h(4) = 0'0382 = -h(10) \quad (6.124)$$

$$h(5) = 0'0297 = -h(9) \quad (6.125)$$

$$h(6) = 0'0163 = -h(8) \quad (6.126)$$

$$h(7) = 0 \quad (6.127)$$

Para ajustar la ganancia, sabemos que los filtros FIR tipo III tienen una respuesta en módulo que viene dada por la expresión:

$$A(w) = \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}-1} 2h(k) \sin \left(w \left[\frac{N-1}{2} - k \right] \right) = \sum_{k=0}^6 2h(k) \sin(w(7-k)) \quad (6.128)$$

Interesa la ganancia para $w_g = 2\pi 18/250$, por lo que, sustituyendo en la expresión anterior, obtenemos:

$$A(w) \Big|_{w=w_g} = 0'2927. \quad (6.129)$$

Con lo que el factor de ganancia que multiplica a los coeficientes será

$$G = \frac{1}{0'2927} = 3'4164. \quad (6.130)$$

Esta operación, en MATLAB se resolvería así:

```
>> w = 2*pi*18/250;
>> G = 1./sum((2*h.*sin(w(7-(0:6)))));
```

Vemos que el pico máximo se produce en torno a los 13'5 Hz (Fig. 6.19). Hemos de tener en cuenta que al fijar N , D queda determinada pero a ser $D < 0'9222$ hemos considerado para su valor mínimo por lo que la anchura de banda del filtro debería ser:

$$BT = \frac{w_s D}{N-1} = \frac{2\pi 250 \cdot 0'9222}{15-1} = 2\pi \cdot 16'46 \text{ rad/s} \quad (6.131)$$

por lo que $w_2 = 2\pi 34'46 \text{ rad/s}$ y, por tanto, $w_c = \frac{1}{2}(2\pi \cdot 34'46 + 2\pi \cdot 18) = 26'23\pi \text{ rad/s}$. Si determinamos los coeficientes $h(n)$ y el nuevo factor de ganancia, obtenemos una respuesta en frecuencia que se ajusta más a las especificaciones (Fig. 6.20).

En la Fig. 6.21 se muestra el resultado de aplicar este filtro sobre una señal de ECG en la que se observa que la oscilación de baja frecuencia es eliminada.

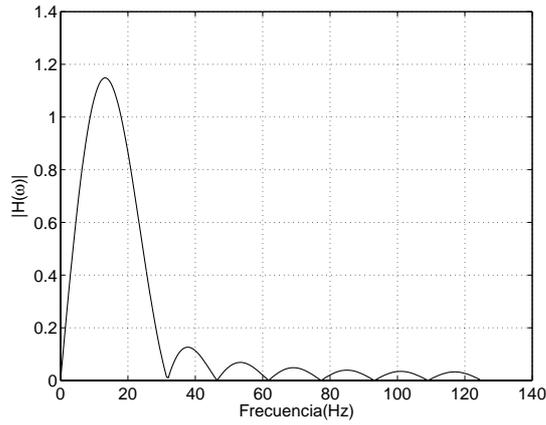


Figura 6.19: Ejercicio 10. Se observa el máximo alrededor de 13'5 Hz.

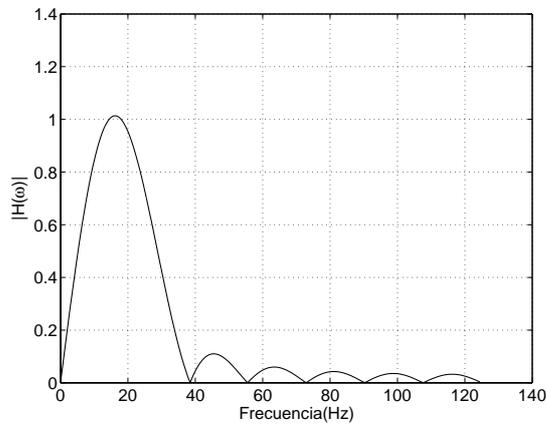


Figura 6.20: Ejercicio 10. Respuesta en frecuencia del filtro tras corregir la frecuencia de corte.

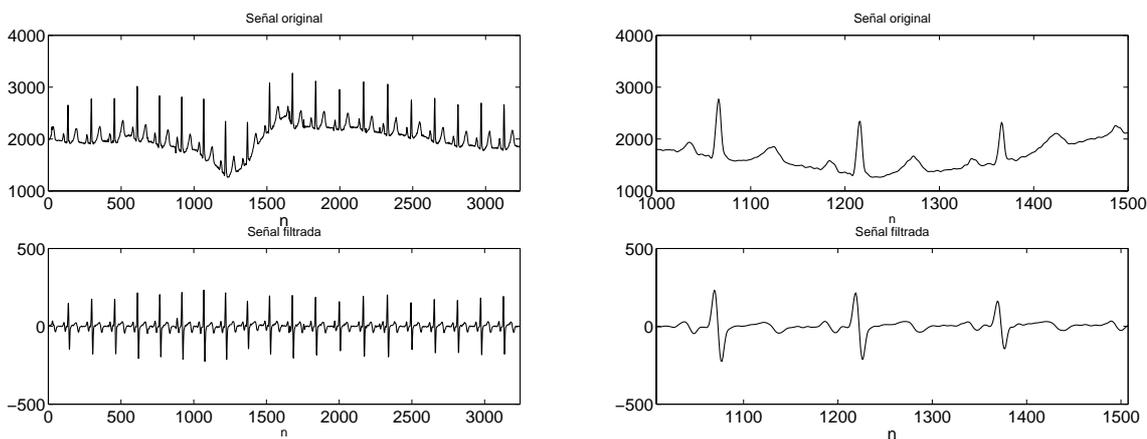


Figura 6.21: Señal original de ECG y filtrada. Las componentes de baja frecuencia (oscilación de la línea base) se eliminan eficientemente. Ejercicio 10.

11. Utilizando una ventana de Blackman de orden 18 diseñe un filtro cuya respuesta en frecuencia venga dada por:

$$H(w) = \begin{cases} 0, & |w| < \pi/2. \\ -\cos w, & \frac{\pi}{2} < |w| < \pi \end{cases}$$

Resolución:

Esta respuesta en frecuencia no se corresponde con ninguna de los cuatro prototipos de filtros FIR. Veamos qué ocurre si intentamos realizar el diseño. Para aplicar el método de ventanas hemos de hallar $h(n)$ del filtro ideal y la ventana. Aplicando la definición de la Transformada de Fourier Inversa en tiempo discreto, tenemos:

$$\begin{aligned}
 h(n) &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} H(w) e^{jwn} dw \right] = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^{-\pi/2} H(w) e^{jwn} dw + \int_{\pi/2}^{\pi} H(w) e^{jwn} dw \right] = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[- \int_{\pi}^{\pi/2} H(-w) e^{-jwn} dw + \int_{\pi/2}^{\pi} H(w) e^{jwn} dw \right] \quad (6.132) \\
 &= - \frac{1}{2\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \cos w \cdot \cos(wn) dw = \dots = \frac{\cos(\pi n/2)}{(1-n^2)\pi}
 \end{aligned}$$

La función $H(w)$ presenta simetría para $w = 0$ por lo que será de tipo I o II, pero ninguno de estos filtros vale 1 en $w = \pi$ entonces no se puede diseñar un filtro de fase lineal con esa respuesta en frecuencia. Si utilizamos la $h(n)$ calculada obtenemos la respuesta en frecuencia y la respuesta impulsional mostrada en la Fig. 6.22 que no se corresponde con las especificaciones.

Un filtro que sí se correspondería con modelos FIR de fase lineal sería el definido por:

$$H(w) = \begin{cases} j \cos w, & -\pi \leq w \leq -\pi/2. \\ 0, & -\pi/2 < w \leq \pi/2 \\ -j \cos w, & \pi/2 < w < \pi \end{cases} \quad (6.133)$$

Para aplicar el método de ventanas es necesario hallar $h(n)$ del filtro ideal y la ventana correspondiente:

$$\begin{aligned}
 h(n) &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^{-\pi/2} j \cos w e^{jwn} dw - \int_{\pi/2}^{\pi} j \cos w e^{jwn} dw \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{\pi/2}^{\pi} j \cos w e^{-jwn} dw - \int_{\pi/2}^{\pi} j \cos w e^{jwn} dw \right] \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \cos w \operatorname{sen}(wn) dw \quad (6.134) \\
 &= \dots = \frac{1}{\pi} \frac{n \cos(\pi n) + \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} n)}{n^2 - 1}
 \end{aligned}$$

En la Fig. 6.23 mostramos la respuesta en frecuencia y la impulsional para este filtro, que se corresponde con las especificaciones de diseño.

El filtro se corresponde con la respuesta especificada, ya que no se tiene ninguna de las cuatro posibles respuestas para un filtro FIR de fase lineal.

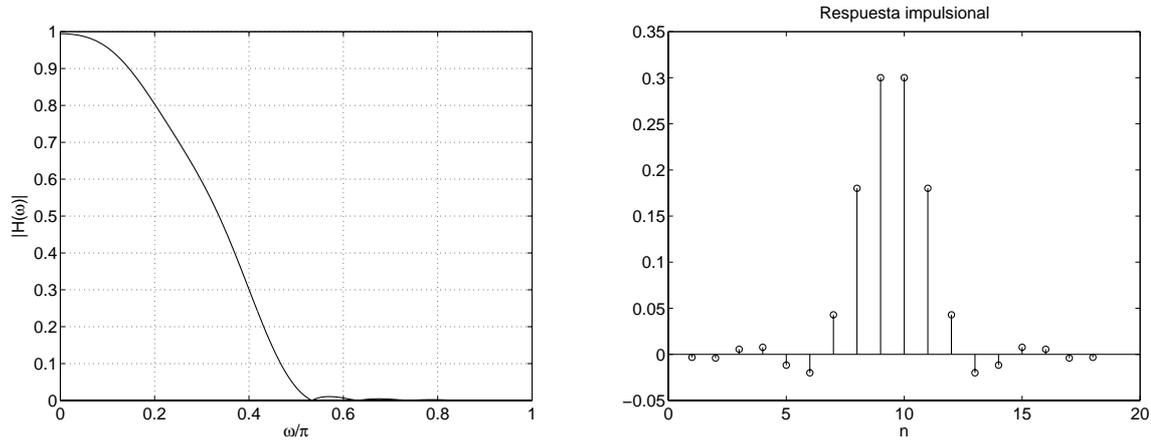


Figura 6.22: (a) Respuesta en frecuencia (módulo) y (b) respuesta impulsional del filtro del ejercicio 11.

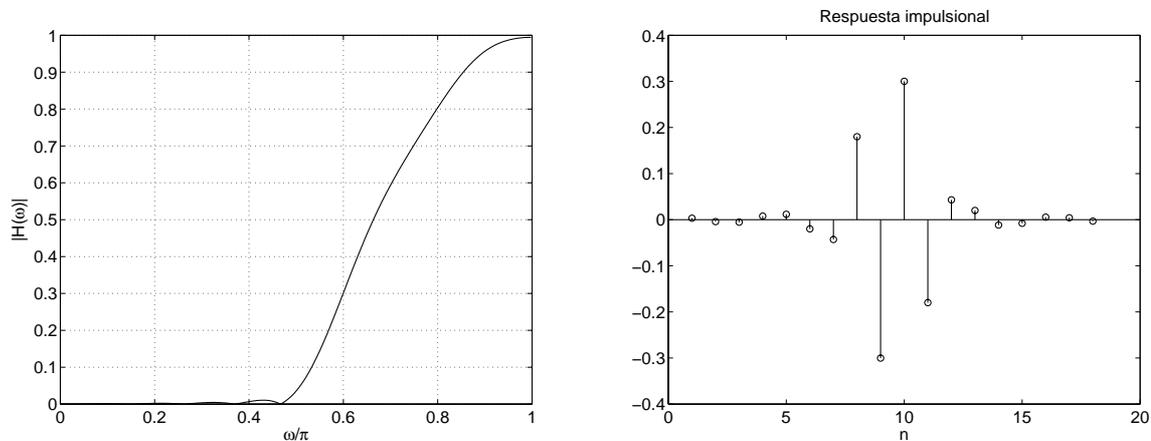


Figura 6.23: (a) Respuesta en frecuencia (módulo) y (b) respuesta impulsional del filtro del ejercicio 11 una vez aplicado el método de ventanas.

12. Para la implementación de un detector de complejos cardíacos en un ECG se va a utilizar un filtro derivador pasa-baja sencillo construido mediante dos filtros en cascada. El filtro pasa-baja es un “*comb filter*” definido como:

$$H_{pb}(z) = \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}}$$

y el derivador:

$$H_{deriv}(z) = 1 - z^{-M}$$

Se desea que el filtro resultante tenga un máximo de amplitud en torno a los 18 Hz., y un cero en torno a los 30 Hz.

Determine los valores de M y N para que se verifiquen las especificaciones en función de la frecuencia de muestreo. Particularice para los casos $F_{m1} = 250Hz.$ y $F_{m2} = 1000Hz.$ ¿A qué frecuencia se produce realmente el máximo?

Resolución:

Obtenemos en primer lugar la respuesta en frecuencia de este filtro:

$$H_{pb}(w) = \frac{1 - e^{-jwN}}{1 - e^{-jw}} = \frac{e^{-jwN/2}}{e^{-jw/2}} \cdot \frac{e^{jwN/2} - e^{-jwN/2}}{e^{jw/2} - e^{-jw/2}}. \quad (6.135)$$

Aplicando la identidad de Euler $\sin w = \frac{e^{jw} - e^{-jw}}{2j}$,

$$H_{pb}(w) = e^{-j\frac{w}{2}(N-1)} \cdot \frac{\text{sen}(wN/2)}{\text{sen}(w/2)}. \quad (6.136)$$

La respuesta en módulo tiene ceros en $wN/2 = k\pi$, $w = 2\pi k/N$ (Fig. 6.24(a)). Para $k = 0$, hay una cancelación de un cero y un polo que se observa claramente si dibujamos el diagrama de polos y ceros del sistema (Fig. 6.24(b)). Por tanto el primer cero de interés se encuentra en $w_c = 2\pi/N$. Esto se puede realizar de forma muy sencilla en MATLAB así:

```
>> N = 4;
>> Hpb_num = [1 zeros(1,N-1) -1]
>> Hpb_den = [1 -1];
>> zplane(Hpb_num,Hpb_den);
```

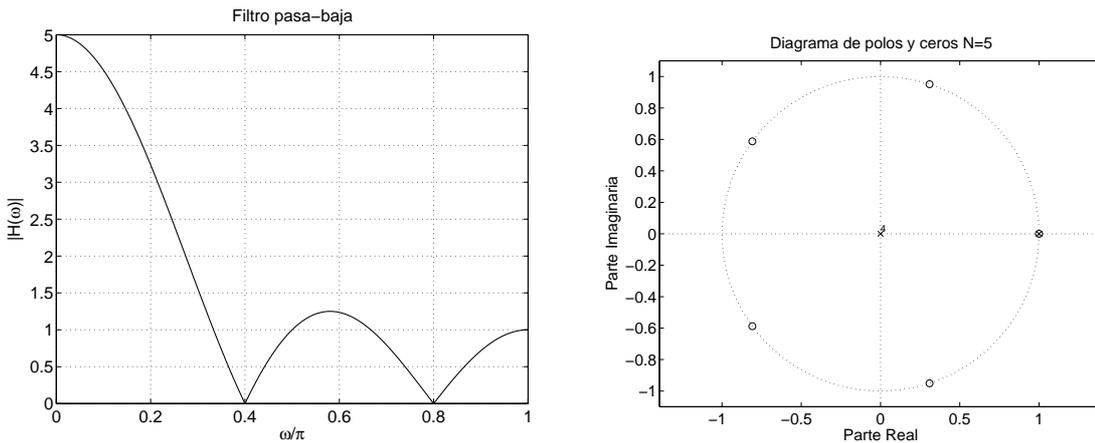


Figura 6.24: (a) Respuesta en frecuencia correspondiente al filtro. (b) Diagrama de polos y ceros de un filtro “comb” de orden cinco ($N = 5$) del ejercicio 12.

Para el segundo filtro obtenemos

$$H_{derivador}(w) = e^{-jw\frac{M}{2}} \cdot \text{sen}(w\frac{M}{2}) \cdot 2j = e^{-jw\frac{M}{2}} \cdot \underbrace{e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot 2\text{sen}(w\frac{M}{2})}_{A(w)}. \quad (6.137)$$

La respuesta en frecuencia de este filtro se muestra en la Fig. 6.25.

Los máximos se producen a frecuencias

$$\frac{dA(w)}{dw} = 0 \implies \cos(w\frac{M}{2}) = 0 \implies \frac{wM}{2} = \frac{\pi}{2}(2k + 1) \implies w_{max} = \frac{\pi}{M}(2k + 1), k = 0, 1, 2, \quad (6.138)$$

La combinación de ambos filtros da como resultado la respuesta mostrada en la Fig. 6.26, con $w_{max} = \pi/M$ y $w_{cero} = 2\pi/N$.

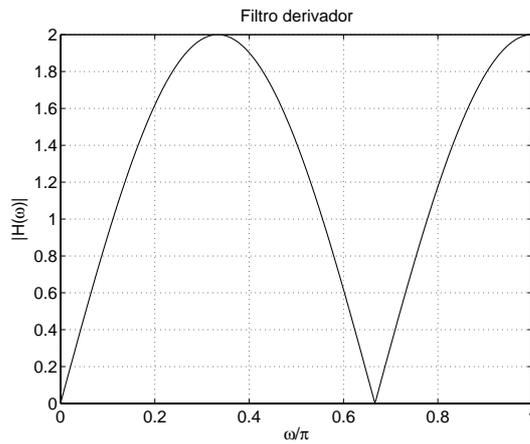


Figura 6.25: Respuesta en frecuencia del filtro derivador del ejercicio 12 para $M = 3$.

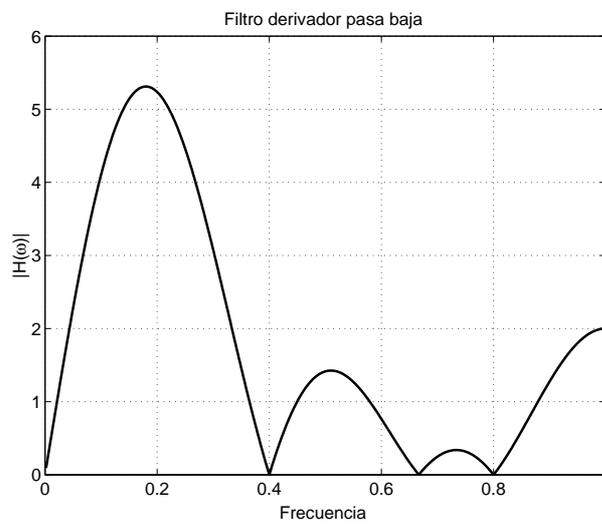


Figura 6.26: Respuesta en frecuencia del filtro derivador pasa-baja del ejercicio 12.

Podemos despejar M y N conocidas las frecuencias de corte y la frecuencia de muestreo:

$$w_{max} = \frac{\pi}{M} = 2\pi \frac{F_1}{F_m} \implies M = \frac{F_m}{2F_1} \quad (6.139)$$

$$w_{cero} = \frac{2\pi}{N} = 2\pi \frac{F_2}{F_m} \implies M = \frac{F_m}{F_2}. \quad (6.140)$$

donde F_1 es la frecuencia del primer máximo del derivador y F_2 es la frecuencia del primer cero del fitro pasa-baja.

Si particularizamos para $F_1 = 18Hz$ y $F_2 = 30Hz$, obtenemos $M = 6'9444$ y $N = 8'3333$ que aproximamos al entero más próximo como se muestra en la Tabla 6.6. Con estos valores, las frecuencias reales obtenidas son $F'_1 = 17'86Hz$, $F'_2 = 31'25Hz$ para $F_m = 250Hz$, $F'_1 = 17'86Hz$, $F'_2 = 33'30Hz$ para $F_m = 1000Hz$.

Realmente el máximo no se encuentra en 17'86 sino en el máximo de la respuesta en módulo total:

$$A_t(w) = \frac{\text{sen}(wM/2) \cdot \text{sen}(wN/2)}{\text{sen}(w/2)}. \quad (6.141)$$

Tabla 6.6: Valores de los órdenes M y N para distintas F_m .

$M = 7$	$M=28$
$N=8$	$N = 33$
$F_m = 250$	$F_m = 1000$

Podemos calcular la posición del máximo con MATLAB para $M = 7$ y $N = 8$ de la siguiente forma:

```
% Calculo del máximo real
Fm=250;
Fmax=250; M=7; N=8;
f = inline('sen(x/2)/(sen(7*x/2)*sen(8*x/2))');

% Invertimos la expresión ya que MATLAB tiene una
% función para calcular el mínimo
max = fminbnd(f,0.00001,2*pi/8);
fmax=max*Fm/(2*pi)
```

con $fmax = 12'37Hz$.

La respuesta en frecuencia de los filtros diseñados se muestran en la Fig. 6.27. Las condiciones impuestas (localización del máximo y posición del primer cero) son independientes y no pueden verificarse simultáneamente.

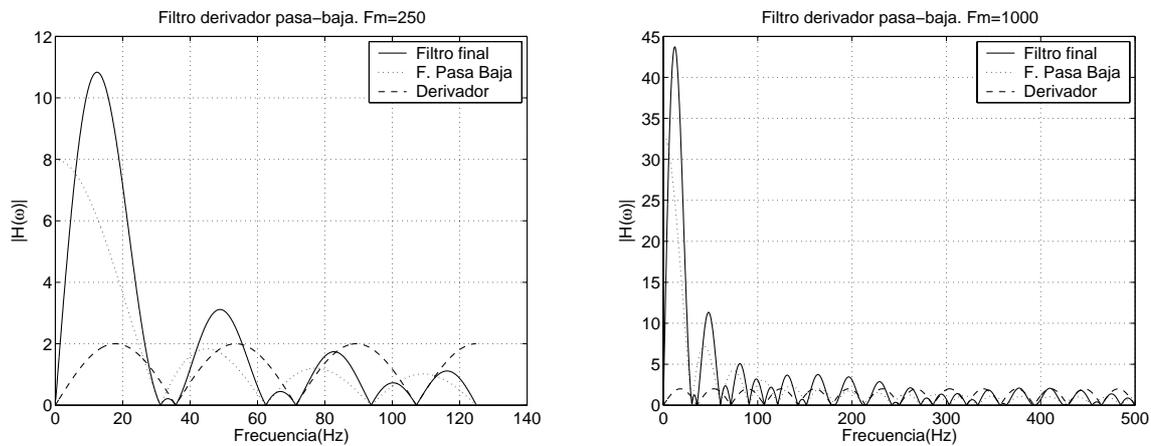


Figura 6.27: Respuesta en frecuencia (módulo) del filtro derivador pasa-baja de (a) $F_m = 250$ Hz y (b) $F_m = 1000$ Hz del ejercicio 12.

13. Un filtro de Butterworth de orden dos tiene por función de transferencia

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}.$$

Transforme este filtro en un filtro digital utilizando el método del impulso invariante. Considere frecuencias de muestreo $\Omega_{m1} = 8rad/s$ y $\Omega_{m2} = 16rad/s$. Realice un ajuste para que las ganancias de ambos filtros a frecuencias bajas coincidan. Represente gráficamente la respuesta en frecuencia del filtro analógico y los dos digitales obtenidas.

Resolución:

Para aplicar la transformada del impulso invariante hemos de descomponer $H(s)$ en fracciones simples:

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1} = \frac{A}{s - p} + \frac{A^*}{s - p^*}. \quad (6.142)$$

Como los polos se encuentran en $p_{1,2} = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{2-4}}{2} = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{2}j}{2}$, podemos obtener:

$$A = H(s)(s - p) \Big|_{s=p} = -\frac{\sqrt{2}}{2}j, A^* = +\frac{\sqrt{2}}{2}j \quad (6.143)$$

Como los polos son complejos conjugados, los residuos también lo serán.

Podemos calcular los residuos en los polos con la instrucción `residuez` de MATLAB de la siguiente forma

```
[r,p,k] = residuez(1,[1 sqrt(2) 1]);
```

Haciendo el cambio $A_k/(s - p)$ por $A_k/(1 - e^{pT}z^{-1})$,

$$H(z) = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}j}{1 - e^{pT}z^{-1}} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}j}{1 - e^{p^*T}z^{-1}}. \quad (6.144)$$

Si sustituimos valores con $T_1 = 2\pi/\Omega_{m1} = 2\pi/8$,

$$H_1(z) = \frac{0'4279z^{-1}}{1 - 0'9752z^{-1} + 0'3293z^{-2}} \quad (6.145)$$

y con $T_2 = 2\pi/16$

$$H_2(z) = \frac{0'2937z^{-1}}{1 - 1'4570z^{-1} + 0'5739z^{-2}} \quad (6.146)$$

Hemos de hacer un ajuste de ganancia para que los filtros diseñados coincidan con el analógico a frecuencias bajas:

$$H(s) \Big|_{s=0} = 1, G \cdot H(z) \Big|_{z=1} = 1. \quad (6.147)$$

De donde obtenemos:

$$G_1 = \frac{1 - 0'9752 + 0'3293}{0'4279} = 0'8275 \text{ y } G_2 = \frac{1 - 1'4570 + 0'5739}{0'2937} = 0'3980. \quad (6.148)$$

Luego podemos escribir las Transformadas Z:

$$H_1(z) = \frac{0'3541z^{-1}}{1 - 0'9752z^{-1} + 0'3293z^{-2}} \quad (6.149)$$

y con $T_2 = 2\pi/16$

$$H_2(z) = \frac{0'1169z^{-1}}{1 - 1'4570z^{-1} + 0'5739z^{-2}} \quad (6.150)$$

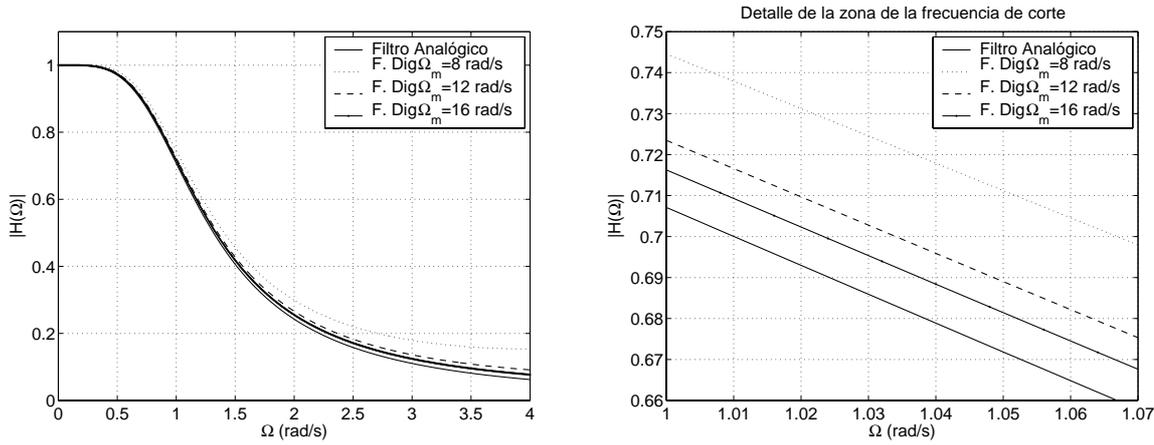


Figura 6.28: (a) Respuesta en frecuencia (módulo) del filtro analógico y los correspondientes digitales para distintas frecuencias de muestreo del ejercicio 13. En (b) se muestra una ampliación de la zona de la frecuencia de corte.

Los gráficos obtenidos se muestran en la Fig. 6.28. Observamos cómo el filtro digital se parece más al analógico a medida que la frecuencia de muestreo se va incrementando. El eje de abscisas de estas gráficas se corresponde con frecuencias analógicas. Para los filtros digitales la escala es idéntica pero las unidades son radianes. ★

14. Se desea diseñar un filtro digital pasa-baja de Butterworth de orden dos con frecuencia de corte 1 rad/s y frecuencia de muestreo 10 rad/s. Utilice la transformación bilineal.

Resolución:

Las posiciones de los polos para un filtro de Butterworth de orden par vienen dadas por:

$$s_k = e^{j\frac{\pi(2k+1)}{2N}}, k = 0, 1, \dots, 2N - 1; N \text{ par} \quad (6.151)$$

y, por tanto, en nuestro caso ($N = 2$):

$$s_0 = e^{j\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (6.152)$$

$$s_1 = e^{j\frac{3\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (6.153)$$

$$s_2 = e^{j\frac{5\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (6.154)$$

$$s_3 = e^{j\frac{7\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (6.155)$$

Asignando a $H(s)$ los polos situados en el semiplano izquierdo obtenemos:

$$H(s) = \frac{1}{(s - s_1)(s - s_2)} = \frac{1}{s^2 - 2\text{Re}\{s_1\}s + |s_1|^2} = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1} \quad (6.156)$$

El filtro tiene frecuencia normalizada $\Omega_c = 1$. Para que la frecuencia digital sea 1 rad/s, deberemos realizar un “pre-warping”. Este nos permite corregir la no linealidad en frecuencia introducida por la transformación bilineal.

$$\Omega = \frac{2}{T} \text{tg}(w/2), F_m = \frac{\Omega_s}{2\pi}, T = \frac{2\pi}{\Omega_s} \quad (6.157)$$

De aquí obtenemos la frecuencia de corte que debe tener el filtro analógico:

$$\Omega = \frac{\Omega_s}{\pi} \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{2\Omega_s}\right) = \frac{\Omega_s}{\pi} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{10}\right) \quad (6.158)$$

La función de transferencia del filtro analógico con frecuencia de corte Ω se obtendrá haciendo la transformación pasa-baja a pasa-baja mediante el cambio $s = s/\Omega$ sobre la ecuación (6.156) llegando a:

$$H(s) = \frac{\Omega^2}{s^2 + \sqrt{2}\Omega s + \Omega^2}. \quad (6.159)$$

El filtro digital obtenido realizando la transformación bilineal es:

$$\begin{aligned} H(z) &= H(s) \Big|_{s=\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}} = \frac{\Omega^2}{\frac{4}{T^2} \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 + \sqrt{2}\Omega \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} + \Omega^2} = \dots = \\ &= \frac{(z^2 + 2z + 1) \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{10}\right)}{(1 + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{10}\right)\sqrt{2} + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{10}\right))z^2 + (2\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{10}\right) - 2)z + (1 - \sqrt{2}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{10}\right) + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{10}\right))} \end{aligned} \quad (6.160)$$

Si tenemos en cuenta la expresión genérica en términos de z^{-1} :

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}, \quad (6.161)$$

y dividimos la expresión (6.160) por el coeficiente a_0 , se pueden identificar los siguientes coeficientes:

$$b_0 = b_2 = \frac{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{10}\right)}{\alpha} \quad (6.162)$$

$$b_1 = 2b_0 \quad (6.163)$$

$$a_0 = 1 \quad (6.164)$$

$$a_1 = \frac{2\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{10}\right) - 2}{\alpha} \quad (6.165)$$

$$a_2 = \frac{1 - \sqrt{2}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{10}\right) + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{10}\right)}{\alpha} \quad (6.166)$$

$$\alpha = (1 + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{10}\right)\sqrt{2} + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{10}\right)) \quad (6.167)$$

Haciendo cálculos obtenemos:

$$H(z) = \frac{0'0675 + 0'1349z^{-1} + 0'0675z^{-2}}{1 - 1'1430z^{-1} + 0'4128z^{-2}} \quad (6.168)$$

Este resultado lo podemos obtener directamente con MATLAB haciendo:

```
>> N = 2 % orden del filtro
>> w = 1
>> ws=10
>> wn=ws/2
>> [B,A]=butter(N,w/wn)
```

Otra posibilidad si queremos seguir paso a paso el procedimiento de diseño es la siguiente:

```

% Obtener el prototipo de Butterworth analógico de orden 2 con frec. normalizada:
>> [z,p,k] = buttap(2)

% Determinar la frecuencia analógica que hemos de emplear
>> w0=1;
>> ws=10;
>> Fs=ws/(2*pi);
>> wa=2*Fs*tan(w0/(2*Fs));

% Obtenemos la función de transferencia del filtro analógico:
>> [N,D] = zp2tf(z,p,k);

% Cambiamos la frecuencia de corte del filtro analógico a wa:
>> [N,D] = lp2lp(N,D,wa);

% Realizamos la transformación lineal:
>> [B,A] = bilinear(N,D,Fs);

```

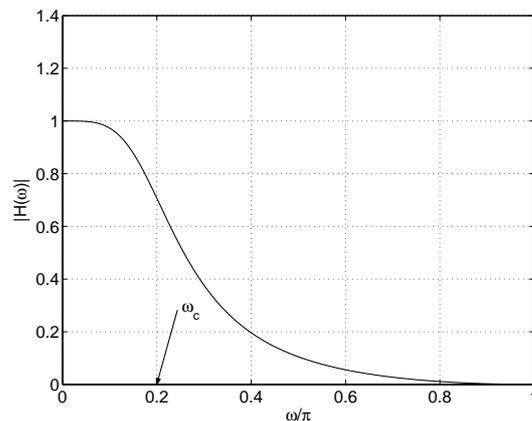


Figura 6.29: Respuesta en frecuencia (módulo) del filtro pasa-baja diseñado en el ejercicio 14.

15. Un sistema de dos ceros y tres polos tiene por respuesta impulsional $h(n) = e^{1/(n+1)}u(n)$. Determine la función de transferencia imponiendo que las respuestas impulsionales coincidan en las primeras siete muestras.

Resolución:

El sistema buscado es de la forma

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{1 + a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + a_3z^{-3}} \quad (6.169)$$

con $M = 2$ y $N = 3$.

Como se impone que ambos sistemas tengan la misma respuesta impulsional en las L primeras muestras, hay pues un total de $L = N + M - 1$ variables a determinar. Necesitaremos, por tanto, L muestras de la respuesta impulsional, en nuestro caso 6:

$$h(n) = \{e^1, e^{\frac{1}{2}}, e^{\frac{1}{3}}, e^{\frac{1}{4}}, e^{\frac{1}{5}}, e^{\frac{1}{6}}\}. \quad (6.170)$$

La ecuación en diferencias del sistema es:

$$h(n) = b_0\delta(n) + b_1\delta(n-1) + b_2\delta(n-2) + b_3\delta(n-3) + b_4\delta(n-4) + b_5\delta(n-5) + b_6\delta(n-6). \quad (6.171)$$

Para $n > 2$,

$$h(n) = -a_1h(n-1) - a_2h(n-2) - a_3h(n-3). \quad (6.172)$$

Sustituyendo para $n = 3, 4, 5$, y escribiendo en forma matricial tenemos el sistema siguiente:

$$-\begin{pmatrix} e^{1/4} \\ e^{1/5} \\ e^{1/6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{1/3} & e^{1/2} & e^1 \\ e^{1/4} & e^{1/3} & e^{1/2} \\ e^{1/5} & e^{1/4} & e^{1/3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

de donde obtenemos $a_1 = -1'5562$, $a_2 = 0'6024$, $a_3 = -0'0387$. Considerando $n = 0, 1, 2$ en la expresión general de $h(n)$ podemos determinar los coeficientes b_n :

$$b_n = h(n) + a_1h(n-1) + a_2h(n-2) + a_3h(n-3), \quad n = 0, 1, 2, \quad (6.173)$$

con

$$b_0 = h(0) = e^1 = 2'7182, \quad b_1 = h(1) + a_1h(0) = -2'5815, \quad b_2 = h(2) + a_1h(1) + a_2h(0) = 0'4673. \quad (6.174)$$

Por tanto:

$$H(z) = \frac{2'7182 - 2'5815z^{-1} + 0'4673z^{-2}}{1 - 1'5562z^{-1} + 0'6024z^{-2} - 0'0387z^{-3}}. \quad (6.175)$$

En la Fig. 6.30 observamos las respuestas impulsionales del filtro ideal y del obtenido por este método. El procedimiento asegura la coincidencia de ambas en las siete primeras muestras pero no en el resto. Este procedimiento para calcular los coeficientes del filtro se denomina Método de Padé.

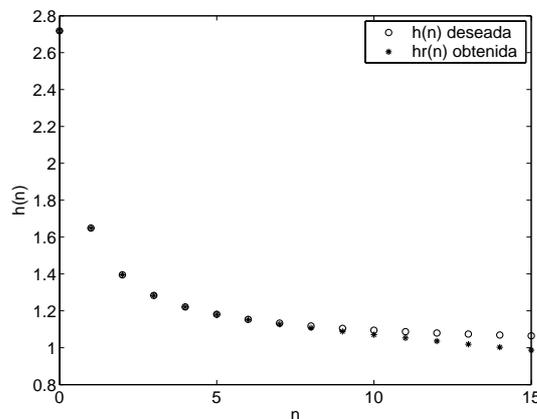


Figura 6.30: Respuesta impulsional del filtro ideal y del obtenido con el Método de Padé.



16. Utilizando un prototipo analógico de Butterworth de orden dos, determine la respuesta en frecuencia en módulo y la función de transferencia de los siguientes filtros analógicos:

- Pasa-baja con frecuencia de corte 10 rad/s.
- Pasa-alta con frecuencia de corte 10 rad/s.
- Pasa-banda como $\Omega_l = 0'618rad/s$ y $\Omega_u = 1'618rad/s$.
- Elimina-banda como $\Omega_l = 0'618rad/s$ y $\Omega_u = 1'618rad/s$.

Resolución:

El prototipo analógico de partida es el mismo que el del ejercicio 14:

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}. \quad (6.176)$$

El filtro anterior tiene una frecuencia de corte normalizada igual a la unidad. Para obtener los filtros solicitados sólo hemos de obtener las transformaciones en frecuencia analógicas siguientes:

a) *Pasa-baja*: $s \xrightarrow{lp} \frac{s}{\Omega_c}$. Por tanto,

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1} \Bigg|_{s=s/10} = \frac{100}{s^2 + 10\sqrt{2}s + 100} \quad (6.177)$$

b) *Pasa-alta*: $s \xrightarrow{hp} \frac{\Omega_c}{s}$ Por tanto,

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1} \Bigg|_{s=10/s} = \frac{s^2}{s^2 + 10\sqrt{2}s + 100} \quad (6.178)$$

c) *Pasa-banda*: $s \xrightarrow{bp} \frac{s^2 + \Omega_0^2}{s(\Omega_u - \Omega_l)}$ donde $\Omega_0 = \sqrt{\Omega_u \Omega_l} = \sqrt{1'618 \cdot 0'618} \simeq 1$ y $\Omega_u - \Omega_l = 1$. Por tanto se obtiene:

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1} \Bigg|_{s=\frac{s^2+1}{s}} = \frac{1}{\left(\frac{s^2+1}{s}\right)^2 + \sqrt{2}\frac{s^2+1}{s} + 1} = \frac{1}{s^4 + \sqrt{2}s^3 + 3s^2 + \sqrt{2}s + 1} \quad (6.179)$$

d) *Elimina-banda*: $s \xrightarrow{bs} \frac{s(\Omega_u - \Omega_l)}{s^2 + \Omega_0^2}$. Es decir, la transformación inversa a la anterior. Obtenemos:

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1} \Bigg|_{s=\frac{s}{s^2+1}} = \frac{(s^2 + 1)^2}{s^4 + \sqrt{2}s^3 + 3s^2 + \sqrt{2}s + 1} \quad (6.180)$$

Estos resultados se pueden obtener fácilmente con MATLAB utilizando la función `buttap` para diseñar el filtro pasa-baja y las funciones `lp2lp`, `lp2hp`, `lp2bp` y `lp2bs` para realizar las transformaciones en frecuencia de pasa-baja a pasa-baja, a pasa-alta, a pasa-banda y a elimina-banda, respectivamente. El código correspondiente se muestra a continuación:

```

% Programa para el diseño de filtros y transformaciones en frecuencia.
clear
close all

B=[0 0 1]
A=[1 sqrt(2) 1]

[Bpb,Apb]=lp2lp(B,A,10)
[Bph,Aph]=lp2hp(B,A,10)
[Bbp,Abp]=lp2bp(B,A,1,1)
[Bbs,Abs]=lp2bs(B,A,1,1)

W=0:20/1000:20;
[h,w]=freqs(Bpb,Apb,W);
[h2,w2]=freqs(Bph,Aph,W);
[h3,w3]=freqs(Bbp,Abp);
[h4,w4]=freqs(Bbs,Abs);

```

Los gráficos obtenidos con estas transformaciones se muestran en la Fig. 6.31.

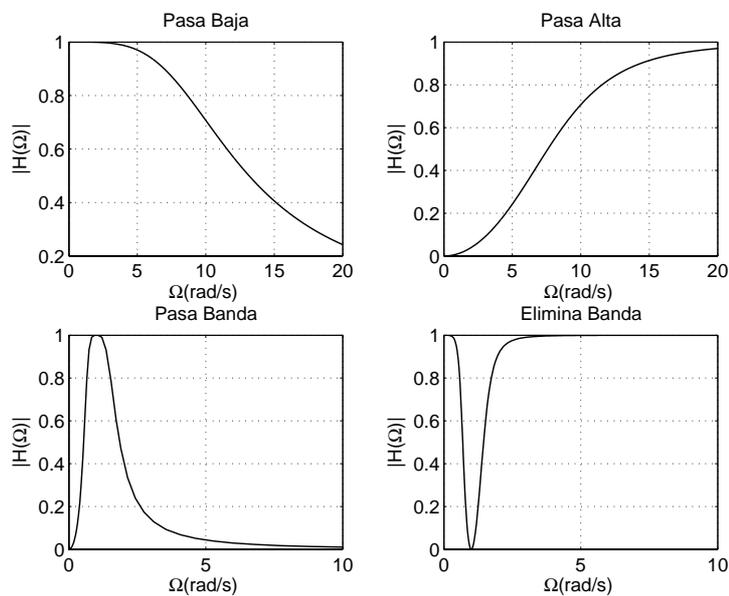


Figura 6.31: Respuesta en frecuencia (módulo) de los distintos filtros analógicos diseñados en el problema 16.



17. Utilizando un prototipo analógico de Butterworth de orden dos, determine la función de transferencia y la respuesta en frecuencia en módulo (en dB.) de los siguientes filtros digitales:

- Pasa-baja con frecuencia de corte 10 rad/s.
- Pasa-alta con frecuencia de corte 10 rad/s.
- Pasa-banda como $\Omega_l = 0'618rad/s$ y $\Omega_u = 1'618rad/s$.
- Elimina-banda como $\Omega_l = 0'618rad/s$ y $\Omega_u = 1'618rad/s$.

utilizando la transformación bilineal. Realice las transformaciones en frecuencia en el dominio analógico. La frecuencia de muestreo es de 80 rad/s.

Resolución:

El procedimiento es el mismo en todos los casos:

- Obtener las frecuencias analógicas adecuadas para el diseño del filtro utilizando la expresión $\Omega_a = \frac{2}{T} \operatorname{tg}\left(\frac{w}{T}\right)$ (“*pre-warping*”).
- Diseñar el filtro analógico con esa frecuencia.
- Aplicar la transformación bilineal sobre el filtro analógico diseñado.

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}. \quad (6.181)$$

a) En este caso se obtiene $w = \frac{2\pi F}{F_m} = 2\pi \frac{\Omega/2\pi}{\Omega_m/2\pi} = \pi/4$. Como $\Omega_m = 2\pi/T$ y $T = 2\pi/\Omega_m$, tenemos que

$$\Omega_c = \frac{2}{T} \operatorname{tg}(w/2) = \frac{2}{T}(\sqrt{2} - 1). \quad (6.182)$$

Ahora diseñamos el filtro analógico para la frecuencia de corte, haciendo una transformación pasa-baja a pasa-baja (1p21p), esto es, $s \rightarrow s/\Omega_c$:

$$H(s) = \frac{\Omega_c^2}{s^2 + \Omega_c^2 \sqrt{2}s + \Omega_c^2} \quad (6.183)$$

Haciendo ahora la transformación bilineal como en el ejercicio 14,

$$H(z) = H(s) \Big|_{s=\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}} = \frac{0'0976 + 0'1953z^{-1} + 0'0976z^{-2}}{1 - 0'9428z^{-1} + 0'3330z^{-2}} \quad (6.184)$$

b) La frecuencia de corte $\Omega_c = 10rad/s$. Ya sabemos que el filtro analógico debe tener frecuencia $\Omega_c = \frac{2}{T} \operatorname{tg}(\pi/8)$. La transformación pasa-baja a pasa-alta (1p2hp) es $s \rightarrow \Omega_c/s$, por lo que:

$$H(s) = \frac{s^2}{s^2 + \Omega_c^2 \sqrt{2}s + \Omega_c^2} \quad (6.185)$$

Si hacemos la transformación bilineal, obtenemos:

$$H(z) = H(s) \Big|_{s=\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}} = \dots = \frac{0'569 - 1'1381z^{-1} + 0'569z^{-2}}{1 - 0'9428z^{-1} + 0'3330z^{-2}} \quad (6.186)$$

donde observamos que el factor $2/T$ de la Transformación Bilineal se cancela con el término presente en el “*pre-warping*” de las frecuencias. T únicamente se emplea en el cálculo de w .

- c) En el caso del pasa-banda tenemos que $\Omega_l = 0'616$ y $\Omega_u = 1'618$. Hacemos el “pre-warping” para ambas frecuencias:

$$w_1 = 2\pi \frac{\Omega_l}{\Omega_s} = \frac{2\pi 0'616}{80}, w_2 = 2\pi \frac{\Omega_u}{\Omega_s} = \frac{2\pi 1'618}{80}, \quad (6.187)$$

Las frecuencias analógicas que emplearemos para el diseño serán:

$$\Omega_l = \frac{2}{T} \operatorname{tg}(w_1/2) = \frac{2}{T} \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi 0'616}{160}\right) = \frac{2}{T} 0'0242 \quad (6.188)$$

$$\Omega_u = \frac{2}{T} \operatorname{tg}(w_u/2) = \frac{2}{T} \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi 1'618}{160}\right) = \frac{2}{T} 0'0635. \quad (6.189)$$

La transformación en frecuencia pasa-baja a pasa-banda es:

$$s \longrightarrow \frac{s^2 + \Omega_0^2}{sB} \quad (6.190)$$

donde $\Omega_0 = \sqrt{\Omega_u \Omega_l}$ y $B = \Omega_u - \Omega_l$. Por tanto se obtiene:

$$H_{pbanda}(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1} \Bigg|_{s=\frac{s^2 + \Omega_0^2}{sB}} = \dots = \frac{s^2 B^2}{s^4 + \sqrt{2}Bs^3 + s^2(B^2 + 2\Omega_0^2) + \sqrt{2}B\Omega_0^2 s + \Omega_0^2} \quad (6.191)$$

Sustituyendo los valores $\Omega_0 = \frac{2}{T} 0'0015$ rad, $B = \frac{2}{T} 0'0394$ rad, y aplicando la transformación bilineal tenemos:

$$H(z) = H(s) \Bigg|_{s=\frac{z-1}{z+1}} = \frac{0'0015 - 0'0029z^{-2} + 0'0015z^{-4}}{1 - 3'8771z^{-2} - 3'6675z^{-3} + 0'8949z^{-4}} \quad (6.192)$$

- d) La diferencia con el caso anterior únicamente radica en el tipo de transformación en frecuencia analógica. En este caso

$$s \longrightarrow \frac{sB}{s^2 + \Omega_0^2}. \quad (6.193)$$

Haciendo esta transformación obtenemos la función de transferencia del filtro analógico:

$$H_{elimina\ banda}(s) = H(s) \Bigg|_{s \rightarrow \frac{sB}{s^2 + \Omega_0^2}} = \frac{s^4 + 2\Omega_0^2 s^2 + \Omega_0^4}{s^4 + \sqrt{2}s^3 + s^2(B^2 + 2\Omega_0^2) + \sqrt{2}B\Omega_0^2 s + \Omega_0^2} \quad (6.194)$$

Haciendo la Transformación Bilineal y utilizando los mismos valores de B y Ω_0 que en el apartado (c), obtenemos:

$$H(z) = \frac{0'9460 - 3'7723z^{-1} + 5'6527z^{-2} - 3'7723z^{-3} + 0'9460z^{-4}}{1 - 3'8771z^{-1} + 5'6497z^{-2} - 3'6675z^{-3} + 0'8949z^{-4}} \quad (6.195)$$

Podemos obtener estos resultados utilizando la instrucción `butter` de MATLAB teniendo en cuenta que las frecuencias de corte (o límite entre bandas) se debe expresar en unidades normalizadas, con $w = 1$ para la frecuencia de Nyquist. Las instrucciones serán:

```
>>N=2; % Orden del filtro.
>>[Bpb,Apb] = butter(N,10/40);
>>[Bpa,Apa] = butter(N,10/40,'high');
>>[Bpbanda,Apbanda] = butter(N,[0.618,1.618]/40,'bandpass');
>>[Beb,Aeb] = butter(N,[0.618,1.618]/40,'stop');
```

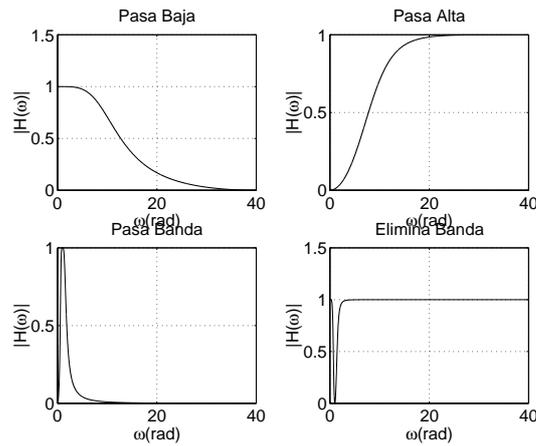


Figura 6.32: Respuesta en frecuencia de los filtros implementados utilizando la transformación bilineal en el ejercicio 17.

En la Fig. 6.32 se muestran las respuestas en frecuencia (módulo) de los cuatro filtros. ★

18. Diseñe un filtro digital pasa-banda a partir de un prototipo de Tchebyshev I que verifique las siguientes especificaciones:

- Frecuencia inferior de la banda pasante 700 Hz.
- Frecuencia superior de la banda pasante 800 Hz.
- Rizado en la banda pasante de 1dB.
- Atenuación mayor que 20 dB en la banda no pasante.
- Anchura de las bandas de transición 200 Hz.
- Frecuencia de muestreo de 3 kHz.

Resolución:

El filtro solicitado tiene el esqueleto de la Fig. 6.33.

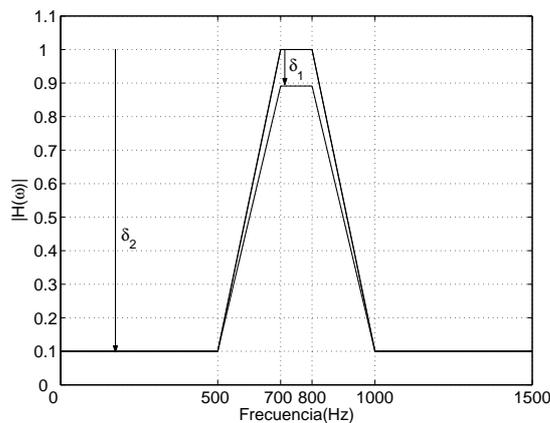


Figura 6.33: Forma esquemática del filtro solicitado en el ejercicio 18.

En primer lugar obtenemos las frecuencias analógicas aplicando “*pre-warping*” de la

siguiente forma:

$$\Omega = \frac{2}{T} \operatorname{tg}(w/2) = \frac{2}{T} \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi F}{2F_m}\right). \quad (6.196)$$

Sustituyendo valores para $T = 1/3000$, $F_m = 3000$ y las cuatro frecuencias analógicas, obtenemos $\Omega_1 = 3464$ rad/s, $\Omega_l = 5402$ rad/s, $\Omega_u = 6664$ rad/s, $\Omega_2 = 10392$ rad/s.

Para calcular el orden del filtro necesario para cumplir las especificaciones hemos de determinar los parámetros del filtro pasa-baja, por lo que haremos la transformación pasa-banda a pasa-baja:

$$s \rightarrow \frac{s^2 + \Omega_0^2}{sB}. \quad (6.197)$$

Determinamos los valores de Ω_0 y B :

$$\Omega_0 = \sqrt{\Omega_u \Omega_l} = \sqrt{5402 \cdot 6664} = 6000 \text{ rad/s}. \quad (6.198)$$

El ancho de banda es $B = \Omega_u - \Omega_l = 1'262$ rad/s, y en consecuencia

$$j\Omega_c = \frac{-\Omega_u^2 + \Omega_0^2}{j\Omega_u B} \rightarrow \Omega_c = \frac{\Omega_u^2 - \Omega_0^2}{\Omega_u B} = 1, \quad (6.199)$$

tal y como era de esperar para la frecuencia de corte del filtro pasa-baja.

Procediendo análogamente para Ω_2 , obtenemos $\Omega_a = 5'4931$. Es decir, el filtro analógico pasa-baja tiene las características de la Fig. 6.34.

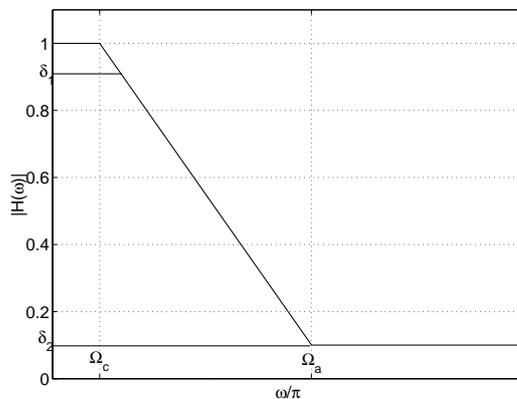


Figura 6.34: Característica del filtro analógico pasa-baja del ejercicio 18.

Ahora podemos estimar el orden del filtro sustituyendo en la expresión

$$N > \frac{\cosh^{-1}\left(\frac{1}{\delta_2 \varepsilon}\right)}{\cosh^{-1}\left(\frac{\Omega_a}{\Omega_c}\right)}, \quad (6.200)$$

aunque para ello necesitamos conocer δ_2 y ε . Sabemos que el rizado en banda pasante es $r_p = 1$ dB, luego podemos calcular ε :

$$20 \log_{10}(1) - 20 \log_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}\right) = r_p \rightarrow \varepsilon = \sqrt{10^{r_p/10} - 1} = 0'5088. \quad (6.201)$$

La atenuación es $r_s = 20dB$ y por tanto:

$$\log_{10}(1) - 20 \log_{10}(\delta_2) = r_s \longrightarrow \delta_2 = 10^{-r_s/20} = 0'1 \quad (6.202)$$

con lo que el orden del filtro será

$$N > \frac{\cosh^{-1}\left(\frac{1}{0'1 \cdot 0'5088}\right)}{\cosh^{-1}\left(\frac{1}{5'4931}\right)} = 1'537, \quad (6.203)$$

de donde se obtiene, finalmente, $N = 2$.

Cabe recordar que las funciones exponenciales inversas se calculan de la siguiente forma

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \beta \longrightarrow e^{2x} - 2\beta e^x + 1 = 0. \quad (6.204)$$

Haciendo $y = e^x$ tenemos $y^2 - 2\beta y + 1 = 0$ con lo que resolviendo esta ecuación cuadrática y deshaciendo el cambio, obtenemos $x = \ln(\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 1})$ siendo la solución, la proporcionada por la raíz positiva de la ecuación de segundo grado.

La función de transferencia del filtro será

$$H(s) \cdot H(-s) = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \mathcal{T}_N^2(s)} \quad (6.205)$$

Sabemos que el polinomio de Tchebyshev de orden dos viene dado por $\mathcal{T}_2(x) = 2x - 1$, luego $1 + \varepsilon^2(2s - 1)^2 = 0$ nos proporciona los polos del sistema $\varepsilon^2 4s^2 - 4\varepsilon^2 s + \varepsilon^2 + 1 = 0$.

Hemos de incluir un factor de ganancia $G^2 = \frac{1}{\varepsilon^2 4}$ que distribuiremos entre $H(s)$ y $H(-s)$, teniendo pues un factor neto de $G = 1/2\varepsilon$. En general $G = \frac{1}{2^{N-1}\varepsilon}$ siendo N el orden del filtro. Esto nos asegura ganancia unidad a bajas frecuencias.

Los polos de este filtro están definidos por

$$\alpha = \frac{1}{N} \operatorname{sh}^{-1}(1/\varepsilon), \quad \beta_m = \frac{2n+1}{2N} \pi, \quad n = 0, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (6.206)$$

$$s_m = -\operatorname{sh}(\alpha) \operatorname{sen}(\beta_m) \pm j \operatorname{ch}(\alpha) \operatorname{cos}(\beta_m). \quad (6.207)$$

En nuestro caso tenemos

$$s_0 = -0'5489 + 0'8951j, \quad s_1 = -0'5489 - 0'8951j, \quad (6.208)$$

con lo que

$$H(s) = \frac{\frac{1}{2\varepsilon}}{(s - s_0)(s - s_1)} = \frac{0'9826}{s^2 + 1'0978s + 1'1025}. \quad (6.209)$$

Expresión que podríamos haber obtenido directamente de una tabla de filtros de Tchebyshev.

Una vez diseñado el filtro pasa-baja, aplicamos la transformación $s = \frac{s^2 + \Omega_0^2}{sB}$ para transformarlo en un pasa banda, con los parámetros calculados anteriormente $\Omega_0 = 6000 \text{ rad/s}$, $B = 1262 \text{ rad/s}$.

$$H_{pbanda} = \frac{0'9826 s^2 B^2}{(s^2 + \Omega_0^2)^2 + 1'0977(s^2 + \Omega_0^2)sB + 1'1025 s^2 B^2}. \quad (6.210)$$

Ahora hacemos la transformación bilineal y obtenemos la función de transferencia del filtro buscado:

$$H(z) = H(s) \Big|_{s=\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}} = \frac{0'0096 - 0'0193z^{-2} + 0'0096z^{-4}}{1 + 1'7521z^{-2} + 0'7954z^{-4}}. \quad (6.211)$$

Este filtro puede diseñarse con MATLAB con sólo dos líneas de código:

```
[N,wn] = cheb1ord([700 800]/1500,[500 1000]/1500,1,20);
[Bm,Am] = cheb1(N,1,wn);
```

obtenemos el mismo resultado, tal y como se muestra en la Fig. 6.35, donde se observa claramente que se cumplen las especificaciones del diseño.

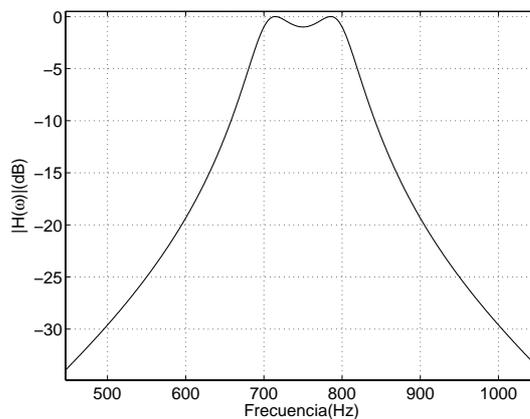


Figura 6.35: Respuesta en frecuencia (módulo) del filtro digital pasa-banda diseñado en el ejercicio 18. ★

19. A partir de las transformaciones en frecuencia en el dominio analógico, verifique las expresiones de dichas transformaciones en el dominio digital utilizando la transformación bilineal.

Resolución:

- a) *Transformación pasa-baja a pasa-baja.*

La transformación analógica es $\hat{s}/\Omega_1 = s/\Omega_2$, siendo Ω_1 la frecuencia de corte del filtro pasa-baja original y Ω_2 la de deseado. Si aplicamos la transformación bilineal $\Omega_1 = \frac{2}{T} \operatorname{tg}(w_1/2)$, $\Omega_2 = \frac{2}{T} \operatorname{tg}(w_2/2)$. Por tanto

$$\frac{\frac{2}{T} \frac{\hat{z}-1}{\hat{z}+1}}{\frac{2}{T} \operatorname{tg}(w_1/2)} = \frac{\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}}{\frac{2}{T} \operatorname{tg}(w_2/2)} \quad (6.212)$$

que, simplificando e imponiendo $\alpha = \frac{\operatorname{tg}(w_1/2)}{\operatorname{tg}(w_2/2)}$, se reduce a

$$\hat{z} = \frac{z + \frac{1-\alpha}{1+\alpha}}{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}z + 1}. \quad (6.213)$$

Luego la transformación requerida es $z \rightarrow \frac{z-a}{1-az}$, donde $a = \frac{\operatorname{sen}((w_2-w_1)/2)}{\operatorname{sen}((w_2+w_1)/2)}$ siendo w_1 y w_2 la frecuencia de corte del filtro original y la nueva frecuencia de corte respectivamente.

b) *Transformación pasa-baja a pasa-alta.*

La transformación analógica que tenemos que aplicar en este caso es $\hat{s}/\Omega_1 = \Omega_2/s$. Si aplicamos la transformación bilineal con “pre-warping” $\Omega_1 = \frac{2}{T}tg(w_1/2)$, $\Omega_2 = \frac{2}{T}tg(w_2/2)$, obtenemos

$$\frac{\frac{2}{T}\frac{\hat{z}-1}{\hat{z}+1}}{\frac{2}{T}tg(w_1/2)} = \frac{\frac{2}{T}tg(w_2/2)}{\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}} \quad (6.214)$$

Operando como en el ejercicio anterior y definiendo ahora $a = tg(w_1/2)tg(w_2/2)$, llegamos a

$$\hat{z} = -\frac{z-a}{1-az}, \quad a = \frac{\cos((w_1+w_2)/2)}{\cos((w_1-w_2)/2)}. \quad (6.215)$$

c) *Transformación pasa-baja a pasa-banda.*

La transformación analógica que tenemos que aplicar en este caso es $\hat{s}/\Omega_c = \frac{s^2+\Omega_0^2}{sB}$ con $\Omega_0 = \sqrt{\Omega_u - \Omega_l}$ y $B = \Omega_u\Omega_l$. Si aplicamos la transformación bilineal con “pre-warping”, obtenemos

$$\frac{2}{T}\frac{\hat{z}-1}{\hat{z}+1} = \Omega_c \frac{(\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1})^2 + \Omega_0^2}{\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}B}, \quad (6.216)$$

donde $\Omega_c = \frac{2}{T}tg(w_c/2)$, $\Omega_0 = \frac{2}{T}\sqrt{tg(w_u/2)tg(w_l/2)}$, $B = \frac{2}{T}(tg(w_u/2)-tg(w_l/2))$. Sustituyendo valores, se puede llegar a la expresión

$$\frac{\hat{z}-1}{\hat{z}+1} = tg(w_c/2) \frac{(\frac{z-1}{z+1})^2 + tg(w_u/2)tg(w_l/2)}{\frac{z-1}{z+1}[tg(w_u/2)-tg(w_l/2)]}. \quad (6.217)$$

Si ahora definimos las constantes

$$a = tg(w_u/2), \quad b = tg(w_u/2)tg(w_l/2), \quad c = tg(w_u/2) - tg(w_l/2), \quad (6.218)$$

llegamos a la expresión final:

$$\begin{aligned} \hat{z} &= \frac{(z^2-1)c + a(1+b)z^2 + 2a(-1+b)z + a(1+b)}{(z^2-1)c - a(1+b)z^2 - 2a(-1+b)z - a(1+b)} \\ &= \frac{[a(1+b)+c]z^2 + [2a(-1+b)]z + a(1+b) - c}{[-a(1+b)+c]z^2 - [2a(-1+b)]z - [a(1+b)+c]}. \end{aligned} \quad (6.219)$$

Si dividimos ahora todos los coeficientes por el coeficiente de z^2 del numerador, se obtiene

$$\hat{z} = \frac{z^2 + \frac{2a(-1+b)}{a(1+b)+c}z + \frac{a(1+b)-c}{a(1+b)+c}}{1 + \frac{2a(-1+b)}{a(1+b)+c}z + \frac{a(1+b)-c}{a(1+b)+c}z^2}. \quad (6.220)$$

Si definimos

$$\beta_1 = \frac{-2k\alpha}{k+1}, \quad \beta_2 = \frac{k-1}{k+1}, \quad \alpha = \frac{1-b}{1+b}, \quad k = \frac{a}{c}(1+b), \quad (6.221)$$

podemos calcular

$$\alpha = \frac{1-b}{1+b} = \frac{1-tg(w_u/2)tg(w_l/2)}{1+tg(w_u/2)tg(w_l/2)} = \frac{\cos((w_u+w_l)/2)}{\cos((w_u-w_l)/2)}. \quad (6.222)$$

Desarrollando la expresión de k , se obtiene:

$$k = tg(w_c/2) \cotg((w_u - w_l)/2). \quad (6.223)$$

De este modo, podemos resumir las expresiones en:

$$z \rightarrow -\frac{z^2 + \beta_1 z + \beta_2}{1 + \beta_1 z + \beta_2 z^2} \quad (6.224)$$

donde $\beta_1 = \frac{-2k\alpha}{k+1}$ y $\beta_2 = \frac{k-1}{k+1}$, $\alpha = \frac{\cos((w_u+w_l)/2)}{\cos((w_u-w_l)/2)}$ y $k = tg(w_c/2) \cotg((w_u-w_l)/2)$.

d) *Transformación pasa-baja a elimina-banda.*

Este apartado es muy similar al anterior por lo que se dejará como ejercicio propuesto. La solución final es la siguiente:

$$z \rightarrow \frac{z^2 + \beta_1 z + \beta_2}{1 + \beta_1 z + \beta_2 z^2} \quad (6.225)$$

donde $\beta_2 = \frac{-2k\alpha}{k+1}$ y $\beta_1 = \frac{1-k}{1+k}$, $\alpha = \frac{\cos((w_u+w_l)/2)}{\cos((w_u-w_l)/2)}$ y $k = tg(w_c/2) tg((w_u - w_l)/2)$.

Estas transformaciones nos permiten partir de un prototipo analógico pasa-baja, obtener el filtro digital pasa-baja y, posteriormente, realizar la transformación en el dominio digital, o bien transformar un filtro digital arbitrario. ★

20. Un sistema digital tiene los siguientes polos y ceros: $p_1 = 0'8 + 0'2j$, $p_2 = 0'8 - 0'2j$, $p_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j$, $p_4 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j$, $p_5 = 0'7$, $p_6 = -0'7$, con un único cero $z_1 = -1$ de orden cinco. Se pide:
- Dibuje el diagrama de polos y ceros y obtenga la función de transferencia factorizando en etapas de segundo orden.
 - Obtenga una representación en cascada del sistema que minimice el número de retardos necesarios. ¿Es esta representación única?
 - Ayudándose del MATLAB, represente la respuesta en frecuencia del sistema.
 - ¿Es estable?

Resolución:

a) La función de transferencia resultante será

$$H(z) = \frac{(1 - z_1 z^{-1})^5}{(1 - p_1 z^{-1})(1 - p_2 z^{-1})(1 - p_3 z^{-1})(1 - p_4 z^{-1})(1 - p_5 z^{-1})(1 - p_6 z^{-1})} \quad (6.226)$$

El gráfico de polos y ceros se muestra en la Fig. 6.36. El sistema tiene polos sobre la circunferencia unidad luego se trata de un oscilador.

b) Sustituyendo valores y agrupando los polos complejos conjugados se obtiene

$$H(z) = \frac{(1 + z^{-1})^5}{(1 - 1'6z^{-1} + 0'68z^{-2})(1 - z^{-1} + z^{-2})(1 - 0'7z^{-1})(1 + 0'7z^{-1})} \quad (6.227)$$

Una posible factorización sería

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - 1'6z^{-1} + 0'68z^{-2}} \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - z^{-1} + z^{-2}} \frac{1 + z^{-1}}{1 - 0'49z^{-2}} \quad (6.228)$$

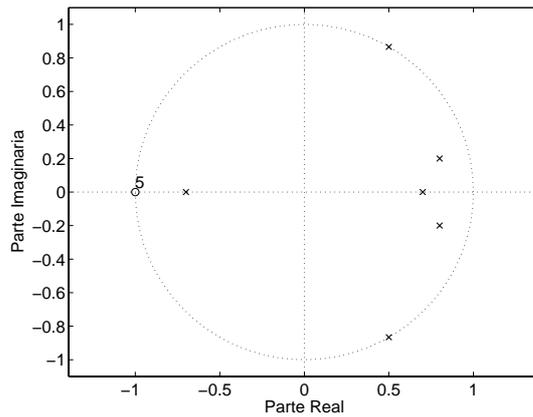


Figura 6.36: Diagrama de ceros y polos del sistema del ejercicio 20.

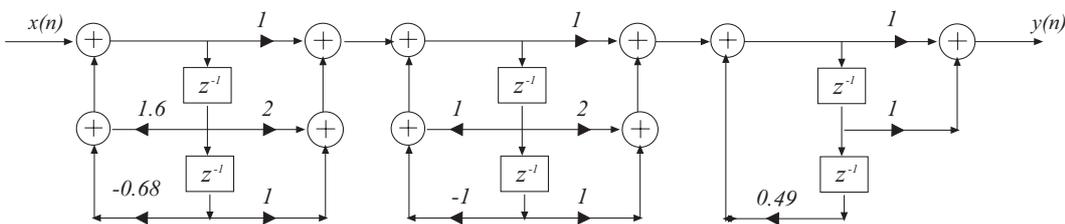


Figura 6.37: Representación del sistema del ejercicio 20 en la forma directa II.

Una representación con el mínimo número de retardos es la forma directa II, mostrada en la Fig. 6.37.

La descomposición no es única; otra posible sería, por ejemplo, considerar:

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - 1'6z^{-1} + 0'68z^{-2}} \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1} + z^{-2}} \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0'49z^{-2}} \quad (6.229)$$

- c) Para calcular la respuesta en frecuencia utilizamos el siguiente código de MATLAB:

```
% Respuesta en frecuencia: definimos los ceros (z) y los polos (p)
>> z = [-1,-1,-1,-1,-1]';
>> p = [0.8+0.2*j, 0.8-0.2*j,0.5+sqrt(3)*j/2,0.5-sqrt(3)*j/2,0.7,-0.7]';
>> k = 1;
>> [B,A] = zp2tf(z,p,k);
>> [h,w]=freqz(B,A);
>> plot(w/pi,abs(h));
```

con lo que se obtiene la respuesta en frecuencia (módulo) de la Fig. 6.38(a). Se observa claramente el efecto de tener polos sobre la circunferencia unidad sobre la respuesta en frecuencia.

- d) El sistema no es estable ya que los polos $p_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j$ y $p_4 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j$ se encuentran sobre la circunferencia unidad. La Fig. 6.38(b) representa ese carácter oscilatorio del sistema, donde hemos representado la respuesta impulsional del mismo

La frecuencia de la oscilación coincide con la fase del polo situado sobre $|z| = 1$ en nuestro caso $\pi/3$, que se corresponde con seis muestras por periodo. Esto se aprecia claramente en la respuesta impulsional.

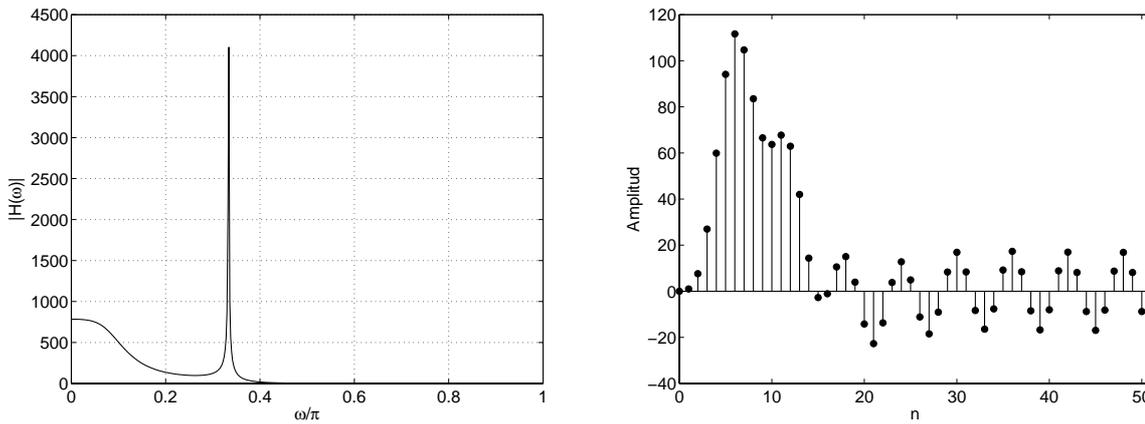


Figura 6.38: (a) Respuesta en frecuencia (módulo) y (b) respuesta impulsional del sistema.

Es importante destacar que en este caso no se puede determinar la salida del sistema ante una entrada de frecuencia conocida a partir de la respuesta en frecuencia ya que el sistema no es estable.

★ ★

21. Diseñe un filtro pasa-banda digital como una combinación en cascada de un filtro pasa-baja y un pasa-alta de Butterworth utilizando la transformación bilineal (ver Fig. 6.39) con $\Omega_1 = 0'15\Omega_m$, $\Omega_2 = 0'35\Omega_m$. La ganancia debe ser aproximadamente la unidad para $\Omega_m/4$. Se pide:
- Determinar la función de transferencia del filtro.
 - Calcule su magnitud y fase para $w = 0$, $w = w_1$, $w = \Omega_m/4$, $w = w_2$ y $w = \Omega_m/2$.
 - Dibuje su respuesta en magnitud y fase en el intervalo $0 \leq w \leq \Omega_m/2$.

Resolución:

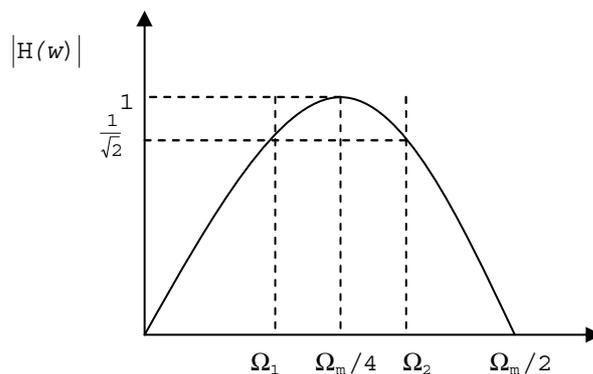


Figura 6.39: Diseño de un filtro pasa-banda como combinación de un pasa-baja y un pasa-alta de Butterworth. Ejercicio 21.

- Como vamos a utilizar la transformación bilineal, necesitamos conocer las frecuencias analógicas, que emplearemos para el diseño del filtro aplicando “pre-

warping". De esta forma, se tiene

$$\Omega_1 = \frac{2}{T} \operatorname{tg}\left(\frac{w}{2}\right) \quad (6.230)$$

siendo las frecuencias digitales:

$$w_1 = \frac{2\pi\Omega}{\Omega_m} = 2\pi 0'15, w_2 = 2\pi 0'35. \quad (6.231)$$

Al aplicar "*pre-warping*", se obtiene

$$\Omega'_{1p} = \frac{2}{T} \operatorname{tg}(\pi 0'15), \Omega'_{2p} = \frac{2}{T} \operatorname{tg}(\pi 0'35). \quad (6.232)$$

La función de transferencia de un filtro pasa-baja de Butterworth de orden uno es

$$H(s) \Big|_{PB} = \frac{1}{1+s} \quad (6.233)$$

y para el pasa-alta se tiene

$$H(s) \Big|_{PA} = \frac{s}{1+s}. \quad (6.234)$$

Si desnormalizamos frecuencias, el filtro en cascada será

$$H_{PBANDA}(s) = H(s) \Big|_{PBAJA} \cdot H(s) \Big|_{PALTA} = \frac{\Omega_1}{s + \Omega_1} \cdot \frac{s}{s + \Omega_2} \quad (6.235)$$

que, aplicando la Transformación bilineal, se tiene

$$H(z) = H(s) \Big|_{s=\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}} = \frac{\operatorname{tg}(0'15\pi)}{\frac{z-1}{z+1} + \operatorname{tg}(0'15\pi)} \cdot \frac{\frac{z-1}{z+1}}{\frac{z-1}{z+1} + \operatorname{tg}(0'35\pi)} \quad (6.236)$$

$$H(z) = \frac{0'5095(z^2 - 1)}{(z - 1 + (z + 1)0'5095)(z - 1 + 1'9626(z + 1))} = \dots = \frac{0'1139(z^2 - 1)}{z^2 - 0'3249z} \quad (6.237)$$

Para hacer el ajuste de ganancia imponemos que para $\Omega = \Omega_m/4$ rad/s se tenga una ganancia unidad. Esto significa que para $w = \pi/2$ el módulo sea 1. Por tanto,

$$H(z) \Big|_{z=e^{j\frac{\pi}{2}}} = 1 \implies \left| G \frac{0'1139(j^2 - 1)}{j^2 - 0'3249} \right| = 1 \implies G = 4'8534 \quad (6.238)$$

Por tanto,

$$H(z) = 0'5528 \frac{(z^2 - 1)}{z^2 - 0'1056} \quad (6.239)$$

b) Las frecuencias digitales a considerar son

$$w = 0, w = 0'15 \cdot 2\pi, w = 0'25 \cdot 2\pi, w = 0'35 \cdot 2\pi, w = \pi. \quad (6.240)$$

Como la respuesta en frecuencia la podemos obtener haciendo $H(z) \Big|_{z=e^{jw}}$,

$$H(w) = 0'5528 \frac{e^{2jw} - 1}{e^{2jw} - 0'1056} = 0'5 \frac{(e^{jw} - 1)(e^{jw} + 1)}{(e^{jw} - 0'3949)(e^{jw} + 0'3949)}. \quad (6.241)$$

Sustituyendo en esta expresión las frecuencias anteriores se obtiene

$$\begin{aligned} w = 0 & \quad H(0) = 0, \phi = \pi/2 \\ w = 0'30\pi & \quad H(w = 0'30\pi) = 0'8621 \cdot e^{j0'5314} \\ w = 0'50\pi & \quad H(w = 0'50\pi) = 1 \cdot e^{j0} \\ w = 0'70\pi & \quad H(w = 0'70\pi) = 0'8621 \cdot e^{-j0'5314} \\ w = \pi & \quad H(w = \pi) = 0, \phi = -\pi/2 \end{aligned} \quad (6.242)$$

La fase para $w = 0$ y $w = \pi$ se puede obtener a partir de la interpretación geométrica de la respuesta en fase a partir del diagrama de polos y ceros. En $w \simeq 0$ tenemos $\phi = \pi/2$ y para $w \simeq \pi$, $\phi = -\pi/2$.

c) A partir de los valores anteriores podemos dibujar aproximadamente la respuesta en frecuencia (Fig. 6.40)

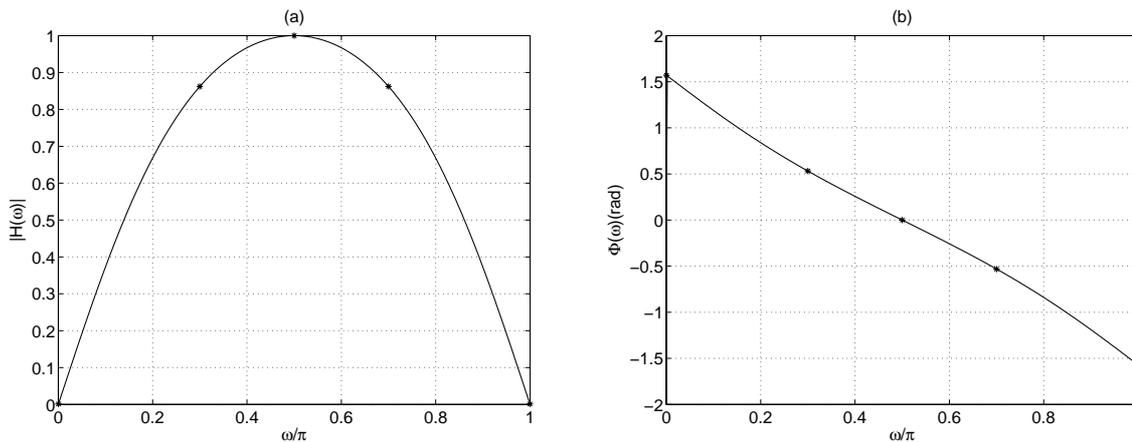


Figura 6.40: Respuesta en frecuencia aproximada del sistema del ejercicio 21 en (a) magnitud y (b) fase.



22. Determine la función de transferencia del diagrama de bloques de la Fig. 6.41 e indique de qué tipo de filtro se trata.

Resolución:

Este diagrama de bloques apareció en el problema 20 del Capítulo 1. Tomando las variables intermedias indicadas podemos plantear las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} y(n) &= q(n) + r(n) \\ q(n) &= p(n - 1) \\ p(n) &= x(n - 1) - r(n - 1) \\ r(n) &= \beta(x(n) + q(n)) + \alpha p(n) \end{aligned} \quad (6.243)$$

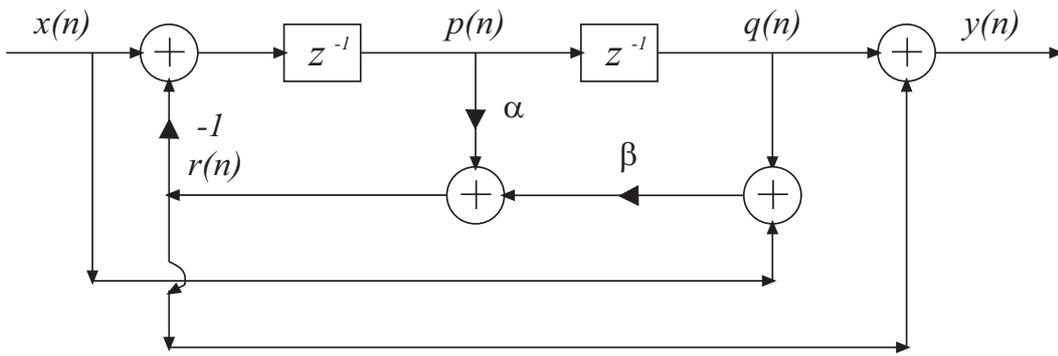


Figura 6.41: Diagrama de bloques del sistema del ejercicio 22.

Si tomamos Transformadas Z y aplicamos la propiedad del retardo temporal, se llega a:

$$\begin{aligned}
 Y(z) &= Q(z) + R(z) \\
 Q(z) &= P(z)z^{-1} \\
 P(z) &= X(z)z^{-1} - R(z)z^{-1} \\
 R(z) &= \beta(X(z) + Q(z)) + \alpha P(z)
 \end{aligned}
 \tag{6.244}$$

Agrupando términos obtenemos

$$H(z) = \frac{\beta + \alpha z^{-1} + z^{-2}}{1 + \alpha z^{-1} + \beta z^{-2}}
 \tag{6.245}$$

Esta función de transferencia en la que los coeficientes del numerador son los mismos que en el denominador sin más que invertir el orden, se corresponde con un filtro pasa-todo, independientemente de los valores de α y β .

Podemos ver fácilmente este hecho. Sea

$$H(z) = \frac{a^* + z^{-1}}{1 + az^{-1}} = \frac{a^*(1 + \frac{1}{a^*}z^{-1})}{1 + az^{-1}}
 \tag{6.246}$$

El cero está en $z = -1/a^*$ y el polo en $z = -a$. La respuesta en frecuencia será

$$H(z) = \frac{a^*(1 + \frac{1}{a^*}e^{-jw})}{1 - ae^{-jw}}.
 \tag{6.247}$$

Si calculamos el módulo

$$|H(w)| = \frac{a\sqrt{(1 - \frac{1}{a}\cos w)^2 + \frac{1}{a^2}\sin^2 w}}{\sqrt{(1 - a\cos w)^2 + a^2\sin^2 w}} = \dots = 1.
 \tag{6.248}$$

El sistema de segundo orden

$$H(z) = \frac{(a^* + z^{-1})(b^* + z^{-1})}{(1 + az^{-1})(1 + bz^{-1})} = \frac{a^*b^* + (a^* + b^*)z^{-1} + z^{-2}}{1 + (a + b)z^{-1} + abz^{-1}}.
 \tag{6.249}$$

Si a y b son reales entonces $a^* = a$ y $b^* = b$. Si a y b son complejos conjugados, entonces $b = a^*$ con lo que $a^*b^* = a^*a = |a|^2$, $a^* + b^* = a^* + a$, y $a + b = a + a^*$. Luego haciendo $\alpha = a + b$ y $\beta = ab$, tenemos la expresión (6.245). Hemos expresado $H(z)$ como producto de dos filtros pasa-todo luego el filtro resultante también lo será.

23. Un sistema se dice de fase mínima si el cambio neto de la fase en π y cero es nulo, es decir, se debe cumplir que $\Phi(\pi) - \Phi(0) = 0$. Determine si es posible tener un filtro FIR de fase lineal con fase mínima.

Resolución:

La linealidad de fase en un filtro FIR implica que haya simetría o antisimetría de los coeficientes de la respuesta impulsional, $h(k) = \pm h(M - k)$ siendo M el orden del filtro. Este se traduce en la presencia de parejas de ceros y sus recíprocos conjugados $\{z_k, \frac{1}{z_k^*}\}$ y un polo doble en el origen (ver Fig. 6.42)

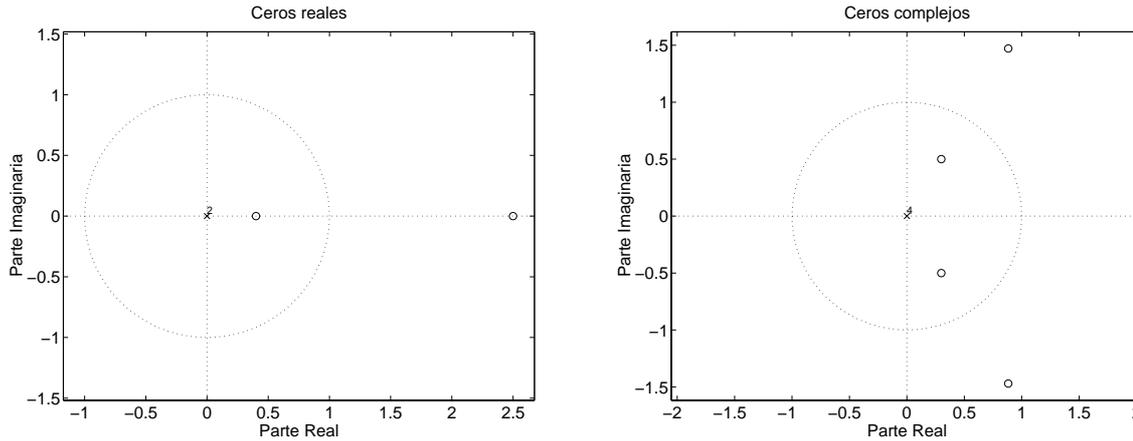


Figura 6.42: Diagramas de polos y ceros para filtros FIR de fase lineal.

Si consideramos un sistema de este tipo y evaluamos la contribución de la fase para cada par de ceros, vemos que

$$w = 0 : \Phi(0) = \Phi(0)_{1/z_k} + \Phi(0)_{z_k} - 2\Phi(0)_{p_k} = \pi + 0 - 2 \cdot 0 = \pi \quad (6.250)$$

$$w = \pi : \Phi(\pi) = \Phi(\pi)_{1/z_k} + \Phi(\pi)_{z_k} - 2\Phi(\pi)_{p_k} = \pi + \pi - 2 \cdot \pi = 0 \quad (6.251)$$

Si tenemos un cero fuera de $|z| = 1$ el recíproco estará dentro de la circunferencia de radio unidad y tendremos un cambio de fase neta de π . Si los ceros se encuentran sobre la circunferencia unidad tenemos dos posibilidades:

- *Un cero real:* $z_k = 1$ o $z_k = -1$, es decir $w = 0$ u $w = \pi$. De esta manera:

$$w = 0 : \Phi(0) = \Phi(0)_{z_k} + \Phi(0)_{p_k} = 0 - 0 = 0 \quad (6.252)$$

$$w = \pi : \Phi(\pi) = \pi - \pi = 0 \quad (6.253)$$

con lo que el cambio de fase neto es cero.

- *Dos ceros complejos:* Aparecerán por parejas de complejos conjugados.

$$w = 0 : \Phi(0) = \Phi(0)_{z_k} + \Phi(0)_{z_k^*} - 2\Phi(0)_{p_k} = -\alpha + \alpha - 0 = 0 \quad (6.254)$$

$$w = \pi : \Phi(\pi) = \Phi(\pi)_{z_k} + \Phi(\pi)_{z_k^*} - 2\Phi(\pi)_{p_k} = (2\pi - \beta) + \beta - 2\pi = 0 \quad (6.255)$$

Es decir, un filtro FIR de fase lineal tendrá fase mínima solamente si los ceros de la función de transferencia están sobre la circunferencia unidad.



24. Un filtro FIR tiene por función de transferencia $H(z) = 1 - \sqrt{2}z^{-1} - z^{-2}$. Dibuje el diagrama de polos y ceros y determine si se verifica que los ceros aparecen en parejas $\{z_k, \frac{1}{z_k^*}\}$. Se pide:
- De acuerdo con el resultado anterior, ¿se tiene un filtro de fase lineal?
 - Obtenga la expresión de la respuesta en frecuencia, módulo y fase para este filtro y determine el retardo de grupo. ¿Tiene el filtro fase lineal?
 - Este filtro cumple la condición de antisimetría $h(0) = -h(2)$. A la vista de los resultados anteriores, ¿cree que hay alguna contradicción?

Resolución:

El filtro tiene los ceros en las siguientes posiciones:

$$z_k = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2+4}}{2} = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2+4}}{2} \quad (6.256)$$

con lo que $1/z_1 = 1/1'9319 = 0'5176$ y $1/z_2 = 1/(-0'5176) = -1'9319$. Observamos que no se cumple la relación ya que se diferencian en el signo luego no es un filtro de fase lineal.

Obtengamos la respuesta en frecuencia:

$$H(w) = H(z) \Big|_{z=e^{jw}} = 1 - \sqrt{2}e^{-jw} - e^{-2jw} = e^{-jw}[2j\text{sen}(w) - \sqrt{2}] \quad (6.257)$$

de aquí obtenemos el módulo y fase:

$$\Phi(w) = -w - \text{arctg}\left(\frac{2\text{sen}w}{\sqrt{2}}\right), |H(w)| = \sqrt{2 + 4\text{sen}^2w}. \quad (6.258)$$

El retardo de grupo $r_g(w) = -\frac{d\Phi(w)}{dw}$ luego operando se obtiene

$$r_g(w) = 1 + \frac{1}{1 + 2\text{sen}^2w} \frac{2}{\sqrt{2}} \cos w. \quad (6.259)$$

Obtenemos que la fase no es lineal. El filtro cumple la condición de antisimetría $h(0) = -h(2)$, sin embargo se trata de un filtro con un número de términos impar. Las condiciones de simetría que aseguran linealidad de fase imponen que los filtros antisimétricos de orden impar deben tener la muestra central igual a 0 $h(M/2) = 0$. Esta condición no se cumple, por esta razón no hay linealidad de fase. Si se considera $h(1) = 0$ tenemos $H(z) = 1 - z^{-2}$ y $H(w) = e^{-jw}2j\text{sen}w$. Luego $\Phi(w) = -w + \frac{\pi}{2}$ (más un posible factor π si $\text{sen}w < 0$) en cualquier caso la fase es lineal y el retardo de grupo $r_g(w) = 1$ es constante.

25. Considere el filtro con coeficientes complejos de función de transferencia:

$$H(z) = (1 - 0'5jz^{-1})(1 - 2jz^{-1})$$

Se pide:

- Determine la función de transferencia analizando las condiciones de simetría. ¿Piensa que se puede tratar de un filtro de fase lineal?
- Dibuje el diagrama de polos y verifique si los ceros aparecen como pares recíprocos conjugados.
- Obtenga la respuesta en frecuencia en módulo y fase y calcule el retardo de grupo.
- Repita los puntos (b) y (c) considerando:

$$H(z) = 1 - 2'5jz^{-1} + z^{-2}$$

- ¿Puede derivar alguna regla para saber si un filtro con número de términos impar y coeficientes complejos va a tener fase lineal?

Resolución:

- Realizando el producto de ceros obtenemos

$$H(z) = 1 - 2'5jz^{-1} - z^{-2}. \quad (6.260)$$

Se trata de un filtro antisimétrico con número de términos impar, como el término central no es cero no debe tener fase lineal de acuerdo con lo comentado anteriormente.

- Los ceros son $z_1 = 0'5j$, $z_2 = 2j$. Se tiene un polo doble en el origen.

$$z_2 = (1/z_1)^* \implies (1/0'5)^* = 2j \quad (6.261)$$

Sí se cumple la condición.

-

$$H(w) = 1 - 2'5je^{-jw} - e^{-2jw} = je^{-jw}[2\sin w - 2'5] \quad (6.262)$$

con lo que el módulo y la fase serán

$$\Phi(w) = -w + \frac{\pi}{2}, |H(w)| = |2\sin w - 2'5|. \quad (6.263)$$

- Si el filtro es

$$H(z) = 1 - 2'5jz^{-1} + z^{-2}, \quad (6.264)$$

los ceros son $z_1 = 1'9319j$, $z_2 = -0'5176j$ y el polo doble se encuentra en $p_k = 0$. Los ceros no cumplen la condición de reciprocidad debido a un cambio de signo. Si calculamos la respuesta en frecuencia

$$H(w) = e^{-jw}[e^{jw} + e^{-jw} - 2'5j] = e^{-jw}[2\cos w - 2'5j] \quad (6.265)$$

con lo que

$$\Phi(w) = -w - \operatorname{arctg}\left(\frac{2'5}{2\cos w}\right), |H(w)| = \sqrt{2'5^2 + 4\cos^2 w}. \quad (6.266)$$

La fase es no lineal aunque se cumple que es un filtro simétrico con un número de términos impar (no hay restricciones sobre el término central).

e) Algunas conclusiones de este ejemplo serían:

- La linealidad de fase se verifica si existe reciprocidad entre los ceros, sean los coeficientes reales o complejos.
- Si el número de términos de un filtro es impar, además de cumplirse las condiciones de simetría $h(k) = \pm h(M - k)$, el término central debe cumplir que:
 - *Filtro simétrico*: El término central debe ser real o nulo.
 - *Filtro antisimétrico*: El término central debe ser imaginario puro o nulo. Es decir, la condición es $h(n) = h^*(M - n)$.

Este lo podemos ver fácilmente en las expresiones de $H(w)$ si el filtro antisimétrico tendremos términos $j\sin w$, si el término central es imaginario puro introducirá una fase $\pi/2$ si es antisimétrico tendremos términos coseno y el término central debe ser real.

26. Considere un filtro FIR real con todos sus ceros sobre la circunferencia unidad. Pruebe que este filtro se puede poner la forma

$$H(z) = h(0)(1 + z^{-1})^{M_1}(1 - z^{-1})^{M_2} \prod_{k=1}^{M_3} (1 - 2\cos\theta_k z^{-1} + z^{-2})$$

donde M_1 es el número de ceros en $z = -1$, M_2 es el número de ceros en $z = 1$ y M_3 es el número de pares de ceros complejos conjugados.

Determine cuál es el orden de este filtro y justifique que si un filtro FIR tiene sus ceros sobre la circunferencia unidad es de fase lineal.

Resolución:

Si un filtro FIR tiene sus ceros sobre la circunferencia unidad, existen varias posibilidades para su ubicación:

- Ceros reales: $z_k = +1$, $z_k = -1$
- Ceros complejos: $z_k = e^{j\theta_k}$, $z_k^* = e^{-j\theta_k}$, aparecerán como pares complejos conjugados ya que el filtro es real.

Sea

- M_1 : el número de ceros $z = -1$.
- M_2 : el número de ceros $z = +1$.
- M_3 : el número de pares de ceros complejos.

Así pues, el orden de este filtro es $M = M_1 + M_2 + M_3$. La función de transferencia será el producto de todos los ceros multiplicados por el coeficiente $h(0)$:

$$H(z) = h(0)(1 + z^{-1})^{M_1}(1 - z^{-1})^{M_2} \prod_{k=1}^{M_3} (1 + e^{-j\theta_k} z^{-1})(1 + e^{j\theta_k} z^{-1}) \quad (6.267)$$

Si agrupamos los ceros complejos obtenemos la expresión indicada:

$$H(z) = h(0)(1 + z^{-1})^{M_1}(1 - z^{-1})^{M_2} \prod_{k=1}^{M_3} (1 - 2\cos\theta_k z^{-1} + z^{-2}) \quad (6.268)$$

Se observa que un filtro FIR con ceros sobre la circunferencia unidad se puede poner como una interconexión en cascada de tres sistemas. Ya que la respuesta en fase total será la suma de cada una de ellas, nos basta verificar que cada etapa tiene fase lineal.

- $(1 + z^{-1})^{M_1}$: cada término $(1 + z^{-1})$ es un filtro con número de términos par simétrico (TIPO II), por tanto es de fase lineal.
- $(1 - z^{-1})^{M_2}$: es un filtro con número de términos par antisimétrico (TIPO IV), por tanto es de fase lineal.
- $(1 - 2\cos\theta_k z^{-1} + z^{-2})$: es un filtro con número de términos impar simétrico (TIPO I), por tanto tiene fase lineal.

El análisis realizado es completamente general por lo que podemos concluir que, cualquier filtro FIR con ceros sobre la circunferencia unidad, es de fase lineal y además por el resultado del problema 23 el filtro será de fase mínima. ★

27. Los cuatro tipos de filtros FIR de fase lineal se diferencian en la presencia de ceros en $z = \pm 1$.
- a) Determinar una condición que deben verificar los coeficientes de la respuesta impulsional $h(n)$ de un filtro para que el filtro tenga ceros en $z = 1$ ó $z = -1$.
 - b) A partir de la regla obtenida en (a) determine si los cuatro tipos de filtros FIR tendrán ceros en estas posiciones.
 - c) Las cuatro primeras muestras de un filtro FIR de fase lineal son $h(0) = 2'1$, $h(1) = 0'57$, $h(2) = -1$, $h(3) = \sqrt{2}$. Diseñe filtros FIR de fase lineal de mínimo orden cuyos primeras muestras sean las que se indican y dibuje su respuesta en frecuencia empleando MATLAB.

Resolución:

- a) Dado que la función de transferencia de un filtro FIR es

$$H(z) = \sum_{k=0}^M h(k)z^{-k} \quad (6.269)$$

podemos considerar $H(z)$ un polinomio de potencias de z^{-1} , la presencia de ceros en $z = \pm 1$ deben anular dicho polinomio luego:

- Ceros en $z = 1$: $\sum_{k=0}^M h(k) = 0$
- Ceros en $z = -1$: $\sum_{k=0}^M (-1)^k h(k) = 0$

La segunda ecuación la podemos interpretar como la suma de términos pares menos los impares.

- b) Veamos qué ocurre con cada tipo.

- *TIPO I: número de términos impar simétrico.*

$$\sum_{k=0}^M h(k) \neq 0 \quad (6.270)$$

Tenemos una suma de términos del mismo signo por lo que la suma no se anula y no hay ceros en $z = 1$.

$$\sum_{k=0}^M (-1)^k h(k) \neq 0 \quad (6.271)$$

ya que el término central siempre permanece y, en general, no es constante. Por ello no hay cero en $z = -1$.

- *TIPO II: número de términos par simétrico.*

$$\sum_{k=0}^M h(k) \neq 0 \quad (6.272)$$

Suma de términos del mismo signo luego no se anula por lo que no hay ceros en $z = 1$.

$$\sum_{k=0}^M (-1)^k h(k) = 0 \quad (6.273)$$

cancelación de términos por parejas. Por ello hay cero en $z = -1$.

- *TIPO III: número de términos impar antisimétrico.*

$$\sum_{k=0}^M h(k) = 0 \quad (6.274)$$

ya que el término central es cero y el resto se anula por pares por lo que hay ceros en $z = 1$.

$$\sum_{k=0}^M (-1)^k h(k) = 0 \quad (6.275)$$

ya que el término central siempre es cero (término $M/2$), los términos impares cambian signo como $h(k) = -h(M - k)$ no tiene ninguna efecto y las sumas se van anulando por pares de términos. Por ello hay ceros en $z = -1$.

- *TIPO IV: número de términos par antisimétrico.*

$$\sum_{k=0}^M h(k) = 0 \quad (6.276)$$

los términos se anulan por parejas por lo que hay ceros en $z = +1$.

$$\sum_{k=0}^M (-1)^k h(k) \neq 0 \quad (6.277)$$

el orden del polinomio es impar luego M es impar, es decir $(-1)^0 h(0) = h(0)$ y $(-1)^M h(M) = (-1)h(M) = -(-h(0)) = h(0)$ luego la suma no se anula y por tanto no hay cero en $z = -1$.

La posición de los ceros en el origen determina qué tipo de filtros se pueden diseñar con cada uno de los cuatro prototipos.

- c) Sabemos que existen cuatro tipos de filtros FIR de fase lineal diferentes según la simetría y el número de términos. Así pues, unos posibles filtros FIR serían:

- *TIPO I: términos impar simétrico.*

$$h(0) = 2'1, h(1) = 0'57, h(2) = -1, h(3) = \sqrt{2}, \quad (6.278)$$

$$h(4) \text{ arbitraria}, h(5) = \sqrt{2}, h(6) = -1, h(7) = 0'57, h(8) = 2'1. \quad (6.279)$$

- *TIPO II: términos par simétrico.*

$$h(0) = 2'1, h(1) = 0'57, h(2) = -1, h(3) = \sqrt{2}, \quad (6.280)$$

$$h(4) = \sqrt{2}, h(5) = -1, h(6) = 0'57, h(7) = 2'1 \quad (6.281)$$

- *TIPO III: términos impar antisimétrico.*

$$h(0) = 2'1, h(1) = 0'57, h(2) = -1, h(3) = \sqrt{2}, \quad (6.282)$$

$$h(4) = 0, h(5) = -\sqrt{2}, h(6) = 1, h(7) = -0'57, h(8) = -2'1 \quad (6.283)$$

- *TIPO IV: términos par antisimétrico.*

$$h(0) = 2'1, h(1) = 0'57, h(2) = -1, h(3) = \sqrt{2}, \quad (6.284)$$

$$h(4) = -\sqrt{2}, h(5) = 1, h(6) = -0'57, h(7) = -2'1 \quad (6.285)$$

Es interesante observar los comportamientos en $w = 0$ y $w = \pi$ para estos cuatro filtros. En la Fig. 6.43 se muestran las respuestas en frecuencias (módulo) de cada uno de los tipos de filtros analizados. Compárese con el resultado del ejercicio 27b).



28. Considere un filtro con una respuesta en módulo como la mostrada en la Fig. 6.44. Justifique que si se diseña un filtro FIR de tipo I con estas características, el número de operaciones producto necesarias para su implementación directa es $\frac{N}{4} + 1$, siendo N el orden del filtro.

Resolución:

Las frecuencias que definen la respuesta en frecuencia son

$$w_p = \frac{\pi}{4}, w_s = \frac{3\pi}{4}, w_c = \frac{1}{2}(w_p + w_s) = \frac{\pi}{2}. \quad (6.286)$$

Un filtro pasa-baja ideal tiene por respuesta impulsional:

$$h(n) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(w_c n)}{n\pi}, & n \neq 0 \\ \frac{w_c}{\pi}, & n = 0 \end{cases} \quad (6.287)$$

Pero si $w_c = \frac{\pi}{2}$, se tiene

$$h(n) = \begin{cases} \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}n\right), & n \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & n = 0 \end{cases} \quad (6.288)$$

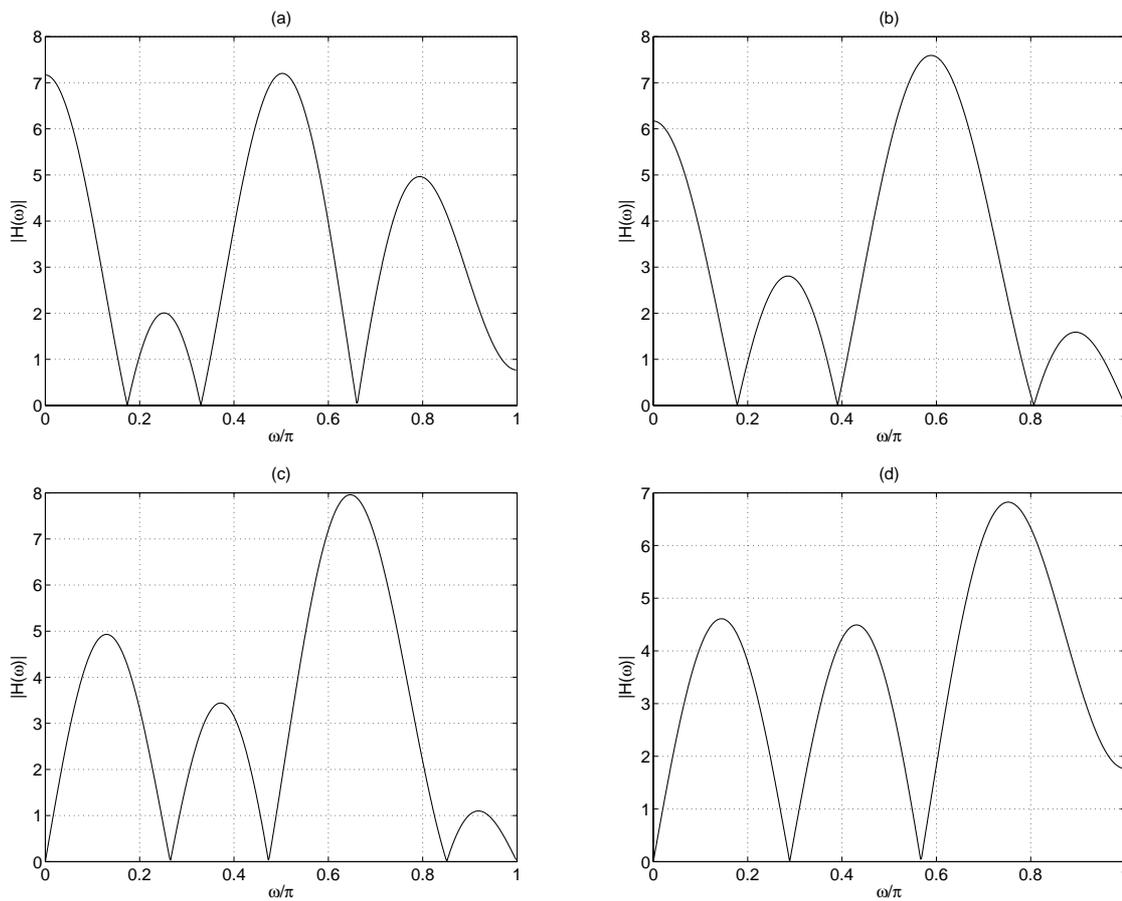


Figura 6.43: Respuestas en frecuencia (módulo) del ejercicio 27c para los filtros de tipo (a) I, (b) II, (c) III y (d) IV.

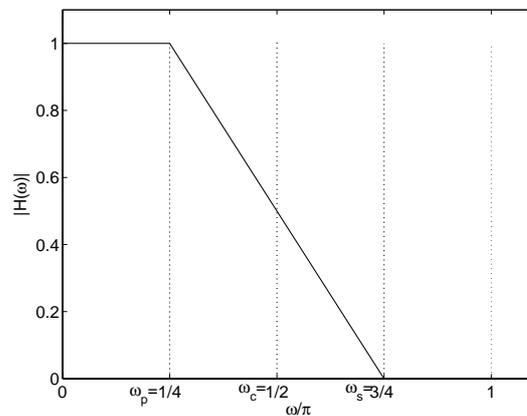


Figura 6.44: Módulo de la respuesta en frecuencia del filtro del ejercicio 28.

En el caso de que $\text{sen}(\pi n/2) = 0$, para $\pi n/2 = k\pi$, con $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ es decir para n par, exceptuando en $n = 0$ cuyo valor es $1/2$. Este filtro tiene $N/2$ coeficientes nulos.

Al tratarse de un filtro FIR de Tipo I, tendremos simetría de coeficientes, por lo que en total el número de productos será la mitad de los coeficientes no nulos ($\frac{N}{2} \cdot \frac{1}{2}$) más un producto correspondiente al término central; es decir, $N_{\text{producto}} = \frac{N}{4} + 1$.

29. Justifique que los diagramas de bloques mostrados en la Fig. 6.45 son equivalentes.

Resolución:

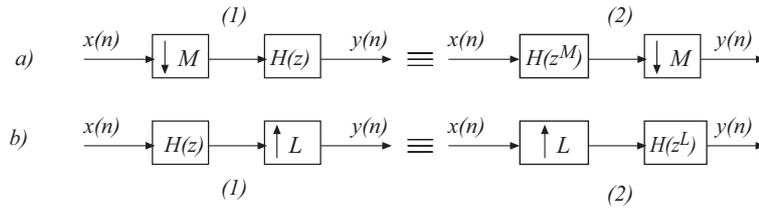


Figura 6.45: Propiedades de la interconexión de interpoladores, diezmadores y filtros en cascada.

Para comprobar la equivalencia de los sistemas, verificaremos que las funciones de transferencia coinciden. Sabemos que las relaciones entre la entrada y salida para un diezmador y un interpolador vienen descritas por el esquema mostrado en la Fig. 6.46.

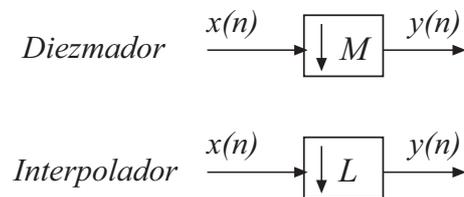


Figura 6.46: Diagramas de los bloques de un interpolador por un factor L y un diezmador por un factor M .

Si denotamos por $w(n)$ la variable intermedia, tenemos:

■ *Bloque 1a.*

$$W(z) = \sum_{k=0}^{M-1} X \left(z^{1/M} W_M^k \right) \quad (6.289)$$

$$Y(z) = H(z)W(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X \left(z^{1/M} W_M^k \right) H(z) \quad (6.290)$$

■ *Bloque 2a.*

$$W(z) = H(z^M)X(z) \quad (6.291)$$

$$Y(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X \left(z^{1/M} W_M^k \right) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H \left(z^{M \cdot 1/M} W_M^{k \cdot M} \right) X \left(z^{1/M} W_M^k \right) \quad (6.292)$$

como $W_k^{kM} = e^{-j \frac{2\pi kM}{M}} = 1$, tenemos

$$Y(z) = H(z)W(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X \left(z^{1/M} W_M^k \right) H(z), \quad (6.293)$$

que coincide con la obtenida para el diagrama 1a.

Para probar la relación b, procedemos análogamente.

- *Bloque 1b.*

$$W(z) = H(z)X(z) \quad (6.294)$$

$$Y(z) = W(z^L) = H(z^L)X(z^L) \quad (6.295)$$

- *Bloque 2b.*

$$W(z) = X(z^L) \quad (6.296)$$

$$Y(z) = W(z)H(z^L) = X(z^L)H(z^L), \quad (6.297)$$

donde se observa que las expresiones coinciden.

Estas propiedades se conocen en la literatura como “*noble identities*”.

30. Justifique que la conexión en cascada de dos filtros FIR de rizado constante en la banda pasante δ_{p1} , δ_{p2} , y rizado en banda atenuada δ_{s1} , δ_{s2} tiene un rizado total en banda pasante igual a la suma de los rizados y atenuación, menor o igual al de mayor atenuación.

Resolución:

La respuesta en frecuencia de dos filtros colocados en cascada es el producto de sus respuestas individuales. Si consideramos la respuesta en módulo, al estar en cascada tendremos el producto de las respuestas en frecuencia y para los rizados en banda pasante tendremos:

$$(1 + \delta_{p1})(1 + \delta_{p2}) = 1 + (\delta_{p1} + \delta_{p2}) + \delta_{p1}\delta_{p2}, \quad (6.298)$$

$$(1 - \delta_{p1})(1 - \delta_{p2}) = 1 - (\delta_{p1} + \delta_{p2}) + \delta_{p1}\delta_{p2}. \quad (6.299)$$

Si despreciamos los términos producto $\delta_{p1}\delta_{p2}$, obtenemos que en la banda pasante el rizado es la suma de los rizados de cada uno de los filtros.

En la banda atenuada, los rizados son δ_{p1} y δ_{p2} , luego el rizado resultante es $\delta_{p3} = \delta_{p1}\delta_{p2}$. Como $\delta_{p1} < 1$ y $\delta_{p2} < 2$, se cumple que

$$\delta_{p3} \leq \delta_{p1}, \delta_{p3} \leq \delta_{p2}. \quad (6.300)$$

Es decir, al menos vamos a tener la atenuación del filtro que menos atenuación presente.

Este resultado debe tenerse en cuenta cuando se diseñan filtros en sistemas de procesado de tasa múltiple, cuando los procesos de diezmado e interpolación se llevan a cabo en varias fases, para asegurar que el filtro antialiasing o anti-imágenes cumpla las especificaciones. En los siguientes problemas veremos algunos ejemplos.

31. Una señal de audio de un disco DAT muestreado a 48kHz. desea convertirse en otra muestreada a 6kHz. para ser enviada a través de una línea comunicaciones. Proponga un sistema para su realización y estudie su carga computacional.

Resolución:

El sistema solicitado de modificar la frecuencia de muestreo por un factor

$$\frac{F'_m}{F_m} = \frac{6kHz}{48kHz} = \frac{1}{8} = \frac{L}{M}. \quad (6.301)$$

Es decir, hemos de realizar una diezmado por un factor $M = 8$.

■ **CASO I: DIEZMADO EN UNA ETAPA.**

El sistema se muestra en la Fig. 6.47. $H(z)$ es el filtro “*antialiasing*” que debe eliminar las frecuencias por encima de los 3kHz. Al tratarse de señales de audio, vamos a utilizar un filtro FIR de fase lineal con las siguientes especificaciones:

- Rizado en la banda pasante: $\delta_1 = 0,002$.
- Rizado en banda atenuada: $\delta_2 = 0,001$.
- Frecuencia de corte: $F_c = 2700Hz$.
- Frecuencia de atenuación: $F_s = 3000Hz$.
- Frecuencia de muestreo: $f_m = 48kHz$.

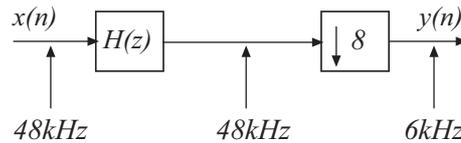


Figura 6.47: Esquema del diezmado en una sola etapa (factor de diezmado $M = 8$).

Hemos fijado la frecuencia de corte a $0,9F_m$ permitiendo una banda de transición de $300Hz$. con estos parámetros podemos estimar el orden del filtro con la expresión de Kaiser:

$$N = \frac{-20 \log_{10} \sqrt{\delta_1 \delta_2} - 13}{14,6 \Delta f} + 1 \quad (6.302)$$

donde $\Delta f = \frac{F_s - F_c}{F_m}$. Sustituyendo, obtenemos $N = 484$.

El número de productos de esta realización es $\frac{(N+1)F_m}{M} = \frac{485 \cdot 48000}{8} = 2910000$ productos/s. donde ya se ha tenido en cuenta que solo una de cada M muestras es necesaria a la salida del filtro FIR, de ahí la reducción en un factor M .

■ **CASO II: DIEZMADO EN DOS ETAPAS.**

Consideremos ahora que, ya que $M = 8$, se puede factorizar. El sistema se implementa en dos etapas; un diezmado por 4 y otro por 2. Consideremos

$$H(z) = G(z^4)F(z), \quad (6.303)$$

donde $G(z^4)$ se obtiene al interpolar un filtro de función de transferencia $G(z)$ por un factor 4 luego su respuesta en frecuencia será la de $G(z)$ comprimida por este factor y repetida cada $F_m/4$. Como $G(z^4)$ debe tener como especificaciones:

- Rizado en la banda pasante: $\delta_1 = 0'001$.
- Rizado en banda atenuada: $\delta_2 = 0'001$.
- Frecuencia de corte: $F_c = 2700Hz$.
- Frecuencia de atenuación: $F_s = 3000Hz$.
- Frecuencia de muestreo: $F_m = 12000Hz$.

donde hemos reducido el rizado en banda pasante a la mitad de acuerdo con los resultados del ejercicio 30. Las especificaciones de $G(z)$ deberán ser:

- Rizado en la banda pasante: $\delta_1 = 0'001$.
- Rizado en banda atenuada: $\delta_2 = 0'001$.

- Frecuencia de corte: $F_c = 2700 \cdot 4Hz$.
- Frecuencia de atenuación: $F_s = 3000 \cdot 4Hz$.
- Frecuencia de muestreo: $F_m = 12000 \cdot 4Hz$.

con lo que obtenemos $N_G = 130$.

El sistema $G(z^4)$ tendrá un espectro repetido cada $48000/4 = 12000Hz$ como se muestra en la Fig. 6.48

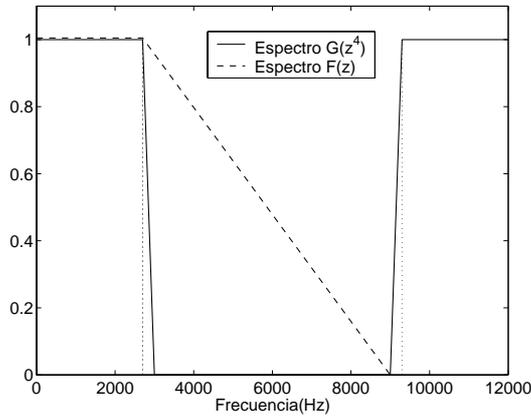


Figura 6.48: Respuesta en frecuencia del filtro "antialiasing" puesto como cascada de dos filtros $G(z^4)F(z)$.

Diseñaremos $F(z)$ para eliminar las imágenes del espectro con las siguientes especificaciones:

- Rizado en la banda pasante: $\delta_1 = 0'001$.
- Rizado en banda atenuada: $\delta_2 = 0'001$.
- Frecuencia de corte: $F_c = 2700Hz$.
- Frecuencia de atenuación: $F_s = 9000Hz$.
- Frecuencia de muestreo: $F_m = 48000Hz$.

con lo que $N_F = 26$.

La estructura resultante se muestra en la Fig. 6.49(a) que aplicando las propiedades de la conexión en cascada se transforma en la mostrada en la Fig. 6.49(b).

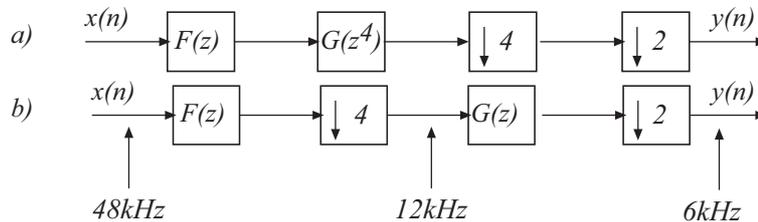


Figura 6.49: (a) Estructura del bloque de diezmo en dos etapas. (b) Sistema resultante tras la aplicación de las propiedades de la interconexión de filtros interpoladores y decimadores en cascada.

La carga computacional será:

- $F(z) = 27 \frac{48000}{4} = 324000$ productos/s.
- $G(z) = 131 \frac{12000}{2} = 786000$ productos/s.

- Productos totales: 1110000 productos/s.

con lo que obtenemos una mejora respecto a la implementación en una etapa de un factor 2'62.

■ *CASO III: DIEZMADO EN TRES ETAPAS.*

Podemos repetir el proceso sobre el filtro $F(z)$ y el diezmador. Este realizará el diezmado en tres etapas. Sea $F(z) \equiv P(z)Q(z^2)$. De este modo, las especificaciones de $Q(z^2)$ son

- Rizado en la banda pasante: $\delta_1 = 0'0005$.
- Rizado en banda atenuada: $\delta_2 = 0'001$.
- Frecuencia de corte: $F_c = 2700Hz$.
- Frecuencia de atenuación: $F_s = 9000Hz$.
- Frecuencia de muestreo: $F_m = 24000Hz$.

luego las de $Q(z)$ serán

- Rizado en la banda pasante: $\delta_1 = 0'0005$.
- Rizado en banda atenuada: $\delta_2 = 0'001$.
- Frecuencia de corte: $F_c = 2700 \cdot 2Hz$.
- Frecuencia de atenuación: $F_s = 9000 \cdot 2Hz$.
- Frecuencia de muestreo: $F_m = 2 \cdot 24000Hz$.

con lo que obtenemos $N_Q = 15$.

Diseñamos $P(z)$ para eliminar las imágenes del espectro repetidas cada $24kHz$.

Las especificaciones serán

- Rizado en la banda pasante: $\delta_1 = 0'0005$.
- Rizado en banda atenuada $\delta_2 = 0'001$.
- Frecuencia de corte: $F_c = 2700Hz$.
- Frecuencia de atenuación: $F_s = 15000Hz$.
- Frecuencia de muestreo: $F_m = 48000Hz$.

con lo que obtenemos $N_P = 15$.

El sistema resultante se muestra en la Fig. 6.50. La carga computacional asociada en este caso viene dada por

$$16 \frac{48000}{2} + 16 \frac{24000}{2} + 131 \frac{12000}{2} = 1362000 \text{ productos/s.} \quad (6.304)$$

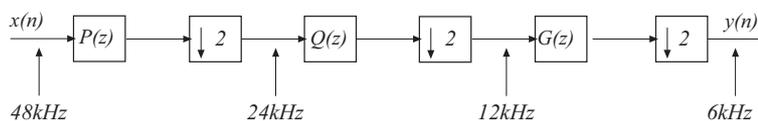


Figura 6.50: Esquema de diezmado en tres etapas.

En este caso la descomposición en tres etapas supone una mejora de un factor 2'14, es decir, no mejora respecto la descomposición en dos etapas. Existen estructuras de implementación en las que se pueden obtener mejoras adicionales en el número de operaciones denominadas *descomposiciones polifásicas*.



32. Se desea implementar un filtro digital que permite extraer las oscilaciones de la línea base de un registro ECG muestreado a 1kHz. Estas oscilaciones son debidas a la respiración y tienen un ancho de banda que se extienden desde continua DC hasta los 0'25 Hz. Considere que la señal de ECG útil se extiende desde los 0'5 Hz. hasta los 100 Hz. ¿Qué procedimiento usarías para eliminar dichas oscilaciones de la señal original al menos en un factor de 40 dB?

Resolución:

Una posible estructura es la mostrada en el diagrama de bloques de la Fig. 6.51. El bloque de retardo nos permitirá que la resta de señales se realice en fase.

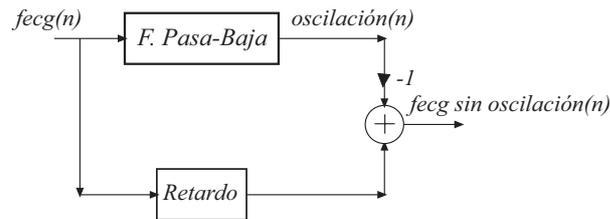


Figura 6.51: Estructura del filtro para eliminar las oscilaciones de baja frecuencia en un electrocardiograma.

El principal problema es el diseño del filtro pasa-baja. Es importante que el filtro no distorsione la fase de la señal por lo que utilizaremos un filtro FIR. Las especificaciones de diseño serán:

$$\delta_2 = 0'01(40dB.), F_c = 0'25Hz., F_s = 0'50Hz., F_m = 1000Hz. \quad (6.305)$$

No se especifica el rizado en la banda pasante por lo que podemos tomar $\delta_1 = 0'02$. Podemos estimar el orden del filtro con la expresión de Kaiser:

$$N = \frac{-20\log_{10}\sqrt{\delta_1\delta_2} - 13}{14,6\Delta f} + 1 \quad (6.306)$$

donde $\Delta f = \frac{f_s - f_c}{F_m}$. Sustituyendo, obtenemos $N = 6574$. La carga computacional de este filtro es muy elevada¹. Podemos utilizar las técnicas de diezmado e interpolación para reducir la carga computacional. Como la señal de interés está en el intervalo $0 < F < 0'25Hz$, podemos diezmar por un factor $L = 200$ con lo que la nueva frecuencia será $F_{m2} = \frac{1000}{200} = 5Hz$.

El filtro antialiasing deberá eliminar frecuencias por encima de $F_s = F_m/(2L) = 2'5Hz$. Por tanto:

$$F_p = 0'25, F_s = 2'5Hz., \delta_1 = 0'02/2, \delta_2 = 0'01Hz., F_m = 1000Hz., \quad (6.307)$$

con lo que obtenemos un orden $N = 823$. Por tanto, hemos reducido el rizado en la banda pasante a la mitad ya que tenemos dos filtros en cascada.

El sistema se queda como en la Fig. 6.52. El segundo filtro es el que nos permitirá extraer las oscilaciones de la línea base. Las especificaciones serán:

$$F_p = 0'25, F_s = 0'5Hz., \delta_1 = 0'02/2, \delta_2 = 0'01Hz., F_m = 5Hz., \quad (6.308)$$

¹El cálculo sería así: $6575 \cdot 1000 = 6575000$ productos/s.

con lo que obtenemos un orden $N = 38$. La carga computacional será $\frac{824 \cdot 1000}{200} + 39 \cdot 5 = 4315$ productos/s.

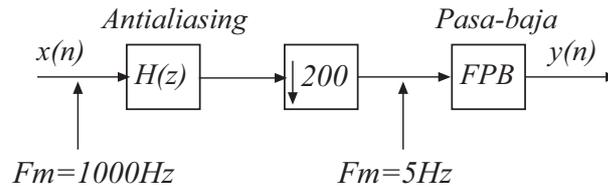


Figura 6.52: Diseño del filtro pasa-baja aplicando un diezmado previo a la señal.

La diferencia con el caso anterior es que la señal resultante es la muestreada a 5Hz. luego no podemos restarla directamente de la original. Hemos de interpolar por el mismo factor. Al colocar una nueva etapa de filtrado, el rizado total aumentará por lo que deberíamos rediseñar los tres filtros con un rizado $\delta_1/3$.

Si repetimos los cálculos para los filtros anteriores con este rizado, obtenemos $N_1 = 876$ y $N_2 = 41$. El filtro para eliminar imágenes tendrá los siguientes parámetros:

$$F_p = 0'25, F_s = 4'5Hz., \delta_1 = 0'02/3, \delta_2 = 0'01Hz., F_m = 1000Hz., \quad (6.309)$$

con lo que obtenemos un orden $N = 465$. La carga computacional será $\frac{878 \cdot 1000}{200} + 42 \cdot 5 + 466 \cdot 1000 = 470600$ productos/s, lo cual supone una reducción de la carga computacional de un factor $6575000/470600 \simeq 14$.

Consideremos el mismo procedimiento pero realizando el diezmado e interpolación en dos etapas ($200 = 20 \cdot 10$), tal y como se muestra en el diagrama de bloques de la Fig. 6.53. Como tenemos cinco filtros, $\delta_p = 0,02/5$. En la Tabla 6.7 se muestran las características de cada uno de los bloques de este esquema, así como los órdenes y retardos introducidos por cada filtro.

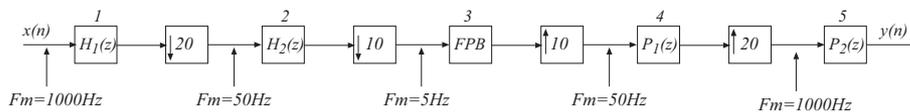


Figura 6.53: Diagrama completo para el diseño del filtro pasa-baja realizando los procesos de diezmado e interpolación en dos etapas.

La carga computacional del sistema global será:

$$\text{Productos} : \frac{88 \cdot 1000}{20} + \frac{50 \cdot 50}{10} + 45 \cdot 5 + 27 \cdot 50 + 45 \cdot 1000 = 51225 \text{ productos} \quad (6.310)$$

con lo que obtenemos una reducción de la carga computacional en un factor aproximado de $6575000/51225 \simeq 129$. El retardo total introducido por los filtros es:

$$\text{Retardo(sec.)} : (88/2)/1000 + (49/2)/50 + 22/5 + (26/2)/50 + (45/2)/1000 = 5'21656 \quad (6.311)$$

Este método de diseño de filtros FIR se conoce como *filtros FIR interpolados*. Aunque el número de coeficientes neto del filtro es elevado, sólo un número reducido de ellos es distinto de cero.

Tabla 6.7: tabla del fd43

Bloque 1	Bloque 2	Bloque 3	Bloque 4 [†]	Bloque 5 [†]
$F_p = 0'25$	$F_p = 0'25$	$F_p = 0'25$	$F_p = 0'25$	$F_p = 0'25$
$F_s = \frac{1000}{2 \cdot 20}$	$F_s = \frac{50}{2 \cdot 10}$	$F_s = 0'5$	$F_s = 5'5 - 0'5$	$F_s = 50 - 0'5$
$\delta_1 = 0'02/5$	$\delta_1 = 0'02/5$	$\delta_1 = 0'02/5$	$\delta_1 = 0'02/5$	$\delta_1 = 0'02/5$
$\delta_2 = 0'01$	$\delta_2 = 0'01$	$\delta_2 = 0'01$	$\delta_2 = 0'01$	$\delta_2 = 0'01$
$F_m = 1000$	$F_m = 50$	$F_m = 5$	$F_m = 50$	$F_m = 1000$
$N = 87$	$N = 49$	$N = (44/2)/5$	$N = 26$	$N = 45$
$Ret = (87/2)/1000$ s.	$Ret = (49/2)/50$ s.	$Ret = (43/2)/50$ s.	$Ret = (26/2)/50$ s.	$Ret = (45/2)/1000$ s.

[†] Los extendemos hasta las repeticiones del espectro siguiente en lugar de fijar la frecuencia de corte a $F_m/2L$ siendo el factor de interpolación.

6.3. Problemas propuestos

- Determine si es posible tener un filtro pasa-todo de fase mínima distinto del trivial $H(z) = 1$.
- Probar que cualquier filtro IIR puede expresarse como producto de un filtro pasa-todo por un filtro de fase mínima.
- Repita el ejercicio 28 para un filtro con respuesta en frecuencia mostrada en la Fig. 6.54. Verifique que el número de productos es $\frac{3}{8}N + 1$.

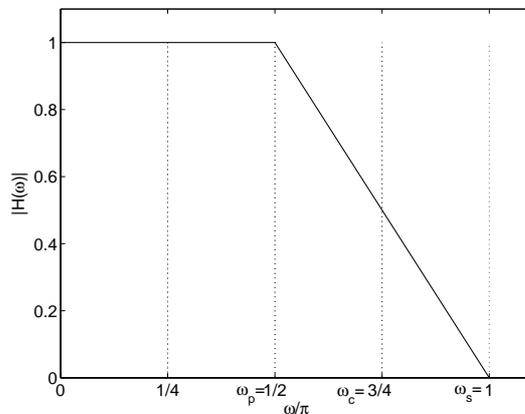


Figura 6.54: Respuesta en frecuencia (módulo) del filtro del ejercicio 6.54.

4. Se quiere diseñar un filtro digital que presenta las siguientes características:

- Frecuencia de muestreo del sistema es de 1 kHz.
- Presenta un cero y un polo.
- Elimina la componente de continua.
- Su ganancia para la frecuencia de 250 Hz es de 1'2.

Determina su ecuación en diferencias.

5. Determinar, mediante la transformación impulso invariante, el sistema digital equivalente a un filtro paso-bajo, de Butterworth de 2º orden cuya expresión viene definida por:

$$H(p) = \frac{1}{\left(\frac{s}{w_c}\right)^2 + \sqrt{2}\left(\frac{s}{w_c}\right) + 1}$$

siendo w_c la frecuencia angular de corte del filtro. Se toma $f_c = 1\text{kHz}$ y se muestrea a 10 kHz.

6. Demuestre que los filtros FIR cuya respuesta impulsional es simétrica o antisimétrica presentan un retardo de grupo constante:

- $h(n) = h(M - n)$ simétrico con $h(n) = 0$, para todo $n < 0$ o $n > M$.
- $h(n) = -h(M - n)$ antisimétrico.

7. Una señal está contaminada con una fuente de ruido que contiene una frecuencia fundamental de 50 Hz y sus armónicos. Sabiendo que la frecuencia de muestreo es de 1kHz, diseñe un filtro digital que elimine dichas frecuencias distorsionando lo menos posible el resto.

8. Repetir el ejercicio propuesto 7 eliminando además la componente de continua.

9. Justifique si es posible diseñar un filtro FIR pasa-alta de fase lineal aplicando las transformaciones en frecuencia digitales descritas en el ejercicio 19.

10. Diseñe un filtro pasa-alta ideal de orden 10 con ventana rectangular. A partir del ejercicio anterior, diseñe un segundo filtro cuya respuesta impulsional se obtenga cambiando el signo de las muestras impares. Dibuje las respuestas en frecuencia de ambos filtros y determine qué relación existe entre ellos.

11. Diseñe un filtro de fase lineal pasa-baja de Kaiser con las siguientes especificaciones:

- a) Límite de la banda pasante: 4 kHz.
- b) Anchura de la banda de transición: 1 kHz.
- c) Atenuación: 80 dB.
- d) Rizado en banda pasante: $r_p = 0'0058$ dB.
- e) Frecuencia de muestreo: 20 kHz.

12. Diseñe un filtro elimina banda por el método de las ventanas con las siguientes especificaciones:
- a) Banda de paso 1: [0, 1500] Hz.
 - b) Banda atenuada: [2000, 3000] Hz.
 - c) Banda de paso 2: [3300, 5000] Hz.
 - d) Frecuencia de muestreo: 10 kHz.
 - e) Atenuación: 55 dB.
 - f) Rizado en banda de paso: $R_p = 0'08$ dB.
13. Se desea diseñar un filtro por el método del muestreo en frecuencia que tenga una respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega}) = |\text{sen}(2\frac{\pi\omega}{\omega_s})|$ con un número de términos $N = 21$, $\omega_m = 2\pi$ rad/s.

6.4. Prácticas con MATLAB

6.4.1. Estudio de las propiedades de los filtros FIR

1. Dadas las siguientes ecuaciones en diferencias,

$$y_1(n) = x(n) + 2x(n-1) + x(n-2) + 2x(n-3) + x(n-4)$$

$$y_2(n) = x(n) - x(n-5)$$

$$y_3(n) = x(n) + 6x(n-1) + 11x(n-2) + 6x(n-4)$$

Comprobar

- Que se trata de filtros FIR.
- Analice la respuesta impulsional (`impz`).
- Estudie el retardo de grupo (`grpdelay`).

¿Los filtros FIR son de fase lineal?

Para poder analizar los sistemas determinados por las ecuaciones en diferencias anteriores deberemos obtener su función de transferencia. Para ello tomamos transformadas Z en ambos lados de cada una de las igualdades y determinamos $H(z)$.

$$H_1(z) = 1 + 2z^{-1} + z^{-2} + 2z^{-3} + z^{-4} \quad (6.312)$$

$$H_2(z) = 1 - z^{-5} \quad (6.313)$$

$$H_3(z) = 1 + 6z^{-1} + 11z^{-2} + 6z^{-4} \quad (6.314)$$

Se puede obtener la respuesta impulsional de estos sistemas en MATLAB mediante la instrucción `impz`, como sigue:

```
b1=[1 2 1 2 1];
b2=[1 0 0 0 0 -1];
b3=[1 6 11 6];
impz(b1,1);
grid
xlabel('n')
ylabel('h_1(n)')

disp('Pulse una tecla para continuar...');pause;
impz(b2,1);
grid
xlabel('n')
ylabel('h_2(n)')

disp('Pulse una tecla para continuar...');pause;
impz(b3,1);
grid
xlabel('n')
ylabel('h_3(n)')
```

En la Fig. 6.55 mostramos las respuestas impulsionales.

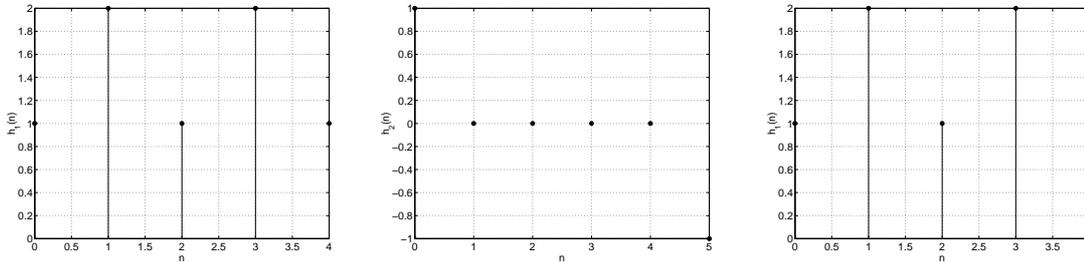


Figura 6.55: Respuestas impulsionales de los tres sistemas.

Si representamos gráficamente el retardo de grupo con la instrucción `grpdelay`, obtenemos que el retardo es constante en los sistemas de las (6.312) y (6.312) ya que en ellos se verifican las propiedades de simetría o antisimetría de los coeficientes sin embargo el sistema de la ecuación (6.312) presenta fase no lineal ya que esta propiedad no se cumple. Esto se observa claramente en la Fig. 6.56.

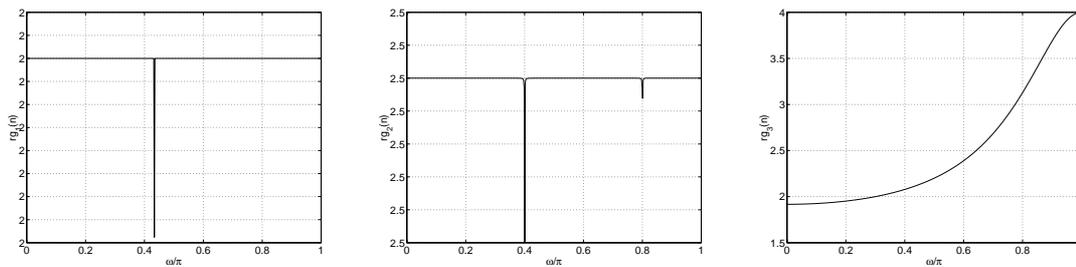


Figura 6.56: Retardo de grupo. Los sistemas (6.312) y (6.312) presentan fase lineal pero no el tercero (ecuación (6.312)).

En las gráficas aparecen picos, que están relacionados con errores numéricos de MATLAB que son de amplitud despreciable tal como se observa el eje Y de cada una de ellas. Podemos comprobar también que en los sistemas de fase lineal el retardo producido por el filtro es $N/2$ siendo N el orden del mismo.

2. Diseñar un filtro FIR por el método de ventanas (`fir1`) con estas características:
 $F_m = 20\text{kHz}$, $f_c = 5\text{kHz}$, $N = 20$.
- Emplee la ventana rectangular (`boxcar`), y Hamming (`hamming`). En cada caso, muestre el rizado en la banda pasante, la atenuación de la banda eliminada y la anchura de la banda de transición. Observe el efecto Gibbs.
 - Diseñe ahora el filtro con los mismos parámetros pero empleando la ventana de Kaiser. Modifique el valor de la atenuación de la banda no pasante a intervalos de 20dB (Atenuación máxima menor de 90 dB).
 - Repita el diseño del apartado anterior pero fijando la atenuación a 60 dB. Analiza cómo se modifica el orden del filtro en función de la anchura de la banda de transición. Utilice como valor máximo de la banda de transición 2 kHz.

Los parámetros que definen la ventana de Kaiser se pueden calcular aproximadamente con las siguientes expresiones. Utiliza la función `kaiser(N,b)` de MATLAB para generar las muestras de dicha ventana

$$\beta = \begin{cases} 0'1102(A - 8'7), & A \geq 50 \text{ dB} \\ 0'5842(A - 21)^{0'4} + 0'07886(A - 21), & 21 < A < 50 \\ 0, & A < 21 \end{cases}$$

donde A es la atenuación en dB. La relación entre el orden del filtro (N) y la anchura de la banda de transición (Δf) viene dada por

$$\Delta f = F_m - F_p = \frac{DF_m}{N - 1}, \quad D = \begin{cases} \frac{A - 7'95}{14'36}, & A > 21 \\ 0'922, & A < 21 \end{cases}$$

La respuesta impulsional de un filtro ideal es no causal e infinita y por tanto irrealizable. En la práctica lo que se hace es desplazar, para que sea causal y recortar el número de muestras que se consideran de la respuesta impulsional. El producir un truncamiento de la respuesta impulsional equivale a multiplicar la respuesta impulsional por una ventana rectangular. El hecho de trincar la respuesta impulsional produce la aparición de lóbulos laterales debidos al efecto Gibbs. Para que dicha transición sea menos abrupta se plantean diversos tipos de ventanas que lo que harán será suavizar dicha transición. Tenemos ventanas de Hanning, Hamming, Blackmann Kaiser. La atenuación del lóbulo secundario respecto al principal, así como el rizado en la banda pasante depende del tipo de ventana elegido pero no del orden del filtro.

- La función `fir1` permite diseñar filtros digitales por el método de las ventanas. El siguiente código diseña los filtros y representa la respuesta en frecuencia obtenida con la ventana rectangular y la de Hamming. Se observa claramente la disminución en el rizado en banda pasante y la mayor atenuación presentada por

la ventana de Hamming. Como contrapartida se tiene una banda de transición mucho más ancha y un lóbulo principal más estrecho.

```

fm=20000;
fc=5000;
N=20;
pto=1000;
br=fir1(N,2*fc/fm,boxcar(N+1));
bh=fir1(N,2*fc/fm,hamming(N+1));
[h,w]=freqz(br,1,pto,fm);
[h2,w]=freqz(bh,1,pto,fm);
ideal=ones(size(1:pto));
nfc=pto*2*fc/fm;
ideal(nfc:pto)=zeros(size(nfc:pto));
plot(w,ideal,'k')
hold on
plot(w,abs(h),'k--')
plot(w,abs(h2),'k:')
legend('F. Ideal','V. Rectangular','V. Hanning')
xlabel('Frecuencia (Hz)')
ylabel('|H(\omega)|')
disp('Pulse una tecla para continuar...')
pause;
axis(1000*[0 5.1152 0.0009 0.0011])

```

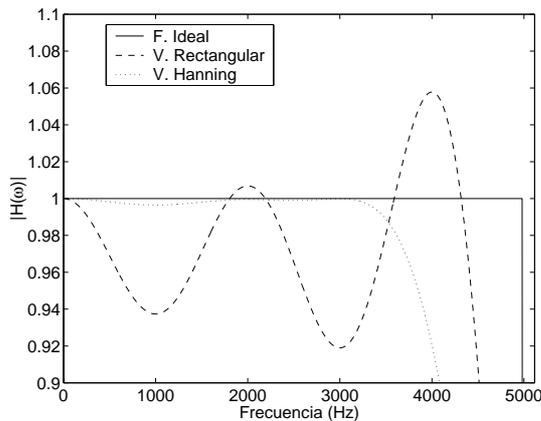


Figura 6.57: Respuesta en frecuencia del filtro diseñado con ventana rectangular y con ventana de Hamming.

Para observar la atenuación proporcionada por ambos filtro hacemos una representación en dB como se muestra en la figura 6.59 en ella observamos el incremento de la atenuación proporcionada por la ventana de Hamming.

En las gráficas se observa claramente el Efecto Gibbs, más patente en la ventana rectangular, ya que ésta presenta una transición brusca mientras que en el resto de ventanas la transición es más suave.

- b) La ventana de Kaiser tiene la ventaja de permitir un control en el rizado. Utilizando el siguiente código de Matlab hemos representado la respuesta en frecuencia para el filtro que venimos utilizando pero variando la atenuación del mismo a intervalos de 20 dB, comenzando en 10 dB.

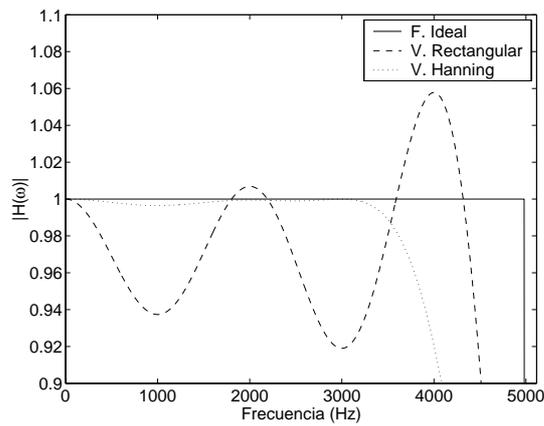


Figura 6.58: Detalle de la banda pasante, en la que observamos la disminución del rizado al emplear la ventana de Hamming.

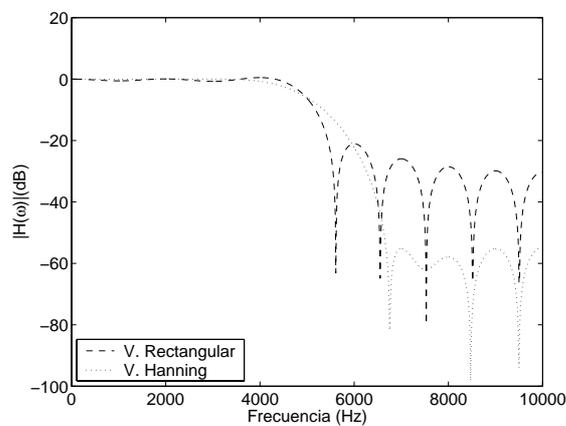


Figura 6.59: Atenuación en escala logarítmica para ambas ventanas.

```

fm=20000;
fc=5000;
N=20;
pto=1000;
A=10:20:90; %Atenuación en dB
for(i=1:length(A))
    if(A(i)<=21)
        beta=0;
    elseif (A(i)>=50)
        beta=0.1102*(A(i)-8.7);
    else
        beta=0.5842*(A(i)-21)^0.4+0.07886*(A(i)-21);
    end
    b=fir1(N,2*fc/fm,kaiser(N+1,beta));
    [h(:,i),w]=freqz(b,1,pto,fm);
end
modulo=20*log10(abs(h));
plot(w,modulo(:,1),'k-',w,modulo(:,2),'k:', ...
w,modulo(:,3),'k.-',w,modulo(:,4),'k--',w,modulo(:,5),'k-')

```

```
legend('A=10','A=30','N=50','A=70','A=90',3)
grid
```

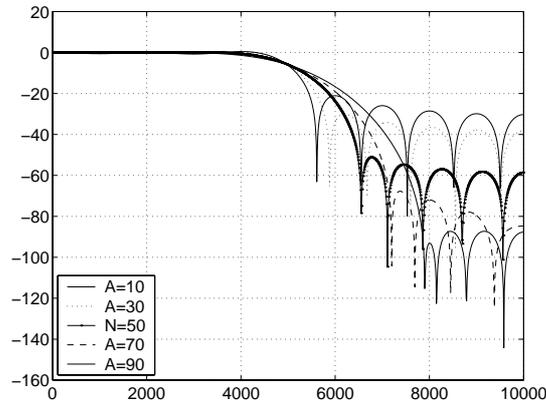


Figura 6.60: Control de la atenuación mediante la ventana de Kaiser.

Aunque hemos empezado con una atenuación de 10 dB, la atenuación del filtro es al menos 20dB, esto es debido a que para este valor obtenemos $\beta = 0$, con lo que la ventana de Kaiser se transforma en la ventana rectangular, por lo que obtenemos la atenuación de una ventana rectangular. Al fijar el orden, se va modificando la anchura de la banda de transición.

- c) El programa utilizado en este caso es similar al anterior, pero el parámetro variable es la anchura de la banda de transición

```
fm=20000;
fc=5000;
pto=1000;
A=60;
beta=0.1102*(A-8.7);
D=(A-7.95)/14.36;
BT=500:500:2000; %Anchura de la banda de transición
N=1+D*fm./(BT); %Determinamos el orden para diversos valores de BR
N=ceil(N); %Redondeamos el orden por exceso
for(i=1:length(N))
    b=fir1(N(i),2*fc/fm,kaiser(N(i)+1,beta));
    [h(:,i),w]=freqz(b,1,pto,fm);
end

modulo=20*log10(abs(h));
plot(w,modulo(:,1),'k-',w,modulo(:,2),'k:',...
w,modulo(:,3),'k.-',w,modulo(:,4),'k--')
grid
```

En las gráficas 6.61 mostramos la respuesta en frecuencia de los filtros y cómo una banda de transición más estrecha requiere un incremento del orden del filtro para cumplir las especificaciones.

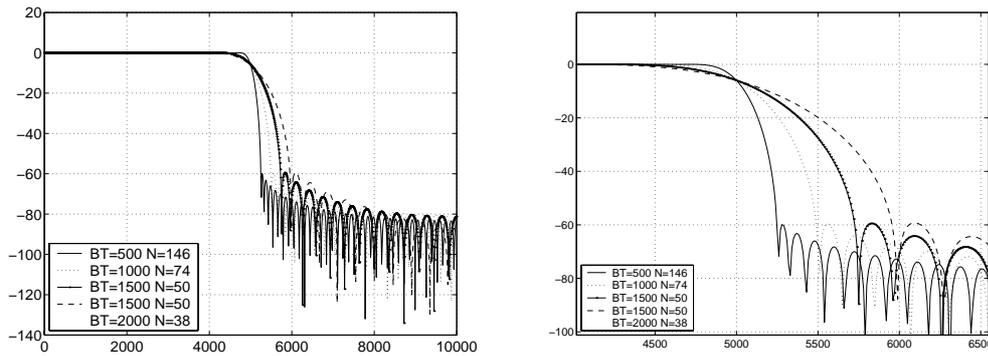


Figura 6.61: (a) Modificación del orden al variar la anchura de la banda de transición. (b) Ampliación de la banda de transición para la figura anterior.

3. Utilizando la expresión obtenida para el diseño de filtros FIR de fase lineal de tipo I (simétricos, número de términos impar, siendo $M + 1$ es el número de muestras de la respuesta en frecuencia y considerando que la primera muestra está en $w = 0$)

$$h(n) = \frac{1}{N} \left[A_0 + \sum_{k=1}^M 2A_k \cos \left(\frac{2\pi(n - M)k}{N} \right) \right] \quad (6.315)$$

con $M = \frac{N-1}{2}$, diseñe un filtro con las especificaciones siguientes:

- Límite de banda de paso: $F_1 = 200$ Hz,
- Frecuencia de muestreo: $F_m = 1000$ Hz,
- Anchura de la Banda de Transición: 50 Hz.

El programa debe permitir elegir el número de muestras en la banda de transición, para ello considere que la transición entre ambas bandas es lineal. Obtenga las respuestas impulsionales y en frecuencia para 1, 2, y 5 muestras en la banda de transición.

Nota: Recuerde que siempre debe aproximar a un número impar de términos para que la expresión anterior sea válida.

En el método del muestreo en frecuencia hay que tomar muestras en la respuesta en frecuencia deseada del filtro (términos A_k de la expresión anterior) y posteriormente calcular la Transformada Inversa de Fourier, para determinar los coeficientes $h(n)$. Debido a las propiedades de simetría, únicamente hemos de tomar la mitad de las muestras en la respuesta en frecuencia del filtro y sustituir en la expresión de $h(n)$ esto nos permitirá obtener la mitad de los coeficientes del filtro, el resto sabemos que son idénticos.

Dado que el parámetro elegido es el número de muestras en la banda de transición, indirectamente estamos fijando la frecuencia de muestreo de la respuesta en frecuencia, ya que la banda de transición es de 50 Hz, asegurar un máximo de una muestra en dicha banda implica muestrear, al menos, a 50 Hz. En general muestrearemos a una frecuencia de BT/n , siendo BT la anchura de la banda de transición y n el número de

muestras en la banda. Posteriormente sustituiremos en la expresión anterior de $h(n)$, que ha sido implementada usando la función `impul`.

```
%Muestreo en frecuencia para filtros FIR de tipo I (orden impar simétricos)
clear
fm=1000;
f1=200;
f2=250;
bt=f2-f1;
pto=1000;
nb=input('Número de puntos en la banda de transición ?');
delta=bt/nb; % Además delta=pi/N --> obtenemos N
N=fm/delta;
if (rem(N,2)==0) %Aseguramos que el número de términos es impar
    N=N+1;
end
delta=fm/N;
M=(N-1)/2;

%Muestreamos la respuesta en frecuencia equiespaciadamente
mp=round(0:f1/delta); %Muestras en banda pasante
mt=round(f1/delta)+1:round(f2/delta); %Muestras en banda de transición
ma=round(f2/delta)+1:M; %Muestras en banda no pasante
A=[ones(size(mp)) mt*delta*(-1/bt)+f2/bt zeros(size(ma))];
h=impul(A);
subplot(211)
stem(h);
grid
xlabel('n')
ylabel('h(n)')
subplot(212)
[h,w]=freqz(h,1,pto,fm);
plot(w,abs(h));
hold on
stem((0:M)*delta,A,'r')
xlabel('Frecuencia (Hz)')
ylabel('|H(\omega)|')
```

La siguiente función permite calcular los valores de la respuesta impulsional a partir de las muestras de la respuesta en frecuencia

```
function h=impul(A)

%A: muestras de la respuesta en frecuencia del filtro
%h: respuesta impulsional del filtro obtenido por muestreo en frecuencia

M=max(size(A))-1
N=2*M+1;
for i=0:M
    aux=A(i);
    for k=2:M+1;
        aux=aux+2*A(k)*cos(2*pi*(k-1)*(i-M)/N);
    end
end
```

```

end
h(i+1)=aux/N;
end
h=[h h(M:-1:1)]; %Aplicamos simetría para calcular el resto de h(n)

```

Si ejecutamos el programa eligiendo para el número de muestras en la banda de transición (variable `nb` del programa) 1, 2 y 3 obtenemos los filtros cuyas gráficas mostramos a continuación: Los filtros obtenidos se muestran en las Figs. 6.62–6.64.

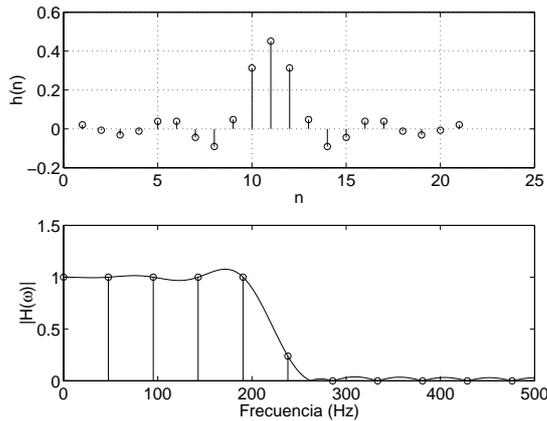


Figura 6.62: Respuesta impulsional y respuesta en módulo para 1 muestra en la banda de transición.

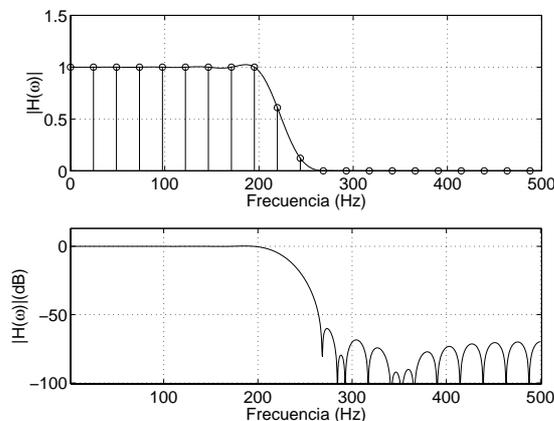


Figura 6.63: Respuesta en módulo en escala lineal y en dB para 2 muestras en la banda de transición.

Para ver el efecto de colocar muestras en la banda de transición hemos repetido el ejercicio eliminando dicha banda. Es decir a partir de la frecuencia límite de la banda pasante la magnitud será cero. En la gráfica siguiente mostramos el filtro resultante. Comparándolo con la misma gráfica con banda de transición observamos que la atenuación es menor, si bien la banda de transición es más estrecha. Este método asegura el comportamiento del filtro en las muestras en frecuencia consideradas, sin embargo en el resto de frecuencias no se tiene control sobre el valor de la respuesta en frecuencia.

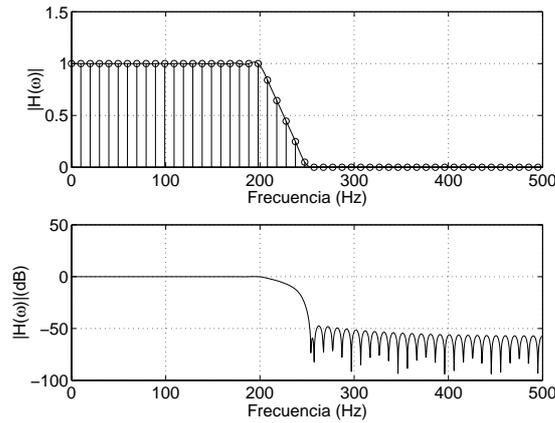


Figura 6.64: Respuesta en módulo en escala lineal y en dB para 5 muestras en la banda de transición.

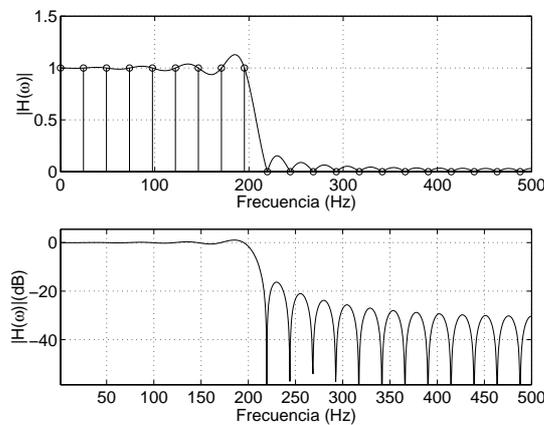


Figura 6.65: Efecto de eliminar la banda de transición en el muestreo en frecuencia.

4. Analice cómo se modifica el orden de un filtro diseñado con la función `remez` en función de la anchura de la banda de transición, rizado en la banda pasante y no pasante. Para ello utilizaremos la función `remezord`. Las características del filtro son: $F_m=1000\text{Hz}$, $F_c=200\text{Hz}$.

- Variación de N con el ancho de banda de transición: $F_{c2}=210:10:300$ Hz. $R_p=3\text{dB}$, $R_s=60\text{dB}$.
- Variación de N con la atenuación de la banda pasante: $BT=20\text{Hz}$ $R_s=60\text{dB}$, $R_p=1:1:5$ dB.
- Variación de N con la atenuación de la banda eliminada: $BT=20\text{Hz}$, $R_p=3\text{dB}$, $R_s=20:10:100$ dB.

Mostrar en cada caso una gráfica de N en función del parámetro variable.

El método más habitual para diseñar filtros FIR de mínimo orden, que cumplan unas determinadas especificaciones es el de la aproximación de Tchebyshev. Este procedimiento permite disminuir el orden del filtro distribuyendo el error tanto en la banda pasante como en la atenuada. Este procedimiento es muy versátil y nos permite

diseñar filtros FIR con una respuesta en frecuencia casi arbitraria. MATLAB dispone de la función `remez` que implementa este método de diseño. Para poder utilizar esta función en primer lugar es necesario hacer una estimación del orden del filtro. Para ello se utiliza la función `remezord`.

En este apartado vamos a analizar la dependencia del orden del filtro con varios parámetros de que definen su comportamiento. Fijaremos tres de los cuatro parámetros y analizaremos cuál es la dependencia del orden del filtro con dicho parámetro. Los parámetros son la anchura de la banda de transición, rizado en la banda pasante y atenuación del filtro.

El siguiente código muestra la dependencia de cada una de estas variables

```
% Variación del orden con la anchura de la banda de transición

fm=1000; %Frecuencia de muestreo
RP=3; %Rizado en la banda pasante en DB
RS=60 %Rizado en la banda atenuada en DB sin signo
F1=200; %Inicio de la banda de transición
W=[1 0]; %Valores ideales del filtro
aa=10^(RP/20);
r1=(aa-1)/(aa+1);
r2=10^(-RS/20); %Rizado en la banda atenuada en escala lineal
rizado=[r1 r2];
F2=210:10:300; %Fin de la banda de transición
for i=1:length(F2)
    [n(i),fo,mo,w] = remezord( [F1 F2(i)], W, rizado, fm );
end
plot(F2-F1,n,'k*',F2-F1,n,'k')
grid
xlabel('Anchura de la banda de transición (Hz)');
ylabel('Orden del filtro');

disp('Pulse una tecla para continuar ...')
pause
clear n;
```

La Fig. 6.66 muestra la dependencia del orden del filtro con la anchura de la banda de transición

```
% Variación del orden del filtro al variar el rizado en la banda pasante
RP=1:0.5:5; %Rizado en la banda pasante en DB
RS=60 %Rizado en la banda atenuada en DB sin signo
F1=200; %Inicio de la banda de transición
W=[1 0]; %Valores ideales del filtro
aa=10.^(RP/20);
r1=(aa-1)./(aa+1);%Rizado en la banda pasante en escala lineal
r2=10^(-RS/20); %Rizado en la banda atenuada en escala lineal

F2=220 ; %Fin de la banda de transición
for i=1:length(RP)
    [n(i),fo,mo,w] = remezord( [F1 F2], W, [r1(i) r2], fm );
```

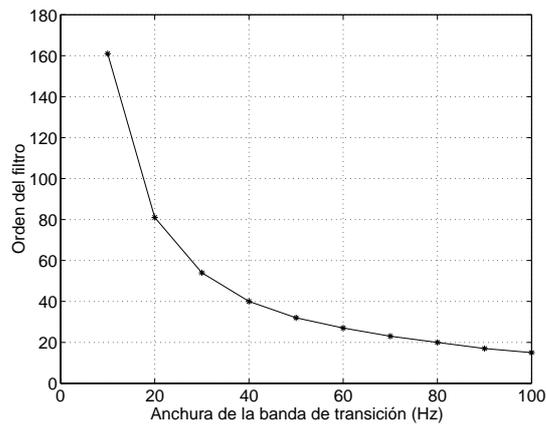


Figura 6.66: Efecto de la anchura de la banda de transición en el orden de un filtro FIR de rizado constante.

```

end
plot(RP,n,'k*','RP,n','k')
grid
xlabel('Rizado de la banda pasante (dB)');
ylabel('Orden del filtro');

disp('Pulse una tecla para continuar ...')
pause
clear n;

```

La Fig. 6.67 muestra la dependencia del orden del filtro con el rizado en la banda pasante.

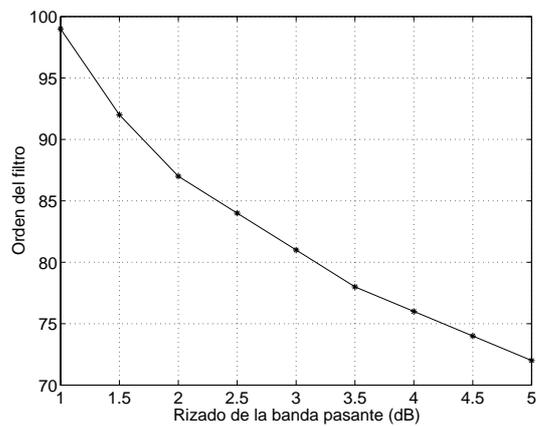


Figura 6.67: Efecto del rizado en la banda pasante en el orden de un filtro FIR de rizado constante.

```

% Variación del orden del filtro al variar el rizado en la banda pasante
RP=3; %Rizado en la banda pasante en DB
RS=20:5:100 %Rizado en la banda atenuada en DB sin signo
F1=200; %Inicio de la banda de transición
W=[1 0]; %Valores ideales del filtro
aa=10^(RP/20);

```

```

r1=(aa-1)/(aa+1); %Rizado en la banda pasante en escala lineal
r2=10.^(-RS/20); %Rizado en la banda atenuada en escala lineal

F2=220 ; %Fin de la banda de transición
for i=1:length(RS)
[n(i),fo,mo,w] = remezord( [F1 F2], W, [r1 r2(i)], fm );
end
plot(RS,n,'k*','RS,n','k')
grid
xlabel('Rizado de la banda atenuada (dB)');
ylabel('Orden del filtro');
clear n;

```

La Fig. 6.68 muestra la dependencia del orden del filtro con el rizado en la banda atenuada.

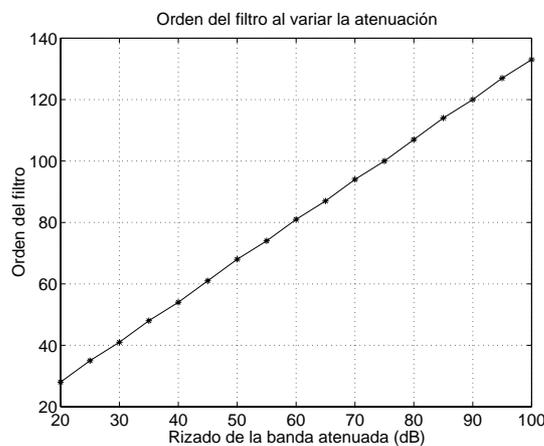


Figura 6.68: Efecto del rizado en la banda atenuada en el orden de un filtro FIR de rizado constante.

Una vez obtenido el orden diseñar el filtro es simplemente llamar a la función `remez` con los parámetros devueltos por `remezord`. Así, a modo de ejemplo, el último filtro del que hemos estimado el orden ($F_c=200\text{Hz}$, Rizado en banda pasante $R_p=3\text{dB}$, anchura de la banda de transición $BT=20\text{ Hz}$ y Atenuación en banda no pasante $R_s=100\text{dB}$) se diseñaría como:

```
b = remez(n(i),fo,mo,w);
```

La respuesta en frecuencia del filtro diseñado se muestra en la Fig. 6.69. En esta última gráfica se observa claramente que se cumplen las especificaciones y cómo aparece un rizado en ambas bandas, tal como se especifica en el diseño. Destacar también que la respuesta en fase es lineal, como deseamos.

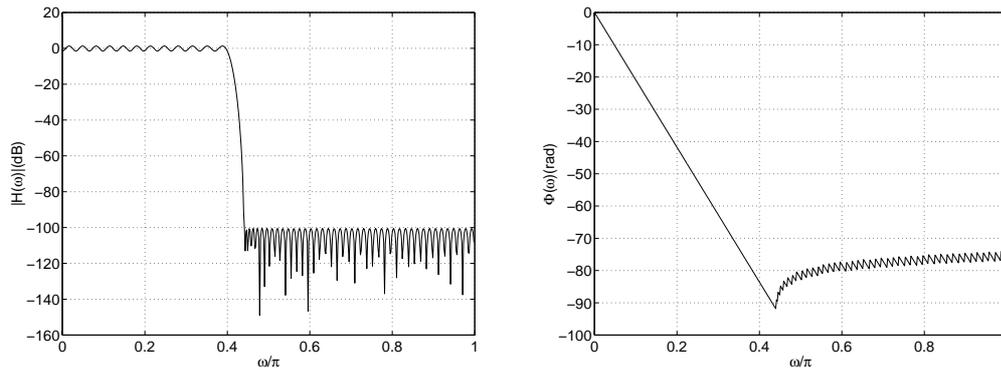


Figura 6.69: Respuesta en frecuencia en módulo y fase de un filtro FIR diseñado por el método de la aproximación de Tchebyshev (Método de Parks Mcllellan).

6.4.2. Estudio de las propiedades de los filtros IIR

1. Considérese la siguiente ecuación en diferencias correspondiente a un filtro digital.

$$y(n) = y(n-1) + \frac{1}{4}x(n-4) + \frac{1}{4}x(n)$$

Dibujar el diagrama de polos y ceros, y estudia su respuesta en frecuencia (módulo y fase) así como la respuesta impulsional. ¿Se trata de un filtro FIR o IIR?

Es este primer apartado vamos a poner de manifiesto que una ecuación en diferencias recursiva no necesariamente esta ligada con un sistema de respuesta impulsional infinita.

Si tomamos transformadas Z en ambos miembros de la ecuación obtenemos que la función de transferencia del sistema es:

$$H(z) = \frac{1 - z^{-4}}{1 - z^{-1}} \quad (6.316)$$

```
b=[1/4 0 0 0 -1/4];
a=[1 -1];
```

```
%Para dibujar el diagrama de polos y ceros hemos
% de introducir los coeficientes en potencias de Z
```

```
NUM=[1/4 0 0 0 -1/4]
DEN=[1 -1 0 0 0];
zplane(NUM,DEN)
disp('Pulse una tecla para continuar ...')
xlabel('Parte Real')
ylabel('Parte Imaginaria')
pause
resfre_mo(b,a,'l')
pause
resfre_fa(b,a)
disp('Pulse una tecla para continuar ...')
```

```

pause
impz(b,a)
xlabel('n')
ylabel('h(n)')
disp('Pulse una tecla para continuar ...')
pause
disp('Se trata de un filtro FIR implementado de forma recursiva')

```

En la Fig. 6.70 mostramos el diagrama de polos y ceros, la respuesta en frecuencia en módulo y fase y la respuesta impulsional del sistema considerado. Observamos que existe una cancelación polo-cero en $z = 1$, por lo que el sistema no tiene polos distintos de los triviales (en el origen). Se tratará, por tanto, de un sistema FIR. En la respuesta impulsional se pone de manifiesto claramente que es un sistema FIR ya que ésta únicamente tiene cuatro términos.

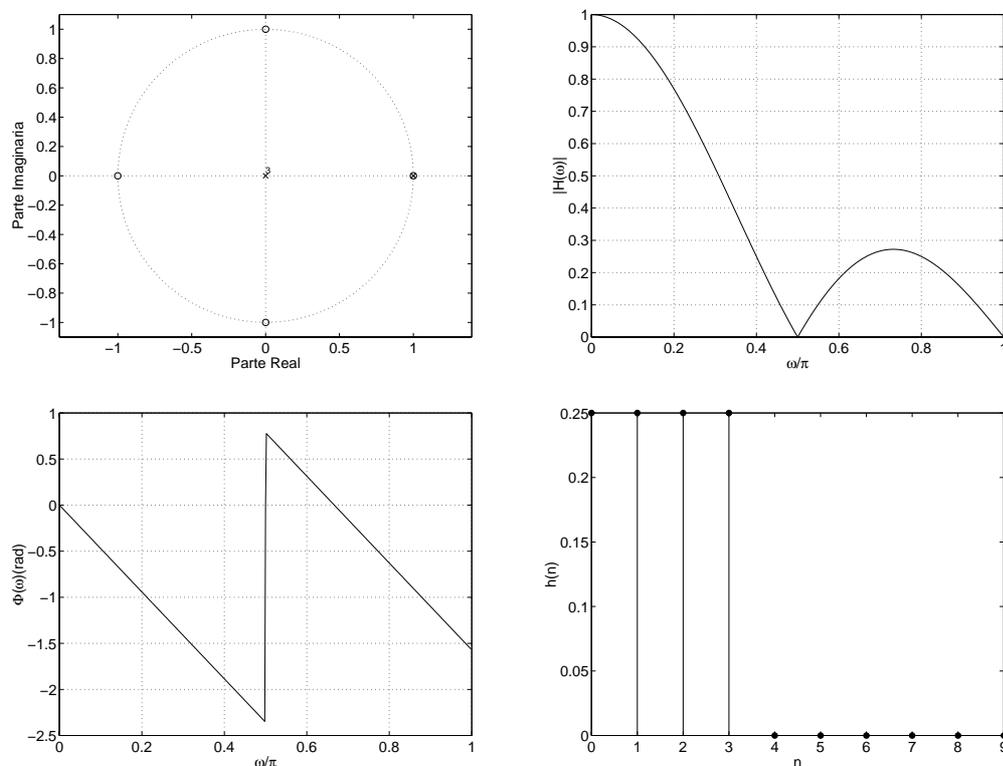


Figura 6.70: (a) Diagrama de polos y ceros del filtro. (b) Respuesta en frecuencia módulo y (c) fase del filtro. (d) Respuesta impulsional del filtro.

2. Diseñe filtros digitales a partir de los prototipos analógicos utilizando el método del impulso invariante (impinvar). Las características de los filtros serán: $F_m=1000$ Hz, $F_c=200$ Hz, $R_p=2$ dB (valor máximo), $R_s=40$ dB (valor mínimo). Banda de transición=100 Hz.

Los prototipos analógicos utilizados serán butterworth (`buttap`), Tchebyshev tipo I y II (`cheb1ap`, `cheb2ap`) y elípticos (`ellipap`). Para estimar el orden del filtro en cada caso se emplearán las funciones `buttord`, `cheb1ord`, `cheb2ord` y `ellipord`.

- Obtener la respuesta en frecuencia y el diagrama de polos y ceros de estos filtros y comparar los resultados con los que se obtienen directamente con las funciones `butter`, `cheby1`, `cheby2` y `ellip` que diseñan a partir de los prototipos analógicos pero empleando el método de la transformación bilineal.
- Determinar la anchura de las bandas de transición en cada uno de estos últimos filtros diseñados con la transformación bilineal.
- Ver cómo se modifica el orden del filtro al variar valores de R_p y R_s .

El procedimiento a seguir es el mismo independientemente del tipo de filtro que se trate. Como vamos a utilizar la transformación del impulso invariante no es necesario hacer un “*prewarping*” de las frecuencias, y el filtro analógico se diseñará para la misma frecuencia de corte que el filtro digital. Para mostrar el procedimiento al completo, vamos a diseñar también los filtros digitales por medio de la transformación bilineal, de esta forma, posteriormente verificaremos que los resultado obtenidos coinciden con los proporcionados directamente con las funciones `butter`, `cheby1`, `cheby2`, etc. que realizan el diseño a partir de prototipos analógicos utilizando la transformación bilineal. Los pasos seguidos se indican detalladamente entre las líneas de código del siguiente programa:

```
%Vamos a realizar el estudio para un filtro de Butterworth, para el resto se
%procede de forma análoga
```

```
fm=1000; %Frecuencia de muestreo
fc1=200; %Frecuencia de corte 1
Rp=2; %Rizado en la banda pasante en dB
Rs=40 %Rizado en la banda atenuada en dB
fc2=300 %Fc+anchura de la banda de transición
```

En primer lugar estimamos el orden del filtro analógico para que se cumplan las especificaciones

```
Wp=2*pi*fc1;
Ws=2*pi*fc2;
```

Estas son las frecuencias analógicas que necesitamos si empleamos la transformación del impulso invariante. Si utilizamos transformación bilineal hemos de aplicar “*prewarping*”. Ahora estimamos el orden del filtro analógico que verifica las especificaciones de diseño

```
[n,Wn]=buttord(Wp,Ws,Rp,Rs,'s')
```

Conocido el orden del filtro analógico lo diseñamos con `buttap`. Este filtro tiene una frecuencia de corte normalizada igual a 1. Esta función nos devuelve los ceros, polos y la ganancia del filtro.

```
[Z,P,K] = buttap(n);
```

Podemos obtener la función de transferencia del filtro a partir de los polos y ceros mediante la función `zp2tf`. El siguiente paso es transformar el filtro pasa baja con frecuencia de corte normalizada a un filtro con la frecuencia de corte deseada. Para ello utilizamos una de las funciones de transformación en frecuencia analógicas, en este caso hacemos una transformación pasa-baja pasa-baja con `lp2lp`.

```
[NUM,DEN]=zp2tf(Z,P,K);
[NUMT,DENT] = lp2lp(NUM,DEN,Wp);
```

```
%Ahora realizamos la transformación a digital por el método del impulso invariante
[BZ,AZ] =impinvar(NUMT,DENT,fm);
```

Aunque el problema no lo solicita, veamos como se hubiese realizado este procedimiento con la transformación bilineal. En primer lugar hubiésemos obtenido las frecuencia analógicas correspondientes, para diseñar el filtro mediante “*prewarping*”. Posteriormente diseñamos el filtro de forma análoga a la anterior, realizamos la transformación en frecuencia pasa-baja pasa-baja, para que la frecuencia de corte sea la determinada por el “*prewarping*”, y finalmente hacemos la transformación a digital mediante la transformación bilineal. Las siguientes líneas de código realizan esta tarea

```
Wpa=tan(Wp/(2*fm))*2*fm;
Wsa=tan(Ws/(2*fm))*2*fm;
[n,Wn]=buttord(Wpa,Wsa,Rp,Rs,'s') %Las frecuencia analógicas en rad/s
[Z,P,K] = buttap(n)
[NUM,DEN]=zp2tf(Z,P,K);
[NUMT,DENT] = lp2lp(NUM,DEN,Wpa);
[NUMd,DEND] = bilinear(NUMT,DENT,fm);
```

La transformación bilineal es el procedimiento habitual para el diseño de un filtro digital IIR a partir de prototipos analógicos, por esta razón Matlab dispone de funciones que realizan esta tarea. Podríamos haber diseñado este filtro directamente mediante las instrucciones siguientes. En la primera se determina el orden del filtro digital y en la segunda se realiza el diseño del filtro digital mediante la transformación bilineal. Es posible especificar filtros que no sean pasa-baja directamente, sin necesidad de realizar ningún tipo de transformación posterior.

Los resultados obtenidos para B y A coinciden con `NUMd`, `DEND`, que habíamos calculado anteriormente realizando todo el proceso.

```
[n,Wn]=buttord(2*fc1/fm,2*fc2/fm,Rp,Rs)
[B,A] = butter(n,Wn);
```

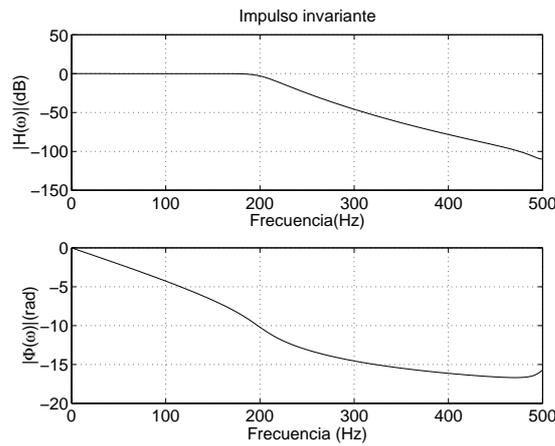


Figura 6.71: Filtro digital de Butterworth diseñado por el método del impulso invariante.

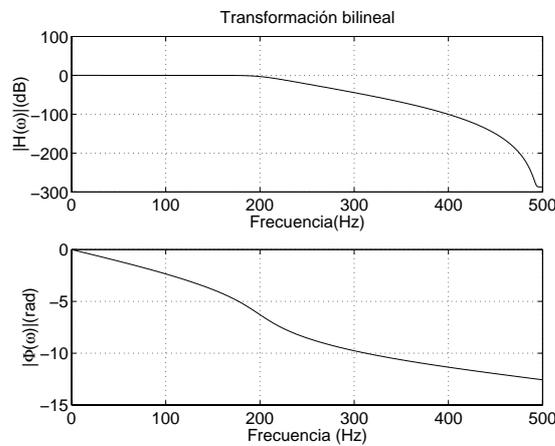


Figura 6.72: Filtro digital de Butterworth diseñado por el método de la transformación bilineal.

En las Figs. 6.71 y 6.72 mostramos la respuesta en frecuencia módulo y fase del filtro diseñado por el método del impulso invariante y mediante la transformación bilineal. El diagrama de polos y ceros se muestra en la Fig. 6.73. Aunque hemos hecho un ajuste de la escala para ver la localización de los polos, los ceros se encuentran distribuidos de forma muy diferente en la transformación bilineal que utilizando el impulso invariante. El agrupamiento de ceros es mayor con la transformación bilineal. Con el impulso invariante la dispersión es mucho mayor.

Podemos repetir el mismo procedimiento cambiando las funciones relacionadas con los filtros de Butterworth con las correspondientes a los filtros de Tchebyshev y elípticos. Se deja como ejercicio al lector realizar esta tarea.

Para poner de manifiesto la diferencia existente entre estos filtros vamos a mostrar cómo se modifican los ordenes de los mismos cuando se diseñan filtros digitales por el método de la transformación bilineal modificando alguno de los parámetros de diseño como son el rizado en la banda pasante, y la atenuación. El código utilizado es el siguiente:

```
Rs=40; %Fijamos la atenuación a 40 dB
```

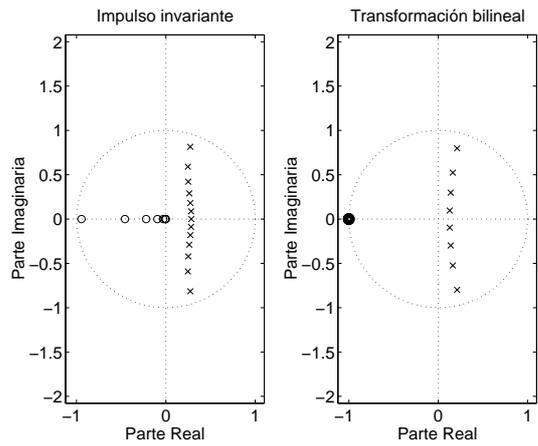


Figura 6.73: Diagrama de polos y ceros del filtro de Butterworth diseñado mediante la transformación bilineal y el impulso invariante.

```

Rp=0.1:0.1:4; %Variamos el rizado en banda pasante
for(i=1:length(Rp))
    [Nb(i),Wn]=buttord(2*fc1/fm,2*fc2/fm,Rp(i),Rs);
    [Nc1(i),Wn]=cheb1ord(2*fc1/fm,2*fc2/fm,Rp(i),Rs);
    [Nc2(i),Wn]=cheb2ord(2*fc1/fm,2*fc2/fm,Rp(i),Rs);
    [Ne(i),Wn]=ellipord(2*fc1/fm,2*fc2/fm,Rp(i),Rs);
end
plot(Rp,Nb,'k-',Rp,Nc1,'k:',Rp,Nc2,'k.-',Rp,Ne,'k--')
legend('Butterworth','Chebyshev I','Chebyshev II','Elíptico')
xlabel('Rizado en la banda pasante (dB)')
ylabel('Orden del filtro')
title('Variación del orden del filtro al variar el rizado en la banda pasante Rs=40')

disp('Pulse una tecla para continuar ...')
pause

clf
clear Nb,Nc1,Nc2,Ne;
Rp=2;
Rs=10:1:100
for(i=1:length(Rs))
    [Nb(i),Wn]=buttord(2*fc1/fm,2*fc2/fm,Rp,Rs(i));
    [Nc1(i),Wn]=cheb1ord(2*fc1/fm,2*fc2/fm,Rp,Rs(i));
    [Nc2(i),Wn]=cheb2ord(2*fc1/fm,2*fc2/fm,Rp,Rs(i));
    [Ne(i),Wn]=ellipord(2*fc1/fm,2*fc2/fm,Rp,Rs(i));
end
plot(Rs,Nb,'k-',Rs,Nc1,'k:',Rs,Nc2,'k.-',Rs,Ne,'k--')
legend('Butterworth','Chebyshev I','Chebyshev II','Elíptico')
xlabel('Rizado en la banda atenuada (dB)')
ylabel('Orden del filtro')
title('Variación del orden del filtro al variar la atenuación Rp=2dB')

```

Las gráficas obtenidas se muestran en las Figs. 6.74 y 6.75. Observamos como a partir de unas especificaciones dadas, son los filtros elípticos los que proporcionan un orden menor, a costa de permitir rizados en ambas bandas. Los filtros de Butterworth

proporcionan el mayor orden si bien la banda pasante es máximamente plana. También podemos obtener un comportamiento plano en la banda pasante con los filtros de Tchebyshev de tipo II, si bien la caída en la banda no pasante no es monótona como ocurre con los de Butterworth.

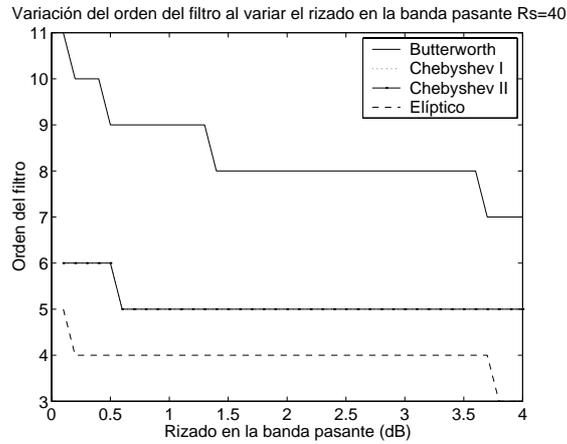


Figura 6.74: Modificación del orden de varios filtros IIR diseñados mediante la transformación bilineal al variar la atenuación.

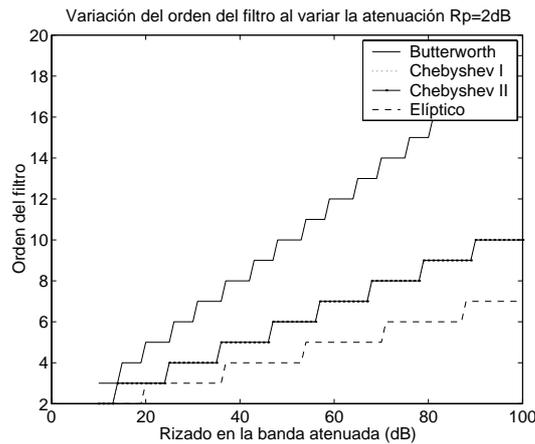


Figura 6.75: Modificación del orden de varios filtros IIR diseñados mediante la transformación bilineal al variar el rizado en la banda pasante.

3. Compare los órdenes obtenidos para filtros FIR e IIR de las mismas características (frecuencia de corte, atenuación, anchura de la banda de transición, etc. Ej: Filtro pasa Baja $F_c=200\text{Hz}$, $BT=100\text{Hz}$, $R_p=1\text{dB}$, $R_s=60\text{ dB}$ Frecuencia de muestreo 1000Hz .)

El siguiente código permite obtener diseñar los diversos filtros:

```
%Comparación de órdenes IIR y FIR
fm=1000; %Frecuencia de muestreo
Rp=1; %Rizado en la banda pasante en DB
Rs=60 %Rizado en la banda atenuada en DB sin signo
F1=200; %Inicio de la banda de transición
W=[1 0]; %Valores ideales del filtro
```

```

a=10^(Rp/20); %Rizado en la banda pasante en escala lineal
r1=(a-1)/(a+1);
r2=10^(-Rs/20); %Rizado en la banda atenuada en escala lineal
rizado=[r1/2 r2];
F2=300; %Fin de la banda de transición

[n,fo,mo,w] = remezord( [F1 F2], W, rizado, fm )

b = remez(n,fo,mo,w);
[h,w]=freqz(b,1);

[nb,w]=buttord(F1*2/fm,F2*2/fm,Rp,Rs);
[b1,a1]=butter(nb,w);
[h1,w]=freqz(b1,a1);

[nc1,w]=cheb1ord(F1*2/fm,F2*2/fm,Rp,Rs);
[b2,a2]=cheby1(nc1,Rp,w);
[h2,w]=freqz(b2,a2);

[nc2,w]=cheb2ord(F1*2/fm,F2*2/fm,Rp,Rs);
[b3,a3]=cheby2(nc2,Rs,w);
[h3,w]=freqz(b3,a3);

[ne,w]=ellipord(F1*2/fm,F2*2/fm,Rp,Rs);
[b4,a4]=ellip(ne,Rp,Rs,w);
[h4,w]=freqz(b4,a4);

figure
plot(w/pi,abs(h),'k-',w/pi,abs(h1),'k:',...
w/pi,abs(h2),'k.-',w/pi,abs(h3),'k--',w/pi,abs(h4),'k-')
legend('Equiripple','Butterworth','Chebyshev I','Chebyshev II','Elíptico')
xlabel('\omega/\pi')
ylabel('|H(\omega)|')

figure
plot(w/pi,angle(h),'k-',w/pi,angle(h1),...
'k:',w/pi,angle(h2),'k.-',w/pi,angle(h3),'k--',w/pi,angle(h4),'k-')
legend('Equiripple','Butterworth','Chebyshev I','Chebyshev II','Elíptico')
xlabel('\omega/\pi')
ylabel('\Phi(\omega)(rad)')

```

Los órdenes obtenidos para los filtros han sido:

- FIR de rizado constante: 21
- Butterworth: 12
- Tchebyshev: 7
- Elíptico: 5

Las respuestas en frecuencia de estos filtros se muestra en las Figs. 6.76 y 6.77.

Para que las gráficas sean comparables, hemos reducido a la mitad el rizado en la banda de paso para el filtro de rizado constante, ya que el rizado en los filtros de

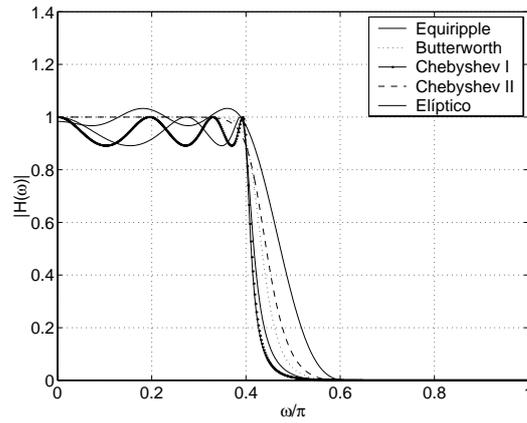


Figura 6.76: Respuesta en frecuencia en módulo de los filtros diseñados.

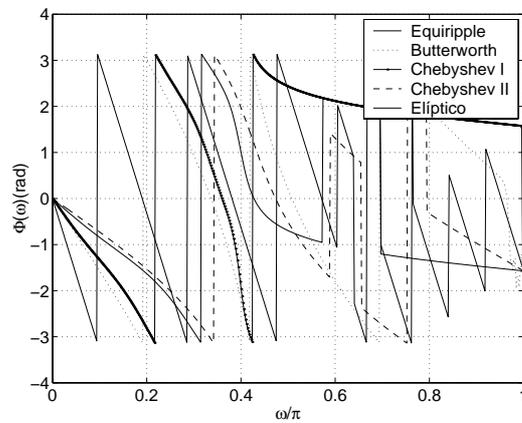


Figura 6.77: Respuesta en frecuencia en fase de los filtros diseñados.

Chebyshev y elíptico oscila entre $1 + \delta_1$ y $1 - \delta_1$ a diferencia de los anteriores en los que la variación es entre $1 + \delta_1$ y $1 - \delta_1$. En la respuesta en fase se observa que, además del filtro FIR cuya fase es lineal, es el filtro de Butterworth el que presenta mayor linealidad en la banda pasante.

En cuanto a la respuesta en módulo, son los filtros elípticos los que presentan una transición más abrupta y el filtro FIR el de transición más suave.

Capítulo 7

Sistemas Adaptativos

7.1. Introducción teórica

Los *sistemas o filtros adaptativos* son sistemas variante-temporales de forma que se adaptan a cambios en su entorno, optimizando su funcionamiento de acuerdo a una serie de algoritmos conocidos como *algoritmos adaptativos*. La forma de determinar el comportamiento óptimo del filtro adaptativo es minimizando una función monótona creciente de la señal o secuencia de error. Esta secuencia se define como la diferencia entre una señal que se toma como referencia, o señal deseada, y la salida del filtro adaptativo.

El esquema general de un sistema adaptativo sería el representado en la Fig. 7.1, donde $x(n)$ es la secuencia de entrada al sistema adaptativo e $y(n)$ es la secuencia de salida que será comparada con la señal deseada $d(n)$ para producir una señal de error $e(n)$. Ésta se emplea para ajustar los coeficientes del sistema adaptativo mediante un determinado algoritmo adaptativo. De este modo, la finalidad del algoritmo adaptativo es modificar los parámetros que definen el funcionamiento del sistema adaptativo de forma que la señal de error sea mínima.

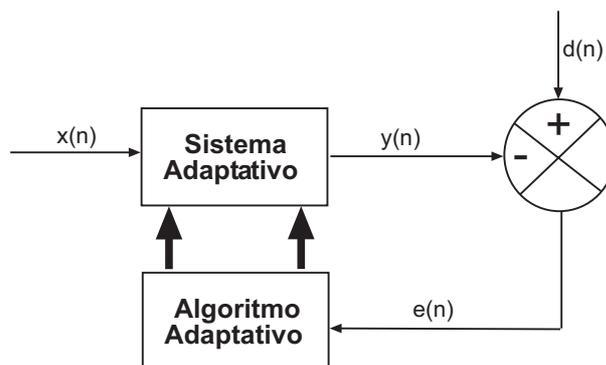


Figura 7.1: Esquema de un sistema adaptativo.

Por lo comentado hasta ahora, los sistemas adaptativos serán variante-temporales y, por tanto, no se podrán utilizar ninguna de las transformadas vistas en este libro. En ese sentido, los métodos de análisis discretos no sirven en estos sistemas salvo en casos muy puntuales. A este inconveniente se une que las relaciones entrada-salida de este tipo de sistemas pueden ser no lineales. Esto conlleva que los sistemas adaptativos necesitan procedimientos

matemáticos avanzados para su análisis.

7.1.1. Aplicaciones de los sistemas adaptativos

Los sistemas adaptativos se pueden utilizar en una serie de estructuras que se detallarán a continuación. En cada una de ellas se proporcionará una serie de aplicaciones de dicha estructura. Es importante recalcar que, hasta el momento, no se ha comentado nada sobre la estructura ni funcionamiento de estos sistemas. Así pues todo lo que se va a comentar a continuación es general para todo tipo de sistema adaptativo (FIR, IIR, red neuronal, etc).

Estructura directa

El esquema de esta estructura es el que se detalla en la Fig. 7.2. A la hora de analizar cualquier sistema adaptativo, el punto clave a tener en cuenta es que se intenta minimizar el valor del error cuadrático medio o cualquier otra función monótona creciente del error. En este caso, éste objetivo se conseguirá cuando la señal de salida del filtro adaptativo sea igual a la señal de salida del sistema desconocido. Como los dos sistemas tienen la misma entrada y presentan la misma salida tenemos identificado el sistema desconocido; la función de transferencia del sistema desconocido es la del sistema adaptativo para dichas entradas. Evidentemente la aplicación más inmediata es su uso en la identificación de sistemas. En la sección de problemas resueltos con MATLAB se verá como se puede utilizar esta estructura para diseñar cualquier respuesta en frecuencia.

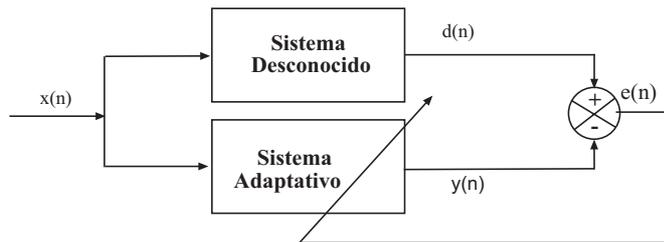


Figura 7.2: Estructura directa de un sistema adaptativo.

Estructura inversa

El esquema de esta estructura es el que se detalla en la Fig. 7.3. Al igual que ocurría en el caso anterior hay que centrarse en lo que persigue el sistema adaptativo: la minimización del error cometido por dicho sistema. Esto ocurrirá cuando la señal de salida del filtro adaptativo $y(n)$ sea igual a la señal deseada que, en esta estructura, es igual a $x(n)$. El objetivo del sistema adaptativo es “deshacer” lo que hace el sistema desconocido. En teoría de sistemas esta acción equivale a decir que el sistema adaptativo tiene como función de transferencia la inversa del sistema desconocido. Una aplicación típica de esta estructura se encuentra en la ecualización de canales.

En cualquier comunicación se tiene un emisor, canal, receptor y, por supuesto, un mensaje. El mensaje se verá distorsionado por el canal de transmisión, y por tanto, el receptor tendrá que eliminar la actuación del canal sobre dicho mensaje para obtener el mensaje original. Las fuentes de distorsión de un canal de comunicaciones son varias: distorsión de la señal, introducción de ruido, atenuación, interferencia entre símbolos (*Inter-Symbol*

Interference, ISI), decaimiento, etc. Por tanto, en problemas de ecualización de canales se trata de identificar la función de transferencia del canal y determinar un sistema cuya función de transferencia sea la inversa de dicho canal. Por las características de muchos canales de transmisión esa función de transferencia cambia con el tiempo y, por tanto, se necesita un sistema que se adapte a dichos cambios. Un sistema adaptativo es ideal en este tipo de situaciones.

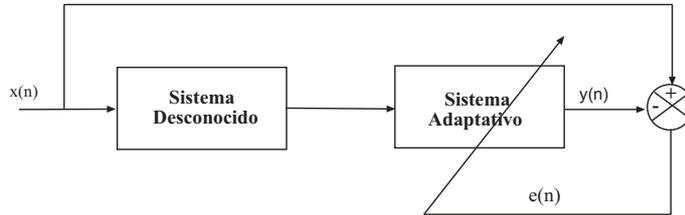


Figura 7.3: Estructura inversa de un sistema adaptativo.

Predictor

Esta estructura se utiliza en modelos de predicción y su esquema se presenta en la Fig. 7.4.

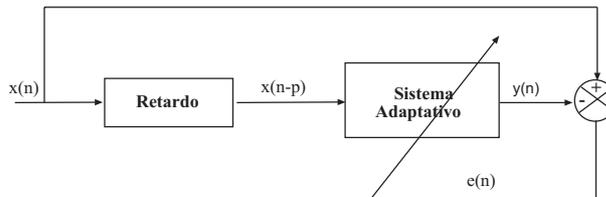


Figura 7.4: Esquema de un sistema adaptativo usado como predictor.

La salida del filtro adaptativo utiliza las muestras anteriores de la señal $x(n)$ para determinar la salida $y(n)$. Esto es,

$$y(n) = f(x(n-p), x(n-p-1), \dots). \quad (7.1)$$

El objetivo del sistema adaptativo es hacer que $y(n) = x(n)$ por lo que se tendría entonces:

$$x(n) = f(x(n-p), x(n-p-1), \dots). \quad (7.2)$$

Si se piensa el significado de la última expresión queda claro el funcionamiento de este sistema. Se trata de realizar una predicción del valor futuro, n_0 , de la señal, $x(n_0)$, en función de las muestras anteriores de dicha señal, $x(n)$ con $n < n_0$.

Esta estructura tiene un uso directo en el diseño de sistemas de control ya que si somos capaces de predecir la magnitud a controlar, podremos modificarla (controlarla) para que muestre una serie de características deseadas. Su utilización en el campo del control ha sido tan amplia que se tiene una rama de esta área del conocimiento conocida como *control adaptativo y neuronal*.

Cancelador activo de ruido

Los pasos a seguir a la hora de filtrar una señal contaminada con ruido aditivo son siempre los mismos. La señal que se tiene a nivel temporal, que es la suma de la señal que

se quiere obtener y el ruido que la interfiere, se transforma de dominio. Se abandona el terreno temporal y se traslada la información a otro dominio, por ejemplo el frecuencial. En dicho dominio la señal y el ruido están separados y se puede aplicar un filtro quedando el ruido eliminado. Finalmente se vuelve al terreno temporal donde ahora sólo se tiene la señal de interés. Todo este proceso queda reflejado en la Fig. 7.5. Este diagrama tiene un problema fácilmente reconocible: ¿qué ocurre si el contenido espectral del ruido y de la señal que se quiere obtener están solapados? En este caso la aplicación de filtros selectivos en frecuencia para eliminar el ruido no son aplicables.

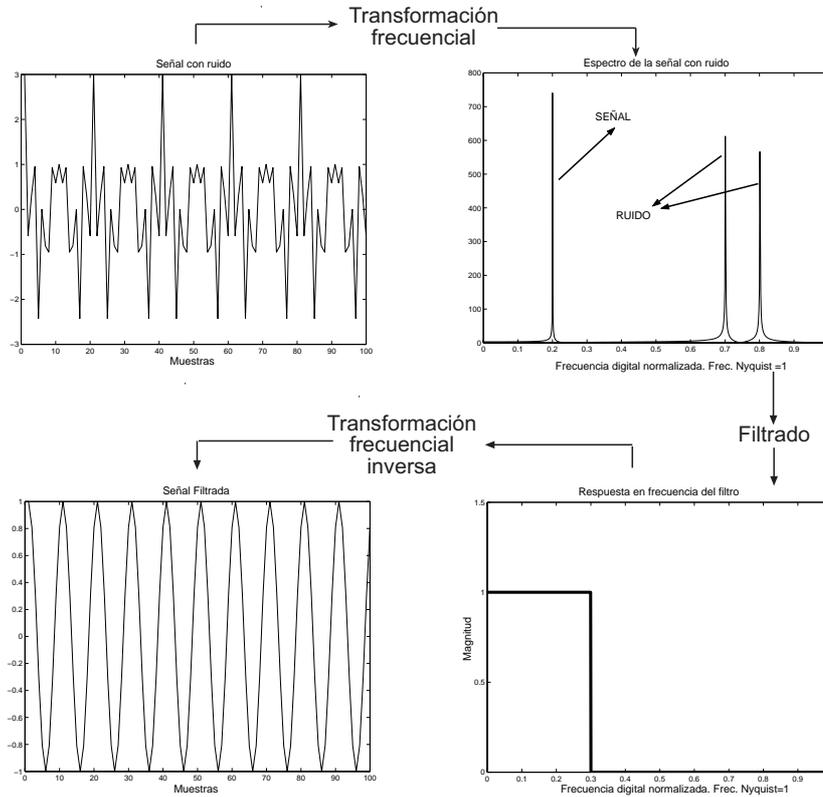


Figura 7.5: Esquema de un filtrado selectivo en frecuencia.

Una de las alternativas para ser utilizadas en este caso es el cancelador activo de ruido (ANC)¹ cuyo esquema se muestra en la Fig. 7.6. Aquí $s(n)$ es la señal que se quiere obtener (deseada), r_0 es el ruido que afecta a dicha señal y r_1 es un ruido correlacionado con el anterior.

De esta forma, el error cuadrático en el instante n cometido por el sistema adaptativo será,

$$e^2(n) = (d(n) - y(n))^2 = (s(n) + r_0(n) - f(r_1(n)))^2, \quad (7.3)$$

donde $f(r_1(n))$ es la salida del filtro adaptativo. Dada la nula correlación entre $s(n)$ y $r_1(n)$, se puede decir que el sistema modela la señal de ruido $r_0(n)$ una vez minimizado este error cuadrático. En este caso, la señal de error es $s(n)$ que es, justamente, la señal que se quiere obtener. Resulta importante destacar que no se habla en ningún momento de

¹N. de AA. En función de campo de aplicación de este tipo de estructuras, se denominan *canceladores activos de ruido* o bien *canceladores adaptativos de ruido*. En el presente texto hemos preferido emplear la primera forma.

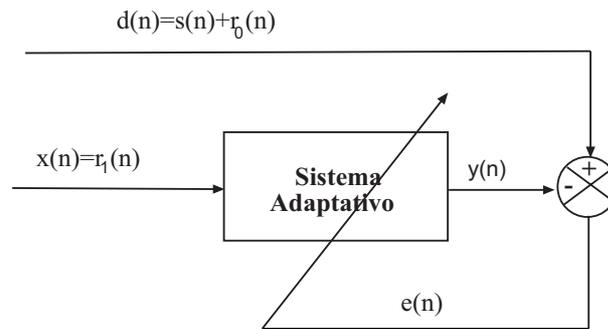


Figura 7.6: Esquema básico de un cancelador activo de ruido.

transformaciones en frecuencia y que el punto clave es la correlación entre fuentes de ruido así como la estimación de que no existe relación entre la señal de ruido y la señal que se quiere obtener.

7.1.2. Algoritmos adaptativos. Algoritmo LMS

Entre los algoritmos adaptativos más extendidos se encuentra la familia de mínimos cuadrados, LMS (“*Least Mean Square*”). Estos algoritmos se obtienen usando la regla delta para la minimización iterativa de funciones. El funcionamiento de esta regla es muy intuitivo; se parte de unos valores de los parámetros de la función (en principio aleatorios) y, a partir de dichos valores, los parámetros del sistema se acercan a los óptimos correspondientes al mínimo de la función. El problema consiste, lógicamente, en determinar la dirección de dicho mínimo. Para ello se echa mano de cálculo vectorial, donde la dirección del mínimo coincide con la opuesta del gradiente de la función. La razón estriba en que la dirección del gradiente apunta al máximo de la función. Según todo lo dicho, la *regla delta* para el ajuste de los parámetros del filtro \mathbf{a} vendría dada por la expresión

$$\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{a}_n - \mu \frac{\partial J}{\partial \mathbf{a}_n}, \quad (7.4)$$

donde J es la función que define el comportamiento del sistema adaptativo (normalmente se considera el error cuadrático medio), μ es un número real positivo, conocido como *constante de adaptación*, que controla el incremento de los parámetros \mathbf{a}_n en cada iteración del ajuste n . Lógicamente, si la constante μ es alta, el incremento será alto y la velocidad de convergencia del sistema adaptativo hacia el sistema óptimo aumentará. El problema radica en que un aumento en el valor de la constante de adaptación puede conllevar que el sistema se vuelva inestable. Este descenso por gradiente queda reflejado de forma esquemática en la Fig. 7.7.

En el caso de la familia de algoritmos adaptativos LMS la función a minimizar es el error instantáneo al cuadrado, es decir:

$$J = e^2(n), \quad (7.5)$$

donde $e(n)$ es el error cometido en el instante n y se define como la diferencia entre la señal deseada, $d(n)$, y la salida del filtro adaptativo en el instante n , $y(n)$, es decir:

$$J = (d(n) - y(n))^2. \quad (7.6)$$

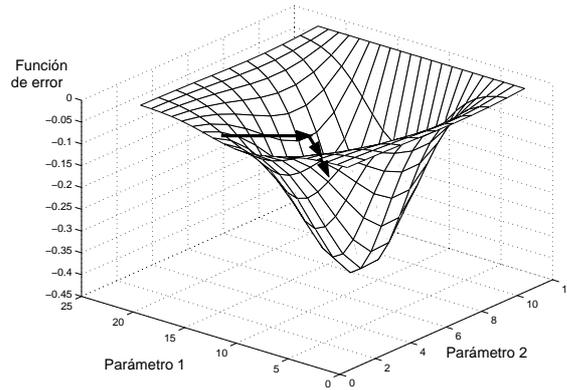


Figura 7.7: Esquema del descenso por gradiente sobre la superficie de la función de error o coste en función de los parámetros.

A continuación se obtendrán las ecuaciones de actualización de un filtro adaptativo de tipo FIR (*“Finite Impulse Response”*). Las razones se deben a su sencillez y a que otros tipos de filtro (IIR, Volterra, etc.) quedan fuera del planteamiento del presente texto. La salida del filtro adaptativo se determina convolucionando la respuesta impulsional del filtro adaptativo con la entrada:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{L-1} w_n(k)x(n-k) \quad (7.7)$$

Siendo $w_n(k)$ el coeficiente k de la respuesta impulsional en el instante n y $x(n)$ la entrada en dicho instante. Para mayor sencillez en las ecuaciones que se van a determinar se definen los vectores de pesos y entradas de la siguiente forma:

$$\mathbf{w}_n = [w_n(0), w_n(1), \dots, w_n(L-1)]^T, \mathbf{x}_n = [x(0), x(1), \dots, x(L-1)]^T. \quad (7.8)$$

donde el superíndice T indica trasposición. De esta forma la salida del filtro queda definida como

$$y(n) = \mathbf{w}_n^T \cdot \mathbf{x}_n. \quad (7.9)$$

La función de coste desarrollada sería

$$J = E\{e^2(n)\} = E\left\{(d(n) - \mathbf{w}_n^T \cdot \mathbf{x}_n)^2\right\} = E\left\{\left(d(n) - \sum_{k=0}^{L-1} w_n(k)x(n-k)\right)^2\right\} \quad (7.10)$$

Para la actualización de los parámetros hay que aplicar la regla delta definida en este caso particular como

$$\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{w}_n - \mu \frac{\partial J}{\partial \mathbf{w}_n}. \quad (7.11)$$

Tenemos que determinar en primer lugar el término de gradiente que aparece en la última expresión

$$\frac{\partial J}{\partial w_n(k)} = \frac{\partial E\{e^2(n)\}}{\partial w_n(k)} = 2e(n) \frac{\partial e(n)}{\partial w_n(k)} \quad (7.12)$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial e(n)}{\partial \mathbf{w}_n} = \frac{\partial E\{d(n) - \sum_{s=0}^{L-1} w_n(s)x(n-s)\}}{\partial w_n(k)} = -x(n-k) \quad (7.13)$$

se llega a

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{w}_n} = \frac{\partial E\{e^2(n)\}}{\partial w_n(k)} = -2e(n)x(n-k). \quad (7.14)$$

Sustituyendo ahora en la expresión que define la regla delta, se tiene la regla de actualización de los coeficientes del filtro adaptativo regido por el LMS:

$$w_{n+1}(k) = w_n(k) + 2\mu e(n)x(n-k), \quad 0 \leq k \leq L-1. \quad (7.15)$$

Utilizando notación vectorial se llega a:

$$\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{w}_n + 2\mu e(n)\mathbf{x}_n \quad (7.16)$$

Así pues, un filtro adaptativo de tipo FIR basado en el LMS tendría la siguientes etapas en su funcionamiento:

1. Inicialización de los coeficientes del filtro adaptativo.

2. Determinación de la salida del filtro:

$$y(n) = \mathbf{w}_n^T \cdot \mathbf{x}_n$$

3. Determinación del error del sistema:

$$e(n) = d(n) - y(n)$$

4. Actualización de los coeficientes del filtro

$$\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{w}_n + \alpha e(n)\mathbf{x}_n$$

Donde se ha englobado el parámetro 2μ en el parámetro α . Destacar que el procedimiento desarrollado, *regla delta*, es totalmente general de forma que se puede utilizar en cualquier estructura donde se defina un índice de funcionamiento del sistema. De este modo, la ecuación de actualización de los parámetros de dicha estructura se convierte en un ejercicio de derivadas parciales.

7.2. Problemas resueltos

1. Demuestre, usando el desarrollo en serie de Taylor de $e^2(n+1)$ que el algoritmo LMS normalizado definido como

$$\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{w}_n + \alpha \frac{e(n)}{\|\mathbf{x}_n\|^2}$$

es el óptimo para minimizar la función de error $J = e^2(n)$.

Resolución:

Se sabe que en el algoritmo LMS se tienen las siguientes ecuaciones

$$y(n) = \sum_{k=0}^{L-1} w_n(k)x(n-k) \quad (7.17)$$

$$e(n) = d(n) - y(n) \quad (7.18)$$

$$w_{n+1}(k) = w_n(k) + \alpha e(n)x(n-k) \quad (7.19)$$

donde $y(n)$ es la salida del filtro adaptativo, $d(n)$ es la señal deseada, $w_n(k)$ son los coeficientes del filtro adaptativo en el instante n y $x(n)$ es la señal de entrada al filtro.

Para mayor facilidad en la demostración, se trabajará con vectores; así se definen los vectores de pesos y la entrada como, respectivamente

$$\mathbf{w}_n = [w_n(0), w_n(1), \dots, w_n(L-1)]^T \quad (7.20)$$

$$\mathbf{x}_n = [x(n), \dots, x(n-L+1)]^T. \quad (7.21)$$

donde el superíndice T indica trasposición. De acuerdo con esto, se tendrá:

$$y(n) = \mathbf{w}_n^T \cdot \mathbf{x}_n \quad (7.22)$$

$$e(n) = d(n) - y(n) \quad (7.23)$$

$$\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{w}_n + \alpha e(n) \cdot \mathbf{x}_n \quad (7.24)$$

donde (\cdot) indica el producto escalar entre vectores.

Desarrollando $e(n+1)$ en series de Taylor, llegamos a:

$$e(n+1) \simeq e(n) + \frac{\partial e(n)}{\partial \mathbf{w}_n} \Delta \mathbf{w}_n + \frac{\partial^2 e(n)}{\partial \mathbf{w}_n^2} (\Delta \mathbf{w}_n)^2 + \dots \quad (7.25)$$

A partir de las ecuaciones (7.22) y (7.23) se puede inferir

$$\frac{\partial e(n)}{\partial \mathbf{w}_n} = -\mathbf{x}_n^T, \quad (7.26)$$

y a partir de la ecuación (7.24) llegamos a

$$\Delta \mathbf{w}_n = \alpha e(n) \mathbf{x}_n. \quad (7.27)$$

Si α es muy pequeña, se puede hacer la aproximación de considerar sólo el término de la primera derivada en el desarrollo en serie de Taylor, llegando entonces a

$$e(n+1) \simeq e(n) - \mathbf{x}_n^T e(n) \alpha \mathbf{x}_n = e(n)(1 - \alpha \|\mathbf{x}_n\|^2). \quad (7.28)$$

Elevando al cuadrado para su inclusión en la fórmula de la regla delta, se obtiene

$$e^2(n+1) = e^2(n)[1 - \alpha\|\mathbf{x}_n\|^2]^2. \quad (7.29)$$

Derivando parcialmente esta expresión respecto de α , e igualando a 0, se llega al α óptimo (α_0) que minimiza $e^2(n+1)$:

$$\frac{\partial e^2(n+1)}{\partial \alpha} = -2e^2(n)[1 - \alpha\|\mathbf{x}_n\|^2] \cdot \|\mathbf{x}_n\|^2 = 0 \implies \alpha_0 = \frac{1}{\|\mathbf{x}_n\|^2}. \quad (7.30)$$

Esta conclusión la podríamos haber derivado de la ecuación (7.28) ya que $e^2(n+1) \geq 0$ y vale cero cuando $\alpha = \frac{1}{\|\mathbf{x}_n\|^2}$. ★ ★

2. Una Función de Base Radial, *Radial Basis Function* (RBF), es una red neuronal que tiene la estructura mostrada en la Fig. 7.8, donde cada una de las neuronas de la capa oculta realiza la operación

$$y_k = e^{-\frac{\|\mathbf{x}_n - \mathbf{c}_k\|^2}{2\sigma_k^2}},$$

siendo \mathbf{x}_n el vector de entrada en el instante n , \mathbf{c}_k el vector de centros y σ_k^2 la varianza asignada a cada centro. La salida de la RBF se calcula como una combinación lineal de las salidas de la capa oculta, es decir

$$o(n) = \sum_{k=1}^N w_n(k)y_k,$$

siendo $w_n(k)$ el peso k de la red en el instante n . Se pide determinar, usando la *regla delta*, las expresiones de actualización de los pesos, centros y varianzas de esta red neuronal.

Resolución:

La regla delta tiene como misión la obtención del mínimo de una función aplicando un procedimiento iterativo. La función a minimizar en nuestro caso será

$$J = e^2(n) = (d(n) - o(n))^2 \quad (7.31)$$

donde $e(n)$ es el error cometido por la red en el instante n . La regla delta plantea la siguiente actualización de un parámetro λ :

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n - \alpha \frac{\partial J}{\partial \lambda_n} \quad (7.32)$$

siendo α un coeficiente real conocido como constante de adaptación. Esta regla se usará para determinar la actualización de los parámetros de la red, en este caso pesos, centros y varianzas.

- **Ajuste de los pesos w_n .** En la RBF se tienen las siguientes ecuaciones

$$y_s = e^{-\frac{\|\mathbf{x}_n - \mathbf{c}_s\|^2}{2\sigma_s^2}} \quad (7.33)$$

$$o(n) = \sum_{s=1}^N w_n(s)y_s \quad (7.34)$$

$$J = e^2(n) = (d(n) - o(n))^2 \quad (7.35)$$

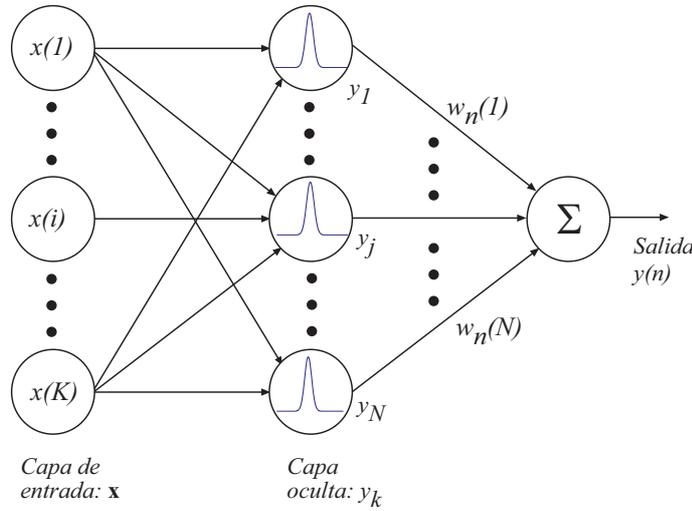


Figura 7.8: Esquema de una Función de Base Radial (RBF) compuesta por una capa de entrada que recibe las señales que propaga a través de una capa oculta formada por un conjunto de nodos o neuronas con función de activación Gaussiana y cuyo procesamiento propaga al nodo de salida.

Aplicando la regla delta para los pesos, se tendría:

$$w_{n+1}(s) = w_n(s) - \alpha \frac{\partial J}{\partial w_n(s)} = -2e(n)y_s \quad (7.36)$$

con lo que

$$w_{n+1}(s) = w_n(s) + 2\alpha e(n)y_s \quad (7.37)$$

Esta ecuación es equivalente al algoritmo LMS de actualización de pesos en un filtro adaptativo.

- **Ajuste de los centros \mathbf{c}_n .** Si se plantea la actualización para los centros, se tiene:

$$\mathbf{c}_k^{n+1} = \mathbf{c}_k^n - \alpha \frac{\partial J}{\partial \mathbf{c}_k^n}. \quad (7.38)$$

Si ahora se aplica la regla de la cadena para derivar $\frac{\partial J}{\partial \mathbf{c}_k^n}$,

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{c}_k^n} = \frac{\partial J}{\partial o(n)} \frac{\partial o(n)}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial \mathbf{c}_k^n}, \quad (7.39)$$

y definiendo

$$u_s = \frac{\|\mathbf{x}_n - \mathbf{c}_s\|^2}{2\sigma_s^2}, \quad (7.40)$$

se tendría

$$y_k = e^{-u_k}. \quad (7.41)$$

Ahora se puede volver a aplicar la regla de la cadena sobre la derivada parcial siguiente:

$$\frac{\partial y_k}{\partial \mathbf{c}_k^n} = \frac{\partial y_k}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial \mathbf{c}_k^n}, \quad (7.42)$$

donde a partir de las Ecs. (7.35), (7.34), (7.41) y (7.40) se obtiene, respectivamente:

$$\frac{\partial J}{\partial o(n)} = -2e(n) \quad (7.43)$$

$$\frac{\partial o(n)}{\partial y_k} = w_n(k) \quad (7.44)$$

$$\frac{\partial y_k}{\partial u_k} = e^{-u_k} \cdot 1 = -y_k \quad (7.45)$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial \mathbf{c}_k} = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{c}_k}{\sigma_k^2} \cdot (-1) \quad (7.46)$$

Utilizando todas estas derivadas, se puede escribir:

$$\mathbf{c}_k^{n+1} = \mathbf{c}_k^n + \gamma \cdot e(n) \cdot w_n(k) \cdot y_k \cdot \left[\frac{\mathbf{x} - \mathbf{c}_k}{\sigma_k^2} \right], \quad (7.47)$$

donde se han englobado todos los factores constantes en el parámetro γ .

- **Actualización de las varianzas** $(\sigma_k^2)_n$. Aplicando la regla delta de nuevo para obtener la actualización de las varianzas se tiene:

$$(\sigma_k^2)_{n+1} = (\sigma_k^2)_n - \alpha \frac{\partial J}{\partial (\sigma_k^2)_n}. \quad (7.48)$$

Para la obtención de la derivada que aparece en la última ecuación habría que hacer las mismas derivadas que aparecen en las ecuaciones (7.39) y (7.42), cambiando la última por $\frac{\partial u_k}{\partial (\sigma_k^2)_n}$. Se tendría entonces que

$$(\sigma_k^2)_n = \frac{\partial J}{\partial o(n)} \frac{\partial o(n)}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial (\sigma_k^2)_n}. \quad (7.49)$$

Calculando la última derivada a partir de (7.40), se tiene que

$$\frac{\partial u_k}{\partial (\sigma_k^2)_n} = -\frac{\|\mathbf{x}_n - \mathbf{c}_k\|^2}{2((\sigma_k^2)_n)^2}. \quad (7.50)$$

Se llega entonces a la siguiente actualización de las varianzas de los centros:

$$(\sigma_k^2)_{n+1} = (\sigma_k^2)_n + \hat{\gamma} e(n) \cdot w_n(k) \cdot y_k \cdot \frac{\mathbf{x} - \mathbf{c}_k}{((\sigma_k^2)_n)^2}, \quad (7.51)$$

donde en $\hat{\gamma}$ se han englobado, de nuevo, todas las constantes.



3. Dado el sistema adaptativo de la Fig. 7.9, con un sólo peso y regido por el algoritmo LMS, se pide:
- La función de transferencia $H(z) = \frac{E(z)}{Y(z)}$, ¿qué respuesta en frecuencia presenta?
 - Realizar lo mismo para $H(z) = \frac{E(z)}{D(z)}$.
 - Si $d(n)$ es una constante de valor k , ¿qué estimación hace el sistema adaptativo de la señal deseada?
 - Si la constante de adaptación varía en cada instante según la siguiente expresión $\alpha = \frac{1}{n+1}$, determine el significado del peso del sistema adaptativo.

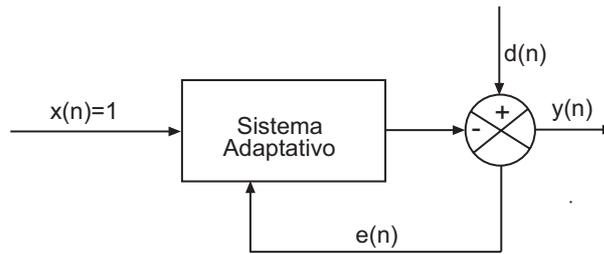
Resolución:

Figura 7.9: Esquema del sistema planteado en el ejercicio 3. La señal de error $e(n)$ se emplea para ajustar los pesos del sistema adaptativo.

- a) El sistema adaptativo planteado es uno de los pocos donde se pueden aplicar Transformadas Z. Además, la interpretación del sistema adaptativo es sencilla pudiendo intuir el comportamiento de dicho sistema. En efecto, del esquema mostrado en la Fig. 7.9 se observa que la salida del sistema adaptativo, como mucho, modelizará (o intentará modelizar) el valor medio de la señal deseada. Si se piensa en términos de descomposición de Fourier esta conclusión es inmediata. Seguidamente se determinará la función de transferencia $H(z) = \frac{E(z)}{Y(z)}$. Se tienen las siguientes ecuaciones para nuestro caso particular (un sólo peso y entrada constante de valor 1):

$$y(n) = w(n) \quad (7.52)$$

$$e(n) = d(n) - y(n) = d(n) - w(n) \quad (7.53)$$

Si se aplica la ecuación (7.53) sobre la actualización de los pesos,

$$w(n+1) = w(n) + \alpha e(n)x(n) \quad (7.54)$$

se obtiene

$$w(n+1) = w(n) + \alpha(d(n) - w(n)) = w(n)(1 - \alpha) + \alpha d(n) \quad (7.55)$$

ya que $x(n) = 1$. La ecuación de actualización de pesos es lineal e invariante temporal, por lo que se pueden aplicar Transformadas Z, más concretamente, la propiedad del retardo temporal de éstas, llegando a

$$W(z) = (1 - \alpha)W(z)z^{-1} + \alpha z^{-1}D(z), \quad (7.56)$$

que conduce a

$$W(z) = \frac{\alpha z^{-1}}{1 - (1 - \alpha)z^{-1}} D(z) \quad (7.57)$$

A partir de la ecuación (7.52) se tiene que $Y(z) = W(z)$, mientras que a partir de la ecuación (7.53) se puede obtener $E(z) = D(z) - W(z)$. Por tanto $H(z) = \frac{E(z)}{Y(z)}$ se calculará como,

$$H(z) = \frac{D(z) - W(z)}{W(z)} = \frac{D(z)}{W(z)} - 1 \quad (7.58)$$

Usando la ecuación (7.57), se obtiene

$$H(z) = \frac{D(z)}{W(z)} - 1 = \frac{1 - (1 - \alpha)z^{-1}}{\alpha z^{-1}} - 1 = \frac{z - 1}{\alpha} \quad (7.59)$$

La función de transferencia presenta un cero en $z = 1$ por lo que elimina la componente de continua; es decir, la señal de error $e(n) = d(n) - y(n)$ no tiene componente de continua. Por tanto, concluimos que el sistema adaptativo estima la componente de continua de $d(n)$ de tal forma que la señal de error no tiene dicha componente.

- b) Para determinar la función de transferencia $H(z) = \frac{E(z)}{D(z)}$ se utiliza,

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{D(z) - W(z)}{D(z)} = 1 - \frac{W(z)}{D(z)} = \\ &= 1 - \frac{\alpha z^{-1}}{1 - (1 - \alpha)z^{-1}} = \frac{1 - z^{-1}}{1 - (1 - \alpha)z^{-1}} = \frac{z - 1}{z - (1 - \alpha)} \end{aligned} \quad (7.60)$$

Esta función de transferencia presenta un polo en $1 - \alpha$ y un cero en $z = 1$. Si $\alpha \simeq 0$, entonces se tiene la disposición de polos/ceros que se muestra en la Fig. 7.10. La respuesta en frecuencia de este sistema se muestra en la Fig. 7.11. La frecuencia de corte f_c del filtro depende del valor de la constante α ; cuanto más cercano a 1 esté su valor, menor será f_c .

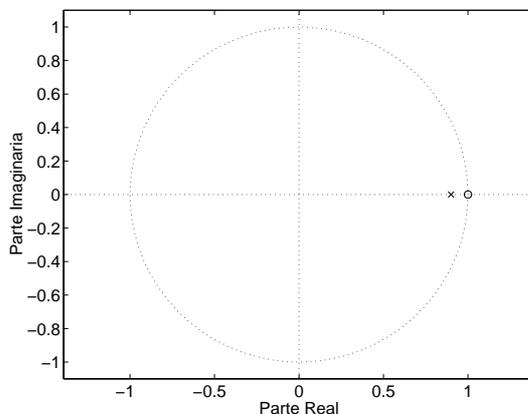


Figura 7.10: Disposición del polo/cero del sistema adaptativo del ejercicio 3.

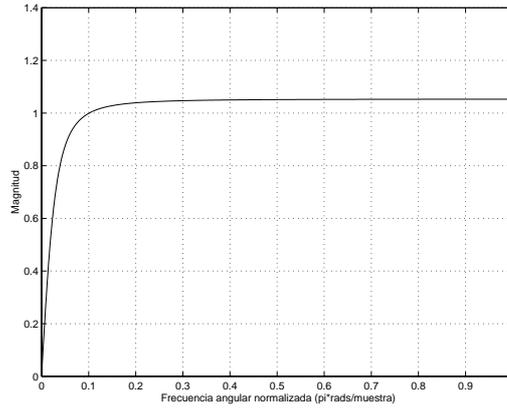


Figura 7.11: Respuesta en frecuencia del sistema adaptativo del ejercicio 3.

Este sistema elimina la componente de continua de la señal dejando el resto de componentes (en magnitud) inalteradas. Una aplicación típica de este sistema se presenta en la parte práctica con MATLAB de este capítulo y se trata de eliminar en un electrocardiograma las variaciones de la línea basal. Este tipo de interferencia es debida a la respiración del paciente que modula la señal electrocardiográfica.

- c) Considerando $d(n) = k$ se puede escribir, a partir de la Ec. (7.53),

$$e(n+1) = d(n+1) - y(n+1) = d(n+1) - w(n+1) \quad (7.61)$$

Como $d(n+1) = d(n) = k$ y a partir de las Ecs (7.53) y (7.55), se puede escribir:

$$e(n+1) = d(n) - [w(n) + \underbrace{\alpha(d(n) - w(n))}_{e(n)}] = [d(n) - w(n)][1 - \alpha] = e(n)[1 - \alpha] \quad (7.62)$$

y, por tanto,

$$\frac{e(n+1)}{e(n)} = 1 - \alpha. \quad (7.63)$$

Iterando esta expresión se llega a $e(k) = (1 - \alpha)^k e(0)$, que es una relación interesante pues proporciona información acerca de:

- *Estabilidad.* El sistema será estable si $|1 - \alpha| < 1$ por lo que se deberá cumplir $0 < \alpha < 2$.
 - *Velocidad de convergencia.* Conforme α esté más cerca a 1, más rápidamente tenderá el error a 0.
- d) Si se toma una dependencia temporal de la constante de adaptación α de forma que $\alpha(n) = 1/(n+1)$, se tiene la siguiente ecuación de actualización

$$w(n+1) = w(n) + \frac{1}{n+1} \cdot (d(n) - w(n)), \quad (7.64)$$

por lo que

$$(n+1)w(n+1) = nw(n) + d(n). \quad (7.65)$$

Si se aplica de forma iterativa esta expresión, se obtiene, inicializando el peso a 0,

$$\begin{aligned}
 (n+1)w(n+1) &= nw(n) + d(n) \\
 nw(n) &= (n-1)w(n-1) + d(n-1) \\
 (n-1)w(n-1) &= (n-2)w(n-2) + d(n-2) \\
 &\vdots \\
 2w(2) &= w(1) + d(1) \\
 w(1) &= d(0).
 \end{aligned} \tag{7.66}$$

Sumando todas las expresiones anteriores,

$$(n+1)w(n+1) = \sum_{k=0}^n d(k) \implies w(n+1) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n d(k) \tag{7.67}$$

El peso $w(n+1)$ es el valor medio de la señal $d(n)$, por lo que de nuevo aparece la estimación de la componente de continua.



4. Un algoritmo muy extendido es el conocido como *leaky-LMS*, donde el objetivo es minimizar la función de coste $J = e^2(n) + \frac{\lambda}{2} \|\mathbf{w}_n\|^2$, siendo \mathbf{w}_n el vector de pesos en el instante n . Determinar
- La ecuación de adaptación de los pesos del filtro adaptativo. ¿Qué papel juega el parámetro λ ?
 - Si se considera el mismo caso que en el problema anterior, esto es, un filtro con un único peso y entrada constante de valor 1, se pide determinar la función de transferencia $G(z) = \frac{E(z)}{D(z)}$, donde $E(z)$ es la TZ de la secuencia de error y $D(z)$ es la TZ de la secuencia deseada. ¿Qué conclusiones se pueden sacar sobre su comportamiento frecuencial?

Resolución:

- a) En un sistema adaptativo se tienen las siguientes ecuaciones

$$y(n) = \mathbf{w}_n^T \cdot \mathbf{x}_n = \sum_{k=0}^{L-1} w_n(k) \cdot x(n-k), \tag{7.68}$$

con $\mathbf{w}_n^T = [w_n(0), \dots, w_n(L-1)]$ y $\mathbf{x}_n^T = [x(n), \dots, x(n-L+1)]$ donde T indica la operación de trasposición. Las secuencias de error y de actualización de los pesos vienen regidas por:

$$e(n) = d(n) - y(n) \tag{7.69}$$

$$\Delta \mathbf{w}_n = -\alpha \nabla_{\mathbf{w}_n} J. \tag{7.70}$$

Además, en el enunciado del problema se proporciona la expresión de la función de coste:

$$J = |e_n|^2 + \frac{\lambda}{2} \|\mathbf{w}_n\|^2 = |e_n|^2 + \frac{\lambda}{2} \sum_{k=0}^{L-1} (w_n(k))^2. \tag{7.71}$$

Aplicando la regla delta a una determinada componente del vector \mathbf{w}_n se tiene,

$$\begin{aligned}\Delta w_n(s) &= -\alpha \frac{\partial J}{\partial w_n(s)} = -\alpha \left[\frac{\partial e^2(n)}{\partial w_n(s)} + \frac{\lambda}{2} \frac{\partial}{\partial w_n(s)} \left(\sum_{k=0}^{L-1} (w_n(k))^2 \right) \right] \\ &= -\alpha \left[2e(n)(-1) \frac{\partial y(n)}{\partial w_n(s)} + \frac{\lambda}{2} 2w_n(s) \right]\end{aligned}\quad (7.72)$$

Aplicando ahora la ecuación (7.68) para determinar la derivada parcial que aparece en la última ecuación se llega a

$$\Delta w_n(s) = 2\alpha e(n)x(n-s) - \lambda\alpha w_n(s), \quad (7.73)$$

que, expresandola en forma vectorial tiene la forma

$$\Delta \mathbf{w}_n = 2\alpha e(n)\mathbf{x}_n - \lambda\alpha \mathbf{w}_n. \quad (7.74)$$

El parámetro λ controla el “decaimiento” de los pesos ya que en la expresión anterior tenemos una realimentación negativa que conduce a los pesos a anularse. Otra forma de verlo consiste en fijarse en la expresión de la función de coste donde hay que minimizar la suma de $e^2(n) + \frac{\lambda}{2} \|\mathbf{w}_n\|^2$. Aquí el parámetro λ determinará la relación entre los dos términos de tal forma que, si λ es pequeño, se “intentará” minimizar mayoritariamente el error cuadrático y si es grande, se “intentará” minimizar $\|\mathbf{w}_n\|^2$, haciendo tender los coeficientes del filtro adaptativo a 0. Por tanto, este parámetro establece un compromiso entre los errores permitidos y el tamaño de los coeficientes.

- b) En el problema anterior, se tenía el esquema de la Fig. 7.9. Ahora se pide determinar la función de transferencia $G(z) = \frac{E(z)}{D(z)}$ cuando se usa la función de coste definida en este problema. Para ello se consideran las ecuaciones siguientes del sistema adaptativo:

$$y(n) = w(n) * x(n) = w(n) \quad (7.75)$$

donde hemos tenido en cuenta que se tiene un solo peso y la entrada es constante tomando un valor de 1.

$$e(n) = d(n) - y(n) = d(n) - w(n) \quad (7.76)$$

$$w(n+1) = w(n) + \alpha e(n)x(n) - \lambda\alpha w(n) \quad (7.77)$$

Reagrupando las expresiones anteriores se llega a

$$w(n+1) = w(n) + \alpha(d(n) - w(n)) - \lambda\alpha w(n), \quad (7.78)$$

con lo que

$$w(n+1) = \alpha d(n) + w(n)[1 - \alpha - \lambda\alpha]. \quad (7.79)$$

Si ahora se toma $\beta = \alpha + \lambda\alpha = \alpha(1 + \lambda)$, la ecuación anterior se puede reescribir como

$$w(n+1) = \alpha d(n) + w(n)(1 - \beta). \quad (7.80)$$

La expresión de actualización de los pesos es muy parecida a la obtenida anteriormente ya que, tomando Transformadas Z, se obtiene

$$W(z) = \alpha D(z)z^{-1} + W(z)z^{-1}(1 - \beta), \quad (7.81)$$

de donde

$$W(z) = \frac{\alpha D(z)z^{-1}}{1 - (1 - \beta)z^{-1}} = \frac{\alpha D(z)z^{-1}}{1 - [1 - \alpha(1 + \lambda)]z^{-1}}. \quad (7.82)$$

Ahora estamos en disposición de calcular $G(z)$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{E(z)}{D(z)} = \frac{D(z) - W(z)}{D(z)} = 1 - \frac{W(z)}{D(z)} = \\ &= 1 - \frac{\alpha z^{-1}}{1 - [1 - \alpha(1 + \lambda)]z^{-1}} = \frac{1 + (\alpha\lambda - 1)z^{-1}}{1 - [1 - \alpha(1 + \lambda)]z^{-1}} \end{aligned} \quad (7.83)$$

Ahora los polos y ceros se sitúan en

- *Ceros:* $z = 1 - \alpha\lambda$
- *Polos:* $z = 1 - \alpha(1 + \lambda) = 1 - \alpha\lambda - \alpha$

tal como se muestra en la Fig. 7.12. La distancia relativa entre polo y cero no cambia $|z_{polo} - z_{cero}| = \alpha$. Sin embargo, aparecen cambios en el funcionamiento; como el cero ya no está en la circunferencia de radio unidad ya no se elimina la componente de continua como en el caso anterior. En cambio, se siguen atenuando las bajas frecuencias.

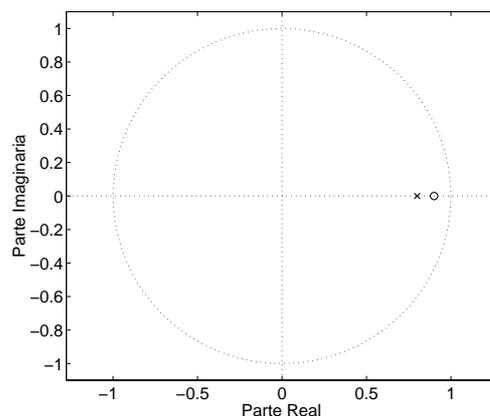


Figura 7.12: Diagrama de polos y ceros del ejercicio 4b).

5. La regla de actualización de un filtro adaptativo usando la regla de Hebb (regla no supervisada de aprendizaje) es

$$\Delta \mathbf{w}_n = \alpha \mathbf{x}_n \cdot y(n),$$

siendo \mathbf{x}_n y \mathbf{w}_n los vectores de entradas y pesos respectivamente, e $y(n)$ la salida del filtro. Demuestre que la regla de Oja, la cual viene dada por

$$\Delta \mathbf{w}_n = \alpha \mathbf{x}_n \cdot y(n) - \alpha \mathbf{w}_n \cdot y^2(n),$$

se puede obtener a partir de la anterior si, después de la actualización, se divide por la norma del vector.

Resolución:

La regla de Hebb de actualización de los pesos queda como

$$\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{w}_n + \alpha \cdot \mathbf{x}_n \cdot y(n) \quad (7.84)$$

Esta fórmula de actualización de pesos hace tender los pesos a infinito ya que se aprecia una realimentación positiva para \mathbf{w}_n al aparecer de forma implícita \mathbf{w}_n e en el término $y(n)$. Otra forma de ver esta inestabilidad es aplicando la regla delta. La ecuación (7.84) corresponde a la minimización de $-\frac{1}{2}y^2(n)$ aplicando dicha regla. Evidentemente esta función no tiene mínimo o, más bien, lo alcanza cuando \mathbf{w}_n tiende a infinito, de ahí esa inestabilidad.

La Regla de Oja se planteó para resolver la inestabilidad de la regla de Hebb, de forma que, si se divide cada vector por su norma, dicho vector tendrá norma unidad y no crecerá en cada iteración. Esto se puede expresar de la forma:

$$\mathbf{w}_{n+1} = \frac{\mathbf{w}_n + \alpha \cdot \mathbf{x}_n \cdot y(n)}{\|\mathbf{w}_n + \alpha \cdot \mathbf{x}_n \cdot y(n)\|} = (\mathbf{w}_n + \alpha \cdot \mathbf{x}_n \cdot y(n)) \cdot (\|\mathbf{w}_n + \alpha \cdot \mathbf{x}_n \cdot y(n)\|^2)^{-1/2} \quad (7.85)$$

Hay que determinar cuánto vale el término $(\|\mathbf{w}_n + \alpha \cdot \mathbf{x}_n \cdot y(n)\|^2)^{-1/2}$. Para ello calculamos primero:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w}_n + \alpha \cdot \mathbf{x}_n \cdot y(n)\|^2 &= (\mathbf{w}_n + \alpha \cdot \mathbf{x}_n \cdot y(n))^T \cdot (\mathbf{w}_n + \alpha \cdot \mathbf{x}_n \cdot y(n)) = \\ &= \|\mathbf{w}_n\|^2 + 2\alpha y(n) \mathbf{w}_n^T \cdot \mathbf{x}_n + \alpha^2 y^2(n) \mathbf{x}_n^T \mathbf{x}_n \end{aligned} \quad (7.86)$$

El primer valor vale 1 (norma del vector anterior). Además, como la constante de adaptación tomará un valor pequeño se puede despreciar el término α^2 . Se tiene entonces

$$\|\mathbf{w}_n + \alpha \cdot \mathbf{x}_n \cdot y(n)\|^2 \simeq 1 + 2\alpha y(n) (\mathbf{w}_n^T \mathbf{x}_n), \quad (7.87)$$

donde el término entre paréntesis es la salida del sistema $y(n)$, por lo que se llega finalmente a

$$\|\mathbf{w}_n + \alpha \cdot \mathbf{x}_n \cdot y(n)\|^2 \simeq 1 + 2\alpha y^2(n). \quad (7.88)$$

Utilizando la aproximación $(1+x)^N \simeq 1+Nx$ con un valor de x muy pequeño,

$$(1 + 2\alpha y^2(n))^{-1/2} \simeq 1 + 2\alpha y^2(n)(-1/2) = 1 - \alpha y^2(n). \quad (7.89)$$

Utilizando las ecuaciones (7.85) y (7.89) la actualización de pesos será:

$$\mathbf{w}_{n+1} = (\mathbf{w}_n + \alpha \mathbf{x}_n y(n))(1 - \alpha y^2(n)) = \mathbf{w}_n + \alpha \mathbf{x}_n y(n) - \alpha \mathbf{w}_n y^2(n) - \alpha^2 \mathbf{x}_n y^2(n) \quad (7.90)$$

actualización que, despreciando el término en α^2 conduce a la regla de Oja:

$$\Delta \mathbf{w}_n = \alpha \mathbf{x}_n \cdot y(n) - \alpha \mathbf{w}_n \cdot y^2(n). \quad (7.91)$$

★ ★ ★

6. La variante normalizada del LMS obtenida anteriormente se puede obtener de otra forma. Dado un cierto valor de entrada $\mathbf{x}_n = [x(n), \dots, x(n-L+1)]^T$, donde el superíndice T indica trasposición, y una señal deseada $d(n)$, hay que determinar el vector de pesos $\mathbf{w}_n = [w_n(0), \dots, w_n(l-1)]^T$, tal que se minimiza $\|\mathbf{w}_{n+1} - \mathbf{w}_n\|^2$ sujeto a las ligaduras $\mathbf{x}_n^T \cdot \mathbf{w}_{n+1} = d(n)$. Demuestre que tal procedimiento es eficaz.

Resolución:

Este es un problema de minimización de una función sujeta a una serie de ligaduras o restricciones. Aparecen entonces los multiplicadores de Lagrange que tienen en cuenta dichas ligaduras. La técnica de los *multiplicadores de Lagrange* se emplea para encontrar puntos estacionarios de una función de varias variables sujeta a una o varias restricciones. Su uso deriva del cálculo variacional y de la mecánica clásica. La función a minimizar será entonces

$$J = \|\mathbf{w}_{n+1} - \mathbf{w}_n\|^2 + \lambda(d(n) - \mathbf{w}_{n+1}^T \mathbf{x}_n), \quad (7.92)$$

donde λ es un multiplicador de Lagrange. La ecuación anterior se deriva parcialmente con respecto a \mathbf{w}_{n+1} y se iguala a 0:

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{w}_{n+1}} = 0. \quad (7.93)$$

De aquí se obtiene la condición siguiente:

$$2(\mathbf{w}_{n+1} - \mathbf{w}_n) - \lambda \mathbf{x}_n = 0, \quad (7.94)$$

con lo que

$$\mathbf{w}_{n+1} = \frac{\lambda}{2} \mathbf{x}_n + \mathbf{w}_n, \quad (7.95)$$

que equivale a

$$\mathbf{w}_{n+1} - \mathbf{w}_n = \frac{\lambda}{2} \mathbf{x}_n. \quad (7.96)$$

Sustituyendo las ecuaciones (7.95) y (7.96) en la expresión de la función a minimizar se obtiene

$$J = \|\mathbf{x}_n\|^2 \frac{\lambda^2}{4} + \lambda \left[d(n) - \left(\frac{\lambda}{2} \mathbf{x}_n + \mathbf{w}_n \right)^T \mathbf{x}_n \right], \quad (7.97)$$

de donde

$$J = \frac{\lambda^2}{4} \|\mathbf{x}_n\|^2 + \lambda \left[\underbrace{d(n) - (\mathbf{w}_n)^T \mathbf{x}_n}_{e(n)} - \frac{\lambda}{2} \|\mathbf{x}_n\|^2 \right], \quad (7.98)$$

con lo que agrupando términos se obtiene:

$$J = -\frac{\lambda^2}{4} \|\mathbf{x}_n\|^2 + \lambda e(n). \quad (7.99)$$

Derivando parcialmente J con respecto a λ e igualando a 0, se tiene

$$\frac{\partial J}{\partial \lambda} = -\frac{\lambda}{2} \|\mathbf{x}_n\|^2 + e(n) = 0, \quad (7.100)$$

con lo que

$$\lambda = \frac{2e(n)}{\|\mathbf{x}_n\|^2}. \quad (7.101)$$

Finalmente, sustituyendo esta expresión en la ecuación (7.96), se llega a,

$$\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{w}_n + \frac{2e(n)\mathbf{x}_n}{2\|\mathbf{x}_n\|^2} = \mathbf{w}_n + \frac{e(n)\mathbf{x}_n}{\|\mathbf{x}_n\|^2} \quad (7.102)$$

con lo que queda demostrado el procedimiento alternativo a la Regla de Oja propuesto.

7. Determine el algoritmo LMS en el caso que los coeficientes del filtro adaptativo y las señales de entrada sean números complejos. En este caso, la salida del filtro queda definida por la siguiente expresión $y(n) = \sum_{k=0}^{L-1} w_n^*(k)x(n-k)$, indicando $w_n^*(k)$ el conjugado de $w_n(k)$.

Resolución:

Ya que $w_n(k)$ es un número complejo se puede definir $w_n(k) = a_k + jb_k$. Por lo comentado anteriormente el error vendrá dado por

$$e(n) = d(n) - y(n) = d(n) - \sum_{k=0}^{L-1} w_n^*(k)x(n-k), \quad (7.103)$$

con $J = e(n)^2 = e(n)e^*(n)$. Derivando parcialmente J con respecto a los coeficientes del filtro se llega a:

$$\frac{\partial J}{\partial w_n(k)} = \frac{\partial e(n)}{\partial w_n(k)} e^*(n) + \frac{\partial e^*(n)}{\partial w_n(k)} e(n). \quad (7.104)$$

donde, para su resolución hay que recordar que

$$\frac{\partial}{\partial w_n(k)} = \frac{\partial}{\partial a_k} + j \frac{\partial}{\partial b_k}. \quad (7.105)$$

Además, la ecuación (7.103) conduce a

$$e^*(n) = d^*(n) - y^*(n) = d(n) - \sum_{k=0}^{L-1} w_n x^*(n-k). \quad (7.106)$$

Sustituyendo los valores de $w_k = a_k + jb_k$ en las expresiones del error y su conjugado se llega a

$$e(n) = d(n) - y(n) = d(n) - \sum_{k=0}^{L-1} (a_k - jb_k)x(n-k), \quad (7.107)$$

$$e^*(n) = d^*(n) - y^*(n) = d(n) - \sum_{k=0}^{L-1} (a_k + jb_k)x^*(n-k). \quad (7.108)$$

De las ecuaciones anteriores son inmediatas las siguientes derivadas

$$\frac{\partial e(n)}{\partial a_k} = -x(n-k), \quad (7.109)$$

$$\frac{\partial e(n)}{\partial b_k} = jx(n-k), \quad (7.110)$$

$$\frac{\partial e^*(n)}{\partial a_k} = -x^*(n-k), \quad (7.111)$$

$$\frac{\partial e^*(n)}{\partial b_k} = -jx^*(n-k). \quad (7.112)$$

Por tanto, las derivadas parciales que aparecen en la ecuación (7.104) serán igual a

$$[-x(n-k) + jx(n-k)j]e^*(n) + [-x^*(n-k) + j(-jx^*(n-k))]e(n) \quad (7.113)$$

que, reagrupando términos, conduce a

$$\frac{\partial J}{\partial w_n(k)} = -2e^*(n)x(n-k). \quad (7.114)$$

Se tiene entonces que, aplicando la regla delta,

$$\mathbf{w}_{n+1}(k) = w_n(k) - \alpha \nabla_{w_n(k)} J. \quad (7.115)$$

Finalmente se llega entonces a

$$w_{n+1}(k) = w_n(k) + 2\alpha e^*(n)x(n-k). \quad (7.116)$$

7.3. Problemas propuestos

1. Determinar la expresión que rige la actualización de los coeficientes de un filtro adaptativo cuando se usa la función de coste $J = |e(n)|$, siendo $e(n)$ el error cometido por el sistema adaptativo. Este algoritmo es conocido como la variante *signo en el error*.

2. Una de las variantes del LMS más extendidas es el conocido como *momentum LMS* cuya ecuación de actualización de los coeficientes viene dada por $\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{w}_n + \alpha e(n)\mathbf{x}_n + \mu(\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_{n-1})$. Usando el mismo esquema de la Fig. 7.9, determine:

a) La función de transferencia $H(z) = \frac{E(z)}{Y(z)}$, ¿qué respuesta en frecuencia presenta?

b) Realizar lo mismo para $H(z) = \frac{E(z)}{D(z)}$.

3. El algoritmo LMS se basa en la minimización de la función de coste $J = e^2(n)$. Sin embargo, la única condición para que una determinada función se pueda usar como elemento de guía de un sistema adaptativo es que dicha función sea monótona creciente con el error. De forma general se podría plantear la siguiente función de coste $J = |e(n)|^r$, siendo r un número real positivo. Se pide determinar:

a) La función que define la actualización de los coeficientes del filtro adaptativo si el factor r se considera constante durante la adaptación.

b) Las ecuaciones de actualización de los coeficientes del filtro y del factor r si dicho factor se adapta durante el funcionamiento del sistema adaptativo.

4. Existe una variante del sistema planteado en la Fig. 7.9 que consiste en usar como entrada la siguiente secuencia

$$x(n) = \begin{cases} 1, & n = kL \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde L es la longitud del filtro adaptativo y $k = 0, 1, 2, \dots$. Determine la ecuación que rige el error del sistema en función de la señal deseada.

5. Dada la función de coste definida por $J = w_1^2 + w_2^2 + 2w_1 + 3w_2$ se usa la regla delta para minimizarla. Determine las condiciones que debe cumplir la constante de adaptación para que el sistema no diverga.

6. Una determinada señal $x(n)$ definida como

$$x(n) = \begin{cases} \neq 0, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

se puede desarrollar en forma de exponenciales complejas de la siguiente forma

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{-j \frac{2\pi kn}{N}},$$

donde los coeficientes c_k son los términos de dicho desarrollo. Se puede definir una función de coste como

$$J = \sum_{n=0}^{N-1} (x(n) - \hat{x}(n))^2,$$

siendo $\hat{x}(n)$:

$$\hat{x}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{-j \frac{2\pi kn}{N}}.$$

Usando el algoritmo LMS para el caso de pesos y entradas complejas determine un procedimiento iterativo para determinar los coeficientes c_k . Implemente dicho procedimiento en MATLAB y compruebe los resultados obtenidos con los coeficientes de la DFT.

7.4. Prácticas con MATLAB

7.4.1. Diseño de un sistema con una determinada respuesta en frecuencia

En este ejemplo se va a utilizar un sistema adaptativo para modelizar una determinada respuesta en frecuencia. Para ello se utilizará la estructura directa estudiada en la introducción teórica de este capítulo. El primer paso es muestrear la respuesta en frecuencia que se quiere tener, esto es, hay que seleccionar una serie de frecuencias, w_k , y determinar cual es la ganancia que se quiere obtener, g_k , para dichas frecuencias. Una vez que se han definido dichas ganancias, y recordando el significado que tiene la respuesta en frecuencia de un sistema, ya se tienen las señales de entrada al filtro adaptativo y la señal deseada que serán:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{M-1} \cos(w_k n) \quad (7.117)$$

$$d(n) = \sum_{k=0}^{M-1} g_k \cos(w_k n) \quad (7.118)$$

El siguiente *“script”* en Matlab implementa esta aplicación. Los parámetros del programa son la constante de adaptación, el número de iteraciones del algoritmo adaptativo, la longitud del filtro adaptativo, las frecuencias a utilizar (deben estar entre 0 y 0.5 ya que trabajamos con frecuencias digitales normalizadas) así como las ganancias de dichas frecuencias (las ganancias y frecuencias se introducen en forma de vector).

```
% Diseño de respuesta en frecuencia mediante filtrado adaptativo
close all
clear
clc

% Introducción de las variables de interés
alpha=input('Constante de adaptación ');
l=input('Longitud del sistema adaptativo ');
n=input('Número de iteraciones ');

% Introducción de las ganancias del filtro
w=input('Vector de frecuencias normalizadas a 0.5 ');
gan=input('Vector de ganancias correspondientes a dichas frecuencias ');

% Generación de las señales deseadas y entrada al filtro
wd=2*pi*w;
temp=(0:n-1)';
mat=temp*wd;

% Señal de entrada al filtro
ent=sum(cos(mat)');

% Señal deseada al filtro

% Matriz de ganancias
long=length(gan);
matgan=ones(n,1)*gan;
```

```

sal=matgan.*cos(mat);
des=sum(sal');

% Inicialización de los coeficientes del filtro
fa=randn(1,1);

% Bucle que implementa el algoritmo LMS
ent=zeros(1,l-1) ent];

for k=1:n,
    % Determinación de la salida del filtro
    y(k)=fa*(ent(k+l-1:-1:k))';

    % Cálculo del error del sistema
    e(k)=des(k)-y(k);

    % Adaptación de los coeficientes del filtro
    fa=fa+alpha*e(k)*ent(k+l-1:-1:k);
end

% Representación de los resultados
subplot(3,1,1)
t1=linspace(0,0.5,fix(n/2));
especent=fft(ent);
plot(t1,abs(especent(1:fix(n/2))))
title('Espectro de la señal de entrada ')

subplot(3,1,2)
especdes=fft(des);
plot(t1,abs(especdes(1:fix(n/2))))
title('Espectro de la señal deseada ')

subplot(3,1,3)
y=abs(fft(y(n-999:n)));
t1=linspace(0,0.5,500);
plot(t1,y(1:500))
title('Espectro de la señal de salida del filtro ');

% Determinamos la respuesta en frecuencia del sistema adaptativo
figure
freqz(fa)

```

En la siguiente simulación se han considerado los siguientes parámetros:

- Constante de adaptación: 0.001.
- Longitud del filtro adaptativo: 40.
- Número de iteraciones 5000
- Frecuencias escogidas: [0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5].
- Ganancias: [0 0 1 1 0 0].

Según los parámetros escogidos tendríamos un sistema que actuaría como un filtro pasa-banda ya que sólo las frecuencias normalizadas 0'2 y 0'3 tienen ganancias no nulas. Los resultados obtenidos quedan representados por las figuras 7.13 y 7.14. En la primera de ellas se muestran las componentes espectrales de la señal de entrada, señal deseada y señal de salida del filtro adaptativo respectivamente. Sobre esta última representación comentar que se realiza la DFT de las últimas muestras de dicha salida para evitar la representación espectral de la salida cuando el sistema se está adaptando que, evidentemente, será diferente a la señal deseada (0'5 se corresponde con la frecuencia de Nyquist en esta gráfica).

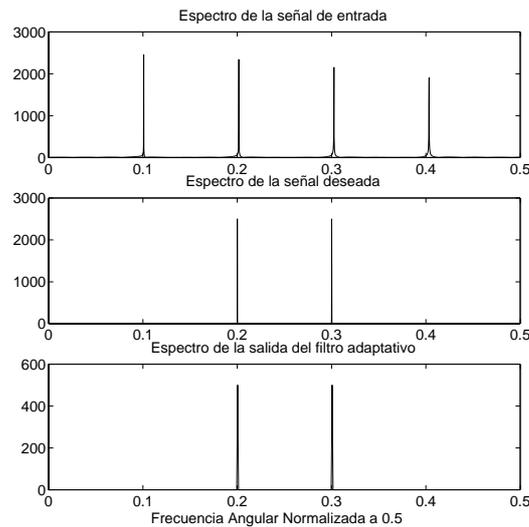


Figura 7.13: Espectros de las diferentes señales del sistema adaptativo.

La Fig. 7.14 representa la respuesta en frecuencia del filtro; se puede comprobar que esta respuesta no se acerca, ni mucho menos, a la que se supone ideal en un filtro pasa-banda. Si se quiere una mejor respuesta, la tasa de muestreo en frecuencia debe ser mayor ya que el filtro adaptativo se adapta a lo que se le pide en las frecuencias que se le indican pero, en el resto de frecuencias, en principio, tiene cualquier ganancia.

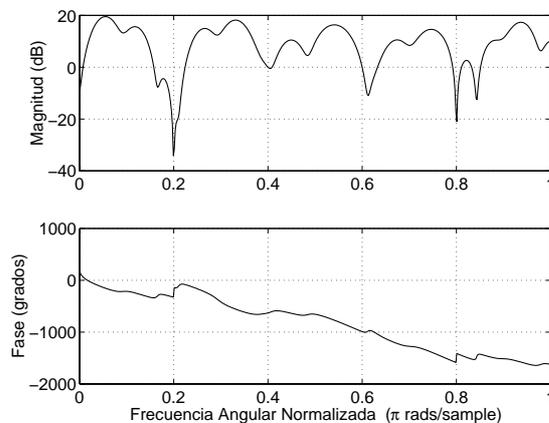


Figura 7.14: Respuesta en frecuencia del sistema obtenido al final de las iteraciones.

7.4.2. Modelización de sistemas

En este ejemplo se va a utilizar la estructura directa para comprobar la capacidad de modelización de un sistema adaptativo. Hay que recordar que la estructura directa tiene el diagrama de bloques mostrado en la Fig. 7.2. En el siguiente programa de MATLAB se implementa dicha estructura añadiendo a la salida del sistema desconocido un cierto ruido blanco. Los parámetros a controlar en el programa son los siguientes:

- Longitud del sistema adaptativo.
- Función de transferencia del sistema desconocido (se supone un sistema de tipo FIR).
- Constante de adaptación.
- Número de iteraciones.
- Varianza del ruido que se le añade a la salida del sistema desconocido.

El programa es el siguiente:

```
% Programa que implementa la estructura directa usando el LMS
% como algoritmo de aprendizaje
clear
close all
clc

% Número de iteraciones del algoritmo
n=input('Número de iteraciones ');

% Señal de entrada (ruido blanco)
x=randn(1,n);

% Introducción del sistema desconocido
sd=input('Sistema desconocido (entre corchetes) ');
lsd=length(sd);
xsd=[zeros(1,lsd-1) x];

% Introducción de la constante de adaptación
alpha=input('Constante de adaptación ');

% Introducción del valor inicial del filtro adaptativo
lsa=input('Longitud del sistema adaptativo ');
sa=randn(1,lsa);
xsa=[zeros(1,lsa-1) x];

% Posibilidad de introducir ruido
vr=input('Varianza del ruido ');

% Bucle que implementa el algoritmo LMS
for t=1:n,
    % Salida del sistema desconocido
    sa=xsa(t+lsa-1:-1:t)*sa';

    % Salida del sistema adaptativo
```

```

ysd=(xsd(t+lzd-1:-1:t)*sd')+vr*randn(1,1);

% Determinación del error%
error(t)=ysd-ysa;

sa=sa+alpha*error(t)*(xsa(t+lza-1:-1:t));
end

plot(error.^2)
xlabel('Número de iteraciones')
ylabel('Error cuadrático')

% Al final se muestran los resultados
sa
sd

```

En la Fig. 7.15 se muestran los resultados obtenidos para la siguiente simulación:

- Longitud del sistema adaptativo: 5
- Función de transferencia del sistema desconocido: [0.2 0.3 0.75 0.78 -0.95]
- Constante de adaptación: 0'01
- Número de iteraciones: 1000
- Varianza del ruido que se le añade a la salida del sistema desconocido: 0'1

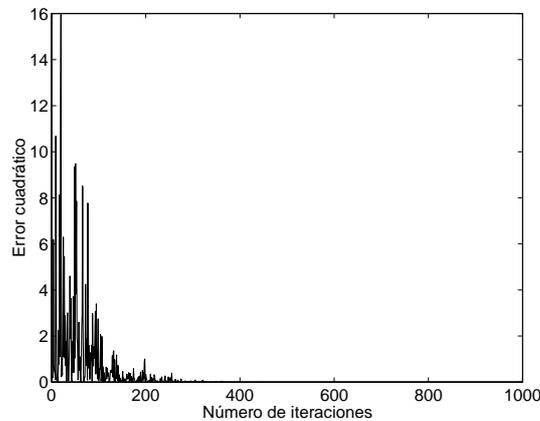


Figura 7.15: Representación del error cometido por el sistema en función de las iteraciones.

Este programa permite comprobar el funcionamiento del algoritmo en múltiples situaciones:

1. ¿Qué ocurre cuando el sistema adaptativo tiene menor o mayor longitud que el sistema desconocido?
2. ¿Qué desajuste final se obtiene entre el sistema adaptativo y el desconocido de acuerdo a los valores de constante de adaptación y nivel de ruido que se añade a la salida del sistema desconocido?

3. ¿Cómo varía la convergencia de acuerdo a la constante de adaptación?

Finalmente se anima al lector que intente sustituir el algoritmo LMS por algunas de las variantes comentadas en la sección de problemas.

7.4.3. Aplicaciones en el procesado digital de electrocardiogramas

Eliminación del ruido de red de 50 Hz

Un electrocardiograma es un registro de la actividad eléctrica del corazón. Tras su adquisición, uno de los problemas que se tienen en su procesado es la eliminación del ruido de red (interferencia de 50 Hz). El problema radica en que la frecuencia de este ruido no es fija sino que se produce una pequeña variación en dicha frecuencia con el tiempo. Esta variación hace que se necesite un filtro elimina-banda que tiene una cierta anchura. Para esta eliminación se planteó el esquema de la Fig. 7.16.

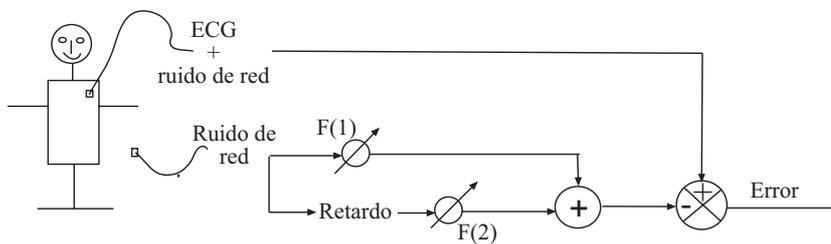


Figura 7.16: Esquema del sistema adaptativo empleado para cancelar la interferencia de la red eléctrica (50 Hz).

El principio de funcionamiento de este esquema es relativamente sencillo; se intenta modelizar el ruido de red para, una vez modelizado, restárselo al electrocardiograma de tal forma que, al final, la señal de error debe ser el electrocardiograma limpio de ruido. Aquí los parámetros a adaptar son los coeficientes $F(1)$ y $F(2)$. Se tienen dos coeficientes porque existen dos parámetros a modelizar, amplitud y fase del ruido de 50 Hz. El retardo que se le introduce al ruido de red es para obtener dos señales no correlacionadas (un seno y un coseno sería la situación ideal).

Para simular el comportamiento del algoritmo LMS en este problema se plantea usar una señal “sintética” para generar el ruido de red de los 50 Hz. De esta forma se puede comprobar cómo el algoritmo se adapta a los cambios de amplitud y de fase del ruido de 50 Hz. A continuación se da el código en MATLAB que implementa dicha aplicación:

```
% Programa que elimina los 50 Hz en un ECG
close all
clc
clear

% Carga del fichero de ECG contaminado con ruido de red
load egcur;

% Introducción de la constante de adaptación
alpha=input('Constante de adaptación ');

% Inicialización de los pesos
```

```

v=randn(1,2);

% Frecuencia de muestreo=1090
w=2*pi*50/1090;

% Bucle para la eliminación de ruido
for k=1:2500,
    % Salida del filtro adaptativo
    sal=v*[cos(w*k) sin(w*k)]';

    % Determinación del error
    error(k)=ecgred(k)-sal;

    % Actualización de los coeficientes
    v=v+alpha*error(k)*[cos(w*k) sin(w*k)];
end

% Visualización de los resultados
subplot(2,1,1)
plot(ecgred(1:2500))
title('ECG con 50 Hz')

subplot(2,1,2)
plot(error(1:2500))
title('Salida del filtro adaptativo')
axis([1 2500 -1 1])

```

Los resultados obtenidos usando 0'25 como constante de adaptación son los mostrados en la Fig. 7.17. Se aprecia cómo el algoritmo no tiene problemas para adaptarse a los cambios en el ruido de 50 Hz (la amplitud es lo más evidente) que aparecen en la señal superior eliminando completamente dicha interferencia.

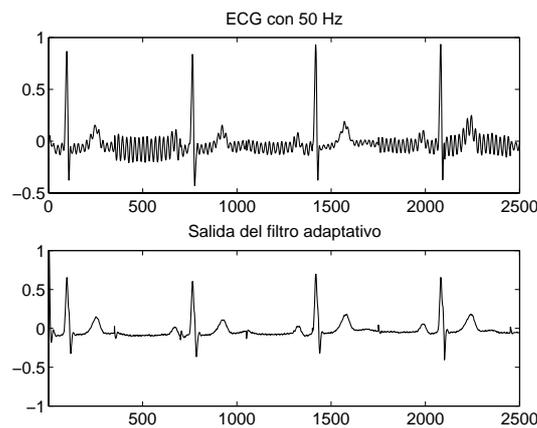


Figura 7.17: Resultados obtenidos en la cancelación de ruido de red.

Determinación del electrocardiograma fetal

En este caso se trata de determinar el electrocardiograma fetal teniendo como principal interferencia el electrocardiograma materno. El problema es que estas dos señales tienen

un contenido espectral similar por lo que intentar un filtrado selectivo en frecuencia supone distorsionar la señal de interés; en este caso el electrocardiograma fetal. Como solución se plantea un cancelador activo de ruido (ver Fig. 7.6) donde la señal deseada es la señal que se obtiene del abdomen de la madre (tiene componentes maternos y fetales) y la señal de entrada al filtro adaptativo es la señal que se obtiene del sensor que se le coloca en el tórax a la madre. Este sensor tomaría, en principio, sólo componente materna y se considera correlacionada con la componente materna y no correlacionada con la fetal de la señal abdominal. El sistema adaptativo modelizaría la componente materna que se encuentra en el sensor que se coloca en el abdomen de la madre de tal forma que la señal de error resultante sólo tendría componente fetal. El siguiente programa implementa en MATLAB esta aplicación:

```
% Programa para determinar el ECG fetal
clear
clc
close all
load fetcur

% Inicialización del filtro adaptativo
n=input('Número de iteraciones, máximo 10000 ');
long=input('Longitud del filtro adaptativo ');
fadap=randn(1,long);
ent=[zeros(1,long-1) torac];

% Constante de adaptación
alpha=input('Constante de adaptación ');

% Bucle principal del algoritmo
for s=1:n,
    sal=(ent(s+long-1:-1:s))*fadap';
    error(s)=abdom(s)-sal;
    fadap=fadap+alpha*error(s)*(ent(s+long-1:-1:s));
end

% Visualización de resultados
subplot(3,1,1)
plot(torac(1:n));
title('Señal torácica')
subplot(3,1,2)
plot(abdom(1:n));
title('Señal abdominal')
subplot(3,1,3)
plot(error(1:n));
title('Señal fetal obtenida con el filtro adaptativo')
axis([1 n -1 1])
```

La simulación mostrada en la Fig. 7.18 ilustra lo obtenido utilizando un filtro adaptativo de 20 coeficientes y una constante de adaptación de valor 0'05. Destacar que la señal fetal, que apenas se aprecia en la señal abdominal (Fig. 7.18b) aparece claramente en la señal de error atenuándose los latidos maternos (Fig. 7.18c).

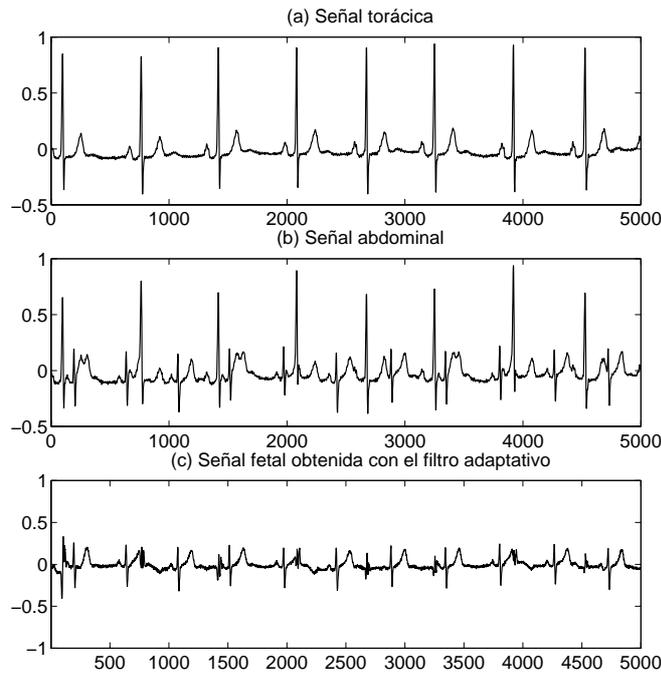


Figura 7.18: Electrocardiograma fetal obtenido usando el sistema adaptativo planteado. (a) Señal torácica recogida como referencia, (b) señal abdominal donde se encuentran los ECG materno y fetal superpuestos y (c) señal fetal recuperada con el algoritmo adaptativo diseñado.

Eliminación de las variaciones de la línea basal

En esta aplicación se plantea eliminar las variaciones de la línea basal en un electrocardiograma. La línea basal se podría definir como el nivel de referencia en dicho electrocardiograma. Esta señal biológica queda modulada por la respiración de tal forma que se obtiene un electrocardiograma como el mostrado en la Fig. 7.19.

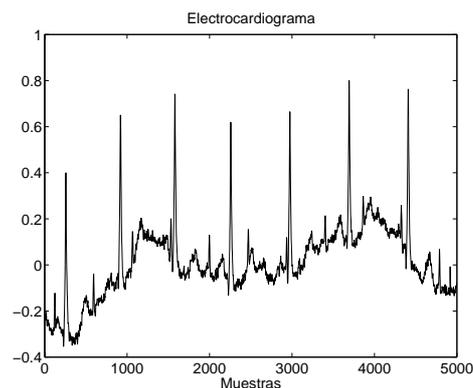


Figura 7.19: Electrocardiograma con variaciones en su línea base. Se muestra la baja frecuencia de estas oscilaciones al ser comparada con la señal de ECG.

Se puede apreciar que la señal que modula al ECG es una señal de muy baja frecuencia comparada con la señal de interés (ECG). Se puede entonces razonar que lo que se intenta eliminar es el valor medio local. Desde este punto de vista se podría plantear el esquema

de la Fig. 7.20 para eliminar dicha interferencia.

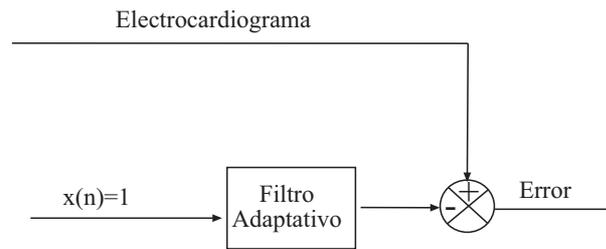


Figura 7.20: Esquema del filtro adaptativo planteado para eliminar las variaciones de la línea basal.

El sistema adaptativo tiene un solo coeficiente y la entrada vale siempre 1. En estas condiciones, como mucho, el sistema adaptativo será capaz de modelizar el valor medio del electrocardiograma. En términos de series de Fourier se comprueba que la salida del filtro, al no tener dependencia con ninguna senoide, sólo puede modelizar la componente continua de dicho desarrollo. El siguiente programa en MATLAB implementa el sistema adaptativo comentado:

```
% Filtro LMS utilizado para eliminar las variaciones de la línea basal
close all
clear
clc

% Introducción de variables
alpha=input('Constante de adaptación ');
n=input('Número de iteraciones ');

% Inicialización de los parámetros
w=randn(1,1);

% Carga del fichero
load vlbcur;
e=zeros(1,n);

% Bucle que implementa el LMS
for s=1:n,
    y=w*1;
    e(s)=des(s)-y;
    w=w+alpha*e(s)*1;
end

% Representación de las señales
subplot(2,1,1)
plot(des(1:n))
title('Señal Original ');

subplot(2,1,2)
plot(e(1:n))
title('Señal Filtrada ');
```

Los parámetros del programa son el número de iteraciones y el valor de la constante de

adaptación. En la Fig. 7.21 se muestra lo obtenido considerando un total de 5000 iteraciones y un valor de constante de adaptación de 0'07.

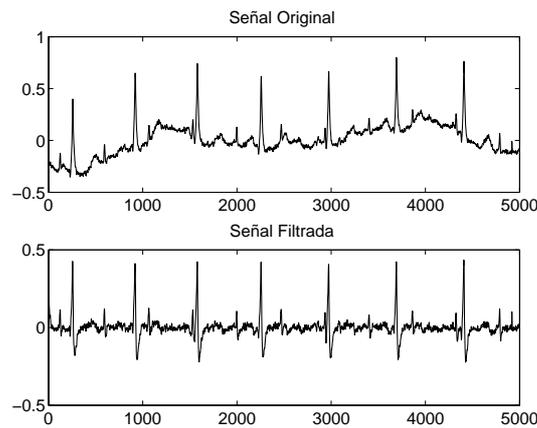


Figura 7.21: Resultados obtenidos en el problema de las variaciones de la línea base. En la gráfica superior se representa un fragmento de la señal original con unas variaciones basales evidentes y en la gráfica inferior cómo el esquema adaptativo las ha eliminado.

7.4.4. Aplicaciones en comunicaciones. Ecualización de canales

En toda comunicación se plantean cuatro elementos clave:

- Emisor.
- Canal.
- Mensaje.
- Receptor.

En un caso ideal el canal no debería distorsionar el mensaje y su misión se debería limitar a la transmisión de dicho mensaje de un emisor a un receptor. Sin embargo, esto no ocurre y el canal distorsiona dicho mensaje, llegando el mensaje original distorsionado al receptor. El esquema comentado, al nivel de sistemas, sería el mostrado en la Fig. 7.22.

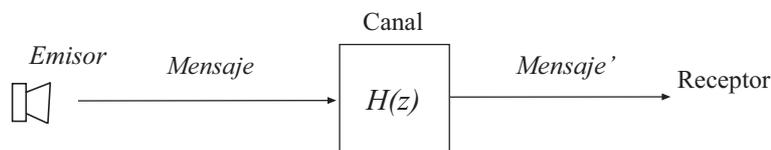


Figura 7.22: Esquema básico de un canal de transmisión.

El objetivo es determinar la inversa de la función de transferencia del canal $H(z)$. El problema que se plantea es que esta función de transferencia será variante temporal; según el momento las condiciones del canal cambiarán y, por tanto, dicha función de transferencia. Se plantea entonces un sistema adaptativo que “ecualice” o iguale el canal². El esquema de la Fig. 7.23 muestra el esquema que se desea implementar.

²N. de A.A. Aunque el término correcto en castellano es *igualación*, resulta común encontrarse con el anglicismo “*ecualización*”. En el presente texto emplearemos indistintamente los dos términos.

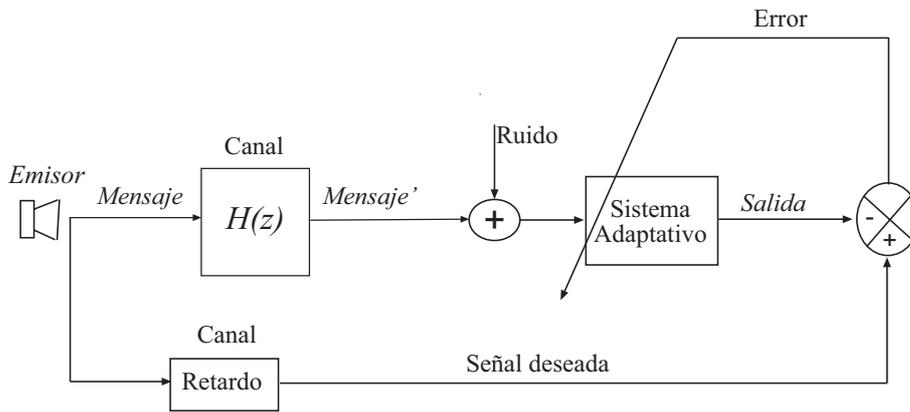


Figura 7.23: Esquema básico de un canal de comunicaciones junto con el esquema de recepción y ecualización de la señal mediante filtrado adaptativo.

El sistema adaptativo tiene como señal de entrada la señal que recibe el receptor donde, además, se le añade un cierto ruido para que las condiciones sean más parecidas a lo que ocurre realmente en un canal de comunicaciones. Además la señal deseada es el mensaje original retardado (tiempo de transmisión de dicho mensaje). En la simulación se plantea usar como canal el definido por la siguiente respuesta impulsional:

$$h(n) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi}{W}(n-2) \right) \right], & n = 1, 2, 3 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (7.119)$$

El factor W que aparece en la expresión de la respuesta impulsional del canal controla la dispersión que existe entre los autovalores de la matriz de autocorrelación y los de la matriz de la señal de entrada. Dicha dispersión tiene una incidencia directa en las características de convergencia del algoritmo (velocidad y desajuste con el sistema óptimo). Este canal es uno de los más usados para comprobar las características de convergencia de los algoritmos adaptativos. En cualquier caso, existe una serie de canales considerados estándar para comparar métodos de igualación y que son mostrados en el Tabla 7.1. Se recomienda, en cualquier caso, visitar la página web de la *International Communication Union* (ITU) en <http://www.itu.int/home/index.html> si se desea mayor información sobre los estándares de telecomunicaciones.

Tabla 7.1: Canales de comunicaciones digitales considerados estándar a la hora de comparar métodos y técnicas de ecualización.

Características	Función de transferencia del canal
Canal de fase mínima	$H(z) = 1 + 0'7z^{-1}$
Canal de fase no mínima	$H(z) = 0'35 + 0'87z^{-1} + 0'35z^{-2}$
Canal no lineal	$H(z) = 0'35 + 0'87z^{-1} + 0'35z^{-2} + (0'35 + 0'87z^{-1} + 0'35z^{-2})^2$

El siguiente programa en MATLAB implementa este problema.

```
% Ecualización de canales
clear
```

```

clc
close all

% Introducción de variables
n=input('Número de iteraciones ');
W=input('Factor de distorsión ');
long=input('Longitud del sistema adaptativo ');
v=input('Varianza del ruido ');
d=input('Retardo de la señal deseada ');
alpha=input('Constante de adaptación ')

% Generación de los datos
x=sign(randn(1,n));
des=[zeros(1,d-1) x];
canal=0.5*(1+cos((2*pi/W)*(-1:1)));
y=filter(canal,1,x);
entrada=y+v*randn(1,length(y));

% Inicialización de los pesos del filtro
w=randn(1,long);

% Bloque del algoritmo LMS
ent=[zeros(1,long-1) entrada];

for k=1:n,
    % Determinación de la salida del filtro
    o(k)=w*(ent(k+long-1:-1:k))';

    % Cálculo del error del sistema
    e(k)=des(k)-o(k);
    % Adaptación de los coeficientes del filtro
    w=w+alpha*e(k)*ent(k+long-1:-1:k);
end

plot(e.^2)

% Representación de las respuestas impulsionales
figure
subplot(3,1,1)
stem(canal)
title('Respuesta impulsional del canal ')

subplot(3,1,2)
stem(w)
title('Respuesta impulsional del sistema adaptativo ')

subplot(3,1,3)
stem(conv(canal,w))
title('Respuesta impulsional del canal+sistema adaptativo ')

% Representación de las respuestas frecuenciales
figure, freqz(canal)

```

```
figure, freqz(w)
figure, freqz(conv(canal,w))
```

La Fig. 7.24 muestra los resultados obtenidos usando los siguientes parámetros de simulación:

- Longitud del sistema adaptativo: 11
- Factor de distorsión del canal: 3.
- Retardo de la señal deseada: 7.
- Varianza del ruido: 0'001.

En cuanto a los parámetros de aprendizaje se han considerado 5000 iteraciones y una constante de adaptación de valor 0'05.

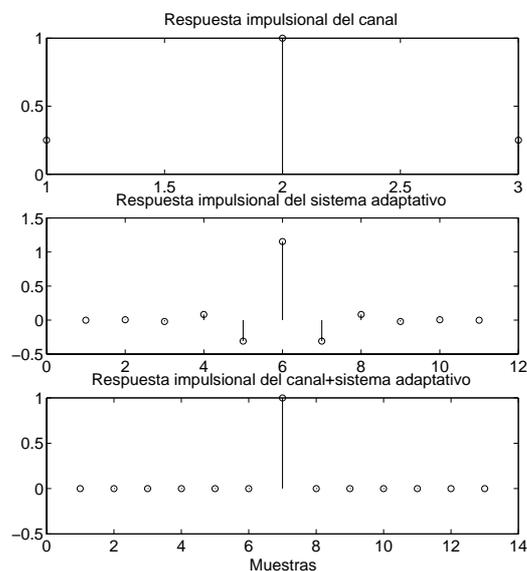


Figura 7.24: Resultados obtenidos en la ecualización de canales. En el panel superior se muestra la respuesta impulsional del canal, en el intermedio se representa la respuesta impulsional del sistema adaptativo y en el inferior la respuesta impulsional del canal y el sistema adaptativo conjuntamente.

Se comprueba que la respuesta impulsional resultante de la combinación entre el canal y el sistema adaptativo da lugar a una delta en $n = 7$ que se corresponde con el retardo de la señal deseada.

Bibliografía

- Antoniou, A. (1994). *Digital filters. Analysis, design and applications* (2nd ed.). Prentice Hall.
- Beyer, W. H. (Ed.). (1984). *CRC standard mathematical tables* (27 ed.). CRC Press, Inc.
- Burrus, C. S., McClellan, J. H., Oppenheim, J. H., Parks, T. W., Schafer, R. W. y Schuessler, H. W. (1998). *Ejercicios de tratamiento de la señal utilizando MATLAB v.4* (1ª ed.). Prentice-Hall.
- DeFatta, D. J., Lucas, J. G. y Hodgkiss, W. S. (1988). *Digital filter processing: A system design approach*. John Wiley & Sons.
- Déziel, J. P. (2001). *Applied digital signal processing* (2nd ed.). Prentice-Hall.
- Haykin, S. (1996). *Adaptive filter theory*. Prentice-Hall.
- Haykin, S. (1999). *Neural networks: A comprehensive foundation*. Prentice Hall.
- Ifeachor, E. C., y Jervis, B. W. (2002). *Digital signal processing. A practical approach* (2nd ed.). McGraw-Hill.
- Jackson, L. B. (1996). *Digital filters and signal processing* (2nd ed.). Kluwer Academic Publishers.
- Lee, E., y Messerschmitt, D. (1988). *Digital communications*. Kluwer Academic Publishers, Boston.
- Luenberger, D. E. (1989). *Programación lineal y no lineal*. Addison-Wesley Iberoamericana.
- McClellan, J. H., Burrus, C. S., Oppenheim, J. H., Parks, T. W., Schafer, R. W. y Schuessler, H. W. (1998). *Computer-based exercises for signal processing using MATLAB 5* (1ª ed.). Prentice-Hall.
- Mitra, S. K. (1999). *Digital signal processing laboratory using MATLAB* (2nd ed.). McGraw-Hill.
- Mitra, S. K. (2001). *Digital signal processing. A computer-based approach* (2nd ed.). McGraw-Hill.
- Oppenheim, A. V., y Schafer, R. W. (2000). *Tratamiento de señales en tiempo discreto*. Prentice Hall.
- Oppenheim, A. V., y Willsky, A. S. (1997). *Señales y sistemas*. Prentice Hall.

- Orfanidis, S. J. (1996). *Introduction to signal processing*. Prentice Hall.
- Parks, T. W., y Burrus, S. (1987). *Digital filter design*. John Wiley & Sons.
- Proakis, J. G. (2001). *Digital communications* (4th ed.). Mc Graw–Hill Higher Education.
- Proakis, J. G., y Manolakis, D. G. (1998). *Tratamiento digital de señales*. Prentice Hall, 3ª Ed.
- Riley, K. F., Hobson, M. P. y Bence, S. J. (1998). *Mathematical methods for physics and engineering: A comprehensive guide*. Cambridge University Press.
- Smith, S. W. (1997). *The scientist and engineer's guide to digital signal processing* (1ª ed.). California Technical Publishing. (Disponible gratuitamente en <http://www.DSPguide.com>)